ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΙΑΤΡΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΜΕΣΩ
ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΝΕΥΡΟΦΥΣΙΟΛΟΓΙΑΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβληθείσα στο
Τμήμα Χημικών Μηχανικών
του Πανεπιστημίου Πατρών

Υπό
ΣΟΦΙΑΣ Ν. ΓΙΑΠΑΛΑΚΗ
Χημικού Μηχανικού

Για την απόκτηση του τίτλου της
Διδάκτορος του Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΑΤΡΑ, 2006

Αλκμαίων εν τω εγκέφαλω είναι το ηγεμονικόν.

Αλκμαίωνας

Aetius:De placitis reliquiae 407

Αφιέρωση

Σε αυτούς που πίστεψαν και ενίσχυσαν την εσώτερή μου δύναμη και σε ό,τι διατήρησε τη φλόγα της ψυχής μου αναμμένη.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διδακτορικής διατριβής θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά κάποιους ανθρώπους που με βοήθησαν για την αποπεράτωσή της.

Τον επιβλέποντά καθηγητή μου, κ. Γεώργιο Δάσιο, για την καθοδήγηση, την επίβλεψή του και τις πολύτιμες συμβουλές του σε μαθησιακό και προσωπικό επίπεδο. Είναι για μένα πραγματικός δάσκαλος και του χρωστώ ευγνωμοσύνη για το χρόνο και τη σκέψη που αφιέρωσε για την επίλυση των όποιων προβλημάτων παρουσιάστηκαν στην ερευνητική και στη συγγραφική πορεία της διατριβής μου.

Τον καθηγητή κ. Αλκιβιάδη Παγιατάκη για τις συμβουλές του, την πάντα ενδιαφέρουσα διαφορετική οπτική με την οποία εξέταζε τα προβλήματα και για τα ερωτήματά του που έδρασαν καταλυτικά για την εξέλιξη της σκέψης μου.

Τον καθηγητή κ. Σταύρο Παύλου για τις εποικοδομητικές συζητήσεις και τις συμβουλές του, αλλά κυρίως για το διαρκές πρόθυμο ενδιαφέρον για να προσφέρει τη βοήθειά του.

Τον καθηγητή κ. Βασίλειο Κωστόπουλο για τη συμπαράσταση, τις συμβουλές και την υποστήριξη που μου προσέφερε, καθώς και για τη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής.

Τον καθηγητή κ. Δημοσθένη Πολύζο ο οποίος έδρασε καταλυτικά με τις αρχικές παραινέσεις του στον τρόπο που έμαθα να αντιμετωπίζω τις εγγενείς δυσκολίες ενός μαθηματικού προβλήματος από τη σκοπιά του μηχανικού.

Την κ. Φωτεινή Καριώτου, που δεν έπαψε στιγμή να πιστεύει σε μένα, να με παροτρύνει και να με βοηθά ουσιαστικά. Η καθοδήγηση και η στάση της υπήρξε κινητήριοις δύναμη για το επόμενο βήμα.

Τους συναδέλφους μου και φίλους στο Εργαστήριο Εφαρμοσμένων Μαθηματικών κ. Κ. Καραδήμα, κ. Δ. Χατζηλοϊζή, κ. Γ. Καμβύσα και κ. Π. Βαφέα για την βοήθεια, την πολυετή συνεργασία και την δυναμική συνύπαρξη στο εργαστήριο, και ιδιαίτερα τη συνεργατιά μου εκτός εργαστηρίου κ. Α. Κανδύλη για τη συνεργασία μας και την ατέρμονη προθυμία της για βοήθεια σε τομείς της ειδικότητάς της - άγνωστους σε μένα, καθώς και όλους τους φίλους στο Τμήμα Χημικών Μηχανικών για τη φιλία που μου προσέφεραν μέχρι τέλους.

Ευχαριστώ την οικογένειά μου για όλα, αλλά ειδικά για το ελεύθερο πνεύμα που με δίδαξαν να διατηρώ στη ζωή μου, το οποίο ήταν ο καταλύτης για το δημιουργήμα που κρατάτε αυτή τη στιγμή στα χέρια σας.

Η παρούσα διατριβή χρηματοδοτήθηκε από τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας μέσω του προγράμματος ΠΕΝΕΔ 2001, με τίτλο 'Σχέδαση σε ανισότροπα υλικά'.

Περίληψη

Η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία (ΗΕΓ) και η Μαγνητοεγκεφαλογραφία (ΜΕΓ) αποτελούν δύο από τις πλέον χρησιμοποιούμενες μη επεμβατικές μεθόδους μελέτης της λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου. Δεδομένου ότι η καταγραφή του παραγόμενου ηλεκτρικού πεδίου (Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα) και του μαγνητικού πεδίου (Μαγνητοεγκεφαλογράφημα) γίνεται πάνω στην επιφάνεια ή εξωτερικά του κρανίου αντιστοίχως, καθώς και ότι το εσωτερικό του εγκεφάλου διακρίνεται από περιοχές διαφορετικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας, ως αγωγός, στην παρούσα διατριβή, θεωρείται ολόκληρο το κρανίο, συμπεριλαμβανομένου του δέρματος, των κρανιακών οστών, του εγκεφαλονωτιαίου υγρού και του εγκεφαλικού ιστού. Ως πηγή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου λαμβάνεται ένα σημειακό διπολικό ρεύμα στο εσωτερικό του εγκεφαλικού ιστού. Για το πρότυπο αυτό επιλύεται το ευθύ πρόβλημα του Βιοηλεκτρομαγνητισμού στη σφαιρική και στην ελλειψοειδή γεωμετρία. Προσδιορίζονται συγκεκριμένα οι πρώτοι όροι προσέγγισης του ηλεκτρικού δυναμικού στον εξωτερικό χώρο και σε κάθε περιοχή εσωτερικά του αγωγού, καθώς και ο τετραπολικός όρος του πολυπολικού αναπτύγματος του εξωτερικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής. Παρουσιάζεται επίσης η διαδικασία αναγωγής των αποτελεσμάτων του ελλειψοειδούς προτύπου στα αντίστοιχα αποτελέσματα του σφαιρικού και παράγονται χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με τη σύγκριση των χρησιμοποιούμενων γεωμετρικών προτύπων.

Στη συνέχεια καταγράφεται το ευθύ πρόβλημα ΗΕΓ, όπου ολόκληρος ο εγκεφαλικός ιστός θεωρείται ως ένας σφαιρικός αγωγός, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει μια σφαιρική περιοχή υγρού διαφορετικής αγωγιμότητας. Όταν οι δυο σφαιρικές περιοχές βρίσκονται ομόκεντρα η μια σε σχέση με την άλλη, η επίλυση του προβλήματος αυτού γίνεται με τη σφαιρική γεωμετρία, ενώ όταν η μια βρίσκεται έκκεντρα της άλλης, η επίλυση του αντιστοίχου προβλήματος γίνεται με τη δισφαιρική.

Τέλος εξαγάγεται η ακριβής και πλήρης αναλυτική λύση για το ευθύ πρόβλημα ΗΕΓ για το σφαιρικό ομογενή αγωγό, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ειδώλων και γίνεται γραφική επεξεργασία των αποτελεσμάτων, η οποία οδηγεί σε συμπεράσματα σχετικά με το αντίστροφο ΗΕΓ πρόβλημα. Συγκεκριμένα, κατασκευάζονται κατανομές του ηλεκτρικού δυναμικού στην

επιφάνεια του σφαιρικού εγκεφάλου. Με βάση αυτές αναπαρίστανται οι ισοδυναμικές καμπύλες, οι οποίες είναι κύκλοι και πραγματοποιείται παραμετρική ανάλυση της θέσης και του προσανατολισμού της διπολικής ροπής της πηγής. Από την ανάλυση αυτή, και για θέσεις της πηγής κοντά στην επιφάνεια του κρανίου, προκύπτει ότι ο προσανατολισμός της διπολικής πηγής έχει κατεύθυνση κάθετη στον κύκλο μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού και φορά αυτή της αύξησης του δυναμικού, ενώ το διάνυσμα θέσης της πηγής τείνει να είναι κάθετο στις ισοδυναμικές καμπύλες μεγίστου δυναμικού. Η ύπαρξη ειδικών θέσεων και προσανατολισμών της πηγής για τις οποίες η συνεισφορά τους στο εξωτερικά μετρούμενο μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική - και για την περίπτωση του σφαιρικού προτύπου είναι αυτή όπου η θέση και ο προσανατολισμός της διπολικής ροπής είναι παράλληλα - αντιστοιχεί σε παράλληλες κυκλικές καμπύλες ηλεκτρικού δυναμικού.

Abstract

Electroencephalography (EEG) and Magnetoencephalography (MEG) are common non-invasive methods for studying the function of the human brain. Considering that the data of the generated electric potential (Electroencephalogram) and the magnetic field (Magnetoencephalogram), takes place on or in the surrounding the head, the entire head, including the skin, the bones, the cerebrospinal fluid and the cerebral, regions which are characterizing by different electric conductivity are including. For this model, the direct Bioelectromagnetism problem is solved in both spherical and ellipsoidal geometry. Specifically, the leading terms of the electric potential in the exterior of the conductor and everywhere in the interior, as well as the leading quadrupolic term of the multipole expansion of the exterior magnetic induction field in the ellipsoidal geometry, are obtained. The reduction of the the ellipsoidal results to the corresponding spherical case, which has brought up useful conclusions concerning these two geometrical models, is also presented. The direct EEG problem is described, for the case where the entire cerebral is considered as a spherical conductor, which surrounds a fluid spherical region of different conductivity. When the two spherical regions are concentric, the problem is solved with the spherical geometry, but when these are eccentric the problem is solved with the bispherical geometry.

Finally, the exact and complete analytic solution for the forward EEG problem is produced by the Image Theory for the homogeneous spherical conductor and is elaborated graphically. In particular, some electric potential distributions are produced on the surface of the spherical brain, where the equipotential curves are represented by circles. Considering these distributions, a parametric analysis of the position and the orientation of the moment dipole is accomplished for the current dipole that has considered in this thesis. Consequently, when the source is near the surface, the orientation of the moment is directed vertically to the zero equipotential circle to the increase potential, since the position vector of the source tends to become vertical to the maximum equipotential curves. The existence of special position and orientation of the source, for which the contribution in

the external magnetic field is zero - and for the spherical case, where the position and the orientation of the sources are parallel - corresponds to parallel equipotential curves.

Συμβολισμός

Γενικά σύμβολα

V_i = αγωγός (ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο)

$S_i = \partial V_i$ = συνοριακή επιφάνεια του αγωγού V_i (ομαλή)

V = αγωγός (ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο)

$\mathbb{R}^3$ = Ευκλείδειος τρισδιάστατος χώρος

$\mathbf{r}'$ = μεταβλητή ολοκλήρωσης

$\mathbf{r}$ = διάνυσμα θέσης του σημείου παρατήρησης

$\mathbf{r}_0$ = διάνυσμα θέσης της σημειακής πηγής

$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ = εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο S^2 = μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$

i = μιγαδική φανταστική μονάδα

$\delta(\mathbf{r})$ = γενικευμένη συνάρτηση του Dirac ($[\delta] = [L^{-3}, M^0, T^0, Q^0]$)

$\delta_{nn'}$ = δέλτα του Kronecker

$O(f) = g$ = σύμβολο Landau που δηλώνει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης g

$\times, \cdot, \otimes$ = εξωτερικό, εσωτερικό και τανυστικό γινόμενο αντίστοιχα

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$ = διπλό εσωτερικό γινόμενο δυαδικών

$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) =$ διπλό εξωτερικό-εσωτερικό γινόμενο δυαδικών

$\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$ = Καρτεσιανή ορθοκανονική βάση

$\mathbf{r} = x_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{x}}_3$ = Καρτεσιανή αναπαράσταση διανύσματος

$\tilde{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i$ = ταυτοτικό δυαδικό

$\tilde{\tilde{\mathbf{I}}} = \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j$ = ταυτοτικό τετραδικό

$\nabla = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ = τελεστής ανάδελτα ($[\nabla] = [L^{-1}, M^0, T^0, Q^0]$)

$\Delta = \nabla \cdot \nabla$ = τελεστής του Laplace ($[\Delta] = [L^{-2}, M^0, T^0, Q^0]$)

T = χρονική περίοδος ($[T] = [L^0, M^0, T^1, Q^0]$)

λ = χωρική περίοδος (μήκος κύματος) ($[\lambda] = [L^1, M^0, T^0, Q^0]$)

ω = κυκλική συχνότητα (χρονική πυκνότητα) ($[\omega] = [L^0, M^0, T^{-1}, Q^0]$)

- k = κυματικός αριθμός (χωρική πυκνότητα) ($[k] = [L^{-1}, M^0, T^0, Q^0]$)
 ν = συχνότητα ($[\nu] = [L^0, M^0, T^{-1}, Q^0]$)
 c_0 = ταχύτητα διάδοσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό ($[c_0] = [L^1, M^0, T^{-1}, Q^0]$)
 ε = ηλεκτρική επιδεκτικότητα ή διηλεκτρική σταθερά ($[\varepsilon] = [L^{-3}, M^{-1}, T^2, Q^2]$)
 ε_0 = ηλεκτρική επιδεκτικότητα του κενού
 μ = μαγνητική διαπερατότητα ($[\mu] = [L^1, M^1, T^0, Q^{-2}]$)
 μ_0 = μαγνητική διαπερατότητα του κενού
 σ_i = αγωγιμότητα του χώρου V_i ($[\sigma] = [L^{-3}, M^{-1}, T^1, Q^2]$)
 ρ = χωρική πυκνότητα φορτίου ($[\rho] = [L^{-3}, M^0, T^0, Q^1]$)
 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό πεδίο ($[\mathbf{E}] = [L^1, M^1, T^{-2}, Q^1]$)
 $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ = χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο ($[\mathbf{H}] = [L^{-1}, M^0, T^{-1}, Q^1]$)
 $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r})$ = πεδίο ηλεκτρικής μετατόπισης ($[\mathbf{D}] = [L^{-2}, M^0, T^0, Q^1]$)
 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ = πεδίο μαγνητικής επαγωγής (χωρική εξάρτηση) ($[\mathbf{B}] = [L^0, M^1, T^{-1}, Q^{-1}]$)
 $\mathbf{J}^V(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$ = χωρική πυκνότητα ρεύματος ($[\mathbf{J}^V] = [L^{-2}, M^0, T^{-1}, Q^1]$)
 $\mathbf{J}^V(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$ = χωρική πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας
 $\mathbf{J}^P(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ = χωρική πυκνότητα του κύριου σημειακού διπολικού ρεύματος
 $\mathbf{J} = \mathbf{J}^P + \mathbf{J}^V$ = χωρική πυκνότητα ολικού ρεύματος
 $u(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό δυναμικό ($[u] = [L^2, M^1, T^{-2}, Q^{-1}]$)
 $u_i(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό δυναμικό του χώρου V_i
 $u_i^-(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό δυναμικό στον εσωτερικό του χώρου V_i με $r < r_0$
 $u_i^+(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό δυναμικό στον εξωτερικό του χώρου V_i με $r > r_0$
 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ = διανυσματικό δυναμικό του πεδίου μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$)
 $F(\mathbf{r})$ = αρμονική συνάρτηση
 $W(\mathbf{r})$ = εσωτερική αρμονική συνάρτηση
 $S(\mathbf{r})$ = ειδική λύση
 $u_0(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό δυναμικό σε άπειρο ομογενή αγωγό
 $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ = μαγνητική επαγωγή σε άπειρο ομογενή αγωγό ($[\mathbf{B}_0] = [L^0, M^1, T^{-1}, Q^{-1}]$)

Σύμβολα στο Σφαιρικό πρότυπο

- $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ = σφαιρική ορθοκανονική βάση
 $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} + \theta\hat{\theta} + \phi\hat{\phi}$ = σφαιρική αναπαράσταση διανύσματος
 α = ακτίνα του σφαιρικού ομογενούς αγωγού ($[\alpha] = [L^1, M^0, T^0, Q^0]$)
 s = ακτίνα του σφαιρικού φλοιού που αναπαριστά το δέρμα
 b = ακτίνα του σφαιρικού φλοιού που αναπαριστά το κρανίο
 f = ακτίνα του σφαιρικού φλοιού που αναπαριστά το εγκεφαλονωτιαίο υγρό
 c = ακτίνα του σφαιρικού ομογενούς αγωγού

έκκεντρη διεύθυνση

$P_n(x)$ = πολυώνυμα Legendre

$P_n^m(x)$ = συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους

$Y_n^m(\mathbf{r})$ = μιγαδικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$u(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό δυναμικό ($[u] = [L^2, M^1, T^{-2}, Q^{-1}]$)

u^+ = ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του σφαιρικού ομογενούς αγωγού

u^- = ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του σφαιρικού ομογενούς αγωγού

u^+ = εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό του σφαιρικού ανομοιογενούς αγωγού των τριών φλοιών

u_s = ηλεκτρικό δυναμικό στον σφαιρικό φλοιό που αναπαριστά το δέρμα

u_b = ηλεκτρικό δυναμικό στον σφαιρικό φλοιό που αναπαριστά το οστό

u_f = ηλεκτρικό δυναμικό στον σφαιρικό φλοιό που αναπαριστά το εγκεφαλονωτιαίο υγρό

u_c^+ = ηλεκτρικό δυναμικό στον σφαιρικό φλοιό που αναπαριστά τον εγκεφαλικό ιστό για

$r_0 < r < c$

u_c^- = ηλεκτρικό δυναμικό στον σφαιρικό φλοιό που αναπαριστά τον εγκεφαλικό ιστό για

$0 < r < r_0$

$D_{i,n}^m$ = παράγοντας αγωγιμότητας για $n = 0, 1, 2, 3$ για τον ομογενή σφαιρικό αγωγό, τον σφαιρικό αγωγό του ενός φλοιού, των δύο και των τριών αντίστοιχα ($[D_{i,n}^m] = [L^{-3}, M^{-1}, T^1, Q^2]$)

$\mathbf{B}_{hom}$ = μαγνητική επαγωγή στο εξωτερικό του σφαιρικού ομογενούς αγωγού ($[\mathbf{B}_{hom}] = [L^0, M^1, T^{-1}, Q^{-1}]$)

Σύμβολα στο Ελλειψοειδές πρότυπο

$\hat{\rho}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$ = ελλειψοειδής ορθοκανονική βάση

$\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + \mu\hat{\mu} + \nu\hat{\nu}$ = ελλειψοειδής αναπαράσταση διανύσματος

x_1, x_2, x_3 = ημιάξονες του ελλειψοειδούς $\rho = x_1$, όπου $x = c, f, b, s$ ($[x_1, x_2, x_3] = [L^1, M^0, T^0, Q^0]$)

h_1, h_2, h_3 = ημιοξονικές αποστάσεις του ελλειψοειδούς $\rho = x_i$, όπου $i = c, f, b, s$

h_ρ, h_μ, h_ν = μετρικοί συντελεστές του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων

$\tilde{\mathbf{E}}(\rho)$ = έκκεντρος τελεστής

$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{M}}(x_1) = \tilde{\mathbf{M}}^{-2}(x_1) = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j$ = τελεστής που ορίζει το ελλειψοειδές $\rho = x_1$, όπου

$x = c, f, b, s$

$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\rho}$ = μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{r}$ του ελλειψοειδούς

$h(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \hat{\rho}$ = εικόνα της συνάρτησης φορέα στο σημείο $\mathbf{r}$ του ελλειψοειδούς

$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) = \hat{\rho}$ = μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της τομής μονόχωνου και δίχωνου υπερβολοειδούς στο σημείο $\mathbf{r}$

$E_n^m(x)$ = εσωτερική συνάρτηση Lamé

$F_n^m(x)$ = εξωτερική συνάρτηση Lamé

$I_n^m(\rho)$ = ελλειπτικό ολοκλήρωμα βαθμού n , τάξης m

$\mathcal{IE}_n^m(\rho, \mu, \nu)$ = εσωτερική ελλειψοειδής αρμονική βαθμού n , τάξης m

$\mathcal{IF}_n^m(\rho, \mu, \nu)$ = εξωτερική ελλειψοειδής αρμονική βαθμού n , τάξης m

l_ρ = συνάρτηση βάρους ως προς την οποία ορίζεται η ορθογωνιότητα των ελλειψοειδών αρμονικών στην επιφάνεια δεδομένου ελλειψοειδούς

γ_n^m = σταθερές κανονικοποίησης των $\mathcal{IE}_n^m$

$u(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό δυναμικό ($[u] = [L^2, M^1, T^{-2}, Q^{-1}]$)

u = ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς ανομοιογενούς αγωγού των τριών φλοιών

u_s = ηλεκτρικό δυναμικό στον ελλειψοειδή φλοιό που αναπαριστά το δέρμα

u_b = ηλεκτρικό δυναμικό στον ελλειψοειδή φλοιό που αναπαριστά το οστό

u_f = ηλεκτρικό δυναμικό στον ελλειψοειδή φλοιό που αναπαριστά το εγκεφαλονωτιαίο υγρό

u_c = ηλεκτρικό δυναμικό στον ελλειψοειδή φλοιό που αναπαριστά τον εγκεφαλικό ιστό

$G_{i,n}^m$ = παράγοντας αγωγιμότητας για $n = 0, 1, 2, 3$ για τον ομογενή ελλειψοειδή αγωγό, τον ελλειψοειδή αγωγό του ενός φλοιού, των δύο και των τριών αντίστοιχα ($[G_{i,n}^m] = [L^{-3}, M^{-1}, T^1, Q^2]$)

$\mathbf{B}_{el}$ = μαγνητική επαγωγή στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς ($[\mathbf{B}_{el}] = [L^0, M^1, T^{-1}, Q^{-1}]$)

Σύμβολα στο Δισφαιρικό πρότυπο

$\hat{\zeta}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ = δισφαιρική ορθοκανονική βάση

$\mathbf{r} = \zeta \hat{\zeta} + \theta \hat{\theta} + \phi \hat{\phi}$ = δισφαιρική αναπαράσταση διανύσματος

2α = εστιακή απόσταση

r_1 = ακτίνα της σφαίρας S_1

r_2 = ακτίνα της σφαίρας S_2

$u(\mathbf{r})$ = ηλεκτρικό δυναμικό ($[u] = [L^2, M^1, T^{-2}, Q^{-1}]$)

u = ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του σφαιρικού ανομοιογενούς αγωγού του ενός φλοιού

u_1^- = ηλεκτρικό δυναμικό στο σφαιρικό φλοιό για $\zeta_0 < \zeta < \zeta_2$

u_1^+ = ηλεκτρικό δυναμικό στο σφαιρικό φλοιό για $\zeta_2 < \zeta < +\infty$

u_2 = ηλεκτρικό δυναμικό στον έκκεντρο πυρήνα

$\mathbf{N}$ = πίνακας συντελεστών των αγνώστων τάξης $[\infty \times \infty]$

$\mathbf{x}$ = πίνακας στήλης των αγνώστων τάξης $[\infty \times 1]$

$\mathbf{K}$ = πίνακας στήλης των σταθερών συντελεστών τάξης $[1 \times \infty]$

Περιεχόμενα

I	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1	Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία της Λειτουργικής Απεικόνισης του Εγκεφάλου	9
1.1	Ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Γιατί είναι τόσο σημαντικός.	9
1.2	Στοιχεία ανατομίας του εγκεφάλου	9
1.3	Νευρώνας	12
1.3.1	Δομή	12
1.3.2	Ο κύκλος ζωής του νευρώνα	14
1.3.3	Η λειτουργία του νευρώνα	16
1.4	Η σημασία του Βιοηλεκτρομαγνητισμού	17
1.5	Ηλεκτροεγκεφαλογραφία και Μαγνητοεγκεφαλογραφία	18
1.6	Οι πηγές στο Βιοηλεκτρομαγνητισμό	20
1.7	Η προτυποποίηση του αγωγού	22
1.8	Η Σχεδόν Στατική Προσέγγιση των εξισώσεων του Maxwell	25
1.9	Μαθηματική τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος του Βιοηλεκτρομαγνητισμού	28
1.9.1	Ο ομογενής πεπερασμένος σφαιρικός αγωγός	28
1.9.2	Ο στρωματοποιημένος αγωγός των τριών φλοιών	31
1.9.3	Ο στρωματοποιημένος αγωγός με υγρό στο εσωτερικό του	38
1.10	Ερμηνεία των ΗΕΓ και ΜΕΓ για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος	39
1.11	Ιστορική αναδρομή	42
2	Ηλεκτροεγκεφαλογραφία σε σφαιρική γεωμετρία	47
2.1	Εισαγωγή	47
2.2	Ευθύ πρόβλημα ΗΕΓ για την ομογενή σφαίρα	48
2.2.1	Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό με ανάπτυγμα σειρών	50
2.2.2	Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό με ανάπτυγμα σειρών	53
2.3	Άθροιση Σειρών	54

2.3.1	Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό	54
2.3.2	Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό	58
2.4	Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό με τη Μέθοδο των Ειδώλων	59
2.5	Σφαιρικός αγωγός τριών φλοιών	68
2.5.1	Επίλυση προβλήματος	68
2.5.2	Αναγωγή του σφαιρικού αγωγού τριών φλοιών στον ομογενή σφαιρικό	78
2.5.3	Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για πεπερασμένο αριθμό σφαιρικών φλοιών	79
2.6	Ο ανομοιογενής αγωγός με υγρό στο εσωτερικό του	82
2.7	Ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου για τον αγωγό των τριών σφαιρικών φλοιών	88
3	Ηλεκτροεγκεφαλογραφία σε ελλειψοειδή γεωμετρία	91
3.1	Εισαγωγή	91
3.2	Το πρότυπο των τριών ελλειψοειδών φλοιών	92
3.3	Φυσικοί εκφυλισμοί	103
3.4	Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για πεπερασμένο αριθμό ελλειψοειδών φλοιών	109
3.5	Γεωμετρικός εκφυλισμός στη σφαίρα	111
4	Μαγνητοεγκεφαλογραφία σε ελλειψοειδή γεωμετρία	117
4.1	Εισαγωγή	117
4.2	Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο	118
4.3	Εκφυλισμός στο σφαιρικό πρότυπο	129
5	Εγκεφαλογραφία σε δισφαιρική γεωμετρία	133
5.1	Μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος στην περίπτωση των δυο έγκεντρων σφαιρών	133
5.2	Το δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων	134
5.3	Ο ανομοιογενής σφαιρικός αγωγός με υγρό έγκεντρο στο εσωτερικό του	138
6	Γραφικές αναπαραστάσεις και σύγκριση αποτελεσμάτων	153
6.1	Εισαγωγή	153
6.2	Το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού	154
6.2.1	Κατανομές του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας για την ακριβή λύση	156
6.2.2	Κατανομές του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας για την προσεγγιστική λύση	159

6.2.3	Σύγκριση της ακριβούς και της προσεγγιστικής λύσης για το ηλεκτρικό δυναμικό	161
6.2.4	Γενική περίπτωση κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας για την ακριβή λύση	164
6.2.5	Συμπεράσματα για το αντίστροφο πρόβλημα ΗΕΓ για την ομογενή σφαίρα	165
6.3	Το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς αγωγού	167
6.3.1	Παράλληλη τοποθέτηση των διανυσμάτων θέσης και ροπής της πηγής .	168
6.3.2	Σύγκριση της σφαίρας και του ελλειψοειδούς	170
6.4	Το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό των αγωγών	172
6.4.1	Μαγνητικά σιωπηλές πηγές για την ομογενή σφαίρα	174
6.4.2	Μαγνητικά σιωπηλές πηγές για το ομογενές ελλειψοειδές	175
6.4.3	Σύγκριση του στρωματοποιημένου αγωγού των τριών φλοιών με τα ομογενή πρότυπα	176
7	Συμπεράσματα	177
7.1	Τα αποτελέσματα της διατριβής	177
7.2	Ανάλυση αποτελεσμάτων	185
A'	Συμπλήρωμα Κεφαλαίου 2	191
A'.1	Πρόταση για την άθροιση σειρών	191
A'.2	Μετασχηματισμός Kelvin	192
A'.3	Υπολογισμός ολοκληρώματος	194
B'	Ελλειψοειδής Γεωμετρία	196
B'.1	Το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων	196
B'.2	Χωρισμός μεταβλητών	197
B'.3	Τύποι: Συσχετισμού	201
B'.4	Χρήσιμες Σχέσεις	202
B'.5	Ελλειπτικά Ολοκληρώματα	203
	Βιβλιογραφία	206

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Ανατομία του Εγκεφάλου	11
1.2	Οι αναδιπλώσεις του εγκεφαλικού φλοιού	12
1.3	Η δομή ενός τυπικού νευρώνα.	13
1.4	Η λειτουργία του νευρώνα	15
1.5	Μαγνητόμετρο τύπου DC.	19
1.6	Στρωματοποίηση της κρανιακής κοιλότητας.	23
1.7	Το μαγνητικό πεδίο ενός ρεύματος διπόλου	40
1.8	Σχηματική απεικόνιση εξιδανικευμένων προτύπων για το μαγνητικό πεδίο και το ηλεκτρικό δυναμικό.	41
2.1	Ο ομογενής σφαιρικός αγωγός	49
2.2	Τα είδωλα στον ομογενή σφαιρικό αγωγό.	61
2.3	Ο σφαιρικός αγωγός των τριών φλοιών.	69
2.4	Ο ανομοιογενής σφαιρικός αγωγός με υγρό στο εσωτερικό του.	83
3.1	Ο ελλειψοειδής αγωγός των τριών φλοιών.	93
5.1	Το δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων	135
5.2	Ο ανομοιογενής σφαιρικός αγωγός με υγρό έκκεντρα στο εσωτερικό του.	139
6.1	Σημεία μηδενισμού της συνάρτησης ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $a = 9cm$	156
6.2	Κατανομή ηλεκτρικού δυναμικού για την ακριβή λύση στην επιφάνεια σφαίρας, για παράλληλη τοποθέτηση των διανυσμάτων θέσης και ροπής της πηγής $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{r}_0$	157
6.3	Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού ακριβούς λύσης για μεταβολή του διανύσματος της θέσης της πηγής.	158
6.4	Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού της ακριβούς λύσης για μεταβολή του διανύσματος της ροπής της πηγής.	159

6.5	Ο συμμετρικός χαρακτήρας της σφαίρας.	160
6.6	Κατανομή ηλεκτρικού δυναμικού για την προσεγγιστική λύση στην επιφάνεια σφαίρας, για παράλληλη τοποθέτηση των διανυσμάτων θέσης και ροπής της πηγής $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{r}_0$	161
6.7	Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού προσεγγιστικής λύσης για μεταβολή του διανύσματος της θέσης της πηγής.	162
6.8	Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού της προσεγγιστικής λύσης για μεταβολή του διανύσματος της ροπής της πηγής.	163
6.9	Ο συμμετρικός χαρακτήρας της σφαίρας.	165
6.10	Κατανομή στην επιφάνεια της σφαίρας για τυχαία θέση και ροπή της πηγής . .	166
6.11	Κατανομή ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του ομογενούς ελλειψοειδούς, για παράλληλη τοποθέτηση των διανυσμάτων θέσης και ροπής της πηγής $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{r}_0$.168	
6.12	Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού για το ομογενές ελλειψοειδές για μεταβολή του διανύσματος της θέσης της πηγής.	169
6.13	Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού για το ομογενές ελλειψοειδές για μεταβολή του διανύσματος της ροπής της πηγής.	170
6.14	Σύγκριση διαγραμμάτων ηλεκτρικού δυναμικού για τη σφαίρα και το ελλειψοειδές.171	
6.15	Σύγκριση διαγραμμάτων μαγνητικού πεδίου του προτύπου των τριών ελλειψοειδών φλοιών με τα ομογενή.	173
6.16	Σύγκριση του μαγνητικού πεδίου για την ομογενή σφαίρα και τον στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό για την περίπτωση των μαγνητικά σφαιρικών σιωπηλών πηγών.	174
6.17	Σύγκριση του μαγνητικού πεδίου για τον ομογενή ελλειψοειδή και τον στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό για την περίπτωση των μαγνητικά σιωπηλών πηγών του πρώτου.	175
B'.1	Το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων	197

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Ενδεικτικές τιμές για τις διαστάσεις και τις αγωγιμότητες των προτύπων της παρούσας διατριβής	24
2.1	Συμβολισμός ακτίνων και αγωγιμοτήτων για το στρωματοποιημένο σφαιρικό αγωγό μέχρι και τριών φλοιών	80
3.1	Συμβολισμός ακτίνων και αγωγιμοτήτων για το στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό μέχρι και τριών φλοιών	110

Μέρος Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος μοιάζει εκπληκτικά περίπλοκος, με τους 10^{11} νευρώνες και των 10^{15} συνάψεων που τον απαρτίζουν. Πίσω όμως από αυτόν τον περίπλοκο νευρωνικό μηχανισμό εντοπίζεται ακριβώς η απλότητα του σκοπού. Ο εγκέφαλος υπάρχει προκειμένου να αντιλαμβάνεται τον κόσμο, ώστε να διαμορφώνει τις κατάλληλες αντιδράσεις προς αυτόν. Ο τρόπος λειτουργίας του εγκεφάλου αντικατοπτρίζει κατά κάποιον τρόπο τη συμπεριφορά και έκφραση του εαυτού μας κάθε στιγμή. Η σπουδαιότητα του οργάνου αυτού για το ανθρώπινο σώμα, κίνησε από νωρίς το ενδιαφέρον των ερευνητών και στάθηκε η αιτία μελέτης του ήδη από τελευταία π.Χ χρόνια. Η έρευνα προς την κατεύθυνση της κατανόησής και λειτουργίας του βρίσκεται σχετικά στην αρχή και αποτελεί διεπιστημονικό αντικείμενο μεγάλου εύρους επιστημών, όπως είναι η Νευροφυσιολογία, τα Μαθηματικά, η Φυσική, η Χημεία, η Πληροφορική κ.τ.λ.

Στην παρούσα διατριβή μελετώνται προβλήματα Νευροφυσιολογίας του ανθρώπινου εγκεφάλου. Συγκεκριμένα μελετάται η ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφάλου, η οποία όπως θα δούμε στο πρώτο κεφάλαιο βασίζεται σε βιοχημικά φαινόμενα της κυτταρικής μεμβράνης των νευρώνων του και δημιουργεί ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα στο άμεσο περιβάλλον τους. Τα ηλεκτρικά φαινόμενα, σε αντίθεση με τα βιοχημικά ή βιοφυσικά, είναι εύκολα μετρήσιμα με τη βοήθεια απλών ηλεκτροδίων και έτσι η προσέγγισή τους είναι άμεση. Επιπρόσθετα, τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούνται μπορούν να μετρηθούν με ένα μαγνητόμετρο. Τα βιοηλεκτρικά και τα βιομαγνητικά φαινόμενα μπορούν να καταγραφούν σε πραγματικό χρόνο από μη επεμβατικές μεθόδους, επειδή η πληροφορία που αποκομίζεται από αυτά φανερώνεται απευθείας σε κάθε σημείο του τρισδιάστατου αγωγού και γύρω από αυτόν.

Τα δεδομένα που λαμβάνονται από την εξωτερική καταγραφή των πεδίων του Βιοηλεκτρισμού αποτελούν το **Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ)**, ενώ αυτών του Βιομαγνητισμού αποτελούν το **Μαγνητοεγκεφαλογράφημα (ΜΕΓ)**. Η μελέτη και ανάλυση του ΗΕΓ και ΜΕΓ έχουν σκοπό τον προσδιορισμό της πηγής, η οποία παρήγαγε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που καταγράφηκαν και συνιστούν αντίστοιχα τις μεθόδους της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας. Η επεξεργασία των δεδομένων προς αυτήν την κατεύθυνση αποτελεί τα λεγόμενα αντίστροφα προβλήματα ΗΕΓ και ΜΕΓ, των οποίων η διερεύνηση προαπαιτεί την επίλυση των αντίστοιχων ευθέων προβλημάτων. Η παρούσα διατριβή αποσκοπεί στη μελέτη των **ευθέων προβλημάτων ΗΕΓ και ΜΕΓ**, δηλαδή στον προσδιορισμό του ηλεκτρικού δυναμικού και του μαγνητικού πεδίου που οφείλονται στη λειτουργία δεδομένης πηγής στο εσωτερικό του εγκεφάλου.

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτών κρίθηκε αναγκαία η αποδοχή κάποιων παραδοχών σε σχέση τόσο με τον αγωγό που προτυποποιεί τον αγωγίμο εγκέφαλο, όσο και με τις πηγές των πεδίων. Σχετικά με την παραδοχή της πηγής, η χρήση της διπολικής πηγής αποτελεί το πιο δημοφιλές πρότυπο και επιλέχθηκε για την παρούσα διατριβή, ενώ πιο σύγ-

χρονες μελέτες θεωρούν για τις πηγές ένα πολυπολικό ανάπτυγμα ως το πλέον ρεαλιστικό. Αναφορικά με τον αγωγό, το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο πρότυπο θεωρεί τον εγκέφαλο ως έναν κλειστό πεπερασμένο ομογενή αγωγό, που χαρακτηρίζεται από σταθερή αγωγιμότητα και από μαγνητική διαπερατότητα που ταυτίζεται με τη μαγνητική διαπερατότητα του κενού, η οποία χαρακτηρίζει και τον περιβάλλοντα μη αγωγίμο χώρο. Απ' την άλλη πλευρά, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι το ηλεκτρικό δυναμικό - και κατά συνέπεια το μαγνητικό πεδίο που απαιτεί τη γνώση του ηλεκτρικού δυναμικού - είναι ένα μέγεθος που εξαρτάται ισχυρά από τη **συνάρτηση αγωγιμότητας**. Αφού λοιπόν στην πραγματικότητα στο εσωτερικό του εγκέφαλου υπάρχουν φορείς διαφορετικής αγωγιμότητας, ο αγωγός οφείλει να προτυποποιηθεί στην πιο γενική του θεώρησή ως ένα κατά τμήματα ομογενές, γραμμικό υλικό, του οποίου η στρωματοποιημένη κατανομή σε φλοιούς διαφορετικής αγωγιμότητας παρέχει τη δυνατότητα διερεύνησης με αναλυτικές μεθόδους.

Τέλος, από γεωμετρικής σκοπιάς, τα πρότυπα που έχουν χρησιμοποιηθεί για την εξέταση του ανθρώπινου εγκέφαλου, ώστε να επιτραπεί η αναλυτική επεξεργασία των προβλημάτων ΗΕΓ και ΜΕΓ, είναι το σφαιρικό και το σφαιροειδές πρότυπο καθώς και αυτό που προκύπτει από μικρή διαταραχή του σφαιρικού. Στατιστικά ανατομικά δεδομένα όμως [53] οδήγησαν πρόσφατα στην καθιέρωση για τον εγκέφαλο του ελλειψοειδούς προτύπου. Συγκεκριμένα, το 2001 μελετήθηκε από τη Φ. Καριώτου η αναλυτική επίλυση του ευθέος προβλήματος του Βιοηλεκτρομαγνητισμού για το ελλειψοειδές πρότυπο του κλειστού πεπερασμένου ομογενούς αγωγού [39]. Επιπρόσθετα η πρωτοεμφανιζόμενη αναλυτική επίλυση προβλημάτων ΗΕΓ και ΜΕΓ στην ελλειψοειδή γεωμετρία, πλασιώθηκε από την ανάπτυξη των κατάλληλων εργαλείων για τη δημιουργία του απαραίτητου γεωμετρικού υπόβαθρου [18, 39].

Η βελτίωση που επιφέρει η παρούσα διατριβή είναι η προτυποποίηση του ανθρώπινου εγκέφαλου στην πιο γενική και πλέον ρεαλιστική θεώρησή του. Συγκεκριμένα η παρούσα διατριβή πραγματεύεται το **πρότυπο των τριών ελλειψοειδών φλοιών διαφορετικής αγωγιμότητας, που περιβάλλουν τον επίσης θεωρούμενο ελλειψοειδή εγκέφαλο**. Σκοπός της αποτελεί η **τρισδιάστατη αναλυτική επίλυση των ευθέων προβλημάτων ΗΕΓ και ΜΕΓ** για το πρότυπο αυτό, καθώς και η περαιτέρω σύγκριση του προτύπου αυτού με το αντίστοιχο ομογενές και αντίστοιχα απλούστερης γεωμετρίας. Επιπλέον η διαδικασία της αναλυτικής επίλυσης και η κατεύθυνση προς την κατανόηση των αποτελεσμάτων οδήγησε σε ένα αποτέλεσμα που παρουσιάζει ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον: στην κατασκευή αλγορίθμου για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών για την περίπτωση αγωγού πολλαπλών στοιβάδων στην ελλειψοειδή αλλά και στη σφαιρική γεωμετρία.

Αναφορικά με το σκοπό της διατριβής, η πραγματοποίηση των συγκρίσεων επέβαλλε τη μελέτη και κατανόηση δύο ακόμη προτύπων: αυτό του σφαιρικού ομογενούς αγωγού και αυτό του αγωγού με υγρό πυρήνα διαφορετικής αγωγιμότητας στο εσωτερικό του. Τα συνολικά τρία

αυτά πρότυπα αναλύονται λεπτομερώς στην παράγραφο **1.7**.

Επανερχόμενοι σε επιπλέον παραδοχές που έγιναν για την επίλυση των ευθέων προβλημάτων που ορίσαμε παραπάνω, πρέπει να αναφέρουμε τη θεώρηση της σχεδόν στατικής προσέγγισης των εξισώσεων του Maxwell [42], που περιγράφουν τον Ηλεκτρομαγνητισμό, δηλαδή της αμελητέας συνεισφοράς της χρονικής παραγωγού της μαγνητικής επαγωγής στο νόμο του Faraday, καθώς της χρονικής παραγωγού του πεδίου μετατόπισης στο νόμο των Ampère-Maxwell. Η θεώρηση της σχεδόν στατικής προσέγγισης των εξισώσεων του Maxwell στην Βιοηλεκτρομαγνητική έρευνα είναι ευρέως χρησιμοποιούμενη, αφού επιβάλλεται από το πραγματικό μέγεθος του εγκεφάλου και τις αποδεκτές τιμές για τις παραμέτρους που τον χαρακτηρίζουν. Στην παράγραφο **1.8** περιγράφονται αναλυτικά οι εξισώσεις του Maxwell καθώς και ο τρόπος που αυτές εκφυλίζονται στο σχεδόν στατικό όριο. Το εισαγωγικό Κεφάλαιο **1** ολοκληρώνεται με τις σημαντικές εργασίες που έχουν πραγματοποιηθεί για τα προβλήματα HEG και MEG.

Η επίλυση του ευθέος προβλήματος HEG σε σφαιρική γεωμετρία για το καθένα από τα τρία θεωρούμενα πρότυπα για τον αγωγό γίνεται στο Κεφάλαιο **2**. Συγκεκριμένα για τον ομογενή σφαιρικό αγωγό παράγονται τα αναπτύγματα σε μιγαδικές σφαιρικές αρμονικές του εσωτερικού και του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού, τα οποία αν και υπάρχουν στη βιβλιογραφία [39], εξήχθησαν σε μορφή τέτοια ώστε να μπορέσουν να αθροιστούν οι σειρές και να δώσουν έτσι στην παράγραφο **2.3** τα αποτελέσματα του εσωτερικού και του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού σε κλειστή μορφή. Η τεκμηρίωση αυτής της άθροισης πραγματοποιήθηκε στην παράγραφο **2.4**, όπου παρήχθη το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό σε κλειστή μορφή με τη μέθοδο των ιδιών. Οι ισοδύναμες κλειστές εκφράσεις που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία της μεθόδου παρέχουν σημαντική πληροφορία για τη φυσική σημασία της λύσης και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για γραφικές αναπαραστάσεις του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του εγκεφάλου, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν και παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο **6**.

Η επίλυση του ευθέος προβλήματος HEG σε σφαιρική γεωμετρία συνεχίζεται για το πρότυπο του αγωγού των τριών φλοιών στην παράγραφο **2.5** και παρέχει εκφράσεις των πρώτων όρων των αναπτυγμάτων του ηλεκτρικού δυναμικού σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, στις οποίες, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, ανάγονται οι αντίστοιχες εκφράσεις που αναφέρονται στο ελλειψοειδές πρότυπο. Στην υπόπαράγραφο **2.5.3** εξάγεται μια γενική σχέση για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό του σφαιρικού αγωγού για οποιονδήποτε αριθμό φλοιών. Στη συνέχεια - παράγραφος **2.6** - παρουσιάζεται και επιλύεται αναλυτικά σε όρους μιγαδικών σφαιρικών αρμονικών το πρόβλημα της HEG για το σφαιρικό αγωγό στου οποίου το εσωτερικό υπάρχει υγρό, για το τρίτο δηλαδή θεωρούμενο πρότυπο. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παράγραφο **2.7**, όπου αποδεικνύεται ότι η συνεισφορά της ακτινικής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου είναι μηδενική για οποιοδήποτε σφαιρικό πρότυπο.

Τα Κεφάλαια 3, 4 που ακολουθούν αποτελούν τον κεντρικό άξονα της εργασίας και περιέχουν την υλοποίηση του κυρίως σκοπού της. Η συνεισφορά του Κεφαλαίου 3 αφορά στα αποτελέσματα του ευθέως προβλήματος ΗΕΓ για τον ελλειψοειδή αγωγό των τριών φλοιών. Για κάθε περιοχή αυτού, καθώς και για το εξωτερικό του παρέχονται εκφράσεις για τα ηλεκτρικά δυναμικά ως πλήρη αναπτύγματα ελλειψοειδών αρμονικών. Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται σε επιπλέον δύο μορφές. Αρχικά, οι πρώτοι όροι του αναπτύγματος γι' αυτό εκφράζονται συναρτήσει Καρτεσιανών συντεταγμένων και ελλειπτικών ολοκληρωμάτων που παρέχουν αυτό σε μορφή κατάλληλη για γραφική επεξεργασία. Ενώ στη συνέχεια, η ταυυστική μορφή των πρώτων όρων του αναπτύγματος προσφέρει τη δυνατότητα ανάδειξης της εξάρτησης του δυναμικού από τη φυσική και τη γεωμετρία, διευκολύνοντας με τον τρόπο αυτό την ερμηνεία του αποτελέσματος. Η μορφή του αναπτύγματος της λύσης του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού είναι ανάλογη με την αντίστοιχη του ομογενούς ελλειψοειδούς προτύπου. Η συνεισφορά ωστόσο των φλοιών στην περίπτωση αυτή δηλώνεται από την παρουσία των **παραγόντων αγωγιμότητας** για το ηλεκτρικό δυναμικό, οι οποίοι είναι όροι που εμπεριέχουν πληροφορία για τη γεωμετρία και τη φυσική του προβλήματος. Από την άλλη πλευρά οι λύσεις των ηλεκτρικών δυναμικών των φλοιών είναι αναπτύγματα σε εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές, τα οποία παρουσιάζουν όμοια μεταξύ τους μορφή, που διαφέρει μόνο σε σταθερούς λόγους που σχετίζονται με τους παράγοντες αγωγιμότητας καθώς και από το γεγονός ότι τα αντίστοιχα ελλειπτικά ολοκληρώματα είναι υπολογισμένα στις διαφορετικές επιφάνειες που οριοθετούν το εσωτερικό του εγκεφάλου. Οι παραπάνω λόγοι καθορίζουν λεπτομερώς την επίδραση των περιβαλλόντων φλοιών κανονικοποιημένων με την επίδραση όλων των φλοιών που θεωρούμε στο πρότυπο. Κάθε λόγος πολλαπλασιάζεται με ένα παράγοντα αγωγιμότητας, το οποίο περιγράφει το τι θα επέβαλλε ο ισοδύναμος ομογενής αγωγός στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό. Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 για τα ηλεκτρικά δυναμικά, δίνουν τη δυνατότητα της επίλυσης του προβλήματος ΜΕΓ, για το ίδιο πρότυπο, στο Κεφάλαιο 4. Η ανομοιογένεια, όπως επιβάλλεται από αυτές τις τέσσερις περιοχές και η ανισοτροπία, όπως υπαγορεύεται από την ελλειψοειδή γεωμετρία, επιβάλλουν το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής, στην ελλειψοειδή γεωμετρία, να εξαρτάται ισχυρά από τους παράγοντες αγωγιμότητας που αντανάχουν τα φυσικά και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προτύπου. Η σχέση που παρέχεται στο κεφάλαιο αυτό για το μαγνητικό πεδίο φανερώνει ότι σε αντίθεση με το αντίστοιχο σφαιρικό πρότυπο, όπου οι φλοιοί διαφορετικής αγωγιμότητας είναι μαγνητικά αόρατοι, **η παρουσία των ελλειψοειδών φλοιών διαφορετικής αγωγιμότητας αναγνωρίζουν το μαγνητικό πεδίο και το τροποποιούν από το αντίστοιχο του ομογενούς προτύπου.** Στην πραγματικότητα η συνεισφορά του προτύπου των τριών ελλειψοειδών φλοιών στο μαγνητικό πεδίο μπορεί να αναγνωριστεί σαν μια διαταραχή του αντίστοιχου διανύσματος του διπόλου για το ομογενές πρότυπο. Στο Κεφάλαιο 5 που έπεται επιλύεται το ευθύ πρόβλημα ΗΕΓ για τον ομογενή αγωγό με

υγρό πυρήνα έκκεντρα στο εσωτερικό του. Θα ήταν ενδιαφέρον μελλοντικά να εφαρμοστούν κατάλληλες τεχνικές αποκοπής για να καθοριστεί με ορισμένου βαθμού ακρίβεια η λύση για το πρότυπο αυτό καθώς και να λυθεί το αντίστοιχο πρόβλημα HEΓ για το πρότυπο αυτό στην ελλειψοειδή γεωμετρία και να γίνουν οι απαραίτητες συγκρίσεις.

Ακολουθεί το Κεφάλαιο 6, στο οποίο κατασκευάζονται διαγράμματα κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του εγκεφάλου και διαγράμματα του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό αυτού για το κύριως πρότυπο της παρούσας διατριβής, αυτό των τριών ελλειψοειδών φλοιών, καθώς και απλούστερων αυτού, προκειμένου να εξηγήσουμε την ποιοτική συμπεριφορά των εν λόγω προτύπων, να ποσοτικοποιήσουμε τα αποτελέσματα και να τα συγκρίνουμε μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα της αναλυτικής επίλυσης καθώς και τα εν λόγω διαγράμματα οδηγούν στη σύγκριση των ανώτερων προτύπων και αναδεικνύουν τη συνεισφορά του στρωματοποιημένου αγωγού των τριών ελλειψοειδών φλοιών - μέσω των παραγόντων αγωγιμότητας - στη διερεύνηση της βιομαγνητικής δραστηριότητας του ανθρώπινου εγκεφάλου. Παρέχουν επιπλέον σημαντικές πληροφορίες για το αντίστροφο πρόβλημα HEΓ σε σφαιρικό αγωγό.

Το αντίστροφο αυτό πρόβλημα έχει στόχο την ερμηνεία των εξωτερικά μετρούμενων πεδίων του ηλεκτρικού δυναμικού $u^+(\mathbf{r})$, ώστε να εντοπιστεί η θέση $\mathbf{r}_0$, καθώς και ο προσανατολισμός και το μέτρο της ροπής $\mathbf{Q}$ της διπολικής πηγής που παρήγαγε τα εν λόγω πεδία. Όπως διαπιστώθηκε από τις κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της σφαίρας, οι ισοδυναμικές καμπύλες αυτού αναπαρίστανται από κύκλους. Η πληροφορία που αντλήσαμε από τα διαγράμματα αυτά αφορά στον εντοπισμό των διανυσμάτων της θέσης και του προσανατολισμού της πηγής. Στην περίπτωση όπου για το πρόβλημα MEΓ παρουσιάζονται σιωπηλές πηγές, δηλαδή τα διανύσματα είναι παράλληλα, οι κυκλικές ισοδυναμικές καμπύλες είναι παράλληλες μεταξύ τους και κάθετες ως προς την κατεύθυνση των παράλληλων διανυσμάτων. Στη γενική περίπτωση της σχετικής απομάκρυνσης των διανυσμάτων αυτών από την παράλληλη τους θέση, τα διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_0$ και προσανατολισμού της πηγής $\mathbf{Q}$ εμπεριέχουν μαζί τους την καθετότητα των παραπάνω κύκλων, στρίβοντάς τους από την αρχική τους παράλληλη θέση.

Το σημαντικό όμως στοιχείο της διατριβής αυτής ως προς τη συνεισφορά της στα αντίστροφα προβλήματα, είναι ότι μέσω της διαδικασίας συλλογής πληροφοριών για το απλό πρότυπο του ομογενούς αγωγού, ανοίγει το δρόμο για την γενική αντιμετώπιση των αντιστρόφων προβλημάτων μέσω αναλυτικών αποτελεσμάτων και γραφικής επεξεργασίας αυτών.

Τέλος στο Κεφάλαιο 7 παρατίθενται συνολικά τα αποτελέσματα, με τέτοιο τρόπο ώστε αρχικά να αποτιμηθεί η συνεισφορά του κυρίως προτύπου της παρούσας διατριβής - των τριών ελλειψοειδών φλοιών - στα προβλήματα HEΓ και MEΓ, αλλά και να σχολιαστούν όλα τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά τη μελέτη των άλλων προτύπων. Η επιμέρους μελέτη απέδωσε γενικούς τύπους για προβλήματα συνοριακών τιμών σε αγωγούς πολλαπλών στοιβάδων και

βοήθησε τη σύγκριση απλούστερων προτύπων της βιβλιογραφίας με του παρόντος, καθώς και τη σύγκριση σε αυτών γεωμετρικό επίπεδο.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στην Μαθηματική Θεωρία της Λειτουργικής Απεικόνισης του Εγκεφάλου

1.1 Ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Γιατί είναι τόσο σημαντικός.

Σύνθετη λέξη που προέρχεται από το εν + κεφαλή και σημαίνει αρχικά αυτόν που βρίσκεται μέσα στο κεφάλι (το μυελό του κρανίου, το μυαλό). Σήμερα, όταν λέμε εγκέφαλος, συνηθίζουμε να εννοούμε το κεντρικό όργανο ελέγχου του νευρικού συστήματος. Λέγοντας όμως εγκέφαλο εννοούμε και μεταφορικά τον άνθρωπο που είναι προικισμένος με εξαιρετικές πνευματικές ικανότητες, τον αρχηγό μιας ομάδας. Ο εγκέφαλος είναι το πιο θαυματικό όργανο στο ανθρώπινο σώμα. Όλες οι εργασίες που εκτελεί το ανθρώπινο σώμα χρειάζονται εντολή από τον εγκέφαλο. Ερμηνεύει όλα τα δεδομένα που λαμβάνουμε από τον κόσμο γύρω μας μέσω των αισθήσεων, ελέγχει τη θερμοκρασία του σώματος, την αρτηριακή πίεση, το ρυθμό της καρδιάς και την αναπνοή, λαμβάνει ερεθίσματα και δίνει εντολές για όλες τις λειτουργίες του σώματος. Σ' αυτόν φτάνουν και σ' αυτόν συνειδητοποιούνται όλα τα εξωτερικά ερεθίσματα που υφίστανται επεξεργασία στο αντίστοιχο για κάθε αισθητήριο όργανο τμήμα του εγκεφάλου. Ο εγκέφαλος πραγματοποιεί όλες αυτές τις διαδικασίες γρήγορα και αποτελεσματικά, ενώ παράλληλα είναι εντυπωσιακό ότι δεν έχει όγκο πολύ μεγαλύτερο από ενάμιση λίτρο.

1.2 Στοιχεία ανατομίας του εγκεφάλου

Το νευρικό σύστημα του ανθρώπου αποτελείται από το κεντρικό νευρικό σύστημα (ΚΝΣ) και το περιφερειακό νευρικό σύστημα (ΠΝΣ). Το ΚΝΣ περιλαμβάνει τον εγκέφαλο που βρί-

σκεται στην κρανιακή κοιλότητα και τον νωτιαίο μυελό, ενώ το ΠΝΣ τα εγκεφαλικά και τα νωτιαία νεύρα. Ο ρόλος του ΚΝΣ είναι να λαμβάνει πληροφορίες από το ΠΝΣ και τις αισθήσεις, να συντονίζει την κίνηση, ενώ αποτελεί παράλληλα κέντρο της μνήμης, της συνειδητής σκέψης, των εκούσιων δραστηριοτήτων και άλλων αυτόματων σωματικών λειτουργιών.

Ο νωτιαίος μυελός είναι ένα σύνολο νευρικών ινών που διατρέχουν το εσωτερικό της σπονδυλικής στήλης και μεταφέρει με τη συνδρομή του ΠΝΣ πληροφορίες από τους αισθητηριακούς υποδοχείς προς τον εγκέφαλο. Ο εγκέφαλος είναι το μεγαλύτερο και το πολυπλοκότερο τμήμα του ΚΝΣ και αποτελείται από νευρικά κύτταρα τα οποία δέχονται, επεξεργάζονται και μεταβιβάζουν ερεθίσματα. Διακρίνεται στον εγκεφαλικό φλοιό με τα δύο εγκεφαλικά ημισφαίρια, στο διάμεσο εγκέφαλο με το θάλαμο και τον υποθάλαμο, στο μέσο εγκέφαλο, στον οπίσθιο εγκέφαλο με τη γέφυρα και την παρεγκεφαλίδα και στον τελικό εγκέφαλο με τον προμήχη μυελό, βλ. Σχήμα 1.1 .

Τα εγκεφαλικά ημισφαίρια που αποτελούν το μεγαλύτερο τμήμα του εγκεφάλου, εμφανίζουν στην επιφάνειά τους πολυάριθμες προεξοχές και αυλακώσεις, οι οποίες ονομάζονται έλικες και αύλακες αντίστοιχα. Οι βαθύτερες αύλακες ονομάζονται σχισμές. Η επιμήκης σχισμή χωρίζει τα ημισφαίρια μεταξύ τους, τα οποία συνδέονται και επικοινωνούν κυρίως μέσω μιας πυκνής δέσμης νευρικών ινών που ονομάζεται μεσολόβιο ή τυλώδες σώμα. Αν αποκοπεί το μεσολόβιο τα δύο ημισφαίρια δεν επικοινωνούν πια και συμπεριφέρονται σαν δύο αυτόνομοι αλλά ημιτελείς εγκέφαλοι. Άλλες σχισμές χωρίζουν το κάθε ημισφαίριο στους τέσσερις λοβούς, από τους οποίους ο μετωπιαίος ελέγχει τις εκούσιες κινήσεις, ο βρεγματικός ελέγχει την αφή και τη γεύση, ο ινιακός την όραση και ο κροταφικός την ακοή και την ισορροπία.

Τα ημισφαίρια του εγκεφάλου αποτελούνται από ένα εξωτερικό στρώμα φαιάς ουσίας, τον εγκεφαλικό φλοιό, ο οποίος συνίσταται από σώματα και δένδριτες νευρικών κυττάρων, ενώ κάτω από τον φλοιό βρίσκονται μάζες λευκής ουσίας, που περιέχουν νευρικές αποφυάδες. Ο εγκεφαλικός φλοιός είναι ένας πολυστρωματικός μανδύας, ο οποίος καλύπτει μεγάλο μέρος της κρανιακής κοιλότητας. Για καθαρά προστατευτικούς και λειτουργικούς λόγους ο εγκέφαλος διαθέτει επίσης μια σειρά από περιβλήματα γεμάτα από υγρό, όπως το εγκεφαλονωτιαίο υγρό.

Ο εγκέφαλος βρίσκεται μέσα στο κρανίο με το οποίο προστατεύεται. Ανάμεσα στον εγκεφαλικό φλοιό και στην κρανιακή κοιλότητα παρεμβάλλονται τρεις μεμβράνες, οι μήνιγγες, οι οποίες περιβάλλουν το πολύτιμο όργανο της ζωής. Από μέσα προς τα έξω αυτές είναι η χοριοειδής, η αραχνοειδής και η σκληρή. Η περιοχή μεταξύ της αραχνοειδούς και της χοριοειδούς μεμβράνης είναι πλήρης με εγκεφαλονωτιαίο υγρό. Οι μήνιγγες δε συμβάλλουν μόνο στην προστασία, αλλά και στη διατροφή του εγκεφάλου. Αυτές με τη σειρά τους περιβάλλονται από την επιφάνεια του κρανίου και το δέρμα. Ο θάλαμος αποτελείται κυρίως από φαιά ουσία και αποτελεί σημαντικό κέντρο υποδοχής ερεθισμάτων. Ο υποθάλαμος από την άλλη

πλευρά είναι το ρυθμιστικό κέντρο των αυτόνομων λειτουργιών, ενώ με τις συνδέσεις του με την υπόφυση ρυθμίζει τις λειτουργίες και τη μεταβολική δραστηριότητα πολλών ενδοκρινών αδένων. Η παρεγκεφαλίδα είναι το κεντρικό νευρικό όργανο που ρυθμίζει τον τόνο των μυών και εξασφαλίζει την ισορροπία του σώματος. Τέλος ο προμήκης μυελός αποτελεί τη συνέχεια του νωτιαίου μυελού προς τον εγκέφαλο. Το όριο του προμήκη με το νωτιαίο μυελό δεν είναι σαφές.

Σχήμα 1.1: Ανατομία του Εγκεφάλου

Η συνολική μάζα εγκεφάλου είναι γνωστή και έχει βάρος 1500 gr [45]. Το δύσκολο όμως είναι να φανταστούμε την έκτασή του. Αυτό οφείλεται στις πολλές αναδιπλώσεις του εγκεφαλικού φλοιού, οι οποίες δημιουργούν τις αύλακες και τις έλικες που είδαμε παραπάνω. Αν ξεδιπλώναμε και τεντώναμε τις αναδιπλώσεις του φλοιού, πάχους 2-4 mm, αυτός θα καταλάμβανε μια επιφάνεια 2500 cm^2 , μια επιφάνεια δηλαδή κατά πολλές φορές μεγαλύτερη από το κεφάλι, βλ. Σχήμα 1.2 .

Σχήμα 1.2: Οι αναδιπλώσεις του εγκεφαλικού φλοιού.

1.3 Νευρώνας

1.3.1 Δομή

Οι κύριοι οικοδομικοί λίθοι του εγκεφάλου είναι οι νευρώνες και τα νευρογλοιακά κύτταρα. Οι μεν πρώτοι αποτελούν τις μονάδες επεξεργασίας και προώθησης της πληροφορίας, τα δε δεύτερα είναι σημαντικά για τη δομική στήριξη, τη διατήρηση κατάλληλης συγγέντρωσης των ιόντων και για τη μεταφορά θρεπτικών συστατικών και άλλων ουσιών μεταξύ των αγγείων αίματος και του εγκεφαλικού ιστού [33]. Στη συνέχεια θα δώσουμε περισσότερες πληροφορίες για τους νευρώνες, μιας και αυτοί είναι τα διεργέσιμα κύτταρα του εγκεφάλου που μας ενδιαφέρουν αφού όταν διεγείρονται, δημιουργούν το ηλεκτρικό ρεύμα, στο οποίο στηρίζεται η ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά του εγκεφάλου.

Οι νευρώνες είναι τα σημαντικότερα κύτταρα στο νευρικό σύστημα. Βρίσκονται στον εγκέφαλο, στο νωτιαίο μυελό και στα νεύρα του περιφερειακού νευρικού συστήματος και ο κύριος ρόλος τους, όπως είπαμε, είναι να επεξεργάζονται και να διαβιβάζουν τη νευρική πληροφορία. Ένα ιδιαίτερα σημαντικό χαρακτηριστικό των νευρώνων είναι ότι έχουν διεργέσιμες μεμβράνες που τους επιτρέπουν να προκαλούν και να διαβιβάζουν ηλεκτρικά σήματα [62]. Οι νευρώνες θέτουν σε λειτουργία και επιτρέπουν τη διέλευση σημάτων στον εγκέφαλο και παρέχουν διάφορα αισθητήρια δεδομένα, όπως η αφή, η όραση, η στάση του σώματος. Παρέχοντας πληροφορία από το περιβάλλον στο σώμα, αυτά τα περιφερειακά κύτταρα αντιδρούν στα εξωτερικά ερεθίσματα με ηλεκτρικούς παλμούς, οι οποίοι διαβιβάζουν την πληροφορία μέσω κωδικοποιημένων ηλεκτρικών σημάτων. Οι νευρώνες παρουσιάζουν ασυμμετρία στο σχήμα τους. Ένας τυπικός νευρώνας αποτελείται από το σώμα, τις κυτταρικές απολήξεις που λέγονται δενδρίτες και από μια νευρική ίνα τον άξονα, Σχήμα 1.3. Το σώμα του νευρώνα είναι το κεντρικό τμήμα του νευρώνα που συνδέει τους δενδρίτες με τον άξονα. Είναι το μέρος όπου βρίσκεται ο πυρήνας

και που συμβαίνει το μεγαλύτερο μέρος της πρωτεϊνικής σύνθεσης. Τα κυτταρικά σώματα και οι δενδρίτες τους είναι συγκεντρωμένα στη φαιά ουσία, το μεγαλύτερο μέρος της οποίας βρίσκεται στην επιφάνεια του εγκεφάλου.

Σχήμα 1.3: Το κυτταρικό σώμα περιέχει τον πυρήνα, την αποθήκη των γενετικών πληροφοριών. Από το κυτταρικό σώμα εκφύονται δύο είδη κυτταρικών αποφυάδων.

Οι περισσότεροι νευρώνες έχουν πολλούς δενδρίτες με άφθονα δενδριτικά κλαδιά. Το συνολικό σχήμα και δομή των δενδριτών ενός νευρώνα ονομάζεται δενδριτικό δέντρο. Η δομή του δενδριτικού δέντρου αποτελεί το κύριο δίκτυο λήψης της πληροφορίας για τον νευρώνα. Εντούτοις μπορεί να γίνει επιπλέον και εκροή της πληροφορίας. Για τη διαδικασία αυτή είναι υπεύθυνος ο άξονας, ο οποίος μεταφέρει τα νευρικά σήματα έξω από τον νευρώνα. Ο κάθε νευρώνας έχει μόνο έναν άξονα, αλλά αυτός μπορεί να κάνει δυνατή την επικοινωνία με πολλά κύτταρα. Οι άξονες καλύπτονται από ένα λιπαρό περίβλημα, το περίβλημα μυελίνης. Αυτό αποτελεί την ευρέως εκτεταμένη μεμβράνη πλάσματος ενός βοηθητικού κυττάρου, του κυττάρου νευρογλίματος. Τα κύτταρα νευρογλίματος βρίσκονται σε τακτά διαστήματα κατά μήκος του άξονα. Η μεμβράνη πλάσματος των τυλίγεται γύρω από τον άξονα και σχηματίζει το επικάλυ-

λυμα μυελίνης. Όταν το επικάλλυμα ενός κυττάρου νευρικού ιστού συναντάει το επικάλλυμα του επόμενου, ο άξονας μένει απροστάτευτος. Αυτή η περιοχή που ονομάζεται κόμβος του Ranvier, παίζει ένα σημαντικό ρόλο στη διάδοση του νευρικού παλμού.

Το μέρος του άξονα που αναδύεται από το σώμα του κυττάρου ονομάζεται αξονικό λοφίδιο. Πέραν της ανατομικής δομής, το αξονικό λοφίδιο είναι επιπλέον το μέρος του νευρώνα που έχει κανάλια νατρίου με τη μεγαλύτερη πυκνότητα διαφοράς δυναμικού. Δηλαδή παράγει τη μεγαλύτερη διαφορά δυναμικού από οποιοδήποτε άλλο μέρος του νευρώνα. Με άλλα λόγια είναι το πιο εύκολα διεγερσιμο μέρος του νευρώνα. Ενώ όμως ο άξονας και το αξονικό λοφίδιο θεωρούνται μέρη εκροής της πληροφορίας, αυτή η περιοχή μπορεί να λάβει δεδομένα και από άλλους νευρώνες. Τέλος ο αξονικός ακροδέκτης, η σύναψη μια ειδική δομή στο τέλος του άξονα, χρησιμεύει για την απελευθέρωση των νευροδιαβιβαστών και επικοινωνεί με άλλους νευρώνες.

Στη συνέχεια θα δώσουμε στατιστικά ανατομικά μεγέθη για τις παραπάνω δομές. Οι άξονες και οι δενδρίτες στο κεντρικό νευρικό σύστημα έχουν διατομή περίπου 1 μm , ενώ κάποια από αυτά στο περιφερειακό νευρικό σύστημα είναι μεγαλύτερα. Το σώμα έχει διάμετρο της τάξης των 10 - 25 μm και δεν είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από τον πυρήνα του κυττάρου που περικλείει. Τέλος το μήκος του άξονα ποικίλει από μερικά χιλιοστά έως αρκετά εκατοστά του μέτρου, αφού ο μακρύτερος άξονας ενός κινητήριου νευρώνα μπορεί να είναι μέχρι και 1 m, να απλώνεται δηλαδή από τη βάση της σπονδυλικής στήλης μέχρι τα δάχτυλα των ποδιών.

1.3.2 Ο κύκλος ζωής του νευρώνα

Όπως όλα τα όργανα του ανθρώπινου σώματος, έτσι και ο εγκέφαλος, ξεκινά την ανάπτυξη του ήδη από την περίοδο της κύησης. Κατά τη διάρκεια της κύησης ο οργανισμός του εμβρύου παράγει τουλάχιστον 250.000 νευρώνες το λεπτό. Όμως 15-30 ημέρες πριν από τη γέννηση η παραγωγή νευρώνων σταματά. Τότε αρχίζει για τον εγκέφαλο η νέα επιγενετική φάση ανάπτυξης, η αρχικά εκρηκτική δημιουργία συνάψεων η οποία διαρκεί για όλη μας τη ζωή. Όσοι νευρώνες δεν καταφέρνουν να σχηματίσουν ισχυρές συνάψεις πεθαίνουν.

Έτσι τη στιγμή της γέννησης έχουν αποδεκατιστεί οι περισσότεροι από τους μισούς νευρώνες. Σ' αυτή τη διαδικασία αέναης δημιουργίας και εξάλειψης των συνάψεων στηρίζεται η φυσιολογική λειτουργία του εγκεφάλου. Η μεγάλη θνησιμότητα των νευρώνων αρχίζει να εκδηλώνεται σε ηλικία 30-40 ετών, χωρίς ο οργανισμός μας να μπορεί να τους αντικαθιστά με νέους. Η αναγέννηση νευρώνων έχει επιτευχθεί μόνο στο εργαστήριο, ενώ οι νευρώνες πεθαίνουν με ρυθμό 100.000 τη μέρα, περίπου ένας κάθε δευτερόλεπτο. Ευτυχώς, δεν υπάρχει αντίστοιχη παρακμή των νοητικών μας ικανοτήτων, γιατί η συνεχής δημιουργία νέων συνάψεων και νευρωνικών κυκλωμάτων εξασφαλίζει την ακεραιότητα όλων σχεδόν των νοητικών μας λειτουργιών [63].

Σε έναν ενήλικα άνθρωπο υπάρχουν τουλάχιστον δέκα δισεκατομμύρια νευρώνες 10^{10} στο πιο εξωτερικό μέρος του εγκεφάλου, στον εγκεφαλικό ιστό και περίπου 10^{12} νευρώνες σε ολόκληρο το νευρικό σύστημα [20, 33, 63]. Αυτοί συνδέονται μεταξύ τους μέσω συνάψεων, το πλήθος των οποίων ανέρχεται στην τάξη των 10^{15} , ενώ χρησιμοποιούν περισσότερους από 10^{18} νευροδιαβιβαστές ανά δευτερόλεπτο. Η σύγκριση του ανθρώπινου εγκεφάλου με έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή αποτελεί ένα υπεραπλουστευμένο εγχείρημα, παραμένει όμως ενδιαφέρουσα. Αν υποθέσουμε ότι κάθε μόριο κουβαλά ένα ψηφίο πληροφορίας (bit), τότε σκεφτόμενοι με όρους υπολογιστικής ικανότητας, ο εγκέφαλος έχει την ικανότητα επεξεργασίας 10^{12} συνολικά giga - bits / sec, ζυγίζει μόνο 1,5 kg και καταναλώνει λιγότερα από 10 - 15 Watts.

Σχήμα 1.4: (α) Η κυτταρική μεμβράνη γύρω από ένα νευρικό ιστό διατηρεί μια διαφορά δυναμικού περίπου 0.1 V μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού υγρού. (β) Ένα ηλεκτρικό ερέθισμα αποπολώνει τη μεμβράνη και η διαφορά δυναμικού μικραίνει. (γ) Η πτώση της διαφοράς δυναμικού διαδίδεται κατά μήκους του νευρικού ιστού, ο οποίος ξαναπαίρνει την αρχική τιμή της διαφοράς δυναμικού μετά τη διέλευση του παλμού.

1.3.3 Η λειτουργία του νευρώνα

Διαφορές ηλεκτρικού δυναμικού και ρεύματα έχουν τον κυρίαρχο ρόλο στη λειτουργία του νευρικού κυττάρου [59]. Η διάδοση νευρικών παλμών είναι ουσιαστικά μια ηλεκτρική διαδικασία, της οποίας ο μηχανισμός διάδοσης είναι πολύπλοκος. Ένας νευρωνικός άξονας κατά μήκος του οποίου μπορεί να κινηθεί ένας ηλεκτρικός παλμός, περιλαμβάνει μια κυλινδρική μεμβράνη με ένα αγώγιμο υγρό - ηλεκτρολύτη - στο εσωτερικό της και ένα δεύτερο στο εξωτερικό της, βλ. Σχήμα 1.4α. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των υγρών σε μια πολωμένη κυτταρική μεμβράνη είναι -70mV , τιμή που αντιστοιχεί στο δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης. Όταν ξεκινά ένας ηλεκτρικός παλμός (ερεθίσμα), η μεμβράνη του νευρικού ιστού γίνεται προσωρινά πιο διαπερατή στα ιόντα των υγρών (πρόκειται κυρίως για ιόντα νατρίου, καλίου, ασβεστίου και χλωρίου) προκαλώντας μια τοπική πτώση της διαφοράς δυναμικού - εκπόλωση κυτταρικής μεμβράνης, βλ. Σχήμα 1.4β. Το δυναμικό ερεθίσματος είναι 30mV . Μετά την απομάκρυνση του ερεθίσματος η μεμβράνη είναι προσωρινά υπερπολωμένη στα -90mV , πριν επανακτήσει το δυναμικό ηρεμίας, βλ. Σχήμα 1.4γ.

Η ενεργοποίηση λοιπόν ενός νευρώνα ισοδυναμεί με τη ροή ιόντων τόσο στους δενδρίτες όσο και στον άξονά του [39]. Η ροή στους δενδρίτες έχει μεγαλύτερη χρονική διάρκεια ($10 - 100 \text{ msec}$), από τη ροή που συνδέεται με το δυναμικό ενέργειας στον άξονα του νευρώνα ($1 - 2 \text{ msec}$). Ακόμη, αν η κίνηση των ιόντων νατρίου σε έναν δενδρίτη ισοδυναμεί με τη ροή ενός διπόλου κατά μήκος του, τότε η κίνηση τους μέσα στον άξονα ισοδυναμεί με τη ροή ενός τετραπόλου, καθώς σε κάθε διηγημένη εσωτερική περιοχή, η αντίστοιχη εξωτερική περιοχή έλκει ιόντα του αντίθετου φορτίου. Λαμβάνοντας υπόψη λοιπόν ότι το πεδίο του διπόλου είναι της τάξης του τετραγώνου της αντίστροφης απόστασης, ενώ το πεδίο του τετραπόλου φθίνει όπως ο κύβος της αντίστροφης απόστασης, το ρεύμα στο δενδρίτη προκαλεί ισχυρότερο πεδίο από αυτό στον άξονα. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια, να θεωρείται ως κύρια πηγή του μετρούμενου εξωτερικά ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, το ρεύμα των ιόντων που διαρρέει τους δενδρίτες, ενώ παράλληλα να θεωρείται ως χωρικό ρεύμα αγωγιμότητας, η επαγόμενη ροή των ιόντων που υπάρχουν στο εξωκυττάριο υγρό.

Η μελέτη συγκεκριμένων νευρικών παλμών ή των ρευμάτων που ισοδυναμούν σε αυτούς είναι ένα σημαντικό διαγνωστικό εργαλείο στην ιατρική. Συγκεκριμένα, το ρεύμα αυτό αποτελεί την κύρια πηγή καταγραφής των μεθόδων της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και Μαγνητοεγκεφαλογραφίας. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε αναλυτικά στις δυο αυτές μεθόδους, αλλά προτού προβούμε σε αυτό θα περιγράψουμε τον Βιοηλεκτρομαγνητισμό, οι αρχές του οποίου διέπουν τα μετρούμενα πεδία στις εν λόγω μεθόδους.

1.4 Η σημασία του Βιοηλεκτρομαγνητισμού

Ο βιοηλεκτρομαγνητισμός είναι μια θεωρία που εξετάζει τα ηλεκτρικά, μαγνητικά και ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα που αναπτύσσονται στους βιολογικούς ιστούς [45]. Τα φαινόμενα αυτά περιλαμβάνουν την συμπεριφορά των διεργάσιμων ιστών (τις πηγές), τα ηλεκτρικά ρεύματα και τα δυναμικά στον εσωτερικό του τρισδιάστατου αγωγού, το μαγνητικό πεδίο μέσα και έξω από το σώμα, την απόκριση των διεργάσιμων κυττάρων σε διέγερση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου και τις εγγενείς ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες του ιστού.

Εξ ορισμού, ο βιοηλεκτρομαγνητισμός περιλαμβάνει διαφορετικούς κλάδους, αφού αφορά στη σχέση των επιστημών ζωής με τις φυσικές επιστήμες. Σαν τέτοιους μπορούμε να αναφέρουμε τη Βιοφυσική, τη Βιοτεχνολογία, την Εμβιομηχανική, την Ιατρική Φυσική.

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε την ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφαλικού ιστού, η οποία όπως είδαμε βασίζεται στα βιοηλεκτρικά φαινόμενα της κυτταρικής μεμβράνης των νευρώνων του και δημιουργεί ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα στο άμεσο περιβάλλον τους.

Τα ηλεκτρικά φαινόμενα - σε αντίθεση με τα βιοχημικά ή βιοφυσικά - είναι εύκολα μετρήσιμα με τη βοήθεια απλών ηλεκτροδίων και έτσι η προσέγγιση τους είναι άμεση. Επιπρόσθετα, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν μπορούν να εντοπισθούν με ένα μαγνητόμετρο. Τα βιοηλεκτρικά και τα βιομαγνητικά φαινόμενα μπορούν να εντοπισθούν σε πραγματικό χρόνο από μη επεμβατικές μεθόδους, επειδή η πληροφορία που αποκομίζεται από αυτά φανερώνεται απευθείας σε κάθε σημείο του τρισδιάστατου αγωγού και γύρω από αυτόν.

Ο Βιοηλεκτρομαγνητισμός καθιστά δυνατή την έρευνα της συμπεριφοράς του ζωντανού ιστού τόσο σε κυτταρικό, όσο και οργανικό επίπεδο. Επιπλέον, τα τελευταία επιτεύγματα επιτρέπουν στους επιστήμονες να εργάζονται σε υποκυτταρικό επίπεδο μετρώντας το ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει μέσω ενός καναλιού ενός και μόνο ιόντος της κυτταρικής μεμβράνης. Με αυτόν τον τρόπο, ο Βιοηλεκτρομαγνητισμός προσφέρει νέες και σημαντικές ευκαιρίες για την ανάπτυξη διαγνωστικών και θεραπευτικών μεθόδων.

Για την περίπτωση του ανθρώπινου εγκεφάλου οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται περιλαμβάνουν την Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού (MRI), την Λειτουργική Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού (fMRI), την Τομογραφία Εκπομπής Ποζιτρονίων (PET), την Υπολογιστική Τομογραφία Εκπομπής Μεμονωμένων Φωτονίων (SPECT) και άλλες. Εντούτοις, οι μόνες τεχνικές απεικονίσεων με υψηλή χωρική και χρονική ανάλυση είναι η Ηλεκτροεγκεφαλογραφία και η Μαγνητοεγκεφαλογραφία. Οι τεχνικές αυτές μπορούν να βοηθήσουν στη διάγνωση επιληψίας, εγκεφαλικών όγκων και άλλων ασθενειών του εγκεφάλου, καθώς επίσης είναι απαραίτητες για την κατανόηση της λειτουργίας του εγκεφάλου.

1.5 Ηλεκτροεγκεφαλογραφία και Μαγνητοεγκεφαλογραφία

Όπως είδαμε στην υποπαράγραφο 1.3.3, στους νευρώνες του εγκεφάλου η ηλεκτρική δραστηριότητα προκαλείται από εσωκυττάρειες μεταβολικές διεργασίες, που μπορεί να αποτελούν και τη βιοχημική συνέπεια της λήψης και της επεξεργασίας πληροφοριών. Όταν η ηλεκτρική αυτή δραστηριότητα δημιουργεί ένα βιοηλεκτρικό πεδίο, ταυτόχρονα δημιουργεί και ένα βιομαγνητικό πεδίο. Γι αυτό το λόγο η προέλευση τόσο των βιοηλεκτρικών, όσο και των βιομαγνητικών σημάτων είναι η χημική δραστηριότητα του κυττάρου.

Η καταγραφή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου γίνεται με τις μη επεμβατικές μεθόδους της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και Μαγνητοεγκεφαλογραφίας, ενώ τα αποτελέσματα των καταγραφών αποτελούν αντίστοιχα το Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ) και το Μαγνητοεγκεφαλογράφημα (ΜΕΓ). Το ηλεκτρομαγνητικό σήμα που καταγράφεται εξωτερικά με αυτές τις μεθόδους, προέρχεται από τη συνολική εγκεφαλική λειτουργία, δηλαδή από το σύνολο των ηλεκτροχημικών επιδράσεων από νευρώνα σε νευρώνα, αθροιζόμενο για όλες τις περιοχές του εγκεφάλου.

Το όργανο που χρησιμοποιείται για τη λήψη ενός εγκεφαλογραφήματος είναι ο ηλεκτροεγκεφαλογράφος. Η λειτουργία του ηλεκτροεγκεφαλογράφου στηρίζεται στην καταγραφή των διαφορών δυναμικού, οι οποίες καταγράφονται πάνω στην εξωτερική δερματική επιφάνεια του ανθρώπινου κρανίου, ως αποτέλεσμα της λειτουργίας του εγκεφάλου. Ο ηλεκτροεγκεφαλογράφος αποτελείται από ηλεκτρόδια, δηλαδή αισθητήρες που μετατρέπουν το ρεύμα ιόντων μέσα στο ανθρώπινο σώμα, σε ρεύμα ηλεκτρονίων μέσα σε κυκλώματα. Η επαφή του ηλεκτροδίου με το δέρμα γίνεται μέσω κολλώδους ουσίας ή μέσω μικρού δακτυλιδιού και απαιτείται ο καλός καθαρισμός του δέρματος του κεφαλιού για να μειωθεί η αντίσταση επαφής. Έτσι επιτυγχάνεται καταγραφή διαφορών δυναμικού - που οφείλονται σε ρεύματα ιόντων διαμέσω της κυτταρικής μεμβράνης των νευρώνων που συμμετέχουν στην εκάστοτε εγκεφαλική λειτουργία - πάνω στην εξωτερική δερματική επιφάνεια του ανθρώπινου κρανίου. Τα δυναμικά αυτά αποτελούν ασθενή ηλεκτρικά σήματα που κυμαίνονται από 1mV έως 100mV, γεγονός που δυσχεραίνει την καταγραφή τους, μιας και συνυπάρχουν με ηλεκτρικά σήματα προερχόμενα από εξωτερικό θόρυβο ή ακόμα και από μυϊκή σύσπαση. Για το λόγο αυτό, και για την ακριβέστερη καταγραφή των εγκεφαλικών ηλεκτρικών σημάτων, πραγματοποιείται πυκνότερη κάλυψη του κεφαλιού με ηλεκτρόδια.

Από την άλλη πλευρά τα δεδομένα του Μαγνητοεγκεφαλογραφήματος λαμβάνονται από τη μέτρηση του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του εγκεφάλου. Το όργανο που χρησιμοποιείται για την καταγραφή του μαγνητικού πεδίου που προκαλείται από την ηλεκτρική δραστηριότητα του εγκεφάλου είναι το μαγνητόμετρο SQUID (Superconducting Quantum Interference Device). Το SQUID είναι μια σφαιρική κάσκα αποτελούμενη από αισθητήρες, οι οποίοι βρί-

σκονται σε απόσταση 5 - 10 cm γύρω από το κεφάλι. Οι αισθητήρες αυτοί μετατρέπουν μικρές μεταβολές της μαγνητικής ροής των συνιστωσών του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου, σε ηλεκτρικές διαφορές δυναμικού. Το όργανο αυτό είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο και επιβάλλεται κατάλληλη μόνωση (αυτό επιτυγχάνεται σε μαγνητικά θωρακισμένους χώρους). Αν σκεφτεί κανείς ότι το μαγνητικό πεδίο του εγκεφάλου που καταγράφεται στο MEG είναι της τάξης των 50 - 500 fT, 10^9 φορές ασθενέστερο από το μαγνητικό πεδίο της Γης.

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι μαγνητόμετρου SQUID, το DC και το RF, βλ. Σχήμα 1.5. Τα

Σχήμα 1.5: Μαγνητόμετρο τύπου DC.

RF SQUIDS έχουν μια μόνο ένωση Josephson, ενώ τα DC SQUIDS έχουν δύο ή παραπάνω ενώσεις. Συνέπεια αυτού είναι ότι τα DC SQUIDS έχουν μεγαλύτερο κόστος επειδή είναι δυσκολότερο να κατασκευαστούν, αλλά παρουσιάζουν υψηλή ευαισθησία.

Η μαγνητική αναζήτηση της ηλεκτρικής δραστηριότητας εισάγει τόσο τεχνικές όσο και ηλεκτρομαγνητικές διαφορές σε σχέση με την ηλεκτρική μέθοδο. Ένα τεχνικό πλεονέκτημα της μαγνητικής μεθόδου είναι ότι τα μαγνητικά σήματα μπορούν να ανιχνευθούν χωρίς την άμεση επαφή ηλεκτροδίων στο δέρμα. Από την άλλη μεριά όμως το μαγνητοεγκεφαλογράφημα απαιτεί πολύ ακριβό εξοπλισμό οργάνων καθώς και μαγνητικά θωρακισμένο δωμάτιο. Το κόστος του δε είναι πολύ υψηλότερο από ότι αυτό του ηλεκτροεγκεφαλογράφηματος.

Η εξέταση, με τους νόμους της φυσικής, των δημιουργούμενων ρευμάτων στο εσωτερικό του εγκεφάλου και των παραγόμενων ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων που αυτά δημιουργούν,

καθώς και ο προσδιορισμός αυτών των πεδίων, αποτελούν έναν από τους κύριους σκοπούς της παρούσας διατριβής. Συγκεκριμένα έχοντας ως δεδομένο το κύριο ρεύμα που κυκλοφορεί μέσα στον εγκέφαλο καθώς και την κατανομή της ηλεκτρικής αγωγιμότητας αυτού, ζητάμε να προσδιορίσουμε τόσο το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται στο εξωτερικό του κρανίου (ευθύ πρόβλημα Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας) όσο και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο (ευθύ πρόβλημα Μαγνητοεγκεφαλογραφίας).

Όπως είναι γνωστό δίνεται τεράστια σημασία στην όσο το δυνατό ακριβέστερη επίλυση του ευθέως προβλήματος της Ηλεκτρομαγνητοεγκεφαλογραφίας, γιατί σε μεγάλο βαθμό σε αυτήν στηρίζεται η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος. Ως αντίστροφο πρόβλημα Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και Μαγνητοεγκεφαλογραφίας ορίζεται ο εντοπισμός της θέσης, του προσανατολισμού και της έντασης της πηγής στο εσωτερικό του εγκεφάλου, που προκάλεσαν τα καταγραφέντα πεδία - ηλεκτρικό και μαγνητικό - στο εξωτερικό αυτού. Όπως τα περισσότερα αντίστροφα προβλήματα, έτσι και εδώ παρουσιάζεται μια εγγενής δυσκολία, που εντοπίζεται στην έλλειψη μοναδικότητας της λύσης, γεγονός που απέδειξε το 1853 ο Hermann von Helmholtz [34].

Προκειμένου να εντοπίσουμε το πρωτεύον ρεύμα στο εσωτερικό του εγκεφάλου γίνονται παραδοχές οι οποίες βασίζονται σε αναλυτικά αποτελέσματα των ευθέων προβλημάτων HEG και MEG. Για την αναλυτική όμως επίλυση αυτών προβαίνουμε σε κάποιες αναγκαίες παραδοχές και αποδεχόμαστε συγκεκριμένα πρότυπα που αφορούν στις πηγές της ηλεκτρικής δραστηριότητας, στη γεωμετρία που προσεγγίζει βέλτιστα τον εγκέφαλο και στις φυσικές παραμέτρους που τον χαρακτηρίζουν. Σε αυτές ακριβώς τις παραδοχές θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

1.6 Οι πηγές στο Βιοηλεκτρομαγνητισμό

Η καλή τοποθέτηση του μαθηματικού προβλήματος συνεπάγεται υποθέσεις που αφορούν τόσο το μοντέλο που προσεγγίζει την ηλεκτροχημική πηγή, όσο και το γεωμετρικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση του κρανίου. Στο σημείο αυτό πρέπει να κάνουμε τις απαραίτητες παραδοχές για τις βιοηλεκτρικές πηγές καθώς και για τον αγωγό, που στην περίπτωση μας αντιπροσωπεύεται από το χώρο του κρανίου και ό,τι αυτό περιλαμβάνει.

Αναφερόμενοι αρχικά στις πηγές, ας υπενθυμίσουμε όπως είδαμε στην υποπαράγραφο 1.3.3, ότι η κίνηση των ιόντων στο νευρώνα, προκαλεί επαγόμενο ρεύμα στο εξωτερικό χώρο. Θα συμβολίσουμε λοιπόν με $\mathbf{J}^P$ την κατανομή της χωρικής πυκνότητας του κυρίου ρεύματος και με $\mathbf{J}^V$ τη χωρική πυκνότητα του επαγόμενου ρεύματος.

Επειδή όμως είδαμε στον κάθε νευρώνα υπάρχει κίνηση ιόντων, η οποία ισοδυναμεί με διπολική ροπή, η κατανομή της πυκνότητας του κυρίου ρεύματος μπορεί να θεωρηθεί ως ισοδύναμη με την αντίστοιχη κατανομή χωρικής πυκνότητας της διπολικής ροπής της πηγής (Plonsey, 1969)

[45]. Επιπλέον, οποιαδήποτε κατανομή ρεύματος - το εύρος της οποίας είναι μικρό σε σχέση με αποστάσεις που μελετώνται - μπορεί να εκφραστεί ως σειρά πολυπόλων αυξανόμενης τάξεως (διπόλων, τετραπόλων, οκταπόλων κ.ο.κ.).

Έτσι, η προσέγγιση της χωρικής πυκνότητας του κυρίου ρεύματος εντοπισμένου στη θέση $\mathbf{r}_0$, με το διπολικό όρο του πολυπολικού του αναπτύγματος, δηλαδή η ισοδύναμη κατανομή ρεύματος για σημειακή διπολική ροπή [43] είναι η

$$\mathbf{J}^P(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.1)$$

όπου δ είναι το συναρτησιακό δέλτα του Dirac, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\int_{R^3} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \Phi(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση Φ .

Προφανώς,

$$\int_{R^3} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (1.3)$$

Ο μηδενικής τάξης όρος του παραπάνω πολυπολικού αναπτύγματος, δηλαδή η ισοδύναμη του $\mathbf{J}^P$ σημειακή διπολική ροπή προκύπτει από την (1.1) ως

$$\mathbf{P}_0 = \int_V \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.4)$$

Στο Βιοηλεκτρομαγνητισμό, ένα ρεύμα διπόλων, εντοπισμένο σε μια περιοχή του εγκεφάλου και με διπολική ροπή $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_0 = \int_V \mathbf{J}^P(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.5)$$

χρησιμοποιείται ως ισοδύναμη πηγή για το κύριο ρεύμα [33], με την έννοια ότι και τα δύο εντοπίζονται στο ίδιο σημείο και παράγουν το ίδιο μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο. Τότε, η πυκνότητα του κυρίου ρεύματος, προτυποποιημένου με το παραπάνω ρεύμα διπόλων, δίνεται μέσω των (1.1) και (1.5), από την

$$\mathbf{J}^P(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.6)$$

Ένα τυπικό ρεύμα διπόλου δημιουργείται από τη ταυτόχρονη δραστηριότητα δεκάδων χιλιάδων νευρώνων και είναι της τάξεως των 10^{-8} Am [33]. Εντούτοις, άλλα μοντέλα έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί για την πηγή του κυρίου ρεύματος, κυρίως ως προς την προσέγγισή του μέσω της πολυπολικής θεώρησης [24, 50, 51], καθώς επίσης και της προτυποποίησης της πηγής ως ενός ρεύματος κατανομής διπόλων [16].

1.7 Η προτυποποίηση του αγωγού

Για τη θεώρηση του αγωγού από την άποψη της φυσικής, πρέπει να λάβουμε υπόψη ορισμένα στοιχεία που προκύπτουν από την ανατομία του εγκεφάλου, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.2. Γνωρίζοντας ότι η καταγραφή του παραγόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου γίνεται πάνω ή λίγο έξω από την επιφάνεια του κρανίου, ως αγωγός πρέπει να θεωρηθεί ολόκληρο το κεφάλι, συμπεριλαμβανομένου του δέρματος, των κρανιακών οστών, των τριών μηνίγγων, του εγκεφαλονωτιαίου υγρού και τέλος του εγκεφαλικού ιστού. Μπορεί ο όγκος των περιοχών εξωτερικά του εγκεφαλικού ιστού να είναι πολύ μικρός σε σχέση με τον ίδιο τον όγκο του ιστού και οι μηνιγγες να είναι πολύ λεπτές, αλλά όλες αυτές οι περιοχές πρέπει να ληφθούν υπόψη όταν επιχειρείται ακριβής ανάλυση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του εγκεφάλου, μια και όλες χαρακτηρίζονται από διαφορετική ηλεκτρική αγωγιμότητα [45]. Επιπρόσθετα, το κεφάλι βρίσκεται μέσα στον μη αγωγίμο αέρα ενώ στο εσωτερικό του εγκεφαλικού ιστού υπάρχουν ήδη ανισotropίες που δε λαμβάνονται υπ' όψη σε μακροσκοπική κλίμακα, όπως για παράδειγμα, το γεγονός ότι η λευκή ουσία στο εσωτερικό του εγκεφάλου είναι δέκα φορές πιο αγωγίμη κατά μήκος των νευροαξόνων σε σχέση με την κάθετη σ' αυτούς διεύθυνση.

Έτσι ένα ρεαλιστικό πρότυπο θα απαιτούσε από τον αγωγό να είναι κατά τμήματα μόνον ομογενής και ισότροπος ενώ το σχήμα του θα πρέπει ταυτόχρονα να αντανακλά και τη χωρική του ανισotropία. Ωστόσο, το σχετικά απλοποιημένο πρότυπο της ομογενούς σφαίρας ή των τριών ομόκεντρων σφαιρών διαφορετικής αγωγιμότητας, έχει δώσει αποτελέσματα που αντιστοιχούν, ικανοποιητικά στις πειραματικές μετρήσεις [8, 45, 52]. Όσον αφορά το γεωμετρικό μοντέλο του αγωγού για την αναλυτική επεξεργασία του προβλήματος, έγινε μια βελτίωση στα ήδη υπάρχοντα χρησιμοποιούμενα πρότυπα.

Το κριτήριο για την επιλογή του κυρίως προτύπου της παρούσας διατριβής είναι οι τιμές της ηλεκτρικής αγωγιμότητας στις διάφορες περιοχές του εγκεφάλου. Όπως είδαμε στη παράγραφο 1.2 στο εσωτερικό της ανθρώπινης κεφαλής βρίσκεται ο εγκεφαλικός ιστός, ο οποίος χαρακτηρίζεται από μια δεδομένη τιμή αγωγιμότητας. Ανάμεσα σε αυτόν και στην κρανιακή κοιλότητα παρεμβάλλονται οι τρεις μηνιγγες - όπως περιγράφηκαν στην ίδια παράγραφο. Αυτές βρίσκονται μέσα στο εγκεφαλονωτιαίο υγρό του οποίου η αγωγιμότητα είναι διαφορετική από αυτήν του εγκεφαλικού ιστού, παρεμφερής όμως με εκείνη των μηνίγγων. Για το λόγο αυτό ενσωματώνουμε ηλεκτρικά τις μηνιγγες στην περιοχή του εγκεφαλονωτιαίου υγρού. Οι μηνιγγες με τη σειρά τους περιβάλλονται από την περιοχή των κρανιακών οστών και τελικά από αυτήν του δέρματος (βλ. Σχήμα 1.6). Οι τιμές που χαρακτηρίζουν τις αγωγιμότητες των τεσσάρων περιοχών έχουν ληφθεί από το [3] και φαίνονται στον Πίνακα 1.1. με βάση λοιπόν αυτά τα ρεαλιστικά ανατομικά δεδομένα θα υιοθετήσουμε έναν στρωματοποιημένο αγωγό, ο

οποίος περιλαμβάνει τέσσερις διαφορετικές περιοχές, όπου η μια εμπεριέχεται στην άλλη. Η εσωτερική περιοχή προτυποποιεί τον εγκεφαλικό ιστό, στον οποίο βρίσκεται η ηλεκτροχημική πηγή. Θα ονομάσουμε πυρήνα του ανομοιογενούς αγωγού την περιοχή όπου βρίσκεται κάθε φορά η πηγή. Οι τρεις εναπομείνουσες περιοχές περιβάλλουν διαδοχικά τον πυρήνα, σχηματίζοντας τρία στρώματα διαφορετικής αγωγιμότητας γύρω από αυτόν και τα οποία στη συνέχεια της εργασίας μας θα τα χαρακτηρίσουμε ως φλοιούς. Οι φλοιοί αυτοί, από μέσα προς τα έξω, αναπαριστούν αντίστοιχα το εγκεφαλονωτιαίο υγρό, το οστό και το δέρμα του κρανίου.

Σχήμα 1.6: Στρωματοποίηση της κρανιακής κοιλότητας: η ύπαρξη τεσσάρων περιοχών διαφορετικής αγωγιμότητας στο εσωτερικό του εγκεφάλου, επιβάλλει την επιλογή του ρεαλιστικού προτύπου των τριών φλοιών.

Η επιλογή του γεωμετρικού προτύπου για τον στρωματοποιημένο αγωγό των τριών φλοιών, έγινε βάσει στατιστικών ανατομικών δεδομένων. Συγκεκριμένα αυτά [53] έχουν οδηγήσει στην καθιέρωση για τον εγκέφαλο του ελλειψοειδούς προτύπου, με ημιάξονες που ανέρχονται περίπου στις τιμές 9, 6.5 και 6 cm και με κύριες τομές, που προσεγγίζουν σε κάποιο βαθμό, τις θέσεις όπου εντοπίζονται οι τρεις κύριες αύλακες που διασχίζουν τον ανθρώπινο εγκέφαλο. Το ομογενές ελλειψοειδές πρότυπο έχει μελετηθεί αναλυτικά στο [39]. Η βελτίωση που επιφέρει η παρούσα διατριβή είναι η θεώρηση του ελλειψοειδούς προτύπου για τον στρωματοποιημένο αγωγό των τριών φλοιών, με τις προαναφερθείσες διαστάσεις να αποτελούν τις

	Εγκέφαλος	+ Υγρό	+ Οστά	+ Δέρμα
Ημιάξονας 1 ($\cdot 10^{-2}m$)	8.46	8.61	9.00	9.34
Ημιάξονας 2 ($\cdot 10^{-2}m$)	5.72	5.95	6.50	6.96
Ημιάξονας 3 ($\cdot 10^{-2}m$)	5.15	5.40	6.00	6.50
Όγκος ελλειψοειδούς (lt)	1.05	1.15	1.50	1.77
Ακτίνα σφαίρας ισοδύναμου όγκου ($\cdot 10^{-2}m$)	6.30	6.50	7.10	7.50
Αγωγιμότητα σ ($(\Omega m)^{-1}$)	$\sigma_c = 0.33$	$\sigma_f = 1$	$\sigma_b = 0.0042$	$\sigma_s = 0.33$

Πίνακας 1.1: Ενδεικτικές τιμές για τις διαστάσεις και τις αγωγιμότητες των προτύπων της παρούσας διατριβής

διαστάσεις του ελλειψοειδούς που αντιπροσωπεύει την επιφάνεια της περιοχής των κρανιακών οστών. Τα τρία εναπομείναντα ελλειψοειδή είναι ομοεστιακά ως προς αυτό με διαστάσεις που φαίνονται στον Πίνακα 1.1. Ο προσανατολισμός των τεσσάρων ομοεστιακών ελλειψοειδών που σχηματίζονται ακολουθεί τον προσανατολισμό του εγκεφάλου, που βρίσκεται σε γωνία περίπου 20° με το οριζόντιο επίπεδο.

Για να ολοκληρώσουμε με την προτυποποίηση του αγωγού θα αναφερθούμε σε δύο ακόμη πρότυπα, τα οποία κυρίως χρησιμοποιούμε για να προβούμε στις απαραίτητες συγκρίσεις κατά την αναγωγή του προτύπου των τριών ελλειψοειδών φλοιών σε απλούστερα. Το δεύτερο πρότυπο αφορά στο κλασικό πλέον πρότυπο του ομογενούς πεπερασμένου αγωγού σταθερής αγωγιμότητας. Θεωρούμε δηλαδή ουσιαστικά ότι ολόκληρο το κρανίο καταλαμβάνεται από τον εγκεφαλικό ιστό, για τον οποίο μία τυπική τιμή της αγωγιμότητας είναι η $\sigma = 0,3(\Omega m)^{-1}$ [33]. Το τρίτο πρότυπο επιλέγεται με κριτήριο για άλλη μια φορά τις περιοχές διαφορετικής τιμής αγωγιμότητας και αφορά έναν μη ομογενή αγωγό, που αποτελείται από μια περιοχή που περιέχει την πηγή του κυρίου ρεύματος - πυρήνα και μια άλλη περιοχή στο εσωτερικό του, η οποία χαρακτηρίζεται από διαφορετική αγωγιμότητα. Ο μη ομογενής αγωγός αυτός αναπαριστά τον εγκεφαλικό ιστό, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει υγρό. Η γεωμετρία είναι αυτή που - όπως θα δούμε παρακάτω - θα καθορίσει αν οι δυο περιοχές είναι ομόκεντρες σφαίρες ή αν η μια είναι έκκεντρη σε σχέση με την άλλη.

Ο πυρήνας καθώς και οι περιβάλλοντες φλοιοί χαρακτηρίζονται ακόμη από ηλεκτρική επιδεκτικότητα $\varepsilon = 10^5 \varepsilon_0 = \frac{10^{-4}}{36\pi} Fm^{-1}$, όπου $\varepsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$ και από μαγνητική διαπερατότητα $\mu = \mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} Hm^{-1}$ [33], όπου ε_0 και μ_0 είναι η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα. Να επισημάνουμε ακόμη ότι $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, όπου $c = 3.00 \cdot 10^8 ms^{-1}$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Ο χώρος που περιβάλλει το κρανίο αντιπροσωπεύει τον ατμοσφαιρικό αέρα και θεωρείται μη αγωγίμος αλλά με μαγνητική διαπερατότητα ίση με αυτή του κενού.

Αφού πραγματοποιήσαμε τις κατάλληλες παραδοχές για την πηγή και τον αγωγό, απομένει να καταστρώσουμε το σύστημα των φυσικών νόμων που περιγράφει βάσει των παραπάνω παραδοχών καλύτερα την παραγωγή και διάδοση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Αυτοί οι νόμοι δεν είναι άλλοι από τις εξισώσεις Maxwell, τις οποίες και θα μελετήσουμε διεξοδικά στην επόμενη παράγραφο.

1.8 Η Σχεδόν Στατική Προσέγγιση των εξισώσεων του Maxwell

Όπως είδαμε στο εσωτερικό του εγκεφάλου λαμβάνουν χώρα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα που προκαλούνται από τη μετακίνηση των ηλεκτρικών φορτίων κατά μήκος του άξονα και των δενδριτών. Προκειμένου λοιπόν να ερμηνεύσουμε τα φαινόμενα αυτά θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Maxwell, οι οποίες ήδη από το δέκατο ένατο αιώνα έχει αποδειχθεί ότι περιγράφουν κάθε ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο.

Συγκεκριμένα μέχρι το 1865 η γνώση του Ηλεκτρομαγνητισμού συγκεντρώνονταν στους νόμους των Faraday, Ampère, Gauss για τον ηλεκτρισμό και Gauss για το μαγνητισμό. Το 1865 όμως ο Maxwell (1831 - 1879) εντόπισε τη μη φυσική συμβατότητα των τεσσάρων νόμων και τη διόρθωσε προσθέτοντας ένα νέο όρο στον μη επαρκή μέχρι τότε νόμο του Ampère [9], ο οποίος εισήγαγε τη χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου ως πηγή του μαγνητικού πεδίου. Ο γενικευμένος νόμος του Ampère - που λόγω της συμβολής του Maxwell λέγεται Νόμος Ampère-Maxwell - παρέχει ένα νέο, συμμετρικό χαρακτήρα στην αλληλοσύνδεση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Με τον τρόπο αυτό πλέον το νέο σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων, που ονομάζεται σύστημα εξισώσεων Maxwell, είναι το ακόλουθο:

Νόμος Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (1.7)$$

Νόμος Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (1.8)$$

Νόμος Gauss για τον ηλεκτρισμό

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.9)$$

Νόμος Gauss για τον μαγνητισμό

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.10)$$

όπου $\mathbf{E}$ και $\mathbf{H}$ είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{D}$ και $\mathbf{B}$ είναι η ηλεκτρική μετατόπιση και η μαγνητική επαγωγή, και $\mathbf{J}$ και ρ είναι η χωρική πυκνότητα ρεύματος και φορτίου

αντίστοιχα. Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν την αλληλεπίδραση μεταξύ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Η χωρική μεταβολή του ενός εκφράζει και ελέγχεται από τη χρονική μεταβολή του άλλου. Συνεπώς, η ύπαρξη χρονικής μεταβολής του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου δεν επιφέρει ποτέ μόνο ηλεκτρικό ή μόνο μαγνητικό πεδίο, αλλά γεννά ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Στο ολικό ρεύμα $\mathbf{J}$ διακρίνεται μία κύρια πηγή επιβαλλόμενου ρεύματος $\mathbf{J}^P$ και ένα επαγόμενο ρεύμα αγωγιμότητας $\mathbf{J}^V$, δηλαδή

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^P + \mathbf{J}^V. \quad (1.11)$$

Ο νόμος διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου επιβάλλει στο ολικό ρεύμα να είναι σωληνοειδές

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.12)$$

και κατά συνέπεια, στο κύριο ρεύμα να συνδέεται με το φορτίο μέσω του επαγόμενου ρεύματος, κατά τρόπον ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^P + \partial_t \rho = 0. \quad (1.13)$$

Ερχόμενοι τώρα να συσχετίσουμε τους νόμους του Maxwell με τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του εγκεφάλου, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι προσομοιώνοντας ολόκληρο το κεφάλι με έναν αγωγό, θεωρούμε ότι ο αγωγός αυτός είναι γραμμικό υλικό. Συνεπώς, για αυτόν τον αγωγό που είναι επιπλέον ομογενής, ισότροπος και αγωγίμος έχουμε ότι

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.14)$$

όπου ε η διηλεκτρική σταθερά του υλικού, που ορίζει τη σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής μετατόπισης και του ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.15)$$

όπου μ η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού συνδέει τη μαγνητική επαγωγή με το μαγνητικό πεδίο και

$$\mathbf{J}^V = \sigma \mathbf{E} \quad (1.16)$$

και σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα του υλικού που συνδέει το ρεύμα αγωγιμότητας με το ηλεκτρικό πεδίο που το παράγει.

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι οι πηγές της ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου δεν

δημιουργούν πουθενά συσσώρευση φορτίου, με αποτέλεσμα η μέση χωρική πυκνότητα φορτίου ρ να είναι μηδενική, οι εξισώσεις (1.8), (1.9) και (1.12), με τη βοήθεια των (1.14)-(1.16), γίνονται

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu(\sigma + \varepsilon \partial_t) \mathbf{E} + \mu \mathbf{J}^P \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.18)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^P + \sigma \mathbf{E} \quad (1.19)$$

ενώ οι (1.7) και (1.13) διατηρούνται οι ίδιες, με την τελευταία να εξασφαλίζει ότι και εκεί όπου υπάρχει ροή κυρίου ρεύματος, η μέση πυκνότητα φορτίου διατηρείται μηδενική. Συμπερασματικά οι εξισώσεις (1.7), (1.10), (1.17), (1.18) και (1.19) περιγράφουν το φαινόμενο του Βιοηλεκτρομαγνητισμού.

Στη συνέχεια θα στηριχτούμε στο γεγονός ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται στο εσωτερικό του εγκεφάλου έχει τόσο μεγάλο μήκος κύματος σε σχέση με τις διαστάσεις του εγκεφάλου, ώστε τα πεδία που δημιουργούνται να θεωρούνται στατικά [39]. Συγκεκριμένα η μεγαλύτερη διάσταση του εγκεφάλου (περίπου 18 cm) καταλαμβάνει λιγότερο από το $\frac{1}{2000}$ του μήκους κύματος που παράγεται στον εγκέφαλο ($\lambda \approx 400m$). Αυτό, μεταφράζεται σε ένα αργά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό κυματικό πεδίο [45, 54], και ισοδυναμεί με τα λεγόμενα Σχεδόν Στατικά πεδία (Quasi Static fields) [42], στα οποία η χρονική τους παράγωγος είναι αμελητέα.

Στο Σχεδόν Στατικό όριο, οι εξισώσεις που περιγράφουν τα φαινόμενα του Βιοηλεκτρισμού και του Βιομαγνητισμού δίνονται από τις (1.7), (1.10), (1.17) και (1.18), οι οποίες λαμβάνοντας υπόψη την αμελητέα συνεισφορά των χρονικών παραγώγων γράφονται

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (1.23)$$

1.9 Μαθηματική τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος του Βιοηλεκτρομαγνητισμού

Το ευθύ πρόβλημα του Βιοηλεκτρομαγνητισμού συνίσταται στην εύρεση του ηλεκτρικού δυναμικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε περιοχή στο εσωτερικό του μη ομογενούς αγωγού, καθώς και στον μη αγώγιμο εξωτερικό χώρο. Το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο παράγονται από δεδομένη πηγή κυρίου ρεύματος που βρίσκεται στο εσωτερικό του αγωγού. Στη συνέχεια θα καταγράψουμε αναλυτικά τα προβλήματα για τα τρία πρότυπα, όπως αυτά τα περιγράψαμε στην παράγραφο 1.7.

1.9.1 Ο ομογενής πεπερασμένος σφαιρικός αγωγός

Θεωρούμε τη λεία επιφάνεια S που ορίζει τον εσωτερικό αγώγιμο χώρο V^- , που χαρακτηρίζεται από ηλεκτρική αγωγιμότητα σ , $\sigma > 0$ και τον εξωτερικό, μη αγώγιμο χώρο V^+ . Στη θέση $\mathbf{r}_0$ του V^- , υποθέτουμε την ύπαρξη σημειακής πηγής ρεύματος διπόλων με ροπή $\mathbf{Q}$, δηλαδή

$$\mathbf{J}^P(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.24)$$

η οποία δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, εντός και εκτός του αγωγού, ενώ επάγει στον V^- ρεύμα αγωγιμότητας

$$\mathbf{J}^V(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.25)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα παραγόμενα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ δίνονται, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, στις σχέσεις (1.20)-(1.23). Από την εξίσωση (1.20) διαπιστώνεται ο αστρόβιλος χαρακτήρας του $\mathbf{E}$, γεγονός που μας επιτρέπει να το αναπαράστήσουμε μέσω ενός βαθμωτού πεδίου u με τον ακόλουθο τρόπο

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r}). \quad (1.26)$$

Το πεδίο u είναι το ηλεκτρικό δυναμικό που καταγράφεται κατά τη λήψη του ΗΕΓ. Συμβολίζουμε με u^- και u^+ το ηλεκτρικό δυναμικό στον εσωτερικό και εξωτερικό χώρο αντίστοιχα. Επιπλέον παίρνουμε την απόκλιση της (1.21) και την αντικαθιστούμε στην (1.26). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η εξίσωση (1.27)

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^-, \quad (1.27)$$

την οποία πρέπει να ικανοποιεί το ηλεκτρικό δυναμικό u^- στο χώρο V^- , όπου το κύριο ρεύμα είναι μη μηδενικό. Αντίστοιχα, στον εξωτερικό χώρο ο οποίος δεν περιλαμβάνει πηγές, το ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση (1.28)

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+. \quad (1.28)$$

Επί της συνοριακής επιφάνειας S η συνάρτηση του δυναμικού πρέπει να ικανοποιεί ειδικές συνθήκες συνέχειας. Για να δούμε ποιοι φυσικοί νόμοι επιβάλλουν τις συνθήκες αυτές, ας θεωρήσουμε τη γενική περίπτωση όπου ο εξωτερικός χώρος είναι και αυτός αγωγίμος, με αγωγιμότητα σ^+ , και $\sigma^+ \neq \sigma$. Τότε η επιβολή της απόκλισης στην εξίσωση (1.21) οδηγεί στην

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot \mathbf{J}^P. \quad (1.29)$$

Από την άλλη πλευρά, η Σχεδόν Στατική θεώρηση των πεδίων και των ρευμάτων στην εξίσωση συνέχειας (1.13) η οποία εξασφαλίζει μηδενική μέση πυκνότητα φορτίου και στο χώρο όπου υπάρχουν πηγές ρεύματος, με αποτέλεσμα η παραγωγικότητα της πηγής να θεωρείται αμελητέα

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^P \approx 0 \quad (1.30)$$

όχι όμως μηδενική, αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε συσσώρευση φορτίου στο εσωτερικό του πυρήνα.

Τότε, το χωρικό ολοκλήρωμα επί του V^- της (1.29), αφού μετατραπεί σε επιφανειακό επί του συνόρου S του V^- μέσω του θεωρήματος της απόκλισης, δίνει λόγω και της (1.30) τη συνθήκη

$$\int_S \sigma \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u ds \approx 0. \quad (1.31)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S .

Μετά από εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα επιφανειακά ολοκληρώματα που προκύπτουν κατά τη θεώρηση της (1.31) επί στοιχειώδους όγκου που διαπερνάται εγκαρσίως από την S , και αφού λάβουμε το όριο στο οποίο ο στοιχειώδης όγκος συρρικνώνεται σε σημείο, παίρνουμε ότι

$$\sigma \frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = \sigma^+ \frac{\partial u^+(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (1.32)$$

Επειδή όμως στο πρότυπο που εξετάζουμε θεωρούμε μηδενικό σ^+ η (1.32) απαιτεί τελικά για το ηλεκτρικό δυναμικό του εσωτερικού χώρου τη συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (1.33)$$

Από την άλλη πλευρά, η ύπαρξη των καθέτων παραγώγων των u^-, u^+ εξασφαλίζει τη συνέχεια του πεδίου δυναμικού στο σύνορο S , δηλαδή

$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (1.34)$$

Τέλος η ασυμπτωτική συνθήκη

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (1.35)$$

επιβάλλεται να ικανοποιείται από το εξωτερικό δυναμικό.

Έτσι, ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού εντός και εκτός του αγωγού, απαιτεί την επίλυση των παρακάτω προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Για τον εσωτερικό χώρο V^- η ύπαρξη της πηγής επιβάλλει τη λύση της εξίσωσης Poisson (1.27) με ομογενή συνθήκη Neumann

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^-, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (1.37)$$

ενώ για τον εξωτερικό χώρο V^+ απαιτείται επίλυση της εξίσωσης Laplace με τη μη ομογενή συνθήκη Dirichlet

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+ \quad (1.38)$$

$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (1.39)$$

και την ασυμπτωτική συνθήκη

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.40)$$

Η διαδικασία επίλυσης των παραπάνω προβλημάτων ακολουθεί συγκεκριμένη σειρά, αφού πρώτα πρέπει να επιλυθεί το εσωτερικό πρόβλημα (1.36) - (1.37). Η προτεραιότητα αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι ο υπολογισμός του εξωτερικού δυναμικού προαπαιτεί τη γνώση του εσωτερικού δυναμικού στο σύνορο.

Ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ απαιτεί μόνον τη λήψη της βαθμίδας του δυναμικού και συνήθως παραλείπεται, αφού τα δεδομένα του ΗΕΓ είναι καταγραφές ηλεκτρικού δυναμικού και όχι ηλεκτρικού πεδίου.

1.9.2 Ο στρωματοποιημένος αγωγός των τριών φλοιών

Ακολουθώντας τις παραδοχές για την ανατομική δομή του κρανίου όπως πραγματοποιήθηκε στην παράγραφο 1.7, θεωρούμε ότι λεία κλειστή επιφάνεια S_c περικλείει το χώρο V_c που προτυποποιεί τον εγκεφαλικό ιστό με αγωγιμότητα σ_c . Θεωρούμε επίσης επιφάνεια S_f η οποία περιβάλλει την S_c ορίζοντας το φλοιό V_f του εγκεφαλονωτιαίου υγρού με αγωγιμότητα σ_f και επίσης διαδοχικές επιφάνειες S_b και S_s που ορίζουν τους φλοιούς V_b και V_s του οστού και του δέρματος, με αγωγιμότητες σ_b και σ_s αντίστοιχα με $\sigma_s \neq \sigma_b \neq \sigma_f \neq \sigma_c$. Τέλος εξωτερικά της S_s ορίζεται ο εξωτερικός, μη αγωγίμος, χώρος V και ο εσωτερικός αγωγίμος χώρος του δέρματος του κρανίου V_s , που χαρακτηρίζεται από ηλεκτρική αγωγιμότητα σ_s . Η μαγνητική διαπερατότητα που χαρακτηρίζει κάθε περιοχή του ανομοιογενούς αγωγού είναι μ_0 και η ίδια διαπερατότητα χαρακτηρίζει και το εξωτερικό του αγωγού.

Στη θέση $\mathbf{r}_0$ του V_c , υποθέτουμε την ύπαρξη σημειακής πηγής ρεύματος διπόλων με ροπή $\mathbf{Q}$, όπως δίνεται από την (1.24), η οποία δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, στο εσωτερικό του αγωγίμου χώρου, το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί ένα επαγωγικό ρεύμα πυκνότητας $\mathbf{J}^V$, που λόγω της ανομοιογένειας στο εσωτερικό του αγωγού, διαφέρει από περιοχή σε περιοχή του αγωγού και ορίζεται μέσω της

$$\mathbf{J}^V(\mathbf{r}) = \sigma_c \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) X_{V_c}(\mathbf{r}) + \sigma_f \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) X_{V_f}(\mathbf{r}) + \sigma_b \mathbf{E}_b(\mathbf{r}) X_{V_b}(\mathbf{r}) + \sigma_s \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) X_{V_s}(\mathbf{r}) \quad (1.41)$$

όπου $X_{V_i}(\mathbf{r})$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της περιοχής V_i για κάθε $i = c, f, b, s$. Το συνολικό ρεύμα σε κάθε σημείο $\mathbf{r}$ δίνεται όπως είδαμε από την (1.11).

Ας συμβολίσουμε στη συνέχεια το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό χώρο (πυρήνα) V_c με u_c , στο φλοιό V_f με u_f , στο φλοιό V_b με u_b , στο φλοιό V_s με u_s και τέλος στον εξωτερικό χώρο V με u . Με όμοιο τρόπο, όπως στην υποπαράγραφο 1.9.1 παίρνουμε την εξίσωση Poisson για την περιοχή στο εσωτερικό του πυρήνα, όπου το κύριο ρεύμα είναι μη μηδενικό, αντίστοιχη με την (1.27), με αγωγιμότητα αυτήν που υπάρχει στο εσωτερικό του πυρήνα σ_c . Στους χώρους V_f , V_b , V_s που δεν υπάρχουν πηγές τα δυναμικά u_f , u_b , u_s ικανοποιούν αντίστοιχα την εξίσωση Laplace. Επί των συνοριακών επιφανειών S_s , S_b , S_f , και S_c η συνάρτηση του δυναμικού πρέπει να ικανοποιεί ειδικές συνθήκες συνέχειας, οι οποίες εξάγονται με όμοιο τρόπο όπως στην υποπαράγραφο 1.9.1.

Έτσι, ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού εντός των φλοιών του αγωγού και εκτός αυτού, απαιτεί την επίλυση των παρακάτω προβλημάτων συνοριακών τιμών. Για τον εσωτερικό χώρο το u_c ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\Delta u_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_c} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_c \quad (1.42)$$

$$u_c(\mathbf{r}) = u_f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c \quad (1.43)$$

$$\sigma_c \frac{\partial u_c(\mathbf{r})}{\partial n} = \sigma_f \frac{\partial u_f(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in S_c. \quad (1.44)$$

Για καθεμιά από τις περιοχές των φλοιών V_f , V_b επιβάλλεται η επίλυση της εξίσωσης Laplace με μια μη ομογενή συνθήκη Dirichlet και μια μη ομογενή συνθήκη Neumann. Ειδικά για την περιοχή του εγκεφαλονωτιαίου υγρού V_f , ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού, απαιτεί την επίλυση του παρακάτω προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta u_f(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_f \quad (1.45)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = u_b(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (1.46)$$

$$\sigma_f \frac{\partial u_f(\mathbf{r})}{\partial n} = \sigma_b \frac{\partial u_b(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (1.47)$$

για την περιοχή του οστού V_b

$$\Delta u_b(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_b \quad (1.48)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = u_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_b \quad (1.49)$$

$$\sigma_b \frac{\partial u_b(\mathbf{r})}{\partial n} = \sigma_s \frac{\partial u_s(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in S_b \quad (1.50)$$

ενώ για την περιοχή του κρανίου V_s απαιτείται επίλυση της εξίσωσης Laplace με μια μη ομογενή συνθήκη Dirichlet και ομογενή συνθήκη Neumann

$$\Delta u_s(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_s \quad (1.51)$$

$$u_s(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_s \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial u_s(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_s. \quad (1.53)$$

Τέλος για τον εξωτερικό μη αγωγίμο χώρο V , απουσία πηγών, απαιτείται πάλι η επίλυση της εξίσωσης Laplace

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (1.54)$$

καθώς και η ικανοποίηση της ασυμπτωτικής συνθήκης στο άπειρο

$$u(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.55)$$

Τα παραπάνω αποτελούν διεπιφανειακά προβλήματα διαπερατότητας. Τα ζευγάρια των εξισώσεων και των συνοριακών συνθηκών δεν μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Έτσι επιβάλλεται η ανάπτυξη των ηλεκτρικών πεδίων σε σειρές και η επίλυση συνολικά του συστήματος που θα προκύψει.

Θα συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ και θα δείξουμε πώς αυτό υπολογίζεται με δεδομένα τα ηλεκτρικά δυναμικά που προκύπτουν από την επίλυση του ευθέος ΗΕΓ.

Η εξίσωση (1.22) υποβάλλει ότι το πεδίο $\mathbf{B}$, ως σωληνοειδές, μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός διανυσματικού δυναμικού $\mathbf{A}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.56)$$

ενώ, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το $\mathbf{A}$, μπορεί να θεωρηθεί επίσης σωληνοειδές

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.57)$$

Τότε αντικαθιστώντας την (1.56) στην (1.21) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \quad (1.58)$$

και τη συνθήκη (1.57), προκύπτει ότι το δυναμικό $\mathbf{A}$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.59)$$

όπου το $\mathbf{J}$ δίνεται από τις σχέσεις (1.11) και (1.41). Η (1.59), ως μερική διαφορική εξίσωση Poisson, έχει λύση η οποία λαμβάνεται άμεσα σε ολοκληρωτική μορφή, χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη λύση του τελεστή του Laplace [33], με τη μορφή

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}'), \quad (1.60)$$

όπου $V^- = V_c \cup V_f \cup V_b \cup V_s$, ολόκληρος ο χώρος στο εσωτερικό του ανομοιογενούς αγωγού. Τότε η (1.56) με τη βοήθεια του διανυσματικού αναλλοίωτου [4] της ταυυστικής ταυτότητας

$$\nabla \otimes (u\mathbf{f}) = (\nabla u) \otimes \mathbf{f} + u \nabla \otimes \mathbf{f} \quad (1.61)$$

όπου u βαθμωτό και $\mathbf{f}$ διανυσματικό πεδίο, οδηγεί για το μαγνητικό πεδίο στην αναπαράσταση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \left(\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}'), \quad (1.62)$$

ή λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.63)$$

η (1.62) γράφεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}'). \quad (1.64)$$

Ξαναγράφουμε την (1.64) εκμεταλλευόμενοι τις (1.11) και (1.41)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sigma_i \int_{V^-} \nabla u_i(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}'), \quad (1.65)$$

όπου u_i είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του αγωγίμου χώρου V_i αντίστοιχα. Εισάγοντας ακόμα την παραδοχή της σημειακής διπολικής πηγής ρεύματος μέσω της (1.24) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μέτρου του Dirac, το πρώτο ολοκλήρωμα της (1.65) γράφεται

$$\int_{V^-} \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') = \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad (1.66)$$

Τότε η (1.65) γίνεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sigma_i \int_{V_i} \nabla u_i(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') \quad (1.67)$$

όπου u_i , με $i = c, f, b, s$ είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του αγωγίμου χωρίου V_i , αντίστοιχα. Η αναπαράσταση (1.67) εκφράζει το μαγνητικό πεδίο ως το άθροισμα του πεδίου που παράγει η κύρια πηγή και της υπέρθεσης των πεδίων που οφείλονται σε χωρική κατανομή διπόλων με ροπές

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}') = -\sigma_i \nabla u_i(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in V_i. \quad (1.68)$$

Από την άλλη πλευρά, το καθένα από τα χωρικά ολοκληρώματα στην (1.67) με τη βοήθεια της ταυτότητας (1.61) και του διανυσματικού αναλλοίωτου της δυαδικής μορφής του θεωρήματος Gauss, μετατρέπεται στο αντίστοιχο επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_{V_i} \nabla u_i(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') = \int_{\partial V_i} u_i(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (1.69)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂V_i του V_i . Η μετατροπή αυτή γίνεται άμεσα για τις περιοχές όπου δεν περικλείονται πηγές, δηλαδή σημεία ιδιομορφίας

για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση, ενώ με βάση την απόδειξη στη δημοσίευση [17] η (1.69) ισχύει επιπλέον και για το χωρίο V_c που περιέχει την πηγή.

Τότε, η έκφραση (1.67) μέσω της (1.68) μετατρέπεται στη μορφή, που είναι γνωστή ως αναπαράσταση Geselowitz για έναν μη ομογενή αγωγό

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i,j=1}^n (\sigma_i - \sigma_j) \int_{S_{i,j}} u_i(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}'_{ij} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sigma_i \int_{S_i} u_i(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}'_{i,j} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (1.70)$$

Για τα δεδομένα του προτύπου της παρούσας εργασίας η αναπαράσταση Geselowitz γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_c} [\sigma_f u_f(\mathbf{r}') - \sigma_c u_c(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_f} [\sigma_b u_b(\mathbf{r}') - \sigma_f u_f(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_b} [\sigma_s u_s(\mathbf{r}') - \sigma_b u_b(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_s} \sigma_s u_s(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.71)$$

όπου το $\hat{\mathbf{n}}'$ συμβολίζει το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{r}'$ της αντίστοιχης επιφάνειας.

Στη συνέχεια θα βρούμε την τάξη του πρώτου όρου στο πολυπολικό ανάπτυγμα του πεδίου $\mathbf{B}$. Για να το πετύχουμε αυτό, θα εκφράσουμε την (1.64) με την ισοδύναμή της μορφή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{V^-} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}'), \quad (1.72)$$

η οποία με τη βοήθεια του ασυμπτωτικού αναπτύγματος

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = r^{-1} (1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \frac{1}{r} + O(r^{-2})) \quad (1.73)$$

γράφεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{r} \int_{V^-} \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right]. \quad (1.74)$$

Η ταυτότητα

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} \otimes \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{J}) \mathbf{r} + \mathbf{J} \cdot \nabla \otimes \mathbf{r} \quad (1.75)$$

το γεγονός ότι το ολικό ρεύμα $\mathbf{J}$ είναι σωληνοειδές καθώς και ότι η βαθμίδα του διανύσματος $\mathbf{r}$ είναι το ταυτοτικό δυαδικό, επιτρέπει στο $\mathbf{J}$ την αναπαράσταση

$$\mathbf{J} = \nabla \cdot (\mathbf{J} \otimes \mathbf{r}). \quad (1.76)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη πως ο φορέας του $\mathbf{J}$ είναι ο εσωτερικός χώρος V^- και χρησιμοποιώντας κατάλληλα τόσο το θεώρημα της απόκλισης όσο και την (1.76), η (1.74) γράφεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \int_S \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \otimes \mathbf{r}' ds(\mathbf{r}') + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \mathbf{r} \in V^+ \quad (1.77)$$

όπου S είναι η συνοριακή επιφάνεια του αγωγού με τον εξωτερικό μη αγωγίμο χώρο. Το ολικό ρεύμα $\mathbf{J}$ στη θέση $\mathbf{r}'$ δίνεται από την (1.11), η οποία λόγω της (1.66) γράφεται

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') - \sigma_i \nabla u_i(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in V_i. \quad (1.78)$$

ενώ το κύριο ρεύμα $\mathbf{J}^P$ έχει οριστεί στην (1.6). Ειδικά, επί της επιφάνειας S , καθώς δεν υπάρχουν πηγές, ο όρος με το $\mathbf{J}^P$ μηδενίζεται και έτσι η (1.77) με τη βοήθεια της (1.78) γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_c} [\sigma_f u_f(\mathbf{r}') - \sigma_c u_c(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_f} [\sigma_b u_b(\mathbf{r}') - \sigma_f u_f(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_b} [\sigma_s u_s(\mathbf{r}') - \sigma_b u_b(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_s} \sigma_s u_s(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}') + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.79)$$

Εξαιτίας των συνοριακών συνθηκών (1.44), (1.47), (1.50) και (1.53) στις επιφάνειες S_c , S_f , S_b και S_s αντίστοιχα, η κάθε μια από τις προς ολοκλήρωση συναρτήσεις στην (1.79) μηδενίζεται στο αντίστοιχο χωρίο ολοκλήρωσης. Συνεπώς, τα ολοκληρώματα στην έκφραση (1.79), είναι όλα μηδενικά, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο διπολικός όρος του $\mathbf{B}$ μηδενίζεται και το πολυπολικό ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ αρχίζει με τετραπολικό όρο.

Με άλλα λόγια, το γεγονός ότι ο πρώτος όρος του πολυπολικού αναπτύγματος του $\mathbf{B}$ είναι τετραπολικός και όχι διπολικός, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από κατανομή ρεύματος $\mathbf{J}$ στο εσωτερικό μη ομογενούς αγωγού με λείο σύνορο, μετρούμενο στον μη αγωγίμο, εξωτερικό του αγωγού, χώρο, είναι της τάξεως του r^{-3} . Το γεγονός αυτό συμφωνεί με το νόμο (1.10) του Gauss για το μαγνητισμό ο οποίος απαιτεί πως στη φύση δεν υπάρχουν ανοιχτές μαγνητικές δυναμικές γραμμές, όπως είναι οι μαγνητικές γραμμές του

πεδίου ενός μονοπόλου.

Ας μείνουμε στη φυσική ερμηνεία των παραπάνω μαθηματικών σχέσεων και να δούμε συγκεκριμένα τι περιγράφει η αναπαράσταση του μαγνητικού πεδίου, όπως δίνεται στην (1.71). Στο εσωτερικό σημείο του ανομοιογενούς αγωγού δημιουργείται ένα σημειακό διπολικό ρεύμα, με σταθερή ροπή $\mathbf{Q}$, που αντιπροσωπεύει την ισοδύναμη πηγή μιας τοπικής ηλεκτροχημικής δραστηριότητας του εγκεφάλου, την ταυτόχρονη δηλαδή νευρική δραστηριότητα χιλιάδων νευρώνων. Η σημειακή αυτή πηγή γεννά ένα μαγνητικό πεδίο του οποίου η ένταση, αν ο αγωγός δεν ήταν πεπερασμένος, θα δινόταν από τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της (1.71). Επειδή όμως υπάρχουν πεπερασμένοι φορείς διαφορετικής αγωγιμότητας στο χώρο, η σημειακή πηγή διεγείρει όλο το εσωτερικό του αγωγού V^- . Έτσι το κάθε χωρίο του ανομοιογενούς αγωγού διαρέεται πλέον από επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα, το οποίο εξαρτάται από την τιμή της αγωγιμότητας στο κάθε χωρίο, επομένως έχει διαφορετική πυκνότητα σε καθένα από αυτά. Δηλαδή, ενώ ο φορέας του σημειακού κυρίου ρεύματος περιορίζεται στη σημείο $\mathbf{r}_0$, ο φορέας του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος είναι κάθε αγωγήμη περιοχή του ανομοιογενούς αγωγού V^- .

Η σημασία του τύπου του Geselowitz (1.71) οφείλεται στο γεγονός ότι η συνολική δραστηριότητα του επαγόμενου ρεύματος μπορεί να περιγραφεί από μια ισοδύναμη κατανομή σημειακών διπόλων επάνω στις συνοριακές επιφάνειες S_i του αγωγού. Τα δίπολα αυτά είναι όλα προσανατολισμένα καθέτως επάνω στις επιφάνειες S_i και τα μέτρα των ροών τους καθορίζονται από τις επιφανειακές τιμές των εσωτερικών ηλεκτρικών δυναμικών u_i και από τις αντίστοιχες αγωγιμότητες σ_i , $i = c, f, b, s$.

Έτσι, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στον χώρο εξωτερικά του αγωγού είναι η υπέρθεση των μαγνητικών πεδίων του σημειακού διπολικού ρεύματος και των ισοδύναμων επαγόμενων διπόλων επάνω στις επιφάνειες S_i .

Όπως είδαμε το εξωτερικά καταγραφόμενο μαγνητικό πεδίο έχει πολυπολικό ανάπτυγμα που αρχίζει με τετραπολικό (όρο της τάξης r^{-3}) αντί με διπολικό όρο. Αυτό όμως φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι οι κατανομές πηγών ξεκινούν με διπολικούς όρους. Η αλήθεια είναι ότι ο διπολικός όρος του $\mathbf{B}$ που οφείλεται στη πραγματική πηγή αναιρείται από τον αντίστοιχο διπολικό όρο που οφείλεται στην επαγόμενη επιφανειακή κατανομή πηγών, γεγονός που δυσκολεύει τον εντοπισμό της πραγματικής πηγής παρά την ίδια την καταγραφή σημάτων του μαγνητικού πεδίου εξωτερικά του εγκεφάλου (δυσκολεύει την ερμηνεία των καταγεγραμμένων σημάτων). Αν όμως ολόκληρος ο χώρος R^3 είχε σταθερή αγωγιμότητα τότε το μαγνητικό πεδίο του ηλεκτρικού διπόλου στο $\mathbf{r}_0$ θα ήταν ίσο με τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της (1.55), ο οποίος έχει μη μηδενικό διπολικό όρο.

Τα αναλυτικά αποτελέσματα που θα προκύψουν από την επίλυση του προβλήματος HEF για τον αγωγό με τη στρωματοποιημένη ομοιογένεια, θα συγχριθούν στο έκτο κεφάλαιο της πα-

ρούσας διατριβής με τις αντίστοιχες κατανομές του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του εγκεφάλου σε απλούστερα φυσικά και γεωμετρικά πρότυπα αγωγών. Τα συμπεράσματα από αυτές τις συγκρίσεις δίνουν σημαντικά στοιχεία στην αντιμετώπιση του αντιστροφικού προβλήματος. Στην επόμενη παράγραφο θα αναφερθούμε στη σχηματική κατανομή της θεωρητικής μορφής του ηλεκτρικού δυναμικού και του μαγνητικού πεδίου.

1.9.3 Ο στρωματοποιημένος αγωγός με υγρό στο εσωτερικό του

Θα συνεχίσουμε με την μαθηματική τοποθέτηση του τρίτου προτύπου, όπως αυτό περιγράφηκε στην παράγραφο 1.7. Θεωρούμε ότι επιφάνεια S_c ορίζει τον εξωτερικό, μη αγωγίμο, χώρο V και τον ενδοκρανιακό αγωγίμο χώρο. Στο χώρο αυτό διακρίνεται μια περιοχή V_c , που χαρακτηρίζεται από ηλεκτρική αγωγιμότητα σ_c και μια περιοχή V_f , με ηλεκτρική αγωγιμότητα $\sigma_f \neq \sigma_c$, η οποία ορίζεται από την επιφάνεια S_f . Η μαγνητική διαπερατότητα που χαρακτηρίζει κάθε περιοχή του ανομοιογενούς αγωγού είναι μ_0 και η ίδια διαπερατότητα χαρακτηρίζει και το εξωτερικό του αγωγού.

Στη θέση $\mathbf{r}_0$ του V_c , υποθέτουμε την ύπαρξη σημειακής πηγής ρεύματος διπόλων με ροπή $\mathbf{Q}$, όπως δίνεται από την (1.24), η οποία δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, στο εσωτερικό του αγωγίμου χώρου, το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί ένα επαγωγικό ρεύμα πυκνότητας $\mathbf{J}^V$, που λόγω της ανομοιογένειας στο εσωτερικό του αγωγού, διαφέρει σε κάθε περιοχή του αγωγού και ορίζεται μέσω της

$$\mathbf{J}^V(\mathbf{r}) = \sigma_f \mathbf{E}_f(\mathbf{r}) X_{V_f}(\mathbf{r}) + \sigma_c \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) X_{V_c}(\mathbf{r}) \quad (1.80)$$

όπου $X_{V_i}(\mathbf{r})$ συμβολίζει τη χαρακτηριστική συνάρτηση της περιοχής V_i για κάθε $i = f, c$. Το συνολικό ρεύμα σε κάθε σημείο $\mathbf{r}$ δίνεται από το άθροισμα του σημειακού και του επαγόμενου ρεύματος, όπως είδαμε στην (1.11).

Ας συμβολίσουμε στη συνέχεια το ηλεκτρικό δυναμικό στον εσωτερικό χώρο V_c που αντιπροσωπεύει τον εγκεφαλικό ιστό με u_c , ενώ στο χώρο που αναπαριστά το υγρό V_f αντίστοιχα με u_f . Το πρόβλημα αυτό φαίνεται να είναι μια υποπερίπτωση του στρωματοποιημένου αγωγού των τριών φλοιών. Πρέπει όμως να επισημάνουμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι αληθές, αφού η πηγή δεν υπάρχει στο εσωτερικό χωρίο, αλλά στον εγκεφαλικό ιστό. Επομένως η εξίσωση Poisson ισχύει για την περιοχή του εγκεφαλικού ιστού V_c , όπου το κύριο ρεύμα είναι μη μηδενικό και είναι αντίστοιχη με την (1.27), με αγωγιμότητα αυτήν που υπάρχει στην εν λόγω περιοχή σ_c . Αντίθετα στο εσωτερικό, στην περιοχή του υγρού V_f , λόγω απουσίας πηγών το ηλεκτρικό δυναμικό u_f ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Επιπλέον η περιοχή του υγρού V_f εντοπίζεται είτε ομόκεντρα (Κεφάλαιο 2), είτε έγκκεντρα (Κεφάλαιο 5) σε σχέση με τον αγω-

γό. Συγκεκριμένα η επίλυση του προβλήματος ηλεκτροεγκεφαλογραφίας σε αυτό το πρότυπο απαιτεί την επίλυση των ακόλουθων προβλημάτων συνοριακών τιμών. Για την περιοχή του υγρού το u_f ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\Delta u_f(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_f \quad (1.81)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = u_c(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (1.82)$$

$$\sigma_f \frac{\partial u_f(\mathbf{r})}{\partial n} = \sigma_c \frac{\partial u_c(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (1.83)$$

για το χώρο V_c το u_c ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\Delta u_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_c \quad (1.84)$$

$$u_c(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c \quad (1.85)$$

$$\frac{\partial u_c(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_c. \quad (1.86)$$

ενώ για τον εξωτερικό μη αγώγιμο χώρο V , απουσία πηγών, απαιτείται πάλι η επίλυση της εξίσωσης Laplace

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (1.87)$$

καθώς και η ικανοποίηση της ακόλουθης ασυμπτωτικής συνθήκης στο άπειρο

$$u(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.88)$$

1.10 Ερμηνεία των ΗΕΓ και ΜΕΓ για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος

Στην παράγραφο 1.5 παρουσιάσαμε αναλυτικά τις βασικές αρχές των μεθόδων της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και Μαγνητοεγκεφαλογραφίας και ορίσαμε πλήρως τα ευθέα προβλήματα ΗΕΓ και ΜΕΓ καθώς και τα αντίστοιχα αντίστροφα προβλήματα, επισημαίνοντας την εγγενή δυσκολία των τελευταίων και τη μη μοναδικότητα της λύσης τους. Ας δούμε όμως κάποια στοιχεία που μας βοηθάνε στην ερμηνεία του αντιστρόφου προβλήματος και αιτιολογούν τη μη μοναδικότητα αυτού.

Σχήμα 1.7: Το μαγνητικό πεδίο ενός ρεύματος διπόλου.

Μια φυσική αιτία για τη μη μοναδικότητα του αντιστρόφου προβλήματος είναι ότι υπάρχουν διευθύνσεις της ροπής στο χώρο, για τις οποίες το μαγνητικό πεδίο που παράγει εξωτερικά του κρανίου είναι μηδενικό και επομένως δεν μπορεί να καταγραφεί. Αυτές είναι οι λεγόμενες μαγνητικά σιωπηλές πηγές. Αν για παράδειγμα, η προτυποποίηση του εγκεφάλου γίνει από έναν σφαιρικό, ομογενή αγωγό, τότε μόνον τα ρεύματα που έχουν μη μηδενική εφαπτομενική του αγωγού συνιστώσα παράγουν μη μηδενικό μαγνητικό πεδίο, ενώ οι ακτινικές είναι μαγνητικά σιωπηλές πηγές [19, 52]. Στην παράγραφο 2.7 της παρούσας εργασίας θα δείξουμε ότι ακόμα και ένας σφαιρικός ανομοιογενής αγωγός έχει ακτινικές μαγνητικά σιωπηλές πηγές. Η διέργηση ενός μικρού τμήματος του φλοιού από ένα ερέθισμα συνδέεται με μια στοιχειώδη πηγή ρεύματος - που όπως είδαμε έχει προκληθεί από τη μεταβολή των χημικών συγκεντρώσεων στην κυτταρική μεμβράνη. Ταυτόχρονα χωρικό ρεύμα δημιουργείται στο περιβάλλον μέσο και συμπληρώνει το κύκλωμα ροής των ιόντων με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχει συσσώρευση φορτίου πουθενά. Το μαγνητικό πεδίο γεννιέται από τη συνεισφορά των δύο αυτών ρευμάτων. Στο Σχήμα 1.7α βλέπουμε σχηματικά το μαγνητικό πεδίο που προκαλείται από το ηλεκτρικό δίπολο [33]. Το μεγάλο τόξο, που βρίσκεται κάθετα στο κέντρο του σχήματος, απεικονίζει το ηλεκτρικό δίπολο σε ομογενές αγωγίμο μέσο. Οι διακεκομμένες καμπύλες απεικονίζουν τα δημιουργούμενα χωρικά ρεύματα, ενώ οι συνεχείς γραμμές κάθετες στο δίπολο, αντιπροσωπεύουν τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ που παράγεται από το

στοιχειώδες ρεύμα. Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.9, εάν η πρωτογενής πηγή και η κατανομή της αγωγιμότητας του περιβάλλοντος είναι γνωστές, το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο που προκύπτει, μπορούν να υπολογιστούν από τις εξισώσεις του Maxwell. Από τη γραμμικότητα των εξισώσεων Maxwell έπεται πως εάν έχουμε τη λύση για ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό δίπολο, τα πεδία που παράγονται από κατανομές διπόλων μπορούν να υπολογιστούν με υπέρθεση.

Για μια μεμονωμένη πηγή ηλεκτρικού διπόλου, το διάγραμμα του ακτινικού μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}_r$, έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο. Το δίπολο εντοπίζεται στη μέση της γραμμής που συνδέει τα δυο άκρα του πεδίου σε ορθή γωνία ως προς αυτήν (βλ. Σχήμα 1.7β). Το μέγεθος, η διεύθυνση και η θέση της πηγής μπορούν να προσδιοριστούν σαφώς από το διάγραμμα με την προϋπόθεση ότι οι πηγές των ρευμάτων περιορίζονται σε μικρή περιοχή του εγκεφάλου. Στην πράξη η καλύτερη λύση βρίσκεται προσαρμόζοντας το θεωρητικό πρότυπο του πεδίου και το πρότυπο από τις μετρήσεις, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής είναι το καλούμενο ισοδύναμο ηλεκτρικό ρεύμα διπόλου.

Στο Σχήμα 1.8, παρατηρούμε πως οι ΜΕΓ και ΗΕΓ κατανομές πεδίου είναι μεταξύ τους ορθο-

Σχήμα 1.8: Σχηματική απεικόνιση εξιδανικευμένων προτύπων για το μαγνητικό πεδίο και το ηλεκτρικό δυναμικό. Το κεφάλι έχει προσεγγισθεί με μια σφαίρα που διαχωρίζεται σε τέσσερα τμήματα, τον εγκεφαλικό ιστό, το εγκεφαλονωτιαίο υγρό, τα κρανιακό οστό και το δέρμα.

γώνιες. Αυτή η παρατήρηση όμως δεν αποτελεί το μοναδικό λόγο για τον οποίο η συνεισφορά

των δύο αυτών μεθόδων στις κλινικές εφαρμογές πρέπει να αντιμετωπιστεί συμπληρωματικά και όχι ανταγωνιστικά [33]. Αφού τόσο τα ηλεκτρικά όσο και τα μαγνητικά σήματα δημιουργούνται από την ίδια νευρωνική δραστηριότητα, πρέπει να μελετάμε παράλληλα τα διαθέσιμα δεδομένα από το ΜΕΓ και τις σχετικές καταγραφές του ΗΕΓ που αφορούν την ίδια εγκεφαλικά λειτουργία. Συγκεκριμένα το ΗΕΓ δίνει καλύτερα αποτελέσματα για πηγές κοντά στην επιφάνεια του κρανίου, αφού παρέχει μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα, ενώ οι καταγραφές του ΜΕΓ προέρχονται κυρίως από πηγές που ανήκουν στον μακροσκοπικά ομογενή ενδοκρανιακό χώρο. Αυτό συμβαίνει γιατί τα ηλεκτρικά δυναμικά ως συναρτήσεις της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του μέσου, επηρεάζονται από την ανομοιογένεια που παρουσιάζουν οι στοιβάδες διαφορετικής αγωγιμότητας στο εσωτερικό του κρανίου. Έτσι οι μετρήσεις των ηλεκτρικών δυναμικών στην επιφάνεια του κρανίου συνεπάγονται τον ακριβή προσδιορισμό κυρίως επιφανειακών ρευμάτων. Από τη άλλη πλευρά, ακριβής προσδιορισμός για το ΜΕΓ επιτυγχάνεται ακόμη και όταν η πηγή του πεδίου βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος στο εσωτερικό του εγκεφάλου. Ο λόγος για αυτό είναι ότι το πρόβλημα που υπάρχει στο ΗΕΓ, δεν υφίσταται στα αποτελέσματα του ΜΕΓ, αφού η συνεισφορά των επιφανειακών ρευμάτων στις στοιβάδες αυτές είναι πολύ μικρή.

Το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο ολοκληρώνεται, πραγματοποιώντας μια ιστορική αναδρομή σε εργασίες που έχουν γίνει ως τώρα και αφορούν στο παρόν πρόβλημα.

1.11 Ιστορική αναδρομή

Από πολύ νωρίς ο άνθρωπος επιχείρησε να κατανοήσει τη δομή και τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου. Ήδη από το 280 π.Χ στο Μουσείο της Αλεξάνδρειας έγιναν πρώιμες ανατομικές μελέτες από τον Ηρόφιλο και τον διάδοχό του Ερασίστρατο [2]. Ο πρώτος διέκρινε τα νεύρα σε αισθητήρια - εκείνα που δέχονται αισθητήριες εντυπώσεις - και κινητικά - εκείνα που προκαλούν κίνηση. Ο Ερασίστρατος έκανε διάκριση ανάμεσα στον κύριως εγκέφαλο - το γνωστό σήμερα ως εγκεφαλικό φλοιό και την παρεγκεφαλίδα. Του έκανε εντύπωση το γεγονός ότι οι πτυχώσεις του ανθρώπινου εγκεφάλου είναι περισσότερες από εκείνες των ζώων και υποστήριξε ότι αυτό έχει σχέση με την ανώτερη ανθρώπινη νοημοσύνη. Αυτό το υποσχόμενο ξεκίνημα ξαφνικά σταμάτησε. Η ιδεολογία του Αιγυπτιακού πολιτισμού σχετικά με το άθικτο του σώματος, που επιβάλλοταν για τη μεταθανάτια ζωή, και η κοινή γνώμη ανάγκασε τους υπεύθυνους του Μουσείου να διακόψουν τις ανατομικές έρευνες. Το αποτέλεσμα ήταν ότι η μελέτη του ανθρώπινου σώματος σταμάτησε για περισσότερους από δεκαπέντε αιώνες.

Το 1820 ο γερμανός γιατρός Frans Joseph Gul εξέφρασε την έως σήμερα σωστή θεωρία, ότι η χημική ουσία που υπάρχει στην επιφάνεια του εγκεφάλου και στο εσωτερικό του νωτιαίου μυελού είναι το ενεργό και ουσιώδες τμήμα του νευρικού συστήματος, ενώ η λευκή ουσία,

που βρίσκεται πιο βαθιά στον εγκέφαλο και στην επιφάνεια του νωτιαίου μυελού, αποτελεί συνδετικό υλικό. Λίγα χρόνια αργότερα, το 1888, ο Valdayer Harts διατύπωσε την πρώτη νευρωνική θεωρία, σύμφωνα με την οποία το νευρικό σύστημα αποτελείται από νευρικά κύτταρα, τα οποία ο ίδιος ονόμασε νευρώνες.

Σαν φυσικό επακόλουθο που πήγαζε από τη γνώση για τη δομή και τη λειτουργία του εγκεφάλου, ο Γερμανός φυσικός και ψυχίατρος Hans Berger γύρω στο 1920 επινόησε ένα σύστημα ηλεκτροδίων, το οποίο, όταν τοποθετηθεί πάνω στο κρανίο και συνδεθεί με έναν παλμογράφο, καταγράφει την ρυθμική διακύμανση του ηλεκτρικού δυναμικού του εγκεφάλου, των γνωστών πλέον εγκεφαλικών κυμάτων. Το 1929 δημοσιεύοντας τα αποτελέσματα των ερευνών του, μίλησε για μια νέα τεχνική, την ηλεκτροεγκεφαλογραφία, που επιτρέπει τη διάγνωση σοβαρών εγκεφαλικών διαταραχών.

Από την άλλη το όργανο για την καταγραφή του ασθενούς μαγνητικού πεδίου του εγκεφάλου αποτελεί ένα ιδιαίτερα πρόσφατο επίτευγμα [62]. Το πρώτο βήμα για την κατασκευή του αποτέλεσε το αξίωμα της λεγόμενης ένωσης από τον B. D. Josephson το 1962, βασισμένοι στο οποίο το επόμενο έτος οι J. Rowell και P. Anderson ανακατασκεύασαν την πρώτη ένωση Josephson. Το DC SQUID αναπτύχθηκε το 1964 από τους R. Jaklevic, J. Lambe, A. Silver και J. Mercereau του εργαστηρίου Ford Research, ενώ το RF SQUID το 1965 από τους J. E. Zimmerman και A. Silver επίσης στο ίδιο εργαστήριο.

Η πρώτη θεωρητική προσέγγιση του φαινομένου του Βιοηλεκτρομαγνητισμού έγινε από τον Helmholtz [34] το 1853 με μια πολύ σημαντική εργασία πάνω στην αρχή της αμοιβαιότητας. Βασισμένη στα αποτελέσματα του Helmholtz, ο Lorente de No (1947) [44], δημοσίευσε εργασία που δίνει μία έκφραση για το δυναμικό στο εξωτερικό κυλινδρικού άξονα.

Μια σημαντική εργασία σχετικά με το ευθύ πρόβλημα Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας είναι αυτή του του J.C. de Munck το 1988 [49], στην οποία υπολογίζεται αναλυτικά η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού στην περίπτωση της στρωματοποιημένης ανομοιογένειας ως προς την αγωγιμότητα, ομόκεντρων σφαιρών και ομοεστιακών σφαιροειδών, όταν η θεωρούμενη πηγή στον πυρήνα είναι μονόπολο. Τα αποτελέσματα αυτά παρέχουν σε μορφή σειρών σφαιρικών και σφαιροειδών αρμονικών αντίστοιχα, το δυναμικό που γεννάται από διπολική πηγή στο εσωτερικό του αγωγού. Ο Wang το 1988, μελέτησε την περίπτωση του σφαιροειδούς αγωγού στο σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων [60], ενώ με την ίδια γεωμετρία αλλά στα πλαίσια του κλινικού και υπολογιστικού ελέγχου ασχολήθηκαν οι Ioannides, Fieseler και Nowak, το 1993, 1996, 1998 [21, 22, 23]. Το πολυπολικό ανάπτυγμα του ηλεκτρικού δυναμικού και του μαγνητικού πεδίου για την την περίπτωση του ελλειψοειδούς αγωγού αλλά σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, μελετήθηκε από τη Φ. Καριώτου [41] το 2003.

Αποτελέσματα σχετικά με το μαγνητικό πεδίο υπάρχουν από το 1958, όταν ο Geselowitz δημοσίευσε εργασίες [26, 27, 28] στις οποίες γενίκευσε υπάρχοντα αποτελέσματα και έδωσε σε

ολοκληρωτική μορφή εκφράσεις για το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό κατά τμήματα μη ομογενούς και ισότροπου αγωγού τα οποία παράγονται από ισοδύναμη κατανομή ρεύματος διπόλων.

Οι εργασίες του Geselowitz υπήρξαν σημαντικές και θεμελιώδεις στην περιοχή αυτή. Οι Cuffin και Cohen [8] παρήγαγαν αποτελέσματα για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό σφαιρικού, σφαιροειδούς και ημιάπειρου αγωγού. Την πολυπλοκότητα και την έλλειψη συμπαγότητας στα, κατά συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, πλήρη αποτελέσματα για τη σφαίρα, βελτίωσαν ποιοτικά οι Ilmoniemi, Hamalainen και Knuutila το 1984 [36]. Λίγο αργότερα, το 1987, δημοσιεύτηκε η εξαιρετικής σημασίας εργασία του J. Sarvas [52] στην οποία υπολογίζεται σε κλειστή συμπαγή και πλήρη μορφή το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό σφαιρικού ομογενούς αγωγού, που παράγεται από σημειακό ηλεκτρικό διπολικό ρεύμα στο εσωτερικό του. Στο αποτέλεσμα αυτό βασίστηκαν πολλές κλινικές και θεωρητικές εφαρμογές, και σ' αυτό θα αναφερθούμε αναλυτικά στην παράγραφο **2.7** της παρούσας εργασίας.

Σχετικά με το ευθύ πρόβλημα MEG υπάρχει η εργασία των Nolte, Fieseler και Curio (2001) [51] που χρησιμοποιεί για αναφορά την εργασία του Sarvas [52] και στην οποία περιέχεται η προσέγγιση των ενός αγωγού ρεαλιστικού σχήματος, μέσω μικρής διαταραχής του σφαιρικού προτύπου. Συγκεκριμένα στην εργασία αυτή παράγεται το μαγνητικό πεδίο του διαταραγμένου προτύπου ως άθροισμα του αντίστοιχου πεδίου για την περίπτωση του σφαιρικού αγωγού, συν μια διόρθωση εξαρτώμενη από τη διαταραχή, με την προϋπόθεση ότι η διαταραχή είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα της σφαίρας που χρησιμοποιείται στο αντίστοιχο πρότυπο.

Το 2001 επιλύθηκε αναλυτικά το ευθύ πρόβλημα του Βιοηλεκτρομαγνητισμού για πρώτη φορά στην ελλειψοειδή γεωμετρία από τη Φ. Καριώτου [39]. Στη διατριβή αυτή παρήχθησαν οι πρώτοι όροι προσέγγισης του ηλεκτρικού δυναμικού στο εσωτερικό και στο εξωτερικό ομογενούς αγωγού σταθερής αγωγιμότητας, καθώς και ο τετραπολικός όρος του πολυπολικού αναπτύγματος του εξωτερικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής, κατά τρόπον ώστε να προβάλλεται ο ανισότροπος χαρακτήρας της ελλειψοειδούς γεωμετρίας, αλλά και η δομή της εξάρτησης των πεδίων από τη φυσική και τη γεωμετρία.

Πρόσφατες πολύ σημαντικές εργασίες έχουν ανακοινωθεί σχετικά με το αντίστροφο πρόβλημα MEG, όπως αυτή των Fokas, Kurylev και Marinakis [25]. Συγκεκριμένα στην εργασία αυτή, οι συγγραφείς βασιζόμενοι στην αντιστροφή της εξίσωσης του Geselowitz σε αγωγό σφαιρικής γεωμετρίας, προσδιορίζουν το μέρος του ρεύματος, που μπορεί να ανακατασκευαστεί από μετρήσεις εξωτερικά του μαγνητικού πεδίου και αποδεικνύουν με βάση την ελαχιστοποίηση της ενέργειας, ότι η ανακατασκευή αυτή του ρεύματος είναι μοναδική. Βελτίωση της γεωμετρίας πραγματοποιήσαν το 2005 οι Δάσιος, Φωκάς, Καριώτου [14], οι οποίοι έδειξαν ότι μόνο ένα μικρό μέρος του κυρίου ρεύματος μπορεί να ανακατασκευασθεί από μετρήσεις ανάλογες και στην περίπτωση αγωγού αστεροειδούς σχήματος.

Βέβαια οι έρευνες για την επίλυση των ευθέων προβλημάτων για ΗΕΓ και ΜΕΓ δεν περιορίζονται μόνο στην αναλυτική επεξεργασία αυτών. Η αύξηση της υπολογιστικής ικανότητας των σύγχρονων υπολογιστών έχει επιτρέψει τη χρήση ρεαλιστικών γεωμετρικών προτύπων τα οποία πλησιάζουν περισσότερο το σχήμα αυτό καθ' εαυτό του ανθρώπινου κεφαλίου. Με την εφαρμογή μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων (FEM) ή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων (BEM), οι διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ των διαφόρων στρωμάτων παύουν να είναι σφαιρικές ή ελλειψοειδείς και αντικαθίστανται από ένα μεγάλο πλήθος διαδοχικών μικρών επιφανειών, ώστε τελικά να έχουμε μορφές πιο ρεαλιστικές. Αυτή η αντιμετώπιση όμως συνεπάγεται εξαιρετικό υπολογιστικό κόστος, δεδομένου ότι χάνεται η δυνατότητα αναλυτικής μαθηματικής επίλυσης των εμφανιζόμενων ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων. Επιπλέον εμπεριέχουν τον κίνδυνο εμφάνισης ανεξέλεγκτων σφαλμάτων.

Συνήθως οι αριθμητικές προσεγγίσεις παρέχουν ως λύσεις διαγράμματα κατανομών του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του κρανίου και του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του εγκεφάλου. Στο έκτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας υπάρχουν διαγράμματα κατανομών του ηλεκτρικού πεδίου, που έχουν προκύψει όμως από γραφική επεξεργασία των αναλυτικών αποτελεσμάτων για τα χρησιμοποιούμενα πρότυπα αυτής της εργασίας. Σε μελλοντική σύγκριση τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσεγγίσεων μπορούν να συγκριθούν με αυτά του έκτου κεφαλαίου και να προβούμε σε συμπεράσματα σχετικά με τα χαρακτηριστικά των μεθόδων.

Κεφάλαιο 2

Ηλεκτροεγκεφαλογραφία σε σφαιρική γεωμετρία

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε αποτελέσματα που αφορούν στο σφαιρικό αγωγό για τον εγκέφαλο, υιοθετώντας ως πηγή ένα δίπολο στο εσωτερικό του για τα τρία πρότυπα που περιγράφονται διεξοδικά στην παράγραφο 1.9. Προβλήματα σχετικά με το εσωτερικό και το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για τον ομογενή σφαιρικό αγωγό έχουν διερευνηθεί στο παρελθόν από τους Sarvas, Καριώτου [39, 52]. Ο σκοπός της μελέτης των προβλημάτων αυτών εδώ αφορά στη συσχέτιση των ήδη γνωστών αποτελεσμάτων για τα ηλεκτρικά δυναμικά με τη μορφή σειράς [39] με τις αντίστοιχες κλειστές μορφές αυτών.

Συγκεκριμένα στην παράγραφο 2.2 παρουσιάζεται το ευθύ πρόβλημα HEF για το πρότυπο του ομογενούς σφαιρικού αγωγού και στις υποπαράγραφους 2.2.1 και 2.2.2 που ακολουθούν εξάγεται το εσωτερικό και το εξωτερικό αντίστοιχα ηλεκτρικό δυναμικό σε ανάπτυγμα σειρών, μέσω της επίλυσης του κατάλληλου προβλήματος συνοριακών τιμών.

Στην παράγραφο 2.3, βασιζόμενοι στα αποτελέσματα της 2.2 για το εσωτερικό και το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, αθροίζονται οι σειρές και προκύπτει με τον τρόπο αυτό η κλειστή μορφή των λύσεων για τα ηλεκτρικά δυναμικά.

Στην παράγραφο 2.4 επικυρώνεται το αποτέλεσμα για την κλειστή μορφή του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού, το οποίο εδώ παράγεται με τη μέθοδο των ειδώλων, μέσω της οποίας φανερώνεται η φυσική σημασία της λύσης του προβλήματος. Αποδεικνύεται ότι οι δυο εκφράσεις που προκύπτουν από την άθροιση των σειρών και τη μέθοδο των ειδώλων είναι ισοδύναμες.

Συνεχίζουμε στην παράγραφο 2.5 με το πρότυπο του σφαιρικού πυρήνα που περικλείεται από

τους τρεις φλοιούς. Η επίλυση του ευθέος προβλήματος HEΓ για το πρότυπο αυτό οδηγεί στον προσδιορισμό του ηλεκτρικού δυναμικού τόσο στο εξωτερικό του εγκεφάλου, όσο στον πυρήνα καθώς και στο εσωτερικό του κάθε φλοιού. Οι λύσεις δίνονται αναλυτικά σε αναπτύγματα σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων. Στην υποπαράγραφο **2.5.2** γίνεται αναγωγή του σφαιρικού προτύπου των τριών φλοιών στο αντίστοιχο ομογενές, ενώ ειδική μνεία γίνεται στην **2.5.3** για την αναγωγή του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού σε πρότυπα αγωγών μικρότερου αριθμού φλοιών, μιας και το εξωτερικό δυναμικό πεδίο είναι αυτό που καταγράφεται από το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα.

Στην παράγραφο **2.6** παρουσιάζεται και επιλύεται αναλυτικά σε όρους μιγαδικών σφαιρικών αρμονικών το πρόβλημα της HEΓ για το σφαιρικό αγωγό στο οποίο στο εσωτερικό υπάρχει υγρό, για το τρίτο δηλαδή πρότυπο της διατριβής.

Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παράγραφο **2.7** στην οποία αναφέρονται τα αποτελέσματα του Sarvas σχετικά με τη μηδενική ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου στην περίπτωση οποιουδήποτε σφαιρικού αγωγού [52] και αποδεικνύεται το ίδιο αποτέλεσμα για το πρότυπο των τριών σφαιρικών φλοιών.

2.2 Ευθύ πρόβλημα HEΓ για την ομογενή σφαίρα

Θεωρούμε για αγωγό μια μη αγώγιμη σφαίρα, $\sigma \neq 0$, ακτίνας α και επιφάνειας S , που διαχωρίζει τον εσωτερικό αγώγιμο χώρο V^- από τον εξωτερικό μη αγώγιμο χώρο V^+ , $\sigma = 0$. Η επιφάνεια S της σφαίρας ορίζεται από την εξίσωση

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha^2 \quad (2.1)$$

Στο εσωτερικό της σφαίρας, βλ. Σχήμα 2.1, η ύπαρξη ηλεκτρικής δραστηριότητας οφείλεται στην παρουσία πηγής και συγκεκριμένα ενός ηλεκτρικού διπόλου ροπής $\mathbf{Q}$ στη θέση $\mathbf{r}_0$. Συνεπώς το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό u^- για την σφαίρα επιλύει το πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad 0 \leq r < \alpha \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.3)$$

Στο εξωτερικό της σφαίρας, απουσία πηγών, το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό u^+ επιλύει το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

Σχήμα 2.1: Ο ομογενής σφαιρικός αγωγός.

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad r > \alpha \quad (2.4)$$

$$u^+(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}), \quad r = \alpha \quad (2.5)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Να επισημανθεί στο σημείο αυτό ότι ενώ η επίλυση του εσωτερικού προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1) - (2.2) για το u^- είναι αυτόνομη, η επίλυση του εξωτερικού προβλήματος συνοριακών τιμών (2.4) - (2.6) για το u^+ , προαπαιτεί τη γνώση του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του αγωγού, δηλαδή τη λύση του εσωτερικού προβλήματος.

Για να επιλύσουμε τα προβλήματα συνοριακών τιμών στη σφαίρα θα χρησιμοποιήσουμε τις μιγαδικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^{|m|} e^{im\phi} \quad (2.7)$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = -n, \dots, n$, οι οποίες αποτελούν πλήρες ορθογώνιο σύνολο συναρτήσεων σε κάθε σφαιρική επιφάνεια. Η ορθογωνιότητα των μιγαδικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών υπακούει στη σχέση

$$\oint_{S^2} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \quad (2.8)$$

ενώ οι χωρικές εσωτερικές και εξωτερικές σφαιρικές αρμονικές δίνονται αντίστοιχα από

$$r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.9)$$

και

$$r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.10)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = -n, \dots, n$. Κάθε αρμονική συνάρτηση γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των εσωτερικών και εξωτερικών σφαιρικών αρμονικών.

2.2.1 Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό με ανάπτυγμα σειρών

Ο προσδιορισμός του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού απαιτεί την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.1) - (2.2). Η λύση του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού u^- - ως γενική λύση της εξίσωσης Poisson (2.2) - είναι το άθροισμα μιας εσωτερικής αρμονικής συνάρτησης $W(\mathbf{r})$ και μιας ειδικής λύσης $S(\mathbf{r})$, που οφείλεται στη μη ομογένεια της εξίσωσης, δηλαδή

$$u^-(\mathbf{r}) = W(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

Όπως αναφέραμε πρωτύτερα η συνάρτηση $W(\mathbf{r})$ ως αρμονική οφείλει γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός εσωτερικών και εξωτερικών σφαιρικών αρμονικών. Ο εσωτερικός όμως χαρακτήρας της $W(\mathbf{r})$ αναιρεί τη συνεισφορά των εξωτερικών σφαιρικών αρμονικών. Συνεπώς το u^- θα είναι της μορφής

$$u^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.12)$$

Όσον αφορά την ειδική λύση της (2.2) η δράση του τελεστή Δ επί της συνάρτησης

$$S(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.13)$$

επιβάλλει τη χρήση της βασικής ιδιότητας της συνάρτησης Green του τελεστή Laplace στον R^3 , κατά την οποία [10]

$$\Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2.14)$$

Συνεπώς

$$\Delta S(\mathbf{r}) = \Delta \left(-\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\sigma} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] \quad (2.15)$$

Δηλαδή η (2.13) εξασφαλίζει την ικανοποίηση της εξίσωσης Poisson (2.2). Λαμβάνοντας υπόψη την

$$-\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.16)$$

ξαναγράφουμε την ειδική λύση (2.13) ώστε ο τελεστής κλίσης να επιδρά στο σημείο της πηγής $\mathbf{r}_0$

$$S(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.17)$$

Η χρήση της (2.16) επιτρέπει να διατηρήσουμε αναλλοίωτη τη μορφή των σφαιρικών αρμονικών, διατηρώντας τη δυνατότητα εκμετάλλευσης της ορθογωνιότητας. Προκειμένου να εκφράσουμε το $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ συναρτήσει σφαιρικών αρμονικών, θα χρειαστούμε το ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσης του Laplace σε σφαιρικές αρμονικές

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{<}^n}{r_{>}^{n+1}} P_n(\cos \gamma) = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_{<}^n}{r_{>}^{n+1}} Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{m*}(\theta', \phi') \quad (2.18)$$

όπου $r_{<} = \min|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}'|$, $r_{>} = \max|\mathbf{r}|, |\mathbf{r}'|$ και $\cos \gamma = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$. Όπως βλέπουμε από τη (2.18), η μορφή του $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ εξαρτάται από τη σχετική θέση του σημείου παρατήρησης $\mathbf{r}$ ως προς τη θέση της πηγής $\mathbf{r}'$. Συγκεκριμένα, το ανάπτυγμα διαφέρει για $r > r_0$ και για $0 < r < r_0$, γεγονός που συνεπάγεται και τη διαφοροποίηση της ειδικής λύσης σε κάθεμιά από τις δύο περιοχές. Ειδικά η (2.18) γράφεται για $r > r_0$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.19)$$

ενώ για $0 < r < r_0$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.20)$$

Η ειδική λύση (2.17) για τον σφαιρικό φλοιό $r > r_0$ γίνεται λόγω της (2.19)

$$S(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.21)$$

ενώ για τη σφαίρα της $0 < r < r_0$, λόγω της (2.20)

$$S_{sp}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.22)$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό στις δυο περιοχές εσωτερικά της σφαίρας δίνεται από τη (2.11) όπως αυτή διαμορφώνεται από τις (2.12), (2.21) για $r > r_0$ - δυναμικό u^- του σφαιρικού φλοιού - ενώ από τις (2.12), (2.22) για $0 < r < r_0$ - δυναμικό u_{sp} της σφαίρας. Συγκεκριμένα το ηλεκτρικό δυναμικό στην περιοχή του φλοιού u^- για $r > r_0$ δίνεται από την

$$u^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0), \quad (2.23)$$

ενώ στην εσωτερική της πηγής σφαιρική περιοχή $0 < r < r_0$ από την

$$u_{sp}^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.24)$$

Προκειμένου να επιλύσουμε το εσωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών (2.2), (2.3), να προσδιορίσουμε δηλαδή τις άγνωστες σταθερές g_n^m , αρκεί να παραγωγίσουμε την (2.23) ως προς r και να απαιτήσουμε να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη (2.3). Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι η επιφάνεια στην οποία πρέπει να ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη, καθορίζει ποια από τις εκφράσεις (2.23), (2.24) του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Στην περίπτωση αυτήν του ομογενούς αγωγού το u^- δίνει την τιμή για την επιφάνεια της σφαίρας, αφού ισχύει για $\alpha \geq r \geq r_0$. Οι τιμές όμως των σταθερών g_n^m που θα προκύψουν από την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (2.3) θα ισχύουν και για την (2.24). Η μορφή (2.24) δεν αξιοποιείται για την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (2.2) - (2.3), είναι απαραίτητη όμως για την πληρότητα του προβλήματος, αφού δίνει τις τιμές του δυναμικού για την περιοχή $0 < r < r_0$. Θα επανέλθουμε στην παρατήρηση αυτή και θα αναγνωρίσουμε τη μεγάλη σημασία της στην παράγραφο **2.7**, όπου μελετάμε το πρότυπο του ανομοιογενούς αγωγού με υγρό στο εσωτερικό του, όπου οι εκφράσεις του δυναμικού για

$r > r_0$ ή $r < r_0$ είναι μείζονος σημασίας για την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών. Συνεχίζουμε τη διαδικασία επίλυσης, παραγωγίζοντας ως προς r την (2.23), υπολογίζοντας το αποτέλεσμα για την τιμή $r = \alpha$ και ικανοποιώντας τέλος τη συνοριακή συνθήκη (2.3). Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε στις παρακάτω τιμές των σταθερών g_n^m της (2.23). Αντικαθιστώντας την (2.23)

$$g_n^m = \frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{1}{\alpha^{2n+1}} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \quad (2.25)$$

για $n \geq 1$ και $m = -n, \dots, n$. Αντικαθιστώντας την (2.25) στην (2.24) παίρνουμε την παραπάνω έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του σφαιρικού αγωγού, δηλαδή για $0 \leq r < r_0$

$$u_{sp}^-(\mathbf{r}) = g_0^0 + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r^n}{2n+1} \left[\frac{n+1}{n} \frac{r_0^n}{\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{r_0^{n+1}} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.26)$$

Στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι εξαιτίας του ότι η μηδενικής τάξης σφαιρική αρμονική $Y_0^0(\hat{\mathbf{r}})$ είναι σταθερή συνάρτηση η σχέση (2.25) ορίζει τις σταθερές για $n \geq 1$. Επιπλέον, αφού το (2.2), (2.3) είναι ένα πρόβλημα Neumann, μπορούμε να προσθέσουμε μια αυθαίρετη σταθερά στην λύση (2.26), η οποία αντιστοιχεί στον μηδενικής τάξης όρο. Από φυσικής άποψης αυτή η αυθαίρεσία συνδέεται με το γεγονός ότι το u_{sp}^- είναι μια συνάρτηση δυναμικού που ορίζεται από την (1.26), η οποία είναι μοναδικά ορισμένη. Ο τελεστής κλίσης αναιρεί την αυθαίρεσία του u_{sp}^- . Το ίδιο ισχύει και για την εξίσωση του ηλεκτρικού δυναμικού του φλοιού u^- που ακολουθεί.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις σταθερές g_n^m στην (2.23) για το ηλεκτρικό δυναμικό στην περιοχή του σφαιρικού φλοιού $r_0 < r < \alpha$

$$u^-(\mathbf{r}) = g_0^0 + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r_0^n}{2n+1} \left[\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.27)$$

Τελικά οι (2.26) και (2.27) παρέχουν το πλήρες ανάπτυγμα του ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές για τον ομογενή σφαιρικό αγωγό, στο εσωτερικό αυτού $0 \leq r < r_0$ και στο σφαιρικό φλοιό $r_0 < r < \alpha$ αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι η (2.26) ικανοποιεί τη (2.3).

2.2.2 Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό με ανάπτυγμα σειρών

Συνεχίζουμε με την επίλυση του εξωτερικού προβλήματος (2.4) - (2.6). Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό έχει ανάπτυγμα σε εξωτερικές σφαιρικές αρμονικές για να ικανοποιείται η ασυμπτωτική συνθήκη (2.6), δηλαδή

$$u^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^m r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.28)$$

Για να ικανοποιήσουμε την εναπομείνουσα συνοριακή συνθήκη (2.5) υπολογίζουμε την τιμή του u^+ στο α , τιμή που παίρνουμε από την (2.27) για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στο σύνορο. Η ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (2.5) οδηγεί στις τιμές για τις σταθερές h_n^m

$$h_n^m = \frac{1}{n\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \quad (2.29)$$

για $n \geq 1$ και $m = -n, \dots, n$. και αν επιπλέον λάβουμε υπόψη την αυθαίρετη σταθερά g_0^0 της (2.27) θα έχουμε

$$h_0^0 = \alpha g_0^0 \quad (2.30)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις (2.29), (2.30) στην (2.28) παίρνουμε την έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του σφαιρικού ομογενούς αγωγού $r > \alpha$

$$u^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \frac{1}{n} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.31)$$

Το αποτέλεσμα που καταλήγουμε στη (2.31) μας επιτρέπει να διαβάσουμε το σύνορο α του αγωγού μόνο στον μονοπολικό όρο τάξης $\frac{1}{r}$ της αυθαίρεσίας και σε κανέναν άλλο από τους υπόλοιπους του αναπτύγματος.

2.3 Άθροιση Σειρών

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε πως τα ήδη γνωστά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας για το εσωτερικό και εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό στην ομογενή σφαίρα [39] εκφρασμένα με όρους που παρουσιάζουν συμβατότητα με αυτούς της παρούσας εργασίας (παράγραφος **2.2**), αθροίζονται για να οδηγηθούμε στην κλειστή μορφή αυτών.

2.3.1 Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό

Το πλήρες ανάπτυγμα του ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές για τον ομογενή σφαιρικό αγωγό έχει παραχθεί στην υποπαράγραφο **2.2.1** όπως είδαμε και δίνεται από τις

σχέσεις (2.26) και (2.27). Από την τελευταία για $r = \alpha$ παίρνουμε τα δεδομένα Dirichlet στην επιφάνεια S , δηλαδή

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} \frac{1}{n} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.32)$$

Παρατηρούμε ότι στη (2.32) έχουμε θεωρήσει μηδενική τιμή για την αυθαίρετη σταθερά g_0^0 , χωρίς βλάβη της γενικότητας, όπως εξηγήσαμε στην υποπαράγραφο **2.2.1**.

Το προσθετικό θεώρημα για τις μιγαδικές σφαιρικές αρμονικές δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί

$$P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.33)$$

Η (2.32) με τη βοήθεια του προσθετικού θεωρήματος (2.33) γράφεται

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.34)$$

Η χρήση του προσθετικού θεωρήματος οδήγησε το ανάπτυγμα σε μια μορφή (2.34) όπου υπάρχει μόνο η άθροιση από το n . Επεξεργαζόμενοι επιπλέον τη (2.34) έχουμε

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.35)$$

Η πρώτη από τις δυο σειρές στην (2.35) είναι άμεσα αθροίσιμη, εξαιτίας του θεμελιώδους αναπτύγματος

$$\frac{1}{|\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{\alpha^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0). \quad (2.36)$$

και η (2.35) γράφεται

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{2}{|\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{\alpha}\right)^n \frac{1}{n} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right]. \quad (2.37)$$

Στη συνέχεια θα αθροίσουμε την εναπομείνασα σειρά στη (2.37) σύμφωνα με την σχέση (2.38) που ακολουθεί και αποδεικνύεται ως Πρόταση 1 στο Παράρτημα Α.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} P_n(\cos \theta) = -\ln \left[\frac{1 - \rho \cos \theta + \sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}}{2} \right] \quad (2.38)$$

όπου $\cos \theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0$ και $\rho = \frac{r_0}{\alpha} < 1$. Αντικαθιστώντας την (2.38) στην (2.37), προκύπτει μια κλειστή μορφή για τα δεδομένα Dirichlet

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{2}{|\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1 - \frac{r_0}{\alpha} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \sqrt{1 - 2\frac{r_0}{\alpha} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{r_0^2}{\alpha^2}}}{2} \right) \right]. \quad (2.39)$$

θα συνεχίσουμε την επεξεργασία της (2.39) με σκοπό να καταλήξουμε σε μια πιο κομψή μορφή. Ο αριθμητής στη συνάρτηση του λογαρίθμου στην (2.39) γράφεται

$$1 - \frac{r_0}{\alpha} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \sqrt{1 - 2\frac{r_0}{\alpha} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{r_0^2}{\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha^2} [\alpha |\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| + \alpha \hat{\mathbf{r}} \cdot (\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)] = \frac{F(\alpha \hat{\mathbf{r}})}{\alpha^2 |\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.40)$$

όπου

$$F(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| [r |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]. \quad (2.41)$$

Συνεπώς τα δεδομένα Dirichlet στην επιφάνεια της σφαίρας είναι

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{2}{|\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{F(\alpha \hat{\mathbf{r}})}{2\alpha^2 |\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] \quad (2.42)$$

ή ισοδύναμα

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{2}{|\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{|\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0| + \hat{\mathbf{r}} \cdot (\alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)}{2\alpha} \right]. \quad (2.43)$$

Επομένως η έκφραση (2.42) ή η ισοδύναμή της (2.43) παρέχει τα δεδομένα Dirichlet.

Συνεχίζουμε με σκοπό να εκφράσουμε σε κλειστή μορφή την έκφραση για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό. Ξαναγράφοντας την (2.27) με τη βοήθεια της (2.17) και του προσθετικού θεωρήματος (2.33), διατηρώντας έτσι τη συνεισφορά της ειδικής λύσης στην αρχική κλειστή της μορφή

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{r_0 r^n}{\alpha^{2n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right]. \quad (2.44)$$

Γράφουμε ισοδύναμα τη (2.44) σε τέτοια μορφή ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες ανάπτυγμα (2.36), καθώς και τη σχέση (2.38) σχετικά με την άθροιση σειρών. Πράγματι

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_0 r)^n}{(\alpha^2)^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0 r}{(\alpha^2)} \right)^n \frac{1}{n} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right]. \quad (2.45)$$

Ξαναγράφουμε την (2.45) αμελώντας τον όρο $\frac{1}{\alpha}$ που θα φύγει λόγω του τελεστή κλίσης και με τη βοήθεια του θεμελιώδους αναπτύγματος (2.18) για $r_< = |\mathbf{r}_0 r|$ και $r_> = |\alpha^2 \hat{\mathbf{r}}|$ και της (2.38) για $\rho = \frac{r_0 r}{\alpha^2}$, αφού $\frac{r_0 r}{\alpha^2} < 1$ η (2.45) γράφεται

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \alpha \frac{1}{|\alpha^2 \hat{\mathbf{r}} - r \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r r_0}{\alpha^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \sqrt{1 - 2 \frac{r r_0}{\alpha^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \left(\frac{r r_0}{\alpha^2} \right)^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\frac{\alpha}{r}}{|\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{2\alpha^2} (\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 + |\alpha^2 \hat{\mathbf{r}} - r \mathbf{r}_0|) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\frac{\alpha}{r}}{|\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r}{2\alpha^2} \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right) + \left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| \right) \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

ή αν θέσουμε

$$\mathbf{P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (2.47)$$

και

$$\mathbf{R} = \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (2.48)$$

όπου τα διανύσματα $\mathbf{P}, \mathbf{R}$ είναι αναλλοίωτα, ανεξάρτητα της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων σε αντίθεση με τα $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0$. Επομένως η (2.46) λόγω των (2.47), (2.48) γράφεται

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{P} + \frac{\alpha}{rR} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{2\alpha^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R} + rR) \right] \quad (2.49)$$

ή ισοδύναμα

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{P} + \frac{\alpha}{rR} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{rR}{2\alpha^2} (1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \right] \quad (2.50)$$

Τέλος, ξαναγράφουμε στηριζόμενοι στη μορφή της (2.50) τα δεδομένα Dirichlet στο σύνορο

$$u^-(\alpha \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{2}{P_\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{P_\alpha}{2\alpha} (1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_\alpha) \right], \quad (2.51)$$

όπου

$$\mathbf{P}_\alpha = \alpha \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0. \quad (2.52)$$

2.3.2 Εξωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό

Το πλήρες ανάπτυγμα του ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές για τον ομογενή σφαιρικό αγωγό που παρήχθηκε στην υποπαράγραφο 2.2.1 και δίνεται από τη (2.31). Η τελευταία λόγω του προσθετικού θεωρήματος (2.33) γράφεται

$$u^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (2.53)$$

Ακολουθώντας αντίστοιχη διαδικασία με αυτήν για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό της υποπαράγραφου 2.3.1 για $r < |\mathbf{r}_0|$, $r > |\mathbf{r}|$ και $\rho = \frac{r_0}{r} < 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) &= 2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) - \frac{1}{r} \right] + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^n} \frac{P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)}{n} \\ &= 2 \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{r} \ln \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_0}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \sqrt{1 - 2 \frac{r_0}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{r_0^2}{r^2}} \right) \\ &= \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{2}{r} - \frac{1}{r} \ln \frac{1}{2r} [\hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|] \\ &= \frac{2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{2}{r} - \frac{1}{r} \ln \frac{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)}{2r^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \end{aligned} \quad (2.54)$$

όπου η $F(\mathbf{r})$ δίνεται από τη (2.41). Αντικαθιστώντας τη (2.54) στην (2.53) και εκτελώντας την παραγωγή έχουμε

$$u^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{1}{r} \mathbf{Q} \cdot \frac{r \nabla_{\mathbf{r}_0} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{r |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)} \quad (2.55)$$

και εκφράζοντας τη (2.55) με τη βοήθεια της (2.47) καταλήγουμε στην

$$u^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{P} + \hat{\mathbf{r}} P}{F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)} \quad (2.56)$$

ή ισοδύναμα για λόγους περαιτέρω σύγκρισης

$$u^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{1}{rP} \mathbf{Q} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{P}}}{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}}} \quad (2.57)$$

ή επιπλέον ισοδύναμα

$$u^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \left[2 \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{1}{rP} \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{P}}}{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}}} \right], \quad r > \alpha \quad (2.58)$$

Τέλος να παρατηρήσουμε ότι για $g_0^0 = 0$ από την (2.51) και συγκρίνοντάς την με τη (2.58) στην επιφάνεια $r = \alpha$ αποδεικνύεται

$$u^+(\alpha\hat{\mathbf{r}}) = u^-(\alpha\hat{\mathbf{r}}), \quad \hat{\mathbf{r}} \in S \quad (2.59)$$

Η (2.59) εξακολουθεί να ισχύει ακόμα και για $g_0^0 \neq 0$ αν προσθέσουμε κατάλληλα την αυθαίρετη σταθερά τόσο στο εξωτερικό, όσο και στο εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

2.4 Εσωτερικό Ηλεκτρικό Δυναμικό με τη Μέθοδο των Ειδώλων

Σε αυτήν την παράγραφο στόχος είναι πάλι η εύρεση του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού u^- όπως ορίζεται από το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\sigma \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad r < \alpha \quad (2.60)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla u^-(\mathbf{r}) = 0, \quad r = \alpha, \quad (2.61)$$

με τη μέθοδο αυτή τη φορά των ειδώλων. Τροποποιώντας τεχνικές που εισήγαγε ο Weiss το 1944 [61], μπορούμε να δείξουμε ότι η λύση του προβλήματος (2.60) - (2.61) έχει την ακόλουθη αναπαράσταση σε όρους ειδώλων Kelvin (βλ. Παράρτημα Α2)

$$u^-(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}) + \frac{\alpha}{r} \Psi\left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}\right) + \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{r} \Psi\left(\frac{\lambda^2}{r^2} \mathbf{r}\right) d\lambda \quad (2.62)$$

όπου

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{1}{4\pi\sigma} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.63)$$

Ας εξηγήσουμε όμως από φυσικής πλευράς τους όρους που περιέχονται στη (2.62). Η (2.62) περιέχει τις ακόλουθες συναρτήσεις του $\mathbf{r}$ και $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{K}_\lambda(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\lambda}{r} \frac{\frac{\lambda^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\left| \frac{\lambda^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^3} \quad (2.65)$$

για $\lambda \in [\alpha, +\infty)$.

Η $\mathbf{K}$ είναι το πεδίο διπόλου στο $\mathbf{r}$ που οφείλεται σε μια ιδιομορφία στο σημείο $\mathbf{r}_0$ πρώτης δύναμης. Προκειμένου να ερμηνεύσουμε την $\mathbf{K}_\lambda$, την ξαναγράφουμε ως

$$\mathbf{K}_\lambda(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\frac{\lambda^3}{r^3} \mathbf{r} - \frac{r^2}{\lambda^2} \mathbf{r}_0}{\frac{\lambda^6}{r^6} \left| \mathbf{r} - \frac{r^2}{\lambda^2} \mathbf{r}_0 \right|^3} = \left(\frac{r}{\lambda} \right)^3 \frac{\mathbf{r} - \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \mathbf{r}_0}{\left| \mathbf{r} - \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \mathbf{r}_0 \right|^3} \quad (2.66)$$

Αφού $r < \alpha \leq \lambda$ συνεπάγεται ότι

$$\frac{r}{\lambda} < 1, \quad \text{για κάθε } \lambda \in [\alpha, +\infty) \quad (2.67)$$

Συνεπώς η $\mathbf{K}_\lambda$, όπως δίνεται από την (2.66), είναι το πεδίο διπόλου στο $\mathbf{r}$ που οφείλεται σε μια ιδιομορφία στο $\left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \mathbf{r}_0$ δύναμης $\left(\frac{r}{\lambda} \right)^3$. Έτσι το δυναμικό στη θέση $\mathbf{r}$ στο εσωτερικό της σφαίρας από τη (2.60) γράφεται

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\left(\frac{r}{\alpha} \right)^3}{\left| \mathbf{r} - \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \mathbf{r}_0 \right|} + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\frac{2}{\alpha} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^3}{\left| \mathbf{r} - \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \mathbf{r}_0 \right|} d\lambda \right] \quad (2.68)$$

Επομένως η (2.66) είναι η υπέρθεση των δυναμικών που οφείλονται σε μοναδιαία διπολική πηγή στο $\mathbf{r}_0$ - που είναι και η πραγματική πηγή του u - μιας πηγής ειδώλου στο $\mathbf{r}_1 = \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \mathbf{r}_0$ δύναμης $\left(\frac{r}{\alpha} \right)^3$ - που είναι φανταστική πηγή - και μιας συνεχούς κατανομής διπολικών ειδώλων στο γραμμικό τμήμα $\left[0, \left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \mathbf{r}_0 \right]$ με δύναμη τη συνάρτηση πυκνότητας $\left(\frac{r}{\lambda} \right)^3 \frac{2}{\alpha}$.

Πρέπει να επισημάνουμε πως παρόλο που το σύστημα των ειδώλων βρίσκεται μέσα στη σφαίρα, αυτά τα είδωλα δεν γεννούν ιδιομορφίες, αφού για κάθε $r < \alpha$ τα είδωλα βρίσκονται στο τμήμα της ακτίνας με μήκος

$$\left(\frac{r}{\alpha} \right)^2 \mathbf{r}_0 < r \quad (2.69)$$

όπως είναι προφανές από την ανισότητα

$$\frac{r}{\alpha} \frac{r_0}{\alpha} < 1. \quad (2.70)$$

Στο Σχήμα 2.2 μπορούμε να δούμε την κατανομή των ειδώλων Kelvin επί του ευθυγράμμου τμήματος OP_1 . Σαν συνέπεια της αμοιβαιότητας μπορούμε να διαβάσουμε την (2.62) σαν ένα πεδίο στο $\mathbf{r}_0$ ενός διπόλου στο $\mathbf{r}$ με μοναδιαία δύναμη, ενός ειδώλου Kelvin στο $\mathbf{r}$ δύναμης $\frac{\alpha}{r}$ και μιας συνεχούς κατανομής ειδώλων με συνάρτηση πυκνότητας $\frac{2}{\alpha} \frac{\lambda}{r}$ από το σημείο $\frac{\alpha^2}{r^2}$ μέχρι το ∞ . Στην πραγματικότητα αυτή η γραμμή κατανομής ειδώλων αναγνωρίζονται σαν τα είδωλα Kelvin του σημείου $\mathbf{r}$ ως προς τη σφαίρα ακτίνας $\lambda \in [\alpha, +\infty)$. Αυτή η δεύτερη οπτική γωνία για την εξήγηση της (2.62) διαφέρει από την πρώτη κατά ένα πρόσημο. Η ισοδυναμία φαίνεται αν εκφράσουμε το δυναμικό της (2.68) ως εξής

$$\begin{aligned}
u^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \left(\frac{r}{\alpha}\right)^3 \frac{\mathbf{r} - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \mathbf{r}_0}{\left|\mathbf{r} - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 \mathbf{r}_0\right|} + \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^3 \left(\mathbf{r} - \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 \mathbf{r}_0\right)}{\left|\mathbf{r} - \left(\frac{r}{\lambda}\right)^2 \mathbf{r}_0\right|} d\lambda \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\frac{r^5}{\alpha^5} \left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right)}{\frac{r^6}{\alpha^6} \left|\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right|^3} + \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^5 \left(\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right)}{\left(\frac{r}{\lambda}\right)^6 \left|\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right|} d\lambda \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\sigma} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\alpha}{r} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0} + \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{\bar{r}} \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{\bar{r}}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\lambda \right] \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η (2.62) ή η (2.71) που καταλήξαμε ισοδύναμα είναι μια λύση του προβλήματος Neumann (2.60), (2.61). Από το θεώρημα του Kelvin (Α'.24) έχουμε ότι

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left[\frac{\frac{\lambda}{r}}{\left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0} \right] = 0, \quad \text{για κάθε } \lambda \geq \alpha \quad (2.72)$$

που ισχύει για κάθε $r < \alpha$ αφού

$$\frac{\lambda}{r} \geq \frac{\alpha}{r} > 1. \quad \text{για κάθε } \lambda \geq \alpha \quad (2.73)$$

Επομένως

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\sigma} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{Q}] \quad (2.74)$$

Στη συνέχεια, στόχος μας αποτελεί η ικανοποίηση της συνθήκης Neumann (2.61) από την (2.71). Για να συμβαίνει αυτό αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{|r\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\alpha}{r} \frac{1}{\left| \frac{\alpha^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} + \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{r} \frac{1}{\left| \frac{\lambda^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} d\lambda \right] \Big|_{r=\alpha} \quad (2.75)$$

είναι ανεξάρτητη του $\mathbf{r}_0$.

Λόγω της (Α'.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\frac{\lambda}{r}}{\left| \frac{\lambda^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} &= \frac{1}{\lambda} \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{\frac{\lambda^2}{r}}{\left| \frac{\lambda^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} \\ &= \frac{1}{\lambda} \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\bar{\mathbf{r}}^2}{\lambda^2} (\mathbf{I} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \frac{\bar{r}}{\left| \bar{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} \\ &= -\frac{\bar{r}^2}{\lambda^3} \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \frac{\bar{r}}{\left| \bar{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} \\ &= -\frac{\bar{r}^2}{\lambda^3} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{r}}{\left| \bar{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Επομένως η (2.75) γράφεται

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|r\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \Big|_{r=\alpha} - \frac{\bar{r}^2}{\alpha^3} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{r}}{\left| \bar{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} \Big|_{\bar{r}=\alpha} - \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\bar{r}^2}{\lambda^3} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{\bar{r}}{\left| \bar{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0 \right|} \Big|_{\bar{r}=\frac{\lambda^2}{\alpha}} d\lambda \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|r\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \Big|_{r=\alpha} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{r}{|r\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \Big|_{r=\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{|r\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} - \frac{r}{\alpha} \frac{1}{|r\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] \bigg|_{r=\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\alpha}{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \\
&= -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} + \left[\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|r\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \right] \bigg|_{r=\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{|\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{t}\mathbf{r}_0|} + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{|\alpha\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \\
&= -\frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Τελικά με την εφαρμογή του τελεστή $\frac{1}{4\pi\sigma} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0})$ στην (2.77) προκύπτει η (2.61). Και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού.

Στο σημείο αυτό θα παραθέσουμε την ακόλουθη παρατήρηση. Έστω το u^- επιλύει το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta_{\mathbf{r}} u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \Omega \tag{2.78}$$

$$\partial n u^- = 0, \quad \partial\Omega \tag{2.79}$$

Αν γράψουμε το u^- στην μορφή

$$u^-(\mathbf{r}) = (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \frac{1}{\sigma} Z(\mathbf{r}), \tag{2.80}$$

Τότε η $Z(\mathbf{r})$ ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta_{\mathbf{r}} Z(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \Omega \tag{2.81}$$

$$\partial n Z(\mathbf{r}) = \text{ανεξάρτητη του } \mathbf{r}_0, \quad \partial\Omega \tag{2.82}$$

Στην πραγματικότητα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την $\frac{Z}{\sigma}$ τη συνάρτηση Neumann που ορίζεται να είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta N = -\delta, \quad \Omega \tag{2.83}$$

$$\partial n N = -\frac{1}{|\partial\Omega|}, \quad \partial\Omega \tag{2.84}$$

όπου $|\partial\Omega|$ είναι το εμβαδόν της συνοριακής επιφάνειας του Ω .

Είναι αξιοσημείωτο ότι αν πολλαπλασιάσουμε την (2.77) με $\frac{1}{4\pi}$ καταλήγουμε στο

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} = -\frac{1}{|\partial\Omega|} \tag{2.85}$$

όπου Ω είναι η σφαίρα ακτίνας α και $|\partial\Omega|$ το εμβαδόν της συνοριακής επιφάνειας. Έτσι, βασιζόμενοι στο αποτέλεσμα της (2.85) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση

$$N(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \frac{\alpha}{r} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0} + \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{r} \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\lambda \right] \quad (2.86)$$

είναι η συνάρτηση Neumann για τη σφαίρα ακτίνας α .

Ας επανέλθουμε όμως στη μέθοδο των ειδώλων και στην οπτική των φανταστικών πηγών που παρέχει η μορφή (2.71). Βασιζόμενοι στη σχέση αυτή, υπάρχει η δυνατότητα προσδιορισμού κλειστής μορφής για το u^- στο βαθμό που μπορεί να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα (2.86). Πράγματι το $\frac{2}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{r} \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0} d\lambda$ μπορεί να υπολογιστεί - παραθέτουμε τον υπολογισμό του στο παράρτημα A3 - και δίνει (βλ.(A'.34))

$$L(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{Q}}{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} + \frac{1}{\alpha r} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}_0 + \alpha^2 \mathbf{Q} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)\mathbf{Q}]}{\left| \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} \quad (2.87)$$

Γνωρίζοντας την τιμή του ολοκληρώματος, ξαναγράφουμε το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό από την (2.71), δηλαδή

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\alpha}{4\pi\sigma r} \mathbf{Q} \cdot \frac{\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^3} - \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{Q}}{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} \\ & + \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot [\mathbf{r}_0 \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r})\bar{\mathbf{I}} + \alpha^2 \bar{\mathbf{I}}] \cdot \mathbf{Q}}{r \left| \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Θέτοντας

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0) \quad (2.89)$$

η (2.88) γίνεται

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sigma} \left\{ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \mathbf{Q} + \frac{\alpha}{r} \frac{\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^3} \cdot \mathbf{Q} - \frac{1}{\alpha} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}}{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_0} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\alpha r} \frac{\mathbf{M} \cdot [\mathbf{r}_0 \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r})\bar{\mathbf{I}} + \alpha^2 \bar{\mathbf{I}}] \cdot \mathbf{Q}}{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}_0 \left| \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|} \right\} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Θα συνεχίσουμε την αναλύοντας περαιτέρω το ολοκλήρωμα που δίνει τη συνεισφορά από τη γραμμή ειδώλων. Αν στο $L(\mathbf{r})$ δεν εφαρμόσουμε τον τελεστή κλίσης στο ολοκλήρωμα, τότε το ολοκλήρωμα

$$K(\mathbf{r}) = \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{r} \frac{d\lambda}{\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{\lambda}{r}\right)^2}{\left[\frac{\lambda^2}{r} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0\right]} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{+\infty} \frac{dt}{|t\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.91)$$

δεν υπάρχει. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της (2.91) πράττουμε ως ακολούθως. Αφού

$$r_0 < \frac{\alpha^2}{r} \leq t \quad (2.92)$$

χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες ανάπτυγμα (2.36) με αντίστροφη λογική από αυτήν της παραγράφου **2.3**. Μετασχηματίζουμε δηλαδή την προς ολοκλήρωση κλειστή μορφή σε σειρά. Συνεπώς

$$K(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{t^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{+\infty} \left[\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n}{t^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \right] dt. \quad (2.93)$$

Στην (2.93) γίνεται φανερό ότι ο όρος για $n = 0$ της σειράς είναι ανεξάρτητος του $\mathbf{r}_0$ και συνεπώς ο τελεστής $\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}$ θα τον εξαλείψει. Επομένως η συνεισφορά της γραμμής κατανομής των ειδώλων γράφεται

$$\begin{aligned} 4\pi\sigma L(\mathbf{r}) &= \frac{2}{4\pi\sigma\alpha} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \int_{\frac{\alpha^2}{r}}^{+\infty} t^{-(n+1)} dt \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n r^n}{\alpha^{2n}} \frac{P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)}{n}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Θέτοντας

$$\rho = \frac{r_0}{\alpha} \frac{r}{\alpha} < 1 \quad (2.95)$$

και χρησιμοποιώντας την (2.38) καταλήγουμε στην

$$4\pi\sigma L(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \left[\frac{1 - \rho \cos \theta + \sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}}{2} \right] \quad (2.96)$$

όπου το ρ δίνεται από την (2.95).

Όμως

$$1 - \rho \cos \theta + \sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} = 1 - \frac{rr_0}{\alpha^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \sqrt{1 - 2\frac{rr_0}{\alpha^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 + \frac{r^2 r_0^2}{\alpha^4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{r}{\alpha^2} \mathbf{r}_0 \right) + \left| \hat{\mathbf{r}} - \frac{r}{\alpha^2} \mathbf{r}_0 \right| \\
&= \frac{\mathbf{r}}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right) + \frac{r}{\alpha^2} \left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| \\
&= \frac{r^2}{\alpha^4} \frac{F\left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}; \mathbf{r}_0\right)}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

όπου

$$F(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = r \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^2 + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| \tag{2.98}$$

Συνεπώς η (2.96) γράφεται

$$4\pi\sigma L(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \left[\frac{r^2}{\alpha^4} \frac{F\left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}; \mathbf{r}_0\right)}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|} \right] \tag{2.99}$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να δείξουμε ότι η (2.99) συμπίπτει με τη (2.87), θα εκτελέσουμε την παραγωγή της (2.99). Πράγματι,

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \left[\frac{r^2}{\alpha^4} \frac{F\left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}; \mathbf{r}_0\right)}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|} \right] = \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \left[\frac{r}{2\alpha^2} \left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| + \frac{\mathbf{r}}{2\alpha^2} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right) \right] \tag{2.100}$$

και θέτοντας

$$\mathbf{R} = \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \tag{2.101}$$

η (2.100) γράφεται

$$\begin{aligned}
&= -\mathbf{Q} \nabla_{\mathbf{R}} \ln \left[\frac{r}{2\alpha^2} R + \frac{\mathbf{r}}{2\alpha^2} \cdot \mathbf{R} \right] = -\mathbf{Q} \cdot \frac{\frac{r}{2\alpha^2} \hat{\mathbf{R}} + \frac{\mathbf{r}}{2\alpha^2}}{\frac{r}{2\alpha^2} R + \frac{\mathbf{r}}{2\alpha^2} \cdot \mathbf{R}} \\
&= -\frac{r \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{R}} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}}{r R + \mathbf{r} \cdot \mathbf{R}} = -\mathbf{Q} \cdot \frac{r \left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right) + \mathbf{r} \left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|}{r \left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| 2 + \left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right)}
\end{aligned} \tag{2.102}$$

ή

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \ln \left[\frac{r^2}{\alpha^4} \frac{F\left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}; \mathbf{r}_0\right)}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|} \right] = -\frac{\mathbf{Q} \cdot (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}})}{\mathbf{R} \cdot (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}})} \tag{2.103}$$

Συνεπώς, η συνεισφορά από τη γραμμή ειδώλων παίρνει την απλή μορφή

$$4\pi\sigma L(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \frac{\mathbf{Q} \cdot (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}})}{\mathbf{R} \cdot (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}})} \tag{2.104}$$

Η συμπαγής μορφή (2.104) μας επιτρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο όρος L εξαφανίζεται όταν τα διανύσματα $\mathbf{Q}$, $(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}})$ είναι κάθετα, δηλαδή όταν $\mathbf{Q} \perp (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}})$, αλλά ο παρανομαστής δεν μπορεί να μηδενιστεί σε καμία περίπτωση, αφού

$$\mathbf{R} \cdot (\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}) = R(\hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + 1) \neq 0 \quad (2.105)$$

αφού τα $\hat{\mathbf{R}}$ και $\hat{\mathbf{r}}$ δεν μπορούν ποτέ να είναι αντίθετα.

Θα ακολουθήσει η σύγκριση των εκφράσεων (2.88) και (2.103) προκειμένου να αποδείξουμε τη σύμπτωση τους. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)\mathbf{r} - r^2\mathbf{r}_0] \cdot \mathbf{Q}}{[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)\mathbf{r} - r^2\mathbf{r}_0] \cdot \mathbf{r}_0} \left(\frac{\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{rR} - 1 \right) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{Q}}{rR} = - \frac{(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}) \cdot \mathbf{Q}}{R(1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}})} \quad (2.106)$$

όπου $\mathbf{R}$ δίνεται από την (2.101). Αφού η (2.106) πρέπει να αληθεύει για κάθε $\mathbf{Q}$, συνεπάγεται ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 - rR(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0}{rRr_0} + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{R} = - \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}}{R(1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}})} \quad (2.107)$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την ισχύ της (2.107), θα δείξουμε ότι οι προβολές των διανυσμάτων των δύο μελών της (2.107) στα $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ συμπίπτουν. Για την προβολή επί του $\hat{\mathbf{r}}$ έχουμε

$$[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0] = 0 \quad (2.108)$$

και η (2.107) δίνει

$$1 = \frac{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \quad (2.109)$$

η οποία ισχύει.

Για τις προβολές επί του $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ή $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ της (2.107) έχουμε

$$\frac{\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 - rR}{rr_0} \frac{-\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0}{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)^2 - 1} = \frac{\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \quad (2.110)$$

Και αφού

$$-\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \frac{R}{r_0} \quad (2.111)$$

για $\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 \neq 0$ συνεπάγεται ότι

$$(\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 - rR) \left[1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \right] \frac{R}{r_0} = rr_0 [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)^2 - 1] \quad (2.112)$$

ή αφού

$$\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{R} \quad (2.113)$$

συνεπάγεται

$$-rR^2 [1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}] [1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}] = rr_0^2 [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)^2 - 1] \quad (2.114)$$

ή

$$-R^2 [1 - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}})^2] = r_0^2 [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)^2 - 1] \quad (2.115)$$

ή

$$R^2 \left[1 - \left(\frac{\alpha^2}{r} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0) \right)^2 \frac{1}{R^2} \right] = r_0^2 - r_0^2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)^2 \quad (2.116)$$

ή

$$R^2 - \left[\frac{\alpha^4}{r^2} + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0)^2 - 2 \frac{\alpha^2}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0) \right] = r_0^2 - r_0^2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)^2 \quad (2.117)$$

ή

$$\frac{\alpha^4}{r^2} + r_0^2 - 2 \frac{\alpha^2}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0) - \frac{\alpha^4}{r^2} - (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0)^2 + 2 \frac{\alpha^2}{r} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0) = r_0^2 - r_0^2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0)^2 \quad (2.118)$$

που επίσης ισχύει. Επομένως αποδείχθηκε ότι οι (2.88) και (2.11) συμπίπτουν. Συνεπώς, η κλειστή μορφή για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται σε όρους της (2.101)

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\alpha}{r} \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{\alpha R} \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}}{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}} \right] \quad r < \alpha \quad (2.119)$$

όπου ο πρώτος όρος οφείλεται στην πηγή $\mathbf{r}_0$, ο δεύτερος οφείλεται στη συνεισφορά από το σημείο

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} \quad (2.120)$$

και ο τρίτος όρος είναι η συνεισφορά από τη γραμμή

$$\frac{\lambda^2}{r^2}, \quad \lambda \in [\alpha, +\infty) \quad (2.121)$$

2.5 Σφαιρικός αγωγός τριών φλοιών

2.5.1 Επίλυση προβλήματος

Ακολουθώντας την ανατομική δομή του εγκεφάλου, όπως περιγράφηκε στην υποπαράγραφο 1.9.2, προτυποποιούμε το ανθρώπινο κεφάλι σαν μια σφαίρα αποτελούμενη από τον εγκεφαλικό ιστό V_c , η οποία περιβάλλεται από τρεις ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς, που ο αναπαριστούν - ξεκινώντας από το εσωτερικό - το εγκεφαλονωτιαίο υγρό V_f , τα κρανιακά οστά V_b και το δέρμα V_s (βλ. Σχήμα 2.3). Οι περιοχές αυτές του ρεαλιστικού προτύπου του σφαιρικού αγωγού των τριών φλοιών διακρίνονται από διαφορετικές τιμές ηλεκτρικής αγωγιμότητας, που είναι αντίστοιχα σ_c , σ_f , σ_b και σ_s . Έστω S_c , S_f , S_b και S_s συμβολίζουν τις

σφαιρικές επιφάνειες οι οποίες σε ορθογώνιες συντεταγμένες ορίζονται από

Σχήμα 2.3: Ο σφαιρικός αγωγός των τριών φλοιών.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 \quad (2.122)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = f^2 \quad (2.123)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b^2 \quad (2.124)$$

και

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = s^2 \quad (2.125)$$

όπου $c < f < b < s$ είναι οι ακτίνες τους. Οι σφαίρες (2.122), (2.123), (2.124) και (2.125) είναι ομόκεντρες και οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) μέσω των σχέσεων [10]

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.126)$$

$$x_2 = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.127)$$

$$x_3 = r \cos \theta \quad (2.128)$$

όπου $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ και $\phi \in [0, 2\pi)$. Στην εσωτερική σφαίρα V_c (πυρήνας), στη θέση $\mathbf{r}_0$, υπάρχει ένα κύριο ρεύμα διπολικής πηγής με ροπή $\mathbf{Q}$ όπως περιγράφεται στη σχέση (1.24). Συνεπώς, ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού στον πυρήνα του αγωγού V_c , εντός των φλοιών V_f , V_b , V_s και στον εξωτερικό χώρο του αγωγού V απαιτεί την επίλυση των κάτωθι προβλημάτων συνοριακών τιμών

$$\Delta u_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_c} \mathbf{Q} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in V_c \quad (2.129)$$

$$u_c(\mathbf{r}) = u_f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c \quad (2.130)$$

$$\sigma_c \frac{\partial u_c(\mathbf{r})}{\partial r} = \sigma_f \frac{\partial u_f(\mathbf{r})}{\partial r}, \quad \mathbf{r} \in S_c \quad (2.131)$$

$$\Delta u_f(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_f \quad (2.132)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = u_b(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (2.133)$$

$$\sigma_f \frac{\partial u_f(\mathbf{r})}{\partial r} = \sigma_b \frac{\partial u_b(\mathbf{r})}{\partial r}, \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (2.134)$$

$$\Delta u_b(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_b \quad (2.135)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = u_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_b \quad (2.136)$$

$$\sigma_b \frac{\partial u_b(\mathbf{r})}{\partial r} = \sigma_s \frac{\partial u_s(\mathbf{r})}{\partial r}, \quad \mathbf{r} \in S_b \quad (2.137)$$

$$\Delta u_s(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_s \quad (2.138)$$

$$u_s(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_s \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial u_s(\mathbf{r})}{\partial r} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_s. \quad (2.140)$$

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (2.141)$$

$$u(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.142)$$

Ο υψηλός βαθμός ανομοιογένειας του προβλήματος, επιβάλλει την ταυτόχρονη επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών (2.129) - (2.131), (2.132) - (2.134), (2.135) - (2.137), (2.138) - (2.140), (2.141) - (2.142) για τον προσδιορισμό των πέντε πεδίων. Αρχικά καταγράφουμε τα αναπτύγματα των πέντε αυτών ηλεκτρικών δυναμικών. Στο εξωτερικό δυναμικό, απουσία πηγών και για λόγους ικανοποίησης της συνοριακής συνθήκης (2.142), το u αναπτύσσεται μόνο σε εξωτερικές σφαιρικές αρμονικές ως ακολούθως

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_n^m r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad r > s \quad (2.143)$$

Για τις περιοχές των τριών φλοιών V_s , V_b , V_f η απουσία πηγών που διατυπώνεται μαθηματικά από την εξίσωση Laplace, βλ. τις (2.138), (2.135), (2.132), τα ηλεκτρικά δυναμικά u_s , u_b , u_f θα έχουν αναπτύγματα σε εσωτερικές και εξωτερικές σφαιρικές αρμονικές, τα οποία είναι αντίστοιχα

$$u_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(g_n^m r^n + h_n^m r^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad b < r < s \quad (2.144)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(k_n^m r^n + l_n^m r^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad f < r < b \quad (2.145)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(p_n^m r^n + q_n^m r^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad c < r < f \quad (2.146)$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό στον πυρήνα του ανομοιογενούς αγωγού ως λύση της εξίσωσης Poisson θα δίνεται από το άθροισμα μιας εσωτερικής αρμονικής συνάρτησης και μιας ειδικής λύσης. Σύμφωνα με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην υποπαράγραφο **2.1.1**, η ειδική λύση στον V_c θα είναι για $r_0 < r < c$

$$S^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.147)$$

ενώ για $0 < r < r_0$

$$S^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^{-(n+1)} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \right) r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.148)$$

Συνεπώς το ανάπτυγμα του ηλεκτρικού δυναμικού u_c είναι για $r_0 < r < c$

$$u_c^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[t_n^m r^n + \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{\sigma_c (2n+1) r^{n+1}} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.149)$$

ενώ για $0 < r < r_0$

$$u_c^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[t_n^m + \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^{-(n+1)} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \right)}{\sigma_c (2n+1)} \right] r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.150)$$

η επίλυση επομένως των προβλημάτων συνοριακών τιμών συνεπάγεται τον προσδιορισμό των οκτώ σταθερών $d_n^m, g_n^m, h_n^m, k_n^m, l_n^m, p_n^m, q_n^m, t_n^m$ που καθορίζουν πλήρως τα αναπτύγματα (2.143) - (2.146) και (2.149), (2.150). Η ικανοποίηση των οκτώ συνοριακών συνθηκών του προβλήματος (2.130), (2.131), (2.133), (2.134), (2.136), (2.137), (2.139), (2.140) από τα παραπάνω αναπτύγματα οδηγούν σε ένα 8×8 γραμμικό αλγεβρικό σύστημα, το οποίο όμως είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο και απαιτεί μια αρκετά επίπονη διαδικασία επίλυσης. Η αναλυτική επίλυση των προβλημάτων του ομογενούς σφαιρικού αγωγού - ύπαρξη ενός συνόρου - (βλ. παράγραφο **2.2**), του σφαιρικού αγωγού ενός φλοιού - ύπαρξη δύο συνόρων - καθώς και του σφαιρικού αγωγού δύο φλοιών - ύπαρξη τριών συνόρων - μας υπέδειξε τον καλύτερο χειρισμό για την επίλυση του ανώτερου 8×8 συστήματος του παρόντος προβλήματος. Να παρενθέσουμε στο

σημείο αυτό πως για λόγους έκτασης, η επίλυση των προβλημάτων των σφαιρικών αγωγών του ενός και των δύο φλοιών με την πηγή στον πυρήνα τους, δεν περιέχονται σε αυτήν την εργασία αλλά τα αποτελέσματα αυτών αναφέρονται στην υποπαράγραφο **2.5.3**, προκειμένου να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητες συγκρίσεις με τα αντίστοιχα πρότυπα της ελλειψοειδούς γεωμετρίας.

Επανερχόμενοι στην επίλυση του 8×8 συστήματος, προτείνουμε τον βέλτιστο αλγόριθμο για την επίλυσή του. Ξεκινάμε με την ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης συνέχειας της κάθετης παραγώγου στο εξωτερικό σύνορο, όπου εμπεριέχονται οι λιγότερες άγνωστες σταθερές. Ακολουθεί η συνοριακή συνθήκη συνέχειας των δυναμικών στο ίδιο σύνορο. Συνεχίζουμε, ικανοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στα εσωτερικά σύνορα, διαδοχικά από το εξωτερικό προς το εσωτερικό, εφαρμόζοντας πρώτα τη συνοριακή συνθήκη συνέχειας της κάθετης παραγώγου του δυναμικού και έπειτα αυτή της συνέχειας του πεδίου του δυναμικού για το κάθε σύνορο.

Συγκεκριμένα η σειρά εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών στο παρόν πρόβλημα είναι (2.140), (2.139), (2.137), (2.136), (2.134), (2.133), (2.131), (2.130) οι οποίες οδηγούν στα ακόλουθα αποτελέσματα, για $n = 0$ και $m = 0$

$$d_0^0 = sg_0^0 \quad (2.151)$$

$$h_0^0 = l_0^0 = q_0^0 = 0 \quad (2.152)$$

$$g_0^0 = k_0^0 = p_0^0 = t_0^0 \quad (2.153)$$

ενώ για $n \geq 1$ και $m = -n, \dots, n$

$$d_n^m = \frac{2n+1}{n} h_n^m \quad (2.154)$$

$$g_n^m = \frac{n+1}{n} \frac{1}{s^{2n+1}} h_n^m \quad (2.155)$$

$$k_n^m = \frac{n+1}{2n+1} \left[\left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_b} \right) \frac{1}{b^{2n+1}} + \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_b} + \frac{n+1}{n} \right) \right] h_n^m \quad (2.156)$$

$$l_n^m = \frac{n+1}{2n+1} \left[\left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_b} \right) \frac{b^{2n+1}}{s^{2n+1}} + \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_b} + \frac{n}{n+1} \right) \right] h_n^m \quad (2.157)$$

$$p_n^m = \frac{n+1}{2n+1} \left[\left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) k_n^m + \left(1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) \frac{1}{f^{2n+1}} l_n^m \right] \quad (2.158)$$

$$q_n^m = \frac{n}{2n+1} \left[\left(1 + \frac{n}{n+1} \frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) l_n^m + \left(1 - \frac{\sigma_b}{\sigma_f} \right) f^{2n+1} k_n^m \right] \quad (2.159)$$

$$t_n^m = -\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{(2n+1)\sigma_c} + p_n^m + \frac{q_n^m}{c^{2n+1}} \quad (2.160)$$

και

$$h_n^m = \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{n\sigma_c} \frac{1}{D_{3,n}^m} \quad (2.161)$$

όπου

$$\begin{aligned} D_{3,n}^m &= \sigma_c + \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_f - \sigma_c) \left(1 - \frac{c^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \\ &\quad - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_f - \sigma_b) \left(1 - \frac{f^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \\ &\quad - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_b - \sigma_s) \left(1 - \frac{b^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)}{\sigma_f} \left(1 - \frac{c^{2n+1}}{f^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{f^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \\ &\quad + \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \left(1 - \frac{c^{2n+1}}{b^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{b^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \left(1 - \frac{f^{2n+1}}{b^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{b^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^3} \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_f \sigma_b} \left(1 - \frac{c^{2n+1}}{f^{2n+1}} \right) \left((n+1) + n \frac{f^{2n+1}}{b^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{b^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \end{aligned} \quad (2.162)$$

Λόγω των (2.151) - (2.162) τα ηλεκτρικά δυναμικά από τις (2.143), (2.144), (2.145), (2.146), (2.149) και (2.150) γράφονται

για $r > s$

$$u(\mathbf{r}) = g_0 \frac{s}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{n D_{3,n}^m} r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.163)$$

για $b < r < s$

$$u_s(\mathbf{r}) = u(s, \theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{r^{n+1}} - \frac{r^n}{s^{2n+1}} \right) \frac{1}{D_{3,n}^m} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.164)$$

για $f < r < b$

$$u_b(\mathbf{r}) = u_s(b, \theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{r^{n+1}} - \frac{r^n}{b^{2n+1}} \right) \frac{1}{\sigma_b} \frac{D_{1,n}^m}{D_{3,n}^m} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.165)$$

για $c < r < f$

$$u_f(\mathbf{r}) = u_b(f, \theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{r^{n+1}} - \frac{r^n}{f^{2n+1}} \right) \frac{1}{\sigma_f} \frac{D_{2,n}^m}{D_{3,n}^m} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.166)$$

για $r_0 < r < c$

$$u_c^+(\mathbf{r}) = u_f(c, \theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{r^{n+1}} - \frac{r^n}{f^{2n+1}} \right) \frac{1}{\sigma_c} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.167)$$

για $0 < r < r_0$

$$u_c^-(\mathbf{r}) = u_f(c, \theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}})}{r_0^{(n+1)}} \right) - \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{(2n+1)c^{2n+1}} \right] \frac{r^n}{\sigma_c} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.168)$$

όπου

$$\begin{aligned} D_{2,n}^m &= \sigma_f - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_f - \sigma_b) \left(1 - \frac{f^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \\ &\quad - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_b - \sigma_s) \left(1 - \frac{b^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \\ &\quad - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \left(1 - \frac{f^{2n+1}}{b^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{b^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right) \end{aligned} \quad (2.169)$$

και

$$D_{1,n}^m = \sigma_b - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_b - \sigma_s) \left(1 - \frac{b^{2n+1}}{s^{2n+1}} \right). \quad (2.170)$$

Στη συνέχεια θα εξηγήσουμε τις εκφράσεις για τα πεδία των ηλεκτρικών δυναμικών, όπως δίνονται από τις (2.163) - (2.167). Η (2.163) δίνει το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάθε σημείο εξωτερικά του αγωγού. Τότε το δυναμικό του εξωτερικού φλοιού u_s εκφράζεται ως το εξωτερικό δυναμικό u υπολογισμένο στην εξωτερική επιφάνεια S_s του δέρματος, συν ένα ανάπτυγμα σε σφαιρικές αρμονικές υπολογισμένο στο σημείο παρατήρησης $\mathbf{r}$, το οποίο αναπαριστά τη συνεισφορά που προέρχεται από το φλοιό V_s . Στον ίδιο νόμο υπακούουν και τα δυναμικά u_b , u_f των επόμενων διαδοχικών φλοιών, καθώς και το δυναμικό του εγκεφαλικού ιστού u_c . Το καθένα από αυτά εκφράζεται ως ένα άθροισμα του δυναμικού του εξωτερικού φλοιού υπολογισμένο στο κοινό τους σύνορο, συν μια συνεισφορά από τον συγκεκριμένο φλοιό, πάντα υπό τη μορφή του κατάλληλου αναπτύγματος σε σφαιρικές αρμονικές.

Επίσης, η μορφή των αναπτυγμάτων (2.163) - (2.167) είναι όμοια και οι εν λόγω σχέσεις ενσωματώνονται στην

$$u_i(\mathbf{r}) = u_{i+1}(r_i, \theta, \phi) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{r^{2n+1}} - \frac{1}{r_i^{2n+1}} \right) \frac{1}{\sigma_i} \frac{D_{k-i,n}^m}{D_{k,n}^m} [\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))] r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.171)$$

για $r_{i-1} < r < r_i$, όπου $i = 0 : c, 1 : f, 2 : b, 3 : s, k = \max(i)$ και r_i ακτίνα του i . Από την (2.171) συμπεραίνουμε ότι τα ηλεκτρικά δυναμικά των φλοιών διαφέρουν μόνο σε σταθερούς λόγους που σχετίζονται με τους παράγοντες αγωγιμότητας και από το γεγονός ότι η πολλαπλασιαστική ποσότητα $\left(\frac{1}{r^{2n+1}} - \frac{r^n}{r_i^{2n+1}} \right)$ είναι υπολογισμένη στην επιφάνεια που βρισκόμαστε κάθε φορά. Οι παραπάνω λόγοι καθορίζουν λεπτομερώς την επίδραση των περιβάλλοντων φλοιών κανονικοποιημένων από την επίδραση όλων των φλοιών που θεωρούμε στο πρότυπο. Κάθε λόγος πολλαπλασιάζεται με ένα παράγοντα αγωγιμότητας, το οποίο μεταφράζεται στο τι θα επέβαλλε ο ισοδύναμος ομογενής αγωγός στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

Η (2.163) παρέχει το πλήρες ανάπτυγμα σε σφαιρικές αρμονικές του ηλεκτρικού δυναμικού στο εξωτερικό ανομοιογενούς αγωγού. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την καρτεσιανή μορφή των σφαιρικών αρμονικών βαθμού μικρότερου ή ίσου του δεύτερου για να εκφράσουμε τους πρώτους όρους του αναπτύγματος (2.163) σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Η διαδικασία αυτή γίνεται προκειμένου το αποτέλεσμα αυτό να συγκριθεί με το αντίστοιχο για το εξωτερικό δυναμικό στην περίπτωση του ελλειψοειδούς στο Κεφάλαιο 3. Η έκφραση σε καρτεσιανές

συντεταγμένες είναι η προβολή της λύσης μέσα στο διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης που γεννούν οι ιδιοσυναρτήσεις βαθμού μικρότερου ή ίσου του δευτέρου, ανεξάρτητα της επιλογής του συστήματος. Οι υπόχωροι αυτοί αποτελούνται από διαφορετικές βάσεις ανάλογα με το επιλέξιμο κάθε φορά σύστημα και οι συγκεκριμένες σχέσεις που μας μεταφέρουν από το ένα σύστημα στο άλλο είναι οι τύποι αλλαγής βάσης που χρησιμοποιούμε στη Γραμμική Άλγεβρα.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των Y_n^m [11, 35] και τις σχέσεις που μας μεταφέρουν από το σφαιρικό στο καρτεσιανό σύστημα [39], αντικαθιστώντας αυτές και τις κλίσεις τους στην (2.163) και εκτελώντας αλγεβρικούς χειρισμούς, οδηγούμαστε στην εξής συμπαγή ταυτιστική έκφραση

$$u(\mathbf{r}) = g_0 \frac{s}{r} + \frac{3}{4\pi D_{3,1}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{5}{8\pi D_{3,2}^m} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (2.172)$$

όπου

$$\begin{aligned} D_{3,1}^m = & \sigma_c + (\sigma_f - \sigma_c) \frac{2}{3} \left(1 - \frac{c^3}{s^3}\right) - (\sigma_f - \sigma_b) \frac{2}{3} \left(1 - \frac{f^3}{s^3}\right) - (\sigma_b - \sigma_s) \frac{2}{3} \left(1 - \frac{b^3}{s^3}\right) \\ & + \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)}{\sigma_f} \frac{2}{9} \left(1 - \frac{c^3}{f^3}\right) \left(1 - \frac{f^3}{s^3}\right) \\ & + \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \frac{2}{9} \left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right) \left(1 - \frac{b^3}{s^3}\right) \\ & - \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \frac{2}{9} \left(1 - \frac{f^3}{b^3}\right) \left(1 - \frac{b^3}{s^3}\right) \\ & - \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_f \sigma_b} \frac{2}{27} \left(1 - \frac{c^3}{f^3}\right) \left(2 + \frac{f^3}{b^3}\right) \left(1 - \frac{b^3}{s^3}\right) \end{aligned} \quad (2.173)$$

και

$$\begin{aligned} D_{3,2}^m = & \sigma_c + (\sigma_f - \sigma_c) \frac{3}{5} \left(1 - \frac{c^5}{s^5}\right) - (\sigma_f - \sigma_b) \frac{3}{5} \left(1 - \frac{f^5}{s^5}\right) - (\sigma_b - \sigma_s) \frac{3}{5} \left(1 - \frac{b^5}{s^5}\right) \\ & + \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)}{\sigma_f} \frac{6}{25} \left(1 - \frac{c^5}{f^5}\right) \left(1 - \frac{f^5}{s^5}\right) \\ & + \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \frac{6}{25} \left(1 - \frac{c^5}{b^5}\right) \left(1 - \frac{b^5}{s^5}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \frac{6}{25} \left(1 - \frac{f^5}{b^5}\right) \left(1 - \frac{b^5}{s^5}\right) \\
& -\frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_f \sigma_b} \frac{6}{25} \left(1 - \frac{c^5}{f^5}\right) \left(3 + 2\frac{f^5}{b^5}\right) \left(1 - \frac{b^5}{s^5}\right)
\end{aligned} \quad (2.174)$$

είναι οι τιμές του $D_{3,n}^m$ για $n = 1$ και $n = 2$ αντίστοιχα.

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα συγκρίνουμε τις εκφράσεις των ηλεκτρικών δυναμικών (2.163) - (2.167) με αντίστοιχες απλούστερων προτύπων και θα σταθούμε ειδικότερα στη μορφή του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού.

2.5.2 Αναγωγή του σφαιρικού αγωγού τριών φλοιών στον ομογενή σφαιρικό

Σκοπός μας εδώ είναι να ανακτήσουμε τα αποτελέσματα (2.164), (2.165), (2.166) και (2.167) για τα πεδία των ηλεκτρικών δυναμικών στους τρεις φλοιούς και στον πυρήνα του σφαιρικού μοντέλου, στα αντίστοιχα αποτελέσματα για το ομογενές μοντέλο. Επιπλέον θα καταγράψουμε τα αποτελέσματα για το εξωτερικό δυναμικό σε πρότυπα του ανομοιογενούς με έναν ή δύο φλοιούς αγωγού και θα δείξουμε με αναγωγές ότι η μορφή του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού είναι όμοια τόσο στο ομογενές πρότυπο, όσο και στο ανομοιογενές πεπερασμένου πλήθους φλοιών, με μοναδική διαφοροποίηση ενός παράγοντα αγωγιμότητας $D_{i,n}^m$ στο ανάπτυγμα του δυναμικού που εκφράζει τη γεωμετρία και τη φυσική του κάθε προτύπου. Για να αναγάγουμε το σφαιρικό μοντέλο των τριών φλοιών στο ομογενές σφαιρικό, χρειάζεται να ενοποιήσουμε κατάλληλα τους χώρους V_s , V_b , V_f και V_c . Αυτό προκύπτει με την επιλογή του ακόλουθου ορίου

$$\sigma_c \rightarrow \sigma_f \rightarrow \sigma_b \rightarrow \sigma_s = \sigma \quad (2.175)$$

το οποίο αντιστοιχεί στο γεωμετρικό όριο

$$c \rightarrow f \rightarrow b \rightarrow s \quad (2.176)$$

και συμβολίζεται με $3sh \rightarrow hom$. Σαν συνέπεια των ορίων αυτών η (2.162) θα δώσει

$$\lim_{3sh \rightarrow hom} (D_{3,n}^m) = \sigma \quad (2.177)$$

που είναι η αγωγιμότητα του ομογενούς αγωγού. Υπό αυτές τις αναγωγές οι (2.164) - (2.167) εκφυλίζονται στην

$$\lim_{3sh \rightarrow hom} u_c(\mathbf{r}) = \lim_{3sh \rightarrow hom} u_f(\mathbf{r}) = \lim_{3sh \rightarrow hom} u_b(\mathbf{r}) = \lim_{3sh \rightarrow hom} u_s(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}) \quad (2.178)$$

δηλαδή όλα τα εσωτερικά δυναμικά του αγωγού των τριών σφαιρικών φλοιών εκφυλίζονται στο δυναμικό του εσωτερικού του ομογενούς αγωγού. Θα συνεχίσουμε στην επόμενη παράγραφο εκτελώντας την ίδια διαδικασία για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

2.5.3 Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για πεπερασμένο αριθμό σφαιρικών φλοιών

Προκειμένου να προβούμε σε συμπεράσματα για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό ας καταγράψουμε τα εξωτερικά ηλεκτρικά δυναμικά τεσσάρων μαθηματικών προτύπων: της σφαίρας (ομογενής αγωγός), της σφαίρας με έναν φλοιό (δύο ομόκεντρες σφαίρες), της σφαίρας με δύο φλοιούς (τρεις ομόκεντρες σφαίρες) και τέλος της σφαίρας τριών φλοιών (ανομοιογενής αγωγός του προτύπου μας). Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι τα προβλήματα της σφαίρας του ενός φλοιού και δύο φλοιών με την παρουσία της πηγής στον πυρήνα, έχουν επιλυθεί αναλυτικά, αλλά δεν παρουσιάζουμε την επίλυσή τους. Ο λόγος για αυτό είναι ότι τα δύο αυτά πρότυπα δεν χρήζουν της μεγάλης φυσικής σημασίας, όπως αυτά των τριών φλοιών, καθώς και ο τρόπος επίλυσής τους είναι αντίστοιχος αυτού του αγωγού των τριών φλοιών. Θα καταγράψουμε όμως τα αποτελέσματα για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, προκειμένου να προβούμε σε συγκρίσεις. να επισημάνουμε επιπλέον ότι για να γίνει στον αναγνώστη πιο εύκολη η κατανόηση των σχέσεων που θα ακολουθήσουν, καθώς και η επαλήθευση των αναγωγών, θα χρησιμοποιήσουμε αριθμητικό συμβολισμό για τις αγωγιμότητες και τις ακτίνες των προτύπων. Στον Πίνακα 2.1 δίνονται τα γεωμετρικά και τα φυσικά στοιχεία των προτύπων όπως αυτά συσχετίζονται με τα ήδη γνωστά.

Συνεπώς το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για κάθε περίπτωση στη σφαίρα δίνεται από

$$u_{sr.ish}(\mathbf{r}) = g_0 \frac{r_1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{n D_{i,n}^m} r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.179)$$

όπου $i = 0, 1, 2, 3$ αντιστοιχούν στα πρότυπα της ομογενούς σφαίρας, του ενός σφαιρικού φλοιού, των δύο σφαιρικών φλοιών και των τριών σφαιρικών φλοιών και είναι για το ομογενές

$$D_{0,n}^m = \sigma_1 \quad (2.180)$$

για τον έναν σφαιρικό φλοιό

ομογενές	$u_{sr.0sh}$	$\sigma_1 = \sigma$ $r_1 = \alpha$				αγωγιμότητα ακτίνα
1 φλοιός	$u_{sr.1sh}$	σ_1 r_1	σ_2 r_2			αγωγιμότητες ακτίνες
2 φλοιοί	$u_{sr.2sh}$	σ_1 r_1	σ_2 r_2	σ_3 r_3		αγωγιμότητες ακτίνες
3 φλοιοί	$u_{sr.3sh}$	$\sigma_1 = \sigma_s$ $r_1 = s$	$\sigma_2 = \sigma_b$ $r_2 = b$	$\sigma_3 = \sigma_f$ $r_3 = f$	$\sigma_4 = \sigma_c$ $r_4 = c$	αγωγιμότητες ακτίνες

Πίνακας 2.1: Συμβολισμός ακτίνων και αγωγιμοτήτων για το στρωματοποιημένο σφαιρικό αγωγό μέχρι και τριών φλοιών

$$D_{1,n}^m = \sigma_2 - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \quad (2.181)$$

για τους δύο σφαιρικούς φλοιούς

$$\begin{aligned} D_{2,n}^m = & \sigma_3 - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_3 - \sigma_2) \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_b} \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_2^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \end{aligned} \quad (2.182)$$

και για τους τρεις σφαιρικούς φλοιούς

$$\begin{aligned} D_{3,n}^m = & \sigma_4 - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_4 - \sigma_3) \left(1 - \frac{r_4^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_3 - \sigma_2) \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_2)}{\sigma_3} \left(1 - \frac{r_4^{2n+1}}{r_3^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2} \left(1 - \frac{r_4^{2n+1}}{r_2^{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}}\right) \\
& -\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2} \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_2^{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}}\right) \\
& + \frac{n(n+1)}{(2n+1)^3} \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_3 \sigma_2} \left(1 - \frac{r_4^{2n+1}}{r_3^{2n+1}}\right) \left((n+1) + n \frac{r_3^{2n+1}}{r_2^{2n+1}}\right) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}}\right)
\end{aligned} \tag{2.183}$$

Θεωρώντας τα όρια

$$\sigma_2 \rightarrow \sigma_1 \tag{2.184}$$

$$\sigma_3 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 \tag{2.185}$$

και

$$\sigma_4 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 \tag{2.186}$$

που αντιστοιχούν στα γεωμετρικά όρια

$$r_2 \rightarrow r_1 \tag{2.187}$$

$$r_3 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1 \tag{2.188}$$

$$r_4 \rightarrow r_3 \rightarrow r_2 \rightarrow r_1 \tag{2.189}$$

στις (2.181), (2.182) και (2.183) αντίστοιχα και συμβολίζοντας $1sh \rightarrow hom$, $2sh \rightarrow hom$, $3sh \rightarrow hom$ αντίστοιχα, προκύπτει

$$\lim_{3sh \rightarrow hom} (D_{3,n}^m) = \lim_{2sh \rightarrow hom} (D_{2,n}^m) = \lim_{1sh \rightarrow hom} (D_{1,n}^m) = D_{0,n}^m = \sigma_1 \tag{2.190}$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{3sh \rightarrow hom} u_3(\mathbf{r}) = \lim_{2sh \rightarrow hom} u_2(\mathbf{r}) = \lim_{1sh \rightarrow hom} u_1(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}), \tag{2.191}$$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της (2.179) για $i = 1, 2, 3$ με αυτά της (2.179) για $i = 0$ γίνεται φανερό ότι η επίδραση της παρουσίας των φλοιών στο εξωτερικό πεδίο των ηλεκτρικών

δυναμικών ενσωματώνεται στον παράγοντα αγωγιμότητας $D_{i,n}^m$ πολλαπλασιαζόμενο με κάθε πολυπολικό όρο, αφήνοντας την υπόλοιπη δομή σταθερή.

Θα ολοκληρώσουμε τις αναγωγικές διαδικασίες με την ανάκτηση του αποτελέσματος του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού της ομογενούς σφαίρας σε τανυστική συμπαγή μορφή [40] με το αποτέλεσμα των τριών σφαιρικών φλοιών (2.172)

$$u_{hom}(\mathbf{r}) = g_0 \frac{s}{r} + \frac{3}{4\pi\sigma} \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{5}{8\pi\sigma} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (2.192)$$

Παρατηρούμε ότι και τα δυο δυναμικά από τις (2.172) και (2.192) έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με μοναδική διαφορά στους όρους αγωγιμότητας $\frac{1}{D_{3,1}^m}, \frac{1}{D_{2,1}^m}$ που ανάγονται στη σταθερή αγωγιμότητα $\frac{1}{\sigma}$ του ομογενούς αγωγού. Το γεγονός ότι οι παραπάνω παράγοντες αγωγιμότητας στην (2.172) συνοδεύουν τον κάθε όρο του αναπτύγματος κάνουν εμφανές το πόσο όρατός είναι ο αγωγός σε κάθε όρο της αυτής. Το γεγονός αυτό αντανακλά την ισχυρή επίδραση των φλοιών στο ηλεκτρικό δυναμικό. Από την άλλη πλευρά, το όριο του αγωγού εμφανίζεται μόνο στον μονοπολικό όρο, που επίσης μεταφέρει την αυθαίρετη σταθερά g_0 .

2.6 Ο ανομοιογενής αγωγός με υγρό στο εσωτερικό του

Θεωρούμε το σφαιρικό πρότυπο του μη ομογενούς αγωγού όπως ακριβώς περιγράφηκε στην παράγραφο 1.7 και αναπαριστάται στο Σχήμα 2.4 που ακολουθεί

Έστω S_c, S_f οι επιφάνειες των ομόκεντρων σφαιρών ακτίνων $r = c, f$ αντίστοιχα, οι οποίες σε ορθογώνιες συντεταγμένες καθορίζονται από

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 \quad (2.193)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = f^2 \quad (2.194)$$

όπου $f < c$. Στο εσωτερικό του αγωγού, στην περιοχή V_c , υπάρχει ηλεκτρικό δίπολο ροπής $\mathbf{Q}$ στη θέση $\mathbf{r}_0$. Συνεπώς στην περιοχή V_c το ηλεκτρικό δυναμικό u_c ικανοποιεί την εξίσωση Poisson, ενώ η περιοχή με το υγρό V_f στο εσωτερικό του αγωγού, απουσία πηγών, ικανοποιούν την εξίσωση Laplace. Για την εύρεση των παραπάνω δυναμικών απαιτείται η επίλυση των ακόλουθων προβλημάτων συνοριακών τιμών. Για την περιοχή του υγρού το u_f ικανοποιεί το

Σχήμα 2.4: Ο ανομοιογενής σφαιρικός αγωγός με υγρό στο εσωτερικό του.

$$\Delta u_f(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_f \quad (2.195)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = u_c(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (2.196)$$

$$\sigma_f \frac{\partial u_f(\mathbf{r})}{\partial r} = \sigma_c \frac{\partial u_c(\mathbf{r})}{\partial r}, \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (2.197)$$

για το χώρο V_c το u_c ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\Delta u_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_c \quad (2.198)$$

$$u_c(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c \quad (2.199)$$

$$\frac{\partial u_c(\mathbf{r})}{\partial r} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_c. \quad (2.200)$$

ενώ για τον εξωτερικό μη αγωγίμο χώρο V , απουσία πηγών, απαιτείται πάλι η επίλυση της εξίσωσης Laplace

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (2.201)$$

καθώς και η ικανοποίηση της ακόλουθης ασυμπτωτικής συνθήκης στο άπειρο

$$u(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (2.202)$$

Η ανομοιογένεια που προκαλεί η θεώρηση μιας παραπάνω περιοχής αυξάνει το βαθμό δυσκολίας του προβλήματος σε σχέση με το ομογενές. Πέραν της δυσκολίας που υπάρχει εξαιτίας του ενός παραπάνω προβλήματος συνοριακών τιμών, η πραγματική δυσκολία και η διαφοροποίηση από την ομογενή σφαίρα έγκειται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει η δυνατότητα αυτόνομης επίλυσης κάποιου από τα προβλήματα συνοριακών τιμών, η εύρεση του αντίστοιχου δυναμικού και η διαδοχική εκμετάλλευση αυτού στις συνοριακές συνθήκες των εναπομεινάντων προβλημάτων για την επίλυσή των. Τα τρία προβλήματα (2.195) - (2.197), (2.198) - (2.200) και (2.201) - (2.202) πρέπει να επιλυθούν ταυτόχρονα. Προτού όμως προβούμε στην λεπτομερή περιγραφή του αλγορίθμου επίλυσης των (2.195) - (2.202), ας περιγράψουμε την εύρεση της ειδικής λύσης S_c του u_c που οφείλεται στην πηγή.

Όπως είδαμε στην υποπαράγραφο **2.2.1**, η ειδική λύση δίνεται από την (2.17) που στην περίπτωσή μας λόγω της αγωγιμότητας του χώρου V_c γράφεται

$$S_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_c} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (2.203)$$

όπως είχαμε παρατηρήσει στην ίδια υποπαράγραφο η ειδική λύση είναι διαφορετική για $r > r_0$ και θα τη συμβολίζουμε με S_c^+ , απ' ότι για $r < r_0$, S_c^- . Έτσι κατά πλήρη αναλογία με τα της υποπαράγραφου **2.2.1** έχουμε για $r_0 < r < c$

$$S^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.204)$$

ενώ για $r < r_0$

$$S^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^{-(n+1)} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \right) r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.205)$$

έχοντας προσδιορίσει την ειδική λύση του u_c για κάθε μια από τις περιοχές $r_0 < r < c$, u_c^+ , και $f < r < r_0$, u_c^- , θα συνεχίσουμε παραθέτοντας τα αναπτύγματα των ηλεκτρικών δυναμικών u_f , u_c^+ , u_c^- και u σε σφαιρικές αρμονικές.

Για $r > c$,

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_n^m r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.206)$$

για $r_0 < r < c$,

$$u_c^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{\sigma_c(2n+1)r^{n+1}} + f_n^m r^n + g_n^m r^{-(n+1)} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.207)$$

για $f < r < r_0$

$$u_c^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^{-(n+1)} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{\sigma_c(2n+1)} r^n + f_n^m r^n + g_n^m r^{-(n+1)} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.208)$$

και για $0 < r < f$

$$u_f(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n c_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.209)$$

Σκοπός μας, όπως είδαμε, είναι η επίλυση των (2.195) - (2.202) για τον προσδιορισμό των δυναμικών ή ισοδύναμα ο προσδιορισμός των σταθερών $d_n^m, f_n^m, g_n^m, c_n^m$. ο αλγόριθμος που θα ακολουθήσουμε για τον προσδιορισμό αυτών έχει ως εξής: Από τις οκτώ σχέσεις (2.195) - (2.202), έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει τις τέσσερις - (2.195), (2.198), (2.201), (2.202) - για να προσδιορίσουμε τη γενική μορφή των αναπτυγμάτων (2.206) - (2.209). Στις (2.206) - (2.209) υπάρχουν οι τέσσερις προαναφερθείσες άγνωστες σταθερές που υπολείπονται να υπολογισθούν. ο υπολογισμός αυτών θα γίνει εφαρμόζοντας τις τέσσερις εναπομείνουσες συνοριακές συνθήκες (2.196), (2.197), (2.199) και (2.200). Δηλαδή η ύπαρξη των δύο συνόρων S_f, S_c γεννά τέσσερις άγνωστες σταθερές στις εκφράσεις των δυναμικών και απαιτεί τελικά την επίλυση ενός 4×4 γραμμικού αλγεβρικού συστήματος - όπως θα δούμε στη συνέχεια. Σύμφωνα με την παρατήρηση σχετικά με την επιλογή του βέλτιστου αλγόριθμου επίλυσης του

συστήματος που περιγράψαμε στην υποπαράγραφο **2.5.1**, η σειρά ικανοποίησης των συνοριακών συνθηκών είναι από τις συνθήκες του εξωτερικού συνόρου S_c και στη συνέχεια του εσωτερικού S_f , ξεκινώντας πρώτα από αυτές της συνέχειας των κάθετων παραγώγων και συνεχίζοντας με αυτές της συνέχειας του πεδίου δυναμικού, δηλαδή η σειρά είναι (2.200), (2.199), (2.197) και (2.196). Από ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών προσδιορίζουμε τις σταθερές ως ακολούθως

$$g_0^0 = 0 \quad (2.210)$$

$$d_0^0 = c f_0^0 \quad (2.211)$$

$$c_0^0 = f_0^0 \quad (2.212)$$

ενώ για $n \geq 1$ και $m = -n, \dots, n$

$$d_n^m = \frac{2n+1}{n} \left[\frac{A_n^m}{(2n+1)\sigma_c} + g_n^m \right] \quad (2.213)$$

$$f_n^m = \frac{n+1}{n} \left[\frac{A_n^m}{(2n+1)\sigma_c} + g_n^m \right] c^{-(2n+1)} \quad (2.214)$$

$$c_n^m = \frac{B_n^m}{(2n+1)\sigma_f} + \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{A_n^m}{\sigma_f} c^{-(2n+1)} + \frac{n+1}{n} \frac{\sigma_c}{\sigma_f} \left(c^{-(2n+1)} - f^{-(2n+1)} \right) g_n^m \quad (2.215)$$

$$g_n^m = \frac{1}{\sigma_c} \frac{1}{2n+1} \frac{n B_n^m (\sigma_c - \sigma_f) f^{2n+1} + (n+1) A_n^m (\sigma_c - \sigma_f) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}}{n \sigma_f + (n+1) \sigma_c + (n+1) (\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \quad (2.216)$$

$$g_n^m + \frac{A_n^m}{(2n+1)\sigma_c} = \frac{1}{\sigma_c} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n+1)\sigma_c A_n^m + n(\sigma_f - \sigma_c) (A_n^m - B_n^m f^{2n+1})}{n \sigma_f + (n+1) \sigma_c + (n+1) (\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \quad (2.217)$$

όπου

$$A_n^m = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \quad (2.218)$$

και

$$B_n^m = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^{-(n+1)} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \right). \quad (2.219)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.210) -(2.217) στα αναπτύγματα των δυναμικών (2.206) - (2.209) προκύπτει

για $r > c$

$$u(\mathbf{r}) = f_0^0 \frac{c}{r} + \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{(2n+1)\sigma_c A_n^m + n(\sigma_f - \sigma_c)(A_n^m - B_n^m f^{2n+1})}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \right] r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.220)$$

για $r_0 < r < c$

$$u_c^+(\mathbf{r}) = f_0^0 + \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n+1)\sigma_c A_n^m + n(\sigma_f - \sigma_c)(A_n^m - B_n^m f^{2n+1})}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \right] \cdot \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{c^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.221)$$

για $f < r < r_0$

$$u_c^-(\mathbf{r}) = f_0^0 + \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left[B_n^m r^n + \frac{n+1}{n} \frac{(2n+1)\sigma_c A_n^m + n(\sigma_f - \sigma_c)(A_n^m - B_n^m f^{2n+1})}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \frac{r^n}{c^{2n+1}} + \frac{nB_n^m(\sigma_c - \sigma_f)f^{2n+1} + (n+1)A_n^m(\sigma_c - \sigma_f)\frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \frac{1}{r^{n+1}} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.222)$$

και για $0 < r < f$

$$u_f(\mathbf{r}) = f_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{\frac{n+1}{n} \frac{A_n^m}{c^{2n+1}} + B_n^m}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \right] r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.223)$$

όπου η αυθαίρετη σταθερά f_0^0 αντανακλά την αυθαιρεσία του σημείου αναφοράς ως προς το οποίο καταγράφονται οι διαφορές του δυναμικού.

Η πολυπλοκότητα της φυσικής του προτύπου αυτού, η οποία υπεισέρχεται στις μορφές των δυναμικών από τη διαφορετική συνάρτηση της ειδικής λύσης που χρησιμοποιείται για τα δυο διαφορετικά σύνορα του αγωγού, αντανακλάται από την πολυπλοκότητα των μορφών των δυναμικών τόσο στο εξωτερικό, όσο και σε κάθε περιοχή στο εσωτερικό του αγωγού.

2.7 Ακτινική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου για τον αγωγό των τριών σφαιρικών φλοιών

Πριν αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του μαγνητικού πεδίου στην ρεαλιστική περίπτωση του σφαιρικού στρωματοποιημένου αγωγού, θα αναφερθούμε στα αποτελέσματα του Sarvas [52] σχετικά με το μαγνητικό πεδίο στην περίπτωση του σφαιρικού αγωγού.

Τα αποτελέσματα αναφέρονται σε δυο ειδικές περιπτώσεις αγωγών στη σφαιρική γεωμετρία, τη θεωρητική περίπτωση του άπειρου ομογενούς αγωγού και την περίπτωση του σφαιρικού ομογενούς αγωγού σε μη αγώγιμο μέσο.

Στην πρώτη περίπτωση, όταν ολόκληρος ο χώρος $\mathbf{R}^3$ θεωρηθεί ως ομογενές αγώγιμο μέσο, τότε το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάθε σημείο του αποτελεί λύση της εξίσωσης Poisson (2.129) και δίνεται, με τη βοήθεια της συνάρτησης Green του τελεστή του Laplace από την

$$u_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{R^3} \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}'), \quad (2.224)$$

Ο Sarvas απέδειξε πως για την περίπτωση του άπειρου ομογενούς αγωγού το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο δίνονται από τις σχέσεις

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_G \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}'), \quad (2.225)$$

και

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}'), \quad (2.226)$$

όπου G σφαίρα άπειρης ακτίνας που περιβάλλει την πηγή. Από τις (2.225) και (2.226) είναι φανερό ότι το ηλεκτρικό δυναμικό u_0 και το μαγνητικό πεδίο $\mu_0^{-1}\mathbf{B}_0$, που η πηγή γεννά

σε άπειρο ομογενή αγωγό, είναι αντίστοιχα το βαθμωτό και το διανυσματικό αναλλοίωτο του δυαδικού

$$\tilde{\mathbf{D}}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \mathbf{J}^P(\mathbf{r}') \otimes \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}'), \quad (2.227)$$

Στην ειδική περίπτωση που η πηγή $\mathbf{J}^P$ θεωρηθεί ως σημειακή πηγή ρεύματος (1.24) οι (2.225) και (2.226) γίνονται

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad (2.228)$$

και

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad (2.229)$$

Επομένως η (1.70) για την περίπτωση του πεπερασμένου ομογενούς αγωγού αγωγιμότητας σ , δίνει το μαγνητικό πεδίο στο μη αγωγίμο εξωτερικό χώρο αυτού

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \int_S u^-(\mathbf{r}) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (2.230)$$

Η εύστοχη παρατήρηση του Sarvas επί της σχέσης (2.230) ήταν ότι στην περίπτωση του σφαιρικού αγωγού, όπου η κάθετη και η ακτινική συνιστώσα συμπίπτουν

$$\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{r}}' \quad (2.231)$$

η ακτινική συνιστώσα του $\mathbf{B}$ συμπίπτει με την ακτινική συνιστώσα του $\mathbf{B}_0$. Η παρατήρηση αυτή αποτελεί συνέπεια του γεγονότος ότι η προβολή στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ της (2.230) εισάγει στο επιφανειακό ολοκλήρωμα το μεικτό γινόμενο

$$\hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{r} = \frac{\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{r} - \frac{\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{r} \quad (2.232)$$

το οποίο και οι δυο όροι μηδενίζονται, αφού ο πρώτος όρος περιέχει το μεικτό γινόμενο ίδιων διανυσμάτων $\mathbf{r}$ και ο δεύτερος λόγω της (2.231) στην ειδική περίπτωση της σφαίρας.

Συνεπώς, αφού

$$\mathbf{B}_{hom}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \quad (2.233)$$

στην ακτινική διεύθυνση δεν καταγράφεται συνεισφορά από το σύνορο του αγωγού. Να επισημάνουμε ότι ο πρώτος όρος στο μεικτό γινόμενο (2.232) μηδενίζεται σε κάθε περίπτωση, ανεξαρτήτως της γεωμετρίας, ενώ ο δεύτερος μόνο στην περίπτωση που έχουμε σφαιρική επιφάνεια.

Θα εκμεταλλευτούμε την παρατήρηση αυτή του Sarvas για τον ομογενή σφαιρικό αγωγό, προκειμένου να βρούμε την ακτινική συνιστώσα του $\mathbf{B}$ στην περίπτωση του σφαιρικού προτύπου των τριών φλοιών.

Το μαγνητικό πεδίο στον μη αγωγίμο εξωτερικό χώρο πεπερασμένου ανομοιογενούς αγωγού δίνεται από την (2.226) και την

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.234)$$

γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_c} [\sigma_f u_f(\mathbf{r}') - \sigma_c u_c(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_f} [\sigma_b u_b(\mathbf{r}') - \sigma_f u_f(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_b} [\sigma_s u_s(\mathbf{r}') - \sigma_b u_b(\mathbf{r}')] \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_s} \sigma_s u_s(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.235)$$

Θεωρούμε την προβολή στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ της (2.235), η οποία εισάγει σε κάθενα από τα επιφανειακά ολοκληρώματα της (2.235) το ίδιο ακριβώς μεικτό γινόμενο που περιγράφει η (2.232), που και στην περίπτωση των τριών φλοιών μηδενίζεται ο πρώτος όρος, όπως παρατηρήσαμε παραπάνω μηδενίζεται σε κάθε περίπτωση λόγω των ιδίων διανυσμάτων $\mathbf{r}$, ενώ ο δεύτερος μηδενίζεται γιατί σε κάθε σημείο οποιασδήποτε από τις σφαιρικές επιφάνειες S_c , S_f , S_b και S_s η κάθετη και η ακτινική διεύθυνση συμπίπτουν, όπως υποδεικνύει η (2.231). Επομένως στην ακτινική διεύθυνση του σφαιρικού προτύπου στρωματοποιημένου αγωγού τριών φλοιών δεν καταγράφεται η συνεισφορά από τα σύνορα του αγωγού, δηλαδή

$$\mathbf{B}_{3sh}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \quad (2.236)$$

Συμπερασματικά το αποτέλεσμα (2.233) του Sarvas και το προκύπτον (2.236) γενικεύεται για κάθε σφαιρικό αγωγό. Η συμμετρία που παρουσιάζει η σφαιρική γεωμετρία και η ιδιότητα των σφαιρικών επιφανειών της σύμπτωσης της κάθετης και τη ακτινικής διεύθυνσης, οδηγούν στο συμπέρασμα ότι κατά αυτήν δεν καταγράφεται συνεισφορά από το σύνορο του αγωγού.

Κεφάλαιο 3

Ηλεκτροεγκεφαλογραφία σε ελλειψοειδή γεωμετρία

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται το ευθύ πρόβλημα Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας για το πρότυπο των τεσσάρων ομοεστιακών ελλειψοειδών φλοιών του ανθρώπινου εγκεφάλου - πρότυπο τριών ελλειψοειδών φλοιών. Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.7, στατιστικά ανατομικά δεδομένα [53] έχουν καθιερώσει το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων ως το ενδεικνυόμενο σύστημα για τη μελέτη εγκεφαλικών απεικονίσεων στη διαγνωστική Ιατρική με τη μορφή ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος, μιας και ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει το σχήμα ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς. Στην παράγραφο 3.2 παρουσιάζουμε και επιλύουμε τα προβλήματα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των ηλεκτρικών δυναμικών στο εξωτερικό του εγκεφάλου και στο εσωτερικό του κάθε φλοιού. Η λύση δίνεται αναλυτικά σε όρους ελλειπτικών ολοκληρωμάτων και ελλειψοειδών αρμονικών μέχρι και την προσέγγιση δεύτερου βαθμού, μιας και δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν αναλυτικά πεδία που απαιτούν γινόμενα Lamé βαθμού μεγαλύτερου του 3 (βλ. Παράρτημα Β'). Στην παράγραφο 3.3 ανακτάμε τα αποτελέσματα για τα πεδία των ηλεκτρικών δυναμικών της παραγράφου 3.2 με το αντίστοιχο για το πρότυπο του ενός φλοιού [38] και του ομογενούς [40]. Επιπλέον με τη βοήθεια κατάλληλων φυσικών εκφυλισμών παρέχουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το ελλειψοειδές πρότυπο των δύο φλοιών [29]. Συνεχίζουμε στην παράγραφο 3.4 με μια μαθηματική ανάλυση για εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για πεπερασμένο αριθμό ελλειψοειδών φλοιών, καταλήγοντας σε αντίστοιχο ειδικό τύπο. Τέλος, στην παράγραφο 3.5 παρουσιάζουμε την γεωμετρική αναγωγή από ελλειψοειδές σε σφαίρα των αποτελεσμάτων των τριών ελλειψοειδών φλοιών της παραγράφου 3.2 στα αντίστοιχα για το σφαιρικό πρότυπο της παραγράφου 2.5.1.

3.2 Το πρότυπο των τριών ελλειψοειδών φλοιών

Ακολουθώντας την ανατομική δομή του εγκεφάλου, όπως περιγράφηκε στην υποπαράγραφο ;;, προτυποποιούμε το ανθρώπινο κεφάλι ως έναν στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό. Οι περιοχές του προτύπου αυτού παρουσιάζουν πλήρη αντιστοιχία με αυτά του σφαιρικού στρωματοποιημένου αγωγού (παράγραφος 2.7). Επομένως το πρότυπο που αναλύουμε στην παράγραφο αυτή, σχηματίζεται από τρεις ομοεστιακούς ελλειψοειδείς φλοιούς γύρω από τον επίσης ομοεστιακό ελλειψοειδή πυρήνα που αναπαριστά τον εγκεφαλικό ιστό. Έστω S_s , S_b , S_f και S_c συμβολίζουν τις τριαξονικές ελλειψοειδείς επιφάνειες οι οποίες σε ορθογώνιες συντεταγμένες καθορίζονται από

$$\frac{x_1^2}{s_1^2} + \frac{x_2^2}{s_2^2} + \frac{x_3^2}{s_3^2} = 1, \quad 0 < s_3 < s_2 < s_1 < +\infty, \quad (3.1)$$

$$\frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} = 1, \quad 0 < b_3 < b_2 < b_1 < +\infty, \quad (3.2)$$

$$\frac{x_1^2}{f_1^2} + \frac{x_2^2}{f_2^2} + \frac{x_3^2}{f_3^2} = 1, \quad 0 < f_3 < f_2 < f_1 < +\infty \quad (3.3)$$

και

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \frac{x_2^2}{c_2^2} + \frac{x_3^2}{c_3^2} = 1, \quad 0 < c_3 < c_2 < c_1 < +\infty, \quad (3.4)$$

αντίστοιχα, όπου $c_i < f_i < b_i < s_i, i = 1, 2, 3$ είναι οι ημιαξονές τους. Τα ελλειψοειδή (3.1), (3.2), (3.3) και (3.4) είναι πράγματι ομοεστιακά και αντιστοιχούν στο ελλειψοειδές σύστημα ρ, μ, ν όπως περιγράφεται από τις σχέσεις (B'.1), (B'.2) και (B'.3) του Παράρτηματος Β', με ημιεστιακές αποστάσεις

$$h_1^2 = s_2^2 - s_3^2 = b_2^2 - b_3^2 = f_2^2 - f_3^2 = c_2^2 - c_3^2, \quad (3.5)$$

$$h_2^2 = s_1^2 - s_3^2 = b_1^2 - b_3^2 = f_1^2 - f_3^2 = c_1^2 - c_3^2, \quad (3.6)$$

$$h_3^2 = s_1^2 - s_2^2 = b_1^2 - b_2^2 = f_1^2 - f_2^2 = c_1^2 - c_2^2. \quad (3.7)$$

Σε όρους της μεταβλητής ρ , οι επιφάνειες S_s , S_b , S_f και S_c αντιστοιχούν σε $\rho = s_1$, $\rho = b_1$, $\rho = f_1$ και $\rho = c_1$ και περιγράφουν τα σύνορα του δέρματος, του οστού, του εγκεφαλονωτιαίου υγρού και του εγκεφαλικού ιστού αντίστοιχα. Το εσωτερικό στη S_c διάστημα V_c αντιστοιχεί

στο διάστημα $\rho \in [h_2, c_1)$ και χαρακτηρίζεται από αγωγιμότητα σ_c . Ο ελλειψοειδής φλοιός μεταξύ των S_c και S_f , συμβολίζεται με V_f , αντιστοιχεί στο διάστημα $\rho \in (c_1, f_1)$ και χαρακτηρίζεται από την αγωγιμότητα σ_f . Ο ελλειψοειδής φλοιός μεταξύ των S_f και S_b , συμβολίζεται με V_b , αντιστοιχεί στο διάστημα $\rho \in (f_1, b_1)$ και χαρακτηρίζεται από την αγωγιμότητα σ_b . Τέλος, ο ελλειψοειδής φλοιός που περικλείεται από τις S_b και S_s , συμβολίζεται με V_s , αντιστοιχεί στο διάστημα $\rho \in (b_1, s_1)$ και χαρακτηρίζεται από την αγωγιμότητα σ_s . Ο εξωτερικός στη S_s μη αγωγίμος χώρος V περιγράφεται από $\rho \in (s_1, \infty)$ (βλ. Σχήμα 3.1).

Σχήμα 3.1: Ο ελλειψοειδής αγωγός των τριών φλοιών.

Στο εσωτερικό ελλειψοειδές, στο σημείο $\mathbf{r}_0 \in V_c$, υπάρχει ένα κύριο ρεύμα διπολικής πηγής ροπής $\mathbf{Q}$. Αυτό καθορίζεται από τη συνάρτηση πυκνότητας ρεύματος $\mathbf{J}^P$, όπως περιγράφεται από την (1.24). Το κύριο ρεύμα $\mathbf{J}^P$ επιφέρει ένα ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ στο εσωτερικό του αγωγίμου χώρου, το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί ένα επαγωγικό ρεύμα πυκνότητας $\mathbf{J}^V$ όπως περιγράφεται από την (1.41). Το συνολικό ρεύμα $\mathbf{J}$ σε κάθε σημείο $\mathbf{r}$ του ανομοιογενούς αγωγού δίνεται από το άθροισμα των δύο αυτών ρευμάτων, όπως υποδεικνύεται από τη σχέση (1.11). Το ρεύμα $\mathbf{J}$ είναι αυτό που παράγει ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, που διαδίδεται τόσο

στο εσωτερικό, όσο και στο εξωτερικό του αγωγίμου χώρου. Όπως είδαμε στην παράγραφο **1.9** το ηλεκτρικό πεδίο αναπαρίσταται από ένα ηλεκτρικό δυναμικό μέσω διαφορικής αναπαράστασης. Για τον προσδιορισμό του ηλεκτρικού δυναμικού τόσο στον εξωτερικό μη αγωγίμο χώρο, όσο και σε κάθε περιοχή των φλοιών θα επιλύσουμε τα προβλήματα συνοριακών τιμών (1.42) - (1.55) όπως αυτά διατυπώνονται στην παράγραφο **1.9.2**.

Για την περίπτωση του ελλειψοειδούς προτύπου τα προβλήματα επαναγράφονται ως ακολούθως. Συγκεκριμένα για την περιοχή του εγκεφαλικού ιστού V_c

$$\Delta u_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_c} \nabla \cdot \mathbf{J}^P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_c \quad (3.8)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = u_c(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c \quad (3.9)$$

$$\sigma_f \partial_n u_f(\mathbf{r}) = \sigma_c \partial_n u_c(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_c \quad (3.10)$$

για την περιοχή του εγκεφαλονωτιαίου υγρού V_f

$$\Delta u_f(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_f \quad (3.11)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = u_f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (3.12)$$

$$\sigma_b \partial_n u_b(\mathbf{r}) = \sigma_f \partial_n u_f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_f \quad (3.13)$$

για την περιοχή του οστού V_b

$$\Delta u_b(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_b \quad (3.14)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = u_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_b \quad (3.15)$$

,

$$\sigma_b \partial_n u_b(\mathbf{r}) = \sigma_s \partial_n u_s(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_b \quad (3.16)$$

για την περιοχή του δέρματος V_s

$$\Delta u_s(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_s \quad (3.17)$$

$$u_s(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_s \quad (3.18)$$

$$\partial_n u_s(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_s \quad (3.19)$$

και τέλος για τον εξωτερικό μη αγωγίμο χώρο V

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (3.20)$$

$$u(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (3.21)$$

Και στην περίπτωση του ελλειψοειδούς προτύπου, όπως και σε αυτό της σφαίρας, ο υψηλός βαθμός ανομοιογένειας του προβλήματος επιβάλλει την ταυτόχρονη επίλυση των ΠΣΤ (3.8)-(3.10), (3.11)-(3.13), (3.14)-(3.16), (3.17)-(3.19) και (3.20)-(3.21). Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε για την επίλυση αυτών στηρίζεται στην ίδια λογική που αναπτύχθηκε στην παράγραφο 2.5.1. Όμως σε αυτήν την περίπτωση η ελλειψοειδής γεωμετρία επιφέρει μια επιπλέον εγγενή δυσκολία στην αντιμετώπιση του προβλήματος.

Ξεκινάμε την επίλυση του προβλήματος με την καταγραφή των πέντε πεδίων των ηλεκτρικών δυναμικών στο εξωτερικό και στους φλοιούς στο εσωτερικό του αγωγού. η λύση της (3.20) είναι μια εξωτερική αρμονική συνάρτηση που υποθέτει το εξωτερικό ελλειψοειδές ανάπτυγμα

$$u(\rho, \mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} f_n^m \mathbf{F}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho > s_1 \quad (3.22)$$

και ικανοποιεί αυτομάτως την ασυμπτωτική συνθήκη (3.21).

Στο εσωτερικό των ελλειψοειδών φλοιών V_s , V_b και V_f τα ηλεκτρικά δυναμικά u_s, u_b και u_f επιλύουν τις εξισώσεις Laplace (3.17), (3.14) και (3.11) αντίστοιχα, επομένως θα έχουν αναπτύγματα σε εσωτερικές και εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές

$$u_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [g_n^m \mathbf{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + h_n^m \mathbf{F}_n^m(\rho, \mu, \nu)], \quad b_1 < \rho < s_1, \quad (3.23)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [k_n^m \mathbf{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + m_n^m \mathbf{F}_n^m(\rho, \mu, \nu)], \quad f_1 < \rho < b_1 \quad (3.24)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [p_n^m \mathbf{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + q_n^m \mathbf{F}_n^m(\rho, \mu, \nu)], \quad c_1 < \rho < f_1 \quad (3.25)$$

Τέλος στον εσωτερικό χώρο V_c που περιλαμβάνει την κύρια πηγή $\mathbf{J}^P$, το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό u_c επιλύει την εξίσωση (3.8) και δίνεται - όπως ακριβώς και στην περίπτωση της σφαίρας - σαν υπέρθεση μιας εσωτερικής αρμονικής συνάρτησης $W(\mathbf{r})$ και μιας ειδικής λύσης $S(\mathbf{r})$ της εξίσωσης του Poisson

$$S(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma_c} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\sigma_c} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (3.26)$$

Χρησιμοποιώντας το ελλειψοειδές ανάπτυγμα για την εσωτερική αρμονική συνάρτηση

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} t_n^m \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.27)$$

μπορούμε να γράψουμε το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό ως

$$u_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_c} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} t_n^m \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad \rho < c_1. \quad (3.28)$$

Προκειμένου να εκφράσουμε τον όρο $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ συναρτήσει ελλειψοειδών αρμονικών, γράφουμε το ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσης του Laplace σε ελλειψοειδείς αρμονικές, όπως δίνεται στη σχέση (B'.17) του Παραρτήματος Β. Τότε για $\rho > \rho_0$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \mathcal{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0) \mathcal{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.29)$$

ενώ για $\rho < \rho_0$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \mathcal{F}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0) \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.30)$$

όπου γ_n^m είναι οι σταθερές κανονικοποίησης της επιφάνειας των ελλειψοειδών αρμονικών όπως δίνονται από τη σχέση (B'.16) του Παραρτήματος Β. Εφαρμόζοντας κατάλληλα τον τελεστή

κλίσης στην (3.29) προκύπτει η ακόλουθη μορφή για το u_c , το οποίο θα το συμβολίζουμε με u_c^+ για $\rho > \rho_0$

$$u_c^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[t_n^m \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathcal{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)}{(2n+1)\sigma_c \gamma_n^m} \mathcal{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right] \quad (3.31)$$

ενώ με u_c^- όταν $\rho < \rho_0$

$$u_c^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[t_n^m + \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathcal{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)}{(2n+1)\sigma_c \gamma_n^m} \right] \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.32)$$

Στη συνέχεια ανακαλούμε τη σχέση (B'.13) του Παραρτήματος Β, η οποία συνδέει τις εξωτερικές με τις εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές

$$\mathcal{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) = (2n+1) \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) I_n^m(\rho) \quad (3.33)$$

έτσι ώστε να εκφράσουμε όλα τα αναπτύγματα των δυναμικών μόνο στις εσωτερικές. Συνεπώς, οι (3.22), (3.23), (3.24), (3.25), (3.31) και (3.32) γίνονται αντίστοιχα

$$u_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [(2n+1) f_n^m I_n^m(\rho)] \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho > c_1, \quad (3.34)$$

$$u_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [g_n^m + (2n+1) h_n^m I_n^m(\rho)] \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad b_1 < \rho < s_1, \quad (3.35)$$

$$u_b(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [k_n^m + (2n+1) m_n^m I_n^m(\rho)] \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad f_1 < \rho < b_1 \quad (3.36)$$

$$u_f(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} [p_n^m + (2n+1) q_n^m I_n^m(\rho)] \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad c_1 < \rho < f_1 \quad (3.37)$$

$$u_c^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[t_n^m + \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathcal{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)}{\sigma_c \gamma_n^m} I_n^m \right] \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho_0 < \rho < c_1 \quad (3.38)$$

$$u_c^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[t_n^m + \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{F}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)}{(2n+1)\sigma_c \gamma_n^m} \right] \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad h_2 < \rho < \rho_0. \quad (3.39)$$

Εκφρασμένα πλέον όλα τα δυναμικά σε όρους εσωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών, η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών είναι άμεση. Επιπλέον, η ομοιογένεια των (3.10), (3.13), (3.16), και (3.19) στον τελεστή ∂n σε συνδυασμό με τη σχέση (B'.7) του Παραρτήματος B, επιτρέπει την αντικατάσταση της κάθετης παραγώγου ∂_n με τη ρ - παράγωγο ∂_ρ , αφού ο αντίστοιχος μετρικός συντελεστής απλοποιείται στο καθένα από τα σύνορα.

Εισάγοντας τις (3.34), (3.35), (3.36), (3.37) και (3.38) στις συνοριακές συνθήκες (3.9), (3.10), (3.12), (3.13), (3.15), (3.16), (3.18) και (3.19) και χρησιμοποιώντας τους κανόνες ορθογωνιότητας στην επιφάνεια των ελλειψοειδών αρμονικών, οι σταθερές $f_n^m, g_n^m, h_n^m, k_n^m, m_n^m, p_n^m, q_n^m, t_n^m$ καθορίζονται ως οι λύσεις ενός 8×8 αλγεβρικού συστήματος. Ακολουθούμε ως βέλτιστο αλγόριθμο για την επίλυση του, αυτόν που περιγράφηκε στην παράγραφο **2.5.1** για το σφαιρικό πρότυπο, προβαίνοντας επιπλέον σε κατάλληλους χειρισμούς για την αντιμετώπιση της εγγενούς δυσκολίας που επιφέρουν οι ελλειψοειδείς αρμονικές στην επίλυσή του. Μετά το πέρας της διαδικασίας αυτής οδηγούμαστε στις εκφράσεις

$$g_0^1 = k_0^1 = p_0^1 = t_0^1 = f_0^1 I_0^1(s_1) \quad (3.40)$$

$$h_0^1 = m_0^1 = q_0^1 = 0 \quad (3.41)$$

ενώ για $n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, 2n + 1$, προκύπτουν συγκεκριμένες εκφράσεις για τις οκτώ σταθερές $f_n^m, g_n^m, h_n^m, k_n^m, m_n^m, p_n^m, q_n^m, t_n^m$, που περιλαμβάνουν συναρτήσεις Lamé πρώτου και δευτέρου είδους υπολογισμένες σε συγκεκριμένα σημεία. Εξαιτίας της ιδιαίτερα πολύπλοκης μορφής των σταθερών, δεν τις καταγράφουμε στο σημείο αυτό, αλλά τις αντικαθιστούμε πρώτα στις εκφράσεις των πεδίων (3.34) - (3.39), εισάγοντας το συμβολισμό

$$I_n^m(x, y) = I_n^m(x) - I_n^m(y) = \int_x^y \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_2^2} \sqrt{t^2 - h_3^2}} \quad (3.42)$$

και

$$S_n^m = E_n^m(s_1) E_n^{m'}(s_1) s_2 s_3 \quad (3.43)$$

$$B_n^m = E_n^m(b_1)E_n^{m'}(b_1)b_2b_3 \quad (3.44)$$

$$F_n^m = E_n^m(f_1)E_n^{m'}(f_1)f_2f_3 \quad (3.45)$$

$$C_n^m = E_n^m(c_1)E_n^{m'}(c_1)c_2c_3 \quad (3.46)$$

όπου ο τόνος συμβολίζει την παραγωγή ως προς τη μεταβλητή.
Συνεπώς, στο εξωτερικό χώρο ισχύει

$$u(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(s_1)} \frac{1}{S_n^m} \frac{1}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad \rho > s_1 \quad (3.47)$$

για την περιοχή του δέρματος

$$u_s(\mathbf{r}) = u(s_1, \mu, \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, s_1) \frac{1}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad b_1 < \rho < s_1, \quad (3.48)$$

για την περιοχή του οστού

$$u_b(\mathbf{r}) = u_s(b_1, \mu, \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, b_1) \frac{1}{\sigma_b} \frac{G_{1,n}^m}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad f_1 < \rho < b_1 \quad (3.49)$$

για την περιοχή του εγκεφαλονωτιαίου υγρού

$$u_f(\mathbf{r}) = u_b(f_1, \mu, \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, f_1) \frac{1}{\sigma_f} \frac{G_{2,n}^m}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad c_1 < \rho < f_1 \quad (3.50)$$

και τέλος για την περιοχή του εγκεφαλικού ιστού

$$u_c^+(\mathbf{r}) = u_f(c_1, \mu, \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, c_1) \frac{1}{\sigma_c} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho_0 < \rho < c_1 \quad (3.51)$$

και

$$u_c^-(\mathbf{r}) = u_f(c_1, \mu, \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma_c \gamma_n^m} \left[\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{2n+1} - I_n^m(c_1) \mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0) \right] E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad h_2 < \rho < \rho_0 \quad (3.52)$$

Οι σταθερές $G_{1,n}^m$, $G_{2,n}^m$ και $G_{3,n}^m$ είναι όροι αγωγιμότητας και δίνονται από τις

$$G_{1,n}^m = \sigma_b + (\sigma_b - \sigma_s) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} G_{2,n}^m &= \sigma_f + (\sigma_f - \sigma_b) \left(I_n^m(f_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{F_n^m} \right) F_n^m \\ &\quad + (\sigma_b - \sigma_s) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m \\ &\quad + \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} I_n^m(f_1, b_1) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m F_n^m, \end{aligned} \quad (3.54)$$

και

$$\begin{aligned} G_{3,n}^m &= \sigma_c + (\sigma_c - \sigma_f) \left(I_n^m(c_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{C_n^m} \right) C_n^m \\ &\quad + (\sigma_f - \sigma_b) \left(I_n^m(f_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{F_n^m} \right) F_n^m \\ &\quad + (\sigma_b - \sigma_s) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m \\ &\quad + \frac{(\sigma_c - \sigma_f)(\sigma_f - \sigma_b)}{\sigma_f} I_n^m(c_1, f_1) \left(I_n^m(f_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{F_n^m} \right) F_n^m C_n^m \\ &\quad + \frac{(\sigma_c - \sigma_f)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} I_n^m(c_1, b_1) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m C_n^m \\ &\quad + \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} I_n^m(f_1, b_1) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m F_n^m \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\sigma_c - \sigma_f)(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_f \sigma_b} I_n^m(c_1, f_1) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) \left(I_n^m(f_1, b_1) - \frac{1}{F_n^m} \right) B_n^m F_n^m C_n^m \quad (3.55)$$

Ερχόμενοι να εξηγήσουμε τις σχέσεις (3.47) - (3.52) παρατηρούμε τα ακόλουθα: η σχέση (3.47) δίνει το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάθε σημείο εξωτερικά του αγωγού. Τότε το δυναμικό του εξωτερικού φλοιού εκφράζεται ως το εξωτερικό δυναμικό u υπολογισμένο στην επιφάνεια S_s του δέρματος, συν ένα ανάπτυγμα υπολογισμένο στο σημείο παρατήρησης $\mathbf{r}$, το οποίο αναπαριστά τη συνεισφορά που προέρχεται από το φλοιό V_s . Ομοίως, τα δυναμικά (3.49) και (3.50) των επόμενων διαδοχικών φλοιών, καθώς και το δυναμικό στο εσωτερικό της περιοχής του εγκεφαλικού ιστού που δίνεται από τις (3.51) και (3.52), εκφράζονται ως το δυναμικό του εξωτερικού φλοιού υπολογισμένο στο κοινό τους σύνορο συν μια συνεισφορά από τον υπό εξέταση φλοιό, πάντα υπό μορφή του κατάλληλου αναπτύγματος ιδιοσυναρτήσεων.

Από τη συνέχεια της ανάλυσής μας θα εξαιρέσουμε το ανάπτυγμα u_e^- για τιμές του $\rho < \rho_0$, αφού το ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσης του τελεστή Laplace (3.30) διαφοροποιείται για τιμές γύρω από το ρ_0 . Η μορφή του καθενός από τα υπόλοιπα αναπτύγματα (3.48) - (3.51) εμφανίζεται να είναι όμοια και μπορεί να ενσωματωθεί στις σχέσεις

$$u_i(\mathbf{r}) = u_{i+1}(\alpha_1^{(i)}, \mu, \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, \alpha_1^{(i)}) \frac{1}{\sigma_i} \frac{G_{k-i,n}^m}{G_{k,n}^m} \frac{1}{\gamma_n^m} [\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathcal{E}_n^m(\mathbf{r}_0)] \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad (3.56)$$

για $\alpha_1^{(i-1)} < \rho < \alpha_1^{(i)}$, όπου $i = 0 : c, 1 : f, 2 : b, 3 : s$, $k = \max(i)$ και $\alpha_1^{(i)}$ ο ημιάξονας του i . Από την (3.56) γίνεται εμφανές ότι τα ηλεκτρικά δυναμικά των φλοιών, διαφέρουν μόνο σε σταθερούς λόγους που σχετίζονται με τους παράγοντες αγωγιμότητας και από το γεγονός ότι τα αντίστοιχα ελλειπτικά ολοκληρώματα είναι υπολογισμένα σε διαφορετικές επιφάνειες. Οι παραπάνω λόγοι καθορίζουν λεπτομερώς την επίδραση των περιβάλλοντων φλοιών κανονικοποιημένων από την επίδραση όλων των φλοιών που θεωρούμε στο πρότυπο. Κάθε λόγος πολλαπλασιάζεται με ένα παράγοντα αγωγιμότητας, το οποίο περιγράφει το τι θα επέβαλλε ο ισοδύναμος ομογενής αγωγός στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

Επίσης παρατηρούμε την ομοιότητα της στη μορφή του αναπτύγματος που δίνει τα ηλεκτρικά δυναμικά των ελλειψοειδών φλοιών (3.56), με την αντίστοιχη σχέση για τους σφαιρικούς φλοιούς (2.171). Είναι κοινή τόσο η υπέρθεση των δυναμικών, η έκφρασή τους σε εσωτερικές αρμονικές αλλά και η εξάρτηση από την πηγή.

Τέλος, και εδώ όπως και στο σφαιρικό πρότυπο, η αυθαίρετη σταθερά g_0^1 αντανακλά την αυθαίρεσία του σημείου αναφοράς ως προς το οποίο καταγράφονται οι διαφορές του δυναμικού. Στη συνέχεια θα επεξεργαστούμε περαιτέρω την έκφραση (3.47), μιας και το εξωτερικό ηλε-

κτρικό δυναμικό είναι αυτό που καταγράφεται σε ένα ηλεκτροεγκεφαλογράφημα. Συνεπώς με τη βοήθεια των εσωτερικών συναρτήσεων Lamé και των εσωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών μετασχηματίζουμε την (3.47) σε όρους των πιο εύχρηστων καρτεσιανών συντεταγμένων. Υπολογίζοντας λοιπόν τη δράση του τελεστή κλίσης στα $\mathbf{IE}_n^m$ και στα E_n^m , προκύπτει η ακόλουθη αναλυτική μορφή των u εκφρασμένη σε καρτεσιανές συντεταγμένες και ελλειπτικά ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}
u(\rho, \mu, \nu) = & g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \frac{3}{4\pi s_1 s_2 s_3} \sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_m}{G_{3,1}^m} \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(s_1)} \\
& - \frac{5}{8\pi s_1 s_2 s_3 (\Lambda_s - \Lambda'_s)} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left[\frac{1}{G_{3,2}^1} \frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(s_1)} \frac{\mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_s (\Lambda_s - s_m^2)} - \frac{1}{G_{3,2}^2} \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(s_1)} \frac{\mathbf{IE}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda'_s (\Lambda'_s - s_m^2)} \right] \\
& + \frac{15}{4\pi s_1 s_2 s_3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_i x_{0j} x_i x_j}{G_{3,2}^{6-i-j} (s_i^2 + s_j^2)} \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(s_1)} + O(el_3)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

όπου $O(el_3)$ είναι οι ελλειψοειδείς όροι, ίσοι ή μεγαλύτεροι του τρίτου.

Οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda_s \\ \Lambda'_s \end{matrix} \right\} = s_1^2 - \frac{1}{3} (h_2^2 + h_3^2) \pm \frac{2}{3} (h_1^4 + h_2^2 h_3^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.58}$$

ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{m=1}^3 \frac{1}{\Lambda_s - s_m^2} = 0 \tag{3.59}$$

και δημιουργούν τα σταθερά δυαδικά

$$\tilde{\Lambda}_s = \frac{1}{G_{3,2}^1} \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{\Lambda_s - s_m^2} \tag{3.60}$$

$$\tilde{\Lambda}'_s = \frac{1}{G_{3,2}^2} \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{\Lambda'_s - s_m^2}. \tag{3.61}$$

Συνεπώς σε μορφή δυαδικών πεδίων

$$\tilde{\mathbf{A}}(\rho) = \frac{3}{4\pi s_1 s_2 s_3} \sum_{m=1}^3 \frac{1}{G_{3,1}^m} \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(s_1)} \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m, \tag{3.62}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = -\frac{5}{8\pi s_1 s_2 s_3 (\Lambda_s - \Lambda'_s)} \left[\frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(s_1)} \frac{\tilde{\Lambda}_s}{\Lambda_s} \mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}) - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(s_1)} \frac{\tilde{\Lambda}'_s}{\Lambda'_s} \mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}) \right] \quad (3.63)$$

και του τετραδικοῦ πεδίου

$$\tilde{\Gamma}(\rho) = \frac{15}{4\pi s_1 s_2 s_3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{1}{G_{3,2}^{6-i-j}} \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(s_1)} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j}{s_i^2 + s_j^2} \quad (3.64)$$

ξαναγράφουμε το ηλεκτρικό πεδίο από την (3.47) ως

$$u(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Gamma}(\rho) : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + O(el_3) \quad (3.65)$$

όπου η διπλή συστολή ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}). \quad (3.66)$$

Η χρήση του πολυαδικοῦ συμβολισμού στην έκφραση του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού παρέχει το πλεονέκτημα μιας ενοποιημένης και συμπαγούς μορφής στην οποία η πηγή αναγνωρίζεται με έναν ευδιάκριτο τρόπο. Στην πραγματικότητα τα πολυαδικά πεδία $\tilde{\mathbf{A}}(\rho)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$, $\tilde{\Gamma}(\rho)$ περιέχουν όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγωγού, ενώ η ροπή και η θέση της πηγής προκύπτει από αυτά μέσω απλής και διπλής συστολής.

Θα συνεχίσουμε στην επόμενη παράγραφο επεξεργαζόμενοι περαιτέρω τα ηλεκτρικά δυναμικά, όπως δίνονται από τις σχέσεις (3.47) - (3.51), με σκοπό να τα αναγάγουμε σε αντίστοιχες μορφές γνωστών αποτελεσμάτων.

3.3 Φυσικοί εκφυλισμοί

Σκοπός μας εδώ είναι να ανακτήσουμε τα αποτελέσματα (3.47) - (3.51) για τα πεδία των ηλεκτρικών δυναμικών στις τέσσερις περιοχές του ελλειψοειδούς προτύπου, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το πρότυπο του ενός φλοιού [38]. Σύμφωνα με το συμβολισμό της παρούσας εργασίας τα αντίστοιχα αποτελέσματα γίνονται

$$u_1(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(s_1)} \frac{1}{S_n^m} \frac{1}{G_{1,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho > s_1, \quad (3.67)$$

$$u_{1,s}(\mathbf{r}) = u_1(s_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, s_1) \frac{1}{G_{1,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad c_1 < \rho < s_1, \quad (3.68)$$

$$u_{1,c}(\mathbf{r}) = u_{1,s}(c_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, c_1) \frac{1}{\sigma_c} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho_0 < \rho < c_1, \quad (3.69)$$

όπου ο δείκτης 1 στο δυναμικό u , δηλώνει τον αριθμό των φλοιών, έναν εν προκειμένω.

Προκειμένου να αναγάγουμε το ελλειψοειδές πρότυπο των τριών φλοιών στο ελλειψοειδές πρότυπο του ενός φλοιού, χρειάζεται να ενοποιήσουμε κατάλληλα τους χώρους V_s , V_b , V_f και V_c . Αυτό επιτυγχάνεται με τις τρεις ακόλουθες εναλλακτικές. Η πρώτη αντιστοιχεί στην επιλογή των ορίων

$$\sigma_f \rightarrow \sigma_b \rightarrow \sigma_s, \quad (3.70)$$

ενώ η αγωγιμότητα του πυρήνα παραμένει σ_c .

Η δεύτερη επιλογή αντιστοιχεί στο

$$\sigma_b \rightarrow \sigma_s, \quad (3.71)$$

$$\sigma_f \rightarrow \sigma_c, \quad (3.72)$$

και η τρίτη προκύπτει αν θεωρήσουμε ότι

$$\sigma_b \rightarrow \sigma_f \rightarrow \sigma_c, \quad (3.73)$$

Οποιαδήποτε από τις τρεις επιλογές ακολουθήσουμε, μπορούμε να ανακτήσουμε τα αποτελέσματα για το ελλειψοειδές πρότυπο του ενός φλοιού. Ενδεικτικά ακολουθούμε την πρώτη που γεωμετρικά αντιστοιχεί σε

$$f_i \rightarrow b_i \rightarrow s_i, \quad (3.74)$$

και συμβολίζεται με $3sh \rightarrow 1sh$. Σαν συνέπεια από τις (3.53) και (3.54) προκύπτει ότι

$$\lim_{3sh \rightarrow 1sh} (G_{1,n}^m) = \lim_{3sh \rightarrow 1sh} (G_{2,n}^m) = \sigma_s \quad (3.75)$$

και από την (3.55) ότι

$$\lim_{3sh \rightarrow 1sh} (G_{3,n}^m) = \sigma_c + (\sigma_c - \sigma_s) \left(I_n^m(c_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{C_n^m} \right) C_n^m \quad (3.76)$$

που είναι ο όρος αγωγιμότητας για το πρότυπο του ενός φλοιού.

Το αποτέλεσμα αυτό εξηγεί την απαίτηση ότι ο $G_{3,n}^m$ παίζει τον ρόλο του όρου αγωγιμότητας στην περίπτωση του προτύπου του ενός φλοιού, ενσωματώνοντας τόσο τη γεωμετρία, όσο και τη φυσική των διαφορετικών αγωγιμοτήτων. Υπό αυτές τις αναγωγές οι (3.48), (3.49) και (3.50) εκφυλίζονται στις

$$\lim_{3sh \rightarrow 1sh} u_f(\mathbf{r}) = \lim_{3sh \rightarrow 1sh} u_b(\mathbf{r}) = \lim_{3sh \rightarrow 1sh} u_s(\mathbf{r}) = u_{1,s}(\mathbf{r}) \quad (3.77)$$

και οι (3.47), (3.51) δίνουν αντίστοιχα

$$\lim_{3sh \rightarrow 1sh} u(\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) \quad (3.78)$$

και

$$\lim_{3sh \rightarrow 1sh} u_c(\mathbf{r}) = u_{1,c}(\mathbf{r}). \quad (3.79)$$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) και (3.51) με τις (3.67), (3.68) και (3.69), γίνεται φανερό ότι η επίδραση της παρουσίας της ανομοιογένειας των φλοιών στα πεδία των ηλεκτρικών δυναμικών ενσωματώνεται στον παράγοντα αγωγιμότητας, πολλαπλασιαζόμενο με κάθε πολυπολικό όρο, αφήνοντας την υπόλοιπη δομή σταθερή. Η παρατήρηση αυτή ενισχύεται στη συνέχεια, όταν αναγάγουμε το πρότυπό μας σε αυτό της απουσίας οπουδήποτε ανομοιογενούς φλοιού που να καλύπτει τον αγωγό πυρήνα. Πραγματικά, παρατηρούμε ότι το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, τόσο στο πρότυπο των τριών όσο και σε αυτό του ενός φλοιού παρουσιάζει την ίδια δομή. Επιπλέον, όλες οι επιδράσεις των τριών φλοιών ενσωματώνονται στον παράγοντα αγωγιμότητας πολλαπλασιαζόμενο με κάθε πολυπολικό όρο.

Στη συνέχεια ανακτούμε από τα αντίστοιχα αποτελέσματα (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) και (3.51) για τα πεδία των ηλεκτρικών δυναμικών στο πρότυπο των τριών φλοιών, τα αποτελέσματα για το απλό πρότυπο του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού αγωγιμότητας σ . Όπως έχει αποδειχθεί στο [40] και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της παρούσας εργασίας, το εξωτερικό δυναμικό του ομογενούς αγωγού έχει τη μορφή

$$u_0(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(s_1)} \frac{1}{S_n^m} \frac{1}{\sigma} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.80)$$

ενώ το εσωτερικό δυναμικό είναι

$$u_{0,s}(\mathbf{r}) = u_0(s_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, s_1) \frac{1}{\sigma} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho_0 < \rho < s_1 \quad (3.81)$$

όπου ο δείκτης 0 στα δυναμικά u , δηλώνει την απουσία των φλοιών γύρω από τον πυρήνα. Προκειμένου να αναγάγουμε το πρότυπο των τριών φλοιών στο ελλειψοειδή ομογενή αγωγό, πρέπει να ενοποιήσουμε τους χώρους V_s , V_b , V_f και V_c . Αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας τα όρια

$$\sigma_c \rightarrow \sigma_f \rightarrow \sigma_b \rightarrow \sigma_s = \sigma \quad (3.82)$$

που γεωμετρικά μεταφράζεται στο

$$c_i \rightarrow f_i \rightarrow b_i \rightarrow s_i \quad (3.83)$$

για $i = 1, 2, 3$ και συμβολίζεται με $3sh \rightarrow hom$. Σαν συνέπεια των (3.53), (3.54) και (3.55) προκύπτει

$$\lim_{3sh \rightarrow hom} (G_{1,n}^m) = \lim_{3sh \rightarrow hom} (G_{2,n}^m) = \lim_{3sh \rightarrow hom} (G_{3,n}^m) = \sigma \quad (3.84)$$

όπου σ είναι η σταθερή αγωγιμότητα του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού. Το αποτέλεσμα αυτό ενισχύει τον ισχυρισμό ότι το $G_{3,n}^m$ ανάγεται στην περίπτωση του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού.

Υπό αυτές τις αναγωγές οι (3.48), (3.49), (3.50) και (3.51) εκφυλίζονται στην

$$\lim_{3sh \rightarrow hom} u_c(\mathbf{r}) = \lim_{3sh \rightarrow hom} u_f(\mathbf{r}) = \lim_{3sh \rightarrow hom} u_b(\mathbf{r}) = \lim_{3sh \rightarrow hom} u_s(\mathbf{r}) = u_{0,s}(\mathbf{r}). \quad (3.85)$$

και η (3.47) στην

$$\lim_{3sh \rightarrow hom} u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}). \quad (3.86)$$

Με βάση τα παραπάνω όρια, ανάγουμε επίσης και τη μορφή (3.57) που αφορά στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό των τριών ελλειψοειδών φλοιών σε όρους καρτεσιανών συντεταγμένων,

στο αντίστοιχο δυναμικό για το ομογενή ελλειψοειδή αγωγό [38]. Σε όρους λοιπόν της παρούσας διατριβής προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 u(\rho, \mu, \nu) = & g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \frac{3}{4\pi\sigma s_1 s_2 s_3} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(s_1)} \\
 & - \frac{5}{8\pi\sigma s_1 s_2 s_3 (\Lambda_s - \Lambda'_s)} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left[\frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(s_1)} \frac{\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_s (\Lambda_s - s_m^2)} - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(s_1)} \frac{\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda'_s (\Lambda'_s - s_m^2)} \right] \\
 & + \frac{15}{4\pi\sigma s_1 s_2 s_3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_i x_{0j} x_i x_j}{(s_i^2 + s_j^2)} \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(s_1)} + O(el_3)
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

όπου $O(el_3)$ είναι οι ελλειψοειδείς όροι, ίσοι ή μεγαλύτεροι του τρίτου.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τα πεδία του ηλεκτρικού δυναμικού για την περίπτωση του ελλειψοειδούς προτύπου των δύο φλοιών [29]. Αυτό θα επιτευχθεί με την αναγωγή των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για το πρότυπο των τριών φλοιών, χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα όρια για τους παράγοντες αγωγιμότητας. Όπως αποδεικνύεται παρακάτω, στο ανάπτυγμα του εξωτερικού δυναμικού, ο παράγοντας αγωγιμότητας για αυτήν την περίπτωση είναι ο $G_{2,n}^m$, όπως δίνεται από την (3.54). Πραγματικά θεωρώντας το όριο

$$\sigma_c \rightarrow \sigma_f \tag{3.88}$$

που γεωμετρικά μεταφράζεται στο

$$c_i \rightarrow f_i \tag{3.89}$$

για $i = 1, 2, 3$ και συμβολίζεται με $3sh \rightarrow 2sh$, παρατηρούμε ότι ο $G_{1,n}^m$ παραμένει ως έχει, ενώ από την (3.53) προκύπτει

$$\lim_{3sh \rightarrow 2sh} (G_{1,n}^m) = \sigma_b + (\sigma_b - \sigma_s) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m = G_{1,n}^m. \tag{3.90}$$

Επιπλέον οι εξισώσεις (3.54) και (3.55) παρέχουν την έκφραση

$$\begin{aligned}
 \lim_{3sh \rightarrow 2sh} (G_{2,n}^m) &= \lim_{3sh \rightarrow 2sh} (G_{3,n}^m) = \\
 & \sigma_f + (\sigma_f - \sigma_b) \left(I_n^m(f_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{F_n^m} \right) F_n^m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\sigma_b - \sigma_s) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m \\
& + \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} I_n^m(f_1, b_1) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m F_n^m = G_{2,n}^m \quad (3.91)
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό ότι ο $G_{2,n}^m$ είναι ακριβώς ο παράγοντας αγωγιμότητας γι το πρότυπο των δύο φλοιών. Υπό αυτές τις αναγωγές οι (3.47), (3.48) και (3.49) δίνουν τα όρια

$$\lim_{3sh \rightarrow 2sh} u(\mathbf{r}) = u_2(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(s_1)} \frac{1}{S_n^m} \frac{1}{G_{2,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathcal{I}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathcal{I}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad (3.92)$$

για $\rho > s_1$

$$\lim_{3sh \rightarrow 2sh} u_s(\mathbf{r}) = u_{2,s}(\mathbf{r}) = u_2(s_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, s_1) \frac{1}{G_{2,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathcal{I}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathcal{I}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad (3.93)$$

για $b_1 < \rho < s_1$

$$\lim_{3sh \rightarrow 2sh} u_b(\mathbf{r}) = u_{2,b}(\mathbf{r}) = u_{2,s}(b_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, b_1) \frac{1}{\sigma_b} \frac{G_{1,n}^m}{G_{2,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathcal{I}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathcal{I}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad (3.94)$$

για $f_1 < \rho < b_1$ ενώ οι (3.50) και (3.51) εκφυλίζονται στη

$$\begin{aligned}
\lim_{3sh \rightarrow 2sh} u_c(\mathbf{r}) &= \lim_{3sh \rightarrow 2sh} u_f(\mathbf{r}) = u_{2,f}(\mathbf{r}) = \\
&= u_{2,b}(f_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, f_1) \frac{1}{\sigma_f} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathcal{I}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathcal{I}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.95)
\end{aligned}$$

Συμπερασματικά, καταλήγουμε στις παρακάτω παρατηρήσεις για τις παραπάνω τέσσερις περιπτώσεις. Το εξωτερικό δυναμικό για την περίπτωση του προτύπου των τριών ελλειψοειδών φλοιών δίνεται στην (3.47), ενώ για τις περιπτώσεις των δύο φλοιών, του ενός φλοιού καθώς και του ελλειψοειδούς ομογενούς προτύπου δίνονται από τις (3.92), (3.67) και (3.80) αντίστοιχα. Παρατηρώντας τις μορφές αυτές, είναι σημαντικό να επισημάνει κανείς τον ρόλο των σταθερά αναγομένων παραγόντων αγωγιμότητας σε κάθε αποτέλεσμα. Με όμοιο τρόπο, εξάγονται περίπλοκα αποτελέσματα για τα εσωτερικά ηλεκτρικά δυναμικά, όπου όλοι οι παράγοντες αγωγιμότητας υπεισέρχονται στα αποτελέσματα, επιβάλλοντας μια συγκεκριμένη επίδραση σε κάθε δυναμικό.

3.4 Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για πεπερασμένο αριθμό ελλειψοειδών φλοιών

Προκειμένου να προβούμε σε συμπεράσματα για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό θα κινηθούμε με όμοιο τρόπο, όπως στην περίπτωση του σφαιρικού προτύπου (βλ. παράγραφο **2.5.3**). Τα εξωτερικά ηλεκτρικά δυναμικά τεσσάρων μαθηματικών προτύπων έχουν ως εξής: το ελλειψοειδές (ομογενής αγωγός), το ελλειψοειδές με έναν φλοιό (δύο ομοεστιακά ελλειψοειδή), το ελλειψοειδές με δύο φλοιούς (τρία ομοεστιακά ελλειψοειδή), και τέλος το ελλειψοειδές με τρεις φλοιούς, (ανομοιογενής αγωγός του προτύπου μας). Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι τα προβλήματα του ομογενούς ελλειψοειδούς και αυτού του ενός φλοιού με την παρουσία της πηγής στον πυρήνα, έχουν επιλυθεί αναλυτικά στα [38, 39] αντίστοιχα, αλλά τα γράφουμε με όρους της παρούσας διατριβής. Θα καταγράψουμε λοιπόν τα αποτελέσματα για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, προκειμένου να προβούμε σε συγκρίσεις. Για την ευκολότερη κατανόηση των σχέσεων που θα ακολουθήσουν, θα χρησιμοποιήσουμε αριθμητικό συμβολισμό για τις αγωγιμότητες και τους ημιάξονες των προτύπων, όπου ο κάτω δείκτης αναφέρεται στους ημιάξονες και ο πάνω στον φλοιό. Στον Πίνακα 3.1 δίνονται τα γεωμετρικά και τα φυσικά στοιχεία των προτύπων όπως αυτά συσχετίζονται με τα ήδη γνωστά. Συνεπώς το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για κάθε περίπτωση στο ελλειψοειδές δίνεται από

$$u_{el.ish}(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(\alpha_1^{(1)})} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(\alpha_1^{(1)})} \frac{1}{A_{1,n}^m} \frac{1}{G_{i,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho > \alpha_1^{(1)}, \quad (3.96)$$

όπου

$$A_{i,n}^m = E_n^m(\alpha_1^{(i)}) E_n^{m'}(\alpha_1^{(i)}) \alpha_2^{(i)} \alpha_3^{(i)} \quad (3.97)$$

για $i = 1, 2, 3, 4$ αντιστοιχούν στα πρότυπα του ομογενούς ελλειψοειδούς, του ενός ελλειψοειδούς φλοιού, των δύο ελλειψοειδών φλοιών και των τριών ελλειψοειδών φλοιών και οι όροι αγωγιμοτήτων έχουν ως εξής: για το ομογενές

$$G_{0,n}^m = \sigma_1 \quad (3.98)$$

$$G_{1,n}^m = \sigma_2 + (\sigma_2 - \sigma_1) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m \quad (3.99)$$

$$G_{2,n}^m = \sigma_3 + (\sigma_3 - \sigma_2) \left(I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{3,n}^m} \right) A_{3,n}^m$$

ομογενές	$u_{el.0sh}$	$\sigma_1 = \sigma$ $\alpha_1^{(1)} = s_1$ $\alpha_2^{(1)} = s_2$ $\alpha_3^{(1)} = s_3$				αγωγιμότητα ημιάξονας 1 ημιάξονας 2 ημιάξονας 3
1 φλοιός	$u_{el.1sh}$	σ_1 $\alpha_1^{(1)}$ $\alpha_2^{(1)}$ $\alpha_3^{(1)}$	σ_2 $\alpha_1^{(2)}$ $\alpha_2^{(2)}$ $\alpha_3^{(2)}$			αγωγιμότητες ημιάξονας 1 ημιάξονας 2 ημιάξονας 3
2 φλοιοί	$u_{el.2sh}$	σ_1 $\alpha_1^{(1)}$ $\alpha_2^{(1)}$ $\alpha_3^{(1)}$	σ_2 $\alpha_1^{(2)}$ $\alpha_2^{(2)}$ $\alpha_3^{(2)}$	σ_3 $\alpha_1^{(3)}$ $\alpha_2^{(3)}$ $\alpha_3^{(3)}$		αγωγιμότητες ημιάξονας 1 ημιάξονας 2 ημιάξονας 3
3 φλοιοί	$u_{el.3sh}$	$\sigma_1 = \sigma_s$ $\alpha_1^{(1)} = s_1$ $\alpha_2^{(1)} = s_2$ $\alpha_3^{(1)} = s_3$	$\sigma_2 = \sigma_b$ $\alpha_1^{(2)} = b_1$ $\alpha_2^{(2)} = b_2$ $\alpha_3^{(2)} = b_3$	$\sigma_3 = \sigma_f$ $\alpha_1^{(3)} = f_1$ $\alpha_2^{(3)} = f_2$ $\alpha_3^{(3)} = f_3$	$\sigma_4 = \sigma_c$ $\alpha_1^{(4)} = c_1$ $\alpha_2^{(4)} = c_2$ $\alpha_3^{(4)} = c_3$	αγωγιμότητες ημιάξονας 1 ημιάξονας 2 ημιάξονας 3

Πίνακας 3.1: Συμβολισμός ακτίνων και αγωγιμοτήτων για το στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό μέχρι και τριών φλοιών

$$\begin{aligned}
& + (\sigma_2 - \sigma_1) \left(I_n^m \left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)} \right) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m \\
& + \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2} I_n^m \left(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(2)} \right) \left(I_n^m \left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)} \right) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m A_{3,n}^m, \quad (3.100)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
G_{3,n}^m &= \sigma_4 + (\sigma_4 - \sigma_3) \left(I_n^m \left(\alpha_1^{(4)}, \alpha_1^{(1)} \right) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{4,n}^m} \right) A_{4,n}^m \\
& + (\sigma_3 - \sigma_2) \left(I_n^m \left(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(1)} \right) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{3,n}^m} \right) A_{3,n}^m \\
& + (\sigma_2 - \sigma_1) \left(I_n^m \left(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)} \right) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_2)}{\sigma_3} I_n^m(\alpha_1^{(4)}, \alpha_1^{(3)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{3,n}^m} \right) A_{3,n}^m A_{4,n}^m \\
& + \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2} I_n^m(\alpha_1^{(4)}, \alpha_1^{(2)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m A_{4,n}^m \\
& + \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(2)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m A_{3,n}^m \\
& + \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_3 \sigma_2} I_n^m(\alpha_1^{(4)}, \alpha_1^{(3)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) \\
& \quad \left(I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(2)}) - \frac{1}{A_{3,n}^m} \right) A_{2,n}^m A_{3,n}^m A_{4,n}^m \tag{3.101}
\end{aligned}$$

οι σχέσεις (3.96) - (3.101) είναι πολύ χρήσιμες για οποιαδήποτε αναγωγή και σύγκριση μεταξύ των προτύπων των φλοιών. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της (3.96) για $i = 1, 2, 3$ με αυτά της (3.96) για $i = 0$ γίνεται φανερό ότι η επίδραση της παρουσίας των φλοιών στο εξωτερικό πεδίο των ηλεκτρικών δυναμικών ενσωματώνεται στον παράγοντα αγωγιμότητας $G_{i,n}^m$ πολλαπλασιαζόμενος με κάθε πολυπολικό όρο, αφήνοντας την υπόλοιπη δομή σταθερή.

3.5 Γεωμετρικός εκφυλισμός στη σφαίρα

Σκοπός μας εδώ είναι να αναγάγουμε την ανισότροπη ελλειψοειδή γεωμετρία στην αντίστοιχη σφαιρική. Θα συμβολίσουμε την οριακή διαδικασία αυτή με $el \rightarrow sr$. Συνεπώς τα τέσσερα ομοεστιακά ελλειψοειδή στο όριο $el \rightarrow sr$ ανάγονται σε τέσσερις ομόκεντρες σφαίρες

$$\lim_{el \rightarrow sr} s_i = s > b = \lim_{el \rightarrow sr} b_i > \lim_{el \rightarrow sr} f_i = f > c = \lim_{el \rightarrow sr} c_i \tag{3.102}$$

Από την (Β'23) του Παραρτήματος Β' προκύπτει άμεσα ότι

$$\lim_{el \rightarrow sr} \Lambda = \lim_{el \rightarrow sr} \Lambda' = s^2 = b^2 = f^2 = c^2 \tag{3.103}$$

Από τις (3.5) - (3.7) έπεται ότι

$$\lim_{el \rightarrow sr} h_i = 0 \quad (3.104)$$

η οποία γεωμετρικά απεικονίζεται από την κατά συνεχή μετατόπιση των εστιών του ελλειψοειδούς προς το κέντρο της σφαίρας.

Τα διαστήματα μεταβολής των γωνιακών μεταβλητών μ και ν , σε συνδυασμό με την (3.104) έχουν ως συνέπεια στο όριο $el \rightarrow sr$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mu = \lim_{el \rightarrow sr} \nu = 0. \quad (3.105)$$

Για να δούμε πως συμπεριφέρεται η ακτινική μεταβλητή ρ στο σφαιρικό όριο, αθροίζουμε κατά μέλη τις (B'.1), (B'.2) και (B'.22) του Παραρτήματος B', αφού υψώσουμε την κάθε μια στο τετράγωνο. Με κατάλληλους αλγεβρικούς χειρισμούς προκύπτει η σχέση

$$\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + h_2^2 + h_3^2 \quad (3.106)$$

η οποία λόγω των 3.103, 3.104 δίνει το όριο

$$\lim_{el \rightarrow sr} \rho = r. \quad (3.107)$$

Επιπλέον ο ορισμός (B'.11) στο Παράρτημα B' των I_n^m , καθώς και οι (B'.18) - (B'.22) οδηγούν με τη βοήθεια των (3.103), (3.104) και (3.107) στην

$$\lim_{el \rightarrow sr} I_n^m(\rho) = \frac{1}{(2n+1)r^{2n+1}} \quad (3.108)$$

για $n = 1, 2, \dots$ $m = 1, 2, \dots, 2n+1$.

Από τη μορφή των συναρτήσεων Lamé [18] προκύπτει άμεσα ότι

$$\lim_{el \rightarrow sr} E_n^m(\rho) = r^n \quad (3.109)$$

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε τις απροσδιοριστίες που συμβαίνουν κατά την αναγωγική διαδικασία, χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες ταυτότητες [18]

$$\frac{IE_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda'_s - s_1^2} = (\Lambda'_s - s_2^2)(x_3^2 - x_1^2) + (\Lambda'_s - s_3^2)(x_2^2 - x_1^2) + (\Lambda'_s - s_2^2)(\Lambda'_s - s_3^2) \quad (3.110)$$

$$\frac{IE_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda'_s - s_2^2} = (\Lambda'_s - s_1^2)(x_3^2 - x_2^2) + (\Lambda'_s - s_3^2)(x_1^2 - x_2^2) + (\Lambda'_s - s_1^2)(\Lambda'_s - s_3^2) \quad (3.111)$$

$$\frac{\mathcal{E}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda'_s - s_3^2} = (\Lambda'_s - s_1^2)(x_2^2 - x_3^2) + (\Lambda'_s - s_2^2)(x_1^2 - x_3^2) + (\Lambda'_s - s_1^2)(\Lambda'_s - s_2^2). \quad (3.112)$$

Επίσης, μετά από αναλυτικούς χειρισμούς και τη χρήση των (3.110) - (3.112) οδηγούμαστε στη σχέση

$$\lim_{el \rightarrow sr} \frac{\mathcal{E}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda_s - \Lambda'_s)(\Lambda'_s - s_i^2)} = \frac{1}{2}(r^2 - 3x_i^2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.113)$$

Αντικαθιστώντας όπου Λ'_s με Λ_s και $\mathcal{E}_2^2(\rho, \mu, \nu)$ με $\mathcal{E}_2^1(\rho, \mu, \nu)$ στις (3.110) - (3.112) προκύπτουν αντίστοιχες ταυτότητες για το $\mathcal{E}_2^1(\rho, \mu, \nu)$.

Επιπλέον οι σχέσεις (3.43), (3.44), (3.45) και (3.46) στο σφαιρικό όριο γράφονται αντίστοιχα

$$\lim_{el \rightarrow sr} S_n^m = ns^{2n+1} \quad (3.114)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} B_n^m = nb^{2n+1} \quad (3.115)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} F_n^m = nf^{2n+1} \quad (3.116)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} C_n^m = nc^{2n+1}. \quad (3.117)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα καρτεσιανά αναπτύγματα των $\mathcal{E}_n^m$ και E_n^m όπως δίνονται στο Παράρτημα Β' από τις (Β'.37) - (Β'.41) αντίστοιχα στις εκφράσεις (3.47) και (3.55) προκύπτει η καρτεσιανή μορφή του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού για τους τρεις πρώτους όρους στο όριο της σφαίρας

$$\lim_{el \rightarrow sr} u(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{s}{r} + \frac{3}{4\pi T_1 r^3} \sum_{i=1}^3 Q_i x_i - \frac{5}{8\pi T_2} \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^3 Q_i x_{0i} + \frac{15}{8\pi T_2} \frac{1}{r^5} \sum_{i,j=1}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (3.118)$$

όπου

$$T_1 = \sigma_c + (\sigma_f - \sigma_c) \frac{2}{3} \left(1 - \frac{c^3}{s^3}\right)$$

$$- (\sigma_f - \sigma_b) \frac{2}{3} \left(1 - \frac{f^3}{s^3}\right)$$

$$- (\sigma_b - \sigma_s) \frac{2}{3} \left(1 - \frac{b^3}{s^3}\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)}{\sigma_f} \frac{2}{9} \left(1 - \frac{c^3}{f^3}\right) \left(1 - \frac{f^3}{s^3}\right) \\
& + \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \frac{2}{9} \left(1 - \frac{c^3}{b^3}\right) \left(1 - \frac{b^3}{s^3}\right) \\
& - \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \frac{2}{9} \left(1 - \frac{f^3}{b^3}\right) \left(1 - \frac{b^3}{s^3}\right) \\
& - \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_f \sigma_b} \frac{2}{27} \left(1 - \frac{c^3}{f^3}\right) \left(2 + \frac{f^3}{b^3}\right) \left(1 - \frac{b^3}{s^3}\right)
\end{aligned} \tag{3.119}$$

και

$$\begin{aligned}
T_2 = & \sigma_c + (\sigma_f - \sigma_c) \frac{3}{5} \left(1 - \frac{c^5}{s^5}\right) - (\sigma_f - \sigma_b) \frac{3}{5} \left(1 - \frac{f^5}{s^5}\right) - (\sigma_b - \sigma_s) \frac{3}{5} \left(1 - \frac{b^5}{s^5}\right) \\
& + \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)}{\sigma_f} \frac{6}{25} \left(1 - \frac{c^5}{f^5}\right) \left(1 - \frac{f^5}{s^5}\right) \\
& + \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \frac{6}{25} \left(1 - \frac{c^5}{b^5}\right) \left(1 - \frac{b^5}{s^5}\right) \\
& - \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} \frac{6}{25} \left(1 - \frac{f^5}{b^5}\right) \left(1 - \frac{b^5}{s^5}\right) \\
& - \frac{(\sigma_f - \sigma_c)(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_f \sigma_b} \frac{6}{25} \left(1 - \frac{c^5}{f^5}\right) \left(3 + 2\frac{f^5}{b^5}\right) \left(1 - \frac{b^5}{s^5}\right)
\end{aligned} \tag{3.120}$$

πλέον μπορούμε να συγκρίνουμε το ανάπτυγμα του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού μέχρι και το δεύτερο όρο (3.119) με το αντίστοιχο της σφαίρας (2.163). Προκειμένου να προβούμε στην σύγκριση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε δυαδικό συμβολισμό για την παραπάνω έκφραση, ο οποίος θα μετατρέψει την (3.119) στην παρακάτω συμπαγή μορφή για το ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό σφαιρικού αγωγού τριών φλοιών

$$\lim_{el \rightarrow sr} u(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{s}{r} + \frac{3}{4\pi T_1} \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{5}{8\pi T_2} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{3.121}$$

και είναι όμοια με την έκφραση (2.172), αφού από τις (2.173), (2.174), (3.120) και (3.121) είναι $D_{3,1}^m = T_1$ και $D_{3,2}^m = T_2$.

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα (3.121) με το αντίστοιχο ελλειψοειδές (3.65), εκτιμάμε το υψηλότερο επίπεδο περιπλοκότητας που παρουσιάζει η ελλειψοειδής λύση. Πραγματικά, σε κάθε

πολυαδική ποσότητα, ο όρος της αγωγιμότητας που περιέχει τη γεωμετρία και τη φυσική του αγωγού ποικίλλει. Από την άλλη πλευρά, ο όρος αγωγιμότητας αλλάζει μόνο από τον όρο n του αντίστοιχου πολυπολικού όρου, αντανακλώντας με τον τρόπο αυτό τη γεωμετρική απλότητα του σφαιρικού προτύπου.

Κεφάλαιο 4

Μαγνητοεγκεφαλογραφία σε ελλειψοειδή γεωμετρία

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό υπολογίζεται αναλυτικά το μαγνητικό πεδίο μέχρι προσέγγιση τετραπόλου στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς στρωματοποιημένου προτύπου, δηλαδή των τεσσάρων ομοεστιακών ελλειψοειδών φλοιών διαφορετικής αγωγιμότητας του ανθρωπίνου εγκεφάλου - πρότυπο τριών ελλειψοειδών φλοιών. Η ανομοιογένεια, όπως επιβάλλεται από αυτές τις τέσσερις περιοχές και η ανισοτροπία, όπως υπαγορεύεται από την ελλειψοειδή γεωμετρία, παρέχουν το πιο ρεαλιστικό φυσικό και γεωμετρικό μοντέλο του εγκεφάλου, για το οποίο είναι δυνατή μια αναλυτική λύση. Αποδεικνύεται ότι σε αντίθεση με το σφαιρικό πρότυπο, όπου οι φλοιοί διαφορετικής αγωγιμότητας είναι μαγνητικά άορατοι, το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής στην ελλειψοειδή γεωμετρία εξαρτάται ισχυρά από τους παράγοντες αγωγιμότητας που αναλύσαμε στο τρίτο κεφάλαιο, που αντανακλούν τα φυσικά και τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά. Το γεγονός ότι οι σφαιρικοί φλοιοί διαφορετικής αγωγιμότητας είναι άορατοι στάθηκε η αιτία να δημιουργηθεί η γενική ιδέα ότι η βιομαγνητική ευθεία λύση δεν εξαρτάται από τους παράγοντες αγωγιμότητας. Όπως αποδεικνύεται, αυτό δεν αληθεύει, αν εγκαταλειφθεί η σφαιρική γεωμετρία. Η παρουσία των φλοιών διαφορετικής αγωγιμότητας μπορεί να αναγνωριστεί σαν μια διαταραχή του αντίστοιχου διανύσματος του διπόλου για το ομογενές πρότυπο. Στην παράγραφο 4.3 περιγράφονται οι εκφυλισμένες περιπτώσεις, όπου είτε οι διαφορετικές αγωγιμότητες στους φλοιούς εξαφανίζονται, είτε η ελλειψοειδής γεωμετρία εκφυλίζεται στην σφαιρική.

4.2 Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

Για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (1.71), η οποία με τη βοήθεια των (2.133), (2.138) και λαμβάνοντας υπόψη ότι το $\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\boldsymbol{\rho}}'$ είναι το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{r}'$ της ελλειψοειδούς επιφάνειας S_i , όπου $i = c, f, b, s$ σε καθένα από τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_c} [\sigma_f u_f(\mathbf{r}') - \sigma_c u_c(\mathbf{r}')] \hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_f} [\sigma_b u_b(\mathbf{r}') - \sigma_f u_f(\mathbf{r}')] \hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ & + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_b} [\sigma_s u_s(\mathbf{r}') - \sigma_b u_b(\mathbf{r}')] \hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_s} \sigma_s u_s(\mathbf{r}') \hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (4.1) \end{aligned}$$

Η εξίσωση (4.1) δείχνει την επίδραση του διπόλου $\mathbf{Q}$ στον άπειρο αγωγίμο χώρο καθώς και την επίδραση των χωρικών ρευμάτων σε κάθε κοινή επιφάνεια των περιοχών του κεφαλιού. Τα ηλεκτρικά δυναμικά u_c, u_f, u_b, u_s επιλύουν - όπως είδαμε στο τρίτο κεφάλαιο - τα προβλήματα συνοριακών τιμών (3.8) - (3.21) στις κατάλληλες κάθε φορά περιοχές. Για τις ανάγκες που επιβάλλει ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου ξαναγράφουμε τα αναπτύγματα των ηλεκτρικών δυναμικών (3.48) - (3.51) ως εξής

$$u_s(\mathbf{r}) = g_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[I_n^m(\rho, s_1) + \frac{1}{S_n^m} \right] \frac{1}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbf{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (4.2)$$

για το $\mathbf{r}$ στην περιοχή του δέρματος V_s , δηλαδή για $b_1 \leq \rho \leq s_1$

$$u_b(\mathbf{r}) = g_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[I_n^m(\rho, b_1) \frac{G_{1,n}^m}{\sigma_b} + I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} \right] \frac{1}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbf{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (4.3)$$

για το $\mathbf{r}$ στην περιοχή του οστού V_b , δηλαδή για $f_1 \leq \rho \leq b_1$

$$u_f(\mathbf{r}) = g_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[I_n^m(\rho, f_1) \frac{G_{2,n}^m}{\sigma_f} + I_n^m(f_1, b_1) \frac{G_{1,n}^m}{\sigma_b} + I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (4.4)$$

για το $\mathbf{r}$ στην περιοχή του εγκεφαλονωτιαίου υγρού V_f , δηλαδή για $c_1 \leq \rho \leq f_1$ και τέλος

$$u_c(\mathbf{r}) = g_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[I_n^m(\rho, c_1) \frac{G_{3,n}^m}{\sigma_c} + I_n^m(c_1, f_1) \frac{G_{2,n}^m}{\sigma_f} + I_n^m(f_1, b_1) \frac{G_{1,n}^m}{\sigma_b} + I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (4.5)$$

για το $\mathbf{r}$ στην περιοχή του εγκεφαλικού ιστού V_f , δηλαδή για $r_0 \leq \rho \leq c_1$.

Επανερχόμενοι στον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου από τη σχέση (4.1), εισαγάγουμε σε αυτήν τις συνοριακές συνθήκες (3.9), (3.12), και (3.15), οπότε προκύπτει

$$\mathbf{B}_{el}(\mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} (\sigma_f - \sigma_c) \mathbf{I}_c(\mathbf{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} (\sigma_b - \sigma_f) \mathbf{I}_f(\mathbf{r})$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} (\sigma_s - \sigma_b) \mathbf{I}_b(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma_s \mathbf{I}_s(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

όπου τα ολοκληρώματα $\mathbf{I}_c, \mathbf{I}_f, \mathbf{I}_b, \mathbf{I}_s$ δίνονται από την

$$\mathbf{I}_i(\mathbf{r}) = \int_{S_i} u_i(\mathbf{r}') \hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds(\mathbf{r}'), \quad i = c, b, f, s. \quad (4.7)$$

Συνεπώς ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου προϋποθέτει τον υπολογισμό των τεσσάρων ολοκληρωμάτων στην (4.6) [13]. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε την πορεία του υπολογισμού καθενός από τα $\mathbf{I}_i$. Χρησιμοποιούμε πρώτα το ελλειψοειδές ανάπτυγμα της ποσότητας $\hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ για την αντίστοιχη επιφάνεια ολοκλήρωσης S_i [18]. Στην συνέχεια θεωρούμε το γινόμενο Cauchy του ελλειψοειδούς αναπτύγματος του αντίστοιχου ηλεκτρικού δυναμικού u από τις σχέσεις (4.2) - (4.5) στο S_i , επί του αναπτύγματος $\hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$. Τέλος, τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με χρήση της ορθογωνιότητας και των σταθερών κανονικοποίησης που δίνονται στις (B'.14), (B'.15).

Ας ξεκινήσουμε εκτελώντας αναλυτικά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\mathbf{I}_c$. Στην επιφάνεια S_c , το ανάπτυγμα γράφεται

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Big|_{\rho=c_1} = \ell_{c_1}(\mu', \nu') \left[\sum_{m=1}^3 \beta_m^c(\mathbf{r}) E_1^m(\mu') E_1^m(\nu') + \sum_{m=1}^5 \delta_m^c(\mathbf{r}) E_2^m(\mu') E_2^m(\nu') \right]$$

$$+O(ell'_3) \quad (4.8)$$

όπου $O(ell'_3)$ συμβολίζει τους ελλειψοειδείς όρους του $\mathbf{r}'$ τάξης υψηλότερης ή ίσης της τρίτης. Οι διανυσματικοί συντελεστές δίνονται από τις

$$\beta_m^c = 3 \frac{c_1 c_2 c_3}{h_1 h_2 h_3} \frac{h_m}{c_m} \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho), \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

$$\delta_1^c = -\frac{c_1 c_2 c_3}{3(\Lambda_c - \Lambda'_c)} \tilde{\Lambda}_c \times \tilde{\mathbf{F}}_c(\mathbf{r}) \quad (4.10)$$

$$\delta_2^c = \frac{c_1 c_2 c_3}{3(\Lambda_c - \Lambda'_c)} \tilde{\Lambda}'_c \times \tilde{\mathbf{F}}_c(\mathbf{r}) \quad (4.11)$$

$$\delta_3^c = \frac{c_1 c_2 c_3}{h_1 h_2 h_3^2} \left[\frac{c_2}{c_1} \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{c_1}{c_2} \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 \right] \times \tilde{\mathbf{F}}_c(\mathbf{r}) \quad (4.12)$$

$$\delta_4^c = \frac{c_1 c_2 c_3}{h_1 h_2^2 h_3} \left[\frac{c_3}{c_1} \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \frac{c_1}{c_3} \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 \right] \times \tilde{\mathbf{F}}_c(\mathbf{r}) \quad (4.13)$$

$$\delta_5^c = \frac{c_1 c_2 c_3}{h_1^2 h_2 h_3} \left[\frac{c_3}{c_2} \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \frac{c_2}{c_3} \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 \right] \times \tilde{\mathbf{F}}_c(\mathbf{r}) \quad (4.14)$$

όπου το διπλό γινόμενο $\times$ ορίζεται μεταξύ δυάδων διανυσμάτων ως εξής

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \quad (4.15)$$

και τα αντίστοιχα πολυαδικά ορίζονται

$$\tilde{\Lambda}_c = \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{\Lambda_c - c_m^2} \quad (4.16)$$

$$\tilde{\Lambda}'_c = \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{\Lambda'_c - c_m^2} \quad (4.17)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) = \sum_{m=1}^3 I_1^m(\rho) \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \quad (4.18)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_2(\rho) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \quad (4.19)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_c(\mathbf{r}) = -\frac{IF_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\Lambda}_c + \frac{IF_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\Lambda}'_c + 15\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} : \tilde{\mathbf{H}}_2(\rho). \quad (4.20)$$

Οι σταθερές Λ_c, Λ'_c ορίζονται από

$$\left. \begin{matrix} \Lambda_c \\ \Lambda'_c \end{matrix} \right\} = c_1^2 - \frac{1}{3} (h_2^2 + h_3^2) \pm \frac{2}{3} (h_1^4 + h_2^2 h_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

που είναι ρίζες της

$$\sum_{m=1}^3 \frac{1}{\Lambda_c - c_m^2} = 0 \quad (4.22)$$

και αντιστοιχούν στο ελλειψοειδές S_c .

Σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι τα τέσσερα ελλειψοειδή είναι ομοεστιακά, όπως αυτό επιβάλλεται από τις (3.5) - (3.7) και (4.21). Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός αυτό αποφαινόμαστε ότι οι όμοιες σταθερές $\Lambda_f, \Lambda'_f, \Lambda_b, \Lambda'_b, \Lambda_s, \Lambda'_s$, που αντιστοιχούν στα ελλειψοειδή S_f, S_b, S_s ορίζονται με όμοιο τρόπο, έτσι ώστε

$$\Lambda_c - c_1^2 = \Lambda_f - f_1^2 = \Lambda_b - b_1^2 = \Lambda_s - s_1^2 \quad (4.23)$$

$$\Lambda'_c - c_1^2 = \Lambda'_f - f_1^2 = \Lambda'_b - b_1^2 = \Lambda'_s - s_1^2 \quad (4.24)$$

και επιπλέον υπολογισμοί οδηγούν στις

$$\Lambda_c - \Lambda'_c = \Lambda_f - \Lambda'_f = \Lambda_b - \Lambda'_b = \Lambda_s - \Lambda'_s \quad (4.25)$$

$$\Lambda_c - c_m^2 = \Lambda_f - f_m^2 = \Lambda_b - b_m^2 = \Lambda_s - s_m^2, \quad m = 2, 3 \quad (4.26)$$

$$\Lambda'_c - c_m^2 = \Lambda'_f - f_m^2 = \Lambda'_b - b_m^2 = \Lambda'_s - s_m^2, \quad m = 2, 3. \quad (4.27)$$

Επομένως οι (4.16), (4.17) και (4.20) συνεπάγονται ότι τα αντίστοιχα δυαδικά, $\tilde{\Lambda}_f, \tilde{\Lambda}_b, \tilde{\Lambda}_s, \tilde{\Lambda}'_f, \tilde{\Lambda}'_b, \tilde{\Lambda}'_s$ ορίζονται αναφορικά ως προς τους ημιάξονες των ελλειψοειδών S_f, S_b, S_s , έτσι ώστε

$$\tilde{\Lambda}_c = \tilde{\Lambda}_f = \tilde{\Lambda}_b = \tilde{\Lambda}_s = \tilde{\Lambda} \quad (4.28)$$

$$\tilde{\Lambda}'_c = \tilde{\Lambda}'_f = \tilde{\Lambda}'_b = \tilde{\Lambda}'_s = \tilde{\Lambda}' \quad (4.29)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_c = \tilde{\mathbf{F}}_f = \tilde{\mathbf{F}}_b = \tilde{\mathbf{F}}_s = \tilde{\mathbf{F}}. \quad (4.30)$$

Οι σχέσεις (4.28) - (4.30) μας επιτρέπουν για λόγους απλότητας να παραλείψουμε τους δείκτες και να χρησιμοποιήσουμε τα αντίστοιχα σύμβολα $\tilde{\Lambda}, \tilde{\Lambda}', \tilde{\mathbf{F}}$ για τα παραπάνω δυαδικά.

Επανερχόμενοι στον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\mathbf{I}_c$, ξαναγράφουμε την έκφραση (4.5) για το δυναμικό στο $\rho = c_1$, ως

$$u_c(c_1, \mu', \nu') = g_0^1 + \sum_{m=1}^3 \zeta_m^c E_1^m(\mu') E_1^m(\nu') + \sum_{m=1}^5 \theta_m^c E_2^m(\mu') E_2^m(\nu') + O(ell_3) \quad (4.31)$$

όπου ζ_m^c και θ_m^c προκύπτουν από τους γενικούς συντελεστές

$$K_n^m = \left(I_n^m(c_1, f_1) \frac{G_{2,n}^m}{\sigma_f} + I_n^m(f_1, b_1) \frac{G_{1,n}^m}{\sigma_b} + I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} \right) \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{G_{3,n}^m} \frac{E_n^m(c_1)}{\gamma_n^m} \quad (4.32)$$

για $n = 1$ και $n = 2$ αντίστοιχα και $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$.

Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (3.2), (3.53), (3.54) καθώς και τις τιμές των σταθερών κανονικοποίησης γ_1^m, γ_2^m - σχέσεις (B'.26) - (B'.29) - και τη σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις Lamé E_n^m και τις ελλειψοειδείς αρμονικές $\mathbb{E}_n^m$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες - σχέσεις (B'.19) - (B'.22) και (B'.38) - (B'.41) - και ύστερα από πολλούς αλγεβρικούς χειρισμούς καταλήγουμε στις

$$\zeta_m^c = \frac{3h_m}{4\pi h_1 h_2 h_3} A_1^m \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{x}}_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.33)$$

$$\theta_1^c = -\frac{5}{4\pi(\Lambda_c - \Lambda'_c)} A_2^1 \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda} \quad (4.34)$$

$$\theta_2^c = \frac{5}{4\pi(\Lambda_c - \Lambda'_c)} A_2^2 \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda} \quad (4.35)$$

$$\theta_{i+j}^c = \frac{15h_i h_j}{4\pi(h_1 h_2 h_3)^2} A_2^{i+j} \mathbf{Q} \cdot (x_{0i} \hat{\mathbf{x}}_j + x_{0j} \hat{\mathbf{x}}_i) \quad (4.36)$$

όπου $i, j \in 1, 2, 3$ και $i \neq j$ και

$$\begin{aligned} A_n^m = & \frac{E_n^m(c_1)}{G_{3,n}^m} \left[I_n^m(c_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} + \frac{(\sigma_f - \sigma_b)}{\sigma_f} I_n^m(c_1, f_1) \left(I_n^m(f_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{F_n^m} \right) F_n^m \right. \\ & \left. + \frac{(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} I_n^m(c_1, b_1) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m \right. \\ & \left. + \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b \sigma_f} I_n^m(c_1, f_1) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) \left(I_n^m(f_1, b_1) - \frac{1}{F_n^m} \right) B_n^m F_n^m \right] \quad (4.37) \end{aligned}$$

για $n = 1$ και $n = 2$ και $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$.

Εισάγοντας τις (4.8) και (4.31) στην (4.7) για $i = c$ και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών προκύπτει

$$\mathbf{I}_c(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^3 \zeta_m^c \gamma_1^m \beta_m^c(\mathbf{r}) + \sum_{m=1}^5 \theta_m^c \gamma_2^m \delta_m^c(\mathbf{r}) + O(el'_3). \quad (4.38)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.9) - (4.14) και (4.33) - (4.36) στην (4.38), ξαναγράφουμε την (4.38)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_c(\mathbf{r}) = & \sum_{m=1}^3 \frac{3c_1 c_2 c_3}{c_m} A_1^m \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \\ & - \frac{(\Lambda_c - c_1^2)(\Lambda_c - c_2^2)(\Lambda_c - c_3^2)}{3(\Lambda_c - \Lambda'_c)} 2c_1 c_2 c_3 A_2^1 \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{\Lambda}} \otimes \tilde{\mathbf{\Lambda}} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{(\Lambda'_c - c_1^2)(\Lambda'_c - c_2^2)(\Lambda'_c - c_3^2)}{3(\Lambda_c - \Lambda'_c)} 2c_1 c_2 c_3 A_2^2 \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{\Lambda}}' \otimes \tilde{\mathbf{\Lambda}}' \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ & + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{(\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (c_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + c_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{c_i c_j} c_1 c_2 c_3 A_2^{i+j} \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) + O(el'_3) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τους ίδιους υπολογισμούς, προκειμένου να υπολογίσουμε τα $\mathbf{I}_f$, $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_s$. Η διαδικασία αυτή είναι εκτενής, αλλά χωρίς δυσκολίες. Επομένως θα περιγράψουμε τα βήματα και θα επισημάνουμε μόνο τα σημαντικά σημεία και τα κυρίως αποτελέσματα για το κάθε ολοκλήρωμα.

Πρώτο βήμα αποτελεί ο υπολογισμός της ποσότητας $\hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ σε κάθε επιφάνεια S_f , S_b και S_s . Ο υπολογισμός αυτός οδηγεί σε μια μορφή όμοια της (4.8) με τους ημιάζονες c_i , $i = 1, 2, 3$ να αντικαθίστανται με τους αντίστοιχους f_i , b_i , s_i σε όλες τις εξισώσεις (4.8) - (4.22). Ο υπολογισμός των αντιστοιχών ηλεκτρικών δυναμικών u_f , u_b , u_s στις επιφάνειες S_f , S_b και S_s απαιτεί το μετασχηματισμό των (4.2) - (4.4) σε μια μορφή όμοια με αυτήν της (4.31). Οι συντελεστές ζ_m^f , θ_m^f , ζ_m^b , θ_m^b και ζ_m^s , θ_m^s δίνονται επίσης από τις (4.33) - (4.36) αν το c_i αντικατασταθεί από τα f_i , b_i , s_i αντίστοιχα, για κάθε $i = 1, 2, 3$. Για το δυναμικό $u_f(f_1, \mu', \nu')$ οι σταθερές A_n^m θα πρέπει να αντικατασταθούν από

$$P_n^m = \frac{E_n^m(f_1)}{G_{3,n}^m} \left[I_n^m(f_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} + \frac{(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} I_n^m(f_1, b_1) \left(I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} - \frac{1}{B_n^m} \right) B_n^m \right] \quad (4.40)$$

για $n = 1$ και $n = 2$ και $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$.

Για τα δυναμικά $u_b(b_1, \mu', \nu')$ και $u_s(s_1, \mu', \nu')$ οι αντίστοιχες σταθερές είναι

$$Q_n^m = \frac{E_n^m(b_1)}{G_{3,n}^m} \left[I_n^m(b_1, s_1) + \frac{1}{S_n^m} \right] \quad (4.41)$$

και

$$R_n^m = \frac{E_n^m(s_1)}{G_{3,n}^m} \frac{1}{S_n^m} \quad (4.42)$$

για $n = 1$ και $n = 2$ και $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$.

Πολλαπλασιάζοντας κάθε ανάπτυγμα του ηλεκτρικού δυναμικού που προκύπτει παραπάνω με $\hat{\rho}' \times \nabla_{\mathbf{r}'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, υπολογίζοντας στο αντίστοιχο σύνορο και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα, προκύπτουν τα $\mathbf{I}_f, \mathbf{I}_b, \mathbf{I}_s$. Αυτά δίνονται σε μια μορφή όμοια της (4.39) στην οποία έχουν πραγματοποιηθεί οι προαναφερθείσες αντικαταστάσεις, των σταθερών A_n^m με P_n^m, Q_n^m, R_n^m και των c_i με τους f_i, b_i, s_i ανάλογα με την περίπτωση. Σύμφωνα με τις (4.25) - (4.27), οι ποσότητες $\Lambda_c - \Lambda'_c, \Lambda_c - c_i^2$ και $\Lambda'_c - c_i^2$ για $i = 1, 2, 3$ που εμφανίζονται στην (4.39) είναι σταθερές σε αυτές τις αντικαταστάσεις.

Τέλος, προκειμένου να υπολογίσουμε το πεδίο μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}_{el}(\mathbf{r})$ από την (4.6) χρειαζόμαστε το πολυπολικό ανάπτυγμα του πρώτου όρου του $\mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$. Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται στο [13] και έχει τη μορφή

$$\mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = 3\mathbf{Q} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) + O(\epsilon l_3'). \quad (4.43)$$

Εισάγοντας όλα στην (4.6) και εστιάζοντας στον πρώτης τάξης διπολικό όρο του $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, παρατηρούμε ότι οι (4.37) και (4.39) - (4.42) συνεπάγονται

$$\begin{aligned} & [(\sigma_f - \sigma_c) \mathbf{I}_c(\mathbf{r}) + (\sigma_b - \sigma_f) \mathbf{I}_f(\mathbf{r}) + (\sigma_s - \sigma_b) \mathbf{I}_b(\mathbf{r}) - \sigma_s \mathbf{I}_s(\mathbf{r})]_{n=1} \\ &= -3 \sum_{m=1}^3 \left[(\sigma_c - \sigma_f) \frac{c_1 c_2 c_3}{c_m} A_1^m + (\sigma_f - \sigma_b) \frac{f_1 f_2 f_3}{f_m} P_1^m + (\sigma_b - \sigma_s) \frac{b_1 b_2 b_3}{b_m} Q_1^m + \sigma_s \frac{s_1 s_2 s_3}{s_m} R_1^m \right] \\ & \quad \times \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Εκτελώντας τους κατάλληλους υπολογισμούς στο δεξί μέλος της εξίσωσης (4.44) και συγκρίνοντας με τη μορφή (3.55) για το G_3^m καταλήγουμε στον ακόλουθο όρο διπολικής τάξης για το $\mathbf{B}_{el}(\mathbf{r})$

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + (\sigma_f - \sigma_c) \mathbf{I}_c(\mathbf{r}) + (\sigma_b - \sigma_f) \mathbf{I}_f(\mathbf{r}) + (\sigma_s - \sigma_b) \mathbf{I}_b(\mathbf{r}) - \sigma_s \mathbf{I}_s(\mathbf{r}) \right]_{n=1}$$

$$\begin{aligned}
&= 3\mathbf{Q} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} - 3\mathbf{Q} \cdot \sum_{m=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \\
&= 3\mathbf{Q} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} - 3\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \otimes \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \\
&= 3\mathbf{Q} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} - 3\mathbf{Q} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το ταυτοτικό δυαδικό. Η εξαίρεση του διπολικού όρου του $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ έρχεται σε συμφωνία με το φυσικό νόμο ότι κανένα μαγνητικό μονόπολο δεν παρατηρείται στη φύση.

Στη συνέχεια μελετάμε τους όρους δεύτερης τάξης για το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Ακολουθώντας όμοιους υπολογισμούς για $n = 2$ και $m = 1, 2$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&[(\sigma_f - \sigma_c) \mathbf{I}_c(\mathbf{r}) + (\sigma_b - \sigma_f) \mathbf{I}_f(\mathbf{r}) + (\sigma_s - \sigma_b) \mathbf{I}_b(\mathbf{r}) - \sigma_s \mathbf{I}_s(\mathbf{r})]_{n=2}^{m=1} \\
&= \frac{(\Lambda_c - c_1^2)(\Lambda_c - c_2^2)(\Lambda_c - c_3^2)}{3(\Lambda_c - \Lambda'_c)} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{\Lambda}} \otimes \tilde{\mathbf{\Lambda}} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{4.46}$$

και

$$\begin{aligned}
&[(\sigma_f - \sigma_c) \mathbf{I}_c(\mathbf{r}) + (\sigma_b - \sigma_f) \mathbf{I}_f(\mathbf{r}) + (\sigma_s - \sigma_b) \mathbf{I}_b(\mathbf{r}) - \sigma_s \mathbf{I}_s(\mathbf{r})]_{n=2}^{m=2} \\
&= -\frac{(\Lambda'_c - c_1^2)(\Lambda'_c - c_2^2)(\Lambda'_c - c_3^2)}{3(\Lambda_c - \Lambda'_c)} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{\Lambda}} \otimes \tilde{\mathbf{\Lambda}} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Για τους υπόλοιπους τρεις όρους δεύτερης τάξης και βαθμού 3, 4 και 5 χρειάζεται να τους επεξεργαστούμε με τέτοιο τρόπο ώστε να προσδιορίσουμε τις σταθερές $G_{1,2}^{i+j}$, $G_{2,2}^{i+j}$, $G_{3,2}^{i+j}$, οι οποίες δίνονται στις (3.53) - (3.55) για $i, j \in \{1, 2, 3\}$ με $i \neq j$. Αυτό μας οδηγεί στην έκφραση

$$\begin{aligned}
&[(\sigma_f - \sigma_c) \mathbf{I}_c(\mathbf{r}) + (\sigma_b - \sigma_f) \mathbf{I}_f(\mathbf{r}) + (\sigma_s - \sigma_b) \mathbf{I}_b(\mathbf{r}) - \sigma_s \mathbf{I}_s(\mathbf{r})]_2^{i+j} \\
&= -\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{(\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (c_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + c_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{c_i^2 + c_j^2} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\
&+ \frac{G_{2,2}^{i+j}}{G_{3,2}^{i+j}} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes \left[\frac{(c_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + c_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{c_i^2 + c_j^2} - \frac{(f_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + f_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{f_i^2 + f_j^2} \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{G_{1,2}^{i+j}}{G_{3,2}^{i+j}} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes \left[\frac{(f_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + f_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{f_i^2 + f_j^2} - \frac{(b_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + b_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{b_i^2 + b_j^2} \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\
& + \frac{\sigma_s}{G_{3,2}^{i+j}} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes \left[\frac{(b_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + b_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{b_i^2 + b_j^2} - \frac{(s_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + s_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{s_i^2 + s_j^2} \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις (4.43), (4.44) και (4.46) - (4.48) στην (4.6) και χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες ταυτότητες προκειμένου να προκύψει μια συμπαγής έκφραση για το συνακόλουθο $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Έχει αποδειχθεί στο [13] ότι για κάθε τριαξονικό ελλειψοειδές με ημιάξονες c_1, c_2, c_3 ισχύουν οι ακόλουθες ταυτότητες

$$\begin{aligned}
& \frac{(\Lambda_c - c_1^2)(\Lambda_c - c_2^2)(\Lambda_c - c_3^2)}{3(\Lambda_c - \Lambda'_c)} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \otimes \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \frac{(\Lambda'_c - c_1^2)(\Lambda'_c - c_2^2)(\Lambda'_c - c_3^2)}{3(\Lambda_c - \Lambda'_c)} \tilde{\mathbf{\Lambda}}' \otimes \tilde{\mathbf{\Lambda}}' \\
& = \frac{1}{3} \tilde{\mathbf{I}} \otimes \tilde{\mathbf{I}} - \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (c_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + c_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i)}{c_i^2 + c_j^2} = \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \\
& + \frac{(c_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j - c_j^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (\hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{c_i^2 + c_j^2} \quad i \neq j
\end{aligned} \tag{4.50}$$

και

$$\hat{\mathbf{x}}_1 \times \tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \tag{4.51}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 \times \tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 \tag{4.52}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_3 \times \tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2. \tag{4.53}$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.50) και τις (4.51) - (4.53) κατάλληλα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}
& \sum_{(i,j)=\{(1,2), (1,3), (2,3)\}}^3 \frac{(\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (c_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + c_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i)}{c_i^2 + c_j^2} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \\
& + \left\{ \frac{(c_1^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - c_2^2 \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \otimes \hat{\mathbf{x}}_3}{c_1^2 + c_2^2} + \frac{(-c_1^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + c_3^2 \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \otimes \hat{\mathbf{x}}_2}{c_1^2 + c_3^2} \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(c_2^2 \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 - c_3^2 \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2) \otimes \hat{\mathbf{x}}_1}{c_2^2 + c_3^2} \Big\} \times \tilde{\mathbf{I}}. \quad (4.54)$$

Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : & \left(\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ & = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{I}} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

και

$$\tilde{\mathbf{I}} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{O}} \quad (4.56)$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το τετραδικό ταυτοτικό και ορίζεται από την

$$\tilde{\mathbf{I}} = \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j. \quad (4.57)$$

Εισαγάγοντας τις (4.43), (4.44) και (4.46) - (4.48) στην (4.6) για το εξωτερικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες (4.49) και (4.54) - (4.56), καταλήγουμε στην ακόλουθη συμπαγή έκφραση

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{d}_c + \mathbf{d}_{2f} - \mathbf{d}_{2c} + \mathbf{d}_{1b} - \mathbf{d}_{1f} + \mathbf{d}_{0s} - \mathbf{d}_{0b}) \\ & \times \left(\frac{F_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{A}} - \frac{F_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{A}}' - 15 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right) + O(el_3) \end{aligned} \quad (4.58)$$

όπου

$$\mathbf{d}_c = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(c_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(c_1) \quad (4.59)$$

$$\mathbf{d}_{2c} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(c_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_2(c_1) \quad (4.60)$$

$$\mathbf{d}_{if} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(f_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_i(f_1) \quad i = 1, 2 \quad (4.61)$$

$$\mathbf{d}_{ib} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(b_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_i(b_1) \quad i = 0, 1 \quad (4.62)$$

$$\mathbf{d}_{0s} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(s_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_0(s_1) \quad (4.63)$$

και τα δυαδικά $\tilde{\mathbf{M}}$ ορίζονται σε κάθε ελλειψοειδές S_c, S_f, S_b, S_s έτσι ώστε

$$\tilde{\mathbf{M}}(\alpha_1) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \quad (4.64)$$

όπου $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ είναι οι ημιάξονες του αντίστοιχου ελλειψοειδούς.

Όμοια τα ακόλουθα δυαδικά ορίζονται σε κάθε επιφάνεια εισάγοντας την αντίστοιχη αντικατάσταση από τους ημιάξονες

$$\tilde{\mathbf{N}}(\alpha_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_i^2} \quad (4.65)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_2(\alpha_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{G_{2,2}^{6-i}}{G_{3,2}^{6-i}} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_i^2} \quad (4.66)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_1(\alpha_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{G_{1,2}^{6-i}}{G_{3,2}^{6-i}} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_i^2} \quad (4.67)$$

και

$$\tilde{\mathbf{N}}_0(\alpha_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_s}{G_{3,2}^{6-i}} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_i^2}. \quad (4.68)$$

Τελικά, οι σταθερές $G_{1,2}^6, G_{2,2}^6, G_{3,2}^6$ δίνονται στις (3.53) - (3.55).

Αποδεικνύεται άμεσα από τις (3.53) - (3.55) ότι όταν ο αγωγίμος πυρήνας απορροφά τους τρεις φλοιούς, που σημαίνει ότι

$$\sigma_s \rightarrow \sigma_b \rightarrow \sigma_f \rightarrow \sigma_c \quad (4.69)$$

ή ισοδύναμα γεωμετρικά

$$s_i \rightarrow b_i \rightarrow f_i \rightarrow c_i \quad (4.70)$$

το οποίο εκφυλίζει το πρότυπο σε αυτό του ομογενούς αγωγού, οι τρεις σταθερές αγωγιμότητας $G_{1,2}^{6-i}, G_{2,2}^{6-i}, G_{3,2}^{6-i}$ συμπίπτουν με την αγωγιμότητα του πυρήνα. Τότε οι (4.66) - (4.68) γίνονται ταυτόσημες με το $\tilde{\mathbf{N}}_0(c_1)$ και οι (4.59) - (4.63) υποδηλώνουν ότι όλα τα διπολικά διανύσματα συμπίπτουν με το $\mathbf{d}_c$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι διαφορές των διανυσμάτων διπόλου στην (4.58) εξαλείφονται και ο πρώτος όρος του $\mathbf{B}_{el}$ εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα διπόλου $\mathbf{d}_c$, που αντιστοιχεί στο σχετικό διάνυσμα του απλού ομογενούς προτύπου [18], δηλαδή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_c \times \left(\frac{\mathcal{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \frac{\mathcal{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{\Lambda}}' - 15 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right) + O(el_3), \quad (4.71)$$

όπου το $\mathbf{d}_c$ δίνεται από την (4.59) και S_c είναι το ελλειψοειδές σύνορο.

Αυτό σημαίνει ότι η παρουσία των τριών φλοιών διαφορετικής αγωγιμότητας μπορεί να αναγνωσθεί σαν μια διαταραχή του αρχικού διανύσματος διπόλου, που μεταφέρει την εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου της πηγής και των παραγόντων αγωγιμότητας.

4.3 Εκφυλισμός στο σφαιρικό πρότυπο

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι αν το ελλειψοειδές πρότυπο που χρησιμοποιούμε για την προτυποποίηση του εγκεφάλου αντικατασταθεί από ένα αντίστοιχο σφαιρικό μοντέλο, το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο δεν αναγνωρίζει τους φλοιούς διαφορετικής αγωγιμότητας και συμπίπτει με τη μορφή του ομογενούς προτύπου [13]

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{B}_{el}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (4.72)$$

Για τη απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού, χρειάζεται να εκτελέσουμε την οριακή διαδικασία, που θα τη συμβολίσουμε με $el \rightarrow sr$, όπως ακριβώς στην υποπαράγραφο **3.2.2**. Η διαδικασία αυτή ανάγει τα τέσσερα ελλειψοειδή του προτύπου μας σε τέσσερις σφαίρες με ακτίνες που υπακούουν στην (3.102).

Αυτή η οριακή διαδικασία παρουσιάζει εγγενείς δυσκολίες καθώς η διδιάστατη εστιακή έλλειψη του ελλειψοειδούς συστήματος πρέπει να αναχθεί με έναν συνεχή τρόπο στο μηδενοδιάστατο κέντρο του σφαιρικού συστήματος. Ο εκφυλισμός αυτός είναι η αιτία της εμφάνισης αοριστιών κατά τη διαδικασία της αναγωγικής διαδικασίας, οι οποίες ξεπερνιούνται με έναν λεπτομερή μη συνήθη αλγεβρικό χειρισμό. Με παρόμοιους χειρισμούς με αυτούς της υποπαράγραφου **3.2.2** εξακολουθούν να ισχύουν οι (3.104), (3.105), (3.107), (3.108), (3.109) καθώς και οι

$$\lim_{el \rightarrow sr} I_2^m(\rho) = \frac{1}{5r^5} \quad (4.73)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \Lambda_c = \lim_{e \rightarrow s} \Lambda'_c = c^2 \quad (4.74)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} E_2^m(c_1) = c^2 \quad (4.75)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \tilde{\mathbf{M}}(c_1) = c^2 \tilde{\mathbf{I}} \quad (4.76)$$

και δεν αλλάζει τίποτα κάθε φορά που αντικαθιστούμε την παράμετρο c με τις f , b ή s στα σύνορα S_c , S_f , S_b ή S_s αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τα όρια (4.73) και (4.75) για να αναγάγουμε τις (3.2) - (3.46) και να τις αντικαταστήσουμε στις (3.53) - (3.55), προκύπτει - ύστερα από μακρείς αλλά ευθείς υπολογισμούς - ότι οι σταθερές αγωγιμότητας $G_{1,s}$, $G_{2,s}$ και $G_{3,s}$ είναι τα αντίστοιχα όρια των $G_{1,s}^m$,

$G_{2,s}^m$ και $G_{3,s}^m$ αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αυτά είναι όμοια με αυτά των (3.53) - (3.55), αλλά δεν εξαρτώνται πλέον από το n ή το m . Οι εκφράσεις (3.72) - (3.75) διασφαλίζουν τα όρια

$$\lim_{el \rightarrow sr} \tilde{\mathbf{N}}(c_1) = \frac{1}{2c^2} \tilde{\mathbf{I}} \quad (4.77)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \tilde{\mathbf{N}}_2(c_1) = \frac{G_{2,s}}{G_{3,s}} \frac{1}{2c^2} \tilde{\mathbf{I}} \quad (4.78)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \tilde{\mathbf{N}}_1(f_1) = \frac{G_{1,s}}{G_{3,s}} \frac{1}{2f^2} \tilde{\mathbf{I}} \quad (4.79)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \tilde{\mathbf{N}}_0(b_1) = \frac{\sigma_s}{G_{3,s}} \frac{1}{2b^2} \tilde{\mathbf{I}} \quad (4.80)$$

όπου τα όρια (4.76) - (4.80) συνεπάγονται τα

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{d}_c = c^2(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \frac{1}{2c^2} \tilde{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2} \quad (4.81)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{d}_{2c} = c^2(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \frac{G_{2,s}}{G_{3,s}} \frac{1}{2c^2} \tilde{\mathbf{I}} = \frac{G_{2,s}}{G_{3,s}} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2} \quad (4.82)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{d}_{2f} = f^2(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \frac{G_{2,s}}{G_{3,s}} \frac{1}{2f^2} \tilde{\mathbf{I}} = \frac{G_{2,s}}{G_{3,s}} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2} \quad (4.83)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{d}_{1f} = f^2(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \frac{G_{1,s}}{G_{3,s}} \frac{1}{2f^2} \tilde{\mathbf{I}} = \frac{G_{1,s}}{G_{3,s}} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2} \quad (4.84)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{d}_{1b} = b^2(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \frac{G_{1,s}}{G_{3,s}} \frac{1}{2b^2} \tilde{\mathbf{I}} = \frac{G_{1,s}}{G_{3,s}} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2} \quad (4.85)$$

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{d}_{0b} = b^2(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\sigma_s}{G_{3,s}} \frac{1}{2b^2} \tilde{\mathbf{I}} = \frac{\sigma_s}{G_{3,s}} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2} \quad (4.86)$$

και

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{d}_{0s} = s^2(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\sigma_s}{G_{3,s}} \frac{1}{2s^2} \tilde{\mathbf{I}} = \frac{\sigma_s}{G_{3,s}} \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2}. \quad (4.87)$$

Σαν συνέπεια των (4.81) - (4.87), όλες οι διαφορές των διανυσμάτων διπόλου που δημιουργούνται από τις στρωματοποιημένες ανομοιογένειες εξαλείφονται στο σφαιρικό όριο. Τότε, το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής στο εξωτερικό του στρωματοποιημένου σφαιρικού αγωγού εξαρτάται μόνο από το εξαρτημένο διάνυσμα διπόλου $\frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2}$, ακριβώς δηλαδή όπως αν ο αγωγός εξαρτώταν μόνο από τον ομογενή πυρήνα.

Οι ειδικοί αλγεβρικοί χειρισμοί που απαιτούνται για την αναγωγή του γεωμετρικού παράγοντα στην (4.58) στο σφαιρικό του όριο εξηγούνται αναλυτικά στο [55]. Αυτό το όριο γίνεται

$$\lim_{e \rightarrow s} \left(\frac{\mathcal{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\mathbf{A}} - \frac{\mathcal{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\mathbf{A}}' - 15 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i x_j I_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right)$$

$$= \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{r^3} - \frac{3}{r^5} \sum_{m=1}^3 x_m^2 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m - 15 \left(\frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{5r^5} - \frac{1}{5r^5} \sum_{m=1}^3 x_m^2 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \right) = \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} \quad (4.88)$$

και δείχνει ότι το ανομοιογενές σφαιρικό όριο του εξωτερικού πεδίου της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$, συμπίπτει με το αντίστοιχο πεδίο για τον ομογενή σφαιρικό αγωγό, που δίνεται στη (4.72).

Κεφάλαιο 5

Εγκεφαλογραφία σε δισφαιρική γεωμετρία

5.1 Μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος στην περίπτωση των δυο έκκεντρων σφαιρών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τη δισφαιρική γεωμετρία για να εξαγάγουμε τη λύση του διεπιφανειακού προβλήματος διαπερατότητας που περιγράφει το ηλεκτρικό δυναμικό για το σφαιρικό πρότυπο του στρωματοποιημένου αγωγού με υγρό που βρίσκεται έκκεντρα στο εσωτερικό του, όπως ακριβώς περιγράφηκε στην παράγραφο 1.7. Γενικά, προβλήματα συνοριακών τιμών που αφορούν την εξίσωση Laplace έχουν μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές για την προτυποποίηση διαφορετικών φυσικών προβλημάτων από το 1912 [37]. Η πλειονότητα αυτών αφορούν στο ηλεκτροστατικό πεδίο δυο φορτισμένων αγωγίμων σφαιρών. Διαφορετικές τεχνικές έχουν χρησιμοποιηθεί κάθε φορά για την αποτίμηση των σταθερών. Στα [56, 57] έχουν πραγματοποιηθεί γεωμετρικές ή φυσικές υποθέσεις προκειμένου να εξαχθούν προσεγγίσεις των συντελεστών. Ένας πιο γενικός χειρισμός, που προτείνεται στο [7], βασίζεται στη μέθοδο της συνάρτησης Green για διαφορικές εξισώσεις.

Το πέμπτο κεφάλαιο δομείται ως εξής: Στην παράγραφο 5.2 περιγράφουμε το δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, εξηγούμε τον R -χωρισμό μεταβλητών που επιδέχεται η εξίσωση Laplace και παρέχουμε επιπλέον χρήσιμα μεγέθη και αναπτύγματα για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Στην παράγραφο 5.3 τοποθετούμε μαθηματικά το πρόβλημα του ανομοιογενούς αγωγού που σε όρους της δισφαιρικής γεωμετρίας μεταφράζεται σε δύο έκκεντρες σφαίρες με τη διπολική πηγή να βρίσκεται στην εξωτερική σφαίρα. Περιγράφεται και δίνεται η λύση του μη γραμμικού συστήματος που καθορίζει επακριβώς το ειδικό δισφαιρικό σύστημα που αντιστοιχεί στο πρό-

βλημά μας και στη συνέχεια περιγράφουμε την επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών που αφορούν στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, αλλά και σε αυτό του εγκεφαλικού ιστού και του υγρού πυρήνα. Εξαιτίας της ελευθερίας της πηγής να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο του φλοιού και σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, τα αναπτύγματα των δυναμικών που προκύπτουν είναι πλήρη, δηλαδή δεν παρουσιάζουν καμιά ανεξαρτησία. Γνωρίζουμε από τη βιβλιογραφία [15] ότι σε περίπτωση αζιμουθιακής ανεξαρτησίας ο υπολογισμός της ακριβούς λύσης οδηγεί σε ένα άπειρο γραμμικό σύστημα, που μπορεί να επιλυθεί προσεγγιστικά με οποιασδήποτε τάξης ακρίβεια μέσω μιας διαδικασίας αποκοπής όρων. Εδώ, θεωρώντας τη γενική λύση, εξάγουμε τη λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών σε μορφή σειρών, χωρίς καμιά υπόθεση ως προς την επιλυσιμότητά των. Ο υπολογισμός της ακριβούς λύσης, που συνεπάγεται τον καθορισμό των συντελεστών των σειρών, οδηγεί σε ένα $2n + 1$ πλήθος γραμμικών συστημάτων άπειρης τάξης, που μπορούν να επιλυθούν προσεγγιστικά με τεχνικές αποκοπής όρων.

5.2 Το δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Το δισφαιρικό σύστημα (ζ, θ, ϕ) , βλ. Σχήμα 5.1, είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων [5, 47, 48], το οποίο συνδέεται με το Καρτεσιανό σύστημα (x_1, x_2, x_3) μέσω των εξισώσεων

$$x_1 = \alpha \frac{\sin \theta \cos \phi}{\cosh \zeta - \cos \theta} \quad (5.1)$$

$$x_2 = \alpha \frac{\sin \theta \sin \phi}{\cosh \zeta - \cos \theta} \quad (5.2)$$

$$x_3 = \alpha \frac{\sinh \zeta}{\cosh \zeta - \cos \theta} \quad (5.3)$$

όπου 2α συμβολίζει την εστιακή απόσταση F_1F_2 , η συντεταγμένη $\zeta \in (-\infty, +\infty)$ καθορίζει τις μη διασταυρούμενες σφαίρες και είναι ίση με το φυσικό λογάριθμο του λόγου των αποστάσεων PF_1, PF_2 των εστιών [7]

$$\zeta = -\ln \frac{PF_1}{PF_2} \quad (5.4)$$

η συντεταγμένη $\theta \in [0, \pi]$ καθορίζει τις διασταυρούμενες σφαίρες και είναι ίση με τη γωνία F_1PF_2 , και η συντεταγμένη $\phi \in [0, 2\pi)$ είναι η αζιμουθιακή γωνία που αναπαριστά την αξονική συμμετρία του δισφαιρικού συστήματος (Βλ. Σχήμα 5.1).

Στο εν λόγω σύστημα υπάρχουν δυο διαφορετικά κέντρα, τοποθετημένα συμμετρικά ως προς την αρχή και πάνω στον άξονα x_3 , που χαρακτηρίζονται ως οι εστίες του συστήματος,

Σχήμα 5.1: Το δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

και ένα τρίτο που αποτελεί την αρχή των αξόνων. Επιλέγουμε ως άξονα x_3 αυτόν που περνά από τα δύο κέντρα. Στη συνέχεια ακολουθεί περιγραφή της κάθεμιάς από τις συντεταγμένες επιφάνειες του συστήματος.

Η συντεταγμένη επιφάνεια $\zeta = \text{σταθερό}$ είναι μια σφαίρα, με κέντρο στο σημείο $(0, 0, \frac{\alpha}{\tanh \zeta})$ και ακτίνα $\frac{\alpha}{|\sinh \zeta|}$. Καθώς το ζ τρέχει από το $-\infty$ στο $+\infty$, αντίστοιχη συντεταγμένη σφαίρα ανέρχεται στην εστία $(0, 0, -\alpha)$, σαρώνει τον ημίχωρο $x_3 < 0$ για $\zeta < 0$, ταυτίζεται με το επίπεδο $x_3 = 0$ για $\zeta = 0$, και μετά σαρώνει τον ημίχωρο $x_3 > 0$ για $\zeta > 0$, για να καταλήξει για $\zeta \rightarrow 0 + \infty$ στο $(0, 0, +\alpha)$. Η αντίστοιχη εξίσωση της επιφάνειας είναι :

$$x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{\alpha}{\tanh \zeta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\sinh^2 \zeta}. \quad (5.5)$$

Η επιφάνεια $\theta = \text{σταθερό}$ δημιουργείται εξαιτίας περιστροφής ενός κυκλικού τόξου γύρω από τη χορδή του που συμπίπτει με το εστιακό τμήμα. Για $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ το δευτερεύον τόξο περιστρέφεται, δημιουργώντας μια αξονικού σχήματος επιφάνεια, ενώ για $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ το μεγαλύτερο τόξο περιστρέφεται δημιουργώντας μια επιφάνεια σε σχήμα μήλου. Για την ειδική

περίπτωση όπου $\theta = \frac{\pi}{2}$ έχουμε μια σφαίρα ακτίνας α και για $\theta = \pi$ έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 2α . Η αντίστοιχη εξίσωση της επιφάνειας είναι:

$$\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \alpha \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right]^2 + x_3^2 = \frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta}. \quad (5.6)$$

Η επιφάνεια $\phi = \text{σταθερό}$ είναι το ημιεπίπεδο που καθορίζει ένα ειδικό μεσημβρινό επίπεδο. Η αντίστοιχη εξίσωση της επιφάνειας είναι:

$$\frac{x_2}{x_1} = \tan \phi. \quad (5.7)$$

Η σφαιρική ακτινική απόσταση δίνεται από:

$$r = \alpha \sqrt{\frac{\cosh \zeta + \cos \theta}{\cosh \zeta - \cos \theta}} \quad (5.8)$$

όπου όταν $(\zeta, \theta) \rightarrow (0, 0)$ τότε $r \rightarrow \infty$.

Η κάθετος $\hat{\mathbf{n}}$ στην επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \quad (5.9)$$

όπου $f(x_1, x_2, x_3) = c$ η εξίσωση της σφαίρας. Αξίζει να σημειωθεί ότι επειδή στην κάτω σφαίρα όσο αυξάνεται η μεταβλητή ζ μεγαλώνει η ακτίνα, άρα και το $\hat{\mathbf{n}}$ κατευθύνεται προς τα έξω της σφαίρας. Αντίθετα, στο πάνω ημιεπίπεδο, έχουμε μείωση της ακτίνας της σφαίρας καθώς το ζ αυξάνει. Έτσι στην περίπτωση αυτή το $\hat{\mathbf{n}}$ κατευθύνεται προς το εσωτερικό της σφαίρας. Αυτό έχει ως συνέπεια - όταν χρησιμοποιούμε σε κάποιο πρόβλημα την εξωτερική παράγωγο - να θεωρούμε το αρνητικό πρόσημο στην πάνω σφαίρα.

Ειδικά, η κάθετος της σφαίρας που αντιστοιχεί στο $\zeta = \text{σταθερό}$ δίνεται από την:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sinh |\zeta|}{\cosh \zeta - \cos \theta} \left(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \frac{\cosh \zeta \cos \theta - 1}{\sinh \zeta} \right). \quad (5.10)$$

Το δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων εξασφαλίζει το απαραίτητο περιβάλλον για την επίλυση προβλημάτων ηλεκτρικού δυναμικού. Οι κλασικές εφαρμογές του δισφαιρικού συστήματος είναι η επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπως η εξίσωση Laplace που δεν επιδέχεται αμιγή χωρισμό μεταβλητών, αλλά R -διαχωρισμό στις δισφαιρικές συντεταγμένες. Στο δισφαιρικό σύστημα ο τελεστής Laplace έχει τη μορφή [47]

$$\Delta = \frac{R^3}{\alpha^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{R^2}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \quad (5.11)$$

όπου

$$R(\zeta, \theta) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta}. \quad (5.12)$$

Η εξίσωση Laplace επιδέχεται R -διαχωρισμό και οι R -ιδιοσυναρτήσεις, κανονικές ως προς τον άξονα συμμετρίας είναι

$$u(\zeta, \theta, \phi) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \begin{Bmatrix} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} \\ e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \end{Bmatrix} P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}. \quad (5.13)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου η λύση εξαρτάται μόνο από τα ζ και θ - περίπτωση αξονικής συμμετρίας ή αζιμουθιακής ανεξαρτησίας - η (5.13) γίνεται

$$u(\zeta, \theta) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \begin{Bmatrix} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} \\ e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \end{Bmatrix} P_n(\cos \theta). \quad (5.14)$$

Ενώ στην γενική περίπτωση η λύση της εξίσωσης Laplace μπορεί να γραφεί εναλλακτικά με τη βοήθεια των σφαιρικών αρμονικών

$$u(\zeta, \theta, \phi) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \begin{Bmatrix} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} \\ e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \end{Bmatrix} Y_n^m(\mathbf{r}). \quad (5.15)$$

Πρέπει ακόμη να επισημανθεί ότι δεν υπάρχει περίπτωση μονοδιάστατης λύσης στο δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Γενικά, ακόμα και στις απλούστερες περιπτώσεις, κάθε λύση δίνεται υπό τη μορφή σειράς.

Άλλα χρήσιμα μεγέθη για την επίλυση συστημάτων συνοριακών τιμών, εκφρασμένα σε δισφαιρικές συντεταγμένες, δίνονται στη συνέχεια. Οι μετρικοί συντελεστές δίνονται από

$$g_\zeta = g_\theta = \frac{g_\phi}{\sin^2 \theta} = \frac{\alpha^2}{(\cosh \zeta - \cos \theta)^2} \quad (5.16)$$

ενώ η κάθετη παράγωγος

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla = \frac{\cosh \zeta - \cos \theta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (5.17)$$

και η στοιχειώδης επιφάνεια για ζ =σταθερό

$$ds(\mathbf{r}) = \frac{\alpha^2 \sin \theta}{(\cosh \zeta - \cos \theta)^2} d\theta d\phi. \quad (5.18)$$

Θεωρώντας το ανάπτυγμα του $(1 + h^2 - 2h \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}$ [10] για $h = e^{-\zeta}$ προκύπτει το ομοιόμορφα συγκλίνον ανάπτυγμα

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta|} P_n(\cos \theta) \quad (5.19)$$

Τέλος το πλήρες ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσης στο δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \frac{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sqrt{\cosh \zeta' - \cos \theta'}}{\sqrt{\cosh(\zeta - \zeta') - \cos \gamma}} \\ &= \frac{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sqrt{\cosh \zeta' - \cos \theta'}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})|\zeta - \zeta'|} P_n(\cos \gamma) \end{aligned} \quad (5.20)$$

όπου το $P_n(\cos \gamma)$ δίνεται από το προσθετικό θεώρημα

$$P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{m=-n}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (5.21)$$

5.3 Ο ανομοιογενής σφαιρικός αγωγός με υγρό έκκεντρα στο εσωτερικό του

Θεωρούμε έναν ανομοιογενή αγωγό με υγρό που βρίσκεται έκκεντρα στο εσωτερικό του και αναπαριστάται στο Σχήμα 5.2 που ακολουθεί.

Τοποθετούμε την εσωτερική σφαίρα που αντιπροσωπεύει το υγρό στο εσωτερικό του εγκεφάλου, έκκεντρα σε σχέση με την περιβάλλουσά της, που αναπαριστά τον εγκεφαλικό ιστό. Επομένως σε μαθηματικούς όρους θεωρούμε δυο έκκεντρες σφαίρες S_1 και S_2 με ακτίνες r_1 και r_2 αντίστοιχα ($r_1 > r_2$), με κέντρα που βρίσκονται σε μια απόσταση d , όπου $d < r_1 - r_2$. Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε ένα δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων - όπως αυτό περιγράφεται από τις (5.1) - (5.3) - που να περιγράφει τις δυο δεδομένες σφαίρες με δυο συγκεκριμένες τιμές της μιας εκ των μεταβλητών του συστήματος.

Θεωρούμε ότι η σφαίρα S_1 που περιγράφει το σύνορο του φλοιού αντιστοιχεί στην τιμή $\zeta = \zeta_1$ και η σφαίρα S_2 που περιγράφει την επιφάνεια του πυρήνα αντιστοιχεί στην τιμή $\zeta = \zeta_2$. Προκειμένου να υιοθετήσουμε ένα δισφαιρικό σύστημα συντεταγμένων για τις σφαίρες S_1 και S_2 , χρειάζεται να βρούμε θετικούς αριθμούς ζ_1 , ζ_2 και α που να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\frac{\alpha}{\sinh \zeta_1} = r_1 \quad (5.22)$$

$$\frac{\alpha}{\sinh \zeta_2} = r_2 \quad (5.23)$$

$$\frac{\alpha}{\tanh \zeta_1} - \frac{\alpha}{\tanh \zeta_2} = d. \quad (5.24)$$

Επιλύοντας το μη γραμμικό αλγεβρικό σύστημα που ορίζουν οι (5.22) - (5.24) ως προς τους αγνώστους ζ_1 , ζ_2 και α καταλήγουμε [5, 58]

$$\alpha = \frac{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - d^2} \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - d^2}}{2d} \quad (5.25)$$

Σχήμα 5.2: Ο ανομοιογενής σφαιρικός αγωγός με υγρό έκκεντρα στο εσωτερικό του.

$$\zeta_1 = \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + r_1^2}}{r_1} \quad (5.26)$$

$$\zeta_2 = \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + r_2^2}}{r_2}. \quad (5.27)$$

Συνεπώς υπό την προϋπόθεση ότι όλα τα ζ_1 , ζ_2 και α είναι θετικά, υπάρχει ακριβώς ένα δισφαιρικό σύστημα που ταιριάζει στο δεδομένο πρόβλημα των δύο σφαιρών.

Ο εξωτερικός μη αγωγίμος χώρος V , που είναι το εξωτερικό της σφαίρας S_1 και αντιστοιχεί στο πεδίο ορισμού

$$V = \{(\zeta, \theta, \phi) | \zeta \in (-\infty, \zeta_1), \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)\}. \quad (5.28)$$

Η περιοχή του φλοιού μεταξύ των S_1 και S_2 συμβολίζεται με V_1 και αντιστοιχεί στο χωρίο

$$V_1 = \{(\zeta, \theta, \phi) | \zeta \in (\zeta_1, \zeta_2), \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)\}, \quad (5.29)$$

ενώ η περιοχή του πυρήνα είναι το εσωτερικό της σφαίρας S_2 και αντιστοιχεί στο χωρίο

$$V_2 = \{(\zeta, \theta, \phi) | \zeta \in (\zeta_2, +\infty), \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)\}. \quad (5.30)$$

Το πρόβλημα των ηλεκτρικών πεδίων που έχουμε να επιλύσουμε έχει ως εξής. Στο εσωτερικό του αγωγού, στην περιοχή V_1 του φλοιού, υπάρχει ηλεκτρικό δίπολο ροπής $\mathbf{Q}$ στη θέση $\mathbf{r}_0$. Συνεπώς στην περιοχή V_1 το ηλεκτρικό δυναμικό u_1 ικανοποιεί την εξίσωση Poisson, ενώ η περιοχή με το υγρό V_2 στο εσωτερικό του αγωγού καθώς και η εξωτερική V , απουσία πηγών, ικανοποιούν την εξίσωση Laplace. Σκοπός μας είναι η εύρεση των δυναμικών των παραπάνω περιοχών. Για τον σκοπό αυτό απαιτείται η επίλυση των ακόλουθων προβλημάτων συνοριακών τιμών, όπως περιγράφονται από τις (1.81) - (1.87) για $f = 2$ και για $c = 1$. Δεδομένου όμως ότι η κάθετη παράγωγος στο δισφαιρικό σύστημα δίνεται από τη σχέση (5.17), ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $\frac{\cosh \zeta - \cos \theta}{\alpha}$ απαλείφεται στα σύνορα S_1, S_2 αντίστοιχα, κατά την εφαρμογή των συνοριακών τιμών (1.83), (1.86). Επομένως οι (1.81) - (1.87) για την περίπτωση του δισφαιρικού συστήματος συντεταγμένων γράφονται: για την περιοχή του υγρού το u_2 ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\Delta u_2(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_2 \quad (5.31)$$

$$u_1(\mathbf{r}) = u_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_2 \quad (5.32)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u_1(\mathbf{r})}{\partial \zeta} = \sigma_2 \frac{\partial u_2(\mathbf{r})}{\partial \zeta}, \quad \mathbf{r} \in S_2 \quad (5.33)$$

για το χώρο V_1 το u_1 ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\Delta u_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma_1} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_1 \quad (5.34)$$

$$u_1(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S_1 \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial u_1(\mathbf{r})}{\partial \zeta} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_1. \quad (5.36)$$

ενώ για τον εξωτερικό μη αγωγίμο χώρο V , απουσία πηγών, απαιτείται πάλι η επίλυση της εξίσωσης Laplace

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (5.37)$$

καθώς και η ικανοποίηση της ακόλουθης ασυμπτωτικής συνθήκης στο άπειρο

$$u(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (5.38)$$

όπου η σφαιρική ακτινική απόσταση r δίνεται από την (5.8). Η (5.38) ισχύει από την (5.8), αφού όταν $(\zeta, \theta) \rightarrow (0, 0)$ τότε $r \rightarrow \infty$. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε αναλυτικά τον τρόπο επίλυσης των τριών αυτών προβλημάτων (5.31) - (5.33), (5.34) - (5.36) και (5.35) - (5.38) ο οποίος διαφοροποιείται αισθητά από αυτόν του προβλήματος των ομόκεντρων σφαιρών της παραγράφου 2.7. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι ο R -χωρισμός μεταβλητών του δι-σφαιρικού συστήματος, ενώ δεν επιδρά στην εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών Dirichlet, επηρεάζει τις Neumann, η εφαρμογή των οποίων δεν μπορεί να οδηγήσει σε αναλυτική λύση. Ας αρχίσουμε τη διαδικασία επίλυσης και θα διαπιστώσουμε στην συνέχεια το λόγο για τον οποίο συμβαίνει αυτό.

Πριν καταγράψουμε τα ηλεκτρικά πεδία θα περιγράψουμε την διαδικασία εύρεσης ειδικής λύσης S_1 του u_1 που οφείλεται στην πηγή. Όπως είδαμε στην υποπαράγραφο 2.2.1, η ειδική λύση δίνεται από την (2.17) που στην περίπτωσή μας λόγω της αγωγιμότητας του χώρου V_1 γράφεται

$$S_1(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma_1} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (5.39)$$

Το ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσης στο δισφαιρικό σύστημα στο $\mathbf{r}_0$ δίνεται από την (5.20)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sqrt{\cosh \zeta_0 - \cos \theta_0}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(n+\frac{1}{2})|\zeta-\zeta_0|} P_n(\cos \gamma) \quad (5.40)$$

και λόγω του προσθετικού θεωρήματος (5.21), η (5.40) γράφεται

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sqrt{\cosh \zeta_0 - \cos \theta_0}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n e^{(n+\frac{1}{2})|\zeta-\zeta_0|} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (5.41)$$

Η ειδική λύση είναι διαφορετική για $\zeta > \zeta_0$ και θα τη συμβολίζουμε με S_1^+ , απ' ότι για $\zeta < \zeta_0$, S_1^- . Έτσι για $\zeta_1 < \zeta < \zeta_0$, δηλαδή $|\zeta - \zeta_0| = \zeta_0 - \zeta$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sqrt{\cosh \zeta_0 - \cos \theta_0}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n e^{(n+\frac{1}{2})(\zeta_0-\zeta)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (5.42)$$

και εφαρμόζοντας τον τελεστή κλίσης στην (5.42) προκύπτει ότι

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right. \\ \left. \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\sqrt{\cosh \zeta_0 - \cos \theta_0} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_0} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \right) \right] e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.43)$$

και η ειδική λύση S_1^- για $\zeta_1 < \zeta < \zeta_0$ γίνεται

$$S_1^-(\mathbf{r}) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} A_{bis,n}^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.44)$$

όπου

$$A_{bis,n}^m = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma_1\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\sqrt{\cosh \zeta_0 - \cos \theta_0} e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_0} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \right), \quad (5.45)$$

ενώ για $\zeta_0 < \zeta < \zeta_2$, δηλαδή $|\zeta - \zeta_0| = \zeta - \zeta_0$ είναι

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right. \\ \left. \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\sqrt{\cosh \zeta_0 - \cos \theta_0} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_0} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \right) \right] e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.46)$$

και η ειδική λύση S_1 γίνεται

$$S_1^+(\mathbf{r}) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} B_{bis,n}^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.47)$$

όπου

$$B_{bis,n}^m = \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma_1\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\sqrt{\cosh \zeta_0 - \cos \theta_0} e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_0} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \right). \quad (5.48)$$

Έχοντας προσδιορίσει την ειδική λύση του u_c για καθεμία από τις περιοχές $\zeta_0 < \zeta < \zeta_2$, u_1^+ , και $\zeta_1 < \zeta < \zeta_0$, u_1^- , θα συνεχίσουμε παραθέτοντας τα αναπτύγματα των ηλεκτρικών δυναμικών u , u_1^- , u_1^+ και u_2 σε σφαιρικές αρμονικές. Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι τα προβλήματα συνοριακών τιμών (5.31) - (5.38) δεν παρουσιάζουν αξονική συμμετρία. Συνεπώς τα αναπτύγματα των δυναμικών πρέπει να είναι πλήρη.

Για $-\infty < \zeta < \zeta_1$,

$$u(\mathbf{r}) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.49)$$

για $\zeta_1 \leq \zeta < \zeta_0$,

$$u_1^-(\mathbf{r}) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{bis,n}^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.50)$$

για $\zeta_0 < \zeta \leq \zeta_2$,

$$u_1^+(\mathbf{r}) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[B_{bis,n}^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.51)$$

και τέλος για $\zeta_2 \leq \zeta < +\infty$

$$u_2(\mathbf{r}) = \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.52)$$

Σκοπός μας, όπως είδαμε, είναι η επίλυση των (5.31) - (5.38) για τον προσδιορισμό των δυναμικών ή ισοδύναμα ο προσδιορισμός των σταθερών $d_n^m, f_n^m, g_n^m, c_n^m$. Για να επιτευχθεί αυτό κρίνεται αναγκαία η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, η οποία απαιτεί τον προσδιορισμό των παραγώγων ως προς ζ των u_1^-, u_1^+ και u_2 , δηλαδή για $\zeta_1 \leq \zeta < \zeta_0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^-(\mathbf{r})}{\partial \zeta} &= \frac{\sinh \zeta}{2\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{bis,n}^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ &+ \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} - g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (5.53)$$

για $\zeta_0 < \zeta \leq \zeta_2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r})}{\partial \zeta} &= \frac{\sinh \zeta}{2\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[B_{bis,n}^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} + f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} + g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ &+ \sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta} - (B_{bis,n}^m + g_n^m) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (5.54)$$

και τέλος για $\zeta_2 < \zeta < +\infty$

$$\frac{\partial u_1^+(\mathbf{r})}{\partial \zeta} = \frac{\sinh \zeta}{2\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$$

$$+\sqrt{\cosh \zeta - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[-\left(n + \frac{1}{2}\right) h_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.55)$$

Θα εφαρμόσουμε πρώτα τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.32) και (5.35), όπου η R συνάρτηση απαλείφεται από τα δυναμικά μέσα και έξω του εκάστοτε συνόρου, αφού ο υπολογισμός για κάθε συνοριακή συνθήκη γίνεται πάνω στο ίδιο σύνορο. Πράγματι εφαρμόζοντας την (5.32) προκύπτει

$$\begin{aligned} & \sqrt{\cosh \zeta_2 - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[B_{bis,n}^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} + f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} + g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} \right] Y_n^m \\ &= \sqrt{\cosh \zeta_2 - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Η απαλοιφή της R συνάρτησης στο σύνορο $\zeta = \zeta_2$ είναι προφανής από την (5.56), η οποία λόγω ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών δίνει την κάτωθι σχέση

$$h_n^m = B_{bis,n}^m + g_n^m + e^{(2n+1)\zeta_2} f_n^m. \quad (5.57)$$

Ομοίως από την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης (5.35) στο σύνορο $\zeta = \zeta_1$ προκύπτει

$$\begin{aligned} & \sqrt{\cosh \zeta_1 - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n d_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \sqrt{\cosh \zeta_1 - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{bis,n}^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (5.58)$$

και από ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών

$$d_n^m = A_{bis,n}^m + f_n^m + e^{-(2n+1)\zeta_1} g_n^m. \quad (5.59)$$

Η συνοριακή συνθήκη Neumann (5.36) λόγω της (5.53) γράφεται

$$\begin{aligned} & \frac{\sinh \zeta_1}{2\sqrt{\cosh \zeta_1 - \cos \theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{bis,n}^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ &+ \sqrt{\cosh \zeta_1 - \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} - g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Στην τελευταία σχέση είναι φανερό η επίδραση της R - διαχωρισιμότητας, αφού υφίσταται ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας της ρίζας που περιλαμβάνει τη γωνία θ . Συνεπώς θα επεξεργαστούμε αλγεβρικά την (5.60) με τέτοιο τρόπο ώστε να ομαδοποιήσουμε τους όρους που είναι πολλαπλασιασμένοι με ζ_1 και αυτούς που είναι με $\cos\theta$, έτσι ώστε τελικά το $\cos\theta$ να εκφραστεί συναρτήσει των σφαιρικών αρμονικών και να είναι δυνατή η εφαρμογή της ορθογωνιότητας. Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν πρώτα την (5.60) με την ποσότητα $2\sqrt{\cosh\zeta_1 - \cos\theta}$ και προκύπτει

$$\begin{aligned} & \sinh\zeta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[A_{bis,n}^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + f_n^m e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} + g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + (\cosh\zeta_1 - \cos\theta) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} - g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

και θεωρώντας στο δεξί μέλος τους όρους που εξαρτώνται από το $\cos\theta$, η (5.61) γράφεται

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) (\sinh\zeta_1 + (2n+1)\cosh\zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right. \\ & \quad \left. + g_n^m (\sinh\zeta_1 - (2n+1)\cosh\zeta_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ & = \cos\theta \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} - g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Για να απαλείψουμε το γινόμενο του συνημιτόνου θ με τις σφαιρικές αρμονικές εκμεταλλευόμεστε τις αναγωγιμές σχέσεις που ακολουθούν, οι οποίες τα συνδέουν με αντίστοιχες σφαιρικές αρμονικές [1]

$$(2n+1)\cos\theta P_n^m(\cos\theta) = P_{n-1}^m(\cos\theta) + (n+1)P_{n+1}^m(\cos\theta) \quad (5.63)$$

για $n \geq 1, m = -n, \dots, n$.

$$(2n+1)\cos\theta Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = (n+m)Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}}) + (n-m+1)Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.64)$$

για $n \geq 1, m = -n, \dots, n$. Για να χρησιμοποιήσουμε τις (5.63), (5.64), ξαναγράφουμε την (5.62) απομονώνοντας από το άθροισμα τη συνεισφορά του πρώτου όρου, δηλαδή

$$(A_{bis,0}^0 + f_0^0) (\sinh\zeta_1 + \cosh\zeta_1) e^{\frac{\zeta_1}{2}} + g_0^0 (\sinh\zeta_1 - \cosh\zeta_1) e^{-\frac{\zeta_1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) (\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right. \\
& \quad \left. + g_n^m (\sinh \zeta_1 - (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& = \cos \theta \left[(A_{bis,0}^0 + f_0^0) e^{\frac{\zeta_1}{2}} - g_0^0 e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \right] \\
& + \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} - g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.65)
\end{aligned}$$

Τότε η (5.65) λόγω των (5.63), (5.64) γράφεται:

$$\begin{aligned}
& (A_{bis,0}^0 + f_0^0) (\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{\frac{\zeta_1}{2}} + g_0^0 (\sinh \zeta_1 - \cosh \zeta_1) e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) (\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right. \\
& \quad \left. + g_n^m (\sinh \zeta_1 - (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& = \left[(A_{bis,0}^0 + f_0^0) e^{\frac{\zeta_1}{2}} - g_0^0 e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \right] P_1(\cos \theta) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n+m) \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} - g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (n-m+1) \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} - g_n^m e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.66)
\end{aligned}$$

Προκειμένου στη σχέση (5.66) να έχουμε σφαιρικές αρμονικές ίδιας τάξης, θέτουμε

$$n-1 = k \Rightarrow n = k+1 \quad (5.67)$$

και

$$n+1 = l \Rightarrow n = l-1 \quad (5.68)$$

και η (5.66) γράφεται

$$(A_{bis,0}^0 + f_0^0) (\sinh \zeta_1 + \cosh \zeta_1) e^{\frac{\zeta_1}{2}} + g_0^0 (\sinh \zeta_1 - \cosh \zeta_1) e^{-\frac{\zeta_1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) (\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right. \\
& \quad \left. + g_n^m (\sinh \zeta_1 - (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& = \left[(A_{bis,0}^0 + f_0^0) e^{\frac{\zeta_1}{2}} - g_0^0 e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \right] P_1(\cos \theta) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-(k+1)}^{(k+1)} (k+m+1) \left[(A_{bis,(k+1)}^m + f_{(k+1)}^m) e^{(k+\frac{3}{2})\zeta_1} - g_{(k+1)}^m e^{-(k+\frac{3}{2})\zeta_1} \right] Y_k^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-(l-1)}^{(l-1)} (l-m) \left[(A_{bis,l-1}^m + f_{l-1}^m) e^{(l-\frac{1}{2})\zeta_1} - g_{l-1}^m e^{-(l-\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.69)
\end{aligned}$$

Και ξαναγράφοντας την (5.69) για $n = k = l = n$, προκύπτει

$$\begin{aligned}
& (A_{bis,0}^0 + f_0^0) (\sinh \zeta_1 + \cosh \zeta_1) e^{\frac{\zeta_1}{2}} + g_0^0 (\sinh \zeta_1 - \cosh \zeta_1) e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) (\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right. \\
& \quad \left. + g_n^m (\sinh \zeta_1 - (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& = \left[(A_{bis,0}^0 + f_0^0) e^{\frac{\zeta_1}{2}} - g_0^0 e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \right] P_1(\cos \theta) \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-(n+1)}^{(n+1)} (n+m+1) \left[(A_{bis,(n+1)}^m + f_{(n+1)}^m) e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_1} - g_{(n+1)}^m e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-(n-1)}^{(n-1)} (n-m) \left[(A_{bis,n-1}^m + f_{n-1}^m) e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_1} - g_{n-1}^m e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.70)
\end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε τη σχέση (5.70) απομονώνοντας από όλα τα αθροίσματα τις συνεισφορές των όρων μέχρι και $n = 1$. Επομένως

$$\begin{aligned}
& (A_{bis,0}^0 + f_0^0) (\sinh \zeta_1 + \cosh \zeta_1) e^{\frac{\zeta_1}{2}} + g_0^0 (\sinh \zeta_1 - \cosh \zeta_1) e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \\
& \left[(A_{bis,1}^{-1} + f_1^{-1}) (\sinh \zeta_1 + 3 \cosh \zeta_1) e^{\frac{3\zeta_1}{2}} + g_1^{-1} (\sinh \zeta_1 - 3 \cosh \zeta_1) e^{-\frac{3\zeta_1}{2}} \right] Y_1^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) \\
& \left[(A_{bis,1}^0 + f_1^0) (\sinh \zeta_1 + 3 \cosh \zeta_1) e^{\frac{3\zeta_1}{2}} + g_1^0 (\sinh \zeta_1 - 3 \cosh \zeta_1) e^{-\frac{3\zeta_1}{2}} \right] P_1(\cos \theta) \\
& \left[(A_{bis,1}^1 + f_1^1) (\sinh \zeta_1 + 3 \cosh \zeta_1) e^{\frac{3\zeta_1}{2}} + g_1^1 (\sinh \zeta_1 - 3 \cosh \zeta_1) e^{-\frac{3\zeta_1}{2}} \right] Y_1^1(\hat{\mathbf{r}}) \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[(A_{bis,n}^m + f_n^m) (\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right. \\
& \quad \left. + g_n^m (\sinh \zeta_1 - (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& = (A_{bis,1}^0 + f_1^0) e^{\frac{3\zeta_1}{2}} - g_0^0 e^{-\frac{3\zeta_1}{2}} + \left[(A_{bis,0}^0 + f_0^0) e^{\frac{\zeta_1}{2}} - g_0^0 e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \right] P_1(\cos \theta) \\
& + \left[(A_{bis,2}^{-1} + f_2^{-1}) e^{\frac{5\zeta_1}{2}} - g_2^{-1} e^{-\frac{5\zeta_1}{2}} \right] Y_1^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) + 2 \left[(A_{bis,2}^0 + f_2^0) e^{\frac{5\zeta_1}{2}} - g_2^0 e^{-\frac{5\zeta_1}{2}} \right] P_1(\cos \theta) \\
& + \left[(A_{bis,2}^1 + f_2^1) e^{\frac{5\zeta_1}{2}} - g_2^1 e^{-\frac{5\zeta_1}{2}} \right] Y_1^1(\hat{\mathbf{r}}) \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-(n+1)}^{(n+1)} (n+m+1) \left[(A_{bis,(n+1)}^m + f_{(n+1)}^m) e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_1} - g_{(n+1)}^m e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-(n-1)}^{(n-1)} (n-m) \left[(A_{bis,n-1}^m + f_{n-1}^m) e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_1} - g_{n-1}^m e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta_1} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.71)
\end{aligned}$$

Και από ορθογωνιότητα στις σφαιρικές αρμονικές προκύπτει:

$$(\sinh \zeta_1 + \cosh \zeta_1) e^{\frac{\zeta_1}{2}} f_0^0 + (\sinh \zeta_1 - \cosh \zeta_1) e^{-\frac{\zeta_1}{2}} g_0^0 - e^{\frac{3\zeta_1}{2}} f_1^0 + e^{-\frac{3\zeta_1}{2}} g_1^0$$

$$= -(\sinh \zeta_1 + \cosh \zeta_1) e^{\frac{\zeta_1}{2}} A_{bis,0}^0 + e^{\frac{3\zeta_1}{2}} A_{bis,1}^0 \quad (5.72)$$

για $n = 1, 2, 3, \dots, m = -n, n$

$$\begin{aligned} & (\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} f_n^m + (\sinh \zeta_1 - (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} g_n^m \\ & - (n+m+1) e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_1} f_{n+1}^m + (n+m+1) e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} g_{n+1}^m \end{aligned}$$

$$= -(\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} A_{bis,n}^m + (n+m+1) e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_1} A_{bis,n+1}^m \quad (5.73)$$

για $n = 1, 2, 3, \dots, m = -(n-1), -(n-2), \dots, (n-2), (n-1)$

$$\begin{aligned} & (\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} f_n^m + (\sinh \zeta_1 - (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_1} g_n^m \\ & - (n+m+1) e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_1} f_{n+1}^m + (n+m+1) e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_1} g_{n+1}^m \\ & - (n-m) e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_1} f_{n-1}^m + (n-m) e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta_1} g_{n-1}^m \end{aligned}$$

$$= -(\sinh \zeta_1 + (2n+1) \cosh \zeta_1) e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_1} A_{bis,n}^m + (n+m+1) e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_1} A_{bis,n+1}^m + (n-m) e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_1} A_{bis,n-1}^m. \quad (5.74)$$

Θα ολοκληρώσουμε με την εφαρμογή της συνοριακής συνθήκης Neumann (5.33), η οποία λόγω των (5.51) και (5.52) και με αντικατάσταση της (5.57) οι τέσσερις σειρές των αγνώστων $f_n^m, g_n^m, d_n^m, h_n^m$ μειώνονται σε δύο.

$$\begin{aligned} & [(\sigma_1 - \sigma_2) \sinh \zeta_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \cosh \zeta_2] e^{\frac{\zeta_2}{2}} f_0^0 \\ & + (\sigma_1 - \sigma_2) (\sinh \zeta_2 - \cosh \zeta_2) e^{-\frac{\zeta_2}{2}} g_0^0 + \\ & - (\sigma_1 + \sigma_2) e^{\frac{3\zeta_2}{2}} f_1^0 + (\sigma_1 - \sigma_2) e^{-\frac{3\zeta_2}{2}} g_1^0 \\ & = -(\sigma_1 - \sigma_2) (\sinh \zeta_2 - \cosh \zeta_2) e^{-\frac{\zeta_2}{2}} B_{bis,0}^0 - (\sigma_1 - \sigma_2) e^{-\frac{3\zeta_2}{2}} B_{bis,1}^0 \quad (5.75) \end{aligned}$$

για $n = 1, 2, 3, \dots, m = -n, n$

$$\begin{aligned}
& (\sigma_1 - \sigma_2) (\sinh \zeta_2 - (2n + 1) \cosh \zeta_2) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} g_n^m \\
& + [(\sigma_1 - \sigma_2) \sinh \zeta_2 + (2n + 1)(\sigma_1 + \sigma_2) \cosh \zeta_2] e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} f_n^m \\
& + (n + m + 1)(\sigma_1 - \sigma_2) e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_2} g_{n+1}^m - (n + m + 1)(\sigma_1 + \sigma_2) e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_2} f_{n+1}^m \\
& = -(\sigma_1 - \sigma_2) (\sinh \zeta_2 - (2n + 1) \cosh \zeta_2) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} B_{bis, n}^m - (n + m + 1)(\sigma_1 - \sigma_2) e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_2} B_{bis, n+1}^m \\
& \quad (5.76)
\end{aligned}$$

για $n = 1, 2, 3, \dots, m = -(n - 1), -(n - 2), \dots, (n - 2), (n - 1)$

$$\begin{aligned}
& (\sigma_1 - \sigma_2) (\sinh \zeta_2 - (2n + 1) \cosh \zeta_2) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} g_n^m \\
& + [(\sigma_1 - \sigma_2) \sinh \zeta_2 + (2n + 1)(\sigma_1 + \sigma_2) \cosh \zeta_2] e^{(n+\frac{1}{2})\zeta_2} f_n^m \\
& + (n + m + 1)(\sigma_1 - \sigma_2) e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_2} g_{n+1}^m - (n + m + 1)(\sigma_1 + \sigma_2) e^{(n+\frac{3}{2})\zeta_2} f_{n+1}^m \\
& + (n + m)(\sigma_1 - \sigma_2) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} g_{n-1}^m - (n + m)(\sigma_1 + \sigma_2) e^{(n-\frac{1}{2})\zeta_2} f_{n-1}^m \\
& = -(\sigma_1 - \sigma_2) (\sinh \zeta_2 - (2n + 1) \cosh \zeta_2) e^{-(n+\frac{1}{2})\zeta_2} B_{bis, n}^m \\
& - (n + m + 1)(\sigma_1 - \sigma_2) e^{-(n+\frac{3}{2})\zeta_2} B_{bis, n+1}^m - (n - m)(\sigma_1 - \sigma_2) e^{-(n-\frac{1}{2})\zeta_2} B_{bis, n-1}^m. \quad (5.77)
\end{aligned}$$

Η επίλυση των εξισώσεων (5.72) - (5.77) είναι ισοδύναμη με την επίλυση του συστήματος (5.78) υπό τη μορφή πινάκων $\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{K}$, όπου ο $\mathbf{N}$ είναι ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων, τάξης $[\infty \times \infty]$, ο $\mathbf{x}$ είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων, τάξης $[\infty \times 1]$ και ο $\mathbf{K}$ είναι ο πίνακας στήλης των σταθερών συντελεστών, επίσης τάξης $[\infty \times 1]$. Για κάθε τιμή του m αντιστοιχεί ένας τέτοιος πίνακας. Επομένως για το πλήθος $m = 2n + 1$ που έχουμε στο πρόβλημά μας και για τα οποία ισχύουν οι αναγωγικές σχέσεις (5.72) - (5.77), θα υπάρχουν $m = 2n + 1, [\infty \times \infty]$ πίνακες της προαναφερθείσας μορφής. Δηλαδή,

$$\begin{bmatrix}
 F_m^{m(1)} & G_m^{m(1)} & F_{m+1}^{m(1)} & G_{m+1}^{m(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
 F_m^{m(2)} & G_m^{m(2)} & F_{m+1}^{m(2)} & G_{m+1}^{m(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
 F_m^{m(3)} & G_m^{m(3)} & F_{m+1}^{m(3)} & G_{m+1}^{m(3)} & F_{m+2}^{m(3)} & G_{m+2}^{m(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
 F_m^{m(4)} & G_m^{m(4)} & F_{m+1}^{m(4)} & G_{m+1}^{m(4)} & F_{m+2}^{m(4)} & G_{m+2}^{m(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & F_{m+1}^{m(5)} & G_{m+1}^{m(5)} & F_{m+2}^{m(5)} & G_{m+2}^{m(5)} & F_{m+3}^{m(5)} & G_{m+3}^{m(5)} & 0 & 0 & \vdots \\
 0 & 0 & F_{m+1}^{m(6)} & G_{m+1}^{m(6)} & F_{m+2}^{m(6)} & G_{m+2}^{m(6)} & F_{m+3}^{m(6)} & G_{m+3}^{m(6)} & 0 & 0 & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_m^m \\ g_m^m \\ f_{m+1}^m \\ g_{m+1}^m \\ f_{m+2}^m \\ g_{m+2}^m \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_m^{m(1)} \\ k_m^{m(2)} \\ k_{m+1}^{m(1)} \\ k_{m+1}^{m(2)} \\ k_{m+2}^{m(1)} \\ k_{m+2}^{m(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Ο δείκτης $i, \text{ όπου } i = 1, 2, 3, \dots$ αναφέρεται στην εξίσωση στην οποία αντιστοιχούν οι συντελεστές των αγνώστων.

Παρατηρούμε ότι κάθε τέτοιος πίνακας είναι ένας εξαδιαγώνιος συμμετρικός πίνακας. Η συμμετρία αυτή του πίνακα για κάθε μια από τις $2n + 1$ διαφορετικές, αλλά σταθερές τιμές του m αντικατοπτρίζει την όμοια και αρμονικά καθορισμένη εξάρτηση στο αζιμούθιο, ενώ ειδικά για $m = 0$ αναπαριστά την αξονική συμμετρία, δηλαδή την ανεξαρτησία της λύσης από το αζιμούθιο.

Ο καθορισμός των αγνώστων μπορεί να γίνει μέχρι οποιασδήποτε τάξης ακρίβεια, με κατάλληλες τεχνικές αποκοπής [15].

Κεφάλαιο 6

Γραφικές αναπαραστάσεις και σύγκριση αποτελεσμάτων

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα κατασκευαστούν γραφήματα για το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο για το κύριως πρότυπο της παρούσας διατριβής, αυτό των τριών ελλειψοειδών φλοιών, καθώς και απλούστερων αυτού, τόσο ως προς την στρωματοποίηση, όσο και ως προς τη γεωμετρία, προκειμένου να εξηγήσουμε την ποιοτική συμπεριφορά των εν λόγω προτύπων, να ποσοτικοποιήσουμε τα αποτελέσματα και να τα συγκρίνουμε μεταξύ τους. Η κατασκευή των γραφημάτων αυτών γίνεται επιπλέον και προς την κατεύθυνση συλλογής πληροφοριών για τα αντίστροφα προβλήματα ΗΕΓ και ΜΕΓ με τελικό μελλοντικό στόχο την επίλυσή των.

Στην παράγραφο **6.2** αναλύουμε το ηλεκτρικό δυναμικό όπως αυτό προκύπτει από την επίλυση του ευθέος προβλήματος ΗΕΓ για το πρότυπο του ομογενούς σφαιρικού αγωγού, για τις περιπτώσεις που αυτό δίνεται από την ακριβή λύση - που εξήχθη με τη μέθοδο των ειδώλων στην παράγραφο **2.4** - και αυτής της προσεγγιστικής λύσης σε όρους σφαιρικών αρμονικών - όπως δόθηκε στην υποπαράγραφο **2.2.2** [12]. Για τις δυο αυτές περιπτώσεις σχεδιάζονται διαγράμματα της κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του κρανίου, με βάση τα οποία πραγματοποιείται παραμετρική ανάλυση της θέσης και του προσανατολισμού της διπολικής ροπής για το απλό ρεύμα διπόλου που έχει θεωρηθεί στα πρότυπα της παρούσας διατριβής. Η παράγραφος περιλαμβάνει ακόμα και μια λεπτομερή σύγκριση των δυο αποτελεσμάτων.

Στην παράγραφο **6.3** παραθέτουμε το ηλεκτρικό δυναμικό όπως αυτό προκύπτει από την επίλυση του ευθέος προβλήματος ΗΕΓ για το πρότυπο του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού σε όρους ελλειψοειδών αρμονικών [38]. Βασιζόμενοι στη σχέση αυτή κατασκευάζονται διαγράμ-

ματα της κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του ομογενούς ελλειψοειδούς, με βάση τα οποία πραγματοποιείται παραμετρική ανάλυση της θέσης και του προσανατολισμού της διπολικής ροπής. Η παράγραφος ολοκληρώνεται με μια λεπτομερή σύγκριση των δυο ομογενών προτύπων στη σφαιρική και στην ελλειψοειδή γεωμετρία.

Τέλος η παράγραφος 6.4 περιλαμβάνει διαγράμματα του μαγνητικού πεδίου μέχρι τετραπολικού όρου προσέγγισης για τον αγωγό των τριών ελλειψοειδών φλοιών, καθώς και των ομογενών αγωγών στη σφαιρική και στην ελλειψοειδή γεωμετρία, στο εξωτερικό του αντίστοιχου κάθε φορά αγωγού. Τα αποτελέσματα της αναλυτικής επίλυσης καθώς και τα εν λόγω διαγράμματα οδηγούν στη σύγκριση των ανώτερων προτύπων και αναδεικνύουν τη συνεισφορά του στρωματοποιημένου αγωγού των τριών ελλειψοειδών φλοιών - μέσω των παραγόντων αγωγιμότητας - στη διεύρευσή της βιομαγνητικής δραστηριότητας του ανθρώπινου εγκεφάλου.

6.2 Το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού

Το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια του εγκεφάλου για την περίπτωση του ομογενούς σφαιρικού αγωγού δύναται να υπολογιστεί είτε από το εξωτερικό είτε από το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό υπολογισμένο στην επιφάνεια $r = \alpha$. Προτού λοιπόν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που δίνουν τις εκφράσεις για το δυναμικό για να σχεδιάσουμε τις αντίστοιχες κατανομές, θα εξηγήσουμε αναλυτικά από τη μορφή των σχέσεων αυτών τις πληροφορίες που λαμβάνονται και το τι αναμένεται τελικά να προκύψει στις κατανομές.

Θα χρησιμοποιήσουμε την ακριβή μορφή του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού στην περίπτωση της ομογενούς σφαίρας όπως αυτό δίνεται από τη σχέση (2.88), δηλαδή

$$\begin{aligned}
 u^-(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\alpha}{4\pi\sigma r} \mathbf{Q} \cdot \frac{\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^3} - \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{Q}}{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} \\
 & + \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot [\mathbf{r}_0 \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}) \bar{\mathbf{I}} + \alpha^2 \bar{\mathbf{I}}] \cdot \mathbf{Q}}{r \left| \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

καθώς και το ανάπτυγμα του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές, όπως δίνεται από την (2.31), μέχρι και όρους δεύτερης τάξης, δηλαδή

$$u^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{3}{4\pi\sigma r^3} \sum_{i=1}^3 Q_i x_i - \frac{5}{8\pi\sigma r^3} \sum_{i=1}^3 Q_i x_{0i} + \frac{15}{8\pi\sigma r^5} \sum_{i=1}^3 Q_i x_{0i} x_i^2$$

$$+ \frac{15}{16\pi\sigma r^5} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (6.2)$$

Υπενθυμίζουμε ότι α είναι η ακτίνα της σφαίρας, $\mathbf{r}$ το διάνυσμα θέσης ως προς το οποίο γίνεται η μέτρηση του ηλεκτρικού δυναμικού, $\mathbf{r}_0$ το διάνυσμα θέσης της πηγής και $\mathbf{Q}$ η ροπή της πηγής. Τα δύο τελευταία μεγέθη είναι αυτά των οποίων η μεταβολή θα μας δώσει πληροφορίες για το αντίστροφο πρόβλημα.

Θα ξεκινήσουμε εξετάζοντας κάποιες ειδικές περιπτώσεις σχετικά με τη θέση και τον προσανατολισμό της πηγής, προκειμένου να βρούμε πληροφορίες σχετικά με το αντίστροφο πρόβλημα ΗΕΓ. Για το λόγο αυτό θεωρούμε την περίπτωση που δημιουργεί μαγνητικά σιωπηλές πηγές [19]. Δηλαδή προσπαθούμε να κατανοήσουμε τι συμβαίνει με το πρόβλημα ΗΕΓ όταν υπάρχουν σιωπηλές πηγές στο ΜΕΓ. Ως σιωπηλή πηγή στο ΜΕΓ ορίζουμε εκείνη την περίπτωση που το διάνυσμα θέσης της πηγής και το διάνυσμα της ροπής είναι ομόρροπα. Τότε το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό, δηλαδή δεν αναγνωρίζεται εξωτερικά η πηγή. Ειδικά για την περίπτωση του ηλεκτρικού δυναμικού, θεωρούμε την πηγή τοποθετημένη σε οποιοδήποτε άξονα και το $\mathbf{Q}$ να είναι παράλληλο στο $\mathbf{r}_0$. Τότε μπορούμε να βρούμε αναλυτικά από τις σχέσεις (6.1) και (6.2) τα σημεία στην επιφάνεια της σφαίρας, όπου το ηλεκτρικό δυναμικό γίνεται ίσο με το μηδέν. Ορίζοντας το σημείο $\mathbf{r}$ στην επιφάνεια της σφαίρας μέσω μιας γωνίας θ , έτσι ώστε $r = \alpha \cos \theta$ και επιλύοντας τη σχέση (6.1) ως προς θ [12], προκύπτει

$$\cos \theta_{ex} = \frac{\alpha^2 + r_0^2}{2\alpha r_0} + \frac{[-\alpha^2(\alpha^2 - r_0^2)^2]^{1/3}}{2\alpha r_0}. \quad (6.3)$$

Ομοίως επιλύοντας τη σχέση (6.2) ως προς θ , προκύπτει

$$\cos \theta_{apr} = -\frac{3\alpha^2}{15r_0} \pm \frac{(9\alpha^2 + 75r_0^2)^{1/2}}{15r_0}. \quad (6.4)$$

Από την (6.3) παρατηρούμε ότι στην ακριβή μορφή η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού μηδενίζεται μόνο σε ένα σημείο που ορίζεται από τη γωνία θ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού είναι μια μονότονη συνάρτηση του r ή ισοδύναμα του θ . Από την άλλη πλευρά, στην προσεγγιστική μορφή (6.4) υπάρχουν δύο γωνίες όπου το ηλεκτρικό δυναμικό μηδενίζεται. Η μία, με το θετικό πρόσημο δίνει την ίδια γωνία με την κλειστή μορφή, ενώ η άλλη εμφανίζεται μόνο όταν το $\mathbf{r}_0$ είναι κοντά στη σφαιρική επιφάνεια. Συγκεκριμένα στο Σχήμα 6.1, μπορούμε να δούμε το γράφημα που έχει εξαχθεί από την (6.4) για τα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης του ηλεκτρικού δυναμικού, για την περίπτωση σφαίρας ακτίνας $\alpha = 9\text{cm}$.

Στη συνέχεια ακολουθούν κάποια δεδομένα για την ακριβή και την προσεγγιστική λύση (6.1)

Σχήμα 6.1: Σημεία μηδενισμού της συνάρτησης ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $\alpha = 9cm$.

και (6.2) αντίστοιχα, για την περίπτωση του σφαιρικού αγωγού ακτίνας $\alpha = 9cm$ και ηλεκτρικής αγωγιμότητας $\sigma = 0.3(\Omega m)^{-1}$ και για την ειδική περίπτωση όπου τα διανύσματα της θέσης της πηγής με της ροπής είναι παράλληλα, δηλ $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{r}_0$.

6.2.1 Κατανομές του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας για την ακριβή λύση

Στις κατανομές των σχημάτων αυτής της υποπαραγράφου τα διανύσματα της θέσης της πηγής και της ροπής επιλέγονται να είναι παράλληλα. Είναι απαραίτητο να επισημάνουμε ότι όλα τα διαγράμματα έχουν κατασκευαστεί με τα μεγέθη που εμφανίζονται σε αυτά να παίρνουν τιμές στο Διεθνές Σύστημα SI, όμως για λόγους ευκρίνειας στα διαγράμματα που απεικονίζονται στα σχήματα του παρόντος κεφαλαίου, τα μεγέθη είναι αδιαστατοποιημένα.

Στο Σχήμα 6.2 βλέπουμε την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας όπως έχει υπολογιστεί από τη σχέση (6.1) (ακριβής λύση). Οι περιοχές κόκκινου

Σχήμα 6.2: Κατανομή ηλεκτρικού δυναμικού για την ακριβή λύση στην επιφάνεια σφαίρας, για παράλληλη τοποθέτηση των διανυσμάτων θέσης και ροπής της πηγής $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{r}_0$. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κύκλοι παράλληλοι μεταξύ τους.

χρώματος αντιστοιχούν σε τιμές μέγιστου ηλεκτρικού δυναμικού για την εκάστοτε κατανομή, ενώ οι περιοχές μπλε χρώματος σε τιμές ελάχιστου δυναμικού αντίστοιχα, όπως επισημαίνεται από το κάθετο φάσμα δεξιά των διαγραμμάτων.

Παρατηρούμε ότι

- Οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι παράλληλοι κύκλοι και μάλιστα κάθετοι στην κοινή διεύθυνση του διανύσματος θέσης και της ροπής του διπόλου.
- Η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού είναι μια μονότονη συνάρτηση του r , η οποία παίρνει υψηλότερες τιμές στη φορά του διανύσματος της ροπής.
- Τα σημεία του μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού ανήκουν σε έναν από τους παραπάνω κάθετους κύκλους, του οποίου η γωνία ορίζεται ακριβώς από την σχέση (6.3). Ο κύκλος μηδενικού δυναμικού απεικονίζεται στα σχήματα των κατανομών με λευκά σημεία.

Στα διαγράμματα του Σχήματος 6.3 μεταβάλλουμε τη θέση της πηγής, διατηρώντας σταθερή την κατεύθυνση της ροπής. Παρατηρούμε λοιπόν ότι

- Καθώς η πηγή πλησιάζει το σύνορο (την επιφάνεια της σφαίρας) το δυναμικό αυξάνεται και η γωνία του κύκλου μηδενικού δυναμικού ελαττώνεται.

Σχήμα 6.3: Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού ακριβούς λύσης για μεταβολή του διανύσματος της θέσης της πηγής. Οι υψηλότερες τιμές ηλεκτρικού δυναμικού βρίσκονται στην φορά του διανύσματος ροπής της πηγής $\mathbf{Q}$, ανεξάρτητα της συμπεριφοράς του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}_0$.

- Παρά τις μεταβολές της θέσης της πηγής, οι τιμές υψηλότερου δυναμικού βρίσκονται πάντα προς την φορά του διανύσματος της ροπής της πηγής $\mathbf{Q}$.

Στα διαγράμματα του Σχήματος 6.4 διατηρούμε σταθερή τη θέση της πηγής και μεταβάλλουμε το μέτρο της ροπής. Παρατηρούμε λοιπόν ότι

- καθώς το μέτρο του $\mathbf{Q}$ αυξάνεται, το φάσμα του δυναμικού αυξάνεται επίσης, ως απόρροια της γραμμικότητας.
- μεταβολές του $\mathbf{Q}$ αφήνουν αναλλοίωτη τη γωνία θ του κύκλου μηδενικού δυναμικού, όπως ακριβώς υποδεικνύεται και από την (6.3) όπου η γωνία θ είναι ανεξάρτητη του $\mathbf{Q}$

Η αύξηση του δυναμικού που επιφέρει η αύξηση του μέτρου του $\mathbf{Q}$, είναι αναμενόμενη, αφού όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από την (6.1), το $\mathbf{Q}$ είναι μέγεθος γραμμικά εξαρτημένο από τη συνάρτηση δυναμικού.

Σχήμα 6.4: Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού της ακριβούς λύσης για μεταβολή του διανύσματος της ροπής της πηγής. Το ηλεκτρικό δυναμικό εξαρτάται γραμμικά από τη μεταβολή του μέτρου της ροπής της πηγής.

Τέλος παραθέτουμε το Σχήμα 6.5 όπου η πηγή με την ίδια κάθε φορά ένταση τοποθετείται διαδοχικά σε καθέναν από τους τρεις κάθετους άξονες. Η συμμετρία που επιφέρει η σφαιρική γεωμετρία έχει ως αποτέλεσμα οι κατανομές που προκύπτουν να είναι ακριβώς ίδιες, με τέτοιο τρόπο που επιδεικνύεται η συμμετρική συνεισφορά των αξόνων.

6.2.2 Κατανομές του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας για την προσεγγιστική λύση

Θα συνεχίσουμε με γραφήματα κατανομών για την λύση του ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές μέχρι δευτέρου βαθμού - σχέση (6.2). Από το Σχήμα 6.6 παρατηρούμε ότι

- οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι κάθετοι κύκλοι στην κοινή διεύθυνση του διανύσματος

Σχήμα 6.5: Ο συμμετρικός χαρακτήρας της σφαίρας: η συμμετρία του δυναμικού στη σφαιρική γεωμετρία φανερώνεται από την κοινή κατανομή του δυναμικού σε οποιαδήποτε διεύθυνση και να τοποθετηθούν τα παράλληλα και ίδιου μέτρου ζευγάρια των $\mathbf{Q}, \mathbf{r0}$.

θέσης και της ροπής του διπόλου.

Μεταβάλλοντας διαδοχικά τη θέση της πηγής και διατηρώντας σταθερό το διάνυσμα της ροπής (Σχήμα 6.7) παρατηρούμε ότι

- καθώς η πηγή πλησιάζει το σύνορο (την επιφάνεια της σφαίρας) το δυναμικό αυξάνεται στην κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα της ροπής της πηγής και
- η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού δεν είναι πλέον μια 1-1 συνάρτηση του r , αφού οι όροι αποκοπής εισάγουν ένα ακόμα κύκλο μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού.

Στα διαγράμματα του Σχήματος 6.8 διατηρούμε σταθερή τη θέση της πηγής και μεταβάλλουμε το μέτρο της ροπής.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

Σχήμα 6.6: Κατανομή ηλεκτρικού δυναμικού για την προσεγγιστική λύση στην επιφάνεια σφαίρας, για παράλληλη τοποθέτηση των διανυσμάτων θέσης και ροπής της πηγής $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{r}_0$. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι κύκλοι παράλληλοι μεταξύ τους.

- καθώς το μέτρο του $\mathbf{Q}$ αυξάνεται, το φάσμα του δυναμικού αυξάνεται επίσης, αφού όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από την (6.2), το $\mathbf{Q}$ είναι μέγεθος γραμμικά εξαρτημένο από τη συνάρτηση δυναμικού.
- μεταβολές του $\mathbf{Q}$ αφήνουν αναλλοίωτη τη γωνία θ του κύκλου μηδενικού δυναμικού, όπως ακριβώς υποδεικνύεται και από την (6.4) όπου η γωνία θ είναι ανεξάρτητη του $\mathbf{Q}$.

6.2.3 Σύγκριση της ακριβούς και της προσεγγιστικής λύσης για το ηλεκτρικό δυναμικό

Επισημαίνουμε ότι η ακριβής λύση (6.1), όπως αυτή προκύπτει από τη μέθοδο των ειδώλων, παρέχει την ακριβή λύση για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για την ομογενή σφαίρα, ενώ η (6.2) δίνει μια προσέγγιση του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού για το ίδιο πρότυπο. Στην πραγματικότητα μπορούμε να συγκρίνουμε τα δύο δυναμικά, αφού ενδιαφερόμαστε για την κατανομή του πεδίου του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του αγωγού, όπου το εξωτερικό και το ηλεκτρικό δυναμικό συμπίπτουν. Συνεπώς το ηλεκτρικό δυναμικό στην σφαιρική επιφάνεια εκφράζεται από τη (6.1), καθώς επίσης και από την (6.2). Στην παρούσα διατριβή

Σχήμα 6.7: Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού προσεγγιστικής λύσης για μεταβολή του διανύσματος της θέσης της πηγής. Όπως και στις κατανομές για την ακριβή λύση κι εδώ οι υψηλότερες τιμές ηλεκτρικού δυναμικού βρίσκονται στην φορά του διανύσματος ροπής της πηγής $\mathbf{Q}$, ανεξάρτητα της συμπεριφοράς του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}_0$. Για θέσεις τις πηγής όμως κοντά στην επιφάνεια της σφαίρας, εμφανίζεται και δεύτερος κύκλος μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού.

έχουμε θεωρήσει για την κατασκευή των κατανομών την περίπτωση διαφορετικών θέσεων της πηγής. Και από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι το ηλεκτρικό δυναμικό χαρακτηρίζεται από ισοδυναμικούς κυκλικές καμπύλες κάθετες στην κοινή διεύθυνση της θέσης και της ροπής του διπόλου. Στην ακριβή μορφή εμφανίζεται ένας κύκλος μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού, σε αντίθεση με την ανοικτή μορφή όπου υπάρχει η δυνατότητα εμφάνισης μέχρι και δυο τέτοιων κύκλων. Η εμφάνιση του δεύτερου κύκλου εξαρτάται αποκλειστικά από τη θέση της πηγής και όχι από το διάνυσμα της ροπής της. Όταν η πηγή είναι κοντά στο κέντρο της σφαίρας, η κατανομή του δυναμικού στη σφαιρική επιφάνεια έχει τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά και στις δυο περιπτώσεις. Αλλά ποσοτικά, συγκρίνοντας την ακριβή λύση με την προσέγγιση, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια υψηλότερη διακύμανση των τιμών του δυναμικού για το ίδιο δίπολο

Σχήμα 6.8: Διαγράμματα ηλεκτρικού δυναμικού της προσεγγιστικής λύσης για μεταβολή του διανύσματος της ροπής της πηγής. Η γραμμική εξάρτηση του $\mathbf{Q}$ από το φάσμα του ηλεκτρικού δυναμικού γίνεται εμφανής.

στην πρώτη περίπτωση. Έπιπλέον όταν η πηγή πλησιάζει στην επιφάνεια οι δυο κατανομές διαφέρουν. Σχετικά με το αντίστροφο πρόβλημα, εάν οι ισοδυναμικοί κύκλοι παρατηρούνται να είναι παράλληλοι μεταξύ τους, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η κάθετος στο κοινό τους επίπεδο ορίζει την κοινή διεύθυνση του διανύσματος θέσης και της διπολικής ροπής που προκαλεί το πεδίο του μετρούμενου ηλεκτρικού δυναμικού.

- Και στις δύο περιπτώσεις εμφανίζεται η ίδια ποιοτικά κατανομή δυναμικού, αλλά ποσοτικά υπάρχει ένα υψηλότερο φάσμα δυναμικού για την ακριβή λύση.
- Οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι κύκλοι κάθετοι στην κοινή κατεύθυνση που ορίζει η κατεύθυνση και η ροπή του διπόλου.
- Η ακριβής λύση (6.1) που δίνει τη συνάρτηση του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού είναι μονότονη, ενώ όπως φαίνεται από τα διαγράμματα κατανομών για την προσεγγιστική

λύση του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού, η προσέγγιση καταστρέφει τη μονοτονία της συνάρτησης.

- Η συνάρτηση δυναμικού παίρνει τις υψηλότερες τιμές στην κατεύθυνση του διανύσματος της ροπής.
- Στις κατανομές της ακριβούς λύσης οι τιμές μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού ανήκουν σε έναν κύκλο, ο οποίος συμπίπτει στις αντίστοιχες κατανομές για την προσεγγιστική λύση. Επιπλέον όμως στην τελευταία περίπτωση δύναται να υπάρχει ένας ακόμη κύκλος μηδενικού δυναμικού, γεγονός που εξαρτάται από το πόσο η κοντά είναι η πηγή στην επιφάνεια της σφαίρας (βλ. Σχήμα 6.1). Καθώς η πηγή πλησιάζει στην επιφάνεια της σφαίρας ο κύκλος μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού έχει μικρότερη γωνία.
- Η γωνία θ είναι ανεξάρτητη του Q .
- Καθώς το μέτρο της ροπής της πηγής αυξάνεται, το φάσμα του δυναμικού αυξάνεται και αυτό.

6.2.4 Γενική περίπτωση κατανομές του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας για την ακριβή λύση

Τα διαγράμματα που παρατίθενται στη συνέχεια αφορούν στην ακριβή μορφή της λύσης του ηλεκτρικού δυναμικού και για μια τυχαία θέση της πηγής και του μέτρου της ροπής της.

Διαπιστώνουμε αρχικά ότι όσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές του Q , τόσο μεγαλύτερες είναι και οι τιμές που παίρνει το δυναμικό. Επίσης υψηλές τιμές δυναμικού παρουσιάζονται όταν η πηγή βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια.

Όσον αφορά τις ισοδυναμικές καμπύλες του ηλεκτρικού δυναμικού, αυτές για μια τυχαία κατανομή παύουν να είναι παράλληλες μεταξύ τους. Η ισοδυναμική όμως καμπύλη μηδενικού κύκλου ηλεκτρικού δυναμικού (MK) παραμένει πάντα κάθετη στην κατεύθυνση του Q . Από την άλλη πλευρά οι ισοδυναμικές καμπύλες που αντιστοιχούν στις υψηλότερες τιμές ηλεκτρικού δυναμικού τείνουν να είναι κάθετες στην διεύθυνση του r_0 , αλλά βρίσκονται κατά τη φορά που επιβάλλει το Q (βλ. Σχήμα 6.9). Επίσης από τα σχήματα αυτά φαίνεται ο συμμετρικός χαρακτήρας της σφαίρας, αφού για ακριβώς αντίθετες τιμές των διανυσμάτων Q και r_0 η κατανομή του δυναμικού στην επιφάνεια της σφαίρας μένει αναλλοίωτη.

Η καθετότητα στο r_0 εξαρτάται από το πόσο βαθιά ή εντοπισμένη στην επιφάνεια του εγκεφάλου βρίσκεται η πηγή. Όσο κοντύτερα βρίσκεται στην επιφάνεια τόσο ακριβέστερα είναι τα αποτελέσματα, ενώ σε μεγάλο βάθος χάνεται το σήμα της πηγής. Το γεγονός αυτό έρχεται

Σχήμα 6.9: Ο συμμετρικός χαρακτήρας της σφαίρας: η συμμετρία του δυναμικού στη σφαιρική γεωμετρία φανερώνεται από την κοινή κατανομή του δυναμικού σε οποιαδήποτε διεύθυνση και να τοποθετηθούν τα παράλληλα και ίδιου μέτρου ζευγάρια των $\mathbf{Q}, \mathbf{r}_0$.

σε συμφωνία με τα κλινικά αποτελέσματα για το HEF [33] και φανερώνεται στο Σχήμα 6.10. Τέλος οι κύκλοι ελάχιστου δυναμικού είναι συμμετρικοί ως προς τους αντίστοιχους μέγιστους ως προς την κάθετη της επιφάνειας που ορίζουν τα $\mathbf{Q}, \mathbf{r}_0$.

6.2.5 Συμπεράσματα για το αντίστροφο πρόβλημα HEF για την ομογενή σφαίρα

Από τα σχήματα της παραγράφου 6.2 και από τις παρατηρήσεις επί αυτών, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

Όταν σε μια κατανομή οι ηλεκτρικές ισοδυναμικές καμπύλες δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους, τότε το $\mathbf{Q}$ έχει κατεύθυνση κάθετη στον κύκλο μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού και φορά προς τη μεριά των υψηλότερων κύκλων δυναμικού. Από την άλλη πλευρά, πληροφορία για τη

Σχήμα 6.10: Κατανομή στην επιφάνεια της σφαίρας για τυχαία θέση και ροπή της πηγής: α) ο κύκλος μηδενικού δυναμικού είναι πάντα κάθετος στο διάνυσμα ροπής της πηγής, β) όταν η πηγή βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια οι κύκλοι μέγιστου δυναμικού τείνουν να είναι κάθετοι στη διεύθυνση του διανύσματος της θέσης $\mathbf{r}_0$, γ) οι κύκλοι ελάχιστου δυναμικού είναι συμμετρικοί ως προς τους αντίστοιχους μέγιστους ως προς την κάθετη της επιφάνειας που ορίζουν τα $\mathbf{Q}$, $\mathbf{r}_0$.

θέση της πηγής λαμβάνεται από τις ισοδυναμικές καμπύλες μέγιστου δυναμικού. Το διάνυσμα θέσης της πηγής τείνει να είναι κάθετο σε αυτές και ο βαθμός καθετότητας μεγαλώνει όσο η πηγή πλησιάζει την επιφάνεια. Από την άλλη πλευρά οι κύκλοι ελάχιστου δυναμικού είναι συμμετρικοί ως προς τους αντίστοιχους μέγιστους ως προς την κάθετη της επιφάνειας που ορίζουν τα $\mathbf{Q}$, $\mathbf{r}_0$.

Το φάσμα του ηλεκτρικού δυναμικού αποτελεί ένα κριτήριο του αν η πηγή βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια ή βαθιά στο εσωτερικό της σφαίρας. Υψηλές τιμές δυναμικού συνεπάγονται πιθανή ύπαρξη της πηγής κοντά στην επιφάνεια της σφαίρας. Μπορεί όμως παράλληλα να σημαίνει και μεγάλο μέτρο της ροπής $\mathbf{Q}$.

Επιπλέον, αν οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι κύκλοι παράλληλοι με τον κύκλο μηδενικού δυνα-

μικού, τότε γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα θέσης και η ροπή της πηγής είναι παράλληλα. Επίσης στην περίπτωση αυτή η θέση του $\mathbf{r}_0$ επηρεάζει τα σημεία που βρίσκεται ο κύκλος μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού.

6.3 Το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς αγωγού

Το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια του εγκεφάλου για την περίπτωση του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού υπολογίζεται από τη σχέση (3.87) πάνω στην επιφάνεια S_s του ελλειψοειδούς, δηλαδή

$$\begin{aligned} u(\rho, \mu, \nu) = & g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \frac{3}{4\pi\sigma s_1 s_2 s_3} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(s_1)} \\ & - \frac{5}{8\pi\sigma s_1 s_2 s_3 (\Lambda_s - \Lambda'_s)} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left[\frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(s_1)} \frac{\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_s (\Lambda_s - s_m^2)} - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(s_1)} \frac{\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda'_s (\Lambda'_s - s_m^2)} \right] \\ & + \frac{15}{4\pi\sigma s_1 s_2 s_3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_i x_{0j} x_i x_j}{(s_i^2 + s_j^2)} \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(s_1)} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $[s_1 s_2 s_3]$ είναι οι ημιάξονες του ελλειψοειδούς, $\mathbf{r}$ το διάνυσμα θέσης ως προς το οποίο γίνεται η μέτρηση του ηλεκτρικού δυναμικού, $\mathbf{r}_0$ το διάνυσμα θέσης της πηγής και $\mathbf{Q}$ η ροπή της πηγής. Οι κατανομές του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του ομογενούς ελλειψοειδούς που θα ακολουθήσουν προκύπτουν από τη μεταβολή των δύο διανυσμάτων που αφορούν στην πηγή, $\mathbf{r}_0$ και $\mathbf{Q}$.

Θα εξετάσουμε αρχικά κάποιες ειδικές περιπτώσεις σχετικά με τη θέση και τον προσανατολισμό της πηγής. Θεωρούμε την πηγή τοποθετημένη σε οποιοδήποτε άξονα και το $\mathbf{Q}$ να είναι παράλληλο στο $\mathbf{r}_0$.

Στο Σχήμα 6.11 βλέπουμε την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του ομογενούς ελλειψοειδούς όπως έχει υπολογιστεί από τη σχέση (6.5). Παρατηρούμε ότι

- Οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι παράλληλες ελλείψεις και κάθετες στην κοινή διεύθυνση του διανύσματος θέσης και της ροπής του διπόλου.
- Οι υψηλότερες τιμές του δυναμικού βρίσκονται στη φορά του διανύσματος της ροπής.

Σχήμα 6.11: Κατανομή ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του ομογενούς ελλειψοειδούς, για παράλληλη τοποθέτηση των διανυσμάτων θέσης και ροπής της πηγής $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{r}_0$. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι ελλείψεις παράλληλες μεταξύ τους.

6.3.1 Παράλληλη τοποθέτηση των διανυσμάτων θέσης και ροπής της πηγής

Στα Σχήματα της υποπαραγράφου αυτής διατηρούμε παράλληλα και τοποθετημένα στους ημιάξονες τα διανύσματα θέσης και ροπής της πηγής.

Αρχικά μετακινούμε τη θέση της πηγής κατά μήκος του μεγάλου ημιάξονα s_1 όπως φαίνεται στα διαγράμματα του Σχήματος 6.12, από τα οποία παρατηρούμε τα εξής:

- Καθώς η πηγή πλησιάζει το σύνορο (την επιφάνεια του ελλειψοειδούς) το δυναμικό αυξάνεται στην κατεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα της ροπής της πηγής.
- Οι όροι αποκοπής του ηλεκτρικού δυναμικού στη σχέση (6.5) καταστρέφουν τη μονοτονία της συνάρτησης, γεγονός που φαίνεται όταν η πηγή πλησιάσει την επιφάνεια.
- Τα διαγράμματα του Σχήματος 6.12 παρουσιάζουν όμοια ποιοτική συμπεριφορά με τα

Σχήμα 6.12: Ως προσεγγιστική, η λύση για το ομογενές ελλειψοειδές, οδηγεί σε διαγράμματα που παρουσιάζουν όμοια ποιοτική συμπεριφορά με τα αντίστοιχα του Σχήματος 6.8 για την προσεγγιστική λύση της σφαίρας. Οι υψηλότερες τιμές ηλεκτρικού δυναμικού βρίσκονται στην φορά του διανύσματος ροπής της πηγής $\mathbf{Q}$, ανεξάρτητα της συμπεριφοράς του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}_0$. Για θέσεις τις πηγής όμως κοντά στην επιφάνεια της σφαίρας, καταστρέφεται η μονοτονία της συνάρτησης

αντίστοιχα του 6.8 για την προσεγγιστική λύση της σφαίρας. Φαίνεται σαν οι όροι αποκοπής που και στις δύο περιπτώσεις είναι μέχρι προσέγγιση τετραπόλου προκαλούν τέτοια απώλεια πληροφoρίας που εκφράζεται γραφικά με τον ίδιο τρόπο.

Η συμπεριφορά του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του ομογενούς ελλειψοειδούς είναι αντίστοιχη αν επιλέξουμε τα διανύσματα θέσης και ροπής της πηγής να βρίσκονται σε οποιονδήποτε από τους δυο άλλους ημιάξονες s_2, s_3 .

Στα διαγράμματα του Σχήματος 6.13 διατηρούμε σταθερή τη θέση της πηγής και μεταβάλλουμε το μέτρο της ροπής.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

Σχήμα 6.13: Ως προσεγγιστική και αυτή η λύση έχει την παρόμοια ποιοτική συμπεριφορά με τα αντίστοιχα διαγράμματα του Σχήματος 6.5 για την προσεγγιστική λύση της σφαίρας. Το Q είναι μέγεθος γραμμικά εξαρτημένο από τη συνάρτηση δυναμικού και οι υψηλότερες τιμές ηλεκτρικού δυναμικού βρίσκονται στη φορά του διανύσματος ροπής της πηγής Q , ανεξάρτητα της συμπεριφοράς του διανύσματος θέσης r_0 .

- καθώς το μέτρο του Q αυξάνεται, το φάσμα του δυναμικού αυξάνεται επίσης, αφού όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε από την (6.5), το Q είναι μέγεθος γραμμικά εξαρτημένο από τη συνάρτηση δυναμικού.
- Η αλλαγή της φοράς του διανύσματος της ροπής της πηγής, επιβεβαιώνει την παρατήρηση που εξήχθει και από το Σχήμα 6.12 ότι οι τιμές μέγιστου δυναμικού βρίσκονται στη φορά του διανύσματος Q .

6.3.2 Σύγκριση της σφαίρας και του ελλειψοειδούς

Στην υποπαράγραφο αυτή επιχειρούμε να μετακινήσουμε τα διανύσματα από την παράλληλη μεταξύ τους θέση με έναν τυχαίο προσανατολισμό των διανυσμάτων της θέσης και της ροπής

της πηγής και να τα συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες κατανομές της σφαίρας. Η ανισοτροπία που επιφέρει η ελλειψοειδής γεωμετρία, καθώς και η προσέγγιση της λύσης δυσκολεύει σε μεγάλο βαθμό την ανάγνωση της πληροφορίας από τις κατανομές, σε αντίθεση με τις αντίστοιχες στη σφαιρική γεωμετρία. Παραθέτοντας μαζί στο Σχήμα 6.14 τα αντίστοιχα διαγράμματα για τη σφαίρα και το ελλειψοειδές οι παραπάνω παρατηρήσεις επιβεβαιώνονται.

Σχήμα 6.14: Οι κατανομές του ελλειψοειδούς διαφέρουν ποιοτικά από αυτές της σφαίρας για τυχαίο προσανατολισμό των $\mathbf{Q}$, $\mathbf{r}_0$. Οι υψηλότερες τιμές ηλεκτρικού δυναμικού παραμένουν στην φορά του διανύσματος ροπής της πηγής $\mathbf{Q}$, ανεξάρτητα της συμπεριφοράς του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}_0$, χωρίς όμως να μπορεί να καθοριστεί επακριβώς στην περίπτωση του ελλειψοειδούς.

6.4 Το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό των αγωγών

Στη παράγραφο αυτή κατασκευάζονται διαγράμματα του μαγνητικού πεδίου για τον αγωγό των τριών ελλειψοειδών φλοιών, καθώς και των ομογενών αγωγών στη σφαιρική και στην ελλειψοειδή γεωμετρία, προκειμένου η γραφική επεξεργασία σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα της αναλυτικής επίλυσης να οδηγήσει σε σύγκριση των τριών προτύπων [13]. Η γραφική επεξεργασία αφορά στις σχέσεις (4.58), (4.71) και (4.72), οι οποίες εκφράζουν το μαγνητικό πεδίο μέχρι τετραπολικού όρου προσέγγισης στο εξωτερικό του αντίστοιχου κάθε φορά αγωγού. Συγκεκριμένα το μαγνητικό πεδίο για τον ελλειψοειδή στρωματοποιημένο αγωγό των τριών φλοιών δίνεται από την

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}(\mathbf{d}_c + \mathbf{d}_{2f} - \mathbf{d}_{2c} + \mathbf{d}_{1b} - \mathbf{d}_{1f} + \mathbf{d}_{0s} - \mathbf{d}_{0b}) \\ \times \left(\frac{\mathcal{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \frac{\mathcal{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{\Lambda}}' - 15 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right) + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right), \quad (6.6)$$

για τον ελλειψοειδή ομογενή αγωγό από την:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_c \times \left(\frac{\mathcal{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{\Lambda}} - \frac{\mathcal{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{\Lambda}}' - 15 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right) + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right) \quad (6.7)$$

και τέλος για τον σφαιρικό ομογενή αγωγό:

$$\lim_{el \rightarrow sr} \mathbf{B}_{el}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (6.8)$$

Τα σχήματα που θα ακολουθήσουν προκύπτουν από τη γραφική επεξεργασία των (6.6), (6.7) και (6.8). Συγκεκριμένα σε κάθε σχήμα υπάρχουν τέσσερα διαγράμματα. Τα τρία πρώτα αναπαριστούν αντίστοιχα την κάθε μια από τις τρεις συνιστώσες του $\mathbf{B}$ - $\mathbf{B}_x$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{B}_z$ - ως προς την απόσταση από την επιφάνεια του κρανίου μέχρι 30cm μακριά από αυτό. Το τέταρτο αναπαριστά το μέτρο του $\mathbf{B}$, $|\mathbf{B}|$ ως προς την προαναφερθείσα απόσταση. Η σύγκριση γίνεται εμφανής αφού σε καθένα από τα παραπάνω διαγράμματα απεικονίζεται η συμπεριφορά του υπό εξέταση μεγέθους, $\mathbf{B}_x$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{B}_z$, $|\mathbf{B}|$ για το πρότυπο των τριών ελλειψοειδών φλοιών, αλλά και για τα ομογενή πρότυπα στη σφαιρική και στην ελλειψοειδή γεωμετρία.

Τα αριθμητικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των διαγραμμάτων αυτών

έχουν ληφθεί από τον Πίνακα 1.1. Όλοι οι υπολογισμοί έχουν γίνει στο SI σύστημα, με πραγματικές τιμές για τα μεγέθη που εμφανίζονται στις σχέσεις, όπως αναφέρονται στο Κεφάλαιο 1.

Στο Σχήμα 6.15 απεικονίζεται η εξάρτηση του $\mathbf{B}$ από την απόσταση από την επιφάνεια του κρανίου για τυχαίο προσανατολισμό των διανυσμάτων της θέσης $\mathbf{r}_0$ και της ροπής της πηγής $\mathbf{Q}$,

Σχήμα 6.15: Σε καθένα από τα παραπάνω διαγράμματα απεικονίζεται η συμπεριφορά του υπό εξέταση μεγέθους, $\mathbf{B}_x$, $\mathbf{B}_y$, $\mathbf{B}_z$, $|\mathbf{B}|$ ως προς την απόσταση από την επιφάνεια του κρανίου μέχρι 30cm μακριά από αυτό για το πρότυπο των τριών ελλειψοειδών φλοιών, αλλά και για τα ομογενή πρότυπα στη σφαιρική και στην ελλειψοειδή γεωμετρία.

Παρατηρούμε ότι

- Οι τρεις συνιστώσες και για τα τρία πρότυπα παρουσιάζουν εκθετική συμπεριφορά.
- Οι καμπύλες των συνιστωσών του $\mathbf{B}$ στο στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό δεν παρουσιάζουν πάντα την ίδια μονοτονία σε σχέση με την κοινή συμπεριφορά των ομογενών προτύπων.
- Στο πρότυπο των τριών ελλειψοειδών φλοιών, το μέτρο του $\mathbf{B}$ είναι μικρότερο από ότι στα ομογενή και εκτείνεται σε ένα φάσμα 50 – 200 fT, που περιλαμβάνεται στο πραγματικό φάσμα των 50 – 500 fT του καταγραφόμενου κλινικά μαγνητικού πεδίου.

Η σύγκριση των τριών προτύπων θα πραγματοποιηθεί ακόμα και για δύο ειδικές περιπτώσεις: α) των μαγνητικά σιωπηλών πηγών για την ομογενή σφαίρα και β) των μαγνητικά σιωπηλών πηγών για το ομογενές ελλειψοειδές.

6.4.1 Μαγνητικά σιωπηλές πηγές για την ομογενή σφαίρα

Στην υποπαράγραφο αυτή μελετάμε την περίπτωση των μαγνητικά σφαιρικών σιωπηλών πηγών, που όπως φαίνεται από την (6.8) είναι η περίπτωση που τα διανύσματα θέσης και ροπής της πηγής είναι συγγραμμικά, δηλαδή $\mathbf{Q} \parallel \mathbf{r}_0$. Στα διαγράμματα του Σχήματος 6.16, παρατηρούμε ότι ενώ τόσο οι συνιστώσες του $\mathbf{B}$, όσο και το μέτρο του είναι μηδέν για τον σφαιρικό ομογενή αγωγό, τα αντίστοιχα μεγέθη για τον ελλειψοειδή αγωγό των τριών φλοιών παρουσιάζουν απόκλιση από το μηδέν. Ειδικά σε απόσταση 10cm από την επιφάνεια του κρανίου, όπου πραγματοποιούνται οι καταγραφές των μαγνητικών σημάτων, η απόκλιση του μέτρου του $\mathbf{B}$ των τριών ελλειψοειδών φλοιών από το μηδέν, είναι $60fT$, που είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις καταγραφές των μαγνητικών σημάτων. Αυτό επικυρώνει το γεγονός ότι οι μαγνητικά σφαιρικές σιωπηλές πηγές παύουν να είναι σιωπηλές για τον στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό.

Σχήμα 6.16: Σύγκριση του μαγνητικού πεδίου για την ομογενή σφαίρα και τον στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό για την περίπτωση των μαγνητικά σφαιρικών σιωπηλών πηγών. Ο ελλειψοειδής αγωγός των τριών φλοιών παρουσιάζει απόκλιση από τις μηδενικές καταγραφές της σφαίρας.

6.4.2 Μαγνητικά σιωπηλές πηγές για το ομογενές ελλειψοειδές

Συνεχίζουμε με τη μελέτη των μαγνητικά σιωπηλών πηγών για το ομογενές ελλειψοειδές όπως αυτές προκύπτουν από τη σχέση (6.7). Επιλέγοντας μια αυθαίρετη, αλλά σιωπηλή πηγή για το ομογενές ελλειψοειδές, με ημιάξονες $[s_1, s_2, s_3]$, [19], επιλέγουμε για το διάνυσμα θέσης της πηγής $\mathbf{r}_0(x_{01}, x_{02}, x_{03})$ το διάνυσμα της ροπής της πηγής ως $\mathbf{Q}\left(\frac{x_{01}}{\alpha_1}, \frac{x_{02}}{\alpha_2}, \frac{x_{03}}{\alpha_3}\right)$. Τότε στο Σχήμα 6.17 καταγράφεται η μηδενική συνάρτηση του $\mathbf{B}$, ως προς την απόσταση από την επιφάνεια του κρανίου, για τον ομογενή ελλειψοειδή αγωγό σε σχέση με τη μη μηδενική συνάρτηση για τον στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό.

Σχήμα 6.17: Σύγκριση του μαγνητικού πεδίου για τον ομογενή ελλειψοειδή και τον στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό για την περίπτωση των μαγνητικά σιωπηλών πηγών του πρώτου. Ο στρωματοποιημένος αγωγός παρουσιάζει απόκλιση από τις μηδενικές καταγραφές του ομογενούς ελλειψοειδούς.

Παρατηρούμε ότι ενώ τόσο οι συνιστώσες του $\mathbf{B}$, όσο και το μέτρο του είναι μηδέν για τον ελλειψοειδή ομογενή αγωγό, τα αντίστοιχα μεγέθη για τον ελλειψοειδή αγωγό των τριών φλοιών παρουσιάζουν απόκλιση από το μηδέν. Συγκεκριμένα για την απόσταση των 10cm από την επιφάνεια του κρανίου, η απόκλιση του μέτρου του $\mathbf{B}$ των τριών ελλειψοειδών φλοιών από το μηδέν, είναι της τάξης των 20fT, που είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις καταγραφές των μαγνητικών σημάτων. Αυτό επικυρώνει το γεγονός ότι οι μαγνητικά σιωπηλές πηγές για τον ελλειψοειδή ομογενή αγωγό δεν υφίστανται πλέον στην περίπτωση του στρωματοποιημένου

ελλειψοειδούς αγωγού.

6.4.3 Σύγκριση του στρωματοποιημένου αγωγού των τριών φλοιών με τα ομογενή πρότυπα

Στην παράγραφο 6.4 καταγράφηκαν οι σχέσεις (6.6), (6.7) και (6.8) που παρέχουν το μαγνητικό πεδίο μέχρι τετραπολικού όρου προσέγγισης στο εξωτερικό του στρωματοποιημένου ελλειψοειδούς αγωγού, του ελλειψοειδούς ομογενούς και του ομογενούς σφαιρικού αντίστοιχα και πραγματοποιήθηκε επιπλέον η γραφική επεξεργασία αυτών. Από τις ίδιες τις σχέσεις και από τα διαγράμματα των Σχημάτων 6.15, 6.16 και 6.17 συμπεραίνουμε τα εξής:

- Το μαγνητικό πεδίο για τον στρωματοποιημένο πρότυπο παρουσιάζει μια ισχυρή αναλυτική εξάρτηση από τους παράγοντες αγωγιμότητας, οι οποίοι δεν υπάρχουν στην περίπτωση των ομογενών προτύπων. Η γραφική επεξεργασία των αντίστοιχων αποτελεσμάτων δείχνει ότι αυτή η εξάρτηση, όταν ποσοτικοποιηθεί για πραγματικές τιμές των αγωγιμοτήτων και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών, είναι της τάξης των καταγραφόμενων μαγνητικών σημάτων.
- Οι καμπύλες των συνιστωσών του $\mathbf{B}$ στο στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό δεν παρουσιάζουν πάντα την ίδια μονοτονία σε σχέση με την κοινή συμπεριφορά των ομογενών προτύπων.
- Η εξάρτηση από τους παράγοντες αγωγιμότητας καταργεί τη σιωπηλή συμπεριφορά των πηγών που προκαλούν μηδενικά μαγνητικά πεδία στα ομογενή πρότυπα. Το μαγνητικό πεδίο του στρωματοποιημένου αγωγού που προκαλείται από αυτές τις πηγές είναι σημαντικό, αφού ανέρχεται στην τάξη των $50 - 500 fT$, που αντιστοιχεί στις μαγνητικά κλινικές καταγραφές.

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι το πρότυπο των τριών ελλειψοειδών φλοιών αναδεικνύει την ισχυρή εξάρτηση της ευθείας Βιομαγνητικής λύσης από τους παράγοντες αγωγιμότητας, που αντανακλούν τα φυσικά και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προτύπου και ως τέτοιο αποτελεί ένα επιπλέον πιο ρεαλιστικό κριτήριο για τη διερεύνηση της βιομαγνητικής δραστηριότητας του ανθρώπινου εγκεφάλου.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

7.1 Τα αποτελέσματα της διατριβής

Στην παράγραφο αυτή εκτίθενται συνοπτικά τα νέα αποτελέσματα που συνεισέφερε η παρούσα διατριβή στην έρευνα του ευθέως προβλήματος ΗΕΓ και ΜΕΓ, σκοπεύοντας με αυτόν τον τρόπο στην παράγραφο 7.2 που ακολουθεί, να σχολιαστούν κάποια από τα συμπεράσματα που μπορούν να αποκομιστούν από τα εν λόγω αποτελέσματα και από τα οποία μπορεί να αναγνωρισθεί ο βαθμός της συμβολής τους.

Έτσι, σχετικά με το ευθύ πρόβλημα ΗΕΓ, υπολογίστηκαν οι ακριβείς κλειστές λύσεις για τα ηλεκτρικά δυναμικά στο εσωτερικό και το εξωτερικό του προτύπου του σφαιρικού ομογενούς αγωγού. Η εξαγωγή των σχέσεων αυτών πραγματοποιήθηκε με δυο τρόπους: πρώτον με άθροιση των αντιστοίχων σειρών - σχέσεις (2.27) και (2.33) - από τις οποίες προέκυψαν αντίστοιχα για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, από τη σχέση (2.50) και για $r < \alpha$, η έκφραση

$$u_{sr}^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{1}{P} + \frac{\alpha}{rR} \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln \frac{rR}{2\alpha^2} (1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \right] \quad (7.1)$$

και για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, από τη σχέση (2.58) και για $r > \alpha$ η έκφραση

$$u_{sr}^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \left[2 \frac{\mathbf{P}}{P^3} + \frac{1}{rP} \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{P}}}{1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{P}}} \right], \quad r > \alpha \quad (7.2)$$

όπου το $\mathbf{P}$ δίνεται από την (2.47).

Δεύτερον για την επικύρωση του αποτελέσματος της (7.1) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των ειδώλων, που καταλήγει για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό στην (2.119) η οποία για $r < \alpha$

και σε όρους της (2.101) παρέχει την έκφραση

$$u_{sr}^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\alpha}{r} \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{\alpha R} \frac{\hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{R}}}{1 + \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{R}}} \right]. \quad (7.3)$$

Στην παράγραφο **2.4** έχει αποδειχθεί η σύμπτωση των σχέσεων (7.2) και (7.3) και επιπλέον έχει αποδειχθεί μέσω της διαδικασίας επίλυσης με τη μέθοδο των ιδιών και ακόμη μια ισοδύναμη έκφραση για το εσωτερικό δυναμικό, η οποία από την (2.88) γράφεται

$$\begin{aligned} u_{sr}^-(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{\alpha}{4\pi\sigma r} \mathbf{Q} \cdot \frac{\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^3} - \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{Q}}{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} \\ & + \frac{1}{4\pi\sigma\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot [\mathbf{r}_0 \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}) \bar{\mathbf{I}} + \alpha^2 \bar{\mathbf{I}}] \cdot \mathbf{Q}}{r \left| \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Η μορφή της σχέσης (7.4) είναι αυτή που χρησιμοποιούμε για την κατασκευή των διαγραμμάτων κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού, στα οποία θα αναφερθούμε αναλυτικά στη συνέχεια.

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό, αναφορικά με τα αποτελέσματα της παραγράφου **2.2** για το εσωτερικό και εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό σε ανάπτυγμα σφαιρικών μιγαδικών αρμονικών, πως δεν πρόκειται για πρωτότυπα αποτελέσματα, αλλά η εξαγωγή των σχέσεων (2.27) και (2.33) κρίθηκε απαραίτητη για να έχουμε τα αποτελέσματα αυτά σε κατάλληλους όρους για να μπορούν να γίνουν οι σχετικές συγκρίσεις. Για το λόγο αυτό παραθέτουμε ακολούθως τις εν λόγω εκφράσεις σε ανάπτυγμα σφαιρικών μιγαδικών αρμονικών καθώς και την προσέγγιση του αναπτύγματος του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές, μέχρι και όρους δεύτερης τάξης [39]. Για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό του φλοιού του αγωγού, που βρίσκεται μεταξύ της θέσης της πηγής και της συνοριακής επιφάνειας, δηλαδή για $r_0 < r < \alpha$ είναι

$$u_{sr}^-(\mathbf{r}) = g_0^0 + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r_0^n}{2n+1} \left[\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (7.5)$$

και για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό και για $r > \alpha$ είναι

$$u_{sr}^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \frac{1}{n} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0). \quad (7.6)$$

Ενώ το ανάπτυγμα του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές για $r > \alpha$, όπως δίνεται από την (6.2), μέχρι και όρους δεύτερης τάξης, είναι

$$u_{sr}^+(\mathbf{r}) = g_0^0 \frac{\alpha}{r} + \frac{3}{4\pi\sigma r^3} \sum_{i=1}^3 Q_i x_i - \frac{5}{8\pi\sigma r^3} \sum_{i=1}^3 Q_i x_{0i} + \frac{15}{8\pi\sigma r^5} \sum_{i=1}^3 Q_i x_{0i} x_i^2 + \frac{15}{16\pi\sigma r^5} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (7.7)$$

Για το ευθύ πρόβλημα ΗΕΓ, πραγματοποιήθηκε η βελτίωση του ομογενούς ελλειψοειδούς προτύπου για τον αγωγίμο εγκέφαλο. Η βελτίωση αυτή έγινε με κριτήριο τις διαφορετικές τιμές αγωγιμότητας στο εσωτερικό της ανθρώπινης κεφαλής και επιλέχθηκε το ρεαλιστικό πρότυπο, το οποίο περιλαμβάνει στρωματοποιημένη δομή σε στοιβάδες σταθερής αγωγιμότητας. Συγκεκριμένα υιοθετήθηκε το πρότυπο του στρωματοποιημένου αγωγού που περιλαμβάνει τέσσερις διαφορετικές περιοχές, όπου η μια εμπεριέχεται στην άλλη. Η εσωτερική περιοχή προτυποποιεί τον εγκεφαλικό ιστό (πυρήνας), στον οποίο βρίσκεται η ηλεκτροχημική πηγή, η οποία θεωρήθηκε - όπως και στο ομογενές πρότυπο - ως ένα ηλεκτρικό δίπολο. Οι τρεις εναπομείνουσες περιοχές περιβάλλουν διαδοχικά τον πυρήνα, σχηματίζοντας τρία στρώματα διαφορετικής αγωγιμότητας γύρω από αυτόν, τους επονομαζόμενους φλοιούς. Οι φλοιοί αυτοί, από μέσα προς τα έξω, αναπαριστούν αντίστοιχα το εγκεφαλονωτιαίο υγρό, τα κρανιακά οστά και το δέρμα του κρανίου.

Έτσι, το ηλεκτρικό δυναμικό του πυρήνα, των περιβάλλοντων φλοιών και του εξωτερικού μη αγωγίμου χώρου υπολογίστηκαν τόσο στο ελλειψοειδές όσο και στο σφαιρικό γεωμετρικό πρότυπο και απέδωσαν τα αναπτύγματα αυτών σε όρους ελλειψοειδών αρμονικών και σφαιρικών μιγαδικών αρμονικών αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, για το ελλειψοειδές πρότυπο προέκυψαν οι σχέσεις (3.47) - (3.52), όπου για τον εξωτερικό χώρο παίρνουμε

$$u_{el.3sh}(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(s_1)} \frac{1}{S_n^m} \frac{1}{G_{3,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} \mathbf{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho > s_1 \quad (7.8)$$

ενώ για κάθε περιοχή φλοιού η μορφή των αναπτυγμάτων (3.48) - (3.51) είναι όμοια και ενσωματώνεται στην σχέση (3.56) για $\alpha_1^{(i-1)} < \rho < \alpha_1^{(i)}$

$$u_{el.3sh(i)}(\mathbf{r}) = u_{i+1}(\alpha_1^{(i)}, \mu, \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} I_n^m(\rho, \alpha_1^{(i)}) \frac{1}{\sigma_i} \frac{G_{k-i,n}^m}{G_{k,n}^m} \frac{1}{\gamma_n^m} [\mathbf{Q} \cdot \nabla \mathbf{E}_n^m(\mathbf{r}_0)] \mathbf{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad (7.9)$$

όπου $i = 0 : c, 1 : f, 2 : b, 3 : s, k = \max(i)$ και $\alpha_1^{(i)}$ ο ημιάξονας του i .

Τέλος για την περιοχή του πυρήνα, όταν η θέση παρατήρησης είναι μικρότερη από αυτήν της πηγής, το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από την

$$u_{el.3sh,c}^-(\mathbf{r}) = u_f(c_1, \mu, \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma_c \gamma_n^m} \left[\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{2n+1} - I_n^m(c_1) \mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0) \right] E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad h_2 < \rho < \rho_0 \quad (7.10)$$

όπου οι παράγοντες αγωγιμότητας $G_{1,n}^m, G_{2,n}^m$ και $G_{3,n}^m$ δίνονται αντίστοιχα στις (3.53), (3.54) και (3.55) και οι διαφορές των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων $I_n^m(x, y)$ από την (3.2).

Οι αντίστοιχες εκφράσεις για το σφαιρικό πρότυπο δίνονται από τις (2.163) - (2.168). Έτσι για τον εξωτερικό μη αγωγίμο χώρο, $r > s$

$$u_{sr.3sh}(\mathbf{r}) = g_0 \frac{s}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{n D_{3,n}^m} r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (7.11)$$

ενώ για κάθε περιοχή φλοιού η μορφή των αναπτυγμάτων (2.163) - (2.167) είναι όμοια και ενσωματώνεται στην (2.171) για $r_{i-1} < r < r_i$

$$u_{sr.3sh(i)}(\mathbf{r}) = u_{i+1}(r_i, \theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{r^{2n+1}} - \frac{1}{r_i^{2n+1}} \right) \frac{1}{\sigma_i} \frac{D_{k-i,n}^m}{D_{k,n}^m} [\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))] r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (7.12)$$

όπου $i = 0 : c, 1 : f, 2 : b, 3 : s, k = \max(i)$ και r_i ακτίνα του i .

Τέλος για $0 < r < r_0$ έχουμε

$$u_{sr.3sh,c}^-(\mathbf{r}) = u_f(c, \theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}})}{r_0^{(n+1)}} \right) - \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{(2n+1)c^{2n+1}} \right] \frac{r^n}{\sigma_c} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (7.13)$$

όπου οι παράγοντες αγωγιμότητας $D_{1,n}^m, D_{2,n}^m$ και $D_{3,n}^m$ δίνονται αντίστοιχα στις (2.170), (2.169) και (2.162).

Επιπλέον, το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο υπολογίστηκε στα δύο γεωμετρικά πρότυπα σε συμπαγή μορφή και ο υπολογισμός του έδωσε τα ακόλουθα αποτελέσματα για τους πρώτους όρους

των αντίστοιχων αναπτυγμάτων.

Για το ελλειψοειδές πρότυπο η σχέση (3.65) δίνει

$$u(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(s_1)} + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\rho) : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + O(\epsilon l_3) \quad (7.14)$$

για $r > s_1$, όπου οι γεωμετρικοί τελεστές $\tilde{\mathbf{A}}(\rho)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\rho)$ και $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}(\rho)$ δίνονται στις (3.62), (3.63) και (3.64) αντίστοιχα. Ενώ η σχέση (2.172) παρέχει το αντίστοιχο πεδίο για το σφαιρικό πρότυπο

$$u(\mathbf{r}) = g_0 \frac{s}{r} + \frac{3}{4\pi D_{3,1}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{5}{8\pi D_{3,2}^m} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (7.15)$$

για $r > s$, όπου τα $D_{3,1}^m$, $D_{3,2}^m$ δίνονται στις (2.173), (2.174) αντίστοιχα,

Τέλος αναφορικά πάλι με το ευθύ πρόβλημα ΗΕΓ, πραγματοποιήθηκε μια νέα βελτίωση του ομογενούς προτύπου για τον ενδοκρανιακό χώρο του αγωγίμου εγκεφάλου, και επιλέχθηκε το πρότυπο του αγωγού σε συγκεκριμένη περιοχή στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει υγρό. Συγκεκριμένα το πρότυπο αφορά σε έναν μη ομογενή αγωγό, που αποτελείται από μια περιοχή που περιέχει μια ηλεκτροχημική πηγή, η οποία θεωρήθηκε - όπως και στα δύο παραπάνω πρότυπα - ως ένα ηλεκτρικό δίπολο, και μια άλλη περιοχή στο εσωτερικό του, η οποία χαρακτηρίζεται από διαφορετική αγωγιμότητα. Ο μη ομογενής αγωγός αυτός αναπαριστά τον εγκεφαλικό ιστό, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει υγρό, που χαρακτηρίζεται από διαφορετική αγωγιμότητα. Κρίνοντας το πρότυπο αυτό από τη σκοπιά των φλοιών, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι πρόκειται για το πρότυπο του αγωγού του ενός φλοιού. Όμως η σημαντική διαφορά του παρόντος προτύπου από το ήδη μελετημένο πρότυπο του ενός φλοιού [38] είναι ότι στην παρούσα περίπτωση η πηγή τοποθετείται στον φλοιό και όχι στον πυρήνα. Έτσι, τα ηλεκτρικά δυναμικά των περιοχών που δημιουργεί το πρότυπο αυτό υπολογίζονται στο σφαιρικό και στο ρεαλιστικό δισφαιρικό πρότυπο όπου οι δυο σφαίρες είναι τοποθετημένες έκκεντρα (σε αντίθεση με την ομόκεντρη τοποθέτηση του σφαιρικού) και η απόσταση των δύο κεντρών τους είναι ρυθμιζόμενη.

Συγκεκριμένα, για το σφαιρικό πρότυπο από τις (2.220) - (2.223) έχουμε τις εκφράσεις για τον εξωτερικό χώρο, δηλαδή για $r > c$

$$u_{sr,1sh.fl}(\mathbf{r}) = f_0^0 \frac{c}{r} + \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{(2n+1)\sigma_c A_n^m + n(\sigma_f - \sigma_c) (A_n^m - B_n^m f_n^{2n+1})}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f_n^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \right] r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (7.16)$$

για την περιοχή που βρίσκεται μεταξύ της θέσης $\mathbf{r}_0$ της πηγής και της εξωτερικής συνοριακής επιφάνειας, δηλαδή για $r_0 < r < c$

$$u_{sr.1sh.fl,c}^+(\mathbf{r}) = f_0^0 + \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n+1)\sigma_c A_n^m + n(\sigma_f - \sigma_c)(A_n^m - B_n^m f^{2n+1})}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \right] \cdot \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{c^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (7.17)$$

για την περιοχή που βρίσκεται μεταξύ της θέσης $\mathbf{r}_0$ της πηγής και της εσωτερικής συνοριακής επιφάνειας, δηλαδή για $f < r < r_0$

$$u_{sr.1sh.fl,c}^-(\mathbf{r}) = f_0^0 + \frac{1}{\sigma_c} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n+1} \left[B_n^m r^n + \frac{n+1}{n} \frac{(2n+1)\sigma_c A_n^m + n(\sigma_f - \sigma_c)(A_n^m - B_n^m f^{2n+1})}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \frac{r^n}{c^{2n+1}} + \frac{nB_n^m(\sigma_c - \sigma_f)f^{2n+1} + (n+1)A_n^m(\sigma_c - \sigma_f) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \frac{1}{r^{n+1}} \right] Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (7.18)$$

και για τον υγρό πυρήνα $0 < r < f$

$$u_{sr.1sh.fl,f}(\mathbf{r}) = f_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left[\frac{\frac{n+1}{n} \frac{A_n^m}{c^{2n+1}} + B_n^m}{n\sigma_f + (n+1)\sigma_c + (n+1)(\sigma_f - \sigma_c) \frac{f^{2n+1}}{c^{2n+1}}} \right] r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (7.19)$$

Από την άλλη πλευρά για το δισφαιρικό πρότυπο ο υπολογισμός της ακριβούς λύσης οδηγεί σε ένα $2n+1$ πλήθος άπειρων γραμμικών συστημάτων, που μπορούν να επιλυθούν προσεγγιστικά με τεχνικές αποκοπής όρων. Οι γραμμικές εξισώσεις που περιλαμβάνουν τις

άγνωστες σταθερές των πεδίων δίνονται στις (5.72)- (5.77) και η επίλυση τους είναι ισοδύναμη με την επίλυση του συστήματος (5.78) υπό τη μορφή πινάκων $\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{K}$, όπου ο $\mathbf{N}$ είναι ο πίνακας συντελεστών των αγνώστων, τάξης $[\infty \times \infty]$, ο $\mathbf{x}$ είναι ο πίνακας στήλη των αγνώστων, τάξης $[\infty \times 1]$ και ο $\mathbf{K}$ είναι ο πίνακας στήλης των σταθερών συντελεστών, επίσης τάξης $[\infty \times 1]$. Για κάθε τιμή του m αντιστοιχεί ένας τέτοιος πίνακας, η μορφή του οποίου είναι η ακόλουθη

$$\begin{bmatrix} F_m^{m(1)} & G_m^{m(1)} & F_{m+1}^{m(1)} & G_{m+1}^{m(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_m^{m(2)} & G_m^{m(2)} & F_{m+1}^{m(2)} & G_{m+1}^{m(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_m^{m(3)} & G_m^{m(3)} & F_{m+1}^{m(3)} & G_{m+1}^{m(3)} & F_{m+2}^{m(3)} & G_{m+2}^{m(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_m^{m(4)} & G_m^{m(4)} & F_{m+1}^{m(4)} & G_{m+1}^{m(4)} & F_{m+2}^{m(4)} & G_{m+2}^{m(4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{m+1}^{m(5)} & G_{m+1}^{m(5)} & F_{m+2}^{m(5)} & G_{m+2}^{m(5)} & F_{m+3}^{m(5)} & G_{m+3}^{m(5)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{m+1}^{m(6)} & G_{m+1}^{m(6)} & F_{m+2}^{m(6)} & G_{m+2}^{m(6)} & F_{m+3}^{m(6)} & G_{m+3}^{m(6)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_m^m \\ g_m^m \\ f_{m+1}^m \\ g_{m+1}^m \\ f_{m+2}^m \\ g_{m+2}^m \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_m^{m(1)} \\ k_m^{m(2)} \\ k_{m+1}^{m(1)} \\ k_{m+1}^{m(2)} \\ k_{m+2}^{m(1)} \\ k_{m+2}^{m(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Ο δείκτης $i, i = 1, 2, 3, \dots$ αναφέρεται στην εξίσωση στην οποία αντιστοιχούν οι συντελεστές των αγνώστων.

Όσον αφορά το ευθύ πρόβλημα ΜΕΓ, διατυπώθηκε ένα αποτέλεσμα της παρούσας διατριβής που ισχύει για κάθε ανομοιογενή αγωγό με περιοχές σταθερής αγωγιμότητας ανεξαρτήτως του γεωμετρικού προτύπου του αγωγού. Όπως αποδείχθηκε λοιπόν, στο πρώτο κεφάλαιο, και ειδικά μέσω των σχέσεων (1.72) - (1.79), το πολυπολικό ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου που μετράται εξωτερικά του ανομοιογενούς αγωγού αρχίζει με τετραπολικό όρο. Το γεγονός αυτό αντανακλά τη μαθηματική επικύρωση της φυσικής πραγματικότητας της μη ύπαρξης ανοικτών μαγνητικών δυναμικών γραμμών, όπως οι εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού επιβάλλουν, ενώ οφείλεται στην επαγόμενη, από την ύπαρξη της κύριας πηγής $\mathbf{J}^P$ στη θέση $\mathbf{r}_0$ εντός του αγωγού, δραστηριότητα των αγωγικών στοιχείων του.

Επομένως, η μελέτη του ευθέος προβλήματος ΜΕΓ περιορίζεται στο πρότυπο του στρωματοποιημένου αγωγού τριών φλοιών. Για το σφαιρικό πρότυπο, βασιζόμενοι σε αντίστοιχα αποτελέσματα για τον ομογενή αγωγό [52] καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι στην ακτινική διεύθυνση του σφαιρικού προτύπου στρωματοποιημένου αγωγού τριών φλοιών δεν καταγράφεται η συνεισφορά από τα σύνορα του αγωγού, δηλαδή

$$\mathbf{B}_{3sh}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}. \quad (7.21)$$

Από την άλλη πλευρά υπολογίστηκε αναλυτικά το μαγνητικό πεδίο μέχρι προσέγγιση τετραπλού στο εξωτερικό του στρωματοποιημένου προτύπου, δηλαδή των τεσσάρων ομοεστιακών ελλειψοειδών φλοιών διαφορετικής αγωγιμότητας από την (4.58) που εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{d}_c + \mathbf{d}_{2f} - \mathbf{d}_{2c} + \mathbf{d}_{1b} - \mathbf{d}_{1f} + \mathbf{d}_{0s} - \mathbf{d}_{0b}) \\ & \times \left(\frac{F_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{A}} - \frac{F_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda_c - \Lambda'_c} \tilde{\mathbf{A}}' - 15 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right) + O(el_3) \end{aligned} \quad (7.22)$$

όπου

$$\mathbf{d}_c = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(c_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(c_1) \quad (7.23)$$

$$\mathbf{d}_{2c} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(c_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_2(c_1) \quad (7.24)$$

$$\mathbf{d}_{if} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(f_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_i(f_1) \quad i = 1, 2 \quad (7.25)$$

$$\mathbf{d}_{ib} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(b_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_i(b_1) \quad i = 0, 1 \quad (7.26)$$

$$\mathbf{d}_{0s} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(s_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_0(s_1). \quad (7.27)$$

Τα δυαδικά $\tilde{\mathbf{M}}$ ορίζονται σε κάθε ελλειψοειδές S_c, S_f, S_b, S_s και δίνονται από τις (4.64) - (4.68) και οι σταθερές $G_{1,2}^6, G_{2,2}^6, G_{3,2}^6$ δίνονται στις (3.53) - (3.55).

Τέλος, για το ευθύ πρόβλημα HEF του ομογενούς αγωγού τόσο στη σφαιρική, όσο και στην ελλειψοειδή γεωμετρία τα αποτελέσματα καταγράφηκαν και γραφικά. Συγκεκριμένα στο έκτο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής παρέχονται κατανομές του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του εγκεφάλου - όταν αυτός προτυποποιείται ως ομογενής αγωγός. Όσο αφορά το ευθύ πρόβλημα MEF κατασκευάστηκαν διαγράμματα των συνιστωσών και του μέτρου του μαγνητικού πεδίου συναρτήσει της απόστασης από την επιφάνεια του κρανίου. τα διαγράμματα αυτά κατασκευάστηκαν για το πρότυπο του στρωματοποιημένου ελλειψοειδούς αγωγού των τριών φλοιών, καθώς και για τα ομογενή πρότυπα στη σφαιρική και ελλειψοειδή γεωμετρία με σκοπό τη σύγκριση των τριών αυτών προτύπων. Οι παρατηρήσεις επί των κατανομών του ηλεκτρικού δυναμικού και των διαγραμμάτων του μαγνητικού πεδίου μας σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των αναλυτικών σχέσεων, μας παρέχουν πληροφορίες για τη βαθιά κατανόηση

για το ευθύ πρόβλημα HEF και MEF και επιπλέον σημαντικές πληροφορίες για το αντίστροφο πρόβλημα HEF στην περίπτωση του ομογενούς σφαιρικού αγωγού, τις οποίες θα τις συζητήσουμε στην επόμενη παράγραφο και εξασφαλίζουν την σπουδαιότητα της παρούσας διατριβής.

7.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε τα αποτελέσματα που συνοψίσαμε στην προηγούμενη, με σκοπό τη σύγκριση των θεωρούμενων προτύπων της παρούσας διατριβής και των πληροφοριών που μπορούμε να εξάγουμε από αυτά.

Αρχικά η χρήση των κατάλληλων σχέσεων για την εξαγωγή κλειστών μορφών μέσω της άθροισης των σειρών για το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό (7.1) και στο εξωτερικό (7.2) του ομογενούς σφαιρικού αγωγού αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο για γεωμετρίες όπως η ελλειψοειδής, όπου οι όροι των αρμονικών συναρτήσεων μεγαλύτεροι της τρίτης τάξης δεν είναι γνωστοί σε κλειστή μορφή.

Από την άλλη πλευρά μια ισοδύναμη κλειστή μορφή για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό παρέχεται από τη μέθοδο των ειδώλων (7.4). Η μορφή αυτή είναι ιδιαίτερα εύχρηστη για αριθμητική επεξεργασία και επιπλέον δίνει τη δυνατότητα ερμηνείας της λύσης ως μιας συγκεκριμένης αναπαράστασης σε όρους μιας γραμμής κατανομής ειδώλων Kelvin. Έτσι το ισοδύναμο της (7.4) αποτέλεσμα (7.3), μπορεί να ερμηνευτεί ως η συνεισφορά των τριών προστιθέμενων όρων, όπου ο πρώτος οφείλεται στην πηγή $\mathbf{r}_0$, ο δεύτερος οφείλεται στη συνεισφορά από το σημείο $\bar{\mathbf{r}} = \frac{a^2}{r^2}\mathbf{r}$ και ο τρίτος είναι η συνεισφορά από τη γραμμή $\frac{\lambda^2}{r^2}\mathbf{r}$, $\lambda \in [\alpha, +\infty)$ (βλ. Σχήμα 2.2).

Σχετικά με το ρεαλιστικό πρότυπο των τριών φλοιών διαφορετικής αγωγιμότητας από τις σχέσεις (7.11) - (7.13) στη σφαιρική γεωμετρία και τις (7.8) - (7.10) στην ελλειψοειδή γεωμετρία καταλήγουμε στα εξής: Οι (7.11) και (7.8) δίνουν το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάθε σημείο εξωτερικά του σφαιρικού και του ελλειψοειδούς ανομοιογενούς αγωγού αντίστοιχα. Και στις δυο περιπτώσεις το δυναμικό του εξωτερικού φλοιού εκφράζεται ως το εξωτερικό δυναμικό υπολογισμένο στην εξωτερική επιφάνεια του δέρματος, συν ένα ανάπτυγμα σε σφαιρικές ή ελλειψοειδείς αρμονικές αντίστοιχα υπολογισμένο στο σημείο παρατήρησης $\mathbf{r}$, το οποίο αναπαριστά τη συνεισφορά που προέρχεται από το φλοιό του δέρματος. Στον ίδιο νόμο υπακούουν και τα δυναμικά των επόμενων διαδοχικών φλοιών, καθώς και το δυναμικό του εγκεφαλικού ιστού. Όλα εκφράζονται ως ένα άθροισμα του δυναμικού του εξωτερικού φλοιού υπολογισμένο στο κοινό τους σύνορο, συν μια συνεισφορά από τον συγκεκριμένο φλοιό, πάντα υπό τη μορφή του κατάλληλου αναπτύγματος στις αντίστοιχες αρμονικές.

Επίσης, η μορφή των αναπτυγμάτων για τα ηλεκτρικά δυναμικά των ελλειψοειδών φλοιών είναι

όμοια και ενσωματώνεται στη σχέση (7.9). Διαφέρουν μόνο σε σταθερούς λόγους που σχετίζονται με τους παράγοντες αγωγιμότητας και με το γεγονός ότι τα αντίστοιχα ελλειπτικά ολοκληρώματα είναι υπολογισμένα σε διαφορετικές επιφάνειες. Οι παραπάνω λόγοι καθορίζουν λεπτομερώς την επίδραση των περιβαλλόντων φλοιών κανονικοποιημένων από την επίδραση όλων των φλοιών που θεωρούμε στο πρότυπο. Κάθε λόγος πολλαπλασιάζεται με ένα παράγοντα αγωγιμότητας, που αντιπροσωπεύει τον ισοδύναμο ομογενή αγωγό στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

Ομοίως, η μορφή των αναπτυγμάτων για τα ηλεκτρικά δυναμικά των σφαιρικών φλοιών είναι όμοια και ενσωματώνεται στη σχέση (7.12). Τα ηλεκτρικά δυναμικά των φλοιών διαφέρουν μόνο σε σταθερούς λόγους που σχετίζονται με τους παράγοντες αγωγιμότητας και από το γεγονός ότι η πολλαπλασιαστική ποσότητα $(\frac{1}{r^{n+1}} - \frac{r^n}{a^{2n+1}})$ όπου $a = c, f, b, s$ είναι υπολογισμένη στην επιφάνεια $r = a$ που βρισκόμαστε κάθε φορά.

Γίνεται ακόμη φανερό, από τη συμπαγή μορφή (7.14) για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό του ελλειψοειδούς ανομοιογενούς αγωγού, ότι η επίδραση της παρουσίας των φλοιών στα πεδία των ηλεκτρικών δυναμικών ενσωματώνεται στον παράγοντα αγωγιμότητας, πολλαπλασιαζόμενο με κάθε πολυπολικό όρο, αφήνοντας την υπόλοιπη δομή σταθερή. Η παρατήρηση αυτή ενισχύεται κατά την αναγωγή του προτύπου σε αυτό της απουσίας φλοιού οπουδήποτε που να καλύπτει τον αγωγό πυρήνα. Πραγματικά, παρατηρούμε ότι το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, τόσο στο πρότυπο των τριών όσο και σε αυτό του ενός φλοιού παρουσιάζει την ίδια δομή. Επιπλέον, όλες οι επιδράσεις των τριών φλοιών ενσωματώνονται στον παράγοντα αγωγιμότητας πολλαπλασιαζόμενο με κάθε πολυπολικό όρο.

Επιπρόσθετα, η διαδικασία επίλυσης των διεπιφανειακών προβλημάτων διαπεράτοτητας για τα πρότυπα των φλοιών τόσο στο σφαιρικό όσο και ειδικότερα στο ελλειψοειδές πρότυπο αποδείχθηκε ιδιαίτερα επίπονη και μακροσκελής. Οι καρποί όμως της μελέτης αυτών αποδεικνύονται σημαντικοί τόσο εγγενώς για τις πληροφορίες που παρέχουν οι λύσεις αυτών, όσο και για το μαθηματικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει η διαδικασία επίλυσης των. Συγκεκριμένα η διαδοχική επίλυση των προβλημάτων για $n = 0, n = 1, n = 2$ και $n = 3$ φλοιούς οδηγεί στα αντίστοιχα αποτελέσματα, τα οποία οδήγησαν στην κατασκευή της γενικής σχέσης (2.179) για το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο σφαιρικό πρότυπο

$$u_{sr.ish}(\mathbf{r}) = g_0 \frac{r_1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{n D_{i,n}^m} r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (7.28)$$

όπου $i = 0, 1, 2, 3$ αντιστοιχούν στα πρότυπα της ομογενούς σφαίρας, του ενός σφαιρικού φλοιού, των δύο σφαιρικών φλοιών και των τριών σφαιρικών φλοιών. Επιλέον για το ομογενές πρότυπο

$$D_{0,n}^m = \sigma_1, \quad (7.29)$$

για τον έναν σφαιρικό φλοιό

$$D_{1,n}^m = \sigma_2 - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right), \quad (7.30)$$

για τους δύο σφαιρικούς φλοιούς

$$\begin{aligned} D_{2,n}^m = & \sigma_3 - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_3 - \sigma_2) \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_b} \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_2^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right), \end{aligned} \quad (7.31)$$

και για τους τρεις σφαιρικούς φλοιούς

$$\begin{aligned} D_{3,n}^m = & \sigma_4 - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_4 - \sigma_3) \left(1 - \frac{r_4^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_3 - \sigma_2) \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n+1}{2n+1} (\sigma_2 - \sigma_1) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_2)}{\sigma_3} \left(1 - \frac{r_4^{2n+1}}{r_3^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2} \left(1 - \frac{r_4^{2n+1}}{r_2^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & - \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2} \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2} \left(1 - \frac{r_3^{2n+1}}{r_2^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right) \\ & + \frac{n(n+1)}{(2n+1)^3} \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_3 \sigma_2} \left(1 - \frac{r_4^{2n+1}}{r_3^{2n+1}} \right) \left((n+1) + n \frac{r_3^{2n+1}}{r_2^{2n+1}} \right) \left(1 - \frac{r_2^{2n+1}}{r_1^{2n+1}} \right). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Η αντίστοιχη γενική σχέση για το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στο ελλειψοειδές πρότυπο δίνεται από την (3.96)

$$u_{el.ish}(\mathbf{r}) = g_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(\alpha_1^{(1)})} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(\alpha_1^{(1)})} \frac{1}{A_{1,n}^m} \frac{1}{G_{i,n}^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla E_n^m(\mathbf{r}_0)}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu), \quad \rho > \alpha_1^{(1)}, \quad (7.33)$$

όπου ο όρος $A_{i,n}^m$ ενσωματώνει γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προτύπου και δίνεται στην (3.97) και οι παράγοντες αγωγιμότητας δίνονται από τις (3.98) - (3.101)

$$G_{0,n}^m = \sigma_1, \quad (7.34)$$

$$G_{1,n}^m = \sigma_2 + (\sigma_2 - \sigma_1) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m, \quad (7.35)$$

$$G_{2,n}^m = \sigma_3 + (\sigma_3 - \sigma_2) \left(I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{3,n}^m} \right) A_{3,n}^m$$

$$+ (\sigma_2 - \sigma_1) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m$$

$$+ \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2} I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(2)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m A_{3,n}^m, \quad (7.36)$$

και

$$G_{3,n}^m = \sigma_4 + (\sigma_4 - \sigma_3) \left(I_n^m(\alpha_1^{(4)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{4,n}^m} \right) A_{4,n}^m$$

$$+ (\sigma_3 - \sigma_2) \left(I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{3,n}^m} \right) A_{3,n}^m$$

$$+ (\sigma_2 - \sigma_1) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m$$

$$+ \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_2)}{\sigma_3} I_n^m(\alpha_1^{(4)}, \alpha_1^{(3)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{3,n}^m} \right) A_{3,n}^m A_{4,n}^m$$

$$+ \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_2} I_n^m(\alpha_1^{(4)}, \alpha_1^{(2)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m A_{4,n}^m$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\sigma_f - \sigma_b)(\sigma_b - \sigma_s)}{\sigma_b} I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(2)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) A_{2,n}^m A_{3,n}^m \\
& + \frac{(\sigma_4 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_1)}{\sigma_3 \sigma_2} I_n^m(\alpha_1^{(4)}, \alpha_1^{(3)}) \left(I_n^m(\alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(1)}) + \frac{1}{A_{1,n}^m} - \frac{1}{A_{2,n}^m} \right) + \\
& + \left(I_n^m(\alpha_1^{(3)}, \alpha_1^{(2)}) - \frac{1}{A_{3,n}^m} \right) A_{2,n}^m A_{3,n}^m A_{4,n}^m \quad (7.37)
\end{aligned}$$

Η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια ενός σφαιρικού αγωγού που προτυποποιεί τον εγχέφαλο γίνεται εμφανής με τις ισοδυναμικές καμπύλες που αναπαρίστανται από κύκλους, ενώ αντίστοιχα στον ελλειψοειδή ομογενή αγωγό με ελλείψεις. Εν γένει σε μια κατανομή οι ηλεκτρικές ισοδυναμικές καμπύλες δεν είναι παράλληλες μεταξύ τους. Στην γενική αυτήν περίπτωση, τα αποτελέσματα των κατανομών μας υποδεικνύουν πως να εντοπίσουμε τη θέση $\mathbf{r}_0$, καθώς και τον προσανατολισμό της ροπής $\mathbf{Q}$ για τη σφαιρική τουλάχιστον περίπτωση, αφού η ανισοτροπία που επιφέρει η ελλειψοειδής γεωμετρία, καθώς και η προσέγγιση της λύσης δυσκολεύει σε μεγάλο βαθμό την ανάγνωση της πληροφορίας από τις κατανομές. Συνεπώς για το σφαιρικό ομογενές πρότυπο, το $\mathbf{Q}$ έχει κατεύθυνση κάθετη στον κύκλο μηδενικού ηλεκτρικού δυναμικού και φορά αυτή του μέγιστου δυναμικού. Από την άλλη πλευρά, το διάνυσμα θέσης της πηγής τείνει να είναι κάθετο στις ισοδυναμικές καμπύλες μέγιστου δυναμικού.

Στην ειδική περίπτωση που οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι ομόκεντροι παράλληλοι κύκλοι, γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα θέσης και ροπής της διπολικής πηγής είναι παράλληλα μεταξύ τους. Δηλαδή η ειδική περίπτωση των παράλληλων ισοδυναμικών κύκλων αντιστοιχεί στην περίπτωση σιωπηλών πηγών του μαγνητικού πεδίου. Με άλλα λόγια η ύπαρξη ειδικών θέσεων και προσανατολισμών της πηγής για τις οποίες η συνεισφορά τους στο εξωτερικά μετρούμενο μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική - και για την περίπτωση του σφαιρικού προτύπου όπου τα $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{r}_0$ είναι παράλληλα - αντιστοιχεί σε παράλληλες κυκλικές καμπύλες ηλεκτρικού δυναμικού. Στην περίπτωση δηλαδή που τα $\mathbf{Q}$, $\mathbf{r}_0$ είναι παράλληλα, ο κύκλος μηδενικού δυναμικού που είναι κάθετος στην κατεύθυνση του $\mathbf{Q}$ είναι παράλληλος με τον κύκλο μέγιστου (ή ελάχιστου λόγω συμμετρίας) δυναμικού που είναι κάθετος στην κατεύθυνση του $\mathbf{r}_0$. Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κατά τη σχετική απομάκρυνση των διανυσμάτων της θέσης και του προσανατολισμού της πηγής από την παράλληλη τους θέση, η γωνία των διανυσμάτων θέσης $\mathbf{r}_0$ και προσανατολισμού της πηγής $\mathbf{Q}$ αποτελεί μέτρο της απομάκρυνσης των παραπάνω

κύκλων από την παραλληλία.

Ως προς τον ποσοτικό προσδιορισμό του αντιστρόφου προβλήματος HEF για την περίπτωση της ομογενούς σφαίρας, κριτήριο αποτελεί το φάσμα του ηλεκτρικού δυναμικού. Υψηλές τιμές δυναμικού συνεπάγονται πιθανή ύπαρξη της πηγής κοντά στην επιφάνεια της σφαίρας. Μπορεί όμως παράλληλα να σημαίνει και μεγάλο μέτρο της ροπής $\mathbf{Q}$, αφού όπως είναι φανερό από την αναλυτική σχέση (7.4) ότι η συνάρτηση του δυναμικού εξαρτάται γραμμικά από το μέγεθος της πηγής.

Αναφορικά με την επίλυση του προβλήματος MEF για τον στρωματοποιημένο ελλειψοειδή αγωγό των τριών φλοιών, η ανομοιογένεια, όπως επιβάλλεται από αυτές τις τέσσερις περιοχές και η ανισοτροπία όπως υπαγορεύεται από την ελλειψοειδή γεωμετρία παρέχουν το πλέον ρεαλιστικό φυσικό και γεωμετρικό μοντέλο του εγκεφάλου, για το οποίο είναι δυνατή μια αναλυτική λύση. Η σχέση (7.22) φανερώνει ότι σε αντίθεση με το σφαιρικό πρότυπο, όπου οι φλοιοί διαφορετικής αγωγιμότητας είναι μαγνητικά αόρατοι, το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής στην στρωματοποιημένη ελλειψοειδή γεωμετρία εξαρτάται ισχυρά από τους παράγοντες αγωγιμότητας $G_{1,n}^m$, $G_{2,n}^m$, $G_{3,n}^m$ που αντανακλούν τα φυσικά και τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά. Το γεγονός ότι οι σφαιρικοί φλοιοί διαφορετικής αγωγιμότητας είναι αόρατοι στάθηκε η αιτία να δημιουργηθεί η γενική ιδέα ότι η βιομαγνητική ευθεία λύση δεν εξαρτάται από τους παράγοντες αγωγιμότητας. Όπως αποδεικνύεται, αυτό δεν αληθεύει, αν εγκαταλειφθεί η σφαιρική γεωμετρία. Επιπλέον η παρουσία των φλοιών διαφορετικής αγωγιμότητας μπορεί να αναγνωριστεί σαν μια διαταραχή του αντίστοιχου διανύσματος του διπόλου για το ομογενές πρότυπο. Ακόμα όμως από την επεξεργασία των διαγραμμάτων του έκτου κεφαλαίου για το μαγνητικό πεδίο, συμπεραίνουμε ότι η εξάρτηση από τους παράγοντες αγωγιμότητας καταργεί τη σιωπηλή συμπεριφορά των πηγών που προκαλούν μηδενικά μαγνητικά πεδία όχι μόνο στο σφαιρικό ομογενές πρότυπο, αλλά και στο ελλειψοειδές ομογενές. Το μαγνητικό πεδίο του στρωματοποιημένου αγωγού που προκαλείται από αυτές τις πηγές είναι σημαντικό, αφού ανέρχεται σε τέτοια τάξη που αντιστοιχεί στις μαγνητικά κλινικές καταγραφές.

Παράρτημα Α΄

Συμπλήρωμα Κεφαλαίου 2

Α΄.1 Πρόταση για την άθροιση σειρών

Θα αποδείξουμε τη σχέση (2.38) της παραγράφου 2.3 για την άθροιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} P_n(\cos \theta)$ όπου $\cos \theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0$ και $\rho = \frac{r_0}{\alpha} < 1$. Προκειμένου να αθροίσουμε την παραπάνω σειρά χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα [26]

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hx + h^2}}. \quad (\text{Α΄.1})$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} P_n(\cos \theta) \quad (\text{Α΄.2})$$

τότε παραγωγίζοντας τη f ως προς ρ και χρησιμοποιώντας την (Α΄.1) προκύπτει

$$\rho f'(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}} - 1. \quad (\text{Α΄.3})$$

Επιλύοντας τη συνήθη διαφορική εξίσωση (Α΄.3) με την αρχική συνθήκη

$$f(0) = 0 \quad (\text{Α΄.4})$$

που προέρχεται από τη (Α΄.2), συνεπάγεται ότι

$$f(\rho) = \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}} - \int \frac{d\rho}{\rho} + c. \quad (\text{Α΄.5})$$

Χρησιμοποιώντας το κατάλληλο τύπο από το [55] για το πρώτο ολοκλήρωμα η (Α'.5) γράφεται

$$\begin{aligned} f(\rho) &= -\ln \frac{2 - 2\rho \cos \theta + 2\sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}}{\rho} - \ln \rho + c \\ &= -\ln \left(1 - \rho \cos \theta + 2\sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2} \right) - \ln 2 + c. \end{aligned} \quad (\text{Α'.6})$$

Η αρχική συνθήκη (Α'.4) συνεπάγεται ότι

$$c = \ln 4. \quad (\text{Α'.7})$$

Επομένως,

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n} P_n(\cos \theta) = -\ln \left[\frac{1 - \rho \cos \theta + \sqrt{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}}{2} \right]. \quad (\text{Α'.8})$$

Άρα η σχέση (2.38) αποδείχθηκε.

Α'.2 Μετασχηματισμός Kelvin

Για μια σφαίρα ακτίνας α ο μετασχηματισμός Kelvin ορίζεται από

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{Α'.9})$$

με

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}. \quad (\text{Α'.10})$$

Ο $\mathbf{T}$ έχει την ιδιότητα

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \quad (\text{Α'.11})$$

δηλαδή

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I} \quad (\text{Α'.12})$$

όπου $\mathbf{I}$ το ταυτοτικό δυαδικό. Η ιδιότητα αυτή έχει ως συνέπεια

$$\mathbf{T}^2(\mathbf{r}) = \mathbf{T} \left(\frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} \right) = \frac{\alpha^2}{\left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} \right|^2} \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} = \mathbf{r}. \quad (\text{Α'.13})$$

Ο μετασχηματισμός Kelvin είναι ένας ένα προς ένα μη γραμμικός συνδυασμός, που διατηρεί σταθερό τον προσανατολισμό, δηλαδή,

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\bar{\mathbf{r}}} \quad (\text{Α'.14})$$

και μετασχηματίζει τον τελεστή κλίσης ως εξής

$$r \nabla_{\mathbf{r}} = \left(\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \bar{r} \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \quad (\text{A'.15})$$

και

$$\bar{r} \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} = \left(\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot r \nabla_{\mathbf{r}} \quad (\text{A'.16})$$

που είναι συνέπεια του γεγονότος ότι

$$\left(\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right)^2 = \tilde{\mathbf{I}}. \quad (\text{A'.17})$$

Συνεπώς

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \frac{\bar{r}^2}{\alpha^2} \left(\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \quad (\text{A'.18})$$

και

$$\nabla_{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{r^2}{\alpha^2} \left(\tilde{\mathbf{I}} - 2\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{r}}. \quad (\text{A'.19})$$

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα του $\mathbf{T}$ είναι η ακόλουθη

$$\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}} \times \nabla_{\bar{\mathbf{r}}}. \quad (\text{A'.20})$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε το θεώρημα Kelvin

Θεώρημα Kelvin: Έστω ένα φραγμένο χωρίο στο $\mathbb{R}^3$ και έστω $\bar{V}$ η εικόνα του Kelvin του V , δηλαδή η εικόνα του μετασχηματισμού

$$\mathbf{r} \rightarrow \bar{\mathbf{r}} = \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r}. \quad (\text{A'.21})$$

Αν $u(\mathbf{r})$ είναι μια λύση της

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V \quad (\text{A'.22})$$

τότε η

$$\bar{u}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{a}{\bar{r}} u \left(\frac{a^2}{r^2} \bar{\mathbf{r}} \right) \quad (\text{A'.23})$$

είναι η λύση της

$$\bar{\Delta} \bar{u}(\bar{\mathbf{r}}) = 0, \quad \bar{\mathbf{r}} \in \bar{V} \quad (\text{A'.24})$$

και αντιστρόφως.

Α'.3 Υπολογισμός ολοκληρώματος

Στο μέρος αυτό του παραρτήματος παρατίθεται ο υπολογισμός $L(\mathbf{r})$ της (2.88) για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, που εκφράζει την άπειρη συνεχή κατανομή πηγών στις θέσεις $\mathbf{r}_\lambda = \frac{r^2}{\lambda^2} \mathbf{r}_0$, $\lambda \in [\alpha, +\infty)$. Είναι

$$L(\mathbf{r}) = \frac{2}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{r} \frac{1}{\left| \left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|} d\lambda \quad (\text{A'.25})$$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}) &= \frac{2}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{r} \frac{\left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\left| \left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^3} d\lambda \\ &= \frac{r^6}{r^3 \alpha} \mathbf{Q} \cdot \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda^2 \mathbf{r} - r^2 \mathbf{r}_0}{|\lambda^2 \mathbf{r} - r^2 \mathbf{r}_0|^3} d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A'.26})$$

Θέτουμε $t = \lambda^2$, επομένως $dt = 2\lambda d\lambda$ και στο κάτω όριο για $\lambda = \alpha$ θα έχουμε $t = \alpha^2$. Επομένως η (A'.26) γίνεται

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}) &= \frac{r^3}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{t\mathbf{r} - r^2 \mathbf{r}_0}{|t\mathbf{r} - r^2 \mathbf{r}_0|^3} dt \quad (\text{A'.27}) \\ &= \frac{r^3}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{t}{|t\mathbf{r} - r^2 \mathbf{r}_0|^3} dt - \frac{r^5}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0 \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{1}{|t\mathbf{r} - r^2 \mathbf{r}_0|^3} dt \\ &= \frac{r^3}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{t}{(r^2 t^2 - 2r^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)t + r^4 r_0^2)^{\frac{3}{2}}} dt - \frac{r^5}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0 \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{1}{(r^2 t^2 - 2r^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)t + r^4 r_0^2)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \frac{r^3}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{d(t^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)t + r^2 r_0^2)}{(t^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)t + r^2 r_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^5}{\alpha} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0 \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)t + r^2 r_0^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0} \int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)t + r^2 r_0^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{2\alpha} \frac{-2}{(t^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)t + r^2 r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{t=\alpha^2}^{t=+\infty} + \frac{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) - r^2(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0)}{\alpha} \\ &\quad + \frac{t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{(r^2 r_0^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)^2)(t^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)t + r^2 r_0^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{t=\alpha^2}^{t=+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{\alpha} \frac{1}{(\alpha^4 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)\alpha^2 + r^2 r_0^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) - r^2(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0)}{\alpha} \frac{1}{r^2 r_0^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)^2} \\
&\quad - \frac{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) - r^2(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0)}{\alpha} \frac{\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2 r_0^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)^2} \frac{1}{(\alpha^4 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)\alpha^2 + r^2 r_0^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A'.28})
\end{aligned}$$

Όμως

$$\alpha^4 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)\alpha^2 + r^2 r_0^2 = r^2 \left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^2 \quad (\text{A'.29})$$

και η (A'.28) γράφεται

$$L(\mathbf{r}) = \frac{1}{\alpha} \frac{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r^2 r_0^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)^2} \quad (\text{A'.30})$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{1}{\alpha \left| \frac{\alpha^2}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| r} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})(r^2 r_0^2) - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)^2 \\
&\quad - \alpha^2(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)^2(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}) \\
&\quad + \alpha^2(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] \frac{1}{r^2 r_0^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)^2}. \quad (\text{A'.31})
\end{aligned}$$

Επιπλέον

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{Q} \quad (\text{A'.32})$$

και

$$r^2 r_0^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)^2 = [\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r})] \cdot \mathbf{r}_0 = -[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0. \quad (\text{A'.33})$$

Αντικαθιστώντας τις (A'.32) και (A'.33) στην (A'.31), η τελευταία γράφεται

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{Q}}{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} + \frac{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0 + (\alpha^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{Q}}{\alpha \left| \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} \\
L(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{\alpha} \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{Q}}{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0} + \frac{[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}_0 + \alpha^2 \mathbf{Q} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0)\mathbf{Q}]}{\alpha r \left| \left(\frac{\alpha}{r} \right)^2 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right| [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_0)] \cdot \mathbf{r}_0}. \quad (\text{A'.34})
\end{aligned}$$

Παράρτημα Β΄

Ελλειψοειδής Γεωμετρία

Β΄.1 Το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων

Οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες (ρ, μ, ν) συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) μέσω των σχέσεων [35]

$$x_1 = \frac{\rho\mu\nu}{h_2h_3} \quad (\text{B'}.1)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\mu^2 - h_3^2}\sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1h_3} \quad (\text{B'}.2)$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2}\sqrt{h_2^2 - \mu^2}\sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1h_2} \quad (\text{B'}.3)$$

όπου η μεταβλητή $\rho \in [h_2, +\infty)$ ορίζει το ελλειψοειδές

$$\frac{x_1^2}{\rho^2} + \frac{x_2^2}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\rho^2 - h_2^2} = 1 \quad (\text{B'}.4)$$

η μεταβλητή $\mu \in [h_3, h_2]$ ορίζει το υπερβολοειδές ενός φύλλου

$$\frac{x_1^2}{\mu^2} + \frac{x_2^2}{\mu^2 - h_3^2} - \frac{x_3^2}{h_2^2 - \mu^2} = 1 \quad (\text{B'}.5)$$

και η μεταβλητή $\nu \in [-h_3, h_3]$ ορίζει το υπερβολοειδές δύο φύλλων, (βλ Σχήμα Β΄.1)

$$\frac{x_1^2}{\nu^2} - \frac{x_2^2}{h_3^2 - \nu^2} - \frac{x_3^2}{h_2^2 - \nu^2} = 1. \quad (\text{B'}.6)$$

Οι τρεις οικογένειες των δευτέρου βαθμού επιφανειών (B'}.4), (B'}.5), (B'}.6) αντιστοιχούν το ίδιο ζεύγος εστιών στα σημεία $\pm h_1, \pm h_2, \pm h_3$. Το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο στο ελλειψοειδές $\rho = \alpha_1$ δίνεται από την

Σχήμα Β'.1: Το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 - \mu^2} \sqrt{\alpha_1^2 - \nu^2}} \sum_{m=1}^3 \frac{x_m}{\alpha_m^2} \hat{\mathbf{x}}_m \quad (\text{B'.7})$$

Β'.2 Χωρισμός μεταβλητών

Ο χωρισμός μεταβλητών για την εξίσωση Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οδηγεί στην εξίσωση Lamé

$$(x^2 - h_2^2)(x^2 - h_3^2)E''(x) + x(2x^2 - h_2^2 - h_3^2)E'(x) + (Ax^2 + B)E(x) = 0 \quad (\text{B'.8})$$

για κάθε έναν από τους παράγοντες $E(\rho)$, $E(\mu)$ και $E(\nu)$ που σχηματίζουν την αρμονική συνάρτηση

$$IE(\rho, \mu, \nu) = E(\rho)E(\mu)E(\nu) \quad (\text{B'.9})$$

όπου A και B είναι σταθερές.

Η μοναδική διαφορά των συναρτήσεων αυτών είναι ότι η $E(\rho)$ ικανοποιεί τη (B'.8) στο διάστημα $[h_2, +\infty)$, η $E(\mu)$ στο $[h_3, h_2]$ και η $E(\nu)$ στο $[-h_3, h_3]$.

Οι σταθερές A και B στην εξίσωση (B'.8) σχετίζονται κατάλληλα με δυο θετικούς ακераίους n και m , όπου όπως ακριβώς στις σφαιρικές αρμονικές, το n ορίζει το βαθμό και το m την τάξη των διαφορετικών συναρτήσεων Lamé του ιδίου βαθμού. Συγκεκριμένα για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και κάθε $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$ η εξίσωση (B'.8) έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις. Μια ομαλή στην εστιακή έλλειψη και μια ομαλή στην περιοχή του απείρου. Για συγκεκριμένες τιμές των n και m μια λύση της εξίσωσης (B'.8) καλείται συνάρτηση Lamé βαθμού n και τάξης m . Συγκεκριμένα η λύση E_n^m που είναι ομαλή στο μηδέν λέγεται συνάρτηση **Lamé πρώτου είδους** (εσωτερική λύση), ενώ η λύση F_n^m που είναι ομαλή στο άπειρο λέγεται συνάρτηση **Lamé δεύτερου είδους** (εξωτερική λύση). Οι εσωτερικές λύσεις $E_n^m(\rho)$ συνδέονται με τις εξωτερικές λύσεις $F_n^m(\rho)$ μέσω της έκφρασης

$$F_n^m(\rho) = (2n + 1)E_n^m(\rho)I_n^m(\rho) \quad (\text{B'.10})$$

όπου τα ελλειπτικά ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$ δίνονται από

$$\begin{aligned} I_n^m(\rho) &= \int_{\rho}^{+\infty} \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_2^2} \sqrt{t^2 - h_3^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\rho^2 - \alpha_1^2}^{+\infty} \frac{dt}{[E_n^m(\sqrt{x + \alpha_1^2})]^2 \sqrt{x + \alpha_1^2} \sqrt{x + \alpha_2^2} \sqrt{x + \alpha_3^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B'.11})$$

Τα γινόμενα Lamé

$$\mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) = E_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu) \quad (\text{B'.12})$$

ορίζουν τις **εσωτερικές χωρικές ελλειψοειδείς αρμονικές**, ενώ τα γινόμενα Lamé

$$\mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) = F_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu) = (2n + 1)\mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu)I_n^m(\rho) \quad (\text{B'.13})$$

ορίζουν τις **εξωτερικές χωρικές ελλειψοειδείς αρμονικές**. Οι επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές ορίζονται από τα γινόμενα και αποτελούν πλήρες ορθογώνιο σύνολο επιφανειακών ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια οποιουδήποτε ελλειψοειδούς από την ομοεστιακή οικογένεια (B'.4). Η ορθογωνιότητα ορίζεται μέσω της συνάρτησης βάρους

$$l_{\rho_0}(\mu, \nu) = [(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)]^{-1/2} \quad (\text{B'.14})$$

επί του ελλειψοειδούς $\rho = \rho_0$ και παρέχει τις σχέσεις

$$\int \int_{\rho=\rho_0} E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) E_{n'}^{m'}(\mu) E_{n'}^{m'}(\nu) l_{\rho_0}(\mu, \nu) ds = 0 \quad (\text{B'.15})$$

για $n \neq n'$ και $m \neq m'$ και όταν $n = n'$ και $m = m'$, όπου γ_n^m είναι οι σταθερές κανονικοποίησης των ελλειψοειδών αρμονικών και δίνονται από τη σχέση

$$\gamma_n^m = \int \int_{\rho=\rho_0} [E_n^m(\mu) E_n^m(\nu)]^2 l_{\rho_0}(\mu, \nu) ds = 0. \quad (\text{B'.16})$$

Η θεμελιώδης λύση του τελεστή του Laplace αποδεικνύεται [54] ότι αναπτύσσεται σε σειρά ελλειψοειδών αρμονικών ως εξής

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \begin{cases} \mathcal{E}_n^m(\rho_0, \mu', \nu') \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), & \rho < \rho_0 \\ \mathcal{E}_n^m(\rho_0, \mu', \nu') \mathcal{E}_n^m(\rho, \mu, \nu), & \rho > \rho_0 \end{cases}. \quad (\text{B'.17})$$

Παρόλο που η μορφή των ελλειψοειδών αρμονικών είναι γνωστή, οι ακριβείς τιμές των παραμέτρων που περιλαμβάνουν δεν εκφράζονται σε όρους των ημιαξόνων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ του ελλειψοειδούς $\rho = \alpha$, όταν ο βαθμός n είναι υψηλότερος από 3. Αυτή η δυσκολία περιορίζει τις αναλυτικές λύσεις σχετικών προβλημάτων συνωριακών τιμών σε έναν 16 - διάστατο αρμονικό υπόχωρο που γεννάται από τις ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μικρότερου ή ίσου του τρίτου. Οι ανάγκες της παρούσας εργασίας περιορίζονται από τις ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μικρότερου ή ίσου του δευτέρου, οι οποίες δίνονται αναλυτικά παρακάτω. Αυτές οι αρμονικές είναι επαρκείς να οδηγήσουν σε μια αναλυτική έκφραση για το δίπολο καθώς και για τον τετραπολικό όρο για το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Οι εσωτερικές συναρτήσεις Lamé βαθμού μικρότερου ή ίσου του δευτέρου δίνονται από [39]

$$E_0^1(x) = 1 \quad (\text{B'.18})$$

$$E_1^m(x) = \sqrt{|x^2 - \alpha_1^2 + \alpha_m^2|}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (\text{B'.19})$$

$$E_2^1(x) = x^2 - \alpha_1^2 + \Lambda \quad (\text{B'.20})$$

$$E_2^2(x) = x^2 - \alpha_1^2 + \Lambda' \quad (\text{B'.21})$$

$$E_2^{6-m}(x) = \frac{E_1^m E_1^2 E_1^3}{E_1^m}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (\text{B'.22})$$

όπου οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \alpha_n^2 \pm \frac{1}{3} \sqrt{\sum_{n=1}^3 \left(\alpha_n^4 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{\alpha_n^2} \right)} \quad (\text{B'.23})$$

είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\sum_{n=1}^3 \frac{1}{\Lambda - \alpha_n^2} = 0. \quad (\text{B'.24})$$

Όταν οι εσωτερικές συναρτήσεις Lamé είναι γνωστές, οι αντίστοιχες εξωτερικές προκύπτουν από τις σχέσεις (B'.10), (B'.12). Οι εσωτερικές και οι εξωτερικές επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές κατασκευάζονται τότε μέσω των (B'.12) και (B'.13) αντίστοιχα. Οι σταθερές κανονικοποίησης που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία είναι οι ακόλουθες

$$\gamma_0^1 = 4\pi \quad (\text{B'.25})$$

$$\gamma_1^m = \frac{4\pi}{3} \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_m^2}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (\text{B'.26})$$

$$\gamma_2^1 = -\frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda - \alpha_1^2) (\Lambda - \alpha_2^2) (\Lambda - \alpha_3^2) \quad (\text{B'.27})$$

$$\gamma_2^1 = \frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda' - \alpha_1^2) (\Lambda' - \alpha_2^2) (\Lambda' - \alpha_3^2) \quad (\text{B'.28})$$

και

$$\gamma_2^{6-m} = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_m^2, \quad m = 1, 2, 3. \quad (\text{B'.29})$$

Όλες οι γ_n^m είναι θετικές όπως απαιτείται από το ελλειψοειδές ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσης του τελεστή Laplace.

Οι ακόλουθες σχέσεις δίνουν τις αποκλίσεις των ελλειψοειδών αρμονικών σε όρους επίσης ελλειψοειδών αρμονικών [18]

$$\nabla \mathcal{E}_0^1(\rho, \mu, \nu) = 0 \quad (\text{B'.30})$$

$$\nabla \mathcal{E}_1^m(\rho, \mu, \nu) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_m} \hat{\mathbf{x}}_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (\text{B'.31})$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}_m$ είναι η καρτεσιανή ορθοκανονική βάση και

$$\nabla \mathcal{E}_2^1(\rho, \mu, \nu) = 2 \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{h_1 h_2 h_3} \sum_{m=1}^3 \frac{h_m}{\Lambda - \alpha_m^2} \mathcal{E}_1^m(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_m \quad (\text{B'.32})$$

$$\nabla \mathcal{E}_2^2(\rho, \mu, \nu) = 2 \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{h_1 h_2 h_3} \sum_{m=1}^3 \frac{h_m}{\Lambda' - \alpha_m^2} \mathcal{E}_1^m(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_m \quad (\text{B'.33})$$

$$\nabla \mathcal{E}_2^3(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{1}{h_1} \mathcal{E}_1^2(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{h_2} \mathcal{E}_1^1(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_2 \right] \quad (\text{B'.34})$$

$$\nabla \mathcal{E}_2^4(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{1}{h_1} \mathcal{E}_1^3(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{h_2} \mathcal{E}_1^1(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_3 \right] \quad (\text{B'.35})$$

$$\nabla \mathcal{E}_2^5(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{1}{h_1} \mathcal{E}_1^3(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{h_2} \mathcal{E}_1^2(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_3 \right]. \quad (\text{B'.36})$$

Β'.3 Τύποι Συσχετισμού

Οι επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές εκφράζονται σε όρους καρτεσιανών ως [11]

$$\mathcal{E}_0^1(\rho, \mu, \nu) = 1 \quad (\text{B'.37})$$

$$\mathcal{E}_1^m(\rho, \mu, \nu) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_m} x_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (\text{B'.38})$$

$$\mathcal{E}_2^1(\rho, \mu, \nu) = (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \left(\sum_{n=1}^3 \frac{x_n^2}{\Lambda - \alpha_n^2} + 1 \right) \quad (\text{B'.39})$$

$$\mathcal{E}_2^2(\rho, \mu, \nu) = (\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) \left(\sum_{n=1}^3 \frac{x_n^2}{\Lambda' - \alpha_n^2} + 1 \right) \quad (\text{B'.40})$$

$$\mathcal{E}_2^{6-m}(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 h_3 h_m \frac{x_1 x_2 x_3}{x_m}, \quad m = 1, 2, 3. \quad (\text{B'.41})$$

Επιπλέον, τα Καρτεσιανά μονώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου του δευτέρου εκφράζονται σε όρους επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών ως ακολούθως

$$\mathcal{E}_0^1(\rho, \mu, \nu) \quad (\text{B'.42})$$

$$x_m = \frac{h_m}{h_1 h_2 h_3} \mathcal{E}_1^m(\rho, \mu, \nu), \quad m = 1, 2, 3. \quad (\text{B'.43})$$

$$x_m^2 = \frac{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_m^2}{3} \left[1 - \frac{E_2^1(\mu)E_2^1(\nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} + \frac{E_2^2(\mu)E_2^2(\nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right], \quad m = 1, 2, 3. \quad (\text{B'.44})$$

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_m} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_m} \mathcal{E}_2^{6-m}(\rho, \mu, \nu), \quad m = 1, 2, 3. \quad (\text{B'.45})$$

B'.4 Χρήσιμες Σχέσεις

Οι σταθερές Λ και Λ' που δίνονται στη (B'.23), οι ημιεστιακές αποστάσεις h_1, h_2, h_3 και οι ημιμάζονες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ικανοποιούν τις ακόλουθες χρήσιμες σχέσεις

$$3(\Lambda + \Lambda') = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \quad (\text{B'.46})$$

$$3\Lambda\Lambda' = \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2 \quad (\text{B'.47})$$

$$\sum_{n=1}^3 (-1)^n (\Lambda - \alpha_n^2) h_n^2 = \sum_{n=1}^3 (-1)^n (\Lambda' - \alpha_n^2) h_n^2 = 0 \quad (\text{B'.48})$$

$$\sum_{n=1}^3 (-1)^n (\Lambda - \alpha_n^2) h_n^2 \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^3 (-1)^n (\Lambda' - \alpha_n^2) h_n^2 \alpha_n^2 = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \quad (\text{B'.49})$$

$$\sum_{n=1}^3 (-1)^n \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2 - \Lambda} = \sum_{n=1}^3 (-1)^n \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2 - \Lambda'} = 3 \quad (\text{B'.50})$$

$$3h_n^2 (\Lambda - \alpha_n^2) (\Lambda' - \alpha_n^2) = (-1)^{n+1} h_1^2 h_2^2 h_3^2 \quad (\text{B'.51})$$

$$(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2) + (\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) + (\Lambda - \alpha_3^2)(\Lambda - \alpha_1^2) = 0 \quad (\text{B'.52})$$

$$(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2) + (\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) + (\Lambda' - \alpha_3^2)(\Lambda' - \alpha_1^2) = 0 \quad (\text{B'.53})$$

για $n = 1, 2, 3$.

Β'.5 Ελλειπτικά Ολοκληρώματα

Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα διακρίνονται σε τρία είδη: στο **ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους** που ορίζεται ως

$$F(\phi \backslash k) = \int_0^{\phi} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (\text{B'.54})$$

όπου η παράμετρος ϕ λέγεται **όρισμα** του ελλειπτικού ολοκληρώματος και παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ και η παράμετρος k λέγεται **μέτρο** του ελλειπτικού ολοκληρώματος και παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, 1)$, στο **ελλειπτικό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους** που ορίζεται ως

$$E(\phi \backslash k) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx \quad (\text{B'.55})$$

και στο **ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους** που ορίζεται ως

$$\Pi(\phi, \eta, k) = \int_0^{\phi} \frac{dx}{(1 + \eta \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}. \quad (\text{B'.56})$$

Αν στις εκφράσεις (B'.54), (B'.55) και (B'.56) αντικαταστήσουμε το όρισμα ϕ με την τιμή $\phi = \frac{\pi}{2}$, προκύπτουν αντίστοιχα οι ορισμοί για τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου, δευτέρου και τρίτου είδους.

Θέτοντας

$$t = \sin x \quad (\text{B'.57})$$

στα τρία είδη ολοκληρωμάτων που είδαμε παραπάνω, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση του t και οι (B'.54), (B'.55) και (B'.56) παίρνουν τη μορφή

$$F(\phi \backslash k) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}} \quad (\text{B'.58})$$

$$E(\phi \backslash k) = \int_0^{\phi} \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \quad (\text{B'.59})$$

$$\Pi(\phi, \eta, k) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{(1 - \eta t^2) \sqrt{1 - k^2 t^2} \sqrt{1 - t^2}}. \quad (\text{B'.60})$$

Σχετικά με τον υπολογισμό των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, αυτός δεν υπακούει σε καμία από τις κλασικές μεθόδους ολοκλήρωσης. Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογισθούν μόνο μέσω του διωνυμικού αναπτύγματος της προς ολοκλήρωση ποσότητας. Ειδικά για το ολοκλήρωμα πρώτου είδους, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση επιδέχεται το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(1 - k^2 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k \sin x)^{2n} \quad (\text{B'.61})$$

όπου το σύμβολο $n!!$ αντιστοιχεί στο γινόμενο των διαδοχικών αρτίων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι από το n , αν το n είναι άρτιος, ή στο γινόμενο των διαδοχικών περιττών μέχρι το n , αν το n είναι περιττός. Η σειρά (B'.61) για $|k \sin x| < 1$ συγκλίνει ομοιόμορφα και τότε τα ολοκληρώματα (B'.54) υπολογίζεται απ' ευθείας, με τη βοήθεια της

$$\int_0^{\phi} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \phi \quad (\text{B'.62})$$

Ομοίως ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων του δευτέρου και του τρίτου είδους προϋποθέτει το ανάπτυγμα της αντίστοιχης υπό ολοκλήρωση ποσότητας σε διωνυμική σειρά και την ολοκλήρωση της εν λόγω σειράς μέσα στο διάστημα ομοιόμορφης σύγκλισής τους, στο οποίο ορίζονται οι παράμετροί τους. Συνεπώς ο υπολογισμός των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων μπορεί να γίνει μόνο προσεγγιστικά μέσω αριθμητικών μεθόδων, όπου η επιλογή κάθε φορά της επιθυμητής προσέγγισης είναι εφικτή.

Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα που εισάγουν τις εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές $\mathcal{F}_n^m$, $n \leq 2$ συνδέονται μεταξύ τους μέσω των ακόλουθων σχέσεων [11]

$$I_1^1(\rho) + I_1^2(\rho) + I_1^3(\rho) = \frac{1}{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (\text{B'.63})$$

$$\alpha_1^2 I_1^1(\rho) + \alpha_2^2 I_1^2(\rho) + \alpha_3^2 I_1^3(\rho) = I_0^1(\rho) - \frac{\rho^2 - \alpha_1^2}{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (\text{B'.64})$$

$$I_2^1(\rho) = \frac{1}{2(\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2) \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{I_1^1(\rho)}{\Lambda - \alpha_1^2} + \frac{I_1^2(\rho)}{\Lambda - \alpha_2^2} + \frac{I_1^3(\rho)}{\Lambda - \alpha_3^2} \right) \quad (\text{B'.65})$$

$$I_2^2(\rho) = \frac{1}{2(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2) \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{I_1^1(\rho)}{\Lambda' - \alpha_1^2} + \frac{I_1^2(\rho)}{\Lambda' - \alpha_2^2} + \frac{I_1^3(\rho)}{\Lambda' - \alpha_3^2} \right) \quad (\text{B'.66})$$

$$I_2^3(\rho) = \frac{1}{h_3^2} (I_1^2(\rho) - I_1^1(\rho)) \quad (\text{B'.67})$$

$$I_2^4(\rho) = \frac{1}{h_2^2} (I_1^3(\rho) - I_1^1(\rho)) \quad (\text{B'.68})$$

$$I_2^5(\rho) = \frac{1}{h_1^2} (I_1^3(\rho) - I_1^2(\rho)). \quad (\text{B'.69})$$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι μεταξύ των εννέα ολοκληρωμάτων I_n^m με $n \leq 2$, μόνο δύο είναι ανεξάρτητα. Δηλαδή, αν τα $I_0^1(\rho)$ και $I_1^1(\rho)$ είναι γνωστά, τα υπόλοιπα επτά ολοκληρώματα μπορούν να εκφρασθούν μέσω των (B'.63)- (B'.69) σε όρους αυτών των δύο.

Πράγματι, στη συνέχεια θα μετατρέψουμε τα $I_0^1(\rho)$ και $I_1^1(\rho)$ σε τέτοια μορφή ώστε να επιδέχονται προσεγγιστικό υπολογισμό μέσω αριθμητικών μεθόδων υπολογισμού των ολοκληρωμάτων.

Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$t = \frac{h_2}{x} \quad (\text{B'.70})$$

που μετασχηματίζει το ελλειπτικό ολοκλήρωμα $I_0^1(\rho)$ στη μορφή

$$I_0^1(\rho) = \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2/\rho} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\frac{h_3^2}{h_2^2}t^2}} = \frac{1}{h_2} F\left(\sin^{-1} \frac{h_2}{\rho} \middle| \sin^{-1} \frac{h_3}{h_2}\right) \quad (\text{B'.71})$$

και το ελλειπτικό ολοκλήρωμα $I_1^1(\rho)$ στη μορφή

$$\begin{aligned} I_1^1(\rho) &= \frac{1}{h_3^2} \int_0^{h_2/\rho} \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\frac{h_3^2}{h_2^2}t^2}} \\ &= \frac{1}{h_2 h_3^2} \int_0^{h_2/\rho} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\frac{h_3^2}{h_2^2}t^2}} - \frac{1}{h_2 h_3^2} \int_0^{h_2/\rho} \frac{\sqrt{1-\frac{h_3^2}{h_2^2}t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{1}{h_2 h_3^2} \left[F\left(\sin^{-1} \frac{h_2}{\rho} \middle| \sin^{-1} \frac{h_3}{h_2}\right) - E\left(\sin^{-1} \frac{h_2}{\rho} \middle| \sin^{-1} \frac{h_3}{h_2}\right) \right]. \quad (\text{B'.72}) \end{aligned}$$

Η μορφή των $I_0^1(\rho)$ και $I_1^1(\rho)$ στις (B'.71) και (B'.72) αντίστοιχα μας επιτρέπει τον αριθμητικό υπολογισμό αυτών και στη συνέχεια τον αλγεβρικό προσδιορισμό και των υπολοίπων επτά ελλειπτικών ολοκληρωμάτων μέσω των σχέσεων (B'.63)- (B'.69).

Βιβλιογραφία

- [1] M. Abramowitz, I. A Stegun The Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1965.
- [2] Isaac Asimov, *Το χρονικό των επιστημονικών ανακαλύψεων*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- [3] P. Berg and M. Scherg, A fast method for forward computation of multiple - shell spherical head models, *Electroencephalography and clinical Neurophysiology*, **90**, pp. 58 - 64, 1994.
- [4] L. Brand, *Vector and Tensor Analysis*, John Wiley and Sons, London, 1947.
- [5] Σ. Ν. Γιαπαλάκη, Επίλυση του προβλήματος σκέδασης της πρόσπτωσης ενός επίπεδου κύματος από μια σκληρή, ισότροπη και ομογενή σφαίρα πάνω από ένα σκληρό επίπεδο σε χαμηλές συχνότητες,, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2001.
- [6] Σ. Ν. Γιαπαλάκη, Γ. Δάσιος, Φ. Καριώτου, Ελλειψοειδή Ιδιοαναπτύγματα σε ανομοιογενή ηλεκτροεγκεφαλογραφία, 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, ΕΜΠ, Αθήνα.
- [7] P.C Chaumet, J.P. Dufour Electric potential and Field between two different spheres, *Journal of Electrostatics*, **43**, pp.145-159, 1998.
- [8] B.N. Cuffin and D. Cohen, Magnetic Fields of a Dipole in Special Volume Conductor Shapes, *IEEE Trans. Biomedical Eng., BME-24*, pp.372-381, 1997.
- [9] Γ. Δάσιος, Σημειώσεις Σεμιναρίου στον Ηλεκτρομαγνητισμό, ακαδημαϊκό έτος 2004-2005.
- [10] Γ. Δάσιος και Κ. Κυριάκη, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα, 1994.

- [11] G. Dassios, Scattering of Acoustic Waves by a Coated Pressure-Release Ellipsoid
Journal of the Acoustical Society of America, **70** , pp. 176-185, 1981.
- [12] G. Dassios, S. N. Giapalaki, A. N. Kandili and F. Kariotou, Analysis of EEG images
Proceedings of 7th International Workshop on Mathematical Methods in Scattering
Theory and Biomedical Engineering, pp. 304 - 307, 2005.
- [13] G. Dassios, S. N. Giapalaki and F. Kariotou, The exterior magnetic field for the
multilayer ellipsoidal model of the brain (submitted).
- [14] G. Dassios, A.S. Fokas, F Kariotou, On the non-uniqueness of the inverse MEG
problem, Inverse Problems, **21**, pp. 11-15.
- [15] G. Dassios, M. Hadjinicolaou, G. Kamvyssas, A. N. Kandili General polarizability
tensor for two spheres International Journal of Engineering Science, (in press).
- [16] G. Dassios, F. Kariotou The direct MEG problem in the Presence of an Ellipsoidal
Shell Inhomogeneity, Quarterly of Applied Mathematics, **63**, pp. 601-618, 2005.
- [17] G. Dassios and F. Kariotou, On the Geselowitz Formula in Biomagnetics, *Quarterly
of Applied Mathematics*, **61**, pp. 387-400, 2003.
- [18] G. Dassios, F Kariotou, Magnetoencephalography in ellipsoidal geometry, Journal
of Mathematical Physics, Vol. **44**, No. 1, pp. 220-241, 2003.
- [19] G. Dassios, F Kariotou, On the Exterior Magnetic Field and Silent Sources in Ma-
gnetoencephalography, Abstract and Applied Analysis, 2004:4, pp.307-314.
- [20] O. Faugeras, F. Clement, R. Deriche, R. Keriven, T. Papadopoulos, J. Roberts, T.
Vieville, F. Devernay, J. Gomes, P. Kornprobst, D. Lingrand Institut National De
Recherche en Informatique et en Automatique INRIA, The inverse EEG and MEG
problems: The adjoint state approach. I: The continuous case.
- [21] T. Fieseler, A. Ioannides, M. Liu and H. Nowak, Model Studies of the accuracy of
the conducting sphere model in MEG using the Spheroid, Biomag, Vienna 1993.
- [22] T. Fieseler, A. Ioannides, M. Liu and H. Nowak A numerically Stable Approximation
for the Magnetic Field of the Conducting Spheroid close to the Symmetry Axis,
Biomag,, Santa Fe, 1996.
- [23] T. Fieseler, A. Ioannides and H. Nowak, Influence of the Global Volume Conduc-
tor Curvature on Point and Distributed Inverse Solutions studied with the Spheroid
Model, Biomag,, Sendai, 1998.

- [24] A.S. Fokas, I.M. Gelfand and Y. Kurylev, Inversion Method for Magnetoencephalography, *Inverse Problems*, **12**, pp. L9-L11, 1996.
- [25] A.S. Fokas, Y. Kurylev and V. Marinakis, The unique determination of neuronal current in the brain via magnetoencephalography, Institute of Physics Publishing, pp. 1067 - 1085, 2004.
- [26] D.B. Geselowitz, On Bioelectric Potentials in an Inhomogeneous Volume Conductor, *Biophysical Journal*, **7**, pp. 1-11, 1967.
- [27] D. B. Geselowitz On the Magnetic Field Generated Outside an Inhomogeneous Volume Conductor by Internal Current Sources, *IEEE Trans. Magn.*, MAG-6, pp. 346-347, 1970.
- [28] D.B. Geselowitz, Multipole Representation for an Equivalent Cardiac Generator, *Proceedings of the IRE*, **48**, pp. 75-79, 1958.
- [29] S. N. Giapalaki and F. Kariotou, The complete ellipsoidal shell - model in EEG Imaging, Abstract and Applied Analysis, pp. 1-18, 2006.
- [30] F. Grynszpan and D.B. Geselowitz, Model Studies of the Magnetocardiogram, *Biophysical Journal*, **13**, pp. 911-925, 1973.
- [31] M.S. Hamalainen, Realistic Conductivity Geometry Model of the Human Head for Interpretation of Neuromagnetic Data, *IEEE Trans. Biomedical Eng.*, **36**, pp. 165-171, 1989.
- [32] M.S. Hamalainen, Introduction to MEG as a tool for functional Imaging: Sources, Measurement and Analysis.
- [33] M. Hamalainen, R. Hari, R.J. Ilmoniemi, J. Knuutila and O. Lounasmaa, Magnetoencephalography - Theory, Instrumentation, and Applications to Noninvasive Studies of the Working Human Brain. *Rev. Mod. Phys.*, **65**, pp. 413-497, 1993.
- [34] H. Helmholtz, *Ann. Physiol. Chem.*, **29** (3), pp. 222, 1853.
- [35] E.W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, BME-24, pp.372-381, 1997. Chelsea, N.Y. 1955.
- [36] R. J. Ilmoniemi, M. S. Hamalainen and J. Knuutila, The Forward and Inverse Problems in the Spherical model. pp. 278-282, in *Biomagnetism: Applications*.

- [37] G.B. Jeffery On the form of the solution of Laplace Equation suitable for problems relating to two spheres, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A.*, **87**, no 593, pp. 109-120, 1912.
- [38] G. Kamvyssas, F Kariotou, Confocal Ellipsoidal Boundaries in EEG Modelling *Bulleting of the Greek Mathematical Society*, **50**, pp. 119-133, 2005.
- [39] Φ. Καριώτου, Μαθηματικά προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2001.
- [40] F. Kariotou, Electroencephalography in Ellipsoidal Geometry, *JMMA*, **290**, pp. 324 - 342 , 2004.
- [41] F. Kariotou, On the Mathematics of EEG and MEG in Spheroidal Geometry, *Bulleting of the Greek Mathematical Society*, **47**, pp. 117-135, 2003.
- [42] L.D. Landau and E.M. Lipshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, London, 1960.
- [43] I.V. Lindell, *Methods for Electromagnetic Field Analysis*, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.
- [44] R. Lorente De No *Studies Rockefeller Inst. Med. Res.*, **132**, pp. 384, 1947.
- [45] J. Malmivuo R. Plonsey, *Bioelectromagnetism*, Oxford University Press, New York, 1995.
- [46] T. Miloh, Forces and moments on a triaxial ellipsoid in potential flow, *Israel J. Techn.*, **11**, pp. 63-74, 1973.
- [47] P. Moon and E. Spencer, *Field Theory Handbook*, Springer - Verlag, Berlin, 1961.
- [48] P.M. Morse and E. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Vols. I, II, McGraw - Hill, New York, 1953.
- [49] J.C. de Munck, The Potential Distribution in a Layered Anisotropic Spheroidal Volume Conductor, *J. Appl. Phys.*, **64**, pp. 464-470, 1988.
- [50] G. Nolte and G. Curio, On the Calculation of Magnetic Fields Based on Multipole Modeling of Focal Biological Current Sources, *Biophysical Journal*, **73**, pp. 1253 - 1262, 1997.

-
- [51] G. Nolte, T. Fieseler and G. Curio, Perturbative Analytical Solutions of the Magnetic Forward Problem for Realistic Volume Conductors, *J. Appl. Phys.*, **89**, pp. 2360-2369, 2001.
- [52] J. Sarvas, Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic Inverse Problem, *Phys. Med. Biol.*, **32**, pp. 11-22, 1987.
- [53] W.S. Snyder, M.R. Ford, G.G. Warner and H.L. Fisher, Jr., Estimates of Absorbed Fractions for Monoenergetic Photon Sources Uniformly Distributed in Various Organs of a Heterogeneous Phantom, *Journal of Nuclear Medicine, Supplement Number, 3, August 1969, Volume 10*, Pamphlet No. 5, Revised 1978.
- [54] A. Sommerfeld, *Electrodynamics*, Academic Press, 1952.
- [55] M. R. Spiegel, Μαθηματικό Τυπολόγιο, Schaum 's outline series.
- [56] R.D Stoy, Solution procedure for the Laplace equation in bispherical coordinates for the two spheres in a uniform external field: Parallel orientation, *J. Appl. Phys.*, **65**, 7, pp. 2611-2615, 1989.
- [57] R.D Stoy, Solution procedure for the Laplace equation in bispherical coordinates for the two spheres in a uniform external field: Perpendicular orientation, *J. Appl. Phys.*, **66**, 10, pp. 5093-5095, 1989.
- [58] G. Venkov, Y. Arnaoudov The penetrable sphere with a soft eccentric core within an acoustic wave field, *Bulletin of the Greek mathematical Society*, Volume **50**, pp. 91-108, 2005
- [59] H.D. Young, Πανεπιστημιακή Φυσική, Εκδόσεις Παπαζήση.
- [60] W.X. Wang, The Potential for a Homogeneous Spheroid in a Spheroidal Coordinate System: I. At an exterior point, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **21**, 4245-4250, 1988.
- [61] P. Weiss, *Proceedings, Cam. Phil. Soc.*, **40**, 259 - 261, 1944.
- [62] <http://www.wikipedia.org>
- [63] <http://www.focusmag.gr>
- [64] <http://www.livepedia.gr>

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

<i>Ονοματεπώνυμο:</i>	Σοφία Γιαπαλάκη	
<i>Ημερομηνία Γέννησης:</i>	12 Αυγούστου 1977	
<i>Υπηκοότητα:</i>	Ελληνική	
<i>Οικογενειακή Κατάσταση:</i>	Άγαμη	
<i>Διεύθυνση Κατοικίας:</i>	Προσωρινή	Θράκης 38 - 40, 264 41 Πάτρα Αχαΐας
	Μόνιμη	Σαπφούς 18, 111 46 Γαλάτσι Αττικής
<i>Ηλεκτρονική Διεύθυνση:</i>	sonia@chemeng.upatras.gr	
	sonja.sofia@gmail.com	
<i>Τηλέφωνα Επικοινωνίας:</i>	+306945158920, +302610431186,	
	+302102930434	

Σπουδές:	09/2001 - σήμερα	Υποψήφια διδάκτωρ του Τμήματος Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών
	09/1996 - 09/2001	Δίπλωμα Χημικού Μηχανικού της Πολυτεχνικής Σχολής του Τμήματος Χημικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Πατρών (με βαθμό 8.29 στα 10)
Ξένες Γλώσσες:		Αγγλικά: άριστη γνώση (Certificate of Proficiency in English)
		Ισπανικά: πολύ καλή γνώση (Diploma De Espanol como lengua extranjera)
Γνώση Πληροφορικής και Χειρισμού Η/Υ:		Microsoft Office (Word, Excell, PowerPoint)
		Χειρισμός Διαδικτύου Συγγραφή επιστημονικών κειμένων με L ^A T _E X Γλώσσα προγραμματισμού Fortran
Διακρίσεις - Υποτροφίες:	09/2002- 08/2005	Υποτροφία του Κοινοφελούς Ιδρύματος Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης
	2003	Χρηματικό Βραβείο από το Ι.Κ.Υ, για την επιτυγχθείσα επίδοση κατά το πρώτο έτος μεταπτυχιακών σπουδών.
	1998, 2001	Χρηματικό Βραβείο από το Ν.Α.Τ, για την επιτυγχθείσα επίδοση κατά το τρίτο έτος προπτυχιακών σπουδών
	1998, 1999, 2000	Τιμητικοί έπαινοι για την επιτυγχθείσα επίδοση κατά το δεύτερο, τρίτο και τέταρτο έτος προπτυχιακών σπουδών.

Εργασιακή εμπειρία:	12/1995 - 12/2003	Συνεργασία με το ΒΡΕΤΑΝΙΚΟ ΣΥΜΒΟΥ- ΛΙΟ για την οργάνωση, διεξαγωγή και επίβλεψη των εξετάσεων του Πανεπιστημίου του Cam- bridge
	11/02 - 30/09/2002	Έργο με τίτλο 'Βέλτιστος προγραμματισμός γραμμών συσκευασίας προϊόντων εργοστασίου της Αθηναϊκής Ζυθοποιίας – ΑΘΗΝΑΙΚΗ ΖΥ- ΘΟΠΟΙΑΣ - Βιομηχανική Ζώνη Πατρών
Συμμετοχή προγράμματα:	Σε	IKYDA 2001, Scattering and Imaging Me- thods for Anisotropic Elastic Materials
		ΓΓΕΤ, ΠΕΝΕΔ 2001, Σκέδαση σε ανισότροπα υλικά
		ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ – Ενίσχυση Ερευνητικών Ομά- δων στο ΤΕΙ Πατρών, ΕΠΕΑΕΚ II –ΚΠΣ II
		ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ II, ΕΠΕΑΕΚ II
Ακαδημαϊκή Εμπειρία:	10/2001 - σήμερα	Έρευνα σε προβλήματα μαθηματικής νευροφυ- σιολογίας. Μελέτη προτύπων Ιατρικής φυσικής. Βελτιστοποίηση διεργασιών. Έρευνα στον Βιο- μαγνητισμό, σε μαθηματικά προβλήματα Ηλε- κτροεγκεφαλογραφίας (ΗΕΓ) και Μαγνητοεγ- κεφαλογραφίας (ΜΕΓ).

Διδακτικό Έργο:	10/2001 - 02/2002	Μαθηματικά I (Γραμμική άλγεβρα)
	02/2002 - 07/2002	Μαθηματικά II (Μαθηματική Ανάλυση)
	10/2002 - 02/2003	Μαθηματικά III (Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις)
	02/2003 - 07/2003	Μαθηματικά Ι΄ (Μερικές διαφορικές εξισώσεις και στατιστική ανάλυση)

Μέλος Σε Οργανώσεις: 25/10/2003 Μέλος Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας, ΤΕΕ

Ερασιτεχνικές Σπουδές και Ενασχολήσεις:

1992	Δίπλωμα μουσικής αρμονίας
1996	Πτυχίο ανωτέρας στο πιάνο Δραστηριότητα σε σκακιστικό όμιλο

Συμμετοχή Σε Συγγράμματα :

1. Επιστημονική συνεργάτρια στη συγγραφή εναλλακτικού διδακτικού υλικού στο προπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών 'Σπουδές στις Φυσικές Επιστήμες' της σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου

Παρακολούθηση Σε Συνέδρια:

1. 3ο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής, Αθήνα, 2001.
2. 5ο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής, Πάτρα, 2003.
3. 6ο Διεθνές Συνέδριο στις Μαθηματικές Μεθόδους της θεωρίας της Σκέδασης και Βιοιατρικής Τεχνολογίας, Τσεπέλοβο, 2003

Ανακοινώσεις Σε Συνέδρια :

1. Σ. Ν. Γιαπαλάκη, Γ. Δάσιος, Φ. Καριώτου, *Ελλειψοειδή Ιδιοαναπτύγματα σε ανομοιογενή ηλεκτροεγκεφαλογραφία*, 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, ΕΜΠ, Αθήνα
2. Σ. Ν. Γιαπαλάκη, Α. Ν Κανδύλη, Φ. Καριώτου, *Ευθύ πρόβλημα Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας – Μια υβριδική προσέγγιση*, 5ο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής, Θεσσαλονίκη, σελ 81 -84
3. G. Dassios, S. N. Giapalaki, A. N. Kandili and F. Kariotou, Analysis of EEG Images, 7th International Workshop on Mathematical Methods in Scattering Theory and biomedical Engineering.

Δημοσιεύσεις σε διεθνή περιοδικά:

1. S. N. Giapalaki and F. Kariotou, The Complete Ellipsoidal Shell–Model in EEG Imaging, *Abstract and Applied Analysis*, pp.1-18, Volume 2006
2. G. Dassios, S. N. Giapalaki, A. N. Kandili and F. Kariotou, The exterior magnetic field for the multilayer ellipsoidal model of the brain (submitted)