Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών

Στοχαστική Αναγνώριση Μηχανικών Συστημάτων με Υστέρηση

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Δημοσθένης Δ. Ρίζος

Υποβάλλεται στο Τμήμα Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Πατρών

ΠΑΤΡΑ 2008

Ευχαριστίες

Όπως (καλώς) συνηθίζεται, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω ορισμένους ανθρώπους, που με τη στάση και τις ενέργειές τους, επηρέασαν, αν όχι καθόρισαν, την ολοκλήρωση της παρούσας διατριβής.

Το μεγαλύτερο ευχαριστώ ανήκει στους γονείς μου, Δημήτρη και Παρασκευή, και στον αδελφό μου, Γιάννη, για τους αναρίθμητους λόγους που μου περνάνε αυτή τη στιγμή από το μυαλό μου, και για άλλους τόσους που ούτε καν φαντάζομαι.

Πολλά θα μπορούσα να πω για το δάσκαλό μου τον Καθηγητή κ. Σπήλιο Φασόη. Θα προτιμήσω να αναφερθώ στη μεγαλύτερη συνεισφορά του προς εμένα. Τον ευχαριστώ που μου έδειξε τον τρόπο να ξεχωρίζω τι με αφορά και τι όχι, όπως και να μη αναλώνομαι σε θέματα που δε με αφορούν.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες αξίζουν στον Καθηγητή του Καθολικού Πανεπιστημίου του Leuven (Βέλγιο) κ. Farid Al. Bender, διότι δίχως την υπομονή και την αρωγή του, η λέξη “τριβή” ίσως θα ήταν για μένα άλλη μία άγνωστη (επί της ουσίας) λέξη γένους θηλυκού.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα το Νίκο (Dr. Νικόλαο Χρυσοχοΐδη) και το Φάνη (Dr. Θεοφάνη Πλαγιανάκο) που υπήρξαν πρόθυμοι και πολύτιμοι συνοδοιπόροι σε δραστηριότητες επιστημονικού, και όχι μόνο, ενδιαφέροντος. Οφείλω να ομολογήσω, ότι το μέχρι τώρα ταξίδι μου μαζί τους επιβεβαιώνει τους κανόνες που έθεσε ο Κωνσταντίνος Καβάφης το 1911 (Ιθάκη).

Θα ήταν τουλάχιστον αγνωμοσύνη αν παρέλειπα να ευχαριστήσω τον Κώστα Πετσούνη, τη Μέννη Βαγιώτη-Πετσούνη, και την Τασία και Πόπη Σταθοπούλου για την αμέριστη συμπαράσταση τους, ακόμα και όταν η χιλιομετρική, και μη, απόσταση την καθιστούσε τόλμημα δύσκολο.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την κ. Μαρία Καρκέλη-Ζαχαράκη για τη συνεισφορά της στην εξέλιξη και διαμόρφωση της παρούσας διατριβής.

Ακόμη, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τους συνεργάτες και φίλους μου, Άγγελο (Dr. Άγγελο Πουλημένο), Γιάννη (Dr. Ιωάννη Σακελλαρίου), Μηνά (Dr. – εύχομαι σύντομα – Μηνά Σπυριδωνάκο) και Φώτη (Dr. – εύχομαι σύντομα – Φώτη Κοψαυτόπουλο) για τις ατελείωτες ώρες συνεργασίας, καθώς και για τη συμβολή τους στη διαμόρφωση του όμορφου και εποικοδομητικού κλίματος στα πλαίσια του εργασιακού μας χώρου.

Πολλά ευχαριστώ ανήκουν στο Δημήτρη (Dr. Δημήτρη Βλάχο) και στο Σταύρο (Dr. Σταύρο Τσαντζαλή), κυρίως για την οργάνωση και εκτέλεση του επιστημονικού εγχειρήματος με την κωδική ονομασία (όπως τουλάχιστον συνηθίζαμε να το αποκαλούμε καθημερινά) “Ταβέρνα”, καθώς και στους συμμετέχοντες σε αυτό. Δίχως την συμβολή αυτών, η αποπεράτωση της παρούσας διατριβής θα ήταν έργο δυσκολότερο.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους και συγγενείς μου, που αγωνίζονταν και αγωνιούσαν μαζί μου όλα αυτά τα χρόνια. Εύχομαι να έχουν πάντα κάποιον αξιόλογο άνθρωπο δίπλα τους, όπως έχω την τύχη να έχω εγώ.

... ό,τι στο τέλος κατακτώ μ’ έχει διαλύσει ...

[Έπεσε Έρωτας: Μακεδόνας - Κραουνάκης (2002)]

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Περίληψη	1
1 Εισαγωγή	5
1.1 Το Γενικό Πρόβλημα και η Σημαντικότητα του	5
1.2 Το Φαινόμενο της Υστέρησης	6
1.2.1 Γενική Περιγραφή	6
1.2.2 Μοντελοποίηση συστημάτων με υστέρηση: Γενικές αρχές	8
1.2.3 Αναγνώριση συστημάτων με υστέρηση: Παρούσα κατάσταση	9
1.3 Γενικό Πρόβλημα: Ορισμοί	13
1.3.1 Μέρος Πρώτο: Στοχαστική Ανίχνευση Μη - γραμμικοτήτων	14
1.3.2 Μέρος Δεύτερο: Στοχαστική αναγνώριση μηχανικών συστημάτων με υστέρηση μέσω του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.	14
1.3.3 Μέρος Τρίτο: Επέκταση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.	18
1.4 Στόχοι της Διατριβής	18
1.4.1 Στατιστική Διάγνωση Μη - Γραμμικοτήτων	18
1.4.2 Δομή του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Βασικές Ιδιότητες	19
1.4.3 Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Εκτίμηση	19
1.4.4 Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Επιλογή της Δομής του Μοντέλου και Έλεγχος Εγκυρότητας	20
1.4.5 Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Επέκταση της Δομής	20
1.4.6 Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Εφαρμογές	20
1.4.7 Δομή της Διατριβής και Καινοτομίες Αυτής	21

2 Στατιστική Ανίχνευση Επιδερμικής Ρωγμής και Επιβεβαίωση Ορθότητας Επισκευής σε Αεροπορικά Κελύφη μέσω Ταλαντωτικών Μετρήσεων	25
2.1 Εισαγωγή	27
2.2 Το Κέλυφος και τα Πειράματα	31
2.2.1 Το Κέλυφος, η Επιδερμική Ρωγμή και η Επιδιόρθωση	31
2.2.2 Τα Πειράματα	31
2.2.3 Τα Ταλαντωτικά Σήματα	32
2.2.4 Έλεγχος Πειραματικής Επαναληψιμότητας	33
2.3 Η SDD / RQA Μεθοδολογία: Οι Μέθοδοι MPBM και CMBM	34
2.3.1 Η επί τη βάση της Αναλύσεως της Μετρούμενης Ταλαντωτικής Συμπεριφοράς Μεθοδολογία	34
2.3.2 Η Μέθοδος των Μορφικών Παραμέτρων (Modal Parameter Based Method – MPBM)	36
2.3.3 Η Μέθοδος του Μέτρου Συνάφειας (Coherence Measure Based Method – CMBM)	42
2.4 Πειραματικά Αποτελέσματα	47
2.4.1 Η Μέθοδος των Μορφικών Παραμέτρων (Modal Parameter Based Method – MPBM)	48
2.4.2 Η Μέθοδος του Μέτρου Συνάφειας (CMBM)	56
2.5 Συμπεράσματα	58
3 Το Μοντέλο Ολίσθησης του Maxwell: Περιγραφή και Ιδιότητες	61
3.1 Σύμβολα και Συντομογραφίες	62
3.1.1 Ακρωνύμια	62
3.1.2 Σύμβολα	62
3.2 Εισαγωγή	62
3.3 Το Μοντέλο Ολίσθησης του Maxwell	65
3.3.1 Μαθηματική Περιγραφή	65
3.3.2 Βασικές Υποθέσεις στη Δομή του Μοντέλου	67
3.3.3 Ορισμοί και Μεταβάσεις	67
3.4 Ιδιότητες του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell	71
3.4.1 Ιδιότητες των Τελεστών Τύπου Ε-Π	73
3.4.2 Ιδιότητες Δύο ή Περισσοτέρων Τελεστών Τύπου Ε-Π σε Συνδυασμό	78

3.4.3	Ιδιότητες του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell	80
3.5	Αναγνωρισιμότητα του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell	87
3.5.1	Εκ Των Προτέρων Αναγνωρισιμότητα: Βασικές Αρχές	87
3.5.2	Εκ Των Προτέρων Αναγνωρισιμότητα: Η Δομή του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell	87
3.5.3	Αναγνωρισιμότητα του Μοντέλου Ολίσθησης Maxwell: Ο Ρόλος της Διέγερσης .	88
3.6	Σχεδιασμός της Διεγέρσεως: Βασικές Αρχές	93
3.7	Συμπεράσματα	95
A'	Παράρτημα: Ιδιότητες Τελεστών	95
B'	Παράρτημα: Ιδιότητες Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell	101
Γ'	Παράρτημα: Μη Αναγνωρισιμότητα του $\delta_M(1)$	108
4	Εκτίμηση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Εκτιμήτρια και Επίδραση Αρχικών Καταστάσεων στην Εκτίμηση	111
4.1	Σύμβολα και Συντομογραφίες	112
4.1.1	Ακρωνύμια	112
4.1.2	Σύμβολα	112
4.2	Εισαγωγή	112
4.3	Η Εκτιμήτρια	114
4.3.1	Το Πραγματικό Σύστημα	115
4.3.2	Η NLR Εκτιμήτρια	115
4.3.3	Ιδιότητες Εκτιμήτριας	116
4.4	Αριθμητική Υλοποίηση της Εκτιμήτριας	119
4.5	Αποτελέσματα	121
4.5.1	Μελέτη της Επίδρασης των Αρχικών Καταστάσεων στην Εκτίμηση	121
4.6	Συμπεράσματα	123
5	Εκτίμηση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Συνέπεια και Ασυμπτωτική Κανονικότητα της NLR Εκτιμήτριας	125
5.1	Σύμβολα και Συντομογραφίες	126
5.1.1	Ακρωνύμια	126
5.1.2	Σύμβολα	126

5.2	Εισαγωγή	126
5.3	Συνέπεια της Εκτιμήτριας	128
5.3.1	Συνέπεια της NLR Εκτιμήτριας	130
5.4	Ασυμπτωτική Κανονικότητα και Πίνακας Συνδυασποράς των Εκτιμήσεων	132
5.4.1	Ασυμπτωτική Κανονικότητα της Εκτιμήτριας	132
5.4.2	Εκτίμηση του Πίνακα Ασυμπτωτικής Συνδυασποράς	133
5.5	Υποθέσεις και Συνθήκες: Συζήτηση και Αξιολόγηση	136
5.6	Αριθμητικά αποτελέσματα: Συνέπεια	139
5.6.1	Πρώτη Περίπτωση: Περιοδική Διέγερση	139
5.6.2	Δεύτερη Περίπτωση: Τυχαία Διέγερση	140
5.7	Αριθμητικά αποτελέσματα: Ασυμπτωτική Κανονικότητα	142
5.7.1	Ασυμπτωτική Κανονικότητα και Πίνακας Συνδυασποράς	142
5.7.2	Εκτιμήτρια του Ασυμπτωτικού Πίνακα Συνδυασποράς	145
5.8	Συμπεράσματα	146
A'	Παράρτημα: Απόδειξη Συνέπειας της NLR Εκτιμήτριας	148
B'	Παράρτημα: Απόδειξη Ασυμπτωτικής Κανονικότητας της NLR Εκτιμήτριας	153
6	Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Επιλογή Δομής και Έλεγχος Εγκυρότητας	165
6.1	Εισαγωγή	165
6.2	Διαδικασία Επιλογής Δομής: Γενικές Υποθέσεις	168
6.3	Διαδικασία Επιλογής Δομής: Βασικές Αρχές	169
6.4	Διαδικασία Επιλογής Δομής: Προτεινόμενος Τρόπος Υλοποίησης	170
6.4.1	Έλεγχος Συνθηκών $C1 - C3$	171
6.4.2	Έλεγχος Υποθέσεων 3.2 - 3.3	171
6.5	Έλεγχος Εγκυρότητας	174
6.6	Αριθμητικά Αποτελέσματα	175
6.6.1	Αποτελέσματα Επιλογής της Δομής	176
6.6.2	Αποτελέσματα Επιβεβαίωσης της Εγκυρότητας	179
6.7	Συμπεράσματα	179

7	Αναγνώριση της Τριβής Προολίσθησης μέσω του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell	181
7.1	Σύμβολα και Συντομογραφίες	182
7.1.1	Ακρωνύμια	182
7.1.2	Σύμβολα	182
7.2	Εισαγωγή	182
7.3	Μέθοδοι Αναγνώρισης της Τριβής Προολίσθησης	185
7.3.1	Η μέθοδος της Γραμμικής Παλινδρόμησης (LR)	186
7.3.2	Η Μέθοδος της Δυναμικής Γραμμικής Παλινδρόμησης (DLR)	187
7.3.3	Η μέθοδος Μη - Γραμμικής Παλινδρόμησης (NLR)	188
7.3.4	Διαδικασία επιλογής της δομής του μοντέλου	188
7.4	Αποτελέσματα Αναγνώρισης Τριβής Προολίσθησης	189
7.4.1	Αποτελέσματα Αναγνώρισης Τριβής Προολίσθησης	190
7.5	Συμπεράσματα	193
8	Αναγνώριση Τριβής στη Συνδυασμένη Περιοχή Προολίσθησης – Ολίσθησης Βάσει των Μοντέλων LuGre και ολίσθησης του Maxwell	195
8.1	Εισαγωγή	196
8.2	Δομές Μοντέλων	201
8.2.1	Η Δομή Μοντέλου LuGre	201
8.2.2	Δομές βασισμένες στο Μοντέλο Ολίσθησης του Maxwell	202
8.3	Μη - Γραμμική Αναγνώριση του Φαινομένου της Τριβής	204
8.3.1	Η LG Μέθοδος	205
8.3.2	Μέθοδοι Αναγνώρισης βάσει του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell	206
8.3.3	Εκτίμηση Παραμέτρων	208
8.4	Αποτελέσματα της Αναγνώρισης της Τριβής	209
8.4.1	Αποτελέσματα Προσομοίωσης	210
8.4.2	Πειραματικά Αποτελέσματα	213
8.5	Επέκταση της Μεθόδου DNLRX	216
8.5.1	Ένα Μηχανικό Σύστημα με Τριβή	217
8.5.2	Προσεγγίσεις της Ταχύτητας και της Επιτάχυνσης.	217
8.5.3	Προσέγγιση της Δύναμης της Τριβής	218

8.5.4 Έκφραση της Δυναμικής του Συστήματος στον Διακριτό Χρόνο	218
8.5.5 Αναγνώριση της Αντίστροφης Δυναμικής	219
8.6 Αποτελέσματα Αναγνώρισης και Αντιστάθμισης της Τριβής	219
8.6.1 Διάταξη Προσομοίωσης	220
8.6.2 Αποτελέσματα Αναγνώρισης της Αντίστροφης Δυναμικής	220
8.6.3 Αποτελέσματα Ελέγχου	221
8.7 Συμπεράσματα	223
9 Σύνοψη και Γενικά Συμπεράσματα	225
Βιβλιογραφία	229
Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα	243

Περίληψη

Η υστέρηση είναι ένα μη γραμμικό φαινόμενο, το οποίο είναι πολύ κοινό σε διάφορους κλάδους της επιστήμης, συμπεριλαμβανομένων της φυσικής, της μηχανικής και της βιολογίας. Η μαθηματική θεμελίωση του φαινομένου της υστέρησης οφείλεται σε διάφορες εφαρμογές, οι οποίες αποτελούν και τα πρακτικά παραδείγματα, τα οποία την υποστηρίζουν. Για το λόγο αυτόν πλήθος μοντέλων, τα οποία πήραν την ονομασία τους από τους επιστήμονες που τα πρότειναν (π.χ Duhem, Weiss, Preisach κ.ο.κ), πρώτα χρησιμοποιήθηκαν για συγκεκριμένες εφαρμογές και μετά θεωρήθηκαν ως μοντέλα υστέρησης.

Το φαινόμενο της υστέρησης, όπως και η μαθηματική του ανάλυση, έχει μελετηθεί διεξοδικά [1, 2] και για το λόγο αυτό έχουν προταθεί αρκετά μαθηματικά εργαλεία. Εντούτοις, το πρόβλημα της αναγνώρισης (επίτευξη μαθηματικών μοντέλων επί τη βάση πειραματικών μετρήσεων) συστημάτων με υστέρηση δεν έχει λάβει τη δέουσα προσοχή ακόμα. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, η αναγνώριση περιορίζεται σε πρακτικά ζητήματα (κυρίως για προσομοιώσεις συστημάτων με υστέρηση), κατά τα οποία επιλέγεται ένα συγκεκριμένο μοντέλο υστέρησης και χρησιμοποιείται μία μέθοδος εκτίμησης (π.χ μη-γραμμική βελτιστοποίηση), δίχως να δαπανάται επιπλέον προσπάθεια σε βαθύτερα θεωρητικά θέματα (π.χ κατά πόσο η εκτίμηση είναι η βέλτιστη ή αν είναι μοναδική κ.ο.κ). Αξίζει να σημειωθεί ότι το πρόβλημα της αναγνώρισης είναι βαθύτερο και χρήζει επιπλέον θεωρητικής ανάλυσης βάσει αρχών και εργαλείων από το γνωστικό αντικείμενο της “Θεωρίας Αναγνώρισης Συστημάτων”, έτσι ώστε να επιτυγχάνονται τα βέλτιστα αποτελέσματα.

Ο πρώτος στόχος της παρούσα διατριβής είναι η ανάπτυξη μεθοδολογίας ανίχνευσης μη γραμμικής συμπεριφοράς (όπως για παράδειγμα η υστέρηση) αποκλειστικά επί τη βάση πειραματικών μετρήσεων. Η βασική ιδέα για την επίτευξη του σκοπού αυτού είναι η χρήση της Συνάρτησης Συνάφειας (Coherence Function), η οποία αναμένεται να μειωθεί με την ύπαρξη μη γραμμικοτήτων [3]. Μετά την ανίχνευση, ο στόχος είναι η ανάπτυξη ολοκληρωμένης μεθοδολογίας για την αναγνώριση φυσικών συστημάτων με υστέρηση, βάσει του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (Maxwell Slip model - [4]). Ο συγκεκριμένος στόχος αντιμετωπίζεται υπό το πρίσμα της θεωρίας αναγνώρι-

ισης συστημάτων (System Identification) και ως εκ τούτου τα βασικά θέματα θεωρητικής φύσεως τα οποία αντιμετωπίζονται είναι, τα ακόλουθα:

1. Η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα (μοναδικότητα της παραμετροποίησης - uniqueness of representation) της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
2. Η επίδραση των αρχικών καταστάσεων στην εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
3. Ο σχεδιασμός της διεγέρσεως έτσι ώστε τα διαθέσιμα δεδομένα να περιέχουν όλη τη δυνατή πληροφορία για την επιτυχή αναγνώριση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
4. Η επιλογή και η αριθμητική εφαρμογή κατάλληλης εκτιμήτριας των παραμέτρων του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
5. Η μελέτη της εκ των υστέρων αναγνωρισιμότητας (a posteriori identifiability) του Μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
6. Η μελέτη της ποιότητας της εκτίμησης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, το οποίο συνεπάγεται την μελέτη της συνέπειας (consistency) και της ασυμπτωτικής κανονικότητας των εκτιμήσεων (asymptotic normality).
7. Η διαδικασία επιλογής της δομής (model structure selection) του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
8. Ο έλεγχος εγκυρότητας (model validation) του εκτιμώμενου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Επί τη βάση των παραπάνω βασικών θεμάτων, αναπτύσσονται κατάλληλα εργαλεία και λεπτομερείς διαδικασίες με σκοπό να δοθούν απαντήσεις.

Προκειμένου να φανερωθεί η πρακτικότητα και εφαρμοσιμότητα των προαναφερθέντων θεωρητικών θεμάτων, είναι αναγκαία η εφαρμογή τους σε ένα πραγματικό σύστημα με υστέρηση. Από το πλήθος των διαθέσιμων συστημάτων αυτού του είδους, επιλέγεται ένα πραγματικό μηχανικό σύστημα με τριβή. Αξίζει να σημειωθεί ότι συστήματα αυτού του είδους όχι μόνο είναι πολύ κοινά σε μηχανολογικές εφαρμογές, αλλά η αναγνώριση τους αποτελεί πρόκληση, λόγω της πολύπλοκης φύσης της υστέρησης που παρουσιάζουν.

Συγκεκριμένα τα εν λόγω συστήματα παρουσιάζουν διαφορετικό είδος υστέρησης ανάλογα με την περιοχή λειτουργίας τους. Έτσι, όταν λειτουργούν στην περιοχή προολίσθησης (δεν παρουσιάζεται μακροσκοπική κίνηση, η σχετική μετατόπιση μεταξύ των επιφανειών που έρχονται σε επαφή

είναι της τάξεως των $2 - 5 \mu m$ - presliding regime [5]) εμφανίζεται υστέρηση (σχεδόν) ανεξάρτητη του ρυθμού, με χαρακτηριστικά μακράς μνήμης (hysteresis with nonlocal memory) μεταξύ της (μικρο)μετατόπισης και της δύναμης τριβής [6, 7, 4]. Όσο η σχετική μετατόπιση των επιφανειών που έρχονται σε επαφή αυξάνεται, τότε όλο και περισσότεροι δεσμοί (junctions) σπάνε και τελικά παρατηρείται μακροσκοπική μετατόπιση με αποτέλεσμα το σύστημα να εισέρχεται στην περιοχή ολίσθησης (sliding regime). Στην περιοχή αυτή, ο προηγούμενος τύπος της υστέρησης εξαφανίζεται και εμφανίζεται υστέρηση, μεταξύ της μετατόπισης και της δύναμης τριβής, ρυθμού εξαρτώμενης [8, 9, 4]. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα σύστημα με τριβή μεταβαίνει από την μια περιοχή λειτουργίας στην άλλη (π.χ κατά την αλλαγή στη φορά της κίνησης) αρκετές φορές ακόμα και κατά την τυπική του λειτουργία. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει τη δυσκολία του προβλήματος.

Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα της αναγνώρισης μηχανικών συστημάτων με τριβή, αρχικά μελετάται το σύστημα μόνο στην περιοχή προολίσθησης. Για το λόγο αυτό διεξάγονται κατάλληλα πειράματα στην περιοχή αυτή, μετρώντας τα σήματα της μετατόπισης και της τριβής προολίσθησης και εφαρμόζεται αναγνώριση του συστήματος επί τη βάση του Μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας οδηγεί σε σχεδόν άψογα αποτελέσματα, καταδεικνύοντας την ικανότητα του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell να περιγράφει τη δυναμική του συστήματος στην περιοχή προολίσθησης.

Αφού μελετήθηκε το σύστημα εντός της περιοχής προολίσθησης, το επόμενο βήμα περιλαμβάνει τη γενικότερη (και πιο πιθανή) περίπτωση, κατά την οποία το σύστημα λειτουργεί στη συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης. Όπως και πριν, διεξάγονται πειράματα και μετρώνται τα σήματα μετατόπισης και τριβής. Αν και η αναγνώριση του συστήματος, μέσω του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell στη συνδυασμένη περιοχή, δίνει χειρότερα συγκρινόμενα με τα προηγούμενα, αποτελέσματα, η χρήση του μοντέλου παρουσιάζεται αρκετά υποσχόμενη.

Το γεγονός ότι η αναγνώριση, μέσω του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, στη συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης οδηγεί σε χειρότερα αποτελέσματα οφείλεται στο ότι η εν λόγω δομή του μοντέλου δεν είναι σε θέση να ερμηνεύσει πλήρως την πολυπλοκότητα της υστέρησης που εμφανίζεται στην περίπτωση αυτή. Έτσι, κρίνεται απαραίτητη η κατάλληλη επέκταση της βασικής δομής. Για το λόγο αυτό προτείνεται κατάλληλη, επί τη βάση της βασική δομής, επέκταση. Η χρήση της νέας δομής του μοντέλου για την αναγνώριση του συστήματος στη συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης οδηγεί σε εξαιρετική βελτίωση των αποτελεσμάτων, καταδεικνύοντας την καταλληλότητά της. Προκειμένου οι δυνατότητες της νέας δομής να παρουσιαστούν καλύτερα, αναπτύσσεται ένα απλό σύστημα ελέγχου πρόσω-αντιστάθμισης (feedforward), βασισμένο στην προ-

τεινόμενη νέα δομή. Ο παραπάνω έλεγχος έχει ως αποτέλεσμα την επίτευξη εξαιρετικά χαμηλού σφάλματος εντοπισμού (tracking error), υποδεικνύοντας την εξαιρετική αντιστάθμιση της αναπτυσσόμενης τριβής και ως εκ τούτου την ικανότητα της προτεινόμενης δομής να ερμηνεύει τη δυναμική του συστήματος με τριβή, όταν αυτό δουλεύει στην συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το Γενικό Πρόβλημα και η Σημαντικότητα του

Η υστέρηση είναι ένα μη - γραμμικό φαινόμενο, το οποίο παρουσιάζεται σε μια πληθώρα περιπτώσεων, όπως για παράδειγμα στην πλαστική παραμόρφωση υλικών, στην τριβή, σε μαγνητικά και έξυπνα υλικά, στο μαγνητισμό και πολλά άλλα [10, 2]. Σε μηχανικά συστήματα η κύρια πηγή υστέρησης οφείλεται στην ύπαρξη διάκενων (backlash) ή/και τριβής, με την τελευταία να είναι ίσως η συνηθέστερη αιτία. Λόγω του ότι η υστέρηση καθορίζει το δυναμικό χαρακτήρα των συστημάτων, παρεκτρέποντας αυτά από τη γραμμική περιοχή, η μοντελοποίηση της είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας τόσο για τη δυναμική ανάλυση, όσο και για την κατανόηση και τον έλεγχο των συστημάτων αυτών. Παρά ταύτα, η μοντελοποίηση βάσει φυσικών νόμων δε είναι πάντα εφικτή. Για το λόγο αυτό συνήθως οι μεθοδολογίες βασίζονται σε πειραματικές μετρήσεις και ως εκ τούτου το πρόβλημα της μοντελοποίησης ανάγεται σε πρόβλημα αναγνώρισης μη-γραμμικών συστημάτων [11, 12, 13].

Η παρούσα εισαγωγή χωρίζεται σε τέσσερα μέρη. Στο πρώτο παρέχονται κάποιοι γενικοί ορισμοί καθώς και κάποιες προκαταρκτικές πληροφορίες (π.χ για τους τύπους υστέρησης) σχετικά με το φαινόμενο της υστέρησης. Το δεύτερο μέρος επικεντρώνεται στα προβλήματα, τα οποία πραγματεύεται η παρούσα διατριβή, ενώ στο τρίτο παρατίθενται οι σκοποί αυτής. Τέλος, στο τέταρτο δίνεται η δομή της διατριβής, καθώς και οι επιμέρους καινοτομίες αυτής.

Σχήμα 1.1: (a-b) Περιοδικά μεταβαλλόμενη είσοδος και αναπτυσσόμενος βρόχος υστέρησης; (c-d) Αυθαίρετη μεταβολή της εισόδου και αναπτυσσόμενος βρόχος υστέρησης.

1.2 Το Φαινόμενο της Υστέρησης

1.2.1 Γενική Περιγραφή

Συνήθως, το φαινόμενο της υστέρησης συνοδεύεται από βρόχους υστέρησης [Σχήμα 1.1(b)], γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι η ύπαρξη βρόγχου είναι αναγκαία [10, σελ. xiv]. Στην πραγματικότητα, η υστέρηση σε ένα σύστημα με είσοδο $u(t)$ και έξοδο $y(t)$ παρατηρείται λόγω της εναλλαγής κλάδων (branching) κατά την εμφάνιση τοπικού ελαχίστου της εισόδου [10]. Συγκεκριμένα [Σχήμα 1.1(c-d)], η έξοδος ακολουθεί τον κλάδο ανόδου όταν η $u(t)$ είναι αύξουσα [διαδρομή ab - Σχήμα 1.1(d)], ενώ τον κλάδο καθόδου όταν $u(t)$ είναι φθίνουσα [διαδρομή bc - Σχήμα 1.1(d)]. Προφανώς, ο βρόχος υστέρησης (hysteresis loop) προκύπτει όταν η είσοδος αυξομειώνεται μεταξύ δύο τοπικών ακροτάτων [Σχήμα 1.1(a,b)], ενώ η εναλλαγή κλάδων εμφανίζεται για αυθαίρετες μεταβολές της $u(t)$ [Σχήμα 1.1(c,d)].

Αν και ακριβής ορισμός της υστέρησης δεν έχει προταθεί ακόμα [14], η τρέχουσα άποψη δέχεται ότι σε ένα σύστημα με υστέρηση ο βρόχος που δημιουργείται λόγω περιοδικής διεγέρσεως διατηρείται ακόμα και όταν η συχνότητα διεγέρσης προσεγγίζει το μηδέν [14]. Ως εκ τούτου ένα γραμμικό σύστημα μπορεί υπό κάποιες συνθήκες να παρουσιάσει βρόχο, αλλά δεν μπορεί να παρουσιάσει υστέρηση. Το παραπάνω μπορεί να γίνει κατανοητό μέσω του παρακάτω παραδείγματος. Στο Σχήμα 1.2(a) παρουσιάζεται η σχέση εισόδου - εξόδου σε ένα γραμμικό σύστημα που απαρτίζεται από μάζα m , γραμμικό ελατήριο με σταθερά k και βισκοελαστικό αποσβεστήρα c [x και f η μετατόπιση (έξοδος) και η δύναμη (είσοδος), αντίστοιχα]:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = f \quad (1.1)$$

Σχήμα 1.2: Βρόχοι σε περιοδικά μεταβαλλόμενη είσοδο για δύο συχνότητες διέγερσης: (a) γραμμικό σύστημα; (b) μοντέλο ολίσθησης Maxwell [4]; (c) μοντέλο LuGre [9] (Μόνιμη κατάσταση).

για δύο διαφορετικές συχνότητες διέγερσης (η είσοδος μεταβάλλεται ημιτονοειδώς). Όπως είναι φανερό εμφανίζεται βρόχος για την περίπτωση $\omega_2 = 0,05 \text{ Hz}$ (αυξημένη ταχύτητα $\dot{x} \Rightarrow$ μεγαλύτερη κατανάλωση ενέργειας στον αποσβεστήρα $\Rightarrow$ έντονη συνεισφορά της βισκοελαστικότητας), ο οποίος εξαφανίζεται για $\omega_1 = 0,03 \text{ Hz}$ (μειωμένη ταχύτητα $\dot{x} \Rightarrow$ λιγότερη κατανάλωση ενέργειας στον αποσβεστήρα $\Rightarrow$ αμελητέα επίδραση της βισκοελαστικότητας). Επομένως και σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, το εν λόγω σύστημα δεν εμφανίζει υστέρηση και ο λόγος για αυτό είναι ότι η επίδραση του (γραμμικού) μηχανισμού κατανάλωσης ενέργειας στο σύστημα (βισκοελαστικότητα: $c \cdot \dot{x}$) σχεδόν εξαφανίζεται για χαμηλές συχνότητες διέγερσης.

Το Σχήμα 1.2(b-c), παρουσιάζει τις σχέσεις εισόδου - εξόδου για την περίπτωση ενός μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (Maxwell - Slip model) [4] και μοντέλου τριβής LuGre [9] σε δύο διαφορετικές περιοδικές διεγέρσεις ($\omega_1 = 0.03 \text{ Hz}$ και $\omega_2 = 0.05 \text{ Hz}$). Σημειώνεται ότι και τα δύο παραπάνω μοντέλα είναι σε θέση να περιγράψουν συστήματα με υστέρηση [15]. Όπως είναι εμφανές οι βρόχοι διατηρούνται και για τις δύο συχνότητες διέγερσης, γεγονός που δηλώνει την ύπαρξη υστέρησης.

Το παραπάνω παράδειγμα αποκαλύπτει ένα επιπλέον χαρακτηριστικό. Στο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, ο βρόχος υστέρησης διατηρείται αμετάβλητος και για τις δύο συχνότητες διέγερσης, ενώ στο LuGre αλλάζει γεωμετρία. Συνεπώς, στην πρώτη περίπτωση η υστέρηση είναι ανεξάρτητη της συχνότητας διέγερσης, ή διαφορετικά του ρυθμού μεταβολής της εισόδου (rate - independent or static hysteresis) [10, σελ.xii], ενώ στην δεύτερη εξαρτάται από αυτή (rate - dependent or dynamic hysteresis) [14, 16]. Χαρακτηριστικό παράδειγμα του πρώτου είδους είναι η τριβή προολίσθησης [6, 7, 4], ενώ του δεύτερου η τριβή στην περιοχή ολίσθησης ή στην συνδυασμένη περιοχή ολίσθησης προολίσθησης [8].

Η ανεξάρτητη του ρυθμού υστέρηση διαχωρίζεται περαιτέρω σε υστέρηση με τοπική μνήμη και μακρά (μη τοπική) μνήμη (local and nonlocal memory, αντίστοιχα) [10, σελ.xiv]. Η σχετική τους διαφορά, καθώς και οι βασικές ιδιότητές τους παρουσιάζονται μέσω των ακόλουθων δύο παραδειγμάτων. Στο Σχήμα 1.3 φαίνεται η διέγερση (πάνω) και ο βρόχος υστέρησης ενός συστήματος

Σχήμα 1.3: Υστέρηση με τοπική και μακρά (μη τοπική) μνήμη.

με τοπική (local) μνήμη (αριστερά). Η διαδρομή που ακολουθείται είναι η $a \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow a \rightarrow \varepsilon$. Σε αυτή τη περίπτωση τα τοπικά ελάχιστα της εισόδου στα σημεία γ και δ δε δημιουργούν νέες διακλαδώσεις, οπότε δεν επηρεάζουν τον παρατηρούμενο βρόχο. Στην περίπτωση της μακράς μνήμης (nonlocal) μνήμης (Σχήμα 1.3 - δεξιά) η διαδρομή είναι η $a \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \gamma \rightarrow a \rightarrow \varepsilon$, με τα ελάχιστα γ και δ να δημιουργούν, αντίστοιχα, νέες διακλαδώσεις (κλάδος $\gamma \rightarrow \delta$ λόγω του γ και κλάδος $\delta \rightarrow \gamma$ λόγω του δ). Επομένως στην περίπτωση αυτή ο βρόχος υστέρησης καθορίζεται από όλα παρελθοντικά τοπικά της εισόδου (μακρά μνήμη). Αξίζει να ειπωθεί ότι και στις δύο περιπτώσεις ο κλάδος που ξεκίνησε λόγω κάποιου τοπικού ελαχίστου κλείνει όταν το ακρότατο αυτό επανεμφανισθεί ή όταν υπερβαίνεται, ενώ το αντίστοιχο ακρότατο διαγράφεται από τη μνήμη (wiping out property – [10, σελ.15]). Για παράδειγμα και στις δύο περιπτώσεις ο κλάδος $a \rightarrow \beta$ δημιουργείται λόγω του ακρότατου a και κλείνει όταν η είσοδος ξαναλάβει τιμή ίση με a (Σχήμα 1.3).

Αν και ο παραπάνω διαχωρισμός είναι ευρέως διαδεδομένος, δεν έχει αναφερθεί αντίστοιχος για την περίπτωση της εξαρτώμενης από το ρυθμό υστέρησης. Επιπλέον, υπάρχει περιορισμένος αριθμός εργασιών που πραγματεύονται την περίπτωση αυτή (ενδεικτικά αναφέρονται [10, 16]). Ο λόγος είναι ότι μέχρι προσφάτως η υστέρηση οριζόταν ως φαινόμενο ανεξάρτητο του ρυθμού [2, σελ.13], το οποίο ισχύει προσεγγιστικά και μόνο όταν ο ρυθμός μεταβολής της εισόδου διατηρείται χαμηλός.

1.2.2 Μοντελοποίηση συστημάτων με υστέρηση: Γενικές αρχές

Οι προτεινόμενες μεθοδολογίες για τη μοντελοποίηση συστημάτων με υστέρηση είναι δυνατόν να ταξινομηθούν σε: (i) Μεθοδολογίες Άσπρου, (ii) Γκριζου και (iii) Μαύρου κουτιού (White, Grey, Black - box), αντίστοιχα. Στην πρώτη κατηγορία ενσωματώνονται μεθοδολογίες οι οποίες συνδέουν την είσοδο με την έξοδο μέσω φυσικών νόμων. Μέχρι τώρα δεν έχει προταθεί ενιαία μεθοδολογία

για την αντιμετώπιση φαινομένων υστέρησης προερχόμενων από διαφορετικά φυσικά συστήματα. Συνεπώς, η μοντελοποίηση εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα και από τους φυσικούς νόμους που το διέπουν (π.χ [17]).

Στη δεύτερη κατηγορία (*Grey - box*) συμπεριλαμβάνονται μεθοδολογίες, οι οποίες χρησιμοποιούν διαθέσιμη γνώση της δυναμικής του συστήματος με υστέρηση. Η διαδικασία που ακολουθείται μπορεί να περιγραφεί σε γενικές γραμμές ως εξής: Αρχικά αναγνωρίζεται, μέσω πειραματικών μετρήσεων, το είδος της υστέρησης που παρουσιάζει το υπό εξέταση σύστημα. Κατόπιν, επιλέγεται κατάλληλο μοντέλο, το οποίο εν δυνάμει αναπαράγει φαινομενολογικά τη μετρούμενη υστέρηση¹. Τέλος προσαρμόζονται, χρησιμοποιώντας πειραματικές μετρήσεις και κατάλληλες τεχνικές, οι παράμετροι του επιλεγμένου μοντέλου έτσι ώστε η δυναμική συμπεριφορά του μοντέλου που προκύπτει, να είναι όσον το δυνατόν σε συμφωνία με τη μετρούμενη. Όπως είναι φανερό, το βασικό πλεονέκτημα της κατηγορίας αυτής είναι ότι ένα φαινομενολογικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση διαφορετικών συστημάτων με υστέρηση, αρκεί αυτά να παρουσιάζουν τύπο υστέρησης ο οποίος να μπορεί να αναπαραχθεί από το εν λόγω μοντέλο.

Στην τρίτη κατηγορία (*Black - box* [18]) συμπεριλαμβάνονται μεθοδολογίες, οι οποίες δε χρειάζονται εκ των προτέρων γνώση της δυναμικής του συστήματος. Συνήθως χρησιμοποιούνται μοντέλα αρκετά ευέλικτα, ικανά να αναπαραγάγουν πλήθος μη - γραμμικών συμπεριφορών. Η προσαρμογή των εν λόγω μοντέλων στο εκάστοτε πρόβλημα γίνεται όπως και πριν βάσει πειραματικών μετρήσεων.

1.2.3 Αναγνώριση συστημάτων με υστέρηση: Παρούσα κατάσταση

Σε γενικές γραμμές ο κύριος σκοπός της αναγνώρισης συστημάτων με υστέρηση είναι η κατασκευή μοντέλων, τα οποία να είναι σε θέση να αναπαραγάγουν ποσοτικά και με ικανοποιητική ακρίβεια την παρατηρούμενη δυναμική του συστήματος. Το πρόβλημα της αναγνώρισης, δοθέντος πειραματικών δεδομένων από το υπό μελέτη σύστημα, χωρίζεται σε δύο γενικά υποπροβλήματα: (i) την επιλογή κατάλληλου μοντέλου, το οποίο εν δυνάμει να περιγράφει τη δυναμική του συστήματος, και (ii) την ανάπτυξη κατάλληλης, επί τη βάση των πειραματικών μετρήσεων, διαδικασίας εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου. Η επιλογή του μοντέλου γίνεται από τις τρεις παραπάνω κατηγορίες. Παρά ταύτα, τα μοντέλα της πρώτης κατηγορίας (*White - box*) είναι στις περισσότερες των περιπτώσεων αρκετά πολύπλοκα, ενσωματώνοντας μεγάλο αριθμό παραμέτρων προς εκτίμηση, και επομένως ακατάλληλα για τους σκοπούς της αναγνώρισης.

Τα τελευταία χρόνια έχει παρατηρηθεί έντονο ενδιαφέρον στη χρήση μεθοδολογιών της τρίτης

¹Για το λόγο αυτό τα μοντέλα αυτά αναφέρονται και ως φαινομενολογικά.

κατηγορίας (*Black - box*) [19, 20, 21, 22]. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι, αν και δεν παρέχουν φυσική εποπτεία, η δυναμική ενός συστήματος με υστέρηση μπορεί να αναπαραχθεί σε αρκετές περιπτώσεις με πολύ καλή ακρίβεια. Επιπλέον, πρόσφατες εργασίες [21, 22] έδειξαν ότι εξαιρετική ακρίβεια είναι δυνατόν να επιτευχθεί μέσω συνδυασμού ήδη διαδεδομένων μεθοδολογιών Γρίζου - κουτιού με τις εν λόγω μεθοδολογίες.

Οι περισσότερες εργασίες χρησιμοποιούν εκ των προτέρων γνώση από το υπό εξέταση σύστημα (π.χ. αν παρουσιάζει υστέρηση δίχως τοπική μνήμη κ.λ.π.) και ως εκ τούτου εμπίπτουν στη δεύτερη κατηγορία (*Grey - box* μεθοδολογίες). Ίσως το πιο ευρέως διαδεδομένο μοντέλο της κατηγορίας αυτής είναι το Preisach [10, σελ.1], το οποίο μοντελοποιεί την υστέρηση ως το συνολικό άθροισμα (υπέρθεση) όλων των δυνατών τελεστών τύπου ρελέ (*relay type operators*):

$$y(t) = \int \int_{a \geq b} \mu(a, \beta) \hat{\gamma}_{a, \beta} u(t) da d\beta \quad (1.2)$$

όπου $\mu(a, \beta)$ είναι μια βαρυτική συνάρτηση, η οποία ονομάζεται και *συνάρτηση πυκνότητας Preisach* και $\hat{\gamma}_{a, \beta} u$ είναι ο τελεστής τύπου ρελέ με άνω και κάτω τιμές 1 και -1 , αντίστοιχα. a και β είναι το άνω και κάτω όριο κορεσμού του κάθε τελεστή (Σχήμα 4). Το Preisach στην κλασσική του μορφή είναι μοντέλο υστέρησης ρυθμού ανεξάρτητης. Παρά ταύτα, με κατάλληλες τροποποιήσεις [10, 16], μπορεί να μετατραπεί και σε ρυθμού εξαρτημένης.

Η αναγνώριση του Preisach περιλαμβάνει την εκτίμηση της συνάρτησης πυκνότητας του $\mu(a, \beta)$. Η απλούστερη μέθοδος συνδέει τη $\mu(a, \beta)$ με τη δεύτερη παράγωγο της εξόδου, η οποία υπολογίζεται αριθμητικά [10, 23]. Προκειμένου να αποφευχθεί η αριθμητική παραγωγή έχουν προταθεί μεθοδολογίες, οι οποίες είτε εκτελούν παρεμβολή στα πειραματικά δεδομένα [10, 24, 25], είτε προσεγγίζουν την $\mu(a, \beta)$ βάσει νευρωνικών δικτύων [26, 27, 28, 29], συναρτήσεων βάσης [30] και κυματιδίων (*Wavelets*) [31]. Εναλλακτικά, υπάρχουν μεθοδολογίες που προεπιλέγουν τη δομή της $\mu(a, \beta)$ [32, 33]. Προσφάτως έχουν προταθεί μεθοδολογίες οι οποίες είτε βασίζονται σε ελάχιστα τετράγωνα [34], είτε είναι προσαρμοστικές (*adaptive*) [35].

Μια δεύτερη εξίσου σημαντική κατηγορία μεθοδολογιών Γκρίζου - κουτιού χρησιμοποιεί ρεολογικά (*Rheological*) μοντέλα, τα οποία προκύπτουν συνδυάζοντας σε παράλληλη ή/και σε σειρά συνδεσμολογία στοιχειώδη μοντέλα που αναπαριστούν βασικές μηχανικές ιδιότητες, όπως ελαστικότητα, βισκοελαστικότητα και πλαστικότητα [2, σελ.32]. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου είδους μοντέλου παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.5, όπου συνδυάζει ένα στοιχειώδες μοντέλο πλαστικότητας (που εναλλακτικά ονομάζεται και μοντέλο τριβής *Coulomb*) και ελαστικότητας σε σειρά, τα οποία τοποθετούνται παράλληλα με ένα στοιχειώδες μοντέλο βισκοελαστικότητας και ελαστικότη-

Σχήμα 1.4: Τελεστής τύπου ρελέ: Όταν η είσοδος u είναι αύξουσα (φθίνουσα), η έξοδος $\dot{\gamma}_{\alpha\beta}u$ ακολουθεί την διαδρομή $abcde$ ($edfba$).

Σχήμα 1.5: Παράδειγμα ρεολογικού μοντέλου

τας. Η είσοδος του συστήματος για το εν λόγω παράδειγμα είναι η μετατόπιση u , ενώ η έξοδος y δίδεται ως εξής:

$$y = \underbrace{k \cdot u}_{\text{Ελαστικότητα}} + \underbrace{c \cdot \dot{u}}_{\text{Βισκοελαστικότητα}} + \underbrace{k \cdot (u - x)}_{\text{Ελαστικότητα σε σειρά με Coulomb}} \quad (1.3)$$

$$\text{όπου } \dot{x} = \begin{cases} 0, & \text{αν } |u - x| < w/k = \Delta \\ \dot{u}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (1.4)$$

όπου k η σταθερά του γραμμικού ελατηρίου και c ο συντελεστής βισκοελαστικής απόσβεσης, ενώ με $\dot{x}$ και $\dot{u}$ συμβολίζεται η πρώτη παράγωγος ως προς το χρόνο. Επιπλέον, ως w ορίζεται το μέτρο της τριβής Coulomb και αντίστοιχα Δ η κρίσιμη παραμόρφωση του ελατηρίου (κατώφλι) πέραν της οποίας το σημείο “A” αρχίζει να κινείται (Σχήμα 1.5).

Σημαντική υποκατηγορία των παραπάνω μοντέλων αποτελούν τα λεγόμενα Prandtl - Ishlinskiĭ, τα οποία προκύπτουν συνδυάζοντας αυθαίρετα ομάδες μοντέλων E/Π και E-Π σε παράλληλη ή/και σειριακή διάταξη [2, σελ.83]. Ως E/Π μοντέλο (συνήθως αναφέρεται και ως Plays) ορίζεται αυτό που συνδυάζει ένα στοιχειώδες μοντέλο Ελαστικότητας παράλληλα με ένα Πλαστικότητας (Σχήμα 1.6) [2, σελ.63]. Αντίστοιχα, σε ένα E-Π μοντέλο (ή αλλιώς Stops) συνδέονται τα δύο παραπάνω στοιχειώδη μοντέλα, αλλά αυτή τη φορά σε σειρά (Σχήμα 1.6) [2, σελ.75]. Επομένως, ως μοντέλο Prandtl - Ishlinskiĭ τύπου E/Π ορίζεται εκείνο, στο οποίο αυθαίρετος αριθμός E/Π μοντέλων συνδέονται σε σειρά [2, σελ.83], και, αντίστοιχα, ως μοντέλο Prandtl - Ishlinskiĭ τύπου E-Π, όταν E-Π μοντέλα συνδέονται παράλληλα. Το τελευταίο μοντέλο, το οποίο αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.6 (δεξιά).

Η βασική διαφορά των μοντέλων Prandtl - Ishlinskiĭ από τα ρεολογικά γενικής μορφής είναι ότι τα πρώτα δεν περιλαμβάνουν στοιχειώδη μοντέλα βισκοελαστικότητας. Για το λόγο αυτό, είναι σε θέση να αναπαραγάγουν μόνο υστέρηση ανεξάρτητη του ρυθμού [2, σελ.63]. Σε αντίθεση ένα ρεολογικό μοντέλο, το οποίο περιλαμβάνει βισκοελαστικότητα, είναι σε θέση να παρουσιάσει υστέρηση ρυθμού εξαρτώμενη. Παρά ταύτα, το χαρακτηριστικό δεν οφείλεται σε κάποιον μη-

Σχήμα 1.6: Στοιχειώδη μοντέλα E/Π και E-Π και μοντέλο Prandtl - Ishlinskii τύπου E-Π

γραμμικό μηχανισμό [π.χ όπως στο μοντέλο LuGre – Σχήμα 1.2(c)], αλλά καθαρά στην ενσωμάτωση του στοιχειώδους βισκοελαστικού μοντέλου [2, σελ.13]. Ως εκ τούτου, αν ο ρυθμός διέγερσης διατηρείται χαμηλός, η συνεισφορά της βισκοελαστικότητας είναι ελάχιστη [αντίστοιχο φαινόμενο παρατηρείται και στο γραμμικό μοντέλο που περιγράφεται στο Σχήμα 1.2(a)] και η υστέρηση που παρατηρείται είναι “σχεδόν” ανεξάρτητη του ρυθμού.

Το πρόβλημα της αναγνώρισης ρεολογικών μοντέλων υστέρησης συνίσταται στην εκτίμηση των εκάστοτε παραμέτρων των στοιχειωδών μοντέλων που χρησιμοποιούνται [π.χ σταθερές ελατηρίων k και βισκοελαστικότητας c , όπως και κρίσιμων παραμορφώσεων (κατωφλίων) Δ], επί τη βάση πειραματικών μετρήσεων. Για το λόγο αυτό έχουν προταθεί μεθοδολογίες, κατά τις οποίες είτε οι παράμετροι του μοντέλου συνδέονται απευθείας (μέσω λύσεων κλειστής μορφής) με τη γεωμετρία του βρόχου υστέρησης [36, 37], είτε προσεγγίζοντας το βρόγχο υστέρησης με αυθαίρετη ακρίβεια μέσω κατάλληλου θεωρήματος αναπαράστασης [38]. Επιπλέον, έχουν προταθεί μεθοδολογίες κατά τις οποίες εκτελούνται σειρά εξειδικευμένων πειραμάτων, έτσι ώστε να απομονώνεται η επίδραση των επιμέρους παραμέτρων [39]. Εναλλακτικά, έχουν προταθεί μεθοδολογίες, κατά τις οποίες η αναγνώριση υλοποιείται είτε επί τη βάση νευρωνικών δικτύων [40, 41, 42], είτε βάσει κατάλληλης διαδικασίας βελτιστοποίησης μέσω γενετικών αλγορίθμων [43].

Όσον αφορά τα μοντέλα τύπου Prandtl - Ishlinskii, η πιο δεδομένη μεθοδολογία περιλαμβάνει την προεπιλογή τόσο του αριθμού των μοντέλων E-Π ή E/Π που χρησιμοποιούνται, καθώς και της τριτής Coulomb w ή της κρίσιμης παραμόρφωσης Δ (κατωφλίων ή thresholds) του κάθε μοντέλου E-Π ή E/Π (Σχήμα 1.6). Οι υπόλοιπες παράμετροι του μοντέλου (π.χ k στην εξίσωση 1.3) εκτιμούνται μέσω ελαχίστων τετραγώνων [44, 45, 46, 4, 47, 48]. Οι παραπάνω μεθοδολογίες εκτελούν μερική αναγνώριση του μοντέλου και ως εκ τούτου θεωρούνται υποβέλτιστες (suboptimal). Το μειονέκτημα αυτό έχει αντιμετωπιστεί μέσω μεθοδολογιών που εκτελούν πλήρη αναγνώριση μέσω μη - γραμμικών τεχνικών βελτιστοποίησης [49, 50]. Παραταύτα, στις εν λόγω μεθοδολογίες δεν υπάρχει συστηματικός

τρόπος επιλογής του αριθμού των μοντέλων Ε-Π ή Ε/Π που χρησιμοποιούνται, όπως επίσης είναι πολύ πιθανόν, λόγω πολυπλοκότητας της διαδικασίας βελτιστοποίησης, ο αλγόριθμος να συγκλίνει σε τοπικό ελάχιστο.

Πέρα από τις μεθοδολογίες αναγνώρισης που βασίζονται στο μοντέλο Preisach και σε ρεολογικά (Rheological) μοντέλα, υπάρχει και μια ευρύτατη κατηγορία που χρησιμοποιεί διαφορικά (differential) μοντέλα υστέρησης τα οποία συνήθως αναφέρονται ως Duhem. Τα εν λόγω μοντέλα απαρτίζονται από μία μη-γραμμική εξίσωση κατάστασης (state equation) και μια εξίσωση εξόδου (output equation) και ανάλογα με τη μορφή τους κατηγοριοποιούνται συνήθως σε *γενικευμένα* (generalized) [14] και *εκτεταμένα* (extended) μοντέλα Duhem [15]:

	Γενικευμένο μοντέλο Duhem	Εκτεταμένο μοντέλο Duhem
Εξίσωση κατάστασης	$\dot{x} = f(x, u) \cdot g(\dot{u})$	$\dot{x} = f(x, u, \dot{u})$
Εξίσωση εξόδου	$y(t) = h(x, u)$	$y(t) = h(x, u, \dot{u})$

όπου x η μεταβλητή κατάστασης και $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ και $h(\cdot)$ κατάλληλες συναρτήσεις, όπου αναλόγως της μορφής τους δίνουν στο αντίστοιχο μοντέλο Duhem δομή ικανή να περιγράψει τόσο φαινόμενα υστέρησης ρυθμού ανεξάρτητης (π.χ μοντέλο Dahl [15]), όσο και ρυθμού εξαρτώμενης (π.χ μοντέλο LuGre [15]).

Στην κλάση των μοντέλων Duhem ανήκει ένας μεγάλος αριθμός γνωστών μοντέλων υστέρησης, όπως για παράδειγμα τα μοντέλα τριβής Dahl [51], LuGre [9] και Leuven [7], όπως επίσης το μοντέλο Bouc - Wen [52] και η τροποποιημένη έκδοση του [53] και το μοντέλο Madelung [1, σελ.274]. Ως εκ τούτου διάφορες μεθοδολογίες αναγνώρισης, ανάλογα με κάθε μοντέλο, έχουν προταθεί. Γενικότερα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε αυτές που αναφέρονται στο πεδίο συχνοτήτων [54, 55] και στο πεδίο του χρόνου. Οι τελευταίες μπορούν επιπλέον να διαχωριστούν σε αυτές που βασίζονται στην εκτέλεση πλήθους εξειδικευμένων πειραμάτων, απομονώνοντας την επίδραση της εκάστοτε παραμέτρου [56, 7, 57, 58], και σε αυτές που χρησιμοποιούν μεθοδολογίες ελαχίστων τετραγώνων, γραμμικών [59] ή μη [53, 60, 61, 62, 63], εκτελώντας την εκτίμηση σε ένα ή σε πολλαπλά στάδια [64]. Επιπλέον, έχουν προταθεί προσαρμοστικές (adaptive) μεθοδολογίες, οι οποίες λειτουργούν επαναληπτικά ως προς το χρόνο (recursive) και είναι ικανές να υλοποιούν την εκτίμηση κατά τη διάρκεια λειτουργίας του συστήματος (on-line) [65, 66, 67, 68].

1.3 Γενικό Πρόβλημα: Ορισμοί

Τα μηχανικά συστήματα (π.χ κατασκευές, κινητήρες, κ.τ.λ) κατά την τυπική τους λειτουργία συνήθως εμφανίσουν υστέρηση λόγω μη γραμμικών φαινομένων, τα οποία κυρίως οφείλονται στην τριβή (π.χ

κινούμενες επιφάνειες που έρχονται σε επαφή), σε διαφορές στη συναρμογή (π.χ ανάπτυξη ρωγμής) και σε ταλαντώσεις μεγάλου εύρους (π.χ πλαστική παραμόρφωση). Σε αρκετές περιπτώσεις το μέγεθος των μη γραμμικοτήτων μπορεί να είναι τέτοιο, ώστε να επιτρέπεται η ανάλυση των εν λόγω συστημάτων μέσω γραμμικών μεθοδολογιών [11]. Εντούτοις, υπάρχουν και πολλές περιπτώσεις όπου η μη - γραμμική ανάλυση δε μπορεί να αποφευχθεί.

Η παρούσα διατριβή αντιμετωπίζει τρία διαδοχικά γενικά προβλήματα, σε τρία διαδοχικά μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει την ανίχνευση της μη - γραμμικής συμπεριφοράς σε μηχανικά συστήματα. Στο δεύτερο επιχειρείται αναγνώριση (μη - γραμμικών) μηχανικών συστημάτων με υστέρηση, επί τη βάση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (μοντέλο Prandtl - Ishlinskiĩ τύπου E-Π - Σχήμα 1.6), ενώ το τρίτο και τελευταίο περιλαμβάνει τη γενίκευση του εν λόγω μοντέλου έτσι ώστε να είναι σε θέση να περιγράφει υστέρηση εξαρτώμενη του ρυθμού (rate - dependent hysteresis).

1.3.1 Μέρος Πρώτο: Στοχαστική Ανίχνευση Μη - γραμμικοτήτων

Στο πρώτο μέρος προτείνεται μεθοδολογία, βασισμένη στη μη παραμετρικά εκτιμώμενη συνάρτηση της συνάφειας (coherence) [69], η οποία ελέγχει το κατά πόσο ένα σύστημα αποκλίνει από τη γραμμική περιοχή λειτουργίας, και ως εκ τούτου η αναγνώριση του επί τη βάση γραμμικών μεθοδολογιών [11] μπορεί να μην είναι αποδοτική. Η ιδέα στηρίζεται στο ότι η υστέρηση αναμένεται να μεταβάλει τη γραμμική σχέση εισόδου - εξόδου με ταυτόχρονη μείωση της συνάφειας σε κάποιες περιοχές συχνοτήτων [3]. Ως μέτρο της συνολικής συμπεριφοράς της συνάφειας προτείνεται το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης της και του άξονα των συχνοτήτων. Όσο μεγαλύτερο είναι το εμβαδόν αυτό τόσο πλησιέστερα στην μονάδα είναι η καμπύλη και κατά επέκταση τόσο πιο βελτιωμένη η συνάφεια. Το βασικό της πλεονέκτημα είναι ότι δεν εξαρτάται από τις φυσικές παραμέτρους (π.χ. η μάζα) του συστήματος.

1.3.2 Μέρος Δεύτερο: Στοχαστική αναγνώριση μηχανικών συστημάτων με υστέρηση μέσω του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Το δεύτερο μέρος αναφέρεται σε μηχανικά συστήματα με υστέρηση, των οποίων η αναγνώριση μέσω γραμμικών μεθοδολογιών [11] είναι μη αποδοτική. Για το λόγο αυτό η χρήση μη γραμμικών μεθοδολογιών και μοντέλων ικανών να περιγράψουν φαινόμενα υστέρησης κρίνεται απαραίτητη.

Από το πλήθος των υποψηφίων μοντέλων επιλέγεται, από τη κατηγορία των ρεολογικών μοντέλων, το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell [μοντέλο Prandtl - Ishlinskiĩ τύπου E-Π - Σχήμα 1.6], λόγω της απλής δομής του και της φυσικής εποπτείας που παρέχει. Το μοντέλο, στη βασική του μορφή είναι σε

θέση να αναπαράγει υστέρηση με μακρά (nonlocal) μνήμη και ανεξάρτητη του ρυθμού διεγέρσεως [4], μεταξύ της μετατόπισης (εισόδου) και δύναμης (εξόδου).

Το γενικό πρόβλημα που αντιμετωπίζεται εδώ μπορεί να εκφραστεί ως εξής: “Δοθέντος ενός σετ πειραματικών μετρήσεων εισόδου (μετατόπιση) - εξόδου (δύναμη) να γίνει αναγνώριση ενός μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, το οποίο να αναπαριστά κατά τρόπο βέλτιστο τη σχέση εισόδου - εξόδου”. Όπως είναι λοιπόν φανερό η βασική παραδοχή εδώ είναι ότι η δυναμική του υπό αναγνώριση συστήματος περιγράφεται τέλεια από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, το οποίο περιέχει M^o τελεστές τύπου Ε-Π (Stop - type operators).

Προκειμένου να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα, η αναγνώριση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell πρέπει να αντιμετωπιστεί. Σε γενικές γραμμές αυτό συνεπάγεται την εκτίμηση του μοντέλου (Model estimation), την επιλογή της δομής του μοντέλου, δηλαδή τον προσδιορισμό του πλήθους M των τελεστών Ε-Π (βλέπε Σχήμα 1.6) που θα χρησιμοποιηθούν (Model structure selection), καθώς και τον τελικό έλεγχο εγκυρότητας του εκτιμηθέντος μοντέλου (Model validation). Πιο συγκεκριμένα, τα βασικά ερωτήματα που πρέπει να απαντηθούν για να δοθεί λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι τα ακόλουθα:

1. Είναι δυνατή η ανάκτηση των πραγματικών παραμέτρων του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell επί τη βάση δεδομένων από ένα αληθινό πείραμα;
2. Είναι δυνατή η εκτίμηση των παραμέτρων επί τη βάση ενός σετ μετρήσεων ή απαιτείται η διεξαγωγή πολλαπλών εξειδικευμένων πειραμάτων;
3. Ποια είναι η ευαισθησία των εκτιμήσεων στον εισερχόμενο πειραματικό θόρυβο;
4. Πώς γίνεται να ποσοτικοποιηθούν τα σφάλματα μοντελοποίησης, λόγω του μετρητικού θορύβου;
5. Βάσει ποιών κανόνων πρέπει να γίνει η επιλογή του αριθμού του τελεστών Ε-Π, έτσι ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη αναπαράσταση του υπό εξέταση συστήματος (Model structure selection);
6. Πώς πρέπει να γίνει ο τελικός έλεγχος ότι πράγματι το τελικά εκτιμώμενο μοντέλο παρέχει τη βέλτιστη αναπαράσταση της δυναμικής του υπό εξέταση συστήματος (Model validation);

Οι πρώτες τέσσερις ερωτήσεις αναφέρονται στην εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Στην περίπτωση αυτή γίνεται η βασική παραδοχή ότι ο αριθμός, M^o , των τελεστών Ε-Π είναι γνωστός. Επί τη βάση αυτής, οι αντίστοιχες απαντήσεις δίδονται λαμβάνοντας υπόψη: (i) Τις ιδιότητες της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, (ii) την επιλογή κατάλληλης εκτιμήτριας για την

εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου, καθώς και την αριθμητική υλοποίηση αυτής και (iii) τις ιδιότητες της επιλεγμένης εκτιμήτριας.

Μία από τις βασικότερες ιδιότητες αναφορικά με την εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα (*a priori identifiability*) [70]. Η συγκεκριμένη ιδιότητα, η οποία αναφέρεται και ως “μοναδικότητα παραμετροποίησης (*uniqueness of representation*)”, δηλώνει σε γενικές γραμμές ότι δεν υπάρχει δεύτερο μοντέλο, το οποίο να έχει ακριβώς την ίδια “συμπεριφορά” με αυτό το οποίο πρόκειται να εκτιμηθεί. Σε περίπτωση που η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα παύσει να ισχύει, τότε η επιτυχής εκτίμηση δεν είναι εφικτή, διότι η (οποιαδήποτε) εκτιμήτρια δεν είναι σε θέση να ξεχωρίσει το πραγματικό μοντέλο από όλα τα ισοδύναμα του. Παρόλη τη σπουδαιότητα, για το πρόβλημα της εκτίμησης, της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας, η μελέτη της για τη εν λόγω δομή δεν έχει αναφερθεί στη βιβλιογραφία.

Όσον αφορά την εκτιμήτρια, έχουν προταθεί μόνο τύπου σφάλματος εξόδου (*Output Error - type estimators*) [49, 44, 45, 46, 50, 4], οι οποίες ανήκουν στη γενικευμένη κλάση των εκτιμητριών σφάλματος πρόβλεψης (*Prediction Error - type estimator*). Οι εν λόγω εκτιμήτριες οδηγούν είτε σε γραμμική παλινδρόμηση, όταν γίνεται προεπιλογή των κατωφλιών (βλέπε Σχήμα 1.6), είτε σε μη - γραμμική παλινδρόμηση όταν υλοποιείται εκτίμηση όλων των παραμέτρων. Αν και στη δεύτερη περίπτωση (μη - γραμμική παλινδρόμηση) τα αποτελέσματα είναι ακριβέστερα της πρώτης, η πολυπλοκότητα της μη - γραμμικής βελτιστοποίησης είναι αυξημένη, με αποτέλεσμα την ύπαρξη πολλών τοπικών ελαχίστων. Μέχρι τώρα δεν έχει αναφερθεί τεχνική μη - γραμμικής βελτιστοποίησης, έτσι ώστε να αντιμετωπιστεί επιτυχώς το παραπάνω πρόβλημα. Επομένως η ανάπτυξη της αποτελεί θέμα εξαιρετικής σπουδαιότητας. Ένα άλλο θέμα, που παρά τη σπουδαιότητά του δεν έχει μελετηθεί ακόμα, είναι η επίδραση των αρχικών καταστάσεων (αρχικές τιμές των παραμορφώσεων των ελατηρίων - βλέπε Σχήμα 1.6) στην απόδοση της εκτιμήτριας.

Ίσως η πιο σημαντική ιδιότητα αναφορικά με την εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι η εκ των υστέρων αναγνωρισιμότητα (*a posteriori identifiability*). Σε γενικές γραμμές η συγκεκριμένη ιδιότητα απαιτεί την ύπαρξη της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας και αναφέρεται στις ικανές (και αναγκαίες, αν αυτό είναι δυνατό) συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell δύναται να ανακτηθεί επί τη βάση πειραματικών μετρήσεων. Προκειμένου η ιδιότητα αυτή να επιτευχθεί, η επιλεγμένη εκτιμήτρια πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνει το πραγματικό μοντέλο από το πλήθος των εναλλακτικών μοντέλων που έχουν την ίδια δομή. Για το λόγο αυτόν η διέγερση (μετατόπιση στη συγκεκριμένη περίπτωση) θα πρέπει να είναι αρκετά “πλούσια” έτσι ώστε τα μετρούμενα σήματα που θα χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση να εμπεριέχουν όλη η απαιτού-

μενη για την επιτυχή εκτίμηση πληροφορία. Συνεπώς, ο σχεδιασμός της επιβαλλόμενης διέγερσης είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας.

Είναι προφανές ότι το επόμενο βήμα, αφού συζητήθηκε η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα και ο σχεδιασμός της διεγέρσεως, αφορά τη μελέτη της απόδοσης την επιλεγμένης εκτιμήτριας. Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί αναλύοντας τις ιδιότητες της εκτιμήτριας, ή - πιο συγκεκριμένα - τις ασυμπτωτικές στατιστικές ιδιότητες αυτής. Αυτό γίνεται λόγω του υπεισερχόμενου στις μετρήσεις πειραματικού θορύβου, ο οποίος εισάγει αβεβαιότητες στην εκτιμήτρια και κατά συνέπεια και στις εκτιμήσεις. Το πρώτο θέμα που αξίζει να συζητηθεί είναι η σύγκλιση (κατά τρόπο στατιστικό και για συνεχώς αυξανόμενο αριθμό δεδομένων) των εκτιμήσεων στις πραγματικές παραμέτρους του μοντέλου ή με άλλα λόγια η συνέπεια της επιλεγμένης εκτιμήτριας. Από πρακτική σκοπιά, η συνέπεια της εκτιμήτριας δηλώνει ότι για αριθμό δεδομένων αρκούντως μεγάλο, οι εκτιμήσεις “σχεδόν” ταυτίζονται με τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων του μοντέλου. Ως εκ τούτου η μελέτη της συνέπειας της εκτιμήτριας αποτελεί το τελευταίο κομμάτι για τη θεμελίωσή της εκ των υστέρων αναγνωρισιμότητας του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Πέρα από τη μελέτη της εκ των υστέρων αναγνωρισιμότητας του μοντέλου (εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα, σχεδιασμός διέγερσης, συνέπεια εκτιμήτριας), το οποίο είναι ένα θέμα που δεν έχει μελετηθεί ακόμα, η μελέτη των επιπλέον ασυμπτωτικών ιδιοτήτων της εκτιμήτριας, οι οποίες μπορούν να καθορίσουν την απόδοση της εκτίμησης, είναι θέμα ανοικτό προς μελέτη. Πιο συγκεκριμένα, η θεμελίωση της ασυμπτωτικής κανονικότητας των εκτιμήσεων καθώς και η επίτευξη της ασυμπτωτικής διασποράς αυτών είναι θέματα, τα οποία δεν έχουν μελετηθεί, που βοηθούν στην αξιολόγηση της ποιότητας της εκτίμησης. Επιπλέον η ανάπτυξη κατάλληλης εκτιμήτριας για τον ασυμπτωτικό πίνακα συνδυασποράς των εκτιμήσεων, καθώς και η μελέτη της συνέπειάς της, είναι θέματα που αν και δεν έχουν μελετηθεί ακόμα, είναι απαραίτητα για την διεξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την ευασθησία των εκτιμήσεων στο μετρητικό θόρυβο και την ποσοτικοποίηση των σφαλμάτων στις εκτιμήσεις που εισάγονται από αυτόν.

Μέχρι το σημείο αυτό έχει υποτεθεί ότι ο αριθμός των τελεστών τύπου E-Π που χρησιμοποιούνται από το πραγματικό μοντέλο είναι γνωστός. Εντούτοις η πληροφορία αυτή, κατά τη διάρκεια μιας πρακτικής εφαρμογής, δεν είναι διαθέσιμη και για το λόγο αυτό η δομή του μοντέλου πρέπει με κάποιον τρόπο να καθοριστεί (model structure selection). Ένας πρακτικός τρόπος είναι η (αυθαίρετη προεπιλογή) του αριθμού των τελεστών [49, 44, 45, 46, 50, 4]. Η διαδικασία όμως αυτή οδηγεί σε μη βέλτιστα αποτελέσματα. Πέρα της διαδικασίας αυτής, δεν έχει προταθεί εναλλακτική, με αποτέλεσμα η ανάπτυξη μίας διαδικασίας επιλογής της δομής, η οποία να εξασφαλίζει τη βέλτιστη

απόδοση, να αποτελεί θέμα ανοικτό προς έρευνα.

Ας υποθεθεί ότι ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell αναγνωρίζεται επί τη βάση πειραματικών δεδομένων (εκτίμηση παραμέτρων και επιλογή της δομής αυτού). Προκειμένου το μοντέλο αυτό να γίνει τελικώς αποδεκτό πρέπει με κάποιον τρόπο να επιβεβαιωθεί ότι αποτελεί τη βέλτιστη αναπαράσταση του συστήματος, το οποίο μοντελοποιεί (υπενθυμίζεται ότι θεωρείται ότι το υπό μοντελοποίηση σύστημα είναι ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M^o τελεστές τύπου E-Π). Η απαίτηση αυτή οδηγεί στο θέμα της επικύρωσης του τελικά εκτιμώμενου μοντέλου (model validation). Μέχρι τώρα η επικύρωση γινόταν ελέγχοντας πόσο καλά το εκτιμώμενο μοντέλο μπορεί να προσομοιώσει το μετρούμενο σήμα της εξόδου (δύναμης) βάσει δεδομένων, τα οποία δεν χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση αυτού (cross validation principle) [49]. Αν και η διαδικασία αυτή είναι απλή και εύκολα εφαρμόσιμη, είναι καθαρά εμπειρική δίχως να παρέχεται θεωρητική αιτιολόγηση για το ότι δίνει τα βέλτιστα αποτελέσματα. Η θεωρητική επομένως ανάλυση και ανάπτυξη κατάλληλων εργαλείων για την επικύρωση του μοντέλου είναι και αυτά θέματα ανοικτά προς έρευνα.

1.3.3 Μέρος Τρίτο: Επέκταση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell είναι σε θέση να αναπαράγει υστέρηση ρυθμού ανεξάρτητη. Όμως το χαρακτηριστικό αυτό του εν λόγω μοντέλου περιορίζει την εφαρμογή στην περίπτωση συστημάτων με ρυθμούς εξαρτώμενα χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα, όπως θα φανεί στα επόμενα κεφάλαια, το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί επιτυχώς για την αναγνώριση του φαινομένου της τριβής στην περιοχή προολίσθησης, όπου η υστέρηση είναι ανεξάρτητη του ρυθμού [4]. Όμως δε παρουσιάζεται κατάλληλο για την αναγνώριση στη συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης – ολίσθησης, όπου η εμφανιζόμενη υστέρηση είναι ρυθμού εξαρτώμενη [9, 8]. Για το λόγο αυτό η επέκταση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, έτσι ώστε να είναι σε θέση να αναπαράγει πιο πολύπλοκους τύπους υστέρησης, θεωρείται σημαντική.

1.4 Στόχοι της Διατριβής

1.4.1 Στατιστική Διάγνωση Μη – Γραμμικότητων

Ο πρώτος στόχος της διατριβής είναι η στατιστική διάγνωση μη – γραμμικότητων σε μηχανικά συστήματα, χρησιμοποιώντας μόνο μετρήσεις της ταλάντωσής τους και λαμβάνοντας υπόψη τη στατιστική αβεβαιότητα των πειραματικών μετρήσεων. Η βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία είναι η συνάρτηση της συνάφειας (coherence), όπως αυτή εκτιμάται μη

– παραμετρικά βάσει της μεθόδου Welch.

Η προτεινόμενη μεθοδολογία αξιολογείται μέσω εφαρμογής της σε μια αεροπορική κατασκευή. Τρεις διαφορετικές δομικές καταστάσεις της κατασκευής εξετάζονται: (i) υγιής κατασκευή (γραμμική συμπεριφορά), (ii) ύπαρξη ρωγμής (ανάπτυξη μη γραμμικοτήτων λόγω διαφοράς συναρμογής και τριβής στην περιοχή της ρωγμής) και (iii) επισκευασμένη κατασκευή (εξουδετέρωση των μη γραμμικοτήτων μέσω επικόλλησης στην περιοχή της ρωγμής κατάλληλου ενισχυτικού επιθέματος από σύνθετο υλικό). Ο σκοπός είναι να ελεγχθεί το κατά πόσο η προτεινόμενη μεθοδολογία, χρησιμοποιώντας μόνο μετρήσεις της ταλάντωσης της κατασκευής από τις τρεις δομικές της καταστάσεις, είναι σε θέση να διαγνώσει την ανάπτυξη μη γραμμικοτήτων στην περίπτωση της ρωγμής και να επιβεβαιώσει την εξουδετέρωση αυτών κατόπιν της επισκευής, λαμβάνοντας υπόψη και την ύπαρξη μετρητικών αβεβαιοτήτων.

1.4.2 Δομή του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Βασικές Ιδιότητες

Ο σκοπός στην παρούσα ενότητα είναι η μελέτη των βασικών ιδιοτήτων της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Βάσει αυτών μελετάται, για πρώτη φορά, η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα (apriori identifiability) της εν λόγω δομής και εξάγονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που εγγυώνται την ύπαρξη αυτής. Επί τη βάση αυτών, διερευνάται η επίδραση των αρχικών καταστάσεων στην εκτίμηση του μοντέλου και δίδονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για το σχεδιασμό κατάλληλης διέγερσης, έτσι ώστε να μετρούμενα σήματα να είναι επαρκούντως, για την εκτίμηση, πλούσια σε πληροφορία.

1.4.3 Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Εκτίμηση

Ο σκοπός εδώ είναι η ανάπτυξη κατάλληλης διαδικασίας εκτίμησης, όπως επίσης και η μελέτη της αποδοτικότητάς της. Για το λόγο αυτό επιλέγεται η εκτιμήτρια σφάλματος εξόδου (Output - Error type estimator) και προτείνεται κατάλληλη αριθμητική υλοποίηση αυτής, με σκοπό την αντιμετώπιση των προβλημάτων σχετικά με ύπαρξη πολλαπλών τοπικών ελαχίστων κατά τη διάρκεια της μη - γραμμικής βελτιστοποίησης. Στη συνέχεια μελετάται η συνέπεια (consistency) της επιλεγμένης εκτιμήτριας, εξάγοντας για πρώτη φορά της αναγκαίες και ικανές συνθήκες που την διασφαλίζουν.

Σε επόμενη φάση αποδεικνύεται η ασυμπτωτική κανονικότητα της εκτιμήτριας και παρέχεται ο ασυμπτωτικός πίνακας συνδυασφοράς των εκτιμήσεων, κάτω από όσο το δυνατό λιγότερο αυστηρές προϋποθέσεις. Κατόπιν τούτου προτείνεται κατάλληλη εκτιμήτρια για τον πίνακα αυτόν και ελέγχεται η συνέπεια της εκτίμησής του.

Όλα τα παραπάνω θεωρητικά αποτελέσματα (συνέπεια, ασυμπτωτική κανονικότητα, κ.ο.κ) επιβεβαιώνονται αριθμητικώς, μέσω πολλαπλών Monte Carlo προσομοιώσεων, οι οποίες υλοποιούνται για διαφορετικά επίπεδα και τύπους προστιθέμενου μετρητικού θορύβου.

1.4.4 Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Επιλογή της Δομής του Μοντέλου και Έλεγχος Εγκυρότητας

Μέχρι τώρα, η προσπάθεια ήταν προσανατολισμένη στο να επιτευχθούν βέλτιστες εκτιμήσεις του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, θεωρώντας ότι ο αριθμός των τελεστών E-Π που ενσωματώνονται στο μοντέλο είναι γνωστός. Όμως η πληροφορία αυτή δεν είναι διαθέσιμη, και για το λόγο αυτό αναπτύσσεται κατάλληλη αναλυτική διαδικασία, βάσει της οποίας επιλέγεται, κατά τρόπο βέλτιστο, ο αριθμός των τελεστών τύπου E-Π που ενσωματώνονται στο μοντέλο (Model Structure Selection).

Η ανάπτυξη κατάλληλων εργαλείων για την αναγνώριση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είχε ως σκοπό τη επίτευξη τόσο της εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου, όσο και της επιλογής της δομής αυτού. Κατόπιν τούτου είναι αναγκαία η ανάπτυξη επιπλέον εργαλείων έτσι ώστε το τελικά εκτιμώμενο - επιλεγμένο μοντέλο να ελέγχεται για το αν παρέχει τη βέλτιστη αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος. Για το λόγο αυτό, αναπτύσσεται κατάλληλη διαδικασία ελέγχου της εγκυρότητας του εκτιμώμενου μοντέλου (Model Validation).

1.4.5 Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Επέκταση της Δομής

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell δεν είναι σε θέση να αναπαράγει υστέρηση ρυθμού εξαρτώμενη. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το μειονέκτημα αυτό και να είναι σε θέση το μοντέλο να περιγράψει μεγαλύτερο εύρος συστημάτων, η επέκταση της δομής του κρίνεται αναγκαία. Συνεπώς, ο σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η επέκταση του μοντέλου με κατάλληλο τρόπο, δίχως όμως να θυσιάζεται η απλότητα της βασικής του έκδοσης.

Πέρα της επεκτάσεως του μοντέλου, η ανάπτυξη κατάλληλης διαδικασίας εκτίμησης αυτού είναι επίσης επιθυμητή. Για το λόγο αυτό η εκτιμήτρια του βασικού μοντέλου επεκτείνεται κατάλληλα, ενώ η αποτελεσματικότητα της ελέγχεται μέσω Monte Carlo προσομοιώσεων.

1.4.6 Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Εφαρμογές

Αν και τα προαναφερθέντα θεωρητικά αποτελέσματα είναι αρκετά σημαντικά για την κατανόηση και την αναγνώριση συστημάτων με υστέρηση μέσω του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, η σπουδαιότη-

τα τους θα παρουσιαστεί καλύτερα μέσω εφαρμογής αυτών σε ένα πραγματικό σύστημα με υστέρηση. Από το πλήθος των υποψηφίων συστημάτων αυτού του είδους, επιλέγεται ένα μηχανικό σύστημα με τριβή (δύο επιφάνειες σε επαφή). Το εν λόγω σύστημα λειτουργεί: (i) στην περιοχή προολίσθησης και (ii) στη συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης, ενώ σήματα μετατόπισης - δύναμης τριβής συλλέγονται από κάθε περιοχή, αντίστοιχα.

Όπως είναι φανερό, ο σκοπός είναι η μελέτη του κατά πόσο το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, τόσο στη βασική του έκδοση, όσο και στην επεκταμένη, είναι σε θέση να αναπαράγει τη δυναμική του συστήματος. Με άλλα λόγια, εξετάζεται το κατά πόσο οι προσομοιώσεις της δύναμης τριβής των εκτιμώμενων μοντέλων είναι σε καλή συμφωνία με τα μετρούμενα σήματα της πραγματικής τριβής.

Το προφανές επόμενο βήμα είναι η ανάπτυξη μιας πιο πρακτικής εφαρμογής. Έτσι λοιπόν μελετάται ο έλεγχος ενός μηχανικού συστήματος με τριβή. Ο σκοπός στην περίπτωση αυτή είναι η επίτευξη ενός ελεγκτή πρόσω - αντιστάθμισης (Feedforward controller), ο οποίος να προκύπτει βάσει της προτεινόμενης μεθοδολογίας αναγνώρισης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Επιπλέον, στόχος είναι η επίδειξη των δυνατοτήτων της προτεινόμενης μεθοδολογία για τον αποτελεσματικό έλεγχο τέτοιων συστημάτων.

1.4.7 Δομή της Διατριβής και Καινοτομίες Αυτής

Κεφάλαιο Δεύτερο: Στα πλαίσια του δεύτερου κεφαλαίου υλοποιείται η στατιστική ανίχνευση μη - γραμμικοτήτων σε μηχανικά συστήματα. Η μεθοδολογία χρησιμοποιεί μόνο ταλαντωτικά σήματα διέγερσης - απόκρισης (δεν απαιτείται αναλυτικό μοντέλο) και βασίζεται στη συνάρτηση συνάφειας (Coherence)

Οι καινοτομίες του κεφαλαίου είναι οι ακόλουθες:

- Η επί τη βάση της συνάρτησης συνάφειας μεθοδολογία για την ανίχνευση μη - γραμμικοτήτων.
- Επιβεβαίωση της ορθότητας της επιδιόρθωσης αεροπορικής κατασκευής επί τη βάσει (μόνο) μετρήσεων της ταλαντωτικής του συμπεριφοράς.

Κεφάλαιο Τρίτο: Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell. Αρχικά δίδεται η πλήρης μαθηματική του περιγραφή και αναλύονται οι βασικότερες εκ των ιδιοτήτων αυτού, παρέχοντας αντίστοιχες αποδείξεις και παραδείγματα. Επί τη βάση αυτών αποδεικνύονται για πρώτη φορά οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες διέγερσης, οι οποίες εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα της αποκρίσεως του μοντέλου. Επιπροσθέτως, αντιμετωπίζεται για πρώτη φορά

το θέμα της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας της εν λόγω δομής, παρέχοντας τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα της παραμετροποίησης της δομής, ως προς τις σταθερές ελατηρίων και τα κατώφλια των τελεστών, και αποδεικνύεται η μη αναγνωρισιμότητα των (άγνωστων) αρχικών καταστάσεων (αρχικές τιμές των παραμορφώσεων των ελατηρίων) του μοντέλου.

Οι καινοτομίες του τρίτου κεφαλαίου είναι:

- Η μελέτη των βασικών ιδιοτήτων της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
- Η μελέτη της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας της δομής, ως προς τις σταθερές των ελατηρίων, τα κατώφλια και τις αρχικές καταστάσεις.
- Οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες διεγέρσεως που εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα της αποκρίσεως του μοντέλου
- Οι βασικές οδηγίες για το σχεδιασμό επαρκούντως πλούσιας διέγερσης (οποιασδήποτε μορφής), έτσι ώστε τα σήματα διέγερσης - απόκρισης να περιέχουν όλη την απαραίτητη πληροφορία για τους σκοπούς της εκτίμησης.

Κεφάλαιο Τέταρτο: Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται η εισαγωγή στο θέμα της εκτίμησης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Για το λόγο αυτό παρουσιάζεται η προτεινόμενη εκτιμήτρια και αναλύονται οι βασικές της ιδιότητες, οι οποίες θα αποτελέσουν τη βάση για την περαιτέρω ανάλυση στα επόμενα κεφάλαια. Επιπλέον προτείνεται κατάλληλη αριθμητική υλοποίηση της εκτιμήτριας, έτσι ώστε να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του εγκλωβισμού της συνάρτησης κόστους σε τοπικά ελάχιστα. Τέλος πραγματοποιείται μία πρώτη αριθμητική εφαρμογή της εκτιμήτριας και μελετάται αριθμητικώς η επίδραση στην εκτίμηση της μη αναγνωρισιμότητας των αρχικών καταστάσεων του μοντέλου.

Οι καινοτομίες του τέταρτου κεφαλαίου είναι:

- Οι βασικές ιδιότητες της εκτιμήτριας
- Η αριθμητική υλοποίηση της εκτιμήτριας
- Η μελέτη της επίδρασης της μη αναγνωρισιμότητας των αρχικών καταστάσεων στην εκτίμηση και ο τρόπος αντιμετώπισης του θέματος αυτού.

Κεφάλαιο Πέμπτο: Στο πέμπτο κεφάλαιο ολοκληρώνεται η μελέτη της εκτίμησης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Για το λόγο αυτό εξετάζονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες οι πραγματικές παράμετροι του μοντέλου μπορούν να ανακτηθούν επί τη βάση πραγματικών πειραματικών μετρήσεων. Κατόπιν τούτου αναλύεται για πρώτη φορά η

συνέπεια της προτεινόμενης εκτιμήτριας. Στη συνέχεια εξετάζεται η στατιστική ασυμπτωτική κατανομή της εκτιμήτριας και δίνεται η μαθηματική έκφραση του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασφοράς των εκτιμήσεων. Κατόπιν τούτου, προτείνεται κατάλληλη εκτιμήτρια για τον πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασφοράς και ελέγχεται η συνέπεια αυτής.

Οι καινοτομίες του πέμπτου κεφαλαίου είναι:

- Η μελέτη της συνέπειας της προτεινόμενης εκτιμήτριας.
- Η μελέτη της ασυμπτωτικής κανονικότητας των εκτιμήσεων.
- Ο πίνακας ασυμπτωτικής συνδυασφοράς των εκτιμήσεων.
- Η εκτιμήτρια του παραπάνω πίνακα, καθώς και η μελέτη της συνέπειας αυτής.

Κεφάλαιο Έκτο: Στο τρέχον κεφάλαιο το πρόβλημα της εκτίμησης γενικεύεται σε αναγνώριση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Ως εκ τούτου, η προσπάθεια πλέον δεν επικεντρώνεται μόνο στην αποτελεσματική εκτίμηση των παραμέτρων του πραγματικού συστήματος, αλλά αναζητείται τεκμηριωμένη διαδικασία επιλογής της δομής του μοντέλου (επιλογή του αριθμού των τελεστών), καθώς και ελέγχου εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου (model validation). Για το λόγο αυτό, προτείνεται κατάλληλη διαδικασία, η οποία βασίζεται κατά κύριο λόγο στις ιδιότητες του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Οι καινοτομίες του έκτου κεφαλαίου είναι:

- Η προτεινόμενη διαδικασία επιλογής της δομής του μοντέλου.
- Ο τρόπος υλοποίησης - εφαρμογής της παραπάνω διαδικασίας.
- Η προτεινόμενη διαδικασία ελέγχου της εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου.

Κεφάλαιο Έβδομο: Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της αναγνώρισης της τριβής προολίσθησης επί τη βάση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Στα πλαίσια του προβλήματος αυτού, εφαρμόζεται η προτεινόμενη διαδικασία εκτίμησης και συγκρίνεται με την ήδη υπάρχουσα, η οποία εκτελεί προεπιλογή των κατωφλίων (thresholds). Επιπροσθέτως, γίνεται για πρώτη φορά η εισαγωγή μέρους της προτεινόμενης επέκτασης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell και τα αποτελέσματα της συγκρίνονται με αυτά των προηγούμενων δύο.

Οι καινοτομίες του κεφαλαίου είναι:

- Η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας για την αναγνώριση του φαινομένου της τριβής προολίσθησης.
- Η εισαγωγή μέρους της προτεινόμενης επέκτασης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Κεφάλαιο 'Ογδοο: Στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής προτείνεται κατάλληλη επέκταση της βασικής δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, έτσι ώστε να καταστεί ικανό να αναπαράγει υστέρηση ρυθμού εξαρτώμενη. Επιπλέον αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της εκτίμησης του επεκταμένου μοντέλου και ελέγχεται η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης διαδικασίας αναγνώρισης αυτού, μέσω κατάλληλων Monte Carlo προσομοιώσεων.

Κατόπιν των παραπάνω, το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, τόσο στην βασική όσο και την επεκταμένη του μορφή, χρησιμοποιείται για την αναγνώριση ενός πραγματικού μηχανικού συστήματος με τριβή, το οποίο λειτουργεί στη συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης (εμφανίζονται αρκετές μεταβάσεις από τη μία περιοχή στην άλλη). Επιπροσθέτως χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό, κυρίως για λόγους σύγκρισης, και το γνωστό μοντέλο τριβής LuGre [9]. Η αναγνώριση βασίζεται σε πειραματικώς μετρούμενα σήματα μετατόπιση - δύναμης τριβής και ο σκοπός είναι να ελεγχθεί σε ποιο βαθμό τα παραπάνω μοντέλα μπορούν να προσομοιάζουν τη μετρούμενη (πραγματική) δύναμη τριβής.

Επί τη βάση των παραπάνω αποτελεσμάτων προτείνεται κατάλληλη μεθοδολογία πρόσω αντιστάθμισης (feedforward controller) της τριβής, κατά την οποία ο ελεγκτής εκπαιδεύεται χρησιμοποιώντας μόνο τα σήματα της επιβαλλόμενης δύναμης (και όχι δύναμης τριβής όπου είναι δύσκολο ή ακόμα και αδύνατο να μετρηθεί απευθείας) και της αναπτυσσόμενης μετατόπισης. Ο σκοπός της παρούσας εφαρμογής είναι η παρουσίαση των δυνατοτήτων της προτεινόμενης μεθοδολογίας, για τον έλεγχο συστημάτων με τριβή.

Οι καινοτομίες του κεφαλαίου είναι:

- Η επέκταση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
- Η εφαρμογή του μοντέλου, τόσο στη βασική του μορφή όσο και στην επεκταμένη, για την αναγνώριση ενός πραγματικού μηχανικού συστήματος με τριβή υπό πραγματικές συνθήκες λειτουργίας.
- Η μεθοδολογία για την υλοποίηση ελεγκτή πρόσω αντιστάθμισης της τριβής, επί τη βάση του επεκταμένου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell και χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό σημάτων και μετρήσεων.

Κεφάλαιο 2

Στατιστική Ανίχνευση Επιδερμικής Ρωγμής και Επιβεβαίωση Ορθότητας Επισκευής σε Αεροπορικά Κελύφη μέσω Ταλαντωτικών Μετρήσεων

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίζεται το συνδυασμένο πρόβλημα της διάγνωσης επιδερμικής ρωγμής (Skin Damage Detection - SDD) και επιβεβαίωσης της ορθής επιδιόρθωσης (Restoration Quality Assessment - RQA) ελαφρών αεροπορικών κελύφων, μέσω ανάλυσης της μετρούμενης ταλαντωτικής συμπεριφοράς αυτών. Για το λόγο αυτό εισάγονται και αναπτύσσονται δύο στατιστικές μέθοδοι, οι οποίες είναι σε θέση να λαμβάνουν υπόψη τη στατιστική αβεβαιότητα των μετρήσεων. Η πρώτη μέθοδος είναι παραμετρική και βασίζεται σε διαστηματικές εκτιμήσεις των φυσικών συχνοτήτων (natural frequencies) και λόγων απόσβεσης (damping ration). Η δεύτερη, η οποία είναι μη - παραμετρική, χρησιμοποιεί τις διαστηματικές εκτιμήσεις της συνάρτησης συνάφειας (Coherence Function). Η αποτελεσματικότητα των δύο αυτών μεθόδων επιβεβαιώνεται μέσω πειραμάτων ταλάντωσης σε ένα ενισχυμένο, μέσω νεύρων δυσκαμψίας, αεροπορικό κέλυφος. Τα αποτελέσματα της μελέτης υποδεικνύουν ότι η πρώτη μέθοδος είναι αποτελεσματική για την επίλυση του προβλήματος αναγνώρισης της επιδερμικής ρωγμής (SDD), ενώ η δεύτερη είναι κατάλληλη για την αντιμετώπιση τόσο του προβλήματος αναγνώρισης της επιδερμικής ρωγμής (SDD), όσο και του προβλήματος ελέγχου της ορθής επιδιόρθωσης (RQA).

Σύμβολα και Συντομογραφίες

A_i, B_i	: AR, X πίνακες (μοντέλο ARX)
$e[t]$	: Σφάλμα πρόβλεψης ενός βήματος
$E\{\cdot\}$	: Στατιστική προσδοκία
$f[t]$	: Σήμα της δύναμης διεγέρσεως
f_s	: Συχνότητα δειγματοληψίας
m	: Αριθμός των μετρούμενων σημάτων απόκρισης
N	: Μήκος των μετρούμενων σημάτων
n_f, n_y	: Τάξεις των AR, X πολυωνυμικών πινάκων
$\mathcal{S}_H, \mathcal{S}_D, \mathcal{S}_R, \mathcal{S}_U$	: Κέλυφος στην υγιή, ρηγματωμένη και επισκευασμένη δομική κατάσταση
$S_{ff}(\omega)$	: Φάσμα ισχύος του σήματος της δύναμης διέγερσης
$S_{y_i y_i}(\omega)$	: Φάσμα ισχύος του i -οστού σήματος ταλαντωτικής απόκρισης
$S_{f y_i}(\omega)$	: Φάσμα διασταυρωμένης ισχύος μεταξύ της διεγέρσεως και της i -οστής απόκρισης
T_s	: Περίοδος δειγματοληψίας
$y[t]$	: Διάνυσμα των ταλαντωτικών αποκρίσεων τη χρονική στιγμή t

Ελληνικά Σύμβολα

a	: Επίπεδο ρίσκου (πιθανότητα σφάλματος τύπου I)
$\gamma^2(\omega)$	: Συνάρτηση τετραγωνικής συνάφειας
Γ	: Μέτρο συνάφειας
ζ_i	: i -οστός λόγος απόσβεσης
θ	: Διάνυσμα μορφικών παραμέτρων
$\sigma_\gamma^2(\omega)$	: Διασπορά της εκτιμήτριας της συνάφειας
σ_Γ^2	: Διασπορά της εκτιμήτριας του μέτρου συνάφειας
Σ_e	: Πίνακας συνδιασποράς του διανύσματος των σφαλμάτων πρόβλεψης ενός βήματος
Σ	: Πίνακας συνδιασποράς του διανύσματος των εκτιμώμενων μορφικών χαρακτηριστικών
ω	: Συχνότητα
ω_{n_i}	: i -οστή φυσική συχνότητα

Δείκτες

$\mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{R}, \mathcal{U}$	: Αντίστοιχα, η υγιής, ρηγματωμένη, επιδιορθωμένη και άγνωστη δομική κατάσταση του κελύφους
--	---

Ακρωνύμια

BIC	: Μπαεσιανό Στατιστικό Κριτήριο
$CMBM$	: Μέθοδος του μέτρου συνάφειας (Coherence Measure Based Method)
FRF	: Συνάρτηση Απόκρισης Συχνότητας (Frequency Response Function)
$MPBM$	: Μέθοδος των Μορφικών Παραμέτρων (Modal Parameter Based Method)
RSS	: Άθροισμά των τετραγώνων των υπολοίπων (Residual Sum of Squares)
RQA	: Επιβεβαίωση Ορθότητας της Επισκευής (πρόβλημα) (Restoration Quality Assessment)
SDD	: Ανίχνευση Επιδερμικής Ρωγμής (πρόβλημα) (Skin Damage Detection)
$VARX$	: Διανυσματικό Μοντέλο Αυτοπαλινδρόμησης με Εξωγενή Διέγερση

2.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίζονται τα προβλήματα της διάγνωσης επιδερμικής ρωγμής (Skin Damage Detection - SDD και επιβεβαίωσης της ορθής επιδιόρθωσης (Restoration Quality Assessment - RQA) σε αεροπορικές κατασκευές. Είναι φανερό ότι και τα δύο αυτά προβλήματα είναι ιδιαίτερης σπουδαιότητας για τη δομική ακεραιότητα γερασμένων αεροσκαφών και συνδέονται άμεσα με τη διαθεσιμότητα και ασφάλεια αυτών [71].

Από το όλο το πλήθος των διαθέσιμων μεθοδολογιών ανίχνευσης δομικών βλαβών, εκείνες οι οποίες βασίζονται στην ανάλυση της μετρούμενης ταλαντωτικής συμπεριφοράς της κατασκευής τυχαίνουν ιδιαίτερης και συνεχώς αυξανόμενης προσοχής τα τελευταία χρόνια [72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79]. Συγκεκριμένα και όσον αφορά τα ενισχυμένα αεροπορικά κελύφη, ο Pereyra και οι συνεργάτες του [80] προτείνουν μια στατιστική μεθοδολογία, η οποία βασίζεται στις διαφορές στην ενέργεια τάνσης (strain energy differences). Οι μεθοδολογία τους εφαρμόζεται σε μια πλάκα αλουμινίου διαστάσεων $2438 \times 1219 \times 3.175 \text{ mm}$ (ύψος $\times$ πλάτος $\times$ πάχος), η οποία ενισχύεται από νεύρα δυσκαμψίας και διεγείρεται μέσω δύο διεγερτών ταλάντωσης (shakers). Τα σήματα διεγέρσεως μετρώνται μέσω αισθητήρων δύναμης, ενώ η ταλαντωτική απόκριση της πλάκας μέσω κατάλληλου μετρητή ταλαντώσεων βασιζόμενο σε σάρωση με ακτίνες laser (scanning laser vibrometer). Ο Worden και οι συνεργάτες του [81] πρότειναν μια παραπλήσια μεθοδολογία και την εφάρμοσαν σε μια μικρότερη, συγκρινόμενη με την προηγούμενη, ενισχυμένη πλάκα διαστάσεων $750 \times 500 \times 3 \text{ mm}$. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή η ταλαντωτική απόκριση της πλάκας μετράται σε διάφορα σημεία μέσω κατάλληλων πιεζοηλεκτρικών επιταχυνσιμέτρων. Παρά το γεγονός ότι και οι δύο παραπάνω μεθοδολογίες παρέχουν πληροφορίες υψηλού επιπέδου (ανίχνευση και εντοπισμός βλάβης) σχετικά με τη δομική ακεραιότητα της εκάστοτε κατασκευής, αντιμετωπίζουν μόνο βλάβες (ρωγμές) στα νεύρα δυσκαμψίας και όχι στην επιδερμίδα της πλάκας.

Σε μια εναλλακτική μεθοδολογία, η οποία προτάθηκε και αυτή από το Worden και τους συνεργάτες του [82], υιοθετούνται τρεις διαφορετικές στατιστικές μέθοδοι ανίχνευσης, τις οποίες και εφαρμόζουν για την ανίχνευση ρωγμών στα νεύρα δυσκαμψίας στην ίδια, όπως και πριν, ενισχυμένη $750 \times 500 \times 3 \text{ mm}$ πλάκα. Η μεθοδολογία βασίζεται στις συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας μεταδοσιμότητας (Transmissibility Frequency Response Functions), οι οποίες προκύπτουν από τα πειραματικώς μετρούμενα σήματα των επιταχύνσεων σε διάφορα σημεία της κατασκευής. Και οι τρεις μέθοδοι έδωσαν επιτυχή διάγνωση των ρωγμών στα νεύρα δυσκαμψίας και εμφανίστηκαν πιο ευαίσθητες από την αντίστοιχη μεθοδολογία της αναφοράς [81]. Παράλληλα ο Manson και οι συνεργάτες του [83] εφάρμοσαν την πρώτη από τις τρεις παραπάνω στατιστικές μεθόδους σε ένα

αεροσκάφος Gnat και επιχείρησαν την ανίχνευση ρωγμών, όχι στα νεύρα δυσκαμψίας, αλλά στην επιδερμίδα του φτερού του αεροσκάφους. Αν και τα αποτελέσματα σε αυτή την εφαρμογή είναι αρκετά ικανοποιητικά, η διαδικασία διάγνωσης βελτιστοποιείται έτσι ώστε να ανιχνεύει τους συγκεκριμένους τύπους βλάβης, οι οποίοι εξάρχής δημιουργήθηκαν στην κατασκευή. Το παραπάνω έχει ως αποτέλεσμα η συγκεκριμένη διαδικασία διάγνωσης να μην είναι πάντα σε θέση να ανιχνεύει βλάβες διαφορετικού τύπου από αυτές που υλοποιήθηκαν στην κατασκευή.

Όλες οι προαναφερθείσες μεθοδολογίες σχετίζονται με την ανίχνευση βλαβών σε αεροπορικές κατασκευές. Μολαταύτα, η βλάβη (ρωγμή στις περισσότερες των περιπτώσεων) άπαξ και ανιχνευτεί πρέπει να επισκευαστεί. Για το λόγο αυτό υπάρχουν συμβατικές τεχνικές κατά τις οποίες αφαιρείται υλικό από την περιοχή της ρωγμής και τοποθετούνται εκ νέου μεταλλικά ενισχυτικά επιθέματα τα οποία προσαρμόζονται στην κατασκευή με βίδες και κοχλίες. Αν και οι τεχνικές αυτές είναι ευρέως διαδεδομένες, απαιτούν την διάνοιξη οπών, έτσι ώστε να προσαρμοστούν οι κοχλίες προσάρτησης, σε κατασκευές που ήδη έχουν χαρακτηριστεί ως ρηγματωμένες, και ως εκ τούτου παρουσιάζουν μειωμένη αντοχή.

Το παραπάνω μειονέκτημα παρακάμπτεται από τη σχετικά προσφάτως προτεινόμενη μεθοδολογία, κατά την οποία επικολλάται κατάλληλο επίθεμα από σύνθετο υλικό στην περιοχή της ρωγμής (Composite Patch Adhesion Technology) [71]. Αν και τα πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι εμφανή, η ποιότητα και η ορθότητα της επισκευής πρέπει με κάποιο τρόπο να επιβεβαιωθεί. Η απαίτηση αποτελεί σύνθετο πρόβλημα και περιλαμβάνει τον έλεγχο της ορθότητας της επικόλλησης του επιθέματος (επιβεβαίωση ότι δεν υπάρχουν διαφορές συναρμογής και κενά και ατέλειες στην κόλληση) όπως και επίσης την επιβεβαίωση ότι η αλλοίωση, λόγω της ρωγμής, της δομικής ακεραιότητας της κατασκευής έχει επιτυχώς αντισταθμιστεί. Ένας πρώτος και πρακτικός τρόπος επιβεβαίωσης της ορθότητας της επικόλλησης είναι ο ήχος που παράγεται από τη ρίψη ενός νομίσματος σε διάφορες περιοχές επικόλλησης του επιθέματος. Αναμένεται ο ήχος να είναι διαφορετικός σε σημεία όπου υπάρχουν ατέλειες στην επικόλληση [84]. Αν και ο προηγούμενος τρόπος είναι αρκετά πρακτικός, υπάρχουν πολύ πιο εξελιγμένοι τρόποι ελέγχου, οι οποίοι βασίζονται σε μη - καταστροφικές τεχνικές (non - destructive), η οποίες εφαρμόζονται τοπικά στο σημείο επικόλλησης του επιθέματος. Μερικές από αυτές είναι η εκπομπή υπερήχων (ultrasonic), οι ακτινογραφίες (X-rays) και η υπέρυθρη φωτογραφία (infrared imaging) [84]. Εναλλακτικά η επιβεβαίωση της ορθότητας της επιδιόρθωσης μπορεί να υλοποιηθεί μέσω ανάλυσης της μετρούμενης ταλαντωτικής συμπεριφοράς της επισκευασμένης κατασκευής. Εν τούτοις, δεν έχει αναφερθεί κάποια εργασία προς αυτή την κατεύθυνση.

Ο σκοπός στην παρούσα περίπτωση είναι η ανάπτυξη καθώς και η πειραματική επιβεβαίωση κατάλληλης μεθοδολογίας, βασιζόμενη στην ανάλυση πειραματικά μετρούμενων ταλαντώσεων, για την ανίχνευση επιδερμικής ρωγμής (Skin Damage Detection – SDD) και την επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής (Restoration Quality Assessment) σε ενισχυμένα αεροπορικά κελύφη χαμηλού βάρους (Σχήμα 2.1). Η ανίχνευση της βλάβης στη συγκεκριμένη περίπτωση κατασκευών είναι πρόβλημα δύσκολο, διότι η ύπαρξη ρωγμής στην επιδερμική δομή του κελύφους (skin damage crack) αναμένεται να προκαλεί περιορισμένη επίδραση στη συνολική δυναμική του κελύφους. Από την άλλη μεριά, η επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής αποτελεί δυσκολότερο και πολυπλοκότερο πρόβλημα λόγω του ότι το επισκευασμένο κέλυφος πιθανόν να παρουσιάζει διαφορετική δυναμική συμπεριφορά από ότι το αντίστοιχο υγιές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα διαφορές μεταξύ επισκευασμένου και υγιούς να οφείλονται στην μικρή αύξηση, λόγω της επικόλλησης του επιθέματος, της μάζας και όχι σε μη αρτιότητα της επισκευής.

Η βασική αρχή πάνω στην οποία αναπτύσσεται η ανίχνευση επιδερμικής ρωγμής και επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής, επί τη βάση της αναλύσεως της μετρούμενης ταλαντωτικής συμπεριφοράς του κελύφους, δύναται να περιγραφεί ως εξής: Τα δυναμικά χαρακτηριστικά της υγιούς κατασκευής (κελύφους) εκτιμώνται πειραματικά (βασική φάση – baseline phase) και αποτελούν τα “βασικά” χαρακτηριστικά της μεθοδολογίας. Η κατασκευή, βρισκόμενη σε μια τυχαία τρέχουσα κατάσταση, υποβάλλεται εκ νέου σε πειραματική ανάλυση της ταλάντωσής της (φάση επιθεώρησης – inspection phase), όταν υπάρχει υπόνοια για ανάπτυξη βλάβης (SDD πρόβλημα) ή απαιτείται επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής (RQA πρόβλημα) και υλοποιείται επανεκτίμηση των δυναμικών της χαρακτηριστικών. Στη συνέχεια τα εκ νέου εκτιμώμενα δυναμικά χαρακτηριστικά, τα οποία χαρακτηρίζονται ως “τρέχοντα” (current), της κατασκευής συγκρίνονται με τα αντίστοιχα “βασικά” (baseline – αυτά που αντιστοιχούν στην υγιή κατασκευή). Η ανίχνευση της βλάβης επιτυγχάνεται όταν τουλάχιστον ένα από τα “τρέχοντα” δυναμικά χαρακτηριστικά είναι διαφορετικό, κατά τρόπο ξεκάθαρο, από το αντίστοιχο “βασικό”. Σε αντίθετη περίπτωση η κατασκευή στην τρέχουσα της κατάσταση χαρακτηρίζεται ως υγιής. Παρομοίως, η ορθότητα της επιδιόρθωσης επιβεβαιώνεται όταν τα τρέχοντα δυναμικά χαρακτηριστικά είναι “όμοια” ή “καλύτερα” από τα αντίστοιχα βασικά.

Ένα βασικό πλεονέκτημα της προαναφερθείσας διαδικασίας είναι το ότι δεν απαιτείται αναλυτικό μοντέλο (π.χ. πεπερασμένα στοιχεία) για την υπό μελέτη κατασκευή. Από την άλλη όμως διάφορα θέματα - παράμετροι πρέπει να καθοριστούν και να διευκρινιστούν. Για παράδειγμα: Βάσει ποιού δυναμικού χαρακτηριστικό θα υλοποιηθεί η ανίχνευση της βλάβης; Μερικές δυνατές επιλογές είναι οι συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας (Frequency Response Function) και τα ολικά (φυσικές

Σχήμα 2.1: (a) Το ρηγματωμένο κέλυφος (πίσω όψη), (b) Το επισκευασμένο κέλυφος (μπροστά όψη· A, B και C είναι τα σημεία μετρήσεως, και F είναι το σημείο επιβολής της διεγέρσεως), (c) Η πειραματική διάταξη.

συχνότητες, λόγοι απόσβεσης – global modal characteristics) ή τοπικά μορφικά χαρακτηριστικά (ιδιομορφές – local modal characteristics). Μια επιπλέον σημαντική ερώτηση είναι το πως και πότε ένα “τρέχον” δυναμικό χαρακτηριστικό θεωρείται διαφορετικό κατά τρόπο ξεκάθαρο από το αντίστοιχο “βασικό”. Είναι εμφανές ότι μικρές αποκλίσεις δύναται να οφείλονται είτε πραγματικά στην ύπαρξη βλάβης ή λανθασμένης επιδιόρθωσης, αλλά είτε σε πειραματικούς ή περιβαλλοντικούς λόγους (π.χ. μετρούμενος πειραματικό θόρυβος). Ως εκ τούτου ο ορισμός κατάλληλα επιλεγμένων ορίων, λαμβανομένου υπόψη την πειραματική στατιστική αβεβαιότητα, κρίνεται αναγκαίος.

Μερικά από τα βασικά τεχνικά θέματα τα οποία αντιμετωπίζονται στην παρούσα φάση είναι τα ακόλουθα :

1. Είναι η ανίχνευση της επιδερμικής ρωγμής (SDD πρόβλημα) και η επιβεβαίωση της ορθότητας της επικείμενης επισκευής (RQA πρόβλημα) εφικτή μέσω αναλύσεως της μετρούμενης ταλαντωτικής συμπεριφοράς του κελύφους.
2. Επί τη βάση ποιού δυναμικού χαρακτηριστικού του κελύφους είναι αποδοτικότερη η ανίχνευση της επιδερμικής ρωγμής (SDD πρόβλημα) και η επιβεβαίωση της ορθότητας της επιδιόρθωσης (RQA πρόβλημα).
3. Είναι κάποιο δυναμικό χαρακτηριστικό ποιο ευαίσθητο στην ύπαρξη της επιδερμικής ρωγμής ή καταλληλότερο για την επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής;
4. Είναι η προτεινόμενη μεθοδολογία αξιόπιστη; Με άλλα λόγια είναι η μεθοδολογία ικανή στο να παρέχει σαφή διαχωρισμό των πραγματικών δομικών αλλαγών (λόγω επιδερμικής ρωγμής ή επιδιόρθωσης) από φαινομενικές αλλαγές που οφείλονται στη στατιστική φύση των εκτιμώμενων δυναμικών χαρακτηριστικών.

Το παρόν κεφάλαιο επιχειρεί να δώσει απαντήσεις στα παραπάνω γενικά ερωτήματα αναπ-

τύσσοντας και επιβεβαιώνοντας πειραματικά δύο διαφορετικές μεθόδους. Η πρώτη βασίζεται στα μορφικά χαρακτηριστικά (Modal Parameter Based Method – MPBM), ενώ η δεύτερη βασίζεται στη συνάρτηση Συνάφειας (Coherence Measure Based Method – CMBM). Στη MPBM επιχειρείται η εύρεση των ολικών μορφικών χαρακτηριστικών (φυσικές συχνότητες και λόγοι απόσβεσης) του κελύφους, μέσω κατάλληλης διαδικασίας στοχαστικής αναγνώρισης. Η διαδικασία αυτή συνδυάζει τη μοντελοποίηση μέσω παραμετρικών διανυσματικών μοντέλων Αυτοπαλινδρόμησης με εξωγενή διέγερση (vector AutoRegressive with eXogenous excitation – VARX) και της μεθοδολογίας ανάλυσης της διασποράς (Dispersion Analysis methodology) [85, 86, 87]. Στη δεύτερη, CMBM, χρησιμοποιείται η μη - παραμετρικά εκτιμώμενη, επί τη βάση της μεθόδου Welch, συνάρτηση Συνάφειας. Η βασική ιδέα σε αυτή την περίπτωση συνίσταται στην προσδοκία ότι η ύπαρξη της επιδερμικής ρωγμής εισάγει μη - γραμμικότητες, ενώ μια ορθή επισκευή τις αντισταθμίζει. Και οι δύο μέθοδοι βασίζονται σε διαστηματικές εκτιμήσεις και σε στατιστικούς ελέγχους υποθέσεων, έτσι ώστε να είναι σε θέση να λαμβάνουν υπόψη τους τις επηρεαζόμενες, στις πειραματικές μετρήσεις, στατιστικές αβεβαιότητες.

2.2 Το Κέλυφος και τα Πειράματα

2.2.1 Το Κέλυφος, η Επιδερμική Ρωγμή και η Επιδιόρθωση

Το αεροπορικό κέλυφος το οποίο χρησιμοποιείται [Σχήμα 2.1(a)] είναι ένα ελαφρύ (887 gr) τραπεζοειδή κέλυφος, ενισχυμένο με νεύρα δυσκαμψίας, από αεροπορικό 20024 – T3 αλουμίνιο με διαστάσεις $450 \times 320 \times 320\text{ mm}$ (μεγάλη βάση - μικρή βάση - ύψος), το οποίο προέρχεται από ένα αεροσκάφος τύπου Vought A - 7 Corsair. Η βλάβη, η οποία αναπτύσσεται είναι μια επιδερμική [πάχος επιδερμικής δομής $\approx 2\text{ mm}$ - Σχήμα 2.1(a)] ρωγμή μήκους 25 mm , η οποία δημιουργήθηκε με τη βοήθεια γωνιακού τροχού. Η επιδιόρθωση της επιδερμικής ρωγμής επιτεύχθηκε με την κατάλληλη επικόλληση στην περιοχή της βλάβης ενισχυτικού επιθέματος από σύνθετο υλικό [μάζα επιθέματος $\approx 27\text{ gr}$ - Σχήμα 2.1(b)] [71]. Η επιδιόρθωση υλοποιήθηκε από το Τμήμα Έρευνας και Ανάπτυξης της Ελληνικής Αεροπορικής Βιομηχανίας (Ε.Α.Β).

2.2.2 Τα Πειράματα

Το κέλυφος αναρτάται με τη βοήθεια σπάγκων και ελέγχεται κάτω από ελεύθερη στήριξη (free - free boundary conditions). Η διέγερση είναι μια τυχαία λευκή κανονικής κατανομής στάσιμη δύναμη, η οποία εφαρμόζεται μέσω ενός μορφικού διεγέρτη (modal shaker) στο σημείο F σε διεύθυνση

Σχήμα 2.2: Τμήματα από τα μετρούμενα σήματα: (a) Δύναμη διέγερσης· (b) επιτάχυνση (απόκριση) του υγιούς κελύφους· (c) επιτάχυνση (απόκριση) του ρηγματωμένου· (d) επιτάχυνση (απόκριση) του επιδιορθωμένου κελύφους (αποκρίσεις στο σημείο A, $f_s = 6 \text{ kHz}$).

κάθετη της στήριξης, και μετράται στο σημείο εφαρμογής της με κατάλληλο αισθητήρα δύναμης (Impedance Head). Οι αναπτυσσόμενες επιταχύνσεις στα σημεία A, B και C μετρώνται με τη βοήθεια πολύ ελαφριών επιταχυνσιομέτρων.

Τα σήματα της εφαρμοζόμενης δύναμης και αναπτυσσόμενων επιταχύνσεων διακριτοποιούνται με συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 6 \text{ kHz}$, μέσω συστήματος καταγραφής δεδομένων της National Instruments το οποίο διαθέτει 4 κανάλια εισόδου ευαισθησίας 16-bit κατάλληλα εξοπλισμένα με φίλτρα για προστασία anti-aliasing.

Τρεις σειρές ταλαντωτικών πειραμάτων εκτελούνται, όπου στην πρώτη σειρά διενεργούνται 10 ταλαντωτικά πειράματα με το υγιές κέλυφος (βασική φάση - baseline phase) σε τρία διαφορετικά εύρη διέγερσης [η ενεργός τιμή (RMS) του σήματος της εφαρμοζόμενης διέγερσης είναι 3.16 4.52 και 5.88 N αντίστοιχα]. Κατά τη δεύτερη και τρίτη φάση διενεργούνται 10 όμοια πειράματα, χρησιμοποιώντας όμως το ρηγματωμένο και το επισκευασμένο κέλυφος, αντίστοιχα (inspection phases).

2.2.3 Τα Ταλαντωτικά Σήματα

Σε κάθε επανάληψη του πειράματος καταγράφεται μια τετράδα σημάτων (εφαρμοζόμενη δύναμη και τρεις αναπτυσσόμενες επιταχύνσεις). Κάθε σήμα διαρκεί 82 s (492000 δεδομένα, συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 6 \text{ kHz}$). Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζονται τμήματα από την εφαρμοζόμενη δύναμη και την επιτάχυνση στο σημείο A για το υγιές, ρηγματωμένο και επισκευασμένο κέλυφος.

Σχήμα 2.3: Δέκα εκτιμήσεις, για τα δέκα διαφορετικά σει δεδομένων, βάσει της μεθόδου Welch, των μέτρων των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας (a) και της συνάρτησης της συνάφειας (b) (υγιές κέλυφος, Σημείο μέτρησης A, $f_s = 6 \text{ kHz}$).

2.2.4 Έλεγχος Πειραματικής Επαναληψιμότητας

Στην παρούσα ενότητα διερευνάται η επαναληψιμότητα (repeatability) της πειραματικής διαδικασίας. Για το λόγο αυτό το κέλυφος, και στις τρεις του δομικές φάσεις (υγιές, ρηγματωμένο, επισκευασμένο) επαναναρτάται σε κάθε μια από τις 10 επαναλήψεις της πειραματικής διαδικασίας. Σε κάθε επανάληψη, οι συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας (FRFs) και οι τετραγωνικές συναρτήσεις της συνάφειας (Squared Coherence Functions) για κάθε μια από τις τρεις συναρτήσεις μεταφοράς (εφαρμοζόμενη δύναμη - επιτάχυνση στο σημείο A, B και C) εκτιμώνται με τη βοήθεια της μεθόδου Welch [88, σελ.52] [$f_s = 6 \text{ kHz}$, 30 μη επικαλυπτόμενα (nonoverlapping) τμήματα (segments) των 16384 δεδομένων το καθένα]. Τα αποτελέσματα κατέδειξαν ότι οι 10 εκτιμήσεις των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας, για κάθε δομική κατάσταση του κελύφους (υγιές, ρηγματωμένο, επισκευασμένο) σχεδόν ταυτίζονται, υποδηλώνοντας με τον τρόπο αυτό την επαναληψιμότητα της πειραματικής διαδικασίας. Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζεται ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα των παραπάνω αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, απεικονίζονται οι 10 εκτιμήσεις των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας και τετραγωνικής συνάφειας, οι οποίες αντιστοιχούν στο υγιές δοκίμιο και αναφέρονται στο σημείο A.

2.3 Η SDD / RQA Μεθοδολογία: Οι Μέθοδοι MPBM και CMBM

2.3.1 Η επί τη βάση της Άναλύσεως της Μετρούμενης Ταλαντωτικής Συμπεριφοράς Μεθοδολογία

Ας υποθεθεί ότι με $\mathcal{S}_H$ συμβολίζεται το κέλυφος στην υγιή του δομική κατάσταση (healthy – nominal state). Επίσης με $\mathcal{S}_U$ συμβολίζεται το κέλυφος στην “τρέχουσα” (άγνωστη) δομική κατάσταση, η οποία μπορεί να είναι είτε η κατάσταση με τη ρωγμή ($\mathcal{S}_U \equiv \mathcal{S}_D$) είτε μετά την επιδιόρθωση ($\mathcal{S}_U \equiv \mathcal{S}_R$).

Τρόπος λειτουργίας της μεθοδολογίας

Η μεθοδολογία για την ανίχνευση της ρωγμής (SDD) ή την επιβεβαίωση της ορθότητας της επιδιόρθωσης (RQA) χωρίζεται, αναφορικά με τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί, στις παρακάτω φάσεις.

(α) Βασική Φάση (Baseline phase): Στην παρούσα φάση διενεργούνται πειράματα ταλαντώσεων στο υγιές κέλυφος (δομική φάση $\mathcal{S}_H$) και τα σήματα που περιγράφουν την ταλάντωση αυτού, δηλαδή το σήμα δύναμης διέγερσης $f_H[t]$ και των ταλαντωτικών αποκρίσεων (επιταχύνσεων στην παρούσα εφαρμογή) $y_H[t]$, καταγράφονται (όπου με t συμβολίζεται ο κανονικοποιημένος διακριτός χρόνος) και τελικά συγκεντρώνονται στον πίνακα $\mathbf{z}_H[t] \triangleq [f_H[t] \ y_H^T[t]]^T$. Το συνολικό αρχείο των δεδομένων $\mathbf{z}_H[t]$ για $t = 1, 2, \dots, N$ συμβολίζεται ως $(\mathbf{z}_H)_1^N$, όπου N συμβολίζει το μήκος των διαθέσιμων σημάτων. Επί τη βάση των δεδομένων αυτών, τα δυναμικά χαρακτηριστικά του κελύφους, τα οποία αντιστοιχούν στην υγιή δομική του κατάσταση, εκτιμώνται με τη βοήθεια κατάλληλης διαδικασίας αναγνώρισης [89, 90].

(β) Φάση Επιθεώρησης (Inspection Phase): Η παρούσα φάση περιλαμβάνει επανάληψη της ανάλυσης της πειραματικά μετρούμενης συμπεριφοράς του κελύφους και τη διεξαγωγή συμπερασμάτων. Για το λόγο αυτό όταν απαιτείται ανίχνευση της ύπαρξης πιθανής ρωγμής (SDD πρόβλημα) ή επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής (RQA πρόβλημα), το κέλυφος, το οποίο βρίσκεται στην “τρέχουσα” δομική κατάσταση $\mathcal{S}_U$, υπόκειται εκ νέου σε μετρήσεις της ταλάντωσής του και η διέγερση $f_U[t]$ μαζί τις αναπτυσσόμενες επιταχύνσεις $y_U^T[t]^T$ του επανασυλλέγονται. Με τη βοήθεια των νέων δεδομένων $(\mathbf{z}_U)_1^N$ (με $\mathbf{z}_U[t] \triangleq [f_U[t] \ y_U^T[t]]^T$) επαναπροσδιορίζονται τα “τρέχοντα” δυναμικά χαρακτηριστικά του κελύφους και συγκρίνονται, μέσω τυπικών στατιστικών μεθόδων ελέγχου υποθέσεων, με τα αντίστοιχα υγιή (τα δυναμικά χαρακτηριστικά του κελύφους όταν αυτό

βρίσκεται στην υγιή δομική κατάσταση). Επί τη βάση της συγκρίσεως αυτής εξάγονται συμπεράσματα για την τρέχουσα δομική κατάσταση του δοκιμίου. Πιο συγκεκριμένα:

SDD πρόβλημα: Η βλάβη ανιχνεύεται όταν τουλάχιστον ένα δυναμικό χαρακτηριστικό της τρέχουσας κατάστασης είναι *στατιστικά διαφορετικό* από το αντίστοιχο βασικό (υγιές). Σε αντίθετη περίπτωση θεωρείται ότι η δομική κατάσταση του κελύφους δεν έχει τροποποιηθεί και ως εκ τούτου το κέλυφος στην τρέχουσα κατάσταση δηλώνεται ως υγιές.

RQA πρόβλημα: Η ορθότητα της επισκευής επιβεβαιώνεται όταν τα δυναμικά χαρακτηριστικά του κελύφους στην τρέχουσα δομική κατάσταση είναι στατιστικώς *όμοια* ή “*καλύτερα*” από τα αντίστοιχα της βασικής (υγιούς) δομικής κατάστασης. Σε αντίθετη περίπτωση δηλώνεται η επιδιόρθωση ως ανεπιτυχής.

Η βασική ιδέα της μεθοδολογίας

Τόσο η ανίχνευση της ρωγμής (SDD πρόβλημα), όσο και η επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής (RQA πρόβλημα) περιλαμβάνουν την *ανάλυση* της μετρούμενης ταλαντωτικής συμπεριφοράς και τη *στατιστική διεξαγωγή συμπερασμάτων*. Το κομμάτι της ανάλυσης περιλαμβάνει την παραμετρική ή μη - παραμετρική μοντελοποίηση των δυναμικών χαρακτηριστικών του κελύφους επί τη βάση μετρήσεων της ταλαντωτικής συμπεριφοράς αυτού. Ο σκοπός στην παρούσα φάση είναι η εξαγωγή, βάσει μετρήσεων, μιας ποσότητας (ταλαντωτικό χαρακτηριστικό), το οποίο συμβολίζεται ως $Q = Q(\mathbf{z}_1^N)$ και αποτελεί το μέσο επίτευξης της εξαγωγής συμπερασμάτων. Από την άλλη πλευρά, στη στατιστική διεξαγωγή συμπερασμάτων, οι αποφάσεις λαμβάνονται συγκρίνοντας το ταλαντωτικό χαρακτηριστικό της τρέχουσας κατάστασης Q_U με το αντίστοιχο Q_H της υγιούς [79]. Ως εκ τούτου, τα προβλήματα SDD και RQA διαμορφώνονται ως ένα σύνθετο δυαδικό πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων, το οποίο σε γενικές γραμμές περιγράφεται ως:

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad Q_H \sim Q_U \quad (\text{μηδενική υπόθεση}) \\ H_1 : & \quad Q_H \not\sim Q_U \quad (\text{εναλλακτική υπόθεση}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

όπου με $\sim$ συμβολίζεται κατάλληλη, ως προς το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται σχέση (για παράδειγμα ισότητα, ανισότητα, κ.ο.κ). Η μηδενική (H_0) και εναλλακτική (H_1) υπόθεση ορίζεται ανάλογα με το πρόβλημα (SDD ή RQA) που αντιμετωπίζεται (Πίνακας 2.1).

Πίνακας 2.1: Ορισμός της μηδενικής και εναλλακτικής υπόθεσης για τα SDD και RQA προβλήματα.

Πρόβλημα	Μηδενική Υπόθεση H_0	Εναλλακτική Υπόθεση H_1
SDD	όχι βλάβη	βλάβη
RQA	ανεπιτυχής επιδιόρθωση	επιτυχής επιδιόρθωση

2.3.2 Η Μέθοδος των Μορφικών Παραμέτρων (Modal Parameter Based Method – MPBM)

Στα πλαίσια της πρώτης μεθόδου, η οποία βασίζεται στα μορφικά χαρακτηριστικά (MPBM), η ανίχνευση της επιδερμικής ρωγμής βασίζεται στην προσδοκία ότι η ρωγμή θα επηρεάσει τα συνολικά μορφικά χαρακτηριστικά (global model parameters). Επιπλέον θεωρείται ότι η ορθή επιδιόρθωση θα επαναφέρει τα μορφικά χαρακτηριστικά στα “επίπεδα” του υγιούς κελύφους. Όμως στην παρούσα περίπτωση, όπου η μάζα του επιθέματος που επικολλάται είναι συγκρίσιμη με αυτή του κελύφους (η μάζα του επισκευασμένου είναι περίπου 3% μεγαλύτερη), η επιδιόρθωση δύναται να επηρεάσει αισθητά τα δυναμικά χαρακτηριστικά του κελύφους. Ως εκ τούτου οι διαφορές μεταξύ του υγιούς και επισκευασμένου κελύφους μπορεί να οφείλονται είτε σε λανθασμένη επιδιόρθωση, είτε στην αύξηση της μάζας. Για το λόγο αυτό είναι αναμενόμενο η MPBM μέθοδος να μη είναι σε θέση να ξεχωρίσει την πραγματική αιτία διαφοροποίησης των δυναμικών χαρακτηριστικών, με αποτέλεσμα να θεωρείται μάλλον ακατάλληλη για το RQA πρόβλημα.

Η MPBM χρησιμοποιεί τα συνολικά μορφικά χαρακτηριστικά (global modal parameters), δηλαδή τις φυσικές συχνότητες και λόγους απόσβεσης, ως το μέσο για τη στατιστική εξαγωγή συμπερασμάτων. Για το λόγο αυτό απαιτείται μια κατάλληλη μέθοδος αναγνώρισης των φυσικών συχνοτήτων και λόγων απόσβεσης επί τη βάση των μετρούμενων σημάτων της διεγέρσεως και των αναπτυσσόμενων επιταχύνσεων. Η επιλογή της εν λόγω μεθόδου στηρίζεται κατά κύριο λόγο στην εκάστοτε εφαρμογή. Από το πλήθος των διαθέσιμων μεθόδων [11, 90, 89], επιλέγεται εκείνη η οποία βασίζεται στα διανυσματικά μοντέλα αυτοπαλινδρόμησης με εξωγενή διέγερση (Vector AutoRegressive with eXogenous excitation - VARX) [86, 87]. Η μέθοδος αυτή επιλέγεται για τη απλότητα της και την αποτελεσματικότητά της ειδικά σε περιπτώσεις όπου ο λόγος θορύβου προς σήματος (noise - to - signal ratio) είναι χαμηλός.

Δεδομένων των μετρούμενων σημάτων διέγερσης $f[t]$ (είσοδος) και αναπτυσσόμενων επιταχύνσεων (έξοδοι) $y[t] = [y_1[t] \dots y_m[t]]^T$ ($m \times 1$) το m -διάστατο μοντέλο VARX(n_y, n_f) είναι της ακόλου-

της μορφής:

$$\mathbf{y}[t] + \sum_{i=1}^{n_y} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{y}[t-i] = \sum_{i=0}^{n_f} \mathbf{B}_i \cdot f[t-i] + \mathbf{e}[t] \quad \Sigma_e = E \{ \mathbf{e}[t] \cdot \mathbf{e}^T[t] \} \quad (2.2)$$

όπου $\mathbf{A}_i$ ($m \times m$) και $\mathbf{B}_i$ ($m \times 1$) είναι οι πολυωνυμικοί πίνακες αυτοπαλινδρόμησης, τάξεως n_y και εξωγενής διεγέρσεως n_f αντίστοιχα. Με $\mathbf{e}[t]$ ($m \times 1$) συμβολίζεται το διάνυσμα των μη παρατηρήσιμων ασυσχέτιστων (λευκών) ακολουθιών μηδενικής μέσης τιμής των σφαλμάτων πρόβλεψης των αντίστοιχων εξόδων του μοντέλου, το οποίο έχει μη - ενικό (non - singular) πίνακα συνδυασφοράς Σ_e ($m \times m$). Σημειώνεται ότι με $E\{\cdot\}$ συμβολίζεται η στατιστική προσδοκία (statistical expectation).

Η εκτίμηση του μοντέλου VARX, η οποία περιλαμβάνει τις εκτιμήσεις των πολυωνυμικών πινάκων $\mathbf{A}_i$ και $\mathbf{B}_i$, υλοποιείται μέσω της ελαχιστοποίησης ενός τετραγωνικού κριτηρίου των σφαλμάτων πρόβλεψης (prediction error estimator). Η διαδικασία αυτή οδηγεί στην κλασική γραμμική εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων [11, 86, 87].

Η επιλογή της δομής του μοντέλου, δηλαδή η επιλογή των τάξεων n_y n_f υλοποιείται εκτιμώντας διαδοχικά μοντέλα της μορφής $VARX(k, k)$ με διαρκώς αυξανόμενη τάξη k , ωσότου την επίτευξη ενός μοντέλου με επαρκείς τάξεις, για την περιγραφή της δυναμικής του συστήματος (κελύφους στην παρούσα εφαρμογή) [86, 87]. Η διαδικασία επιλογής των τάξεων βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του ίχνους (trace) του πίνακα συνδυασφοράς $\hat{\Sigma}_e$ των εκτιμώμενων, επί τη βάση του μοντέλου, σφαλμάτων πρόβλεψης ενός βήματος (one - step - ahead prediction errors):

$$\text{ίχνος}(\hat{\Sigma}_e) = \text{ίχνος}\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{\mathbf{e}}[t] \cdot \hat{\mathbf{e}}^T[t]\right) \quad (2.3)$$

και του κριτηρίου BIC (Bayesian Information Criterion), το οποίο ορίζεται ως:

$$BIC = \ln \det |\hat{\Sigma}_e| + b \times \frac{\ln N}{N} \quad (2.4)$$

όπου $\ln(\cdot)$ είναι ο φυσικός λογάριθμος, $\det\{\cdot\}$ η ορίζουσα και $b = m^2 \cdot n_y + m \cdot (n_f + 1)$ ο συνολικός αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων του εκάστοτε μοντέλου.

Επιπροσθέτως, η επάρκεια της τάξης του μοντέλου ελέγχεται μέσω των διαγραμμάτων σταθεροποίησης (stabilization diagrams), τα οποία απεικονίζουν τις εκτιμώμενες φυσικές συχνότητες συναρτήσει της τάξης του μοντέλου. Σύμφωνα με τα διαγράμματα αυτά, μια επαρκής τάξη θεωρείται ότι επιτυγχάνεται μόλις οι εκτιμώμενες φυσικές συχνότητες παύσουν να αλλάζουν (σταθεροποιούνται) [86, 87]. Ο τελικός έλεγχος εγκυρότητας του εκτιμώμενου μοντέλου επιτυγχάνεται, επιβεβαιώνοντας την τυπική υπόθεση ότι η ακολουθία των εκτιμώμενων σφαλμάτων ενός βήματος είναι ασυσχέτιστη (uncorrelatedness hypothesis).

Άπαξ και το εκτιμώμενο μοντέλο VARX περάσει τον έλεγχο εγκυρότητας τότε θεωρείται επαρκές για την αναπαράσταση του συστήματος υπό αναγνώριση (κελύφος στην παρούσα εφαρμογή). Επομένως οι φυσικές συχνότητες και λόγοι απόσβεσης προκύπτουν απευθείας από τους ακόλουθους τύπους:

$$\omega_{n_i} = \frac{1}{2\pi T_s} \sqrt{\left(\frac{\ln(\lambda_i \cdot \lambda_i^*)}{2}\right)^2 + \left(\cos^{-1}\left(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \cdot \lambda_i^*}}\right)\right)^2} \quad (Hz) \quad (2.5)$$

$$\zeta_i = \frac{\sqrt{\left(\ln(\lambda_i \cdot \lambda_i^*)\right)^2}}{\sqrt{\left(\ln(\lambda_i \cdot \lambda_i^*)\right)^2 + 4 \cdot \left(\cos^{-1}\left(\frac{\lambda_i + \lambda_i^*}{2\sqrt{\lambda_i \cdot \lambda_i^*}}\right)\right)^2}} \quad (2.6)$$

όπου με T_s συμβολίζεται η περίοδος δειγματοληψίας, με τον αστερίσκο ο συζυγής μιγαδικός και λ_i η i -στή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, το οποίο προέρχεται από το τμήμα της αυτοπαλινδρόμησης ως εξής:

$$\det(\mathbf{I}_m \cdot \lambda^{n_y} + \mathbf{A}_1 \cdot \lambda^{n_y-1} + \dots + \mathbf{A}_{n_y-1} \cdot \lambda + \mathbf{A}_{n_y}) = 0 \quad (2.7)$$

όπου $\mathbf{I}_m$ ο $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας.

Η διάκριση των πραγματικών ιδιομορφών από τις εξωγενείς (αυτές οι οποίες οφείλονται στην ύπαρξη μετρητικού θορύβου ή σε υπερπαραμετροποίηση του μοντέλου) πραγματοποιείται μέσω της μεθοδολογίας της αναλύσεως της διασποράς (dispersion analysis) [85, 86]. Η εν λόγω μεθοδολογία στηρίζεται στο τμήμα της ενέργειας που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιομορφή σε κάθε μία από τις συναρτήσεις μεταφοράς του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, οι ιδιομορφές οι οποίες παρουσιάζουν αμελητέα συνεισφορά στη διασπορά, δηλαδή:

$$\|\Delta_k\| = \|[\Delta_{ik}]\| < \varepsilon \quad (2.8)$$

μπορούν να θεωρηθούν ως εξωγενείς. Στην παραπάνω μαθηματική έκφραση η ποσότητα $[\Delta_{ik}]$ αντιστοιχεί στη συνεισφορά στη διασπορά της k -οστής ιδιομορφής στην i -στή συνάρτηση μεταφοράς. Το παραπάνω εκφράζεται ως $|E_{ik}|/E_i$, όπου E_i αναπαριστά την ενέργεια της i -στής απόκρισης λόγω της διεγέρσεως και E_{ik} το τμήμα της ενέργειας E_i το οποίο αντιστοιχεί στη k -οστή ιδιομορφή. Επιπροσθέτως με $\|\cdot\|$ συμβολίζεται κατάλληλη νόρμα πίνακα και ε ένα προεπιλεγμένο κατώφλι. Ο διαχωρισμός των πραγματικών ιδιομορφών από τις εξωγενείς μπορεί να υλοποιηθεί και με τη βοήθεια των διαγραμμάτων σταθεροποίησης, όμως συχνά φαινόμενα όπως σταθεροποίηση εξωγενών συχνοτήτων και διαχωρισμού των συχνοτήτων (frequency splitting) μπορεί να οδηγήσουν να λανθασμένα συμπεράσματα [90].

Στατιστική διεξαγωγή συμπερασμάτων

Η εκτιμήτρια σφάλματος πρόβλεψης για τις φυσικές συχνότητες και τους λόγους απόσβεσης $\hat{\theta} = [\hat{\omega}_{n_1} \dots \hat{\omega}_{n_p} : \hat{\zeta}_1 \dots \hat{\zeta}_p]^T$ (όπου p ο συνολικός αριθμός των ιδιομορφών που αναγνωρίζονται) ακολουθεί, κατά προσέγγιση (κάτω από κατάλληλες συνθήκες, όπως η ύπαρξη αρκετά μεγάλου αριθμού δεδομένων), κανονική κατανομή [88, σελ.271], με μέση τιμή να ταυτίζεται με το πραγματικό (άλλα άγνωστο) διάνυσμα των φυσικών συχνοτήτων και λόγων απόσβεσης, θ , και πίνακα συνδυασποράς Σ . Επομένως:

$$\hat{\theta} \sim \mathcal{N}(\theta, \Sigma) \quad (2.9)$$

όπου με $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ συμβολίζεται η κανονική κατανομή με την υποδεικνυόμενη μέση τιμή και πίνακα συνδυασποράς.

Τόσο το SDD όσο και το RQA πρόβλημα βασίζεται στη σύγκριση του διανύσματος των μορφικών χαρακτηριστικών του υγιούς κελύφους με το αντίστοιχο του κελύφους όταν αυτό βρίσκεται στην τρέχουσα κατάσταση. Πιο συγκεκριμένα, στηρίζεται στην καταγραφή στατιστικά σημαντικών αλλαγών ανάμεσα στα δύο διανύσματα. Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί είτε μέσω $2p$ μονοδιάστατων (scalar) ελέγχων (το κάθε στοιχείο του διανύσματος των μορφικών παραμέτρων της τρέχουσας δομικής κατάστασης συγκρίνεται με το αντίστοιχο της υγιούς), είτε μέσω πολυδιάστατου (multivariate) ελέγχου (όπου το δύο διανύσματα συγκρίνονται ταυτόχρονα). Όπως είναι εμφανές, οι μονοδιάστατοι έλεγχοι αποτελούν υποπερίπτωση του γενικού πολυδιάστατου και ως εκ τούτου η ανίχνευση αλλαγών στο διάνυσμα των μορφικών χαρακτηριστικών μπορεί να βασιστεί εξόλοκλήρου στο πολυδιάστατο έλεγχο. Παρά το γεγονός αυτό κρίνεται απαραίτητη και η διεξαγωγή των μονοδιάστατων ελέγχων, έτσι ώστε να υπάρχει εποπτεία σχετικά με τη μεταβολή (αύξηση ή μείωση) του εκάστοτε μορφικού χαρακτηριστικού από τη μία δομική κατάσταση στην άλλη (π.χ από την υγιή στη ρηγματωμένη).

(α) Πολυμεταβλητός στατιστικός έλεγχος Προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα SDD και RQA, ο ακόλουθος στατιστικός έλεγχος υποθέσεων υλοποιείται:

$$\begin{aligned} H_0 &: \delta\theta \triangleq \theta_{\mathcal{H}} - \theta_{\mathcal{U}} = \mathbf{0} \quad (\text{μηδενική υπόθεση}) \\ H_1 &: \delta\theta \triangleq \theta_{\mathcal{H}} - \theta_{\mathcal{U}} \neq \mathbf{0} \quad (\text{εναλλακτική υπόθεση}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

όπου με $\theta_{\mathcal{H}}$ και $\theta_{\mathcal{U}}$ συμβολίζεται το διάνυσμα των μορφικών παραμέτρων του κελύφους στην υγιή και τρέχουσα δομική κατάσταση.

Όπως είναι φανερό από την Εξ. (2.10), ελέγχεται η διαφορά μεταξύ των δύο πραγματικών διανυσμάτων των μορφικών χαρακτηριστικών που αντιστοιχούν στην υγιή και τρέχουσα κατάσταση.

Είναι βασικό να παρατηρηθεί ότι τα δύο διανύσματα αυτά είναι άγνωστα (οι πραγματικές μέσες τιμές είναι άγνωστες) και μόνο οι εκτιμήσεις αυτών είναι διαθέσιμες (όπως αυτές προκύπτουν από τα διαθέσιμα σετ δεδομένων $(\mathbf{z}_{\mathcal{H}})_1^N$ και $(\mathbf{z}_{\mathcal{U}})_1^N$). Επίσης, η διαφορά των διανυσμάτων των μορφικών παραμέτρων ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή:

$$\delta\hat{\boldsymbol{\theta}} \triangleq \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{H}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{U}} \sim \mathcal{N}(\delta\boldsymbol{\theta}, \delta\boldsymbol{\Sigma}), \quad \text{με} \quad \delta\boldsymbol{\theta} \triangleq \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{H}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{U}}, \quad \delta\boldsymbol{\Sigma} \triangleq \boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{H}} + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{U}} \quad (2.11)$$

όπου με $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{H}}$ και $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{U}}$ συμβολίζονται οι πίνακες συνδυασφοράς της εκτιμήτριας για την υγιή και τρέχουσα δομική κατάσταση, αντίστοιχα.

Δεδομένου της μηδενικής (H_0) υποθέσεως: $\delta\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{H}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{U}} \sim \mathcal{N}(0, 2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{H}})$, ενώ η ποσότητα $\mathcal{Q}$ (βλέπε παρακάτω), ακολουθεί χ^2 κατανομή με $2d$ (διάσταση των διανυσμάτων των μορφικών χαρακτηριστικών) βαθμούς ελευθερίας [91, σελ.72], το οποίο σημαίνει:

$$\mathcal{Q} \triangleq \delta\hat{\boldsymbol{\theta}}^T \cdot \delta\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot \delta\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \chi^2(d) \quad (2.12)$$

όπου $\delta\boldsymbol{\Sigma} = 2\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{H}}$. Η παραπάνω στατιστική ποσότητα περιλαμβάνει τον πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathcal{H}}$, ο οποίος είναι μη διαθέσιμος. Στην πράξη το γεγονός αυτό αντιμετωπίζεται αντικαθιστώντας τον από τον αντίστοιχο δειγματικό (sampled) $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathcal{H}}$. Αν θεωρηθεί ότι αυτός ο δειγματικός ανάλογος ως καθοριστική (deterministic) ποσότητα, δηλαδή μία ποσότητα με αμελητέα διασπορά (αυτό είναι ρεαλιστικό για μεγάλο αριθμό δεδομένων), τότε κατασκευάζεται ο ακόλουθος έλεγχος υποθέσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α (σφάλμα τύπου I: η πιθανότητα να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση, ενώ είναι σωστή - για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Σχήμα 2.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} < \chi_{1-a}^2(d) &\implies \text{αποδοχή της } H_0 \\ \text{αλλιώς} &\implies \text{αποδοχή της } H_1 \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου με $\chi_{1-a}^2(d)$ συμβολίζεται το κρίσιμο $1 - a$ όριο της κεντρική (central) χ^2 κατανομής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι είναι προτιμότερο να ελεγχθεί η συνολική συμπεριφορά των φυσικών συχνοτήτων ξέχωρα από αυτή των λόγων απόσβεσης. Προκειμένου να υλοποιηθεί κάτι τέτοιο το εκτιμώμενο διάνυσμα της διαφοράς των μορφικών χαρακτηριστικών $\delta\hat{\boldsymbol{\theta}}$ χωρίζεται ως εξής: $\delta\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\omega_n}^T & \delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\zeta_n}^T \end{bmatrix}^T$ και ο πολυδιάστατος έλεγχος υποθέσεων υλοποιείται για καθένα από τα δυο κομμάτια του διανύσματος ξεχωριστά [Εξ. (2.13) αλλά με $d \equiv p$] κατόπιν κατάλληλου κατακερματισμού του πίνακα συνδυασφοράς $\delta\boldsymbol{\Sigma}$].

(β) Μονοδιάστατος στατιστικός έλεγχος Στην προκειμένη φάση τα προβλήματα SDD και RQA αντιμετωπίζονται εξετάζοντας για το αν καθένα ξεχωριστά από τα στοιχεία, $\delta\theta^{(i)}$ (με $i = 1, \dots, 2p$),

Σχήμα 2.4: Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων, επί τη βάση μια ποσότητας η οποία ακολουθεί χ^2 κατανομή.

του πραγματικού διανύσματος της διαφοράς των μορφικών χαρακτηριστικών $\delta\theta$, είναι διαφορετικό από το μηδέν. Έτσι ο μονοδιάστατος έλεγχος (για κάθε $i = 1, \dots, 2p$) πραγματοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} H_0 : \delta\theta^{(i)} &\triangleq \theta_{\mathcal{H}}^{(i)} - \theta_{\mathcal{U}}^{(i)} = 0 \quad (\text{μηδενική υπόθεση}) \\ H_1 : \delta\theta^{(i)} &\triangleq \theta_{\mathcal{H}}^{(i)} - \theta_{\mathcal{U}}^{(i)} \neq 0 \quad (\text{εναλλακτική υπόθεση}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

όπου με $\theta_{\mathcal{H}}^{(i)}$ και $\theta_{\mathcal{U}}^{(i)}$ συμβολίζεται το i -οστό (με $i = 1, \dots, 2p$) στοιχείο του διανύσματος των μορφικών χαρακτηριστικών της υγιούς και τρέχουσας δομικής κατάστασης, αντίστοιχα.

Λόγω της Εξ. (2.11) το i -οστό στοιχείο, $\delta\theta^{(i)}$, του διανύσματος της διαφοράς των μορφικών χαρακτηριστικών, $\delta\hat{\theta}$, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\delta\theta^{(i)} \triangleq \theta_{\mathcal{H}}^{(i)} - \theta_{\mathcal{U}}^{(i)}$ (πραγματική διαφορά) και διασπορά $\delta\Sigma^{(i)} \triangleq \Sigma_{\mathcal{H}}^{(i)} + \Sigma_{\mathcal{U}}^{(i)}$, δηλαδή:

$$\delta\hat{\theta}^{(i)} \triangleq \hat{\theta}_{\mathcal{H}}^{(i)} - \hat{\theta}_{\mathcal{U}}^{(i)} \sim \mathcal{N}(\delta\theta^{(i)}, \delta\Sigma^{(i)}) \quad (2.15)$$

όπου με $\Sigma_{\mathcal{H}}^{(i)}$ και $\Sigma_{\mathcal{U}}^{(i)}$ συμβολίζεται το i -οστό στοιχείο της διαγωνίου (αντίστοιχη διασπορά) των πινάκων συνδυασφοράς $\Sigma_{\mathcal{H}}$ και $\Sigma_{\mathcal{U}}$, αντίστοιχα [Εξ. (2.11)].

Σύμφωνα με η μηδενική υπόθεση (H_0), τα πραγματικά i -οστά (για κάθε i) μορφικά χαρακτηριστικά ταυτίζονται (δηλαδή, $\theta_{\mathcal{H}}^{(i)} = \theta_{\mathcal{U}}^{(i)}$), όπως επίσης και οι αντίστοιχες διασπορές ($\Sigma_{\mathcal{H}}^{(i)} = \Sigma_{\mathcal{U}}^{(i)}$). Για το λόγω αυτό, το $\delta\hat{\theta}^{(i)}$ ακολουθεί την παρακάτω κανονική κατανομή

$$\text{Υπό την } H_0 : \delta\hat{\theta}^{(i)} \triangleq \hat{\theta}_{\mathcal{H}}^{(i)} - \hat{\theta}_{\mathcal{U}}^{(i)} \sim \mathcal{N}(0, 2\Sigma_{\mathcal{H}}^{(i)}) \quad (2.16)$$

Η ισότητα των $\theta_{\mathcal{H}}^{(i)}$ και $\theta_{\mathcal{U}}^{(i)}$ ελέγχεται σε επίπεδο σημαντικότητας α (σφάλμα τύπου Ι), επί τη βάση του κάτωθι στατιστικού ελέγχου υποθέσεων (Σχήμα 2.5):

$$\begin{aligned} |\delta\hat{\theta}^{(i)}| &\leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{2\hat{\Sigma}_{\mathcal{H}}^{(i)}} \quad (\forall i) \implies \text{αποδοχή της } H_0 \\ &\text{αλλιώς} \implies \text{αποδοχή της } H_1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Σχήμα 2.5: Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων, επί τη βάση στατιστικής ποσότητας η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή (two-tailed test).

όπου με $\hat{\Sigma}_{\mathcal{H}}^{(i)}$ συμβολίζεται το i -οστό διαγώνιο στοιχείο του δειγματικού (εκτιμώμενου) αναλόγου του $\Sigma_{\mathcal{H}}$.

Σημείωση: Προφανώς η Εξ. (2.17) δηλώνει ότι η μηδενική υπόθεση (H_0) γίνεται αποδεκτή αν και μόνο αν τα διαστήματα εμπιστοσύνης του $\delta\theta^{(i)}$, τα οποία είναι:

$$\left[\delta\hat{\theta}^{(i)} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{2\hat{\Sigma}_{\mathcal{H}}^{(i)}}, \delta\hat{\theta}^{(i)} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{2\hat{\Sigma}_{\mathcal{H}}^{(i)}} \right]$$

περιλαμβάνουν ($\forall i = 1, \dots, 2p$) την μηδενική τιμή.

2.3.3 Η Μέθοδος του Μέτρου Συνάφειας (Coherence Measure Based Method – CMBM)

Η κύρια συνιστώσα της μεθόδου του μέτρου της συνάφειας (Coherence Measure Based Method – CMBM) είναι η συνάρτηση της (τετραγωνικής) συνάφειας (Coherence) $\gamma^2(\omega)$. Δεδομένου των σημάτων της διεγέρσεως $f[t]$ και των αποκρίσεων $\mathbf{y}[t] = [y_1[t] \dots y_m[t]]^T$, η τετραγωνική συνάφεια $\gamma_i^2(\omega)$, για κάθε ζεύγος διεγέρσεως - απόκρισης, ορίζεται ως εξής [69, σελ.178]:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|S_{fy_i}(\omega)|^2}{S_{ff}(\omega) \cdot S_{y_i y_i}(\omega)}, \quad \gamma^2(\omega) \in [0, 1] \quad (2.18)$$

όπου με ω συμβολίζεται η συχνότητα, $S_{ff}(\omega)$ και $S_{y_i y_i}(\omega)$ είναι τα φάσματα ισχύος των υποδεικνυόμενων σημάτων και $S_{fy_i}(\omega)$ το ετεροφάσμα ισχύος μεταξύ της διεγέρσεως και του i -οστού σήματος απόκρισης.

Η εκτιμήτρια της $\hat{\gamma}^2(\omega)$ μπορεί να προκύψει αντικαθιστώντας τα φάσματα της Εξ. (2.18) με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις τους, οι οποίες υλοποιούνται με τη μέθοδο του Welch [88, σελ.52]. Προκειμένου να γίνει η εκτίμηση αυτή, το καθένα από τα μετρούμενα σήματα των αποκρίσεων, $y_i[t]$, χωρίζεται

σε n_d μη - επικαλυπτόμενα (nonoverlapping) τμήματα, το καθένα μήκους L . Βάσει των παραπάνω η Welch εκτιμήτρια $\hat{S}_{y_i y_i}(\omega)$ του φάσματος ισχύος δίδεται ως εξής (όμοια για το $\hat{S}_{ff}(\omega)$ και $\hat{S}_{fy_i}(\omega)$) [92, σελ.72]:

$$\hat{S}_{y_i y_i}(\omega) = \frac{1}{n_d} \cdot \sum_{r=1}^{n_d} I^{(r)}(\omega) \quad \text{με} \quad I^{(r)}(\omega) = \frac{1}{L} \cdot \left| \sum_{t=1}^L w[t] \cdot y_i^{(r)}[t] \cdot e^{-j\omega t T_s} \right|^2 \quad (2.19)$$

όπου με το δείκτη r μέσα στην παρένθεση δηλώνεται το i -οστό τμήμα, ενώ με $w[t]$ ένα κατάλληλο παράθυρο εξομάλυνσης.

Η μέση τιμή και η διασπορά της $\hat{\gamma}^2(\omega)$ μπορεί να αποδειχθεί ότι δίδεται από τις ακόλουθες εξισώσεις [93]:

$$E \{ \hat{\gamma}^2(\omega) \} \approx \gamma^2(\omega) + \frac{1}{n_d} (1 - \gamma^2(\omega))^2 \quad \sigma_{\hat{\gamma}}^2(\omega) = \frac{2 \cdot \gamma^2(\omega)}{n_d} (1 - \gamma^2(\omega))^2 \quad (2.20)$$

όπου με $\gamma^2(\omega)$ συμβολίζεται η πραγματική συνάφεια.

Στη συνέχεια ορίζεται το μέτρο συνάφειας (coherence measure). Για το λόγο αυτό εκτελείται διακριτοποίηση ως προς την συχνότητα ω_i ($i = 1, \dots, n_\omega$) (με διακρισιμότητα ως προς τη συχνότητα $\delta\omega$), και ορίζεται το μέτρο αυτό ως:

$$\Gamma \triangleq \delta\omega \cdot \sum_{i=1}^{n_\omega} \gamma^2[\omega_i] \quad (2.21)$$

το οποίο στην ουσία προκύπτει ως το άθροισμα των επιμέρους, για κάθε συχνότητα ω_i , τιμών της συνάφειας. Όπως είναι προφανές, το μέτρο συνάφειας είναι το διακριτό ισοδύναμο του ολοκληρώματος της συνάφειας σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων (Σχήμα 2.6). Όσο ο αριθμός των διακριτών συχνοτήτων n_ω τείνει στο άπειρο ($n_\omega \rightarrow \infty$) η εκτιμήτρια του μέτρου συνάφειας ακολουθεί προσεγγιστικά, λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος [94, σελ.46], κανονική κατανομή, δηλαδή:

$$\hat{\Gamma} \sim \mathcal{N}(\Gamma, \sigma_{\hat{\Gamma}}^2) \quad \text{όπου} \quad \sigma_{\hat{\Gamma}}^2 = \delta\omega^2 \cdot \sum_{i=1}^N \sigma_{\gamma}^2[\omega_i] \quad (2.22)$$

όπου με Γ συμβολίζεται η πραγματική τιμή του μέτρου. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος μεροληψίας (bias term) στο δεξιό κομμάτι της αριστερή σχέσης στην Εξ. (2.20) γίνεται, για κάθε συχνότητα, ασήμαντος για μεγάλες τιμές n_d (αθροιζόμενων τμημάτων), ή/και για τιμή της συνάφειας κοντά στη μονάδα. Επιπροσθέτως, η διασπορά του εκτιμώμενου μέτρου $\hat{\Gamma}$ ισούται με το άθροισμα των επιμέρους διασπορών των εκτιμήσεων της συνάφειας, λόγω του ότι οι εκτιμήσεις της συνάφειας για διαφορετικές συχνότητες, $\hat{\gamma}^2[\omega_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n_\omega$), είναι τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες είναι μεταξύ του ασυσχέτιστες [95, σελ.204].

Σχήμα 2.6: Το μέτρο συνάφειας (αντιπροσωπευτικό παράδειγμα).

Διεξαγωγή Στατιστικών Συμπερασμάτων

Όταν το κέλυφος βρίσκεται στη ρηγματωμένη δομική του κατάσταση, τότε είναι πιθανόν η επιδερμική ρωγμή, ανάλογα με τη φόρτιση που δέχεται το κέλυφος, να ανοιγοκλείνει [82] και ως εκ τούτου να συμπεριφέρεται ως τμηματικά γραμμικό (piecewise linear) ελατήριο [96]. Επιπροσθέτως, επιπλέον μη - γραμμική συμπεριφορά δύναται να αναπτυχθεί λόγω τριβής μεταξύ των δύο πλευρών της ρωγμής (όπως η ρωγμή ανοιγοκλείνει, τότε οι δύο πλευρές της τρίβονται μεταξύ τους) [82]. Όποια και να είναι η κατάσταση, αναμένεται η ύπαρξη της ρωγμής να εισάγει τοπικά μη - γραμμική συμπεριφορά. Από την άλλη πλευρά, ο σκοπός της επιδιόρθωσης είναι η μεταφορά των φορτίων μέσω του επιθέματος παρακάμπτοντας τη ρωγμή [84], αντισταθμίζοντας όσο το δυνατόν περισσότερο την επίδραση της ρωγμής στη συνολική συμπεριφορά του κελύφους.

Στην παρούσα ενότητα αναπτύσσεται η CMBM για την αντιμετώπιση των SDD και RQA προβλημάτων. Η βασική αρχή στηρίζεται στην προσδοκία ότι κάτω από σταθερές πειραματικές και περιβαλλοντολογικές συνθήκες, η συνολική συνάφεια (μέτρο συνάφειας) μειώνεται με την ύπαρξη της ρωγμής (λόγω του ότι εισάγεται ή ενισχύεται η μη - γραμμική συμπεριφορά του κελύφους) και αυξάνεται, συγκρινόμενη με την αντίστοιχη στη ρηγματωμένη δομική κατάσταση, με την ορθή επιδιόρθωση (φυσικά δύναται να πλησιάσει ή και ακόμα να υπερβεί τη τιμή που αντιστοιχεί στην υγιή δομική κατάσταση). Το βασικό πλεονέκτημα της CMBM είναι ότι παρακάμπτει την τυπική εξάρτηση στις φυσικές παραμέτρους του κελύφους (και γενικότερα της κατασκευής), όπως για παράδειγμα τη μάζα, και ως εκ τούτου μπορεί να αποδειχθεί αποτελεσματική και αξιόπιστη για την αντιμετώπιση και του SDD αλλά και του RQA προβλήματος. Επιπλέον, η CMBM καλύπτει ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων μέσω μίας μεταβλητής (του μέτρου συνάφειας).

Όσον αφορά το SDD πρόβλημα, αναμένεται ότι η ύπαρξη της επιδερμικής ρωγμής να οδηγήσει σε μείωση του μέτρου συνάφειας. Επομένως, αν το μέτρο συνάφειας στην τρέχουσα δομική κατάσταση (όπου αναζητάτε αν μια ρωγμή έχει πιθανόν αναπτυχθεί) του κελύφους είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το αντίστοιχο της υγιούς, δηλαδή αν $\Gamma_{\mathcal{H}} - \Gamma_{\mathcal{U}} \leq 0$, τότε θεωρείται ότι δεν έχει αναπτυχθεί ρωγμή

Πίνακας 2.2: Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων (μέθοδος βασισμένη στο μέτρο συνάφειας – CMBM).

Πρόβλημα	Κατάσταση 1	Κατάσταση 2	H_0 Υπόθεση (μηδενική)	H_1 Υπόθεση (εναλλακτική)
SDD	Υγιές	Ρηγματωμένο;	$\delta\Gamma^\dagger \leq 0$: όχι ρωγμή	$\delta\Gamma > 0$: ρωγμή
RQA	Επιτυχής Επιδιόρθωση;	Υγιές	$\delta\Gamma^\dagger < 0$ ανεπιτυχής επιδιόρθωση	$\delta\Gamma \geq 0$ επιτυχής επιδιόρθωση
RQA-II	Επιδιόρθωση; (Μερική)	Ρηγματωμένο	$\delta\Gamma^\dagger \leq 0$ ανεπιτυχής επιδιόρθωση	$\delta\Gamma > 0$ (μερικώς) επιτυχής επιδιόρθωση

$$^\dagger \delta\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$$

(Πίνακας 2.2).

Στα πλαίσια του RQA προβλήματος, το μέτρο συνάφειας του κελύφους στην επισκευασμένη δομική κατάσταση ($\Gamma_{\mathcal{R}}$), συγκρίνεται με το αντίστοιχο της υγιούς κατάστασης ($\Gamma_{\mathcal{H}}$). Αν $\Gamma_{\mathcal{R}} - \Gamma_{\mathcal{H}} < 0$ τότε το μέτρο συνάφειας της επισκευασμένης δομικής κατάστασης είναι μικρότερο από το αντίστοιχο της υγιούς, με αποτέλεσμα να θεωρείται ότι οι μη - γραμμικότητες, οι οποίες εισάχθηκαν από τη ρωγμή, δεν αντισταθμίζονται επιτυχώς. Επομένως το κέλυφος χαρακτηρίζεται ως ανεπιτυχώς επισκευασμένο.

Επιπροσθέτως, το μέτρο συνάφειας $\Gamma_{\mathcal{R}}$ αξίζει να συγκριθεί και με το $\Gamma_{\mathcal{D}}$ (σύγκριση επισκευασμένου με ρηγματωμένου). Αν και η εν λόγω σύγκριση δεν είναι ακριβώς RQA πρόβλημα, για το λόγω αυτό ονομάζεται *RQA II* πρόβλημα, μπορεί να δώσει επιπλέον πληροφορίες. Έτσι αν $\Gamma_{\mathcal{R}} - \Gamma_{\mathcal{D}} \leq 0$, δηλαδή το μέτρο συνάφειας στην επισκευασμένη δομική κατάσταση είναι μικρότερο ή ίσο με το αντίστοιχο της ρηγματωμένης, τότε όχι μόνο οι μη - γραμμικότητες λόγω της ρωγμής δεν έχουν αντισταθμιστεί, αλλά η επικόλληση του επιθέματος εισήγαγε επιπρόσθετες. Από την άλλη πλευρά αν $\Gamma_{\mathcal{R}} - \Gamma_{\mathcal{D}} > 0$ τότε υπάρχει βελτίωση, αλλά χωρίς η ολοκληρωτική αντιστάθμιση της μη - γραμμικότητας της ρωγμής να επιβεβαιώνεται πλήρως. Σε αυτή τη περίπτωση είναι ασφαλέστερο να θεωρεί το κέλυφος ως μερικώς ορθά επισκευασμένο.

Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα υπό το πρίσμα της πρακτικότητας, αρχικά εφαρμόζεται ο RQA έλεγχος (σύγκριση επισκευασμένου με υγιές). Σε περίπτωση αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης, (Πίνακας 2.2), τότε εφαρμόζεται ο RQA II έλεγχος (σύγκριση επισκευασμένου με ρηγματωμένο). Αν σε αυτή την περίπτωση η εναλλακτική (αντίστοιχα: η μηδενική) υπόθεση γίνει αποδεκτή, τότε το κέλυφος χαρακτηρίζεται ως μερικώς (αντίστοιχα: ανεπιτυχώς) επισκευασμένο (Πίνακας 2.2).

Τόσο το SDD όσο και το RQA πρόβλημα αντιμετωπίζονται μέσω στατιστικών ελέγχων υποθέσεων

(στον Πίνακα 2.2 ορίζονται οι καταστάσεις 1 και 2):

$$\begin{aligned} H_0 : \delta\Gamma &\triangleq \Gamma_1 - \Gamma_2 \leq 0 \quad (< 0 \text{ για το RQA πρόβλημα}) \quad (\text{μηδενική υπόθεση}) \\ H_1 : \delta\Gamma &\triangleq \Gamma_1 - \Gamma_2 > 0 \quad (\geq 0 \text{ για το RQA πρόβλημα}) \quad (\text{εναλλακτική υπόθεση}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, λαμβάνεται υπόψη η διαφορά των εκτιμώμενων μέτρων συνάφειας της κατάστασης 1 και 2. Επομένως:

$$\delta\hat{\Gamma} \triangleq \hat{\Gamma}_1 - \hat{\Gamma}_2 \sim \mathcal{N}(\delta\Gamma, \delta\sigma_\Gamma^2) \quad \text{με} \quad \delta\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2 \quad \delta\sigma_\Gamma^2 = \sigma_{\Gamma_1}^2 + \sigma_{\Gamma_2}^2 \quad (2.24)$$

η οποία λόγω της Εξ. (2.22) ακολουθεί κανονική κατανομή με την υποδεικνυόμενη μέση τιμή (πραγματική διαφορά του μέτρου συνάφειας Γ) και διασπορά. Σημειώνεται ότι τα $\hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_2$ είναι αμοιβαίως ανεξάρτητα διότι προκύπτουν από διαφορετικά σαι δεδομένων.

Υπό το καθεστώς της μηδενικής υπόθεσης (H_0): $\delta\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2 \leq 0$ (ή < 0) και $\delta\sigma_\Gamma^2 = 2\sigma_{\Gamma_1}^2$, επομένως:

$$\text{Υπό την } H_0 : \quad \delta\hat{\Gamma} \triangleq \hat{\Gamma}_1 - \hat{\Gamma}_2 \sim \mathcal{N}(\delta\Gamma, 2\sigma_{\Gamma_1}^2) \quad (\delta\Gamma \leq 0 \text{ ή } \delta\Gamma < 0) \quad (2.25)$$

Η διασπορά $\sigma_{\Gamma_1}^2$ είναι άγνωστη, αλλά δύναται να εκτιμηθεί επί τη βάση των Εξ. (2.22) και (2.20), αντικαθιστώντας την πραγματική συνάφεια με την εκτίμησή της. Κατόπιν τούτου, η εμφάνιση ή όχι στατιστικώς σημαντικής μείωσης του μέτρου συνάφειας Γ_2 της καταστάσεως 2, συγκρινόμενη με την Γ_1 της 1, μπορεί να υλοποιηθεί μέσω κατάλληλου στατιστικού ελέγχου υποθέσεων. Λόγω του ότι η μηδενική υπόθεση είναι και αυτή σύνθετη, η ανάπτυξη ενός στατιστικού ελέγχου υποθέσεων σε οποιαδήποτε επίπεδο σημαντικότητας (σφάλμα τύπου Ι) α απαιτεί τη γνώση την μη - διαθέσιμης μέση τιμής της διαφοράς, $\delta\Gamma \leq 0$ (ή < 0). Προκειμένου να αντιμετωπιστεί η δυσκολία αυτή, εφαρμόζεται η ακόλουθη συντηρητική διαδικασία [97, σελ.386]. Στα πλαίσια της διαδικασίας αυτής το επίπεδο σημαντικότητας επιλέγεται σύμφωνα με την χειρότερη δυνατή, υπό το καθεστώς της μηδενικής υποθέσεως H_0 , περίπτωση, η οποία είναι $\delta\Gamma = 0$. Λογίζοντας την εκτιμώμενη διασπορά $\hat{\sigma}_{\Gamma_1}^2$ ως καθοριστική ποσότητα (ποσότητα με αμελητέα μεταβλητότητα), αναπτύσσεται ο ακόλουθος έλεγχος:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\hat{\Gamma}}{\sqrt{2\hat{\sigma}_{\Gamma_1}^2}} < Z_{1-\alpha} &\implies H_0 \text{ αποδοχή} \\ \text{Αλλιώς} &\implies H_1 \text{ αποδοχή} \end{aligned} \quad (2.26)$$

όπου α το μέγιστο δυνατό σφάλμα τύπου Ι που μπορεί να εμφανιστεί στη μηδενική υπόθεση και $Z_{1-\alpha}$ το κρίσιμο $1 - \alpha$ όριο της κανονικοποιημένης κανονικής κατανομής (τυπικές τιμές είναι $\alpha = 0.05$, $Z_{0.95} = 1.645$).

2.4 Πειραματικά Αποτελέσματα

Προτού δοθούν τα αποτελέσματα σχετικά με τα SDD και RQA προβλήματα, είναι αρκετά διαφωτιστικό να παρουσιαστεί πώς επηρεάζεται η δυναμική του κελύφους από την ύπαρξη της ρωγμής και την επικόλληση του ενισχυτικού επιθέματος. Τα Σχήματα 2.7 - 2.8 παρουσιάζουν τα μέτρα των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας (FRFs) και τις αντίστοιχες τετραγωνικές συνάφειες (Coherence), όπως αυτές προκύπτουν από την υγιή, ρηγματωμένη και επισκευασμένη δομική κατάσταση του κελύφους (στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζεται το χαμηλό εύρος συχνοτήτων, ενώ στο Σχήμα 2.8 το αντίστοιχο υψηλό). Οι εκτιμήσεις αυτές βασίζονται στην μέθοδο Welch, κατά τις οποίες η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 6 \text{ kHz}$, τα διαθέσιμα σήματα χωρίζονται σε 30 μη-επικαλυπτόμενα τμήματα μήκους 16384 δεδομένων το καθένα, ενώ χρησιμοποιείται παράθυρο εξομάλυνσης τύπου Hanning.

Συγκρίνοντας τις συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας του υγιούς και ρηγματωμένου κελύφους στο $350 - 600 \text{ Hz}$ [χαμηλό εύρος συχνοτήτων - Σχήμα 2.7(a)], παρατηρείται ότι οι δύο αυτές καμπύλες είναι σχεδόν ταυτόσημες. Αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτό το εύρος συχνοτήτων ($350 - 600 \text{ Hz}$) εμφανίζονται οι πρώτες τέσσερις ιδιομορφές (δεν υπάρχουν ιδιομορφές κάτω από τα 350 Hz), οι οποίες είναι κατά κύριο λόγο υπεύθυνες για τη “συνολική” (“global”) δυναμική συμπεριφορά του κελύφους. Διαφορές αρχίζουν να εμφανίζονται για συχνότητες πάνω από τα 600 Hz [Σχήμα 2.8(a)], όπου και εμφανίζονται οι ιδιομορφές οι οποίες διαμορφώνουν κυρίως την “τοπική” (“local”) δυναμική συμπεριφορά του κελύφους. Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι η ρωγή μεταβάλλει κυρίως την τοπική δυναμική συμπεριφορά του κελύφους και πολύ λιγότερο την αντίστοιχη συνολική. Αξίζει να σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι σε ποιοτική συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της αναφοράς [83].

Από την άλλη μεριά, η σύγκριση των μέτρων των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας του υγιούς (ή ρηγματωμένου) και του επισκευασμένου καταδεικνύει διαφορές, οι οποίες είναι εμφανέστερες ακόμα και στο χαμηλό εύρος συχνοτήτων [Σχήμα 2.7(a)]. Επιπλέον οι διαφορές αυτές γίνονται μεγαλύτερες για συχνότητες μεγαλύτερες από 600 Hz [Σχήμα 2.8(a)]. Τα αποτελέσματα αυτά δηλώνουν ότι η επικόλληση του ενισχυτικού επιθέματος μεταβάλλει σημαντικά στη συνολική δυναμική συμπεριφορά του κελύφους.

Στη συνέχεια αντιμετωπίζονται τα προβλήματα SDD και RQA, επί τη βάση των MPBM και CMBM μεθοδολογιών. Προκειμένου να ελεγχθούν οι δυνατότητες των δύο μεθόδων αυτών, θεωρούνται δύο διαφορετικά SDD προβλήματα. Στο πρώτο, το οποίο αναφέρεται ως SDD I, το υγιές κέλυφος συγκρίνεται με το ρηγματωμένο. Στο δεύτερο, το οποίο αναφέρεται ως SDD II, το υγιές συγκρίνεται

Σχήμα 2.7: Σύγκριση των μέτρων των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας (a) και συνάφειας (b) στο εύρος χαμηλών συχνοτήτων για τις τρεις δομικές καταστάσεις του κελύφους **υγιές (healthy)** (σκουρότερη και λεπτότερη γραμμή), **ρηγματωμένο (damaged)** (η πιο ανοιχτόχρωμη και παχύτερη γραμμή), **επιδιορθωμένο (restored)** (η δεύτερη πιο σκούρα και παχιά γραμμή), Σημείο μέτρησης A, δεδομένα από ένα πείραμα, εκτιμήσεις μέσω της μεθόδου Welch, $f_s = 6 \text{ kHz}$.

με τον εαυτό του (φυσικά χρησιμοποιώντας διαφορετικά σει δεδομένων). Η επιλογή αυτή γίνεται έτσι ώστε να ελεγχθεί η αξιοπιστία των μεθόδων, δηλαδή για το αν ανιχνεύουν την ύπαρξη ρωγμής όταν αυτή δεν υπάρχει (false alarms).

2.4.1 Η Μέθοδος των Μορφικών Παραμέτρων (Modal Parameter Based Method – MPBM)

Η μέθοδος που βασίζεται στα μορφικά χαρακτηριστικά (MRBM), συγκρίνει τις φυσικές συχνότητες και τους λόγους απόσβεσης του υγιούς με του ρηγματωμένου (SDD) ή με του επισκευασμένου (RQA) κελύφους. Η παρούσα ανάλυση βασίζεται στη σύγκριση των μορφικών χαρακτηριστικών, όπως αυτά παρουσιάζονται μέχρι τα 540 Hz . Σύμφωνα με το Σχήμα 2.7, στο εύρος αυτό εμφανίζονται οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές. Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι η επίδραση της επιδερμικής ρωγμής στο εύρος αυτό (χαμηλό εύρος) είναι ελάχιστη, διαπιστώνεται ότι η αντιμετώπιση του SDD προβλήματος σε αυτό το εύρος παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία. Προφανώς, αν επιλεγόταν μεγαλύτερο εύρος (για παράδειγμα μέχρι τα 1500 Hz), η ανίχνευση θα ήταν ευκολότερη (βλέπε [98] για περισσότερες πληροφορίες), αλλά δε θα ήταν δυνατόν να ελεγχθεί το κατά πόσο η μέθοδος είναι ικανή να αν-

Σχήμα 2.8: Σύγκριση των μέτρων των συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας (a) και συνάφειας (b) στο εύρος υψηλών συχνοτήτων για τις τρεις δομικές καταστάσεις του κελύφους **υγιές (healthy)** (σκοιρότερη και λεπτότερη γραμμή), **ρηγματωμένο (damaged)** (η πιο ανοιχτόχρωμη και παχύτερη γραμμή), **επιδιορθωμένο (restored)** (η δεύτερη πιο σκούρα και παχιά γραμμή), Σημείο μέτρησης A, δεδομένα από ένα πείραμα, εκτιμήσεις μέσω της μεθόδου Welch, $f_s = 6 \text{ kHz}$].

τιλαμβάνεται και να καταγράφει ακόμα και τις μικρές τροποποιήσεις στη δομική κατάσταση του κελύφους.

Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάθε πείραμα ο λόγος θορύβου προς σήματος (noise-to-signal ration) είναι ιδιαίτερα χαμηλός (σε όλες τις δομικές καταστάσεις του κελύφους). Αυτό είναι προφανές από τη συνάρτηση της τετραγωνικής συνάφειας [Σχήματα 2.7(b) και 2.8(b)], η οποία λαμβάνει τιμές (για κάθε συχνότητα) πολύ κοντά στη μονάδα. Το γεγονός αυτό δικαιολογεί τη επιλογή της χρήσης των διανυσματικών μοντέλων αυτοπαλινδρόμησης με εξωγενή διέγερση (VARX) για την αναγνώριση των μορφικών χαρακτηριστικών.

Τα μετρούμενα σήματα, πριν χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση των μοντέλων VARX υπόκεινται σε κατάλληλη προεπεξεργασία (signal preprocessing). Πιο συγκεκριμένα τα σήματα, τα οποία ελήφθησαν με δειγματοληψία $f_s = 6 \text{ kHz}$, φιλτράρονται από ένα βαθυπερατό (lowpass) ψηφιακό φίλτρο δεκάτης τέταρτης τάξεως τύπου Chebyshev I, με συχνότητα αποκοπής στα 600 Hz , και γίνεται επαναδειγματοληψία αυτών με συχνότητα $f_s = 1500 \text{ Hz}$. Κατόπιν του φιλτραρίσματος και της επαναδειγματοληψίας, τα σήματα κανονικοποιούνται, έτσι ώστε να βρίσκονται στο ίδιο εύρος,

Σχήμα 2.9: Το ίχνος του Σ_e και το κριτήριο BIC συναρτήσει της AR τάξης για το υγιές (a,b), ρηγματωμένο (c,d) και επιδιορθωμένο (e,f) κέλυφος (αναγνώριση μέσω μοντέλων VARX, $f_s = 1.5 \text{ kHz}$, Σημεία μέτρησης A B και C).

ενώ αφαιρείται η δειγματική τους μέση τιμή. Από όλο το μήκος των προεπεξεργασμένων σημάτων, μόνο τα 8 s (12000 δεδομένα) χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση.

Βασική φάση (Baseline phase)

Αναγνώριση βάσει μοντέλων VARX. Η αναγνώριση τρισδιάστατων [η μέθοδος χρησιμοποιεί τις μετρούμενες επιταχύνσεις και από τα τρία σημεία μέτρησης, A, B και C, συνεπώς $m = 3$ - Εξ. (2.2)] μοντέλων $\text{VARX}(k, k)$ για $k = 7, \dots, 35$, χρησιμοποιώντας τα προεπεξεργασμένα ταλαντωτικά σήματα από το υγιές κέλυφος, οδηγεί σε διαρκώς μειωνόμενο ίχνος του εκτιμώμενου πίνακα συνδυασποράς $\hat{\Sigma}_e$ και κριτήριο BIC. Εντούτοις, το ίχνος σχεδόν παύει να μειώνεται για τάξεις αυτοπαλινδρόμησης $k \geq 20$ [Σχήμα 2.9(a)]. Επιπλέον, όπως παρουσιάζεται από το διάγραμμα σταθεροποίησης των φυσικών συχνοτήτων (Σχήμα 2.10) μια τάξη αυτοπαλινδρόμησης ίσης με 20 επαρκεί για τη σταθεροποίηση των τεσσάρων πρώτων φυσικών συχνοτήτων. Έτσι η τάξη $k = 20$ επιλέγεται και για το κομμάτι της αυτοπαλινδρόμησης, άλλα και για το κομμάτι της εξωγενούς διεγέρσεως [Εξ. (2.2)].

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία αναγνώρισεως, αλλά τώρα χρησιμοποιώντας τα προεπεξεργασμένα σήματα από το ρηγματωμένο και επισκευασμένο κέλυφος, αντίστοιχα, λαμβάνονται όμοια αποτελέσματα (βλέπε Σχήματα 2.9 και 2.10). Έτσι, ένα μοντέλο $\text{VARX}(20, 20)$ επιλέγεται για όλες τις δομικές καταστάσεις.

Τα επιλεγμένα μοντέλα $\text{VARX}(20, 20)$ εμφανίζονται, και για τις τρεις δομικές καταστάσεις, ικανά στο να παρέχουν ακριβείς προβλέψεις ενός βήματος (one step ahead predictions), δίνοντας σφάλματα πρόβλεψης μικρότερα του 0,03%. Επιπροσθέτως, η φασματική απόκριση του κάθε μοντέλου

Σχήμα 2.10: Διάγραμμα σταθεροποίησης συχνοτήτων για το υγιές, ρηγματωμένο και επιδιορθωμένο κέλυφος, αντίστοιχα (αναγνώριση μέσω μοντέλων VARX, $f_s = 1.5 \text{ kHz}$, Σημεία μέτρησης A B και C).

Σχήμα 2.11: Σύγκριση των μέτρων των αποκρίσεων συχνότητας του εκτιμώμενου μοντέλου ARX (λεπτή γραμμή) με τα αντίστοιχα μη - παραμετρικά, μέσω της μεθόδου Welch, εκτιμώμενα (παχιά γραμμή): (a) υγιές, (b) ρηγματωμένο, (c) επιδιορθωμένο κέλυφος, αντίστοιχα (Σημείο μέτρησης A, οι μη - παραμετρικές εκτιμήσεις υλοποιούνται κατόπιν της προεπεξεργασίας των σημάτων).

(Bode) είναι σε εξαιρετική συμφωνία με τις αντίστοιχες μη - παραμετρικές εκτιμώμενες συναρτήσεις απόκρισης συχνότητας, όπως αυτές εκτιμήθηκαν βάσει της μεθόδου Welch (Σχήμα 2.11).

Αρχική αποτίμηση των επιπτώσεων της ρωγμής και της επισκευής. Προτού γίνει παράθεση των αποτελεσμάτων για τα SDD και RQA προβλήματα, ελέγχεται η επίδραση της ρωγμής και της επισκευής πάνω στις φυσικές συχνότητες και στους λόγους απόσβεσης του κελύφους. Για το λόγο αυτό γίνεται η εκτίμηση των διαστημάτων εμπιστοσύνης (σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$) των τεσσάρων πρώτων ιδιομορφών και για στις τρεις δομικές καταστάσεις του κελύφους, επί τη βάση κατάλληλης Monte Carlo διαδικασίας [50 VARX(20, 20) εκτιμήσεις βάσει 50 διαφορετικών σετ δεδομένων από κάθε δομική κατάσταση].

Στο Σχήμα 2.12 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα διαστήματα εμπιστοσύνης των τεσσάρων πρώτων φυσικών συχνοτήτων και λόγων απόσβεσης του υγιούς και ρηγματωμένου κελύφους. Τα

Σχήμα 2.12: Εκτιμήσεις, επί τη βάση των μοντέλων VARX, των φυσικών συχνοτήτων και των λόγων απόσβεσης για το υγιές ($-o-$) και το ρηγματωμένο κέλυφος ($--\times--$) (Αποτελέσματα Monte Carlo, οι σημειακές εκτιμήσεις δηλώνονται με o ή $\times$, $f_s = 1.5 \text{ kHz}$).

Σχήμα 2.13: Εκτιμήσεις, επί τη βάση των μοντέλων VARX, των φυσικών συχνοτήτων και των λόγων απόσβεσης για το υγιές ($-o-$) και το επιδιορθωμένο κέλυφος ($--\times--$) (Αποτελέσματα Monte Carlo, οι σημειακές εκτιμήσεις δηλώνονται με o ή $\times$, $f_s = 1.5 \text{ kHz}$).

αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι η σημειακές εκτιμήσεις (μέσες τιμές) και των τεσσάρων πρώτων φυσικών συχνοτήτων του ρηγματωμένου κελύφους είναι ελαφρώς μικρότερες από τις αντίστοιχες του υγιούς. Εντούτοις, τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης επικαλύπτονται, γεγονός που δηλώνει ότι η επίδραση της ρωγμής πάνω στις φυσικές συχνότητες είναι μάλλον περιορισμένη. Επιπλέον, είναι σημαντικό να παρατηρηθεί η μικρή μείωση στους πρώτους δύο λόγους απόσβεσης [Σχήμα 2.12], αλλά είναι σημαντικότερο το γεγονός ότι τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης των δύο πρώτων λόγων απόσβεσης είναι μη - επικαλυπτόμενα. Αυτό δείχνει ότι οι δύο πρώτοι λόγοι απόσβεσης έχουν μειωθεί πέρα από οποιαδήποτε στατιστική αβεβαιότητα, υποδεικνύοντας την ευαισθησία τους στην ύπαρξη της ρωγμής.

Σχήμα 2.14: Αποτελέσματα μονοδιάστατων στατιστικών ελέγχων για τη μέθοδο των μορφικών παραμέτρων (MPBM): Έλεγχος των διαστημάτων εμπιστοσύνης των διαφορών των φυσικών συχνοτήτων και των λόγων απόσβεσης για το αν περιέχουν το μηδέν ($- \cdot -$) για το SDD I (a,b) και SDD II (c,d) και το RQA (e,f) πρόβλημα, αντίστοιχα.

Παρόμοια σύγκριση απεικονίζεται στο Σχήμα 2.13, όπου συγκρίνονται οι τέσσερις πρώτες φυσικές συχνότητες και λόγοι απόσβεσης του υγιούς και του επισκευασμένου. Όπως είναι εμφανές, τα διαστήματα εμπιστοσύνης της τρίτης φυσικής συχνότητας και όλων των λόγων απόσβεσης είναι μη - επικαλυπτόμενα. Το γεγονός αυτό ενισχύει την προσδοκία (βλέπε προηγουμένως και Σχήματα 2.7 - 2.8), ότι το υγιές και επισκευασμένο κέλυφος έχουν μάλλον διαφορετικά μορφικά χαρακτηριστικά. Η διαφοροποίηση αυτή φαίνεται να προέρχεται από την αύξηση της μάζας του κελύφους λόγω της επικολλήσεως του επιθέματος.

Φάση επιθεώρησης: Προβλήματα SDD και RQA

Ο σκοπός της παρούσας υποενότητας είναι η αξιολόγηση του κατά πόσο η MPBM είναι σε θέση να ανιχνεύσει την επιδερμική ρωγμή, αποφεύγοντας λανθασμένες ανιχνεύσεις αυτής (false alarms).

Το SDD I πρόβλημα (ρηγματωμένο κέλυφος). Τα αποτελέσματα των μονοδιάστατων (βαθμωτών) και των πολυδιάστατων στατιστικών ελέγχων υποθέσεων παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Μονοδιάστατοι έλεγχοι: Οι εκτιμήσεις των διαστημάτων εμπιστοσύνης (σε επίπεδο σημαντικότη-

τας $\alpha = 0.05$) των επιμέρους διαφορών των τεσσάρων πρώτων φυσικών συχνοτήτων και λόγων απόσβεσης μεταξύ της υγιούς και τρέχουσας (η ύπαρξη της ρωγμής δε θεωρείται δεδομένη) δομικής κατάστασης παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.14(a,b). Αν και οι μεταβολές στις φυσικές συχνότητες είναι ελάχιστες (όπως ήδη συζητήθηκε με αφορμή το Σχήμα 2.12), η ρωγμή ανιχνεύεται επιτυχώς από τη μεταβολή της τρίτης φυσικής συχνότητας (το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης δεν περιέχει το μηδέν). Οι διαφορές στους λόγους απόσβεσης είναι μεγαλύτερες, με τη ρωγμή να ανιχνεύεται από τους περισσότερους από αυτούς, με εξαίρεση του τετάρτου (τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης δεν περιέχουν το μηδέν). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαίωσαν ότι οι λόγοι απόσβεσης είναι πιο ευαίσθητοι στην ύπαρξη της ρωγμής, από ότι οι φυσικές συχνότητες. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι αν και τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης των φυσικών συχνοτήτων του υγιούς και ρηγματωμένου κελύφους παρουσιάστηκαν ως επικαλυπτόμενα, ο προτεινόμενος στατιστικός έλεγχος υποθέσεων καταδεικνύει σημαντική, πέρα από τη στατιστική αβεβαιότητα, μείωση στην τρίτη φυσική συχνότητα.

Πολυδιάστατοι έλεγχοι: Όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι προτιμότερο να εφαρμοστεί ο πολυδιάστατος έλεγχος ξεχωριστά για τις φυσικές συχνότητες και τους λόγους απόσβεσης. Στο Σχήμα 2.15(a) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του πολυδιάστατου στατιστικού ελέγχου υποθέσεων αναφορικά με τις μεταβολές των φυσικών συχνοτήτων και των λόγων απόσβεσης, αντίστοιχα. Όπως είναι φανερό η στατιστική ποσότητα βάσει της οποίας υλοποιείται ο έλεγχος είναι, και στις δύο περιπτώσεις, μεγαλύτερη από την κρίσιμη (σε επίπεδο ρίσκου $\alpha = 0.05$) τιμή, υποδηλώνοντας ανίχνευση (με επιτυχία) της ρωγμής.

Τα παραπάνω αποτελέσματα κατέδειξαν ότι παρά την περιορισμένη επίδραση της ρωγμής πάνω στα συνολικά (global) δυναμικά χαρακτηριστικά του κελύφους, η MPBM κατάφερε να ανιχνεύσει μεταβολές, πέρα από τη στατιστική αβεβαιότητα, τόσο στις φυσικές συχνότητες όσο και στους λόγους απόσβεσης, παρέχοντας επιτυχής λύση στο SDD πρόβλημα.

Το SDD II πρόβλημα (υγιές δοκίμιο). Τα αποτελέσματα των μονοδιάστατων (βαθμωτών) και των πολυδιάστατων στατιστικών ελέγχων υποθέσεων για την περίπτωση του SDD II προβλήματος παρουσιάζονται στη συνέχεια. Ο σκοπός στην παρούσα φάση είναι ο έλεγχος του κατά πόσο η MPMB είναι σε θέση να ανιχνεύσει επιτυχώς τη μη ύπαρξη της ρωγμής.

Μονοδιάστατοι έλεγχοι: Οι εκτιμήσεις των διαστημάτων εμπιστοσύνης (σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$) των επιμέρους διαφορών των τεσσάρων πρώτων φυσικών συχνοτήτων και λόγων απόσβεσης, που αντιστοιχούν σε δύο περιπτώσεις, κατά τις οποίες το κέλυφος βρίσκεται και στις δύο στην

Σχήμα 2.15: Αποτελέσματα πολυδιάστατων στατιστικών ελέγχων για τη μέθοδο των μορφικών παραμέτρων (MPBM): Σύγκριση της στατιστικής ποσότητας στην οποία στηρίζεται ο έλεγχος (×) με τη κρίσιμη τιμή (— · —) για το SDD I (a,b) και SDD II (c,d) και το RQA (e,f) πρόβλημα, αντίστοιχα.

υγιά δομική του κατάσταση, παρουσιάζονται στο 2.16(c). Όπως είναι εμφανές, τόσο οι διαφορές στις φυσικές συχνότητες όσο και στους λόγους απόσβεσης είναι στατιστικά ασήμαντες (τα διαστήματα εμπιστοσύνης περιέχουν το μηδέν), αποτέλεσμα που δηλώνει ότι η MPBM επιλέγει (ορθά) την μηδενική υπόθεση, δηλαδή τη μη ύπαρξη της ρωγμής.

Πολυδιάστατοι έλεγχοι: Παρόμοια αποτελέσματα καταγράφονται και με τη χρήση των πολυδιάστατων ελέγχων σε επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha = 0.05$. Σύμφωνα με το Σχήμα 2.15(b), η στατιστική ποσότητα, στον έλεγχο της οποίας στηρίζεται ο πολυδιάστατος στατιστικός έλεγχος, είναι καθαρά μικρότερη από την κρίσιμη τιμή, τόσο για τις φυσικές συχνότητες όσο και για τους λόγους απόσβεσης. Γεγονός που δηλώνει και πάλι τη (ορθή) επιλογή της μηδενική υπόθεσης H_0 .

Το RQA πρόβλημα (επισκευασμένο κέλυφος). Τυπικά αποτελέσματα για το RQA πρόβλημα (σύγκριση υγιούς με επισκευασμένο) βασίζονται σε κατάλληλους στατιστικούς ελέγχους υποθέσεων (σύμφωνα με τον Πίνακα 2.1) και παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.14(e,f) (μονοδιάστατοι έλεγχοι) και Σχήμα 2.15(c) (πολυδιάστατοι έλεγχοι). Οι μονοδιάστατοι έλεγχοι καταδεικνύουν ότι οι μεταβολές στην πρώτη και τρίτη φυσική συχνότητα, όπως επίσης και στους τέσσερις λόγους απόσβεσης, είναι στατιστικά σημαντικές (τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης δεν περιέχουν το μηδέν). Παρόμοια συμπεράσματα προκύπτουν από τους πολυδιάστατους στατιστικούς ελέγχους υποθέσεων, όπου η στατιστική ποσότητα που ελέγχεται είναι εμφανώς μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι τα μορφικά χαρακτηριστικά του επισκευασμένου είναι διαφορετικά από εκείνα του υγιούς κελύφους. Εντούτοις, οι διαφοροποιήσεις αυτές μπορεί να είναι είτε λόγω ανεπαρκούς επιδιόρθωσης ή/και λόγω αύξησης της συνολικής μάζας του κελύφους από την επικόλληση του ενισχυτικού επιθέματος. Επειδή η MPBM δεν είναι σε θέση να διαχωρίσει τις δύο αυτές καταστάσεις, δεν προτείνεται για την αντιμετώπιση του RQA προβλήματος.

2.4.2 Η Μέθοδος του Μέτρου Συνάφειας (CMBM)

Βασική φάση (Baseline phase)

Η μέθοδος χρησιμοποιεί τις εκτιμήσεις των διαστημάτων εμπιστοσύνης του μέτρου συνάφειας (για καθένα από ζεύγη διέγερσης - μετρούμενης επιτάχυνσης ξεχωριστά), όπως αυτά προκύπτουν επί τη βάση της μεθόδου φασματικής εκτιμήσεως του Welch [88, σελ.52] (τα σήματα μήκους 492000 δεδομένων χωρίζονται σε $n_d = 30$ μη - επικαλυπτόμενα τμήματα ενώ χρησιμοποιείται παράθυρο εξομάλυνσης Hanning, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι $f_s = 6 \text{ kHz}$, ενώ η προκύπτουσα ανάλυση στη συχνότητα είναι $\delta\omega = 0.3662 \text{ Hz}$). Το μέτρο συνάφειας εκτιμάται στο εύρος $0,38 - 2,00 \text{ kHz}$. Η επιλογή αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι η πρώτη ιδιομορφή του κελύφους (σε όλες τις δομικές του καταστάσεις) εμφανίζεται λίγο πριν τα 400.

Φάση επιθεώρησης (Inspection phase)

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης του μέτρου συνάφειας επαναπροσδιορίζονται σε κάθε φάση επιθεώρησης, δηλαδή όταν διερευνάται αν υπάρχει βλάβη (SDD) ή αν η επιδιόρθωση είναι επιτυχής (RQA). Οι έλεγχοι οι οποίοι αναπτύσσονται παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η σύγκριση του επιδιορθωμένου με το ρηγματωμένο κέλυφος μπορεί να δώσει επιπλέον πληροφορίες (RQA II πρόβλημα).

Πριν δοθούν τα αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων υποθέσεων, είναι αρκετά ενημερωτική η αρχική μελέτη των διαστημάτων εμπιστοσύνης του μέτρου συνάφειας σε κάθε δομική κατάσταση του κελύφους. Τυπικά αποτελέσματα (σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.05$) παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.16(a), για κάθε μία από τα τρία σημεία μέτρησης των επιταχύνσεων (Σημεία A, B, C). Όπως είναι εμφανές, η προσδοκία βάσει της οποίας έχει μορφοποιηθεί η CMBM ισχύει, αφού το μέτρο συνάφειας μειώνεται με τη ρωγμή και αυξάνεται, μάλιστα ξεπερνάει το αντίστοιχο του υγιούς, ξανά με την ορθή επιδιόρθωση.

Το SDD I πρόβλημα (ρηγματωμένο κέλυφος). Τυπικά αποτελέσματα τις συγκρίσεως του υγιούς με το ρηγματωμένο κέλυφος (βλέπε Πίνακα 2.2) παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.16(b). Η στατιστική ποσότητα $\left[\delta\hat{\Gamma} / \sqrt{2\hat{\sigma}_{\Gamma_1}^2} - \text{βλέπε Εξ. (2.26)} \right]$ είναι για όλα τα σημεία μέτρησης (A, B και C) μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή (σε επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha_{max} = 0.05$, υποδεικνύοντας (ορθά) την ύπαρξη της ρωγμής (αποδοχή της H_1 υπόθεσης - βλέπε Πίνακα 2.2), αφού τα μέτρα συνάφειας του υγιούς κελύφους είναι στατιστικά μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του ρηγματωμένου.

Σχήμα 2.16: Αποτελέσματα των στατιστικών ελέγχων για τη μέθοδο του μέτρου συνάφειας (CMBM) για κάθε σημείο μέτρησης (A,B,C): (a) Διαστήματα εμπιστοσύνης του μέτρου συνάφειας για το υγιές ($\diamond$), το ρηγματωμένο ($+$) και το επιδιορθωμένο ($\bullet$) κέλυφος, (b) Σύγκριση της στατιστικής ποσότητας ($\times$), στην οποία βασίζεται ο έλεγχος, με τη κρίσιμη τιμή ($- \cdot -$) για το SDD I πρόβλημα, (c) Σύγκριση της στατιστικής ποσότητας ($\times$), στην οποία βασίζεται ο έλεγχος, με τη κρίσιμη τιμή ($- \cdot -$) για το SDD II πρόβλημα, (d) Σύγκριση της στατιστικής ποσότητας ($\times$), στην οποία βασίζεται ο έλεγχος, με τη κρίσιμη τιμή ($- \cdot -$) για το RQA πρόβλημα, (e) Σύγκριση της στατιστικής ποσότητας ($\times$), στην οποία βασίζεται ο έλεγχος, με τη κρίσιμη τιμή ($- \cdot -$) για το RQA II πρόβλημα.

Το SDD II πρόβλημα (υγιές κέλυφος). Ο έλεγχος υποθέσεων (σε επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha_{max} = 0.05$) και για τα τρία σημεία μέτρησης, παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.16(c). Σε κάθε περίπτωση η στατιστική ποσότητα βάσει της οποίας υλοποιείται ο έλεγχος είναι μικρότερη από την κρίσιμη τιμή, υποδεικνύοντας (ορθά) την αποδοχή της H_0 υπόθεσης, και ως εκ τούτου τη μη ύπαρξη της ρωγμής.

Το RQA πρόβλημα (επισκευασμένο κέλυφος). Τυπικά αποτελέσματα αναφορικά με το RQA πρόβλημα (σύγκριση υγιούς με επισκευασμένο - βλέπε Πίνακα 2.2), παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.16(d). Η στατιστική ποσότητα βάσει της οποίας υλοποιείται ο έλεγχος είναι μεγαλύτερη (σε επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha_{max} = 0.05$) από την κρίσιμη τιμή και για τα τρία σημεία μέτρησης. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην αποδοχή της H_1 υπόθεσης (βλέπε Πίνακα 2.2), και ως εκ τούτου στο συμπέρασμα ότι τα μέτρα συνάφειας του επιδιορθωμένου κελύφους είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα του υγιούς. Αξίζει να σημειωθεί ότι η επιδιόρθωση μέσω επικολλήσεως του ενισχυτικού επιθέματος όχι μόνο κατάφερε να αντισταθμίσει την (μη - γραμμική) επίδραση της ρωγμής, αλλά επίσης βελτίωσε επιπλέον ατέλειες, τις οποίες πιθανόν να είχε το υγιές κέλυφος.

2.5 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίστηκε το συνδυαστικό πρόβλημα της ανίχνευσης επιδερμικής ρωγμής (SDD) και της επιβεβαίωσης της ορθότητας της επισκευής (RQA) σε ενισχυμένα αεροπορικά κελύφη χαμηλού βάρους. Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκαν δύο στατιστικές μέθοδοι: Η πρώτη βασίζεται στα πειραματικώς εκτιμώμενα μορφικά χαρακτηριστικά του κελύφους (MPBM), ενώ η δεύτερη στο μη - παραμετρικά εκτιμώμενο μέτρο συνάφειας (CMBM). Η αποτελεσματικότητα των μεθόδων αυτών διερευνήθηκε μέσω μιας πειραματικής εφαρμογής. Αν και η επίδραση της ρωγμής στα δυναμικά χαρακτηριστικά του κελύφους είναι περιορισμένη, αποδείχθηκε ότι είναι ανιχνεύσιμη. Επιπλέον επιβεβαιώθηκε η ορθότητα της επισκευής.

Τα κυριότερα συμπεράσματα του κεφαλαίου συγκεντρώνονται, σύμφωνα με τα ερωτήματα που τέθηκαν στην εισαγωγή του κεφαλαίου, ως εξής:

- (i) Επιβεβαιώθηκε η δυνατότητα ανίχνευσης της επιδερμικής ρωγμής (SDD) και η επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής (RQA), μέσω ανάλυσης της μετρούμενης ταλαντωτικής συμπεριφοράς του κελύφους.
- (ii) Καταδείχθηκε ότι η ανίχνευση της επιδερμικής ρωγμής (SDD) μπορεί να υλοποιηθεί καταγράφοντας είτε διαφορές στις φυσικές συχνότητες και στους λόγους απόσβεσης, είτε μείωση στο

μέτρο συνάφειας. Όσον αφορά την επιβεβαίωση της ορθότητας της επισκευής,δείχθηκε ότι η χρήση των μορφικών χαρακτηριστικών είναι ακατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα, διότι επηρεάζονται σημαντικά από την επικόλληση του επιθέματος (π.χ. αύξηση μάζας). Από την άλλη πλευρά, η μέθοδος του μέτρου συνάφειας κρίθηκε κατάλληλη και αποτελεσματική και το συγκεκριμένο πρόβλημα.

(iii) Αν και η ανίχνευση της επιδερμικής ρωγμής (SDD) είναι εφικτή χρησιμοποιώντας είτε τις διαφορές στις φυσικές συχνότητες, είτε τους λόγους απόσβεσης,δείχθηκε ότι οι λόγοι απόσβεσης παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευαισθησία στην ύπαρξη της ρωγμής.

(iv) Η προτεινόμενη, βάσει της μετρούμενης ταλαντωτικής συμπεριφοράς, μεθοδολογία αποδείχθηκε αξιόπιστη για την αντιμετώπιση τόσο του SDD όσο και RQA προβλήματος, διότι δεν αναφέρθηκαν λάθος ανιχνεύσεις της ρωγμής (false alarms), ενώ οι μεταβολές λόγω της ρωγμής είναι καθαρά μεγαλύτερες από την εν γένει πειραματική απροσδιοριστία (variability). Κατά όμοιο τρόπο, η επιβεβαίωση της ορθότητας της επιδιόρθωσης εξακριβώθηκε πέρα από οποιαδήποτε πειραματική ασάφεια.

Κεφάλαιο 3

Το Μοντέλο Ολίσθησης του Maxwell: Περιγραφή και Ιδιότητες

Το παρόν κεφάλαιο αναφέρεται στο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell και έχει ως σκοπό την πλήρη περιγραφή αυτού, καθώς και των βασικότερων ιδιοτήτων της δομής του. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές μαθηματικές εξισώσεις του μοντέλου, αναφέρονται λεπτομερώς οι περιοχές λειτουργίας αυτού και δίδονται οι βασικές Υποθέσεις, βάσει των οποίων στηρίζεται όλη η περαιτέρω ανάλυση. Κατόπιν τούτου, παρουσιάζονται και αποδεικνύονται τόσο αναλυτικά όσο και γραφικά, αφενός οι βασικές ιδιότητες του κάθε τελεστή τύπου Ε-Π, που το μοντέλο ενσωματώνει, και αφετέρου του συνολικού μοντέλου. Οι ιδιότητες αυτές θα αποτελέσουν τα εργαλεία τόσο για την ανάλυση που υλοποιείται στα επόμενα κεφάλαια, όσο και στο τρέχον κεφάλαιο για την απόδειξη, για πρώτη φορά, της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας (a priori identifiability) της δομής του μοντέλου και τη μελέτη της επίδρασης των αρχικών καταστάσεων στην αναγνώριση του μοντέλου. Επιπροσθέτως, εξάγονται για πρώτη φορά οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες διέγερσης, έτσι ώστε τα σήματα που θα χρησιμοποιηθούν για τους σκοπούς της αναγνώρισης του μοντέλου στα επόμενα κεφάλαια, να είναι επαρκούντως πλούσια, δηλαδή να περιέχουν όλη την απαιτούμενη για την αναγνώριση πληροφορία. Τέλος, παρέχονται οι βασικές οδηγίες για τον “ορθό” σχεδιασμό του σήματος της διέγερσης.

3.1 Σύμβολα και Συντομογραφίες

3.1.1 Ακρωνύμια

<i>MRDE</i>	: Το πιο πρόσφατο δεσπόζων ακρότατο – Most Recent Dominant Extremum
<i>LTL</i>	: Όριο του κατώτερου κατωφλίου – Lower Threshold Limit
<i>sup</i>	: Κατώτερο άνω φράγμα – supreme or least upper bound

3.1.2 Σύμβολα

$x(t)$	: Εφαρμοζόμενη μετατόπιση (διέγερση)
k_i	: Σταθερά ελατηρίου του i – οστού τελεστή
$\mathbf{k}_M$	: Διάνυσμα σταθερών ελατηρίων, $\mathbf{k}_M \triangleq [k_1 \dots k_M]^T$
Δ_i	: Κατώφλι του i -οστού κατωφλίου
$\delta_i(t)$	: Παραμόρφωση του ελατηρίου του i -οστού τελεστή
$\delta_M(1)$	: Διάνυσμα αρχικών καταστάσεων
$\mathbf{d}_M$	: Διάνυσμα κατωφλίων, $\mathbf{d}_M \triangleq [\Delta_1 \dots \Delta_M]^T$
$\boldsymbol{\theta}_M$	: Διάνυσμα παραμέτρων ενός μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές
Θ_M	: Χώρος παραμέτρων – Parameter space
$f(t, \boldsymbol{\theta}_M)$	: Απόκριση ενός μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με διάνυσμα παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}_M$
M	: Αριθμός τελεστών που περιέχει ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell
$slip(+)$	: Περιοχή θετικής ολίσθησης
$slip(-)$	: Περιοχή αρνητικής ολίσθησης
$stick$	: Περιοχή ακινησίας
$stick \rightarrow slip(+)$	: Διάσχιση του θετικού ορίου ολίσθησης
$stick \rightarrow slip(-)$	: Διάσχιση του αρνητικού ορίου ολίσθησης
$slip(\pm) \rightarrow slip(\mp)$	: Αλλαγή στη διεύθυνση ολίσθησης
t	: Κανονικοποιημένος διακριτός χρόνος
t_e	: Χρονική στιγμή εμφάνισης ενός τοπικού ακρότατου της $x(t)$
t_i	: Χρονική στιγμή όπου ο i -οστός τελεστής εισέρχεται στην περιοχή ολίσθησης
$x(t_{e,i})$	: Δεσπόζων για τον i -οστό τελεστή ακρότατο της $x(t)$
$x(t_{e,1:M'})$	: Δεσπόζων για τους $i = 1, \dots, M'$ τελεστές ακρότατο της $x(t)$
$\bar{x}(t_{e,i})$	: Δεσπόζων για τον i -οστό τελεστή μέγιστο της $x(t)$
$\bar{x}(t_{e,1:M'})$	: Δεσπόζων για τους $i = 1, \dots, M'$ τελεστές μέγιστο της $x(t)$
$\underline{x}(t_{e,i})$	: Δεσπόζων για τον i -οστό τελεστή ελάχιστο της $x(t)$
$\underline{x}(t_{e,1:M'})$	: Δεσπόζων για τους $i = 1, \dots, M'$ τελεστές ελάχιστο της $x(t)$

3.2 Εισαγωγή

Το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell (το οποίο εναλλακτικά ονομάζεται και Prandtl - Ishlinskiĩ τύπου Ε-Π [2, σελ. 83]) ανήκει στη γενικότερη κατηγορία των ρεολογικών μοντέλων της υστέρησης (βλέπε Κεφάλαιο 1). Εν συντομία το μοντέλο μπορεί να περιγραφεί (περισσότερες πληροφορίες δίδονται

Σχήμα 3.1: Σχηματική απεικόνιση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές.

στην επόμενη ενότητα) ως ένα μοντέλο το οποίο περιέχει M τελεστές τύπου Ε-Π (βλέπε Κεφάλαιο 1) σε παράλληλη διάταξη [Σχήμα 3.1]. Κάθε τελεστής, ο οποίος χαρακτηρίζεται από αμελητέα αδράνεια, ενσωματώνει ένα γραμμικό ελατήριο με σταθερά ελαστικότητας k_i και μέγιστη (κατά απόλυτη τιμή) παραμόρφωση ελατηρίου Δ_i (κατώφλι threshold). Η διαφορά μεταξύ της εφαρμοζόμενης μετατόπισης (κοινή διέγερση για όλους τους τελεστές) x και η i -οστή τρέχουσα θέση της μάζας του εκάστοτε τελεστή x_i δίνει την τρέχουσα (μη - μετρήσιμη) παραμόρφωση του αντίστοιχου ελατηρίου δ_i . Ο i -στός τελεστής παραμένει σε ακινησία όταν και μόνο όταν $|\delta_i| < \Delta_i$, ενώ ολισθαίνει, δηλαδή $|\delta_i| = \Delta_i$, μέχρι ωσότου η εφαρμοζόμενη μετατόπιση λάβει ένα τοπικό μέγιστο, δηλαδή μέχρι η εφαρμοζόμενη ταχύτητα ($v = \frac{dx}{dt}$) να αλλάξει φορά (πρόσημο).

Μεταξύ των κυριότερων προτερημάτων του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι η απλότητα και η φυσική εποπτεία που παρέχει, καθώς και η ικανότητα του να περιγράφει φαινόμενα υστέρησης ρυθμού ανεξάρτητης με μακρά μνήμη (nonlocal memory - βλέπε Κεφάλαιο 1) [15]. Λόγω των χαρακτηριστικών αυτών το εν λόγω μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί σε πλήθος εφαρμογών με τη μοντελοποίηση της τριβής [45, 4, 99, 100, 21, 101, 102, 103, 22, 104] και πιεζοηλεκτρικών διεγερτών [49, 44, 45, 46, 50] να αποτελούν τις σημαντικότερες.

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται πλήρως το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, ενώ για πρώτη φορά μελετώνται οι βασικότερες εκ των ιδιοτήτων του. Αυτό όπως θα φανεί τόσο στο παρόν κεφάλαιο, όσο και στα υπόλοιπα, είναι εξαιρετικά σημαντικό για την περαιτέρω ανάλυση και αναγνώριση συστημάτων με υστέρηση.

Κατόπιν της μελέτης των ιδιοτήτων της δομής του μοντέλου αναλύεται για πρώτη φορά, τόσο η εκ των υστέρων αναγνωρισιμότητα (a priori identifiability) της δομής, όσο και η επίδραση των

αρχικών καταστάσεων (αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου του εκάστοτε τελεστή) στην αναγνώριση του μοντέλου. Έτσι με άλλα λόγια αποδεικνύεται ότι κάτω από γενικές (και μη δεσμευτικές) υποθέσεις κάθε μοντέλο που ανήκει στην δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι εν δυνάμει διαφορετικό από τα υπόλοιπα (μοναδικότητα παραμετροποίησης - uniqueness of representation) και ως εκ τούτου δύναται να αναγνωριστεί κατά τρόπο μοναδικό (a priori identifiability). Επιπλέον δείχνεται ότι οι αρχικές (μη - μετρήσιμες και γενικότερα μη - παρατηρήσιμες) αρχικές καταστάσεις, αν και είναι άγνωστες ποσότητες, δεν είναι δυνατή η εκτίμηση τους κατά τρόπο μοναδικό, διότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο μοντέλα με διαφορετικές αρχικές καταστάσεις που δίνουν ακριβώς την ίδια συμπεριφορά (η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα τους δεν μπορεί να εγγυηθεί).

Η εκ των υστέρων αναγνωρισιμότητα αναφέρει ότι κάτω από κάποιες γενικές παραδοχές, δύο μοντέλα ολίσθησης του Maxwell δύναται να εμφανίζουν διαφορετικό χαρακτήρα. Εντούτοις και προκειμένου το επιθυμητό χαρακτηριστικό αυτό να εμφανιστεί πρέπει η διέγερση να είναι κατάλληλη. Έτσι η παραμετροποίηση ενός μοντέλου ολίσθησης του Maxwell μπορεί να είναι μοναδική, αλλά υπό το καθεστώς μη επαρκούντως πλούσιας διεγέρσης το χαρακτηριστικό αυτό να μη παρατηρείται. Με άλλα λόγια αν η διέγερση δεν είναι πλούσια αρκετά, τα μετρούμενα σήματα δε θα περιέχουν την απαιτούμενη πληροφορία που εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του μοντέλου, βάσει του οποίου παράγονται τα σήματα αυτά.

Όπως είναι λοιπόν εμφανές, η διέγερση παίζει εξίσου σημαντικό ρόλο. Για το λόγο αυτό εξάγονται για πρώτη φορά οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες διεγέρσης, έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι τα μετρούμενα σήματα προέρχονται από ένα μοντέλο και μόνο από αυτό (έτσι ώστε η εκτιμήτρια της οποίας η εισαγωγή θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο να μπορεί να ξεχωρίσει το μοντέλο αυτό). Επί τη βάση των παραπάνω δίδονται, για πρώτη φορά, κατευθυντήριες οδηγίες για το σχεδιασμό κατάλληλου σήματος διεγέρσης.

Το παρόν κεφάλαιο δομείται ως εξής: Το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell παρουσιάζεται στη δεύτερη ενότητα. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες τόσο του εκάστοτε τελεστή E-Π όσο και του συνολικού μοντέλου. Η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα (a priori identifiability) της δομής του μοντέλου μελετάται στην τέταρτη ενότητα, ενώ στην πέμπτη ενότητα παρουσιάζονται οι κατευθυντήριες οδηγίες για το σχεδιασμό κατάλληλου σήματος διεγέρσης. Τέλος, τα βασικά συμπεράσματα του κεφαλαίου συνοψίζονται στην έκτη ενότητα.

3.3 Το Μοντέλο Ολίσθησης του Maxwell

3.3.1 Μαθηματική Περιγραφή

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζεται μια σχηματική αναπαράσταση της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Το μοντέλο περιλαμβάνει M ελαστο-πλαστικούς τελεστές τύπου Ε-Π σε παράλληλη διάταξη. Κάθε τελεστής χαρακτηρίζεται από αμελητέα μάζα, ένα γραμμικό ελατήριο με σταθερά k_i και μέγιστη παραμόρφωση ελατηρίου Δ_i (κατώφλι ή threshold). Για παραμορφώσεις ελατηρίου μικρότερες, σε μέτρο, από το κατώφλι Δ_i , ο τελεστής παραμένει ακίνητος (*sticks*), ενώ σε αντίθετη περίπτωση ολισθαίνει (*slips*). Η τρέχουσα θέση της μάζας του τελεστή συμβολίζεται με x_i . Η διαφορά μεταξύ της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$, η οποία είναι κοινή για όλους τους τελεστές, και της τρέχουσας θέσης της μάζας του i -οστού τελεστή δίνει την τρέχουσα τιμή της παραμόρφωσης του ελατηρίου του αντίστοιχου τελεστή:

$$\delta_i(t) \triangleq x(t) - x_i(t), \quad \text{με} \quad |\delta_i(t)| \leq \Delta_i, \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (3.1)$$

Προφανώς, $\delta_i(t) > 0$ αντιστοιχεί σε επιμήκυνση και $\delta_i(t) < 0$ σε συσπίρωση.

Όταν ο i -οστος τελεστής είναι ακίνητος (*sticks*), τότε η μάζα του παραμένει ακίνητη και η παραμόρφωση του ελατηρίου του, $\delta_i(t)$, μεταβάλλεται αναλογικά με τη μετατόπιση $x(t)$, δίχως να ξεπερνάει σε μέτρο το αντίστοιχο κατώφλι, $|\delta_i(t)| < \Delta_i$. Εναλλακτικά, όταν ο τελεστής ολισθαίνει (*slips*), τότε η μάζα κινείται και η παραμόρφωση του ελατηρίου του λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, ($|\delta_i(t)| = \Delta_i$). Για το λόγο αυτό:

$$\frac{d\delta_i(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} & (\text{Ακνησία} - \text{Stick}) \\ 0 & (\text{Ολίσθηση} - \text{Slip}) \end{cases} \quad (3.2)$$

Ο i -οστος τελεστής παραμένει ακίνητος εφόσον $|\delta_i(t)| < \Delta_i$, ενώ ολισθαίνει μέχρι τη στιγμή της εμφάνισης τοπικού ακρότατου της εφαρμοζόμενης μετατόπισης, δηλαδή όταν η εφαρμοζόμενη ταχύτητα $\left(v(t) = \frac{dx(t)}{dt}\right)$ αλλάζει φορά.

Αν στην Εξ. (3.2) εφαρμοστεί αριθμητική πρόσω - παραγωγή (forward - differentiation) τότε (σημειώνεται ότι από αυτό το σημείο και πέρα ως $t = 1, 2, \dots$ συμβολίζεται ο διακριτός χρόνος):

$$\delta_i(t+1) = \begin{cases} \text{sgn}[x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)] \cdot |x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)|, & (\text{Ακνησία}) \\ \text{sgn}[\delta_i(t)] \cdot \Delta_i, & (\text{Ολίσθηση}) \end{cases} \quad (3.3)$$

Λόγω του ότι, $|\delta_i(t)| \leq \Delta_i$, $\forall t$, οι Εξ. (3.3) παρέχουν το μέτρο του $\delta_i(t+1)$:

$$|\delta_i(t+1)| = \min\{|x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)|, \Delta_i\} \quad (3.4)$$

Η φορά (πρόσημο) του $\delta_i(t+1)$ καθορίζεται από τις Εξ. (3.3). Εν τούτοις, για $\delta_i(t) = \delta_i(t+1) = \Delta_i$ [αντίστοιχα: $\delta_i(t) = \delta_i(t+1) = -\Delta_i$], τότε [λόγω της Εξ.(3.4)] $x(t+1) - x(t) \geq 0$ [αντίστοιχα: $x(t+1) - x(t) \leq 0$]. Για το λόγο αυτό, όταν ο τελεστής ολισθαίνει ισχύει $\text{sgn}[x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)] = \text{sgn}[\delta_i(t)]$, και επομένως η φορά (επιμήκυνση ή συσπίρωση) της i -οστής παραμόρφωσης ελατηρίου (σε ακινησία ή ολίσθηση) ενσωματώνεται στην Εξ. (3.4) ακολούθως:

Εξίσωση κατάστασης (για κάθε i):

$$\delta_i(t+1) = \text{sgn}[x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)] \cdot \min\{|x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)|, \Delta_i\} \quad (3.5)$$

Διαχωρίζοντας την περιοχή ολίσθησης σε θετική και αρνητική, κάθε τελεστής παρουσιάζει τρεις περιοχές λειτουργίας:

- (i) Θετική ολίσθηση [*slip*(+)] $\iff \delta_i(t) = \Delta_i$
- (ii) Ακινησία [*stick*] $\iff |\delta_i(t)| < \Delta_i$
- (iii) Αρνητική ολίσθηση [*slip*(-)] $\iff \delta_i(t) = -\Delta_i$

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλων των ειδών οι μεταβάσεις από τη μια περιοχή στην άλλη είναι εφικτές και εξαρτώνται, κυρίως, από την εφαρμοζόμενη μετατόπιση.

Η έξοδος (απόκριση) του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell ορίζεται ως το άθροισμα των δυνάμεων των επιμέρους ελατηρίων:

Εξίσωση εξόδου (άθροισμα δυνάμεων ελατηρίων):

$$f(t, \theta_M, \delta_M(1)) = \sum_{i=1}^M k_i \cdot \delta_i(t) \quad (3.6)$$

όπου οι παραμορφώσεις $\delta_i(t)$ ($\forall i = 1, \dots, M$) δίδονται από την Εξ. (3.5), με αρχικές καταστάσεις $\delta_M(1) \triangleq [\delta_1(1) \dots \delta_M(1)]^T$ (διάνυσμα αρχικών καταστάσεων). Επίσης, με $\mathbf{k}_M \triangleq [k_1 \dots k_M]^T$ και $\mathbf{d}_M \triangleq [\Delta_1 \dots \Delta_M]^T$ συμβολίζονται τα διανύσματα των σταθερών των ελατηρίων και των κατωφλίων, αντίστοιχα, τα οποία συλλέγονται στο γενικό διάνυσμα των παραμέτρων του μοντέλου το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\theta_M \triangleq [\mathbf{k}_M^T : \mathbf{d}_M^T]^T \in \Theta_M \quad (3.7)$$

όπου με Θ_M συμβολίζεται ο χώρος μέσα από τον οποίο το διάνυσμα θ_M λαμβάνει τιμές (parameter space). Όπως είναι φανερό από την Εξ. (3.6), το μοντέλο εξαρτάται από το διάνυσμα των αρχικών καταστάσεων $\delta_M(1)$, παραταύτα στις περισσότερες των περιπτώσεων η εξάρτηση αυτή, αν και θα εννοείται, θα παραλείπεται για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού.

3.3.2 Βασικές Υποθέσεις στη Δομή του Μοντέλου

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι βασικές υποθέσεις στις οποίες υπακούει η δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Όπως θα γίνει φανερό αμέσως παρακάτω, οι υποθέσεις αυτές είναι γενικές και απλές.

Υπόθεση 3.1 Ο χώρος των παραμέτρων $\Theta_M \subset \mathcal{R}^{2M}$ είναι συμπαγής (κλειστός και φραγμένος - compact parameter space [105, σελ.356]) . □

Υπόθεση 3.2 Οι σταθερές των ελατηρίων των τελεστών είναι καθαρά θετικές ποσότητες, δηλαδή $k_i > 0, \forall i = 1, \dots, M$. □

Υπόθεση 3.3 Τα κατώφλια (thresholds) είναι θετικά και μεταξύ τους διαφορετικά. Σύμφωνα με αυτό υιοθετείται η ακόλουθη σύμβαση: $0 < \Delta_1 < \dots < \Delta_M$. □

Η πρώτη υπόθεση θεωρείται τυπική [13, σελ.26] [106] η οποία δε δημιουργεί προβλήματα κατά τη χρήση του μοντέλου σε πρακτικές εφαρμογές. Επιπλέον, όπως θα συζητηθεί σε επόμενα κεφάλαια, χρησιμοποιείται για την επίτευξη κατάλληλου ομοιόμορφου νόμου μεγάλων αριθμών (Uniform Law of Large Numbers – ULLN), ενώ δηλώνει, εμμέσως, ότι η απόκριση του μοντέλου δεν απειρίζεται ($k_i < \infty, \forall i = 1, \dots, M$).

Η Υπόθεση 3.2 δηλώνει ότι οι σταθερές των ελατηρίων των επιμέρους τελεστών είναι θετικές ποσότητες, γεγονός το οποίο απαιτείται, καθώς δίχως αυτό, το μοντέλο χάνει τη φυσική του υπόσταση και ερμηνεία.

Τέλος η Υπόθεση 3.3 δηλώνει ότι τα επιμέρους κατώφλια είναι αφενός θετικές ποσότητες (αλλιώς χάνεται η φυσική ερμηνεία) και αφετέρου διαφορετικά μεταξύ τους. Το τελευταίο, σε συνδυασμό με τον καθορισμό των αρχικών καταστάσεων (βλέπε παρακάτω), απαιτείται έτσι ώστε να αποκλειστεί η περίπτωση να υπάρχουν δύο τελεστές με ίδια κατώφλια (δύο τελεστές με ίδιο κατώφλι μπορούν να συγχωνευτούν σε ένα με σταθερά ελατηρίου ίση με το άθροισμα των δύο επιμέρους).

3.3.3 Ορισμοί και Μεταβάσεις

Στην παρούσα ενότητα αναφέρονται διάφοροι ορισμοί, οι οποίοι είναι βασικοί για την κατανόηση και την ανάλυση στη συνέχεια. Επιπλέον αναλύονται οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται έτσι ώστε ο εκάστοτε τελεστής να μεταβαίνει από την μία περιοχή λειτουργίας του στην άλλη.

Πίνακας 3.1: Δεσπόζοντα Ακρότατα και οι προκύπτουσες παραμορφώσεις ελατηρίου.

Τύπος Ακρότατου	Μετατόπιση	Παραμόρφωση Ελατηρίου
Δεσπόζον Ακρότατο (γενικά)	$x(t_{e,i}) \Rightarrow$	$ \delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ $[slip(+) \text{ ή } (-)]$
Δεσπόζον Μέγιστο	$\bar{x}(t_{e,i}) \Rightarrow$	$\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ $[slip(+)]$
Δεσπόζον Ελάχιστο	$\underline{x}(t_{e,i}) \Rightarrow$	$\delta_i(t_{e,i}) = -\Delta_i$ $[slip(-)]$

Ορισμός 3.1 (Δεσπόζοντα Ακρότατα (max/min)) Έστω ένας τελεστής E -Π με κατώφλι Δ_i , ο οποίος διεγείρεται από μια εφαρμοζόμενη ακολουθία μετατόπισης $x(t)$, η οποία παρουσιάζει ένα τυχαίο ακρότατο τη χρονική στιγμή t_e . Αν $\delta_i(t_e) = \Delta_i$ [ή $\delta_i(t_e) = -\Delta_i$], τότε το συγκεκριμένο ακρότατο χαρακτηρίζεται ως δεσπόζον για το i -στο τελεστή και συμβολίζεται ως $x(t_{e,i})$ ($t_e \equiv t_{e,i}$). Επιπροσθέτως, αν το $x(t_{e,i})$ είναι μέγιστο (ή ελάχιστο) τότε συμβολίζονται ως $\bar{x}(t_{e,i})$ [ή $\underline{x}(t_{e,i})$]. $\square$

Για λόγους καλύτερης κατανόησης, όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί, μεταξύ ενός δεσπόζοντος ακρότατου για τον i -στο τελεστή και της παραμόρφωσης του ελατηρίου του, παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν είναι όλα τα ακρότατα της μετατόπισης δεσπόζοντα για έναν τελεστή. Για παράδειγμα το ακρότατο της μετατόπισης της μετατόπισης τη χρονική στιγμή $t = 12$ [Σχήμα 3.2(a)] είναι δεσπόζον μόνο για τον πρώτο τελεστή (ο οποίο χαρακτηρίζεται από παραμόρφωση ελατηρίου $\delta_1(t)$ και κατώφλι $\Delta_1 = 0.01$). Αν ένα ακρότατο της παραμόρφωσης είναι δεσπόζον για περισσότερο από έναν τελεστή, για παράδειγμα $\forall i = 1, \dots, M' \leq M$ (βλέπε Σχήμα 3.2 για $t = 19$) τότε συμβολίζεται ως $x(t_{e,1:M'})$. Παρομοίως, αν το $x(t_{e,1:M'})$ είναι μέγιστο [αντίστοιχα ελάχιστο], τότε συμβολίζεται ως $\bar{x}(t_{e,1:M'})$ [αντίστοιχα $\underline{x}(t_{e,1:M'})$].

Ορισμός 3.2 (MRDE) Έστω ένας τελεστής E -Π με κατώφλι Δ_i , ο οποίος διεγείρεται από μια εφαρμοζόμενη ακολουθία μετατόπισης $x(t)$. Επιπλέον, έστω $x(t_{e,i})$ ένα δεσπόζον ακρότατο για τον i -στό τελεστή. Αν για $t > t_{e,i}$ δεν εμφανίζεται άλλο δεσπόζον για τον τελεστή ακρότατο, τότε το $x(t_{e,i})$ χαρακτηρίζεται ως το πιο πρόσφατο δεσπόζον ακρότατο (Most Recent Dominant Extremum - MRDE) για τον i -στό τελεστή την τρέχουσα χρονική στιγμή t (με $t > t_{e,i}$). $\square$

Η έννοια του MRDE απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 3.2. Αρχικά ας επικεντρωθεί η προσοχή στον πρώτο τελεστή [$\delta_1(t)$ - Σχήμα 3.2.(b)], όπου το MRDE του $\forall t \in [12, 18]$ είναι το $x(12)$, ενώ για $\forall t \in [19, 24]$ είναι το $x(19)$ [το παλαιό MRDE $x(12)$ αντικαθίσταται από το νέο $x(19)$ κ.ο.κ.]. Κατά

Σχήμα 3.2: Δεσπόζοντα ακρότατα και μεταβάσεις περιοχών λειτουργίας : (a) εφαρμοζόμενη μετατόπιση· (b) $\delta_1(t)$ [$\Delta_1 = 0.01$]· (c) $\delta_2(t)$ [$\Delta_2 = 2.5$].

όμοιο τρόπο το MRDE για το δεύτερο τελεστή [Σχήμα 3.2.(c)] $\forall t \in [19, 24]$ είναι το $x(19)$. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι δύο τελεστές δεν είναι απαραίτητο να μοιράζονται το ίδιο MRDE.

Ορισμός 3.3 (Διάσχιση του Ορίου Ολίσθησης) Έστω $t_i - 1, t_i$, έτσι ώστε $|\delta_i(t_i - 1)| < \Delta_i$ και $\delta_i(t_i) = \Delta_i$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_i$]. Τότε λέγεται ότι ο i -στός τελεστής διασχίζει το θετικό [αντίστοιχα αρνητικό] του όριο ολίσθησης τη χρονική στιγμή t_i , και συμβολίζεται με $\delta_i(t)$ $stick \rightarrow slip(+)$ [αντίστοιχα: $stick \rightarrow slip(-)$] τη χρονική στιγμή t_i . $\square$

Τυπικό παράδειγμα της $stick \rightarrow slip(+)$ μετάβασης απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2(c) τη χρονική στιγμή $t = 17$ [$|\delta_2(16)| < \Delta_2$ και $\delta_2(17) = \Delta_2$]. Σε γενικές γραμμές η $stick \rightarrow slip(\pm)$ μετάβαση δηλώνει ότι ο i -στός τελεστής αναχωρεί από την περιοχή ακινησίας και εισέρχεται στην περιοχή θετικής [$slip(+)$] ή αρνητικής [$slip(-)$] ολίσθησης.

Ορισμός 3.4 (Διάσχιση του Ορίου Ακινησίας) Έστω $t_{e,i}, t_{e,i} + 1$, τέτοια ώστε $\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_i$] και $|\delta_i(t_{e,i} + 1)| < \Delta_i$. Τότε λέγεται ότι ο i -στός τελεστής διασχίζει το θετικό [αντίστοιχα αρνητικό] του όριο ακινησίας τη χρονική στιγμή $t_{e,i} + 1$, και συμβολίζεται ως $slip(+) \rightarrow stick$ [αντίστοιχα $slip(-) \rightarrow stick$] τη χρονική στιγμή $t_{e,i} + 1$. $\square$

Πίνακας 3.2: Μεταβάσεις μεταξύ των περιοχών λειτουργίας του i -οστού τελεστή.

Μετάβαση	Πριν	Μετά
$slip(+) \rightarrow stick$	$\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$	$ \delta_i(t_{e,i}+1) < \Delta_i$
$slip(-) \rightarrow stick$	$\delta_i(t_{e,i}) = -\Delta_i$	$ \delta_i(t_{e,i}+1) < \Delta_i$
$slip(\pm) \rightarrow slip(\mp)$	$\delta_i(t_{e,i}) = \pm\Delta_i$	$\delta_i(t_{e,i}+1) = \mp\Delta_i$
$stick \rightarrow slip(+)$	$ \delta_i(t_i-1) < \Delta_i$	$\delta_i(t_i) = \Delta_i$
$stick \rightarrow slip(-)$	$ \delta_i(t_i-1) < \Delta_i$	$\delta_i(t_i) = -\Delta_i$

Ορισμός 3.5 (Αλλαγή στη Φορά Ολίσθησης) Έστω $t_{e,i}$, $t_{e,i} + 1$, έτσι ώστε $\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_i$] και $\delta_i(t_{e,i} + 1) = -\Delta_i$ [αντίστοιχα: $= \Delta_i$]. Τότε λέγεται ότι ο i -στός τελεστής αλλάζει φορά ολίσθησης τη χρονική στιγμή $t_{e,i} + 1$, και συμβολίζεται ως $slip(\pm) \rightarrow slip(\mp)$ τη χρονική στιγμή $t_{e,i} + 1$. $\square$

Τυπικό παράδειγμα της $slip(+) \rightarrow stick$ μετάβασης απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2(c) τη χρονική στιγμή $t = 20$ [$\delta_2(19) = \Delta_2$ και $|\delta_2(20)| < \Delta_2$]. Επιπλέον, στο Σχήμα 3.2(b) παρουσιάζεται ένα παράδειγμα $slip(\pm) \rightarrow slip(\mp)$ [$\delta_1(19) = \Delta_1$ και $\delta_1(20) = -\Delta_2$].

Για καλύτερη κατανόηση όλων των παραπάνω, παρουσιάζονται όλες οι δυνατές μεταβάσεις που δύναται να πάθει ο i -στός τελεστής, μαζί με τη τιμή της παραμόρφωσης του ελατηρίου του πριν και μετά την μετάβαση, στον Πίνακα 3.2. Σημειώνεται ότι με t_i δηλώνεται η χρονική στιγμή κατά την οποία ο i -στός τελεστής εισέρχεται στην περιοχή ολίσθησης του. Επιπλέον, αξίζει να παρατηρηθεί ότι $t_{e,i} + 1 \equiv t_i$ όταν ο i -στός τελεστής $slip(\pm) \rightarrow slip(\mp)$ (αλλάζει φορά ολίσθησης).

Παρατηρώντας προσεκτικότερα το Σχήμα 3.2 διαπιστώνεται ότι ο i -στός τελεστής αναχωρεί από τη περιοχή ολίσθησης αμέσως μετά την εμφάνιση ενός δεσπόζοντος, για αυτόν, ακρότατου [ή διαφορετικά αμέσως μετά το MRDE του - βλέπε για περισσότερες λεπτομέρειες το Σχήμα 3.2(c) τη χρονική στιγμή $t = 20$]. Αυτός ο σημαντικός μηχανισμός αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό του εκάστοτε τελεστή ο οποίο περιγράφεται από την εξίσωση κατάστασής του [Εξ. (3.5)] ως εξής.

Ας υποθεθεί ότι το MRDE του i -οστού τελεστή είναι μέγιστο, δηλαδή $\bar{x}(t_{e,i})$, επομένως: $x(t_{e,i} + 1) - \bar{x}(t_{e,i}) < 0 \Rightarrow \bar{x}(t_{e,i} + 1) - \bar{x}(t_{e,i}) + \Delta_i < \Delta_i$. Εφόσον το $\bar{x}(t_{e,i})$ είναι δεσπόζον μέγιστο για τον i -στό τελεστή τότε $\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ (Πίνακας 3.1). Επομένως, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται: $\bar{x}(t_{e,i} + 1) - \bar{x}(t_{e,i}) + \delta_i(t_{e,i}) < \Delta_i$. Λόγω τούτου, η Εξ. (3.5) δίνει για $t = t_{e,i}$: $\delta_i(t_{e,i} + 1) < \Delta_i$ το οποίο σημαίνει ότι ο τελεστής αναχωρεί από την περιοχή θετικής ολίσθησης αμέσως μετά την εμφάνιση του δεσπόζοντος για αυτόν μέγιστο $x(t_{e,i})$ και εισέρχεται είτε στην περιοχή ακινησίας, είτε στη περιοχή αρνητική ολίσθησης. Αν $-\Delta_i < x(t_{e,i} + 1) - \bar{x}(t_{e,i}) + \delta_i(t_{e,i}) < \Delta_i$ τότε η Εξ. (3.5) δίνει: $|\delta_i(t_{e,i} + 1)| < \Delta_i$ (*stick*), ενώ διαφορετικά [δηλαδή $x(t_{e,i} + 1) - \bar{x}(t_{e,i}) + \delta_i(t_{e,i}) \leq -\Delta_i$]

Σχήμα 3.3: Η συμπεριφορά του τελεστή τύπου Ε-Π: (α) Η εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ (είσοδος)· (β) η προκύπτουσα δύναμη ελατηρίου του τελεστή $f(t)$ (έξοδος)· (γ) $f(t)$ συναρτήσει του $x(t)$ ($\Delta_1 = 0.5$.)

$\delta_i(t_{e,i}+1) = -\Delta_i [\text{slip}(-)]$. Όπως είναι φανερό η διαφορά $x(t_{e,i}+1) - \bar{x}(t_{e,i})$ καθορίζει ποιά θα είναι η νέα περιοχή. Αυτό είναι εμφανές στο Σχήμα. 3.2, στο οποίο ο πρώτος τελεστής $\text{slip}(+) \rightarrow \text{slip}(-)$ τη χρονική στιγμή $t = 20$, ενώ ο δεύτερο $\text{slip}(+) \rightarrow \text{stick}$ τη ίδια χρονική στιγμή. Σημειώνεται ότι $\Delta_1 < \Delta_2$.

Το προηγούμενο παράδειγμα οδηγεί στο σημαντικό συμπέρασμα ότι μόνο η εμφάνιση ενός δεσπόζοντος για τον i -οστό τελεστή ακρότατου προκαλεί την αναχώρηση από την περιοχή ολίσθησης (θετική ή αρνητικής). Αυτό είναι σε τέλεια συμφωνία με τη φυσική ερμηνεία του μοντέλου, διότι εφόσον ο i -οστός τελεστής ολισθαίνει (η μάζα του κινείται), ας υποτεθεί προς τη θετική φορά, τότε η κίνηση αυτή θα διατηρηθεί μέχρι ωσότου να συμβεί αναστροφή της κίνησης ή ισοδύναμα μέχρι ωσότου η μετατόπιση να εμφανίσει ακρότατο.

3.4 Ιδιότητες του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell

Η παρούσα ενότητα αφιερώνεται στη μελέτη των επιμέρους ιδιοτήτων τόσο των τελεστών Ε-Π όσο και του συνολικού μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Πριν δοθούν περισσότερες λεπτομέρειες για τις ιδιότητες αυτές, παρουσιάζεται εν συντομία ο βρόγχος υστέρησης ο οποίος προκύπτει από ένα τελεστή τύπου Ε-Π, καθώς και από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με $M = 10$ τελεστές.

Στο Σχήμα 3.3(c) απεικονίζεται ο στοιχειώδης βρόγχος υστέρησης [μετατόπιση (είσοδος) - δύ-

Σχήμα 3.4: Το άθροισμα των δυνάμεων των ελατηρίων του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (έξοδος) συναρτήσεις της εφαρμοζόμενης μετατόπισης [$M = 10$ τελεστές· εφαρμοζόμενη μετατόπισης: $x(t) = \sin(0.2\pi t)\sin(5\pi t)$ · Συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 150 \text{ Hz}$].

ναμη ελατηρίου (έξοδος)], όπως αυτός προκύπτει όταν σε έναν τελεστή τύπου E-Π εφαρμοστεί μετατόπιση $x(t)$ η οποία μεταβάλλεται περιοδικά και με τρόπο γραμμικό μεταξύ μιας μέγιστης και μιας ελάχιστης τιμής [Σχήμα 3.3(a)]. Ο στοιχειώδης βρόγχος υστέρησης είναι ρυθμού ανεξάρτητος (rate independent), το οποίο σημαίνει ότι διατηρεί αναλλοίωτο το σχήμα του ακόμα και όταν ο ρυθμός διέγερσης προσεγγίζει το μηδέν, δηλαδή όταν η διέγερση μεταβάλλεται πάρα πολύ αργά. Λόγω του χαρακτηριστικού αυτού, το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell δίνει υστέρηση ρυθμού ανεξάρτητη [15].

Στο Σχήμα 3.4 παρουσιάζεται ο βρόγχος υστέρησης (εφαρμοζόμενη μετατόπιση - άθροισμα δυνάμεων ελατηρίων), όπως αυτός προκύπτει όταν ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με $M = 10$ τελεστές διεγερθεί από μία περιοδική μετατόπιση της μορφής $x(t) = \sin(0.2\pi t) \cdot \sin(5\pi t)$.

Αφού παρουσιάστηκε, γραφικά, ο τύπος της υστέρησης τον οποίο δίνει το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, δίνονται στην επόμενη υποενότητα οι ιδιότητες των τελεστών E-Π που ενσωματώνονται στο εν λόγω μοντέλο. Αρχικά παρουσιάζονται οι στοιχειώδεις ιδιότητες του E-Π τελεστή όταν δρα μόνος του και στη συνέχεια όταν λειτουργεί μαζί με άλλους κάτω από το καθεστώς της κοινής διεγέρσεως. Κατόπιν των παραπάνω, παρουσιάζονται και αναλύονται οι γενικές ιδιότητες του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell όταν αυτό ενσωματώνει αυθαίρετο αριθμό τελεστών M .

3.4.1 Ιδιότητες των Τελεστών Τύπου Ε-Π

Η βασική ιδέα πάνω στην οποία θα βασιστεί η ανάλυση των ιδιοτήτων, τόσο μεμονωμένα του τελεστή όσο και του μοντέλου γενικότερα, στηρίζεται στον τρόπο που συμπεριφέρεται ο τελεστής στην περιοχή της ακινησίας του. Όπως θα γίνει κατανοητό παρακάτω, η εξέλιξη της παραμόρφωσης του ελατηρίου $\delta_i(t)$ του i -οστού τελεστή, όταν αυτός είναι ακίνητος (*sticks*), εξαρτάται αποκλειστικά από την τρέχουσα τιμή της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$, το κατώφλι του και το MRDE του. Προκειμένου το παραπάνω να γίνει αρχικά κατανοητό ας εξεταστεί το ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω $\bar{x}(t_{e,i})$ το MRDE για τον i -οστό τελεστή, επομένως $\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ (βλέπε Πίνακα 3.1). Επιπλέον ας υποθεθεί ότι ο i -οστός τελεστής $slip(+) \rightarrow stick$ τη χρονική στιγμή $t_{e,i}+1$ και παραμένει ακίνητος (*stick*), δηλαδή $|\delta_i(t)| < \Delta_i, \forall t \in [t_{e,i}+1, t_i-1]$. Κάνοντας διαδοχική χρήση της Εξ. (3.5) για τις χρονικές στιγμές $t = t_{e,i}, t_{e,i}+1, \dots, t_i-2$ προκύπτει το ακόλουθο σει εξισώσεων (υπενθύμιση: ο i -οστός τελεστής είναι ακίνητος για το χρονικό διάστημα $[t_{e,i}+1, t_i-1]$ και ως εκ τούτου $|x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)| < \Delta_i$ για το διάστημα αυτό):

$$\delta_i(t_{e,i}+1) = x(t_{e,i}+1) - x(t_{e,i}) + \Delta_i \quad (3.8)$$

$$\delta_i(t_{e,i}+2) = x(t_{e,i}+2) - x(t_{e,i}+1) + \delta_i(t_{e,i}+1) \quad (3.9)$$

$$\vdots$$

$$\delta_i(t_i-1) = x(t_i-1) - x(t_i-2) + \delta_i(t_i-2) \quad (3.10)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\delta_i(t_{e,i}+1) = x(t_{e,i}+1) - \bar{x}(t_{e,i}) + \Delta_i \quad (3.11)$$

$$\delta_i(t_{e,i}+2) = x(t_{e,i}+2) - \bar{x}(t_{e,i}) + \Delta_i \quad (3.12)$$

$$\vdots$$

$$\delta_i(t_i-1) = x(t_i-1) - \bar{x}(t_{e,i}) + \Delta_i \quad (3.13)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν, συμπεραίνεται ότι:

$$\delta_i(t) = x(t) - \bar{x}(t_{e,i}) + \Delta_i, \quad \forall t \in [t_{e,i}+1, t_i-1] \quad (3.14)$$

Η Εξ. (3.14) δηλώνει ότι οποιεδήποτε ο i -οστός τελεστής παραμένει ακίνητος (*sticks*), η παραμόρφωση του ελατηρίου του $\delta_i(t)$ εξαρτάται από την τρέχουσα τιμή της μετατόπισης $x(t)$, το κατώφλι του Δ_i και από το MRDE του. Αν θεωρηθούν τα τελευταία δύο (Δ_i και MRDE) ως δεδομένα, η μορφή της εξέλιξης της $\delta_i(t)$ εντός της περιοχής ακινησίας καθορίζεται εξόλοκληρου από

Σχήμα 3.5: Σχηματική αναπαράσταση της Ιδιοτήτων 3.1 και 3.2: (a) $x(t)$, (b) $\delta_i(t)$ [$\Delta_i = 2.3$, $|\delta_i(t)| < \Delta_i, \forall t \in [t_{e,i} + 1, t_i - 1]$ · *stick* $\rightarrow$ *slip*(+)] τη χρονική στιγμή t_i .

τις μεταβολές της μετατόπισης $x(t)$ (βλέπε Σχήμα 3.5, στο οποίο το $\bar{x}(t_{e,i}) \equiv x(t_{e,i})$ είναι το *MRDE* του αντίστοιχου τελεστή για κάθε τρέχουσα χρονική στιγμή εντός του διαστήματος $[t_{e,i}, t_i]$).

Η επίσημη έκφραση της παραπάνω ιδιότητας είναι η ακόλουθη.

Ιδιότητα 3.1 Έστω ένας τελεστής με κατώφλι Δ_i , ο οποίος διεγείρεται από μια εφαρμοζόμενη ακολουθία μετατόπισης $x(t)$. Επίσης ας υποτεθεί ότι ο τελεστής παραμένει ακίνητος (δηλαδή $|\delta_i(t)| < \Delta_i$) $\forall t \in [t_{e,1} + 1, t_i - 1]$, όπου $x(t_{e,i})$ είναι το *MRDE* του. Τότε η εξέλιξη της παραμόρφωσης του ελατηρίου του τελεστή για τη εν λόγω χρονική περίοδο (δηλαδή για όσο χρόνο ο τελεστής παραμένει ακίνητος) δίνεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση:

$$\delta_i(t) = x(t) - x(t_{e,i}) + \delta_i(t_{e,i}), \quad \forall t \in [t_{e,i} + 1, t_i - 1] \quad (3.15)$$

όπου $\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_i$] όταν το $x(t_{e,i})$ είναι μέγιστο [αντίστοιχα: ελάχιστο] (βλέπε Πίνακα 3.1). $\square$

Απόδειξη: Η απόδειξη της παραπάνω ιδιότητας προκύπτει απευθείας, ακολουθώντας παρόμοια αλγεβρική διαδικασία, βάσει της οποίας εξάχθηκαν οι Εξ. (3.8) - (3.14). $\square$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η Ιδιότητα 3.1 αποκαλύπτει το σημαντικό χαρακτηριστικό, ότι ο τελεστής Ε-Π θυμάται το *MRDE* του για όλη τη διάρκεια που βρίσκεται στη περιοχή ακινησίας του.

Η επόμενη ιδιότητα βοηθάει στον καθορισμό της τρέχουσας περιοχής λειτουργίας του i -οστού τελεστή, χρησιμοποιώντας την τρέχουσα τιμή της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$, το κατώφλι Δ_i του i -οστού τελεστή, όπως επίσης και το *MRDE* του.

Ιδιότητα 3.2 Έστω ένας τελεστής τύπου Ε-Π με κατώφλι Δ_i , ο οποίος διεγείρεται από μια εφαρ-

μοζόμενη ακολουθία μετατόπισης $x(t)$. Επίσης ας υποτεθεί ότι το MRDE του τελεστή την τρέχουσα χρονική στιγμή t ($t \geq t_{e,i}$) είναι το $x(t_{e,i})$. Υπό αυτές τις προϋπόθεσης ο τελεστής παραμένει ακίνητος για $t > t_{e,i}$ αν και μόνο αν:

$$x(t_{e,i}) - \delta_i(t_{e,i}) - \Delta_i < x(t) < x(t_{e,i}) - \delta_i(t_{e,i}) + \Delta_i, \quad \forall t > t_{e,i} \quad (3.16)$$

□

Απόδειξη: Η επάρκεια της Ιδιότητας 3.2 μπορεί να αποδειχθεί υποθέτοντας ότι η Εξ. (3.16) ισχύει $\forall t > t_{e,i}$. Θα δειχθεί ότι ο εν λόγω τελεστής παραμένει ακίνητος (*stick*) για το χρονικό διάστημα αυτό. Δίχως περιορισμό της γενικότητας θεωρείται ότι το MRDE του τελεστή $x(t_{e,i})$ είναι μέγιστο, συνεπώς $\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ (θετική ολίσθησης - Πίνακας 3.1). Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η Εξ. (3.16) γράφεται ως εξής:

$$x(t_{e,i}) - 2\Delta_i < x(t) < x(t_{e,i}), \quad \forall t > t_{e,i} \quad (3.17)$$

Σημειώνεται ότι παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν αν θεωρηθεί ότι το $x(t_{e,i})$ είναι ελάχιστο.

Η απόδειξη θα υλοποιηθεί αναδρομικά. Για το λόγο αυτό αρχικά θεωρείται η χρονική στιγμή $t = t_{e,i} + 1$. Υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις τη χρονική στιγμή αυτή: (a) ο τελεστής να ολισθαίνει θετικά [*slip*(+)], (b) αρνητικά [*slip*(-)] ή να είναι ακίνητος (c) [*stick*]. Η πρώτη περίπτωση είναι αδύνατη διότι το $x(t_{e,i})$ είναι δεσπόζον μέγιστο για τον τελεστή, επομένως σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο τελεστής είναι υποχρεωμένος να εγκαταλείψει την περιοχή θετικής ολίσθησης.

Έστω τώρα ότι ισχύει η δεύτερη περίπτωση, επομένως $\delta_i(t_{e,i} + 1) = -\Delta_i$. Σύμφωνα με την Εξ. (3.5) ισχύει: $x(t_{e,i} + 1) - x(t_{e,i}) + \Delta_i \leq -\Delta_i$, το οποίο είναι αδύνατο λόγω της Εξ. (3.17).

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η μόνη δυνατή περίπτωση, υπό το καθεστώς της Εξ. (3.17), είναι ο τελεστής να παραμένει ακίνητος τη χρονική στιγμή $t_{e,i} + 1$. Αν τώρα γίνει η ίδια ανάλυση για την επόμενη χρονική στιγμή ($t = t_{e,i} + 2$), λαμβάνοντας υπόψη ότι, αφενός η Εξ. (3.17) εξακολουθεί να ισχύει και αφετέρου τη χρονική στιγμή $t_{e,i} + 1$ ο τελεστής είναι ακίνητος (άρα ισχύει η Ιδιότητα 3.1), τότε συμπεραίνεται ότι και σε αυτή τη χρονική στιγμή ο τελεστής παραμένει ακίνητος.

Αν η παραπάνω αλγεβρική διαδικασία επαναληφθεί αναδρομικά $\forall t > t_{e,i} + 2$, τότε προκύπτει ότι ο τελεστής παραμένει ακίνητος $\forall t > t_{e,i}$.

Το αναγκαίο κομμάτι της Ιδιότητας 3.2 αποδεικνύεται απευθείας λαμβάνοντας υπόψη ότι ο τελεστής είναι ακίνητος (*sticks*) $\forall t = t_{e,i} + 1, t_{e,i} + 2, \dots$ [ακολουθείται η ίδια αλγεβρική διαδικασία βάσει της οποίας εξάχθηκαν οι Εξ. (3.8) - (3.10)]. □

Η Ιδιότητα 3.2 παρέχει, υπό την προϋπόθεση ότι δίδεται το κατώφλι και το MRDE του i -οστού τελεστή, την αναγκαία και ικανή τιμή της μετατόπισης $x(t)$, η οποία αναγκάζει τον τελεστή να παραμένει ακίνητος. Επομένως ο i -οστός τελεστής ολισθαίνει - αν και μόνο αν - η τρέχουσα τιμή της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ γίνει ίση ή υπερβεί τα όρια που δίνονται από την Εξ. (3.16). Το παραπάνω θα γίνει πιο κατανοητό με τη βοήθεια του ακόλουθου παραδείγματος.

Ας εξεταστεί το Σχήμα 3.5 και ας παρατηρηθεί ότι το MRDE του απεικονιζόμενου τελεστή ($\Delta_i = 2.3$) $\forall t > t_{e,i}$ είναι το $x(t_{e,i}) = 6$. Αν εφαρμοστούν τα δεδομένα αυτά στην Εξ. (3.16) [προφανώς, $\delta_i(t_{e,i}) = 2.3$] τότε βγαίνει ότι: $1.4 < x(t) < 6$, το οποίο με τη σειρά του δηλώνει ότι εφόσον η εφαρμοζόμενη μετατόπιση είναι τέτοια ώστε το $x(t) \in (1.4, 6)$, τότε ο τελεστής παραμένει ακίνητος. Όπως είναι εμφανές στο Σχήμα 3.5, η εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ βρίσκεται στα όρια αυτά $\forall t \in [t_{e,i} + 1, t_i - 1]$. Επιπλέον είναι φανερό ότι για τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο ο τελεστής παραμένει ακίνητος ($|\delta_i(t)| < 2.3$, $\forall t \in [t_{e,i} + 1, t_i - 1]$), ενώ τη χρονική στιγμή t_i $stick \rightarrow slip(+)$. Ας σημειωθεί ότι $x(t_i) = 6$, δηλαδή η εφαρμοζόμενη μετατόπιση την τρέχουσα χρονική στιγμή t_i υπερβαίνει τα παραπάνω όρια.

Η Ιδιότητα 3.2 παρέχει ένα πρακτικό εργαλείο καθορισμού της τρέχουσας περιοχής λειτουργίας του i -οστού τελεστή. Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής: (i) Δοθέντος του Δ_i , εντοπίζεται το MRDE του i -οστού τελεστή την τρέχουσα χρονική στιγμή t , (ii) αντικαθίστανται η τρέχουσα τιμή της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ στην Εξ. (3.16) και (iii) αν η τιμή $x(t)$ βρίσκεται εντός των ορίων τότε ο τελεστής είναι ακίνητος, αν είναι μεγαλύτερη ή ίση με το πάνω όριο τότε ολισθαίνει θετικά, ενώ αν είναι μικρότερη ή ίση με το κάτω όριο ολισθαίνει αρνητικά.

Η επόμενη ιδιότητα αφιερώνεται στη διαφορισμότητα της παραμόρφωσης του ελατηρίου του i -οστού τελεστή $\delta_i(t)$, ως προς το κατώφλι του Δ_i . Σημειώνεται ότι αν και μέχρι τώρα η απευθείας εξάρτηση της παραμόρφωσης του ελατηρίου από το κατώφλι του i -οστού τελεστή έχει παραλειφθεί (για λόγους απλούστευσης του συμβολισμού), υιοθετείται στα πλαίσια της επόμενης ιδιότητας.

Προτού δοθεί η επίσημη έκφραση της ιδιότητας της διαφορίσης, παρατίθεται, για λόγους κατανόησης, το παρακάτω παράδειγμα. Ας υποτεθεί ότι το MRDE του i -οστού τελεστή είναι μέγιστο και συμβολίζεται ως $\bar{x}(t_{e,i})$. Επομένως η παραμόρφωση του ελατηρίου του $\delta_i(t)$ για $t \geq t_{e,i}$, δίνεται, λόγω της Ιδιότητας 3.1 και 3.2, ως εξής:

$$\delta_i(t, \Delta_i) = \begin{cases} \Delta_i & ; x(t) - \bar{x}(t_{e,i}) \geq 0 \\ x(t) - x(t_{e,i}) + \Delta_i & ; -2\Delta_i < x(t) - \bar{x}(t_{e,i}) < 0 \\ -\Delta_i & ; x(t) - \bar{x}(t_{e,i}) \leq -2\Delta_i \end{cases} \begin{matrix} [slip(+)] \\ [stick] \\ [slip(-)] \end{matrix}, \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (3.18)$$

Διαφορίζοντας τον κάθε κλάδο της παραπάνω εξίσωσης ως προς το Δ_i , προκύπτει το ακόλουθο

αποτέλεσμα :

$$\frac{\partial \delta_i(t, \Delta_i)}{\partial \Delta_i} \triangleq \delta'_i(t, \Delta_i) = \begin{cases} 1 & ; x(t) - \bar{x}(t_{e,i}) \geq 0 \\ 1 & ; -2\Delta_i < x(t) - \bar{x}(t_{e,i}) < 0 \\ -1 & ; x(t) - \bar{x}(t_{e,i}) \leq -2\Delta_i \end{cases} \begin{matrix} [slip(+)] \\ [stick] \\ [slip(-)] \end{matrix}, \quad \forall t \geq t_{e,i} \quad (3.19)$$

Επομένως η $\delta_i(t, \Delta_i)$ είναι σχεδόν παντού (almost everywhere) δύο φορές διαφορίσιμη ως προς το Δ_i , εκτός από την καμπύλη η οποία ορίζεται από τη σχέση: $x(t) - \bar{x}(t_{e,i}) = -2\Delta_i$ (ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στην [107, Section 10] για ένα αντίστοιχο παράδειγμα).

Η επίσημη έκφραση της παραπάνω ιδιότητας διαφορίσης παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω.

Ιδιότητα 3.3 (Διαφορισιμότητα) Έστω ο i -οστός τελεστής με αυθαίρετο κατώφλι $\Delta_i \leq c$ (με $0 < c < \infty$), ο οποίος διεγείρεται από μια εφαρμοζόμενη ακολουθία μετατόπισης $x(t)$. Επίσης ας υποτεθεί ότι η διέγερση είναι τέτοια ώστε $\forall \Delta_i$ υπάρχει τουλάχιστον ένα MRDE, το οποίο συμβολίζεται ως $x(t_{e,i})$, για τον εν λόγω τελεστή. Τότε η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι σχεδόν παντού δύο φορές διαφορίσιμη ως προς το κατώφλι του Δ_i , ενώ η αντίστοιχη πρώτη και δεύτερη παράγωγος δίνεται ως εξής:

$$\frac{\partial \delta_i(t, \Delta_i)}{\partial \Delta_i} \triangleq \delta'_i(t, \Delta_i) = \begin{cases} 1 & [slip(+)] \\ sgn\{\delta_i(t_{e,i})\} & [stick] \\ -1 & [slip(-)] \end{cases}, \quad \forall t \geq t_{e,i} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 \delta_i(t, \Delta_i)}{\partial \Delta_i^2} \triangleq \delta''_i(t, \Delta_i) = 0 \quad (3.21)$$

όπου $\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_i$] αν και μόνο αν το $x(t_{e,i})$ είναι δεσπόζον μέγιστο [αντίστοιχα: ελάχιστο] για το i -οστό τελεστή (βλέπε Πίνακα 3.1). $\square$

Απόδειξη: Λόγω της συνθήκης Lipschitz, η οποία περιγράφεται από την Ιδιότητα 3.6 (βλέπε παρακάτω), ισχύει $\forall \Delta_i, \tilde{\Delta}_i$ το ακόλουθο:

$$|\delta_i(t, \Delta_i) - \delta_i(t, \tilde{\Delta}_i)| \leq |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i|, \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (3.22)$$

όπου με t_{cr} συμβολίζεται η χρονική στιγμή εμφάνισης του κοινού (και για τους δύο τελεστές) δεσπόζοντος ακρότατου. Επομένως, η $\delta_i(t, \Delta_i)$ είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμη ως προς το Δ_i .

Στη συνέχεια υπενθυμίζεται ότι $\forall \Delta_i$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x(t_{e,i})$ (MRDE). Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις: (a) ο i -οστός τελεστής είναι ακίνητος (*sticks*), (b) ολισθαίνει θετικά $[slip(+)]$ και (c) ολισθαίνει αρνητικά $[slip(-)]$ για $t \geq t_{e,i}$.

Στην περίπτωση ακινησίας (πρώτη περίπτωση), η παραμόρφωση ελατηρίου του τελεστή δίνεται από την Ιδιότητα 3.1 [Εξ. (3.15)]. Επομένως, $\delta'_i(t, \Delta_i) = sgn\{\delta_i(t, e, i)\}$, με $\delta_i(t_{e,i}) = \Delta_i$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_i$] αν και μόνο αν το $x(t_{e,i})$ είναι δεσπόζον, για τον τελεστή, μέγιστο [αντίστοιχα:

ελάχιστο]. Κατά παρόμοιο τρόπο, αν ο τελεστής ολισθαίνει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά], τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\delta'_i(t, \Delta_i) = 1$ [αντίστοιχα: $= -1$].

Επί τη βάση των προηγούμενων αποτελεσμάτων, η απόδειξη της Εξ. (3.21) προκύπτει απευθείας. $\square$

3.4.2 Ιδιότητες Δύο ή Περισσότερων Τελεστών Τύπου E-Π σε Συνδυασμό

Οι ιδιότητες που παρουσιάζονται στην παρούσα υποενότητα αναφέρονται στην συνδυασμένη συμπεριφορά δύο ή και περισσότερων τελεστών τύπου E-Π, υπό το καθεστώς κοινής διέγερσης (εφαρμοζόμενης μετατόπισης). Κατά κύριο λόγο ελέγχεται πως συμπεριφέρεται ένας τελεστής όταν ένας άλλος με μεγαλύτερο κατώφλι ολισθαίνει ή παραμένει ακίνητος. Τα βασικά εργαλεία για την επίτευξη του παραπάνω είναι οι Ιδιότητες 3.1 και 3.2.

Η ιδιότητα, η οποία θα παρουσιαστεί αμέσως παρακάτω, αναφέρεται σε δύο τελεστές τύπου E-Π με κατώφλια $\Delta_1 < \Delta_2$ κάτω από την ίδια διέγερση. Σε γενικές γραμμές δηλώνει ότι αν ο δεύτερος τελεστής είναι ακίνητος για κάποιο χρονικό διάστημα, και ως εκ τούτου η εφαρμοζόμενη μετατόπιση βρίσκεται εντός των ορίων που δίνονται από την Εξ. (3.16), τότε ένα οποιοδήποτε δεσπόζον ακρότατο για τον πρώτο τελεστή, το οποίο μπορεί να εμφανιστεί εντός του εν λόγω χρονικού διαστήματος, πρέπει να βρίσκεται εντός κάποιων συγκεκριμένων ορίων, αλλιώς ο δεύτερος τελεστής δεν είναι δυνατόν να παραμένει ακίνητος. Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά τη διάρκεια του εν λόγω χρονικού διαστήματος, ο πρώτος τελεστής δύναται να ολισθαίνει ή να είναι ακίνητος, ή ακόμα να μεταβαίνει από τη μία περιοχή στην άλλη αρκετές φορές (γεγονός που συνεπάγεται τη εμφάνιση πολλαπλών δεσπόζοντων ακροτάτων για αυτόν).

Ιδιότητα 3.4 Έστω δύο τελεστές τύπου E-Π, οι οποίοι διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, με $x(t_{e,1:2})$ να είναι ένα δεσπόζον μέγιστο [αντίστοιχα: ελάχιστο] και για τους δύο ταυτόχρονα. Επιπλέον, ας υποτεθεί ότι τα κατώφλια τους είναι Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα, με $\Delta_1 < \Delta_2$. Αν ο δεύτερος τελεστής παραμένει ακίνητος [δηλαδή: $|\delta_2(t)| < \Delta_2 \forall t > t_{e,1:2}$], τότε ένα οποιοδήποτε δεσπόζον ελάχιστο, $\underline{x}(t_{e,1})$, ή μέγιστο, $\bar{x}(t_{e,1})$, για τον πρώτο τελεστή, το οποίο εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t > t_{e,1:2}$, πρέπει να βρίσκεται στα ακόλουθα εύρη:

$$\text{Αν } x(t_{e,1:2}) \text{ είναι μέγιστο} \quad [x(t_{e,1:2}) \equiv \bar{x}(t_{e,1:2})] \text{ τότε :}$$

$$\bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_2 < \underline{x}(t_{e,1}) \leq \bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_1 \quad (3.23)$$

$$\bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_2 + 2\Delta_1 \leq \bar{x}(t_{e,1}) < \bar{x}(t_{e,1:2}) \quad (3.24)$$

Αν $x(t_{e,1:2})$ είναι ελάχιστο $[x(t_{e,1:2}) \equiv \underline{x}(t_{e,1:2})]$ τότε :

$$\underline{x}(t_{e,1:2}) < \underline{x}(t_{e,1}) \leq \underline{x}(t_{e,1:2}) + 2\Delta_2 - 2\Delta_1 \quad (3.25)$$

$$\underline{x}(t_{e,1:2}) + 2\Delta_1 \leq \bar{x}(t_{e,1}) < \underline{x}(t_{e,1:2}) + 2\Delta_2 \quad (3.26)$$

□

Απόδειξη: Παράρτημα Α'.

□

Η επόμενη ιδιότητα δηλώνει ότι [υπό το καθεστώς της κοινής διεγέρσεως (εφαρμοζόμενης μετατόπισης) και της ύπαρξης κοινού δεσπόζοντος ακρότατου] όταν ένας τελεστής ολισθαίνει (θετικά ή αρνητικά), τότε οποιοσδήποτε άλλος τελεστής με μικρότερο κατώφλι έχει ήδη ολισθήσει προς την ίδια κατεύθυνση με τον παραπάνω. Τα εργαλεία για την απόδειξη της ιδιότητας αυτής είναι οι ιδιότητες 3.2 και 3.4.

Ιδιότητα 3.5 Έστω δύο τελεστές τύπου E-Π, οι οποίοι διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, με $x(t_{e,1:2})$ να αποτελεί δεσπόζον ακρότατο και για τους δύο ταυτόχρονα. Επιπλέον, ας υποτεθεί ότι τα κατώφλια τους είναι Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα, με $\Delta_1 < \Delta_2$. Αν $\exists t_2 > t_{e,1:2}$ τέτοιο ώστε ο δεύτερος τελεστής να ολισθαίνει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά], δηλαδή $\delta_2(t_2) = \Delta_2$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_2$], τότε ο πρώτος τελεστής τη χρονική στιγμή t_2 ολισθαίνει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά] και αυτός.

□

Απόδειξη: Παράρτημα Α'.

□

Μερικά παραδείγματα της προηγούμενης ιδιότητας απεικονίζονται γραφικά στο Σχήμα 3.2. Όπως εύκολα διαπιστώνεται, οποιεδήποτε ο δεύτερος τελεστής $[\delta_2(t)]$ ολισθαίνει, τότε ο πρώτος τελεστής $[\delta_1(t)]$ έχει ήδη μπει στην περιοχή ολίσθησης. Σημειώνεται ότι $\Delta_1 < \Delta_2$.

Ιδιότητα 3.6 (Πρώτη συνθήκη Lipschitz) Έστω δύο τελεστές τύπου E-Π, οι οποίοι διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, με $x(t_{e,1:2})$ να αποτελεί δεσπόζον ακρότατο και για τους δύο ταυτόχρονα. Επιπλέον, ας υποτεθεί ότι τα κατώφλια τους είναι Δ_1 και Δ_2 , αντίστοιχα, με $\Delta_1 < \Delta_2$. Τότε:

$$|\delta_1(t) - \delta_2(t)| \leq |\Delta_1 - \Delta_2|, \quad \forall t \geq t_{e,1:2} \quad (3.27)$$

□

Απόδειξη: Παράρτημα Α'.

□

3.4.3 Ιδιότητες του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Η πρώτη ιδιότητα αναφέρεται στις συνοριακές συνθήκες της απόκρισης του μοντέλου. Οι επόμενες δύο αναφέρονται στη διαφορά μεταξύ των αποκρίσεων δύο μοντέλων ολίσθησης του Maxwell, και δηλώνουν είτε ότι είναι φραγμένη, κατά απόλυτο τιμή, από έναν αυθαίρετα μεγάλο αλλά πεπερασμένο αριθμό, είτε από μια άλλη συνάρτηση, η οποία τείνει στο μηδέν όταν το όρισμα της τείνει και αυτό το μηδέν.

Ιδιότητα 3.7 Έστω ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές και διάνυσμα παραμέτρων $\theta_M \in \Theta_M$, όπου Θ_M συμπαγής (compact) χώρος (Υπόθεση 3.1). Με $f(t, \theta_M)$ συμβολίζεται η αντίστοιχη απόκριση του. Τότε υπάρχει $C_{\Theta_M} < \infty$ ένας αυθαίρετα μεγάλος αλλά πεπερασμένος θετικός αριθμός, τέτοιος ώστε:

$$|f(t, \theta_M)| \leq C_{\Theta_M} \quad (3.28)$$

□

Απόδειξη: Αρχικά υπενθυμίζεται ότι $|\delta_i(t)| \leq \Delta_i$, $\forall t$ και $\forall i = 1, \dots, M$ και $\theta_M \in \Theta_M$ (συμπαγής χώρος). Επομένως, η Εξ. (3.6), $\forall t$ και $\forall \theta_M \in \Theta_M$ δίνει:

$$-\infty < -\sum_{i=1}^M k_i \cdot \Delta_i \leq f(t, \theta_M) \leq \sum_{i=1}^M k_i \cdot \Delta_i < \infty \implies |f(t, \theta_M)| \leq \sup_{\theta_M} \left\{ \sum_{i=1}^M k_i \cdot \Delta_i \right\} = C_{\Theta_M} \quad (3.29)$$

όπου με $\sup$ (supremum) συμβολίζεται το κατώτερο άνω άκρο ¹.

□

Ιδιότητα 3.8 Έστω δύο μοντέλα ολίσθησης του Maxwell με M και $\widetilde{M}$ τελεστές, με διανύσματα παραμέτρων $\theta_M \in \Theta_M$ και $\theta_{\widetilde{M}} \in \Theta_{\widetilde{M}}$, όπου Θ_M και $\Theta_{\widetilde{M}}$ συμπαγής (compact) χώροι. Επιπλέον, ας υποτεθεί ότι με $f(t, \theta_M)$ και $f(t, \theta_{\widetilde{M}})$ συμβολίζονται οι αντίστοιχες αποκρίσεις των δύο παραπάνω μοντέλων. Τότε υπάρχει $C < \infty$ έτσι ώστε:

$$|f(t, \theta_{\widetilde{M}}) - f(t, \theta_M)| \leq C \quad (3.30)$$

□

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει απευθείας από την Ιδιότητα 3.7

□

¹ Το κατώτερο άνω άκρο – για παράδειγμα αν $S \triangleq \{x \in \mathcal{R} : 0 < x < 1\}$ τότε $\sup_S \{x\} = 1$).

Ιδιότητα 3.9 (Δεύτερη συνθήκη Lipschitz) Έστω δύο μοντέλα ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές έκαστο, τα οποία διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$. Τα διανύσματα των παραμέτρων των δύο μοντέλων είναι $\theta_M = [k_1 \dots k_M \Delta_1 \dots \Delta_M]^T \in \Theta_M$ και $\tilde{\theta}_M = [\tilde{k}_1 \dots \tilde{k}_M \tilde{\Delta}_1 \dots \tilde{\Delta}_M]^T \in \Theta_M$, όπου ο χώρος των παραμέτρων Θ_M είναι συμπαγής. Έστω $x(t_{cr})$ το κοινό για όλους τους τελεστές και των δύο μοντέλων δεσπόζον ακρότατο. Τότε ισχύει η παρακάτω συνθήκη Lipschitz, $\forall t \geq t_{cr}$ για τις αντίστοιχες αποκρίσεις των δύο μοντέλων:

$$|f(t, \theta_M) - f(t, \tilde{\theta}_M)| \leq C \cdot d_{\Theta_M}(\theta_M, \tilde{\theta}_M), \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (3.31)$$

όπου με $C < \infty$ συμβολίζεται ένας αυθαίρετα μεγάλος, αλλά πεπερασμένος, θετικός και σταθερός αριθμός και με $d_{\Theta_M}(\theta, \tilde{\theta})$ η L_1 νόρμα:

$$d_{\Theta_M}(\theta_M, \tilde{\theta}_M) = \sum_{i=1}^M (|k_i - \tilde{k}_i| + |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i|) \quad (3.32)$$

□

Απόδειξη: Σύμφωνα με την Εξ. (3.6):

$$|f(t, \theta_M) - f(t, \tilde{\theta}_M)| \leq \sum_{i=1}^M |k_i \cdot \delta_i(t) - \tilde{k}_i \cdot \tilde{\delta}_i(t)|, \quad \forall t \quad (3.33)$$

Έστω $\rho_i \triangleq k_i - \tilde{k}_i$ και $\lambda_i(t) \triangleq \delta_i(t) - \tilde{\delta}_i(t)$. Τότε:

$$|k_i \cdot \delta_i(t) - \tilde{k}_i \cdot \tilde{\delta}_i(t)| \leq |k_i| |\rho_i| + |\delta_i(t)| |\lambda_i(t)| + |\rho_i \cdot \lambda_i(t)| \quad (3.34)$$

Εξ ορισμού $|\delta_i(t)| \leq \Delta_i$. Επιπλέον λόγω του ότι ο χώρος των παραμέτρων, Θ_M είναι συμπαγής $\exists c < \infty$ τέτοιο ώστε $c > |k_i|, |\tilde{k}_i|, |\Delta_i|, |\tilde{\Delta}_i|, \forall k_i, \tilde{k}_i, \Delta_i, \tilde{\Delta}_i$. Επίσης, λόγω της Ιδιότητας 3.6: $|\lambda_i(t)| \leq |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i|$. Λόγω όλων των παραπάνω, η Εξ. (3.34) γίνεται:

$$|k_i \cdot \delta_i(t) - \tilde{k}_i \cdot \tilde{\delta}_i(t)| \leq c \cdot (|k_i - \tilde{k}_i| + |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i|) + |(k_i - \tilde{k}_i) \cdot (\Delta_i - \tilde{\Delta}_i)| \quad (3.35)$$

Ο τελευταίος όρος του δεξιότερου τμήματος της Εξ. (3.35) γίνεται:

$$\begin{aligned} |(k_i - \tilde{k}_i) \cdot (\Delta_i - \tilde{\Delta}_i)| &\leq |k_i| \cdot |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i| + |\tilde{k}_i| \cdot |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i| \\ &\leq 2c |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i| \end{aligned} \quad (3.36)$$

Επομένως, λόγω της Εξ. (3.36), η Εξ. (3.35) γίνεται:

$$|k_i \cdot \delta_i(t) - \tilde{k}_i \cdot \tilde{\delta}_i(t)| \leq C \cdot (|k_i - \tilde{k}_i| + |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i|) \quad (3.37)$$

όπου $C \geq 3c$ και τελικώς η Εξ. (3.33), λόγω της Εξ. (3.37), γίνεται:

$$|f(t, \theta_M) - f(t, \tilde{\theta}_M)| \leq C \cdot \sum_{i=1}^M \left(|k_i - \tilde{k}_i| + |\Delta_i - \tilde{\Delta}_i| \right) \quad (3.38)$$

□

Οι επόμενες δύο ιδιότητες αναφέρονται σε εκείνες τις συνθήκες, οι οποίες αν παραβιαστούν τότε δύο διαφορετικά μοντέλα, με τον ίδιο αριθμό τελεστών, δίνουν ακριβώς την ίδια απόκριση υπό το καθεστώς κοινής διεγέρσεως. Συνεπώς, οι εν λόγω ιδιότητες αναπόφευκτα συνδέονται με τα χαρακτηριστικά, τα οποία πρέπει να διέπουν την εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, έτσι ώστε να αναγκάζει δύο διαφορετικά μοντέλα να δίνουν διαφορετική απόκριση (κάθε μοντέλο να έχει δηλαδή μοναδική ταυτότητα). Οι ιδιότητες αυτές σχετίζονται άμεσα με την επιτυχή εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (βλέπε επόμενα κεφάλαια και κυρίως Υποενότητα 4.3.3 – Κεφάλαιο 4).

Η πρώτη ιδιότητα αναφέρεται στη βασικότερη συνθήκη διεγερσης, δίχως την οποία (ή καλύτερα δίχως του αποτελέσματος που επιφέρει) δεν είναι δυνατή η διασφάλιση της μοναδικότητας του κάθε μοντέλου.

Ιδιότητα 3.10 Έστω ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές και διάνυσμα παραμέτρων $\theta_M = [k_1 \dots k_M \Delta_1 \dots \Delta_M]^T \in \Theta_M$. Έστω ότι το εν λόγω μοντέλο διεγείρεται από μία εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, έτσι ώστε τουλάχιστον ένας εκ των τελεστών του μοντέλου να ξεκινάει από ακινησία και να μην εισέρχεται ποτέ στην περιοχή ολίσθησης του (θετική ή αρνητική - παραμένει δηλαδή πάντα ακίνητος). Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα δεύτερο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με διάνυσμα παραμέτρων $\tilde{\theta}_M = [\tilde{k}_1 \dots \tilde{k}_M \tilde{\Delta}_1 \dots \tilde{\Delta}_M]^T \in \Theta_M$ και $\tilde{\theta}_M \neq \theta_M$, το οποίο αν διεγερθεί από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση όπως το πρώτο μοντέλο, δίνει ακριβώς την ίδια απόκριση με το πρώτο, δηλαδή:

$$f(t, \theta_M) = f(t, \tilde{\theta}_M), \quad \forall t = 1, 2, \dots$$

□

Απόδειξη: Η απόδειξη θα υλοποιηθεί μέσω ενός αντιπαραδείγματος.

Εφόσον τουλάχιστον ένας τελεστής παραμένει διαρκώς στην περιοχή ακινησίας, γίνεται η υπόθεση ότι η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται από τον πρώτο τελεστή του πρώτου μοντέλου. Εφόσον ο πρώτος τελεστής $[\delta_1(t)]$ παραμένει ακίνητος $\forall t = 1, 2, \dots$ [εξ υποθέσεως $|\delta_1(t)| < \Delta_1, \forall t = 1, 2, \dots$], τότε προκύπτει από την Εξ. (3.5) ότι η παραμόρφωση του ελατηρίου του δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\delta_1(t) = x(t) - x(1) + \delta_1(1), \quad \forall t = 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

όπου με $\delta_1(1)$ η αρχική κατάσταση του εν λόγω τελεστή. Συνεπώς η απόκριση του πρώτου μοντέλου είναι [Εξ. (3.6)]:

$$\begin{aligned} f(t, \theta_M) &= k_1 \cdot \delta_1(t) + k_2 \cdot \delta_2(t) + \dots + k_M \cdot \delta_M(t) \\ &= k_1 \cdot x(t) + k_1 \cdot (\delta_1(1) - x(1)) + \sum_{i=2}^M k_i \cdot \delta_i(t) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Έστω τώρα ένα δεύτερο μοντέλο με $\tilde{k}_i = k_i \forall i = 1, \dots, M$, $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i \forall i = 2, \dots, M$ και $\tilde{\Delta}_1 > \Delta_1$, το οποίο παρουσιάζει ακριβώς τις ίδιες αρχικές καταστάσεις με το πρώτο μοντέλο. Είναι προφανές ότι ο πρώτος τελεστής και αυτού του μοντέλου ξεκινάει $|\delta_1(1) = \tilde{\delta}_1(1)|$ και $|\delta_1(1)| < \Delta_1 < \tilde{\Delta}_1$ και παραμένει συνεχώς στην περιοχή ακινησίας $|\delta_1(t)| < \Delta_1 < \tilde{\Delta}_1, \forall t = 1, 2, \dots$. Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι προφανές ότι αν και δύο μοντέλα είναι διαφορετικά, παρουσιάζουν ακριβώς την ίδια απόκριση. $\square$

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα φαίνεται ότι όλοι οι τελεστές πρέπει να αναγκαστούν, από τη διέγερση, να εισέλθουν τουλάχιστον μία φορά στην περιοχή ολίσθησης τους², διότι σε αντίθετη περίπτωση η απώλεια της μοναδικότητας της αποκρίσεως είναι δεδομένο ότι θα συμβεί.

Πέρα από την Ιδιότητα 3.10, η απαίτηση να βρεθούν όλοι οι τελεστές τουλάχιστον για μία χρονική στιγμή στη περιοχή ολίσθησης του μπορεί να κατανοηθεί και ως εξής: Αν ο κάθε τελεστής δε βρεθεί τουλάχιστον μία χρονική στιγμή σε ολίσθηση, τότε στο σήμα της απόκρισης δεν περιέχεται πληροφορία σχετικά με την περιοχή αυτή. Με άλλα λόγια έχει αποκοπεί αναγκαία πληροφορία από το σήμα της απόκρισης του μοντέλου.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η εφαρμοζόμενη μετατόπιση πρέπει να είναι τέτοια ώστε όλοι οι τελεστές να βρεθούν τουλάχιστον μία χρονική στιγμή στη περιοχή ολίσθησης. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην πρώτη αναγκαστική συνθήκη διεγέρσεως:

Ορισμός 3.6 (Συνθήκη C0) Η εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ είναι αναγκαίο να σχεδιαστεί με τρόπο τέτοιο, έτσι ώστε να αυξάνεται (ή να μειώνεται), αυθαίρετα, μέχρι μίας κρίσιμης μέγιστης (ή ελάχιστης) τιμής $x_{cr} = x(t_{cr})$. Η τιμή αυτή πρέπει να είναι τέτοια ώστε να αναγκάζει όλους τους τελεστές να ολισθήσουν τη χρονική στιγμή t_{cr} . $\square$

Η Συνθήκη C0 απεικονίζεται γραφικά στο Σχήμα 3.2, όπου η $x(19)$ είναι και για τους δύο τελεστές τέτοια ώστε $\delta_1(19) = \Delta_1$ και $\delta_2(19) = \Delta_2$. Έτσι θέτοντας $t_{cr} = 19$ η Συνθήκη C0 ικανοποιείται.

²Ο βασικός λόγος που συμβαίνει αυτό είναι η εκ των προτέρων μη αναγνωρισιμότητα των αρχικών καταστάσεων, θέμα το οποίο θα αναλυθεί με λεπτομέρειες σε παρακάτω ενότητα.

Το αποτέλεσμα που επιφέρει η $C0$ μπορεί να επιτευχθεί θέτοντας μία άλλη συνθήκη. Με άλλα λόγια η Συνθήκη $C0$ δεν είναι ο μοναδικός τρόπος να επιτύχουμε την άκρως απαραίτητη απαίτηση “όλοι οι τελεστές να βρεθούν τουλάχιστον μία φορά σε ολίσθηση”. Εντούτοις πιστεύεται ότι η προτεινόμενη Συνθήκη $C0$ είναι ο ευκολότερος και πρακτικότερος τρόπος υλοποίησης της απαίτησης αυτής. Δεδομένου λοιπόν ότι η Συνθήκη $C0$ επιτυγχάνει (ίσως με τον ευκολότερο τρόπο) τη συγκεκριμένη συμπεριφορά από τους τελεστές, η οποία είναι αναγκαία για την επίτευξη της μοναδικότητας της απόκρισης, χαρακτηρίζεται ως αναγκαία συνθήκη.

Η επόμενη ιδιότητα αναφέρεται στις αναγκαίες και ικανές συνθήκες διέγερσης, οι οποίες δεδομένου της Συνθήκης $C0$, διασφαλίζουν ότι ένα μοντέλο δεν μπορεί να έχει ακριβώς την ίδια απόκριση με ένα άλλο, το οποίο ανήκει στην ίδια δομή. Με άλλα λόγια αναφέρεται στις συνθήκες διέγερσης που αναγκάζουν δύο μοντέλα που ανήκουν στην ίδια δομή να υπακούουν στην ακόλουθη ισοδυναμία:

$$f(t, \theta_M) = f(t, \tilde{\theta}_M), \forall t \geq t_{cr} \iff \theta_M = \tilde{\theta}_M \quad (3.41)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ισότητα των αποκρίσεων συνδέεται, μέσω της Εξ. (3.41), μόνο με το διάνυσμα των παραμέτρων θ_M και όχι και με το διάνυσμα των αρχικών καταστάσεων $\delta_M(1)$ (σημειώνεται ότι και το $\delta_M(1)$ είναι άγνωστο κατά τη διαδικασία της εκτιμήσεως). Αυτό γίνεται διότι, όπως θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα του τρέχοντος κεφαλαίου, υπάρχουν τουλάχιστον δύο μοντέλα με διαφορετικό διάνυσμα αρχικών καταστάσεων τα οποία δίνουν ακριβώς την ίδια απόκριση [η δομή του μοντέλου δεν είναι εκ των προτέρων αναγνωρίσιμη ως προς το $\delta_M(1)$]. Επομένως κάθε προσπάθεια διάκρισης είναι καταδικασμένη να αποτύχει. Αυτός είναι και ο λόγος, για τον οποίο η ισότητα των αποκρίσεων λαμβάνεται από t_{cr} και πέρα³.

Πρίν δοθεί η επίσημη έκφραση της εν λόγω ιδιότητας, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί τι ακριβώς θεωρείται ως δομή μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Ορισμός 3.7 (Δομή μοντέλου ολίσθησης του Maxwell) Με το όρο δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές, ορίζεται το σύνολο των μοντέλων ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές, τα οποία διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ και για τα οποία ισχύουν οι Υποθέσεις 3.1 - 3.3 και η Συνθήκη $C0$ τη χρονική στιγμή t_{cr} . $\square$

³ Λόγω της Συνθήκης $C0$, το $x(t_{cr})$ είναι το πρώτο δεσπόζον ακρότατο. Συνεπώς $\forall i = 1, \dots, M, \delta_i(t_{cr}) = \text{sgn}[x(t_{cr})] \cdot \Delta_i$. Οπότε αν θεωρηθεί ότι τα διαθέσιμα δεδομένα ξεκινάνε από τη χρονική στιγμή t_{cr} , τότε η αρχική κατάσταση του κάθε τελεστή είναι ίση με το κατώφλι του (και όχι μια οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $[-\Delta_i, \Delta_i]$), το οποίο όπως θα αποδειχθεί είναι εκ των προτέρων αναγνωρίσιμο. Με αυτόν τον τρόπο λοιπόν αντιμετωπίζεται το βασικό πρόβλημα της μη αναγνωρισιμότητας των αρχικών καταστάσεων.

Κατόπιν τούτου, παρουσιάζεται η εν λόγω ιδιότητα, η οποία δίνει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες διεγέρσεως που καθιστούν έγκυρη την ισοδυναμία που περιγράφεται από την Εξ. (3.41).

Ιδιότητα 3.11 (Συνθήκες Διέγερσης) Έστω ένα μοντέλο, το οποίο ανήκει στη δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές. Επί τη βάση αυτού, δεν υπάρχει άλλο μοντέλο στη δομή που να έχει ακριβώς την ίδια απόκριση με το πρώτο [ισχύει η ισοδυναμία της Εξ. (3.41)] αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα οι ακόλουθες συνθήκες:

C1: Ο πρώτος τελεστής $[\delta_1(t)]$ $slip(\pm) \rightarrow stick$ τουλάχιστον μία φορά για $t > t_{cr}$.

C2: $\forall i = 1, \dots, M - 1$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο χρονικές στιγμές $t_{e,i+1}, t_i$, με $t_{cr} \leq t_{e,i+1} < t_i$ τέτοιες ώστε:

(a) το $x(t_{e,i+1})$ να είναι το MRDE για τον $i + 1$ -οστό τελεστή την τρέχουσα χρονική στιγμή t_i .

Επομένως, (βλέπε Πίνακα 3.1) $\delta_{i+1}(t_{e,i+1}) = \Delta_{i+1}$ (ή $= -\Delta_{i+1}$).

(b) $|\delta_{i+1}(t)| < \Delta_{i+1}, \forall t \in [t_{e,i+1} + 1, t_i]$ (ο $i + 1$ -οστός τελεστής παραμένει ακίνητος)

(c) $\delta_i(t_i) = -\delta_i(t_{e,i+1})$, δηλαδή ο i -οστός τελεστής ολισθαίνει (*slips*) προς την αντίθετη κατεύθυνση από ότι έκανε τη χρονική στιγμή $t_{e,i+1}$.

C3: Υπό το καθεστώς της Συνθήκης C2 και $\forall i = 1, \dots, M - 1$ υπάρχουν τουλάχιστον δύο χρονικές στιγμές $t'_{e,i+1}, t'_i$, με $t_{cr} \leq t_{e,i+1} \leq t'_{e,i+1} < t'_i$ και $t_i < t'_i$ τέτοιες ώστε:

(a) το $x(t'_{e,i+1})$ να είναι το MRDE του $i + 1$ -οστού τελεστή την τρέχουσα χρονική στιγμή t'_i .

Επιπλέον (βλέπε Πίνακα 3.1) $\delta_{i+1}(t'_{e,i+1}) = \Delta_{i+1}$ (ή $= -\Delta_{i+1}$).

(b) $|\delta_{i+1}(t)| < \Delta_{i+1}, \forall t \in [t'_{e,i+1} + 1, t'_i]$ (ο $i + 1$ -οστός τελεστής παραμένει ακίνητος)

(c) $\delta_i(t'_i) = \begin{cases} \delta_i(t'_{e,i+1}) \\ or \\ -\delta_i(t'_{e,i+1}) \end{cases}$

όπου για τον κάτω κλάδο της C3(c) ισχύει:

$$x(t_i) - x(t_{e,i+1}) \neq \pm(x(t'_i) - x(t'_{e,i+1}))$$

Σημειώνεται ότι $\forall i = 1, \dots, M - 1$, $\delta_{i+1}(t_{e,i+1}) = \Delta_{i+1}$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_{i+1}$], εφόσον το $x(t_{e,i+1})$ είναι δεσπόζον μέγιστο [αντίστοιχα: ελάχιστο] για τον $i + 1$ -οστό τελεστή (βλέπε Πίνακα 3.1). Ομοίως για $t = t'_{e,i+1}$.

Επιπλέον, αφού $\Delta_i < \Delta_{i+1}, \forall i = 1, \dots, M - 1$, τότε η Ιδιότητα 3.5 δηλώνει ότι $\delta_i(t_{e,i+1}) = \Delta_i$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_i$]. Ομοίως για $t = t'_{e,i+1}$. $\square$

Απόδειξη: Παράρτημα Β'. □

Αν και η παραπάνω ιδιότητα παρουσιάζει αυξημένη πολυπλοκότητα στις μαθηματικές εκφράσεις που ενσωματώνει, οι βασικές συνθήκες που θέτει είναι απλές και εύκολα κατανοητές. Συγκεκριμένα η Συνθήκη $C1$ (υπενθύμιση: Εξ ορισμού το Δ_i είναι το μικρότερο κατώφλι) δηλώνει ότι δεν υπάρχει τελεστής, στον οποίο συμβαίνουν μόνο $slip(\pm) \rightarrow slip(\mp)$ μεταβάσεις. Επίσης, οι Συνθήκες $C2$ και $C3$ δηλώνουν σε γενικές γραμμές ότι $\forall i = 1, \dots, M - 1$ υπάρχουν τουλάχιστον δύο (διαδοχικές ή όχι) χρονικές στιγμές t_i και t'_i , τέτοιες ώστε $|\delta_i(t)| = \Delta_i$, ενώ $|\delta_{i+1}(t)| < \Delta_i$, $\forall t = t_i, t'_i$. Με άλλα λόγια, η εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ πρέπει να είναι τέτοια, ώστε για τουλάχιστον δύο χρονικές στιγμές ο i -οστός τελεστής να ολισθαίνει, ενώ ο $i + 1$ -οστός να παραμένει ακίνητος.

Σημείωση: Περισσότερες πληροφορίες - λεπτομέρειες σχετικά με τις Συνθήκες $C1 - C3$, καθώς και ορισμένες γραφικές απεικονίσεις αυτών, παρουσιάζονται στην Ενότητα 3.6 παρακάτω.

Η Ιδιότητα 3.11 αναφέρεται στην ισότητα των αποκρίσεων δύο μοντέλων ολίσθησης του Maxwell με ίσο αριθμό τελεστών, η οποία όπως θα φανεί στα παρακάτω κεφάλαια είναι αναγκαία για την εξαγωγή των ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την επιτυχή εκτίμηση του μοντέλου. Η επόμενη ιδιότητα γενικεύει την προηγούμενη ελέγχοντας την εν λόγω ισότητα, αλλά μεταξύ μοντέλων με διαφορετικό αριθμό τελεστών. Πιο συγκεκριμένα δηλώνει ότι δεν υπάρχει περίπτωση, υπό κάποιες προϋποθέσεις, δύο μοντέλα (με διαφορετικό αριθμό τελεστών) να έχουν ακριβώς την ίδια απόκριση. Η ιδιότητα αυτή, όπως θα φανεί σε επόμενα κεφάλαια, αποτελεί το βασικό εργαλείο για την επιλογή της δομής του μοντέλου (για την επιλογή του αριθμού των τελεστών που απαιτούνται για τη βέλτιστη αναπαράσταση του υπό αναγνώριση συστήματος).

Ιδιότητα 3.12 Έστω δύο μοντέλα ολίσθησης του Maxwell, τα οποία ενσωματώνουν M και $\tilde{M}$ ($\tilde{M} \neq M$) τελεστές, ενώ τα αντίστοιχα διανύσματα των παραμέτρων τους είναι $\theta_M \in \Theta_M$ και $\theta_{\tilde{M}} \in \Theta_{\tilde{M}}$. Και τα δύο μοντέλα διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, με t_{cr} η χρονική στιγμή στην οποία εκπληρώνεται η Συνθήκη $C0$ και για τα δύο μοντέλα. Ας υποτεθεί ότι το πρώτο μοντέλο υπόκειται στις Υποθέσεις 3.1 - 3.3 και στις Συνθήκες (διέγερσης) $C1 - C3$. Τότε αν το δεύτερο μοντέλο υπόκειται εξίσου στις Υποθέσεις 3.2 - 3.3 και Συνθήκες (διέγερσης) $C1 - C3$, τότε δεν υπάρχουν $\theta_M \in \Theta_M$ και $\theta_{\tilde{M}} \in \Theta_{\tilde{M}}$ τέτοια ώστε:

$$f(t, \theta_M) = f(t, \theta_{\tilde{M}}), \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (3.42)$$

□

Απόδειξη: Παράρτημα Β'. □

3.5 Αναγνωρισιμότητα του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell

3.5.1 Εκ Των Προτέρων Αναγνωρισιμότητα: Βασικές Αρχές

Η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα (apriori identifiability) [108], η οποία συχνά αναφέρεται και ως μοναδικότητα της παραμετροποίησης (uniqueness of representation), αποτελεί ιδιότητα της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Παρόλα αυτά εξετάζεται, κυρίως λόγω της αναγκαιότητάς της, σε ξεχωριστή ενότητα, προκειμένου να δοθεί η δέουσα προσοχή.

Σε γενικές γραμμές η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα μιας δομής σημαίνει ότι κάθε μοντέλο, το οποίο χαρακτηρίζεται από την εν λόγω δομή έχει μοναδικό χαρακτήρα ⁴. Μια πιο τυπική έκφραση της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας περιλαμβάνει τη μελέτη του κατά πόσο ένα μοντέλο από μια συγκεκριμένη δομή δύναται να αναγνωριστεί κατά τρόπο μοναδικό μέσω τουλάχιστον ενός κατάλληλα σχεδιασμένου πειράματος, κάτω από τις ιδανικές συνθήκες της μη ύπαρξης θορύβου στις μετρήσεις και της ορθής επιλογής της δομής [108].

Όπως είναι ευκόλως εννοούμενο, η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα είναι αναγκαία για την επιτυχή εκτίμηση ενός οποιουδήποτε μοντέλου, όχι όμως και ικανή (βλέπε επόμενα κεφάλαια). Για το λόγο αυτόν, είναι εξαιρετικά σημαντική η διερεύνηση των συνθηκών, κάτω από τις οποίες επιτυγχάνεται η διασφάλιση της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

3.5.2 Εκ Των Προτέρων Αναγνωρισιμότητα: Η Δομή του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell

Σε γενικές γραμμές, η αναγνώριση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell περιλαμβάνει την εκτίμηση τόσο του μη μετρήσιμου διανύσματος των αρχικών συνθηκών, $\delta_M(1)$, όσο και των αγνώστων διανυσμάτων των σταθερών των ελατηρίων, k_M , και των κατωφλίων, d_M (γενικότερα δηλαδή του διανύσματος των παραμέτρων θ_M), βάσει των διαθέσιμων σημάτων εφαρμοζόμενης μετατόπισης (είσοδος) – μετρούμενης συνολικής δύναμης (έξοδος).

Ορισμός 3.8 (Εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα) [70] Το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell είναι εκ των προτέρων αναγνωρίσιμο ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων θ_M , από δεδομένα εισόδου

⁴Παράδειγμα: Έστω $x(t)$ η διέγερση σε ένα μοντέλο της μορφής $y(t) = a \cdot b \cdot x(t)$, όπου $a = 2$ και $b = 6$ οι (άγνωστες) παράμετροι και $y(t)$ η απόκριση. Ας υποθεθεί ότι υπάρχουν διαθέσιμα τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ και το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός επί τη βάση αυτών των παραμέτρων a και b . Όπως είναι φανερό, υπάρχουν άπειροι συνδυασμοί a και b που δίνουν την ίδια απόκριση (π.χ $a = 4$ και $b = 3$, κ.ο.κ). Συνεπώς, το μοντέλο δεν είναι μοναδικά ορισμένο (δεν υπάρχει μοναδικότητα της παραμετροποίησης) και συνεπώς η εν λόγω δομή είναι εκ των προτέρων μη αναγνωρίσιμη. Συνεπώς κάθε προσπάθεια εκτίμησης είναι καταδικασμένη να αποτύχει.

- εξόδου, αν και μόνο αν η ισότητα των αποκρίσεων των δύο μοντέλων (παραμετροποιημένα ως προς θ_M και $\bar{\theta}_M$) ισοδυναμεί με ισότητα των αντίστοιχων διανυσμάτων των σταθερών των ελατηρίων και των κατωφλίων, δηλαδή:

$$f(t, \theta_M, \delta_M(1)) = f(t, \bar{\theta}_M, \delta_M(1)) \iff \theta_M = \bar{\theta}_M \quad (3.43)$$

για τουλάχιστον μία ακολουθία διέγερσης $x(t)$ και για τουλάχιστον ένα κοινό διάνυσμα αρχικών καταστάσεων $\delta_M(1) = \bar{\delta}_M(1)$. $\square$

Πρόταση 3.1 (Εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα των k_M και d_M) Η δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι εκ των προτέρων αναγνωρίσιμη ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων θ_M . $\square$

Απόδειξη: Η απόδειξη της εν λόγω ιδιότητας στηρίζεται στο ναδειχθεί ότι υπό τις Υποθέσεις 3.2 και 3.3, υπάρχει τουλάχιστον μία εφαρμοζόμενη μετατόπιση (είσοδος) που ικανοποιεί την ισοδυναμία που περιγράφεται από την Εξ. (3.43). Όπως είναι φανερό αν επιλεγθεί μία είσοδος που να πληρεί τις Συνθήκες $C0 - C3$ (π.χ μια περιοδική είσοδος με κατάλληλα επιλεγμένη συχνότητα ανανέωσης), τότε σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.11 η Εξ. (3.43) ικανοποιείται. $\square$

Η προηγούμενη ιδιότητα αναφέρθηκε στην εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα του διανύσματος των παραμέτρων θ_M (ή αλλιώς του διανύσματος των σταθερών των ελατηρίων k_M και των κατωφλίων d_M). Ακόμα δεν έχει γίνει λόγος για το διάνυσμα των αρχικών καταστάσεων $\delta_M(1)$, όπου είναι μη μετρήσιμο και στην ουσία άγνωστο όπως και το θ_M . Όπως παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω, η δομή είναι εκ των προτέρων μη αναγνωρίσιμη ως προς το διάνυσμα αυτό (η αριθμητική επιβεβαίωση της παρακάτω ιδιότητας γίνεται μέσω κατάλληλων Monte Carlo προσομοιώσεων και παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο, αφού πρώτα γίνει η εισαγωγή της προτεινόμενης εκτιμήτριας).

Πρόταση 3.2 (Έλλειψη εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας του $\delta_M(1)$) Η δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, η οποία χαρακτηρίζεται από δύο και παραπάνω τελεστές και ακολουθεί τις Υποθέσεις 3.2 και 3.3, δεν είναι εκ των προτέρων αναγνωρίσιμη ως προς το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών $\delta_M(1)$. $\square$

Απόδειξη: Παράρτημα Γ'. $\square$

3.5.3 Αναγνωρισιμότητα του Μοντέλου Ολίσθησης Maxwell: Ο Ρόλος της Διέγερσης

Η προηγούμενη ενότητα αφιερώθηκε στην ανάλυση της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, η οποία και αποδείχθηκε κάτω από πολύ γενικές υποθέσεις. Αν

και αποδείχθηκε ότι το μοντέλο είναι μοναδικά ορισμένο, υπάρχει πιθανότητα το χαρακτηριστικό αυτό να μην αντανakλάται στη μετρούμενη απόκριση. Με άλλα λόγια ένα εκ των προτέρων αναγνωρίσιμο μοντέλο μπορεί να χάσει αυτό το χαρακτηριστικό του, με αποτέλεσμα όταν επιχειρείται αναγνώριση αυτού, η εκτιμήτρια να μην είναι σε θέση να το διακρίνει ανάμεσα στα υπόλοιπα υποψήφια. Προκειμένου η μοναδικότητα του μοντέλου να μπορέσει (εμμέσως φυσικά) να εμφανιστεί, η διέγερση πρέπει να είναι κατάλληλη⁵.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η διέγερση πρέπει να είναι κατάλληλη, έτσι ώστε να αναγκάσει το μοντέλο που πρόκειται να εκτιμηθεί, να δώσει απόκριση διαφορετική από οποιοδήποτε άλλο μοντέλο. Συνεπώς, οι (αναγκαίες και ικανές) Συνθήκες που καθορίζονται από την Ιδιότητα 3.11 αποτελούν τη βάση για το σχεδιασμό κατάλληλης διέγερσης. Προτού όμως δοθούν αναλυτικές οδηγίες σχεδιασμού της διεγέρσεως, αναλύονται παρακάτω με λεπτομέρεια οι Συνθήκες αυτές.

Επεξήγηση των Συνθηκών $C0 - C3$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2, δεν υπάρχει μοναδικότητα ως προς τις αρχικές καταστάσεις, το οποίο σημαίνει ότι οποιαδήποτε προσπάθεια να εκτιμηθούν θα αποτύχει (βλέπε επόμενο κεφάλαιο για ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα). Πρέπει συνεπώς με κάποιον τρόπο να προεπιλεχθούν (υπενθυμίζεται ότι είναι μη μετρήσιμες ποσότητες). Η αυθαίρετη προεπιλογή τους μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα (βλέπε επόμενο κεφάλαιο), επομένως απαιτείται ένας αναλυτικός τρόπος επιλογή τους. Η Συνθήκη $C0$ εξυπηρετεί το σκοπό αυτόν, διότι τη χρονική στιγμή t_{cr} , όλοι οι τελεστές ολισθαίνουν, επομένως αν θεωρηθεί ότι οι μετρήσεις ξεκινάνε από τη χρονική στιγμή αυτή, τότε η αρχική κατάσταση του κάθε τελεστή είναι ίση με το κατώφλι του.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η Συνθήκη $C1$ αποκλείει την ύπαρξη τελεστή, ο οποίος δε βρίσκεται ποτέ σε ακινησία (του συμβαίνουν μόνο $slip(\pm) \rightarrow slip(\mp)$ μεταβάσεις), διότι σε αντίθετη περίπτωση δεν είναι δυνατή η ανάκτηση πληροφοριών σχετικά με την περιοχή ακινησίας του. Σε γενικές γραμμές, όσο μικρότερο είναι το κατώφλι του τελεστή, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ο τελεστής να παρουσιάζει την παραπάνω συμπεριφορά (βλέπε Σχήμα 3.2 για ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα).

⁵Παράδειγμα: Έστω το ακόλουθο (σωστό) μοντέλο

$$y(t) = \begin{cases} a & \text{αν } x(t) \geq 0 \\ b & \text{αν } x(t) < 0 \end{cases}$$

όπου $y(t)$ και $x(t)$ η απόκριση και η διέγερση αντίστοιχα, και $a = 2$ και $b = 10$ οι παράμετροι του μοντέλου. Είναι εμφανές ότι το μοντέλο αυτό είναι εκ των προτέρων αναγνωρίσιμο. Παραταύτα, αν η διέγερση είναι τέτοια ώστε $x(t) > 0$, $\forall t$, τότε δεν αλλάζουν οι κλάδοι κατά τη λειτουργία του μοντέλου με αποτέλεσμα η μοναδικότητα να χάνεται. Έτσι για παράδειγμα ένα (λανθασμένο) μοντέλο με $\bar{a} = 2$ και $\bar{b} = 20$ δίνει, υπό την εν λόγω διέγερση, ακριβώς την ίδια απόκριση με το αρχικό μοντέλο, με αποτέλεσμα αν επιχειρηθεί αναγνώριση του μοντέλου βάσει των $x(t)$ και $y(t)$ σημάτων, η εκτιμήτρια να μη μπορεί να διακρίνει το σωστό από το λανθασμένο μοντέλο.

Για το λόγο αυτό εισάγεται η έννοια του *ορίου του κατώτερου κατώφλιου* (*Lower Threshold Limit - LTL*).

Ορισμός 3.9 (Lower Threshold Limit - LTL) Έστω μία δεδομένη εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ και ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, το οποίο ενσωματώνει τελεστές με κατώφλια Δ_i ($i = 1, 2, \dots, M$). Ως *LTL* ορίζεται εκείνη η ποσότητα, η οποία εξαρτάται εξολοκλήρου από την εφαρμοζόμενη μετατόπιση, για την οποία οι τελεστές με κατώφλι ίσο και μικρότερο αυτής δε διασχίζουν καμία φορά το όριο ακινησίας για τη δεδομένη $x(t)$. Δηλαδή:

$$\Delta_i \leq LTL \implies \text{ο } i\text{-οστός τελεστής δε διασχίζει ούτε μια φορά το όριο ακινησίας} \quad (3.44)$$

□

Πρόταση 3.3 (Καθορισμός του LTL) Δοθέντος της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$, το *LTL* καθορίζεται ως εξής:

$$LTL = \frac{1}{2} \cdot \min_{t_e} |x(t_e + 1) - x(t_e)| \quad (3.45)$$

όπου με t_e συμβολίζεται η χρονική στιγμή όπου η εφαρμοζόμενη μετατόπιση εμφανίζει ένα τοπικό ακρότατο.

□

Απόδειξη: Αρχικά σημειώνεται ότι ένας τελεστής εγκαταλείπει της περιοχή ολίσθησης αμέσως μετά από ένα δεσπόζον για αυτόν τοπικό ακρότατο της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$. Προκειμένου ο τελεστής με το μικρότερο κατώφλι (κατά σύμβαση ο πρώτος με κατώφλι Δ_1) να έχει τη δυνατότητα να διασχίσει το όριο ακινησίας του, τουλάχιστον μια φορά, θα πρέπει η ελάχιστη, ως προς όλες τις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν σε τοπικά ακρότατα της $x(t)$, απόλυτη διαφορά $|x(t_e + 1) - x(t_e)|$ να είναι, σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.2, μικρότερη από δύο φορές το κατώφλι.

□

Το *LTL* καθορίζει ότι για κατώφλι κάτω από αυτό ο αντίστοιχος τελεστής δεν εισέρχεται ποτέ στην περιοχή ακινησίας. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι είτε ολισθαίνει συνεχώς και μεταβαίνει από τη περιοχή θετικής ολίσθησης στην περιοχή αρνητικής ολίσθησης (και ανάποδα), είτε παραμένει διαρκώς στην περιοχή ακινησίας (διότι για να επιτευχθεί $slip(\pm) \rightarrow stick$ πρέπει πρωτίστως να βρίσκεται σε ολίσθηση $[slip(\pm)]$). Όμως η δεύτερη περίπτωση δε μπορεί να συμβαίνει διότι λόγω της Συνθήκης $C0$ (όλοι οι τελεστές ξεκινάνε από την περιοχή ολίσθησης). Επομένως, όταν ισχύει η Συνθήκη $C0$ και το κατώφλι του τελεστή είναι μικρότερο από το *LTL* τότε ο τελεστής ολισθαίνει διαρκώς και μεταβαίνει από την μία περιοχή ολίσθησης στην άλλη, δίχως να περνά από την περιοχή ακινησίας του.

Σχήμα 3.6: Σχηματική περιγραφή των Συνθηκών που περιγράφονται από την Ιδιότητα 3.11: (α) Παραβίαση των Συνθηκών $C2$ και $C3$ (Χαμηλό πλάτος εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ ραυγε, Συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 0.25 \text{ Hz}$), (β) Παραβίαση των Συνθηκών $C2$ και $C3$ (Υψηλό πλάτος εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$, $f_s = 0.25 \text{ Hz}$), (γ) Παραβίαση της Συνθήκης $C3$ (Υψηλό πλάτος εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$, $f_s = 0.5 \text{ Hz}$), (δ) Ικανοποίηση των Συνθηκών $C2$ και $C3$ (Υψηλό πλάτος εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$, $f_s = 1 \text{ Hz}$) [$x(t)$: $- \bullet -$, $\delta_1(t)$: $- \times -$, $\delta_2(t)$: $- \circ -$, $\Delta_1 = 1.55$, $\Delta_2 = 2.05$]

Τώρα συνδυάζοντας τη συνθήκη $C1$ με την ιδέα του LTL , προκύπτει η κατώτερη δυνατή τιμή, για μια δεδομένη εφαρμοζόμενη μετατόπιση, την οποία μπορεί να λάβει ένα κατώφλι, κάτω της οποίας χάνεται η ισοδυναμία που περιγράφεται από την Εξ. (3.41) (το μοντέλο γίνεται μη αναγνωρίσιμο).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι Συνθήκες $C2$ και $C3$ δηλώνουν ότι $\forall i = 1, \dots, M - 1$ υπάρχουν τουλάχιστον δύο χρονικές στιγμές (διαδοχικές ή όχι) t_i και t'_i , τέτοιες ώστε ο i -οστός τελεστής ολισθαίνει ενώ ο $(i + 1)$ -οστός τελεστής παραμένει ακίνητος.

Όπως είναι εμφανές, οι δύο αυτές συνθήκες μπορούν να παραβιαστούν με δύο τρόπους. Κατά τον πρώτο υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in [1, \dots, M - 1]$ για τον οποίο ο i -οστός τελεστής ολισθαίνει

και/ή ακινητοποιείται ταυτόχρονα με τον $i + 1$ -οστό τελεστή (παθαίνουν ακριβώς τις ίδιες μεταβάσεις ακριβώς την ίδια χρονική στιγμή). Κατά το δεύτερο υπάρχει τουλάχιστον ένα $i \in [1, \dots, M - 1]$ για το οποίο ο i -οστός και $i + 1$ -οστός τελεστής παθαίνουν ακριβώς τις ίδιες μεταβάσεις, εκτός από μία χρονική στιγμή. Μερικά παραδείγματα των παραπάνω δυνατών παραβιάσεων παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.6(a,b,c).

Στο Σχήμα 3.6(a) παρουσιάζεται η περίπτωση κατά την οποία υπάρχουν δύο (τουλάχιστον) τελεστές που παραμένουν διαρκώς ακίνητοι $\forall t > t_{cr}$. Παρομοίως, στο Σχήμα 3.6(b), παρουσιάζεται η περίπτωση κατά την οποία όποτε ο πρώτος τελεστής $[\delta_1(t)]$ ακινητοποιείται [αντίστοιχα: ολισθαίνει], τότε και ο δεύτερος $[\delta_2(t)]$ ακινητοποιείται [αντίστοιχα: ολισθαίνει], ταυτόχρονα.

Μια άλλη περίπτωση παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.6(c), κατά την οποία μόνο η Συνθήκη $C2$ ικανοποιείται τη χρονική στιγμή t_1 . Όπως είναι φανερό η Συνθήκη $C3$ παραβιάζεται αφού ο δεύτερος τελεστής $stick \rightarrow slip(-)$ τη χρονική στιγμή $t'_1 = t_1 + 1$ (αμέσως μετά) και έπειτα και οι δύο τελεστές ολισθαίνουν ή/και ακινητοποιούνται ταυτόχρονα $\forall t > t'_1 + 1$. Με άλλα λόγια δεν υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές όπου ο πρώτος ολισθαίνει, ενώ ο δεύτερος ακινητοποιείται.

Στο Σχήμα 3.6(d) παρουσιάζεται ένα παράδειγμα κατά το οποίο και οι δύο Συνθήκες $[C2 - C3]$ (κάτω κλάδος) ικανοποιούνται. Στο παράδειγμα αυτό ο πρώτος τελεστής $[\delta_1(t)]$ παραμένει δύο χρονικές στιγμές (διαδοχικές στο τρέχον παράδειγμα) t_1 και t'_1 στην περιοχή ολίσθησης (αρνητικής), ενώ ο δεύτερος τελεστής παραμένει ακίνητος $|\delta_2(t)| < \Delta_2 \forall t = t_1, t'_1$. Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η παρούσα περίπτωση είναι σχεδόν όμοια με εκείνη του Σχήματος 3.6(c), με τη μόνη διαφορά ότι στην τρέχουσα το σήμα της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ είναι πυκνότερο από πριν (συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1 \text{ Hz}$ σε αντίθεση με $f_s = 0.5 \text{ Hz}$). Το γεγονός αυτό αποτελεί ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, το οποίο θα παίζει σημαντικό ρόλο κατά το σχεδιασμό της διεγέρσεως στη συνέχεια (βλέπε παρακάτω).

Αν και η περίπτωση που παρουσιάστηκε στο Σχήμα 3.6(c) παραβιάζει τη Συνθήκη $C3$, είναι δυνατόν αυτό να αλλάξει επιτρέποντας στη διέγερση να προκαλέσει πολλαπλές μεταβάσεις στους τελεστές. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.7, το οποίο είναι πανομοιότυπο με εκείνο του Σχήματος 3.6(c) $\forall t \leq 30$, άλλα στην παρούσα περίπτωση τα σήματα έχουν μεγαλύτερο μήκος. Έτσι στην περίπτωση αυτή η Συνθήκη $C2$ ικανοποιείται τη χρονική στιγμή t_1 , ενώ η $C3$ (άνω κλάδος) τη χρονική στιγμή t'_1 (σημειώνεται ότι οι χρονικές στιγμές t_1 και t'_1 δεν είναι διαδοχικές).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, μπορεί να ειπωθεί ότι οι Συνθήκες που περιέχονται στην Ιδιότητα 3.11 είναι αρκετά μη δεσμευτικές και δύναται να ικανοποιηθούν αρκετά εύκο-

Σχήμα 3.7: Επίδειξη των Συνθηκών $C2$ και $C3$ [Μεγάλο πλάτος $x(t)$, $f_s = 0.5 \text{ Hz}$: $x(t)$: $-\bullet-$, $\delta_1(t)$: $-\times-$, $\delta_2(t)$: $-\circ-$, $\Delta_1 = 1.55$, $\Delta_2 = 2.05$]

λα. Εντούτοις, υπάρχουν δύο βασικές απαιτήσεις τις οποίες πρέπει το σήμα της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ να ικανοποιεί προκειμένου να είναι σε θέση να προσφέρει καθαρή διάκριση διαφορετικών μοντέλων που ανήκουν στην ίδια δομή, ή με άλλα λόγια να μπορεί να ικανοποιεί την ισοδυναμία της Εξ. (3.41). Αυτές είναι το *πλάτος* και η *ομαλότητα* (ή ισοδύναμα ο *συντελεστής ομαλότητας*) της $x(t)$ για $t \geq t_{cr}$ (βλέπε παρακάτω για περισσότερες πληροφορίες). Η πρώτη εγγυάται ότι $\forall i = 1, \dots, M-1$ ο i -οστός τελεστής θα βρεθεί στην περιοχή ολίσθησης του, ενώ η δεύτερη ότι ο $(i+1)$ -οστός τελεστής θα παραμείνει ακίνητος (για επαρκή χρόνο - τουλάχιστο δύο χρονικές στιγμές), ενώ ο i -οστός θα παραμένει στην ολίσθηση. Συνεπώς, ο επιτυχής σχεδιασμός της εφαρμοζόμενης διέγερσης συνίσταται στην κατάλληλη επιλογή των δύο αυτών απαιτήσεων. Αυτό παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω.

3.6 Σχεδιασμός της Διεγέρσεως: Βασικές Αρχές

Οι βασικές οδηγίες για το σχεδιασμό κατάλληλου σήματος διέγερσης (μετατόπισης) δίδονται από τις συνθήκες $C0$, $C1$, $C2$ και $C3$. Επί τη βάση αυτών, παρουσιάζεται η διαδικασία, βάσει της οποίας σχεδιάζεται η εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$. Όπως θα γίνει φανερό, η διαδικασία αυτή είναι αρκετά απλή, με αποτέλεσμα η εφαρμογή της να είναι εφικτή ακόμα και κατά την τυπική λειτουργία του μοντέλου.

Αρχικά ας ληφθεί υπόψη το παράδειγμα του Σχήματος 3.6(a). Στην περίπτωση αυτή το *πλάτος* της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ για $t > t_{cr}$ δεν επαρκεί για να αναγκάσει τον πρώτο τελεστή $[\delta_1(t)]$ να ξαναολισθήσει μετά τη χρονική στιγμή t_{cr} , με αποτέλεσμα η συνεισφορά του εν λόγω τελεστή στη συνολική απόκριση του μοντέλου να μη μπορεί να διαχωριστεί από αυτή των υπόλοιπων [δεν ικανοποιείται η Συνθήκη $C2(c)$]. Εντούτοις, αν αυξηθεί το πλάτος της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ για $t > t_{cr}$ [βλέπε Σχήμα 3.6(b)], τότε $\delta_1(t_1) = -\Delta_1$ [ολισθαίνει - ικανοποίηση της

Συνθήκης $C2(c)$], άλλα ταυτόχρονα συμβαίνει και $\delta_2(t_1) = -\Delta_2$ [ο δεύτερος τελεστής ολισθαίνει και αυτός - δεν ικανοποιείται η Συνθήκη $C2(b)$]. Μια συμπεριφορά αυτού του είδους δεν επιτρέπει το διαχωρισμό της συνεισφοράς του εκάστοτε τελεστή στη συνολική απόκριση, επομένως συμπεραίνεται ότι η κατάλληλη επιλογή του εύρους της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ για $t > t_{cr}$ είναι αναγκαία, αλλά όχι και ικανή για την επίτευξη του σκοπού [δηλαδή να ισχύει η Εξ. (3.41)].

Από την άλλη, αν η κατάλληλη επιλογή του εύρους της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ για $t > t_{cr}$ συνδυαστεί με αύξηση του συντελεστή ομαλότητας (smoothness factor), το οποίο μπορεί να γίνει για παράδειγμα επιλέγοντας πιο πυκνό (δηλαδή αυξάνοντας τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s) σήμα εφαρμοζόμενης μετατόπισης, τότε επιτυγχάνεται βελτίωση [βλέπε Σχήμα 3.6(c) όπου ικανοποιείται τουλάχιστον η Συνθήκη $C2$]. Ο συντελεστής ομαλότητας της $x(t)$ πρέπει να αυξηθεί, τουλάχιστον, μέχρι εκείνο το σημείο, όπου η συνεισφορά του εκάστοτε τελεστή να είναι ξεκάθαρη⁶. Στο Σχήμα 3.6(d) παρουσιάζεται ένα παράδειγμα ορθής επιλογής του *συντελεστή ομαλότητας*, όπου η συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1\text{ Hz}$ επαρκεί για το διαχωρισμό της συνεισφοράς του πρώτου τελεστή από αυτή του δεύτερου [υπενθύμιση: $\Delta_1 = 1.55$ και $\Delta_2 = 2.05$]. Παρά ταύτα, αν τα κατώφλια των δύο τελεστών ήταν πιο κοντά, για παράδειγμα $\Delta_1 = 1.6$ και $\Delta_1 = 1.8$, τότε η εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 3.6(d), δεν επαρκεί για το παραπάνω διαχωρισμό (δεν ικανοποιούνται οι Συνθήκες $C2$ και $C3$). Στην περίπτωση αυτή μια συχνότητα δειγματοληψίας της τάξεως των $f_s = 2\text{ Hz}$ θα επαρκούσε.

Αξίζει να σημειωθεί (βλέπε $C2$ και $C3$) ότι δεν είναι αναγκαίο ο M -οστός τελεστής (αυτός με το μεγαλύτερο κατώφλι - βλέπε Υπόθεση 3.3) να ξαναολισθήσει για $t > t_{cr}$. Επομένως ο M -οστός τελεστής επιτρέπεται να παραμείνει ακίνητος για $\forall t > t_{cr}$, και ως εκ τούτου το *πλάτος* της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ για $t > t_{cr}$ μπορεί να επιλεγθεί έτσι ώστε να κάνει το $(M - 1)$ -οστό τελεστή (αυτόν με το δεύτερο μεγαλύτερο κατώφλι) να ολισθήσει τουλάχιστον δύο χρονικές στιγμές ενώ ο (M) -οστός τελεστής παραμένει ακίνητος. Επί τη βάση των παραπάνω αποτελεσμάτων, ο σχεδιασμός της εφαρμοζόμενης μετατόπισης πρέπει να βασιστεί στους επόμενους κανόνες:

1. Η εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ πρέπει να αυξηθεί (γραμμικά ή όχι) μέχρι ένα κρίσιμο σημείο $x(t_{cr})$, το οποίο θα είναι επαρκές για να φέρει όλους τους τελεστές του μοντέλου στη θετική ολίσθηση (Συνθήκη $C0$).
2. Το *πλάτος* της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ για $t > t_{cr}$ πρέπει να επιλεγθεί έτσι ώστε να αναγκάζει (τουλάχιστον) τον τελεστή με το δεύτερο μεγαλύτερο κατώφλι, δηλαδή αυτόν με Δ_{M-1} , να ολισθήσει σύμφωνα με τις Συνθήκες $C2$ και $C3$. Όπως είναι ευκόλως κατανοητό

⁶Αυτό γίνεται όταν ένας τελεστής ολισθαίνει και εκείνος με το αμέσως μεγαλύτερο κατώφλι παραμένει ακίνητος

όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος, τόσο μεγαλύτερα είναι τα αναγνωρίσιμα Δ_{M-1} και Δ_M .

3. Όσο μεγαλύτερος είναι ο *συντελεστής ομαλότητας*, τόσο μικρότερη η *LTL* τιμή, και ως εκ τούτου, τόσο μικρότερη η τιμή κατωφλιού (κατά σύμβαση Δ_1) που μπορεί να αναγνωριστεί και τόσο κοντύτερα σε τιμή δύο διαδοχικά κατώφλια, Δ_i και Δ_{i+1} , που μπορούν να αναγνωριστούν.

Σημείωση: Ο *συντελεστής ομαλότητας* της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ μπορεί να αυξηθεί είτε αυξάνοντας τη συχνότητα δειγματοληψίας f_s , αλλά είτε διατηρώντας τη f_s σταθερή και αναγκάζοντας τη $x(t)$ να αυξομειώνεται με αργό ρυθμό.

Οι παραπάνω κανόνες σχεδιασμού της εφαρμοζόμενης μετατόπισης, δηλαδή το *πλάτος* και ο *συντελεστής ομαλότητας*, είναι αρκετά εύκολοι στην υλοποίηση του και μπορούν να εφαρμοστούν ακόμα και σε πολύ απλούς τύπους διεγέρσεων, όπως για παράδειγμα ημιτονοειδούς μορφής. Επιπροσθέτως, επιλέγοντας τον τύπο της διέγερσης (π.χ περιοδική., κ.ο.κ) είναι δυνατός ο καθορισμός του μικρότερου αναγνωρίσιμου κατωφλιού, Δ_1 , των δύο μεγαλύτερων αναγνωρίσιμων κατωφλίων Δ_{M-1} και Δ_M , όπως επίσης και το πόσο κοντά σε τιμή μπορούν να είναι δύο κατώφλια δίχως να χάνεται η αναγνωρισιμότητα του μοντέλου.

3.7 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell. Η εν λόγω δομή περιέχει τελεστές τύπου Ε-Π και ως εκ τούτου είναι σε θέση να αντιμετωπίζει φαινόμενα υστέρησης με μακρά μνήμη. Οι βασικές ιδιότητες της δομής διερευνήθηκαν και επί τη βάση αυτών αποδείχθηκε η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα της δομής. Διερευνήθηκε η επίδραση των αρχικών καταστάσεων πάνω στην αναγνώριση του μοντέλου και εξάχθηκαν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες διέγερσης για τη διασφάλιση της αναγνωρισιμότητας. Επιπροσθέτως, δόθηκαν κατευθυντήριες οδηγίες για το σχεδιασμό κατάλληλης, για τους σκοπούς της αναγνώρισης, εφαρμοζόμενης διέγερσης.

Τελειώνοντας, αξίζει να σημειωθεί ότι τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν στο παρόν κεφάλαιο αποτελούν τα βασικά εργαλεία για την αντιμετώπιση πιο σύνθετων προβλημάτων σχετικά με την εκτίμηση και γενικότερα την αναγνώριση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Α' Παράρτημα: Ιδιότητες Τελεστών

Στο παρόν Παράρτημα παρουσιάζονται οι αποδείξεις των Ιδιοτήτων 3.4, 3.5 και 3.6.

Απόδειξη Ιδιότητας 3.4: Έστω $|\delta_2(t)| < \Delta_2$ (ο δεύτερος τελεστής είναι ακίνητος) $\forall t > t_{e,1:2}$, όπου με $\bar{x}(t_{e,1:2})$ το MRDE του (η εναλλακτική υπόθεση $\underline{x}(t_{e,1:2})$ καταλήγει στα ίδια αποτελέσματα). Λόγω τούτου η τιμή της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ πρέπει να βρίσκεται στο εύρος που καθορίζεται από την Εξ. (3.16):

$$\bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_2 < x(t) < \bar{x}(t_{e,1:2}), \quad \forall t \in [t_{e,1:2} + 1, t_2 - 1] \quad (3.46)$$

Τα ακόλουθα δύο μέρη της απόδειξης αφιερώνονται στην εξαγωγή της ανώτερης και κατώτερης τιμής όπου ένα δεσπόζον, για τον πρώτο τελεστή, ακρότατο μπορεί να λάβει (εύρος), δίχως να παραβιάζεται η συνθήκη που καθορίζεται από την Εξ. (3.46). Τα εργαλεία για την επίτευξη του σκοπού αυτού είναι: (i) η Εξ. (3.46) και (ii) η Ιδιότητα 3.2, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της τρέχουσας περιοχής λειτουργίας του πρώτου τελεστή βάσει της τρέχουσας τιμής της $x(t)$, του MRDE του, καθώς και του κατωφλιού του.

Η απόδειξη στηρίζεται στον έλεγχο των δεσπόζοντων ακροτάτων του πρώτου τελεστή. Όμως ο πρώτος τελεστής στο χρονικό διάστημα $[t_{e,1:2}, t_2]$ μπορεί να εμφανίζει πολλαπλά δεσπόζοντα ακρότατα (ελάχιστα και μέγιστα), η ανάλυση ξεκινάει λαμβάνοντας υπόψη το πιο πρόσφατο δεσπόζον ακρότατο του πρώτου τελεστή, το οποίο δεν είναι άλλο από το MRDE του. Σύμφωνα με αυτό, υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις σχετικά με αυτό το MRDE. Συγκεκριμένα, μπορεί να είναι ελάχιστο, δηλαδή $\underline{x}(t_{e,1})$ (Περίπτωση Α), ή μέγιστο, δηλαδή $\bar{x}(t_{e,1})$ (Περίπτωση Β).

Περίπτωση Α (Εύρος τιμών για τα Δεσπόζοντα Ελάχιστα του πρώτου τελεστή): Το άνω φράγμα του MRDE του πρώτου τελεστή, το οποίο δηλώνεται ως $\underline{x}(t_{e,1})$ (υπενθύμιση: $\delta_1(t_{e,1}) = -\Delta_1$), εξάγεται λαμβάνοντας υπόψη το προηγούμενο δεσπόζον ακρότατο του πρώτου τελεστή, το οποίο μπορεί να είναι είτε μέγιστο [Υποπερίπτωση Α(1)], ελάχιστο [Υποπερίπτωση Α(2)].

Υποπερίπτωση Α(1): Αρχικά ας υποθεθεί ότι το αμέσως προηγούμενο δεσπόζον ακρότατο είναι μέγιστο και συμβολίζεται ως $\bar{x}(t'_{e,1})$ (επομένως: $\delta_1(t'_{e,1}) = \Delta_1$) με $t_{e,1:2} < t'_{e,1} < t_{e,1} < t_2 - 1$. Λόγω της Εξ. (3.46):

$$\bar{x}(t'_{e,1}) < \bar{x}(t_{e,1:2}) \quad (3.47)$$

Όπως είναι εμφανές το MRDE για τον πρώτο τελεστή $\forall t \in [t'_{e,1} + 1, t_{e,1} - 1]$ είναι το $\bar{x}(t'_{e,1})$. Έτσι η αναγκαία και ικανή τιμή της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t')$, όπου $t'_{e,1} < t' \leq t_{e,1}$, η οποία αναγκάζει τον πρώτο τελεστή να ολισθήσει αρνητικά ⁷ δίνεται από την Ιδιότητα 3.2 και επομένως:

$$x(t') \leq \bar{x}(t'_{e,1}) - 2\Delta_1 \implies \underline{x}(t_{e,1}) \leq \bar{x}(t'_{e,1}) - 2\Delta_1 \quad (3.48)$$

⁷Ο πρώτος τελεστής πρέπει πρώτα να ολισθήσει αρνητικά προκειμένου να εμφανιστεί το δεσπόζον για αυτόν ελάχιστο $\underline{x}(t_{e,1})$ μετά τη χρονική στιγμή t' . Ένα σχετικό παράδειγμα παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3(a,b), στο οποίο οι χρονικές στιγμές t' και $t_{e,1}$ εμφανίζονται στα σημεία Β και C, αντίστοιχα

εφόσον $\underline{x}(t_{e,1}) \leq x(t')$. Έτσι συνδυάζοντας τις Εξ. (3.47) – (3.48), προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\underline{x}(t_{e,1}) < \bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_1 \quad [\underline{x}(t_{e,1}) \text{ άνω φράγμα}] \quad (3.49)$$

Υποπερίπτωση A(2): Τώρα ας υποτεθεί η δεύτερη δυνατή υποπερίπτωση, κατά την οποία το δεσπόζον ακρότατο του πρώτου τελεστή πριν τη χρονική στιγμή $t_{e,1}$ είναι ελάχιστο, δηλαδή $\underline{x}(t'_{e,1})$ (επομένως: $\delta_1(t'_{e,1}) = -\Delta_1$) με $t_{e,1:2} < t'_{e,1} < t_{e,1} < t_2 - 1$. Αν ακολουθηθεί η ίδια αλγεβρική διαδικασία επί τη βάση της οποίας εξάχθηκαν οι Εξ. (3.48) – (3.49), τότε προκύπτει το ακόλουθο:

$$\underline{x}(t_{e,1}) \leq \underline{x}(t'_{e,1}) \quad [\underline{x}(t_{e,1}) \text{ άνω φράγμα}] \quad (3.50)$$

Όπως είναι εμφανές ένα οποιοδήποτε $\underline{x}(t_{e,1})$ έχει ως άνω φράγμα είτε το δεξιότερο τμήμα της Εξ. (3.49) ή το προηγούμενο (εφόσον υπάρχει) δεσπόζον ελάχιστο [Εξ. (3.50)]. Επομένως το ανώτερο δυνατό πάνω όριο προκύπτει συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις:

$$\underline{x}(t_{e,1}) \leq \max\{\bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_1, \underline{x}(t'_{e,1})\} \quad (3.51)$$

Τώρα ας παρατηρηθεί ότι μόνο το προηγούμενο δεσπόζον ελάχιστο (και όχι το μέγιστο) του πρώτου τελεστή μπορεί να επηρεάσει [βλέπε Εξ. (3.50)] το άνω φράγμα που περιγράφεται από την Εξ. (3.50). Λόγω τούτου το ανώτερο δυνατό άνω φράγμα είναι, λαμβάνοντας υπόψη και την Εξ. (3.50):

$$\underline{x}(t_{e,1}) \leq \max\{\bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_1, \underline{x}(t_{e,1}^{(1)})\} \quad (3.52)$$

όπου με $\underline{x}(t_{e,1}^{(1)})$ ($t_{e,1}^{(1)} \leq t'_{e,1} < t_{e,1}$) το πρώτο, μετά τη χρονική στιγμή $t_{e,1:2}$. Εντούτοις η τιμή της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$ που απαιτείται για να ολισθήσει αρνητικά ο πρώτος τελεστής για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t_{e,1:2}$ είναι: $\underline{x}(t_1^{(1)}) \leq \bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_1$ (βλέπε Ιδιότητα 3.2). Εφόσον $x(t_1^{(1)}) \geq \underline{x}(t_{e,1}^{(1)})$ [όπως πριν, βλέπε Σχήμα 3.3(a,b) για ένα σχετικό παράδειγμα], τότε [επίσης λόγω της Εξ. (3.52)]:

$$\underline{x}(t_{e,1}) \leq \bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_1, \quad \forall t_{e,1} \in [t_{e,1:2} + 1, t_2 - 1] \quad (3.53)$$

Το κάτω φράγμα δίνεται απευθείας από το αριστερότερο τμήμα της Εξ. (3.46). Συνεπώς, $\forall t_{e,1} \in [t_{e,1:2} + 1, t_2 - 1]$:

$$\bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_2 < \underline{x}(t_{e,1}) \leq \bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_1 \quad (3.54)$$

Περίπτωση Β (Εύρος τιμών για τα Δεσπόζοντα Μέγιστα του πρώτου τελεστή): Το κάτω φράγμα του $\bar{x}(t_{e,1})$ προκύπτει ακολουθώντας την ίδια αλγεβρική διαδικασία (λογίζοντας τα προηγούμενα δεσπόζοντα ακρότατα), βάσει της οποίας εξάχθηκε το άνω φράγμα του $\underline{x}(t_{e,1})$ (βλέπε παραπάνω). Έπομένως υποθέτοντας ότι το προηγούμενο δεσπόζον ακρότατο είναι μέγιστο, έστω $\bar{x}(t'_{e,1})$, τότε:

$$\bar{x}(t_{e,1}) \geq \bar{x}(t'_{e,1}) \quad (3.55)$$

ενώ αν είναι ελάχιστο, έστω $\underline{x}(t'_{e,1})$:

$$\bar{x}(t_{e,1}) \geq \underline{x}(t'_{e,1}) + 2\Delta_1 \quad (3.56)$$

Εφόσον το $\bar{x}(t_{e,1})$ φράσσεται από κάτω είτε από το προηγούμενο δεσπόζον μέγιστο [Εξ. (3.55)], είτε από το δεξιότερο τμήμα της Εξ. (3.56), τότε το χαμηλότερο δυνατό φράγμα ενός οποιουδήποτε $\bar{x}(t_{e,1})$, το οποίο εμφανίζεται στο διάστημα $[t_{e,1:2} + 1, t_2 - 1]$ προκύπτει αν η χρησιμοποιηθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\underline{x}(t'_{e,1})$. Λόγω της Εξ. (3.54):

$$\bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_2 + 2\Delta_1 \leq \bar{x}(t_{e,1}) < \bar{x}(t_{e,1:2}) \quad (3.57)$$

με το άνω φράγμα να προκύπτει απευθείας από την Εξ. (3.46). $\square$

Απόδειξη Ιδιότητας 3.5: Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο μέρη, όπου αντιστοιχούν στις δύο δυνατές περιπτώσεις [Περίπτωση Α: το $x(t_{e,1:2})$ είναι μέγιστο, δηλαδή $x(t_{e,1:2}) \equiv \bar{x}(t_{e,1:2})$, Περίπτωση Β: το $x(t_{e,1:2})$ είναι ελάχιστο, δηλαδή $x(t_{e,1:2}) \equiv \underline{x}(t_{e,1:2})$].

Περίπτωση Α: Έστω $\exists t'_2 > t_{e,1:2} : \delta_2(t'_2) = \Delta_2$ [αντίστοιχα: $-\Delta_2$] για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή $t_{e,1:2}$. Επομένως υπάρχουν οι κάτωθι δύο δυνατές υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση Α(1): Ο δεύτερος τελεστής $slip(+) \rightarrow slip(-)$ τη χρονική στιγμή $t'_2 = t_{e,1:2} + 1$.

Υποπερίπτωση Α(2): Ο δεύτερος τελεστής $slip(+) \rightarrow sticks$ τη χρονική στιγμή $t_{e,1:2} + 1$, παραμένει ακίνητος ($stick$) $\forall t \in [t_{e,1:2} + 1, t'_2 - 1]$ και $stick \rightarrow slip(+)$ [αντίστοιχα: $stick \rightarrow slip(-)$].

Αξίζει να σημειωθεί ότι και στις δύο υποπεριπτώσεις το $\bar{x}(t_{e,1:2})$ είναι το MRDE για το δεύτερο τελεστή. Επομένως, σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.2 ισχύει το ακόλουθο:

$$\delta_2(t'_2) = \Delta_2 \iff x(t'_2) \geq \bar{x}(t_{e,1:2}) \quad [slip(+)] \quad (3.58)$$

$$\delta_2(t'_2) = -\Delta_2 \iff x(t'_2) \leq \bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_2 \quad [slip(-)] \quad (3.59)$$

Υποπερίπτωση Α(1): Σε αυτή τη υποπερίπτωση και οι δύο τελεστές μοιράζονται το ίδιο MRDE, το οποίο είναι το $\bar{x}(t_{e,1:2})$. Εφαρμόζοντας απευθείας την Ιδιότητα 3.2 για τον πρώτο τελεστή προκύπτει ότι η τιμή $x(t'_2)$, η οποία δίνεται από την Εξ. (3.59), είναι ικανή για να αναγκάσει τον πρώτο τελεστή να ολισθήσει αρνητικά [υπενθύμιση: $\Delta_1 < \Delta_2$]. Συνεπώς, $\delta_1(t'_2) = -\Delta_1$.

Υποπερίπτωση Α(2): Έστω $x(t_{e,1})$, με $t_{e,1} \geq t_{e,1:2}$, το MRDE για τον πρώτο τελεστή την τρέχουσα χρονική στιγμή $t \in [t_{e,1:2} + 1, t'_2 - 1]$. Εφόσον όλες οι προϋποθέσεις της Ιδιότητας 3.4 ισχύουν, τότε το $x(t_{e,1})$ υπόκεινται στην Εξ. (3.23) αν είναι ελάχιστο ή στην Εξ. (3.24) αν είναι μέγιστο.

Τώρα υπενθυμίζεται ότι οι αναγκαία και ικανή $x(t)$ τιμή που αναγκάζει τον πρώτο τελεστή να ολισθήσει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά] δίνεται από την Ιδιότητα 3.2. Επομένως, συνδυάζοντας την Ιδιότητα 3.2 με τις Εξ. (3.23) - (3.24) λαμβάνοντας υπόψη όλες τις εναλλακτικές περιπτώσεις [για παράδειγμα: το να είναι το $x(t_{e,1})$ δεσπόζον μέγιστο ή ελάχιστο και η $x(t'_2)$ να υπόκειται στην Εξ. (3.58) ή στην Εξ. (3.59)], προκύπτει (μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις) ότι $\delta_1(t'_2) = \Delta_1$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_1$]. Προκειμένου το παραπάνω να γίνει πιο κατανοητό, δίδεται το ακόλουθο παράδειγμα.

Λόγω της Ιδιότητας 3.2 [Εξ. (3.16)] μία τιμή $x(t) \geq \underline{x}(t_{e,i}) + 2\Delta_1$ [όπου με $\underline{x}(t_{e,i})$ συμβολίζεται το MRDE για τον πρώτο τελεστή, το οποίο είναι και αυτό ελάχιστο] είναι ικανή στο να αναγκάσει τον πρώτο τελεστή να ολισθήσει θετικά. Αντικαθιστώντας τη μέγιστη δυνατή $\underline{x}(t_{e,1})$ τιμή [Εξ. (3.24): $\underline{x}(t_{e,1}) \leq \bar{x}(t_{e,1:2}) - 2\Delta_1$] στην παραπάνω εξίσωση δίνει ότι μία $x(t) \geq \bar{x}(t_{e,1:2})$ κάνει τον πρώτο τελεστή να ολισθαίνει θετικά. Εφόσον $x(t'_2) \geq \bar{x}(t_{e,1:2})$ [Εξ. (3.58)], τότε ο πρώτος τελεστής ολισθαίνει θετικά τη χρονική στιγμή t'_2 .

Περίπτωση B: Η απόδειξη όταν η $x(t_{e,1:2})$ είναι ελάχιστο είναι ακριβώς η ίδια με πριν [λαμβάνονται υπόψη οι Εξ. (3.25) - (3.26) και εφαρμόζεται η ίδια αλγεβρική διαδικασία].

Εφόσον και οι δύο τελεστές ολισθαίνουν θετικά ή αρνητικά τη χρονική στιγμή t'_2 , τότε οποιοδήποτε δεσπόζον ακρότατο προκύψει μετά από αυτή τη χρονική στιγμή είναι δεσπόζον και για τους δύο τελεστές. Επομένως, αν ακολουθηθεί η ίδια αλγεβρική διαδικασία, προκύπτει ότι όποτε ο δεύτερος τελεστής ολισθαίνει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά] τότε και ο πρώτος τελεστής πρέπει να ολισθήσει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά]. $\square$

Απόδειξη Ιδιότητας 3.6: Η απόδειξη της συγκεκριμένης ιδιότητας υλοποιείται ελέγχοντας τη διαφορά $\delta_2(t) - \delta_1(t)$, όταν ο δεύτερος τελεστής ολισθαίνει (θετικά ή αρνητικά) ή παραμένει ακίνητος. Όπως θα φανεί παρακάτω, σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις η συνθήκη Lipschitz που περιγράφεται από την εν λόγω συνθήκη είναι έγκυρη.

Εφόσον $\Delta_1 < \Delta_2$, και οι δύο τελεστές διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση και μοιράζονται το ίδιο MRDE, το οποίο είναι το $x(t_{e,1:2})$, τότε ισχύει η Ιδιότητα 3.5 ($\forall t \geq t_{e,1:2}$). Όσον αφορά το δεύτερο τελεστή, υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις:

Περίπτωση A: Ο δεύτερος τελεστής ολισθαίνει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά] σε μια αυθαίρετη χρονική στιγμή t , επομένως $|\delta_2(t)| = \Delta_2$.

Περίπτωση B: Ο δεύτερος τελεστής είναι ακίνητος σε μία αυθαίρετη χρονική στιγμή t , δηλαδή $|\delta_2(t)| < \Delta_2$.

Περίπτωση A: Εφόσον ο δεύτερος τελεστής ολισθαίνει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά] τότε ο πρώτος τελεστής ολισθαίνει θετικά [αντίστοιχα: αρνητικά] και αυτός (Ιδιότητα 3.5). Επομένως στην περίπτωση αυτή:

$$\delta_1(t) - \delta_2(t) = \Delta_1 - \Delta_2 \text{ [αντίστοιχα: } -\Delta_1 + \Delta_2] \quad (3.60)$$

$$\text{Άρα: } |\delta_1(t) - \delta_2(t)| = |\Delta_1 - \Delta_2|$$

Περίπτωση B: Εφόσον ο δεύτερος τελεστής είναι ακίνητος, τότε πρέπει να υπάρχει ένα δεσπόζον για αυτόν ακρότατο, έστω $x(t_{e,2})$ με $t_{e,2} \geq t_{e,1,2}$, το οποίο να ανάγκασε τον εν λόγω τελεστή να ολισθήσει. Ως εκ τούτου είναι το MRDE του. Σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.1:

$$\delta_2(t) = x(t) - \bar{x}(t_{e,2}) + \Delta_2, \quad \forall t \in [t_{e,2} + 1, t_2 - 1] \quad (3.61)$$

στην οποία εμμέσως υποτίθεται ότι το $x(t_{e,2})$ είναι μέγιστο $[\bar{x}(t_{e,2})]$.

Υποπερίπτωση B(1): Αρχικά ας ληφθεί υπόψη η διαφορά $\delta_2(t) - \delta_1(t)$, όταν ο πρώτος τελεστής είναι και αυτός ακίνητος. Έστω ότι $x(t_{e,1})$, με $t_{e,2} \leq t_{e,1} \leq t_2 - 1$, συμβολίζεται το MRDE του. Επομένως σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.1:

$$\delta_1(t) = \begin{cases} x(t) - \bar{x}(t_{e,1}) + \Delta_1, & x(t_{e,1}) \equiv \bar{x}(t_{e,1}) \\ x(t) - \underline{x}(t_{e,1}) - \Delta_1, & x(t_{e,1}) \equiv \underline{x}(t_{e,1}) \end{cases} \quad (3.62)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξ. (3.61) και (3.62) στη διαφορά $\delta_2(t) - \delta_1(t)$, λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι το MRDE του πρώτου τελεστή πρέπει να βρίσκεται στα όρια που καθορίζονται από τις Εξ. (3.23) (αν είναι μέγιστο) ή (3.24) (αν είναι ελάχιστο) της Ιδιότητας 3.4. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι: $|\delta_2(t) - \delta_1(t)| \leq \Delta_2 - \Delta_1$.

Υποπερίπτωση B(2): Τώρα ας θεωρηθεί ότι ο πρώτος τελεστής ολισθαίνει αρνητικά. Σύμφωνα με την Εξ. (3.61), η διαφορά $\delta_2(t) - \delta_1(t)$, γίνεται:

$$\delta_2(t) - \delta_1(t) = x(t) - \bar{x}(t_{e,2}) + \Delta_2 + \Delta_1, [slip(-)] \quad (3.63)$$

$$(3.64)$$

Εφόσον ο πρώτος τελεστής ολισθαίνει αρνητικά τη χρονική στιγμή t , τότε [Ιδιότητα 3.2]:

$$x(t) \leq \begin{cases} \bar{x}(t_{e,1}) - 2\Delta_1, & \text{αν } x(t_{e,1}) \equiv \bar{x}(t_{e,1}) \text{ είναι μέγιστο} \\ \underline{x}(t_{e,1}), & \text{αν } x(t_{e,1}) \equiv \underline{x}(t_{e,1}) \text{ είναι ελάχιστο} \end{cases} \quad (3.65)$$

όπου με $x(t_{e,1})$ συμβολίζεται το MRDE για τον πρώτο τελεστή $\forall t \in [t_{e,1}, t_2 - 1]$. Εφόσον ο δεύτερος τελεστής παραμένει ακίνητος $\forall t \in [t_{e,2} + 1, t_2 - 1]$, τότε η εφαρμοζόμενη μετατόπιση θα πρέπει να βρίσκεται εντός των ορίων που δίνονται από την Εξ. (3.16) της Ιδιότητας 3.2, δηλαδή:

$$-2\Delta_2 < x(t) - \bar{x}(t_{e,2}) < 2\Delta_2 \quad (3.66)$$

Συνδυάζονται το αριστερότερο τμήμα της Εξ. (3.66) με τη Εξ. (3.65) προκύπτει, αντιστοίχως, το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$-2\Delta_2 < x(t) - \bar{x}(t_{e,2}) \leq \bar{x}(t_{e,1}) - x(t_{e,2}) - 2\Delta_1 \quad (3.67)$$

$$-2\Delta_2 < x(t) - \bar{x}(t_{e,2}) \leq \underline{x}(t_{e,1}) - x(t_{e,2}) \quad (3.68)$$

όπου η Εξ. (3.67) [αντίστοιχα: (3.68)] αντιστοιχεί αν είναι το $x(t_{e,1})$ μέγιστο [αντίστοιχα: ελάχιστο].

Ας ληφθεί υπόψη τώρα το άνω φράγμα του $\bar{x}(t_{e,1})$ [αντίστοιχα: $\underline{x}(t_{e,1})$], το οποίο δίνεται από την Εξ. (3.24) [αντίστοιχα: (3.23)]. Λόγω αυτού, και οι δύο εξισώσεις (3.67) - (3.68) γίνονται:

$$\begin{aligned} -2\Delta_2 < x(t) - \bar{x}(t_{e,2}) < -2\Delta_1 \implies \\ -\Delta_2 + \Delta_1 < x(t) - \bar{x}(t_{e,2}) + \Delta_2 + \Delta_1 < \Delta_2 - \Delta_1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

και λόγω της Εξ. (3.63), $|\delta_2(t) - \delta_1(t)| < \Delta_2 - \Delta_1$.

Υποπερίπτωση B(3): Τώρα ας ληφθεί υπόψη ότι ο πρώτος τελεστής ολισθαίνει θετικά. Η απόδειξη στην υποπερίπτωση αυτή είναι παραπλήσια με την προηγούμενη [Υποπερίπτωση B(2)]. $\square$

Β' Παράρτημα: Ιδιότητες Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell

Το παρόν παράρτημα χωρίζεται σε δύο τμήματα. Στο πρώτο παρουσιάζεται η απόδειξη της Ιδιότητας 3.11. Προκειμένου να γίνει αυτό αιτείται το Λήμμα 3.1, το οποίο παρουσιάζεται και αποδεικνύεται πριν την κύρια απόδειξη. Στο δεύτερο και τελευταίο τμήμα του παραρτήματος παρουσιάζεται η απόδειξη της Ιδιότητας 3.12.

Λήμμα 3.1 Έστω δύο μοντέλα ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές και διανύσματα παραμέτρων $\theta_M = [k_1 \dots k_M \Delta_1 \dots \Delta_M]^T$ και $\bar{\theta}_M = [\bar{k}_1 \dots \bar{k}_M \bar{\Delta}_1 \dots \bar{\Delta}_M]^T$. Τα μοντέλα ανήκουν στην ίδια δομή και παρουσιάζουν ακριβώς την ίδια απόκριση $\forall t \geq t_{cr}$. Τότε:

- Η (κοινή) μέγιστη (αντίστοιχα: ελάχιστη) δυνατή τιμή της απόκρισης των δύο μοντέλων επιτυγχάνεται μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αν και μόνο αν όλοι οι τελεστές και των δύο μοντέλων ολισθαίνουν θετικά (αντίστοιχα: αρνητικά) τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
- Ο τελεστής με το μέγιστο κατώφλι του πρώτου μοντέλου (εξ' ορισμού ο M -οστός) έχει το ίδιο $MRDE \forall t \geq t_{cr}$ με όλους τους τελεστές του δεύτερου μοντέλου με κατώφλια ίσα ή μεγαλύτερα από αυτό του πρώτου.

$\square$

Απόδειξη: Λόγω της Συνθήκης $C'0$ (και τα δύο μοντέλα ανήκουν στην ίδια δομή), οι αποκρίσεις των δύο μοντέλων λαμβάνουν τη μέγιστη δυνατή τιμή τους, η οποία είναι ίση με:

$$f(t_{cr}, \theta_M) = f(t_{cr}, \bar{\theta}_M) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^M k_i \cdot \Delta_i = \sum_{i=1}^M \bar{k}_i \cdot \bar{\Delta}_i = f_{max} \quad (3.70)$$

Η Εξ. (3.70) δηλώνει ότι η μέγιστη δυνατή απόκριση του ενός μοντέλου είναι ίση με τη μέγιστη δυνατή απόκριση του άλλου μοντέλου. Αστό, σε συνδυασμό με την υπόθεση της ισότητας των αποκρίσεων, έχει ως αποτέλεσμα το ότι όταν η απόκριση του ενός μοντέλου λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή απόκριση τότε υποχρεωτικά και η απόκριση του δεύτερου μοντέλου θα λάβει και αυτή τη μέγιστη δυνατή τιμή της⁸.

Εξ' ορισμού του μοντέλου, η μέγιστη δυνατή τιμή της απόκριση μπορεί να συμβεί αν και μόνο αν η παραμόρφωση ελατηρίου του κάθε τελεστή λάβει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή όταν κάθε τελεστής ολισθαίνει θετικά. Γενικεύοντας λοιπόν το παραπάνω, οι αποκρίσεις των μοντέλων λαμβάνουν τη μέγιστη (αντίστοιχα: ελάχιστη) τιμή τους f_{max} (αντίστοιχα: f_{min}) όταν και μόνο όταν όλοι οι τελεστές και των δύο μοντέλων βρίσκονται στη θετική (αντίστοιχα: αρνητική) ολίσθηση. Αυτό αποδεικνύει το πρώτο σκέλος του εν λόγω Λήμματος.

Προχωρώντας στο δεύτερο σκέλος της απόδειξης, γίνεται η εξής παραδοχή, δίχως να βλάπτεται η γενικότητα [υπενθύμιση: ο M -οστός τελεστής έχει το μεγαλύτερο κατώφλι (Δ_M) για το πρώτο μοντέλο]:

$$\Delta_M \geq \bar{\Delta}_{M-1} > \bar{\Delta}_M \quad (3.71)$$

Αν μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ο M -οστός τελεστής του πρώτου μοντέλου ολισθαίνει θετικά (αντίστοιχα: αρνητικά), τότε λόγω της Ιδιότητας 3.5 (η οποία ισχύει λόγω της Συνθήκης $C'0$), όλοι οι τελεστές του πρώτου μοντέλου (οι οποίοι έχουν κατώφλια μικρότερα του Δ_M), πρέπει να ολισθαίνουν θετικά (αντίστοιχα: αρνητικά). Συνεπώς, αυτή τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή η απόκριση του πρώτου μοντέλου λαμβάνει τη μέγιστη (αντίστοιχα: ελάχιστη) δυνατή τιμή της και επομένως σύμφωνα με το πρώτο σκέλος του Λήμματος όλοι οι τελεστές του δεύτερου μοντέλου πρέπει να ολισθαίνουν θετικά (αντίστοιχα: αρνητικά) και αυτοί. Άρα το συμπέρασμα είναι ότι ο τελεστής με κατώφλι Δ_M (πρώτο μοντέλο) ολισθαίνει αν και μόνο αν⁹ ολισθαίνουν οι τελεστές με κατώφλια $\bar{\Delta}_{M-1}$ και $\bar{\Delta}_M$ (δεύτερο μοντέλο). Αυτό αναπόφευκτα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο M -οστός τελεστής του πρώτου

⁸Η συνθήκη $C'0$ χρησιμοποιείται προκειμένου να αποκλειστεί η περίπτωση να ισχύει η ισότητα των αποκρίσεων μεταξύ των δύο μοντέλων, άλλα το πρώτο μοντέλο να λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή του ενώ το δεύτερο όχι.

⁹Το ότι η ολίσθηση του M -οστού τελεστή του πρώτου μοντέλου (Δ_M) προκαλεί την ολίσθηση του $M-1$ -οστού ($\bar{\Delta}_{M-1}$) και του M -οστού ($\bar{\Delta}_M$) τελεστή του δεύτερου μοντέλου αποδείχθηκε ακριβώς παραπάνω. Επιπλέον, η ολίσθηση του $M-1$ -οστού ($\bar{\Delta}_{M-1}$) ή του M -οστού ($\bar{\Delta}_M$) τελεστή του δεύτερου μοντέλου προκαλεί την ολίσθηση του M -οστού τελεστή (Δ_M) του πρώτου μοντέλου [Εξ. (3.71) σε συνδυασμό με την Ιδιότητα 3.5] και ως εκ τούτου και αυτή η περίπτωση εκπίπτει στην προηγούμενη.

μοντέλου και όλοι τελεστές του δεύτερου μοντέλου με κατώφλια ίσα ή μεγαλύτερα αυτού μοιράζονται πάντα το ίδιο $MRDE$. $\square$

Απόδειξη Ιδιότητας 3.11: Η απόδειξη της επάρκειας, δηλαδή του ότι αν ισχύουν οι Συνθήκες $C1 - C3$ τότε το μοντέλο έχει μοναδική απόκριση, βασίζεται στα ακόλουθα βήματα:

- Αρχικά θεωρείται ένα μοντέλο εντός δομής, με διάνυσμα παραμέτρων $\theta_M = [k_1 \dots k_M \Delta_1 \dots \Delta_M]^T$, το οποίο διεγείρεται από μία εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, έτσι ώστε να ισχύουν οι Συνθήκες $C1 - C3$.
- Γίνεται η υπόθεση ότι υπάρχει και δεύτερο μοντέλο εντός δομής, με διάνυσμα παραμέτρων $\bar{\theta}_M = [\bar{k}_1 \dots \bar{k}_M \bar{\Delta}_1 \dots \bar{\Delta}_M]^T$, το οποίο διεγείρεται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση όπως το πρώτο μοντέλο και έχει ακριβώς την ίδια απόκριση με το πρώτο μοντέλο $\forall t \geq t_{cr}$, δηλαδή:

$$f(t, \theta_M) = f(t, \bar{\theta}_M), \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (3.72)$$

- Αποδεικνύεται ότι η μόνη περίπτωση να συμβαίνει η Εξ. (3.72), είναι να ταυτίζονται τα δύο μοντέλα, δηλαδή: $\theta_M = \bar{\theta}_M$

Οι βασικές αρχές πάνω στις οποίες θα βασιστεί η απόδειξη είναι το Λήμμα 3.1 και η Ιδιότητα 3.5, δηλαδή στο ότι όταν ένας τελεστής ολισθαίνει θετικά (αντίστοιχα: αρνητικά), τότε όλοι τελεστές, που διεγείρονται από την ίδια $x(t)$ με αυτόν, με κατώφλια ίσα ή μικρότερα ολισθαίνουν θετικά (αντίστοιχα: αρνητικά) και αυτοί.

Για λόγους κατανόησης, η απόδειξη θα υλοποιηθεί για $M = 3$. Η γενίκευση της είναι σχετικά απλή, αλλά λόγω πολυπλοκότητας του συμβολισμού γίνεται δυσανάγνωστη. Εφόσον και τα δύο μοντέλα υπόκεινται στη Συνθήκη $C0$ (ανήκουν στην ίδια δομή), τότε για $t = t_{cr}$ ισχύει (υπό το καθεστώς της ισότητας των δύο αποκρίσεων):

$$f(t_{cr}, \theta_3) = f(t_{cr}, \bar{\theta}_3) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 k_i \cdot \Delta_i = \sum_{i=1}^3 \bar{k}_i \cdot \bar{\Delta}_i \quad (3.73)$$

Αρχικά θεωρείται η ακόλουθη διάταξη (θα αποδειχθεί ότι είναι αδύνατο να ισχύει):

$$\bar{\Delta}_1 \leq \Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 \leq \bar{\Delta}_2 < \bar{\Delta}_3 \quad (3.74)$$

Συνεισφορά της $C2$: Σύμφωνα με τη Συνθήκη $C2(a, b)$ για $i = 2$ και για $\forall t \in [t_{e,3} + 1, t_2]$, και την Ιδιότητα 3.1 προκύπτει ότι:

$$|\delta_3(t)| < \Delta_3 \implies \delta_3(t) = x(t) - x(t_{e,3}) + \Delta_M \quad (3.75)$$

Στην παραπάνω εξίσωση έγινε η σιωπηρή παραδοχή ότι το $MRDE$, $x(t_{e,3})$, του τρίτου τελεστή είναι μέγιστο, συνεπώς $\delta_M(t_{e,M}) = \Delta_M$ (βλέπε Πίνακα 3.1). Επειδή το $x(t_{e,3})$ είναι το $MRDE$ και για το δεύτερο και τρίτο τελεστή του δεύτερου μοντέλου (οι οποίοι πρέπει οπωσδήποτε να είναι στην περιοχή ακινησίας $\forall t \in [t_{e,3}+1, t_2]$ - βλέπε Λήμμα 3.1), ισχύει $[\forall i = 2, 3]$:

$$|\bar{\delta}_i(t)| < \bar{\Delta}_i \implies \bar{\delta}_i(t) = x(t) - x(t_{e,3}) + \bar{\Delta}_i, \quad \forall t \in [t_{e,3}+1, t_2] \quad (3.76)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη την εξίσωση των αποκρίσεων των δύο μοντέλων για $t = t_2$ προκύπτει [λαμβάνοντας υπόψη τη Συνθήκη $C2(c)$ και τις Εξ. (3.75) - (3.76)]:

$$-k_1 \cdot \Delta_1 - k_2 \cdot \Delta_2 + k_3 \cdot (x(t_2) - x(t_{e,3}) + \Delta_3) = -\bar{k}_1 \cdot \bar{\Delta}_1 + \bar{k}_2 \cdot (x(t_2) - x(t_{e,3} + \bar{\Delta}_2) + \bar{\Delta}_3) + \bar{k}_3 \cdot (x(t_2) - x(t_{e,3}) + \bar{\Delta}_3) \quad (3.77)$$

διότι $\bar{\Delta}_1 < \Delta_2$ (ο πρώτος τελεστής του δεύτερου μοντέλου πρέπει να ολισθαίνει).

Συνεισφορά της $C3$: Εκτελώντας την ίδια αλγεβρική διαδικασία όπως και ακριβώς παραπάνω, αλλά τώρα λαμβάνοντας υπόψη τη Συνθήκη $C3$ για $i = 2$, προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$k_1 \cdot \Delta_1 + k_2 \cdot \Delta_2 + k_3 \cdot (x(t'_2) - x(t'_{e,3}) + \Delta_3) = \bar{k}_1 \cdot \bar{\Delta}_1 + \bar{k}_2 \cdot (x(t'_2) - x(t'_{e,3} + \bar{\Delta}_2) + \bar{\Delta}_3) + \bar{k}_3 \cdot (x(t'_2) - x(t'_{e,3}) + \bar{\Delta}_3) \quad (3.78)$$

$$-k_1 \cdot \Delta_1 - k_2 \cdot \Delta_2 + k_3 \cdot (x(t'_2) - x(t'_{e,3}) + \Delta_3) = -\bar{k}_1 \cdot \bar{\Delta}_1 + \bar{k}_2 \cdot (x(t'_2) - x(t'_{e,3} + \bar{\Delta}_2) + \bar{\Delta}_3) + \bar{k}_3 \cdot (x(t'_2) - x(t'_{e,3}) + \bar{\Delta}_3) \quad (3.79)$$

όπου η Εξ. (3.78) αντιστοιχεί στον άνω κλάδο της $C3(3)$, ενώ η Εξ. (3.79) στον κάτω κλάδο της $C3(3)$.

Η Εξ. (3.78) [άνω κλάδος της $C3(c)$], λόγω της Εξ. (3.73), δίνει:

$$K_3 = \bar{K}_2 + \bar{K}_3 \quad (3.80)$$

διότι $x(t'_2) - x(t'_{e,3}) \neq 0$ (σε διαφορετική περίπτωση το $x(t'_{e,3})$ δε θα ήταν $MRDE$ - βλέπε Πίνακα 3.1).

Το ίδιο αποτέλεσμα με την Εξ. (3.80) προκύπτει αν η Εξ. (3.79) (κάτω κλάδος της $C3(c)$) αφαιρεθεί από την Εξ. (3.77) (άνω κλάδος της $C3(c)$).

Συνδυάζοντας τώρα το αποτέλεσμα της Εξ. (3.80) με την Εξ. (3.77) προκύπτει ότι:

$$k_3 \cdot \Delta_3 = \bar{k}_2 \cdot \bar{\Delta}_2 + \bar{k}_3 \cdot \bar{\Delta}_3 \quad (3.81)$$

Όμως τα αποτελέσματα των Εξ. (3.80) – (3.81), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο τρίτος τελεστής (Δ_3) του πρώτου μοντέλου και ο δεύτερος ($\bar{\Delta}_2$) και τρίτος ($\bar{\Delta}_3$) τελεστής του δεύτερου μοντέλου παραμένουν ακίνητοι [άρα οι παραμορφώσεις του δίνονται από τις Εξ. (3.75) – (3.76)] ή ολισθαίνουν ακριβώς τις ίδιες χρονικές στιγμές, οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$k_3 \cdot \delta_3(t) = \bar{k}_2 \cdot \bar{\delta}_2(t) + \bar{k}_3 \cdot \bar{\delta}_3(t), \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (3.82)$$

Επί τη βάση της Εξ. (3.82), η Εξ. (3.73) γίνεται ως εξής:

$$f(t, \theta_3) = f(t, \bar{\theta}_3) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 k_i \cdot \delta_i(t) = \sum_{i=1}^2 \bar{k}_i \cdot \bar{\delta}_i(t), \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (3.83)$$

Αν τώρα εφαρμοστεί η ίδια αλγεβρική διαδικασία, λαμβανομένου υπόψη της νέα ισότητας των αποκρίσεων, όπως αυτή περιγράφεται από την Εξ. (3.83), χρησιμοποιώντας τις Συνθήκες $C2 - C3$ για $i = 1$, προκύπτει ότι $k_2 = 0$. Όμως το αποτέλεσμα αυτό είναι απαράδεκτο και συνεπώς η διάταξη της Εξ. (3.74) δε μπορεί να ισχύει.

Κατόπιν των παραπάνω αποτελεσμάτων, γίνεται εκ νέου υπόθεση σχετικά με τη διάταξη, η οποία είναι:

$$\bar{\Delta}_1 \leq \Delta_1 < \Delta_2 \leq \bar{\Delta}_2 < \Delta_3 \leq \bar{\Delta}_3 \quad (3.84)$$

Εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια αλγεβρική διαδικασία όπως και πριν, χρησιμοποιώντας της Συνθήκες $C2 - C3$ αρχικά για $i = 2$ και έπειτα για $i = 1$, προκύπτει ότι $k_j = \bar{k}_j$ και $\Delta_j = \bar{\Delta}_j$ για $\forall j = 2, 3$.

Συνεισφορά της C1: Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, η Εξ. (3.73) γίνεται:

$$k_1 \cdot \Delta_1 = \bar{k}_1 \cdot \bar{\Delta}_1 \quad (3.85)$$

επομένως είναι σαν να ελέγχεται η ισότητα δύο μοντέλων με $M = 1$. Λόγω της Συνθήκης $C1$ ο πρώτος τελεστής του πρώτου μοντέλου $slip(+) \rightarrow stick$ (ή $slip(-) \rightarrow stick$) τουλάχιστον μία φορά. Έστω ότι αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t_{e,1} + 1$ (με $t_{e,1} \geq t_{cr}$). Λόγω του Λήμματος 3.1 οι δύο εναπομείναντες τελεστές μοιράζονται το ίδιο $MRDE$ τη χρονική στιγμή $t_{e,1}$ και ολισθαίνουν και ακινητοποιούνται τις ίδιες χρονικές στιγμές. Άρα, η Εξ. (3.85) γίνεται για $t = t_{e,1} + 1$:

$$k_1 \cdot (x(t_{e,1} + 1) - x(t_{e,1}) \pm \Delta_1) = \bar{k}_1 \cdot (x(t_{e,1} + 1) - x(t_{e,1}) \pm \bar{\Delta}_1) \quad (3.86)$$

όπου το θετικό (αντίστοιχα: αρνητικό) πρόσημο αντιστοιχεί σε μέγιστο (αντίστοιχα: ελάχιστο) $MRDE$ τη χρονική στιγμή $t_{e,1}$. Λόγω του ότι $x(t_{e,1} + 1) - x(t_{e,1}) \neq 0$ (αλλιώς το $x(t_{e,1})$ δε θα ήταν $MRDE$) και της Εξ. (3.76), προκύπτει ότι: $k_1 = \bar{k}_1$ και $\Delta_1 = \bar{\Delta}_1$.

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούν στο συμπέρασμα, ότι στην περίπτωση που ισχύει η διάταξη της Εξ. (3.84), τότε τα δύο εν λόγω μοντέλα ταυτίζονται. Όμοια αποτελέσματα (δηλαδή ότι είτε η ισότητα των μοντέλων είναι αδύνατη, είτε ότι τα δύο μοντέλα ταυτίζονται) εξάγονται για όποια διάταξη και αν χρησιμοποιηθεί, αρκεί να εφαρμοστεί η όλη παραπάνω αλγεβρική διαδικασία.

Αναγκαιότητα: Το αναγκαίο τμήμα της Ιδιότητας 3.11 αποδεικνύεται υποθέτοντας ότι όταν τουλάχιστον μία από τις Συνθήκες $C1 - C3$ δεν ισχύει τότε η ισότητα των αποκρίσεων των δύο μοντέλων δεν συνεπάγεται πάντα την ισότητα των διανυσμάτων των παραμέτρων, δηλαδή $\theta = \tilde{\theta}$. Με άλλα λόγια η απόδειξη της αναγκαιότητας των συνθηκών $C1 - C3$ αποδεικνύεται με τη βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος. Για το λόγο αυτόν επιλέγεται ένα σήμα εφαρμοζόμενης μετατόπισης από την κλάση σημάτων $\mathcal{E}$, η οποία περιέχει όλα εκείνα τα σήματα διέγερσης, τα οποία εμφανίζουν ένα μέγιστο $x_{cr} = x(t_{cr})$ σύμφωνα με τη Συνθήκη $C0$ και κατόπιν μειώνονται μονοτονικά.

Αναγκαιότητα της $C1$: Αν η συνθήκη $C1$ δεν είναι έγκυρη τότε τη χρονική στιγμή $t_{cr} + 1$ τουλάχιστον ο τελεστής με παραμόρφωση ελατηρίου $\delta_1(t)$ $slip(+) \rightarrow slip(-)$ [Ιδιότητα 3.4]. Για το λόγο αυτόν ένας οποιοσδήποτε (τυχαίος) τελεστής με παραμόρφωση ελατηρίου $\bar{\delta}_1(t)$, με αυθαίρετα μικρό κατώφλι $\bar{\Delta}_1$, $slip(+) \rightarrow slip(-)$ τη χρονική στιγμή $t_{cr} + 1$. Τώρα αν επιλεχθεί κατάλληλα η σταθερά ελαστικότητας $\bar{k}_1$, δηλαδή $k_1 \cdot \Delta_1 = \bar{k}_1 \cdot \bar{\Delta}_1$ του τυχαίου αυτού τελεστή, είναι πολύ εύκολο να δείχθει ότι ο τυχαίος αυτός τελεστής δίνει ακριβώς την ίδια συνεισφορά με τον τελεστή με κατώφλι Δ_1 .

Αναγκαιότητα των $C2 - C3$: Η αναγκαιότητα των συνθηκών $C2 - C3$ αποδεικνύεται μέσω ενός αντιπαραδείγματος. Έστω ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές, το οποίο υπακούει στις Υποθέσεις 3.2 και 3.3 και είναι παραμετροποιημένο από το διάνυσμα θ_M . Ας υποτεθεί ότι η απόκριση του μοντέλου είναι $f(t, \theta_M)$, λόγω της εφαρμοζόμενης μετατόπισης $x(t)$, η οποία υπακούει στις συνθήκες $C0$ και $C1$ και ανήκει στην κλάση $\mathcal{E}$. Από τη στιγμή που η συνθήκη $C2$ δεν ισχύει τότε όπως η $x(t)$ [$t > t_{cr}$] μειώνεται, υπάρχει τουλάχιστον ένα $j \in [2, M]$ τέτοιο ώστε οι τελεστές με παραμορφώσεις ελατηρίων $\delta_{j-1}(t)$ και $\delta_j(t)$ $stick \rightarrow slip(-)$ περνάνε όριο της αρνητικής τους ολίσθησης την ίδια χρονική στιγμή $t_j > t_{cr} + 1$ (Περίπτωση Α). Ομοίως αν δεν ισχύει η $C3$ τότε οι δύο εν λόγω τελεστές $stick \rightarrow slip(-)$ σε διαδοχικές χρονικές στιγμές $t_j > t_{cr} + 1$ και $t_j + 1$ (Περίπτωση Β).

Περίπτωση Α: Ας υποτεθεί ότι οι τελεστές με παραμορφώσεις ελατηρίων $\delta_{j-1}(t)$ και $\delta_j(t)$ $stick \rightarrow slip(-)$ την ίδια χρονική στιγμή t_j [Δ_{j-1} και Δ_j υπακούουν στην Εξ. (3.16)]. Έστω ένα δεύτερο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές και διανύσματα παραμέτρων $\bar{k}$ και $\bar{d}$, το οποίο και αυτό υπακούει τις Υποθέσεις 3.2 και 3.3. Το εν λόγω μοντέλο διεγείρεται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, έτσι ώστε μόνο οι συνθήκες $C0$ και $C1$ να ικανοποιούνται, και παρέχει απόκριση

$f(t, \bar{\theta}_M)$. Οι παράμετροι του δεύτερου μοντέλου επιλέγονται ως $k_i = \bar{k}_i$ και $\Delta_i = \bar{\Delta}_i$, $\forall i \in [1, j-2] \cup [j+1, M]$, ενώ $\bar{k}_{j-1}$, $\bar{k}_j$, $\bar{\Delta}_{j-1}$ και $\bar{\Delta}_j$ ακολουθούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$k_{j-1} + k_j = \bar{k}_{j-1} + \bar{k}_j \quad (3.87)$$

$$k_{j-1} \cdot \Delta_{j-1} + k_j \cdot \Delta_j = \bar{k}_{j-1} \cdot \bar{\Delta}_{j-1} + \bar{k}_j \cdot \bar{\Delta}_j \quad (3.88)$$

$$x(t_j) - x(t_{cr}) \leq -2 \cdot \Delta_j \leq -2 \cdot \bar{\Delta}_j < -2 \cdot \Delta_{j-1} \leq -2 \cdot \bar{\Delta}_{j-1} < x(t_j - 1) - x(t_{cr}) \quad (3.89)$$

Αν οι αποκρίσεις των δύο μοντέλων [Εξ. (3.6)] αφαιρεθούν, λαμβάνοντας υπόψη ότι κάποιες εκ των παραμέτρων είναι ίδιες, τότε προκύπτει:

$$f(t, \theta_M) - f(t, \bar{\theta}_M) = \sum_{r=j-1}^j [k_r \cdot \delta_r(t) - \bar{k}_r \cdot \bar{\delta}_r(t)], \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (3.90)$$

Λόγω του ότι η Συνθήκη $C1$ ισχύει και για τα δύο μοντέλα, τότε όλοι οι τελεστές $slip(+) \rightarrow stick$ ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή $t_{cr} + 1$. Σύμφωνα με την Εξ. (3.89) και την Ιδιότητα 3.2, οι τελεστές με $\delta_{j-1}(t)$ και $\delta_j(t)$, όπως επίσης και με $\bar{\delta}_{j-1}(t)$ και $\bar{\delta}_j(t)$, $stick \rightarrow slip(-)$ τη χρονική στιγμή t_j (δεν ισχύει η συνθήκη $C2$). Ως εκ τούτου, όλοι οι παραπάνω τελεστές παραμένουν στην ακινησία για το χρονικό διάστημα $[t_{cr} + 1, t_j - 1]$, επομένως οι παραμορφώσεις των ελατηρίων τους, σε αυτό το χρονικό διάστημα δίδεται από την Εξ. (3.14) (Ιδιότητα 3.1 με $x(t_0) = x(t_{cr})$, $\delta_r(t_0) = \Delta_r$ και $\bar{\delta}_r(t_0) = \bar{\Delta}_r$, $\forall r \in [j-1, j]$). Λόγω του παραπάνω και των Εξ. (3.87) - (3.88), η Εξ. (3.90) γίνεται:

$$f(t, \theta_M) - f(t, \bar{\theta}_M) = \sum_{r=j-1}^j (k_r - \bar{k}_r) \cdot (x(t) - x(t_{cr})) + \sum_{r=j-1}^j (k_r \cdot \Delta_r - \bar{k}_r \cdot \bar{\Delta}_r) = 0, \quad \forall t \in [t_{cr} + 1, t_j - 1] \quad (3.91)$$

Εφόσον η $x(t)$ μειώνεται $\forall t > t_{cr}$, τότε σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.2, οι τελεστές με $\delta_{j-1}(t)$, $\delta_j(t)$, $\bar{\delta}_{j-1}(t)$ και $\bar{\delta}_j(t)$ παραμένουν στην αρνητική ολίσθηση $\forall t \geq t_j$. Επομένως η Εξ. (3.90), χρησιμοποιώντας την Εξ. (3.88), γίνεται:

$$f(t, \theta_M) - f(t, \bar{\theta}_M) = - \sum_{r=j-1}^j (k_r \cdot \Delta_r - \bar{k}_r \cdot \bar{\Delta}_r) = 0, \quad \forall t \geq t_j \quad (3.92)$$

Οι Εξ. (3.91) - (3.92), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τη χρονική στιγμή t_{cr} , όλοι οι τελεστές ολισθαίνουν θετικά (Συνθήκη $C0$), δηλώνει ότι οι αποκρίσεις $f(t, \theta_M)$ και $f(t, \bar{\theta}_M)$ ταυτίζονται για $\forall t \geq t_{cr}$, αποδεικνύοντας με τον τρόπο αυτόν την αναγκαιότητα της Συνθήκης $C2$.

Περίπτωση Β: Τώρα ας υποθεθεί ότι οι τελεστές με $\delta_{j-1}(t)$ και $\delta_j(t)$ $stick \rightarrow slip(-)$ σε διαδοχικές χρονικές στιγμές t_j και $t_j + 1$, αντίστοιχα. Έστω ένα δεύτερο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, όμοιο

με το προηγούμενο, άλλα με $\bar{k}_{j-1}$, $\bar{k}_j$, $\bar{\Delta}_{j-1}$ και $\bar{\Delta}_j$ να ακολουθούν τις Εξ. (3.87)-(3.88) και :

$$[k_j - \bar{k}_j] \cdot [x(t_j) - x(t_{cr})] = -2 \cdot [k_j \cdot \Delta_j - \bar{k}_j \cdot \bar{\Delta}_j] \quad (3.93)$$

$$x(t_j) - x(t_{cr}) \leq -2 \cdot \Delta_{j-1} \leq -2 \cdot \bar{\Delta}_{j-1} < x(t_j - 1) - x(t_{cr}) \quad (3.94)$$

$$x(t_j + 1) - x(t_{cr}) \leq -2 \cdot \Delta_j \leq -2 \cdot \bar{\Delta}_j < x(t_j) - x(t_{cr}) \quad (3.95)$$

Αν ακολουθηθεί η προηγούμενη αλγεβρική διαδικασία, λαμβάνοντας υπόψη ότι η συνθήκη $C3$ δεν ισχύει και ως εκ τούτου και οι δύο τελεστές με $\delta_{j-1}(t)$ και $\bar{\delta}_{j-1}(t)$ *stick* $\rightarrow$ *slip*(-) τη χρονική στιγμή t_j [Εξ. (3.94) και Ιδιότητα 3.2] και ότι οι δύο τελεστές με $\delta_j(t)$ και $\bar{\delta}_j(t)$ περνάνε το αρνητικό τους όριο ολίσθησης τη χρονική στιγμή $t_j + 1$ [Εξ. (3.95) και Ιδιότητα 3.2], συμπεραίνεται ότι τα δύο μοντέλα έχουν ταυτόσημες αποκρίσεις, αποδεικνύοντας με τον τρόπο αυτόν την αναγκαιότητα της Συνθήκης $C3$. $\square$

Γ' Παράρτημα: Μη Αναγνωρισιμότητα του $\delta_M(1)$

Η παρούσα απόδειξη βασίζεται σε ένα αντιπαράδειγμα, παρουσιάζονται ένα μοντέλο, το οποίο δίνει ακριβώς ίδιες αποκρίσεις κάτω από δύο διαφορετικά διανύσματα αρχικών συνθηκών $\delta_2(1)$ και $\bar{\delta}_2(1)$ (η εφαρμοζόμενη μετατόπιση είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις).

Έστω ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με $M = 2$ τελεστές, παραμετροποιημένο από το διάνυσμα $\theta_2 = [k_2^T d_2^T]^T$, όπου $d_2 = [\Delta_1 \Delta_2]^T$, $k_2 = [k_1 k_2]^T$ με $k_1 = k_2$.

Ας υποτεθεί ότι $f(t, \theta_2, \delta_2(1))$ και $f(t, \theta_2, \bar{\delta}_2(1))$ είναι οι αποκρίσεις του μοντέλου σε εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, υπό το καθεστώς δύο διαφορετικών διανυσμάτων αρχικών συνθηκών $\delta_2(1) = [\delta_1(1) \delta_2(1)]^T$ και $\bar{\delta}_2(1) = [\bar{\delta}_1(1) \bar{\delta}_2(1)]^T$, αντίστοιχα. Επίσης γίνεται η υπόθεση ότι Οι τελεστές με παραμορφώσεις ελατηρίων $\delta_i(t)$ και $\bar{\delta}_i(t)$ [$\forall i = 1, 2$] ξεκινάνε από την ακινησία, δηλαδή $|\delta_i(1)|, |\bar{\delta}_i(1)| < \Delta_1, \forall i = 1, 2$.

Έστω, $|\delta_i(t)| < \Delta_i$ και $|\bar{\delta}_i(t)| < \Delta_i, \forall t \in [1, t_1]$ και $\forall i = 1, 2$. Είναι απλό να επιβεβαιωθεί ότι οι αποκρίσεις $f(t, \theta_2, \delta_2(1))$ και $f(t, \theta_2, \bar{\delta}_2(1))$ ταυτίζονται $\forall t \in [1, t_1]$ αν και μόνο αν [υπό την Εξ. (3.14) - Ιδιότητα 3.1] $\delta_1(1) + \delta_2(1) = \bar{\delta}_1(1) + \bar{\delta}_2(1)$, δηλαδή:

$$f(t, \theta_2, \delta_2(1)) = f(t, \theta_2, \bar{\delta}_2(1)) \quad \forall t \in [1, t_1] \iff \delta_1(1) + \delta_2(1) = \bar{\delta}_1(1) + \bar{\delta}_2(1) \quad (3.96)$$

Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν την παραπάνω σχέση και τις ακόλουθες δύο:

$$\Delta_1 - \delta_1(1) = \Delta_2 - \bar{\delta}_2(1) < \Delta_1 - \bar{\delta}_1(1) = \Delta_2 - \delta_2(1) \quad (3.97)$$

$$\Delta_1 - \delta_1(1) \leq x(t_1 + 1) - x(1) < \Delta_1 - \bar{\delta}_1(1) \quad (3.98)$$

Τότε, λόγω της Ιδιότητας 3.2, και οι δύο τελεστές με παραμορφώσεις ελατηρίων $\delta_1(t)$ και $\bar{\delta}_2(t)$ $stick \rightarrow slip(+)$ τη χρονική στιγμή $t_1 + 1$, ενώ οι υπόλοιποι δύο με παραμορφώσεις ελατηρίων $\bar{\delta}_1(t)$ και $\delta_2(t)$ παραμένουν ακίνητοι. Εφαρμόζοντας πάλι την Εξ. (3.14) με $\delta_1(t_1 + 1) = \Delta_1$ και $\bar{\delta}_2(t_1 + 1) = \Delta_2$, είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι $f(t_1 + 1, \theta_2, \delta_2(1)) = f(t_1 + 1, \theta_2, \bar{\delta}_2(1))$. Το παραπάνω υποδεικνύει ότι το μοντέλο παρέχει πανομοιότυπες αποκρίσεις μέσα στο χρονικό διάστημα $[1, t_1 + 1]$ και για τα δύο διαφορετικά διανύσματα αρχικών συνθηκών. Επιπλέον αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι αποκρίσεις για $t > t_1 + 1$ δεν περιέχουν πλέον τη επίδραση των αρχικών συνθηκών (πέρασμα του θετικού ορίου ολίσθησης τη χρονική στιγμή $t_1 + 1$ - Συνθήκη $C0$). Για το λόγο αυτό οι δύο εν λόγω αποκρίσεις είναι ίσες $\forall t$, και ως εκ τούτου τα διανύσματα αρχικών συνθηκών δεν είναι αναγνωρίσιμα. $\square$

Κεφάλαιο 4

Εκτίμηση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Εκτιμήτρια και Επίδραση Αρχικών Καταστάσεων στην Εκτίμηση

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύεται η εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Το θέμα αυτό αποτελεί ένα πολυσύνθετο πρόβλημα, το οποίο περιλαμβάνει την επιλογή κατάλληλης εκτιμήτριας, την αριθμητική υλοποίηση αυτής, τη μελέτη των ιδιοτήτων της, όπως επίσης και την αξιολόγηση της ποιότητας της διαδικασίας εκτίμησης. Για το λόγο αυτό, στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου, γίνεται εισαγωγή σε θέματα εκτίμησης και επιλέγεται κατάλληλη μη – γραμμική εκτιμήτρια. Παρατίθενται κάποιες βασικές ιδιότητες της εκτιμήτριας, συμπεριλαμβανομένου των ικανών και απαραίτητων συνθηκών για την ύπαρξη ολικού ελάχιστου της συνάρτησης κόστους που ελαχιστοποιείται στα πλαίσια της εκτίμησης. Όπως θα γίνει φανερό στα επόμενα κεφάλαια, οι ιδιότητες αυτές θα αποτελέσουν τη βάση για την αξιολόγηση της ποιότητας της εκτίμησης. Επιπροσθέτως, προτείνεται κατάλληλη διαδικασία μη – γραμμικής βελτιστοποίησης δύο σταδίων για την αριθμητική υλοποίηση αυτής, με σκοπό την αντιμετώπιση του προβλήματος εγκλωβισμού της συνάρτησης κόστους σε τοπικά ελάχιστα. Τέλος, παρατίθενται μερικά αριθμητικά αποτελέσματα, βασισμένα σε Monte Carlo προσομοιώσεις, με σκοπό αφενός των έλεγχο της ορθότητας της εκτίμησης και αφετέρου την επίδειξη των προβλημάτων που δύναται να δημιουργηθούν από τη λανθασμένη επιλογή των αρχικών καταστάσεων (έλλειψη εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας του διανύσματος των αρχικών καταστάσεων – βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο).

4.1 Σύμβολα και Συντομογραφίες

4.1.1 Ακρωνύμια

NLR : Εκτιμήτρια Μη – Γραμμικής Παλινδρόμησης (NonLinear Regression)

4.1.2 Σύμβολα

$argmin$	: Όρισμα που ελαχιστοποιεί την υποδεικνυόμενη συνάρτηση
$\hat{}$	: Έκτίμηση/Εκτιμήτρια
M^o	: Αριθμός τελεστών του πραγματικού συστήματος
$\mathbf{k}_{M^o}^o$	: Διάνυσμα σταθερών ελατηρίων του πραγματικού συστήματος
$\mathbf{d}_{M^o}^o$	: Διάνυσμα κατωφλίων του πραγματικού συστήματος
$\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o$	: Διάνυσμα παραμέτρων του πραγματικού συστήματος
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M,N}$	: Εκτιμήτρια (εκτίμηση) του διανύσματος των παραμέτρων του μοντέλου
$f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$	: Απόκριση του πραγματικού συστήματος
$y(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$	: Μετρούμενη απόκριση του πραγματικού συστήματος
$\epsilon(t)$	: Επισερχόμενος θόρυβος στη μετρούμενη απόκριση
$e(t, \boldsymbol{\theta}_M)$	: Σφάλμα εξόδου ενός τυχαίου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές
N	: Αριθμός δεδομένων
$Q_N(\boldsymbol{\theta}_M)$	: Συνάρτηση κόστους λόγω ενός τυχαίου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές
$E\{\cdot\}$	: Στατιστική Προσδοκία (Statistical expectation)

4.2 Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο ασχολείται με το πρόβλημα της εκτίμησης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Το πρόβλημα μπορεί σε γενικές γραμμές να παρουσιαστεί ως εξής:

Έστω ένα σύστημα, το οποίο περιγράφεται πλήρως από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M^o τελεστές και διάνυσμα παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o$. Το σύστημα διεγείρεται από μια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ και παράγει απόκριση $f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$. Επί τη βάση των μετρούμενων σημάτων $x(t)$ και $f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$, να εκτιμηθεί ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M^o τελεστές, το οποίο να αναπαριστά κατά τρόπο βέλτιστο το υπό εκτίμηση σύστημα.

Όπως είναι φανερό το εν λόγω πρόβλημα περιλαμβάνει την εκτίμηση, έστω $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o,N}$, του διανύσματος των παραμέτρων του πραγματικού συστήματος $\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o$. Αξίζει να σημειωθεί ότι για την επίλυση αυτού γίνονται δύο σιωπηρές παραδοχές. Σύμφωνα με την πρώτη θεωρείται ότι τα μετρούμενα σήματα, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στα πλαίσια της εκτίμησης, προέρχονται στην ουσία από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με άγνωστο το πραγματικό διάνυσμα παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o$. Κατά τη δεύτερη, θεωρείται ότι ο αριθμός των τελεστών που ενσωματώνει το πραγματικό σύστημα είναι

γνωστός και ίσος με M^o .

Η πρώτη παραδοχή είναι αρκετά σύνηθης [11, σελ. 210] στα πλαίσια του γνωστικού αντικειμένου της αναγνώρισης συστημάτων. Η γενίκευση αυτής είναι δυνατή με το να γίνει δεκτό ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από ένα σύστημα διαφορετικής δομής από το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell (Model Misspecification - βλέπε [13, σελ. 101]). Εντούτοις μια τέτοια ανάλυση ξεφεύγει από τα όρια και τους σκοπούς της παρούσης διατριβής.

Όσον αφορά τη δεύτερη παραδοχή (γνωστός ο πραγματικός αριθμός των τελεστών), γίνεται κατά σύμβαση έτσι ώστε να επικεντρωθεί σε πρώτη φάση η προσπάθεια στην αποτελεσματική εκτίμηση του διανύσματος των πραγματικών παραμέτρων. Προφανώς στα πλαίσια μιας πραγματικής εφαρμογής, ο αριθμός αυτός είναι άγνωστος και πρέπει να εκτιμηθεί ή καλύτερα να επιλεγθεί με τρόπο κατάλληλο. Η διαδικασία επιλογής του αριθμού των τελεστών αποτελεί πρόβλημα πέρα από τα όρια του παρόντος κεφαλαίου και αναπτύσσεται σε παρακάτω κεφάλαια (Κεφάλαιο 6).

Σχετικά τώρα με το πρόβλημα της εκτίμησης, όπως θα έχει γίνει ήδη κατανοητό, είναι ένα σύνθετο πρόβλημα, το οποίο για να επιλυθεί απαιτείται η μελέτη πλήθους υποπροβλημάτων. Σε πρώτη φάση πρέπει να επιλεγθεί κατάλληλη εκτιμήτρια βάσει της οποίας θα υλοποιηθεί η εκτίμηση, όπως επίσης και να δοθεί κατάλληλη διαδικασία αριθμητικής υλοποίησης αυτής. Επιπλέον, πρέπει να μελετηθούν οι ιδιότητες της επιλεγμένης εκτιμήτριας με σκοπό την αποτίμηση της ποιότητας της εκτίμησης. Τέλος, πρέπει να ελεγχθεί αριθμητικώς το κατά πόσο τελικά η εκτιμήτρια δίνει εκτιμήσεις οι οποίες ταυτίζονται, ή είναι αρκετά “κοντά”, στις πραγματικές παραμέτρους του συστήματος.

Στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου επιχειρείται η ανάλυση των περισσότερων από τα προαναφερθέντα υποπροβλήματα. Για το λόγο αυτό αρχικά προτείνεται μία εκτιμήτρια, η οποία συμβολίζεται ως NLR (NonLinear Regression estimator), η οποία στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση ενός τετραγωνικού κριτηρίου του σφάλματος εξόδου του μοντέλου. Σε γενικές γραμμές μπορεί να ειπωθεί ότι η εν λόγω εκτιμήτρια ανήκει στη γενικότερη κλάση των εκτιμητριών σφάλματος πρόβλεψης (Prediction Error estimator - [11, σελ. 169]). Αξίζει να σημειωθεί ότι πέραν εκτιμητριών του είδους αυτού [49, 44, 45, 50, 4, 100, 21, 22] δεν έχει αναφερθεί κάποια άλλης μορφής.

Τώρα όσον αφορά την αριθμητική εφαρμογή αυτής έχουν αναφερθεί δύο τρόποι υλοποίησης. Στα πλαίσια του πρώτου προεπιλέγονται τα κατώφλια των τελεστών του μοντέλου με αποτέλεσμα η εκτίμηση να γίνεται μέσω γραμμικής παλινδρόμησης [44, 45]. Όπως είναι κατανοητό, ο παραπάνω τρόπος επιτυγχάνει μερική εκτίμηση του μοντέλου και ως εκ τούτου προσφέρει μειωμένη ακρίβεια. Ο δεύτερος τρόπος επιχειρεί την πλήρη εκτίμηση του μοντέλου (κατώφλια και σταθερές ελατηρίων των τελεστών) και για το λόγο αυτό προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια. Όμως η διαδικασία αυτή

καταλήγει σε μη - γραμμική παλινδρόμηση, η οποία αφενός είναι δυσκολότερη στην υλοποίησή της και αφετέρου παρουσιάζει και επιμέρους προβλήματα, όπως ο εγκλωβισμός της σε τοπικά ελάχιστα (βλέπε παρακάτω). Στα πλαίσια του παρόντος κεφαλαίου προτείνεται για πρώτη φορά κατάλληλη διαδικασία μη - γραμμικής παλινδρόμησης, η οποία βασίζεται σε μη - γραμμική βελτιστοποίηση δύο σταδίων, η οποία παρουσιάζεται ικανή να εντοπίζει το ολικό (global) ελάχιστο, παρακάμπτοντας το προηγούμενο μειονέκτημα.

Επί τη βάση των παραπάνω μελετάται για πρώτη φορά η επίδραση των αρχικών καταστάσεων στην εκτίμηση των παραμέτρων. Έτσι με τον τρόπο αυτόν πιστοποιείται αριθμητικώς, αφενός ότι η έλλειψη της εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας ως προς τις αρχικές καταστάσεις, σε συνδυασμό με την αυθαίρετη επιλογή αυτών, καταλήγει σε μείωση της ακρίβειας της εκτίμησης, και αφετέρου η αποτελεσματικότητα της Συνθήκης $C0$ (βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο).

Πέρα από την πρόταση και την αριθμητική υλοποίηση της εν λόγω εκτιμήτριας, στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται για πρώτη φορά, κάποιες από τις ιδιότητες αυτής, οι οποίες θα αποτελέσουν τη βάση για την μελέτη και θεμελίωση τόσο των στατιστικών ιδιοτήτων της εκτιμήτριας (συνέπεια και ασυμπτωτική κανονικότητα), όσο και της διαδικασίας επιλογής της δομής του μοντέλου (βλέπε παρακάτω κεφάλαια).

Το παρόν κεφάλαιο δομείται ως εξής: Στην Ενότητα 4.3 περιγράφεται η εκτιμήτρια και οι βασικές της ιδιότητες, ενώ στην Ενότητα 4.4 η προτεινόμενη διαδικασία αριθμητικής υλοποίησης αυτής. Η Ενότητα 4.5 περιέχει μερικά αριθμητικά αποτελέσματα, μέσω των οποίων διερευνάται η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης εκτιμήτριας, όπως επιπλέον και η επίδραση των αρχικών καταστάσεων στην εκτίμηση. Τέλος παρατίθενται τα συμπεράσματα του τρέχοντος κεφαλαίου.

4.3 Η Εκτιμήτρια

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η προτεινόμενη εκτιμήτρια. Λόγω του γεγονότος ότι εκτελεί ταυτόχρονη εκτίμηση τόσο των άγνωστων κατωφλίων όσο και των σταθερών των ελατηρίων του κάθε τελεστή, οδηγεί σε μη - γραμμική παλινδρόμηση, η οποία υλοποιείται μέσω κατάλληλης διαδικασίας μη - γραμμικής βελτιστοποίησης (βλέπε επόμενη ενότητα). Για το λόγω αυτόν ονομάζεται NLR (NonLinear Regression) εκτιμήτρια.

Προτού δοθεί ο μαθηματικός ορισμός της εν λόγω εκτιμήτριας είναι αναγκαίο να ορισθεί πρωτίστως το πραγματικό σύστημα (το σύστημα το οποίο παράγει τα μετρούμενα σήματα). Όπως έχει αναφερθεί το σύστημα αυτό περιγράφεται πλήρως από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με

M^o τελεστές. Κατόπιν τούτου δίδεται ο ορισμός της εκτιμήτριας και η ενότητα ολοκληρώνεται με κάποιες βασικές ιδιότητες της εκτιμήτριας. Τα παραπάνω θέματα αναλύονται κατά σειρά στις τρεις ακόλουθες υποενότητες.

4.3.1 Το Πραγματικό Σύστημα

Ορισμός 4.1 (Πραγματικό Σύστημα) Το πραγματικό σύστημα περιγράφεται πλήρως από ένα μοντέλο το οποίο ανήκει στη δομή¹ του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M^o τελεστές και παρουσιάζει πραγματικό διάνυσμα παραμέτρων $\theta_{M^o}^o \triangleq [k_1^o \dots k_{M^o}^o \quad \Delta_1^o \dots \Delta_{M^o}^o]^T \in \Theta_{M^o}$. Η διεγερση του συστήματος είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι Συνθήκες C1 – C3. Στην παραγόμενη (πραγματική) απόκριση, $f(t, \theta_{M^o}^o)$, προστίθεται εισερχόμενος μετρητικός θόρυβος $\epsilon(t)$ κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$y(t, \theta_{M^o}^o) = f(t, \theta_{M^o}^o) + \epsilon(t), \quad \forall t = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

έτσι ώστε $E\{\epsilon(t)\} = 0$ και $E\{\epsilon^2(t)\} < \infty, \forall t$. Με $y(t, \theta_{M^o}^o)$ συμβολίζεται η μετρούμενη απόκριση, με $E\{\cdot\}$ η στατιστική προσδοκία (statistical expectation) και με N ο συνολικός αριθμός των δεδομένων (αριθμός παρατηρήσεων). $\square$

4.3.2 Η NLR Εκτιμήτρια

Η εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου βασίζεται στην ελαχιστοποίηση ενός τετραγωνικού κριτηρίου, έστω $Q_N(\theta_M)$, του σφάλματος εξόδου, $e(t, \theta_M)$, του μοντέλου, το οποίο ορίζεται ως²:

$$e(t, \theta_M) \triangleq y(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_M) \quad (4.2)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, το κριτήριο (ή αλλιώς συνάρτηση κόστους) ορίζεται ως εξής ($\forall \theta_M \in \Theta_M$ και $\forall M \geq 1$):

$$Q_N(\theta_M) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^N e^2(t, \theta_M) = \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^N \left(\epsilon^2(t) + 2(f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_M)) \cdot \epsilon(t) + (f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_M))^2 \right) \quad (4.3)$$

Επομένως η NLR εκτιμήτρια ορίζεται ως εξής:

$$\hat{\theta}_{M,N} \triangleq \arg \min_{\theta_M} Q_N(\theta_M) \quad (4.4)$$

¹Υπενθύμιση: Όσα μοντέλα ανήκουν στην δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M , έχουν ίδιο αριθμό τελεστών, ικανοποιούν τις Υποθέσεις 3.1 – 3.3 και διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση η οποία αναγκάζει όλα τα μοντέλα να υπακούουν στη Συνθήκη C0 (βλέπε 3.7 – Κεφάλαιο 3).

²Αν και στα πλαίσια του προβλήματος της εκτίμησης αναζητείται το βέλτιστο μοντέλο ανάμεσα από όλα τα μοντέλα με δομή ίδια με αυτή του πραγματικού συστήματος, η εκτιμήτρια ορίζεται και σε πρώτη φάση μελετώνται οι βασικές της ιδιότητες γενικά (το M δεν είναι απαραίτητα ίσο με M^o). Ο λόγος για τον οποίο γίνεται αυτό είναι ότι στο Κεφάλαιο 6 ο αριθμός των τελεστών θεωρείται άγνωστος και προτείνεται κατάλληλη διαδικασία για την ορθή επιλογή αυτού.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους (σετ εκτίμησης - estimation set), ξεκινάνε από τη χρονική στιγμή t_{cr} (Συνθήκη C'0). Αυτή η επιλογή γίνεται προκειμένου να εξαιρεθεί από την εκτίμηση η (απροσδιόριστη) πληροφορία που αφορά τη μεταβατική απόκριση του κάθε τελεστή (εφόσον η αρχικές καταστάσεις δεν είναι αναγνωρίσιμες), η οποία αναμένεται να μειώσει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων (βλέπε Υποενότητα 4.5.1).

4.3.3 Ιδιότητες Εκτιμήτριας

Όπως είναι φανερό από τα παραπάνω, η συνάρτηση κόστους $Q_N(\theta_M)$ [Εξ. (4.3)] είναι συνάρτηση του διανύσματος των παραμέτρων θ_M . Επιπλέον, εφόσον το διάνυσμα των παραμέτρων έχει διαστάσεις $2M \times 1$, τότε η συνάρτηση κόστους είναι, εμμέσως, συνάρτηση και του αριθμού των τελεστών M , δηλαδή με άλλα λόγια της δομής του μοντέλου. Επιπροσθέτως, η $Q_N(\theta_M)$ είναι στοχαστική ποσότητα, με μέση τιμή, $\forall \theta_M \in \Theta_M$, $\forall N$ και $\forall M \geq 1$, να ορίζεται ως εξής:

$$EQ_N(\theta_M) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^N \left(E\epsilon^2(t) + 2 \cdot (f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_M)) \cdot E\epsilon(t) + (f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_M))^2 \right) \quad (4.5)$$

Πρωταρχικό ερώτημα σχετικά με τη $Q_N(\theta_M)$ είναι το κατά πόσο υπάρχει ολικό ελάχιστο (μιας και η εκτίμηση βασίζεται στην ελαχιστοποίηση αυτής), ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων θ_M , και ποιες είναι οι συνθήκες για την επίτευξη αυτού. Εντούτοις, λόγω της στοχαστικότητας της $Q_N(\theta_M)$, η εν λόγω ανάλυση είναι εξαιρετικά δύσκολη, ή ακόμα και αδύνατη. Για το λόγο αυτό υιοθετείται μια έμμεση τακτική, κατά την οποία αρχικά εξαγονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την επίτευξη του ολικού ελαχίστου της $EQ_N(\theta_M)$ και στη συνέχεια δείχνεται ότι η $Q_N(\theta_M)$ συγκλίνει ομοιόμορφα $\forall \theta_M \in \Theta_M$ για $N \rightarrow \infty$ στη $EQ_N(\theta_M)$. Το πρώτο κομμάτι της ανάλυσης παρουσιάζεται στις ακόλουθες Προτάσεις, ενώ το δεύτερο, για το οποίο απαιτούνται επιπλέον υποθέσεις και παραδοχές, αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 4.1 (Ολικό Ελάχιστο) Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1. Επιπλέον γίνεται η παραδοχή ότι υπάρχει ένα δεύτερο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με διάνυσμα παραμέτρων $\theta_M \in \Theta_M$ (σημειώνεται ότι M δεν είναι απαραίτητως ίσο με M^o), το οποίο υπόκειται στην Υπόθεση 3.1 (ο Θ_M είναι και αυτός συμπαγής χώρος) και διεγείρεται από την ίδια με το πραγματικό σύστημα εφαρμοζόμενη μετατόπιση. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- Υπάρχει τουλάχιστον ένα ολικό ελάχιστο της $EQ_N(\theta_M)$, ως προς θ_M , το οποίο είναι ίσο με:

$$\min_{\theta_M} EQ_N(\theta_M) = \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^N E\epsilon^2(t)$$

- Το(τα) ολικό(α) ελάχιστο(α) της $EQ_N(\theta_M)$, ως προς θ_M , επιτυγχάνεται (επιτυγχάνονται) αν και μόνο αν $f(t, \theta_M) = f(t, \theta_{M^o}^o) \forall t \geq t_{cr}$.

□

Απόδειξη: Αρχικά αποδεικνύεται η αναγκαιότητα. Εφόσον $E\epsilon(t) < \infty$ και $E\epsilon^2(t) < \infty$ (Ορισμός 4.1) και $f(t, \theta_M) = f(t, \theta_{M^o}^o) \forall t$, τότε το ολικό ελάχιστο της $EQ_N(\theta_M)$, ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων, επιτυγχάνεται και ισούται [λόγω της Εξ. (4.5)] με:

$$\min_{\theta_M} EQ_N(\theta_M) = \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^N E\epsilon^2(t) < \infty \quad (4.6)$$

Τώρα ας ληφθεί υπόψη η επάρκεια. Λόγω του Ορισμού 4.1, $E\epsilon(t) = 0$ και $E\epsilon^2(t) < \infty$, όπως επίσης $|f(t, \theta_{M^o}^o)| < \infty \forall t$ (συμπαγής χώρος παραμέτρων - βλέπε Ιδιότητα 3.7). Επιπλέον, λόγω του ότι το δεύτερο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell υπόκεινται στην Υπόθεση 3.1, ισχύει ότι $|f(t, \theta_M)| < \infty \forall t$. Λόγω όλων των παραπάνω, η προσδοκώμενη συνάρτηση κόστους γίνεται [Εξ. (4.5)]:

$$EQ_N(\theta_M) = \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^N E\epsilon^2(t) + \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^N (f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_M))^2 < \infty \quad (4.7)$$

Ας ληφθεί τώρα υπόψη το ολικό ελάχιστο της Εξ. (4.7). Αυτό δίνει ότι $f(t, \theta_M) = f(t, \theta_{M^o}^o) \forall t \geq t_{cr}$.

□

Όπως είναι φανερό από την προηγούμενη πρόταση, το ολικό ελάχιστο της $E\{Q_N(\theta_M)\}$, ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων, δύναται να επιτευχθεί και από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με αριθμό τελεστών διαφορετικό από το πραγματικό. Το προφανές επόμενο ερώτημα, άμεσα συνυφασμένο με την επιτυχία της εκτίμησης, είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες βάσει των οποίων το ολικό αυτό ελάχιστο να επιτυγχάνεται, κατά τρόπο μοναδικό, από το πραγματικό διάνυσμα των παραμέτρων του μοντέλου $\theta_{M^o}^o$, και κατά συνέπεια από το ένα μοντέλο με τη σωστή δομή (σωστό αριθμό τελεστών). Το εν λόγω ζήτημα πραγματεύεται στις ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση 4.2 (Μοναδικότητα) Έστω το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1. Τότε από το σύνολο των μοντέλων που ανήκουν στην ίδια δομή με το πραγματικό σύστημα, μόνο το πραγματικό σύστημα δίνει το ολικό ελάχιστο της προσδοκώμενης συνάρτησης κόστους $E\{Q_N(\theta_{M^o}^o)\}$. Με

άλλα λόγια, από όλα τα πιθανά διανύσματα παραμέτρων $\theta_{M^o} \in \Theta_{M^o}$, μόνο το διάνυσμα των πραγματικών παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$ αναγκάζει την $E\{Q_N(\theta_{M^o})\}$ να λάβει την ολικά ελάχιστη τιμή της. $\square$

Απόδειξη: Αρχικά αναζητείται εκείνο το μοντέλο μέσα από τη δομή των μοντέλων με $M = M^o$ τελεστές, το οποίο ελαχιστοποιεί την $E\{Q_N(\theta_{M^o})\}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1, το μοντέλο αυτό είναι εκείνο το οποίο επαληθεύει την εξίσωση:

$$f(t, \theta_{M^o}^o) = f(t, \theta_{M^o}), \forall t \geq t_{cr}$$

Εφόσον όμως το πραγματικό σύστημα υπόκειται στις Υποθέσεις 3.1 – 3.3 και στις συνθήκες $C0 - C3$ τότε η παραπάνω εξίσωση επιτυγχάνεται μόνο αν $\theta_{M^o}^o \equiv \theta_{M^o}$ (Ιδιότητα 3.11). $\square$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω Πρόταση είναι στην ουσία απόρροια της αναγνωρισιμότητας του μοντέλου (περισσότερη συζήτηση στο θέμα αυτό, καθώς και μία εκτενής αναφορά στην αναγκαιότητα και επάρκεια των υποθέσεων και συνθηκών που έχουν τεθεί, δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο).

Όπως έχει γίνει ήδη αντιληπτό, εκτός από το διάνυσμα των παραμέτρων του πραγματικού συστήματος, ο πραγματικός αριθμός των τελεστών είναι και αυτός άγνωστος. Αν και δε θα δοθεί περισσότερο έμφαση στο πως θα εκτιμηθεί - επιλεγθεί ο αριθμός αυτός, μίας και το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο καθαρά στην εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, αξίζει (για λόγους οι οποίοι θα γίνουν ξεκάθαροι στο Κεφάλαιο 6) να αποδειχθούν οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες το ολικό ελάχιστο της $E\{Q_N(\theta_M)\}$ δίνεται μόνο από το διάνυσμα των πραγματικών παραμέτρων, και ως εκ τούτου από ένα μοντέλο με τη σωστή δομή. Η εν λόγω ανάλυση παρουσιάζεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3 Έστω το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1. Έστω ένα δεύτερο μοντέλο με M τελεστές (χωρίς να ισχύει $M = M^o$ απαραίτητως), το οποίο διεγείρεται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση, έτσι ώστε να ισχύει και για αυτό η Συνθήκη $C0$ τη χρονική στιγμή t_{cr} . Επιπλέον θεωρείται ότι το διάνυσμα των παραμέτρων του, $\theta_M \in \Theta$ (Θ_M συμπαγής χώρος), ελαχιστοποιεί την $E\{Q_N(\theta_M)\}$. Υπό το καθεστώς των παραπάνω ισχύει $\theta_{M^o}^o \equiv \theta_M$ (και ως εκ τούτου $M \equiv M^o$) αν και μόνο αν το δεύτερο μοντέλο υπόκειται στις Υποθέσεις 3.2 και 3.3 και στις Συνθήκες $C1 - C3$. $\square$

Απόδειξη: Το γεγονός ότι αν $\theta_{M^o}^o \equiv \theta_M$ τότε ισχύουν οι Υποθέσεις 3.2 και 3.3 και οι Συνθήκες $C1 - C3$ είναι πασιφανές.

Τώρα ας θεωρηθεί ότι για το δεύτερο μοντέλο ισχύουν οι Υποθέσεις 3.2 και 3.3 και οι Συνθήκες $C1 - C3$. Εφόσον οι παράμετροι και αυτού του μοντέλου ελαχιστοποιούν την $E\{Q_N(\theta_M)\}$, τότε

σύμφωνα με την Πρόταση 4.1 αυτό επιτυγχάνεται αν και μόνο αν:

$$f(t, \theta_{M^o}^o) = f(t, \theta_M), \forall t \geq t_{cr} \quad (4.8)$$

Εφόσον όμως ισχύουν για το μοντέλο αυτό οι Υποθέσεις 3.2 και 3.3 και οι Συνθήκες $C0 - C3$, τότε σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.12 (Κεφάλαιο 3), η μόνη περίπτωση να ισχύει η Εξ. (4.8), είναι το εν λόγω μοντέλο να ανήκει στην ίδια δομή με το πραγματικό σύστημα, δηλαδή για $M \equiv M^o$. Εφόσον όμως το πραγματικό σύστημα υπακούει στις Συνθήκες $C1 - C3$, τότε λόγω μοναδικότητας της απόκρισης του (Ιδιότητα 3.11 - Κεφάλαιο 3), η Εξ. (4.8) μπορεί να συμβαίνει μόνο για $\theta_{M^o}^o \equiv \theta_M$. $\square$

Η Πρόταση 4.3 παρέχει μία ξεκάθαρη σύνδεση μεταξύ του ολικού ελαχίστου της $EQ_N(\theta_M)$ και του πραγματικού διανύσματος των παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$. Με άλλα λόγια δηλώνει ότι δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί το ολικό ελάχιστο της $E\{Q_N(\theta_M)\}$ από ένα μοντέλο με διαφορετικό αριθμό τελεστών από το πραγματικό σύστημα και ταυτόχρονα να ισχύουν για αυτό οι Υποθέσεις 3.2 και 3.3 και οι Συνθήκες $C0 - C3$ (η χρησιμότητα του αποτελέσματος αυτού θα καταστεί σαφής στο Κεφάλαιο 6).

Αφού μελετήθηκαν οι βασικές ιδιότητες και εξετάστηκε κάτω από ποιές συνθήκες επιτυγχάνεται ο ελάχιστο της $E\{Q_N(\theta_M)\}$, το εύλογο επόμενο βήμα είναι η αριθμητική ανάπτυξη και εφαρμογή της εκτιμήτριας. Για το λόγο αυτό προτείνεται στην επόμενη ενότητα κατάλληλη αριθμητική διαδικασία μη - γραμμικής βελτιστοποίησης για την υλοποίηση της εκτίμησης.

4.4 Αριθμητική Υλοποίηση της Εκτιμήτριας

Η εν λόγω εκτιμήτρια (NLR) σκοπεύει στην πλήρη εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, δηλαδή στην εκτίμηση τόσο των σταθερών των ελατηρίων, όσο και των κατωφλίων. Υπενθυμίζεται ότι στα πλαίσια της εκτιμήσεως του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell θεωρείται ότι ο αριθμός των τελεστών του πραγματικού συστήματος, M^o , είναι γνωστός

Όπως είναι φανερό [Εξ. (3.5) - Κεφάλαιο 3], το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell είναι μη - γραμμικό ως προς τα κατώφλια των τελεστών. Επομένως, η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους της Εξ. (4.3) οδηγεί σε εκτιμήτρια μη γραμμικής παλινδρόμησης. Εντούτοις, είναι απαραίτητο να παρατηρηθεί ότι το μοντέλο είναι μη γραμμικό μόνο ως προς το διάνυσμα των κατωφλίων $\mathbf{d}_{M^o}$, ενώ η γραμμικότητα ως προς το διάνυσμα των σταθερών των ελατηρίων, $\mathbf{k}_{M^o}$, διατηρείται. Για το λόγο αυτόν, η εκτιμήτρια μπορεί να υλοποιηθεί διαδοχικά ως μη γραμμική και γραμμική παλινδρόμηση, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\hat{\theta}_{M^o} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_{M^o}^T & \hat{\mathbf{d}}_{M^o}^T \end{bmatrix}^T = \arg \min_{\mathbf{k}_{M^o}, \mathbf{d}_{M^o}} Q_N(\theta_{M^o}) = \arg \min_{\mathbf{d}_{M^o}} \left\{ \min_{\mathbf{k}_{M^o}} Q_N(\mathbf{k}_{M^o} / \mathbf{d}_{M^o}) \right\} \quad (4.9)$$

Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ισοϋψών γραμμών (Contour plot) της συνάρτησης κόστους $\mathcal{J}$ συναρτήσει των σταθερών ελαστικότητας και των κατωφλίων [μοντέλο με έναν τελεστή].

Η μη γραμμική παλινδρόμηση υλοποιείται αριθμητικά μέσω κατάλληλης υβριδικής διαδικασίας βελτιστοποίησης δύο σταδίων. Στο πρώτο στάδιο, το οποίο αναφέρεται ως και προστάδιο βελτιστοποίησης (pre - optimization phase) χρησιμοποιείται ένας γενετικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης [12], με σκοπό τη διερεύνηση ευρέων περιοχών του χώρου των παραμέτρων και τον εντοπισμό των πιθανών περιοχών στα οποία υπάρχουν τα μερικά ή ολικά ελάχιστα της συνάρτησης του κόστους. Στο δεύτερο στάδιο, το οποίο ονομάζεται και τελικό στάδιο βελτιστοποίησης (fine - optimization), χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος Nelder - Mead Downhill Simplex [109] με σκοπό τον ακριβή εντοπισμό των μερικών ή ολικών ελαχίστων στις περιοχές των παραμέτρων που επιλέχθηκαν από το προηγούμενο στάδιο.

Η προτεινόμενη διαδικασία βελτιστοποίησης δύο σταδίων εντοπίζει αποτελεσματικά (όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια) το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους, παρακάμπτοντας το πρόβλημα εγκλωβισμού σε τοπικά ελάχιστα, φαινόμενο το οποίο είναι αρκετά έντονο στο παρόν πρόβλημα (για παράδειγμα στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζεται η συνάρτηση κόστους για ένα μοντέλο με $M = 1$). Επιπροσθέτως, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης Nelder - Mead Downhill Simplex χρησιμοποιεί υπολογισμούς μόνο της συνάρτησης κόστους και όχι των παραγώγων της, οι οποίες δεν ορίζονται παντού αφού η συνάρτηση κόστους δεν είναι ομαλή (smooth) σε όλο το πεδίο των παραμέτρων.

Σημείωση: Στην Ενότητα 4.5, παρουσιάζονται και αποτελέσματα εκτίμησης και των άγνωστων αρχικών καταστάσεων, προκειμένου να δειχθούν τα προβλήματα που εμφανίζονται λόγω της μη εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητας του διανύσματος των αρχικών καταστάσεων. Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα των αρχικών καταστάσεων, $\delta_{M^0}(1)$, εκτιμάται μαζί με τα διανύσματα των σταθερών των ελατηρίων, k_{M^0} , και κατωφλίων, d_{M^0} . Επομένως, η προτεινόμενη διαδικασία μη - γραμμικής παλινδρόμησης μεταβάλλεται ελαφρώς, και οι άγνωστοι παράμετροι από $2M$ γίνονται $3M$. Λόγω του ότι το μοντέλο είναι μη γραμμικό και ως προς το διάνυσμα των αρχικών καταστάσεων, η εκτίμηση

αυτού υλοποιείται κατά τη διαδικασία της μη - γραμμικής παλινδρόμησης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι παραμορφώσεις των ελατηρίων είναι φραγμένες από τα κατώφλια ($|\delta_i(1)| \leq \Delta_i, \forall i = 1, \dots, M^o$), ένας τρόπος να ενσωματωθεί το παραπάνω στη NLR εκτιμήτρια (ή αλλιώς μέθοδο) είναι να τεθεί $\delta_i(1) = \Delta_i \cdot \sin(\phi_i)$, με $\phi_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\forall i = 1, \dots, M^o$, και η μη - γραμμική παλινδρόμηση να υλοποιηθεί ως προς τα κατώφλια, Δ_i , και τα ϕ_i . Η επιλογή του διαστήματος από το οποίο λαμβάνουν τιμές τα ϕ_i , στηρίζεται στο γεγονός ότι $\forall \phi_i, \phi_i^* \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \phi_i \neq \phi_i^* \iff \sin(\phi_i) \neq \sin(\phi_i^*)$.

4.5 Αποτελέσματα

Προτού δοθούν περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα αποτελέσματα, παρέχονται αναλυτικές λεπτομέρειες σχετικά τους Γενετικούς αλγόριθμους, οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των παραμέτρων στα πλαίσια της NLR εκτιμήτριας. Κάθε κατώφλι κωδικοποιείται με τη βοήθεια του αλγόριθμου του Gray [110] στο εύρος $[LB, UB]$, χρησιμοποιώντας ανάλυση 20 bits. Το κάτω όριο LB θέτεται ίσο με το LTL, ενώ το άνω επιλέγεται αυθαίρετα. Ο χρησιμοποιούμενος γενετικός αλγόριθμος ενσωματώνει: (i) ένα μη - γραμμικό τελεστή κατάταξης (ranking) με συντελεστή (selective pressure) ίσο με 1,3, (ii) έναν στοχαστικό καθολικό τελεστή δειγματοληψίας (stochastic universal sampling), ο οποίος διαθέτει συντελεστή χάσματος γενεών (generation gap) ίσο με 0,97, (iii) έναν τελεστή διασταύρωσης δύο σημείων (two-point crossover operator) με πιθανότητα διασταύρωσης ίση με 0.80, (iv) ένα τελεστή μετάλλαξης (mutation) με πιθανότητα μετάλλαξης ίση με 0.01 και (v) έναν τελεστή επανατοποθέτησης βάσει της απόδοσης (fitness-based reinsertion operator). Ο δειγματικός πληθυσμός και ο αριθμός των γενεών επιλέχθηκαν ανάλογα με την πολυπλοκότητα του υπό εκτίμηση μοντέλου, δίχως να ξεπερνάει και στις δύο περιπτώσεις το 200. Στην περίπτωση εκτίμησης και των αρχικών συνθηκών, κάθε ϕ_i κωδικοποιείται όπως και πριν (20-bits Gray - coded) στο εύρος $[-\pi/2, \pi/2]$.

4.5.1 Μελέτη της Επίδρασης των Αρχικών Καταστάσεων στην Εκτίμηση

Τα αποτελέσματα βασίζονται σε δεδομένα μετατόπισης - απόκρισης προερχόμενα από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με $M^o = 3$ τελεστές, του οποίου οι παράμετροι (σταθερές ελατηρίων και κατώφλια) παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1. Σε όλες τις προσομοιώσεις (υλοποιήσεις) η εφαρμοζόμενη μετατόπιση είναι ένα σήμα λευκού θορύβου (white noise) μηδενικής μέσης τιμής και μήκους $N = 1.000$ σημείων. Οι αποκρίσεις είναι δίχως προσθήκη θορύβου.

Εδώ εξετάζεται το κατά πόσο η NLR μέθοδος (εκτιμήτρια) είναι σε θέση να εκτιμήσει με ακρίβεια τις πραγματικές παραμέτρους του μοντέλου. Υλοποιούνται 30 εκτιμήσεις για κάθε μέθοδο χρησι-

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα Εκτίμησης για την NLR μέθοδο (30 Monte Carlo προσομοιώσεις, σημειακές εκτιμήσεις $\pm$ δύο τυπικές αποκλίσεις).

	Πραγματικές Παράμετροι	Αποτελέσματα Κατηγορίας I	Αποτελέσματα Κατηγορίας II	Αποτελέσματα Κατηγορίας III
k_1	4.0	$4.0 \pm 7.2 \times 10^{-3}$	$4.0 \pm 1.9 \times 10^{-3}$	$4.0 \pm 1.3 \times 10^{-12}$
k_2	2.0	$2.0 \pm 7.3 \times 10^{-3}$	$2.0 \pm 1.0 \times 10^{-2}$	$2.0 \pm 2.4 \times 10^{-12}$
k_3	1.0	$1.0 \pm 2.1 \times 10^{-3}$	$1.0 \pm 9.4 \times 10^{-3}$	$1.0 \pm 2.0 \times 10^{-12}$
Δ_1	0.8	$0.8 \pm 1.1 \times 10^{-3}$	$0.8 \pm 1.4 \times 10^{-4}$	$0.8 \pm 2.3 \times 10^{-13}$
Δ_2	1.5	$1.5 \pm 9.0 \times 10^{-4}$	$1.5 \pm 9.8 \times 10^{-4}$	$1.5 \pm 5.1 \times 10^{-13}$
Δ_3	1.9	$1.9 \pm 3.2 \times 10^{-4}$	$1.9 \pm 1.1 \times 10^{-3}$	$1.9 \pm 6.6 \times 10^{-13}$
$\delta_1(1)$	-0.3	—	$(0.7 \pm 5.9) \times 10^{-1}$	—
$\delta_2(1)$	0.4	—	$(-3.9 \pm 9.0) \times 10^{-1}$	—
$\delta_3(1)$	0.0	—	$9.2 \times 10^{-2} \pm 1.3$	—
NOE (%)	—	$(3.4 \pm 8.5) \times 10^{-3}$	$(0.3 \pm 1.1) \times 10^{-3}$	$(9.3 \pm 1.6) \times 10^{-25}$

μποιώντας την σωστή δομή ($M^o = 3$). Παρακάτω παρουσιάζονται τρεις κατηγορίες αποτελεσμάτων:

- (i) Υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες (Κατηγορία I αποτελεσμάτων).
- (ii) Εκτιμώντας τις αρχικές συνθήκες (Κατηγορία II αποτελεσμάτων).
- (iii) Εξαλείφοντας την επίδραση των αρχικών συνθηκών μέσω της συνθήκης $C'0$ (κατηγορία III αποτελεσμάτων).

Οι εκτιμήσεις συγκρίνονται με τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων στον πίνακα 4.1, ενώ επιπλέον παρουσιάζεται και το αντίστοιχο κανονικοποιημένο σφάλμα εξόδου, NOE, όπως αυτό προκύπτει σε κάθε περίπτωση. Οι εκτιμήσεις τόσο των σταθερών των ελατηρίων, όσο και των κατωφλιών, όπως αυτές προκύπτουν σε όλες τις κατηγορίες αποτελεσμάτων, είναι σε εξαιρετική συμφωνία με τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων. Ωστόσο, οι εκτιμήσεις των αρχικών συνθηκών είναι ολοκληρωτικά ανακριβείς (κατηγορία II), επιβεβαιώνοντας ότι είναι μη αναγνωρίσιμες (Πρόταση 3.2).

Οι τυπικές αποκλίσεις των εκτιμηθέντων σταθερών των ελατηρίων και των κατωφλιών, όπως αυτές προκύπτουν στις κατηγορίες I και II, είναι σαφώς μεγαλύτερες, συγκρινόμενες με αυτές της κατηγορίας III (οι οποίες είναι πρακτικά μηδέν λόγω της απουσίας θορύβου). Η αιτία της διαφοράς αυτής για την κατηγορία I είναι ότι οι αρχικές συνθήκες επιλέγονται λανθασμένα, ενώ για την κατηγορία II ότι η έλλειψη αναγνωρισιμότητας των αρχικών συνθηκών οδηγεί στον εγκλωβισμό της συνάρτησης κόστους σε τοπικά ελάχιστα.

Το συνολικά καλύτερο κανονικοποιημένο σφάλμα εξόδου (NOE), με τεράστια διαφορά από τα υπόλοιπα, καταγράφεται από το μοντέλο της κατηγορίας III. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει τη

σπουδαιότητα της προτεινόμενης διαδικασίας απαλοιφής της επίδρασης των αρχικών συνθηκών (Συνθήκη $C0$) στην ακρίβεια των εκτιμήσεων.

4.6 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο πραγματοποιήθηκε η εισαγωγή στο γενικότερο πρόβλημα της εκτίμησης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Για το λόγο αυτό δόθηκε η πλήρης περιγραφή του πραγματικού συστήματος και έγινε η εισαγωγή της εκτιμήτριας NLR. Κατόπιν τούτου παρουσιάστηκαν μερικές βασικές ιδιότητες της εκτιμήτριας, οι οποίες αποτελούν τη βάση για την περαιτέρω ανάλυση στα επόμενα κεφάλαια. Επίσης προτάθηκε κατάλληλη διαδικασία δύο σταδίων για την αριθμητική υλοποίηση της εκτιμήτριας, έτσι ώστε να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του εγκλωβισμού της συνάρτησης κόστους, κατά τη μη - γραμμική βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) αυτής, σε τοπικά ελάχιστα. Τέλος παρουσιάστηκαν αποτελέσματα Monte Carlo αναλύσεως επί τη βάση σημάτων μετατόπισης - απόκρισης (δίχως προσθήκη θορύβου) προερχόμενα από ένα μοντέλο ολίσθησης με $M^o = 3$. Η πραγματοποιηθείσα ανάλυση είχε ως σκοπό, αφενός τη μελέτη της αποτελεσματικότητας της προτεινόμενης διαδικασίας εκτίμησης, και αφετέρου την επίδειξη των προβλημάτων που δύναται να εμφανιστούν λόγω λανθασμένης επιλογής του διανύσματος των αρχικών καταστάσεων, $\delta_{M^o}(1)$.

Τα βασικά συμπεράσματα του παρόντος κεφαλαίου συνοψίζονται ως εξής:

- Η συνάρτηση κόστους (η καλύτερα η προσδοκώμενη τιμή αυτής), που ελαχιστοποιείται στα πλαίσια της εκτιμήσεως, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων, το οποίο όμως δύναται να επιτευχθεί και από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με λανθασμένο (διαφορετικό του πραγματικού) αριθμό τελεστών.
- Το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης κόστους επιτυγχάνεται από ένα μοντέλο με τη σωστή δομή (με αριθμό τελεστών ίσο με αυτό του πραγματικού συστήματος), αν και μόνο αν το μοντέλο αυτό υπακούει στις Συνθήκες $C1 - C3$ και τις Υποθέσεις 3.2 - 3.3.
- Η προτεινόμενη διαδικασία μη - γραμμικής βελτιστοποίησης δύο σταδίων φάνηκε ικανή να αντιμετωπίζει επιτυχώς το πρόβλημα εγκλωβισμού της συνάρτησης του κόστους σε τοπικά ελάχιστα. Το γεγονός αυτός επιβεβαιώθηκε μέσω κατάλληλης Monte Carlo ανάλυσης.
- Παρουσιάστηκε η επίδραση των αρχικών καταστάσεων πάνω στην εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, και επιβεβαιώθηκε αριθμητικώς η αποτελεσματικότητα της Συνθήκης $C0$ στην επιλογή αυτών.

Κεφάλαιο 5

Εκτίμηση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Συνέπεια και Ασυμπτωτική Κανονικότητα της NLR Εκτιμήτριας

Το παρόν κεφάλαιο έχει ως σκοπό να ολοκληρώσει τη μελέτη, η οποία ξεκίνησε στο προηγούμενο κεφάλαιο, της εκτιμήσεως του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, αναλύοντας τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η διαδικασία της εκτίμησης μπορεί να στεφθεί με επιτυχία. Για το λόγο αυτόν εξετάζονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες οι πραγματικές παράμετροι του μοντέλου μπορούν να αναχτηθούν επί τη βάση πραγματικών πειραματικών μετρήσεων. Κατόπιν των παραπάνω, αναλύεται για πρώτη φορά η συνέπεια της NLR εκτιμήτριας. Τα θεωρητικά αποτελέσματα της εν λόγω ανάλυσης δείχνουν ότι οι εκτιμήσεις συγκλίνουν κατά πιθανότητα στις πραγματικές παραμέτρους κάτω από απλές υποθέσεις σχετικά με τη δομή του μοντέλου, απλές συνθήκες διέγερσης και σχετικά γενικές υποθέσεις σχετικά με τον προστιθέμενο μετρητικό θόρυβο. Στη συνέχεια εξετάζεται για πρώτη φορά η στατιστική κατανομή των εκτιμήσεων και αποδεικνύεται ότι ακολουθούν ασυμπτωτικά κανονική κατανομή, ενώ δίνεται η μαθηματική έκφραση του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασποράς των εκτιμήσεων. Κατόπιν τούτου και προκειμένου να γίνει εμφανής η πρακτικότητα των αμέσως παραπάνω θεωρητικών αποτελεσμάτων, προτείνεται κατάλληλη εκτιμήτρια για τον πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασποράς και ελέγχεται η συνέπεια αυτού. Όλα τα παραπάνω θεωρητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνονται αριθμητικώς, μέσω κατάλληλων Monte Carlo προσομοιώσεων.

5.1 Σύμβολα και Συντομογραφίες

5.1.1 Ακρωνύμια

NLR	: Εκτιμήτρια Μη - Γραμμικής Παλινδρόμησης (NonLinear Regression)
sup	: Κατώτερο άνω φράγμα - supreme or least upper bound
inf	: Ανώτερο κάτω φράγμα - infimum or greatest lower bound
$\liminf_{N \rightarrow \infty}$	: Όριο ανώτερου κάτω φράγματος
$plim$	: Τελεστής ορίου πιθανότητας - Probability Limit
$w.p.1$	: Με πιθανότητα 1
$i.p$	: Κατά πιθανότητα
N/S	: Λόγος θορύβου προς σήμα - Noise - to - Signal
AsN	: Ασυμπτωτική κανονική κατανομή

5.1.2 Σύμβολα

$Pr\{\cdot\}$	: Πιθανότητα
$\ \cdot\ $	: Ευκλείδεια νόρμα
$O(x)$	: Συνάρτηση που φράσσεται ασυμπτωτικά από το x
$N \rightarrow \infty$	: N (αριθμός δεδομένων) τείνει στο άπειρο
$o(x)$	: Συνάρτηση που τείνει στο μηδέν γρηγορότερα από το x
M^o	: Αριθμός τελεστών του πραγματικού συστήματος
$k_{M^o}^o$	: Διάνυσμα σταθερών ελατηρίων του πραγματικού συστήματος
$d_{M^o}^o$	: Διάνυσμα κατωφλίων του πραγματικού συστήματος
$\theta_{M^o}^o$	: Διάνυσμα παραμέτρων του πραγματικού συστήματος
$\hat{\theta}_{M,N}$	: Εκτιμήτρια (εκτίμηση) του διανύσματος των παραμέτρων του μοντέλου
$\bar{\theta}_M$	: Ελαχιστοποιητής της $EQ_N(\theta_M)$
$f(t, \theta_{M^o}^o)$	: Απόκριση του πραγματικού συστήματος
$y(t, \theta_{M^o}^o)$	: Μετρούμενη απόκριση του πραγματικού συστήματος
$\epsilon(t)$	: Επισερχόμενος θόρυβος στη μετρούμενη απόκριση
$e(t, \theta_M)$	: Σφάλμα εξόδου ενός τυχαίου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές
N	: Αριθμός δεδομένων
$Q_N(\theta_M)$	: Συνάρτηση κόστους λόγω ενός τυχαίου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές
$E\{\cdot\}$	: Στατιστική Προσδοκία (Statistical expectation)

5.2 Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο αφιερώνεται στην ολοκληρωμένη αντιμετώπιση του γενικού προβλήματος της εκτίμησης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Το εν λόγω πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί με λεπτομέρεια ως εξής:

Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται πλήρως από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, με M^o τελεστές και διάνυσμα παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$. Επιπλέον το πραγματικό σύστημα διεγείρεται από μία

εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ και δίνει μία απόκριση $f(t, \theta_{M^0}^o)$. Έστω ότι στο μετρούμενο σήμα της μετατόπισης, το οποίο συμβολίζεται ως $y(t, \theta_{M^0}^o)$, εισέρχεται μετρητικός στοχαστικός (μη μετρήσιμος) θόρυβος $\epsilon(t)$. Επί τη βάση των μετρούμενων σημάτων $x(t)$ και $y(t, \theta_{M^0}^o)$, να εκτιμηθεί ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M^o τελεστές, το οποίο να περιγράφει όσο το δυνατόν καλύτερα το πραγματικό σύστημα, δίνοντας εκτιμώμενο διάνυσμα παραμέτρων, έστω $\hat{\theta}_{M^o, N}$, το οποίο βρίσκεται όσο το δυνατόν πιο κοντά στο αντίστοιχο πραγματικό.

Όπως είναι κατανοητό, το πρόβλημα της εκτίμησης είναι σύνθετο και πλήθος θεμάτων χρειάζονται επιπλέον ανάλυση και μελέτη. Μερικά από αυτά αντιμετωπίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (επιλογή εκτιμήτριας, βασικές ιδιότητες και αριθμητική υλοποίηση αυτής), το οποίο αποτελούσε και το εισαγωγικό κεφάλαιο στο πρόβλημα της εκτίμησης. Στο τρέχον κεφάλαιο η ανάλυση προχωράει βαθύτερα και στοχεύει κυρίως στην ποιοτική αξιολόγηση της προτεινόμενης διαδικασίας εκτιμήσεως. Τα βασικά ερωτήματα τα οποία θέτονται είναι τα ακόλουθα:

- Είναι δυνατή η ανάκτηση των πραγματικών παραμέτρων του συστήματος, μέσω της εκτίμησης, επί τη βάση σημάτων από κατάλληλα σχεδιασμένη πειραματική διαδικασία (δηλαδή από ένα πραγματικό πείραμα); Αν ναι, ποιες είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες και την επίτευξη του αποτελέσματος αυτού (επιτυχής εκτίμηση);
- Λόγω του ότι η μετρούμενη απόκριση περιέχει ποσοστό (στοχαστικού) θορύβου, οι εκτιμήσεις είναι εκ των πραγμάτων ποσότητες στοχαστικές. Το ερώτημα εδώ είναι κατά πόσο οι εκτιμήσεις που λαμβάνονται είναι κοντά στις παραμέτρους του πραγματικού συστήματος. Αν ναι τότε οι εκτιμήσεις βελτιώνονται με αύξηση του αριθμού των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τους σκοπούς της εκτιμήσεως; Επιπροσθέτως, ποιες είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που εξασφαλίζουν τη ασυμπτωτική (στατιστική) σύγκλιση των εκτιμήσεων στις πραγματικές παραμέτρους;
- Πόσο ευαίσθητες στο υπεισερχόμενο πειραματικό θόρυβο είναι οι εκτιμήσεις που λαμβάνονται;
- Είναι δυνατή η ποσοτικοποίηση των σφαλμάτων, που εισέρχονται στην εκτίμηση λόγω του μετρητικού θορύβου;

Τα δύο πρώτα ερωτήματα παραπέμπουν στο βασικό ερώτημα του κατά πόσο η εκτιμήτρια που έχει επιλεγεί είναι συνεπής (consistency), δηλαδή του κατά πόσο οι εκτιμήσεις συγκλίνουν, κατά τρόπο στατιστικό, στις πραγματικές παραμέτρους με αύξηση του αριθμού των δεδομένων. Αξίζει να σημειωθεί ότι τέτοιου είδους ανάλυση δεν έχει αναφερθεί για την περίπτωση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Τα επόμενα δύο ερωτήματα παραπέμπουν στην περαιτέρω ανάλυση των ασυμπτωτικών ιδιοτήτων της εκτιμήτριας. Με άλλα λόγια και προκειμένου να δοθούν απαντήσεις στα συγκεκριμένα ερωτήματα, είναι αναγκαίο να διερευνηθεί η ασυμπτωτική κατανομή των εκτιμήσεων, όπως επίσης και να εξαχθεί η μαθηματική έκφραση του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυαστοράς αυτών. Επιπροσθέτως πρέπει να δοθεί κατάλληλη εκτιμήτρια για τον πίνακα αυτόν και φυσικά να δειχθεί η συνέπεια της εν λόγω εκτιμήτριας. Κανένα από τα παραπάνω θέμα δεν έχει διερευνηθεί.

Ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η διερεύνηση των παραπάνω θεμάτων και η θεμελίωση και εξαγωγή κατάλληλων συμπερασμάτων και μαθηματικών εκφράσεων, επί τη βάση όσο το δυνατόν πιο ξεκάθαρων και πρακτικά εφαρμοζόμενων συνθηκών και υποθέσεων. Για το λόγο αυτό διερευνώνται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες – υποθέσεις που εξασφαλίζουν τη συνέπεια της NLR εκτιμήτριας. Κατόπιν τούτου, αποδεικνύεται η ασυμπτωτική κανονικότητα των εκτιμήσεων, δίνεται η μαθηματική έκφραση του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυαστοράς των εκτιμήσεων, προτείνεται εκτιμήτρια για τον πίνακα αυτόν και αποδεικνύεται η συνέπεια της εκτιμήτριας αυτής. Όλα τα παραπάνω θεωρητικά συμπεράσματα, ενισχύονται μέσω αριθμητικών αποτελεσμάτων επί τη βάση Monte Carlo προσομοιώσεων.

Το παρόν κεφάλαιο δομείται ως εξής: Στη Ενότητα 5.3 αναλύεται το πρόβλημα της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας και δίδονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που την εξασφαλίζουν. Στην Ενότητα 5.4 αποδεικνύεται η ασυμπτωτική κανονικότητα των εκτιμήσεων, κάτω από σχετικά ήπιες υποθέσεις, δίνεται έκφραση του ασυμπτωτικού πίνακα συνδυαστοράς των εκτιμήσεων και στη συνέχεια προτείνεται εκτιμήτρια για τον πίνακα αυτόν και αποδεικνύεται η συνέπεια της εκτιμήτριας αυτής. Μια συζήτηση σχετικά με τις συνθήκες και τις υποθέσεις που τέθηκαν στα πλαίσια τις παραπάνω αναλύσεως παρουσιάζεται στην Ενότητα 5.5, ενώ τα αριθμητικά αποτελέσματα τόσο για τη συνέπεια όσο και την ασυμπτωτική κανονικότητα της εκτιμήτριας παρουσιάζονται στις Ενότητες 5.6 και 5.7, αντίστοιχα. Τέλος στην Ενότητα 5.8 συνοψίζονται τα συμπεράσματα του κεφαλαίου.

5.3 Συνέπεια της Εκτιμήτριας

Ίσως το σημαντικότερο θέμα σχετικά με την επιτυχή εκτίμηση του μοντέλου είναι το κατά πόσο το πραγματικό διάνυσμα των παραμέτρων $\theta_{M^0}^o$ μπορεί να ανακτηθεί επιτυχώς επί τη βάση των πειραματικά μετρούμενων (πραγματικών) σημάτων μετατόπισης - δύναμης (διέγερσης - απόκρισης). Αυτό οδηγεί στο βασικό ερώτημα του κατά πόσο το πραγματικό σύστημα είναι αναγνωρίσιμο κάτω από πραγματικές συνθήκες (εκ των υστέρων αναγνωρισιμότητα – a posteriori identifiability).

Εντούτοις, οι εκτιμήσεις του πραγματικού διανύσματος των παραμέτρων παρουσιάζουν αβεβαιότητες, λόγω κυρίως του εισερχόμενου στις μετρήσεις πειραματικού (στοχαστικού) θορύβου. Επομένως η απόλυτη ταύτιση των εκτιμήσεων με τις πραγματικές παραμέτρους είναι μάλλον ουτοπική προσδοκία. Παραταύτα, το να δειχθεί ότι οι εκτιμήσεις είναι “αρκετά” κοντά στις πραγματικές τιμές είναι πιο ρεαλιστικό σενάριο. Χρησιμοποιώντας πιο μαθηματικούς όρους, το να αποδειχθεί ότι οι εκτιμήσεις συγκλίνουν, κατά τρόπο στατιστικό (όπως θα αναφερθεί στη συνέχεια) στις πραγματικές παραμέτρους, όσο ο αριθμός των δεδομένων που χρησιμοποιούνται τείνει στο άπειρο (απόδειξη συνέπειας της εκτιμήτριας) επικυρώνει την επιτυχή εκτίμηση. Επομένως η συνέπεια της εκτιμήτριας είναι άμεσα συνδεδεμένη με την (εκ των υστέρων) αναγνωρισιμότητα του πραγματικού συστήματος.

Η παρούσα ενότητα αφιερώνεται στην απόδειξη της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας. Προφανώς, πριν δοθεί περαιτέρω ανάλυση στο θέμα αυτό, υπάρχει πλήθος άλλων θεμάτων που είναι αναγκαία για την επίτευξη του στόχου αυτού. Καταρχάς, το πραγματικό σύστημα πρέπει να είναι εκ των προτέρων αναγνωρίσιμο (a priori identifiability), δηλαδή το πραγματικό σύστημα θα πρέπει να περιγράφεται από ένα και μοναδικό διάνυσμα παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$, διότι σε αντίθετη περίπτωση η εκτιμήτρια δεν έχει που να συγκλίνει. Το χαρακτηριστικό αυτό, το οποίο αποτελεί εν γένει ιδιότητα της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, έχει ήδη αναλυθεί και αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 3. Επιπλέον, εφόσον η εκτίμηση βασίζεται αποκλειστικά στα μετρούμενα σήματα, θα πρέπει όλη η απαραίτητη για την εκτίμηση πληροφορία να περιέχεται σε αυτά. Αυτό είναι θέμα ορθής διεγέρσεως, έτσι ώστε να ο μοναδικός χαρακτήρας του πραγματικού συστήματος (εφόσον είναι εκ των προτέρων αναγνωρίσιμο) να αντανakλάται στις μετρήσεις. Το θέμα αυτό έχει ήδη αναπτυχθεί στο Κεφάλαιο 3.

Από τη στιγμή που έχουν εξασφαλιστεί οι παραπάνω απαραίτητες προϋποθέσεις, τότε το μόνο που χρειάζεται είναι να αποδειχθεί ότι το ολικό ελάχιστο, ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$, της συνάρτησης κόστους [Εξ. (4.3)], δίδεται, $\forall N$, από το πραγματικό διάνυσμα παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$ και μόνο από αυτό. Δηλαδή:

$$\theta_{M^o}^o = \arg \min_{\theta_{M^o}} Q_N(\theta_{M^o}), \quad \forall N \quad (5.1)$$

Με τον τρόπο αυτό το πραγματικό διάνυσμα των παραμέτρων συνδέεται απευθείας με μία προς μία σχέση με το εν λόγω ολικό ελάχιστο της συνάρτησης του κόστους. Επομένως ο εντοπισμός του ολικού ελαχίστου αυτού θα συνεπάγονταν την απόκτηση του πραγματικού διανύσματος των παραμέτρων¹. Εντούτοις μία τέτοια προσδοκία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ανέφικτη, διότι η συνάρτηση

¹Το αν τελικά μπορεί να προκύψει αριθμητικώς η απαίτηση αυτή, είναι θέμα απεγκλωβισμού της συνάρτησης κόστους από τυχόν τοπικά ελάχιστα, το οποίο με τη σειρά του είναι θέμα της τεχνικής μη - γραμμικής βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται κατά την πρακτική εφαρμογή (βλέπε Κεφάλαιο 4)

του κόστους $Q_N(\theta_{M^o})$ είναι στοχαστική ποσότητα [στην μαθηματική έκφρασή της εισέρχεται και ο μετρητικός θόρυβος – βλέπε Εξ. (4.3)], και ως εκ τούτου η απευθείας ανάλυση αυτής είναι εξαιρετικά δύσκολη (ή ακόμα και αδύνατη).

Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της αποδείξεως της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας μπορεί να ακολουθηθεί μια πλάγια τακτική, η οποία στην ουσία είναι η κλασική τακτική που ακολουθείται σε αντίστοιχες περιπτώσεις [13, σελ.24-25] και περιλαμβάνει τα ακόλουθα δύο στάδια.

Στάδιο Πρώτο: Αρχικά δείχνεται ότι για $N \rightarrow \infty$ η $Q_N(\theta_{M^o})$ συγκλίνει, ομοιόμορφα στο χώρο των παραμέτρων, τουλάχιστον κατά πιθανότητα (converges in probability²), στην αντίστοιχη προσδοκώμενη τιμή, δηλαδή [13, σελ.37]:

$$\text{plim} \left\{ \sup_{\Theta_M} |Q_N(\theta_M) - EQ_N(\theta_M)| \right\} = 0, \forall M, \forall \theta_M \in \Theta_M \quad (5.2)$$

Λόγω της ομοιόμορφης συγκλίσεως, διάφορες ιδιότητες της $Q_N(\theta_M)$ μπορούν να μεταφερθούν στο όριο αυτής³. Επομένως μπορεί να αποδειχθεί ότι $\forall M$:

$$\text{plim} \left\{ \min_{\theta_M} Q_N(\theta_M) - \min_{\theta_M} EQ_N(\theta_M) \right\} = 0 \quad (5.3)$$

Επομένως, η Εξ. (5.3) επιτρέπει την ακόλουθη προσέγγιση (για N αρκετά μεγάλο):

$$\min_{\theta_M} Q_N(\theta_M) \approx \min_{\theta_M} EQ_N(\theta_M) \quad (5.4)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι προκειμένου να υπάρχει ο ομοιόμορφος νόμος μεγάλων αριθμών [Uniform Law of Large Number (ULLN)], ο οποίος περιγράφεται από την Εξ. (5.2), και ως εκ τούτου να ισχύει η προσέγγιση της Εξ. (5.4), χρειάζονται επιπλέον υποθέσεις σχετικά με το μετρητικό θόρυβο $\epsilon(t)$.

Στάδιο Δεύτερο: Στην παρούσα φάση συνδέεται, σύμφωνα με την Εξ. (5.4), το ολικό ελάχιστο της $EQ_N(\theta_{M^o})$, αναφορικά με το θ_{M^o} , με το πραγματικό διάνυσμα των παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$. Η ενέργεια αυτή είναι εύκολη, διότι η ποσότητα $EQ_N(\theta_{M^o})$ είναι μη στοχαστική και ως εκ τούτου μπορεί να αναλυθεί απευθείας.

5.3.1 Συνέπεια της NLR Εκτιμήτριας

Πριν δοθεί η απόδειξη της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας, χρειάζεται (βλέπε Στάδιο Πρώτο) να τεθούν επιπλέον υποθέσεις σχετικά με το μετρητικό θόρυβο $\epsilon(t)$ [Εξ. (4.1)]. Η προσπάθεια στην

²Σύγκλιση κατά πιθανότητα [convergence in probability (i.p)]: $\text{plim} \hat{a}_N = a_o \iff \lim_{N \rightarrow \infty} Pr\{|\hat{a}_N - a_o| > \lambda\} = 0, \forall \lambda > 0 \iff \hat{a}_N \rightarrow a_o$ κατά πιθανότητα (i.p) καθώς $N \rightarrow \infty$, όπου με $Pr\{\cdot\}$ η αντίστοιχη πιθανότητα και plim ο τελεστής ορίου πιθανότητας [111, σελ.96].

³Αν $\sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_N(x) - \bar{f}(x)| \rightarrow 0$ (ομοιόμορφη σύγκλιση - uniform convergency) και $x_N = \arg \min_{-1 \leq x \leq 1} f_N(x)$, τότε $x_N \rightarrow \arg \min \bar{f}(x)$ [11, σελ.237].

παρούσα φάση είναι να γίνουν υποθέσεις, οι οποίες να είναι όσο το δυνατό γενικές και ρεαλιστικές, δίχως όμως να χάνεται η απλότητα και να γίνεται δυσκολότερος ο έλεγχος τους κατά τη διάρκεια πρακτικών εφαρμογών.

Υπόθεση 5.1 (Μετρητικός θόρυβος) Ο προστιθέμενος στις μετρήσεις μετρητικός θόρυβος $\{\epsilon(t) : t = 1, \dots, N\}$ είναι μια ψευδοστάσιμη (quasi-stationary⁴) στοχαστική ακολουθία μηδενικής μέσης τιμής, έτσι ώστε:

$$\epsilon(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h_t(r) \cdot w(t-r) = H_t(\mathcal{B}) \cdot w(t) \quad (5.5)$$

όπου $\{w(t) : t = 1, \dots, N\}$ είναι μια στοχαστική ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή $Ew(t) = 0$, διασπορά $Ew^2(t) = \sigma_w^2(t)$ και φραγμένες τις τέσσερις πρώτες στατιστικές ροπές. Το $\{H_t(\mathcal{B}), t = 1, 2, \dots\}$ είναι ένα φίλτρο που ανήκει στην οικογένεια των ομοιόμορφα ευσταδών φίλτρων (Uniformly Stable family of filters⁵). Σημειώνεται ότι με $\mathcal{B}$ συμβολίζεται ο τελεστής οπισθοδρόμησης (backshift operator): $\mathcal{B}^r \cdot x(t) \triangleq x(t-r)$. $\square$

Επί τη βάση της Υπόθεσης 5.1, παρουσιάζεται η ακόλουθη πρόταση, στην οποία αναλύεται η συνέπεια της NLR εκτιμήτριας.

Πρόταση 5.1 (Συνέπεια της NLR εκτιμήτριας) Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1, ενώ ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος δίνεται από την Υπόθεση 5.1. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις η NLR εκτιμήτρια είναι συνεπής, δηλαδή:

$$plim \hat{\theta}_{M^o, N} = \theta_{M^o}^o \quad (5.6)$$

$\square$

Απόδειξη: Παράρτημα Α'. $\square$

Σύμφωνα λοιπόν με την Πρόταση 5.1, το διάνυσμα των παραμέτρων του πραγματικού συστήματος είναι εκ των υστέρων αναγνωρίσιμο. Με άλλα λόγια οι εκτιμήσεις που δίδονται από τη NLR εκτιμήτρια συγκλίνουν ασυμπτωτικά στις πραγματικές τιμές αν και μόνο αν ισχύουν τόσο οι Υποθέσεις 3.2 –3.3 όσο και οι Συνθήκες C1 – C2. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Υποθέσεις 3.2 –3.3 και οι

⁴Έστω ένα σήμα το οποίο υπόκειται στις ακόλουθες υποθέσεις:

(i) $E\{s(t)\} = m_s(t)$, $|m_s(t)| \leq C$, $\forall t$,

(ii) $E\{s(t)s(t)\} = R_s(t, r)$, $|R_s(t, r)| \leq C$, με $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_s(t, t-r) = R_s(r)$, $\forall r$

Αν ισχύουν οι συνθήκες (i) και (ii), τότε το $s(t)$ δηλώνεται ως ψευδοστάσιμο [11, σελ.27].

⁵Έστω η ακόλουθη οικογένεια φίλτρων με τα εξής χαρακτηριστικά: $G_a(\mathcal{B})$, $a \in \mathcal{A}$: $G_a(\mathcal{B}) = \sum_{r=1}^{\infty} g_a(r) \mathcal{B}^r$, $a \in \mathcal{A}$. Η εν λόγω οικογένεια ονομάζεται ομοιόμορφα ευσταθής (uniformly stable) αν: $|g_a(r)| \leq g(r)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, $\sum_{r=1}^{\infty} g(r) < \infty$ [11, σελ.21]

Συνθήκες $C1 - C2$ είναι αναγκαίες και ικανές για την επίτευξη της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας (περισσότερη συζήτηση πάνω στο θέμα αυτό παρουσιάζεται στην Ενότητα 5.5).

5.4 Ασυμπτωτική Κανονικότητα και Πίνακας Συνδυασφοράς των Εκτιμήσεων

5.4.1 Ασυμπτωτική Κανονικότητα της Εκτιμήτριας

Κατόπιν αποδείξεως της συνέπειας της εκτιμήτριας, το επόμενο βήμα, το οποίο θα βοηθήσει στην αξιολόγηση της ποιότητας της εκτίμησης, είναι να εξεταστεί πόσο ευαίσθητες στο μετρητικό θόρυβο είναι οι εκτιμήσεις, όπως επίσης με ποιον τρόπο μπορούν να ποσοτικοποιηθούν τα σφάλματα που υπεισέρχονται σε αυτές. Η αναζήτηση απαντήσεων, οδηγεί σε πρώτη φάση στην απόδειξη της ασυμπτωτικής κανονικότητας των εκτιμήσεων, όπως επίσης και στην εξαγωγή της μαθηματικής έκφρασης του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασφοράς των εκτιμήσεων. Κατόπιν τούτου και προκειμένου η εν λόγω θεωρητική ανάλυση να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πρακτικές εφαρμογές, είναι αναγκαία η επιλογή κατάλληλης εκτιμήτριας για τον πίνακα αυτόν, όπως επίσης και η αξιολόγηση της αξιοπιστίας της εκτιμήτριας αυτής μέσω μελέτης της συνέπειας της. Όλα τα παραπάνω θέματα αναλύονται στην παρούσα ενότητα.

Προκειμένου να αποδειχθεί η ασυμπτωτική κανονικότητα των εκτιμήσεων απαιτούνται ισχυρότερες υποθέσεις (από αυτές της Υπόθεσης 5.1) σχετικά με τον προστιθέμενο μετρητικό θόρυβο, έτσι ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή κατάλληλου κεντρικού οριακού θεωρήματος. Η τροποποίηση των ήδη υπάρχουσων υποθέσεων παρατίθεται αμέσως παρακάτω, και όπως είναι εύκολο να διαπιστωθεί είναι αυστηρότερες από αυτές της Υπόθεσης 5.1.

Υπόθεση 5.2 (Τροποποίηση Υποθέσεων) Ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος $\{\epsilon(t) : t = 1, \dots, N\}$ είναι μια στοχαστική στάσιμη διεργασία μηδενικής μέσης τιμής, η οποία ορίζεται ως:

$$\epsilon(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h(r) \cdot w(t-r), \quad \sum_{r=0}^{\infty} |h(r)| < \infty \quad (5.7)$$

με θετικά ορισμένο (positive definite) πίνακα συνδυασφοράς Σ_{ϵ} . Με $w(t)$ συμβολίζεται μια στοχαστική διεργασία λευκού θορύβου με $Ew(t) = 0$ και πεπερασμένες τέσσερις πρώτες στατιστικές ροπές. $\square$

Κατόπιν των παραπάνω (αυστηρότερων) υποθέσεων, παρατίθεται η επόμενη πρόταση, η οποία αναφέρεται στην ασυμπτωτική κανονικότητα των εκτιμήσεων, όπως επίσης και στον πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασφοράς αυτών.

Πρόταση 5.2 (Ασυμπτωτική Κανονικότητα) Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1, ενώ ο προστιδόμενος μετρητικός θόρυβος στην Υπόθεση 5.2. Επί τη βάση αυτών, η NLR εκτιμήτρια του διανύσματος των πραγματικών παραμέτρων του συστήματος ακολουθεί, ασυμπτωτικά, κανονική κατανομή, δηλαδή:

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{M^o,N} - \theta_{M^o}^o) \in AsN(0, P(\theta_{M^o}^o)) \quad (5.8)$$

$$P(\theta_{M^o}^o) \triangleq G^{-1}(\theta_{M^o}^o) \cdot \bar{P}(\theta_{M^o}^o) \cdot G^{-1}(\theta_{M^o}^o) \quad [2M^o \times 2M^o] \quad (5.9)$$

$$G(\theta_{M^o}^o) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{N} \cdot \Phi_N(\theta_{M^o}^o) \cdot \Phi_N^T(\theta_{M^o}^o) \right) \quad [2M^o \times 2M^o] \quad (5.10)$$

$$\bar{P}(\theta_{M^o}^o) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{N} \cdot \Phi_N(\theta_{M^o}^o) \cdot \Sigma_\epsilon \cdot \Phi_N^T(\theta_{M^o}^o) \right) \quad [2M^o \times 2M^o] \quad (5.11)$$

$$\Phi_N(\theta_{M^o}^o) \triangleq \begin{bmatrix} \delta_1^o(1) & \dots & \delta_1^o(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{M^o}^o(1) & \dots & \delta_{M^o}^o(N) \\ k_1^o \cdot \delta_1^{\prime o}(1) & \dots & k_1^o \cdot \delta_1^{\prime o}(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{M^o}^o \cdot \delta_{M^o}^{\prime o}(1) & \dots & k_{M^o}^o \cdot \delta_{M^o}^{\prime o}(N) \end{bmatrix} \quad [2M^o \times N] \quad (5.12)$$

$$\Sigma_\epsilon \triangleq \begin{bmatrix} \gamma_\epsilon(0) & \dots & \gamma_\epsilon(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_\epsilon(N-1) & \dots & \gamma_\epsilon(0) \end{bmatrix} \quad [N \times N] \quad (5.13)$$

$$\gamma_\epsilon(r) \triangleq E\{\epsilon(t)\epsilon(t+r)\} \quad (5.14)$$

όπου με $\delta_i^o(t)$ και $\delta_i^{\prime o}(t)$ [$\forall i = 1, \dots, M^o$] συμβολίζεται η παραμόρφωση ελατηρίου και η πρώτη παράγωγος αυτής ως προς το κατώφλι, Δ_i^o , του i -οστού τελεστή του πραγματικού συστήματος, αντίστοιχα [αντικαθίσταται $\Delta_i = \Delta_i^o$ στις Εξ. (3.5) και (3.21), αντίστοιχα]. Επίσης με $\gamma_\epsilon(r)$ συμβολίζεται η συνάρτηση αυτοδιασποράς της διεργασίας $\epsilon(t)$. $\square$

Απόδειξη: Παράρτημα Β'. $\square$

Αξίζει να σημειωθεί ότι υπό το καθεστώς των Υποθέσεων 3.2 και 3.3 και των Συνθηκών C0 – C3, ο πίνακας $G(\theta_{M^o}^o)$ είναι αντιστρέψιμος (βλέπε Λήμμα 5.6 στο Παράρτημα Β'. Επιπροσθέτως, τα όρια, τα οποία εμφανίζονται στις Εξ. (5.10) – (5.11) υπάρχουν λόγω των Υποθέσεων 3.1 και 5.2, αντίστοιχα (βλέπε Παράρτημα Β').

5.4.2 Εκτίμηση του Πίνακα Ασυμπτωτικής Συνδυασποράς

Σύμφωνα με τις Εξ. (5.9) – (5.14), μία προφανής εκτιμήτρια, έστω $P_N(\hat{\theta}_{M^o,N})$, του πίνακα $P(\theta_{M^o}^o)$ προκύπτει αν αντικατασταθούν, στη μαθηματική έκφραση του πίνακα, οι πραγματικές ποσότητες

από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις. Με άλλα λόγια η εν λόγω εκτιμήτρια είναι ως εξής:

$$\mathbf{P}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \triangleq N \left[\boldsymbol{\Phi}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \boldsymbol{\Phi}_N^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right]^{-1} \boldsymbol{\Phi}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\epsilon \boldsymbol{\Phi}_N^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \left[\boldsymbol{\Phi}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \boldsymbol{\Phi}_N^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right]^{-1} \quad (5.15)$$

όπου:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\epsilon \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_\epsilon(0) & \dots & \hat{\gamma}_\epsilon(N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}_\epsilon(N-1) & \dots & \hat{\gamma}_\epsilon(0) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

όπου με $\hat{\gamma}_\epsilon(\cdot)$ συμβολίζεται μία εκτιμήτρια της συνδυασποράς του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου, ενώ ο $\boldsymbol{\Phi}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N})$ προκύπτει θέτοντας $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}$, αντί για $\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o$, στην Εξ. (5.12).

Πρόταση 5.3 (Συνέπεια Εκτιμήτριας του Πίνακα Συνδυασποράς) Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1 και ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος υπακούει στην Υπόθεση 5.2. Έστω επίσης $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\epsilon$ μία συνεπής εκτιμήτρια του πίνακα $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon$. Υπό αυτές της προϋποθέσεις η εκτιμήτρια $\mathbf{P}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N})$ [Εξ. (5.15)] είναι συνεπής, δηλαδή:

$$\text{plim} \left\{ \mathbf{P}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right\} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \quad (5.18)$$

□

Απόδειξη: Αρχικά εφαρμόζεται στην εκτιμήτρια του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασποράς [Εξ. (5.15)] ο τελεστής ορίου πιθανότητας (plim). Η ενέργεια αυτή έχει ως αποτέλεσμα (ο plim λειτουργεί ως τελεστής - βλέπε [111, σελ.96]):

$$\begin{aligned} \text{plim} \left\{ \mathbf{P}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right\} &= N \left[\text{plim} \left\{ \boldsymbol{\Phi}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \boldsymbol{\Phi}_N^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right\} \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \text{plim} \left\{ \boldsymbol{\Phi}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right\} \cdot \text{plim} \left\{ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\epsilon \right\} \cdot \text{plim} \left\{ \boldsymbol{\Phi}_N^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right\} \cdot \\ &\cdot \left[\text{plim} \left\{ \boldsymbol{\Phi}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \boldsymbol{\Phi}_N^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right\} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Λόγω του Λήμματος 5.5 (βλέπε Παράρτημα Β):

$$\text{plim} \left\{ \boldsymbol{\Phi}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right\} = \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \quad (5.20)$$

και $\text{plim} \left\{ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\epsilon \right\} = \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon$ (η εκτιμήτρια $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_\epsilon$ είναι συνεπής). Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\text{plim} \left\{ \mathbf{P}_N(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N}) \right\} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \quad (5.21)$$

αποτέλεσμα το οποίο αποδεικνύει τη συνέπεια της εν λόγω εκτιμήτριας του πίνακα ασυμπτωτικής διασποράς. $\square$

Όπως θα έχει γίνει ήδη αντιληπτό, προκειμένου να επιτευχθεί η συνέπεια της εκτιμήτριας του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασποράς των εκτιμήσεων πρέπει να βρεθεί μια συνεπής εκτιμήτρια του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασποράς, Σ_ϵ . Το θέμα αυτό επιλύεται με τη βοήθεια του ακόλουθου λήμματος.

Λήμμα 5.1 (Συνεπής Εκτιμήτρια του Πίνακα Σ_ϵ) Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1 και ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος υπακούει στην Υπόθεση 5.2. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις η ακόλουθη εκτιμήτρια $[e(t, \hat{\theta}_{M^o, N})]$: σφάλμα εξόδου του μοντέλου - Εξ. (4.2)]:

$$\hat{\gamma}_\epsilon(r) = \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^{N-r} e(t, \hat{\theta}_{M^o, N}) \cdot e(t+r, \hat{\theta}_{M^o, N}) \quad (5.22)$$

είναι συνεπής εκτιμήτρια της συνδυασποράς $\gamma_\epsilon(r)$ του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου, δηλαδή:

$$\text{plim}\{\hat{\gamma}_\epsilon(r)\} = \gamma_\epsilon(r) \quad (5.23)$$

$\square$

Απόδειξη: Η $\hat{\gamma}_\epsilon(r)$ γράφεται, με τη βοήθεια των Εξ. (4.2) και (5.27) ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_\epsilon(r) = & \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^{N-r} \left(\epsilon(t)\epsilon(t+r) + \epsilon(t) \cdot \left(f(t+r, \theta_{M^o}^o) - f(t+r, \hat{\theta}_{M^o, N}) \right) + \right. \\ & \left. \epsilon(t+r) \cdot \left(f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \hat{\theta}_{M^o, N}) \right) + \left(f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \hat{\theta}_{M^o, N}) \right) \cdot \right. \\ & \left. \left(f(t+r, \theta_{M^o}^o) - f(t+r, \hat{\theta}_{M^o, N}) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Η εφαρμογή του plim στην Εξ. (5.24), λαμβάνοντας υπόψη και το Λήμμα 5.5 (βλέπε Παράρτημα Β), έχει ως αποτέλεσμα:

$$\text{plim}\{\hat{\gamma}_\epsilon(r)\} = \text{plim}\left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^{N-r} \epsilon(t)\epsilon(t+r) \right\} \quad (5.25)$$

Εφόσον ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος υπόκειται στην Υπόθεση 5.2, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3 το οποίο βρίσκεται στο βιβλίο του Ljung [11, σελ.34-35]⁶:

$$\text{plim}\left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^{N-r} \epsilon(t)\epsilon(t+r) \right\} = E\{\epsilon(t)\epsilon(t+r)\} = \gamma_\epsilon(r) \quad (5.26)$$

⁶Έστω $\{s(t)\}$ μία ψευδοστάσιμη ακολουθία. Επίσης έστω $Es(t) = m(t)$. Ας υποθεθεί ότι: $s(t) - m(t) = v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h_t(r)w(t-r)$ όπου $\{w(t)\}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με μηδενική μέση τιμή $Ew^2(t) = \sigma_t^2$ και φραγμένες τέσσερις πρώτες στατιστικές ροπές, καθώς και το $\{H_t(\mathcal{B}) : t = 1, 2, \dots\}$ ανήκει στην οικογένεια των ομοιόμορφα ευσταθών φίλτρων. Τότε ισχύει, με πιθανότητα 1 καθώς το N τείνει στο άπειρο, ότι: $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [s(t)v(t-\tau) - Es(t)v(t-\tau)] \rightarrow 0$.

□

Αν και το Λήμμα 5.1 αποδεικνύει τη συνέπεια της προτεινόμενης εκτιμήτριας, είναι πολύ πιθανόν να εμφανιστούν προβλήματα κατά την αριθμητική υλοποίηση (για N πεπερασμένο) της εν λόγω εκτιμήτριας, ιδίως για χρονικές καθυστερήσεις (Lags: r) συγκρινόμενες με το μήκος των διαθέσιμων δεδομένων. Το εν λόγω πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί επί τη βάση μίας εκ των παρακάτω δύο Προσεγγίσεων:

Προσέγγιση I: Μια τυπική εκτιμήτρια της συνάρτησης συνδυασπόρας, δηλαδή :

$$\hat{\gamma}_\epsilon(r) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{t=t_{cr}}^{N-r} e(t, \hat{\theta}_{M^o, N}) \cdot e(t+r, \hat{\theta}_{M^o, N}) \quad (5.27)$$

μπορεί να προκύψει με το να τεθεί $\hat{\gamma}_\epsilon(r) = 0$ για $r \geq N/4$. Η ενέργεια αυτή έχει πρακτικό νόημα διότι σύμφωνα με την Υπόθεση 5.2, ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος παρουσιάζει φαινόμενα μνήμης μειούμενης με το χρόνο (fading memory).

Προσέγγιση II: Εναλλακτικά δύναται να χρησιμοποιηθεί μια πολυπλοκότερη αλλά σαφώς ακριβέστερη προσέγγιση, κατά την οποία υπολογίζεται το $\hat{e}(t, \hat{\theta}_{M^o, N})$ μέσω της Εξ. (4.2), αναγνωρίζεται επί τη βάση αυτού ένα μοντέλο ARMA και στη συνέχεια εκτιμάται αναλυτικά, βάσει του μοντέλου αυτού, η $\hat{\gamma}_\epsilon(r)$ ⁷.

5.5 Υποθέσεις και Συνθήκες: Συζήτηση και Αξιολόγηση

Μέχρι το σημείο αυτό έχει αναλυθεί η συνέπεια της NLR εκτιμήτριας, καθώς και η ασυμπτωτική κανονικότητα των εκτιμήσεων. Προκειμένου να επιτευχθεί ο σκοπός αυτός ήταν αναγκαίο να τεθούν κάποιες υποθέσεις και συνθήκες. Μερικές από αυτές είναι αναγκαίες, ενώ κάποιες άλλες είναι αναγκαίες και ικανές (ελάχιστες). Ο σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να ξεκαθαρίσει το τοπίο. Για το λόγο δε τούτο παρατίθεται μια λεπτομερής έκθεση για το ποιές από αυτές είναι αναγκαίες και ποιές είναι ικανές. Περαιτέρω, έχει ακόμα στόχο να επισημάνει τρόπους γενίκευσης, κυρίως για μελλοντική έρευνα.

Η έκθεση ξεκινάει με τον καθορισμό των αρχικών καταστάσεων (διάνυσμα $\delta_{M^o}(1)$). Δίχως να καθοριστούν με κάποιον τρόπο οι αρχικές καταστάσεις, δεν είναι δυνατή η ανάλυση που έχει υλοποιηθεί μέχρι το σημείο αυτό (για παράδειγμα δεν είναι δυνατόν να εξαχθούν οι αναγκαίες και ικανές

⁷ Η εκτιμήτρια που προτείνεται στην Προσέγγιση II μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι και αυτή συνεπής. Η απόδειξη στηρίζεται στο ότι $e(t, \hat{\theta}_{M^o, N}) = \epsilon(t) + f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \hat{\theta}_{M^o, N})$ [λόγω συνέπειας της NLR: $\text{plim}\{f(t, \hat{\theta}_{M^o, N})\} = f(t, \theta_{M^o}^o)$] στο Λήμμα B.3 και στο Επακόλουθο του Λήμματος B.4 όπως αυτά δίνονται στο βιβλίο του Söderström και Stoica [112, σελ.550-551]. Λόγω απλότητας παραλείπεται.

συνθήκες διεγέρσεως – Βλέπε Ιδιότητα 3.10, Κεφάλαιο 3). Επομένως ο καθορισμός των αρχικών καταστάσεων είναι αναγκαίος. Από την άλλη, η ορθή εκτίμηση των αρχικών καταστάσεων είναι ανέφικτη, διότι όπως έχει ήδη αποδειχθεί η δομή του μοντέλου είναι εκ των προτέρων μη αναγνωρίσιμη ως προς αυτές (βλέπε Πρόταση 3.2 - Κεφάλαιο 3), ενώ η αυθαίρετη προεπιλογή τους οδηγεί σε μειωμένη ακρίβεια στην εκτίμηση (βλέπε Ενότητα 4.5.1 - Κεφάλαιο 4). Προκειμένου λοιπόν να υπάρξει ένας τρόπος καθορισμού των αρχικών καταστάσεων, προτάθηκε η Συνθήκη $C0$. Είναι πολύ σημαντικό να σημειωθεί, τουλάχιστον σύμφωνα με τη γνώμη του συγγραφέα της παρούσας διατριβής, ότι δεν υπάρχει άλλος αναλυτικός και γενικός τρόπος καθορισμού των αρχικών καταστάσεων. Υπό αυτή την έννοια η Συνθήκη $C0$ είναι αναγκαία.

Οι $C1 - C3$ αποτελούν τις συνθήκες διέγερσης, έτσι ώστε τα διαθέσιμα προς εκτίμηση δεδομένα να περιέχουν όλη την απαραίτητη πληροφορία. Σε περίπτωση που το πραγματικό σύστημα διεγείρεται από μια εφαρμοζόμενη μετατόπιση, η οποία αδυνατεί να εκπληρώσει τουλάχιστον μία από τις συνθήκες $C1 - C3$, τότε η προκύπτουσα απόκριση δεν έχει μοναδικό χαρακτήρα. Με άλλα λόγια, η ίδια απόκριση μπορεί να προκύψει και από ένα άλλο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, με αποτέλεσμα η εκτιμήτρια να μην είναι σε θέση να ξεχωρίσει το πραγματικό σύστημα από όλα τα άλλα υποψήφια. Το γεγονός αυτό αντανakλάται στην Πρόταση 5.1, σύμφωνα με την οποία οι Συνθήκες $C1 - C3$ είναι αναγκαίες και ικανές για την επίτευξη της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας.

Η Υπόθεση 3.1 δηλώνει ότι ο χώρος των παραμέτρων είναι συμπαγής (φραγμένος και κλειστός). Η υπόθεση αυτή είναι μόνο ικανή για να εξαχθεί το σημαντικό συμπέρασμα ότι $|f(t, \theta_M)| < \infty, \forall t$ (βλέπε Ιδιότητα 3.7). Σύμφωνα με τους Röttscher και Prucha [13, σελ.26] η υπόθεση αυτή μπορεί να μετριαστεί ή ακόμα και να παραληφθεί, αλλά μία τέτοια ενέργεια καθιστά δύσκολη την εξαγωγή της ομοιόμορφης σύγκλησης της συνάρτησης κόστους, απαίτηση βασική για την απόδειξη της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας. Επιπλέον η εν λόγω Υπόθεση χρειάζεται προκειμένου να υπάρχει το $\inf$ στην Εξ. (5.47) (Λήμμα 5.3 - Παράρτημα Α') και ως εκ τούτου να μπορεί να αποδειχθεί η αναγνωριστική μοναδικότητα του $\theta_{M^0}^o$, η οποία χρειάζεται για την απόδειξη της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας (Βλέπε Παράρτημα Α'). Γενικότερα η Υπόθεση 3.1 θεωρείται μάλλον τυπική στα πλαίσια του γνωστικού αντικείμενου της Αναγνώρισης Συστημάτων [13, σελ.26] [106], και δε φαίνεται να δημιουργεί πρόβλημα κατά την πρακτική εφαρμογή της εκτιμήσεως του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Η Υπόθεση 3.2 είναι αναγκαία, διότι αν παραβιαστεί (δηλαδή $k_i = 0$ για τουλάχιστον ένα $i = 1, \dots, M$), τότε αυτό σημαίνει ότι ο αντίστοιχος τελεστής δεν συνεισφέρει στην συνολική απόκριση, και ως εκ τούτου η αναγνώριση του είναι ανέφικτη. Επιπλέον, η περίπτωση: $k_i < 0$ δεν έχει φυσική υπόσταση.

Η Υπόθεση 3.3 είναι, υπό το καθεστώς της Συνθήκης $C0$, αναγκαία και αυτή. Αυτό γίνεται διότι αν υπάρχουν τουλάχιστον δύο τελεστές με ίσα κατώφλια, τότε αυτοί οι δύο μπορούν να ενσωματωθούν σε έναν, με σταθερά ελατηρίου ίση με το άθροισμα των αντίστοιχων δύο σταθερών ελατηρίου των επιμέρους δύο τελεστών. Για καλύτερη κατανόηση ας ληφθεί υπόψη ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με ($M = 2$) τελεστές, κατώφλια $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ και δυσκαμψίες $k_1 = 10$ και $k_2 = 20$. Λόγω της συνθήκης $C0$, οι αρχικές καταστάσεις των δύο τελεστών είναι πανομοιότυπες και ίσες, γεγονός που δηλώνει ότι $\delta_1(t) = \delta_2(t) (\forall t \geq t_{cr})$. Τώρα ας υποτεθεί ένα δεύτερο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ και $k_1 = 25$ και $k_2 = 5$, το οποίο υπόκειται και αυτό στη Συνθήκη $C0$. Όπως είναι προφανές και τα δύο μοντέλα παράγουν ακριβώς την ίδια απόκριση για $t \geq t_{cr}$, και ως εκ τούτου δεν είναι δυνατός ο διαχωρισμός της συνεισφοράς του κάθε τελεστή.

Η Υπόθεση 5.1 δηλώνει ότι ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος προκύπτει ως το αποτέλεσμα του φιλτραρίσματος μία ακολουθίας ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών από ένα γραμμικό φίλτρο της οικογένειας των ομοιόμορφα ευσταθών φίλτρων. Αν και η εν λόγω υπόθεση δε θεωρείται αυστηρή, είναι μόνο ικανή για την επίτευξη της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας. Παρόμοια αποτελέσματα θα μπορούσαν να επιτευχθούν, αν γίνονταν ακόμα λιγότερο αυστηρές υποθέσεις σχετικά με τη φύση του θορύβου, υπό την προϋπόθεση όμως ότι και σε αυτή την περίπτωση θα υπάρχει κατάλληλος νόμος μεγάλων αριθμών (Laws of Large Numbers – LLN) για την επίτευξη της ομοιόμορφης σύγκλισης της συνάρτησης του κόστους στην προσδοκώμενη τιμή της [για περισσότερες πληροφορίες βλέπε [13, σελ.45] για μια εξαιρετική συλλογή από οριακά θεωρήματα ή [107]].

Η Υπόθεση 5.2 αν και είναι πιο αυστηρή από την 5.1, εξακολουθεί να είναι ευρύς και ουσιαστικά δεν περιορίζει σε σημαντικό βαθμό την πρακτικότητα της Πρότασης 5.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι η Υπόθεση 5.2 είναι μόνο ικανή και όχι αναγκαία και παρόμοια αποτελέσματα μπορούν να επιτευχθούν χρησιμοποιώντας λιγότερες αυστηρές υποθέσεις (βλέπε [13, σελ.99]), αρκεί να ισχύει κατάλληλο κεντρικό οριακό θεώρημα, έτσι ώστε να μπορεί να αποδειχθεί η ασυμπτωτική κανονικότητα των εκτιμήσεων.

Όπως είναι εμφανές, τόσο η Υπόθεση 5.1 όσο και η 5.2 δεν είναι οι ελάχιστες (δηλαδή ικανές και αναγκαίες). Εντούτοις, η απαίτηση για φραγμένες (τουλάχιστον) δύο πρώτες στατιστικές ροπές (βλέπε Ορισμό 4.1) είναι μάλλον αναπόφευκτη, διότι οι εκτιμήτριες τύπου σφάλματος πρόβλεψης (Prediction Error type of estimators), στις οποίες ανήκει και η προτεινόμενη NLR εκτιμήτρια, βασίζονται στη σύγκλιση των δειγματικών δευτέρων ροπών στις αντίστοιχες προσδοκώμενες τιμές τους.

Πίνακας 5.1: Πρώτη περίπτωση αποτελεσμάτων (περιοδική διέγερση, 900 Monte Carlo υλοποιήσεις, σημειακές εκτιμήσεις $\pm$ μία τυπική απόκλιση).

Πραγματικές Παράμετροι	Εκτιμώμενες Παράμετροι ($N = 3000$)	Εκτιμώμενες Παράμετροι ($N = 6000$)
$k_1 = 3.0$	3.0009 ± 0.0432	3.0009 ± 0.0228
$k_2 = 2.0$	2.0000 ± 0.0527	1.9982 ± 0.0308
$k_3 = 1.0$	0.9987 ± 0.0437	1.0009 ± 0.0266
$\Delta_1 = 0.1$	0.1000 ± 0.0010	0.1000 ± 0.0005
$\Delta_2 = 0.2$	0.2001 ± 0.0020	0.2000 ± 0.0011
$\Delta_3 = 0.3$	0.3001 ± 0.0026	0.3000 ± 0.0015

5.6 Αριθμητικά αποτελέσματα: Συνέπεια

Ο σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η αριθμητική επιβεβαίωση της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας. Για το λόγο αυτόν παρουσιάζονται δύο διαφορετικές περιπτώσεις, όπου κάθε μία περιλαμβάνει Monte Carlo προσομοιώσεις ενός μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιούνται διαφορετικά μοντέλα). Στην πρώτη περίπτωση στο μοντέλο εφαρμόζεται μετατόπιση περιοδικού τύπου (periodic excitation), ενώ στη δεύτερη τυχαίου (random excitation). Επιπροσθέτως και προκειμένου να ελεγχθεί η επίδραση του προστιθέμενου θορύβου στη συνέπεια της εκτιμήτριας, επιλέγονται χαμηλά επίπεδα θορύβου (lower noise - to - signal ratio) στην πρώτη περίπτωση και υψηλότερα (higher noise - to - signal ratio) στη δεύτερη περίπτωση.

5.6.1 Πρώτη Περίπτωση: Περιοδική Διέγερση

Η πρώτη περίπτωση αποτελεσμάτων περιλαμβάνει 900 σετ σημάτων μετατόπισης (διέγερσης) - δύναμης (απόκρισης), όπως αυτά προκύπτουν 900 προσομοιώσεις (υλοποιήσεις - realizations) ενός μοντέλου ολίσθησης του Maxwell με $M^o = 3$ τελεστές, του οποίου οι παράμετροι παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1. Σε όλες τις υλοποιήσεις η διέγερση επιλέγεται ως $x(t) = \cos(2t)$ (συχνότητα δειγματοληψίας: $f_s = 250 \text{ Hz}$). Σε κάθε μία από τις 900 αποκρίσεις, $f(t, \theta_3^o)$, προστίθεται μετρητικός θόρυβος, ο οποίος παράγεται περνώντας μία διεργασία $w(t)$ από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, μηδενικής μέσης τιμής, μέσω ενός χρονικά μεταβαλλόμενου μοντέλου ARMA (μοντέλο TARMA - [113]). Οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις του σήματος $w(t)$, καθώς και της απόκρισης του TARMA μοντέλου είναι 0.90 και 0.036, αντίστοιχα. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα του σήματος της διέγερσης, της απόκρισης (χωρίς και με το μετρητικό θόρυβο) του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell και του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.1.

Σχήμα 5.1: Σήματα από τις υλοποιήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην πρώτη περίπτωση αποτελεσμάτων: (a) Διέγερση (περιοδική), (b) Απόκριση (με και χωρίς θόρυβο) και (c) προστιθέμενος θόρυβος (αντιπροσωπευτικά παραδείγματα).

Στην προκειμένη περίπτωση, παρουσιάζονται δύο διαφορετικοί τύποι αποτελεσμάτων. Στα πλαίσια του πρώτου, η κάθε εκτίμηση βασίζεται σε 3000 (12 *sec*) δεδομένα διέγερσης - απόκρισης με θόρυβο, ενώ στο δεύτερο σε 6000 (24 *sec*). Η επιλογή αυτή έγινε έτσι ώστε να γίνει εμφανές ότι οι εκτιμήσεις βελτιώνονται, δηλαδή πλησιάζουν περισσότερο στις πραγματικές παραμέτρους του μοντέλου με αύξηση του αριθμού των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση.

Τα Monte Carlo αποτελέσματα (900 εκτιμήσεις για $N = 3000$ και $N = 6000$ δεδομένα) παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1. Όπως είναι εμφανές από τα αποτελέσματα αυτά, ο δειγματικός μέσος (sampled mean) των εκτιμήσεων, είναι σε εξαιρετική συμφωνία με τις αντίστοιχες πραγματικές παραμέτρους, με το $N = 6000$ τύπο εκτιμήσεων να είναι ελαφρώς πιο κοντά (εκτός για τη k_2 παράμετρο). Επιπροσθέτως είναι εξαιρετικά σημαντικό να παρατηρηθεί ότι οι αντίστοιχες τυπικές αποκρίσεις των $N = 3000$ εκτιμήσεων είναι σχεδόν διπλάσιες συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες των $N = 6000$ εκτιμήσεων. Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει για ακόμα μια φορά της συνέπεια της εκτιμήτριας, αφού οι εκτιμήσεις βελτιώνονται με αύξηση των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση.

5.6.2 Δεύτερη Περίπτωση: Τυχαία Διέγερση

Η δεύτερη περίπτωση αποτελεσμάτων περιλαμβάνει και αυτή 900 Monte Carlo υλοποιήσεις από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell (διαφορετικό από το προηγούμενο) με $M^o = 3$, του οποίου οι παράμετροι παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2. Η διέγερση (εφαρμοζόμενη μετατόπιση) στην παρούσα περίπτωση είναι μια τυχαία ακολουθία μηδενικής μέσης τιμής, η οποία προκύπτει από το πέρασμα μιας στοχαστικής ακολουθίας λευκού θορύβου από ένα βαθυπερατό φίλτρο (συχνότητα αποκοπής:

Πίνακας 5.2: Δεύτερη περίπτωση αποτελεσμάτων (περιοδική διέγερση, 900 Monte Carlo υλοποιήσεις, σημειακές εκτιμήσεις $\pm$ μία τυπική απόκλιση).

Πραγματικές Παράμετροι	Εκτιμώμενες Παράμετροι ($N = 3000$)	Εκτιμώμενες Παράμετροι ($N = 6000$)
$k_1 = 1.0$	1.0473 ± 0.1922	1.0262 ± 0.1320
$k_2 = 4.0$	3.9990 ± 0.0296	3.9996 ± 0.0215
$k_3 = 3.0$	3.0001 ± 0.0113	2.9998 ± 0.0095
$\Delta_1 = 0.2$	0.1988 ± 0.0379	0.1990 ± 0.0283
$\Delta_2 = 1.0$	0.9999 ± 0.0028	1.0000 ± 0.0022
$\Delta_3 = 3.0$	3.0001 ± 0.0025	3.0000 ± 0.0018

Σχήμα 5.2: Σήματα από τις υλοποιήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στη δεύτερη περίπτωση αποτελεσμάτων: (a) Διέγερση (περιοδική), (b) Απόκριση (με και χωρίς θόρυβο) και (c) προστιθέμενος θόρυβος (αντιπροσωπευτικά παραδείγματα).

$f_c = 10 \text{ Hz}$, συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 250 \text{ Hz}$). Σε κάθε μία από τις 900 Monte Carlo αποκρίσεις του μοντέλου προστίθεται μετρητικός θόρυβος, ο οποίος παράγεται όπως και πριν, αλλά χρησιμοποιώντας διαφορετικό μοντέλο TARMA. Οι τυπικές αποκλίσεις του $w(t)$ σήματος καθώς και της απόκρισης του μοντέλου TARMA είναι 5.56 και 0.56, αντίστοιχα. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα των σημάτων που χρησιμοποιούνται για στις Monte Carlo εκτιμήσεις παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην παρούσα περίπτωση αποτελεσμάτων, τα επίπεδα θορύβου που χρησιμοποιούνται είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα της πρώτης.

Υλοποιούνται, όπως και πριν, δύο τύποι υλοποιήσεων για $N = 3000$ και $N = 6000$ δεδομένα, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.2, και καταδεικνύουν, αν και οι τυπικές αποκλίσεις είναι μεγαλύτερες λόγω των υψηλότερων ποσοστών θορύβου, την εξαιρετική συμφωνία των εκτιμήσεων με τις πραγματικές παραμέτρους. Επιπροσθέτως, παρατηρείται

Πίνακας 5.3: Πραγματικές παράμετροι [αριστερή στήλη] και οι αντίστοιχες παράμετροι του AR μοντέλου που παράγει τον προστιθέμενο θόρυβο [δεξιά στήλη: παράμετροι του AR(2) μοντέλου $[\epsilon(t) + a_1 \cdot \epsilon(t-1) + a_2 \cdot \epsilon(t-2) = w(t)]$, σ_ϵ : τυπική απόκλιση του $\epsilon(t)$, σ_ϵ/σ_f : ο λόγος θορύβου προς σήματος].

Πραγματικές Παράμετροι	Παράμετροι για την παραγωγή του θορύβου
$k_1 = 2.0$	$a_1 = 0.4200$
$k_2 = 1.0$	$a_2 = 0.8722$
$\Delta_1 = 0.2$	$\sigma_\epsilon = 0.0524$
$\Delta_2 = 1.1$	$100 \cdot \sigma_\epsilon/\sigma_f = 5\%$

και πάλι ότι οι εκτιμήσεις βελτιώνονται με αύξηση του αριθμού των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τους σκοπούς της εκτιμήσεως.

5.7 Αριθμητικά αποτελέσματα: Ασυμπτωτική Κανονικότητα

Η παρούσα ενότητα αφιερώνεται στην αριθμητική επιβεβαίωση της ασυμπτωτικής κανονικότητας της NLR εκτιμήτριας. Για το λόγο αυτό υλοποιούνται 1000 Monte Carlo υλοποιήσεις ενός μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, του οποίου οι παράμετροι παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.3. Ως διέγερση επιλέγεται ένας φιλτραρισμένος λευκός θόρυβος (βαθυπερατό ψηφιακό φίλτρο Chebyshev τύπου I με συχνότητα αποκοπής: 5 Hz και συχνότητα δειγματοληψίας: 2500 Hz). Σε κάθε Monte Carlo υλοποίηση καταγράφονται $N = 16000$ δεδομένα διέγερσης, $x(t)$ (μετατόπισης) και απόκρισης, $f(t, \theta_2^0)$ (δύναμης), ενώ στην απόκριση προστίθεται χρωματισμένος θόρυβος $\epsilon(t)$ με μηδενική μέση τιμή. Ο προστιθέμενος θόρυβος προκύπτει ως το φιλτράρισμα ενός λευκού θορύβου από ένα μοντέλο αυτοπαλινδρόμησης (AutoRegressive - AR) δευτέρας τάξεως (οι αντίστοιχες παράμετροι του εν λόγω μοντέλου παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.3). Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα της διέγερσης, της απόκρισης (χωρίς θόρυβο), καθώς και του προστιθέμενου θορύβου παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.3. Επιπροσθέτως παρουσιάζεται και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του προστιθέμενου θορύβου.

5.7.1 Ασυμπτωτική Κανονικότητα και Πίνακας Συνδυασporάς

Στο Σχήμα 5.4 παρουσιάζονται τα δειγματικά ιστογράμματα όπως αυτά προκύπτουν από τις 1000 Monte Carlo εκτιμήσεις των σταθερών των ελατηρίων και των κατωφλιών ($\hat{k}_i$ και $\hat{\Delta}_i$, $\forall i = 1, 2$). Το πρώτο που παρατηρείται είναι ότι όλα τα ιστογράμματα έχουν ως κέντρο τις αντίστοιχες πραγματικές παραμέτρους, γεγονός που δηλώνει τη συνέπεια της εκτιμήτριας. Κατά δεύτερον, η κατανομή των εκτιμήσεων είναι (σχεδόν) κανονική, αποτέλεσμα το οποίο είναι σε συμφωνία με την Πρόταση 5.2. Επιπροσθέτως, τα ιστογράμματα είναι σε εξαιρετική συμφωνία με τις αντίστοιχες θεωρητικές καμ-

Σχήμα 5.3: Σειτ δεδομένων: (a) Σήματα μετατόπισης (λεπτή γραμμή) και πραγματικής απόκρισης του μοντέλου (παχιά γραμμή), (b) Προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος, (c) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου (Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα, Οι οριζόντιες — γραμμές δηλώνουν τα όρια στατιστικής σπουδαιότητας σε επίπεδο σημαντικότητας 95%).

πύλες (διακεκομμένες γραμμές του Σχήματος 5.4) Πυκνότητας Πιθανότητας (Probability Density Function). Οι εν λόγω καμπύλες εξάχθηκαν χρησιμοποιώντας τη Πρόταση 5.2, και συγκεκριμένα αντικαθιστώντας τις πραγματικές παραμέτρους (τόσο του μοντέλου, όσο και της συνδυασφοράς του προστιθέμενου θορύβου [114, σελ.89]) στις Εξ. (5.8) – (5.10).

Ένας περισσότερο εμπειριστωμένος έλεγχος του κατά πόσο οι εκτιμήσεις ακολουθούν (α-συμπτωτικά) κανονική κατανομή μπορεί να υλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τον Kolmogorov – Smirnov (KS) έλεγχο υποθέσεων [109, σελ.470]. Σύμφωνα με αυτόν τον έλεγχο, καθορίζεται αν οι 1000 Monte Carlo εκτιμήσεις του διανύσματος των παραμέτρων του μοντέλου μπορούν να παρουσιάσουν την υποθετική Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας, όπως αυτή καθορίζεται από την Πρόταση 5.2. Τα αποτελέσματα εφαρμογής του εν λόγω ελέγχου καταδεικνύουν ότι οι εκτιμήσεις όντως ακολουθούν την κανονική κατανομή όπως αυτή δίνεται από την Πρόταση 5.2. Πιο συγκεκριμένα, η μηδενική υπόθεση του K-S ελέγχου (δηλαδή ότι οι εκτιμήσεις ακολουθούν την κατανομή της Πρότασης 5.2) γίνεται πάντα δεκτή σε επίπεδο σημαντικότητας = 5%.

Το προφανές επόμενο βήμα είναι να ελεγχθεί για το αν η μαθηματική έκφραση του πίνακα α-

Σχήμα 5.4: Δειγματικά ιστογράμματα για κάθε μία από τις εκτιμώμενες παραμέτρους. Το κάθε ιστόγραμμα βασίζεται σε 1000 Monte Carlo εκτιμήσεις μοντέλων ολίσθησης του Maxwell με $M^o = 2$ τελεστές. Οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στις θεωρητικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, όπως αυτές εξάχθηκαν επί τη βάση της Πρόταση 5.2, της εκάστοτε παραμέτρου (έγινε χρήση των πραγματικών παραμέτρων καθώς και τις πραγματικής διασποράς του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου).

συμπτωτικής συνδυασποράς $P(\theta_{M^o}^o)$ [Εξ. (5.9)] είναι σωστή. Για το σκοπό αυτόν, ο “θεωρητικός” πίνακας ασυμπτωτικής συνδυασποράς συγκρίνεται με τον αντίστοιχο δειγματικό, όπως αυτός προκύπτει από τις 1000 διαθέσιμες Monte Carlo εκτιμήσεις του διανύσματος των παραμέτρων. Επαναλαμβάνεται ότι ο “θεωρητικός” πίνακας ασυμπτωτικής συνδυασποράς υπολογίστηκε από την Εξ. (5.9), ενώ ο “θεωρητικός” πίνακας συνδυασποράς του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου, Σ_ϵ , υπολογίστηκε επί τη βάση των παραμέτρων του $AR(2)$ μοντέλου (οι παράμετροι του οποίου φαίνονται στον Πίνακα 5.3) που τον παράγει [114, σελ.89].

Στο Σχήμα 5.5 παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα διαστήματα εμπιστοσύνης της κάθε μίας από τις τέσσερις παραμέτρους (δύο σταθερές ελατηρίου και δύο κατώφλια – Πίνακας 5.3), όπως αυτά προέκυψαν από την Πρόταση 5.2 (“θεωρητικά διαστήματα εμπιστοσύνης” – λιγότερο παχιά γραμμή) με τα αντίστοιχα δειγματικά, όπως αυτά προέκυψαν από τις 1000 Monte Carlo εκτιμήσεις⁸

⁸Εφόσον υπάρχουν 1000 Monte Carlo εκτιμήσεις (δείγματα) για κάθε παράμετρο του μοντέλου, τότε μπορεί να υπολογιστεί η δειγματική διασπορά της εκάστοτε παραμέτρου. Για παράδειγμα η δειγματική διασπορά της σταθεράς ελατηρίου του πρώτου τελεστή είναι: $var_{k_1} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{1000} (\hat{k}_i^j - \bar{k}_i)^2$, όπου $\bar{k}_i$ ο δειγματικός μέσος.

Σχήμα 5.5: Σύγκριση των διαστημάτων εμπιστοσύνης των παραμέτρων του μοντέλου όπως αυτά προκύπτουν από την Πρόταση 5.2 (λεπτή γραμμή) με τα αντίστοιχα δειγματικά, όπως αυτά προκύπτουν από τις 1000 Monte Carlo εκτιμήσεις (παχιά γραμμή) [$M^o = 2$, Τα κουτιά αντιστοιχούν στη μέση τιμή $\pm$ δύο τυπικές αποκλίσεις, Η ανάλυση Monte Carlo βασίζεται σε 1000 διαφορετικές υλοποιήσεις].

(περισσότερο παχιά γραμμή). Όπως είναι εμφανές τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι σε εξαιρετική συμφωνία, αποτέλεσμα, το οποίο επιβεβαιώνει την ορθότητα της μαθηματικής έκφρασης του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασφοράς των εκτιμήσεων.

5.7.2 Εκτιμήτρια του Ασυμπτωτικού Πίνακα Συνδυασφοράς

Η παρούσα υποενότητα έχει ως σκοπό την αριθμητική επιβεβαίωση της συνέπειας της εκτιμήτριας του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασφοράς των εκτιμήσεων. Με τον τρόπο αυτό θα ελεγχθεί, αριθμητικώς, η αξιοπιστία της προτεινόμενης εκτιμήτριας.

Η εκτίμηση του εν λόγω πίνακα πραγματοποιείται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στον πρώτο υιοθετείται η *Προσέγγιση I* [Εξ. (5.27)], ενώ στο δεύτερο η *Προσέγγιση II*. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω υπάρχουν 1000 Monte Carlo εκτιμήσεις του πίνακα $\mathbf{P}(\theta_2^o)$ [σε κάθε Monte Carlo επανάληψη εκτιμάται, μαζί με τις παραμέτρους, και ο πίνακας συνδυασφοράς αυτών, χρησιμοποιώντας την εκτιμήτρια της Εξ. (5.15)] για κάθε *Προσέγγιση*. Ως εκ τούτου υπάρχουν διαθέσιμες 1000 εκτιμήσεις της διασφοράς των παραμέτρων για κάθε *Προσέγγιση*.

Όπως είναι εμφανές από το Σχήμα 5.6, η δειγματική μέση τιμή⁹ (οριζόντια γραμμή στη μέση του κάθε κουτιού) της διασφοράς των παραμέτρων, και για τις δύο *Προσεγγίσεις*, είναι σε πολύ καλή

⁹Εφόσον υπάρχουν 1000 εκτιμήσεις (δείγματα), για κάθε *Προσέγγιση*, της διασφοράς της εκάστοτε παραμέτρου, τότε μπορεί να υπολογιστεί, για κάθε *Προσέγγιση*, ο δειγματικός μέσος και η δειγματική διασφορά της διασφοράς της εκάστοτε παραμέτρου.

Σχήμα 5.6: Σύγκριση των διαστημάτων εμπιστοσύνης της διασποράς όπως αυτά προκύπτουν από τις 1000 επιμέρους Monte Carlo εκτιμήσεις του πίνακα συνδιασποράς των παραμέτρων, χρησιμοποιώντας τις Προσεγγίσεις I και II με τις αντίστοιχες πραγματικές διασπορές (— · —) [Τα κουτιά αντιστοιχούν στο δειγματικό μέσο $\pm$ δύο τυπικές αποκλίσεις].

συμφωνία με την πραγματική διασπορά (οριζόντια — · — γραμμή - διαγώνια στοιχεία του πίνακα $P(\theta_2^0)$, όπως αυτός προκύπτει από την Πρόταση 5.2). Επιπροσθέτως, και στις δύο Προσεγγίσεις, η πραγματική διασπορά των παραμέτρων περιέχεται στα εκτιμώμενα δειγματικά διαστήματα εμπιστοσύνης. Τα αποτελέσματα αυτά καταδεικνύουν τη συνέπεια της προτεινόμενης εκτιμήτριας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην Προσέγγιση II, ο δειγματικός μέσος της διασποράς είναι πιο κοντά [λιγότερη μεροληψία (bias)], από ότι ο αντίστοιχος της Προσέγγισης I. Επίσης τα διαστήματα εμπιστοσύνης, όπως αυτά προκύπτουν από την Προσέγγιση II, είναι στενότερα αυτών της Προσέγγισης I. Τα αποτελέσματα αυτά είναι αναμενόμενα, διότι η Προσέγγιση II, αν και πιο απαιτητική στην υλοποίησή της, θεωρείται ακριβέστερη της Προσέγγισης I.

5.8 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίστηκε το γενικό πρόβλημα της εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Ως εκ τούτου μελετήθηκε η συνέπεια της NLR εκτιμήτριας και εξάχθηκαν οι αναγκαίες

και ικανές συνθήκες για την επίτευξη αυτής. Επί τη βάση αυτών των θεωρητικών αποτελεσμάτων, αποδείχθηκε η ασυμπτωτική κανονικότητα της εκτιμήτριας και δόθηκε η μαθηματική έκφραση του πίνακα της ασυμπτωτικής συνδιασπορά των παραμέτρων. Κατόπιν τούτου προτάθηκε κατάλληλη εκτιμήτρια για τον πίνακα αυτόν και επιδείχθηκε η συνέπεια της. Όλα τα παραπάνω θεωρητικά αποτελέσματα επιβεβαιώθηκαν αριθμητικώς, μέσω κατάλληλων διαδικασιών Monte Carlo.

Τα βασικά συμπεράσματα του κεφαλαίου συνοψίζονται ως εξής (βλέπε ερωτήματα στην εισαγωγή του κεφαλαίου):

- Οι παράμετροι του συστήματος μπορούν να ανακτηθούν επί τη βάση πειραματικών μετρήσεων, κάτω από γενικές και εύκολα εφαρμόσιμες υποθέσεις και συνθήκες σχετικά με τη δομή του μοντέλου και τη διέγερση αυτού και χαλαρές υποθέσεις για τον προστιθέμενο μετρητικό θόρυβο.
- Οι εκτιμήσεις βελτιώνονται με αύξηση του αριθμού των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τους σκοπούς της εκτίμησης και συγκλίνουν (ασυμπτωτικά) στις πραγματικές παραμέτρους του συστήματος.
- Η ευαισθησία των εκτιμήσεων στο μετρητικό θόρυβο μπορεί να καθοριστεί από τον πίνακα ασυμπτωτικής συνδιασποράς των παραμέτρων.
- Η ποσοτικοποίηση των σφαλμάτων λόγω του προστιθέμενου θορύβου μπορεί να υλοποιηθεί βάσει της εκτίμησης του πίνακα συνδιασποράς των εκτιμήσεων. Η διαδικασία αυτή κρίνεται ως αξιόπιστη, διότι η εκτίμηση αυτή αποδείχθηκε συνεπής.

Το γενικό συμπέρασμα του κεφαλαίου είναι ότι υπό σχετικά χαλαρές υποθέσεις και συνθήκες, η NLR παρέχει αξιόπιστη εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Α' Παράρτημα: Απόδειξη Συνέπειας της NLR Εκτιμήτριας

Προκειμένου να αποδειχθεί η συνέπεια της NLR εκτιμήτριας, απαιτούνται μερικά βοηθητικά λήμματα, τα οποία παρατίθενται στη συνέχεια. Το πρώτο εξ αυτών περιγράφει μερικούς νόμους μεγάλων αριθμών (Laws of Large Numbers) σχετικά με τον προστιθέμενο μετρητικό θόρυβο, όπως αυτός περιγράφεται από την Υπόθεση 5.1.

Λήμμα 5.2 (LLN) Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{\epsilon(t) : t = 1, \dots, N\}$, οι οποίες υπόκεινται στην Υπόθεση 5.1. Τότε:

$$plim \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(t) \right) = 0, \quad \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E|\epsilon(t)| = O(1) \quad (5.28)$$

$$plim \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\epsilon^2(t) - E\epsilon^2(t)) \right) = 0 \quad (5.29)$$

όπου ο O συμβολισμός δηλώνει: $f(x) = O(g(x)) \implies \lim_{N \rightarrow \infty} |f(x)/g(x)| < \infty$ [11, σελ. xiv]. $\square$

Απόδειξη: Εφόσον το $H_t(\mathcal{B})$ ανήκει στην οικογένεια των ομοιόμορφα ευσταθών φίλτρων, τότε ισχύει το ακόλουθο [11, σελ. 20]:

$$|h_t(r)| \leq h(r), \quad \forall t = 1, 2, \dots, \sum_{r=0}^{\infty} h(r) < \infty \quad (5.30)$$

Επομένως, κατόπιν μερικών αλγεβρικών πράξεων $[\forall t = 1, 2, \dots]^{10}$:

$$\sum_{r=t}^{\infty} |h_r(r-t)| \leq \sum_{r=0}^{\infty} h(r) < \infty \implies \sum_{r=t}^{\infty} h_r(r-t) < \infty \quad (5.31)$$

Τώρα λαμβάνεται υπόψη το ακόλουθο (βλέπε Υπόθεση 5.1), το οποίο μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις καταλήγει στο εξής:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(t) = \frac{1}{N} \left[w(1) \cdot \sum_{r=1}^N h_r(r-1) + \dots + w(t) \cdot \sum_{r=t}^N h_r(r-t) + \dots \right] = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \bar{w}(t) \quad (5.32)$$

όπου $\bar{w}(t) \triangleq w(t) \cdot \sum_{r=t}^N h_r(r-t)$.

Τα στοιχεία που αθροίζονται στην Εξ. (5.32), δηλαδή τα $\bar{w}(t)$, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή και διασπορά [λόγω της Εξ. (5.31)]:

$$E\bar{w}(t) = 0, \quad \sigma_{\bar{w}}^2(t) = \left(\sum_{r=t}^N h_r(r-t) \right)^2 \cdot \sigma_w^2(t) < \infty \quad (5.33)$$

¹⁰Εφόσον $h(r) \geq 0$ και το άπειρο άθροισμα $\sum_{r=0}^{\infty} h(r) < \infty$, τότε $\sum_{r=0}^{\infty} |h_t(r)| < \infty$. Επομένως, το άπειρο άθροισμα $\sum_{r=0}^{\infty} h_t(r)$ συγκλίνει κατά απόλυτη τιμή, οπότε $\sum_{r=0}^{\infty} h_t(r) < \infty$

Επομένως, σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα του Kolmogorov ¹¹[115, σελ.114] (σημειώνεται ότι εφόσον η $\sigma_w^2(t)$ είναι φραγμένη [Εξ. (5.33)], τότε $\sum_{t=1}^{\infty} \sigma_w^2(t)/t^2 < \infty$):

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\bar{w}(t) - E\bar{w}(t)) \rightarrow 0 \text{ με πιθανότητα ένα (w.p.1) όταν } N \rightarrow \infty \quad (5.34)$$

και επομένως λόγω των Εξ. (5.32) - (5.33) [υπενθυμίζεται ότι η σύγκλιση με πιθανότητα ένα ¹² $\Rightarrow$ σύγκλιση κατά πιθανότητα (in probability - (i.p)[115, σελ.110]]:

$$\text{plim} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(t) \right) = 0 \quad (5.35)$$

Τώρα λαμβάνεται υπόψη [υπό το καθεστώς της Εξ. (5.5) της Υπόθεσης 5.1] ότι $\forall t$:

$$E\epsilon^2(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h_t^2(r) \cdot \sigma_w^2(t-r) \leq \sup_t \sigma_w^2(t) \sum_{r=0}^{\infty} h^2(r) < \infty \quad (5.36)$$

εφόσον αφενός $E\{w(t_1) \cdot w(t_2)\} = 0$ για $t_1 \neq t_2$ (ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές) και η $w(t)$ έχει φραγμένες τέσσερις πρώτες στατιστικές ροπές ($\sigma_w^2(t) \leq \sup_t \sigma_w^2(t) < \infty, \forall t$), και αφετέρου $\sum_{r=0}^{\infty} h(r) < \infty$ (οικογένεια ομοιόμορφα ευσταθών φίλτρων).

Εφόσον η $E\epsilon^2(t)$ είναι φραγμένη [Εξ. (5.36)], τότε $E\epsilon^2(t) \leq \sup_t \{E\epsilon^2(t)\} < \infty$. Αν ληφθεί τώρα υπόψη η ανισότητα Holder [115, σελ.149], δηλαδή ότι $E|\epsilon(t)| \leq \sqrt{E\epsilon^2(t)}$, τότε (και σύμφωνα με τα παραπάνω) ισχύει $\forall N$ το ακόλουθο συμπέρασμα:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E|\epsilon(t)| \leq \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sqrt{E\epsilon^2(t)} \leq \sqrt{\sup_t \{E\epsilon^2(t)\}} < \infty \implies \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E|\epsilon(t)| = O(1) \quad (5.37)$$

Η απόδειξη του τρίτου σκέλους [Εξ. (5.29)] του Λήμματος 5.2 προκύπτει απευθείας από το θεώρημα 2.3 από το βιβλίο του Ljung [11, σελ. 34-35]¹³. $\square$

Το δεύτερο λήμμα αποδεικνύει ότι το πραγματικό διάνυσμα των παραμέτρων, $\theta_{M^o}^o$, είναι ο *αναγνωριστικά μοναδικός ελαχιστοποιητής (identifiably unique minimizer)*¹⁴ [13, σελ.16] της προσδοκώμενης συνάρτησης κόστους, $EQ_N(\theta_{M^o})$. Το εν λόγω λήμμα αναφέρεται στην αναγνωρισσιμότητα του

¹¹Πρώτο θεώρημα Kolmogorov: Έστω $\{x(t) : t = 1, 2, \dots, N\}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή $E\{x(t)\} = \mu_t$ και διασπορά $V\{x(t)\} = \sigma_t^2$. Τότε $\sum_{t=1}^{\infty} \sigma_t^2/t^2 < \infty \implies \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mu_t \rightarrow 0$ με πιθανότητα ένα καθώς $N \rightarrow \infty$ [115, σελ. 114].

¹²Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{x(t) : t = 1, 2, \dots, N\}$ συγκλίνει με πιθανότητα ένα (w.p.1) καθώς $N \rightarrow \infty$, αν $\forall \lambda > 0, \lim_{N \rightarrow \infty} P\{\sup_{n \geq N} |x(t) - c| > \lambda\} = 0$, όπου με $Pr\{\cdot\}$ συμβολίζεται η αντίστοιχη πιθανότητα.

¹³ Θεώρημα 2.3: Έστω ότι η $\{s(t)\}$ είναι μία ψευδοστάσιμη διεργασία. Επίσης έστω ότι $Es(t) = m(t)$. Επιπλέον ας υποθεθεί ότι: $s(t) - m(t) = v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h_t(r)w(t-k) = H_t(\mathcal{B})w(t)$, όπου $\{w(t)\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή, $Ew^2(t) = \sigma_t^2$ και φραγμένες τέσσερις πρώτες στατιστικές ροπές, ενώ επίσης το $\{H_t(\mathcal{B}) : t = 1, 2, \dots\}$ ανήκει στην οικογένεια των ομοιόμορφα ευσταθών φίλτρων. Σύμφωνα λοιπόν με όλα τα παραπάνω ισχύει η ακόλουθη στατιστική σύγκλιση με πιθανότητα ένα καθώς το N τείνει στο ∞ : $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [s(t)v(t-\tau) - Es(t)v(t-\tau)] \rightarrow 0$.

¹⁴Ορισμός του μοναδικά αναγνωρίσιμου ελαχιστοποιητή: Για μια δεδομένη ακολουθία συναρτήσεων $\bar{Q}_N : T \times B \rightarrow \mathcal{R}$ και μια δεδομένη (μη στοχαστική) ακολουθία $\bar{\tau} \in T$, η ακολουθία των ελαχιστοποιητών $\bar{\beta}_n$ της $\bar{Q}_N(\bar{\tau}, \beta)$ ονομάζεται

μοντέλου και δηλώνει ότι το ολικό ελάχιστο της $EQ_N(\theta_{M^o})$, ως προς το θ_{M^o} επιτυγχάνεται μόνο από το διάνυσμα των πραγματικών παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$. Στην ουσία το παρακάτω Λήμμα αποτελεί μια μαθηματική γενίκευση της Πρότασης 4.2 (Κεφάλαιο 4).

Λήμμα 5.3 (Αναγνωριστική Μοναδικότητα του $\theta_{M^o}^o$) Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις ο ελαχιστοποιητής της $EQ_N(\theta_{M^o})$, έστω $\bar{\theta}_{M^o, N}$, είναι αναγνωριστικά μοναδικός με $\bar{\theta}_{M^o, N} \equiv \bar{\theta}_{M^o} \equiv \theta_{M^o}^o$ αν και μόνο αν το πραγματικό σύστημα υπόκειται στις Υποθέσεις 3.2 – 3.3 και στις Συνθήκες C1 – C3. $\square$

Απόδειξη: Ο ελαχιστοποιητής $\bar{\theta}_{N, M^o}$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: $f(t, \bar{\theta}_{N, M^o}) = f(t, \theta_{M^o}^o)$, $\forall t$ (η συνθήκη αυτή είναι ικανή και αναγκαία, βλέπε Πρόταση 4.1 – Κεφάλαιο 4). Εντούτοις σύμφωνα με τη Ιδιότητα 3.11 (Κεφάλαιο 3) η παραπάνω ισότητα συνεπάγεται $\bar{\theta}_{N, M^o} \equiv \theta_{M^o}^o$ αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα οι Υποθέσεις 3.2 – 3.3 και οι Συνθήκες C0 – C3. Επομένως στην περίπτωση αυτή ο ελαχιστοποιητής είναι ανεξάρτητος του αριθμού των δεδομένων N , άρα: $\bar{\theta}_{N, M^o} = \bar{\theta}_{M^o} \equiv \theta_{M^o}^o$.

Έστω ο ακόλουθος χώρος: $\tilde{\Theta}_{M^o} \triangleq \{\theta_{M^o} \in \Theta_{M^o} : d_{\theta_{M^o}}(\theta_{M^o}^o, \theta_{M^o}) \geq \lambda\} \subset \Theta_{M^o}$ (ο χώρος αυτός είναι φραγμένος λόγω της Υπόθεσης 3.1). Εφόσον το $\theta_{M^o}^o$ είναι ο μοναδικός ελαχιστοποιητής της $EQ_N(\theta_{M^o})$, τότε $\forall \lambda > 0$ και $\forall N$ επαρκούντως μεγάλο ισχύει το ακόλουθο:

$$\inf_{\tilde{\Theta}_{M^o}} EQ_N(\theta_{M^o}) - EQ_N(\theta_{M^o}^o) > 0 \implies \liminf_{N \rightarrow \infty} \left[\inf_{\tilde{\Theta}_{M^o}} EQ_N(\theta_{M^o}) - EQ_N(\theta_{M^o}^o) \right] > 0 \quad (5.38)$$

Επομένως το $\theta_{M^o}^o$ είναι ο αναγνωριστικά μοναδικός ελαχιστοποιητής της $EQ_N(\theta_{M^o})$. $\square$

Στη συνέχεια δίδεται η απόδειξη της συνέπειας της NLR εκτιμήτριας, η οποία βασίζεται στο Λήμμα 3.1 το οποίο παρουσιάζεται στο βιβλίο των Rötcher and Prucha [13, σελ.17]¹⁵. Προκειμένου να μπορεί να εφαρμοστεί το συγκεκριμένο λήμμα χρειάζονται τα ακόλουθα:

- Η $Q_N(\theta_{M^o})$ υπακούει σε ένα ασθενές ομοιόμορφο νόμο μεγάλων αριθμών (a weak Uniform

μοναδικά αναγνωρίσιμη αν $\forall \lambda > 0$:

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \left[\inf_{\{\beta \in B : d_{\theta}(\beta_N, \beta) \geq \lambda\}} \bar{Q}_N(\bar{\tau}, \beta) - \bar{Q}_N(\bar{\tau}, \bar{\beta}_N) \right] > 0$$

όπου με $\inf$ (infimum) ορίζεται το ανώτερο κάτω όριο (για παράδειγμα: Έστω $S \triangleq \{x \in \mathcal{R} : 0 < x < 1\}$ τότε $\inf_S \{x\} = 0$) και με $\liminf$ το όριο του ανώτερου κάτω ορίου όταν το $N \rightarrow \infty$ (δηλαδή αν $\{x(t) : t = 1, 2, \dots, N\}$ μία ακολουθία τότε: $\liminf_{N \rightarrow \infty} x(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq N} x(m))$). Με d_{θ} ορίζεται κατάλληλη συνάρτηση μέτρου (distance function).

¹⁵Λεμμα 3.1: Έστω ότι $Q(\theta_{M^o, N})$ και $EQ(\theta_{M^o, N})$ είναι δύο ακολουθίες συναρτήσεων έτσι ώστε: $\sup_{\Theta} |Q_N(\theta_{M^o, N}) - EQ_N(\theta_{M^o, N})| \rightarrow 0$ w.p.1 [i.p.] καθώς $N \rightarrow \infty$ (ομοιόμορφη στατιστική σύγκλιση). Έστω ότι $\bar{\theta}_{M^o, N}$ είναι ένας αναγνωριστικά μοναδικός ελαχιστοποιητής της $EQ_N(\theta_{M^o, N})$, τότε για οποιοδήποτε ακολουθία $\hat{\theta}_{M^o, N}$ τέτοια ώστε να ισχύει: $Q_N(\hat{\theta}_{M^o, N}) = \inf_{\Theta} Q_N(\theta_{M^o, N})$, προκύπτει ότι $d_{\Theta}(\hat{\theta}_{M^o, N}, \bar{\theta}_{M^o, N}) \rightarrow 0$ w.p.1 [i.p.] καθώς $N \rightarrow \infty$.

Law of Large Numbers - ULLN) $\forall \theta_{M^o} \in \Theta_{M^o}$, δηλαδή:

$$\text{plim} \left\{ \sup_{\Theta_{M^o}} |Q_N(\theta_{M^o}) - EQ_N(\theta_{M^o})| \right\} = 0 \quad (5.39)$$

- Ο ελαχιστοποιητής της $EQ_N(\theta_{M^o})$, δηλαδή ο $\bar{\theta}_{M^o, N}$, είναι αναγνωριστικά μοναδικός.

Απόδειξη Πρότασης 5.1 (Συνέπεια της NLR Εκτιμήτριας)

Ο ομοιόμορφος νόμος μεγάλων αριθμών (ULLN) μπορεί να προκύψει από το Επακόλουθο (Corollary) 3.1 όπως αυτό προτάθηκε από τον Newey¹⁶ [106]. Σύμφωνα με αυτό υπάρχουν τρία σκέλη προς επιβεβαίωση. Στο πρώτο απαιτείται συμπαγής χώρος παραμέτρων, απαίτηση που εκπληρώνεται από την Υπόθεση 3.1.

Στο δεύτερο σκέλος απαιτείται η συνάρτηση κόστους να εκπληρεί έναν ασθενές σημειακό νόμο μεγάλων αριθμών (weak LLN: $\text{plim} \{Q_N(\theta_{M^o}) - EQ_N(\theta_{M^o})\} = 0$). Η απαίτηση αυτή μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ισχύει με τη βοήθεια του Λήμματος 5.2 των Εξ. (4.3) - (4.5) και της Υποθέσεως 5.1, ως εξής:

$$\begin{aligned} & \text{plim} \{Q_N(\theta_{M^o}) - EQ_N(\theta_{M^o})\} = \\ & = \text{plim} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\epsilon^2(t) - E\epsilon^2(t)) \right\} + \text{plim} \left\{ \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N (f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_{M^o})) \cdot (\epsilon(t) - E\epsilon(t)) \right\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Λόγω της Εξ. (5.5) ισχύει:

$$\bar{\epsilon}(t) \triangleq (f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_{M^o})) \cdot \epsilon(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \bar{h}_t(r) \cdot w(t-r) \quad (5.41)$$

$$\text{όπου: } \bar{h}_t(r) = (f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_{M^o})) \cdot h_t(r) \quad (5.42)$$

Επειδή η ποσότητα $(f(t, \theta_{M^o}^o) - f(t, \theta_{M^o}))$ είναι φραγμένη (Ιδιότητα 3.8), η ακολουθία $\bar{\epsilon}(t)$ προκύπτει ως το αποτέλεσμα του φιλτραρίσματος μίας ακολουθίας ανεξάρτητων μεταβλητών $w(t)$ μέσω ενός ομοιόμορφα ευσταθούς φίλτρου με συντελεστές $\bar{h}_t(r)$ ($r = 0, 1, 2, \dots$). Συνεπώς η Εξ. (5.40) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\text{plim} \{Q_N(\theta_{M^o}) - EQ_N(\theta_{M^o})\} = \text{plim} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\epsilon^2(t) - E\epsilon^2(t)) \right\} + \text{plim} \left\{ \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N (\bar{\epsilon}(t) - E\bar{\epsilon}(t)) \right\} \quad (5.43)$$

¹⁶Επακόλουθο 3.1: Έστω Θ_{M^o} συμπαγής χώρος και $\text{plim} \{Q_N(\theta_{M^o}) - EQ_N(\theta_{M^o})\} = 0$ (σημειακός νόμος μεγάλων αριθμών), όπου $Q_N(\theta_{M^o}) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N q(t, \theta_{M^o})$. Επιπλέον ας υποτεθεί ότι υπάρχει $b_t(z_t)$ και μια συνάρτηση $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, με $h(0) = 0$, η οποία είναι συνεχής στο μηδέν (για παράδειγμα: $h(d) = d^a, a > 0$), τέτοια ώστε: $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E\{b_t(z_t)\} = O(1)$ και $|q(t, \theta_{M^o}) - q(t, \bar{\theta}_{M^o})| \leq b_t(z_t) \cdot h(d_{\Theta_{M^o}}(\theta_{M^o}, \bar{\theta}_{M^o}))$ (Συνθήκη Lipschitz) $\forall \theta_{M^o}, \bar{\theta}_{M^o} \in \Theta_{M^o}$. Τότε $\text{plim} \left\{ \sup_{\Theta_{M^o}} |Q_N(\theta_{M^o}) - EQ_N(\theta_{M^o})| \right\} = 0$ (ομοιόμορφος νόμος μεγάλων αριθμών). Σημειώνεται ότι με z_t συμβολίζονται τα δεδομένα.

Όμως $E\bar{\epsilon}(t) = 0$ και σύμφωνα με το Λήμμα 5.2 [Εξ. (5.28)] προκύπτει ότι: $\text{plim}\{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \bar{\epsilon}(t)\} = 0$. Επιπλέον το πρώτο μέλος των αθροιζόμενων της Εξ. (5.43) είναι μηδέν λόγω του Λήμματος 5.2 [Εξ. (5.29)]. Επομένως:

$$\text{plim}\{Q_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}) - EQ_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o})\} = 0 \quad (5.44)$$

Στο τρίτο και τελευταίο σκέλος πρέπει να γίνει επιβεβαίωση μίας συνθήκης Lipschitz, στην οποία πρέπει να υπακούν τα τμήματα, έστω $q(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o})$, που αθροίζονται στην Εξ. (4.3) [δηλαδή: $q(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}) \triangleq e^2(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}) = (y(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) - f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}))^2$]. Ας υποθεθεί ότι $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o}, \boldsymbol{\theta}_{M^o} \in \Theta_{M^o}$ και ας ληφθεί υπόψη η απόλυτη διαφορά: $|q(t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o}) - q(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o})|$, η οποία γίνεται λόγω των Εξ. (4.1) και (4.2):

$$|q(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}) - q(t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o})| \leq (2 \cdot |\epsilon(t)| + 2 \cdot |f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)| + |f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o})| + |f(t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o})|) \cdot |f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}) - f(t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o})| \quad (5.45)$$

η οποία με τη σειρά της γίνεται λόγω της Εξ. (3.29) και της Ιδιότητας 3.9 $[\forall t = t_{cr}, t_{cr} + 1, \dots, N]$:

$$|q(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}) - q(t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o})| \leq \underbrace{(2 \cdot |\epsilon(t)| + 2 \cdot C)}_{b(t)} \cdot \underbrace{C \cdot d_{\boldsymbol{\theta}_{M^o}}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o})}_{h(\cdot)} \quad (5.46)$$

Προφανώς, $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h(0) = 0$, όπως επίσης η h είναι συνεχής στο μηδέν. Λόγω αυτού, η Εξ. (5.46) γίνεται:

$$|q(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}) - q(t, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o})| \leq b(t) \cdot h(d_{\boldsymbol{\theta}_{M^o}}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{M^o})) \quad (5.47)$$

Η Εξ. (5.47) δίνει μία συνθήκη Lipschitz, για την οποία ισχύει [λόγω του Λήμματος 5.2]:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Eb(t) = O(1) \quad (5.48)$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει και το απαιτούμενο τρίτο σκέλος, επομένως ισχύει ο απαιτούμενος ομοιόμορφος νόμος μεγάλων αριθμών.

Το παραπάνω αποτέλεσμα, σε συνδυασμό με τη αναγνωριστικά μοναδικότητα του ελαχιστοποιητή της $EQ_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o})$ (Λήμμα 5.3), δηλώνει ότι όλες οι απαιτήσεις του Λήμματος 3.1, το οποίο παρέχεται από τους Rötcher και Prucha [13, σελ.17], πληρούνται. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται η συνέπεια της εκτιμήτριας.

Σημείωση: Οι Υποθέσεις 3.2 - 3.3 και οι Συνθήκες C1 - C3 είναι, εκτός από ικανές, και αναγκαίες για την επίτευξη της αναγνωριστικά μοναδικότητας, δηλώνονται με τον τρόπο αυτό και την αναγκαιότητα του για την επίτευξη της συνέπειας. $\square$

Β' Παράρτημα: Απόδειξη Ασυμπτωτικής Κανονικότητας της NLR Εκτιμήτριας

Το παρόν παράρτημα αφιερώνεται στην απόδειξη της ασυμπτωτικής κανονικότητας της εκτιμήτριας. Για το σκοπό αυτό απαιτούνται μερικά βοηθητικά λήμματα, τα οποία παρουσιάζονται και αποδεικνύονται στη συνέχεια και πριν τη βασική απόδειξη της ασυμπτωτικής κανονικότητας.

Το Λήμμα 5.4, το οποίο εξάγεται απευθείας από την Υπόθεση 3.1, αναφέρεται στις συνοριακές ιδιότητες του μοντέλου.

Λήμμα 5.4 Υπό το καθεστώς της Υποθέσεως 3.1, όλα τα στοιχεία του ακόλουθου διανύσματος:

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}) \triangleq \frac{\partial f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{M^o}} = [\delta_1(t) \dots \delta_{M^o}(t) : k_1 \cdot \delta'_1(t) \dots k_{M^o} \cdot \delta'_{M^o}(t)]^T \quad (5.49)$$

είναι φραγμένα κατά απόλυτη τιμή από έναν αυθαίρετα μεγάλο, άλλα πεπερασμένο, θετικό αριθμό $c_{max} < \infty$, $\forall \boldsymbol{\theta}_{M^o} \in \Theta_{M^o}$ και $\forall t$. □

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει απευθείας από το γεγονός ότι $|\delta_i(t)| \leq \Delta_i$ ($\forall i$), την Υπόθεση 3.1 και την Ιδιότητα 3.3. □

Το Λήμμα που ακολουθεί χρησιμοποιείται για την απόδειξη της συνέπειας της εκτιμήτριας του πίνακα ασυμπτωτικής συνδυασφοράς των εκτιμήσεων. Δηλώνει ότι οι εκτιμώμενη παραμόρφωση ελατηρίου του εκάστοτε τελεστή, $\hat{\delta}_{i,N}(t)$, η πρώτη παράγωγος αυτής ως προς το αντίστοιχο κατώφλι, $\hat{\delta}'_{i,N}(t)$ [$\forall i = 1, \dots, M^o$], καθώς και η απόκριση του εκτιμώμενου μοντέλου, $f(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o,N})$ συγκλίνουν κατά πιθανότητα (i.p) $\forall t \geq t_{cr}$ και καθώς το $N \rightarrow \infty$ στις αντίστοιχες πραγματικές. Είναι προφανές ότι οι προαναφερθείσες εκτιμήσεις προκύπτουν μέσω αντικατάστασης των εκτιμώμενων παραμέτρων στις Εξ. (3.5), (3.20) και (3.6), αντίστοιχα.

Λήμμα 5.5 Ας υποτεθεί ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1. Επιπλέον έστω ότι υπάρχει μία συνεπής εκτιμήτρια, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o,N} \triangleq [\hat{k}_{1,N} \dots \hat{k}_{M^o,N} \hat{\Delta}_{1,N} \dots \hat{\Delta}_{M^o,N}]^T$, του διανύσματος των πραγματικών παραμέτρων, $\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o$. Τότε [$\forall i = 1, \dots, M^o$] ισχύουν τα ακόλουθα:

$$plim\{\hat{\delta}_{i,N}(t)\} = \delta_i^o(t), \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (5.50)$$

$$plim\{\hat{\delta}'_{i,N}(t)\} = \delta_i'^o(t), \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (5.51)$$

$$plim\{f(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o,N})\} = f(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o), \quad \forall t \geq t_{cr} \quad (5.52)$$

όπου με $\delta_i^o(t)$ και $\delta_i'^o(t)$ συμβολίζονται αντίστοιχα η πραγματική παραμόρφωση του i -στού τελεστή και η πρώτη παράγωγος αυτής ως προς το κατώφλι του. □

Απόδειξη: Η απόδειξη του εν λόγω λήμματος θα βασιστεί απευθείας στον ορισμό της σύγκλισης κατά πιθανότητα (*i.p.*).

Το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από το διάνυσμα παραμέτρων $\theta_{M^o}^o \in \Theta_{M^o}$. Έστω ένα τυχαίο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με διάνυσμα παραμέτρων τέτοιο ώστε $\theta_{M^o} \in \Theta_{M^o}$. Επιπλέον ας υποθεθεί ότι και τα δύο παραπάνω μοντέλα διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$, έτσι ώστε η συνθήκη $C0$ να ικανοποιείται από το πραγματικό σύστημα t_{cr} . Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει απευθείας ότι $\forall i = 1, \dots, M^o$ [Εξ. (3.5), (3.6) και (3.21)]:

$$\text{Αν } |\delta_i(t) - \delta_i^o(t)| \neq 0 \text{ (για μία χρονική στιγμή } t \geq t_{cr}), \quad \text{τότε } \Delta_i \neq \Delta_i^o \quad (5.53)$$

$$\text{Αν } |\delta'_i(t) - \delta'^o_i(t)| \neq 0 \text{ (για μία χρονική στιγμή } t \geq t_{cr}), \quad \text{τότε } \Delta_i \neq \Delta_i^o \quad (5.54)$$

$$\text{Αν } |f(t, \theta_{M^o}) - f(t, \theta_{M^o}^o)| \neq 0 \text{ (για μία χρονική στιγμή } t \geq t_{cr}), \quad \text{τότε } \theta_{M^o} \neq \theta_{M^o}^o \quad (5.55)$$

Είναι προφανές ότι το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές [για παράδειγμα $\theta_{M^o} \neq \tilde{\theta}_{M^o}$ δε συνεπάγεται πάντα ότι $f(t, \theta_{M^o}) \neq f(t, \tilde{\theta}_{M^o})$]. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες διέγερσης (Συνθήκες $C1 - C3$ - βλέπε Ιδιότητα 3.11 - Κεφάλαιο 3).

Οι Εξ. (5.53) - (5.55) δηλώνουν ότι $\forall \xi_i, \psi_i, \omega_i > 0$ αυθαίρετα μικρά, υπάρχουν $\kappa(\xi_i), \lambda(\psi_i), \mu(\omega_i) > 0$ τέτοια ώστε ($\forall i = 1, \dots, M^o$ και $\forall t \geq t_{cr}$):

$$|\delta_i(t) - \delta_i^o(t)| > \xi_i \implies |\Delta_i - \Delta_i^o| > \kappa(\xi_i) \quad (5.56)$$

$$|\delta'_i(t) - \delta'^o_i(t)| > \phi_i \implies |\Delta_i - \Delta_i^o| > \lambda(\psi_i) \quad (5.57)$$

$$|f(t, \theta_{M^o}) - f(t, \theta_{M^o}^o)| > \omega_i \implies \|\theta_{M^o} - \theta_{M^o}^o\| > \mu(\omega_i) \quad (5.58)$$

Επιλέγεται $\varepsilon > 0$ αυθαίρετα μικρό έτσι ώστε $\varepsilon < \inf\{\kappa(\xi_i), \lambda(\psi_i), \mu(\omega_i)\}$. Επομένως οι Εξ. (5.56) - (5.58) μπορούν να γραφτούν ως:

$$|\delta_i(t) - \delta_i^o(t)| > \xi_i \implies |\Delta_i - \Delta_i^o| > \varepsilon \quad (5.59)$$

$$|\delta'_i(t) - \delta'^o_i(t)| > \phi_i \implies |\Delta_i - \Delta_i^o| > \varepsilon \quad (5.60)$$

$$|f(t, \theta_{M^o}) - f(t, \theta_{M^o}^o)| > \omega_i \implies \|\theta_{M^o} - \theta_{M^o}^o\| > \varepsilon \quad (5.61)$$

Εφόσον $\hat{\theta}_{M^o, N} \in \Theta_{M^o}$, αντικαθίσταται το θ_{M^o} με το εκτιμώμενο διάνυσμα των παραμέτρων $\hat{\theta}_{M^o, N}$, και σύμφωνα με αυτό υπολογίζονται οι στοχαστικές ποσότητες $\hat{\delta}_{i, N}(t)$, $\hat{\delta}'_{i, N}(t)$ και $f(t, \hat{\theta}_{M^o, N})$.

Τότε ¹⁷:

$$Pr \left\{ |\hat{\delta}_{i,N}^o(t) - \delta_i^o(t)| > \xi_i \right\} \leq Pr \left\{ |\hat{\Delta}_{i,N} - \Delta_i^o| > \varepsilon \right\} \quad (5.62)$$

$$Pr \left\{ |\hat{\delta}_{i,N}'(t) - \delta_i^{o'}(t)| > \phi_i \right\} \leq Pr \left\{ |\hat{\Delta}_{i,N} - \Delta_i^o| > \varepsilon \right\} \quad (5.63)$$

$$Pr \left\{ |f(t, \hat{\theta}_{M^o,N}) - f(t, \theta_{M^o}^o)| > \omega_i \right\} \leq Pr \left\{ \|\hat{\theta}_{M^o,N} - \theta_{M^o}^o\| > \varepsilon \right\} \quad (5.64)$$

όπου με $Pr\{\cdot\}$ συμβολίζεται η αντίστοιχη πιθανότητα. Όμως έχει υποθεθεί ότι η $\hat{\theta}_{M^o,N}$ είναι συνεπής εκτίμηση του $\theta_{M^o}^o$. Επομένως και σύμφωνα με το ορισμό της σύγκλισης κατά πιθανότητα, τα δεξιά τμήμα των Εξ. 5.62 – 5.64 συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το $N \rightarrow \infty$. Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι και τα αριστερά τμήματα των παραπάνω εξισώσεων συγκλίνουν στο μηδέν και αυτό αποδεικνύει τις Εξ. (5.50) – (5.52). $\square$

Το επόμενο Λήμμα παρέχει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ο πίνακας $\Phi_N(\theta_M)$ [Εξ. (5.11)] για $\theta_M = \theta_{M^o}^o$ είναι εκ δεξιών αντιστρέψιμος (right invertible). Αυτό μπορεί να συμβαίνει όταν και μόνο όταν η τάξη του εν λόγω πίνακα είναι $rank\{\Phi_N(\theta_M)\} = 2M^o$ ¹⁸. Η συγκεκριμένη ιδιότητα χρησιμοποιείται προκειμένου να αποδειχθεί ότι ο πίνακας συνδυασφοράς, ο οποίος περιγράφεται από την Εξ. (5.9) [Πρόταση 5.2], είναι αντιστρέψιμος.

Λήμμα 5.6 (Αντιστρεψιμότητα) Έστω ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με διάνυσμα παραμέτρων $\theta_M \in \Theta_M \subset \mathcal{R}^{2M}$, για το οποίο ισχύουν οι Υποθέσεις 3.2 – 3.3 και οι Συνθήκες C0 – C3. Έστω επίσης $\Phi_N(\theta_M)$ ένας πίνακας με διαστάσεις $2M \times N$ (με $2M < N$), ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\Phi_N(\theta_M) \triangleq \begin{bmatrix} \delta_1(1) & \dots & \delta_1(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_M(1) & \dots & \delta_M(N) \\ k_1 \cdot \delta'_1(1) & \dots & k_1 \cdot \delta'_1(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_M \cdot \delta'_M(1) & \dots & k_M \cdot \delta'_M(N) \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Τότε:

(i) Ο πίνακας $\Phi_N(\theta_M) \cdot \Phi_N^T(\theta_M)$ είναι θετικά ορισμένος (positive definite).

(ii) Έστω Σ ($N \times N$) ένας συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας, τότε ο πίνακας $\Phi_N \cdot \Sigma \cdot \Phi_N^T$ είναι θετικά ορισμένος. $\square$

¹⁷Θεωρείται A και B δύο στοχαστικά ενδεχόμενα τέτοια ώστε $A \Rightarrow B$. Επομένως το ενδεχόμενο A προκαλεί το B , αλλά όμως το ενδεχόμενο B μπορεί να προκληθεί ακόμα και αν το A δε συμβεί ποτέ (μονή συνεπαγωγή). Επομένως προκύπτει απευθείας ότι $Pr\{A\} \leq Pr\{B\}$, με $Pr\{\cdot\}$ η αντίστοιχη πιθανότητα [115, σελ.111].

¹⁸Έστω ένας πίνακας A ($2M \times N$). Τότε ο πίνακας $A \cdot A^T$ είναι θετικά ορισμένος (positive definite) αν και μόνο αν ο A είναι εκ δεξιών αντιστρέψιμος (right invertible). Σημειώνεται ότι ο A είναι εκ δεξιών αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $rank A = 2M$ [105, σελ.89].

Απόδειξη: Το ότι ο πίνακας $\Phi_N(\theta_M) \cdot \Phi_N^T(\theta_M)$ είναι θετικά ορισμένος μπορεί να αποδειχθεί με το να δείχθεί ότι ο πίνακας $\Phi_N(\theta_M)$ έχει $2M$ γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές [105, σελ.89]. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί δείχνοντας ότι η μόνη αποδεκτή λύση της ακόλουθης εξίσωσης είναι η μηδενική:

$$\sum_{i=1}^M \left(a_i \cdot \delta_i(t) + \underbrace{b_i \cdot k_i}_{\bar{a}_i} \cdot \delta'_i(t) \right) = 0 \implies a_i = \bar{a}_i = 0 \quad (5.66)$$

Αρχικά ας ληφθεί υπόψη η Συνθήκη $C0$ και η Εξ. (3.20) για τη χρονική στιγμή $t = t_{cr}$. Σύμφωνα με αυτά η Εξ. (5.66) για $t = t_{cr}$ γίνεται:

$$\sum_{i=1}^M (a_i \cdot \Delta_i + \bar{a}_i) = 0 \quad (5.67)$$

Λόγω της συνθήκης $C2$ για $i = M - 1$, $|\delta_M(t_{M-1})| < \Delta_M$ και $\delta_{M-1}(t_{M-1}) = -\delta_{M-1}(t_{e,M})$ ¹⁹. Το παραπάνω σε συνδυασμό με την Ιδιότητα 3.5 και την Υπόθεση 3.3, δηλώνει ότι $\delta_j(t_{M-1}) = -\delta_j(t_{e,M})$, $\forall j = 1, \dots, M - 1$, $\forall \Delta_j \leq \Delta_{M-1}$. Συνεπώς λόγω αυτού και της Ιδιότητας 3.3 προκύπτει [Εξ. (5.66) για $t = t_{M-1}$]:

$$a_M \cdot \delta_M(t_{M-1}) \mp \sum_{i=1}^{M-1} a_i \cdot \Delta_i \mp \left(\sum_{i=1}^{M-1} \bar{a}_i \mp \bar{a}_M \right) = 0 \quad (5.68)$$

στην οποία το αρνητικό [αντίστοιχα: θετικό] πρόσημο αντιστοιχεί σε $\delta_{M-1}(t_{e,M}) = \Delta_{M-1}$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_{M-1}$]. Στη συνέχεια λαμβάνεται υπόψη η Συνθήκη $C3$ για $i = M - 1$ και θεωρείται, σε πρώτη φάση, ότι ισχύει ο άνω κλάδος της εν λόγω Συνθήκης [$C3(c)$]. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και παραπάνω προκύπτει ότι:

$$a_M \cdot \delta_M(t'_{M-1}) \pm \sum_{i=1}^{M-1} a_i \cdot \Delta_i \pm \left(\sum_{i=1}^{M-1} \bar{a}_i + \bar{a}_M \right) = 0 \quad (5.69)$$

στην οποία το θετικό [αντίστοιχα: αρνητικό] πρόσημο αντιστοιχεί σε $\delta_{M-1}(t_{e,M}) = \Delta_{M-1}$ [αντίστοιχα: $= -\Delta_{M-1}$]. Αντίστοιχα αν ληφθεί υπόψη ότι ισχύει ο κάτω κλάδος της Συνθήκης $C3(c)$ προκύπτει ότι:

$$a_M \cdot \delta_M(t'_{M-1}) \mp \sum_{i=1}^{M-1} a_i \cdot \Delta_i \mp \left(\sum_{i=1}^{M-1} \bar{a}_i \mp \bar{a}_M \right) = 0 \quad (5.70)$$

Σε περίπτωση που ισχύει ο άνω κλάδος της Συνθήκης $C3(c)$ [Εξ. (5.69)], τότε αφαιρείται [αντίστοιχα: προστίθεται] η Εξ. (5.67) από την Εξ. (5.69), δίνοντας:

$$a_M \cdot (\delta_M(t'_{M-1}) \mp \Delta_M) = 0 \implies \underline{a_M = 0} \quad (5.71)$$

¹⁹Υπενθυμίζεται ότι το $x(t_{e,M})$ είναι δεσπόζον ακρότατο για τον M -οστό τελεστή, επομένως $\delta_M(t_{e,M}) = \Delta_M$ [ή: $= -\Delta_M$]. Αυτό σε συνδυασμό με την Ιδιότητα 3.5 δηλώνει ότι για όλους τους τελεστές με κατώφλια μικρότερα ή ίσα από το Δ_M (π.χ Δ_{M-1}) πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει ότι $\delta_i(t_{e,M}) = \Delta_i$ [ή: $= -\Delta_i$] με $i = 1, \dots, M - 1$.

λόγω του ότι $|\delta_M(t'_{M-1})| < \Delta_M$ [Συνθήκη $C3(b)$]

Αν τώρα ισχύει ο κάτω κλάδος της Συνθήκης $C3(c)$, τότε λόγω των Συνθηκών $C2(b) - C3(b)$, $|\delta_M(t)| < \Delta_M$, $\forall t = t_{M-1}, t'_{M-1}$, με $x(t_{e,M})$ και $x(t'_{e,M})$ να είναι τα αντίστοιχα MRDE του για αυτές τις χρονικές στιγμές. Επομένως λόγω της Ιδιότητας 3.1:

$$\delta_M(t_{M-1}) = x(t_{M-1}) - x(t_{e,M}) + \delta_M(t_{e,M}) \implies \delta_M(t_{M-1}) = x(t_{M-1}) - x(t_{e,M}) \pm \Delta_M \quad (5.72)$$

$$\delta_M(t'_{M-1}) = x(t'_{M-1}) - x(t'_{e,M}) + \delta_M(t'_{e,M}) \implies \delta_M(t'_{M-1}) = x(t'_{M-1}) - x(t'_{e,M}) \pm \Delta_M \quad (5.73)$$

όπου το θετικό [αντίστοιχα: αρνητικό] πρόσημο αντιστοιχεί σε $slip(+)$ [αντίστοιχα: $(-)$] τη χρονική $t = t_{e,M}$ ή $t = t'_{e,M}$. Τώρα αντικαθίστανται οι Εξ. (5.72) - (5.73) στις Εξ. (5.68) και (5.70), αντίστοιχα. Αν $\delta_M(t_{e,M}) = -\delta_M(t'_{e,M})$ (π.χ ο M -οστός τελεστής $slip(+)$ τη χρονική στιγμή $t_{e,M}$ και $slip(-)$ τη χρονική στιγμή $t'_{e,M}$) τότε προστίθενται οι δύο προκύπτουσες εξισώσεις, αλλιώς αφαιρούνται. Η διαδικασία αυτή δίνει όπως και πριν: $\underline{a_M = 0}$, διότι $x(t_{M-1}) - x(t_{e,M}) \neq \pm(x(t'_{M-1}) - x(t'_{e,M}))$.

Αν όλη η παραπάνω αλγεβρική διαδικασία επαναληφθεί για $i = M-2, \dots, 1$ τότε συμπεραίνεται ότι:

$$a_2 = \dots = a_{M-1} = a_M = 0 \quad (5.74)$$

Κατόπιν του παραπάνω αποτελέσματος, λαμβάνεται τώρα υπόψη η Συνθήκη $C2$ για $t = t_{M-1}, t_{M-2}, \dots, t_1$. Επομένως σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.5, και λόγω της Υποθέσεως 3.3, προκύπτει ότι:

$$\delta_i(t_i) = \Delta_i \text{ [αντίστοιχα : } -\Delta_i] \implies \delta_j(t_i) = \Delta_j \text{ [αντίστοιχα : } -\Delta_j], \forall j \leq i \quad (5.75)$$

$\forall i = 1, \dots, M-1$. Επομένως, η Εξ. (5.66) δίνει διαδοχικά [χρησιμοποιώντας και τα αποτελέσματα της Εξ. (5.74)]:

$$t = t_{M-1} : \quad a_1 \cdot \Delta_1 + \sum_{i=1}^{M-1} \bar{a}_i - \bar{a}_M = 0 \quad (5.76)$$

$$t = t_{M-2} : \quad a_1 \cdot \Delta_1 + \sum_{i=1}^{M-2} \bar{a}_i - \bar{a}_{M-1} - \bar{a}_M = 0 \quad (5.77)$$

$\vdots$

$$t = t_1 : \quad a_1 \cdot \Delta_1 + \bar{a}_1 - \sum_{i=2}^M \bar{a}_i = 0 \quad (5.78)$$

Στη συνέχεια αφαιρούνται διαδοχικά οι παραπάνω εξισώσεις από την Εξ. (5.67), λαμβάνοντας υπόψη την Υπόθεση 3.2, δηλαδή ότι $k_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, M$:

$$\bar{a}_i = 0 \implies b_i = 0, \quad \forall i = 2, \dots, M \quad (5.79)$$

Σύμφωνα με τη Συνθήκη $C1$, η οποία δηλώνει ότι ο πρώτος τελεστής $slip(\pm) \rightarrow stick$ (βλέπε τον Πίνακα 3.2) για τουλάχιστον μία φορά. Ας υποθεθεί ότι η εν λόγω μετάβαση συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t_{e,1} + 1$, συνεπώς [βλέπε Ιδιότητα 3.1]:

$$\delta_1(t_{e,1} + 1) = x(t_{e,1} + 1) - x(t_{e,1}) + \delta_1(t_{e,1}) \quad (5.80)$$

Τώρα ας τεθεί $t = t_{e,1}, t_{e,1} + 1$ στην Εξ. (5.66) και ας αφαιρεθούν οι προκύπτουσες εξισώσεις, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα των Εξ. (5.74) και (5.79):

$$a_1 \cdot (x(t_{e,1} + 1) - x(t_{e,1})) = 0 \implies \underline{a_1 = 0} \quad (5.81)$$

διότι $x(t_{e,1} + 1) \neq x(t_{e,1})$ (σε αντίθετη περίπτωση η Εξ. 5.80 δίνει $\delta_1(t_{e,1} + 1) = \Delta_1$ (ή $-\Delta_1$), το οποίο είναι μη παραδεκτό). Συνδυάζονται τα αποτελέσματα των Εξ. (5.74), (5.79) και (5.81), μαζί με την Υπόθεση 3.2, στην Εξ. (5.66) για $t = t_{e,1}$, προκύπτει ότι $\underline{b_1 = 0}$.

Η απόδειξη του δεύτερου μέρους του Λήμματος 5.6 προκύπτει απευθείας από τα παραπάνω αποτελέσματα και την Πρόταση 8.1.2(xii)²⁰ η οποία παρέχεται στο βιβλίου του Bernstein [105, σελ.240].

Λήμμα 5.7 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα - ΚΟΘ) Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1. Αν ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος υπακούει στην Υπόθεση 5.2, τότε η ακόλουθη στοχαστική ποσότητα:

$$z_N(\theta_{M^o}^o) \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{t=1}^N \epsilon(t) \cdot \varphi(t, \theta_{M^o}^o) \quad (5.82)$$

$$\varphi(t, \theta_{M^o}^o) \triangleq \left[\frac{\partial f(t, \theta_M)}{\partial \theta_M} \right]_{\theta_M = \theta_{M^o}^o} = [\delta_1^o(t) \dots \delta_{M^o}^o(t) : k_1^o \cdot \delta_1^{\prime o}(t) \dots k_{M^o}^o \cdot \delta_{M^o}^{\prime o}(t)]^T \quad (5.83)$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή, δηλαδή:

$$z_N(\theta_{M^o}^o) \in AsN(\mathbf{0}, \bar{P}(\theta_{M^o}^o)), \quad \bar{P}(\theta_{M^o}^o) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \Phi_N(\theta_{M^o}^o) \cdot \Sigma_\epsilon \cdot \Phi_N^T(\theta_{M^o}^o) \right) \quad (5.84)$$

όπου με $\bar{P}_o(\theta_{M^o}^o)$ και Σ_ϵ συμβολίζονται οι αντίστοιχοι πίνακες συνδυασφοράς των παραμέτρων και του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου [Εξ. (5.13)], ενώ ο πίνακας $\Phi_N(\theta_{M^o}^o)$ δίνεται από την Εξ. (5.65).

□

²⁰Έστω $A = \mathbf{0}_{n \times n}$ ο $n \times n$ μηδενικός πίνακας και B ένας πίνακας με διαστάσεις $n \times n$. Αν $A < B$ και S ένας πίνακας με διαστάσεις $m \times n$ με $rank S = m$, τότε $SAS^T < SBS^T$. Σημειώνεται ότι με $B > 0$ δηλώνεται ότι ο συγκεκριμένος πίνακας είναι θετικά ορισμένος [105, σελ. 240].

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στο Λήμμα Β.3 που περιέχεται στο βιβλίο του Söderström και Stoica [112, σελ.550]²¹

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$ [Εξ. (5.83)] είναι καθοριστικό με φραγμένα στοιχεία ($\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o \in \Theta_{M^o} \subset \mathcal{R}^{M^o}$ – Υπόθεση 3.1). Επίσης, $\epsilon(t)$ είναι εξ' ορισμού μια διεργασία ARMA μηδενικής μέσης τιμής (Υπόθεση 5.2). Επομένως, $E\{z_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)\} = \mathbf{0}$.

Ο πίνακας συνδυασποράς, έστω $\bar{\mathbf{P}}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) = E\{z_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) z_N^T(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)\}$, του $z_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$ δίνεται ως εξής (μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) &\triangleq E\{z_o(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) z_N^T(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)\} = \\ &= \underbrace{\frac{\gamma_\epsilon(0)}{N} \sum_{t=1}^N \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t, 0, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)}_{\text{Τμήμα I}} + \underbrace{\sum_{r=1}^{N-1} \frac{\gamma_\epsilon(r)}{N} \sum_{t=1}^{N-r} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t, r, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)}_{\text{Τμήμα II}} + \underbrace{\sum_{r=1}^{N-1} \frac{\gamma_\epsilon(r)}{N} \sum_{t=1}^{N-r} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^T(t, r, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)}_{\text{Τμήμα III}} \end{aligned} \quad (5.85)$$

όπου με $\gamma_\epsilon(r)$ συμβολίζεται η συνάρτηση συνδυασποράς της διεργασίας $\epsilon(t)$ [Εξ. (5.14)] και:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t, r, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) &\triangleq \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \cdot \boldsymbol{\varphi}^T(t+r, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1^o(t) \delta_1^o(t+r) & \dots & \delta_1^o(t) \delta_{M^o}^o(t+r) & \delta_1^o(t) k_1^o \delta_1^o(t+r) & \dots & \delta_1^o(t) k_{M^o}^o \delta_{M^o}^o(t+r) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{M^o}^o(t) \delta_1^o(t+r) & \dots & \delta_{M^o}^o(t) \delta_{M^o}^o(t+r) & \delta_1^o(t) k_1^o \delta_1^o(t+r) & \dots & \delta_{M^o}^o(t) k_{M^o}^o \delta_{M^o}^o(t+r) \\ k_1^o \delta_1^o(t) \delta_1^o(t+r) & \dots & k_1^o \delta_1^o(t) \delta_{M^o}^o(t+r) & k_1^o \delta_1^o(t) k_1^o \delta_1^o(t+r) & \dots & k_1^o \delta_1^o(t) k_{M^o}^o \delta_{M^o}^o(t+r) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{M^o}^o \delta_{M^o}^o(t) \delta_1^o(t+r) & \dots & k_{M^o}^o \delta_{M^o}^o(t) \delta_{M^o}^o(t+r) & k_{M^o}^o \delta_{M^o}^o(t) k_1^o \delta_1^o(t+r) & \dots & k_{M^o}^o \delta_{M^o}^o(t) k_{M^o}^o \delta_{M^o}^o(t+r) \end{bmatrix}}_{[2M^o \times 2M^o]} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Ας σημειωθεί ότι:

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{N-r} \bar{\boldsymbol{\Phi}}(t, r, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1^o(1) & \dots & \delta_1^o(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{M^o}^o(1) & \dots & \delta_{M^o}^o(N) \\ k_1^o \cdot \delta_1^o(1) & \dots & k_1^o \cdot \delta_1^o(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{M^o}^o \cdot \delta_{M^o}^o(1) & \dots & k_{M^o}^o \cdot \delta_{M^o}^o(N) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) [2M^o \times N]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1^o(1+r) & \dots & \delta_{M^o}^o(1+r) & k_1^o \cdot \delta_1^o(1+r) & \dots & k_{M^o}^o \cdot \delta_{M^o}^o(1+r) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^o(N) & \dots & \delta_{M^o}^o(N) & k_1^o \cdot \delta_1^o(N) & \dots & k_{M^o}^o \cdot \delta_{M^o}^o(N) \\ \mathbf{0}_{r \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{r \times 1} & \mathbf{0}_{r \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{r \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_N(r, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) [N \times 2M^o]} \end{aligned} \quad (5.87)$$

²¹ Έστω $\mathbf{X}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \mathbf{z}(t)$, όπου $\mathbf{z}(t)$ είναι μια πολυδιάστατη (διανυσματική) στάσιμη διεργασία μηδενικής μέσης τιμής που προκύπτει ως $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$, όπου $\boldsymbol{\Phi}(t)$ είναι πίνακας και $\mathbf{v}(t)$ διάνυσμα. Τα στοιχεία των $\boldsymbol{\Phi}(t)$ και $\mathbf{v}(t)$ είναι στάσιμες, πιθανόν συσχετιζόμενες, διεργασίες ARMA μηδενικής μέσης τιμής, οι οποίες προκύπτουν από λευκές ακολουθίες με φραγμένες τέσσερις πρώτες στατιστικές ροπές. Τα στοιχεία του $\boldsymbol{\Phi}(t)$ μπορούν να είναι επίσης φραγμένοι καθοριστικοί όροι. Υποθέτοντας ότι ο πίνακας $\mathbf{P} = \lim_{N \rightarrow \infty} E\mathbf{X}_N \cdot \mathbf{X}_N^T$ υπάρχει και είναι μη ενικός, τότε το $\mathbf{X}_N$ ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή, δηλαδή $\mathbf{X}_N \in \mathcal{AN}(0, \mathbf{P})$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^{N-r} \bar{\Phi}_o^T(t, r, \theta_{Mo}^o) = \\
& = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1^o(1) & \dots & \delta_1^o(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_M^o(1) & \dots & \delta_M^o(N) \\ k_1^o \cdot \delta_1^o(1) & \dots & k_1^o \cdot \delta_1^o(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_M^o \cdot \delta_M^o(1) & \dots & k_M^o \cdot \delta_M^o(N) \end{bmatrix}}_{\Phi_N(\theta_{Mo}^o) \ [2M^o \times N]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{r \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{r \times 1} & \mathbf{0}_{r \times 1} & \dots & \mathbf{0}_{r \times 1} \\ \delta_1^o(1) & \dots & \delta_M^o(1) & k_1^o \cdot \delta_1^o(1) & \dots & k_M^o \cdot \delta_M^o(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_1^o(N-r) & \dots & \delta_M^o(N-r) & k_1^o \cdot \delta_1^o(N-r) & \dots & k_M^o \cdot \delta_M^o(N-r) \end{bmatrix}}_{B_N(r, \theta_{Mo}^o) \ [N \times 2M^o]}
\end{aligned} \tag{5.88}$$

όπου $\mathbf{0}_{r \times 1}$ είναι το $r \times 1$ μηδενικό διάνυσμα και $\Phi_N(\theta_{Mo}^o)$ ορίζεται από την Εξ. (5.65). Σημειώνεται ότι $\Phi_N(\theta_{Mo}^o) \equiv A_N^T(0, \theta_{Mo}^o) \equiv B_N^T(0, \theta_{Mo}^o)$. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η Εξ. (5.85) γίνεται:

$$\bar{P}_N(\theta_{Mo}^o) = \frac{1}{N} \cdot \Phi_N(\theta_{Mo}^o) \cdot \left(\gamma_\epsilon(0) \cdot \Phi_N^T(\theta_{Mo}^o) + \sum_{r=1}^{N-1} \gamma_\epsilon(r) \cdot \left(A_N(r, \theta_{Mo}^o) + B_N(r, \theta_{Mo}^o) \right) \right) \tag{5.89}$$

Εφαρμόζοντας αλγεβρικές πράξεις, η Εξ. (5.89) μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\bar{P}_N(\theta_{Mo}^o) = \frac{1}{N} \cdot \Phi_N(\theta_{Mo}^o) \cdot \Sigma_\epsilon \cdot \Phi_N^T(\theta_{Mo}^o) \tag{5.90}$$

Εφόσον ο πίνακας συνδυασφοράς Σ_ϵ ($N \times N$) του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου $\epsilon(t)$ είναι εξ' ορισμού θετικά ορισμένος, τότε λόγω του δευτέρου μέρους Λήμματος 5.6, ο πίνακας συνδυασφοράς $\bar{P}_N(\theta_{Mo}^o)$ είναι θετικά ορισμένος $\forall N$.

Αφού αποδείχθηκε ότι ο πίνακας συνδυασφοράς $\bar{P}_N(\theta_{Mo}^o)$ είναι θετικά ορισμένος, $\forall N$, το επόμενο βήμα είναι να αποδειχθεί ότι το όριο της Εξ. (5.84) υπάρχει. Προκειμένου να αποδειχθεί αυτό, αρχικά χρησιμοποιείται ο πίνακας $\bar{\Phi}(t, r, \theta_{Mo}^o)$ όπως αυτός περιγράφεται από την Εξ. (5.86). Σύμφωνα με το Λήμμα 5.4 το (i, j) -οστό στοιχείο του εν λόγω πίνακα είναι φραγμένο από ένα αυθαίρετα μεγάλο, αλλά πεπερασμένο θετικό αριθμό c_{max}^2 . Επομένως ($\forall N$ και $\forall r = 0, \dots, N-1$):

$$|\bar{\Phi}^{(i,j)}(t, r, \theta_{Mo}^o)| \leq c_{max}^2 \implies \frac{\gamma_\epsilon(r)}{N} \sum_{t=1}^{N-r} |\bar{\Phi}^{(i,j)}(t, r, \theta_{Mo}^o)| \leq \gamma_\epsilon(r) \cdot c_{max}^2 < \infty \tag{5.91}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει διότι εξ' ορισμού θεωρείται ότι ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος έχει φραγμένες τέσσερις πρώτες ροπές (βλέπε Υπόθεση 5.2).

Λόγω της Εξ. (5.91) για $r = 0$, προκύπτει ότι το Τμήμα I της Εξ. (5.85) συγκλίνει κατά απόλυτη τιμή καθώς $N \rightarrow \infty$.

Επικεντρώνοντας τώρα την προσοχή στη σειρά (ακολουθία) του Τμήματος II της Εξ. (5.85),

προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα :

$$\left| \frac{\gamma_\epsilon(r)}{N} \sum_{t=1}^{N-r} |\bar{\Phi}^{(i,j)}(t, r, \theta_{M^o}^o)| \right| = \frac{\gamma_\epsilon(r)}{N} \sum_{t=1}^{N-r} |\bar{\Phi}^{(i,j)}(t, r, \theta_{M^o}^o)| \quad (5.92)$$

και επομένως [λόγω και της Εξ. (5.91)]:

$$\sum_{r=1}^{N-1} \left| \frac{\gamma_\epsilon(r)}{N} \sum_{t=1}^{N-r} |\bar{\Phi}^{(i,j)}(t, r, \theta_{M^o}^o)| \right| \leq c_{max}^2 \sum_{r=1}^{N-1} \gamma_\epsilon(r) < \infty \quad (5.93)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει λόγω της υποθέσεως ότι ο μετρητικός θόρυβος παρουσιάζει μνήμη που φθίνει με την πάροδο του χρόνου (fading memory) (βλέπε Υπόθεση 5.2). Επομένως η σειρά που περιγράφεται από το Τμήμα II της Εξ. (5.85) συγκλίνει και αυτή κατά απόλυτη τιμή καθώς $N \rightarrow \infty$. Σημειώνεται ότι παρόμοια αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν και για τη σειρά του Τμήματος III της Εξ. (5.85).

Λόγω των παραπάνω αποτελεσμάτων όλα τα στοιχεία του πίνακα $\bar{P}_N(\theta_{M^o}^o)$ συγκλίνουν κατά απόλυτη τιμή καθώς $N \rightarrow \infty$, υποδεικνύοντας ότι το όριο $\bar{P}(\theta_{M^o}^o) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{P}_N(\theta_{M^o}^o)$ υπάρχει και είναι μη - ενικό.

Εφόσον όλες οι απαιτήσεις του Λήμματος B.3 του Söderström και Stoica [112, π.550] εκπληρούνται, τότε η ποσότητα $z_N(\theta_{M^o}^o)$ ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή σύμφωνα με τις Εξ. (5.82) - (5.84).

Απόδειξη Πρότασης 5.2 (Ασυμπτωτική Κανονικότητα της NLR Εκτιμήτριας) Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης κόστους $Q_N(\theta)$ στο $\hat{\theta}_{N,M^o}$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Taylor γύρω από το $\theta_{M^o}^o$ ως εξής [112, σελ.205]:

$$\left[\frac{\partial Q_N(\theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\hat{\theta}_{M^o,N}} \approx \underbrace{\left[\frac{\partial Q_N(\theta)}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_{M^o}^o}}_{g_N(\theta_{M^o}^o)} + \underbrace{\left[\frac{\partial^2 Q_N(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right]_{\theta=\theta_{M^o}^o}}_{G_N(\theta_{M^o}^o)} (\hat{\theta}_{M^o,N} - \theta_{M^o}^o) + o(\|\hat{\theta}_{M^o,N} - \theta_{M^o}^o\|) \quad (5.94)$$

όπου με o και $\|\cdot\|$ ο συμβολισμός *μικρό ο*²² [11, σελ.xvii] και κατάλληλη νόρμα μέτρου, αντίστοιχα.

Καθώς η πρώτη παράγωγος είναι μηδέν για $\theta = \hat{\theta}_{M^o,N}$ και $\hat{\theta}_{M^o,N}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του $\theta_{M^o}^o$ ($\hat{\theta}_{M^o,N} - \theta_{M^o}^o \approx 0$), η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\sqrt{N}(\hat{\theta}_{M^o,N} - \theta_{M^o}^o) \approx -G_N^{-1}(\theta_{M^o}^o) \cdot \sqrt{N}g_N(\theta_{M^o}^o) \quad (5.95)$$

όπου $g_N(\theta_{M^o}^o)$ και $G_N(\theta_{M^o}^o)$ είναι η πρώτη παράγωγος (gradient) και δεύτερη παράγωγος Hessian του $Q_N(\theta)$ στο $\theta = \theta_{M^o}^o$, αντίστοιχα, οι οποίες λόγω των Εξ. (3.6), (4.3), (4.2) και της Ιδιότητας 3.3,

²²η σχέση $f(x) = o(g(x))$ δηλώνει ότι το όριο της $f(x)/g(x)$ είναι μηδέν, καθώς το x τείνει στο άπειρο

γίνονται (κατόπιν μερικών αλγεβρικών πράξεων):

$$\sqrt{N}\mathbf{g}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) = -\frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \epsilon(t) \cdot \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \quad [2M^o \times 1] \quad (5.96)$$

$$\mathbf{G}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \cdot \boldsymbol{\varphi}^T(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) - \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \epsilon(t) \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial^2 f(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o}}_{\mathbf{F}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)} \quad [2M^o \times 2M^o] \quad (5.97)$$

όπου το $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\theta})$ δίνεται, γενικά, από την Εξ. (5.83). Επιπλέον σύμφωνα με την Ιδιότητα 3.3 ο πίνακας $\mathbf{F}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$ καθορίζεται ως:

$$\mathbf{F}_N(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \triangleq \left[\frac{\partial^2 f(t, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \delta_1^{'o}(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \delta_{M^o}^{'o}(t) \\ \delta_1^{'o}(t) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \delta_{M^o}^{'o}(t) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad [2M^o \times 2M^o] \quad (5.98)$$

Όλα τα στοιχεία, $F_N^{(i,j)}(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$ ($i, j = 1, \dots, 2M$), του πίνακα $\mathbf{F}_N(t, \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$ είναι φραγμένα ($\forall t$), λόγω του ότι $|\delta_i^{'o}(t)| = 1$ ($\forall i, \forall t \geq t_{cr}$) (Ιδιότητα 3.3).

Πρώτη Παράγωγος (Gradient): Σύμφωνα με το Λήμμα 5.7, η ποσότητα $\sqrt{N}\mathbf{g}_{o,N}$ ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή:

$$\sqrt{N}\mathbf{g}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \in AsN(0, \bar{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)), \quad \bar{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{N} \cdot \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \cdot \boldsymbol{\Sigma}_\epsilon \cdot \boldsymbol{\Phi}_N^T(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \right) \quad (5.99)$$

όπου $\bar{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$ ($2M \times 2M$) ο αντίστοιχος πίνακας συνδυασφοράς και $\boldsymbol{\Sigma}_\epsilon$ ($N \times N$) ο πίνακας συνδυασφοράς του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου $\epsilon(t)$ [Εξ. (5.13)], ενώ $\boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$ ($2M \times N$) καθορίζεται από την Εξ. (5.65) για $\boldsymbol{\theta}_M = \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o$.

Δεύτερη Παράγωγος (Hessian): Ας ληφθεί υπόψη το δεξιότερο τμήμα του δεξιού κομματιού της Εξ. (5.97). Λόγω της Εξ. (5.7) (Υπόθεση 5.2):

$$\bar{\epsilon}(t) \triangleq \epsilon(t) \cdot F_o^{(i,j)}(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{F_o^{(i,j)}(t) \cdot h(r)}_{\bar{h}_t(r)} \cdot w(t-r) \quad (5.100)$$

Εφόσον το στοιχείο $F_o^{(i,j)}(t)$ ($\forall i, j$) είναι φραγμένο και $\sum_{r=0}^{\infty} |h(r)| < \infty$ (Υπόθεση 5.2), τότε $\sum_{r=0}^{\infty} |\bar{h}_t(r)| < \infty$. Επομένως η $\bar{\epsilon}(t)$ διεργασία προκύπτει από το πέρασμα μίας διεργασίας λευκού θορύβου $w(t)$ από ένα ομοιόμορφα ευσταθές φίλτρο, και συνεπώς $E\bar{\epsilon}(t) = 0$ και (λόγω του Λήμματος 5.2):

$$\text{plim} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \bar{\epsilon}(t) \right\} = 0 \quad (5.101)$$

Στη συνέχεια εξετάζεται το αριστερότερο τμήμα του δεξιού κομματιού της Εξ. (5.97), το οποίο κατόπιν μερικών αλγεβρικών πράξεων γίνεται:

$$\bar{G}_N(\theta_{M^o}^o) \triangleq \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varphi}(t, \theta_{M^o}^o) \cdot \boldsymbol{\varphi}^T(t, \theta_{M^o}^o) = \frac{2}{N} \cdot \boldsymbol{\Phi}_N(\theta_{M^o}^o) \cdot \boldsymbol{\Phi}_N^T(\theta_{M^o}^o) \quad (5.102)$$

ο οποίος είναι ένας καθοριστικός (deterministic) μη ενικός ($\forall N$) πίνακας [Εξ. (5.65) και Λήμμα 5.6]. Αν εφαρμοστεί ο τελεστής ορίου πιθανότητας $\text{plim}\{\cdot\}$ στην Εξ. (5.97), λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ. (5.101) και (5.102) [υπενθυμίζεται ότι όλα τα στοιχεία του $\mathbf{F}_N(\theta_{M^o}^o)$ είναι φραγμένα]:

$$\mathbf{G}(\theta_{M^o}^o) \triangleq \text{plim} \{ \mathbf{G}_N(\theta_{M^o}^o) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{G}}_N(\theta_{M^o}^o) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{N} \cdot \boldsymbol{\Phi}_N(\theta_{M^o}^o) \cdot \boldsymbol{\Phi}_N^T(\theta_{M^o}^o) \right) \quad (5.103)$$

Αν τώρα εφαρμοστεί η ίδια αλγεβρική διαδικασία, βάσει της οποίας εξάχθηκε η σύγκληση της σειράς του Τμήματος Ι της Εξ. (5.85), προκύπτει ότι το όριο της Εξ. (5.103) υπάρχει. Επιπροσθέτως, εφόσον $\bar{\mathbf{G}}_N(\theta_{M^o}^o)$ είναι θετικά ορισμένος $\forall N$, τότε ο πίνακας $\mathbf{G}(\theta_{M^o}^o)$ είναι θετικά ορισμένος και αυτός με τη σειρά του.

Σύμφωνα λοιπόν με την Εξ. (5.95) και τα αποτελέσματα των Εξ. (5.99) και (5.103) η ποσότητα $\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N} - \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$ ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή (βλέπε [112, σελ.551]²³), δηλαδή $\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{M^o;N} - \boldsymbol{\theta}_{M^o}^o) \in \text{AsN}(0, \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o))$ με πίνακα συνδυασποράς $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}_{M^o}^o)$, ο οποίος παρουσιάζεται στην Εξ. (5.9). □

²³Εστω ότι η ποσότητα $\mathbf{x}_N$ ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή $\text{AsN}(0, \mathbf{P})$. Τότε η ποσότητα $\mathbf{y}_N = \mathbf{A}_N \cdot \mathbf{x}_N$, με $\mathbf{A}_N$ να είναι μία ακολουθία από τυχαίους τετραγωνικούς πίνακες η οποία συγκλίνει κατά πιθανότητα σε ένα μη ενικό πίνακα $\mathbf{A}$, ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή, δηλαδή: $\mathbf{y}_N \in \text{AsN}(0, \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T)$.

Κεφάλαιο 6

Αναγνώριση του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell: Επιλογή Δομής και Έλεγχος Εγκυρότητας

Στο παρόν κεφάλαιο το πρόβλημα της εκτίμησης γενικεύεται σε αναγνώριση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, Ως εκ τούτου, η προσπάθεια πλέον δεν επικεντρώνεται μόνο στην αποτελεσματική εκτίμηση των παραμέτρων του πραγματικού συστήματος, αλλά αναζητείται τεκμηριωμένη διαδικασία επιλογής της δομής του μοντέλου (επιλογή του αριθμού των τελεστών), καθώς και ελέγχου εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου (model validation). Για το λόγο αυτό, προτείνεται κατάλληλη διαδικασία, η οποία βασίζεται κατά κύριο λόγο στις ιδιότητες του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Η ανάλυση που πραγματοποιείται κατέδειξε ότι ένα εκτιμώμενο μοντέλο έχει τη σωστή δομή (δηλαδή ίδιο αριθμό τελεστών με το πραγματικό σύστημα) αν και μόνο αν το εν λόγω μοντέλο ικανοποιεί τις αναγκαίες Υποθέσεις 3.2 – 3.3 και αναγκαίες Συνθήκες $C1 - C3$. Επομένως, η διαδικασία της επιλογής της δομής μπορεί να βασιστεί στην επιβεβαίωση αυτών των αναγκαιών (ελάχιστων) Υποθέσεων και Συνθηκών. Για το λόγο αυτό μπορεί να θεωρηθεί η διαδικασία αυτή ως θεμελιώδης (generic). Επιπροσθέτως, αποδεικνύεται ότι η επιλογή της δομής και ο έλεγχος εγκυρότητας του μοντέλου είναι προβλήματα ισοδύναμα και ως εκ τούτου άπαξ ένα μοντέλο επιλεχθεί, τότε αυτομάτως χαρακτηρίζεται και ως έγκυρο. Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνονται αριθμητικώς μέσω κατάλληλης διαδικασίας Monte Carlo.

6.1 Εισαγωγή

Στα πλαίσια των προηγούμενων δύο κεφαλαίων έγινε η γενική παραδοχή ότι ο αριθμός των τελεστών M^o του πραγματικού συστήματος είναι γνωστός. Ο σκοπός για τον οποίο έγινε αυτό είναι για να

επικεντρωθεί η ανάλυση αφενός στην εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου και αφετέρου στην ποιοτική αξιολόγηση αυτής. Εντούτοις, ο αριθμός των τελεστών του πραγματικού συστήματος είναι ποσότητα άγνωστη, η οποία πρέπει να εκτιμηθεί, ή καλύτερα να επιλεγεί, κατά τρόπο κατάλληλο έτσι ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή επίδοση.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στο παρόν κεφάλαιο γενικεύεται η έννοια της εκτίμησης και πλέον το πρόβλημα ανάγεται σε αναγνώριση (identification) του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, το οποίο μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται πλήρως από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, με M^o τελεστές και με διάνυσμα παραμέτρων $\theta_{M^o}^o$. Επιπλέον το πραγματικό σύστημα διεγείρεται από μία εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ και δίνει μία απόκριση $f(t, \theta_{M^o}^o)$, η οποία μετράται μαζί με την εφαρμοζόμενη μετατόπιση. Έστω ότι στο μετρούμενο σήμα της μετατόπισης, το οποίο συμβολίζεται ως $y(t, \theta_{M^o}^o)$, εισέρχεται μετρητικός στοχαστικός (μη μετρήσιμος) θόρυβος $\epsilon(t)$. Επί τη βάση των μετρούμενων σημάτων $x(t)$ και $y(t, \theta_{M^o}^o)$, να εκτιμηθεί ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές, το οποίο πιστοποιημένα να περιγράφει κατά τρόπο βέλτιστο το πραγματικό σύστημα.

Ένα από τα σημεία της παραπάνω έκφρασης που χρίζουν επιπλέον σχολιασμού είναι ότι δε θεωρείται ότι το εκτιμώμενο μοντέλο έχει κατά ανάγκη τον ίδιο αριθμό τελεστών με το πραγματικό σύστημα. Με άλλα λόγια η βέλτιστη απεικόνιση του πραγματικού συστήματος δεν αναζητείται πλέον μόνο μέσα από το σύνολο των μοντέλων με την ίδια δομή (ίδιο αριθμό τελεστών), αλλά η αναζήτηση γίνεται μέσα στη κλάση¹, όπου περιέχονται όλες οι πιθανές δομές του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Επιπλέον, αξίζει να επικεντρωθεί το ενδιαφέρον στην πρόταση: “πιστοποιημένα να περιγράφει κατά τρόπο βέλτιστο το πραγματικό σύστημα”. Το παραπάνω δηλώνει ότι είναι επιθυμητό αφενός το εκτιμώμενο μοντέλο να επιλεγεί έτσι ώστε να έχει τον ίδιο αριθμό τελεστών με το πραγματικό σύστημα και αφετέρου να υπάρχει κατάλληλη διαδικασία επιβεβαίωσης ότι η “επιλογή” αυτή είναι η σωστή.

Ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη κατάλληλης διαδικασίας, επί τη βάση της οποίας να είναι δυνατή η επιλογή της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (επιλογή του αριθμού των τελεστών) κατά τρόπο αναλυτικό. Επιπροσθέτως, στοχεύει στη θεμελίωση κατάλληλης διαδικασίας επιβεβαίωσης της ορθότητας της εν λόγω επιλογής, έτσι ώστε να επιβεβαιώνεται ότι το τελικά επιλεγμένο μοντέλο αποτελεί τη βέλτιστη αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος (έλεγχος εγκυρότητας - model validation). Η προσπάθεια αυτή γίνεται για πρώτη φορά και έχει

¹Η κλάση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell ορίζεται στην επόμενη ενότητα.

ως στόχο να καλύψει το κενό που υπάρχει στη βιβλιογραφία, σύμφωνα με τη οποία η επιλογή της δομής γίνονταν κυρίως μέσω της αυθαίρετης (ad hoc) προεπιλογής του αριθμού των τελεστών [49]. Προσφάτως προτάθηκε από το συγγραφέα της παρούσης διατριβής, σε συνεργασία με τον καθηγητή του, μία διαδικασία, η οποία αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιλογής του αριθμού των τελεστών υπό το κλασικό πρίσμα επιλογής τάξεως μοντέλου. Σύμφωνα με αυτή, η οποία περιγράφεται με περισσότερη λεπτομέρεια στα τελευταία δύο κεφάλαια της διατριβής, εκτιμώνται διαδοχικά μοντέλα ολίσθησης του Maxwell με διαρκώς αυξανόμενο αριθμό τελεστών, υπολογίζοντας ταυτόχρονα ένα τετραγωνικό κριτήριο του σφάλματος εξόδου του μοντέλου. Τελικά επιλέγεται το μοντέλο που παρουσιάζει το μικρότερο, συγκριτικά, κριτήριο (σφάλμα). Αν και η διαδικασία αυτή είναι αρκετά απλή και φαίνεται να αποδίδει καλά (βλέπε τα αριθμητικά αποτελέσματα των δύο τελευταίων κεφαλαίων), δεν έχει τεκμηριωθεί θεωρητικώς ότι καταλήγει στη σωστή επιλογή.

Όσον αφορά τον έλεγχο εγκυρότητας (model validation), η μέχρι τώρα βιβλιογραφία προτείνει μια διαδικασία κατά την οποία ελέγχεται το κατά πόσο το τελικά επιλεγμένο μοντέλο είναι σε θέση να αναπαράγει (προσομοιώνει) με ακρίβεια το μετρούμενο σήμα εξόδου, χρησιμοποιώντας δεδομένα διαφορετικά από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς της εκτίμησης (cross validation principle) [101]. Αν και η εν λόγω διαδικασία είναι αρκετά απλή και ευκόλως εφαρμόσιμη, χαρακτηρίζεται ως εμπειρική.

Στα πλαίσια του τρέχοντος κεφαλαίου αποδεικνύεται ότι η ορθή επιλογή του αριθμού των τελεστών και ο άρτιος έλεγχος εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου συμβαίνει αν και μόνο αν ισχύουν κάποιες προϋποθέσεις. Ιδιαίτερη προσπάθεια καταπονήθηκε έτσι ώστε οι προϋποθέσεις αυτές να είναι οι ελάχιστες (αναγκαίες και ικανές), έτσι ώστε η διαδικασία αυτή να χαρακτηρίζεται ως θεμελιώδης (generic). Κατόπιν τούτου προτείνεται κατάλληλος τρόπος εφαρμογής της διαδικασίας αυτής. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο τρόπος αυτός βασίζεται στα θεωρητικά επιτεύγματα των προηγούμενων κεφαλαίων και δεν είναι μοναδικός, δηλαδή ο τρόπος, με τον οποίο θα επιβεβαιωθούν οι εν λόγω υποθέσεις μπορεί να διαφοροποιηθεί ανάλογα την εφαρμογή και τις απαιτήσεις.

Το κεφάλαιο δομείται ως εξής: Στην Ενότητα 6.2 δίδονται οι ελάχιστες υποθέσεις στην επιβεβαίωση των οποίων θα στηριχθεί η διαδικασία επιλογής της δομής. Στην Ενότητα 6.3 παρουσιάζεται η βασική διαδικασία επιλογής της δομής, ενώ στην Ενότητα 6.4 προτείνεται κατάλληλος τρόπος υλοποίησης αυτής. Η ενότητα 6.5 αναφέρεται στον έλεγχο εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου. Τέλος τα αριθμητικά αποτελέσματα του κεφαλαίου παρουσιάζονται στην Ενότητα 6.6, ενώ τα συμπεράσματα συνοψίζονται στην Ενότητα 6.7.

6.2 Διαδικασία Επιλογής Δομής: Γενικές Υποθέσεις

Εφόσον ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η επιλογή του αριθμού των τελεστών του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, είναι κατανοητό ότι η αναζήτηση του βέλτιστου μοντέλου δεν περιορίζεται μόνο στα πλαίσια συγκεκριμένης δομής, αλλά επεκτείνεται στο σύνολο όλων των δυνατών δομών. Με άλλα λόγια, η εκτιμήτρια αναζητά το “βέλτιστο” μοντέλο για την αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος ανάμεσα από όλα τα δυνατά υποψήφια μοντέλα, με αποτέλεσμα η έρευνα αυτή να διευρύνεται από τη δομή στην κλάση. Προκειμένου αυτό να γίνει μαθηματικά σαφές παρατίθεται ο ορισμός της “κλάσης” του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell

Ορισμός 6.1 (Κλάση μοντέλου ολίσθησης του Maxwell) Με τον όρο κλάση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, ορίζεται το σύνολο όλων των μοντέλων ολίσθησης του Maxwell με τελεστές $M = 1, 2, \dots$, τα οποία διεγείρονται από την ίδια εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$ και για τα οποία ισχύουν οι Υποθέσεις 3.1 – 3.3 και η Συνθήκη $C0$ τη χρονική στιγμή t_{cr} . $\square$

Στη συνέχεια γίνεται μία αναδιοργάνωση των συνθηκών που έχουν τεθεί μέχρι τώρα. Η ενέργεια αυτή αποσκοπεί στην καλύτερη παρουσίαση της διαδικασίας επιλογής της δομής του μοντέλου, η οποία ακολουθεί στην επόμενη ενότητα. Η πρώτη υπόθεση στην ουσία ξαναεκφράζει τη γενική απαίτηση (πάνω στην οποία στηρίχτηκε η εκτίμηση του μοντέλου) ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται πλήρως από ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M^o , το οποίο διεγείρεται κατάλληλα έτσι ώστε η απόκριση του να είναι μοναδική.

Υπόθεση 6.1 Έστω ότι το πραγματικό σύστημα περιγράφεται από τον Ορισμό 4.1. $\square$

Σύμφωνα με τις αντίστοιχες συζητήσεις, η Υπόθεση 6.1 θεωρείται αναγκαία, διότι δίχως αυτή δε διασφαλίζεται η μοναδικότητα του πραγματικού συστήματος (χάνεται η αναγνωρισιμότητα) και ως εκ τούτου η εκτίμηση αποτυγχάνει.

Η δεύτερη υπόθεση καθορίζει το χώρο (search space) μέσα από τον οποίο η εκτιμήτρια αναζητά τη βέλτιστη αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος. Στην ουσία δέχεται ότι όλα τα υποψήφια μοντέλα υπακούουν στις Υποθέσεις 3.1 – 3.3 και στη Συνθήκη $C0$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί (βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο) οι Υποθέσεις 3.2 – 3.3 καθώς και η Συνθήκη $C0$ είναι αναγκαίες για την εκτίμηση του μοντέλου. Για το λόγο αυτόν, η Υπόθεση 6.2 θεωρείται αναγκαία και αυτή.

Υπόθεση 6.2 Όλα τα υποψήφια μοντέλα ολίσθησης του Maxwell ανήκουν στην κλάση (Ορισμός 6.1) του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. $\square$

Η τρίτη κατά σειρά Υπόθεση, είναι μια γενίκευση των αντίστοιχων 5.1 ή 5.2 και στην ουσία διαπραγματεύεται τα χαρακτηριστικά του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου.

Υπόθεση 6.3 *Ο προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος είναι τέτοιος ώστε να ισχύει ο ομοιόμορφος νόμος μεγάλων αριθμών που περιγράφεται από την Εξ. (5.2), δηλαδή:*

$$\text{plim} \left\{ \sup_{\Theta_M} |Q_N(\theta_M) - EQ_N(\theta_M)| \right\} = 0, \forall M, \forall \theta_M \in \Theta_M \quad (6.1)$$

□

Η Υπόθεση 6.3 χρησιμοποιείται έτσι ώστε η προσέγγιση που περιγράφεται από την Εξ. (5.4) να είναι εφικτή (βλέπε Ενότητα 5.3 - Κεφάλαιο 5 για περισσότερες λεπτομέρειες), δηλαδή:

$$\min_{\theta_M} Q_N(\theta_M) \approx \min_{\theta_M} EQ_N(\theta_M) \quad (6.2)$$

Η εν λόγω υπόθεση είναι μόνο ικανή και όχι αναγκαία. Στην πραγματικότητα, αντί για ομοιόμορφη σύγκλιση, αρκεί να υποτεθεί απευθείας ότι ισχύει η σημειακή σύγκλιση η οποία περιγράφεται από την Εξ. (5.3), δηλαδή:

$$\text{plim} \left\{ \min_{\theta_M} Q_N(\theta_M) - \min_{\theta_M} EQ_N(\theta_M) \right\} = 0 \quad (6.3)$$

Εντούτοις, είναι εξαιρετικά δύσκολο, ίσως και αδύνατο, να αποδειχθεί το ακριβώς παραπάνω, λόγω της στοχαστικότητας της συνάρτησης του κόστους (βλέπε Ενότητα 5.3 - Κεφάλαιο 5 για περισσότερες λεπτομέρειες). Ως εκ τούτου και πάντα από πρακτική σκοπιά, η Υπόθεση 6.3 θεωρείται ως αναγκαία και αυτή.

6.3 Διαδικασία Επιλογής Δομής: Βασικές Αρχές

Η ανάλυση ξεκινάει με το να υποτεθεί ότι το πραγματικό σύστημα υπακούει στην Υπόθεση 6.1, όπως επίσης και ότι όλα τα υποψήφια μοντέλα εκπληρούν την Υπόθεση 6.2. Τώρα ας θεωρηθεί ότι υπάρχουν διαθέσιμα αρκετά δεδομένα (το N είναι επαρκούντως μεγάλο) μετατόπισης - δύναμης από το πραγματικό σύστημα, έτσι ώστε η (ασυμπτωτική) προσέγγιση της Εξ. (6.2) να έχει νόημα. Επί τη βάση των προϋποθέσεων αυτών εκτιμώνται διαδοχικά μοντέλα ολίσθησης του Maxwell για αυξανόμενο αριθμό τελεσών (δηλαδή $M = 1, 2, \dots$). Έστω ότι το ολικό ελάχιστο, ως προς το διάνυσμα των παραμέτρων, της προσδοκώμενης συνάρτησης του κόστους, $\forall M = 1, 2, \dots$, είναι:

$$\bar{Q}(\theta_M) \triangleq \min_{\theta_M} EQ_N(\theta_M) \quad (\forall M = 1, 2, \dots) \quad (6.4)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1, το ελάχιστο της $EQ_N(\theta_M)$ ως προς το θ_M μπορεί να συμβεί ακόμα και από ένα μοντέλο με διαφορετικό αριθμό τελεστών από αυτόν του πραγματικού συστήματος. Επομένως υπάρχουν πολλά υποψήφια μοντέλα τα οποία μπορούν να δώσουν το ολικό ελάχιστο της $EQ_N(\theta_M)$. Συνεπώς ακόμα και αν υπάρχει διαθέσιμος μεγάλος αριθμός δεδομένων, το μοντέλο που θα δώσει την ελάχιστη συνάρτηση κόστους δεν συνεπάγεται κατά ανάγκη ότι περιέχει και το σωστό αριθμό τελεστών.

Εντούτοις, σύμφωνα με τις Πρότασεις 4.2² και 4.3³, το ολικό ελάχιστο της $EQ_N(\theta_M)$ μπορεί να επιτευχθεί μόνο από ένα μοντέλο με το σωστό αριθμό τελεστών (δηλαδή για $M = M^o$) αν και μόνο αν το μοντέλο αυτό υπακούει στις Υποθέσεις 3.2 – 3.3 και στις Συνθήκες $C0 - C3$

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω αποτελέσματα, η σωστή επιλογή της δομής επιτυγχάνεται αν και μόνο αν βρεθεί το μοντέλο, του οποίου οι παράμετροι ελαχιστοποιούν την $EQ_N(\theta_M)$ και εκπληρώνει και αυτό με τη σειρά του τις Υποθέσεις 3.2 – 3.3 και τις Συνθήκες $C1 - C3$. Όπως είναι λοιπόν εμφανές η επιλογή της δομής του μοντέλου στην ουσία είναι ισοδύναμη με την ανίχνευση του κατά πόσο, για ένα μοντέλο που ελαχιστοποιεί την $EQ_N(\theta_M)$, ισχύουν κάποιες Συνθήκες και Υποθέσεις.

Είναι σημαντικό να ειπωθεί ότι το παραπάνω συμπέρασμα είναι ασυμπτωτικό. Στην πράξη ο αριθμός των δεδομένων μπορεί να είναι μεγάλος, άλλα σε κάθε περίπτωση είναι πεπερασμένος. Επίσης, μόνο εκτιμήσεις του ελάχιστου της $EQ_N(\theta_M)$ είναι διαθέσιμες, ποσότητες οι οποίες είναι στοχαστικές. Συνεπώς αν και η προαναφερθείσα ανάλυση θέτει τους βασικούς κανόνες πάνω στους οποίους μπορεί να στηριχθεί η επιλογή της δομής του μοντέλου, χρειάζεται να προταθεί κατάλληλος τρόπος ανίχνευσης τόσο του ελάχιστου της $EQ_N(\theta_M)$, όσο και της επιβεβαίωσης των Συνθηκών $C1 - C3$ και των Υποθέσεων 3.2 – 3.3. Ένας προτεινόμενος τρόπος επιβεβαίωσης των παραπάνω παρουσιάζεται στην ακόλουθη ενότητα.

6.4 Διαδικασία Επιλογής Δομής: Προτεινόμενος Τρόπος Υλοποίησης

Τα βασικά βήματα πάνω στα οποία θα αναπτυχθεί ο προτεινόμενος τρόπος επιλογής της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι τα ακόλουθα:

²Υπενθύμιση: Το ελάχιστο της $EQ_N(\theta_{M^o})$, ως προς θ_{M^o} (εντός της σωστής δομής) είναι μοναδικό και δίνεται από το πραγματικό διάνυσμα των παραμέτρων.

³Υπενθύμιση: Το ελάχιστο της $EQ_N(\theta_M)$, ως προς θ_M (εντός της κλάσης) δίνεται από το πραγματικό διάνυσμα των παραμέτρων κάτω από ορισμένες συνθήκες.

- Δεδομένων των διαθέσιμων σημάτων διέγερσης - απόκρισης, εκτιμώνται μοντέλα ολίσθησης του Maxwell με διαρκώς αυξανόμενο αριθμό τελεστών (δηλαδή $M = 1, 2, \dots$). Για κάθε εκτιμώμενο μοντέλο υπολογίζεται η συνάρτηση κόστους, όπως αυτή δίνεται από την Εξ. (4.3). Σημειώνεται ότι στην εκτίμηση του κάθε μοντέλου θεωρείται ότι ισχύει η Συνθήκη $C0$. Για το λόγο αυτό επιλέγεται το σετ δεδομένων της εκτίμησης να ξεκινάει από τη χρονική στιγμή t_{cr} , στην οποία θεωρείται ότι όλοι οι τελεστές ολισθαίνουν⁴.
- Από τα εκτιμώμενα μοντέλα αποκλείονται εκείνα τα οποία δεν υπακούουν στις Συνθήκες $C1 - C3$
- Εξετάζεται αν τα εναπομείναντα υποψήφια μοντέλα ικανοποιούν τις Υποθέσεις 3.2 - 3.3.
- Επιλέγεται εκείνο το μοντέλο το οποίο επιτυγχάνει τη ελάχιστη συνάρτηση κόστους και ικανοποιεί ταυτόχρονα τις Συνθήκες $C1 - C3$ και τις Υποθέσεις 3.2 - 3.3.

Σημείωση: Η σιωπηρή παραδοχή η οποία έγινε στην προαναφερθείσα διαδικασία είναι ότι ο αριθμός των δεδομένων που χρησιμοποιούνται για τους σκοπούς της αναγνώρισης είναι αρκετά μεγάλος.

6.4.1 Έλεγχος Συνθηκών $C1 - C3$

Οι συνθήκες $C1 - C3$ μπορούν να επιβεβαιωθούν πολύ εύκολα. Το μόνο που απαιτείται είναι να αντικατασταθούν τα εκτιμώμενα κατώφλια στην Εξ. (3.5) και σε συνδυασμό με την εφαρμοζόμενη μετατόπιση να διερευνηθεί το κατά πόσο οι προκύπτουσες παραμορφώσεις των ελατηρίων συμμορφώνονται με τις εν λόγω Συνθήκες.

6.4.2 Έλεγχος Υποθέσεων 3.2 - 3.3

Ο έλεγχος των Υποθέσεων 3.2 - 3.3 παρουσιάζει ιδιομορφία, διότι τα εκτιμώμενα κατώφλια είναι στοχαστικές ποσότητες (το εκτιμώμενο διάνυσμα $\hat{\theta}_{M,N}$ είναι στοχαστικό), των οποίων οι μέσες τιμές είναι μη διαθέσιμες ποσότητες. Ως εκ τούτου ο έλεγχος των Υποθέσεων 3.2 - 3.3 πρέπει να γίνει σε στατιστικό πλαίσιο, συμπέρασμα, το οποίο με τη σειρά του οδηγεί στην ανάπτυξη κατάλληλου στατιστικού ελέγχου υποθέσεων. Εντούτοις, η ανάπτυξη ενός τέτοιου ελέγχου απαιτεί τις στατιστικές ιδιότητες των εκτιμήσεων (συνέπεια εκτιμήσεων, ασυμπτωτική κανονικότητα, πίνακας συνδυασφοράς, κ.ο.κ).

⁴Σε περίπτωση που η διέγερση δεν έχει σχεδιαστεί με γνώμονα τη Συνθήκη $C0$ τότε μπορεί να επιλεχθεί ένα ακρότατο της απόκριση (αν είναι δυνατόν το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή) και να θεωρηθεί ότι αυτή τη χρονική στιγμή εκπληρώνεται η Συνθήκη $C0$. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με αυτή την προσέγγιση παρουσιάζονται στις πειραματικές εφαρμογές των δύο τελευταίων κεφαλαίων της διατριβής

Εφόσον, η μόνη προσπάθεια η οποία έχει αναφερθεί σχετικά με τις ιδιότητες αυτές είναι η ανάλυση που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναγκαστικά η ανάπτυξη του στατικού ελέγχου υποθέσεων θα βασιστεί σε αυτά τα θεωρητικά αποτελέσματα. Αυτό έχει ως συνέπεια να γίνουν επιπλέον υποθέσεις, πέραν των απαραίτητων Υποθέσεων 6.1 – 6.3, έτσι ώστε να ισχύει η Πρόταση 5.2. Αυτή η ανάγκη οδηγεί στην αποδοχή της Υπόθεσης 5.2, η οποία έχει να κάνει με τις ιδιότητες του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου⁵.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαδικασία επιλογής της δομής, όπως αυτή παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, βασίζεται σχεδόν στις ελάχιστες υποθέσεις και ως εκ τούτου θεωρείται θεμελιώδης. Εντούτοις, ο προτεινόμενος τρόπος εφαρμογής της διαδικασίας δε μπορεί να θεωρηθεί μοναδικός, εφόσον θέτει επιπλέον υποθέσεις με σκοπό να χρησιμοποιηθούν τα εξαγόμενα αποτελέσματα σχετικά με τις στατιστικές ιδιότητες της εκτιμήτριας.

Προχωρώντας λοιπόν στην επιβεβαίωση των Υποθέσεων 3.2 – 3.3, προκύπτει, σε γενικές γραμμές, ο ακόλουθος στατιστικός έλεγχος υποθέσεων:

$$H_0 : g \sim 0 \text{ (μηδενική υπόθεση)}$$

$$H_1 : g \approx 0 \text{ (εναλλακτική υπόθεση)}$$

όπου με $\sim$ συμβολίζεται κατάλληλη μαθηματική σχέση (για παράδειγμα ισότητα, ανισότητα, κ.ο.κ), η οποία τίθεται ανάλογα με τον έλεγχο που υιοθετείται (βλέπε παρακάτω), ενώ με g κατάλληλα επιλεγμένη, για τους σκοπούς του ελέγχου, στατιστική ποσότητα.

Στα πλαίσια της μηδενικής υποθέσεως γίνεται δεκτό ότι η δομή του μοντέλου είναι σωστή, όπως επίσης ότι ισχύουν οι Συνθήκες C1 – C3 και οι Υποθέσεις 3.2 – 3.3 και 5.2. Ως εκ τούτου, τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα της Πρότασης 5.2 ισχύουν. Επομένως, για N επαρκούντως μεγάλο, $\theta_{M^o}^o \approx E\hat{\theta}_{M^o, N}^o$, όπως επίσης όλα τα στοιχεία του εν λόγω διανύσματος ακολουθούν, κατά προσέγγιση, συνδυασμένη κανονική κατανομή με πίνακα συνδυασποράς να δίνεται από την Εξ. (5.9). Από την άλλη πλευρά, στην εναλλακτική υπόθεση γίνεται δεκτό ότι τουλάχιστον μία από τις Υποθέσεις 3.2 – 3.3 καταρρίπτεται και ως εκ τούτου η δομή του μοντέλου είναι λανθασμένη (λανθασμένος αριθμός τελεστών).

Έλεγχος της Υπόθεσης 3.2 και μέρους της Υπόθεσης 3.3 ($k_i, \Delta_i > 0, \forall i = 1, \dots, M$)

Έστω $\theta_{M^o}^{o(i)}$ και $\hat{\theta}_{M^o, N}^{(i)}$ το i -οστό στοιχείο των διανυσμάτων $\theta_{M^o}^o$ και $\hat{\theta}_{M^o, N}^o$, τότε, υπό το καθεστώς της μηδενικής υποθέσεως και για N επαρκούντως μεγάλο, το $\hat{\theta}_{M^o, N}^{(i)}$ ακολουθεί, προσεγγιστικά, κανονική

⁵Είναι εμφανές ότι αν ο μετρητικός θόρυβος υπακούει στην Υπόθεση 5.2, τότε αυτομάτως ικανοποιεί και την Υπόθεση 6.3, η οποία είναι πρακτικά αναγκαία για τη διαδικασία επιλογής της δομής - βλέπε Απόδειξη της Πρότασης 5.1

κατανομή (Πρόταση 5.2), δηλαδή:

$$\hat{\theta}_{M^o, N}^{(i)} \sim \mathcal{N} \left(\theta_{M^o}^{o(i)}, \frac{1}{N} P^{(i,i)}(\theta_{M^o}^o) \right) \quad (6.5)$$

όπου με $P^{(i,i)}(\theta_{M^o}^o)$ συμβολίζεται το i -οστό διαγώνιο στοιχείο (αντίστοιχη διασπορά) του πίνακα συνδυασποράς $P(\theta_{M^o}^o)$ [Εξ. (5.9)].

Σύμφωνα λοιπόν με το παραπάνω, ο στατιστικός έλεγχος υποθέσεων για τις εν λόγω υποθέσεις υλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta_{M^o}^{o(i)} > 0 \quad (\forall i) \quad (\text{μηδενική υπόθεση}) \\ H_1 &: \text{Διαφορετικά για κάποια } i \quad (\text{εναλλακτική υπόθεση}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Εφόσον η μηδενική υπόθεση είναι σύνθετη, η εφαρμογή της διαδικασίας στατιστικού ελέγχου υποθέσεων, σε οποιαδήποτε επίπεδο εμπιστοσύνης α (πιθανότητα σφάλματος Τύπου I, δηλαδή η πιθανότητα να απορριφθεί η i -οστή μηδενική υπόθεση, όταν αυτή είναι ορθή), απαιτεί τη γνώση του μη διαθέσιμου μέσου $\theta_{M^o}^{o(i)}$. Προκειμένου να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό, υιοθετείται μία συντηρητική διαδικασία, σύμφωνα με την οποία επιλέγεται το επίπεδο εμπιστοσύνης α υπό το καθεστώς της χειρότερης δυνατής (υπό το καθεστώς της μηδενικής υπόθεσης H_0) περίπτωσης, το οποίο είναι $\theta_{M^o}^{o(i)} = 0$ [97, σελ.386]. Αν επομένως χρησιμοποιηθεί η διασπορά ως μία σταθερή ποσότητα, ο στατιστικός έλεγχος υποθέσεων για την Υπόθεση 3.2 υλοποιείται, χρησιμοποιώντας το μέγιστο επίπεδο εμπιστοσύνης α , ως εξής

$$\frac{\hat{\theta}_{M^o}^{(i)}}{\sqrt{\frac{1}{N} P^{(i,i)}(\theta_{M^o}^o)}} > Z_{1-\alpha} \quad (\forall i) \implies \text{Η } H_0 \text{ γίνεται δεκτή} \quad (6.7)$$

$$\text{Σε κάθε άλλη περίπτωση} \implies \text{Η } H_1 \text{ γίνεται δεκτή}$$

όπου με $Z_{1-\alpha}$ συμβολίζεται η κρίσιμη τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής σε επίπεδο $1 - \alpha$.

Έλεγχος της Υπόθεσης 3.3 ($\Delta_i < \Delta_{i+1}, \forall i = 1, \dots, M-1$)

Αρχικά ας θεωρηθεί η ποσότητα $\delta\hat{\theta}_{i,j} \triangleq \hat{\Delta}_i - \hat{\Delta}_j, \forall i = 1, \dots, M^o - 1$ και $\forall j = i + 1, \dots, M^o$. Υπό το καθεστώς της μηδενικής υποθέσεως, η ποσότητα $\delta\hat{\theta}_{i,j}$ ακολουθεί, προσεγγιστικά, κανονική κατανομή με μέση τιμή $\delta\theta_{i,j}^o \triangleq E\delta\hat{\theta}_{i,j} = \Delta_i^o - \Delta_j^o$ και διασπορά $\sigma_{\delta\theta_{i,j}}^2 \triangleq \frac{1}{N} (P^{(i,i)}(\theta_{M^o}^o) + P^{(j,j)}(\theta_{M^o}^o) + P^{(i,j)}(\theta_{M^o}^o))$, όπου με $P^{(i,j)}$ συμβολίζεται το i, j -οστό στοιχείο του πίνακα συνδυασποράς $P(\theta_{M^o}^o)$.

Έστω τώρα η ακόλουθη στατιστική ποσότητα ελέγχου (test statistics):

$$\hat{z}_{i,j} \triangleq \frac{(\delta\hat{\theta}_{i,j})^2}{\sigma_{\delta\theta_{i,j}}^2} \quad (6.8)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.3, το οποίο δίνεται από τον Anderson [91, σελ.72], η ποσότητα $\hat{z}_{i,j}$ ακολουθεί, υπό το καθεστώς της μηδενικής υπόθεσης, μη κεντρική x^2 κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας και μέση τιμή:

$$z_{i,j} \triangleq E\hat{z}_{i,j} = 1 + \frac{(\Delta_i^o - \Delta_j^o)^2}{\sigma_{\delta\theta_{i,j}}^2} \quad (6.9)$$

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, ο στατιστικός έλεγχος εγκυρότητας της Υπόθεσης 3.3 μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} H_0 : \delta\theta_{i,j} \neq 0, \quad (\forall i, j) & \iff z_{i,j} > 1 \quad (\forall i, j) \\ H_1 : \delta\theta_{i,j} = 0, \quad \text{για κάποια } i, j & \iff z_{i,j} = 1 \quad \text{για κάποια } i, j \end{aligned} \quad (6.10)$$

Η μηδενική υπόθεση [Εξ. (6.10) – δεξίο μέρος] είναι και αυτή με τη σειρά της σύνθετη. Επομένως, η υλοποίηση του εν λόγω ελέγχου εκτελείται, κατά τρόπο όμοιο με την προηγούμενη περίπτωση, επιλέγοντας το επίπεδο σημαντικότητας σύμφωνα με τη χειρότερη δυνατή (στα πλαίσια της μηδενικής υπόθεσης) περίπτωση [97, σελ. 425], η οποία είναι $z_{i,j} = 1$. Σύμφωνα λοιπόν με τις επιλογές αυτές, ο έλεγχος υλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{z}_{i,j} > \chi_\alpha^2(1) \quad (\forall i, j) & \implies \text{Η υπόθεση } H_0 \text{ γίνεται αποδεκτή} \\ \text{Αλλιώς} & \implies \text{Η υπόθεση } H_1 \text{ γίνεται αποδεκτή} \end{aligned} \quad (6.11)$$

όπου με $\chi_\alpha^2(1)$ συμβολίζεται η κρίσιμη τιμή της x^2 κατανομής σε επίπεδο σημαντικότητας α .

Σημείωση: Οι προτεινόμενοι στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων [Εξ. (6.7) και (6.11)] απαιτούν τη θεωρητική (ασυμπτωτική) διασπορά $P^{(i,i)}(\theta_{M^o}^o)$, ποσότητα η οποία είναι μη διαθέσιμη. Εντούτοις, και πάντα στα πλαίσια της μηδενικής υποθέσεως, η Πρόταση 5.3 ισχύει και επομένως η εν λόγω διασπορά μπορεί να αντικατασταθεί από την συνεπή εκτίμηση της $P^{(i,i)}(\hat{\theta}_{M^o})$.

6.5 Έλεγχος Εγκυρότητας

Το πρόβλημα του ελέγχου εγκυρότητας περιλαμβάνει την επιβεβαίωση του ότι το επιλεγμένο μοντέλο αποτελεί τη βέλτιστη αναπαράσταση του υπό αναγνώριση πραγματικού συστήματος. Η συγκεκριμένη απαίτηση, υπό το καθεστώς ότι το πραγματικό σύστημα υπόκειται στην Υπόθεση 6.1, οδηγεί αναπόφευκτα στο ότι το επιλεγμένο (εκτιμώμενο) μοντέλο πρέπει να υπακούει στις Συνθήκες $C1 - C3$ και στις Υποθέσεις 3.2 - 3.3.

Εντούτοις, όπως έχει ήδη αναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα, η (θεμελιώδης) διαδικασία επιλογής της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell βασίζεται στην επιβεβαίωση ότι το εκτιμώμενο μοντέλο υπακούει στις Υποθέσεις 3.2 - 3.3 και στις Συνθήκες $C1 - C3$. Επομένως, είναι φανερό

ότι το πρόβλημα της επιλογής της δομής μοντέλου και του ελέγχου εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου ταυτίζονται. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο σημαντικό συμπέρασμα ότι αν ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell επιλεγθεί από τη προαναφερθείσα διαδικασία, τότε χαρακτηρίζεται αυτομάτως και ως έγκυρη αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος.

6.6 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Η προτεινόμενη διαδικασία επιλογής της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, καθώς και του ελέγχου εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου, ελέγχεται αριθμητικώς στην παρούσα ενότητα μέσω κατάλληλης Monte Carlo ανάλυσης. Για το λόγο αυτό επιλέγεται ένα μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με $M^o = 3$ τελεστές, το οποίο και αποτελεί το πραγματικό σύστημα για την εν λόγω ανάλυση. Το “πραγματικό” σύστημα διεγείρεται από ένα εφαρμοζόμενο σήμα μετατόπισης $x(t)$, το οποίο είναι της μορφής $x(t) = \cos(2t)$ (περιοδική), όπου με t συμβολίζεται ο διακριτός χρόνος (συχνότητα δειγματοληψίας: 250 Hz), μήκους 32000 δεδομένων. Σε κάθε Monte Carlo επανάληψη στο “πραγματικό” σήμα της απόκρισης του συστήματος προστίθεται μετρητικός (χρωματισμένος) στοχαστικός θόρυβος, $\epsilon(t)$, έτσι ώστε ο λόγος της τυπικής απόκλισης του θορύβου ως προς το σήμα να είναι ίσος με 6% ($100 \cdot \sigma_\epsilon / \sigma_f = 6\%$). Η διεργασία του προστιθέμενου θορύβου προκύπτει φιλτράροντας μία διεργασία λευκού θορύβου μηδενικής μέσης τιμής από ένα μοντέλο κινητού μέσου όρου (Moving Average model) τάξεως ίσης με 500 [δηλαδή: $e(t) = w(t) + \sum_{r=1}^{500} b_r \cdot w(t-r)$]. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της εφαρμοζόμενης μετατόπισης, της πραγματικής απόκρισης του συστήματος (δίχως προσθήκης θορύβου), καθώς και του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου (συγκεκριμένη υλοποίηση), παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.1. Επιπροσθέτως στο ίδιο σχήμα, παρουσιάζεται και η πραγματική (βασισόμενη στις πραγματικές παραμέτρους του μοντέλου που παράγει τον θόρυβο) συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του προστιθέμενου θορύβου.

Η Monte Carlo ανάλυση περιλαμβάνει 500 σετ σημάτων εφαρμοζόμενης μετατόπισης - προκύπτουσας απόκρισης (συμπεριλαμβανομένου του προστιθέμενου μετρητικού θορύβου). Στα πλαίσια της συγκεκριμένης ανάλυσης υλοποιούνται 500 εκτιμήσεις μοντέλων ολίσθησης του Maxwell για $M = 2, 3, 4, 5$ τελεστές, αντίστοιχα. Με άλλα λόγια υπάρχουν διαθέσιμες 500 εκτιμήσεις για κάθε ένα από τους παραπάνω αριθμούς τελεστών.

Σε κάθε Monte Carlo επανάληψη της διαδικασίας εκτίμησης, χρησιμοποιούνται μόνο τα πρώτα 16000, από τα διαθέσιμα 32000, δεδομένα (διέγερση και απόκριση με τον προστιθέμενο θόρυβο), τα οποία απαρτίζουν και το σετ εκτίμησης I (estimation set I). Τα εναπομείναντα 16000 δεδομένα [τα οποία απαρτίζουν και το σετ εκτίμησης II (estimation set II)], χρησιμοποιούνται για να μελετηθεί η

Σχήμα 6.1: Σήματα που χρησιμοποιούνται για την Monte Carlo ανάλυση: (a) Μετατόπιση (διακεκομμένη γραμμή) και η “πραγματική” απόκριση δίχως προσθήκη μετρητικού θορύβου (συμπαγής γραμμή), (b) προστιθέμενος μετρητικός θόρυβος (αντιπροσωπευτικό παράδειγμα), (c) η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της (η οριζόντιες — γραμμές υποδεικνύουν τα στατιστικά όρια σημαντικότητας σε επίπεδο 95%).

συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους για τις διάφορες τιμές M , όταν χρησιμοποιούνται δεδομένα διαφορετικά από αυτά στα οποία βασίστηκε η εκτίμηση.

6.6.1 Αποτελέσματα Επιλογής της Δομής

Προτού δοθούν περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την προτεινόμενη διαδικασία επιλογής της δομής, αξίζει να αναλυθεί η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους για κάθε M . Στο Σχήμα 6.2 απεικονίζονται τα δειγματικά, όπως αυτά προέκυψαν από τις 500 διαθέσιμες εκτιμήσεις, διαστήματα εμπιστοσύνης της συνάρτησης κόστους για κάθε $M = 2, 3, 4, 5$ και στα δύο σαι εκτίμησης (estimation set I - II).

Όσον αφορά το πρώτο σαι εκτίμησης (estimation set I), η δειγματική μέση τιμή της συνάρτησης κόστους (βασισμένη στις 500 εκτιμήσεις για κάθε M) φαίνεται να μειώνεται με αύξηση του M . Εντούτοις, η μείωση που σημειώνεται για $M \geq 3$ είναι αρκετά μικρή (ελάχιστη, σχεδόν αμελητέα).

Σχήμα 6.2: Διαστήματα επιστοσύνης της συνάρτησης κόστους, βάσει της πραγματοποιηθείσας Monte Carlo ανάλυσης, συναρτήσει του αριθμού των τελεστών M : (a) Σει εκτίμησης I estimation set I, (b) Σει εκτίμησης II estimation set II (Αποτελέσματα βασισμένα σε 500 Monte Carlo εκτιμήσεις για κάθε M . Τα κουτιά αντιστοιχούν στο δειγματικό μέσο της συνάρτησης κόστους $\pm$ δύο τυπικές αποκλίσεις, ενώ το σύμβολο (o) στο δειγματικό μέσο της συνάρτησης κόστους).

Το γεγονός ότι η συνάρτηση κόστους σχεδόν παύει να μειώνεται εμφανώς, για αριθμό τελεστών μεγαλύτερο του πραγματικού, οφείλεται στο ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους δύναται να επιτευχθεί και από μοντέλα, τα οποία έχουν διαφορετικό αριθμό τελεστών από ότι το πραγματικό σύστημα (Πρόταση 4.1). Με άλλα λόγια για $M < 3$, η απαίτηση περισσότερων τελεστών για την αναπαράσταση της δυναμικής του πραγματικού συστήματος αντανακλάται στη συνάρτηση του κόστους. Ενώ για $M > 3$, η ανάγκη για τελεστές έχει καλυφθεί και απλά εμφανίζονται τα αποτελέσματα της Πρότασης 4.1. Η απλή λογική φαίνεται λοιπόν να υποδεικνύει ότι η επιλογή της δομής θα μπορούσε να υλοποιηθεί απλά με το να ανιχνευτεί ο αριθμός των τελεστών, πέρα του οποίου η μείωση της συνάρτησης του κόστους είναι αμελητέα. Εντούτοις, η υιοθέτηση μίας τέτοιας τεχνικής μάλλον θα οδηγήσει σε αναξιόπιστη (όπως θα φανεί από τα επόμενα αποτελέσματα) επιλογή. Ο λόγος, ο οποίος φαίνεται να οφείλεται για την αναξιόπιστη αυτή είναι και ο ίδιος που αναγκάζει τη συνάρτηση κόστους να παρουσιάζει, για διαφορετικά M , εντόνως επικαλυπτόμενα διαστήματα εμπιστοσύνης. Επομένως, αν και ο δειγματικός μέσος της συνάρτησης κόστους φαίνεται να προσφέρει αρκετές ενδείξεις για την ορθή επιλογή της δομής, το γεγονός ότι δεν είναι, τουλάχιστον στα πλαίσια πρακτικών εφαρμογών, διαθέσιμος, σε συνδυασμό με τη στοχαστικότητα της συνάρτησης κόστους, είναι πολύ πιθανόν να οδηγήσει σε λάθος επιλογή.

Εξετάζοντας τώρα τα αντίστοιχα αποτελέσματα, αλλά για το δεύτερο σει εκτίμησης (estimation

Πίνακας 6.1: Αποτέλεσμα επιλογής δομής και ελέγχου εγκυρότητας (500 Monte Carlo υλοποιήσεις για κάθε M).

	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$
Πρώτη Διαδικασία	0	0	46	454
Δεύτερη Διαδικασία	0	381	104	15
Προτεινόμενη Διαδικασία	0	494	6	0

set II), παρατηρείται ότι η επίδραση της υπερπαραμετροποίησης (χρήσης περισσότερων τελεστών από ότι το πραγματικό σύστημα) είναι πιο εμφανής από ότι στην προηγούμενη περίπτωση. Συγκριμένα, ο δειγματικός μέσος της συνάρτησης κόστους λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του για το σωστό αριθμό τελεστών ($M = 3$). Όμως και πάλι τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης είναι εντόνως επικαλυπτόμενα, γεγονός που δηλώνει ότι η χρήση ενός διαφορετικού σετ δεδομένων, από αυτό που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση, μπορεί και πάλι να οδηγήσει σε λανθασμένη επιλογή.

Αφού μελετήθηκε η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προτεινόμενης διαδικασίας επιλογής της δομής. Προκειμένου να υπάρχουν άμεσα συμπεράσματα σχετικά με την καταλληλότητά της, υιοθετούνται αρχικά δύο εναλλακτικές διαδικασίες επιλογής της δομής, οι οποίες εν συντομία παρουσιάστηκαν στις παραπάνω δύο παραγράφους. Στην πρώτη η δομή επιλέγεται βάσει της συμπεριφοράς της συνάρτησης κόστους στο σετ εκτίμησης I, ενώ στα πλαίσια της δεύτερης επί τη βάση του σετ εκτίμησης II. Και οι τρεις διαδικασίες επαναλαμβάνονται 500 φορές (για κάθε μία Monte Carlo υλοποίηση) και τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 6.1.

Όπως είναι άμεσα εμφανές, η πρώτη διαδικασία (επιλογή βάσει του σετ εκτίμησης I) οδηγεί, όπως ήταν αναμενόμενο, σε υπερπαραμετροποίηση (επιλογή περισσότερων των τριών τελεστών), αφού από τις 500 επαναλήψεις της διαδικασίας επιλογής της δομής, η σωστή δομή $M = 3$ δεν επιλέγεται ούτε μία φορά, ενώ αντίστοιχα η $M = 4$ επιλογή γίνεται 46 φορές, ενώ αντίστοιχα η $M = 5$, 454.

Η δεύτερη διαδικασία (επιλογή βάσει του σετ εκτίμησης II), δίνει τη σωστή δομή ($M = 3$) 381 φορές (76.2% επιτυχία), ενώ δίνει τις επιλογές $M = 4$ και $M = 5$, 104 και 15 φορές αντίστοιχα. Όπως είναι φανερό, η επιτυχία της διαδικασίας αυτής είναι σαφώς αυξημένη, συγκρινόμενη με την προηγούμενη, υποδεικνύοντας ικανοποιητικά αποτελέσματα. Επομένως, θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η δεύτερη διαδικασία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένας γρήγορος και πρακτικός τρόπος επιλογής της δομής.

Όσον αφορά τώρα την προτεινόμενη διαδικασία επιλογής της δομής (βλέπε προπροηγούμενη ενότητα), η εφαρμογή της σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0.5\%$ (σφάλμα τύπου I: Πιθανότητα

απόρριψης μίας σωστής δομής) δίνει τη σωστή δομή 494 φορές (98.8% επιτυχία), τη $M = 4$ δομή 6 φορές, και καμία φορά τη $M = 5$ δομή. Όπως είναι λοιπόν εμφανές, η απόδοση της προτεινόμενης δομής είναι σαφώς ανώτερη των προηγούμενων δύο, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι παρέχει σχεδόν τέλεια επιλογή της δομής.

6.6.2 Αποτελέσματα Επιβεβαίωσης της Εγκυρότητας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, όταν ένα εκτιμηθέν μοντέλο επιλεγεί από την προτεινόμενη διαδικασία επιλογής της δομής, τότε αυτόματα γίνεται δεκτό και ως έγκυρη αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος (περνάει τον έλεγχο εγκυρότητας). Σύμφωνα με αυτά τα θεωρητικά αποτελέσματα, η προαναφερθείσα Monte Carlo ανάλυση υποδεικνύει ότι 6 φορές (από τις συνολικά 500 – Πίνακας 6.1) ένα μοντέλο με $M = 4$ τελεστές κρίθηκε ως έγκυρη αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος (δεν εμφανίστηκε μοντέλο με $M = 5$ το οποίο να περνά τον έλεγχο). Επομένως, το παρατηρούμενο σφάλμα τύπου II [Type II error: η πιθανότητα να γίνει δεκτό ένα μοντέλο με λάθος δομή (πιθανότητα να δίνει δεκτή μια λανθασμένη μηδενική υπόθεση – [97, σελ.377])] είναι ίσο με 1.2%, το οποίο είναι ιδιαίτερα μικρό.

Όσον αφορά τα μοντέλα $M = 3$, τα οποία εκτιμήθηκαν στα πλαίσια της Monte Carlo ανάλυσης, μόνο ένα από τα 500 δεν πέρασε τον έλεγχο (κρίθηκε ακατάλληλο για την αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος, αν και είχε το σωστό αριθμό τελεστών). Το αποτέλεσμα αυτό υποδεικνύει ότι στη συγκεκριμένη ανάλυση επιτεύχθηκε σφάλμα τύπου I (Type I error: η πιθανότητα να απορριφθεί ένα σωστό μοντέλο) ίσο με 0.2%, το οποίο είναι μικρότερο από το προεπιλεγθέν σφάλμα τύπου I (0.5%).

Τα παραπάνω αποτελέσματα υπέδειξαν πιθανότητα 1.2% να περάσει τον έλεγχο εγκυρότητας ένα μοντέλο, ενώ δεν θα έπρεπε (σφάλμα τύπου II) και πιθανότητα 0.2% να χαρακτηριστεί ως ακατάλληλο ένα μοντέλο με σωστή δομή. Σύμφωνα με τα παραπάνω, επιβεβαιώνεται, αριθμητικά, η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης διαδικασίας ελέγχου εγκυρότητας.

6.7 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα της αναγνώρισης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Στην ουσία γενικεύεται το πρόβλημα από εκτίμηση σε αναγνώριση του μοντέλου. Συγκεκριμένα και επί τη βάση των θεωρητικών επιτευγμάτων των προηγούμενων μοντέλων προτείνεται κατάλληλη μεθοδολογία για την επιλογή της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell και τον

έλεγχου εγκυρότητας τελικά επιλεγμένου μοντέλου.

Σύμφωνα λοιπόν με τα θεωρητικά αποτελέσματα του κεφαλαίου, αποδείχθηκε ότι η επιλογή της δομής του μοντέλου (επιλογή του αριθμού των ενσωματωμένων τελεστών) μπορεί να βασιστεί στον απλό έλεγχο των βασικών υποθέσεων σχετικά με τη δομή του μοντέλου (Υποθέσεις 3.2 – 3.2), όπως επίσης των Συνθηκών διέγερσης (Συνθήκες $C1 - C3$). Λόγω του ότι οι παραπάνω Υποθέσεις και Συνθήκες έχουν χαρακτηριστεί ως αναγκαίες (ελάχιστες), τότε η προτεινόμενη διαδικασία επιλογής της δομής μπορεί να χαρακτηριστεί ως θεμελιώδης (generic).

Επιπροσθέτως δείχθηκε ότι το πρόβλημα της επιλογής της δομής και του ελέγχου εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου είναι προβλήματα ισοδύναμα, γεγονός που δηλώνει με τη σειρά του ότι άπαξ και ένα μοντέλο επιλεχθεί τότε αυτόματα κρίνεται και ως βέλτιστη αναπαράσταση του πραγματικού συστήματος.

Κατόπιν των παραπάνω, προτάθηκε κατάλληλος τρόπος για την υλοποίηση της διαδικασίας αναγνώρισης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Σε γενικές γραμμές ο προτεινόμενος αυτός τρόπος δύναται να υλοποιηθεί και διαφορετικά. Εντούτοις, όπως έγινε φανερό, απαιτούνται οι στατιστικές ιδιότητες της εκτιμήτριας. Όμως τα μόνα διαθέσιμα, στην τρέχουσα βιβλιογραφία, εργαλεία για το σκοπό αυτόν είναι τα θεωρητικά αποτελέσματα των προηγούμενων κεφαλαίων (συνέπεια, ασυμπτωτική κατανομή, κ.ο.κ). Επομένως ο προτεινόμενος τρόπος, αν και δεν είναι ο μοναδικός, αποτελεί τη μοναδική θεωρητικώς τεκμηριωμένη, τουλάχιστον για τη δεδομένη χρονική στιγμή, πρόταση για την αντιμετώπιση του προβλήματος της αναγνώρισης.

Τα θεωρητικά επιτεύγματα του κεφαλαίου πιστοποιήθηκαν αριθμητικώς, μέσω κατάλληλης Monte Carlo ανάλυσης. Τα αποτελέσματα κατέγραψαν ότι η προτεινόμενη διαδικασία επιτυγχάνει σχεδόν άψογη επιλογή της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Επιπροσθέτως δείχθηκε αριθμητικώς η αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης διαδικασίας, έναντι των πρακτικών (εμπειρικών) διαδικασιών που ήδη υπάρχουν διαθέσιμες στην βιβλιογραφία.

Κεφάλαιο 7

Αναγνώριση της Τριβής Προολίσθησης μέσω του Μοντέλου Ολίσθησης του Maxwell

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της αναγνώρισης της τριβής προολίσθησης επί τη βάση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Για το λόγο αυτό εφαρμόζονται δύο μέθοδοι για την αναγνώριση της τριβής προολίσθησης, οι οποίες αναφέρονται ως Γραμμική Δυναμική Παλινδρόμηση (Dynamic Linear Regression - DLR) και Μη Γραμμική Παλινδρόμηση (NonLinear Regression - NLR), αντίστοιχα. Οι παραπάνω δύο μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικές προεκτάσεις της ήδη υπάρχουσας μεθόδου, ονομαζόμενη ως Γραμμική Παλινδρόμηση (Linear Regression - LR), κατά την οποία εκτελείται προεπιλογή των κατωφλίων (thresholds). Στα πλαίσια της πρώτης (DLR), εισάγεται επιπλέον δυναμική υπό τη μορφή ενός διανυσματικού φίλτρου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response filter - FIR), ενώ στη δεύτερη (NLR) τα όρια δεν προεπιλέγονται, αλλά εκτιμούνται επί τη βάση κατάλληλης διαδικασίας μη γραμμικής παλινδρόμησης (βλέπε προηγούμενα κεφάλαια). Η αποτελεσματικότητα και των δύο νέων μεθόδων ελέγχεται με τη βοήθεια σημάτων προερχόμενων από κατάλληλη πειραματική διάταξη. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι και οι δύο μέθοδοι, συγκρινόμενες με την υπάρχουσα (LR), παρουσιάζουν σαφή βελτίωση. Η πρώτη (DLR) παρέχει μεγαλύτερη ακρίβεια, ενώ η δεύτερη επιτυγχάνει πολύ καλό ισοζύγιο μεταξύ της ακρίβειας και της πολυπλοκότητας της παραμετροποίησης (parametric complexity).

7.1 Σύμβολα και Συντομογραφίες

7.1.1 Ακρωνύμια

LR	: Linear Regression μέθοδος (εκτιμήτρια)
NLR	: NonLinear Regression μέθοδος (εκτιμήτρια)
DLR	: Dynamic Linear Regression μέθοδος (εκτιμήτρια)
$LR(M, \mathbf{k})$	: Μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές, το οποίο εκτιμάται βάσει της LR μεθόδου
$NLR(M, \mathbf{k})$	: Μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές, το οποίο εκτιμάται βάσει της NLR μεθόδου (εκτιμήτριας)
$DLR(M, \boldsymbol{\theta}, n)$	: Τροποποιημένο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell με M τελεστές το οποίο εκτιμάται βάσει της DLR μεθόδου (εκτιμήτριας)
NOE	: Κανονικοποιημένο Σφάλμα Εξόδου (Normalized Output Error)

7.1.2 Σύμβολα

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	: Το διάνυσμα παραμέτρων προς εκτίμηση του $DLR(M, \boldsymbol{\theta}, n)$ μοντέλου
$f(t)$	: Μετρούμενο σήμα δύναμης τριβής προολίσθησης
$f(t, M)$	: Απόκριση του μοντέλου $LR(M, \mathbf{k})$, $NLR(M, \mathbf{k})$ ή $DLR(M, \boldsymbol{\theta}, n)$
$e(t)$	: Σφάλμα εξόδου ενός μοντέλου $LR(M, \mathbf{k})$, $NLR(M, \mathbf{k})$ ή $DLR(M, \boldsymbol{\theta}, n)$
t_{cr}	: Χρονική στιγμή επαλήθευσης της Συνθήκης $C0$
$\mathcal{J}$	: Συνάρτηση κόστους
n	: Τάξη του μοντέλου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR), το οποίο ενσωματώνεται στο μοντέλο $DLR(M, \boldsymbol{\theta}, n)$
$\bar{\mu}_f$	: Δειγματικός μέσος της μετρούμενης δύναμης τριβής προολίσθησης

7.2 Εισαγωγή

Η τριβή είναι το αποτέλεσμα μιας εξαιρετικά πολύπλοκης αλληλεπίδρασης δύο επιφανειών σε επαφή σε συνδυασμό με άλλους παράγοντες, όπως για παράδειγμα το λιπαντικό. Όπως είναι γνωστό η τριβή παρουσιάζει δύο περιοχές λειτουργίας, την προολίσθηση (presliding regime) και την ολίσθηση (sliding regime) [5].

Στην περιοχή προολίσθησης (ή μικρο-ολίσθησης), η σχετική μετατόπιση μεταξύ των επιφανειών σε επαφή είναι απειροελάχιστη (της τάξεως των $2 - 5 \mu m$ για ατσάλι [5]). Η τριβή στην περιοχή αυτή είναι κυρίως συνάρτηση της σχετικής μετατόπισης [5], και οφείλεται στις δυνάμεις συνοχής λόγω της ελαστοπλαστικής παραμόρφωσης των μικροσκοπικών προεξοχών (asperities) σε επαφή των δύο επιφανειών. Με αύξηση της μετατόπισης όλο και περισσότερες επαφές σπάνε και τελικά παρατηρείται μια σχετική μετατόπιση διαφυγής, πέραν της οποίας ξεκινάει η ολίσθηση. Στην περιοχή ολίσθησης οι επαφές έχουν σπάσει και παρατηρείται μακροσκοπική σχετική μετατόπιση μεταξύ

των επιφανειών. Στην περιοχή αυτή η τριβή είναι κυρίως συνάρτηση της σχετικής ταχύτητας [5].

Σε αρκετές εφαρμογές ελέγχου θέσεως υψηλής ακρίβειας, η τριβή προολίσθησης αποτελεί την κύρια αιτία που καθορίζει τη συμπεριφορά του συστήματος ελέγχου στην εναλλαγές στη φορά της κίνησης (motion reversal) και κοντά στην τελικά επιθυμητή θέση (hunting). Για το λόγο αυτό, η ακριβής μοντελοποίηση της τριβής προολίσθησης είναι εξαιρετικά σημαντική, τόσο για τους σκοπούς της μελέτης της δυναμικής συστημάτων με τριβή, όσο και στην ανάπτυξη διατάξεων ελέγχου ακριβείας.

Κατάλληλα πειράματα στην περιοχή προολίσθησης αποκάλυψαν ότι το φαινόμενο εμφανίζει υστερητική συμπεριφορά [6, 7]. Συγκεκριμένα δείχθηκε πειραματικώς ότι η δύναμη τριβής εξαρτάται όχι μόνο από την τρέχουσα τιμή της μετατόπισης αλλά και από τα παρελθοντικά ακρότατα αυτής. Συνεπώς, ο κυρίαρχος τύπος υστέρησης στην περιοχή της τριβής προολίσθησης είναι υστέρηση με μακρά μνήμη (hysteresis with nonlocal memory) (Βλέπε Σχήμα 1.3 – Κεφάλαιο 1).

Η ακριβής μοντελοποίηση της τριβής προολίσθησης βάσει φυσικών νόμων, των ιδιοτήτων και της γεωμετρίας των υλικών των επιφανειών σε επαφή δεν είναι ακόμα εφικτή. Για το λόγο αυτό, είναι αρκετά διαδεδομένη η χρήση μεθοδολογιών αναγνώρισης συστημάτων, οι οποίες βασίζονται σε πειραματικώς μετρούμενα σήματα. Οι μεθοδολογίες αυτές χωρίζονται σε μεθοδολογίες *μαύρου κουτιού* (black box), κατά τις οποίες δεν απαιτείται εκ των προτέρων γνώση της δυναμικής συμπεριφοράς της τριβής προολίσθησης [116, 21], και σε μεθοδολογίες *γκρίζου κουτιού* (gray box), στις οποίες περισσότερες πληροφορίες απαιτούνται. Η δεύτερη κατηγορία μπορεί επιπλέον να διαχωριστεί, βάσει της δομής του μοντέλου που χρησιμοποιείται, σε μεθοδολογίες που δεν εξαρτώνται από ενδιάμεσες καταστάσεις (state-independent) και σε αυτές που εξαρτώνται (state-dependent).

Στις μη εξαρτώμενες (state-independent) μεθοδολογίες, η τριβή προολίσθησης συνδέεται απευθείας με τη μετρούμενη μετατόπιση. Ο Kim και οι συνεργάτες του [117] χρησιμοποίησαν το μοντέλο του Armstrong [5] (η τριβή προολίσθησης και η μετατόπιση συνδέονται μέσω ενός γραμμικού ελατηρίου), ενώ η εκτίμηση του εν λόγω μοντέλου επιτεύχθηκε μέσω κατάλληλης διαδικασίας βελτιστοποίησης βασισμένη σε εξελικτικούς αλγόριθμους. Ο Wu και ο Tung [118] τροποποίησαν το μοντέλο τριβής του Coloumb, υποθέτοντας ότι η μετατόπιση στην περιοχή προολίσθησης είναι ανάλογη των μεταβολών της τριβής προολίσθησης, και όχι απευθείας της τριβής. Ο Awabdy και οι συνεργάτες του [119] συσχέτισαν την τριβή και τη μετατόπιση απευθείας, μέσω του τροποποιημένου μοντέλου του Dahl [120], ενώ η εκτίμηση έγινε μέσω ελαχίστων τετραγώνων. Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι παραπάνω μεθοδολογίες απαιτούν την διεξαγωγή εξειδικευμένων πειραμάτων.

Οι εξαρτώμενες (state-dependent) μεθοδολογίες συνδέουν την τριβή προολίσθησης με την

μετατόπιση, μέσω μη μετρήσιμων μεταβλητών κατάστασης. Σε αυτή την περίπτωση ο δυναμικός χαρακτήρας της τριβής προολίσθησης περιγράφεται αρτιότερα από ότι πριν, άλλα ταυτόχρονα η διαδικασία της αναγνώρισης είναι δυσκολότερη. Μια κλάση μεθοδολογιών βασίζεται στο ευρέως διαδεδομένο μοντέλο LuGre [9, 56] (καθώς και στην τροποποιημένη έκδοση αυτού, η οποία αναφέρεται ως ελαστοπλαστικό μοντέλο τριβής [58]) και σε κατάλληλη μη γραμμική βελτιστοποίηση στο πεδίο του χρόνου. Αν και η υλοποίηση τους είναι συγκριτικά απλή, απαιτείται, όπως και πριν, η διεξαγωγή πλήθους εξειδικευμένων, κατάλληλα σχεδιασμένων, πειραμάτων αναγνώρισης. Σε μια προσπάθεια αντιμετώπισης του μειονεκτήματος αυτού, έχει προσφάτως προταθεί μέθοδος [121, 55], η οποία χρησιμοποιεί μια γραμμικοποιημένη έκδοση του μοντέλου LuGre σε συνδυασμό με κατάλληλη μεθοδολογία αναγνώρισης στο πεδίο συχνοτήτων. Παρόλα αυτά, καμία από τις παραπάνω μεθοδολογίες δεν είναι σε θέση να αναπαραγάγει την παρατηρούμενη υστέρηση με μακρά μνήμη που παρατηρείται στην περιοχή της τριβής προολίσθησης.

Μια εναλλακτική μεθοδολογία βασίζεται στο μοντέλο τριβής Leuven [7], το οποίο χρησιμοποιεί δύο θέσεις μνήμης προσωρινής αποθήκευσης, για την αποθήκευση αντίστοιχα των παρελθοντικών τοπικών ελαχίστων και μεγίστων της μετατόπισης, τα οποία αντιστοιχούν στους ένθετους βρόγχους υστέρησης. Η εκτίμηση πραγματοποιείται μέσω προσαρμογής καμπύλης (curve fitting), με τρόπο παραπλήσιο με εκείνου που χρησιμοποιείται για στην αναγνώριση του μοντέλου υστέρησης του Preisach [10]. Το βασικότερο πλεονέκτημα της μεθοδολογίας αυτής είναι ότι ερμηνεύει την ειδική υστέρηση της τριβής προολίσθησης. Από την άλλη, το μέγεθος της προσωρινής μνήμης αποθήκευσης πρέπει να προεπιλεχθεί. Το γεγονός αυτό μπορεί να οδηγήσει σε φαινόμενα υπερχείλισης της μνήμης (stack overflow) σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου (on-line), όταν ο αριθμός των νέων βρόγχων υπερβεί την προεπιλεγμένη τιμή αυτή.

Προσφάτως, προτάθηκε μεθοδολογία [45, 4] για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματός. Η πρόταση βασίζεται στη χρήση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (Maxwell Slip model), το οποίο χρησιμοποιεί τμηματική προσέγγιση της υστέρησης της περιοχής προολίσθησης, με τη βοήθεια πλήθους στοιχειωδών τελεστών τύπου E-Π, οι οποίοι υπόκεινται σε τριβή Coulomb. Η εκτίμηση σε αυτή την περίπτωση υλοποιείται επί τη βάση γραμμικής παλινδρόμησης, σε συνδυασμό με κατάλληλη προεπιλογή κάποιων εκ των παραμέτρων του μοντέλου (των κατωφλίων ή thresholds).

Ο κύριος σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι να επιχειρήσει μία πρώτη προσέγγιση του φαινομένου της τριβής, επί τη βάση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Ως εκ τούτου αρχικά επιλέγεται η μελέτη του φαινομένου στην περιοχή προολίσθησης, όπου ο τύπος υστέρησης που εμφανίζεται μπορεί φαινομενολογία να αναπαραχθεί από το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell. Επί τη

βάση των παραπάνω, εφαρμόζεται για πρώτη φορά η μέθοδος (εκτιμήτρια) NLR για την αναγνώριση της τριβής στην περιοχή προολίσθησης. Επιπροσθέτως και προκειμένου να συνδυαστεί η φυσική εποπτεία και η απλότητα της βασικής δομής με βελτίωση της απόδοσης, αναπτύσσεται μία νέα μέθοδος η οποία βασίζεται και αυτή στο βασικό μοντέλο ολίσθησης του Maxwell και αναφέρεται ως Γραμμική Δυναμική Παλινδρόμηση (Dynamic Linear Regression - DLR).

Οι παραπάνω δύο μέθοδοι μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικές προεκτάσεις της ήδη υπάρχουσας μεθόδου, ονομαζόμενη ως Γραμμική Παλινδρόμηση (Linear Regression - LR), κατά την οποία εκτελείται προεπιλογή των κατωφλίων (thresholds) [45, 4]. Στα πλαίσια της DLR, εισάγεται επιπλέον δυναμική υπό τη μορφή ενός διανυσματικού φίλτρου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response filter - FIR). Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι η εν λόγω μέθοδος αποτελεί στην ουσία τον προάγγελο της επέκτασης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, η οποία εισάγεται στο επόμενο κεφάλαιο. Όσον αφορά τη μέθοδο (NLR) τα όρια δεν προεπιλέγονται αλλά εκτιμούνται επί τη βάση κατάλληλης διαδικασίας μη γραμμικής παλινδρόμησης (βλέπε προηγούμενα κεφάλαια).

Οι προτεινόμενες δύο μέθοδοι, ξεπερνούν τον περιορισμό της διεξαγωγής πλήθους κατάλληλων και εξειδικευμένων πειραμάτων αναγνώρισης, αφού είναι σε θέση να εκτελούν την εκτίμηση χρησιμοποιώντας δεδομένα από ένα πείραμα, το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί ακόμα και κατά τη διάρκεια της τυπικής λειτουργίας του συστήματος. Η αποτελεσματικότητα και των δύο νέων μεθόδων ελέγχεται με τη βοήθεια σημάτων προερχόμενων από κατάλληλη πειραματική διάταξη (πραγματικό σύστημα με τριβή στην περιοχή προολίσθησης), ενώ ταυτόχρονα συγκρίνονται με την ήδη υπάρχουσα (LR) μέθοδο.

Το παρόν κεφάλαιο δομείται ως εξής: Στη δεύτερη ενότητα παρουσιάζεται η ήδη υπάρχουσα LR μέθοδο, ξαναπαρουσιάζεται εν συντομία η NLR και εισάγεται η DLR μέθοδος (η βασική δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell δε ξανααναφέρεται – βλέπε Κεφάλαιο 3). Η μελέτη της αποτελεσματικότητας τους παρουσιάζεται στην τρίτη ενότητα, ενώ τέλος, τα βασικά συμπεράσματα του κεφαλαίου συνοψίζονται στην τέταρτη ενότητα.

7.3 Μέθοδοι Αναγνώρισης της Τριβής Προολίσθησης

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται οι δύο νέες μέθοδοι για την αναγνώριση της τριβής προολίσθησης. Οι μέθοδοι, οι οποίες βασίζονται στη δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, ονομάζονται: Δυναμική Γραμμική Παλινδρόμηση (Dynamic Linear Regression - DLR) και Μη - Γραμμική

Παλινδρόμηση (NonLinear Regression), αντίστοιχα. Σε γενικές γραμμές μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικές προεκτάσεις της ήδη υπάρχουσας μεθόδου της Γραμμικής Παλινδρόμησης (Linear Regression - LR), κατά την οποία τα κατώφλια (thresholds) προεπιλέγονται [45, 4]). Στα πλαίσια της DLR εισάγεται επιπλέον δυναμικός χαρακτήρας με τη μορφή ενός διανυσματικού φίλτρου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, ενώ στην NLR τα κατώφλια δεν προεπιλέγονται, αλλά εκτιμούνται μέσω κατάλληλης διαδικασίας μη - γραμμικής παλινδρόμησης.

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι, συμπεριλαμβανομένου και της LR, η οποία παρουσιάζεται από τη μία για λόγους συγκρίσεως και από την άλλη ως βάση για την εισαγωγή των DLR και NLR μεθόδων, στηρίζονται στην ελαχιστοποίηση ενός τετραγωνικού κριτηρίου (συνάρτηση κόστους) της μορφής¹:

$$\mathcal{J} \triangleq \sum_{t=t_{cr}}^N e^2(t) \quad (7.1)$$

όπου N ο αριθμός των δεδομένων των σημάτων διέγερσης - απόκρισης που χρησιμοποιούνται κατά την αναγνώριση, και $e(t)$ το σήμα του σφάλματος εξόδου, το οποίο ορίζεται ως η διαφορά των σημάτων της μετρούμενης τριβής $f(t)$ από την αντίστοιχη, επί τη βάση του εκάστοτε μοντέλου, προσομοίωση αυτής $f_M(t)$:

$$e(t) \triangleq f(t) - f_M(t) \quad (7.2)$$

Όπως κατά σύμβαση συνηθίζεται, το σφάλμα εξόδου, $e(t)$, θεωρείται ακολουθία ασυσχέτιστων παρατηρήσεων με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_e^2 [11] (σημειώνεται ότι η παραπάνω υπόθεση μπορεί να γενικευτεί (βλέπε Κεφάλαιο 5), άλλα αυτό είναι πέρα από τους σκοπούς του παρόντος κεφαλαίου²).

7.3.1 Η μέθοδος της Γραμμικής Παλινδρόμησης (LR)

Η ήδη υπάρχουσα μέθοδος της Γραμμικής Παλινδρόμησης LR είναι η απλούστερη δυνατή και εκτελεί μερική αναγνώριση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Το μη γραμμικό τμήμα [Εξ. (3.5)] του μοντέλου θεωρείται γνωστό (προεπιλογή των κατωφλίων), ενώ μόνο το γραμμικό τμήμα [Εξ. (3.6)] εκτιμάται. Εφόσον η αναγνώριση της τριβής πραγματοποιείται στην περιοχή προολίσθησης, τα κατώφλια τοποθετούνται (προεπιλέγονται) ομοιόμορφα στο εύρος λειτουργίας του συστήματος, όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\Delta_i = \frac{i}{M} \times \max_t \{|x(t)|\} \quad (i = 1, \dots, M) \quad (7.3)$$

¹Η συνάρτηση κόστους της Εξ. (7.1) είναι στην ουσία η ίδια συνάρτηση με αυτή της Εξ. (4.3). Αναφέρεται εκ νέου για λόγους κατανόησης και υιοθέτησης ευκολότερου συμβολισμού

²Η προσπάθεια του παρόντος κεφαλαίου επικεντρώνεται στην αποτύπωση των πλεονεκτημάτων της χρήσης του μοντέλου του Maxwell, υπό το πρίσμα της πρακτικότητας και χρησιμοποιώντας τα ελάχιστα δυνατά μαθηματικά εργαλεία και υποθέσεις. Με αυτόν τον τρόπο θα τονιστεί η ευκολία εφαρμογής της ακόμα και από μη εξειδικευμένους χρήστες.

Η αναπαράσταση της τριβής προολίσθησης από το μοντέλο LR(M) είναι της μορφής [συγκρινόμενη με την Εξ. (3.6)]:

$$\text{LR}(M, \mathbf{k}): \quad f_M(t) = \sum_{i=1}^M k_i \cdot \delta_i(t) + e(t) \quad (7.4)$$

η οποία υπόκειται στην Εξ. (3.5). Όπως είναι φανερό, η δομή του μοντέλου είναι γραμμική ως προς τις άγνωστες παραμέτρους (τις σταθερές των ελατηρίων) και ως εκ τούτου η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους της Εξ. (7.1) οδηγεί σε εκτιμήτρια τύπου γραμμικής παλινδρόμησης για τις άγνωστες σταθερές των γραμμικών ελατηρίων των τελεστών του μοντέλου.

7.3.2 Η Μέθοδος της Δυναμικής Γραμμικής Παλινδρόμησης (DLR)

Η παρούσα μέθοδος βασίζεται σε κατάλληλη προέκταση της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Όπως και πριν, υλοποιείται μερική αναγνώριση του μοντέλου, το μη γραμμικό κομμάτι [κατώφλια - Εξ. (3.5)] του μοντέλου προεπιλέγεται. Εντούτοις, το γραμμικό τμήμα του βασικού μοντέλου επεκτείνεται, επιτρέποντας την εξάρτηση της δύναμης προολίσθησης όχι μόνο από τις τρέχουσες τιμές των παραμορφώσεων των ελατηρίων των τελεστών, αλλά και από παρελθοντικές τιμές αυτών. Η προέκταση υλοποιείται οδηγώντας κάθε παραμόρφωση ελατηρίου μέσω ενός φίλτρου Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (Finite Impulse Response - FIR) τάξεως n . Για το λόγο αυτό, το διάνυσμα των παραμορφώσεων των ελατηρίων $\delta(t)$, το οποίο ορίζεται ως:

$$\delta(t) \triangleq [\delta_1(t) \dots \delta_M(t)]^T$$

οδηγείται σε ένα M -διάστατο φίλτρο τύπου FIR τάξεως n , με διανυσματικές παραμέτρους θ_i ($i = 0, \dots, n$).

Το μοντέλο DLR(M, n, θ) είναι της μορφής:

$$\text{DLR}(M, n, \theta): \quad f_M(t) = \sum_{i=0}^n \theta_i^T \cdot \delta(t-i) + e(t) \quad (7.5)$$

εξαρτώμενο από την Εξ. (3.5). Με θ συμβολίζεται το σύνθετο διάνυσμα των παραμέτρων του φίλτρου FIR, το οποίο είναι προς εκτίμηση, ενώ με $e(t)$ το αντίστοιχο σφάλμα του μοντέλου.

Η δομή του μοντέλου DLR διατηρεί τη γραμμικότητα του ως προς τις (εκτιμώμενες) παραμέτρους του μοντέλου. Για το λόγο αυτό η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους της Εξ. (7.1) εξακολουθεί να οδηγεί σε εκτιμήτρια τύπου γραμμικής παλινδρόμησης για το άγνωστο διάνυσμα θ . Το βασικό πλεονέκτημα της εν λόγω δομής είναι η εισαγωγή επιπρόσθετης δυναμικής συμπεριφοράς και ευελιξίας υπό τη μορφή του M -διάστατου φίλτρου τύπου FIR. Το γεγονός αυτό είναι θέση να εξισορροπήσει, μέχρι ενός βαθμού, τη διαφορά της πραγματικής δυναμικής της τριβής προολίσθησης

και του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, η οποία προέρχεται τόσο λόγω εσφαλμένης προεπιλογής των κατωφλίων, όσο λόγω της ύπαρξης επιπλέον δυναμικού χαρακτήρα, ο οποίος δεν είναι σε θέση να ερμηνευτεί από τη βασική δομή (για παράδειγμα την ύπαρξη μικρο-βισκοελαστικής απόσβεσης μεταξύ των προεξοχών των δύο επιφανειών που έρχονται σε επαφή).

7.3.3 Η μέθοδος Μη - Γραμμικής Παλινδρόμησης (NLR)

Η μέθοδος της Μη - Γραμμικής Παλινδρόμησης σκοπεύει στην ολοκληρωτική εκτίμηση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, δηλαδή στην εκτίμηση τόσο των σταθερών των ελατηρίων, όσο και των κατωφλίων. Το μοντέλο NLR(M) είναι της μορφής:

$$\text{NLR}(M, \mathbf{k}, \mathbf{d}): \quad f_M(t) = \sum_{i=1}^M k_i \cdot \delta_i(t) + e(t) \quad (7.6)$$

εξαρτώμενο από την Εξ. (3.5), με $e(t)$ το σφάλμα εξόδου του μοντέλου.

Αναμένεται ότι η εκτίμηση των κατωφλίων θα αυξήσει την ακρίβεια. Από την άλλη όμως η γραμμικότητα του μοντέλου ως προς τις εκτιμώμενες παραμέτρους του χάνεται. Σε αυτή τη περίπτωση, η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους της Εξ. (7.1) οδηγεί σε εκτιμήτρια μη γραμμικής παλινδρόμησης. Εντούτοις, είναι απαραίτητο να παρατηρηθεί ότι το μοντέλο είναι μη γραμμικό μόνο ως προς το διάνυσμα των κατωφλίων $\mathbf{d}$, ενώ η γραμμικότητα ως προς το διάνυσμα των σταθερών των ελατηρίων, $\mathbf{k}$, διατηρείται (βλέπε Κεφάλαιο 4 για περισσότερες λεπτομέρειες). Για το λόγο αυτόν, η εκτιμήτρια μπορεί να υλοποιηθεί διαδοχικά ως μη γραμμική και γραμμική παλινδρόμηση, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}^T & \hat{\mathbf{d}}^T \end{bmatrix}^T = \arg \min_{\mathbf{k}, \mathbf{d}} \mathcal{J}(\mathbf{k}, \mathbf{d}) = \arg \min_{\mathbf{d}} \{ \min_{\mathbf{k}} \mathcal{J}(\mathbf{k}/\mathbf{d}) \} \quad (7.7)$$

Η μη γραμμική παλινδρόμηση υλοποιείται αριθμητικά μέσω κατάλληλης υβριδικής διαδικασίας βελτιστοποίησης δύο σταδίων (βλέπε Κεφάλαιο 4).

7.3.4 Διαδικασία επιλογής της δομής του μοντέλου

Λόγω του ότι ο κύριος σκοπός της αναγνώρισης της τριβής στην περιοχή προολίσθησης είναι η προσομοίωση και ο έλεγχος, η επιλογή της δομής του μοντέλου επικεντρώνεται σε αυτές τις ανάγκες και βασίζεται κατά κύριο λόγο στην ικανότητα του εκάστοτε μοντέλου να παρέχει ικανοποιητική προσομοίωση. Η ικανότητα αυτή μετράται μέσω ενός κανονικοποιημένου τετραγωνικού κριτηρίου του σφάλματος εξόδου του μοντέλου, το οποίο ονομάζεται *κανονικοποιημένο σφάλμα εξόδου*, (Nor-

malized Output Error - NOE):

$$NOE = \frac{\sum_{t=t_{cr}}^N (f(t) - f_M(t))^2}{\sum_{t=t_{cr}}^N (f(t) - \bar{\mu}_f)^2} \times 100\% \quad (7.8)$$

όπου με $f(t)$ και $f_M(t)$ συμβολίζεται αντίστοιχα η πραγματική δύναμη τριβής και η εκ του μοντέλου προσομοίωση αυτής, με $\bar{\mu}_f$ ο δειγματικός μέσος της πραγματικής δύναμης τριβής και με N ο αριθμός των δειγμάτων που περιέχονται στα σήματα. Το βασικό πλεονέκτημα του παρόντος κριτηρίου είναι ότι εστιάζει απευθείας στην δυναμική εισόδου - εξόδου και είναι εφαρμόσιμο σε οποιαδήποτε δομή μοντέλου.

Η επιλογή της δομής για τα μοντέλα LR(M) και NLR(M) (επιλογή του αριθμού M των τελεστών) στηρίζεται στη διαδοχική εκτίμηση μοντέλων με αυξανόμενο αριθμό τελεστών και στον υπολογισμό του κανονικοποιημένου κριτηρίου του σφάλματος εξόδου. Όσον αφορά το μοντέλο DLR(M,n) η επιλογή της δομής βασίζεται στην εκτίμηση μοντέλων με διάφορες τάξεις n για κάθε M . Η τελική δομή επιλέγεται λαμβάνοντας υπόψη διάφορες τιμές M . Η επιβεβαίωση των μοντέλων βασίζεται στην ικανότητα προσομοίωσης των μοντέλων χρησιμοποιώντας ένα σετ δεδομένων, το οποίο αναφέρεται ως *σετ εγκυρότητας*, το οποίο δεν έχει χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση αυτών (cross validation principle)³.

7.4 Αποτελέσματα Αναγνώρισης Τριβής Προολίσθησης

Προτού δοθούν περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα αποτελέσματα της αναγνώρισης της τριβής προολίσθησης, παρέχονται αναλυτικές λεπτομέρειες σχετικά με τους Γενετικούς αλγόριθμους, οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των παραμέτρων στα πλαίσια της NLR μεθόδου. Κάθε κατώφλι κωδικοποιείται με τη βοήθεια του αλγόριθμου του Gray[110] στο εύρος $[LB, UB]$, χρησιμοποιώντας ανάλυση 20 bits. Το κάτω όριο LB θέτεται ίσο με το LTL, ενώ το άνω επιλέγεται αυθαίρετα. Ο χρησιμοποιούμενος γενετικός αλγόριθμος ενσωματώνει: (i) ένα μη - γραμμικό τελεστή κατάταξης (ranking) με συντελεστή (selective pressure) ίσο με 1,3, (ii) έναν στοχαστικό καθολικό τελεστή δειγματοληψίας (stochastic universal sampling), ο οποίος διαθέτει συντελεστή χάσματος γενεών (generation gap) ίσο με 0,97, (iii) έναν τελεστή διασταύρωσης δύο σημείων (two-point crossover operator) με πιθανότητα διασταύρωσης ίση με 0.80, (iv) ένα τελεστή μετάλλαξης

³Η επιλογή της δομής και ο έλεγχος εγκυρότητας, στην περίπτωση του NLR μοντέλου, θα μπορούσε να υλοποιηθεί βάσει των θεωρητικών επιτευγμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου. Παρά ταύτα, επιλέχθηκε να υιοθετηθεί η εν λόγω “απλουστευμένη” διαδικασία, έτσι ώστε: (i) Να ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία για όλα τα μοντέλα (δεν υπάρχουν αντίστοιχα, όπως για το NLR, θεωρητικά αποτελέσματα για τα LR και DLR μοντέλα) και (ii) Είναι επιθυμητό να διατηρηθεί η διαδικασία αναγνώρισης της τριβής προολίσθησης όσο το δυνατόν πιο απλή, έτσι ώστε να μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί και από ένα μη έμπειρο χρήστη, παρουσιάζοντας με τον τρόπο αυτόν την αποτελεσματικότητά και την πρακτικότητα αυτής.

(mutation) με πιθανότητα μετάλλαξης ίση με 0.01 και (v) έναν τελεστή επανατοποθέτησης βάσει της απόδοσης (fitness-based reinsertion operator). Ο δειγματικός πληθυσμός και ο αριθμός των γενεών επιλέχθηκαν ανάλογα με την πολυπλοκότητα του υπό εκτίμηση μοντέλου, δίχως να ξεπερνάει και στις δύο περιπτώσεις το 300.

7.4.1 Αποτελέσματα Αναγνώρισης Τριβής Προολίσθησης

Τα παρόντα αποτελέσματα βασίζονται σε ένα ζεύγος σημάτων μετατόπιση - δύναμη τριβής προολίσθησης. Τα σήματα έχουν 25.033 δείγματα έκαστο και προέρχονται από κατάλληλη πειραματική διάταξη, στην οποία δύο επιφάνειες έρχονται σε επαφή και το όλο σύστημα λειτουργεί στην περιοχή προολίσθησης [17]. Η εφαρμοζόμενη μετατόπιση είναι ένα στοχαστικό σήμα, το οποίο έχει πρώτα φιλτραριστεί με τη βοήθεια ενός βαθυπερατού ψηφιακού φίλτρου, με συχνότητα δειγματοληψίας ίση με $f_s = 250\text{Hz}$.

Η επίδραση των αρχικών συνθηκών εξαλείφεται όπως έχει ήδη προταθεί. Για το λόγο αυτό εντοπίζεται το ολικό ακρότατο (ελάχιστο στην περίπτωση αυτή) της εφαρμοζόμενης δύναμης, το οποίο εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t_{cr} = 18.252$. Επομένως, τα υπολειπόμενα 6.781 δείγματα από κάθε σήμα, χωρίζονται σε δύο μη - επικαλυπτόμενα σει δεδομένων. Το πρώτο, το οποίο ονομάζεται *σει εκτίμησης*, περιέχει 2.000 ($t = 18.252 \dots 20251$) δεδομένα και χρησιμοποιείται για τους σκοπούς της αναγνώρισης (εκτίμηση και επιλογή δομής). Το δεύτερο (σει εγκυρότητας) έχει μήκος 4.781 δεδομένα ($t = 20.252 \dots 25.033$) και χρησιμοποιείται για τον ανεξάρτητο έλεγχο των επιδόσεων των εκτιμώμενων μοντέλων.

Τα αποτελέσματα της επιλογής της δομής του μοντέλου παρουσιάζονται στο Σχήμα 7.1, στο οποίο παρουσιάζεται το κανονικοποιημένο σφάλμα εξόδου συναρτήσεως του αριθμού M των χρησιμοποιούμενων τελεστών. Το Σχήμα 7.1(a) αναφέρεται στο σει εκτίμησης, ενώ το Σχήμα 7.1(b) στο σει εγκυρότητας. Όσον αφορά την DLR μέθοδο, στο Σχήμα 7.1(a) παρουσιάζεται η τάξη n (για κάθε M), πέραν της οποίας η μείωση του σφάλματος είναι πρακτικά αμελητέα.

Όπως είναι φανερό από το Σχήμα 7.1(a), το σφάλμα μειώνεται με το M . Παραταύτα, ο ρυθμός μείωσης του σφάλματος για τα μοντέλα LR γίνεται αρκετά μικρός για $M \geq 6$, ενώ για τα NLR επιπεδώνεται για $M \geq 6$. Για το λόγο αυτό τελικά επιλέγονται τα μοντέλα LR(6) και NLR(6). Όσον αφορά τα DLR μοντέλα, το σφάλμα μειώνεται για $M \leq 7$, παραμένει σχεδόν σταθερό για $M = 8$, ενώ συνεχίζει να μειώνεται για $M \leq 9$. Για λόγους οικονομίας της παραμετροποίησης (principle of parsimony), επιλέγεται το μοντέλο DLR(7,8).

Σχήμα 7.1: NOE κριτήριο συναρτήσει του αριθμού των τελεστών: (α) Σει εκτίμησης (Estimation Set)· (β) Σει εγκυρότητας (Validation Set).

Η συμπεριφορά των επιλεγμένων μοντέλων στο σετ εγκυρότητας είναι ανάλογη [Σχήμα 7.1(b)], επιδεικνύοντας ότι τα μοντέλα αυτά αποτελούν έγκυρες προσεγγίσεις της πραγματικής δυναμικής του συστήματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι για τα μοντέλα NLR, το σφάλμα αυξάνει για $M \leq 9$ [Σχήμα 7.1(b)]. Μία πιο προσεκτική διερεύνηση των μοντέλων NLR(9) και NLR(10) υποδεικνύει ότι περιέχουν τελεστές με σχεδόν ίσα κατώφλια (thresholds) και αντίθετες σταθερές ελατηρίων. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις βασικές Υποθέσεις 3.2 – 3.3 και ως εκ τούτου είναι μη αποδεκτό⁴. Η δομή των μοντέλων αυτών είναι καθαρά υπερεκτιμημένη, και πιθανών η συμπεριφορά αυτή να οφείλεται στην προσπάθεια του μοντέλου να ερμηνεύσει δυναμική, την οποία η δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, δεν είναι σε θέση να αντιμετωπίσει.

Όπως είναι εμφανές από τα παραπάνω αποτελέσματα, όλα τα επιλεγμένα μοντέλα είναι σε θέση να αναπαράγουν, σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό, την υποθάλπουσα πραγματική δυναμική της τριβής προολίσθησης. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται και από τα αποτελέσματα του Σχήματος 7.2, το οποίο παρουσιάζει τη σύγκριση της πειραματικά μετρούμενης δύναμης τριβής προολίσθησης με την αντίστοιχα προσομοιωμένη από τα επιλεχθέντα μοντέλα [LR(6), DLR(7,8) και NLR(6)]. Επιπλέον, στο Σχήμα 7.2 παρουσιάζονται και τα αντίστοιχα σήματα των σφαλμάτων εξόδου των τελικά επιλεγμένων μοντέλων.

⁴Σύμφωνα με την ανάλυση του Κεφαλαίου 6, η συμπεριφορά αυτή είναι σαφής ένδειξη υπερπαραμετροποίησης (χρήσης περισσότερων τελεστών από όσους πραγματικά χρειάζονται)

Σχήμα 7.2: Σύγκριση της προσομοιωμένης, επί τη βάσει των εκτιμώμενων μοντέλων, δύναμης της τριβής προολίσθησης ($\cdot$) με την πειραματικά μετρούμενη ($-$) και οι αντίστοιχες ακολουθίες των σφαλμάτων εξόδου των μοντέλων (Πειραματικά αποτελέσματα, μέρος του σετ εγκυρότητας).

Στον Πίνακα 7.1 παρουσιάζεται μια λεπτομερής σύγκριση των επιδόσεων (κανονικοποιημένα σφάλματα εξόδου και απόλυτο μέγιστο σφάλμα) των επιλεγμένων μοντέλων στο σετ εγκυρότητας. Επιπλέον, παρουσιάζεται και η πολυπλοκότητα της παραμετροποίησης (αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων) του κάθε μοντέλου, μαζί με τον απαιτούμενο, για την εκτίμηση του κάθε μοντέλου, χρόνο. Όπως είναι εμφανές, το μοντέλο DLR(7,8) επιτυγχάνει την καλύτερη ακρίβεια (χαμηλότερο σφάλμα), ακολουθούμενο από το NLR(6) και τελικά το LR(6), σε συνδυασμό με τη δεύτερη καλύτερη επίδοση του απόλυτου μέγιστου σφάλματος [με μικρή διαφορά από το πρώτο NLR(6)]. Από την άλλη όμως παρουσιάζει, με διαφορά, τη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, η οποία όμως δεν αντανακλάται στον υπολογιστικό χρόνο, λόγω της γραμμικότητας της μεθόδου. Σε αντίθεση η NLR μέθοδος παρουσιάζει υψηλό υπολογιστικό χρόνο, λόγω της μη - γραμμικής παλινδρόμησης.

Πίνακας 7.1: Χαρακτηριστικά των εκτιμώμενων μοντέλων (Πειραματικά αποτελέσματα για το σετ εγκυρότητας).

	LR(6)	DLR(7, 8)	NLR(6)
NOE κριτήριο ^a (%)	4.6	0.7	1.5
Μέγιστο Σφάλμα ^a (Nt)	1.2	1.0	0.9
Παραμετρική Πολυπλοκότητα	6	63	12
Υπολογιστικός Χρόνος (min)	1.8×10^{-3}	3.4×10^{-3}	18.8

^aΗ προσομοίωση ξεκινάει από τη χρονική στιγμή $t_{cr} = 18, 252$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι το NLR(6) μοντέλο παρουσιάζει εξαιρετικά καλύτερη ακρίβεια από το αντίστοιχο LR(6), ενώ και τα δύο περιέχουν τον ίδιο αριθμό τελεστών. Από την άλλη μεριά το DLR(7,8) μοντέλο προσφέρει την καλύτερη ακρίβεια. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η πολυπλοκότερη δομή του, σε σύγκριση με τα υπόλοιπα δύο, επιτρέπει την καλύτερη αναπαράσταση της πραγματικής δυναμικής της τριβής προολίσθησης. Εντούτοις, το τίμημα για το πλεονέκτημα αυτό είναι η αυξημένη πολυπλοκότητα του εν λόγω μοντέλου (περισσότερες εκτιμώμενες παράμετροι - Πίνακας 7.1). Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο NLR(6) (του οποίου οι παράμετροι παρουσιάζονται στον Πίνακα 7.2) σημειώνει πολύ καλή ισορροπία μεταξύ της επιτευχθείσας ακρίβειας και της πολυπλοκότητας της παραμετροποίησης. Ο υπολογιστικός χρόνος του εν λόγω μοντέλου, αν και είναι υψηλός, δεν αποτελεί μειονέκτημα, υπό την προϋπόθεση ότι η εκτίμηση του δεν πραγματοποιείται σε πραγματικό χρόνο (off-line estimation).

7.5 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα της αναγνώρισης της τριβής στην περιοχή προολίσθησης, επί τη βάση της δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Η εν λόγω δομή περιέχει τελεστές τύπου E-Π και ως εκ τούτου είναι σε θέση να αντιμετωπίζει φαινόμενα υστέρησης δίχως τοπική μνήμη. Επί τη βάση αυτού, αναπτύχθηκαν οι νέες μέθοδοι, οι οποίες ονομάστηκαν Δυναμική Γραμμική Παλινδρόμηση (Dynamic Linear Regression - DLR) και Μη - Γραμμική Παλινδρόμηση (Non - Linear Regression - NLR). Οι αποτελεσματικότητά τους ελέγχθηκε μέσω πειραματικών σημάτων από ένα μηχανικό σύστημα με τριβή, το οποίο λειτουργεί στην περιοχή προολίσθησης. Υλοποιήθηκαν συγκρίσεις με τη ήδη υπάρχουσα μέθοδο της Γραμμικής Παλινδρόμησης (Linear Regression - LR). Τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν καταδεικνύουν τα παρακάτω.

1. Όλες οι μέθοδοι κατάφεραν, αν και με διαφορετικό βαθμό ακρίβειας, να μοντελοποιήσουν την πραγματική δυναμική της τριβής προολίσθησης.

Πίνακας 7.2: Οι εκτιμώμενες παράμετροι του τελικά επιλεγμένου μοντέλου NLP(6) (Πειραματικά αποτελέσματα).

i	1	2	3	4	5	6
Δ_i (μm)	5.7×10^{-3}	1.1×10^{-1}	4.2×10^{-1}	1.5	4.1	7.8
k_i ($Nt/\mu m$)	26	1.3	4.1×10^{-1}	4.3×10^{-1}	2.2×10^{-1}	5.9×10^{-1}

2. Η ήδη υπάρχουσα LR μέθοδος παρέχει μερική αναγνώριση του μοντέλου (τα κατώφλια προεπιλέγονται) και οδηγεί στα μεγαλύτερα σφάλματα και σε εκτιμήσεις παραμέτρων οι οποίες δεν είναι σε συμφωνία με τις πραγματικές.
3. Η DLR μέθοδος εκτελεί και αυτή μερική αναγνώριση του μοντέλου. Παραταύτα, η εν λόγω δομή δίνει τη δυνατότητα αναπαράστασης επιπλέον δυναμικής συμπεριφοράς, πέρα των δυνατοτήτων της βασικής δομής. Επιπλέον είναι σε θέση να μειώνει το σφάλμα λόγω λανθασμένης προεπιλογής των κατωφλίων του μοντέλου. Σε γενικές γραμμές η μέθοδος παρέχει το χαμηλότερο σφάλμα προσομοίωσης της τριβής προολίσθησης, αλλά παρουσιάζει τη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα της παραμετροποίησης.
4. Η NLR μέθοδος επιτρέπει την ολοκληρωτική αναγνώριση του μοντέλου, μέσω κατάλληλης μη γραμμικής παλινδρόμησης. Προσφέρει εξαιρετική ακρίβεια στην εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου, ενώ επιπλέον επιτυγχάνει πολύ καλή αντιστάθμιση μεταξύ της συνολικής ακρίβειας και της πολυπλοκότητας της παραμετροποίησης.
5. Η προτεινόμενη επέκταση της βασικής δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (DLR) φαίνεται να προσφέρει σαφή βελτίωση στη δυνατότητα αναπαράστασης της πραγματικής δυναμικής του φαινομένου της τριβής προολίσθησης. Επί τη βάση των πειραματικών αυτών αποτελεσμάτων (και κάποιων άλλων παρατηρήσεων, οι οποίες θα αναφερθούν στο επόμενο κεφάλαιο) δημιουργήθηκε η ιδέα της επεκτάσεως της βασικής δομής. Η πλήρης ανάπτυξη και παρουσίαση της προτεινόμενης επέκτασης αποτελεί ένα από τα βασικά θέματα του επόμενου και τελευταίου κεφαλαίου της παρούσας διατριβής.

Τελειώνοντας, αξίζει να σημειωθεί ότι τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που επιτεύχθηκαν στο παρόν κεφάλαιο, αν και αναφέρονται στο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, δεν περιορίζονται μόνο στη αναγνώριση του φαινομένου της τριβής προολίσθησης. Για το λόγο αυτό, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την αναγνώριση πλήθους φυσικών συστημάτων ή φαινομένων με χαρακτηριστικά υστέρησης παραπλήσια με αυτά της τριβής, όπως για παράδειγμα σε μαγνητικά υλικά και πιεζοηλεκτρικούς διεγέρτες.

Κεφάλαιο 8

Αναγνώριση Τριβής στη Συνδυασμένη Περιοχή Προολίσθησης – Ολίσθησης Βάσει των Μοντέλων LuGre και ολίσθησης του Maxwell

Στο παρόν κεφάλαιο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα της αναγνώρισης του φαινομένου της τριβής στην συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης. Για το λόγο αυτό εισάγονται τρεις μέθοδοι αναγνώρισης, οι οποίες συμβολίζονται ως LG, NLR και DNLRX. Η πρώτη χρησιμοποιεί το γνωστό μοντέλο τριβής LuGre, η δεύτερη το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell στη βασική του έκδοση, ενώ η τρίτη την προτεινόμενη επέκταση αυτού. Ως γνωστό το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell είναι σε θέση να αναπαράγει σε πολύ καλό βαθμό τη δυναμική της τριβής προολίσθησης (βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο), αλλά δίνει σταθερή δύναμη τριβής στην ολίσθηση. Ο περιορισμός αυτός παρακάμπτεται από την προτεινόμενη επέκταση αυτού, κατά την οποία εισάγεται επιπλέον δυναμική. Η αναγνώριση, σε όλες τις παραπάνω μεθόδους, υλοποιείται επί τη βάση ενός σετ δεδομένων (δεδομένα από ένα μόνο πείραμα). Αρχικά, η απόδοση των παραπάνω μεθόδων αποτιμάται βάσει κατάλληλων Monte Carlo προσομοιώσεων και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας πειραματικά (πραγματικά) δεδομένα. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι η DNLRX μέθοδος επιτυγχάνει τη βέλτιστη απόδοση, ακολουθούμενη από την NLR και τέλος από τη LG. Στη συνέχεια προτείνεται και αξιολογείται μια διαδικασία πρόσω - αντιστάθμισης (feedforward) της τριβής, η οποία στηρίζεται στην προτεινόμενη μεθοδολογία DNLRX. Τα αποτελέσματα του ελέγχου κατέδειξαν ότι η προτεινόμενη διαδικασία οδηγεί σε αποτελεσματική αντιστάθμιση της τριβής.

Σχήμα 8.1: Προσομοίωση των δύο επιφανειών που έρχονται σε επαφή, παρουσιάζοντας τους δεσμούς που αναπτύσσονται λόγω τραχύτητας (asperities) των επιφανειών ως ελαστικές προεξοχές (v : ταχύτητα, z : παραμόρφωση προεξοχών).

8.1 Εισαγωγή

Η τριβή είναι ένα σημαντικό μη - γραμμικό φαινόμενο το οποίο μπορεί να δημιουργήσει σφάλματα θέσεως, κατά τον έλεγχο μηχανικών συστημάτων, κίνηση με μεταβάσεις από ακινησία σε ολίσθηση και ανάποδα (stick and slip motion) και πολλά άλλα. Γενικά η συμπεριφορά της χωρίζεται σε δύο περιοχές λειτουργίας: Την περιοχή προολίσθησης (presliding or microslip regime) και ολίσθησης (sliding regime). Στην πρώτη οι δυνάμεις συνοχής λόγω της τραχύτητας των δύο επιφανειών που έρχονται σε επαφή είναι κυρίαρχες, με αποτέλεσμα να μην παρατηρείται μακροσκοπική σχετική μετακίνηση. Η τριβή στην περιοχή αυτή εξαρτάται κυρίως από τα παρελθοντικά ακρότατα της (σχετικής) μετατόπισης, με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται υστέρηση με μακρά μνήμη (hysteresis with nonlocal memory) [7]. Όσο η σχετική μετατόπιση αυξάνεται τόσο περισσότεροι δεσμοί σπάνε (μείωση των δυνάμεων συνοχής) τόσο πιο πιθανή είναι η επίτευξης μακροσκοπικής κίνησης. Ως εκ τούτου υπάρχει ένα όριο πέρα του οποίου το σύστημα εισέρχεται στην περιοχή ολίσθησης. Στην περιοχή αυτή, η τριβή εξαρτάται κυρίως από την (σχετική) ταχύτητα και ο προηγούμενος τύπος υστέρησης εξαφανίζεται, δίνοντας τη θέση του σε ένα νέο που είναι εξαρτώμενος του ρυθμού διεγέρσεως (Σχήμα 1.3). Ταυτόχρονα εμφανίζονται και διάφορα άλλα μη - γραμμικά φαινόμενα [5].

Η ύπαρξη ενός “καλού” μοντέλου τριβής είναι απαραίτητη για διάφορους σκοπούς, όπως η φυσική κατανόηση συστημάτων με τριβή, όπως επίσης και ο έλεγχος αυτών. Παραταύτα, η απευθείας (και ακριβής) μοντελοποίηση της τριβής βάσει των φυσικών της νόμων που την διέπουν, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των υλικών και των επιφανειών που έρχονται σε επαφή, δεν είναι ακόμα εφικτή. Για το λόγο αυτό η μοντελοποίηση ανάγεται σε πρόβλημα αναγνώρισης, στα πλαίσια του οποίου εκτιμώνται κατάλληλα μοντέλα, συνήθως τριβής, επί τη βάση πειραματικών μετρήσεων. Ως εκ τούτου έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι αναγνώρισης της τριβής. Σε γενικές γραμμές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε μεθόδους “μαύρου κουτιού” (black - box methods), κατά τις οποίες δε χρησιμοποιείται η διαθέσιμη, για τη δυναμική της τριβής, γνώση [122, 100, 21, 22], και σε μεθόδους “γκρίζου κουτιού” (grey - box or physics based methods), στις οποίες χρησιμοποιείται

η υπάρχουσα γνώση για το σύστημα με τριβή που μοντελοποιείται (βλέπε παρακάτω). Πρόσφατες μελέτες κατέδειξαν ότι βέλτιστα αποτελέσματα επιτυγχάνονται συνδυάζοντας μεθόδους από τις δύο παραπάνω κατηγορίες [21, 22].

Οι μέθοδοι γκρίζου κουτιού μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως *ανεξάρτητες εσωτερικών καταστάσεων* (*state - independent*) και *εξαρτώμενες εσωτερικών καταστάσεων* (*state - dependent*). Στην πρώτη περίπτωση η τριβή συνδέεται απευθείας με τη (σχετική) ταχύτητα (ή / και μετατόπιση), δίνοντας μια μάλλον απλοποιημένη έκφραση της δυναμικής της τριβής. Οι πιο κλασικές μέθοδοι συνδέουν την τριβή με την ταχύτητα μέσω της στατικής απεικόνισης που προσφέρει ένα μοντέλο Coulomb σε συνδυασμό με έναν όρο βισκοελαστικής απόσβεσης (*viscous damping*). Η διαδικασία αναγνώρισης του εν λόγω μοντέλου μπορεί να βασιστεί είτε σε τεχνικές στο πεδίο του χρόνου [5] ή στο πεδίο των συχνοτήτων [123, 124]. Πέρα τούτων, έχουν προταθεί και αναπτυχθεί μέθοδοι οι οποίες χρησιμοποιούν το μοντέλο τριβής του Karnopp [125] και επιχειρούν την αναγνώριση είτε μέσω μη - γραμμικής βελτιστοποίησης [126], είτε μέσω τεχνικών πολλαπλών σταδίων στο πεδίο του χρόνου [127]. Πιο εξελιγμένες μέθοδοι, όσον αφορά τη δομή του χρησιμοποιούμενου μοντέλου της τριβής, λαμβάνουν υπόψη το φαινόμενο Stribeck και επιχειρούν αναγνώριση μέσω τεχνικών γραμμικής ή μη - γραμμικής παλινδρόμησης [5] ή μέσω επεκταμένου φιλτραρίσματος Kalman (*extended Kalman filtering*) [128]. Εντούτοις, καμία από τις παραπάνω μεθόδους δε λαμβάνει υπόψη την περιοχή προολίσθησης. Για το λόγο αυτό ο Awabdy και οι συνεργάτες του επέλεξαν το τροποποιημένο μοντέλο Dahl [120] και εκτίμησαν της παραμέτρους του μέσω τεχνικών προσαρμογής καμπύλης (*curve fitting*) [119]. Οι Wu και Tung τροποποίησαν το κλασικό μοντέλο τριβής του Coulomb, εκφράζοντας την μετατόπιση στην περιοχή προολίσθησης συναρτήσει των διαφορών της δύναμης τριβής [118].

Παρά το γεγονός ότι οι παραπάνω μέθοδοι είναι συγκριτικά απλές, αδυνατούν να περιγράψουν τη δυναμική φύση του φαινομένου της τριβής, κυρίως στην περιοχή ολίσθησης και κατά τη μετάβαση από την προολίσθηση στην ολίσθηση. Για το λόγο αυτόν, ο Armstrong ανέπτυξε ένα μοντέλο τριβής εφτά παραμέτρων, και επέλεξε διαδικασία εκτίμησης, η οποία βασίζεται σε πολλαπλά και εξειδικευμένα πειράματα, σε διεξοδικό ψάξιμο και σε γραμμική παλινδρόμηση. Εναλλακτικά, και πάντα για το συγκεκριμένο μοντέλο, έχει προταθεί διαδικασία εκτίμησης ενός σταδίου, η οποία βασίζεται στη μη - γραμμική βελτιστοποίηση μέσω εξελικτικών αλγορίθμων (*evolutionary optimization*) [117].

Σε αντίθεση με τις προαναφερθείσες, οι μέθοδοι που εξαρτώνται από εσωτερικές καταστάσεις (*state dependent*) συνδέουν, δυναμικά, την τριβή με τη ταχύτητα (ή/και μετατόπιση) μέσω εσωτερικών

(μη μετρήσιμων) μεταβλητών κατάστασης (state variables). Με τον τρόπο αυτό, η δυναμική του φαινομένου της τριβής περιγράφεται αρτιότερα, αλλά ταυτόχρονα η διαδικασία της αναγνώρισης γίνεται δυσκολότερη. Οι Oancea και Laursen [129] επέλεξαν ένα φαινομενολογικό μοντέλο, το οποίο εξαρτάται τόσο από το ρυθμό διέγερσης όσο και από μια εσωτερική (μη μετρήσιμη) μεταβλητή κατάστασης. Αν και το συγκεκριμένο μοντέλο ενσωματώνει την πειραματική παρατήρηση ότι το σύστημα ακινητοποιείται κατά την αλλαγή της φοράς της κίνησης (η σχετική ταχύτητα μηδενίζεται) δίχως όμως να μηδενίζεται η δύναμη τριβής (τριβή προολίσθησης ή κύλισης - frictional stick), δεν ερμηνεύει την πειραματικά παρατηρούμενη μετατόπιση προολίσθησης (presliding displacement). Επίσης η προτεινόμενη διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου, περιλαμβάνει τη διεξαγωγή πολλαπλών, ειδικά σχεδιασμένων, πειραμάτων.

Μια μεγάλη κλάση (state dependent) μεθόδων βασίζεται στο μοντέλο τριβής LuGre [9]. Στις περισσότερες των περιπτώσεων, η εκτίμηση των παραμέτρων αυτού υλοποιείται διαχωρίζοντας αυτές σε στατικές και δυναμικές, οι οποίες αναφέρονται στην περιοχή ολίσθησης και προολίσθησης, αντίστοιχα. Η εκτίμησή τους υλοποιείται διεξάγοντας κατάλληλα πειράματα στις δύο αυτές περιοχές, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, για τις στατικές διεξάγονται πολλαπλά πειράματα σε διαφορετικές σταθερές ταχύτητες με το σύστημα να βρίσκεται στην περιοχή ολίσθησης. Η εκτίμησή τους υλοποιείται είτε μέσω μη - γραμμικής βελτιστοποίησης [56] ή μέσω επεκταμένου φιλτραρίσματος Kalman (Kalman filtering). Από την άλλη μεριά, η διαδικασία εκτίμησης των δυναμικών παραμέτρων είναι δυσκολότερη. Για την επίτευξη της εκτίμησης, οι Canudas de Wit και Lischinsky πρότειναν μια διαδικασία τριών σταδίων [56]. Ο Dupont και οι συνεργάτες του [58] επέλεξαν ένα μοντέλο με δομή παραπλήσια αυτής του LuGre, το οποίο και το ονόμασαν ελαστοπλαστικό μοντέλο τριβής (Elastoplastic friction model) και εφάρμοσαν μέθοδο εκτίμησης παρόμοια με την προηγούμενη. Ο Hensen και οι συνεργάτες του χρησιμοποίησαν μια γραμμικοποιημένη έκδοση του μοντέλου LuGre και εκτίμησαν τις δυναμικές παραμέτρους χρησιμοποιώντας δεδομένα από ένα πείραμα και κατάλληλη τεχνική στο πεδίο των συχνοτήτων [55]. Πέραν αυτής, έχει αναφερθεί μία εργασία η οποία επιχειρεί την εκτίμηση όλων των παραμέτρων του μοντέλου LuGre (στατικών και δυναμικών) μέσω χρήσης γενετικών αλγορίθμων [130]. Όμως η αποτελεσματικότητα της έχει ελεγχθεί μόνο με προσομοιωμένα σήματα και όχι μέσω πραγματικού πειράματος.

Εναλλακτικά, οι Hsieh και Pan [131] επικεντρώθηκαν στην περιοχή προολίσθησης και πρότειναν ένα μοντέλο, το οποίο αποτελείται από τέσσερα μέρη (modules), προκειμένου να ερμηνεύσουν την υστέρηση που εμφανίζεται στην περιοχή αυτή. Ο Swevers και οι συνεργάτες του προτείναν το ολοκληρωμένο μοντέλο τριβής Leuven, το οποίο είναι παραπλήσιο με το LuGre, αλλά ενσωματώνει επιπλέον παραμέτρους έτσι ώστε να είναι σε θέση να αναπαριστάνει την υστέρηση με μακρά μ-

Σχήμα 8.2: Σχηματική απεικόνιση του διαδικασίας πρόσω αντιστάθμισης της τριβής σε ένα μηχανικό σύστημα.

νήμη της περιοχής προολίσθησης [7]. Σε αντιπαράθεση με όλες τις παραπάνω μεθόδους, οι δύο τελευταίες αντιμετωπίζουν την υστέρηση προολίσθησης, άλλα προκειμένου να εκτιμηθούν τα αντίστοιχα μοντέλα απαιτούνται πολλαπλά και εξειδικευμένα πειράματα. Προσφάτως, ο Al-Bender και οι συνεργάτες του πρότειναν μία γενικευμένη έκδοση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, επιχειρώντας την αναγνώριση αυτού μέσω κατάλληλης μη - γραμμική βελτιστοποίησης βασισμένη σε γενικούς αλγόριθμους [22].

Επιπλέον, η αναγνώριση του φαινομένου της τριβής είναι εξίσου σημαντική και για τον αποτελεσματικό έλεγχο συστημάτων με τριβή. Σε γενικές γραμμές, οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος του ελέγχου συστημάτων με τριβή, χωρίζονται σε δύο γενικές κλάσεις. Στην πρώτη, η οποία δεν απαιτεί την ύπαρξη μοντέλου τριβής (non - model), ανήκουν οι μέθοδοι, οι οποίες είτε θεωρούν την τριβή την τρέχουσα χρονική στιγμή ως (άγνωστη) μεταβλητή κατάστασης και την συνυπολογίζουν μαζί με τις υπόλοιπες μεταβλητές κατάστασης [132] του συστήματος, είτε προσθέτουν κατάλληλο σήμα (dither signal) στο σήμα ελέγχου με σκοπό την εξουδετέρωση μέρους της επίδρασης της τριβής [5]. Στη δεύτερη ανήκουν οι μέθοδοι, οι οποίες απαιτούν την ύπαρξη μοντέλου τριβής. Σε γενικές γραμμές η αρχή λειτουργίας τους περιγράφεται στο Σχήμα 8.2 και στηρίζεται στο ότι η πραγματική τριβή (f), εκτιμάται με τη βοήθεια κάποιου μοντέλου και η αντίστοιχη δύναμη ($\hat{f}$) η οποία αντισταθμίζει τη τριβή προστίθεται στο σήμα ελέγχου [5, 133]. Όπως είναι λοιπόν φανερό, η ύπαρξη ενός μοντέλου τριβής με καλή ικανότητα πρόβλεψης της τριβής είναι βασική προϋπόθεση.

Το παρόν κεφάλαιο στοχεύει στην αναγνώριση του φαινομένου της τριβής στη συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης, βάσει του μοντέλου LuGre και του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Τρεις μέθοδοι αναγνώρισης, οι οποίες συμβολίζονται ως LG (LuGre), NLR (NonLinear Regression) και DNLRX (Dynamic NonLinear Regression with direction application of eXcitation) αναπτύσσονται και εφαρμόζονται.

Η πρώτη μέθοδος, η οποία χρησιμοποιεί το μοντέλο τριβής LuGre, μπορεί να θεωρεί ως επέκταση αυτής που αναφέρεται στην αναφορά [130], και χρησιμοποιείται κυρίως για λόγους σύγκρισης, διότι το εν λόγω μοντέλο είναι ίσως το πιο διαδεδομένο μοντέλο τριβής.

Η δεύτερη μέθοδος χρησιμοποιεί το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell στη βασική του δομή [το οποίο για λόγους συμβολισμού στο παρόν (όπως και στο προηγούμενο) κεφάλαιο αναφέρεται και ως μοντέλο NLR]. Η συγκεκριμένη δομή είναι σε θέση να αναπαράγει την υστέρηση προολίσθησης με μακρά μνήμη [4], αλλά παρουσιάζει το μειονέκτημα ότι δίνει σταθερή τριβή στην περιοχή ολίσθησης.

Η τρίτη μέθοδος (DNLRX) υπερπηδάει το μειονέκτημα της “σταθερής τριβής στην περιοχή ολίσθησης”, μέσω κατάλληλης επέκτασης της βασικής δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Έτσι για το λόγο αυτό προτείνεται το μοντέλο DNLRX.

Στα πλαίσια και των τριών παραπάνω μεθόδων, όλες οι αντίστοιχες παράμετροι του εκάστοτε μοντέλου εκτιμώνται ταυτόχρονα, χρησιμοποιώντας ένα σετ δεδομένων μετατόπισης - δύναμη τριβής, όπως αυτό προκύπτει από μία επανάληψη του πειράματος. Έτσι με τον τρόπο αυτόν, η πειραματική διαδικασία απλοποιείται, διότι η συνήθης απαίτηση για πολλαπλά εξειδικευμένα πειράματα παρακάμπτεται.

Στη συνέχεια των παραπάνω, υλοποιείται επιπλέον επέκταση της DNLRX μεθόδου. Ο σκοπός της επέκτασης αυτής είναι η αναγνώριση του φαινομένου της τριβής, επί τη βάση των πιο κοινών, κατά τη διάρκεια μια εφαρμογής, μετρούμενων σημάτων, τα οποία είναι η μετατόπιση και η εφαρμοζόμενη δύναμη (Σχήμα 8.2). Η συγκεκριμένη επέκταση παρακάμπτει την ανάγκη την ύπαρξης των σημάτων της ταχύτητας και επιτάχυνσης (είτε μέσω μετρήσεων, είτε μέσω αριθμητικής παραγωγίσης, είτε με άλλον τρόπο), του σήματος της δύναμης της τριβής, καθώς και τη γνώση των φυσικών παραμέτρων (π.χ. μάζα) του συστήματος. Έτσι με τον τρόπο αυτό, η πειραματική διαδικασία απλοποιείται περαιτέρω, αφού το σήμα της δύναμης τριβής δεν απαιτείται πλέον. Περαιτέρω δε απαιτείται ο ελάχιστος αριθμός αισθητήρων.

Οι κύριες συνεισφορές του παρόντος κεφαλαίου συνοψίζονται ως εξής:

1. Η ταυτόχρονη εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου LuGre χρησιμοποιώντας δεδομένα από ένα πείραμα (δεν απαιτούνται πολλαπλά και εξειδικευμένα πειράματα). Η αποτίμηση της απόδοσης της εκτίμησης για τη συγκεκριμένη μέθοδο.
2. Η προτεινόμενη επέκταση της βασικής δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, η διαδικασία εκτίμησης αυτού (DNLRX) και η αποτίμηση της απόδοσης της εκτίμησης της συγ-

κεκριμένης μεθόδου.

3. Η συγκριτική πειραματική αποτίμηση της αποδόσεως των LuGre, NLR και DNLRX μεθόδων, για την αναγνώριση του φαινομένου της τριβής στην συνδυασμένη περιοχή, χρησιμοποιώντας ένα σετ (πραγματικών) μετρήσεων μετατόπισης - δύναμης τριβής.
4. Η επιπλέον επέκταση της DNLRX μεθόδου, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η αναγνώριση του συστήματος με τριβή, χρησιμοποιώντας τα πιο ευκόλως μετρούμενα σήματα, τα οποία είναι η μετατόπιση και η εφαρμοζόμενη δύναμη.

Το υπόλοιπο κεφάλαιο οργανώνεται ως εξής: Οι μαθηματικές εκφράσεις των χρησιμοποιούμενων δομών μοντέλων παρουσιάζονται στην ενότητα 8.2. Οι LG, NLR και DNLRX μέθοδοι αναγνώρισης παρουσιάζονται στην ενότητα 8.3, ενώ η αποτελεσματικότητά τους ελέγχεται μέσω Monte Carlo προσομοιώσεων και πραγματικών πειραματικών σημάτων στην ενότητα 8.4. Η επέκταση της DNLRX μεθόδου παρουσιάζεται στην ενότητα 8.5 και αποτιμάται μέσω ενός απλού αριθμητικού πειράματος ελέγχου μέσω αντιστάθμισης στην ενότητα 8.6. Τέλος τα συμπεράσματα του κεφαλαίου συγκεντρώνονται στη ενότητα 8.7.

8.2 Δομές Μοντέλων

8.2.1 Η Δομή Μοντέλου LuGre

Το μοντέλο τριβής LuGre (LG) [9], ενσωματώνει μία μη - παρατηρήσιμη μεταβλητή κατάσταση, z , η οποία αναπαριστάνει τη μέση παραμόρφωση των ελαστικών προεξοχών των δύο επιφανειών που έρχονται σε επαφή, οι οποίες είναι υπεύθυνες για τη ανάπτυξη της τριβής (Σχήμα 8.1). Το μοντέλο είναι σε θέση να ερμηνεύει και να αναπαριστά τα περισσότερα από τα παρατηρούμενα δυναμικά φαινόμενα, τα οποία συγκροτούν το φαινόμενο της τριβής. Εντούτοις δεν είναι σε θέση να αναπαράγει τη υστέρηση με μακρά μνήμη που παρουσιάζεται στην περιοχή προολίσθησης [7].

Το μοντέλο LuGre περιγράφεται από μια μη - γραμμική εξίσωση κατάστασης:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|}{s(v)} \cdot z \quad (8.1)$$

και από μια εξίσωση εξόδου, η οποία προσεγγίζει τη δύναμη τριβής:

$$f_{LG} = \sigma_0 \cdot z + \sigma_1 \cdot \frac{dz}{dt} + \sigma_2 \cdot v \quad (8.2)$$

Σχήμα 8.3: Η βασική δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.

Στις παραπάνω μαθηματικές εκφράσεις με v συμβολίζεται η (σχετική) ταχύτητα, με σ_0 μια ισοδύναμη δυσκαμψία και με σ_1 , σ_2 οι συντελεστές μικρό - βισκοελαστικής και βισκοελαστικής απόσβεσης, αντίστοιχα. Η $s(v)$ είναι μια συνάρτηση, η οποία καθορίζεται από το χρήστη, η οποία μοντελοποιεί τη συμπεριφορά σταθερής ταχύτητας (constant-velocity behavior). Στα πλαίσια της παρούσας ανάλυσης υιοθετείται η παρακάτω έκφραση, η οποία είναι παραπλήσια της τυπικά χρησιμοποιούμενης [5]:

$$s(v) = a_1 + \frac{a_2}{1 + \left(\frac{|v|}{v_s}\right)^\mu}, \quad a_1 = \frac{F_c}{\sigma_0}, \quad a_2 = \frac{F_s - F_c}{\sigma_0} \quad (8.3)$$

όπου με F_c και F_s περιγράφεται η *Coulomb* και *στατική (τριβή κύλισης)* τριβή, αντίστοιχα, με v_s η ταχύτητα *Striebeck*, η οποία είναι η ταχύτητα κατά την οποία η τριβή ολίσθησης λαμβάνει την ελάχιστη της τιμή και με μ μια επιπλέον παράμετρος για αύξηση της ευελιξίας της μοντελοποίησης.

8.2.2 Δομές βασισμένες στο Μοντέλο Ολίσθησης του Maxwell

Η Βασική Δομή του Μοντέλου

Αν και η (βασική) δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell έχει ήδη περιγραφεί σε προηγούμενα κεφάλαια, επαναπεριγράφεται στον παρόν κεφάλαιο, κυρίως για λόγους πληρότητας και κατανόησης (Σχήμα 8.3). Ως εκ τούτου, το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell στην βασική του έκδοση, περιέχει M τελεστές τύπου Ε - Π σε παράλληλη διάταξη, στους οποίους ασκείται η ίδια μετατόπιση $x(t)$ (διέγερση). Κάθε τελεστής παρουσιάζει αμελητέα (μηδενική) αδράνεια, σταθερά ελατηρίου k_i και μέγιστη (απόλυτη) παραμόρφωση ελατηρίου Δ_i (κατώφλι - threshold). Για παραμόρφωση ελατηρίου μικρότερη (κατά απόλυτη τιμή) του κατωφλιού Δ_i [$|\delta_i(t)| < \Delta_i$], ο τελεστής είναι ακίνητος (sticks), σε αντίθετη περίπτωση ολισθαίνει [$|\delta_i(t)| = \Delta_i$] ολισθαίνει (slips). Το όλο σύστημα

παραμένει ακίνητο, με άλλα λόγια βρίσκεται στην περιοχή προολίσθησης, αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας τελεστής παραμένει ακίνητος ($\exists j \in [1, M] : |\delta_j(t)| < \Delta_j$), ενώ ολισθαίνει, βρίσκεται στην περιοχή ολίσθησης, αν και μόνο αν όλοι οι τελεστές ολισθαίνουν ($|\delta_i(t)| = \Delta_i, \forall i$).

Το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell περιγράφεται από M μη - γραμμικές εξισώσεις κατάστασης (βλέπε Κεφάλαιο 4 για περισσότερες πληροφορίες):

$$\delta_i(t+1) = \text{sgn}[x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)] \cdot \min\{|x(t+1) - x(t) + \delta_i(t)|, \Delta_i\}, \quad \forall i = 1, \dots, M \quad (8.4)$$

όπου $i = 1, \dots, M$, ενώ η τριβή προσεγγίζεται από την ακόλουθη εξίσωση εξόδου (άθροισμα των δυνάμεων ελατηρίων των επιμέρους τελεστών):

$$f_M(t) = \sum_{i=1}^M k_i \cdot \delta_i(t) \quad (8.5)$$

όπου $t = 1, 2, \dots$ αναπαριστά τον (κανονικοποιημένο) διακριτό χρόνο.

Τα βασικά πλεονεκτήματα του εν λόγω μοντέλου είναι η απλότητα του, η φυσική εποπτεία που παρέχει, όπως επίσης η ικανότητα του να περιγράφει υστέρηση με μακρά μνήμη [4]. Το κυριότερο μειονέκτημα είναι το γεγονός ότι παρέχει σταθερή δύναμη τριβής στην περιοχή ολίσθησης [βλέπε την Εξ. (8.5) λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύστημα ολισθαίνει αν και μόνο αν $|\delta_i(t)| = \Delta_i, \forall i$, το οποίο σημαίνει ότι όλοι οι τελεστές ολισθαίνουν]. Όπως είναι εμφανές, ο περιορισμός αυτός μπορεί να μειώσει την απόδοση του εν λόγω μοντέλου, χειροτερεύοντας τα αποτελέσματα. Ως εκ τούτου μια κατάλληλη επέκταση αυτού κρίνεται αναγκαία (βλέπε παρακάτω).

Επέκταση της Δομής του Μοντέλου

Η επέκταση του μοντέλου στηρίζεται σε κατάλληλη τροποποίηση του γραμμικού μέρους του μοντέλου, δηλαδή της εξίσωσης εξόδου [Εξ. (8.5)] της βασικής δομής του μοντέλου. Συγκεκριμένα, η δύναμη τριβής στην περίπτωση αυτή εξαρτάται από τις τρέχουσες, αλλά και παρελθοντικές τιμές τόσο των παραμορφώσεων των ελατηρίων $[\delta_i(t)]$, όσο και από την ίδια την εφαρμοζόμενη μετατόπιση $x(t)$. Η προσέγγιση αυτή επιτυγχάνεται οδηγώντας το σήμα της μετατόπισης μέσω ενός φίλτρου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (Finite Impulse Response filter - FIR filter) τάξεως n_x και παραμέτρων r_j ($j = 0, \dots, n_x$) και το διάνυσμα των παραμορφώσεων των ελατηρίων $\delta(t)$, το οποίο ορίζεται ως:

$$\delta(t) \triangleq [\delta_1(t) \dots \delta_M(t)]^T,$$

μέσω ενός διανυσματικού (M διαστάσεων) FIR φίλτρου τάξεως n [με διανυσματικούς συντελεστές θ_r ($r = 0, \dots, n$)]. Έτσι λοιπόν είναι της ακόλουθης μορφής [σημειώνεται ότι το νέο (επεκταμένο)

μοντέλο δηλώνεται ως $\text{DNLRX}(M, n, n_x)$:

$$f_{EM}(t) = \sum_{j=0}^n \theta_j^T \cdot \delta(t-j) + \sum_{j=0}^{n_x} r_j \cdot x(t-j) \quad (8.6)$$

το οποίο υπόκειται στην Εξ (8.4). Σύμφωνα με το δεύτερο μέρος της Εξ. (8.6), η τριβή εξαρτάται από το ιστορικό της μετατόπισης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της μετατόπισης, το εν λόγω μέρος της Εξ. (8.6) μπορεί να θεωρεί ως το διακριτού - χρόνου ισοδύναμο της εξάρτησης της τριβής στην ταχύτητα, το οποίο μπορεί εν γένει να περιγράψει και το φαινόμενο της χρονικής υστέρησης της τριβής στην περιοχή ολίσθησης (frictional lag - αλλαγές στη τριβή συμβαίνουν με χρονική καθυστέρηση συγκρινόμενες με τις αλλαγές στην ταχύτητα [5]).

Σύμφωνα με το πρώτο μέρος της Εξ. (8.6), η τριβή εξαρτάται και από το ιστορικό των παραμορφώσεων των ελατηρίων. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως το διακριτού - χρόνου ανάλογο της ύπαρξης της μικρο - βισκοελαστικότητας.

Η προτεινόμενη επέκταση διατηρεί την απλότητα της βασικής δομής, υπό την έννοια ότι το μη - γραμμικό τμήμα του μοντέλου [Εξ (8.4)] διατηρείται ως έχει. Επιπροσθέτως προσδίδει επιπλέον δυναμικό χαρακτήρα και ευελιξία στην δομή, λόγω της εισαγωγής των FIR φίλτρων. Η εν λόγω επέκταση μπορεί, μέχρι ενός βαθμού, να ερμηνεύσει διαφορές μεταξύ της πραγματικής δυναμικής της τριβής και της βασικής δομής. Προφανώς το κόστος που πρέπει να πληρωθεί είναι η εισαγωγή επιπλέον παραμέτρων, οι οποίες σημειωτέον εισάγονται με τρόπο γραμμικό ως προς την επεκτεταμένη δομή.

8.3 Μη - Γραμμική Αναγνώριση του Φαινομένου της Τριβής

Οι επιλεγμένες μέθοδοι αναγνώρισης βασίζονται στις προαναφερθέντες δομές μοντέλων. Η πρώτη μέθοδος (LG) χρησιμοποιεί το μοντέλο LuGre. Η NLR (NonLinear Regression) μέθοδος, χρησιμοποιεί τη βασική δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, και έχει ήδη χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση του φαινομένου της τριβής στην περιοχή προολίσθησης (βλέπε προηγούμενο κεφάλαιο). Η DNLRX (Dynamic NonLinear Regression with direct application of the eXcitation) χρησιμοποιεί την προτεινόμενη επεκταμένη δομή μοντέλου.

Στα πλαίσια όλων των μεθόδων, όλες οι αντίστοιχες παράμετροι εκτιμώνται ταυτόχρονα επί τη βάση ενός ζεύγους σημάτων μετατόπισης (διέγερση) και δύναμης τριβής (απόκριση), όπως αυτά προκύπτουν από τη διεξαγωγή ενός και μοναδικού πειράματος. Όπως είναι φανερό, με τον τρόπο αυτό παρακάμπτεται η συνηθισμένη απαίτηση για διεξαγωγή πολλαπλών και εξειδικευμένων πειρα-

μάτων, και η εκτίμηση σε κάθε περίπτωση υλοποιείται μέσω ελαχιστοποίησης ενός τετραγωνικού κριτηρίου (συνάρτηση κόστους) της ακόλουθης μορφής:

$$\mathcal{J} \triangleq \sum_{t=\lambda}^N e^2(t) \quad (8.7)$$

όπου με N συμβολίζεται το μήκος των διαθέσιμων σημάτων, ενώ $\lambda \equiv 1$ για τις LG και NLR μεθόδους και $\lambda \equiv \max\{n, n_x\} + 1$ για την DNLRX μέθοδο. $e(t)$ είναι το σφάλμα εξόδου το οποίο ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της μετρούμενης $f(t)$ και της επί τη βάση του εκάστοτε μοντέλου προσομοιωμένης, $\bar{f}(t)$, δύναμης τριβής:

$$e(t) \triangleq f(t) - \bar{f}(t) \quad (8.8)$$

Το σφάλμα αυτό θεωρείται ως στάσιμη λευκή ακολουθία με μηδενική μέση τιμή και διασπορά ίση με σ_e^2 . Σημειώνεται ότι η θεώρηση αυτή μπορεί να επεκταθεί, αλλά κάτι τέτοιο είναι πέρα από τους σκοπούς του παρόντος κεφαλαίου.

8.3.1 Η LG Μέθοδος

Η μέθοδος LG έχει ως σκοπό τη αναγνώριση του LuGre μοντέλου, το οποίο μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή [βλέπε Εξ. (8.2)]:

$$\text{LG}(\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}_{LG}): f(t) = \boldsymbol{\theta}_{LG}^T \cdot \left[z(t) : \frac{dz(t)}{dt} : v(t) : 1 \right]^T + e(t) \quad (8.9)$$

η οποία υπόκειται στις Εξ. (8.1) και Εξ. (8.3). Τα διανύσματα $\mathbf{g}$ και $\boldsymbol{\theta}_{LG}$ περιέχουν τις παραμέτρους του μοντέλου:

$$\mathbf{g} \triangleq [z_0 \ a_1 \ a_2 \ v_s \ \mu]^T, \quad \boldsymbol{\theta}_{LG} \triangleq [\sigma_0 \ \sigma_1 \ \sigma_2 \ b]^T \quad (8.10)$$

όπως επίσης και την αρχική τιμή z_0 της μη - μετρήσιμης μεταβλητής κατάστασης $z(t)$, και την παράμετρο b , η οποία είναι μία επιπλέον μεταβλητή η οποία χρησιμοποιείται για την αντιστάθμιση τυχόν μέσης τιμής στα σήματα λόγω αισθητήρων (sensor bias).

Όπως είναι εμφανές, το μοντέλο είναι μη - γραμμικό ως προς το διάνυσμα $\mathbf{g}$ [Εξ. (8.1) και Εξ. (8.3)], έτσι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους οδηγεί σε εκτιμήτρια μη - γραμμικής παλινδρόμησης. Παραταύτα, το μοντέλο παραμένει γραμμικό ως προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}_{LG}$ [Εξ. (8.9)]. Για το λόγο αυτό, η συνολική εκτιμήτρια μπορεί να υλοποιηθεί μέσω διαδοχικής μη - γραμμικής και γραμμικής παλινδρόμησης (βλέπε υποενότητα στη συνέχεια 8.3.3). Η εν λόγω διαδικασία υλοποίησης της εκτιμήτριας είναι η βασική διαφορά της προτεινόμενης LG μεθόδου και αυτής που περιγράφεται στην αναφορά [130].

Σημειώνεται ότι η εξέλιξη (evolution) της μεταβλητής κατάστασης $z(t)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης της μη - γραμμικής διαφορικής εξίσωσης της Εξ. (8.1), είτε εφαρμόζοντας σε αυτή κατάλληλη διακριτοποίηση. Στο παρόν κεφάλαιο υιοθετείται η πρώτη εναλλακτική.

8.3.2 Μέθοδοι Αναγνώρισης βάσει του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell

Η Μέθοδος NLR

Η NLR μέθοδος αναφέρεται στην αναγνώριση του βασικού μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, το οποίο δηλώνεται και ως NLR μοντέλο (βλέπε υποενότητα 8.2.2), η οποία συνιστάται στην εκτίμηση των σταθερών των ελατηρίων (k_i) και των κατωφλίων (thresholds - Δ_i).

Το μοντέλο NLR είναι της ακόλουθης μορφής [συγκρινόμενο με την Εξ. (8.5)]:

$$\text{NLR}(M; \mathbf{d}, \boldsymbol{\theta}_M): f(t) = \boldsymbol{\theta}_M^T \cdot \left[\boldsymbol{\delta}^T(t) : 1 \right]^T + e(t) \quad (8.11)$$

η οποία υπόκειται στην Εξ. (8.4), όπου με $\boldsymbol{\theta}_M$ και $\mathbf{d}$ (διάνυσμα των κατωφλίων) ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{d} \triangleq [\Delta_1 \dots \Delta_M]^T, \quad \boldsymbol{\theta}_M \triangleq [k_1 \dots k_M \ b]^T \quad (8.12)$$

όπου με b συμβολίζεται μία επιπλέον παράμετρος η οποία έχει τον ίδιο ρόλο όπως και πριν.

Λόγω του μη - γραμμικού τμήματος του μοντέλου Εξ. (8.4), η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους $\mathcal{J}$ οδηγεί σε μη - γραμμική παλινδρόμηση. Εφόσον το μοντέλο είναι μη - γραμμικό μόνο ως προς το διάνυσμα $\mathbf{d}$, ενώ παραμένει γραμμικό ως προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}_M$, η εκτίμηση δύναται να εκτιμηθεί με τρόπο όμοιο με την προηγούμενη περίπτωση (LG).

Η Μέθοδος DNLRX

Η συγκεκριμένη μέθοδος στοχεύει στην αναγνώριση του επεκταμένου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (μοντέλο DNLRX - βλέπε υποενότητα 8.2.2), το οποίο είναι της μορφής:

$$\text{DNLRX}(M, n, n_x; \mathbf{d}, \boldsymbol{\theta}_{EM}): f(t) = \boldsymbol{\theta}_{EM}^T \cdot \left[\boldsymbol{\delta}^T(t) \dots \boldsymbol{\delta}^T(t-n) : x(t) \dots x(t-n_x) : 1 \right]^T + e(t) \quad (8.13)$$

και υπόκειται επιπλέον στην Εξ. (8.4), με $\boldsymbol{\theta}_{EM}$ το σύνθετο διάνυσμα διαστάσεων $(n+1) \cdot M + n_x + 2$ που περιέχει τις παραμέτρους του μοντέλου (εκτός από τα κατώφλια):

$$\boldsymbol{\theta}_{EM} \triangleq \left[\boldsymbol{\theta}_0^T \dots \boldsymbol{\theta}_n^T : r_0 \dots r_{n_x} : b \right]^T \quad (8.14)$$

Εφόσον το εν λόγω μοντέλο είναι μη - γραμμικό ως προς το διάνυσμα $\mathbf{d}$ και γραμμικό ως προς το $\boldsymbol{\theta}_{EM}$ διάνυσμα, τότε η εκτίμηση του μπορεί να πραγματοποιηθεί όπως και πριν.

Αρχικές Τιμές της Παραμόρφωσης των Ελατηρίων

Προκειμένου να υπολογιστεί η συνάρτηση κόστους $\mathcal{J}$, είναι απαραίτητο να προσδιοριστεί το διάνυσμα των αρχικών παραμορφώσεων των ελατηρίων των τελεστών $\delta_M(1)$ (αρχικές καταστάσεις). Λόγω του ότι το διάνυσμα αυτό δεν είναι διαθέσιμο (οι παραμορφώσεις των ελατηρίων των τελεστών είναι ποσότητες μη - μετρήσιμες) πρέπει είτε να εκτιμηθεί είτε να επιλεγθεί με κατάλληλο τρόπο. Εντούτοις, τα αποτελέσματα του τετάρτου κεφαλαίου κατέδειξαν ότι η αυθαίρετη επιλογή των αρχικών καταστάσεων, όπως επίσης και η εκτίμηση αυτών (δεν υπάρχει εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα ως προς τις αρχικές συνθήκες) δημιουργεί προβλήματα, μειώνοντας την ακρίβεια της εκτίμησης. Για αυτό το λόγο και προκειμένου να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό μπορεί να εφαρμοστεί η διαδικασία που προτάθηκε στο τρίτο κεφάλαιο (Συνθήκη $C0$), η οποία στην τρέχουσα κατάσταση υλοποιείται ως εξής¹: Αρχικά λαμβάνεται υπόψη ότι το σύστημα λειτουργεί συνδυαστικά και στην περιοχή προολίσθησης αλλά και στην περιοχή ολίσθησης. Όταν η μετατόπιση λάβει (ας υποθεθεί τη χρονική στιγμή t_{cr}) ένα “δεσπόζον” (dominant) ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο), τότε το σύστημα θα έχει ήδη ξεφύγει από τη περιοχή προολίσθησης [η απαιτούμενη μετατόπιση για τη μετάβαση (break-away displacement)] από την προολίσθηση στην ολίσθηση έχει ξεπεραστεί). Συνεπώς το σύστημα τη χρονική στιγμή t_{cr} ολισθαίνει, και ως εκ τούτου (εξ’ ορισμού) όλοι οι τελεστές του ολισθαίνουν ως προς την ίδια διεύθυνση με τη μετατόπιση τη χρονική στιγμή αυτή. Επομένως αν χρησιμοποιηθούν για τους σκοπούς της εκτίμησης τα δεδομένα από τη χρονική στιγμή t_{cr} και έπειτα, τότε οι άγνωστες αρχικές καταστάσεις (αρχικές παραμορφώσεις ελατηρίων) μπορούν να επιλεγθούν ως $\delta_M(1) = \text{sgn}[x(t_{cr})]d$.

Επιλογή Τάξης για τα NLR / DNLRX Μοντέλα

Ο κύριος σκοπός για τον οποίο πραγματοποιείται η αναγνώριση της τριβής στο παρόν κεφάλαιο είναι η επίτευξη μοντέλων με πολύ καλές δυνατότητες προσομοίωσης της δύναμης τριβής (βλέπε τα αντίστοιχα σχόλια στην εισαγωγή του κεφαλαίου). Για το λόγο αυτόν η διαδικασία επιλογής της τάξεως των μοντέλων προσαρμόζεται σε αυτήν την απαίτηση. Έτσι η επιλογή υλοποιείται επί τη βάση ενός κανονικοποιημένου κριτηρίου σφάλματος εξόδου (Normalized Output Error criterion – NOE),

¹Αξίζει να σημειωθεί ότι το πείραμα, τα αποτελέσματα του οποίου θα παρουσιαστούν στην επόμενη ενότητα, δε σχεδιάστηκε έτσι ώστε η διέγερση να υπακούει εξ’ αρχής στη Συνθήκη $C0$. Εντούτοις ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, η Συνθήκη $C0$ μπορεί να εφαρμοστεί εκ’ των υστέρων, δίχως να δημιουργηθεί κάποιο πρόβλημα. Η επιλογή αυτή έγινε με σκοπό να δειχθεί η απλότητα και η πρακτική ευελιξία της προτεινόμενης Συνθήκης $C0$. Έτσι η Συνθήκη δύναται να επιτευχθεί ακόμα και όταν δεν είναι δυνατή η επανάληψη της πειραματικής διαδικασίας ή ακόμα και όταν λαμβάνονται οι μετρήσεις κατά την τυπική λειτουργία του συστήματος.

το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$\text{NOE} = \frac{\sum_{t=\lambda}^N (f(t) - \bar{f}(t))^2}{\sum_{t=\lambda}^N (f(t) - \hat{\mu}_f)^2} \times 100\% \quad (8.15)$$

όπου με $\hat{\mu}_f$ συμβολίζεται ο δειγματικός μέσος του πραγματικού σήματος της δύναμης της τριβής, ενώ η παράμετρος λ ορίζεται όπως στην Εξ. (8.7).

Η επιλογή τάξεως για το μοντέλο $\text{NLR}(M)$ (δηλαδή την επιλογή του αριθμού M των τελεστών που χρησιμοποιούνται) βασίζεται στη διαδοχική εκτίμηση μοντέλων με αυξανόμενο αριθμό τελεστών M και αποτίμηση του παραπάνω κριτηρίου σφάλματος (NOE κριτηρίου). Από την άλλη μεριά, η επιλογή των τάξεων του μοντέλου $\text{DNLRX}(M, n, n_y)$ περιλαμβάνει την εκτίμηση μοντέλων για διάφορες τάξεις n, n_y για κάθε M . Τελικά, από όλα τα M επιλέγεται εκείνο το μοντέλο με την καλύτερη συμπεριφορά (χαμηλότερο κριτήριο NOE).

Τέλος ο έλεγχος εγκυρότητας των τελικά επιλεγμένων μοντέλων υλοποιείται ελέγχοντας την ικανότητα προσομοίωσης του μοντέλου, σε δεδομένα διαφορετικά από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς της εκτίμησης (cross validation principle) [112, σελ.423].

8.3.3 Εκτίμηση Παραμέτρων

Η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους $\mathcal{J}$ [Εξ. (8.7)], στα πλαίσια όλων των παραπάνω μεθόδων, οδηγεί σε εκτιμήτρια μη - γραμμικής παλινδρόμησης. Επιπλέον όλα τα παραπάνω μοντέλα είναι μη - γραμμικά ως προς κάποιες παραμέτρους τους, όπου γενικότερα συμβολίζονται ως θ_{nl} , ενώ παραμένουν γραμμικά ως προς τις υπόλοιπες, η οποίες συμβολίζονται με θ_l . Επομένως η εκτιμήτριας μπορεί να υλοποιηθεί μέσω διαδοχικής μη - γραμμικής και γραμμικής παλινδρόμησης, όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\left[\hat{\theta}_{nl}^T \hat{\theta}_l^T \right]^T = \arg \min_{\theta_{nl}, \theta_l} \mathcal{J}(\theta_{nl}, \theta_l) = \arg \min_{\theta_{nl}} \left\{ \min_{\theta_l} \mathcal{J}(\theta_l / \theta_{nl}) \right\}$$

όπου τα διανύσματα θ_{nl} και θ_l ορίζονται ανάλογα με το συγκεκριμένο μοντέλο (για παράδειγμα $\theta_{nl} \equiv d$ και $\theta_l \equiv \theta_M$ για το NLR μοντέλο).

Η μη - γραμμική παλινδρόμηση βασίζεται σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης δύο φάσεων. Στην πρώτη (pre - optimization) η βελτιστοποίηση υλοποιείται μέσω γενετικών αλγορίθμων (genetic algorithms) [12, σελ.126], με σκοπό την εξερεύνηση μεγάλων περιοχών του χώρου στον παραμέτρων και τον εντοπισμό εκείνων των περιοχών, στα οποία βρίσκονται τα ολικά ή τοπικά ελάχιστα. Στη δεύτερη φάση (fine optimization) χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης Nelder-Mead Downhill Simplex [12, σελ.86] με σκοπό τον ακριβή εντοπισμό των ελαχίστων (τοπικών ή ολικών) μέσα στις περιοχές που επιλέχθηκαν από το πρώτο στάδιο.

Αυτή η διαδικασία βελτιστοποίησης δύο φάσεων βρέθηκε αρκετά αποτελεσματική (βλέπε προηγούμενα κεφάλαια) στο να εντοπίζει το πραγματικό ολικό ελάχιστο της συνάρτησης του κόστους, παρακάμπτοντας το σύνηθες πρόβλημα του εγκλωβισμού σε τοπικά ελάχιστα, φαινόμενο το οποίο είναι αρκετά πιθανό, κυρίως για τις NLR και DNLRX μεθόδους.

8.4 Αποτελέσματα της Αναγνώρισης της Τριβής

Δύο ειδών αποτελέσματα παρουσιάζονται στην παρούσα ενότητα, τα οποία αναφέρονται ως *προσομοιωμένα* και *πειραματικά*. Τα πρώτα περιλαμβάνουν δύο διαφορετικά σει των 40 διεγέρσεων - αποκρίσεων (υλοποιήσεων - Monte Carlo runs) το ένα, τα οποία προκύπτουν από ένα μοντέλο LuGre και DNLRX(3,2,2), αντίστοιχα. Ο σκοπός της παρούσας ανάλυσης είναι η διερεύνηση του κατά πόσο οι LG και DNLRX μέθοδοι είναι ικανές στο να παρέχουν ακριβείς εκτιμήσεις των αντίστοιχων μοντέλων. Σημειώνεται ότι δεν παρουσιάζονται προσομοιωμένα αποτελέσματα για την NLR μέθοδο, αφού η αποτελεσματικότητά της έχει μελετηθεί σε προηγούμενα κεφάλαια.

Τα πειραματικά αποτελέσματα βασίζονται σε πραγματικά δεδομένα από ένα φυσικό σύστημα με τριβή, το οποίο λειτουργεί τόσο στην περιοχή προολίσθησης όσο και ολίσθησης, ενώ συμβαίνουν πολλαπλές μεταβάσεις από τη μία περιοχή στην άλλη. Ο σκοπός της παρούσας ανάλυσης είναι η αποτίμηση της ικανότητας των τριών μεθόδων να περιγράψουν με ακρίβεια και να αναπαράγουν την πραγματική δυναμική του φαινομένου της τριβής.

Πριν δοθούν αναλυτικά τα αποτελέσματα, αξίζει να δοθούν μερικές επιπλέον πληροφορίες για το πως επιλέχθηκαν τα όρια για τα διανύσματα $\mathbf{d}$ [μέθοδοι NLR και DNLRX - Εξ. (8.12)] και $\mathbf{g}$ [Μέθοδος LG - Εξ. (8.10)] στην πρώτη φάση της βελτιστοποίησης (pre - optimization), η οποία υλοποιείται επί τη βάση γενετικών αλγορίθμων. Όσον αφορά τις μεθόδους LR και DNLRX, τα όρια για το διάνυσμα $\mathbf{d}$ θέτονται σύμφωνα με τις αρχές που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Για την LG μέθοδο, τα όρια για το z_0 επιλέγοντας λαμβάνοντας υπόψη ότι τη χρονική στιγμή t_{cr} (τη χρονική στιγμή δηλαδή που ξεκινάει το σει δεδομένων που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση) το σύστημα ολισθαίνει. Συνεπώς από φυσικής απόψεως, η αρχική μέση παραμόρφωση των προεζοχών, όπως αυτή περιγράφεται από την z_0 , έχει την ίδια φορά με τη $x(t_{cr})$ και δεν μπορεί να ξεπεράσει, σε μέτρο αυτήν. Οι παράμετροι a_1 και a_2 είναι θετικές [διότι $F_c, \sigma_0 > 0$ και σε γενικές γραμμές $F_s - F_c \geq 0$ - Εξ. (8.3)]. Εντούτοις, το άνω όριο αυτών επιλέγεται αυθαίρετα, διότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει εκ των προτέρων πληροφορία για τα σ_0 , F_c και F_s , δίχως τη διεξαγωγή εξειδικευμένων πειραμάτων [56]. Η ταχύτητα v_s είναι εξ' ορισμού θετική ποσότητα. Επιπλέον, επειδή αναφέρεται στην ταχύτητα κατά την οποία το σύστημα μεταβαίνει από την περιοχή προολίσθησης στην περιοχή ολίσθησης, η τιμή

Πίνακας 8.1: Αποτελέσματα αναγνώρισης μέσω της μεθόδου LG για την περίπτωση μηδενικού θορύβου και για την περίπτωση 5% θορύβου (40 Monte Carlo επαναλήψεις για κάθε περίπτωση, σημειακές εκτιμήσεις συν/πλην δύο τυπικών αποκλίσεων).

	Πραγματικοί Παράμετροι	Εκτιμώμενες Παράμετροι (0% θόρυβος)	Εκτιμώμενες Παράμετροι (5% θόρυβος)
σ_0	90	$90.0000 \pm 1 \times 10^{-13}$	89.894354 ± 1.6821347
σ_1	0.2	$0.2000 \pm 1 \times 10^{-16}$	0.2000024 ± 0.0033159
σ_2	0.05	$0.0500 \pm 6 \times 10^{-17}$	0.0502979 ± 0.0025510
F_c	0.4	$0.4000 \pm 8 \times 10^{-16}$	0.3987581 ± 0.0120069
F_s	1.1	$1.1000 \pm 9 \times 10^{-16}$	1.1036044 ± 0.1075498
v_s	0.7	$0.7000 \pm 2 \times 10^{-16}$	0.7039528 ± 0.0747625
μ	3	$3.0000 \pm 5 \times 10^{-15}$	3.0204863 ± 0.3948522
z_0	0.005	$0.0050 \pm 5 \times 10^{-20}$	0.0050005 ± 0.0003361
b	2	$2.0000 \pm 5 \times 10^{-16}$	2.0000594 ± 0.0016820

της είναι μικρή συγκρινόμενη με τη μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, ταχύτητα που αποκτά το σύστημα κατά τη διάρκεια της λειτουργίας του [5]. Τα όρια για την παράμετρο μ μπορούν να επιλεχθούν θεωρώντας ότι $\mu \in (0, 5]$, σημειώνεται ότι η συνηθέστερη τιμή για την παράμετρο αυτή είναι $\mu = 2$ [5].

8.4.1 Αποτελέσματα Προσομοίωσης

40 διαφορετικές υλοποιήσεις διέγερσης - απόκρισης, επί τη βάση ενός μοντέλου LuGre (συμπεριλαμβανομένου της παραμέτρου b) χρησιμοποιούνται. Οι πραγματικές παράμετροι του επιλεγμένου μοντέλου παρουσιάζονται στην αριστερή πλευρά του Πίνακα 8.1. Οι αριθμητικές προσομοιώσεις υλοποιήθηκαν σε υπολογιστικό περιβάλλον Simulink/Matlab, χρησιμοποιώντας τον επιτυτή μεταβλητού βήματος Dormand - Prince (ODE45). Η συχνότητα δειγματοληψίας επιλέχθηκε ίση με $f_s = 600 \text{ Hz}$.

Σε κάθε υλοποίηση η διέγερση (στη συγκεκριμένη περίπτωση η διέγερση είναι το σήμα της ταχύτητας) προέρχεται φιλτράροντας, μέσω ενός βαθυπερατού (Lowpass) φίλτρου (ψηφιακό φίλτρο όγδοης τάξης, τύπου Chebyshev I, με συχνότητα αποκοπής στα 30 Hz), ένα στοχαστικό σήμα λευκού θορύβου. Κάθε σήμα διέγερσης (ταχύτητας) αποτελείται από $N = 1000$ δεδομένα [βλέπε Σχήμα 8.4(a) για μια σχηματική αναπαράσταση ενός σήματος διέγερσης (ταχύτητας)]. Οι αποκρίσεις είναι είτε με μηδενικό θόρυβο, είτε αλλοιώνονται με θόρυβο 5% στην τυπική απόκλιση [βλέπε Σχήμα 8.4(b)]. Οι εκτιμώμενες παράμετροι του μοντέλου LuGre, για την περίπτωση του μηδενικού θορύβου, συγκρίνονται με τις αντίστοιχες πραγματικές στο Πίνακα 8.1. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι οι εκτιμώμενες παράμετροι ταυτίζονται με τις αντίστοιχες πραγματικές, επιτυγχάνοντας

Σχήμα 8.4: Τμήματα των σημάτων που χρησιμοποιήθηκαν στις προσομοιώσεις: (a)-(b) Ταχύτητα και δύναμη τριβής επί τη βάση του μοντέλου LuGre, (c)-(d) μετατόπιση και δύναμη επί τη βάση του επεκταμένου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (αντιπροσωπευτικές υλοποιήσεις, συχνότητα δειγματοληψίας $fs = 600 \text{ Hz}$, οι παχύτερες γραμμές αντιστοιχούν στην περίπτωση δίχως θόρυβο, ενώ οι λεπτότερες γραμμές στην περίπτωση 5% θορύβου).

αριθμητικά ασήμαντες τυπικές αποκλίσεις (φυσικά λόγω της απουσίας του θορύβου). Η υψηλή ακρίβεια των εκτιμήσεων επιβεβαιώνεται και στην περίπτωση του 5% θορύβου (δεξί τμήμα του Πίνακα 8.1). Σε αυτή την περίπτωση, οι εκτιμήσεις είναι σε εξαιρετική συμφωνία με τις αντίστοιχες πραγματικές, ενώ οι τυπικές αποκλίσεις που επιτεύχθηκαν είναι αρκετά μικρές. Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι η μέθοδος LG είναι σε θέση να παρέχει ακριβείς εκτιμήσεις του μοντέλου τριβής LuGre, χρησιμοποιώντας ένα και μοναδικό σετ δεδομένων.

Η μέθοδος DNLRX

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούνται 40 υλοποιήσεις διέγερσης - απόκρισης $[x(t) - f(t)]$, όπως αυτές προκύπτουν [βλέπε Σχήμα 8.4(c-d) για ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα] επί τη βάση ενός μοντέλου DNLRX με $M = 3$ και τάξεις των φίλτρων FIR $n = 2$ και $n_x = 2$, αντίστοιχα [βλέπε Εξ. (8.13)]. Οι πραγματικές παράμετροι του μοντέλου παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.2 (αριστερά).

Σε κάθε υλοποίηση η διέγερση (στη συγκεκριμένη περίπτωση η διέγερση είναι το σήμα της μετατόπισης) προέρχεται φιλτράροντας, μέσω ενός βαθυπερατού (Lowpass) φίλτρου (ψηφιακό φίλτρο όγδοης τάξης, τύπου Chebyshev I, με συχνότητα αποκοπής στα 30 Hz), ένα στοχαστικό σήμα λευκού θορύβου. Κάθε σήμα διέγερσης (μετατόπισης) αποτελείται από $N = 2000$ δεδομένα. Οι αποκρίσεις είναι είτε με μηδενικό θόρυβο, είτε αλλοιώνονται με θόρυβο 5% στην τυπική απόκλιση.

Πίνακας 8.2: Αποτελέσματα αναγνώριση μέσω της μεθόδου DNLRX για την περίπτωση μηδενικού θορύβου και για την περίπτωση 5% θορύβου (40 Monte Carlo υλοποιήσεις για κάθε περίπτωση· Σημειακές εκτιμήσεις συν/πλην δύο τυπικές αποκλίσεις).

	Πραγματικές Παράμετροι	Εκτιμώμενες Παράμετροι (0% θόρυβος)	Εκτιμώμενες Παράμετροι (5% θόρυβος)
d	0.1	$0.1000 \pm 4.7 \times 10^{-10}$	0.1007 ± 0.0075
	0.7	$0.7000 \pm 6.6 \times 10^{-10}$	0.7007 ± 0.0064
	1.3	$1.3000 \pm 4.7 \times 10^{-10}$	1.3000 ± 0.0046
θ_0	0.9	$0.9000 \pm 7.4 \times 10^{-10}$	0.9015 ± 0.0524
	-0.7	$-0.7000 \pm 9.8 \times 10^{-10}$	-0.7054 ± 0.0341
	0.8	$0.8000 \pm 7.4 \times 10^{-10}$	0.8039 ± 0.0235
θ_1	-0.3	$-0.3000 \pm 4.7 \times 10^{-9}$	-0.3032 ± 0.1234
	0.5	$0.5000 \pm 2.8 \times 10^{-9}$	0.5100 ± 0.0592
	-0.2	$-0.2000 \pm 1.7 \times 10^{-9}$	-0.2046 ± 0.0438
θ_2	-0.01	$-0.0100 \pm 2.3 \times 10^{-9}$	-0.0129 ± 0.0813
	0.05	$0.0500 \pm 1.7 \times 10^{-9}$	0.0448 ± 0.0348
	-0.04	$-0.0400 \pm 5.1 \times 10^{-10}$	-0.0383 ± 0.0245
r_0	-0.07	$-0.0700 \pm 5.6 \times 10^{-10}$	-0.0733 ± 0.0654
r_1	0.05	$0.0500 \pm 1.0 \times 10^{-9}$	0.0542 ± 0.1276
r_2	0.01	$0.0100 \pm 5.1 \times 10^{-10}$	0.0087 ± 0.0638
b	2.00	$2.0000 \pm 2.0 \times 10^{-11}$	2.0000 ± 0.0015

Τα διαθέσιμα δεδομένα χωρίζονται σε δύο ξεχωριστά σει $N = 1000$ δεδομένων έκαστο. Το πρώτο αναφέρεται ως *σει εκτίμησης* και χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων, ενώ στο δεύτερο (*σει ελέγχου εγκυρότητας*) για την αποτίμηση της επίδοσης του μοντέλου σε δεδομένα, τα οποία δε χρησιμοποιούνται για στην εκτίμηση.

Αρχικά διερευνάται αν η προτεινόμενη διαδικασία επιλογής των τάξεων του μοντέλου DNLRX(M , n , n_y) οδηγεί στις σωστές τάξεις. Η διερεύνηση αυτή υλοποιείται για την περίπτωση 5% θορύβου, διότι σε αυτήν την περίπτωση είναι πιθανότερη η εμφάνιση φαινομένων υπερπαραμετροποίησης. Τα αποτελέσματα της επιλογής της τάξεως παρουσιάζονται στο Σχήμα 8.5. Η διαδικασία της αναγνώρισης, για κάθε M , δείχνει ότι το κριτήριο NOE μειώνεται διαρκώς με αύξηση των τάξεως n και n_y ($n, n_x \in [0, 6]$). Οι τάξεις n και n_y (για κάθε M) πέρα των οποίων η περαιτέρω μείωση του NOE κριτηρίου είναι πρακτικά ασήμαντη (μικρότερη του 1%) επιλέγονται και παρουσιάζονται στο Σχήμα 8.5.

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 8.5, ένα πλατό στην αλληλουχία του NOE κριτηρίου εμφανίζεται για $M \geq 3$, έτσι επιλέγεται το μοντέλο DNLRX(3, 2, 2) (αξίζει να σημειωθεί ότι το εν λόγω μοντέλο χαρακτηρίζεται από τις σωστές τάξεις). Η συγκεκριμένη επιλογή επιβεβαιώνεται και από την αποτίμηση της συμπεριφορά του εν λόγω μοντέλου στο σει ελέγχου εγκυρότητας, όπου η ελάχιστη τιμή του NOE κριτηρίου επιτυγχάνεται από το DNLRX(3, 2, 2), με μικρές διαφορές από τα αντίστοιχα

Σχήμα 8.5: Το NOE κριτήριο συναρτήσει των τάξεων του DNLRX μοντέλου (περίπτωση 5% θορύβου, αποτελέσματα από μία υλοποίηση).

μοντέλα DNLRX(4, 2, 0) και DNLRX(5, 2, 3).

Η ικανότητα του επιλεγμένου DNLRX(3, 2, 2) μοντέλου να παρέχει ακριβείς εκτιμήσεις των πραγματικών παραμέτρων ελέγχεται μέσω Monte Carlo πειραμάτων χρησιμοποιώντας τις σωστές τάξεις ($M = 3$, $n = 2$ και $n_x = 2$). Οι εκτιμήσεις συγκρίνονται με τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές των παραμέτρων στον Πίνακα 8.2. Τα αποτελέσματα για την περίπτωση του μηδενικού θορύβου δείχνουν ότι οι εκτιμώμενες παράμετροι ταυτίζονται με τις αντίστοιχες πραγματικές, ενώ οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις είναι ασήμαντες, κυρίως λόγω μη ύπαρξης θορύβου στα δεδομένα.

Παρόμοια αποτελέσματα καταγράφονται και στην περίπτωση του 5% θορύβου, όπου οι εκτιμήσεις είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τις αντίστοιχες πραγματικές παραμέτρους (δεξιά στήλη του Πίνακα 8.2). Τα παραπάνω αποτελέσματα καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα της μεθόδου αναγνώρισης.

8.4.2 Πειραματικά Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παρούσα υποενότητα βασίζονται σε πραγματικές πειραματικές μετρήσεις από μια πειραματική εγκατάσταση [17] και είναι χορηγία του Katholieke Universiteit Leuven (Belgium). Η εγκατάσταση είναι παρόμοια αυτής που περιγράφεται στο Σχήμα 8.2 (μέσα το πλαίσιο με τη διακεκομμένη γραμμή). Αξίζει να σημειωθεί ότι για τους σκοπούς της αναγνώρισης του φαινομένου της τριβής, η μετατόπιση θεωρείται ως η διέγερση (είσοδος), ενώ η αναπτυσσόμενη δύναμη τριβής ως η απόκριση (έξοδος). Τα μετρούμενα σήματα της μετατόπισης και της δύναμης τριβής έχουν δειγματοληψίας με συχνότητα $f_s = 2.5 \text{ kHz}$.

Τα διαθέσιμα δεδομένα χωρίζονται σε τρία διαφορετικά σετ. Το πρώτο έχει μήκος 10000 δεδομένα

Σχήμα 8.6: Το κριτήριο NOE συναρτίζει των τάξεων των μοντέλων NLR και DNLRX: (a) σαι εκτίμησης (Estimation set), (b) σαι ελέγχου εγκυρότητας (validation set) [Πειραματικά αποτελέσματα].

και χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων (estimation set). Το δεύτερο έχει μήκος 34933 δεδομένα και χρησιμοποιείται για τον έλεγχο εγκυρότητας (validation set), ενώ το τρίτο έχει μήκος 35170 δεδομένα (test set) και χρησιμοποιείται για την αποτίμηση των τριών μεθόδων επί τη βάση δεδομένων που δε χρησιμοποιήθηκαν για τους σκοπούς της αναγνώρισης. Αξίζει να σημειωθεί ότι τη χρονική στιγμή $t_{cr} = 45,068$ η μετατόπιση λαμβάνει μια “δεσπόζων” (dominant) μέγιστη τιμή και ως εκ τούτου το σαι εκτίμησης επιλέγεται να ξεκινάει από εκείνη τη χρονική στιγμή.

Η Μέθοδος LG

Το μοντέλο LG απαιτεί την ύπαρξη του σήματος της ταχύτητας [Εξ. (8.1) – (8.3)], το οποίο δεν είναι διαθέσιμο. Για το λόγο αυτό εκτιμάται μέσω αριθμητικής παραγωγής του φιλτραρισμένου (μέσω ενός βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $f_c = 0.4 \text{ kHz}$) σήματος της μετατόπισης (παρόμοια επεξεργασία αναφέρεται και στην [58]).

Οι Μέθοδοι NLR και DNLRX

Η διαδικασία επιλογής της τάξης του μοντέλου NLR παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.6, στο οποίο αναπαριστάται το κριτήριο NOE συναρτίζει του αριθμού M των τελεστών. Στο σαι εκτίμησης, το NOE κριτήριο μειώνεται με την αύξηση της τάξεως [Σχήμα 8.6(a)]. Εντούτοις, εμφανίζονται, για $M \geq 5$, αρνητικές εκτιμήσεις για κάποιες από τις σταθερές ελαστικότητας των ελατηρίων, επομένως επιλέγεται το μοντέλο NLR(4). Η εμφάνιση αρνητικών εκτιμήσεων πιθανόν να οφείλεται στην προσπάθεια του μοντέλου να ερμηνεύσει την επιπλέον, από όσο του επιτρέπει η δομή (το μοντέλο μπορεί να δώσει μόνο σταθερή δύναμη τριβής στην περιοχή ολίσθησης) του, δυναμική του φαινομένου της τριβής. Η παραπάνω επιλογή μπορεί να επιβεβαιωθεί εξετάζοντας τη συμπεριφορά του εν λόγω μοντέλου στο σαι ελέγχου εγκυρότητας [Σχήμα 8.6(b)] - το NOE κριτήριο αυξάνεται για $M > 4$.

Όσον αφορά τη DNLRX μέθοδο, το Σχήμα 8.6 παρουσιάζει τις τάξεις n και n_y (για κάθε M) πέρα από τις οποίες η μείωση του κριτηρίου είναι πρακτικά ασήμαντη. Η συμπεριφορά του κριτηρίου στο σετ εκτίμησης είναι παρόμοια με πριν, δηλαδή μειώνεται με αύξηση του αριθμού των τελεστών M [Σχήμα 8.6(a)]. Όμως το κριτήριο μειώνεται για $M \leq 4$, παραμένει σχεδόν αμετάβλητο για $M = 4$ και συνεχίζει να μειώνεται για $M > 5$. Επομένως, το μοντέλο DNLRX(4, 3, 2) επιλέγεται. Το εν λόγω μοντέλο επιβεβαιώνεται ως έγκυρη αναπαράσταση της δυναμικής της τριβής, εξετάζοντας τη συμπεριφορά του στο σετ ελέγχου εγκυρότητας [Σχήμα 8.6(b)], στο οποίο το DNLRX(4, 3, 2) επιτυγχάνει την ολική ελάχιστη τιμή του κριτηρίου NOE.

Αποτίμηση των Επιδόσεων των Μοντέλων και Σύγκριση

Η αποτίμηση των εκτιμώμενων μοντέλων πραγματοποιείται επί τη βάση της ακρίβειας, με την οποία είναι σε θέση να προσομοιώνουν τη μετρούμενη δύναμη τριβής. Για το λόγω αυτό η σύγκριση γίνεται βάσει των τιμών που λαμβάνουν τα κριτήρια NOE και MAX (το μέγιστο, κατά απόλυτο τιμή, σφάλμα) για το εκάστοτε επιλεγμένο μοντέλο. Επιπλέον δίνεται και η παραμετρική πολυπλοκότητα (δηλαδή ο αριθμός των παραμέτρων του κάθε μοντέλου που εκτιμάται).

Όλα τα εκτιμώμενα μοντέλα καταφέρνουν να πιάσουν, αν και με διαφορετικούς βαθμούς ακρίβειας, τη δυναμική της τριβής. Αυτό είναι εμφανές από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο Σχήμα 8.7, στο οποίο συγκρίνεται η πραγματική (μετρούμενη) δύναμη τριβής με τις αντίστοιχες προσομοιώσεις αυτής, μέσω των εκτιμώμενων μοντέλων. Επιπροσθέτως, παρατίθενται και οι αντίστοιχες ακολουθίες των σφαλμάτων εξόδου. Η σύγκριση αυτή αναφέρεται στο σετ ελέγχου (test set)². Παρατηρώντας προσεκτικά την περιοχή προολίσθησης, διαπιστώνεται ότι τα μοντέλα LG και NLR(4) παρέχουν πολύ καλή προσομοίωση, ενώ τέλεια προσομοίωση επιτυγχάνεται από το μοντέλο DNLRX(4, 3, 2). Όσον αφορά την περιοχή ολίσθησης, το μοντέλο LG σε γενικές γραμμές δίνει καλή προσομοίωση. Από την άλλη μεριά, το NLR(4) προβλέπει επιτυχώς τις μεταβάσεις από τη μία περιοχή λειτουργίας στην άλλη (προολίσθηση - ολίσθηση και ανάποδα), άλλα παρέχει σταθερή δύναμη τριβής στην περιοχή ολίσθησης. Το μειονέκτημα αυτό αντιμετωπίζεται από το μοντέλο DNLRX(4, 3, 2), το οποίο παρέχει σχεδόν τέλεια προσομοίωση της τριβής και στις δύο περιοχές προολίσθησης.

Μια συγκεντρωτική αποτίμηση και σύγκριση των τριών μοντέλων παρουσιάζεται στον Πίνακα 8.3. Όπως είναι προφανές, το DNLRX(4, 3, 2) επιτυγχάνει το ελάχιστο, συγκριτικά με τα υπόλοιπα δύο μοντέλα, NOE, το οποίο είναι 43% και 64% μικρότερο από τα αυτά των NLR(4) και LG, αντίστοιχα, όπως επίσης δίνει και την ελάχιστη MAX τιμή. Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν ότι

² Δεδομένα, τα οποία δε χρησιμοποιήθηκαν ούτε στην εκτίμηση, ούτε για την επιλογή της δομής.

Σχήμα 8.7: Σύγκριση της προσομοιωμένης δύναμης της τριβής, βάσει των εκτιμώμενων μοντέλων, (παχιά γραμμή) με την πραγματική δύναμη τριβής (λεπτή γραμμή). Επίσης απεικονίζονται και οι αντίστοιχες ακολουθίες σφαλμάτων (τμήμα από το σετ ελέγχου (test set), οι κατακόρυφες διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν τις μεταβάσεις από ολίσθηση σε προολίσθηση και ανάποδα).

η προτεινόμενη επέκταση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, αν και δεν είναι σε θέση να αναπαράγει τα σταθερής ταχύτητας χαρακτηριστικά της τριβής, όπως για παράδειγμα το μοντέλο LuGre [βλέπε Εξ. (8.3)], παρέχει επιπλέον ευελιξία μοντελοποίησης, η οποία βελτιώνει σημαντικά τη συνολική επίδοση. Φυσικά το κόστος που πρέπει να πληρωθεί για το αποτέλεσμα αυτό είναι η αυξημένη παραμετρική πολυπλοκότητα (πρέπει να εκτιμηθούν περισσότερες παράμετροι - βλέπε Πίνακα 8.3). Εντούτοις, αυτό δεν αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα, αφού οι επιπλέον παράμετροι εισάγονται στο μοντέλο με τρόπο γραμμικό ως προς τη δομή.

8.5 Επέκταση της Μεθόδου DNLRX

Μέχρι το σημείο αυτό ελέχθησαν οι δυνατότητες της μεθόδου DNLRX στο να αναπαριστά την πραγματική δυναμική της τριβής στη συνδυασμένη περιοχή προολίσθησης - ολίσθησης. Εντούτοις, η αναγνώριση βασιζόταν στην ύπαρξη του σήματος της δύναμης τριβής. Το γεγονός αυτό μπορεί να θεωρεί ως μειονέκτημα διότι στις περισσότερες των περιπτώσεων η μέτρηση της δύναμης τριβής εί-

Πίνακας 8.3: Χαρακτηριστικά των εκτιμώμενων μοντέλων (σει ελέγχου).

Μοντέλο	LG	NLR(4)	DNLRX(4, 3, 2)
NOE ^a (%)	0.67	0.42	0.24
MAE ^a	0.22	0.17	0.15
Παραμετρική πολυπλοκότητα	9	9	24

^aΗ προσομοίωση ξεκινάει από τη χρονική στιγμή $t_{cr} = 45,068$.

ναί είτε δύσκολο (και ακριβό) εγχείρημα, είτε αδύνατο. Για το λόγο αυτόν, στην παρούσα ενότητα εισάγεται κατάλληλη επέκταση της μεθόδου DNLRX, έτσι ώστε η αναγνώριση να υλοποιείται επί τη βάση των πιο κοινά μετρούμενων σημάτων, τα οποία είναι η μετατόπιση και η εφαρμοζόμενη δύναμη (βλέπε Σχήμα 8.2). Η εν λόγω επέκταση εισάγεται με τη βοήθεια ενός απλού μηχανικού παραδείγματος και αποτιμάται βάσει μιας απλής διάταξης ελέγχου πρόσω - αντιστάθμισης.

8.5.1 Ένα Μηχανικό Σύστημα με Τριβή

Έστω το ακόλουθο μηχανικό σύστημα με τριβή, το οποίο απαρτίζεται από μία μάζα m , ένα βισκοελαστικό αποσβεστήρα με σταθερά c και ένα γραμμικό ελατήριο με σταθερά k . Το σύστημα διεγείρεται από μία δύναμη u , ενώ η (μη - μετρούμενη) δύναμη τριβής f αντιστέκεται στην κίνηση. Η μαθηματική έκφραση (μοντέλο) του συστήματος είναι:

$$m \cdot a + c \cdot v + k \cdot x = u - f \quad (8.16)$$

όπου με x , v και a συμβολίζεται η μετατόπιση, ταχύτητα και επιτάχυνση αντίστοιχα.

Εκτός από τα σήματα μετατόπισης (x) και εφαρμοζόμενης δύναμης (u), η αναγνώριση του παραπάνω συστήματος [Εξ. (8.16)] συνήθως απαιτεί μετρήσεις της ταχύτητας (v), της επιτάχυνσης (a), καθώς και της δύναμης της τριβής (f). Εναλλακτικά, οι v , a και f δύναται να μη μετρηθούν, άλλα να εκφραστούν ως κατάλληλες συναρτήσεις των μετρούμενων ποσοτήτων (όπως η x). Το εν λόγω ζήτημα αναλύεται στις επόμενες τρεις υποενότητες.

8.5.2 Προσεγγίσεις της Ταχύτητας και της Επιτάχυνσης.

Όπως είναι γνωστό, τα σήματα της ταχύτητας $v(t)$ και της επιτάχυνσης $a(t)$ δύναται να επιτευχθούν μέσω αριθμητικής παραγωγίσης. Όμως η διαδικασία αυτή, αφενός δεν είναι η μοναδική για την επίτευξη του σκοπού αυτού και αφετέρου υπόκεινται σε αριθμητικά σφάλματα. Η ιδέα που υιοθετείται στο παρόν κεφάλαιο είναι η έκφραση των σημάτων της ταχύτητας και επιτάχυνσης, ως αναπαραστάσεις Κινητού Μέσου Όρου (Moving Average) με τάξεις n_v , n_a και συντελεστές p_j , q_j , του σήματος

της μετατόπισης. Οι προσεγγίσεις αυτές υλοποιούνται ως εξής:

$$v(t) \approx \sum_{j=0}^{n_v} p_j \cdot x(t-j) \quad (8.17)$$

$$a(t) \approx \sum_{j=0}^{n_a} q_j \cdot x(t-j) \quad (8.18)$$

Οι τάξεις και οι συντελεστές των παραπάνω εκφράσεων είναι άγνωστες και ως εκ τούτου εκτιμώνται επί τη βάση της διαδικασίας της αναγνώρισης.

8.5.3 Προσέγγιση της Δύναμης της Τριβής

Το επόμενο βήμα συνίσταται στην επιλογή κατάλληλης παραμετροποίησης για την προσέγγιση της δύναμης της τριβής. Για τον λόγο αυτόν χρησιμοποιείται το επεκταμένο μοντέλο ολίσθησης του Maxwell. Οι λόγοι, για τους οποίους υιοθετείται η προσέγγιση αυτή, είναι ότι τα μέχρι τώρα αποτελέσματα κατέδειξαν (βλέπε προηγούμενη ενότητα) την καταλληλότητα του DNLRX μοντέλου για την προσέγγιση της δύναμης της τριβής. Επιπλέον, η εν λόγω παραμετροποίηση εκφράζει τη τριβή ως συνάρτηση της μετατόπισης [Εξ. (8.4) και Εξ. (8.6)], σε αντίθεση με άλλες δημοφιλείς παραμετροποιήσεις (π.χ LuGre) που την επιτυγχάνουν συναρτήσει της ταχύτητας.

8.5.4 Έκφραση της Δυναμικής του Συστήματος στον Διακριτό Χρόνο

Οι εξισώσεις (8.6) [σε συνδυασμό με (8.4)], (8.17) και (8.18), παρέχουν την ακόλουθη, σύμφωνα με την Εξ. (8.16), αναπαράσταση διακριτού χρόνου:

$$\begin{aligned} m \cdot \left(\sum_{j=0}^{n_a} q_j \cdot x(t-j) \right) + c \cdot \left(\sum_{j=0}^{n_v} p_j \cdot x(t-j) \right) + k \cdot x(t) \\ = u(t) - \sum_{j=0}^{n_x} r_j \cdot x(t-j) - \sum_{j=0}^n \theta_j^T \cdot \delta(t-j) \end{aligned} \quad (8.19)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$u_{EM}(t) = \sum_{j=0}^{n'_x} g_j \cdot x(t-j) + \sum_{j=0}^n \theta_j^T \cdot \delta(t-j) \quad (8.20)$$

η οποία υπόκειται στην Εξ (8.4). Με u_{EM} συμβολίζεται η επί τη βάση του εν λόγω μοντέλου εφαρμοζόμενη δύναμη. Επιπλέον, $n'_x \triangleq \max\{n_a, n_v, n_x\}$ και με g_j συμβολίζονται οι αντίστοιχοι παράμετροι, όπως αυτοί προκύπτουν από το συνδυασμό των κοινών όρων. Η παρούσα παραμετροποίηση παρέχει (υπό τον όρο ότι οι τάξεις και οι παράμετροι είναι γνωστοί) την τρέχουσα τιμή της εφαρμοζόμενης δύναμης συναρτήσει της ιστορίας της μετατόπισης. Ως εκ τούτου μπορεί να θεωρηθεί ως

το διακριτού χρόνου ισοδύναμο της αντίστροφης δυναμικής του συστήματος (η απευθείας δυναμική αντιστοιχεί στην αιτιατή σχέση δύναμης - αναπτυσσόμενης μετατόπισης).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι παράμετροι και οι τάξεις των προσεγγίσεων κινητού μέσου όρου της ταχύτητας [Εξ. (8.17) και Εξ. (8.18)] συγχωνεύονται με τις αντίστοιχες του μοντέλου DNLRX. Μέσω της διαδικασίας αυτής, επιτρέπεται στη διεργασία να διαλέξει, μέσω της διαδικασίας της αναγνώρισης, τις βέλτιστες προσεγγίσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

8.5.5 Αναγνώριση της Αντίστροφης Δυναμικής

Όπως είναι εμφανές η μαθηματική αναπαράσταση της Εξ. (8.20) είναι στην ουσία ένα DNLRX μοντέλο. Ως εκ τούτου η αναγνώριση του (εκτίμηση παραμέτρων και επιλογή της τάξεως) μπορεί να υλοποιηθεί επί τη βάση της μεθόδου DNLRX. Η μόνη ουσιαστική διαφορά στην παρούσα περίπτωση είναι ότι στη συνάρτηση κόστους που πρόκειται να ελαχιστοποιηθεί [Εξ. (8.7)] και στο κριτήριο NOE [Εξ. (8.15)] χρησιμοποιείται η μετρούμενη $u(t)$ και η επί τη βάση του μοντέλου $u_{EM}(t)$ εφαρμοζόμενη δύναμη [αντίστοιχα $f(t) \equiv u(t)$ και $\tilde{f}(t) \equiv u_{EM}(t)$]. Έτσι το σήμα της μετρούμενης δύναμης τριβής δε απαιτείται πλέον και η αναγνώριση υλοποιείται μέσω ενός ζεύγος σημάτων μετατόπισης (είσοδος) - εφαρμοζόμενης δύναμης (έξοδος), δίχως να χρειάζεται αφενός η ταχύτητα και η επιτάχυνση και αφετέρου η γνώση των φυσικών παραμέτρων του συστήματος (π.χ της μάζας).

8.6 Αποτελέσματα Αναγνώρισης και Αντιστάθμισης της Τριβής

Στην παρούσα ενότητα ελέγχεται η ικανότητα της μεθόδου DNLRX για την ακριβή αναπαράσταση και έλεγχο ενός μηχανικού συστήματος με τριβή. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται ένα απλό μηχανικό σύστημα το οποίο υπόκεινται σε δυνάμεις αδράνειας και τριβής (Σχήμα 8.8). Η τριβή στο παρόν σύστημα παράγεται από ένα λεπτομερές μοντέλο τριβής μεγάλης κλίμακας, το οποίο βασίζεται στη μοντελοποίηση των προεξοχών των δύο επιφανειών που έρχονται σε επαφή (πλήρης περιγραφή του μοντέλου στην αναφορά [134]). Συγκεκριμένα το εν λόγω μοντέλο περιγράφει τη συμπεριφορά ενός μεγάλου αριθμού προεξοχών (περίπου 5000) κάτω από συνθήκες πρόσφυσης (adhesion), παραμόρφωσης (deformation) και ερπυσμού (creep) και έχει κριθεί κατάλληλο για την προσομοίωση τριβής [100]. Εντούτοις λόγω της πολυπλοκότητάς του και του μεγάλου αριθμού των παραμέτρων που ενσωματώνει είναι ακατάλληλο για τους σκοπούς της αναγνώρισης.

Σχήμα 8.8: Δομικό διάγραμμα για την αντιστάθμιση της τριβής.

8.6.1 Διάταξη Προσομοίωσης

Τα σήματα $x(t)$ και $u(t)$ λαμβάνονται από προσομοίωση του συστήματος κλειστού βρόγχου χρησιμοποιώντας μόνο αναλογικό έλεγχο (Σχήμα 8.8 δίχως τον ελεγκτή προσω - αντιστάθμισης). Η μάζα επιλέγεται $m = 5 \text{ kg}$, ενώ η συχνότητα δειγματοληψίας ίση με $f_s = 2,000 \text{ Hz}$. Η αριθμητική προσομοίωση βασίζεται στον Dormand - Prince επιτυτή σταθερού βήματος και υλοποιείται σε περιβάλλον Simulink/Matlab. Η μετατόπιση αναφοράς x_{ref} είναι ένα φιλτραρισμένο (μέσω βαθυπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής ίση με $f_c = 5 \text{ Hz}$) στοχαστικό σήμα. Μέσω της προσομοίωσης παράγεται ένα ζεύγος σημάτων μετατόπισης - εφαρμοζόμενης δύναμης, όπου το καθένα περιέχει 100000 δεδομένα.

8.6.2 Αποτελέσματα Αναγνώρισης της Αντίστροφης Δυναμικής

Οι αρχικές τιμές (αρχικές καταστάσεις) των παραμορφώσεων των ελατηρίων των Ε-Π τελεστών επιλέγονται με το εντοπισμό ενός επικρατούντος ακρότατου στη διέγερση (μετατόπιση). Έτσι το μέγιστο τη χρονική στιγμή $t_{cr} = 2,525$ επιλέγεται (το σει εκτίμηση ξεκινάει από το σημείο αυτό). Επομένως τα υπόλοιπα 97476 δεδομένα χωρίζονται σε τρία μη - επικαλυπτόμενα σει: Ένα μήκους 8,100 (estimation set) δεδομένων το οποίο χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων, ένα 38,900 δεδομένων (validation set) το οποίο χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με το προηγούμενα για την επιλογή της τάξης και τέλος ένα 50,476 δεδομένων (test set) το οποίο χρησιμοποιείται για την ανεξάρτητη αποτίμηση της επίδοσης του εκτιμώμενου μοντέλου.

Η διαδικασία επιλογής των τάξεων του μοντέλου παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.9, όπου απεικονίζονται οι τάξεις n και n_x (για κάθε M), πέρα των οποίων η μείωση στο κριτήριο NOE είναι αμελητέα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τάξη $n_x = 2$ επιλέγεται για όλα τα υπό εξέταση DNLRX μοντέλα. Το κριτήριο NOE εντός του σει εκτίμησης (estimation set) μειώνεται με την αύξηση του αριθμού M (Σχήμα 8.9). Εντούτοις το κριτήριο παραμένει σχεδόν αμετάβλητο για $M \geq 5$, και επομένως για

Σχήμα 8.9: Επιλογή των τάξεων των μοντέλων DNLRX για το μηχανικό σύστημα με τριβή: κριτήριο NOE συναρτήσει των τάξεων.

Σχήμα 8.10: Μηχανικό Σύστημα με Τριβή: (a) Πραγματική εφαρμοζόμενη δύναμη $u(t)$. (b) επί τη βάση του DNLRX(5, 2, 2) σφάλμα προσομοίωσης (test set).

λόγους οικονομίας της παραμετροποίησης (principle of parsimony), επιλέγεται το DNLRX(5, 2, 2) μοντέλο. Επιπροσθέτως, το NOE κριτήριο παραμένει πρακτικά αμετάβλητο για $M \geq 5$ εντός του σει ελέγχου εγκυρότητας (validation set), γεγονός που δηλώνει ότι $M = 5$ είναι επαρκές για την αναπαράσταση του συστήματος.

Όπως είναι φανερό από τα αποτελέσματα του Σχήματος 8.10, το DNLRX(5, 2, 2) μοντέλο είναι σε θέση να ερμηνεύσει τη δυναμική του συστήματος. Εξετάζοντας τη συμπεριφορά του μοντέλου στο σει ελέγχου (test set) παρατηρείται ότι το σφάλμα προσομοίωσης [Σχήμα 8.10(b)] μεταξύ της πραγματικής και επί τη βάση του μοντέλου προσομοίωση της εφαρμοζόμενης δύναμης είναι αρκετά μικρό (NOE = 0.26%). Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει την επιτυχή αναγνώριση του συστήματος.

8.6.3 Αποτελέσματα Ελέγχου

Προκειμένου να εξεταστεί η δυνατότητα εφαρμογής της μεθόδου DNLRX για τον έλεγχο μέσω αντιστάθμισης της τριβής, μορφοποιούνται και διερευνώνται δύο διατάξεις ελέγχου. Η πρώτη

Σχήμα 8.11: Αποτελέσματα ελέγχου: (a) Τροχιά αναφοράς, (b) Σφάλμα τροχιάς μέσω P ελέγχου, (c) Σφάλμα τροχιάς μέσω P + DNLRX ελέγχου (Για κάθε διάταξη παρουσιάζεται και οι μέση τιμή συν/πλην μία τυπική απόκλιση, όπως αυτά προκύπτουν από τις 30 υλοποιήσεις.)

ενσωματώνει μόνο αναλογικό (P) έλεγχο σε βρόγχο ανάδρασης, ενώ στη δεύτερη χρησιμοποιείται αναλογικός έλεγχος σε συνδυασμό με ελεγκτή προσω - αντιστάθμισης, ο οποίος βασίζεται στο εκτιμημένο μοντέλο DNLRX(5, 2, 2) (P+DNLRX [Σχήμα 8.8]). Και στις δύο διατάξεις το κέρδος του αναλογικού ελεγκτή διατηρείται σταθερό και ίσο με $K = 1000$. Η αποτελεσματικότητα των ελέγχων διερευνάται με τη βοήθεια ενός “πολύπλοκου” σήματος αναφοράς [Σχήμα 8.11(a)]. Το σήμα αναφοράς επιλέγεται με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε το σύστημα να λειτουργεί στις περιοχές προολίσθησης και ολίσθησης, καθώς και να εμφανίζει αρκετές μεταβάσεις από τη μία περιοχή στην άλλη.

Για κάθε διάταξη ελέγχου, υλοποιούνται 30 επαναλήψεις και συνολικά υπολογίζεται η δειγματική μέση τιμή και διασπορά του NOE κριτηρίου. Η ενέργεια αυτή γίνεται διότι το μοντέλο μεγάλης κλίμακας που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία της τριβής βασίζεται σε στοχαστικές υλοποιήσεις, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση της πραγματικής τριβής [134].

Στο Σχήμα 8.11 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου και για τις δύο διατάξεις, καθώς και οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις, όπως αυτές προκύπτουν από τις 30 επαναλήψεις. Όπως είναι φανερό ο αναλογικός έλεγχος, αποτυγχάνει. Από την άλλη ο συνδυασμός του αναλογικού ελεγκτή σε συνδυασμό με το μοντέλο DNLRX(5, 2, 2) έχει ως αποτέλεσμα το σύστημα να ακολουθεί σχεδόν τέλεια την μετατόπιση αναφοράς, υποδεικνύοντας τις δυνατότητες της DNLRX μεθόδου για τον έλεγχο συστημάτων με τριβή.

8.7 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύχθηκε το πρόβλημα της αναγνώρισης του φαινομένου της τριβής. Για το λόγο αυτό προτάθηκαν τρεις μέθοδοι αναγνώρισης, οι οποίες αναφέρονται ως LG, NLR και DNLRX. Η πρώτη αναφέρεται στο μοντέλο τριβής του LuGre, η δεύτερη χρησιμοποιεί τη βασική δομή του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, ενώ στην Τρίτη μέθοδο εισάχθηκε κατάλληλη επέκταση αυτού. Η επεκταμένη αυτή δομή συνδυάζει τα πλεονεκτήματα της αντίστοιχης βασικής, μερικά από τα οποία είναι η απλότητα όπως και η ικανότητα να περιγράφει τη υστέρηση που εμφανίζεται στην περιοχή προολίσθησης, με επιπλέον ευελιξία μοντελοποίησης με τη μορφή δύο φίλτρων πεπερασμένη κρουστικής απόκρισης (FIR).

Η αποτελεσματικότητα των μεθόδων αποτιμήθηκε μέσω πειραμάτων Monte Carlo, όπως επίσης και μέσω σημάτων από μια πραγματική πειραματική διάταξη, η οποία αναφέρεται σε ένα σύστημα με τριβή, στο οποίο συμβαίνουν πολλαπλές μεταβάσεις από την προολίσθηση στην ολίσθηση και ανάποδα. Σε όλες τις μεθόδους οι παράμετροι εκτιμήθηκαν όλες ταυτόχρονα χρησιμοποιώντας ένα και μοναδικό σει σημάτων μετατόπισης - δύναμης τριβής, παρακάμπτοντας τη συνηθισμένη απαίτηση για διεξαγωγή πολλαπλών και εξειδικευμένων πειραμάτων.

Τέλος προτάθηκε κατάλληλη επέκταση της προτεινόμενης μεθόδου DNLRX, με σκοπό την επίτευξη αναγνώρισης βάσει των πιο κοινά μετρούμενων σημάτων, τα οποία είναι η μετατόπιση και η εφαρμοζόμενη δύναμη. Με τον τρόπο αυτόν εξαλείφθηκε η ανάγκη για μετρήσεις της δύναμης της τριβής, όπως και η αναγκαιότητα χρήσης των φυσικών παραμέτρων του συστήματος. Επί τη βάση αυτών ένα απλό παράδειγμα προσω - αντιστάθμισης παρουσίασε τις δυνατότητες της μεθόδου για τον αποτελεσματικό έλεγχο συστημάτων με τριβή.

Τα κυριότερα συμπεράσματα του κεφαλαίου είναι τα ακόλουθα:

- (i) Η προτεινόμενη διαδικασία μη - γραμμικής αναγνώρισης δύο σταδίων πέτυχε ακριβείς εκτιμήσεις τόσο του μοντέλου LuGre όσο και του μοντέλου DNLRX.
- (ii) Οι προτεινόμενες μέθοδοι αποδείχθηκαν ικανές, αν και με διαφορετικό βαθμό ακρίβειας, να ερμηνεύσουν τη δυναμική της τριβής.
- (iii) Το μοντέλο DNLRX πέτυχε αναμφισβήτητα την καλύτερη επίδοση (με δεύτερο το NLR και τελευταίο το LG), γεγονός που υποδεικνύει την αποτελεσματικότητα της προτεινόμενης επέκτασης της βασικής δομής του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell.
- (iv) Η αναγνώριση μέσω της μεθόδου DNLRX βάσει ενός και μοναδικού σει σημάτων μετατόπισης -

εφαρμοζόμενης δύναμης, κατάφερε να πιάσει με εξαιρετική ακρίβεια την αντίστροφη δυναμική ενός μηχανικού συστήματος με τριβή.

- (v) Ο έλεγχος μέσω πρόσω - αντιστάθμισης βάσει του μοντέλου DNLRX χαρακτηρίστηκε αποτελεσματικότατος. Το γεγονός αυτός ενισχύει την πεποίθηση ότι η εν λόγω μέθοδος είναι κατάλληλη για τον ακριβή έλεγχο συστημάτων με τριβή.

Κεφάλαιο 9

Σύνοψη και Γενικά Συμπεράσματα

Στην παρούσα διατριβή αναπτύχθηκε αρχικά στατιστική μεθοδολογία για την ανίχνευση μη γραμμικής συμπεριφοράς, αποκλειστικά επί τη βάση πειραματικών μετρήσεων, λαμβάνοντας υπόψη και τις στατιστικές αβεβαιότητες αυτών και παρακάμπτοντας την ανάγκη ύπαρξης αναλυτικού μοντέλου. Η βασική ιδέα για την επίτευξη του σκοπού αυτού ήταν η χρήση της Συνάρτησης Συνάφειας, η οποία αναμένεται να μειωθεί με την ύπαρξη μη γραμμικοτήτων. Η προτεινόμενη μεθοδολογία εφαρμόστηκε σε μια πραγματική αεροπορική κατασκευή, η οποία αρχικά ήταν σε υγιή κατάσταση, έπειτα αναπτύχθηκε επιδερμική ρωγμή και τελικά επισκευάστηκε μέσω επικόλλησης κατάλληλου επιθέματος από σύνθετο υλικό στην περιοχή της ρωγμής. Η προτεινόμενη μεθοδολογία κατάφερε επιτυχώς να ανιχνεύσει την ύπαρξη της επιδερμικής ρωγμής και να επιβεβαιώσει την ορθότητα της επισκευής.

Στη συνέχεια η προσοχή στράφηκε προς την ανάπτυξη ολοκληρωμένης μεθοδολογίας για την αναγνώριση φυσικών συστημάτων με υστέρηση. Από το πλήθος των μοντέλων υστέρησης επιλέχθηκε το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell, το οποίο ανήκει στη γενικότερη κατηγορία ρεολογικών μοντέλων υστέρησης. Η επιλογή αυτή έγινε με γνώμονα τα πλεονεκτήματα του εν λόγω μοντέλου, μερικά από τα οποία είναι η απλότητα του, η φυσική εποπτεία που παρέχει, καθώς και η εφαρμογή του σε μηχανολογικά συστήματα (π.χ. αναγνώριση φαινομένων τριβής).

Προκειμένου να τεθούν οι στέρεες βάσεις για την ανάπτυξη της εν λόγω μεθοδολογίας αναγνώρισης φυσικών συστημάτων με υστέρηση, αρχικά μελετώνται οι βασικές ιδιότητες του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell και αποδεικνύεται για πρώτη φορά η εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα του, χαρακτηριστικό απαραίτητο για την επιτυχή αναγνώριση του μοντέλου. Κατόπιν τούτου εξάγονται οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες που διασφαλίζουν ότι η διεγερση είναι αρκετά, για τους σκοπούς της αναγνώρισης, πλούσια.

Δεδομένης της προηγούμενης ανάλυσης, γίνεται εισαγωγή στο πρόβλημα της εκτιμήσεως του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Για το λόγο αυτό, επιλέγεται κατάλληλη εκτιμήτρια, από την κλάση των εκτιμητριών σφάλματος πρόβλεψης, και προτείνεται κατάλληλος “έξυπνος” τρόπος αριθμητικής υλοποίησης αυτής, έτσι ώστε να μειωθούν οι πιθανότητες εγκλωβισμού της εκτιμήσεως σε τοπικά ελάχιστα.

Σε επόμενη φάση αντιμετωπίζονται βαθύτερα ζητήματα, κυρίως θεωρητικής φύσεως άλλα με σαφής πρακτικές προεκτάσεις, σχετικά με την εκτίμηση του μοντέλου. Συγκεκριμένα, μελετάται το κατά πόσο η εκτίμηση του μοντέλου είναι αξιόπιστη. Για το λόγο αυτό, εξάγονται για πρώτη φορά οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν τη συνέπεια της προτεινόμενης εκτιμήτριας. Σε επόμενη φάση, και προκειμένου να ποσοτικοποιηθούν τα σφάλματα που εισέρχονται στις εκτιμήσεις, αποδεικνύεται η ασυμπτωτική κανονικότητα της εκτιμήτριας και δίδεται η έκφραση του ασυμπτωτικού πίνακα συνδυαστοράς των εκτιμήσεων.

Μέχρι το σημείο αυτό, η προσπάθεια επικεντρώθηκε στη μελέτη της εκτιμήσεως του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell. Κατόπιν τούτου, το πρόβλημα γενικεύεται σε αναγνώριση του μοντέλου. Επομένως, στην εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου, προστίθεται και το πρόβλημα της επιλογής της δομής αυτού, καθώς και του ελέγχου εγκυρότητας του τελικά επιλεγμένου μοντέλου. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι η επιλογή της δομής είναι πρόβλημα ισοδύναμο με τον έλεγχο εγκυρότητας του μοντέλου, και εξάχθηκαν οι βασικές (θεμελιώδης) αρχές βάσει των οποίων δύναται να αντιμετωπιστεί το εν λόγω ζήτημα. Κατόπιν τούτου, προτάθηκε κατάλληλη διαδικασία πρακτικής εφαρμογής των παραπάνω αρχών.

Τα γενικά συμπεράσματα που εξάγονται από τη μελέτη του προβλήματος της αναγνώρισης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι τα εξής:

1. Αποδείχθηκε θεωρητικώς και επιβεβαιώθηκε αριθμητικώς, ότι η διαδικασία αναγνώρισης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι αξιόπιστη κάτω από: (i) απλούστατες υποθέσεις σχετικά με τη δομή του μοντέλου, (ii) απλές και ευκόλως εφαρμόσιμες Συνθήκες Διέγερσης και (iii) σχετικά γενικές υποθέσεις όσον αφορά των προστιθέμενο μετρητικό θόρυβο.
2. Η εφαρμογή της προτεινόμενης διαδικασίας αναγνώρισης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell είναι αρκετά απλή και μπορεί να γίνει ακόμα και από ένα μη εξειδικευμένο χρήστη. Οι πρακτικοί παράμετροι που πρέπει να ακολουθηθούν προκειμένου να διασφαλιστεί η επιτυχία της αναγνώρισης είναι οι ακόλουθοι:

- Πρέπει να γίνει απαλοιφή των αρχικών καταστάσεων. Αυτό μπορεί πολύ εύκολα να

επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τη Συνθήκη C0.

- Η διέγερση πρέπει να επιλεγθεί έτσι ώστε να εκπληρώνει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες διέγερσης. Σε γενικές γραμμές:
 - α) Όσο μεγαλύτερο το εύρος (πλάτος) της διέγερσης, τόσο καλύτερα.
 - β) Όσο πιο πυκνό είναι το σήμα της διεγέρσεως, τόσο το καλύτερα.
 - γ) Είναι αρκετά επιθυμητό, όχι όμως και απολύτως απαραίτητο, η διέγερση να επιλεγθεί έτσι ώστε να επιφέρει μερικές αλλαγές στη φορά της κίνησης.
- Καλό είναι η αριθμητική υλοποίηση της εκτιμήτριας να πραγματοποιηθεί επί τη βάση του προτεινόμενου “έξυπνου” τρόπου, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα εγκλωβισμού της εκτιμήτριας σε τοπικά ελάχιστα.

Έχοντας μελετήσει το πρόβλημα της αναγνώρισης του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell σε βάση, διαμορφώνοντας με τον τρόπο αυτό μία στιβαρή θεωρητική βάση, το εύλογο επόμενο ερώτημα είναι πως είναι δυνατή η εφαρμογή αυτής για την αναγνώριση ενός πραγματικού συστήματος με υστέρηση. Για το λόγο αυτό, επιλέγεται ένα μηχανικό σύστημα με τριβή, λαμβάνονται πειραματικές μετρήσεις από αυτό και εφαρμόζεται η προτεινόμενη μεθοδολογία αναγνώρισης. Αξίζει να σημειωθεί ότι αφενός ένα τέτοιο σύστημα είναι σύνηθες στο τομέα των μηχανολογικών συστημάτων, και αφετέρου παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία μοντελοποίησης αναφορικά με τους τύπους υστέρησης που εμφανίζει σε κάθε περιοχή λειτουργίας του.

Η αναγνώριση του εν λόγω συστήματος επί τη βάση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell, καθώς και της προτεινόμενης επέκτασης του, σε συνδυασμό με την προτεινόμενη μεθοδολογία καταλήγει στα εξής γενικά συμπεράσματα:

1. Το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell κρίνεται αρκετά ικανό για την αναπαράσταση της δυναμικής της τριβής προολίσθησης.
2. Το μοντέλο ολίσθησης του Maxwell δίνει ικανοποιητική αναπαράσταση της δυναμικής της τριβής στη συνδυασμένη περιοχή ολίσθησης - προολίσθησης.
3. Η προτεινόμενη επέκταση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell δίνει σχεδόν άριστη αναπαράσταση της τριβής στη συνδυασμένη περιοχή ολίσθησης - προολίσθησης.
4. Η προτεινόμενη επέκταση του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο για την ανάπτυξη κατάλληλης διαδικασίας ελέγχου ακριβείας συστημάτων με τριβή.

Θέματα Μελλοντικής Μελέτης

Η αναγνώριση συστημάτων με υστέρηση αποτελεί ένα τεράστιο γνωστικό αντικείμενο με πολυάριθμες εφαρμογές. Ως εκ τούτου, υπάρχουν αρκετά θέματα τόσο θεωρητικού όσο και πρακτικού ενδιαφέροντος ανοικτά προς μελλοντική μελέτη. Μερικά από αυτά είναι:

1. Όσον αφορά την αναγνώριση του βασικού μοντέλου ολίσθησης του Maxwell:

- Η χρήση, πέρα από την προτεινόμενη, διαφορετικών εκτιμητριών του μοντέλου ολίσθησης του Maxwell (π.χ. εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας), με σκοπό τη διερεύνηση του κατά πόσο επιτυγχάνονται ακριβέστερες εκτιμήσεις του εν λόγω μοντέλου.
- Η γενίκευση των υποθέσεων σχετικά με τον προστιθέμενο μετρητικό θόρυβο.
- Ενσωμάτωση στην διαδικασία αναγνώρισης, καθοριστικών σφαλμάτων (μοντελοποίησης), πέρα από το μετρητικό θόρυβο (model misspecification).
- Εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας σε άλλα συστήματα, πέραν αυτών με τριβή, με υστέρηση (π.χ πιεζοηλεκτρικά και έξυπνα υλικά, πλαστική παραμόρφωση υλικών, αποσβεστήρες, συστήματα με διάκενα, κ.ο.κ).

2. Όσον αφορά την αναγνώριση του προτεινόμενου επεκταμένου μοντέλου ολίσθησης του Maxwell:

- Μελέτη της εκτίμησης του (εκ των προτέρων αναγνωρισιμότητα, σχεδιασμός διέγερσης, συνέπεια, ασυμπτωτική κανονικότητα των εκτιμήσεων, διαδικασία επιλογής της δομής, κ.ο.κ).
- Εφαρμογή του σε επιπλέον συστήματα με υστέρηση.

3. Όσον αφορά την αναγνώριση και έλεγχο συστημάτων με τριβή:

- Συνδυασμός της προτεινόμενης μεθοδολογία με Black Box τεχνικές, με σκοπό τη βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων.
- Ενσωμάτωση στην διαδικασία της αναγνώρισης επιπρόσθετων παραγόντων που καθορίζουν τη λειτουργία του συστήματος με τριβή (π.χ. αύξηση θερμοκρασίας, ώρες λειτουργίας, αλλαγές στη φόρτιση, κ.ο.κ). Η εν λόγω επέκταση μπορεί να πραγματοποιηθεί επιβάλλοντας χρονική μεταβλητότητα στις παραμέτρους του μοντέλου.
- Χρήση της προτεινόμενης μεθοδολογία για την ανίχνευση βλαβών σε συστήματα με τριβή.

- Χρήση της προτεινόμενης μεθοδολογία για την ανάπτυξη κατάλληλου ελέγχου ακριβείας του συστήματος καθώς και πειραματική επιβεβαίωση της αποτελεσματικότητας του ελέγχου αυτού.

Βιβλιογραφία

- [1] M.A. Kransosel'skii and A.V Pokrovskii. *Systems with Hysteresis*. Springer - Verlag, Berlin, 1989.
- [2] A. Visintin. *Differential Models of Hysteresis*. Springer - Verlag, Berlin, 1991.
- [3] K.G. McConnel. *Vibration Testing*. McGraw Hill, 1995.
- [4] V. Lampaert, J. Swevers, and F. Al-Bender. Modification of the Leuven intergrated friction model structure. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 47:683 – 687, 2002.
- [5] B.H. Armstrong, P. Dupont, and C. Canudas De Wit. A survey of models, analysis tools, and compensation methods, for the control of machines with friction. *Automatica*, 30:1083 – 1138, 1994.
- [6] S. Futami, A. Furutani, and S. Yoshida. Nanometer positioning and its micro-dynamics. *Nanotechnology*, 1:31 – 37, 1990.
- [7] J. Swevers, F. Al-Bender, C.G. Ganseman, and T. Prajogo. An intergated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45:675 – 686, 2000.
- [8] D.P. Hess and A. Soom. Friction at a lubricated line contact operating at oscillation sliding velocities. *J. of Tribology*, 112:147 – 152, 1990.
- [9] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K.J. Åström, and P. Lischinsky. A new model for control of system with friction. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 40:419 – 425, 1995.
- [10] I.D. Mayergoyz. *Mathematical Models of Hysteresis*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [11] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, New York, 1997.
- [12] O. Nelles. *Nonlinear System Identification: From Classical Approaches to Neural Networks and Fuzzy Models*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

- [13] B.M. Pötcher and I.R. Prucha. *Dynamic Nonlinear Econometric Models: Asymptotic Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [14] J. Oh and D.S. Bernstein. Semilinear Duhem model for rate - independent and rate - dependent hysteresis. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 50(5):631 – 645, May 2005.
- [15] J. Oh, D.S. Bernstein, D.D. Rigos, and S.D. Fassois. On duhem models for sliding and presliding friction. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control CDC - European Control Conference ECC*, Seville, Spain, 2005.
- [16] X. Tan and J.S. Baras. Modeling and control of hysteresis in magnetostriuctive actuators. *Automatica*, 40:1469 – 1480, 2004.
- [17] V. Lampaert, F. Al-Bender, and J. Swevers. Experimental characterization of dry friction at low velocities on a developed tribometer setup for macroscopic measurements. *Tribol. Lett.*, 16:95 – 105, 2004.
- [18] J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Beneviste, B. Delyon, and P.-Y. Glorennec. Nonlinear black - box modeling in system identification: An unified overview. *Automatica*, 31:1691 – 1724, 1995.
- [19] F. Benedettini, D. Capecchi, and F. Vestroni. Identification of hysteretic oscillators under earthquake loading by nonparametric models. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(5):606 – 612, May 1995.
- [20] A. Leva and L. Piroddi. Narx - based technique for the modelling of magneto - rheological damping devices. *Smart Materials and Structures*, 11:79 – 88, 2002.
- [21] U. Parlitz, A. Hornstein, D. Engster, Lampaert V. Al-Bender, F., T. Tjahjowidodo, S.D. Fassois, D.D. Rigos, C.X. Wong, K. Worden, and G. Manson. Identification of presliding friction identification. *Chaos*, 14:420 – 430, 2004.
- [22] K. Worden, C. X. Wong, U. Parlitz, A. Hornstein, D. Engster, T. Tjahjowidodo, F. Al-Bender, D. D. Rigos, and S. D. Fassois. Identification of presliding and sliding friction dynamics: gray box and black box models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(1):514 – 534, 2007.
- [23] Wang D.W.L. Gorbet, R.B. and Morris K.A. Preisach model identification of a two-wire SMA actuator. In *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics Automation*, pages 2161 – 2167, Leuven, Belgium, May 1998. IEEE.

- [24] Shed G. Croft, D. and S. Devasia. Creep hysteresis, and vibration compensation for piezoactuators: Atomic force microscopy application. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123:35 – 43, 2001.
- [25] Y.M. Han, S.C. Li, H.G. Lee, S.B. Choi, and H.J. Choi. Hysteresis identification of polymethylaniline - base EP fluid using preisach model. *Materials and Design*, 24:53 – 61, 2003.
- [26] Serpico C. and C. Visone. Magnetic hysteresis modeling via feed-forward neural networks. *IEEE Trans. on Magnetics*, 34(3):623 – 635, May 1998.
- [27] A.A. Adly and S.K. Abd-El-Hafiz. Using neural networks in the identification of preisach - type hysteresis models. *IEEE Trans. on Magnetics*, 34:3, May 1998.
- [28] Velardi F. Natale, C. and C. Visone. Identification and compensation of preisach hysteresis models for magnetostrictive actuators. *PhysicaB*, 306:161 – 165, 2001.
- [29] Natale C. Pirozzi S. Davino, D. and C. Visone. Phenomenological dynamic model of a magnetostrictive actuator. *Physica B*, 343:112 – 116, 2004.
- [30] C. Visone and M. Sjöström. Exact invertible hysteresis models based on play operators. *Physica B*, 343:148 – 152, 2004.
- [31] Xiao Z. Lin E. Yu, Y. and N. Naganathan. Analytic and experimental of a wavelet identification of preisach model of hysteresis. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 208:255 – 263, 2000.
- [32] A. Ktena, D.I. Fotiadis, P.D. Spanos, A. Berger, and C.V. Massalas. Identification of 1d and 2d preisach models for ferromagnets and shape memory alloys. *International Journal of Engineering Science*, 40:2235 – 2247, 2002.
- [33] Cardelli E. Azzerboni, B. and G. Finocchio. A comparative study of preisach scalar hysteresis models. *Physica B*, 343:164 – 170, 2004.
- [34] R.V. Iyer and M.E. Shirley. Hysteresis parameter identification with limited experimental data. *IEEE Trans. on Magnetics*, 40(5):3227 – 3239, September 2004.
- [35] X. Tan and J.S. Baras. Adaptive identification and control of hysteresis in smart materials. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 50(6):827 – 839, June 2005.

- [36] J. Bastien, M. Schatzman, and C.-H Lamarque. Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom. *European Journal of Mechanics A / Solids*, 19:277 – 307, 2000.
- [37] C.-H Lamarque, F. Bernardin, and J. Bastien. Study of a rheological model with a friction and a cubic term: Deterministic and stochastic cases. *European Journal of Mechanics A / Solids*, 24:572 – 592, 2005.
- [38] S. Cincotti and I. Daneri. A PWL circuit approach to the definition of a ϵ -approximation model of scalar static hysteresis. *IEEE Trans. on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, 49(9):1290 – 1308, September 2002.
- [39] C. Hsieh and Y.-C. Pan. Dynamics behavior and modelling of the pre-sliding static friction. *Wear*, 242:1 – 17, 2000.
- [40] S. Cincotti. and I. Daneri. Neural network identification of a nonlinear circuit model of hysteresis. *Electronics Letters*, 33(13), 1997.
- [41] S. Cincotti. Approximation properties of a PWL circuit model of hysteresis. *Physica B*, 275:216 – 222, 2000.
- [42] S. Cincotti. Dynamics properties of a piece-wise linear circuit model of hysteresis. *IEEE Trans. on Magnetics*, 37(5):3320 – 3323, September 2001.
- [43] F. Petrone, M. Lacagnina, and M. Scinti. Dynamic characterization of elastomers and identification with rheological models. *Journal of Sound and Vibration*, 271:339 – 363, 2004.
- [44] K. Kuhnen. Adaptive inverse control of piezoelectric actuators with hysteresis operators. In *Proceedings of the European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999. (CD-ROM).
- [45] V. Lampaert and J. Swevers. On-line identification of hysteresis function with nonlocal memory. In *Proceeding of IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 833 – 837, Como, Italy, July 2001.
- [46] K. Kuhnen and H. Janocha. Inverse feedforward controller for complex hysteretic nonlinearities in smart - material systems. In *Proceeding of the IASTED, International Conference of Modelling, Identification and Control*, Innsbruck, Austria, February 2001.

- [47] T. Matsuo, D. Shimode, Y. Terada, and M. Shimasaki. Application of stop and play models to the representation of magnetic characteristics of silicon steel sheet. *IEEE Trans. on Magnetics*, 39(3), 2003.
- [48] K. Kuhnen. Modeling, identification and compensation of complex hysteretic nonlinearities: A modified prandtl-ishlinshii. *European Journal of Control*, 9(4), 2003.
- [49] M. Goldfarb and N. Celanovic. A lumped parameter electromechanical model for describing the nonlinear behavior of piezoelectric actuators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 119:478 – 485, 1997.
- [50] G.S. Choi, Y.A. Lim, and G.H. Choi. Tracking position control of piezoelectric actuators for periodic reference inputs. *Mechatronics*, 12:669 – 684, 2002.
- [51] P. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal*, 14:1675 – 1682, 1976.
- [52] Y.K. Wen. Method for random vibration of hysteretic systems. *J. Eng. Mech. Division, Proc. ASCE*, 102:249 – 263, 1976.
- [53] Dyke S.J. Sain M.K. Spencer, B.F. and J.D. Carlson. Phenomenological model for magnetorheological dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(3):230 – 238, March 1997.
- [54] Ko J.K. Ni, Y.Q. and C.W. Wong. Identification of non-linear hysteretic isolators from periodic vibration tests. *Journal of Sound and Vibration*, 217(4):737 – 756, 1998.
- [55] R. Hensen, M. Molengraft, and M. Steinbuch. Frequency domain identification of dynamic friction model parameters. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, 10:191 – 196, 2002.
- [56] C. Canudas de Wit and P. Lischinsky. Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model. *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing*, 11:65 – 80, 1997.
- [57] Banning. State - space analysis and identification for a class of hysteretic systems. *Automatica*, 37:1883 – 1892, 2001.
- [58] P. Dupont, V. Hayward, B. Armstrong, and F. Altpeter. Single state elastoplastic friction models. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 47:787 – 792, 2002.
- [59] J. Oh and D.S Bernstein. Identification of rate-independent and rate-dependent hysteresis using the semilinear duhem model. submitted to *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2005.

- [60] Spencer B.F. Sain M.K. Dyke, S.J and J.D. Carlson. An experimental study of MR dampers for seismic protection. *Smart Materials and Structures*, 7:693 – 703, 1998.
- [61] A. Kyprianou and K. Worden. Identification of hystertic systems using the differential evolution algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 248(2):289 – 314, 2001.
- [62] Yu H. Li, S.J. and Y. Suzuki. Identification of non-linear hysteretic systems with slip. *Computers and Structures*, 82:157 – 165, 2002.
- [63] S.M. Dutta and F.H. Ghorbel. Differential hysteresis modeling of a shape memory alloy wire actuator. *IEEE/ASME Trans. on Mechtronics*, 10(2):189 – 197, 2005.
- [64] Kim Y.Y. Jung H. abd Lee G.N. Wee, H. Nonlinear rate - dependent stick-slip phenomena: modeling and parameter estimation. *International Journal of Solids and Structures*, 38:1415 – 1431, 2001.
- [65] Masri S.F. Chassiakos A.G. Smyth, A.W. and T.K. Caughey. On-line parametric identification of MDOF nonlinear hysteretic systems. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(2):133 – 142, February 1999.
- [66] J.-W Lin and R. Betti. On-line identification and damage detection in non-linear structural systems using a variable forgetting factor approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33:419 – 444, 2004.
- [67] J.N. Yand and S. Lin. On-line identification of non-linear hsysteretic structures using an adaptive tracking technique. *International journal of Non-linear Mechanics*, 39:1481 – 1491, 2004.
- [68] J.-L. Ha and R.-F. Fung. Hysteresis identification and dynamics responses of the impact drice mechanism. *Journal of Sound and Vibration*, 283:943 – 956, 2005.
- [69] J.S. Bendat and A.G. Piersol. *Random Data: Analysis an Measurement Procedures*. John Wiley & Sons, New York, USA, 1986.
- [70] M.P. Saccomani, S. Audoly, and L. D'Angiò. Parameter identifiability of nonlinear systems: The role of initial conditions. *Automatica*, 39:619 – 630, 2003.
- [71] G. Goulios and Z.P. Marioli-Riga. Composite patch repairs for commercial aircraft: Com-pres. *Air and Space Europe*, 3(3):143 – 147, 2001.

- [72] Doebling S.W., C.R. Farrar, M.B. Prime, and D. W. Shevitz. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review. Technical Report Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, USA, 1995.
- [73] M.H. Sadeghi and S.D. Fassois. A geometric approach to the non-destructive identification of faults in stochastic structural systems. *AIAA Journal*, 35(4):700 – 705, 1997.
- [74] M.H. Sadeghi and S.D. Fassois. Reduced-dimensionality geometric approach to fault identification in stochastic structural systems. *AIAA Journal*, 36(12):2250 – 2256, 1998.
- [75] Y. Zou, L. Tong, and G.P. Steven. Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures – a review. *Journal of Sound and Vibration*, 230(2):357 – 378, 2000.
- [76] J.S. Sakellariou and S.D. Fassois. Parametric output error based identification and fault detection in structures under earthquake excitation. In *Proceedings of European Conference on System Identification and Structural Health Monitoring*, pages 323 – 332, Madrid, Spain, 2000.
- [77] J.S. Sakellariou, D.D. Rizos, and Fassois. S.D. Fault detection and magnitude estimation for an aircraft skeleton structure via a functional model based method. In *Proceeding of First European Workshop on Structural Health Monitoring*, pages 253 – 260, Paris, France, 2002.
- [78] J.S. Sakellariou and S.D. Fassois. Parametric output error based identification and fault detection in structures under earthquake excitation. submitted to *Journal of Sound and Vibration*, 2004.
- [79] S.D. S.D., Fassois and J.S. Sakellariou. Time series methods for fault detection and identification in vibrating structures. *Philosophical Transactions of the Royal Society: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2006. Invited paper.
- [80] L.R. Pereyra, R.A. Osegueda, C. Carrasco, and C. Ferregut. Detection of damage in a stiffened plate from fusion of modal strain energy differences. In *Proceeding of the International Modal Analysis Conference*, pages 1556 – 1562, Bellingham, WA, USA, 2000.
- [81] K. Worden, G. Manson, and D.J. Allaman. An experimental appraisal of the stain energy damage location method. *Key Engineering Materials*, 204-205:35 – 46, 2001.

- [82] Worden. K., Manson. G, and D. Allman. Experimental validation of a structural health monitoring methodology. part ii. novelty detection on a gnat aircraft. *Journal of Sound and Vibration*, 259:323 – 343, 2003.
- [83] Manson. G, Worden. K., and D. Allman. Experimental validation of a structural health monitoring methodology. part ii. novelty detection on a laboratory structure. *Journal of Sound and Vibration*, 259:345 – 363, 2003.
- [84] N.P. Avdelidis, A. Moropoulou, and Z.P. Marioli Riga. The technology of composite patches and their structural reliability inspection using infrared imaging. *Prog. in Aerospace Sciences*, 39:317 – 328, 2003.
- [85] J.E. Lee and S.D. Fassois. On the problem of stochastic experimental modal analysis based on multiple excitation multiple response data – parts i and ii. *Journal of Sound and Vibration*, 161:33 – 87, 1993.
- [86] S.D. Fassois. Mimo lms - armax identification of vibrating structures – part i: The method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(4):723 – 735, 2001.
- [87] A. Florakis, S.D. Fassois, and F.M. Hemez. Mimo lms - armax identification of vibrating structures – part ii: A critical assessment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(4):737 – 758, 2001.
- [88] S. Braun. *Mechanical Signature Analysis: Theory and Applications*. Academic Press, London, 1986.
- [89] S.D. Fassois. Parametric identification of vibrating structures. In S.G. Braun, D.J. Ewins, and S.S. Rao, editors, *Encyclopedia of Vibration*. Academic Press, London, 2001.
- [90] K.A. Petsounis and S.D. Fassois. Parametric time-domain methods for the identification of vibrating structures – a critical comparison and assessment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(6):1031 – 1060, 2001.
- [91] T.W. Anderson. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Sons, New York, USA, 1984.
- [92] S.M. Kay. *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*. Prentice-Hall, New Jersey, 1988.
- [93] G.C. Carter. Coherence and time delay estimation. *Proceedings of IEEE*, 75(2):236 – 255, 1987.

- [94] D.C. Montgomery. *Introduction to Statistic Quality Control*. John Wiley, USA, 1991. Second edition.
- [95] D.R. Brillinger. *Time Series Data Analysis and Theory*. Holden-Day, Inc, San Francisco, California, 1981.
- [96] S.L. Tsyfansky and V.I. Beresnevich. Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings. *Journal of Sound and Vibration*, 263:49 – 60, 2000.
- [97] E.R. Dougherty. *Probability and Statistics for the Engineering, Computing and Physical Sciences*. Prentice-Hall, New Jersey, 1990.
- [98] D.D. Rizos, S.D. Fassois, Z.P. Marioli-Riga, and A.N. Karanika. Damage detection in stiffened aircraft panels via vibration testing. In *Proceedings of the International Conference on Structural System Identification*, pages 453 – 462, Kassel, Germany., 2001.
- [99] D.D. Rizos and S.D. Fassois. Presliding friction identification based upon the Maxwell slip model structure. In *4th International Symposium, Investigations of Non-Linear Dynamics Effects in Production Systems*, Chemnitz, Germany, 2003.
- [100] F. Al-Bender, V. Lampaert, S.D. Fassois, D.D. Rizos, K. Worden, D. Engster, A. Hornstein, and U. Parlitz. Measurement and identification of pre-sliding friction dynamics. In G. Radons and R. Neugebauer, editors, *Nonlinear Dynamics of Production Processes*. Wiley-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, Weinheim, 2003.
- [101] D.D. Rizos and S.D. Fassois. Presliding friction identification based upon the Maxwell slip model structure. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 14:431 – 445, 2004.
- [102] D.D. Rizos and S.D. Fassois. Friction identification based upon the LuGre and Maxwell slip models. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- [103] D. D. Rizos and S. D. Fassois. Maxwell slip model based identification and control of systems with friction. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control CDC – European Control Conference ECC*, Seville, Spain, 2005.
- [104] D.D. Rizos and S.D. Fassois. Friction identification based upon the luGre and maxwell slip models. Accepted for publication in *IEEE Trans. Control System Technology*, 2007.
- [105] D.S. Bernstein. *Matrix Mathematics, Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear System Theory*. Princeton University Press, 2005.

- [106] W.K. Newey. Uniform convergence in probability and stochastic equicontinuity. *Econometrica*, 59:1161–1167, 1991.
- [107] D. Bauer and B. Ninness. Asymptotic properties of least - squares estimates of Hammerstein - Wiener models. *International Journal of Control*, 75:34–51, 2002.
- [108] S. Audoly, L. D’Angiò, M.P. Saccomani, and C. Cobelli. Global identifiability of linear compartmental models - a computer algebra algorithm. *IEEE Trans. Biomedical Engineering*, 45:36 – 48, 1998.
- [109] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [110] A. Chipperfield, P. Fleming, H. Pohlheim, and C. Fonseca. Genetic algorithm toolbox: For use with matlab. URL: <http://www.shef.ac.uk/gaipp/ga-toolbox>.
- [111] J.M. Mendel. *Lesson in Estimation Theory of Signal Processing, Communication and Control*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [112] T. Söderström and P. Stoica. *System Identification*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [113] A.G. Poulimenos and S.D. Fassois. Non-stationary random vibration modelling and analysis via functional series tarma models. In *Proceedings of the ISMA International Conference on Noise and Vibration Engineering*, Leuven, Belgium, 2004.
- [114] P.J. Brockwell and R.A. Davis. *Intoduction to Time Series and Forecasting*. Springer texts in statistics. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [115] C.R. Rao. *Linear Statistical Inference and its Applications: Second Edition*. John Wiley & Sons, Inc, New York, USA, 1974.
- [116] F. Al-Bender, V. Lampaert, S.D. Fassois, D.D. Rizos, K. Worden, D. Engster, A. Hornstein, and U. Parlitz. Measurement and identification of pre-sliding friction dynamics. In *4th International Symposium, Investigations of Non-Linear Dynamics Effects in Production Systems*, Chemnitz, Germany, 2003.
- [117] J.H. Kim, H.K. Chae, J.Y. Jeon, and S.W. Lee. Identification and control of systems with friction using accelerated evolutionary programming. *IEEE Control Syst. Mag.*, 16:38 – 47, 1996.

- [118] R.H. Wu and P.C. Tung. Studies of stick-slip friction presliding displacement and hunting. *ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control*, 124:111 – 117, 2002.
- [119] B.A. Awabdy, W. Shih, and D.M. Auslander. Nanometer positioning of a linear motion stage under static loads. *IEEE / ASME Trans. on Mechatronics*, 3:113 – 119, 1998.
- [120] M. Todd and K. Johnson. A model for coulomb torque hysteresis in ball bearings. *International Journal of Mechanical Sciences*, 29:339 – 354, 1987.
- [121] D. Kostic, R. Hensen, B. Jager, and M. Steinbuch. Modelling and identification of an RRR-rodut. In *Proceeding of the 40th Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida USA, 2001.
- [122] L.-C. Lin and J.-C. Lai. Stable adaptive fuzzy control with tsf fuzzy friction estimation for linear drive systems. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 38:237 – 253, 2003.
- [123] S.-J. Kim and I.-J. Ha. A frequency - domain approach to identification of mechanical systems with friction. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 46:888 – 893, 2001.
- [124] Y.-Y. Chen, P.-Y. Huang, and J.-Y. Yen. Frequency-domain identification algorithms for servo systems with friction. *IEEE Trans. on Control System Technology*, 10:654 – 665, 2002.
- [125] D. Karnopp. Computer simulation of stick - slip friction in mechanical dynamic systems. *ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control*, 107:100 – 103, 1985.
- [126] K.C. Cheok, H. Hu, and N.K. Loh. Modelling and identification of a class of servomechanism systems with stick - slip friction. *ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control*, 10:324 – 328, 1998.
- [127] Besancon Voda A. Ravanbod Shirazi, L. Friction identification using the karnopp model, applied to an electropneumatic actuator. *Proc. Instn Mech. Engrs Part I: System and Control Engineering*, 217:123 – 135, 2003.
- [128] M.R. Elhami and D.J. Brookfield. Sequential identification of coulomb and viscous friction in robot drives. *Automatica*, 33:393 – 401, 1997.
- [129] V.G. V.G. Oancea and T.A. Laursen. Investigation of low frequency stick - slip motion: Experiments and numerical modelling. *Journal of Sound and Vibration*, 213:577 – 600, 1998.
- [130] H.N. Al-Duwaish. Parametrization and compensation of friction forces using genetic algorithms. In *Thirty-Fourth IAS Annual Meeting, Industry Applications Conference*, 1999.

-
- [131] C. Hsieh and Y.-C. Pan. Dynamic behaviour and modelling of the pre-sliding static friction. *Wear*, 242:1 – 17, 2000.
- [132] L.R. Ray, A. Ramasubramanian, and J. Townsend. Adaptive friction compensation using extended kalma-bucy filter friction estimator. *Control Engineering Practice*, 9:169 – 179, 2001.
- [133] H. Olsson, K.J. Åström, C. Canudas de Wit, M. Gäfvert, and P. Lischinsky. Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, 4:179 – 195, 1998.
- [134] V. Lampaert Al-Bender, F. and Swevers J. A novel generic model at asperity level for dry friction force dynamics. *Tribology Letters*, 16:81 – 93, 2004.

Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα

Ο **Δημοσθένης Δ. Ρίζος** γεννήθηκε στις 18 Φεβρουαρίου 1976 στη Νίκαια (Πειραιάς). Απέκτησε το Δίπλωμα του Μηχανολόγου Μηχανικού στο Πανεπιστήμιο Πατρών στο Τμήμα της Πολυτεχνικής Σχολής Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών κατά την περίοδο 1994 – 1999. Από τότε και έως σήμερα είναι Υποψήφιος Διδάκτορας Μηχανολόγος Μηχανικός στο ίδιο τμήμα.

Ερευνητικά Ενδιαφέροντα

Πειραματική μορφική ανάλυση, μοντελοποίηση και αναγνώριση στοχαστικών γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων, διάγνωση βλαβών σε κατασκευές και μηχανικά συστήματα μέσω στατιστικών μεθόδων. Πειραματικές εφαρμογές.

Εκπαιδευτική Προϋπηρεσία

- ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ -Εργαστηριακές Ασκήσεις: "Συστήματα και Αυτόματος Έλεγχος" (1999-2002)
-Εργαστηριακές Ασκήσεις: "Προγραμματισμός H/Y (2002)"
- ΚΕΚ ΓΣΕΒΕΕ -Σεμινάριο: "Εισαγωγή στη χρήση H/Y - internet (2001)"
-Σεμινάριο: "Εισαγωγή στη χρήση H/Y - word - excel - internet (2002)"

Συμμετοχή σε Ερευνητικά Προγράμματα

- Μέλος Ερευνητικής Ομάδας Προγράμματος με τίτλο :

Ανάπτυξη Μεθόδου Επισκευής Γηρασμένων Αεροσκαφών με χρήση Ενισχυτικών Επιθεμάτων από Προηγμένα Σύνθετα Υλικά

για το χρονικό διάστημα Σεπτεμβρίου 1999 - Μάϊος 2001.

- Μέλος Ερευνητικής Ομάδας Προγράμματος με τίτλο:

Ανάπτυξη συστήματος για την παραμετρική μορφική αναγνώριση και διάγνωση βλαβών σε κατασκευές κρίσιμης ασφάλειας (πρόγραμμα ΠΕΝΕΔ99)

για το χρονικό διάστημα Ιανουάριος 2000 - Ιούνιος 2001.

- Μέλος Ερευνητικής Ομάδας Προγράμματος με τίτλο:

Nonlinear Dynamics Modeling, Detection, Identification and Fault Diagnosis in Industrial Robotics and Machine Elements

για το χρονικό διάστημα Σεπτέμβριος 2001 - Δεκέμβριος 2004.

Επιστημονικές Εργασίες

1. Al-Bender, F., Lampaert, V., Fassois, S.D., Rizos, D.D., Worden, K., Engster, D., Hornstein, A., and Parlitz, U., "Measurement and Identification of Pre-sliding Friction Dynamics", *Nonlinear Dynamics of Production Processes* (Wiley-VCH), Editors G. Radons and R. Neugebauer, pp. 350-367, 2003.
2. Parlitz, U., Hornstein, A., Engster, D., Al-Bender, F., Lampaert, V., Fassois, S.D., Rizos, D.D., Worden, K., and Wong, C., "Identification of Pre-sliding Friction Dynamics", *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **14**, pp. 420-430, 2004 (invited paper).
3. Rizos, D.D., and Fassois, S.D., "Presliding Friction Identification Based Upon the Maxwell Slip Model Structure", *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **14**, pp. 431-445, 2004 (invited paper).
4. Worden, K., Wong, C.X., Parlitz, U., Hornstein, A., Engster, D., Tjahjowidodo, T., Al-Bender, Rizos, D.D., and Fassois, S.D., "Identification of presliding and sliding friction dynamics: grey box and black box models", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **21**, pp.514-534, 2007.
5. Rizos, D.D., Fassois, S.D., Marioli-Riga, Z.P., and Karanika, A.N. "Vibration-based skin damage statistical detection and restoration assessment in a stiffened aircraft panel", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **22**, pp. 315-337, 2008.

6. Rizos, D.D., and Fassois, S.D., "Friction Identification based upon the LuGre and Maxwell Slip models", (*IEEE Trans. Control System Technology*), accepted for publication.
7. Rizos, D.D., and Fassois, S.D., "Identification of the Maxwell Slip model: A posteriori identifiability", journal version under preparation for publication.
8. Rizos, D.D., and Fassois, S.D., "Identification of the Maxwell Slip model: Asymptotic properties", journal version under preparation for publication.
9. Petsounis, K.A, Rizos, D.D., and Fassois, S.D., "In-Operation vector autoregressive spectral and modal analysis of railway vehicle dynamics", in *the Proceedings of the 4th European Conference on Noise Control* Patras, Greece, 2001.
10. Rizos, D.D., Fassois, S.D., Marioli-Riga, Z.P., and Karanika, A.N., "Damage Detection in Stiffened Aircraft Panels via Vibration Testing", in *the Proceedings of the International Conference on Structural System Identification*, Kassel, Germany, 2001, pp. 453-462.
11. Rizos, D.D., Fassois, S.D., Marioli-Riga, Z.P., and Karanika, A.N., "Statistical Skin Damage Detection and Restoration Assessment for Aircraft Panels via Vibration Testing" In *the proceedings of the First European Workshop on Structural Health Monitoring*, Paris, France, 2002.
12. Sakellariou, J.S, Rizos, D.D, and Fassois, S.D, "Fault Detection and Magnitude estimation on for an Aircraft Skeleton Structure via a Function Model Based Method, In *the Proceedings of the First European Workshop on Structural Health Monitoring*, Paris, France, 2002.
13. Rizos, D.D., and Fassois, S.D., "Presliding Friction Identification Based Upon the Maxwell Slip Model Structure", in *the Proceedings of the 4th Symposium on Investigations of Nonlinear Dynamics Effects in Production Systems*, Chemnitz, Germany, 2003.
14. Al-Bender, F., Lampaert, V., Fassois, S.D., Rizos, D.D., Worden, K., Engster, D., Hornstein, A., and Parlitz, U., "Measurement and Identification of Pre-Sliding Friction Dynamics", in *the Proceedings of the 4th Symposium on Investigations of Nonlinear Dynamics Effects in Production Systems*, Chemnitz, Germany, 2003.
15. Worden, K., Wong, C.X., Parlitz, U., Hornstein, A., Engster, D., Tjahjowidodo, T., Al-Bender, Rizos, D.D., and Fassois, S.D., "Identification of presliding and sliding friction", in *the Proceedings of the ENOC, 5th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*, Eindhoven, Netherland, 2005.

16. Rigos, D.D., and Fassois, S.D., "Friction identification based upon the LuGre and Maxwell Slip models", in the *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
17. Rigos, D.D., and Fassois, S.D., "Maxwell Slip model based identification and control of systems with friction", to appear in the *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control CDC - European Control Conference ECC*, Seville, Spain, 2005.
18. Oh, J., Ashwani, P.K., Bernstein, D.S., Rigos, D.D., and Fassois, S.D., "On Duhem Models for Sliding and Presliding Friction", to appear in the *Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control CDC and European Control Conference ECC*, Seville, Spain, 2005.