ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ
ΣΤΗ ΝΕΥΡΟΦΥΣΙΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΕΓΚΕΦΑΛΟΥ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΦΩΤΕΙΝΗ Β. ΚΑΡΙΩΤΟΥ

--

Πάτρα 2002

Σ' εκείνους που με δίδαξαν το σκέπτεσθαι.

Η έγκριση της Διδακτορικής Διατριβής από το Τμήμα Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, δεν υποδηλοί αποδοχή των γνώμών του συγγραφέα.

(ν. 5543/1932, Άρθρο 202)

Ολοκληρώνοντας τη διδακτορική διατριβή μου θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στους ανθρώπους που είχα την τιμή να συνεργασθώ κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Δάσιο, για τη φωτισμένη καθοδήγησή του, την αμέριστη υποστήριξη, τη συνεχή ενθάρρυνση και εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλλε καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας, καθώς και για τις εμπειρίες της χαράς μετά από μια γόνιμη μαθηματική αλληλεπίδραση ή της πληρότητας μετά από την ανακάλυψη της κομψότητας ενός κρυμμένου αποτελέσματος.

Στον καθηγητή κ. Αλκιβιάδη Παγιατάκη για την οπτική την οποία επέβαλλε με το παράδειγμά του στη σύνδεση της ερευνητικής θεώρησης με τη φυσική πραγματικότητα και τις αρχές της και για τη σταθερή εμπιστοσύνη την οποία επέτρεψε να χαρακτηρίζει τη συνεργασία μας σε όλη της τη διάρκεια.

Στον καθηγητή κ. Γεώργιο Κωστόπουλο για την προθυμία και την αμεσότητα με την οποία μου μεταλαμπάδευσε τις βασικές αρχές της, άγνωστης σε μένα, αλλά καθοριστικής για την ερευνητική μου πορεία, περιοχής της Νευροφυσιολογίας του εγκεφάλου.

Στον καθηγητή κ. Αθανάσιο Φωκά για την εμπιστοσύνη του και για τις καταλυτικές παρατηρήσεις του, καρπούς γόνιμης συζήτησης, οι οποίες υπήρξαν το έναυσμα για την είσοδο στην τελική φάση της συγκέντρωσης του ερευνητικού υλικού και συγγραφή της παρούσας διατριβής.

Στον αναπληρωτή καθηγητή κ. Βασίλειο Κωστόπουλο για τη φιλία και τη συμπαράστασή του καθώς και για τις εύστοχες υποδείξεις του κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Στο σύζυγό μου Φυσικό κ. Αλέξιο Ματθαίου για την αδιάλειπτη υποστήριξη και για τις επί της ουσίας παρατηρήσεις του που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην καλλιέργεια και συγκομιδή της παρούσας διατριβής.

Στους συναδέλφους του Εργαστηρίου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών κ. Κατερίνα Καραδήμα, κ. Σοφία Γιαπαλάκη, κ. Παναγιώτη Βαφέα και κ. Γρηγόριο Καμβύσα για τη συμπαράσταση και τη φιλία τους, η οποία έκανε το χρόνο των μεταπτυχιακών μου σπουδών γόνιμο αλλά και πλήρη εμπειριών χαράς, συνεργασίας και δημιουργικότητας.

Στην κ. Σοφία Παπαδοπούλου, η οποία έβγαλε εις πέρας το επίπονο έργο της δακτυλογράφησης της διατριβής υπό δυσκολότατες συνθήκες, για την προθυμία και την ικανότητα με την οποία ανταποκρίθηκε στις απαιτήσεις και στις δυσκολίες, σε όλη τη διάρκεια της συγγραφής και της ολοκλήρωσης του έργου.

Στους γονείς μου κ. Βασίλειο και κ. Μαρία Καριώτη οφείλω βαθιά ευγνωμοσύνη γιατί έθεσαν τα θεμέλια πάνω στα οποία βασίστηκε ολόκληρη η πορεία των σπουδών μου, με επιστέγασμα την παρούσα διατριβή.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στο ερευνητικό Ινστιτούτο Χημικής Μηχανικής και Χημικών Διεργασιών Υψηλής Θερμοκρασίας για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε ως μεταπτυχιακό υπότροφο, καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Φ. Καριώτου

*Αν ο ανθρώπινος εγκέφαλος ήταν τόσο απλός
ώστε να μπορεί να γίνει κατανοητός,
θα ήμαστε τόσο ανόητοι
που δε θα μπορούσαμε να τον κατανοήσουμε!*

*Colin Blakemore
“The Mind Machine”*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ακριβής και πλήρης αναλυτική λύση για το ευθύ πρόβλημα του Βιομαγνητισμού του ανθρώπινου εγκεφάλου είναι γνωστή για την περίπτωση που η πηγή του μετρούμενου μαγνητικού πεδίου θεωρείται σημειακό διπολικό ρεύμα εντός σφαιρικού ομογενούς αγωγού. Στην παρούσα διατριβή το ευθύ πρόβλημα του Βιοηλεκτρομαγνητισμού επιλύεται για το πλέον ρεαλιστικό πρότυπο του ομογενούς ελλειψοειδούς εγκεφάλου. Οι πρώτοι όροι προσέγγισης του ηλεκτρικού δυναμικού στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του αγωγού παράγονται, καθώς και ο τετραπολικός όρος του πολυπολικού αναπτύγματος του εξωτερικού πεδίου μαγνητικής επαγωγής, κατά τρόπον ώστε να προβάλλεται ο ανισότροπος χαρακτήρας της ελλειψοειδούς γεωμετρίας, αλλά και η δομή της εξάρτησης των πεδίων από τη Φυσική και τη Γεωμετρία. Η επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων στη σφαιρική γεωμετρία καθώς και η επίπονη διαδικασία της αναγωγής των αποτελεσμάτων του ελλειψοειδούς προτύπου στα αντίστοιχα αποτελέσματα του σφαιροειδούς και του σφαιρικού προτύπου, απέδωσε χρήσιμα ποιοτικά συμπεράσματα ως προς τη σύγκριση των χρησιμοποιούμενων γεωμετρικών προτύπων.

Ειδικότερα, όπως αποδείχτηκε, η αύξηση της ανισοτροπίας του προτύπου αντιστοιχεί στην εμφάνιση στα αποτελέσματα για τα εξωτερικά πεδία, της συνοριακής επιφάνειας του αγωγού, η οποία απουσιάζει από τα αντίστοιχα αποτελέσματα του πλήρως ισότροπου σφαιρικού αγωγού. Επιπλέον προσδιορίστηκε ο τρόπος με τον οποίο η πηγή εισέρχεται στον τετραπολικό όρο της μαγνητικής επαγωγής στα τρία πρότυπα, μέσω της ροπής, τροποποιημένης όπου χρειάζεται, και της θέσης της. Συνέπεια τούτου ήταν ο προσδιορισμός των μαγνητικά σιωπηλών πηγών σε κάθε πρότυπο, όπου αποδείχτηκε ότι μία πηγή που έχει προσανατολισμό κάθετο στην επιφάνεια του εκάστοτε αγωγού στο σημείο που ορίζει το διάνυσμα θέσης της, είναι σιωπηλή, δηλαδή δεν παράγει μαγνητικό πεδίο μετρήσιμο εξωτερικά του αγωγού. Τέλος, η διατριβή περιλαμβάνει μελέτη της ελλειψοειδούς γεωμετρίας και ανάλυσης του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων, καθώς και εμβάθυνση στη διαδικασία αναγωγής αυτής της γεωμετρίας στη σφαιροειδή και στη σφαιρική. Ειδικά μελετώνται γεωμετρικές και αναλυτικές σχέσεις σύνδεσης του ελλειψοειδούς με το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, με σκοπό την βαθύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων της διατριβής στα αντίστοιχα πρότυπα, αλλά και των δυνατοτήτων εκμετάλλευσης τους στη μελλοντική αντιμετώπιση των αντιστρόφων προβλημάτων του Βιοηλεκτρομαγνητισμού.

ABSTRACT

An exact and complete analytic solution for the forward problem, in the theory of Biomagnetics of the human brain, is known only for the case where the source of the measured magnetic field, in the exterior of a homogeneous sphere, is considered to be a point current dipole. It is also known for special directions of the source inside a spheroidal homogeneous conductor. In the present thesis the corresponding problem for the more realistic ellipsoidal brain model is solved up to its first multipole term. The leading terms of the electric potential in the interior and the exterior of the conductor, as well as the leading quadrupolic term of the multipole expansion of the exterior magnetic induction field, are obtained. The results are given in a form that exhibits the anisotropic character of the ellipsoidal geometry and the structure of the dependence of the fields on Physics and Geometry.

The solution of the corresponding problems in spherical geometry as well as the laborious task of reducing the ellipsoidal results in the corresponding spheroidal and spherical cases, has brought up useful conclusions concerning these three geometrical models.

In particular it has been proved that, as the anisotropy of the model is increased, the corresponding results for the exterior fields incorporate the boundary of the conductor, which is totally absent in the corresponding results of the isotropic spherical model.

Furthermore, the way that the source enters in the quadrupolic term of the magnetic induction field is identified as the vector product of its moment, modified when needed, by its position vector. Consequently, the magnetic silent sources for each model, i.e. sources that produce non detectable exterior magnetic field, are also characterized. Actually, a source that is oriented normally to the boundary of the conductor in the direction of its location, is shown to be always silent.

Finally, the present thesis includes a study of ellipsoidal geometry and of the related ellipsoidal coordinate system, as well as a thorough examination of its reduction process to the spheroidal and spherical system. Geometric and analytic connection relations between the ellipsoidal and the spherical system are obtained, aiming to a better understanding of the results of the present thesis. Furthermore this study sets the basis for broadening the possibilities of solving some of the inverse problems of Bioelectromagnetics.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ.....	i
------------------	---

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	
---------------	--

1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 : ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

1.1 Ο ανθρώπινος εγκέφαλος.....	
---------------------------------	--

13

1.2 Η λειτουργία του Νευρικού Κυττάρου.....	
---	--

16

1.3 Βασικές αρχές της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και Μαγνητοεγκεφαλογραφίας....	
---	--

19

1.4 Οι πηγές, ο αγωγός και η προτυποποίησή τους.....	21
--	----

1.5 Η Σχεδόν Στατική Προσέγγιση των εξισώσεων του Maxwell.....	25
--	----

1.6 Μαθηματική τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος.....	
---	--

30

1.7 Ιστορική ανασκόπηση του ευθέος EEG και MEG προβλήματος.....	39
---	----

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι - Το Γεωμετρικό Υπόβαθρο

2.1. Εισαγωγή.....	
--------------------	--

45

2.2 Η γέννηση του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων.....	
---	--

47

2.3 Οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες.....	
---	--

49

2.4 Η αντιστροφή του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων.....	
--	--

51

2.5 Χρήσιμες γεωμετρικές ιδιότητες του ελλειψοειδούς.....	54
2.6 Δυναμική αναπαράσταση του ελλειψοειδούς.....	56
2.7 Ο τελεστής του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων.....	57
2.8 Η φασματική ανάλυση του τελεστή του Laplace και οι ελλειψοειδείς αρμονικές.....	59
2.9 Οι εσωτερικές συναρτήσεις Lamé.....	61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : Ο ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΑΓΩΓΟΣ

3.1 Μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος στην περίπτωση του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού.....	71
3.2. Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.....	74
3.3 Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.....	84
3.4 Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.....	86

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : Ο ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΗΣ ΑΓΩΓΟΣ

4.1 Εισαγωγή.....	105
4.2 Το σφαιροειδές σύστημα και οι βασικές αναγωγές.....	111
4.3 Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.....	116
4.4 Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.....	120
4.5 Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.....	123

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : Ο ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΑΓΩΓΟΣ

5.1	Εισαγωγή.....	129
5.2	Ο υπολογισμός των u^- , u^+ , B	131
5.3	Ασυμπτωτική ανάλυση του μαγνητικού πεδίου.....	144
5.4	Αναγωγή του ελλειψοειδούς προτύπου στο σφαιρικό.....	147
5.5	Αναγωγή του σφαιροειδούς προτύπου στο σφαιρικό.....	154

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 : ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ II - Εμβαθύνοντας στο Γεωμετρικό Υπόβαθρο

6.1	Η έκκεντρη διεύθυνση.....	165
6.2	Η τομή του μονόχωνου και του δίχωνου υπερβολοειδούς.....	169
6.3	Ελλειψοειδείς και Σφαιρικές Αρμονικές.....	176

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ

7.1	Οι καρποί της διατριβής.....	183
7.2	Η επικαρπία.....	188

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΡΙΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.....

197

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β : ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.....

203

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ : ΕΛΛΕΨΘΕΙΔΕΙΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ.....

207

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ
GESELOWITZ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ.....**

215

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....

..... 223

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

Γενικά σύμβολα

V^- = αγωγός (ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο)

$S = \partial V^-$ = συνοριακή επιφάνεια του αγωγού V^- (ομαλή)

$V^+ = (V^- \cup S)^c$ = εξωτερικός του V^- μη αγωγίμος χώρος

$\mathbb{R}^3$ = Ευκλείδειος τρισδιάστατος χώρος

V = όγκος του αγωγού

$\mathbf{r} =$ μεταβλητή ολοκλήρωσης

$\mathbf{r}$ = διάνυσμα θέσης του σημείου παρατήρησης

$\mathbf{r}_0$ = διάνυσμα θέσης της σημειακής πηγής

$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ = εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{r}$ της επιφάνειας S

$B_\varepsilon = B(\mathbf{r}_0, \varepsilon) = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon \}$ = ανοικτή σφαίρα με κέντρο $\mathbf{r}_0$ και ακτίνα ε

$S_\varepsilon = \partial B(\mathbf{r}_0, \varepsilon) = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \varepsilon \}$ = συνοριακή επιφάνεια της σφαίρας B_ε

$V(\varepsilon) = V^- - B_\varepsilon$ = ελεύθερος από πηγές χώρος του αγωγού

$S^2 = \{ \hat{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3 \mid |\hat{\mathbf{r}}| = 1 \}$ = μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$

i = μιγαδική φανταστική μονάδα

$\delta(\mathbf{r})$ = γενικευμένη συνάρτηση του Dirac

δ_{mn} = δέλτα του Kronecker

$O(f) = g$ = σύμβολο Landau που δηλώνει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης g

$\times, \cdot, \otimes$ = εξωτερικό, εσωτερικό και τανυστικό γινόμενο αντίστοιχα

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{d})$ = διπλό εσωτερικό γινόμενο δυαδικών

$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$ = διπλό εξωτερικό-εσωτερικό γινόμενο δυαδικών

$\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$ = Καρτεσιανή ορθοκανονική βάση

$\mathbf{r} = x_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{x}}_3$ = Καρτεσιανή αναπαράσταση διανύσματος

$$\tilde{\mathbf{I}} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i = \text{ταυτοτικό δυαδικό}$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{I}}} = \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j = \text{ταυτοτικό τετραδικό}$$

$$\nabla = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \text{τελεστής ανάδελτα}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \text{τελεστής του Laplace}$$

$$T = \text{χρονική περίοδος}$$

$$\lambda = \text{χωρική περίοδος (μήκος κύματος)}$$

$$\omega = \text{κυκλική συχνότητα (χρονική πυκνότητα)}$$

$$k = \text{κυματικός αριθμός (χωρική πυκνότητα)}$$

$$\nu = \text{συχνότητα}$$

$$c_0 = \text{ταχύτητα διάδοσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό}$$

$$\epsilon = \text{ηλεκτρική επιδεκτικότητα ή διηλεκτρική σταθερά}$$

$$\epsilon_0 = \text{ηλεκτρική επιδεκτικότητα του κενού}$$

$$\mu = \text{μαγνητική διαπερατότητα}$$

$$\mu_0 = \text{μαγνητική διαπερατότητα του κενού}$$

$$\sigma = \text{αγωγιμότητα}$$

$$\rho = \text{χωρική πυκνότητα φορτίου}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \text{αρμονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \text{ηλεκτρικό πεδίο (χωρική εξάρτηση)}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \text{χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο ηλεκτρικής μετατόπισης}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \text{αρμονικά μεταβαλλόμενο πεδίο μαγνητικής επαγωγής}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{πεδίο μαγνητικής επαγωγής (χωρική εξάρτηση)}$$

$$\mathbf{J}^p = \mathbf{J}^p(\mathbf{r}, t) = \text{χρονικά μεταβαλλόμενη χωρική πυκνότητα κύριου ρεύματος}$$

$$\mathbf{J}^v = \mathbf{J}^v(\mathbf{r}, t) = \text{χρονικά μεταβαλλόμενη χωρική πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας}$$

$$\mathbf{J}^v(\mathbf{r}) \propto (\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}) = \text{χωρική πυκνότητα ρεύματος αγωγιμότητας}$$

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) \propto (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}_0 = \text{χωρική πυκνότητα του κύριου σημειακού διπολικού ρεύματος}$$

$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}}$ μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της τομής μονόχωνου και δίχωνου υπερβολοειδούς στο σημείο $\mathbf{r}$

$E_n^m(x)$ = εσωτερική συνάρτηση Lamé

$F_n^m(x)$ = εξωτερική συνάρτηση Lamé

$I_n^m(\rho)$ = ελλειπτικό ολοκλήρωμα βαθμού n , τάξεως m

$IE_n^m(\rho, \mu, \nu)$ = εσωτερική ελλειψοειδής αρμονική βαθμού n , τάξεως m

$IF_n^m(\rho, \mu, \nu)$ = εξωτερική ελλειψοειδής αρμονική βαθμού n , τάξεως m

l_ρ = συνάρτηση βάρους ως προς την οποία ορίζεται η ορθογωνιότητα των ελλειψοειδών αρμονικών στην επιφάνεια δεδομένου ελλειψοειδούς

γ_n^m = σταθερές κανονικοποίησης των IE_n^m

u_{el}^- = ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς $\rho = a_1$

u_{el}^+ = ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς $\rho = a_1$

B_{el} = μαγνητική επαγωγή στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς $\rho = a_1$

d_{el} = διάνυσμα της πηγής στην έκφραση του B_{el}

Σύμβολα στο επίμηκες σφαιροειδές πρότυπο

$\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\phi}$ = σφαιροειδής ορθοκανονική βάση

$\mathbf{r} = \xi \hat{\xi} + \eta \hat{\eta} + \phi \hat{\phi}$ = σφαιροειδής αναπαράσταση διανύσματος

a_1, a_2 = ημιάξονες του επιμήκους σφαιροειδούς

c = ημιεστιακή απόσταση του επιμήκους σφαιροειδούς

$\tau = \cosh \xi$ = απλοποιημένη σφαιροειδής μεταβλητή

u_{sd}^- = ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό επιμήκους σφαιροειδούς

u_{sd}^+ = ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό επιμήκους σφαιροειδούς

B_{sd} = μαγνητική επαγωγή στο εξωτερικό επιμήκους σφαιροειδούς

d_{sd} = διάνυσμα της πηγής στην έκφραση του B_{sd}

Σύμβολα στο σφαιρικό πρότυπο

$\hat{\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ = σφαιρική ορθοκανονική βάση

$\mathbf{r} = r\hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ = σφαιρική αναπαράσταση διανύσματος

a = ακτίνα του σφαιρικού αγωγού

$\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon = (\theta_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ = έκκεντρη διεύθυνση

$P_n(x)$ = πολυώνυμο Legendre

$P_n^m(x)$ = συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους

$Y_n^m(\mathbf{r})$ = μιγαδικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$Y_n^{m,e}(\mathbf{r})$ = άρτιες επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$Y_n^{m,o}(\mathbf{r})$ = περιττές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

u_{sr}^- = ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό σφαιρικού αγωγού

u_{sr}^+ = ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό σφαιρικού αγωγού

$\mathbf{B}_{sr}$ = μαγνητική επαγωγή στο εξωτερικό σφαιρικού αγωγού

$\mathbf{d}_{sr}$ = διάνυσμα της πηγής στην έκφραση του $\mathbf{B}_{sr}$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Φυσικά φαινόμενα που σχετίζονται με τον Ηλεκτρισμό και το Μαγνητισμό είναι γνωστά από τα αρχαία χρόνια. Ωστόσο, μόνον λίγο περισσότερο από τα τελευταία 200 χρόνια ο Ηλεκτρομαγνητισμός συνδέθηκε με το ανθρώπινο σώμα, αρχής γενομένης με την ανακάλυψη, από τον Luigi Galvani το 1786, ηλεκτρικής επίδρασης στο πόδι ενός βατράχου. Από τότε, πολλά χρόνια εκτεταμένης έρευνας έχουν συνεισφέρει στην κατανόηση και χρησιμοποίηση των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων που συμβαίνουν μέσα και επάνω στο ανθρώπινο σώμα. Η βασική έρευνα σ' αυτή την περιοχή ανήκει στον κλάδο της Νευροφυσιολογίας.

Ο ηλεκτρισμός που παράγεται μέσα στο σώμα προέρχεται από, αλλά και ελέγχει με κάποιον τρόπο, τη λειτουργία των νευρώνων, των μυών και των οργάνων του σώματος [5]. Για παράδειγμα, οι τάσεις των μυών οφείλονται στην έλξη και άπωση ηλεκτρικών φορτίων, ενώ η λειτουργία του εγκεφάλου είναι κατ' εξοχήν ηλεκτρική, καθώς όλα τα νευρικά σήματα από και προς τον εγκέφαλο διαδίδονται μέσω της ροής μικρών, ηλεκτρικών ρευμάτων βιοχημικής προέλευσης. Τα μικροσκοπικά αυτά ρεύματα έχουν ως συνέπεια την παραγωγή ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου μέσα αλλά και έξω από το σώμα λόγω του συζευγμένου χαρακτήρα του Ηλεκτρομαγνητισμού σε ότι αφορά χρονικώς μεταβαλλόμενα φαινόμενα. Καθώς τα πεδία αυτά έχουν εξαιρετικά μικρή ένταση, είναι ανιχνεύσιμα από κατάλληλα ευαίσθητα όργανα, μόνον πολύ κοντά στην επιφάνεια του σώματος, δίνουν, ωστόσο, πολύ σημαντική πληροφορία για τη λειτουργία του σώματος στο εσωτερικό του.

Τα ηλεκτρικά και μαγνητικά αυτά φαινόμενα, καθώς η προέλευσή τους, όπως θα δούμε αναλυτικά στις παραγράφους **1.1** και **1.2** του πρώτου κεφαλαίου είναι βιοχημική, αποτελούν το αντικείμενο μελέτης του Βιοηλεκτρισμού και Βιομαγνητισμού, αντίστοιχα, ενώ η εξωτερική καταγραφή των αντιστοιχών πεδίων στο **Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (EEG)** και στο **Μαγνητοεγκεφαλογράφημα (MEG)** είναι ο στόχος των αντίστοιχων μεθόδων **Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας** και της **Μαγνητοεγκεφαλογραφίας**.

Τα δεδομένα που λαμβάνονται από τις καταγραφές αυτές αναλύονται, με σκοπό τον προσδιορισμό της πηγής, η οποία παρήγαγε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που καταγράφηκαν. Η επεξεργασία των δεδομένων προς αυτήν την κατεύθυνση αποτελεί τα λεγόμενα **αντίστροφα EEG και MEG προβλήματα**.

Στην παρούσα διατριβή σκοπός μας είναι η μελέτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που οφείλονται στη λειτουργία δεδομένης πηγής εντός του εγκεφάλου, δηλαδή η αντιμετώπιση των λεγομένων **ευθέων EEG και MEG προβλημάτων**.

Τόσο το ευθύ όσο και το αντίστροφο EEG και MEG πρόβλημα έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης ερευνητών διαφόρων ειδικοτήτων, ήδη από τις δεκαετίες του 1950 και του 1960, αναζητώντας τρόπους υπολογισμού του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που παράγουν στο εξωτερικό του εγκεφάλου δεδομένες πηγές που βρίσκονται στο εσωτερικό του, είτε τρόπους προσδιορισμού των πηγών από μετρήσεις των πεδίων αυτών εξωτερικά του εγκεφάλου. Η συνεισφορά ερευνητών από την ειδικότητα των Μαθηματικών, των Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, των Φυσικών, της Πληροφορικής και φυσικά της Ιατρικής, παρουσιάζεται στην εξαιρετική ανασκόπηση, της Βιομαγνητικής κυρίως έρευνας, από τον Härmäläinen και τους συνεργάτες του [25].

Προκειμένου να μελετηθούν τα προβλήματα αυτά, ορισμένες παραδοχές έπρεπε να γίνουν αποδεκτές, αναφορικά τόσο με τον αγωγό που χρησιμοποιείται ως πρότυπο για τον αγωγίμο εγκέφαλο όσο και με τις πηγές των πεδίων. Έτσι, η χρήση της διπολικής πηγής αποτέλεσε, όπως θα δούμε στο πρώτο κεφάλαιο, το πιο δημοφιλές πρότυπο, ενώ πιο σύγχρονες μελέτες θεωρούν για τις πηγές ένα πολυπολικό ανάπτυγμα ως το πλέον ρεαλιστικό.

Όσον αφορά τον αγωγό, που προτυποποιεί τον ανθρώπινο εγκέφαλο, στην πιο γενική θεώρησή του αποτελεί ένα κατά τμήματα ομογενές, γραμμικό υλικό, του οποίου η

στρωματοποιημένη κατανομή σε στοιβάδες διαφορετικής αγωγιμότητας παρέχει τη δυνατότητα διερεύνησης με αναλυτικές μεθόδους. Απ' την άλλη πλευρά, το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο πρότυπο θεωρεί τον εγκέφαλο ως κλειστό πεπερασμένο ομογενή αγωγό, που χαρακτηρίζεται από σταθερή αγωγιμότητα και από μαγνητική διαπερατότητα που ταυτίζεται με τη μαγνητική διαπερατότητα του κενού, η οποία χαρακτηρίζει και τον περιβάλλοντα μη αγώγιμο χώρο. Τέλος, από πλευράς γεωμετρίας, τα πρότυπα που έχουν χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσουν τον ανθρώπινο εγκέφαλο, ώστε να επιτραπεί η αναλυτική επεξεργασία των EEG και MEG προβλημάτων, είναι το σφαιρικό και το σφαιροειδές πρότυπο, καθώς και αυτό που προκύπτει από μικρή διαταραχή του σφαιρικού. Ωστόσο, στατιστικά ανατομικά δεδομένα αποδίδουν, [46], στον εγκέφαλο τη γεωμετρία ενός ελλειψοειδούς με ημιάξονες, 9, 6.5 και 6 cm και προσανατολισμό του μεγίστου άξονα περί τις 20° από το οριζόντιο επίπεδο. Η ελλειψοειδής γεωμετρία είναι αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή για να προτυποποιήσει τον αγώγιμο εγκέφαλο, ενώ αναλυτική παρουσίαση και αιτιολόγηση των προτύπων που αφορούν την πηγή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου καθώς και τον αγωγό που την περιέχει γίνεται στην παράγραφο 1.4.

Από την άλλη πλευρά, το πραγματικό μέγεθος του εγκεφάλου και οι αποδεκτές τιμές για τις παραμέτρους που τον χαρακτηρίζουν, επιβάλλουν, από αρχής της Βιοηλεκτρομαγνητικής έρευνας, τη θεώρηση της σχεδόν στατικής προσέγγισης των εξισώσεων του Maxwell, που περιγράφουν τον Ηλεκτρομαγνητισμό, που σημαίνει πως η χρονική παράγωγος της μαγνητικής επαγωγής στο νόμο του Faraday, καθώς και η χρονική παράγωγος του πεδίου μετατόπισης στο νόμο των Ampere-Maxwell, θεωρούνται αμελητέες. Η παράγραφος 1.5 παρέχει μαθηματική τεκμηρίωση της θεώρησης αυτής για το σχεδόν στατικό χαρακτήρα των πεδίων που εμφανίζονται συγχρόνως με την ενεργοποίηση μιας περιοχής του εγκεφάλου.

Από την άποψη της θεωρητικής μελέτης, με αναλυτικές μεθόδους, τόσο του ευθέως όσο και του αντιστρόφου EEG και MEG προβλήματος, η μαθηματική τους θεμελίωση οφείλεται κατά κύριο λόγο στις εργασίες του Geselowitz από το 1967 ως το 1973 [20,21,22,23]. Στις εργασίες αυτές ο Geselowitz παρήγαγε ολοκληρωτικές εκφράσεις για το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού, τα οποία παράγονται από σημειακή διπολική πηγή στο εσωτερικό του. Οι εκφράσεις αυτές αναφέρονται στην πιο γενική περίπτωση του κατά τμήματα

ομογενούς αγωγού αυθαίρετης γεωμετρίας, αποτελώντας την αφετηρία για τον υπολογισμό των πεδίων με αριθμητικές μεθόδους. Οι αναπαραστάσεις του Geselowitz συνδέουν το εξωτερικά παραγόμενο πεδίο, αφ' ενός με την κύρια πηγή που το δημιουργήσε και αφ' ετέρου με την ισοδύναμη επιφανειακή κατανομή διπόλων με προσανατολισμό κάθετο στις διεπιφάνειες που χωρίζουν τις περιοχές διαφορετικής αγωγιμότητας. Η κύρια πηγή των πεδίων ανήκει σε μία από τις περιοχές αυτές και η ενεργοποίησή της ισοδυναμεί με την ταυτόχρονη ενεργοποίηση του περιβάλλοντος αγωγίμου υλικού, δημιουργώντας χωρικά ρεύματα σε κάθε περιοχή με μη μηδενική αγωγιμότητα που ανήκει στον αγωγό. Όπως έδειξε ο Geselowitz, η χρήση του διανυσματικού αναλλοίωτου της δυαδικής μορφής του θεωρήματος του Gauss καθώς και κατάλληλων διανυσματικών ταυτοτήτων, οδηγεί στην ισοδυναμία της συνεισφοράς, στο εκάστοτε πεδίο, των χωρικών ρευμάτων με τη συνεισφορά της επιφανειακής κατανομής διπόλων πάνω στις διεπιφάνειες οι οποίες αποτελούν το φορέα των ασυνεχειών της αγωγιμότητας του υπό μελέτη αγωγού.

Η εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss στις περιοχές που δεν περιέχουν την κύρια πηγή είναι άμεση, κάτι που δεν ισχύει για την περιοχή εκείνη που περιλαμβάνει στο εσωτερικό της την πηγή. Η πηγή αυτή απαιτεί προσεκτική ανάλυση, απομονώνοντας την ιδιομορφία της πηγής με μια σφαίρα οσοδήποτε μικρής ακτίνας, και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss στον υπόλοιπο αγωγίμο χώρο, που είναι πλέον ελεύθερος από πηγές. Η οριακή διαδικασία συρρίκνωσης της σφαίρας που περιβάλλει την ιδιομορφία καθώς και τεχνικές ομαλοποίησης, μέσω μικρής διαταραχής της θέσης της πηγής, έδειξε ότι η συνεισφορά στο μετρούμενο πεδίο της ροής μέσω της επιφάνειας της σφαίρας εξουδετερώνεται από τη συνεισφορά της σημειακής πηγής, αφήνοντας την ισοδυναμία μεταξύ των χωρικών ρευμάτων και της επιφανειακής κατανομής των διπόλων να ισχύει και για την ιδιόρρυθμη εκείνη περιοχή που περιλαμβάνει την πηγή. Η αυστηρή μαθηματική απόδειξη της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του Geselowitz για το μαγνητικό πεδίο, που συμπίπτει με την αντίστοιχη απόδειξη για το ηλεκτρικό δυναμικό, αποτελεί το περιεχόμενο της δημοσίευσης [13] στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής και περιγράφεται συνοπτικά στην παράγραφο 1.6 και αναλυτικά στο παράρτημα Δ.

Από την άλλη πλευρά, η έρευνα που έχει γίνει χρησιμοποιώντας απλά γεωμετρικά πρότυπα για τον αγωγό έχει αποδώσει σημαντικούς καρπούς με κρίσιμες συνέπειες καθώς και κλινικές εφαρμογές στην έρευνα του βιοηλεκτρομαγνητισμού.

Ειδικά, στο σφαιρικό πρότυπο ξεχωρίζει η εργασία του Sarvas το 1987 [45] όπου έδωσε σε κλειστή μορφή την πλήρη λύση για το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής στο εξωτερικό σφαιρικού ομογενούς αγωγού, ενώ αντίστοιχη μορφή για το ηλεκτρικό δυναμικό στο ίδιο μοντέλο δε μπορέσαμε να εντοπίσουμε στη γνωστή μας βιβλιογραφία. Στο σφαιροειδές μοντέλο ξεχωρίζουν η εργασία των Cuffin και Cohen το 1977 [6] για το μαγνητικό πεδίο και του J.C. de Munck το 1988 [41] για το ηλεκτρικό δυναμικό στην περίπτωση του κατά στοιβάδες διαφορετικής αγωγιμότητας ομογενούς αγωγού. Τέλος αναφέρουμε τις εργασίες των Nolte, Fieseler και Curio του 1997 [42] και του 2001 [43] για το πρότυπο του ελαφρώς διαταραγμένου σφαιρικού αγωγού, ενώ εκτενής ιστορική αναδρομή πάνω στις ερευνητικές προσπάθειες για την αντιμετώπιση των ευθέων EEG και MEG προβλημάτων από το 1947 ως σήμερα, περιλαμβάνεται στην παράγραφο 1.7.

Αναφορικά με το αντίστροφο MEG πρόβλημα, αξίζει να αναφέρουμε, παρ' όλο που δεν αφορά την ουσία της παρούσας διατριβής αλλά περισσότερο το μέλλον της, πως έχει αποδειχτεί ήδη από τον Helmholtz το 1853 ότι δεν έχει μοναδική λύση, που σημαίνει πως οι εξωτερικές μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου δεν καθορίζουν κατά μοναδικό τρόπο την πηγή η οποία το παρήγαγε. Ειδικά, οι Fokas, Gelfand και Kurylen το 1996 [19] απέδειξαν πως με δεδομένο το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό σφαιρικού αγωγού, το οποίο παράγεται από αυθαίρετη κατανομή ρεύματος στο εσωτερικό του, μόνον το σωληνοειδές τμήμα της εφαπτομενικής συνιστώσας της κατανομής της πηγής μπορεί να ανακατασκευαστεί. Αυτό συμβαίνει γιατί τόσο το ακτινικό κομμάτι όσο και το αστροβίλο τμήμα της εφαπτομενικής συνιστώσας είναι μαγνητικά σιωπηλό, δηλαδή δε συνεισφέρει στο εξωτερικά μετρούμενο μαγνητικό πεδίο με αποτέλεσμα να μην είναι ανιχνεύσιμο.

Ένας λόγος για την απουσία της ακτινικής τουλάχιστον συνιστώσας της κατανομής της πηγής από τη συνεισφορά στο μαγνητικό πεδίο συνδέεται με τη συμμετρία του σφαιρικού προτύπου που χρησιμοποιείται, αντιπροσωπεύοντας τον πλήρως ισότροπο χώρο. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιείται για τον αγωγίμο εγκέφαλο το ελλειψοειδές πρότυπο, το οποίο εισάγει στη μελέτη των προβλημάτων την πλήρη ανισοτροπία του τρισδιάστατου χώρου. Κατά συνέπεια απαιτείται η πολύ πιο πολύπλοκη θεωρία της φασματικής ανάλυσης του τελεστή του Laplace, που περιγράφει τα εν λόγω προβλήματα, στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων, σε αντιδιαστολή με το σφαιρικό σύστημα όπου οι συνήθεις σφαιρικές αρμονικές

συναρτήσεις παρέχουν αναπτύγματα της λύσεως των προβλημάτων που μελετούμε. Λεπτομερής περιγραφή του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων, των γεωμετρικών ιδιοτήτων καθώς και της θεωρίας των ελλειψοειδών αρμονικών περιλαμβάνεται στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας διατριβής.

Η μαθηματική τοποθέτηση του ευθέως EEG και MEG προβλήματος, που επιλύονται στη συνέχεια, γίνεται στην παράγραφο 1.6, η οποία περιλαμβάνει επίσης και τη μαθηματική απόδειξη του γεγονότος ότι το μαγνητικό πεδίο που μετράται εξωτερικά οποιουδήποτε αγωγού είναι της τάξεως του κύβου της αντίστροφης απόστασης. Αυτό, όπως αποδεικνύεται στην παράγραφο αυτή, οφείλεται στο ότι ο διπολικός όρος του αναπτύγματος του μαγνητικού πεδίου, ο οποίος οφείλεται στην κύρια πηγή, αναιρείται από τον αντίστοιχο όρο της ισοδύναμης επιφανειακής κατανομής επί του συνόρου του αγωγού, και η αναίρεση αυτή γίνεται σε κάθε αγωγό που έχει λείο και φραγμένο σύνορο και περικλείει την πηγή στο εσωτερικό του. Με άλλα λόγια το ενεργοποιημένο αγώγιμο περιβάλλον της πηγής “κρύβει” κατά κάποιον τρόπο την πηγή κατά έναν όρο του πολυπολικού του αναπτύγματος, κάνοντας το μαγνητικό πεδίο ασθενέστερο στο εξωτερικό του αγωγού.

Η επίλυση των ευθέων EEG και MEG προβλημάτων για την περίπτωση του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού γίνεται στο τρίτο κεφάλαιο. Το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του αγωγού παρέχεται σε τρεις μορφές, που η κάθε μία εξυπηρετεί με διαφορετικό τρόπο την παρούσα διατριβή. Έτσι, το εσωτερικό δυναμικό δίνεται ως πλήρες ανάπτυγμα ελλειψοειδών αρμονικών και σε αυτή τη μορφή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του εξωτερικού δυναμικού καθώς και του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του αγωγού. Οι πρώτοι όροι του αναπτύγματος δίνονται επίσης συναρτήσει Καρτεσιανών συντεταγμένων και ελλειπτικών ολοκληρωμάτων που παρέχουν το εσωτερικό δυναμικό σε μορφή κατανοητή και προσιτή στην αριθμητική επεξεργασία. Τέλος, η τανυστική μορφή των πρώτων όρων του αναπτύγματος προσφέρει τη δυνατότητα ανάδειξης της εξάρτησης του δυναμικού από τη φυσική και τη γεωμετρία, διευκολύνοντας την άντληση συμπερασμάτων από το αποτέλεσμα. Έτσι, το ανάπτυγμα του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού εμπεριέχει μια αυθαίρετη σταθερά, η οποία αντιστοιχεί στη μέτρηση του δυναμικού ως προς ένα αυθαίρετο σημείο αναφοράς κατά τη διαδικασία λήψης του EEG. Επιπλέον ο πρώτος όρος του αναπτύγματος, μετά από τη σταθερά, εμπεριέχει την προβολή της ροπής της πηγής στη διεύθυνση μέτρησης, ενώ η θέση της πηγής εμφανίζεται στους όρους του

αναπτύγματος που φέρουν τις ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δευτέρου. Ο γεωμετρικός τελεστής που ρυθμίζει τη βαρύτητα κάθε όρου του αναπτύγματος εξαρτάται από τους ημιάξονες του ελλειψοειδούς αγωγού, μεταφέροντας στο δυναμικό την εξάρτηση από την ανισοτροπία του συνόρου.

Αντίστοιχες μορφές παρέχονται για το ηλεκτρικό δυναμικό και για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού, ο επίπονος υπολογισμός του οποίου, με τη χρήση τανυστικού κυρίως λογισμού, περιλαμβάνεται στην παράγραφο **3.4**. Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύεται πώς ο τετραπολικός όρος του αναπτύγματος του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου είναι ευθέως ανάλογος με το διάνυσμα της πηγής, το οποίο αποτελεί εξωτερικό γινόμενο της θέσης και της ροπής της, τροποποιημένης κατάλληλα από την ανισότροπη γεωμετρία στην οποία αναφέρεται. Στο διάνυσμα αυτό δρα η γεωμετρία εκ νέου ως τελεστής, προβάλλοντάς το στον εξωτερικό του ελλειψοειδούς χώρο και δίνοντας τον τετραπολικό όρο σε μορφή συμπαγή αλλά αναγνώσιμη και συγκρίσιμη με την αντίστοιχη μορφή στο σφαιροειδές και το σφαιρικό πρότυπο.

Η αναγωγή των παραπάνω αποτελεσμάτων στο πρότυπο του επιμήκους και του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς αποτελεί το περιεχόμενο του τέταρτου κεφαλαίου. Εισαγωγικά, στην παράγραφο **4.1**, δίνεται μια περιγραφή της αναγωγικής διαδικασίας του ελλειψοειδούς συστήματος στο επίμηκες και στο πεπλατυσμένο σφαιροειδές και τέλος στο σφαιρικό σύστημα, στην οποία εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο εμφανίζονται απροσδιόριστες μορφές κατά την πορεία του διαδοχικού εκφυλισμού. Στην παράγραφο αυτή περιγράφεται πώς η μείωση του βαθμού ανισοτροπίας του συστήματος συντεταγμένων που επιλέγεται, αντιστοιχεί σε μείωση της διάστασης του αντίστοιχου εστιακού κέντρου, από το οποίο το σύστημα αναβλύζει, με αποτέλεσμα την απειρία των πιθανών προτύπων που είναι δυνατόν, στο σφαιρικό όριο, να οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα. Οι απροσδιόριστες αυτές μορφές αντιμετωπίζονται συχνά με πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς, οι οποίοι εξουδετερώνουν τους παράγοντες που τις δημιουργούν πριν απαιτηθεί η οριακή διαδικασία. Οι ειδικοί αυτοί χειρισμοί περιγράφονται κατά την εξέλιξη του τέταρτου και του πέμπτου κεφαλαίου, κατά τον εκφυλισμό των αντίστοιχων γεωμετρικών προτύπων. Επιπλέον η αναγωγή του ελλειψοειδούς τόσο στο σφαιροειδές όσο και στο σφαιρικό πρότυπο απαιτεί την εισαγωγή ενός νέου μετασχηματισμού που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του ελλειψοειδούς ένα σημείο της μοναδιαίας σφαίρας που ορίζεται από τη λεγόμενη

αντίστοιχη έκκεντρη διεύθυνση. Ο τελεστής του μετασχηματισμού ονομάζεται έκκεντρος τελεστής και, όπως αποδεικνύεται στο έβδομο κεφάλαιο, διαδοχική εφαρμογή του συνδέει ένα διάνυσμα θέσης της επιφάνειας του ελλειψοειδούς με την αντίστοιχη, κάθετη σε αυτήν, διεύθυνση. Η ιδιότητα αυτή του έκκεντρου τελεστή επιτρέπει τον προσδιορισμό των σιωπηλών πηγών στο ελλειψοειδές αλλά και στο σφαιροειδές πρότυπο, όπως περιγράφεται στο έβδομο κεφάλαιο.

Η αναγωγή του ελλειψοειδούς στον επιμήκη και στον πεπλατυσμένο σφαιροειδή αγωγό έδωσε τους πρώτους όρους των αναπτυγμάτων των αντίστοιχων αποτελεσμάτων συναρτήσει Καρτεσιανών συντεταγμένων, σε αντιδιαστολή με τα υπάρχοντα αποτελέσματα τα οποία, όσον αφορά το ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό μη ομογενούς σφαιροειδούς αγωγού [41] που ο φορέας της κατανομής της αγωγιμότητας αποτελείται από στοιβάδες ομοεστιακών σφαιροειδών σταθερής αγωγιμότητας, αυτό δίνεται ως ανάπτυγμα σε σφαιροειδείς αρμονικές, όπως δίνεται και το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό ομογενούς σφαιροειδούς [6]. Τα αποτελέσματα που παρέχονται στο κεφάλαιο 4 προβάλλουν τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο η συμμετρία, που μεταφέρει στο πρότυπο ο άξονας περιστροφής, επηρεάζει τις εκφράσεις των πεδίων. Ο δυαδικός τελεστής που μεταφέρει την επίδραση της γεωμετρίας στο ηλεκτρικό δυναμικό, δρα στη δυνάδα των διανυσμάτων της ηλεκτρικής ροπής και της θέσης της πηγής αφ' ενός καθώς και της ροπής και της θέσης όπου μετράται το πεδίο, αφ' ετέρου, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του αγωγού.

Είναι ενδιαφέρον ότι, αναφορικά με το εξωτερικό δυναμικό, η θέση της πηγής εισάγεται σε όρους τάξεως μεγαλύτερης ή ίσης του κύβου της αντίστροφης απόστασης, ενώ στον όρο που δίνει την τάξη του αντίστοιχου τετραγώνου, η πηγή εισέρχεται μόνον μέσω της ροπής της. Από την άλλη πλευρά, ο γεωμετρικός τελεστής που δρα πάνω στην πηγή έχει την ίδια δομή τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, με βαρύτητες οι οποίες εκφράζουν την εξάρτηση από τη θέση στην οποία το δυναμικό μετράται. Από την άλλη πλευρά, η έκφραση που λαμβάνεται για το μαγνητικό πεδίο δηλώνει τη διατήρηση της ισότροπης μορφής στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής, όπου το διάνυσμα της πηγής εκφράζεται ως το εξωτερικό γινόμενο της ροπής και της θέσης της, χωρίς τροποποίηση από τη γεωμετρία, ενώ στην προβολή στο κάθετο επίπεδο, η πηγή εισέρχεται τροποποιημένη κατάλληλα. Έτσι, η έκφραση του τετραπολικού όρου του μαγνητικού πεδίου που

παράγεται στην παράγραφο 4.5 για το εξωτερικό του επιμήκους σφαιροειδούς, προβάλλει τη μερική ανισοτροπία την οποία, μέσω της ανισότητας των αξόνων του, εισάγει το σφαιροειδές στη μορφή του πεδίου καθώς και τη συμμετοχή της ισοτροπίας η οποία διατηρείται μέσω του άξονα περιστροφής.

Η συνεισφορά του πέμπτου κεφαλαίου αφορά αποτελέσματα σχετικά με τον ομογενή σφαιρικό αγωγό. Ειδικά, παράγονται τα αναπτύγματα σε σφαιρικές αρμονικές του εσωτερικού και του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού, τα οποία αν και θεμελιώδη, δεν μπορέσαμε να εντοπίσουμε στη γνωστή μας βιβλιογραφία. Ανάλυση παρόμοια με του τρίτου κεφαλαίου, απέδωσε εκφράσεις των πρώτων όρων των αναπτυγμάτων του ηλεκτρικού δυναμικού και του μαγνητικού πεδίου σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, στις οποίες, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, ανάγονται οι αντίστοιχες εκφράσεις που αναφέρονται στο ελλειψοειδές και το επίμηκες σφαιροειδές πρότυπο. Κατά τη διαδικασία της αναγωγής, αποδεικνύονται χρήσιμες ταυτότητες μεταξύ των παραμέτρων του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων, οι οποίες αφορούν την άρση των εμφανιζόμενων απροσδιορίστων μορφών, η χρησιμότητά τους δε, ξεφεύγει από το πλαίσιο της παρούσας διατριβής, καθώς εφαρμόζονται στην αναγωγή οποιουδήποτε προβλήματος από την ελλειψοειδή στη σφαιρική γεωμετρία.

Στο ίδιο κεφάλαιο παρέχεται ασυμπτωτική ανάλυση της κλειστής μορφής που έδωσε ο Sarvas για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού [45], με σκοπό την ταύτιση του τετραπολικού όρου των αναπτυγμάτων τόσο της πλήρους λύσεως του Sarvas, όσο και της λύσεως που προέκυψε από τη φασματική ανάλυση του όλου προβλήματος. Το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα απέδωσε τον τετραπολικό καθώς και τον οκταπολικό όρο του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου για το σφαιρικό αγωγό, ενώ στον τετραπολικό όρο συγκλίνουν τα ιδιοαναπτύγματα του αντίστοιχου πεδίου τόσο από το ελλειψοειδές όσο και από το επίμηκες σφαιροειδές πρότυπο. Με την έννοια αυτή, το πέμπτο κεφάλαιο είναι αυτό που περιέχει τους περισσότερους, και πιθανώς τους πιο δύσκολους, υπολογισμούς, είναι όμως και αυτό που επικυρώνει την ισχύ των αποτελεσμάτων ολόκληρης της διατριβής.

Το έκτο κεφάλαιο επιστρέφει στη μελέτη του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων, με σκοπό να αποκομίσει νέα στοιχεία τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην επεξεργασία των παραγομένων από τη διατριβή αποτελεσμάτων. Έτσι, όπως αναφέραμε και παραπάνω, περιγράφεται αναλυτικά ο έκκεντρος τελεστής και η φυσική εμφάνιση της έκκεντρης διεύθυνσης ως συνέπεια της δράσης του πάνω σε μία

διεύθυνση του ελλειψοειδούς καθώς και η γεωμετρική εικόνα της έκκεντρης διεύθυνσης σε σχέση με την αντίστοιχη διεύθυνση του ελλειψοειδούς. Αποδεικνύεται η ταύτιση των δύο αυτών διευθύνσεων όταν το ελλειψοειδές ανάγεται σε σφαίρα, οπότε ο έκκεντρος τελεστής εκφυλίζεται σε πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, ενώ φαίνεται η συμβολή του στην απεικόνιση της διεύθυνσης που ορίζει ένα σημείο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς καθώς και της αντίστοιχης κάθετης σε αυτήν διεύθυνσης, σε ένα σημείο της μοναδιαίας σφαίρας, με τη βοήθεια και της έκκεντρης διεύθυνσης. Η σύνδεση του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων με το σφαιρικό επεκτείνεται, μέσω του ορισμού ενός σφαιρικού συστήματος με πολικό άξονα τον x_1 και αζιμούθιο που ξεκινά από τον x_2 -άξονα, με την αποκόμιση σχέσεων που εκφράζουν όλες τις μέχρι σήμερα γνωστές ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις ως γραμμικό συνδυασμό σφαιρικών αρμονικών αντίστοιχου βαθμού. Τέλος, το έκτο κεφάλαιο περιλαμβάνει μελέτη των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της τομής των δύο συντεταγμένων επιφανειών του ελλειψοειδούς συστήματος, του μονόχωνου και του δίχωνου υπερβολοειδούς, καθώς αυτή αποτελεί το αντίστοιχο της ακτινικής διεύθυνσης στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού. Με πρόθεση δε, να μεταφέρουμε τεχνικές που στο σφαιρικό πρότυπο απέδωσαν σημαντικά αποτελέσματα, όπως η τεχνική που χρησιμοποίησε ο Sarvas [45] για την απόκτηση της κλειστής μορφής του πλήρους μαγνητικού πεδίου, η διεξοδική μελέτη της αντίστοιχης διεύθυνσης στο ελλειψοειδές σύστημα, που είναι η διεύθυνση της συγκεκριμένης τομής, κρίνεται αναγκαία και φυσικά υπάρχουν πολλά να γίνουν σε αυτή την περιοχή.

Το έβδομο κεφάλαιο περιλαμβάνει τη συλλογή των βασικών αποτελεσμάτων της παρούσας διατριβής καθώς και μια εκτενή συζήτηση πάνω στα αποτελέσματα αυτά, μερικά από τα συμπεράσματα της οποίας έχουμε ήδη αναφέρει στο πλαίσιο της παρουσίασής τους στην εισαγωγή. Το σημαντικό καινούριο αποτέλεσμα που αποκομίζεται από το έβδομο κεφάλαιο είναι ο προσδιορισμός των σιωπηλών πηγών στο ελλειψοειδές και στο σφαιροειδές πρότυπο, καθώς και η προβολή κάτω απ' αυτό το πρίσμα των σιωπηλών πηγών του σφαιρικού ως εκφυλισμένη περίπτωση των προηγούμενων δύο στο όριο όπου οι ημιάξονές τους συμπίπτουν. Ειδικά, αποδεικνύεται ότι στο ελλειψοειδές και στο σφαιροειδές πρότυπο σιωπηλή είναι εκείνη η διπολική πηγή της οποίας η ροπή έχει τη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς η οποία αντιστοιχεί στη διεύθυνση της θέσης της εντός του αγωγού. Αντίστοιχα, σιωπηλές πηγές στο σφαιρικό πρότυπο είναι εκείνες των

οποίων η ροπή έχει τη διεύθυνση της ακτίνας που ορίζει η θέση της μέσα στον αγωγό και η οποία προφανώς ταυτίζεται με την αντίστοιχη κάθετη στη σφαιρική επιφάνεια. Τα συμπεράσματα αυτά αποδεικνύονται και προεκτείνονται στο μέλλον με την πρόθεση να ακουμπήσουν το αντίστροφο MEG πρόβλημα, μέσω μιας θεώρησης αντίστοιχης, πιθανώς, με αυτήν των Fokas, Gelfand και Kurylev[19], για το σφαιρικό αγωγό. Προς αυτή την κατεύθυνση προεκτείνονται και τα προβλήματα που αφορούν το ηλεκτρικό δυναμικό, καθώς η αντιμετώπιση του αντιστρόφου EEG προβλήματος προϋποθέτει τη λύση του αντίστοιχου ευθέως προβλήματος, λαμβανομένης υπόψη μιας δομής ανομοιογένειας για τον αγωγό, στρωματοποιημένης κατά στοιβάδες, καθώς το πεδίο δυναμικού επηρεάζεται σημαντικά από τη δομή του φορέα της αγωγιμότητας. Η επιπλέον πληροφορία που αναμένεται να αποκομισθεί και από την πλήρη αντιμετώπιση και του EEG προβλήματος στο πρότυπο του, αποτελούμενου από ομοεστιακά ελλειψοειδή διαφορετικής αγωγιμότητας, αγωγού μαζί με τη γνώση την οποία μας προσφέρει η εμβάθυνση στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων, θεωρούμε πως θα συνεισφέρει σημαντικά στον εντοπισμό της θέσης, του προσανατολισμού και της έντασης της πηγής, από τη γνώση του μαγνητικού πεδίου και του ηλεκτρικού δυναμικού στο εξωτερικό του αγωγίμου μέσου.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με την παράθεση στα παραρτήματα Α, Β, Γ και Δ απαραίτητων για την παρακολούθησή της, θεωρητικών “παρενθέσεων” που αφορούν την επίλυση τριτοβάθμιων πολυωνυμικών εξισώσεων από τη θεωρία του Cardano, συνοπτική παρουσίαση των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, έναν πλήρη κατάλογο σχέσεων μεταξύ των ελλειψοειδών αρμονικών, που είναι αναγκαίες για το χειρισμό τους στο πλαίσιο της εργασίας αυτής, καθώς και την αυστηρή μαθηματική απόδειξη της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του Geselowitz που αναφέραμε παραπάνω και την οποία λόγω της εξειδίκευσης και της τεχνικής πολυπλοκότητάς της, την παραθέτουμε χωριστά στο παράρτημα Δ, ώστε να μη διακοπεί η συνέχεια της παρουσίασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

1.1 Ο ανθρώπινος εγκέφαλος.

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι η πιο πολύπλοκη “γνωστή” οργανωμένη δομή, ένας κόσμος που αποτελείται από νευρικά κύτταρα, οργανικές δομές και χημικές ουσίες και στον οποίο εγκαθιδρύονται σκέψεις και συναισθήματα. Με βάση το νου που συνίσταται από, αλλά και δημιουργεί σ’ ένα βαθμό, τις σκέψεις αυτές και επηρεάζεται από τα συνυπάρχοντα συναισθήματα, ο άνθρωπος επιχειρεί να γνωρίσει τη δομή και τη λειτουργία του ίδιου του οργάνου με το οποίο ο νους του εκφράζεται. Το αυτοπαθές του εγχειρήματος αυτού, επιβάλλει να είναι δυνατή οριακά μόνον η πλήρης γνώση της δομής και της λειτουργίας του εγκεφάλου, απαιτεί δε την εμβριθή, πλατιά ως προς τις προσεγγίσεις της και διαρκή διερεύνησή του.

Ο βασικός ρόλος του εγκεφάλου στον οργανισμό είναι να λαμβάνει σήματα, τα οποία μεταφέρουν πληροφορίες από το εσωτερικό και το εξωτερικό του σώματος, να τις επεξεργάζεται και, με βάση αυτές, να δίνει την, κατά το δυνατό, πλέον κατάλληλη απόκριση. Οι πληροφορίες μεταφέρονται από και προς τον εγκέφαλο, ως ηλεκτρικά σήματα κατά μήκος ειδικευμένων κυττάρων, των νευρώνων. Υπάρχουν τουλάχιστον δέκα δισεκατομμύρια (10^{10}) νευρώνες στο πιο εξωτερικό μέρος του εγκέφαλου, στον

εγκεφαλικό φλοιό, ο οποίος είναι υπεύθυνος για τις ανώτερες νοητικές λειτουργίες [2,25]. Οι νευρώνες αυτοί συνδέονται μεταξύ τους μέσω συνάψεων, των οποίων το πλήθος είναι της τάξης των εκατό τρισεκατομμυρίων (10^{14}). Αποτελούν έτσι, τις λειτουργικές μονάδες ενός αχανούς νευρωνικού δικτύου το οποίο διεκπεραιώνει αποτελεσματικά την παράλληλη επεξεργασία εκατομμυρίων πληροφοριών την ίδια χρονική στιγμή, με εξαιρετική ταχύτητα.

Καθώς, λοιπόν, ο εγκέφαλος είναι ένα τόσο σημαντικό όργανο, στον ανθρώπινο οργανισμό, είναι ιδιαιτέρως προστατευμένο από τη φύση. Περιβάλλεται από τρεις μεμβράνες ή μήνιγγες, τη χοριοειδή, την αραχνοειδή και τη σκληρή, το προστατευτικό κρανίο και το δέρμα του κεφαλιού, όλα στοιβάδες διαφορετικής ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Επιπλέον, καθώς ο εγκέφαλος “πλέει” μέσα στο εγκεφαλονωτιαίο υγρό, που είναι ικανό να απορροφήσει τυχόν κραδασμούς, η πραγματικά αποτελεσματική του μάζα έχει βάρος 50 gr, στη συνολική μάζα βάρους 1500 gr, του εγκεφάλου [25]. Αυτό εξασφαλίζει τη μέγιστη δυνατή προστατευτική μόνωσή του από το εξωτερικό περιβάλλον, αλλά ταυτόχρονα υποχρεώνει και τον εγκεφαλικό φλοιό, πάχους 2-4 mm και συνολικής επιφάνειας 2500 cm², να αναδιπλώνεται με πολύ περίπλοκο τρόπο, ώστε να χωρέσει μέσα στη μικρή κρανιακή κοιλότητα που σχηματίζουν τα κρανιακά οστά. Κατά την αναδίπλωση αυτή, δημιουργούνται τρεις κύριες σχισμές, που υποδιαιρούν τον εγκεφαλικό ιστό σε οκτώ τμήματα. Ειδικά, η κεντρική επιμήκης σχισμή ορίζει τα δύο ημισφαίρια του εγκεφάλου, τα οποία συνδέονται στενά μεταξύ τους με το μεσολόβιο ή τυλώδες σώμα. Το καθένα απ’ αυτά με τη σειρά του διασχίζεται από δύο βαθιές αύλακες μία κάθετη, τη λεγόμενη κεντρική αύλακα, και μία οριζόντια, τη λεγόμενη πλάγια που το υποδιαιρούν σε τέσσερις κύριους λοβούς, το Μετωπιαίο, τον Ινιακό, το Βρεγματικό και τον Κροταφικό [15].

Το κεντρικό νευρικό σύστημα του ανθρώπινου οργανισμού συμπληρώνεται με το νωτιαίο μυελό και τα περιφερικά νεύρα, που υπηρετούν τη διακίνηση των σημάτων που μεταφέρουν πληροφορία, μεταξύ του εγκεφάλου και του υπολοίπου σώματος. Έτσι, τα νευρικά κύτταρα του εγκεφάλου στέλνουν τα μηνύματά τους, για παράδειγμα για την καθοδήγηση εκουσίων κινήσεων, μέσω απαγωγών νευρικών ινών, οι οποίες έχουν περισσότερο από ένα μέτρο μήκος και διαπερνούν τα οστά της σπονδυλικής στήλης, αποτελώντας δεμάτια στη λευκή ουσία του νωτιαίου μυελού. Φθάνοντας στα κύτταρα-αποδέκτες, τους κινητικούς νευρώνες, μεταδίδουν τις

εντολές τους στα περιφερικά νεύρα, τα οποία τις μεταβασική λειτουργική μονάδα στο δίκτυο πληροφοριών **κύτταρο**, ή **νευρώνας**. Ένας νευρώνας αποτελείται ονομάζεται **σώμα**, από κυτταρικές απολήξεις, τους **δενδρίτες**, της οποίας το μήκος μπορεί να φθάσει και μέχρι **νέυρωνα** (βλ. Σχ. 1.1). Το σώμα και οι денδρίτες του ως αποδέκτες ηλεκτρικών σημάτων σε κατάλληλα τους, τις **συνάψεις**, ενώ περιέχονται στη φαιά ουσία μέρος του εγκεφαλικού φλοιού, στην επιφάνεια του νευρικού κυττάρου και οι παράπλευροι κλάδοι του σώμα του νευρώνα προς γειτονικούς ή απομακρυσμένους. Καθώς οι άξονες των νευρώνων είναι ηλεκτρικά μονωμένοι με μία ουσία, τη μυελίνη, η οποία τους προσδίδει ιριδίζουσα όψη, αποτελούν τη λεγόμενη λευκή ουσία και καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο μέρος του εσωτερικού του εγκεφάλου.

Στην επόμενη παράγραφο, θα περιγράψουμε συνοπτικά, πώς δημιουργούνται και πώς διαβιβάζονται τα ηλεκτρικά σήματα κατά μήκος των νευρικών κυττάρων, με σκοπό να διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ηλεκτρικά συμβάντα σε τοπικές, κυτταρικού επιπέδου, δομές παράγουν μακροσκοπικές πηγές ηλεκτρικών ρευμάτων.

Σχήμα 1.2 Συναψή

1.2 Η λειτουργία του Νευρικού Κυττάρου.

Ένας νευρώνας, όπως και κάθε άλλο κύτταρο, περιβάλλεται από κυτταρική μεμβράνη, ένα διπλό στρώμα φωσφολιπιδίων πάχους 10 nm (10^{-8}m), η οποία απομονώνει το ενδοκυττάριο από το εξωκυττάριο υγρό, και διατηρεί τις συγκεντρώσεις των ιόντων που ενυπάρχουν σ' αυτά, σταθερές [2,15,25]. Κατ' αυτόν τον τρόπο, όταν ο νευρώνας δεν έχει ενεργοποιηθεί, η μεμβράνη διατηρεί τις

συγκεντρώσεις των ιόντων άνισες στους δύο χώρους (ενδο- και εξωκυττάριο), χρησιμοποιώντας κατάλληλα ορισμένα πρωτεϊνικά μόρια της δομής της (αντλίες ιόντων). Η κίνηση ιόντων κατά την κλίση συγκέντρωσής τους προκαλεί συσσώρευση αρνητικών φορτίων στο εσωτερικό της κυτταρικής μεμβράνης, έτσι ώστε η μεμβράνη να έχει μόνιμη ηλεκτρική πόλωση (της τάξης $-60-90$ mV αρνητικά στο εσωτερικό της).

Ειδικότερα, μεταξύ των ιόντων του ενδοκυττάρου και του εξωκυττάρου υγρού, αποφασιστικό ρόλο παίζουν τα ιόντα K^+ , Na^+ , Cl^- , εξ' αιτίας της υψηλής συγκέντρωσής τους αλλά και της υψηλής διαπερατότητας της κυτταρικής μεμβράνης σ' αυτά. Καθώς, λοιπόν, στο εσωτερικό υπερτερεί κατά πολύ η συγκέντρωση των ιόντων K^+ , ενώ στο εξωτερικό του πλεονάζουν τα ιόντα Na^+ και Cl^- , τα ιόντα αυτά τείνουν να κινηθούν όπως τους υπαγορεύει η χημική τους βαθμίδα. Η χαμηλή διαπερατότητα της μεμβράνης όμως σε Na^+ σε σχέση με το K^+ κύρια (και το Cl^- λιγότερο) έχει ως αποτέλεσμα την έξοδο ιόντων K^+ και τη δημιουργία διαφοράς δυναμικού και συνεπώς την εμφάνιση ηλεκτρικής βαθμίδας, η οποία εμποδίζει την περαιτέρω κίνηση των ιόντων. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι κινήσεις των ιόντων ισορροπούν σε μεμβρανικά δυναμικά που αντιστοιχούν στις συγκεντρώσεις τους εκατέρωθεν της μεμβράνης και της σχετικής διαπερατότητας της μεμβράνης σε αυτά. Όταν ένα εξωτερικό ερέθισμα φθάσει στη σύναψη ενός νευρικού κυττάρου με τη μορφή προσυναπτικής απελευθέρωσης και μετασυναπτικής δέσμευσης κατάλληλης ουσίας, του νευροδιαβιβαστή, όπως θα δούμε στη συνέχεια, το κύτταρο απαντά αλλάζοντας τη διαπερατότητα της μεμβράνης του. Για παράδειγμα μπορεί να αυξήσει τη διαπερατότητα σε ιόντα Na^+ , με αποτέλεσμα το φορτίο στο εσωτερικό να γίνει λιγότερο αρνητικό. Το δυναμικό στο εσωτερικό του κυττάρου αυξάνει και αν φθάσει σε μία κρίσιμη τιμή, στο λεγόμενο **δυναμικό πυροδότησης ή ουδό**, ξεκινάει ένα **δυναμικό ενεργείας**, το οποίο είναι το σήμα που θα μεταβιβαστεί κατά μήκος του συγκεκριμένου νευρώνα. Η μεμβράνη, σ' αυτή την περίπτωση, γίνεται ακόμη πιο διαπερατή στο Na^+ , σ' ένα θετικό φαύλο κύκλο εκπόλωσης και εισόδου Na^+ , μέχρι που η διαφορά δυναμικού να φθάσει στην τιμή όπου η χημική βαθμίδα του Na^+ να εξισορροπηθεί από την ηλεκτρική του βαθμίδα, περίπου στα 50 μ V. Τότε μειώνεται η κίνηση του Na^+ και η μεμβράνη γίνεται διαπερατή κυρίως για το K^+ , οπότε και αρχίζει η επαναπόλωση του νευρώνα, με την εκροή ιόντων K^+ . Το δυναμικό γίνεται

και πάλι αρνητικό, μέχρι την τιμή των -80mV , οπότε και τα ιόντα K^+ ισορροπούν. Στο σημείο αυτό, αρχίζει η τελική φάση, όπου η μεμβράνη αποκτά πάλι την αρχική διαπερατότητά της και η διαφορά δυναμικού της φθάνει στην τιμή του δυναμικού ηρεμίας, -65mV .

Αυτή η τοπική εκπόλωση της μεμβράνης και η επακόλουθη εισροή και εκροή ιόντων, οδηγεί στη δημιουργία ενός δυναμικού ενεργείας και, ενώ η συναπτική αλλαγή της διαπερατότητας της μεμβράνης, και επομένως η εκπόλωση είναι δυνατή μόνο στη μεμβράνη κατά μήκος των δενδριτών ή του σώματος του νευρώνα, η δημιουργία του δυναμικού ενεργείας, δηλαδή η διέγερση του νευρώνα, γίνεται στο αξονικό λοφίδιο (βλ. Σχ. 1.1) όπου και ο χαμηλότερος ουδός εκπόλωσης, και από εκεί ξεκινάει η μετάδοση του δυναμικού ενεργείας κατά μήκος του άξονα.

Με την έκλυση ενός δυναμικού ενεργείας, η εισροή των ιόντων Na^+ που οδήγησε στην αρχική εκπόλωση του κυττάρου επιβάλλει ένα ρεύμα κατιόντων που, λόγω της σχετικά μεγαλύτερης αντίστασης της μεμβράνης του άξονα, μπορεί να ταξιδέψει μόνο στο εσωτερικό του, εκπολώνοντας την αμέσως γειτονική περιοχή του. Καθώς η μεμβράνη στο νευράξονα διαθέτει τασεοελεγχόμενους διαύλους Na^+ μόνο σε ορισμένα σημεία του, τις **περισφιγξεις** (βλ. Σχ. 1.1), όταν η εκπόλωση εκεί φθάσει στην ουδό, ιόντα Na^+ από το εξωκυττάριο υγρό εισέρχονται από την πλησιέστερη περισφιγξη, ισοδυναμώντας με ρεύμα πυκνωτή που επιστρέφει από τον εξωκυττάριο χώρο, πυροδοτείται νέο δυναμικό ενεργείας το οποίο συντηρεί την εκπόλωση, ως την επόμενη περισφιγξη κ.ο.κ. Μ' αυτό τον τρόπο το δυναμικό ενεργείας, συνεχώς αναγεννώμενο, φθάνει στο άκρο του άξονα, την προσυναπτική απόληξη αναλλοίωτο, με τη μορφή ενός **κυρίου ρεύματος** ιόντων Na^+ . Το κύριο ρεύμα συνοδεύεται από επαγόμενη ροή ιόντων στον περιβάλλοντα αγωγίμο χώρο, τα λεγόμενα **χωρικά ρεύματα**, λόγω της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σ' αυτά μέσα από την πολύ λεπτή κυτταρική μεμβράνη. Η προσυναπτική απόληξη εμπεριέχει αποθηκευμένα μόρια της νευροδιαβιβαστικής ουσίας του συγκεκριμένου νευρώνα (βλ. Σχ. 1.2), τα οποία απελευθερώνονται μόλις ένα δυναμικό ενεργείας φθάσει εκεί. Ένα μέρος από τα μόρια αυτά δεσμεύεται από τους αντίστοιχους υποδοχείς στη μετασυναπτική μεμβράνη του επόμενου νευρικού κυττάρου. Ανάλογα με το είδος του υποδοχέα στον οποίο δεσμεύεται ο νευροδιαβιβαστής, η μεμβράνη του επόμενου κυττάρου γίνεται λιγότερο ή περισσότερο διαπερατή σε διάφορα ιόντα (Na^+ , K^+ , Ca^{++} , Cl^-).

Η αύξηση της διαπερατότητας σε Na^+ , οδηγεί σε εκπόλωση του νέου κυττάρου αυξάνοντας το δυναμικό της μεμβράνης προς την κατεύθυνση του δυναμικού πυροδότησης. Η άθροιση στο χώρο και το χρόνο τέτοιων **διεγερτικών μετασυναπτικών δυναμικών**, οδηγεί στο δυναμικό πυροδότησης και στην συνακόλουθη δημιουργία δυναμικού ενεργείας, με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω.

Η αύξηση της διαπερατότητας σε Cl^- ή K^+ , οδηγεί σε υπερπόλωση του κυττάρου και επομένως σε δυναμικό που απομακρύνει από την ουδό, το λεγόμενο **ανασταλτικό μετασυναπτικό δυναμικό**, το οποίο προφανώς δε δημιουργεί νέο δυναμικό ενεργείας, αλλά επιπλέον αναστέλλει τη διαδικασία εκπόλωσης και εμποδίζει τη μετάδοση του μηνύματος από ένα νευρώνα σε άλλο.

Όταν το ρεύμα των ιόντων, που ταξιδεύει κατά μήκος του μετασυναπτικού δενδρίτη, ενισχυόμενο ή αναστελλόμενο από την άθροιση με άλλα ρεύματα που δημιουργούνται στις επάλληλες συνάψεις, φθάσει στο αξονικό λοφίδιο, δημιουργώντας εκπολωτικό δυναμικό ικανό να πυροδοτήσει νέο δυναμικό ενεργείας, η μετάδοση του σήματος διέγερσης έχει επιτευχθεί. Φυσικά εξίσου σημαντική είναι και η συναπτική αναστολή, καθ' όσον επηρεάζει αρνητικά τη μετάδοση άλλων μηνυμάτων.

Η ενεργοποίηση λοιπόν ενός νευρώνα ισοδυναμεί με τη ροή ιόντων αφ' ενός στους δενδρίτες του και αφ' ετέρου στον άξονά του. Η ροή στους δενδρίτες, που συνδέεται με το μετασυναπτικό δυναμικό, έχει μεγαλύτερη χρονική διάρκεια (της τάξεως των δεκάδων ή εκατοντάδων msec) από τη ροή που συνδέεται με το δυναμικό ενεργείας στον άξονα του νευρώνα (1-2 msec) [25]. Επιπλέον, αν η κίνηση των ιόντων Na^+ σε ένα δενδρίτη ισοδυναμεί με τη ροή ενός διπόλου κατά μήκος του, τότε η κίνησή τους μέσα στον άξονα ισοδυναμεί με τη ροή ενός τετραπόλου, καθώς σε κάθε διηγεμένη εσωτερική περιοχή, η αντίστοιχη εξωτερική περιοχή έλκει ιόντα του αντίθετου φορτίου, λόγω του μικρού πάχους της μεμβράνης του νευροάξονα. Δεδομένου, λοιπόν, ότι το πεδίο του διπόλου είναι της τάξεως του τετραγώνου της αντίστροφης απόστασης, ενώ το πεδίο του τετραπόλου φθίνει όπως ο κύβος της, το ρεύμα στο δενδρίτη προκαλεί ισχυρότερο πεδίο από το ρεύμα στον άξονα. Επιπλέον, τα συναπτικά ρεύματα στους δενδρίτες έχουν μεγαλύτερες δυνατότητες συγχρονισμού στο χώρο και στο χρόνο, για λόγους τόσο φυσιολογίας, όσο και δομής, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στους πυραμιδικούς νευρώνες, οι οποίοι έχουν κορυφαίους

δενδρίτες παράλληλα διευθετημένους, ενώ η διεύθυνση των αξόνων τους μπορεί να ποικίλει. Έτσι, ως κύρια πηγή του μετρούμενου εξωτερικά ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, θεωρείται το ρεύμα των ιόντων που διαρρέουν τους δενδρίτες, ενώ η επαγόμενη ροή των ιόντων που υπάρχουν στον εξωκυττάριο χώρο θεωρείται ως χωρικό ρεύμα αγωγιμότητας. Συγκεκριμένα, το ενδοκυττάριο σκέλος του ρεύματος αποτελεί την κύρια πηγή του μαγνητοεγκεφαλογραφήματος και το εξωκυττάριο του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος.

1.3 Βασικές αρχές της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας.

Η συναπτική επίδραση σε μια περιοχή του εγκεφάλου ισοδυναμεί με την ενεργοποίηση μιας κύριας πηγής ρεύματος, η οποία όπως είδαμε, προέρχεται από κίνηση (είσοδο ή έξοδο) ιόντων δια μέσω μεμβρανικών διαύλων στις συνάψεις η οποία επάγει αντίστοιχη μετακίνηση ιόντων μέσα στους εμπλεκόμενους νευρώνες, και με την επακόλουθη παθητική εμφάνιση χωρικών ρευμάτων στον περιβάλλοντα του νευρώνα χώρο. Η κίνηση των ιόντων στον εσωτερικό και η επαγόμενη κίνηση στον εξωτερικό του νευρώνα χώρο, συμπληρώνουν ένα βρόχο ιοντικής ροής εξασφαλίζοντας έτσι πως δεν υπάρχει σε κανένα σημείο συσσώρευση φορτίου, με αποτέλεσμα τοπικά η μέση πυκνότητα φορτίου να είναι μηδενική.

Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, που παράγεται από το κύριο και το επαγόμενο χωρικό ρεύμα μαζί, μπορεί να καταγραφεί με τις μη επεμβατικές μεθόδους της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και της Μαγνητοεγκεφαλογραφίας, ενώ τα αποτελέσματα της καταγραφής αποτελούν το λεγόμενο **Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (EEG)** και **Μαγνητοεγκεφαλογράφημα (MEG)**. Για ένα καταγράψιμο εξωτερικά ηλεκτρο-μαγνητικό σήμα, είναι απαραίτητη η συγχρονισμένη λειτουργία χιλιάδων γειτονικών νευρώνων, που καταλαμβάνουν έκταση μερικών τετραγωνικών χιλιοστών εγκεφαλικού φλοιού [25].

Σ' ένα EEG καταγράφονται ως ηλεκτρικά δυναμικά τα σήματα που λαμβάνουν ηλεκτρόδια, τοποθετημένα σε ειδικά επιλεγμένα σημεία στην επιφάνεια του κεφαλιού. Τα δυναμικά είναι της τάξεως των 50μV, γεγονός που δυσχεραίνει τη καταγραφή τους, καθώς τα αναγκαστικά συν-καταγραφόμενα εξωτερικά ηλεκτρικά σήματα, είτε σήματα προερχόμενα από μυϊκή σύσπαση, μπορούν να οδηγήσουν σε παρερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Απ' την άλλη μεριά, το πολύ ασθενές μαγνητικό πεδίο, της τάξεως των 50–500 Ft, καταγράφεται στο MEG, με ένα SQUID μαγνητόμετρο (Superconducting Quantum Interference Device) [25]. Το SQUID μαγνητόμετρο μπορεί να θεωρηθεί ως μετασχηματιστής που μετατρέπει μικρές μεταβολές της μαγνητικής ροής των εφαπτομενικών συνιστωσών του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου, σε διαφορές δυναμικού, μέσω αισθητήρων τοποθετημένων σε ένα σφαιρικό κάλυμμα σε απόσταση 5–10 cm γύρω από το κεφάλι. Δεδομένου ότι το παραγόμενο μαγνητικό πεδίο είναι περίπου 10^9 φορές ασθενέστερο από το μαγνητικό πεδίο της γης, η καταγραφή του απαιτεί συνθήκες υψηλής μαγνητικής μόνωσης και εξαιρετική ευαισθησία.

Παρά τους περιορισμούς τους, οι δύο αυτές μέθοδοι μελέτης της ηλεκτρικής δραστηριότητας του εγκεφάλου, μέσω του EEG και MEG, έχουν δώσει αξιοσημείωτα αποτελέσματα και γίνονται ολοένα πιο σημαντικές καθώς πληθαίνουν οι κλινικές τους εφαρμογές. Αδιαμφισβήτητα πλεονεκτήματά τους αποτελούν η μη επεμβατικότητα, η κοινή προέλευση των σημάτων τους από την ίδια συγχρονισμένη νευρωνική δραστηριότητα εντός του εγκεφάλου και η δυνατότητά τους να παρακολουθούν τις ταχύτατες μεταβολές της ηλεκτρικής δραστηριότητας στο φλοιό, καθώς η χρονική ανάλυσή τους είναι της τάξης χιλιοστών του δευτερολέπτου [25]. Απ' την άλλη μεριά, τα δεδομένα των δύο μεθόδων λειτουργούν συμπληρωματικά, στη σύνθεση της εικόνας της εγκεφαλικής λειτουργίας καθώς, το EEG παρέχει μεγαλύτερη χωρική ακρίβεια για πηγές κοντά στην επιφάνεια του κρανίου, ενώ οι καταγραφές ενός MEG οφείλονται κυρίως σε πηγές που ανήκουν στον μακροσκοπικά ομογενή ενδοκρανιακό χώρο [25]. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι τα ηλεκτρικά δυναμικά, που μετρώνται στην επιφάνεια του κρανίου, επηρεάζονται σημαντικά από την ανομοιογένεια που δημιουργούν οι στοιβάδες διαφορετικής αγωγιμότητας στο εσωτερικό του κρανίου, με αποτέλεσμα οι μετρήσεις να οδηγούν, σε ακριβή προσδιορισμό κυρίως επιφανειακών πηγών. Απ' την άλλη μεριά, η συνεισφορά των, επιφανειακών ρευμάτων στις στοιβάδες αυτές, στο εξωτερικά μετρούμενο μαγνητικό πεδίο, είναι τόσο μικρή ώστε δε λαμβάνεται υπ' όψη στην ερμηνεία των δεδομένων του MEG, με αποτέλεσμα το MEG να οδηγεί σε ακριβή προσδιορισμό και όταν η πηγή του πεδίου είναι σε περισσότερο βάθος στο εσωτερικό του εγκεφάλου.

Εάν το κύριο ρεύμα και η κατανομή της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του περιβάλλοντος χώρου είναι γνωστή, το παραγόμενο πεδίο ηλεκτρικού δυναμικού και το μαγνητικό

πεδίο που καταγράφονται αντίστοιχα στο EEG και MEG, μπορούν να υπολογιστούν, επιλύοντας τις εξισώσεις του Maxwell. Αυτό το ευθύ πρόβλημα αποτελεί το κύριο αντικείμενο της παρούσης εργασίας.

Ωστόσο, είναι γνωστό πώς, υπό ορισμένες συνθήκες το χωρικό ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο ίσο και αντίθετο με αυτό του κυρίου ρεύματος, με αποτέλεσμα αυτές οι πηγές ηλεκτρικής δραστηριότητας να εμφανίζονται, εξωτερικά, μαγνητικά σιωπηλές. Για παράδειγμα, αν ο εγκέφαλος προσεγγιστεί με ένα σφαιρικό αγωγό, τότε μόνον τα ρεύματα που έχουν μη μηδενική εφαπτομενική του αγωγού συνιστώσα παράγουν μαγνητικό πεδίο, ενώ οι ακτινικές είναι **μαγνητικά σιωπηλές πηγές** [25].

Αυτή είναι μία φυσική αιτία που στερεί τη μοναδικότητα της λύσης στο αντίστροφο EEG και MEG πρόβλημα, στην ερμηνεία δηλαδή των δεδομένων από τα EEG και MEG, προς την κατεύθυνση του εντοπισμού της θέσης, του προσανατολισμού και της έντασης της πηγής που προκάλεσε τα καταγραφέντα πεδία. Η μαθηματική απόδειξη της μη μοναδικότητας της λύσης αυτού του προβλήματος δόθηκε το 1853 από τον Hermann von Helmholtz [28].

Για την αναλυτική αντιμετώπιση των δύο αυτών βασικών προβλημάτων του EEG και του MEG, είναι αναγκαίες ορισμένες παραδοχές καθώς και η υιοθέτηση συγκεκριμένων προτύπων που αφορούν τις πηγές της ηλεκτρικής δραστηριότητας, τη γεωμετρία που προσεγγίζει βέλτιστα τον εγκέφαλο και τις φυσικές παραμέτρους που τον χαρακτηρίζουν. Αλλά σ' αυτά θ' αναφερθούμε στις επόμενες παραγράφους.

1.4 Οι πηγές, ο αγωγός και η προτυποποίησή τους.

Ό,τι ακολουθεί στη συνέχεια της εργασίας μας, ισχύει κάτω από ορισμένες παραδοχές, που έχουν να κάνουν με το φυσικό και γεωμετρικό πρότυπο που υιοθετούμε για τις βιοηλεκτρικές πηγές της υπό μελέτην ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας, καθώς και για τον αγωγό που αντιπροσωπεύει τον ενεργοποιημένο εγκέφαλο.

Θεωρώντας κατ' αρχήν τις πηγές, είδαμε στις παραγράφους **1.2** και **1.3** ότι ως κύρια πηγή των εξωτερικά μετρούμενων πεδίων θεωρείται το στοιχειώδες ρεύμα ιόντων που διαρρέει το εσωτερικό των δενδριτών, οι οποίοι ενεργοποιούνται συγχρόνως σε μια μικρή περιοχή του εγκεφαλικού φλοιού. Ας συμβολίσουμε με $\mathbf{J}^p(\mathbf{r})$ την

κατανομή της χωρικής πυκνότητας του κύριου ρεύματος και με $\mathbf{J}^v(\mathbf{r})$ την πυκνότητα του επαγόμενου χωρικού ρεύματος.

Όπως επίσης είδαμε στην παράγραφο 1.2, η κίνηση των ιόντων μέσα σε κάθε νευρώνα ισοδυναμεί με ροή διπόλων μέσα σ' αυτόν και, κατά συνέπεια, η κατανομή της πυκνότητας του κύριου ρεύματος μπορεί να θεωρηθεί ως ισοδύναμη με την αντίστοιχη κατανομή χωρικής πυκνότητας της διπολικής ροπής της πηγής (Plonsey, 1969) [37].

Απ' την άλλη πλευρά, δεδομένου ότι οποιαδήποτε κατανομή ρεύματος μπορεί να εκφραστεί ως σειρά πολυπόλων αυξανόμενης τάξεως (διπόλων, τετραπόλων, οκταπόλων κ.ο.κ.), με την προϋπόθεση ότι το εύρος της είναι μικρό σε σχέση με τις αποστάσεις που μελετώνται, κάθε εντοπισμένη πηγή κύριου ρεύματος γράφεται [35] ως

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0\delta(\mathbf{r}) + \mathbf{P}_1 \otimes \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} \mathbf{P}_2 : \otimes \otimes \delta(\mathbf{r}) + \dots \quad (1.1)$$

όπου ο n -τάξεως όρος αποτελείται από n εφαρμογές του τελεστή ∇ επί της γενικευμένης συνάρτησης δέλτα του Dirac, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \Phi(\mathbf{r}) \quad (1.2)$$

για κάθε συνεχή στο $\mathbf{r}$ συνάρτηση Φ .

Προφανώς,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (1.3)$$

Ακόμα, οι τελεστές $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots$ στην (1.1) είναι τανυστές τάξεως 1,2,3 αντίστοιχα, και ορίζουν τις ροπές n -τάξεως του ρεύματος $\mathbf{J}^p$ μέσω του τύπου

$$\mathbf{P}_n = \int_V \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.4)$$

όπου V είναι ο φορέας της συνάρτησης $\mathbf{J}^p$, δηλ. το τοπολογικό κάλυμμα του συνόλου στο οποίο η $\mathbf{J}^p$ δε μηδενίζεται. Για $n = 0$, η (1.4) δίνει τον όρο μηδενικής τάξεως, δηλαδή την ισοδύναμη του $\mathbf{J}^p$ σημειακή διπολική ροπή

$$\mathbf{P}_0 = \int_V \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (1.5)$$

Τότε η

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1.6)$$

αποτελεί την προσέγγιση της χωρικής πυκνότητας του κυρίου ρεύματος εντοπισμένου στη θέση $\mathbf{r}_0$, με το μονοπολικό όρο του πολυπολικού του αναπτύγματος (1.1) [35].

Στη μελέτη του Βιοηλεκτρομαγνητισμού και στις εφαρμογές των EEG και MEG, ένα ρεύμα διπόλων, εντοπισμένο στη θέση $\mathbf{r}_0$ του αγωγού V , που αντιπροσωπεύει τον εγκέφαλο, και με διπολική ροπή $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} \mathbf{P}_0 = \int_V \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) d\mathbf{v}(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

χρησιμοποιείται ως ισοδύναμη πηγή για το κύριο ρεύμα, [25] με την έννοια ότι και τα δύο εντοπίζονται στο ίδιο σημείο και παράγουν το ίδιο μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο. Τότε, η πυκνότητα του κυρίου ρεύματος, προτυποποιημένου με το παραπάνω ρεύμα διπόλων, δίνεται μέσω των (1.6) και (1.7), από την

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) \propto \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (1.8)$$

Ένα τυπικό ρεύμα διπόλου που δημιουργείται από τη συγχρονισμένη δραστηριότητα πιθανώς δεκάδων χιλιάδων νευρώνων είναι της τάξεως των 10^{-8} Am [25]. Ωστόσο, άλλα μοντέλα έχουν επίσης χρησιμοποιηθεί για το κύριο ρεύμα, κυρίως ως προς την προσέγγισή του μέσω της πολυπολικής θεώρησης. Εκτεταμένη ανασκόπηση των προσεγγίσεων που έχουν διερευνηθεί, αλλά και που είναι αντικείμενο τρέχουσας έρευνας, μπορεί κανείς να βρει στις αναφορές [19,42,43].

Απ' την άλλη μεριά, δεδομένου ότι η καταγραφή του παραγόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου γίνεται πάνω ή λίγο έξω από την επιφάνεια της κεφαλής, ως αγωγός πρέπει να θεωρηθεί ολόκληρο το κεφάλι, συμπεριλαμβανομένου του δέρματος, των κρανιακών οστών, των τριών μηνίγγων, του εγκεφαλονωτιαίου υγρού και τέλος του εγκεφαλικού ιστού. Όλες αυτές οι περιοχές χαρακτηρίζονται από διαφορετική ηλεκτρική αγωγιμότητα [37]. Επιπροσθέτως το κεφάλι βρίσκεται μέσα στον μη αγωγίμο αέρα ενώ στο εσωτερικό του εγκεφαλικού ιστού υπάρχουν ήδη ανισοτροπίες που δε λαμβάνονται υπ' όψη σε μακροσκοπική κλίμακα, όπως για παράδειγμα, το γεγονός ότι η λευκή ουσία στο εσωτερικό του εγκεφάλου είναι δέκα φορές πιο αγωγήμη κατά μήκος των νευροαξόνων σε σχέση με την κάθετη σ' αυτούς διεύθυνση [25].

Έτσι ένα ρεαλιστικό πρότυπο θα απαιτούσε από τον αγωγό να είναι κατά τμήματα μόνον ομογενής και ισότροπος ενώ το σχήμα του θα πρέπει να αντανakλά και τη

χωρική του ανισοτροπία. Ωστόσο, το σχετικά απλοποιημένο πρότυπο της ομογενούς σφαίρας ή των τριών ομόκεντρων σφαιρών διαφορετικής αγωγιμότητας και διαφορετικών ακτίνων, έχει δώσει αποτελέσματα που αντιστοιχούν, ικανοποιητικά στις πειραματικές μετρήσεις [6,37,45].

Στην παρούσα εργασία θα υιοθετήσουμε για τον υπό μελέτη αγωγό, το πρότυπο του ομογενούς πεπερασμένου κλειστού αγωγού σταθερής αγωγιμότητας σ , για την οποία δεχόμαστε την τιμή

$$\sigma = 0,3 \quad (\Omega \cdot m)^{-1} \quad (1.9)$$

που είναι μία τυπική τιμή της αγωγιμότητας του εγκεφαλικού ιστού [25].

Ο αγωγός χαρακτηρίζεται ακόμη, από ηλεκτρική επιδεκτικότητα [25]

$$\varepsilon = 10^5 \varepsilon_0 = \frac{10^{-4}}{36\pi} \quad F/m \quad (1.10)$$

και από μαγνητική διαπερατότητα μ [25]

$$\mu = \mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \quad H/m. \quad (1.11)$$

Στις (1.10) και (1.11), ε_0 και μ_0 είναι η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα. Ο χώρος που περιβάλλει τον αγωγό αντιπροσωπεύει τον ατμοσφαιρικό αέρα και θεωρείται μη αγωγίμος αλλά με μαγνητική διαπερατότητα που η τιμή της είναι ίση με μ_0 .

Από γεωμετρική σκοπιά, στατιστικά ανατομικά δεδομένα [46] έχουν οδηγήσει στην καθιέρωση για τον εγκέφαλο του ελλειψοειδούς προτύπου, με ημιάξονες 9, 6.5 και 6 cm και με κύριες τομές, που προσεγγίζουν σε κάποιο βαθμό, τις θέσεις όπου εντοπίζονται οι τρεις κύριες αύλακες που διασχίζουν τον ανθρώπινο εγκέφαλο. Ο προσανατολισμός του ελλειψοειδούς προτύπου ακολουθεί τον προσανατολισμό του εγκεφάλου, που βρίσκεται σε γωνία περί των 20° με το οριζόντιο επίπεδο. Δεδομένης της δυσκολίας στο χειρισμό της πλήρους ανισοτροπίας που παρέχει η ανισότιτα των τριών αξόνων, καθώς και της εγγενούς, όπως θα δούμε παρακάτω, δυσκολίας του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων, η βασική έρευνα έχει ως τώρα περιοριστεί στα απλούστερα γεωμετρικά πρότυπα της σφαίρας, του σφαιροειδούς καθώς και μικρών παρεκκλίσεων από τη σφαιρική συμμετρία, δίνοντας ωστόσο πολύ σημαντικά αποτελέσματα από τις απλές αυτές γεωμετρίες. Μια σύντομη ανασκόπηση των γνωστών αποτελεσμάτων παρέχεται στην παράγραφο **1.6**. Στην εργασία μας αυτή

θα θεωρήσουμε την ελλειψοειδή προσέγγιση του εγκεφάλου, με ημιάξονες a_1, a_2, a_3 που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε θετική πραγματική τιμή, αρκεί να διατηρούνται μεταξύ τους άνισοι.

Τέλος, υπολείπεται να εξετάσουμε το σύστημα των φυσικών νόμων που περιγράφει καλύτερα, με βάσει τις παραπάνω παραδοχές για τις παραμέτρους, τη δραστηριότητα των βιοηλεκτρικών πηγών στο εσωτερικό του εγκεφάλου και την επακόλουθη παραγωγή και διάδοση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Αυτό είναι και το αντικείμενο μελέτης της επόμενης παραγράφου.

1.5 Η Σχεδόν Στατική Προσέγγιση των εξισώσεων του Maxwell.

Ως γνωστόν, οι εξισώσεις που περιγράφουν οποιοδήποτε ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο, είναι οι εξισώσεις του Maxwell (1865), δηλαδή η ενοποίηση των βασικών νόμων του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού ώστε να αποτελέσουν ένα συζευγμένο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που συνδέει το αποτέλεσμα, δηλαδή το παραγόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, με το αίτιο, που είναι η ύπαρξη κινουμένων ηλεκτρικών φορτίων.

Για την ακρίβεια, αν $\mathbf{E}$ και $\mathbf{H}$ είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{D}$ και $\mathbf{B}$ είναι η ηλεκτρική μετατόπιση και η μαγνητική επαγωγή, και τέλος $\mathbf{J}$ και ρ είναι η χωρική πυκνότητα ρεύματος και φορτίου αντίστοιχα, τότε οι βασικές εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού [31,48] παίρνουν τη μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (\text{Νόμος Faraday}) \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (\text{Νόμος Ampère-Maxwell}) \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{Νόμος Gauss για τον ηλεκτρισμό}) \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Νόμος Gauss για το μαγνητισμό}). \quad (1.15)$$

Στο ολικό ρεύμα $\mathbf{J}$ διακρίνεται μία κύρια πηγή επιβαλλόμενου ρεύματος $\mathbf{J}^p$ και ένα επαγόμενο ρεύμα αγωγιμότητας $\mathbf{J}^v$, ή

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^p + \mathbf{J}^v. \quad (1.16)$$

Ο νόμος διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου επιβάλλει στο ολικό ρεύμα να είναι σωληνοειδές

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.17)$$

και κατά συνέπεια, στο κύριο ρεύμα να συνδέεται με το φορτίο μέσω του επαγόμενου ρεύματος, κατά τρόπον ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^p + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.18)$$

Θεωρώντας επιπλέον το υλικό που καταλαμβάνει το εσωτερικό του αγωγού, αντιπροσωπεύοντας τον εγκέφαλο και τις προστατευτικές του στοιβάδες, ως γραμμικό υλικό, ορίζονται οι φυσικές σταθερές, που συνδέουν τα αντίστοιχα πεδία με γραμμικές σχέσεις. Έτσι, σε ένα φυσικώς ισότροπο υλικό, η ηλεκτρική επιδεκτικότητα, ή διηλεκτρική σταθερά, ϵ του υλικού ορίζει τη σχέση μεταξύ της ηλεκτρικής μετατόπισης και του ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.19)$$

η μαγνητική διαπερατότητα μ του υλικού συνδέει τη μαγνητική επαγωγή με το μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.20)$$

και η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ του υλικού συνδέει το ρεύμα αγωγιμότητας με το ηλεκτρικό πεδίο που το παράγει

$$\mathbf{J}^v = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.21)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι, όπως είδαμε στην παράγραφο **1.3**, οι πηγές της ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου είναι τέτοιες ώστε να μη δημιουργούν πουθενά συσσώρευση φορτίου, με αποτέλεσμα η μέση χωρική πυκνότητα φορτίου ρ να είναι μηδενική, οι εξισώσεις (1.12)-(1.16), με τη βοήθεια των (1.19)-(1.21), γίνονται

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (1.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} + \mu \mathbf{J}^p \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.24)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E} \quad (1.25)$$

ενώ η (1.18) συνεχίζει να ισχύει εξασφαλίζοντας ότι και εκεί όπου υπάρχει ροή κυρίου ρεύματος, η μέση πυκνότητα φορτίου διατηρείται μηδενική.

Θα δείξουμε ότι, οι τιμές των παραμέτρων ϵ , μ και σ που δόθηκαν στην παράγραφο **1.4** και, όπως είναι αποδεκτό, χαρακτηρίζουν τον μέσο ενεργοποιημένο ανθρώπινο εγκέφαλο, εξασφαλίζουν, από τις (1.22)-(1.25), τη γέννηση ηλεκτρομαγνητικού

κύματος το οποίο διαδίδεται στο χώρο που περιβάλλει τον αγωγό, και πρακτικά θεωρείται κενός, με μήκος κύματος τόσο μεγάλο σε σχέση με τις διαστάσεις του εγκεφάλου, ώστε πρακτικά τα πεδία που δημιουργούν γίνονται αντιληπτά ως στατικά. Έστω, λοιπόν ότι επιβάλλεται στο αγωγίμο υλικό ένα αρμονικά μεταβαλλόμενο πεδίο E , με κυκλική συχνότητα ω . Τότε, η πυκνότητα του παραγόμενου κύματος στο χρόνο είναι, προφανώς, ω και έστω k ο κυματικός του αριθμός, δηλαδή η πυκνότητά του στο χώρο, T η χρονική του περίοδος, η οποία συνδέεται με τη συχνότητα ν και την κυκλική συχνότητα ω , μέσω της σχέσεως

$$T\nu = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.26)$$

Η χωρική του περίοδος ή το μήκος κύματος λ , συνδέεται με τον κυματικό αριθμό k με τη σχέση

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.27)$$

Το κύμα διαδίδεται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός

$$c_0 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (1.28)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι στο Βιομαγνητισμό η συχνότητα

$$\nu = 100 \text{ Hz} \quad (1.29)$$

θεωρείται τυπική για ηλεκτρικά φαινόμενα που συμβαίνουν στο κυτταρικό επίπεδο και ότι ένα μη μαγνητικό υλικό, όπως αυτό από το οποίο θεωρούμε ότι συνίσταται ο υπό μελέτην αγωγός, ανταποκρίνεται στο επιβαλλόμενο πεδίο με ένα ρεύμα αγωγιμότητας

$$J^v = \sigma E \quad (1.30)$$

και ένα ρεύμα πόλωσης

$$(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (1.31)$$

οι εξισώσεις που περιγράφουν τη διάδοση του παραγόμενου κύματος στον περιβάλλοντα κενό χώρο, δίνονται, με τη βοήθεια και των (1.15), (1.22) – (1.24), (1.31) από τις εξισώσεις

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.32)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(\sigma + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) E \quad (1.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.35)$$

Παίρνοντας το στροβιλισμό της (1.32) και χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (1.36)$$

την (1.34) καθώς επίσης και την (1.33) καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.37)$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι

$$\Delta \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (1.38)$$

Υποθέτοντας ότι τα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ μεταβάλλονται αρμονικά στο χρόνο με συχνότητα ω , μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (1.39)$$

και

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (1.40)$$

Τότε η φασματική μορφή των (1.37) και (1.38) είναι

$$(\Delta + k^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (1.41)$$

και

$$(\Delta + k^2)\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{MERGEFORMAT}(1.42)$$

όπου ο κυματικός αριθμός k δίνεται από τη σχέση διασποράς

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon \omega^2 + i\mu_0 \sigma \omega. \quad (1.43)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.43) τις τιμές για τα ν , μ_0 , σ , ε που έχουμε δεχθεί στις (1.29), (1.11), (1.9) και (1.10) αντίστοιχα, καθώς και τη σχέση (1.27), παίρνουμε ότι το μήκος κύματος για το παραγόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι

$$\lambda = \frac{1000}{\sqrt{6}} \text{ m}, \quad (1.44)$$

δηλαδή μεγαλύτερο από 400 m!

Έτσι, ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που δημιουργείται μέσα σε γραμμικό υλικό του οποίου οι τιμές των φυσικών παραμέτρων που το χαρακτηρίζουν συμπίπτουν με αυτές που είναι παραδεκτές για τον εγκεφαλικό ιστό, διαδίδεται στο κενό με μήκος κύματος δυο χιλιάδες φορές μεγαλύτερο από τη μεγαλύτερη διαστάσεως του

εγκεφάλου, που κατά μέσο όρο είναι 18 cm. Με άλλα λόγια, η μεγαλύτερη διάσταση του εγκεφαλικού ιστού καταλαμβάνει λιγότερο από το 1/2000 του μήκους κύματος που παράγεται στον εγκέφαλο. Αυτό, όπως επισημαίνει ο Sommerfeld [47] ισοδυναμεί με ένα αργά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό κυματικό πεδίο, ή αλλιώς, όπως επιβεβαιώνεται και από τους Landau και Lipshitz [33], ισοδυναμεί με τα λεγόμενα Σχεδόν Στατικά πεδία (Quasi Static fields), στα οποία η χρονική τους παράγωγος είναι αμελητέα, δηλαδή

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cong \mathbf{0} \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cong \mathbf{0}, \quad (1.46)$$

με την προϋπόθεση ότι η κλίμακα των αποστάσεων στην οποία αναφερόμαστε, παραμένει πολύ μικρότερη από το μήκος του εν λόγω κύματος. Προφανώς, η (1.44) εξασφαλίζει αυτή την προϋπόθεση.

Τέλος, η Σχεδόν Στατική Προσέγγιση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που γεννιέται από τη βιοχημική διέγερση του εγκεφάλου επικυρώνεται και από τους Geselowitz (1963) και Plonsey και Heppner (1967), οι οποίοι επισημαίνουν πώς τα πεδία αυτά, καθώς και τα ρεύματα που τα παράγουν, στο συμβατικό Σχεδόν Στατικό όριο συμπεριφέρονται ως στάσιμα, με την έννοια ότι η χρονική τους μεταβολή μπορεί να αγνοηθεί [37].

Στο Σχεδόν Στατικό όριο, οι εξισώσεις που περιγράφουν τα φαινόμενα του Βιοηλεκτρισμού και του Βιομαγνητισμού δίνονται από τις (1.22) – (1.23) και (1.15), οι οποίες με τη βοήθεια των (1.39), (1.40), (1.45) και (1.46) γράφονται

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (1.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) + \sigma_0(\mathbf{E}) \quad (1.48)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.49)$$

1.6 Μαθηματική τοποθέτηση του ευθέως προβλήματος.

Το ευθύ πρόβλημα του Βιοηλεκτρομαγνητισμού συνίσταται στην εύρεση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου που παράγονται από δεδομένη πηγή κυρίου ρεύματος μέσα σε πεπερασμένο ομογενή αγωγό, ο οποίος βρίσκεται στο εσωτερικό ενός μη αγωγίμου χώρου.

Με βάση τις παραδοχές που προηγήθηκαν στην παράγραφο **1.4**, θεωρούμε ότι η λεία C^1 - επιφάνεια S ορίζει τον εσωτερικό αγωγίμο χώρο V^- , που χαρακτηρίζεται από ηλεκτρική αγωγιμότητα σ ($\sigma > 0$) και μαγνητική διαπερατότητα μ_0 , και τον εξωτερικό, μη αγωγίμο, χώρο V^+ , που χαρακτηρίζεται από την ίδια μαγνητική διαπερατότητα μ_0 . Στη θέση $\mathbf{r}_0$ του V^- , θεωρούμε ότι υπάρχει σημειακή πηγή ρεύματος διπόλων $\mathbf{J}^p$ με ροπή $\mathbf{Q}$, δηλαδή

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.50)$$

η οποία δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, εντός και εκτός του αγωγού, ενώ επάγει στον V^- ρεύμα αγωγιμότητας

$$\mathbf{J}^v(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.51)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τα παραγόμενα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{B}$ δίνονται, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, στις σχέσεις (1.47)–(1.49). Όπως είναι προφανές στις εξισώσεις αυτές, το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να υπολογιστεί ανεξάρτητα του μαγνητικού, ενώ ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου προϋποθέτει τη γνώση του ηλεκτρικού πεδίου.

Έτσι, η εξίσωση (1.47) προβάλλει τον αστρόβιλο χαρακτήρα του $\mathbf{E}$ και επομένως παρέχει τη δυνατότητα αναπαράστασής του μέσω ενός βαθμωτού πεδίου u , ως εξής

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r}). \quad (1.52)$$

Το πεδίο u είναι το ηλεκτρικό δυναμικό που καταγράφεται κατά τη λήψη του EEG.

Ειδικά, αν συμβολίσουμε με u^- και u^+ το δυναμικό στον εσωτερικό και εξωτερικό χώρο V^- και V^+ , αντίστοιχα, τότε, λαμβάνοντας την απόκλιση της (1.48) και αντικαθιστώντας την (1.52) παίρνουμε την εξίσωση Poisson

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^- \quad (1.53)$$

την οποία πρέπει να ικανοποιεί το ηλεκτρικό δυναμικό u^- στο χώρο V^- , όπου το κύριο ρεύμα είναι μη μηδενικό. Αντίστοιχα, στον εξωτερικό χώρο όπου δεν υπάρχουν πηγές, το ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+. \quad (1.54)$$

Επί της συνοριακής επιφάνειας S το δυναμικό υποχρεώνεται να ικανοποιεί ειδικές συνθήκες συνέχειας. Για να γίνει κατανοητή η ανάγκη που τις επιβάλλει, ας δεχτούμε προς στιγμήν ότι ο εξωτερικός χώρος είναι και αυτός αγωγίμος, με αγωγιμότητα σ^+ , και $\sigma^+ \neq \sigma$. Τότε η επιβολή της απόκλισης στην εξίσωση (1.48) δεν οδηγεί στην (1.53) αλλά στην

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p. \quad (1.55)$$

Από την άλλη πλευρά, η Σχεδόν Στατική θεώρηση των πεδίων και των ρευμάτων (βλ. παράγραφο 1.5) μεταφέρεται και στην εξίσωση συνέχειας (1.18) η οποία εξασφαλίζει μηδενική μέση πυκνότητα φορτίου και στο χώρο όπου υπάρχουν πηγές ρεύματος, με αποτέλεσμα η παραγωγικότητα της πηγής να θεωρείται αμελητέα

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^p \approx 0, \quad (1.56)$$

όχι όμως μηδενική, αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε συσσώρευση φορτίου στον V^- .

Τότε, το χωρικό ολοκλήρωμα επί του V^- της (1.55), αφού μετατραπεί σε επιφανειακό επί του συνόρου S του V^- μέσω του θεωρήματος της απόκλισης, δίνει λόγω και της (1.56) τη συνθήκη

$$\int_S \sigma \hat{n} \cdot \nabla u \, ds \approx 0 \quad (1.57)$$

όπου $\hat{n}$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S .

Μετά από εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα επιφανειακά ολοκληρώματα που προκύπτουν κατά τη θεώρηση της (1.57) επί στοιχειώδους όγκου που διαπερνάται εγκαρσίως από την S , και αφού λάβουμε το όριο στο οποίο ο στοιχειώδης όγκος συρρικνώνεται σε σημείο, παίρνουμε ότι

$$\sigma \frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = \sigma^+ \frac{\partial u^+(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (1.58)$$

Επειδή όμως στο πρότυπο που εξετάζουμε θεωρούμε μηδενικό σ^+ , η (1.58) απαιτεί τελικά για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό τη συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (1.59)$$

η οποία ισοδυναμεί, όπως φαίνεται από την (1.58), με τη συνθήκη συνέχειας της καθέτου συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου, στην επιφάνεια S , στην οποία επιβιώνουν μόνον οι εφαπτομενικές του συνιστώσες.

Από την άλλη πλευρά, η ύπαρξη των καθέτων παραγώγων των u^- , u^+ εξασφαλίζει τη συνέχεια του πεδίου δυναμικού στο σύνορο S , δηλαδή

$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (1.60)$$

Τέλος, το εξωτερικό δυναμικό απαιτείται να ικανοποιεί την ασυμπτωτική συνθήκη

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.61)$$

Έτσι, ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού εντός και εκτός του αγωγού, απαιτεί την επίλυση των παρακάτω προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Για τον εσωτερικό χώρο V^- απαιτείται η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης Laplace με ομογενή συνθήκη Neumann

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^- \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (1.63)$$

ενώ για τον εξωτερικό χώρο V^+ απαιτείται επίλυση της εξίσωσης Laplace με τη μη ομογενή συνθήκη Dirichlet

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+ \quad (1.64)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (1.65)$$

και

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.66)$$

Είναι προφανές ότι οι τιμές του u^+ επί της επιφάνειας S είναι γνωστές από την επίλυση του εσωτερικού προβλήματος (1.62)-(1.63). Έτσι, ο υπολογισμός του εξωτερικού δυναμικού u^+ προαπαιτεί τη γνώση του εσωτερικού δυναμικού u^- .

Ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ απαιτεί μόνον τη λήψη της βαθμίδας του δυναμικού και συνήθως παραλείπεται, καθώς τα δεδομένα του EEG, προς τα οποία κατευθύνονται τόσο το ευθύ όσο και το αντίστροφο EEG πρόβλημα, αφορούν μόνον το ηλεκτρικό δυναμικό.

Στη συνέχεια θα δείξουμε πώς μπορούμε, δεδομένου του u^- , να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$.

Κατ' αρχήν η εξίσωση (1.49) υποβάλλει ότι το πεδίο $\mathbf{B}$, ως σωληνοειδές, μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός διανυσματικού δυναμικού $\mathbf{A}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.67)$$

ενώ, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το $\mathbf{A}$, μπορεί να θεωρηθεί επίσης σωληνοειδές

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.68)$$

Τότε αντικαθιστώντας την (1.67) στην (1.48) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (1.36) για το πεδίο $\mathbf{A}$ και τη συνθήκη (1.68), προκύπτει ότι το δυναμικό $\mathbf{A}$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 (\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})). \quad (1.69)$$

Η (1.69), ως μερική διαφορική εξίσωση Poisson, έχει λύση η οποία λαμβάνεται άμεσα σε ολοκληρωτική μορφή, χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη λύση του τελεστή του Laplace, με τη μορφή

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \frac{\mathbf{J}^p(\mathbf{r}') + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}'). \quad (1.70)$$

Τότε η (1.67), με τη βοήθεια του διανυσματικού αναλλοίωτου [4] της ταυστικής ταυτότητας

$$\nabla \otimes (u\mathbf{f}) = (\nabla u) \otimes \mathbf{f} + u \nabla \otimes \mathbf{f}, \quad (1.71)$$

όπου u βαθμωτό και $\mathbf{f}$ διανυσματικό πεδίο, οδηγεί για το μαγνητικό πεδίο στην αναπαράσταση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \left(\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times [(\mathbf{J}^p(\mathbf{r}') + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}')) d\mathbf{v}(\mathbf{r}')] \quad (1.72)$$

ή, λόγω της (1.52), στην αναπαράσταση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} [\mathbf{J}^p(\mathbf{r}') - \sigma \nabla u^-(\mathbf{r}')] \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}'). \quad (1.73)$$

Πριν συνεχίσουμε την επεξεργασία της ολοκληρωτικής μορφής (1.73) για το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, είναι χρήσιμο σ' αυτό το σημείο να βρούμε την τάξη του πρωτεύοντος όρου στο πολυπολικό ανάπτυγμα του πεδίου $\mathbf{B}$.

Συμβολίζοντας με $\mathbf{J}$ το ολικό ρεύμα

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) - \sigma \nabla u(\mathbf{r}) \quad (1.74)$$

η (1.73) είναι ισοδύναμη με την

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \int_{V^-} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \quad (1.75)$$

η οποία με τη βοήθεια του ασυμπτωτικού αναπτύγματος

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = r^{-1} \left(1 + \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \frac{1}{r} + O(r^{-2}) \right) \quad (1.76)$$

γράφεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[\frac{1}{r} \int_{V^-} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{v}(\mathbf{r}') + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right]. \quad (1.77)$$

Η ταυτότητα

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} \otimes \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{J})\mathbf{r} + \mathbf{J} \cdot \nabla \otimes \mathbf{r}, \quad (1.78)$$

το γεγονός ότι το ολικό ρεύμα $\mathbf{J}$ είναι σωληνοειδές καθώς και ότι η βαθμίδα του διανύσματος $\mathbf{r}$ είναι το ταυτοτικό δυαδικό, επιτρέπει στο $\mathbf{J}$ την αναπαράσταση

$$\mathbf{J} = \nabla \cdot (\mathbf{J} \otimes \mathbf{r}).$$

$$(1.79)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη πως ο φορέας του $\mathbf{J}$ είναι ο εσωτερικός χώρος V^- , και χρησιμοποιώντας κατάλληλα τόσο το θεώρημα της απόκλισης όσο και την (1.79), η (1.77) γράφεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.80)$$

Το ολικό ρεύμα $\mathbf{J}$ στη θέση $\mathbf{r}'$ δίνεται από την (1.74), ενώ το κύριο ρεύμα $\mathbf{J}^p$ έχει οριστεί στην (1.50). Ειδικά, επί της επιφάνειας S , καθώς δεν υπάρχουν πηγές, ο όρος με το $\mathbf{J}^p$ μηδενίζεται και, λόγω της συνοριακής συνθήκης (1.63) το ίδιο ισχύει και για τον όρο με το $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στην έκφραση (1.80) είναι μηδέν, που αποδεικνύει ότι το πολυπολικό αναπτύγμα του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ αρχίζει με τετραπολικό και όχι με διπολικό όρο.

Σημειώνουμε εδώ πως η χρήση του θεωρήματος της απόκλισης στο χώρο V^- , ο οποίος περιλαμβάνει τις πηγές του μαγνητικού πεδίου, τεκμηριώνεται αμέσως παρακάτω, ως στάδιο της περαιτέρω επεξεργασίας της (1.73).

Το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα εξασφαλίζει ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από κατανομή ρεύματος $\mathbf{J}$ στο εσωτερικό αγωγού με οποιαδήποτε κλειστή λεία συνοριακή επιφάνεια S , μετρούμενο στον μη αγωγίμο, εξωτερικό του αγωγού, χώρο, είναι της τάξεως του r^{-3} . Αν δεν ήταν έτσι, και για κάποια επιφάνεια ο διπολικός όρος δε μηδενιζόταν, το πεδίο θα συνέπιπτε τότε με το μαγνητικό πεδίο που θα παρήγαγε, αν υπήρχε, ένα μαγνητικό μονόπολο, κατ' αντιστοιχίαν με το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί γύρω του ένα απομονωμένο ηλεκτρικό φορτίο. Αυτό όμως θα σήμαινε πως οι δυναμικές του γραμμές θα ήταν ανοικτές, που έρχεται σε αντίθεση με το νόμο του Gauss για το μαγνητισμό (1.49) ο οποίος εξασφαλίζει πως στη φύση δεν υπάρχουν ανοιχτές μαγνητικές δυναμικές γραμμές. Έτσι, το αποτέλεσμα ότι ο σημαντικός όρος του πολυπολικού αναπτύγματος του $\mathbf{B}$ είναι τετραπολικός και όχι διπολικός, συμφωνεί με το γεγονός πως στη φύση δεν υπάρχουν ανοιχτές μαγνητικές γραμμές.

Με στόχο την απλοποίηση της μορφής της (1.73), οι περισσότεροι ερευνητές [6,20,21,25,45] χρησιμοποίησαν την ταυτότητα (1.71) και το διανυσματικό αναλλοίωτο της δυαδικής μορφής του θεωρήματος του Gauss, για να μετατρέψουν το χωρικό ολοκλήρωμα

$$\int_{V^-} \nabla u^-(\mathbf{r}) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}')$$

(1.81)

της (1.73), στο αντίστοιχο επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_{S^-} u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}').$$

(1.82)

Η μετατροπή αυτή μπορεί να γίνει άμεσα μόνο στις περιοχές όπου δεν περικλείονται πηγές, δηλαδή σημεία ιδιομορφίας για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση.

Τέτοια σημεία είναι φυσικά τα σημεία στα οποία εντοπίζονται οι πηγές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, που για το υπό μελέτην πρόβλημα είναι το σημείο $\mathbf{r}_0$, όπως δηλώνεται στην (1.50), καθώς και τα σημεία $\mathbf{r}'$ στην επιφάνεια S .

Όσον αφορά τα επιφανειακά ιδιόμορφα σημεία, αυτά αποτελούν ιδιομορφία όταν το πεδίο μετράται στο εσωτερικό του αγωγού, που αποτελεί θεωρητική μόνον δυνατότητα. Και στην περίπτωση αυτή ωστόσο, δε συνεισφέρουν στο συνολικό επιφανειακό ολοκλήρωμα καθώς, απομονώνοντας το $\mathbf{r}$ με μία περιβάλλουσα σφαίρα, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνειά της, ταυτίζεται με το διάνυσμα $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, μηδενίζοντας το αντίστοιχο εξωτερικό γινόμενο.

Έτσι, η εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης για οποιαδήποτε θέση μέτρησης $\mathbf{r}$ του πεδίου $\mathbf{B}$ απαιτεί αποκλεισμό της κύριας ιδιομορφίας του σημείου $\mathbf{r}_0$ με μία περιβάλλουσα σφαίρα B_ε , ακτίνας ε και επιφάνειας S_ε .

Στο χώρο

$$V(\varepsilon) = V^- - B_\varepsilon \quad (1.83)$$

το θεώρημα του Gauss εξασφαλίζει ότι

$$\begin{aligned} & \int_{V(\varepsilon)} \nabla u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \\ &= \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}') - \int_{S_\varepsilon} u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (1.84)$$

ενώ το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{V^-} \nabla u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}')$$

$$= \int_{V(\varepsilon)} \nabla u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') + \int_{B_\varepsilon} \nabla u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}'). \quad (1.85)$$

Αποδεικνύεται, μέσω εκτενούς αναλύσεως που παρατίθεται στο Παράρτημα Δ και αποτελεί το περιεχόμενο της δημοσίευσης [13], ότι η συνεισφορά στην (1.85) του χωρικού ολοκληρώματος επί της σφαίρας B_ε είναι ακριβώς ίση με τη συνεισφορά, μέσω της (1.84), του αντίστοιχου επιφανειακού ολοκληρώματος επί της επιφάνειας S_ε , με αποτέλεσμα την αλληλοαναίρεσή τους και την επικύρωση της ισχύος της ταυτότητας

$$\int_{V^-} \nabla u^-(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (1.86)$$

ακόμα και για χωρία που περιέχουν ιδιομορφίες της μορφής (1.50). Η απόδειξη αυτή που βασίζεται στη θεωρία ομαλοποίησης πολυδιάστατων γενικευμένων ολοκληρωμάτων και σε ανάλυση οριακών τιμών επιφανειακών ολοκληρωμάτων, παρέχει στην ουσία μια γενίκευση της συμπεριφοράς των ολοκληρωτικών θεωρημάτων της διανυσματικής ανάλυσης.

Τότε, το μαγνητικό πεδίο γράφεται, μέσω των (1.73) και (1.86)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^-} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'). \quad (1.87)$$

Εισάγοντας, τέλος, την παραδοχή της σημειακής διπολικής πηγής ρεύματος μέσω της (1.50), και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του μέτρου του Dirac, το πρώτο ολοκλήρωμα της (1.87) γράφεται

$$\int \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (1.88)$$

Αντικαθιστώντας τελικά την (1.88) στην (1.87), καταλήγουμε στη θεμελιώδη ολοκληρωτική αναπαράσταση του Geselowitz για το μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (1.89)$$

η οποία προσφέρει έναν ευθύ τρόπο υπολογισμού του μαγνητικού πεδίου εξωτερικά του αγωγού, με την προϋπόθεση ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια του αγωγού είναι γνωστό.

Η φυσική περιγραφή της αναπαράστασης (1.89) είναι η ακόλουθη. Στο εσωτερικό σημείο $\mathbf{r}_0$ του αγωγού V^- δημιουργείται ένα σημειακό διπολικό ρεύμα, με σταθερή ροπή $\mathbf{Q}$, που αντιπροσωπεύει την ισοδύναμη πηγή μιας τοπικής ηλεκτροχημικής δραστηριότητας του εγκεφάλου.

Η σημειακή αυτή πηγή γεννά ένα μαγνητικό πεδίο του οποίου η ένταση δίνεται από τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της (1.89), ταυτόχρονα όμως, το πεδίο της σημειακής πηγής, διεγείρει όλο το εσωτερικό του αγωγού V^- , ο οποίος διαρέεται πλέον από επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα. Με άλλα λόγια ενώ ο φορέας του σημειακού κυρίου ρεύματος περιορίζεται στη σημείο $\mathbf{r}_0$, ο φορέας του επαγόμενου ηλεκτρικού ρεύματος είναι ολόκληρος ο αγωγός V^- .

Η σημασία του τύπου του Geselowitz (1.89) οφείλεται στο γεγονός ότι η συνολική δραστηριότητα του επαγόμενου ρεύματος μπορεί να περιγραφεί από μια ισοδύναμη κατανομή σημειακών διπόλων επάνω στη συνοριακή επιφάνεια S του αγωγού. Τα δίπολα αυτά είναι όλα προσανατολισμένα καθέτως επάνω στην επιφάνεια S και τα μέτρα των ροπών τους καθορίζονται από τις επιφανειακές τιμές του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού u^- .

Έτσι, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στον χώρο εξωτερικά του αγωγού είναι μία υπέρθεση των μαγνητικών πεδίων του σημειακού διπολικού ρεύματος στο $\mathbf{r}_0$ και των ισοδύναμων διπόλων επάνω στην S .

Το σημαντικό αποτέλεσμα που αποδείχθηκε παραπάνω είναι ότι ο διπολικός όρος του $\mathbf{B}$ (όρος της τάξης του r^{-2}) που οφείλεται στη πραγματική πηγή αναιρείται από τον αντίστοιχο διπολικό όρο που οφείλεται στην ισοδύναμη επιφανειακή κατανομή πηγών, με αποτέλεσμα το εξωτερικά καταγραφόμενο μαγνητικό πεδίο να έχει πολυπολικό ανάπτυγμα που αρχίζει με τετραπολικό (όρος της τάξης r^{-3}) αντί με διπολικό όρο. Με άλλα λόγια το πεπερασμένο αγωγίμο νέφος που περιβάλλει την πραγματική πηγή στο σημείο διέγερσης $\mathbf{r}_0$ “κρύβει” κατά κάποιον τρόπο αυτήν την πηγή κατά έναν όρο του πολυπολικού αναπτύγματος στο δημιουργούμενο μαγνητικό πεδίο.

Η μερική αυτή απόκρυψη της πηγής δεν οφείλεται στην αγωγιμότητα του περιβάλλοντος μέσου αλλά στο γεγονός ότι ο φορέας της συνάρτησης αγωγιμότητας είναι συμπαγής και άρα φραγμένος. Η ύπαρξη της διεπιφάνειας μεταξύ αγωγίμου και

μη αγώγιμου μέσου είναι υπαίτια για την ανάπτυξη των ισοδύναμων διπόλων και τελικά για την μερική εξασθένιση του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του αγωγού. Πραγματικά αν ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ είχε σταθερή αγωγιμότητα τότε το μαγνητικό πεδίο του ηλεκτρικού διπόλου στο $\mathbf{r}_0$ θα ήταν ίσο με τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της (1.89), ο οποίος έχει μη μηδενικό διπολικό όρο.

Το γεγονός αυτό δυσχεραίνει την καταγραφή σημάτων MEG εξωτερικά του εγκεφάλου. Τονίζουμε εδώ την σημαντική εξάρτηση του μετρούμενου μαγνητικού πεδίου από την γεωμετρία του αγώγιμου χωρίου V^- αφού το σύνορο S του V^- είναι ο φορέας κατανομής των ισοδύναμων διπόλων.

Στην επόμενη παράγραφο θα κάνουμε μία σύντομη ανασκόπηση των προσεγγίσεων που έχουν γίνει στο παρελθόν στο υπό μελέτην πρόβλημα. Θα περιγράψουμε περισσότερο αναλυτικά την περίπτωση της σφαιρικής προσέγγισης του αγωγού όπως αυτή αναλύθηκε από τον Sarvas (1987) [45] για το μαγνητικό πεδίο, δεδομένου ότι αυτή παρέχει τη μόνη κλειστή και πλήρη γνωστή μορφή για το $\mathbf{B}$ και συνεπώς έχει ευρέως χρησιμοποιηθεί ερευνητικά τόσο σε θεωρητικές και κλινικές μελέτες, όσο και στην κατασκευή οργάνων καταγραφής και τεχνικών αντιστροφής για τον προσδιορισμό της ισοδύναμης διεγερθείσας βιοχημικής πηγής.

1.7 Ιστορική ανασκόπηση του ευθέος EEG και MEG προβλήματος.

Η βασική διερεύνηση της μαθηματικής θεωρίας που περιγράφει προβλήματα που σχετίζονται με το Βιοηλεκτρισμό και το Βιομαγνητισμό, θεμελιώνεται μέσα στις δεκαετίες του '50 και του '60.

Έχοντας το θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη αυτής της περιοχής από το 1853 σε μια εξαιρετικής σημασίας εργασία, πάνω στην αρχή της αμοιβαιότητας, του Helmholtz [28] πολλές θεωρητικές δημοσιεύσεις εμφανίστηκαν, μέχρι το 1960, που αφορούσαν την κατανομή των ηλεκτρικών δυναμικών κυρίως όσον αφορά τον καρδιακό ιστό [20,22,27]. Ενδεικτικά αναφέρουμε τη, βασισμένη στα αποτελέσματα του Helmholtz, εργασία του Lorente de Nó (1947)[36], που δίνει μία έκφραση για το δυναμικό στο εξωτερικό κυλινδρικού άξονα και των Plonsey (1965) και Stevens (1966)[20], οι οποίοι χρησιμοποίησαν το θεώρημα του Green για να παράγουν εκφράσεις που συνδέουν τα δυναμικά στις δύο πλευρές της κυτταρικής μεμβράνης με το ρεύμα στο εσωτερικό του κυττάρου.

Τομή στη μαθηματική θεμελίωση της περιοχής αυτής αποτελούν οι εργασίες του Geselowitz [20,21,22] στις οποίες γενίκευσε υπάρχοντα αποτελέσματα και έδωσε σε ολοκληρωτική μορφή εκφράσεις για το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό κατά τμήματα μη ομογενούς και ισότροπου αγωγού τα οποία παράγονται από ισοδύναμη κατανομή ρεύματος διπόλων.

Οι ερευνητικές εργασίες στην περιοχή αυτή σε όλα τα επόμενα χρόνια βασίστηκαν στις ολοκληρωτικές μορφές του Geselowitz για ειδικά γεωμετρικά πρότυπα αγωγών, με την εργασία των Cuffin και Cohen του 1977 [6] να ξεχωρίζει ως προς τα αποτελέσματα για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό σφαιρικού, σφαιροειδούς και ημιάπειρου αγωγού. Την πολυπλοκότητα και την έλλειψη συμπαγότητας στα, κατά συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου, πλήρη αποτελέσματα για τη σφαίρα, βελτίωσαν ποιοτικά οι Ilmoniemi, Hämmäläinen και Knuutila το 1984 [30] ενώ σταθμό στην περιοχή της Βιομαγνητικής έρευνας αποτέλεσε η εξαιρετικής σημασίας εργασία του J. Sarvas [45] το 1987. Στην εργασία αυτή, ο Sarvas υπολόγισε σε κλειστή συμπαγή και πλήρη μορφή το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό σφαιρικού ομογενούς αγωγού, που παράγεται από σημειακό ηλεκτρικό διπολικό ρεύμα στο εσωτερικό του. Στο αποτέλεσμα αυτό βασίστηκαν πολλές κλινικές και θεωρητικές εφαρμογές, και επειδή θα χρησιμοποιηθεί και στην παρούσα εργασία, θα κάνουμε αναλυτική παρουσίασή του αμέσως παρακάτω.

Πέρα από τα αποτελέσματα σχετικά με το μαγνητικό πεδίο στη σφαιρική γεωμετρία, σημαντικές προσπάθειες κατευθύνθηκαν προς τον υπολογισμό της κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού, με την εργασία του J.C. de Munck το 1988 [41] να ξεχωρίζει στην περίπτωση της στρωματοποιημένης ανομοιογένειας ως προς την αγωγιμότητα, ομόκεντρων σφαιρών και ομοεστιακών σφαιροειδών. Τα αποτελέσματα αυτά παρέχουν σε μορφή σειρών σφαιρικών και σφαιροειδών αρμονικών αντίστοιχα, το δυναμικό που γεννάται από διπολική πηγή στο εσωτερικό του αγωγού. Η περίπτωση του σφαιροειδούς αγωγού έχει επίσης διερευνηθεί, στα πλαίσια του σφαιροειδούς συστήματος συντεταγμένων, από τους Wang (1988) [50], και στα πλαίσια του κλινικού και υπολογιστικού ελέγχου από τους Ioannides, Fieseler και Nowak, το 1993, 1996, 1998 [16,17,18]. Το πολυπολικό ανάπτυγμα του ηλεκτρικού δυναμικού και του μαγνητικού πεδίου για την περίπτωση αυτή και σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, περιέχεται στην εργασία [32] και αποτελεί το περιεχόμενο των παραγράφων 4.1, 4.2 και 4.3 της παρούσας διατριβής.

Τέλος, διαφορετική εκδοχή στην λήψη αναλυτικών λύσεων του ευθέως MEG προβλήματος παρέχει η προσέγγιση των Nolte, Fieseler και Curio (2001) [43] ενός αγωγού ρεαλιστικού σχήματος, μέσω μικρής διαταραχής του σφαιρικού προτύπου. Χρησιμοποιώντας τη λογική που χρησιμοποίησε και ο Sarvas στο [45], οι συγγραφείς παρήγαγαν το μαγνητικό πεδίο του διαταραγμένου προτύπου ως άθροισμα του αντίστοιχου πεδίου για την περίπτωση του σφαιρικού αγωγού, συν μια διόρθωση εξαρτώμενη από τη διαταραχή, με την προϋπόθεση ότι η διαταραχή είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ακτίνα της σφαίρας που χρησιμοποιείται στο αντίστοιχο πρότυπο.

Παράλληλα με τις προσπάθειες για αναλυτική αντιμετώπιση των ευθέων προβλημάτων για EEG και MEG, λύσεις για τις πολύπλοκες γεωμετρίες που προσεγγίζουν το ρεαλιστικό σχήμα του εγκεφάλου υπολογίζονται αριθμητικά, λύνοντας τις εξισώσεις του Maxwell σε διαφορική ή ολοκληρωτική μορφή, μέσω της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) ή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων (BEM), αντίστοιχα. Οι μέθοδοι αυτοί πλεονεκτούν ως προς την προσέγγιση της γεωμετρίας, απαιτούν όμως υψηλό υπολογιστικό κόστος σε χώρο και χρόνο, και επιπλέον εμπεριέχουν τον κίνδυνο εμφάνισης ανεξέλεγκτων σφαλμάτων, τουλάχιστον όσον αφορά τους διαφορικούς τελεστές που χειρίζεται η FEM.

Πριν εισέλθουμε στην αναλυτική περιγραφή της παρούσας διατριβής που αφορά την ρεαλιστική ελλειψοειδή προσέγγιση του εγκεφάλου, είναι χρήσιμο να αναφερθούμε στην κρίσιμη εργασία του Sarvas [45], για το μαγνητικό πεδίο στην περίπτωση του σφαιρικού αγωγού.

Τα σημαντικά αποτελέσματα του Sarvas αφορούν δύο ειδικές περιπτώσεις αγωγών, τη θεωρητική περίπτωση του άπειρου ομογενούς αγωγού και την περίπτωση του σφαιρικού ομογενούς αγωγού σε μη αγώγιμο μέσο.

Όταν ολόκληρος ο χώρος $\mathbb{R}^3$ θεωρηθεί ως ομογενές αγώγιμο μέσο, τότε το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάθε σημείο του αποτελεί λύση της εξίσωσης Poisson (1.62) και δίνεται, με τη βοήθεια της συνάρτησης Green του τελεστή του Laplace με τη μορφή

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}(\mathbf{r}'). \quad (1.90)$$

Η χρήση του βαθμωτού αναλλοίωτου της τανυστικής ταυτότητας (1.71), η εφαρμογή – με την τεκμηρίωση που περιγράψαμε στην παράγραφο **1.6** – του θεωρήματος της απόκλισης του Gauss σε μία σφαίρα G άπειρης ακτίνας η οποία περιβάλλει την πηγή

καθώς και η παρατήρηση ότι, ο φορέας της πηγής $\mathbf{J}^p$ είναι το εσωτερικό του αγωγού G , οδηγεί στην έκφραση

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_G \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \quad (1.91)$$

για το ηλεκτρικό δυναμικό που γεννάται από το ρεύμα $\mathbf{J}^p(\mathbf{r})$ εντός άπειρου ομογενούς αγωγού, σταθερής αγωγιμότητας σ . Όσον αφορά το μαγνητικό πεδίο στην ίδια περίπτωση, υπολογίζεται από τη σχέση (1.73), με χρήση του διανυσματικού αναλλοίωτου, τόσο της ταυστικής ταυτότητας (1.71), όσο και της δυαδικής μορφής του θεωρήματος της απόκλισης όπως και προηγουμένως στην περίπτωση της σφαίρας άπειρης ακτίνας.

Τέλος, το γεγονός ότι στο σύνορο του G το κύριο ρεύμα $\mathbf{J}^p$ θεωρείται μηδενικό καθώς και ότι ο στροβιλισμός της βαθμίδας κάθε διανύσματος είναι επίσης μηδενικός, οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση για το μαγνητικό πεδίο στον άπειρο ομογενή αγωγό

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}'). \quad (1.92)$$

Από τις (1.91) και (1.92) είναι προφανές πως το ηλεκτρικό δυναμικό u_0 και το μαγνητικό πεδίο $\mu_0^{-1}\mathbf{B}_0$, που η πηγή $\mathbf{J}^p(\mathbf{r})$ γεννά σε άπειρο ομογενή αγωγό, είναι το βαθμωτό και διανυσματικό αναλλοίωτο, αντιστοίχως, του δυαδικού

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_G \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \otimes \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}'). \quad (1.93)$$

Ειδικά, αν η πηγή $\mathbf{J}^p$ θεωρηθεί πως είναι η σημειακή πηγή ρεύματος (1.50), τα παραπάνω αποτελέσματα δίνουν

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (1.94)$$

και

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (1.95)$$

Κατόπιν τούτου, είναι φανερό πως η εξίσωση (1.89) που δίνει το μαγνητικό πεδίο στον μη αγώγιμο εξωτερικό χώρο πεπερασμένου ομογενούς αγωγού, γίνεται

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S \mathbf{u}^-(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'). \quad (1.96)$$

Η ευφυής παρατήρηση του Sarvas ήταν ότι εάν ο αγωγός θεωρηθεί σφαιρικός, η ακτινική συνιστώσα του $\mathbf{B}$ συμπίπτει με την ακτινική συνιστώσα του $\mathbf{B}_0$, καθώς η προβολή στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ της (1.96) εισάγει στο επιφανειακό ολοκλήρωμα το μεικτό γενόμενο

$$\hat{\mathbf{n}}' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \mathbf{r} = - \frac{\hat{\mathbf{n}}' \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \mathbf{r}, \quad (1.97)$$

το οποίο μηδενίζεται, αφού σε κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας S , η κάθετη και η ακτινική διεύθυνση συμπίπτουν

$$\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{r}}'. \quad (1.98)$$

Έτσι,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} \quad (1.99)$$

και στην ακτινική διεύθυνση δεν καταγράφεται συνεισφορά από το σύνορο του αγωγού.

Η επόμενη παρατήρηση του Sarvas ήταν πώς, στο εξωτερικό του αγωγού, όπου δεν υπάρχει πηγή $\mathbf{J}^P$ και η αγωγιμότητα σ μηδενίζεται, το μαγνητικό πεδίο, λόγω της (1.48), γίνεται αστρόβιλο, και δέχεται επομένως την ακόλουθη αναπαράσταση μέσω του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού U

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^+. \quad (1.100)$$

Επειδή το πεδίο $\mathbf{B}$ έχει την ασυμπτωτική τάξη $O(r^{-3})$ καθώς το $r \rightarrow \infty$, έπεται ότι το μαγνητικό δυναμικό U συμπεριφέρεται ως $O(r^{-2})$ στην περιοχή του απείρου.

Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$U(\mathbf{r}) = - \int_0^\infty \nabla U(\mathbf{r} + t\hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{r}} dt \quad (1.101)$$

και εκμεταλλευόμενος τις (1.100) και (1.99) και (1.95), υπολόγισε το ολοκλήρωμα στην (1.101), και συνεπώς το μαγνητικό δυναμικό U . Με τη βοήθεια τότε της (1.100), το μαγνητικό πεδίο, μετά από εκτενείς υπολογισμούς γράφεται με τη μορφή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi F^2(\mathbf{r})} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0) [\tilde{\mathbf{I}} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}] F(\mathbf{r}) \quad (1.102)$$

όπου

$$F(\mathbf{r}) = r |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \quad (1.103)$$

και

$$\nabla F(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \left[\mathbf{r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \mathbf{r} \right] + \frac{r^2 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.104)$$

Το αποτέλεσμα αυτό για το σφαιρικό αγωγό θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα διατριβή ως μέτρο σύγκρισης της σφαιρικής σε σχέση με την ελλειψοειδή προσέγγιση του γεωμετρικού προτύπου του εγκεφάλου. Συγκεκριμένα, το πεδίο που θα λάβουμε από την επεξεργασία του ελλειψοειδούς αγωγού θα αναχθεί στο αντίστοιχο σφαιρικό, καθώς οι παράμετροι του ελλειψοειδούς θα το οδηγήσουν στη σφαίρα, μέσα από την οριακή διαδικασία πολύπλοκων απροσδιόριστων μορφών.

Πριν όμως από αυτό, θα παρεμβάλλουμε μια εκτενή αναφορά στη γεωμετρία την οποία θα χρησιμοποιήσουμε, δημιουργώντας έτσι το υπόβαθρο στο οποίο θα αναζητήσουμε, από πλευράς γεωμετρίας, την εποπτεία του προτύπου και, από πλευράς αναλυτικής επεξεργασίας, τη απαραίτητη φασματική ανάλυση του τελεστή του Laplace για την επίλυση των απαιτούμενων προβλημάτων συννοριακών τιμών.

Σημειώνουμε εδώ ότι οι εκτενείς αυτές παρεμβολές δεν περιέχουν απλά γνωστά αποτελέσματα που μπορούν να βρεθούν σε σχετικές βιβλιογραφικές αναφορές. Ένα μεγάλο μέρος αποτελεί εργασία υποβάθρου, που αλλού τροποποίησε και προσάρμοσε γνωστά αποτελέσματα και αλλού παρήγαγε πρωτότυπα αποτελέσματα που είναι απαραίτητα για την επίλυση των ευθέων EEG και MEG προβλημάτων σε ελλειψοειδή γεωμετρία.

Για παράδειγμα, ο εκφυλισμός των αποτελεσμάτων του ελλειψοειδούς στην περίπτωση της σφαίρας απαιτεί την εύρεση και απόδειξη πολύπλοκων σχέσεων μεταξύ των εσωτερικών και των εξωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών, με βάση τις οποίες αντιμετωπίζονται κατά μοναδικό τρόπο οι ιδιόρρυθμες απροσδιοριστίες του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν κλειδί για την κατανόηση του τρόπου με τον οποίον συνδέονται οι αρμονικοί υπόχωροι της ελλειψοειδούς με την σφαιρική γεωμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ I - Το γεωμετρικό υπόβαθρο

2.1. Εισαγωγή.

Κάθε επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο που περιγράφεται από μία ομογενή πολωνυμική εξίσωση, με μεταβλητές τις τρεις συντεταγμένες ενός σημείου της επιφάνειας, χαρακτηρίζεται από το βαθμό της εξίσωσης αυτής. Έτσι, για παράδειγμα τα επίπεδα, τα οποία περιγράφονται από πρωτοβάθμια εξίσωση της μορφής $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικούς αριθμούς, θεωρούνται επιφάνειες πρώτου βαθμού, ενώ η σφαίρα, που περιγράφεται από εξίσωση της μορφής $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, θεωρείται επιφάνεια δευτέρου βαθμού.

Στην παράγραφο αυτή θα παρακολουθήσουμε τη γέννηση όλων των επιφανειών δευτέρου βαθμού μέσα από τη γενική τετραγωνική μορφή

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \bar{a}_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \sum_{i=1}^3 \bar{\beta}_i \bar{x}_i + \bar{c} = 0. \quad (2.1)$$

Στρίβοντας κατάλληλα το σύστημα των συντεταγμένων στο οποίο είναι εκφρασμένη η (2.1) ώστε να απαλειφθούν οι μεικτοί όροι $\bar{x}_i \bar{x}_j$ με $i \neq j$, και μετατοπίζοντας

παράλληλα τους άξονες, ώστε να απορροφηθούν και οι πρωτοβάθμιοι όροι με τη βοήθεια στοιχειώδους Άλγεβρας, η (2.1) οδηγείται στην κανονική της μορφή,

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 = d \quad (2.2)$$

όπου $c_1, c_2, c_3, d \in \mathbb{R}$.

Όταν $d \neq 0$ η μορφή (2.2) ονομάζεται μη εκφυλισμένη. Αποδεικνύεται πως η διερεύνηση της μη εκφυλισμένης μορφής (2.2), ανασύρει όλες τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού, μέσω της ισοδυναμίας της

$$\bar{c}_1 x_1^2 + \bar{c}_2 x_2^2 + \bar{c}_3 x_3^2 = 1 \quad (2.3)$$

όπου $\bar{c}_i = c_i / d$, $i = 1, 2, 3$.

Έτσι, η θετικότητα των συντελεστών $\bar{c}_i$, επιτρέπει την αντικατάσταση $\bar{c}_i = \alpha_i^{-2}$, $i = 1, 2, 3$ και γεννά το τριαξονικό ελλειψοειδές

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \quad (2.4)$$

με $0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty$, του οποίου εκφυλισμένες μορφές αποτελούν το πεπλατυσμένο σφαιροειδές με $0 < \alpha_3 < \alpha_2 = \alpha_1$, το επίμηκες σφαιροειδές με $0 < \alpha_3 = \alpha_2 < \alpha_1$ και η σφαίρα $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$.

Η αρνητικότητα ενός μόνο από τους συντελεστές της (2.3), επιτρέπει την αντικατάσταση $\bar{c}_1 = \alpha_1^2$, $\bar{c}_2 = \alpha_2^2$, $\bar{c}_3 = -\alpha_3^2$ και οδηγεί στο μονόχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \quad (2.5)$$

ενώ η αρνητικότητα δύο από τους τρεις συντελεστές της (2.3)

$c_1 = \alpha_1^2$, $c_2 = -\alpha_2^2$, $c_3 = -\alpha_3^2$ οδηγεί στο δίχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1. \quad (2.6)$$

Όπως θα δείξουμε παρακάτω, από κάθε σημείο του χώρου διέρχεται ένα ελλειψοειδές, ένα μονόχωνο και ένα δίχωνο υπερβολοειδές. Έτσι, οι τρεις αυτές επιφάνειες δευτέρου βαθμού δημιουργούν σύστημα συντεταγμένων, μέσω του οποίου μπορούν να περιγραφούν ως ειδικές περιπτώσεις όλες οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού.

Καθώς μάλιστα, τα περισσότερα φυσικά προβλήματα αφορούν επιφάνειες δευτέρου βαθμού, το σύστημα του ελλειψοειδούς, του μονόχωνου υπερβολοειδούς και του δίχωνου υπερβολοειδούς αποτελεί το καταλληλότερο σύστημα συντεταγμένων για την περιγραφή φυσικών συστημάτων.

Αλλά σ' αυτό θα επανέλθουμε αργότερα.

2.2 Η γέννηση του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων.

Οι μορφές των επιφανειών β' βαθμού που ορίζονται μέσω των εξισώσεων (2.4), (2.5) και (2.6) αποτελούν γεωμετρικές αναπαραστάσεις των ριζών της συνάρτησης

$$f(\lambda) = \frac{x_1^2}{\alpha_1^2 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2 - \lambda} - 1 \quad (2.7)$$

στα διαστήματα $(-\infty, \alpha_3^2)$, (α_3^2, α_2^2) , (α_2^2, α_1^2) αντίστοιχα, όπου $0 < \alpha_3^2 < \alpha_2^2 < \alpha_1^2 < +\infty$.

Καθώς η συνάρτηση $f(\lambda)$ είναι συνεχής και έχει θετική παράγωγο και ετερόσημες οριακές τιμές σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα, το θεώρημα του Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας ρίζας της $f(\lambda)$ σε καθένα απ' αυτά.

Έτσι, δεδομένων των ημιαξόνων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και λαμβάνοντας υπ' όψη το πρόσημο των παρονομαστών της (2.7), η

$$f(\lambda) = 0 \quad (2.8)$$

περιγράφει κατά μοναδικό τρόπο την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς, όταν η ρίζα ανήκει στο διάστημα $(-\infty, \alpha_3^2)$, ενός μονόχωνου υπερβολοειδούς, όταν η ρίζα ανήκει στο (α_3^2, α_2^2) , και ενός δίχωνου υπερβολοειδούς όταν η ρίζα ανήκει στο (α_2^2, α_1^2) .

Με άλλα λόγια, από ένα σημείο (x_1, x_2, x_3) του χώρου, διέρχεται ένα ελλειψοειδές, ένα μονόχωνο και ένα δίχωνο υπερβολοειδές, οι οποίες επιφάνειες περιγράφονται από την ίδια εξίσωση (2.8) για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

Αντιστρόφως, καθώς το λ διαγράφει τα αντίστοιχα διαστήματα, κάθε μία από τις τρεις αυτές οικογένειες επιφανειών καλύπτουν πλήρως το χώρο, με αποτέλεσμα, να μην υπάρχει κανένα σημείο στον $\mathbb{R}^3$ στο οποίο να μην αντιστοιχεί μία τέτοια τριάδα επιφανειών. [29]

Πράγματι, καθώς το λ διατρέχει το διάστημα $(-\infty, \alpha_3^2)$, τα σημεία (x_1, x_2, x_3) που ικανοποιούν την (2.8) ανήκουν σε επιφάνειες ελλειψοειδών που “φουσκώνουν” περνώντας από την εσωτερική επιφάνεια διπλής όψεως της εστιακής έλλειψης

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_3^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} = 1 \quad (2.9)$$

για $\lambda \rightarrow \alpha_{3-}^2$ έως τη σφαίρα άπειρης ακτίνας, όταν $\lambda \rightarrow -\infty$.

Παρόμοια, τα μονόχωνα υπερβολοειδή που εγείρονται όταν η ρίζα της (2.8) σαρώνει το διάστημα (α_3^2, α_2^2) “φουσκώνουν” από την εσωτερική επιφάνεια διπλής όψεως της εστιακής υπερβολής

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} = 1 \quad (2.10)$$

για $\lambda \rightarrow \alpha_{3+}^2$, έως την εξωτερική επιφάνεια διπλής όψεως της έλλειψης (2.9) για $\lambda \rightarrow \alpha_{2-}^2$.

Τέλος, τα δίχωνα υπερβολοειδή καλύπτουν το χώρο, καθώς ξεδιπλώνονται από την εξωτερική επιφάνεια διπλής όψεως της υπερβολής (2.10), για $\lambda \rightarrow \alpha_{2+}^2$ και ανοίγονται κατά συνεχή τρόπο έως το όριο $\lambda \rightarrow \alpha_{1-}^2$ οπότε τα δύο φύλλα συναντώνται στο επίπεδο διπλής όψεως $x_1 x_3$.

Έτσι, από κάθε σημείο του χώρου διέρχεται ένα ελλειψοειδές, ένα μονόχωνο και ένα δίχωνο υπερβολοειδές, τα οποία έχουν κοινές εστίες και ημιεστιακές αποστάσεις που συνδέονται με τους ημιάξονες μέσω των σχέσεων

$$h_1^2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \quad (2.11)$$

$$h_2^2 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \quad (2.12)$$

$$h_3^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2. \quad (2.13)$$

Κατά συνέπεια, οι τρεις επιφάνειες που ικανοποιούν την (2.8) στα διαστήματα όπου μεταβάλλεται η παράμετρος λ , αποτελούν σύστημα συντεταγμένων.

Επιπλέον, αποδεικνύεται πως οι τρεις αυτές επιφάνειες τέμνονται, σε κάθε σημείο, ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, με αποτέλεσμα το σύστημα συντεταγμένων το οποίο αποτελούν, να είναι ορθογώνιο.

Πράγματι, λαμβάνοντας την κλίση της συνάρτησης f από την (2.7), και ορίζοντας

$$f(\lambda_i) = f_i(\lambda) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

όπου οι δείκτες $i = 1, 2, 3$ αντιστοιχούν στο δίχωνο υπερβολοειδές, στο μονόχωνο υπερβολοειδές και στο ελλειψοειδές αντίστοιχα, παίρνουμε

$$\nabla_r(f_i(\lambda)) = \left(\frac{2x_1}{\alpha_1^2 - \lambda_i}, \frac{2x_2}{\alpha_2^2 - \lambda_i}, \frac{2x_3}{\alpha_3^2 - \lambda_i} \right). \quad (2.15)$$

Τότε, για κάθε $i \neq j$ και $i, j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \nabla_r(f_i(\lambda)) \cdot \nabla_r(f_j(\lambda)) &= \sum_{k=1}^3 \frac{4x_k^2}{(\alpha_k^2 - \lambda_i)(\alpha_k^2 - \lambda_j)} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{4x_k^2}{\lambda_i - \lambda_j} \left(\frac{1}{\alpha_k^2 - \lambda_i} - \frac{1}{\alpha_k^2 - \lambda_j} \right) \\ &= \frac{4}{\lambda_i - \lambda_j} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{\alpha_k^2 - \lambda_i} - \sum_{k=1}^3 \frac{x_k^2}{\alpha_k^2 - \lambda_j} \right) \\ &= \frac{4}{\lambda_i - \lambda_j} (1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

ως συνέπεια της (2.14).

Το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που γεννιέται από την εξίσωση (2.8) με συντεταγμένες επιφάνειες το ελλειψοειδές, το μονόχωνο και το δίχωνο υπερβολοειδές, λέγεται ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων.

2.3 Οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες.

Οι εξισώσεις (2.14) περιγράφουν της συντεταγμένες επιφάνειες του ελλειψοειδούς συστήματος. Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να επιλυθεί το σύστημα (2.14) ως προς τα x_1, x_2, x_3 για να καθοριστούν εκείνες οι παράμετροι που θα αποτελέσουν τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες [29].

Θεωρώντας τις αποστάσεις των ριζών λ_i της $f(\lambda)$ από τον μέγιστο ημιάξονα α_1 εισάγουμε τις μεταβλητές ρ, μ, ν έτσι ώστε

$$\rho^2 = \alpha_1^2 - \lambda_3, \quad \lambda_3 \in (-\infty, \alpha_3^2) \quad (2.17)$$

$$\mu^2 = \alpha_1^2 - \lambda_2, \quad \lambda_2 \in (\alpha_3^2, \alpha_2^2) \quad (2.18)$$

$$\nu^2 = \alpha_1^2 - \lambda_1, \quad \lambda_1 \in (\alpha_2^2, \alpha_1^2). \quad (2.19)$$

Τότε, τα διαστήματα μεταβολής των ρ^2, μ^2, ν^2 με τη βοήθεια και των (2.11)-(2.13), είναι

$$\rho^2 \in (\alpha_1^2 - \alpha_3^2, +\infty) = (h_2^2, +\infty) \quad (2.20)$$

$$\mu^2 \in (\alpha_1^2 - \alpha_2^2, \alpha_1^2 - \alpha_3^2) = (h_3^2, h_2^2) \quad (2.21)$$

$$v^2 \in (0, \alpha_1^2 - \alpha_2^2) = (0, h_3^2). \quad (2.22)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.17)-(2.19) στις (2.14) και χρησιμοποιώντας τις (2.11)-(2.13) παίρνουμε την παρακάτω περιγραφή των συντεταγμένων επιφανειών του ελλειψοειδούς συστήματος, η οποία εισάγει τη δομική σύνδεσή τους, δηλαδή την εξάρτηση από τις κοινές τους εστίες:

$$\frac{x_1^2}{\rho^2} + \frac{x_2^2}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\rho^2 - h_2^2} = 1 \quad (2.23)$$

$$\frac{x_1^2}{\mu^2} + \frac{x_2^2}{\mu^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\mu^2 - h_2^2} = 1 \quad (2.24)$$

$$\frac{x_1^2}{v^2} + \frac{x_2^2}{v^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{v^2 - h_2^2} = 1 \quad (2.25)$$

όπου τα διαστήματα μεταβολής των ρ^2, μ^2, v^2 δίνονται στις (2.20)-(2.22), που συνδυάζονται στη συνεχή ανισότητα

$$0 < v^2 < h_3^2 < \mu^2 < h_2^2 < \rho^2 < +\infty. \quad (2.26)$$

Οι μεταβλητές ρ, μ, v λέγονται ελλειψοειδείς συντεταγμένες και η σταθερή τιμή της καθεμιάς δίνει αντίστοιχα ένα ελλειψοειδές, ένα μονόχωνο υπερβολοειδές και ένα δίχωνο υπερβολοειδές.

Το σύστημα των εξισώσεων (2.23)-(2.25) είναι γραμμικό ως προς x_1^2, x_2^2, x_3^2 με μη μηδενική ορίζουσα. Η μοναδική του λύση βρίσκεται μετά από μακροσκελείς αλλά τετριμμένους αλγεβρικούς χειρισμούς και είναι η ακόλουθη

$$x_1^2 = \frac{\rho^2 \mu^2 v^2}{h_2^2 h_3^2} \quad (2.27)$$

$$x_2^2 = \frac{(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - v^2)}{h_1^2 h_3^2} \quad (2.28)$$

$$x_3^2 = \frac{(\rho^2 - h_2^2)(h_2^2 - \mu^2)(h_2^2 - v^2)}{h_1^2 h_2^2}. \quad (2.29)$$

Κατά τον αποτετραγωνισμό των (2.27)-(2.29) τα κατάλληλα πρόσημα των x_1, x_2, x_3 για κάθε ογδομήριο εξασφαλίζονται μέσω των παρακάτω συμβάσεων [29].

Η ρ -μεταβλητή, καθώς μεταβάλλεται σε άπειρο διάστημα, παίζει το ρόλο “ακτινικής” μεταβλητής και θεωρείται πάντα θετική, δηλ. $\rho \in (h_2, +\infty)$. Οι μ, v μεταβλητές

μεταβάλλονται σε πεπερασμένα διαστήματα και παίζουν το ρόλο “γωνιακών” μεταβλητών.

Ειδικά, καθώς $\mu^2 \in (h_3^2, h_2^2)$, συμβατικά θεωρείται πως το μ σαρώνει το θετικό διάστημα (h_3, h_2) δύο φορές, μία φορά αυξανόμενο και μία φορά μειούμενο, προσδίδοντας στη μεταβλητή x_3 θετικό ή αρνητικό πρόσημο αντιστοίχως.

Ομοίως το v θεωρείται πως σαρώνει το διάστημα $(-h_3, h_3)$ δύο φορές, προσδίδοντας στην μεταβλητή x_2 θετικό πρόσημο, όταν το v αυξάνεται από $-h_3$ σε h_3 , και αρνητικό όταν μειώνεται από h_3 σε $-h_3$.

Τέλος, η μεταβλητή v θεωρείται ότι καθορίζει το πρόσημο της x_1 κατά τρόπο ώστε οι x_1 και v να παίρνουν συγχρόνως το ίδιο πρόσημο.

Έτσι τα πρόσημα των x_1, x_2, x_3 που καθορίζουν το ογδομήριο στο οποίο ανήκει το σημείο (x_1, x_2, x_3) , καθορίζονται πλήρως από τη φορά που οι γωνιακές μεταβλητές μ, v σαρώνουν το διάστημα μεταβολής τους.

Κατά συνέπεια, οι καρτεσιανές συντεταγμένες συνδέονται με τις αντίστοιχες ελλειψοειδείς για κάθε ογδομήριο μέσω των σχέσεων

$$x_1 = \frac{\rho \mu v}{h_2 h_3} \quad (2.30)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v^2}}{h_1 h_3} \quad (2.31)$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - v^2}}{h_1 h_2} \quad (2.32)$$

όπου τα πρόσημα των x_1, x_2, x_3 καθορίζονται από τις παραπάνω συμβάσεις διαγραφής των διαστημάτων μεταβολής των μ και v .

2.4 Η αντιστροφή του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων.

Αποδεικνύεται θεωρητικά ότι οι εξισώσεις (2.30)-(2.32) μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων ενός σημείου στις αντίστοιχες ελλειψοειδείς, μπορούν να αντιστραφούν. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός έχει ιδιαίτερος πολύπλοκη και γι’

αυτό δύσχρηστη μορφή, η θεωρητική αξία του όμως είναι σημαντική και γι' αυτό παραθέτουμε τα βασικά σημεία της παραγωγής του και τα τελικά αποτελέσματα.

Το σύστημα των εξισώσεων (2.23)-(2.25), που έδωσε ως λύση τις (2.30)-(2.32) μπορεί να συνοψιστεί στην

$$\frac{x_1^2}{y} + \frac{x_2^2}{y - h_3^2} + \frac{x_3^2}{y - h_2^2} = 1 \quad (2.33)$$

η οποία για τα $y = \rho^2, \mu^2, \nu^2$ που ικανοποιούν την (2.26), δίνει αντίστοιχα τις (2.23)-(2.25).

Οι τιμές ρ^2, μ^2, ν^2 της παραμέτρου y είναι οι τρεις πραγματικές και άνισες ρίζες της συνάρτησης

$$f(y) = \frac{g(y)}{y(y - h_3^2)(y - h_2^2)} \quad (2.34)$$

με

$$g(y) = x_1^2(y - h_3^2)(y - h_2^2) + x_2^2y(y - h_2^2) + x_3^2y(y - h_3^2) - y(y - h_3^2)(y - h_2^2) \quad (2.35)$$

η οποία ορίζεται στο σύνολο $(0, h_3^2) \cup (h_3^2, h_2^2) \cup (h_2^2, +\infty)$.

Είναι προφανές ότι οι ρίζες της $f(y)$ συμπίπτουν με τις ρίζες της $g(y)$, η οποία είναι συνεχής συνάρτηση του y και παίρνει ετερόσημες οριακές τιμές στα άκρα των διαστημάτων $(0, h_3^2)$, (h_3^2, h_2^2) , (h_2^2, y) με $y \rightarrow +\infty$. Έτσι, το θεώρημα του Bolzano εξασφαλίζει πως η g έχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα. Τις πραγματικές και άνισες αυτές ρίζες θα υπολογίσουμε αμέσως παρακάτω.

Η μορφή της g , ως πολυώνυμο τρίτου βαθμού στην μεταβλητή y , είναι

$$\begin{aligned} -g(y) &= y^3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + h_2^2 + h_3^2)y^2 \\ &+ [x_1^2(h_2^2 + h_3^2) + x_2^2h_2^2 + x_3^2h_3^2 + h_2^2h_3^2]y - x_1^2h_2^2h_3^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

η οποία δίνει τις ρίζες της μέσω της θεωρίας του Cardano (βλ. Παράρτημα Α), ως εξής

$$y_1 = -\frac{\alpha}{3} + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \quad (2.37)$$

$$y_2 = -\frac{\alpha}{3} + \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B} \quad (2.38)$$

$$y_3 = -\frac{\alpha}{3} + \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B} \quad (2.39)$$

όπου

$$A = -\frac{1}{2}\left(c - \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(c - \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27}\right)^2 + \left(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\right)^3} \quad (2.40)$$

$$B = -\frac{1}{2}\left(c - \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(c - \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27}\right)^2 + \left(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}\right)^3} \quad (2.41)$$

$$a = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - h_2^2 - h_3^2 \quad (2.42)$$

$$b = x_1^2(h_2^2 + h_3^2) + x_2^2h_2^2 + x_3^2h_3^2 + h_2^2h_3^2 \quad (2.43)$$

$$c = -x_1^2h_2^2h_3^2 \quad (2.44)$$

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad (2.45)$$

$$\omega^2 = \bar{\omega} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \quad (2.46)$$

Με σκοπό να αντιστοιχίσουμε τις ρίζες y_1, y_2, y_3 , όπως δίνονται στις (2.37)-(2.39) με τις παραμέτρους ρ^2, μ^2, ν^2 παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι είναι όλες πραγματικές, που συμβαίνει μόνον όταν τα A και B είναι μιγαδικοί αριθμοί (βλ. Παράρτημα Α), και μάλιστα συζυγείς.

Καθώς η εξίσωση (2.45) επιβάλλει στο ω να είναι κυβική ρίζα της μονάδας, τα $\sqrt[3]{A}$, $\omega\sqrt[3]{A}$ και $\omega^2\sqrt[3]{A}$ είναι οι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου. Επειδή, επιπλέον, στη (2.40) το υπόριζο είναι αρνητικό, έπεται ότι το κύριο όρισμα της $\sqrt[3]{A}$ ανήκει στο $(0, \pi)$, δηλαδή το τρίγωνο έχει την κορυφή που αντιστοιχεί στο $\sqrt[3]{A}$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Τότε

$$\operatorname{Re}\{\omega\sqrt[3]{A}\} < \operatorname{Re}\{\omega^2\sqrt[3]{A}\} < \operatorname{Re}\{\sqrt[3]{A}\}. \quad (2.47)$$

Επιπλέον, αν χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\bar{A}$ για το συζυγή του A , τότε

$$B = \bar{A} \quad (2.48)$$

$$\sqrt[3]{B} = \overline{\sqrt[3]{A}} \quad (2.49)$$

$$\omega\sqrt[3]{B} = \overline{\omega^2\sqrt[3]{A}} \quad (2.50)$$

$$\omega^2\sqrt[3]{B} = \overline{\omega\sqrt[3]{A}} \quad (2.51)$$

και οι (2.37)-(2.39) μέσω των (2.49)-(2.51), δίνουν τις ρίζες y_1, y_2, y_3

$$y_1 = -\frac{\alpha}{3} + 2 \operatorname{Re}\{\sqrt[3]{A}\} \quad (2.52)$$

$$y_2 = -\frac{\alpha}{3} + 2 \operatorname{Re}\{\omega \sqrt[3]{A}\} \quad (2.53)$$

$$y_3 = -\frac{\alpha}{3} + 2 \operatorname{Re}\{\omega^2 \sqrt[3]{A}\}. \quad (2.54)$$

Τότε, η ανισότητα (2.47) επιβάλλει στις ρίζες y_1, y_2, y_3 τη διάταξη

$$y_2 < y_3 < y_1 \quad (2.55)$$

και κατά συνέπεια την ταύτιση,

$$\rho^2 = -\frac{\alpha}{3} + 2 \operatorname{Re}\{\sqrt[3]{A}\} \quad (2.56)$$

$$v^2 = -\frac{\alpha}{3} + 2 \operatorname{Re}\{\omega \sqrt[3]{A}\} \quad (2.57)$$

$$\mu^2 = -\frac{\alpha}{3} + 2 \operatorname{Re}\{\omega^2 \sqrt[3]{A}\}. \quad (2.58)$$

Οι εξισώσεις (2.56)-(2.58) με τη βοήθεια των (2.40)-(2.46) δίνουν τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες συναρτήσει των αντίστοιχων καρτεσιανών και αποτελούν τον αντίστροφο μετασχηματισμό του (2.30)-(2.32).

2.5 Χρήσιμες γεωμετρικές ιδιότητες του ελλειψοειδούς.

Έστω S η επιφάνεια του βασικού ελλειψοειδούς

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \quad (2.59)$$

που προκύπτει από την (2.17) για $\lambda=0$, είτε από την (2.23) για $\rho = \alpha_1$.

Επί της επιφάνειας S ορίζονται οκτώ ισομετρίες, δηλαδή οκτώ απεικονίσεις (ενδογενείς) μεταξύ των σημείων της οι οποίες διατηρούν τις σχετικές αποστάσεις στα πρότυπα και στις εικόνες αναλλοίωτες.

Αυτές είναι η ταυτοτική, η συμμετρία ως προς το κέντρο του ελλειψοειδούς (αντιστροφή), η στροφή γύρω από καθέναν από τους τρεις κυρίως άξονες κατά γωνία π και η ανάκλαση σε καθένα από τα κύρια επίπεδα του ελλειψοειδούς.

Οι οκτώ αυτές ισομετρίες οι οποίες αποτελούν πεπερασμένη ομάδα ως προς την σύνθεση, αντιστοιχούν σε κάθε σημείο του ελλειψοειδούς τα επτά συμμετρικά του, εξασφαλίζοντας την επάρκεια της μελέτης του σε ένα μόνον ογδοημόριο, εφ' όσον η

προβολή των αποτελεσμάτων στα άλλα ογδοημόρια επιτυγχάνεται μέσω της ομάδας των συμμετριών του.

Μία ακόμη χρήσιμη για την παρούσα εργασία απεικόνιση επί των σημείων της επιφάνειας του ελλειψοειδούς, είναι η απεικόνιση του Gauss και η συνυφασμένη μ' αυτήν συνάρτηση φορέα.

Η απεικόνιση του Gauss αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $\mathbf{r}$ μιας αστεροειδούς επιφάνειας S , το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$, δηλαδή

$$S \ni \mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \in S^2 \quad (2.60)$$

όπου με S^2 συμβολίζουμε την μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$.

Η συνάρτηση φορέα h ορίζεται επίσης επί της επιφάνειας S με τον τύπο

$$h(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S. \quad (2.61)$$

Για δεδομένο $\mathbf{r} \in S$, η τιμή $h(\mathbf{r})$ δίνει την απόσταση της αρχής των αξόνων από το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $\mathbf{r}$.

Σχήμα 2.1

Η χρησιμότητα της απεικόνισης του Gauss και της αντίστοιχης συνάρτησης φορέα στο ελλειψοειδές, οφείλεται στο γεγονός πως, εξαιρουμένων των έξι σημείων τομής με τους άξονες, δεν υπάρχει κανένα σημείο στην επιφάνειά του, στο οποίο το κάθετο διάνυσμα να έχει τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης, σε αντίθεση με τη σφαίρα, που σε όλα τα σημεία της το κάθετο διάνυσμα είναι ακτινικό.

Έτσι η απεικόνιση του Gauss προσφέρει ένα μέτρο της εκτροπής του καθέτου διανύσματος από τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης επάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Η εν λόγω εκτροπή αντανακλά την ανισοτροπία του ελλειψοειδούς και σε κάποιο βαθμό το χαρακτηρίζει. Για το ελλειψοειδές (2.59) αποδεικνύεται [7] ότι

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\alpha_i^4} \right]^{-1/2}. \quad (2.62)$$

2.6 Δυαδική αναπαράσταση του ελλειψοειδούς.

Έστω το συμμετρικό και θετικά ορισμένο δυαδικό [7]

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\alpha_i^2} \quad (2.63)$$

εκφρασμένο στην Καρτεσιανή βάση $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$. Τότε, η διπλή συστολή του με το διάνυσμα

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (2.64)$$

δίνει

$$\mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} \quad (2.65)$$

και επομένως, η εξίσωση

$$\mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} = 1 \quad (2.66)$$

συμπίπτει με την εξίσωση (2.59) του βασικού ελλειψοειδούς.

Με αυτή την έννοια, θεωρούμε ότι το δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}$ χαρακτηρίζει το ελλειψοειδές (2.59), ενώ το αντίστροφο του

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \quad (2.67)$$

χαρακτηρίζει το αντίστροφο ελλειψοειδές, του οποίου οι ημιάξονες έχουν μήκη ίσα με τα αντίστροφα των αντίστοιχων ημιαξόνων του (2.66). Θα ολοκληρώσουμε τη μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων του ελλειψοειδούς που είναι χρήσιμα στην παρούσα εργασία, με τη δυαδική αναπαράσταση του εφαπτόμενου επιπέδου και του καθέτου διανύσματος σε τυχόν σημείο της επιφανείας του.

Από την Αναλυτική Γεωμετρία είναι γνωστό ότι η διανυσματική εξίσωση ευθείας ε , που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{d}$ και έχει διεύθυνση $\mathbf{b}$ είναι

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{d} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.68)$$

Αν ένα σημείο $\mathbf{r}$ ανήκει τόσο στην ευθεία (2.68) όσο και στο ελλειψοειδές (2.66), θα πρέπει να ικανοποιεί τη δευτεροβάθμια, ως προς t , εξίσωση

$$t^2(\mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{b}) + 2t(\mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d}) + (\mathbf{d} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d} - 1) = 0. \quad (2.69)$$

Αν η ευθεία (2.68) ανήκει στο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\mathbf{d}$ της επιφάνειας του ελλειψοειδούς, τότε θα πρέπει να έχει κοινό μόνον το σημείο επαφής $\mathbf{r} = \mathbf{d}$, δηλ.

$$\mathbf{d} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d} = 1 \quad (2.70)$$

και

$$\mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d} = 0. \quad (2.71)$$

Αντικαθιστώντας το $\mathbf{b}$ από την (2.68) στην (2.71) παίρνουμε

$$(\mathbf{r} - \mathbf{d}) \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (2.72)$$

όπου $\mathbf{r}$ είναι οποιοδήποτε σημείο της ευθείας εκτός του σημείου επαφής $\mathbf{d}$. Τότε η (2.72) με τη βοήθεια της (2.70), συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d} = 1. \quad (2.73)$$

Η (2.73) είναι η δυαδική εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $\mathbf{d}$ της επιφάνειας του ελλειψοειδούς $\tilde{\mathbf{A}}$.

Απ' την άλλη μεριά, η εξίσωση (2.72) υποβάλλει πώς το διάνυσμα $(\mathbf{r} - \mathbf{d})$ που ανήκει στο εφαπτόμενο επίπεδο, είναι κάθετο στο διάνυσμα $\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d}$. Κατά συνέπεια, το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{d}) = \frac{\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d}}{\|\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{d}\|} \quad (2.74)$$

είναι το κάθετο στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, στο σημείο $\mathbf{d}$ αυτής, δηλαδή η εικόνα της απεικόνισης του Gauss στο σημείο $\mathbf{d}$.

2.7 Ο τελεστής του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων.

Ο τελεστής του Laplace σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{J} \left[\partial_u \left(\frac{J}{h_u^2} \partial_u \right) + \partial_v \left(\frac{J}{h_v^2} \partial_v \right) + \partial_\omega \left(\frac{J}{h_\omega^2} \partial_\omega \right) \right] \quad (2.75)$$

όπου

$$J = h_u h_v h_\omega \quad (2.76)$$

και h_u, h_v, h_ω οι μετρικοί συντελεστές που για το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων αποδεικνύεται πως παίρνουν τη μορφή [29]

$$h_\rho = \left[\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - h_3^2)(\rho^2 - h_2^2)} \right]^{1/2} \quad (2.77)$$

$$h_\mu = \left[\frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - h_3^2)(h_2^2 - \mu^2)} \right]^{1/2} \quad (2.78)$$

$$h_\nu = \left[\frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(h_3^2 - \nu^2)(h_2^2 - \nu^2)} \right]^{1/2}. \quad (2.79)$$

Τότε η (2.75) μέσω των (2.76)-(2.79) δίνει, για τον τελεστή του Laplace σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες, τη μορφή

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \left[(\rho^2 - h_3^2)(\rho^2 - h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho(2\rho^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \\ & + \frac{1}{(\mu^2 - \rho^2)(\mu^2 - \nu^2)} \left[(\mu^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \mu(2\mu^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \\ & + \frac{1}{(\nu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \mu^2)} \left[(\nu^2 - h_3^2)(\nu^2 - h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu(2\nu^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{\partial}{\partial \nu} \right]. \quad (2.80) \end{aligned}$$

Κάθε όρος του τελεστή Δ όπως δίνεται στη μορφή (2.80), είναι γινόμενο ενός αλγεβρικού παράγοντα που φέρει και τις τρεις ελλειψοειδείς συντεταγμένες, συζευγμένες μεταξύ τους, και ενός διαφορικού παράγοντα που εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή και έχει κοινή δομή και στους τρεις όρους.

Η κοινή αυτή δομή στη μορφή (2.80) ενέπνευσε τον ορισμό των “θερμομετρικών παραμέτρων” ξ, η, ζ μέσω των σχέσεων

$$\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.81)$$

$$\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \equiv \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.82)$$

$$\sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \equiv \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (2.83)$$

ή όπως αποδεικνύεται, τον ορισμό τους μέσω των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων (βλ. Παράρτημα Β)

$$\xi(\rho) = \int_{h_2}^{\rho} \frac{du}{\sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{u^2 - h_2^2}} \quad (2.84)$$

$$\eta(\mu) = \int_{h_3}^{\mu} \frac{du}{\sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - u^2}} \quad (2.85)$$

$$\zeta(\nu) = \int_0^{\nu} \frac{du}{\sqrt{h_3^2 - u^2} \sqrt{h_2^2 - u^2}}. \quad (2.86)$$

Με τη βοήθεια των (2.81)-(2.83), η (2.80) γράφεται

$$\Delta = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \quad (2.87)$$

και δίνει τον τελεστή του Laplace σε ελλειψοειδείς – θερμομετρικές συντεταγμένες. Η έκφραση (2.87) διαφέρει από την Καρτεσιανή μορφή του τελεστή του Laplace κατά το ότι οι συντελεστές των παραγώγων δεύτερης τάξης δεν είναι ίσοι μεταξύ τους. Κατά συνέπεια στην εξίσωση (2.87) η ανισοτροπία του ελλειψοειδούς συστήματος επιβάλλεται μέσω των διαφορετικών συντελεστών $[(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)]^{-1}$, $[(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)]^{-1}$, $[(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)]^{-1}$, έτσι ώστε ο τελεστής Δ να δίνεται ως η τροποποιημένη μορφή της αντίστοιχης Καρτεσιανής, που εμφανίζεται όταν ο τελεστής δρα στον πλήρως ισότροπο χώρο. Σημειώνουμε ακόμη ότι οι συντελεστές της (2.87) είναι συναρτήσεις του χώρου αντανakλώντας έτσι την μεταβαλλόμενη σχετική ανισοτροπία του ελλειψοειδούς συστήματος.

2.8 Η φασματική ανάλυση του τελεστή του Laplace και οι ελλειψοειδείς αρμονικές.

Ο Lamé, στη δεκαετία 1837-1847 [29], επιχείρησε το χωρισμό μεταβλητών του τελεστή του Laplace και κατασκεύασε τις ομώνυμες ιδιοσυναρτήσεις, καθώς και τα **γινόμενα Lamé** γνωστά και ως **ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις**. Στην προσπάθειά του να κατασκευάσει ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις, χρησιμοποίησε τη μορφή (2.87) για τον τελεστή Δ , καθώς και δύο αυθαίρετες παραμέτρους A και B , και ζήτησε η εξίσωση

$$\Delta u(\rho, \mu, \nu) = 0 \quad (2.88)$$

να ικανοποιείται από μία συνάρτηση χωριζομένων μεταβλητών, της μορφής

$$u(\rho, \mu, \nu) = R(\rho)M(\mu)N(\nu). \quad (2.89)$$

Χρησιμοποιώντας αλγεβρικά τεχνάσματα προς αυτή την κατεύθυνση καθώς και τις (2.81)-(2.83), απέδειξε ότι οι τρεις συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής R, M, N

ικανοποιούν όλες την ίδια συνήθη διαφορική εξίσωση στο αντίστοιχο για την κάθε μία διάστημα μεταβολής της μεταβλητής της. Αυτή η εξίσωση έμεινε στην Ιστορία των Μαθηματικών με το όνομα **εξίσωση του Lamé** και είναι η εξής:

$$(x^2 - h_3^2)(x^2 - h_2^2)E''(x) + x(2x^2 - h_3^2 - h_2^2)E'(x) + Ax^2E(x) + BE(x) = 0. \quad (2.90)$$

Η αναζήτηση λύσεων της (2.90) με τη μορφή φθίνουσων δυνάμεων του x

$$E_n(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_{\kappa} x^{n-\kappa} \quad (2.91)$$

και η απαίτηση ο μεγιστοβάθμιος όρος να είναι ο $\alpha_0 x^n$, οδήγησε στην εξής επιλογή για την παράμετρο A

$$A = -n(n+1). \quad (2.92)$$

Κατά συνέπεια, οι συναρτήσεις $R(\rho)$, $M(\mu)$, $N(\nu)$ οφείλουν να ικανοποιούν στα διαστήματα $(h_2^2, +\infty)$, (h_3^2, h_2^2) και $(0, h_3^2)$ αντιστοίχως, τη διαφορική εξίσωση Lamé,

$$(x^2 - h_3^2)(x^2 - h_2^2)E''(x) + x(2x^2 - h_3^2 - h_2^2)E'(x) + [(h_2^2 + h_3^2)P - n(n+1)x^2]E(x) = 0 \quad (2.93)$$

όπου το n είναι θετικός ακέραιος και το $(h_2^2 + h_3^2)P = B$, αυθαίρετη παράμετρος. Οι ιδιολύσεις της εξίσωσης Lamé, οι $R(\rho)$, $M(\mu)$, $N(\nu)$ ονομάζονται **συναρτήσεις Lamé**. Η (2.93) ως συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, την εσωτερική $E_n(x)$, ομαλή στην περιοχή του $x = 0$, και την εξωτερική $F_n(x)$, ομαλή στην περιοχή του απείρου.

Τότε οι ελλειψοειδείς ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Δ θα είναι γινόμενα συναρτήσεων Lamé, ή όπως λέγονται, γινόμενα Lamé

$$IE_n(\rho, \mu, \nu) = E_n(\rho)E_n(\mu)E_n(\nu) \quad (2.94)$$

και

$$IF_n(\rho, \mu, \nu) = F_n(\rho)E_n(\mu)E_n(\nu) \quad (2.95)$$

όπου η ρ -μεταβλητή, καθώς μπορεί να μεταβάλλεται ως το άπειρο καθορίζει το ακτινικό μέρος των ιδιολύσεων, ενώ οι μεταβλητές μ, ν , μεταβαλλόμενες σε πεπερασμένα διαστήματα καθορίζουν το γωνιακό μέρος των ελλειψοειδών αρμονικών.

Εφ'όσον, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, γίνει δυνατό να προσδιοριστεί η εσωτερική λύση $E_n(x)$ της (2.93), τότε η εξωτερική συνάρτηση Lamé $F_n(x)$ μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει της E_n , με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης.

Πράγματι, αναζητώντας λύση της μορφής

$$F_n(x) = E_n(x)\Psi_n(x) \quad (2.96)$$

και αντικαθιστώντας στην (2.93), οδηγούμαστε στην

$$F_n(x) = E_n(x) \int \frac{du}{[E_n(u)]^2 \sqrt{|u^2 - h_3^2|} \sqrt{|u^2 - h_2^2|}} \quad (2.97)$$

όπου τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από το διάστημα μεταβολής της μεταβλητής x .

Η (2.97) εκφρασμένη για τη ρ -μεταβλητή, δίνει τη ρ -εξάρτηση της εξωτερικής αρμονικής $F_n(\rho, \mu, \nu)$, η οποία κατά την αναγωγή του ελλειψοειδούς σε σφαίρα, θέλουμε να ανάγεται απ' ευθείας στην αντίστοιχη εξωτερική σφαιρική αρμονική.

Έτσι, οι $E_n(\rho)$ και $F_n(\rho)$ θέλουμε να ανάγονται στις r^n και $r^{-(n+1)}$ αντίστοιχα και γι' αυτό επιβάλλουμε την κανονικοποίηση

$$F_n(\rho) = cE_n(\rho) \int_{\rho}^{+\infty} \frac{du}{[E_n(u)]^2 \sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{u^2 - h_2^2}}. \quad (2.98)$$

Λαμβάνοντας το όριο όπου το ελλειψοειδές τείνει στην σφαίρα και η ελλειψοειδής ακτινική μεταβλητή ρ τείνει στην αντίστοιχη σφαιρική r , οι ημιεστιακές αποστάσεις h_2, h_3 τείνουν στο μηδέν και η σταθερά c παίρνει την τιμή

$$c = 2n + 1. \quad (2.99)$$

Τότε η κανονικοποιημένη εξωτερική συνάρτηση Lamé γίνεται

$$F_n(\rho) = (2n + 1)E_n(\rho) \int_{\rho}^{+\infty} \frac{du}{[E_n(u)]^2 \sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{u^2 - h_2^2}} \quad (2.100)$$

και ορίζεται στον εξωτερικό του ελλειψοειδούς $\rho =$ σταθερό χώρο.

2.9 Οι εσωτερικές συναρτήσεις Lamé.

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι, να κατασκευαστούν εσωτερικές λύσεις $E_n(x)$ της εξίσωσης Lamé (2.93), έτσι ώστε οι αντίστοιχες εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές $IE_n(\rho, \mu, \nu)$ να έχουν τον ίδιο βαθμό με τις σφαιρικές αρμονικές $r^n Y_n^m(\theta, \phi)$ για $m = -n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$, ενώ το σύνολο $\{IE_n(\rho, \mu, \nu)\}_{n \in \mathbb{N}}$ να είναι πλήρες σύνολο συναρτήσεων στο χώρο των αρμονικών συναρτήσεων σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες.

Η βασική ιδέα του Lamé [7,29] ήταν, να βρεί ένα τρόπο για να συνδέσει τις γωνιακές μεταβλητές του σφαιρικού και του ελλειψοειδούς συστήματος, να χρησιμοποιήσει αυτό τον τρόπο για να μετασχηματίσει τις γνωστές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές Y_n^m , και με βάσει αυτό το μετασχηματισμό να ορίσει νέες συναρτήσεις στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν να απαιτήσει από τις νέες συναρτήσεις, να ικανοποιούν την εξίσωση Lamé (2.93), χρησιμοποιώντας για το λόγο αυτό το βαθμό ελευθερίας που του παρέχει η ελεύθερη παράμετρος P .

Για την εκπλήρωση του σκοπού αυτού, χρησιμοποίησε το μετασχηματισμό

$$\cos \theta_\varepsilon = \frac{\mu \nu}{h_2 h_3} \quad (2.101)$$

$$\sin \theta_\varepsilon \cos \phi_\varepsilon = \frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1 h_3} \quad (2.102)$$

$$\sin \theta_\varepsilon \sin \phi_\varepsilon = \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1 h_2} \quad (2.103)$$

όπου οι γωνίες $\theta_\varepsilon, \phi_\varepsilon$ μεταβάλλονται στα διαστήματα $[0, \pi]$ και $[0, 2\pi)$ αντίστοιχα, καθώς οι μεταβλητές μ, ν μεταβάλλονται στα (h_3, h_2) και $(-h_3, h_3)$ αντίστοιχα.

Η διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon$ που ορίζεται από τις γωνίες θ, ϕ μέσω των (2.101)-(2.103) ονομάζεται **έκκεντρη διεύθυνση** και συνδέεται με τη διεύθυνση $\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu)$ με την απεικόνιση

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathcal{E}}(\rho) \cdot \hat{\mathbf{r}}_\varepsilon \quad (2.104)$$

όπου ο τελεστής $\tilde{\mathcal{E}}$ δίνεται από την έκφραση

$$\tilde{\mathcal{E}}(\rho) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\rho^2 - \alpha_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \quad (2.105)$$

το διάνυσμα θέσης στο ελλειψοειδές σύστημα είναι

$$\mathbf{r} = \left(\rho \frac{\mu\nu}{h_2 h_3}, \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1 h_3}, \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1 h_2} \right) \quad (2.106)$$

και η

$$\hat{\mathbf{r}}_\epsilon = (\cos \theta_\epsilon, \sin \theta_\epsilon \cos \phi_\epsilon, \sin \theta_\epsilon \sin \phi_\epsilon) \quad (2.107)$$

καθορίζει την έκκεντρη διεύθυνση.

Η χρήση του μετασχηματισμού (2.101)-(2.103) στις $(2n+1)$ επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές Y_n^m βαθμού n , οδήγησε στον καθορισμό τεσσάρων κλάσεων ελλειψοειδών συναρτήσεων, τις οποίες περιγράφουμε στη συνέχεια [7].

Η **Lamé κλάση K** περιλαμβάνει συναρτήσεις αρτίων επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών αρτίας τάξεως

$$Y_n^{2m,e}(\theta, \varphi) = P_n^{2m}(\cos \theta) \cos(2m\varphi) \quad 2m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.108)$$

όπου P_n^{2m} είναι οι συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους [8,29].

Οι συναρτήσεις της K κλάσεως είναι της μορφής

$$K(\mu, \nu) = U_n(\mu)U_n(\nu) \quad (2.109)$$

όπου τα U_n είναι δυναμοσειρές με μέγιστο βαθμό n , και το πλήθος τους είναι $\frac{n}{2} + 1$,

αν το n είναι άρτιο, και $\frac{n+1}{2}$, αν το n είναι περιττό.

Η **Lamé κλάση L** περιλαμβάνει συναρτήσεις που προήλθαν από μετασχηματισμό αρτίων επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών περιττής τάξεως

$$Y_n^{2m+1,e}(\theta, \varphi) = P_n^{2m+1}(\cos \theta) \cos(2m+1)\varphi. \quad (2.110)$$

Είναι συναρτήσεις της μορφής

$$L(\mu, \nu) = \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2} U_{n-1}(\mu)U_{n-1}(\nu) \quad (2.111)$$

όπου τα U_{n-1} είναι δυναμοσειρές με μέγιστο βαθμό $n-1$, και το πλήθος

τους είναι $\frac{n}{2}$ αν το n άρτιο, ενώ $\frac{n+1}{2}$ αν το n είναι περιττό.

Στην **Lamé κλάση M** ανήκουν οι συναρτήσεις που προήλθαν από μετασχηματισμό περιττών επιφανειακών αρμονικών περιττής τάξης

$$Y_n^{2m+1,0}(\theta, \varphi) = P_n^{2m+1}(\cos \theta) \sin(2m+1)\varphi \quad (2.112)$$

και είναι της μορφής

$$M(\mu, \nu) = \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} U_{n-1}(\mu) U_{n-1}(\nu) \quad (2.113)$$

όπου τα U_{n-1} ορίζονται όπως στην (2.111). Το πλήθος των M-συναρτήσεων είναι $\frac{n}{2}$

όταν το n είναι άρτιο και $\frac{n+1}{2}$ όταν το n είναι περιττό.

Τέλος, στην **Lamé κλάση N** ανήκουν οι συναρτήσεις που προήλθαν από μετασχηματισμό των περιττών συναρτήσεων αρτίας τάξεως,

$$Y_n^{2m,0}(\theta, \varphi) = P_n^{2m}(\cos \theta) \sin(2m\varphi) \quad (2.114)$$

και είναι της μορφής

$$N(\mu, \nu) = \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} U_{n-2}(\mu) U_{n-2}(\nu) \quad (2.115)$$

όπου τα U_{n-2} είναι δυναμοσειρές μεγίστου βαθμού ίσου με n-2. Το πλήθος τους είναι

$\frac{n}{2}$ όταν το n είναι άρτιο και $\frac{n-1}{2}$ όταν το n είναι περιττό.

Συνολικά, με τον τρόπο αυτό ορίζονται, όπως ήταν αναμενόμενο $2n+1$, συναρτήσεις από όλες τις κλάσεις, όταν το n είναι άρτιο, και ομοίως όταν το n είναι περιττό.

Οι εξισώσεις (2.109), (2.111), (2.113) και (2.115) μεταφέρουν την πληρότητα των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών στις επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές, επάνω σε οποιοδήποτε ελλειψοειδές που αντιστοιχεί σε κάποια σταθερή τιμή του ρ.

Καθώς είναι όλες χωριζόμενων μεταβλητών, θα χρησιμοποιήσουμε τη μορφή τους

$$K(x) = U_n(x) \quad (2.116)$$

$$L(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} U_{n-1}(x) \quad (2.117)$$

$$M(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|} U_{n-1}(x) \quad (2.118)$$

$$N(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \sqrt{|x^2 - h_2^2|} U_{n-2}(x) \quad (2.119)$$

για να τις επιβάλλουμε ως πολωνυμικές λύσεις της εξίσωσης Lamé (2.93), εκμεταλλευόμενοι την ελευθερία που μας παρέχει η παράμετρος P.

Κατ' αρχήν μπορεί να αποδειχθεί ότι οι δυναμοσειρές $U_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ και $U_{n-2}(x)$ επιδέχονται μετασχηματισμό της μορφής

$$u = x^2 \quad (2.120)$$

καθώς οι διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν σε κάθε περίπτωση εξαρτώνται μόνον από τη δεύτερη δύναμη του x , χωρίς να υπεισέρχεται καμία άλλη δύναμή του σ' αυτές. Αυτό σημαίνει πως οι δυνάμεις διαδοχικών όρων των δυναμοσειρών διαφέρουν κατά δύο, και επομένως είναι της μορφής

$$U_n(x) = \sum_{\kappa=0}^r \alpha_{\kappa} x^{n-2\kappa} \quad (2.121)$$

όπου n είναι ο μέγιστος βαθμός της δυναμοσειράς. Όσο αφορά τη σταθερά r , αυτή θα επιλεγεί συναρτήσει του n και της παραμέτρου P της (2.93), ώστε η σειρά (2.121), σε κάθε περίπτωση, να διακόπτεται πριν η δύναμη $n-2\kappa$ γίνει αρνητική. Με άλλα λόγια, η παράμετρος P θα χρησιμοποιηθεί στην επιλογή του r , έτσι ώστε οι σειρές (2.121) όταν αντικατασταθούν στις (2.116)-(2.119) και επιβληθούν ως λύσεις της (2.93), να είναι πολυώνυμα.

Θα περιγράψουμε ενδεικτικά τη διαδικασία κατασκευής των συναρτήσεων Lamé κλάσης L , μια που η κατασκευή των κλάσεων K, M, N διαφέρει μόνο ως προς το βαθμό πολυπλοκότητας του πρώτου βήματος, ενώ η πορεία παραμένει όμοια.

Έτσι, καθώς η $L(x)$, όπως δίνεται στην (2.117), υποχρεώνεται να ικανοποιεί την εξίσωση Lamé (2.93), η $U_{n-1}(x)$ οφείλει να είναι λύση της

$$\begin{aligned} (x^2 - h_2^2)U_{n-1}''(x) + x(4x^2 - 2h_2^2 - \alpha)U_{n-1}'(x) \\ + [\alpha P - h_2^2 - (n-1)(n+2)x^2]U_{n-1}(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

όπου

$$\alpha = h_2^2 + h_3^2. \quad (2.123)$$

Επιπλέον, λόγω της (2.121), ζητάμε η λύση $U_{n-1}(x)$ της (2.122) να είναι της μορφής

$$U_{n-1}(x) = \sum_{\kappa=0}^{r-1} \alpha_{\kappa} x^{n-1-2\kappa} \quad (2.124)$$

με $\alpha_0 \neq 0$.

Εισάγοντας την (2.124) στην (2.122) και κάνοντας αναγωγές στους όμοιους όρους των σειρών που προκύπτουν, καταλήγουμε στην αναγωγική σχέση τριών όρων,

$$\begin{aligned} \alpha_{\kappa+1}[-2(\kappa+1)(2n-2\kappa-1)] + \alpha_{\kappa}\{\alpha[P - (n-1-2\kappa)^2] - h_2^2(2n-4\kappa-1)\} \\ + \alpha_{\kappa-1}h_2^2h_3^2(n+1-2\kappa)(n-2\kappa) = 0 \end{aligned} \quad (2.125)$$

όπου $\kappa \in \mathbb{N}$ με $0 \leq \kappa \leq r-1$, α_0 μη μηδενικός πραγματικός αριθμός και $\alpha_{\kappa} = 0$ για κάθε $\kappa < 0$ ή $\kappa \geq r$.

Η σχέση (2.125) για $\kappa = r$ δίνει, εξαιτίας των προηγούμενων περιορισμών και για μη τετριμμένες λύσεις της (2.122), ότι το r είναι

$$r = \frac{n}{2}, \quad \text{αν το } n \text{ είναι άρτιος} \quad (2.126)$$

και

$$r = \frac{n+1}{2}, \quad \text{αν το } n \text{ είναι περιττός φυσικός αριθμός.} \quad (2.127)$$

Εξάλλου, η αναγωγική σχέση (2.125), για $\kappa = 0, 1, 2, \dots, r-1$ δίνει ένα γραμμικό και ομογενές σύστημα r -εξισώσεων με αγνώστους τα $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$, το οποίο έχει μη μηδενική λύση, όταν η ορίζουσά του είναι μηδενική. Η τιμή της ορίζουσας εξαρτάται, προφανώς από το φυσικό αριθμό n και την παράμετρο P . Έτσι, για κάθε τιμή του n , προσδιορίζονται οι τιμές εκείνες του P που θα δώσουν τις μη μηδενικές λύσεις U_{n-1} της (2.122) και επομένως τις αντίστοιχες L -συναρτήσεις Lamé.

Ειδικά για $n = 1$ είναι λόγω της (2.127), $r = 1$ και επομένως η U_{n-1} έχει μοναδικό όρο τον $\alpha_0 x^0$, ενώ η (2.125) γίνεται

$$\alpha_0 [\alpha P - h_2^2] = 0. \quad (2.128)$$

Προφανώς, η απαίτηση για την ορίζουσα δίνει σ' αυτή την περίπτωση

$$P = \frac{h_2^2}{h_2^2 + h_3^2} \quad (2.129)$$

οπότε και ο α_0 ορίζεται λόγω της (2.128) αυθαίρετα.

Άρα γι' αυτή την τιμή του P και για $n = 1$ η αντίστοιχη εξίσωση Lamé, έχει στην κλάση L τη λύση

$$L_1(x) = \alpha_0 \sqrt{|x^2 - h_3^2|}, \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.130)$$

Ομοίως, για $n = 2$ είναι $r = 1$, και η αντίστοιχη τιμή του P είναι

$$P = \frac{4h_2^2 + h_3^2}{h_2^2 + h_3^2}. \quad (2.131)$$

Η αντίστοιχη σ' αυτό το ζεύγος (n, P) εξίσωση Lamé, έχει L -λύση της μορφής

$$L_2(x) = \alpha_0 x \sqrt{|x^2 - h_3^2|}, \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.132)$$

Τέλος, για $n = 3$ είναι $r = 2$. Η αντίστοιχη ορίζουσα λαμβάνεται από την (2.125) για $\kappa = 0$ και $\kappa = 1$, είναι δευτέρας τάξεως και ο μηδενισμός της οδηγεί στη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\alpha^2 P^2 + [-\alpha(6h_2^2 + 4\alpha)]P + h_2^2(5h_2^2 + 4\alpha + 20h_3^2) = 0 \quad (2.133)$$

όπου το α δίνεται στην (2.123).

Οι λύσεις

$$P_{1,2} = \frac{1}{\alpha} \left[3h_2^2 + 2\alpha \pm 2\sqrt{(h_2^2 + \alpha)^2 - 5h_2^2 h_3^2} \right] \quad (2.134)$$

της (2.133) είναι πραγματικές και άνισες, αφού το υπόριζο της (2.134) γράφεται

$$(h_2^2 + \alpha)^2 - 5h_2^2 h_3^2 = (2h_2^2 - h_3^2)^2 + 3h_2^2 h_3^2 > 0. \quad (2.135)$$

Έτσι, οι εξισώσεις Lamé που αντιστοιχούν στις παραμέτρους ($n=3, P=P_1$) και ($n=3, P=P_2$) έχουν αντιστοίχως L-λύσεις της μορφής

$$L_3^i(x) = \alpha_0 \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \left[x^2 + \frac{1}{10}(\alpha P_i - 4\alpha - 5h_2^2) \right], \quad i = 1, 2. \quad (2.136)$$

Το γεγονός ότι οι ρίζες της (2.133) είναι πραγματικές και άνισες ισχύει για κάθε ορίζουσα που προκύπτει από οποιαδήποτε τιμή του n και είναι επακόλουθο της δομής της εξίσωσης Lamé, από την οποία και η ίδια εκπορεύεται [8,9].

Πράγματι, η (2.93) μπορεί να γραφτεί με τη μορφή

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{|x^2 - h_3^2|} \sqrt{|x^2 - h_2^2|} E'(x) \right]' \\ & + \left[\frac{h_2^2 + h_3^2}{\sqrt{|x^2 - h_3^2|} \sqrt{|x^2 - h_2^2|}} P - \frac{n(n+1)x^2}{\sqrt{|x^2 - h_3^2|} \sqrt{|x^2 - h_2^2|}} \right] E(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.137)$$

η οποία είναι συνήθης διαφορική εξίσωση, τύπου Sturm-Liouville με παράμετρο P , για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού n . Οι τιμές της παραμέτρου P που βρίσκουμε ως ρίζες της εκάστοτε ορίζουσας, είναι οι ιδιοτιμές της αντίστοιχης εξίσωσης Lamé, δηλαδή της (2.137), ενώ οι λύσεις που ορίζονται από αυτές, είναι οι αντίστοιχες ιδιολύσεις της. Κατά συνέπεια, από τη θεωρία Sturm-Liouville, ως ιδιοτιμές της (2.137), οι τιμές του P είναι πραγματικές και άνισες μεταξύ τους, ενώ οι αντίστοιχες ιδιολύσεις αποτελούν πλήρες σύνολο λύσεων, ως προς εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται με συνάρτηση βάρους την

$$l(x) = \frac{h_2^2 + h_3^2}{\sqrt{|x^2 - h_3^2|} \sqrt{|x^2 - h_2^2|}}. \quad (2.138)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύεται πως για $n = 4, 5, 6, 7$, ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών των αγνώστων που προκύπτουν από την αναγωγική

σχέση (2.125), οδηγεί σε πολωνυμική εξίσωση τρίτου βαθμού, η οποία, όπως είδαμε στην παράγραφο 2.4, λύνεται αναλυτικά μέσω των τύπων του Cardano, οι οποίοι όμως στην πράξη αποδεικνύονται εξαιρετικά δύσχρηστοι.

Απ' την άλλη πλευρά, για $n \geq 8$, ο μηδενισμός των αντίστοιχων οριζουσών οδηγεί σε μη αναγώγιμες πολωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του πέμπτου, για τις οποίες όπως απέδειξε ο Galois το 1830, δεν είναι δυνατόν να εκφρασθούν σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων μέσω ριζικών και των τεσσάρων πράξεων ενός σώματος.

Καθώς ανάλογα αποτελέσματα, με όλα όσα εξήχθησαν σ' αυτή την παράγραφο, παίρνουμε κατά τη μελέτη και των άλλων κλάσεων K, M, N του Lamé, είναι επόμενο ότι κλειστή αναλυτική μορφή για τις συναρτήσεις Lamé υπάρχει μόνον για $n = 0, 1, 2, 3$, ενώ για $n = 4, 5, 6, 7$ υπάρχει μόνον σε θεωρητικό επίπεδο και για $n \geq 8$ δεν υπάρχει καθόλου.

Οι συναρτήσεις Lamé που προκύπτουν από τις τέσσερις κλάσεις για $n = 0, 1, 2, 3$ δίνονται παρακάτω.

$$E_0^1(x) = 1 \quad (n = 0, \text{ κλάση } K) \quad (2.139)$$

$$E_1^1(x) = x \quad (n = 1, \text{ κλάση } K) \quad (2.140)$$

$$E_1^2(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (n = 1, \text{ κλάση } L) \quad (2.141)$$

$$E_1^3(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (n = 1, \text{ κλάση } M) \quad (2.142)$$

$$E_2^1(x) = x^2 + \Lambda - \alpha_1^2 \quad (n = 2, \text{ κλάση } K) \quad (2.143)$$

$$E_2^2(x) = x^2 + \Lambda' - \alpha_1^2 \quad (n = 2, \text{ κλάση } K) \quad (2.144)$$

$$E_2^3(x) = x\sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (n = 2, \text{ κλάση } L) \quad (2.145)$$

$$E_2^4(x) = x\sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (n = 2, \text{ κλάση } M) \quad (2.146)$$

$$E_2^5(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (n = 2, \text{ κλάση } N) \quad (2.147)$$

$$E_3^1(x) = x[x^2 + \Lambda_1 - \alpha_1^2] \quad (n = 3, \text{ κλάση } K) \quad (2.148)$$

$$E_3^2(x) = x[x^2 + \Lambda'_1 - \alpha_1^2] \quad (n = 3, \text{ κλάση } K) \quad (2.149)$$

$$E_3^3(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} [x^2 + \Lambda_2 - \alpha_1^2] \quad (n = 3, \text{ κλάση } L) \quad (2.150)$$

$$E_3^4(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} [x^2 + \Lambda'_2 - \alpha_1^2] \quad (n = 3, \text{ κλάση } L) \quad (2.151)$$

$$E_3^5(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|} [x^2 + \Lambda_3 - \alpha_1^2] \quad (n = 3, \text{ κλάση M}) \quad (2.152)$$

$$E_3^6(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|} [x^2 + \Lambda'_3 - \alpha_1^2] \quad (n = 3, \text{ κλάση M}) \quad (2.153)$$

$$E_3^7(x) = x \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \sqrt{x^2 - h_3^2} \quad (n = 3, \text{ κλάση N}) \quad (2.154)$$

όπου οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \pm \frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\alpha_i^4 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{\alpha_i^2} \right) \right]^{1/2} \quad (2.155)$$

ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Lambda - \alpha_i^2} = 0 \quad (2.156)$$

και οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda_\kappa \\ \Lambda'_\kappa \end{matrix} \right\} = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^3 \alpha_n^2 - \frac{1}{5} \alpha_\kappa^2 \pm \frac{1}{5} \left\{ 4 \sum_{n=1}^3 \alpha_n^4 - 3 \alpha_\kappa^4 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \left(\sum_{n=1}^3 \frac{1}{\alpha_n^2} + \frac{6}{\alpha_\kappa^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (2.157)$$

για $\kappa = 1, 2, 3$, ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1 + 2\delta_{i\kappa}}{(\Lambda_\kappa - \alpha_i^2)} = 0. \quad (2.158)$$

Τέλος, οι σταθερές κανονικοποίησης των συναρτήσεων Lamé E_n^m , καθώς και σχέσεις που συνδέουν τις απ' αυτές οριζόμενες Ελλειψοειδείς αρμονικές και τις κλίσεις τους με το καρτεσιανό και σφαιρικό σύστημα, δίνονται στο Παράρτημα Γ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΑΓΩΓΟΣ

3.1 Μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος στην περίπτωση του ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα παράγουμε το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό ομογενούς ελλειψοειδούς αγωγού, που οφείλονται στην ύπαρξη σημειακής διπολικής πηγής ρεύματος στο εσωτερικό του.

Έστω, λοιπόν, S η επιφάνεια του τριαξονικού ελλειψοειδούς

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \quad (3.1)$$

με $0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty$, το οποίο, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, καθορίζει ένα ελλειψοειδές σύστημα με συντεταγμένες ρ , μ , ν , και ημιοστιακές αποστάσεις h_1, h_2, h_3 που ορίζονται από τις σχέσεις

$$h_1^2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \quad (3.2)$$

$$h_2^2 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \quad (3.3)$$

$$h_3^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2. \quad (3.4)$$

Προφανώς, οι (3.2), (3.3), (3.4) υποδεικνύουν ότι

$$h_2^2 = h_1^2 + h_3^2. \quad (3.5)$$

Οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες ρ, μ, ν συνδέονται με τις Καρτεσιανές, μέσω των σχέσεων (2.30), (2.31), (2.32) και μεταβάλλονται στα διαστήματα $(h_2, +\infty)$, (h_3, h_2) και $(-h_3, h_3)$ αντιστοίχως. Καταχρηστικά, θα χαρακτηρίζουμε τη μεταβλητή ρ ως “ακτινική” μεταβλητή και τις μεταβλητές μ, ν ως “γωνιακές”.

Σε κάθε σημείο $\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu)$ της επιφάνειας του ελλειψοειδούς (3.1) το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα είναι το $\hat{\rho}$, το οποίο σε Καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται μέσω της (2.74) από την έκφραση

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\rho} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\sqrt{\alpha_1^2 - \mu^2} \sqrt{\alpha_1^2 - \nu^2}} \sum_{m=1}^3 \frac{x_m}{\alpha_m^2} \hat{\mathbf{x}}_m \quad (3.6)$$

όπου $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ η γνωστή Καρτεσιανή βάση.

Η επιφάνεια S του ελλειψοειδούς, που καταλαμβάνει ο εγκεφαλικός ιστός, αντιστοιχεί στην τιμή $\rho = \alpha_1$ της ακτινικής μεταβλητής. Ο εσωτερικός αγωγίμος χώρος V^- αντιστοιχεί στο διάστημα μεταβολής $[h_2, \alpha_1)$ της ρ και χαρακτηρίζεται από τη θετική ηλεκτρική αγωγιμότητα σ και τη μαγνητική διαπερατότητα μ_0 .

Ο εξωτερικός χώρος αντιστοιχεί στις τιμές $(\alpha_1, +\infty)$ του ρ και θεωρείται μη αγωγίμος ηλεκτρικά, ενώ χαρακτηρίζεται από την ίδια μαγνητική διαπερατότητα μ_0 .

Στη θέση $\mathbf{r}_0$, στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς, υπάρχει σημειακή διπολική πηγή ρεύματος με ηλεκτρική ροπή $\mathbf{Q}$,

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.7)$$

η οποία παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ και ένα μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ τα οποία, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.5, ικανοποιούν τη Σχεδόν Στατική Προσέγγιση του συστήματος των εξισώσεων του Maxwell, δηλαδή τις εξισώσεις

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.11)$$

για την περίπτωση όπου η μέση πυκνότητα φορτίου είναι μηδενική.

Το ολικό ρεύμα $\mathbf{J}$ στην (3.9), συνδέεται με το κύριο ρεύμα $\mathbf{J}^p$, μέσω της σχέσεως

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}^p(\mathbf{r}) + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3.12)$$

ενώ το ηλεκτρικό πεδίο, λόγω της (3.8), επιδέχεται την αναπαράσταση

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r}) \quad (3.13)$$

μέσω του ηλεκτρικού δυναμικού u .

Όπως είδαμε στην παράγραφο **1.6**, στον εσωτερικό του ελλειψοειδούς (3.1) χώρο, το δυναμικό u^- ικανοποιεί το ακόλουθο πρόβλημα Neumann

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^- \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial \rho} = 0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (3.15)$$

όπου, λόγω της ορθογωνιότητας του ελλειψοειδούς συστήματος, η κάθετη παραγωγή εκφράζεται μέσω της παραγωγής στη μεταβλητή ρ . Προφανώς, το πρόβλημα (3.14), (3.15) επιλύεται χωρίς την ανάγκη επιπλέον πληροφορίας, και μ' αυτό θα ξεκινήσουμε τη μελέτη στην επόμενη παράγραφο **3.2**.

Στον εξωτερικό χώρο V^+ το ηλεκτρικό δυναμικό u^+ ικανοποιεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+ \quad (3.16)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (3.17)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (3.18)$$

που αποτελεί αντικείμενο μελέτης της παραγράφου **3.3**.

Τέλος, έχοντας ως δεδομένο το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό u^- , θα υπολογίσουμε, στην παράγραφο **3.4**, το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (3.19)$$

και με τη βοήθεια και της (1.89), θα υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς $\rho = a_1$, από την έκφραση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'). \quad (3.20)$$

3.2 Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

Η γενική λύση της εξίσωσης Poisson (3.14) είναι άθροισμα μίας αρμονικής συνάρτησης $\Phi(\mathbf{r})$, που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στον εσωτερικό χώρο $h_2 \leq \rho < \alpha_1$, και μιας ειδικής λύσης της (3.14).

Όσον αφορά την ειδική λύση της (3.14), παρατηρούμε ότι η δράση του τελεστή Δ επί της συνάρτησης

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.21)$$

επιβάλλει τη χρήση της βασικής ιδιότητας της συνάρτησης Green του τελεστή του Laplace στον $\mathbb{R}^3$, σύμφωνα με την οποία ισχύει ότι [8]

$$\Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.22)$$

Τότε,

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot (\mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)). \quad (3.23)$$

Κατά συνέπεια οι (3.7) και (3.23) εξασφαλίζουν την ικανοποίηση της εξίσωσης Poisson (3.14), από την συνάρτηση (3.21).

Τότε η γενική λύση της (3.14) για $\rho \in [h_2, \alpha_1)$ είναι

$$u^-(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.24)$$

όπου

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} b_n^m \mathbf{I}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.25)$$

και $\mathbf{I}_n^m$ είναι, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, οι εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές, ενώ το σημείο $\mathbf{r}$ αντιστοιχεί στην ελλειψοειδή τριάδα (ρ, μ, ν) . Η απαίτηση ώστε το εσωτερικό δυναμικό επί της επιφάνειας $S(\rho = \alpha_1)$ να ικανοποιεί τη συνθήκη (3.15), μεταφέρεται στη συνάρτηση Φ ως απαίτηση να ικανοποιείται η

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] \quad (3.26)$$

για $\rho = \alpha_1$.

Προκειμένου να εκμεταλλευτούμε την (3.26) για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές b_n^m , $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι ελλειψοειδείς αρμονικές, όταν ορίζονται επί επιφάνειας ελλειψοειδούς, αποτελούν πλήρες σύνολο, ορθογωνίων μεταξύ τους, συναρτήσεων [29].

Η πληρότητα των ελλειψοειδών αρμονικών επιτρέπει το ακόλουθο ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσεως του τελεστή του Laplace [12,38]

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0) \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.27)$$

για τα σημεία $\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu)$ της μέτρησης του πεδίου και $\mathbf{r}_0(\rho_0, \mu_0, \nu_0)$ της θέσης της διπολικής πηγής. Το ανάπτυγμα (3.27) ισχύει για κάθε $\rho > \rho_0$.

Στην (3.27), γ_n^m είναι οι σταθερές κανονικοποίησης των εσωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών, που δίνονται ως

$$\gamma_n^m = \int_{\rho=\alpha_1} [E_n^m(\mu) E_n^m(\nu)]^2 \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 - \mu^2} \sqrt{\alpha_1^2 - \nu^2}} ds \quad (3.28)$$

και αποτελούν τα τετράγωνα της L^2 -norm των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών επί της επιφάνειας $\rho = \alpha_1$, ως προς τη συνάρτηση βάρους

$$l_{\alpha_1}(\mu, \nu) = [\alpha_1^2 - \mu^2](\alpha_1^2 - \nu^2)^{-1/2}. \quad (3.29)$$

Οι τιμές τους για $n=1$ και $n=2$ δίνονται στο Παράρτημα Γ. Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.30)$$

στην (3.27), και αντικαθιστώντας και την (3.25) στη συνθήκη (3.26) προκύπτει η εξίσωση

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[b_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) + \frac{1}{\sigma(2n+1)\gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu)) \right]_{\rho=\alpha_1} = 0. \quad (3.31)$$

Η χρήση της (3.30) επέτρεψε τη διατήρηση της μορφής των ελλειψοειδών αρμονικών αναλλοίωτης, διατηρώντας ανέπαφη τη δυνατότητα εκμετάλλευσης της ορθογωνιότητάς τους.

Αν, επιπλέον, εκφράσουμε τις εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές, συναρτήσεων των εσωτερικών με τη βοήθεια των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων $I_n^m(\rho)$

$$I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{du}{[E_n^m(u)]^2 \sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{u^2 - h_2^2}} \quad (3.32)$$

και της σχέσης (Γ.6), παίρνουμε από την (3.31) την έκφραση

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[b_n^m \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{IE}_n^m(\mathbf{r}_0)) I_n^m(\alpha_1) \right] E_n^m(\alpha_1) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) = 0. \quad (3.33)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.33) επί

$$E_n^{m'}(\mu) E_n^{m'}(\nu) l_{\alpha_1}(\mu, \nu) \quad (3.34)$$

όπου η $l_{\alpha_1}(\mu, \nu)$ είναι η συνάρτηση βάρους που ορίζεται στην (3.29), και ολοκληρώνοντας επάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς $\rho = \alpha_1$, η ορθογωνιότητα των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών ως προς την l_{α_1} , παρέχει την έκφραση

$$b_n^m = \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{IE}_n^m(\mathbf{r}_0)) \left[\frac{1}{\alpha_2 \alpha_3 E_n^m(\alpha_1) E_n^{m'}(\alpha_1)} - I_n^m(\alpha_1) \right] \quad (3.35)$$

για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, (2n+1)$. Στην (3.35) ο τόνος συμβολίζει παραγωγή ως προς το όρισμα και στη συνέχεια υπολογισμό της παραγώγου στο σημείο $\rho = \alpha_1$.

Ακόμα, παραγωγίζοντας την $F_n^m(\rho)$ από τη σχέση (2.100) και το ελλειπτικό ολοκλήρωμα (3.32) ως προς το όρισμα ρ , παίρνουμε για $\rho = \alpha_1$, ότι

$$F_n^{m'}(\alpha_1) = (2n+1) E_n^{m'}(\alpha_1) \left[I_n^m(\alpha_1) - \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3 E_n^m(\alpha_1) E_n^{m'}(\alpha_1)} \right]. \quad (3.36)$$

Αντικαθιστώντας την (3.36) στην (3.35), και εν συνεχεία στις (3.25) και (3.24), προκύπτει η μορφή

$$u^-(\mathbf{r}) = u^-(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)\sigma \gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{IE}_n^m(\mathbf{r}_0)) \frac{F_n^{m'}(\alpha_1)}{E_n^{m'}(\alpha_1)} \mathbf{IE}_n^m(\mathbf{r}) \quad (3.37)$$

για το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς αγωγού, δηλαδή για $h_2 \leq \rho < \alpha_1$. Παρατηρούμε ότι η λύση (3.37) εμπεριέχει μία αυθαίρετη σταθερά b_0^1 , η οποία αντανakλά την αυθαιρεσία του σημείου αναφοράς ως προς το οποίο καταγράφονται οι διαφορές του δυναμικού u^- . Επίσης, στη μορφή (3.37) είναι

φανερή η συνεισφορά της πηγής στο εσωτερικό δυναμικό u^- , η οποία συμπίπτει με το πεδίο δυναμικού, u_0 , του διπόλου, στην περίπτωση του άπειρου ομογενούς αγωγού, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.7 και στη σχέση (1.94). Τέλος, ο τρίτος όρος της (3.37) μεταφέρει την επίδραση του συνόρου στη λύση u^- , μέσω της συνοριακής συνθήκης (3.15).

Στη συνέχεια θα παράγουμε τρεις διαφορετικές εκφράσεις για το δυναμικό u^- , με αφετηρία την (3.37), οι οποίες στα πλαίσια της παρούσας διατριβής εξυπηρετούν διαφορετικό σκοπό.

Κατ' αρχήν θα παράγουμε το ανάπτυγμα της (3.37) σε ελλειψοειδείς αρμονικές, με σκοπό να το χρησιμοποιήσουμε στον υπολογισμό του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού στην παράγραφο 3.3, αλλά και του επιφανειακού ολοκληρώματος (3.19) στην παράγραφο 3.4. Καθώς η θεμελιώδης λύση του τελεστή του Laplace επιδέχεται διαφορετικό ανάπτυγμα στον ελλειψοειδή πυρήνα $h_2 \leq \rho < \rho_0$ από αυτό στον ελλειψοειδή φλοιό $\rho_0 < \rho < \alpha_1$, το αντίστοιχο ανάπτυγμα για το u^- αποκτά διαφορετική έκφραση στις δύο περιπτώσεις. Έτσι, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (Γ.10) για τη συνάρτηση $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$ στον πυρήνα $h_2 \leq \rho < \rho_0$, καθώς και τις σχέσεις (3.30) και (3.37), παίρνουμε την έκφραση

$$u_c^-(\mathbf{r}) = u_c^-(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)\sigma\gamma_n^m} \mathbf{Q} \left[\nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{I}_n^m(\mathbf{r}_0) - \frac{F_n^m(\alpha_1)}{E_n^m(\alpha_1)} \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{I}_n^m(\mathbf{r}_0) \right] \mathbf{I}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.38)$$

για το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς που διέρχεται από τη θέση $\mathbf{r}_0$ της πηγής.

Απ' την άλλη πλευρά, αναπτύσσοντας τη θεμελιώδη λύση σε ελλειψοειδείς αρμονικές για $\rho > \rho_0$ και χρησιμοποιώντας τις (3.27), (3.30), (Γ.6), (3.36) και (3.37) παίρνουμε την έκφραση

$$u_s^-(\mathbf{r}) = u_s^-(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma\gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{I}_n^m(\mathbf{r}_0)) \left[\mathbf{I}_n^m(\rho) - \mathbf{I}_n^m(\alpha_1) + \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3 E_n^m(\alpha_1) E_n^m(\alpha_1)} \right] \mathbf{I}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.39)$$

για το ηλεκτρικό δυναμικό στον ελλειψοειδή φλοιό $\rho_0 < \rho < \alpha_1$, δηλαδή στο χώρο ανάμεσα στο ελλειψοειδές που διέρχεται από τη θέση $\mathbf{r}_0$ της πηγής και στο ελλειψοειδές του αγωγού, $\rho = \alpha_1$. Λόγω της συνέχειας του πεδίου u^- μέχρι τη συνοριακή επιφάνεια, η (3.39) δίνει επίσης τις τιμές του δυναμικού για $\mathbf{r} \in S$, όταν θέσουμε σ' αυτήν $\rho = \alpha_1$. Σ' αυτή την περίπτωση

$$u_s^-(\mathbf{r}) = u_s^-(\alpha_1, \mu, \nu) \\ = b_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma \gamma_n^m \alpha_2 \alpha_3 E_n^{m'}(\alpha_1)} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{I} E_n^m(\mathbf{r}_0)) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \quad (3.40)$$

και αυτή είναι η μορφή που θα συναντήσουμε ξανά στις παραγράφους 3.3 και 3.4.

Η έκφραση (3.39) παρέχει το πλήρες, θεωρητικό ανάπτυγμα του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού σε ελλειψοειδείς αρμονικές στη θέση $\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu)$ του ελλειψοειδούς φλοιού $\rho_0 < \rho < \alpha_1$. Αν περιοριστούμε στους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος και συμβολίσουμε με $O(e/l_3)$ τους όρους που περιέχουν ελλειψοειδείς αρμονικές τάξεως μεγαλύτερης ή ίσης του 3, θα αποκτήσουμε σαφέστερη εικόνα για την εξάρτηση του δυναμικού u^- από τις θέσεις $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_0$ και τις φυσικές παραμέτρους της ροπής $\mathbf{Q}$ και της αγωγιμότητας σ , στην περιοχή όπου τα δεδομένα των EEG περιέχουν μεγαλύτερη ακρίβεια ως προς τη θέση της πηγής, δηλαδή κοντά στην επιφάνεια S του αγωγού.

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.139)-(2.147) υπολογίζουμε τις $E_n^m(u)$ και τις παραγώγους τους $E_n^{m'}(u)$ στη θέση $u = \alpha_1$ και παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$E_1^m(\alpha_1) = \alpha_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (3.41)$$

$$E_2^1(\alpha_1) = \Lambda \quad (3.42)$$

$$E_2^1(\alpha_1) = \Lambda' \quad (3.43)$$

$$E_2^{6-m}(\alpha_1) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_m}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (3.44)$$

και

$$\alpha_2 \alpha_3 [E_1^m(\alpha_1)]' = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_m}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (3.45)$$

$$\alpha_2 \alpha_3 [E_2^1(\alpha_1)]' = \alpha_2 \alpha_3 [E_2^2(\alpha_1)]' = 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad (3.46)$$

$$\alpha_2 \alpha_3 \left[E_2^{i+j}(\alpha_1) \right]' = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \frac{(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)}{\alpha_i \alpha_j}, \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ με } i \neq j. \quad (3.47)$$

Χρησιμοποιώντας επίσης τις σχέσεις (Γ.23)-(Γ.27) για τις $\mathbf{IE}_n^m(\rho, \mu, \nu)$ και τις κλίσεις τους $\nabla \mathbf{IE}_n^m(\rho, \mu, \nu)$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες και τέλος τις (Γ.11)-(Γ.15) για τις σταθερές κανονικοποίησης γ_n^m , οδηγούμαστε στις παρακάτω εκφράσεις

$$\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{IE}_1^m(\mathbf{r}_0)}{\sigma \gamma_1^m} = \frac{\mathbf{Q}}{\sigma} \cdot \left[\frac{3h_m}{4\pi h_1 h_2 h_3} \hat{\mathbf{x}}_m \right], \quad m = 1, 2, 3 \quad (3.48)$$

$$\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r}_0)}{\sigma \gamma_2^1} = \frac{\mathbf{Q}}{\sigma} \cdot \left[\frac{-5}{4\pi(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 \frac{x_{0m} \hat{\mathbf{x}}_m}{(\Lambda - \alpha_m^2)} \right] \quad (3.49)$$

$$\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{IE}_2^2(\mathbf{r}_0)}{\sigma \gamma_2^2} = \frac{\mathbf{Q}}{\sigma} \cdot \left[\frac{5}{4\pi(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 \frac{x_{0m} \hat{\mathbf{x}}_m}{(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right] \quad (3.50)$$

$$\frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{IE}_2^{i+j}(\mathbf{r}_0)}{\sigma \gamma_2^{i+j}} = \frac{\mathbf{Q}}{\sigma} \cdot \left[\frac{15}{4\pi} \frac{h_i h_j}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} (x_{0i} \hat{\mathbf{x}}_j + x_{0j} \hat{\mathbf{x}}_i) \right], \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ με } i \neq j. \quad (3.51)$$

Αντικαθιστώντας, τέλος, τις (3.41)-(3.51) στην (3.39) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό στην περιοχή $\rho_0 < \rho < \alpha_2$

$$\begin{aligned} u_s^-(\rho, \mu, \nu) = & b_0^1 + \frac{3}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \left(I_1^m(\rho) - I_1^m(\alpha_1) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \right) \\ & - \frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left(I_2^1(\rho) - I_2^1(\alpha_1) + \frac{1}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Lambda} \right) \frac{\mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \alpha_m^2)} \\ & + \frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left(I_2^2(\rho) - I_2^2(\alpha_1) + \frac{1}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Lambda'} \right) \frac{\mathbf{IE}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda' - \alpha_m^2)} \\ & + \frac{15}{4\pi\sigma} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j \left(I_2^{i+j}(\rho) - I_2^{i+j}(\alpha_1) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_i^2 + \alpha_j^2)} \right) \\ & + O(e l_3). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Το σύμβολο $O(e l_3)$ υποδεικνύει την τάξη προσέγγισης της έκφρασης (3.52) μέχρι τις ελλειψοειδείς αρμονικές τρίτου βαθμού. Οι $\mathbf{IE}_2^1$ και $\mathbf{IE}_2^2$ είναι οι δύο πρώτες ελλειψοειδείς αρμονικές δευτέρου βαθμού και δίνονται σε Καρτεσιανές συντεταγμένες στις (Γ.25) και (Γ.26) ενώ σχετικά με τα ελλειπτικά ολοκληρώματα

$I_n^m(\rho)$ και $I_n^m(\alpha_1)$ για $n=1,2$ και $m=1,2,\dots,2n+1$ χρήσιμες σχέσεις για το χειρισμό τους δίνονται στις (Γ.32)- (Γ.38), (Γ.42) και (Γ.43).

Χρησιμοποιώντας τεχνικές ασυμπτωτικής ανάλυσης αποδεικνύεται ότι τα ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$ είναι της τάξης του $\rho^{-(2n+1)}$.

Πράγματι, για τις εσωτερικές συναρτήσεις Lamé όπως δίνονται στις (2.139)-(2.154), και για μεγάλες τιμές της μεταβλητής u , παρατηρούμε ότι ισχύει

$$E_n^m(u) = u^n + O(u^{n-2}), \quad n \geq 1. \quad (3.53)$$

Απ' την άλλη μεριά, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα [4], παίρνουμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$\sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{u^2 - h_2^2} = u^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \right] \quad (3.54)$$

που ισχύει για μεγάλες τιμές της u , οπότε στην ίδια περιοχή της μεταβλητής u , η ποσότητα

$$\frac{1}{[E_n^m(u)]^2 \sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{u^2 - h_2^2}} = \frac{1}{u^{2n+2} \left[1 + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \right]} = \frac{1}{u^{2n+2}} + O\left(\frac{1}{u^{2n+4}}\right). \quad (3.55)$$

Η (3.32) τότε, μέσω της (3.55), επιβάλλει στα ελλειπτικά ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$, να δέχονται το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$I_n^m(\rho) = \frac{1}{(2n+1)\rho^{2n+1}} + O\left(\frac{1}{\rho^{2n+3}}\right), \quad \rho \rightarrow \infty \quad (3.56)$$

που δηλώνει ότι για μεγάλες τιμές του ρ τα $I_n^m(\rho)$ είναι της τάξης του $\rho^{-(2n+1)}$.

Τότε, παρατηρώντας την (3.52) ως προς την εξάρτηση του u_s^- από τη θέση

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (\rho, \mu, \nu) \quad (3.57)$$

την εξάρτηση από τη θέση

$$\mathbf{r}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad (3.58)$$

και την εξάρτηση από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ελλειψοειδούς, και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό

$$\frac{x}{\alpha} = \max_{i=1,2,3} \left\{ \frac{x_i}{\alpha_i} \right\} \quad (3.59)$$

και

$$\frac{x_0}{\rho} = \max_{i=1,2,3} \left\{ \frac{x_{0i}}{\rho} \right\} \quad (3.60)$$

βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο κατηγορίες όρων, πέρα από την αυθαίρετη σταθερά b_0^1 . Υπάρχουν όροι της τάξεως του x_0/ρ και όροι της τάξεως του $(x/\alpha)^2$. Και στις δύο περιπτώσεις, τα πηλικά x_0/ρ και x/α είναι μικρότερα της μονάδος, δεδομένου ότι η θέση $\mathbf{r}$ εντοπίζεται στον ελλειψοειδή φλοιό $\rho_0 < \rho < \alpha_1$, εξασφαλίζοντας έτσι τη σύγκλιση των σειρών της (3.52) και το ικανοποιητικό της προσέγγισης, έως το βαθμό $n = 2$ του αναπτύγματος σε ελλειψοειδείς αρμονικές.

Ως προς την εξάρτηση του u_s^- από τις φυσικές παραμέτρους είναι ακόμα πιο καθαρή, στην τρίτη μορφή, την οποία θα επεξεργαστούμε χρησιμοποιώντας τανυστικό συμβολισμό αμέσως πιο κάτω. Η χρήση του τανυστικού συμβολισμού, αλλά και του τανυστικού λογισμού, εξασφαλίζει τη μέγιστη συμπαγότητα στην εξαγωγή και στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων και γι' αυτό αναδεικνύει καθαρότερα το ρόλο των διαφόρων παραμέτρων σ' αυτά, αλλά και τη μαθηματική κομψότητα των ίδιων των αποτελεσμάτων.

Έτσι, εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς

$$\tilde{\mathbf{I}} = \sum_{m=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \quad (3.61)$$

για το ταυτοτικό δυαδικό και

$$\tilde{\tilde{\mathbf{I}}} = \sum_{i,j=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \quad (3.62)$$

για το ταυτοτικό τετραδικό.

Στη συνέχεια της εργασίας μας σ' αυτήν αλλά και στις επόμενες παραγράφους, θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω δυαδικά και τετραδικά

$$\tilde{\mathbf{M}}(\rho) = \sum_{m=1}^3 (\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_m^2) \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \quad (3.63)$$

$$\tilde{\Lambda} = \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{\Lambda - \alpha_m^2} \quad (3.64)$$

$$\tilde{\Lambda}' = \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{\Lambda' - \alpha_m^2} \quad (3.65)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) = \sum_{m=1}^3 I_1^m(\rho) \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \quad (3.66)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_2(\rho) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \quad (3.67)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_1(\rho) = \sum_{m=1}^3 \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(\alpha_1)} \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \quad (3.68)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_2(\rho) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(\alpha_1)} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2} \quad (3.69)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_1 = \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_m^2} \quad (3.70)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2}. \quad (3.71)$$

Οι τελεστές αυτοί αποτελούν τροποποιήσεις των αντιστοίχων ταυτοτικών ενσωματώνοντας την ανισοτροπία του ελλειψοειδούς, στη διαφορετική βαρύτητα με την οποία βαθμώνεται κάθε όρος τους, δηλαδή κάθε μία από τις κύριες διευθύνσεις του ελλειψοειδούς. Με τον τρόπο αυτό μεταφέρουν, αλλά και επιβάλλουν κατά κάποιον τρόπο, τα χαρακτηριστικά κάθε διεύθυνσης του χώρου.

Είναι χαρακτηριστικό πως όταν το ελλειψοειδές εκφυλιστεί στη σφαίρα, οι σχέσεις (3.63) και (3.66)-(3.71) ορίζουν πολλαπλάσια των ισότροπων ταυτοτικών (3.61) και (3.62).

Τότε, ο πρώτος όρος της (3.52) μπορεί να γραφεί, με τη βοήθεια των (3.61) και (3.66) ως

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \left[I_1^m(\rho) - I_1^m(\alpha_1) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \right] = \\ & = \frac{3}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot (\tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) - \tilde{\mathbf{H}}_1(\alpha_1)) \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{\sigma V} \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{r} \\ & = \mathbf{Q} \cdot \left[\frac{3}{4\pi\sigma} (\tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) - \tilde{\mathbf{H}}_1(\alpha_1)) + \frac{1}{\sigma V} \tilde{\mathbf{I}} \right] \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.72)$$

όπου

$$V = \frac{4\pi}{3} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad (3.73)$$

είναι ο όγκος του ελλειψοειδούς $\rho = \alpha_1$.

Θέτοντας ως

$$\tilde{\mathbf{A}}(\rho) = \frac{3}{4\pi\sigma} (\tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) - \tilde{\mathbf{H}}_1(\alpha_1)) + \frac{1}{\sigma V} \tilde{\mathbf{I}} \quad (3.74)$$

ο πρώτος όρος μπορεί, από τις (3.72) και (3.74) να γραφεί ως

$$\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\rho) \cdot \mathbf{r}. \quad (3.75)$$

Απ' την άλλη μεριά, ο δεύτερος όρος της (3.52), χρησιμοποιώντας τις (3.64) και (3.65), μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \quad (3.76)$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = & -\frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \left[\left(I_2^1(\rho) - I_2^1(\alpha_1) + \frac{2\pi}{3V\Lambda} \right) \tilde{\Lambda} \mathbb{I} E_2^1(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. - \left(I_2^2(\rho) - I_2^2(\alpha_1) + \frac{2\pi}{3V\Lambda'} \right) \tilde{\Lambda}' \mathbb{I} E_2^1(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Τέλος, ο τρίτος όρος της (3.52), κατ' αναλογία με τον πρώτο και με τη χρήση των τετραδικών (3.67) και (3.71) γράφεται ως

$$\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left[\frac{15}{4\pi\sigma} (\tilde{\mathbf{H}}_2(\rho) - \tilde{\mathbf{H}}_2(\alpha_1)) + \frac{5}{\sigma V} \tilde{\mathbf{N}}_2 \right] : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\tilde{\Gamma}}(\rho) : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \quad (3.78)$$

όπου

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}(\rho) = \frac{15}{4\pi\sigma} (\tilde{\mathbf{H}}_2(\rho) - \tilde{\mathbf{H}}_2(\alpha_1)) + \frac{5}{\sigma V} \tilde{\mathbf{N}}_2. \quad (3.79)$$

Τότε, οι (3.52), (3.75), (3.76) και (3.78), επιτρέπουν στην έκφραση του ηλεκτρικού δυναμικού u_s^- , στον ελλειψοειδή φλοιό $\rho_0 < \rho < \alpha_1$, τη μορφή

$$u_s^-(\mathbf{r}) = b_0^1 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\rho) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\tilde{\Gamma}}(\rho) : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + O(e l_3) \quad (3.80)$$

μέσω των τελεστών $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}$ και $\tilde{\tilde{\Gamma}}$, που αποτελούν γραμμικούς συνδυασμούς των τροποποιημένων ταυτοτικών $\tilde{\mathbf{I}}$ και $\tilde{\tilde{\mathbf{I}}}$ και μεταφέρουν την επίδραση της ελλειψοειδούς γεωμετρίας. Σημειώνουμε ότι στην (3.80) η απλή συστολή δηλώνει το γνωστό εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \quad (3.81)$$

όπου a_i, b_i οι i -συνιστώσες των $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, ενώ η διπλή συστολή ορίζεται ως

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}). \quad (3.82)$$

3.3 Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

Στην παράγραφο αυτή, θα επιλύσουμε το εξωτερικό πρόβλημα (3.16)-(3.18) για το ηλεκτρικό δυναμικό στο μη αγωγίμο χώρο V^+ , εξωτερικά του ελλειψοειδούς $\rho = \alpha_1$.

Αναζητώντας μια λύση που να είναι αρμονική συνάρτηση ομαλή στην περιοχή του απείρου, ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση του Laplace (3.16) και συγχρόνως η ασυμπτωτική συνθήκη (3.18), οδηγούμαστε στην εξής μορφή για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό

$$u^+(\rho, \mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m \mathbf{IF}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (3.83)$$

για $\rho > \alpha_1$. Οι ιδιοσυναρτήσεις $\mathbf{IF}_n^m$ είναι οι εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές, που συνδέονται, όπως έχουμε ήδη δει, με τις αντίστοιχες εσωτερικές, μέσω των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων $\mathbf{I}_n^m$ και της σχέσης (Γ.6).

Η συνοριακή συνθήκη Dirichlet (3.17) επιβάλλει ώστε επί της επιφάνειας S του ελλειψοειδούς $\rho = \alpha_1$, οι τιμές του εξωτερικού δυναμικού u^+ να συμπίπτουν με τις αντίστοιχες τιμές του εσωτερικού δυναμικού u^- . Έτσι, οι (3.17), (3.40) και (3.83) επιβάλλουν

$$\begin{aligned} u^+(\alpha_1, \mu, \nu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m \mathbf{IF}_n^m(\alpha_1, \mu, \nu) \\ &= b_0^1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma \gamma_n^m \alpha_2 \alpha_3 E_n^{m'}(\alpha_1)} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{IE}_n^m(\mathbf{r}_0) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu)). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Εισάγοντας στο αριστερό μέλος της (3.84) τις επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές, μέσω της (Γ.6), πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί

$$E_n^{m'}(\mu) E_n^{m'}(\nu) l_{\alpha_1}(\mu, \nu) \quad (3.85)$$

και ολοκληρώνοντας επάνω στην επιφάνεια $\rho = \alpha_1$, η ορθογωνιότητα των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών ως προς τη συνάρτηση βάρους l_{α_1} συνεπάγεται τις σχέσεις

$$c_0^1 = \frac{b_0^1}{F_0^1(\alpha_1)} \quad (3.86)$$

και

$$c_n^m = \frac{1}{\sigma \gamma_n^m \alpha_2 \alpha_3 F_n^m(\alpha_1) E_n^{m'}(\alpha_1)} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{I} E_n^m(\mathbf{r}_0)) \quad (3.87)$$

για $n = 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$.

Αντικαθιστώντας τις (Γ.3), (2.139), (3.86) και (3.87) στην (3.83), το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό παίρνει, για $\rho > \alpha_1$, τη μορφή

$$u^+(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(\alpha_1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{I} E_n^m(\mathbf{r}_0))}{\sigma \gamma_n^m \alpha_2 \alpha_3 E_n^m(\alpha_1) E_n^{m'}(\alpha_1)} \frac{I_n^m(\rho)}{I_n^m(\alpha_1)} \mathbf{I} E_n^m(\rho, \mu, \nu). \quad (3.88)$$

Η εξίσωση (3.88) παρέχει το πλήρες ανάπτυγμα σε ελλειψοειδείς αρμονικές του δυναμικού u^+ . Παρατηρούμε ότι η αυθαιρεσία που ενυπήρχε στο u_s^- , στον όρο μηδενικής τάξεως του αναπτύγματος (3.37), μεταφέρθηκε, μέσω της συνθήκης (3.17), στο u^+ ως αυθαιρεσία στον όρο τάξεως r^{-1} .

Απ' την άλλη μεριά, περαιτέρω επεξεργασία των πρώτων όρων της (3.88) επιτρέπει στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της να γίνουν περισσότερο ορατά. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, όπως και στην παράγραφο 3.2 τις σχέσεις (3.41)-(3.51), οδηγούμαστε στην παρακάτω προσέγγιση του ηλεκτρικού δυναμικού στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς αγωγού $\rho = \alpha_1$,

$$u^+(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(\alpha_1)} + \frac{3}{4\pi\sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(\alpha_1)} - \frac{5}{8\pi\sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left[\frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(\alpha_1)} \frac{\mathbf{I} E_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(\alpha_1)} \frac{\mathbf{I} E_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda'(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right] + \frac{15}{4\pi\sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_i x_{0j} x_i x_j}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2} \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(\alpha_1)} + O(e l_3). \quad (3.89)$$

Παρατηρώντας την (3.89) από την άποψη της ασυμπτωτικής ανάλυσης και χρησιμοποιώντας τα σχετικά συμπεράσματα (3.53) και (3.56), της προηγούμενης παραγράφου, για τα ελλειπτικά ολοκληρώματα και τις ελλειψοειδείς αρμονικές, βλέπουμε ότι σ' αυτήν υπάρχουν όροι της τάξεως του α/x , του $(\alpha/x)^2$ και του $(\alpha/x)^3$, όπου το πηλίκο α/x ορίζεται ανάλογα με την (3.59) για να αντιστοιχεί σε

ένα μέτρο της εξάρτησης του δυναμικού από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ελλειψοειδούς σε σχέση με το σημείο παρατήρησης $\mathbf{r}$. Δεδομένου ότι στην (3.89) το πεδίο u^+ υπολογίζεται σε σημείο $\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu)$ στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς, όπου $\rho > \alpha_1$, ο λόγος α/x είναι μικρότερος της μονάδας, γεγονός που εξασφαλίζει τη σύγκλιση των σειρών αλλά συγχρόνως και το ικανοποιητικό της παραπάνω προσέγγισης.

Εξάλλου χρησιμοποιώντας τον τανυστικό συμβολισμό (3.68) και (3.69), καθώς και τους περαιτέρω ορισμούς

$$\tilde{\mathbf{A}}_1(\rho) = \frac{3}{4\pi\sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\tilde{\mathbf{L}}_1(\rho) \quad (3.90)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r}) = -\frac{5}{8\pi\sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\Lambda - \Lambda')}\left[\frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(\alpha_1)}\frac{\tilde{\Lambda}}{\Lambda}\mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r}) - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(\alpha_1)}\frac{\tilde{\Lambda}'}{\Lambda'}\mathbf{IE}_2^2(\mathbf{r})\right] \quad (3.91)$$

και

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}_1(\rho) = \frac{5}{\sigma V}\tilde{\tilde{\mathbf{L}}}_2(\rho) \quad (3.92)$$

η (3.89), κατ' αναλογία με την αντίστοιχη έκφραση (3.80) για το εσωτερικό δυναμικό u_s^- , οδηγεί στην εξής τανυστική έκφραση του ηλεκτρικού δυναμικού για $\mathbf{r} \in V^+$, δηλαδή για $\rho > \alpha_1$

$$u^+(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(\alpha_1)} + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\tilde{\Gamma}}_1 : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + O(eI_3). \quad (3.93)$$

Στην (3.93) η απλή και διπλή συστολή ορίζονται όπως στις (3.81) και (3.82).

3.4 Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Εφαλτήρια εξίσωση για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου είναι, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.6, η εξίσωση (1.89), από την οποία θα εστιάσουμε, κατ' αρχήν, στον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος

$$\int_S u^-(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'). \quad (3.94)$$

Αρχική μας πρόθεση είναι, να εκφράσουμε όλες τις ποσότητες που εμφανίζονται στην προς ολοκλήρωση συνάρτηση, συναρτήσει επιφανειακών ελλειψοειδών

αρμονικών, έτσι ώστε να εκμεταλλευτούμε την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων αυτών για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος επί της επιφάνειας $\rho = \alpha_1$, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Γ.8) και (Γ.9).

Όσον αφορά το ηλεκτρικό δυναμικό επί της ελλειψοειδούς επιφάνειας S , έχει υπολογιστεί στην παράγραφο 3.2 και δίνεται, συναρτήσει επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών, για $\rho = \alpha_1$, στην εξίσωση (3.40).

Αναλύοντας τους όρους της (3.40), που περιέχουν ελλειψοειδείς αρμονικές μέχρι και δευτέρου βαθμού, με τη βοήθεια των σχέσεων (3.45)-(3.51), παίρνουμε το εξής ανάπτυγμα

$$\begin{aligned}
 u_s^-(\mathbf{r}') &= u_s^-(\alpha_1, \mu', \nu') = b_0^1 \\
 &+ \frac{1}{\sigma V h_1 h_2 h_3} \sum_{m=1}^3 \alpha_m h_m Q_m E_1^m(\mu') E_1^m(\nu') \\
 &- \frac{5}{6\sigma V (\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m}}{\Lambda - \alpha_m^2} E_2^1(\mu') E_2^1(\nu') \\
 &+ \frac{5}{6\sigma V (\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m}}{\Lambda' - \alpha_m^2} E_2^2(\mu') E_2^2(\nu') \\
 &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_i h_j \alpha_{\sigma-(i+j)}} \frac{(Q_i x_{0j} + Q_j x_{0i})}{(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)} E_2^{i+j}(\mu') E_2^{i+j}(\nu') \\
 &+ O(e l'_3)
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

ή, εισάγοντας τανυστικό συμβολισμό,

$$\begin{aligned}
 u_s^-(\mathbf{r}') &= u^-(\alpha_1, \mu', \nu') = b_0^1 + \sum_{m=1}^3 \zeta_m E_1^m(\mu') E_1^m(\nu') \\
 &+ \sum_{m=1}^5 \theta_m E_2^m(\mu') E_2^m(\nu') + O(e l'_3)
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

όπου

$$\zeta_m = \frac{\alpha_m h_m}{\sigma V h_1 h_2 h_3} (\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{x}}_m), \quad m = 1, 2, 3 \tag{3.97}$$

και

$$\theta_1 = - \frac{5}{6\sigma V (\Lambda - \Lambda')} (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda}) \tag{3.98}$$

$$\theta_2 = \frac{5}{6\sigma V(\Lambda - \Lambda')} (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda}') \quad (3.99)$$

$$\theta_3 = \frac{5\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\sigma V h_1 h_2 h_3} \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)}{\alpha_3 h_3 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \quad (3.100)$$

$$\theta_4 = \frac{5\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\sigma V h_1 h_2 h_3} \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)}{\alpha_2 h_2 (\alpha_1^2 + \alpha_3^2)} \quad (3.101)$$

$$\theta_5 = \frac{5\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\sigma V h_1 h_2 h_3} \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2)}{\alpha_1 h_1 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)}. \quad (3.102)$$

Απ' την άλλη μεριά, το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}'$, στο σημείο $\mathbf{r}'$ της επιφάνειας S του ελλειψοειδούς $\rho = \alpha_1$, δίνεται συναρτήσει Καρτεσιανών συντεταγμένων, με τη μορφή (3.6). Χρησιμοποιώντας την (3.29) για την $l_{\alpha_1}(\mu', \nu')$ και την (3.63) για το δυαδικό $\tilde{\mathbf{M}}(\rho)$ στη θέση $\rho = \alpha_1$, προκύπτει μέσω της (3.6) η εξής έκφραση για το μοναδιαίο κάθετο

$$\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\boldsymbol{\rho}}' = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 l_{\alpha_1}(\mu', \nu') \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \cdot \mathbf{r}'. \quad (3.103)$$

Θα αφήσουμε το μοναδιαίο κάθετο $\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ για λίγο στη μορφή (3.103), δεδομένου ότι πρόθεσή μας είναι να αναπτύξουμε σε ελλειψοειδείς αρμονικές ολόκληρη την ποσότητα $\hat{\boldsymbol{\rho}}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3}$. Στο σημείο αυτό ο οικονομικότερος τρόπος, από την άποψη της πολυπλοκότητας και του πλήθους των πράξεων, αποδεικνύεται πως περνάει και πάλι μέσα από τον τανυστικό λογισμό.

Έτσι, συνεχίζουμε επεξεργαζόμενοι το ανάπτυγμα της $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ για $\mathbf{r}' \in S$ και $\mathbf{r} \in V^+$. Χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη για την εργασία μας, αναπαράσταση (3.27) και την ταυτότητα (3.30), όπου τώρα ως πηγή θεωρούμε το επαγόμενο στη θέση $\mathbf{r}'$ χωρικό ρεύμα αγωγιμότητας, οδηγούμαστε στο ανάπτυγμα σε ελλειψοειδείς αρμονικές

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \nabla_{\mathbf{r}'} \mathbf{IE}_n^m(\alpha_1, \mu', \nu') \mathbf{IF}_n^m(\rho, \mu, \nu) + O(e l_3) \end{aligned} \quad (3.104)$$

ενώ με τη βοήθεια και των (3.48)-(3.51) και της (Γ.6) προκύπτει η έκφραση

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} &= \sum_{m=1}^3 \frac{3h_m}{h_1 h_2 h_3} \hat{\mathbf{x}}_m I_1^m(\rho) \mathbb{I}_1^m(\rho, \mu, \nu) \\
&\quad - \sum_{m=1}^3 \frac{x'_m \hat{\mathbf{x}}_m}{(\Lambda - \Lambda') \left(\frac{\mathbb{I}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right)} \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{h_i h_j}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} (x'_i \hat{\mathbf{x}}_j + x'_j \hat{\mathbf{x}}_i) 15 I_2^{i+j}(\rho) \mathbb{I}_2^{i+j}(\rho, \mu, \nu) + O(e l_3). \quad (3.105)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις $\mathbb{I}_n^m(\mathbf{r})$ με την Καρτεσιανή μορφή τους μέσω των (Γ.23) και (Γ.27) και χρησιμοποιώντας τις διανυσματικές εκφράσεις των σημείων $\mathbf{r}'$ και $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r}' = \sum_{m=1}^3 x'_m \hat{\mathbf{x}}_m \quad (3.106)$$

και

$$\mathbf{r} = \sum_{m=1}^3 x_m \hat{\mathbf{x}}_m \quad (3.107)$$

αντίστοιχα, μετασχηματίζουμε την (3.105) στην

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} &= 3 \sum_{m=1}^3 I_1^m(\rho) \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \cdot \mathbf{r} \\
&\quad - \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{(\Lambda - \Lambda') \left(\frac{\mathbb{I}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right)} \cdot \mathbf{r}' \\
&\quad + \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} : \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] \cdot \mathbf{r}' + O(e l_3) \quad (3.108)
\end{aligned}$$

ή, με τη βοήθεια των (3.64)-(3.67),

$$\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}' + O(e l_2') \quad (3.109)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = - \frac{\mathbb{I}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\Lambda} + \frac{\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\Lambda}' + 15 \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} : \tilde{\mathbf{H}}_2(\rho) \quad (3.110)$$

και το ανάπτυγμα (3.109) ισχύει για τα σημεία $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ με $\rho > \rho'$. Ο τόνος στο σύμβολο $O(e l_2')$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει τη μεταβλητή στην οποία αναφέρονται οι ελλειψοειδείς αρμονικές που καθορίζουν την τάξη της προσέγγισης. Έτσι, η σχέση (3.109) δίνει την προσέγγιση μέχρι τις ελλειψοειδείς αρμονικές πρώτου βαθμού ως

προς τη μεταβλητή $\mathbf{r}'$, αλλά μέχρι ελλειψοειδείς αρμονικές δευτέρου βαθμού ως προς την μεταβλητή $\mathbf{r}$, και τα σύμβολα $O(e l'_2)$ και $O(e l_3)$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά στην (3.109).

Τότε, από τις (3.103) και (3.109), παίρνουμε την έκφραση

$$\begin{aligned} \hat{\rho}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 l_{\alpha_1}(\mu', \nu') [3 \mathbf{r}' \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} \\ & + \mathbf{r}' \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'] + O(e l'_3) \end{aligned} \quad (3.111)$$

ή, λόγω της (3.106)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 l_{\alpha_1}(\mu', \nu') \left[3 \sum_{m=1}^3 (\hat{\mathbf{x}}_m \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\alpha_1) \cdot \mathbf{r}) \mathbf{x}'_m \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=1}^3 (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_j) \mathbf{x}'_i \mathbf{x}'_j + O(e l'_3) \right]. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Στη μορφή (3.112), η ποσότητα $\hat{\rho}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ είναι έτοιμη να δεχτεί τη μετατροπή των Καρτεσιανών μονωνύμων του σημείου $\mathbf{r}'$, σε επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές, μέσω των σχέσεων (Γ.28)-(Γ.31), (Γ.5) και των (3.41)-(3.44). Έτσι, ο πρώτος όρος της (3.112) δίνει όρους με ελλειψοειδείς αρμονικές πρώτου βαθμού, ενώ από το άθροισμα, οι όροι που προέρχονται από δείκτες των οποίων οι τιμές συμπίπτουν, δίνουν μηδενικού και δευτέρου βαθμού αρμονικές, ενώ οι υπόλοιποι όροι, που αντιστοιχούν σε διαφορετικούς δείκτες, δίνουν ελλειψοειδείς αρμονικές δευτέρου βαθμού. Ειδικότερα, για $\rho' = \alpha_1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \hat{\rho}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = & \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 l_{\alpha_1}(\mu', \nu') \left\{ \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 \alpha_m^2 (\hat{\mathbf{x}}_m \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_m) \right. \\ & + \frac{3}{h_1 h_2 h_3} \sum_{m=1}^3 \alpha_m h_m (\hat{\mathbf{x}}_m \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r}) E_1^m(\mu') E_1^m(\nu') \\ & - \frac{1}{3(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_m^2}{\Lambda - \alpha_m^2} (\hat{\mathbf{x}}_m \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_m) E_2^1(\mu') E_2^1(\nu') \\ & \left. + \frac{1}{3(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 \frac{\alpha_m^2}{\Lambda' - \alpha_m^2} (\hat{\mathbf{x}}_m \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_m) E_2^2(\mu') E_2^2(\nu') \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{\alpha_i \alpha_j}{h_{6-(i+j)}} (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_j) E_2^{i+j}(\mu') E_2^{i+j}(\nu') \Bigg\} \\
& + O(e l'_3). \tag{3.113}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως ο όρος που περιέχει ελλειψοειδείς αρμονικές μηδενικού βαθμού ως προς το σημείο $\mathbf{r}'$, ή αλλιώς, ο μονοπολικός, ως προς το σημείο $\mathbf{r}$, όρος, μηδενίζεται, όπως φαίνεται στην παρακάτω ανάλυση, με τη βοήθεια των (3.63)-(3.65), (3.67) και (3.110). Πραγματικά, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^3 \alpha_m^2 (\hat{\mathbf{x}}_m \cdot \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(\alpha_1) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_m) = \sum_{m=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_m \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_m \\
& = - \frac{\mathbb{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \times \hat{\mathbf{x}}_m}{\Lambda - \alpha_m^2} + \frac{\mathbb{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \times \hat{\mathbf{x}}_m}{\Lambda' - \alpha_m^2} \\
& + 15 \sum_{m=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_m \times (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} : \tilde{\mathbf{H}}_2(\rho)) \cdot \hat{\mathbf{x}}_m \\
& = 15 \sum_{m=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_m \times \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_m \\
& = 15 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 I_2^{i+j}(\rho) x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_j \times \hat{\mathbf{x}}_i \\
& = 0. \tag{3.114}
\end{aligned}$$

Τότε, η (3.113) γράφεται

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\rho}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} & = l_{\alpha_1}(\mu', \nu') \left[\sum_{m=1}^3 \boldsymbol{\beta}_m E_1^m(\mu') E_1^m(\nu') \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^5 \boldsymbol{\delta}_m E_2^m(\mu') E_2^m(\nu') \right] + O(e l'_3) \tag{3.115}
\end{aligned}$$

όπου

$$\boldsymbol{\beta}_m = \frac{3\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{h_1 h_2 h_3} \frac{h_m}{\alpha_m} \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \tag{3.116}$$

$$\boldsymbol{\delta}_1 = - \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{3(\Lambda - \Lambda')} \tilde{\Lambda} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \tag{3.117}$$

$$\delta_2 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{3(\Lambda - \Lambda')} \tilde{\mathbf{A}}' \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \quad (3.118)$$

$$\delta_3 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{h_1 h_2 h_3^2} \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \quad (3.119)$$

$$\delta_4 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{h_1 h_2^2 h_3} \left[\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \quad (3.120)$$

$$\delta_5 = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{h_1^2 h_2 h_3} \left[\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}). \quad (3.121)$$

Το διπλό γινόμενο $\times$ που εμφανίζεται στις (3.116)-(3.121) ορίζεται μεταξύ δυνάδων διανυσμάτων ως εξής [4,35]

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}). \quad (3.122)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.96) και (3.115) προκύπτει για την ποσότητα που πρέπει να ολοκληρώσουμε στην επιφάνεια S του ελλειψοειδούς $\rho = \alpha_1$, η εξής μορφή

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{p}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = l_{\alpha_1}(\mu', \nu') \left[b_0^1 + \sum_{m=1}^3 \zeta_m E_1^m(\mu') E_1^m(\nu') + \sum_{m=1}^5 \theta_m E_2^m(\mu') E_2^m(\nu') \right. \\ \left. + O(e l'_3) \right] \times \left[\sum_{m=1}^3 \beta_m E_1^m(\mu') E_1^m(\nu') + \sum_{m=1}^5 \delta_m E_2^m(\mu') E_2^m(\nu') + O(e l'_3) \right] l_{\alpha_1}(\mu', \nu'). \quad (3.123) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά Cauchy τις σειρές που εμφανίζονται στην (3.123), παρατηρούμε ότι προκύπτουν όροι που φέρουν γινόμενα της μορφής

$$E_n^m(\mu') E_n^m(\nu') E_{n'}^{m'}(\mu') E_{n'}^{m'}(\nu') l_{\alpha_1}(\mu', \nu') \quad (3.124)$$

και

$$E_n^m(\mu') E_n^m(\nu') O(e l'_3) \quad (3.125)$$

με $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$, και $n' = 1, 2$ και $m' = 1, 2, \dots, 2n'+1$.

Όσο αφορά τους όρους της μορφής (3.124), κατά την ολοκλήρωσή τους στην ελλειψοειδή επιφάνεια S , δίνουν, λόγω της ορθογωνιότητας των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών επί της S και των σχέσεων (Γ.8) και (Γ.9), αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{m=1}^3 \zeta_m \beta_m \gamma_1^m, \quad \sum_{m=1}^5 \theta_m \delta_m \gamma_2^m \quad (3.126)$$

όπου οι σταθερές κανονικοποίησης γ_n^m δίνονται στις (Γ.11)-(Γ.15).

Όσον αφορά τους όρους της μορφής (3.125), αυτοί παρέχουν όρους με παράγοντες γ_n^m με $n \geq 3$. Παρατηρούμε ότι οι τελευταίοι αυτοί όροι εκφράζουν πολύπολα τάξεως μεγαλύτερης ή ίσης του οκταπόλου, ως προς το σημείο $\mathbf{r}$, στο οποίο αναφερόμαστε. Πράγματι, την τάξη του πολυπόλου ως προς $\mathbf{r}$ στην (3.123) τη μεταφέρουν οι διανυσματικοί συντελεστές $\boldsymbol{\beta}_m$ και $\boldsymbol{\delta}_m$ οι οποίοι δε μετέχουν ως μεταβλητές στην ολοκλήρωση. Όπως φαίνεται από τις (3.116)-(3.121), και παράλληλα από τις (3.64)-(3.67) και (3.110), οι συντελεστές $\boldsymbol{\beta}_m$ μεταφέρουν την τάξη του διπόλου, ενώ η τάξη του πολυπόλου που μεταφέρουν οι συντελεστές $\boldsymbol{\delta}_m$ “κρύβεται” στην ποσότητα $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$. Η έκφραση (3.110) που δίνει την $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ και παράλληλα η χρήση των (3.65)-(3.67), (Γ.6) και (Γ.23)-(Γ.28), κάνει φανερό πώς, η ποσότητα $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ μεταφέρει την τάξη του τετραπόλου, μέσω των εξωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών δευτέρου βαθμού που ενσωματώνει.

Απ’ την άλλη πλευρά, εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου, του τρίτου, μεταφέρουν λόγω των (Γ.6), (3.53) και (3.56) πολύπολα τάξεως μεγαλύτερης ή ίσης του οκταπόλου, τα οποία βρίσκονται εκτός του επίπεδου προσέγγισης που αφορά την παρούσα εργασία.

Εστιάζοντας λοιπόν την προσοχή μας στην αναζήτηση του τετραπολικού όρου του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, αυτός εξαντλείται από τη συνεισφορά των όρων της μορφής (3.124), δηλαδή, λόγω και της (3.126),

$$\int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{p}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}') = \sum_{m=1}^3 \zeta_m \boldsymbol{\beta}_m \gamma_1^m + \sum_{m=1}^5 \theta_m \boldsymbol{\delta}_m \gamma_2^m + O(e l_3). \quad (3.127)$$

Αναλυτικά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.97), (3.116) και (Γ.12) προκύπτει ότι ο διπολικός όρος του αναπτύγματος (3.127) είναι

$$\sum_{m=1}^3 \zeta_m \boldsymbol{\beta}_m \gamma_1^m = \frac{3}{\sigma} \sum_{m=1}^3 (\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{x}}_m) \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{H}}_1(\rho) = \frac{3}{\sigma} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho). \quad (3.128)$$

Επίσης από τις (3.98)-(3.102), (3.117)-(3.121) και (Γ.13)-(Γ.15) προκύπτει ο τετραπολικός όρος της (3.127)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^5 \theta_m \boldsymbol{\delta}_m \gamma_2^m &= -\frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{3\sigma(\Lambda - \Lambda')} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda} \otimes \tilde{\Lambda} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{3\sigma(\Lambda - \Lambda')} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda}' \otimes \tilde{\Lambda}' \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{(\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (\alpha_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + \alpha_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{\sigma(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}). \quad (3.129)$$

Τότε, η (3.127) μέσω των (3.128) και (3.129) δίνει το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{p}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') &= \frac{3}{\sigma} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{H}}_1(\rho) \\ &- \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{3\sigma(\Lambda - \Lambda')} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda} \otimes \tilde{\Lambda} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{3\sigma(\Lambda - \Lambda')} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda}' \otimes \tilde{\Lambda}' \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{(\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (\alpha_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + \alpha_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{\sigma(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &+ O(el_3). \end{aligned} \quad (3.130)$$

Με τη σχέση (3.130) ολοκληρώθηκε το μέρος της εργασίας, που αφορούσε τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος (3.94).

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα (3.109) για το πεδίο που παράγεται από το κύριο ρεύμα διπόλων στη θέση $\mathbf{r}_0$, και θα ενσωματώσουμε την προκύπτουσα έκφραση, μαζί με την (3.130), στην (1.89), για να καταλήξουμε την τετραπολική προσέγγιση του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς αγωγού.

Έτσι, δεδομένου ότι η πηγή εντοπίζεται στον εσωτερικό χώρο V^- και η θέση $\mathbf{r}$ στην οποία αναφέρεται το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται στον εξωτερικό χώρο V^+ , είναι $\rho > \rho_0$ και το ανάπτυγμα (3.109) ισχύει ως εξής

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = 3\tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{F}}(\rho) \cdot \mathbf{r}_0 + O(el_3) \quad (3.131)$$

ενώ η ποσότητα $\tilde{\mathbf{F}}(\rho)$ ορίζεται στην (3.110).

Κατά συνέπεια,

$$\mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = 3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{H}}_1(\rho) + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 \times \tilde{\mathbf{F}}(\rho) + O(el_3) \quad (3.132)$$

και η (1.89), λόγω των (3.130) και (3.132), δίνει το μαγνητικό πεδίο στο χώρο V^+ στη μορφή

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\
& + \frac{\mu_0}{12\pi} \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{\Lambda - \Lambda'} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda} \otimes \tilde{\Lambda} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\
& - \frac{\mu_0}{12\pi} \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{\Lambda - \Lambda'} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\Lambda}' \otimes \tilde{\Lambda}' \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\
& - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \otimes (\alpha_2^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \alpha_1^2 \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\
& - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \otimes (\alpha_3^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \alpha_1^2 \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)}{\alpha_1^2 + \alpha_3^2} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\
& - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{(\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2) \otimes (\alpha_3^2 \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \alpha_2^2 \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2)}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\
& + O(eI_3). \tag{3.133}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε κατ' αρχήν πώς οι όροι που έφεραν την τάξη του διπόλου στις (3.130) και (3.132) ενσωματώθηκαν στην (1.90) κατά τέτοιον τρόπο ώστε αλληλοαναιρέθηκαν, αφήνοντας στο μαγνητικό πεδίο τη συνεισφορά τους στον τετραπολικό μόνον όρο, και επιβάλλοντας στο πολυπολικό του ανάπτυγμα να ξεκινά με τον όρο του τετραπόλου. Η ιδιότητα αυτή, όπως δείξαμε στην παράγραφο 1.6, είναι γενική ιδιότητα όλων των φραγμένων ομογενών αγωγών με λείο σύνορο. Έτσι συναντούμε για άλλη μια φορά την ικανοποίηση της απαίτησης για μη ύπαρξη ανοικτών μαγνητικών γραμμών από τη φυσική θεωρία της Μαγνητοστατικής [33,48]. Η συνέχεια της παραγράφου αυτής θα αφιερωθεί στην επεξεργασία της έκφρασης (3.133) για το μαγνητικό πεδίο, με σκοπό να παράγουμε μορφές της ίδιας έκφρασης όπου ο ρόλος των φυσικών και γεωμετρικών της παραμέτρων είναι περισσότερο έκδηλος καθώς επίσης και μορφές περισσότερο προσιτές στη χρήση τους σε υπολογιστικές μεθόδους, όσον αφορά τις πρακτικές εφαρμογές του αποτελέσματος. Κατ' αρχήν ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της (3.133) μπορούν να συνδυαστούν μέσω του τετραδικού

$$\frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{3(\Lambda - \Lambda')} \tilde{\Lambda} \otimes \tilde{\Lambda} - \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{3(\Lambda - \Lambda')} \tilde{\Lambda}' \otimes \tilde{\Lambda}'. \tag{3.134}$$

Με τη βοήθεια των (3.64) και (3.65), των σχέσεων (Γ.50), (Γ.51) και των συνεπαγομένων, απ' αυτές, ταυτοτήτων

$$\frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{(\Lambda - \alpha_i^2)^2} = (\Lambda - \alpha_i^2) - \sum_{m=1}^3 (\Lambda - \alpha_m^2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.135)$$

και

$$\frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{(\Lambda' - \alpha_i^2)^2} = (\Lambda' - \alpha_i^2) - \sum_{m=1}^3 (\Lambda' - \alpha_m^2), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.136)$$

καθώς και εκτενών αλλά ευθέων αλγεβρικών χειρισμών αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned} & \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{3(\Lambda - \Lambda')} \tilde{\mathbf{A}} \otimes \tilde{\mathbf{A}} - \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{3(\Lambda - \Lambda')} \tilde{\mathbf{A}}' \otimes \tilde{\mathbf{A}}' \\ &= \frac{1}{3} \tilde{\mathbf{I}} \otimes \tilde{\mathbf{I}} - \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \end{aligned} \quad (3.137)$$

όπου το δεύτερο μέλος είναι ανεξάρτητο των Λ και Λ' .

Τότε ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της (3.133) συνδυάζεται μέσω της (3.137) και δίνουν

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left(\frac{1}{3} \tilde{\mathbf{I}} \otimes \tilde{\mathbf{I}} - \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \right) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\mu_0}{12\pi} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0) \tilde{\mathbf{I}} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) - \frac{\mu_0}{12\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left(\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \right) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Από την (3.100) και τον ορισμό των $\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}'$ και $\tilde{\mathbf{H}}_2(\rho)$ μέσω των (3.61) και (3.64)-(3.67) προκύπτουν άμεσα τα εξής

$$\tilde{\mathbf{I}} \times \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{I}} \times \tilde{\mathbf{A}}' = \mathbf{0} \quad (3.139)$$

και

$$\tilde{\mathbf{I}} \times (\mathbf{x}'_i \otimes \mathbf{x}'_j + \mathbf{x}'_j \otimes \mathbf{x}'_i) = \mathbf{0} \quad (3.140)$$

για κάθε ζευγάρι i, j με $i \neq j$, επομένως

$$\tilde{\mathbf{I}} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (3.141)$$

Κατά συνέπεια, ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της (3.133) συνεισφέρουν στο αποτέλεσμα μόνον μέσω της ποσότητας

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left(\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \right) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}). \quad (3.142)$$

Προχωρώντας στους επόμενους τρεις όρους της (3.133), παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι, με απλές πράξεις διάταξης διανυσμάτων, μπορεί να αποδειχθεί η ισχύς της ταυτότητας

$$\begin{aligned} & \frac{(\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (\alpha_j^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \alpha_i^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i)}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \\ &+ \frac{(\alpha_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j - \alpha_j^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (\hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2}, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Η εφαρμογή της (3.143) στην (3.133) με τη βοήθεια και της (3.142), οδηγεί στην έκφραση

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &- \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left(\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \right) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &- \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &- \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{(\alpha_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j - \alpha_j^2 \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \otimes (\hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j)}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2} \right) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ &+ O(e l_3). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Ο ορισμός (3.62) του ταυτοτικού τετραδικού και η ιδιότητά του να αφήνει αναλλοίωτο κάθε δυαδικό που υφίσταται διπλή συστολή μαζί του, συμπυκνώνει το δεύτερο και τον τρίτο όρο της (3.144) στη μορφή

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{I}} \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \quad (3.145)$$

με την οποία εξουδετερώνεται ο πρώτος όρος της, αφήνοντας στο μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ τη συνεισφορά από τον τέταρτο όρο μόνον.

Αναφορικά με τον όρο αυτόν, παρατηρούμε ότι, καθώς για το ταυτοτικό δυαδικό $\tilde{\mathbf{I}}$ ισχύουν οι ταυτότητες

$$\hat{\mathbf{x}}_1 \times \tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (3.146)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 \times \tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (3.147)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_3 \times \tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 \quad (3.148)$$

οι οποίες αποδεικνύονται άμεσα, μέσω της (3.61), ο τελευταίος όρος της (3.144) μπορεί να αναλυθεί ως εξής

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left[\frac{(\alpha_1^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \alpha_2^2 \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \times \tilde{\mathbf{I}} \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ & -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left[\frac{(-\alpha_1^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \alpha_3^2 \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)}{\alpha_1^2 + \alpha_3^2} \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 \times \tilde{\mathbf{I}} \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ & -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left[\frac{(\alpha_2^2 \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 - \alpha_3^2 \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2)}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 \times \tilde{\mathbf{I}} \right] \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \\ & + O(e l_3). \end{aligned} \quad (3.149)$$

Οι διανυσματικές ποσότητες

$$\frac{\hat{\mathbf{x}}_k}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - x_k^2}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.150)$$

που εμφανίζονται μέσα στις αγκύλες της (3.149), αποτελούν τις k -συνιστώσες του δυαδικού $\tilde{\mathbf{N}}_1$, όπως ορίζεται στην (3.70), ενώ οι δυαδικές παραστάσεις που περιέχονται στις παρενθέσεις, αφού υποστούν τη διπλή συστολή με τη δυάδα $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0$, με την έννοια της (3.82), αποτελούν τις αντίστοιχες συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου

$$\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(\alpha_1) \times \mathbf{r}_0 \quad (3.151)$$

όπου το δυαδικό $\tilde{\mathbf{M}}$ ορίζεται στην (3.63).

Τότε, ορίζοντας το διάνυσμα

$$\mathbf{d}_{el} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(\alpha_1) \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_1 \quad (3.152)$$

η (3.149) συρρικνώνεται στην

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{d}_{el} \times \tilde{\mathbf{I}}) \times \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) + O(e l_3) \quad (3.153)$$

η οποία αποτελεί την πλέον συμπυκνωμένη μορφή για τον τετραπολικό όρο του αναπτύγματος του μαγνητικού πεδίου. Επειδή, ωστόσο, παρά τη μαθηματική της κομψότητα, η μορφή (3.153) “κρύβει” μέσα στα σύμβολά της τις φυσικές και γεωμετρικές ποσότητες του προτύπου που μελετάμε, συνεχίζουμε την επεξεργασία

της αναλύοντας την ποσότητα $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r})$ μέσω της (3.110) και εκτελώντας τις επιμέρους πράξεις που εμφανίζονται.

Έτσι, αντικαθιστώντας, το ταυτοτικό δυαδικό $\tilde{\mathbf{I}}$ καθώς και τα $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}', \tilde{\mathbf{H}}_2$ από τις (3.61), (3.64), (3.65) και (3.67), και χρησιμοποιώντας το διπλό, εξωτερικό-εσωτερικό γινόμενο, μεταξύ των δυνάδων που προκύπτουν σύμφωνα με την (3.122) και το διπλό εξωτερικό γινόμενο μεταξύ διανυσμάτων, σύμφωνα με την ταυτότητα

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad (3.154)$$

οδηγούμεστε στις εκφράσεις

$$(\mathbf{d}_{\text{el}} \times \tilde{\mathbf{I}}) \times \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{d}_{\text{el}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \quad (3.155)$$

$$(\mathbf{d}_{\text{el}} \times \tilde{\mathbf{I}}) \times \tilde{\mathbf{A}}' = \mathbf{d}_{\text{el}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}' \quad (3.156)$$

ενώ για $i \neq j$, στην

$$(\mathbf{d}_{\text{el}} \times \tilde{\mathbf{I}}) \times (\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{d}_{\text{el}} \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j + \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i). \quad (3.157)$$

Για την ακρίβεια, οι (3.155)-(3.157) είναι ειδικές περιπτώσεις της δυαδικής ταυτότητας

$$(\mathbf{d} \times \tilde{\mathbf{I}}) \times (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{d}) \quad (3.158)$$

η οποία αποδεικνύεται με τον τρόπο που περιγράψαμε πιο πάνω. Στις (3.155)-(3.157) συμβαίνει τα δυαδικά $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}'$ και $\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} : \tilde{\mathbf{H}}_2(\rho)$ να έχουν μηδενικό βαθμωτό αναλλοίωτο και γι' αυτό η δράση του τελεστή $(\mathbf{d}_{\text{el}} \times \tilde{\mathbf{I}}) \times$ επί αυτών, περιορίζεται στην απλή συστολή τους με το διάνυσμα $\mathbf{d}_{\text{el}}$. Το ευτυχές αυτό αποτέλεσμα οδηγεί την έκφραση (3.153) στην, πολύ σημαντική για την περαιτέρω πορεία της εργασίας μας, μορφή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{\text{el}} \cdot \left[\frac{\mathbf{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\mathbf{A}} - \frac{\mathbf{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\mathbf{A}}' - \frac{3}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 h_i h_j \mathbf{F}_2^{i+j}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] + O(e l_3) \quad (3.159)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αντικατάσταση

$$15 \tilde{\mathbf{H}}_2(\rho) : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} = 15 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i x_j \mathbf{I}_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j = \frac{3}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 h_i h_j \mathbf{F}_2^{i+j}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \quad (3.160)$$

η οποία είναι δυνατή λόγω των (Γ.6) και (Γ.27).

Η σημασία της σχέσεως (3.159) φαίνεται μέσα από τέσσερις διαφορετικές θεωρήσεις της.

Κατ' αρχήν προβάλλεται ο τρόπος με τον οποίο η κύρια πηγή $\mathbf{J}^p$ υπεισέρχεται στον τετραπολικό όρο του μαγνητικού πεδίου, μέσω της ροπής $\mathbf{Q}$, και της θέσης της $\mathbf{r}_0$, στο διάνυσμα $\mathbf{d}_{el}$, το οποίο υφίσταται τη δράση ενός τελεστή που μεταφέρει μόνον γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγωγού.

Εξαιτίας της παρατήρησης αυτής, η παραπάνω θεώρηση της (3.159) μπορεί να αποδειχθεί ιδιαιτέρως χρήσιμη στην αντιμετώπιση του αντιστρόφου MEG προβλήματος, όπως θα δούμε στη συνέχεια, στο έκτο κεφάλαιο.

Όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.152), η ροπή $\mathbf{Q}$ εμπλέκεται στο διάνυσμα $\mathbf{d}_{el}$ τροποποιημένη, μέσω του τελεστή $\tilde{\mathbf{M}}(\alpha_1)$, ο οποίος μεταφέρει στη φυσική ποσότητα $\mathbf{Q}$ την επίδραση της ανισοτροπίας του ελλειψοειδούς προτύπου που χρησιμοποιούμε. Με άλλα λόγια, το διάνυσμα

$$\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}(\alpha_1) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 Q_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (3.161)$$

ενσωματώνει την επίδραση της ελλειψοειδούς γεωμετρίας στη φυσική του προβλήματος που μελετούμε. Απ' την άλλη μεριά, η επίδραση αυτή είναι ακόμη πιο καθαρή, αν συγκρίνουμε τη μορφή του διανύσματος $\mathbf{d}_{el}$, όπως δίνεται στην (3.152) με τη μορφή του διανύσματος $\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0$, που παίζει ακριβώς τον ίδιο ρόλο στο αποτέλεσμα (1.102) του Sarvas [45] για το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, στην περίπτωση του σφαιρικού αγωγού. Από την άποψη αυτή ο ρόλος των τελεστών $\tilde{\mathbf{M}}(\alpha_1)$ και $\tilde{\mathbf{N}}_1$ είναι να τροποποιήσουν το διάνυσμα της πηγής

$$\mathbf{d}_{sr} = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \quad (3.162)$$

της σφαιρικής γεωμετρίας, κατά τρόπον ώστε αυτό να ανταποκρίνεται στη νέα γεωμετρία στην οποία καλείται να λειτουργήσει. Είναι εξάλλου προφανές, ότι το κύριο χαρακτηριστικό της νέας γεωμετρίας είναι οι ιδιαιτερότητες των διευθύνσεων του χώρου, δηλαδή η ανισοτροπία.

Απ' την άλλη πλευρά, η έκφραση (3.159) προσφέρει την καταλληλότερη μορφή του μαγνητικού πεδίου εξωτερικά του ελλειψοειδούς αγωγού, για να συγκριθεί, εποπτικά κατ' αρχήν και αναλυτικά στη συνέχεια, στο πέμπτο κεφάλαιο, με την αντίστοιχη μορφή για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού, όπως το έδωσε

σε πλήρη μορφή ο Sarvas [45] στη σχέση (1.102). Η εποπτεία αφορά στον όμοιο τρόπο με τον οποίο η φυσική και η γεωμετρία εμπλέκονται στα δύο αποτελέσματα, ενώ η καταλληλότητα της (3.159) για την αναλυτική αναγωγή της στο αντίστοιχο σφαιρικό αποτέλεσμα έγκειται στο ότι σ' αυτήν έχουν εξαλειφθεί μέσω κατάλληλων επιλογών, πολύπλοκων σχέσεων και χειρισμών, όλες οι απροσδιοριστίες που εμφανίζονται κατά την οριακή διαδικασία της αναγωγής του ανισότροπου ελλειψοειδούς στην ισότροπη σφαίρα. Αυτά όμως θα τα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια, στο πέμπτο κεφάλαιο.

Ένα ακόμη στοιχείο που προβάλλει η έκφραση (3.159) είναι η αρμονικότητα του τετραπολικού όρου του $\mathbf{B}$, καθώς η χωρική του εξάρτηση εμπεριέχεται ολόκληρη μέσα στις εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές $\mathbb{F}_2^m$, $m = 1, 2, \dots, 5$. Το γεγονός πώς το μαγνητικό πεδίο είναι αρμονικό υπαγορεύεται από το νόμο του Gauss για το μαγνητισμό που απαιτεί τη σωληνοειδή του συμπεριφορά, συγχρόνως με το νόμο των Ampère-Maxwell που, λόγω της απουσίας πηγών ρεύματος στο χώρο V^+ , απαιτεί, από το $\mathbf{B}$, συγχρόνως και την αστρόβιλη συμπεριφορά του. Τέλος, η χρησιμότητα της (3.159) επεκτείνεται στο ότι η Καρτεσιανή μορφή του $\mathbf{B}$, που είναι το επόμενο ζητούμενο από την άποψη της αναγνωσιμότητας και της εφαρμοσιμότητάς του για υπολογιστικούς σκοπούς, απέχει πλέον ένα βήμα από αυτή. Το βήμα αυτό αποτελεί το τελευταίο μέρος της παραγράφου αυτής και ακολουθεί αμέσως παρακάτω.

Πράγματι, αναπτύσσοντας το διάνυσμα $\mathbf{d}_{el}$ κατά συνιστώσες από την (3.152) προκύπτει η έκφραση

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{el} = \sum_{i=1}^3 d_i \hat{\mathbf{x}}_i = & \frac{\alpha_2^2 Q_2 x_{03} - \alpha_3^2 Q_3 x_{02}}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{\alpha_3^2 Q_3 x_{01} - \alpha_1^2 Q_1 x_{03}}{\alpha_1^2 + \alpha_3^2} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ & + \frac{\alpha_1^2 Q_1 x_{02} - \alpha_2^2 Q_2 x_{01}}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \hat{\mathbf{x}}_3 \end{aligned} \quad (3.163)$$

και χρησιμοποιώντας τις (3.64), (3.65) και (3.160), στην (3.159) το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς αγωγού, γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbb{F}_2^1(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda - \Lambda'} \sum_{i=1}^3 \frac{d_i}{\Lambda - \alpha_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbb{F}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda - \Lambda'} \sum_{i=1}^3 \frac{d_i}{\Lambda' - \alpha_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i \\ & - \frac{15\mu_0}{4\pi} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 d_i x_i x_j \mathbb{I}_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_j + O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4\right). \end{aligned} \quad (3.164)$$

Το σύμβολο α/x χρησιμοποιείται κατ' αναλογία με τον ορισμό (3.59), για να δηλώσει ένα μέτρο του λόγου των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του ελλειψοειδούς προς τις συντεταγμένες του σημείου παρατήρησης.

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι, οι $\mathbf{IF}_2^1(\mathbf{r})$ και $\mathbf{IF}_2^2(\mathbf{r})$ μέσω των (Γ.6) και (Γ.25)-(Γ.26) γράφονται με τη μορφή

$$\mathbf{IF}_2^1(\mathbf{r}) = 5\mathbf{I}_2^1(\rho)(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_m^2}{\Lambda - \alpha_m^2} + 1 \right) \quad (3.165)$$

και

$$\mathbf{IF}_2^2(\mathbf{r}) = 5\mathbf{I}_2^2(\rho)(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_m^2}{\Lambda' - \alpha_m^2} + 1 \right), \quad (3.166)$$

είναι προφανές πώς η (3.164) παρέχει το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο για το ελλειψοειδές πρότυπο του εγκεφάλου, συναρτήσει των Καρτεσιανών συντεταγμένων και των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων $\mathbf{I}_2^m(\rho)$, $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα $\mathbf{I}_n^m(\rho)$, όπως ορίζονται στην (3.32) γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των κυρίων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων πρώτου και δεύτερου είδους $F(\phi, \alpha)$ και $E(\phi, \alpha)$, για $\phi = \sin^{-1}(h_2/\rho)$ και $\alpha = \sin^{-1}(h_3/h_2)$, όπως περιγράφεται στο Παράρτημα Γ, σχετικά με τα ελλειπτικά ολοκληρώματα. Δεδομένου επίσης ότι τα κύρια ελλειπτικά ολοκληρώματα $F(\phi, \alpha)$, $E(\phi, \alpha)$, αλλά και του τρίτου είδους, τα $\Pi(\phi, k, \alpha)$ επιδέχονται υπολογισμό μέσω αριθμητικών μεθόδων, η μορφή (3.164) για το μαγνητικό πεδίο αποτελεί την πλέον κατάλληλη για επεξεργασία του αποτελέσματος μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή, προς την κατεύθυνση της γραφικής αναπαράστασης και διερεύνησής του καθώς και της εξαγωγής συμπερασμάτων που μπορεί να αποδειχθούν χρήσιμα στην αντιμετώπιση του αντιστρόφου MEG προβλήματος.

Τα επόμενα δύο κεφάλαια αφορούν στην οριακή διαδικασία της αναγωγής των αποτελεσμάτων του τρίτου κεφαλαίου στις εκφυλισμένες περιπτώσεις του επιμήκους σφαιροειδούς, για το οποίο $\alpha_2 = \alpha_3$ του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς με $\alpha_1 = \alpha_2$, και της σφαίρας $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. Στα κεφάλαια αυτά, ο τετραπολικός όρος του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό των σφαιροειδών καθώς και της σφαίρας, παράγεται, ενώ αποδεικνύεται ότι αυτός συμπίπτει με τον αντίστοιχο όρο του αποτελέσματος (1.102) του Sarvas.

Παράλληλα, παράγονται και ο διπολικός και τετραπολικός όρος του ηλεκτρικού δυναμικού στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του αγωγού στις παραπάνω γεωμετρίες, με τη μέθοδο της αναγωγής των αντίστοιχων πεδίων δυναμικού από την ελλειψοειδή γεωμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ο ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΗΣ ΑΓΩΓΟΣ

4.1 Εισαγωγή.

Στο τέταρτο και στο πέμπτο κεφάλαιο η παρούσα διατριβή προσανατολίζεται στις εκφυλισμένες μορφές του ελλειψοειδούς προτύπου. Η ανισότητα των αξόνων του ελλειψοειδούς είναι το κρίσιμο χαρακτηριστικό με το οποίο το τριαξονικό ελλειψοειδές αντανακλά την πλήρη ανισοτροπία του τρισδιάστατου χώρου. Έτσι, αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι οι τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς (3.1) με

$$0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty \quad (4.1)$$

τότε η ισότητα δύο από τους άξονες, εκφυλίζει το τριαξονικό ελλειψοειδές σε ένα σφαιροειδές, το οποίο ως στερεό εκ περιστροφής έχει αξονική συμμετρία και αντανακλά έτσι τη μερική ισοτροπία του τρισδιάστατου χώρου.

Ειδικά, η ισότητα των δύο μικρών ημιαξόνων

$$0 < \alpha_2 = \alpha_3 < \alpha_1 < +\infty \quad (4.2)$$

καθορίζει το επίμηκες σφαιροειδές ενώ η ισότητα των δύο μεγάλων ημιαξόνων

$$0 < \alpha_3 < \alpha_2 = \alpha_1 < +\infty \quad (4.3)$$

καθορίζει το πεπλατυσμένο σφαιροειδές. Ο άξονας συμμετρίας περιστροφής, που αποτελεί και τη διεύθυνση ως προς την οποία ο χώρος είναι αναλλοίωτος στις

στροφές, είναι σε κάθε περίπτωση αυτός που είναι κάθετος στο επίπεδο των δύο ίσων ημιαξόνων.

Έτσι, στην περίπτωση (4.2) του επιμήκους σφαιροειδούς είναι ο x_1 – άξονας, ενώ στην περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς (4.3), είναι ο x_3 – άξονας. Η οριακή περίπτωση του επιμήκους σφαιροειδούς, όπου οι δύο ίσοι ημιάξονες είναι ασυμπτωτικά μικρότεροι από τον τρίτο ημιάξονα, οδηγεί στην ασυμπτωτική περίπτωση της “βελόνας”.

Σχήμα 4.1 Το Ελλειψοειδές Σύστημα

Η αντίστοιχη περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς, με τους δύο ίσους ημιάξονες ασυμπτωτικά μεγαλύτερους του τρίτου, περιγράφει ασυμπτωτικά την αναγωγή του σφαιροειδούς σε κυκλικό “δίσκο”.

Σχήμα 4.2 Το επίμηκες σφαιροειδές σύστημα

Σχήμα 4.3 Το σφαιρικό σύστημα

Τέλος, η ισότητα και των τριών ημιαξόνων του ελλειψοειδούς

$$0 < \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 < +\infty \quad (4.4)$$

οδηγεί στην εκφυλισμένη περίπτωση της σφαίρας, η οποία αντανakλά τον πλήρως ισότροπο τρισδιάστατο χώρο.

Η διαδοχική πορεία εκφυλισμού του τριαξονικού ελλειψοειδούς προς τη σφαίρα που περιγράψαμε, συνεπιφέρει αντίστοιχες μετατοπίσεις των τριών εστιών του ελλειψοειδούς, οι οποίες αντανakλώνται στις τιμές που παίρνουν διαδοχικά οι ημиеστιακές αποστάσεις h_1, h_2, h_3 .

Έτσι, όταν το ελλειψοειδές γίνεται επίμηκες σφαιροειδές, μία εστία του συμπίπτει με την αρχή των αξόνων ($h_1 = 0$) και οι άλλες δύο ταυτίζονται στη μοναδική εστία του σφαιροειδούς ($h_2 = h_3$), ενώ στην περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς η μία εστία συμπίπτει με την αρχή των αξόνων ($h_3 = 0$), ενώ η κοινή απόσταση των άλλων δύο από την αρχή ($h_1 = h_2$), καθορίζει την ακτίνα του εστιακού κύκλου του σφαιροειδούς. Είναι προφανές ότι και στις δύο περιπτώσεις, ο εκφυλισμός του ελλειψοειδούς αντανakλάται σε μηδενισμό μίας από τις ημиеστιακές αποστάσεις και σε ταύτιση των άλλων δύο.

Όταν το ελλειψοειδές αναχθεί σε σφαίρα, οι τρεις εστίες του συμπίπτουν στην αρχή των αξόνων, που είναι και το κέντρο της σφαίρας, με αποτέλεσμα οι τρεις ημиеστιακές αποστάσεις να μηδενίζονται.

Ο οριακός μηδενισμός των αντίστοιχων ημиеστιακών αποστάσεων είναι αυτός που θα μεταφέρει το γεωμετρικό εκφυλισμό του ελλειψοειδούς προτύπου στις προαναφερθείσες μορφές, μέσω της αλγεβρικής αναγωγής των αποτελεσμάτων του ελλειψοειδούς στις ανάλογες περιπτώσεις.

Σχήμα 4.4

Ωστόσο, όπως μπορεί κανείς να δει στα αποτελέσματα (3.52), (3.89) και (3.164) για το εσωτερικό και το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό και στο εξωτερικό μαγνητικό

πεδίο αντίστοιχα, στην περίπτωση του ελλειψοειδούς αγωγού, και παίρνοντας υπ' όψη τις τιμές των παραμέτρων Λ , Λ' , όπως δίνονται στη (2.155), η εξίσωση μεταξύ οποιωνδήποτε ημιαξόνων εισάγει στα αποτελέσματα απροσδιόριστες μορφές (0/0) που κάνουν αδύνατη την περαιτέρω απ' ευθείας επεξεργασία τους.

Η άρση των απροσδιοριστιών αυτών απαιτεί ένα πρόγραμμα ειδικών αλγεβρικών χειρισμών και τη χρήση καταλλήλων σχέσεων μεταξύ των όρων που εμπλέκονται, έτσι ώστε οι παράγοντες που οδηγούν στους μηδενισμούς, να απλοποιούνται πριν απαιτηθεί η οριακή διαδικασία εκφυλισμού. Η εμφάνιση και η άρση των εν λόγω απροσδιοριστιών καθώς και τα τελικά αποτελέσματα της αναγωγής από το ελλειψοειδές πρότυπο στο σφαιροειδές και στο σφαιρικό, αποτελούν το περιεχόμενο του τέταρτου και του πέμπτου κεφαλαίου.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην αναλυτική παρουσίασή τους, θα δούμε περιγραφικά, το λόγο για τον οποίο εμφανίζονται αυτές οι απροσδιοριστίες, μια που ο λόγος αυτός δεν αφορά τα συγκεκριμένα αποτελέσματα, αλλά αποτελεί εγγενή δυσκολία του ελλειψοειδούς συστήματος. Ας θεωρήσουμε λοιπόν την οικογένεια των ομοεστιακών ελλειψοειδών

$$\frac{x_1^2}{\rho^2} + \frac{x_2^2}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\rho^2 - h_2^2} = 1 \quad (4.5)$$

η οποία όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 σαρώνει το χώρο $\mathbb{R}^3$ καθώς η μεταβλητή ρ διανύει το διάστημα $[h_2, +\infty)$.

Πεπλατυσμένη σφαιροειδής γεωμετρία

Εστιακός κυκλικός δίσκος (2 – D)

Σχήμα 4.5

Επιμήκης σφαιροειδής γεωμετρία

Εστιακό ευθύγραμμο τμήμα (1 – D)

Σχήμα 4.6

Σφαιρική Γεωμετρία

Εστιακό κέντρο (0 – D)

Σχήμα 4.7

Όταν το ρ βρίσκεται στην περιοχή του απείρου, το αντίστοιχο ελλειψοειδές αγγίζει ασυμπτωτικά τη μορφή της σφαίρας άπειρης ακτίνας, και καθώς το ρ ελαττώνεται, τα αντίστοιχα ελλειψοειδή συρρικνώνονται, μέχρι που στο όριο $\rho \rightarrow h_2^+$, το ελλειψοειδές “κλείνει” στην επιφάνεια διπλής όψεως που περιγράφει η εστιακή έλλειψη (2.9)

$$\frac{x_1^2}{h_2^2} + \frac{x_2^2}{h_1^2} \leq 1. \quad (4.6)$$

Έτσι, αν θεωρήσουμε ένα σημείο P στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που περιγράφει ένα ασυμπτωτικά μεγάλο ρ , αυτό, καθώς το ελλειψοειδές συρρικνώνεται προς την εστιακή έλλειψη, ακολουθεί μία καμπύλη πορεία, με τελικό προορισμό ένα σημείο επάνω ή στο εσωτερικό της εστιακής έλλειψης (Σχ. 4.4).

Απ’ την άλλη πλευρά, θεωρώντας ότι ο χώρος καλύπτεται από ομοεστιακά επιμήκη σφαιροειδή, τα οποία συστέλλονται από μία σφαίρα άπειρης ακτίνας ώσπου να συρρικνωθούν στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζεται από τις δύο εστίες του σφαιροειδούς, βλέπουμε πώς ο γεωμετρικός εκφυλισμός των ομοεστιακών σφαιροειδών οδηγεί το σημείο P από την περιοχή του απείρου, στο μονοδιάστατο σύνολο ενός ευθυγράμμου τμήματος, δηλαδή του κλειστού διαστήματος $[-h_2, h_2]$ του x_1 -άξονα (Σχ. 4.6). Η περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς οδηγεί κατ’ αναλογία το τυχόν σημείο P στην επιφάνεια της ασυμπτωτικά μεγάλης σφαίρας, σε ένα σημείο της επιφάνειας διπλής όψης που προσφέρει ο εστιακός κύκλος

$$x_1^2 + x_2^2 \leq h_2^2 = h_1^2 \quad (4.7)$$

στον οποίο εκφυλίζεται βαθμιαία, η οικογένεια των ομοεστιακών πεπλατυσμένων σφαιροειδών (Σχ. 4.5).

Τέλος, αν θεωρήσουμε ότι το τυχόν σημείο P της περιοχής του απείρου ανήκει στην επιφάνεια της σφαίρας άπειρης ακτίνας, η οποία συρρικνώνεται καθώς η ακτίνα της ελαττώνεται, καλύπτοντας με ομόκεντρες σφαίρες το χώρο $\mathbb{R}^3$, όταν η ακτίνα της σφαίρας μηδενιστεί το σημείο P θα βρεθεί στο κέντρο της σφαίρας (Σχ. 4.7).

Σημειώνουμε εδώ πώς, η διαφοροποίηση των οποιωνδήποτε αποτελεσμάτων μεταξύ επιμήκους και πεπλατυσμένης σφαιροειδούς γεωμετρίας, οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη διαφορετική διάσταση που έχει το αντίστοιχο “εστιακό κέντρο”. Έτσι, η πεπλατυσμένη σφαιροειδής γεωμετρία, που έχει τις εστίες της εκτός άξονα συμμετρίας, δημιουργεί το διδιάστατο “εστιακό κέντρο” (4.7), ενώ η επιμήκης

σφαιροειδής γεωμετρία, που έχει τις εστίες της επάνω στον άξονα συμμετρίας, γεννά το μονοδιάστατο “εστιακό κέντρο” ενός ευθυγράμμου τμήματος.

Τέλος, η σφαίρα, που έχει περισσότερους από έναν (στην πραγματικότητα άπειρους) γραμμικώς ανεξάρτητους άξονες συμμετρίας, οδηγεί σε σημειακό “εστιακό κέντρο” και συνεπώς, σε σύνολο μηδενικής διαστάσεως, γεγονός που αντανακλά την υψηλή συμμετρία της. Παρατηρούμε λοιπόν ότι, αύξηση της ισοτροπίας του χώρου αντιστοιχεί σε μείωση των διαστάσεων του εστιακού κέντρου. Με άλλα λόγια, τα χαρακτηριστικά των διευθύνσεων του χώρου είναι νομοτελειακά καταγραφωμένα στο “εστιακό κέντρο” απ’ όπου αναβλύζει το αντίστοιχο σύστημα περιγραφής του τρισδιάστατου χώρου.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα Καρτεσιανό σύστημα στο χώρο $\mathbb{R}^3$ στον οποίο αναπτύσσεται τόσο η οικογένεια των ομοεστιακών ελλειψοειδών για $\rho \in [h_2, +\infty)$, όσο και οι οικογένειες των ομοεστιακών σφαιροειδών και των ομόκεντρων σφαιρών $r \in [0, +\infty)$. Τότε, το σημείο P που θεωρήσαμε πιο πάνω, ξεκινώντας από το άπειρο και ακολουθώντας την ελλειψοειδή ή την πεπλατυσμένη σφαιροειδή γεωμετρία, θα οδηγηθεί σε ένα σημείο ενός διδιάστατου συνόλου, ακολουθώντας την επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία θα οδηγηθεί σε ένα σημείο ενός μονοδιάστατου συνόλου, ενώ ακολουθώντας τη σφαιρική γεωμετρία θα καταλήξει σε ένα αδιάστατο σύνολο.

Με άλλα λόγια, υπάρχουν διπλά άπειρες πιθανές τελικές θέσεις για το σημείο P με την οριακή διαδικασία μέσω των ελλειψοειδών, και των πεπλατυσμένων σφαιροειδών, απλά άπειρες πιθανές τελικές θέσεις μέσω των επιμήκων σφαιροειδών και μόνο μία τελική θέση μέσω των σφαιρών. Αυτό σημαίνει πώς υπάρχουν άπειρες δυνατότητες, άρα ύπαρξη απροσδιοριστίας, στην αναγωγή ενός αποτελέσματος που αναφέρεται στο ελλειψοειδές, στο αντίστοιχο αποτέλεσμα που αφορά κάποιο σφαιροειδές και στο μοναδικό αποτέλεσμα που αναφέρεται στο ίδιο πρόβλημα για τη σφαίρα.

Ας γίνουμε όμως πιο συγκεκριμένοι, για τα προβλήματα που μελετάμε. Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε την αναγωγή των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 3, στο σφαιροειδές πρότυπο, και ειδικότερα στο επίμηκες σφαιροειδές.

Όσον αφορά το πεπλατυσμένο σφαιροειδές, θα περιοριστούμε να δώσουμε τον κατάλληλο μετασχηματισμό, ο οποίος όταν εφαρμοστεί στα αποτελέσματα του

επιμήκους, τα ανάγει άμεσα στα αντίστοιχα αποτελέσματα για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές.

4.2 Το σφαιροειδές σύστημα και οι βασικές αναγωγές.

Έστω S η επιφάνεια του επιμήκους σφαιροειδούς αγωγού, η οποία σε Καρτεσιανές συντεταγμένες έχει τη μορφή

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{\alpha_2^2} = 1 \quad (4.8)$$

όπου οι ημιάξονές του

$$0 < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty \quad (4.9)$$

σχετίζονται με την ημiesτιακή του απόσταση c μέσω της εξίσωσης

$$c^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2. \quad (4.10)$$

Το σφαιροειδές (4.8) καθορίζει ένα επίμηκες σφαιροειδές σύστημα [39], με συντεταγμένες (ξ, η, ϕ) και με συντεταγμένες επιφάνειες ένα επίμηκες σφαιροειδές (4.8), ένα υπερβολοειδές εκ περιστροφής και ένα ημιεπίπεδο. Κάθε μία από τις επιφάνειες αυτές αντιστοιχεί σε μία σταθερή τιμή των μεταβλητών ξ , η και ϕ αντίστοιχα.

Οι επιμήκειες σφαιροειδείς συντεταγμένες (ξ, η, ϕ) συνδέονται με τις Καρτεσιανές (x_1, x_2, x_3) μέσω των σχέσεων

$$x_1 = c \cosh \xi \cos \eta \quad (4.11)$$

$$x_2 = c \sinh \xi \sin \eta \cos \phi \quad (4.12)$$

$$x_3 = c \sinh \xi \sin \eta \sin \phi. \quad (4.13)$$

Έχοντας ως σκοπό τη σύνδεση των σφαιροειδών συντεταγμένων (ξ, η, ϕ) με τις ελλειψοειδείς (ρ, μ, ν) είναι αναγκαία η ακόλουθη νοηματική παρένθεση.

Από τις (2.30)-(2.32) και (4.11)-(4.13) φαίνεται πώς οι Καρτεσιανές συντεταγμένες δέχονται τις εξής αναπαραστάσεις

$$x_1 = c \cosh \xi \cos \eta = \rho \frac{\mu \nu}{h_2 h_3} \quad (4.14)$$

$$x_2 = c \sinh \xi \sin \eta \cos \phi = \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1 h_3} \quad (4.15)$$

και

$$x_3 = c \sinh \xi \sin \eta \sin \phi = \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\sqrt{h_3^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1 h_2}. \quad (4.16)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τα όρια μεταβολής των μ , ν , είναι προφανές ότι η ποσότητα $\mu\nu/h_2 h_3$ μεταβάλλεται στο διάστημα $(0,1)$ και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως συνημίτονο μιας γωνιακής μεταβλητής [29], έστω

$$\frac{\mu\nu}{h_2 h_3} = \cos \theta_\varepsilon. \quad (4.17)$$

Ομοίως δικαιολογούνται και οι παρακάτω θεωρήσεις [29]

$$\frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2}}{h_1} \frac{\sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_3} = \sin \theta_\varepsilon \cos \phi_\varepsilon \quad (4.18)$$

και

$$\frac{\sqrt{h_2^2 - \mu^2}}{h_1} \frac{\sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_2} = \sin \theta_\varepsilon \sin \phi_\varepsilon \quad (4.19)$$

οι οποίες τεκμηριώνουν το μετασχηματισμό που εισήγαγε ο Lamé κατά την ταξινόμηση των ομωνύμων συναρτήσεων και τον οποίο περιγράψαμε στην παράγραφο 2.9.

Οι συντεταγμένες ρ , θ_ε , ϕ_ε ορίζουν ένα νέο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων [8] το ελλειπτοσφαιρικό, και μπορούν να συνδεθούν πέρα από τις Καρτεσιανές, τις σφαιροειδείς (ξ, η, ϕ) και τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες (ρ, μ, ν) και με σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) στις οποίες ως πολικός άξονας θεωρείται ο x_1 -άξονας και το αζιμούθιο μετράται από τον x_2 -άξονα. Έτσι,

$$x_1 = \rho \cos \theta_\varepsilon = r \cos \theta \quad (4.20)$$

$$x_2 = \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin \theta_\varepsilon \cos \phi_\varepsilon = r \sin \theta \cos \phi \quad (4.21)$$

$$x_3 = \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sin \theta_\varepsilon \sin \phi_\varepsilon = r \sin \theta \sin \phi. \quad (4.22)$$

Τότε, οι (4.14)-(4.16) και (4.20)-(4.22) παρέχουν σύνδεση ανάμεσα στις συντεταγμένες του Καρτεσιανού, επιμήκους σφαιροειδούς, ελλειψοειδούς, ελλειπτοσφαιρικού και σφαιρικού συστήματος.

Από τη σύνδεση του σφαιροειδούς με το σφαιρικό, μπορεί να αποδειχθεί [11] ότι οι συντεταγμένες (ξ, η, ϕ) εκφράζονται συναρτήσει των (r, θ, ϕ) ως εξής:

$$\xi = \cosh^{-1} \left[\frac{C_+ + C_-}{2c} \right] \quad (4.23)$$

$$\eta = \cos^{-1} \left[\frac{C_+ - C_-}{2c} \right] \quad (4.24)$$

$$\phi = \phi \quad (4.25)$$

όπου

$$C_{\pm} = [r^2 \pm 2cr \cos \theta + c^2]^{1/2}. \quad (4.26)$$

Η σύνδεση (4.20)-(4.22), του σφαιρικού συστήματος με το Καρτεσιανό, προσφέρει άμεση έκφραση των (ξ, η, ϕ) , μέσω των (4.23)-(4.26), με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες, η οποία επιτρέπει και την έκφραση των ποσοτήτων $C_{\pm}$ συναρτήσει αυτών, ως εξής

$$C_{\pm} = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm 2cx_1 + c^2]^{1/2}. \quad (4.27)$$

Από τις (4.23), (4.24) και (4.26) είναι φανερό πώς κατά την αναγωγή του σφαιροειδούς σε σφαίρα, που συμβαίνει στο όριο $c \rightarrow 0$, οι ποσότητες που συμπίπτουν είναι οι εξής

$$\lim_{c \rightarrow 0} c \cosh \xi = r \quad (4.28)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \eta = \theta. \quad (4.29)$$

Από την άλλη μεριά, όπως αποδεικνύεται στο Κεφάλαιο 7, όπου μελετούμε εκτενέστερα την έκκεντρη διεύθυνση, η αναγωγή του ελλειπτοσφαιρικού συστήματος στο σφαιρικό, οδηγεί τις γωνίες θ_e και ϕ_e στις αντίστοιχες γωνίες θ και ϕ του σφαιρικού.

Έτσι, οι (4.14), (4.20) και (4.28) επιβάλλουν, κατά την αναγωγή του ελλειψοειδούς στο σφαιροειδές και στη συνέχεια στο σφαιρικό, την οριακή ταύτιση

$$\rho \rightarrow c \cosh \xi \rightarrow r \quad (4.30)$$

ενώ οι (4.12)-(4.14) και (4.18)-(4.20), τις

$$\frac{\mu\nu}{h_2 h_3} \rightarrow \cos \eta \rightarrow \cos \theta \quad (4.31)$$

$$\frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1 h_3} \rightarrow \sin \eta \cos \phi \rightarrow \sin \theta \cos \phi \quad (4.32)$$

και

$$\frac{\sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - v^2}}{h_1 h_2} \rightarrow \sin \eta \sin \phi \rightarrow \sin \theta \sin \phi. \quad (4.33)$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μείνουμε στην αναγωγή του ελλειψοειδούς στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα, που συμβαίνει στο όριο όπου μηδενίζεται το h_1 , ενώ τα h_2 και h_3 συμπίπτουν με την εστιακή απόσταση c , ως συνέπεια της εξίσωσης των ημιαξόνων α_2 και α_3 .

Στη συνέχεια της παραγράφου αυτής, θα παράγουμε τις αναγωγές των ποσοτήτων εκείνων που είναι αναγκαίες για την έκφραση των αποτελεσμάτων (3.52), (3.89) και (3.164) για το εσωτερικό, το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό και για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού, στην περίπτωση που ο αγωγός θεωρείται το επίμηκες σφαιροειδές (4.8).

Έτσι, οι παράμετροι Λ , Λ' , όπως δίνονται στην (2.155), για $\alpha_2 = \alpha_3$ γίνονται

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \Lambda = \frac{2\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{3} \quad (4.34)$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \Lambda' = \alpha_2^2 \quad (4.35)$$

ενώ οι ακόλουθες σχέσεις είναι άμεσες συνέπειες αυτών

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda - \Lambda') = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda - \alpha_2^2) = \frac{2c^2}{3} \quad (4.36)$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda - \alpha_1^2) = -\frac{c^2}{3} \quad (4.37)$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda' - \alpha_1^2) = -c^2 \quad (4.38)$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda' - \alpha_2^2) = 0. \quad (4.39)$$

Απ' την άλλη μεριά, τα ελλειπτικά ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$, τα οποία για $\alpha_2 = \alpha_3$ γίνονται, μέσω της (Γ.4)

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{dt}{[\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} E_n^m(t)]^2 |t^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2|}, \quad (4.40)$$

δεν είναι πια ελλειπτικά και κατά συνέπεια υπολογίζονται ακριβώς με αναλυτικούς χειρισμούς [7,9].

Ειδικότερα, ο υπολογισμός του ορίου του $I_0^1(\rho)$ απαιτεί τον υπολογισμό του

ολοκληρώματος

$$\int_{\rho}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - h_3^2} \quad (4.41)$$

ο οποίος άμεσα δίνει

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) = \frac{1}{2h_3} \ln \frac{\rho_s + h_3}{\rho_s - h_3} \quad (4.42)$$

όπου ρ_s είναι το σφαιροειδές όριο της ακτινικής ελλειψοειδούς μεταβλητής ρ .

Οι σχέσεις (Γ.32) και (Γ.33) με δεδομένη την (4.42) δίνουν για $\alpha_2 = \alpha_3$, τις τιμές των

$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_1^m(\rho)$, $m = 1, 2, 3$ ως λύσεις γραμμικού συστήματος, ως εξής

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_1^1(\rho) = \frac{1}{h_3^2} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{1}{\rho_s} \right) \quad (4.43)$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_1^2(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_1^3(\rho) = \frac{1}{2h_3^2} \left(\frac{\rho_s}{\rho_s^2 - h_3^2} - \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) \right). \quad (4.44)$$

Τέλος, οι (Γ.34)-(Γ.38) εξασφαλίζουν τον άμεσο υπολογισμό των $I_2^m(\rho)$, $m = 1, 2, 3, 4, 5$, μέσω των (4.43), (4.44) και της αντικατάστασης $\alpha_2 = \alpha_3$, με εξαίρεση τον υπολογισμό του $I_2^2(\rho)$, στο οποίο η (4.39) απαγορεύει τη χρήση της (Γ.35). έτσι, το $I_2^2(\rho)$ υπολογίζεται απ' ευθείας από τον ορισμό του (4.40), με ανάλυση της υπό ολοκλήρωσης ποσότητας σε απλά κλάσματα. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών για τα $I_2^m(\rho)$, $m = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι τα εξής [9]

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^1(\rho) = \frac{9}{4h_3^4} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{3\rho_s}{3\rho_s^2 - h_3^2} \right) \quad (4.45)$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^2(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^5(\rho) = \frac{3}{8h_3^4} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{\rho_s(3\rho_s^2 - 5h_3^2)}{3(\rho_s^2 - h_3^2)^2} \right) \quad (4.46)$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^3(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^4(\rho) = -\frac{3}{2h_3^4} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{\rho_s(3\rho_s^2 - 2h_3^2)}{3\rho_s(\rho_s^2 - h_3^2)} \right). \quad (4.47)$$

Δεδομένου ότι στην οριακή κατάσταση όπου $\alpha_2 = \alpha_3$ ισχύουν οι

$$\rho_s = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \rho = c \cosh \xi \quad (4.48)$$

και

$$h_3 = c \quad (4.49)$$

όπως είδαμε πιο πάνω, οι σχέσεις (4.42)-(4.47), μέσω των (4.48) και (4.49), δίνουν τα ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$, $n \leq 2$, με όρους του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος συντεταγμένων.

Για λόγους οικονομίας της παρουσίασης των αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου, θα θεωρήσουμε την επιπλέον αντικατάσταση

$$\tau = \cosh \xi \quad (4.50)$$

η οποία μέσω των (4.23) και (4.27) δίνει τη μεταβλητή τ , συναρτήσει Καρτεσιανών συντεταγμένων

$$\tau = \frac{1}{2c} \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + c^2 + 2cx_1} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + c^2 - 2cx_1} \right). \quad (4.51)$$

Τότε, η (4.48) μέσω της (4.50) γράφεται

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \rho = \rho_s = c\tau \quad (4.52)$$

και τα όρια των ολοκληρωμάτων $I_n^m(\rho)$ εκφράζονται άμεσα, συναρτήσει της ημιεστιακής απόστασης c και της μεταβλητής τ .

Σ' αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να χρησιμοποιήσουμε τις αναχθείσες στο όριο $\alpha_2 = \alpha_3$ ποσότητες αυτής της παραγράφου, για να παράγουμε τα βασικά αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3, στην περίπτωση του επιμήκους σφαιροειδούς προτύπου.

4.3 Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μορφή (3.52) που δίνει το ηλεκτρικό δυναμικό στον ελλειψοειδή φλοιό $\rho_0 < \rho < \alpha_1$, συναρτήσει Καρτεσιανών συντεταγμένων και των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων $I_n^m(\rho)$, $n \leq 2$.

Ο όρος που περιλαμβάνει τα $I_1^m(\rho)$, $m=1,2,3$, ανάγεται άμεσα, με τη βοήθεια των (4.42)-(4.44), (4.49) και (4.52) ως εξής

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \frac{3}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \left[I_1^m(\rho) - I_1^m(\alpha_1) + \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \right] \\ &= \frac{3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 f_1(\tau) + \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) f_2(\tau) \end{aligned} \quad (4.53)$$

όπου

$$f_1(\tau) = \frac{1}{c^3} \left[\ln \left(\frac{\tau+1}{\tau-1} \right) - \frac{1}{\tau} - \ln \left(\frac{\alpha_1 + c}{\alpha_2} \right) + \frac{\alpha_1 c}{\alpha_2^2} \right] \quad (4.54)$$

και

$$f_2(\tau) = \frac{1}{2c^3} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau+1}{\tau-1} \right) + \frac{\tau}{\tau^2-1} + \ln \left(\frac{\alpha_1 + c}{\alpha_2} \right) + \frac{(\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2)}{\alpha_1 \alpha_2^2} c \right]. \quad (4.55)$$

Οι όροι της (3.52) οι οποίοι περιλαμβάνουν τα $I_2^1(\rho)$ και $I_2^2(\rho)$ μεταφέρουν τις απροσδιόριστες μορφές στις οποίες αναφερθήκαμε στην παράγραφο **4.1**, και οι οποίες εμφανίζονται συγχρόνως με τον όρο $\Lambda' - \alpha_2^2$.

Για την επεξεργασία των όρων αυτών χρειαζόμαστε τις παρακάτω τρεις ταυτότητες, οι οποίες ισχύουν στο όριο $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} & \left\{ \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{(\Lambda - \Lambda')} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1}{\Lambda - \alpha_1^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2}{\Lambda - \alpha_2^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3}{\Lambda - \alpha_3^2} \right] \right\} \\ &= -\frac{c^2}{3} (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{(\Lambda - \Lambda')} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1}{\Lambda' - \alpha_1^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2}{\Lambda' - \alpha_2^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3}{\Lambda' - \alpha_3^2} \right] \right\} = 0 \quad (4.57)$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} & \left\{ \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{(\Lambda - \Lambda')} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1}{\Lambda' - \alpha_1^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2}{\Lambda' - \alpha_2^2} + \frac{\hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3}{\Lambda' - \alpha_3^2} \right] \left(\frac{x_1^2}{\Lambda' - \alpha_1^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{x_2^2}{\Lambda' - \alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\Lambda' - \alpha_3^2} \right) \right\} = \frac{3}{2} (x_2^2 - x_3^2) (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Η απόδειξη των (4.56) και (4.57) είναι άμεση, εάν οι αλγεβρικές απλοποιήσεις των ομοίων παραγόντων στο αριστερό τους μέλος γίνουν, πριν ληφθεί το όριο και αντικατασταθούν οι οριακές τιμές μέσω των (4.36)-(4.39).

Όσο αφορά την (4.58) ωστόσο, αφού γίνουν όλες οι δυνατές απλοποιήσεις στο αριστερό μέλος, παρατηρούμε ότι εμφανίζονται όροι της μορφής $(\Lambda' - \alpha_2^2)/(\Lambda' - \alpha_3^2)$ και αντίστροφοι, οι οποίοι στο όριο $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$ οδηγούν σε απροσδιοριστία της μορφής 0/0.

Αντιμετωπίζουμε λοιπόν το λόγο $(\Lambda' - \alpha_2^2)/(\Lambda' - \alpha_3^2)$ χωριστά, χρησιμοποιώντας για το Λ' τη σχέση (2.155) που το όρισε, και εκφράζοντας τον ημιάξονα α_2 ως μια ε-διαταραχή του α_3 ως εξής

$$\alpha_2^2 = \alpha_3^2 + \varepsilon. \quad (4.59)$$

Τότε μέσω των (2.155) και (4.59) προκύπτει ότι

$$\frac{\Lambda' - \alpha_2^2}{\Lambda' - \alpha_3^2} = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_3^2 - 2\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - h_3^2\varepsilon + h_3^4}}{\alpha_1^2 - \alpha_3^2 + \varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - h_3^2\varepsilon + h_3^4}} \quad (4.60)$$

και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του l' Hospital για τις οριακές τιμές, παίρνουμε ότι στο όριο $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$, ή ισοδύναμα στο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$, ισχύει

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Lambda' - \alpha_2^2}{\Lambda' - \alpha_3^2} = -1. \quad (4.61)$$

Στο αριστερό μέλος της (4.58) τότε, αφού γίνουν όλες οι δυνατές απλοποιήσεις, επιβάλλεται το όριο για $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$, με την προϋπόθεση ότι η οριακή τιμή του πηλίκου $(\Lambda' - \alpha_2^2)/(\Lambda' - \alpha_3^2)$ και του αντιστρόφου του, λαμβάνεται από την (4.61), οπότε το δεξί μέλος της ταυτότητας προκύπτει ευθέως.

Ξαναγυρνώντας στην (3.52) παρατηρούμε ότι η ταυτότητα (4.56), μαζί με τη (Γ.25) που δίνει την $\mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες επιτρέπουν τον υπολογισμό του παρακάτω ορίου ως εξής

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \frac{\mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} \right\} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{c^2}{3} \right). \quad (4.62)$$

Χρησιμοποιώντας επιπλέον την οριακή τιμή (4.45) για τα $I_2^1(\rho)$ και $I_2^1(\alpha_1)$, την (4.34) για το Λ και την (4.52) για τη μεταβλητή ρ , φθάνουμε στην εξής μορφή για τον όρο της (3.52) που αφορά την $\mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ -\frac{5}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \frac{\mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} \left(I_2^1(\rho) - I_2^1(\alpha_1) + \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Lambda} \right) \right\} \\ &= \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{c^2}{3} \right) f_3(\tau) \end{aligned} \quad (4.63)$$

όπου

$$f_3(\tau) = -\frac{3}{8c^5} \left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{6\tau}{3\tau^2-1} \right) + \frac{3}{4c^5} \left(\ln \left(\frac{\alpha_1+c}{\alpha_2} \right) - \frac{c(2\alpha_1^4+2\alpha_2^4+5\alpha_1^2\alpha_2^2)}{3\alpha_1\alpha_2^2(2\alpha_1^2+\alpha_2^2)} \right). \quad (4.64)$$

Στη συνέχεια, οι ταυτότητες (4.57), (4.58) και η (Γ.26) που δίνει την $\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες επιτρέπουν τον υπολογισμό του ορίου

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \frac{\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} \right\} = \frac{3}{2} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3)(x_2^2 - x_3^2) \quad (4.65)$$

ενώ οι (4.35), (4.46) και η (4.52) για τις οριακές τιμές των Λ' , $I_2^1(\rho)$ και του ρ , οδηγούν στην ακόλουθη μορφή τον όρο που ενέχει την $\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})$ στην (3.52)

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ \frac{5}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \frac{\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} \left(I_2^2(\rho) - I_2^2(\alpha_1) + \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Lambda'} \right) \right\} \\ &= \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : \left[(\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \frac{(x_2^2 - x_3^2)}{2} \right] f_4(\tau) \end{aligned} \quad (4.66)$$

όπου

$$\begin{aligned} f_4(\tau) &= -\frac{3}{16c^5} \left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{2\tau(3\tau^2-5)}{3(\tau^2-1)^2} \right) \\ &\quad - \frac{3}{8c^5} \left(\ln \left(\frac{\alpha_1+c}{\alpha_2} \right) - \frac{c(2\alpha_1^4+4\alpha_2^4-3\alpha_1^2\alpha_2^2)}{3\alpha_1\alpha_2^4} \right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Όσον αφορά τους τελευταίους όρους της (3.52) που περιέχουν τα ελλειπτικά ολοκληρώματα $I_2^m(\rho)$, $m=3,4,5$ αυτά ανάγονται άμεσα στο σφαιροειδές όριο, μέσω των (4.46) και (4.47). Λαμβάνοντας υπ' όψη την ισότητα των ορίων των $I_2^5(\rho)$ και $I_2^2(\rho)$, και των $I_2^3(\rho)$ και $I_2^4(\rho)$, οι σχετικοί όροι ανάγονται ως εξής

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ \frac{15}{4\pi\sigma} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j \left(I_2^{i+j}(\rho) - I_2^{i+j}(\alpha_1) + \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_i^2 + \alpha_j^2)} \right) \right\} \\ &= \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2) x_2 x_3 f_4(\tau) \\ &\quad + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : [(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_2 + (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_3] f_5(\tau) \end{aligned} \quad (4.68)$$

όπου

$$f_5(\tau) = \frac{3}{4c^5} \left(-\ln\left(\frac{\tau+1}{\tau-1}\right) + \frac{2(3\tau^2-2)}{3\tau(\tau^2-1)^2} \right) + \frac{3}{2c^5} \left(\ln\left(\frac{\alpha_1+c}{\alpha_2}\right) + \frac{c\alpha_1(\alpha_1^2-7\alpha_2^2)}{3\alpha_2^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)} \right). \quad (4.69)$$

Η τελική μορφή για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σφαιροειδές όριο είναι

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} u_s^-(\mathbf{r}) = & b_0^1 + \frac{3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 f_1(\tau) + (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) f_2(\tau)) \\ & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{c^2}{3} \right) f_3(\tau) \\ & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : \left[(\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \frac{(x_2^2 - x_3^2)}{2} + (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2) x_2 x_3 \right] f_4(\tau) \\ & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : [(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_2 + (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_3] f_5(\tau) \\ & + O\left(\left(\frac{x}{a}\right)^3\right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

όπου οι συναρτήσεις $f_i(\tau)$, $i=1,2,3,4,5$ δίνονται στις (4.54), (4.55), (4.64), (4.67) και (4.69) αντίστοιχα, ενώ το πηλίκο x/a κατ' αναλογία με το συμβολισμό (3.57) και (3.60), παρέχει ένα μέτρο του λόγου των συντεταγμένων του σημείου παρατήρησης, ως προς τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σφαιροειδούς αγωγού. Παρατηρώντας τη μορφή (4.70) των πρώτων όρων του αναπτύγματος του u^- σημειώνουμε πως η γεωμετρία του σφαιροειδούς εισέρχεται σε όλους αυτούς τους όρους μέσω ενός τελεστή, ο οποίος δρα στη διάταξη των διανυσμάτων $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}$ και $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0$. Στη δομή του γεωμετρικού αυτού τελεστή εξάλλου, εμφανής είναι ο ρόλος του άξονα περιστροφής του σφαιροειδούς σε αντιδιαστολή με τον τρόπο που οι άλλοι δύο άξονες x_2 και x_3 συνεισφέρουν σ' αυτήν.

4.4 Το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.

Στην παράγραφο αυτή στρεφόμαστε στην αναγωγή της έκφρασης (3.89) για το ηλεκτρικό δυναμικό, από το εξωτερικό του ελλειψοειδούς αγωγού, (3.1), στο εξωτερικό του επιμήκους σφαιροειδούς (4.8). Έτσι, ο όρος μηδενικού, όπως και οι όροι πρώτου βαθμού της (3.89) ανάγονται άμεσα στο όριο $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$,

χρησιμοποιώντας τις οριακές τιμές (4.42)-(4.44) για τα $I_0^1(\rho)$ και $I_1^m(\rho)$, $m=1,2,3$, δίνοντας

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ b_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(\alpha_1)} + \frac{3}{4\pi\sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(\alpha_1)} \right\} = \\ = b_0^1 g_0(\tau) + \frac{3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 g_1(\tau) + (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) g_2(\tau)) \end{aligned} \quad (4.71)$$

όπου

$$g_0(\tau) = \frac{\ln \frac{\tau+1}{\tau-1}}{2 \ln \frac{\alpha_1+c}{\alpha_2}} \quad (4.72)$$

$$g_1(\tau) = \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2^2} \frac{\left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{2}{\tau} \right)}{\left(\ln \frac{\alpha_1+c}{\alpha_2} - \frac{c}{\alpha_1} \right)} \quad (4.73)$$

και

$$g_2(\tau) = \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2^2} \frac{\left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{2\tau}{\tau^2-1} \right)}{\left(\ln \frac{\alpha_1+c}{\alpha_2} - \frac{c\alpha_1}{\alpha_2^2} \right)}. \quad (4.74)$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.62) και (4.65) που αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, και τις οριακές τιμές των Λ , Λ' και $I_2^1(\rho)$, $I_2^2(\rho)$ από τις (4.34), (4.35), (4.45) και (4.46) αντίστοιχα, οι σχετικοί όροι της (3.89) ανάγονται ως εξής

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ -\frac{5}{8\pi\sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \left[\sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m} \mathbf{I} E_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} \frac{I_2^1(\rho)}{\Lambda I_2^1(\alpha_1)} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m} \mathbf{I} E_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \frac{I_2^2(\rho)}{\Lambda I_2^2(\alpha_1)} \right] \right\} \\ = \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{c^2}{3} - \frac{2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} \right) g_3(\tau) \\ + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} + g_4(\tau) \end{aligned} \quad (4.75)$$

όπου

$$g_3(\tau) = \frac{1}{4\alpha_1\alpha_2^2(2\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \frac{\left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{6\tau}{3\tau^2-1} \right)}{\left(\ln \frac{\alpha_1+c}{\alpha_2} - \frac{3\alpha_1c}{2\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right)} \quad (4.76)$$

και

$$g_4(\tau) = \frac{1}{4\alpha_1\alpha_2^4} \frac{\left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{2\tau(3\tau^2-5)}{3(\tau^2-1)^2} \right)}{\left(\ln \frac{\alpha_1+c}{\alpha_2} - \frac{c\alpha_1(-2\alpha_1^2+5\alpha_2^2)}{3\alpha_2^4} \right)}. \quad (4.77)$$

Εξάλλου, οι όροι της (3.89) που αφορούν τα $I_2^m(\rho)$, $m=3,4,5$, εξαιτίας της ισότητας των ορίων τους $I_2^3(\rho)$ με το $I_2^4(\rho)$ και του $I_2^5(\rho)$ με το $I_2^2(\rho)$, δίνουν μέσω των (4.46) και (4.47)

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ \frac{15}{4\pi\sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_i x_{0j} \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2} \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(\alpha_1)} \right\} \\ &= \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) x_2 x_3 g_4(\tau) \\ &+ \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : [(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_2 + (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_3 x_1] g_5(\tau) \end{aligned} \quad (4.78)$$

όπου

$$g_5(\tau) = \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \frac{\left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{2(3\tau^2-2)}{3\tau(\tau^2-1)} \right)}{\left(\ln \frac{\alpha_1+c}{\alpha_2} - \frac{c(\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2)}{3\alpha_1\alpha_2^2} \right)}. \quad (4.79)$$

Έτσι, το ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του σφαιροειδούς αγωγού (4.8) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} u^+(\mathbf{r}) &= b_0^1 g_0(\tau) + \frac{3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : [\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 g_1(\tau) + (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) g_2(\tau)] \\ &+ \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{c^2}{3} - \left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} \right) \right) g_3(\tau) \\ &+ \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : \left[(\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \left(\frac{x_2^2 - x_3^2}{2} \right) + (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2) x_2 x_3 \right] g_4(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : [(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)x_1x_2 + (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)x_1x_3]g_5(\tau) \\
& + O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4\right).
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Οι συναρτήσεις $g_i(r)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ δίνονται στις (4.72), (4.73), (4.74), (4.77) και (4.79) αντιστοίχως και ο ρόλος τους, όπως η σύγκριση των αποτελεσμάτων (4.70) για το εσωτερικό δυναμικό και (4.80) για το εξωτερικό δυναμικό αφήνει να φανεί, είναι να δώσουν σε κάθε όρο του γεωμετρικού τελεστή που δρα στο $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}$ και στο $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0$, και οποίος είναι ο ίδιος τόσο στην (4.70) όσο και στην (4.80), την κατάλληλη βαρύτητα, ώστε το αποτέλεσμα της δράσης να είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στον αντίστοιχο χώρο του σφαιροειδούς.

4.5 Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Στρεφόμαστε τώρα στην αναγωγή της σχέσεως (3.164) που δίνει το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς, για την περίπτωση όπου $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε από την (3.163) πώς η x_1 -συνιστώσα του διανύσματος $\mathbf{d}$ στο όριο $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$ συμπίπτει με τη x_1 -συνιστώσα του εξωτερικού γινομένου $(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0)/2$. Έτσι, περιμένουμε πώς η ιδιαιτερότητα αυτή θα γίνει φανερή σε όλους τους όρους της (3.164).

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (Γ.6) για τις εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές, η (3.164) γράφεται

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{5\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{\text{el}} \cdot \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} I_2^1(\rho) \\
& - \frac{5\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{\text{el}} \cdot \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \mathbf{IE}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} I_2^2(\rho) \\
& - \frac{5\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{\text{el}} \cdot \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j x_i x_j I_2^{i+j}(\rho) \\
& + O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4\right).
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Οι σχέσεις (4.62) και (4.65) καθώς και τα όρια των $I_2^m(\rho)$, $m=1,2,3,4,5$ από τις (4.45) ως (4.47) επιτρέπουν την αναγωγή της (4.81) στην εξής μορφή

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{5\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{sd} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{c^2}{3} \right) F_1(\tau) \\ & + \frac{5\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{sd} \cdot (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2) \frac{(x_2^2 - x_3^2)}{2} F_2(\tau) \\ & + \frac{5\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{sd} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes [\hat{\mathbf{x}}_2 x_1 x_2 F_3(\tau) + \hat{\mathbf{x}}_3 x_1 x_3 F_3(\tau)] \\ & + \frac{5\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{sd} \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes [\hat{\mathbf{x}}_1 x_1 x_2 F_3(\tau) + \hat{\mathbf{x}}_3 x_2 x_3 F_2(\tau)] \\ & + \frac{5\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{sd} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes [\hat{\mathbf{x}}_1 x_1 x_3 F_3(\tau) + \hat{\mathbf{x}}_2 x_2 x_3 F_2(\tau)] \\ & + O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4\right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

όπου το σύμβολο α/x υποδηλώνει ένα μέτρο του λόγου των χαρακτηριστικών του σφαιροειδούς αγωγού προς τις συντεταγμένες του σημείου παρατήρησης, ενώ

$$F_1(\tau) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^1(\rho) = \frac{9}{8c^5} \left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{6\tau}{3\tau^2-1} \right) \quad (4.83)$$

$$F_2(\tau) = -3 \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^2(\rho) = -3 \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^5(\rho) = -\frac{9}{16c^5} \left[\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{2\tau(3\tau^2-5)}{3(\tau^2-1)^2} \right] \quad (4.84)$$

και

$$F_3(\tau) = -3 \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^3(\rho) = -3 \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^4(\rho) = \frac{9}{4c^5} \left[\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - \frac{2(3\tau^2-2)}{3\tau(\tau^2-1)} \right]. \quad (4.85)$$

Το διάνυσμα $\mathbf{d}_{sd}$ που εμφανίζεται στην (4.82) είναι το διάνυσμα με το οποίο η πηγή εισέρχεται στον πρώτο όρο του μαγνητικού πεδίου, μέσω της ροπής $\mathbf{Q}$ και της θέσης της $\mathbf{r}_0$, και προκύπτει ως το σφαιροειδές όριο ($\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$) του αντίστοιχου διανύσματος $\mathbf{d}_{el}$ του ελλειψοειδούς προτύπου στη σχέση (3.164).

Ειδικότερα, από την (3.163) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{sd} = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \mathbf{d}_{el} = & \frac{(Q_2 x_{03} - Q_3 x_{02})}{2} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ & + \frac{(\alpha_2^2 Q_3 x_{01} - \alpha_1^2 Q_1 x_{03})}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{(\alpha_1^2 Q_1 x_{02} - \alpha_2^2 Q_2 x_{01})}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \hat{\mathbf{x}}_3. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Ορίζοντας τον τελεστή

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \alpha_1^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2^2 (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \quad (4.87)$$

η (4.86) γράφεται στη συμπαγή μορφή

$$\mathbf{d}_{sd} = \frac{(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0)}{2} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \left(\frac{(\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1) \times \mathbf{r}_0}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right) \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1). \quad (4.88)$$

Στην (4.88) είναι προφανής η ταύτιση της προβολής του διανύσματος $\mathbf{d}_{sd}$ στη διεύθυνση x_1 του άξονα περιστροφής του σφαιροειδούς, με την αντίστοιχη προβολή του διανύσματος $(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0)/2$, όπου το $\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0$ είναι το διάνυσμα με το οποίο η πηγή εισέρχεται στο αποτέλεσμα (1.102) για το μαγνητικό πεδίο, στην περίπτωση του σφαιρικού αγωγού [45]. Η ταύτιση αυτή είναι συνέπεια της γεωμετρικής ιδιότητας του σφαιροειδούς να παραμένει αναλλοίωτο στις στροφές περί τον άξονα περιστροφής του. Απ' την άλλη πλευρά, οι προβολές του $\mathbf{d}_{sd}$ στους άλλους δύο άξονες απαιτούν την τροποποίηση του διανύσματος $\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0$, εισάγοντας έτσι την απόκλιση του σφαιροειδούς προτύπου από την πλήρη ισοτροπία του σφαιρικού.

Αναδιατάσσοντας λοιπόν τους όρους της (4.82) κατά συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{d}_{sd}$ και χρησιμοποιώντας τη μορφή (4.88), φθάνουμε στην ακόλουθη έκφραση για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του σφαιροειδούς αγωγού

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{5\mu_0}{8\pi} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{r}) \\ & + \frac{5\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1 \times \mathbf{r}_0}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right] \cdot [\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{r})] \\ & + O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4\right). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Τα διανύσματα $\boldsymbol{\beta}_i(\mathbf{r})$ στην (4.89) μεταφέρουν στο μαγνητικό πεδίο, αλλά και εξαρτώνται εξολοκλήρου από τη γεωμετρία του αγωγού, όπως φαίνεται στις ακόλουθες εκφράσεις τους

$$\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{r}) = \left(\frac{c^2}{3} - \frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} \right) 2F_1(\tau) \hat{\mathbf{x}}_1 + x_1 x_2 F_3(\tau) \hat{\mathbf{x}}_2 + x_1 x_3 F_3(\tau) \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned}\beta_2(\mathbf{r}) &= x_1 x_2 F_3(\tau) \hat{\mathbf{x}}_i \\ &+ \left[\left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{c^2}{3} \right) F_1(\tau) + \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} F_2(\tau) \right] \hat{\mathbf{x}}_2 + x_2 x_3 F_2(\tau) \hat{\mathbf{x}}_3\end{aligned}\quad (4.91)$$

$$\begin{aligned}\beta_3(\mathbf{r}) &= x_1 x_3 F_3(\tau) \hat{\mathbf{x}}_i + x_2 x_3 F_2(\tau) \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &+ \left[\left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{c^2}{3} \right) F_1(\tau) - \frac{x_2^2 - x_3^2}{2} F_2(\tau) \right] \hat{\mathbf{x}}_3.\end{aligned}\quad (4.92)$$

Οι συναρτήσεις $F_i(\tau)$, $i=1,2,3$ δίνονται στις σχέσεις (4.83), (4.84) και (4.85) αντίστοιχα. Αξίζει να σημειώσουμε πώς, παρατηρώντας τις (4.90)-(4.92) από γεωμετρική σκοπιά, είναι προφανές σ' αυτές η ισοδυναμία των δύο καθέτων, στον άξονα περιστροφής, διευθύνσεων του σφαιροειδούς, καθώς η εναλλαγή μεταξύ των x_2 και x_3 , αφήνει και τα τρία διανύσματα αναλλοίωτα.

Τελειώνοντας το κεφάλαιο αυτό, και πριν φύγουμε από το επίμηκες σφαιροειδές πρότυπο, επισημαίνουμε πώς τα μέχρι τώρα γνωστά αποτελέσματα που αφορούν το ηλεκτρικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο που παράγονται από σημειακή διπολική πηγή στο εσωτερικό ομογενούς σφαιροειδούς αγωγού, ο οποίος βρίσκεται εντός μη αγώγιμου χώρου, αναφέρονται σε πλήρεις σειρές σφαιροειδών αρμονικών. Ειδικότερα, το ηλεκτρικό δυναμικό στη συνοριακή επιφάνεια του επιμήκους σφαιροειδούς αγωγού έχει υπολογιστεί από τον Berry [3] για $\mathbf{r} \in S$ στη μορφή

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(2-\delta_m^0)(2n+1)(n-m)!P_n^m(\cos\eta)}{(\cosh^2 \xi_0 - 1)(n+m)!P_n^{m'}(\cosh \xi_s)} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_{nm} \quad (4.93)$$

όπου

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{nm} &= \frac{\sin \eta_0}{(\cosh^2 \xi_0 - \cos^2 \eta_0)^{1/2}} P_n^m(\cosh \xi_0) P_n^{m'}(\cos \eta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0) \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ &+ \frac{\sin \xi_0}{(\cosh^2 \xi_0 - \cos^2 \eta_0)^{1/2}} P_n^{m'}(\cosh \xi_0) P_n^m(\cos \eta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0) \hat{\boldsymbol{\xi}} \\ &+ \frac{1}{\sinh \xi_0 \sin \eta_0} P_n^m(\cosh \xi_0) P_n^m(\cos \eta_0) m \sin m(\varphi - \varphi_0) \hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned}\quad (4.94)$$

και (ξ_0, η_0, ϕ_0) , (ξ, η, ϕ) οι θέσεις $\mathbf{r}_0$ της πηγής και $\mathbf{r}$ της μέτρησης του πεδίου, αντιστοίχως σε σφαιροειδείς συντεταγμένες.

Ο J.C. de Munck [4], έχει υπολογίσει σε μία αντίστοιχη έκφραση το ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό μη ομογενούς σφαιροειδούς αγωγού, όπου η μη ομοιογένεια

αναφέρεται σε φλοιούς ομοεστιακών σφαιροειδών διαφορετικής αγωγιμότητας, ενώ οι Cuffin και Cohen [6] έχουν δώσει κατά συνιστώσες το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό ομογενούς επιμήκους σφαιροειδούς αγωγού, το οποίο οφείλεται σε σημειακή διπολική πηγή για τις περιπτώσεις όπου η ροπή της είναι προσανατολισμένη στις διευθύνσεις $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ και $\hat{\phi}$. Τα αποτελέσματα αυτά δίνονται ως πλήρεις σειρές σφαιροειδών αρμονικών, η έκτασή τους όμως κάνει απαγορευτική την παρουσίασή τους στα πλαίσια αυτής της διατριβής.

Με την έννοια αυτή, τα βασικά αποτελέσματα (4.70), (4.80) και (4.89) για το ηλεκτρικό πεδίο εντός και εκτός του ομογενούς σφαιροειδούς αγωγού και για το μαγνητικό πεδίο στον εξωτερικό μη αγωγίμο χώρο, αποτελούν καινούρια συνεισφορά στη μελέτη του ευθέως EEG και MEG προβλήματος στη σφαιροειδή γεωμετρία.

Απ' την άλλη πλευρά, τα εν λόγω αποτελέσματα δίνουν άμεσα τα αντίστοιχα πεδία για την περίπτωση που ο αγωγός θεωρηθεί ως το πεπλατυσμένο σφαιροειδές, το οποίο εκφράζεται σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, επίσης από την (4.8), με τη διαφορά ότι $\alpha_1 < \alpha_2$. Οι πεπλατυσμένες σφαιροειδείς συντεταγμένες δίνονται από τις (4.11)-(4.13) με εναλλαγή μεταξύ του $\sinh \xi$ και του $\cosh \xi$ [39]. Εάν συμβολίσουμε με $\bar{c}$ την ημιστιακή απόσταση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς, τότε ο μετασχηματισμός που ανάγει τα αποτελέσματα (4.70), (4.80) και (4.89) του επιμήκους σφαιροειδούς στα αντίστοιχα αποτελέσματα του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς είναι ο εξής [10]

$$c \rightarrow -i\bar{c} \quad (4.95)$$

και

$$\tau = \cosh \xi \rightarrow i \sinh \xi. \quad (4.96)$$

Η ολοκλήρωση της μελέτης του σφαιροειδούς προτύπου απαιτεί ακόμη, την αναγωγή των αποτελεσμάτων (4.70), (4.80) και (4.89) του κεφαλαίου αυτού, στα αντίστοιχα αποτελέσματα του σφαιρικού προτύπου. Η απ' ευθείας παραγωγή αυτών, καθώς και η αναγωγή στο σφαιρικό όριο των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 3 για τον ελλειψοειδή αγωγό και του Κεφαλαίου 4 για το σφαιροειδή αγωγό, αποτελούν το περιεχόμενο του επόμενου κεφαλαίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ο ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΑΓΩΓΟΣ

5.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε αποτελέσματα που αφορούν το γεωμετρικό πρότυπο του σφαιρικού ομογενούς αγωγού για τον εγκέφαλο. Προβλήματα σχετικά με το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό καθώς και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο έχουν διερευνηθεί στο παρελθόν από τους de Munck, Ilmoniemi, Sarvas, Fokas και άλλους, [19,30,41,45]. Ο σκοπός της μελέτης των προβλημάτων αυτών στα πλαίσια της παρούσας διατριβής έχει να κάνει με την εις βάθος κατανόηση των φαινομένων που εμπλέκονται στους υπολογισμούς αυτούς, και που συνδέονται με προτυποποιήσεις μεγεθών στο ευαίσθητο και ιδιόρρυθμο όριο της Σχεδόν Στατικής Προσέγγισης του Ηλεκτρομαγνητισμού, που κάνει την κατανόηση των φαινομένων αυτών να μην είναι άμεσα εμφανής. Επί πλέον, η μελέτη των προβλημάτων (1.62)-(1.63) για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό u^- , (1.64)-(1.66) για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό u^+ και ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ μέσω της (1.89) για το σφαιρικό πρότυπο, αν και δεν παρέχει αμιγώς καινούρια γνώση, δίνει για πρώτη φορά τους κυρίαρχους όρους του ηλεκτρικού δυναμικού τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του αγωγού και του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του αγωγού, με τη

συμπαγή μορφή που παρέχει η χρήση τανυστών και Καρτεσιανών συντεταγμένων. Στη μορφή αυτή προβάλλεται ο ξεχωριστός τρόπος με τον οποίο εμπλέκεται η Φυσική και η Γεωμετρία του προτύπου στα αντίστοιχα αποτελέσματα. Οι εκφράσεις για τα u^- , u^+ και $\mathbf{B}$, είναι εξάλλου αναγκαίες για να είναι δυνατή η σύγκριση με τα αντίστοιχα πεδία στο ελλειψοειδές και στο σφαιροειδές πρότυπο, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τη δομή του σήματος που λαμβάνεται κατά τη μέτρηση του αντίστοιχου πεδίου. Ενδιαφέρουσα μελλοντική έρευνα θα απαιτούσε να εξεταστεί το κατά πόσον είναι δυνατόν τα συμπεράσματα αυτά να αποβούν χρήσιμα στην αντιμετώπιση του αντιστρόφου EEG και MEG προβλήματος. Τέλος, οι σχέσεις που παρέχονται για τα u^- , u^+ και $\mathbf{B}$ από τη μελέτη αυτή παρέχουν τις κατάλληλες μορφές που απαιτούνται για να αναχθούν οι σχετικές εκφράσεις από το ελλειψοειδές και το σφαιροειδές στο αντίστοιχο σφαιρικό πρότυπο.

Έτσι, το κεφάλαιο αυτό δομείται ως εξής. Στην παράγραφο **5.2** περιγράφουμε συνοπτικά την επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών που αφορούν το εσωτερικό και το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Ακολουθώντας μεθόδους παρόμοιες με αυτές του Κεφαλαίου 3, υπολογίζουμε το εξωτερικό Μαγνητικό πεδίο, καταλήγοντας στις τρεις βασικές εκφράσεις που δίνουν τους πρώτους όρους προσέγγισης για τα πεδία u^- , u^+ και $\mathbf{B}$ στο σφαιρικό αγωγό, συναρτήσει των παραμέτρων $\mu_0, \sigma, \mathbf{Q}, \mathbf{r}_0$ και γεωμετρικών εκφράσεων σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Η παράγραφος **5.3** αναφέρεται στην ασυμπτωτική ανάλυση του αποτελέσματος (1.102) για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού, στην πλήρη μορφή του, την οποία υπολόγισε ο Sarvas [45] ακολουθώντας τελείως διαφορετική κατεύθυνση. Ο σκοπός της αναλύσεως αυτής είναι να απομονωθεί ο τετραπολικός όρος του ασυμπτωτικού αναπτύγματος, ώστε να επικυρωθούν τα αντίστοιχα αποτελέσματα της παραγράφου **5.2** και της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή τους και κατά συνέπεια, να επικυρωθεί η αναγωγή των νέων αποτελεσμάτων των Κεφαλαίων **3** και **4** στο πλέον γνωστό και ευρέως χρησιμοποιημένο αποτέλεσμα του σφαιρικού αγωγού.

Η αναγωγή αυτή, με τους ιδιόρρυθμους χειρισμούς που απαιτεί, εκτελείται στις παραγράφους **5.4** και **5.5** αντίστοιχα.

5.2 Ο υπολογισμός των u^- , u^+ , $\mathbf{B}$.

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε πώς η επιφάνεια S που διαχωρίζει τον αγωγίμο χώρο V^- από τον μη αγωγίμο V^+ είναι η σφαιρική επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha^2 \text{ Equation Chapter 5 Section 1 (5.1)}$$

όπου α είναι η ακτίνα του σφαιρικού αγωγού.

Αρχικά θα επιλύσουμε το εσωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad 0 \leq r < \alpha \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u^-(r, \theta, \phi) = 0, \quad r = \alpha \quad (5.3)$$

με

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (5.4)$$

και $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$, για τον υπολογισμό του εσωτερικού δυναμικού u^- συναρτήσει, τόσο των σφαιρικών αρμονικών, όσο και των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Με τις τιμές του u^- επί της συνοριακής επιφάνειας S γνωστές, θα λύσουμε κατόπιν το εξωτερικό πρόβλημα

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad r > \alpha \quad (5.5)$$

$$u^+(\alpha, \theta, \phi) = u^-(\alpha, \theta, \phi) \quad (5.6)$$

και

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

όπου $\theta \in [0, \pi]$ και $\phi \in [0, 2\pi)$.

Τέλος, χρησιμοποιώντας ξανά τις τιμές $u^-(\alpha, \theta, \phi)$ θα υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο από την αναπαράσταση Geselowitz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'). \quad (5.8)$$

Στο πρόγραμμα αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τις πραγματικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$$Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \quad (5.9)$$

$$Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^m(\cos \theta) \sin(m\phi) \quad (5.10)$$

και

$$Y_n^0(\hat{\mathbf{r}}) = P_n(\cos \theta) \quad (5.11)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, n$ όπου P_n και P_n^m είναι τα πολυώνυμα του Legendre και οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους αντίστοιχα [8,29], οι οποίες ως γνωστόν, είναι λύσεις της συνήθους διαφορικής εξίσωσης Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad (5.12)$$

για $m = 0$ και για $m \neq 0$ αντίστοιχα.

Οι (5.9), (5.10) και (5.11) παρέχουν τότε τις χωρικές εσωτερικές σφαιρικές αρμονικές

$$r^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r^n Y_n^0(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.13)$$

και τις χωρικές εξωτερικές σφαιρικές αρμονικές

$$r^{-(n+1)} Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r^{-(n+1)} Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r^{-(n+1)} Y_n^0(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.14)$$

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε επίσης το ανάπτυγμα της θεμελιώδους λύσεως του τελεστή του Laplace σε σφαιρικές αρμονικές

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta) \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\phi - \phi_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta) \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \left[Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

το οποίο ισχύει για $r > r_0$ ενώ για $0 < r < r_0$ το ανάπτυγμα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta) \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r_0, θ_0, ϕ_0) καθορίζουν τη θέση $\mathbf{r}_0$ της πηγής $\mathbf{J}^p$ ενώ οι (r, θ, ϕ) καθορίζουν τη θέση στην οποία μετράται το αντίστοιχο πεδίο.

Όπως ακριβώς και στην παράγραφο 3.2 για την περίπτωση του ελλειψοειδούς αγωγού, το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται ως άθροισμα της εσωτερικής αρμονικής συνάρτησης $\Phi(\mathbf{r})$ και της ειδικής λύσης (3.21) της εξίσωσης (5.2) ως εξής

$$u^-(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (5.17)$$

όπου

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n r^n \left(c_n^{m,e} Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) + c_n^{m,0} Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right). \quad (5.18)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (3.30) και το ανάπτυγμα (5.15) για την $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$ καθώς και τις (5.9) και (5.10) για τις $Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}})$ και $Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}})$, η (5.17) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών, δίνοντας το ηλεκτρικό δυναμικό στο σφαιρικό φλοιό $r_0 < r < \alpha$, στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} u_s^-(r, \theta, \phi) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{4\pi\sigma} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n P_n(\cos\theta_0))}{r^{n+1}} + c_n^0 r^n \right] P_n(\cos\theta) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{2\pi\sigma} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{r^{n+1}} + c_n^{m,e} r^n \right] Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{2\pi\sigma} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{r^{n+1}} + c_n^{m,0} r^n \right] Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.19) \end{aligned}$$

Η παραγωγή της (5.19) ως προς r , ο υπολογισμός του αποτελέσματος για την τιμή $r = \alpha$ και η ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (5.3) οδηγούν στις ακόλουθες τιμές των σταθερών c_n^m της (5.18)

$$c_n = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{n+1}{n\alpha^{2n+1}} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n P_n(\cos\theta_0)), \quad n \geq 1 \quad (5.20)$$

$$c_n^{m,e} = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{n+1}{n\alpha^{2n+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)), \quad n \geq 1 \quad (5.21)$$

$$c_n^{m,0} = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{n+1}{n\alpha^{2n+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)), \quad n \geq 1. \quad (5.22)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.20)-(5.22) στην (5.18) και στη συνέχεια στην (5.17), παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του σφαιρικού αγωγού, δηλαδή για $0 \leq r < \alpha$

$$\begin{aligned}
u^-(\mathbf{r}) = & c_0 - \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \\
& + \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n P_n(\cos \theta_0)) \frac{r^n}{\alpha^{2n+1}} P_n^m(\cos \theta) \\
& + \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{n+1}{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \frac{r^n}{\alpha^{2n+1}} Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\
& + \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{n+1}{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \frac{r^n}{\alpha^{2n+1}} Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Η ύπαρξη της αυθαίρετης σταθεράς c_0 αντανακλά την έλλειψη μοναδικότητας για το εσωτερικό πρόβλημα Neumann (5.2), (5.3).

Εξάλλου, αντικαθιστώντας τα c_n^m από τις (5.20)-(5.22) στην (5.19) παίρνουμε για το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού $r_0 < r < \alpha$ την έκφραση

$$\begin{aligned}
u_s^-(\mathbf{r}) = & c_0 \\
& + \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n P_n(\cos \theta_0)) \left[\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta) \\
& + \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right] Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\
& + \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right] Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Οι (5.23) και (5.24) παρέχουν το πλήρες ανάπτυγμα του ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές αρμονικές, στο εσωτερικό του σφαιρικού αγωγού $0 \leq r < \alpha$ και του σφαιρικού φλοιού $r_0 < r < \alpha$ αντίστοιχα. Στη μορφή (5.24) η ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (5.3) από κάθε όρο του ιδιοαναπτύγματος, είναι προφανής.

Με σκοπό να φθάσουμε σε μια έκφραση που να είναι συγκρίσιμη με τα αποτελέσματα (3.52) και (4.65) για το $u_s^-(\mathbf{r})$ στην περίπτωση του ελλειψοειδούς και του σφαιροειδούς προτύπου αντίστοιχα, θα χρησιμοποιήσουμε την Καρτεσιανή μορφή των σφαιρικών αρμονικών βαθμού μικροτέρου ή ίσου του δευτέρου για να εκφράσουμε τους πρώτους όρους του αναπτύγματος (5.24) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Στην ουσία χρησιμοποιούμε την προβολή της λύσης μέσα στον διανυσματικό υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης που γεννούν οι ιδιοσυναρτήσεις

(ανεξάρτητα επιλογής συστήματος) βαθμού μικρότερου ή ίσου του δύο. Οι υποχώροι αυτοί εκπροσωπούνται από διαφορετικές βάσεις ανάλογα με το σύστημα που επιλέγεται κάθε φορά και οι διάφορες σχέσεις που μας μεταφέρουν από το ένα σύστημα στο άλλο δεν αποτελούν τίποτε άλλο από τους τύπους αλλαγής βάσης όπως τους γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Έτσι, χρησιμοποιώντας τον ορισμό των $P_n(\cos \theta)$ και $P_n^m(\cos \theta)$ [9,29], τις (5.9)-(5.10) και το σφαιρικό σύστημα (4.18)-(4.20) με πολικό άξονα τον x_1 , παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$rP_1(\cos \theta) = x_1 \quad (5.25)$$

$$rY_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = x_2 \quad (5.26)$$

$$rY_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = x_3 \quad (5.27)$$

$$r^2P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \quad (5.28)$$

$$r^2Y_2^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = 3x_1x_2 \quad (5.29)$$

$$r^2Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) = 3(x_2^2 - x_3^2) \quad (5.30)$$

$$r^2Y_2^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = 3x_1x_3 \quad (5.31)$$

$$r^2Y_2^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}) = 6x_2x_3. \quad (5.32)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.25)-(5.32) καθώς και τις κλίσεις τους, στην (5.24) και εκτελώντας αλγεβρικούς χειρισμούς προς την κατεύθυνση της συμπαγούς παρουσίας του αποτελέσματος, οδηγούμαστε στην ακόλουθη έκφραση για το u_s^-

$$u_s^-(\mathbf{r}) = c_0 + \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{2r^2} + \frac{r}{\alpha^3} \right] + 3 \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{I}})}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{3r^3} + \frac{r^2}{2\alpha^5} \right] + O(sr_3) \quad (5.33)$$

όπου το σύμβολο $O(sr_3)$ δηλώνει όρους με σφαιρικές αρμονικές βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του τρίτου. Στην (5.33) είναι άμεσα εμφανείς οι όροι της μορφής

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}_0}{r} \right)^n, \quad \text{για } n = 0, 1 \quad (5.34)$$

και

$$\left(\frac{r}{\alpha} \right)^n, \quad \text{για } n = 1, 2 \quad (5.35)$$

που είχαμε αναγνωρίσει και στην αντίστοιχη μορφή (3.52) για το u_s^- του ελλειψοειδούς, και που εξασφαλίζουν το ικανοποιητικό της προσέγγισης, αφού δυνάμεις μεγαλύτερες ή ίσες της τρίτης για τα πηλικά r_0/r και r/α παρέχουν τιμές πολύ μικρότερες της μονάδας.

Συνεχίζουμε την ανάλυση του σφαιρικού προτύπου με την επίλυση του εξωτερικού προβλήματος (5.5)-(5.7).

Η ικανοποίηση της ασυμπτωτικής συνθήκης (5.7) απαιτεί από το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό να έχει τη μορφή μίας εξωτερικής αρμονικής συνάρτησης

$$u^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n r^{-(n+1)} (d_n^{m,e} Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) + d_n^{m,0} Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}})). \quad (5.36)$$

Ο υπολογισμός του $u^+(\mathbf{r})$ από την (5.36) στη θέση $r = \alpha$ και η ικανοποίηση της συνοριακής συνθήκης (5.6) οδηγούν στον υπολογισμό των παρακάτω τιμών για τις σταθερές c_n^m

$$d_0 = \alpha c_0 \quad (5.37)$$

$$d_n = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{2n+1}{n} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n P_n(\cos \theta_0)), \quad n \geq 1 \quad (5.38)$$

$$d_n^{m,e} = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{2n+1}{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)), \quad n \geq 1 \quad (5.39)$$

και

$$d_n^{m,0} = \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{2n+1}{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)), \quad n \geq 1 \quad (5.40)$$

όπου c_0 η αυθαίρετη σταθερά που εμπεριέχεται στα αποτελέσματα (5.23), (5.24) και (5.33) για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, και η ύπαρξή της είναι συμβατή τόσο με την καλή τοποθέτηση του προβλήματος Neumann (5.2)-(5.3) όσο και με το φυσικό γεγονός ότι τόσο το u^- όσο και το u^+ αφορούν μετρήσεις δυναμικού, οι οποίες κατά τη διαδικασία EEG γίνονται επί της εξωτερικής επιφάνειας του κεφαλιού, δηλαδή επί της συνοριακής επιφάνειας του αγωγού, ως προς ένα ηλεκτρόδιο τοποθετημένο αυθαίρετως σε ένα σημείο αναφοράς. Η ελευθερία στην επιλογή του σημείου αναφοράς εισάγει την αυθαιρεσία στη μέτρηση του πεδίου δυναμικού στη συνοριακή επιφάνεια. Η αυθαιρεσία αυτή περιορίζεται στη μορφή μιας προσθετικής σταθεράς, γεγονός που είναι συμβατό με τη φυσική του προβλήματος. Όπως όμως φαίνεται

καθαρά στην ακόλουθη σχέση για το u^+ , η αυθαιρεσία που εμφανίζεται στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, συνδέεται με αυτήν του εσωτερικού, γεγονός αναμενόμενο αφού η επιλογή του σημείου αναφοράς που τις γεννά δεν έχει αλλάξει. Το σημαντικό είναι πώς σε ολόκληρη τη μορφή του u^+ , το σύνορο $r = \alpha$ εισάγεται μόνον μέσω αυτής της αυθαιρεσίας, στον μονοπολικό όρο τάξεως r^{-1} . Ειδικότερα, το ηλεκτρικό δυναμικό στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού $r = \alpha$ δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned} u^+(\mathbf{r}) = & c_0 \frac{\alpha}{r} \\ & + \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n P_n(\cos \theta_0)) \left[\frac{2n+1}{n} \right] r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \\ & + \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{2n+1}{n} \right] r^{-(n+1)} Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left[\frac{2n+1}{n} \right] r^{-(n+1)} Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.41) \end{aligned}$$

Η χρήση των (5.25)-(5.32) στην επεξεργασία της (5.41), η οποία παρέχει το πλήρες ανάπτυγμα του εξωτερικού δυναμικού u^+ σε σφαιρικές αρμονικές, προσφέρει τη δυνατότητα της έκφρασης των πρώτων όρων του αναπτύγματος σε Καρτεσιανές συντεταγμένες και στη συνέχεια στη συμπαγή ταυστική έκφραση

$$u^+(\mathbf{r}) = c_0 \frac{\alpha}{r} + \frac{3}{4\pi\sigma} \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{5}{8\pi\sigma} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{(\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (5.42)$$

Στρεφόμαστε, τέλος, στον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού $r = \alpha$, μέσω της (5.8).

Δεδομένου του αναπτύγματος (5.15) για τη θεμελιώδη λύση $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$ για $r > r_0$, η αντικατάσταση της θέσης $\mathbf{r}_0$ της πηγής με τη θέση $\mathbf{r}'$ του επαγόμενου στοιχειώδους διπόλου επί της συνοριακής επιφάνειας S , για την οποία ισχύει επίσης ότι $r > r'$, και η ταυτότητα

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.43)$$

επιτρέπουν το ανάπτυγμα

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = & -\sum_{n=0}^{\infty} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \right) (\mathbf{r}')^n P_n(\cos \theta') \\
& -2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) (\mathbf{r}')^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}') \\
& -2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r^{n+1}} Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) (\mathbf{r}')^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (5.44)
\end{aligned}$$

Απ' την άλλη πλευρά, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}'$ στο σημείο $\mathbf{r}'$ της σφαιρικής επιφάνειας S γράφεται

$$\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{r}}' = \cos \theta' \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin \theta' \cos \phi' \hat{\mathbf{x}}_2 + \sin \theta' \sin \phi' \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (5.45)$$

είτε μέσω των (4.18)-(4.20) όπου ορίζεται το σφαιρικό σύστημα με πολικό άξονα τον x_1 και αζιμούθιο που μετράται από τον άξονα x_2 , είτε των (5.25)-(5.27) για την Καρτεσιανή έκφραση των σφαιρικών αρμονικών, η (5.45) γράφεται

$$\hat{\mathbf{n}}' = \hat{\mathbf{r}}' P_1(\cos \theta') \hat{\mathbf{x}}_1 + Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}') \hat{\mathbf{x}}_2 + Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}') \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (5.46)$$

Συνδυάζοντας τις επιφανειακές αρμονικές μεταξύ τους, μέσω των (5.9)-(5.11), των τριγωνομετρικών εκφράσεων των $P_n^m(\cos \theta)$ και $P_n(\cos \theta)$ [9], και με στοιχειώδεις τριγωνομετρικούς χειρισμούς, αποδεικνύονται οι σχέσεις

$$P_1(\cos \theta) P_1(\cos \theta) = \frac{1}{3} [1 + 2P_2(\cos \theta)] \quad (5.47)$$

$$P_1(\cos \theta) Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{3} Y_2^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.48)$$

$$P_1(\cos \theta) Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{3} Y_2^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.49)$$

$$Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{3} \left[1 - P_2(\cos \theta) + \frac{1}{2} Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (5.50)$$

$$Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{6} Y_2^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.51)$$

$$Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{3} \left[1 - P_2(\cos \theta) - \frac{1}{2} Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right]. \quad (5.52)$$

Τότε, με τη βοήθεια των (5.44), (5.46) και των (5.47)-(5.52) προκύπτει ότι για $r' = \alpha$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = & -\hat{\mathbf{r}}' \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\alpha}{3} \left[\hat{\mathbf{x}}_1 \times \nabla \left(\frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \right) \right. \\
& + \hat{\mathbf{x}}_2 \times \nabla \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \hat{\mathbf{x}}_3 \times \nabla \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \Big] \\
& - \frac{\alpha}{3} \left[2\hat{\mathbf{x}}_1 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \right) - \hat{\mathbf{x}}_2 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right. \\
& \left. - \hat{\mathbf{x}}_3 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right] P_2(\cos \theta') \\
& - \frac{\alpha}{3} \left[\hat{\mathbf{x}}_1 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \hat{\mathbf{x}}_2 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \right) \right] Y_2^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}') \\
& - \frac{\alpha}{3} \left[\hat{\mathbf{x}}_1 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \hat{\mathbf{x}}_3 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \right) \right] Y_2^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}') \\
& - \frac{\alpha}{6} \left[\hat{\mathbf{x}}_2 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) - \hat{\mathbf{x}}_3 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right] Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}') \\
& - \frac{\alpha}{6} \left[\hat{\mathbf{x}}_2 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \hat{\mathbf{x}}_3 \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right] Y_2^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}') \\
& + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \tag{5.53}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι λόγω της (5.46) ο δεύτερος όρος της (5.53) μηδενίζεται, αφού

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{x}}_1 \times \nabla \left(\frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \right) + \hat{\mathbf{x}}_2 \times \nabla \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \hat{\mathbf{x}}_3 \times \nabla \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \\
& = -\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \times \nabla \frac{1}{r} = \mathbf{0}. \tag{5.54}
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα, τις τιμές του ηλεκτρικού δυναμικού $u_s^-(\mathbf{r}')$ στο σημείο $\mathbf{r}'$ της σφαιρικής επιφάνειας $r' = \alpha$, από την έκφραση (5.24) ως εξής

$$\begin{aligned}
u_s^-(\alpha, \theta', \phi') = & c_0 + \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n P_n(\cos \theta_0)) \frac{2n+1}{n\alpha^{n+1}} P_n(\cos \theta') \\
& + \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \frac{(n-m)!(2n+1)}{(n+m)! n\alpha^{n+1}} Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}') \\
& + \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \frac{(n-m)!(2n+1)}{(n+m)! n\alpha^{n+1}} Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}'). \tag{5.55}
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά Cauchy τις (5.53) και (5.55) και εκμεταλλευόμενοι την ορθογωνιότητα των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών όπως δίνεται από τις

$$\int_{S^2} Y_n^{m,e}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{n'}^{m',e}(\hat{\mathbf{r}}') ds(\hat{\mathbf{r}}') = \int_{S^2} Y_n^{m,0}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{n'}^{m',0}(\hat{\mathbf{r}}') ds(\hat{\mathbf{r}}') = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (5.56)$$

για $n = 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, n$, και

$$\int_{S^2} P_n(\cos \theta) P_{n'}(\cos \theta') ds(\hat{\mathbf{r}}') = \frac{4\pi}{2n+1} \delta_{nn'} \quad (5.57)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$, όπου $\delta_{nn'}$ το δέλτα του Kronecker, παίρνουμε για το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (5.8)

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ & = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{\mu_0}{24\pi} \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1 \times \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \right) \\ & + \frac{\mu_0}{48\pi} \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2 \times \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \frac{\mu_0}{48\pi} \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_3 \times \nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

όπου τα δυαδικά $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}_i, i = 1, 2, 3$ είναι τα ακόλουθα

$$\tilde{\mathbf{A}} = \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0 P_1(\cos \theta_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0 Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0 Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (5.59)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = 3 \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 P_2(\cos \theta_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 Y_2^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 Y_2^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (5.60)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = 2 \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 Y_2^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 Y_2^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (5.61)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_3 = 2 \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 Y_2^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 Y_2^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^2 Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \otimes \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (5.62)$$

Παρατηρούμε ότι το $\tilde{\mathbf{A}}$, με τη βοήθεια της (5.48), μπορεί να γραφεί

$$\tilde{\mathbf{A}} = \nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0 (P_1(\cos \theta_0) \hat{\mathbf{x}}_1 + Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}_0) \hat{\mathbf{x}}_2 + Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}_0) \hat{\mathbf{x}}_3)] = \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbf{r}_0 = \tilde{\mathbf{I}} \quad (5.63)$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ το ταυτοτικό δυαδικό, και επομένως, ο πρώτος όρος της (5.58) παίρνει τη μορφή

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (5.64)$$

Απ' την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τις Καρτεσιανές εκφράσεις (5.28)-(5.32) των σφαιρικών αρμονικών δευτέρου βαθμού και με κατάλληλες ομαδοποιήσεις καταλήγουμε στις εξής εκφράσεις για τους δυαδικούς συντελεστές $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \tilde{\mathbf{A}}_3$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_1 &= \frac{3}{2} \nabla_{\mathbf{r}_0} (3x_{01}^2 - r_0^2) \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + 3\nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01}x_{02}) \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + 3\nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01}x_{03}) \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \\
&= 9x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 - 3\mathbf{r}_0 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + 3x_{01}\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + 3x_{02}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + 3x_{01}\hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + 3x_{03}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \\
&= 3[x_{01}\tilde{\mathbf{I}} + x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)]
\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_2 &= 6\nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{01}x_{02}) \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + 3\nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02}^2 - x_{03}^2) \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + 6\nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02}x_{03}) \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \\
&= 6(x_{02}\tilde{\mathbf{I}} + x_{01}\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 - x_{03}\hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + x_{03}\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \\
&= 6[x_{02}\tilde{\mathbf{I}} + x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2)]
\end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_3 &= 6\nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02}x_{03}) \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + 6\nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02}x_{03}) \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - 3\nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02}^2 - x_{03}^2) \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \\
&= 6(x_{03}\tilde{\mathbf{I}} + x_{01}\hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + x_{02}\hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - x_{02}\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \\
&= 6[x_{03}\tilde{\mathbf{I}} + x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + (\hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3)].
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Λαμβάνοντας εξάλλου υπ' όψη την (5.46), έχουμε ότι

$$\mathbf{r} = rP_1(\cos \theta)\hat{\mathbf{x}}_1 + rY_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_2 + rY_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_3 \tag{5.68}$$

και

$$\frac{\mathbf{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2}P_1(\cos \theta)\hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{r^2}Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{r^2}Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_3 \tag{5.69}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\right) &= -\nabla \otimes \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} \\
&= \nabla\left(\frac{1}{r^2}P_1(\cos \theta)\right)\hat{\mathbf{x}}_1 + \nabla\left(\frac{1}{r^2}Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}})\right)\hat{\mathbf{x}}_2 + \nabla\left(\frac{1}{r^2}Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}})\right)\hat{\mathbf{x}}_3.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Η (5.58) τότε, με τη βοήθεια των (5.65)-(5.67) και (5.70) γράφεται

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \int_S \mathbf{u}^-(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}') = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \\
&-\frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \cdot [x_{01}\tilde{\mathbf{I}} + x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1] \times \nabla \otimes \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \\
&-\frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \cdot [x_{02}\tilde{\mathbf{I}} + x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2] \times \nabla \otimes \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 \\
&-\frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \cdot [x_{03}\tilde{\mathbf{I}} + x_{01}\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3] \times \nabla \otimes \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{I}} \times \nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_i x_{0i} \right\} \\
&\quad - \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \cdot x_{0i} \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \times \nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \cdot \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \mathbf{r}_0 \times \nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \\
&\quad + \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0 \otimes \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \times \nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_i + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (5.71)
\end{aligned}$$

Στο τελευταίο σκέλος της (5.71) παρατηρούμε ότι ο τρίτος και ο πέμπτος όρος μηδενίζονται εξαιτίας των μεικτών γινομένων

$$\hat{\mathbf{x}}_i \times \nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{x}}_i \times \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.72)$$

Τότε, με τη βοήθεια και της διανυσματικής έκφρασης του $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{r}_0 = \sum_{i=1}^3 x_{0i} \hat{\mathbf{x}}_i \quad (5.73)$$

η (5.71) γράφεται

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \left[\nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i=1}^3 Q_i \mathbf{r}_0 \times \left[\nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{x}}_i + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \left[\nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{r}_0 \times \left[\nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{Q} + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Θα αφήσουμε για λίγο το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (5.8) στη μορφή αυτή για να έρθουμε στο πεδίο του διπόλου, και στην ποσότητα

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (5.75)$$

την οποία πρόθεσή μας είναι να εκφράσουμε σε μορφή παρόμοια με την (5.74). Έτσι, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (5.44), αφού αντικαταστήσουμε το σημείο $\mathbf{r}_0$ με το $\mathbf{r}'$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{\mu_0}{4\pi} r_0 P_1(\cos \theta_0) \mathbf{Q} \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta) \right) \\
&\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} r_0 Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}_0) \mathbf{Q} \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} r_0 Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}_0) \mathbf{Q} \times \nabla_r \left(\frac{1}{r^2} Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (5.76)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.68) για το διάνυσμα $\mathbf{r}_0$ και (5.70), η (5.76) γράφεται με τη μορφή

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \left[\nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{r}_0 + O\left(\frac{1}{r^4} \right). \quad (5.77)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.74) και (5.77) στην (5.8) παρατηρούμε ότι ο διπολικός όρος εξαλείφεται, αφήνοντας στο ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου ως πρώτο όρο τον τετραπολικό, όπως ήταν αναμενόμενο, σύμφωνα με την (1.80) και τις σχετικές παρατηρήσεις της παραγράφου 1.6.

Τότε, το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$ από την (5.8) μέσω των (5.74) και (5.77) παίρνει την μορφή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \left[\nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{r}_0 \times \left[\nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \mathbf{Q} + O\left(\frac{1}{r^4} \right). \quad (5.78)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε για το $\nabla \otimes \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$ την έκφραση (5.70), καθώς και τις ταυτότητες

$$(\mathbf{Q} \times \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0) = \hat{\mathbf{r}} \times [\mathbf{r}_0 \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q})] \quad (5.79)$$

και

$$-(\hat{\mathbf{r}}_0 \times \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q}) = \hat{\mathbf{r}} \times [\mathbf{Q} \times (\mathbf{r}_0 \times \hat{\mathbf{r}})] \quad (5.80)$$

οι οποίες συνεπάγονται τη

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q} \times \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}_0 \times \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q}) &= \hat{\mathbf{r}} \times [\mathbf{Q} \times (\mathbf{r}_0 \times \hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{r}_0 \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Q})] \\ &= -\hat{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0)] \\ &= (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0)(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \\ &= (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Η (5.78) μέσω των (5.70) και (5.81) γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 + \frac{3\mu_0}{8\pi r^3} [(\mathbf{Q} \times \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r}_0 \times \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q})] \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4} \right). \end{aligned} \quad (5.82)$$

Η (5.82) αποτελεί την πλέον συμπυκνωμένη μορφή για τον τετραπολικό όρο του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού.

5.3 Ασυμπτωτική ανάλυση του μαγνητικού πεδίου.

Στην παράγραφο αυτή ο σκοπός μας είναι, να αναλύσουμε ασυμπτωτικά το πλήρες μαγνητικό πεδίο στον εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού χώρο, στη μορφή (1.102) όπως δόθηκε από τον Sarvas [45], ώστε να απομονώσουμε από αυτό τον τετραπολικό του όρο.

Η ανάλυση αυτή βασίζεται σε εκτεταμένους χειρισμούς του αναπτύγματος του Taylor για $|x| < 1$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}x^\kappa + \dots \quad (5.83)$$

όπου το σύμβολο $f^{(\kappa)}(0)$, όπως και το αντίστοιχο με κ τόνους αντί της παρενθέσεως, δίνει την παράγωγο κ -τάξης της συνάρτησης f , υπολογισμένη στη θέση $x = 0$.

Το ανάπτυγμα που ακολουθεί απαιτεί λεπτούς και τεχνικούς χειρισμούς που ελαχιστοποιούν τις πράξεις και εστιάζουν τη διαδικασία σε ό,τι είναι σημαντικό.

Ξεκινώντας, παρατηρούμε πώς η (1.102) μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \left(\frac{1}{F(\mathbf{r})} \tilde{\mathbf{I}} - \mathbf{r} \otimes \frac{\nabla F(\mathbf{r})}{F^2(\mathbf{r})} \right) \quad (5.84)$$

όπου οι ποσότητες $F(\mathbf{r})$ και $\nabla F(\mathbf{r})$ δίνονται στις (1.103) και (1.104).

Θα αναπτύξουμε λοιπόν σε ασυμπτωτικές σειρές, τις εκφράσεις $[F(\mathbf{r})]^{-1}$, $[F(\mathbf{r})]^{-2}$, $\nabla F(\mathbf{r})$ και $\nabla F(\mathbf{r})/[F(\mathbf{r})]^2$.

Δεδομένου ότι η (5.84) ισχύει στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού, δηλαδή για $r > \alpha > r_0$, η ποσότητα

$$x = \frac{r_0}{r} \quad (5.85)$$

μεταβάλλεται στο $[0,1)$ καθιστώντας το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, μια συγκλίνουσα σειρά. Θέτουμε ακόμα

$$\beta = \hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (5.86)$$

όπου προφανώς $\beta \in [-1, +1]$, και ορίζουμε τις συναρτήσεις $g(x)$ και $h(x)$ ως εξής

$$g(x) = \frac{r_0^3}{F(\mathbf{r})} = \frac{x^3}{h(x)} \quad (5.87)$$

όπου

$$h(x) = (1 + x^2 - 2\beta x)^{1/2} (2 + x^2 - 3\beta x). \quad (5.88)$$

Έτσι, το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $[F(\mathbf{r})]^{-1}$ ισοδυναμεί με το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της $r_0^{-3}g(x)$ ή της $x^3(h(x))^{-1}$.

Δεδομένου ότι, λόγω της (5.86), είναι $|x| < 1$, θα αναπτύξουμε την $h^{-1}(x)$ σε σειρά Taylor όπως την (5.83). Υπολογίζοντας τις παραγώγους μέχρι τρίτης τάξης της $h(x)$ στη θέση $x=0$, και αντικαθιστώντας στους τύπους που δίνουν τις αντίστοιχες παραγώγους της $1/h(x)$, παίρνουμε

$$(h^{-1}(0))' = \beta \quad (5.89)$$

$$(h^{-1}(0))'' = \frac{3}{4}(5\beta^2 - 1) \quad (5.90)$$

$$(h^{-1}(0))''' = 21\beta^3 - 9\beta. \quad (5.91)$$

Η (5.83) για τη συνάρτηση $h^{-1}(x)$, μέσω των (5.89)-(5.91), παρέχει για τη συνάρτηση $g(x)$, λόγω και της (5.87), την έκφραση

$$g(x) = x^3 \left[\frac{1}{2} + \beta x + \frac{3}{8}(5\beta^2 - 1)x^2 + O(x^3) \right] = \frac{1}{2}x^3 + \beta x^4 + \frac{3}{8}(5\beta^2 - 1)x^5 + O(x^6) \quad (5.92)$$

και για την $1/F(\mathbf{r})$, την έκφραση

$$\frac{1}{F(\mathbf{r})} = \frac{1}{2r^3} + r_0 \hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r^4} + \frac{3r_0^2}{8} [5(\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - 1] \frac{1}{r^5} + O\left(\frac{1}{r^6}\right). \quad (5.93)$$

Τότε η έκφραση για την $[F(\mathbf{r})]^{-2}$ έπεται, από τις (5.87) και (5.92) και το γινόμενο κατά Cauchy των εμφανιζόμενων σειρών

$$\frac{1}{[F(\mathbf{r})]^2} = \frac{1}{r_0^6} g^2(x) = \frac{x^6}{r_0^6} \left[\frac{1}{4} + \beta x + \frac{1}{8}(23\beta^2 - 3)x^2 + \frac{1}{4}(29\beta^3 - 9\beta)x^3 + O(x^4) \right]. \quad (5.94)$$

Στρεφόμαστε τώρα στο ανάπτυγμα του $\nabla F(\mathbf{r})$, από την (1.103), η οποία με τις αντικαταστάσεις (5.85) και (5.86) γράφεται μετά από πράξεις,

$$\begin{aligned} \nabla F(\mathbf{r}) = \frac{r_0^2}{x^2} & \left[2\hat{\mathbf{r}} - 2x\hat{\mathbf{r}}_0 + 2\hat{\mathbf{r}}(1+x^2-2\beta x)^{1/2} - x\hat{\mathbf{r}}_0(1+x^2-2\beta x)^{1/2} \right. \\ & \left. + (1+x^2-2\beta x)\hat{\mathbf{r}} + (1-\beta x)(1+x^2-2\beta x)^{-1/2}(\hat{\mathbf{r}} - x\hat{\mathbf{r}}_0) \right] \end{aligned} \quad (5.95)$$

ή, απομονώνοντας τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_0$, παίρνουμε

$$\nabla F(\mathbf{r}) = \frac{r_0^2}{x^2} (\Lambda(x)\hat{\mathbf{r}} - M(x)\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (5.96)$$

όπου

$$\Lambda(x) = 2 + q^2(x) + 2q(x) + \frac{1 - \beta x}{q} \quad (5.97)$$

$$M(x) = 2 + q(x) + \frac{1 - \beta x}{q} \quad (5.98)$$

και

$$q(x) = (1 + x^2 - 2\beta x)^{1/2}. \quad (5.99)$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους μέχρι τρίτης τάξης στο σημείο $x = 0$ των συναρτήσεων $q(x)$, $M(x)$ και $\Lambda(x)$ διαδοχικά, και αναπτύσσοντας κατά Taylor, με τη βοήθεια της (5.83), τις $\Lambda(x)$ και $M(x)$ καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\Lambda(x) = 6 - 4\beta x + \frac{1}{2}(3 - \beta^2)x^2 + O(x^4) \quad (5.100)$$

$$M(x) = 4 - \beta x - \frac{1}{2}(\beta - \beta^3)x^3 + O(x^4). \quad (5.101)$$

Τότε, από την (5.96), μέσω των (5.100) και (5.101) προκύπτει το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $\nabla F(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \nabla F(\mathbf{r}) &= \frac{r_0^2}{x^2} \left(6 - 4\beta x + \frac{3 - \beta^2}{2} x^2 + O(x^4) \right) \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad - \frac{r_0^2}{x^2} \left(4 - \beta x - \frac{\beta - \beta^3}{2} x^3 + O(x^4) \right) \hat{\mathbf{r}}_0. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά Cauchy τις σειρές των (5.94) και (5.102) φθάνουμε στην ακόλουθη έκφραση για το $\nabla F(\mathbf{r}) / F^2(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla F(\mathbf{r})}{[F(\mathbf{r})]^2} &= \left[\frac{3}{2} \frac{x^4}{r_0^4} + 5\beta \frac{x^5}{r_0^4} + \frac{15(7\beta^2 - 1)}{8} \frac{x^6}{r_0^4} + O(x^7) \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad - \left[\frac{x^5}{r_0^4} + \frac{15}{4} \beta \frac{x^6}{r_0^4} + \frac{3(7\beta^2 - 1)}{2} \frac{x^7}{r_0^4} + O(x^8) \right] \hat{\mathbf{r}}_0 \end{aligned} \quad (5.103)$$

ή, χρησιμοποιώντας την (5.85) και αναδιατάσσοντας κατά δυνάμεις του x ,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla F(\mathbf{r})}{[F(\mathbf{r})]^2} &= \frac{x^4}{r_0^4} \left[\frac{3}{2} \hat{\mathbf{r}} + (5\beta \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{r}}_0)x + \frac{15}{8} ((7\beta^2 - 1)\hat{\mathbf{r}} - 2\beta \hat{\mathbf{r}}_0)x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} ((21\beta^3 - 7\beta)\hat{\mathbf{r}} - (7\beta^2 - 1)\hat{\mathbf{r}}_0)x^3 + O(x^4) \right]. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Από τις (5.93) και (5.104) έχουμε τη δυαδική έκφραση

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{F(\mathbf{r})} - \mathbf{r} \otimes \frac{\nabla F(\mathbf{r})}{[F(\mathbf{r})]^2} = \frac{x^3}{r_0^3} \left[\frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{2} + (\beta \tilde{\mathbf{I}} - 5\beta \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}_0) \mathbf{x} \right. \\ \left. + \left(\frac{3(5\beta^2 - 1)}{8} \tilde{\mathbf{I}} - \frac{15(7\beta^2 - 1)}{8} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \frac{15\beta}{4} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}_0 \right) \mathbf{x}^2 \right] + O(x^6). \end{aligned} \quad (5.105)$$

Αντικαθιστώντας τα x και β από τις (5.81) και (5.86) στην (5.105) και στη συνέχεια στην (5.84), οδηγούμαστε στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \frac{(\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})}{r^3} \\ + \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \frac{(\tilde{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \tilde{\mathbf{I}} - 5\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r}_0}{r^4} + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \end{aligned} \quad (5.106)$$

το οποίο ισχύει για αποστάσεις απομακρυσμένες από τον αγωγό, δηλαδή για $r \rightarrow \infty$.

5.4 Αναγωγή του ελλειψοειδούς προτύπου στο σφαιρικό.

Θα στραφούμε τώρα για άλλη μια φορά στα αποτελέσματα για το εσωτερικό και το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό και για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του ελλειψοειδούς αγωγού, και θα διερευνήσουμε τη μορφή τους στο όριο, όπου ο ελλειψοειδής αγωγός τείνει να γίνει σφαιρικός, δηλαδή όταν

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \xrightarrow{e \rightarrow s} (\alpha, \alpha, \alpha). \quad (5.107)$$

Το σύμβολο $e \rightarrow s$ υποδεικνύει το όριο στο οποίο το ελλειψοειδές με ημιάξονες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τείνει να γίνει σφαίρα ακτίνας α .

Από την (2.155) φαίνεται κατ' αρχήν άμεσα ότι

$$\lim_{e \rightarrow s} \Lambda = \lim_{e \rightarrow s} \Lambda' = \alpha^2 \quad (5.108)$$

ενώ από τις (3.2)-(3.4) έπεται ότι

$$\lim_{e \rightarrow s} h_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.109)$$

η οποία γεωμετρικά απεικονίζεται από την κατά συνεχή τρόπο μετατόπιση των εστιών του ελλειψοειδούς προς το κέντρο της σφαίρας, όπως περιγράψαμε στην παράγραφο 4.1.

Τα διαστήματα μεταβολής των “γωνιακών” μεταβλητών μ και ν , σε συνδυασμό με την (5.109) έχουν ως συνέπεια την

$$\lim_{e \rightarrow s} \mu = \lim_{e \rightarrow s} \nu = 0 \quad (5.110)$$

ενώ για την ακτινική μεταβλητή ρ , η σχέση

$$\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + h_2^2 + h_3^2 \quad (5.111)$$

που προκύπτει προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.27)-(2.29) και εκτελώντας την απαραίτητη άλγεβρα, επιβάλλει μέσω των (5.109) και (5.110) το όριο

$$\lim_{e \rightarrow s} \rho = r. \quad (5.112)$$

Επιπλέον, ο ορισμός (Γ.4) των $I_n^m(\rho)$ καθώς και οι (2.140)-(2.154) οδηγούν με τη βοήθεια των (5.108), (5.109) και (5.112) στην

$$\lim_{e \rightarrow s} I_n^m(\rho) = \frac{1}{(2n+1)r^{2n+1}} \quad (5.113)$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, (2n+1)$.

Ξεκινώντας για την αναγωγή του ηλεκτρικού δυναμικού u_s^- στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς, επιλέγουμε τη μορφή (3.80) η οποία συγκεντρώνει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ελλειψοειδούς, τα οποία θα υποστούν τον εκφυλισμό, στους τελεστές $\tilde{\mathbf{A}}(\rho)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ και $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\rho)$, οι οποίοι ορίζονται στις (3.74), (3.77) και (3.79) αντίστοιχα.

Από τις (3.74) και (3.66) έπεται ότι

$$\lim_{e \rightarrow s} \tilde{\mathbf{A}}(\rho) = \frac{3}{4\pi\sigma} \left[\sum_{m=1}^3 \lim_{e \rightarrow s} (I_1^m(\rho) - I_1^m(\alpha_1)) \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \right] + \frac{3\tilde{\mathbf{I}}}{4\pi\sigma\alpha^3} \quad (5.114)$$

ενώ οι (5.112) και (5.113) οδηγούν στην

$$\lim_{e \rightarrow s} \tilde{\mathbf{A}}(\rho) = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2}{\alpha^3} \right) \tilde{\mathbf{I}}. \quad (5.115)$$

Ομοίως, οι (3.79), (3.67), (3.71), (5.112) και (5.113) παρέχουν το όριο

$$\lim_{e \rightarrow s} \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\rho) = \frac{3}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r^5} + \frac{3}{2\alpha^5} \right) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j. \quad (5.116)$$

Απ' την άλλη πλευρά, ο τελεστής $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ όπως ορίζεται στην (3.77), δεν μπορεί άμεσα να αναχθεί στο σφαιρικό όριο, καθώς περιλαμβάνει όρους οι οποίοι εμφανίζουν στο όριο αυτό, απροσδιόριστη συμπεριφορά. Για το χειρισμό του $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$, τον φέρνουμε από την (3.77), στη μορφή

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = & -\frac{5}{4\pi\sigma} \left(\frac{\tilde{\Lambda} \mathbb{I}_2^1(\mathbf{r}) I_2^1(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')} - \frac{\tilde{\Lambda}' \mathbb{I}_2^2(\mathbf{r}) I_2^2(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')} \right) \\
& + \frac{5}{4\pi\sigma} \left(\frac{\tilde{\Lambda} \mathbb{I}_2^1(\mathbf{r}) I_2^1(\alpha_1)}{(\Lambda - \Lambda')} - \frac{\tilde{\Lambda}' \mathbb{I}_2^2(\mathbf{r}) I_2^2(\alpha_1)}{(\Lambda - \Lambda')} \right) \\
& - \frac{5}{6\sigma V} \left(\frac{\tilde{\Lambda} \mathbb{I}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda(\Lambda - \Lambda')} - \frac{\tilde{\Lambda}' \mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda'(\Lambda - \Lambda')} \right). \quad (5.117)
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τη μορφή των $\tilde{\Lambda}$ και $\tilde{\Lambda}'$ από τις (3.64) και (3.65), αλλά και των $\mathbb{I}_2^1(\mathbf{r})$ και $\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})$ από τις (Γ.25) και (Γ.26), καταλαβαίνουμε πώς οι απροσδιοριστίες είναι της μορφής 0/0 και εμπλέκονται στους όρους $\tilde{\Lambda} \mathbb{I}_2^1(\mathbf{r})[\Lambda(\Lambda - \Lambda')]^{-1}$ και $\tilde{\Lambda}' \mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})[\Lambda'(\Lambda - \Lambda')]^{-1}$. Η επεξεργασία τους απαιτεί τη χρήση των παρακάτω ταυτοτήτων, οι οποίες απομακρύνουν αλγεβρικά τους παράγοντες, οι οποίοι στο σφαιρικό όριο μηδενίζονται και δημιουργούν τις απροσδιόριστες μορφές

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{I}_2^1(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{I}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda'(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \\
& = \frac{1}{\Lambda\Lambda'} \sum_{\kappa=1}^3 x_\kappa^2 \left[\frac{3}{2} (\Lambda + \Lambda') - \alpha_\kappa^2 - \alpha_m^2 + 3\delta_{\kappa m} (\alpha_\kappa^2 - \Lambda - \Lambda') \right] + 1 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{\alpha_m^2 \Lambda \Lambda'} \quad (5.118)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{I}_2^1(\rho, \mu, \nu) I_2^1(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{I}_2^2(\rho, \mu, \nu) I_2^2(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} = \left(r^2 - 3x_m^2 + \alpha_m^2 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{3} \right) I_2^1(\rho) \\
& + \frac{\mathbb{I}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda' - \alpha_m^2} \left[\frac{3}{2} I_3^7(\rho) - \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\rho^2 - h_2^2}(\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2)(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2)} \right]. \quad (5.119)
\end{aligned}$$

καθώς και των

$$\frac{\mathbb{I}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda' - \alpha_1^2} = (\Lambda' - \alpha_2^2)(x_3^2 - x_1^2) + (\Lambda' - \alpha_3^2)(x_2^2 - x_1^2) + (\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) \quad (5.120)$$

$$\frac{\mathbb{I}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda' - \alpha_2^2} = (\Lambda' - \alpha_1^2)(x_3^2 - x_2^2) + (\Lambda' - \alpha_3^2)(x_1^2 - x_2^2) + (\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) \quad (5.121)$$

$$\frac{\mathbb{I}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda' - \alpha_3^2} = (\Lambda' - \alpha_1^2)(x_2^2 - x_3^2) + (\Lambda' - \alpha_2^2)(x_1^2 - x_3^2) + (\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2) \quad (5.122)$$

Η απόδειξη των (5.118), (5.120)-(5.122) απαιτεί την αντικατάσταση των $\mathbb{I}_2^1(\mathbf{r})$ και $\mathbb{I}_2^2(\mathbf{r})$ από τις (Γ.25) και (Γ.26) και μακροσκελείς αλλά ευθείς αλγεβρικούς

χειρισμούς. Η δυσκολία τους δεν οφείλεται τόσο στην αναλυτική τους απόδειξη (γι' αυτό και παραλείπεται) αλλά στην εύρεση της κατάλληλης μορφής τους, η οποία με την σειρά της οδηγεί μέσω ομαδοποιήσεων στην άρση των απροσδιοριστιών.

Η απόδειξη της (5.119) δεν είναι απλή, προϋποθέτει δε την ταυτότητα

$$\frac{\mathbb{E}_2^1(\rho, \mu, \nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{E}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} = r^2 - 3x_m^2 + \alpha_m^2 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{3} \quad (5.123)$$

η οποία αποδεικνύεται με τη βοήθεια της (Γ.30), και την

$$\frac{I_2^1(\rho) - I_2^2(\rho)}{\Lambda - \Lambda'} = \frac{3}{2} I_3^7(\rho) - \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\rho^2 - h_2^2}(\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2)(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2)} \quad (5.124)$$

όπου

$$I_3^7(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t^2 - h_2^2)^{3/2}(t^2 - h_3^2)^{3/2}}. \quad (5.125)$$

Η απόδειξη της (5.124) απαιτεί αντικατάσταση στο αριστερό μέλος των (Γ.34) και (Γ.35) και χρήση της (Γ.39).

Τότε η αντικατάσταση του $I_2^2(\rho)$ από την (5.124) στο αριστερό μέλος της (5.119) και εν συνεχεία η χρήση της (5.123), οδηγεί άμεσα στο δεξί μέλος της (5.119).

Αν υπολογίσουμε δε, την ταυτότητα (5.124) στην τιμή $\rho = \alpha_1$, και την αντικαταστήσουμε στην (5.123), φθάνουμε στην ταυτότητα

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{E}_2^1(\rho, \mu, \nu)I_2^1(\alpha_1)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{E}_2^2(\rho, \mu, \nu)I_2^2(\alpha_1)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \\ &= \left(r^2 - 3x_m^2 + \alpha_m^2 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{3} \right) I_2^1(\alpha_1) \\ &+ \frac{\mathbb{E}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda' - \alpha_m^2} \left[\frac{3}{2} I_3^7(\alpha_1) - \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Lambda\Lambda'} \right]. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι στο όριο $e \rightarrow s$ οι (5.118) και (5.119) με τη βοήθεια των (5.108), (5.109), (5.112), (5.113) δίνουν

$$\lim_{e \rightarrow s} \left\{ \frac{\mathbb{E}_2^1(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{E}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda'(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right\} = \frac{r^2 - 3x_m^2}{\alpha^2} \quad (5.127)$$

και

$$\lim_{e \rightarrow s} \left\{ \frac{\mathbb{E}_2^1(\rho, \mu, \nu)I_2^1(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{E}_2^2(\rho, \mu, \nu)I_2^2(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right\} = \frac{1}{5r^3} - \frac{3x_m^2}{5r^5} \quad (5.128)$$

όπου χρειάστηκαν επιπλέον και τα αντίστοιχα όρια των (5.120), (5.121) και (5.122) για τα οποία ισχύει ότι

$$\lim_{e \rightarrow s} \frac{\mathbb{E}_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda' - \alpha_m^2} = 0, \quad m = 1, 2, 3. \quad (5.129)$$

Η (5.125) αντίστοιχα δίνει

$$\lim_{e \rightarrow s} \left\{ \frac{\mathbb{E}_2^1(\rho, \mu, \nu) I_2^1(\alpha_1)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{\mathbb{E}_2^2(\rho, \mu, \nu) I_2^2(\alpha_1)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right\} = \frac{r^2 - 3x_m^2}{5\alpha^5}. \quad (5.130)$$

Συνδυάζοντας τέλος τις (5.127), (5.128) και (5.130) στην (5.117), ο τελεστής $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ στο όριο $e \rightarrow s$ παίρνει τη μορφή

$$\lim_{e \rightarrow s} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi\sigma} \left[-\left(\frac{1}{3r^3} + \frac{r^2}{2\alpha^5} \right) \tilde{\mathbf{I}} + \left(\frac{1}{r^5} + \frac{3}{2\alpha^5} \right) \sum_{m=1}^3 x_m^2 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \right]. \quad (5.131)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις (5.115), (5.116) και (5.131) στην (3.80) καθώς και την έκφραση

$$\mathbf{r} = \sum_{m=1}^3 x_m \hat{\mathbf{x}}_m \quad (5.132)$$

για το διάνυσμα $\mathbf{r}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow s} u_s^-(\mathbf{r}) &= b_0^1 + \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{2r^2} + \frac{r}{\alpha^3} \right) \\ &+ \frac{3}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left[-\left(\frac{1}{3r^3} + \frac{r^2}{2\alpha^5} \right) \tilde{\mathbf{I}} + \left(\frac{1}{r^5} + \frac{3}{2\alpha^5} \right) \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \right] + O\left(\frac{1}{r^4} \right) \end{aligned} \quad (5.133)$$

η οποία προφανώς ταυτίζεται με την αντίστοιχη εξίσωση (5.33) που δίνει το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού $r_0 < r < \alpha$.

Προχωρούμε στην αναγωγή του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού από την μορφή (3.93) του ελλειψοειδούς αγωγού, στην αντίστοιχη μορφή (5.42) του σφαιρικού.

Όπως και στην περίπτωση του εσωτερικού δυναμικού, στην έκφραση (3.93) τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ελλειψοειδούς συγκεντρώνονται στους συντελεστές

$I_0^1(\rho)/I_0^1(\alpha_1)$, $\tilde{\mathbf{A}}_1(\rho)$, $\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r})$ και $\tilde{\tilde{\Gamma}}_1(\rho)$ και αυτοί είναι που θα υποστούν την αναγωγή στο όριο $e \rightarrow s$.

Ο συντελεστής του σταθερού όρου, μέσω της (5.112), ανάγεται άμεσα στον αντίστοιχο συντελεστή της (5.42), αφού

$$\lim_{e \rightarrow s} \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(\alpha_1)} = \frac{\alpha}{r}. \quad (5.134)$$

Οι τελεστές $\tilde{\mathbf{A}}_1(\rho)$ και $\tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_1(\rho)$, όπως ορίζονται στις (3.90) και (3.92), με τη βοήθεια των (3.68) και (3.69), ανάγονται στις ακόλουθες εκφράσεις

$$\lim_{e \rightarrow s} \tilde{\mathbf{A}}_1(\rho) = \frac{3}{4\pi\sigma} \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{r^3} \quad (5.135)$$

$$\lim_{e \rightarrow s} \tilde{\tilde{\mathbf{F}}}_1(\rho) = \frac{15}{8\pi\sigma} \frac{1}{r^5} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j. \quad (5.136)$$

Ο τελεστής $\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r})$, όπως ορίζεται στην (3.91) χρειάζεται ειδικό χειρισμό.

Για την ακρίβεια, απαιτείται η απόδειξη της ταυτότητας

$$\begin{aligned} & \frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(\alpha_1)} \frac{\mathbf{I}E_2^1(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(\alpha_1)} \frac{\mathbf{I}E_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda'(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \\ &= \frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(\alpha_1)} \left\{ \frac{1}{\Lambda\Lambda'} \sum_{\kappa=1}^3 x_\kappa^2 \left[\frac{3}{2}(\Lambda + \Lambda') - \alpha_\kappa^2 - \alpha_m^2 + 3\delta_{\kappa m}(\alpha_\kappa^2 - \Lambda - \Lambda') \right] + 1 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{\alpha_m^2 \Lambda \Lambda'} \right\} \\ &+ \frac{\mathbf{I}E_2^2(\rho, \mu, \nu)}{I_2^1(\alpha_1) \Lambda'(\Lambda' - \alpha_m^2)} \left\{ \frac{3}{2} I_3^7(\rho) - \frac{1}{2\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} (\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2)(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2)} \right. \\ &\left. + \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(\rho)} \left(\frac{3}{2} I_3^7(\alpha_1) - \frac{1}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Lambda \Lambda'} \right) \right\}. \quad (5.137) \end{aligned}$$

Η (5.137) προκύπτει χρησιμοποιώντας κατάλληλα την ταυτότητα (5.118) και την (5.124), υπολογισμένη στη θέση ρ καθώς και στη θέση $\rho = \alpha_1$.

Λαμβάνοντας το όριο $e \rightarrow s$ στην (5.136) και παίρνοντας υπ' όψη, από τις (5.120)-(5.122), ότι

$$\lim_{e \rightarrow s} \frac{\mathbf{I}E_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda'(\Lambda' - \alpha_m^2)} = 0, \quad m = 1, 2, 3 \quad (5.138)$$

προκύπτει η ακόλουθη έκφραση

$$\lim_{e \rightarrow s} \left\{ \frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(\alpha_1)} \frac{\mathbf{I}E_2^1(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(\alpha_1)} \frac{\mathbf{I}E_2^2(\rho, \mu, \nu)}{\Lambda'(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right\} = \frac{\alpha^3}{r^3} - 3 \frac{\alpha^3}{r^5} x_m^2. \quad (5.139)$$

Από τις (3.91) και (5.137) τότε, ο τελεστής $\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r})$ οδηγείται στο όριο

$$\lim_{e \rightarrow s} \tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r}) = \frac{5}{8\pi\sigma} \left[-\frac{\tilde{\mathbf{I}}}{r^3} + \frac{3}{r^5} \sum_{m=1}^3 x_m^2 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \right]. \quad (5.140)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.134)-(5.136) και την (5.140) στην (3.93) φθάνουμε στη μορφή του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού, στο όριο όπου το ελλειψοειδές γίνεται σφαίρα

$$\lim_{e \rightarrow s} u^+(\mathbf{r}) = b_0^1 \frac{\alpha}{r} + \frac{3}{4\pi\sigma} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{5}{8\pi\sigma} \left(-\frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}_0}{r^3} + \frac{3}{r^5} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (5.141)$$

η οποία ταυτίζεται με την αντίστοιχη έκφραση (5.42) για το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο στην περίπτωση του σφαιρικού αγωγού.

Στρεφόμαστε τέλος στην αναγωγή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου στο σφαιρικό όριο, για την οποία θα χρησιμοποιήσουμε τη μορφή (3.159) του $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Κατ' αρχήν παρατηρούμε από την (3.163) ότι

$$\lim_{e \rightarrow s} \mathbf{d}_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \quad (5.142)$$

ενώ οι (Γ.6), (3.64), (3.65) καθώς και η ταυτότητα (5.127) που ισχύει στο όριο $e \rightarrow s$, παρέχουν το όριο

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow s} \left[\frac{\mathbb{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\Lambda} - \frac{\mathbb{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\Lambda}' \right] &= 5 \sum_{m=1}^3 \frac{r^2 - 3x_m^2}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \\ &= \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{r^3} - \frac{3}{r^5} \sum_{m=1}^3 x_m^2 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Απ' την άλλη πλευρά, η ταυτότητα (3.160) καθώς και η (5.113) οδηγούν στην

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow s} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{h_i h_j}{h_i^2 h_j^2 h_3^2} \mathbb{F}_2^{i+j}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j &= \lim_{e \rightarrow s} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i x_j I_2^{i+j}(\rho) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \\ &= \frac{1}{5r^5} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j = \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{5r^5} - \frac{1}{5r^5} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.143) και (5.144) στην (3.159) λαμβάνουμε το όριο

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow s} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} (\lim_{e \rightarrow s} \mathbf{d}_{el}) \cdot \left[\frac{\tilde{\mathbf{I}}}{r^3} - \frac{3}{r^5} \sum_{m=1}^3 x_m^2 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \right] \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} (\lim_{e \rightarrow s} \mathbf{d}_{el}) \cdot \left[3 \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^5} - \frac{3}{r^5} \sum_{m=1}^3 x_m^2 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m \right] \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{aligned} \quad (5.145)$$

η οποία προφανώς συμπίπτει τόσο με το αποτέλεσμα (5.82) της ανάλυσης μέσω των σφαιρικών ιδιοσυναρτήσεων όσο και με το αποτέλεσμα (5.106) της ασυμπτωτικής αναλύσεως του πλήρους πεδίου.

5.5 Αναγωγή του σφαιροειδούς προτύπου στο σφαιρικό.

Ολοκληρώνοντας το τέταρτο κεφάλαιο είχαμε αποκομίσει τις εκφράσεις (4.70) και (4.80) για τους πρώτους όρους προσέγγισης του εσωτερικού και του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου και την έκφραση (4.89) για τον τετραπολικό όρο του μαγνητικού πεδίου στον εξωτερικό χώρο του σφαιροειδούς αγωγού. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε την οριακή διαδικασία κατά την οποία οι δύο άξονες, α_1 και α_2 , του επιμήκους σφαιροειδούς τείνουν να συμπέσουν, οδηγώντας την ημισεκτική απόσταση c στο μηδενισμό και την επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία στη σφαιρική, ενώ η κατεύθυνσή μας θα είναι να δούμε πώς τα αποτελέσματα (4.70), (4.80) και (4.89) σ' αυτό το όριο συμπίπτουν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα (5.33), (5.42) και (5.82) του σφαιρικού προτύπου.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν πώς στις εκφράσεις (4.70) και (4.80) για το ηλεκτρικό δυναμικό, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγωγού εισέρχονται στους συντελεστές $f_i(\tau)$ και $g_i(\tau)$ $i=1,2,3,4,5$, ενώ στην έκφραση (4.89) για το μαγνητικό πεδίο οι άξονες επηρεάζουν τη μορφή ολόκληρου του τετραπολικού όρου, μα οι απροσδιοριστίες, που αναμένονται να εμφανιστούν κατά τη διαδικασία της αναγωγής, προϋπάρχουν εν δυνάμει μέσα στους συντελεστές $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$ και $F_3(\tau)$. Έτσι, εστιάζουμε κατ' αρχήν στα όρια των $f_i(\tau)$, $g_i(\tau)$, $i=1,2,3,4,5$ και $F_i(\tau)$, $i=1,2,3$, όταν $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, ή ισοδύναμα, όταν $c \rightarrow 0$.

Από τις (4.50) και (4.30) έπεται το όριο

$$\lim_{c \rightarrow 0} c\tau = r \quad (5.146)$$

ενώ η Καρτεσιανή μορφή (4.51) της μεταβλητής τ υποβάλλει πώς

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} = 0. \quad (5.147)$$

Εξετάζοντας τις μορφές των $f_i(\tau)$, $i=1,2,3,4,5$ και των $F_i(\tau)$, $i=1,2,3$ μέσα από τις εκφράσεις (4.54), (4.55), (4.64), (4.67), (4.69) και (4.83)-(4.85), από την άποψη των

ορίων $c \rightarrow 0$ και $\tau^{-1} \rightarrow 0$ βλέπουμε ότι εμφανίζονται απροσδιόριστες μορφές του τύπου 0/0 στις εκφράσεις

$$\frac{1}{c^{2\nu+1}} \left(\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - Q_i(\tau) \right) \quad (5.148)$$

και

$$\frac{1}{c^{2\nu+1}} \left(\ln \frac{\alpha_1 + c}{\alpha_2} + R_i \left(\frac{c}{\alpha_1} \right) \right) \quad (5.149)$$

όπου οι συναρτήσεις $Q_i(\tau)$ και $R_i(c/\alpha_1)$ $i=1,2,3,4,5$ είναι ρητές συναρτήσεις ως προς τις μεταβλητές τους και $\nu \in \{1,2\}$.

Για να επεξεργαστούμε τις μορφές αυτές, χρησιμοποιούμε το λογαριθμικό ανάπτυγμα

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left[1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{7}x^6 + O(x^8) \right] \quad (5.150)$$

καθώς και το ανάπτυγμα σε διωνυμική σειρά

$$(1+x)^\nu = 1 + \nu x + \frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!}x^3 + O(x^4) \quad (5.151)$$

μέσα στο διάστημα σύγκλισής τους, δηλαδή για $x \in (-1,1)$.

Δεδομένου ότι η μεταβλητή τ , που έχει οριστεί στην (4.50), ως ένα υπερβολικό συνημίτονο, μεταβάλλεται στο διάστημα $[1,+\infty)$ και παράλληλα $\alpha_1 > c$, τα αναπτύγματα (5.150) και (5.151) συγκλίνουν για $x = \tau^{-1}$ και για $x = c\alpha_1^{-1}$, και επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση των

$$\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} = \ln \frac{1+\tau^{-1}}{1-\tau^{-1}} = \frac{2}{\tau} \left(1 + \frac{1}{3\tau^2} + \frac{1}{5\tau^4} + O\left(\frac{1}{\tau^6}\right) \right) \quad (5.152)$$

και

$$\ln \frac{\alpha_1 + c}{\alpha_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha_1 + c}{\alpha_1 - c} = \frac{c}{\alpha_1} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^4 + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^6 \right) \right] \quad (5.153)$$

καθώς και στο ανάπτυγμα σε σειρά, των συναρτήσεων $Q_i(\tau)$ και $R_i\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)$.

Εξετάζουμε τώρα τις συναρτήσεις f_i χωριστά.

Η $f_1(\tau)$ αντικαθιστώντας τις (5.151) και (5.152) στην (4.54) οδηγείται στην

$$f_1(\tau) = \frac{1}{c^3} \left[\frac{1}{3\tau^3} + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right) \right] + \frac{1}{c^3} \left[-\frac{c}{\alpha_1} - \frac{1}{3} \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^3 + \frac{c\alpha_1}{\alpha_2^2} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^5\right) \right] \quad (5.154)$$

ενώ εκφράζοντας το α_2^2 , συναρτήσει του c και του α_1 , από την εξίσωση (4.10), ως

$$\alpha_2^2 = \alpha_1^2 - c^2 \quad (5.155)$$

και εφαρμόζοντας το διωνυμικό ανάπτυγμα (5.151) ως προς τη μεταβλητή c/α_1 που εμφανίζεται, η (5.153) γράφεται

$$\begin{aligned} f_1(\tau) &= \frac{1}{c^3} \left[\frac{1}{3\tau^3} + O\left(\frac{1}{\tau^5}\right) \right] + \frac{1}{c^3} \left[\frac{c}{\alpha_1} \left(-1 - \frac{1}{3} \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^3 + 1 + \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^3 + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^5\right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{3c^3\tau^3} + \frac{2}{3\alpha_1^3} + O(c^2). \end{aligned} \quad (5.156)$$

Παρατηρούμε πώς οι συναρτήσεις

$$Q_1(\tau) = \frac{1}{\tau} \quad (5.157)$$

και

$$R_1\left(\frac{c}{\alpha_1}\right) = \frac{c\alpha_1}{\alpha_2^2} \quad (5.158)$$

οι οποίες αφαιρούνται στην (4.54) από τις $\ln((\tau+1)/(\tau-1))$ και $\ln((\alpha_1+c)/\alpha_2)$ αφού αναπτυχθούν σε διωνυμικές σειρές, εξουδετερώνουν τους όρους εκείνους από τα αναπτύγματα (5.151) και (5.153), που δημιουργούν τις απροσδιόριστες μορφές.

Τον ίδιο ρόλο παίζουν και οι άλλες συναρτήσεις $Q_i(\tau)$ και $R_i(c/\alpha_1)$, $i=2,3,4,5$, στην ανάλυση των αντίστοιχων συντελεστών $f_i(\tau)$, γι' αυτό και η επεξεργασία τους ακολουθεί την ίδια ακριβώς πορεία, η οποία είναι η ακόλουθη.

Αναπτύσσουμε τις λογαριθμικές συναρτήσεις $\ln((\tau+1)/(\tau-1))$ και $\ln((\alpha_1+c)/\alpha_2)$ σύμφωνα με τις (5.151) και (5.153) αντίστοιχα. Κατόπιν αναπτύσσουμε τις ρητές συναρτήσεις $Q_i(\tau)$ και $R_i(c/\alpha_1)$, οι οποίες αντιστοιχούν στο συντελεστή $f_i(\tau)$, χρησιμοποιώντας τη διωνυμική σειρά (5.151), και αντικαθιστούμε τα αναπτύγματα που προκύπτουν στην αντίστοιχη του συντελεστή εξίσωση, (4.55), (4.64), (4.67) και (4.69). Τετριμμένες αλγεβρικές αναγωγές απαλλάσσουν την τελική έκφραση από τις

απροσδιόριστες μορφές και επιτρέπουν πλέον την αναγωγή του $f_i(\tau)$ στο σφαιρικό όριο, δεδομένου ότι $c\tau \rightarrow r$ όπως είδαμε στην (5.146), και ότι $\alpha_1 \xrightarrow{c \rightarrow 0} \alpha$.

Έτσι, η (5.155) στο όριο $c \rightarrow 0$ δίνει

$$\lim_{c \rightarrow 0} f_1(\tau) = \frac{1}{3r^3} + \frac{2}{3\alpha^3}. \quad (5.159)$$

Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά και την αναγωγή του συντελεστή $f_2(\tau)$ ακολουθώντας την πορεία που μόλις περιγράψαμε και, στη συνέχεια, θα δώσουμε τις τελικές μόνον εκφράσεις των συναρτήσεων $Q_i(\tau)$, $R_i(c/\alpha_1)$ και $f_i(\tau)$ καθώς και τα αντίστοιχα όρια $\lim_{c \rightarrow 0} f_i(\tau)$ για $i = 3, 4, 5$. Οι πράξεις που πρόκειται να παραλειφθούν αποτελούν πιο πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς, της ίδιας όμως αναλυτικής πορείας και λογικής, και κατά την κρίση μας, δεν προσφέρουν ουσιαστικά στην παρουσίαση της διατριβής, ελλοχεύει δε ο κίνδυνος της κούρασης και της σύγχυσης.

Ο συντελεστής $f_2(\tau)$ δίνεται στην (4.55) ως εξής

$$f_2(\tau) = \frac{1}{2c^3} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\tau+1}{\tau-1} \right) + \frac{\tau}{\tau^2-1} + \ln \left(\frac{\alpha_1+c}{\alpha_2} \right) + \frac{(\alpha_1^2-2\alpha_2^2)}{\alpha_1\alpha_2^2} c \right]. \quad (5.160)$$

Το ανάπτυγμα (5.151) σε διωνυμική σειρά επιτρέπει τις εκφράσεις

$$Q_2(\tau) = \frac{\tau}{\tau^2-1} = \frac{1}{\tau} \left[1 - \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 \right]^{-1} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^3} + O\left(\frac{1}{\tau^5} \right) \quad (5.161)$$

και

$$\begin{aligned} R_2(\tau) &= \frac{c(\alpha_1^2-2\alpha_2^2)}{\alpha_1\alpha_2^2} = \frac{c}{\alpha_1} \left[1 - 2 \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^2 \right]^{-1} \\ &= \frac{c}{\alpha_1} - \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^3 + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^5 \right) \end{aligned} \quad (5.162)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε και η (5.155).

Αντικαθιστώντας τις (5.152), (5.153), (5.161) και (5.162) στην (5.160) φθάνουμε στην

$$f_2(\tau) = \frac{1}{3c^3\tau^3} + \frac{2}{3\alpha_1^3} + O(c^2) \quad (5.163)$$

η οποία στο όριο $c \rightarrow 0$, οδηγεί στην

$$\lim_{c \rightarrow 0} f_2(\tau) = \frac{1}{3r^3} + \frac{2}{3\alpha^3}. \quad (5.164)$$

Ομοίως, η (5.151) καθώς και οι απαραίτητες ενδιάμεσες πράξεις, οδηγούν στις

$$Q_3(\tau) = \frac{6\tau}{3\tau^2 - 1} = \frac{2}{\tau} + \frac{2}{3\tau^3} + \frac{2}{9\tau^5} + O\left(\frac{1}{\tau^7}\right) \quad (5.165)$$

$$Q_4(\tau) = \frac{2\tau(3\tau^2 - 5)}{3(\tau^2 - 1)^2} = \frac{2}{\tau} + \frac{2}{3\tau^3} - \frac{2}{3\tau^5} + O\left(\frac{1}{\tau^7}\right) \quad (5.166)$$

$$Q_5(\tau) = \frac{2(3\tau^2 - 2)}{3\tau(\tau^2 - 1)} = \frac{2}{\tau} + \frac{2}{3\tau^3} + \frac{2}{3\tau^5} + O\left(\frac{1}{\tau^7}\right) \quad (5.167)$$

καθώς και στις

$$R_3\left(\frac{c}{\alpha_1}\right) = \frac{c(2\alpha_1^4 + 2\alpha_2^4 + 5\alpha_1^2\alpha_2^2)}{3\alpha_1\alpha_2^2(2\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} = \frac{c}{\alpha_1} + \frac{c^3}{3\alpha_1^3} - \frac{c^5}{3\alpha_1^5} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^7\right) \quad (5.168)$$

$$R_4\left(\frac{c}{\alpha_1}\right) = \frac{c(2\alpha_1^4 + 4\alpha_2^4 - 3\alpha_1^2\alpha_2^2)}{3\alpha_1\alpha_2^4} = \frac{c}{\alpha_1} + \frac{c^3}{3\alpha_1^3} + \frac{c^5}{\alpha_1^5} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^7\right) \quad (5.169)$$

$$R_5\left(\frac{c}{\alpha_1}\right) = \frac{c\alpha_1(\alpha_1^2 - 7\alpha_2^2)}{3\alpha_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} = \frac{c}{\alpha_1} - \frac{c^3}{3\alpha_1^3} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^7\right). \quad (5.170)$$

Τέλος, η αντικατάσταση των (5.152), (5.153) καθώς και των (5.165) και (5.168) στην (4.64) οδηγεί στο όριο

$$\lim_{c \rightarrow 0} f_3(\tau) = -\frac{1}{15r^5} - \frac{1}{10\alpha^5}, \quad (5.171)$$

των (5.166) και (5.169) στην (4.67), οδηγεί στο όριο

$$\lim_{c \rightarrow 0} f_4(\tau) = \frac{1}{5r^5} + \frac{3}{10\alpha^5} \quad (5.172)$$

και των (5.167) και (5.170) στην (4.69) οδηγεί στο

$$\lim_{c \rightarrow 0} f_5(\tau) = \frac{1}{5r^5} + \frac{3}{10\alpha^5}. \quad (5.173)$$

Τότε, το σφαιρικό όριο της (4.70) δίνει για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό u_s^- , μέσω των (5.159), (5.164), (5.171)-(5.173), την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow 0} u_s^- &= b_0^1 + \frac{3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : \tilde{\mathbf{I}} \left(\frac{1}{3r^3} + \frac{2}{3\alpha^3} \right) \\
&+ \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{8\pi\sigma} : \left[(\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1)(-2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right. \\
&\quad \left. + 3(\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3)(x_2^2 - x_3^2) \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] \left(\frac{1}{r^5} + \frac{3}{2\alpha^5} \right) + O(sr_3). \quad (5.174)
\end{aligned}$$

Η χρήση της ταυτότητας

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \quad (5.175)$$

και της έκφρασης (3.61) για το ταυτοτικό δυαδικό, στην (5.174) παρέχει την έκφραση

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow 0} u_s^- &= b_0^1 + \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2}{\alpha^3} \right) \\
&+ \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{8\pi\sigma} : \left[-2r^2 \tilde{\mathbf{I}} + 6 \sum_{i=1}^3 x_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \right. \\
&\quad \left. + 6 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] \left(\frac{1}{r^5} + \frac{3}{2\alpha^5} \right) + O(sr_3) \quad (5.176)
\end{aligned}$$

ή, χρησιμοποιώντας την

$$\sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \quad (5.177)$$

η (5.176) γράφεται

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow 0} u_s^- &= b_0^1 + \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{2}{\alpha^3} \right) \\
&+ \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{I}}) \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3r^2}{2\alpha^5} \right) + O(sr_3) \quad (5.178)
\end{aligned}$$

η οποία είναι προφανώς ισοδύναμη με την έκφραση (5.33) για το ηλεκτρικό δυναμικό

u^+ στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού $r_0 < r < \alpha$.

Στρεφόμαστε τώρα στο εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, όπως δίνεται στην εξίσωση (4.80), και στην αναγωγή των συντελεστών $g_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές αυτοί, που ορίζονται στις (4.72), (4.73), (4.74), (4.76), (4.77) και (4.79) αντίστοιχα, αποτελούν συναρτήσεις της μορφής

$$\frac{\ln \frac{\tau+1}{\tau-1} - W_i(\tau)}{\ln \frac{\alpha_1 + c}{\alpha_2} - P_i\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)} \quad (5.179)$$

όπου οι συναρτήσεις $W_i(\tau)$, $P_i\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)$ είναι ρητές συναρτήσεις. Η πορεία που θα ακολουθήσουμε, προκειμένου να αποφύγουμε την εμφάνιση της απροσδιοριστίας 0/0 κατά τη διαδικασία της αναγωγής των $g_i(\tau)$ στο σφαιρικό όριο, είναι όμοια με αυτήν που αφορούσε τους συντελεστές $f_i(\tau)$. Θα αναπτύξουμε τις λογαριθμικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τις (5.152) και (5.153) και θα χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα (5.154) για τις συναρτήσεις $W_i(\tau)$, $P_i(c/\alpha_1)$. Η αντικατάσταση των αναπτυγμάτων που προκύπτουν στην (5.179) εξουδετερώνει τους “κακούς” όρους και η αναγωγή γίνεται πλέον δυνατή.

Έτσι, η άμεση αντικατάσταση των (5.152) και (5.153) στην (4.72) δίνει για το g_0 την έκφραση

$$g_0(\tau) = \frac{\alpha_1}{c\tau} \left[\frac{1 + \frac{1}{3\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right)}{1 + \frac{c^2}{3\alpha_1^2} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^4\right)} \right] \quad (5.180)$$

και στο όριο $c \rightarrow 0$ την

$$\lim_{c \rightarrow 0} g_0(\tau) = \frac{\alpha}{r}. \quad (5.181)$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η έκφραση (4.73) γράφεται

$$g_1(\tau) = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2 c^3 \tau^3} \left[\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5\tau^2} + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{c^2}{5\alpha_1^2} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^4\right)} \right] \quad (5.182)$$

και ότι στο όριο $c \rightarrow 0$

$$\lim_{c \rightarrow 0} g_1(\tau) = \frac{1}{r^3}. \quad (5.183)$$

Για τους υπόλοιπους συντελεστές $g_i(\tau)$ $i = 2, 3, 4, 5$ η χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος είναι αναγκαία και, όσον αφορά τις συναρτήσεις $W_i(\tau)$, αυτές συμπίπτουν με τις συναρτήσεις $Q_i(\tau)$ που ορίστηκαν και αναλύθηκαν στις (5.161),

(5.165)-(5.167). Ανάλυση όμως χρειάζονται και οι συναρτήσεις $P_i\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)$, και η

ανάλυση αυτή απαιτεί το ανάπτυγμα (5.151), τη σχέση (5.155) και μια σειρά πολύπλοκων αλλά τετριμμένων αλγεβρικών πράξεων, τις οποίες, όπως και πριν θα παραλείψουμε προς χάριν της ουσίας της παρουσίασης.

Η χρήση της (5.155), λοιπόν, και στη συνέχεια της (5.151) παρέχει τις εξής εκφράσεις

$$P_1\left(\frac{c}{\alpha_1}\right) = \frac{c\alpha_1}{\alpha_2^2} = \frac{c}{\alpha_1} + \frac{c^3}{\alpha_1^3} - \frac{c^5}{\alpha_1^5} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^7\right) \quad (5.184)$$

$$P_2\left(\frac{c}{\alpha_1}\right) = \frac{3\alpha_1 c}{2\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = \frac{c}{\alpha_1} + \frac{c^3}{3\alpha_1^3} - \frac{c^5}{9\alpha_1^5} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^7\right) \quad (5.185)$$

$$P_3\left(\frac{c}{\alpha_1}\right) = \frac{c\alpha_1(-2\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2)}{3\alpha_2^4} = \frac{c}{\alpha_1} + \frac{c^3}{3\alpha_1^3} + \frac{c^5}{3\alpha_1^5} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^7\right) \quad (5.186)$$

$$P_4\left(\frac{c}{\alpha_1}\right) = \frac{c\alpha_1(\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2)}{3\alpha_1\alpha_2^2} = \frac{c}{\alpha_1} + \frac{c^3}{3\alpha_1^3} + \frac{5c^5}{3\alpha_1^5} + O\left(\left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^7\right). \quad (5.187)$$

Η αντικατάσταση τώρα των (5.152) και (5.153) καθώς και των (5.162) και (5.184) στην (4.74), δίνει στο όριο $c \rightarrow 0$

$$\lim_{c \rightarrow 0} g_2(\tau) = \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\alpha_1\alpha_2^2} \frac{\alpha_1^3}{c^3\tau^3} \left[\frac{\frac{1}{3} + O(c^2)}{\frac{1}{3} + O(c^2)} \right] \right\} = \frac{1}{r^3} \quad (5.188)$$

ενώ με τη βοήθεια των (5.165) και (5.185), η (4.76) δίνει

$$\lim_{c \rightarrow 0} g_3(\tau) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2^2(2\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \frac{\alpha_1^5}{c^5\tau^5} \left[\frac{\frac{14}{45} + O(c^2)}{\frac{14}{45} + O(c^2)} \right] = \frac{1}{6r^5}. \quad (5.189)$$

Οι (5.166) και (5.186), μαζί με τις (5.152) και (5.154) οδηγούν την (4.77) στο

$$\lim_{c \rightarrow 0} g_4(\tau) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2^4} \frac{\alpha_1^5}{c^5\tau^5} \left[\frac{\frac{8}{15} + O(c^2)}{\frac{8}{15} + O(c^2)} \right] = \frac{1}{2r^5} \quad (5.190)$$

και τέλος οι (5.167) και (5.187) ομοίως στην (4.79), παρέχουν το

$$\lim_{c \rightarrow 0} g_5(\tau) = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \frac{\alpha_1^5}{c^5\tau^5} \left[\frac{\frac{28}{15} + O(c^2)}{\frac{28}{15} + O(c^2)} \right] = \frac{1}{2r^5}. \quad (5.191)$$

Σ' αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να αντικαταστήσουμε τις οριακές τιμές των $g_i(\tau)$ από τις (5.181), (5.182) και (5.188)-(5.191) στην εξίσωση (4.80) για να πάρουμε τη μορφή του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού $u^+(\mathbf{r})$ στο σφαιρικό όριο $c \rightarrow 0$. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} u^+(\mathbf{r}) = & b_0^1 \frac{\alpha}{r} + \frac{3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{r^3} \\ & + \frac{15}{16\pi\sigma} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \left[(\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{-2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} \right) \right. \\ & + (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3)(x_2^2 - x_3^2) \\ & \left. + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] \frac{1}{r^5} + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \end{aligned} \quad (5.192)$$

Η έκφραση (5.191) με τη βοήθεια της (5.175) και της (3.61) οδηγεί στην

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0} u^+(\mathbf{r}) = & b_0^1 \frac{\alpha}{r} + \frac{3\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\sigma r^2} + \frac{15}{16\pi\sigma} \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{r^5} : \left[-\frac{2r^2}{3} \tilde{\mathbf{I}} + 2 \sum_{i=1}^3 x_i^2 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \right. \\ & \left. + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \\ = & b_0^1 \frac{\alpha}{r} + \frac{3\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\sigma r^2} + \frac{5\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{8\pi\sigma r^3} : (3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{I}}) + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{aligned} \quad (5.193)$$

η οποία συμπίπτει με την έκφραση (5.42) για το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού.

Τέλος θα περιγράψουμε την αναγωγή του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του σφαιροειδούς αγωγού, από την έκφραση (4.89), στην αντίστοιχη έκφραση (5.82) ή (5.106) του σφαιρικού αγωγού.

Παρατηρούμε κατ' αρχήν από τις (4.83)-(4.85), στις οποίες ορίζονται οι συντελεστές $F_i(\tau)$, $i=1,2,3$, ότι η αναγωγή τους έγκειται στη χρήση του λογαριθμικού αναπτύγματος (5.152) και στα αναπτύγματα των συναρτήσεων $Q_3(\tau)$, $Q_4(\tau)$ και $Q_5(\tau)$ από τις (5.165)-(5.166). Άμεση αντικατάσταση αυτών στις (4.83)-(4.85) δίνει τα ακόλουθα

$$\lim_{c \rightarrow 0} F_1(\tau) = \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{5c^5 \tau^5} + O(c^2) \right\} = \frac{1}{5r^5} \quad (5.194)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} F_2(\tau) = \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ -\frac{3}{5c^5 \tau^5} + O(c^2) \right\} = -\frac{3}{5r^5} \quad (5.195)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} F_3(\tau) = \lim_{c \rightarrow 0} \left\{ -\frac{3}{5c^5 \tau^5} + O(c^2) \right\} = -\frac{3}{5r^5}. \quad (5.196)$$

Τότε τα διανύσματα $\beta_i(\mathbf{r})$, $i=1,2,3$ που ορίζονται στις (4.90)-(4.92) μέσω των (5.194)-(5.196) στο όριο $c \rightarrow 0$ παίρνουν τη μορφή

$$\lim_{c \rightarrow 0} \beta_1(\mathbf{r}) = \frac{r^2 - 3x_1^2}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_1 - \frac{3x_1x_2}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_2 - \frac{3x_1x_3}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (5.197)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \beta_2(\mathbf{r}) = -\frac{3x_1x_2}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{r^2 - 3x_2^2}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_2 - \frac{3x_2x_3}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (5.198)$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \beta_3(\mathbf{r}) = -\frac{3x_1x_3}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_1 - \frac{3x_2x_3}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{r^2 - 3x_3^2}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (5.199)$$

Ισοδύναμα, οι (5.197)-(5.199) γράφονται στη μορφή

$$\lim_{c \rightarrow 0} \beta_i(\mathbf{r}) = \frac{r^2 - 3x_i^2}{5r^5} \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{3}{5r^5} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_j \quad (5.200)$$

για $i=1,2,3$. Τότε, καθώς η σφαιροειδής γεωμετρία τείνει οριακά να γίνει σφαιρική, η έκφραση (4.89) του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του σφαιροειδούς αγωγού γίνεται για $c \rightarrow 0$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{5\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \left[\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \left(\lim_{c \rightarrow 0} \beta_i(\mathbf{r}) \right) \right] + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (5.201)$$

η οποία, με τη βοήθεια της (5.200) η (5.201) γράφεται

$$\begin{aligned}
\lim_{c \rightarrow 0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \left[\frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{3}{r^5} \sum_{i,j=1}^3 x_i x_j \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \\
&= \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)
\end{aligned} \tag{5.202}$$

που συμπίπτει με τις εκφράσεις (5.82) και (5.106) για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η μελέτη του ευθέος EEG και MEG προβλήματος, στην περίπτωση της γεωμετρικής προτυποποίησης του εγκεφάλου μέσω του ομογενούς σφαιρικού αγωγού $r \leq \alpha$.

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράψαμε πώς παράγεται η λύση των εν λόγω προβλημάτων χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του Laplace στη σφαιρική γεωμετρία, καθώς και πώς, ξεκινώντας από την αντίστοιχη επίλυση στην ελλειψοειδή γεωμετρία μπορούμε, εκφυλίζοντας κατά συνεχή τρόπο το ελλειψοειδές σύστημα σε επίμηκες σφαιροειδές και τελικά σε σφαιρικό, να περάσουμε από τις λύσεις στα αντίστοιχα πρότυπα του εγκεφάλου, καταλήγοντας στις σφαιρικές λύσεις που υπολογίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Σημαντικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου ήταν επίσης το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου μακριά από το σφαιρικό αγωγό ξεκινώντας από την πλήρη έκφρασή του [45], και το οποίο έδειξε ότι ο πρώτος ασυμπτωτικός όρος της πλήρους μορφής, ο τετραπολικός, συμπίπτει με τον αντίστοιχο όρο του αναπτύγματος που έδωσε η φασματική ανάλυση του μαγνητικού πεδίου.

Επίσης στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται το υπολογιστικό μέρος της παρούσας διατριβής. Υπολείπεται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων που πήραμε, καθώς και η εκμαίευση από αυτά πληροφορίας, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αντιμετώπιση των αντιστρόφων EEG και MEG προβλημάτων. Αυτά τα θέματα θα μας απασχολήσουν στο έβδομο κεφάλαιο. Αξίζει όμως να παρεμβάλλουμε στο επόμενο κεφάλαιο ένα κομμάτι θεωρητικών παράπλευρων αποτελεσμάτων της βασικής μας έρευνας, το οποίο αφορά βαθύτερη διερεύνηση του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων, από την οποία αποκομίσαμε νέα δεδομένα, χρήσιμα να συνυπάρχουν ως υπόβαθρο μαζί με τα αποτελέσματα των κεφαλαίων 3, 4 και 5, ώστε η οπτική μας στο κεφάλαιο 7 να είναι ευρύτερη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ II

Εμβαθύνοντας στο Γεωμετρικό Υπόβαθρο

6.1 Η έκκεντρη διεύθυνση.

Στο Κεφάλαιο 2 είχαμε παρακολουθήσει την εισαγωγή του μετασχηματισμού (2.101)-(2.103), τον οποίο υπέδειξε αρχικά ο Lamé [29] για να ταξινομήσει τις ομώνυμες συναρτήσεις κατά το πρότυπο των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών.

Στη συνέχεια ο Hobson [29] χρησιμοποίησε αυτό το μετασχηματισμό για να παράγει το ανάπτυγμα μιάς συνάρτησης, ορισμένης επάνω στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς, σε επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές, κατ' αναλογία με το αντίστοιχο ανάπτυγμα σε σφαιρικές αρμονικές.

Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζει την έκκεντρη διεύθυνση

$$\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon = \hat{\mathbf{r}}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \phi_\varepsilon) = (\cos \theta_\varepsilon, \sin \theta_\varepsilon \cos \phi_\varepsilon, \sin \theta_\varepsilon \sin \phi_\varepsilon) \quad (6.1)$$

η οποία συνδέεται με τη διεύθυνση

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \mu, \nu) = \left(\rho \frac{\mu \nu}{h_2 h_3}, \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1 h_3}, \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1 h_2} \right) \quad (6.2)$$

μέσω της απεικόνισης

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathcal{E}}(\rho) \cdot \hat{\mathbf{r}}_e \quad (6.3)$$

όπου ο τελεστής $\tilde{\mathcal{E}}(\rho)$, όπως είδαμε στη (2.105), δίνεται από το δυαδικό

$$\tilde{\mathcal{E}}(\rho) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \quad (6.4)$$

ή την αντίστοιχη συντεταγμένη μορφή του

$$\tilde{\mathcal{E}}(\rho) = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho^2 - h_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Ο τελεστής $\tilde{\mathcal{E}}(\rho)$ έχει ξεχωριστό ρόλο μέσα στο ελλειψοειδές σύστημα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, γι' αυτό θα τον ονομάσουμε **έκκεντρο τελεστή**.

Ας παρατηρήσουμε σ' αυτό το σημείο, πως ο έκκεντρος τελεστής $\tilde{\mathcal{E}}(\rho)$ όπως ορίζεται στην (6.4), καθορίζει το αντίστροφο ελλειψοειδές από αυτό που αντιστοιχεί στην τιμή ρ της ακτινικής ελλειψοειδούς μεταβλητής, με την έννοια ότι η εξίσωση με τη μονάδα της διπλής συστολής του με το δυαδικό $\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ περιγράφει τα σημεία της επιφάνειας του ελλειψοειδούς με ημιάξονες ρ^{-1} , $(\rho^2 - h_3^2)^{-1/2}$, $(\rho^2 - h_2^2)^{-1/2}$. Την παρατήρηση αυτή θα συναντήσουμε ξανά στο έβδομο κεφάλαιο.

Ας θεωρήσουμε τώρα, το σφαιρικό εκείνο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ως πολικός άξονας λαμβάνεται ο x_1 άξονας, ενώ το αζιμούθιο μετράται από το x_2 άξονα και οι διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_e$ καθορίζονται από τις πολικές γωνίες θ και θ_e καθώς και από τα αζιμούθια ϕ και ϕ_e , αντίστοιχα.

Τότε, η (4.20) παρέχει τον ορισμό των θ , θ_e ως εξής

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{x_1}{r} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) \quad (6.6)$$

και

$$\theta_e = \cos^{-1} \left(\frac{x_1}{\rho} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\mu\nu}{h_2 h_3} \right) \quad (6.7)$$

ενώ οι (4.21)-(4.22) προσδιορίζουν τις γωνίες ϕ και ϕ_e ως

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{x_3}{x_2} \right) \quad (6.8)$$

και

$$\phi_\varepsilon = \tan^{-1} \left(\frac{x_3 \sqrt{\rho^2 - h_3^2}}{x_2 \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{h_3 \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - v^2}}{h_2 \sqrt{\mu_2^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v^2}} \right). \quad (6.9)$$

Από τις (6.6)-(6.9) φαίνεται πώς οι διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon$ διαφέρουν στο βαθμό που η ελλειψοειδής και η σφαιρική ακτινική μεταβλητή, ρ και r αντίστοιχα, διαφέρουν. Καθώς μάλιστα ισχύει η μεταξύ τους σχέση

$$\rho^2 = r^2 + h_2^2 + h_3^2 - \mu^2 - v^2 \quad (6.10)$$

την οποία είδαμε ξανά στην (5.111), οι διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon$ συμπίπτουν στο όριο όπου το ελλειψοειδές εκφυλίζεται σε σφαίρα, καθώς τότε οι ημισεμιακές αποστάσεις h_2, h_3 καθώς και οι μεταβλητές μ, v τείνουν στο μηδέν.

Από γεωμετρική άποψη, αποδεικνύεται με επιχειρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας ότι οι διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon$ συνδέονται κατασκευαστικά μέσω της απεικόνισης (6.3) με τον ακόλουθο τρόπο.

Ας θεωρήσουμε τις τρεις ομόκεντρες σφαίρες με ακτίνες $\rho, \sqrt{\rho^2 - h_3^2}$ και $\sqrt{\rho^2 - h_2^2}$, και τα σημεία τομής A_1, A_2, A_3 της ακτίνας που ορίζεται από τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon(\theta_\varepsilon, \phi_\varepsilon)$ με καθεμιά από τις σφαίρες αυτές αντίστοιχα. Τότε, οι (6.7), (6.9) οδηγούν μέσω γεωμετρικών επιχειρημάτων, στο ότι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες x_i του σημείου $\mathbf{r}(\rho, \mu, v)$ επάνω στο ελλειψοειδές $\rho = \text{σταθερό}$, συμπίπτουν με τις αντίστοιχες συντεταγμένες των σημείων A_i . Έτσι, η i -συντεταγμένη του σημείου A_i αποτελεί την i -συντεταγμένη του σημείου $\mathbf{r}$, για $i = 1, 2, 3$, με αποτέλεσμα η διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon$ να καθορίζει μέσω των τομών της με τις τρεις σφαίρες, κατά μοναδικό τρόπο, το σημείο $\mathbf{r}$ του ελλειψοειδούς. Η σύνδεση αυτή, εκτός του ότι προσφέρει έναν κατασκευαστικό τρόπο της στροφής στον $\mathbb{R}^3$ που μεταφέρει τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon$ στην διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$, παρέχει και μίαν 1-1 απεικόνιση των σημείων της επιφάνειας S ενός ελλειψοειδούς με τα σημεία της επιφάνειας S^2 της μοναδιαίας σφαίρας. Η απεικόνιση αυτή,

$$S \ni \mathbf{r} \rightarrow \hat{\mathbf{r}}_\varepsilon \in S^2 \quad (6.11)$$

είναι η δεύτερη απεικόνιση μεταξύ των σημείων της S και της S^2 που συναντούμε στα πλαίσια της παρούσας διατριβής. Στην (2.60) είχαμε ήδη δει την απεικόνιση Gauss, η οποία αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\mathbf{r}$ της επιφάνειας S , το μοναδιαίο κάθετο

στην S στο ίδιο σημείο, που για το σημείο $\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu)$ συμπίπτει με το $\hat{\rho}$. Έτσι η απεικόνιση Gauss μέσω της (2.60) παρέχει την αντιστοίχιση

$$S \ni \mathbf{r} \rightarrow \hat{\rho} \in S^2 \quad (6.12)$$

μέσω της συνάρτησης φορέα που δίνει για το σημείο $\mathbf{r}$ το μήκος της προβολής του στην κάθετη διεύθυνση.

Στην εξίσωση (2.74) του δεύτερου κεφαλαίου καθώς και στην (3.6) του τρίτου, συναντήσαμε ξανά το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σημείο $\mathbf{r}$ της ελλειψοειδούς επιφάνειας $\rho = \alpha_1$. Από τη σχέση (2.74), όταν αναφέρεται στο ελλειψοειδές (2.23), είτε από τη σχέση που ορίζει απ' ευθείας το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\rho}$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \quad (6.13)$$

όπου h_ρ ο μετρικός συντελεστής

$$h_\rho = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (6.14)$$

που δίνεται και στην (2.77), αποδεικνύεται ότι

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{h_\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} \cdot \mathbf{r} \quad (6.15)$$

η οποία με τη βοήθεια της (6.4) γράφεται

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{h_\rho} \tilde{\mathcal{E}}^{-2}(\rho) \cdot \mathbf{r} \quad (6.16)$$

και μέσω της (6.3) δίνει

$$\hat{\rho} = \frac{\rho}{h_\rho} \tilde{\mathcal{E}}^{-1}(\rho) \cdot \hat{\mathbf{r}}_e. \quad (6.17)$$

Με άλλα λόγια, από τις εξισώσεις (6.3), (6.16) και (6.17) μπορούν να αντληθούν τα ακόλουθα συμπεράσματα. Δεδομένου του σημείου $\mathbf{r}$ της επιφάνειας S του ελλειψοειδούς, η δράση του τελεστή $\tilde{\mathcal{E}}^{-1}(\rho)$ επάνω στο $\mathbf{r}$ οδηγεί στο σημείο $\hat{\mathbf{r}}_e$ που η έκκεντρη διεύθυνση ορίζει στην επιφάνεια S^2 της μοναδιαίας σφαίρας,

$$\hat{\mathbf{r}}_e = \tilde{\mathcal{E}}^{-1}(\rho) \cdot \mathbf{r}. \quad (6.18)$$

Από την άλλη πλευρά, η διαδοχική δράση του ίδιου τελεστή επάνω στο $\mathbf{r}$ δύο φορές οδηγεί με την κατάλληλη βαθμωση, στο εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο σημείο $\mathbf{r}$ της S , μέσω της (6.16). Συνεχίζοντας, παρατηρούμε ότι η

απλή συστολή στα δύο μέλη της (6.16) με το διάνυσμα $\mathbf{r}$ καθώς και η παρατήρηση ότι

$$\tilde{\mathcal{E}}^{-2}(\rho) : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} = 1 \quad (6.19)$$

οδηγεί στο συμπέρασμα κατ' αρχήν ότι η ποσότητα ρ/h_ρ παρέχει το μέτρο της προβολής του $\mathbf{r}$ στην αντίστοιχη κάθετη διεύθυνση, δηλαδή παρέχει την εικόνα της συνάρτησης φορέα που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\mathbf{r}$.

Κατά συνέπεια, οι (6.16), (6.17) και η προηγούμενη παρατήρηση είναι ισοδύναμες με την εξίσωση

$$\tilde{\mathcal{E}}^{-2}(\rho) \cdot \mathbf{r} = \tilde{\mathcal{E}}^{-1}(\rho) \cdot \mathbf{r}_\varepsilon = \frac{h_\rho}{\rho} \hat{\rho} \quad (6.20)$$

η οποία δηλώνει ότι η διαδοχική δράση του $\tilde{\mathcal{E}}^{-1}(\rho)$ δύο φορές επί του $\mathbf{r}$ δίνει το διάνυσμα που έχει διεύθυνση την αντίστοιχη κάθετη στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς και μέτρο αντίστροφο προς το μέτρο της προβολής του $\mathbf{r}$ σ' αυτή τη διεύθυνση.

Οι σχέσεις (6.3) και (6.16) θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα διατριβή σε δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη αφορά τη γεωμετρία του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων και θα διερευνηθεί στην επόμενη παράγραφο, ενώ η δεύτερη αφορά την ανάλυση στο ίδιο σύστημα, και ειδικότερα την παραγωγή εκφράσεων των εσωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών, συναρτήσει σφαιρικών αρμονικών, η οποία θα περιγραφεί στην παράγραφο 6.3.

6.2 Η τομή του μονόχωνου και του δίχωνου υπερβολοειδούς.

Όπως είδαμε στην αρχή του Κεφαλαίου 2, από κάθε σημείο του τρισδιάστατου χώρου διέρχεται ένα ελλειψοειδές $\rho = \text{σταθερό}$, ένα μονόχωνο υπερβολοειδές $\mu = \text{σταθερό}$ και ένα δίχωνο υπερβολοειδές $\nu = \text{σταθερό}$. Οι επιφάνειες αυτές είναι οι συντεταγμένες επιφάνειες του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων και, σαν τέτοιες, αφ' ενός τέμνονται κάθετα, αφού το σύστημα είναι ορθογώνιο, και αφ' ετέρου οι τομές τους είναι γραμμές καμπυλότητας [44]. Μία γραμμή καμπυλότητας, είναι μία καμπύλη της οποίας η δέσμευσή της επί μίας επιφάνειας S , της επιβάλλει να έχει γεωδαισιακή στρέψη μηδενική. Έτσι, αν μία γραμμή καμπυλότητας, όντας αδέσμευτη από επιφάνεια, είχε μηδενική στρέψη, δηλαδή ήταν επίπεδη καμπύλη, η δέσμευσή της στην S την καμπυλώνει, χωρίς να τη στρίβει, αφήνοντας τη στρέψη της

να είναι πάντα μηδενική. Αν η δεδομένη καμπύλη ετύχαινε, όντας ελεύθερη, να έχει στρέψη μη μηδενική, η δέσμευσή της επί της επιφάνειας S θα την “έστριβε” κατά τρόπον ώστε η συνολική της στρέψη, η γεωδαισιακή, να είναι μηδενική.

Εξ’ άλλου από τον ορισμό τους [44], οι γραμμές καμπυλότητας μιας επιφάνειας δείχνουν σε κάθε σημείο τους τη διεύθυνση ακραίας καμπύλωσης της επιφάνειας στην οποία ανήκουν. Καθώς δε, σε κάθε σημείο της επιφάνειας οι γραμμές καμπυλότητας εμφανίζονται κατά ζεύγη, και είναι μεταξύ τους ορθογώνιες, η μία δείχνει τη διεύθυνση μέγιστης ενώ η ορθογώνια σ’ αυτήν, δείχνει τη διεύθυνση ελάχιστης καμπύλωσης της επιφάνειας.

Έτσι, κάθε μία από τις τομές των συντεταγμένων επιφανειών του ελλειψοειδούς συστήματος, αποτελεί για τις αντίστοιχες επιφάνειες κύρια διεύθυνση, δηλαδή διεύθυνση στην οποία η επιφάνεια αυτή καμπυλώνεται κατά μέγιστο ή ελάχιστο βαθμό.

Στην παράγραφο αυτήν θα μας απασχολήσει η τομή του μονόχωνου και του δίχωνου υπερβολοειδούς, και ο λόγος για την επιλογή αυτή στην παρούσα διατριβή θα γίνει καθαρός στο επόμενο κεφάλαιο.

Ας θεωρήσουμε το βασικό ελλειψοειδές $\rho = \alpha_1$ που δίνεται σε Καρτεσιανές συντεταγμένες στην (3.1). Κάθε σημείο του χαρακτηρίζεται από την τριάδα (α_1, μ, ν) , όπου οι “γωνιακές” μεταβλητές μ, ν καθορίζουν το μονόχωνο υπερβολοειδές και το δίχωνο υπερβολοειδές που διέρχονται από το δεδομένο σημείο. Η τομή των δύο αυτών επιφανειών τέμνει την οικογένεια των ομοεστιακών ελλειψοειδών $\bigcup_{\rho=\alpha_1}^{\infty} \{S_\rho\}$ που περιβάλλουν το $\rho = \alpha_1$, στα σημεία (ρ, μ, ν) με $\rho \geq \alpha_1$. Ας

ονομάσουμε C την καμπύλη αυτή και ας θεωρήσουμε ότι αποτελεί την τομή των επιφανειών $\mu = \mu_c$ και $\nu = \nu_c$. Τότε, η καμπύλη C ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση

$$[h_2, +\infty) \supset [\alpha_1, +\infty) \ni \rho \rightarrow \mathbf{r}(\rho) \in \mathbb{R}^3 \quad (6.21)$$

με

$$\mathbf{r}(\rho) = \left(\rho \frac{\mu_c \nu_c}{h_2 h_3}, \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\mu_c^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu_c^2}}{h_1 h_3}, \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{h_2^2 - \mu_c^2} \sqrt{h_2^2 - \nu_c^2}}{h_1 h_2} \right). \quad (6.22)$$

Επειδή η καμπύλη C , ως τομή συντεταγμένων επιφανειών ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων, τέμνει κάθετα την οικογένεια των ομοεστιακών ελλειψοειδών, το

εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο της, είναι συγχρόνως και κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που διέρχεται από το σημείο αυτό. Έτσι, το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\hat{\mathbf{T}}$ στο σημείο $\mathbf{r}(\rho)$ αυτής είναι [44]

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}(\rho)) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{d\mathbf{r}(\rho)}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{ds} \quad (6.23)$$

όπου s το μήκος που έχει διανυθεί επί της καμπύλης C από το σημείο $\rho = \alpha_1$ ως το $\mathbf{r}(\rho)$.

Δεδομένης δε, της (6.13), η (6.23) παρέχει, την

$$\frac{ds}{d\rho} = h_\rho = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (6.24)$$

που λέει ότι ο μετρικός συντελεστής h_{ρ_1} , αποτελεί το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σημείο $\mathbf{r}$ διαγράφει το τόξο μήκους s επί της καμπύλης C , καθώς η παράμετρος ρ διανύει το διάστημα $[\alpha_1, \infty)$. Το γεγονός ότι το μέτρο της ταχύτητας αυτής είναι συνάρτηση του ρ , είναι αντανάκλαση του ότι η καμπύλη C δεν είναι ευθεία, ενώ η έντονη μη γραμμικότητα με την οποία συνδέεται η ταχύτητα με την παράμετρο ρ είναι επίσης αντανάκλαση της μη γραμμικότητας και της ανισοτροπίας με την οποία “αντιλαμβάνεται” αλλά και περιγράφει το ελλειψοειδές σύστημα τον τρισδιάστατο χώρο.

Τότε, το πεδίο διευθύνσεων $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$ της καμπύλης C , δίνεται από τις εξισώσεις (6.15)-(6.17).

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει η προβολή του πεδίου διευθύνσεων $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{r}(\rho))$ καθώς και του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{r}(\rho)$ που δίνει τη θέση των σημείων της καμπύλης που αντιστοιχούν στις διάφορες τιμές του ρ , επί της μοναδιαίας σφαίρας. Θα προσδιορίσουμε, δηλαδή, την τροχιά που διαγράφουν τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ και $\hat{\mathbf{r}}(\rho)$ στην επιφάνεια S^2 της μοναδιαίας σφαίρας, καθώς το ρ διανύει το διάστημα $[h_2, +\infty)$.

Έστω λοιπόν $\mathbf{r}(\rho, \mu_c, \nu_c)$ ένα σημείο της καμπύλης C , το οποίο δίνεται στην εξίσωση (6.22). Τότε το σημείο $\hat{\mathbf{r}}(x_1, x_2, x_3)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{\rho^2 + \mu_c^2 + \nu_c^2 - h_2^2 - h_3^2}} \quad (6.25)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η (6.10), και συγχρόνως ικανοποιεί, ως μοναδιαίο, και την

$$|\hat{\mathbf{r}}| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (6.26)$$

Λόγω της (6.25) και της (6.2), οι συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) του $\hat{\mathbf{r}}$ οφείλουν επίσης να ικανοποιούν τις

$$x_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \mu_c^2 + v_c^2 - h_2^2 - h_3^2}} \frac{\mu_c v_c}{h_2 h_3} \quad (6.27)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2}}{\sqrt{\rho^2 + \mu_c^2 + v_c^2 - h_2^2 - h_3^2}} \frac{\sqrt{\mu_c^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v_c^2}}{h_1 h_3} \quad (6.28)$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 + \mu_c^2 + v_c^2 - h_2^2 - h_3^2}} \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu_c^2} \sqrt{h_2^2 - v_c^2}}{h_1 h_2}. \quad (6.29)$$

Ο σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τη μορφή της καμπύλης που διαγράφει το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ επί της S^2 , εκμεταλλευόμενοι τις (6.26)-(6.29). Για το σκοπό αυτό, απαλείφουμε αρχικά την παράμετρο ρ από τις (6.27)-(6.29). Λύνοντας ως προς την τετραγωνική ρίζα την (6.27) παίρνουμε την έκφραση

$$\sqrt{\rho^2 + \mu_c^2 + v_c^2 - h_2^2 - h_3^2} = \frac{\rho \mu_c v_c}{x_1 h_2 h_3} \quad (6.30)$$

και αντικαθιστώντας την (6.30) στις (6.28) και (6.29), παίρνουμε μετά από τις σχετικές αλγεβρικές αναγωγές τη σχέση

$$\rho^2 = \frac{h_3^2}{1 - \frac{x_2^2}{x_1^2} \frac{\mu_c^2 v_c^2 h_1^2}{(\mu_c^2 - h_3^2)(h_3^2 - v_c^2)h_2^2}} = \frac{h_2^2}{1 - \frac{x_3^2}{x_1^2} \frac{\mu_c^2 v_c^2 h_1^2}{(h_2^2 - \mu_c^2)(h_2^2 - v_c^2)h_3^2}}. \quad (6.31)$$

Η (6.31) παρέχει την εξίσωση

$$\frac{x_1^2}{\mu_c^2 v_c^2} - \frac{x_2^2}{(\mu_c^2 - h_3^2)(h_3^2 - v_c^2)} + \frac{x_3^2}{(h_2^2 - \mu_c^2)(h_2^2 - v_c^2)} = 0 \quad (6.32)$$

η οποία, λόγω της θετικότητας των παρονομαστών, που έπεται από τα διαστήματα μεταβολής (h_3, h_2) και $(0, h_3)$ των μ_c και v_c αντίστοιχα, είναι εξίσωση ελλειπτικού κώνου με άξονα περιστροφής τον x_2 -άξονα και ημιάξονες

$$\mu_c v_c (\mu_c^2 - h_3^2)^{-1/2} (h_3^2 - v_c^2)^{-1/2}$$

και

$$[(h_2^2 - \mu_c^2)(h_2^2 - v_c^2)(\mu_c^2 - h_3^2)^{-1}(h_3^2 - v_c^2)^{-1}]^{1/2}.$$

Η ταυτόχρονη ικανοποίηση και της (6.26), επιβάλλει στην τροχιά του $\hat{\mathbf{r}}$ να είναι η τομή του ελλειπτικού κώνου (6.32) με την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας, και η τομή αυτή περιγράφεται από το σύστημα των παρακάτω εξισώσεων

$$\begin{cases} x_1^2 \left[\frac{h_3^2(\mu_c^2 + v_c^2 - h_3^2)}{\mu_c^2 v_c^2} \right] + x_3^2 \left[\frac{h_1^2(h_2^2 + h_3^2 - \mu_c^2 - v_c^2)}{(h_2^2 - \mu_c^2)(h_2^2 - v_c^2)} \right] = 1 \\ x_2^2 = 1 - x_1^2 - x_3^2 \end{cases} \quad (6.33)$$

Επιπλέον, η (6.31) εξαιτίας των ορίων μεταβολής του ρ στη γενική περίπτωση στο διάστημα $(h_2, +\infty)$ επιβάλλει στην ποσότητα x_3^2 / x_1^2 τα όρια

$$0 < \frac{x_3^2}{x_1^2} < \frac{h_3^2(h_2^2 - \mu_c^2)(h_2^2 - v_c^2)}{h_1^2 \mu_c^2 v_c^2}. \quad (6.34)$$

Η (6.34) λέει, ότι καθώς η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(\rho)$ διατρέχει την καμπύλη C αντανακλώντας τη σάρωση του διαστήματος $(h_2, +\infty)$ από τη μεταβλητή ρ , το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ διατρέχει το τόξο της στρεβλής έλλειψης (6.33), που ξεκινάει από το $x_1 x_2$ επίπεδο ($x_3 = 0$), από το οποίο ξεκινάει και η καμπύλη C , και καταλήγει οριακά καθώς $\rho \rightarrow \infty$, στο σημείο της με x_3 / x_1

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{x_3}{x_1} = \frac{h_3}{h_1} \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu_c^2} \sqrt{h_2^2 - v_c^2}}{\mu_c v_c}. \quad (6.35)$$

Επίσης, η (6.31) παρέχει για το λόγο x_2 / x_1 του οριακά τελικού σημείου της τροχιάς του $\hat{\mathbf{r}}$, όταν $\rho \rightarrow \infty$, την έκφραση

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{x_2}{x_1} = \frac{h_2}{h_1} \frac{\sqrt{\mu_c^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v_c^2}}{\mu_c v_c} \quad (6.36)$$

η οποία με τη βοήθεια της (6.35) οδηγεί στην

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{x_3}{x_2} = \frac{h_3}{h_2} \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu_c^2} \sqrt{h_2^2 - v_c^2}}{\sqrt{\mu_c^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v_c^2}}. \quad (6.37)$$

Αν λάβουμε υπ' όψη μας την (6.22) που ορίζει, τη διεύθυνση $\mathbf{r}(\rho)$, η (6.37) οδηγεί στην

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_3 \sqrt{\rho^2 - h_3^2}}{x_2 \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (6.38)$$

η οποία μέσω των (6.8) και (6.9) εκφράζει την ταύτιση του αζιμούθιου των διευθύνσεων $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_\varepsilon$ στο όριο $\rho \rightarrow \infty$ όπου το ελλειψοειδές γίνεται σφαίρα.

Αντίστοιχα, οι (6.35) και (6.36) δίνουν την εφαπτομένη της πολικής γωνίας του οριακά τελικού σημείου της τροχιάς του $\hat{\mathbf{r}}$ ως εξής

$$\tan \theta_{\infty} = \frac{\sqrt{x_{2,\infty}^2 + x_{3,\infty}^2}}{x_{1,\infty}} = \sqrt{\left(\frac{h_2 h_3}{\mu_c v_c}\right)^2 - 1} = \tan \theta_{\varepsilon} \quad (6.39)$$

η οποία εκφράζει την ταύτιση και της πολικής γωνίας των διευθύνσεων $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_{\varepsilon}$ όταν το $\rho \rightarrow \infty$. Κατά συνέπεια, όταν το σημείο $\mathbf{r}$ της καμπύλης C βρίσκεται στην περιοχή του απείρου, η αντίστοιχη μοναδιαία διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ πλησιάζει οριακά την έκκεντρη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_{\varepsilon}$ που χαρακτηρίζει την τομή C , μέσω της (6.1) και της

$$\hat{\mathbf{r}}_{\varepsilon}(\mu_c, v_c) = \left(\frac{\mu_c v_c}{h_2 h_3}, \frac{\sqrt{\mu_c^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v_c^2}}{h_1 h_3}, \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu_c^2} \sqrt{h_2^2 - v_c^2}}{h_1 h_2} \right). \quad (6.40)$$

Συνοψίζοντας, η προβολή πάνω στη μοναδιαία σφαίρα της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(\rho)$ της καμπύλης C , αποτελεί τμήμα της στρεβλής έλλειψης, που περιγράφεται στην (6.33), με αρχικό σημείο το οποίο προκύπτει από τις εξισώσεις αυτές για $x_3 = 0$, με συντεταγμένες

$$\hat{\mathbf{r}}(\rho = h_2) = \left(\frac{\mu_c v_c}{h_3 \sqrt{-h_3^2 + \mu_c^2 + v_c^2}}, \frac{\sqrt{\mu_c^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v_c^2}}{h_3 \sqrt{-h_3^2 + \mu_c^2 + v_c^2}}, 0 \right) \quad (6.41)$$

και οριακό τελικό σημείο που αντιστοιχεί στο $\rho \rightarrow \infty$ και καθορίζεται επί της S^2 από την έκκεντρη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_{\varepsilon}(\mu_c, v_c)$ της καμπύλης C .

Απ' την άλλη πλευρά, η προβολή του πεδίου διευθύνσεων $\hat{\rho}$ της καμπύλης C επί της S^2 είναι μια καμπύλη τετάρτου βαθμού όπως θα δείξουμε αμέσως παρακάτω. Πραγματικά, από τις (6.15) και (6.2) που ορίζουν τη διεύθυνση $\hat{\rho} = (x_1, x_2, x_3)$, προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις

$$x_1 = \frac{1}{h_{\rho}} \frac{\mu_c v_c}{h_2 h_3} = \frac{\gamma_1}{h_{\rho}} \quad (6.42)$$

$$x_2 = \frac{\rho}{h_{\rho} \sqrt{\rho^2 - h_3^2}} \frac{\sqrt{\mu_c^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v_c^2}}{h_1 h_3} = \frac{\rho \gamma_2}{h_{\rho} \sqrt{\rho^2 - h_3^2}} \quad (6.43)$$

$$x_3 = \frac{\rho}{h_{\rho} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu_c^2} \sqrt{h_2^2 - v_c^2}}{h_1 h_2} = \frac{\rho \gamma_3}{h_{\rho} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (6.44)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (6.40) και την αντικατάσταση

$$\gamma_i = \mathbf{r}_e \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.45)$$

Τετραγωνίζοντας τις (6.42)-(6.44) και αντικαθιστώντας το μετρικό συντελεστή από την (6.14) παίρνουμε ότι

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - h_3^2} = \frac{x_2^2}{x_1^2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \quad (6.46)$$

και

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - h_2^2} = \frac{x_3^2}{x_1^2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_3^2}. \quad (6.47)$$

Απαλείφοντας τη μεταβλητή ρ^2 από τις (6.46), (6.47) και μετά από την απαραίτητη άλγεβρα, φθάνουμε στην εξίσωση

$$x_1^2 x_2^2 h_3^2 \gamma_3^2 - x_1^2 x_3^2 h_2^2 \gamma_2^2 + x_2^2 x_3^2 h_1^2 \gamma_1^2 = 0 \quad (6.48)$$

την οποία πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες του σημείου $\hat{\mathbf{p}}$, συγχρόνως με την

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (6.49)$$

που επιβάλλει το μοναδιαίο μήκος του.

Η ταυτόχρονη ικανοποίηση των (6.48) και (6.49) οδηγεί στην εξίσωση τετάρτου βαθμού

$$x_2^4 h_3^2 \gamma_3^2 - x_3^4 h_2^2 \gamma_2^2 - x_2^2 h_3^2 \gamma_3^2 + x_3^2 h_2^2 \gamma_2^2 + x_2^2 x_3^2 (-h_1^2 \gamma_1^2 - h_2^2 \gamma_2^2 + h_3^2 \gamma_3^2) = 0 \quad (6.50)$$

η οποία περιγράφει την προβολή της τροχιάς του $\hat{\mathbf{p}}$, στο $x_2 x_3$ -επίπεδο, ενώ το x_1 προσδιορίζεται από την (6.49).

Μέχρι εδώ, στη μελέτη του κεφαλαίου αυτού, έχουμε διερευνήσει γεωμετρικές ιδιότητες του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων, οι οποίες το συνδέουν απ' ευθείας με το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, και ειδικότερα με εκείνο το σφαιρικό σύστημα στο οποίο η πολική γωνία μετράται από τον x_1 άξονα και το αζιμούθιο από τον x_2 άξονα.

Θα συνεχίσουμε την μελέτη προς αυτή την κατεύθυνση στην επόμενη παράγραφο, στην οποία θα διερευνήσουμε τρόπους με τους οποίους τα δύο συστήματα συνδέονται και μέσω της ανάλυσης, επιχειρώντας τη σύνδεση των ελλειψοειδών με τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις.

6.3 Ελλειψοειδείς και Σφαιρικές Αρμονικές.

Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, για το οποίο μιλήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο και το οποίο ορίζεται στις (4.20)-(4.22). Οι ίδιες εξισώσεις περιγράφουν τη σύνδεσή του με το ελλειψοειδές σύστημα μέσω της έκκεντρης διεύθυνσης, αποτελώντας το βασικό μετασχηματισμό της παρούσας παραγράφου. Η σύνδεση εκφράζεται επίσης μέσω της (6.3), με τη βοήθεια των (6.1), (6.2) και (6.4). Θα μας χρειαστεί ακόμα η σχέση (6.10) η οποία συνδέει την ακτινική σφαιρική μεταβλητή r με τις ελλειψοειδείς μεταβλητές ρ, μ, ν , καθώς και η ταυτότητα

$$\mu^2 + \nu^2 = h_1^2 \sin^2 \theta_\epsilon \cos^2 \phi_\epsilon + h_2^2 \cos^2 \theta_\epsilon + h_3^2 \quad (6.51)$$

η οποία αποδεικνύεται, τετριμμένα, μέσω των (4.17) και (4.18), και προσφέρει σύνδεση μεταξύ των “γωνιακών” ελλειψοειδών μεταβλητών μ, ν και των αντίστοιχων σφαιρικών μεταβλητών στην έκκεντρη διεύθυνση.

Η (6.51) όταν αντικατασταθεί στην (6.10) παρέχει την

$$\rho^2 = r^2 + \sin^2 \theta_\epsilon [h_2^2 - h_1^2 \cos^2 \phi_\epsilon] \quad (6.52)$$

με την οποία η ρ -μεταβλητή του ελλειψοειδούς συστήματος εκφράζεται συναρτήσει των σφαιρικών μεταβλητών $r, \theta_\epsilon, \phi_\epsilon$. Τέλος, με τη βοήθεια των σχέσεων (2.27)-(2.29) που συνδέουν τις ελλειψοειδείς με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες, αποδεικνύεται η ταυτότητα

$$\rho^2 \mu^2 + \rho^2 \nu^2 + \mu^2 \nu^2 = x_1^2 (h_2^2 + h_3^2) + x_2^2 h_2^2 + x_3^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2 \quad (6.53)$$

η οποία επίσης θα φανεί χρήσιμη στη συνέχεια.

Οι ελλειψοειδείς αρμονικές που θα χρησιμοποιήσουμε δίνονται στις (Γ.23)-(Γ.27) μέχρι το δεύτερο βαθμό σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, ενώ για τις ελλειψοειδείς αρμονικές τρίτου βαθμού, θα χρησιμοποιήσουμε τη μορφή τους σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες, όπως ορίζονται μέσω της (Γ.2) και των (2.148)-(2.154).

Απ' την άλλη πλευρά, οι αρμονικές συναρτήσεις που ορίζονται στο σφαιρικό σύστημα που χρησιμοποιούμε συμπίπτουν με τις γνωστές σφαιρικές αρμονικές που ορίσαμε στις (5.9)-(5.14), καθώς το σφαιρικό σύστημα με πολικό άξονα τον x_1 και αζιμούθιο που μετράται από τον άξονα x_2 , προκύπτει από το κλασικό σφαιρικό, στο οποίο πολικός άξονας είναι ο x_3 και το αζιμούθιο ξεκινά από τον x_1 -άξονα, με

μετασχηματισμό στροφής που περιγράφεται από τον πίνακα μετασχηματισμού

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.54)$$

Ο τελεστής του Laplace δε, καθώς είναι αναλλοίωτος στις στροφές, διατηρεί και τη μορφή των ιδιοσυναρτήσεών του αναλλοίωτη και επομένως, οι επιφανειακές αρμονικές ορίζονται και στο νέο σύστημα μέσω των (5.9)-(5.14).

Στην παράγραφο αυτήν όμως, θα χρειαστούμε την έκφρασή τους σε σφαιρικές συντεταγμένες, και γι' αυτό είναι χρήσιμο να παραθέσουμε τις παρακάτω εκφράσεις, για τις οποίες χρησιμοποιήσαμε τις τριγωνομετρικές εκφράσεις των $P_n^m(\cos \theta)$ [8] και τριγωνομετρικές ταυτότητες που δίνουν τα $\sin(m\phi)$ και $\cos(m\phi)$ για $n = 0, 1, 2, 3$ και $m = 1, 2, \dots, (2n + 1)$. Έτσι, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$Y_0^0(\hat{\mathbf{r}}) = 1 \quad (6.55)$$

$$Y_1^0(\hat{\mathbf{r}}) = \cos \theta \quad (6.56)$$

$$Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = \sin \theta \cos \phi \quad (6.57)$$

$$Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = \sin \theta \sin \phi \quad (6.58)$$

$$Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \quad (6.59)$$

$$Y_2^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = 3 \cos \theta \sin \theta \cos \phi \quad (6.60)$$

$$Y_2^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = 3 \cos \theta \sin \theta \sin \phi \quad (6.61)$$

$$Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) = 3 \sin^2 \theta \cos 2\phi \quad (6.62)$$

$$Y_2^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}) = 3 \sin^2 \theta \sin 2\phi \quad (6.63)$$

$$Y_3^0(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3) \quad (6.64)$$

$$Y_3^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \cos \phi \quad (6.65)$$

$$Y_3^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \phi \quad (6.66)$$

$$Y_3^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) = 15 \sin^2 \theta \cos \theta \cos 2\phi \quad (6.67)$$

$$Y_3^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}) = 15 \sin^2 \theta \cos \theta \sin 2\phi \quad (6.68)$$

$$Y_3^{3,e}(\hat{\mathbf{r}}) = 15 \sin^3 \theta \cos 3\phi \quad (6.69)$$

$$Y_3^{3,0}(\hat{\mathbf{r}}) = 15 \sin^3 \theta \sin 3\phi. \quad (6.70)$$

Η (Γ.23) και η (6.54) τότε δίνουν άμεσα την

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_0^1(\mathbf{r}) = r^0 Y_0^0(\hat{\mathbf{r}}) \quad (6.71)$$

ενώ η (Γ.24), ο μετασχηματισμός (4.20)-(4.22) καθώς και οι (6.56)-(6.58) δίνουν άμεσα τις

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}) = h_2 h_3 x_1 = h_2 h_3 r \cos \theta = h_2 h_3 r Y_1^0(\hat{\mathbf{r}}) \quad (6.72)$$

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_1^2(\mathbf{r}) = h_1 h_3 x_2 = h_1 h_3 r \sin \theta \cos \phi = h_1 h_3 r Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (6.73)$$

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}) = h_1 h_2 x_3 = h_1 h_2 r \sin \theta \sin \phi = h_1 h_2 r Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (6.74)$$

Η (5.25) και οι (4.20)-(4.22) οδηγούν στην

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}) = & (\Lambda - \alpha_2^2) h_2^2 r^2 \cos^2 \theta + (\Lambda - \alpha_1^2) h_1^2 r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ & + (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2) r^2 + (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Οι (6.56), (6.57) με τη βοήθεια των (5.47) και (5.50) καθώς και η απαραίτητη άλγεβρα φέρνουν την $\mathbb{I}\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})$ στη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}) = & \frac{h_1^2(\Lambda - \alpha_1^2)}{6} r^2 Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \left[\frac{2h_2^2(\Lambda - \alpha_2^2)}{3} - \frac{h_1^2(\Lambda - \alpha_1^2)}{3} \right] r^2 Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \left[\frac{h_2^2(\Lambda - \alpha_2^2)}{3} - \frac{h_1^2(\Lambda - \alpha_1^2)}{3} + (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2) \right] r^2 \\ & + (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Εκφράζοντας τις ημιοστιακές αποστάσεις h_1^2, h_2^2 συναρτήσει των ημιαξόνων με τη βοήθεια των (3.2)-(3.4) και χρησιμοποιώντας επίσης τις (Γ.44) και (Γ.45) αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής του r^2 μηδενίζεται, δίνοντας στην $\mathbb{I}\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})$ την τελική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}) = & \frac{h_1^2(\Lambda - \alpha_1^2)}{6} r^2 Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \frac{1}{3} \left[2h_2^2(\Lambda - \alpha_2^2) - h_1^2(\Lambda - \alpha_1^2) \right] r^2 Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2). \end{aligned} \quad (6.77)$$

Με ίδιο ακριβώς τρόπο, αλλά ξεκινώντας από την (5.26), αποδεικνύεται ότι η $\mathbb{I}\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r})$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\mathbb{I}\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}) &= \frac{h_1^2(\Lambda' - \alpha_1^2)}{6} r^2 Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad + \frac{1}{3} [2h_2^2(\Lambda' - \alpha_2^2) - h_1^2(\Lambda' - \alpha_1^2)]^2 Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad + (\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2).\end{aligned}\quad (6.78)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Γ.27), (4.20)-(4.22) και τις (6.60), (6.61) και (6.63) προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3^2 x_1 x_2 = h_1 h_2 h_3^2 r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi = \frac{h_1 h_2 h_3^2}{3} r^2 Y_2^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (6.79)$$

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}) = h_1 h_2^2 h_3 x_1 x_3 = h_1 h_2^2 h_3 r^2 \cos \theta \sin \theta \sin \phi = \frac{h_1 h_2^2 h_3}{3} r^2 Y_2^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (6.80)$$

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}) = h_1^2 h_2 h_3 x_2 x_3 = h_1^2 h_2 h_3 r^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi = \frac{h_1^2 h_2 h_3}{6} r^2 Y_2^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (6.81)$$

Η επεξεργασία των ελλειψοειδών αρμονικών τρίτου βαθμού είναι σημαντικά πιο πολύπλοκη από την άποψη της απαίτησης σε ταυτότητες οι οποίες αφορούν τα Λ_i , $i=1,2,3$ τα οποία εμπλέκονται, καθώς και αλγεβρικών και τριγωνομετρικών χειρισμών που επίσης απαιτούνται. Καθώς επιπλέον ο βαθμός των εν λόγω αρμονικών και οι συγκεκριμένοι χειρισμοί δεν είναι άμεσα συνδεδεμένοι κατ' ουσίαν με την παρούσα διατριβή, θα παραθέσουμε επιγραμματικά τα βασικά βήματα της απόδειξης της πρώτης σχέσης, αλλά θα αποφύγουμε τις αποδείξεις των υπολοίπων καθώς χαρακτηρίζονται από ανάλογους χειρισμούς.

Έτσι, η $\mathbb{I}\mathbb{E}_3^1(\mathbf{r})$, μέσω των (Γ.2) και (2.148) γράφεται

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_3^1(\rho, \mu, \nu) = \rho \mu \nu (\rho^2 + K_1)(\mu^2 + K_1)(\nu^2 + K_1) \quad (6.82)$$

όπου μέσω της (2.157) η παράμετρος K_1 γράφεται

$$K_1 = \Lambda_1 - \alpha_1^2 = \frac{1}{5} \left(-2(h_2^2 + h_3^2) + \sqrt{4h_1^4 + h_2^2 h_3^2} \right) \quad (6.83)$$

και, καθώς η Λ_1 είναι λύση της εξίσωσης (2.158), η K_1 ικανοποιεί την

$$5K_1^2 + 4(h_2^2 + h_3^2)K_1 + 3h_2^2 h_3^2 = 0. \quad (6.84)$$

Από την (6.83) αποδεικνύονται επιπλέον οι ταυτότητες

$$K_1^2 + K_1(h_2^2 + h_3^2) + h_2^2 h_3^2 = (\Lambda_1 - \alpha_2^2)(\Lambda_1 - \alpha_3^2) \quad (6.85)$$

και

$$K_1(h_2^2 + h_3^2) + 2h_2^2 h_3^2 = 5(\Lambda_1 - \alpha_2^2)(\Lambda_1 - \alpha_3^2). \quad (6.86)$$

Η χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας στην (6.82) καθώς και των ταυτοτήτων (6.10), (6.53) και της (2.27), οδηγεί στην έκφραση της $\mathbb{IE}_3^1(\rho, \mu, \nu)$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \mathbb{IE}_3^1(\rho, \mu, \nu) = h_2 h_3 \big[& x_1^2 (K_1^2 + K_1(h_2^2 + h_3^2) + h_2^2 h_3^2) \\ & + x_1 x_2^2 K_1(K_1 + h_2^2) + x_1 x_3^2 K_1(K_1 + h_3^2) \\ & + x_1 K_1(K_1^2 + K_1(h_2^2 + h_3^2) + h_2^2 h_3^2) \big]. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Η (6.87) με τη βοήθεια της ταυτότητας (6.85) γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbb{IE}_3^1(\rho, \mu, \nu) = h_2 h_3 (\Lambda_1 - \alpha_2^2)(\Lambda_1 - \alpha_3^2) x_1^2 + h_2 h_3 (\Lambda_1 - \alpha_1^2) x_1 [x_2^2 (\Lambda_1 - \alpha_3^2) \\ + x_3^2 (\Lambda_1 - \alpha_2^2) + (\Lambda_1 - \alpha_2^2)(\Lambda_1 - \alpha_3^2)]. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα, το μετασχηματισμό (4.20)-(4.22) καθώς και τις (6.56), (6.64), και (6.67) η (6.88) οδηγείται στην

$$\begin{aligned} \mathbb{IE}_3^1(\rho, \mu, \nu) = h_2 h_3 \bigg\{ & \frac{h_1^2 (\Lambda_1 - \alpha_2^2)}{30} r^3 Y_3^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \frac{1}{5} [(h_2^2 + h_3^2)(\Lambda_1 - \alpha_1^2) + 2h_2^2 h_3^2] r^3 Y_3^0(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + (\Lambda_1 - \alpha_1^2)(\Lambda_1 - \alpha_2^2)(\Lambda_1 - \alpha_3^2) r Y_1^0(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + \frac{1}{5} [5(\Lambda_1 - \alpha_1^2)^2 + 4(h_2^2 + h_3^2)(\Lambda_1 - \alpha_1) + 3h_2^2 h_3^2] r^3 Y_1^0(\hat{\mathbf{r}}) \bigg\} \end{aligned} \quad (6.89)$$

και η οποία, λόγω των (6.84) και (6.86) δίνει τελικά

$$\begin{aligned} \mathbb{IE}_3^1(\rho, \mu, \nu) = h_2 h_3 \bigg\{ & \frac{h_1^2 (\Lambda_1 - \alpha_2^2)}{30} r^3 Y_3^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + (\Lambda_1 - \alpha_2^2)(\Lambda_1 - \alpha_3^2) r^3 Y_3^0(\hat{\mathbf{r}}) \\ & + (\Lambda_1 - \alpha_1^2)(\Lambda_1 - \alpha_3^2)(\Lambda_1 - \alpha_2^2) r Y_1^0(\hat{\mathbf{r}}) \bigg\}. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Η διαδικασία που απαιτείται για την απόκτηση των εκφράσεων για τις $\mathbb{IE}_3^m(\mathbf{r})$ $m = 2, 3, 4, 5, 6$ είναι ανάλογη με αυτήν που περιγράψαμε μόλις για την $\mathbb{IE}_3^1(\mathbf{r})$, ενώ οι

διαφορές έγκεινται στις ταυτότητες και στις σφαιρικές αρμονικές που χρησιμοποιούμε κάθε φορά. Οι εκφράσεις που προκύπτουν από την πορεία αυτή είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{E}_3^3(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_3 \left\{ \frac{h_1^2 (\Lambda_2 - \alpha_1^2)}{60} r^3 Y_3^{3,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + \frac{(\Lambda_2 - \alpha_2^2)(\Lambda_2 - \alpha_3^2)}{6} r^3 Y_3^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + (\Lambda_2 - \alpha_1^2)(\Lambda_2 - \alpha_2^2)(\Lambda_2 - \alpha_3^2) r Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) \right\} \end{aligned} \quad (6.91)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{E}_3^5(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 \left\{ \frac{h_1^2 (\Lambda_3 - \alpha_1^2)}{60} r^3 Y_3^{3,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + \frac{(\Lambda_3 - \alpha_2^2)(\Lambda_3 - \alpha_3^2)}{6} r^3 Y_3^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + (\Lambda_3 - \alpha_1^2)(\Lambda_3 - \alpha_2^2)(\Lambda_3 - \alpha_3^2) r Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) \right\} \end{aligned} \quad (6.92)$$

ενώ οι εκφράσεις για τα $\mathbb{I}\mathbb{E}_3^2(\mathbf{r})$, $\mathbb{I}\mathbb{E}_3^4(\mathbf{r})$ και $\mathbb{I}\mathbb{E}_3^6(\mathbf{r})$ είναι της ίδιας μορφής με τις (6.90), (6.91) και (6.92), με τις αντικαταστάσεις $\Lambda_i \rightarrow \Lambda'_i$, $i = 1, 2, 3$, αντίστοιχα.

Τέλος, η $\mathbb{I}\mathbb{E}_3^7(\mathbf{r})$ δίνεται από τις (Γ.2) και (2.154), ενώ οι (2.30)-(2.32) προσφέρουν την Καρτεσιανή της έκφραση

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{E}_3^7(\rho, \mu, \nu) = \rho \mu \nu \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} \\ = h_1^2 h_2^2 h_3^2 x_1 x_2 x_3. \end{aligned} \quad (6.93)$$

Η χρήση του μετασχηματισμού (4.20)-(4.22) συνδέει την $\mathbb{I}\mathbb{E}_3^7(\mathbf{r})$ με το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και η (6.68) την οδηγεί στην τελική μορφή

$$\mathbb{I}\mathbb{E}_3^7(\rho, \mu, \nu) = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{30} r^3 Y_3^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}). \quad (6.94)$$

Οι σχέσεις (6.72)-(6.74), (6.76), (6.78)-(6.80) και (6.90)-(6.94) που παρήχθησαν σ' αυτήν την παράγραφο, δίνουν όλες τις εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές μέχρι τρίτου βαθμού, με τη μορφή γραμμικού συνδυασμού σφαιρικών αρμονικών που ανήκουν στον αντίστοιχο αρμονικό υπόχωρο.

Έτσι, για $n = 1, 2, 3$, κάθε ελλειψοειδής αρμονική $\mathbf{IE}_n^m(\mathbf{r})$ απαιτεί για την έκφρασή της σφαιρικές αρμονικές βαθμού n και $n - 2$, με την προϋπόθεση φυσικά ότι σφαιρικές αρμονικές με αρνητικό βαθμό θεωρούνται μηδενικές.

Οι ίδιες σχέσεις όμως προσφέρουν με σχεδόν άμεσο τρόπο, τον αντίστροφο μετασχηματισμό, ο οποίος παρέχει τους κατάλληλους συνδυασμούς Ελλειψοειδών αρμονικών οι οποίοι αντιστοιχούν στις σφαιρικές αρμονικές.

Έτσι, για $n \leq 2$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$r^0 Y_0^0(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{IE}_0^1(\mathbf{r}) \quad (6.95)$$

$$r Y_1^0(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{IE}_1^1(\mathbf{r})}{h_2 h_3} \quad (6.96)$$

$$r Y_1^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{IE}_1^2(\mathbf{r})}{h_1 h_3} \quad (6.97)$$

$$r Y_1^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{IE}_1^3(\mathbf{r})}{h_1 h_2} \quad (6.98)$$

$$r^2 Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\mathbf{IE}_2^2(\mathbf{r})}{2(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_1^2)} - \frac{\mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})}{2(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_1^2)} + \frac{2\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2}{6} \quad (6.99)$$

$$r^2 Y_2^{1,e}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{3\mathbf{IE}_2^3(\mathbf{r})}{h_1 h_2 h_3^2} \quad (6.100)$$

$$r^2 Y_2^{1,0}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{3\mathbf{IE}_2^4(\mathbf{r})}{h_1 h_2^2 h_3} \quad (6.101)$$

$$r^2 Y_2^{2,e}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{h_1^2 \mathbf{IE}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)} - \frac{h_1^2 \mathbf{IE}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)} + h_1^2 \quad (6.102)$$

$$r^2 Y_2^{2,0}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{6\mathbf{IE}_2^5(\mathbf{r})}{h_1^2 h_2 h_3} . \quad (6.103)$$

Είναι φανερό η χρησιμότητα των σχέσεων (6.95)-(6.103) στην άρση των απροσδιορίστων μορφών που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία της αναγωγής από το ελλειψοειδές στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, αλλά και των (6.72)-(6.94) κατά τον αντίστροφο μετασχηματισμό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ

7.1 Οι καρποί της διατριβής.

Στην παράγραφο αυτή θα συνοψίσουμε τα νέα αποτελέσματα που συνεισέφερε η παρούσα διατριβή στη μελέτη του ευθέος EEG και MEG προβλήματος, με σκοπό, στην επόμενη παράγραφο να συζητήσουμε μερικά από τα συμπεράσματα που μπορούν να αντληθούν από τα αποτελέσματα αυτά, και από τα οποία μπορεί να εκτιμηθεί ο βαθμός της συνεισφοράς τους, καθώς και να καθοριστούν οι διαδρομές περαιτέρω διερεύνησης που τα νέα αυτά αποτελέσματα ανοίγουν για το μέλλον.

Έτσι, αναφορικά με το ευθύ EEG πρόβλημα, το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του φλοιού του αγωγού, που βρίσκεται μεταξύ της θέσης $\mathbf{r}_0$ της πηγής και της συνοριακής επιφάνειας, υπολογίστηκε στα τρία γεωμετρικά πρότυπα του αγωγού, ο οποίος θεωρήθηκε ομογενής, στο ελλειψοειδές, στο επίμηκες σφαιροειδές και στο σφαιρικό, και απέδωσε τους ακόλουθους πρώτους όρους των αντίστοιχων αναπτυγμάτων.

Για το ελλειψοειδές πρότυπο, από την (3.80) έχουμε για $\rho_0 < \rho < \alpha_1$ την έκφραση

$$u_{el}^-(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\rho) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\tilde{\Gamma}}(\rho) : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + O(\epsilon l_3) \quad (7.1)$$

όπου οι γεωμετρικοί τελεστές $\tilde{\mathbf{A}}(\rho)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ και $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\rho)$ δίνονται στις (3.74), (3.77) και (3.79) αντίστοιχα, ενώ δύο ακόμα εκφράσεις του ίδιου πεδίου σε ελλειψοειδείς και Καρτεσιανές συντεταγμένες, παρέχουν οι (3.39) και (3.52) αντίστοιχα.

Για το επίμηκες σφαιροειδές πρότυπο, η (4.70) παρέχει για $\cosh \xi_0 < \tau < \cosh \alpha_1$ την έκφραση

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} u_{sd}^-(\mathbf{r}) = & b_0^1 + \frac{3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : \left[(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 f_1(\tau) + (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) f_2(\tau)) \right] \\ & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} - \frac{c^2}{3} \right) f_3(\tau) \\ & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : \left[(\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \frac{(x_2^2 - x_3^2)}{2} + (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2) x_2 x_3 \right] f_4(\tau) \\ & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : \left[(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_2 + (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_3 \right] f_5(\tau) \\ & + O\left(\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3\right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

όπου οι γεωμετρικοί συντελεστές $f_i(\tau)$, $i=1,2,3,4,5$ δίνονται στις (4.54), (4.55), (4.64), (4.67) και (4.69) αντίστοιχα.

Η αντίστοιχη έκφραση για το σφαιρικό πρότυπο είναι η (5.33)

$$u_{sr}^-(\mathbf{r}) = c_0 + \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{2r^2} + \frac{r}{\alpha^3} \right] + 3 \frac{\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : (3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{I}})}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{3r^3} + \frac{r^2}{2\alpha^5} \right] + O(sr_3) \quad (7.3)$$

που ισχύει για $r_0 < r < \alpha$.

Απ' την άλλη πλευρά, το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο υπολογίστηκε στα τρία γεωμετρικά πρότυπα και ο υπολογισμός του απέδωσε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Στη μελέτη του ελλειψοειδούς προτύπου η σχέση (3.93) δίνει για $\rho > \alpha_1$

$$\begin{aligned} u_{el}^+(\rho, \mu, \nu) = & b_0^1 \frac{I_0^1(\rho)}{I_0^1(\alpha_1)} \\ & + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1(\rho) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \tilde{\mathbf{\Gamma}}_1 : \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} + O(\epsilon l_3) \end{aligned} \quad (7.4)$$

όπου οι γεωμετρικοί τελεστές $\tilde{\mathbf{A}}(\rho)$, $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})$ και $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\rho)$ δίνονται στις (3.90)-(3.92) αντίστοιχα.

Η σχέση (4.80) δίνει το εξωτερικό δυναμικό για την περίπτωση του επιμήκους σφαιροειδούς προτύπου για $\tau > \cosh \alpha_1$

$$\begin{aligned}
 u_{sd}^+(\mathbf{r}) = & b_0^1 g_0(\tau) + \frac{3\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}}{4\pi\sigma} : [\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 g_1(\tau) + (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) g_2(\tau)] \\
 & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : (\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \left(\frac{c^2}{3} - \left(\frac{2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2} \right) \right) g_3(\tau) \\
 & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : \left[(\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \left(\frac{x_2^2 - x_3^2}{2} \right) + (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2) x_2 x_3 \right] g_4(\tau) \\
 & + \frac{15\mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0}{4\pi\sigma} : [(\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_2 + (\hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) x_1 x_3] g_5(\tau) \\
 & + O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4\right)
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

όπου οι συντελεστές $g_i(\tau)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ δίνονται στις (4.72), (4.73), (4.74), (4.77) και (4.79) αντίστοιχα.

Τέλος, η (5.42) παρέχει το αντίστοιχο πεδίο για το σφαιρικό πρότυπο

$$u_{sr}^+(\mathbf{r}) = c_0 \frac{\alpha}{r} + \frac{3}{4\pi\sigma} \frac{\mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{5}{8\pi\sigma} \mathbf{Q} \otimes \mathbf{r}_0 : \frac{(\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{7.6}$$

που ισχύει για $r > \alpha$.

Όσον αφορά το ευθύ MEG πρόβλημα, ένα σημαντικό αποτέλεσμα της παρούσας διατριβής δεν αφορά κάποιο ειδικό γεωμετρικό πρότυπο του αγωγού, αλλά ισχύει για κάθε συννοριακή επιφάνεια που περικλείει συμπαγή και φραγμένο φορέα σταθερής αγωγιμότητας. Όπως αποδείχθηκε λοιπόν, στο πρώτο κεφάλαιο, και ειδικά μέσω των σχέσεων (1.74)-(1.80), το πολυπολικό ανάπτυγμα του μαγνητικού πεδίου που μετράται εξωτερικά του αγωγού αρχίζει με τετραπολικό όρο. Το γεγονός αυτό αντανακλά τη μαθηματική επικύρωση της φυσικής πραγματικότητας της μη ύπαρξης ανοικτών μαγνητικών δυναμικών γραμμών, όπως οι εξισώσεις του Ηλεκτρομαγνητισμού επιβάλλουν, ενώ οφείλεται στην επαγόμενη, από την ύπαρξη της κύριας πηγής $\mathbf{J}^p$ στη θέση $\mathbf{r}_0$ εντός του αγωγού, δραστηριότητα των αγώγιμων στοιχείων του.

Η δραστηριότητα αυτή ισοδυναμεί, όπως είδαμε στην παράγραφο **1.6** κατά τη μελέτη της ολοκληρωτικής αναπαράστασης του μαγνητικού πεδίου του Geselowitz, με την δραστηριότητα επιφανειακής κατανομής διπόλων προσανατολισμένων κάθετα στη

συνοριακή επιφάνεια του αγωγού, που έχει ως αποτέλεσμα να “κρύβει” τη συνεισφορά της πραγματικής πηγής κατά έναν όρο του πολυπολικού αναπτύγματος στο δημιουργούμενο μαγνητικό πεδίο.

Η μερική αυτή απόκρυψη ισχύει σε κάθε περίπτωση κλειστού ομογενούς αγωγού με λείο σύνορο, που περικλείει στο εσωτερικό του πηγή μαγνητικού πεδίου και περιβάλλεται από μη αγώγιμο μέσο.

Απ’ την άλλη πλευρά, συνεισφορά της παρούσας διατριβής αποτελεί η αυστηρή μαθηματική απόδειξη της ολοκληρωτικής αναπαράστασης (1.89) του μαγνητικού πεδίου του Geselowitz, λαμβανομένης υπ’ όψη της ιδιομορφίας που το χωρίο ολοκλήρωσης περικλείει, κάνοντας απαγορευτική την απ’ ευθείας εφαρμογή σ’ αυτό θεωρημάτων της διανυσματικής ανάλυσης. Η απόδειξη αυτή που επικυρώνει μαθηματικά την πιο σημαντική εξίσωση της έρευνας που αφορά την Μαγνητοεγκεφαλογραφία, δίνεται συνοπτικά στην παράγραφο **1.6** και παρουσιάζεται αναλυτικά στο Παράρτημα Δ.

Τέλος, τα αποτελέσματα της διατριβής που αφορούν τον υπολογισμό του εξωτερικού πεδίου στα τρία γεωμετρικά πρότυπα που μελετώνται είναι τα ακόλουθα.

Από τη σχέση (3.159) παίρνουμε για το εξωτερικό του ελλειψοειδούς αγωγού, δηλαδή για $\rho > \alpha_1$ την έκφραση

$$\mathbf{B}_{el}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{d}_{el} \cdot \left[\frac{\mathbf{F}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\Lambda} - \frac{\mathbf{F}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda - \Lambda'} \tilde{\Lambda}' - \frac{3}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 h_i h_j \mathbf{F}_2^{i+j}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \right] + O(e l_3) \quad (7.7)$$

ενώ για το εξωτερικό του επιμήκους σφαιροειδούς αγωγού, δηλαδή για $\tau > \cosh \alpha_1$ η σχέση (4.89) παρέχει την έκφραση

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{sd}(\mathbf{r}) = & \frac{5\mu_0}{8\pi} (\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{r}) \\ & + \frac{5\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1 \times \mathbf{r}_0}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \right] \cdot [\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \boldsymbol{\beta}_2(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{r})] \\ & + O\left(\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4\right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

όπου οι διανυσματικοί συντελεστές $\beta_i(\mathbf{r})$, $i = 1, 2, 3$ δίνονται στις (4.90)-(4.92) και ο τελεστής $\tilde{\mathbf{M}}_1$ παρέχεται στην (4.87).

Το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού δίνεται στις σχέσεις (5.82) και (5.106), με τη μορφή

$$\mathbf{B}_{\text{sr}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\tilde{\mathbf{I}} - 3\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (7.9)$$

Τέλος, στο κεφάλαιο 6 περιελήφθησαν κάποια αποτελέσματα που αφορούν το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων, το οποίο αποτελεί το σκελετό για τη βασική συνεισφορά αυτής της διατριβής, με σκοπό να συνεισφέρουν στην κατανόηση των κύριων καρπών, που αποτελούν οι σχέσεις (7.1), (7.4) και (7.7). Έτσι, πέρα από τις σχέσεις σύνδεσης (6.72)-(6.75), (6.78)-(6.82), (6.91)-(6.104) μεταξύ ελλειψοειδών και σφαιρικών αρμονικών οι οποίες παρήχθησαν, η σύνδεση μεταξύ του ελλειψοειδούς και του σφαιρικού συστήματος απέδωσε τις απεικονίσεις των διανυσμάτων $\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu)$ του ελλειψοειδούς και του αντιστοίχου καθέτου διανύσματος $\hat{\rho}$, στην έκκεντρη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_\epsilon$, μέσω του έκκεντρου τελεστή $\tilde{\mathcal{E}}(\rho)$

$$\tilde{\mathcal{E}}(\rho) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \quad (7.10)$$

και των σχέσεων (6.3)

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathcal{E}}(\rho) \cdot \hat{\mathbf{r}}_\epsilon \quad (7.11)$$

και

$$\tilde{\mathcal{E}}^{-2}(\rho) \cdot \mathbf{r} = \tilde{\mathcal{E}}^{-1}(\rho) \cdot \hat{\mathbf{r}}_\epsilon = \frac{h_\rho}{\rho} \hat{\rho}. \quad (7.12)$$

Τέλος η μελέτη της τομής των δύο συντεταγμένων επιφανειών του ελλειψοειδούς συστήματος, του μονόχωνου και του δίχωνου υπερβολοειδούς, η οποία περιλαμβάνεται στην παράγραφο 6.2, αποτελεί μόνον το πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση, καθώς παρέχει συλλογή πληροφοριών σχετικά με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της, ενώ η νέα πληροφορία που παράγεται αφορά την προβολή του διανυσματικού πεδίου που την ορίζει καθώς και του πεδίου διευθύνσεων της, στην επιφάνεια, της μοναδιαίας σφαίρας. Ο λόγος που κατοχυρώνει την αξία της μελέτης αυτής στην παρούσα διατριβή παρουσιάζεται στην επόμενη παράγραφο που αποτελεί και την τελευταία της διατριβής.

7.2 Η επικαρπία.

Στην παράγραφο αυτή θα επιχειρήσουμε μία συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων που συνοψίσαμε στο κεφάλαιο αυτό, ενώ η παρατήρησή τους θα γίνεται υπό το πρίσμα του τι πληροφορία μπορεί να εξαχθεί από τις αναλυτικές εκφράσεις (7.1)-(7.9) που θα μπορούσε να βοηθήσει στην αντιμετώπιση του αντιστρόφου EEG και MEG προβλήματος. Τα αντίστροφα αυτά προβλήματα έχουν στόχο την ερμηνεία των εξωτερικά μετρούμενων πεδίων του ηλεκτρικού δυναμικού $u^+(\mathbf{r})$ και του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ώστε να εντοπιστεί η θέση $\mathbf{r}_0$, καθώς και ο προσανατολισμός και το μέτρο της ροπής $\mathbf{Q}$ της διπολικής πηγής που παρήγαγε τα εν λόγω πεδία.

Στις σχέσεις (7.4)-(7.6) λοιπόν, οι οποίες αναφέρονται στο EEG πρόβλημα, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι η συνοριακή επιφάνεια του αγωγού εισέρχεται στις εκφράσεις (7.4) και (7.5) που δίνουν το ηλεκτρικό δυναμικό στο ελλειψοειδές και στο επίμηκες σφαιροειδές πρότυπο του αγωγού, αντίστοιχα, μέσω της εμπλοκής στα αποτελέσματα, των ημιαξόνων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Απ' την άλλη πλευρά, στην αντίστοιχη έκφραση (7.6) για το σφαιρικό αγωγό το σύνορο $r = a$ εμφανίζεται μόνον συγχρόνως με την αυθαιρεσία c_0 , στο μονοπολικό όρο του αναπτύγματος. Η παρατήρηση αυτή επισημαίνει κατά κύριο λόγο την έντονη επίδραση που έχει ο φορέας της αγωγιμότητας στο εξωτερικά μετρούμενο ηλεκτρικό δυναμικό και κατά συνέπεια στην ερμηνεία των δεδομένων του λαμβανομένου EEG. Η αλλαγή της θεώρησης της γεωμετρίας του αγωγού από σφαιρική, αρχικά σε επιμήκη σφαιροειδή και στη συνέχεια σε ελλειψοειδή κάνει προοδευτικά πιο “εμφανές” στο μετρούμενο δυναμικό την επίδραση του αντίστοιχου συνόρου. Ομοίως σε ό,τι αφορά την αντίστροφη οπτική, κάνει πιο εμφανή την επίδραση του συνόρου στον εντοπισμό της θέσης και της ροπής της πηγής. Επιπλέον, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, το ηλεκτρικό δυναμικό που καταγράφεται στο EEG επηρεάζεται έντονα από τις ανομοιογένειες του φορέα της αγωγιμότητας που περιβάλλει την πηγή. Γνωρίζουμε ακόμα ότι ένα ρεαλιστικό πρότυπο για τον αγωγίμο εγκέφαλο περιλαμβάνει στρωματοποιημένη δομή σε στοιβάδες σταθερής αγωγιμότητας. Κατά συνέπεια, η αντιμετώπιση του αντιστρόφου EEG προβλήματος έχει ως προαπαιτούμενο τη μελέτη του ευθέως προβλήματος σε ένα αντίστοιχα δομημένο γεωμετρικό πρότυπο.

Έτσι, τα αποτελέσματα (7.4)-(7.6) αποτελούν το πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση και επικυρώνουν την επίδραση της ανισοτροπίας στη θεώρηση του αγωγού. Η συνέχεια της μελέτης του EEG προβλήματος απαιτεί την επίλυση των προβλημάτων διαπερατότητας που επιβάλλει η θεώρηση ενός μη ομογενούς φορέα αγωγιμότητας, που η κάθε μία χαρακτηρίζεται από διαφορετική αλλά σταθερή αγωγιμότητα.

Ένα ακόμη ενδιαφέρον σημείο που μπορούμε να διακρίνουμε και στις τρεις εκφράσεις (7.4)-(7.6) είναι ότι στους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος, το μονοπολικό και το διπολικό, εμπλέκονται μόνον η αγωγιμότητα, το σύνορο και η ροπή $\mathbf{Q}$, ενώ η θέση της πηγής εμφανίζεται για πρώτη φορά στον τετραπολικό όρο του αναπτύγματος του ηλεκτρικού δυναμικού, και αυτό ισχύει και για τα τρία γεωμετρικά πρότυπα του ομογενούς αγωγού.

Αυτό πιθανώς μπορεί να βοηθήσει στον προσδιορισμό του διανύσματος $\mathbf{Q}$ από μέτρηση του πεδίου u^+ σε απόσταση τέτοια που ο διπολικός όρος να είναι ο κυρίαρχος όρος του αναπτύγματος.

Στρεφόμαστε τώρα στα αποτελέσματα (7.7)-(7.9) για το μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού για τα γεωμετρικά πρότυπα που μελετάμε. Η πρώτη παρατήρηση αφορά ξανά την εισαγωγή της συνοριακής επιφάνειας στο ελλειψοειδές και το επίμηκες σφαιροειδές πρότυπο σε αντιδιαστολή με την παντελή απουσία της στην έκφραση (7.9) του σφαιρικού προτύπου. Έτσι, η αύξηση της ανισοτροπίας που παίρνουμε υπ' όψη στο πρότυπο που επιλέγουμε κάνει πιο εμφανές στο αποτέλεσμα το σύνορο του αγωγού, το οποίο αντιστοιχεί στη διεπιφάνεια μεταξύ δύο χωρίων διαφορετικής αγωγιμότητας ίδιας όμως μαγνητικής διαπερατότητας. Έτσι, η διεπιφάνεια μεταξύ των χώρων διαφορετικής αγωγιμότητας, επηρεάζει εμμέσως το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, μέσω της συνεισφοράς, της επιφανειακής κατανομής επαγόμενων χωρικών ρευμάτων σ' αυτό. Στη συνεισφορά αυτή οφείλεται όπως είδαμε και η μερική απόκρυψη της δραστηριότητας της κύριας πηγής.

Απ' την άλλη πλευρά, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στις (7.7)-(7.9), οι τρεις εκφράσεις δίνουν στον τετραπολικό όρο του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου την κοινή δομή

$$\mathbf{B}^q(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{8\pi} \mathbf{d} \cdot \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \quad (7.13)$$

όπου $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r})$ είναι ένας τελεστής που εξαρτάται αποκλειστικά από τη γεωμετρία του προτύπου, που χρησιμοποιείται στην αντίστοιχη έκφραση, για τον αγωγό. Το διάνυσμα $\mathbf{d}$ είναι αυτό που εισάγει τη διπολική πηγή στο αποτέλεσμα για το μαγνητικό πεδίο, μέσω της θέσης της $\mathbf{r}_0$ και της ροπής $\mathbf{Q}$,

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\text{el}} = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}} \times \mathbf{r}_0) \cdot \tilde{\mathbf{N}}_1 \quad (7.14)$$

όπως ορίστηκε για το ελλειψοειδές πρότυπο, στην (3.152) όπου από τις (3.63) και (7.10)

$$\tilde{\mathbf{M}} = \sum_{m=1}^3 \alpha_m^2 \hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m = \tilde{\mathcal{E}}^2(\alpha_1) \quad (7.15)$$

ενώ από την (3.70)

$$\tilde{\mathbf{N}}_1 = \sum_{m=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_m \otimes \hat{\mathbf{x}}_m}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_m^2}. \quad (7.16)$$

Για το σφαιροειδές πρότυπο αντίστοιχα, είναι

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\text{sd}} = \frac{\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0}{2} \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1 \times \mathbf{r}_0}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1) \quad (7.17)$$

όπου ο τελεστής $\tilde{\mathbf{M}}_1$ ορίζεται στην (4.87) ως

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \alpha_1^2 \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2^2 (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) \quad (7.18)$$

ενώ για το σφαιρικό πρότυπο είναι

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{\text{sr}} = \mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0. \quad (7.19)$$

Δεδομένου ότι ο συντελεστής $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r})$ εξαρτάται μόνον από τη γεωμετρία του αγωγού και τη θέση $\mathbf{r}$ στην οποία, μετράται το πεδίο, είναι σε κάθε περίπτωση γνωστός. Τότε από την (7.13) και στα τρία γεωμετρικά πρότυπα είναι δυνατόν να προσδιοριστεί με ακρίβεια το εκάστοτε διάνυσμα $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \frac{8\pi}{\mu_0} \mathbf{B}^q(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{G}}^{-1}(\mathbf{r}). \quad (7.20)$$

Η γνώση του $\mathbf{d}$ για το ελλειψοειδές πρότυπο συνεπάγεται, μέσω της (7.14), τη γνώση του διανύσματος

$$\mathbf{d}_{\text{el}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}_1^{-1} = \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}} \times \mathbf{r}_0 \quad (7.21)$$

ενώ για το σφαιροειδές πρότυπο η συνέπεια είναι περισσότερο πολύπλοκη. Ειδικότερα, η γνώση του $\mathbf{d}_{\text{sd}}$, έπεται, από την (7.17) τη γνώση της x_1 -συνιστώσας

του $\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0$ και της προβολής στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\hat{\mathbf{x}}_1$ του διανύσματος, $(\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1 \times \mathbf{r}_0) / (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$. Τέλος, η γνώση του $\mathbf{d}_{sr}$, ισοδυναμεί μέσω της (7.19) με τη γνώση του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0$.

Ξεκινώντας από το τέλος, αυτό σημαίνει ότι για το σφαιρικό πρότυπο γνωρίζουμε την κάθετη διεύθυνση στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{r}_0$.

Όσον αφορά το ελλειψοειδές πρότυπο και το διάνυσμα $\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}$, καταλαβαίνουμε από τον ορισμό (7.15) του $\tilde{\mathbf{M}}$ και από την (7.12) ότι μπορεί να θεωρηθεί ως το διάνυσμα θέσης του σημείου εκείνου του ελλειψοειδούς συνόρου $\rho = \alpha_1$, στο οποίο η ροπή $\mathbf{Q}$ αποτελεί το αντίστοιχο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Έτσι, η γνώση του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}} \times \mathbf{r}_0$ παρέχει τον καθορισμό του επιπέδου στο οποίο ανήκουν το διάνυσμα $\mathbf{r}_0$ και εκείνο το διάνυσμα, έστω $\mathbf{r}_Q$ που επί της ελλειψοειδούς συνοριακής επιφάνειας έχει αντίστοιχο κάθετο διάνυσμα το $\mathbf{Q}$.

Στην εκμείωση από την πληροφορία αυτή κάποιας επί πλέον γνώσης σχετικά με τον προσδιορισμό της θέσης $\mathbf{r}_0$ ή της ροπής $\mathbf{Q}$ ίσως δράσει βοηθητικά η όποια πληροφορία έλθει από το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό, και το ζήτημα αυτό αποτελεί αντικείμενο περαιτέρω διερεύνησης στο μέλλον.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο που μπορούμε να αντλήσουμε από τα αποτελέσματα (7.7)-(7.9) που αφορούν το μαγνητικό πεδίο, έχουν να κάνουν με τις σιωπηλές πηγές, δηλαδή με την ύπαρξη ειδικών θέσεων και προσανατολισμών της πηγής για τις οποίες η συνεισφορά τους στο εξωτερικά μετρούμενο μαγνητικό πεδίο είναι μηδενική. Αν δε, είναι αυτές οι μόνες οι οποίες λειτουργούν στο εσωτερικό του αγωγού, τότε δεν καταγράφεται καθόλου μαγνητικό πεδίο στο εξωτερικό του. Αυτό αποτελεί και τη φυσική ερμηνεία της έλλειψης μοναδικότητας στη λύση του αντιστρόφου προβλήματος MEG.

Είναι γνωστό [25,45] αλλά και προφανές από τις (7.13) και (7.19) είτε και μόνον από την (7.9) ότι στο σφαιρικό πρότυπο πηγές των οποίων ο προσανατολισμός $\mathbf{Q}$ είναι συγγραμμικός της θέσης $\mathbf{r}_0$ της πηγής, μηδενίζει το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, αποτελώντας έτσι μία μαγνητικά σιωπηλή πηγή.

Για το ελλειψοειδές πρότυπο, οι (7.13)-(7.16) υποδεικνύουν πώς ισχύουν αντίστοιχα συμπεράσματα για τον ελλειψοειδή αγωγό με τη διαφορά πώς τώρα σιωπηλή πηγή θα

αποτελεί εκείνη της οποίας το αντίστοιχο διάνυσμα $\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}$ είναι συγγραμμικό με τη θέση της $\mathbf{r}_0$. Με βάση τα επιχειρήματα που εκφέραμε πιο πάνω, αυτό σημαίνει πώς σιωπηλή πηγή στο ελλειψοειδές πρότυπο θα είναι εκείνη που η ροπή της $\mathbf{Q}$, έχει τη διεύθυνση της καθέτου στη συντομική ελλειψοειδή επιφάνεια, η οποία αντιστοιχεί στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_0$, που ορίζει η θέση της πηγής.

Η άντληση της αντίστοιχης πληροφορίας για το σφαιροειδές πρότυπο έχει ανάγκη από λίγη άλγεβρα. Έτσι, από την (7.13) και τις (7.17) και (7.18), είναι προφανές ότι μία πηγή θα είναι σιωπηλή στον επιμήκη σφαιροειδή αγωγό όταν ισχύουν συγχρόνως οι μηδενισμοί

$$(\mathbf{Q} \times \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{x}}_1 = 0 \quad (7.22)$$

$$(\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1 \times \mathbf{r}_0) \cdot (\hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3) = 0. \quad (7.23)$$

Η (7.22), ισχύει όταν οι προβολές των $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{r}_0$ στο x_2x_3 επίπεδο είναι συγγραμμικές, ενώ η (7.23) ισχύει όταν οι προβολές των διανυσμάτων $\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1$ και $\mathbf{r}_0$ στα επίπεδα x_1x_3 και x_1x_2 είναι συγγραμμικές. Με τη βοήθεια της (4.86) είναι φανερό ότι η συνθήκη (7.23) ικανοποιείται όταν

$$\frac{\alpha_1^2 Q_1}{\alpha_2^2 Q_2} = \frac{x_{01}}{x_{02}}. \quad (7.24)$$

και

$$\frac{\alpha_1^2 Q_1}{\alpha_2^2 Q_3} = \frac{x_{01}}{x_{03}}. \quad (7.25)$$

Η διαίρεση κατά μέλη των (7.24), (7.25) κάνει προφανές ότι τότε, και η (7.22) ικανοποιείται συγχρόνως, που σημαίνει ότι αν οι προβολές των $\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1$ και $\mathbf{r}_0$ στα επίπεδα x_1x_3 και x_1x_2 είναι συγγραμμικές, το ίδιο θα συμβαίνει και για τις προβολές των $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{r}_0$ στο x_2x_3 επίπεδο. Τότε, τα διανύσματα $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{r}_0$ ανήκουν στο επίπεδο που ορίζεται από το αζιμούθιο του $\mathbf{r}_0$, ενώ το $\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_1$, κατ' αντιστοιχία με το ελλειψοειδές πρότυπο, αποτελεί τη διεύθυνση εκείνη στην οποία η αντίστοιχη εξωτερική κάθετος στην επιφάνεια του σφαιροειδούς είναι η ροπή $\mathbf{Q}$.

Δεδομένου επιπλέον ότι για τη σφαιροειδή επιφάνεια η εξωτερική κάθετος ανήκει στο ίδιο επίπεδο με το διάνυσμα της θέσης στην οποία αντιστοιχεί, λόγω της εκ περιστροφής δημιουργίας της, οι προηγούμενες συνθήκες ικανοποιούνται συγχρόνως

όταν η ροπή $\mathbf{Q}$ της πηγής έχει διεύθυνση την κάθετη στη διεύθυνση του $\mathbf{r}_0$, πράγμα που σημαίνει ότι και για το επίμηκες σφαιροειδές πρότυπο, σιωπηλές είναι οι πηγές που είναι προσανατολισμένες κάθετα στη συνωριακή επιφάνεια του αγωγού.

Έτσι, και οι σιωπηλές πηγές του σφαιροειδούς προτύπου μεταφέρουν το χαρακτήρα του ανισότροπου ελλειψοειδούς του οποίου μέτρο της απόκλισης από την ισότροπη σφαίρα αποτελεί η απόκλιση της ακτινικής από την αντίστοιχη κάθετη διεύθυνση. Έτσι, εμφανίζεται ως φυσικό επακόλουθο της ανισοτροπίας το γεγονός ότι οι σιωπηλές πηγές τόσο στο πλήρως ανισότροπο ελλειψοειδές πρότυπο όσο και στο μερικώς ανισότροπο σφαιροειδές πρότυπο, έχουν προσανατολισμό τον κάθετο στο σύνορο που αντιστοιχεί στην ακτινική διεύθυνση της θέσης $\mathbf{r}_0$. Ο ακτινικός προσανατολισμός των σιωπηλών πηγών στο σφαιρικό πρότυπο ακολουθεί τον ίδιο κανόνα, με τη διαφορά ότι στη σφαίρα η κάθετη και η ακτινική διεύθυνση συμπίπτουν.

Οι παρατηρήσεις αυτές μας φέρνουν στο θέμα της μελέτης της μοναδικότητας του αντιστρόφου MEG προβλήματος. Όπως απέδειξαν οι Fokas, Gelfand και Kurylev [19] για τη γενικότερη περίπτωση όπου ως πηγή θεωρείται οποιαδήποτε κατανομή ρεύματος $\mathbf{J}$, η χρήση του σφαιρικού προτύπου για τον αγωγό, κατά τον υπολογισμό του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου αγνοεί τη συνεισφορά ολόκληρης της ακτινικής συνιστώσας του $\mathbf{J}$ καθώς και του αστρόβιλου μέρους της εφαπτομενικής του συνιστώσας.

Έτσι, κατά την αντιστροφή του προβλήματος στο σφαιρικό γεωμετρικό πρότυπο, στην ερμηνεία των δεδομένων ενός MEG, πρέπει να διαβάζουμε το μαγνητικό πεδίο που παράγει μόνον το σωληνοειδές μέρος της εφαπτομενικής συνιστώσας της πραγματικής κατανομής ρεύματος που εδημιούργησε το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Απ' την άλλη πλευρά, οι ίδιοι συγγραφείς απέδειξαν επίσης ότι η θεωρητική απαίτηση της ελαχιστοποίησης της L_2 norm της κατανομής ρεύματος της πηγής, δηλαδή της ποσότητας

$$\int_V |\mathbf{J}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$$

δικαιολογεί και επικυρώνει τη μηδενική συνεισφορά της ακτινικής συνιστώσας και του αστρόβιλου μέρους της εφαπτομενικής συνιστώσας του $\mathbf{J}$ από το εξωτερικά μετρούμενο μαγνητικό πεδίο.

Καθώς αυτά ισχύουν για το σφαιρικό πρότυπο αγωγού είναι κατεύθυνση εξαιρετικού ενδιαφέροντος η ανάπτυξη αντίστοιχης θεωρίας για το ελλειψοειδές πρότυπο, που να διερευνά το μέρος εκείνο της κατανομής ρεύματος που δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο, και του οποίου η συνεισφορά δε μπορεί να υπολογιστεί από την αντίστοιχη έκφραση, αναλαμβάνοντας έτσι την ευθύνη για την έλλειψη μοναδικότητας στη λύση του αντιστρόφου MEG προβλήματος.

Μία ακόμη κατεύθυνση που φαίνεται να έχει ενδιαφέρον όσο αφορά το ελλειψοειδές γεωμετρικό πρότυπο, συνδέεται με την απόκλιση της ακτινικής διεύθυνσης και της αντίστοιχης σ' αυτήν καθέτου στη συννοριακή επιφάνεια του αγωγού. Είδαμε πιο πριν ότι η απόκλιση αυτή εμφανίζεται ως φυσικό επακόλουθο της ανισοτροπίας του προτύπου, το οποίο συμπαρασύρει τον χαρακτηρισμό των πηγών ως σιωπηλές από το σφαιρικό πρότυπο, όπου το $\mathbf{Q}$ έχει την ακτινική διεύθυνση $\mathbf{r}_0$, στο ελλειψοειδές, όπου το $\mathbf{Q}$ έχει την κάθετη διεύθυνση που αντιστοιχεί στο $\mathbf{r}_0$. Συνεχίζοντας την οπτική της αντιστοίχισης των δύο προτύπων, εστιάζουμε για λίγο στη διαδικασία με την οποία ο Sarvas παρήγαγε το 1987 [45] την πλήρη και κλειστή μορφή του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του σφαιρικού αγωγού. Τα κρίσιμα σημεία στη διαδικασία αυτή όπως περιγράψαμε στην παράγραφο 1.7 ήταν δύο.

Το πρώτο αφορούσε το γεγονός ότι στην ακτινική διεύθυνση το σύνορο του αγωγού δε συνεισφέρει στο μετρούμενο μαγνητικό πεδίο, το οποίο καταλαβαίνουμε με βάση τα προηγούμενα, πώς συνδέεται με τον προσανατολισμό σιωπηλών πηγών. Το δεύτερο αφορούσε τον υπολογισμό του μαγνητικού δυναμικού μέσω της ολοκλήρωσης της ακτινικής συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, η οποία δεν περιελάμβανε το σύνορο, κατά μήκος μιας ευθείας απείρου μήκους στην ακτινική διεύθυνση που ορίζει το σημείο μέτρησης $\mathbf{r}$.

Βλέπουμε ότι τον κυρίαρχο ρόλο στη διαδικασία που απέδωσε την κλειστή μορφή του μαγνητικού πεδίου στο σφαιρικό αγωγό έπαιξε η ακτινική διεύθυνση, η οποία με βάση τα προηγούμενα αποτελεί την, ειδική για τη σφαιρική γεωμετρία, περίπτωση όπου η κάθετη διεύθυνση συμπίπτει με την αντίστοιχη ακτινική. Απ' την άλλη πλευρά, η ευθεία στην οποία έγινε η ολοκλήρωση για τον υπολογισμό του μαγνητικού δυναμικού αποτελεί την τομή των δύο συντεταγμένων επιφανειών, του ημιεπιπέδου και του κώνου. Η αντίστοιχη τομή για το ελλειψοειδές σύστημα, είναι η τομή του μονόχωνου και του δίχωνου υπερβολοειδούς, της οποίας πεδίο διευθύνσεων

αποτελεί το πεδίο των μοναδιαίων εξωτερικών καθέτων στις ελλειψοειδείς επιφάνειες, που διέρχονται από κάθε σημείο της τομής.

Έτσι, η τομή αυτή, την οποία μελετήσαμε στην παράγραφο **6.2** φαίνεται να αναλαμβάνει το ρόλο που έχει η ακτινική διεύθυνση στο σφαιρικό σύστημα. Περαιτέρω μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων της τομής του μονόχωνου και του δίχωνου υπερβολοειδούς, όπως για παράδειγμα ο υπολογισμός της καμπυλότητας και της στρέψης, το αν είναι μία καμπύλη επίπεδη ή όχι, αποτελεί αντικείμενο διερεύνησης για το άμεσο μέλλον.

Τέλος, τα αποτελέσματα (7.4)-(7.9) οφείλουν να κωδικοποιηθούν ώστε να γίνει η υπολογιστική επεξεργασία τους μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή και να παραχθούν τα κατάλληλα διαγράμματα. Η πληροφορία που αναμένεται να διαβαστεί μέσω των διαγραμμάτων αυτών αφορά κυρίως τις ομοιότητες και τις παρεκκλίσεις στη συμπεριφορά των μελετούμενων πεδίων στα τρία γεωμετρικά μοντέλα. Η πληροφορία αυτή θα δώσει τη διάσταση της ποσοτικής συνεισφοράς της εισαγωγής της ανισοτροπίας στη μελέτη των EEG και MEG προβλημάτων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΡΙΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Η επίλυση οποιασδήποτε αλγεβρικής εξίσωσης συνίσταται στην δυνατότητα εύρεσης μιας έκφρασης για τη λύση της σε κλειστή μορφή. Η διαδικασία αυτή θα πρέπει να περιγράφεται από έναν αλγόριθμο πεπερασμένων βημάτων αποτελούμενο από τις τέσσερις πράξεις του σώματος $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και την εξαγωγή ριζών.

Επειδή όμως και η εξαγωγή ακέραιας ρίζας συνίσταται σε αλγόριθμο των τεσσάρων πράξεων του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{C}$, γι' αυτό και για την έκφραση της λύσης μιας αλγεβρικής εξίσωσης ζητείται αλγόριθμος των τεσσάρων πράξεων του σώματος στο οποίο επιλύουμε την εξίσωση.

Έτσι, για $n = 1$, η πολυωνυμική εξίσωση α' βαθμού

$$\alpha x = \beta, \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{A.1})$$

έχει λύση $x = \beta/\alpha$ που χρησιμοποιεί μόνο τη διαίρεση και η έκφρασή της είναι γνωστή από την αρχαιότητα.

Για $n = 2$, η

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{A.2})$$

έχει λύση

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (\text{A.3})$$

που χρησιμοποιεί τις τέσσερις πράξεις και την εξαγωγή τετραγωνικής ρίζας, και είναι γνωστή η έκφρασή της από τον 9^ο αιώνα στις εργασίες του άραβα Mohamed Ben Musa.

Για $n = 3$, η κυβική εξίσωση

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + c = 0 \quad (\text{A.4})$$

και για $n = 4$, η τεταρτοβάθμια εξίσωση

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0 \quad \alpha \neq 0 \quad (\text{A.5})$$

έχουν λύσεις των οποίων τους τύπους βρήκαν οι ιταλοί μαθηματικοί: Scipio, Ferro, Tartaglia, Cardano και Ferrari μεταξύ 1500-1550 μΧ.

Για $n \geq 5$ δεν υπάρχουν τύποι για τις λύσεις των πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού ανωτέρου ή ίσου του πέμπτου, και η απόδειξη γι' αυτό ολοκληρώθηκε στις αρχές του 19^{ου} αιώνα από τον Galois (1811-1832).

Για $n = 5$ ο Hermitte, το 1858, απέδειξε ότι οι πέντε ρίζες του πολυνύμου 5^{ου} βαθμού εκφράζονται μέσω ελλειπτικών ολοκληρωμάτων.

Ειδικά για την επίλυση της (A.4), θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα τεχνάσματα που οδήγησαν στην επίλυσή της και στους λεγόμενους τύπους του Cardano που περιγράφουν τις λύσεις της συναρτήσεως των συντελεστών της [49].

Επιβάλλεται κατ' αρχήν στην (A.4) ο μετασχηματισμός

$$x = y + k \quad (\text{A.5})$$

με σκοπό να χρησιμοποιηθεί η παράμετρος k για να απαλειφθεί ο δευτεροβάθμιος όρος της (A.4). Πράγματι, καθώς η επίλυση της (A.4) είναι ισοδύναμη με την εύρεση των ριζών της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + c \quad (\text{A.6})$$

το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από τη θέση $x = k$ οδηγεί μέσω της επιλογής

$$k = -\frac{\alpha}{3} \quad (\text{A.7})$$

στην ισοδύναμη συνάρτηση

$$\bar{f}(y) = y^3 + py + q \quad (\text{A.8})$$

όπου

$$p = \beta - \frac{\alpha^2}{3} \quad (\text{A.9})$$

και

$$q = c - \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{2\alpha^3}{27}. \quad (\text{A.10})$$

Ο επιπλέον μετασχηματισμός

$$y = u + v \quad (\text{A.11})$$

μετατρέπει την (A.8) στην ισοδύναμή της

$$\bar{f}(u, v) = u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q \quad (\text{A.12})$$

και η επιλογή των u, v έτσι ώστε

$$uv = -\frac{p}{3} \quad (\text{A.13})$$

οδηγεί τις ρίζες της (A.12) στην απαίτηση να ικανοποιούν την

$$u^3 + v^3 = -q. \quad (\text{A.14})$$

Οι (A.13) και (A.14) παρέχουν το άθροισμα και το γινόμενο των u^3 και v^3 που συνδέονται μέσω των (A.11) και (A.5) με τις ρίζες της συνάρτησης $f(x)$ που αναζητούμε. Από τους τύπους του Vieta λοιπόν παίρνουμε ότι

$$u^3 = A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (\text{A.15})$$

και

$$v^3 = B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}. \quad (\text{A.16})$$

Τότε, η λύση της (A.4) δίνεται από τις (A.15), (A.16), (A.11) και (A.5) ως εξής

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} - \frac{q}{3} \quad (\text{A.17})$$

όπου τα p και q δίνονται στις (A.9) και (A.10).

Καθώς η υπόριζη ποσότητα στις (A.15) και (A.16) παίρνει και αρνητικές τιμές, τα A και B είναι εν γένει μιγαδικοί αριθμοί. Οι κυβικές τους ρίζες είναι τρεις και αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την πολική μορφή των μιγαδικών αριθμών και του τύπου του DeMoivre ότι είναι οι αριθμοί $\sqrt[3]{A}$, $\omega\sqrt[3]{A}$ και $\bar{\omega}\sqrt[3]{A}$, όπου

$$\omega = e^{\frac{i2\pi}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \omega^2 = \bar{\omega} \quad (\text{A.18})$$

και με παύλα συμβολίζουμε τον συζυγή μιγαδικό αριθμό. Οι τρεις κυβικές ρίζες του B ορίζονται με ανάλογο τρόπο.

Σημειώνουμε εδώ πώς οι αριθμοί 1, ω και $\bar{\omega}$, που είναι οι τρεις κυβικές ρίζες της μονάδας, αντιστοιχούν στις τρεις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου, όπου η μία κορυφή συμπίπτει με την τομή του πραγματικού θετικού ημιάξονα με το μοναδιαίο κύκλο. Τότε, οι κυβικές ρίζες του A αντιστοιχούν στις κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ίσης με την κυβική ρίζα του μέτρου του A, ενώ οι τρεις κυβικές ρίζες του B είναι τα αντίστοιχα σημεία στον κύκλο ακτίνας ίσης με την κυβικής ρίζα του μέτρου του B.

Η ικανοποίηση από τις έξι αυτές κυβικές ρίζες των συνθηκών (A.13) και (A.14) οδηγεί στις τρεις ρίζες της εξίσωσης (A.4), οι οποίες είναι οι εξής:

$$x_1 = -\frac{\alpha}{3} + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \quad (\text{A.19})$$

$$x_2 = -\frac{\alpha}{3} + \omega\sqrt[3]{A} + \bar{\omega}\sqrt[3]{B} \quad (\text{A.20})$$

$$x_3 = -\frac{\alpha}{3} + \bar{\omega}\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B} \quad (\text{A.21})$$

όπου

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A.22})$$

$$A = -\frac{1}{2}\left(b - \frac{\alpha^2}{3}\right) + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad (\text{A.23})$$

και

$$B = -\frac{1}{2}\left(b - \frac{\alpha^2}{3}\right) - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \quad (\text{A.24})$$

Οι (A.19)-(A.21) με τις παραμέτρους που ορίζονται στις (A.22)-(A.24) αποτελούν τους τύπους του Cardano και παρέχουν τις λύσεις της τριτοβάθμιας πολωνυμικής εξίσωσης (A.4).

Η διερεύνηση της (A.4) υπό το πρίσμα των τύπων του Cardano, έγκειται στο πρόσημο της υπόριζης ποσότητας στις (A.23), (A.24), ή ισοδύναμα στο πρόσημο της ποσότητας

$$\Delta = 27q^2 + 4p^3. \quad (\text{A.25})$$

Έτσι, αν $\Delta > 0$, οι αριθμοί A και B είναι πραγματικοί τα δύο ισόπλευρα τρίγωνα στο μιγαδικό επίπεδο έχουν κοινό προσανατολισμό με το τρίγωνο που ορίζουν οι κυβικές

ρίζες της μονάδας και οι τρεις λύσεις της (Α.4), με τη βοήθεια των (Α.19)-(Α.22) δίνονται από τις

$$x_1 = -\frac{\alpha}{3} + \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \quad (\text{Α.26})$$

$$x_2 = -\frac{\alpha}{3} - \frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{2} + i\sqrt{3} \frac{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{2} \quad (\text{Α.27})$$

και

$$x_3 = \bar{x}_2. \quad (\text{Α.28})$$

Αν $\Delta = 0$, οι αριθμοί A και B συμπίπτουν, ενώ τα δύο ισόπλευρα τρίγωνα που ορίζουν οι κυβικές ρίζες των A και B συμπίπτουν επίσης διατηρώντας τις πλευρές τους παράλληλες με το τρίγωνο στο μοναδιαίο κύκλο, ενώ οι ρίζες της (Α.4) γράφονται τώρα

$$x_1 = -\frac{\alpha}{3} - 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad (\text{Α.29})$$

και

$$x_2 = x_3 = -\frac{\alpha}{3} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}}. \quad (\text{Α.30})$$

Τέλος, όταν $\Delta < 0$, οι αριθμοί A και B είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, τα τρίγωνα που ορίζουν στο μιγαδικό επίπεδο είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο και συμμετρικά ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών, ενώ οι ρίζες της (Α.4) είναι σ' αυτή την περίπτωση

$$x_1 = -\frac{\alpha}{3} + 2\operatorname{Re}\left\{\sqrt[3]{A}\right\} \quad (\text{Α.31})$$

$$x_2 = -\frac{\alpha}{3} - \operatorname{Re}\left\{\sqrt[3]{A}\right\} - \sqrt{3}\operatorname{Im}\left\{\sqrt[3]{A}\right\} \quad (\text{Α.32})$$

$$x_3 = -\frac{\alpha}{3} - \operatorname{Re}\left\{\sqrt[3]{A}\right\} + \sqrt{3}\operatorname{Im}\left\{\sqrt[3]{A}\right\} \quad (\text{Α.33})$$

όπου τα σύμβολα $\operatorname{Re}\{z\}$ και $\operatorname{Im}\{z\}$ δίνουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z , αντιστοίχως.

Παρατηρούμε ότι οι τρεις ρίζες της τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης είναι όλες πραγματικές όταν $\Delta \leq 0$, ενώ όπως μπορεί να αποδειχθεί, στην τελευταία περίπτωση είναι επιπλέον μεταξύ τους άνισες.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Οι ελλειπτικές συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, προέκυψαν μέσα από τη μελέτη της κίνησης του απλού εκκρεμούς για κάθε αρχική γωνία και από τον υπολογισμό του μήκους της έλλειψης. Τα προβλήματα αυτά απασχολούσαν για αρκετούς αιώνες την αναλυτική σκέψη, ελύθησαν δε μέσω του ορισμού και της μελέτης των συναρτήσεων αυτών από τους Legendre και Jacobi στη δεκαετία του 1820.

Έτσι, η προσπάθεια να προσδιοριστεί η κίνηση του απλού εκκρεμούς μέσω μίας συνάρτησης που να συνδέει τη θέση του σε μία χρονική στιγμή, μέσω της χρονικής διάρκειας της κίνησής του και η προσπάθεια να αποφευχθεί η προσέγγιση σε οποιοδήποτε στάδιο του υπολογισμού οδήγησε τον Legendre στην εξίσωση

$$t = t_0 \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\phi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (\text{B.1})$$

όπου t_0 η χρονική στιγμή της έναρξης της κίνησης, l το μήκος του εκκρεμούς, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και τα k και ϕ παράμετροι που θα εξηγηθούν παρακάτω.

Η εξίσωση (B.1) εισήγαγε αυτό που ο Legendre ονόμασε **ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους** και ορίζεται ως

$$F(\phi/k) = \int_0^{\phi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad (B.2)$$

όπου $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ και $0 < k < 1$. Η παράμετρος k λέγεται μέτρο του ελλειπτικού ολοκληρώματος και από την άποψη του εκκρεμούς αποτελεί το ημίτονο του μισού της αρχικής γωνίας που το εκκρεμές σχηματίζει με την κατακόρυφο, εισάγοντας έτσι στην εξίσωση (B.1) τις αρχικές συνθήκες της κίνησης. Η παράμετρος ϕ λέγεται όρισμα του ελλειπτικού ολοκληρώματος και από την άποψη του ίδιου προβλήματος συνδέεται με τη γωνία που ορίζει η τυχαία θέση του εκκρεμούς κατά την κίνησή του, με την κατακόρυφο, μέσω του μετασχηματισμού Legendre

$$\sin \phi(t) = \frac{\sin \theta(t)}{k}. \quad (B.3)$$

Απ' την άλλη πλευρά, ο υπολογισμός της χρονικής περιόδου του απλού εκκρεμούς, με δεδομένη τη (B.1) οδήγησε στον ορισμό του **πλήρους ελλειπτικού ολοκληρώματος πρώτου είδους**

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2} \mid k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}} \quad (B.4)$$

όπου $0 < k < 1$. Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν μόνο μέσω του διωνυμικού αναπτύγματος της προς ολοκλήρωση ποσότητας

$$(1 - k^2 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (k \sin x)^{2n} \quad (B.5)$$

όπου το σύμβολο $n!!$ αντιστοιχεί στο γινόμενο των διαδοχικών αρτίων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι από το n , αν το n είναι άρτιος, ή στο γινόμενο των διαδοχικών περιττών μέχρι το n , αν το n είναι περιττός. Η σειρά (B.5) για $|k \sin x| < 1$ συγκλίνει ομοιόμορφα και τότε τα ολοκληρώματα (B.2) και (B.4) υπολογίζονται απ' ευθείας, με τη βοήθεια της

$$\int_0^{\phi} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \phi \quad (B.6)$$

και δίνονται σε κάθε επιθυμητή προσέγγιση με τη βοήθεια H/Y .

Απ' την άλλη μεριά, ο υπολογισμός του μήκους του τόξου μιάς έλλειψης με τη βοήθεια του μετασχηματισμού σε ελλειπτικές συντεταγμένες οδήγησε στον ορισμό του **ελλειπτικού ολοκληρώματος δευτέρου είδους**

$$E(\phi \setminus k) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx \quad (B.7)$$

και του **πλήρους ελλειπτικού ολοκληρώματος δευτέρου είδους**

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx \quad (B.8)$$

όπου η παράμετρος k είναι, σε ό,τι αφορά την έλλειψη, που αποτέλεσε αφορμή για τον ορισμό των (B.7) και (B.8), η εκκεντρότητά της.

Τέλος ορίζεται το **ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους**

$$\Pi(\phi, \eta, k) = \int_0^{\phi} \frac{dx}{(1 + \eta \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad (B.9)$$

και το αντίστοιχο **πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους**

$$\Pi(\eta, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 + \eta \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}. \quad (B.10)$$

Θέτοντας

$$t = \sin x \quad (B.11)$$

στα τρία είδη ολοκληρωμάτων, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση γίνεται συνάρτηση του t και οι (B.2), (B.7) και (B.9) παίρνουν τη μορφή

$$F(\phi \setminus k) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}} \quad (B.12)$$

$$E(\phi \setminus k) = \int_0^{\phi} \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \quad (B.13)$$

$$\Pi(\phi, \eta, k) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{(1 - \eta t^2) \sqrt{1 - k^2 t^2} \sqrt{1 - t^2}}. \quad (B.14)$$

Τα αντίστοιχα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα προκύπτουν από την αντικατάσταση του ορίσματος ϕ από την τιμή $\pi/2$.

Όπως και στα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου είδους, έτσι και στα ολοκληρώματα δευτέρου και τρίτου είδους, ο υπολογισμός τους προϋποθέτει το ανάπτυγμα της υπό ολοκλήρωση ποσότητας σε διωνυμική σειρά και την ολοκλήρωση της αντίστοιχης σειράς μέσα στο διάστημα ομοιόμορφης σύγκλισής τους, το οποίο ορίζονται οι παράμετροί τους. Έτσι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα και των τριών ειδών υπολογίζονται μόνον προσεγγιστικά, μέσω των αντίστοιχων αναπτυγμάτων, η συμβολή όμως των H/Y κάνει την προσέγγιση να είναι εφικτή σε κάθε επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΙΣ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε βασικές σχέσεις από τη θεωρία της φασματικής ανάλυσης του τελεστή του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οι οποίες είναι χρήσιμες στην παρούσα διατριβή [29].

Έτσι, όπως είδαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 2, ο χωρισμός μεταβλητών για την εξίσωση του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οδηγεί στην εξίσωση Lamé [29]

$$(x^2 - h_2^2)(x^2 - h_3^2)E''(x) + x(2x^2 - h_2^2 - h_3^2)E'(x) + (Ax^2 + B)E(x) = 0 \quad (\Gamma.1)$$

για κάθε έναν από τους παράγοντες $E(\rho)$, $E(\mu)$ και $E(v)$ που σχηματίζουν την αρμονική συνάρτηση

$$IE(\rho, \mu, v) = E(\rho)E(\mu)E(v) \quad (\Gamma.2)$$

όπου τα A και B είναι σταθερές.

Η μόνη διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων $E(\rho)$, $E(\mu)$ και $E(v)$ είναι ότι η $E(\rho)$ ικανοποιεί τη (Γ.1) στο διάστημα $(h_2, +\infty)$, η $E(\mu)$ στο διάστημα (h_3, h_2) και η $E(v)$ στο διάστημα $(-h_3, h_3)$.

Οι σταθερές A και B , όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 2 συνδέονται με τους θετικούς ακέραιους n και m , από τους οποίους, όπως ακριβώς ισχύει και για τις

σφαιρικές αρμονικές, ο ακέραιος n καθορίζει το βαθμό και ο m την τάξη, κάθε λύσης της (Γ.1) δηλαδή κάθε συνάρτησης Lamé E_n^m .

Για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ η εξίσωση (Γ.1) έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, μία ομαλή στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων και μία ομαλή στην περιοχή του απείρου. Ειδικά η λύση E_n^m , που είναι ομαλή στο μηδέν, λέγεται συνάρτηση Lamé πρώτου είδους ενώ η λύση F_n^m που είναι ομαλή στην περιοχή του απείρου λέγεται συνάρτηση Lamé δευτέρου είδους.

Οι εσωτερικές λύσεις $E_n^m(\rho)$ συνδέονται με τις εξωτερικές λύσεις $F_n^m(\rho)$ μέσω της έκφρασης

$$F_n^m(\rho) = (2n+1)E_n^m(\rho)I_n^m(\rho) \quad (\Gamma.3)$$

όπου τα ελλειπτικά ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$ δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} I_n^m(\rho) &= \int_{\rho}^{+\infty} \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_2^2} \sqrt{t^2 - h_3^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\rho^2 - \alpha_1^2}^{+\infty} \frac{dx}{[E_n^m(\sqrt{x + \alpha_1^2})]^2 \sqrt{x + \alpha_1^2} \sqrt{x + \alpha_2^2} \sqrt{x + \alpha_3^2}}. \quad (\Gamma.4) \end{aligned}$$

Τα γινόμενα Lamé

$$IE_n^m(\rho, \mu, \nu) = E_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu) \quad (\Gamma.5)$$

ορίζουν τις εσωτερικές χωρικές ελλειψοειδείς αρμονικές, ενώ τα γινόμενα Lamé

$$IF_n^m(\rho, \mu, \nu) = F_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu) = (2n+1)IE_n^m(\rho, \mu, \nu)I_n^m(\rho) \quad (\Gamma.6)$$

ορίζουν τις εξωτερικές συμπαγείς ελλειψοειδείς αρμονικές. Οι επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές ορίζονται από τα γινόμενα $E_n^m(\mu)E_n^m(\nu)$ και αποτελούν πλήρες ορθογώνιο σύνολο “γωνιακών” ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια οποιουδήποτε ελλειψοειδούς με εστίες $\pm h_2, \pm h_3$ και $\pm h_1 = \pm \sqrt{h_2^2 - h_3^2}$, οι οποίες εμφανίζονται στην εξίσωση (Γ.1). Η ορθογωνιότητα των επιφανειακών ελλειψοειδών ορίζεται ως προς τη συνάρτηση βάρους

$$I_{\rho_0}(\mu, \nu) = [(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)]^{-1/2} \quad (\Gamma.7)$$

επί του ελλειψοειδούς $\rho = \rho_0$ και οδηγεί στις σχέσεις

$$\iint_{\rho=\rho_0} E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) E_n^{m'}(\mu) E_n^{m'}(\nu) l_{\rho_0}(\mu, \nu) ds = 0 \quad (\Gamma.8)$$

για $n \neq n'$ και $m \neq m'$, και

$$\iint_{\rho=\rho_0} [E_n^m(\mu) E_n^m(\nu)]^2 l_{\rho_0}(\mu, \nu) ds = \gamma_n^m \quad (\Gamma.9)$$

όταν $n = n'$ και $m = m'$, όπου γ_n^m είναι οι σταθερές κανονικοποίησης των αντίστοιχων ελλειψοειδών αρμονικών.

Η θεμελιώδης λύση του τελεστή του Laplace αποδεικνύεται [38] ότι αναπτύσσεται σε σειρά ελλειψοειδών αρμονικών ως εξής

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \begin{cases} I_n^m(\rho_0, \mu', \nu') I_n^m(\rho, \mu, \nu), & \rho < \rho_0 \\ I_n^m(\rho_0, \mu', \nu') I_n^m(\rho, \mu, \nu), & \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (\Gamma.10)$$

Αν και η συναρτησιακή μορφή των ελλειψοειδών αρμονικών είναι γνωστή, οι τιμές των παραμέτρων που εμπεριέχονται σ' αυτήν, όπως έχουμε ήδη δει στο Κεφάλαιο 2, δε μπορούν να εκφραστούν σε κλειστή μορφή συναρτήσεων των ημιαξόνων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ του ελλειψοειδούς, όταν ο βαθμός n είναι μεγαλύτερος από 3. Έτσι, οι αναλυτικές λύσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών που αναφέρονται στο ελλειψοειδές σύστημα, περιορίζονται στον 16-διαστάσεων αρμονικό υπόχωρο που καλύπτεται από τις ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μικροτέρου ή ίσου του τρίτου [29].

Στην παρούσα διατριβή ο περιορισμός σε ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μικροτέρου ή ίσου του δευτέρου έδωσε ικανοποιητικές προσεγγίσεις τόσο για το ηλεκτρικό δυναμικό, όσο και για το μαγνητικό πεδίο. Έτσι, οι σχέσεις στις οποίες θα αναφερθούμε στη συνέχεια, αφορούν τις ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μικροτέρου ή ίσου του δεύτερου.

Οι 9 αντίστοιχες συναρτήσεις Lamé πρώτου είδους καθώς και οι αντίστοιχες σταθερές Λ και Λ' που εμπλέκονται σ' αυτές, δίνονται στο δεύτερο κεφάλαιο, στις σχέσεις (2.139)-(2.147) και (2.155), (2.156). Τότε, οι αντίστοιχες συναρτήσεις Lamé δευτέρου είδους κατασκευάζονται μέσω των σχέσεων (Γ.3) και (Γ.4).

Οι σταθερές κανονικοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία [12] είναι οι εξής:

$$\gamma_0^1 = 4\pi \quad (\Gamma.11)$$

$$\gamma_1^m = \frac{4\pi}{3} \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_m^2}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (\Gamma.12)$$

$$\gamma_2^1 = -\frac{8\pi}{5}(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \quad (\Gamma.13)$$

$$\gamma_2^2 = \frac{8\pi}{5}(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) \quad (\Gamma.14)$$

και

$$\gamma_2^{6-m} = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_m^2, \quad m=1,2,3. \quad (\Gamma.15)$$

όπου μπορεί να αποδειχθεί με αναλυτικές μεθόδους ότι οι παράγοντες $\Lambda - \Lambda'$, $\Lambda - \alpha_2^2$, $\Lambda - \alpha_3^2$ και $\Lambda' - \alpha_3^2$ είναι θετικοί, ενώ οι παράγοντες $\Lambda - \alpha_1^2$, $\Lambda' - \alpha_1^2$ και $\Lambda' - \alpha_2^2$ είναι αρνητικοί.

Στη συνέχεια παραθέτουμε σχέσεις που εκφράζουν τις κλίσεις των ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων επίσης ελλειψοειδών αρμονικών. Με απευθείας υπολογισμούς αποδεικνύεται ότι

$$? IE_0^1(\rho, \mu, \nu) = 0 \quad (\Gamma.16)$$

$$? IE_1^m(\rho, \mu, \nu) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_m} \hat{\mathbf{x}}_m \quad m=1,2,3 \quad (\Gamma.17)$$

$$\nabla IE_2^1(\rho, \mu, \nu) = 2 \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{h_1 h_2 h_3} \sum_{m=1}^3 \frac{h_m}{\Lambda - \alpha_m^2} IE_1^m(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_m \quad (\Gamma.18)$$

$$\nabla IE_2^2(\rho, \mu, \nu) = 2 \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{h_1 h_2 h_3} \sum_{m=1}^3 \frac{h_m}{\Lambda' - \alpha_m^2} IE_1^m(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_m \quad (\Gamma.19)$$

$$? IE_2^3(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 h_3 \frac{? 1}{? h_1} IE_1^2(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{h_2} IE_1^1(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{?}{?} \quad (\Gamma.20)$$

$$? IE_2^4(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 h_3 \frac{? 1}{? h_1} IE_1^3(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{h_3} IE_1^1(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{?}{?} \quad (\Gamma.21)$$

$$? IE_2^5(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 h_3 \frac{? 1}{? h_2} IE_1^3(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{h_3} IE_1^2(\rho, \mu, \nu) \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{?}{?} \quad (\Gamma.22)$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}_m$ είναι η Καρτεσιανή ορθοκανονική βάση.

Απ' την άλλη πλευρά, στην εξέλιξη της παρούσας διατριβής, κυρίως του τρίτου κεφαλαίου, κάναμε εκτεταμένη χρήση των παρακάτω εκφράσεων των συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\mathbb{IE}_0^1(\rho, \mu, \nu) = 1 \quad (\Gamma.23)$$

$$\mathbb{IE}_1^m(\rho, \mu, \nu) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_m} x_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (\Gamma.24)$$

$$\mathbb{IE}_2^1(\rho, \mu, \nu) = (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \left(\sum_{n=1}^3 \frac{x_n^2}{\Lambda - \alpha_n^2} + 1 \right) \quad (\Gamma.25)$$

$$\mathbb{IE}_2^2(\rho, \mu, \nu) = (\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) \left(\sum_{n=1}^3 \frac{x_n^2}{\Lambda' - \alpha_n^2} + 1 \right) \quad (\Gamma.26)$$

$$\mathbb{IE}_2^{6-m}(\rho, \mu, \nu) = h_1 h_2 h_3 h_m \frac{x_1 x_2 x_3}{x_m}, \quad m = 1, 2, 3. \quad (\Gamma.27)$$

Τα Καρτεσιανά μονώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου του δευτέρου εκφράζονται, μέσω των παραπάνω σχέσεων (Γ.23)-(Γ.27), συναρτήσει ελλειψοειδών αρμονικών ως εξής:

$$1 = \mathbb{IE}_0^1(\rho, \mu, \nu) \quad (\Gamma.28)$$

$$x_m = \frac{h_m}{h_1 h_2 h_3} \mathbb{IE}_1^m(\rho, \mu, \nu) \quad m = 1, 2, 3 \quad (\Gamma.29)$$

$$x_m^2 = \frac{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_m^2}{3} \left[1 - \frac{E_2^1(\mu)E_2^1(\nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_m^2)} + \frac{E_2^2(\mu)E_2^2(\nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_m^2)} \right], \quad m = 1, 2, 3 \quad (\Gamma.30)$$

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_m} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_m} \mathbb{IE}_2^{6-m}(\rho, \mu, \nu), \quad m = 1, 2, 3. \quad (\Gamma.31)$$

Σχετικά με τα ελλειπτικά ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές $\mathbb{IE}_n^m$, $n \leq 2$, αναφερόμαστε στις ακόλουθες σχέσεις που συνδέουν μεταξύ τους

$$I_1^1(\rho) + I_1^2(\rho) + I_1^3(\rho) = \frac{1}{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (\Gamma.32)$$

$$\alpha_1^2 I_1^1(\rho) + \alpha_2^2 I_1^2(\rho) + \alpha_3^2 I_1^3(\rho) = I_0^1(\rho) - \frac{\rho^2 - \alpha_1^2}{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (\Gamma.33)$$

$$I_2^1(\rho) = \frac{1}{2(\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2) \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{I_1^1(\rho)}{\Lambda - \alpha_1^2} + \frac{I_1^2(\rho)}{\Lambda - \alpha_2^2} + \frac{I_1^3(\rho)}{\Lambda - \alpha_3^2} \right) \quad (\Gamma.34)$$

$$I_2^2(\rho) = \frac{1}{2(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2) \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{I_1^1(\rho)}{\Lambda' - \alpha_1^2} + \frac{I_1^2(\rho)}{\Lambda' - \alpha_2^2} + \frac{I_1^3(\rho)}{\Lambda' - \alpha_3^2} \right) \quad (\Gamma.35)$$

$$I_2^3(\rho) = \frac{1}{h_3^2} (I_1^2(\rho) - I_1^1(\rho)) \quad (\Gamma.36)$$

$$I_2^4(\rho) = \frac{1}{h_2^2} (I_1^3(\rho) - I_1^1(\rho)) \quad (\Gamma.37)$$

$$I_2^5(\rho) = \frac{1}{h_1^2} (I_1^3(\rho) - I_1^2(\rho)) . \quad (\Gamma.38)$$

$$\sum_{n=1}^3 \frac{I_1^n(\rho)}{(\Lambda - \alpha_n^2)(\Lambda' - \alpha_n^2)} = 3I_3^7(\rho) \quad (\Gamma.39)$$

$$\sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_n^2 I_1^n(\rho)}{(\Lambda - \alpha_n^2)(\Lambda' - \alpha_n^2)} = \frac{3}{h_1^2} [I_1^2(\rho) - I_1^3(\rho)] + 3\alpha_1^2 I_3^7(\rho) . \quad (\Gamma.40)$$

Οι αποδείξεις των σχέσεων αυτών αποτελούν ένα μακροσκελές εγχείρημα επίπονων, αλλά ως επί το πλείστον ευθέων, αλγεβρικών και αναλυτικών χειρισμών, μεταξύ των ολοκληρωμάτων (Γ.4) που ορίζουν τα $I_n^m(\rho)$ και, κατά μεγάλο μέρος τους ανήκουν στο [9].

Αυτό που στην ουσία δείχνουν οι (Γ.32)-(Γ.38) είναι ότι μεταξύ των εννέα ολοκληρωμάτων $I_n^m(\rho)$ με $n \leq 2$, μόνον δύο είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Για παράδειγμα, εάν τα $I_0^1(\rho)$ και $I_1^1(\rho)$ είναι γνωστά, τα άλλα επτά ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν μέσω των (Γ.32)-(Γ.38), συναρτήσει αυτών των δύο.

Απ' την άλλη πλευρά, δεδομένων των ορισμών (B.12) και (B.13) για τα μη πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους, $F(\phi/\alpha)$ και $E(\phi/\alpha)$ αντίστοιχα, αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την έκφραση των $I_0^1(\rho)$ και $I_1^1(\rho)$, και μέσω αυτών, για την έκφραση και των επτά υπολοίπων $I_n^m(\rho)$ με $n \leq 2$. Πράγματι, ο μετασχημασμός

$$t = \frac{h_2}{x} \quad (\Gamma.41)$$

φέρνει το ελλειπτικό ολοκλήρωμα $I_0^1(\rho)$ στη μορφή

$$\begin{aligned} I_0^1(\rho) &= \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2/\rho} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\frac{h_3^2}{h_2^2} t^2}} \\ &= \frac{1}{h_2} F\left(\sin^{-1} \frac{h_2}{\rho} \mid \sin^{-1} \frac{h_3}{h_2}\right) \end{aligned} \quad (\Gamma.42)$$

και το $I_1^1(\rho)$ στη μορφή

$$\begin{aligned} I_1^1(\rho) &= \frac{1}{h_3^2} \int_0^{h_2/\rho} \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\frac{h_3^2}{h_2^2} t^2}} \\ &= \frac{1}{h_2 h_3^2} \int_0^{h_2/\rho} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-\frac{h_3^2}{h_2^2} t^2}} - \frac{1}{h_2 h_3^2} \int_0^{h_2/\rho} \frac{\sqrt{1-\frac{h_3^2}{h_2^2} t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{1}{h_2 h_3^2} \left[F\left(\sin^{-1} \frac{h_2}{\rho} \mid \sin^{-1} \frac{h_3}{h_2}\right) - E\left(\sin^{-1} \frac{h_2}{\rho} \mid \sin^{-1} \frac{h_3}{h_2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\Gamma.43)$$

Καθώς τα ελλειπτικά ολοκληρώματα $F(\phi \mid \alpha)$ και $E(\phi \mid \alpha)$ επιδέχονται προσεγγιστικό υπολογισμό μέσω αριθμητικών μεθόδων, η δυνατότητα αυτή παρέχεται, μέσω των (Γ.42) και (Γ.43), και στα εννέα ελλειπτικά ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$ με $n \leq 2$.

Τέλος παραθέτουμε και τις πιο χρήσιμες, για την παρούσα διατριβή, από τις σχέσεις που συνδέουν τις σταθερές Λ , Λ' , τους ημιάξονες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και τις ημιστιακές αποστάσεις h_1, h_2 και h_3 του ελλειψοειδούς

$$3(\Lambda + \Lambda') = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \quad (\Gamma.44)$$

$$3\Lambda\Lambda' = \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2 \quad (\Gamma.45)$$

$$\sum_{n=1}^3 (-1)^n (\Lambda - \alpha_n^2) h_n^2 = \sum_{n=1}^3 (-1)^n (\Lambda' - \alpha_n^2) h_n^2 = 0 \quad (\Gamma.46)$$

$$\sum_{n=1}^3 (-1)^n (\Lambda - \alpha_n^2) h_n^2 \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^3 (-1)^n (\Lambda' - \alpha_n^2) h_n^2 \alpha_n^2 = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \quad (\Gamma.47)$$

$$\sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2 - \Lambda} = \sum_{n=1}^3 \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2 - \Lambda'} = 3 \quad (\Gamma.48)$$

$$3h_n^2 (\Lambda - \alpha_n^2) (\Lambda' - \alpha_n^2) = (-1)^{n+1} h_1^2 h_2^2 h_3^2 \quad (\Gamma.49)$$

$$(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2) + (\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) + (\Lambda - \alpha_3^2)(\Lambda - \alpha_1^2) = 0 \quad (\Gamma.50)$$

και

$$(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2) + (\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) + (\Lambda' - \alpha_3^2)(\Lambda' - \alpha_1^2) = 0. \quad (\Gamma.51)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ GESELOWITZ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε τη μαθηματική ανάλυση της αναπαράστασης του Geselowitz για το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής $\mathbf{B}$, στην οποία αναπαράσταση βασίζονται σχεδόν όλες οι εργασίες στην έρευνα του Βιομαγνητισμού. Θα διατυπώσουμε κατ' αρχήν την αναπαράσταση αυτή στη γενική της μορφή, όπως δόθηκε από τον Geselowitz το 1970 [21].

Η γενικότητα αφορά τη θεώρηση του εγκεφάλου ως ανομοιογενούς αγωγού, ο οποίος όμως αποτελείται από τμήματα σταθερής αγωγιμότητας. Έτσι, σε μαθηματικούς όρους, ας θεωρήσουμε ότι το ανοικτό αλλά φραγμένο χωρίο G του $\mathbb{R}^3$ αντιπροσωπεύει τον αγωγίμο ανθρώπινο εγκέφαλο και έχει ένα $C^{(1)}$ – λείο σύνορο S . Η μοναδιαία, κάθετη στην S , διεύθυνση κατευθύνεται προς το άπειρο εξωτερικό χωρίο $G_0 = (G \cup S)^c$, το οποίο θεωρείται μη αγωγίμο. Ο αγωγός G υποδιαιρείται σε πεπερασμένο πλήθος χωρίων $G_1, G_2, \dots, G_n$ τα οποία είναι μη κενά, χαρακτηρίζονται δε από αγωγιμότητες $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ σταθερές αλλά όχι κατ' ανάγκην μεταξύ τους ίσες. Η διαμέριση του G στα G_i προϋποθέτει ότι τα χωρία G_i είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή

$$G_i \cap G_j = \emptyset \quad (\Delta.1)$$

για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$ με $i \neq j$ καθώς και

$$G_i \cap G_0 = \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\Delta.2)$$

ενώ η ένωση των τοπολογικών καλυμμάτων τους καλύπτει πλήρως τον G . Αν με $\bar{G}_i$ συμβολίσουμε το κάλυμμα του χωρίου G_i , τότε για τη διεπιφάνεια S_{ij} που χωρίζει τα χωρία G_i, G_j ορίζουμε

$$S_{ij} = \bar{G}_i \cap \bar{G}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\Delta.3)$$

ενώ με $\hat{n}_{ij}$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, που έχει κατεύθυνση από το G_i στο G_j . Επιπλέον ορίζουμε ως

$$S_{i0} = \bar{G}_i \cap \bar{G}_0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\Delta.4)$$

το τμήμα του συνόρου S του αγωγού G που είναι κοινό με το εκάστοτε χωρίο G_i , ενώ η επιφάνεια

$$S_i = \bigcup_{j=1}^n S_{ij} \quad (\Delta.5)$$

αποτελεί το σύνορο του χωρίου G_i για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Έστω ότι το χωρίο G_n περιλαμβάνει στο εσωτερικό του το κύριο διπολικό ρεύμα $\mathbf{J}^p(\mathbf{r})$ [23], το οποίο δίνεται από την

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 \in G_n. \quad (\Delta.6)$$

Όπως δείξαμε και στην παράγραφο 1.6, το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ επιδέχεται, μέσω της σχεδόν στατικής προσέγγισης των εξισώσεων του Maxwell, την αναπαράσταση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') \quad (\Delta.7)$$

η οποία, κατ' αναλογία με την πορεία που οδήγησε από την (1.73) στην (1.89), και με τη διαμέριση του αγωγού G στα χωρία G_i , παρέχει τη σχέση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sigma_i \int_{G_i} \nabla u_i(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') \quad (\Delta.8)$$

όπου u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό του αγωγίμου χωρίου G_i , αντίστοιχα. Η αναπαράσταση (Δ.8) εκφράζει το μαγνητικό πεδίο ως το

άθροισμα του πεδίου που παράγει η κύρια πηγή $\mathbf{J}^p$ και της υπέρθεσης των πεδίων που οφείλονται σε χωρική κατανομή διπόλων με ροπές

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}') = -\sigma_i \nabla u_i(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in G_i. \quad (\Delta.9)$$

Η αναπαράσταση του Geselowitz [20,21] αφορά την αντικατάσταση των χωρικών αυτών κατανομών με αντίστοιχες επιφανειακές κατανομές διπόλων πάνω στις διεπιφάνειες των χωρίων διαφορετικής αγωγιμότητας, μετατρέποντας την έκφραση (Δ.8) στη μορφή, που είναι γνωστή ως αναπαράσταση Geselowitz,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (\sigma_i - \sigma_j) \int_{S_{i,j}} u_i(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}'_{ij} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sigma_i \int_{S_{i,0}} u_i(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\Delta.10)$$

Για να φθάσει στην έκφραση (Δ.10) ο Geselowitz χρησιμοποίησε το θεώρημα του Gauss για να μετατρέψει τα χωρικά ολοκληρώματα της (Δ.9) στα αντίστοιχα επιφανειακά ολοκληρώματα της (Δ.10), και αυτό γίνεται άμεσα στα χωρία G_i τα οποία δεν περιέχουν την πηγή $\mathbf{J}^p$, χρειάζεται όμως ιδιαίτερη μεταχείριση η εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss στο χωρίο G_n το οποίο περιέχει την πηγή.

Ειδικότερα, ο Geselowitz, όπως και οι ερευνητές έπειτα απ' αυτόν, [6,25,43,45], χρησιμοποίησαν την ταυτότητα

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} u_i(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &= \nabla_{\mathbf{r}'} u_i(\mathbf{r}') \times \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left[u_i(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left[u_i(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \end{aligned} \quad (\Delta.11)$$

καθώς και το διανυσματικό αναλλοίωτο της δυαδικής μορφής του θεωρήματος του Gauss [4]

$$\int_{\Omega} \nabla \otimes \mathbf{f} dv = \int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{f} ds \quad (\Delta.12)$$

όπου $\mathbf{f} \in C^{(1)}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ και το σύνορο του χωρίου Ω είναι $C^{(1)}$ – λεία επιφάνεια.

Για όλα τα χωρία που δεν περιέχουν πηγές, οι (Δ.11) και (Δ.12) οδηγούν στην εξίσωση

$$\int_{G_i} \nabla u_i(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') = \int_{S_i} u_i(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}'). \quad (\Delta.13)$$

Αποδεικνύεται εύκολα πώς για $\mathbf{r} \in G_i$ η ιδιομορφία στο $\mathbf{r}$ δε συνεισφέρει στη (Δ.13) κατά την εφαρμογή της (Δ.12), αφού, απομονώνοντας το $\mathbf{r}$ με μία κεντρικά περιβάλλουσα σφαίρα, ισχύει

$$\hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{0}. \quad (\Delta.14)$$

Δε συμβαίνει όμως το ίδιο με την ιδιομορφία στο $\mathbf{r}_0$, την οποία περιέχει το χωρίο G_n . Για να είναι δυνατή η εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss και στο χωρίο αυτό, χρειάζεται το $\mathbf{r}_0$ να απομονωθεί από το G_n με μία μικρή σφαίρα ακτίνας ε

$$B(\mathbf{r}_0; \varepsilon) = \{ \mathbf{r} \in G_n : |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon \} \subset G_n \quad (\Delta.15)$$

οπότε, το χωρίο ολοκλήρωσης στο οποίο θα εφαρμοστεί η (Δ.12) είναι το $G_n(\varepsilon)$, όπου

$$G_n(\varepsilon) = G_n - B(\mathbf{r}_0; \varepsilon) \quad (\Delta.16)$$

και

$$\partial G_n(\varepsilon) = S_n \cup S(\mathbf{r}_0; \varepsilon). \quad (\Delta.17)$$

Τότε, καθώς το ηλεκτρικό δυναμικό στο G_n γράφεται, μέσω της (3.24), ως

$$u_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_n} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + w(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G_n \quad (\Delta.18)$$

όπου η συνάρτηση $w(\mathbf{r})$ είναι αρμονική, η (Δ.13) για το χωρίο $G_n(\varepsilon)$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} \int_{G_n(\varepsilon)} \nabla u_n(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') &= \int_{S_n} u_n(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}') \\ &- \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma_n} \cdot \int_{S(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^3} \otimes \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}') - \int_{S(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} w(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{s}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\Delta.19)$$

Αποδεικνύεται πώς η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στο τελευταίο ολοκλήρωμα της (Δ.19) είναι φραγμένη στο εσωτερικό της σφαίρας $B(\mathbf{r}_0; \varepsilon)$ για κάθε $\mathbf{r} \in G_0$ και επομένως

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} w(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') = \mathbf{0}. \quad (\Delta.20)$$

Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε το όριο, καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, του ολοκληρώματος

$$\tilde{\mathbf{H}}(\varepsilon) = \int_{S(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|^3} \otimes \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}'). \quad (\Delta.21)$$

Εισάγοντας ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, με κέντρο το $\mathbf{r}_0$, μέσω του μετασχηματισμού

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \varepsilon \hat{\mathbf{n}}' \quad (\Delta.22)$$

προκύπτει ότι

$$ds(\mathbf{r}') = \varepsilon^2 ds(\hat{\mathbf{n}}') \quad (\Delta.23)$$

και

$$\hat{\mathbf{n}}' = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0|} \quad (\Delta.24)$$

οπότε η (Δ.21) γράφεται

$$\tilde{\mathbf{H}}(\varepsilon) = \int_{S^2} \hat{\mathbf{n}}' \otimes \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \varepsilon \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \varepsilon \hat{\mathbf{n}}'|^3} ds(\hat{\mathbf{n}}') \quad (\Delta.25)$$

όπου η S^2 είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας.

Με σκοπό να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Lebesgue (Lebesgue dominated convergence theorem) στο τελευταίο ολοκλήρωμα, για να περάσει η οριακή διαδικασία $\varepsilon \rightarrow 0$ από το ολοκλήρωμα στην προς ολοκλήρωση συνάρτηση, διακριτοποιούμε τη συνεχή μεταβλητή ε θέτοντας

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad (\Delta.26)$$

έτσι ώστε το συνεχές όριο $\varepsilon \rightarrow 0^+$ αντικαθίσταται από το διακριτό όριο $n \rightarrow \infty$.

Επιπλέον, επειδή

$$\left| \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - n^{-1} \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - n^{-1} \hat{\mathbf{n}}'|^3} \right| = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - n^{-1} \hat{\mathbf{n}}'|^2} \leq \frac{1}{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| - \varepsilon)^2} < \frac{1}{d^2} \quad (\Delta.27)$$

όπου

$$d = \min\{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s| : \mathbf{r}_s \in S\} > 0 \quad (\Delta.28)$$

το θεώρημα του Lebesgue παρέχει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\mathbf{H}}(\varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{H}}\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{S^2} \hat{\mathbf{n}}' \otimes \hat{\mathbf{n}}' \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - n^{-1} \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - n^{-1} \hat{\mathbf{n}}'|^3} ds(\hat{\mathbf{n}}') \\ &= \int_{S^2} \hat{\mathbf{n}}' \otimes \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} ds(\hat{\mathbf{n}}') = \int_{S^2} \hat{\mathbf{n}}' \otimes \hat{\mathbf{n}}' ds(\hat{\mathbf{n}}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \end{aligned} \quad (\Delta.29)$$

Απ' την άλλη πλευρά, η άμεση εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss μέσω της (Δ.12) παρέχει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{S^2} \hat{\mathbf{n}}' \otimes \hat{\mathbf{n}}' ds(\hat{\mathbf{n}}') = \int_{S^2} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} ds(\hat{\mathbf{r}}) = \int_{|\mathbf{r}| \leq 1} \nabla \otimes \mathbf{r} d\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{I}} \int_{|\mathbf{r}| \leq 1} d\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} \tilde{\mathbf{I}}. \quad (\Delta.30)$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση προκύπτει, από τη (Δ.19) μέσω των (Δ.20), (Δ.28) και (Δ.29), ότι

$$\begin{aligned} &\int_{G_n} \nabla u_n(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{G_n(\varepsilon)} \nabla u_n(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') + \int_{B(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} \nabla u_n(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{S_n} u_n(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') - \int_{S(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} u_n(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. + \int_{B(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} \nabla u_n(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \right] \\ &= \int_{S_n} u_n(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') - \frac{1}{3\sigma_n} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} \nabla u_n(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (\Delta.31)$$

Λόγω της ιδιομορφίας στη θέση $\mathbf{r}_0$, το τελευταίο ολοκλήρωμα της (Δ.31) για να υπολογιστεί, χρειάζεται τεχνική ομαλοποίησης μέσω της διαταραχής της θέσης της πηγής κατά μία μικρή απόσταση $\delta \in (0, \varepsilon)$. Το δυναμικό του “διαταραγμένου” διπόλου είναι τότε

$$u_n^\delta(\bar{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{4\pi\sigma_n} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}} \frac{1}{\bar{r} + \delta} = \frac{1}{4\pi\sigma_n} \mathbf{Q} \cdot \frac{\bar{\mathbf{r}}}{\bar{r}(\bar{r} + \delta)^2} \quad (\Delta.32)$$

όπου $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ και επομένως

$$\nabla_{\bar{\mathbf{r}}} u_n^\delta(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma_n} \mathbf{Q} \cdot \left[\frac{\tilde{\mathbf{I}}}{\bar{r}(\bar{r} + \delta)^2} - \frac{3\bar{r} + \delta}{\bar{r}(\bar{r} + \delta)^3} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right]. \quad (\Delta.33)$$

Η οριακή διαδικασία $\varepsilon \rightarrow 0$ έπεται την $\delta \rightarrow 0$, στην οποία

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \bar{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \bar{\mathbf{r}}|^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (\Delta.34)$$

και τότε, με τη βοήθεια και της (Δ.29) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(\mathbf{r}_0; \varepsilon)} \nabla u_n(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{v}(\mathbf{r}') \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Q}}{4\pi\sigma_n} \cdot \int_0^\varepsilon \left[\frac{\bar{r}}{(\bar{r} + \delta)^2} \int_{S^2} \tilde{\mathbf{I}} d\mathbf{s}(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{\bar{r}(3\bar{r} + \delta)}{(\bar{r} + \delta)^3} \int_{S^2} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} d\mathbf{s}(\hat{\mathbf{r}}) \right] d\bar{r} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ &= \frac{\mathbf{Q}}{3\sigma_n} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon \frac{2\delta\bar{r}}{(\bar{r} + \delta)^3} d\bar{r} = \frac{\mathbf{Q}}{3\sigma_n} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \left[1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon \frac{2\delta\varepsilon + \delta^2}{(\varepsilon + \delta)^2} \right]. \quad (\Delta.35) \end{aligned}$$

Καθώς οι οριακές διαδικασίες κατά τις οποίες τα ε και δ τείνουν στο μηδέν, επιβάλλονται συγχρόνως, επιλέγουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας,

$$\delta = \varepsilon^\alpha, \quad \alpha > 1 \quad (\Delta.36)$$

έτσι ώστε τείνοντας το ε στο μηδέν $\varepsilon \in (0,1)$ το δ να παραμένει στο διάστημα $(0, \varepsilon)$, οπότε η δ -διαταραχή που επιβάλλαμε στη θέση της πηγής να τη διατηρεί εντός της σφαίρας $B(\mathbf{r}_0, \varepsilon)$ κατά τη διάρκεια της συρρίκνωσης της σφαίρας $B(\mathbf{r}_0, \varepsilon)$ στο $\mathbf{r}_0$.

Τότε,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\delta\varepsilon + \delta^2}{(\varepsilon + \delta)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon^{\alpha-1} + \varepsilon^{2(\alpha-1)}}{(1 + \varepsilon^{\alpha-1})^2} = 0 \quad (\Delta.37)$$

και η (Δ.34) μέσω της (Δ.30) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ροή μέσω της επιφάνειας $S(\mathbf{r}_0; \varepsilon)$ της σφαίρας που περιβάλλει την πηγή, απομονώνοντας την από το G_n , είναι ίση κατά μέτρο και αντίθετη, από τη συνεισφορά της σημειακής ιδιομορφίας στο $\mathbf{r}_0$, με αποτέλεσμα να αλληλοαναιρούνται, επιτρέποντας στο χωρικό ολοκλήρωμα επί του G_n να εκφράζεται μέσω του επιφανειακού ολοκληρώματος επί του συνόρου του S_n , ως εξής:

$$\int_{G_n} \nabla u_n(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv(\mathbf{r}') = \int_{S_n} u_n(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') . \quad (\Delta.38)$$

Η ισχύς της (Δ.38) καθώς και η (Δ.13) επικυρώνουν τη μετάβαση της αναπαράστασης του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ από τη (Δ.8), που περιλαμβάνει τα χωρικά ολοκληρώματα, στην αναπαράσταση Geselowitz (Δ.10) μέσω των επιφανειακών ολοκληρωμάτων επί των συνόρων των G_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Ειδικά για το σφαιρικό ομογενή αγωγό αγωγιμότητας σ , η αναπαράσταση Geselowitz δίνει

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{Q} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int_S u(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (\Delta.39)$$

όπου S είναι το σύνορο του αγωγού και $\mathbf{r}_0 \in G_0$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. M. Abramowitz and I.A. Stegun, “*The Handbook of Mathematical Functions*”, Dover, New York, 1965.
2. M. Bear, B. Connors, M. Paradiso, “*Neuroscience: Exploring the Brain*”, Williams and Wilkins, Canada, 1996.
3. M.P. Berry, “N, M Space Harmonics of the Oblate Spheroid”, *Annals of the New York Academy of Science*, **65**, pp. 1126-1134, 1956.
4. L. Brand, “*Vector and Tensor Analysis*”, John Wiley and Sons, London, 1947.
5. J. Cameron, J. Skofronick, “*Medical Physics*”, John Wiley, New York, 1978.
6. B.N. Cuffin and D. Cohen, “Magnetic Fields of a Dipole in Special Volume Conductor Shapes”, *IEEE Trans. Biomedical Eng.*, **BME-24**, pp.372-381, 1997.
7. Γ. Δάσιος: Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος, ακαδημαϊκό έτος 1997-1998.
8. Γ. Δάσιος και Κ. Κυριάκη, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα, 1994.
9. G. Dassios, “ Scattering of Acoustic Waves by a Coated Pressure-Release Ellipsoid”, *Journal of the Acoustical Society of America*, **70**, pp. 176-185, 1981.
10. G. Dassios, M. Hadjinicolaou and A. Payatakes, “Generalized eigenfunctions and complete semiseparable solutions for Stokes flow in spheroidal coordinates”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **32**, No 1, pp. 157-191, 1994.
11. G. Dassios and R. Kleinman, “On the capacity and Rayleigh Scattering for a Class of non-convex Bodies”, *Q. Journal. Mech. Appl. Math.*, **42**, Pt.3, 1989.
12. G. Dassios and T. Miloh, “Rayleigh Scattering for the Kelvin-Inverted Ellipsoid”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **57**, pp. 757-770, 1999.
13. G. Dassios and F. Kariotou, “On the Geselowitz Formula in Biomagnetics”, *Quarterly of Applied Mathematics*, (in press).
14. G. Dassios and F. Kariotou, “Magnetoencephalography in Ellipsoidal Geometry”, *Journal of Mathematical Physics*, (in press).
15. A. Despopoulos and S. Silbernagl, “*Εγχειρίδιο Φυσιολογίας με έγχρωμο άτλαντα*”, Ιατρικές εκδόσεις Λίτσας, 1989.
16. T. Fieseler, A. Ioannides, M. Liu and H. Nowak, “Model Studies of the accuracy of the conducting sphere model in MEG using the Spheroid”, Biomag, Vienna 1993.

17. T. Fieseler, A. Ioannides, M. Liu and H. Nowak, "A numerically Stable Approximation for the Magnetic Field of the Conducting Spheroid close to the Symmetry Axis", Biomag, Santa Fe, 1996.
18. T. Fieseler, A. Ioannides and H. Nowak, "Influence of the Global Volume Conductor Curvature on Point and Distributed Inverse Solutions studied with the Spheroid Model", Biomag, Sendai, 1998.
19. A.S. Fokas, I.M. Gelfand and Y. Kurylev, "Inversion Method for Magnetoencephalography", *Inverse Problems*, **12**, pp. L9-L11, 1996.
20. D.B. Geselowitz, "On Bioelectric Potentials in an Inhomogeneous Volume Conductor", *Biophysical Journal*, **7**, pp. 1-11, 1967.
21. D. B. Geselowitz, "On the Magnetic Field Generated Outside an Inhomogeneous Volume Conductor by Internal Current Sources", *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-6**, pp. 346-347, 1970.
22. D.B. Geselowitz, "Multipole Representation for an Equivalent Cardiac Generator", *Proceedings of the IRE*, **48**, pp. 75-79, 1958.
23. F. Grynszpan and D.B. Geselowitz, "Model Studies of the Magnetocardiogram", *Biophysical Journal*, **13**, pp. 911-925, 1973.
24. M.S. Hämmäläinen and J. Sarvas, "Realistic Conductivity Geometry Model of the Human Head for Interpretation of Neuromagnetic Data", *IEEE Trans. Biomedical Eng.*, **36**, pp. 165-171, 1989.
25. M. Hämmäläinen, R. Hari, R.J. Ilmoniemi, J. Knuutila and O. Lounasmaa, "Magnetoencephalography – Theory, Instrumentation, and Applications to Noninvasive Studies of the Working Human Brain", *Rev. Mod. Phys.*, **65**, pp. 413-497, 1993.
26. S. He, "Frequency Series Expansion of an Explicit Solution for a Dipole Inside a Conducting Sphere at Low Frequency", *IEEE Trans Biomed Eng.*, **45**, 1249-1258, 1998.
27. H.H. Hecht, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **65**, pp. 653, 1957.
28. H. Helmholtz, *Ann. Physiol. Chem.*, **29** (3), pp. 222, 1853.
29. E.W. Hobson, "*The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*", Chelsea, N.Y. 1955.
30. R. J. Ilmoniemi, M. S. Hämmäläinen and J. Knuutila, "The Forward and Inverse Problems in the Spherical model", pp. 278-282, in *Biomagnetism: Applications*

- and Theory*, edited by Harold Weinberg, Gerhard Stroink, and Toivo Katila, Pergamon Press, New York, 1985.
31. J.D.Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, John Wiley, New York, 1962.
 32. F. Kariotou, Magnetoencephalography in Spheroidal Geometry, *Bulleting of the Greek Mathematical Society* (in press).
 33. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, “*Electrodynamics of Continuous Media*”, Pergamon Press, London, 1960.
 34. S.K. Law, P.L. Nunez and R.S. Wijesinghe, “High-Resolution EEG using Spline Generated Surface Laplacians on Spherical and Ellipsoidal Surfaces”, *IEEE Trans. Biomedical Eng.*, **40**, pp. 145-153, 1993.
 35. I.V. Lindell, “*Methods for Electromagnetic Field Analysis*”, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.
 36. R. Lorente De Nó, *Studies Rockefeller Inst. Med. Res.*, **132**, pp. 384, 1947.
 37. J. Malmivuo and R. Plonsey, “*Bioelectromagnetism*”, Oxford University Press, New York, 1995.
 38. T. Miloh, “Forces and moments on a triaxial ellipsoid in potential flow”, *Israel J. Techn.*, **11**, pp. 63-74, 1973.
 39. P. Moon and D.E. Spencer, “*Field Theory Handbook*”, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
 40. P.M. Morse and H. Feshbach, “*Methods of Theoretical Physics*”, McGraw Hill, New York, 1953.
 41. J.C. de Munck, “The Potential Distribution in a Layered Anisotropic Spheroidal Volume Conductor”, *J. Appl. Phys.*, **64**, pp. 464-470, 1988.
 42. G. Nolte and G. Curio, “On the Calculation of Magnetic Fields Based on Multipole Modeling of Focal Biological Current Sources”, *Biophysical Journal*, **73**, pp. 1253 – 1262, 1997.
 43. G. Nolte, T. Fieseler and G. Curio, “Perturbative Analytical Solutions of the Magnetic Forward Problem for Realistic Volume Conductors”, *J. Appl. Phys.*, **89**, pp. 2360-2369, 2001.
 44. B. O’Neill, “*Elementary Differential Geometry*”, Academic press, 1997.
 45. J. Sarvas, “Basic Mathematical and Electromagnetic Concepts of the Biomagnetic Inverse Problem”, *Phys. Med. Biol.*, **32**, pp. 11-22, 1987.

46. W.S. Snyder, M.R. Ford, G.G. Warner and H.L. Fisher, Jr., “Estimates of Absorbed Fractions for Monoenergetic Photon Sources Uniformly Distributed in Various Organs of a Heterogeneous Phantom”, *Journal of Nuclear Medicine*, Supplement Number, 3, August 1969, Volume 10, Pamphlet No. 5, Revised 1978.
47. A. Sommerfeld, “*Electrodynamics*”, Academic Press, 1952.
48. J.A. Stratton, “*Electromagnetic Theory*”, McGraw Hill, New York, 1941.
49. J.V. Uspensky, “Theory of Equations”, 3rd Edition, Mc Graw-Hill, New York, 1948.
50. W.X. Wang, “The Potential for a Homogeneous Spheroid in a Spheroidal Coordinate System: I. At an exterior point”, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **21**, 4245-4250, 1988.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η Φωτεινή Β. Καριώτου γεννήθηκε στην Αθήνα στις 22 Ιουνίου 1965. Απέκτησε το πτυχίο των Μαθηματικών της σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Πατρών το 1990. Είναι παντρεμένη με τον Αλέξιο Ματθαίου από το 1990 και έχουν δύο παιδιά, τη Βασιλική που γεννήθηκε το 1992 και τη Μαρία – Σωτηρία που γεννήθηκε το 1995. Το 1997 ξεκίνησε Μεταπτυχιακές σπουδές στο Τμήμα Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, από όπου απέκτησε το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης (2002) καθώς και το διδακτορικό δίπλωμα στην περιοχή των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, με τίτλο διατριβής: “Μαθηματικά προβλήματα Ηλεκτρομαγνητικής Δραστηριότητας στη Νευροφυσιολογία του Εγκεφάλου”. Έχει δημοσιεύσει τρεις εργασίες σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά και έχει κάνει τρεις ανακοινώσεις σε διεθνή συνέδρια.

Κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών της σπουδών ήταν μεταπτυχιακή υπότροφος του Ερευνητικού Ινστιτούτου Χημικής Μηχανικής και Χημικών Διεργασιών Υψηλής Θερμοκρασίας (ΕΙΧΗΜΥΘ), ενώ διακρίθηκε με υποτροφία του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ), κατά το δεύτερο έτος των μεταπτυχιακών της σπουδών.

Κατά τα έτη 1993 – 1995 edίδαξε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Αρσάκειο Πατρών), ενώ κατά τα έτη 1997 – 1999 προσέφερε το επικουρικό διδακτικό έργο που της ανατέθηκε από το Τμήμα Χημικών Μηχανικών, διδάσκοντας τα φροντιστήρια σε μαθήματα Μαθηματικής Ανάλυσης, Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων και Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.