ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
ΣΤΗ ΡΟΗ STOKES

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Κ. ΒΑΦΕΑΣ

ПАТРА 2003

ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΡΟΗ STOKES

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβληθείσα στο Τμήμα Χημικών Μηχανικών
του
Πανεπιστημίου Πατρών
Υπό
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΒΑΦΕΑ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Γ. ΔΑΣΙΟΣ (Επιβλέπων)

Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Α.Χ. ΠΑΓΙΑΤΑΚΗΣ (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)

Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Σ. ΠΑΥΛΟΥ (Μέλος Τριμελούς Επιτροπής)

Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Δ. ΠΟΛΥΖΟΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων

και Αεροναυπηγών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ν. ΚΑΦΟΥΣΙΑΣ

Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Α. ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΠΟΥΛΟΣ

Καθηγητής, Τμήμα Επιστήμης

και Τεχνολογίας Υλικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Μ. ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΟΥ

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Σχολή Θετικών Επιστημών

και Τεχνολογίας, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Η έγκριση της Διδακτορικής Διατριβής από το Τμήμα Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, δεν υποδηλοί αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

(ν. 5543/1932, Άρθρο 202)

Σε αυτούς που με μύησαν στην έρευνα

Τα μαθηματικά, σωστά ιδωμένα, κατέχουν όχι μόνον αλήθεια, αλλά και εξαιρετική ομορφιά, μία ομορφιά ψυχρή και αυστηρή, όμοια με γλυπτού, που δεν γοητεύει το αδύνατο μέρος της φύσης μας, χωρίς τις υπέροχες παγίδες της ζωγραφικής και της μουσικής, όμως εξαίσια καθαρή και ικανή για αυστηρή τελειότητα, τέτοια που μόνον η μέγιστη τέχνη μπορεί να μας προσφέρει.

Bertrand Russel

Έχοντας κλείσει ένα πολύ σοβαρό κεφάλαιο της ζωής μου, την ολοκλήρωση της διδακτορικής μου διατριβής, αισθάνομαι έντονα την ανάγκη και την επιθυμία να εκφράσω ένα μεγάλο “ευχαριστώ” στο Δάσκαλό μου, συνεργάτη και φίλο, στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Δάσιο, ο οποίος αδιαλείπτως με ενέπνεε, μου μετέδιδε τις μαθηματικές του εμπειρίες, με ενθάρρυνε σε κάθε επιστημονικό μου βήμα και με περιέβαλε με αμέριστη εμπιστοσύνη.

Στον καθηγητή κ. Αλκιβιάδη Παγιατάκη εκφράζω τις ειλικρινά θερμές ευχαριστίες μου για τη γόνιμη συνεργασία μας, η οποία μου έδωσε τη δυνατότητα να εφαρμόσω τα μαθηματικά μοντέλα στη φυσική πραγματικότητα.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Σταύρο Παύλου, ο οποίος έδειξε την εμπιστοσύνη του στην προσπάθειά μου δεχόμενος να αποτελέσει μέλος της τριμελούς μου επιτροπής.

Στο Ερευνητικό Ινστιτούτο Χημικής Μηχανικής και Χημικών Διεργασιών Υψηλής Θερμοκρασίας, που με υποστήριξε οικονομικά καθ’ όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου, καταθέτω τις ευχαριστίες μου.

Τέλος, στους γονείς μου, οι οποίοι με στήριξαν ηθικά και ψυχικά και μου συμπαραστάθηκαν σταθερά και εποικοδομητικά καθ’ όλη τη διάρκεια της ερευνητικής μου δραστηριότητας προσφέρω την ολόψυχη ευγνωμοσύνη μου και αγάπη. Η στήριξη αυτή μαζί με τη συμπαράσταση των συνεργατών και φίλων μου με βοήθησαν να ανταποκριθώ στις απαιτήσεις τόσο της πενταετούς έρευνάς μου, όσο και της συγγραφής αυτής της διατριβής.

Παναγιώτης Βαφέας

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο για ροή Stokes διαμέσου σχετικά ομογενών σμηνών σωματιδίων είναι ουσιαστικά πρακτικού ενδιαφέροντος, διότι προσφέρουν ένα σχετικά απλό, αλλά αξιόπιστο σχέδιο για την αναλυτική ή ημιαναλυτική επίλυση προβλημάτων μεταφοράς μάζας και θερμότητας. Τα περισσότερα από τα αναλυτικά μοντέλα σε αυτή την περιοχή θεωρούν είτε σφαιρικά είτε, σε πρόσφατες εκδόσεις, μη σφαιρικά αλλά αξονοσυμμετρικά σχήματα. Παρά το γεγονός ότι πολλές πρακτικές εφαρμογές εμπλέκουν σωματίδια με αξονική συμμετρία, η γενική θεώρηση αναφέρεται σε συμπαγή σωματίδια αυθαίρετου σχήματος. Η παρούσα δουλειά ασχολείται με ενδιαφέρουσες απόψεις της θεωρητικής ανάλυσης έρπουσας ροής σε τρισδιάστατα και διδιάστατα σφαιρικά, σφαιροειδή και ελλειψοειδή χωρία.

Θεωρούμε τέσσερις διαφορετικές πλήρεις αναπαραστάσεις των λύσεων για ροές που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes. Η πρώτη είναι η αναπαράσταση Stokes, η οποία εξασφαλίζεται, αν εκφράσουμε την εξίσωση κινήσεως σε $2-D$ σφαιρικές ή σφαιροειδείς συντεταγμένες, σύμφωνα με την οποία η συνάρτηση ροής αναπτύσσεται σε όρους χωριζόμενων ή ημιδιαχωριζόμενων ιδιομορφών, αντίστοιχα. Οι άλλες τρεις, όπου ισχύουν επίσης σε μη αξονοσυμμετρικές γεωμετρίες, είναι οι διαφορικές αναπαραστάσεις Parkovich – Neuber, Boussinesq – Galerkin και Palaniappan *et al.*, όπου η ταχύτητα και η ολική πίεση εκφράζονται σε όρους αρμονικών και διαρμονικών ιδιοσυναρτήσεων. Αυτές οι πλήρεις διαφορικές λύσεις αφορούν και $2-D$ προβλήματα ροής. Τύποι σύνδεσης λαμβάνονται για τις περιπτώσεις αξονοσυμμετρικών και τρισδιάστατων ροών, οι οποίοι σχετίζουν τα αρμονικά δυναμικά και το δυναμικό συνάρτησης ροής. Η συσχέτιση είναι αποτέλεσμα της εξίσωσης των πεδίων ροής και καθορίζει τις ακριβείς σχέσεις σύνδεσης μεταξύ των αντιστοίχων σταθερών συντελεστών των δυναμικών. Η αντιστροφή της διαδικασίας εξαρτάται από τη γεωμετρία και την πολυπλοκότητα των διαφορικών λύσεων.

Η αναπαράσταση των Parkovich – Neuber μας προσφέρει συγκεκριμένα σημαντικά πλεονεκτήματα και αποτελεί έναν πλήρη τρόπο για να λύσουμε $2-D$ και περισσότερο $3-D$ κυτταρικά μοντέλα, όπου είτε στάσιμα σωματίδια αιωρούνται σε ομοιόμορφα κινούμενο ρευστό (μοντέλο Kuwabara), είτε σωματίδια κινούνται με μια σταθερή ομοιόμορφη ταχύτητα και / ή περιστρέφονται με μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ένα ακίνητο ρευστό (μοντέλο Happel, μηχανικά ενεργειακά αυτόνομο). Η ευελιξία της αναπαράστασης, που κληρονομείται από τους βαθμούς ελευθερίας που προσφέρει, βοηθάει να αντιμετωπίσουμε απροσδιοριστίες σε πολύπλοκες γεωμετρίες. Αυτό το παρατηρούμε λύνοντας το πρόβλημα στο ρευστό κέλυφος μεταξύ του στερεού σωματιδίου και της φανταστικής εξωτερικής επιφάνειας με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel. Συνεπώς, εξάγουμε αναλυτικές εκφράσεις για τα πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης, στροβιλισμού και ολικού τανυστή των τάσεων για διαφορετικά συστήματα μοντέλων σωματιδίων σε κύτταρο. Η επίπονη διαδικασία εκφυλισμού των αποτελεσμάτων σε απλούστερες γεωμετρίες συμπεριλαμβάνεται.

ABSTRACT

Particle-in-cell models for Stokes flow through a relatively homogeneous swarm of particles are of substantial practical interest, because they provide a relatively simple but reliable platform for the analytical or semianalytical solution of heat and mass transport problems. Most of the analytical models in this realm consider either spherical or, in latter versions, non-spherical but still axisymmetric shapes. Despite of the fact that many practical applications involve particles with axial symmetry, the general consideration consists of rigid particles of arbitrary shape. The present work is concerned with some interesting aspects of the theoretical analysis of creeping flow in three and two-dimensional spherical, spheroidal or ellipsoidal domains.

Four different complete representations of the solutions for flows that follow the Stokes description are considered here. The first one, named Stokes representation, is obtained, expressing equation of motion in $2-D$ spherical or spheroidal coordinates, according to which the stream function is expanded in terms of separable or semiseparable eigenmodes, respectively. The other three, valid in non-axisymmetric geometries as well, are the Papkovitch – Neuber, the Boussinesq – Galerkin and the Palaniappan *et al.* differential representations, where the velocity and total pressure fields are expressed in terms of harmonic and biharmonic eigenfunctions. These complete differential solutions hold true also for $2-D$ flow problems. Connection formulae are obtained for the case of axisymmetric and three-dimensional flows, which relate the harmonic and the stream potential functions. The interrelation is a consequence of the equation of the flow fields and specifies the exact relations of the connection between the corresponding constant coefficients of the potentials. The inversion of this procedure depends on the geometry and the complexity of the differential solutions.

It seems that the Papkovitch – Neuber differential representation offers us certain important advantages and forms a more complete way in order to solve $2-D$ and mostly $3-D$ cell models, where either stationary particles are embedded within a uniformly moving fluid (Kuwabara model) or the particles are moving with a constant uniform velocity and / or rotate with a constant angular velocity in an otherwise quiescent fluid (Happel model, self-sufficient in mechanical energy). The flexibility of the representation, inherited by its degrees of freedom, helps us to confront certain indeterminacies in complicated geometries. This is demonstrated by solving the problem of the flow in a fluid cell filling the space between the surface of the solid particle and the fictitious outer boundary with Kuwabara or Happel-type boundary conditions in several geometries. Thus, we obtain analytical expressions for the velocity, the total pressure, the angular velocity and the stress tensor fields for different particle-in-cell system models. The laborious task of reducing the results to simpler geometries is also included.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

Οι μονάδες που αντιπροσωπεύουν κάθε φυσικό ή μαθηματικό μέγεθος είναι γραμμένες στο σύστημα S.I. (διεθνές σύστημα).

Γενικά σύμβολα.

F	= δύναμη που προκαλεί τη διατμητική τάση [=] N ή kgm/s ²
A	= επιφάνεια επαφής με ρευστό ή στερεό που ασκείται η δύναμη [=] m ²
x_1, x_2, x_3	= καρτεσιανές μεταβλητές [=] m
t	= χρονική μεταβλητή [=] s
ρ_0	= ομοιόμορφη ή συνεχής πυκνότητα [=] kg/m ³
ρ_i	= ομοιόμορφη ή συνεχής πυκνότητα του συστατικού i του μίγματος των ρευστών στην περίπτωση χημικών αντιδράσεων [=] kg/m ³
r_i	= ρυθμός παραγωγής του συστατικού i του μίγματος των ρευστών ανά μονάδα όγκου του ρευστού στην περίπτωση χημικών αντιδράσεων [=] kg/m ³ s
μ_0	= δυναμικό ιξώδες [=] Pas ή Ns/m ² ή kg/ms
δV	= διαφορικός όγκος στον ορισμό της συνεχούς πυκνότητας [=] m ³
δV^*	= κρίσιμος διαφορικός όγκος στον ορισμό της συνεχούς πυκνότητας [=] m ³
δm	= διαφορική μάζα στον ορισμό της συνεχούς πυκνότητας [=] kg
$\tau_{x_2 x_1}$	= διατμητική τάση στον ορισμό του δυναμικού ιξώδους [=] kg/ms ²
v_{x_1}	= ταχύτητα στην x_1 -διεύθυνση στον ορισμό του δυναμικού ιξώδους [=] m/s
ν_0	= κινηματικό ιξώδες [=] m ² /s
N_{Ma}	= αδιάστατος αριθμός Mach [=] –
U_f	= ομοιόμορφη ταχύτητα ροής ή μέση ταχύτητα ροής [=] m/s

C	= ταχύτητα του ήχου στο ρευστό [=] m/s
Re	= αδιάστατος αριθμός του Reynolds [=] –
D	= διάμετρος κυκλικού αγωγού στο πείραμα του Reynolds [=] m
v_z	= $v_z(r, z)$ = διδιάστατη ταχύτητα στη z -διεύθυνση σε κύλινδρο [=] m/s
v_z	= $v_z(r)$ = μονοδιάστατη ταχύτητα στη z -διεύθυνση σε κύλινδρο [=] m/s
$V_m(t)$	= υλικός όγκος συστήματος μεταβαλλόμενος με το χρόνο [=] m ³
$A_m(t)$	= υλική επιφάνεια συστήματος μεταβαλλόμενη με το χρόνο [=] m ²
V	= σταθερός όγκος ελέγχου [=] m ³
A	= σταθερή επιφάνεια ελέγχου [=] m ²
M	= μάζα συστήματος [=] kg
$\mathbf{F}$	= εξωτερικές δυνάμεις που εφαρμόζονται στο σύστημα [=] N ή kg/ms ²
$\mathbf{P}$	= γραμμική ορμή συστήματος [=] kgm/s
E	= ολική ενέργεια συστήματος [=] J
$\dot{Q}$	= ρυθμός πρόσδοσης θερμότητας στο σύστημα από το περιβάλλον [=] J/s
$\dot{W}$	= ρυθμός απόδοσης έργου από το σύστημα στο περιβάλλον [=] J/s
$N(t)$	= εκτατικές ιδιότητες συστήματος [=] (εξαρτάται)
η	= εντατικές ιδιότητες συστήματος [=] (εξαρτάται)
$\mathbf{r}$	= διάνυσμα θέσης του σημείου παρατήρησης [=] m
$\hat{x}_\kappa$	= καρτεσιανή ορθοκανονική βάση για $\kappa = 1, 2, 3$
$\mathbf{r}$	= $x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3$ = καρτεσιανή αναπαράσταση διανύσματος θέσης [=] m
$\ \mathbf{r}\ $	= μέτρο του διανύσματος θέσης του σημείου παρατήρησης [=] m
$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$	= διάνυσμα του πεδίου ταχύτητας [=] m/s
$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$	= εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο ή ορθομοναδιαίο διάνυσμα μιας επιφάνειας
$\times, \cdot, \otimes$	= εξωτερικό, εσωτερικό και τανυστικό γινόμενο, αντίστοιχα
∇	= διαφορικός τελεστής της βάθμωσης [=] 1/m
Δ	= διαφορικός τελεστής του Laplace [=] 1/m ²
$\mathbf{g}$	= επιτάχυνση της βαρύτητας ($ \mathbf{g} = g = 9.81 \text{ m/s}^2$)
$\mathbf{t}_{(n)}$	= διάνυσμα των τάσεων που εφαρμόζονται στον υλικό όγκο [=] kg/ms ²
δA	= διαφορική επιφάνεια στον ορισμό του διανύσματος των τάσεων [=] m ²

- $\delta \mathbf{F}_{(n)}$ = δύναμη που ασκείται στη διαφορική επιφάνεια στον ορισμό του διανύσματος των τάσεων [=] N ή kgm/s²
- $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(\mathbf{r})$ = ολικός τανυστής των τάσεων [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- $p = p(\mathbf{r})$ = θερμοδυναμική πίεση [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- $\tilde{\mathbf{I}}$ = μοναδιαίο ή ταυτοτικό δυαδικό [=] –
- $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$ = πεδίο ολικής πίεσης [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- ℓ = χαρακτηριστικό μήκος στην αδιαστατοποίηση [=] m
- u = χαρακτηριστική ταχύτητα στην αδιαστατοποίηση [=] m/s
- $\mathbf{v}^*$ = αδιάστατη ταχύτητα [=] –
- p^* = αδιάστατη ολική πίεση [=] –
- ∇^* = αδιάστατος διαφορικός τελεστής της βάθμωσης [=] –
- Δ^* = αδιάστατος διαφορικός τελεστής του Laplace [=] –
- $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ = διαφορικός τελεστής της σύνθεσης δύο τελεστών του Laplace [=] 1/m⁴
- $\omega = \omega(\mathbf{r})$ = στροβιλισμός ή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής [=] 1/s
- $\mathfrak{E}$ = χώρος των πραγματικών αριθμών
- $\Omega(\mathfrak{E}^3)$ = τρισδιάστατα, απλώς συνεκτικά, φραγμένα πεδία ροής
- $\Omega(\mathfrak{E}^2)$ = διδιάστατα, απλώς συνεκτικά, φραγμένα πεδία ροής
- $\partial \Omega(\mathfrak{E}^3)$ = επιφάνεια που αντιστοιχεί στα τρισδιάστατα, απλώς συνεκτικά, φραγμένα πεδία ροής
- $\partial \Omega(\mathfrak{E}^2)$ = επιφάνεια που αντιστοιχεί στα διδιάστατα, απλώς συνεκτικά, φραγμένα πεδία ροής
- $\psi = \psi(\mathbf{r})$ = ροϊκή συνάρτηση ή συνάρτηση ροής σε διδιάστατα προβλήματα [=] m³/s
- φ = αζιμουθιακή γωνία στον ορισμό της συνάρτησης ροής [=] –
- $\hat{\varphi}$ = μοναδιαίο διάνυσμα αζιμουθιακής γωνίας στον ορισμό της συνάρτησης ροής [=] –
- z = κυλινδρική συντεταγμένη του άξονα συμμετρίας στον ορισμό της συνάρτησης ροής [=] m
- $\hat{z}$ = μοναδιαίο διάνυσμα του z [=] –
- x_1 = άξονας συμμετρίας στο αναλλοίωτο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων [=] m
- C = καμπύλη στη γεωμετρική αναπαράσταση του φυσικού ορισμού της συνάρτησης ροής [=] m

- S_C = επιφάνεια ροής από περιστροφή στον ορισμό της συνάρτησης ροής [=] m^2
- $Q = Q(\mathbf{r})$ = στιγμιαίος ογκομετρικός ρυθμός ροής διαμέσου μιας επιφάνειας ή παροχή
[=] m^3/s
- ρ = κυλινδρική ακτίνα στον ορισμό της συνάρτησης ροής [=] m
- $\hat{\mathbf{t}}$ = εφαπτομενικό διάνυσμα επί μίας καμπύλης [=] –
- E^2 = διαφορικός τελεστής για αξονοσυμμετρικές ροές Stokes [=] $1/m^2$
- E^4 = διαφορικός τελεστής της σύνθεσης δύο τελεστών E^2 , $E^4 = E^2 \circ E^2$, για αξονοσυμμετρικές ροές Stokes [=] $1/m^4$
- q_1, q_2, Φ = συντεταγμένες δεξιόστροφου ορθογωνίου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων στις δύο διαστάσεις [=] (εξαρτάται)
- u_{q_1}, u_{q_2} = συνιστώσες του διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας σε γενικό διδιάστατο σύστημα συντεταγμένων $= u_{q_1}(\mathbf{r}), u_{q_2}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$
[=] m/s
- $\hat{\mathbf{q}}_\kappa$ = ορθομοναδιαία διανύσματα του διδιάστατου δεξιόστροφου ορθογωνίου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων q_1, q_2, Φ για $\kappa = 1, 2$ [=] –
- h_{q_κ} = μετρικοί συντελεστές σε γενικό διδιάστατο σύστημα συντεταγμένων για $\kappa = 1, 2$ [=] (εξαρτάται)
- h_Φ = μετρικός συντελεστής της αζιμούθιας γωνίας σε γενικό διδιάστατο σύστημα συντεταγμένων [=] (εξαρτάται)
- $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ = q_1 κατά κατεύθυνση παράγωγος της ολικής πίεσης σε γενικό διδιάστατο σύστημα συντεταγμένων $= \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial q_1}, \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] (εξαρτάται)
- $\frac{\partial P}{\partial q_2}$ = q_2 κατά κατεύθυνση παράγωγος της ολικής πίεσης σε γενικό διδιάστατο σύστημα συντεταγμένων $= \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial q_2}, \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] (εξαρτάται)
- P_0 = αυθαίρετη σταθερή πίεση [=] Pa ή N/m^2 ή kg/ms^2
- χ_n = σφαιρική αρμονική συνάρτηση στη γενική λύση του Lamb για
 $n \in (-\infty, +\infty) = \chi_n(\mathbf{r})$ [=] m/s

- ϕ_n = σφαιρική αρμονική συνάρτηση στη διαφορική γενική λύση του Lamb για
 $n \in (-\infty, +\infty) = \phi_n(\mathbf{r}) [=] \text{ m}^2/\text{s}$
- p_n = σφαιρική αρμονική συνάρτηση στη διαφορική γενική λύση του Lamb για
 $n \in (-\infty, +\infty) = p_n(\mathbf{r}) [=] \text{ Pa ή N/m}^2 \text{ ή kg/ms}^2$
- r = σφαιρική ακτινική συνιστώσα [=] m
- θ, φ = σφαιρικές γωνιακές συνιστώσες [=] –
- $\hat{r} \hat{\theta} \hat{\varphi}$ = σφαιρική ορθοκανονική βάση [=] –
- Φ = διανυσματικό αρμονικό δυναμικό στις διαφορικές αναπαραστάσεις των
 Naghdi – Hsu και των Papkovitch – Neuber = $\Phi(\mathbf{r}) [=] \text{ m/s}$
- Φ_0 = βαθμωτό αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση των
 Papkovitch – Neuber = $\Phi_0(\mathbf{r}) [=] \text{ m}^2/\text{s}$
- $\mathbf{B}$ = διανυσματικό διαρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση των
 Boussinesq – Galerkin = $\mathbf{B}(\mathbf{r}) [=] \text{ m}^3/\text{s}$
- $\mathbf{b}$ = βαθμωτό αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση των
 Boussinesq – Galerkin = $\mathbf{b}(\mathbf{r}) [=] \text{ m}^2/\text{s}$
- Ψ = βοηθητική συνάρτηση στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης
 των Naghdi – Hsu = $\Psi(\mathbf{r}) [=] \text{ N ή kgm/s}^2$
- $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ = συναρτησιακό του Dirac για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$
 $[=] 1/\text{m}^3$
- Φ_1 = βοηθητική συνάρτηση στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης
 των Boussinesq – Galerkin = $\Phi_1(\mathbf{r}) [=] \text{ m}^2/\text{s}$
- A = βαθμωτό διαρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση των
 Palaniappan *et al.* = $A(\mathbf{r}) [=] \text{ m}^2/\text{s}$
- B = βαθμωτό αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση των
 Palaniappan *et al.* = $B(\mathbf{r}) [=] \text{ m/s}$
- L = γωνιακό κομμάτι του τελεστή του Laplace εκτός του $1/r^2$ [=] –
- f = βοηθητική συνάρτηση στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης
 των Palaniappan *et al.* = $f(\theta, \varphi)$, όπου $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ [=] –

- h = βοηθητική συνάρτηση στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης των Palaniappan *et al.* = $h(r)$, όπου $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ [=] 1/s
- g = βοηθητική συνάρτηση στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης των Palaniappan *et al.* = $g(r)$, όπου $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ [=] m²/s
- A' = βοηθητική συνάρτηση στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης των Palaniappan *et al.* = $A'(\mathbf{r})$ [=] m²/s
- Φ_κ = βοηθητικές συναρτήσεις δυναμικού στην απόδειξη της μοναδικότητας της διαφορικής αναπαράστασης των Naghdi – Hsu = $\Phi_\kappa(\mathbf{r})$, $\kappa = 1, 2$ [=] m/s
- $\tilde{\mathbf{G}}$ = θεμελιώδης λύση πεδίου ταχύτητας στη ροή Stokes ή δυαδικό του Oseen = $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^3)$ ή για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^2)$ [=] 1/m
- $\mathbf{P}$ = θεμελιώδης λύση πεδίου ολικής πίεσης στη ροή Stokes = $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^3)$ ή για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^2)$ [=] 1/m²
- $\frac{\partial}{\partial n}$ = κάθετη παράγωγος στην διεύθυνση του εξωτερικού μοναδιαίου καθέτου ή ορθομοναδιαίου διανύσματος μιας επιφάνειας $\hat{\mathbf{n}}$ [=] 1/m
- $^{(3)}\tilde{\Sigma}$ = τριαδικό των τάσεων που γεννά το δυαδικό του Oseen στη ροή Stokes = $^{(3)}\tilde{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^3)$ ή για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^2)$ [=] kg/m³s
- $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ = συνάρτηση κατανομής πηγών στις εξισώσεις Stokes [=] Pa/m ή kg/m²s²
- u, v, w = συντεταγμένες δεξιόστροφου ορθογωνίου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις [=] (εξαρτάται)
- J = Ιακωβιανή του μετασχηματισμού $(u, v, w) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$ [=] (εξαρτάται)
- $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ = ορθομοναδιαία διανύσματα του τρισδιάστατου δεξιόστροφου ορθογωνίου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων u, v, w [=] –
- h_u, h_v, h_w = μετρικοί συντελεστές σε δεξιόστροφο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις [=] (εξαρτάται)
- dU = στοιχειώδης όγκος σε δεξιόστροφο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις [=] m³
- dS_κ = στοιχειώδεις επιφάνειες σε δεξιόστροφο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις για $\kappa = u, v, w$ [=] m²

- $d\ell_\kappa$ = στοιχειώδη μήκη σε δεξιόστροφο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις για $\kappa = u, v, w$ [=] m
- b, b = διανυσματική και βαθμωτή συνάρτηση (βοηθητικές συναρτήσεις, $b = \nabla b$), αντίστοιχα, στην απόδειξη για τον διαφορικό τελεστή του Laplace σε δεξιόστροφο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων στις τρεις διαστάσεις [=] (εξαρτάται)
- $(dS)^2$ = τετράγωνο της διαφορικής επιφανείας ή πρώτη θεμελιώδης μορφή [=] m²
- U = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή ταχύτητα προσέγγισης σε σωματίδιο εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή μεταφορική ταχύτητα ενός σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel. Για τρισδιάστατες ροές σε γενικό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι U_κ , $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m/s
- $\bar{U}$ = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή ταχύτητα διακένου ή φαινόμενη ταχύτητα που προσεγγίζει σωματίδιο εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή μεταφορική ταχύτητα διακένου ή φαινόμενη ταχύτητα ενός σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel που λαμβάνει υπόψη του και τα διάκενα μεταξύ των φανταστικών εξωτερικών ρευστών επιφανειών όταν αναφερόμαστε σε όλο το πορώδες μέσο. Για τρισδιάστατες ροές σε γενικό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $\bar{U}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m/s
- Ω = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή περιστροφική ή γωνιακή ταχύτητα ενός σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel. Για τρισδιάστατες ροές σε γενικό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι Ω_κ , $\kappa = 1, 2, 3$ [=] 1/s
- Ω = τρισδιάστατα $\Omega(\mathbf{e}^3)$ ή διδιάστατα $\Omega(\mathbf{e}^2)$, απλώς συνεκτικά, φραγμένα πεδία ροής στα μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο (Happel και Kuwabara),

- όπου περικλείονται από την επιφάνεια του στερεού σωματιδίου $\partial \Omega_i(\mathbf{B}^3)$ ή $\partial \Omega_i(\mathbf{B}^2)$ και την επιφάνεια του ρευστού φλοιού $\partial \Omega_e(\mathbf{B}^3)$ ή $\partial \Omega_e(\mathbf{B}^2)$, δηλαδή $\partial \Omega(\mathbf{B}^3/\mathbf{B}^2) = \partial \Omega_i(\mathbf{B}^3/\mathbf{B}^2) \cup \partial \Omega_e(\mathbf{B}^3/\mathbf{B}^2)$
- Φ = αζιμουθιακή γωνία στα αξονοσυμμετρικά προβλήματα ροής στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara [=] –
- $\hat{\phi}$ = μοναδιαίο διάνυσμα αζιμουθιακής γωνίας στα αξονοσυμμετρικά προβλήματα ροής στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara [=] –
- ω_ϕ = αζιμουθιακή συνιστώσα του πεδίου στροβιλισμού στα αξονοσυμμετρικά προβλήματα ροής στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara [=] 1/s
- F_D = οπισθέλκουσα δύναμη επί στερεού σωματιδίου στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel για ροή σμήνους σωματιδίων σε πορώδη μέσα. Για τρισδιάστατες ροές σε γενικό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $F_{D\kappa}$, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] N ή kgm/s²
- $C_{D\kappa}$ = συντελεστής οπισθέλκουσας επί στερεού σωματιδίου στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel για ροή σμήνους σωματιδίων σε πορώδη μέσα στην $\hat{x}_\kappa$ διεύθυνση, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] –
- $S_{C\kappa}$ = χαρακτηριστική επιφάνεια του στερεού σωματιδίου στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel για ροή σμήνους σωματιδίων σε πορώδη μέσα, η οποία είναι κάθετη στην $\hat{x}_\kappa$ διεύθυνση, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m²
- Q_C = παροχή διαμέσου του κυττάρου στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara (Q_C^K) ή Happel (Q_C^H) για ροή σμήνους σωματιδίων σε πορώδη μέσα [=] m³/s

- k_p = διαπερατότητα του σμήνους σωματιδίων σε πορώδη μέσα στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel [=] m^2
- $A_{p\kappa}, \ell_{p\kappa}$ = χαρακτηριστική επιφάνεια και χαρακτηριστικό μήκος του όγκου ελέγχου που επιλέγεται στον ορισμό της διαπερατότητας k_p στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel σε μια από τις διευθύνσεις $\hat{x}_\kappa$ της ροής, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m^2 και m
- $\Delta P_{p\kappa}$ = επιφανειακή πτώση πίεσης κατά μήκος του $\ell_{p\kappa}$ που αντιστοιχεί στην ταχύτητα διακένου ή φαινόμενη ταχύτητα $\bar{U}$ στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel σε μια από τις διευθύνσεις $\hat{x}_\kappa$ της ροής, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] Pa ή N/m^2 ή kg/ms^2
- N_p = πλήθος των στερεών σωματιδίων στον όγκο ελέγχου που επιλέγεται στον ορισμό της διαπερατότητας k_p στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel [=] –
- V_p = όγκος του στερεού σωματιδίου στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel [=] m^3
- γ_p = στερεό κλάσμα όγκου του πορώδους στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel [=] –
- $A_{C\kappa}, \ell_{C\kappa}$ = ενεργή επιφάνεια διατομής και ενεργό μήκος του μοναδιαίου όγκου πρισματικού σχήματος που επιλέγεται στον ορισμό της ταχύτητας διακένου ή φαινόμενης ταχύτητας $\bar{U}$ στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel σε μια από τις διευθύνσεις $\hat{x}_\kappa$ της ροής, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m^2 και m
- χ = σταθερά αναλογίας στον ορισμό της ταχύτητας διακένου ή φαινόμενης ταχύτητας $\bar{U}$ στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara ή Happel [=] –

Σύμβολα στη σφαιρική γεωμετρία.

- r = σφαιρική ακτινική συνιστώσα, $0 \leq r < +\infty$ [=] m
 a = ακτίνα σταθερής σφαίρας [=] m
 θ, φ = σφαιρικές γωνιακές συνιστώσες, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$ [=] –
 ζ = τροποποιημένη σφαιρική γωνιακή συνιστώσα της θ , $-1 \leq \zeta \leq 1$ [=] –
 $\hat{r}\hat{\theta}\hat{\varphi}$ = σφαιρική ορθοκανονική βάση $= \hat{r}\hat{\zeta}\hat{\varphi}$ [=] –
 $\mathbf{r}$ = $\Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \{(r, \theta, \varphi) : r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \equiv \{(r, \zeta, \varphi) : r > 0, |\zeta| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}$
 $\hat{\mathbf{r}}$ = $\partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \equiv \{(\zeta, \varphi) : |\zeta| \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$
 h_r, h_θ, h_φ = μετρικοί συντελεστές στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, $h_\theta \equiv h_\zeta$ [=]
 –, m, m, αντίστοιχα
 J_{sr} = Ιακωβειανή στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων [=] m²
 $\hat{\mathbf{n}}_{sr}$ = εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο ή ορθομοναδιαίο διάνυσμα μιας επιφάνειας
 στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων $= \hat{\mathbf{n}}_{sr}(\mathbf{r})$ [=] –
 $\mathbf{D}$ = γωνιακό μέρος του διαφορικού τελεστή της βάθμωσης στο σφαιρικό
 σύστημα συντεταγμένων [=] –
 $\mathbf{B}$ = διαφορικός τελεστής του Beltrami ή γωνιακό μέρος του διαφορικού
 τελεστή του Laplace στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων [=] –
 ρ_{sr} = “κυλινδρική” ακτίνα στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, $\rho_{sr} \equiv h_\varphi$ [=] m
 i = μιγαδική φανταστική μονάδα
 s = άρτιο (e) (even) ή περιττό (o) (odd) και “τίποτα” ή “*” μέρος στον
 ορισμό των βαθμωτών συμπαγών ή επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών
 ιδιοσυναρτήσεων
 ℓ = είδος στον ορισμό των βαθμωτών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών
 ιδιοσυναρτήσεων, $\ell = 1, 2, 3, 4$
 S^2 = μοναδιαία σφαίρα στο χώρο $\mathbf{\Theta}^3$ [=] m²
 Y_n^{ms} = βαθμωτές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις βαθμού
 $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$, πραγματικές αν ο χαρακτήρας

- $s = e, o$ (άρτιος ή περιττός) ή μιγαδικές αν ο χαρακτήρας $s = -, *$ (“τίποτα” ή συζυγής) $= Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) [=] -$
- $\delta_{\kappa l}$ = δέλτα του Kronecker για $\kappa, l = (n, m, s), (n', m', s')$ στην ορθογωνιότητα των βαθμωτών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων
- ε_m = παράγοντας Neumann (ισχύει ότι $\varepsilon_m = 1, m = 0$ και $\varepsilon_m = 2, m \geq 1$), $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$
- $u_{n, sr}^{(\ell)ms}$ = βαθμωτές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 1, 2, 3, 4$, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$, όπου το $s = e, o$ ή $s = -, *$ δηλώνει το χαρακτήρα $= u_{n, sr}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) [=] m^n$ ($\ell = 1, 2$) ή $m^{-(n+1)}$ ($\ell = 3, 4$)
- $u_{n, sr}^{(i)ms}$ = εσωτερικές βαθμωτές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 1 \equiv i$ (internal), βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$, όπου το $s = e, o$ ή $s = -, *$ δηλώνει το χαρακτήρα $= u_{n, sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) [=] m^n$
- $u_{n, sr}^{(e)ms}$ = εξωτερικές βαθμωτές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 3 \equiv e$ (external), βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$, όπου το $s = e, o$ ή $s = -, *$ δηλώνει το χαρακτήρα $= u_{n, sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) [=] m^{-(n+1)}$
- u_{sr} = βοηθητική βαθμωτή αρμονική συνάρτηση-δυναμικού στον ορισμό των βαθμωτών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων $= u_{sr}(\mathbf{r}) [=]$ (εξαρτάται)
- $\delta_{n, sr}^{(\ell)ms}$ = βοηθητικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $\ell = 1, 2, 3, 4$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ ή $s = -, *$ στο γενικό ανάπτυγμα της αρμονικής συνάρτησης $u_{sr} [=]$ (εξαρτάται)
- $\mathbf{u}_{sr}$ = βοηθητική διανυσματική αρμονική συνάρτηση-δυναμικού στον ορισμό των διανυσματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων $= \mathbf{u}_{sr}(\mathbf{r}) [=]$ (εξαρτάται)

ϕ_{sr}, A_{sr} = βοηθητικές συναρτήσεις (βαθμωτή, διανυσματική) στον ορισμό των διανυσματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων = $\phi_{sr}(\mathbf{r}), A_{sr}(\mathbf{r}) [=]$ (εξαρτάται)

$\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ = διανυσματικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$, χαρακτήρα $s = e, o$ (άρτιος ή περιττός) = $\mathbf{P}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \mathbf{B}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \mathbf{C}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) [=]$ –

$\mathbf{N}_n^{(i)ms}$ = $\mathbf{N}$ –εσωτερική διανυσματική συμπαγής σφαιρική αρμονική ιδιοσυνάρτηση βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n+1$, χαρακτήρα $s = e, o$ (άρτιος ή περιττός) = $\mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) [=]$ m^n

$\mathbf{M}_n^{(i)ms}$ = $\mathbf{M}$ –εσωτερική διανυσματική συμπαγής σφαιρική αρμονική ιδιοσυνάρτηση βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$, χαρακτήρα $s = e, o$ (άρτιος ή περιττός) = $\mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) [=]$ m^n

$\mathbf{G}_n^{(i)ms}$ = $\mathbf{G}$ –εσωτερική διανυσματική συμπαγής σφαιρική αρμονική ιδιοσυνάρτηση βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, χαρακτήρα $s = e, o$ (άρτιος ή περιττός) = $\mathbf{G}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) [=]$ m^n

$\mathbf{N}_n^{(e)ms}$ = $\mathbf{N}$ –εξωτερική διανυσματική συμπαγής σφαιρική αρμονική ιδιοσυνάρτηση βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, χαρακτήρα $s = e, o$ (άρτιος ή περιττός) = $\mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) [=]$ $m^{-(n+1)}$

$\mathbf{M}_n^{(e)ms}$ = $\mathbf{M}$ –εξωτερική διανυσματική συμπαγής σφαιρική αρμονική ιδιοσυνάρτηση βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$, χαρακτήρα $s = e, o$ (άρτιος ή περιττός) = $\mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) [=]$ $m^{-(n+1)}$

$\mathbf{G}_n^{(e)ms}$ = $\mathbf{G}$ –εξωτερική διανυσματική συμπαγής σφαιρική αρμονική ιδιοσυνάρτηση βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n+1$, χαρακτήρα $s = e, o$ (άρτιος ή περιττός) = $\mathbf{G}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) [=]$ $m^{-(n+1)}$

$\alpha_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = βοηθητικοί εσωτερικοί $m = 0, 1, 2, \dots, n+1$ ή εξωτερικοί $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $s = e, o$ που αντιστοιχούν στις $\mathbf{N}$ διανυσματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις στο γενικό ανάπτυγμα της $\mathbf{u}_{sr}$ [=] (εξαρτάται)

$\beta_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = βοηθητικοί εσωτερικοί $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ή εξωτερικοί $m = 0, 1, 2, \dots, n$ βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $s = e, o$ που αντιστοιχούν στις $\mathbf{M}$ διανυσματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις στο γενικό ανάπτυγμα της $\mathbf{u}_{sr}$ [=] (εξαρτάται)

$\gamma_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = βοηθητικοί εσωτερικοί $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ή εξωτερικοί $m = 0, 1, 2, \dots, n+1$ βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $s = e, o$ που αντιστοιχεί στις $\mathbf{G}$ διανυσματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις στο γενικό ανάπτυγμα της $\mathbf{u}_{sr}$ [=] (εξαρτάται)

$\mathbf{r}$ = $\Omega(\mathbf{\Theta}^2) = \{(r, \theta) : r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi\} \equiv \{(r, \zeta) : r > 0, |\zeta| \leq 1\}$ (2-D χωρία)

Ψ_{sr} = συνάρτηση ροής στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων σε διδιάστατα προβλήματα που ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{sr}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m^3/s

$\Psi_{n,sr}^{(\ell)}$ = ιδιοσυναρτήσεις ροής είδους $\ell = 1, 2, 3, 4$ και βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων σε 2-D προβλήματα που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{n,sr}^{(\ell)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m^n και m^{n+2} ($\ell = 1, 2$) ή m^{-n+1} και m^{-n+3} ($\ell = 3, 4$)

$\Psi_{n,sr}^{(i)}$ = εσωτερικές ιδιοσυναρτήσεις ροής είδους $\ell = 1 \equiv i$ (internal) και βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων σε 2-D προβλήματα που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{n,sr}^{(i)}(\mathbf{r})$ [=] m^n και m^{n+2}

$\Psi_{n,sr}^{(e)}$ = εξωτερικές ιδιοσυναρτήσεις ροής είδους $\ell = 3 \equiv e$ (internal) και βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων σε 2-D προβλήματα

- που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{n,sr}^{(e)}(\mathbf{r}) [=]$
 m^{-n+1} και m^{-n+3}
- $\Psi_{n,sr}^{(\ell),\subset}$ = ιδιοσυναρτήσεις ροής είδους $\ell = 1, 2, 3, 4$ και βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ στο
 σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων σε $2-D$ προβλήματα που ανήκουν στον
 πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^2 = \Psi_{n,sr}^{(\ell)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m^n ($\ell = 1, 2$
) ή m^{-n+1} ($\ell = 3, 4$)
- $A_{n,sr}^\ell$ = βοηθητικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $\ell = 1, 2, 3, 4$ και $n = 0, 1, 2, \dots$
 που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις ροής $\Psi_{n,sr}^{(\ell),\subset}$ στο γενικό ανάπτυγμα
 της Ψ_{sr} (εσωτερικοί, απουσία ιδιομορφιών $\rightarrow \ell = 1$ και εξωτερικοί,
 απουσία ιδιομορφιών $\rightarrow \ell = 3$) [=] $m^{3-n/s}$ ($\ell = 1, 2$) ή $m^{n+2/s}$ ($\ell = 3, 4$)
- $B_{n,sr}^\ell$ = βοηθητικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $\ell = 1, 2, 3, 4$ και $n = 0, 1, 2, \dots$
 που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις ροής $\Psi_{n,sr}^{(\ell)}$ στο γενικό ανάπτυγμα
 της Ψ_{sr} (εσωτερικοί, απουσία ιδιομορφιών $\rightarrow \ell = 1$ και εξωτερικοί,
 απουσία ιδιομορφιών $\rightarrow \ell = 3$) [=] $m^{1-n/s}$ ($\ell = 1, 2$) ή m^n/s ($\ell = 3, 4$)
- “ PN ” = συντομογραφία για τη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber
- “ BG ” = συντομογραφία για τη διαφορική αναπαράσταση Boussinesq – Galerkin
- “ $PNAU$ ” = συντομογραφία για τη διαφορική αναπαράσταση Palaniappan *et al.*
- “ S ” = συντομογραφία για τη διαφορική αναπαράσταση Stokes
- $\mathbf{v}_{sr}^{PN}$ = σφαιρικό πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich –
 Neuber = $\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m/s
- $\mathbf{P}_{sr}^{PN}$ = σφαιρικό πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich –
 Neuber = $\mathbf{P}_{sr}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- $\mathbf{P}_{0sr}^{PN}$ = αυθαίρετη σφαιρική σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση
 Parkovich – Neuber [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²

- Φ_{sr} = διανυσματικό σφαιρικό αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση
Papkovich – Neuber = $\Phi_{sr}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m/s
- Φ_{0sr} = βαθμωτό σφαιρικό αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση
Papkovich – Neuber = $\Phi_{0sr}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m²/s
- $\mathbf{v}_{sr}^{BG}$ = σφαιρικό πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση Boussinesq –
Galerkin = $\mathbf{v}_{sr}^{BG}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m/s
- P_{sr}^{BG} = σφαιρικό πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Boussinesq –
Galerkin = $P_{sr}^{BG}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- P_{0sr}^{BG} = αυθαίρετη σφαιρική σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση
Boussinesq – Galerkin [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- $\mathbf{B}_{sr}$ = διανυσματικό σφαιρικό διαρμονικό δυναμικό στη διαφορική
αναπαράσταση Boussinesq – Galerkin = $\mathbf{B}_{sr}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$
[=] m³/s
- $\mathbf{b}_{sr}$ = βαθμωτό σφαιρικό αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση
Boussinesq – Galerkin = $\mathbf{b}_{sr}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m²/s
- $\mathbf{v}_{sr}^{PNAU}$ = σφαιρικό πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση Palaniappan *et*
al. = $\mathbf{v}_{sr}^{PNAU}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m/s
- P_{sr}^{PNAU} = σφαιρικό πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Palaniappan
et al. = $P_{sr}^{PNAU}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- P_{0sr}^{PNAU} = αυθαίρετη σφαιρική σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση
Palaniappan *et al.* [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- $\mathbf{A}_{sr}$ = βαθμωτό σφαιρικό διαρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση
Palaniappan *et al.* = $\mathbf{A}_{sr}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m²/s
- $\mathbf{B}_{sr}$ = βαθμωτό σφαιρικό αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση
Palaniappan *et al.* = $\mathbf{B}_{sr}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m/s

$\mathbf{v}_{sr}^S$ = διδιάστατο σφαιρικό πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση
 $\text{Stokes} = \mathbf{v}_{sr}^S(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) [=] \text{m/s}$

P_{sr}^S = διδιάστατο σφαιρικό πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση
 $\text{Stokes} = P_{sr}^S(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) [=] \text{Pa ή N/m}^2 \text{ ή kg/ms}^2$

P_{0sr}^S = διδιάστατη αυθαίρετη σφαιρική σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση Stokes [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²

Ψ_{sr} = διδιάστατο βαθμωτό σφαιρικό δυναμικό ροής στη διαφορική αναπαράσταση Stokes που ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή
 $E^4 = \Psi_{sr}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) [=] \text{m}^3/\text{s}$

$e_{n,sr}^{(i/e)m}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί διανυσματικοί μιγαδικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού $\Phi_{sr} = c_{n,sr}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,sr}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,sr}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_3$ με συζυγή τον $e_{n,sr}^{(i/e)m*} [=] \text{m}^{-n+1}/\text{s ή m}^{n+2}/\text{s}$

$d_{n,sr}^{(i/e)m}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί μιγαδικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού Φ_{0sr} με συζυγή τον $d_{n,sr}^{(i/e)m*} [=] \text{m}^{-n+2}/\text{s ή m}^{n+3}/\text{s}$

$f_{n,sr}^{(i/e)m}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί διανυσματικοί μιγαδικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Boussinesq – Galerkin για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$ στο αρμονικό μέρος του γενικού αναπτύγματος του διαρμονικού δυναμικού $\mathbf{B}_{sr} = f_{n,sr}^{1(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_1 + f_{n,sr}^{2(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_2 + f_{n,sr}^{3(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_3$ με συζυγή τον $f_{n,sr}^{(i/e)m*} [=] \text{m}^{-n+3}/\text{s ή m}^{n+4}/\text{s}$

$g_{n,sr}^{(i/e)m}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί διανυσματικοί μιγαδικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Boussinesq – Galerkin για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$ στο διαρμονικό μέρος του γενικού αναπτύγματος του

διαρμονικού δυναμικού $\mathbf{B}_{sr} = g_{n,sr}^{1(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_1 + g_{n,sr}^{2(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_2 + g_{n,sr}^{3(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_3$ με συζυγή
τον $g_{n,sr}^{(i/e)m*} [=] m^{-n+1}/s$ ή m^{n+2}/s

$h_{n,sr}^{(i/e)m}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί μιγαδικοί σταθεροί συντελεστές στη
διαφορική αναπαράσταση Boussinesq – Galerkin για $n=0,1,2,\dots$ και
 $m=0,1,2,\dots,n$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού b_{sr} με
συζυγή τον $h_{n,sr}^{(i/e)m*} [=] m^{-n+2}/s$ ή m^{n+3}/s

$a_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί $m=0,1,2,\dots,n+1$ ή εξωτερικοί $m=0,1,2,\dots,n-1$ βαθμωτοί
πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση
Parkovich – Neuber για $n=0,1,2,\dots$ και $s=e,o$ που αντιστοιχούν στις $\mathbf{N}$
διανυσματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις στο γενικό
ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού $\Phi_{sr} [=] m^{-n+1}/s$ ή m^{n+2}/s

$b_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί $m=0,1,2,\dots,n$ ή εξωτερικοί $m=0,1,2,\dots,n$ βαθμωτοί
πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση
Parkovich – Neuber για $n=0,1,2,\dots$ και $s=e,o$ που αντιστοιχούν στις $\mathbf{M}$
διανυσματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις στο γενικό
ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού $\Phi_{sr} [=] m^{-n+1}/s$ ή m^{n+2}/s

$c_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί $m=0,1,2,\dots,n-1$ ή εξωτερικοί $m=0,1,2,\dots,n+1$ βαθμωτοί
πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση
Parkovich – Neuber για $n=0,1,2,\dots$ και $s=e,o$ που αντιστοιχεί στις $\mathbf{G}$
διανυσματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις στο γενικό
ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού $\Phi_{sr} [=] m^{-n+1}/s$ ή m^{n+2}/s

$d_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη
διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber για $n=0,1,2,\dots$,
 $m=0,1,2,\dots,n$ και $s=e,o$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού
δυναμικού $\Phi_{0sr} [=] m^{-n+2}/s$ ή m^{n+3}/s

$f_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη
διαφορική αναπαράσταση Palaniappan *et al.* για $n=0,1,2,\dots$,

$m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ στο αρμονικό μέρος του γενικού αναπτύγματος του διαρμονικού δυναμικού $A_{sr} [=] m^{-n+2}/s$ ή m^{n+3}/s

$g_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Palaniappan *et al.* για $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ στο διαρμονικό μέρος του γενικού αναπτύγματος του διαρμονικού δυναμικού $A_{sr} [=] m^{-n}/s$ ή m^{n+1}/s

$e_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Palaniappan *et al.* για $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού $B_{sr} [=] m^{-n+1}/s$ ή m^{n+2}/s

$e_{n,sr}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί διανυσματικοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber για $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού $\Phi_{sr} = c_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{x}_1 + a_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{x}_2 + b_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{x}_3 [=] m^{-n+1}/s$ ή m^{n+2}/s

$v_{r,sr}^{PN}$ = r –συνιστώσα του εκφυλισμένου διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας Parkovich – Neuber $v_{sr}^{PN}(r, \zeta)$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων $= v_{r,sr}^{PN}(r, \zeta)$, $r > 0$ και $|\zeta| \leq 1 [=] m/s$

$v_{\zeta,sr}^{PN}$ = ζ –συνιστώσα του εκφυλισμένου διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας Parkovich – Neuber $v_{sr}^{PN}(r, \zeta)$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων $= v_{\zeta,sr}^{PN}(r, \zeta)$, $r > 0$ και $|\zeta| \leq 1 [=] m/s$

$A_{n,sr}^{i/e}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Stokes για $n = 0, 1, 2, \dots$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις ροής του $\ker E^2$ στο γενικό ανάπτυγμα της συνάρτησης ροής $\Psi_{sr} [=] m^{3-n}/s$ ή m^{n+2}/s

- $B_{n,sr}^{i/e}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Stokes για $n=0,1,2,\dots$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις ροής του $\ker E^4$ στο γενικό ανάπτυγμα της συνάρτησης ροής Ψ_{sr} [=] m^{1-n}/s ή m^n/s
- $u_{r,sr}^S$ = r –συνιστώσα του διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας Stokes $\mathbf{v}_{sr}^S(r,\zeta)$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων = $u_{r,sr}^S(r,\zeta)$, $r > 0$ και $|\zeta| \leq 1$ [=] m/s
- $u_{\zeta,sr}^S$ = ζ –συνιστώσα του διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας Stokes $\mathbf{v}_{sr}^S(r,\zeta)$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων = $u_{\zeta,sr}^S(r,\zeta)$, $r > 0$ και $|\zeta| \leq 1$ [=] m/s
- ω_{sr}^{PN} = σφαιρικό πεδίο στροβιλισμού στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $\omega_{sr}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\textcircled{3}})$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\textcircled{2}})$ [=] 1/s
- $\tilde{\Pi}_{sr}^{PN}$ = σφαιρικό πεδίο ολικού τανυστή των τάσεων στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $\tilde{\Pi}_{sr}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\textcircled{3}})$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\textcircled{2}})$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- p_{sr}^{PN} = σφαιρικό πεδίο θερμοδυναμικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $p_{sr}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\textcircled{3}})$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\textcircled{2}})$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- a = ακτίνα του σφαιρικού στερεού σωματιδίου στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2–D) και Happel για τρισδιάστατες ροές (3–D) [=] m
- b = ακτίνα της εξωτερικής σφαίρας που περιβάλλει το σφαιρικό στερεό σωματίδιο ακτίνας a με τη ρευστή επιφάνεια να αποτελεί το εξωτερικό νοητό σύνορο που απαιτείται για να μοντελοποιηθεί η ροή του σμήνους σφαιρικών σωματιδίων μέσα στο πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2–D) και Happel για τρισδιάστατες ροές (3–D) [=] m

$r \in [a, b]$ = διάστημα μεταβολής της σφαιρικής ακτινικής συνιστώσας που διατρέχει στο διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ στη μελέτη μοντέλων κυττάρων [=] m

U_{sr} = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή ταχύτητα προσέγγισης σε σφαιρικό σωματίδιο εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) ή αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή μεταφορική ταχύτητα ενός σφαιρικού σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D), όπου στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $U_{\kappa, sr}$, $\kappa = 1, 2, 3$ με $U_{1, sr} = U_{sr}$ και $U_{2, sr} = U_{3, sr} = 0$ [=] m/s

$\omega_{\varphi, sr}^{PN}$ = Φ –συνιστώσα του διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου στροβιλισμού Parkovich – Neuber $\omega_{sr}^{PN}(r, \zeta)$ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων = $\omega_{\varphi, sr}^{PN}(r, \zeta)$, $r > 0$ και $|\zeta| \leq 1$ [=] 1/s

$D_{n, sr}^K$ = ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων από τη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber στο μοντέλο σφαιρικού σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) για $n \geq 1$ [=] 1/m³

$\gamma_{K, sr}$ = σταθερή ποσότητα λόγου ακτίνων σφαιρών (b/a) ορισμένη στο μοντέλο σφαιρικού σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D), $\gamma_{K, sr} > 1$ [=] –

$K_{K, sr}$ = σταθερή ποσότητα ορισμένη στο μοντέλο σφαιρικού σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) = $K_{K, sr}(\gamma_{K, sr})$ [=] –

Ω_{sr} = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή περιστροφική ή γωνιακή ταχύτητα ενός σφαιρικού σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D), όπου στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $\Omega_{\kappa, sr}$, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] 1/s

- $\gamma_{H,sr}$ = σταθερή ποσότητα λόγου ακτίνων σφαιρών (a/b) ορισμένη στο μοντέλο σφαιρικού σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές ($3-D$), $\gamma_{H,sr} < 1$ [=] –
- $K_{H,sr}$ = σταθερή ποσότητα ορισμένη στο μοντέλο σφαιρικού σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές ($3-D$) $= K_{H,sr}(\gamma_{H,sr})$ [=] –
- $\bar{U}_{sr}$ = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή ταχύτητα διακένου ή φαινόμενη ταχύτητα που προσεγγίζει σφαιρικό σωματίδιο εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές ($2-D$) ή αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή μεταφορική ταχύτητα διακένου ή φαινόμενη ταχύτητα ενός σφαιρικού σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές ($3-D$) που λαμβάνει υπόψη του και τα διάκενα μεταξύ των φανταστικών εξωτερικών ρευστών επιφανειών όταν αναφερόμαστε σε όλο το πορώδες μέσο, όπου στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $\bar{U}_{\kappa,sr}$, $\kappa = 1, 2, 3$ με $\bar{U}_{1,sr} = \bar{U}_{sr}$ και $\bar{U}_{2,sr} = \bar{U}_{3,sr} = 0$ [=] m/s
- $\bar{P}_{0sr}^{PN}$ = τροποποιημένη αυθαίρετη σφαιρική σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²

Σύμβολα στη σφαιροειδή γεωμετρία.

- η = επιμήκης σφαιροειδής “ακτινική” συνιστώσα, $0 \leq \eta < +\infty$ [=] –
- θ, φ = επιμήκεις σφαιροειδείς γωνιακές συνιστώσες, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$ [=] –
- τ = τροποποιημένη επιμήκης σφαιροειδής “ακτινική” συνιστώσα της η , $1 \leq \tau \leq +\infty$ [=] –
- ζ = τροποποιημένη επιμήκης σφαιροειδής γωνιακή συνιστώσα της θ , $-1 \leq \zeta \leq 1$ [=] –
- $c > 0$ = ημιεστιακή απόσταση του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος [=] m
- $\hat{\eta}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ = επιμήκης σφαιροειδής ορθοκανονική βάση $= \hat{\tau}, \hat{\zeta}, \hat{\varphi}$ [=] –

- $\mathbf{r} = \Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \{(\eta, \theta, \varphi) : \eta > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \equiv \{(\tau, \zeta, \varphi) : \tau > 1, |\zeta| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}$
- $\hat{\mathbf{r}} = \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \equiv \{(\zeta, \varphi) : |\zeta| \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$
- $h_\eta, h_\theta, h_\varphi$ = μετρικοί συντελεστές στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων,
 $h_\eta \equiv h_\tau$ και $h_\theta \equiv h_\zeta$ [=] m, m, m, αντίστοιχα
- J_{sd} = Ιακωβειανή στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων [=] m³
- S_η = μοναδικά καθορισμένο και μη εκφυλισμένο επίμηκες σφαιροειδές,
 $0 < \eta < +\infty$ όπου $S_\eta \equiv S_\tau$, $1 < \tau < +\infty$ [=] m²
- α_1 = μεγάλος ημιάξονας, πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 , του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος συντεταγμένων [=] m
- $\alpha_2 = \alpha_3$ = μικρός ημιάξονας (ίδιος και στους δύο άξονες x_2 και x_3) του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος συντεταγμένων [=] m
- ε = εκκεντρότητα του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος [=] –
- S_0 = ευθύγραμμο εστιακό τμήμα στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων με άκρα $-c$ και c [=] m
- $\hat{\mathbf{n}}_{sd}$ = εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο ή ορθομοναδιαίο διάνυσμα μιας επιφάνειας στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων = $\hat{\mathbf{n}}_{sd}(\mathbf{r})$ [=] –
- ρ_{sd} = “κυλινδρική” ακτίνα στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων,
 $\rho_{sd} \equiv h_\varphi$ [=] m
- i = μιγαδική φανταστική μονάδα
- s = άρτιο (e) (even) ή περιττό (o) (odd) μέρος στον ορισμό των βαθμωτών συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων
- ℓ = είδος στον ορισμό των βαθμωτών συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων, $\ell = 1, 2, 3, 4$
- $S_n^{(\ell)m}$ = ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 1, 2, 3, 4$, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων =
 $S_n^{(\ell)m}(\tau, \zeta)$ [=] –

f^{ms} = ιδιοσυναρτήσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και χαρακτήρα s αρτίου ή περιττού ($s = e, o$) στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων $= f^{ms}(\varphi)$ [=] –

$u_{n,sd}^{(\ell)ms}$ = βαθμωτές συμπαγείς επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 1, 2, 3, 4$, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και χαρακτήρα $s = e, o$ $= u_{n,sd}^{(\ell)ms}(\mathbf{r})$ [=] –

$u_{n,sd}^{(i)ms}$ = εσωτερικές βαθμωτές συμπαγείς επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 1 \equiv i$ (internal), βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και χαρακτήρα $s = e, o$ $= u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r})$ [=] –

$u_{n,sd}^{(e)ms}$ = εξωτερικές βαθμωτές συμπαγείς επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 3 \equiv e$ (external), βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και χαρακτήρα $s = e, o$ $= u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r})$ [=] –

u_{sd} = βοηθητική βαθμωτή αρμονική συνάρτηση–δυναμικού στον ορισμό των βαθμωτών συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων $= u_{sd}(\mathbf{r})$ [=] (εξαρτάται)

$\delta_{n,sd}^{(\ell)ms}$ = βοηθητικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $\ell = 1, 2, 3, 4$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ στο γενικό ανάπτυγμα της αρμονικής συνάρτησης u_{sd} [=] (εξαρτάται)

T_n^m = βοηθητικές συναρτήσεις σε όρους των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου και δευτέρου είδους, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων $= T_n^m(\tau)$ (για $m = 0$, $T_n^0(\tau) \equiv T_n(\tau)$) [=] –

Z_n^m = βοηθητικές συναρτήσεις σε όρους των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου και δευτέρου είδους, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης

$m=0,1,2,\dots,n$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων $= Z_n^m(\zeta)$

(για $m=0$, $Z_n^0(\zeta) \equiv Z_n(\zeta)$) [=] –

$\mathbf{r} = \Omega(\mathbf{\Theta}^2) = \{(\eta, \theta) : \eta > 0, 0 \leq \theta \leq \pi\} \equiv \{(\tau, \zeta) : \tau > 1, |\zeta| \leq 1\}$ ($2-D$ χωρία)

$\Theta_n^{(\ell)}$ = ιδιοσυναρτήσεις που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^2 στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων σε διδιάστατα προβλήματα είδους $\ell=1,2,3,4$ και βαθμού $n=0,1,2,\dots = \Theta_n^{(\ell)}(\tau, \zeta)$ [=] –

$\Omega_n^{(\ell)}$ = γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^4 στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων σε διδιάστατα προβλήματα είδους $\ell=1,2,3,4$ και βαθμού $n=0,1,2,\dots = \Omega_n^{(\ell)}(\tau, \zeta)$ [=] –

Ψ_{sd} = συνάρτηση ροής στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων σε διδιάστατα προβλήματα που ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{sd}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m^3/s

$\Psi_{n,sd}^{(\ell)}$ = ιδιοσυναρτήσεις ροής είδους $\ell=1,2,3,4$ και βαθμού $n=0,1,2,\dots$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων σε $2-D$ προβλήματα που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{n,sd}^{(\ell)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m^3/s

$\Psi_{n,sd}^{(i)}$ = εσωτερικές ιδιοσυναρτήσεις ροής είδους $\ell=1 \equiv i$ (internal) και βαθμού $n=0,1,2,\dots$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων σε $2-D$ προβλήματα που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{n,sd}^{(i)}(\mathbf{r})$ [=] m^3/s

$\Psi_{n,sd}^{(e)}$ = εξωτερικές ιδιοσυναρτήσεις ροής είδους $\ell=3 \equiv e$ (internal) και βαθμού $n=0,1,2,\dots$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων σε $2-D$ προβλήματα που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{n,sd}^{(e)}(\mathbf{r})$ [=] m^3/s

- $A_{n,sd}^\ell$ = βοηθητικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $\ell = 1, 2, 3, 4$ και $n = 0, 1, 2, \dots$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις ροής $\Theta_n^{(\ell)}$ στο γενικό ανάπτυγμα της Ψ_{sd} (εσωτερικοί, απουσία ιδιομορφιών $\rightarrow \ell = 1, n \geq 2$ και εξωτερικοί, απουσία ιδιομορφιών $\rightarrow \ell = 3, n \geq 2$) [=] m³/s
- $B_{n,sd}^\ell$ = βοηθητικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές για $\ell = 1, 2, 3, 4$ και $n = 0, 1, 2, \dots$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις ροής $\Omega_n^{(\ell)}$ στο γενικό ανάπτυγμα της Ψ_{sd} (εσωτερικοί, απουσία ιδιομορφιών $\rightarrow \ell = 1, n \geq 2$ και εξωτερικοί, απουσία ιδιομορφιών $\rightarrow \ell = 3, n \geq 2$) [=] m³/s
- λ = τροποποιημένη πεπλατυσμένη σφαιροειδής ακτινική συνιστώσα της η , $0 \leq \lambda < +\infty$ [=] –
- $\bar{c}$ = ημιεστιακή απόσταση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς συστήματος, $\bar{c} > 0$ [=] m
- “PN” = συντομογραφία για τη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber
- “S” = συντομογραφία για τη διαφορική αναπαράσταση Stokes
- $\mathbf{v}_{sd}^{PN}$ = επίμηκες σφαιροειδές πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m/s
- $\mathbf{P}_{sd}^{PN}$ = επίμηκες σφαιροειδές πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $\mathbf{P}_{sd}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- $\mathbf{P}_{0sd}^{PN}$ = αυθαίρετη επιμήκης σφαιροειδής σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- Φ_{sd} = διανυσματικό επίμηκες σφαιροειδές αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $\Phi_{sd}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m/s
- Φ_{0sd} = βαθμωτό επίμηκες σφαιροειδές αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $\Phi_{0sd}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m²/s

- $\mathbf{v}_{sd}^S$ = διδιάστατο επίμηκες σφαιροειδές πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση Stokes = $\mathbf{v}_{sd}^S(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\Theta^2)$ [=] m/s
- P_{sd}^S = διδιάστατο επίμηκες σφαιροειδές πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Stokes = $P_{sd}^S(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\Theta^2)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- P_{0sd}^S = διδιάστατη αυθαίρετη επιμήκης σφαιροειδής σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση Stokes [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- Ψ_{sd} = διδιάστατο βαθμωτό επίμηκες σφαιροειδές δυναμικό ροής στη διαφορική αναπαράσταση Stokes που ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 = \Psi_{sd}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\Theta^2)$ [=] m³/s
- $e_{n,sd}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί διανυσματικοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber για $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού $\Phi_{sd} = c_{n,sd}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,sd}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,sd}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_3$ [=] m/s
- $d_{n,sd}^{(i/e)ms}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber για $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού Φ_{0sd} [=] m²/s
- $\mathbf{v}_{\tau,sd}^{PN}$ = τ –συνιστώσα του εκφυλισμένου διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας Parkovich – Neuber $\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta)$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων = $v_{\tau,sd}^{PN}(\tau, \zeta)$, $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$ [=] m/s
- $\mathbf{v}_{\zeta,sd}^{PN}$ = ζ –συνιστώσα του εκφυλισμένου διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας Parkovich – Neuber $\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta)$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων = $v_{\zeta,sd}^{PN}(\tau, \zeta)$, $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$ [=] m/s
- $\Theta_n^{(i/e)}$ = εσωτερικές ($\ell = 1 \equiv i$) ή εξωτερικές ($\ell = 3 \equiv e$) ιδιοσυναρτήσεις που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^2 στο επίμηκες

σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων σε διδιάστατα προβλήματα βαθμού

$$n = 0, 1, 2, \dots = \Theta_n^{(i/e)}(\tau, \zeta) [=] -$$

$\Omega_n^{(i/e)}$ = εσωτερικές $(\ell = 1 \equiv i)$ ή εξωτερικές $(\ell = 3 \equiv e)$ γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^4 στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων σε διδιάστατα προβλήματα βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots = \Omega_n^{(i/e)}(\tau, \zeta) [=] -$

$A_{n,sd}^{i/e}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Stokes για $n = 0, 1, 2, \dots$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις ροής του $\ker E^2$ στο γενικό ανάπτυγμα της συνάρτησης ροής $\Psi_{sd} [=] \text{m}^3/\text{s}$

$B_{n,sd}^{i/e}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Stokes για $n = 0, 1, 2, \dots$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις ροής του $\ker E^4$ στο γενικό ανάπτυγμα της συνάρτησης ροής $\Psi_{sd} [=] \text{m}^3/\text{s}$

$v_{\tau,sd}^S$ = τ –συνιστώσα του διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας Stokes $\mathbf{v}_{sd}^S(\tau, \zeta)$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων = $v_{\tau,sd}^S(\tau, \zeta)$, $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1 [=] \text{m/s}$

$v_{\zeta,sd}^S$ = ζ –συνιστώσα του διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου ταχύτητας Stokes $\mathbf{v}_{sd}^S(\tau, \zeta)$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων = $v_{\zeta,sd}^S(\tau, \zeta)$, $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1 [=] \text{m/s}$

ω_{sd}^{PN} = επίμηκες σφαιροειδές πεδίο στροβιλισμού στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $\omega_{sd}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) [=] 1/\text{s}$

$\tilde{\Pi}_{sd}^{PN}$ = επίμηκες σφαιροειδές πεδίο ολικού τανυστή των τάσεων στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber = $\tilde{\Pi}_{sd}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) [=] \text{Pa}$ ή N/m^2 ή kg/ms^2

- p_{sd}^{PN} = επίμηκες σφαιροειδές πεδίο θερμοδυναμικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber $= p_{sd}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- τ_a = “ακτίνα” του επιμήκους σφαιροειδούς στερεού σωματιδίου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) [=] –
- τ_b = “ακτίνα” του εξωτερικού επιμήκους σφαιροειδούς που περιβάλλει το επίμηκες σφαιροειδές στερεό σωματίδιο “ακτίνας” τ_a με τη ρευστή επιφάνεια να αποτελεί το εξωτερικό νοητό σύνορο που απαιτείται για να μοντελοποιηθεί η ροή του σμήνους επιμήκων σφαιροειδών σωματιδίων μέσα στο πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) [=] –
- $\tau \in [\tau_a, \tau_b]$ = διάστημα μεταβολής της επιμήκους σφαιροειδούς “ακτινικής” συνιστώσας που διατρέχει στο διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ στη μελέτη του μοντέλου κυττάρου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) [=] –
- U_{sd} = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή ταχύτητα προσέγγισης σε επίμηκες σφαιροειδές σωματίδιο εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D), όπου στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $U_{\kappa, sd}$, $\kappa = 1, 2, 3$ με $U_{1, sd} = U_{sd}$ και $U_{2, sd} = U_{3, sd} = 0$ [=] m/s
- $\omega_{\varphi, sd}^{PN}$ = Φ –συνιστώσα του διδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού πεδίου στροβιλισμού Papkovitch – Neuber $\omega_{sd}^{PN}(\tau, \zeta)$ στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων $= \omega_{\varphi, sd}^{PN}(\tau, \zeta)$, $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$ [=] 1/s
- $D_{n, sd}^{(\ell)}$ = βοηθητική συνάρτηση για $\ell = i$ (εσωτερική) και για $\ell = e$ (εξωτερική), $n = 0, 1, 2, \dots$, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου

σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara

για διδιάστατες ροές $(2-D) = D_{n,sd}^{(\ell)}(\tau) [=] -$

$F_{n,sd}^{(\ell)}$ = βοηθητική συνάρτηση για $\ell = i$ (εσωτερική) και για $\ell = e$ (εξωτερική),

$n = 0, 1, 2, \dots$, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara

για διδιάστατες ροές $(2-D) = F_{n,sd}^{(\ell)}(\tau) [=] -$

$M_{n,sd}^{(\ell)}$ = βοηθητική συνάρτηση για $\ell = i$ (εσωτερική) και για $\ell = e$ (εξωτερική),

$n = 0, 1, 2, \dots$, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara

για διδιάστατες ροές $(2-D) = M_{n,sd}^{(\ell)}(\tau) [=] 1/m$

$K_{n,sd}^{(\ell)}$ = βοηθητική συνάρτηση για $\ell = i$ (εσωτερική) και για $\ell = e$ (εξωτερική),

$n = 0, 1, 2, \dots$, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara

για διδιάστατες ροές $(2-D) = K_{n,sd}^{(\ell)}(\tau) [=] -$

$L_{n,sd}^{(\ell)}$ = βοηθητική συνάρτηση για $\ell = i$ (εσωτερική) και για $\ell = e$ (εξωτερική),

$n = 0, 1, 2, \dots$, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara

για διδιάστατες ροές $(2-D) = L_{n,sd}^{(\ell)}(\tau) [=] -$

$l_{n,sd}$ = σταθερή ποσότητα για $n = 0, 1, 2, \dots$, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους

σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές $(2-D) [=] -$

$k_{n,sd}$ = σταθερή ποσότητα για $n = 0, 1, 2, \dots$, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους

σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές $(2-D) [=] -$

$m_{n,sd}$ = σταθερή ποσότητα για $n = 0, 1, 2, \dots$, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους

σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές $(2-D) [=] -$

f_{sd} = βοηθητική συνάρτηση ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές ($2-D$) = $f_{sd}(\tau)$ [=] m/s

$\mathbf{v}_{sd}^{(0)PN}$ = κύριος πρώτος όρος για το επίμηκες σφαιροειδές πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές ($2-D$) = $\mathbf{v}_{sd}^{(0)PN}(\mathbf{r})$ με συνιστώσες $v_{\tau,sd}^{(0)PN}(\mathbf{r})$ και $v_{\zeta,sd}^{(0)PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m/s

$\mathbf{p}_{sd}^{(0)PN}$ = κύριος πρώτος όρος για το επίμηκες σφαιροειδές πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές ($2-D$) = $\mathbf{p}_{sd}^{(0)PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²

$\omega_{sd}^{(0)PN}$ = κύριος πρώτος όρος για το επίμηκες σφαιροειδές πεδίο στροβιλισμού στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές ($2-D$) = $\omega_{sd}^{(0)PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] 1/s

$\Psi_{sd}^{(0)}$ = κύριος πρώτος όρος για την επιμήκη σφαιροειδή συνάρτηση δυναμικού ροής ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές ($2-D$) = $\Psi_{sd}^{(0)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ [=] m³/s

$D_{n,sd}^K$ = ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων από τη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές ($2-D$) για $n \geq 0$ [=] 1/m³

- $L_{1,sd}$ = σταθερή ποσότητα ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) [=] –
- $L_{2,sd}$ = σταθερή ποσότητα ορισμένη στο μοντέλο επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) [=] –
- $\bar{U}_{sd}$ = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή ταχύτητα διακένου ή φαινόμενη ταχύτητα που προσεγγίζει επίμηκες σφαιροειδές σωματίδιο εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για διδιάστατες ροές (2-D) που λαμβάνει υπόψη του και τα διάκενα μεταξύ των φανταστικών εξωτερικών ρευστών επιφανειών όταν αναφερόμαστε σε όλο το πορώδες μέσο, όπου στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $\bar{U}_{\kappa,sd}$, $\kappa = 1, 2, 3$ με $\bar{U}_{1,sd} = \bar{U}_{sd}$ και $\bar{U}_{2,sd} = \bar{U}_{3,sd} = 0$ [=] m/s
- $\bar{P}_{0sd}^{PN}$ = τροποποιημένη αυθαίρετη επιμήκης σφαιροειδής σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²

Σύμβολα στην ελλειψοειδή γεωμετρία.

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ = ημιάξονες σταθερού ελλειψοειδούς [=] m
- $f(\lambda)$ = βοηθητική συνάρτηση στην εύρεση των συντεταγμένων επιφανειών στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων, όπου $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ είναι παράμετρος [=] –
- h_κ = ημιεστιακές αποστάσεις ελλειψοειδούς για $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m
- ρ = ελλειψοειδής ακτινική συνιστώσα, $\rho \in (h_2, +\infty)$ [=] m
- μ, ν = ελλειψοειδείς γωνιακές συνιστώσες, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$ [=] m
- $\hat{\rho}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$ = ελλειψοειδής ορθοκανονική βάση [=] –
- $\mathbf{r}$ = $\Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \{(\rho, \mu, \nu) : \rho \in (h_2, +\infty), \mu \in (h_3, h_2), \nu \in (-h_3, h_3)\}$
- $\hat{\mathbf{r}}$ = $\partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \{(\mu, \nu) : \mu \in (h_3, h_2), \nu \in (-h_3, h_3)\}$

h_ρ, h_μ, h_ν = μετρικοί συντελεστές στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων [=] $-, -, -$, αντίστοιχα

J_{el} = Ιακωβειανή στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων [=] $-$

S_ρ = μοναδικά καθορισμένο και μη εκφυλισμένο ελλειψοειδές, $\rho \in (h_2, +\infty)$ [=] m^2

S_μ = μοναδικά καθορισμένο και μη εκφυλισμένο μονόχωνο υπερβολοειδές, $\mu \in (h_3, h_2)$ [=] m^2

S_ν = μοναδικά καθορισμένο και μη εκφυλισμένο δίχωνο υπερβολοειδές, $\nu \in (-h_3, h_3)$ [=] m^2

$\hat{\mathbf{n}}_{el}$ = εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο ή ορθομοναδιαίο διάνυσμα μιας επιφάνειας στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων = $\hat{\mathbf{n}}_{el}(\mathbf{r})$ [=] $-$

ξ, η, ζ = θερμομετρικές παράμετροι, μέσων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, στον ορισμό του διαφορικού τελεστή του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων = $\xi(\rho), \eta(\mu), \zeta(\nu)$, $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$ [=] $1/m$

E_n^m = εσωτερικές ιδιοσυναρτήσεις Lamé βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n + 1 = E_n^m(x)$, $x = \rho, \mu, \nu$ [=] m^n

F_n^m = εξωτερικές ιδιοσυναρτήσεις Lamé βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n + 1 = F_n^m(x)$, $x = \rho, \mu, \nu$ [=] $m^{-(n+1)}$

$I_n^m(\rho)$ = ελλειπτικά ολοκληρώματα βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$ στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων [=] $m^{-(2n+1)}$

IE_n^m = βαθμωτές εσωτερικές συμπαγείς ελλειψοειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n + 1 = IE_n^m(\mathbf{r})$ [=] m^{3n}

IF_n^m = βαθμωτές εξωτερικές συμπαγείς ελλειψοειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n + 1 = IF_n^m(\mathbf{r})$ [=] m^{n-1}

u_{el} = βοηθητική βαθμωτή αρμονική συνάρτηση–δυναμικού στον ορισμό των
βαθμωτών συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων $= u_{el}(\mathbf{r})$
[=] (εξαρτάται)

$\delta_{n,el}^{(i)m}$ = βοηθητικοί βαθμωτοί εσωτερικοί σταθεροί συντελεστές για $n = 0, 1, 2, \dots$
και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ στο γενικό ανάπτυγμα της αρμονικής συνάρτησης u_{el}
[=] (εξαρτάται)

$\delta_{n,el}^{(e)m}$ = βοηθητικοί βαθμωτοί εξωτερικοί σταθεροί συντελεστές για $n = 0, 1, 2, \dots$
και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ στο γενικό ανάπτυγμα της αρμονικής συνάρτησης u_{el}
[=] (εξαρτάται)

$l_p(\mu, \nu)$ = συνάρτηση βάρους στην ορθογωνιότητα των επιφανειακών ελλειψοειδών
αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια ενός σταθερού
ελλειψοειδούς $\rho = \rho_0$ [=] $1/m^2$

γ_n^m = σταθερές κανονικοποίησης στην ορθογωνιότητα των επιφανειακών
ελλειψοειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια ενός σταθερού
ελλειψοειδούς $\rho = \rho_0$ για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ [=] m^{4n}

Λ, Λ' = σταθερές στον ορισμό των συναρτήσεων Lamé [=] m^2

$\Lambda_\kappa, \Lambda'_\kappa$ = σταθερές στον ορισμό των συναρτήσεων Lamé για $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m^2

$\delta_{\kappa l}$ = δέλτα του Kronecker για $\kappa, l = 1, 2, 3$

x_κ = Καρτεσιανές συντεταγμένες για $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m

$\hat{x}_\kappa$ = καρτεσιανή ορθοκανονική βάση για $\kappa = 1, 2, 3$ [=] –

$\mathbf{R}^{el}$ = “προβληματικός”, όσον αφορά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών,
ελλειψοειδής παράγοντας $= \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r})$ [=] $1/m^2$

“ PN ” = συντομογραφία για τη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch – Neuber

$\mathbf{v}_{el}^{PN}$ = ελλειψοειδές πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση Papkovitch –
Neuber $= \mathbf{v}_{el}^{PN}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ [=] m/s

P_{el}^{PN} = ελλειψοειδές πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση
Papkovitch – Neuber $= P_{el}^{PN}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ [=] Pa ή N/m^2 ή kg/ms^2

- P_{0el}^{PN} = αυθαίρετη ελλειψοειδής σταθερή πίεση στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- Φ_{el} = διανυσματικό ελλειψοειδές αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber = $\Phi_{el}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] m/s
- Φ_{0el} = βαθμωτό ελλειψοειδές αρμονικό δυναμικό στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber = $\Phi_{0el}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] m²/s
- p_{el}^{PN} = ελλειψοειδές πεδίο θερμοδυναμικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber = $p_{el}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- $\tilde{\Pi}_{el}^{PN}$ = ελλειψοειδές πεδίο ολικού τανυστή των τάσεων στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber = $\tilde{\Pi}_{el}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²
- ω_{el}^{PN} = ελλειψοειδές πεδίο στροβιλισμού στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber = $\omega_{el}^{PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] 1/s
- $e_{n,el}^{(i/e)m}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί διανυσματικοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού $\Phi_{el} = c_{n,el}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,el}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,el}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_3$ [=] m⁻³ⁿ⁺¹/s ή m⁻ⁿ⁺²/s
- $d_{n,el}^{(i/e)m}$ = εσωτερικοί ή εξωτερικοί βαθμωτοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ στο γενικό ανάπτυγμα του αρμονικού δυναμικού Φ_{0el} [=] m⁻³ⁿ⁺²/s ή m⁻ⁿ⁺³/s
- ρ_a = “ακτίνα” του ελλειψοειδούς στερεού σωματιδίου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) [=] m
- ρ_b = “ακτίνα” του εξωτερικού ελλειψοειδούς που περιβάλλει το ελλειψοειδές στερεό σωματίδιο “ακτίνας” ρ_a με τη ρευστή επιφάνεια να αποτελεί το

εξωτερικό νοητό σύνορο που απαιτείται για να μοντελοποιηθεί η ροή του σμήνους ελλειψοειδών σωματιδίων μέσα στο πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) [=] m

$\rho \in [\rho_a, \rho_b]$ = διάστημα μεταβολής της ελλειψοειδούς “ακτινικής” συνιστώσας που διατρέχει στο διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ στη μελέτη του μοντέλου κυττάρου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) [=] m

U_{el} = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή μεταφορική ταχύτητα ενός ελλειψοειδούς σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D), όπου στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $U_{\kappa,el}$, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m/s

Ω_{el} = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή περιστροφική ή γωνιακή ταχύτητα ενός ελλειψοειδούς σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D), όπου στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $\Omega_{\kappa,el}$, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] 1/s

$\bar{U}_{el}$ = αυθαίρετη ομοιόμορφη και σταθερή μεταφορική ταχύτητα διακένου ή φαινόμενη ταχύτητα ενός ελλειψοειδούς σωματιδίου εντός πορώδους μέσου στο μοντέλο σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) που λαμβάνει υπόψη του και τα διάκενα μεταξύ των φανταστικών εξωτερικών ρευστών επιφανειών όταν αναφερόμαστε σε όλο το πορώδες μέσο, όπου στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες είναι οι $\bar{U}_{\kappa,el}$, $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m/s

$\mathbf{v}_{el}^{(0)PN}$ = κύριος πρώτος όρος για το ελλειψοειδές πεδίο ταχύτητας στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) = $\mathbf{v}_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ [=] m/s

$P_{el}^{(0)PN}$ = κύριος πρώτος όρος για το ελλειψοειδές πεδίο ολικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) $= P_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega$ (Ⓢ^3) [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²

$p_{el}^{(0)PN}$ = κύριος πρώτος όρος για το ελλειψοειδές πεδίο θερμοδυναμικής πίεσης στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) $= p_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega$ (Ⓢ^3) [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²

$\tilde{\Pi}_{el}^{(0)PN}$ = κύριος πρώτος όρος για το ελλειψοειδές πεδίο ολικού τανυστή των τάσεων στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) $= \tilde{\Pi}_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega$ (Ⓢ^3) [=] Pa ή N/m² ή kg/ms²

$\omega_{el}^{(0)PN}$ = κύριος πρώτος όρος για το ελλειψοειδές πεδίο στροβιλισμού στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) $= \omega_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega$ (Ⓢ^3) [=] 1/s

$\lambda_{\kappa l}$ = σταθερή ποσότητα για $\kappa, l=1,2,3$, $\kappa \neq l$, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) [=] –

N_{κ} = σταθερή ποσότητα για $\kappa=1,2,3$, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) [=] m²

- P_{κ}^l = σταθερή ποσότητα για $\kappa, l = 1, 2, 3$, $\kappa \neq l$, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) [=] $1/\text{m}^2$
- $R^{\kappa+l}$ = σταθερή ποσότητα για $\kappa, l = 1, 2, 3$, $\kappa \neq l$, ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) [=] $1/\text{s}$
- $Z(\rho)$ = βοηθητική συνάρτηση ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D) [=] m/s
- $H_{\kappa}(\rho)$ = βοηθητική συνάρτηση ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D), $\kappa = 1, 2, 3$ [=] $1/\text{m}^2\text{s}$
- $\Theta_{\kappa}(\rho)$ = βοηθητική συνάρτηση ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D), $\kappa = 1, 2, 3$ [=] $1/\text{s}$
- $M_{\kappa}^l(\rho)$ = βοηθητική συνάρτηση ορισμένη στο μοντέλο ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο σε πορώδες μέσο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για τρισδιάστατες ροές (3-D), $\kappa, l = 1, 2, 3$, $\kappa \neq l$ [=] $1/\text{m}^3\text{s}$

Πρόσθετα σύμβολα παραρτημάτων.

- u, v = αυθαίρετες βαθμωτές συναρτήσεις στις γενικές ταυτότητες [=] (εξαρτάται)
- f, g = αυθαίρετες διανυσματικές συναρτήσεις στις γενικές ταυτότητες [=] (εξαρτάται)
- h, q = αυθαίρετες διανυσματικές συναρτήσεις στις γενικές ταυτότητες [=] (εξαρτάται)
- $\tilde{\zeta}$ = αυθαίρετο δυαδικό ή τανυστής δευτέρας τάξης στις γενικές ταυτότητες [=] (εξαρτάται)
- $\tilde{\zeta}^T$ = ανάστροφο αυθαίρετο δυαδικό ή ανάστροφος τανυστής δευτέρας τάξης στις γενικές ταυτότητες [=] (εξαρτάται)

- x = μεταβλητή που “τρέχει” στο χώρο των πραγματικών αριθμών, $x \in \mathbf{8} [=]$ (εξαρτάται)
- n = βαθμός ειδικής συνάρτησης
- m = τάξη ειδικής συνάρτησης
- P_n^m = συσχετισμένες ή προσαρτημένες ειδικές συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n = P_n^m(x)$, $x \in \mathbf{8} [=]$ –
- Q_n^m = συσχετισμένες ή προσαρτημένες ειδικές συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n = Q_n^m(x)$, $x \in \mathbf{8} [=]$ –
- φ = αζιμουθιακή γωνία στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin m\varphi$ και $\cos m\varphi$ για κάθε $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) [=] –
- P_n = πολυώνυμα Legendre ή συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots = P_n(x)$, $x \in \mathbf{8} [=]$ –
- Q_n = συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots = Q_n(x)$, $x \in \mathbf{8} [=]$ –
- G_n = πολυώνυμα Gegenbauer ή ειδικές συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου είδους, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots = G_n(x)$, $x \in \mathbf{8} [=]$ –
- H_n = ειδικές συναρτήσεις Gegenbauer δευτέρου είδους, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots = H_n(x)$, $x \in \mathbf{8} [=]$ –
- $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ = σταθερές που εμφανίζονται στις αναγωγικές σχέσεις για τις ειδικές συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου και δευτέρου είδους για βαθμό $n \geq 4$ [=] –
- E_n = εσωτερικές ιδιοσυναρτήσεις Lamé βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots = E_n(x)$, $x \in \mathbf{8} [=]$ mⁿ
- F_n = εξωτερικές ιδιοσυναρτήσεις Lamé βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots = F_n(x)$, $x \in \mathbf{8} [=]$ m⁻⁽ⁿ⁺¹⁾
- h_1, h_2, h_3 = παράμετροι της εξίσωσης Lamé (ημιεστιακές αποστάσεις ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων) [=] m
- A, B, p = σταθερές της εξίσωσης Lamé με $A, B, p \in \mathbf{8} [=]$ (εξαρτάται)

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ = γεωμετρικές παράμετροι της εξίσωσης Lamé συνδεόμενες άμεσα με τα

$$h_\kappa, \kappa = 1, 2, 3 \text{ (ημιάξονες του ελλειψοειδούς) [=] m}$$

ρ, μ, ν = μεταβλητές τιμές της παραμέτρου $x \in \mathfrak{E}$ που εμφανίζονται στην εξίσωση Lamé (μεταβλητές ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων), όπου

$$\rho \in (h_2, +\infty), \mu \in (h_3, h_2), \nu \in (-h_3, h_3) \text{ (στην επιφάνεια, } \rho = \rho_s) [=] m$$

Ψ_n = ιδιοσυνάρτηση στην μέθοδο υποβιβασμού τάξης για την εύρεση των εξωτερικών συναρτήσεων Lamé βαθμού $n=0, 1, 2, \dots = \Psi_n(x), x \in \mathfrak{E}$ [=] (εξαρτάται)

E_n^m = εσωτερικές συναρτήσεις Lamé στην πλήρη μορφή τους βαθμού $n=0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n+1 = E_n^m(x), x \in \mathfrak{E}$ [=] m^n

F_n^m = εξωτερικές συναρτήσεις Lamé στην πλήρη μορφή τους βαθμού $n=0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n+1 = F_n^m(x), x \in \mathfrak{E}$ [=] $m^{-(n+1)}$

Λ, Λ' = σταθερές στον ορισμό των συναρτήσεων Lamé [=] m^2

$\Lambda_\kappa, \Lambda'_\kappa$ = σταθερές στον ορισμό των συναρτήσεων Lamé για $\kappa = 1, 2, 3$ [=] m^2

$\delta_{\kappa l}$ = δέλτα του Kronecker για $\kappa, l = 1, 2, 3$

γ_n^m = σταθερές κανονικοποίησης στην ορθογωνιότητα που αφορά τις εσωτερικές συναρτήσεις Lamé σε συγκεκριμένα διαστήματα του x για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ [=] m^{4n}

$l_\rho(\mu, \nu)$ = συνάρτηση βάρους στην ορθογωνιότητα που αφορά τις επιφανειακές συναρτήσεις Lamé, στην επιφάνεια ενός σταθερού ελλειψοειδούς $\rho = \rho_s$, σε συγκεκριμένα διαστήματα του $x = \mu, \nu$ για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ [=] $1/m^2$

$F(\phi, k)$ = ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους για $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ και $0 < k < 1$ (πλήρες για $\phi = \frac{\pi}{2}$) [=] (εξαρτάται)

$E(\phi, k)$ = ελλειπτικό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους για $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ και $0 < k < 1$ (πλήρες για $\phi = \frac{\pi}{2}$) [=] (εξαρτάται)

$\Pi(\phi, \eta, k)$ = ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους για $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ και $0 < k < 1$ (πλήρες

για $\phi = \frac{\pi}{2}$) [=] (εξαρτάται)

B = διαρμονική συνάρτηση ή συνάρτηση που ανήκει στον πυρήνα του Δ^2 στο θεώρημα αναπαράστασης του Almansi $= B(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] (εξαρτάται)

B_1 = αρμονική συνάρτηση ή συνάρτηση που ανήκει στον πυρήνα του Δ στο θεώρημα αναπαράστασης του Almansi $= B_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] (εξαρτάται)

B_2 = αρμονική συνάρτηση ή συνάρτηση που ανήκει στον πυρήνα του Δ στο θεώρημα αναπαράστασης του Almansi $= B_2(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] (εξαρτάται)

X = τρισδιάστατη εσωτερική αρμονική στο θεώρημα αναπαράστασης του Almansi $= X(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] (εξαρτάται)

Ψ = τρισδιάστατη εσωτερική αρμονική στο θεώρημα αναπαράστασης του Almansi $= \Psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ [=] (εξαρτάται)

E^2 = διαφορικός τελεστής για αξονοσυμμετρικές ροές Stokes [=] $1/\text{m}^2$

E^4 = διαφορικός τελεστής της σύνθεσης δύο τελεστών E^2 , $E^4 = E^2 \circ E^2$, για αξονοσυμμετρικές ροές Stokes [=] $1/\text{m}^4$

Ψ = συνάρτηση ροής που ανήκει στον πυρήνα του E^4 στο θεώρημα αναπαράστασης για αξονοσυμμετρικές ροές $= \Psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^2)$ [=] m^3/s

Ψ_1 = συνάρτηση ροής που ανήκει στον πυρήνα του E^2 στο θεώρημα αναπαράστασης για αξονοσυμμετρικές ροές $= \Psi_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^2)$ [=] m^3/s

Ψ_2 = συνάρτηση ροής που ανήκει στον πυρήνα του E^2 στο θεώρημα αναπαράστασης για αξονοσυμμετρικές ροές $= \Psi_2(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^2)$ [=] m^3/s

$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\mathbf{r})$ = τανυστικό πεδίο τάσεων στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων που περιέχει την ολική πίεση [=] Pa ή N/m^2 ή kg/ms^2

$\tau_{(n)}$ = διάνυσμα των τάσεων που αναφέρεται στο τανυστικό πεδίο τάσεων $\tilde{\tau}$ στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων [=] Pa ή N/m^2 ή kg/ms^2

L = γενική μορφή διαφορικού τελεστή στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων [=] (εξαρτάται)

-
- B = γενική μορφή διαφορικού τελεστή συννοριακών συνθηκών στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων [=] (εξαρτάται)
- u, v, h = $u(\mathbf{r}), v(\mathbf{r}), h(\mathbf{r})$ = βοηθητικές συναρτήσεις στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων [=] (εξαρτάται)
- E = γενική μορφή θεμελιώδους λύσης στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων = $E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathfrak{G}^3)$ ή για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathfrak{G}^2)$ [=] (εξαρτάται)
- $f = f(\mathbf{r})$ = γενική μορφή συνάρτησης κατανομής πηγών ή ιδιομορφιών στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων [=] (εξαρτάται)
- $g = g(\mathbf{r})$ = γενική μορφή συνάρτησης των συννοριακών συνθηκών στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων [=] (εξαρτάται)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Φυσικά φαινόμενα που σχετίζονται με τη θεωρία της ροής ρευστών είναι γνωστά από τα αρχαία χρόνια. Οι πρώτες γνώσεις στη Μηχανική των ρευστών αποδίδονται στους Αιγυπτίους, στο 3000 προ Χριστού, σε συσχετισμό με διάφορες ναυπηγικές κατασκευές και αν εξαιρέσουμε την ενεργή παρουσία του Αρχιμήδη όσον αφορά τη Στατική των ρευστών τον τρίτο αιώνα προ Χριστού, πέρασαν 40 αιώνες απραξίας και απουσίας προόδου στο συγκεκριμένο επιστημονικό τομέα. Τα πρώτα βήματα ενασχόλησης με τον τομέα της Ρευστομηχανικής άρχισαν το Μεσαίωνα με τον Galileo, που μελέτησε αρχικά τους νόμους της πτώσης σωμάτων μέσα στην ατμόσφαιρα και με τον Newton στη συνέχεια, που συμπλήρωσε τους νόμους αυτούς και μέσω σημαντικών πειραματικών νόμων, όπως αυτός της τριβής των ρευστών, έθεσε τα θεμέλια της Κλασικής Μηχανικής. Η κυρίως, όμως, Μηχανική των Ρευστών μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπτύσσεται με τις μελέτες του Torricelli από το 1608 έως το 1647 γύρω από την εκροή ρευστών από στόμια δεξαμενών, οι οποίες συμπληρώθηκαν από το Γάλλο σύγχρονό του Pascal μέχρι το 1662, που ήταν ο πρώτος ίσως που διαπίστωσε ότι η αντίσταση που οφείλεται στη ροή του ρευστού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητάς του. Ο 18^{ος} αιώνας ανήκει αποκλειστικά σε αρκετούς μεγάλους επιστήμονες και θεμελιωτές του κλάδου της Ρευστομηχανικής. Ο πρώτος είναι ο Bernoulli (1700–1782) που διατύπωσε και το ομώνυμο θεώρημα, που ουσιαστικά είναι η μαθηματική διατύπωση της αρχής διατηρήσεως της ενέργειας στα ρευστά, ενώ την ίδια περίπου περίοδο με τον Bernoulli έζησε και ο D' Alembert,

που μελέτησε την αντίσταση που εξασκείται πάνω σε ένα σώμα κινούμενο σε ιδανικό ρευστό και ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την αρχή διατηρήσεως της μάζας που, τελικά, οδήγησε στη γνωστή εξίσωση της συνέχειας. Οι βασικές εξισώσεις κινήσεως για ιδανικά (ανιζώδη) ρευστά παρουσιάστηκαν από τον Euler τον ίδιο αιώνα, του οποίου οι εργασίες υπήρξαν αντικείμενο μελέτης και συνέχειας από τον Lagrange. Οι αντίστοιχοι νόμοι κινήσεως που διατυπώθηκαν από τον Euler, αλλά για πραγματικά (ιζώδη) ρευστά εκφράστηκαν από τους Navier (1783–1836) και Stokes (1819–1903) (εξισώσεις Navier – Stokes), όπου ο τελευταίος θεωρείται και ο γνήσιος θεμελιωτής της σύγχρονης θεωρίας της Υδροδυναμικής. Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα αναφέρουμε δύο επιστήμονες οι οποίοι εδραίωσαν στο χώρο της Ρευστομηχανικής σημαντικές θεωρίες, όπως αυτές που αναφέρονται στις πηγές (Rankine) με πολύ μεγάλη χρησιμότητα στην Αεροδυναμική, και αυτές που θεμελίωσαν τις στροβιλώδεις κινήσεις (Helmoltz). Ο Helmholtz, συγκεκριμένα, ήταν και ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια του ασυνεχούς, όπου η μελέτη του συνεχίστηκε σε πιο αναλυτική βάση από τους Kirchhof (1824–1887) και Rayleigh (1842–1919).

Μέσα στο πλαίσιο της γενικότητας των ιζωδών ρευστών κινήθηκε και ο Hagen, ο οποίος διαπίστωσε για πρώτη φορά το 1839 την ύπαρξη δύο ειδών ιζώδους ροής, τη στρωτή και τη στροβιλώδη. Ειδικότερα, ο Hagen παρατήρησε ότι, κατά τη ροή ενός ρευστού μέσα σε έναν κυκλικό αγωγό, το είδος και τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής μεταβάλλονταν όταν η ταχύτητα του ρευστού γινόταν μεγαλύτερη από μία ορισμένη τιμή. Όμως ο Hagen δεν κατάφερε να αναγνωρίσει τη βασική παράμετρο η οποία επηρέαζε το είδος της ροής, κάτι που έγινε πολύ αργότερα, το 1883, από τον Reynolds που ήταν ουσιαστικά ο πρώτος ερευνητής που ασχολήθηκε συστηματικά με τη μελέτη της ροής ρευστών μέσα σε κυλινδρικούς αγωγούς [97]. Με τον ορισμό του ομώνυμου αδιάστατου αριθμού, ο Reynolds κατάφερε να ορίσει το βασικό κριτήριο για τη μετάπτωση από τη στρωτή ροή στην τυρβώδη και αντίστροφα.

Ωστόσο, λίγο πιο πριν το 1851, σαν συνέχεια των εξισώσεων Navier – Stokes, ο Stokes εισήγαγε μερικές βασικές απλοποιήσεις αυτών των εξισώσεων με σκοπό να απλουστεύσει τη μαθηματική διατύπωση χωρίς να προσβάλει τη φυσική υπόσταση. Οι απλοποιημένες μορφές των εξισώσεων Navier – Stokes, δηλαδή οι εξισώσεις Stokes για τη μόνιμη ή ψευδομόνιμη ροή ενός ιζώδους, ασυμπίεστου ρευστού σε μικρούς αριθμούς Reynolds, οι οποίες είναι γνωστές πάνω από έναν αιώνα και αποτελούν τη βάση επίλυσης πολλών Νευτώνειων προβλημάτων ροής, συνδέουν ένα

διανυσματικό διαρμονικό πεδίο ταχύτητας με ένα βαθμωτό αρμονικό πεδίο ολικής πίεσης. Η αναφορά [108] αποτελεί και την πρώτη εμφάνιση της “Ροής Stokes” στη βιβλιογραφία.

Οι παραπάνω παράγραφοι αποτελούν μια σύντομη ιστορική αναδρομή από την Αρχαιότητα μέχρι και τα τέλη του 19^{ου} αιώνα, όπου οι κανόνες του Stokes εγκαθίστούν μια καινούργια αρχή στη μελέτη μιας πληθώρας προβλημάτων ροής ρευστών οι οποίες χαρακτηρίζονται σαν έρπουσες και αποτελούν τη βάση για την έρευνα που αναπτύχθηκε στην παρούσα Διατριβή. Τα τελευταία 100 χρόνια από το 1900 έως και τις αρχές του 2000 αρκετά σημαντικά φυσικά προβλήματα ακολουθούν τους κανόνες του Stokes και επιδεικνύουν Νευτώνεια συμπεριφορά, η οποία χαρακτηρίζεται από σταθερές ιδιότητες, όπως η πυκνότητα και το ιξώδες. Τα υπόλοιπα προβλήματα σχετίζονται με ρευστά που δεν έχουν τις ιδιότητες των ρευστών Stokes και επιδέχονται διαφορετικού είδους προσεγγίσεις. Ειδικότερα, η μη Νευτώνεια συμπεριφορά [73,101] αναφέρεται σε υγρά που χρειάζονται πρόσθετες παραμέτρους για να χαρακτηρισθούν επαρκώς και αποτελεί έναν ιδιαίτερο κλάδο, τη Ρεολογία. Από την άλλη, παρόλο που η ιδιότητα της ασυμπιεστότητας αφορά τα υγρά και τα αέρια, η συμπίεστη ροή [83,114] εμφανίζεται συχνότερα σε ροή αερίων και συνδέεται άμεσα με τον αδιάστατο αριθμό Mach, ενώ χαρακτηριστικό της σταθερής ροής είναι η μη ύπαρξη χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων και μεγεθών σε αντίθεση με τη μεταβατική ροή που τα πεδία ροής εξελίσσονται με το χρόνο [120–122]. Εμείς, στην εργασία αυτή, ασχολούμαστε σε γενικό επίπεδο με τη ροή Stokes στη μελέτη θεωρητικών και πρακτικών προβλημάτων ροής ρευστών.

Προτού, όμως, προχωρήσουμε στην ιστορική ανασκόπηση των τελευταίων 100 χρόνων σε τρόπους επίλυσης ροών Stokes και σε αναφορές των βασικότερων μοντέλων μελέτης της ροής γύρω από στερεά σωματίδια, αξίζει να αναφέρουμε μερικούς βασικούς και ιδιαίτερους κλάδους της Μηχανικής των ρευστών, όπως την Μαγνητοϋδροδυναμική [31,112], που μελετά τα φαινόμενα αλληλεπίδρασης ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων που αναπτύσσονται στην κίνηση ενός ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού κάτω από την επίδραση ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Μόλις το 1904 ο Prandtl γεφύρωσε οριστικά σχεδόν το χάσμα μεταξύ της Κλασσικής Υδροδυναμικής και της Υδραυλικής, όπου απέδειξε πως η ροή γύρω από ένα στερεό σώμα χωρίζεται σε δύο περιοχές. Στο οριακό στρώμα [84,100], μια πολύ λεπτή στοιβάδα ρευστού που περιβάλλει την επιφάνεια του στερεού και όπου επικρατούν έντονα φαινόμενα τριβής, και στην υπόλοιπη περιοχή έξω από το οριακό στρώμα,

όπου η τριβή θεωρείται αμελητέα και η ροή χαρακτηρίζεται δυναμική. Με αυτό τον τρόπο, εδραιώθηκε η έννοια της ιξώδους ροής που χαρακτηρίζει και την προαναφερθείσα ροή κατά Stokes. Παρόλα αυτά, το αντικείμενο αυτής της Διατριβής περιορίζεται στη μη εκτεταμένη μελέτη της ροής σε πολύ μικρή απόσταση από το σωματίδιο, αφού δεν λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα οριακού στρώματος.

Η σχετική κίνηση ρευστού ως προς σμήνη μικρών σωματιδίων αποτελεί περιοχή μεγάλου ενδιαφέροντος σε σημαντικούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας [34] και σχετίζεται άμεσα με τη μελέτη των πορωδών μέσων και των εφαρμογών τους τόσο στη Βιομηχανία, όσο και στη μελέτη πολλών εργαστηριακών φαινομένων στον κλάδο της Χημικής Μηχανικής. Τα περισσότερα από αυτά τα φαινόμενα βασίζονται στη μελέτη της αλληλεπίδρασης συστημάτων σωματιδίου–ρευστού, όπου έχουμε να αντιμετωπίσουμε είτε φαινόμενα κίνησης σωματιδίων μέσα σε ηρεμούντα ρευστά, είτε φυσικά φαινόμενα όπου το ρευστό περνάει διαμέσου στάσιμων σωματιδίων. Σε κάθε περίπτωση ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων απορρέει από την προτυποποίηση αυτών των φαινομένων. Η μελέτη των συστημάτων σωματιδίου–ρευστού μέσα σε πορώδη μέσα καθίσταται αρκετά πιο απλή με την ανάπτυξη διαφόρων προτύπων ή μοντέλων, όπως λέγονται, τα οποία μέσω μιας σειράς απλουστεύσεων και υποθέσεων που θα δούμε αργότερα, κατορθώνουν να απλοποιούν τη μαθηματική περιγραφή των προβλημάτων ροής και μεταφοράς, επιτυγχάνοντας έτσι ευκολότερη πρόσβαση στη λύση τους, χωρίς να μειώνεται η πιστότητά τους προς τη φυσική διεργασία που προσομοιάζουν. Συνεπώς, το πρόβλημα κάθε φορά εστιάζεται στην κατάλληλη επιλογή των υποθέσεων και των απλουστεύσεων του εκάστοτε φυσικού προβλήματος ροής.

Μια πρώτη βασική υπόθεση έχει ήδη προαναφερθεί και αφορά τις συνθήκες Stokes που επικρατούν όταν μελετάται η ροή γύρω από τα σωματίδια. Η απλούστευση αυτή δικαιολογείται γιατί σε πολλά σωματιδιακά συστήματα οι κινήσεις είναι έρπουσες είτε λόγω της “αργής” κίνησης, είτε λόγω του μικρού μεγέθους των σωματιδίων. Τα συστήματα αυτά χαρακτηρίζονται επίσης από την ισχυρά ιξώδη συμπεριφορά τους, Shapiro [102], ενώ σε πολλές πρακτικές εφαρμογές ο αριθμός του Reynolds είναι αρκετά μικρός, παραδοχή που ισχύει λόγω της υπόθεσης ροής Stokes. Στην περίπτωση της έρπουσας ροής η λύση είναι και μοναδική, αλλά αυτό δεν συμβαίνει σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds, ενώ η γεωμετρία παίζει πολλές φορές

καθοριστικό ρόλο στον πλήρη καθορισμό της αναλυτικής λύσης σε τέτοιου είδους συστήματα.

Υπάρχουν αρκετοί μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών σε σωματιδιακά συστήματα σε πορώδη μέσα, όπως η μέθοδος των ανακλάσεων, η τεχνική των μοναδιαίων κυττάρων, η χρήση γενικευμένων συναρτήσεων Green για την επίλυση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων κίνησης, καθώς και εφαρμογή των πιο πολύπλοκων τεχνικών “ειδώλων” [36], τοπικής ταύτισης [104] και της θεωρίας των μεταβολών [106]. Σε κάθε περίπτωση η λύση λαμβάνεται σε αναλυτική μορφή, αλλά η δυσκολία έγκειται κάθε φορά στον τρόπο επίλυσης και στη διαδικασία που εφαρμόζεται για την επίτευξη ενός ικανοποιητικού αποτελέσματος. Η δυσκολία της κάθε μεθόδου έγκειται κάθε φορά στις προσεγγίσεις που χαρακτηρίζουν την κάθε μια. Το αντικείμενο της εν λόγω Διατριβής περιορίζεται στην ανάπτυξη της τεχνικής των μοναδιαίων κυττάρων με απώτερο σκοπό να ελαττώσουμε το πλήθος και το μέγεθος των υπολογισμών, αλλά συγχρόνως να καταστήσουμε εφικτή τη χρήση των απαραίτητων συνοριακών συνθηκών που διέπουν το πρόβλημα. Για να επιτευχθεί αυτό έχουν εισαχθεί τα μοντέλα κυττάρων ή, όπως είναι γνωστά, τα μοντέλα “σωματίδιο σε κύτταρο”, τα οποία αποτελούν μια από τις πιο αποτελεσματικές προσπάθειες για τη μοντελοποίηση μη συμπαγών δομών σωματιδίων κατανεμημένων στο χώρο. Σύμφωνα με τη τεχνική των μοναδιαίων κυττάρων, το εκάστοτε πρόβλημα συνοριακών τιμών για σχετική ροή σμήνους σωματιδίων μέσα σε πορώδες μέσο ανάγεται στη θεώρηση ενός μόνο σωματιδίου του σμήνους και ενός φανταστικού ρευστού συνόρου που το περιβάλλει. Έτσι, η θεώρηση ενός πλήρους διαστάσεων πορώδους μέσου ανάγεται σε αυτήν ενός σωματιδίου και του “ρευστού περιβλήματός” του, πράγμα που απλοποιεί σημαντικά τη μαθηματική περιγραφή οποιουδήποτε φαινομένου. Δηλαδή, το πρόβλημα ροής που πρέπει κάποιος να λύσει περιορίζεται στο χώρο του ρευστού φλοιού μεταξύ του στερεού σωματιδίου και της ρευστής επιφάνειας. Για την εξαγωγή μιας πλήρους αναλυτικής λύσης η πιο πάνω μοντελοποίηση συμπληρώνεται από τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του σωματιδίου και στο εξωτερικό σύνορο του ρευστού περιβλήματος. Η μέθοδος μοναδιαίου κυττάρου εφαρμόζεται κυρίως σε περιοδικές διατάξεις και σε προβλήματα που παρουσιάζουν πυκνές συγκεντρώσεις σωματιδίων μακριά από τα τοιχώματα που τα περικλείουν, έτσι ώστε οι αλληλεπιδράσεις των τοιχωμάτων με τα σωματίδια να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Τέλος, οι μόνες αλληλεπιδράσεις που υπάρχουν μεταξύ των σωματιδίων είναι και αυτές που καθορίζουν τις συνοριακές

συνθήκες στο εξωτερικό περίβλημα. Σε αυτό το σημείο πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η παραπάνω θεώρηση του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο δηλώνεται είτε από την κίνηση σωματιδίου σε ηρεμούν ρευστό, είτε από τη ροή ρευστού γύρω από ακίνητο σωματίδιο, με τη διαφορά να υπάρχει στις συνοριακές συνθήκες που υφίστανται μικρές μεταβολές.

Η σφαιρική γεωμετρία δίδει μία αρκετά καλή προσέγγιση για αρκετά εσωτερικά και εξωτερικά προβλήματα ροής που αφορούν μικρά σωματίδια. Παρόλα αυτά, η σφαιροειδής γεωμετρία και πολύ περισσότερο η πιο πολύπλοκη ελλειψοειδής αντιπροσωπεύει πιο πιστά φαινόμενα ροής όπως τα παραπάνω παραδείγματα. Εφόσον αυτή η οικογένεια προβλημάτων είναι αξιοσημείωτου πρακτικού και θεωρητικού ενδιαφέροντος, αξίζει να σημειωθεί η σπουδαιότητα της μελέτης της ροής γύρω από σφαιρικά, σφαιροειδή ή ελλειψοειδή σωματίδια μέσα σε πορώδη μέσα. Εμείς ενδιαφερόμαστε για τη ροή Stokes μια συνθήκη που ικανοποιείται λόγω του μικρού μεγέθους των αιωρούμενων σωματιδίων.

Στο πλαίσιο αυτού του είδους μελέτης έχουν αναπτυχθεί ισχυρές αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης όπως Stokesian δυναμική [11–13] ή προσομοίωση Lattice – Boltzmann [60], αλλά και σημαντικές αναλυτικές εφαρμογές για μελέτη σωματιδίων αυθαίρετου σχήματος που προτάθηκαν από τον Brenner σε μια σειρά εργασιών με καθαρά θεωρητικό υπόβαθρο [16–21].

Οι πρώτες αναλυτικές προσπάθειες αντιμετώπισης προβλημάτων ροής γύρω από στερεά σωματίδια με τη βοήθεια της μεθόδου των κυτταρικών μοντέλων εμφανίστηκαν στη πρώτη δεκαετία του 20^{ου} αιώνα και αφορούσαν, φυσικά, την απλή σφαιρική γεωμετρία [77] για την απεικόνιση των σωματιδίων. Ειδικότερα, ο Cunningham το 1910 [32] και μετέπειτα ο Uchida [116] το 1949 εισήγαγαν πρότυπα μοναδιαίου κυττάρου, όπου διαφέρουν στη θεώρηση του εξωτερικού συνόρου που ο μιν πρώτος θεώρησε την εξωτερική σφαιρική επιφάνεια στερεή εκφράζοντας με αυτό τον τρόπο την ύπαρξη των γειτονικών σφαιρών, ο δε δεύτερος υπέθεσε ότι ο ρευστός φλοιός που περιβάλλει τη σφαίρα έχει σχήμα κύβου. Πιο αναλυτικά, το μοντέλο του Uchida έχει το πλεονέκτημα ότι καλύπτει πλήρως το χώρο του πορώδους μέσου, αλλά μειονεκτεί στο γεγονός ότι η διαφορά στη γεωμετρία μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού σφαιρικού συνόρου οδηγεί σε τρισδιάστατο πρόβλημα ροής. Από την άλλη μεριά, ο Brenner [15] στη Διατριβή του το 1957, ανέπτυξε μία ακριβή λύση έρπουσας ροής για αυτή τη γεωμετρία χρησιμοποιώντας μια μέθοδο τοπικής

ταύτισης. Πρώτα ο Happel το 1958 [54] και μετά από ένα χρόνο ο Kuwabara το 1959 [66] πρότειναν μοντέλα κυττάρων, όπου το σωματίδιο και το εξωτερικό ρευστό σύνορο είναι και τα δύο σφαιρικά. Αυτή η προτυποποίηση έχει το σημαντικό πλεονέκτημα ότι οδηγεί σε μια αξονικά συμμετρική ροή που η λύση της δίνεται από μια απλή κλειστή μορφή, και οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα για υπολογισμούς μεταφοράς μάζας και θερμότητας. Το πάχος του ρευστού στρώματος υπολογίζεται έτσι ώστε το κλάσμα του στερεού όγκου του κυττάρου, που αποτελείται από τη στερεή σφαίρα με το ρευστό φλοιό, να είναι ίσο με το κλάσμα του στερεού όγκου όλου του σμήνους. Από την άλλη πλευρά, έχει το μειονέκτημα ότι ο εξωτερικός φλοιός δεν καλύπτει πλήρως το πορώδες μέσο, μια δυσκολία η οποία πρέπει να αντιμετωπιστεί, όταν περνάμε από την ιδέα του κυττάρου στο συσσωμάτωμα των σωματιδίων, όπου χρειάζεται να υπολογίσουμε τη διαπερατότητα του σμήνους. Η διαφορά μεταξύ των δύο θεωρήσεων Happel και Kuwabara βρίσκεται στις συνοριακές συνθήκες. Το μοντέλο Happel υποθέτει ότι η εσωτερική σφαίρα (η αρχή του συστήματος συντεταγμένων τοποθετείται στο κέντρο της) κινείται με μια σταθερή και ομοιόμορφη ταχύτητα στη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας της. Υποθέτοντας ψευδομόνιμη κατάσταση, οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται αναλογούν στη συνθήκη μη ολίσθησης στην επιφάνεια της εσωτερικής σφαίρας, καθώς και στον μηδενισμό της ακτινικής ταχύτητας και των επιφανειακών τάσεων στον εξωτερικό φλοιό. Το μοντέλο Kuwabara υποθέτει ότι η εσωτερική στερεά σφαίρα είναι στάσιμη (ακίνητη) και ότι το ρευστό περνάει διαμέσου του μοναδιαίου κυττάρου. Εδώ, οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι μηδενικές συνιστώσες ταχύτητας στην επιφάνεια του ακίνητου στερεού σωματιδίου, καθώς και μια ακτινική ταχύτητα ίση με μια ταχύτητα προσέγγισης στον εξωτερικό φλοιό και μηδενικός στροβιλισμός στην εξωτερική ρευστή σφαιρική επιφάνεια. Και οι δύο διατυπώσεις δίνουν ουσιαστικά τα ίδια αποτελέσματα για το πεδίο ταχύτητας (με την κατάλληλη αλλαγή του σημείου αναφοράς) και περίπου ίδιες δυνάμεις οπισθέλκουσας, Tien [115]. Ωστόσο, η θεώρηση του Happel έχει το σημαντικό πλεονέκτημα ότι δεν απαιτεί εναλλαγή μηχανικής ενέργειας μεταξύ του κυττάρου και του εξωτερικού περιβάλλοντος. Αντιθέτως, το μοντέλο Kuwabara απαιτεί ένα μικρό αλλά “σεβαστό” ποσοστό ανταλλαγής ενέργειας με το περιβάλλον, διότι η μηχανική δύναμη που προσφέρεται από τη σφαίρα στο ρευστό δεν καταναλώνεται πλήρως από τις ιξώδεις απώλειες στο ρευστό φλοιό, αλλά ένα μικρό μέρος δίνεται στο περιβάλλον. Τα πεδία ροής στα δύο αυτά μοντέλα δόθηκαν σε κλειστή μορφή και για

την εξαγωγή της λύσης του Kuwabara χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές συνάρτησης ροής, ενώ για την εξαγωγή της λύσης του Happel εφαρμόστηκε η γενική διαφορική αναπαράσταση του Lamb [68]. Αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα του Kuwabara [66] είναι ελαφρώς λανθασμένα όσον αφορά τον καθορισμό κάποιων σταθερών στην αναλυτική λύση, ενώ στην εργασία του Kuwabara [66] μελετήθηκε η συγκεκριμένου τύπου ροή κυλίνδρου σε κύτταρο διαμέσου μιας διάταξης παραλλήλων κυλίνδρων με άξονα κάθετο στην διεύθυνση της ροής, ένα φαινόμενο το οποίο μελέτησε, βέβαια, το 1959 πρώτος ο Happel [55], ανεξάρτητα.

Οι Pfeffer και Happel [91] το 1964, καθώς επίσης ο Pfeffer [92] το 1964 χρησιμοποίησαν, πρώτοι, το μοναδιαίο κύτταρο του Happel για να μοντελοποιήσουν τη μεταφορά μάζας σε μια απορροφητική σφαίρα σε ένα σμήνος σωματιδίων, για την περίπτωση χαμηλών αριθμών Reynolds και υψηλών αριθμών Peclet.

Έχοντας περάσει ήδη στην έβδομη δεκαετία του 20^{ου} αιώνα, τα σφαιρικά πρότυπα εξακολουθούν να βρίσκονται στην πρώτη γραμμή της επιστημονικής κοινότητας. Οι Neale και Nader [80] το 1974 βελτίωσαν τα πρότυπα των Happel και Kuwabara θεωρώντας ότι το εξεταζόμενο κύτταρο εμφυτεύεται μέσα σε ένα μη φραγμένο, συνεχές, ομογενές και ισότροπο πορώδες μέσο, το οποίο έχει την ίδια διαπερατότητα με αυτήν του σμήνους των σωματιδίων, όπου η ροή στο εξωτερικό διαπερατό μέσο περιγράφεται από την εξίσωση του Brinkman [22].

Εξάλλου, το 1976 οι Tardos *et al.* [113] κατάφεραν να υπολογίσουν παρόμοιες εκφράσεις για την περίπτωση του χαμηλού αριθμού Reynolds και του υψηλού αριθμού Peclet βασισμένοι στα μοντέλα του Kuwabara και των Neale και Nader, αποδεικνύοντας ότι η θεώρηση των τελευταίων δίνουν καλύτερα αποτελέσματα που συμφωνούν με το πείραμα και την αριθμητική προσαρμογή.

Περνώντας από την ιδέα των σφαιρικών προτύπων σε πιο πολύπλοκα γεωμετρικά σχήματα που αναπαριστούν πιο ρεαλιστικά το σχήμα των σωματιδίων σε εφαρμογές, καταλήγουμε στη διαπίστωση ότι το σφαιροειδές σχήμα [77] οδηγεί σε μια καλύτερη και πιο αξιόπιστη προσέγγιση για την περιγραφή του είδους των υπό μελέτη σωματιδίων μέσα στο πορώδες μέσο. Μέχρι σήμερα υπάρχουν αξιόπιστες εργασίες αριθμητικού και αναλυτικού χαρακτήρα που αφορούν, όμως, αξονοσυμμετρικά προβλήματα ροής σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Εξίσου μεγάλης σημασίας είναι και οι μελέτες με χρήση της θεωρίας των ιδιομορφιών για κατανομές πηγών μέσα στη ροή, στην επιφάνεια και στον άξονα συμμετρίας του σφαιροειδούς. Αναφορικά

επισημαίνουμε τις σημαντικότερες αναφορές [25,26,27,28,59,71,96,118,124] από το 1974 έως και το 1990 που ασχολούνται είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά με τη θεωρία κατανομών ιδιομορφιών και πολυπολικών αναπτυγμάτων για ροή σμήνους σφαιροειδών σωματιδίων. Όμως, στο πλαίσιο της συγκεκριμένης Διατριβής, εξετάζουμε τις ομαλές ροές απουσία πηγών.

Έτσι, αν εξαιρέσουμε κάποιες αρχικές έρευνες το 1876 από τον Oberbeck [82], όπου παρήγαγε μια λύση σε καρτεσιανές συντεταγμένες για τη ροή Stokes που προκαλείται από την σταθερή μεταφορά ενός ελλειψοειδούς παράλληλα προς τους κύριους άξονές του μέσα σε μη φραγμένο ρευστό, περιοχή με την οποία ασχολήθηκε και ο Sampson [99] 15 χρόνια αργότερα, παράγοντας πολύπλοκες και δύσχρηστες εκφράσεις, η ουσιαστική μελέτη της ροής γύρω από σφαιροειδή σωματίδια ξεκίνησε το 1972 με τους Epstein και Masliyah [47] που πρότειναν μια χρήσιμη γενίκευση του μοντέλου “σφαίρα σε κύτταρο” θεωρώντας ένα αντίστοιχο μοντέλο “σφαιροειδές σε κύτταρο” σε σμήνη σφαιροειδών σωματιδίων. Παρόλα αυτά έπρεπε να λύσουν το πρόβλημα έρπουσας ροής αριθμητικά, ένα γεγονός που απέτρεψε τη χρήση στη μεταφορά μάζας και θερμότητας. Η δυσκολία που παρουσιάστηκε (δυσκολία που παρουσιάζεται και σε άλλες περιπτώσεις ροών Stokes σε σφαιροειδείς συντεταγμένες) ήταν ότι η εξίσωση κινήσεως για τη συνάρτηση ροής του Stokes δεν επιδεχόταν χωρισμό μεταβλητών σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Αυτή η δυσκολία ξεπεράστηκε μόλις το 1994 από τους Dassios *et al.* [37] με την εισαγωγή της μεθόδου του ημιδιαχωρισμού των μεταβλητών για τον διαφορικό τελεστή της εξίσωσης της κινήσεως. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε στην ίδια εργασία για να επιλυθεί πλήρως το συνοριακό πρόβλημα τιμών με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara για ροή γύρω από ακίνητα σφαιροειδή σωματίδια με χρήση των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων που ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή της κινήσεως σε σφαιροειδείς συντεταγμένες.

Ένα χρόνο αργότερα, οι Dassios *et al.* [38] έλυσαν το πρόβλημα σφαιροειδούς σε κύτταρο με χρήση συνοριακών συνθηκών τύπου Happel με την μέθοδο του ημιδιαχωρισμού μεταβλητών για τη ροϊκή συνάρτηση και παρέθεσαν σε σύγκριση τα αποτελέσματα από την θεώρηση Kuwabara.

Παρόλα αυτά, κάποιες απροσδιοριστίες εμφανίζονται όταν τα μοντέλα Happel και Kuwabara λύνονται σε όρους συνάρτησης ροής σε σφαιροειδείς συντεταγμένες, οι οποίες αναφέρονται στην ύπαρξη μιας επιπλέον σταθεράς στο πρόβλημα συνοριακών τιμών, η οποία υπολογίζεται με την επιβολή μιας συνοριακής συνθήκης γεωμετρικού χαρακτήρα που απαιτεί το σφαιροειδές μοντέλο Happel ή Kuwabara να δίνει τα

αντίστοιχα γνωστά σφαιρικά αποτελέσματα, οπότε και υπολογίζεται η συγκεκριμένη σταθερά. Επιπλέον, αναφερόμενοι στο γεγονός της μη κάλυψης του πορώδους μέσου από τα μοντέλα των Happel και Kuwabara, σημειώνουμε ότι στην εργασία [38] έχει συζητηθεί εκτενώς και η σχέση της ταχύτητας του σμήνους σωματιδίων με τη μέση ταχύτητα του σμήνους λαμβάνοντας υπόψη και το πορώδες.

Τα κυτταρικά μοντέλα σφαιροειδών σωματιδίων με την εφαρμογή των γενικευμένων ιδιομορφών που παρουσιάστηκε από τους Dassios *et al.* χρησιμοποιήθηκαν εκτενώς και άμεσα στα επόμενα χρόνια από το 1995 έως και το 1997 [8,9,30] στη μεταφορά μάζας και θερμότητας για ροή σμήνους επιμήκων σφαιροειδών σωματιδίων. Πάντως, οι Coutelieis *et al.* [29] απέδειξαν ότι το πεπλατυσμένο σχήμα μπορεί να δώσει ουσιαστικά υψηλότερους ρυθμούς μεταφοράς μάζας και θερμότητας για συγκεκριμένες συνθήκες ροής Stokes.

Τέλος, ανεξάρτητα από την συγκεκριμένη μέθοδο, ο Zlatanovski [125] το 1999 μελέτησε την αξονοσυμμετρική ροή μέσω ενός πορώδους επιμήκους σφαιροειδούς με χρήση του μοντέλου Brinkman [22].

Όπως έχουμε παρατηρήσει μέσα από την ιστορική αναδρομή, μέχρι τα τέλη του 20^{ου} κυριαρχούν τα μοντέλα κυττάρων στη σφαιρική γεωμετρία και μόλις τη τελευταία δεκαετία αναπτύχθηκαν αξιόπιστες μέθοδοι για την αναλυτική αντιμετώπιση προβλημάτων ροής σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Και στις δύο γεωμετρίες γίνεται εκτενής εκμετάλλευση της ιδιότητας της αξονικής συμμετρίας που προσφέρουν. Προχωρώντας σε μη αξονοσυμμετρικά σχήματα οδηγούμαστε στο τριαξονικό ελλειψοειδές, όπου πολύ λίγες έως ελάχιστες αναφορές αναλυτικού περιεχομένου είναι γνωστές. Ωστόσο, υπάρχουν πολύ σημαντικές εργασίες αριθμητικού χαρακτήρα για ροή γύρω από ελλειψοειδή σωματίδια με τη χρήση της μεθόδου της κατανομής πηγών ή ιδιομορφιών, ξεκινώντας από τον Miloh [75] το 1974 ο οποίος παρήγαγε ένα σύστημα από ιδιομορφίες – σημειακές πηγές – για ένα αυθαίρετο εξωτερικό δυναμικό πεδίο μέσα σε ένα τριαξονικό ελλειψοειδές. Το 1985 ο Dabros [33] στην προσπάθειά του να λάβει υπόψη τα τοιχώματα του πορώδους μέσου, ανέπτυξε μια μέθοδο κατανομής διακριτών ιδιομορφιών, ενώ στις αμέσως επόμενες χρονιές το 1986 πρώτα ο Kim [62] και το 1987 οι Kim και Arunachalam [63] παρήγαγαν μια γενική λύση για έρπουσα ροή γύρω από ένα ελλειψοειδές με τη μέθοδο των ιδιομορφιών και χρήση των ελλειψοειδών αρμονικών με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Παρόλα αυτά, οι παραπάνω μέθοδοι απαιτούν επίπονη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή και

εφαρμόζουν θεωρίες κατανομών πηγών. Μέχρι και σήμερα δεν υπήρχε κάποια αξιόπιστη αναλυτική λύση για την επίλυση προβλημάτων σε χωρία δίχως αξονική συμμετρία που, ίσως, να κάλυπταν και την περίπτωση των αξονοσυμμετρικών ροών διορθώνοντας την εμφάνιση των αυθαίρετων σταθερών και απροσδιοριστιών [37,38] με κάποια μαθηματική ή ακόμα καλύτερα φυσική δικαιολόγηση. Η χρήση δύο συναρτήσεων ροής, για παράδειγμα, για την εύρεση αναλυτικής λύσης στην περίπτωση του ελλειψοειδούς, απαιτεί ευαίσθητους χειρισμούς και αν αναλογιστούμε τις ήδη υπάρχουσες δυσκολίες της εφαρμογής μιας συνάρτησης ροής στην περίπτωση των σφαιροειδών σωματιδίων, μπορούμε να καταλάβουμε ότι οι τεχνικές συνάρτησης ροής είναι ανεπαρκείς σε τρισδιάστατα προβλήματα.

Μέσα στο πλαίσιο της ανάγκης εύρεσης αναλυτικών λύσεων του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων του Stokes οι οποίες να δίνονται συναρτήσει απλών δυναμικών, έγινε απαραίτητη η εισαγωγή διαφορικών αναπαραστάσεων των λύσεων για αυτό το σύστημα για πεδία ροής δίχως αξονική συμμετρία. Με τον όρο “διαφορική αναπαράσταση” εννοούμε οποιαδήποτε αναπαράσταση των πεδίων ταχύτητας και πίεσης που εκφράζεται μέσω διαφορικών τελεστών. Οι πρώτες μορφές τέτοιου είδους αναπαραστάσεων, χωρίς κάποια ουσιαστική απόδειξη ή εφαρμογή, εμφανίστηκαν το 1885 με τον Boussinesq (Galerkin) [10] σαν συνάρτηση αρμονικών και διαρμονικών δυναμικών, αλλά μετά από 47 χρόνια ο Lamb [68] έδωσε μία αναλυτική γενική λύση του παραπάνω ζεύγους διαφορικών εξισώσεων του Stokes σε σφαιρικές, όμως, συντεταγμένες σε όρους σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων.

Δύο χρόνια μετά την εμφάνιση της λύσης του Lamb, ο Neuber σε συνεργασία με τον Papkovich το 1934 [81] παρουσίασαν μία άλλη διαφορική αναπαράσταση σε όρους καθαρά αρμονικών δυναμικών σε αναλλοίωτο σύστημα συντεταγμένων. Όμως, η πληρότητα των διαφορικών λύσεων των Boussinesq – Galerkin και Papkovich – Neuber δεν είχε αποδειχτεί μέχρι το 1961, όπου και εμφανίστηκε μια διαφορική γενική λύση ολοκληρωτικού χαρακτήρα (περιείχε και ολοκληρωτικούς τελεστές) από τους Naghdi και Hsu [79], ενώ η πλήρης απόδειξη της πληρότητάς τους πραγματοποιήθηκε 10 χρόνια μετά, το 1971, από τον Stippes [107] και παρουσιάστηκε αναλυτικά από τους Xu και Wang μόλις το 1991 [123] σε μια συνοπτική και ουσιαστική εργασία απόδειξης της πληρότητας των αναπαραστάσεων Naghdi – Hsu, Papkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin σε τρισδιάστατα χωρία, καθώς και ειδικές περιπτώσεις αξονοσυμμετρικών ροών.

Το 1992 οι Palaniappan *et al.* [86] υπέθεσαν μια εναλλακτική γενική διαφορική λύση των εξισώσεων του Stokes, όπου η πληρότητά της αποδείχτηκε από τους Padmanathi *et al.* [85] χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες. Με μια διαφοροποίηση, όμως, στην ολική πίεση ώστε να ισχύει για γενικό σύστημα συντεταγμένων, η πιο πάνω γενική λύση ισχύει σε κάθε καμπυλόγραμμο σύστημα.

Η γενική διαφορική αναπαράσταση των Naghdi – Hsu αποδεικνύεται ότι είναι μοναδική, αλλά δεν συμβαίνει το ίδιο και με τις διαφορικές αναπαραστάσεις των Parkovich – Neuber και των Boussinesq – Galerkin που παρόλο προέρχονται από τη μοναδική λύση των Naghdi – Hsu, δεν είναι μοναδικές εφόσον χρησιμοποιούμε επιπλέον δυναμικά για να αναπαραστήσουμε τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης. Συνεπώς, όπως έχει αποδειχτεί από τους Eubanks και Sternberg [48], στη θεωρία της ελαστικότητας, τα παραπάνω δυναμικά μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους χωρίς να επηρεαστεί η πληρότητα και να διατηρείται και η μοναδικότητα για κάθε είδους συνδυασμό. Βασική προϋπόθεση είναι οι εξισώσεις που επιλύουν οι αναπαραστάσεις να είναι ομογενείς. Όπως και στην ελαστικότητα έτσι και στην ρευστομηχανική οι εξισώσεις του Stokes αποτελούν ένα σύστημα ομογενών διαφορικών εξισώσεων με αποτέλεσμα να γίνεται εφικτή η χρήση της προαναφερθείσας σημαντικής δυνατότητας. Τελικά, η μοναδικότητα διατηρείται είτε με μηδενισμό κάποιων δυναμικών, είτε με ανάλυσή τους σε γραμμικό συνδυασμό κάποιων άλλων. Από την άλλη μεριά, η διαφορική λύση των Palaniappan *et al.* είναι μοναδική όπως μπορεί κάποιος να δει στις αντίστοιχες αναφορές. Επομένως, στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών που μπορεί να χρειάζεται η ευελιξία των αναπαραστάσεων, η διαφορική αναπαράσταση των Parkovich – Neuber, λόγω της απλότητάς της έναντι της αντίστοιχης των Boussinesq – Galerkin, αποτελεί από τα πιο σημαντικά εργαλεία για την εύρεση των πεδίων ροής σε εφαρμογές μοναδιαίων κυττάρων είτε σε τρισδιάστατα χωρία, είτε σε πεδία με αξονική συμμετρία, για κάθε είδους γεωμετρία, σφαιρική, σφαιροειδής ή και ελλειψοειδής [77,78]. Αυτή θα είναι εξάλλου και η βασική γενική διαφορική λύση που θα χρησιμοποιήσουμε σε όλη τη διάρκεια της Διατριβής.

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια εκτενής μελέτη των τρισδιάστατων διαφορικών αναπαραστάσεων για τις ροές που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes στα τρία κύρια ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, το σφαιρικό, το επίμηκες σφαιροειδές και το ελλειψοειδές. Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης,

συγκρίνουμε τις γενικές διαφορικές λύσεις και παράγουμε σχέσεις σύνδεσης σε επίπεδο δυναμικών. Επιπλέον, επιλύουμε συγκεκριμένες εφαρμογές που αφορούν κυτταρικά μοντέλα σε σωματιδιακά συστήματα με κατάλληλη χρήση των παραπάνω αναπαραστάσεων, ανάλογα με το είδος του φυσικού προβλήματος και τη μορφή του σωματιδίου που αντανακλά κάθε φορά τη χρησιμοποιούμενη γεωμετρία. Τελικά, αποδεικνύεται ότι η διαφορική αναπαράσταση που προτάθηκε από τους Parkovich – Neuber είναι η πιο αρμόδια για την εύρεση των πεδίων ροής στα μοντέλα σωματιδίου σε κύτταρο, λόγω της ευελιξίας που προσφέρουν τα αρμονικά δυναμικά της. Αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας είναι η χρήση κάποιων βαθμών ελευθερίας [48] που ενώ σε σφαιρικές συντεταγμένες δεν είναι απαραίτητη η χρήση τους, στα υπόλοιπα συστήματα η συγκεκριμένη ανάγκη είναι επιτακτική. Το περιεχόμενο της εργασίας αποτελείται από τέσσερα μέρη.

Το Πρώτο Μέρος περιέχει εξ' ολοκλήρου το θεωρητικό υπόβαθρο των ροών Stokes σε διδιάστατα και τρισδιάστατα χωρία, τους τρόπους αντιμετώπισης και επίλυσης των προβλημάτων, καθώς και την απαραίτητη θεωρία για την ανάπτυξη των κυτταρικών μοντέλων μέσω της θεώρησης σωματιδίου σε κύτταρο μέσα σε πορώδη μέσα με τις απαραίτητες συνοριακές συνθήκες. Όλες οι πληροφορίες αυτού του μέρους δίνονται ανεξάρτητα του συστήματος συντεταγμένων και δεν αποτελούν πρωτότυπο κομμάτι αυτής της Διατριβής. Ειδικότερα, η διάρθρωση αυτού του μέρους περιλαμβάνει τα παρακάτω κεφάλαια. Στο **Κεφάλαιο I-1** εξάγουμε τις εξισώσεις Stokes που είναι και οι βασικές εξισώσεις αναφοράς για την παρούσα Διατριβή. Αναλυτικότερα, προσπαθούμε να παραθέσουμε το απαραίτητο φυσικό και μαθηματικό υπόβαθρο για τη ροή κατά Stokes, ώστε ο αναγνώστης να μπορεί να κατανοήσει αρχικά τη φυσική που καθορίζει και τη μαθηματική αντιμετώπιση. Έτσι, αρχικά, εισάγουμε την έννοια του ρευστού και μιλάμε για τις βασικές ιδιότητες της πυκνότητας και του ιξώδους. Στη συνέχεια αναφερόμαστε στους βασικούς τύπους ροής και διατυπώνουμε τους κύριους νόμους της Ρευστομηχανικής. Διαχωρίζουμε τις έννοιες συστήματος και όγκου ελέγχου, ενώ διαμέσου των βασικών μεθόδων ανάλυσης της ροής ρευστών, προχωράμε στη βασική παράγραφο της κινητικής. Χρησιμοποιούμε, χωρίς απόδειξη, το θεώρημα της μεταφοράς του Reynolds για να παράγουμε το ισοζύγιο διατήρησης της μάζας από το οποίο προκύπτει και η εξίσωση της συνέχειας. Με τον ίδιο τρόπο οδηγούμαστε και στο μακροσκοπικό ισοζύγιο γραμμικής ορμής, ο οποίο καταλήγει, αρχικά, στην εξίσωση κινήσεως του Cauchy και, μετέπειτα, στις εξισώσεις των Navier – Stokes. Τελικά, οι τελευταίες μαζί με το ισοζύγιο μάζας επιδέχονται μια

σειρά από φυσικά δικαιολογημένες απλοποιήσεις για να μας δώσουν τις γνωστές εξισώσεις του Stokes. Το αντικείμενο του **Κεφαλαίου I-2** μας απασχολεί με τη θεωρητική μελέτη των αξονοσυμμετρικών, δηλαδή των διδιάστατων ροών Stokes. Εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης ροής και αναλύουμε τις αναλλοίωτες, ως προς συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, σχέσεις που συνδέουν τη ροϊκή συνάρτηση με το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας για $2-D$ συστήματα ροών. Μετά από μια σειρά από πράξεις καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ροής, που αποτελεί το βαθμωτό ανάλογο των εξισώσεων του Stokes. Στη συνέχεια, γράφουμε τον διαφορικό τελεστής E^2 σε γενικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα και στο τέλος παράγουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις που προσφέρουν το πεδίο ολικής πίεσης για διδιάστατες ροές σε όρους της συνάρτησης ροής. Η ανάλυση των διδιάστατων ροών στο Κεφάλαιο I-2 καλύπτει πλήρως όλο το φάσμα των αξονοσυμμετρικών προβλημάτων ρευστομηχανικής που ακολουθούν τους κανόνες που εισήγαγε πρώτος ο Stokes το 1851. Ωστόσο, το **Κεφάλαιο I-3** επεκτείνεται σε μη αξονοσυμμετρικά πεδία ροής και σε τρισδιάστατα χωρία, όπου η χρήση των διαφορικών αναπαραστάσεων είναι αναπόφευκτη. Κάνουμε ιδιαίτερη αναφορά, μαζί με την παράθεση των αποδείξεων, στις διαφορικές λύσεις που προτάθηκαν από τους Parkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin, οι οποίες προέρχονται από τη γενική λύση των Naghdi – Hsu. Οι παραπάνω είναι ανεξάρτητες από το σύστημα συντεταγμένων και προσφέρουν λύσεις των εξισώσεων του Stokes σε μορφή διαφορικών τελεστών που δρουν πάνω σε αρμονικά και διαρμονικά δυναμικά. Αυτό δεν συμβαίνει με την αναπαράσταση που πρότεινε ο Lamb, η οποία δίνεται σε όρους σφαιρικών αρμονικών δυναμικών. Η διαφορική αναπαράσταση των Palaniappan *et al.* υποθέτει μια εναλλακτική τρισδιάστατη μορφή, η οποία μαζί με την απόδειξή της συμπληρώνει την σειρά των διαφορικών αναπαραστάσεων που θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη μοναδικότητα των γενικών λύσεων και αναλύεται περιληπτικά η ευελιξία της διαφορικής λύσης των Parkovich – Neuber, η οποία προσφέρει μια σειρά από βαθμούς ελευθερίας που μας επιτρέπουν να συνδέσουμε μεταξύ τους τα αρμονικά δυναμικά της, ανεξαρτήτως του φυσικού προβλήματος. Η χρησιμότητα των γενικών αναπαραστάσεων επιβεβαιώνεται μέσω της δυνατότητας εκφυλισμού όλων των γενικών λύσεων από $3-D$ γεωμετρίες σε $2-D$ χωρία. Συνεπώς, η γενική περίπτωση των τρισδιάστατων λύσεων καλύπτει πλήρως και τα διδιάστατα χωρία, όπου δεν είναι απαραίτητο να ακολουθηθεί η

μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο I-2. Στη συνέχεια, αφιερώνουμε μια παράγραφο στη θεωρία των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων [36,39] στη ροή Stokes, που επισφραγίζει τη θεωρητική παρουσίαση του τρίτου κεφαλαίου του πρώτου μέρους και αναλύει περιληπτικά την περίπτωση όπου το σύστημα των εξισώσεων Stokes δεν είναι ομογενές, αλλά το δεύτερο μέλος τους καλύπτεται από την ύπαρξη μιας συνάρτησης κατανομής πηγών. Εκεί γίνεται και η πρώτη αναφορά στις συναρτήσεις Green [5,53,98] και παρουσιάζεται ο κύριος τρόπος αντιμετώπισης προβλημάτων κατανομής ιδιομορφιών στη ροή ή και ακόμα στην επιφάνεια του στερεού σωματιδίου. Τέλος, η παρουσίαση του τρίτου κεφαλαίου ολοκληρώνεται με την παράθεση των βασικών χαρακτηριστικών των τρισδιάστατων γενικών ορθογωνίων καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων. Στο τελευταίο κεφάλαιο αυτού του μέρους, **Κεφάλαιο I-4**, εισάγουμε την έννοια των μοντέλων ροής σωματιδίων σε κύτταρο και εξηγούμε εξονυχιστικά πώς από τα πολύπλοκα σωματιδιακά συστήματα που συναντάμε σε εργαστηριακές και βιομηχανικές εφαρμογές φτάνουμε στα κυτταρικά μοντέλα μέσω απλοποιητικών υποθέσεων που στηρίζονται σε ισχυρά αποδεδειγμένα φυσικά επιχειρήματα. Εν τέλει, η μελέτη της σχετικής κίνησης σμήνους σωματιδίων μέσα σε πορώδες μέσο μπορεί να μοντελοποιηθεί κατάλληλα. Τα μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο ή μοναδιαίων κυττάρων αποτελούν περιοχή μεγάλου ενδιαφέροντος σε σημαντικούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας και είναι χρήσιμα στην ανάπτυξη απλών αλλά αξιόπιστων αναλυτικών εκφράσεων για την μεταφορά μάζας και θερμότητας μέσα σε σμήνη σωματιδίων. Βασιζόμενοι στην ιδέα ότι μια συγκέντρωση σωματιδίων σε ρευστό μπορεί να διαιρεθεί σε έναν αριθμό από μοναδιαία κύτταρα όπου ένα μόνο σωματίδιο βρίσκεται μέσα σε κάθε κύτταρο, το πρόβλημα των συνοριακών τιμών τότε ανάγεται στη θεώρηση ενός μόνο σωματιδίου και του “ρευστού καλύμματος” που το περιβάλλει. Με αυτό τον τρόπο η μαθηματική διατύπωση κάθε φυσικού προβλήματος απλοποιείται αισθητά. Εμμένοντας σε αυτή την άποψη, παρουσιάζουμε τις συνοριακές συνθήκες των δύο βασικών μοντέλων σωματιδίου σε κύτταρο, του κυττάρου Kuwabara (ακίνητο σωματίδιο μέσα σε ομοιόμορφη μεταφορική ροή) και του κυττάρου Happel (μεταφορική και περιστροφική κίνηση σωματιδίου σε ηρεμούν ρευστό) για αναλλοίωτο σύστημα συντεταγμένων, βασιζόμενοι στα αντίστοιχα σφαιρικά μοντέλα που παρουσιάστηκαν στα μέσα του 20^{ου} αιώνα. Τελικά, φάνηκε πως η θεώρηση Kuwabara μας παραπέμπει σε διδιάστατες, δηλαδή με αξονική συμμετρία, ροές, ενώ το κύτταρο Happel, που είναι και ενεργειακά αυτόνομο,

επεκτείνεται και σε τρισδιάστατα χωρία στη γενική του μορφή που η μεταφορική κίνηση συνοδεύεται με περιστροφή. Ωστόσο, και τα δύο μοντέλα έχουν το κύριο μειονέκτημα ότι δεν καλύπτουν πλήρως το πορώδες μέσο. Ολοκληρώνουμε τη θεωρητική παράθεση με την σύνοψη των πεδίων ροής μέσω της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, όπου φτιάχνουμε έναν κατάλογο με τα πεδία που θα υπολογίζουμε στις εφαρμογές στα επόμενα μέρη της Διατριβής. Δηλαδή, θεωρώντας, τα μοντέλα μοναδιαίων κυττάρων μπορούν να επιλυθούν πολύπλοκα προβλήματα Ρευστομηχανικής στον ρευστό φλοιό μεταξύ του στερεού σωματιδίου και της φανταστικής ρευστής επιφανείας που απαιτείται για να μοντελοποιηθεί η ροή. Τα πεδία που υπολογίζουμε στο φλοιό, τα οποία και εμπλέκονται και στις συνοριακές συνθήκες των δύο μοντέλων, είναι το πεδίο ταχύτητας και ολικής πίεσης (μέσω της διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber), καθώς επίσης και τα πεδία του στροβιλισμού και ολικού τανυστή των τάσεων. Με αυτό το κεφάλαιο συγκεντρώσαμε όλες τις γενικές πληροφορίες που απαιτούνται για να προχωρήσουμε στα επόμενα τρία μέρη, όπου επικεντρωνόμαστε στα τρία βασικά ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα, το σφαιρικό, το σφαιροειδές και το ελλειψοειδές.

Αναλυτικότερα, λοιπόν, στο Δεύτερο Μέρος εισάγουμε το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, συγκρίνουμε τις διαφορικές αναπαραστάσεις που αναλύσαμε και προχωράμε σε δύο πολύ σημαντικές εφαρμογές. Συγκεκριμένα, στο **Κεφάλαιο II–1** δίνουμε όλα τα γεωμετρικά και αλγεβρικά χαρακτηριστικά της σφαιρικής γεωμετρίας, παρουσιάζουμε τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις (πραγματικές, μιγαδικές, διανυσματικές) και κατασκευάζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις που ανήκουν στον πυρήνα των διαφορικών τελεστών E^2 και E^4 για αξονοσυμμετρικές ροές σε σφαιρικές συντεταγμένες. Τα πρωτότυπα των αποτελεσμάτων μας ξεκινάνε από το **Κεφάλαιο II–2**, όπου συγκεντρώνουμε τα πεδία ταχύτητας και πίεσης των διαφορικών αναπαραστάσεων. Συνεχίζοντας, συσχετίζουμε, στη σφαιρική γεωμετρία, τα δυναμικά των ζευγών των διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin (3–D), Parkovich – Neuber και Palaniappan *et al.* (3–D) και Parkovich – Neuber και Stokes (2–D), εξισώνοντας τα πεδία ροής και μεταφέροντας τη σύνδεση στους σταθερούς συντελεστές των δυναμικών. Η παραπάνω έρευνα αποτελεί και μέρος των δημοσιευμένων εργασιών [40], [43] και [117], αντίστοιχα. Είναι φανερό πως η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber πλεονεκτεί των άλλων και λόγω της απλότητάς της και λόγω της πληροφoρίας της αναφοράς [48],

όπου μας επιτρέπει να συνδυάσουμε τα δυναμικά που εμπλέκονται σε αυτή την διαφορική λύση τυχαία, κάτι που δεν είναι απαραίτητο σε αυτή τη γεωμετρία και ιδίως όταν η γενική αυτή λύση εφαρμόζεται σε φυσικά προβλήματα. Για την παραπάνω έρευνα, διατηρήθηκε η γνωστή θεώρηση των εσωτερικών και εξωτερικών ιδιοσυναρτήσεων απουσία ιδιομορφιών ή πηγών στον άξονα συμμετρίας. Η απαίτηση αυτή είναι υποχρεωτική γιατί πέρα από το φυσικό υπόβαθρο των ομαλών πεδίων ροής σε συνθήκες κατά Stokes, υπάρχει και εξίσου μαθηματικός λόγος ο οποίος αναφέρεται σε επιχειρήματα ορθογωνιότητας. Τέλος, λόγω της ιδιότητας της μεταβατικότητας, μέσα από τις σχέσεις σύνδεσης που εξάγουμε, ο ενδιαφερόμενος μπορεί να καταλήξει σε τύπους σύνδεσης των δυναμικών Boussinesq – Galerkin (3–D), Palaniappan *et al.* (3–D) και Stokes (2–D) κάνοντας τις απαραίτητες αναγωγές για τις μιγαδικές, διανυσματικές και πραγματικές επιφανειακές και συμπαγείς σφαιρικές ιδιοσυναρτήσεις, καθώς και στα τρισδιάστατα σε διδιάστατα χωρία. Οι αλλαγές μεταφέρονται αυτόματα στους σταθερούς συντελεστές και παράγονται ανάλογοι τύποι με αυτούς που παρατέθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο. Στο **Κεφάλαιο II–3** αναπτύσσουμε τα δύο βασικά μοντέλα σφαιρικού σωματιδίου σε ρευστό για τη ροή σμήνους σωματιδίων μέσα σε πορώδες μέσο. Αρχικά, κάνοντας αναλυτική χρήση της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, κατασκευάζουμε τα σφαιρικά πεδία ροής στα μοντέλα Kuwabara (2–D) και Happel (3–D). Έπειτα, ακολουθούν δύο παράγραφοι. Στην πρώτη παράγραφο μελετάμε το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα της έρπουσας κίνησης ρευστού γύρω από ακίνητο σφαιρικό σωματίδιο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara, ανακτώντας με αυτό τον τρόπο τα διορθωμένα πεδία, ενώ στη δεύτερη παράγραφο αναλύεται το τρισδιάστατο πρόβλημα της μεταφορικής και περιστροφικής ροής, που ακολουθεί τους κανόνες του Stokes, σφαιρικού σωματιδίου μέσα σε ηρεμούν ρευστό με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel. Και στις δύο περιπτώσεις τα αποτελέσματα για τα πεδία ροής λαμβάνονται σε κλειστή μορφή και αποτελούν τη βάση για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων, μέσω γεωμετρικού εκφυλισμού, για το 2–D κύτταρο Kuwabara σε σφαιροειδή γεωμετρία και για το 3–D κύτταρο Happel σε ελλειψοειδή γεωμετρία που θα δούμε στις αντίστοιχες εφαρμογές στα επόμενα μέρη της διδακτορικής Διατριβής. Τα αποτελέσματα του συγκεκριμένου κεφαλαίου αποτελούν μέρος της δημοσιευμένης εργασίας [43] και της υποβληθείσας για κρίση εργασίας [44].

Το Τρίτο Μέρος της Διατριβής περιλαμβάνει αποτελέσματα που αφορούν την σφαιροειδή γεωμετρία, συσχετίζονται οι πιο σημαντικές διαφορικές λύσεις για τις

ροές Stokes και επιλύεται μια συγκεκριμένη εφαρμογή. Πιο αναλυτικά, όπως και στο Κεφάλαιο II-1, έτσι και στο **Κεφάλαιο III-1** γίνεται μια εκτεταμένη γεωμετρική και αλγεβρική εξέταση του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος συντεταγμένων, παρουσιάζονται οι αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις, καθώς και οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^4 , αποτέλεσμα του ημιδιαχωρισμού των μεταβλητών της εξίσωσης κινήσεως. Οι πληροφορίες συμπληρώνονται με μια εμπειριστατωμένη μελέτη του κατάλληλου γεωμετρικού εκφυλισμού στη σφαιρική γεωμετρία, καθώς και με την παράθεση ενός κατάλληλου μετασχηματισμού [56,77], ο οποίος μετατρέπει τα αποτελέσματα από την επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία στην πεπλατυσμένη και αντίστροφα. Έτσι, συγκεντρώνουμε όλα τα απαραίτητα στοιχεία για την περαιτέρω ανάλυση των επομένων κεφαλαίων. Επομένως, στο **Κεφάλαιο III-2** εξετάζουμε τη γενική διαφορική λύση Parkovich – Neuber και την αναπαράσταση Stokes, οι οποίες προσφέρουν λύσεις για προβλήματα έρπουσας ροής στη σφαιροειδή γεωμετρία και, επιπλέον, συνδέουμε τις δύο αναπαραστάσεις για ροές απουσία ανωμαλιών στον άξονα συμμετρίας. Κάτω από το συγκεκριμένο πρίσμα, βρίσκουμε τύπους σύνδεσης μετά από τη συσχέτιση των πεδίων ροής χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα δυναμικά σε όρους επιμήκων σφαιροειδών ιδιοσυναρτήσεων. Παρά το γεγονός ότι αυτές οι αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες, όπως φαίνεται και στο επόμενο κεφάλαιο των εφαρμογών, η διαφορική λύση Parkovich – Neuber είναι προτιμητέα σε σχέση με την αναπαράσταση Stokes, ενώ η αναπαράσταση Parkovich – Neuber μπορεί να επεκταθεί στην επίλυση πλήρων 3-D προβλημάτων σε σφαιρική και σφαιροειδή γεωμετρία. Ήδη παρατηρήσαμε την απλότητα του χειρισμού της στην επίλυση του κυττάρου με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel σε σφαιρικές συντεταγμένες σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τέλος, η συγκεκριμένη πλήρης διαφορική λύση αποτελεί τον μοναδικό απλό τρόπο για την επίλυση προβλημάτων σωματιδίων σε κύτταρο σε γεωμετρίες που δεν επιδέχονται αξονική συμμετρία, όπως η ελλειψοειδής γεωμετρία, λόγω της ευελιξίας που της προσφέρεται [48]. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου βρίσκονται στη δεκτή προς δημοσίευση εργασία [42]. Στο τελευταίο **Κεφάλαιο III-3** του τρίτου μέρους κατασκευάζουμε τα επιμήκη σφαιροειδή πεδία ροής στο μοντέλο Kuwabara (2-D) και στη συνέχεια διεξάγεται η μελέτη της αξονοσυμμετρικής ροής σμήνους σφαιροειδών σωματιδίων εντός πορώδους μέσου με την ανάπτυξη της θεωρίας του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara, όπου

παρατηρούμε την εφαρμογή της γενικής διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber επιδιώκοντας να εξάγουμε την γενική λύση σε μορφή αναπτυγμάτων σε σειρές. Το ίδιο πρόβλημα είχε λυθεί στην [37] με τη μέθοδο των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων για τη συνάρτηση ροής, που προκύπτουν από τον ημιδιαχωρισμό μεταβλητών για την εξίσωση κινήσεως. Η ίδια απροσδιοριστία που εμφανίστηκε τότε, εμφανίζεται και τώρα, αλλά οι βαθμοί ελευθερίας που μας προσφέρει η διαφορική λύση των Parkovich – Neuber (κοίτα αναφορά [48]) μας επιτρέπει την αποφυγή αυτού του προβλήματος μέσω μιας μαθηματικής δικαιολόγησης η οποία, βέβαια, δεν στηρίζεται από φυσικής άποψης. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την πεπλατυσμένη γεωμετρία παράγονται εύκολα με την εφαρμογή απλού μετασχηματισμού, ενώ με μια επιλεκτικά κατάλληλη οριακή διαδικασία ανακτώνται τα πεδία ροής για το αντίστοιχο πρότυπο στη σφαιρική γεωμετρία. Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος έρπουσας ροής αποτελεί την εφαρμογή της ερευνητικής δουλειάς της εργασίας [42].

Το τελευταίο Τέταρτο Μέρος αποτελεί μια εξ' ολοκλήρου καινούργια δουλειά εξαιρετικής σημασίας η οποία βρίσκεται ακόμα στο στάδιο της βελτίωσης και για αυτό το λόγο η αντίστοιχη αναφορά [45] βρίσκεται ακόμα στο στάδιο της γραφής. Παρόλα αυτά, παράγονται σημαντικά αποτελέσματα που αποτελούν την σταθερή βάση της προαναφερθείσας βελτίωσης. Το αντικείμενο αυτού του μέρους στηρίχθηκε στο γεγονός ότι αναλυτικές λύσεις δεν είχαν αναφερθεί για μοντέλα ελλειψοειδών σωματιδίων σε κύτταρο μέχρι το 2003. Η χρήση δύο συναρτήσεων ροής για επίλυση τρισδιάστατων προβλημάτων δεν είναι και η πιο αποτελεσματική. Οπότε, είναι επιτακτική η ανάγκη για χρήση τρισδιάστατων διαφορικών αναπαραστάσεων για την μελέτη τρισδιάστατων προβλημάτων ροής γύρω από ελλειψοειδή σωματίδια. Το κίνητρο για την μελέτη αυτή το αποτέλεσε η επίλυση του τρισδιάστατου σφαιρικού μοντέλου Happel [44], το οποίο είναι και ενεργειακά αυτόνομο. Πιο ειδικά, αυτό το μέρος χωρίζεται σε δύο κεφάλαια. Το **Κεφάλαιο IV–1** αναφέρεται στα γενικά χαρακτηριστικά της ελλειψοειδούς γεωμετρίας, καθώς και στις ελλειψοειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις μέχρι το βαθμό που είναι γνωστές. Επιπλέον, καταγράφεται αναλυτικά όλη η διαδικασία του γεωμετρικού εκφυλισμού του συστήματος στο σφαιροειδές, αλλά και στο σφαιρικό με παράλληλη παράθεση του αντίστοιχου αλγεβρικού εκφυλισμού όλων των ποσοτήτων που εμπλέκονται στην ελλειψοειδή γεωμετρία. Από την άλλη πλευρά, στο **Κεφάλαιο IV–2** εισάγουμε ένα μοντέλο “ελλειψοειδές σε κύτταρο” με χρήση τρισδιάστατων συννοριακών συνθηκών τύπου Happel. Λόγω της γνώσης περιορισμένου αριθμού ελλειψοειδών αρμονικών η

αναλυτική λύση περιορίζεται στους πρώτους όρους, που παρέχουν, όμως, την πιο σημαντική συνεισφορά για το μέγεθος των ελλειψοειδών σωματιδίων που ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Η λύση λαμβάνεται σε κλειστή μορφή με τη βοήθεια της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber. Η διαφορά με το κυτταρικό μοντέλο που πρότεινε ο ίδιος ο Happel [54] έγκειται στο γεγονός ότι το ελλειψοειδές σωματίδιο πέρα από τη μεταφορική κίνηση υφίσταται και περιστροφική κίνηση η οποία και δημιουργεί την τρισδιάστατη ροή. Τελικά, υπολογίζουμε τους κύριους όρους για τα πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης, στροβιλισμού και ολικού τανυστή των τάσεων, από όπου ένας επίπονος και κατάλληλος γεωμετρικός εκφυλισμός οδήγησε στο αντίστοιχο σφαιρικό πρότυπο.

Μια σύνοψη των βασικών αποτελεσμάτων, καθώς και μια σειρά από **Συμπεράσματα** συμπεριλαμβάνονται σε ξεχωριστή παράγραφο, όπου δίνονται σε αναλλοίωτη μορφή μερικές βασικές ποσότητες που μπορούν να υπολογιστούν στα κυτταρικά μοντέλα για έρπουσα ροή σε πορώδη μέσα. Επιπλέον, παρουσιάζεται μια σειρά από μελλοντικά βήματα που αποτελούν συνέχεια της παρούσας Διατριβής και που ήδη βρίσκονται υπό μελέτη. Δηλαδή, τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από το θεωρητικό μέρος της εργασίας που αποτελεί η συσχέτιση των διαφορικών αναπαραστάσεων σε διάφορες γεωμετρίες, αλλά και από την εφαρμογή της θεωρίας στην επίλυση προβλημάτων έρπουσας ροής για τους δύο τύπους κυττάρων Kuwabara και Happel, επιλέγοντας την κατάλληλη διαφορική λύση για τις εξισώσεις Stokes, επιδέχονται κριτική σε αυτή την παράγραφο.

Η Διατριβή ολοκληρώνεται με την παράθεση στα Παραρτήματα Α, Β, Γ και Δ απαιτητών για την παρακολούθησή της θεωρητικών “παρενθέσεων” που αφορούν δευτερευούσης σημασίας στοιχεία, τα οποία συμπληρώνουν τα πρωτότυπα αποτελέσματα. Ειδικότερα, στο **Παράρτημα Α** γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση ενός πλήρους καταλόγου ταυτοτήτων που σχετίζουν τους βασικούς διαφορικούς τελεστές της βάθμωσης και του Laplace. Οι κύριες ειδικές συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι συναρτήσεις Legendre, Gegenbauer και Lamé, όπου στο **Παράρτημα Β** διατυπώνουμε μερικές βασικές ιδιότητες και ορισμούς για τις σημαντικότερες ειδικές συναρτήσεις [6,36,39,58,69,76,78,95,103] της Διατριβής. Η απόδειξη του θεωρήματος του Almansi για τις διαρμονικές συναρτήσεις αποτελεί αντικείμενο του **Παραρτήματος Γ**, όπου την παραθέτουμε σε ξεχωριστό παράρτημα, ώστε να μην διακοπεί η συνέχεια της παρουσίασης. Η απόδειξη γίνεται με τη βοήθεια

των σφαιρικών συντεταγμένων, αλλά η αποσύνθεση μιας διαρμονικής συνάρτησης σε έναν συνδυασμό δύο αρμονικών συναρτήσεων επεκτείνεται σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Τέλος, στο **Παράρτημα Δ**, λόγω της ξεχωριστής υφής αυτού του θέματος, δίνονται οι ολοκληρωτικές μορφές $3-D$ αναπαραστάσεων στη ροή Stokes. Στο πλαίσιο αυτό, παραθέτουμε με απόδειξη τη βασική ολοκληρωτική μορφή του πεδίου ταχύτητας, από όπου εξάγουμε τις βασικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για το πεδίο ολικής πίεσης και ταχύτητας, τα οποία αναφέραμε στο Κεφάλαιο I–3. Ολοκληρώνουμε το παράρτημα αυτό με μια συνοπτική ανακεφαλαίωση των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων και με παρουσίαση των αναπτυγμάτων της θεμελιώδους λύσης του διαφορικού τελεστή του Laplace.

Μια εκτενής και αντιπροσωπευτική **Βιβλιογραφία**, που ακολουθεί τα παραρτήματα, συγκεντρώνει όλες τις επιπλέον πληροφορίες που ο αναγνώστης δεν μπορεί να ανασύρει μέσα από την εν λόγω Διατριβή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ.....	i
------------------	---

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
---------------	---

ΜΕΡΟΣ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι-1: ΡΟΗ STOKES – ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

I-1.1	Η έννοια του ρευστού.....	23
I-1.2	Ιδιότητες των ρευστών – υπόθεση του συνεχούς μέσου.....	25
I-1.3	Τύποι ροής.....	28
I-1.4	Θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής.....	33
I-1.5	Σύστημα και όγκος ελέγχου.....	33
I-1.6	Βασικές μέθοδοι ανάλυσης ροής ρευστών.....	35
I-1.7	Κινητική.....	36
I-1.8	Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds.....	36
I-1.9	Εξίσωση συνέχειας – διατήρηση της μάζας.....	39
I-1.10	Μακροσκοπικό ισοζύγιο γραμμικής ορμής.....	40
I-1.11	Εξίσωση κινήσεως του Cauchy – εξίσωση Navier – Stokes.....	41
I-1.12	Απλοποιήσεις των εξισώσεων της συνέχειας και των εξισώσεων Navier – Stokes. Οι εξισώσεις Stokes.....	43
I-1.13	Επίλυση των εξισώσεων Stokes.....	48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι-2: ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ 2-D ΡΟΗ STOKES – ΠΕΔΙΑ ΡΟΗΣ

I-2.1	Αξονοσυμμετρική ροή – η συνάρτηση ροής.....	51
I-2.2	Σχέση μεταξύ της συνάρτησης ροής και της ταχύτητας.....	54

I-2.3	Η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ροής.....	58
I-2.4	Ο διαφορικός τελεστής E^2 σε καμπυλόγραμμο σύστημα.....	61
I-2.5	Το πεδίο ολικής πίεσης.....	62

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι-3: ΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ 3-D ΡΟΗ STOKES – ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

I-3.1	Τρισδιάστατη ροή – βασικές διαφορικές αναπαραστάσεις.....	65
I-3.2	Τρισδιάστατη διαφορική αναπαράσταση Palaniappan <i>et al</i>	73
I-3.3	Μοναδικότητα των διαφορικών αναπαραστάσεων.....	79
I-3.4	Αξονοσυμμετρικές διαφορικές αναπαραστάσεις.....	81
I-3.5	Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις στη ροή Stokes.....	81
I-3.6	3-D ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων.....	85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι-4: ΜΟΝΤΕΛΑ ΡΟΗΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΕ ΚΥΤΤΑΡΟ – ΠΕΔΙΑ STOKES

I-4.1	Σωματιδιακά συστήματα και απλοποιητικά μοντέλα.....	91
I-4.2	Συνοριακές συνθήκες σε μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο.....	104

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ-1: ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΙΙ-1.1	Εισαγωγή – σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.....	113
ΙΙ-1.2	Σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις.....	119
ΙΙ-1.3	Ο πυρήνας των διαφορικών τελεστών E^2 και E^4 σε σφαιρικές συντεταγμένες.....	132

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ-2: ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ (SR)

ΙΙ-2.1	Εισαγωγή στα 3-D και 2-D σφαιρικά πεδία ροής.....	135
ΙΙ-2.2	Συσχέτιση 3-D διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin στη σφαιρική γεωμετρία.....	140

Π-2.3	Συσχέτιση $3-D$ διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Palaniappan <i>et al.</i> στη σφαιρική γεωμετρία.....	148
Π-2.4	Συσχέτιση $2-D$ διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Stokes στη σφαιρική γεωμετρία.....	154

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Π-3: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΚΥΤΤΑΡΑ (SR)

Π-3.1	Τα σφαιρικά πεδία ροής στα μοντέλα Kuwabara ($2-D$), Happel ($3-D$).....	165
Π-3.2	Το κύτταρο Kuwabara ($2-D$) για αξονοσυμμετρική ροή Stokes διαμέσου σμήνους ακίνητων σφαιρικών σωματιδίων.....	173
Π-3.3	Το κύτταρο Happel ($3-D$) για τρισδιάστατη ροή Stokes σμήνους σφαιρικών σωματιδίων σε ηρεμούν ρευστό.....	181

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ-1: ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΙΙΙ-1.1	Εισαγωγή – επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων.....	189
ΙΙΙ-1.2	Επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές συναρτήσεις.....	197
ΙΙΙ-1.3	Ο πυρήνας των διαφορικών τελεστών E^2 και E^4 σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες.....	203
ΙΙΙ-1.4	Γεωμετρικός εκφυλισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες.....	208
ΙΙΙ-1.5	Το πεπλατυσμένο σφαιροειδές.....	213

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ-2: ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ (SD)

ΙΙΙ-2.1	Εισαγωγή στα $3-D$ και $2-D$ επιμήκη σφαιροειδή πεδία ροής.....	215
ΙΙΙ-2.2	Συσχέτιση $2-D$ διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Stokes στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία.....	221

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ-3: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΗ ΚΥΤΤΑΡΑ (SD)

III-3.1	Τα επιμήκη σφαιροειδή πεδία ροής στο μοντέλο Kuwabara ($2-D$).....	237
III-3.2	Το κύτταρο Kuwabara ($2-D$) για αξονοσυμμετρική ροή Stokes διαμέσου σμήνους ακίνητων επιμήκων σφαιροειδών σωματιδίων.....	246

ΜΕΡΟΣ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV-1: ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

IV-1.1	Εισαγωγή – ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων.....	265
IV-1.2	Ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις.....	276
IV-1.3	Γεωμετρικός εκφυλισμός σε σφαιροειδείς συντεταγμένες.....	294
IV-1.4	Γεωμετρικός εκφυλισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες.....	300
IV-1.5	Βασικές σχέσεις χωρίς απροσδιοριστίες στον εκφυλισμό του ελλειψοειδούς σε σφαιροειδές και σφαίρα.....	302

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV-2: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ ΚΥΤΤΑΡΑ (EL)

IV-2.1	Τα ελλειψοειδή πεδία ροής στο μοντέλο Happel ($3-D$).....	305
IV-2.2	Το κύτταρο Happel ($3-D$) για τρισδιάστατη ροή Stokes σμήνους ελλειψοειδών σωματιδίων σε ηρεμούν ρευστό.....	317

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	337
-------------------	-----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

A.1	Ταυτότητες του διαφορικού τελεστή της βάθμωσης.....	349
A.2	Ταυτότητες του διαφορικού τελεστή του Laplace.....	351
A.3	Άλλες ταυτότητες.....	351

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

B.1	Συναρτήσεις Legendre.....	353
B.2	Συναρτήσεις Gegenbauer.....	356

B.3	Συναρτήσεις Lamé.....	359
-----	-----------------------	-----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: .ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ALMANSI ΓΙΑ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

.....	367
-------	-----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ 3-D ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΡΟΗ STOKES

Δ.1	Βασική ολοκληρωτική μορφή του πεδίου ταχύτητας.....	373
Δ.2	Ολοκληρωτική αναπαράσταση για το πεδίο ολικής πίεσης.....	380
Δ.3	Ολοκληρωτική αναπαράσταση για το πεδίο ταχύτητας.....	381
Δ.4	Ανακεφαλαίωση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων.....	383

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	389
-------------------	-----

ΜΕΡΟΣ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι–1 ΡΟΗ STOKES – ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΚΑΙ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

I–1.1 Η έννοια του ρευστού.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δοθούν κάποια γενικά στοιχεία γύρω από την ροή των ρευστών. Αυτό σε συνδυασμό με κάποιους ορισμούς θα βοηθήσει στο να γίνει αντιληπτό στον αναγνώστη το αντικείμενο της ροής ρευστών χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες.

Η Μηχανική των Ρευστών [7,50,52,56,68,70,84,87,111,119], που ονομάζεται και Δυναμική των Ρευστών, είναι η έρευνα και η διατύπωση των νόμων της κινηματικής και της δυναμικής των ρευστών σωμάτων, δηλαδή των υγρών, των αερίων και των ατμών. Ο κλάδος αυτός των θετικών επιστημών ασχολείται με την συμπεριφορά των ρευστών όταν αυτά βρίσκονται σε στάση και σε κίνηση και έχει εκτεταμένο θεωρητικό και πειραματικό ενδιαφέρον. Γι' αυτό η συμβολή του στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης και των άλλων συγγενών θεωρητικών κλάδων είναι εξαιρετικά σημαντική με ιδιαίτερες εφαρμογές στη μεταφορά μάζας και θερμότητας.

Παρά το γεγονός ότι η έρευνά μας περιορίζεται στα κλασσικά ρευστά, αξίζει να αναφέρουμε έναν ιδιαίτερο κλάδο της Μηχανικής των ρευστών, την Μαγνητορευστομηχανική [31,112], που μελετά τη ροή ιονισμένων ρευστών σε χώρο μαγνητικού, ηλεκτρικού ή και ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Αρχικά, είναι λογικό να δοθεί ο ορισμός του ρευστού. Ρευστό είναι μια ουσία που υφίσταται συνεχή παραμόρφωση υπό την επιρροή μιας διατμητικής τάσεως [84,87], οσοδήποτε μικρή και αν είναι η τάση αυτή. Επομένως, τα ρευστά περιλαμβάνουν τις υγρές και τις αέριες φάσεις των φυσικών καταστάσεων μέσα στις οποίες η ύλη υπάρχει. Επιπλέον, όταν ένα ρευστό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας δεν ασκείται πάνω σε αυτό καμία διατμητική τάση. Άρα, στα ηρεμούντα ρευστά ασκούνται μόνο κάθετες τάσεις. Ο διαχωρισμός μεταξύ της ρευστής και της στερεής κατάστασης της ύλης είναι καθαρός εάν κάποιος συγκρίνει την συμπεριφορά ενός ρευστού και ενός στερεού. Ένα στερεό μπορεί να παραμορφώνεται κάτω από την επιρροή μιας διατμητικής τάσης αλλά αυτή η παραμόρφωση δεν είναι συνεχής σε αντίθεση με το ρευστό που υφίσταται διαρκή παραμόρφωση κάθε χρονική στιγμή.

Σχήμα Ι-1.1: Συμπεριφορά στερεού (α) και ρευστού (β), κάτω από την επίδραση μιας συνεχούς διατμητικής τάσης.

Στο Σχήμα Ι-1.1 φαίνεται η συμπεριφορά ενός στερεού και ενός ρευστού κάτω από την επίδραση μιας συνεχούς διατμητικής τάσης F/A (δύναμη ανά μονάδα επιφανείας). Η τάση αυτή εφαρμόζεται στην πάνω πλάκα από τις δύο μεταξύ των οποίων βρίσκεται το στερεό ή το ρευστό. Η τάση εφαρμόζεται μέσω μιας δύναμης F και A είναι η επιφάνεια της πλάκας η οποία βρίσκεται σε επαφή με το ρευστό ή το στερεό. Συνολικά μπορούμε να πούμε ότι τα στερεά χωρίζονται σε κρυσταλλικά και άμορφα ενώ τα ρευστά σε υγρά και αέρια. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν ενδιάμεσες καταστάσεις

όπως οδοντόκρεμα, χρώματα κτλ, όπου το σώμα συμπεριφέρεται σαν στερεό (δηλ. μη ρευστό) για F/A μικρότερο μιας κρίσιμης τιμής και σαν ρευστό για F/A μεγαλύτερο της συγκεκριμένης κρίσιμης αυτής τιμής.

Ι-1.2 Ιδιότητες των ρευστών – υπόθεση του συνεχούς μέσου.

Στην μελέτη ασυμπίεστης ροής μιας φάσης (αργότερα θα γίνει κατανοητή η έννοια της ασυμπιεστότητας), εάν το υγρό είναι νευτώνειο χρειαζόμαστε μόνο δύο ιδιότητες [84,87], την ομοιόμορφη πυκνότητα ρ_0 και το δυναμικό ιξώδες μ_0 . Ευτυχώς, πολλά ρευστά είναι νευτώνεια όπως όλα τα αέρια και πολλά υγρά, τα οποία αποτελούνται από ομοιόμορφα μόρια όπως για παράδειγμα το νερό, οι κοινοί υγροί υδρογονάνθρακες (βενζίνη, κηροζίνη), γλυκόλη, αιθανόλη κτλ. Μη Νευτώνεια υγρά [73,101] χρειάζονται πρόσθετες παραμέτρους για να χαρακτηρισθούν επαρκώς.

Σχήμα Ι-1.2: Ορισμός της συνεχούς πυκνότητας.

Όπως είναι γνωστό [3], τα ρευστά αποτελούνται από μόρια τα οποία κινούνται συνεχώς σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις διευθύνσεις. Λόγω της θερμικής αυτής κίνησης, οι θέσεις και οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων μεταβάλλονται συνεχώς, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται το πλήθος των μορίων που περιέχονται κάθε χρονική στιγμή σε έναν ορισμένο όγκο ρευστού. Το γεγονός αυτό καθιστά προβληματικό τον καθορισμό των ιδιοτήτων του ρευστού (πυκνότητα και ιξώδες) σε ένα σημείο του

χώρου. Στην μακροσκοπική ανάλυση των προβλημάτων ροής, για να αποφύγουμε την απροσδιοριστία των ιδιοτήτων, υποθέτουμε ότι το ρευστό είναι ένα συνεχές μέσο. Η υπόθεση του συνεχούς μέσου οδηγεί στην παραδοχή ότι οι ιδιότητές του, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο κατά τρόπο συνεχή. Στην πράξη, η πυκνότητα και το ιξώδες αποτελούν συνεχείς συναρτήσεις της μορφής $\rho_0(x_1, x_2, x_3, t)$ και $\mu_0(x_1, x_2, x_3, t)$, γεγονός που καθίσταται εφικτό κάτω από ειδικές συνθήκες. Έτσι, για παράδειγμα, για να ορίσουμε την πυκνότητα ρ_0 πρέπει να πάρουμε έναν διαφορικό όγκο δV με διαφορική μάζα δm όπως φαίνεται και στο Σχήμα I-1.2 και για σταθερό χρόνο t να προσδιορίσουμε τον κρίσιμο διαφορικό όγκο δV^* που σταθεροποιείται η τιμή της. Τότε, η σχέση για την οριακή αυτή πυκνότητα προκύπτει από την έκφραση

$$\rho_0(x_1, x_2, x_3, t) = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^*} \left(\frac{\delta m}{\delta V} \right), \quad (\text{I-1.1})$$

όπου παρατηρούμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\delta V \ll \delta V^* \Rightarrow$ μεγάλες διακυμάνσεις του λόγου $\delta m / \delta V$,
- $\delta V \geq \delta V^* \Rightarrow$ σχεδόν καμία διακύμανση του λόγου $\delta m / \delta V$.

Ο οριακός όγκος δV^* είναι περίπου 10^{-9} mm^3 για όλα τα υγρά και τα αέρια σε ατμοσφαιρική πίεση [119]. Στον όγκο αυτό περιέχεται ένας σημαντικά μεγάλος αριθμός μορίων (π.χ., σε 10^{-9} mm^3 αέρα σε κανονικές συνθήκες περιέχονται περίπου 30 εκατομμύρια μόρια). Από στατιστική άποψη, ο αριθμός αυτός των μορίων είναι αρκετά ικανοποιητικός ώστε να οριστεί μια σχεδόν σταθερή τιμή πυκνότητας σύμφωνα με την εξίσωση (I-1.1). Επομένως, ο οριακός όγκος δV^* είναι ο ελάχιστος όγκος οποιουδήποτε ρευστού για τον οποίο η θεώρηση στατιστικών μέσων όρων έχει φυσικό νόημα.

Το μοντέλο του συνεχούς μέσου αποτελεί τη βάση της θεωρητικής διερεύνησης των προβλημάτων ροής ρευστών. Για να είναι η χρήση αυτού του μοντέλου επιτρεπτή θα πρέπει οι διαστάσεις του εξεταζόμενου συστήματος να είναι μεγαλύτερες, τουλάχιστον, από τη μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του ρευστού. Επειδή σε συνήθεις συνθήκες το μέγεθος αυτό είναι πολύ μικρό (π.χ., για τον αέρα, η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του είναι περίπου $6.3 \times 10^{-5} \text{ mm}$), η ανωτέρω προϋπόθεση ικανοποιείται. Υπάρχουν, όμως, και προβλήματα ροής που η μέση ελεύθερη διαδρομή των μορίων του ρευστού είναι είτε αρκετά μεγάλη είτε της ίδιας

τάξης μεγέθους με τη μικρότερη χαρακτηριστική διάσταση του θεωρούμενου συστήματος. Στις περιπτώσεις αυτές, το μοντέλο του συνεχούς μέσου δεν οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα και, επομένως, για την επίλυση προβλημάτων της κατηγορίας αυτής χρησιμοποιούνται συνήθως οι αρχές της Κινητικής Θεωρίας και της Στατιστικής Μηχανικής [89,126]. Παρόλα αυτά, για τα περισσότερα από τα συνήθη προβλήματα ροής ρευστών μπορεί να χρησιμοποιηθεί η υπόθεση του συνεχούς μέσου ως βάση για την επίλυσή τους, υιοθετώντας με αυτό τον τρόπο την εξαιρετικά σημαντική υπόθεση της σταθερής ή της συνεχούς ή της ομοιόμορφης πυκνότητας.

Παρόμοια είναι και η συμπεριφορά για το δυναμικό ιξώδες. Το ιξώδες είναι η ιδιότητα εκείνη των ρευστών που τους δίνει την δυνατότητα να αντιστέκονται σε κάθε προσπάθεια αλλαγής της μορφής τους. Η παραμόρφωση ή η διάτμηση των ρευστών προκαλείται από την επίδραση των διατμητικών τάσεων. Για μονοδιάστατη ροή ο νόμος του Newton για το ιξώδες όπως βγαίνει πειραματικά με χρήση ενός ιξωδόμετρου τύπου Couette [84,101] που μετράει τη διατμητική τάση $\tau_{x_2x_1}$ έναντι του

ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας $\frac{dv_{x_1}}{dy}$ και εκφράζεται μέσω της εξίσωσης

$$\mu_0 = \frac{\tau_{x_2x_1}}{\left(\frac{dv_{x_1}}{dy}\right)}. \quad (\text{I-1.2})$$

Η εξίσωση (I-1.2) εκφράζει την διατμητική τάση ως προς τον ρυθμό διάτμησης και ισχύει για νευτώνεια ρευστά ενώ ανάλογες, όμως πιο πολύπλοκες εξισώσεις υπάρχουν για τα μη νευτώνεια ρευστά [73,84,101] (πρότυπα Bingham, Carreau κ.α.).

Μερικές τυπικές τιμές του δυναμικού ιξώδους σε θερμοκρασία δωματίου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα,

Πετρέλαιο	Νερό	Hg	Grape Fruit	Αίμα (37°C)	Καφές	Μέλι	Τήγματα Πολυμερών	Πίσσα	Γυαλί
0.65	1.0	1.5	2.5	4-15	10	10^4	10^3 - 10^6	10^8	10^{23}

Πίνακας I-1.1: Χαρακτηριστικές τιμές δυναμικού ιξώδους σε mPas διαφόρων υλικών στους 20°C.

Η πυκνότητα και το ιξώδες συνδέονται μέσω του κινηματικού ιξώδους [84,87]

$$\nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0}, \quad (\text{I-1.3})$$

συνοψίζοντας με αυτόν τον τρόπο τις βασικές ιδιότητες των ρευστών σε ένα μέγεθος.

I-1.3 Τύποι ροής.

Με τον όρο ροή εννοούμε την κίνηση ενός ρευστού μέσα σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου η οποία ονομάζεται πεδίο ροής. Οι βασικοί τύποι ροής που προκύπτουν από συγκεκριμένα κριτήρια όπως τη γεωμετρία της ροής, τη φύση του ρευστού, την εξάρτηση της ταχύτητας από το χρόνο κ.α., συνοψίζονται παρακάτω.

I-1.3a Συμπίεστη και ασυμπίεστη ροή.

Ασυμπίεστη ροή ονομάζεται η ροή ενός ρευστού, πραγματικού ή ιδανικού, κατά την οποία οι μεταβολές της πυκνότητας σε όλη την έκταση του πεδίου ροής είναι αμελητέες, σε αντίθεση με την συμπίεστη ροή κατά την οποία οι μεταβολές της πυκνότητας είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Τα περισσότερα ρευστά θεωρούνται συμπίεστα αλλά τα αέρια πολύ περισσότερο των υγρών. Αλλαγή της πυκνότητας μπορεί να προκληθεί είτε δι' αλλαγής της θερμοκρασίας είτε δι' αλλαγής της πίεσης. Τα φαινόμενα συμπίεστότητας εμφανίζονται συνήθως σε υψηλές ταχύτητες λόγω της μεταβολής της πίεσης. Ένα μέτρο εκτίμησης του αν η ροή είναι συμπίεστη ή ασυμπίεστη αποτελεί ο αδιάστατος αριθμός Mach N_{Ma} και ορίζεται σαν το λόγο της χαρακτηριστικής ταχύτητας ροής U_f προς την ταχύτητα του ήχου στο ρευστό C ,

$$N_{Ma} = \frac{U_f}{C}. \quad (\text{I-1.4})$$

Συγκεκριμένα, αν $N_{Ma} \leq 0.3$ τότε η ροή θεωρείται ασυμπίεστη ενώ αν $N_{Ma} > 0.3$ η ροή θεωρείται συμπίεστη. Συμπίεστη ροή [83,114] εμφανίζεται συχνότερα σε ροή αερίων, όπου η ταχύτητα του ήχου σε κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας είναι $C = 340$ m/sec.

Επιπλέον, σε συνθήκες ασυμπίεστου ρευστού δεν υπάρχει αλλαγή της πυκνότητας ρ_0 με τον χρόνο t και με τις χωρικές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) , δηλ.,

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial x_\kappa} = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3. \quad (\text{I-1.5})$$

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με ασυμπίεστα ρευστά λόγω του γεγονότος ότι η ταχύτητα του ήχου στο νερό είναι $C=1435$ m/sec. Επειδή δε η ταχύτητα του νερού στις περισσότερες εφαρμογές είναι πολύ μικρότερη του 1 km/s, σπάνια εμφανίζεται η περίπτωση συμπίεστης ροής σε νερό ή άλλο υγρό.

I-1.3β Γραμμική (στρωτή) και τυρβώδης (στροβιλώδης) ροή.

Η γραμμική ροή [84,87] χαρακτηρίζεται από την στρωτή, δηλ. η ομαλή και κατά στρώματα, κίνηση κάθε στοιβάδας του ρευστού σε σχέση με τις γειτονικές στοιβάδες. Σε κάθε τέτοιο στρώμα, η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού είναι ομοιόμορφη σε όλη την έκταση μιας εγκάρσιας, ως προς τη διεύθυνση της ροής, διατομής του στρώματος. Επομένως, κατά τη στρωτή ροή, η μόνη κίνηση που παρατηρείται είναι κατά τη διεύθυνση της ροής, αφού δεν υπάρχει συνιστώσα της ταχύτητας κατά την κάθετη προς αυτή διεύθυνση, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει μακροσκοπική ανάμιξη των γειτονικών στρωμάτων του ρευστού λόγω ανταλλαγής μάζας σε μορφή σωματιδίων. Η επικοινωνία των στρωμάτων αυτών γίνεται σε μοριακό επίπεδο, καταλήγοντας σε μοριακή ανάμιξη λόγω της θερμικής κίνησης των μορίων.

Η στροβιλώδης ή όπως ονομάζεται τυρβώδης ροή [46,57,84,87] χαρακτηρίζεται από χαώδη κίνηση του ρευστού, όπου τα σωματίδια κινούνται σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις διευθύνσεις κατά εντελώς τυχαίο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση εμφανίζονται τα παραπάνω φαινόμενα μακροσκοπικής ανάμιξης των στρωμάτων ρευστού με αποτέλεσμα τη δημιουργία μικρών βραχυβίων δινών, έντονου στροβιλισμού και ταχείας ανάμιξης.

Ο τύπος της ροής που παρεμβάλλεται μεταξύ της στρωτής και της τυρβώδους ροής ονομάζεται μεταβατική ροή [84,87].

Η ύπαρξη των δύο ειδών ιξώδους ροής διαπιστώθηκε για πρώτη φορά από τον Hagen το 1839. Ο Hagen παρατήρησε ότι, κατά τη ροή ενός ρευστού μέσα σε έναν κυκλικό αγωγό, το είδος και τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής μεταβάλλονταν όταν η ταχύτητα του ρευστού γινόταν μεγαλύτερη από μια ορισμένη τιμή. Όμως ο Hagen δεν

κατάφερε να αναγνωρίσει τη βασική παράμετρο η οποία επηρέαζε το είδος της ροής, κάτι που έγινε πολύ αργότερα, το 1883, από τον Osborne Reynolds που ήταν ουσιαστικά ο πρώτος ερευνητής που ασχολήθηκε συστηματικά με τη μελέτη της ροής ρευστών μέσα σε κυλινδρικούς αγωγούς [97]. Για την διασαφήνιση των δύο τύπων ροής, ο Reynolds χρησιμοποίησε μια συσκευή (συσκευή Reynolds) έκχυσης μελανιού ή άλλου έγχρωμου υγρού μέσα σε νερό και παρατήρησε την εξέλιξη της ροής σε κυλινδρικού σχήματος σωλήνες. Ο Reynolds χρησιμοποιώντας σωλήνες διαφόρων διαμέτρων και νερό διαφόρων θερμοκρασιών, κατάφερε να πιστοποιήσει πλήρως τα

γραμμές

δύο είδη ιξώδους ροής και να παρουσιάσει τη βασική παράμετρο, η οποία φέρει και το όνομά του (αριθμός του Reynolds), ως κριτήριο που χαρακτηρίζει το είδος της ροής. Ο αριθμός Reynolds είναι μια αδιάστατη ομάδα γεωμετρικών και φυσικών μεταβλητών η οποία παριστάνεται με το σύμβολο Re .

Σχήμα Ι-1.3: Το πείραμα του Reynolds για ταυτοποίηση στρωτής και τυρβώδους ροής.

Για ροή μέσα σε κυκλικούς αγωγούς, ο αριθμός Reynolds ορίζεται από τη σχέση

$$Re = \frac{\rho_0 U_f D}{\mu_0}, \quad (\text{I-1.6})$$

όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα του ρευστού, μ_0 είναι το δυναμικό ιξώδες του ρευστού, U_f είναι η μέση ταχύτητα του ρευστού και D είναι η διάμετρος σωλήνα που χρησιμοποιείται στο πείραμα του Reynolds. Αυτό που παρατηρείται πειραματικά στο συγκεκριμένο πείραμα φαίνεται στο Σχήμα Ι-1.3.

Ο αριθμός Reynolds μπορεί να ερμηνευθεί σαν ο λόγος της δύναμης αδράνειας ως προς την ιξώδη δύναμη. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι για ροή σε σωλήνες συνήθους κατασκευής το πείραμα δείχνει:

- Στρωτή Ροή $\Rightarrow Re < \sim 2100$
- Τυρβώδης Ροή $\Rightarrow Re > \sim 2100$

Αυτή η κρίσιμη τιμή $Re = 2100$ ισχύει μόνο για κυλινδρικούς αγωγούς. Για αγωγούς άλλης γεωμετρίας η κρίσιμη τιμή του Re διαφέρει πολύ. Η τιμή του 2100 αποτελεί ένα ανώτερο όριο για την ευστάθεια της στρωτής ροής. Κάτω από ορισμένες συνθήκες, η ροή στον αγωγό μπορεί να παραμείνει στρωτή και για αριθμούς $Re > 2100$, αλλά μια τέτοια κατάσταση είναι ασταθής και, με τη μικρότερη διαταραχή, μεταπίπτει σε τυρβώδη. Για αριθμούς $Re < 2100$, οι εξωτερικές διαταραχές της ροής, οσοδήποτε σοβαρές και αν είναι αυτές, αποσβεννύονται και η ροή στον αγωγό, σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις από το στόμιο, γίνεται τελικά στρωτή. Για πολύ μικρούς αριθμούς Reynolds [56] θα επεκταθούμε αργότερα.

I-1.3γ *Ανιξώδης και ιξώδης ροή – συνθήκη μη ολίσθησης.*

Ανιξώδης ή άτριβη ροή [84,87], όπως ονομάζεται, είναι η ροή ενός ρευστού με μηδενικό ιξώδες. Τα ρευστά που έχουν αυτή την ιδιότητα ($\mu_0 = 0$) ονομάζονται ιδανικά ρευστά*. Επειδή στη φύση δεν υπάρχει κανένα ρευστό το οποίο να έχει ιξώδες μηδέν, η έννοια της ανιξώδους ροής είναι θεωρητική.

* Σε ορισμένα συγγράμματα [111], ως ιδανικά ρευστά ορίζονται τα ρευστά τα οποία έχουν ιξώδες μηδέν και σταθερή πυκνότητα. Όμως, ιδανικό μπορεί να είναι και ένα συμπιεστό ρευστό. Τα ασυμπίεστα ιδανικά ρευστά αναφέρονται συχνά και ως ρευστά του Pascal.

Από την άλλη μεριά, ιξώδης ροή [84,87] είναι η ροή ενός πραγματικού ρευστού. Τα πραγματικά ρευστά έχουν όλα ιξώδες, ανεξάρτητα αν αυτό είναι μικρό ή μεγάλο. Η θεώρηση του ιξώδους στην ανάλυση των προβλημάτων ροής αυξάνει σημαντικά τη δυσκολία διατύπωσης και επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τη ροή του ρευστού. Σε αντίθεση με την άτριβη ροή, η ιξώδης ροή επηρεάζεται σημαντικά από την παρουσία στερεών τοιχωμάτων, με αποτέλεσμα το ρευστό να μην ολισθαίνει πάνω στην στερεή επιφάνεια, αλλά να είναι στερεά “προσκολλημένο” πάνω σε αυτήν. Η παρατήρηση αυτή, η οποία είναι γενική, αποτελεί βασική οριακή συνθήκη για την ανάλυση προβλημάτων ιξώδους ροής πάνω και γύρω από στερεά σώματα, η οποία είναι γνωστή ως συνθήκη μη ολίσθησης. Η συνθήκη αυτή αναφέρει ότι η σχετική ταχύτητα των πραγματικών ρευστών ως προς το στερεό τοίχωμα είναι μηδέν. Η συνθήκη μη ολίσθησης ισχύει όταν ισχύει και η υπόθεση του συνεχούς μέσου. Αξίζει να αναφέρουμε το γεγονός ότι καθώς απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια του στερεού σώματος, η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται συνεχώς έως ότου αποκτήσει μια συγκεκριμένη οριακή τιμή, οπότε και παραμένει σταθερή. Η περιοχή του ρευστού στην οποία συμβαίνει η μεταβολή της ταχύτητας ονομάζεται οριακό στρώμα [84,100] και είναι έντονη σε μεγάλους αριθμούς Reynolds.

I-1.3δ Μονοδιάστατη, διδιάστατη και τριδιάστατη ροή.

Ο αριθμός των διαστάσεων μιας ροής ισούται με τον ελάχιστο απαιτούμενο αριθμό χωρικών συντεταγμένων για την περιγραφή του πεδίου ταχύτητας.

Σχήμα Ι-1.4: Αναπτυσσόμενη και πλήρως αναπτυγμένη ροή μέσα σε κυλινδρικό σωλήνα.

Επομένως μέσα σε έναν σωλήνα, για παράδειγμα, έχουμε διδιάστατη ροή στην αρχή που αργότερα, σε αρκετά μεγάλη απόσταση από τον σωλήνα, μετατρέπεται σε μονοδιάστατη όπως φαίνεται και στο Σχήμα Ι-1.4. Βέβαια, πάντα η μορφή της ροής καθορίζεται από τη γεωμετρία και τη φύση του προβλήματος ροής που επιλύεται, γεγονός που υποδεικνύει κάθε φορά τον αριθμό των διαστάσεων στον εκάστοτε τύπο ροής για τα πεδία. Έτσι, ανάλογα με τις χωρικές συντεταγμένες που επιλέγονται (πολικές, κυλινδρικές, σφαιρικές, σφαιροειδείς, ελλειψοειδείς) [77] και ανάλογα με τον τύπο της ροής που επιβάλλεται, υπάρχουν μονοδιάστατες, διδιάστατες ή αξονοσυμμετρικές και τρισδιάστατες ροές, ενδεχόμενα χρονικά εξαρτώμενες.

Ι-1.3ε Σταθερή και μεταβατική ροή.

Χαρακτηριστικό της σταθερής ροής είναι η μη ύπαρξη χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων και μεγεθών σε αντίθεση με τη μεταβατική ροή που τα πεδία ροής εξελίσσονται με το χρόνο [120–122]. Αξίζει να αναφέρουμε εδώ ότι η τυρβώδης ροή είναι εκ φύσεως μεταβατική, αλλά μπορούμε να ορίσουμε σταθερή τυρβώδη ροή εισάγοντας χρονομέσες τιμές για τα εμφανιζόμενα πεδία και φυσικά μεγέθη.

Ι-1.4 Θεμελιώδεις νόμοι της ρευστομηχανικής.

Η ανάπτυξη της Μηχανικής των ρευστών βασίζεται πάνω σε ορισμένες βασικές αρχές ή φυσικούς νόμους. Οι φυσικοί νόμοι έχουν διατυπωθεί σαν συμπέρασμα μακροχρόνιων παρατηρήσεων των φυσικών και χημικών φαινομένων στη φύση. Οι φυσικοί νόμοι έχουν αξιωματική διατύπωση, δηλαδή, αποτελούν αδιαμφισβήτητες αρχές οι οποίες προέρχονται από την ίδια τη φύση. Η επιβεβαίωση των αρχών αυτών γίνεται έμμεσα, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της μαθηματικής ανάλυσης με τα πειραματικά δεδομένα. Επισημαίνουμε τους βασικούς φυσικούς νόμους:

- ι) Αρχή ή νόμος διατήρησης της μάζας,
- ι) Δεύτερος νόμος του Newton για την κίνηση των ρευστών,
- ι) Αρχή διατήρησης της ορμής,
- ι) Πρώτος και Δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής.

I-1.5 Σύστημα και όγκος ελέγχου.

Σύστημα [84,87] είναι ένα σώμα που περικλείεται από μια επιφάνεια η οποία απαγορεύει την εισροή ή εκροή μάζας και μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Καθετί που δεν ανήκει στο σύστημα αποτελεί το περιβάλλον του. Τα όρια ενός συστήματος σχηματίζουν μια κλειστή επιφάνεια, πραγματική ή υποθετική, η οποία χωρίζει το σύστημα από το περιβάλλον του. Ο όγκος ενός συστήματος καλείται υλικός όγκος, $V_m(t)$ και η επιφάνειά του υλική επιφάνεια, $A_m(t)$. Το σύστημα μπορεί να μην επιτρέπει την εισροή ή εκροή μάζας, όμως μπορεί να ανταλλάσσει ενέργεια με το περιβάλλον διαμέσου των ορίων του συστήματος με τη μορφή θερμότητας και έργου. Ένα σύστημα το οποίο δεν ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον, παρ' ότι βρίσκεται σε διαφορετική θερμοκρασία από αυτό, ονομάζεται θερμικά μονωμένο. Αν το ίδιο σύστημα δεν ανταλλάσσει με το περιβάλλον του ούτε έργο ονομάζεται απομονωμένο. Τέλος, ανάλογα με το θεωρούμενο πρόβλημα, η ποσότητα της ύλης που περιέχεται σε ένα σύστημα μπορεί να είναι απειροελάχιστη ή αρκετά μεγάλη. Η έννοια του συστήματος δεν είναι εύχρηστη παρόλο που διέπεται από απλούς νόμους φυσικής. Στην περίπτωση της ρευστομηχανικής, όμως, η χρήση της ιδέας του συστήματος γίνεται συχνά προβληματική. Αυτό συμβαίνει διότι πάντοτε ένα σύστημα εντός πεδίου ροής υφίσταται δραστικές γεωμετρικές αλλαγές που κάνουν την μαθηματική ανάλυση δύσκολη ή αδύνατη. Άρα προκειμένου να αναλύσουμε μαθηματικά ένα πρόβλημα μας συμφέρει να αναφερόμαστε σε ένα απλό γεωμετρικό σχήμα.

Αυτό το επιτυγχάνουμε ορίζοντας έναν κατάλληλο όγκο ελέγχου*. Η γεωμετρική επιφάνεια που περικλείει τον όγκο ελέγχου, V και χωρίζει αυτόν από το περιβάλλον του, ονομάζεται επιφάνεια ελέγχου, A . Ο όγκος ελέγχου είναι απλός, προσαρμοσμένος στην γεωμετρία του προβλήματος και κατά προτίμηση σταθερός. Η διαφορά με το σύστημα έγκειται στο ότι ο όγκος ελέγχου επιτρέπει την εναλλαγή μάζας με το περιβάλλον. Ταυτόχρονα, μπορεί να ανταλλάσσει με αυτό ενέργεια με τη μορφή θερμότητας και έργου. Έτσι, μεταξύ ενός όγκου ελέγχου και του περιβάλλοντός του υπάρχει συνεχής επικοινωνία που εκδηλώνεται με τη μεταφορά

* Στη Θερμοδυναμική, αντί των όρων σύστημα και όγκος ελέγχου, χρησιμοποιούνται συνήθως οι όροι κλειστό σύστημα και ανοικτό σύστημα, αντίστοιχα.

μάζας, ορμής και ενέργειας. Η μάζα ενός όγκου ελέγχου μπορεί να διατηρείται σταθερή ή να μεταβάλλεται με το χρόνο. Τέλος, ανάλογα με το είδος των πληροφοριών που επιζητούμε κατά την εξέταση ενός προβλήματος ροής, το μέγεθος του όγκου ελέγχου μπορεί να είναι απειροελάχιστο ή αρκετά μεγάλο.

Τη διαφορά συστήματος και όγκου ελέγχου την βλέπουμε πιο κάτω θεωρώντας γραμμική ροή μεταξύ παραλλήλων πλακών.

Σχήμα Ι-1.5: Συμπεριφορά συστήματος και όγκου ελέγχου σε γραμμική ροή εντός παραλλήλων πλακών.

Στο Σχήμα Ι-1.5 φαίνεται καθαρά η διαφορά στην συμπεριφορά του συστήματος που μεταβάλλεται με το χρόνο και του όγκου ελέγχου που παραμένει σταθερός, αν θεωρήσουμε τη γραμμική ροή μεταξύ δύο παραλλήλων πλακών και “φωτογραφίσουμε” τη ροή σε διάφορες χρονικές στιγμές.

Ι-1.6 Βασικές μέθοδοι ανάλυσης ροής ρευστών.

Για τη θεωρητική διερεύνηση των προβλημάτων ροής χρησιμοποιούνται η μέθοδος της μακροσκοπικής ανάλυσης και η μέθοδος της διαφορικής ανάλυσης. Η μεν πρώτη, εμφανίζεται σε μακροσκοπικούς, η δε δεύτερη, σε απειροστών διαστάσεων όγκους ελέγχου. Από τη μακροσκοπική ανάλυση προκύπτουν μέσες τιμές ή προσεγγιστικές σχέσεις, ενώ από τη διαφορική ανάλυση, ακριβείς τιμές ή κατανομές των ιδιοτήτων του πεδίου ροής. Όταν η θεωρητική διερεύνηση ενός προβλήματος ροής δεν είναι εφικτή, η λύση προσεγγίζεται μέσω πειραμάτων, στην αριστοποίηση των οποίων συμβάλλει σημαντικά η μέθοδος της διαστατικής ανάλυσης.

I-1.7 Κινητική.

Κινητική είναι η μελέτη της κινήσεως των ρευστών χωρίς καμία αναφορά στις τάσεις που προκαλούν αυτή την κίνηση. Οι φυσικοί νόμοι που διέπουν την κινητική από τη μια μεριά είναι απλοί και εύκολα εφαρμόσιμοι, από την άλλη μεριά, όμως, αναφέρονται στην έννοια του συστήματος.

Στην παράγραφο I-1.5 παρατηρήσαμε τη διαφορά μεταξύ συστήματος και όγκου ελέγχου και του εξαιρετικής σημασίας πλεονεκτήματος του όγκου ελέγχου να παραμένει σταθερός και να επιτρέπει την εναλλαγή μάζας. Στα περισσότερα προβλήματα πρακτικής σημασίας ο υλικός όγκος αλλάζει γρήγορα και ριζικά με το χρόνο. Όταν συμβαίνει αυτό, οι υπολογισμοί διαφόρων μεγεθών καθίστανται δύσκολοι. Άρα, για την ανάλυση τέτοιων προβλημάτων όπου μελετάται λεπτομερώς η κίνηση των ρευστών, η χρήση του συστήματος είναι ανεπαρκής και δύσκολη. Προκειμένου, λοιπόν, να προχωρήσουμε επιβάλλεται να μετατρέψουμε τους φυσικούς νόμους από τη μορφή που αφορά το σύστημα (υλικός όγκος $V_m(t)$ και υλική επιφάνεια $A_m(t)$), στην αντίστοιχη μορφή που αφορά τον όγκο ελέγχου (σταθερός όγκος ελέγχου V και σταθερή επιφάνεια ελέγχου A). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί εισάγοντας το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds [84].

I-1.8 Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds.

Η αναλυτική μελέτη των προβλημάτων ροής βασίζεται, κυρίως, σε τρεις φυσικούς νόμους όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο. Αυτοί είναι, ο νόμος διατήρησης της μάζας,

$$\left[\frac{dM}{dt} \right]_{\Sigma} = 0, \quad (\text{I-1.7})$$

όπου M είναι η μάζα ενός συστήματος, ο δεύτερος νόμος του Newton,

$$\mathbf{F} = \left[\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right]_{\Sigma}, \quad (\text{I-1.8})$$

για τις εξωτερικές δυνάμεις $\mathbf{F}$ και την γραμμική ορμή $\mathbf{P}$ και ο νόμος διατήρησης της ενέργειας E , αναφερόμενοι στο ρυθμό μεταβολής της ενέργειας,

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left[\frac{dE}{dt} \right]_{\Sigma}, \quad (\text{I-1.9})$$

όπου $\dot{Q}$, $\dot{W}$ είναι ο ρυθμός πρόσδοσης θερμότητας στο σύστημα από το περιβάλλον και ο ρυθμός απόδοσης έργου από το σύστημα στο περιβάλλον, αντίστοιχα. Ο δείκτης “ Σ ” δηλώνει ότι οι εξισώσεις (I-1.7)–(I-1.9) εφαρμόζονται σε σύστημα και περιγράφουν τι συμβαίνει σε αυτό όταν υφίσταται μια ορισμένη επίδραση από το περιβάλλον του. Όπως εξηγήσαμε και προηγούμενα, η έννοια του συστήματος δεν είναι η πιο χρήσιμη για την επίλυση προβλημάτων ροής με αποτέλεσμα να γίνει επιτακτική η ανάγκη της χρήσης του όγκου ελέγχου. Αυτό απαιτεί την τροποποίηση των φυσικών νόμων (I-1.7)–(I-1.9), έτσι, ώστε οι νέες μορφές τους να εφαρμόζονται σε έναν ορισμένο όγκο ελέγχου. Οι νέες αυτές μορφές ονομάζονται ολοκληρωτικές ή μακροσκοπικές εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας και περιγράφουν την επίδραση της ροής πάνω στον εξεταζόμενο όγκο ελέγχου. Για την εφαρμογή των μακροσκοπικών εξισώσεων ροής το μόνο που χρειάζεται να γνωρίζουμε είναι τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής στην περιοχή του όγκου ελέγχου. Η τεχνική της μετατροπής των εξισώσεων συστήματος στις αντίστοιχες εξισώσεις όγκου ελέγχου βασίζεται στη σχέση που συνδέει τις εκτατικές ιδιότητες ενός συστήματος με τις αντίστοιχες εντατικές. Έτσι αν συμβολίσουμε σαν $N(t)$ τις εκτατικές ιδιότητες και σαν η τις αντίστοιχες εντατικές ιδιότητες (ρ_0 : πυκνότητα), οι εκτατικές ιδιότητες ορίζονται σαν ολοκληρώματα όγκου των αντίστοιχων εντατικών ιδιοτήτων,

$$N(t) = \iiint_{V_m(t)} \eta \rho_0 dU. \quad (\text{I-1.10})$$

$N(t) = M$ (μάζα)	$\eta = 1$ (μονάδα)
-------------------	---------------------

$N(t) = \mathbf{P}$ (γραμμική ορμή)	$\eta = \mathbf{v}$ (ταχύτητα)
$N(t) = E$ (ολική ενέργεια*)	$\eta = e$ (ειδική ολική ενέργεια)

Πίνακας I-1.2: Εκτατικές και οι αντίστοιχες εντατικές ιδιότητες συστήματος.

Μερικά παραδείγματα εκτατικών και εντατικών ιδιοτήτων δίνονται στον Πίνακα I-1.2.

Τώρα, η έκφραση των διαφορών φυσικών νόμων για ένα σύστημα αναφέρεται στον ρυθμό αλλαγής της N , με άλλα λόγια, αν διαφορίσουμε ως προς το χρόνο τη σχέση (I-1.10), απαιτεί τον υπολογισμό του

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho_0 dU. \quad (\text{I-1.11})$$

Επειδή, όμως, το $V_m(t)$ αλλάζει γρήγορα και ριζικά με τον χρόνο t , ο υπολογισμός αυτός είναι περίπλοκος. Το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds επιτρέπει την έκφραση του ανωτέρου όρου υπό την μορφή απλούστερων όρων οι οποίοι και επιτρέπουν τον υπολογισμό. Το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds (για απόδειξη βλέπε [84]) μας εξασφαλίζει με την παρακάτω μορφή για την χρονική μεταβολή του ολοκληρώματος των εντατικών ιδιοτήτων ενός συστήματος σαν το άθροισμα ενός ολοκληρώματος όγκου στον υλικό όγκο συστήματος και ενός επιφανειακού ολοκληρώματος στην υλική επιφάνεια συστήματος,

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho_0 dU = \iiint_{V_m(t)} \frac{\partial(\eta \rho_0)}{\partial t} dU + \iint_{A_m(t)} \eta \rho_0 \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (\text{I-1.12})$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ελέγχου $A_m(t)$.

Σχήμα I-1.6: Κίνηση συστήματος ως προς έναν ακίνητο όγκο ελέγχου σε δύο πολύ κοντινές χρονικές στιγμές t, t' με $t < t'$.

* Προκειμένου να καταλήξουμε στις βασικές εξισώσεις ροής που διέπουν το πρόβλημά μας, θα χρειαστούμε τη μάζα και τη γραμμική ορμή. Όσον αφορά την ενέργεια, αναλυτικές πληροφορίες δίνονται στη [87].

Θεωρώντας έναν όγκο ελέγχου V που για λόγους σκοπιμότητας είναι απλός και (συνήθως, αλλά όχι πάντα) ακίνητος, εκλέγουμε αυθαίρετα τον υλικό όγκο $V_m(t)$ έτσι ώστε να συμπίπτει με τον όγκο ελέγχου V την χρονική στιγμή t και μόνο αυτήν, γιατί εν γένει το σύστημα κινείται σε σχέση με τον όγκο ελέγχου όπως φαίνεται και στο Σχήμα Ι-1.6. Την συγκεκριμένη χρονική στιγμή ο υλικός όγκος $V_m(t)$ και η υλική επιφάνεια $A_m(t)$ συμπίπτουν με τον όγκο ελέγχου V και την επιφάνεια ελέγχου A , αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση, τα ολοκληρώματα του δεξιού σκέλους του θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds (Ι-1.12) μπορούν να εκτελεστούν πάνω στα πεδία V και A αντί για τα πεδία $V_m(t)$ και $A_m(t)$. Είναι αξιοσημείωτο να επισημανθεί το γεγονός ότι το $V_m(t)$ δεν μπορεί να αντικατασταθεί με το V στον όρο του αριστερού σκέλους της έκφρασης (Ι-1.12) εξ' αιτίας της παρουσίας της χρονοπαραγώγου, γιατί το $V_m(t)$ αλλάζει με το χρόνο ενώ το V όχι. Άρα συνδυάζοντας τις εξισώσεις (Ι-1.11) και (Ι-1.12) σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \eta \rho_0 dU = \iiint_V \frac{\partial(\eta \rho_0)}{\partial t} dU + \iint_A \eta \rho_0 \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (\text{I-1.13})$$

Η σχέση (Ι-1.13) ονομάζεται “*γέφυρα*” διότι συνδέει την ιδέα του συστήματος (αριστερό σκέλος) με την ιδέα του όγκου ελέγχου (δεξιό μέλος) και λέει ότι, ο ρυθμός αύξησης του N του συστήματος τη χρονική στιγμή t ισούται με το άθροισμα του ρυθμού αύξησης του N που περιέχεται στον όγκο ελέγχου τη στιγμή t και του ρυθμού εκροής N από την επιφάνεια ελέγχου τη στιγμή t .

Η χρησιμότητα της “*γέφυρας*” έγκειται στο γεγονός ότι μας επιτρέπει να μετατρέψουμε τους διάφορους νόμους της φυσικής από τη μορφή που ισχύει για συστήματα στην αντίστοιχη εύχρηστη μορφή για όγκο ελέγχου.

Ι-1.9 Εξίσωση συνέχειας – διατήρηση της μάζας.

Αν χρησιμοποιήσουμε τη “*γέφυρα*” (Ι-1.13) θέτοντας, σύμφωνα με τον Πίνακα Ι-1.2, όπου $N(t) = M$ (μάζα) και όπου $\eta = 1$, τότε έχουμε

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \rho_0 dU = \iiint_V \frac{\partial \rho_0}{\partial t} dU + \iint_A \rho_0 \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (\text{I-1.14})$$

Όμως, από το νόμο της διατηρήσεως της μάζας ενός συστήματος

$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad (\text{I-1.15})$$

εύκολα προκύπτει η ολοκληρωτική μορφή του ισοζυγίου της μάζας από την εξίσωση (I-1.14),

$$\iiint_V \frac{\partial \rho_0}{\partial t} dU + \iint_A \rho_0 \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (\text{I-1.16})$$

Το ισοζύγιο μάζας (I-1.16) εκφράζει ότι ο ρυθμός αύξησης μάζας μέσα στον όγκο ελέγχου συν το ρυθμό εκροής μάζας από την επιφάνεια ελέγχου ισούται με το μηδέν.

Ο όρος $\rho_0 \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ αλλάζει πρόσημο ανάλογα με την διεύθυνση της ταχύτητας. Δηλαδή, το πρόσημο αυτού του όρου εξαρτάται από τη διεύθυνση της ταχύτητας $\mathbf{v}$ σε σχέση με το ορθομοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$.

Η μακροσκοπική εξίσωση της συνέχειας (I-1.16) εφαρμόζεται τόσο σε καθαρά ρευστά όσο και σε ομοιογενή μίγματα ρευστών, υπό την προϋπόθεση ότι στο εσωτερικό του όγκου ελέγχου δεν γίνονται πυρηνικές ή χημικές αντιδράσεις*.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αποκλίσεως Gauss [14], μετατρέπουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα στη σχέση (I-1.16) σε ολοκλήρωμα όγκου μέσω της έκφρασης

$$\iint_A \rho_0 \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) dU \quad (\text{θεώρημα Gauss}) \quad (\text{I-1.17})$$

και, τότε, η ολοκληρωτική μορφή του ισοζυγίου της μάζας παίρνει τη μορφή

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) \right) dU = 0, \quad (\text{I-1.18})$$

όπου λόγω της αυθαιρεσίας του όγκου ελέγχου V , καταλήγουμε στη διαφορική μορφή του ισοζυγίου μάζας ή, όπως λέγεται, στην εξίσωση της συνέχειας [84,87],

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) = 0. \quad (\text{I-1.19})$$

Το φυσικό νόημα της εξίσωσης της συνέχειας δηλώνει ότι, ο ρυθμός αυξήσεως της μάζας ανά μονάδα όγκου σε ένα σημείο (x_1, x_2, x_3) και ο ρυθμός εκροής μάζας ανά μονάδα όγκου σε ένα σημείο (x_1, x_2, x_3) έχουν άθροισμα μηδέν.

* Όταν στο εσωτερικό του όγκου ελέγχου γίνονται χημικές αντιδράσεις, η μακροσκοπική εξίσωση της συνέχειας για ένα συστατικό i του μίγματος των ρευστών γράφεται ως εξής:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dU + \iint_A \rho_i \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V r_i dU, \quad (\text{I-1.16a})$$

όπου ρ_i είναι η πυκνότητα και r_i ο ρυθμός παραγωγής του συστατικού i ανά μονάδα όγκου του ρευστού. Η εξίσωση (I-1.16a) ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι όλα τα συστατικά του μίγματος κινούνται με την ίδια ταχύτητα.

Ι-1.10 Μακροσκοπικό ισοζύγιο γραμμικής ορμής.

Προκειμένου να εξάγουμε την εξίσωση συνέχειας θέσαμε στη “γέφυρα” (Ι-1.13) όπου $N(t) = M$, $\eta = 1$ αρχικά. Κατ’ αναλογία, χρησιμοποιούμε τα στοιχεία του Πίνακα Ι-1.2 και θέτουμε στη “γέφυρα” $N(t) = \mathbf{P}$, $\eta = \mathbf{v}$. Ειδικότερα,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \mathbf{v} \rho_0 dU = \iiint_V \frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} dU + \iint_A \rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (\text{I-1.20})$$

Από την άλλη, γνωρίζουμε [84,87] ότι ο ρυθμός αλλαγής της γραμμικής ορμής ενός συστήματος ισούται με το άθροισμα της δύναμης της βαρύτητας* και της συνισταμένης των επιφανειακών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα. Μαθηματικά η παραπάνω πρόταση μεταφράζεται στην αρχή της γραμμικής ορμής μέσα σε έναν ολικό όγκο $V_m(t)$,

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m(t)} \mathbf{v} \rho_0 dU = \iiint_{V_m(t)} \mathbf{g} \rho_0 dU + \iint_{A_m(t)} \mathbf{t}_{(n)} dS, \quad (\text{I-1.21})$$

όπου $\mathbf{g}$ είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας (με μέτρο 9.81 m/s^2) και $\mathbf{t}_{(n)}$ είναι το διάνυσμα των συνολικών τάσεων που εφαρμόζονται στην υλική επιφάνεια και δίνεται από το παρακάτω όριο, θεωρώντας τη δύναμη που δρα σε μια διαφορική επιφάνεια,

$$\mathbf{t}_{(n)} = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{F}_{(n)}}{\delta A}. \quad (\text{I-1.22})$$

Αφού κατά τη χρονική στιγμή t έχουμε $V_m(t) = V$ και $A_m(t) = A$, τα πεδία ολοκληρώσεως στους δύο όρους του δεξιού μέλους της έκφρασης (Ι-1.21) μπορούν να αντικατασταθούν με V και A . Συνδυάζοντας, λοιπόν, τις εξισώσεις (Ι-1.20) και (Ι-1.21) καταλήγουμε στο μακροσκοπικό ισοζύγιο γραμμικής ορμής,

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} dU + \iint_A \rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \mathbf{g} \rho_0 dU + \iint_A \mathbf{t}_{(n)} dS. \quad (\text{I-1.23})$$

Δηλαδή, ο ρυθμός αύξησης της γραμμικής ορμής που περιέχεται στον όγκο ελέγχου V και ο ρυθμός εκροής γραμμικής ορμής μέσω της επιφάνειας ελέγχου A ισούται με το άθροισμα των βαρυτικών (γενικά σωματικών) δυνάμεων που δρουν επάνω στο περιεχόμενο του όγκου ελέγχου και της συνισταμένης των επιφανειακών δυνάμεων που δρουν επάνω στην επιφάνεια ελέγχου.

* Γενικά, οι δυνάμεις που ασκούνται στον υλικό όγκο μπορεί να μην είναι μόνο δυνάμεις βαρύτητας αλλά γενικά σωματικές δυνάμεις, όπως για παράδειγμα δυνάμεις πίεσης. Παρόλα αυτά, οι δυνάμεις βαρύτητας είναι από φυσικής πλευράς οι πιο ουσιαστικές αν δεν υπάρχει η επίδραση εξωτερικού παράγοντα.

I-1.11 Εξίσωση κινήσεως του Cauchy – εξίσωση Navier – Stokes.

Στην προηγούμενη παράγραφο αναπτύξαμε το ισοζύγιο γραμμικής ορμής στην ολοκληρωτική του μορφή. Με κατάλληλη χρήση του θεωρήματος του Gauss

$$\iint_A \rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iiint_V \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) dU \quad (\text{θεώρημα Gauss}) \quad (\text{I-1.24})$$

αντικαθιστούμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο μακροσκοπικό ισοζύγιο γραμμικής ορμής (I-1.23) με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα όγκου από την εξίσωση (I-1.24). Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\iiint_V \left(\frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) dU = \iiint_V \mathbf{g} \rho_0 dU + \iint_A \mathbf{t}_{(n)} dS. \quad (\text{I-1.25})$$

Ο ορισμός του διανύσματος τάσεως* (I-1.22) αναφέρεται σε συγκεκριμένο σημείο (x_1, x_2, x_3) και σε μια αυθαίρετη διαφορική επιφάνεια $\hat{\mathbf{n}} \delta A$. Το ρέον ρευστό ασκεί μια δύναμη $\delta \mathbf{F}_{(n)}$ πάνω στην επιφάνεια $\hat{\mathbf{n}} \delta A$. Ο δείκτης n χρησιμοποιείται για να μας υπενθυμίζει ότι η δύναμη $\delta \mathbf{F}_{(n)}$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό του στοιχείου της επιφάνειας, δηλ. από την κατεύθυνση του ορθομοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$.

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε τον ορισμό του ολικού τανυστή των τάσεων $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ [84] που εκφράζεται μέσω της θερμοδυναμικής πίεσης P από τη ρεολογική εξίσωση

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = -P\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \left[\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^\top \right] + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \mu_0 \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \tilde{\mathbf{I}}, \quad (\text{I-1.26})$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό, κ είναι ο συντελεστής πυκνωτικού ιξώδους και το σύμβολο “ $\top$ ” δηλώνει αναστροφή. Όπως άμεσα φαίνεται από τον ορισμό (I-1.26), ο ολικός τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός [109]. Γύρω από την διανυσματική και τανυστική ανάλυση ο αναγνώστης μπορεί να καταφύγει στις [14,88,109], ενώ για πιο εξειδικευμένη τανυστική ανάλυση στο πεδίο της ρευστομηχανικής, όλες οι πληροφορίες συνοψίζονται στην [84]. Έχοντας υπ’ όψη την (I-1.26) αποδεικνύεται [84] η σχέση του διανύσματος τάσης (I-1.22) και του ολικού τανυστή των τάσεων,

* Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε σημείο επιφάνειας έχει δύο όψεις και ότι το διάνυσμα της τάσης επί της όψης με μοναδιαίο κάθετο $-\hat{\mathbf{n}}$ γράφεται ως $\mathbf{t}_{(-n)}$ και ισχύει

$$\mathbf{t}_{(n)} = -\mathbf{t}_{(-n)}. \quad (\text{I-1.22a})$$

$$\mathbf{t}_{(n)} = \hat{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{\Pi}} = \tilde{\mathbf{\Pi}} \hat{\mathbf{n}}. \quad (\text{I-1.27})$$

Η δεύτερη ισότητα στην (I-1.27) προκύπτει από τη συμμετρικότητα του $\tilde{\mathbf{\Pi}}$. Τότε, η έκφραση (I-1.25) γίνεται

$$\iiint_V \left(\frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) dU = \iiint_V \mathbf{g} \rho_0 dU + \iint_A \hat{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{\Pi}} dS. \quad (\text{I-1.28})$$

Από την άλλη, το γνωστό, πια, θεώρημα αποκλίσεως του Gauss για τανυστές δίνει

$$\iint_A \hat{\mathbf{n}} \tilde{\mathbf{\Pi}} dS = \iiint_V \nabla \tilde{\mathbf{\Pi}} dU \quad (\text{θεώρημα Gauss}) \quad (\text{I-1.29})$$

και κινούμενοι στο ίδιο κλίμα της μετατροπής των επιφανειακών ολοκληρωμάτων σε ολοκληρώματα όγκου, ώστε να γίνει εφικτή η μετατροπή των ολοκληρωτικών εξισώσεων σε διαφορικές, εισάγουμε το θεώρημα (I-1.29) στην (I-1.28) έτσι ώστε

$$\iiint_V \left(\frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \rho_0 \mathbf{g} \tilde{\mathbf{\Pi}} \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}} \right) dU = 0. \quad (\text{I-1.30})$$

Χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα αυθαιρεσίας του όγκου ελέγχου V , καταλήγουμε στην εξίσωση κινήσεως του Cauchy [50,84,87]

$$\frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \rho_0 \mathbf{g} \tilde{\mathbf{\Pi}} \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}, \quad (\text{I-1.31})$$

όπου με τη βοήθεια της (I-1.26) και της ταυτότητας (A.13) ή (A.14)

$$\nabla \cdot (p \tilde{\mathbf{I}}) = \nabla p \cdot \tilde{\mathbf{I}} + p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{I}} = \nabla p \quad (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{0}) \quad (\text{I-1.32})$$

οδηγεί στην εξίσωση των Navier – Stokes [50,84,87] για νευτώνεια ρευστά

$$\frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla p + \nabla \cdot \left\{ \mu_0 \left[\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^\top \right] + \left[\left(\kappa - \frac{2}{3} \mu_0 \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] \tilde{\mathbf{I}} \right\} + \rho_0 \mathbf{g}. \quad (\text{I-1.33})$$

Δηλαδή, ο ρυθμός αυξήσεως της γραμμικής ορμής μέσα σε ένα διαφορικό όγκο ελέγχου ανά μονάδα όγκου ισούται με το άθροισμα τεσσάρων ποσοτήτων. Με τη σειρά που εμφανίζονται στην εξίσωση, αυτές είναι: ο ρυθμός εισροής γραμμικής ορμής δια συναγωγής [7] στο διαφορικό όγκο ελέγχου ανά μονάδα όγκου, η συνισταμένη των εκ πίεσεως δυνάμεων που ασκούνται στο διαφορικό όγκο ελέγχου ανά μονάδα όγκου, η συνισταμένη των ιξωδών επιφανειακών δυνάμεων που ασκούνται στο διαφορικό όγκο ελέγχου ανά μονάδα όγκου και η συνισταμένη των σωματικών (βαρυτικών) δυνάμεων που ασκούνται στο διαφορικό όγκο ελέγχου ανά μονάδα όγκου.

I–1.12 Απλοποιήσεις των εξισώσεων της συνέχειας και των εξισώσεων Navier – Stokes. Οι εξισώσεις Stokes.

Οι, εξαιρετικής σημασίας, βασικές εξισώσεις των περισσοτέρων προβλημάτων ροής νευτώνειων ρευστών αναλύθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους και είναι η εξίσωση της συνέχειας (I–1.19) και η εξίσωση των Navier – Stokes (I–1.33). Οι συγκεκριμένοι νόμοι δίνονται σε διαφορική μορφή προκειμένου να γίνει ακριβής περιγραφή του πεδίου ροής σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου. Λιγότερο η διαφορική εξίσωση της συνέχειας και πολύ περισσότερο η διαφορική εξίσωση των Navier – Stokes απλοποιούνται αισθητά, κάνοντας λογικές προσεγγίσεις, όταν εφαρμόζονται σε ειδικές μορφές ροής [50,84,87]. Οι συνηθέστερες μορφές ροής που αντιμετωπίζουμε στην πράξη για την αναλυτική επίλυση πλήθους σημαντικών προβλημάτων ρευστομηχανικής είναι η μόνιμη* και η ασυμπίεστη ροή σταθερού ιξώδους (τέτοιου χαρακτήρα μη μόνιμες ροές εμφανίζονται στις [120–122]). Σε αυτές τις περιπτώσεις, αρχικά, τα πεδία ροής δεν εξαρτώνται από το χρόνο, δηλ.,

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 \quad (\text{I–1.34})$$

και

$$\frac{\partial(\rho_0 \mathbf{v})}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (\text{I–1.35})$$

Επιπλέον, σύμφωνα με την υπόθεση ασυμπίεστης ροής σταθερού ιξώδους, οι δύο βασικές ιδιότητες των ρευστών, η ομοιόμορφη πυκνότητα ρ_0 και το δυναμικό ιξώδες μ_0 , είναι σταθερές και ανεξάρτητες και του χώρου. Βέβαια σε συνθήκες ασυμπίεστης ροής η σχέση (I–1.34) ικανοποιείται αυτόματα. Έτσι, οδηγούμαστε στην παρακάτω έκφραση για την εξίσωση της συνέχειας (I–1.19)

$$\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I–1.36})$$

ή

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{Εξίσωση της Συνέχειας – Συνθήκη ασυμπίεστης ροής}) \quad (\text{I–1.37})$$

* Πολλές φορές είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε ψευδομόνιμη κατάσταση όταν δεν καθορίζεται πλήρως η εξάρτηση ή η ανεξαρτησία των πεδίων ροής από τον χρόνο. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν όλες οι υποθέσεις της μόνιμης ροής με την προϋπόθεση της μελέτης των φαινομένων κατά την έναρξή τους.

επειδή $\rho_0 \neq 0$. Οι εξισώσεις των Navier – Stokes (I-1.33) απλοποιούνται αρκετά με τις παραπάνω συνηθισμένες προσεγγίσεις. Αναλυτικότερα, λόγω των εξισώσεων (I-1.35) και (I-1.37), γενική σχέση (I-1.33) γράφεται ως

$$-\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \nabla p + \mu_0 \nabla \cdot [\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T] + \rho_0 \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (\text{I-1.38})$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας (A.12) σε συνδυασμό με την (A.13),

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho_0 \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0) \quad (\text{I-1.39})$$

καθώς και των σχέσεων (A.40) και (A.41),

$$\nabla \cdot [\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T] = \Delta \mathbf{v} + \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}, \quad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0) \quad (\text{I-1.40})$$

η έκφραση (I-1.38) απλοποιείται ακόμα περισσότερο,

$$-\rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \nabla p + \mu_0 \Delta \mathbf{v} + \rho_0 \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (\text{I-1.41})$$

όπου το Δ είναι ο διαφορικός τελεστής του Laplace. Φυσικά, το ∇ είναι ο διαφορικός τελεστής της βάθμωσης. Μπορούμε, για απλούστευση, να ορίσουμε ένα φυσικό μέγεθος, την ολική πίεση P που εκφράζεται μέσω του αθροίσματος της θερμοδυναμικής πίεσης και της πίεσης λόγω βαρύτητας. Άρα, διαλέγοντας το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το καρτεσιανό μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{x}}_1$ να είναι αντιπαράλληλο με την επιτάχυνση της βαρύτητας $\mathbf{g}$,

$$\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{x}}_1 \quad (\text{I-1.42})$$

και εισάγοντας τον προαναφερθέντα ορισμό για την ολική πίεση

$$P = p + \rho_0 g x_1, \quad (\text{I-1.43})$$

συνδυάζουμε τις (I-1.42) και (I-1.43) με αποτέλεσμα

$$\nabla P = \nabla p + \rho_0 g \nabla x_1 = \nabla p + \rho_0 g \hat{\mathbf{x}}_1 = \nabla p - \rho_0 \mathbf{g}. \quad (\text{I-1.44})$$

Οπότε, η (I-1.41) καταλήγει στην

$$-\rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \nabla P + \mu_0 \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (\text{I-1.45})$$

Ο όρος $\mu_0 \Delta \mathbf{v}$ εκφράζει την συνισταμένη των ιξωδών επιφανειακών δυνάμεων που ασκούνται είτε πάνω σε ένα υλικό σημείο ανά μονάδα όγκου, είτε πάνω σε ένα διαφορικό όγκο ελέγχου ανά μονάδα όγκου. Ο όρος ∇P δηλώνει την παραγόμενη πίεση, ενώ ο όρος $\rho_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v}$ αντιπροσωπεύει το σύνολο των αδρανειακών δυνάμεων επί μιας διαφορικής επιφάνειας ελέγχου ανά μονάδα επιφανείας.

Με λίγες πράξεις ακόμα στην (I-1.45) οδηγούμαστε στην έκφραση

$$-\frac{\rho_0}{\mu_0} \mathbf{v} \cdot \nabla \otimes \mathbf{v} - \frac{1}{\mu_0} \nabla P + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (\text{I-1.46})$$

Η συγκεκριμένη παράσταση (I-1.46) δέχεται μια περαιτέρω απλοποίηση που αφορά τον αδιάστατο αριθμό Reynolds. Όμως, στη μορφή αυτή είναι αδύνατο να εξετάσουμε πώς επηρεάζει ο αριθμός Reynolds την (I-1.46). Παρόλο που καθ' όλη τη διάρκεια εργασίας δεν θα ασχοληθούμε με αδιάστατες μεταβλητές*, είναι επιβεβλημένο σε αυτό το σημείο να εισάγουμε δεδομένα αδιάστατα μεγέθη με απώτερο σκοπό την εξαγωγή της βασικής εξίσωσης κίνησης που διέπει τα περισσότερα προβλήματα ροής. Άρα, προκειμένου να διαγράψουμε τους όρους που έχουν ασήμαντο, σχετικά, μέγεθος και να οδηγηθούμε σε επιτυχή και ριζική απλοποίηση της (I-1.46), θα επιχειρήσουμε αδιαστατοποίηση της αναφερθείσας εξίσωσης θέτοντας κάποιες χαρακτηριστικές μεταβλητές ή μεγέθη. Δηλαδή, εδώ θα θέσουμε

$$\left. \begin{aligned} \ell &= \text{χαρακτηριστικό μήκος,} \\ u &= \text{χαρακτηριστική ταχύτητα} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-1.47})$$

και, οπότε, ορίζουμε κατάλληλα τα αδιάστατα μεγέθη και διαφορικούς τελεστές που εμφανίζονται στην (I-1.46)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \mathbf{v}/u &&= \text{αδιάστατη ταχύτητα,} \\ P^* &= P/\rho_0 u^2 &&= \text{αδιάστατη ολική πίεση,} \\ \nabla^* &= \ell \nabla &&= \text{αδιάστατος τελεστής βάθμωσης,} \\ \Delta^* &= \ell^2 \Delta &&= \text{αδιάστατος τελεστής Laplace.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-1.48})$$

Επιπλέον,

$$Re = \frac{\rho_0 u \ell}{\mu_0} = \text{αδιάστατος αριθμός Reynolds.}$$

Με απλή αντικατάσταση των σχέσεων αδιαστατοποίησης (I-1.47) και (I-1.48) στην (I-1.46) παίρνουμε

$$-Re \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \otimes \mathbf{v}^* - Re \nabla^* P^* + \Delta^* \mathbf{v}^* = \mathbf{0}. \quad (\text{I-1.49})$$

* Κατά την επίλυση φυσικών προβλημάτων είναι πάντα σκόπιμο να εργαζόμαστε με αδιάστατα μεγέθη διότι τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από τη μετατροπή των αρμόδιων εξισώσεων σε αδιάστατη μορφή είναι πολλά και σημαντικά. Η εκλογή των χαρακτηριστικών μεγεθών που βοηθάνε στην αδιαστατοποίηση εξαρτάται κάθε φορά από τη γεωμετρία και τη φυσική του προβλήματος [84].

Τα πιο πολλά σημαντικά προβλήματα ροής στο χώρο της Χημικής Μηχανικής, όπως ροή γύρω από μικρούς κόκκους ή σταγόνες και ροή σε λεπτομερισμένα πορώδη μέσα, χαρακτηρίζονται από ένα είδος ροής που ο αριθμός Reynolds είναι πολύ μικρότερος της μονάδας [56]. Αυτό το είδος ροής καλείται έρπουσα ροή και εμφανίζεται σε πολλές φυσικές εφαρμογές. Για πολύ μικρούς αριθμούς Reynolds, λοιπόν, όπως υποδεικνύει η σχέση (I-1.49), οι ιξώδεις όροι υπερισχύουν των όρων αδρανείας και οι τελευταίοι μπορούν να παραλειφθούν, δεδομένου ότι η βαθμίδα της ολικής πίεσης παραμένει αρκετά ισχυρή ώστε να ισοσταθμίζει τον πολύ μικρό αριθμό Reynolds. Η πιο πάνω πρόταση μαθηματικά σημαίνει

$$-Re \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \otimes \mathbf{v}^* \lll \Delta^* \mathbf{v}^* \quad \text{για} \quad Re \lll 1, \quad (\text{I-1.50})$$

όπου αυτό αντανakλάται στην (I-1.49),

$$-Re \nabla^* P^* + \Delta^* \mathbf{v}^* = \mathbf{0}. \quad (\text{I-1.51})$$

Παρατηρούμε ότι η (I-1.51) είναι, πια, μια γραμμική εξίσωση σε αντίθεση με την (I-1.49), όπου η μη γραμμικότητα εισέρχεται μέσω των μη γραμμικών όρων αδρανείας. Άρα έχουμε την ευτυχή συγκυρία η φυσική της έρπουσας ροής των περισσοτέρων προβλημάτων ρευστομηχανικής να συμβαδίζει με τα απλά μαθηματικά της γραμμικής σχέσης (I-1.51).

Επαναφέροντας τις διαστατοποιημένες μεταβλητές (I-1.48) στην (I-1.51) προκύπτει η γνωστή εξίσωση του Stokes για έρπουσα ροή,

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v} - \nabla P = \mathbf{0} \quad (\text{Εξίσωση του Stokes} - \text{Συνθήκη έρπουσας ροής}). \quad (\text{I-1.52})$$

Μια άμεση συνέπεια της εξίσωσης του Stokes (I-1.46) είναι ότι, το πεδίο ταχύτητας είναι διαρμονικό, δηλ., ανήκει στον πυρήνα του τελεστή $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ και το πεδίο ολικής πίεσης είναι αρμονικό, δηλ., ανήκει στον πυρήνα του τελεστή του Laplace.

Σχήμα Ι-1.7: Έρπουσα ροή, $Re \lll 1$, γύρω από σφαιρικό σωματίδιο.

Στο Σχήμα Ι-1.7 παρατηρούμε τη ροή γύρω από συμμετρικό σώμα (σφαίρα), όπου φαίνεται η ιδανικότητα της έρπουσας ροής. Η κρίσιμη τιμή του Re κάτω από την

οποία η ροή μπορεί να θεωρηθεί σαν έρπουσα εξαρτάται από τη γεωμετρία και την απαιτούμενη ακρίβεια.

Η εξίσωση (I-1.52) αποκαλύπτει μια πολύ χαρακτηριστική ιδιότητα της έρπουσας ροής. Η ταχύτητα $\mathbf{v}$ είναι ανάλογη της βαθμίδας της ολικής πίεσης ∇P και αντιστρόφως. Επιπλέον, επειδή η οπισθέλκουσα δύναμη [56,84,87] είναι ανάλογη των πρώτων χωρικών παραγώγων της ταχύτητας, προκύπτει ότι σε έρπουσες ροές η ταχύτητα, η βαθμίδα της ολικής πίεσης και η οπισθέλκουσα δύναμη είναι ανάλογες μεταξύ τους συναρτήσεις. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν διαγνωστικό μέσο για να πιστοποιηθεί ότι μια ροή είναι πράγματι έρπουσα.

Ένα σημαντικό μέγεθος που εμφανίζεται συνεχώς σε φυσικά προβλήματα είναι ο στροβιλισμός ή αλλιώς η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\boldsymbol{\omega}$,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}. \quad (\text{I-1.53})$$

Ουσιαστικά, τα αστρόβιλα πεδία ροής απαιτούν

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{I-1.54})$$

όπου χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (A.47)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \quad (\text{I-1.55})$$

καταλήγουμε, λόγω των εξισώσεων (I-1.37) και (I-1.54), στο ότι

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (\text{I-1.56})$$

Τότε, η εξίσωση του Stokes δίνει

$$\nabla P = \mathbf{0}, \quad (\text{I-1.57})$$

που σημαίνει ότι τα αστρόβιλα πεδία είναι πεδία σταθερής ολικής πίεσης.

I-1.13 Επίλυση των εξισώσεων Stokes.

Η αναφορά [108] αποτελεί την πρώτη εμφάνιση της “Ροής Stokes” στη βιβλιογραφία. Συνοψίζοντας το θεωρητικό υπόβαθρο, η ροή Stokes (1851) για τη μόνιμη ή ψευδομόνιμη, μη αξονοσυμμετρική κίνηση ενός ιξώδους (σταθερό δυναμικό ιξώδες μ_0), ασυμπίεστου (σταθερή πυκνότητα ρ_0) ρευστού σε μικρούς αριθμούς Reynolds (έρπουσα ροή), γύρω από σωματίδια ευρισκόμενα μέσα σε απλώς συνεκτικά, ομαλά, φραγμένα πεδία ροής $\Omega(\mathbb{R}^3)$, περιγράφεται από ένα ζεύγος μερικών διαφορικών εξισώσεων που συνδέουν το διανυσματικό πεδίο της διαρμονικής ταχύτητας $\mathbf{v}$

(αρμονικός ο στροβιλισμός $\boldsymbol{\omega}$) με το βαθμωτό αρμονικό πεδίο ολικής πίεσης P , όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης,

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \quad (\text{I-1.58})$$

και

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3). \quad (\text{I-1.59})$$

Οι εξισώσεις Stokes, οι οποίες είναι γνωστές πάνω από έναν αιώνα, αποτελούν τη βάση επίλυσης πολλών Νευτώνειων προβλημάτων ροής. Η μεν μια εξίσωση (Navier – Stokes) (I-1.58) δηλώνει ότι, η παραγόμενη πίεση αντιτίθεται στις ιξώδεις δυνάμεις, η δε άλλη σχέση (εξίσωση συνέχειας) (I-1.59) διασφαλίζει την ασυμπιεστότητα του ρευστού.

Το διανυσματικό αρμονικό πεδίο του στροβιλισμού βρίσκεται ότι επαληθεύει την

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3). \quad (\text{I-1.60})$$

Το πεδίο ολικής πίεσης παράγεται από το άθροισμα της θερμοδυναμικής πίεσης P και της δύναμης πίεσεως λόγω βαρύτητας $\rho g x_1$ (g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας)

$$P(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) + \rho_0 g x_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3), \quad (\text{I-1.61})$$

όπου το x_1 δηλώνει κάθε φορά το ύψος αναφοράς.

Το πεδίο του ολικού τανυστή των τάσεων $\tilde{\Pi}$ είναι αρμονικό,

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{r}) = -p(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \left[\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}) + (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}))^T \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3), \quad (\text{I-1.62})$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό και το σύμβολο “ T ” δηλώνει αναστροφή.

Υπάρχουν αρκετές αποτελεσματικές μέθοδοι σε χρήση για την επίλυση προβλημάτων ροής Stokes όπως αριθμητική ανάλυση [2,65,94], τεχνικές συνάρτησης ροής (Κεφάλαιο I-2) και αναλυτικές μέθοδοι (Κεφάλαιο I-3) σε μορφές διαφορικών αναπαράστάσεων των λύσεων των εξισώσεων του Stokes σε διδιάστατα $\Omega(\mathbb{B}^2)$ και τρισδιάστατα χωρία $\Omega(\mathbb{B}^3)$ ποικίλων γεωμετριών. Οι λύσεις αυτές δίνουν την ταχύτητα και την ολική πίεση μέσω παραστάσεων – συναρτήσεων που ονομάζονται δυναμικά, διανυσματικά ή βαθμωτά, και είναι εύκολο να υπολογιστούν.

Πέρα από το μαθηματικό ενδιαφέρον που παρουσιάζει η συσχέτιση αυτών των αναπαράστάσεων, η επιλογή της κατάλληλης διαφορικής αναπαράστασης για την επίλυση φυσικών προβλημάτων ροής αποτελεί πάντα έναν ελκυστικό τομέα έρευνας που θα μας απασχολήσει στην παρούσα διατριβή. Τα κυριότερα προβλήματα που εμφανίζονται στη φύση, ευτυχώς, ακολουθούν τους κανόνες του Stokes και αφορούν

συνήθως συστήματα μικρών σωματιδίων και ρευστού (Κεφάλαιο I–4). Γενικά, η σχετική κίνηση ρευστού ως προς σμήνη μικρών σωματιδίων αποτελεί περιοχή μεγάλου ενδιαφέροντος σε σημαντικούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Συστήματα σωματιδίου – ρευστού εμφανίζονται σε πολλές σημαντικές εφαρμογές, όπως καθίζηση, ροή σε κοκκώδη – πορώδη μέσα, ρευστοποίηση, φαινόμενα μεταφοράς, κρυσταλλοποίηση, διήθηση, υδροδυναμική χρωματογραφία, ροή γαλακτωμάτων, κολλοειδών κλπ. Η διαδικασία της επίλυσης των συγκεκριμένων προβλημάτων συμπληρώνεται από μια ομάδα συνοριακών συνθηκών που εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος και τη γεωμετρία.

Οι συνοριακές συνθήκες αναφέρονται στα όρια του όγκου ελέγχου $\partial\Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ για μη αξονοσυμμετρικές και $\partial\Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ για αξονοσυμμετρικές ροές και διατυπώνουν κάποια φυσική αρχή, για τα όρια αυτά, η οποία ισχύει για όλο το χρονικό διάστημα που εξετάζεται ο όγκος ελέγχου. Από φυσική άποψη, οι συνοριακές συνθήκες εκφράζουν την αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με το άμεσο περιβάλλον του. Από μαθηματική άποψη, οι συνοριακές συνθήκες θεσπίζονται για μια μαθηματική επιφάνεια η οποία οριοθετεί την περιοχή του χώρου που μας ενδιαφέρει. Το συνηθέστερο όριο στην οριοθέτηση αυτή είναι μια ορατή φυσική διεπιφάνεια. Στην ανάλυση των προβλημάτων ροής ρευστών εμφανίζονται συνήθως τρία είδη φυσικών διεπιφανειών: στερεού – ρευστού*, υγρού – υγρού και υγρού – αερίου.

* Σε αυτή την κατηγορία ανήκει και η σχεδόν πάντα εμφανιζόμενη συνοριακή συνθήκη της μη ολίσθησης που αναφέραμε στην παράγραφο I–1.3γ.

ΜΕΡΟΣ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι–2 ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ 2–D ΡΟΗ STOKES – ΠΕΔΙΑ ΡΟΗΣ

Ι–2.1 Αξονοσυμμετρική ροή – η συνάρτηση ροής.

Στο Κεφάλαιο Ι–1 επισημάνσαμε την αναφορά [108] που αποτελεί την πρώτη εμφάνιση της “Ροής Stokes” στη βιβλιογραφία. Η συγκεκριμένη βιβλιογραφία, όμως, αφορά αξονοσυμμετρικές ή διδιάστατες ροές Stokes. Η θεωρία αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι απαιτεί μια μόνον συνάρτηση δυναμικού αυτήν που ονομάζουμε συνάρτηση ροής και επιπλέον ότι αυτή η συνάρτηση ροής έχει φυσική σημασία. Το μειονέκτημα είναι ότι ισχύει μόνον για αξονομετρικές ροές. Η ροϊκή συνάρτηση ή η συνάρτηση ροής Ψ είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία ορίζεται για μια διδιάστατη, ασυμπίεστη* ροή (πραγματικού ή ιδανικού ρευστού), έτσι, ώστε να ικανοποιείται πάντα η διαφορική εξίσωση της συνέχειας (Ι–1.59).

* Η συνάρτηση ροής ορίζεται και για συμπίεστες όπως, επίσης, και για τρισδιάστατες ροές (απαιτούνται δύο συναρτήσεις ροής), αλλά, στις περιπτώσεις αυτές, απαιτούνται πιο πολύπλοκες μαθηματικές θεωρήσεις [110]. Βέβαια, οι μη αξονοσυμμετρικές ροές αντιμετωπίζονται αλλιώς όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο Ι–3.

Στις αξονοσυμμετρικές ροές [56,84,87,123] είναι επιτακτική η εισαγωγή συστημάτων συντεταγμένων με ύπαρξη αξονικής συμμετρίας, δηλ., αντίστοιχα, ύπαρξη αξιμουθιακής γωνίας. Τα συστήματα αυτά ορίζονται κατάλληλα όπως θα δούμε στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου. Θεωρούμε, λοιπόν, για άξονα συμμετρίας τον άξονα z και έστω Φ η αξιμουθιακή γωνία. Μια ροή θα λέγεται αξονοσυμμετρική όταν η ταχύτητα $\mathbf{v}$ είναι ανεξάρτητη της γωνίας αξιμουθίου Φ , δηλ.,

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r})}{\partial \Phi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{G}^3) \quad (\text{I-2.1})$$

και όταν, επίσης η ταχύτητα $\mathbf{v}$ δεν έχει αξιμουθιακή συνιστώσα, δηλ.,

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{G}^3). \quad (\text{I-2.2})$$

Συνεπώς, η κίνηση του ρευστού είναι η ίδια σε κάθε μεσημβρινό επίπεδο.

Ακόμα, οι ροϊκές γραμμές ή γραμμές ροής (stream lines) βρίσκονται επάνω στο μεσημβρινό επίπεδο, λόγω της (I-2.2). Υπενθυμίζουμε ότι ροϊκή γραμμή λέγεται η καμπύλη της οποίας η εφαπτόμενη σε κάθε σημείο συμπίπτει με την ταχύτητα, δηλαδή μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \quad t > 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{G}^3). \quad (\text{I-2.3})$$

Οι ορισμοί αξονοσυμμετρίας (I-2.1) και (I-2.2) μαζί συνεπάγονται ότι οι ροϊκές επιφάνειες είναι ομοαξονικές επιφάνειες από περιστροφή.

Θέλοντας να ορίσουμε από φυσικής σκοπιάς τη συνάρτηση ροής, θεωρούμε μια καμπύλη C ενός μεσημβρινού επιπέδου που συνδέει ένα τυχόν σημείο $\mathbf{r}(\rho, z)$ με ένα σημείο $\mathbf{r}_0(\rho, z_0)$ του άξονα συμμετρίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα I-2.1.

Σχήμα Ι-2.1: Γεωμετρική αναπαράσταση του φυσικού ορισμού της συνάρτησης ροής.

Η περιστροφή της καμπύλης C γύρω από τον z -άξονα γεννά την επιφάνεια S_C . Έστω Q ο στιγμιαίος ογκομετρικός ρυθμός ροής διαμέσου της επιφάνειας S_C . Δηλαδή, το Q ισούται με τον όγκο του ρευστού που περνάει την επιφάνεια S_C ανά μονάδα χρόνου και επομένως, το Q είναι παροχή. Ορίζουμε, ακόμα, συμβατικά το αλγεβρικό πρόσημο του Q να είναι θετικό όταν η συνολική ροή δια της επιφάνειας S_C γίνεται στην διεύθυνση $-\hat{z}$ (ροή κατά κάτω). Θεωρούμε ένα σημείο $\mathbf{r}'_0(\rho, z'_0)$ επάνω στον z -άξονα* και το συνδέουμε με το $\mathbf{r}(\rho, z)$ μέσω μιας συνεχούς καμπύλης C' που επίσης βρίσκεται επάνω στο ίδιο μεσημβρινό επίπεδο με την C . Έστω $S_{C'}$ η επιφάνεια που γεννάται από την περιστροφή της C' γύρω από τον z -άξονα. Επειδή η ροή Stokes είναι ασυμπίεστη ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) έπεται ότι η συνολική μάζα ρευστού μέσα στον όγκο που ορίζουν οι επιφάνειες S_C και $S_{C'}$ παραμένει σταθερή, και συνεπώς ο στιγμιαίος ογκομετρικός ρυθμός ροής διαμέσου της επιφάνειας S_C είναι επίσης Q . (Αυτό αποδεικνύεται απλά με τον τύπο του Gauss).

Συνεπώς, η παροχή Q καθορίζεται μοναδικά αν γνωρίζουμε το σημείο $\mathbf{r}$, δηλαδή η αντιστοιχία

$$\mathbf{r} \rightarrow Q(\mathbf{r}) \quad (\text{I-2.4})$$

αποτελεί μια συνάρτηση, που απεικονίζει το σημείο $\mathbf{r}$ στον όγκο $Q(\mathbf{r})$ που διαπερνά οποιαδήποτε επιφάνεια της μορφής S_C ανά μονάδα χρόνου.

Προφανώς το Q είναι και συνάρτηση του t , αλλά με την παραπάνω διαδικασία και λόγω της ασυμπίεστότητας της ροής ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), αποδείξαμε ότι η παροχή είναι ανεξάρτητη της καμπύλης C . Αν επιχειρήσουμε να συνδέσουμε τη συνάρτηση ροής με την ογκομετρική παροχή καταλήγουμε στον ορισμό

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q(\mathbf{r}, t)}{2\pi}, \quad t > 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^2). \quad (\text{I-2.5})$$

Προφανώς,

$$\psi(\rho = 0, z, t) = 0, \quad t > 0, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (\text{I-2.6})$$

δηλαδή η συνάρτηση ροής μηδενίζεται επάνω στον άξονα συμμετρίας.

* Για ευκολία, θεωρούμε προσωρινά κυλινδρικές συντεταγμένες πράγμα που διευκολύνει στους υπολογισμούς χωρίς βλάβη γενικότητας. Επιπλέον, σαν αξιμουθιακή γωνία θεωρούμε πάντα τη γωνία φ , ενώ ο άξονας συμμετρίας θα είναι σε όλη τη πορεία της συγκεκριμένης δουλειάς ο x_1 σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Για μια σταθερή χρονική στιγμή ή σε μόνιμες ροές όπως οι δικές μας, η ροϊκή συνάρτηση είναι ανεξάρτητη του χρόνου επηρεάζοντας τον ορισμό (I-2.5), οπότε

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{Q(\mathbf{r})}{2\pi}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{I-2.7})$$

Η μεταβολή της συνάρτησης Ψ κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής είναι μηδέν, δηλαδή,

$$d\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{I-2.8})$$

Άρα, η ροϊκή συνάρτηση μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης, μόνιμης ροής είναι σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε ροϊκής γραμμής του πεδίου ροής. Επομένως, αν γνωρίζουμε την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης ροής μια δεδομένη χρονική στιγμή, μπορούμε να χαράξουμε γραμμές σταθερών τιμών Ψ οι οποίες θα συμπίπτουν με τις ροϊκές γραμμές του πεδίου. Δηλαδή, η ροϊκή συνάρτηση περιγράφει αλγεβρικά τη γεωμετρία του πεδίου ροής.

I-2.2 Σχέση μεταξύ της συνάρτησης ροής και της ταχύτητας.

Ο στιγμιαίος ογκομετρικός ρυθμός ροής είναι σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_{r_0}^r \int_0^{2\pi} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rho d\phi d\ell, \quad (\text{I-2.9})$$

όπου S είναι η επιφάνεια που γεννά η καμπύλη C του μεσημβρινού επιπέδου κατά την περιστροφή της, $\hat{\mathbf{n}}$ είναι η κάθετος της S , $\hat{\mathbf{t}}$ η εφαπτομένη της C και $d\ell$ το στοιχειώδες μήκος επάνω στην C .

Σχήμα Ι-2.2: Γεωμετρική ερμηνεία του επιφανειακού ολοκληρώματος (Ι-2.9).

Προφανώς τα διανύσματα $\hat{\mathbf{n}}$ και $\hat{\mathbf{t}}$ βρίσκονται επάνω στο μεσημβρινό επίπεδο. Επειδή η ροή είναι αξονοσυμμετρική η ταχύτητα $\mathbf{v}$ είναι ανεξάρτητη της αζιμουθιακής γωνίας Φ και συνεπώς μια ολοκλήρωση στην Φ , δίνει, λόγω και της (Ι-2.5) ή και της (Ι-2.7) για μόνιμες ροές, ότι

$$\psi = \psi(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \rho d\ell, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2), \quad (\text{Ι-2.10})$$

όπου έχουμε αποδείξει ότι η Ψ είναι ανεξάρτητη τόσο της επιλογής του σημείου $\mathbf{r}_0$ επάνω στον άξονα συμμετρίας, όσο και της καμπύλης ολοκλήρωσης που συνδέει τα $\mathbf{r}_0$ και $\mathbf{r}$ επάνω στο μεσημβρινό επίπεδο.

Η σχέση (Ι-2.10) αποτελεί μια ολοκληρωτική έκφραση που συνδέει τη συνάρτηση ροής Ψ με την ταχύτητα. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια έκφραση της ροϊκής συνάρτησης μέσω της ταχύτητας που θα εκφράζεται τοπικά με διαφορική μορφή. Έχουμε ότι

$$\psi = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} d\psi = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \nabla \psi \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{t}} d\ell \quad (\text{Ι-2.11})$$

Αφαιρώντας τις (Ι-2.10) και (Ι-2.11) κατά μέλη παίρνουμε

$$\int_{r_0}^{\mathbf{r}} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \rho - \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \psi) d\ell = 0 \quad (\text{Ι-2.12})$$

από την οποία, επειδή το $\mathbf{r}$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \rho - \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla \psi = 0. \quad (\text{Ι-2.13})$$

Τώρα, τα διανύσματα $(\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ αποτελούν ένα ορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα και συνεπώς

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}. \quad (\text{Ι-2.14})$$

Άρα η (Ι-2.13) δίνει

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \rho - (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}) \cdot \nabla \psi = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \rho - \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \nabla \psi = \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{v} \rho - \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \nabla \psi] = 0 \quad (\text{Ι-2.15})$$

και επειδή η (Ι-2.15) ισχύει για κάθε $\hat{\mathbf{n}}$ (αλλάζοντας την καμπύλη που περνάει από το συγκεκριμένο σημείο) έπεται ότι

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \hat{\boldsymbol{\phi}} \times \nabla \psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2), \quad (\text{Ι-2.16})$$

όπου λόγω της ταυτότητας (A.24) συνεπάγεται

$$\mathbf{v} = -\nabla \times \left(\hat{\phi} \frac{\Psi}{\rho} \right) = \nabla \times \left(-\hat{\phi} \frac{\Psi}{\rho} \right). \quad (\text{I-2.17})$$

Η εξήγηση της (I-2.17) έπεται. Εφόσον δουλεύουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες που αποτελεί το πιο απλό αξονοσυμμετρικό σύστημα συντεταγμένων, συνεχίζουμε ορίζοντας τον τελεστή της βάθμωσης σε αυτό το σύστημα, δηλαδή,

$$\nabla = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{κυλινδρικές συντεταγμένες}) \quad (\text{I-2.18})$$

και τότε

$$\nabla \phi = \hat{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\hat{\phi}}{\rho}. \quad (\text{I-2.19})$$

Συνεπώς, εισάγοντας τη σχέση (I-2.19) στην έκφραση (I-2.16) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (A.24) ή την (I-2.17) απευθείας θα έχουμε ακόμα ότι

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \phi \times \nabla \psi(\mathbf{r}) = -\nabla \times (\psi \nabla \phi), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2). \quad (\text{I-2.20})$$

Οι σχέσεις (I-2.17) και (I-2.20) αποτελούν σημειακές σχέσεις σύνδεσης της ταχύτητας και της συνάρτησης ροής του Stokes. Ειδικά από την έκφραση (I-2.20) φαίνεται αμέσως ότι η ταχύτητα είναι σωληνοειδές πεδίο.

Η σχέση (I-2.20) είναι χρήσιμη επειδή εκφράζεται συναρτήσει διαφορικών αναλλοιώτων και συνεπώς είναι εύκολο να πάρουμε τις εκφράσεις του $\mathbf{v}$ σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων. Άρα, χρησιμοποιήσαμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες και καταλήξαμε σε εκφράσεις που αφορούν οποιοδήποτε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων με άξονα συμμετρίας τον άξονα x_1 .

Γενική περίπτωση.

Έστω (q_1, q_2, ϕ) δεξιόστροφο, ορθογώνιο, καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων με ϕ την αζιμουθιακή γωνία και άξονα συμμετρίας σε καρτεσιανές συντεταγμένες τον άξονα x_1 . Στη γενική περίπτωση ισχύει

$$\nabla = (\nabla q_1) \frac{\partial}{\partial q_1} + (\nabla q_2) \frac{\partial}{\partial q_2} + (\nabla \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{I-2.21})$$

και τότε το πεδίο ταχύτητας δίνεται στη διδιάστατη μορφή

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_{q_1}(\mathbf{r}) \hat{q}_1 + v_{q_2}(\mathbf{r}) \hat{q}_2, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2). \quad (\text{I-2.22})$$

Οι συνιστώσες της γενικής μορφής (I-2.22) υπολογίζονται με χρήση της (I-2.20)

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_{q_1} \hat{\mathbf{q}}_1 + v_{q_2} \hat{\mathbf{q}}_2 = (\nabla \Phi) \times (\nabla \Psi) \\ &= \frac{\hat{\Phi}}{\rho} \times \left[\|\nabla q_1\| \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} + \|\nabla q_2\| \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} + \frac{\hat{\Phi}}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} \right] \\ &= \hat{\mathbf{q}}_2 \frac{\|\nabla q_1\|}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} - \hat{\mathbf{q}}_1 \frac{\|\nabla q_2\|}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2},\end{aligned}\quad (\text{I-2.23})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση (I-2.21) σε συνδυασμό με τις (I-2.19) και (I-2.20) και επίσης κάναμε χρήση του γεγονότος ότι το σύστημα (q_1, q_2, Φ) είναι ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Άρα, λόγω του αποτελέσματος (I-2.23) και εξισώνοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$v_{q_1} = -\frac{\|\nabla q_2\|}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \quad \text{και} \quad v_{q_2} = \frac{\|\nabla q_1\|}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1}. \quad (\text{I-2.24})$$

Ορίζοντας, τώρα, τους μετρικούς συντελεστές συναρτήσει παραγώγων του διανύσματος θέσης

$$h_{q_\kappa} = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_\kappa} \right\|, \quad \kappa = 1, 2 \quad (\mathbf{r} = x_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{x}}_3) \quad (\text{I-2.25})$$

και σύμφωνα με το συμβολισμό που έχουμε ακολουθήσει για τον άξονα συμμετρίας να είναι ο $x_1 = z$ στις καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) , οπότε και

$$\rho = \rho(q_1, q_2) = \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)}, \quad (\text{σε κυλινδρικές, } x_2 = \rho \cos \Phi, x_3 = \rho \sin \Phi) \quad (\text{I-2.26})$$

οι συνιστώσες (I-2.24) της ταχύτητας γίνονται

$$v_{q_1}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho h_{q_2}} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial q_2}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \quad (\text{I-2.27})$$

και

$$v_{q_2}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho h_{q_1}} \frac{\partial \Psi(\mathbf{r})}{\partial q_1}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{I-2.28})$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε πλήρως ορίσει τη γενική μορφή του πεδίου ταχύτητας για αξονοσυμμετρικές ή διδιάστατες ροές Stokes μέσω της συνάρτησης ροής όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (I-2.22), (I-2.27) και (I-2.28) για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων της μορφής (q_1, q_2, Φ) , όπου Φ είναι η γωνία αζιμουθίου.

Προφανώς, λόγω των (I-2.27) και (I-2.28) η Ψ παίζει το ρόλο μιας συνάρτησης δυναμικού και συνεπώς ορίζεται μοναδικά μόνον ως προς μια προσθετική σταθερά.

Με άλλα λόγια, η τιμή της ροϊκής συνάρτησης δεν έχει φυσική σημασία, ενώ η τιμή της μεταβολής της Ψ έχει. Αξίζει, επίσης, να παρατηρήσουμε ότι η (I–2.10) δίνει τη συνάρτηση ροής Ψ συναρτήσει της ταχύτητας $\mathbf{v}$, μέσω ολοκληρωτικού τελεστή. Η (I–2.17) δίνει το $\mathbf{v}$ συναρτήσει του Ψ , μέσω διαφορικού τελεστή. Η διαδικασία που περιγράφεται στις σχέσεις (I–2.11)–(I–2.16) αντιπροσωπεύει την αντιστροφή του ολοκληρωτικού τελεστή (I–2.10) στον (I–2.17).

Προκειμένου να υπολογίσουμε το πεδίο ταχύτητας είναι απαραίτητη η γνώση του δυναμικού, όπως λέγεται, συνάρτησης ροής και το ερώτημα ανάγεται στην εύρεση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί η ροϊκή συνάρτηση Ψ .

I–2.3 Η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ροής.

Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο I–1, σχέση (I–1.58) ότι για ασυμπίεστα ρευστά ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) η εξίσωση Stokes που συνδέει την ολική πίεση με την ταχύτητα για μόνιμη, έρπουσα και τρισδιάστατη ροή γράφεται

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v} - \nabla P = 0, \quad (\text{I–2.29})$$

η οποία είναι γραμμική. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (A.47)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \quad (\text{I–2.30})$$

και την συνθήκη μη συμπίεστότητας

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I–2.31})$$

παίρνουμε, για την (I–2.29),

$$\mu_0 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla P = \mathbf{0}. \quad (\text{I–2.32})$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τον στροβιλισμό της (I–2.32) και λόγω της (A.43)

$$\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})] = \mathbf{0} \quad (\mu_0 \neq 0) \quad (\text{I–2.33})$$

και αν διατηρήσουμε τον συμβολισμό (I–1.60) για τον στροβιλισμό, τότε η εξίσωση (I–2.33) γράφεται

$$\nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{0} \quad (\text{I–2.34})$$

και περιγράφει τη δυναμική* του πεδίου $\boldsymbol{\omega}$.

* Στην περίπτωση της μη μόνιμης ροής, όπου επιβιώνουν οι όροι αδρανείας, η σχέση (I–2.33) γράφεται ως

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{\mu_0}{\rho_0} \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{0}, \quad (\text{I–2.34a})$$

Αν τώρα εκφράσουμε το πεδίο ταχύτητας $\mathbf{v}$ μέσω της συνάρτησης ροής Ψ , όπως στις (I-2.22) έως (I-2.28) για κυλινδρικές συντεταγμένες (χρησιμοποιούμε πάλι το απλούστερο σύστημα συντεταγμένων με δυνατότητα αξονικής συμμετρίας χωρίς βλάβη της γενικότητας με $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{x}}_1 + \rho \cos\phi \hat{\mathbf{x}}_2 + \rho \sin\phi \hat{\mathbf{x}}_3$), θέτοντας $q_1 = \rho$ και $q_2 = z$ παίρνουμε λόγω της (I-1.60)

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \nabla \times \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{\rho}} - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right] = \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi \\
 &= \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{2\rho} \left[\rho \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi = \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{2\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi \\
 &= \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{2\rho} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \Psi \\
 &= \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{2\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \Psi \\
 &= \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{2\rho} \left[\Delta - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \Psi, \tag{I-2.35}
 \end{aligned}$$

όπου ο διαφορικός τελεστής του Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες για λύσεις ανεξάρτητες της αζιμούθιας γωνίας δίνεται από την

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{I-2.36}$$

Ορίζουμε τον τελεστή E^2

$$\begin{aligned}
 E^2 &\equiv \Delta - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{I-2.37}
 \end{aligned}$$

και έχουμε λόγω της έκφρασης (I-2.35)

από όπου εύκολα λαμβάνεται η (I-2.34) θεωρώντας έρπουσα, μόνιμη ροή.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\hat{\phi}}{2\rho} E^2 \boldsymbol{\psi} . \quad (\text{I-2.38})$$

Η σχέση (I-2.38) εκφράζει τον στροβιλισμό συναρτήσει της συνάρτησης ροής.

Ακόμα έχουμε παίρνοντας τον στροβιλισμό της (I-2.38)

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\omega} &= \left[\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times \left[\frac{\hat{\phi}}{2\rho} E^2 \boldsymbol{\psi} \right] \\ &= -\hat{z} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{2\rho} E^2 \boldsymbol{\psi} \right) + \frac{\hat{\phi}}{2\rho} \times \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} \right) \frac{1}{\rho} E^2 \boldsymbol{\psi} + \left(\hat{z} \hat{\phi} \wedge \right) \frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial z} E^2 \boldsymbol{\psi} \\ &= -\hat{z} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{2\rho} E^2 \right) + \frac{1}{2\rho^2} E^2 \right] \boldsymbol{\psi} + \hat{\phi} \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial}{\partial z} E^2 \right) \boldsymbol{\psi} \\ &= -\left[\hat{z} \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} E^2 \right) - \hat{\phi} \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial}{\partial z} E^2 \right) \right] \boldsymbol{\psi} \end{aligned} \quad (\text{I-2.39})$$

και εφαρμόζοντας άλλη μια φορά τον τελεστή “ $\nabla \times$ ” στην (I-2.39) καταλήγουμε

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) &= -\left[\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\phi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times \left[\hat{z} \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} E^2 \right) - \hat{\phi} \frac{1}{2\rho} \left(\frac{\partial}{\partial z} E^2 \right) \right] \boldsymbol{\psi} \\ &= -\hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} E^2 \right) \boldsymbol{\psi} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2\rho} \frac{\partial}{\partial z} E^2 \right) \boldsymbol{\psi} \\ &= -\frac{\hat{\phi}}{2\rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E^2 \boldsymbol{\psi} = -\frac{\hat{\phi}}{2\rho} E^4 \boldsymbol{\psi} , \end{aligned} \quad (\text{I-2.40})$$

όπου ο τελεστής E^4 είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης δύο τελεστών E^2 , δηλ.,

$$E^4 = E^2 \circ E^2 . \quad (\text{I-2.41})$$

Αντικαθιστώντας την τελική σχέση (I-2.40) στην εξίσωση του στροβιλισμού (I-2.34) παίρνουμε

$$-\frac{\hat{\phi}}{2\rho} E^4 \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0} , \quad (\text{I-2.42})$$

από όπου επειδή η γωνία $\hat{\phi}$ είναι αυθαίρετη, καταλήγουμε στην δυναμική εξίσωση* που ικανοποιεί η συνάρτηση ροής Ψ κάτω από συνθήκες ροής Stokes,

$$E^4 \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = 0 , \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2) \quad (\text{I-2.43})$$

με τον τελεστή E^4 να δίνεται από την σύνθεση (I-2.41).

* Στην περίπτωση της μη μόνιμης ροής, όπου επιβιώνουν οι όροι αδρανείας, η σχέση (I-2.43) γράφεται ως

$$\frac{\partial}{\partial t} (E^2 \boldsymbol{\psi}) + \rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{(E^2 \boldsymbol{\psi})}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{\rho_0} (E^4 \boldsymbol{\psi}) . \quad (\text{I-2.43a})$$

Την γενική μορφή σε κάθε σύστημα του τελεστή E^2 θα την δούμε παρακάτω. Ο στροβιλισμός υπολογίζεται από την αναλλοίωτη έκφραση (I-2.38), όπου με τη βοήθεια της εξίσωσης (I-2.26) γράφεται σαν

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\phi}}{2\sqrt{(x_2^2 + x_3^2)}} E^2 \psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2). \quad (\text{I-2.44})$$

Από την (I-2.38) ή την (I-2.44) παρατηρούμε ότι η ποσότητα $E^2 \psi$ περιγράφει την αζιμουθιακή συνιστώσα του στροβιλισμού

$$E^2 \psi = 2\rho(\hat{\phi} \cdot \omega) \quad (\text{I-2.45})$$

και για αστρόβιλα πεδία (πεδία σταθερής ολικής πίεσης) η ροή περιγράφεται από μια Ψ για την οποία

$$E^2 \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2). \quad (\text{I-2.46})$$

Η εξίσωση (I-2.43α) για έρπουσα, μη μόνιμη ροή περιγράφει πώς διαχέεται, και η σχέση (I-2.43) πώς κατανέμεται η αζιμουθιακή συνιστώσα του στροβιλισμού.

Η παραπάνω ανάλυση έγινε στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, παρ' όλο που οι εκφράσεις (I-2.43)–(I-2.46) είναι ανεξάρτητες του συστήματος συντεταγμένων. Από την άλλη, όμως, ο βασικός διαφορικός τελεστής E^2 έχει οριστεί για τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την μορφή του τελεστή E^2 σε γενικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα.

I-2.4 Ο διαφορικός τελεστής E^2 σε καμπυλόγραμμο σύστημα.

Γενικά αν ρ είναι η κυλινδρική συνιστώσα έχουμε από την (I-2.37) ότι

$$\Delta - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} = E^2 \quad (\text{I-2.47})$$

συνεπώς, αν (q_1, q_2, Φ) είναι ένα οποιοδήποτε αξονοσυμμετρικό σύστημα με Φ την αζιμουθιακή γωνία, η έκφραση του E^2 παίρνεται εκφράζοντας τόσο τον διαφορικό

τελεστή του Laplace Δ όσο και τον τελεστή $\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$ στο αντίστοιχο σύστημα.

Σημειώνουμε ότι από την έκφραση του Δ θα πρέπει να παραβλεφθούν οι όροι με παραγωγή στο Φ εφόσον διατηρούμαστε σε επίπεδο αξονοσυμμετρικών ροών Stokes.

Γενικά, από την (I-2.37) έχουμε

$$E^2 = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{I-2.47})$$

που αποτελεί μια συμμετρική μορφή του E^2 σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Από την (I-2.38) σε συνάρτηση με την (I-1.60) παίρνουμε

$$E^2 \psi = \rho \hat{\phi} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (\text{I-2.48})$$

όπου εισάγοντας τον ορισμό (I-2.22) καταλήγουμε μετά από απλή άλγεβρα στη σχέση

$$E^2 \psi = \rho \frac{1}{h_{q_1} h_{q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_{q_2} v_{q_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_{q_1} v_{q_1}) \right]. \quad (\text{I-2.49})$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις συνιστώσες της ταχύτητας (I-2.27) και (I-2.28) παίρνουμε

$$E^2 \psi = \frac{\rho}{h_{q_1} h_{q_2}} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{h_{q_2}}{h_{q_1}} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\rho}{h_{q_1} h_{q_2}} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{h_{q_1}}{h_{q_2}} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \quad (\text{I-2.50})$$

και συνεπώς

$$E^2 = \frac{\rho}{h_{q_1} h_{q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_{q_2}}{\rho h_{q_1}} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_{q_1}}{\rho h_{q_2}} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right], \quad (\text{I-2.51})$$

όπου προφανώς η ποσότητα $\rho = \rho(q_1, q_2)$ είναι αυτή που ορίστηκε στην (I-2.26) και υπενθυμίζουμε εδώ για το αναλλοίωτο σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) ,

$$\rho = \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)}. \quad (\text{I-2.52})$$

Για σύγκριση, γράφουμε και τον τελεστή του Laplace για Φ -ανεξάρτητες λύσεις,

$$\Delta = \frac{1}{\rho h_{q_1} h_{q_2}} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\rho h_{q_2}}{h_{q_1}} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\rho h_{q_1}}{h_{q_2}} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right]. \quad (\text{I-2.53})$$

Παρατηρούμε ότι απλά το ρ αντικαθίσταται με το ρ^{-1} στην (I-2.51).

I-2.5 Το πεδίο ολικής πίεσης.

Προκειμένου να εξάγουμε το πεδίο ολικής πίεσης ξεκινάμε από την εξίσωση του Stokes και ακολουθώντας τα βήματα του Τμήματος Ι-2.3, χρησιμοποιούμε τη σχέση (Ι-2.32) παραμένοντας στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Έχουμε

$$\mu_0 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla P = \mathbf{0} \quad (\text{I-2.54})$$

ή με άμεση χρήση της (Ι-1.60)

$$\nabla P = -2\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{\omega}, \quad (\text{I-2.55})$$

από όπου με αντικατάσταση του στροβιλισμού από την (Ι-2.38)

$$\nabla P = -2\mu_0 \nabla \times \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{2\rho} E^2 \psi \right) \quad (\text{I-2.56})$$

και με εφαρμογή της ταυτότητας (Α.24) η (Ι-2.56) συνεπάγεται ότι για γενικό σύστημα συντεταγμένων (q_1, q_2, Φ)

$$\nabla P = \frac{\mu_0 \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\rho} \times \nabla (E^2 \psi), \quad (\text{I-2.57})$$

όπου σε συνδυασμό με την εξίσωση (Ι-2.21) για Φ -ανεξαρτησία και με τους ορισμούς

$$\nabla q_\kappa = |\nabla q_\kappa| \hat{\mathbf{q}}_\kappa = \frac{1}{h_\kappa} \hat{\mathbf{q}}_\kappa, \quad \kappa = 1, 2 \quad (\text{I-2.58})$$

ισοδυναμεί με την

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\mathbf{q}}_1}{h_{q_1}} \frac{\partial P}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{q}}_2}{h_{q_2}} \frac{\partial P}{\partial q_2} &= \frac{\mu_0 \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\rho} \times \left[\frac{\hat{\mathbf{q}}_1}{h_{q_1}} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{q}}_2}{h_{q_2}} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial q_2} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{\hat{\mathbf{q}}_2}{h_{q_1}} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial q_1} - \frac{\hat{\mathbf{q}}_1}{h_{q_2}} \frac{\partial (E^2 \psi)}{\partial q_2} \right] \end{aligned} \quad (\text{I-2.59})$$

που άμεσα συνεπάγεται ότι

$$\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial q_1} = -\frac{\mu_0}{\rho} \frac{h_{q_1}}{h_{q_2}} \frac{\partial (E^2 \psi(\mathbf{r}))}{\partial q_2}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2) \quad (\text{I-2.60})$$

και

$$\frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial q_2} = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{h_{q_2}}{h_{q_1}} \frac{\partial (E^2 \psi(\mathbf{r}))}{\partial q_1}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2). \quad (\text{I-2.61})$$

Φυσικά το αναλλοίωτο του P^* δίνεται από την (Ι-2.26)

* Το αναλλοίωτο P όπως το ορίσαμε αρχικά μέσα από την εισαγωγή του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων είναι, εν τέλει, ο μετρικός συντελεστής της αζιμούθιας γωνίας Φ , δηλ.,

$$\rho = \rho(q_1, q_2) = \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)}, \quad (\text{σε κυλινδρικές, } x_2 = \rho \cos \varphi, x_3 = \rho \sin \varphi) \quad (\text{I-2.62})$$

ενώ εύκολα κανείς μπορεί να καταλάβει από τις σχέσεις (I-2.60) και (I-2.61) ότι τα αστρόβιλα πεδία ροής ($E^2\psi = 0$), είναι πεδία σταθερής ολικής πίεσης. Το P καθορίζεται αυθαίρετα ως προς μια προσθετική σταθερά αφού

$$dP(\mathbf{r}) = \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial q_2} dq_2, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \quad (\text{I-2.63})$$

και επομένως μετά από ολοκλήρωση λαμβάνουμε

$$P(\mathbf{r}) = P_0 + \int \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial q_1} dq_1 + \int \frac{\partial P(\mathbf{r})}{\partial q_2} dq_2, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad (\text{I-2.64})$$

όπου η ολική πίεση δίνεται σαν συνάρτηση μιας αυθαίρετης σταθερής πίεσης P_0 , συνήθως προσδιοριζόμενη σε ένα βολικό σημείο, για παράδειγμα στον ισημερινό.

Σε αντίθεση με την (I-2.17) που δίνει την ταχύτητα $\mathbf{v}$ άμεσα σαν συνάρτηση της ροϊκής συνάρτησης Ψ , οι (I-2.60) και (I-2.61) δίνουν την ολική πίεση P έμμεσα, μέσω της επίλυσης διαφορικών εξισώσεων σαν συνάρτηση του Ψ .

Για την επίλυση προβλημάτων ροής όπου δεν είναι δυνατή ή επιθυμητή η χρήση αξονικής συμμετρίας απαιτούνται δύο συναρτήσεις ροής και γενικότερα εισάγονται πιο πολύπλοκες μαθηματικές θεωρήσεις [110]. Επομένως, είναι προτιμότερο σε τέτοιες περιπτώσεις τρισδιάστατων ή μη αξονοσυμμετρικών ροών να χρησιμοποιούνται εναλλακτικοί τρόποι επίλυσης των εξισώσεων του Stokes (I-1.58) και (I-1.59). Ο πιο αξιόπιστος τρόπος αντιμετώπισης ροών που ακολουθούν τις συνθήκες του Stokes είναι η εισαγωγή ποικίλων διαφορικών αναπαραστάσεων [10,79,81,85,86,123] των λύσεων που είναι και το αντικείμενο του Κεφαλαίου I-3 που ακολουθεί.

$$h_\varphi \equiv \rho = \rho(q_1, q_2) = \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)}. \quad (\text{I-2.62a})$$

ΜΕΡΟΣ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι-3 ΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ 3-D ΡΟΗ STOKES – ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ι-3.1 Τρισδιάστατη ροή – βασικές διαφορικές αναπαραστάσεις.

Η ανάλυση των διδιάστατων ροών στο Κεφάλαιο Ι-2 καλύπτει πλήρως όλο το φάσμα των αξονοσυμμετρικών προβλημάτων ρευστομηχανικής που ακολουθούν τους κανόνες που εισήγαγε πρώτος ο Stokes το 1851 [108]. Επιπλέον, μέχρι τα μέσα του προηγούμενου αιώνα η ανάλυση ροών γύρω από σωματίδια απλού σχήματος (σφαίρας ή σφαιροειδούς) με αξονική συμμετρία διατηρούσε τις προαναφερθείσες μεθόδους επίλυσης στη κορυφή της επιστημονικής κοινότητας. Παρόλα αυτά, η αναγκαιότητα χρήσης πιο πολύπλοκων γεωμετριών για την απεικόνιση των σωματιδίων, όπως π.χ. ελλειψοειδής γεωμετρία, ή και ακόμα η γενίκευση των ήδη υπάρχοντων αποτελεσμάτων για αξονοσυμμετρικές ροές σε τρισδιάστατες ροές, επέφερε την απαίτηση μεθόδων λύσης προβλημάτων ροών Stokes σε χωρία χωρίς αξονική συμμετρία. Ούτως ή άλλως, όπως αναλύσαμε και στο Κεφάλαιο Ι-1, το

ζεύγος ή το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του Stokes που συνδέει το πεδίο ταχύτητας $\mathbf{v}$ με το πεδίο ολικής πίεσης P αναφερόμενοι στη μόνιμη ή ψευδομόνιμη κίνηση ενός ιξώδους, ασυμπίεστου ρευστού σε μικρούς αριθμούς Reynolds (έρπουσα ροή),

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3), \quad (\text{I-3.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.2})$$

περιγράφει τη ροή γύρω από σωματίδια ευρισκόμενα μέσα σε τρισδιάστατα, απλώς συνεκτικά, ομαλά και φραγμένα πεδία ροής $\Omega(\mathbb{R}^3)$, όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης.

Υπενθυμίζουμε ότι μ_0 είναι το δυναμικό ιξώδες, ενώ τα εξίσου βασικά πεδία του στροβιλισμού και του τανυστή της τάσεως παρουσιάζονται μέσα από τις εκφράσεις (I-1.60) και (I-1.62). Οι παραπάνω εξισώσεις σε συνδυασμό με τις απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες ανάλογα με το εξεταζόμενο φυσικό πρόβλημα, συγκροτούν ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα οριακών τιμών [49].

Μέσα στο πλαίσιο της ανάγκης εύρεσης αναλυτικών λύσεων του συστήματος (I-3.1) και (I-3.2), οι οποίες να δίνονται συναρτήσει απλών δυναμικών, έγινε απαραίτητη η εισαγωγή διαφορικών αναπαραστάσεων των λύσεων των εξισώσεων Stokes για πεδία ροής δίχως αξονική συμμετρία. Με τον όρο “διαφορική αναπαράσταση” εννοούμε οποιαδήποτε αναπαράσταση των πεδίων $\mathbf{v}$ και P που εκφράζεται μέσω διαφορικών τελεστών. Οι πρώτες μορφές τέτοιου είδους αναπαραστάσεων, χωρίς κάποια ουσιαστική απόδειξη ή εφαρμογή, εμφανίστηκαν το 1885 με τον Boussinesq (Galerkin) [10], αλλά μετά από 47 χρόνια ο Lamb [68] έδωσε μια αναλυτική γενική λύση του παραπάνω ζεύγους διαφορικών εξισώσεων σε σφαιρικές, όμως, συντεταγμένες σε όρους σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \nabla \times (\mathbf{r} \chi_n(\mathbf{r})) + \nabla \phi_n(\mathbf{r}) + \frac{(n+3)}{2\mu_0(n+1)(2n+3)} r^2 \nabla p_n(\mathbf{r}) - \frac{n}{\mu_0(n+1)(2n+3)} \mathbf{r} p_n(\mathbf{r}) \right\} \quad (\text{I-3.3})$$

και

$$P(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3). \quad (\text{I-3.4})$$

Οι συναρτήσεις χ_n , ϕ_n , p_n για $n \in (-\infty, +\infty)$ είναι αρμονικές, r είναι η ακτινική συνιστώσα, ενώ η λύση (I-3.3), (I-3.4) ισχύει μόνο για σφαιρικές συντεταγμένες. Πολλές εφαρμογές της παραπάνω αναπαράστασης περιγράφονται από τους Happel και Brenner [56], όπου μια πληθώρα προβλημάτων, διδιάστατων και τρισδιάστατων, σε σφαιρική γεωμετρία έχει λυθεί στα πλαίσια των σχέσεων (I-3.3) και (I-3.4).

Δύο χρόνια μετά την εμφάνιση της λύσης του Lamb, ο Neuber σε συνεργασία με τον Parkovich το 1934 [81] παρουσίασαν μια άλλη διαφορική αναπαράσταση η οποία μαζί με την πρόταση των Boussinesq και Galerkin αποτέλεσαν τις βασικές διαφορικές αναπαραστάσεις των λύσεων της ροής κατά Stokes χωρίς, βέβαια, να έχουν αποδείξει την πληρότητά τους. Η αρχή για την απόδειξη πληρότητας των παραπάνω αναπαραστάσεων έγινε το 1961 με την εμφάνιση μιας ιδιάζουσας μορφής διαφορικής αναπαράστασης, που περιείχε και ολοκληρωτικούς τελεστές, από τους Naghdi και Hsu [79]. Η πληρότητα των εν λόγω αναπαραστάσεων αποδείχθηκε 10 χρόνια μετά, το 1971, από τον Stippes [107] και παρουσιάστηκε αναλυτικά από τους Xu και Wang μόλις το 1991 [123] σε μια συνοπτική και ουσιαστική εργασία απόδειξης της πληρότητας των αναπαραστάσεων Naghdi – Hsu, Parkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin σε τρισδιάστατα χωρία, καθώς και ειδικές περιπτώσεις αξονοσυμμετρικών ροών. Η αναφορά [123] αποτελεί και τη βάση ανάλυσης των διαφορικών λύσεων των εξισώσεων Stokes. Στηριζόμενοι στη συγκεκριμένη αναφορά θα καταγράψουμε αυτές τις βασικές διαφορικές αναπαραστάσεις και θα αποδείξουμε την πληρότητά τους.

Θεώρημα αναπαράστασης Naghdi – Hsu.

Τα πεδία ροής (ταχύτητα και ολική πίεση) για τη ροή Stokes δίνονται συναρτήσει ενός διανυσματικού αρμονικού δυναμικού Φ ,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \iiint_{\Omega} \frac{(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \Phi(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{I-3.5}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3),$$

και

$$P(\mathbf{r}) = P_0 - \mu_0 \nabla \cdot \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3), \quad (\text{I-3.6})$$

όπου

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.7})$$

και P_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερή πίεση, συνήθως προσδιοριζόμενη σε ένα βολικό σημείο, ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα.

Θεώρημα αναπαράστασης Parkovich – Neuber.

Τα πεδία ροής (ταχύτητα και ολική πίεση) για τη ροή Stokes δίνονται συναρτήσει ενός διανυσματικού αρμονικού δυναμικού Φ και ενός βαθμωτού αρμονικού δυναμικού Φ_0 ,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{r}) \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.8})$$

και

$$P(\mathbf{r}) = P_0 - \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{r} \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3), \quad (\text{I-3.9})$$

όπου

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta \Phi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.10})$$

και P_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερή πίεση, συνήθως προσδιοριζόμενη σε ένα βολικό σημείο, ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα.

Θεώρημα αναπαράστασης Boussinesq – Galerkin.

Τα πεδία ροής (ταχύτητα και ολική πίεση) για τη ροή Stokes δίνονται συναρτήσει ενός διανυσματικού διαρμονικού δυναμικού (κοίτα Παράρτημα Γ) $\mathbf{B}$ και ενός βαθμωτού αρμονικού δυναμικού b ,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \nabla \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \nabla b(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.11})$$

και

$$P(\mathbf{r}) = P_0 - \mu_0 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3), \quad (\text{I-3.12})$$

όπου

$$\Delta^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta b(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.13})$$

και P_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερή πίεση, συνήθως προσδιοριζόμενη σε ένα βολικό σημείο, ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα.

- Πρόταση: Οι παραπάνω διαφορικές αναπαραστάσεις είναι *πλήρεις* (complete).

Απόδειξη.

Δεν είναι δύσκολο να αποδειχτεί ότι οι παραπάνω τρεις γενικές λύσεις ικανοποιούν αυτόματα τις (I-3.1) και (I-3.2).

Αν το πεδίο ροής $\Omega(\Theta^3)$ είναι φραγμένο και συνεκτικό απλά, κάτι που ισχύει στην περίπτωση μας, και τότε ορίζουμε μια συνάρτηση Ψ

$$\Psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3), \quad (\text{I-3.14})$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι, εφόσον η θεμελιώδης λύση* του τελεστή του Laplace

είναι η $-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ [36,39] και αν ορίσουμε $\Delta \equiv \Delta_r$, θα ισχύει

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3). \quad (\text{I-3.15})$$

Αντικαθιστώντας το P από την έκφραση (I-3.15) στην (I-3.1) παίρνουμε

$$\Delta \left[\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \Psi(\mathbf{r}) \right] = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3). \quad (\text{I-3.16})$$

Επομένως, αν Φ είναι μια αρμονική διανυσματική συνάρτηση, δηλ.,

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3), \quad (\text{I-3.17})$$

τότε εύκολα από την (I-3.16) προκύπτει ότι

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \Psi(\mathbf{r}) + \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3). \quad (\text{I-3.18})$$

Παίρνουμε, τώρα, την απόκλιση της σχέσεως (I-3.18), οπότε έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \Delta \Psi(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3) \quad (\text{I-3.19})$$

ή λόγω των (I-3.2) και (I-3.15) οδηγούμαστε στην

$$P(\mathbf{r}) - \mu_0 \nabla \cdot \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{ή} \quad P(\mathbf{r}) = \mu_0 \nabla \cdot \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3). \quad (\text{I-3.20})$$

Αλλά, τότε αναλύοντας περισσότερο την εξίσωση (I-3.18),

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \nabla_r \left[-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}') \right] + \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3) \quad (\text{I-3.21})$$

και λόγω της (I-3.20)

* Η θεμελιώδης λύση του τελεστή του Laplace [36,39], για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\Theta^3)$, ικανοποιεί την

$$\Delta_r \left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \text{όπου} \quad \nabla_r = -\nabla_{r'}, \quad \text{και} \quad \iiint_{\Omega} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dU(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}).$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \iiint_{\Omega} \frac{(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \Phi(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}\Phi + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.22})$$

Συνεπώς, το θεώρημα αναπαράστασης Naghdi – Hsu (I-3.5)–(I-3.7) αποδείχθηκε. Η εισαγωγή της αυθαίρετης πίεσης στην (I-3.20) δεν χαλάει τη γενικότητα.

Η αναπαράσταση Naghdi – Hsu παρόλο που έχει και ολοκληρωτική έκφραση είναι ουσιαστικά διαφορική αναπαράσταση γιατί δίνεται μέσω διαφορικών τελεστών. Η συνεκτικότητα απαιτείται για να ισχύει η αναπαράσταση (I-3.14), ενώ το φραγμένο Ω απαιτείται για να υπάρχουν τα ολοκληρώματα.

Εφόσον αποδείχθηκε ότι η γενική λύση των Naghdi – Hsu είναι πλήρης, τότε και κάθε γενική λύση ή αναπαράσταση που προκύπτει από αυτή θα είναι πλήρης. Αρκεί, λοιπόν, να αποδείξουμε ότι οι υπόλοιπες δύο διαφορικές αναπαραστάσεις των Parkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin παράγονται από την λύση των Naghdi – Hsu και επομένως είναι πλήρεις.

Κάτω από το συγκεκριμένο πρίσμα, θα αποδείξουμε αρχικά την πληρότητα της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber. Ειδικότερα, κάνοντας χρήση της ταυτότητας (A.35) παίρνουμε για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$

$$\Delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{r}\Phi(\mathbf{r}) \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \cdot \Phi(\mathbf{r})) + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) + 2 \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{r})^T : (\nabla \otimes \Phi(\mathbf{r})), \quad (\text{I-3.23})$$

όπου επειδή οι συναρτήσεις $\mathbf{r}$ και Φ είναι αρμονικές αφού ισχύει η (I-3.17), και λόγω του ότι

$$\nabla \otimes \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{I}} \equiv \tilde{\mathbf{I}}^T, \quad (\text{I-3.24})$$

καταλήγουμε

$$\Delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{r}\Phi(\mathbf{r}) \right) = \tilde{\mathbf{I}} : \nabla \Phi(\mathbf{r}) = \nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{ταυτότητα (A.49)}) \quad (\text{I-3.25})$$

Με παρόμοια επιχειρήματα που χειριστήκαμε τις σχέσεις (I-3.14) και (I-3.15), οδηγούμαστε και στην

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left[-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \Phi(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}\Phi) \right] = \nabla \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.26})$$

και λόγω της (I-3.25) παίρνουμε

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left[-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \Phi(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} \mathbf{r}\Phi(\mathbf{r}) \right] = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.27})$$

Άρα, αν ορίσουμε μια βαθμωτή αρμονική συνάρτηση Φ_0 ,

$$\Delta\Phi_0(\mathbf{r})=0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.28})$$

τότε η (I-3.27) συνεπάγεται

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \Phi(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} \mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.29})$$

Επειδή η Φ είναι αρμονική συνάρτηση από την αναπαράσταση των Naghdi – Hsu, παίρνουμε, αφού εφαρμόσουμε πρώτα το διαφορικό τελεστή $\nabla \equiv \nabla_{\mathbf{r}}$ στην (I-3.29),

$$\frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \iiint_{\Omega} \frac{(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \Phi(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r})) = -\frac{1}{2} \nabla \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.30})$$

ή λόγω της (I-3.22),

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \nabla(\Phi \cdot \mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \nabla \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.31})$$

από την οποία έπεται ότι

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \nabla(\Phi \cdot \mathbf{r}) + \nabla \Phi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.32})$$

Οπότε αποδείξαμε τη μορφή του πεδίου ταχύτητας που συμπίπτει με την (I-3.8) και προχωράμε στο πεδίο ολικής πίεσης. Από την εξίσωση Stokes (I-3.1) και την ταχύτητα (I-3.32) με αντικατάσταση έπεται ότι

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla P(\mathbf{r}) - \mu_0 \Delta \left[\frac{1}{2} (\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla(\Phi \cdot \mathbf{r}) + \Phi_0(\mathbf{r})) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.33})$$

και επειδή τα δυναμικά Φ , Φ_0 είναι αρμονικά, λόγω της ταυτότητας (A.50)

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{2} \nabla \Delta(\mathbf{r} \Phi(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.34})$$

Όμως η (A.35) μας δίνει σε συνδυασμό με την (I-3.24)

$$\Delta(\mathbf{r} \Phi) = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \Phi + \nabla(\Phi \cdot \mathbf{r}) + 2(\nabla \otimes \Phi)^T : (\nabla \otimes \Phi), \quad (\text{I-3.35})$$

από όπου η αρμονικότητα των συναρτήσεων Φ και $\mathbf{r}$ οδηγεί στην

$$\Delta(\mathbf{r} \Phi) = 2 \nabla \Phi. \quad (\text{I-3.36})$$

Τελικά, εισάγοντας την ταυτότητα (I-3.36) στη σχέση (I-3.34) λαμβάνουμε

$$\nabla P(\mathbf{r}) - \mu_0 \nabla \cdot \nabla(\Phi \cdot \mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.37})$$

ή

$$\nabla(P(\mathbf{r}) - \mu_0 \nabla \cdot \nabla(\Phi \cdot \mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.38})$$

όπου με απευθείας ολοκλήρωση,

$$P(\mathbf{r}) - \mu_0 \nabla \cdot \nabla(\Phi \cdot \mathbf{r}) = c, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.39})$$

όπου c είναι μια σταθερά που την θεωρούμε είτε μηδενική είτε την αυθαίρετη σταθερή πίεση μηδενική. Άρα, η (I-3.39) δίνει την ολική πίεση,

$$P(\mathbf{r}) = P_0 - \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.40})$$

και το θεώρημα αναπαράστασης Papkovitch – Neuber (I-3.8)–(I-3.10) αποδείχθηκε.

Από την παραπάνω απόδειξη έπεται ότι τα διανυσματικά δυναμικά Φ που χρησιμοποιούνται στις δύο αναπαραστάσεις των Naghdi – Hsu και των Papkovitch – Neuber* είναι τα ίδια.

Συνεχίζουμε, τώρα, με την απόδειξη της διαφορικής λύσης Boussinesq – Galerkin ορίζοντας την διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\Phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3), \quad (\text{I-3.41})$$

όπου Φ είναι η διανυσματική αρμονική συνάρτηση των δύο προηγούμενων θεωρημάτων. Προφανώς,

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \quad (\mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3)) \quad (\text{I-3.42})$$

και συνεπώς, η $\mathbf{B}$ είναι διαρμονική συνάρτηση (ο αναλυτικός τρόπος αντιμετώπισής τους συνοψίζεται στο Παράρτημα Γ) που θα καλέσουμε δυναμικό,

$$\Delta^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \Delta (\mathbf{r}) = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3). \quad (\text{I-3.43})$$

Παίρνοντας την απόκλιση της (I-3.42) έχουμε

$$\nabla \cdot (\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \nabla \cdot (\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.44})$$

άρα λαμβάνουμε λόγω της (I-3.25)

$$\Delta (\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \Delta \left(\frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\text{I-3.45})$$

και συνεπώς,

$$\frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \Phi_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3), \quad (\text{I-3.46})$$

όπου

* Αξίζει να σημειώσουμε στο σημείο αυτό την ευελιξία της διαφορικής αναπαράστασης των Papkovitch – Neuber λόγω του πλήθους των δυναμικών που χρησιμοποιεί. Συγκεκριμένα, επειδή οι εξισώσεις Stokes (I-3.1) και (I-3.2) αποτελούν σύστημα ομογενών διαφορικών εξισώσεων και λόγω της εξαιρετικής σημασίας εργασίας [48], όπου έχει αποδειχτεί ότι η συγκεκριμένη αναπαράσταση στις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις της ελαστικότητας προσφέρει μια σειρά από βαθμούς ελευθερίας. Αυτή η ιδιότητα επεκτείνεται και στις ροές Stokes, όπου η πληρότητα της αναφερθείσας γενικής λύσης ισχύει ακόμα και αν τα δυναμικά Φ και Φ_0 συνδέονται μεταξύ τους, κάτι που θα δούμε αναλυτικά στα επόμενα Μέρη του Διδακτορικού.

$$\Delta\Phi_1(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.47})$$

Επιστρέφοντας στην αναπαράσταση Papkovitch – Neuber (I-3.32), τώρα, έχουμε

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{r}) + \nabla \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.48})$$

και σε συνδυασμό με τις (I-3.42) και (I-3.46) προχωράμε,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \Phi_1(\mathbf{r})) - \frac{1}{2} \nabla \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.49})$$

Θέτοντας

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) \equiv -\Phi_1(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \nabla \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.50})$$

από όπου φαίνεται άμεσα ότι

$$\Delta \mathbf{b}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.51})$$

παίρνουμε

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \nabla \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \nabla \mathbf{b}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.52})$$

Ακόμα, από την (I-3.40) προκύπτει με τη βοήθεια της (I-3.42) και της

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 - \mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{B}(\mathbf{r})) = \mathbf{P}_0 - \mu_0 \nabla \cdot (\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.53})$$

και με εναλλαγή των διαφορικών τελεστών $\nabla \cdot$ και Δ σύμφωνα με την ταυτότητα (A.53) καταλήγουμε στην (I-3.12),

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 - \mu_0 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.54})$$

και το τελευταίο θεώρημα που προέκυψε από τη γενική διαφορική λύση των Naghdi – Hsu, δηλαδή, το θεώρημα αναπαράστασης Boussinesq – Galerkin (I-3.8)–(I-3.10) αποδείχθηκε. Φυσικά το $\mathbf{P}_0$ είναι η γνωστή αυθαίρετη πίεση που έχουμε ορίσει επανειλημμένα.

Παρατηρούμε ότι εφόσον το δυναμικό $\mathbf{\Phi}$ είναι αρμονική συνάρτηση, τότε από τις σχέσεις (I-3.44) και (I-3.45) έχουμε

$$\iiint_{\Omega} \frac{(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{\Phi}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}') = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{\Phi}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.55})$$

Δηλαδή, “η απόκλιση του δυναμικού που παράγουν οι πηγές $\mathbf{\Phi}$, ισούται με το δυναμικό που παράγουν οι πηγές $\nabla \cdot \mathbf{\Phi}$ ”.

Οι παραπάνω διαφορικές λύσεις αναφέρονται σε τρισδιάστατα χωρία και οι αποδείξεις συνοψίζονται στην [123]. Στη συγκεκριμένη βιβλιογραφία υπάρχουν και οι αξονοσυμμετρικές λύσεις των Papkovitch – Neuber και Boussinesq – Galerkin,

αλλά στο τέλος αυτού του κεφαλαίου θα δούμε πώς από τις σχέσεις για τρισδιάστατες ροές καταλήγουμε σε εκφράσεις για διδιάστατες ροές με ήδη γνωστές πληροφορίες.

I–3.2 Τρισδιάστατη διαφορική αναπαράσταση Palaniappan *et al.*

Το 1992 οι Palaniappan *et al.* [86] υπέθεσαν ότι η γενική λύση

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \nabla \times \nabla \times (\mathbf{rA}) + \nabla \times (\mathbf{rB}) \\ &= \nabla \nabla \cdot (\mathbf{rA}) - \Delta (\mathbf{rA}) + \nabla \times (\mathbf{rB}) \quad (\text{λόγω ταυτότητας (A.47)}) \end{aligned} \quad (\text{I–3.56})$$

σε συνδυασμό με την σφαιρική μορφή για την ολική πίεση,

$$P = P_0 + \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} (r \Delta A), \quad \Delta^2 A = 0, \quad \Delta B = 0, \quad (\text{I–3.57})$$

όπου r είναι η σφαιρική ακτινική συνιστώσα, επιλύει τις εξισώσεις του Stokes (I–3.1) και (I–3.2). Αρχικά, οι εκφράσεις (I–3.56) και (I–3.57) με απλή αντικατάσταση τις ικανοποιούν.

Μόλις 6 χρόνια αργότερα αποδείχθηκε η πληρότητα της εν λόγω διαφορικής λύσης από τους Padmavathi *et al.* [85] χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες [77]. Με μια διαφοροποίηση, όμως, στην ολική πίεση ώστε να ισχύει για γενικό σύστημα συντεταγμένων, η πιο πάνω γενική λύση ισχύει σε κάθε καμπυλόγραμμο σύστημα. Η απόδειξη, βέβαια, έχει πραγματοποιηθεί στο απλό σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων.

Θεώρημα αναπαράστασης Palaniappan *et al.*

Τα πεδία ροής (ταχύτητα και ολική πίεση) για τη ροή Stokes δίνονται συναρτήσει ενός βαθμωτού διαρμονικού δυναμικού (κοίτα Παράρτημα Γ) A και ενός βαθμωτού αρμονικού δυναμικού B ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \nabla \times (\mathbf{rA}(\mathbf{r})) + \nabla \times (\mathbf{rB}(\mathbf{r})) \\ &= \nabla \nabla \cdot (\mathbf{rA}(\mathbf{r})) - \Delta (\mathbf{rA}(\mathbf{r})) + \nabla \times (\mathbf{rB}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{I–3.58})$$

και

$$P(\mathbf{r}) = P_0 + \mu_0 (1 + \mathbf{r} \cdot \nabla) \Delta A(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \quad (\text{I–3.59})$$

όπου

$$\Delta^2 A(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta B(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.60})$$

και P_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερή πίεση, συνήθως προσδιοριζόμενη σε ένα βολικό σημείο, ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα. Η (I-3.58)–(I-3.60) είναι πλήρης.

Απόδειξη.

Η απόδειξη θα γίνει για σφαιρικές συντεταγμένες και ισχύει γενικά.

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη ας δούμε τα εξής δύο λήμματα (χωρίς απόδειξη) που οφείλονται στον Chadwick *et al.* [23].

• Λήμμα 1

Έστω $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ με $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς παραγώγους δευτέρας τάξης όπου

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) : r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty. \quad (\text{I-3.61})$$

Τότε, αν ισχύει (κάτι που στην περίπτωση μας είναι αληθές)

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.62})$$

υπάρχουν βαθμωτές συναρτήσεις A και B τέτοιες ώστε

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}A(\mathbf{r})) + \nabla \times (\mathbf{r}B(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.63})$$

όπου οι A και B ικανοποιούν τις μερικές διαφορικές εξισώσεις

$$LA(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.64})$$

$$LB(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.65})$$

και όπου L είναι το γωνιακό κομμάτι του τελεστή του Laplace [77] εκτός του $1/r^2$ και δίνεται από τη σχέση

$$L = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (\text{I-3.66})$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) .

• Λήμμα 2

Η μερική διαφορική εξίσωση $Lf(\mathbf{r}) = 0$, $\mathbf{r} \in \partial \Omega(\mathfrak{B}^3) \equiv \partial \Omega$ δεν έχει φραγμένες λύσεις στο σύνορο $\partial \Omega$ πέρα από σταθερές, όπου το $\partial \Omega$ στη σφαίρα ορίζεται ως

$$\partial \Omega = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}. \quad (\text{I-3.67})$$

Σημειώνουμε ότι ισχύει

$$\Delta L = L\Delta \quad \text{και} \quad \Delta^2 L = L\Delta^2. \quad (\text{I-3.68})$$

Προχωράμε, τώρα, στην απόδειξη. Έστω $(\mathbf{v}, \mathbf{P})$ ένα ζεύγος λύσεων των εξισώσεων Stokes (I-3.1) και (I-3.2). Τότε από το Λήμμα 1 έπεται ότι το $\mathbf{v}$ εκφράζεται στην μορφή

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}A(\mathbf{r})) + \nabla \times (\mathbf{r}B(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.69})$$

όπου τα δυναμικά A και B ικανοποιούν τις (I-3.64) και (I-3.65), αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας τον διαφορικό τελεστή του Laplace στην (I-3.64) έχουμε

$$\Delta(LA(\mathbf{r})) = -\Delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.70})$$

Λόγω των ταυτοτήτων (A.35) και (A.49) έχουμε (το $\mathbf{r}$ είναι αρμονικό)

$$\begin{aligned} -\Delta(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})) &= -\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) + 2(\nabla \mathbf{r})^T : (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r})) \\ &= -\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) + 2\tilde{\mathbf{I}} : (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r})) \\ &= -\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) + 2\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{I-3.71})$$

αφού μιλάμε για ασυμπίεστα ρευστά. Με μια επιπλέον εφαρμογή του τελεστή Δ στην (I-3.70) και με κατάλληλο συνδυασμό με το αποτέλεσμα (I-3.71) φτάνουμε στην έκφραση

$$\Delta^2(LA(\mathbf{r})) = -\Delta(\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.72})$$

όπου χωρίς ιδιαίτερα δύσκολη άλγεβρα και ακολουθώντας τα βήματα της (I-3.71) τελικά,

$$-\mathbf{r} \cdot \Delta^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}) = L(\Delta^2 A(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.73})$$

ως αποτέλεσμα της διαρμονικότητας του πεδίου ταχύτητας και εφόσον οι τελεστές L και Δ^2 εναλλάσσονται. Άρα,

$$L(\Delta^2 A(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.74})$$

Ομοίως, λόγω του λήμματος 1, σχέση (I-3.65), και για λόγους ασυμπίεστότητας, καθώς επίσης και εξαιτίας της δυνατότητας εναλλαγής των τελεστών L , Δ και $\nabla \times$, ισχύει

$$L(\Delta B(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.75})$$

Βεβαίως, η εξαγωγή της (I-3.75) στηρίχθηκε στο γεγονός ότι ο στροβιλισμός της ταχύτητας $(\nabla \times \mathbf{v})$ είναι αρμονικό πεδίο.

Το Λήμμα 2 μας κάνει εύκολα κατανοητό ότι η λύση της (I-3.74) θα πρέπει να είναι μια σταθερά εξαρτώμενη από r αφού $L = L(\theta, \varphi)$, δηλ.,

$$\Delta^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = h(r), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{I-3.76})$$

Έστω

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = g(r) + \mathbf{A}'(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{I-3.77})$$

ώστε

$$\Delta^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \Delta^2 g(r) + \Delta^2 \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = h(r), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{λόγω της (I-3.76)}) \quad (\text{I-3.78})$$

Διαλέγουμε την $\mathcal{G}$ έτσι ώστε

$$\Delta^2 g(r) = h(r), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty. \quad (\text{I-3.79})$$

Αυτή η επιλογή είναι δυνατή αφού η εξίσωση (I-3.79) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Πρέπει λοιπόν, σαν άμεσο αποτέλεσμα των (I-3.78) και (I-3.79)

$$\Delta^2 \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{I-3.80})$$

Συνεχίζοντας, σε σφαιρικές συντεταγμένες [77], ο τελεστής της βάθμωσης γράφεται όπως στην (Γ.5),

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\text{I-3.81})$$

οπότε μπορούμε, επίσης, να αμελήσουμε το $\mathcal{G}$ εφόσον, λόγω της (A.24),

$$\nabla \times (\mathbf{r} g(r)) = g(r) (\nabla \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times \nabla g(r) = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} g(r) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{I-3.82})$$

Επομένως, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\mathcal{G}$ δεν υπεισέρχεται στην έκφραση του $\nabla \times (\mathbf{r} \mathbf{A})$ στην (I-3.69) και άρα δεν παίζει ρόλο αν το αμελήσουμε ή όχι, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε

$$g(r) \equiv 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty. \quad (\text{I-3.83})$$

Συνεπώς, οι σχέσεις (I-3.78) και (I-3.80) οδηγούν στην

$$\Delta^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{I-3.84})$$

Με παρόμοια επιχειρηματολογία για την εξαγωγή της (I-3.84), ξεκινώντας από την έκφραση (I-3.75) αποδεικνύουμε ότι, χωρίς βλάβη γενικότητας,

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{I-3.85})$$

Με αυτό τον τρόπο αποδείξαμε ότι τα δυναμικά A και B που υπεισέρχονται στο πεδίο ταχύτητας (I-3.69) είναι διαρμονικές και αρμονικές συναρτήσεις, αντίστοιχα, δηλαδή, ικανοποιούν τις (I-3.84) και (I-3.85), αντίστοιχα.

Τώρα, αντικαθιστούμε την έκφραση (I-3.69) για την ταχύτητα $\mathbf{v}$ στην (I-3.1),

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla P(\mathbf{r}) = \Delta [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}A(\mathbf{r})) + \nabla \times (\mathbf{r}B(\mathbf{r}))], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{I-3.86})$$

Όμως, οι (A.31) και (A.57) δίνουν

$$\begin{aligned} \Delta [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}A(\mathbf{r}))] &= \nabla \times \nabla \times [\Delta (\mathbf{r}A(\mathbf{r}))] \\ &= \nabla \times \nabla \times [A(\mathbf{r})(\Delta \mathbf{r}) + \mathbf{r}(\Delta A(\mathbf{r})) + 2(\nabla \otimes \mathbf{r}) \cdot \nabla A(\mathbf{r})] \\ &= \nabla \times \nabla \times [\mathbf{r}(\Delta A(\mathbf{r})) + 2\nabla A(\mathbf{r})] \\ &= \nabla \times \nabla \times [\mathbf{r}(\Delta A(\mathbf{r}))] \quad (\text{λόγω (A.43)}) \\ &= \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{r})\Delta A(\mathbf{r}) + \nabla(\Delta A(\mathbf{r})) \times \mathbf{r}] \quad (\text{λόγω (A.24)}) \\ &= \nabla \times [\nabla(\Delta A(\mathbf{r})) \times \mathbf{r}] \\ &= 3\nabla(\Delta A(\mathbf{r})) + \mathbf{r} \cdot \nabla \otimes \nabla(\Delta A(\mathbf{r})) - \nabla(\Delta A(\mathbf{r})) \quad (\text{λόγω (A.28)}) \\ &= 2\nabla(\Delta A(\mathbf{r})) + \mathbf{r} \cdot \nabla \otimes \nabla(\Delta A(\mathbf{r})) \\ &= \nabla(\Delta A(\mathbf{r})) + [\nabla(\Delta A(\mathbf{r})) + \mathbf{r} \cdot \nabla \otimes \nabla(\Delta A(\mathbf{r}))] \\ &= \nabla(\Delta A(\mathbf{r})) + \nabla[\mathbf{r} \cdot \nabla(\Delta A(\mathbf{r}))] \quad (\text{λόγω (A.6)}) \\ &= \nabla \{ (1 + \mathbf{r} \cdot \nabla) \Delta A(\mathbf{r}) \}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \end{aligned} \quad (\text{I-3.87})$$

Επιπλέον, με παρόμοιο και πιο εύκολο τρόπο,

$$\Delta [\nabla \times (\mathbf{r}B(\mathbf{r}))] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{I-3.88})$$

και λόγω των (I-3.87) και (I-3.88) έχουμε στην (I-3.86)

$$\nabla \left(\frac{1}{\mu_0} P(\mathbf{r}) \right) = \nabla \{ (1 + \mathbf{r} \cdot \nabla) \Delta A(\mathbf{r}) \}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{I-3.89})$$

όπου ολοκληρώνοντας ως προς μια αυθαίρετη σταθερή πίεση P_0 , αποδεικνύουμε τον γενικό τύπο για την ολική πίεση (I-3.59),

$$P(\mathbf{r}) = P_0 + \mu_0 (1 + \mathbf{r} \cdot \nabla) \Delta A(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{I-3.90})$$

Φυσικά, ο τύπος (I-3.57) αποτελεί την μετατροπή της (I-3.90) σε σφαιρικές συντεταγμένες, όπου

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}, \quad (\text{I-3.91})$$

ενώ χρησιμοποιώντας το ∇ από την (I-3.81) φτάνουμε στην σχέση (I-3.57),

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_0 + \mu_0 \frac{\partial}{\partial r} (r\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.92})$$

και έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη του θεωρήματος διαφορικής αναπαράστασης* των Palaniappan *et al.* Ομοίως εδώ, το θεώρημα του Almansi [123] που παρουσιάστηκε στο Παράρτημα Γ, μας προσφέρει τον τρόπο εύρεσης του διαρμονικού δυναμικού $\mathbf{A}$. Οι αποδείξεις των Λημμάτων 1 και 2 εξαρτώνται από την ύπαρξη των λύσεων των εξισώσεων (I-3.64) και (I-3.65), οι οποίες απαιτούν τα χωρία να είναι φραγμένα. Οπότε, η απόδειξη της πληρότητας της γενικής λύσης των Palaniappan *et al.*, που χρησιμοποιεί τα εν λόγω λήμματα, ισχύει για φραγμένες περιοχές ροής. Ο Chadwick [23] παρατήρησε ότι τα αποτελέσματα των Λημμάτων 1 και 2 μπορούν να επεκταθούν και σε άπειρα χωρία ($r_2 \rightarrow \infty$) τα οποία είναι φραγμένα μόνο εσωτερικά από μια σφαίρα, ενώ τα πεδία οφείλουν να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες ομαλότητας καθώς το $r \rightarrow \infty$.

I-3.3 Μοναδικότητα των διαφορικών αναπαραστάσεων.

Οι διαφορικές αναπαραστάσεις των λύσεων των εξισώσεων του Stokes αποδείχθηκε ότι είναι πλήρεις. Στην προσπάθειά μας να αποδείξουμε την μοναδικότητα των γενικών λύσεων, θα ξεκινήσουμε από την βασική διαφορική λύση που προτάθηκε από τους Naghdi και Hsu. Θα θεωρήσουμε δύο αρμονικά δυναμικά, Φ_1 και Φ_2 , που αναπαριστούν τα πεδία ροής $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{P}_2$, αντίστοιχα μέσω της συγκεκριμένης λύσης. Αν ορίσουμε, τότε, το αρμονικό δυναμικό Φ

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_1(\mathbf{r}) - \Phi_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.93})$$

η αναπαράσταση (I-3.5)–(I-3.7), λόγω απαίτησης μοναδικότητας $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ και $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ δίνει

$$\frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \iiint_{\Omega} \frac{(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \Phi(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dU(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.94})$$

και

* Η διαφορική αναπαράσταση των Palaniappan *et al.* παρότι η απόδειξή της στηρίχθηκε σε χρήση λημμάτων σε σφαιρική γεωμετρία, δεν παύει να ισχύει σε γενικό ορθογώνιο, καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, όπως φαίνεται και από τις αναλλοίωτες μορφές (I-3.58)–(I-3.60).

$$\nabla \cdot \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{I-3.95})$$

όπου

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{I-3.96})$$

Με απλή αντικατάσταση της (I-3.96) στην (I-3.94) προκύπτει

$$\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.97})$$

και με συνδυασμό της με τον ορισμό (I-3.93) δηλώνει ότι

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{I-3.98})$$

και με αυτόν τον τρόπο αποδείχθηκε η μοναδικότητα της γενικής λύσης των Naghdi και Hsu.

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στις διαφορικές αναπαραστάσεις των Parkovich – Neuber (3 συνιστώσες ενός διανυσματικού αρμονικού δυναμικού και 1 βαθμωτό αρμονικό δυναμικό) και των Boussinesq – Galerkin (6 συνιστώσες ενός διανυσματικού διαρμονικού δυναμικού και 1 βαθμωτό αρμονικό δυναμικό) που παρόλο προέρχονται από μοναδική λύση (γενική λύση των Naghdi – Hsu, 3 συνιστώσες ενός διανυσματικού αρμονικού δυναμικού) δεν είναι μοναδικές εφόσον χρησιμοποιούμε επιπλέον δυναμικά για να αναπαραστήσουμε τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης. Επομένως, όπως έχει αποδειχτεί από τους Eubanks και Sternberg [48], στη θεωρία της ελαστικότητας, τα παραπάνω δυναμικά μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους χωρίς να επηρεαστεί η πληρότητα και να διατηρείται και η μοναδικότητα για κάθε είδους συνδυασμό. Βασική προϋπόθεση είναι οι εξισώσεις που επιλύουν οι αναπαραστάσεις να είναι ομογενείς. Όπως και στην ελαστικότητα έτσι και στην ρευστομηχανική οι εξισώσεις του Stokes αποτελούν ένα σύστημα ομογενών διαφορικών εξισώσεων με αποτέλεσμα να γίνεται εφικτή η χρήση της προαναφερθείσας σημαντικής δυνατότητας. Τελικά, η μοναδικότητα διατηρείται είτε με μηδενισμό κάποιων δυναμικών, είτε με ανάλυσή τους σε γραμμικό συνδυασμό κάποιων άλλων. Επειδή στη συγκεκριμένη εργασία, για την επίλυση φυσικών προβλημάτων συνοριακών τιμών εφαρμόζεται η διαφορική αναπαράσταση των Parkovich – Neuber, λόγω της απλότητάς της σε σχέση με την διαφορική λύση των Boussinesq – Galerkin, επιλέγουμε σχέσεις σύνδεσης που αναφέρονται στα δυναμικά της, δηλαδή τα Φ και Φ_0 . Για παράδειγμα, αν μηδενίσουμε αυθαίρετα το Φ_0 , τότε η λύση των Parkovich – Neuber είναι μοναδική. Εμείς, όμως, επιλέγουμε κάθε φορά να γράψουμε το ένα δυναμικό σαν συνάρτηση του άλλου,

$$\Phi_0 = f(\Phi), \quad (\text{I-3.99})$$

ανάλογα με τις δυσκολίες που παρουσιάζει το εκάστοτε φυσικό πρόβλημα, όπως θα δούμε και στις εφαρμογές στα υπόλοιπα μέρη της Διατριβής.

Τελειώνοντας, η διαφορική αναπαράσταση των Palaniappan *et al.* (2 συνιστώσες ενός βαθμωτού διαρμονικού δυναμικού και 1 βαθμωτό αρμονικό δυναμικό) χρησιμοποιεί τόσα δυναμικά όσα και οι Naghdi – Hsu στην λύση τους. Είναι εύκολο να αποδειχθεί* η μοναδικότητα της αναπαράστασης αυτής με παρόμοιο τρόπο.

Προκειμένου να κατανοηθεί καλύτερα η χρησιμότητα των διαφορικών αναπαραστάσεων και να αναπτυχθεί με το βέλτιστο τρόπο η “ικανότητα” της κάθε μιας σε σχέση με την άλλη, είναι επιβεβλημένος ο συσχετισμός τους σε επίπεδο δυναμικών σε διάφορες γεωμετρίες [40–43,117], κάτι που αποτελεί το κύριο μέρος της παρούσας εργασίας στα επόμενα Μέρη. Επιπλέον, η ουσία της προαναφερθείσας μη μοναδικότητας ορισμένων αναπαραστάσεων, και κυρίως της διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber (σχέση (I-3.99)), έγκειται στις διάφορες εφαρμογές σε φυσικά προβλήματα συνοριακών τιμών, όχι τόσο στην απλή σφαιρική γεωμετρία [43,44], όσο, όπως θα δούμε αργότερα, σε πιο πολύπλοκα συστήματα συντεταγμένων όπως το επίμηκες και πεπλατυσμένο σφαιροειδές [42] και το ελλειψοειδές [45] σύστημα.

I-3.4 Αξονοσυμμετρικές διαφορικές αναπαραστάσεις.

Γνωρίζουμε πολύ καλά ότι οι διαφορικές αναπαραστάσεις που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους αφορούν την γενική περίπτωση τρισδιάστατων ή μη αξονοσυμμετρικών πεδίων ροής. Στην περίπτωση, όμως, που αναφερόμαστε σε διδιάστατα χωρία και δεν ακολουθείται η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο I-2, ούτε η χρήση των μορφών για αξονοσυμμετρικές ροές από τους Xu και Wang [123], τότε είναι δυνατός ο εκφυλισμός όλων των γενικών λύσεων από 3-D γεωμετρίες σε 2-D χωρία. Αυτό καθίσταται εύκολο με εφαρμογή των γνωστών ορισμών αξονοσυμμετρίας. Συνεπώς, για διδιάστατες ροές ισχύει

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r})}{\partial \varphi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3), \quad (\text{I-3.100})$$

δηλ., η ταχύτητα $\mathbf{v}$ είναι ανεξάρτητη της γωνίας αζιμουθίου φ , καθώς επίσης

* Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στις αρμόδιες αναφορές για την αναπαράσταση των Palaniappan *et al.*, δηλαδή στις [85,86].

$$\hat{\phi} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \quad (\text{I-3.101})$$

και άρα η ταχύτητα $\mathbf{v}$ δεν έχει αξιμουθιακή συνιστώσα. Σε αυτές τις περιπτώσεις η ροή θεωρείται αξονοσυμμετρική, με αποτέλεσμα η κίνηση του ρευστού είναι η ίδια σε κάθε μεσημβρινό επίπεδο.

I-3.5 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις στη ροή Stokes.

Σε αυτή την παράγραφο, για πληρότητα, θα αναφέρουμε τις βασικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις [36,39] των λύσεων που διέπουν τις εξισώσεις Stokes για τα πεδία ροής στη γενική περίπτωση της ύπαρξης μιας συνάρτησης κατανομής πηγών $\mathbf{f}$, όπου συμπληρώνει το δεξί μέλος των εξισώσεων Stokes και είναι υπεύθυνη για την μη ομογένειά τους.

Συνεπώς, υποθέτουμε ότι το ζευγάρι $\mathbf{v}$, P ικανοποιεί τις εξισώσεις που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes μέσα σε απλώς συνεκτικά, ομαλά, φραγμένα πεδία ροής $\Omega(\mathbb{B}^3)$ παρουσία ιδιομορφιών μέσα στο χωρίο,

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \nabla P(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3), \quad (\text{I-3.102})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3), \quad (\text{I-3.103})$$

ενώ το ζευγάρι των θεμελιωδών λύσεων $\tilde{\mathbf{G}}$, $\mathbf{P}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες γνωστές μη ομογενείς εξισώσεις του Stokes για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^3)$,

$$\mu_0 \Delta \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\mu_0 (\nabla \otimes \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - 8\pi\mu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\mathbf{I}}, \quad (\text{I-3.104})$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^3), \quad (\text{I-3.105})$$

όπου δ είναι το συναρτησιακό του Dirac και το σύμβολο $\tilde{\mathbf{I}}$ αναφέρεται στο μοναδιαίο δυαδικό. Η επιβολή του φραγμένου χωρίου είναι επιβεβλημένη προκειμένου, όπως θα δούμε, να ορίσουμε τις αναπαραστάσεις. Οι θεμελιώδεις λύσεις* που επιλύουν τις (I-3.104) και (I-3.105) εκφράζονται μέσω των σχέσεων

* Η θεμελιώδης λύση για το πεδίο ταχύτητας $\tilde{\mathbf{G}}$ που δίνεται από την έκφραση (I-3.106) είναι το δυαδικό του Oseen [56], ενώ το τριαδικό [72] των τάσεων που γεννά το δυαδικό του Oseen [56] δίνεται από τη σχέση

$${}^{(3)}\tilde{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -6\mu_0 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{B}^3). \quad (\text{I-3.106a})$$

Η απόδειξη των θεμελιωδών σχέσεων είναι αρκετά επίπονη και ελάσσονος σημασίας σε αυτή την εργασία.

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\text{I-3.106})$$

και

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\text{I-3.107})$$

για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{B}^3)$. Φυσικά, μπορεί το $\mathbf{r}'$ να ανήκει στην επιφάνεια $\partial\Omega(\mathbf{B}^3)$. Το ζεύγος των συναρτήσεων $\tilde{\mathbf{G}}, \mathbf{P}$ ονομάζονται συναρτήσεις Green [5,53,98].

Τότε, το πεδίο ταχύτητας και το πεδίο ολικής πίεσης δίνονται μέσω ολοκληρωμάτων επιφανείας και όγκου που περιέχουν τις λύσεις προς υπολογισμό και ονομάζονται “ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις” των πεδίων ροής. Σε αυτή την περίπτωση, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των πεδίων ροής Stokes είναι οι εξής για το πεδίο ταχύτητας,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu_0} \left\{ - \iiint_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dU(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \iint_{\partial\Omega} \left[\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \left(\mu_0 \frac{\partial}{\partial n'} \mathbf{v}(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \left(\frac{\partial}{\partial n'} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - 2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \otimes \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right) \right] dS(\mathbf{r}') \right\} \quad (\text{I-3.108}) \end{aligned}$$

και για το πεδίο ολικής πίεσης,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ - \iiint_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dU(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \iint_{\partial\Omega} \left[\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \left(\mu_0 \frac{\partial}{\partial n'} \mathbf{v}(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \left(\frac{\partial}{\partial n'} \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \right] dS(\mathbf{r}') \right\}, \quad (\text{I-3.109}) \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ και φυσικά η παράγωγος στην κάθετη διεύθυνση ορίζεται από την έκφραση

$$\frac{\partial}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{I-3.110})$$

Οι αποδείξεις των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων (I-3.108) και (I-3.109), καθώς και μια πιο αναλυτική και φυσική μελέτη τους, συνοψίζονται στο Παράρτημα Δ. Οι συγκεκριμένες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις ισχύουν και στην περίπτωση των

ομογενών εξισώσεων Stokes, που σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν κατανομές πηγών ή ιδιομορφιών στο χωρίο μας, δηλαδή $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$, οπότε εξαφανίζονται τα ολοκληρώματα όγκου και παραμένουν τα επιφανειακά ολοκληρώματα. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν σε φραγμένα πεδία ροής. Συνεπώς, για εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών τα ολοκληρώματα όγκου μετατρέπονται σε γενικευμένα ολοκληρώματα και απαιτούνται συμπληρωματικές συνθήκες, με ασυμπτωτική μορφή καθώς $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, για τις ολοκληρωτέες συναρτήσεις, που να καθορίζουν τη συμπεριφορά τους στο άπειρο. Επιπλέον, πρέπει πάντα να καθορίζεται σωστά το πρόσημο μπροστά από τα επιφανειακά ολοκληρώματα, γιατί η εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss στα εξωτερικά χωρία συνδέεται άμεσα με τη φορά του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ επί της επιφανείας. Άρα, έχουμε αλλαγή πρόσημου που οφείλεται στην αλλαγή της φοράς του μοναδιαίου $\hat{\mathbf{n}}$.

Η έννοια της θεμελιώδους λύσης [36,39], καθώς και της συναφούς έννοιας της συνάρτησης Green [5,53,98] ορίζεται εδώ για ένα γραμμικό μερικό διαφορικό τελεστή στη σχέση (I-3.104), όπου το $\mathbf{r}'$ είναι ο πόλος ή το ανώμαλο σημείο και αναφέρεται σε μια κατανομή πηγών είτε στο χωρίο $\Omega(\mathbf{0}^3)$ είτε στο σύνορό του $\partial\Omega(\mathbf{0}^3)$. Η θεμελιώδης λύση περιγράφει το αποτέλεσμα που δημιουργεί στη θέση $\mathbf{r}$ ένα σημειακό αίτιο μοναδιαίας έντασης που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}'$. Η γνώση της θεμελιώδους λύσης για έναν γραμμικό διαφορικό τελεστή ισοδυναμεί με τη γνώση της λύσης των εξισώσεων (I-3.104) και (I-3.105) και αποτελεί δύσκολη διαδικασία, η οποία ισοδυναμεί στην ουσία με την ίδια την επίλυση του προβλήματος, αλλά δεν είναι αυτή τη στιγμή το αντικείμενό μας. Έτσι, οι μορφές των θεμελιωδών λύσεων (I-3.106) και (I-3.107) για τη ροή Stokes είναι κάτι ανάλογο με την μορφή της θεμελιώδους λύσης για τον τελεστή του Laplace που είδαμε και προηγουμένως στις αποδείξεις των διαφορικών αναπαραστάσεων. Συνήθως, σε διάφορα φυσικά προβλήματα, οι θεμελιώδεις λύσεις χωρίζονται σε δύο κομμάτια, το ανώμαλο κομμάτι που ικανοποιεί πάντα την εξίσωση και το ομαλό κομμάτι όπου τροποποιείται πάντα ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες.

Από την άλλη μεριά, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις [36,39,64] προσφέρουν το μεγάλο πλεονέκτημα της έκφρασης των πεδίων ροής $\mathbf{v}$, P συναρτήσει ολοκληρωμάτων στο σύνορο που περιέχουν τα ίδια τα πεδία και τις κάθετες παραγώγους αυτών. Συνεπώς, στη επίλυση συγκεκριμένων φυσικών προβλημάτων

οριακών τιμών, η μορφή των συνοριακών συνθηκών μπορεί άμεσα, με κατάλληλη χρήση και εφαρμογή των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων, να συντελέσει στην απευθείας εύρεση της ταχύτητας και πίεσης. Με άλλα λόγια, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων των εξισώσεων του Stokes συναρτήσει επιφανειακών ολοκληρωμάτων, εισάγει με άμεσο τρόπο τις συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος ροής. Επομένως, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων, κυρίως ελλειπτικού τύπου, έχουν εξαιρετική σημασία τόσο στη μελέτη των προβλημάτων συνοριακών τιμών και στη φυσική ερμηνεία των φαινομένων, όσο και στην αριθμητική επίλυσή τους με τη μέθοδο επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων, όπου η διακριτοποίηση γίνεται επάνω στο σύνορο, αντί για ολόκληρο το θεμελιώδες πεδίο, περιορίζοντας έτσι το αριθμητικό σχήμα σε πεδίο με μια διάσταση μικρότερη. Για αυτό το λόγο, η αναλυτική μορφή της διατριβής μας οδηγεί στη χρήση των διαφορικών αναπαραστάσεων που είναι πιο εύχρηστες στις αναλυτικές προσεγγίσεις. Αξίζει να αναφέρουμε ότι για εξωτερικά πεδία, απαιτείται κατάλληλος ρυθμός απόσβεσης στο άπειρο. Τελειώνοντας, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις συνδέονται άμεσα με την εμφάνιση πηγών ή ιδιομορφιών σε προβλήματα, όπου η λύση τους δίνεται μέσα από ολοκληρώματα όγκου και επιφανείας που περιέχουν τις πηγές και τις θεμελιώδεις λύσεις [39], όπως κανείς μπορεί να δει και στο Παράρτημα Δ. Με αυτό τον τρόπο γίνεται και άμεση χρήση των καταλλήλων συνοριακών συνθηκών στα επιφανειακά ολοκληρώματα.

Γενικά, δεν χρειάζεται να επεκταθούμε περαιτέρω στις θεμελιώδεις λύσεις και στις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις, εφόσον όλα τα προβλήματα συνοριακών τιμών που έχουν λυθεί σε αυτή την εργασία αφορούν ομαλά πεδία ροής χωρίς την παρουσία πηγών ή ιδιομορφιών. Άρα, απαιτείται απλά η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, που θα μελετηθούν διεξοδικά στο επόμενο Κεφάλαιο Ι-4, στις διαφορικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται. Παρόλα αυτά, αν ο αναγνώστης θέλει να επεκταθεί περισσότερο σε ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις ή ιδιομορφίες, αναλυτικά ή αριθμητικά μπορεί να ανατρέξει στη βιβλιογραφία [4,36,40,41,51,64,74,75,94,105].

Ι-3.6 3-D ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων.

Στο Κεφάλαιο I-2 καταγράφηκαν οι γενικές μορφές των διαφορικών τελεστών που αναφέρονται στα αξονοσυμμετρικά πεδία. Σε αυτή την παράγραφο θα επιχειρήσουμε να δώσουμε με συνοπτικό τρόπο όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για τη μορφή των διαφορικών τελεστών της βάθμωσης ∇ και του Laplace Δ . Έτσι, ο αναγνώστης θα είναι σε θέση να ανάγει όλες τις παραπάνω πληροφορίες για διαφορικές αναπαραστάσεις του Κεφαλαίου I-3 σε οποιοδήποτε 3-D ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων [77] επιθυμεί έχοντας όλη την πληροφορία.

I-3.6a Καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.

Αναλυτικότερα, θα ξεκινήσουμε με την θεώρηση ενός γενικού καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων και θα θεωρήσουμε μια τυχαία επιφάνεια που δίνεται μέσω της παραμετροποίησης

$$u = u(x_1, x_2, x_3), \quad v = v(x_1, x_2, x_3), \quad w = w(x_1, x_2, x_3), \quad (\text{I-3.111})$$

όπου $(x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{B}$. Ο μετασχηματισμός $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (u, v, w)$ είναι ένα προς ένα και επί, δηλαδή, η ποσότητα

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \equiv (\nabla u \times \nabla v) \cdot \nabla w \neq 0. \quad (\text{I-3.112})$$

Επειδή υποθέτουμε ότι το σύνολο $(u, v, w) \in C^{(1)}$, δηλ., έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης, όπως φαίνεται και από την (I-3.112), συνεπάγεται ότι η ποσότητα που ορίστηκε στην προηγούμενη σχέση δεν αλλάζει πρόσημο. Φυσικά, αν άλλαζε τότε λόγω της συνέχειας θα μηδενιζόταν κάτι που είναι άτοπο.

Ο μετασχηματισμός (I-3.111) αντιστρέφεται,

$$x_1 = x_1(u, v, w), \quad x_2 = x_2(u, v, w), \quad x_3 = x_3(u, v, w) \quad (\text{I-3.113})$$

με $(u, v, w) \in \mathfrak{B}$. Σταθεροποιώντας την μια μεταβλητή λαμβάνουμε τις συντεταγμένες επιφάνειες, ενώ σταθεροποιώντας δύο μεταβλητές λαμβάνουμε τις συντεταγμένες καμπύλες.

Το διάνυσμα θέσης ή παρατήρησης, όπως είναι γνωστό, δίνεται από την έκφραση που περιέχει τις συντεταγμένες του γενικού καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων (u, v, w) ,

$$\mathbf{r} = x_1(u, v, w)\hat{\mathbf{x}}_1 + x_2(u, v, w)\hat{\mathbf{x}}_2 + x_3(u, v, w)\hat{\mathbf{x}}_3, \quad (\text{I-3.114})$$

όπου x_1, x_2, x_3 είναι οι καρτεσιανές μεταβλητές και $\hat{x}_\kappa$ είναι η καρτεσιανή ορθοκανονική βάση για $\kappa = 1, 2, 3$. Λόγω της (I-3.114) ισχύει

$$\nabla \mathbf{r} = (\nabla u) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} + (\nabla v) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} + (\nabla w) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \equiv \tilde{\mathbf{I}} \quad (\text{I-3.115})$$

και συνεπώς, το σύνολο των $(\nabla u, \nabla v, \nabla w)$ είναι αμοιβαία βάση [35,109] των

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right). \text{ Άρα,}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla u &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) J^{-1} \\ \nabla v &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) J^{-1} \\ \nabla w &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) J^{-1} \end{aligned} \right\} \quad \text{ή} \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= J [(\nabla v) \times (\nabla w)] \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= J [(\nabla w) \times (\nabla u)] \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} &= J [(\nabla u) \times (\nabla v)] \end{aligned} \right\}, \quad (\text{I-3.116})$$

όπου J είναι η Ιακωβειανή του μετασχηματισμού,

$$J = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}, \quad (\text{I-3.117})$$

ενώ εύκολα κανείς παρατηρεί ότι

$$\left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right\} [(\nabla u \times \nabla v) \cdot \nabla w] = 1. \quad (\text{I-3.118})$$

Το κέρδος αυτής της θεωρίας είναι ότι όταν το σύστημα είναι και ορθογώνιο, τότε οι δύο αμοιβαίες βάσεις συμπίπτουν. Η φυσική σημασία της Ιακωβειανής εξηγείται από την πιο κάτω σχέση,

$$J = \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{du dv dw}, \quad (\text{I-3.119})$$

όπου δηλώνει τον λόγο του πραγματικού όγκου του συστήματος ως προς τον όγκο του παραμετροποιημένου χώρου.

I-3.6β *Ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων.*

Όλα σχεδόν τα συστήματα συντεταγμένων που αναφέρονται στην πληθώρα των φυσικών προβλημάτων είναι ορθογώνια [77]. Τουλάχιστον, εμείς, στην εργασία αυτή εμπλεκόμαστε με τέτοιου είδους συστήματα. Το πέρασμα από τα γενικής μορφής

καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων στα ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων γίνεται με την εισαγωγή της συνθήκης ορθογωνιότητας

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0 \quad (\text{I-3.120})$$

με το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ να δίνεται από την (I-3.114).

Επιλέγουμε ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων u, v, w με μοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}$, τέτοιο ώστε

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= h_u \hat{\mathbf{u}} & \Rightarrow & & h_u &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\| \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= h_v \hat{\mathbf{v}} & \Rightarrow & & h_v &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} &= h_w \hat{\mathbf{w}} & \Rightarrow & & h_w &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right\| \end{aligned} \right\}, \quad (\text{I-3.121})$$

όπου τα h_u, h_v, h_w είναι οι μετρικοί συντελεστές του ορθογωνίου συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση η Ιακωβειανή (I-3.117) εκφράζεται μέσω των μετρικών συντελεστών του συστήματος,

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = h_u h_v h_w [(\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{w}}] \\ &= h_u h_v h_w > 0 \end{aligned} \quad (\text{I-3.122})$$

αφού τα $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}$ είναι ορθογώνια και μοναδιαία.

Οπότε, άμεσα, υπολογίζουμε από τις (I-3.116) και (I-3.121)

$$\left. \begin{aligned} \nabla u &= \frac{h_v \hat{\mathbf{v}} \times h_w \hat{\mathbf{w}}}{h_u h_v h_w} = \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u} \\ \nabla v &= \frac{h_w \hat{\mathbf{w}} \times h_u \hat{\mathbf{u}}}{h_u h_v h_w} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{h_v} \\ \nabla w &= \frac{h_u \hat{\mathbf{u}} \times h_v \hat{\mathbf{v}}}{h_u h_v h_w} = \frac{\hat{\mathbf{w}}}{h_w} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-3.123})$$

εφόσον για τα $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}$ ορίσαμε ότι είναι και δεξιόστροφα, δηλ.,

$$\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{w}}, \quad \hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{u}}, \quad \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}. \quad (\text{I-3.124})$$

Είναι ενδιαφέρον να δούμε τον στοιχειώδη όγκο dU ,

$$dU \equiv dx_1 dx_2 dx_3 = J(dudv dw)$$

$$= h_u h_v h_w (dudvdw), \quad (\text{I-3.125})$$

τις στοιχειώδεις επιφάνειες dS_u, dS_v, dS_w ,

$$\begin{aligned} dS_u &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw \right\| = \| h_v \hat{\mathbf{v}} dv \times h_w \hat{\mathbf{w}} dw \| \\ &= h_v h_w dv dw, \end{aligned} \quad (\text{I-3.126})$$

$$\begin{aligned} dS_v &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \right\| = \| h_w \hat{\mathbf{w}} dw \times h_u \hat{\mathbf{u}} du \| \\ &= h_u h_w dudw, \end{aligned} \quad (\text{I-3.127})$$

$$\begin{aligned} dS_w &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right\| = \| h_u \hat{\mathbf{u}} du \times h_v \hat{\mathbf{v}} dv \| \\ &= h_u h_v dudv \end{aligned} \quad (\text{I-3.128})$$

και τα στοιχειώδη μήκη $d\ell_u, d\ell_v, d\ell_w$,

$$d\ell_u = h_u du, \quad d\ell_v = h_v dv, \quad d\ell_w = h_w dw. \quad (\text{I-3.129})$$

I-3.6γ Γενικές εκφράσεις των διαφορικών τελεστών ∇ και Δ .

Με σύνθετη παραγωγή σε οποιοδήποτε u, v, w ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ο διαφορικός τελεστής της βάθμωσης ∇ γράφεται

$$\nabla = \nabla_u \frac{\partial}{\partial u} + \nabla_v \frac{\partial}{\partial v} + \nabla_w \frac{\partial}{\partial w} \quad (\text{I-3.130})$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (I-3.123) παίρνει τη μορφή

$$\nabla = \frac{\hat{\mathbf{u}}}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{\mathbf{v}}}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{\mathbf{w}}}{h_w} \frac{\partial}{\partial w}, \quad (\text{I-3.131})$$

όπου η σχέση (I-3.131) αποτελεί τη γενική έκφραση του διαφορικού τελεστή της βάθμωσης σε κάθε ορθογώνιο σύστημα u, v, w με ορθομοναδιαία διανύσματα $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{w}}$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε μια σχέση γενική και για τον διαφορικό τελεστή του Laplace είναι απαραίτητη η εύρεση μιας πιο πολύπλοκης μορφής για τον τελεστή ∇ απ' ότι αυτής της εξίσωσης (I-3.131). Ειδικότερα, θεωρούμε μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{b}$ όπου δρα ο τελεστής του ∇ σαν εσωτερικό γινόμενο και γράφουμε την (I-3.131) με εναλλακτικό τρόπο κάνοντας χρήση των σχέσεων (I-3.121), (I-3.122) και (I-3.123) δηλ.,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{b} &= \frac{h_v \hat{\mathbf{v}} \times h_w \hat{\mathbf{w}}}{h_u h_v h_w} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u} + \frac{h_w \hat{\mathbf{w}} \times h_u \hat{\mathbf{u}}}{h_u h_v h_w} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial v} + \frac{h_u \hat{\mathbf{u}} \times h_v \hat{\mathbf{v}}}{h_u h_v h_w} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial w} \\
&= J^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial u} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial v} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial w} \right\} \\
&= J^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) \cdot \mathbf{b} \right] - \mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) \right. \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \cdot \mathbf{b} \right] - \mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial w} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{b} \right] - \mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\}. \tag{I-3.132}
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = \mathbf{0} \tag{I-3.133}$$

όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με σύνθετες παραγωγίσεις. Επομένως, εισάγοντας την (I-3.133) στην (I-3.132) και χρησιμοποιώντας, επίσης, τις εκφράσεις (I-3.121) καταλήγουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{J}{h_u} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b}) \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{J}{h_v} (\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{b}) \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{J}{h_w} (\hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{b}) \right] \right\}. \tag{I-3.134}$$

Σε αυτή τη φάση, ορίζουμε μια βαθμωτή συνάρτηση b που τη συνδέουμε με τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{b}$ μέσω της

$$\mathbf{b} = \nabla b \tag{I-3.135}$$

και με αντικατάσταση της (I-3.135) στη σχέση (I-3.134) οδηγούμαστε στην

$$\nabla \cdot \nabla b \equiv \Delta b = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{J}{h_u} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla b) \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{J}{h_v} (\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla b) \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{J}{h_w} (\hat{\mathbf{w}} \cdot \nabla b) \right] \right\}, \tag{I-3.136}$$

από όπου λόγω της αρχικής μορφής του τελεστή της βάθμωσης (I-3.131) έχουμε

$$\Delta b = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{J}{h_u^2} \frac{\partial b}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{J}{h_v^2} \frac{\partial b}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{J}{h_w^2} \frac{\partial b}{\partial w} \right] \right\} \tag{I-3.137}$$

και, τελικά, ο διαφορικός τελεστής του Laplace Δ σε ένα οποιοδήποτε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων u, v, w έχει την παρακάτω μορφή,

$$\Delta = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{J}{h_u^2} \frac{\partial}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{J}{h_v^2} \frac{\partial}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial w} \left[\frac{J}{h_w^2} \frac{\partial}{\partial w} \right] \right\}, \tag{I-3.138}$$

όπου η Ιακωβειανή του μετασχηματισμού δίνεται από την εξίσωση (I-3.122). Τέλος, το μοναδιαίο δυαδικό $\tilde{\mathbf{I}}$ δίνεται σε αναλλοίωτη Καρτεσιανή μορφή,

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (\text{I-3.139})$$

Με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώσαμε τα βασικά στοιχεία* που συνθέτουν τη θεωρία των ορθογωνίων συστημάτων συντεταγμένων στην προσπάθειά μας να είμαστε όσο το δυνατόν πιο συνοπτικοί αλλά και συγχρόνως να μεταφέρουμε όλη την πληροφορία. Άρα, οι διαφορικοί τελεστές που εμφανίστηκαν στις διαφορικές αναπαραστάσεις έχουν τις γενικές μορφές (I-3.131) και (I-3.138) και μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιαδήποτε γεωμετρία σε τρισδιάστατα πεδία ροής.

* Μια σημαντική ποσότητα αποτελεί και το τετράγωνο της διαφορικής επιφανείας $(dS)^2$ σε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων,

$$(dS)^2 \equiv d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) (du)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) (dv)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) (dw)^2, \quad (\text{I-3.125a})$$

που αποτελεί και την πρώτη θεμελιώδη μορφή.

ΜΕΡΟΣ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι-4 ΜΟΝΤΕΛΑ ΡΟΗΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΣΕ ΚΥΤΤΑΡΟ – ΠΕΔΙΑ STOKES

Ι-4.1 Σωματιδιακά συστήματα και απλοποιητικά μοντέλα.

Η σχετική κίνηση ρευστού ως προς σμήνη μικρών σωματιδίων αποτελεί περιοχή μεγάλου ενδιαφέροντος σε σημαντικούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας [34] και σχετίζεται άμεσα με τη μελέτη των πορωδών μέσων και των εφαρμογών τους. Βιομηχανικές, τεχνολογικές ή και αμιγώς επιστημονικές περιοχές ενδιαφέροντος στις οποίες απαντώνται τα πορώδη μέσα είναι η βιομηχανία πετρελαίου, η φαρμακοβιομηχανία, η βιοχημική μηχανική, η ιατρική, η βιομηχανία πλαστικών καθώς και οι βιομηχανίες βαρέων κατασκευών. Από την άλλη μεριά, αναφερόμενοι στον κλάδο της Χημικής Μηχανικής, η μελέτη πολλών εργαστηριακών φαινομένων, όπως της καθίζησης, της ροής σε κοκκώδη-πορώδη μέσα, της ρευστοποίησης, των φαινομένων μεταφοράς, της κρυσταλλοποίησης, της διήθησης, της υδροδυναμικής χρωματογραφίας, της ροής γαλακτωμάτων, των κolloειδών, των αιωρημάτων έμβιων κυττάρων και πολλών άλλων συγγενών φαινομένων, βασίζεται

στη μελέτη της αλληλεπίδρασης συστημάτων σωματιδίου–ρευστού. Τα σωματίδια μπορεί να κινούνται σε σμήνη διαμέσου του ρευστού όπως στην ιζηματοποίηση ή να παραμένουν στάσιμα όπως στις στερεοποιημένες κλίνες. Η σχετική κίνηση, όμως, σωματιδίου–ρευστού μπορεί να είναι περισσότερο πολύπλοκη όπως στα ρευστοποιημένα συστήματα. Έτσι, κάθε φορά έχουμε να αντιμετωπίσουμε φαινόμενα όπου είτε τα σωματίδια κινούνται μέσα σε ηρεμούντα ρευστά, είτε φυσικά φαινόμενα όπου το ρευστό διαπερνάει στάσιμα σωματίδια. Σε κάθε περίπτωση ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων απορρέει από την προτυποποίηση αυτών των φαινομένων.

Η μελέτη των συστημάτων σωματιδίου–ρευστού μέσα σε πορώδη μέσα μπορεί να γίνει είτε μακροσκοπικά, είτε μικροσκοπικά με τη δεύτερη να πλεονεκτεί μεν στο γεγονός της λεπτομέρειας στην περιγραφή των φαινομένων, να μειονεκτεί δε σε απλότητα και ευχρηστία. Παρόλα αυτά, η μικροσκοπική ανάλυση αποτελεί το βασικό και αρχικό στάδιο αντιμετώπισης των προαναφερθέντων φυσικών προβλημάτων και προκειμένου να υπερνικηθούν οι όποιες δυσκολίες έχουν αναπτυχθεί διάφορα απλοποιητικά πρότυπα, που ονομάζονται μοντέλα. Τα εν λόγω μοντέλα, μέσω μιας σειράς απλουστεύσεων και υποθέσεων που θα δούμε αργότερα, κατορθώνουν να απλοποιούν τη μαθηματική περιγραφή των προβλημάτων ροής και μεταφοράς, επιτυγχάνοντας έτσι ευκολότερη πρόσβαση στη λύση τους, χωρίς να μειώνεται η πιστότητά τους προς τη φυσική διεργασία που προσομοιάζουν.

Στον χαρακτηρισμό ενός συστήματος σωματιδίου–ρευστού σε πορώδη μέσα συνήθως λαμβάνονται υπόψη η φύση του ρευστού το οποίο, όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο I–1, προσδιορίζεται με πληροφορίες γύρω από το ιξώδες και την πυκνότητα, και η φύση του στερεού, όπου λαμβάνεται υπόψη το μέγεθος και το σχήμα των σωματιδίων. Εξίσου εξαιρετικής σημασίας παράγοντες αφορούν την αναλογία του στερεού στο ρευστό, τη σχετική κίνηση του στερεού και του ρευστού καθώς και το είδος κίνησής τους. Άλλοι παράγοντες όπως η κίνηση Brown, η επίδραση των τοιχωμάτων που περιέχουν το σύστημα των σωματιδίων μέσα σε ρευστό, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων, η ολίσθηση του ρευστού και η παρουσία ηλεκτροστατικών πεδίων είναι ιδιαίτερα σημαντικοί σε ορισμένες περιπτώσεις. Οπότε, είναι φανερό ότι δεν υπάρχει ένας γενικός και πλήρης τρόπος αντιμετώπισης της φυσικής στη μελέτη τέτοιων συστημάτων.

Η μικροσκοπική θεώρηση ενός φαινομένου το οποίο λαμβάνει χώρα σε ένα χώρο σημαντικής γεωμετρικής πολυπλοκότητας αντιμετωπίζει δυσκολίες τόσο με το

πλήθος των επιμέρους φαινομένων που πρέπει να ληφθούν υπόψη (αυτό αντανακλάται στο πλήθος των εξισώσεων που απαιτούνται) ώστε αυτό να περιγράφεται λεπτομερώς, όσο και με την περιγραφή των, συνήθως αρκετά πολύπλοκων σε αυτήν την κλίμακα, γεωμετρικών συνόρων. Καθίσταται, έτσι, εμφανής η ανάγκη υπάρξεως διαφόρων θεωρήσεων οι οποίες να παράγουν όσο το δυνατόν απλούστερες εκφράσεις για τα εξεταζόμενα μεγέθη χρησιμοποιώντας τις απλούστερες δυνατές εξισώσεις για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων, χωρίς όμως να θυσιάζεται η συνέπεια προς τα πραγματικά φαινόμενα. Συνεπώς, καταφεύγουμε σε έναν αριθμό απαραίτητων απλουστεύσεων.

Αναλυτικές λύσεις είναι εύκολο να αναπτυχθούν σε απλά μοντέλα σωματιδίων μέσα σε ρευστό, όπου έχουν εισαχθεί απλές γεωμετρίες. Σε περισσότερο περίπλοκες περιπτώσεις, όπως σε άτακτα σμήνη σωματιδίων ή και πολύπλοκα συστήματα συντεταγμένων, το πρόβλημα της ροής είναι πολύ δύσκολο να λυθεί αναλυτικά, οπότε χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές μέθοδοι. Όμως σε αυτές τις περιπτώσεις συχνά προτιμάται η χρήση της αναλυτικής λύσης από μια αντίστοιχη προτυποποιημένη ροή η οποία να προσεγγίζει το πραγματικό πεδίο ροής. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό αν αναλογιστεί κανείς ότι μια αναλυτική λύση της ροής παρέχει τη βάση για την μαθηματική ανάλυση των διαδικασιών μεταφοράς, όπως μεταφορά θερμότητας και μάζας σε συγκεντρώσεις σωματιδίων ή σε κοκκώδη πορώδη μέσα, στην ανάπτυξη σωματιδίων στους αντιδραστήρες πολυμερισμού γαλακτωμάτων, στη διήθηση αερίων και υγρών αιωρημάτων, σε κοκκώδη πορώδη μέσα και σε άλλες συναφείς διαδικασίες. Άρα, το πρόβλημα εστιάζεται στην κατάλληλη επιλογή των παραδοχών και των υποθέσεων που να μοντελοποιούν το φυσικό πρόβλημα εύκολα, ώστε να είναι εφικτή η παραγωγή μιας αναλυτικής λύσης, και με μικρό τίμημα όσον αφορά τα πραγματικά δεδομένα.

I-4.1α *Οι εξισώσεις Stokes – μια επανεπίσκεψη.*

Συγκεκριμένα, η αρχική σημαντική απλοποίηση έχει ήδη πραγματοποιηθεί αναλυτικά στο Κεφάλαιο Ι-1 θεωρώντας ροή που ακολουθεί τους κανόνες του Stokes [56]. Αναλυτικότερα, υποθέσαμε τη μόνιμη ή ψευδομόνιμη, μη αξονοσυμμετρική έρπουσα σχετική κίνηση ενός ιξώδους, ασυμπίεστου ρευστού, γύρω από σωματίδια ευρισκόμενα μέσα σε απλώς συνεκτικά, ομαλά, φραγμένα πεδία ροής και με διεξοδική ανάλυση καταλήξαμε στις εξισώσεις του Stokes (I-1.58) και (I-1.59).

Ειδικότερα, στην παρούσα εργασία, η θεώρηση της έρπουσας ροής είναι και η πιο πρακτική αλλά και συγχρόνως αποτελεσματική αφού η “αργή” κίνηση (μικρός αριθμός Reynolds) έχει ως αποτέλεσμα να μην χρειάζεται να ληφθούν υπόψη οι αδρανειακές επιδράσεις στη λύση της εξίσωσης κινήσεως του Cauchy, η οποία περιγράφει τη ροή του ρευστού ως προς τα σωματίδια σε αυτού του είδους τα συστήματα. Σε αυτή την περίπτωση, οι ιξώδεις δυνάμεις που προέρχονται από τις διατμητικές κινήσεις του ρευστού κυριαρχούν στις αδρανειακές δυνάμεις που σχετίζονται με την επιτάχυνση ή επιβράδυνση των σωματιδίων του ρευστού. Η απλούστευση αυτή δικαιολογείται γιατί σε πολλά σωματιδιακά συστήματα οι κινήσεις είναι έρπουσες (λόγω “αργής” κίνησης ή λόγω μικρού μεγέθους των σωματιδίων) ώστε να ισχύει αυτή η παραδοχή. Τα συστήματα αυτά χαρακτηρίζονται επίσης από την ισχυρά ιξώδη συμπεριφορά τους, Shapiro [102], ενώ σε πολλές πρακτικές εφαρμογές ο αριθμός του Reynolds είναι αρκετά μικρός, παραδοχή που ισχύει λόγω της υπόθεσης ροής Stokes.

Ο καθορισμός των ικανών και αναγκαίων συνθηκών που απαιτούνται ώστε η λύση της εξίσωσης της έρπουσας κίνησης να είναι μοναδικά καθορισμένη, είναι ένα ανοικτό μαθηματικό πρόβλημα, όπως έδειξε το 1963 η Ladyzhenskaya [67]. Το 1989 οι Power και Miranda [93] απέδειξαν την ύπαρξη λύσης στη γενική περίπτωση της ασυμπίεστης ιξώδους ροής μέσα σε ένα κλειστό χωρίο το οποίο περικλείεται από δύο αυθαίρετες επιφάνειες και έθεσαν με αυτό τον τρόπο το θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη αξιόπιστων μοντέλων στη ροή Stokes με κατάλληλη εφαρμογή των ευρέως χρησιμοποιούμενων συνοριακών συνθηκών. Στην περίπτωση της έρπουσας ροής η λύση είναι και μοναδική, αλλά αυτό δεν συμβαίνει σε μεγαλύτερους αριθμούς Reynolds, ενώ η γεωμετρία παίζει πολλές φορές καθοριστικό ρόλο. Για προβλήματα συνοριακών τιμών που περιέχουν παραγώγους των διανυσματικών πεδίων, ή συνδυασμούς καθορισμένων τιμών της ταχύτητας, καθώς και παραγώγους στα σύνορα, δεν είναι δυνατή η γενίκευση των αναγκαίων συνθηκών. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται η “φυσική διαίσθηση” ως οδηγός στον καθορισμό των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών έτσι ώστε να εξασφαλιστεί μοναδική λύση.

I-4.1β Τεχνικές επίλυσης για ροή σμήνους σωματιδίων μέσα σε πορώδη μέσα – Η ιδέα των μοντέλων κυττάρων.

Για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών σε σωματιδιακά συστήματα σε πορώδη μέσα, χρησιμοποιούνται αρκετές μέθοδοι, όπως η μέθοδος των ανακλάσεων, η τεχνική των μοναδιαίων κυττάρων, η χρήση γενικευμένων συναρτήσεων Green για την επίλυση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων κίνησης, καθώς και εφαρμογή των πιο πολύπλοκων τεχνικών “ειδώλων” [36], τοπικής ταύτισης [104] και της θεωρίας των μεταβολών [106]. Σε κάθε περίπτωση η λύση λαμβάνεται σε αναλυτική μορφή, αλλά η δυσκολία έγκειται κάθε φορά στον τρόπο επίλυσης και στη διαδικασία που εφαρμόζεται για την επίτευξη ενός ικανοποιητικού αποτελέσματος.

Επομένως, η εφαρμογή των πλέον εξειδικευμένων τεχνικών των ειδώλων, της τοπικής ταύτισης και της θεωρίας μεταβολών δεν είναι κάτι που θα μας απασχολήσει στη Διατριβή. Επιπλέον, η μελέτη φυσικών προβλημάτων μέσω γενικευμένων συναρτήσεων Green δεν παρέχουν εύχρηστες λύσεις εφόσον δίνονται συναρτήσει ολοκληρωμάτων και όχι μέσα από αναπαραστάσεις από σειρές, κάτι που είναι και το ζητούμενο στη πλειονότητα των περιπτώσεων.

Από την άλλη μεριά, στη μέθοδο των ανακλάσεων οι συνοριακές συνθήκες ικανοποιούνται πάνω σε κάθε μια από τις ξεχωριστές επιφάνειες που περιλαμβάνει το πρότυπο, συμπεριλαμβανομένων και των τοιχωμάτων που περιβάλλουν το αιώρημα στην περίπτωση που η έκταση του συστήματος του ρευστού με τα σωματίδια είναι πεπερασμένη. Η τεχνική αυτή, όμως, χρησιμοποιείται για την αλληλεπίδραση σωματιδίων μεταξύ τους και με τα τοιχώματα μέσα σε πολύ αραιά αιώρηματα όπου έχουμε γρήγορη σύγκλιση του αντίστοιχου μαθηματικού αλγόριθμου.

Συνεπώς, σε όλες τις πιο πάνω περιπτώσεις το βασικό πρόβλημα μοντελοποίησης των μη συμπαγών πορωδών μέσων παραμένει. Δηλαδή, εξακολουθούμε να αναζητάμε μια εφαρμογή που θα μειώσει το πλήθος και το μέγεθος των υπολογισμών και θα κάνει εφικτή τη χρήση των απαραίτητων συνοριακών συνθηκών που διέπουν το πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό έχει επιλυθεί σε μεγάλο βαθμό από τα μοντέλα κυττάρων ή μοντέλα “σωματίδιο σε κύτταρο”, τα οποία αποτελούν τη σημαντικότερη ίσως προσπάθεια για τη μοντελοποίηση δομών σωματιδίων κατανεμημένων στο χώρο. Κάνοντας μια σειρά απλών αλλά λογικών υποθέσεων, αυτά τα μοντέλα κατορθώνουν να απλοποιούν την περιγραφή της δομής κατανεμημένων στο χώρο σωματιδίων ποικίλων γεωμετριών, παράγοντας απλά, εύχρηστα και αρκετά αξιόπιστα αποτελέσματα με σημαντικές εφαρμογές για τη ροή διαμέσου σμήνους σωματιδίων μέσα σε τέτοιου είδους δομές. Η τεχνική του μοναδιαίου κυττάρου, βασίζεται στην ιδέα ότι μια αρκετά πυκνή συγκέντρωση σωματιδίων μέσα σε ρευστό μπορεί να

διαιρεθεί σε έναν αριθμό από μοναδιαία κύτταρα όπου ένα μόνο σωματίδιο βρίσκεται μέσα σε κάθε κύτταρο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα I-4.1. Έτσι, η θεώρηση ενός πλήρους διαστάσεων πορώδους μέσου ανάγεται σε αυτήν ενός σωματιδίου και του “ρευστού περιβλήματός” του, πράγμα που απλοποιεί σημαντικά τη μαθηματική περιγραφή οποιουδήποτε φαινομένου.

Σχήμα I-4.1: Αναπαράσταση της μετάπτωσης από πορώδες μέσο σε μοντέλο κυττάρου.

Δηλαδή, τώρα, το πρόβλημα των συνοριακών τιμών ανάγεται στη θεώρηση ενός μόνο σωματιδίου και του “ρευστού καλύμματος” που το περιβάλλει με αποτέλεσμα να εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του σωματιδίου και στο εξωτερικό σύνορο του ρευστού περιβλήματος. Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται αυστηρά μόνο σε περιοδικές διατάξεις. Όμως μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και σε περιπτώσεις όπου τα σωματίδια θεωρούνται ότι έχουν διαταχθεί τυχαία, με τη στοχαστική έννοια του όρου. Η μέθοδος μοναδιαίου κυττάρου εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα που παρουσιάζουν πυκνές συγκεντρώσεις σωματιδίων μακριά από τα τοιχώματα που τα περικλείουν, έτσι ώστε οι αλληλεπιδράσεις των τοιχωμάτων με τα σωματίδια να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Τέλος, οι μόνες αλληλεπιδράσεις που υπάρχουν μεταξύ των σωματιδίων είναι και αυτές που καθορίζουν τις συνοριακές συνθήκες στο εξωτερικό περίβλημα, όπως θα διαπιστώσουμε και αργότερα στη μελέτη των βασικών μοντέλων τέτοιας μορφής.

Στην εποχή μας, μια πλήρης λύση για ροή σμήνους σωματιδίων είναι εφικτή με τη χρήση ισχυρών αριθμητικών μεθόδων επίλυσης, όπως Stokesian δυναμική [11–13] ή προσομοίωση Lattice – Boltzmann [60], αλλά και με σημαντικές αναλυτικές εφαρμογές για μελέτη σωματιδίων αυθαίρετου σχήματος που προτάθηκαν από τον Brenner σε μια ουσιαστική και συγχρόνως αποτελεσματική σειρά εργασιών με θεωρητικό υπόβαθρο [16–21].

Μέχρι σήμερα η δημιουργία τέτοιων προτύπων έχει περιοριστεί στην περίπτωση σφαιρικών και σφαιροειδών σωματιδίων που παρουσιάζουν μεγάλο μαθηματικό ενδιαφέρον και πρακτικά προσεγγίζουν τη μορφή των σωματιδίων που μελετώνται με αυτά τα μοντέλα στη ροή Stokes και οδηγούν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Ξεκινώντας από το 1910 με τον Cunningham [32], όπου εισήγαγε ένα πρότυπο μοναδιαίου κυττάρου για να υπολογίσει την οριακή ταχύτητα καθίζησης των σωματιδίων σε ένα αιώρημα, υποθέτοντας ότι η εξωτερική σφαιρική επιφάνεια είναι στερεή εκφράζοντας με αυτό τον τρόπο την ύπαρξη των γειτονικών σφαιρών, αναπτύχθηκαν διάφορα πρότυπα μοναδιαίων κυττάρων με σφαιρικά σωματίδια. Μερικά από αυτά είναι το μοντέλο του Uchida [116] το 1949, όπου χρησιμοποίησε επίσης ένα πρότυπο σφαίρα σε κύτταρο αλλά υπέθεσε ότι ο ρευστός φλοιός που περιβάλλει τη σφαίρα έχει σχήμα κύβου, γεγονός που σημαίνει ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών σε επιφάνειες με διαφορετικές γεωμετρίες, καθώς και τα πρότυπα του Brenner [15] στη διατριβή του το 1957, όπου ανέπτυξε μια

ακριβή λύση έρπουσας ροής για αυτή τη γεωμετρία χρησιμοποιώντας μια μέθοδο τοπικής ταύτισης.

Από αυτή τη χρονιά και μετά υπήρξαν δύο εξαιρετικά σημαντικές θεωρήσεις για ροή Stokes σμήνους σφαιρικών σωματιδίων μέσα σε πορώδη μέσα χρησιμοποιώντας το πρότυπο σφαίρα σε κύτταρο που απεικονίζεται και στο Σχήμα I-4.1. Η ιδέα στηριζόταν στο γεγονός ότι η ροή γύρω από οποιοδήποτε στερεό σφαιρικό σωματίδιο του σμήνους, προσεγγίζεται με τη ροή μέσα σε ένα σφαιρικό ρευστό στρώμα που περιβάλλει τη στερεά σφαίρα. Συγκεκριμένα, ο Happel [54], πρώτα το 1958, και μετά ο Kuwabara [66] το 1959 πρότειναν μοντέλα κυττάρων όπου και το σωματίδιο και ο εξωτερικός φλοιός είναι σφαιρικά, διατηρώντας με αυτό τον τρόπο την αξονική συμμετρία της ροής. Το πάχος του ρευστού στρώματος υπολογίζεται έτσι ώστε το κλάσμα του στερεού όγκου του κυττάρου (στερεή σφαίρα με ρευστό φλοιό) να είναι ίσο με το κλάσμα του στερεού όγκου όλου του σμήνους. Από την άλλη πλευρά, τα συγκεκριμένα μοντέλα μειονεκτούν στο ότι δεν καλύπτουν πλήρως τον χώρο του πορώδους μέσου. Το μοντέλο του Kuwabara υποθέτει ότι το σωματίδιο είναι ακίνητο και το ρευστό κινείται με μια ομοιόμορφη ταχύτητα στη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας, ενώ το μοντέλο Happel υποθέτει ότι το σωματίδιο κινείται ομοιόμορφα μέσα σε ηρεμούν ρευστό. Η διαφορά ανάμεσα στα δύο μοντέλα έγκειται στις συνοριακές συνθήκες και συγκεκριμένα εστιάζεται στο γεγονός ότι στο κύτταρο Kuwabara μηδενίζεται ο στροβιλισμός, αντί των εφαπτομενικών τάσεων (συνοριακή συνθήκη του κυτταρικού μοντέλου Happel) πάνω στην εξωτερική επιφάνεια του κυττάρου. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που το κύτταρο Happel είναι ελαφρώς πιο αξιόπιστο από το κύτταρο Kuwabara εφόσον δεν επιτρέπει την ανταλλαγή μηχανικής ενέργειας με το εξωτερικό περιβάλλον. Οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες, δηλαδή η συνθήκη μη ολίσθησης πάνω στη στερεή σφαίρα και η συνθήκη για την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας στον εξωτερικό φλοιό, όπως θα παρατηρήσουμε και αργότερα, είναι ίδιες με ελαφρές αλλαγές λόγω της σχετικής κίνησης στερεού και ρευστού. Τα πρότυπα των Happel και Kuwabara δίνουν ουσιαστικά τα ίδια αποτελέσματα όσον αφορά στις συνιστώσες της ταχύτητας (βλέπε για παράδειγμα, Tien [115], 1989, σελ. 66–67). Οι δύο αυτές λύσεις δόθηκαν σε κλειστή μορφή και για την εξαγωγή της λύσης του Kuwabara χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές συνάρτησης ροής που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο I-2, ενώ για την εξαγωγή της λύσης του Happel εφαρμόστηκε η γενική διαφορική αναπαράσταση του Lamb [68] που δόθηκε

στο Κεφάλαιο Ι-3 μέσω των σχέσεων (Ι-3.3) και (Ι-3.4) για την ταχύτητα και την ολική πίεση, αντίστοιχα. Αξίζει σε αυτό το σημείο να κάνουμε δύο παρατηρήσεις. Πρώτον, τα αποτελέσματα του Kuwabara [66] είναι ελαφρώς λανθασμένα όσον αφορά τον καθορισμό κάποιων σταθερών στην αναλυτική λύση, πράγμα όμως που ναι, μεν, δεν επηρεάζει σημαντικά τη φυσική, είναι απαραίτητη, δε, η κατάλληλη διόρθωση, η οποία και πραγματοποιήθηκε όπως θα δούμε και στη συνέχεια. Δεύτερον, στην εργασία του Kuwabara [66] μελετήθηκε η συγκεκριμένου τύπου ροή κύλινδρος σε κύτταρο διαμέσου μιας διάταξης παραλλήλων κυλίνδρων με άξονα κάθετο στην διεύθυνση της ροής, ένα φαινόμενο το οποίο μελέτησε, βέβαια, το 1959 πρώτος ο Happel [55], ανεξάρτητα.

Μια σημαντική βελτίωση των προτύπων σφαίρα σε κύτταρο προτάθηκε από τους Neale και Nader [80] το 1974, οι οποίοι θεώρησαν ότι το βασικό κύτταρο εμφυτεύεται μέσα σε ένα μη φραγμένο, συνεχές, ομογενές και ισότροπο πορώδες μέσο, το οποίο έχει την ίδια διαπερατότητα με αυτήν του σμήνους των σωματιδίων, όπου η ροή στο εξωτερικό διαπερατό μέσο περιγράφεται από την εξίσωση του Brinkman [22].

Τα παραπάνω πρότυπα σε σφαίρα χρησιμοποιήθηκαν εκτενώς από τους Pfeffer και Happel [91] το 1964 και επίσης από τον Pfeffer [92] το 1964, που χρησιμοποίησαν το πρότυπο Happel για να επιλύσουν το πρόβλημα της μεταφοράς μάζας σε μια σφαίρα που βρίσκεται μέσα σε ένα σμήνος. Το 1976 οι Tardos *et al.* [113] παρήγαγαν παρόμοιες λύσεις χρησιμοποιώντας τα πρότυπα του Kuwabara και των Neale και Nader. Εξάλλου, μια περιοχή στην οποία τα πρότυπα των Happel και Kuwabara βρίσκουν πολλές εφαρμογές είναι η προτυποποίηση της σωματιδιακής εναπόθεσης αεροκολλοειδών και υδροκολλοειδών σωματιδίων σε κοκκώδεις κλίνες (ο αναγνώστης παραπέμπεται στην αρμόδια εργασία από τον Tien [115]).

Ο βασικός στόχος στην μοντελοποίηση είναι να πραγματοποιούμε όσο το δυνατόν περισσότερες απλοποιήσεις διατηρώντας την πιστότητα του μοντέλου. Από εκεί και πέρα κάθε επιπλέον προσεγγιστικός παράγοντας που “αναιρείται” κάνει το πρότυπο πιο γενικό, αλλά αυξάνει τον βαθμό δυσκολίας. Οι κύριες αλλαγές, λοιπόν, που γίνονται αφορούν συνήθως τη γεωμετρία και την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων. Σε όλες τις προαναφερθείσες εργασίες τα σωματίδια θεωρούνται σφαιρικά. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις τα σωματίδια στην πραγματικότητα (κόκκοι, συσσωματώματα, μακρομόρια, βακτήρια και άλλα) δεν είναι σφαιρικά. Μια καλύτερη προσέγγιση τότε επιτυγχάνεται θεωρώντας τα σωματίδια σαν επιμήκη ή

πεπλατυσμένα σφαιροειδή και αυτή αποτελεί μια καλύτερη και πιο αξιόπιστη προσέγγιση.

Φυσικά, πρέπει να τονίσουμε ότι υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες εργασίες, αριθμητικού και αναλυτικού χαρακτήρα, που αφορούν την επίλυση μοντέλων κυττάρων σε σφαιροειδή γεωμετρία. Παρόλα αυτά, αυτή η βιβλιογραφική ανασκόπηση αφορά αξονοσυμμετρικά προβλήματα ροής.

Η ροή Stokes γύρω από σφαιροειδή προσέλκυε το ενδιαφέρον των ερευνητών αρκετά νωρίς, από το 1876 με τον Oberbeck [82], όπου παρήγαγε μια λύση σε καρτεσιανές συντεταγμένες για τη ροή Stokes που προκαλείται από την σταθερή μεταφορά ενός ελλειψοειδούς παράλληλα προς τους κύριους άξονές του μέσα σε μη φραγμένο ρευστό (βλέπε επίσης Lamb [68], Happel και Brenner [56]), περιοχή με την οποία ασχολήθηκε και ο Sampson [99] 15 χρόνια αργότερα, παράγοντας πολύπλοκες και δύσχρηστες εκφράσεις. Μέρος της παρούσας εργασίας περιέχει τις διορθώσεις και την συμπλήρωση της εργασίας του.

Όπως παρατηρήσαμε, μετά τα τέλη αυτού του αιώνα και μέχρι το 1972 επικράτησαν τα σφαιρικά πρότυπα, όπου τη χρονιά αυτή οι Epstein και Masliyah [47] πρότειναν μια πολύ χρήσιμη γενίκευση των μοντέλων σφαίρα σε κύτταρο των Happel και Kuwabara, για ροή γύρω από σφαιροειδή σωματίδια.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά προβλήματα ροής Stokes γύρω από σφαιροειδή έχουν αντιμετωπιστεί με επιτυχία με χρήση της μεθόδου των ιδιομορφιών για κατανομές πηγών πάνω στον άξονα ενός σφαιροειδούς και την αναπαράσταση των πεδίων ροής μέσω αυτών των κατανομών σε μια σειρά εργασιών των Chwang και Wu [25,27,28] από το 1974 έως το 1976 και του Chwang [26] το 1975. Στην επόμενη δεκαετία, πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με τη μέθοδο των ιδιομορφιών σε σφαιροειδείς συντεταγμένες, όπως, για παράδειγμα, με επιφανειακές κατανομές πηγών το 1978 οι Rallison και Acrivos [96] και με διακριτές ή συνεχείς κατανομές ιδιομορφιών στον άξονα συμμετρίας ενός όχι και τόσο λεπτού σφαιροειδούς το 1983 ο Wanqyi [118]. Τέλος, το 1980 οι Liao και Krueger [71] και το 1985 οι Jeffrey και Onishi [59] χρησιμοποίησαν πολυπολικά αναπτύγματα και την μέθοδο της τοπικής ταύτισης μια λύση της συνάρτησης ροής Stokes γύρω από δύο σφαιροειδή και γύρω από δύο σφαίρες, αντίστοιχα, ενώ το 1990 οι Yoon και Kim [124] χρησιμοποίησαν πολυπολική ανάπτυξη και μια μέθοδο τοπικής ταύτισης για να υπολογίσουν τη

σχετική κίνηση δύο σφαιροειδών που κινούνται μέσα σε ροή Stokes, παίρνοντας υπόψη την υδροδυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των δύο σωματιδίων.

Μόλις το 1994 οι Dassios *et al.* [37] επιχείρησαν με επιτυχία να υπολογίσουν την συνάρτηση ροής σε σφαιροειδείς συντεταγμένες εισάγοντας την μέθοδο του ημιδιαχωρισμού μεταβλητών για τον τελεστή E^4 , ο οποίος, ενώ χωρίζει μεταβλητές στο καρτεσιανό, κυλινδρικό και σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και επιδέχεται R-διαχωρισσιμότητα σε δισφαιρικές συντεταγμένες [78], δεν χωρίζει σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Στη ίδια εργασία [37] επιλύεται πλήρως το συνοριακό πρόβλημα τιμών με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara με χρήση των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων που ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή E^4 σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Ένα χρόνο αργότερα, οι Dassios *et al.* [38] έλυσαν το πρόβλημα “σφαιροειδές σε κύτταρο” με χρήση συνοριακών συνθηκών τύπου Happel με την μέθοδο του ημιδιαχωρισμού μεταβλητών για τη ροϊκή συνάρτηση και παρέθεσαν σε σύγκριση τα αποτελέσματα από την θεώρηση Kuwabara. Παρόλα αυτά, κάποιες απροσδιοριστίες εμφανίζονται όταν τα μοντέλα Happel και Kuwabara λύνονται σε όρους συνάρτησης ροής σε σφαιροειδείς συντεταγμένες*. Επίσης, πρέπει να σημειώσουμε ότι στην αναφορά [38] έχει συζητηθεί εκτενώς και η σχέση της ταχύτητας του σμήνους σωματιδίων με τη μέση ταχύτητα του σμήνους λαμβάνοντας υπόψη και το πορώδες, αφού όπως προείπαμε, τα μοντέλα Happel και Kuwabara δεν καλύπτουν πλήρως το πορώδες μέσο.

Από το 1995 έως και το 1997 μια σειρά εργασιών για την μεταφορά μάζας και θερμότητας για ροή σμήνους επιμηκών σφαιροειδών σωματιδίων, με χρήση του προτύπου σφαιροειδές σε κύτταρο [8,9,30], στηρίχθηκε στη μέθοδο που αναπτύχθηκε από τους Dassios *et al.* προσφέροντας σημαντικά αποτελέσματα. Πάντως, οι Coutelieris *et al.* [29] απέδειξαν ότι το πεπλατυσμένο σχήμα μπορεί να δώσει ουσιαστικά υψηλότερους ρυθμούς μεταφοράς μάζας και θερμότητας για συγκεκριμένες συνθήκες ροής Stokes.

* Οι απροσδιοριστίες που εμφανίζονται αναφέρονται στην ύπαρξη μιας επιπλέον σταθεράς στο πρόβλημα συνοριακών τιμών, η οποία υπολογίζεται με την επιβολή μιας συνοριακής συνθήκης γεωμετρικού χαρακτήρα που απαιτεί το σφαιροειδές μοντέλο Happel ή Kuwabara να δίνει τα αντίστοιχα γνωστά σφαιρικά αποτελέσματα, οπότε και υπολογίζεται η συγκεκριμένη σταθερά. Τα αποτελέσματα, βέβαια, είναι ικανοποιητικά και όπως θα φανεί και αργότερα η επίλυση των ίδιων προβλημάτων με εναλλακτικούς αναλυτικούς τρόπους δεν λύνει το πρόβλημα, αλλά προσφέρει μια ευελιξία στο χειρισμό.

Ανεξάρτητα από την συγκεκριμένη μέθοδο, ο Zlatanovski [125] το 1999 μελέτησε την αξονοσυμμετρική ροή μέσω ενός πορώδους επιμήκους σφαιροειδούς με το μοντέλο του Brinkman [22].

Τέλος, στην προσπάθεια να κατανοηθεί καλύτερα ο λόγος της εμφάνισης συγκεκριμένων απροσδιοριστιών στα σφαιροειδή μοντέλα κυττάρων που χρησιμοποιούν συνοριακές συνθήκες τύπου Happel και Kuwabara, εφαρμόστηκε η θεωρία των διαφορικών αναπαραστάσεων που αναπτύχθηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο I-3. Συγκεκριμένα το 2002 οι Dassios *et al.* [42] εφάρμοσαν τη διαφορική αναπαράσταση των Parkovich – Neuber για τον υπολογισμό των πεδίων ροής στο μοντέλο Kuwabara. Παρόλο που το πρόβλημα του μη υπολογισμού μιας σταθεράς μέσω των συνοριακών συνθηκών παρέμεινε, όπως θα δούμε και στα επόμενα Μέρη της διατριβής, η ευελιξία της παρούσας αναπαράστασης [48] μας επέτρεψε να χειριστούμε κατάλληλα το πρόβλημα. Τα αποτελέσματα μας οδήγησαν στην ίδια ακριβώς λύση [37]. Επιπλέον, το 2002 οι Dassios και Vafeas [43] υπολόγισαν μέσω της ίδιας αναπαράστασης τα διορθωμένα πεδία ροής για το σφαιρικό πρότυπο Kuwabara και με έναν επιλεγμένο γεωμετρικό εκφυλισμό, τα αποτελέσματα από την [42] οδήγησαν επιτυχώς στη λύση [43]. Αναλυτικότερα, φυσικά, θα αναφερθούμε και στο κύριο μέρος της Διατριβής.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε μοντέλα κυττάρων σε σφαιρικές και σφαιροειδείς συντεταγμένες, όπου το είδος της γεωμετρίας επιβάλλει αξονική συμμετρία. Προχωρώντας σε μη αξονοσυμμετρικά σχήματα οδηγούμαστε στο τριαξονικό ελλειψοειδές. Δεν αμφισβητείται το γεγονός ότι έχουν αναφερθεί εξαιρετικές εργασίες αριθμητικού χαρακτήρα που αφορούν ροή γύρω από ελλειψοειδή σωματίδια με τη χρήση της μεθόδου της κατανομής πηγών ή ιδιομορφιών. Το 1974 ο Miloh [75] παρήγαγε ένα σύστημα από ιδιομορφίες – σημειακές πηγές – για ένα αυθαίρετο εξωτερικό δυναμικό πεδίο μέσα σε ένα τριαξονικό ελλειψοειδές. Το σύστημα αυτό αποτελείται από κατανομές μονοπόλων και διπόλων πάνω στο εστιακό ελλειψοειδές, και είναι γενίκευση των αντίστοιχων κατανομών ιδιομορφιών για σφαίρα και σφαιροειδές. Πρόσφατα, αναπτύχθηκαν μέθοδοι ιδιομορφιών που αντιμετωπίζουν περιπτώσεις όπου οι επιδράσεις από τα τοιχώματα δεν είναι αμελητέες. Το 1985 ο Dabros [33] ανέπτυξε μια μέθοδο κατανομής διακριτών ιδιομορφιών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου πρέπει να ληφθούν υπόψη οι επιδράσεις των τοιχωμάτων. Ακόμα, το 1986 πρώτα ο Kim [62] και το 1987 οι Kim και Arunachalam

[63] παρήγαγαν μια γενική λύση για έρπουσα ροή γύρω από ένα ελλειψοειδές με τη μέθοδο των ιδιομορφιών και χρήση των ελλειψοειδών αρμονικών με χρήση αριθμητικών μεθόδων.

Αναλυτικές, όμως, λύσεις δεν είχαν αναφερθεί για μοντέλα ελλειψοειδών σωματιδίων σε κύτταρο μέχρι το 2003. Η χρήση δύο συναρτήσεων ροής για επίλυση τρισδιάστατων προβλημάτων δεν είναι και η πιο αποτελεσματική. Οπότε, είναι επιτακτική η ανάγκη για χρήση τρισδιάστατων διαφορικών αναπαραστάσεων για την μελέτη τρισδιάστατων προβλημάτων ροής γύρω από ελλειψοειδή σωματίδια. Το κίνητρο για την μελέτη αυτή το αποτέλεσε η επίλυση του τρισδιάστατου σφαιρικού μοντέλου Happel [44] από τους Dassios και Vafeas το 2003, το οποίο είναι και ενεργειακά αυτόνομο. Στη συγκεκριμένη εργασία, η έρπουσα ροή σμήνους σφαιρικών σωματιδίων τα οποία κινούνται και περιστρέφονται αυθαίρετα μέσα σε ηρεμούν ρευστό, αναλύεται με ένα τρισδιάστατο μοντέλο σφαίρα σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel. Η λύση λαμβάνεται σε κλειστή μορφή με τη βοήθεια της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber. Η διαφορά με το κυτταρικό μοντέλο που πρότεινε ο ίδιος ο Happel [54] έγκειται στο γεγονός ότι το σφαιρικό σωματίδιο πέρα από τη μεταφορική κίνηση υφίσταται και περιστροφική κίνηση η οποία και δημιουργεί την τρισδιάστατη ροή. Η συγκεκριμένη δουλειά αποτέλεσε και το εναρκτήριο λάκτισμα για την εύρεση των πεδίων ροής γύρω από ένα ελλειψοειδές που κινείται και περιστρέφεται αυθαίρετα, οπότε η μη αξονική συμμετρία είναι επιβεβλημένη εκ των πραγμάτων. Για την μοντελοποίηση του πιο πάνω φαινομένου οι Dassios και Vafeas [45] εισήγαγαν το μοντέλο ελλειψοειδές σε κύτταρο με χρήση τρισδιάστατων συνοριακών συνθηκών τύπου Happel. Τα πεδία ροής υπολογίστηκαν μέσω της γνωστής αναπαράστασης των λύσεων της ροής Stokes, την γενική λύση Parkovich – Neuber. Λόγω της γνώσης περιορισμένου αριθμού ελλειψοειδών αρμονικών η αναλυτική λύση περιορίζεται στους πρώτους όρους, που παρέχουν, όμως, την πιο σημαντική συνεισφορά για το μέγεθος των ελλειψοειδών σωματιδίων που ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Τέλος, ένας επίπονος και κατάλληλος γεωμετρικός εκφυλισμός οδήγησε στο αντίστοιχο σφαιρικό πρότυπο [44].

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι, οι διαφορικές αναπαραστάσεις γενικά, και συγκεκριμένα η γενική λύση των Parkovich – Neuber, αποτελούν ένα πολύ ισχυρό εργαλείο στα χέρια του εφαρμοσμένου μηχανικού για την εύρεση αναλυτικών λύσεων αν και η σπουδαιότητά τους φαίνεται στην προσπάθεια

επίλυσης φυσικών προβλημάτων ροής μέσα σε πορώδη μέσα τα οποία δεν είναι αξονοσυμμετρικά είτε λόγω της φυσικής, είτε λόγω της γεωμετρίας.

Τελικά, οι αναλυτικές μέθοδοι και οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ροής “ζουν” στον ίδιο χώρο, αλλά η λογική των δύο μορφών προσέγγισης διαφέρει ουσιαστικά, γιατί η αντίστοιχη αντιμετώπιση του προβλήματος βασίζεται σε διαφορετικές αρχές. Στις αναλυτικές προσεγγίσεις αντικαθιστούμε το πρόβλημα με κάποιο απλούστερο, που η λύση του δεν διαφέρει πολύ από τη λύση του αρχικού προβλήματος. Στις αριθμητικές προσεγγίσεις, από την άλλη πλευρά, δεν αλλάζουμε το πρόβλημα αλλά τον τρόπο με τον οποίο το πλησιάζουμε, και η βάση για αυτή την αλλαγή είναι η αντικατάσταση των συνεχών μεταβλητών που επιβάλλει η Κλασσική Ανάλυση με διακριτές μεταβλητές που επιβάλλει η Αριθμητική Ανάλυση. Το βέλτιστο είναι ο συνδυασμός των παραπάνω μεθόδων με αποτέλεσμα τη δημιουργία υβριδικών λύσεων. Προφανώς, οι υβριδικές μέθοδοι είναι από μόνες τους ιδιαίτερα δύσκολες, γιατί απαιτούν βαθιά γνώση των δυνατοτήτων τόσο των αναλυτικών όσο και των αριθμητικών μεθόδων, για να μπορέσει να αποφασίσει κάποιος σε ποια σημεία της διαδικασίας επίλυσης πρέπει να παρέμβει με αλλαγή από τη μια μέθοδο στην άλλη. Η συγκεκριμένη εργασία, πάντως, αποτελεί το “αναλυτικό όπλο” στον “αριθμητικό επιστήμονα”.

I-4.2 Συνοριακές συνθήκες σε μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο.

Σε αυτή την παράγραφο θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε τις γενικές (ανεξάρτητες από σύστημα συντεταγμένων και αριθμού διαστάσεων) συνοριακές συνθήκες που διέπουν τα μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο και κυρίως εκείνα τα πρότυπα που χρησιμοποιούν συνοριακές συνθήκες τύπου Happel και Kuwabara. Τόσο το μοντέλο του Happel όσο και αυτό του Kuwabara χρησιμοποιούν τις γνωστές εξισώσεις της έρπουσας ροής για να περιγράψουν τη ροή μέσα στο ρευστό φλοιό που δημιουργείται από το σωματίδιο και τη φανταστική ρευστή επιφάνεια που περικλείει το σωματίδιο και δημιουργείται για να μοντελοποιήσουμε τη ροή που ακολουθεί τους κανόνες του Stokes [56]. Αναλυτικότερα, υποθέτουμε, αναλόγως, τη μόνιμη ή ψευδομόνιμη, μη αξονοσυμμετρική έρπουσα και σχετική κίνηση ενός ιζώδους (σταθερό δυναμικό ιζώδες μ_0), ασυμπίεστου (σταθερή πυκνότητα ρ_0) ρευστού, γύρω από σωματίδια

ευρισκόμενα μέσα σε απλώς συνεκτικά, ομαλά, φραγμένα πεδία ροής $\Omega(\mathbb{R}^3)$. Τότε, λοιπόν, χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις του Stokes για την περιγραφή των πεδίων ταχύτητας $\mathbf{v}$ και πίεσης P . Επιπλέον, όταν αυτά τα πεδία είναι γνωστά, τότε τα πεδία του ολικού τανυστή των τάσεων $\tilde{\mathbf{T}}$ και του στροβιλισμού $\boldsymbol{\omega}$ καθορίζονται πλήρως συναρτήσει αυτών.

Οι βασικοί τύποι συνοριακών τιμών [36] παρουσιάστηκαν περιληπτικά στο Παράρτημα Δ και το πλήθος των συνοριακών συνθηκών, όπου αναφέρονται στο σύνορο $\partial\Omega(\mathbb{R}^3)$, είναι συνδυασμοί των συνθηκών (Δ.75)–(Δ.77).

Ι-4.2α Συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara σε σύστημα σωματιδίου σε κύτταρο.

Θεωρούμε τη ροή Stokes μέσα σε ένα πορώδες μέσο. Υποθέτοντας το σύστημα σωματιδίου–ρευστού, που αναλύθηκε προηγουμένως, για να μοντελοποιήσουμε τη ροή διαμέσου σμήνους σωματιδίων, ορίζουμε την προσέγγιση σωματιδίου σε ρευστό, όπως φαίνεται και στο Σχήμα Ι-4.2.

Σχήμα Ι-4.2: Αναπαράσταση του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara.

Σύμφωνα με τη θεώρηση του Kuwabara, θεωρούμε τους δύο αυθαίρετους όγκους του σχήματος I-4.2. Ο εσωτερικός όγκος, που δηλώνεται από την επιφάνεια $\partial \Omega_i$, είναι στερεός και στάσιμος και αποτελεί το υπό μελέτη σωματίδιο. Περικλείεται από έναν άλλο όγκο, που υποδεικνύεται από την επιφάνεια $\partial \Omega_e$ και αποτελεί το ρευστό φλοιό του μοντέλου σωματίδιο σε κύτταρο. Μια ταχύτητα προσέγγισης U με γενικό τύπο

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i \hat{x}_i \quad (\text{I-4.1})$$

δημιουργεί τη ροή στο ρευστό φλοιό μεταξύ των δύο όγκων $\Omega(\mathbf{e}^3)$, όπου και υπολογίζονται τα πεδία ροής. Οι συνοριακές συνθήκες είναι ανάλογες με αυτές του προτύπου Kuwabara (1959) [66] σφαίρα σε κύτταρο και αναφέρονται σε πιο γενικά σχήματα και συστήματα συντεταγμένων. Άρα, αν $\hat{n}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια του στερεού σωματιδίου $\partial \Omega_i$, οι συνοριακές συνθήκες είναι οι εξής,

$$\text{Σ.Σ.(1):} \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{για} \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega_i(\mathbf{e}^3), \quad (\text{I-4.2})$$

$$\text{Σ.Σ.(2):} \quad \hat{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \hat{n}(\mathbf{r}) \cdot U \quad \text{για} \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega_e(\mathbf{e}^3), \quad (\text{I-4.3})$$

$$\text{Σ.Σ.(3):} \quad \omega_\phi \equiv \hat{\phi} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για} \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega_e(\mathbf{e}^3), \quad (\text{I-4.4})$$

όπου

$$\partial \Omega(\mathbf{e}^3) = \partial \Omega_i(\mathbf{e}^3) \cup \partial \Omega_e(\mathbf{e}^3). \quad (\text{I-4.5})$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι για $\mathbf{r} \in \partial \Omega_e(\mathbf{e}^3)$ το ορθομοναδιαίο διάνυσμα συμπίπτει με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του σωματιδίου $\hat{n}(\mathbf{r})$ για κάθε τιμή του $\mathbf{r} \in \partial \Omega_i(\mathbf{e}^3)$. Η εξίσωση (I-4.2) εκφράζει τη συνθήκη μη ολίσθησης, ενώ η έκφραση (I-4.3) συνεπάγεται ότι υπάρχει ροή, όπου να διαπερνάει το ρευστό φλοιό $\partial \Omega_e(\mathbf{e}^3)$. Επιπλέον, σύμφωνα με το επιχείρημα που προέβαλε ο Kuwabara, ο στροβιλισμός μηδενίζεται στην εξωτερική επιφάνεια $\partial \Omega_e(\mathbf{e}^3)$. Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώσαμε τον ορισμό ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος συνοριακών τιμών τύπου Kuwabara.

Παρατηρούμε ότι λόγω της συνοριακής συνθήκης (I-4.4), το πρότυπο σωματίδιο σε κύτταρο του Kuwabara εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε αξονοσυμμετρικό ορθογώνιο

καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, όπου η μια χαρακτηριστική μεταβλητή του συστήματος είναι η αζιμούθια γωνία Φ . Για αυτό το λόγο, τα εξωτερικά αίτια που δημιουργούν τη ροή αναφέρονται μόνο σε μεταφορική ταχύτητα U , δίχως επιβαλλόμενη περιστροφή. Δηλαδή, η φύση του συγκεκριμένου μοντέλου επιδρά στην αναγκαστική μείωση των γεωμετρικών διαστάσεων κατά μια,

$$\Omega(\mathbf{\Theta}^3) \equiv \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \quad \text{και} \quad \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \equiv \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{I-4.6})$$

Τέλος, ένα βασικό μειονέκτημα του παρόντος μοντέλου έγκειται στο ότι δεν είναι ενεργειακά αυτόνομο, αφού το έργο που παράγουν οι διατμητικές τάσεις πάνω στον εξωτερικό φλοιό δεν ισοσκελίζεται.

I-4.2β Συνοριακές συνθήκες τύπου *Happel* σε σύστημα σωματιδίου σε κύτταρο.

Υποθέτουμε, όπως και πριν, τη ροή Stokes μέσα σε ένα πορώδες μέσο και θεωρώντας ένα αντίστοιχο σύστημα σωματιδίου-ρευστού, που αναλύθηκε προηγουμένως, για να μοντελοποιήσουμε, τώρα, τη ροή σμήνους σωματιδίων, ορίζουμε την προσέγγιση σωματιδίου σε ρευστό, όπως φαίνεται και στο Σχήμα I-4.3.

Σχήμα Ι–4.3: Αναπαράσταση του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel.

Ο Happel ανέπτυξε το πρότυπό του [54], πρότυπο ελεύθερης επιφάνειας, στην περίπτωση που τα σωματίδια κινούνται δια μέσου ηρεμούντος ρευστού, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της καθίζησης, για διδιάστατες ροές. Αναλύοντας, τώρα, τη φυσική του τρισδιάστατου μοντέλου Happel σύμφωνα με την ιδέα σφαίρα σε κύτταρο [54], θεωρούμε τους δύο αυθαίρετους όγκους του σχήματος Ι–4.3. Ο εσωτερικός όγκος, που δηλώνεται από την επιφάνεια $\partial \Omega_i$, είναι στερεός, κινείται με μια σταθερή μεταφορική ταχύτητα $\mathbf{U}$ και περιστρέφεται, επίσης αυθαίρετα, με μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\Omega}$. Ο εξωτερικός όγκος, που υποδεικνύεται από την επιφάνεια $\partial \Omega_e$, αντιπροσωπεύει το ρευστό σύνορο του μοναδιαίου κυττάρου που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της ροής σμήνους σωματιδίων. Οι γενικές μορφές των σταθερών επιβαλλόμενων πεδίων $\mathbf{U}$ και $\mathbf{\Omega}$ δίνονται από τις εκφράσεις

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 U_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad \text{και} \quad \mathbf{\Omega} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (\text{I-4.7})$$

Η επιβαλλόμενη περιστροφή μαζί με τη μεταφορά δημιουργούν την τρισδιάστατη ροή στο ρευστό φλοιό ανάμεσα στους δύο όγκους $\Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, όπου υπολογίζονται τα πεδία ροής.

Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται, είναι ανάλογες με εκείνες του σφαιρικού κυττάρου Happel για αξονοσυμμετρικές ροές (1958) [54], όπου ο Happel, την ταχύτητα του ρευστού πάνω στην εσωτερική σφαιρική επιφάνεια την θεώρησε ίση με την ταχύτητα της στερεής σφαίρας (συνθήκη μη ολίσθησης), ενώ την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας στην εξωτερική επιφάνεια του ρευστού φλοιού την έθεσε ίση με μηδέν. Η καλή τοποθέτηση του προβλήματος συμπληρώθηκε θέτοντας τις εφαπτομενικές συνιστώσες της τάσης πάνω στην εξωτερική σφαιρική επιφάνεια ίσες με μηδέν, δηλαδή θεωρώντας ότι στην εξωτερική επιφάνεια δεν υπάρχουν τριβές έτσι ώστε το ρευστό να μπορεί να την διαπερνά ελεύθερα.

Επομένως, αν $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια του στερεού σωματιδίου $\partial \Omega_i$, οι συνοριακές συνθήκες που αναφέρονται σε γενικά ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων είναι οι εξής,

$$\text{Σ.Σ.(1):} \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{U} \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \quad \text{για} \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega_i(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{I-4.8})$$

$$\Sigma.\Sigma.(2): \quad \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για} \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega_e(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{I-4.9})$$

$$\Sigma.\Sigma.(3): \quad \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \left(\tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \otimes \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \right) \mathbf{\Theta} \quad \text{για} \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega_e(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{I-4.10})$$

όπου

$$\partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \partial \Omega_i(\mathbf{\Theta}^3) \cup \partial \Omega_e(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\text{I-4.11})$$

Είναι αξιοσημείωτο και πάλι ότι για $\mathbf{r} \in \partial \Omega_e(\mathbf{\Theta}^3)$ το ορθομοναδιαίο διάνυσμα συμπίπτει με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του σωματιδίου $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ για κάθε τιμή του $\mathbf{r} \in \partial \Omega_e(\mathbf{\Theta}^3)$. Η πρώτη εξίσωση εκφράζει τη συνθήκη μη ολίσθησης, ενώ η δεύτερη εξίσωση μας λέει ότι δεν υπάρχει ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας στην εξωτερική επιφάνεια του ρευστού. Η καλή τοποθέτηση του προβλήματος συμπληρώνεται θέτοντας τις εφαπτομενικές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ίσες με μηδέν πάνω στην εξωτερική σφαιρική επιφάνεια, όπως φαίνεται από την τελευταία συνθήκη. Η τελευταία συνθήκη εξασφαλίζει κιόλας την μη ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον. Έτσι, ολοκληρώσαμε την διατύπωση ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος συνοριακών συνθηκών τύπου Happel μέσα σε τρισδιάστατα χωρία.

Συνεπώς, η προσέγγιση του Happel δεν δίνει μόνο ενεργειακά αυτόνομες λύσεις αλλά γενικεύεται και για μη αξονοσυμμετρικά χωρία. Η δυσκολία σε αυτό το μοντέλο περιορίζεται στο χειρισμό της συνοριακής συνθήκης (I-4.10) που έχει αρκετά πιο πολύπλοκη μορφή από την αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη (I-4.4) του προτύπου που προτάθηκε από τον Kuwabara και αφορά τον μηδενισμό του στροβιλισμού αντί των εφαπτομενικών συνιστωσών της ολικής τάσης.

I-4.2γ Σύνοψη – πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης, στροβιλισμού και ολικού τανυστή τάσεων.

Οι προαναφερθείσες συνοριακές συνθήκες για τα μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο είναι έτοιμες για να εφαρμοστούν στα πεδία ροής. Υπενθυμίζουμε ότι, για την ανάπτυξη των προσεγγιστικών λύσεων των κυτταρικών μοντέλων, έχουμε θεωρήσει αμελητέες τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων μεταξύ τους και με τα τοιχώματα του πορώδους μέσου. Η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο αυτών προτύπων βρίσκεται στο ότι στο κύτταρο Kuwabara μηδενίζεται ο στροβιλισμός, αντί της εφαπτομενικής τάσης, όπως στο κύτταρο Happel, πάνω στην εξωτερική επιφάνεια του κυττάρου.

Έτσι, η τελευταία θεώρηση δεν επιτρέπει την ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον. Σε κάθε περίπτωση, το πάχος του ρευστού στρώματος υπολογίζεται έτσι ώστε το κλάσμα του στερεού όγκου του κυττάρου (στερεό σωματίδιο με ρευστό φλοιό) να είναι ίσο με το κλάσμα του στερεού όγκου όλου του σμήνους.

Οι συνοριακές συνθήκες (I-4.2)–(I-4.4) και (I-4.8)–(I-4.10) δεν μεταβάλλονται σημαντικά στην περίπτωση που η επιφάνεια $\partial\Omega_e \equiv \infty$, οπότε μιλάμε για ένα μη φραγμένο ρευστό [56], αλλά απαιτούνται συμπληρωματικές για παροχή πληροφοριών στο άπειρο, το οποίο αποτελεί το μη φραγμένο μέρος του συνόρου. Η συνθήκη αυτή θα δίνεται προφανώς σε οριακή ή ασυμπτωτική μορφή. Πιο αναλυτικά στην περίπτωση που το σωματίδιο είναι ακίνητο και το ρευστό κινείται με μια ομοιόμορφη κατανομή ταχύτητας $\mathbf{U}$, έχουμε

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{U} \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty, \quad (\text{I-4.12})$$

ενώ όταν το στερεό σωματίδιο κινείται με αυθαίρετη ταχύτητα $\mathbf{U}$ και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\Omega}$, λαμβάνουμε την ασυμπτωτική μορφή

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{καθώς} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty. \quad (\text{I-4.13})$$

Λόγω της φύσης των δύο μοντέλων που περιγράψαμε αναλυτικά, η προτυποποίηση δεν καλύπτει πλήρως το χώρο του πορώδους μέσου, αφού εμφανίζονται κενά μεταξύ των φανταστικών εξωτερικών επιφανειών των ρευστών φλοιών των υπό μελέτη στερεών σωματιδίων. Το συγκεκριμένο πρόβλημα συζητάται εκτενώς στην αναφορά [38], όπου λύνονται τα μοντέλα Happel και Kuwabara σε όρους της συνάρτησης ροής σε σφαιροειδείς συντεταγμένες, υποθέτοντας το πρότυπο σφαιροειδές σε κύτταρο. Πιο συγκεκριμένα, σε αυτή την εργασία, στο μοντέλο Happel δεν υπάρχει επιβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$), εφόσον το σφαιροειδές οδηγεί σε αξονική συμμετρία. Άρα, εξετάζεται η περίπτωση της μεταφορικής ταχύτητας $\mathbf{U}$ στη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας του σφαιροειδούς και αποδεικνύεται η σχέση αυτής της ταχύτητας με τη μέση πραγματική ταχύτητα στην περίπτωση που λαμβάνουμε υπόψη όλο το πορώδες μέσο στον υπολογισμό της διαπερατότητας.

Τέλος, το σύστημα συντεταγμένων λαμβάνεται κατάλληλα ανάλογα με τη γεωμετρία και το φυσικό πρόβλημα, άρα και τις συνοριακές συνθήκες. Όμως, πάντα το εκάστοτε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων τίθεται στο “κέντρο” του σωματιδίου, οπότε οι συντεταγμένες του σωματιδίου και του ρευστού φλοιού συμπίπτουν με τις χρησιμοποιούμενες συντεταγμένες και το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ συμπίπτει με το διάνυσμα θέσης που ορίζονται τα πεδία ροής.

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύσαμε εκτενώς ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι επίλυσης προβλημάτων που ορίζονται σύμφωνα με τους κανόνες του Stokes, όπως αριθμητική ανάλυση, τεχνικές συνάρτησης ροής και άλλες αναλυτικές μέθοδοι. Εμείς, στην παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε με τη χρήση των διαφορικών αναπαραστάσεων για την εύρεση των πεδίων ροής. Θα λύσουμε τέτοιου είδους συνοριακά προβλήματα (Happel και Kuwabara) εφαρμόζοντας τις διαφορικές λύσεις που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο Ι-3. Τελικά, αποδεικνύεται ότι από πολλές απόψεις (ευχρηστία, εμφάνιση βαθμών ελευθερίας, καλύτερη σε σύγκριση με άλλες διαφορικές λύσεις και άλλα) ότι η πλήρης διαφορική αναπαράσταση που προτάθηκε από τους Parkovich – Neuber είναι η πιο αξιόπιστη για τον υπολογισμό των πεδίων ροής, οπότε και αυτή χρησιμοποιείται. Συνεπώς, στην προσπάθειά μας να λύσουμε διάφορα προβλήματα συνοριακών τιμών τύπου Happel και Kuwabara σε ποικίλες γεωμετρίες που συμβαδίζουν με τους νόμους του Stokes, δηλ.,

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \text{ ή } \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2) \quad (\text{I-4.14})$$

και

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \text{ ή } \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2), \quad (\text{I-4.15})$$

χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις για τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης μέσω της αναπαράστασης Parkovich – Neuber που δίνονται συναρτήσει ενός διανυσματικού αρμονικού δυναμικού Φ και ενός βαθμωτού αρμονικού δυναμικού Φ_0 ,

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \nabla (\Phi \cdot \mathbf{r}) + \nabla \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \text{ ή } \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2) \quad (\text{I-4.16})$$

και

$$P(\mathbf{r}) = P_0 - \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \text{ ή } \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2), \quad (\text{I-4.17})$$

όπου

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta \Phi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \text{ ή } \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2). \quad (\text{I-4.18})$$

Όπως γνωρίζουμε, P_0 είναι μια αυθαίρετη σταθερή πίεση, συνήθως προσδιοριζόμενη σε ένα βολικό σημείο, ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα, ενώ η ολική πίεση παράγεται από το άθροισμα της θερμοδυναμικής πίεσης P και της δύναμης πίεσεως λόγω βαρύτητας $\rho_0 g x_1$

$$P(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) + \rho_0 g x_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \text{ ή } \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2), \quad (\text{I-4.19})$$

όπου το x_1 δηλώνει κάθε φορά το ύψος αναφοράς και αποτελεί και τη γνωστή συντεταγμένη του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Όταν υπολογίσουμε τα παραπάνω πεδία ροής, το πεδίο του στροβιλισμού ω βρίσκεται ότι επαληθεύει την

$$\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \text{ ή } \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^2) \quad (\text{I-4.20})$$

και το πεδίο του ολικού τανυστή των τάσεων $\tilde{\Pi}$ καθορίζεται από την σχέση

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{r}) = -p(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \left[\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}) + (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}))^T \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \text{ ή } \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^2), \quad (\text{I-4.21})$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό και το σύμβολο “ T ” δηλώνει αναστροφή.

Ο υπολογισμός διαφόρων δευτερευουσών, μεν, σημαντικών, δε, ποσοτήτων όπως της ογκομετρικής παροχής, της οπισθέλκουσας δύναμης και της διαπερατότητας του πορώδους μέσου* δεν είναι αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Η επιλογή των διαφορικών αναπαραστάσεων μας επιτρέπουν να ασχοληθούμε με προβλήματα συνοριακών τιμών σε διδιάστατα και τρισδιάστατα χωρία σε διαφόρων ειδών γεωμετρίες. Η συσχέτιση των αναπαραστάσεων που γνωρίζουμε καθώς και η κατάλληλη επιλογή της διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber στον καθορισμό των λύσεων Happel και Kuwabara στα διάφορα είδη ορθογωνίων καμπυλόγραμμων συστημάτων συντεταγμένων, αποτελεί το αντικείμενο των επόμενων μερών της Διατριβής και των επιστημονικών εργασιών που έχει συμβάλει ο συγγραφέας.

* Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο του Happel [56], καθώς και στις εξίσου σημαντικές εργασίες των Dassios *et al.* [37,38] για περισσότερες πληροφορίες στον υπολογισμό των εν λόγω μεγεθών.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ-1 ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΙΙ-1.1 Εισαγωγή – σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Κάθε είδους επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο που περιγράφεται από μια ομογενή πολυωνυμική εξίσωση, με μεταβλητές τις τρεις συντεταγμένες ενός σημείου της επιφάνειας, χαρακτηρίζεται από το βαθμό της εξίσωσης αυτής. Έτσι, για παράδειγμα τα επίπεδα, τα οποία περιγράφονται από μια πρωτοβάθμια εξίσωση της μορφής $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, με a, b, c, d πραγματικούς αριθμούς, θεωρούνται επιφάνειες πρώτου βαθμού. Μια σφαίρα, όμως, ακτίνας α , $\alpha \in \mathbf{R}$, περιγράφεται από μια εξίσωση της μορφής $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha^2$, όπου θεωρείται επιφάνεια δευτέρου βαθμού και σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε το αλγεβρικό και το γεωμετρικό υπόβαθρο αυτού του είδους των επιφανειών. Τα βασικά χαρακτηριστικά των πληροφοριών που καταθέτουμε εδώ και που τροποποιούμε κατάλληλα για περαιτέρω χρήση βασίζονται κυρίως στους Moon και Spencer [77] για τη γεωμετρία και στους Hobson [58] ή

Morse και Feshbach [78] για την άλγεβρα και τις αρμονικές συναρτήσεις της σφαιρικής γεωμετρίας.

Αναφερόμενοι στο Κεφάλαιο I-3, οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) , για κάθε $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$, αντιστοιχούν στις γενικές παραμετρικές εξισώσεις (u, v, w) και αποτελούν ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Από την άλλη μεριά, κατασκευάζονται από τρεις συντεταγμένες επιφάνειες που αναφέρονται σε σφαίρες για σταθερό r , σε κυκλικούς κώνους για σταθερό θ και ημιεπίπεδα για σταθερό φ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα II-1.1, όπου σαν άξονας συμμετρίας επιλέγεται ο άξονας x_1 .

Σχήμα II-1.1: Σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων.

Το εν λόγω σύστημα επιτρέπει την αξονική συμμετρία γύρω από τον άξονα x_1 και τότε είναι εφικτός ο εκφυλισμός, όποτε πρέπει, των τρισδιάστατων $3-D$ χωρίων σε διδιάστατα ή αξονοσυμμετρικά $2-D$ πεδία.

Συνεπώς, σύμφωνα με την παραπάνω διάταξη των αξόνων και σε όρους του απλού μετασχηματισμού

$$\zeta = \cos \theta, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -\sqrt{1-\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{ή} \quad -1 \leq \zeta \leq 1, \quad (\text{II-1.1})$$

λαμβάνουμε εκφράσεις για τη σχέση μεταξύ των Καρτεσιανών συντεταγμένων και του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων, οπότε καταλήγουμε σε σχέσεις ανάλογες των (I-3.113), δηλ.,

$$x_1 = r \cos \theta = r \zeta, \quad (\text{II-1.2})$$

$$x_2 = r \sin \theta \cos \varphi = r \sqrt{1-\zeta^2} \cos \varphi, \quad (\text{II-1.3})$$

$$x_3 = r \sin \theta \sin \varphi = r \sqrt{1-\zeta^2} \sin \varphi, \quad (\text{II-1.4})$$

όπου $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $-1 \leq \zeta \leq 1$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$. Από την (I-3.114) το διάνυσμα θέσης ή παρατήρησης $\mathbf{r}$ δίνεται συναρτήσει των Καρτεσιανών συντεταγμένων,

$$\mathbf{r} = x_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (\text{II-1.5})$$

Για κάθε μη εκφυλισμένη σφαίρα ισχύει $r > 0$. Χρησιμοποιώντας τις γενικές εκφράσεις (I-3.121), υπολογίζουμε τους μετρικούς συντελεστές του συστήματος,

$$h_r = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\| = 1, \quad (\text{II-1.6})$$

$$h_\zeta = h_\theta = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = r, \quad 0 < r < +\infty, \quad (\text{II-1.7})$$

$$h_\varphi = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| = r \sin \theta = r \sqrt{1-\zeta^2}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{ή} \quad -1 \leq \zeta \leq 1. \quad (\text{II-1.8})$$

Η (I-3.122), επιπλέον, μας οδηγεί στην Ιακωβειανή του συστήματος J_{sr} ,

$$J_{sr} = h_r h_\theta h_\varphi = r^2 \sin \theta = r^2 \sqrt{1-\zeta^2}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{ή} \quad -1 \leq \zeta \leq 1. \quad (\text{II-1.9})$$

Μέσω των ίδιων σχέσεων (I-3.121) του Κεφαλαίου I-3, καταλήγουμε στα μοναδιαία διανύσματα της σφαιρικής γεωμετρίας $\hat{\mathbf{r}} \hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ (με τη σειρά που γράφονται αναφέρονται σε δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα), οπότε έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \frac{1}{h_r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &= \zeta \hat{\mathbf{x}}_1 + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \sqrt{1-\zeta^2} \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3, \end{aligned} \quad (\text{II-1.10})$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &= -\sqrt{1-\zeta^2} \hat{\mathbf{x}}_1 + \zeta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \zeta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\boldsymbol{\zeta}},\end{aligned}\quad (\text{II-1.11})$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (\text{II-1.12})$$

και τις αντίστροφες

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad (\text{II-1.13})$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_2 &= \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{r}} - \cos \theta \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\zeta}} - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \sqrt{1-\zeta^2} \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \zeta \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}\quad (\text{II-1.14})$$

και

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_3 &= \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} - \cos \theta \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \sqrt{1-\zeta^2} \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \zeta \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}\end{aligned}\quad (\text{II-1.15})$$

για $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ορίζουμε τη σφαίρα B_r για $r > 0$ σαν το σύνολο

$$B_r = \left\{ \mathbf{r} \in \mathfrak{E}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2 \right\}, \quad 0 < r < +\infty, \quad (\text{II-1.16})$$

τότε το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}_{sr}$ στην επιφάνεια μιας σφαίρας για $r = \text{σταθερό}$ συμπίπτει με το ακτινικό μοναδιαίο κάθετο $\hat{\mathbf{r}}$,

$$\hat{\mathbf{n}}_{sr}(\mathbf{r}) = \zeta \hat{\mathbf{x}}_1 + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \sqrt{1-\zeta^2} \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 = \frac{\mathbf{r}}{r} \equiv \hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{II-1.17})$$

Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώσαμε την παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών* της σφαιρικής γεωμετρίας που χρησιμοποιούνται στην πορεία της εργασίας.

Συνεχίζοντας, οι βασικοί διαφορικοί τελεστές της βάθμωσης ∇ και του Laplace Δ προκύπτουν με απλή αντικατάσταση στις γενικές σχέσεις (I-3.131) και (I-3.138), αντίστοιχα και για $0 \leq \varphi < 2\pi$ υποθέτουν τις μορφές

$$\nabla = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\zeta}}}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

* Προσθέτουμε ότι οι εκφράσεις για τον στοιχειώδη όγκο, τις στοιχειώδεις επιφάνειες, τα στοιχειώδη μήκη και την πρώτη θεμελιώδη μορφή σε σφαιρικές συντεταγμένες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εξισώσεις (I-3.125), (I-3.126)–(I-3.128), (I-3.129) και (I-3.125α), αντίστοιχα, όπου με απλή αντικατάσταση των χαρακτηριστικών του συστήματος λαμβάνονται οι σφαιρικές εκφράσεις.

$$\begin{aligned}
&= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (0 < r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi) \\
&= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r} \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r \sqrt{1-\zeta^2}} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad 0 < r < +\infty, -1 \leq \zeta \leq 1, \quad (\text{II-1.18})
\end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση των σχέσεων (II-1.6)–(II-1.8), ενώ για τον διαφορικό τελεστή του Laplace εισάγουμε τον ορισμό της Ιακωβειανής (II-1.9), δηλ.,

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{J_{sr}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{J_{sr}}{h_r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{J_{sr}}{h_\theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{J_{sr}}{h_\varphi^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1-\zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] + \frac{1}{r^2 (1-\zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{II-1.19})
\end{aligned}$$

για $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$ και $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Συχνά στα διάφορα προβλήματα δεν χρησιμοποιούνται οι εκφράσεις (II-1.18) και (II-1.19) για τους τελεστές αλλά μορφές που διαχωρίζουν το ακτινικό από το γωνιακό κομμάτι. Τότε, οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται ως εξής,

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{D}, \quad 0 < r < +\infty \quad (\text{II-1.20})$$

και

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} B, \quad 0 < r < +\infty, \quad (\text{II-1.21})$$

όπου οι γωνιακοί διαφορικοί τελεστές $\mathbf{D}$ και B είναι

$$\mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\theta}} \wedge \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = -\sqrt{1-\zeta^2} \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{II-1.22})$$

και

$$B = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1-\zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] + \frac{1}{(1-\zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{II-1.23})$$

με $0 < r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$. Ο γωνιακός διαφορικός τελεστής B ονομάζεται τελεστής του Beltrami και συνδέεται με τον τελεστή $\mathbf{D}$ μέσω της απλής εξίσωσης

$$B = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}. \quad (\text{II-1.24})$$

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή D στο εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{r}$ παίρνουμε με απλή άλγεβρα και παραγωγήσι

$$D \otimes \hat{r} \hat{\theta} = \hat{\theta} \otimes \hat{\phi} - \hat{\phi} \otimes \hat{\xi} = \hat{\xi} \otimes \hat{\phi} - \hat{\phi} \otimes \hat{r} = \tilde{I} \otimes \hat{r}, \quad (\text{II-1.25})$$

όπου $\tilde{I}$ είναι το ταυτοτικό δυαδικό που η αναλλοίωτή του μορφή (I-3.139) συνεπάγεται τη σφαιρική έκφραση

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \hat{x}_1 \otimes \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \otimes \hat{x}_2 + \hat{x}_3 \otimes \hat{x}_3 \\ &= \hat{r} \otimes \hat{r} \hat{\theta} = \hat{\theta} \otimes \hat{\phi} - \hat{\phi} \otimes \hat{r} = \hat{\xi} \otimes \hat{\phi} - \hat{\phi} \otimes \hat{r}. \end{aligned} \quad (\text{II-1.26})$$

Όπως θα δούμε αργότερα στην ανάλυση των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων, απαιτείται να γνωρίζουμε τη σύνδεση του πραγματικού χώρου με το μιγαδικό χώρο στις διάφορες συναρτήσεις. Συνεπώς, γνωρίζοντας εκ των προτέρων ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις που μεταφέρουν την μιγαδική πληροφορία στις αρμονικές συναρτήσεις, τότε για πληρότητα αναφέρουμε τις πιο κάτω σχέσεις,

$$\cos m\varphi = \frac{e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}}{2} \quad \text{και} \quad \sin m\varphi = \frac{e^{im\varphi} - e^{-im\varphi}}{2i}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (\text{II-1.27})$$

αφού

$$e^{\pm im\varphi} = \cos m\varphi \pm i \sin m\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (\text{II-1.28})$$

για κάθε τιμή βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ των συναρτήσεων με τις οποίες θα εμπλακούμε, όπου i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα.

Τελειώνοντας, το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, φ) επιδέχεται εκφυλισμό αποτελεσμάτων στις δύο διαστάσεις, ορίζοντας, όπως προαναφέραμε, σαν άξονα συμμετρίας τον άξονα x_1 , πράγμα που συνεπάγεται αξονοσυμμετρία και ανεξαρτησία από την αζιμούθια γωνία φ . Τότε οι διαφορικοί τελεστές (II-1.18) και (II-1.19) παίρνουν την αντίστοιχη διδιάστατη μορφή απουσία παραγωγίσεων ως προς τη γωνία φ . Η θεωρία για τέτοιου είδους πεδία αναπτύχθηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο I-2 όπου υπάρχει αντιστοιχία με το γενικό σύστημα (q_1, q_2, φ) για $q_1 = r$ και $q_2 = \theta$ και οι εν λόγω διαφορικοί τελεστές λαμβάνονται από τις μορφές (I-2.21) και (I-2.53), ενώ οι μετρικοί συντελεστές έχουν τις ίδιες εκφράσεις, $h_{q_1} = h_r$ και $h_{q_2} = h_\theta$. Άρα, ο διαφορικός τελεστής E^2 για αξονοσυμμετρικές ροές δίνεται από την γενική εξίσωση

(Ι-2.51), όπου σε σφαιρικές συντεταγμένες για $0 < r < +\infty$ και $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $-1 \leq \zeta \leq 1$ η ήδη ορισμένη “κυλινδρική” ποσότητα

$$\rho_{sr} = \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)} = r \sin \theta = r \sqrt{1 - \zeta^2} \equiv h_\phi \quad (\text{II-1.29})$$

καταλήγει στην παρακάτω έκφραση για τον τελεστή E^2 σε 2-D πεδία,

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{\rho_{sr}}{h_r h_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_\theta}{\rho_{sr} h_r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_r}{\rho_{sr} h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (0 < r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(1 - \zeta^2)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad 0 < r < +\infty, \quad -1 \leq \zeta \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{II-1.30})$$

Για διδιάστατα χωρία, λόγω των σχέσεων (II-1.19) και (II-1.30), οι διαφορικοί τελεστές E^2 και Δ συνδέονται μέσω της

$$E^2 = \Delta + \frac{2}{r^2} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial (\cos \theta)} - r \frac{\partial}{\partial r} \right] = \Delta + \frac{2}{r^2} \left[\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - r \frac{\partial}{\partial r} \right] \quad (\text{II-1.31})$$

για $0 < r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$.

II-1.2 Σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις.

Σε αυτή την παράγραφο παραθέτουμε βασικές σχέσεις από τη θεωρία της φασματικής ανάλυσης του τελεστή του Laplace Δ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων οι οποίες είναι χρήσιμες στην παρούσα διατριβή [58,78]. Πολλές φορές ανάλογα με το είδος του προβλήματος που λύνεται ή ανάλογα με τα εργαλεία επίλυσης που χρησιμοποιούνται, είναι δυνατόν να εισάγουμε διάφορα είδη σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων, όπως τις πραγματικές, τις μιγαδικές και τις διανυσματικές. Αυτό είναι και το αντικείμενο των παρακάτω υποπαραγράφων που αναλύουν αυτών των ειδών τις ιδιοσυναρτήσεις. Θα διατηρήσουμε τον συμβολισμό (II-1.1) για την απεικόνιση του $\cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ μέσω της μεταβλητής ζ , $-1 \leq \zeta \leq 1$, ενώ για την εύρεση των σφαιρικών αρμονικών ακολουθείται η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών [36].

II-1.2α Πραγματικές και μιγαδικές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις.

Μια σφαιρική αρμονική βαθμού n είναι ο περιορισμός ενός ομογενούς αρμονικού πολυνύμου βαθμού n πάνω στη μοναδιαία σφαίρα. Εισάγουμε το σύνολο των $2n+1$ γραμμικώς ανεξάρτητων πραγματικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων Y_n^{ms} βαθμού n ($n=0,1,2,\dots$) και τάξης m ($m=0,1,2,\dots,n$) σε όρους των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre $P_n^m(\cos\theta) = P_n^m(\zeta)$ (κοίτα Παράρτημα Β, παράγραφο Β.1, για $x = \cos\theta = \zeta \in [-1,1]$) μέσω της έκφρασης

$$Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^m(\zeta) \begin{cases} \cos m\varphi, & s = e \\ \sin m\varphi, & s = o \end{cases}, \quad m = 0,1,2,\dots,n, \quad |\zeta| \leq 1, \quad \varphi \in [0,2\pi) \quad (\text{II-1.32})$$

για $n = 0,1,2,\dots$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\iint_{S^2} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{n'}^{m's'}(\hat{\mathbf{r}}) dS(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{ss'} \frac{1}{\varepsilon_m}. \quad (\text{II-1.33})$$

Εδώ, δ_{kl} αντιπροσωπεύει το δέλτα του Kronecker, ε_m είναι ο παράγοντας Neumann ($\varepsilon_m = 1, m=0$ και $\varepsilon_m = 2, m \geq 1$), s δηλώνει τον άρτιο (e) (even) ή τον περιττό (o) (odd) χαρακτήρα των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών και το S^2 αποτελεί την μοναδιαία σφαίρα στο χώρο $\mathbf{E}^3$. Για τις ίδιες τιμές των n και m οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους ορίζονται από τις (Β.3) και (Β.5), δηλαδή,

$$P_n^m(\zeta) = \frac{(1-\zeta^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d\zeta^{n+m}} (\zeta^2 - 1)^n, \quad \zeta = \cos\theta, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{II-1.34})$$

Ο διαφορικός τελεστής Beltrami B έχει σαν ιδιοζευγάρι το ζευγάρι $\{-n(n+1), Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})\}$ με ιδιοτιμές $-n(n+1)$ και ιδιοδιανύσματα τις επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές,

$$B Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = -n(n+1) Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 0,1,2,\dots, \quad m = 0,1,2,\dots,n, \quad s = e, o, \quad (\text{II-1.35})$$

όπου αναφερόμενοι σε τρισδιάστατα πεδία $\Omega(\mathbf{E}^3)$, $\hat{\mathbf{r}} = \partial \Omega(\mathbf{E}^3)$ και

$$\hat{\mathbf{r}} = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad \text{ή} \quad \hat{\mathbf{r}} = \{(\zeta, \varphi) : |\zeta| \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}. \quad (\text{II-1.36})$$

Η εύρεση των σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων στηρίζεται στην μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών και τα αποτελέσματα δίνονται σε όρους των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων. Αυτό τελικά που τις συμπληρώνει είναι η ακτινική εξάρτηση που προκύπτει από το χωρισμό μεταβλητών στην εξίσωση του Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες [36]. Τελικά, το πλήρες σύνολο των

ιδιοσυναρτήσεων $u_{n,sr}^{(\ell)ms}$ είδους ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$), βαθμού n ($n = 0, 1, 2, \dots$) και τάξης m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή Δ ($\Delta u_{n,sr}^{(\ell)ms} = 0$),

στη γενική, από μαθηματικής σκοπιάς*, περίπτωση είναι για $\zeta = \cos\theta \in [-1, 1]$

$$u_{n,sr}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) = \begin{cases} r^n \\ r^{-(n+1)} \end{cases} \begin{cases} P_n^m(\zeta), \ell = 1, 3 \\ Q_n^m(\zeta), \ell = 2, 4 \end{cases} \begin{cases} \cos m\varphi, s = e \\ \sin m\varphi, s = o \end{cases}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{II-1.37})$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) &= \{(r, \theta, \varphi) : r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \\ &\equiv \{(r, \zeta, \varphi) : r > 0, |\zeta| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}. \end{aligned} \quad (\text{II-1.38})$$

Ωστόσο, λόγω φυσικών απαιτήσεων που αφορούν τις ροές Stokes, τα πεδία ροής πρέπει να είναι ομαλά (χωρίς ιδιομορφίες) στον άξονα συμμετρίας x_1 για $\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα ΙΙ-1.1. Συνεπώς, οι όροι στην (II-1.37) που εμπεριέχουν τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre του δευτέρου είδους Q_n^m εξαιρούνται και, οπότε, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 2, 4$ πρέπει να αποκλεισθούν. Άρα, κάθε αρμονική συνάρτηση ομαλή στον άξονα συμμετρίας x_1 (απουσία ιδιομορφιών για $\zeta = \pm 1$), ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή του Laplace και σε σφαιρικές συντεταγμένες αυτός ο γραμμικός χώρος, λόγω και της εξίσωσης (II-1.32), εκφράζεται μέσω των εσωτερικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων είδους $\ell = 1 \equiv i$ (internal)

$$u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) = r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad s = e, o \quad (\text{II-1.39})$$

και μέσω των εξωτερικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων είδους $\ell = 3 \equiv e$ (external)

$$u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) = r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad s = e, o, \quad (\text{II-1.40})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$. Κάθε αρμονική συνάρτηση γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των εσωτερικών και εξωτερικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων.

Ένας εναλλακτικός τρόπος ορισμού των $2n+1$ γραμμικώς ανεξάρτητων επιφανειακών αρμονικών συναρτήσεων είναι με χρήση στοιχείων μιγαδικής ανάλυσης και

* Η γενική περίπτωση δεν περιέχει μόνο τις επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις που εκφράζονται μέσω των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους, αλλά και τα είδη των ιδιοσυναρτήσεων που περιέχουν και τις συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους που είναι ιδιόμορφες στον άξονα συμμετρίας.

εκφράζονται μέσω της εξής μιγαδικής μορφής (για τις συναρτήσεις Legendre κοίτα Παράρτημα Β, παράγραφο Β.1, για $x = \cos \theta = \zeta \in [-1, 1]$),

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^m(\zeta) e^{im\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-1.41})$$

και την συζυγή της

$$Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^m(\zeta) e^{-im\varphi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-1.42})$$

για κάθε $\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{B}^3)$ που ορίστηκε στην (II-1.36). Το σύμβολο “*” δηλώνει μιγαδική σύζευξη, ενώ i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα. Οι συσχετισμένες συναρτήσεις του Legendre πρώτου είδους ορίζονται από την εξίσωση (II-1.34) και η σχέση ορθογωνιότητας που ικανοποιούν οι (II-1.41) και (II-1.42) είναι παρόμοια με την σχέση (II-1.33),

$$\iint_{S^2} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_{n'}^{m'*}(\hat{\mathbf{r}}) dS(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \frac{1}{\varepsilon_m}. \quad (\text{II-1.43})$$

Αν, για ευκολία, ορίσουμε μια μεταβλητή s , ανάλογη εκείνης στις πραγματικές σφαιρικές αρμονικές για τις άρτιες και περιττές ιδιοσυναρτήσεις, όπου να καθορίζει το “τίποτα” ή το “*”, δηλαδή, $s = -, *$, τότε ο χωρισμός μεταβλητών της εξίσωσης

$\Delta u_{n,sr}^{(\ell)ms} = 0$ για $\zeta = \cos \theta \in [-1, 1]$ οδηγεί στην

$$u_{n,sr}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) = \begin{cases} r^n \\ r^{-(n+1)} \end{cases} \begin{cases} P_n^m(\zeta), \ell = 1, 3 \\ Q_n^m(\zeta), \ell = 2, 4 \end{cases} \begin{cases} e^{im\varphi}, s = - \\ e^{-im\varphi}, s = * \end{cases}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{II-1.44})$$

όπου είναι αποτέλεσμα συναφές της σχέσης (II-1.37) για είδος ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$), βαθμό n ($n = 0, 1, 2, \dots$) και τάξη m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$). Φυσικά, πάλι για λόγους ομαλότητας στον άξονα x_1 για $\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$, η (II-1.44) αποκλείει τις συναρτήσεις Legendre Q_n^m και οδηγούμαστε σε παραστάσεις ανάλογες των (II-1.39) και (II-1.40) για τις εσωτερικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 1 \equiv i$ (internal),

$$u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) = r^n \begin{cases} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad s = -, * \quad (\text{II-1.45})$$

και

$$u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) = r^{-(n+1)} \begin{cases} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad s = -, * \quad (\text{II-1.46})$$

για τις εξωτερικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 3 \equiv e$ (external), όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3)$. Τότε, πάλι, κάθε αρμονική συνάρτηση γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των εσωτερικών $u_{n,sr}^{(i)ms}$ και εξωτερικών $u_{n,sr}^{(e)ms}$ συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων.

Ανάλογα, λοιπόν, με τη φύση του προβλήματος ή τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται οι πραγματικές ή οι μιγαδικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις*. Η σύνδεση των δύο αυτών ειδών επιφανειακών αρμονικών είναι αποτέλεσμα των σχέσεων (II-1.27) και (II-1.28) που συνδέει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τη μιγαδική εκθετική συμπεριφορά και αντίστροφα. Συνεπώς, οι εκφράσεις (II-1.41), (II-1.42) και (II-1.32) καταλήγουν στις πιο κάτω σχέσεις σύνδεσης,

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = Y_n^{me}(\hat{\mathbf{r}}) + iY_n^{mo}(\hat{\mathbf{r}}) \quad \text{και} \quad Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) = Y_n^{me}(\hat{\mathbf{r}}) - iY_n^{mo}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{II-1.47})$$

ενώ αντίστροφα

$$Y_n^{me}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}})}{2} \quad \text{και} \quad Y_n^{mo}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) - Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}})}{2i} \quad (\text{II-1.48})$$

για κάθε τιμή βαθμού $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και τάξης $n = 0, 1, 2, \dots$ και για $\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbb{B}^3)$.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να παραθέσουμε μερικές σχέσεις που μπορούν να αποδειχθούν πολύ εύκολα είτε με χρήση των βασικών αναγωγικών σχέσεων του Παραρτήματος Β, είτε με απλή άλγεβρα. Συγκεκριμένα για τις διάφορες τιμές των $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$ και $\varphi \in [0, 2\pi)$ η σχέση (II-1.32) ή οι (II-1.41) και (II-1.42), οδηγούν στην

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{n(n+1)}{(2n+1)\sin\theta} \left[\frac{n-m+1}{n+1} Y_{n+1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{n+m}{n} Y_{n-1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (\text{II-1.49})$$

ή

$$(1-\zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \left[\frac{n+m}{n} Y_{n-1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) - \frac{n-m+1}{n+1} Y_{n+1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right], \quad (\text{II-1.50})$$

όπου $s = e, o$ για τις πραγματικές ή $s = -, *$ για τις μιγαδικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις. Επιπλέον λόγω των (II-1.41) και (II-1.42),

* Τελικά, μια βαθμωτή πραγματική ή μιγαδική συμπαγής σφαιρική αρμονική συνάρτηση u_{sr} γράφεται σε πλήρες ανάπτυγμα των βαθμωτών πραγματικών ή μιγαδικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων,

$$u_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^4 \sum_s \left[\delta_{n,sr}^{(\ell)ms} u_{n,sr}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3), \quad (\text{II-1.37a}) \text{ ή } (\text{II-1.44a})$$

όπου $s = e, o$ ή $s = -, *$ και φυσικά η u_{sr} μπορεί να είναι και διανυσματική συνάρτηση που τον διανυσματικό χαρακτήρα τον μεταφέρουμε στους σταθερούς συντελεστές.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = imY_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) = -imY_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{II-1.51})$$

και, επίσης, με τη βοήθεια της (II-1.32),

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} Y_n^{me}(\hat{\mathbf{r}}) = -mY_n^{mo}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_n^{mo}(\hat{\mathbf{r}}) = mY_n^{me}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{II-1.52})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Πρέπει να παρατηρήσουμε για αποφυγή λαθών ορισμού, ότι η σχέση (B.21) του Παραρτήματος Β αντανakλά έναν παρόμοιο περιορισμό και για τις επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις, δηλ.,

$$Y_{-n}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv 0, \quad n \geq 0, \quad \hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{II-1.53})$$

και

$$Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv 0, \quad n < m, \quad \hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{II-1.54})$$

όπου, πάλι εδώ $s = e, o$ ή $s = -, *$.

Ο τελεστής της βάρθρωσης ∇ στις συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις.

Οι διαφορικές αναπαραστάσεις, όπως λέει και το όνομά τους, είναι αναπαραστάσεις που δίνονται μέσω διαφορικών τελεστών και στις περισσότερες περιπτώσεις αφορούν τον τελεστή της βάρθρωσης ∇ . Ωστόσο, λόγω του γεγονότος ότι οι αναπαραστάσεις αυτές, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο I-3, εκφράζονται συναρτήσει αρμονικών δυναμικών, τότε μπορεί ο οποιοσδήποτε να καταλάβει την αναγκαιότητα της εύρεσης μιας απλής και εύχρηστης μορφής της δράσης του τελεστή ∇ στις συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις. Η πιο κατάλληλη μορφή θα δίνεται σε Καρτεσιανές συντεταγμένες σε όρους συμπαγών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων, έτσι ώστε να ισχύει, φυσικά, η ταυτότητα (A.50) του Παραρτήματος Α, δηλ.,

$$\Delta(\nabla u_{n,sr}^{(\ell)ms}(\mathbf{r})) = \nabla(\Delta u_{n,sr}^{(\ell)ms}(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{II-1.55})$$

όπου $\ell = 1, 2, 3, 4$, $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$, ενώ $s = e, o$ ή $s = -, *$. Αυτό είναι δυνατόν, αφού το $\nabla u_{n,sr}^{(\ell)ms}$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν οι συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις. Η απαίτηση ομαλών πεδίων ροής στον άξονα συμμετρίας x_1 για $\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$ μας ωθεί στον υπολογισμό της βάρθρωσης των συμπαγών αρμονικών των ειδών $\ell = 1, 3$, δηλαδή των εσωτερικών $\nabla u_{n,sr}^{(i)ms}$ και των

εξωτερικών $\nabla u_{n,sr}^{(e)ms}$. Μέσα στο πλαίσιο αυτό παραθέτουμε σχέσεις που εκφράζουν τις κλίσεις, αρχικά, των μιγαδικών συμπαγών αρμονικών (ΙΙ-1.44) με δράση του τελεστή της βάθμωσης (ΙΙ-1.18) για $0 < r < +\infty$, $|\zeta| \leq 1$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$, οπότε θεωρώντας ομαλά πεδία η κλίση των εσωτερικών ($\ell = 1 \equiv i$) μιγαδικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων είναι για τις τιμές των $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)m}(\mathbf{r}) &= \nabla \left(r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right) \\ &= \left[\hat{\mathbf{r}} \zeta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r} \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \left(r^n P_n^m(\zeta) e^{im\varphi} \right), \end{aligned} \quad (\text{ΙΙ-1.56})$$

όπου απεικονίζοντας τα σφαιρικά μοναδιαία διανύσματα σε Καρτεσιανές συντεταγμένες μέσω των (ΙΙ-1.10)–(ΙΙ-1.12), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (ΙΙ-1.50) και (ΙΙ-1.51) μαζί με βασικές αναγωγικές σχέσεις του Παραρτήματος Β για τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)m}(\mathbf{r}) &= \frac{(\hat{\mathbf{x}}_2 + i\hat{\mathbf{x}}_3)}{2} (n+m)(n+m-1) r^{n-1} Y_{n-1}^{m-1}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad - \frac{(\hat{\mathbf{x}}_2 - i\hat{\mathbf{x}}_3)}{2} r^{n-1} Y_{n-1}^{m+1}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad + \hat{\mathbf{x}}_1 (n+m) r^{n-1} Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad n \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{ΙΙ-1.57})$$

και για τη συζυγή μορφή

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)m*}(\mathbf{r}) &= \nabla \left(r^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \\ &= \left[\hat{\mathbf{r}} \zeta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r} \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} \wedge \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \left(r^n P_n^m(\zeta) e^{-im\varphi} \right), \end{aligned} \quad (\text{ΙΙ-1.58})$$

και ακολουθώντας τα ίδια βήματα με πριν φτάνουμε στην αναμενόμενη παράσταση

$$\nabla u_{n,sr}^{(i)m*}(\mathbf{r}) = \left\{ \nabla u_{n,sr}^{(i)m}(\mathbf{r}) \right\}^*, \quad n \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{ΙΙ-1.59})$$

Την περίπτωση $m = 0$ τη χειριζόμαστε ξεχωριστά,

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)0}(\mathbf{r}) &= \nabla \left(r^n Y_n^0(\hat{\mathbf{r}}) \right) \\ &= \left[\hat{\mathbf{r}} \zeta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r} \wedge \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left(r^n P_n^0(\zeta) \right), \end{aligned} \quad (\text{ΙΙ-1.60})$$

καταλήγοντας στην

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)0}(\mathbf{r}) &= \frac{(i\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{x}}_2)}{2} r^{n-1} Y_{n-1}^1(\hat{\mathbf{r}}) \\ &+ \frac{(i\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{x}}_2)^*}{2} r^{n-1} Y_{n-1}^{1*}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &+ \hat{\mathbf{x}}_1 n r^{n-1} Y_{n-1}^0(\hat{\mathbf{r}}), \quad n \geq 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \end{aligned} \quad (\text{II-1.61})$$

Ομοίως, για τις εξωτερικές ($\ell = 3 \equiv e$) μιγαδικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές

$$u_{n,sr}^{(e)m}(\mathbf{r}) = r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-1.62})$$

και

$$u_{n,sr}^{(e)m*}(\mathbf{r}) = r^{-(n+1)} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-1.63})$$

έχουμε τις αντίστοιχες εκφράσεις των (II-1.57), (II-1.59) και (II-1.61), δηλαδή,

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(e)m}(\mathbf{r}) &= \frac{(\hat{\mathbf{x}}_2 + i\hat{\mathbf{x}}_3)}{2} (n-m+2)(n-m+1) r^{-(n+2)} Y_{n+1}^{m-1}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &- \frac{(\hat{\mathbf{x}}_2 - i\hat{\mathbf{x}}_3)}{2} r^{-(n+2)} Y_{n+1}^{m+1}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &- \hat{\mathbf{x}}_1 (n-m+1) r^{-(n+2)} Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad n \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{II-1.64})$$

και για τη συζυγή μορφή

$$\nabla u_{n,sr}^{(e)m*}(\mathbf{r}) = \left\{ \nabla u_{n,sr}^{(e)m}(\mathbf{r}) \right\}^*, \quad n \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{II-1.65})$$

Την περίπτωση $m = 0$ τη χειριζόμαστε, επίσης, ξεχωριστά και προκύπτει

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(e)0}(\mathbf{r}) &= \frac{(i\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{x}}_2)}{2} r^{-(n+2)} Y_{n+1}^1(\hat{\mathbf{r}}) \\ &+ \frac{(i\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{x}}_2)^*}{2} r^{-(n+2)} Y_{n+1}^{1*}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &- \hat{\mathbf{x}}_1 (n+1) r^{-(n+2)} Y_{n+1}^0(\hat{\mathbf{r}}), \quad n \geq 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \end{aligned} \quad (\text{II-1.66})$$

όπου το σύμβολο “*” δηλώνει μιγαδική σύζευξη, ενώ i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα. Οι μιγαδικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις δίνονται μέσω

των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους από τους γνωστούς ορισμούς* (II-1.41) και (II-1.42).

Αν, τώρα, πάρουμε το πραγματικό και φανταστικό μέρος των σχέσεων για τις εσωτερικές (II-1.57), (II-1.59), (II-1.61) και εξωτερικές (II-1.64)–(II-1.66) μιγαδικές συμπαγείς αρμονικές, οδηγούμαστε σε ισοδύναμες εκφράσεις για τις πραγματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις (II-1.39) και (II-1.40), για τις άρτιες ($s = e$) και για τις περιττές ($s = o$), όπου για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, n$ οι πραγματικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις είναι αυτές που ορίστηκαν από τις εξισώσεις (II-1.32). Συνεπώς, οι χρήσιμες σχέσεις σύνδεσης (II-1.47) έχουν σαν αποτέλεσμα τις πιο κάτω βαθμώσεις για τις εσωτερικές ($\ell = 1 \equiv i$) αρμόδιες συναρτήσεις,

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)me}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1)Y_{n-1}^{(m-1)e}(\hat{\mathbf{r}}) - Y_{n-1}^{(m+1)e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1)Y_{n-1}^{(m-1)o}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{n-1}^{(m+1)o}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &\quad + (n+m)Y_{n-1}^{me}(\hat{\mathbf{r}})r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3), \end{aligned} \quad (\text{II-1.67})$$

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)mo}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1)Y_{n-1}^{(m-1)o}(\hat{\mathbf{r}}) - Y_{n-1}^{(m+1)o}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1)Y_{n-1}^{(m-1)e}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{n-1}^{(m+1)e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &\quad + (n+m)Y_{n-1}^{mo}(\hat{\mathbf{r}})r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3), \end{aligned} \quad (\text{II-1.68})$$

και για την περίπτωση $m = 0$ για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3)$,

$$\nabla u_{n,sr}^{(i)0e}(\mathbf{r}) = \left[-Y_{n-1}^{1e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_2 - Y_{n-1}^{1o}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_3 + nY_{n-1}^{0e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_1 \right] r^{n-1}, \quad n \geq 0. \quad (\text{II-1.69})$$

Ομοίως, για τις εξωτερικές ($\ell = 3 \equiv e$) πραγματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές οι εκφράσεις δεν απέχουν πολύ από τις αντίστοιχες (II-1.67)–(II-1.69), δηλ.,

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(e)me}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{(m-1)e}(\hat{\mathbf{r}}) - Y_{n+1}^{(m+1)e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{-(n+2)} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{(m-1)o}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{n+1}^{(m+1)o}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{-(n+2)} \hat{\mathbf{x}}_3 \end{aligned}$$

* Ο αναγνώστης στον χειρισμό των σχέσεων αυτών θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη του κάθε φορά τους περιορισμούς (II-1.53) και (II-1.54).

$$-(n-m+1)Y_{n+1}^{me}(\hat{\mathbf{r}})r^{-(n+2)}\hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{II-1.70})$$

$$\begin{aligned} \nabla u_{n, sr}^{(e)mo}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{(m-1)o}(\hat{\mathbf{r}}) - Y_{n+1}^{(m+1)o}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{-(n+2)}\hat{\mathbf{x}}_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left[(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{(m-1)e}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{n+1}^{(m+1)e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{-(n+2)}\hat{\mathbf{x}}_3 \\ &- (n-m+1)Y_{n+1}^{mo}(\hat{\mathbf{r}})r^{-(n+2)}\hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{II-1.71}) \end{aligned}$$

και με τον ίδιο τρόπο για την περίπτωση $m = 0$ για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$

$$\nabla u_{n, sr}^{(e)0e}(\mathbf{r}) = \left[-Y_{n+1}^{1e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_2 - Y_{n+1}^{1o}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_3 - (n+1)Y_{n+1}^{0e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_1 \right] r^{-(n+2)}, \quad n \geq 0. \quad (\text{II-1.72})$$

Οι πραγματικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις δίνονται μέσω των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους από τους γνωστούς ορισμούς (II-1.32).

II-1.2β Διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις.

Στην περίπτωση της μελέτης βαθμωτών αρμονικών δυναμικών ακολουθείται πάντα η διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως αναπτύσσοντας ένα τέτοιου είδους δυναμικό σε σειρές των πραγματικών ή μιγαδικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων με πραγματικούς ή μιγαδικούς βαθμωτούς σταθερούς συντελεστές. Παρόλο που η ίδια διαδικασία συνοδεύει και την περίπτωση των διανυσματικών αρμονικών δυναμικών, αποδίδοντας τον διανυσματικό χαρακτήρα του δυναμικού μέσω πραγματικών ή μιγαδικών διανυσματικών σταθερών συντελεστών, φάνηκε επιτακτική η ανάγκη αντιμετώπισης των προβλημάτων διατηρώντας τον βαθμωτό χαρακτήρα των σταθερών συντελεστών. Αυτό αυτόματα σήμαινε ότι ο διανυσματικός χαρακτήρας μιας τέτοιας συνάρτησης θα μεταφερόταν στις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις με κάποιο τρόπο.

Η ιδέα αυτή αποδίδεται αρχικά στην εύστοχη παρατήρηση του Hansen το 1935 που πρότεινε τη φυσική ως παράγοντα που θα αποφασίσει για την έκφραση μιας διανυσματικής αρμονικής συνάρτησης-δυναμικού $\mathbf{u}_{sr}$,

$$\Delta \mathbf{u}_{sr}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{II-1.73})$$

από τη στιγμή μάλιστα που η (II-1.73) υπαγορεύεται μέσα από συγκεκριμένα προβλήματα φυσικής που αναζητούν τη λύση τους.

Έτσι, ο Hansen πρότεινε να εκφραστεί η $\mathbf{u}_{sr}$ μέσω της ανάλυσης του Helmholtz σαν το διανυσματικό άθροισμα ενός αστρόβιλου πεδίου $\nabla\phi_{sr}$ και ενός σωληνοειδούς $\nabla \times \mathbf{A}_{sr}$ μέσω της έκφρασης

$$\mathbf{u}_{sr}(\mathbf{r}) = \nabla\phi_{sr}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}_{sr}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3), \quad (\text{II-1.74})$$

όπου η βαθμωτή συνάρτηση ϕ_{sr} είναι το βαθμωτό δυναμικό της $\mathbf{u}_{sr}$ και η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{A}_{sr}$ είναι το διανυσματικό δυναμικό της $\mathbf{u}_{sr}$. Λόγω του σωληνοειδούς χαρακτήρα του τελευταίου δυναμικού και λόγω του γεγονότος ότι ενώ στο δεξί μέλος της (II-1.73) έχουμε τέσσερα δυναμικά, στο αριστερό έχουμε τρία δυναμικά, οπότε επιλέγουμε αυθαίρετα χωρίς βλάβη γενικότητας

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_{sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3). \quad (\text{II-1.75})$$

Η απόδειξη της (II-1.75) γίνεται γράφοντας το $\mathbf{A}_{sr}$ στη μορφή (II-1.74).

Ακολουθώντας μια πολύ έξυπνη διαδικασία* [78] που στηρίχθηκε στην παραπάνω ιδέα, κατασκευάστηκαν τρεις τύποι διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων, οι τύπου **N** συναρτήσεις που είναι αστρόβιλες και σωληνοειδείς, οι τύπου **M** συναρτήσεις που είναι σωληνοειδείς αλλά στροβιλώδεις και οι τύπου **G** που είναι και στροβιλώδεις και μη σωληνοειδείς, οι οποίες είναι αρμονικές,

$$\Delta \mathbf{N} = \Delta \mathbf{M} = \Delta \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (\text{II-1.76})$$

και ορίζονται μέσω αντιστοιχών διανυσματικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών. Φυσικά, θεωρούμε εξ' αρχής ομαλά πεδία ροής στον άξονα συμμετρία για $\zeta = \pm 1$, οπότε αυτόματα θα αναφερόμαστε σε εσωτερικά και εξωτερικά πεδία απουσία ιδιομορφιών, δηλ., οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις δεν θα περιέχουν συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους στη ζ μεταβλητή $Q_n^m(\zeta)$. Το γεγονός αυτό μας καθοδηγεί στη χρήση των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών και συγκεκριμένα των πραγματικών που δίνονται μέσα από τις σχέσεις (II-1.32).

Μένοντας, επομένως, στην τροποποίηση για τις σφαιρικές συντεταγμένες (II-1.1), $\cos\theta = \zeta \in [-1, 1]$, και για κάθε $\varphi \in [0, 2\pi)$, οι άρτιες (*e*) και οι περιττές (*o*) διανυσματικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις $\mathbf{P}_n^{ms}$, $\mathbf{B}_n^{ms}$ και $\mathbf{C}_n^{ms}$,

* Η περιγραφή της συγκεκριμένης διαδικασίας κατασκευής των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητη, ούτε της παρούσας φιλοσοφίας της διατριβής.

$$\mathbf{P}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{II-1.77})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \mathbf{D}Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \left[-\sqrt{1-\zeta^2} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (\text{II-1.78})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) &= -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{D}Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \hat{\mathbf{r}} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \times \left[-\sqrt{1-\zeta^2} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (\text{II-1.79})$$

για οποιαδήποτε τιμή του $n \geq 0$, $m = 0, 1, \dots, n$, $s = e, o$, είναι κάθετες,

$$\mathbf{P}_n^{ms} \cdot \mathbf{C}_n^{ms} = \mathbf{C}_n^{ms} \cdot \mathbf{B}_n^{ms} = \mathbf{B}_n^{ms} \cdot \mathbf{P}_n^{ms} = 0 \quad (\text{II-1.80})$$

και ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\begin{aligned} \iint_{S^2} \mathbf{P}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{P}_{n'}^{m's'}(\hat{\mathbf{r}}) dS(\hat{\mathbf{r}}) &= \iint_{S^2} \mathbf{B}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{B}_{n'}^{m's'}(\hat{\mathbf{r}}) dS(\hat{\mathbf{r}}) = \iint_{S^2} \mathbf{C}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{C}_{n'}^{m's'}(\hat{\mathbf{r}}) dS(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \frac{4\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{ss'} \frac{1}{\varepsilon_m}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 2, & m \geq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{II-1.81})$$

Εδώ, πάλι, δ_{kl} αντιπροσωπεύει το δέλτα του Kronecker, ε_m είναι ο παράγοντας Neumann, s δηλώνει τον άρτιο (e) ή τον περιττό (o) χαρακτήρα των διανυσματικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών και το S^2 αποτελεί την μοναδιαία σφαίρα στο χώρο $\mathbf{\Theta}^3$. Είναι εύκολο να αποδειχτούν τα παρακάτω χρήσιμα εξωτερικά γινόμενα,

$$\mathbf{C}_n^m \times \mathbf{B}_n^{ms} = \frac{\|\mathbf{D}Y_n^{ms}\|}{n(n+1)Y_n^{ms}} \mathbf{P}_n^{ms}, \quad \mathbf{B}_n^{ms} \cdot \mathbf{P}_n^{ms} = Y_n^{ms} \mathbf{C}_n^{ms}, \quad \mathbf{P}_n^{ms} \cdot \mathbf{C}_n^{ms} = Y_n^m \mathbf{B}_n^{ms}, \quad (\text{II-1.82})$$

καθώς επίσης,

$$\mathbf{B}_n^{ms} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{C}_n^{ms} \quad \text{και} \quad \mathbf{C}_n^{ms} = \mathbf{B}_n^{ms} \times \hat{\mathbf{r}}, \quad (\text{II-1.83})$$

όπου υπενθυμίζουμε για $n = 0, 1, 2, \dots$ τον ορισμό (P_n^m : συναρτήσεις Legendre)

$$Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^m(\zeta) \begin{cases} \cos m\varphi, & s=e \\ \sin m\varphi, & s=o \end{cases}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad |\zeta| \leq 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (\text{II-1.84})$$

Άρα, για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ οι εσωτερικές διανυσματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις $\mathbf{N}_n^{(i)ms}$, $\mathbf{M}_n^{(i)ms}$ και $\mathbf{G}_n^{(i)ms}$ δίνονται από τις εκφράσεις

$$\mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) = \nabla \left(r^{n+1} Y_{n+1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) = \sqrt{(n+1)(n+2)} r^n \mathbf{B}_{n+1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) + (n+1) r^n \mathbf{P}_{n+1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{II-1.85})$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n+1$, $s = e, o$,

$$\mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\mathbf{r} r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) = \sqrt{n(n+1)} r^n \mathbf{C}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{II-1.86})$$

για $n = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$, $s = e, o$,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) &= r^{2n+1} \mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \\ &= \sqrt{n(n-1)} r^n \mathbf{B}_{n-1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) - n r^n \mathbf{P}_{n-1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (\text{II-1.87})$$

για $n = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, $s = e, o$, ενώ οι εξωτερικές διανυσματικές συναρτήσεις σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις $\mathbf{N}_n^{(e)ms}$, $\mathbf{M}_n^{(e)ms}$ και $\mathbf{G}_n^{(e)ms}$ υποθέτουν τις μορφές

$$\mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) = \nabla \left(r^{-n} Y_{n-1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) = \sqrt{n(n-1)} r^{-(n+1)} \mathbf{B}_{n-1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) - n r^{-(n+1)} \mathbf{P}_{n-1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{II-1.88})$$

για $n = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, $s = e, o$,

$$\mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\mathbf{r} r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) = \sqrt{n(n+1)} r^{-(n+1)} \mathbf{C}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{II-1.89})$$

για $n = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$, $s = e, o$,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{r^{2n+1}} \mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) \\ &= \sqrt{(n+1)(n+2)} r^{-(n+1)} \mathbf{B}_{n+1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) + (n+1) r^{-(n+1)} \mathbf{P}_{n+1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (\text{II-1.90})$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n+1$, $s = e, o$ *.

Τότε, η παρακάτω πλήρης αναπαράσταση κάθε διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{u}_{sr}$ που ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή Δ (Laplace) επιτυγχάνεται,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{sr}(\mathbf{r}) &= \sum_{s=e,o} \alpha_{0,sr}^{(i)0s} \mathbf{N}_0^{(i)0s}(\mathbf{r}) + \sum_{s=e,o} \alpha_{0,sr}^{(i)1s} \mathbf{N}_0^{(i)1s}(\mathbf{r}) + \sum_{s=e,o} \gamma_{0,sr}^{(e)0s} \mathbf{G}_0^{(e)0s}(\mathbf{r}) + \sum_{s=e,o} \gamma_{0,sr}^{(e)1s} \mathbf{G}_0^{(e)1s}(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \alpha_{n,sr}^{(i)ms} \mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \alpha_{n,sr}^{(e)ms} \mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \beta_{n,sr}^{(i)ms} \mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \beta_{n,sr}^{(e)ms} \mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \gamma_{n,sr}^{(i)ms} \mathbf{G}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \gamma_{n,sr}^{(e)ms} \mathbf{G}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \end{aligned} \quad (\text{II-1.91})$$

* Η δυσκολία στην εύρεση των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών είδους $\mathbf{G}$ έγκειται στο ότι δεν δίνονται σε κάποια αναλλοίωτη μορφή όπως οι άλλες δύο $\mathbf{N}$ και $\mathbf{M}$, αλλά για την κατασκευή τους ακολουθήθηκε μια έξυπνη διαδικασία που είναι ενεργή μόνο στις σφαιρικές συντεταγμένες. Συγκεκριμένα, για την δημιουργία των εσωτερικών $\mathbf{G}$ συνδυάστηκε το εσωτερικό ακτινικό μέρος του τελεστή της βάθμωσης με το εξωτερικό γωνιακό κομμάτι, όταν δρουν σε μια πραγματική επιφανειακή σφαιρική αρμονική, ενώ για την κατασκευή των εξωτερικών $\mathbf{G}$ έγινε ακριβώς το αντίστροφο. Αυτή η “εναλλαγή” είναι εφικτή μόνο σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Με σκοπό να κάνουμε αυτή την ανάλυση πιο πλήρη και ανεξάρτητη, παραθέτουμε μερικές ενδιαφέρουσες πληροφορίες και σχέσεις μεταξύ των διανυσματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών, όπως τις αντίστροφες των (II-1.85)–(II-1.90),

$$\mathbf{P}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{r^{-n+1}}{(2n+1)} \mathbf{N}_{n-1}^{(i)ms}(\mathbf{r}) - \frac{r^{n+2}}{(2n+1)} \mathbf{N}_{n+1}^{(e)ms}(\mathbf{r}), \quad (\text{II-1.92})$$

$$\mathbf{B}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \frac{r^{-n+1}}{(2n+1)} \mathbf{N}_{n-1}^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{r^{n+2}}{(2n+1)} \mathbf{N}_{n+1}^{(e)ms}(\mathbf{r}), \quad (\text{II-1.93})$$

$$\mathbf{C}_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{r^{-n}}{2\sqrt{n(n+1)}} \mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \frac{r^{n+1}}{2\sqrt{n(n+1)}} \mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \quad (\text{II-1.94})$$

για $n=0,1,2,\dots$, $m=0,1,\dots,n$, $s=e,o$ και $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$. Τέλος, κάνοντας χρήση απλής άλγεβρας, εξάγουμε τις απλές εκφράσεις για την απόκλιση και τον στροβιλισμό των διανυσματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών, δηλαδή,

$$\nabla \cdot \mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) = ? \quad \mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{II-1.95})$$

$$\nabla \times \mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) = ? \quad \mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{II-1.96})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) = ? \quad \mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{II-1.97})$$

ενώ

$$\nabla \times \mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) = (n+1) \mathbf{N}_{n-1}^{(i)ms}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{II-1.98})$$

$$\nabla \times \mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) = -n \mathbf{N}_{n+1}^{(e)ms}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{II-1.99})$$

και

$$\nabla \cdot \mathbf{G}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) = -n(2n+1) r^{n-1} Y_{n-1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{II-1.100})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) = -(n+1)(2n+1) r^{-(n+2)} Y_{n+1}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{II-1.101})$$

$$\nabla \times \mathbf{G}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) = -(2n+1) \mathbf{M}_{n-1}^{(i)ms}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad (\text{II-1.102})$$

$$\nabla \times \mathbf{G}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) = (2n+1) \mathbf{M}_{n+1}^{(e)ms}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{II-1.103})$$

Ολοκληρώσαμε, λοιπόν, τη θεωρία γύρω από τις διανυσματικές αρμονικές συναρτήσεις οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες στην περίπτωση των διαφορικών αναπαραστάσεων, αφού κομμάτια αναπαραστάσεων που έχουμε ήδη αναλύσει στο Κεφάλαιο I-3 (για παράδειγμα $\nabla \Phi_0$, ∇b , $\nabla \times (\mathbf{r}B)$) γράφονται απευθείας σαν διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις, κάτι που θα δούμε πρακτικά και στο Κεφάλαιο II-2. Δυστυχώς, η παραπάνω ιδέα είναι εφικτή μόνο σε σφαιρικές

συντεταγμένες λόγω της μη αναλλοίωτης μορφής της διανυσματικής συμπαγούς σφαιρικής αρμονικής ιδιοσυνάρτησης $\mathbf{G}$, κάτι που εμποδίζει να χρησιμοποιήσουμε διανυσματικές αρμονικές σε άλλα, πιο πολύπλοκα, συστήματα συντεταγμένων, όπως το σφαιροειδές ή το ελλειψοειδές σύστημα. Συνεπώς, η εύρεση διανυσματικών συμπαγών και επιφανειακών σφαιροειδών ή ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων αποτελεί μέχρι και σήμερα ανοιχτό πρόβλημα. Ωστόσο, όταν αναφερόμαστε σε λύσεις της εξίσωσης του Helmholtz, τότε υπάρχουν διανυσματικές σφαιροειδείς συναρτήσεις που να ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή του Helmholtz και για αυτό το λόγο πολλά προβλήματα κυματικής, ηλεκτρομαγνητικής και ελαστικής διάδοσης λύνονται πολύ πιο εύκολα.

ΙΙ-1.3 Ο πυρήνας των διαφορικών τελεστών E^2 και E^4 σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Σε συνθήκες ροής Stokes, η δυναμική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ροής Ψ_{sr} , που περιγράψαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο Ι-2, για διδιάστατα ή, αλλιώς, αξονοσυμμετρικά σφαιρικά πεδία ροής είναι η (Ι-2.43),

$$E^4 \Psi_{sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^2), \quad (\text{ΙΙ-1.103})$$

όπου σε σφαιρικές συντεταγμένες για $\zeta = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-1 \leq \zeta \leq 1$ γνωρίζουμε

$$E^4 = E^2 \circ E^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(1-\zeta^2)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(1-\zeta^2)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right]. \quad (\text{ΙΙ-1.104})$$

Στη σφαιρική γεωμετρία αποδεικνύεται [56] ότι οι διαφορικοί τελεστές E^2 και E^4 χωρίζουν μεταβλητές και με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών [36] καταλήγουμε απλά ότι το γωνιακό μέρος της συνάρτησης ροής ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση του Gegenbauer (κοίτα Παράρτημα Β) που έχει σαν λύσεις τις συναρτήσεις Gegenbauer (βαθμού $n=0,1,2,\dots$) πρώτου G_n και δευτέρου H_n είδους. Τελικά, το πλήρες σύνολο των σφαιρικών ιδιοσυναρτήσεων $\Psi_{n,sr}^{(\ell)}$ είδους ℓ ($\ell=1,2,3,4$) και βαθμού n ($n=0,1,2,\dots$) που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^4 ($E^4 \Psi_{n,sr}^{(\ell)} = 0$), στη γενική περίπτωση των 2-D πεδίων, είναι για $\zeta = \cos\theta \in [-1,1]$

$$\Psi_{n,sr}^{(\ell)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} r^n \\ r^{-n+1} \\ r^{n+2} \\ r^{-n+3} \end{cases} \begin{cases} G_n(\zeta), \ell = 1, 3 \\ H_n(\zeta), \ell = 2, 4 \end{cases}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2), \quad (\text{II-1.105})$$

όπου

$$\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2) = \{(r, \theta) : r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi\} \equiv \{(r, \zeta) : r > 0, |\zeta| \leq 1\}. \quad (\text{II-1.106})$$

Το υποσύνολο της (II-1.105)

$$\Psi_{n,sr}^{(\ell),\subset}(\mathbf{r}) = \begin{cases} r^n \\ r^{-n+1} \end{cases} \begin{cases} G_n(\zeta), \ell = 1, 3 \\ H_n(\zeta), \ell = 2, 4 \end{cases}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2), \quad (\text{II-1.107})$$

αφορά εκείνες τις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_{n,sr}^{(\ell),\subset}$ που είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$E^2 \Psi_{n,sr}^{(\ell),\subset} = 0.$$

Ωστόσο, για τους ίδιους φυσικούς λόγους που έχουμε αναφέρει για τις ροές Stokes, τα πεδία ροής πρέπει να είναι ομαλά, απουσία πηγών, στον άξονα συμμετρίας x_1 για $\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$. Άρα, οι όροι στην (II-1.105) που εμπεριέχουν τις συναρτήσεις Gegenbauer δευτέρου είδους H_n δεν λαμβάνονται υπ' όψη και, συνεπώς, εξαιρούνται. Δηλαδή, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 2, 4$ πρέπει να αποκλεισθούν. Άρα, κάθε συνάρτηση ροής ομαλή στον άξονα συμμετρίας x_1 (απουσία ιδιομορφιών για $\zeta = \pm 1$), ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^4 και σε σφαιρικές συντεταγμένες αυτός ο γραμμικός χώρος εκφράζεται μέσω των εσωτερικών ιδιοσυναρτήσεων $\Psi_{n,sr}^{(1)} \equiv \Psi_{n,sr}^{(i)}$ είδους $\ell = 1 \equiv i$ (internal)

$$\Psi_{n,sr}^{(i)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} r^n \\ r^{n+2} \end{cases} \{G_n(\zeta)\}, \quad n \geq 2, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2) \quad (\text{II-1.108})$$

και μέσω των εξωτερικών ιδιοσυναρτήσεων $\Psi_{n,sr}^{(3)} \equiv \Psi_{n,sr}^{(e)}$ είδους $\ell = 3 \equiv e$ (external)

$$\Psi_{n,sr}^{(e)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} r^{-n+1} \\ r^{-n+3} \end{cases} \{G_n(\zeta)\}, \quad n \geq 2, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2). \quad (\text{II-1.109})$$

Κάθε συνάρτηση Ψ_{sr} που ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^4 γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων $\Psi_{n,sr}^{(\ell)}$ είδους ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) και

βαθμού n ($n = 0, 1, 2, \dots$) στην περίπτωση των διδιάστατων σφαιρικών πεδίων και το πλήρες ανάπτυγμα, για $\zeta = \cos\theta \in [-1, 1]$ και $r \geq 0$, υποθέτει την αναπαράσταση

$$\begin{aligned} \Psi_{sr}(r, \zeta) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{n, sr}^1 r^n + B_{n, sr}^1 r^{n+2} + A_{n, sr}^3 r^{1-n} + B_{n, sr}^3 r^{3-n} \right) G_n(\zeta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left(A_{n, sr}^2 r^n + B_{n, sr}^2 r^{n+2} + A_{n, sr}^4 r^{1-n} + B_{n, sr}^4 r^{3-n} \right) H_n(\zeta), \end{aligned} \quad (\text{II-1.110})$$

όπου το άθροισμα με τους A -συντελεστές αναπαριστά ένα στοιχείο του χώρου $\ker E^2$, ενώ το άθροισμα με τους B -συντελεστές αποτελεί μια συνάρτηση που βρίσκεται στο χώρο $\ker E^2$ υπό τη δράση του τελεστή E^2 . Το δεύτερο άθροισμα που αφορά τις συναρτήσεις Gegenbauer δευτέρου είδους H_n ξεκινά από $n=2$ για το λόγο ότι οι ιδιοσυναρτήσεις Gegenbauer πρώτου και δευτέρου είδους για $n=0, 1$ (G_0 , G_1 , H_0 , H_1) συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων (B.30) και (B.31) του Παραρτήματος Β και με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται η επανάληψη.

Οι ομαλές πάνω στον άξονα συμμετρίας λύσεις της εξίσωσης κινήσεως (II-1.103), περιορίζονται στον κατάλληλο υπόχωρο του $\ker E^4$ που καθορίζεται από τις ιδιοσυναρτήσεις περιττού είδους και βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δύο. Άρα, η εξαίρεση ιδιομορφιών για $\zeta = \pm 1$ απαιτεί όλες οι ιδιοσυναρτήσεις αρτίου βαθμού και οι δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις περιττού βαθμού (κοίτα (B.30) και (B.31)) να εξαφανιστούν. Δηλαδή, οι αντίστοιχοι σταθεροί συντελεστές στο παραπάνω ανάπτυγμα (II-1.110) οφείλουν να μηδενιστούν, δηλ.,

$$A_{n, sr}^\ell = B_{n, sr}^\ell = 0, \quad n \geq 2, \quad \ell = 2, 4 \quad (\text{II-1.111})$$

και

$$A_{0, sr}^\ell = B_{0, sr}^\ell = A_{1, sr}^\ell = B_{1, sr}^\ell = 0, \quad \ell = 1, 3. \quad (\text{II-1.112})$$

Οι αντίστοιχες πληροφορίες και οι βασικές αναγωγικές σχέσεις, σχέσεις παραγώγων και κανόνες ορθογωνιότητας για τις συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου G_n και δευτέρου H_n είδους συνοψίζονται στο Παράρτημα Β, στην παράγραφο Β.2 μαζί με τις αντίστοιχες σχέσεις για τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ-2 ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ (SR)

ΙΙ-2.1 Εισαγωγή στα 3- D και 2- D σφαιρικά πεδία ροής.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να βρούμε έναν τρόπο σύνδεσης των διαφορικών αναπαραστάσεων των λύσεων των εξισώσεων του Stokes που αναλύθηκαν εκτενώς στο Κεφάλαιο Ι-3 για τρισδιάστατες ροές, καθώς και με την αναπαράσταση Stokes για διδιάστατες ροές όπως μελετήθηκε στο Κεφάλαιο Ι-2. Από την άλλη μεριά, η σφαιρική γεωμετρία αποτελεί το πιο ευρέως διαδεδομένο πλαίσιο εργασίας για την απεικόνιση μικρών σωματιδίων που κινούνται μέσα σε ιξώδη και ασυμπίεστα ρευστά, ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τη σταθερή ροή κατά Stokes. Συνεπώς, σκοπός μας είναι η συσχέτιση των διαφορικών αναπαραστάσεων Papkovitch – Neuber, Boussinesq – Galerkin, Palaniappan *et al.* για 3- D χωρία, καθώς και Stokes για 2- D χωρία σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αυτό που πραγματικά γίνεται είναι ότι η σύνδεση των βασικών διαφορικών λύσεων πραγματοποιείται μέσω των αντιστοίχων δυναμικών που τις αντιπροσωπεύουν. Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να

παρατηρήσουμε τη διαδικασία που απαιτείται για να “περάσουμε” από τη μια αναπαράσταση στην άλλη με σκοπό να κατανοήσουμε πώς η μαθηματική ουσία υπεισέρχεται στη φυσική. Έτσι, θα μπορούμε να έχουμε μια διαίσθηση για το είδος της διαφορικής αναπαράστασης που πρέπει να υιοθετηθεί κάθε φορά ανάλογα με το είδος και την πολυπλοκότητα του φυσικού προβλήματος που θέλουμε να επιλύσουμε. Από μαθηματικής σκοπιάς, το πέρασμα από την μια αναπαράσταση στην άλλη, είτε για τρισδιάστατα είτε για αξονοσυμμετρικά πεδία ροής, γίνεται με την συσχέτιση των δυναμικών σε επίπεδο σταθερών συντελεστών και βοηθάει σε μεγάλο βαθμό να κατανοήσουμε και να επιλέξουμε την κατάλληλη γενική λύση για το αρμόδιο φυσικό πρόβλημα. Θα ασχοληθούμε με 3-D ή 2-D συμπαγή σφαιρικά πεδία,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) &= \{(r, \theta, \varphi) : r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \\ &\equiv \{(r, \zeta, \varphi) : r > 0, |\zeta| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}\end{aligned}\quad (\text{II-2.1})$$

ή

$$\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2) = \{(r, \theta) : r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi\} \equiv \{(r, \zeta) : r > 0, |\zeta| \leq 1\}, \quad (\text{II-2.2})$$

καθώς και με 3-D ή 2-D επιφανειακά σφαιρικά πεδία,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{B}^3) &= \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \\ &\equiv \{(\zeta, \varphi) : |\zeta| \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}\end{aligned}\quad (\text{II-2.3})$$

ή

$$\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{B}^2) = \{\theta : 0 \leq \theta \leq \pi\} \equiv \{\zeta : |\zeta| \leq 1\}. \quad (\text{II-2.4})$$

Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για τις τροποποιημένες σφαιρικές συντεταγμένες (κοίτα εξίσωση (II-1.1)).

Λόγω της γραμμικότητας των διαφορικών τελεστών που χρησιμοποιούμε, η συσχέτιση θα γίνει μεταξύ μιας αναπαράστασης με όλες τις άλλες και με επιχειρήματα μεταβατικότητας συνδέονται όλες μεταξύ τους. Αυτό που κάνουμε είναι να συσχετίσουμε τα σφαιρικά πεδία ταχύτητας και πίεσης από την τρισδιάστατη αναπαράσταση Parkovich – Neuber (PN), που δίνεται μέσω του διανυσματικού αρμονικού δυναμικού Φ_{sr} και του βαθμωτού αρμονικού δυναμικού Φ_{0sr} ,

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_{sr}(\cdot) - \frac{1}{2} \nabla (\Phi \cdot \mathbf{r}_{sr}(\cdot) + \Phi_{0sr}(\cdot)), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{II-2.5})$$

και

$$\mathbf{P}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{PN} - \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{P}_{sr}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3), \quad (\text{II-2.6})$$

όπου

$$\Delta \Phi_{sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta \Phi_{0sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3), \quad (\text{II-2.7})$$

με τις υπόλοιπες τρισδιάστατες και διδιάστατες διαφορικές λύσεις. Η σταθερή πίεση $\mathbf{P}_{0sr}^{PN}$ αναπαριστά μια αυθαίρετη σταθερή πίεση, συνήθως προσδιοριζόμενη σε ένα βολικό σημείο, ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα.

Οι μη αξονοσυμμετρικές διαφορικές αναπαραστάσεις που θα συσχετιστούν με την παραπάνω λύση υποθέτουν τις μορφές (I-3.11)–(I-3.13) για τη γενική λύση Boussinesq – Galerkin (BG) και (I-3.58)–(I-3.60) για τη γενική λύση Palaniappan *et al.* (PNAU), που σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφονται συναρτήσει του διανυσματικού διαρμονικού δυναμικού (κοίτα Παράρτημα Γ) $\mathbf{B}_{sr}$ και του βαθμωτού αρμονικού δυναμικού b_{sr} ,

$$\mathbf{v}_{sr}^{BG}(\mathbf{r}) = \Delta \mathbf{B}_{sr}(\mathbf{r}) - \nabla \nabla \cdot \mathbf{B}_{sr}(\mathbf{r}) + \nabla b_{sr}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3) \quad (\text{II-2.8})$$

και

$$\mathbf{P}_{sr}^{BG}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{BG} - \mu_0 \Delta (\nabla \cdot \mathbf{B}_{sr}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3), \quad (\text{II-2.9})$$

όπου

$$\Delta^2 \mathbf{B}_{sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta b_{sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3) \quad (\text{II-2.10})$$

για την αναπαράσταση Boussinesq – Galerkin και συναρτήσει του βαθμωτού διαρμονικού δυναμικού (κοίτα Παράρτημα Γ) A_{sr} και του βαθμωτού αρμονικού δυναμικού B_{sr} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sr}^{PNAU}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} A_{sr}(\mathbf{r})) + \nabla \times (\mathbf{r} B_{sr}(\mathbf{r})) \\ &= \nabla \nabla \cdot (\mathbf{r} A_{sr}(\mathbf{r})) - \Delta (\mathbf{r} A_{sr}(\mathbf{r})) + \nabla \times (\mathbf{r} B_{sr}(\mathbf{r})), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3) \end{aligned} \quad (\text{II-2.11})$$

και

$$\mathbf{P}_{sr}^{PNAU}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{PNAU} + \mu_0 (1 + \mathbf{r} \cdot \nabla) \Delta A_{sr}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3) \quad (\text{II-2.12})$$

όπου

$$\Delta^2 A_{sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta B_{sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3) \quad (\text{II-2.13})$$

για την αναπαράσταση Palaniappan *et al.*, όπου $\mathbf{P}_{0sr}^{BG}$ και $\mathbf{P}_{0sr}^{PNAU}$ είναι, αντίστοιχα, οι αυθαίρετες σταθερές πιέσεις αναφοράς που παίζουν τον ίδιο ρόλο με εκείνη της διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber.

Όλες οι πληροφορίες για τους διαφορικούς τελεστές δίνονται στο Κεφάλαιο II-1 για σφαιρικές συντεταγμένες και πιο αναλυτικά ο τελεστής του Laplace εκφράζεται μέσω των σχέσεων (II-1.19) ή (II-1.21) (μαζί με (II-1.23)) και ο τελεστής της βάρυμησης δίνεται από τις (II-1.18) ή (II-1.20) (μαζί με (II-1.22)).

Αξίζει να σημειώσουμε πως όλες οι παραπάνω διαφορικές αναπαραστάσεις μπορούν να αναχθούν και σε 2-D πεδία, απλά με τη χρήση των σχέσεων που επιτρέπουν το πέρασμά τους από τρισδιάστατα χωρία σε αξονοσυμμετρικά, δηλαδή μέσω των εξισώσεων (I-3.100) και (I-3.101).

Από την άλλη μεριά, η θεωρία Stokes (S) για διδιάστατες, δηλαδή αξονοσυμμετρικές, ροές επιβάλλει την ύπαρξη ενός μόνο δυναμικού ροής, της συνάρτησης ροής Ψ_{sr} που, όπως παρατηρήσαμε και στο Κεφάλαιο I-2, αποτελεί την συνάρτηση-δυναμικού έκφρασης των πεδίων ροής. Τα πεδία ταχύτητας και πίεσης μπορούν να υπολογιστούν άμεσα με χρήση των γενικών εκφράσεων (I-2.23) με (I-2.27) και (I-2.28) (διδιάστατη ταχύτητα) και, επιπλέον, (I-2.64) μαζί με τις (I-2.60) και (I-2.61) (διδιάστατη πίεση). Οι γενικές αυτές εξισώσεις εμπεριέχουν την “κυλινδρική” ποσότητα ρ_{sr} που ταυτίζεται με το μετρικό συντελεστή h_ϕ , όπως φαίνεται από την σχέση (II-1.29), και τους σφαιρικούς μετρικούς συντελεστές h_r και h_θ που ικανοποιούν τις (II-1.6) και (II-1.7), αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας, λοιπόν, τις τελευταίες στις γενικές σχέσεις για τα σφαιρικά πεδία ροής λαμβάνουμε

$$\mathbf{v}_{sr}^S(r, \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{sr}(r, \theta)}{\partial \theta} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\partial \Psi_{sr}(r, \theta)}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad (\text{II-2.14})$$

από όπου θέτοντας τον γνωστό μετασχηματισμό $\zeta = \cos \theta$ από την (II-1.1),

$$\mathbf{v}_{sr}^S(r, \zeta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi_{sr}(r, \zeta)}{\partial \zeta} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r \sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\partial \Psi_{sr}(r, \zeta)}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad r > 0, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{II-2.15})$$

με $\hat{\mathbf{r}} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \hat{\boldsymbol{\phi}}$ να δηλώνουν τα μοναδιαία διανύσματα της σφαιρικής γεωμετρίας. Με αντίστοιχο τρόπο, το πεδίο ολικής πίεσης εκφράζεται μέσω της δράσης του τελεστή E^2 (εξίσωση (II-1.30) στη σφαιρική γεωμετρία) στη συνάρτηση ροής Ψ_{sr} και οι γενικές εκφράσεις μας οδηγούν στην παρακάτω ολοκληρωτική έκφραση,

$$P_{sr}^S(r, \theta) = P_{0sr}^S + \mu_0 \left\{ - \int_{+\infty}^r \frac{1}{r'^2 \sin \theta} \frac{\partial (E^2 \Psi_{sr}(r', \theta))}{\partial \theta} dr' \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{1}{\sin \theta'} \frac{\partial (E^2 \psi_{sr}(r, \theta'))}{\partial r} d\theta' \right\}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad (\text{II-2.16})$$

όπου σύμφωνα με το γνωστό μετασχηματισμό,

$$\begin{aligned} P_{sr}^S(r, \zeta) = P_{0sr}^S + \mu_0 \left\{ \int_{+\infty}^r \frac{1}{r'^2} \frac{\partial (E^2 \psi_{sr}(r', \zeta))}{\partial \zeta} dr' \right. \\ \left. - \int_0^{\zeta} \frac{1}{(1-\zeta'^2)} \frac{\partial (E^2 \psi_{sr}(r, \zeta'))}{\partial r} d\zeta' \right\}, \quad r > 0, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{II-2.17}) \end{aligned}$$

Λόγω της (I-2.44), τα αστρόβιλα πεδία περιγράφονται από μια συνάρτηση που ανήκει στον πυρήνα του τελεστή E^2 και αυτά τα πεδία, όπως φαίνεται άμεσα από την (II-2.17), είναι πεδία σταθερής ολικής πίεσης. Έτσι, ολοκληρώθηκε και η ανάλυση των πεδίων ροής που θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα αξονοσυμμετρικά πεδία της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber.

Το βασικό πλεονέκτημα της αναπαράστασης Stokes έγκειται στο γεγονός ότι απαιτεί μόνο μια συνάρτηση για να περιγράψει την ταχύτητα και την πίεση, αλλά μειονεκτεί στο ότι αφορά μόνο αξονοσυμμετρικές γεωμετρίες (για τρισδιάστατα χωρία απαιτούνται δύο συναρτήσεις ροής και τότε το πρόβλημα γίνεται πολύ πιο δύσκολο) και επιπλέον στο ότι αναπαριστά το πεδίο ολικής πίεσης μέσω ολοκληρωμάτων που καθιστά σαφώς πιο δύσκολο τον υπολογισμό του. Φυσικά, όλα αυτά τα προβλήματα εξαλείφονται στην περίπτωση των διαφορικών αναπαραστάσεων για προφανής λόγους. Εξάλλου, οι διδιάστατες ροές μπορούν να αντιμετωπιστούν και από τη θεωρία διαφορικών αναπαραστάσεων με έναν απλό εκφυλισμό από 2-D σε 3-D πεδία ροής. Βέβαια, στη σφαιρική γεωμετρία η διαφορά δεν είναι εμφανής λόγω της απλότητας του συστήματος, αλλά σε πιο πολύπλοκες γεωμετρίες όπως σφαιροειδή ή και ελλειψοειδή (αυξημένος βαθμός δυσκολίας) φαίνεται η διαφορά, όπως θα δούμε και στα επόμενα μέρη της εργασίας. Στις επόμενες παραγράφους θα συσχετίσουμε τις διάφορες αναπαραστάσεις, εξισώνοντας τα πεδία ροής, με τη διαφορική λύση Parkovich – Neuber. Δηλαδή, σε σφαιρικές συντεταγμένες, θα χρησιμοποιήσουμε τον μιγαδικό συμβολισμό για την 3-D συσχέτιση

$$\text{Parkovich – Neuber (PN)} \leftrightarrow \text{Boussinesq – Galerkin (BG)}, \quad (\text{II-2.18})$$

τον διανυσματικό συμβολισμό για την 3-D συσχέτιση

$$\text{Parkovich – Neuber (PN)} \leftrightarrow \text{Palaniappan et al. (PNAU)} \quad (\text{II-2.19})$$

και τον πραγματικό συμβολισμό για την 2-D συσχέτιση

$$\text{Papkovich – Neuber (PN)} \leftrightarrow \text{Stokes (S)}, \quad (\text{II-2.20})$$

αναφερόμενοι στις αντίστοιχες αρμονικές συναρτήσεις των δυναμικών. Σε κάθε περίπτωση θεωρούμε ότι τα σφαιρικά χωρία με τα οποία ασχολούμαστε λείπουν ανωμαλιών και, συνεπώς, εμπλεκόμαστε με την εύρεση της ταχύτητας και πίεσης σε πεδία χωρίς πηγές. Στο Κεφάλαιο II-1 αναλύσαμε εκτενώς την επίδραση που έχει στα αρμονικά δυναμικά και στο δυναμικό της συνάρτησης ροής μια τέτοιου είδους υπόθεση. Κανονικά, στην ανάπτυξη των σειρών, θα έπρεπε να είχαμε όλων των ειδών τις αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις (ανάπτυγμα (II-1.37α) ή (II-1.44α) για πραγματικές ή μιγαδικές, αντίστοιχα) και τις ιδιοσυναρτήσεις ροής (ανάπτυγμα (II-1.110)). Ωστόσο, λόγω των φυσικών απαιτήσεων που αφορούν τις ροές Stokes, τα πεδία ροής πρέπει να είναι ομαλά (χωρίς ιδιομορφίες) στον άξονα συμμετρίας x_1 για $\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$. Συνεπώς, όλοι οι όροι στα ήδη αναφερθέντα αναπτύγματα που εμπεριέχουν τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre του δευτέρου είδους Q_n^m και τις συναρτήσεις Gegenbauer* δευτέρου είδους H_n για κάθε $n \geq 0$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$ εξαιρούνται και, οπότε, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις πρέπει να αποκλεισθούν. Άρα, κάθε αρμονική συνάρτηση και συνάρτηση ροής ομαλή στον άξονα συμμετρίας x_1 (απουσία ιδιομορφιών για $\zeta = \pm 1$), ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή του Laplace Δ και στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^2 , αντίστοιχα, και σε σφαιρικές συντεταγμένες αυτός ο γραμμικός χώρος, εκφράζεται μέσω των εσωτερικών (i) και των εξωτερικών (e) σφαιρικών αρμονικών δυναμικών (πραγματικών, (II-1.39) και (II-1.40) ή μιγαδικών, (II-1.45) και (II-1.46) ή διανυσματικών, (II-1.85)–(II-1.87) και (II-1.88)–(II-1.90)) και μέσω των εσωτερικών (i) και των εξωτερικών (e) σφαιρικών συναρτήσεων ροής ((II-1.108) και (II-1.109)), αντίστοιχα. Αυτός θα είναι και ο συμβολισμός που θα ακολουθήσουμε στις επόμενες παραγράφους.

II-2.2 Συσχέτιση 3-D διαφορικών αναπαραστάσεων Papkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin στη σφαιρική γεωμετρία.

* Σύμφωνα με τον ορισμό των συναρτήσεων Gegenbauer στο Παράρτημα Β, οι ομαλές ροές πάνω στον άξονα συμμετρίας επιβάλλουν τον επιπλέον μηδενισμό των συναρτήσεων Gegenbauer πρώτου είδους, πρώτου και δευτέρου βαθμού.

ΙΙ-2.2α Τα τριδιάστατα πεδία ροής *Parovich – Neuber* και *Boussinesq – Galerkin*.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω, ακολουθώντας τον μιγαδικό συμβολισμό για τις επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις Y_n^m από τις εξισώσεις (ΙΙ-1.41) και (ΙΙ-1.42), τα σφαιρικά αρμονικά δυναμικά της αναπαράστασης *Parovich – Neuber* Φ_{sr} και Φ_{0sr} δίνονται από τα αναπτύγματα των μιγαδικών εσωτερικών και εξωτερικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων

$$\begin{aligned} \Phi_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(e_{n,sr}^{(i)m} r^n + e_{n,sr}^{(e)m} r^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + \left(e_{n,sr}^{(i)m*} r^n + e_{n,sr}^{(e)m*} r^{-(n+1)} \right) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{ΙΙ-2.21})$$

και

$$\begin{aligned} \Phi_{0sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(d_{n,sr}^{(i)m} r^n + d_{n,sr}^{(e)m} r^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + \left(d_{n,sr}^{(i)m*} r^n + d_{n,sr}^{(e)m*} r^{-(n+1)} \right) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \end{aligned} \quad (\text{ΙΙ-2.22})$$

αντίστοιχα, όπου για $n \geq 0$

$$e_{n,sr}^{(i/e)m} = c_{n,sr}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,sr}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,sr}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad d_{n,sr}^{(i/e)m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{ΙΙ-2.23})$$

και

$$e_{n,sr}^{(i/e)m*} = c_{n,sr}^{(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,sr}^{(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,sr}^{(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad d_{n,sr}^{(i/e)m*}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{ΙΙ-2.24})$$

είναι οι εσωτερικοί και εξωτερικοί μιγαδικοί σταθεροί συντελεστές των δυναμικών καθώς και οι συζυγείς τους. Τα δυναμικά (ΙΙ-2.21) και (ΙΙ-2.22), σε συνδυασμό με τις (ΙΙ-2.5), (ΙΙ-2.6) και τις ταυτότητες (Α.1), (Α.2), (Α.6), παράγουν το πεδίο ταχύτητας

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\tilde{\mathbf{I}} - \frac{1}{2}[(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \otimes \hat{\mathbf{r}} \right] \cdot \left(e_{n,sr}^{(i)m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + e_{n,sr}^{(i)m*} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^n \\ - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} [(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \left(d_{n+1,sr}^{(i)m} Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}}) + d_{n+1,sr}^{(i)m*} Y_{n+1}^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^n \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\tilde{\mathbf{I}} - \frac{1}{2}[-n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \otimes \hat{\mathbf{r}} \right] \cdot \left(e_{n,sr}^{(e)m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + e_{n,sr}^{(e)m*} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{-(n+1)} \\ - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} [-n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \left(d_{n-1,sr}^{(e)m} Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}}) + d_{n-1,sr}^{(e)m*} Y_{n-1}^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{-(n+1)} \end{aligned} \quad (\text{ΙΙ-2.25})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ και το πεδίο ολικής πίεσης, λόγω της (Α.11),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{PN} - \mu_0 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\mathbf{n}\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \cdot \left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(i)m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{e}_{n,sr}^{(i)m*} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{n-1} \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [-(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \cdot \left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(e)m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{e}_{n,sr}^{(e)m*} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{-(n+2)} \right\} \quad (\text{II-2.26}) \end{aligned}$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, όπου ακολουθήσαμε το συμβολισμό (II-1.20) και (II-1.22) για την αναπαράσταση του τελεστή της βάρμωσης ∇ με διαχωρισμό του ακτινικού με το γωνιακό $\mathbf{D}$ κομμάτι, ενώ σε σφαιρική γεωμετρία $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$.

Από την άλλη πλευρά, με τα ίδια στοιχεία με πριν αλλά και με χρήση του Θεωρήματος αναπαράστασης του Almansi (κοίτα Παράρτημα Γ) για την απεικόνιση των διαρμονικών συναρτήσεων, δηλαδή των δυναμικών που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή Δ^2 , καταλήγουμε στα παρακάτω αναπτύγματα Boussinesq –

Galerkin για το διαρμονικό δυναμικό $\mathbf{B}_{sr}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\mathbf{f}_{n,sr}^{(i)m} r^n + \mathbf{f}_{n,sr}^{(e)m} r^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \left(\mathbf{f}_{n,sr}^{(i)m*} r^n + \mathbf{f}_{n,sr}^{(e)m*} r^{-(n+1)} \right) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \\ + r^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(\mathbf{g}_{n,sr}^{(i)m} r^n + \mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m} r^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \left(\mathbf{g}_{n,sr}^{(i)m*} r^n + \mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m*} r^{-(n+1)} \right) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \right\} \quad (\text{II-2.27}) \end{aligned}$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ και για το δυναμικό $\mathbf{b}_{sr}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(h_{n,sr}^{(i)m} r^n + h_{n,sr}^{(e)m} r^{-(n+1)} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right. \\ \left. + \left(h_{n,sr}^{(i)m*} r^n + h_{n,sr}^{(e)m*} r^{-(n+1)} \right) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\text{II-2.28}) \end{aligned}$$

Οι εσωτερικοί και εξωτερικοί μιγαδικοί σταθεροί συντελεστές των δυναμικών έχουν την Καρτεσιανή μορφή

$$\mathbf{f}_{n,sr}^{(i/e)m} = f_{n,sr}^{1(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_1 + f_{n,sr}^{2(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_2 + f_{n,sr}^{3(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad n \geq 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-2.29})$$

και

$$\mathbf{f}_{n,sr}^{(i/e)m*} = f_{n,sr}^{1(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_1 + f_{n,sr}^{2(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_2 + f_{n,sr}^{3(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad n \geq 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-2.30})$$

για το αρμονικό μέρος του διαρμονικού δυναμικού $\mathbf{B}_{sr}$ και

$$\mathbf{g}_{n,sr}^{(i/e)m} = g_{n,sr}^{1(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_1 + g_{n,sr}^{2(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_2 + g_{n,sr}^{3(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad n \geq 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-2.31})$$

και

$$\mathbf{g}_{n,sr}^{(i/e)m*} = g_{n,sr}^{1(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_1 + g_{n,sr}^{2(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_2 + g_{n,sr}^{3(i/e)m*} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad n \geq 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-2.32})$$

για το διαρμονικό μέρος του $\mathbf{B}_{sr}$. Επιπλέον, οι βαθμωτοί μιγαδικοί σταθεροί συντελεστές $h_{n,sr}^{(i/e)m}$ και $h_{n,sr}^{(i/e)m*}$, $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$, εκφράζουν το βαθμωτό χαρακτήρα του αρμονικού δυναμικού b_{sr} . Αντικαθιστώντας, τώρα, τις (II-2.27) και (II-2.28) στα πεδία ροής Boussinesq – Galerkin, εξισώσεις (II-2.8) και (II-2.9) και χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις ταυτότητες (A.1), (A.2), (A.11) και (A.31) παράγουμε το πεδίο ταχύτητας

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sr}^{BG}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(6+4n)\tilde{\mathbf{I}} - [(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \otimes [(n+2)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \right] \cdot \left(\mathbf{g}_{n,sr}^{(i)m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{g}_{n,sr}^{(i)m*} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^n \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+2} \left[-[(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \otimes [(n+2)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \right] \cdot \left(\mathbf{f}_{n+2,sr}^{(i)m} Y_{n+2}^m(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{f}_{n+2,sr}^{(i)m*} Y_{n+2}^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^n \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \left[(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D} \right] \left(h_{n+1,sr}^{(i)m} Y_{n+1}^m(\hat{\mathbf{r}}) + h_{n+1,sr}^{(i)m*} Y_{n+1}^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^n \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(2-4n)\tilde{\mathbf{I}} - [-n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \otimes [-(n-1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \right] \cdot \left(\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m*} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{-(n+1)} \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-2} \left[-[-n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \otimes [-(n-1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \right] \cdot \left(\mathbf{f}_{n-2,sr}^{(e)m} Y_{n-2}^m(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{f}_{n-2,sr}^{(e)m*} Y_{n-2}^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{-(n+1)} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \left[-n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D} \right] \left(h_{n-1,sr}^{(e)m} Y_{n-1}^m(\hat{\mathbf{r}}) + h_{n-1,sr}^{(e)m*} Y_{n-1}^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{-(n+1)} \quad (\text{II-2.33}) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ και με τον ίδιο τρόπο, λόγω των (A.11) και (A.30), παράγουμε το πεδίο ολικής πίεσης,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{sr}^{BG}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{BG} - \mu_0 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (6+4n) [n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \cdot \left(\mathbf{g}_{n,sr}^{(i)m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{g}_{n,sr}^{(i)m*} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{n-1} \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2-4n) [-(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}] \cdot \left(\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m*} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) \right) r^{-(n+2)} \right\} \quad (\text{II-2.34}) \end{aligned}$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$, όπου και σε αυτή την περίπτωση ακολουθήσαμε το γνωστό συμβολισμό (II-1.20) και (II-1.22) για την αναπαράσταση του τελεστή της βάθμωσης ∇ με διαχωρισμό του ακτινικού με το γωνιακό $\mathbf{D}$ κομμάτι.

Σημειώνουμε ότι το σύμβολο $\tilde{\mathbf{I}}$ δηλώνει το μοναδιαίο δυαδικό που σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από την (II-1.26), δηλ.,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}} &= \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &= \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\phi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\phi}} - \hat{\boldsymbol{\varphi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (\text{II-2.35}) \end{aligned}$$

Π-2.2β Τύποι συσχέτισης *Parkovich – Neuber* και *Boussinesq – Galerkin*.

Στο πλαίσιο της συσχέτισης των υπολογισμένων πεδίων ροής, ψάχνουμε για εκείνες τις αρμονικές και διαρμονικές ιδιοσυναρτήσεις, που εισάγονται από τις εκφράσεις (Π-2.21), (Π-2.22) και (Π-2.27), (Π-2.28), οι οποίες μας εξασφαλίζουν τα ίδια πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης. Σύμφωνα, λοιπόν, με αυτή τη θεώρηση αναζητούμε τύπους σύνδεσης για τις διαφορικές αναπαραστάσεις *Parkovich – Neuber* και *Boussinesq – Galerkin* μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_{sr}^{BG}(\mathbf{r}) \quad \text{και} \quad P_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = P_{sr}^{BG}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{Π-2.36})$$

Εφόσον ο διανυσματικός χαρακτήρας των διανυσματικών αρμονικών και ιδιοσυναρτήσεων αντανακλάται στους σταθερούς συντελεστές, οι οποίοι γράφονται σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, είναι φανερό ότι υποχρεούμαστε να δουλέψουμε στο Καρτεσιανό σύστημα. Αυτό είναι εφικτό και απαιτεί την έκφραση των πεδίων ροής σε Καρτεσιανές συντεταγμένες που να εμπλέκουν σταθερές και σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις. Συνεπώς, με αυτό τον τρόπο, είμαστε ικανοί να μεταφέρουμε την σύνδεση των αρμονικών και διαρμονικών δυναμικών σε μια αντίστοιχη σύνδεση των σταθερών συντελεστών.

Επιτυγχάνουμε τύπους σύνδεσης για τους σταθερούς συντελεστές, ως αποτέλεσμα της συσχέτισης των υπό μελέτη αναπαραστάσεων. Αυτό είναι αληθές εκφράζοντας τα

$$\nabla(r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})) = \{[n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}]Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})\}r^{n-1}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{Π-2.37})$$

$$\nabla(r^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}})) = \{[n\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}]Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}})\}r^{n-1}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{Π-2.38})$$

$$\nabla(r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})) = \{[-(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}]Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})\}r^{-(n+2)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{Π-2.39})$$

και

$$\nabla(r^{-(n+1)} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}})) = \{[-(n+1)\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{D}]Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}})\}r^{-(n+2)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{Π-2.40})$$

για κάθε $n \geq 0$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$, σαν συνάρτηση των μιγαδικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Αυτό είναι εφικτό, αφού οι εκφράσεις (Π-2.37)–(Π-2.40) ανήκουν στον υπόχωρο που παράγουν οι επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές. Η συγκεκριμένη δουλειά αποτέλεσε μια προσπάθεια, του Κεφαλαίου Π-1, αρκετών πράξεων με χρήση αναγωγικών σχέσεων και ιδιοτήτων των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre.

Αναζητούμε, λοιπόν, εκείνα τα αρμονικά $(\Phi_{sr}, \Phi_{0sr}, b_{sr})$ και διαρμονικά $(\mathbf{B}_{sr})$ δυναμικά που δίνονται από τις εξισώσεις (ΙΙ-2.21), (ΙΙ-2.22), (ΙΙ-2.27) και (ΙΙ-2.28), για τα οποία ισχύει η (ΙΙ-2.36). Με βάση την τελευταία που ικανοποιείται από τα πεδία ροής (ΙΙ-2.25), (ΙΙ-2.26) για τη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber και (ΙΙ-2.33), (ΙΙ-2.34) για τη διαφορική λύση Boussinesq – Galerkin, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις σύνδεσης των σταθερών συντελεστών, αφού χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα για τα διαστήματα των n και m τις εκφράσεις για τη δράση του διαφορικού τελεστή της βάθμωσης στις μιγαδικές συμπαγείς σφαιρικές ιδιοσυναρτήσεις από το Κεφάλαιο ΙΙ-1. Δηλαδή, εισάγοντας τις (ΙΙ-2.37)–(ΙΙ-2.40) σε συνδυασμό με τις προαναφερθείσες εκφράσεις (ΙΙ-1.56)–(ΙΙ-1.66) στα πεδία ροής, τότε οι σταθεροί συντελεστές των δύο αναπαραστάσεων πρέπει να ικανοποιούν τις επόμενες σχέσεις για ισότητα πεδίου ταχύτητας και πεδίου ολικής πίεσης,

$$P_{0sr}^{PN} = P_{0sr}^{BG}, \quad (\text{ΙΙ-2.41})$$

που είναι αποτέλεσμα της συσχέτισης των πεδίων ολικών πιέσεων καθαρά, ενώ

$$e_{n,sr}^{(i)m} = (6+4n)g_{n,sr}^{(i)m} = (6+4n)(g_{n,sr}^{1(i)m}\hat{\mathbf{x}}_1 + g_{n,sr}^{2(i)m}\hat{\mathbf{x}}_2 + g_{n,sr}^{3(i)m}\hat{\mathbf{x}}_3) \quad (\text{ΙΙ-2.42})$$

και

$$e_{n,sr}^{(i)m*} = (6+4n)g_{n,sr}^{(i)m*} = (6+4n)(g_{n,sr}^{1(i)m*}\hat{\mathbf{x}}_1 + g_{n,sr}^{2(i)m*}\hat{\mathbf{x}}_2 + g_{n,sr}^{3(i)m*}\hat{\mathbf{x}}_3) \quad (\text{ΙΙ-2.43})$$

με $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$, όπου συνδέονται ο εσωτερικός σταθερός συντελεστής του δυναμικού Φ_{sr} με τον αντίστοιχο του διαρμονικού μέρους του δυναμικού $\mathbf{B}_{sr}$.

Αν τροποποιήσουμε ελαφρά τον ορισμό των μιγαδικών επιφανειακών αρμονικών συναρτήσεων και γράψουμε τις (ΙΙ-1.41) και (ΙΙ-1.42) ως

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\zeta) e^{im\phi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{ΙΙ-2.44})$$

και την συζυγή της

$$Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\zeta) e^{-im\phi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{ΙΙ-2.45})$$

για κάθε $\hat{\mathbf{r}} \in \partial\Omega(\mathbf{B}^3)$, ώστε η ορθογωνιότητα (ΙΙ-1.43) να ισχύει με βάση τη μονάδα, τότε η μορφή της αναπαράστασης Boussinesq – Galerkin επιβάλλει το αρμονικό και το διαρμονικό κομμάτι του δυναμικού $\mathbf{B}_{sr}$ να συνδεθούν μεταξύ τους και μαζί με τα αρμονικά δυναμικά Φ_{0sr} και b_{sr} μέσω των

$$g_{n,sr}^{1(i)m} = \frac{\sqrt{\frac{(2n+5)}{(2n+1)}}}{2\sqrt{(n+1)^2 - m^2}} \left\{ 2\sqrt{(n+2)^2 - m^2} f_{n+2,sr}^{1(i)m} - \sqrt{\frac{(2n+3)}{(2n+5)}} (2h_{n+1,sr}^{(i)m} + d_{n+1,sr}^{(i)m}) \right\}, \quad (\text{II-2.46})$$

$$g_{n,sr}^{2(i)m} = -\frac{\sqrt{\frac{(2n+5)}{(2n+1)}}}{\sqrt{(n+1)^2 - m^2} \sqrt{(n+2)^2 - m^2}} \left\{ [(n+1)(n+2) + m^2] f_{n+2,sr}^{2(i)m} + im(2n+3) f_{n+2,sr}^{3(i)m} \right\}, \quad (\text{II-2.47})$$

$$g_{n,sr}^{3(i)m} = -\frac{\sqrt{\frac{(2n+5)}{(2n+1)}}}{\sqrt{(n+1)^2 - m^2} \sqrt{(n+2)^2 - m^2}} \left\{ [(n+1)(n+2) + m^2] f_{n+2,sr}^{3(i)m} - im(2n+3) f_{n+2,sr}^{2(i)m} \right\} \quad (\text{II-2.48})$$

για κάθε $n \geq 0$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Για να ανακτήσουμε τις αντίστοιχες παραστάσεις για τους συζυγείς μιγαδικούς σταθερούς συντελεστές $g_{n,sr}^{\kappa(i)m*}$, $\kappa = 1, 2, 3$ για $n \geq 0$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$, αρκεί να πάρουμε τις συζυγείς εκφράσεις των (II-2.46)–(II-2.48), όπου το σύμβολο “*” δηλώνει μιγαδική σύζευξη, ενώ i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα. Για την εξαγωγή των παραπάνω σχέσεων χρησιμοποιήσαμε γνωστά επιχειρήματα ορθογωνιότητας για τις επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις. Εξετάζοντας ξεχωριστά τις ακραίες περιπτώσεις καταλήγουμε στο ότι πρέπει

$$f_{0,sr}^{(i)0}, f_{0,sr}^{(i)0*}, h_{0,sr}^{(i)0}, h_{0,sr}^{(i)0*}, d_{0,sr}^{(i)0}, d_{0,sr}^{(i)0*} \in \mathfrak{B} \quad (\text{II-2.49})$$

αφού δεν υπεισέρχονται στα πεδία ροής των δύο αναπαραστάσεων, ενώ εύκολα προκύπτει ότι

$$f_{1,sr}^{(i)m} = f_{1,sr}^{(i)m*} = 0, \quad m = 0, 1 \quad (\text{II-2.50})$$

καθώς επίσης για $m = n+1$,

$$f_{n+2,sr}^{(i)n+1} = \frac{1}{\sqrt{(2n+5)}} \left(h_{n+1,sr}^{(i)n+1} + \frac{1}{2} d_{n+1,sr}^{(i)n+1} \right) \hat{x}_1, \quad n \geq 0 \quad (\text{II-2.51})$$

και η συζυγής της για τον $f_{n+2,sr}^{(i)n+1*}$, αλλά για $m = n+2$

$$f_{n+2,sr}^{(i)n+2} = f_{n+2,sr}^{(i)n+2*} = 0, \quad n \geq 0, \quad (\text{II-2.52})$$

όπου η (II-2.52) συνεπάγεται και μηδενικό πεδίο ταχύτητας. Όλοι οι σταθεροί συντελεστές για $n \geq 0$ και $m > n$ μηδενίζονται εξ’ ορισμού των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων, όπως φαίνεται και από τη σχέση (II-1.54).

Με παρόμοιο τρόπο λαμβάνουμε τα αποτελέσματα για τους εξωτερικούς μιγαδικούς σταθερούς συντελεστές, δηλαδή, από τη συσχέτιση των ολικών πιέσεων έχουμε

$$\mathbf{e}_{n,sr}^{(e)m} = (2-4n)\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m} = (2-4n)\left(\mathbf{g}_{n,sr}^{1(e)m}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{g}_{n,sr}^{2(e)m}\hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{g}_{n,sr}^{3(e)m}\hat{\mathbf{x}}_3\right) \quad (\text{II-2.53})$$

και

$$\mathbf{e}_{n,sr}^{(e)m*} = (2-4n)\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m*} = (2-4n)\left(\mathbf{g}_{n,sr}^{1(e)m*}\hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{g}_{n,sr}^{2(e)m*}\hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{g}_{n,sr}^{3(e)m*}\hat{\mathbf{x}}_3\right), \quad (\text{II-2.54})$$

$n \geq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$, όπου, τώρα, συνδέονται ο εξωτερικός σταθερός συντελεστής του δυναμικού Φ_{sr} με τον αντίστοιχο του διαρμονικού μέρους του δυναμικού $\mathbf{B}_{sr}$.

Διατηρώντας τους ορισμούς (II-2.44) και (II-2.45), η εμφάνιση του διαρμονικού δυναμικού στην αναπαράσταση Boussinesq – Galerkin επιβάλλει το εξωτερικό αρμονικό και το διαρμονικό κομμάτι του δυναμικού $\mathbf{B}_{sr}$ να συνδεθούν μεταξύ τους και μαζί με τα εξωτερικά αρμονικά δυναμικά Φ_{0sr} και $\mathbf{b}_{sr}$ μέσω παρομοίων σχέσεων με τις (II-2.46)–(II-2.48) και, συνεπώς καταλήγουμε στις

$$\mathbf{g}_{n,sr}^{1(e)m} = \frac{\sqrt{(2n-3)}}{2\sqrt{n^2-m^2}} \left\{ 2\sqrt{(n-1)^2-m^2} f_{n-2,sr}^{1(e)m} + \sqrt{(2n-1)} \left(2h_{n-1,sr}^{(e)m} + d_{n-1,sr}^{(e)m} \right) \right\}, \quad (\text{II-2.55})$$

$$\mathbf{g}_{n,sr}^{2(e)m} = -\frac{\sqrt{(2n-3)}}{\sqrt{(n-1)^2-m^2}\sqrt{n^2-m^2}} \left\{ \left[n(n-1) + m^2 \right] f_{n-2,sr}^{2(e)m} + im(1-2n)f_{n-2,sr}^{3(e)m} \right\}, \quad (\text{II-2.56})$$

$$\mathbf{g}_{n,sr}^{3(e)m} = -\frac{\sqrt{(2n-3)}}{\sqrt{(n-1)^2-m^2}\sqrt{n^2-m^2}} \left\{ \left[n(n-1) + m^2 \right] f_{n-2,sr}^{3(e)m} - im(1-2n)f_{n-2,sr}^{2(e)m} \right\} \quad (\text{II-2.57})$$

για τις τιμές βαθμού και τάξης $n \geq 2$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n-2$. Οι συζυγείς σταθεροί συντελεστές $\mathbf{g}_{n,sr}^{\kappa(e)m*}$, $\kappa = 1, 2, 3$ για $n \geq 2$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n-2$, προκύπτουν μετά από μιγαδοποίηση των σχέσεων σύνδεσης (II-2.55)–(II-2.57), οι οποίες προέκυψαν μετά από προσεκτική άλγεβρα και εφαρμογή των σχέσεων ορθογωνιότητας για τις μιγαδικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές.

Οι αρχικές περιπτώσεις για τον καθορισμό των σταθερών συντελεστών $\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m}$, $\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)m*}$ για $n = 0, 1$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$, όπως επίσης και των $h_{0,sr}^{(e)0}$, $d_{0,sr}^{(e)0}$, $h_{0,sr}^{(e)0*}$, $d_{0,sr}^{(e)0*}$, εξετάζονται ξεχωριστά και συγκεκριμένα καλύπτονται πλήρως από τις τελικές περιπτώσεις για $m = n-1$,

$$\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)n-1} = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \left(h_{n-1,sr}^{(e)n-1} + \frac{1}{2} d_{n-1,sr}^{(e)n-1} \right) \hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 1 \quad (\text{II-2.58})$$

και η συζυγής της για τον $\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)n-1*}$, αλλά για $m = n$

$$\mathbf{g}_{n,sr}^{(e)n} = \mathbf{g}_{n,sr}^{(e)n*} = \mathbf{0}, \quad n \geq 0, \quad (\text{II-2.59})$$

όπου η (II-2.52) συνεπάγεται και μηδενικό πεδίο ταχύτητας. Πάλι, όλοι οι σταθεροί συντελεστές για τους οποίους ισχύει $n \geq 0$ και $m > n$, καθώς και εκείνοι για τους οποίους έχουμε $n < 0$ μηδενίζονται εξ' ορισμού των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων, όπως φαίνεται και από τις αντίστοιχες σχέσεις (II-1.54) και (II-1.53) και η σχέση (II-2.59) ολοκληρώνει τη σειρά παρουσίασης των σχέσεων σύνδεσης των διαφορικών μας αναπαραστάσεων.

Σε αυτή την παράγραφο* αναπτύχθηκε μια μέθοδος σύνδεσης δύο διαφορετικών 3-D διαφορικών αναπαραστάσεων των λύσεων για τις εξισώσεις Stokes. Βασισμένοι σε αυτή τη μέθοδο, εξετάσαμε τις διαφορικές αναπαραστάσεις Parkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin, οι οποίες προσφέρουν γενικές λύσεις για προβλήματα ροών που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, υπολογίσαμε το πεδίο ταχύτητας και το πεδίο ολικής πίεσης που παράγονται από τις γνωστές συμπαγείς αρμονικές και διαρμονικές ιδιοσυναρτήσεις. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, παρήχθησαν τύποι σύνδεσης οι οποίοι μετατρέπουν κάθε λύση του συστήματος Stokes από τη διαφορική λύση Boussinesq – Galerkin στη γενική λύση Parkovich – Neuber, αλλά όχι αντίστροφα. Δηλαδή, ο πίνακας σύνδεσης των δύο αναπαραστάσεων δεν είναι αντιστρέψιμος με την έννοια ότι μπορούμε μόνο να ξεκινήσουμε με τις ιδιολύσεις της αναπαράστασης Boussinesq – Galerkin και να ανακτήσουμε τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης μέσω της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber. Θεωρήσαμε ροές σε εσωτερικά και εξωτερικά χωρία απουσία ιδιομορφιών πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 , όπου οι δύο περιπτώσεις ικανοποιούν παρόμοιες σχέσεις για τους σταθερούς συντελεστές και τους συζυγείς τους. Τέλος, παρατηρούμε ότι οι δύο γενικές λύσεις είναι ισοδύναμες, αλλά η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber είναι αυτή που δίνεται μέσω πιο απλής μορφής λόγω της εμφάνισης του διαρμονικού δυναμικού $\mathbf{B}_{sr}$.

* Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παραγράφου II-2.2 αποτελούν μέρος της δημοσιευμένης εργασίας [40].

ΙΙ-2.3 Συσχέτιση 3-D διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Palaniappan *et al.* στη σφαιρική γεωμετρία.

ΙΙ-2.3α Τα τρισδιάστατα πεδία ροής Palaniappan *et al.* και Parkovich – Neuber.

Η εισαγωγή των διαφορικών αναπαραστάσεων των λύσεων των εξισώσεων Stokes εκφράζει την προσέγγισή μας σε όλες τις τρισδιάστατες ασυμπίεστες ροές, τόσο σε θεωρητική βάση, όσο και σε πρακτική μέσω επίλυσης διαφόρων προβλημάτων ροής με συνοριακές συνθήκες, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο. Το πρόβλημα κάθε φορά έγκειται στην κατάλληλη επιλογή της διαφορικής αναπαράστασης για το αντίστοιχο πρόβλημα εκμεταλλευόμενοι τα βασικά τους πλεονεκτήματα εκ των οποίων το πιο σημαντικό είναι ότι δίνονται μέσω αρμονικών δυναμικών. Όμως, ο τρόπος επιλογής στηρίζεται στον τρόπο που σχετίζονται αυτές οι αναπαραστάσεις με συνέπεια να πρέπει να δούμε πώς συνδέονται μεταξύ τους.

Στο πλαίσιο της προηγούμενης παραγράφου, θα επιχειρήσουμε τη συσχέτιση της ήδη γνωστής μας διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber με την τρισδιάστατη διαφορική λύση που προτάθηκε από τους Palaniappan *et al.* σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αυτό είναι δυνατό αν συνδεθούν κατάλληλα οι αρμόδιες ιδιοσυναρτήσεις που παράγουν τα πεδία ροής μέσω των διαφορικών αναπαραστάσεων. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τα μη αξονοσυμμετρικά πεδία ροής, που παράγονται από τις συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις διαμέσου της αναπαράστασης Parkovich – Neuber και μετά να αντιμετωπίσουμε το αντίστροφο πρόβλημα του καθορισμού εκείνων των αρμονικών και διαρμονικών ιδιοσυναρτήσεων, οι οποίες οδηγούν στα ίδια πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης μέσω της γενικής λύσης των Palaniappan *et al.* σε σφαιρική γεωμετρία. Πιο αναλυτικά, θα επιχειρήσουμε να συσχετίσουμε αυτές τις διαφορικές λύσεις με σκοπό να εξάγουμε, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, τύπους σύνδεσης για τα αρμονικά (Φ_{sr} , Φ_{0sr} , B_{sr}) και διαρμονικά (A_{sr}) δυναμικά στη σφαιρική γεωμετρία.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω, θα υιοθετήσουμε τη θεωρία των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων που αναλύσαμε εκτενώς στο Κεφάλαιο ΙΙ-1, παράγραφο ΙΙ-1.2β για να απλοποιήσουμε τις πράξεις. Ακολουθώντας το διανυσματικό συμβολισμό για τις επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις από τις εξισώσεις (ΙΙ-1.77)–(ΙΙ-1.79) που ικανοποιούν τη γενική σχέση

ορθογωνιότητας (II–1.81) και εισάγοντας το πλήρες σύνολο των εσωτερικών (εξισώσεις (II–1.85)–(II–1.87)) και εξωτερικών (εξισώσεις (II–1.88)–(II–1.90)) διανυσματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων, τα σφαιρικά αρμονικά δυναμικά της αναπαράστασης Parkovich – Neuber Φ_{sr} και Φ_{0sr} δίνονται από τα ανάπτυγματα για $s = e, o$ (άρτια ή περιττά),

$$\begin{aligned} \Phi_{sr}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{s=e,o} a_{n,sr}^{(i)ms} \mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} b_{n,sr}^{(i)ms} \mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=e,o} c_{n,sr}^{(i)ms} \mathbf{G}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=e,o} a_{n,sr}^{(e)ms} \mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} b_{n,sr}^{(e)ms} \mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{s=e,o} c_{n,sr}^{(e)ms} \mathbf{G}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \quad (\text{II–2.60}) \end{aligned}$$

με τους πραγματικούς σταθερούς συντελεστές $a_{n,sr}^{(i)ms}$, $b_{n,sr}^{(i)ms}$, $c_{n,sr}^{(i)ms}$, $a_{n,sr}^{(e)ms}$, $b_{n,sr}^{(e)ms}$, $c_{n,sr}^{(e)ms}$ να ορίζονται στα αντίστοιχα διαστήματα των σειρών για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ και, κάνοντας χρήση των πραγματικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων από το Κεφάλαιο II–1, εξισώσεις (II–1.32) και (II–1.33),

$$\Phi_{0sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} d_{n,sr}^{(i)ms} (r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} d_{n,sr}^{(e)ms} (r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}})) \quad (\text{II–2.61})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ με πραγματικούς σταθερούς συντελεστές $d_{n,sr}^{(i)ms}$, $d_{n,sr}^{(e)ms}$.

Τα δυναμικά (II–2.60) και (II–2.61), σε συνδυασμό με τις (II–2.5), (II–2.6) και τις ταυτότητες (A.1), (A.2), (A.6), (II–1.95)–(II–1.103), καθώς και τους γνωστούς ορισμούς των διανυσματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων (II–1.85) και (II–1.88) για τη διανυσματική απεικόνιση του $\nabla \Phi_{0sr}$, παράγουν το πεδίο ταχύτητας (κοίτα και γενικό ανάπτυγμα (II–1.91))

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{s=e,o} \left[-\frac{(n-1)}{2} a_{n,sr}^{(i)ms} - \frac{1}{2} d_{n+1,sr}^{(i)ms} + \frac{(n+2)(2n+5)}{2(2n+3)} c_{n+2,sr}^{(i)ms} r^2 \right] \mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=e,o} \left[\frac{(n+2)}{2} a_{n,sr}^{(e)ms} - \frac{1}{2} d_{n-1,sr}^{(e)ms} - \frac{(n-1)(2n-3)}{2(2n-1)} c_{n-2,sr}^{(e)ms} r^2 \right] \mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[b_{n,sr}^{(i)ms} \right] \mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[b_{n,sr}^{(e)ms} \right] \mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=e,o} \left[\frac{(n-1)}{(2n-1)} c_{n,sr}^{(i)ms} \right] \mathbf{G}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{s=e,o} \left[\frac{(n+2)}{(2n+3)} c_{n,sr}^{(e)ms} \right] \mathbf{G}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \quad (\text{II–2.62}) \end{aligned}$$

και, αν εφαρμόσουμε τις (II-1.95), (II-1.97), (II-1.100), (II-1.101), το πεδίο ολικής πίεσης υποθέτει τη μορφή

$$\begin{aligned} P_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = P_{0sr}^{PN} + \mu_0 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} (n+1)(2n+3) c_{n+1,sr}^{(i)ms} \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} n(2n-1) c_{n-1,sr}^{(e)ms} \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right\} \quad (\text{II-2.63}) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$. Το σύμβολο s δηλώνει το άρτιο (e) και περιττό (o) χαρακτήρα των δυναμικών.

Από την άλλη πλευρά, με τα ίδια στοιχεία με πριν αλλά και με χρήση του Θεωρήματος αναπαράστασης του Almansi (κοίτα Παράρτημα Γ) για την απεικόνιση των διαρμονικών συναρτήσεων, δηλαδή των δυναμικών που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή Δ^2 , καταλήγουμε στα παρακάτω αναπτύγματα Palaniappan *et al.* για το διαρμονικό δυναμικό A_{sr} , σε όρους των πραγματικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων αρτίου (e) ή περιττού (o) είδους,

$$\begin{aligned} A_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} f_{n,sr}^{(i)ms} \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} f_{n,sr}^{(e)ms} \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \\ + r^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} g_{n,sr}^{(i)ms} \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} g_{n,sr}^{(e)ms} \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right\} \quad (\text{II-2.64}) \end{aligned}$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ με πραγματικούς σταθερούς συντελεστές $f_{n,sr}^{(i)ms}$, $g_{n,sr}^{(i)ms}$, $f_{n,sr}^{(e)ms}$, $g_{n,sr}^{(e)ms}$ που ορίζονται στα αντίστοιχα διαστήματα των σειρών και για το αρμονικό δυναμικό

$$B_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} e_{n,sr}^{(i)ms} \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} e_{n,sr}^{(e)ms} \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \quad (\text{II-2.65})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ με πραγματικούς σταθερούς συντελεστές $e_{n,sr}^{(i)ms}$, $e_{n,sr}^{(e)ms}$.

Ακολουθώντας κάπως πιο πολύπλοκους υπολογισμούς, τα δυναμικά (II-2.64) και (II-2.65), σε συνδυασμό, τώρα, με τις (II-2.11), (II-2.12) και τις ταυτότητες (A.1), (A.2), (A.6), (A.47), (II-1.95)–(II-1.103), καθώς και τους ορισμούς των διανυσματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων (II-1.86) και (II-1.89) για τη διανυσματική απεικόνιση του $\nabla \times (\mathbf{r} B_{sr})$, παράγουν το πεδίο ταχύτητας (κοίτα και γενικό ανάπτυγμα (II-1.91))

$$\mathbf{v}_{sr}^{PNAU}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[(n+2) f_{n+1,sr}^{(i)ms} + \frac{(n+2)(2n+5)}{(2n+3)} g_{n+1,sr}^{(i)ms} r^2 \right] \mathbf{N}_n^{(i)ms}(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=e,o} \left[-(n-1) f_{n-1,sr}^{(e)ms} - \frac{(n-1)(2n-3)}{(2n-1)} g_{n-1,sr}^{(e)ms} r^2 \right] \mathbf{N}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[e_{n,sr}^{(i)ms} \right] \mathbf{M}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[e_{n,sr}^{(e)ms} \right] \mathbf{M}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=e,o} \left[\frac{2(n-1)}{(2n-1)} g_{n-1,sr}^{(i)ms} \right] \mathbf{G}_n^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{s=e,o} \left[\frac{2(n+2)}{(2n+3)} g_{n+1,sr}^{(e)ms} \right] \mathbf{G}_n^{(e)ms}(\mathbf{r}) \quad (\text{II-2.66})
\end{aligned}$$

και, αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα (Α.30), η $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ βοηθάει στο να εξασφαλιστεί το πεδίο ολικής πίεσης από την έκφραση

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{sr}^{PNAU}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{PNAU} + \mu_0 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} 2(n+1)(2n+3) g_{n,sr}^{(i)ms} \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right. \\
\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} 2n(2n-1) g_{n,sr}^{(e)ms} \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right\} \quad (\text{II-2.67})
\end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3)$.

Οι εσωτερικές διανυσματικές συμπαγείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις $\mathbf{N}^{(i)}$, $\mathbf{M}^{(i)}$, $\mathbf{G}^{(i)}$, καθώς και οι εσωτερικές διανυσματικές συμπαγείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις $\mathbf{N}^{(e)}$, $\mathbf{M}^{(e)}$, $\mathbf{G}^{(e)}$ ορίζονται από τις (II-1.85)–(II-1.87), (II-1.88)–(II-1.90), αντίστοιχα.

Από τις εκφράσεις για τα πεδία ροής (II-2.62), (II-2.63) και (II-2.66), (II-2.67) παρατηρούμε πόσο απλές είναι οι μορφές που καταλήξαμε με τη χρήση των διανυσματικών αρμονικών συναρτήσεων σε σύγκριση με τις εκφράσεις στην προηγούμενη παράγραφο. Εξάλλου, ο χαρακτήρας των διαφορικών αναπαραστάσεων που γράφονται σε όρους διαφορικών τελεστών που δρουν πάνω σε αρμονικές και διαρμονικές συναρτήσεις δημιουργεί πρόσφορο έδαφος για τη χρήση διανυσματικών συναρτήσεων που ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή του Laplace. Τέλος, παρατηρούμε ότι η διαρμονικότητα των πεδίων ταχύτητας εισάγεται στις εσωτερικές και εξωτερικές διανυσματικές συμπαγείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις τύπου $\mathbf{N}$.

II-2.3β Τύποι συσχέτισης Palaniappan et al. και Papkovich – Neuber.

Σε αυτή την παράγραφο, σκοπός μας είναι να βρούμε τα ακριβή αρμονικά και διαρμονικά δυναμικά, που δίνονται από τις εξισώσεις (II-2.60), (II-2.61) και, επιπλέον, (II-2.64), (II-2.65), οι οποίες καταλήγουν στην ίδια ταχύτητα και ολική πίεση. Από αυτή την άποψη, ψάχνουμε να βρούμε τύπους σύνδεσης για τις

διαφορικές αναπαραστάσεις Parkovich – Neuber και Palaniappan *et al.* που εξασφαλίζουν τις ταυτότητες

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_{sr}^{PNAU}(\mathbf{r}) \quad \text{και} \quad \mathbf{P}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{sr}^{PNAU}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\text{II-2.68})$$

Με βάση τις εξισώσεις (II-2.68), προχωράμε στη συσχέτιση των πεδίων ροής Parkovich – Neuber (II-2.62) και (II-2.63) με τα αντίστοιχα πεδία ροής της γενικής λύσης Palaniappan *et al.*, (II-2.66) και (II-2.67). Αυτή η συσχέτιση οδηγεί σε τύπους σύνδεσης που σχετίζουν τους αντίστοιχους σταθερούς συντελεστές των δυναμικών (II-2.60), (II-2.61), (II-2.64), (II-2.65). Αυτό που πραγματικά συμβαίνει είναι ότι η σύνδεση των πεδίων ταχύτητας και ολικής πίεσης μεταφέρεται στην αντίστοιχη σύνδεση των σταθερών συντελεστών των δυναμικών. Πράγματι, μετά από κάποιους απλούς υπολογισμούς, εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδιοσυναρτήσεων $\mathbf{N}^{(i/e)}$, $\mathbf{M}^{(i/e)}$, $\mathbf{G}^{(i/e)}$ και με γνωστά επιχειρήματα ορθογωνιότητας, καταλήγουμε στις

$$c_{n+1,sr}^{(i)ms} = 2g_{n,sr}^{(i)ms}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o, \quad (\text{II-2.69})$$

$$c_{n-1,sr}^{(e)ms} = 2g_{n,sr}^{(e)ms}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o, \quad (\text{II-2.70})$$

ως αποτέλεσμα της εξίσωσης των ολικών πιέσεων, ενώ

$$b_{n,sr}^{(i)ms} = e_{n,sr}^{(i)ms}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o, \quad (\text{II-2.71})$$

$$b_{n,sr}^{(e)ms} = e_{n,sr}^{(e)ms}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o, \quad (\text{II-2.72})$$

όπου είναι άμεση συνέπεια της ορθογωνιότητας των εσωτερικών και εξωτερικών διανυσματικών συμπαγών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων $\mathbf{M}$ στα πεδία ταχύτητας.

Πιο πολύπλοκες εκφράσεις προκύπτουν από τη σύνδεση των συντελεστών του αρμονικού μέρους των εσωτερικών και εξωτερικών διανυσματικών συμπαγών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων $\mathbf{N}$ στα πεδία ροής, δηλ.,

$$(n-2)a_{n-1,sr}^{(i)ms} + d_{n,sr}^{(i)ms} = -2(n+1)f_{n,sr}^{(i)ms} \quad (\text{II-2.73})$$

για $n = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$ και $s = e, o$ και

$$(n+3)a_{n+1,sr}^{(e)ms} - d_{n,sr}^{(e)ms} = -2nf_{n,sr}^{(e)ms} \quad (\text{II-2.74})$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, \dots, n$ και $s = e, o$.

Οι συντελεστές του διαρμονικού κομματιού των $\mathbf{N}$ -ιδιοσυναρτήσεων, καθώς και οι συντελεστές των $\mathbf{G}$ -ιδιοσυναρτήσεων ικανοποιούνται αυτόματα από τις παραπάνω εκφράσεις σύνδεσης οι οποίες και ολοκληρώνουν την σύνδεση των αναπαραστάσεων. Οι περιπτώσεις που δεν ακολουθούν τις γενικές σχέσεις (II-2.69)–(II-2.74) για $n = 0$ χειρίζονται ξεχωριστά. Αυτές αφορούν τους σταθερούς συντελεστές

$$g_{0,sr}^{(e)0e}, e_{0,sr}^{(i)0e}, e_{0,sr}^{(e)0e}, d_{0,sr}^{(i)0e}, f_{0,sr}^{(i)0e}, f_{0,sr}^{(e)0e} \in \textcircled{8}. \quad (\text{II-2.75})$$

Επιπλέον, η συσχέτιση των ολικών πιέσεων συνεπάγεται την εξίσωση των σταθερών πιέσεων αναφοράς που ορίστηκαν προηγουμένως, δηλαδή,

$$P_{0sr}^{PN} = P_{0sr}^{PNAU}. \quad (\text{II-2.76})$$

Σε αυτή την παράγραφο* αναπτύχθηκε μια μέθοδος σύνδεσης δύο διαφορετικών 3-D διαφορικών αναπαραστάσεων των λύσεων για τις εξισώσεις Stokes απουσία ιδιομορφιών στον άξονα συμμετρίας x_1 . Βασισμένοι σε αυτή τη μέθοδο, εξετάσαμε τις διαφορικές αναπαραστάσεις Parkovich – Neuber και Palaniappan *et al.*, οι οποίες προσφέρουν γενικές λύσεις για προβλήματα ροών που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes σε σφαιρική γεωμετρία. Τα σημαντικά φυσικά πεδία ροής (ταχύτητα, ολική πίεση) παρουσιάστηκαν σε όρους των διανυσματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων. Επιπλέον, η συσχέτιση αυτών των πεδίων οδήγησε σε τύπους σύνδεσης για τους σταθερούς συντελεστές των δυναμικών, χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα δυναμικά συναρτήσεις σφαιρικών ιδιολύσεων. Μια άμεση συνέπεια της συσχέτισης των αναπαραστάσεών μας για τις ροές Stokes είναι ότι η διαδικασία δεν είναι αντιστρέψιμη. Οπότε, συμπεραίνουμε ότι, πάντα μπορούν να υπολογιστούν τα πεδία ροής μέσω της αναπαράστασης Palaniappan *et al.* όταν είναι γνωστές οι ιδιομορφές Parkovich – Neuber, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή δεν μπορούμε να επιτύχουμε σχέσεις που να μας δίνουν τα δυναμικά Parkovich – Neuber μέσω των αρμονικών και διαρμονικών δυναμικών της γενικής διαφορικής λύσης Palaniappan *et al.* και, οπότε, δεν βρίσκουμε τα πεδία ταχύτητας και πίεσης. Αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στις σχέσεις σύνδεσης (II-2.73) και (II-2.73) που δεν μπορούν να αντιστραφούν και να μας δώσουν τους σταθερούς συντελεστές των δυναμικών της αναπαράστασης Parkovich – Neuber μέσω μόνο σταθερών συντελεστών της άλλης διαφορικής λύσης. Ωστόσο, αυτή η μη αντιστρεψιμότητα του πίνακα σύνδεσης των δύο αναπαραστάσεων αντιμετωπίζεται από το χαρακτήρα της λύσης Parkovich – Neuber όταν θελήσουμε να λύσουμε κάποιο συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα. Με άλλα λόγια η ευελιξία της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, που αναλύθηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο I-3 μας επιτρέπει να συνδέσουμε τα δυναμικά αυτής της αναπαράστασης από την σχέση (I-3.99), λόγω της αναφοράς

* Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παραγράφου II-2.3 αποτελούν μέρος της δημοσιευμένης εργασίας [43].

[48]. Τότε, μπορούμε να συσχετίσουμε τα δυναμικά κατάλληλα, δηλαδή να τα συνδέσουμε, ώστε να καταστήσουμε τη διαδικασία αντιστρέψιμη. Δηλαδή,

$$\Phi_{sr} = f(\Phi_{0sr}) \Rightarrow (a_{n,sr}^{(i/e)ms}, b_{n,sr}^{(i/e)ms}, c_{n,sr}^{(i/e)ms}) = f(d_{n,sr}^{(i/e)ms}) \quad (\text{II-2.77})$$

και τότε ο πίνακας αντιστρέφεται. Τέλος, παρόλο που οι δύο γενικές λύσεις δεν είναι ισοδύναμες, η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber είναι αυτή που δίνεται μέσω πιο απλής μορφής λόγω της εμφάνισης του διαρμονικού δυναμικού A_{sr} .

II-2.4 Συσχέτιση 2-D διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Stokes στη σφαιρική γεωμετρία.

II-2.4a Τα διδιάστατα πεδία ροής Stokes και Parkovich – Neuber.

Ένας από τους πιο αξιόπιστους τρόπους αντιμετώπισης αξονοσυμμετρικών ροών που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes είναι η εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης ροής, όπου αποτελεί το διδιάστατο δυναμικό απεικόνισης των πεδίων ταχύτητας και ολικής πίεσης. Δυστυχώς, στη γενική περίπτωση των τρισδιάστατων κινήσεων αυτή η μοναδική μέθοδος δεν είναι δυνατή, τουλάχιστον με την έννοια που γνωρίζουμε με συνέπεια να απαιτούνται πιο πολύπλοκες μέθοδοι. Ειδικά, όταν αλλάζει η γεωμετρία, μεταβάλλεται και ο βαθμός δυσκολίας και αν στην σφαιρική γεωμετρία η χρήση του δυναμικού ροής δεν επιφέρει τυχόν δυσκολίες, σε πιο πολύπλοκες γεωμετρίες είναι εμφανής η απαίτηση ενός εναλλακτικού τρόπου περιγραφής των πεδίων ροής. Έτσι, η εμφάνιση συγκεκριμένων απροσδιοριστιών μας εξαναγκάζει να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές προσεγγίσεις.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, δεν εμφανίζονται αυτές οι μορφές των απροσδιοριστιών κάτι που, πιθανόν, είναι αποτέλεσμα της πλήρους χωρισιμότητας μεταβλητών του διαφορικού τελεστή E^4 , κάτι που δεν γίνεται, όπως θα δούμε παρακάτω, στο επόμενο πιο πολύπλοκο αξονοσυμμετρικό σύστημα συντεταγμένων που είναι το σφαιροειδές. Πιο συγκεκριμένα, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο ΙΙ-1, η λύση για σφαιρικές συντεταγμένες λαμβάνεται σε απλή μορφή και οι τύποι καθίστανται έτοιμοι προς χρησιμοποίηση σε διάφορες εφαρμογές. Ο βαθμός δυσκολίας καθίσταται εξαιρετικά μεγάλος σε περιπτώσεις γεωμετριών που δεν επιδέχονται αξονική συμμετρία, οπότε είναι υποχρεωτική η συνδυαστική χρήση δύο συναρτήσεων ροής. Τότε, η ανάγκη

εμφάνισης των διαφορικών αναπαραστάσεων είναι επιτακτική, κάτι που φαίνεται και στο Κεφάλαιο IV–2, όπου επιλύεται συγκεκριμένο πρόβλημα σε ελλειψοειδή γεωμετρία και τυχόν απροσδιοριστίες αίρονται εξαιτίας της ευελιξίας των διαφορικών λύσεων, όπου προσφέρουν τα πεδία ροής μέσω περισσοτέρων από ένα δυναμικό.

Ωστόσο, είναι ενδιαφέρον να επιχειρήσουμε τη συσχέτιση της ήδη γνωστής μας διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber με τη διδιάστατη διαφορική λύση του Stokes σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αυτό είναι εφικτό αν συνδεθούν κατάλληλα οι αρμόδιες ιδιοσυναρτήσεις που παράγουν τα πεδία ροής μέσω των διαφορικών αναπαραστάσεων. Με άλλα λόγια, σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τα αξονοσυμμετρικά πεδία ροής, που παράγονται από τις συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις διαμέσου της αναπαράστασης Parkovich – Neuber και μετά να αντιμετωπίσουμε το αντίστροφο πρόβλημα του καθορισμού εκείνων των ιδιοσυναρτήσεων ροής, οι οποίες οδηγούν στα ίδια πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης μέσω της διδιάστατης αναπαράστασης Stokes σε σφαιρική γεωμετρία. Δηλαδή, θα συσχετίσουμε αυτές τις διαφορικές γενικές λύσεις με σκοπό να εξάγουμε, όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, τύπους σύνδεσης για τα δυναμικά που ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή του Laplace $\Delta (\Phi_{sr}, \Phi_{0sr})$ και το δυναμικό ροής που ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή $E^4 (\Psi_{sr})$ στη σφαιρική γεωμετρία. Συνεπώς, λόγω της τρισδιάστατης μορφής της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, υποχρεούμαστε να θεωρήσουμε αξονική συμμετρία για να είναι δυνατή η παραπάνω συσχέτιση σε 2–D χωρία, γεγονός που αντανάκλαται σε επιπλέον σχέσεις για τα δυναμικά Parkovich – Neuber. Φυσικά, σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε πεδία ροής χωρίς ιδιομορφίες στον άξονα συμμετρίας.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω, θα υιοθετήσουμε τη θεωρία των πραγματικών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων Y_n^{ms} που αναλύσαμε εκτενώς στο Κεφάλαιο II–1, παράγραφο II–1.2α. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον ορισμό των ιδιοσυναρτήσεων (II–1.32) για τις οποίες ισχύει η (II–1.33) και εισάγοντας το πλήρες σύνολο των εσωτερικών (εξίσωση (II–1.39)) και εξωτερικών (εξίσωση (II–1.40)) πραγματικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων, τα σφαιρικά αρμονικά δυναμικά της αναπαράστασης Parkovich – Neuber Φ_{sr} και Φ_{0sr} παρουσιάζονται από τα αναπτύγματα για $s = e, o$ (άρτια ή περιττά),

$$\Phi_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left(e_{n,sr}^{(i)ms} r^n + e_{n,sr}^{(e)ms} r^{-(n+1)} \right) Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{II-2.78})$$

και

$$\Phi_{0sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left(d_{n,sr}^{(i)ms} r^n + d_{n,sr}^{(e)ms} r^{-(n+1)} \right) Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{II-2.79})$$

αντίστοιχα, όπου για $n \geq 0$ και $s = e, o$

$$e_{n,sr}^{(i/e)ms} = c_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad d_{n,sr}^{(i/e)ms}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-2.80})$$

είναι οι εσωτερικοί και εξωτερικοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές των δυναμικών. Τα πεδία δυναμικών (II-2.78) και (II-2.79), σε συνδυασμό με τις (II-2.5), (II-2.6) και τις ταυτότητες (A.1), (A.2), (A.6), παράγουν το πεδίο ταχύτητας

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ \left[\left(e_{n,sr}^{(i)ms} r^n + e_{n,sr}^{(e)ms} r^{-(n+1)} \right) Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right] \right. \\ & - \left[\left(e_{n,sr}^{(i)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sr}^{(i)ms} \right] \nabla \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \\ & \left. - \left[\left(e_{n,sr}^{(e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sr}^{(e)ms} \right] \nabla \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{II-2.81}) \end{aligned}$$

ενώ για το πεδίο ολικής πίεσης, λόγω της (A.11),

$$\mathbf{P}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{PN} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[e_{n,sr}^{(i)ms} \cdot \nabla \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) + e_{n,sr}^{(e)ms} \cdot \nabla \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right] \quad (\text{II-2.82})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, ο διανυσματικός σταθερός συντελεστής $e_{n,sr}^{(i/e)ms}$ από την (II-2.80) επιδέχεται την πιο κάτω αναπαράσταση αν χρησιμοποιήσουμε τις (II-1.13)–(II-1.15),

$$\begin{aligned} e_{n,sr}^{(i/e)ms} = & \left[\left(a_{n,sr}^{(i/e)ms} \cos \varphi + b_{n,sr}^{(i/e)ms} \sin \varphi \right) \sqrt{1 - \zeta^2} + c_{n,sr}^{(i/e)ms} \zeta \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[\left(a_{n,sr}^{(i/e)ms} \cos \varphi + b_{n,sr}^{(i/e)ms} \sin \varphi \right) \zeta - c_{n,sr}^{(i/e)ms} \sqrt{1 - \zeta^2} \right] \hat{\boldsymbol{\zeta}} \\ & + \left(-a_{n,sr}^{(i/e)ms} \sin \varphi + b_{n,sr}^{(i/e)ms} \cos \varphi \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad |\zeta| \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (\text{II-2.83}) \end{aligned}$$

για κάθε τιμή βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, της τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και του χαρακτήρα $s = e, o$. Άμεση συνέπεια της (II-2.83) είναι η εξαγωγή της

$$\left(e_{n,sr}^{(i/e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) = \left(a_{n,sr}^{(i/e)ms} \cos \varphi + b_{n,sr}^{(i/e)ms} \sin \varphi \right) r \sqrt{1 - \zeta^2} + c_{n,sr}^{(i/e)ms} r \zeta, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{II-2.84})$$

2.84)

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$.

Εφόσον η γενική διαφορική λύση Parkovich – Neuber αναφέρεται σε 3- D χωρία ροής, οφείλουμε να μειώσουμε τις διαστάσεις σε δύο, θεωρώντας αξονική συμμετρία, με σκοπό να καταστήσουμε τη συσχέτιση με την αναπαράσταση Stokes δυνατή. Αυτό είναι εφικτό και απαιτεί το ίδιο πεδίο ταχύτητας σε κάθε μεσημβρινό επίπεδο, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο I-3, σχέσεις (I-3.100) και (I-3.101). Αναλυτικότερα, η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη της αξιμούθιας γωνίας Φ , δηλ.,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r})}{\partial \Phi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{II-2.85})$$

καθώς επίσης, το πεδίο ταχύτητας δεν έχει αξιμουθιακή συνιστώσα, δηλ.,

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\text{II-2.86})$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις εκφυλισμού από 3- D πεδία σε 2- D χωρία (II-2.85) και (II-2.86) στο πεδίο ταχύτητας (II-2.81), λαμβάνουμε τις απαραίτητες εκφράσεις για τους σταθερούς συντελεστές, όπου αντανakλούν την επιβαλλόμενη αξονική συμμετρία,

$$a_{n,sr}^{(i)ms} = b_{n,sr}^{(i)ms} = a_{n,sr}^{(e)ms} = b_{n,sr}^{(e)ms} = 0, \quad n \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o \quad (\text{II-2.87})$$

και

$$c_{n,sr}^{(i)ms} = d_{n,sr}^{(i)ms} = c_{n,sr}^{(e)ms} = d_{n,sr}^{(e)ms} = 0, \quad n \geq 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad s = e, o. \quad (\text{II-2.88})$$

Άρα, οι εναπομείναντες σταθεροί συντελεστές, δηλαδή,

$$c_{n,sr}^{(i/e)} \equiv c_{n,sr}^{(i/e)0e} \quad \text{και} \quad d_{n,sr}^{(i/e)} \equiv d_{n,sr}^{(i/e)0e}, \quad n \geq 0, \quad (\text{II-2.89})$$

αναφέρονται στα αξονοσυμμετρικά πεδία ροής Parkovich – Neuber απουσία ιδιομορφιών πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 . Δίνοντας βάση στις σχέσεις (II-2.87) και (II-2.88), τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης, που δίνονται από τις (II-2.81)–(II-2.84), απλοποιούνται σημαντικά παρέχοντάς μας τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(i)} r^n P_n(\zeta) + \mathbf{e}_{n,sr}^{(e)} r^{-(n+1)} P_n(\zeta) \right) \right. \\ \left. - \left[\left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(i)} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sr}^{(i)} \right] \nabla \left(r^n P_n(\zeta) \right) \right. \\ \left. - \left[\left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(e)} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sr}^{(e)} \right] \nabla \left(r^{-(n+1)} P_n(\zeta) \right) \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad (\text{II-2.90}) \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση του ορισμού (II-1.32) με P_n να αντιστοιχεί στις συναρτήσεις ή στα πολώνυμα του Legendre πρώτου είδους που είδαμε στο Παράρτημα Β, ενώ για το πεδίο ολικής πίεσης η αντίστοιχη αξονοσυμμετρική έκφραση είναι η

$$P_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = P_{0sr}^{PN} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbf{e}_{n,sr}^{(i)} \cdot \nabla (r^n P_n(\zeta)) + \mathbf{e}_{n,sr}^{(e)} \cdot \nabla (r^{-(n+1)} P_n(\zeta)) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2). \quad (\text{II-2.91})$$

Τώρα, όμως,

$$\mathbf{e}_{n,sr}^{(i/e)} = \mathbf{e}_{n,sr}^{(i/e)0e} = c_{n,sr}^{(i/e)} \left(\zeta \hat{\mathbf{r}} \zeta - \sqrt{1-\zeta^2} \hat{\mathbf{x}} \right) = c_{n,sr}^{(i/e)} \hat{\mathbf{e}}_1, \quad |\zeta| \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (\text{II-2.92})$$

για κάθε τιμή του βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, όπου

$$(\mathbf{e}_{n,sr}^{(i/e)} \cdot \mathbf{r}) = c_{n,sr}^{(i/e)} r \zeta, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2) \quad (\text{II-2.93})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και οι τελευταίες αποτελούν το διδιάστατο εκφυλισμό των εκφράσεων (II-2.83) και (II-2.84).

Η εφαρμογή του διαφορικού τελεστή της βάθμωσης ∇ στη μορφή (II-1.18) στις εσωτερικές και εξωτερικές αρμονικές συναρτήσεις ελλείψει αζιμουθίου, μας εφοδιάζει με τα ομαλά πάνω στον άξονα συμμετρίας σφαιρικά πεδία ροής Parkovich – Neuber, οπότε το πεδίο ταχύτητας (II-2.90) υποθέτει τη διδιάστατη μορφή

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(r, \zeta) = v_{r,sr}^{PN}(r, \zeta) \hat{\mathbf{r}} \zeta + v_{\zeta,sr}^{PN}(r, \zeta) \hat{\mathbf{e}}_1, \quad r > 0, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{II-2.94})$$

όπου οι συνιστώσες της εκφράζονται συναρτήσει της ακτινικής συνιστώσας r και των συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους P_n και P_n^1 μέσω των

$$v_{r,sr}^{PN}(r, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ (n+1) \left(\frac{(n+3)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(e)} + d_{n,sr}^{(e)} \right) r^{-(n+2)} + \frac{n(n+1)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(e)} r^{-n} \right. \\ \left. - n \left(\frac{(n-2)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(i)} + d_{n,sr}^{(i)} \right) r^{n-1} - \frac{n(n+1)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(i)} r^{n+1} \right\} P_n(\zeta) \quad (\text{II-2.95})$$

και

$$v_{\zeta,sr}^{PN}(r, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{(n+3)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(e)} + d_{n,sr}^{(e)} \right) r^{-(n+2)} + \frac{(n-2)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(e)} r^{-n} \right. \\ \left. + \left(\frac{(n-2)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(i)} + d_{n,sr}^{(i)} \right) r^{n-1} + \frac{(n+3)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(i)} r^{n+1} \right\} P_n^1(\zeta) \quad (\text{II-2.96})$$

ενώ για την ολική πίεση (II-2.91) καταλήγουμε στην

$$P_{sr}^{PN}(r, \zeta) = P_{0sr}^{PN} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) c_{n+1,sr}^{(i)} r^n - n c_{n-1,sr}^{(e)} r^{-(n+1)} \right] P_n(\zeta) \quad (\text{II-2.97})$$

για κάθε $r > 0$ και $|\zeta| \leq 1$.

Παρόμοια, το πλήρες ανάπτυγμα της συνάρτησης ροής Stokes που ανήκει στον $\ker E^4$, όπου η εξίσωση κινήσεως χωρίζει μεταβλητές σε σφαιρικές συντεταγμένες,

δίνεται μέσω των συναρτήσεων Gegenbauer πρώτου G_n και δευτέρου H_n στη μεταβλητή ζ , $\zeta \in [-1, 1]$ (κοίτα Παράρτημα Β). Το παραπάνω ανάπτυγμα περιγράφηκε στο Κεφάλαιο II-1, σχέση (II-1.110). Μια παρόμοια θεώρηση με αυτή της αναπαράστασης Parkovich – Neuber περιλαμβάνει μια σειρά από ποικίλα βήματα απλοποιήσεων που εξαιρούν την παρουσία ιδιομορφιών στον άξονα συμμετρίας με αποτέλεσμα η σφαιρική συνάρτηση ροής (II-1.110) να εκφυλιστεί στην

$$\Psi_{sr}(r, \zeta) = \sum_{n=2}^{\infty} (A_{n, sr}^i r^n + B_{n, sr}^i r^{n+2} + A_{n, sr}^e r^{1-n} + B_{n, sr}^e r^{3-n}) G_n(\zeta) \quad (\text{II-2.98})$$

για $r > 0$ και $|\zeta| \leq 1$, όπου το άθροισμα με τους A -συντελεστές αναπαριστά ένα στοιχείο του χώρου $\ker E^2$, ενώ το άθροισμα με τους B -συντελεστές αποτελεί μια συνάρτηση που βρίσκεται στο χώρο $\ker E^2$ υπό τη δράση του τελεστή E^2 .

Οι σχετικές αναπαραστάσεις των πεδίων ροής Stokes προκύπτουν με το να εισάγουμε τη συνάρτηση ροής (II-2.98) στο πεδίο ταχύτητας (II-2.15) και στο πεδίο ολικής πίεσης (II-2.17). Οπότε, λόγω συμμετρικότητας, η παρακάτω αναπαράσταση για το πεδίο ταχύτητας είναι αληθής,

$$\mathbf{v}_{sr}^S(r, \zeta) = \mathbf{v}_{r, sr}^S(r, \zeta) \hat{\mathbf{r}} \zeta + \mathbf{v}_{\zeta, sr}^S(r, \zeta) \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad r > 0, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{II-2.99})$$

όπου, εδώ, οι συνιστώσες στις δύο κύριες διευθύνσεις της σφαίρας υποθέτουν τις μορφές

$$\mathbf{v}_{r, sr}^S(r, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_{n+1, sr}^e r^{-(n+2)} - B_{n+1, sr}^e r^{-n} - A_{n+1, sr}^i r^{n-1} - B_{n+1, sr}^i r^{n+1} \right] P_n(\zeta) \quad (\text{II-2.100})$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\zeta, sr}^S(r, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left[-n A_{n+1, sr}^e r^{-(n+2)} - (n-2) B_{n+1, sr}^e r^{-n} \right. \\ \left. + (n+1) A_{n+1, sr}^i r^{n-1} + (n+3) B_{n+1, sr}^i r^{n+1} \right] P_n^1(\zeta) \end{aligned} \quad (\text{II-2.101})$$

για $r > 0$ και $|\zeta| \leq 1$. Το πεδίο ολικής πίεσης στις δύο διαστάσεις δίνεται από την ολοκληρωτική έκφραση

$$\begin{aligned}
P_{sr}^S(r, \zeta) = & P_{0sr}^S + \mu_0 \left\{ \int_{+\infty}^r \left[\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left((2n-1) B_{n+1, sr}^e r^{-(n+2)} - (2n+3) B_{n+1, sr}^i r^{n-1} \right) P_n(\zeta) \right] dr' \right. \\
& \left. - \int_0^{\zeta} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)} \left(n(2n-1) B_{n+1, sr}^e r'^{-(n+1)} + (n+1)(2n+3) B_{n+1, sr}^i r'^n \right) \frac{P_n(\zeta')}{\sqrt{1-\zeta'^2}} \right] d\zeta' \right\},
\end{aligned}
\tag{II-2.102}$$

όπου $r > 0$, $|\zeta| \leq 1$.

II-2.4β Τύποι συσχέτισης Stokes και Parkovich – Neuber.

Σε αυτή την παράγραφο, σκοπός μας είναι να βρούμε τα ακριβή δυναμικά Parkovich – Neuber (II-2.78), (II-2.79), μαζί με τις (II-2.87), (II-2.88) και την αντίστοιχη συνάρτηση ροής (II-2.98), τα οποία συνεπάγονται τα ίδια πεδία ταχύτητας και πίεσης. Από αυτή τη σκοπιά, ψάχνουμε τύπους σύνδεσης, για τις πλέον διδιάστατες, διαφορικές αναπαραστάσεις, που να συμπίπτουν με τις εξισώσεις

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_{sr}^S(\mathbf{r}) \quad \text{και} \quad P_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = P_{sr}^S(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\Theta^2). \tag{II-2.103}$$

Η (II-2.103) αποτελεί τον κρίκο σύνδεσης των πεδίων ροής Parkovich – Neuber (σχέσεις (II-2.94)–(II-2.97)) και των αντιστοιχών πεδίων ροής της αναπαράστασης Stokes (σχέσεις (II-2.99)–(II-2.102)). Η συσχέτιση των δύο διαφορικών λύσεων μας οδηγεί σε τύπους σύνδεσης που συσχετίζουν τους αντίστοιχους σταθερούς συντελεστές των δυναμικών. Αυτάματα, λοιπόν, παίρνουμε

$$c_{n, sr}^{(i)} = \frac{2(2n+1)}{n(n-1)} B_{n, sr}^i, \quad n \geq 2, \tag{II-2.104}$$

$$c_{n, sr}^{(e)} = -\frac{2(2n+1)}{(n+1)(n+2)} B_{n+2, sr}^e, \quad n \geq 0, \tag{II-2.105}$$

όπου φαίνεται η σύνδεση των δυναμικών Φ_{sr} και Ψ_{sr} . Επιπλέον,

$$d_{n, sr}^{(i)} = 2 \left(\frac{1}{n} A_{n+1, sr}^i - \frac{1}{(n-1)} B_{n-1, sr}^i \right), \quad n \geq 3, \tag{II-2.106}$$

$$d_{n, sr}^{(e)} = -2 \left(\frac{1}{(n+1)} A_{n+1, sr}^e - \frac{1}{(n+2)} B_{n+3, sr}^e \right), \quad n \geq 1, \tag{II-2.107}$$

φόρμουλα που σχετίζει τα δυναμικά $\Phi_{0,sr}$ και Ψ_{sr} , όπου οι παραπάνω με απλή άλγεβρα μπορούν να αντιστραφούν και να μας δώσουν τους A και B σταθερούς συντελεστές συναρτήσεων των c και d σταθερών συντελεστών.

Οι περιπτώσεις που δεν ικανοποιούν τις παραπάνω γενικές σχέσεις μελετώνται ξεχωριστά και, συνεπώς, καταλήγουμε στις

$$d_{1,sr}^{(i)} = 2A_{2,sr}^i + c_{0,sr}^{(i)}, \quad d_{2,sr}^{(i)} = A_{3,sr}^i \quad \text{και} \quad d_{0,sr}^{(e)} = B_{3,sr}^e, \quad (\text{II-2.108})$$

ενώ

$$c_{0,sr}^{(i)}, c_{1,sr}^{(i)}, d_{0,sr}^{(i)} \in \mathbf{8}. \quad (\text{II-2.109})$$

Τέλος, η συσχέτιση των ολικών πιέσεων συνεπάγεται την εξίσωση των σταθερών πιέσεων αναφοράς, δηλαδή,

$$P_{0,sr}^{PN} = P_{0,sr}^S. \quad (\text{II-2.110})$$

Η πλήρης λύση για τις εξισώσεις Stokes σε σφαιρικές συντεταγμένες επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας αυτές τις διαφορικές λύσεις, που λαμβάνονται από τα αρμονικά δυναμικά για την αναπαράσταση Parkovich – Neuber και το δυναμικό της συνάρτησης ροής για την αναπαράσταση Stokes. Σε αυτή την παράγραφο* αναπτύχθηκε μια μέθοδος σύνδεσης δύο διαφορετικών $2-D$ διαφορικών αναπαραστάσεων των λύσεων για τις εξισώσεις Stokes χωρίς ιδιομορφίες στον άξονα συμμετρίας x_1 . Βασισμένοι σε αυτή τη μέθοδο, κατασκευάσαμε τα πεδία ροής από τις δύο γενικές λύσεις. Τύποι σύνδεσης ευρέθηκαν που συσχετίζουν τα αντίστοιχα δυναμικά. Πιο συγκεκριμένα, βρήκαμε εκφράσεις μεταξύ των σταθερών συντελεστών των αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων και της ιδιοσυνάρτησης ροής. Η διαδικασία αποδεικνύεται ότι είναι αντιστρέψιμη, γεγονός που, όταν αναφερόμαστε σε επίπεδο συσχέτισης, δεν απαιτείται να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της αναφοράς [48]. Ωστόσο, μια ματιά στα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης στην αναπαράσταση Parkovich – Neuber, σχέσεις (II-2.94)–(II-2.97), αποκαλύπτει αυτή την εξαιρετικά χρήσιμη ευελιξία της εν λόγω διαφορικής λύσης. Αυτό γίνεται κατανοητό αν προσέξουμε τις συνιστώσες του πεδίου ταχύτητας, είτε της $u_{r,sr}^{PN}$, είτε της $u_{\zeta,sr}^{PN}$ και ειδικά τους συντελεστές του $r^{-(n+2)}$ και του r^{n-1} , $n \geq 1$ που ενσωματώνουν σε μια σταθερά τους σταθερούς συντελεστές $c_{n+1,sr}^{(e)}$, $d_{n,sr}^{(e)}$ και $c_{n-1,sr}^{(i)}$, $d_{n,sr}^{(i)}$, αντίστοιχα.

* Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παραγράφου II-2.4 αποτελούν μέρος της δημοσιευμένης εργασίας [117].

Συνεπώς, είναι φανερό πως ο τρόπος εμφάνισης των σταθερών εκφράζει την ευελιξία της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber που, στη σφαιρική γεωμετρία, είναι πιο αντιληπτή. Άρα, μπορούμε να εκφράσουμε τους c –συντελεστές συναρτήσεων των d –συντελεστών χωρίς να αλλοιωθεί το πεδίο ροής της ταχύτητας.

Ανακεφαλαίωση–παρατηρήσεις.

Στις παραγράφους ΙΙ-2.2, ΙΙ-2.3 και ΙΙ-2.4 συσχετίσαμε, στη σφαιρική γεωμετρία, τα δυναμικά των ζευγών των διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin (3- D), Parkovich – Neuber και Palaniappan *et al.* (3- D) και Parkovich – Neuber και Stokes (2- D), αντίστοιχα, μεταφέροντας τη σύνδεση στους σταθερούς συντελεστές των δυναμικών. Είναι φανερό πως η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber πλεονεκτεί των άλλων και λόγω της απλότητάς της και λόγω της πληροφορίας της αναφοράς [48], όπου μας επιτρέπει να συνδυάσουμε τα δυναμικά που εμπλέκονται σε αυτή την διαφορική λύση τυχαία,

$$\Phi_{0sr} = f(\Phi_{sr}), \quad (\text{ΙΙ-2.111})$$

σχέση που, τελικά, δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί στις σφαιρικές συντεταγμένες και ιδίως όταν η γενική αυτή λύση εφαρμόζεται σε φυσικά προβλήματα. Αυτή την ιδιότητα, όμως, θα τη δούμε καλύτερα στο επόμενο κεφάλαιο των εφαρμογών που δεν απαιτείται η εισαγωγή μιας σχέσης της μορφής (ΙΙ-2.111), σε αντίθεση με την πιο πολύπλοκη σφαιροειδή γεωμετρία (κοίτα και την εφαρμογή στο Κεφάλαιο ΙΙΙ-3), όπου το πρόβλημα είναι εμφανές και η ανάγκη για χρήση της (ΙΙ-2.111) επιτακτική.

Διατηρήθηκε η γνωστή θεώρηση των εσωτερικών και εξωτερικών ιδιοσυναρτήσεων απουσία ιδιομορφιών ή πηγών στον άξονα συμμετρίας x_1 . Η απαίτηση αυτή είναι υποχρεωτική γιατί πέρα από το φυσικό υπόβαθρο των ομαλών πεδίων ροής σε συνθήκες κατά Stokes, υπάρχει και εξίσου μαθηματικός λόγος ο οποίος αναφέρεται σε επιχειρήματα ορθογωνιότητας. Δηλαδή, η ύπαρξη ανώμαλων ειδικών συναρτήσεων για $\zeta = \pm 1$, όπως των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre δευτέρου είδους Q_n^m και των συναρτήσεων Gegenbauer δευτέρου είδους H_n θα δημιουργούσε πρόβλημα και στην εύρεση των φόρμουλων σύνδεσης των σταθερών συντελεστών αφού δεν θα ήταν δυνατή η εφαρμογή των γνωστών σχέσεων ορθογωνιότητας που αναφέρονται σε ομαλές ειδικές συναρτήσεις στον άξονα συμμετρίας.

Η σταθερή πίεση αναφοράς συνήθως λαμβάνεται σε ένα σημείο βολικό ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα. Ένα τέτοιο σημείο αποτελεί η θέση στον ισημερινό και σε συγκεκριμένη απόσταση από το υπό μελέτη σωματίδιο.

Τέλος, λόγω της ιδιότητας της μεταβατικότητας, μέσα από τις σχέσεις σύνδεσης που εξάγαμε, ο ενδιαφερόμενος μπορεί να καταλήξει σε τύπους σύνδεσης των δυναμικών Boussinesq – Galerkin ($3-D$), Palaniappan *et al.* ($3-D$) και Stokes ($2-D$) κάνοντας τις απαραίτητες αναγωγές για τις μιγαδικές, διανυσματικές και πραγματικές επιφανειακές και συμπαγείς σφαιρικές ιδιοσυναρτήσεις, καθώς και στα τρισδιάστατα σε διδιάστατα χωρία. Οι αλλαγές μεταφέρονται αυτόματα στους σταθερούς συντελεστές και παράγονται ανάλογοι τύποι με αυτούς που παρατέθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο.

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ-3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΚΥΤΤΑΡΑ (SR)

ΙΙ-3.1 Τα σφαιρικά πεδία ροής στα μοντέλα Kuwabara (2- D), Happel (3- D).

Στο Κεφάλαιο Ι-4 αναλύσαμε εκτενώς την ιδέα των μοντέλων “σωματίδιο σε κύτταρο” σε σύστημα σωματιδίου–ρευστού για σμήνη σωματιδίων μέσα σε πορώδη μέσα. Μετά από μια αναλυτική παρουσίαση της βιβλιογραφίας, παραθέσαμε τα δύο βασικά μοντέλα κυττάρων με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara και Happel που θεωρούν ότι η ροή γύρω από οποιοδήποτε στερεό σφαιρικό σωματίδιο του σμήνους, προσεγγίζεται με τη ροή μέσα σε ένα ρευστό σφαιρικό στρώμα που περιβάλλει τη στερεά σφαίρα. Το πάχος του ρευστού στρώματος υπολογίζεται έτσι ώστε το κλάσμα του στερεού όγκου του κυττάρου, που δηλώνει τη στερεή σφαίρα με το ρευστό φλοιό, να είναι ίσο με το κλάσμα του στερεού όγκου όλου του σμήνους.

Σύμφωνα, λοιπόν, με την παραπάνω θεώρηση τα δύο προαναφερθέντα μοντέλα μελετούν την κίνηση του ρευστού στο ρευστό φλοιό μεταξύ των δύο επιφανειών της

στερεής σφαίρας και της ρευστής επιφάνειας που την περιβάλλει. Με αυτό τον τρόπο μοντελοποιείται η ροή του σμήνους των σωματιδίων μέσα στο πορώδες μέσο, λαμβάνοντας εκφράσεις για τα πεδία ροής. Τα μοντέλα κυττάρων Kuwabara [66] και Happel [54] θεωρούν ότι και το σωματίδιο και ο εξωτερικός φλοιός είναι σφαιρικά, διατηρώντας με αυτό τον τρόπο την αξονική συμμετρία της ροής. Από την άλλη πλευρά, τα συγκεκριμένα μοντέλα μειονεκτούν στο ότι δεν καλύπτουν πλήρως τον χώρο του πορώδους μέσου με αποτέλεσμα η επιβαλλόμενη ταχύτητα ροής μέσα στον ρευστό φλοιό να μην συμπίπτει με την αντίστοιχη επιβαλλόμενη ταχύτητα – λαμβάνοντας υπόψη και τα διάκενα – στο πορώδες μέσο, φαινόμενο που μελετήθηκε στην [38]. Το μοντέλο του Kuwabara υποθέτει ότι το σωματίδιο είναι ακίνητο και το ρευστό κινείται με μια ομοιόμορφη ταχύτητα στην διεύθυνση του άξονα συμμετρίας, ενώ το μοντέλο Happel υποθέτει ότι το σωματίδιο κινείται ομοιόμορφα μέσα σε ηρεμούν ρευστό. Η διαφορά ανάμεσα στα δύο μοντέλα έγκειται στις συνοριακές συνθήκες και το κύτταρο Happel είναι ελαφρώς πιο αξιόπιστο από το κύτταρο Kuwabara εφόσον δεν επιτρέπει την ανταλλαγή μηχανικής ενέργειας με το εξωτερικό περιβάλλον. Το συγκεκριμένο γεγονός επιβεβαιώνεται από τη μοναδική διαφορετική συνοριακή συνθήκη που καθορίζει και την εν λόγω αξιοπιστία. Έτσι, ενώ στο κύτταρο Kuwabara μηδενίζεται ο στροβιλισμός στην εξωτερική ρευστή επιφάνεια, στο κύτταρο Happel μηδενίζονται οι εφαπτομενικές τάσεις.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα της ροής σωματιδίων σε κύτταρο χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara και Happel σε σφαιρικές συντεταγμένες από τις γενικές εκφράσεις τους που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο I-4. Πιο συγκεκριμένα, θα επαναλάβουμε το ήδη γνωστό πρόβλημα του Kuwabara στις δύο διαστάσεις κάνοντας χρήση της θεωρίας των διαφορικών αναπαραστάσεων για τον υπολογισμό των πεδίων ροής. Με αυτό τον τρόπο θα ανακτήσουμε τα διορθωμένα αποτελέσματα του συγκεκριμένου προβλήματος (1959) και θα αποκτήσουμε μια αίσθηση της “λειτουργίας” των διαφορικών αναπαραστάσεων στην επίλυση τέτοιου είδους φυσικών προβλημάτων. Επιπλέον, θα επιλύσουμε το σφαιρικό κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel, όχι όμως στις δύο διαστάσεις, αλλά σε τρισδιάστατα χωρία, όπου οι ήδη γνωστές συνοριακές συνθήκες [54] τροποποιούνται κατάλληλα ώστε να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι η επιβαλλόμενη κίνηση περιλαμβάνει μαζί με τη μεταφορά και

περιστροφή. Η δουλειά αυτή αποτελεί και πρωτότυπη εργασία σε αντίθεση με την προηγούμενη.

Γενικά, θα ασχοληθούμε με $3-D$,

$$\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \equiv \{(r, \zeta, \varphi) : r > 0, |\zeta| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}, \quad r : \text{φραγμένο} \quad (\text{II-3.1})$$

ή $2-D$,

$$\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \equiv \{(r, \zeta) : r > 0, |\zeta| \leq 1\}, \quad r : \text{φραγμένο}, \quad (\text{II-3.2})$$

συμπαγή σφαιρικά ομαλά και φραγμένα πεδία, καθώς και με $3-D$,

$$\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \equiv \{(\zeta, \varphi) : |\zeta| \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad (\text{II-3.3})$$

ή $2-D$,

$$\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \equiv \{\zeta : |\zeta| \leq 1\}, \quad (\text{II-3.4})$$

επιφανειακά σφαιρικά ομαλά πεδία, όπου

$$\partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \partial \Omega_i(\mathbf{\Theta}^3) \cup \partial \Omega_e(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{II-3.5})$$

και

$$\partial \Omega(\mathbf{\Theta}^2) = \partial \Omega_i(\mathbf{\Theta}^2) \cup \partial \Omega_e(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{II-3.6})$$

Το σύμβολο $\partial \Omega_i$ δηλώνει την επιφάνεια του στερεού σφαιρικού σωματιδίου, ενώ το σύμβολο $\partial \Omega_e$ υποδεικνύει το ρευστό σύνορο του μοναδιαίου κυττάρου που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της ροής σμήνους σωματιδίων. Τελικά, η ολική επιφάνεια $\partial \Omega$ καθορίζεται από την ένωση αυτών των δύο επιφανειών των ομόκεντρων σφαιρών. Σχηματικά, η παρουσίαση των δύο μοντέλων με τα αρμόδια χωρία και την απαραίτητη φυσική αναπαρίσταται από τα Γραφήματα I-4.2 και I-4.3. Οι γενικές συνοριακές συνθήκες παίρνονται από τις σχέσεις (I-4.1)–(I-4.6) για τη θεώρηση Kuwabara και από τις σχέσεις (I-4.7)–(I-4.11) για τη θεώρηση Happel. Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε, και σε αυτή την παράγραφο, τον ορισμό για τις τροποποιημένες σφαιρικές συντεταγμένες που δίνονται από την εξίσωση (II-1.1).

Για την εύρεση των πεδίων ροής και στα δύο μοντέλα θα εισάγουμε την τρισδιάστατη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber (PN) [81,123], που δίνεται σε όρους των αρμονικών δυναμικών Φ_{sr} και Φ_{0sr} ,

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_{sr}(\cdot) - \frac{1}{2} \nabla (\Phi \cdot \mathbf{r}_{sr}(\cdot) + \Phi_{0sr}(\cdot)), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{II-3.7})$$

για την ταχύτητα και

$$\mathbf{P}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{PN} - \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{r}_{sr}(\cdot), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{II-3.8})$$

για την ολική πίεση, όπου P_{0sr}^{PN} είναι η πίεση αναφοράς ορισμένη στον ισημερινό και

$$\Delta \Phi_{sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta \Phi_{0sr}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3). \quad (\text{II-3.9})$$

Η ολική πίεση παράγεται από το άθροισμα της θερμοδυναμικής πίεσης p_{sr}^{PN} και της βαρυτικής δύναμης $\rho_0 g x_1$ (g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας),

$$P_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = p_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) + \rho_0 g x_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3), \quad (\text{II-3.10})$$

όπου το x_1 δηλώνει ένα αυθαίρετο ύψος αναφοράς και μ_0 , ρ_0 είναι το δυναμικό ιξώδες και η πυκνότητα του ρευστού, αντίστοιχα.

Δύο βασικά μεγέθη που εξασφαλίζουν την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών στην επίλυση των δύο μοντέλων σωματιδίων σε κύτταρο Kuwabara και Happel είναι ο στροβιλισμός ω_{sr}^{PN} ,

$$\omega_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3) \quad (\text{II-3.11})$$

και ο ολικός τανυστής των τάσεων $\tilde{\mathbf{P}}_{sr}^{PN}$,

$$\tilde{\mathbf{P}}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = -p_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \left[\nabla \otimes \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) + \left(\nabla \otimes \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) \right)^T \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3), \quad (\text{II-3.12})$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό,

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \zeta^2 + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (\text{II-3.13})$$

και το σύμβολο “ T ” δηλώνει αναστροφή. Σε αυτό το σημείο, για πληρότητα, συνοψίζουμε τους βασικούς διαφορικούς τελεστές της βάθμωσης ∇ ,

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \zeta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3) \quad (\text{II-3.14})$$

και του Laplace Δ ,

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1-\zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] + \frac{1}{r^2 (1-\zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{S}^3), \quad (\text{II-3.15})$$

όπου $\hat{\mathbf{r}} \zeta \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ αντιπροσωπεύουν τα μοναδιαία διανύσματα της σφαιρικής γεωμετρίας.

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια μιας σφαίρας συμπίπτει με το ακτινικό ορθομοναδιαίο σφαιρικό διάνυσμα, δηλ.,

$$\hat{\mathbf{n}}_{sr}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \zeta \hat{\mathbf{x}}_1 + \sqrt{1-\zeta^2} \cos\varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \sqrt{1-\zeta^2} \sin\varphi \hat{\mathbf{x}}_3, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{II-3.16})$$

Τέλος, στην περίπτωση των αξονοσυμμετρικών πεδίων ροής,

$$\Omega(\mathbf{B}^3) \equiv \Omega(\mathbf{B}^2) \quad \text{και} \quad \partial\Omega(\mathbf{B}^3) \equiv \partial\Omega(\mathbf{B}^2), \quad (\text{II-3.17})$$

υπενθυμίζουμε ότι ο εκφυλισμός από τα τρισδιάστατα (3-D) σε διδιάστατα (2-D) χωρία αντανακλάται στη σχέση αξιμουθιακής ανεξαρτησίας,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r})}{\partial \varphi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{II-3.18})$$

καθώς επίσης και στην έλλειψη αξιμουθιακής συνιστώσας,

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \quad (\text{II-3.19})$$

Ολοκληρώσαμε, λοιπόν, τη συγκέντρωση των βασικών εργαλείων επίλυσης των μοντέλων σωματιδίου-ρευστού και την παράθεση των κύριων πεδίων ροής (ταχύτητα, ολική πίεση, στροβιλισμός και ολικός τανυστής των τάσεων) που υπεισέρχονται στις συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara και Happel είτε σε τρισδιάστατα χωρία, αλλά και σε πεδία με αξονική συμμετρία χρησιμοποιώντας τη γενική διαφορική λύση που προτάθηκε από τους Papkovitch – Neuber.

Αναφερόμενοι στις γενικές πληροφορίες του Κεφαλαίου ΙΙ-1, εισάγουμε το σύνολο των $2n+1$ γραμμικών ανεξάρτητων πραγματικών επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων Y_n^{ms} βαθμού $n=0,1,2,\dots$ και τάξης $m=0,1,2,\dots,n$ σε όρους των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre P_n^m ,

$$Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) = P_n^m(\zeta) \begin{cases} \cos m\varphi, & s=e \\ \sin m\varphi, & s=o \end{cases}, \quad m=0,1,2,\dots,n, \quad |\zeta| \leq 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (\text{II-3.20})$$

για $n=0,1,2,\dots$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\iint_{S^2} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{n'}^{m's'}(\hat{\mathbf{r}}) dS(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{ss'} \frac{1}{\varepsilon_m}, \quad (\text{II-3.21})$$

όπου το δ_{kl} αντιπροσωπεύει το δέλτα του Kronecker, ε_m είναι ο παράγοντας Neumann ($\varepsilon_m=1, m=0$ και $\varepsilon_m=2, m \geq 1$), s δηλώνει τον άρτιο (e) ή τον περιττό (o) χαρακτήρα των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών, το S^2 αποτελεί την μοναδιαία σφαίρα στο χώρο $\mathbf{B}^3$ και για τις ίδιες τιμές των n και m ,

$$P_n^m(\zeta) = \frac{(1-\zeta^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d\zeta^{n+m}} (\zeta^2 - 1)^n, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{II-3.22})$$

Οι φυσικές απαιτήσεις των ροών Stokes υποθέτουν πεδία ροής ομαλά, χωρίς ιδιομορφίες, στον άξονα συμμετρίας x_1 για $\zeta = \pm 1$. Συνεπώς, οι όροι που εμπεριέχουν τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre του δευτέρου είδους Q_n^m εξαιρούνται και, οπότε, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις πρέπει να αποκλεισθούν. Άρα, κάθε ομαλή αρμονική συνάρτηση ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή Δ και σε σφαιρικές συντεταγμένες εκφράζεται μέσω των εσωτερικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων

$$u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) = r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad s = e, o \quad (\text{II-3.23})$$

και μέσω των εξωτερικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων

$$u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) = r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad s = e, o, \quad (\text{II-3.24})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$.

Άρα, η πλήρης αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου λύσεων των δυναμικών της αναπαράστασης Papkovitch – Neuber, εξίσωση (II-3.9), υποθέτει τις μορφές

$$\Phi_{sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[e_{n,sr}^{(i)ms} u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) + e_{n,sr}^{(e)ms} u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{II-3.25})$$

και

$$\Phi_{0sr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[d_{n,sr}^{(i)ms} u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) + d_{n,sr}^{(e)ms} u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{II-3.26})$$

Παρατηρούμε ότι για $n \geq 0$ και $s = e, o$ οι

$$e_{n,sr}^{(i/e)ms} = c_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,sr}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad d_{n,sr}^{(i/e)ms}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{II-3.27})$$

είναι οι εσωτερικοί και εξωτερικοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές των δυναμικών Φ_{sr} και Φ_{0sr} , αντίστοιχα που είδαμε και στο Κεφάλαιο II-2.

Έχοντας συγκεντρώσει, λοιπόν, όλες τις απαραίτητες πληροφορίες, μπορούμε να κατασκευάσουμε τα πεδία ροής συναρτήσεις των προηγούμενων αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων (II-3.23) και (II-3.24). Αρχικά, εισάγουμε τα δυναμικά (II-3.25) και (II-3.26) στα πεδία ροής Papkovitch – Neuber και, με επιλεκτική χρήση των ταυτοτήτων του Παραρτήματος Α και κυρίως των (Α.1), (Α.2) και (Α.6), λαμβάνουμε από το πεδίο ταχύτητας (II-3.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ \mathbf{e}_{n,sr}^{(i)ms} u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) - \left[\left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(i)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sr}^{(i)ms} \right] \nabla u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. + \mathbf{e}_{n,sr}^{(e)ms} u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) - \left[\left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sr}^{(e)ms} \right] \nabla u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right\} \quad (\text{II-3.28}) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, ενώ για το πεδίο ολικής πίεσης (II-3.8) με βοήθεια της σχέσης (A.11) καταλήγουμε στην

$$\mathbf{P}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_{0sr}^{PN} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ \mathbf{e}_{n,sr}^{(i)ms} \cdot \nabla u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{n,sr}^{(e)ms} \cdot \nabla u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\text{II-3.29})$$

Φυσικά, όλων των ειδών οι ιδιομορφίες έχουν εξαιρεθεί.

Όταν το πεδίο ταχύτητας έχει υπολογιστεί, το πεδίο στροβιλισμού (II-3.11), με την άμεση χρήση της (A.24), οδηγεί στην έκφραση

$$\boldsymbol{\omega}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ \nabla u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{n,sr}^{(i)ms} + \nabla u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{n,sr}^{(e)ms} \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{II-3.30})$$

ενώ η (II-3.12) σε συνδυασμό με τις αρμόδιες ταυτότητες του Παραρτήματος Α μας εφοδιάζει με τον ολικό τανυστή των τάσεων

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{\Pi}}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = & -p_{sr}^{PN}(\mathbf{r})\mathbf{I} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ \left[\left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(i)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sr}^{(i)ms} \right] \nabla \otimes \nabla u_{n,sr}^{(i)ms}(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. + \left[\left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sr}^{(e)ms} \right] \nabla \otimes \nabla u_{n,sr}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right\} \quad (\text{II-3.31}) \end{aligned}$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$.

Οι γενικές εκφράσεις (II-3.28)–(II-3.31) αποτελούν τα βασικά σφαιρικά πεδία ροής σε όρους των γνωστών εσωτερικών και εξωτερικών συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων και της κλίσης τους. Οι βαθμώσεις αυτών των πραγματικών συναρτήσεων αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο ΙΙ-1 και τις συγκεντρώνουμε ξανά γράφοντας τις εκφράσεις τους σαν συνάρτηση των πραγματικών επιφανειακών σφαιρικών ιδιοσυναρτήσεων, δηλαδή, για τις εσωτερικές πραγματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές, τις άρτιες

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)me}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1) Y_{n-1}^{(m-1)e}(\hat{\mathbf{r}}) - Y_{n-1}^{(m+1)e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ & - \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1) Y_{n-1}^{(m-1)o}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{n-1}^{(m+1)o}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_3 \\ & + (n+m) Y_{n-1}^{me}(\hat{\mathbf{r}}) r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{II-3.32}) \end{aligned}$$

τις περιπτώσεις

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(i)mo}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1)Y_{n-1}^{(m-1)o}(\hat{\mathbf{r}}) - Y_{n-1}^{(m+1)o}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left[(n+m)(n+m-1)Y_{n-1}^{(m-1)e}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{n-1}^{(m+1)e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &+ (n+m)Y_{n-1}^{mo}(\hat{\mathbf{r}})r^{n-1} \hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 0, \quad m=1, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \end{aligned} \quad (\text{II-3.33})$$

και για την περίπτωση $m=0$ για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$,

$$\nabla u_{n,sr}^{(i)0e}(\mathbf{r}) = \left[-Y_{n-1}^{1e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_2 - Y_{n-1}^{1o}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_3 + nY_{n-1}^{0e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_1 \right] r^{n-1}, \quad n \geq 0. \quad (\text{II-3.34})$$

Ομοίως, για τις εξωτερικές πραγματικές συμπαγείς σφαιρικές αρμονικές ισχύουν αντίστοιχες εκφράσεις με τις παραπάνω και ο τελεστής της βάθμωσης δρα στις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις παράγοντας τις εξωτερικές παραστάσεις των κλίσεων αυτών των ιδιολύσεων, τις άρτιες

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(e)me}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{(m-1)e}(\hat{\mathbf{r}}) - Y_{n+1}^{(m+1)e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{-(n+2)} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &- \frac{1}{2} \left[(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{(m-1)o}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{n+1}^{(m+1)o}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{-(n+2)} \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &- (n-m+1)Y_{n+1}^{me}(\hat{\mathbf{r}})r^{-(n+2)} \hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 0, \quad m=1, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \end{aligned} \quad (\text{II-3.35})$$

τις περιπτώσεις

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sr}^{(e)mo}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left[(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{(m-1)o}(\hat{\mathbf{r}}) - Y_{n+1}^{(m+1)o}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{-(n+2)} \hat{\mathbf{x}}_2 \\ &+ \frac{1}{2} \left[(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{(m-1)e}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{n+1}^{(m+1)e}(\hat{\mathbf{r}}) \right] r^{-(n+2)} \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &- (n-m+1)Y_{n+1}^{mo}(\hat{\mathbf{r}})r^{-(n+2)} \hat{\mathbf{x}}_1, \quad n \geq 0, \quad m=1, \dots, n, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \end{aligned} \quad (\text{II-3.36})$$

και με τον ίδιο τρόπο για την περίπτωση $m=0$ για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$

$$\nabla u_{n,sr}^{(e)0e}(\mathbf{r}) = \left[-Y_{n+1}^{1e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_2 - Y_{n+1}^{1o}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_3 - (n+1)Y_{n+1}^{0e}(\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{x}}_1 \right] r^{-(n+2)}, \quad n \geq 0. \quad (\text{II-3.37})$$

Εδώ, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι εξ' ορισμού των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους ισχύει

$$Y_{-n}^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv 0, \quad n \geq 0, \quad s=e,o, \quad \hat{\mathbf{r}} \in \partial\Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{II-3.38})$$

και

$$Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv 0, \quad n < m, \quad s = e, o, \quad \hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbb{B}^3). \quad (\text{II-3.39})$$

Για την εξαγωγή των σχέσεων (II-3.32)–(II-3.37) χρησιμοποιήθηκε η μορφή του διαφορικού τελεστή της βάθμωσης (II-3.14), βασικές αναγωγικές σχέσεις από το Παράρτημα Β για τις συναρτήσεις Legendre και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, καθώς και τους τύπους μετατροπής των ορθομοναδιαίων διανυσμάτων του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων στη Καρτεσιανή βάση $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, 3$ τους οποίους και συνοψίζουμε από το Κεφάλαιο ΙΙ-1,

$$\hat{\mathbf{r}} = \zeta \hat{\mathbf{x}}_1 + \sqrt{1-\zeta^2} \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \sqrt{1-\zeta^2} \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (\text{II-3.40})$$

$$\hat{\zeta} = -\sqrt{1-\zeta^2} \hat{\mathbf{x}}_1 + \zeta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \zeta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (\text{II-3.41})$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (\text{II-3.42})$$

για $|\zeta| \leq 1$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$. Η σύνδεση της Καρτεσιανής βάσης με τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα της σφαιρικής γεωμετρίας γίνεται με απλή αντιστροφή.

Εν τέλει, κατασκευάσαμε τα πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης, στροβιλισμού και ολικού τανυστή των τάσεων σε μορφές κατάλληλες για να δεχτούν τις συνοριακές συνθήκες των μοντέλων σωματιδίων σε κύτταρο που θα μελετήσουμε στις παρακάτω παραγράφους σε σφαιρικές συντεταγμένες.

II-3.2 Το κύτταρο Kuwabara (2-D) για αξονοσυμμετρική ροή Stokes διαμέσου σμήνους ακίνητων σφαιρικών σωματιδίων.

Με σκοπό να επιδείξουμε τη χρησιμότητα της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, τη χρησιμοποιούμε για να λύσουμε το πρόβλημα ροής Stokes μέσα σε ένα ρευστό κέλυφος το οποίο περιορίζεται από δύο ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες. Με αυτό τον τρόπο, οδηγούμαστε στην ανάκτηση των διορθωμένων αποτελεσμάτων του κυττάρου Kuwabara (1959) για ροή σε μικρούς αριθμούς Reynolds γύρω από σφαίρες μέσα σε ιξώδη ρευστά. Πιο αναλυτικά, εξετάζουμε το πρόβλημα αξονοσυμμετρικής κίνησης με ομοιόμορφη ταχύτητα ενός έρποντος ρευστού διαμέσου σμήνους ακινήτων σωματιδίων, απουσία ιδιομορφιών. Με άλλα λόγια, σύμφωνα με την ιδέα του σωματιδίου σε κύτταρο που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο Ι-4, ενδιαφερόμαστε να λύσουμε την έρπουσα ροή μεταξύ του ρευστού φλοιού δύο ομόκεντρων σφαιρών.

Θεωρείται μια στερεή σφαίρα ακτίνας $r = a$, όπου η επιφάνειά της δηλώνεται από το $\partial \Omega_i$ όπως φαίνεται και στο γενικό Σχήμα I-4.2. Υποθέτουμε ότι το στερεό σφαιρικό σωματίδιο είναι στάσιμο και περιβάλλεται από ένα ρευστό σφαιρικό στρώμα το οποίο καθορίζεται από την εξωτερική σφαίρα $r = b$ που δηλώνεται από το $\partial \Omega_e$ και είναι το εξωτερικό νοητό σύνορο που απαιτείται για να μοντελοποιηθεί η ροή του σμήνους σωματιδίων μέσα στο πορώδες μέσο. Μια συμμετρική ως προς τον άξονα x_1 ροή δημιουργείται στον εσωτερικό φλοιό ($a \leq r \leq b$) εξαιτίας μιας ομοιόμορφης ταχύτητας προσέγγισης στην επιφάνεια της εξωτερικής σφαίρας $\partial \Omega_e$. Αυτή η ταχύτητα έχει μέτρο U_{sr} και διεύθυνση τη θετική διεύθυνση του άξονα x_1 που είναι και ο άξονας συμμετρίας. Δηλαδή, η ταχύτητα προσέγγισης U_{sr} έχει τη γενική μορφή (I-4.1) με $U_{1,sr} = U_{sr}$ και $U_{2,sr} = U_{3,sr} = 0$, οπότε

$$U_{sr} = U_{sr} \hat{x}_1 = U_{sr} \left(\zeta \hat{r} - \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\phi} \right), \quad |\zeta| \leq 1, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (\text{II-3.43})$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι ίδιες με αυτές του προτύπου Kuwabara (1959) “σφαίρα σε κύτταρο” [66] οι οποίες περιγράφονται από τις γενικές σχέσεις (I-4.2)–(I-4.4) σε σφαιρική γεωμετρία. Συνιστάται ιδιαίτερη προσοχή στο πρόσημο της συνοριακής συνθήκης (I-4.3) το οποίο είναι αρνητικό επειδή στην εξωτερική επιφάνεια για $r = b$ ισχύει ότι $\hat{n}(\mathbf{r}) = -\hat{r}$ για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3)$ με $a \leq r \leq b$. Άρα, λόγω της (II-3.16) έχουμε

$$\Sigma.\Sigma.(1): \quad \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{για} \quad r = a, \quad (\text{II-3.44})$$

$$\Sigma.\Sigma.(2): \quad \hat{r} \cdot \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = -\hat{r} \cdot \mathbf{U}_{sr} \quad \text{για} \quad r = b, \quad (\text{II-3.45})$$

$$\Sigma.\Sigma.(3): \quad \hat{\phi} \cdot \boldsymbol{\omega}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για} \quad r = b, \quad (\text{II-3.46})$$

όπου η εξίσωση (II-3.44) εκφράζει τη συνθήκη μη ολίσθησης στην επιφάνεια της στερεής σφαίρας και η έκφραση (II-3.45) συνεπάγεται ότι υπάρχει κάθετη ροή, όπου να διαπερνάει το ρευστό φλοιό. Επιπλέον, κατά αναλογία με το επιχείρημα που προέβαλε ο Kuwabara, ο στροβιλισμός μηδενίζεται στην εξωτερική επιφάνεια, σύμφωνα με την συνοριακή συνθήκη (II-3.46), εξίσωση που φανερώνει και το βασικό μειονέκτημα του παρόντος μοντέλου, αφού εξαιτίας της το έργο που παράγουν οι διατμητικές τάσεις πάνω στον εξωτερικό φλοιό δεν ισοσκελίζεται. Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώσαμε τον ορισμό ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος συνοριακών τιμών τύπου Kuwabara το οποίο θα λύσουμε με τη βοήθεια της

διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber. Αυτό που πρέπει να κάνουμε, δηλαδή, είναι να υπολογίσουμε τους σταθερούς συντελεστές $e_{n,sr}^{(i/e)ms}$ και $d_{n,sr}^{(i/e)ms}$ για κάθε $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$, αφού εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες στα πεδία ταχύτητας (II-3.28) και στροβιλισμού (II-3.30).

Είναι φανερό πως το συγκεκριμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών αναφέρεται σε διδιάστατες, τουτέστιν αξονοσυμμετρικές, ροές, γεγονός που είναι αποτέλεσμα της τελευταίας οριακής συνθήκης η οποία δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε σωματίδια που προκαλούν τρισδιάστατες ροές. Εφόσον, λοιπόν, η γενική λύση Parkovich – Neuber καλύπτει 3-D πεδία ροής, για 2-D ροές, όπως στην περίπτωση μας, υποχρεούμαστε να κάνουμε έναν αξιοσημείωτο εκφυλισμό που αφορά την αξονική συμμετρία. Η ενέργεια αυτή εστιάζεται στις εξισώσεις (II-3.18) και (II-3.19), οι οποίες εφαρμόζονται στην ταχύτητα (II-3.28) της αναπαράστασής μας και αποτελούν την βάση για την ελαχιστοποίηση των διαστάσεων σε δύο, καθιστώντας το πεδίο ταχύτητας ανεξάρτητο της γωνίας Φ και χωρίς αξιμουθιακή συνιστώσα. Η παρούσα διαδικασία αναλύθηκε στο κεφάλαιο της συσχέτισης των σφαιρικών διαφορικών αναπαραστάσεων, όπου εισάγοντας το πεδίο ταχύτητας (II-3.28) στις (II-3.18) και (II-3.19) καταλήξαμε στις παρακάτω σχέσεις για τους σταθερούς συντελεστές,

$$a_{n,sr}^{(i)ms} = b_{n,sr}^{(i)ms} = a_{n,sr}^{(e)ms} = b_{n,sr}^{(e)ms} = 0, \quad n \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o \quad (\text{II-3.47})$$

και

$$c_{n,sr}^{(i)ms} = d_{n,sr}^{(i)ms} = c_{n,sr}^{(e)ms} = d_{n,sr}^{(e)ms} = 0, \quad n \geq 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad s = e, o. \quad (\text{II-3.48})$$

Ορίζουμε τους εναπομείναντες σταθερούς συντελεστές $e_{n,sr}^{(i/e)} \equiv e_{n,sr}^{(i/e)0e}$ και $d_{n,sr}^{(i/e)0e} \equiv d_{n,sr}^{(i/e)}$ από τις σχέσεις

$$e_{n,sr}^{(i/e)} = c_{n,sr}^{(i/e)} \hat{x}_1 = c_{n,sr}^{(i/e)} \left(\zeta \hat{r} \zeta - \sqrt{1 - \zeta^2} \right), \quad d_{n,sr}^{(i/e)}, \quad n \geq 0, \quad (\text{II-3.49})$$

όπου αναφέρονται στα αξονοσυμμετρικά πεδία ροής Parkovich – Neuber απουσία ιδιομορφιών πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 . Αν δράσουμε το διαφορικό τελεστή (II-3.14) στις συμπαγείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις (II-3.23) και (II-3.24) για αξιμουθιακή ανεξαρτησία και εφαρμόσουμε την ταυτότητα (B.13) του Παραρτήματος Β για την παραγωγή των συναρτήσεων Legendre για $m = 0$, τότε παίρνουμε

$$\nabla u_{n,sr}^{(i)0e}(\mathbf{r}) \equiv \nabla u_{n,sr}^{(i)}(\mathbf{r}) = r^{n-1} \left[n \hat{r} \mathcal{P}_n(\zeta) - \hat{P}_n^1(\zeta) \right], \quad n \geq 0 \quad (\text{II-3.50})$$

για τις εσωτερικές και

$$\nabla u_{n,sr}^{(e)0e}(\mathbf{r}) \equiv \nabla u_{n,sr}^{(e)}(\mathbf{r}) = -r^{-(n+2)} \left[(n+1) \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} P_n(\zeta) + \hat{P}_n^1(\zeta) \right], \quad n \geq 0 \quad (\text{II-3.51})$$

για κάθε $a \leq r \leq b$ και $|\zeta| \leq 1$, όπου οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους ικανοποιούν την (II-3.22). Επιπλέον εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\left(\mathbf{e}_{n,sr}^{(i/e)} \cdot \mathbf{r} \right) = c_{n,sr}^{(i/e)} r \zeta, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2), \quad a \leq r \leq b \quad (\text{II-3.52})$$

και οι σταθεροί συντελεστές $c_{n,sr}^{(i/e)}$ και $d_{n,sr}^{(i/e)}$, $n \geq 0$ πρέπει να υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες (II-3.44)–(II-3.46).

Μια ανάλογη διαδικασία με αυτή του προηγούμενου κεφαλαίου οδηγεί στα ενδιαφερόμενα αξονοσυμμετρικά πεδία ροής Parkovich – Neuber. Τότε, εισάγοντας τις (II-3.47)–(II-3.52) στις σχέσεις (II-3.28)–(II-3.30) και χρησιμοποιώντας τους αναγωγικούς τύπους (B.12) και (B.15) για $m=0,1$ (αξιμουθιακή ανεξαρτησία), η ταχύτητα (II-3.28) υποθέτει την αξονοσυμμετρική μορφή που εξάγαμε και στο Κεφάλαιο II-2, δηλ.,

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(r, \zeta) = v_{r,sr}^{PN}(r, \zeta) \hat{\mathbf{r}} \zeta + v_{\zeta,sr}^{PN}(r, \zeta) \hat{\zeta}, \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{II-3.53})$$

όπου οι συνιστώσες της εκφράζονται συναρτήσει της ακτινικής συνιστώσας r και των συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους P_n και P_n^1 μέσω των

$$\begin{aligned} v_{r,sr}^{PN}(r, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ (n+1) \left(\frac{(n+3)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(e)} + d_{n,sr}^{(e)} \right) r^{-(n+2)} + \frac{n(n+1)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(e)} r^{-n} \right. \\ \left. - n \left(\frac{(n-2)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(i)} + d_{n,sr}^{(i)} \right) r^{n-1} - \frac{n(n+1)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(i)} r^{n+1} \right\} P_n(\zeta) \quad (\text{II-3.54}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} v_{\zeta,sr}^{PN}(r, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{(n+3)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(e)} + d_{n,sr}^{(e)} \right) r^{-(n+2)} + \frac{(n-2)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(e)} r^{-n} \right. \\ \left. + \left(\frac{(n-2)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(i)} + d_{n,sr}^{(i)} \right) r^{n-1} + \frac{(n+3)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(i)} r^{n+1} \right\} P_n^1(\zeta) \quad (\text{II-3.55}) \end{aligned}$$

ενώ για την ολική πίεση (II-3.29) παίρνουμε την έκφραση

$$P_{sr}^{PN}(r, \zeta) = P_{0sr}^{PN} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) c_{n+1,sr}^{(i)} r^n - n c_{n-1,sr}^{(e)} r^{-(n+1)} \right] P_n(\zeta) \quad (\text{II-3.56})$$

για κάθε $a \leq r \leq b$ και $|\zeta| \leq 1$. Το πεδίο στροβιλισμού που δίνεται από την τριών διαστάσεων σχέση (II-3.30), εύκολα επιβεβαιώνεται ότι εκφράζεται από την εξίσωση

$$\omega_{sr}^{PN}(r, \zeta) = \hat{\phi}_{\phi, sr}^{PN}(\zeta), \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{II-3.57})$$

όπου

$$\omega_{\phi, sr}^{PN}(r, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{c_{n+1, sr}^{(i)} r^n + c_{n-1, sr}^{(e)} r^{-(n+1)}\} P_n^1(\zeta), \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{II-3.58})$$

Οι σταθεροί συντελεστές $c_{n, sr}^{(i)}$, $c_{n, sr}^{(e)}$, $d_{n, sr}^{(i)}$, $d_{n, sr}^{(e)}$, $n \geq 0$ πρέπει να υπολογιστούν από τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (II-3.44)–(II-3.46), οι οποίες λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή των παραπάνω πεδίων, μαζί με την (II-3.43), μετατρέπονται στις

$$\Sigma.\Sigma.(1): \quad v_{r, sr}^{PN} = 0 \quad \text{για} \quad r = a, \quad (\text{II-3.59})$$

$$\Sigma.\Sigma.(2): \quad v_{\zeta, sr}^{PN} = 0 \quad \text{για} \quad r = a, \quad (\text{II-3.60})$$

$$\Sigma.\Sigma.(3): \quad v_{r, sr}^{PN} = -U_{sr} \zeta = -U_{sr} P_1(\zeta) \quad \text{για} \quad r = b, \quad (\text{II-3.61})$$

$$\Sigma.\Sigma.(4): \quad \omega_{\phi, sr}^{PN} \equiv \hat{\phi} \cdot \omega_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για} \quad r = b \quad (\text{II-3.62})$$

και αυτό που απαιτείται τώρα είναι να λύσουμε το παραπάνω καλά τοποθετημένο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Kuwabara.

Αν αντικαταστήσουμε τις συνοριακές συνθήκες (II-3.59)–(II-3.62) στα πεδία ταχύτητας (II-3.53)–(II-3.55) και στροβιλισμού (II-3.57), (II-3.58), τότε επιτυγχάνουμε το παρακάτω σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για τους άγνωστους σταθερούς συντελεστές, δηλαδή,

$$\begin{aligned} & -\frac{n(n+1)}{(2n+3)} a^{n+1} c_{n+1, sr}^{(i)} + \frac{n(n+1)}{(2n-1)} a^{-n} c_{n-1, sr}^{(e)} \\ & - n a^{n-1} (cd)_{n, sr}^{(i)} + (n+1) a^{-(n+2)} (cd)_{n, sr}^{(e)} = 0, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{II-3.63})$$

$$\begin{aligned} & \frac{(n+3)}{(2n+3)} a^{n+1} c_{n+1, sr}^{(i)} + \frac{(n-2)}{(2n-1)} a^{-n} c_{n-1, sr}^{(e)} \\ & + a^{n-1} (cd)_{n, sr}^{(i)} + a^{-(n+2)} (cd)_{n, sr}^{(e)} = 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (\text{II-3.64})$$

$$\begin{aligned} & -\frac{n(n+1)}{(2n+3)} b^{n+1} c_{n+1, sr}^{(i)} + \frac{n(n+1)}{(2n-1)} b^{-n} c_{n-1, sr}^{(e)} \\ & - n b^{n-1} (cd)_{n, sr}^{(i)} + (n+1) b^{-(n+2)} (cd)_{n, sr}^{(e)} = 0, \quad n \geq 0, \quad n \neq 1 \end{aligned} \quad (\text{II-3.65})$$

και για $n = 1$,

$$-\frac{2}{5}b^2c_{2,sr}^{(i)} + 2b^{-1}c_{0,sr}^{(e)} - (cd)_{1,sr}^{(i)} + 2b^{-3}(cd)_{1,sr}^{(e)} = -2U_{sr} \quad (\text{II-3.66})$$

και

$$b^n c_{n+1,sr}^{(i)} + b^{-(n+1)} c_{n-1,sr}^{(e)} = 0, \quad n \geq 1, \quad (\text{II-3.67})$$

όπου για κάθε $n \geq 0$ ορίσαμε

$$(cd)_{n,sr}^{(i)} = \frac{(n-2)}{(2n-1)} c_{n-1,sr}^{(i)} + d_{n,sr}^{(i)} \quad \text{και} \quad (cd)_{n,sr}^{(e)} = \frac{(n+3)}{(2n+3)} c_{n+1,sr}^{(e)} + d_{n,sr}^{(e)}. \quad (\text{II-3.68})$$

Σε αυτό το σημείο προκύπτει μια πρώτη παρατήρηση που αφορά την ευελιξία της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, όπου οι d -σταθεροί συντελεστές μπορούν ακόμα και να παραληφθούν αφού ενσωματώνονται με τους c -σταθερούς συντελεστές στη μορφή των (cd) -σταθερών συντελεστών.

Για $n=0$ από τις (II-3.63) και (II-3.65) προκύπτει

$$(cd)_{0,sr}^{(e)} = 0, \quad (\text{II-3.69})$$

ενώ για $n \geq 1$ η ορίζουσα του πίνακα των σταθερών των αγνώστων του συστήματος (II-3.63)–(II-3.67) υπολογίζεται από την έκφραση

$$D_{n,sr}^K = \frac{2n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)a^3} \left[(2n+1)^2 - (2n+3)\gamma_{K,sr}^{2n-1} + (2n-1)\gamma_{K,sr}^{-(2n+3)} - (2n+3)(2n-1)\gamma_{K,sr}^{-2} \right] \quad (\text{II-3.70})$$

για $n \geq 1$, όπου ορίσαμε σαν

$$\gamma_{K,sr} = \frac{b}{a} > 1. \quad (\text{II-3.71})$$

Αν παραγωγίσουμε την (II-3.70) ως προς $\gamma_{K,sr}$,

$$\frac{d}{d\gamma_{K,sr}} D_{n,sr}^K = -(2n-1)(2n+3) \frac{(1-\gamma_{K,sr}^{2n+1})^2}{\gamma_{K,sr}^{2(n+2)}} < 0, \quad n \geq 1 \quad (\text{II-3.72})$$

και, συγχρόνως, αν πάρουμε το όριο της (II-3.70)

$$\lim_{\gamma_{K,sr} \rightarrow 1^+} D_{n,sr}^K = 0, \quad n \geq 1, \quad (\text{II-3.73})$$

καταλήγουμε στο ότι η ορίζουσα είναι αυστηρά θετική και, συνεπώς,

$$D_{n,sr}^K \neq 0, \quad n \geq 1. \quad (\text{II-3.74})$$

Επομένως, η ομογένεια του συστήματος (ΙΙ-3.63)–(ΙΙ-3.67) για $n \geq 2$ σε συνδυασμό με την (ΙΙ-3.74) συνεπάγεται

$$c_{n+1,SR}^{(i)} = c_{n-1,SR}^{(e)} = (cd)_{n,SR}^{(i)} = (cd)_{n,SR}^{(e)} = 0, \quad n \geq 2, \quad (\text{ΙΙ-3.75})$$

ενώ για $n = 1$ το σύστημα (ΙΙ-3.63)–(ΙΙ-3.67) γίνεται

$$-\frac{2}{5}a^2c_{2,SR}^{(i)} + 2a^{-1}c_{0,SR}^{(e)} - (cd)_{1,SR}^{(i)} + 2a^{-3}(cd)_{1,SR}^{(e)} = 0, \quad (\text{ΙΙ-3.76})$$

$$\frac{4}{5}a^2c_{2,SR}^{(i)} - a^{-1}c_{0,SR}^{(e)} + (cd)_{1,SR}^{(i)} + a^{-3}(cd)_{1,SR}^{(e)} = 0, \quad (\text{ΙΙ-3.77})$$

$$-\frac{2}{5}b^2c_{2,SR}^{(i)} + 2b^{-1}c_{0,SR}^{(e)} - (cd)_{1,SR}^{(i)} + 2b^{-3}(cd)_{1,SR}^{(e)} = -2U_{SR}, \quad (\text{ΙΙ-3.78})$$

$$bc_{2,SR}^{(i)} + b^{-2}c_{0,SR}^{(e)} = 0, \quad (\text{ΙΙ-3.79})$$

όπου αποτελεί ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους σταθερούς συντελεστές $c_{2,SR}^{(i)}$, $c_{0,SR}^{(e)}$, $(cd)_{1,SR}^{(i)}$, $(cd)_{1,SR}^{(e)}$ και ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων να δίνεται από το γενικό τύπο (ΙΙ-3.70) για $n = 1$, για την οποία ισχύει $D_{1,SR}^K \neq 0$.

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα υπολογίζουμε τους αγνώστους σαν συνάρτηση της σταθερής ποσότητας $\gamma_{K,SR}$ και τελικά,

$$c_{2,SR}^{(i)} = -\frac{3U_{SR}}{2K_{K,SR}} \frac{1}{a^2\gamma_{K,SR}^3}, \quad (\text{ΙΙ-3.80})$$

$$c_{0,SR}^{(e)} = \frac{3U_{SR}}{2K_{K,SR}} a, \quad (\text{ΙΙ-3.81})$$

$$(cd)_{1,SR}^{(i)} = \frac{U_{SR}}{K_{K,SR}} \left(2 + \frac{1}{\gamma_{K,SR}^3} \right), \quad (\text{ΙΙ-3.82})$$

$$(cd)_{1,SR}^{(e)} = -\frac{U_{SR}}{10K_{K,SR}} a^3 \left(5 - \frac{2}{\gamma_{K,SR}^3} \right), \quad (\text{ΙΙ-3.83})$$

όπου

$$K_{K,SR} = \frac{(\gamma_{K,SR} - 1)^3 (1 + 3\gamma_{K,SR} + 6\gamma_{K,SR}^2 + 5\gamma_{K,SR}^3)}{5\gamma_{K,SR}^6} \quad (\text{ΙΙ-3.84})$$

και αποτελούν τους μοναδικούς σταθερούς συντελεστές των αναπτυγμάτων που επιβιώνουν. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (ΙΙ-3.80)–(ΙΙ-3.83), μαζί με τις (ΙΙ-3.69) και (ΙΙ-3.75) στα πεδία ροής (ΙΙ-3.53)–(ΙΙ-3.58) και γνωρίζοντας τον ορισμό

$$P_0^1(\zeta) \equiv 0, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{II-3.85})$$

παίρνουμε, τελικά, για το πεδίο ταχύτητας

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(r, \zeta) = \mathbf{v}_{r, sr}^{PN}(r, \zeta) \hat{\mathbf{r}} \zeta + \mathbf{v}_{\zeta, sr}^{PN}(r, \zeta) \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{II-3.86})$$

όπου οι συνιστώσες καθορίζονται από τις

$$\begin{aligned} v_{r, sr}^{PN}(r, \zeta) = \frac{U_{sr} \zeta}{2K_{K, sr}} & \left[\frac{3}{5\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \left(2 + \frac{1}{\gamma_{K, sr}^3} \right) \right. \\ & \left. + 3 \left(\frac{a}{r} \right) - \left(1 - \frac{2}{5\gamma_{K, sr}^3} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{II-3.87})$$

και

$$\begin{aligned} v_{\zeta, sr}^{PN}(r, \zeta) = -\frac{U_{sr} \sqrt{1-\zeta^2}}{2K_{K, sr}} & \left[\frac{6}{5\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \left(2 + \frac{1}{\gamma_{K, sr}^3} \right) \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{5\gamma_{K, sr}^3} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (\text{II-3.88})$$

για κάθε $a \leq r \leq b$ και $|\zeta| \leq 1$, ενώ για το πεδίο στροβιλισμού λαμβάνουμε

$$\omega_{sr}^{PN}(r, \zeta) = \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{3U_{sr} \sqrt{1-\zeta^2}}{4aK_{K, sr}} \left[-\frac{1}{\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{II-3.89})$$

Τέλος, το πεδίο ολικής πίεσης επαληθεύει την

$$P_{sr}^{PN}(r, \zeta) = \bar{P}_{0sr}^{PN} + \frac{3\mu_0 U_{sr} \zeta}{2aK_{K, sr}} \left[\frac{2}{\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right], \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{II-3.90})$$

όπου $\bar{P}_{0sr}^{PN} = P_{0sr}^{PN} - \mu_0 c_{1, sr}^{(i)}$, $c_{1, sr}^{(i)} \in \mathfrak{G}$, ενώ οι σταθερές $\gamma_{K, sr}$ και $K_{K, sr}$ ικανοποιούν τις σχέσεις (II-3.71) και (II-3.84), αντίστοιχα και a , b είναι οι ακτίνες των ομόκεντρων σφαιρών του μοντέλου μας “σφαίρα σε κύτταρο”.

Λόγω των σχέσεων που μας δίνουν τις συνιστώσες της ταχύτητας και τις παραγώγους της πίεσης μέσω της συνάρτησης δυναμικού ροής Ψ_{sr} , δηλαδή τις εξισώσεις (II-2.15) και (II-2.17), αντίστοιχα, τα παραπάνω πεδία αντιστοιχούν σε μια συνάρτηση ροής που έχει τη μορφή

$$\Psi_{sr}(r, \zeta) = \frac{U_{sr} a^2 (1 - \zeta^2)}{4K_{K, sr}} \left[-\frac{3}{5\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \left(2 + \frac{1}{\gamma_{K, sr}^3}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{r}{a}\right) + \left(1 - \frac{2}{5\gamma_{K, sr}^3}\right) \left(\frac{a}{r}\right) \right]$$

(II-3.91)

για κάθε $a \leq r \leq b$ και $|\zeta| \leq 1$.

Τα αποτελέσματα* για τη μελέτη της αξονοσυμμετρικής ροής σμήνους σφαιρικών σωματιδίων εντός πορώδους μέσου με την ανάπτυξη της θεωρίας του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara δεν είναι πρωτότυπα, αλλά προσφέρουν τα διορθωμένα πεδία ροής της αναφοράς του 1959 [66]. Επιπλέον, παρατηρήσαμε την εφαρμογή της γενικής διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber επιδιώκοντας να εξάγουμε τα παραπάνω αποτελέσματα.

Η λύση (II-3.91) συμπίπτει με τη λύση του διορθωμένου προτύπου Kuwabara το 1959 [66] εάν μετατρέψουμε τη μεταβλητή r σε αδιάστατη παράμετρο ως προς την μοναδιαία ακτίνα του στερεού σφαιρικού σωματιδίου $a = 1$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η ταχύτητα U_{sr} στη λύση μας πρέπει να αντικατασταθεί με $-U_{sr}$ στη λύση του Kuwabara και τότε υπάρχει πλήρης ταύτιση των αποτελεσμάτων.

Ο Happel 1958 [54] ανεξάρτητα από τον Kuwabara και χρονικά λίγο νωρίτερα, για να μελετήσει το πρόβλημα της σχετικής αργής κίνησης μιας τυχαίας συγκέντρωσης σφαιρών ως προς ηρεμούν ρευστό, εισήγαγε το πρότυπο των δύο ομόκεντρων σφαιρών. Η εσωτερική σφαίρα αναπαριστά ένα από τα σωματίδια της συγκέντρωσης και η εξωτερική σφαίρα αποτελεί ένα ρευστό φλοιό με ελεύθερη επιφάνεια. Δηλαδή, εμφανίζεται εδώ όπως και στο πρότυπο Kuwabara η ιδέα “σφαίρα σε κύτταρο” για διδιάστατες ροές. Η διαφοροποίηση των δύο προτύπων γίνεται μόνο σε επίπεδο συνοριακών συνθηκών. Πιο αναλυτικά, ο μηδενισμός του στροβιλισμού στον εξωτερικό φλοιό αντικαθίσταται από τον μηδενισμό των εφαπτομενικών τάσεων, συνθήκη που καθιστά και το μοντέλο ενεργειακά αυτόνομο, αφού δεν επιτρέπει την ανταλλαγή ενέργειας με το εξωτερικό περιβάλλον. Για την ανάλυση του παρόντος μοντέλου ακολουθείται η ίδια διαδικασία με αυτή για την επίλυση του κυττάρου Kuwabara και τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν πολύ, οπότε δεν έχει ενδιαφέρον η επίλυση αυτού του προβλήματος στην παρούσα εργασία. Παρόλα αυτά, είναι αξιοσημείωτη η συμπεριφορά της ροής με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel στην περίπτωση των τρισδιάστατων ροών σφαιρικών σωματιδίων που περιστρέφονται μαζί

* Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παραγράφου ΙΙ-3.2 αποτελούν μέρος της δημοσιευμένης εργασίας [43].

με τη μεταφορά. Η μελέτη ενός τέτοιου προβλήματος συνοριακών συνθηκών είναι και το αντικείμενο της παραγράφου που ακολουθεί και αποτελεί πρωτότυπη δουλειά που αφορά την επέκταση του κυττάρου Happel σε τρισδιάστατα χωρία.

II-3.3 Το κύτταρο Happel ($3-D$) για τρισδιάστατη ροή Stokes σμήνους σφαιρικών σωματιδίων σε ηρεμούν ρευστό.

Η εξαιρετικής σημασίας χρησιμότητα της διαφορικής αναπαράστασης Papkovitch – Neuber παρουσιάζεται για άλλη μια φορά στην επίλυση ενός προβλήματος ροής Stokes μέσα σε ένα ρευστό κέλυφος το οποίο περιορίζεται από δύο ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες και μοντελοποιεί την κίνηση σμήνους σωματιδίων μέσα σε πορώδες μέσο η οποία περιγράφεται από το κυτταρικό μοντέλο Happel. Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά αυτού του κυττάρου είναι ίδια με αυτά του κυττάρου Kuwabara, αλλά σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε το πρόβλημα της τρισδιάστατης ομοιόμορφης έρπουσας μεταφοράς και περιστροφής σωματιδίων, θεωρώντας ένα μοντέλο “σφαίρα σε κύτταρο” τύπου Happel, απουσία ιδιομορφιών. Η απουσία αξονικής συμμετρίας οφείλεται στην επιβαλλόμενη περιστροφή των σωματιδίων και αποδίδει τον πιο γενικό $3-D$ χαρακτήρα του συγκεκριμένου μοντέλου. Το κίνητρο για την επίλυση ενός τέτοιου προβλήματος είναι ότι οι συνοριακές συνθήκες τύπου Happel είναι πιο συμβατές με τη φυσική εφόσον εξασφαλίζουν ότι κάθε μοναδιαίο κύτταρο είναι ενεργειακά αυτόνομο. Με άλλα λόγια, σε συμφωνία με την αποδοχή του Happel [54], θεωρούμε δύο ομόκεντρες σφαίρες. Υποθέτοντας μικρούς αριθμούς Reynolds και ψευδομόνιμη κατάσταση, λόγω των τρισδιάστατων χωρίων, και συμβιβάζομενοι με την ιδέα του σωματιδίου σε κύτταρο που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο I-4, ενδιαφερόμαστε να λύσουμε την έρπουσα ροή μεταξύ του ρευστού φλοιού των δύο ομόκεντρων σφαιρών, κατά αναλογία με το κύτταρο Kuwabara με τη διαφορά να έγκειται στις συνοριακές συνθήκες και στον μη αξονοσυμμετρικό χαρακτήρα του μοντέλου.

Έστω, λοιπόν, δύο ομόκεντρες σφαίρες ακτίνων a και b με $a < b$. Η εσωτερική σφαίρα που δηλώνεται από την επιφάνεια $\partial \Omega_i$ (κοίτα και το γενικό Σχήμα I-4.3) για $r = a$ είναι στερεή και κινείται με μια σταθερή αυθαίρετη ταχύτητα μεταφοράς U_{sr} στις κύριες διευθύνσεις της σφαίρας. Επιπλέον, περιστρέφεται, επίσης αυθαίρετα, με

μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\mathbf{\Omega}_{sr}$. Συνεπώς, από τον ορισμό της ομοιόμορφης ταχύτητας και της σταθερής περιστροφής,

$$\mathbf{U}_{sr} = U_{sr} \left(\zeta \hat{\mathbf{r}} \zeta - \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\mathbf{x}} \right) = U_{sr} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad \text{και} \quad \mathbf{\Omega}_{sr} = \sum_{i=1}^3 \Omega_{i,sr} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (\text{II-3.92})$$

αντίστοιχα για $|\zeta| \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, όπου τα $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, 3$ αποτελούν την Καρτεσιανή ορθοκανονική βάση. Λόγω της πλήρους συμμετρίας που προσφέρει η σφαιρική γεωμετρία, η συνιστώσα της ομοιόμορφης ταχύτητας των σωματιδίων από την (I-4.7) που επιβιώνει είναι η $U_{1,sr} = U_{sr}$, ενώ $U_{2,sr} = U_{3,sr} = 0$. Αντίθετα με την U_{sr} , χρησιμοποιούμε και τις τρεις συνιστώσες της επιβαλλόμενης γωνιακής ταχύτητας. Η εξωτερική σφαίρα δηλώνεται από την επιφάνεια $\partial \Omega_e$ για $r = b$ και αναπαριστά το φανταστικό σύνορο του μοναδιαίου κυττάρου (“σφαίρα σε κύτταρο”) που χρησιμοποιείται για να μοντελοποιηθεί η ροή του σμήνους των σφαιρικών σωματιδίων. Η επιβαλλόμενη περιστροφή (μαζί και με τη μεταφορά) στην εξίσωση (II-3.92) προκαλεί την τρισδιάστατη ροή στο ρευστό φλοιό για $a \leq r \leq b$.

Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται, είναι ανάλογες με εκείνες του σφαιρικού κυτταρικού μοντέλου Happel για αξονοσυμμετρικές ροές 1958 [54]. Πράγματι, υποθέτοντας ψευδομόνιμη κατάσταση, οι “τρειςδιάστατες” συνοριακές συνθήκες τύπου Happel εκφράζονται από τις

$$\Sigma.\Sigma.(1): \quad \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = U_{sr} \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Omega}_{sr} \times \mathbf{r} \quad \text{για} \quad r = a, \quad (\text{II-3.93})$$

$$\Sigma.\Sigma.(2): \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για} \quad r = b, \quad (\text{II-3.94})$$

$$\Sigma.\Sigma.(3): \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) = 0 \quad \text{για} \quad r = b, \quad (\text{II-3.95})$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό που δίνεται από την (II-3.13). Τώρα, η εξίσωση (II-3.93) εκφράζει τη συνθήκη μη ολίσθησης στην επιφάνεια του στερεού σωματιδίου, ενώ η συνθήκη (II-3.94) συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει κάθετη ροή που να διαπερνάει το ρευστό φλοιό. Επί προσθέτει, οι επιφανειακές τάσεις μηδενίζονται στην εξωτερική σφαίρα, όπως φαίνεται από τη συνοριακή συνθήκη (II-3.95), μια συνθήκη που εξασφαλίζει τη μη ανταλλαγή μηχανικής ενέργειας με το περιβάλλον. Και με αυτή την εξίσωση ολοκληρώνεται η παράθεση ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος τύπου Happel μέσα σε 3-D χωρία, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3)$ με $a \leq r \leq b$. Σκοπός μας είναι να λύσουμε το προαναφερθέν μη αξονοσυμμετρικό πρόβλημα Happel σε σφαιρικά χωρία με τη βοήθεια της τρισδιάστατης διαφορικής λύσης Parkovich –

Neuber η οποία αποτελεί το πλέον κατάλληλο εργαλείο επίλυσης τέτοιου είδους προβλημάτων. Αυτό που θα κάνουμε, δηλαδή, είναι να υπολογίσουμε τους σταθερούς συντελεστές $e_{n, sr}^{(i/e)ms}$ και $d_{n, sr}^{(i/e)ms}$ για κάθε $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$, αφού εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες στα πεδία ταχύτητας (II-3.28) και ολικού τανυστή τάσεων (II-3.31).

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες (II-3.93)–(II-3.95) στα πιο πάνω πεδία παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ e_{n, sr}^{(i)ms} r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) - \left[\left(e_{n, sr}^{(i)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sr}^{(i)ms} \right] \nabla \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right. \\ \left. + e_{n, sr}^{(e)ms} r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) - \left[\left(e_{n, sr}^{(e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sr}^{(e)ms} \right] \nabla \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right\} \\ = 2 \left(\mathbf{U}_{sr} \cdot \mathbf{r} \right), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad r = a, \quad (\text{II-3.96}) \end{aligned}$$

ενώ για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ και $r = b$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot e_{n, sr}^{(i)ms} \right) r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) - \left[\left(e_{n, sr}^{(i)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sr}^{(i)ms} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right. \\ \left. + \left(\hat{\mathbf{r}} \cdot e_{n, sr}^{(e)ms} \right) r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) - \left[\left(e_{n, sr}^{(e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sr}^{(e)ms} \right] \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right\} = 0 \quad (\text{II-3.97}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ \left[\left(e_{n, sr}^{(i)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sr}^{(i)ms} \right] \frac{\partial}{\partial r} \nabla \left(r^n Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right. \\ \left. + \left[\left(e_{n, sr}^{(e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sr}^{(e)ms} \right] \frac{\partial}{\partial r} \nabla \left(r^{-(n+1)} Y_n^{ms}(\hat{\mathbf{r}}) \right) \right\} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (\text{II-3.98}) \end{aligned}$$

όπου το $\mathbf{v}_{sr}^{PN}$ δίνεται από την (II-3.28), ενώ για την εξαγωγή της τελευταίας κάναμε χρήση της σχέσης

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}. \quad (\text{II-3.99})$$

Στη συνοριακή συνθήκη (II-3.96) θα χρησιμοποιήσουμε Καρτεσιανές συντεταγμένες αναπαριστώντας τους διανυσματικούς σταθερούς συντελεστές από τις (II-3.27), χρησιμοποιώντας τους γενικούς τύπους (II-3.32)–(II-3.39) για την γραφή των $\nabla(r^n Y_n^{ms})$ και $\nabla(r^{-(n+1)} Y_n^{ms})$, καθώς και εισάγοντας βασικές αναγωγικές σχέσεις για την αντιμετώπιση των όρων της μορφής $x_\kappa \nabla(r^n Y_n^{ms})$ και $x_\kappa \nabla(r^{-(n+1)} Y_n^{ms})$ για κάθε $\kappa = 1, 2, 3$, $n \geq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$. Επιπλέον κάνουμε χρήση και των

εκφράσεων (ΙΙ-3.92). Για τη συνοριακή συνθήκη (ΙΙ-3.97) απαιτείται η γραφή του ορθομοναδιαίου διανύσματος $\hat{r}$ στο Καρτεσιανό σύστημα από την (ΙΙ-3.40) και η επιλεκτική εφαρμογή αναγωγικών σχέσεων του Παραρτήματος Β. Τέλος, για τη συνοριακή συνθήκη (ΙΙ-3.98) κάνουμε πάλι χρήση των (ΙΙ-3.32)–(ΙΙ-3.39), αφού αναπαραστήσουμε στο σφαιρικό σύστημα το μοναδιαίο δυαδικό από την (ΙΙ-3.13).

Μετά από μια σειρά από πράξεις με αναγωγικές σχέσεις και αρκετή άλγεβρα την οποία δεν είναι επιθυμητό να παρουσιάσουμε εδώ, καταλήγουμε σε ένα πολύπλοκο ομογενές σύστημα, όπου αποτελείται από τους σταθερούς συντελεστές που αντιστοιχούν σε ένα πεδίο ταχύτητας βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δύο. Η ομογένεια αυτού του συστήματος μαζί με το γεγονός ότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη του μηδενός, φανερώνει ότι

$$e_{n,sr}^{(i)ms} = e_{n,sr}^{(e)ms} = 0, \quad n \geq 3, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o \quad (\text{ΙΙ-3.100})$$

και

$$d_{n,sr}^{(i)ms} = d_{n,sr}^{(e)ms} = 0, \quad n \geq 4, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o. \quad (\text{ΙΙ-3.101})$$

Συνεπώς, τα αποτελέσματά μας περιορίζονται στο δευτέρου βαθμού πεδίο ταχύτητας και αντί για τη σειρά (ΙΙ-3.28) ανακτούμε μια κλειστή μορφή αν λάβουμε υπόψη μας τις (ΙΙ-3.100) και (ΙΙ-3.101). Οι υπόλοιποι σταθεροί συντελεστές θα υπολογιστούν από τις (ΙΙ-3.96)–(ΙΙ-3.98).

Με αρκετά εύκολη άλγεβρα οδηγούμαστε στον μηδενισμό αρκετών από τους εναπομείναντες σταθερούς συντελεστές, ενώ, τελικά, οι σταθεροί συντελεστές που επιβιώνουν, σύμφωνα και με τους ορισμούς (ΙΙ-3.27) και (ΙΙ-3.92) ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις,

$$b_{1,sr}^{(i)1e} - a_{1,sr}^{(e)1o} = 2 \quad 1,sr, \quad (\text{ΙΙ-3.102})$$

$$c_{1,sr}^{(i)1o} - b_{1,sr}^{(e)0e} = 2 \quad 2,sr, \quad (\text{ΙΙ-3.103})$$

$$c_{1,sr}^{(i)1e} - a_{1,sr}^{(e)0e} = -2 \quad 3,sr, \quad (\text{ΙΙ-3.104})$$

$$-a^3 c_{2,sr}^{(i)0e} + \left(2 - \frac{3a}{b}\right) c_{0,sr}^{(e)0e} = 3a U_{sr}, \quad (\text{ΙΙ-3.105})$$

$$d_{0,sr}^{(e)0e} = -3c_{1,sr}^{(e)0e} = -3a_{1,sr}^{(e)1e} = -3b_{1,sr}^{(e)1o}, \quad (\text{ΙΙ-3.106})$$

$$-\frac{b^5}{5} c_{2,sr}^{(i)0e} + d_{1,sr}^{(e)0e} = 0, \quad (\text{ΙΙ-3.107})$$

$$c_{0,sr}^{(i)0e} - d_{1,sr}^{(i)0e} + \frac{2}{b} c_{0,sr}^{(e)0e} = 0, \quad (\text{ΙΙ-3.108})$$

$$c_{2, sr}^{(i)0e} + 5d_{3, sr}^{(i)0e} = 0, \quad (\text{II-3.109})$$

$$a^5 c_{2, sr}^{(i)0e} + 3a^5 d_{3, sr}^{(i)0e} + 3d_{1, sr}^{(e)0e} + a^2 c_{0, sr}^{(e)0e} = 0. \quad (\text{II-3.110})$$

Με συνέπεια στις (II-3.102)–(II-3.110), θέτοντας τους υπόλοιπους σταθερούς συντελεστές ίσους με το μηδέν, τα πεδία ροής (II-3.28)–(II-3.31) παίρνουν την τελική τους μορφή μετά την αντικατάσταση των υπάρχοντων σταθερών συντελεστών. Άρα, εισάγοντας τη λύση των (II-3.102)–(II-3.110) στις εκφράσεις για τα πεδία ροής και χρησιμοποιώντας τις φόρμουλες (II-3.32)–(II-3.39) για τη βάρθρωση των συμπαγών σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων, με τους ορισμούς (II-3.20) και (II-3.92), καταλήγουμε στη σφαιρική τρισδιάστατη μορφή των πεδίων ροής με τη βοήθεια των αναγωγικών σχέσεων του Παραρτήματος Β, παράγραφος Β.1. Πράγματι, σε όρους των αντίστοιχων ποσοτήτων με εκείνες στο κύτταρο Kuwabara

$$\gamma_{H, sr} = \frac{a}{b}, \quad \gamma_{H, sr} < 1 \quad (\text{II-3.111})$$

και

$$K_{H, sr} = 2 - 3\gamma_{H, sr} + 3\gamma_{H, sr}^5 - 2\gamma_{H, sr}^6, \quad (\text{II-3.112})$$

όπου a και b είναι οι ακτίνες των ομόκεντρων σφαιρών, η σχέση (II-3.28) για το πεδίο ταχύτητας αναπαρίσταται από την

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = & \mathbf{U} \mathbf{\hat{r}} + \mathbf{\hat{r}} \times \mathbf{r} \\ & + \mathbf{\hat{r}} \frac{U_{sr} \zeta}{K_{H, sr}} \left[-\left(3\gamma_{H, sr}^5 + 2\right) + \gamma_{H, sr}^5 \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \left(2\gamma_{H, sr}^5 + 3\right) \left(\frac{a}{r}\right) \right] \\ & + \mathbf{\hat{\zeta}} \frac{U_{sr} \sqrt{1-\zeta^2}}{2K_{H, sr}} \left[2\left(3\gamma_{H, sr}^5 + 2\right) - 4\gamma_{H, sr}^5 \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{r}\right)^3 - \left(2\gamma_{H, sr}^5 + 3\right) \left(\frac{a}{r}\right) \right], \quad (\text{II-3.113}) \end{aligned}$$

όπου υπολογίζεται στο χωρίο μεταξύ των δύο σφαιρών, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\hat{\Theta}}^3)$ με $a \leq r \leq b$. Το πεδίο ολικής πίεσης, που παίρνεται από την εξίσωση (II-3.29), επιδέχεται τη κλειστή λύση για $|\zeta| \leq 1$,

$$\mathbf{P}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{P}}_{0, sr}^{PN} + \frac{\mu_0 U_{sr} \zeta}{a K_{H, sr}} \left[10\gamma_{H, sr}^5 \left(\frac{r}{a}\right) + \left(2\gamma_{H, sr}^5 + 3\right) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right], \quad a \leq r \leq b, \quad (\text{II-3.114})$$

όπου $\bar{\mathbf{P}}_{0sr}^{PN} = \mathbf{P}_{0sr}^{PN} - \mu_0 \left(b_{1,sr}^{(i)1e} + c_{1,sr}^{(i)1o} + a_{1,sr}^{(i)0e} \right)$, ενώ για το πεδίο στροβιλισμού (II-3.30)

εύκολα επιβεβαιώνεται ότι για $|\zeta| \leq 1$ και $a \leq r \leq b$ ικανοποιεί την

$$\boldsymbol{\omega}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega}_{sr} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{U_{sr} \sqrt{1-\zeta^2}}{2aK_{H,sr}} \left[-5\gamma_{H,sr}^5 \left(\frac{r}{a} \right) + (2\gamma_{H,sr}^5 + 3) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right]. \quad (\text{II-3.115})$$

Εάν συνεχίσουμε να επικεντρωνόμαστε στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, ο ολικός τανυστής των τάσεων (II-3.31) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = & -p_{sr}^{PN}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{I}} + \frac{\mu_0 U_{sr}}{aK_{H,sr}} \left\{ 2(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})\zeta \left[3\left(\frac{a}{r}\right)^4 - (2\gamma_{H,sr}^5 + 3)\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2\gamma_{H,sr}^5 \left(\frac{r}{a}\right) \right] \right. \\ & - (\hat{\boldsymbol{\zeta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\phi}})\zeta \left[3\left(\frac{a}{r}\right)^4 + 2\gamma_{H,sr}^5 \left(\frac{r}{a}\right) \right] \\ & \left. + 3(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \hat{\boldsymbol{\zeta}} \otimes \hat{\mathbf{r}})\sqrt{1-\zeta^2} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^4 - \gamma_{H,sr}^5 \left(\frac{r}{a}\right) \right] \right\} \quad (\text{II-3.116}) \end{aligned}$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ με $a \leq r \leq b$, όπου το μοναδιαίο δυαδικό παρέχεται από την έκφραση (II-3.13) και η θερμοδυναμική πίεση συνδέεται με την ολική πίεση (II-3.114) μέσα από τη σχέση

$$p_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) = p_{sr}^{PN}(\mathbf{r}) - \rho_0 g x_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad a \leq r \leq b. \quad (\text{II-3.117})$$

Φυσικά, η αυθαίρετη σταθερή πίεση p_{0sr}^{PN} και το αυθαίρετο ύψος αναφοράς x_1 επιλέγονται κατάλληλα ανάλογα με τις φυσικές απαιτήσεις του προβλήματος που μελετάται. Τελικά, τα πεδία ροής Stokes του μη αξονοσυμμετρικού προβλήματος Happel υπολογίστηκαν σε κλειστές μορφές που παρέχονται από τις σχέσεις (II-3.113) – (II-3.117).

Τα αποτελέσματα* για τη μελέτη της τρισδιάστατης ροής σμήνους σφαιρικών σωματιδίων εντός πορώδους μέσου με την ανάπτυξη της θεωρίας του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel είναι πρωτότυπα και παρατηρήσαμε την εφαρμογή της γενικής διαφορικής λύσης Papkovitch – Neuber επιδιώκοντας να εξάγουμε τα παραπάνω αποτελέσματα.

Η 3-D λύση για το πεδίο ταχύτητας (II-3.113) συμπίπτει με την αξονοσυμμετρική λύση του προτύπου Happel το 1958 [54] εάν θέσουμε

$$\boldsymbol{\Omega}_{sr} = \mathbf{0}, \quad (\text{II-3.118})$$

* Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παραγράφου ΙΙ-3.3 αποτελούν μέρος της δημοσιευμένης εργασίας [44].

όπου μαθηματικά είναι φανερό τι επιφέρει στα πεδία ροής η (II–3.118). Από φυσικής άποψης, η έλλειψη επιβαλλόμενης γωνιακής ταχύτητας μετατρέπει τον τρισδιάστατο χαρακτήρα του μοντέλου μας σε διδιάστατο, ανακτώντας με αυτό τον τρόπο τα αποτελέσματα του αξονοσυμμετρικού μοντέλου “σφαίρα σε κύτταρο” με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel.

Ανακεφαλαίωση–παρατηρήσεις.

Στις παραγράφους II–3.2 και II–3.3 αναπτύχθηκαν τα δύο βασικά μοντέλα σφαιρικού σωματιδίου σε ρευστό για τη ροή σμήνους σωματιδίων μέσα σε πορώδες μέσο. Στην πρώτη παράγραφο μελετήθηκε το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα της έρπουσας κίνησης ρευστού γύρω από ακίνητο σφαιρικό σωματίδιο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara, ενώ στη δεύτερη παράγραφο αναλύθηκε το τρισδιάστατο πρόβλημα της μεταφορικής και περιστροφικής ροής, που ακολουθεί τους κανόνες του Stokes, σφαιρικού σωματιδίου μέσα σε ηρεμούν ρευστό με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel. Και στις δύο περιπτώσεις τα αποτελέσματα για τα πεδία ροής λήφθηκαν σε κλειστή μορφή και αποτελούν τη βάση για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων, μέσω γεωμετρικού εκφυλισμού, για το 2–D κύτταρο Kuwabara σε σφαιροειδή γεωμετρία και για το 3–D κύτταρο Happel σε ελλειψοειδή γεωμετρία που θα δούμε στις αντίστοιχες εφαρμογές στα επόμενα μέρη της διδακτορικής Διατριβής.

Αξίζει να αναφέρουμε πως τα δύο μοντέλα που μελετήθηκαν έχουν το μειονέκτημα ότι δεν καλύπτουν πλήρως το χώρο του πορώδους μέσου λόγω της ύπαρξης των διακένων μεταξύ του εξωτερικού ρευστού φλοιού των στερεών σφαιρών που συμπληρώνει το εξωτερικό σύνορο στη μελέτη της ροής. Αυτή η δυσκολία πρέπει να ληφθεί υπόψη όταν κάποιος θελήσει να μελετήσει, πέρα από το μοναδιαίο κύτταρο, το σμήνος των σωματιδίων του πορώδους μέσου. Η διαφορά προκαλεί την αλλαγή στη μεταφορική ταχύτητα $\mathbf{U}_{sr} = U_{sr} \hat{\mathbf{x}}_1$ και ο τρόπος που επηρεάζεται έχει μελετηθεί εκτενώς στην αναφορά [38] στην επίλυση των κυττάρων Kuwabara και Happel με αξονική συμμετρία σε σφαιροειδή γεωμετρία με χρήση τεχνικών συνάρτησης ροής. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα εμφανίζεται όταν θέλουμε να μελετήσουμε τη διαπερατότητα του πορώδους μέσου και τότε πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα διακένου (interstitial velocity) $\bar{\mathbf{U}}_{sr} = \bar{U}_{sr} \hat{\mathbf{x}}_1$, όπως λέγεται, που λαμβάνει υπόψη της

και τα διάκενα στο πορώδες μέσο. Η ανάλυση αυτή, όμως, δεν είναι αντικείμενο της παρούσας εργασίας, όπου περιοριζόμαστε στη μικροσκοπική αντιμετώπιση της ροής και στον καθορισμό των πεδίων ροής στον ρευστό φλοιό μεταξύ των δύο ομόκεντρων σφαιρών. Παρόλα αυτά μια μικρή παράθεση των γενικών τύπων για τον υπολογισμό ποσοτήτων που αφορούν το πορώδες μέσο γίνεται μέσω μιας συζήτησης στην ανάλυση των αποτελεσμάτων και στα συμπεράσματα.

Η ευελιξία της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber φαίνεται πιο καθαρά, όπως είπαμε, σε πιο πολύπλοκες γεωμετρίες, όπου ο υπολογισμός των σταθερών συντελεστών επιφέρει μια επιπλέον πολυπλοκότητα και η χρήση της ιδιότητας αυτής της διαφορικής λύσης που παρέχεται στην [48] μας επιτρέπει την παράθεση εναλλακτικών συνθηκών για τους σταθερούς συντελεστές. Αυτό, όμως, θα το δούμε στα επόμενα μέρη και κυρίως στις εφαρμογές που λύνονται τα παραπάνω κυτταρικά μοντέλα σε σφαιροειδή και ελλειψοειδή γεωμετρία.

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ-1 ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΙΙΙ-1.1 Εισαγωγή – επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων.

Ένας από τους κύριους στόχους στη δημιουργία ενός προτύπου είναι η απλοποίηση της γεωμετρικής πολυπλοκότητας διατηρώντας ταυτόχρονα την αξιοπιστία του προτύπου. Σε όλες τις προαναφερθείσες εργασίες τα σωματίδια θεωρήθηκαν σφαιρικά. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις τα σωματίδια στην πραγματικότητα (κόκκοι, συσσωματώματα, μακρομόρια, βακτήρια και διάφορα άλλα) δεν είναι σφαιρικά. Μια καλύτερη προσέγγιση τότε επιτυγχάνεται θεωρώντας τα σαν επιμήκη ή πεπλατυσμένα σφαιροειδή. Σε αντίθεση με την μονοδιάστατη σφαιρική γεωμετρία η γεωμετρία των σφαιροειδών αποτελεί μια διπαραμετρική προσέγγιση των πραγματικών σχημάτων εισάγοντας έναν ακόμα βαθμό ελευθερίας. Για το λόγο αυτό η οικογένεια προβλημάτων που αφορά στη ροή γύρω από σφαιροειδή, με ποικίλες συνθήκες, παρουσιάζει αξιόλογο πρακτικό και θεωρητικό ενδιαφέρον. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε το αλγεβρικό και το γεωμετρικό υπόβαθρο αυτού του είδους των επιφανειών και συγκεκριμένα η ανάλυσή μας θα περιοριστεί στη μελέτη του

επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος συντεταγμένων. Τα αντίστοιχα, γεωμετρικού και αλγεβρικού χαρακτήρα, αποτελέσματα καθώς και διαφορών άλλων ειδών αποτελέσματα φυσικών προβλημάτων που θα μελετήσουμε για την πεπλατυσμένη σφαιροειδή γεωμετρία, λαμβάνονται απλά με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού [77] που θα δούμε αργότερα. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή την εργασία είναι σύμφωνα με αυτόν των Moon και Spencer [77] για τη γεωμετρία και στους Hobson [58] ή Morse και Feshbach [78] για την άλγεβρα και τις σφαιροειδείς αρμονικές συναρτήσεις.

Σχήμα III-1.1: Σύστημα επιμήκων σφαιροειδών συντεταγμένων.

Με συνέπεια στους ορισμούς του Κεφαλαίου I-3 και δοθέντος ενός σταθερού θετικού αριθμού $c > 0$, ο οποίος θεωρείται ότι είναι η ημιστιακή απόσταση του συστήματος, οι επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες (η, θ, φ) , για κάθε $0 \leq \eta < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$, αντιστοιχούν στις γενικές παραμετρικές εξισώσεις (u, v, w) και αποτελούν

ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Οι επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες παράγονται από την περιστροφή μιας ορθογώνιας οικογένειας ομοεστιακών ελλείψεων και υπερβολών γύρω από τον μεγάλο άξονα των ελλείψεων x_1 . Συνεπώς, κατασκευάζονται από τρεις συντεταγμένες επιφάνειες που αναφέρονται σε επιμήκη σφαιροειδή για σταθερό η , σε δίκωνα υπερβολοειδή για σταθερό θ και ημιεπίπεδα για σταθερό φ , όπως φαίνεται και στο Σχήμα ΙΙΙ-1.1, όπου σαν άξονας συμμετρίας επιλέγεται, πάλι για λόγους συμβατότητας με το σφαιρικό σύστημα, ο άξονας x_1 . Άρα, το σύστημα επιτρέπει την αξονική συμμετρία γύρω από τον άξονα x_1 και τότε είναι εφικτός ο εκφυλισμός, όποτε είναι αναγκαίο, των τρισδιάστατων $3-D$ χωρίων σε διδιάστατα ή αξονοσυμμετρικά $2-D$ πεδία κατά αναλογία με το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Ακολουθώντας την διάταξη των αξόνων του Σχήματος ΙΙΙ-1.1 και σε όρους των απλών μετασχηματισμών

$$\tau = \cosh \eta, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \sqrt{\tau^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad 0 \leq \eta < +\infty \quad \text{ή} \quad 1 \leq \tau < +\infty \quad (\text{ΙΙΙ-1.1})$$

και

$$\zeta = \cos \theta, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -\sqrt{1 - \zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{ή} \quad -1 \leq \zeta \leq 1, \quad (\text{ΙΙΙ-1.2})$$

οι εν λόγω επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες συνδέονται με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες με σχέσεις ανάλογες των (Ι-3.113), δηλ.,

$$x_1 = c \cosh \eta \cos \theta = c \tau \zeta, \quad (\text{ΙΙΙ-1.3})$$

$$x_2 = c \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi = c \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi, \quad (\text{ΙΙΙ-1.4})$$

$$x_3 = c \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi = c \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi, \quad (\text{ΙΙΙ-1.5})$$

όπου $0 \leq \eta < +\infty$ ή $1 \leq \tau < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $-1 \leq \zeta \leq 1$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$. Η γωνία φ ταυτίζεται γεωμετρικά με την αντίστοιχη σφαιρική γωνία κάτι που δεν ισχύει και με την γωνία θ , η οποία διαγράφει έλλειψη σε αντίθεση με τη σφαιρική γωνία που διαγράφει κύκλο. Από την (Ι-3.114) το διάνυσμα θέσης ή παρατήρησης $\mathbf{r}$ είναι

$$\mathbf{r} = x_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (\text{ΙΙΙ-1.6})$$

Για κάθε μη εκφυλισμένο επίμηκες σφαιροειδές ισχύει $\eta > 0$. Οι γενικές εκφράσεις (Ι-3.121) χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των μετρικών συντελεστών του

συστήματος, όποτε και καταλήγουμε σε σχέσεις για τα h_η , h_θ , και h_φ όπως φαίνεται και παρακάτω,

$$h_\tau = h_\eta = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right\| = c \left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta \right)^{1/2} = c \sqrt{\tau^2 - \zeta^2}, \quad (\text{III-1.7})$$

$$h_\zeta = h_\theta = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = c \left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta \right)^{1/2} = c \sqrt{\tau^2 - \zeta^2}, \quad (\text{III-1.8})$$

$$h_\varphi = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| = c \sinh \eta \sin \theta = c \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{III-1.9})$$

για κάθε $0 < \eta < +\infty$ ή $1 < \tau < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $-1 \leq \zeta \leq 1$ και $c > 0$.

Η (I-3.122), επιπλέον, καθορίζει για τις ίδιες τιμές των χαρακτηριστικών μεταβλητών των επιμήκων σφαιροειδών συντεταγμένων την Ιακωβειανή του συστήματος J_{sd} ,

$$\begin{aligned} J_{sd} &= h_\eta h_\theta h_\varphi = c^3 \left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta \right) \sinh \eta \sin \theta \quad (0 < \eta < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi \text{ και } c > 0) \\ &= c^3 \left(\tau^2 - \zeta^2 \right) \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad -1 \leq \zeta \leq 1, \quad c > 0. \quad (\text{III-1.10}) \end{aligned}$$

Οι ίδιες εξισώσεις (I-3.121) του Κεφαλαίου I-3, οδηγούν στα μοναδιαία διανύσματα της επιμήκους σφαιροειδούς γεωμετρίας $\hat{\eta} \equiv \hat{\tau}, \hat{\theta} \equiv \hat{\zeta}, \hat{\varphi}$ (με τη σειρά που γράφονται αναφέρονται σε δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα), οπότε παίρνουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \\ &= \frac{1}{\left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta \right)^{1/2}} \left(\sinh \eta \cos \theta \hat{\mathbf{x}}_1 + \cosh \eta \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cosh \eta \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \right) = \hat{\quad} \quad (\text{III-1.11}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{\left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta \right)^{1/2}} \left(-\cosh \eta \sin \theta \hat{\mathbf{x}}_1 + \sinh \eta \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \sinh \eta \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(-\tau \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{x}_1 + \zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \cos \varphi \hat{x}_2 + \zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \sin \varphi \hat{x}_3 \right) = \hat{\boldsymbol{\eta}}, \quad (\text{III-1.12})$$

ενώ για το ορθομοναδιαίο διάνυσμα επαληθεύεται η ταύτισή του με το σφαιρικό,

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \hat{x}_2 + \cos \varphi \hat{x}_3. \quad (\text{III-1.13})$$

Οι αντίστροφες σχέσεις των (III-1.11)–(III-1.13) είναι

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{1}{\left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta \right)^{1/2}} \left(\sinh \eta \cos \theta \hat{\boldsymbol{\eta}} - \cosh \eta \sin \theta \hat{\boldsymbol{\eta}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\boldsymbol{\tau}} - \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right), \end{aligned} \quad (\text{III-1.14})$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= \frac{1}{\left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta \right)^{1/2}} \left(\cosh \eta \sin \theta \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\eta}} + \sinh \eta \cos \theta \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\eta}} \right) - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\tau \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\tau}} + \zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right) - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{III-1.15})$$

και

$$\begin{aligned} \hat{x}_3 &= \frac{1}{\left(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta \right)^{1/2}} \left(\cosh \eta \sin \theta \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\eta}} + \sinh \eta \cos \theta \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\eta}} \right) + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\tau \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\tau}} + \zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right) + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{III-1.16})$$

για $0 < \eta < +\infty$ ή $1 < \tau < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Σε κάθε σταθερή τιμή του $\eta > 0$ αντιστοιχεί ένα μοναδικά καθορισμένο και μη εκφυλισμένο επίμηκες σφαιροειδές (κοίτα Σχήμα ΙΙΙ-1.1)

$$S_\eta : \frac{x_2^2 + x_3^2}{c^2 \sinh^2 \eta} + \frac{x_1^2}{c^2 \cosh^2 \eta} = 1, \quad 0 < \eta < +\infty, \quad c > 0 \quad (\text{III-1.17})$$

ή

$$S_\tau : \frac{x_2^2 + x_3^2}{c^2 (\tau^2 - 1)} + \frac{x_1^2}{c^2 \tau^2} = 1, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad c > 0 \quad (\text{III-1.18})$$

με μεγάλο ημιάξονα, πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 , τον a_1 , μικρό ημιάξονα τον $a_2 = a_3$ και εκκεντρότητα ε , δηλαδή για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $0 < \eta < +\infty$ και $1 < \tau < +\infty$,

$$\alpha_1(\eta) = \alpha_1(\tau) = c \cosh \eta = c\tau, \quad (\text{III-1.19})$$

$$\alpha_2(\eta) = \alpha_3(\eta) = \alpha_2(\tau) = \alpha_3(\tau) = c \sinh \eta = c\sqrt{\tau^2 - 1} \quad (\text{III-1.20})$$

και

$$\varepsilon = \frac{1}{\cosh \eta} = \frac{1}{\tau}. \quad (\text{III-1.21})$$

Ειδικότερα, καθώς $\eta \rightarrow 0^+$ ή $\tau \rightarrow 1^+$

$$\alpha_1(\eta) \rightarrow c, \quad \alpha_2(\eta) = \alpha_3(\eta) \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\eta) \rightarrow 1 \quad (\text{III-1.22})$$

ή

$$\alpha_1(\tau) \rightarrow c, \quad \alpha_2(\tau) = \alpha_3(\tau) \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\tau) \rightarrow 1 \quad (\text{III-1.23})$$

και το επίμηκες σφαιροειδές εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο εστιακό τμήμα

$$S_0 : \{(0, 0, t) : t \in [-c, +c]\}, \quad c > 0. \quad (\text{III-1.24})$$

Αντίθετα, καθώς $\eta \rightarrow +\infty$ ή $\tau \rightarrow +\infty$

$$[\alpha_1(\eta) - \alpha_2(\eta)] = [\alpha_1(\eta) - \alpha_3(\eta)] \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\eta) \rightarrow 0 \quad (\text{III-1.25})$$

ή

$$[\alpha_1(\tau) - \alpha_2(\tau)] = [\alpha_1(\tau) - \alpha_3(\tau)] \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\tau) \rightarrow 0, \quad (\text{III-1.26})$$

αφού για $0 \leq \eta < +\infty$

$$\alpha_1(\eta) = c \cosh \eta = c \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{2}, \quad \alpha_2(\eta) = \alpha_3(\eta) = c \sinh \eta = c \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2}, \quad (\text{III-1.27})$$

το επίμηκες σφαιροειδές προσεγγίζει μια σφαίρα εντοπισμένη στο άπειρο. Τέλος, στο όριο που η ημιεστιακή απόσταση τείνει στο μηδέν ($c \rightarrow 0^+$) το σύστημα μετατρέπεται στο αντίστοιχο σφαιρικό για

$$\|\mathbf{r}\| = c\sqrt{\cosh^2 \eta + \cos^2 \theta - 1} = c\sqrt{\tau^2 + \zeta^2 - 1} \equiv r, \quad 0 < r < +\infty \quad (\text{III-1.28})$$

για κάθε $0 < \eta < +\infty$ ή $1 < \tau < +\infty$ και $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$, όπου r είναι η σφαιρική ακτίνα.

Το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}_{sd}$ στην επιφάνεια ενός επιμήκους σφαιροειδούς $\eta = \text{σταθερό}$ ή $\tau = \text{σταθερό}$ συμπίπτει με το μοναδιαίο κάθετο $\hat{\mathbf{t}}$,

$$\hat{\mathbf{n}}_{sd}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \right). \quad (\text{III-1.29})$$

Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώσαμε την παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών* της επιμήκους σφαιροειδούς γεωμετρίας.

Προχωρώντας, οι βασικοί διαφορικοί τελεστές της βάθμωσης ∇ και του Laplace Δ προκύπτουν με απλή αντικατάσταση στις γενικές σχέσεις (I-3.131) και (I-3.138), αντίστοιχα και για $0 \leq \varphi < 2\pi$, $c > 0$ υποθέτουν τις μορφές

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}}}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{h_\phi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{c \sqrt{\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta}} \left[\hat{\boldsymbol{\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{c \sinh \eta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (0 < \eta < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ &= \frac{1}{c \sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left[\sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial}{\partial \tau} - \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{c \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{III-1.30}) \end{aligned}$$

όπου $1 < \tau < +\infty$ και $-1 \leq \zeta \leq 1$, ενώ κάναμε χρήση των σχέσεων (III-1.7)–(III-1.9) και για τον διαφορικό τελεστή του Laplace, αφού έχουμε εισάγει τον ορισμό της Ιακωβειανής (III-1.10), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{J_{sd}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{J_{sd}}{h_\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{J_{sd}}{h_\theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{J_{sd}}{h_\phi^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{c^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta)^{1/2} \sinh \eta \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sinh \eta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sinh \eta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{(\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta)}{\sinh \eta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ &= \frac{1}{c^2 (\tau^2 - \zeta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(\tau^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \right\} + \frac{1}{c^2 (\tau^2 - 1)(1 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{III-1.31}) \end{aligned}$$

1.31)

* Προσθέτουμε ότι οι εκφράσεις για τον στοιχειώδη όγκο, τις στοιχειώδεις επιφάνειες, τα στοιχειώδη μήκη και την πρώτη θεμελιώδη μορφή σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εξισώσεις (I-3.125), (I-3.126)–(I-3.128), (I-3.129) και (I-3.125α), αντίστοιχα, όπου με απλή αντικατάσταση των χαρακτηριστικών του συστήματος λαμβάνονται οι επιμήκεις σφαιροειδείς εκφράσεις.

για $0 < \eta < +\infty$ ή $1 < \tau < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ και $c > 0$. Αξίζει σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι για τα προαναφερθέντα διαστήματα των παραμέτρων του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος συντεταγμένων

$$\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta}} = \frac{2i}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) Q_{2n}(i \sinh \eta) P_{2n}(\cos \theta), \quad c > 0 \quad (\text{III-1.32})$$

ή

$$\frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} = \frac{2i}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) P_{2n}(0) Q_{2n}(i \sqrt{\tau^2 - 1}) P_{2n}(\zeta), \quad c > 0, \quad (\text{III-1.33})$$

όπου i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα και τα P_{2n} , Q_{2n} είναι οι συναρτήσεις Legendre πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα (κοίτα Παράρτημα Β).

Παρόμοια με τη σφαιρική γεωμετρία, στην ανάλυση των επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών συναρτήσεων, απαιτείται να γνωρίζουμε τη σύνδεση του πραγματικού χώρου με το μιγαδικό χώρο. Συνεπώς, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις που μεταφέρουν την μιγαδική πληροφορία στις αρμονικές συναρτήσεις και οι σχέσεις σύνδεσης δίνονται όπως παρακάτω,

$$\cos m\varphi = \frac{e^{im\varphi} + e^{-im\varphi}}{2} \quad \text{και} \quad \sin m\varphi = \frac{e^{im\varphi} - e^{-im\varphi}}{2i}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (\text{III-1.34})$$

αφού

$$e^{\pm im\varphi} = \cos m\varphi \pm i \sin m\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (\text{III-1.35})$$

για κάθε τιμή βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ των συναρτήσεων με τις οποίες θα εμπλακούμε, όπου i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα. Παρόλα αυτά, στα προβλήματα σφαιροειδούς γεωμετρίας που λύνονται, θα ασχοληθούμε μόνο με τον ορισμό των συναρτήσεων των ημίτονων και συνημίτονων, δηλαδή, θα διατηρηθούμε στους πραγματικούς χώρους.

Για πληρότητα, παραθέτουμε το ταυτοτικό δυαδικό $\tilde{\mathbf{I}}$, όπου η αναλλοίωτή του μορφή (I-3.139) συνεπάγεται την επιμήκη σφαιροειδή έκφραση

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}} &= \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 \\ &= \hat{\boldsymbol{\eta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\eta}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{\zeta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (\text{III-1.36})$$

Τελειώνοντας, το επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων (η, θ, φ) μπορεί να εκφυλιστεί στις δύο διαστάσεις, με συνέπεια την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε $2-D$ πεδία, ορίζοντας σαν άξονα συμμετρίας τον άξονα x_1 , πράγμα που συνεπάγεται αξονοσυμμετρία και ανεξαρτησία από την αζιμούθια γωνία Φ . Τότε οι διαφορικοί τελεστές (ΙΙΙ-1.30) και (ΙΙΙ-1.31) δίνονται στην αντίστοιχη διδιάστατή τους μορφή απουσία παραγωγίσεων ως προς τη γωνία Φ . Η θεωρία για τέτοιου είδους πεδία αναπτύχθηκε εκτενώς στο Κεφάλαιο Ι-2 όπου υπάρχει αντιστοιχία με το γενικό σύστημα (q_1, q_2, φ) για $q_1 = \eta$ και $q_2 = \theta$ και συγκεκριμένοι διαφορικοί τελεστές λαμβάνονται από τις μορφές (Ι-2.21) και (Ι-2.53), ενώ οι μετρικοί συντελεστές έχουν τις ίδιες εκφράσεις, $h_{q_1} = h_\eta$ και $h_{q_2} = h_\theta$. Άρα, ο διαφορικός τελεστής E^2 για αξονοσυμμετρικές ροές δίνεται από την γενική εξίσωση (Ι-2.51), όπου σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες για $0 < \eta < +\infty$ ή $1 < \tau < +\infty$ και $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $|\zeta| \leq 1$, η ήδη ορισμένη “κυλινδρική” ποσότητα

$$\rho_{sd} = \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)} = c \sinh \eta \sin \theta = c \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2} \equiv h_\varphi \quad (\text{ΙΙΙ-1.37})$$

καταλήγει στην παρακάτω έκφραση για τον τελεστή E^2 σε $2-D$ χωρία,

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{\rho_{sd}}{h_\eta h_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\theta}{\rho_{sd} h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_\eta}{\rho_{sd} h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{c^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta)^{1/2}} \left\{ \sinh \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\sinh \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{c^2 (\tau^2 - \zeta^2)} \left[(\tau^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + (1 - \zeta^2) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right], \quad c > 0. \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-1.38})$$

για κάθε $0 < \eta < +\infty$ ή $1 < \tau < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $-1 \leq \zeta \leq 1$ και $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Άρα, για διδιάστατα πεδία, οι σχέσεις (ΙΙΙ-1.31) και (ΙΙΙ-1.38) για τους διαφορικούς τελεστές Δ και E^2 , αντίστοιχα, συνδυάζονται κατάλληλα ώστε να καταλήξουμε στην έκφραση

$$\begin{aligned} E^2 &= \Delta - \frac{2}{c^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta)} \left[\frac{1}{\tanh \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \\ &= \Delta - \frac{2}{c^2 (\tau^2 - \zeta^2)} \left[\tau \frac{\partial}{\partial \tau} - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right], \quad c > 0, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-1.39})$$

όπου $0 < \eta < +\infty$ ή $1 < \tau < +\infty$ και $0 \leq \theta \leq \pi$ ή $-1 \leq \zeta \leq 1$.

III–1.2 Επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές συναρτήσεις.

Σε αυτή την παράγραφο παραθέτουμε βασικές σχέσεις από τη θεωρία της φασματικής ανάλυσης του τελεστή του Laplace Δ στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων οι οποίες είναι χρήσιμες στην παρούσα διατριβή [58,78]. Δυστυχώς δεν είναι εφικτό, κατά αναλογία με τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις, να εισάγουμε διανυσματικές σφαιροειδείς αρμονικές συναρτήσεις. Η δυσκολία έγκειται στην εύρεση των διανυσματικών σφαιροειδών αρμονικών είδους $\mathbf{G}$ που δεν δίνονται σε κάποια αναλλοίωτη μορφή όπως οι άλλες δύο $\mathbf{N}$ και $\mathbf{M}$. Συγκεκριμένα στις σφαιρικές συντεταγμένες, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο II–1, για την δημιουργία των εσωτερικών $\mathbf{G}$ συνδυάστηκε το εσωτερικό ακτινικό μέρος του τελεστή της βάρθρωσης με το εξωτερικό γωνιακό κομμάτι, στην περίπτωση που δρουν σε μια πραγματική επιφανειακή σφαιρική αρμονική, ενώ για την κατασκευή των εξωτερικών $\mathbf{G}$ έγινε ακριβώς το αντίστροφο. Αυτή η “εναλλαγή” είναι, τελικά, εφικτή μόνο σε σφαιρικές συντεταγμένες κάτι που εμποδίζει να χρησιμοποιήσουμε διανυσματικές αρμονικές σε άλλα, πιο πολύπλοκα, συστήματα συντεταγμένων, όπως το σφαιροειδές σύστημα. Συνεπώς, η εύρεση διανυσματικών συμπαγών και επιφανειακών σφαιροειδών αρμονικών συναρτήσεων αποτελεί μέχρι και σήμερα ανοικτό πρόβλημα. Για αυτό το λόγο στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων, θα ακολουθήσουμε τον ορισμό για τις πραγματικές σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις, αφού ο μιγαδικός τρόπος είναι ιδιαίτερα δύσχρηστος. Αυτό είναι και το αντικείμενο των παρακάτω υποπαραγράφων που αναλύουν αυτών των ειδών τις ιδιοσυναρτήσεις. Θα διατηρήσουμε τον συμβολισμό (III–1.1) για την απεικόνιση του $\cosh \eta$, $0 \leq \eta < +\infty$ μέσω της μεταβλητής τ , $1 \leq \tau < +\infty$ και την παράσταση (III–1.2) για την απεικόνιση του $\cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ μέσω της παραμέτρου ζ , $-1 \leq \zeta \leq 1$, ενώ για την εύρεση των επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών συναρτήσεων ακολουθείται η γνωστή μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών [36].

Εισάγουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $S_n^{(\ell)m}$ είδους ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$), βαθμού n ($n = 0, 1, 2, \dots$) και τάξης m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) σε όρους των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre

πρώτου, P_n^m , και δευτέρου, Q_n^m , είδους (κοίτα Παράρτημα Β, παράγραφο Β.1, για $x = \cos\theta = \zeta \in [-1, 1]$ και $x = \cosh\eta = \tau \in (1, +\infty)$) μέσω των εκφράσεων

$$S_n^{(1)m}(\tau, \zeta) = P_n^m(\tau)P_n^m(\zeta), \quad S_n^{(3)m}(\tau, \zeta) = Q_n^m(\tau)P_n^m(\zeta) \quad (\text{III-1.40})$$

για τις ομαλές, χωρίς ιδιομορφίες, πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 ($\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$) ιδιοσυναρτήσεις και

$$S_n^{(2)m}(\tau, \zeta) = P_n^m(\tau)Q_n^m(\zeta), \quad S_n^{(4)m}(\tau, \zeta) = Q_n^m(\tau)Q_n^m(\zeta) \quad (\text{III-1.41})$$

για τις ιδιοσυναρτήσεις με ιδιομορφίες πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 ($\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$), λόγω της εμφάνισης των συναρτήσεων Legendre δευτέρου είδους στη μεταβλητή ζ , $Q_n^m(\zeta)$ για κάθε $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$. Για τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους στη μεταβλητή ζ , $P_n^m(\zeta)$ ισχύει η σχέση ορθογωνιότητας (B.11), ενώ στο Παράρτημα Β, παράγραφος Β.1 συνοψίζονται όλες οι πληροφορίες γύρω από τις συναρτήσεις Legendre που εμφανίζονται στους ορισμούς (III-1.40) και (III-1.41).

Από αυτή τη στιγμή και πέρα όταν θα αναφερόμαστε σε τρισδιάστατα πεδία $\Omega(\mathbf{3})$ θα εννοούμε τα πεδία εκείνα όπου το διάνυσμα θέσης θα είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{3}) &= \{(\eta, \theta, \varphi) : \eta > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \\ &\equiv \{(\tau, \zeta, \varphi) : \tau > 1, |\zeta| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi)\}, \end{aligned} \quad (\text{III-1.42})$$

ενώ στην επιφάνεια του επιμήκους σφαιροειδούς $\hat{\mathbf{r}} = \partial \Omega(\mathbf{3})$ ισχύει

$$\hat{\mathbf{r}} = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \quad \text{ή} \quad \hat{\mathbf{r}} = \{(\zeta, \varphi) : |\zeta| \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}. \quad (\text{III-1.43})$$

Η εύρεση των επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων στηρίζεται στην μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών και τα αποτελέσματα δίνονται σε όρους των συναρτήσεων $S_n^{(\ell)m}$ των εξισώσεων (III-1.40) και (III-1.41). Αυτό τελικά που τις συμπληρώνει είναι η αξιμουθιακή γωνιακή εξάρτηση που προκύπτει από το χωρισμό μεταβλητών στην εξίσωση του Laplace σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες [36]. Τελικά, το πλήρες σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων $u_{n, sd}^{(\ell)ms}$ είδους ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$), βαθμού n ($n = 0, 1, 2, \dots$) και τάξης m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) που ανήκουν στον πυρήνα

του διαφορικού τελεστή Δ ($\Delta u_{n,sd}^{(\ell)ms} = 0$), στη γενική περίπτωση δίνονται από τις σχέσεις

$$u_{n,sd}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) = S_n^{(\ell)m}(\tau, \zeta) f^{ms}(\varphi), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{III-1.44})$$

με

$$f^{ms}(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi, & s = e \\ \sin m\varphi, & s = o \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (\text{III-1.45})$$

όπου το s δηλώνει τον άρτιο (e) (even) ή τον περιττό (o) (odd) χαρακτήρα των συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων*.

Ωστόσο, λόγω φυσικών απαιτήσεων των ροών Stokes, τα πεδία ροής πρέπει να είναι ομαλά στον άξονα συμμετρίας x_1 για $\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα III-1.1. Συνεπώς, οι όροι στην (III-1.44) που εμπεριέχουν τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre του δευτέρου είδους Q_n^m στη μεταβλητή ζ εξαιρούνται και, οπότε, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είδους $\ell = 2, 4$ πρέπει να αποκλεισθούν. Άρα, κάθε αρμονική συνάρτηση ομαλή στον άξονα συμμετρίας x_1 , ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή του Laplace και σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες αυτός ο γραμμικός χώρος, εκφράζεται μέσω των εσωτερικών συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων είδους $\ell = 1 \equiv i$ (internal)

$$u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r}) = S_n^{(1)m}(\tau, \zeta) f^{ms}(\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad s = e, o \quad (\text{III-1.46})$$

και μέσω των εξωτερικών συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων είδους $\ell = 3 \equiv e$ (external)

$$u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r}) = S_n^{(3)m}(\tau, \zeta) f^{ms}(\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \quad s = e, o, \quad (\text{III-1.47})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$. Φυσικά, οι συναρτήσεις $S_n^{(\ell)m}$ για τα είδη $\ell = 1, 3$ δίνονται από τις σχέσεις (III-1.40) και, τότε, κάθε αρμονική συνάρτηση γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των εσωτερικών και εξωτερικών συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων.

* Τελικά, μια βαθμωτή πραγματική συμπαγής σφαιρική αρμονική συνάρτηση u_{sd} γράφεται σε πλήρες ανάπτυγμα των ιδιοσυναρτήσεων που περιγράψαμε,

$$u_{sd}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\ell=1}^4 \sum_{s=e,o} \left[\delta_{n,sd}^{(\ell)ms} u_{n,sd}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{III-1.44a})$$

όπου φυσικά η u_{sd} μπορεί να είναι και διανυσματική συνάρτηση και τον διανυσματικό χαρακτήρα τον μεταφέρουμε στους σταθερούς συντελεστές.

Ο τελεστής της βάθμωσης ∇ στις συμπαγείς επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές συναρτήσεις.

Στο πλαίσιο των ορισμών των διαφορικών αναπαραστάσεων που εκφράζονται μέσω διαφορικών τελεστών και, κυρίως, μέσω του διαφορικού τελεστή της βάθμωσης ∇ , ο οποίος, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο Ι-3, δρα σε αρμονικά δυναμικά, είναι επιτακτικής ανάγκης η εύρεση μιας απλής και εύχρηστης μορφής της δράσης του τελεστή ∇ στις συμπαγείς επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις. Η πιο κατάλληλη μορφή θα δινόταν σε Καρτεσιανές συντεταγμένες σε όρους συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών συναρτήσεων, έτσι ώστε να ισχύει, φυσικά, η ταυτότητα (Α.50) του Παραρτήματος Α, δηλ.,

$$\Delta(\nabla u_{n,sd}^{(\ell)ms}(\mathbf{r})) = \nabla(\Delta u_{n,sd}^{(\ell)ms}(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3), \quad (\text{III-1.48})$$

όπου $\ell = 1, 2, 3, 4$, $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$, ενώ $s = e, o$. Με δεδομένη την απαίτηση ομαλών πεδίων ροής στον άξονα συμμετρίας x_1 για $\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$ μας ωθεί στον υπολογισμό της βάθμωσης των συμπαγών αρμονικών των ειδών $\ell = 1, 3$, δηλαδή των εσωτερικών $\nabla u_{n,sd}^{(i)ms}$ και των εξωτερικών $\nabla u_{n,sd}^{(e)ms}$. Αυτή ήταν και η διαδικασία που ακολουθήθηκε και στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων στο Κεφάλαιο ΙΙ-1, αλλά η μορφή του συγκεκριμένου συστήματος καθώς επίσης και το γεγονός ότι τα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στα επόμενα κεφάλαια του Μέρους ΙΙΙ, καθιστούν αφενός μεν, δύσκολη τη γραφή της βάθμωσης των αρμονικών συναρτήσεων σε όρους αρμονικών συναρτήσεων σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, αφετέρου δε, δεν χρησιμοποιούνται σε αυτή τη μορφή αλλά σε μια μορφή πιο εύχρηστη όσον αφορά το πνεύμα της διδακτορικής διατριβής. Συνεπώς, πρέπει να βρούμε μια παράσταση για τη κλίση των επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών συναρτήσεων που να μας βοηθάει στα επόμενα βήματα. Μια τέτοια μορφή θα περιπλέκει όλα τα είδη των αρμονικών συναρτήσεων σε έναν γενικό τύπο σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Πιο αναλυτικά, αν ορίσουμε τις συναρτήσεις T_n^m και Z_n^m σαν συναρτήσεις των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου και δευτέρου είδους στις μεταβλητές τ και ζ μέσω των εκφράσεων

$$T_n^m(\tau) = \begin{cases} P_n^m(\tau), & \ell = 1, 2 \\ Q_n^m(\tau), & \ell = 3, 4 \end{cases}, \quad 1 < \tau < +\infty \quad (\text{III-1.49})$$

και

$$Z_n^m(\zeta) = \begin{cases} P_n^m(\zeta), & \ell = 1, 3 \\ Q_n^m(\zeta), & \ell = 2, 4 \end{cases}, \quad -1 \leq \zeta \leq 1, \quad (\text{III-1.50})$$

ενώ αν χρησιμοποιήσουμε την (III-1.45) έτσι ώστε

$$f^{ms}(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi, & s = e \\ \sin m\varphi, & s = o \end{cases} \Rightarrow f^{ms'}(\varphi) = \begin{cases} -m \sin m\varphi, & s = e \\ m \cos m\varphi, & s = o \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (\text{III-1.51})$$

τότε για κάθε $\ell = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$ η (III-1.44) σε συνδυασμό με την γενική έκφραση (III-1.30) δίνουν

$$\begin{aligned} \nabla u_{n, sd}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) &= \nabla \left(S_n^{(\ell)m}(\tau, \zeta) f^{ms}(\varphi) \right) \\ &= \frac{1}{c\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left[\sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} - \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left(S_n^{(\ell)m}(\tau, \zeta) f^{ms}(\varphi) \right) \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{c\sqrt{\tau^2 - 1}\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(S_n^{(\ell)m}(\tau, \zeta) f^{ms}(\varphi) \right), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3). \end{aligned} \quad (\text{III-1.52})$$

Εύκολα από την (III-1.52) προκύπτει ότι αν γράψουμε

$$S_n^{(\ell)m}(\tau, \zeta) = T_n^m(\tau) Z_n^m(\zeta), \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-1.53})$$

για $\ell = 1, 2, 3, 4$, $n = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$, έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla u_{n, sd}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) &= \frac{f^{ms}(\varphi)}{c\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left[\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{\tau^2 - 1}} Z_n^m(\zeta) (\tau^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \tau} T_n^m(\tau) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hat{\zeta}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} T_n^m(\tau) (1 - \zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} Z_n^m(\zeta) \right] \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{c\sqrt{\tau^2 - 1}\sqrt{1 - \zeta^2}} T_n^m(\tau) Z_n^m(\zeta) f^{ms'}(\varphi), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \end{aligned} \quad (\text{III-1.54})$$

όπου η ημιεστιακή απόσταση $c > 0$.

Αρα, διατηρώντας τους ορισμούς (III-1.49) και (III-1.50), εισάγοντας τις ιδιοσυναρτήσεις (III-1.40), (III-1.41) και (III-1.51) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις παραγωγίσεων (B.13) και (B.14) για τις συναρτήσεις Legendre πρώτου και δευτέρου

είδους στις μεταβλητές τ και ζ από το Παράρτημα Β, παράγραφο Β.1, τότε καταλήγουμε στην πολύ εύχρηστη σχέση, όπως θα αποδειχτεί και αργότερα,

$$\begin{aligned} \nabla u_{n, sd}^{(\ell)ms}(\mathbf{r}) = & \frac{cf^{ms}(\varphi)}{(2n+1)} \left\{ \frac{Z_n^m(\zeta)\hat{\mathbf{r}}}{c^2\sqrt{\tau^2-\zeta^2}\sqrt{\tau^2-1}} \left(n(n-m+1)T_{n+1}^m(\tau) - (n+1)(n+m)T_{n-1}^m(\tau) \right) \right. \\ & \left. + \frac{T_n^m(\tau)\hat{\zeta}}{c^2\sqrt{\tau^2-\zeta^2}\sqrt{1-\zeta^2}} \left(n(n-m+1)Z_{n+1}^m(\zeta) - (n+1)(n+m)Z_{n-1}^m(\zeta) \right) \right\} \\ & + \frac{f^{ms'}(\varphi)\hat{\boldsymbol{\phi}}}{c\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}} T_n^m(\tau)Z_n^m(\zeta), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{III-1.55})$$

για κάθε είδος $\ell=1,2,3,4$, βαθμό $n=1,2,\dots$, τάξη $m=0,1,2,\dots,n$ και χαρακτήρα $s=e,o$. Φυσικά, η παραπάνω έκφραση λαμβάνει υπόψη τις σχέσεις-ορισμούς που προαναφέραμε, (III-1.49)–(III-1.51).

Η περίπτωση $n=0, m=0$ αντιμετωπίζεται ξεχωριστά και συγκεκριμένα είναι

$$\begin{aligned} \nabla u_{0, sd}^{(\ell)0e}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{c\sqrt{\tau^2-\zeta^2}} \left[\frac{\hat{\mathbf{r}}}{\sqrt{\tau^2-1}} Z_0(\zeta) (\tau^2-1) \frac{\partial}{\partial \tau} T_0(\tau) \right. \\ & \left. - \frac{\hat{\zeta}}{\sqrt{1-\zeta^2}} T_0(\tau) (1-\zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} Z_0(\zeta) \right] \end{aligned} \quad (\text{III-1.56})$$

για κάθε είδος $\ell=1,2,3,4$ και $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$.

Τα χωρία που δεν εμπεριέχουν ιδιομορφίες στον άξονα συμμετρίας για $\zeta=\pm 1$ περιορίζουν κατάλληλα τον υπόχωρο της κλίσης των αρμονικών συναρτήσεων στα είδη $\ell=1,3$, δηλαδή, των εσωτερικών $\nabla u_{n, sd}^{(i)ms}$ ($\ell=1$) και των εξωτερικών $\nabla u_{n, sd}^{(e)ms}$ ($\ell=3$) επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων για βαθμό $n=0,1,2,\dots$, τάξη $m=0,1,2,\dots,n$ και χαρακτήρα $s=e,o$.

III-1.3 Ο πυρήνας των διαφορικών τελεστών E^2 και E^4 σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες.

Όταν βρισκόμαστε σε συνθήκες ροής Stokes, η δυναμική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση ροής Ψ_{sd} , που περιγράψαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο Ι-2, για διδιάστατα ή, αλλιώς, αξονοσυμμετρικά σφαιροειδή πεδία ροής είναι η (I-2.43),

$$E^4 \psi_{sd}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2), \quad (\text{III-1.57})$$

όπου σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες από την (III-1.38) για $\tau = \cosh \eta$, $0 < \eta < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$ και για $\zeta = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-1 \leq \zeta \leq 1$ γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} E^4 &= E^2 \circ E^2 \\ &= \frac{1}{c^4} \left[\frac{\tau^2 - 1}{(\tau^2 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1 - \zeta^2}{(\tau^2 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right] \left[\frac{\tau^2 - 1}{(\tau^2 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1 - \zeta^2}{(\tau^2 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-1.58})$$

για κάθε $c > 0$.

Στη σφαιρική γεωμετρία αποδεικνύεται [56] ότι οι διαφορικοί τελεστές E^2 και E^4 χωρίζουν μεταβλητές και με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών [36] λαμβάνονται οι ιδιοσυναρτήσεις που μελετήσαμε εκτενώς στο αντίστοιχο Κεφάλαιο II-1. Η εξίσωση (III-1.57) χωρίζει, επίσης, μεταβλητές στο καρτεσιανό και κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, ενώ ο διαφορικός τελεστής E^2 επιδέχεται χωρισιμότητα σε σφαιροειδείς συντεταγμένες στις μεταβλητές τ και ζ με την έννοια που γνωρίζουμε [36]. Όμως, η εξίσωση (III-1.57) δεν είναι διαχωρίσιμη στο σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων, γεγονός που είχε καθυστερήσει σημαντικά την ανάπτυξη της ανάλυσης των φαινομένων αλληλεπίδρασης μεταξύ σωματιδίων-ρευστού στην περίπτωση που τα σωματίδια είναι σφαιροειδή, παρ' όλη την χρησιμότητά τους στις εφαρμογές.

Το 1965 οι Happel και Brenner [56] παρήγαγαν μια λύση του προβλήματος της αξονοσυμμετρικής έρπουσας ροής γύρω από ένα ακίνητο σφαιροειδές χρησιμοποιώντας μια “ad hoc” τεχνική για να ξεπεράσουν τη δυσκολία που παρουσιαζόταν από το γεγονός ότι η εξίσωση (III-1.57) δεν χωρίζει μεταβλητές σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων, με τη συνήθη έννοια του όρου. Ωστόσο, η εξεύρεση της πλήρους αναπαράστασης της γενική λύσης της εξίσωσης $E^4 \psi_{sd} = 0$ σε σφαιροειδή γεωμετρία, σε αναλυτική κλειστή μορφή αποτέλεσε επίτευγμα της εργασίας των Dassios *et al.* το 1994 [37]. Με αυτό τον τρόπο λύθηκαν, όπως προαναφέραμε και στο Κεφάλαιο I-4, τα μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel [38] και Kuwabara [37].

Τρισδιάστατες λύσεις της εξίσωσης της κίνησης της έρπουσας ροής είναι πολύτιμες σε προβλήματα που αφορούν σωματιδιακά συστήματα αν δεν γίνεται χρήση της θεωρίας διαφορικών αναπαραστάσεων. Αφού σε τέτοιου είδους προβλήματα

υπάρχουν πολλαπλά σύνορα, είναι επιθυμητό να παρέχονται επαρκώς γενικές λύσεις, ούτως ώστε να επιτρέπουν ταυτόχρονη ικανοποίηση όλων των συνοριακών συνθηκών.

Σε αυτή την παράγραφο θα παραθέσουμε περιληπτικά τα αποτελέσματα της εργασίας [37] όσον αφορά την χωρισιμότητα μεταβλητών του τελεστή E^2 και την “ημιδιαχωρισιμότητα” του τελεστή E^4 σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες. Στη συγκεκριμένη εργασία παρουσιάστηκε για πρώτη φορά η θεωρητική ανάπτυξη και περιγραφή των αναλυτικών μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή της γενικής λύσης του προβλήματος της έρπουσας ροής, όπου εισήχθηκε η ιδέα της ημιδιαχωρισιμότητας των μεταβλητών.

Συνεπώς, αναφερόμενοι πάντα στην [37], οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή E^2 , ο οποίος χωρίζει μεταβλητές στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, παράγονται μέσω των συναρτήσεων Gegenbauer (βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$) πρώτου G_n και δευτέρου H_n είδους. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές είναι οι συναρτήσεις $\Theta_n^{(\ell)}$ είδους ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) και βαθμού n ($n = 0, 1, 2, \dots$), όπου για κάθε $\tau > 1$, $|\zeta| \leq 1$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\Theta_n^{(1)}(\tau, \zeta) = G_n(\tau)G_n(\zeta), \quad (\text{III-1.59})$$

$$\Theta_n^{(2)}(\tau, \zeta) = G_n(\tau)H_n(\zeta), \quad (\text{III-1.60})$$

$$\Theta_n^{(3)}(\tau, \zeta) = H_n(\tau)G_n(\zeta), \quad (\text{III-1.61})$$

$$\Theta_n^{(4)}(\tau, \zeta) = H_n(\tau)H_n(\zeta) \quad (\text{III-1.62})$$

και ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^2 , δηλ.,

$$E^2\Theta_n^{(\ell)}(\tau, \zeta) = 0, \quad \ell = 1, 2, 3, 4, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{III-1.63})$$

Η πλήρης αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου των λύσεων παριστάνεται με μορφή σειρών των ιδιοσυναρτήσεων. Με περιορισμό του διανυσματικού χώρου των λύσεων παράγεται ο κατάλληλος κάθε φορά υπόχωρος για την επίλυση εσωτερικών ($\ell = 1$) και εξωτερικών ($\ell = 3$) προβλημάτων.

Ο ελλειπτικού τύπου διαφορικός τελεστής E^4 δεν χωρίζει μεταβλητές και προκειμένου να επιτευχθεί η πλήρης αναπαράσταση του πυρήνα του τελεστή E^4 χρησιμοποιείται η θεωρία των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων [37]. Παράγεται έτσι το πλήρες σύνολο των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων, όπου κάθε μια ιδιοσυνάρτηση δίνεται σε κλειστή μορφή με ένα καθορισμένο συνδυασμό από συναρτήσεις Gegenbauer μικτής τάξης.

Κάθε συνάρτηση που ανήκει στον πυρήνα του τελεστή E^2 ανήκει επίσης στον πυρήνα του τελεστή E^4 . Παρόλα αυτά, αυτές οι συναρτήσεις που δίνονται από τις σχέσεις (III–1.59)–(III–1.62) δεν αποτελούν ένα πλήρες σύνολο λύσεων της εξίσωσης κινήσεως (III–1.57). Οι λύσεις που δεν είναι μέλη της χώρου $\ker E^2$ κατασκευάστηκαν με τη μέθοδο των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων [37]. Έτσι, ορίζουμε με $\Omega_n^{(\ell)}$, είδους ℓ ($\ell=1,2,3,4$) και βαθμού n ($n=0,1,2,\dots$), αυτές τις γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις που αναπαριστούν την “προεικόνα”, μετά τη δράση του τελεστή E^2 , ενός τυχαίου στοιχείου του χώρου $\ker E^2$. Λοιπόν,

$$E^2\Omega_n^{(\ell)}(\tau, \zeta) \in \ker E^2, \quad \ell=1,2,3,4, \quad n=0,1,2,\dots, \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{III–1.64})$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (III–1.64), τα $\Omega_n^{(\ell)}$ λύνουν τις εξισώσεις

$$c^2 E^2 \Omega_n^{(\ell)}(\tau, \zeta) = \Theta_n^{(\ell)}(\tau, \zeta), \quad \ell=1,2,3,4, \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{III–1.65})$$

για κάθε $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$, όπου η σταθερά c^2 , $c > 0$ εισάγεται στην (III–1.65) για να υπάρχει συμβατότητα με το συμβολισμό. Η τελευταία έκφραση έχει σαν αποτέλεσμα μια πλήρη φασματική αποσύνθεση των λύσεων του χώρου $\ker E^4$, όταν είναι γνωστές οι ιδιοσυναρτήσεις $\Omega_n^{(\ell)}$. Για κάθε $\ell=1,2,3,4$, $n=0,1,2,\dots$ και για $\tau > 1$, $|\zeta| \leq 1$ οι ιδιοσυναρτήσεις $\Omega_n^{(\ell)}$ αποδεικνύεται [37] ότι είναι για $n=0$

$$\Omega_0^{(1)}(\tau, \zeta) = -G_0(\tau)G_2(\zeta) - G_2(\tau)G_0(\zeta), \quad (\text{III–1.66})$$

$$\Omega_0^{(2)}(\tau, \zeta) = \frac{1}{3}G_0(\tau)G_3(\zeta) - G_2(\tau)G_1(\zeta), \quad (\text{III–1.67})$$

$$\Omega_0^{(3)}(\tau, \zeta) = \frac{1}{3}G_3(\tau)G_0(\zeta) - G_1(\tau)G_2(\zeta), \quad (\text{III–1.68})$$

$$\Omega_0^{(4)}(\tau, \zeta) = \frac{1}{3}G_1(\tau)G_3(\zeta) + \frac{1}{3}G_3(\tau)G_1(\zeta) \quad (\text{III–1.69})$$

για $n=1$

$$\Omega_1^{(1)}(\tau, \zeta) = \Omega_0^{(4)}(\tau, \zeta), \quad (\text{III–1.70})$$

$$\Omega_1^{(2)}(\tau, \zeta) = -\Omega_0^{(3)}(\tau, \zeta), \quad (\text{III–1.71})$$

$$\Omega_1^{(3)}(\tau, \zeta) = -\Omega_0^{(2)}(\tau, \zeta), \quad (\text{III–1.72})$$

$$\Omega_1^{(4)}(\tau, \zeta) = \Omega_0^{(1)}(\tau, \zeta) \quad (\text{III–1.73})$$

για $n=2$

$$\Omega_2^{(1)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{25}G_2(\tau)G_4(\zeta) + \frac{2}{25}G_4(\tau)G_2(\zeta), \quad (\text{III–1.74})$$

$$\Omega_2^{(2)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{25} G_2(\tau) H_4(\zeta) + \frac{2}{25} G_4(\tau) H_2(\zeta) + \frac{1}{6} G_2(\tau) G_1(\zeta), \quad (\text{III-1.75})$$

$$\Omega_2^{(3)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{25} H_2(\tau) G_4(\zeta) + \frac{2}{25} H_4(\tau) G_2(\zeta) + \frac{1}{6} G_1(\tau) G_2(\zeta), \quad (\text{III-1.76})$$

$$\Omega_2^{(4)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{25} H_2(\tau) H_4(\zeta) + \frac{2}{25} H_4(\tau) H_2(\zeta) + \frac{1}{6} G_1(\tau) H_2(\zeta) + \frac{1}{6} H_2(\tau) G_1(\zeta) \quad (\text{III-1.77})$$

για $n = 3$

$$\Omega_3^{(1)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{49} G_3(\tau) G_5(\zeta) + \frac{2}{49} G_5(\tau) G_3(\zeta), \quad (\text{III-1.78})$$

$$\Omega_3^{(2)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{49} G_3(\tau) H_5(\zeta) + \frac{2}{49} G_5(\tau) H_3(\zeta) - \frac{1}{90} G_3(\tau) G_0(\zeta), \quad (\text{III-1.79})$$

$$\Omega_3^{(3)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{49} H_3(\tau) G_5(\zeta) + \frac{2}{49} H_5(\tau) G_3(\zeta) - \frac{1}{90} G_0(\tau) G_3(\zeta), \quad (\text{III-1.80})$$

$$\Omega_3^{(4)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{49} H_3(\tau) H_5(\zeta) + \frac{2}{49} H_5(\tau) H_3(\zeta) - \frac{1}{90} G_0(\tau) H_3(\zeta) - \frac{1}{90} H_3(\tau) G_0(\zeta) \quad (\text{III-1.81})$$

και για $n = 4, 5, 6, \dots$ δίνονται από τους γενικούς τύπους,

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(1)}(\tau, \zeta) = & -\frac{\alpha_n}{2(2n-3)} [G_{n-2}(\tau) G_n(\zeta) + G_n(\tau) G_{n-2}(\zeta)] \\ & + \frac{\beta_n}{2(2n+1)} [G_{n+2}(\tau) G_n(\zeta) + G_n(\tau) G_{n+2}(\zeta)], \end{aligned} \quad (\text{III-1.82})$$

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(2)}(\tau, \zeta) = & -\frac{\alpha_n}{2(2n-3)} [G H_2(\tau) \quad_n(\zeta) + H_n(\tau) \quad_{n-2}(\zeta)] \\ & + \frac{\beta_n}{2(2n+1)} [G H_{n+2}(\tau) \quad_n(\zeta) + H_n(\tau) \quad_{n+2}(\zeta)], \end{aligned} \quad (\text{III-1.83})$$

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(3)}(\tau, \zeta) = & -\frac{\alpha_n}{2(2n-3)} [H_{n-2}(\tau) G_n(\zeta) + H_n(\tau) G_{n-2}(\zeta)] \\ & + \frac{\beta_n}{2(2n+1)} [H_{n+2}(\tau) G_n(\zeta) + H_n(\tau) G_{n+2}(\zeta)], \end{aligned} \quad (\text{III-1.84})$$

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(4)}(\tau, \zeta) = & -\frac{\alpha_n}{2(2n-3)} [H_{n-2}(\tau) H_n(\zeta) + H_n(\tau) H_{n-2}(\zeta)] \\ & + \frac{\beta_n}{2(2n+1)} [H_{n+2}(\tau) H_n(\zeta) + H_n(\tau) H_{n+2}(\zeta)], \end{aligned} \quad (\text{III-1.85})$$

όπου οι σταθερές α_n και β_n εκφράζονται από τις εξισώσεις

$$\alpha_n = \frac{(n-3)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)} \quad \text{και} \quad \beta_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad n \geq 4. \quad (\text{III-1.86})$$

Όπως και πριν, κάθε φορά παράγεται ο κατάλληλος υπόχωρος για την επίλυση εσωτερικών ($\ell = 1$) και εξωτερικών ($\ell = 3$) προβλημάτων.

Κάθε συνάρτηση ροής Stokes ψ_{sd} , αναπαρίσταται ως άθροισμα των σειρών των ιδιοσυναρτήσεων και των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή E^2 . Κάθε όρος του αναπτύγματος ανεξάρτητα, δεν είναι λύση της εξίσωσης $E^4\psi_{sd} = 0$, αλλά το πλήρες ανάπτυγμα είναι. Επομένως, η συνάρτηση ροής γράφεται σαν μια σειρά σε όρους των ιδιοσυναρτήσεων $\Theta_n^{(\ell)}$ και $\Omega_n^{(\ell)}$ για κάθε είδος ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) και βαθμό n ($n = 0, 1, 2, \dots$) και τότε

$$\begin{aligned}\psi_{sd}(\tau, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^4 \psi_{n,sd}^{(\ell)}(\tau, \zeta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^4 \left[A_{n,sd}^{\ell} \Theta_n^{(\ell)}(\tau, \zeta) + B_{n,sd}^{\ell} \Omega_n^{(\ell)}(\tau, \zeta) \right], \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-1.87})\end{aligned}$$

για $\tau = \cosh \eta$, $0 < \eta < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$ και για $\zeta = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-1 \leq \zeta \leq 1$, όπου το άθροισμα με τις Θ -συναρτήσεις αναπαριστά ένα στοιχείο του χώρου $\ker E^2$ (χωριζόμενες μεταβλητές) και το άθροισμα με τις Ω -συναρτήσεις αναπαριστά ένα στοιχείο του χώρου $\ker E^4$ (ημιχωριζόμενες μεταβλητές). Οι ιδιοσυναρτήσεις $\Theta_n^{(\ell)}$ και $\Omega_n^{(\ell)}$ είδους ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) και βαθμού n ($n = 0, 1, 2, \dots$) γράφονται μέσω των συναρτήσεων Gegenbauer πρώτου και δευτέρου είδους, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων που αναπτύχθηκαν στην [37]. Όλες οι ιδιότητες και οι αναγωγικές σχέσεις των συναρτήσεων Gegenbauer συνοψίζονται στο Παράρτημα Β, παράγραφο Β.2.

Οι ομαλές λύσεις, πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 , της εξίσωσης κινήσεως περιορίζονται στον κατάλληλο υπόχωρο του $\ker E^4$, ο οποίος αποτελείται από τις ιδιοσυναρτήσεις περιττού είδους και βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δύο ($n \geq 2$). Άρα, η εξαίρεση ιδιομορφιών για $\zeta = \pm 1$ απαιτεί όλες οι ιδιοσυναρτήσεις αρτίου βαθμού και οι δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις περιττού βαθμού (κοίτα (Β.30) και (Β.31)) να εξαφανιστούν. Δηλαδή, οι αντίστοιχοι σταθεροί συντελεστές στο παραπάνω ανάπτυγμα (III-1.87) οφείλουν να μηδενιστούν, δηλ.,

$$A_{n,sd}^{\ell} = B_{n,sd}^{\ell} = 0, \quad n \geq 0, \quad \ell = 2, 4 \quad (\text{III-1.88})$$

και

$$A_{0,sd}^{\ell} = B_{0,sd}^{\ell} = A_{1,sd}^{\ell} = B_{1,sd}^{\ell} = 0, \quad \ell = 1, 3. \quad (\text{III-1.89})$$

Μια αναδιάταξη του πλήρους αναπτύγματος με τέτοιο τρόπο ώστε η γωνιακή εξάρτηση να εισάγεται μέσω συναρτήσεων Gegenbauer συγκεκριμένης τάξης παράγει κάποιου είδους ημιδιαχωρίσιμη λύση που δίνεται με ανάπτυγμα όλων των όρων της σειράς. Η πληρότητα της ημιδιαχωρίσιμης λύσης επιτρέπει την χρήση της για την επίλυση εσωτερικών, $\Psi_{n, sd}^{(i)} \equiv \Psi_{n, sd}^{(i)}$ είδους $\ell = 1 \equiv i$ (internal), και εξωτερικών, $\Psi_{n, sd}^{(e)} \equiv \Psi_{n, sd}^{(e)}$ είδους $\ell = 3 \equiv e$ (external), προβλημάτων καθώς και προβλημάτων σφαιροειδούς κυττάρου, με ή χωρίς ($\ell = 1, 3$ και $n \geq 2$) ιδιομορφίες στον άξονα συμμετρίας. Δίνεται επίσης ο περιορισμός της γενικής λύσης που περιγράφει ροές που είναι ομαλές στον άξονα συμμετρίας. Ωστόσο, η θεωρία των διαφορικών αναπαραστάσεων εισάγει ένα πιο πρακτικό τρόπο αντιμετώπισης αξονοσυμμετρικών προβλημάτων και σίγουρα έναν πιο αποτελεσματικό και μοναδικό τρόπο αντιμετώπισης τρισδιάστατων προβλημάτων χωρίς αξονική συμμετρία.

ΙΙΙ-1.4 Γεωμετρικός εκφυλισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Σε ότι αναφέρουμε σε αυτή την παράγραφο θα ακολουθηθεί η γνωστή τροποποίηση $\tau = \cosh \eta$, $0 < \eta < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$ και $\zeta = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-1 \leq \zeta \leq 1$. Το σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων εκφυλίζεται στο αντίστοιχο σφαιρικό, καθώς η ημιεστιακή του απόσταση c τείνει στο μηδέν, $c \rightarrow 0^+$. Ταυτόχρονα, η μορφή της συνάρτησης ροής Stokes (ΙΙΙ-1.87) σε σφαιροειδή γεωμετρία μετατρέπεται στην αντίστοιχη γνωστή διαχωρίσιμη μορφή της (ΙΙ-1.110) στη σφαιρική γεωμετρία. Η διαδικασία αυτή ξεκινάει με τον ορισμό (ΙΙΙ-1.28),

$$\|\mathbf{r}\| = c\sqrt{\tau^2 + \zeta^2 - 1} \equiv r, \quad 0 < r < +\infty, \quad c > 0 \quad (\text{ΙΙΙ-1.90})$$

για κάθε $1 < \tau < +\infty$ και $|\zeta| \leq 1$, όπου r είναι η σφαιρική ακτίνα. Τότε, ισχύει το παρακάτω πολύ σημαντικό, για τη διαδικασία εκφυλισμού αποτελεσμάτων από το σφαιροειδές σύστημα στο αντίστοιχο σφαιρικό, όριο

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} c\tau = r, \quad 0 < r < +\infty, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{ΙΙΙ-1.91})$$

και λόγω του αναπτύγματος Taylor [14] γύρω από το 0

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\tau + 1}{\tau - 1} = \coth^{-1} \tau = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{3\tau^3} + \frac{1}{5\tau^5} + \dots, \quad \tau > 1, \quad (\text{ΙΙΙ-1.92})$$

προκύπτει με κατάλληλο συνδυασμό και απλή άλγεβρα με την (III-1.91) το εξίσου σημαντικό όριο

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{2c} \ln \frac{\tau+1}{\tau-1} = \frac{1}{r}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{III-1.93})$$

αφού η οριακή διαδικασία επιβιώνει τον πρώτο όρο του αθροίσματος (III-1.92).

Επομένως, καθώς το επίμηκες σφαιροειδές (III-1.18) παραμορφώνεται συνεχώς όσο οι δύο εστίες πλησιάζουν το μηδέν, η ακτινική σφαιρική συνιστώσα ανακτάται από το όριο του γινομένου $c\tau$ καθώς $c \rightarrow 0^+$, ενώ η γωνιακή εξάρτηση παραμένει αναλλοίωτη. Αυτό υποδηλώνει ότι οι συναρτήσεις Gegenbauer ή Legendre εξακολουθούν να παρέχουν τη γωνιακή εξάρτηση, ενώ για την ακτινική εξάρτηση ακολουθείται κάθε φορά μια συγκεκριμένη διαδικασία η οποία και περιγράφεται παρακάτω, ξεχωριστά για τα δύο είδη αυτών των ειδικών συναρτήσεων. Φυσικά, οι διαφορικοί τελεστές ∇ , Δ και E^2 , στο όριο που η ημιεστιακή απόσταση c τείνει στο μηδέν, $c \rightarrow 0^+$, εκφυλίζεται από τις εκφράσεις για το επίμηκες σφαιροειδές σύστημα, εξισώσεις (III-1.30), (III-1.31) και (III-1.38), αντίστοιχα, στις αντίστοιχες εκφράσεις για το σφαιρικό σύστημα*, εξισώσεις (II-1.18), (II-1.19) και (II-1.30), αντίστοιχα, αφού λόγω της (III-1.91)

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{1}{c\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left[\sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} - \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] + \frac{\hat{\phi}}{c\sqrt{\tau^2 - 1}\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2 - c^2\zeta^2}} \left[\sqrt{(c\tau)^2 - c^2} \hat{\tau} \frac{\partial}{\partial (c\tau)} - \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{\sqrt{(c\tau)^2 - c^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &\xrightarrow{c \rightarrow 0^+} \hat{r} \zeta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{r} \hat{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r\sqrt{1 - \zeta^2}} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (\text{III-1.94})$$

για κάθε $0 < r < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$ και $|\zeta| \leq 1$, όπου στο όριο $c \rightarrow 0^+$, $\hat{\tau} \rightarrow \hat{r}$. Ο τελεστής του Laplace, ομοίως, γίνεται

* Τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα εκφυλίζονται αυτόματα από τις επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες στα αντίστοιχα στις σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{c^2(\tau^2 - \zeta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(\tau^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \right\} + \frac{1}{c^2(\tau^2 - 1)(1 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{1}{((c\tau)^2 - c^2\zeta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial (c\tau)} \left[((c\tau)^2 - c^2) \frac{\partial}{\partial (c\tau)} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{((c\tau)^2 - c^2)(1 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
&\xrightarrow{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] + \frac{1}{r^2(1 - \zeta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{III-1.95})
\end{aligned}$$

για κάθε $0 < r < +\infty$, $1 < \tau < +\infty$ και $|\zeta| \leq 1$, ενώ για τον διαφορικό τελεστή E^2

$$\begin{aligned}
E^2 &= \frac{1}{c^2(\tau^2 - \zeta^2)} \left[(\tau^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + (1 - \zeta^2) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right] \\
&= \frac{1}{((c\tau)^2 - c^2\zeta^2)} \left[((c\tau)^2 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial (c\tau)^2} + (1 - \zeta^2) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right] \\
&\xrightarrow{c \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(1 - \zeta^2)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{III-1.96})
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η γωνιακή εξάρτηση έμεινε αμετάβλητη στις παραπάνω εκφράσεις παρόλο που γεωμετρικά η γωνία θ (ή ζ) δεν είναι η ίδια στα δύο συστήματα συντεταγμένων.

Αναφερόμενοι, τώρα, στις ειδικές συναρτήσεις Gegenbauer στην τ μεταβλητή, μετασχηματίζονται κατάλληλα, στο όριο καθώς $c \rightarrow 0^+$ και τελικά χρησιμοποιώντας τις οριακές σχέσεις (III-1.91) και (III-1.93) και τους ορισμούς από το Παράρτημα Β, παράγραφο Β.2, καταλήγουμε στις ακόλουθες οριακές εκφράσεις,

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^0 G_0(\tau)) = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-c^0 H_1(\tau)) = 1, \quad (\text{III-1.97})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^1 G_1(\tau)) = \lim_{c \rightarrow 0^+} (c^1 H_0(\tau)) = -r, \quad (\text{III-1.98})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^2 G_2(\tau)) = -\frac{1}{2} r^2, \quad (\text{III-1.99})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^3 G_3(\tau)) = -\frac{1}{2} r^3, \quad (\text{III-1.100})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^4 G_4(\tau)) = -\frac{5}{8} r^4, \quad (\text{III-1.101})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^n G_n(\tau)) = (\text{const.}) r^n, \quad n \geq 5 \quad (\text{III-1.102})$$

και

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-1} H_2(\tau)) = \frac{1}{3r}, \quad (\text{III-1.103})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-2} H_3(\tau)) = \frac{1}{15r^2}, \quad (\text{III-1.104})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-3} H_4(\tau)) = \frac{2}{105r^3}, \quad (\text{III-1.105})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-n+1} H_n(\tau)) = (\text{const.}) r^{-n+1}, \quad n \geq 5 \quad (\text{III-1.106})$$

για κάθε $0 < r < +\infty$ και $1 < \tau < +\infty$.

Για να ανακτηθεί η μορφή της συνάρτησης ροής Stokes στη σφαιρική γεωμετρία, σχέση (II-1.110), από τις αντίστοιχες εκφράσεις της επιμήκους σφαιροειδούς, σχέση (III-1.87), είναι ανάγκη να γίνει μια απαραίτητη βάρθρωση των “επιμήκων σφαιροειδών” σταθερών συντελεστών $A_{n,sd}^\ell$ και $B_{n,sd}^\ell$ για κάθε είδος ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) και βαθμό n ($n = 0, 1, 2, \dots$), ώστε η σειρά (III-1.87) να δώσει οριακά την σφαιρική σειρά (II-1.110) με τους αντίστοιχους “σφαιρικούς” σταθερούς συντελεστές $A_{n,sr}^\ell$, $B_{n,sr}^\ell$ για κάθε είδος $\ell = 1, 3$ και βαθμό $n = 0, 1, 2, \dots$ και $A_{n,sr}^\ell$, $B_{n,sr}^\ell$ για κάθε είδος $\ell = 2, 4$ και βαθμό $n = 2, 3, 4, \dots$, τώρα. Αυτό που πρέπει να γίνει είναι η πιο κάτω βάρθρωση, δηλ.,

- οι σταθεροί συντελεστές $A_{0,sd}^1$, $A_{0,sd}^2$, $A_{1,sd}^3$, $A_{1,sd}^4$ παραμένουν όπως είναι,
 - οι σταθεροί συντελεστές $A_{1,sd}^1$, $A_{1,sd}^2$, $A_{0,sd}^3$, $A_{0,sd}^4$ πολλαπλασιάζονται με c ,
 - οι σταθεροί συντελεστές $A_{n,sd}^1$, $A_{n,sd}^2$ για $n \geq 2$ πολλαπλασιάζονται με c^n ,
 - οι σταθεροί συντελεστές $A_{n,sd}^3$, $A_{n,sd}^4$ για $n \geq 2$ πολλαπλασιάζονται με c^{-n+1}
- και εξαιτίας της (III-1.65) που εισάγει ακόμη έναν παράγοντα c^2 ,
- οι σταθεροί συντελεστές $B_{0,sd}^1$, $B_{0,sd}^2$, $B_{1,sd}^3$, $B_{1,sd}^4$ πολλαπλασιάζονται με c^2 ,
 - οι σταθεροί συντελεστές $B_{1,sd}^1$, $B_{1,sd}^2$, $B_{0,sd}^3$, $B_{0,sd}^4$ πολλαπλασιάζονται με c^3 ,
 - οι σταθεροί συντελεστές $B_{n,sd}^1$, $B_{n,sd}^2$ για $n \geq 2$ πολλαπλασιάζονται με c^{n+2} ,

• οι σταθεροί συντελεστές $B_{n, sd}^3, B_{n, sd}^4$ για $n \geq 2$ πολλαπλασιάζονται με c^{-n+3} , όπου $c > 0$. Εισάγοντας, λοιπόν, την παραπάνω βάρθρωση για τους σταθερούς συντελεστές και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (ΙΙΙ-1.97)–(ΙΙΙ-1.106) στη γενική έκφραση για τη συνάρτηση ροής (ΙΙΙ-1.87) και στο όριο $c \rightarrow 0^+$, λόγω και των μορφών των ιδιοσυναρτήσεων $\Theta_n^{(\ell)}$ και $\Omega_n^{(\ell)}$ είδους ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) και βαθμού n ($n = 0, 1, 2, \dots$), λαμβάνεται η σφαιρική έκφραση για την συνάρτηση ροής, δηλαδή η εξίσωση (ΙΙ-1.110) με τους αντίστοιχους σταθερούς συντελεστές. Όλες οι προαναφερθείσες πληροφορίες στηρίχθηκαν στην [37].

Πολλές φορές, όμως, όπως στην περίπτωση των διαφορικών αναπαραστάσεων που εισάγονται οι αρμονικές συναρτήσεις, χρειάζεται να δουλεύουμε με τις ειδικές συναρτήσεις Legendre. Σε αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητη μια παρόμοια οριακή διαδικασία για τις εν λόγω συναρτήσεις.

Αρχικά, θα δούμε τις οριακές περιπτώσεις των συναρτήσεων Legendre πρώτου P_n και δευτέρου Q_n είδους για κάθε $n \geq 0$ στην περίπτωση $m = 0$, στη μεταβλητή τ , $\tau > 1$, αφού η γωνιακή εξάρτηση δεν αλλάζει. Πιο αναλυτικά, λόγω των ορισμών (B.5) και (B.8) με (B.9) του Παραρτήματος Β, παράγραφο Β.1 για $x = \tau$ και σε συνδυασμό με τις (ΙΙΙ-1.91) και (ΙΙΙ-1.93) καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις,

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^n P_n(\tau)) = p_n r^n, \quad 0 < r < +\infty, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad n \geq 0 \quad (\text{ΙΙΙ-1.107})$$

και

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-(n+1)} Q_n(\tau)) = q_n r^{-(n+1)}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad n \geq 0, \quad (\text{ΙΙΙ-1.108})$$

όπου

$$p_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \quad \text{και} \quad q_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \frac{1}{(2n-2k+1)} \quad (\text{ΙΙΙ-1.109})$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$, ενώ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ και $(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n)$.

Στην περίπτωση των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου P_n^m και δευτέρου Q_n^m είδους για κάθε $n \geq 0$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$, στη μεταβλητή τ , χρησιμοποιούμε τους αντίστοιχους ορισμούς του Παραρτήματος Β,

$$P_n^m(\tau) = (\tau^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{d\tau^m} P_n(\tau), \quad \tau > 1 \quad (\text{ΙΙΙ-1.110})$$

και

$$Q_n^m(\tau) = (\tau^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{d\tau^m} Q_n(\tau), \quad \tau > 1 \quad (\text{III-1.111})$$

για να οδηγηθούμε με τη βοήθεια των (III-1.107)–(III-1.109) στις ακόλουθες οριακές σχέσεις για $c \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} (c^n P_n^m(\tau)) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left\{ \left((c\tau)^2 - c^2 \right)^{m/2} \frac{d^m}{d(c\tau)^m} (c^n P_n(\tau)) \right\} \\ &= r^m \frac{d^m}{dr^m} (p_n r^n) = p_n r^m \frac{d^m}{dr^m} r^n, \quad \tau > 1, \quad r > 0 \end{aligned} \quad (\text{III-1.112})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-(n+1)} Q_n^m(\tau)) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left\{ \left((c\tau)^2 - c^2 \right)^{m/2} \frac{d^m}{d(c\tau)^m} (c^{-(n+1)} Q_n(\tau)) \right\} \\ &= r^m \frac{d^m}{dr^m} (q_n r^{-(n+1)}) = q_n r^m \frac{d^m}{dr^m} r^{-(n+1)}, \quad \tau > 1, \quad r > 0 \end{aligned} \quad (\text{III-1.113})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Με όμοιο τρόπο, για να ανακτηθεί η μορφή μιας αρμονικής συνάρτησης u_{sr} στη σφαιρική γεωμετρία, σχέση (II-1.37α) ή (II-1.44α), από την αντίστοιχη έκφραση της επιμήκους σφαιροειδούς, σχέση (III-1.44α), είναι ανάγκη να γίνει μια απαραίτητη βάρθρωση των “επιμήκων σφαιροειδών” σταθερών συντελεστών $\delta_{n,sd}^{(\ell)ms}$ για κάθε είδος ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$), βαθμό n ($n = 0, 1, 2, \dots$), τάξη m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) και χαρακτήρα s ($s = e, o$) ώστε η σειρά (III-1.44α) να δώσει οριακά την σφαιρική σειρά (II-1.37α) ή (II-1.44α) με τους αντίστοιχους “σφαιρικούς” σταθερούς συντελεστές $\delta_{n,sr}^{(\ell)ms}$ για κάθε είδος ℓ ($\ell = 1, 2, 3, 4$), βαθμό n ($n = 0, 1, 2, \dots$), τάξη m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) και χαρακτήρα s ($s = e, o$ ή $s = -, *$). Άρα, κάνουμε την πιο κάτω βάρθρωση, δηλ.,

- οι σταθεροί συντελεστές $\delta_{n,sd}^{(1)ms}$, $\delta_{n,sd}^{(2)ms}$ πολλαπλασιάζονται με c^n ,
- οι σταθεροί συντελεστές $\delta_{n,sd}^{(3)ms}$, $\delta_{n,sd}^{(4)ms}$ πολλαπλασιάζονται με $c^{-(n+1)}$,

όπου $c > 0$ και τότε κάθε συμπαγής επιμήκης σφαιροειδής αρμονική συνάρτηση της μορφής (III-1.44α) εκφυλίζεται στο σφαιρικό ανάλογο (II-1.44α) στο όριο $c \rightarrow 0^+$.

III-1.5 Το πεπλατυσμένο σφαιροειδές.

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα και έχει δειχθεί από τους Happel και Brenner [56] (κοίτα, επίσης, αναφορά [77]) η λύση για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές καθώς και οποιοδήποτε άλλο παραγόμενο μέγεθος μπορεί να ληφθεί χρησιμοποιώντας έναν μετασχηματισμό μιγαδικοποίησης των μεταβλητών του επιμήκους σφαιροειδούς. Έτσι, κάνοντας χρήση αυτού του μετασχηματισμού παράγονται οι εκφράσεις για τα πεδία ροής και για όλα τα μεγέθη που μας αφορούν, καθώς και για το γεωμετρικό και αλγεβρικό υλικό που μας απασχολεί. Συνεπώς, τα αντίστοιχα αποτελέσματα και όλες οι πληροφορίες που αναπτύξαμε σε αυτό το κεφάλαιο για την πεπλατυσμένη σφαιροειδή γεωμετρία μπορούν να ληφθούν μέσω του απλού, αλλά εξαιρετικής σημασίας, μετασχηματισμού

$$\tau \rightarrow i\lambda \quad \text{και} \quad c \rightarrow -i\bar{c}, \quad (\text{III-1.114})$$

όπου $0 \leq \lambda \equiv \sinh \eta < +\infty$ και $\bar{c} > 0$ είναι οι καινούργιες χαρακτηριστικές μεταβλητές της πεπλατυσμένης σφαιροειδούς γεωμετρίας και i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα. Συνεπώς, η παραπάνω αντικατάσταση δηλώνει τον αλγόριθμο που μετατρέπει τα αποτελέσματα από το επίμηκες σφαιροειδές στο πεπλατυσμένο. Το αξιοσημείωτο είναι ότι ακριβώς η ίδια αντικατάσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψει τα αποτελέσματα από το πεπλατυσμένο στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα.

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ-2 ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ (SD)

ΙΙΙ-2.1 Εισαγωγή στα 3-D και 2-D επιμήκη σφαιροειδή πεδία ροής.

Πολλές πρακτικές εφαρμογές αφορούν σωματίδια (ανόργανα, οργανικά, βιολογικά) με μη σφαιρικό, αλλά παρόλα αυτά, αξονοσυμμετρικό σχήμα. Η παρούσα δουλειά αυτού του κεφαλαίου ασχολείται με αρκετά ενδιαφέρουσες απόψεις της θεωρητικής ανάλυσης της ροής Stokes σε σφαιροειδή χωρία. Πιο αναλυτικά, θα επιχειρήσουμε να βρούμε έναν τρόπο σύνδεσης της διαφορικής αναπαράστασης των λύσεων των εξισώσεων του Stokes Papkovitch – Neuber που αναλύθηκε στο Κεφάλαιο Ι-3 για τρισδιάστατες ροές, με την αναπαράσταση Stokes για διδιάστατες ροές όπως μελετήθηκε στο Κεφάλαιο Ι-2, αφού εφαρμόσουμε την απαραίτητη αναγωγή της διαφορικής λύσης στις δύο διαστάσεις. Ένας από τους πιο βασικούς στόχους στη δημιουργία ενός προτύπου είναι το κατάλληλο πάντρεμα των μαθηματικών απλοποιήσεων με τη φυσική υπόσταση του εν λόγω μοντέλου. Στο προηγούμενο

Μέρος II τα σωματίδια θεωρήθηκαν σφαιρικά. Ωστόσο, στην πραγματικότητα πολλά σωματίδια δεν είναι σφαιρικά και τότε μια πολύ καλύτερη προσέγγιση επιτυγχάνεται αν τα θεωρήσουμε επιμήκη ή πεπλατυσμένα σφαιροειδή. Συνεπώς για πολλά εσωτερικά και εξωτερικά προβλήματα ιξώδους και ασυμπίεστης ροής που χαρακτηρίζουν τη σταθερή ροή κατά Stokes και ενασχολούνται με μικρά σωματίδια, η σφαιροειδής γεωμετρία αποτελεί πολύ καλή προσέγγιση. Άρα, σε πολλές περιπτώσεις η ροή θεωρείται αξονοσυμμετρική. Παρόλο που το πεπλατυσμένο σφαιροειδές έχει αποδειχτεί [29] ότι δίνει υψηλότερους ρυθμούς μεταφοράς μάζας και θερμότητας σε συγκεκριμένες συνθήκες ογκομετρικής παροχής, το επίμηκες σφαιροειδές εμφανίζεται πιο συχνά. Για αυτό το λόγο, από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία, αφού τα αποτελέσματα για την πεπλατυσμένη γεωμετρία μπορούμε να τα ανακτήσουμε μέσω του γνωστού μετασχηματισμού (III–1.114) του Κεφαλαίου III–1.

Δύο διαφορετικές πλήρεις αναπαραστάσεις για ροή Stokes θεωρούνται εδώ. Η πρώτη λαμβάνεται μέσω της θεωρίας των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων, σύμφωνα με την οποία η συνάρτηση ροής αναπτύσσεται σε όρους χωριζόμενων και “ημιδιαχωριζόμενων” ιδιοσυναρτήσεων, όπως παρατηρήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Από την άλλη μεριά, η δεύτερη που ισχύει και για μη αξονοσυμμετρικές γεωμετρίες, είναι η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, όπου τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης δίνονται συναρτήσει αρμονικών σφαιροειδών ιδιοσυναρτήσεων. Φόρμουλες συσχέτισης προκύπτουν, όπου αυτό που πραγματικά γίνεται είναι ότι η σύνδεση των βασικών διαφορικών λύσεων πραγματοποιείται μέσω των αντιστοίχων δυναμικών που τις αντιπροσωπεύουν. Στην περίπτωση των αξονοσυμμετρικών ροών η γενική λύση Parkovich – Neuber είναι ισοδύναμη με τη θεωρία Stokes αναπαράστασης των πεδίων ροής, αλλά η 3-D αναπαράσταση προσφέρει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα. Η διαδικασία σύνδεσης προσφέρει το μαθηματικό υπόβαθρο για την κατανόηση της φυσικής. Έτσι, σε αντίθεση με τη σφαιρική γεωμετρία, θα μπορούμε να έχουμε μια διαίσθηση για το είδος της διαφορικής αναπαράστασης που πρέπει να υιοθετηθεί κάθε φορά ανάλογα με το είδος και την πολυπλοκότητα του φυσικού προβλήματος που θέλουμε να επιλύσουμε. Τα αποτελέσματα της συσχέτισης δίνουν μια διαίσθηση του είδους των απροσδιοριστιών που εμφανίζονται όταν προσπαθούμε να λύσουμε φυσικά προβλήματα, κάτι που θα

παρατηρήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο εφαρμογών. Εδώ, θα ασχοληθούμε με 3-D ή 2-D συμπαγή επιμήκη σφαιροειδή πεδία,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) &= \{(\eta, \theta, \varphi) : \eta > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \\ &\equiv \{(\tau, \zeta, \varphi) : \tau > 1, |\zeta| \leq 1, \varphi \in [0, 2\pi)\} \end{aligned} \quad (\text{III-2.1})$$

ή

$$\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) = \{(\eta, \theta) : \eta > 0, 0 \leq \theta \leq \pi\} \equiv \{(\tau, \zeta) : \tau > 1, |\zeta| \leq 1\}, \quad (\text{III-2.2})$$

καθώς και με 3-D ή 2-D επιφανειακά σφαιρικά πεδία,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3) &= \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \\ &\equiv \{(\zeta, \varphi) : |\zeta| \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \end{aligned} \quad (\text{III-2.3})$$

ή

$$\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^2) = \{\theta : 0 \leq \theta \leq \pi\} \equiv \{\zeta : |\zeta| \leq 1\}. \quad (\text{III-2.4})$$

Σε ότι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για τις τροποποιημένες επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες (βλέπε εξισώσεις (III-1.1) και (III-1.2)).

Λόγω της σπουδαιότητας και της ευελιξίας [48] της τρισδιάστατης διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber και σε συνδυασμό με την παρουσία απροσδιοριστιών στην επίλυση φυσικών προβλημάτων με τεχνικές σφαιροειδών συναρτήσεων ροής, η συσχέτιση περιορίζεται σε αυτούς τους δύο τρόπους αναπαράστασης των διδιάστατων πεδίων Stokes. Αυτό που κάνουμε είναι να συσχετίσουμε τα επιμήκη σφαιροειδή πεδία ταχύτητας και πίεσης από την τρισδιάστατη αναπαράσταση Parkovich – Neuber (PN), που δίνεται μέσω του διανυσματικού αρμονικού δυναμικού Φ_{sd} και του βαθμωτού αρμονικού δυναμικού Φ_{0sd} ,

$$\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_{sd}(\cdot) - \frac{1}{2} \nabla (\Phi \cdot \mathbf{r}_{sd}(\cdot) + \Phi_{0sd}(\cdot)), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{III-2.5})$$

και

$$P_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = P_{0sd}^{PN} - \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{r}_{sd}(\cdot), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{III-2.6})$$

όπου

$$\Delta \Phi_{sd}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta \Phi_{0sd}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{III-2.7})$$

με τη διδιάστατη αναπαράσταση της ταχύτητας και ολικής πίεσης σε όρους της συνάρτησης ροής Stokes. Η σταθερή πίεση P_{0sd}^{PN} αναπαριστά μια αυθαίρετη σταθερή

πίεση, συνήθως προσδιοριζόμενη σε ένα βολικό σημείο, ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα που απαιτείται να επιλυθεί κάθε φορά.

Όλες οι πληροφορίες για τους διαφορικούς τελεστές δίνονται στο Κεφάλαιο III–1 για επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες και πιο αναλυτικά ο τελεστής του Laplace δίνεται από την έκφραση (III–1.31) και ο τελεστής της βάθμωσης εκφράζεται μέσω της (III–1.30).

Σημειώνουμε πως η γενική διαφορική λύση Parkovich – Neuber μπορεί να αναχθεί και σε 2–D πεδία, απλά με τη χρήση των σχέσεων που επιτρέπουν αυτή τη μετατροπή από τρισδιάστατα σε αξονοσυμμετρικά χωρία, δηλαδή μέσω των γνωστών εξισώσεων (I–3.100) και (I–3.101).

Από την άλλη μεριά, η διδιάστατη ασυμπίεστη ροή χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μιας συνάρτησης ροής Ψ_{sd} , η οποία εισάγεται με σκοπό τον υπολογισμό της ταχύτητας και της ολικής πίεσης. Η πλήρης λύση της εξίσωσης κινήσεως του Stokes σε σφαιροειδείς συντεταγμένες επιτυγχάνεται μέσα από τη θεωρία των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων και, οπότε, αυτή η συνάρτηση ροής επιδέχεται την αναπαράσταση ενός πλήρους αναπτύγματος σειρών σε όρους ημιδιαχωριζόμενων ιδιομορφών.

Τα πεδία ταχύτητας και πίεσης υπολογίζονται από τις γενικές εκφράσεις (I–2.23) με (I–2.27) και (I–2.28) (διδιάστατη ταχύτητα) και, επιπλέον, (I–2.64) μαζί με τις σχέσεις (I–2.60) και (I–2.61) (διδιάστατη πίεση). Μέσα σε αυτές τις εξισώσεις εμπεριέχεται η “κυλινδρική” ποσότητα ρ_{sd} που ταυτίζεται με το μετρικό συντελεστή h_ϕ , όπως φαίνεται από την σχέση (III–1.37), και τους επιμήκεις σφαιροειδείς μετρικούς συντελεστές h_η και h_θ που ικανοποιούν τις (III–1.7) και (III–1.8), αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας, λοιπόν, τις τελευταίες στις γενικές σχέσεις για τα επιμήκη σφαιροειδή πεδία ροής παίρνουμε

$$\mathbf{v}_{sd}^S(\eta, \theta) = \frac{1}{c^2 \sinh \eta \sin \theta \sqrt{\cosh^2 \eta - \cos^2 \theta}} \left\{ -\frac{\partial \Psi_{sd}(\eta, \theta)}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial \Psi_{sd}(\eta, \theta)}{\partial \eta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right\} \quad (\text{III–2.8})$$

για κάθε $\eta > 0$ και $\theta \in [0, \pi]$, όπου μετασχηματίζοντας τις μεταβλητές η και θ μέσω των σχέσεων $\tau = \cosh \eta$ και $\zeta = \cos \theta$ από τις (III–1.1) και (III–1.2), αντίστοιχα

$$\mathbf{v}_{sd}^S(\tau, \zeta) = \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \frac{\partial \Psi_{sd}(\tau, \zeta)}{\partial \zeta} \hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \frac{\partial \Psi_{sd}(\tau, \zeta)}{\partial \tau} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right], \quad (\text{III–2.9})$$

όπου $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$ με $\hat{\eta} \equiv \hat{\tau}, \hat{\theta} \equiv \hat{\zeta}, \hat{\phi}$ να δηλώνουν τα μοναδιαία διανύσματα της επιμήκους σφαιροειδούς γεωμετρίας. Παρόμοια, το πεδίο ολικής πίεσης εκφράζεται μέσω της δράσης του τελεστή E^2 (εξίσωση (ΙΙΙ-1.38) στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία) στη συνάρτηση ροής Ψ_{sd} και οι γενικές εκφράσεις καταλήγουν στην παρακάτω ολοκληρωτική έκφραση,

$$P_{sd}^S(r, \theta) = P_{0sd}^S + \frac{\mu_0}{c} \left\{ - \int_{+\infty}^{\eta} \frac{1}{\sinh \eta' \sin \theta} \frac{\partial (E^2 \Psi_{sd}(\eta', \theta))}{\partial \theta} d\eta' + \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{1}{\sinh \eta \sin \theta'} \frac{\partial (E^2 \Psi_{sd}(\eta, \theta'))}{\partial \eta} d\theta' \right\} \quad (\text{ΙΙΙ-2.10})$$

με $\eta > 0$ και $\theta \in [0, \pi]$, όπου σύμφωνα με το γνωστό μετασχηματισμό,

$$P_{sd}^S(\tau, \zeta) = P_{0sd}^S + \frac{\mu_0}{c} \left\{ \int_{+\infty}^{\tau} \frac{1}{(\tau'^2 - 1)^2} \frac{\partial (E^2 \Psi_{sd}(\tau', \zeta))}{\partial \zeta} d\tau' - \int_0^{\zeta} \frac{1}{(1 - \zeta'^2)} \frac{\partial (E^2 \Psi_{sd}(\tau, \zeta'))}{\partial \tau} d\zeta' \right\}, \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{ΙΙΙ-2.11})$$

2.11)

Από την τελευταία φαίνεται ότι τα αστρόβιλα πεδία περιγράφονται από μια συνάρτηση ροής η οποία ικανοποιεί την εξίσωση $E^2 \Psi_{sd} = 0$ και αυτά τα πεδία είναι πεδία σταθερής ολικής πίεσης, όπως αποδεικνύει η (ΙΙΙ-2.11). Έτσι, ολοκληρώθηκε η ανάλυση των πεδίων ροής που θα συγκριθούν με τα αντίστοιχα αξονοσυμμετρικά πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber.

Το βασικό πλεονέκτημα της αναπαράστασης Stokes έγκειται στο γεγονός ότι απαιτεί μόνο μια συνάρτηση για να περιγράψει την ταχύτητα και την πίεση, αλλά μειονεκτεί στο ότι αφορά μόνο αξονοσυμμετρικά πεδία. Πρέπει, βέβαια, να ληφθεί υπόψη ότι οι τρισδιάστατες ροές μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα ζεύγος συναρτήσεων ροής, όπου στην περίπτωση αυτή οι γραμμές ροής είναι οι τομές των δύο οικογενειών που αντιστοιχούν σε σταθερή συνάρτηση ροής. Όμως, η συγκεκριμένη εργασία αφορά ροές με αξονική συμμετρία και, συνεπώς, δεν τίθεται θέμα χρησιμοποίησης δύο συναρτήσεων ροής. Επιπλέον, το ολικό πεδίο της πίεσης ικανοποιεί ολοκληρωτική

αναπαράσταση γεγονός που συνεπάγεται έναν πρόσθετο βαθμό δυσκολίας στον υπολογισμό των πεδίων ροής.

Αυτού του είδους οι δυσκολίες δεν συμβαίνουν στην περίπτωση των διαφορικών αναπαραστάσεων. Εξάλλου, οι διδιάστατες ροές μπορούν να αντιμετωπιστούν και από τη θεωρία διαφορικών αναπαραστάσεων με την εισαγωγή ενός απλού εκφυλισμού από $2-D$ σε $3-D$ πεδία ροής. Βέβαια, όπως παρατηρήσαμε στο Μέρος II στη σφαιρική γεωμετρία η διαφορά δεν είναι εμφανής λόγω της απλότητας του συστήματος, αλλά στην πιο πολύπλοκη σφαιροειδή γεωμετρία υπάρχει ουσιαστική διαφορά, πράγμα που φαίνεται και στις εφαρμογές. Στην επόμενη παράγραφο θα συσχετίσουμε τη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber, εξισώνοντας τα πεδία ροής, με τη διαφορική λύση του Stokes για διδιάστατα επιμήκη σφαιροειδή χωρία. Δηλαδή, σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες, θα χρησιμοποιήσουμε τον πραγματικό συμβολισμό για την $2-D$ συσχέτιση

$$\text{Parkovich – Neuber (PN)} \leftrightarrow \text{Stokes (S)}, \quad (\text{III-2.12})$$

αναφερόμενοι στις αντίστοιχες αρμονικές συναρτήσεις των δυναμικών και στη ροϊκή συνάρτηση. Παραμένουμε στο πνεύμα της εύρεσης εκείνων των πεδίων ροής τα οποία είναι ομαλά πάνω στον άξονα συμμετρίας του επιμήκους σφαιροειδούς x_1 για $\theta = 0, \pi$ ή $\zeta = \pm 1$. Άρα, αποκλείονται κάθε είδους πηγές που προέρχονται από την παρουσία ειδικών συναρτήσεων με ανωμαλίες στον άξονα περιστροφής του επιμήκους σφαιροειδούς. Στο Κεφάλαιο III-1 αναλύσαμε εκτενώς την επίδραση που έχει στα αρμονικά δυναμικά και στο δυναμικό της συνάρτησης ροής μια τέτοιου είδους υπόθεση, όπου στην γραφή των σειρών θα έπρεπε να είχαμε όλων των ειδών τις αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις (εξίσωση (III-1.44a)) και τις ιδιοσυναρτήσεις ροής (ανάπτυγμα (III-1.87)). Ωστόσο, αρκετοί όροι στις σειρές εξαιρούνται σαν αποτέλεσμα των φυσικών απαιτήσεων για ροές Stokes δίχως ιδιομορφίες στον άξονα x_1 . Αυτοί οι όροι εμπεριέχουν τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους Q_n^m και τις συναρτήσεις Gegenbauer* δευτέρου είδους H_n στη μεταβλητή ζ για κάθε $n \geq 0$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και, οπότε, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις πρέπει να αποκλεισθούν. Άρα, κάθε αρμονική συνάρτηση και συνάρτηση ροής ομαλή στον

* Σύμφωνα με τον ορισμό των συναρτήσεων Gegenbauer στο Παράρτημα Β, οι ομαλές ροές πάνω στον άξονα συμμετρίας επιβάλλουν τον επιπλέον μηδενισμό των συναρτήσεων Gegenbauer πρώτου είδους, πρώτου και δευτέρου βαθμού.

άξονα συμμετρίας x_1 (απουσία ιδιομορφιών για $\zeta = \pm 1$), ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή του Laplace Δ και στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^2 , αντίστοιχα, και σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες αυτός ο γραμμικός χώρος, εκφράζεται μέσω των εσωτερικών (i) και των εξωτερικών (e) επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών δυναμικών (εκφράσεις (ΙΙΙ-1.46) και (ΙΙΙ-1.47)) και μέσω των εσωτερικών (i) και των εξωτερικών (e) επιμήκων σφαιροειδών συναρτήσεων ροής (εξίσωση (ΙΙΙ-1.87) για $\ell = 1 \equiv i$ και $\ell = 3 \equiv e$), αντίστοιχα. Αυτός θα είναι και ο συμβολισμός που θα ακολουθήσουμε στις επόμενες παραγράφους. Φυσικά, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι το πλήρες ανάπτυγμα για τη συνάρτηση ροής στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία δίνεται μέσω των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο ΙΙΙ-1.

ΙΙΙ-2.2 Συσχέτιση 2-D διαφορικών αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Stokes στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία.

ΙΙΙ-2.2α Τα διδιάστατα πεδία ροής Stokes και Parkovich – Neuber.

Βασικός στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι η εξαγωγή σχέσεων σύνδεσης μεταξύ των δυναμικών της διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber και της συνάρτησης ροής Stokes με τέτοιο τρόπο ώστε και οι δύο τρόποι αναπαράστασης των πεδίων έρπουσας ροής να μας οδηγούν στις ίδιες εκφράσεις για τα φυσικά ενδιαφέροντα πεδία της ταχύτητας και της ολικής πίεσης. Θέτοντάς το αλλιώς, δεδομένης μιας ιδιομορφής από τη μια αναπαράσταση ψάχνουμε για τον συγκεκριμένο συνδυασμό ιδιομορφών της άλλης αναπαράστασης που παράγει τα ίδια πεδία ροής.

Μια τέτοιου είδους συσχέτιση είναι απαραίτητη σε αυτό το γεωμετρικό επίπεδο, εφόσον, στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, δεν εμφανίζονται κάποιου είδους απροσδιοριστίες, αποτέλεσμα της πλήρους χωρισσιμότητας μεταβλητών του διαφορικού τελεστή E^4 , κάτι που δεν γίνεται, όπως θα δούμε παρακάτω σε συγκεκριμένη εφαρμογή, στο πιο πολύπλοκο αξονοσυμμετρικό επίμηκες σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων. Έτσι, μπορούμε να αποκτήσουμε μια διαίσθηση μέχρι κάποιο ουσιαστικό βαθμό της επίδρασης που έχει η ημιδιαχωρισσιμότητα του τελεστή

E^4 στα φυσικά προβλήματα. Αντίθετα, η εισαγωγή της ευέλικτης, όσον αφορά τον τρόπο χειρισμού των αρμονικών δυναμικών, γενικής λύσης Parkovich – Neuber δημιουργεί αρχικά την εντύπωση μιας πιο πλήρους μεθόδου αντιμετώπισης προβλημάτων ροής που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes, η οποία επιβεβαιώνεται μέσα από τη χρήση της για την επίλυση κυτταρικών μοντέλων.

Με σκοπό την παραγωγή βασικών συναρτήσεων έτοιμες προς χρήση για ροές Stokes σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες, υπολογίζουμε τις ιδιολύσεις Parkovich – Neuber, οι οποίες παράγονται από τις κατάλληλες επιμήκεις σφαιροειδείς ιδιοσυναρτήσεις. Τότε, επιτυγχάνονται τύποι σύνδεσης μέσω των οποίων κάθε λύση του συστήματος Stokes, που δίνεται σε όρους ημιδιαχωριζόμενων ιδιοσυναρτήσεων, μπορεί να μετατρέπεται σε ιδιομορφές Parkovich – Neuber. Αποδεικνύεται ότι αυτή η διαδικασία δεν είναι αντιστρέψιμη διότι αυτές οι φόρμουλες συσχετίζουν κάθε δυναμικό της αναπαράστασης Parkovich – Neuber με ένα συγκεκριμένο συνδυασμό από ημιδιαχωριζόμενες ιδιοσυναρτήσεις. Αυτό υποδηλώνει ότι η χρήση της γενικής διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber διαμορφώνει ελαφρώς έναν πιο πλήρη τρόπο για την επίλυση προβλημάτων ροής σωματιδίων σε κύτταρο. Από την άλλη μεριά, δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι βαθμοί ελευθερίας, τους οποίους προσφέρει η διαφορική αναπαράσταση [48], καθιστά την εν λόγω γενική λύση ένα ισχυρό εργαλείο για την εύρεση λύσεων σε τέτοιου είδους προβλήματα. Η ίδια συσχέτιση πραγματοποιήθηκε στη σφαιρική γεωμετρία όπου η αντιστρεψιμότητα διατηρείται λόγω της χωρισιμότητας της εξίσωσης κινήσεως σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων. Τα αποτελέσματα, για σύγκριση, βρίσκονται στην παράγραφο II–2.4. Τέλος, επικεντρωνόμαστε στα επιμήκη σφαιροειδή, αφού τα αποτελέσματα για την πεπλατυσμένη σφαιροειδή γεωμετρία λαμβάνονται από τον απλό και εύχρηστο μετασχηματισμό που αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο III–1.

Δηλαδή, θα συσχετίσουμε αυτές τις διαφορικές γενικές λύσεις με σκοπό να εξάγουμε τύπους σύνδεσης για τα δυναμικά που ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή του Laplace

$\Delta (\Phi_{sd}, \Phi_{0sd})$ και το δυναμικό ροής που ανήκει στον πυρήνα του διαφορικού

τελεστή $E^4 (\Psi_{sd})$ στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία. Συνεπώς, λόγω της τρισδιάστατης μορφής της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, υποχρεούμαστε να θεωρήσουμε αξονική συμμετρία για να είναι δυνατή η παραπάνω συσχέτιση σε 2–D χωρία, γεγονός που αντανάκλαται σε επιπλέον σχέσεις για τα

δυναμικά Parkovich – Neuber. Φυσικά, σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε πεδία ροής χωρίς ιδιομορφίες στον άξονα συμμετρίας.

Αναφερόμενοι στις γενικές πληροφορίες της παραγράφου ΙΙΙ-1.2 του προηγούμενου Κεφαλαίου ΙΙΙ-1, εισάγουμε τις εσωτερικές συμπαγείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις

$$u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r}) = P_n^m(\tau)P_n^m(\zeta)f^{ms}(\varphi), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{III-2.13})$$

και τις εξωτερικές συμπαγείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις

$$u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r}) = Q_n^m(\tau)P_n^m(\zeta)f^{ms}(\varphi), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{III-2.14})$$

βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και χαρακτήρα $s = e, o$ σε όρους των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre πρώτου, P_n^m , και δευτέρου, Q_n^m , είδους, όπου ο άρτιος (e) και περιττός (o) χαρακτήρας των ιδιομορφών εκφράζεται από την

$$f^{ms}(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi, & s = e \\ \sin m\varphi, & s = o \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad (\text{III-2.15})$$

για όλες τις ομαλές συναρτήσεις στον άξονα συμμετρίας x_1 . Τότε, η πλήρης αναπαράσταση των δυναμικών Parkovich – Neuber Φ_{sd} και Φ_{0sd} υποθέτει τις πιο κάτω μορφές για $s = e, o$ (άρτια ή περιττά),

$$\Phi_{sd}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[e_{n,sd}^{(i)ms} u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r}) + e_{n,sd}^{(e)ms} u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{III-2.16})$$

και

$$\Phi_{0sd}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[d_{n,sd}^{(i)ms} u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r}) + d_{n,sd}^{(e)ms} u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{III-2.17})$$

αντίστοιχα, όπου για $n \geq 0$ και $s = e, o$

$$e_{n,sd}^{(i/e)ms} = c_{n,sd}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,sd}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,sd}^{(i/e)ms} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad d_{n,sd}^{(i/e)ms}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{III-2.18})$$

είναι οι εσωτερικοί και εξωτερικοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές των δυναμικών. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (III-2.16) και (III-2.17) στη διαφορική αναπαράσταση (III-2.5) και (III-2.6), σε συνδυασμό με τις ταυτότητες (A.1), (A.2) και (A.6) του Παραρτήματος Α παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left\{ \left[e_{n,sd}^{(i)ms} u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r}) + e_{n,sd}^{(e)ms} u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right] \right. \\ & - \left[\left(e_{n,sd}^{(i)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sd}^{(i)ms} \right] \nabla u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r}) \\ & \left. - \left[\left(e_{n,sd}^{(e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sd}^{(e)ms} \right] \nabla u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{III-2.19}) \end{aligned}$$

για το πεδίο ταχύτητας και

$$P_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = P_{0sd}^{PN} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=e,o} \left[\mathbf{e}_{n,sd}^{(i)ms} \cdot \nabla u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{n,sd}^{(e)ms} \cdot \nabla u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{III-2.20})$$

για το πεδίο ολικής πίεσης.

Η εξίσωση (III-2.18) αποτελεί την Καρτεσιανή αναπαράσταση του διανυσματικού σταθερού συντελεστή $\mathbf{e}_{n,sd}^{(i/e)ms}$. Ωστόσο, οι εκφράσεις (III-1.14)–(III-1.16) αποτελούν το μέσο της μετατροπής αυτού του σταθερού συντελεστή σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες, δηλαδή,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n,sd}^{(i/e)ms} = & \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left\{ \left[\left(a_{n,sd}^{(i/e)ms} \cos \varphi + b_{n,sd}^{(i/e)ms} \sin \varphi \right) \tau \sqrt{1 - \zeta^2} + c_{n,sd}^{(i/e)ms} \zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \right] \hat{\tau} \right. \\ & \left. + \left[\left(a_{n,sd}^{(i/e)ms} \cos \varphi + b_{n,sd}^{(i/e)ms} \sin \varphi \right) \zeta \sqrt{\tau^2 - 1} - c_{n,sd}^{(i/e)ms} \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \right] \hat{\zeta} \right\} \\ & + \left(-a_{n,sd}^{(i/e)ms} \sin \varphi + b_{n,sd}^{(i/e)ms} \cos \varphi \right) \hat{\phi}, \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (\text{III-2.21}) \end{aligned}$$

για κάθε τιμή βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, της τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και του χαρακτήρα $s = e, o$. Μια άμεση συνέπεια της (III-2.21) είναι η παράσταση που εμφανίζεται στο πεδίο ταχύτητας (III-2.19),

$$\left(\mathbf{e}_{n,sd}^{(i/e)ms} \cdot \mathbf{r} \right) = c \left[\left(a_{n,sd}^{(i/e)ms} \cos \varphi + b_{n,sd}^{(i/e)ms} \sin \varphi \right) \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2} + c_{n,sd}^{(i/e)ms} \tau \zeta \right], \quad (\text{III-2.22})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ με $c > 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$ και $s = e, o$. Η βάθμωση των επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων παρέχεται από τις γενικές σχέσεις (III-1.55) και (III-1.56) για τα είδη των συναρτήσεων που δεν είναι ιδιόμορφα στον άξονα συμμετρίας. Δηλαδή, αναφερόμενοι στις αρμονικές (III-2.13) και (III-2.14) έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sd}^{(i)ms}(\mathbf{r}) = & \frac{cf^{ms}(\varphi)}{(2n+1)} \left\{ \frac{P_n^m(\zeta) \hat{\tau}}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} \left(n(n-m+1)P_{n+1}^m(\tau) - (n+1)(n+m)P_{n-1}^m(\tau) \right) \right. \\ & \left. + \frac{P_n^m(\tau) \hat{\zeta}}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} \left(n(n-m+1)P_{n+1}^m(\zeta) - (n+1)(n+m)P_{n-1}^m(\zeta) \right) \right\} \\ & + \frac{f^{ms'}(\varphi) \hat{\phi}}{c \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2}} P_n^m(\tau) P_n^m(\zeta), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad c > 0 \quad (\text{III-2.23}) \end{aligned}$$

για τις εσωτερικές συμπαγείς επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις, βαθμού $n=1,2,\dots$, τάξης $m=0,1,2,\dots,n$ και χαρακτήρα $s=e,o$, ενώ η περίπτωση $n=0, m=0$ αντιμετωπίζεται ξεχωριστά και συγκεκριμένα είναι

$$\nabla u_{0,sd}^{(i)0e}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{III-2.24})$$

λόγω του ορισμού $P_0(\tau) = P_0(\zeta) = 1$. Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sd}^{(e)ms}(\mathbf{r}) = & \frac{cf^{ms}(\varphi)}{(2n+1)} \left\{ \frac{P_n^m(\zeta)\hat{\tau}}{c^2\sqrt{\tau^2-\zeta^2}\sqrt{\tau^2-1}} \left(n(n-m+1)Q_{n+1}^m(\tau) - (n+1)(n+m)Q_{n-1}^m(\tau) \right) \right. \\ & \left. + \frac{Q_n^m(\tau)\hat{\zeta}}{c^2\sqrt{\tau^2-\zeta^2}\sqrt{1-\zeta^2}} \left(n(n-m+1)P_{n+1}^m(\zeta) - (n+1)(n+m)P_{n-1}^m(\zeta) \right) \right\} \\ & + \frac{f^{ms'}(\varphi)\hat{\phi}}{c\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}} Q_n^m(\tau)P_n^m(\zeta), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad c > 0 \end{aligned} \quad (\text{III-2.25})$$

για τις εξωτερικές συμπαγείς επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις, βαθμού $n=1,2,\dots$, τάξης $m=0,1,2,\dots,n$ και χαρακτήρα $s=e,o$, ενώ η περίπτωση $n=0, m=0$ αντιμετωπίζεται πάλι ξεχωριστά, αλλά τώρα

$$\nabla u_{0,sd}^{(e)0e}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c\sqrt{\tau^2-\zeta^2}\sqrt{\tau^2-1}} \hat{\tau}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad c > 0. \quad (\text{III-2.26})$$

Η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber καλύπτει 3-D πεδία ροής. Για 2-D ροές, όπως στην περίπτωση μας, μια ουσιαστική αναγωγή είναι δυνατή, με σκοπό να γίνει εφικτή η συσχέτιση με την αναπαράσταση Stokes (2-D). Αυτή η αναγωγή καθορίζεται από τις σχέσεις εκφυλισμού, (I-3.100) και (I-3.101), Κεφάλαιο I-3, του πεδίου ταχύτητας σε αξονοσυμμετρικές ροές. Πράγματι, η αξονική συμμετρία του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος συνεπάγεται ταχύτητα ανεξάρτητη της αζιμουθιακής γωνίας Φ και, επιπλέον, χωρίς αζιμούθια συνιστώσα, φυσική η οποία περιγράφεται από τις γνωστές παραστάσεις

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r})}{\partial \varphi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \quad (\text{III-2.27})$$

και

$$\hat{\phi} \cdot \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3), \quad (\text{III-2.28})$$

αντίστοιχα. Αν εφαρμόσουμε τις (III–2.27) και (III–2.28) στο πεδίο ταχύτητας που δίνεται από την (III–2.19), επιτυγχάνουμε τις απαραίτητες σχέσεις για τους σταθερούς συντελεστές, οι οποίες αντανakλούν την απαιτούμενη αξονική συμμετρία, δηλ.,

$$a_{n,sd}^{(i)ms} = b_{n,sd}^{(i)ms} = a_{n,sd}^{(e)ms} = b_{n,sd}^{(e)ms} = 0, \quad n \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots, n, \quad s = e, o \quad (\text{III–2.29})$$

και

$$c_{n,sd}^{(i)ms} = d_{n,sd}^{(i)ms} = c_{n,sd}^{(e)ms} = d_{n,sd}^{(e)ms} = 0, \quad n \geq 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad s = e, o. \quad (\text{III–2.30})$$

Οι σταθεροί συντελεστές, λοιπόν, που επιβιώνουν και καθορίζουν και τα διδιάστατα πεδία ροής απουσία ιδιομορφιών είναι οι

$$e_{n,sd}^{(i/e)} \equiv e_{n,sd}^{(i/e)0e} \quad \text{και} \quad d_{n,sd}^{(i/e)} \equiv d_{n,sd}^{(i/e)0e}, \quad n \geq 0, \quad (\text{III–2.31})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε κατάλληλα επιχειρήματα ορθογωνιότητας για τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους.

Τότε οι σχέσεις (III–2.21)–(III–2.26) παίρνουν την αξονοσυμμετρική τους μορφή σύμφωνα με τις (III–2.29)–(III–2.31) και, συνεπώς, γίνονται για κάθε $c > 0$,

$$\begin{aligned} e_{n,sd}^{(i/e)} &\equiv e_{n,sd}^{(i/e)0e} = c_{n,sd}^{(i/e)} \zeta \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\zeta \sqrt{\tau^2 - 1} - \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \\ &= c_{n,sd}^{(i/e)} \hat{x}_1, \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (\text{III–2.32})$$

για κάθε τιμή του βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, ενώ

$$(e_{n,sd}^{(i/e)} \cdot \mathbf{r}) = c c_{n,sd}^{(i/e)} \tau \zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{III–2.33})$$

Συνεχίζοντας, όσον αφορά τις επιμήκειες σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις για $m = 0$ (αξιμουθιακή ανεξαρτησία), δηλαδή τις $u_{n,sd}^{(i)0e} \equiv u_{n,sd}^{(i)}$ και $u_{n,sd}^{(e)0e} \equiv u_{n,sd}^{(e)}$, $n \geq 0$, με τη βοήθεια της (III–2.15), καταλήγουμε για $c > 0$ στις

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,sd}^{(i)}(\mathbf{r}) &= \frac{cn(n+1)}{(2n+1)} \left\{ \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} (P_{n+1}(\tau) - P_{n-1}(\tau)) P_n(\zeta) \hat{\tau} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} P_n(\tau) (P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)) \hat{\zeta} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III–2.34})$$

όπου $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$ για $n \geq 1$ και

$$\nabla u_{0,sd}^{(i)}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{III–2.35})$$

Με την ίδια τακτική οδηγούμαστε για $c > 0$ στις

$$\nabla u_{n,sd}^{(e)}(\mathbf{r}) = \frac{cn(n+1)}{(2n+1)} \left\{ \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} (Q_{n+1}(\tau) - Q_{n-1}(\tau)) P_n(\zeta) \hat{\tau} \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} Q_n(\tau) (P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)) \hat{\zeta} \right\}, \quad (\text{III-2.36})$$

όπου $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$ για $n \geq 1$, ενώ για $n = 0$

$$\nabla u_{0,sd}^{(e)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} \hat{\tau}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad c > 0. \quad (\text{III-2.37})$$

Τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης, τώρα, λαμβάνουν την αξονοσυμμετρική τους μορφή σε όρους των συναρτήσεων Legendre πρώτου P_n και δευτέρου Q_n είδους από τις τρισδιάστατες εκφράσεις τους (III-2.19) και (III-2.20), οπότε αν γράψουμε τις εσωτερικές (III-2.13) και εξωτερικές (III-2.14) συμπαγείς επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις στη διδιάστατη μορφή

$$u_{n,sd}^{(i)}(\mathbf{r}) = P_n(\tau) P_n(\zeta), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \quad (\text{III-2.38})$$

και

$$u_{n,sd}^{(e)}(\mathbf{r}) = Q_n(\tau) P_n(\zeta), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad (\text{III-2.39})$$

έχουμε

$$\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\mathbf{e}_{n,sd}^{(i)} u_{n,sd}^{(i)}(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{n,sd}^{(e)} u_{n,sd}^{(e)}(\mathbf{r}) \right] \right. \\ \left. - \left[\left(\mathbf{e}_{n,sd}^{(i)} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sd}^{(i)} \right] \nabla u_{n,sd}^{(i)}(\mathbf{r}) \right. \\ \left. - \left[\left(\mathbf{e}_{n,sd}^{(e)} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,sd}^{(e)} \right] \nabla u_{n,sd}^{(e)}(\mathbf{r}) \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad c > 0 \quad (\text{III-2.40})$$

για το πεδίο ταχύτητας και

$$\mathbf{p}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}_{0,sd}^{PN} - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbf{e}_{n,sd}^{(i)} \cdot \nabla u_{n,sd}^{(i)}(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{n,sd}^{(e)} \cdot \nabla u_{n,sd}^{(e)}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad c > 0 \quad (\text{III-2.41})$$

για το πεδίο ολικής πίεσης.

Χρησιμοποιώντας τις βασικές αναγωγικές σχέσεις του Παραρτήματος Β για τις συναρτήσεις Legendre και αντικαθιστώντας τις (III-2.32)–(III-2.39) στα πεδία ροής

(III-2.40) και (III-2.41), αντιμετωπίζουμε τους όρους τύπου $\tau (1 - \zeta^2) P_n(\tau) P_n(\zeta)$,

$\tau (1 - \zeta^2) Q_n(\tau) P_n(\zeta)$, καθώς $\tau \zeta (P_{n+1}(\tau) - P_{n-1}(\tau)) P_n(\zeta)$, $\tau \zeta (Q_{n+1}(\tau) - Q_{n-1}(\tau)) P_n(\zeta)$

και $\tau \zeta P_n(\tau)(P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta))$, $\tau \zeta Q_n(\tau)(P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta))$, ενώ, επίσης τους όρους $\zeta (P_{n+1}(\tau) - P_{n-1}(\tau))P_n(\zeta)$, $\zeta (Q_{n+1}(\tau) - Q_{n-1}(\tau))P_n(\zeta)$ και $\tau P_n(\tau)(P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta))$, $\tau Q_n(\tau)(P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta))$, $n \geq 1$ και, συνεπώς, φτάνουμε σε 2-D εκφράσεις για το πεδίο ταχύτητας, δηλαδή,

$$\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = v_{\tau, sd}^{PN}(\tau, \zeta) \hat{\mathbf{r}} + v_{\zeta, sd}^{PN}(\tau, \zeta) \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{III-2.42})$$

όπου οι συνιστώσες μετά από τα παραπάνω είναι

$$\begin{aligned} v_{\tau, sd}^{PN}(\tau, \zeta) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0,1} \left\{ \mathbf{e}_{n, sd}^{(i)} u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) - \left[\left(\mathbf{e}_{n, sd}^{(i)} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sd}^{(i)} \right] \nabla u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) \right. \\ & \left. + \mathbf{e}_{n, sd}^{(e)} u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) - \left[\left(\mathbf{e}_{n, sd}^{(e)} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sd}^{(e)} \right] \nabla u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \right\} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ & + \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ c^2 c_{n, sd}^{(i)} \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} \left[\frac{n P_{n-2}(\tau)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{P_n(\tau)}{(2n-1)(2n+3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(n+1) P_{n+2}(\tau)}{(2n+1)(2n+3)} \right] \left(n P_{n-1}(\zeta) + (n+1) P_{n+1}(\zeta) \right) + c d_{n, sd}^{(i)} \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} (P_{n-1}(\tau) - P_{n+1}(\tau)) P_n(\zeta) \right\} \\ & + \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ c^2 c_{n, sd}^{(e)} \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} \left[\frac{n Q_{n-2}(\tau)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{Q_n(\tau)}{(2n-1)(2n+3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(n+1) Q_{n+2}(\tau)}{(2n+1)(2n+3)} \right] \left(n P_{n-1}(\zeta) + (n+1) P_{n+1}(\zeta) \right) + c d_{n, sd}^{(e)} \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} (Q_{n-1}(\tau) - Q_{n+1}(\tau)) P_n(\zeta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-2.43})$$

και

$$\begin{aligned} v_{\zeta, sd}^{PN}(\tau, \zeta) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0,1} \left\{ \mathbf{e}_{n, sd}^{(i)} u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) - \left[\left(\mathbf{e}_{n, sd}^{(i)} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sd}^{(i)} \right] \nabla u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) \right. \\ & \left. + \mathbf{e}_{n, sd}^{(e)} u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) - \left[\left(\mathbf{e}_{n, sd}^{(e)} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n, sd}^{(e)} \right] \nabla u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \right\} \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} \\ & + \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ c^2 c_{n, sd}^{(i)} \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} \left[\frac{n P_{n-2}(\zeta)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{P_n(\zeta)}{(2n-1)(2n+3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(n+1) P_{n+2}(\zeta)}{(2n+1)(2n+3)} \right] \left(n P_{n-1}(\tau) + (n+1) P_{n+1}(\tau) \right) + c d_{n, sd}^{(i)} \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} P_n(\tau) (P_{n-1}(\zeta) - P_{n+1}(\zeta)) \right\} \\ & + \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ c^2 c_{n, sd}^{(e)} \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} \left[\frac{n P_{n-2}(\zeta)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{P_n(\zeta)}{(2n-1)(2n+3)} \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{(n+1)P_{n+2}(\zeta)}{(2n+1)(2n+3)}\left[(nQ_{n-1}(\tau)+(n+1)Q_{n+1}(\tau))+cd_{n,sd}^{(e)}\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}Q_n(\tau)(P_{n-1}(\zeta)-P_{n+1}(\zeta))\right]\Bigg\} \quad (\text{III-2.44})$$

για κάθε $c > 0$ και $\tau > 1$, $|\zeta| \leq 1$. Το διδιάστατο πεδίο ολικής πίεσης αναλογεί στην

$$\begin{aligned} P_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = & P_{0sd}^{PN} - \left[\mathbf{e}_{0,sd}^{(i)} \cdot \nabla u_{0,sd}^{(i)}(\tau, \zeta) + \mathbf{e}_{0,sd}^{(e)} \cdot \nabla u_{0,sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \right] \\ & + \frac{\mu_0}{c(\tau^2 - \zeta^2)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n+1)} c_{n,sd}^{(i)} [P_{n-1}(\tau)P_{n+1}(\zeta) - P_{n+1}(\tau)P_{n-1}(\zeta)] \right. \\ & \left. + \frac{n(n+1)}{(2n+1)} c_{n,sd}^{(e)} [Q_{n-1}(\tau)P_{n+1}(\zeta) - Q_{n+1}(\tau)P_{n-1}(\zeta)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III-2.45})$$

όπου $c > 0$ και $\tau > 1$, $|\zeta| \leq 1$.

Στον αντίποδα, από τη στιγμή που έχουν παραχθεί οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις στο Κεφάλαιο ΙΙΙ-1 [37] στις επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες το πλήρες ανάπτυγμα της συνάρτησης ροής Stokes που ανήκει στον $\ker E^4$, δίνεται μέσω των συναρτήσεων Gegenbauer πρώτου G_n και δευτέρου H_n στις μεταβλητές τ και ζ , $\tau > 1$, $\zeta \in [-1, 1]$ (κοίτα Παράρτημα Β). Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων [37] που δίνονται μέσω των σχέσεων (ΙΙΙ-1.66)–(ΙΙΙ-1.86), μαζί με τις ιδιοσυναρτήσεις που ανήκουν στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή E^2 (εκφράσεις (ΙΙΙ-1.59)–(ΙΙΙ-1.62)), η συνάρτηση ροής γράφεται σαν μια σειρά σε όρους των εσωτερικών και εξωτερικών ιδιοσυναρτήσεων, εφόσον μια παρόμοια θεώρηση με αυτή της αναπαράστασης Parkovich – Neuber περιλαμβάνει μια σειρά από ποικίλα βήματα απλοποιήσεων που εξαιρούν την παρουσία ιδιομορφιών στον άξονα συμμετρίας με αποτέλεσμα η επιμήκης σφαιροειδής συνάρτηση ροής (ΙΙΙ-1.87) να εκφυλιστεί στην

$$\begin{aligned} \psi_{sd}(\tau, \zeta) = & \sum_{n=2}^{\infty} \left[A_{n,sd}^i \Theta_n^{(i)}(\tau, \zeta) + B_{n,sd}^i \Omega_n^{(i)}(\tau, \zeta) \right] \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left[A_{n,sd}^e \Theta_n^{(e)}(\tau, \zeta) + B_{n,sd}^e \Omega_n^{(e)}(\tau, \zeta) \right], \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1, \end{aligned} \quad (\text{III-2.46})$$

όπου το άθροισμα με τους A -συντελεστές αναπαριστά ένα στοιχείο του χώρου $\ker E^2$ που εκφράζεται μέσω των εξισώσεων του Κεφαλαίου ΙΙΙ-1 για $\ell = 1, 3$,

$$\Theta_n^{(i)}(\tau, \zeta) = G_n(\tau)G_n(\zeta), \quad n \geq 2 \quad \text{και} \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-2.47})$$

και

$$\Theta_n^{(e)}(\tau, \zeta) = H_n(\tau)G_n(\zeta), \quad n \geq 2 \quad \text{και} \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{III-2.48})$$

ενώ το άθροισμα με τους B -συντελεστές αποτελεί μια συνάρτηση που βρίσκεται στο χώρο $\ker E^2$ υπό τη δράση του τελεστή E^2 και αποτελούν την αποτελέσματα της εξαιρετικής σημασίας εργασίας [37]. Αυτές οι γενικευμένες ιδιοσυναρτήσεις που είναι αποτέλεσμα του ημιδιαχωρισμού μεταβλητών του διαφορικού τελεστή E^4 σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες και στην περίπτωση της απουσίας πηγών στον άξονα x_1 δίνεται από τις παρακάτω εσωτερικές και εξωτερικές παραστάσεις που αντιστοιχούν στα είδη $\ell = 1, 3$,

$$\Omega_2^{(i)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{25} G_2(\tau)G_4(\zeta) + \frac{2}{25} G_4(\tau)G_2(\zeta) \quad (\text{III-2.49})$$

και

$$\Omega_2^{(e)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{25} H_2(\tau)G_4(\zeta) + \frac{2}{25} H_4(\tau)G_2(\zeta) + \frac{1}{6} G_1(\tau)G_2(\zeta) \quad (\text{III-2.50})$$

για $n = 2$,

$$\Omega_3^{(i)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{49} G_3(\tau)G_5(\zeta) + \frac{2}{49} G_5(\tau)G_3(\zeta) \quad (\text{III-2.51})$$

και

$$\Omega_3^{(e)}(\tau, \zeta) = \frac{2}{49} H_3(\tau)G_5(\zeta) + \frac{2}{49} H_5(\tau)G_3(\zeta) - \frac{1}{90} G_0(\tau)G_3(\zeta) \quad (\text{III-2.52})$$

για $n = 3$, και

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(i)}(\tau, \zeta) = & -\frac{\alpha_n}{2(2n-3)} [G_{n-2}(\tau)G_n(\zeta) + G_n(\tau)G_{n-2}(\zeta)] \\ & + \frac{\beta_n}{2(2n+1)} [G_{n+2}(\tau)G_n(\zeta) + G_n(\tau)G_{n+2}(\zeta)] \end{aligned} \quad (\text{III-2.53})$$

και

$$\begin{aligned} \Omega_n^{(e)}(\tau, \zeta) = & -\frac{\alpha_n}{2(2n-3)} [H_{n-2}(\tau)G_n(\zeta) + H_n(\tau)G_{n-2}(\zeta)] \\ & + \frac{\beta_n}{2(2n+1)} [H_{n+2}(\tau)G_n(\zeta) + H_n(\tau)G_{n+2}(\zeta)] \end{aligned} \quad (\text{III-2.54})$$

για $n = 4, 5, 6, \dots$, όπου οι σταθερές α_n και β_n εκφράζονται από τις εξισώσεις

$$\alpha_n = \frac{(n-3)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)} \quad \text{και} \quad \beta_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad n \geq 4. \quad (\text{III-2.55})$$

Το δυναμικό συνάρτησης ροής (III-2.46), με τις (III-2.47)–(III-2.55), είναι αυτό που υπεισέρχεται στα πεδία ταχύτητας (III-2.9) και ολικής πίεσης (III-2.11) για να

καταλήξουμε, τελικά, μετά από αρκετές αλγεβρικές πράξεις που συνθέτουν τη δράση των παραγώγων στις συναρτήσεις Gegenbauer (B.46) και (B.47) και τις κύριες αναγωγικές σχέσεις του Παραρτήματος Β για αυτές τις ειδικές συναρτήσεις, στις πιο κάτω πολύπλοκες εκφράσεις για τα πεδία ροής. Δηλαδή, το διδιάστατο ή αξονοσυμμετρικό πεδίο ταχύτητας έχει τη γνωστή μορφή

$$\mathbf{v}_{sd}^S(\tau, \zeta) = \mathbf{v}_{\tau, sd}^S(\tau, \zeta) \hat{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{v}_{\zeta, sd}^S(\tau, \zeta) \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{III-2.56})$$

όπου, εδώ, οι συνιστώσες σε συνδυασμό και με τους ορισμούς (B.28) και (B.29) του Παραρτήματος Β, υποθέτουν τις εκφράσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\tau, sd}^S(\tau, \zeta) = & \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} \left\{ \sum_{n=0}^1 \left[A_{n, sd}^i \frac{\partial}{\partial \zeta} \Theta_n^{(i)}(\tau, \zeta) + A_{n, sd}^e \frac{\partial}{\partial \zeta} \Theta_n^{(e)}(\tau, \zeta) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^3 \left[B_{n, sd}^i \frac{\partial}{\partial \zeta} \Omega_n^{(i)}(\tau, \zeta) + B_{n, sd}^e \frac{\partial}{\partial \zeta} \Omega_n^{(e)}(\tau, \zeta) \right] \right. \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \left[A_{n, sd}^i (P_n(\tau) - P_{n-2}(\tau)) P_{n-1}(\zeta) + A_{n, sd}^e (Q_n(\tau) - Q_{n-2}(\tau)) P_{n-1}(\zeta) \right] \\ & + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)} \left[B_{n, sd}^i (P_{n-2}(\tau) - P_n(\tau)) \left(\frac{\alpha_n}{(2n-3)} P_{n-3}(\zeta) - \frac{\beta_n}{(2n+1)} P_{n+1}(\zeta) \right) \right. \\ & \left. + (2n-1) B_{n, sd}^i \left(\frac{\alpha_n}{(2n-5)(2n-3)} (P_{n-4}(\tau) - P_{n-2}(\tau)) - \frac{\beta_n}{(2n+1)(2n+3)} (P_n(\tau) - P_{n+2}(\tau)) \right) P_{n-1}(\zeta) \right] \\ & + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)} \left[B_{n, sd}^e (Q_{n-2}(\tau) - Q_n(\tau)) \left(\frac{\alpha_n}{(2n-3)} P_{n-3}(\zeta) - \frac{\beta_n}{(2n+1)} P_{n+1}(\zeta) \right) \right. \\ & \left. + (2n-1) B_{n, sd}^e \left(\frac{\alpha_n}{(2n-5)(2n-3)} (Q_{n-4}(\tau) - Q_{n-2}(\tau)) - \frac{\beta_n}{(2n+1)(2n+3)} (Q_n(\tau) - Q_{n+2}(\tau)) \right) P_{n-1}(\zeta) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-2.57})$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\zeta, sd}^S(\tau, \zeta) = & \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} \left\{ \sum_{n=0}^1 \left[A_{n, sd}^i \frac{\partial}{\partial \tau} \Theta_n^{(i)}(\tau, \zeta) + A_{n, sd}^e \frac{\partial}{\partial \tau} \Theta_n^{(e)}(\tau, \zeta) \right] \right. \\ & \left. + \sum_{n=0}^3 \left[B_{n, sd}^i \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_n^{(i)}(\tau, \zeta) + B_{n, sd}^e \frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_n^{(e)}(\tau, \zeta) \right] \right. \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \left[A_{n, sd}^i P_{n-1}(\tau) (P_n(\zeta) - P_{n-2}(\zeta)) + A_{n, sd}^e Q_{n-1}(\tau) (P_n(\zeta) - P_{n-2}(\zeta)) \right] \\ & + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)} \left[B_{n, sd}^i \left(\frac{\alpha_n}{(2n-3)} P_{n-3}(\tau) - \frac{\beta_n}{(2n+1)} P_{n+1}(\tau) \right) (P_{n-2}(\zeta) - P_n(\zeta)) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2n-1)B_{n,sd}^i P_{n-1}(\tau) \left(\frac{\alpha_n}{(2n-5)(2n-3)} (P_{n-4}(\zeta) - P_{n-2}(\zeta)) - \frac{\beta_n}{(2n+1)(2n+3)} (P_n(\zeta) - P_{n+2}(\zeta)) \right) \Bigg] \\
& + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2(2n-1)} \left[B_{n,sd}^e \left(\frac{\alpha_n}{(2n-3)} Q_{n-3}(\tau) - \frac{\beta_n}{(2n+1)} Q_{n+1}(\tau) \right) (P_{n-2}(\zeta) - P_n(\zeta)) \right. \\
& \left. + (2n-1)B_{n,sd}^e Q_{n-1}(\tau) \left(\frac{\alpha_n}{(2n-5)(2n-3)} (P_{n-4}(\zeta) - P_{n-2}(\zeta)) - \frac{\beta_n}{(2n+1)(2n+3)} (P_n(\zeta) - P_{n+2}(\zeta)) \right) \right] \\
& \quad \quad \quad \text{(III-2.58)}
\end{aligned}$$

για κάθε $c > 0$ και $\tau > 1$, $|\zeta| \leq 1$. Το αξονοσυμμετρικό πεδίο ολικής πίεσης παίρνεται από την

$$P_{sd}^S(\tau, \zeta) = P_{0sd}^S + \frac{\mu_0}{c} \left\{ \int_{+\infty}^{\tau} \frac{\partial P_{sd}^S(\tau', \zeta)}{\partial \tau'} d\tau' + \int_0^{\zeta} \frac{\partial P_{sd}^S(\tau, \zeta')}{\partial \zeta'} d\zeta' \right\}, \quad c > 0 \quad \text{(III-2.59)}$$

για $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$, όπου

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{sd}^S(\tau, \zeta)}{\partial \tau} &= \frac{\mu_0}{c^3(\tau^2 - 1)} \left\{ \sum_{n=0}^1 \left[B_{n,sd}^i \frac{\partial}{\partial \zeta} \Theta_n^{(i)}(\tau, \zeta) + B_{n,sd}^e \frac{\partial}{\partial \zeta} \Theta_n^{(e)}(\tau, \zeta) \right] \right. \\
& \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{B_{n,sd}^i}{(2n-1)} (P_n(\tau) - P_{n-2}(\tau)) P_{n-1}(\zeta) + \frac{B_{n,sd}^e}{(2n-1)} (Q_n(\tau) - Q_{n-2}(\tau)) P_{n-1}(\zeta) \right] \right\} \\
& \quad \quad \quad \text{(III-2.60)}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{sd}^S(\tau, \zeta)}{\partial \zeta} &= -\frac{\mu_0}{c^3(1 - \zeta^2)} \left\{ \sum_{n=0}^1 \left[B_{n,sd}^i \frac{\partial}{\partial \tau} \Theta_n^{(i)}(\tau, \zeta) + B_{n,sd}^e \frac{\partial}{\partial \tau} \Theta_n^{(e)}(\tau, \zeta) \right] \right. \\
& \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{B_{n,sd}^i}{(2n-1)} P_{n-1}(\tau) (P_n(\zeta) - P_{n-2}(\zeta)) + \frac{B_{n,sd}^e}{(2n-1)} Q_{n-1}(\tau) (P_n(\zeta) - P_{n-2}(\zeta)) \right] \right\} \\
& \quad \quad \quad \text{(III-2.61)}
\end{aligned}$$

για κάθε $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$. Οι (III-2.58) – (III-2.60) φανερώσουν και τη δυσκολία της αντιμετώπισης προβλημάτων ροής όπου είναι απαραίτητη η εύρεση του πεδίου ολικής πίεσης. Το συγκεκριμένο πεδίο δίνεται μέσω ολοκληρώματος που πρέπει να υπολογιστεί σε αντίθεση με τη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber που μας εφοδιάζει με την ολική πίεση απευθείας σε όρους αρμονικών δυναμικών, όπως δείχνει και η έκφραση (III-2.45).

ΙΙΙ-2.2β Τύποι συσχέτισης Stokes και Parkovich – Neuber.

Παίρνοντας υπόψη ότι τα πεδία ροής για την ταχύτητα και για την ολική πίεση έχουν υπολογιστεί, η ιδέα είναι να βρούμε μετασχηματισμούς από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Ειδικότερα, για δεδομένη ταχύτητα και ολική πίεση σε όρους του δυναμικού συνάρτησης ροής από τις (ΙΙΙ-2.46)–(ΙΙΙ-2.55), αναζητούμε εκείνα τα ισοδύναμα δυναμικά Parkovich – Neuber (ΙΙΙ-2.16)–(ΙΙΙ-2.18), μαζί με τις (ΙΙΙ-2.29), (ΙΙΙ-2.30), που θα παράγουν πανομοιότυπα πεδία ροής. Από αυτή τη σκοπιά, ψάχνουμε τύπους σύνδεσης, για τις πλέον διδιάστατες, διαφορικές αναπαραστάσεις, που να ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_{sd}^S(\mathbf{r}) \quad \text{και} \quad P_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = P_{sd}^S(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{E}^2). \quad (\text{ΙΙΙ-2.62})$$

Η (ΙΙΙ-2.62) είναι ο συνδετικός κρίκος των πεδίων ροής Parkovich – Neuber (σχέσεις (ΙΙΙ-2.42)–(ΙΙΙ-2.45)) και των αντιστοίχων πεδίων ροής της αναπαράστασης Stokes (σχέσεις (ΙΙΙ-2.57)–(ΙΙΙ-2.61)). Μετά από επίπονους υπολογισμούς, συσχετίζουμε τα πεδία ροής και αυτό που στην πραγματικότητα γίνεται είναι ότι η σύνδεση της ταχύτητας και της ολικής πίεσης μεταφέρεται στους αντίστοιχους σταθερούς συντελεστές των δυναμικών της γενικής διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber και της συνάρτησης ροής της αναπαράστασης Stokes. Αυτό σημαίνει ότι

$$c_{n,sd}^{(i)} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{(2n+3)(n+1)(n+2)} B_{n+2,sd}^i - \frac{1}{(2n-1)(n-1)n} B_{n,sd}^i \right], \quad c > 0 \quad (\text{ΙΙΙ-2.63})$$

και

$$c_{n,sd}^{(e)} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{(2n+3)(n+1)(n+2)} B_{n+2,sd}^e - \frac{1}{(2n-1)(n-1)n} B_{n,sd}^e \right], \quad c > 0 \quad (\text{ΙΙΙ-2.64})$$

για κάθε $n \geq 2$. Συνεπώς, κάθε εσωτερικό και εξωτερικό διανυσματικό δυναμικό της αναπαράστασης Parkovich – Neuber $\Phi_{n,sd}^{(i)}$ και $\Phi_{n,sd}^{(e)}$, αντίστοιχα, $n \geq 2$ στη διεύθυνση x_1 (η μόνη διεύθυνση που “επιβιώνει”) εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός δύο εσωτερικών ιδιοσυναρτήσεων ροής $\psi_{n+2,sd}^i$ και $\psi_{n,sd}^i$ και δύο εξωτερικών ιδιοσυναρτήσεων ροής $\psi_{n+2,sd}^e$ και $\psi_{n,sd}^e$, αντίστοιχα για $n \geq 2$. Επιπλέον, παίρνουμε

$$d_{n,sd}^{(i)} = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{2}{n(n+1)} A_{n+1,sd}^i + \frac{1}{(2n-1)^2(2n+3)^2} \left[\frac{(n+1)(2n-1)^2}{(2n+5)(n+2)} B_{n+3,sd}^i \right. \right.$$

$$\left. - \left(4 + \frac{3}{n(n+1)} \right) B_{n+1, sd}^i - \frac{n(2n+3)^2}{(2n-3)(n-1)} B_{n-1, sd}^i \right] \Bigg\}, \quad c > 0 \quad (\text{III-2.65})$$

και

$$d_{n, sd}^{(e)} = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{2}{n(n+1)} A_{n+1, sd}^e + \frac{1}{(2n-1)^2 (2n+3)^2} \left[\frac{(n+1)(2n-1)^2}{(2n+5)(n+2)} B_{n+3, sd}^e \right. \right. \\ \left. \left. - \left(4 + \frac{3}{n(n+1)} \right) B_{n+1, sd}^e - \frac{n(2n+3)^2}{(2n-3)(n-1)} B_{n-1, sd}^e \right] \right\}, \quad c > 0 \quad (\text{III-2.66})$$

για κάθε $n \geq 2$. Παρόμοια, λοιπόν, κάθε εσωτερικό και εξωτερικό βαθμωτό δυναμικό της αναπαράστασης Parkovich – Neuber $\Phi_{0n, sd}^{(i)}$ και $\Phi_{0n, sd}^{(e)}$, αντίστοιχα, $n \geq 2$ εκφράζεται, τώρα, σε όρους μιας εσωτερικής $\Psi_{n+1, sd}^i$ και μιας εξωτερικής $\Psi_{n+1, sd}^e$ ιδιοσυνάρτησης ροής, αντίστοιχα για $n \geq 2$, από το χώρο $\ker E^2$, καθώς επίσης και σε όρους τριών εσωτερικών $\Psi_{n+3, sd}^i$, $\Psi_{n+1, sd}^i$, $\Psi_{n-1, sd}^i$ και τριών εξωτερικών $\Psi_{n+3, sd}^e$, $\Psi_{n+1, sd}^e$, $\Psi_{n-1, sd}^e$ ιδιοσυναρτήσεων ροής, αντίστοιχα για $n \geq 2$, από το χώρο $\ker E^4$. Για τις περιπτώσεις μηδενικού και πρώτου βαθμού, οι οποίες εξετάζονται με ξεχωριστή διαδικασία, λαμβάνουμε

$$d_{1, sd}^{(i)} = -\frac{1}{c} \left\{ A_{2, sd}^i + c^2 \left[-c_{0, sd}^{(i)} + \frac{2}{25c^2} \left(\frac{1}{21} B_{4, sd}^i - \frac{2}{3} B_{2, sd}^i \right) \right] \right\}, \quad c > 0 \quad (\text{III-2.67})$$

και

$$d_{1, sd}^{(e)} = -\frac{1}{c} \left\{ A_{2, sd}^e + c^2 \left[-c_{0, sd}^{(e)} + \frac{2}{25c^2} \left(\frac{1}{21} B_{4, sd}^e - \frac{2}{3} B_{2, sd}^e \right) \right] \right\}, \quad c > 0, \quad (\text{III-2.68})$$

ενώ

$$B_{2, sd}^e = 6c^2 c_{0, sd}^{(e)}, \quad B_{3, sd}^e = 30c^2 c_{1, sd}^{(e)} \quad \text{και} \quad 3d_{0, sd}^{(e)} = -cc_{1, sd}^{(e)}, \quad c > 0 \quad (\text{III-2.69})$$

και

$$c_{0, sd}^{(i)}, c_{0, sd}^{(e)}, c_{1, sd}^{(i)}, c_{1, sd}^{(e)}, d_{0, sd}^{(i)} \in \mathfrak{B}. \quad (\text{III-2.70})$$

Τέλος, η συσχέτιση των ολικών πιέσεων συνεπάγεται την εξίσωση των σταθερών πιέσεων αναφοράς, δηλαδή,

$$P_{0sd}^{PN} = P_{0sd}^S. \quad (\text{III-2.71})$$

Η σταθερή πίεση αναφοράς συνήθως λαμβάνεται σε ένα σημείο βολικό ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα. Ένα τέτοιο σημείο αποτελεί η θέση στον ισημερινό και σε συγκεκριμένη απόσταση από το υπό μελέτη σωματίδιο.

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την πεπλατυσμένη σφαιροειδή γεωμετρία μπορούν άμεσα να ληφθούν μέσω του απλού μετασχηματισμού [77]

$$\tau \rightarrow i\lambda \quad \text{και} \quad c \rightarrow -i\bar{c}, \quad (\text{III-2.72})$$

όπου $0 \leq \lambda \equiv \sinh \eta < +\infty$ και $\bar{c} > 0$ είναι οι καινούργιες χαρακτηριστικές μεταβλητές της πεπλατυσμένης σφαιροειδούς γεωμετρίας και i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα. Συνεπώς, η παραπάνω αντικατάσταση δηλώνει τον αλγόριθμο που μετατρέπει τα αποτελέσματα από το επίμηκες σφαιροειδές στο πεπλατυσμένο. Το αξιοσημείωτο είναι ότι ακριβώς η ίδια αντικατάσταση, αλλά αντίστροφα,

$$\lambda \rightarrow i\tau \quad \text{και} \quad \bar{c} \rightarrow -ic \quad (\text{III-2.73})$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψει τα αποτελέσματα από το πεπλατυσμένο στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα.

Σε αυτή την παράγραφο* εξετάσαμε τη γενική διαφορική λύση Parkovich – Neuber και την αναπαράσταση Stokes, οι οποίες προσφέρουν λύσεις για προβλήματα έρπουσας ροής στη σφαιροειδή γεωμετρία και, επιπλέον, συνδέσαμε τις δύο αναπαραστάσεις για ροές απουσία ανωμαλιών στον άξονα συμμετρίας. Κάτω από το συγκεκριμένο πρίσμα, βρέθηκαν τύποι σύνδεσης μετά από τη συσχέτιση των πεδίων ροής χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα δυναμικά σε όρους σφαιροειδών ιδιοσυναρτήσεων. Άμεση συνέπεια της συσχέτισης των αναπαραστάσεων για ροές που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes, όπου παράγονται φόρμουλες σύνδεσης για τους σταθερούς συντελεστές των δυναμικών, είναι ότι η διαδικασία δεν είναι δυνατό να αντιστραφεί, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του αντίστοιχου προβλήματος σε σφαιρική γεωμετρία, όπου παρουσιάζεται πλήρης αντιστρεψιμότητα. Φαίνεται ότι μια επιπλέον πληροφορία για την αναπαράσταση Stokes είναι απαραίτητη, με την έννοια ότι κάποιος μπορεί να υπολογίσει πάντα τα πεδία ροής μέσω της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, εφόσον οι ιδιομορφές Stokes είναι καθορισμένες, αλλά δεν μπορεί να επιτύχει εκφράσεις που να μας εξασφαλίζουν τα δυναμικά Stokes σαν συνάρτηση των αρμονικών δυναμικών της γενικής λύσης Parkovich – Neuber. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η εξίσωση κινήσεως είναι ημιδιαχωρίσιμη σε σφαιροειδείς συντεταγμένες κάτι που δεν συμβαίνει στη σφαιρική γεωμετρία, όπου ο χωρισμός μεταβλητών στην εξίσωση κινήσεως διατηρείται.

* Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παραγράφου ΙΙΙ-2.2 αποτελούν μέρος της δημοσιευμένης εργασίας [42].

Παρά το γεγονός ότι αυτές οι αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες, όπως θα φανεί και στο επόμενο κεφάλαιο των εφαρμογών, η διαφορική λύση Parkovich – Neuber είναι προτιμητέα σε σχέση με την αναπαράσταση Stokes διότι μας προσφέρει τρία σημαντικά πλεονεκτήματα. Πρώτον, απευθύνεται κατευθείαν στην ολική πίεση και στις συνιστώσες ταχυτήτων, παρά στη συνάρτηση ροής. Δεύτερον, δίνει μια πλήρως διαχωρίσιμη, παρά ημιδιαχωρίσιμη, λύση. Τρίτον, χρησιμοποιεί τις συναρτήσεις Legendre, οι οποίες είναι ουσιαστικά πιο απλές από τις ειδικές συναρτήσεις Gegenbauer (τα δύο πρώτα μέλη του συνόλου των συναρτήσεων Gegenbauer δεν είναι ορθογώνιες στις άλλες, γεγονός που οδηγεί σε υπολογιστικές πολυπλοκότητες). Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά καθιστούν την αντιμετώπιση των προβλημάτων συνοριακών συνθηκών απλούστερες. Πέρα από αυτά τα πλεονεκτήματα, η αναπαράσταση Parkovich – Neuber μπορεί να επεκταθεί στην επίλυση πλήρων 3-D προβλημάτων σε σφαιρική και σφαιροειδή γεωμετρία. Ήδη παρατηρήσαμε την απλότητα του χειρισμού της στην επίλυση του κυττάρου με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel σε σφαιρικές συντεταγμένες σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τέλος, η συγκεκριμένη πλήρης διαφορική λύση αποτελεί τον μοναδικό απλό τρόπο για την επίλυση προβλημάτων σωματιδίων σε κύτταρο σε γεωμετρίες που δεν επιδέχονται αξονική συμμετρία, όπως η ελλειψοειδής γεωμετρία.

Είναι φανερό πως η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber πλεονεκτεί των άλλων και λόγω της απλότητάς της και λόγω της πληροφoρίας της αναφοράς [48], όπου μας επιτρέπει να συνδυάσουμε τα δυναμικά που εμπλέκονται σε αυτή την διαφορική λύση τυχαία,

$$\Phi_{0sd} = f(\Phi_{sd}), \quad (\text{III-2.73})$$

σχέση που, τελικά, δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί στις σφαιρικές συντεταγμένες, αλλά επιβάλλεται πολλές φορές στις σφαιροειδείς συντεταγμένες. Ωστόσο, αυτό θα το κατανοήσουμε αν εφαρμόσουμε τη διαφορική μας λύση σε προβλήματα κυτταρικών μοντέλων, κάτι που γίνεται στο επόμενο Κεφάλαιο III-3, όπου επιλύεται το κύτταρο Kuwabara για ροή γύρω από σμήνος ακίνητων σφαιροειδών σωματιδίων. Παρόλο που η λύση έχει επιτευχθεί σε όρους της συνάρτησης ροής, εμφανίζονται επαναλαμβανόμενες απροσδιοριστίες, οι οποίες αίρονται αν εφαρμόσουμε την σχέση (III-2.73) που διέπει τη διαφορική μας γενική λύση. Αλλά αυτό θα το δούμε καλύτερα αργότερα.

Στην παραπάνω συσχέτιση, διατηρήθηκε η γνωστή θεώρηση των εσωτερικών και εξωτερικών ιδιοσυναρτήσεων απουσία ιδιομορφιών ή πηγών στον άξονα συμμετρίας x_1 διατηρώντας μας σε συμφωνία με τη φυσική που αφορά τις ροές Stokes, αλλά και δίνοντάς μας τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα επιχειρήματα ορθογωνιότητας. Με άλλα λόγια, η ύπαρξη ανώμαλων ειδικών συναρτήσεων για $\zeta = \pm 1$, όπως των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre δευτέρου είδους Q_n^m και των συναρτήσεων Gegenbauer δευτέρου είδους H_n θα δημιουργούσε πρόβλημα και στην εύρεση των τύπων σύνδεσης των σταθερών συντελεστών αφού δεν θα ήταν δυνατή η εφαρμογή των γνωστών σχέσεων ορθογωνιότητας που αναφέρονται σε ομαλές ειδικές συναρτήσεις στον άξονα συμμετρίας.

Τελειώνοντας, επειδή αναφερόμαστε σε συσχέτιση σταθερών συντελεστών δεν έχει νόημα ο γεωμετρικός εκφυλισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες, γεγονός που αποτελεί σημείο εκκίνησης της ορθότητας των αποτελεσμάτων όταν επιλύουμε συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα και θα φανεί ακόμα πιο καθαρά στο επόμενο κεφάλαιο.

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ-3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΗ ΚΥΤΤΑΡΑ (SD)

ΙΙΙ-3.1 Τα επιμήκη σφαιροειδή πεδία ροής στο μοντέλο Kuwabara (2-D).

Η μελέτη των μοντέλων σωματιδίου σε κύτταρο για τη ροή Stokes διαμέσου ενός σμήνους σωματιδίων έχει ουσιαστικά μεγάλο ενδιαφέρον, διότι μας προσφέρουν μια σχετικά απλή βάση για την αναλυτική ή ημιαναλυτική λύση για φαινόμενα μεταφοράς θερμότητας και μάζας. Οι πρώιμες εκδόσεις αυτών των μοντέλων ασχολούνταν με σφαιρικά σωματίδια, δύο εκ των οποίων τις εφαρμογές περιγράψαμε πλήρως στο Κεφάλαιο ΙΙ-3. Για αυτό το λόγο τα μοντέλα “σωματίδιο σε κύτταρο”, που μελετήθηκαν αναλυτικά στο Κεφάλαιο Ι-4, για σφαιροειδή σωματίδια αναπτύχθηκαν πρόσφατα. Συνοπτικά, σε αυτό το κεφάλαιο, η ευελιξία της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber επιδεικνύεται λύνοντας το πρόβλημα της ροής μέσα σε ρευστό κέλυφος στο χώρο μεταξύ δύο ομοεστιακών σφαιροειδών επιφανειών με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara.

Πολλές χημικές, βιοχημικές και άλλες εργαστηριακές εφαρμογές εισάγουν στερεά ή ρευστή ύλη στη μορφή μικρών σωματιδίων για πρακτικούς λόγους που καλύπτουν ένα μεγάλο φάσμα εφαρμογών που περιγράφονται από αυτά τα συστήματα και αποδίδουν σημαντικές φυσικές ιδιότητες στη μεταφορά μάζας και θερμότητας, όπως ρυθμοί αντιδράσεων, οπισθέλκουσα, διαπερατότητα και άλλα.

Τα μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο είναι χρήσιμα στην ανάπτυξη απλών και ισχυρών αναλυτικών εκφράσεων για τη μεταφορά μάζας και θερμότητας σε σμήνη σωματιδίων. Τα συγκεκριμένα μοντέλα βασίζονται, όπως έχουμε προαναφέρει, στην ιδέα ότι ένα τυπικό σωματίδιο του σμήνους και το ρευστό γύρω από αυτό μπορούν να προσεγγισθούν ως ένα “σωματίδιο σε κύτταρο” με κατάλληλες διαστάσεις και συνοριακές συνθήκες. Με αυτό τον τρόπο, η μαθηματική διατύπωση της ροής, καθώς και τα προβλήματα μεταφοράς μάζας και θερμότητας απλοποιούνται ουσιαστικά [8,9,29,30].

Στη σημερινή εποχή μια πλήρης λύση της ροής μέσω ενός σμήνους σωματιδίων καθίσταται δυνατή με ισχυρές μεθόδους που εμπεριέχουν ως επί το πλείστον το στοιχείο της αριθμητικής ανάλυσης, όπως Stokesian δυναμική [13] ή Lattice – Boltzmann μοντελοποίηση [60]. Παρόλα αυτά, αυτές οι μέθοδοι περιέχουν τη χρήση πολύπλοκων υπολογιστικών κωδικών για κάθε περίπτωση που μελετάται ξεχωριστά. Ωστόσο, υπάρχει πάντα χώρος και ανάγκη για αναλυτικές μεθόδους οι οποίες “συλλαμβάνουν” τα ουσιώδη χαρακτηριστικά των, υπό θεώρηση, διαδικασιών μεταφοράς μέσα σε αναλυτικές εκφράσεις που εμπεριέχουν τις κατάλληλες γεωμετρικές και φυσικές ομάδες. Σε αυτό το σημείο τα κυτταρικά μοντέλα σωματιδίων χρησιμεύουν σαν το αρχικό σχέδιο για την αναλυτική επίλυση τέτοιου χαρακτήρα προβλημάτων ρευστομηχανικής.

Στο Κεφάλαιο I–4 ασχοληθήκαμε με μια μικρή αναφορά στο παρελθόν που αφορούν μοντέλα σφαιροειδών σωματιδίων. Όμως, μέχρι το 1994 δεν είχε παρουσιαστεί μια ενδιαφέρουσα αναλυτική δουλειά που να αφορά μοντέλα σφαιροειδών σε κύτταρο λόγω της μη χωρισιμότητας μεταβλητών της εξίσωσης $E^4 \psi_{sd} = 0$ σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Αυτή η δυσκολία αντιμετωπίστηκε πρόσφατα από τους Dassios *et al.* [37] με την εισαγωγή της μεθόδου ημιδιαχωρισμού μεταβλητών, η οποία στηρίζεται σε μια κατάλληλη πεπερασμένη διαστατική φασματική αποσύνθεση του τελεστή E^4 και τα αποτελέσματα τα είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια στην παράθεση των

γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων. Παρόλα αυτά, μια απροσδιοριστία εμφανίζεται όταν τα σφαιροειδή μοντέλα τύπου Happel και Kuwabara επιλύονται σε όρους της συνάρτησης ροής (αυτή η απροσδιοριστία δεν εμφανίζεται στην περίπτωση της σφαίρας). Η απροσδιοριστία μπορεί να ξεπερασθεί μέσα από την επιβολή μιας πρόσθετης γεωμετρικής συνθήκης η οποία εξασφαλίζει το σωστό εκφυλισμό στην περίπτωση της διαταραγμένης σφαίρας [56]. Η ίδια απροσδιοριστία εμφανίζεται όταν η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber χρησιμοποιείται και αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι στη διαφορική αναπαράσταση μας δίνεται η δυνατότητα να καθορίσουμε εμείς κάποιες σταθερές ανάλογα με το τι είναι βολικό κάθε φορά ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα. Η ευελιξία αυτή της διαφορικής λύσης στηρίζεται στην αναφορά [48] και αποτελεί το λόγο για τον οποίο επιλύουμε ένα ήδη γνωστό πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια καλύτερη μέθοδο. Η συσχέτιση των διαφορικών λύσεων του Parkovich – Neuber και του Stokes στο Κεφάλαιο ΙΙΙ-2 μας βοήθησε ουσιαστικά να καταλάβουμε τη συμπεριφορά τους καλύτερα.

Στο πλαίσιο της πλήρους κατανόησης της χρησιμότητας και της ευελιξίας της αναπαράστασής μας, εξάγουμε τη λύση του προβλήματος έρπουσας ροής διαμέσου σμήνους ακίνητων σφαιροειδών σωματιδίων, τα οποία είναι αναπτυσσόμενα μέσα σε Νευτώνειο ρευστό που κινείται με μια ομοιόμορφη και σταθερή μέση ταχύτητα διακένου στην διεύθυνση του άξονα συμμετρίας (η διαφορά μεταξύ αυτής της ταχύτητας και της ταχύτητας που χρησιμοποιούμε στο μοντέλο μας οφείλεται στο ότι τα σφαιροειδή σωματίδια δεν καλύπτουν πλήρως το χώρο, όπως και οι σφαίρες, στοιχείο που το συζητήσαμε και στα κεφάλαια για τη σφαιρική γεωμετρία). Υπό την υπόθεση μικρών αριθμών Reynolds, μια αξονοσυμμετρική ροή Stokes σε έναν σφαιροειδή “φάκελο” κατάλληλου σχήματος και διαστάσεων υιοθετείται σαν μια επαρκής προσέγγιση για τη ροή γύρω από ένα τυπικό σωματίδιο του σμήνους, σε συμφωνία με την αρχή του Kuwabara [66]. Το εσωτερικό σφαιροειδές, το οποίο αναπαριστά ένα από τα σωματίδια στο συσσωμάτωμα, είναι στερεό, ενώ το εξωτερικό σφαιροειδές αναπαριστά ένα φανταστικό ρευστό περίβλημα που προσδιορίζει την επιφάνεια ενός μοναδιαίου κυττάρου (“σφαιροειδές σε κύτταρο”). Η παρούσα ιδέα προσφέρει έναν χρήσιμο και αποτελεσματικό τρόπο μοντελοποίησης της ροής διαμέσου σμήνους από σφαιροειδή σωματίδια. Το πάχος του ρευστού στρώματος υπολογίζεται έτσι ώστε το κλάσμα του στερεού όγκου του κυττάρου (στερεό σφαιροειδές με ρευστό φλοιό) να είναι ίσο με το κλάσμα του στερεού όγκου

όλου του σμήνους. Οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, αποτέλεσμα των παραπάνω υποθέσεων, χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των πεδίων ροής σαν αναπτύγματα σειρών μέσω της γενικής διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber, η οποία αναπαριστά την ταχύτητα και την ολική πίεση σε όρους αρμονικών δυναμικών. Εκμεταλλευόμενοι την αξονική συμμετρία, που κληρονομείται από τη σφαιροειδή γεωμετρία, το προαναφερθέν πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά και μια ακριβής λύση κατασκευάζεται, όταν μια επιπλέον γεωμετρική–ασυμπτωτική συνθήκη επικαλείται. Με έναν κατάλληλο συνδυασμό όρων, που περιγράψαμε και στο εισαγωγικό Κεφάλαιο III–1, ο γεωμετρικός εκφυλισμός στην περίπτωση της σφαίρας οδηγεί στα διορθωμένα αποτελέσματα του κυττάρου Kuwabara (βλέπε αναφορά [66] και Κεφάλαιο II–3) για ροή γύρω από σφαιρικά σωματίδια.

Παρά το γεγονός ότι έχει αποδειχτεί [29] ότι η πεπλατυσμένη σφαιροειδής γεωμετρία μπορεί να δώσει ουσιαστικά υψηλότερους ρυθμούς μεταφοράς μάζας και θερμότητας για δεδομένη ογκομετρική παροχή, είναι το επίμηκες σφαιροειδές το σχήμα το οποίο ανταποκρίνεται πιο πιστά στην πραγματικότητα, αφού τα σωματίδια τείνουν σε επιμήκη σφαιροειδή παρά πεπλατυσμένα μέσα στη ροή. Όμως, η παρατήρηση που αναφέραμε για την πεπλατυσμένη σφαιροειδή γεωμετρία μπορεί να βρει πρακτικές εφαρμογές, δεδομένης κάποιου είδους εξωτερικής δύναμης (π.χ. ηλεκτρομαγνητική), η οποία θα καθορίσει τον προσανατολισμό των σωματιδίων. Ωστόσο, εμείς θα επικεντρωθούμε στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία, εφόσον τα αποτελέσματα, από μαθηματικής σκοπιάς, για την πεπλατυσμένη λαμβάνονται αυτόματα με την εφαρμογή ενός απλού μετασχηματισμού που έχουμε επανειλημμένα επαναλάβει και βρίσκεται στην αναφορά [77].

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε μόνο το κύτταρο Kuwabara, σε αντίθεση με τις προηγούμενες εφαρμογές για σφαιρικά σωματίδια, όπου αναλύθηκε και το κύτταρο Happel. Έτσι, παραμένουμε στο πνεύμα της παρούσας Διατριβής παρουσιάζοντας τα πλεονεκτήματα των διαφορικών αναπαραστάσεων όταν αυτές εφαρμόζονται σε κυτταρικά μοντέλα. Εξάλλου, στο επόμενο μέρος θα μελετήσουμε το τρισδιάστατο κύτταρο Happel για τη μη αξονοσυμμετρική ροή σμήνους ελλειψοειδών σωματιδίων και με αυτό τον τρόπο θα καλύψουμε και τη σφαιροειδή περίπτωση. Συνεπώς, ο γεωμετρικός εκφυλισμός του 2–D σφαιροειδούς κυττάρου Kuwabara και του 3–D ενεργειακά αυτόνομου ελλειψοειδούς κυττάρου Happel, όπως θα δούμε, θα οδηγήσουν στα αντίστοιχα σφαιρικά πρότυπα του δεύτερου μέρους.

Γενικά, στο πλαίσιο των αξονοσυμμετρικών (2-D) ροών σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες ασχολούμαστε με διδιάστατα συμπαγή ομαλά και φραγμένα πεδία,

$$\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \equiv \{(\tau, \zeta) : \tau > 1, |\zeta| \leq 1\}, \quad \tau : \text{φραγμένο}, \quad (\text{III-3.1})$$

καθώς και με διδιάστατα επιφανειακά ομαλά πεδία,

$$\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \equiv \{\zeta : |\zeta| \leq 1\}, \quad (\text{III-3.2})$$

όπου

$$\partial \Omega(\mathbf{\Theta}^2) = \partial \Omega_i(\mathbf{\Theta}^2) \cup \partial \Omega_e(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{III-3.3})$$

Το σύμβολο $\partial \Omega_i$ δηλώνει την επιφάνεια του στερεού επιμήκους σφαιροειδούς σωματιδίου, ενώ το σύμβολο $\partial \Omega_e$ υποδεικνύει το ρευστό σύνορο του μοναδιαίου κυττάρου που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της ροής σμήνους σωματιδίων. Τελικά, η ολική επιφάνεια $\partial \Omega$ καθορίζεται από την ένωση αυτών των δύο επιφανειών των ομοεστιακών επιμήκων σφαιροειδών. Σχηματικά, το μοντέλο Kuwabara αναπαρίσταται από το Γράφημα I-4.2, ενώ οι γενικές συνοριακές συνθήκες καλύπτονται από τις σχέσεις (I-4.1)–(I-4.6). Από την άλλη, όσον αφορά το συμβολισμό, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό για τις τροποποιημένες επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες που παίρνονται από τις εξισώσεις (III-1.1) και (III-1.2). Τα πεδία ροής υπολογίζονται από την τρισδιάστατη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber (PN) [81,123], που δίνεται σε όρους των αρμονικών δυναμικών Φ_{sd} και Φ_{0sd} , όπου μετά από τον κατάλληλο εκφυλισμό (οφειλόμενο στις γνωστές εξισώσεις (III-2.27) και (III-2.28)) που συνεπάγεται την μείωση των διαστάσεων κατά μια, οπότε

$$\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = \mathbf{r}_{sd} \cdot \nabla \left(\Phi_{sd}(\tau, \zeta) + \Phi_{0sd}(\tau, \zeta) \right), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \quad (\text{III-3.4})$$

για την ταχύτητα και

$$P_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = P_{0sd}^{PN} - \mu_0 \nabla \cdot \Phi_{sd}(\tau, \zeta), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2) \quad (\text{III-3.5})$$

για την ολική πίεση, όπου P_{0sr}^{PN} είναι η πίεση αναφοράς ορισμένη στον ισημερινό και

$$\Delta \Phi_{sd}(\tau, \zeta) = 0, \quad \Delta \Phi_{0sd}(\tau, \zeta) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{III-3.6})$$

Η ολική πίεση δίνεται συναρτήσει της θερμοδυναμικής πίεσης P_{sr}^{PN} και της βαρυτικής δύναμης $\rho_0 g x_1$ (g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας),

$$P_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = P_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) + \rho_0 g x_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad (\text{III-3.7})$$

όπου το $x_1 = c\tau\zeta$, $c > 0$ δηλώνει το ύψος αναφοράς και μ_0 , ρ_0 είναι το δυναμικό ιξώδες και η πυκνότητα του ρευστού, αντίστοιχα.

Ένα βασικό μέγεθος που εξασφαλίζει την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών στην επίλυση του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο Kuwabara είναι ο στροβιλισμός ω_{sd}^{PN} ,

$$\omega_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad (\text{III-3.8})$$

ενώ στην προσπάθειά μας να παρουσιάσουμε ολοκληρωμένη την εργασία, δίνουμε τη μορφή του ολικού τανυστή των τάσεων,

$$\tilde{\Pi}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = -p_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) \tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \left[\nabla \otimes \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) + \left(\nabla \otimes \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) \right)^T \right] \quad (\text{III-3.9})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$, όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό,

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\boldsymbol{\tau}} \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{\zeta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (\text{III-3.10})$$

και το σύμβολο “ $\otimes$ ” δηλώνει αναστροφή.

Οι βασικοί διαφορικοί τελεστές για διδιάστατες ροές συνοψίζονται από το Κεφάλαιο III-1 και τους παραθέτουμε εδώ για πληρότητα σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες. Επομένως, ο διαφορικός τελεστής της βάθμωσης ∇ έχει τη μορφή

$$\nabla = \frac{1}{c\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left[\sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial}{\partial \tau} - \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right], \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-3.11})$$

για $c > 0$, ενώ ο διαφορικός τελεστής του Laplace Δ δίνεται από την έκφραση

$$\Delta = \frac{1}{c^2(\tau^2 - \zeta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(\tau^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 - \zeta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \right\}, \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{III-3.12})$$

όπου $c > 0$ και $\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ αντιπροσωπεύουν τα μοναδιαία διανύσματα της επιμήκους σφαιροειδούς γεωμετρίας. Επιπλέον, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ενός επιμήκους σφαιροειδούς συμπίπτει με το σφαιροειδές ορθομοναδιαίο $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, δηλ.,

$$\hat{\mathbf{n}}_{sd}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \right), \quad (\text{III-3.13})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ και $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Ολοκληρώσαμε, λοιπόν, τη συγκέντρωση των βασικών εργαλείων επίλυσης του μοντέλου σωματιδίου-ρευστού και την παράθεση των κύριων πεδίων ροής (ταχύτητα, ολική πίεση και στροβιλισμός) που υπεισέρχονται στις συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara σε πεδία με αξονική συμμετρία χρησιμοποιώντας τη γενική διαφορική λύση που προτάθηκε από τους Parkovich – Neuber, έχοντας πραγματοποιήσει τον απαραίτητο εκφυλισμό στις δύο διαστάσεις.

Οι ιδιοσυναρτήσεις που ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή του Laplace σε χωρία με αξονική συμμετρία, απουσία ιδιομορφιών ή πηγών πάνω στον άξονα συμμετρίας x_1 (πρέπει να εξαιρεθούν οι αντίστοιχες ανώμαλες ειδικές συναρτήσεις στη μεταβλητή ζ), δίνονται από τις εσωτερικές συμπαγείς επιμήκειες σφαιροειδείς ιδιοσυναρτήσεις ελλείπει αξιμουθιακής γωνίας Φ ,

$$u_{n, sd}^{(i)0e}(\tau, \zeta) \equiv u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) = P_n(\tau)P_n(\zeta), \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-3.14})$$

και από τις αντίστοιχες εξωτερικές συμπαγείς επιμήκειες σφαιροειδείς ιδιοσυναρτήσεις

$$u_{n, sd}^{(e)0e}(\tau, \zeta) \equiv u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) = Q_n(\tau)P_n(\zeta), \quad \tau > 1, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-3.15})$$

βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$, σε όρους των συναρτήσεων Legendre πρώτου, P_n , και δευτέρου, Q_n , είδους. Αυτές οι συναρτήσεις ορίστηκαν για διάφορα διαστήματα του $x \in \textcircled{3}$ στο Παράρτημα Β και συνοψίζουμε εδώ τα πιο βασικά στοιχεία που χρειάζονται σε αυτό το κεφάλαιο. Αναλυτικότερα, οι συναρτήσεις ή τα πολυώνυμα του Legendre εκφράζονται από τον τύπο του Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad x = \tau, \zeta \in \textcircled{3} \quad (\text{III-3.16})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$, όπου, εδώ, οι συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους Q_n στη μεταβλητή τ εμφανίζονται με τη μορφή

$$Q_n(\tau) = P_n(\tau) \frac{1}{2} \ln \frac{\tau + 1}{\tau - 1} - \sum_{\kappa=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2n - 4\kappa + 3)}{(2\kappa - 1)(n - \kappa + 1)} P_{n-2\kappa+1}(\tau), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\textcircled{3}^2). \quad (\text{III-}$$

3.17)

Τα πολυώνυμα του Legendre στη μεταβλητή ζ ικανοποιούν τη γνωστή σχέση (B.11) ορθογωνιότητας για $m = 0$, τιμή που αντανakλά την αξιμουθιακή ανεξαρτησία, δηλαδή,

$$(P_n(\zeta), P_{n'}(\zeta)) = \int_{-1}^{+1} P_n(\zeta) P_{n'}(\zeta) d\zeta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'}, \quad n \geq 0, \quad n' \geq 0, \quad (\text{III-3.18})$$

με $\delta_{nn'}$ να συμβολίζει το δέλτα του Kronecker.

Με βάση τους ορισμούς (III-3.14) και (III-3.15) γράφουμε τα πλήρη αναπτύγματα των αρμονικών δυναμικών Parkovich – Neuber για 2-D ροές, δηλαδή,

$$\Phi_{sd}(\tau, \zeta) = \hat{\mathbf{x}}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{n, sd}^{(i)} \mathbf{u}_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) + c_{n, sd}^{(e)} \mathbf{u}_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2) \quad (\text{III-3.19})$$

και

$$\Phi_{0sd}(\tau, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[d_{n, sd}^{(i)} \mathbf{u}_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) + d_{n, sd}^{(e)} \mathbf{u}_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2), \quad (\text{III-3.20})$$

αντίστοιχα, όπου για $n \geq 0$

$$c_{n, sd}^{(i/e)} \equiv c_{n, sd}^{(i/e)0e} \quad \text{και} \quad d_{n, sd}^{(i/e)} \equiv d_{n, sd}^{(i/e)0e}, \quad (\text{III-3.21})$$

είναι οι εσωτερικοί και εξωτερικοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές των δυναμικών Φ_{sd} και Φ_{0sd} , αντίστοιχα που είδαμε και στο Κεφάλαιο III-2, αλλά σε αξονοσυμμετρική μορφή. Η θεώρηση διδιάστατων πεδίων ροής συνεπάγεται την κατεύθυνση του διανυσματικού δυναμικού Φ_{sd} στην $\hat{\mathbf{x}}_1$ διεύθυνση, κάτι που επαληθεύεται και αργότερα από την εξαγωγή του πεδίου ταχύτητας.

Οι παραστάσεις των δυναμικών (III-3.19) και (III-3.20) δέχονται την επίδραση των διαφορικών τελεστών από τα πεδία (III-3.4), (III-3.5), (III-3.8) και (III-3.9) στη μορφή των εξισώσεων (III-3.11) και (III-3.12). Επομένως, με τη βοήθεια της

$$c_{n, sd}^{(i/e)}(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \mathbf{r}) = c_{n, sd}^{(i/e)} c \tau \zeta, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2), \quad c > 0 \quad (\text{III-3.22})$$

και χρησιμοποιώντας κατάλληλα τις ταυτότητες (A.1), (A.2) και (A.6) του Παραρτήματος Α λαμβάνουμε την αξονοσυμμετρική ταχύτητα

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_{n, sd}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_1 u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) - \left[c_{n, sd}^{(i)} c \tau \zeta + d_{n, sd}^{(i)} \right] \nabla u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) \right. \\ \left. + c_{n, sd}^{(e)} \hat{\mathbf{x}}_1 u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) - \left[c_{n, sd}^{(e)} c \tau \zeta + d_{n, sd}^{(e)} \right] \nabla u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III-3.23})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2)$ και $c > 0$, ενώ για το διδιάστατο πεδίο ολικής πίεσης με βοήθεια της (A.11) καταλήγουμε στην

$$P_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = P_{0sd}^{PN} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_{n, sd}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \nabla u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) + c_{n, sd}^{(e)} \hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \nabla u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \right\} \quad (\text{III-3.24})$$

για κάθε $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$. Φυσικά, όλων των ειδών οι ιδιομορφίες έχουν εξαιρεθεί.

Όταν υπολογίσουμε το πεδίο ταχύτητας από την (ΙΙΙ-3.23), το πεδίο στροβιλισμού (ΙΙΙ-3.8) στις δύο διαστάσεις, με την άμεση χρήση της (Α.24), οδηγεί στην έκφραση

$$\omega_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_{n, sd}^{(i)} \nabla u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) \times \hat{\mathbf{x}}_1 + c_{n, sd}^{(e)} \nabla u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \times \hat{\mathbf{x}}_1 \right\}, \quad (\text{ΙΙΙ-3.25})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$. Για πληρότητα, χωρίς να χρειάζεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Kuwabara, παραθέτουμε τον 2-D τανυστή των τάσεων,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{\Pi}}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = & -p_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) \tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[c_{n, sd}^{(i)} \tau \zeta + d_{n, sd}^{(i)} \right] \nabla \otimes \nabla u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) \right. \\ & \left. + \left[c_{n, sd}^{(e)} \tau \zeta + d_{n, sd}^{(e)} \right] \nabla \otimes \nabla u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.26})$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ και $c > 0$.

Για τρισδιάστατες ροές, η κλίση των συμπαγών επιμήκων σφαιροειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων έχει ήδη υπολογιστεί στο Κεφάλαιο ΙΙΙ-2 από τις (ΙΙΙ-2.23)– (ΙΙΙ-2.26), όπου για αξονοσυμμετρικές ροές θέτουμε $m = 0$, οπότε για $c > 0$

$$\begin{aligned} \nabla u_{n, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) = & \frac{cn(n+1)}{(2n+1)} \left\{ \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} (P_{n+1}(\tau) - P_{n-1}(\tau)) P_n(\zeta) \hat{\mathbf{r}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} P_n(\tau) (P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)) \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.27})$$

όπου $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$ για $n \geq 1$ και

$$\nabla u_{0, sd}^{(i)}(\tau, \zeta) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\text{ΙΙΙ-3.28})$$

Παρόμοια, έχουμε για $c > 0$

$$\begin{aligned} \nabla u_{n, sd}^{(e)}(\tau, \zeta) = & \frac{cn(n+1)}{(2n+1)} \left\{ \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} (Q_{n+1}(\tau) - Q_{n-1}(\tau)) P_n(\zeta) \hat{\mathbf{r}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2 \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} Q_n(\tau) (P_{n+1}(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)) \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.29})$$

3.29)

όπου $\tau > 1$ και $|\zeta| \leq 1$ για $n \geq 1$, ενώ για $n = 0$

$$\nabla u_{0,sd}^{(e)}(\tau, \zeta) = -\frac{1}{c\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}\sqrt{\tau^2 - 1}} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad c > 0. \quad (\text{III-3.30})$$

Τα μοναδιαία ορθογώνια διανύσματα της επιμήκους σφαιροειδούς γεωμετρίας, που χρησιμοποιούμε στις διδιάστατες ροές, υπενθυμίζουμε ότι δίνονται από τις

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \quad (\text{III-3.31})$$

και

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(-\tau \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\mathbf{x}}_1 + \zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \cos \varphi \hat{\mathbf{x}}_2 + \zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \sin \varphi \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \quad (\text{III-3.32})$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^2)$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$, όπου $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, 3$ είναι η Καρτεσιανή βάση.

Συνεπώς, κατασκευάσαμε τα πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης, στροβιλισμού και (προαιρετικά, χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς) ολικού τανυστή των τάσεων σε μορφές κατάλληλες για να δεχτούν τις συνοριακές συνθήκες του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο Kuwabara που θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες.

Σημειώνουμε πως ένα μέτρο σύγκρισης της ορθότητας των αποτελεσμάτων μας θα είναι πρώτον ο προσεκτικός γεωμετρικός εκφυλισμός στο αντίστοιχο σφαιρικό πρότυπο του Κεφαλαίου II-3, παράγραφος II-3.2 και δεύτερον η σύγκριση των αποτελεσμάτων μας σε όρους διαφορικής αναπαράστασης με τα ήδη γνωστά σε όρους συνάρτησης ροής από την εργασία [37] σε επίπεδο πρώτου όρου.

III-3.2 Το κύτταρο Kuwabara (2-D) για αξονοσυμμετρική ροή Stokes διαμέσου σμήνους ακίνητων επιμήκων σφαιροειδών σωματιδίων.

Με σκοπό να επιδείξουμε τη χρησιμότητα της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, τη χρησιμοποιούμε για να λύσουμε το πρόβλημα ροής Stokes μέσα σε ένα ρευστό κέλυφος το οποίο περιορίζεται από δύο ομοεστιακές επιμήκεις σφαιροειδείς επιφάνειες. Αυτό το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει λυθεί από τους Dassios *et al.* σε μια προηγούμενη εργασία [37] με χρήση της θεωρίας του Stokes και τη μέθοδο του ημιδιαχωρισμού μεταβλητών που αναπτύχθηκε στην ίδια εργασία. Βρέθηκε ότι οι

συννοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara δεν είναι επαρκείς ώστε να δώσουν ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Συνεπώς, για να επιτευχθεί η μοναδική λύση, θεωρήθηκε απαραίτητο να τεθεί μια πρόσθετη οριακή συνθήκη γεωμετρικής φύσης που εξασφαλίζει τον κατάλληλο εκφυλισμό του σφαιροειδούς μοντέλου στο αντίστοιχο της ελαφρώς διαταραγμένης σφαίρας [56]. Εδώ, το ίδιο πρόβλημα επιλύεται με τη βοήθεια της γενικής διδιάστατης (2- D) διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, όπου ακριβώς η ίδια επιπλέον γεωμετρική συνθήκη είναι, πάλι, απαραίτητη στο να καταστήσει το πρότυπο τύπου Kuwabara καλά τοποθετημένο. Η διαφορά έγκειται στην πληροφορία που παίρνεται από την ιδιότητα της πληρότητας της αναπαράστασης [48] που μας επιτρέπει τον “αυθαίρετο” χειρισμό των δυναμικών της αναπαράστασης με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\Phi_{0sd} = f(\Phi_{sd}) \quad \text{ή} \quad \Phi_{sd} = f^{-1}(\Phi_{0sd}), \quad (\text{III-3.33})$$

σχέση που υποδηλώνει ότι η πληρότητα διατηρείται ακόμα και αν γραφεί το ένα δυναμικό σαν συνάρτηση του άλλου ή και ακόμα να μηδενιστεί ολόκληρο, δηλ.,

$$\Phi_{0sd} = 0 \quad (\text{III-3.34})$$

ή και μερικές συνιστώσες του κάτι το οποίο κάνουμε εμείς για να αποφύγουμε το πρόβλημα της μη καλής τοποθέτησης.

III-3.2α *Το 2- D κύτταρο Kuwabara, οι συννοριακές συνθήκες και τα πεδία ροής.*

Τα σφαιροειδή σωματίδια μπορεί να είναι είτε επιμήκη είτε πεπλατυσμένα. Εφόσον χρησιμοποιώντας έναν απλό μετασχηματισμό, τα αποτελέσματα για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές μπορούν να ληφθούν από εκείνα της επιμήκους σφαιροειδούς γεωμετρίας, χειριζόμαστε μόνο την περίπτωση των επιμήκων σφαιροειδών σωματιδίων. Ο κατάλληλος εκφυλισμός στη σφαίρα καταλήγει στα διορθωμένα αποτελέσματα του κυτταρικού μοντέλου του Kuwabara του Κεφαλαίου ΙΙ-3 και της αναφοράς [66].

Θεωρούμε δύο ομοεστιακά επιμήκη σφαιροειδή. Το εσωτερικό, επιφάνειας $\partial\Omega_i$ για $\tau = \tau_a = a_1/c$, $c > 0$, είναι στερεό και στάσιμο, όπως δείχνει και το Σχήμα Ι-4.2. Υπάρχει μέσα σε ένα σφαιροειδές ρευστό στρώμα που καθορίζεται από το εξωτερικό σφαιροειδές, το οποίο δηλώνεται από την επιφάνεια $\partial\Omega_e$ για $\tau = \tau_b = b_1/c$, $c > 0$, όπου a_1 και b_1 είναι οι αντίστοιχοι μεγάλοι ημιάξονες των δύο σφαιροειδών. Μια ομοιόμορφη ταχύτητα προσέγγισης μεγέθους U_{sd} , στην θετική διεύθυνση του άξονα

x_1 , παράγει την αξονοσυμμετρική ροή στο ρευστό στρώμα μεταξύ των δύο σφαιροειδών (η σχέση μεταξύ της ταχύτητας προσέγγισης U_{sd} και της μέσης ταχύτητας διακένου διαμέσου $\bar{U}_{sd}$ του σμήνους συζητήθηκε στην [38]). Δηλαδή, η ταχύτητα προσέγγισης U_{sd} έχει τη γενική μορφή (I-4.1) με $U_{1,sd} = U_{sd}$ και $U_{2,sd} = U_{3,sd} = 0$, οπότε

$$\mathbf{U}_{sd} = U_{sd} \hat{\mathbf{x}}_1 = \frac{U_{sd}}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \hat{\mathbf{t}} - \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right), \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{III-}$$

3.35)

Οι συνοριακές συνθήκες είναι ίδιες με αυτές του προτύπου Kuwabara (1959) [66] οι οποίες περιγράφονται από τις γενικές σχέσεις (I-4.2)–(I-4.4) σε επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία. Προσοχής χρήζει το πρόσημο της συνοριακής συνθήκης (I-4.3) το οποίο είναι αρνητικό επειδή στην εξωτερική επιφάνεια για $\tau = \tau_b$ ισχύει ότι $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{t}}$ για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2)$ και $\varphi \in [0, 2\pi)$ με $\tau_a \leq \tau \leq \tau_b$. Άρα, λόγω της (III-3.13) έχουμε

$$\Sigma.\Sigma.(1): \quad \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \text{για} \quad \tau = \tau_a, \quad (\text{III-3.36})$$

$$\Sigma.\Sigma.(2): \quad \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{U}_{sd} \quad \text{για} \quad \tau = \tau_b, \quad (\text{III-3.37})$$

$$\Sigma.\Sigma.(3): \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για} \quad \tau = \tau_b, \quad (\text{III-3.38})$$

όπου η εξίσωση (III-3.36) είναι η συνθήκη μη ολίσθησης πάνω στην επιφάνεια του στερεού σωματιδίου. Η συνοριακή συνθήκη (III-3.37) εκφράζει την ύπαρξη μιας ομοιόμορφης, αξονικά προσπίπτουσας ταχύτητας προσέγγισης στην επιφάνεια του εξωτερικού σφαιροειδούς, ενώ η εξίσωση (III-3.38) εκφράζει την παραδοχή ότι δεν υπάρχει στροβιλισμός για $\tau = \tau_b$ κατά αντιστοιχία με το επιχείρημα που προέβαλε ο Kuwabara [66], χαρακτηριστικό μόνο των ροών Stokes σε γεωμετρίες με αξονική συμμετρία. Η συνοριακή συνθήκη (III-3.38) φανερώνει, επίσης, το βασικό μειονέκτημα του μοντέλου, αφού εξαιτίας της το έργο που παράγουν οι διατμητικές τάσεις πάνω στον εξωτερικό φλοιό δεν ισοσκελίζεται, με συνέπεια το κυτταρικό μοντέλο να μην είναι ενεργειακά αυτόνομο.

Προκειμένου να εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες στα πεδία ροής (III-2.23)–(III-2.26), η ταχύτητα, η ολική πίεση και ο στροβιλισμός πρέπει να γραφούν με τέτοιο

τρόπο ώστε να είναι εύκολο να δεχτούν τις συνοριακές συνθήκες. Είναι επιθυμητό, λοιπόν, να αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις (ΙΙΙ-3.27)–(ΙΙΙ-3.30) στα πεδία ροής και τελικά, αφού πραγματοποιήσουμε μερικές αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε ακριβώς στα ίδια πεδία ροής του Κεφαλαίου ΙΙΙ-2, παράγραφος ΙΙΙ-2.2, σχέσεις (ΙΙΙ-2.42)–(ΙΙΙ-2.45) για τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης, ενώ καταλήγουμε και σε μια παρόμοια σχέση για το πεδίο στροβιλισμού. Για να μπορέσουμε να εισάγουμε τα πεδία αυτά στις συνοριακές συνθήκες και να εφαρμόσουμε τη σχέση ορθογωνιότητας (ΙΙΙ-3.18), είναι επιβεβλημένο να γραφούν τα παραπάνω πεδία έτοιμα για χρήση. Αυτό περιλαμβάνει την κατάλληλη απεικόνιση της ταχύτητας, της ολικής πίεσης και του στροβιλισμού σε όρους των ειδικών συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους P_n στη μεταβλητή ζ .

Σε αυτό το σημείο, για ευκολία στη γραφή των πεδίων ροής, ορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις T_n , είδους $\ell = i \equiv 1, e \equiv 3$ (κατά αναλογία των εκφράσεων (ΙΙΙ-1.49) του εισαγωγικού Κεφαλαίου ΙΙΙ-1) μέσω των συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους στη μεταβλητή τ για ομαλά πεδία ροής στον άξονα συμμετρίας x_1 από τις εκφράσεις

$$T_n(\tau) = \begin{cases} P_n(\tau), & \ell = i \\ Q_n(\tau), & \ell = e \end{cases}, \quad 1 < \tau < +\infty. \quad (\text{ΙΙΙ-3.39})$$

Οι σταθεροί συντελεστές που επιβιώνουν από τα αναπτύγματα, δηλαδή οι $c_{n,sd}^{(\ell)}$ και $d_{n,sd}^{(\ell)}$, $\ell = i, e$, πρέπει να υπολογιστούν από τις συνοριακές συνθήκες.

Το πεδίο ταχύτητας (ΙΙΙ-3.23) οδηγεί στην (ΙΙΙ-2.42), όπου σε δύο διαστάσεις είναι

$$\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) = v_{\tau, sd}^{PN}(\tau, \zeta) \hat{\tau} + v_{\zeta, sd}^{PN}(\tau, \zeta) \hat{\zeta}, \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{ΙΙΙ-3.40})$$

Θέτοντας

$$(cd)_{01, sd}^{(\ell)} \equiv c_{0, sd}^{(\ell)} - \frac{1}{c} d_{1, sd}^{(\ell)}, \quad \ell = i, e \quad (\text{ΙΙΙ-3.41})$$

και ακολουθώντας τους ορισμούς (ΙΙΙ-3.39) οι συνιστώσες της ταχύτητας (ΙΙΙ-2.43) και (ΙΙΙ-2.44) δέχονται τα παρακάτω αναπτύγματα σειρών,

$$\begin{aligned} v_{\tau, sd}^{PN}(\tau, \zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2c} d_{0, sd}^{(e)} + \frac{1}{6} c_{1, sd}^{(e)} \right) P_0(\tau) \right] P_0(\zeta) \right. \\ &\quad \left. + \left(c_{0, sd}^{(e)} P_1(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \frac{4}{15} \left[\left(\frac{2}{5} c_{2, sd}^{(\ell)} - \frac{5}{4} (cd)_{01, sd}^{(\ell)} \right) T_0(\tau) + \left(-\frac{1}{7} c_{2, sd}^{(\ell)} + \frac{5}{4} (cd)_{01, sd}^{(\ell)} \right) T_2(\tau) \right] \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{9}{35} c_{2, sd}^{(\ell)} \right) T_4(\tau) \Bigg] P_1(\zeta) \\
& + \left(\frac{1}{3} c_{1, sd}^{(e)} P_0(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \frac{3}{49} \left[\left(3 c_{3, sd}^{(\ell)} + \frac{49}{5} \frac{1}{c} d_{2, sd}^{(\ell)} \right) T_1(\tau) + \left(-\frac{7}{9} c_{3, sd}^{(\ell)} - \frac{49}{5} \frac{1}{c} d_{2, sd}^{(\ell)} \right) T_3(\tau) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\frac{20}{9} c_{3, sd}^{(\ell)} \right) T_5(\tau) \right] \right) P_2(\zeta) \\
& + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{\ell=i, e} \frac{n(n+1)}{2} \left[\left(\frac{(n-2)(n-1)}{(2n-3)(2n-1)^2} c_{n-1, sd}^{(\ell)} \right) T_{n-3}(\tau) \right. \\
& + \left(\frac{(n+1)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)^2} c_{n+1, sd}^{(\ell)} - \frac{(n-2)}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} c_{n-1, sd}^{(\ell)} + \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{c} d_{n, sd}^{(\ell)} \right) T_{n-1}(\tau) \\
& + \left(-\frac{(n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} c_{n+1, sd}^{(\ell)} - \frac{(n-2)n}{(2n-1)^2(2n+1)} c_{n-1, sd}^{(\ell)} - \frac{1}{(2n+1)} \frac{1}{c} d_{n, sd}^{(\ell)} \right) T_{n+1}(\tau) \\
& \left. + \left(-\frac{(n+2)(n+3)}{(2n+3)^2(2n+5)} c_{n+1, sd}^{(\ell)} \right) T_{n+3}(\tau) \right] P_n(\zeta) \Bigg\}, \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-3.42})
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
v_{\zeta, sd}^{PN}(\tau, \zeta) = & \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} \left\{ \left(-\frac{1}{3} c_{0, sd}^{(e)} P_0(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \frac{4}{25} \left[\left(\frac{2}{3} c_{2, sd}^{(\ell)} - \frac{25}{12} (cd)_{01, sd}^{(\ell)} \right) T_1(\tau) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(c_{2, sd}^{(\ell)} \right) T_3(\tau) \right] \right) P_0(\zeta) \\
& + \sum_{\ell=i, e} \frac{9}{49} \left[\left(c_{3, sd}^{(\ell)} + \frac{49}{15} \frac{1}{c} d_{2, sd}^{(\ell)} \right) T_2(\tau) + \left(\frac{4}{3} c_{3, sd}^{(\ell)} \right) T_4(\tau) \right] P_1(\zeta) \\
& + \left(\frac{1}{3} c_{0, sd}^{(e)} P_0(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \frac{4}{7} \left[\left(-\frac{1}{15} c_{2, sd}^{(\ell)} + \frac{7}{12} (cd)_{01, sd}^{(\ell)} \right) T_1(\tau) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{4}{9} c_{4, sd}^{(\ell)} - \frac{1}{10} c_{2, sd}^{(\ell)} + \frac{3}{2} \frac{1}{c} d_{3, sd}^{(\ell)} \right) T_3(\tau) + \left(\frac{5}{9} c_{4, sd}^{(\ell)} \right) T_5(\tau) \right] \right) P_2(\zeta) \\
& + \sum_{\ell=i, e} \frac{5}{11} \left[\left(-\frac{11}{105} c_{3, sd}^{(\ell)} - \frac{33}{25} \frac{1}{c} d_{2, sd}^{(\ell)} \right) T_2(\tau) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{70}{99} c_{5, sd}^{(\ell)} - \frac{44}{315} c_{3, sd}^{(\ell)} + \frac{22}{9} \frac{1}{c} d_{4, sd}^{(\ell)} \right) T_4(\tau) + \left(\frac{28}{33} c_{5, sd}^{(\ell)} \right) T_6(\tau) \right] P_3(\zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{\ell=i,e} \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{(2n-3)^2(2n-1)} c_{n-2, sd}^{(\ell)} \right) T_{n-3}(\tau) \right. \\
& + \left(-\frac{(n-1)n(n+2)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} c_{n, sd}^{(\ell)} - \frac{(n-3)(n-1)^2 n}{(2n-3)^2(2n-1)} c_{n-2, sd}^{(\ell)} - \frac{n(n-1)}{(2n-1)} \frac{1}{c} d_{n-1, sd}^{(\ell)} \right) T_{n-1}(\tau) \\
& + \left(\frac{(n+1)(n+2)^2(n+4)}{(2n+3)(2n+5)^2} c_{n+2, sd}^{(\ell)} - \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} c_{n, sd}^{(\ell)} + \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)} \frac{1}{c} d_{n+1, sd}^{(\ell)} \right) T_{n+1}(\tau) \\
& \left. + \left(-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(2n+3)(2n+5)^2} c_{n+2, sd}^{(\ell)} \right) T_{n+3}(\tau) \right] P_n(\zeta) \Bigg\}, \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{III-}
\end{aligned}$$

3.43)

Με τον ίδιο τρόπο το πεδίο στροβιλισμού (III-3.25) με τη βοήθεια των (III-3.27)–(III-3.30) γράφεται με κατάλληλη αναπροσαρμογή των σειρών του αναπτύγματος,

$$\begin{aligned}
\omega_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) &= \frac{\hat{\phi}}{c(\tau^2 - \zeta^2) \sqrt{\tau^2 - 1} \sqrt{1 - \zeta^2}} \left\{ \left(\frac{2}{3} c_{0, sd}^{(e)} P_1(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \left[-\frac{8}{35} c_{2, sd}^{(\ell)} (T_2(\tau) - T_4(\tau)) \right] \right) P_0(\zeta) \right. \\
&+ \left(\frac{2}{5} c_{1, sd}^{(e)} P_0(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \left[-\frac{8}{21} c_{3, sd}^{(\ell)} (T_3(\tau) - T_5(\tau)) \right] \right) P_1(\zeta) \\
&+ \left(-\frac{2}{3} c_{0, sd}^{(e)} P_1(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \left[\frac{8}{35} c_{2, sd}^{(\ell)} (T_0(\tau) - T_4(\tau)) - \frac{40}{77} c_{4, sd}^{(\ell)} (T_4(\tau) - T_6(\tau)) \right] \right) P_2(\zeta) \\
&+ \left(-\frac{2}{5} c_{1, sd}^{(e)} P_0(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \left[\frac{8}{21} c_{3, sd}^{(\ell)} (T_1(\tau) - T_5(\tau)) - \frac{280}{429} c_{5, sd}^{(\ell)} (T_5(\tau) - T_7(\tau)) \right] \right) P_3(\zeta) \\
&+ \sum_{n=4}^{\infty} \sum_{\ell=i, e} \left[-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)} c_{n-2, sd}^{(\ell)} (T_{n-4}(\tau) - T_{n-2}(\tau)) \right. \\
&+ \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} c_{n, sd}^{(\ell)} (T_{n-2}(\tau) - T_{n+2}(\tau)) \\
&\left. \left. - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)} c_{n+2, sd}^{(\ell)} (T_{n+2}(\tau) - T_{n+4}(\tau)) \right] P_n(\zeta) \right\}, \quad (\text{III-}3.44)
\end{aligned}$$

για $\tau_a \leq \tau \leq \tau_b$ και $|\zeta| \leq 1$. Για την ολική πίεση, η (III-3.24) μέσω της (III-2.45) δίνει

$$\begin{aligned}
P_{sd}^{PN}(\tau, \zeta) &= P_{0sd}^{PN} - \frac{\mu_0}{c(\tau^2 - \zeta^2)} \left\{ \sum_{\ell=i, e} \frac{2}{3} c_{1, sd}^{(\ell)} T_2(\tau) P_0(\zeta) + \left[-c_{0, sd}^{(e)} P_0(\tau) + \sum_{\ell=i, e} \frac{6}{5} c_{2, sd}^{(\ell)} T_3(\tau) \right] P_1(\zeta) \right. \\
&\left. - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\ell=i, e} \left[\frac{(n-1)n}{(2n-1)} c_{n-1, sd}^{(\ell)} T_{n-2}(\tau) - \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)} c_{n+1, sd}^{(\ell)} T_{n+2}(\tau) \right] P_n(\zeta) \right\} \quad (\text{III-}3.45)
\end{aligned}$$

με $\tau_a \leq \tau \leq \tau_b$ και $|\zeta| \leq 1$.

Οι σταθεροί συντελεστές $c_{n, sd}^{(i)}$, $c_{n, sd}^{(e)}$, $d_{n, sd}^{(i)}$, $d_{n, sd}^{(e)}$, $n \geq 0$ πρέπει να υπολογιστούν από τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (III–3.36)–(III–3.38), οι οποίες λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή των παραπάνω πεδίων, μαζί με την (III–3.35), μετατρέπονται στις

$$\Sigma.\Sigma.(1): \quad u_{\tau, sd}^{PN} = 0 \quad \text{για} \quad \tau = \tau_a, \quad (\text{III–3.46})$$

$$\Sigma.\Sigma.(2): \quad u_{\zeta, sd}^{PN} = 0 \quad \text{για} \quad \tau = \tau_a, \quad (\text{III–3.47})$$

$$\Sigma.\Sigma.(3): \quad u_{\tau, sd}^{PN} = -U_{sd} \frac{\sqrt{\tau_b^2 - 1}}{\sqrt{\tau_b^2 - \zeta^2}} \zeta \quad \text{για} \quad \tau = \tau_b, \quad (\text{III–3.48})$$

$$\Sigma.\Sigma.(4): \quad \omega_{\varphi, sd}^{PN} \equiv \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{sd}^{PN}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για} \quad \tau = \tau_b \quad (\text{III–3.49})$$

και αυτό που απαιτείται τώρα είναι να λύσουμε το παραπάνω καλά τοποθετημένο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Kuwabara και να προσδιορίσουμε τους σταθερούς συντελεστές.

Με σκοπό να εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες (III–3.46)–(III–3.49), κάνουμε χρήση των εκφράσεων (III–3.40)–(III–3.44), καθώς και της σχέσεως ορθογωνιότητας (III–3.18) και αναγωγικών σχέσεων. Μετά από εκτεταμένη άλγεβρα, καταλήγουμε σε ένα περίπλοκο σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που εμπεριέχουν τους άγνωστους σταθερούς συντελεστές. Αυτό το σύστημα διαχωρίζεται σε ένα “άρτιο–σύστημα”, δηλαδή “ $2n$ –σύστημα”, $n = 0, 1, 2, \dots$ και σε ένα “περιττό–σύστημα”, δηλαδή “ $2n + 1$ –σύστημα”, $n = 0, 1, 2, \dots$, σαν συνέπεια της συμμετρικής του δομής.

- “περιττό–σύστημα” ή “ $2n + 1$ –σύστημα”, $n \geq 0$.

Η ομογένεια αυτού του συστήματος και η μη μηδενικότητα της ορίζουσας του πίνακα των συντελεστών των αγνώστων οδηγεί στο μηδενισμό των αντίστοιχων σταθερών συντελεστών, οπότε

$$c_{n, sd}^{(i)} = c_{n, sd}^{(e)} = 0, \quad n = 3, 5, 7, \dots \quad (\text{III–3.50})$$

και

$$d_{n, sd}^{(i)} = d_{n, sd}^{(e)} = 0, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad \text{και} \quad d_{0, sd}^{(e)} = -\frac{c}{3} c_{1, sd}^{(\theta)} = 0. \quad (\text{III–3.51})$$

Οι παραπάνω σχέσεις μηδενισμού αποτελούν άλλη μια συνέπεια της συμμετρίας του προβλήματος.

- “άρτιο-σύστημα” ή “ $2n$ -σύστημα”, $n \geq 0$.

Έχοντας στο μυαλό μας τον ορισμό (ΙΙΙ-3.41) που προαναφέραμε, οι σταθεροί συντελεστές που μένουν, δηλ., οι $c_{0,sd}^{(e)}$, $(cd)_{01,sd}^{(i)}$, $(cd)_{01,sd}^{(e)}$, καθώς και οι $c_{n,sd}^{(i)}$, $c_{n,sd}^{(e)}$ για $n = 2, 4, 6, \dots$ και οι $d_n^{(i)}$, $d_n^{(e)}$ για $n = 3, 5, 7, \dots$, ικανοποιούν το παρακάτω $2n \times 2n$ σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για $n = 0$ (“ 0 -σύστημα”),

$$\begin{aligned} & [l_{2,sd} F_{2,sd}^{(i)}(\tau_a)] c_{2,sd}^{(i)} + [l_{2,sd} F_{2,sd}^{(e)}(\tau_a)] c_{2,sd}^{(e)} - [k_{0,sd} F_{0,sd}^{(i)}(\tau_a)] (cd)_{01,sd}^{(i)} - [k_{0,sd} F_{0,sd}^{(e)}(\tau_a)] (cd)_{01,sd}^{(e)} \\ & - [2l_{1,sd}] c_{0,sd}^{(e)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.52})$$

$$[K_{2,sd}^{(i)}(\tau_b)] c_{2,sd}^{(i)} + [K_{2,sd}^{(e)}(\tau_b)] c_{2,sd}^{(e)} - \frac{F_{0,sd}^{(i)}(\tau_b)}{3} c_{0,sd}^{(e)} = 0, \quad (\text{ΙΙΙ-3.53})$$

$$\begin{aligned} & [m_{4,sd} D_{2,sd}^{(i)}(\tau_a)] c_{2,sd}^{(i)} + [m_{4,sd} D_{2,sd}^{(e)}(\tau_a)] c_{2,sd}^{(e)} - [D_{0,sd}^{(i)}(\tau_a)] (cd)_{01,sd}^{(i)} - [D_{0,sd}^{(e)}(\tau_a)] (cd)_{01,sd}^{(e)} \\ & - \frac{F_{0,sd}^{(i)}(\tau_a)}{2} c_{0,sd}^{(e)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.54})$$

$$\begin{aligned} & [m_{4,sd} D_{2,sd}^{(i)}(\tau_b)] c_{2,sd}^{(i)} + [m_{4,sd} D_{2,sd}^{(e)}(\tau_b)] c_{2,sd}^{(e)} - [D_{0,sd}^{(i)}(\tau_b)] (cd)_{01,sd}^{(i)} - [D_{0,sd}^{(e)}(\tau_b)] (cd)_{01,sd}^{(e)} \\ & - \frac{F_{0,sd}^{(i)}(\tau_b)}{2} c_{0,sd}^{(e)} = f_{sd}(\tau_b). \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.55})$$

Για $n = 1$ (“ 2 -σύστημα”) έχουμε

$$\begin{aligned} & [l_{4,sd} F_{4,sd}^{(i)}(\tau_a)] c_{4,sd}^{(i)} + [l_{4,sd} F_{4,sd}^{(e)}(\tau_a)] c_{4,sd}^{(e)} + [M_{3,sd}^{(i)}(\tau_a)] d_{3,sd}^{(i)} + [M_{3,sd}^{(e)}(\tau_a)] d_{3,sd}^{(e)} \\ & = [k_{2,sd} F_{2,sd}^{(i)}(\tau_a)] c_{2,sd}^{(i)} + [k_{2,sd} F_{2,sd}^{(e)}(\tau_a)] c_{2,sd}^{(e)} - [k_{0,sd} F_{0,sd}^{(i)}(\tau_a)] (cd)_{01,sd}^{(i)} \\ & - [k_{0,sd} F_{0,sd}^{(e)}(\tau_a)] (cd)_{01,sd}^{(e)} - [2l_{1,sd}] c_{0,sd}^{(e)}, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.56})$$

$$\begin{aligned} & [K_{4,sd}^{(i)}(\tau_b)] c_{4,sd}^{(i)} + [K_{4,sd}^{(e)}(\tau_b)] c_{4,sd}^{(e)} = [K_{2,sd}^{(i)}(\tau_b) + L_{2,sd}^{(i)}(\tau_b)] c_{2,sd}^{(i)} \\ & + [K_{2,sd}^{(e)}(\tau_b) + L_{2,sd}^{(e)}(\tau_b)] c_{2,sd}^{(e)} - \frac{F_{0,sd}^{(i)}(\tau_b)}{3} c_{0,sd}^{(e)}, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.57})$$

$$\begin{aligned} & [m_{6,sd} D_{4,sd}^{(i)}(\tau_a)] c_{4,sd}^{(i)} + [m_{6,sd} D_{4,sd}^{(e)}(\tau_a)] c_{4,sd}^{(e)} + [N_{3,sd}^{(i)}(\tau_a)] d_{3,sd}^{(i)} + [N_{3,sd}^{(e)}(\tau_a)] d_{3,sd}^{(e)} \\ & = -[m_{1,sd} D_{2,sd}^{(i)}(\tau_a)] c_{2,sd}^{(i)} - [m_{1,sd} D_{2,sd}^{(e)}(\tau_a)] c_{2,sd}^{(e)}, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.58})$$

$$\begin{aligned} & [m_{6,sd} D_{4,sd}^{(i)}(\tau_b)] c_{4,sd}^{(i)} + [m_{6,sd} D_{4,sd}^{(e)}(\tau_b)] c_{4,sd}^{(e)} + [N_{3,sd}^{(i)}(\tau_b)] d_{3,sd}^{(i)} + [N_{3,sd}^{(e)}(\tau_b)] d_{3,sd}^{(e)} \\ & = -[m_{1,sd} D_{2,sd}^{(i)}(\tau_b)] c_{2,sd}^{(i)} - [m_{1,sd} D_{2,sd}^{(e)}(\tau_b)] c_{2,sd}^{(e)}, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.59})$$

ενώ για $n = 2, 3, 4, \dots$ (“ $2n$ -σύστημα”) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
& \left[l_{2n+2, sd} F_{2n+2, sd}^{(i)}(\tau_a) \right] c_{2n+2, sd}^{(i)} + \left[l_{2n+2, sd} F_{2n+2, sd}^{(e)}(\tau_a) \right] c_{2n+2, sd}^{(e)} + \left[M_{2n+1, sd}^{(i)}(\tau_a) \right] d_{2n+1, sd}^{(i)} \\
& + \left[M_{2n+1, sd}^{(e)}(\tau_a) \right] d_{2n+1, sd}^{(e)} = \left[k_{2n, sd} F_{2n, sd}^{(i)}(\tau_a) \right] c_{2n, sd}^{(i)} + \left[k_{2n, sd} F_{2n, sd}^{(e)}(\tau_a) \right] c_{2n, sd}^{(e)} \\
& + \left[l_{2n-1, sd} F_{2n-2, sd}^{(i)}(\tau_a) \right] c_{2n-2, sd}^{(i)} + \left[l_{2n-1, sd} F_{2n-2, sd}^{(e)}(\tau_a) \right] c_{2n-2, sd}^{(e)} \\
& + \left[M_{2n-1, sd}^{(i)}(\tau_a) \right] d_{2n-1, sd}^{(i)} + \left[M_{2n-1, sd}^{(e)}(\tau_a) \right] d_{2n-1, sd}^{(e)}, \quad (\text{III-3.60})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[K_{2n+2, sd}^{(i)}(\tau_b) \right] c_{2n+2, sd}^{(i)} + \left[K_{2n+2, sd}^{(e)}(\tau_b) \right] c_{2n+2, sd}^{(e)} \\
& = \left[K_{2n, sd}^{(i)}(\tau_b) + L_{2n, sd}^{(i)}(\tau_b) \right] c_{2n, sd}^{(i)} + \left[K_{2n, sd}^{(e)}(\tau_b) + L_{2n, sd}^{(e)}(\tau_b) \right] c_{2n, sd}^{(e)} \\
& - \left[L_{2n-2, sd}^{(i)}(\tau_b) \right] c_{2n-2, sd}^{(i)} - \left[L_{2n-2, sd}^{(e)}(\tau_b) \right] c_{2n-2, sd}^{(e)}, \quad (\text{III-3.61})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[m_{2n+4, sd} D_{2n+2, sd}^{(i)}(\tau_a) \right] c_{2n+2, sd}^{(i)} + \left[m_{2n+4, sd} D_{2n+2, sd}^{(e)}(\tau_a) \right] c_{2n+2, sd}^{(e)} + \left[N_{2n+1, sd}^{(i)}(\tau_a) \right] d_{2n+1, sd}^{(i)} \\
& + \left[N_{2n+1, sd}^{(e)}(\tau_a) \right] d_{2n+1, sd}^{(e)} = - \left[m_{2n-1, sd} D_{2n, sd}^{(i)}(\tau_a) \right] c_{2n, sd}^{(i)} \\
& - \left[m_{2n-1, sd} D_{2n, sd}^{(e)}(\tau_a) \right] c_{2n, sd}^{(e)}, \quad (\text{III-3.62})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[m_{2n+4, sd} D_{2n+2, sd}^{(i)}(\tau_b) \right] c_{2n+2, sd}^{(i)} + \left[m_{2n+4, sd} D_{2n+2, sd}^{(e)}(\tau_b) \right] c_{2n+2, sd}^{(e)} + \left[N_{2n+1, sd}^{(i)}(\tau_b) \right] d_{2n+1, sd}^{(i)} \\
& + \left[N_{2n+1, sd}^{(e)}(\tau_b) \right] d_{2n+1, sd}^{(e)} = - \left[m_{2n-1, sd} D_{2n, sd}^{(i)}(\tau_b) \right] c_{2n, sd}^{(i)} \\
& - \left[m_{2n-1, sd} D_{2n, sd}^{(e)}(\tau_b) \right] c_{2n, sd}^{(e)}, \quad (\text{III-3.63})
\end{aligned}$$

όπου έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις του τ ως

$$D_{n, sd}^{(\ell)}(\tau) = \frac{1}{(2n+1)} \left[-\frac{(n+1)T_{n+2}(\tau)}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{T_n(\tau)}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{nT_{n-2}(\tau)}{(2n-1)(2n+1)} \right], \quad (\text{III-3.64})$$

$$F_{n, sd}^{(\ell)}(\tau) = (n-1)(n+2) [\tau T_n(\tau)], \quad (\text{III-3.65})$$

$$M_{n, sd}^{(\ell)} = \frac{n(n+1)}{c(2n+1)} T_n(\tau), \quad (\text{III-3.66})$$

$$N_{n, sd}^{(\ell)}(\tau) = \frac{[T_{n-1}(\tau) - T_{n+1}(\tau)]}{c(2n+1)}, \quad (\text{III-3.67})$$

$$K_{n, sd}^{(\ell)}(\tau) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2) [T_{n+2}(\tau) - T_n(\tau)]}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \quad (\text{III-3.68})$$

$$L_{n, sd}^{(\ell)}(\tau) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2) [T_n(\tau) - T_{n-2}(\tau)]}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \quad (\text{III-3.69})$$

για κάθε εσωτερική ($\ell = i$) και εξωτερική ($\ell = e$) συνάρτηση, καθώς και τις σταθερές ποσότητες

$$l_{n,sd} = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}, \quad k_{n,sd} = \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} \quad \text{και} \quad m_{n,sd} = n \quad (\text{III-3.70})$$

και το μη ομογενές μέρος του συστήματος “0-σύστημα” που εμφανίζεται στην εξίσωση (III-3.55),

$$f_{sd}(\tau) = -(\tau^2 - 1)U_{sd}. \quad (\text{III-3.71})$$

Παρατηρούμε ότι η λύση του $2n$ -συστήματος βασίζεται στις λύσεις των 2κ -συστημάτων, $\kappa = 0, 1, 2, \dots, n-1$ και δεν είναι μοναδικά επιλύσιμο και αυτό διότι το “0-σύστημα” (εξισώσεις (III-3.52)–(III-3.55)) συγκροτεί ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με πέντε αγνώστους σταθερούς συντελεστές. Όπως έχουν τα πράγματα τώρα, δεν είναι δυνατό να καθορίσουμε τους σταθερούς συντελεστές ξεχωριστά και να καταλήξουμε σε μοναδική λύση, πράγμα που σημαίνει ότι το πρότυπο Kuwabara δεν είναι πλήρες (δηλαδή, όχι καλά τοποθετημένο) σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Τώρα, η φύση της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber μας εξασφαλίζει με έναν αριθμό από βαθμούς ελευθερίας που αντανakλούν την ευελιξία αυτής της διαφορικής λύσης και μας επιτρέπουν να χειριστούμε συγκεκριμένους όρους των πεδίων ροής ανεξάρτητα, χωρίς να παίρνονται υπόψη οι συνοριακές συνθήκες.

Ειδικότερα, βασισμένοι στο γεγονός ότι τα $\Phi_{n,sd}^{(\ell)}$ -δυναμικά και τα $\Phi_{0n,sd}^{(\ell)}$ -δυναμικά, $n \geq 0$, $\ell = i, e$ δεν είναι ανεξάρτητα [48], οι αντίστοιχοι σταθεροί συντελεστές $\mathbf{e}_{n,sd}^{(\ell)} = \mathbf{c}_{n,sd}^{(\ell)} \hat{\mathbf{x}}_1$ και $\mathbf{d}_{n,sd}^{(\ell)}$, $n \geq 0$, $\ell = i, e$ δεν είναι ανεξάρτητοι. Συνεπώς, μπορούμε να εκφράσουμε είτε τους $\mathbf{d}$ συναρτήσει των $\mathbf{c}$ σταθερών συντελεστών ή να μηδενίσουμε συγκεκριμένους σταθερούς συντελεστές στην επιφάνεια του εσωτερικού σφαιροειδούς σύμφωνα με την [48]. Στην προσπάθειά μας να καταστήσουμε πλήρη την προτυποποίηση Kuwabara, θέτουμε μια πρόσθετη συνθήκη απαιτώντας τη λύση να τείνει ασυμπτωτικά στη λύση του προβλήματος Kuwabara για την ελαφρώς διαταραγμένη σφαίρα [56], καθώς το επίμηκες σφαιροειδές τείνει να γίνει “περίπου” σφαίρα. Αυτή η γεωμετρική συνθήκη περιορίζει το χώρο της λύσης τόσο όσο χρειάζεται για να λάβουμε μοναδική λύση (πρέπει να σημειωθεί ότι ακριβώς η ίδια συνθήκη χρησιμοποιήθηκε στην [37] για να λυθεί το πρόβλημα με τη βοήθεια της συνάρτησης ροής Stokes). Εάν επικεντρωθούμε στον πρώτο όρο της τ -συνιστώσας του πεδίου ταχύτητας (η οποία αντιστοιχεί στην r -συνιστώσα του κυττάρου Kuwabara για διαταραγμένη σφαίρα [56]) που δίνεται από την (III-3.42), δηλαδή τον $P_1(\zeta)$ -όρο, τότε υπάρχει, για απειροελάχιστες τιμές του c , ένας γενικός τύπος

εξάρτησης (μετά από μια κατάλληλη βάρθρωση του σταθερού συντελεστή $c_{2,sd}^{(e)}$ και έχοντας υπόψη από το Κεφάλαιο III-1 ότι $c^{-(n+1)}Q_n(\tau) \xrightarrow{c \rightarrow 0^+} r^{-(n+1)}$, $n \geq 0$)

$$(c^{-3}c_{2,sd}^{(e)}) \frac{c^2}{\sqrt{(c\tau)^2 - (c\zeta)^2} \sqrt{(c\tau)^2 - c^2}} \left\{ c^5 (c^{-5}Q_4(\tau)), c^3 (c^{-3}Q_2(\tau)) \right\} P_1(\zeta) - \{r^{-7}, r^{-5}\} P_1(\zeta),$$

ο οποίος δεν εμφανίζεται στο μοντέλο “διαταραγμένη σφαίρα σε κύτταρο”. Οπότε, χωρίς η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber να χάσει την πληρότητά της [48], θέτουμε το σταθερό συντελεστή της παραπάνω έκφρασης ($c_{2,sd}^{(e)}$) ίσο με το μηδέν στην επιφάνεια του στερεού σφαιροειδούς σωματιδίου μας, δηλ.,

$$c_{2,sd}^{(e)} = 0, \quad \tau = \tau_a. \quad (\text{III-3.72})$$

Αυτή η συνθήκη τέθηκε με σκοπό να κάνουμε τη λύση του συστήματος (III-3.52)–(III-3.55) για $n=0$ εφικτή. Τότε, όλα τα συστήματα (III-3.56)–(III-3.59) για $n=1$ και (III-3.60)–(III-3.63) για $n=2,3,\dots$ μπορούν να επιλυθούν μοναδικά σαν μια ομάδα από $2n \times 2n$ συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων. Άρα, η εξίσωση (III-3.72) είναι η απαιτούμενη σχέση που μετατρέπει το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε καλά τοποθετημένο.

Όταν λυθεί το παραπάνω σύστημα με τους σταθερούς συντελεστές, η λύση λαμβάνεται σε μορφή πλήρους αναπτύγματος σε σειρές για τα πεδία ταχύτητας και στροβιλισμού που δίνονται από τις σχέσεις (III-3.40) με (III-3.42), (III-3.43) και (III-3.44), αντίστοιχα. Φυσικά η ολική πίεση γύρω από το επίμηκες σφαιροειδές μας μπορεί να υπολογιστεί από την έκφραση (III-3.45), ενώ κάποιος που θέλει να επεκταθεί και στις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στο κύτταρο, μπορεί, κάλλιστα, να χρησιμοποιήσει τη γενική έκφραση (III-3.26).

Όσο για τους λοιπούς σταθερούς συντελεστές $c_{1,sd}^{(i)}$ και $d_{0,sd}^{(i)}$, αυτοί δεν χρειάζονται διότι δεν εμφανίζονται ούτε στην έκφραση για το πεδίο ταχύτητας ούτε στη μορφή του πεδίου στροβιλισμού. Ειδικότερα, ο σταθερός συντελεστής $d_{0,sd}^{(i)} \in \mathfrak{B}$ δεν εμφανίζεται καθόλου, ενώ ο σταθερός συντελεστής $c_{1,sd}^{(i)}$ παρουσιάζεται μόνο στην έκφραση για την ολική πίεση σε σταθερό όρο και μπορεί να συμπτυχθεί με την σταθερή πίεση αναφοράς P_{0sd}^{PN} σε μια καινούργια πίεση αναφοράς $\bar{P}_{0sd}^{PN}$, συνήθως λαμβανόμενη στον ισημερινό για $\zeta = 0$. Τελικά, στις εξισώσεις Stokes δεν παίζει

ρόλο η σταθερή πίεση αφού η ολική πίεση υπεισέρχεται σε αυτές με τη μορφή της κλίσης της, δηλαδή ∇P . Παρατηρούμε ότι μέσω της αναπαράστασης που χρησιμοποιήσαμε καταλήξαμε απευθείας σε παράσταση για την ολική πίεση κάτι που δεν είναι δυνατό με τη μέθοδο της συνάρτησης ροής.

ΙΙΙ-3.2β *Οι κύριοι πρώτοι όροι των πεδίων ροής για το 2-D επίμηκες σφαιροειδές κύτταρο Kuwabara.*

Τα πεδία ροής (ταχύτητα, ολική πίεση, στροβιλισμός) λήφθηκαν στη μορφή σειρών από τις (ΙΙΙ-3.40)–(ΙΙΙ-3.45). Ωστόσο, ο κύριος πρώτος όρος αυτών των σειρών είναι, τελικά, ικανοποιητικός για βιομηχανικές και εργαστηριακές εφαρμογές όσο ο λόγος των διαστάσεων a_1/a_2 των σφαιροειδών παραμένει μέσα σε καθορισμένα όρια, όπως για παράδειγμα $\sim 1/5 < a_1/a_2 < \sim 5$. Επιπλέον, στην προσπάθειά μας να οδηγηθούμε στα αντίστοιχα αποτελέσματα του σφαιρικού προβλήματος Kuwabara του Κεφαλαίου ΙΙ-3, οι πρώτοι όροι των αναπτυγμάτων είναι ικανοποιητικοί, εφόσον οι όροι ανώτερου βαθμού είναι μηδαμινής σημασίας και, επίσης, πολλαπλασιάζονται με υψηλότερες δυνάμεις της ημισεστιακής απόστασης c [8]. Έτσι, καθώς $c \rightarrow 0^+$ αυτοί οι όροι εξαφανίζονται και δεν συνεισφέρουν στη λύση της σφαίρας. Λύνοντας το 4×4 τροποποιημένο σύστημα (ΙΙΙ-3.52)–(ΙΙΙ-3.55) τώρα, αφού εισάγουμε την έξτρα συνθήκη (ΙΙΙ-3.72), υπολογίζουμε τους συντελεστές $c_{2,sd}^{(i)}$, $c_{0,sd}^{(e)}$, $(cd)_{01,sd}^{(i)}$, $(cd)_{01,sd}^{(e)}$ που αφορούν τον πρώτο όρο των σειρών. Όταν το κάνουμε αυτό, τους αντικαθιστούμε στα πεδία ροής και τελικά παίρνουμε τις αντίστοιχες κύριες εκφράσεις τους.

Ο κύριος πρώτος όρος βαθμού $n=0$ του αναπτύγματος του πεδίου ταχύτητας από την (ΙΙΙ-3.40)

$$\mathbf{v}_{sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = v_{\tau, sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) \hat{\tau} + v_{\zeta, sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) \hat{\zeta}, \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{ΙΙΙ-3.73})$$

έχει συνιστώσες που υποθέτουν τις μορφές που προέρχονται από τα γενικά αναπτύγματα (ΙΙΙ-3.42) και (ΙΙΙ-3.43), δηλ.,

$$v_{\tau, sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = \frac{U_{sd}}{D_{0, sd}^K \sqrt{\tau^2 - \zeta^2} \sqrt{\tau^2 - 1}} \left[-\frac{L_{2, sd}}{3} P_0(\tau) - \frac{5G_4(\tau_b)}{2G_1(\tau_b)} P_1(\tau) + \left(\frac{L_{2, sd}}{3} + \frac{1}{14} \right) P_2(\tau) \right]$$

$$-\frac{1}{14}P_4(\tau) - \frac{L_{1,sd}}{3}Q_0(\tau) + \frac{L_{1,sd}}{3}Q_2(\tau) \Big] P_1(\zeta), \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-3.74})$$

και

$$\begin{aligned} v_{\zeta, sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = & \frac{U_{sd}}{D_{0, sd}^K \sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left[\frac{5G_4(\tau_b)}{4G_1(\tau_b)} P_0(\tau) - \frac{L_{2, sd}}{2} P_1(\tau) + \frac{1}{4} P_3(\tau) \right. \\ & \left. - \frac{L_{1, sd}}{2} Q_1(\tau) \right] P_1'(\zeta), \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b, \quad |\zeta| \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{III-3.75})$$

Οι σειρές (III-3.44) και (III-3.45) μας παρέχουν τις αντίστοιχες εκφράσεις των κύριων πρώτων όρων για το στροβιλισμό και την ολική πίεση, αντίστοιχα. Λοιπόν, έχουμε

$$w_{sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = \frac{U_{sd} \hat{\phi}}{D_{0, sd}^K c(\tau^2 - \zeta^2) \sqrt{\tau^2 - 1}} \left[\frac{5}{14} (P_2(\tau) - P_4(\tau)) + \frac{5G_4(\tau_b)}{2G_1(\tau_b)} P_1(\tau) \right] P_1'(\zeta) \quad (\text{III-3.76})$$

και

$$P_{sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = \bar{P}_{sd}^{PN} + \frac{U_{sd} \mu_0}{D_{0, sd}^K c(\tau^2 - \zeta^2)} \left[-\frac{5G_4(\tau_b)}{2G_1(\tau_b)} P_0(\tau) - \frac{15}{2} P_3(\tau) \right] P_1'(\zeta) \quad (\text{III-3.77})$$

για $\tau_a \leq \tau \leq \tau_b$ και $|\zeta| \leq 1$, όπου οι σταθερές $L_{1, sd}$, $L_{2, sd}$ δίνονται από τις

$$L_{1, sd} = -G_2(\tau_a)P_3(\tau_a) + G_4(\tau_a)P_1(\tau_a) + \frac{5P_1(\tau_a)}{P_1(\tau_b)} G_4(\tau_b) \left[\frac{G_2(\tau_a)}{P_1(\tau_a)} + P_1(\tau_a) \right], \quad (\text{III-3.78})$$

και

$$L_{2, sd} = -G_4(\tau_a)Q_1(\tau_a) + H_2(\tau_a)P_3(\tau_a) - \frac{5P_1(\tau_a)}{P_1(\tau_b)} G_4(\tau_b) \left[\frac{H_2(\tau_a)}{P_1(\tau_a)} + Q_1(\tau_a) \right], \quad (\text{III-3.79})$$

ενώ το σύμβολο $D_{0, sd}^K$ αποτελεί την ορίζουσα μηδενικού βαθμού του επιμήκους σφαιροειδούς κυττάρου Kuwabara και είναι

$$D_{0, sd}^K = \frac{1}{2G_2(\tau_b)} [L_{2, sd}G_2(\tau_b) - 3G_4(\tau_b) + L_{1, sd}H_2(\tau_b)] \neq 0. \quad (\text{III-3.80})$$

Για ευκολία περιλαμβάνουμε σε αυτό το σημείο τις παρακάτω ειδικές συναρτήσεις από το Παράρτημα Β

$$G_1(x) = -x, \quad P_0(x) = 1,$$

$$\begin{aligned}
G_2(x) &= \frac{1}{2}(1-x^2), & P_1(x) &= 1, \\
G_4(x) &= \frac{1}{8}(5x^2-1)(1-x^2), & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), \\
H_2(x) &= \frac{1}{4}(1-x^2)\ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{2}, & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\
& & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), \\
& & Q_1(x) &= P_1(x)Q_0(x)-1, \\
& & Q_2(x) &= P_2(x)Q_0(x)-\frac{3}{2}x,
\end{aligned} \tag{III-3.81}$$

όπου $x = \tau$ ή ζ και, επίσης,

$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x = \zeta, \quad P_1^1(x) = \sqrt{x^2-1}, \quad x = \tau, \tag{III-3.82}$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \zeta, \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad x = \tau.$$

III-3.2γ Σύγκριση με τα πεδία ροής Stokes που δίνονται στην αναφορά [37].

Τα αποτελέσματα της υποπαραγράφου III-3.2β μπορούν να διασταυρωθούν με τα ήδη γνωστά αποτελέσματα για το επίμηκες σφαιροειδές κύτταρο Kuwabara από τους Dassios *et al.* [37] για να διαπιστωθεί η ορθότητά τους. Για να γίνει αυτό δυνατό πρέπει να μετατρέψουμε τα αποτελέσματα του πρώτου κύριου όρου του πεδίου ταχύτητας, εξισώσεις (III-3.73)–(III-3.75), σε μια έκφραση για την συνάρτηση ροής. Με απλές πράξεις εξάγουμε την αντίστοιχη κύρια τιμή για τη συνάρτηση ροής, δηλαδή,

$$\begin{aligned}
\psi_{sd}^{(0)}(\tau, \zeta) &= \frac{U_{sd} c^2}{D_{0,sd}^K} \left[-\frac{5G_4(\tau_b)}{2G_1(\tau_b)} G_1(\tau) + L_{2,sd} G_2(\tau) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} G_4(\tau) + L_{1,sd} H_2(\tau) \right] G_2(\zeta), \quad \tau_a \leq \tau \leq \tau_b, \quad |\zeta| \leq 1. \tag{III-3.82}
\end{aligned}$$

Η λύση (III-3.82) είναι ο κύριος πρώτος όρος για την συνάρτηση ροής κάνοντας χρήση της γενικής λύσης Parkovich – Neuber και είναι πανομοιότυπη με την αντίστοιχη έκφραση για το επίμηκες σφαιροειδές στην αναφορά [37], όπου η

προσέγγιση του Stokes έχει χρησιμοποιηθεί. Είναι εξαιρετικού ενδιαφέροντος να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση (III–3.72) μπορεί να γραφτεί και αλλιώς αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο σύνδεσης των δύο αναπαραστάσεων Parkovich – Neuber και Stokes από την σχέση (III–2.64) του Κεφαλαίου III–2 για την αξονοσυμμετρική επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία,

$$c_{n, sd}^{(e)} = \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{(2n+3)(n+1)(n+2)} B_{n+2, sd}^e - \frac{1}{(2n-1)(n-1)n} B_{n, sd}^e \right], \quad c > 0 \quad (\text{III–3.83})$$

για $n = 2$. Τότε η (III–3.72), λόγω της (III–3.83), παρέχει

$$c_{2, sd}^{(e)} = \frac{1}{6c^2} \left[\frac{1}{14} B_{4, sd}^e - B_{2, sd}^e \right] = 0 \Rightarrow B_{4, sd}^e = 14 B_{2, sd}^e, \quad (\text{III–3.84})$$

όπου είναι η μορφή που συνδέει τους σταθερούς συντελεστές $B_{4, sd}^e$ και $B_{2, sd}^e$ της συνάρτησης ροής και αυτή η σύνδεση αναφέρεται και στην εργασία [37].

Με αυτό τον τρόπο επιβεβαιώσαμε, αρχικά, τα αποτελέσματά μας και παρατηρήσαμε την ίδια ακριβώς σχέση που απαιτείται για να επιτευχθεί μοναδική λύση. Η μόνη, αλλά ουσιαστική, διαφορά είναι ότι η διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber μας επιτρέπει την εισαγωγή αυτής της έξτρα συνθήκης σε αντίθεση με την αναπαράσταση Stokes. Παρόλα αυτά, το πρόβλημα μη καλής τοποθέτησης του σφαιροειδούς κυτταρικού μοντέλου με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara παραμένει ανεξάρτητα από την αναπαράσταση.

III–3.2δ *Γεωμετρικός εκφυλισμός στο σφαιρικό κυτταρικό μοντέλο Kuwabara.*

Στο Κεφάλαιο III–1, παράγραφο III–1.4 ασχοληθήκαμε εκτενώς με τη διαδικασία που απαιτείται για να εκφυλιστεί το επίμηκες σφαιροειδές στην σφαιρική γεωμετρία. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα χαρακτηριστικά για να οδηγηθούμε στα αντίστοιχα αποτελέσματα για το σφαιρικό πρότυπο Kuwabara [66], στη διορθωμένη του μορφή στην παράγραφο II–3.2 του Κεφαλαίου II–3 για την μελέτη της έρπουσας ροής στο ρευστό στρώμα μεταξύ δύο ομόκεντρων σφαιρών a και b , $b > a$.

Η επιμήκης σφαιροειδής γεωμετρία εκφυλίζεται στην σφαιρική στο όριο, καθώς η ημισεσμιακή απόσταση c τείνει στο μηδέν, $c \rightarrow 0^+$. Για τον αντίστοιχο αναλυτικό εκφυλισμό, η οριακή διαδικασία εμπεριέχει έναν κατάλληλο συνδυασμό του c με τις συντεταγμένες μεταβλητές του συστήματος έτσι ώστε

$$\|\mathbf{r}\| = c\sqrt{\tau^2 + \zeta^2 - 1} \equiv r, \quad 0 < r < +\infty, \quad c > 0, \quad (\text{III-3.85})$$

όπως και τα παρακάτω όρια,

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} c\tau = r, \quad 0 < r < +\infty, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{III-3.86})$$

και

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{2c} \ln \frac{\tau + 1}{\tau - 1} = \frac{1}{r}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{III-3.87})$$

Τότε, ο ορισμός των συναρτήσεων Legendre και Gegenbauer, σύμφωνα και με τα παραπάνω, από τις σχέσεις (III-1.107)–(III-1.109) και (III-1.97)–(III-1.106), αντίστοιχα, οδηγεί στα όρια

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^0 P_0(\tau)) = 1, \quad (\text{III-3.88})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c P_1(\tau)) = r, \quad (\text{III-3.89})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^2 P_2(\tau)) = \frac{3}{2} r^2, \quad (\text{III-3.90})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^3 P_3(\tau)) = \frac{5}{2} r^3, \quad (\text{III-3.91})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^4 P_4(\tau)) = \frac{35}{8} r^4, \quad (\text{III-3.92})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-1} Q_0(\tau)) = \frac{1}{r}, \quad (\text{III-3.93})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-2} Q_1(\tau)) = \frac{1}{3r^2}, \quad (\text{III-3.94})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-3} Q_2(\tau)) = \frac{2}{15r^3}, \quad (\text{III-3.95})$$

καθώς, επίσης, και στα όρια

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c G_1(\tau)) = -r, \quad (\text{III-3.96})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^2 G_2(\tau)) = -\frac{1}{2} r^2, \quad (\text{III-3.97})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^4 G_4(\tau)) = -\frac{5}{8} r^4, \quad (\text{III-3.98})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} (c^{-1} H_2(\tau)) = \frac{1}{3r} \quad (\text{III-3.99})$$

για κάθε $0 < r < +\infty$, όπου οι παραπάνω εκφράσεις ισχύουν σε οποιοδήποτε διάστημα του $1 < \tau < +\infty$. Όταν αναφερόμαστε στις επιφάνειες των δύο ομοεστιακών επιμήκων

σφαιροειδών για $\tau = \tau_a, \tau_b$, οι εξισώσεις που ισχύουν είναι οι ίδιες με την αντικατάσταση $r = a, b$ στις (III–3.88)–(III–3.99). Αναφέρουμε ότι από αλγεβρική άποψη η μεταβλητή ζ , $\zeta \in [-1, 1]$ παραμένει η ίδια και στα δύο συστήματα συντεταγμένων, κάτι που δεν είναι αληθές όταν εξετάζουμε γεωμετρικά το επίμηκες σφαιροειδές και το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Σύμφωνα με τον ορισμό (III–3.13) έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} \left(\zeta \sqrt{\tau^2 - 1} \hat{x}_1 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi \hat{x}_2 + \tau \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi \hat{x}_3 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\tau\tau)^2 - (\zeta\zeta)^2}} \left(\zeta \sqrt{(\tau\tau)^2 - c^2} \hat{x}_1 + (\tau\tau) \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi \hat{x}_2 + (\tau\tau) \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi \hat{x}_3 \right)\end{aligned}\quad (\text{III–3.100})$$

και στο σφαιρικό όριο,

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \hat{\tau} = \hat{r} \quad (\text{III–3.101})$$

λόγω της (III–3.86) και της έκφρασης του $\hat{r}$ από την σχέση (II–1.17) ενώ τα μοναδιαία $\hat{\zeta}$ και $\hat{\phi}$ είναι τα “ίδια” με τη σφαιρική γεωμετρία.

Συνεχίζοντας, τα $P_1(\zeta) = \zeta$ και $P_1^1(\zeta) = \sqrt{1 - \zeta^2}$ παραμένουν όπως είναι και οι μετατροπές

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_{sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = \mathbf{v}_{sr}^{PN}(r, \zeta), \quad (\text{III–3.102})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_{\tau, sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = \mathbf{v}_{r, sr}^{PN}(r, \zeta), \quad (\text{III–3.103})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \mathbf{v}_{\zeta, sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = \mathbf{v}_{\zeta, sr}^{PN}(r, \zeta), \quad (\text{III–3.104})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \boldsymbol{\omega}_{sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = \boldsymbol{\omega}_{sr}^{PN}(r, \zeta), \quad (\text{III–3.105})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \mathbf{P}_{sd}^{(0)PN}(\tau, \zeta) = \mathbf{P}_{sr}^{PN}(r, \zeta), \quad (\text{III–3.106})$$

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \bar{\mathbf{P}}_{0sd}^{PN} = \bar{\mathbf{P}}_{0sr}^{PN} \quad (\text{III–3.107})$$

και

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} U_{sd} = U_{sr}, \quad (\text{III–3.108})$$

γίνονται για λόγους συμβολισμού.

Τέλος, οι σταθερές $L_{1,sd}$, $L_{2,sd}$ και η ορίζουσα $D_{0,sd}^K$ παίρνουν τις αντίστοιχες σφαιρικές εκφράσεις με κατάλληλη χρήση των (ΙΙΙ-3.88)–(ΙΙΙ-3.99) και ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{c\sqrt{\tau^2 - \zeta^2}} &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{c\sqrt{\tau^2 - 1}} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2 - c^2}} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2 - (c\zeta)^2}} \\ &= \frac{1}{r}, \quad 0 < r < +\infty, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad |\zeta| \leq 1, \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.109})$$

αλλά

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{c^2(\tau^2 - \zeta^2)} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{((c\tau)^2 - (c\zeta)^2)} = \frac{1}{r^2} \quad (\text{ΙΙΙ-3.110})$$

Οι (ΙΙΙ-3.109) και (ΙΙΙ-3.110) ισχύει και για $\tau = \tau_a, \tau_b$ και, τότε, $r = a, b$.

Αν εφαρμόσουμε όλα τα παραπάνω στα πεδία ροής των πρώτων και σημαντικών όρων (ΙΙΙ-3.73)–(ΙΙΙ-3.80) λαμβάνουμε μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις τα διορθωμένα αποτελέσματα για το μοντέλο “σφαίρα σε κύτταρο” με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara [66], τα οποία ανακτήθηκαν εξ’ αρχής, με την ίδια διαδικασία σε σφαιρικές συντεταγμένες, στο Κεφάλαιο ΙΙ-3. Η ταχύτητα (ΙΙΙ-3.73)–(ΙΙΙ-3.75) εκφυλίζεται στις

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(r, \zeta) = \mathbf{v}_{r, sr}^{PN}(r, \zeta) \hat{\mathbf{r}} \zeta - \mathbf{v}_{\zeta, sr}^{PN}(r, \zeta) \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1 \quad (\text{ΙΙΙ-3.111})$$

με συνιστώσες

$$\begin{aligned} v_{r, sr}^{PN}(r, \zeta) &= \frac{U_{sr}}{2K_{K, sr}} \left[\frac{3}{5\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \left(2 + \frac{1}{\gamma_{K, sr}^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + 3 \left(\frac{a}{r} \right) - \left(1 - \frac{2}{5\gamma_{K, sr}^3} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] P_1(\zeta) \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.112})$$

και

$$\begin{aligned} v_{\zeta, sr}^{PN}(r, \zeta) &= -\frac{U_{sr}}{2K_{K, sr}} \left[\frac{6}{5\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \left(2 + \frac{1}{\gamma_{K, sr}^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \left(\frac{a}{r} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{5\gamma_{K, sr}^3} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] P_1'(\zeta) \end{aligned} \quad (\text{ΙΙΙ-3.113})$$

για κάθε $a \leq r \leq b$ και $|\zeta| \leq 1$, ενώ το πεδίο στροβιλισμού (ΙΙΙ-3.76) εκφυλίζεται στην

$$\omega_{sr}^{PN}(r, \zeta) = \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{3U_{sr}}{4aK_{K, sr}} \left[-\frac{1}{\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] P_1'(\zeta), \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1. \quad (\text{ΙΙΙ-3.114})$$

Επίσης, το πεδίο ολικής πίεσης (III–3.77) καταλήγει οριακά στη σχέση

$$P_{sr}^{PN}(r, \zeta) = \bar{P}_{0sr}^{PN} + \frac{3\mu_0 U_{sr}}{2aK_{K, sr}} \left[\frac{2}{\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right) + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] P_1(\zeta), \quad a \leq r \leq b, \quad |\zeta| \leq 1, \quad (\text{III–} 3.115)$$

όπου a, b είναι οι ακτίνες των ομόκεντρων σφαιρών του αντίστοιχου μοντέλου “σφαίρα σε κύτταρο”, ενώ

$$\gamma_{K, sr} = \frac{b}{a} > 1, \quad K_{K, sr} = \frac{(\gamma_{K, sr} - 1)^3 (1 + 3\gamma_{K, sr} + 6\gamma_{K, sr}^2 + 5\gamma_{K, sr}^3)}{5\gamma_{K, sr}^6} \quad (\text{III–} 3.116)$$

και U_{sr} είναι η καινούργια ταχύτητα προσέγγισης στο σφαιρικό κύτταρο.

Τέλος, η συνάρτηση ροής (III–3.82) οριακά όταν $c \rightarrow 0^+$ καταλήγει στην αντίστοιχη σφαιρική έκφραση

$$\Psi_{sr}(r, \zeta) = \frac{U_{sr} a^2}{2K_{K, sr}} \left[-\frac{3}{5\gamma_{K, sr}^3} \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \left(2 + \frac{1}{\gamma_{K, sr}^3} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{r}{a} \right) + \left(1 - \frac{2}{5\gamma_{K, sr}^3} \right) \left(\frac{a}{r} \right) \right] G_2(\zeta) \quad (\text{III–} 3.117)$$

για κάθε $a \leq r \leq b$ και $|\zeta| \leq 1$.

Τα παραπάνω εκφυλισμένα αποτελέσματα είναι ακριβώς τα ίδια με τη λύση που επιτεύχθηκε στο Κεφάλαιο II–3 για το διδιάστατο κύτταρο Kuwabara σε σφαιρικές συντεταγμένες.

III–3.2ε *Το πεπλατυσμένο σφαιροειδές.*

Ο γνωστός μετασχηματισμός [77]

$$c \rightarrow -i\bar{c}, \quad c, \bar{c} > 0 \quad (\text{III–} 3.118)$$

και

$$\tau \rightarrow i\lambda, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad 0 < \lambda < +\infty, \quad (\text{III–} 3.119)$$

επιτρέπει τη μετάπτωση από το επίμηκες σφαιροειδές στο πεπλατυσμένο ενώ ο

$$\bar{c} \rightarrow -ic, \quad c, \bar{c} > 0 \quad (\text{III–} 3.120)$$

και

$$\lambda \rightarrow i\tau, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad 0 < \lambda < +\infty \quad (\text{III–} 3.121)$$

κάνει ακριβώς το αντίστροφο, όπου $0 \leq \lambda \equiv \sinh \eta < +\infty$, $\bar{c} > 0$ είναι οι καινούργιες χαρακτηριστικές μεταβλητές της πεπλατυσμένης σφαιροειδούς γεωμετρίας.

Ανακεφαλαίωση–παρατηρήσεις.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρατέθηκαν αναλυτικά τα αποτελέσματα της μελέτης της αξονοσυμμετρικής ροής σμήνους σφαιροειδών σωματιδίων εντός πορώδους μέσου με την ανάπτυξη της θεωρίας του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara*, όπου παρατηρήσαμε την εφαρμογή της γενικής διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber επιδιώκοντας να εξάγουμε την γενική λύση σε μορφή αναπτυγμάτων σε σειρές. Τα αποτελέσματα για την πεπλατυσμένη γεωμετρία μπορούν να παραχθούν εύκολα με την εφαρμογή απλού μετασχηματισμού, ενώ με μια επιλεκτικά κατάλληλη οριακή διαδικασία ανακτώνται τα πεδία ροής για το αντίστοιχο πρότυπο στη σφαιρική γεωμετρία. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η ταχύτητα U_{sd} στη λύση μας πρέπει να αντικατασταθεί με $-U_{sd}$ στη λύση του Kuwabara και τότε υπάρχει πλήρης ταύτιση των αποτελεσμάτων, ενώ αναφέρουμε για άλλη μια φορά ότι το συγκεκριμένο μοντέλο δεν είναι ενεργειακά αυτόνομο λόγω του μηδενισμού του στροβιλισμού στο εξωτερικό σφαιροειδές με αποτέλεσμα να υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας με το εξωτερικό περιβάλλον.

Η μελέτη του αντίστοιχου διδιάστατου προβλήματος σφαιροειδούς σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel είναι ελάσσονος σημασίας αυτή τη στιγμή σε αυτή την εργασία. Αυτό ισχύει διότι, το πρόβλημα έχει ήδη λυθεί στην [38] παρουσιάζοντας ακριβώς την ίδια απροσδιοριστία, οπότε είναι άσκοπο να δούμε την ευελιξία της διαφορικής μας αναπαράστασης λύνοντας άλλο ένα γνωστό πρόβλημα. Ωστόσο, αυτό όμως που έχει μεγάλη σημασία είναι η χρήση της διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber για την επίλυση του μοντέλου “σωματίδιο σε κύτταρο” με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες, γεωμετρία που επιβάλλει την επίλυση του προβλήματος αυτού σε χωρία χωρίς αξονική συμμετρία, διότι το ελλειψοειδές σωματίδιο μεταφέρει την πλήρη ανισοτροπία του χώρου. Αλλά, αυτό αποτελεί το θέμα του Κεφαλαίου IV-2, όπου με εκφυλισμό λαμβάνουμε το άλλο αντίστοιχο τρισδιάστατο σφαιρικό πρότυπο του Κεφαλαίου ΙΙ-3, παράγραφος ΙΙ-3.3, ολοκληρώνοντας με αυτό τον τρόπο την οριοθέτηση των δυνατοτήτων των διαφορικών αναπαραστάσεων στις διάφορες γεωμετρίες.

* Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης παραγράφου ΙΙΙ-3.2 αποτελούν μέρος της δημοσιευμένης εργασίας [42].

ΜΕΡΟΣ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV-1 ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

IV-1.1 Εισαγωγή – ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων.

Ήδη έχουμε αναφέρει ότι κάθε επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο που περιγράφεται από μια ομογενή πολυωνυμική εξίσωση, με μεταβλητές τις τρεις συντεταγμένες ενός σημείου της επιφάνειας, χαρακτηρίζεται από το βαθμό της εξίσωσης αυτής. Έτσι, για παράδειγμα τα επίπεδα θεωρούνται επιφάνειες πρώτου βαθμού, ενώ η σφαίρα θεωρείται επιφάνεια δευτέρου βαθμού. Στην παράγραφο αυτή θα παρακολουθήσουμε τη γέννηση όλων των επιφανειών δευτέρου βαθμού μέσα από τη γενική τετραγωνική μορφή

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + c = 0, \quad a_{\kappa l}, b_{\kappa} \in \mathbf{8}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3. \quad (\text{IV-1.1})$$

Στρέφοντας κατάλληλα το σύστημα των συντεταγμένων στο οποίο είναι εκφρασμένη η (IV-1.1) ώστε να απαλειφθούν οι μεικτοί όροι $x_i x_j$ με $i \neq j$, και μετατοπίζοντας παράλληλα τους άξονες, ώστε να απορροφηθούν και οι πρωτοβάθμιοι όροι με τη βοήθεια στοιχειώδους άλγεβρας, η (IV-1.1) οδηγείται στην κανονική της μορφή,

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 = d \quad (\text{IV-1.2})$$

όπου $c_1, c_2, c_3, d \in \mathbb{R}$.

Όταν $d \neq 0$ η μορφή (IV-1.2) ονομάζεται μη εκφυλισμένη. Αποδεικνύεται πως η διερεύνηση της μη εκφυλισμένης μορφής (IV-1.2), ανασύρει όλες τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού, μέσω της ισοδυναμίας της

$$\bar{c}_1 x_1^2 + \bar{c}_2 x_2^2 + \bar{c}_3 x_3^2 = 1 \quad (\text{IV-1.3})$$

όπου $\bar{c}_\kappa = c_\kappa / d$, $\kappa = 1, 2, 3$.

Έτσι, η θετικότητα των συντελεστών $\bar{c}_\kappa$, επιτρέπει την απλή αντικατάσταση $\bar{c}_\kappa = \alpha_\kappa^{-2}$, $\kappa = 1, 2, 3$ και γεννά το τριαξονικό ελλειψοειδές

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1 \quad (\text{IV-1.4})$$

με $0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty$, του οποίου εκφυλισμένες μορφές αποτελούν το πεπλατυσμένο σφαιροειδές με $0 < \alpha_3 < \alpha_2 = \alpha_1$, το επίμηκες σφαιροειδές με $0 < \alpha_3 = \alpha_2 < \alpha_1$ και η σφαίρα $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$.

Η αρνητικότητα ενός μόνο από τους συντελεστές της (IV-1.3), επιτρέπει την αντικατάσταση $\bar{c}_1 = \alpha_1^{-2}$, $\bar{c}_2 = \alpha_2^{-2}$, $\bar{c}_3 = -\alpha_3^{-2}$ και η οποία οδηγεί στο μονόχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1, \quad (\text{IV-1.5})$$

ενώ η αντίστοιχη αρνητικότητα δύο εκ των τριών συντελεστών της (IV-1.3)

$\bar{c}_1 = \alpha_1^{-2}$, $\bar{c}_2 = -\alpha_2^{-2}$, $\bar{c}_3 = -\alpha_3^{-2}$ οδηγεί στο δίχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} - \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_3^2} = 1. \quad (\text{IV-1.6})$$

Από κάθε σημείο του χώρου διέρχεται ένα ελλειψοειδές, ένα μονόχωνο και ένα δίχωνο υπερβολοειδές. Έτσι, οι τρεις αυτές επιφάνειες δευτέρου βαθμού δημιουργούν σύστημα συντεταγμένων, όπως φαίνεται και στο Σχήμα IV-1.1, μέσω του οποίου μπορούν να περιγραφούν ως ειδικές περιπτώσεις όλες οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού.

Καθώς μάλιστα, τα περισσότερα φυσικά προβλήματα αφορούν επιφάνειες δευτέρου βαθμού, το σύστημα του ελλειψοειδούς, του μονόχωνου υπερβολοειδούς και του δίχωνου υπερβολοειδούς αποτελεί το καταλληλότερο σύστημα συντεταγμένων για την περιγραφή φυσικών συστημάτων.

Οι μορφές των επιφανειών δευτέρου βαθμού που ορίζονται μέσω των εξισώσεων (IV-1.4), (IV-1.5) και (IV-1.6) αποτελούν γεωμετρικές αναπαραστάσεις των ριζών της συνάρτησης

$$f(\lambda) = \frac{x_1^2}{\alpha_1^2 - \lambda} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{\alpha_3^2 - \lambda} - 1 \quad (\text{IV-1.7})$$

σε καθένα από τα ξεχωριστά διαστήματα $(-\infty, \alpha_3^2)$, (α_3^2, α_2^2) , (α_2^2, α_1^2) αντίστοιχα, όπου $0 < \alpha_3^2 < \alpha_2^2 < \alpha_1^2 < +\infty$. Καθώς η συνάρτηση $f(\lambda)$ είναι συνεχής και έχει θετική παράγωγο και ετερόσημες οριακές τιμές σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα, το θεώρημα του Bolzano εξασφαλίζει την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μιας ρίζας της $f(\lambda)$ σε καθένα από αυτά.

Έτσι, δεδομένων των ημιαξόνων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και λαμβάνοντας υπ' όψη το πρόσημο των παρονομαστών της (IV-1.7), η

$$f(\lambda) = 0 \quad (\text{IV-1.8})$$

περιγράφει κατά μοναδικό τρόπο την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς, όταν η ρίζα ανήκει στο διάστημα $(-\infty, \alpha_3^2)$, ενός μονόχωνου υπερβολοειδούς, όταν η ρίζα ανήκει στο (α_3^2, α_2^2) , και ενός δίχωνου υπερβολοειδούς όταν η ρίζα ανήκει στο (α_2^2, α_1^2) .

Με άλλα λόγια, από ένα σημείο (x_1, x_2, x_3) του χώρου, διέρχεται ένα ελλειψοειδές, ένα μονόχωνο και ένα δίχωνο υπερβολοειδές, οι οποίες επιφάνειες περιγράφονται από την ίδια εξίσωση (IV-1.8) για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ .

Αντιστρόφως, καθώς το λ διαγράφει τα αντίστοιχα διαστήματα, κάθε μια από τις τρεις αυτές οικογένειες επιφανειών καλύπτουν πλήρως το χώρο, με αποτέλεσμα, να μην υπάρχει κανένα σημείο στον $\mathbb{R}^3$ στο οποίο να μην αντιστοιχεί μια τέτοια τριάδα επιφανειών [58].

Πράγματι, καθώς το λ διατρέχει το διάστημα $(-\infty, \alpha_3^2)$, τα σημεία (x_1, x_2, x_3) που ικανοποιούν την (IV-1.8) ανήκουν σε επιφάνειες ελλειψοειδών που “φουσκώνουν” περνώντας από την εσωτερική επιφάνεια διπλής όψεως της εστιακής έλλειψης

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_3^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} = 1 \quad (\text{IV-1.9})$$

για $\lambda \rightarrow \alpha_{3-}^2$ έως τη σφαίρα άπειρης ακτίνας, όταν $\lambda \rightarrow -\infty$.

Παρόμοια, τα μονόχωνα υπερβολοειδή που εγείρονται όταν η ρίζα της (IV-1.8) σαρώνει το διάστημα (α_3^2, α_2^2) “φουσκώνουν” από την εσωτερική επιφάνεια διπλής όψεως της εστιακής υπερβολής

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} - \frac{x_3^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2} = 1 \quad (\text{IV-1.10})$$

για $\lambda \rightarrow \alpha_{3+}^2$, έως την εξωτερική επιφάνεια διπλής όψεως της έλλειψης (IV-1.9) για $\lambda \rightarrow \alpha_{2-}^2$.

Τέλος, τα δίχωνα υπερβολοειδή καλύπτουν το χώρο, καθώς ξεδιπλώνονται από την εξωτερική επιφάνεια διπλής όψεως της υπερβολής (IV-1.10), για $\lambda \rightarrow \alpha_{2+}^2$ και ανοίγονται κατά συνεχή τρόπο έως το όριο $\lambda \rightarrow \alpha_1^2$ οπότε τα δύο φύλλα συναντώνται στο επίπεδο διπλής όψεως $x_1 x_3$.

Έτσι, από κάθε σημείο του χώρου διέρχεται ένα ελλειψοειδές, ένα μονόχωνο και ένα δίχωνο υπερβολοειδές, τα οποία έχουν κοινές εστίες και ημισεμιακές αποστάσεις που συνδέονται με τους ημιάξονες μέσω των σχέσεων

$$h_1^2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \quad (\text{IV-1.11})$$

$$h_2^2 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2, \quad (\text{IV-1.12})$$

$$h_3^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = h_2^2 - h_1^2 \quad (\text{IV-1.13})$$

για κάθε $0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty$. Κατά συνέπεια, οι τρεις επιφάνειες που ικανοποιούν την (IV-1.8) στα διαστήματα όπου μεταβάλλεται η παράμετρος λ , αποτελούν σύστημα συντεταγμένων. Σύμφωνα με τα παραπάνω η εστιακή έλλειψη έχει εστίες το ζεύγος $(-h_3, h_3)$, ενώ η εστιακή υπερβολή περνάει από το ίδιο ζεύγος σημείων $(-h_3, h_3)$ το οποίο βρίσκεται στον άξονα x_1 . Στον ίδιο άξονα κείται και το ζεύγος $(-h_2, h_2)$ και μαζί με το ζεύγος ημισεμιακών αποστάσεων $(-h_1, h_1)$ που κείται στον άξονα x_2 συμπληρώνονται τα σημεία που περνάει η εστιακή έλλειψη.

Επιπλέον, αποδεικνύεται [58] πως οι τρεις υπό μελέτη επιφάνειες τέμνονται, σε κάθε σημείο, ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, με αποτέλεσμα το σύστημα συντεταγμένων το οποίο αποτελούν, να είναι ορθογώνιο. Το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που γεννιέται από την εξίσωση (IV-1.8) με συντεταγμένες επιφάνειες το ελλειψοειδές, το μονόχωνο υπερβολοειδές και το δίχωνο υπερβολοειδές, λέγεται ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων.

Οι εξισώσεις (IV-1.8) περιγράφουν της συντεταγμένες επιφάνειες του ελλειψοειδούς συστήματος. Σκοπός μας είναι να επιλυθεί το σύστημα (IV-1.8) ως προς τα x_1, x_2, x_3 για να καθοριστούν εκείνες οι παράμετροι που θα αποτελέσουν τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες [58].

Θεωρώντας τις αποστάσεις των ριζών λ_k , $k=1,2,3$ της $f(\lambda_k)=0$ από τον μέγιστο ημιάξονα α_1 εισάγουμε τις μεταβλητές ρ, μ, ν έτσι ώστε

$$\rho^2 = \alpha_1^2 - \lambda_3, \quad \lambda_3 \in (-\infty, \alpha_3^2), \quad (\text{IV-1.14})$$

$$\mu^2 = \alpha_1^2 - \lambda_2, \quad \lambda_2 \in (\alpha_3^2, \alpha_2^2), \quad (\text{IV-1.15})$$

$$\nu^2 = \alpha_1^2 - \lambda_1, \quad \lambda_1 \in (\alpha_2^2, \alpha_1^2). \quad (\text{IV-1.16})$$

Τότε, τα διαστήματα μεταβολής των ρ^2, μ^2, ν^2 με τη βοήθεια και των (IV-1.11)–(IV-1.13), είναι

$$\rho^2 \in (\alpha_1^2 - \alpha_3^2, +\infty) = (h_2^2, +\infty), \quad (\text{IV-1.17})$$

$$\mu^2 \in (\alpha_1^2 - \alpha_2^2, \alpha_1^2 - \alpha_3^2) = (h_3^2, h_2^2), \quad (\text{IV-1.18})$$

$$\nu^2 \in (0, \alpha_1^2 - \alpha_2^2) = (0, h_3^2). \quad (\text{IV-1.19})$$

Αντικαθιστώντας τις (IV-1.14)–(IV-1.16) στις (IV-1.8) για κάθε λ_k , $k=1,2,3$ και χρησιμοποιώντας τις (IV-1.11)–(IV-1.13) παίρνουμε την παρακάτω περιγραφή των συντεταγμένων επιφανειών του ελλειψοειδούς συστήματος, η οποία εισάγει τη δομική σύνδεσή τους, δηλαδή την εξάρτηση από τις κοινές τους εστίες,

$$\frac{x_1^2}{\rho^2} + \frac{x_2^2}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\rho^2 - h_2^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} = \mathbf{r} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} \cdot \mathbf{r} = 1, \quad (\text{IV-1.20})$$

$$\frac{x_1^2}{\mu^2} + \frac{x_2^2}{\mu^2 - h_3^2} - \frac{x_3^2}{h_2^2 - \mu^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\mu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} = 1, \quad (\text{IV-1.21})$$

$$\frac{x_1^2}{\nu^2} - \frac{x_2^2}{h_3^2 - \nu^2} - \frac{x_3^2}{h_2^2 - \nu^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\nu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} = 1, \quad (\text{IV-1.22})$$

όπου τα διαστήματα μεταβολής των ρ^2, μ^2, ν^2 δίνονται στις (IV–1.17)–(IV–1.19), που συνδυάζονται στη συνεχή ανισότητα

$$0 < \nu^2 < h_3^2 < \mu^2 < h_2^2 < \rho^2 < +\infty. \quad (\text{IV–1.23})$$

Οι μεταβλητές ρ, μ, ν λέγονται ελλειψοειδείς συντεταγμένες και η σταθερή τιμή της καθεμιάς δίνει αντίστοιχα ένα ελλειψοειδές για σταθερό ρ , ένα μονόχωνο υπερβολοειδές για σταθερό μ και ένα δίχωνο υπερβολοειδές για σταθερό ν , όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα IV–1.1.

Σχήμα IV–1.1: Σύστημα ελλειψοειδών συντεταγμένων.

Τα βασικά χαρακτηριστικά των πληροφοριών που θα παρουσιαστούν και που θα τροποποιηθούν κατάλληλα για περαιτέρω χρήση βασίζονται κυρίως στους Moon και Spencer [77] για τη γεωμετρία και στους Hobson [58] ή Morse και Feshbach [78] για την άλγεβρα και τις αρμονικές συναρτήσεις της ελλειψοειδούς γεωμετρίας.

Το σύστημα των εξισώσεων (IV–1.20)–(IV–1.22) είναι γραμμικό ως προς x_1^2, x_2^2, x_3^2 με μη μηδενική ορίζουσα. Η μοναδική του λύση βρίσκεται μετά από μακροσκελείς αλλά τετριμμένους αλγεβρικούς χειρισμούς και είναι η ακόλουθη,

$$x_1^2 = \frac{\rho^2 \mu^2 \nu^2}{h_2^2 h_3^2}, \quad (\text{IV–1.24})$$

$$x_2^2 = \frac{(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - v^2)}{h_1^2 h_3^2}, \quad (\text{IV-1.25})$$

$$x_3^2 = \frac{(\rho^2 - h_2^2)(h_2^2 - \mu^2)(h_2^2 - v^2)}{h_1^2 h_2^2}. \quad (\text{IV-1.26})$$

Κατά τον αποτετραγωνισμό των (IV-1.24)–(IV-1.26) τα κατάλληλα πρόσημα των x_1, x_2, x_3 για κάθε ογδοημόριο εξασφαλίζονται μέσω των παρακάτω συμβάσεων [58]. Η ρ –μεταβλητή, καθώς μεταβάλλεται σε άπειρο διάστημα, παίζει το ρόλο “ακτινικής” μεταβλητής και θεωρείται πάντα θετική, δηλ. $\rho \in (h_2, +\infty)$. Οι μ και v μεταβλητές μεταβάλλονται σε πεπερασμένα διαστήματα και παίζουν το ρόλο “γωνιακών” μεταβλητών. Ειδικά, καθώς $\mu^2 \in (h_3^2, h_2^2)$, συμβατικά θεωρείται πως το μ σαρώνει το θετικό διάστημα (h_3, h_2) δύο φορές, μια φορά αυξανόμενο και μια φορά μειούμενο, προσδίδοντας στη μεταβλητή x_3 θετικό ή αρνητικό πρόσημο αντιστοίχως. Ομοίως, το v θεωρείται πως σαρώνει το διάστημα $(-h_3, h_3)$ δύο φορές, προσδίδοντας στην μεταβλητή x_2 θετικό πρόσημο, όταν το v αυξάνεται από $-h_3$ σε h_3 , και αρνητικό όταν μειώνεται από h_3 σε $-h_3$. Τέλος, η μεταβλητή v θεωρείται ότι καθορίζει το πρόσημο της x_1 κατά τρόπο ώστε οι x_1 και v να παίρνουν συγχρόνως το ίδιο πρόσημο. Έτσι, τα πρόσημα των x_1, x_2, x_3 που καθορίζουν το ογδοημόριο στο οποίο ανήκει το σημείο (x_1, x_2, x_3) , καθορίζονται πλήρως από τη φορά που οι γωνιακές μεταβλητές μ, v σαρώνουν το διάστημα μεταβολής τους.

Αναφερόμενοι στο Κεφάλαιο I-3, οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες (ρ, μ, v) , για κάθε $h_2 \leq \rho < +\infty$, $h_3 \leq \mu \leq h_2$ και $-h_3 \leq v \leq h_3$, αντιστοιχούν στις γενικές παραμετρικές εξισώσεις (u, v, w) και αποτελούν ένα δεξιόστροφο ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Κατά συνέπεια, παίρνοντας τα ανοιχτά διαστήματα μεταβολών, οι καρτεσιανές συντεταγμένες συνδέονται με τις αντίστοιχες ελλειψοειδείς για κάθε ογδοημόριο μέσω των σχέσεων

$$x_1 = \frac{\rho \mu v}{h_2 h_3} \quad (\text{IV-1.27})$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v^2}}{h_1 h_3} \quad (\text{IV-1.28})$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - v^2}}{h_1 h_2} \quad (\text{IV-1.29})$$

με $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $v \in (-h_3, h_3)$ και τα πρόσημα των x_1, x_2, x_3 καθορίζονται από τις παραπάνω συμβάσεις διαγραφής των διαστημάτων μεταβολής των μ και v . Το συγκεκριμένο σύστημα δεν επιτρέπει την αξονική συμμετρία γύρω από τον άξονα x_1 και τότε δεν είναι εφικτός ο εκφυλισμός, όποτε πρέπει, των τρισδιάστατων $3-D$ χωρίων σε διδιάστατα ή αξονοσυμμετρικά $2-D$ πεδία. Συνεπώς, το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων είναι το κατεξοχήν μη αξονοσυμμετρικό σύστημα που δημιουργεί μόνο τρισδιάστατες ροές αν αναφερόμαστε σε ελλειψοειδή σωματίδια που διαταράσσουν το πεδίο ροής.

Η διδακτορική Διατριβή της κ. Καριώτου [61] αποτελεί την πλέον αξιόπιστη πηγή που εμπεριέχει συγκεντρωτικά αποτελέσματα για την ελλειψοειδή γεωμετρία με εμβάθυνση τόσο στην άλγεβρα όσο και στη γεωμετρία. Εμείς, στο πλαίσιο της παρουσίασης της σφαιρικής και σφαιροειδούς γεωμετρίας, ακολουθούμε την ίδια τακτική με αυτή των Κεφαλαίων II-1 και III-1.

Πάλι, από την (I-3.114) το διάνυσμα θέσης ή παρατήρησης $\mathbf{r}$ δίνεται συναρτήσει των Καρτεσιανών συντεταγμένων από την αναλλοίωτη έκφραση

$$\mathbf{r} = x_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + x_3 \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (\text{IV-1.30})$$

Χρησιμοποιώντας τις γενικές εκφράσεις (I-3.121), υπολογίζουμε τους μετρικούς συντελεστές του ελλειψοειδούς συστήματος,

$$h_\rho = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right\| = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - v^2}}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}, \quad (\text{IV-1.31})$$

$$h_\mu = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} \right\| = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - v^2}}{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2}}, \quad (\text{IV-1.32})$$

$$h_v = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \frac{\sqrt{\rho^2 - v^2} \sqrt{\mu^2 - v^2}}{\sqrt{h_3^2 - v^2} \sqrt{h_2^2 - v^2}}, \quad (\text{IV-1.33})$$

όπου $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $v \in (-h_3, h_3)$.

Η (I-3.122), επιπλέον, αποτελεί τη γενική σχέση της Ιακωβεινής ενός ορθογωνίου συστήματος που σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες μας οδηγεί στην J_{el} ,

$$J_{el} = h_\rho h_\mu h_\nu = \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}} \quad (\text{IV-1.34})$$

για τα ίδια διαστήματα μεταβολής των ρ, μ, ν .

Οι ίδιες σχέσεις (I-3.121) του Κεφαλαίου I-3, μας οδηγούν στα μοναδιαία διανύσματα της ελλειψοειδούς γεωμετρίας $\hat{\rho}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$ (με τη σειρά $\hat{\rho}, \hat{\nu}, \hat{\mu}$ αναφέρονται σε δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα), οπότε και λαμβάνουμε τις εκφράσεις

$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \frac{\rho}{h_\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{x}_i}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2}, \quad (\text{IV-1.35})$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} = \frac{\mu}{h_\mu} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{x}_i}{\mu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2}, \quad (\text{IV-1.36})$$

$$\hat{\nu} = \frac{1}{h_\nu} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \nu} = \frac{\nu}{h_\nu} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{x}_i}{\nu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2}, \quad (\text{IV-1.37})$$

από όπου με αντιστροφή παίρνουμε

$$\hat{x}_\kappa = x_\kappa \left[\frac{\rho \hat{\rho}}{h_\rho (\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2)} + \frac{\mu \hat{\mu}}{h_\mu (\mu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2)} + \frac{\nu \hat{\nu}}{h_\nu (\nu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2)} \right], \quad (\text{IV-1.38})$$

όπου

$$x_\kappa = \frac{h_\kappa}{h_1 h_2 h_3} \sqrt{|\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2|} \sqrt{|\mu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2|} \sqrt{|\nu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2|} \quad (\text{IV-1.39})$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, 3$ και $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$. Τα απόλυτα στα ριζικά χρησιμεύουν ώστε οι υπόριζες διαφορές να γράφονται κατάλληλα ώστε να είναι θετικές ποσότητες και με την βοήθεια των (IV-1.11)–(IV-1.13) οι (IV-1.39) να δίνουν τις σχέσεις σύνδεσης του Καρτεσιανού συστήματος με το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή τις (IV-1.27)–(IV-1.29).

Στο όριο που οι ημιεστιακές αποστάσεις τείνουν στο μηδέν ($h_1 = h_2 = h_3 \rightarrow 0$) το σύστημα μετατρέπεται στο αντίστοιχο σφαιρικό για

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 - (h_2^2 + h_3^2)} \equiv r, \quad 0 < r < +\infty \quad (\text{IV-1.40})$$

για κάθε $0 < \nu^2 < h_3^2 < \mu^2 < h_2^2 < \rho^2 < +\infty$, όπου r είναι η σφαιρική ακτίνα.

Σύμφωνα με τον ορισμό του μέτρου του διανύσματος θέσης, λοιπόν, έχουμε

$$\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 + h_2^2 + h_3^2, \quad (\text{IV-1.41})$$

ενώ εύκολα υπολογίζεται ότι

$$\rho^2 \mu^2 + \rho^2 \nu^2 + \mu^2 \nu^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 x_i^2 + 2x_1^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2 \quad (\text{IV-1.42})$$

και από την (IV-1.27),

$$\rho^2 \mu^2 \nu^2 = x_1^2 h_2^2 h_3^2, \quad (\text{IV-1.43})$$

όπου $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$.

Το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}_{el}$ στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς $\rho = \text{σταθερό}$ συμπίπτει με το μοναδιαίο κάθετο $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ και αναπτύσσοντας τη σειρά στη σχέση (IV-1.35) καταλήγουμε στην

$$\hat{\mathbf{n}}_{el}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{h_p} \left[\frac{x_1 \hat{\mathbf{x}}_1}{\rho^2} + \frac{x_2 \hat{\mathbf{x}}_2}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{x_3 \hat{\mathbf{x}}_3}{\rho^2 - h_2^2} \right] = \frac{\rho}{h_p} \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{IV-1.44})$$

για $0 < \nu^2 < h_3^2 < \mu^2 < h_2^2 < \rho^2 < +\infty$, από όπου με τη βοήθεια της σχέσης (IV-1.20) προκύπτει

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{el} = \frac{\rho}{h_p}. \quad (\text{IV-1.45})$$

Σε αυτό το σημείο, για πληρότητα, παραθέτουμε το ταυτοτικό δυαδικό $\tilde{\mathbf{I}}$, όπου η αναλλοίωτή του μορφή (I-3.139) συνεπάγεται την ελλειψοειδή έκφραση

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}} + \hat{\boldsymbol{\mu}} \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\boldsymbol{\nu}} \otimes \hat{\boldsymbol{\nu}}. \quad (\text{IV-1.46})$$

Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώσαμε την παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών* της ελλειψοειδούς γεωμετρίας που χρησιμοποιούνται στην πορεία της εργασίας.

Ολοκληρώνοντας τις βασικές ιδέες του υπό μελέτη συστήματος, οι βασικοί διαφορικοί τελεστές της βάθμωσης ∇ και του Laplace Δ προκύπτουν με απλή αντικατάσταση στις γενικές σχέσεις (I-3.131) και (I-3.138), αντίστοιχα και για τις

* Προσθέτουμε ότι οι εκφράσεις για τον στοιχειώδη όγκο, τις στοιχειώδεις επιφάνειες, τα στοιχειώδη μήκη και την πρώτη θεμελιώδη μορφή σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εξισώσεις (I-3.125), (I-3.126)–(I-3.128), (I-3.129) και (I-3.125α), αντίστοιχα, όπου με απλή αντικατάσταση των χαρακτηριστικών του συστήματος λαμβάνονται οι ελλειψοειδείς εκφράσεις.

γνωστές τιμές $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$ υποθέτουν τις πιο κάτω μορφές για τον διαφορικό τελεστή της βάρθρωσης,

$$\begin{aligned} \nabla &= \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\hat{\rho}}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\mu}}{h_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\hat{\nu}}{h_\nu} \frac{\partial}{\partial \nu} \\ &= \hat{\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &\quad + \hat{\mu} \frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \\ &\quad + \hat{\nu} \frac{\sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \nu^2} \sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \nu}, \end{aligned} \quad (\text{IV-1.47})$$

όπου κάναμε χρήση των σχέσεων (IV-1.31)–(IV-1.33) για τους μετρικούς συντελεστές, ενώ για τον διαφορικό τελεστή του Laplace χρησιμοποιούμε τον ορισμό της Ιακωβειανής (IV-1.34), δηλ.,

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{J_{el}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{J_{el}}{h_\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{J_{el}}{h_\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{J_{el}}{h_\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \left[\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \left[\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \left[\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \left[\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \left[\sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \right] \left[\sqrt{h_3^2 - \nu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-1.48})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \left[(\rho^2 - h_3^2)(\rho^2 - h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho(2\rho^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(\mu^2 - \rho^2)(\mu^2 - \nu^2)} \left[(\mu^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} + \mu(2\mu^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(\nu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \mu^2)} \left[(\nu^2 - h_3^2)(\nu^2 - h_2^2) \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu(2\nu^2 - h_3^2 - h_2^2) \frac{\partial}{\partial \nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV-1.49})$$

Κάθε όρος του τελεστή Δ όπως δίνεται στη μορφή (IV–1.48), είναι γινόμενο ενός αλγεβρικού παράγοντα που φέρει και τις τρεις ελλειψοειδείς συντεταγμένες, συζευγμένες μεταξύ τους, και ενός διαφορικού παράγοντα που εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή και έχει κοινή δομή και στους τρεις όρους.

Η κοινή αυτή δομή στη μορφή (IV–1.48) ενέπνευσε τον ορισμό των “θερμομετρικών παραμέτρων” ξ, η, ζ μέσω των σχέσεων

$$\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad (\text{IV–1.50})$$

$$\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \equiv \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \mu \in (h_3, h_2), \quad (\text{IV–1.51})$$

$$\sqrt{h_3^2 - v^2} \sqrt{h_2^2 - v^2} \frac{\partial}{\partial v} \equiv \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad v \in (-h_3, h_3) \quad (\text{IV–1.52})$$

ή όπως αποδεικνύεται, τον ορισμό τους μέσω των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων (βλέπε Παράρτημα Β)

$$\xi(\rho) = \int_{h_2}^{\rho} \frac{du}{\sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{u^2 - h_2^2}} \quad (\text{IV–1.53})$$

$$\eta(\mu) = \int_{h_3}^{\mu} \frac{du}{\sqrt{u^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - u^2}} \quad (\text{IV–1.54})$$

$$\zeta(v) = \int_0^v \frac{du}{\sqrt{h_3^2 - u^2} \sqrt{h_2^2 - u^2}}. \quad (\text{IV–1.55})$$

Με τη βοήθεια των (IV–1.53)–(IV–1.55), η (IV–1.48) γράφεται

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - v^2)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ & + \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - v^2)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ & + \frac{1}{(\rho^2 - v^2)(\mu^2 - v^2)} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad 0 < v^2 < h_3^2 < \mu^2 < h_2^2 < \rho^2 < +\infty \end{aligned} \quad (\text{IV–1.56})$$

και δίνει τον τελεστή του Laplace σε ελλειψοειδείς – θερμομετρικές συντεταγμένες. Η έκφραση (IV–1.56) διαφέρει από την Καρτεσιανή μορφή του τελεστή του Laplace κατά το ότι οι συντελεστές των παραγώγων δεύτερης τάξης δεν είναι ίσοι μεταξύ τους. Κατά συνέπεια στην εξίσωση (IV–1.56) η ανισοτροπία του ελλειψοειδούς

συστήματος επιβάλλεται μέσω των διαφορετικών συντελεστών των παραγώγων, $\left[(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)\right]^{-1}$, $\left[(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)\right]^{-1}$, $\left[(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)\right]^{-1}$, έτσι ώστε ο τελεστής Δ να δίνεται ως η τροποποιημένη μορφή της αντίστοιχης Καρτεσιανής, που εμφανίζεται όταν ο τελεστής δρα στον πλήρως ισότροπο χώρο. Σημειώνουμε ακόμη ότι οι συντελεστές της (IV-1.56) είναι συναρτήσεις του χώρου αντανακλώντας έτσι την μεταβαλλόμενη σχετική ανισοτροπία του ελλειψοειδούς συστήματος.

IV-1.2 Ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις.

Σε αυτή την παράγραφο παραθέτουμε βασικές σχέσεις από τη θεωρία της φασματικής ανάλυσης του τελεστή του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οι οποίες είναι χρήσιμες στην παρούσα Διατριβή [58].

Έτσι, όπως είδαμε αναλυτικά στο Παράρτημα Β, ο χωρισμός μεταβλητών [36] στην εύρεση των ελλειψοειδών αρμονικών για την εξίσωση του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων οδηγεί στην εξίσωση Lamé [58] για $x \in \mathfrak{B}$,

$$(x^2 - h_3^2)(x^2 - h_2^2)E''(x) + x(2x^2 - h_3^2 - h_2^2)E'(x) + (Ax^2 + B)E(x) = 0 \quad (\text{IV-1.57})$$

για κάθε έναν από τους ξεχωριστούς παράγοντες $E(\rho)$, $E(\mu)$, $E(\nu)$ για $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$ που σχηματίζουν την αρμονική συνάρτηση

$$IE(\rho, \mu, \nu) = E(\rho)E(\mu)E(\nu) \quad (\text{IV-1.58})$$

όπου $A, B \in \mathfrak{B}$ είναι σταθερές και h_2, h_3 είναι οι παράμετροι του ελλειψοειδούς.

Η μόνη διαφορά μεταξύ των συναρτήσεων $E(\rho)$, $E(\mu)$ και $E(\nu)$ είναι ότι η $E(\rho)$ ικανοποιεί την (IV-1.57) στο διάστημα $(h_2, +\infty)$, η $E(\mu)$ στο διάστημα (h_3, h_2) και η $E(\nu)$ στο διάστημα $(-h_3, h_3)$.

Οι σταθερές A και B , όπως αποδείχθηκε στο Παράρτημα Β, συνδέονται με τους θετικούς ακραίους n και m , από τους οποίους, όπως ακριβώς ισχύει και για τις σφαιρικές αρμονικές, ο ακέραιος n καθορίζει το βαθμό και ο m την τάξη, κάθε λύσης της (IV-1.57), δηλαδή κάθε συνάρτησης Lamé E_n^m .

Λόγω φυσικών απαιτήσεων των ροών Stokes, τα πεδία ροής πρέπει να είναι ομαλά στην περιοχή του μηδενός. Άρα, κάθε αρμονική συνάρτηση ομαλή στο μηδέν, ανήκει

στον πυρήνα του διαφορικού τελεστή του Laplace και σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες αυτός ο γραμμικός χώρος, εκφράζεται μέσω των εσωτερικών και εξωτερικών συμπαγών ή χωρικών ελλειψοειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων που θα εξετάσουμε στην συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, για $n = 0, 1, 2, 3$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ η εξίσωση (IV-1.57) έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, μια ομαλή στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων και μια ομαλή στην περιοχή του απείρου. Ειδικά η λύση E_n^m , που είναι ομαλή στο μηδέν, λέγεται συνάρτηση Lamé πρώτου είδους ενώ η λύση F_n^m , που είναι ομαλή στην περιοχή του απείρου, λέγεται συνάρτηση Lamé δευτέρου είδους. Οι εσωτερικές λύσεις $E_n^m(\rho)$ συνδέονται με τις εξωτερικές λύσεις $F_n^m(\rho)$ μέσω της έκφρασης

$$F_n^m(\rho) = (2n+1)E_n^m(\rho)I_n^m(\rho), \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad (\text{IV-1.59})$$

όπου για κάθε $n = 0, 1, 2, 3$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ τα ελλειπτικά ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$ δίνονται από τη σχέση

$$I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{du}{[E_n^m(u)]^2 \sqrt{u^2 - h_2^2} \sqrt{u^2 - h_3^2}}, \quad \rho \in (h_2, +\infty) \quad (\text{IV-1.59})$$

ή κάνοντας τον μετασχηματισμό $y = u^2 - \alpha_1^2$,

$$I_n^m(\rho) = \frac{1}{2} \int_{\rho^2 - \alpha_1^2}^{+\infty} \frac{dy}{[E_n^m(\sqrt{y + \alpha_1^2})]^2 \sqrt{y + \alpha_1^2} \sqrt{y + \alpha_2^2} \sqrt{y + \alpha_3^2}} \quad (\text{IV-1.60})$$

για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$.

Από αυτή τη στιγμή και πέρα όταν θα αναφερόμαστε σε τρισδιάστατα πεδία $\Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ θα εννοούμε τα πεδία εκείνα όπου το διάνυσμα θέσης θα είναι

$$\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) = \{(\rho, \mu, \nu) : \rho \in (h_2, +\infty), \mu \in (h_3, h_2), \nu \in (-h_3, h_3)\} \quad (\text{IV-1.61})$$

ενώ στην επιφάνεια του επιμήκους σφαιροειδούς $\hat{\mathbf{r}} = \partial \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ισχύει

$$\hat{\mathbf{r}} = \{(\mu, \nu) : \mu \in (h_3, h_2), \nu \in (-h_3, h_3)\}. \quad (\text{IV-1.62})$$

Τα γινόμενα Lamé

$$IE_n^m(\mathbf{r}) = E_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{IV-1.63})$$

ορίζουν τις εσωτερικές χωρικές ελλειψοειδείς αρμονικές, ενώ τα γινόμενα Lamé

$$IF_n^m(\mathbf{r}) = F_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu) = (2n+1)IE_n^m(\mathbf{r})I_n^m(\rho), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{IV-1.64})$$

ορίζουν τις εξωτερικές συμπαγείς ελλειψοειδείς αρμονικές. Τότε, λοιπόν, κάθε αρμονική συνάρτηση γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των εσωτερικών και εξωτερικών συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων*.

Οι επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές ορίζονται από τα γινόμενα $E_n^m(\mu)E_n^m(\nu)$ και αποτελούν ένα πλήρες ορθογώνιο σύνολο “γωνιακών” ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια οποιουδήποτε ελλειψοειδούς με εστίες $\pm h_2, \pm h_3$ και $\pm h_1 = \pm\sqrt{h_2^2 - h_3^2}$, οι οποίες εμφανίζονται στην εξίσωση (IV-1.57). Η ορθογωνιότητα των επιφανειακών ελλειψοειδών ορίζεται ως προς τη συνάρτηση βάρους για $\rho = \rho_0 = \text{σταθερό}$

$$l_{\rho_0}(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}} \quad (\text{IV-1.65})$$

στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς $\rho = \rho_0$ και οδηγεί στις σχέσεις

$$\iint_{\rho=\rho_0} E_n^m(\mu)E_n^m(\nu)E_{n'}^{m'}(\mu)E_{n'}^{m'}(\nu)l_{\rho_0}(\mu, \nu)dS = 0, \quad n \neq n', \quad m \neq m' \quad (\text{IV-1.66})$$

και

$$\iint_{\rho=\rho_0} (E_n^m(\mu)E_n^m(\nu))^2 l_{\rho_0}(\mu, \nu)dS = \gamma_n^m, \quad n = n', \quad m = m', \quad (\text{IV-1.67})$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, 2n+1$ και γ_n^m είναι οι σταθερές κανονικοποίησης.

Αν και η συναρτησιακή μορφή των ελλειψοειδών αρμονικών είναι γνωστή, οι τιμές των παραμέτρων που εμπεριέχονται σ' αυτήν, όπως έχουμε ήδη δει στο Παράρτημα Β, δεν μπορούν να εκφραστούν σε κλειστή μορφή συναρτήσεων των ημιαξόνων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ του ελλειψοειδούς, όταν ο βαθμός n είναι μεγαλύτερος από 3. Έτσι, οι αναλυτικές λύσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών που αναφέρονται στο ελλειψοειδές σύστημα, περιορίζονται στον 16-διαστάσεων αρμονικό υπόχωρο που καλύπτεται από τις ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μικροτέρου ή ίσου του τρίτου [58]. Στην παρούσα Διατριβή ο περιορισμός σε ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μικροτέρου ή ίσου του τρίτου έδωσε ικανοποιητικές προσεγγίσεις για τα πεδία ροής.

* Τελικά, μια βαθμωτή συμπαγής ελλειψοειδής αρμονική συνάρτηση u_{el} γράφεται σε πλήρες ανάπτυγμα,

$$u_{el}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\delta_{n,el}^{(i)m} I E_n^m(\mathbf{r}) + \delta_{n,el}^{(e)m} I F_n^m(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \quad (\text{IV-1.63a}) \text{ ή } (\text{IV-1.64a})$$

όπου, φυσικά, η u_{el} μπορεί να είναι και διανυσματική συνάρτηση που τον διανυσματικό χαρακτήρα τον μεταφέρουμε στους σταθερούς συντελεστές.

Έτσι, οι σχέσεις στις οποίες θα αναφερθούμε στη συνέχεια, αφορούν τις ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού μικρότερου ή ίσου του τρίτου.

Οι σταθερές κανονικοποίησης που ενδιαφέρουν είναι αυτές για $n=0,1,2,3$ και τις είδαμε και στο Παράρτημα Β, παράγραφο Β.3. Για $n=3$ δεν υπάρχει συγκεκριμένη βιβλιογραφία, ενώ για $n=0,1,2$ είναι οι εξής,

$$\gamma_0^1 = 4\pi, \quad (\text{IV-1.68})$$

$$\gamma_1^\kappa = \frac{4\pi}{3} \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa^2}, \quad \kappa=1,2,3, \quad (\text{IV-1.69})$$

$$\gamma_2^1 = -\frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda - \alpha_1^2) (\Lambda - \alpha_2^2) (\Lambda - \alpha_3^2), \quad (\text{IV-1.70})$$

$$\gamma_2^2 = \frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda' - \alpha_1^2) (\Lambda' - \alpha_2^2) (\Lambda' - \alpha_3^2), \quad (\text{IV-1.71})$$

$$\gamma_2^{6-\kappa} = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_\kappa^2, \quad \kappa=1,2,3 \quad (\text{IV-1.72})$$

ή αλλάζοντας τον συμβολισμό στην (IV-1.72),

$$\gamma_2^{\kappa+l} = \frac{4\pi}{15} \frac{h_1^4 h_2^4 h_3^4}{h_\kappa^2 h_l^2}, \quad \kappa, l=1,2,3, \quad \kappa \neq l. \quad (\text{IV-1.73})$$

Για $n=3$, χωρίς να υπάρχει η αντίστοιχη δημοσίευση, οι Γ. Δάσιος και Α. Χααραλαμπόπουλος έχουν βρει ότι

$$\gamma_3^1 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_1' - \Lambda_1) (\Lambda_1 - \alpha_1^2) h_2^2 h_3^2 \left[(\Lambda_1 - \alpha_1^2) (h_2^2 + h_3^2) + 2h_2^2 h_3^2 \right], \quad (\text{IV-1.74})$$

$$\gamma_3^2 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_1 - \Lambda_1') (\Lambda_1' - \alpha_1^2) h_2^2 h_3^2 \left[(\Lambda_1' - \alpha_1^2) (h_2^2 + h_3^2) + 2h_2^2 h_3^2 \right], \quad (\text{IV-1.75})$$

$$\gamma_3^3 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_2 - \Lambda_2') (\Lambda_2 - \alpha_2^2) h_1^2 h_3^2 \left[(\Lambda_2 - \alpha_2^2) (h_3^2 - h_1^2) + h_2^2 h_3^2 \right], \quad (\text{IV-1.76})$$

$$\gamma_3^4 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_2' - \Lambda_2) (\Lambda_2' - \alpha_2^2) h_1^2 h_3^2 \left[(\Lambda_2' - \alpha_2^2) (h_3^2 - h_1^2) + h_2^2 h_3^2 \right], \quad (\text{IV-1.77})$$

$$\gamma_3^5 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_3 - \Lambda_3') (\Lambda_3 - \alpha_3^2) h_1^2 h_2^2 \left[(\Lambda_3 - \alpha_3^2) (h_1^2 + h_2^2) + h_2^2 h_3^2 \right], \quad (\text{IV-1.78})$$

$$\gamma_3^6 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_3' - \Lambda_3) (\Lambda_3' - \alpha_3^2) h_1^2 h_2^2 \left[(\Lambda_3' - \alpha_3^2) (h_1^2 + h_2^2) + h_2^2 h_3^2 \right], \quad (\text{IV-1.79})$$

$$\gamma_3^7 = \frac{4\pi}{7 \cdot 15} h_1^4 h_2^4 h_3^4. \quad (\text{IV-1.80})$$

Οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \pm \frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\alpha_i^4 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{\alpha_i^2} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{IV-1.81})$$

ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Lambda - \alpha_i^2} = 0 \quad (\text{IV-1.82})$$

και οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda_\kappa \\ \Lambda'_\kappa \end{matrix} \right\} = \frac{2}{5} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 - \frac{1}{5} \alpha_\kappa^2 \pm \frac{1}{5} \left\{ 4 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^4 - 3 \alpha_\kappa^4 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\alpha_i^2} + \frac{6}{\alpha_\kappa^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (\text{IV-1.83})$$

για $\kappa = 1, 2, 3$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1 + 2\delta_{i\kappa}}{(\Lambda_\kappa - \alpha_i^2)} = 0. \quad (\text{IV-1.84})$$

Για τις πρώτες τρεις τιμές του βαθμού n οι συναρτήσεις $E_n^m(x)$ για $x = \rho, \mu, \nu$ δόθηκαν στο Παράρτημα Β, σχέσεις (B.60)–(B.75). Εδώ θα γράψουμε για πληρότητα αυτές τις τιμές για την ρ μεταβλητή. Πιο αναλυτικά, για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$, αλλά και στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς $\rho = \rho_0$ ισχύει ότι οι ιδιοσυναρτήσεις $E_n^m(\rho)$ για $n = 0, 1, 2, 3$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ είναι

$$E_0^1(\rho) = 1, \quad (\text{IV-1.85})$$

$$E_1^\kappa(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.86})$$

$$E_2^1(\rho) = \rho^2 - \alpha_1^2 + \Lambda, \quad (\text{IV-1.87})$$

$$E_2^2(\rho) = \rho^2 - \alpha_1^2 + \Lambda', \quad (\text{IV-1.88})$$

$$E_2^{6-\kappa}(\rho) = \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}}, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-1.89})$$

ή αλλάζοντας, πάλι, τον συμβολισμό στην (IV-1.89),

$$E_2^{\kappa+l}(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2} \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_l^2}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-1.90})$$

$$E_3^{2\kappa-1}(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2} (\rho^2 - \alpha_1^2 + \Lambda_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.91})$$

$$E_3^{2\kappa}(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2} (\rho^2 - \alpha_1^2 + \Lambda'_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.92})$$

$$E_3^7(\rho) = \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}. \quad (\text{IV-1.93})$$

Εύκολα για τις παραγώγους παίρνουμε παρόμοιες σχέσεις,

$$E_0^{1'}(\rho) = 0, \quad (\text{IV-1.94})$$

$$E_1^{\kappa'}(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.95})$$

$$E_2^{1'}(\rho) = E_2^{2'}(\rho) = 2\rho, \quad (\text{IV-1.96})$$

$$E_2^{6-\kappa'}(\rho) = \frac{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \left[2(\rho^2 - \alpha_1^2) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 - \alpha_\kappa^2 \right], \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-1.97})$$

ή αλλιάζοντας, πάλι, τον συμβολισμό στην (IV-1.97),

$$E_2^{\kappa+l'}(\rho) = \rho \left[\frac{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_l^2}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}} + \frac{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_l^2}} \right], \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-1.98})$$

$$E_3^{2\kappa-1'}(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}} \left[3(\rho^2 - \alpha_1^2) + \Lambda_\kappa + 2\alpha_\kappa^2 \right], \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.99})$$

$$E_3^{2\kappa'}(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}} \left[3(\rho^2 - \alpha_1^2) + \Lambda'_\kappa + 2\alpha_\kappa^2 \right], \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.100})$$

$$E_3^{7'}(\rho) = \frac{\rho^2 (3\rho^2 - 2h_3^2 - 2h_2^2) + h_2^2 h_3^2}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}. \quad (\text{IV-1.101})$$

Στην επιφάνεια του ίδιου σταθερού ελλειψοειδούς, η παράγωγος των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων (IV-1.59) για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ (στην περίπτωση μας $n = 0, 1, 2, 3$) και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ δίνεται από την

$$\frac{d}{d\rho} I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} 0 du + 0 - \frac{d\rho}{d\rho} \frac{1}{[E_n^m(\rho)]^2 \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \quad (\text{IV-1.102})$$

ή προχωρώντας,

$$I_n^{m'}(\rho) = - \frac{1}{[E_n^m(\rho)]^2 \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}, \quad \rho \in (h_2, +\infty) \quad (\text{IV-1.103})$$

και οπότε με απλούς υπολογισμούς στην (IV-1.59) καταλήγουμε στην σχέση

$$F_n^{m'}(\rho) = (2n+1) \left[E_n^{m'}(\rho) I_n^m(\rho) - \frac{1}{(E_n^m(\rho)) \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \right], \quad (\text{IV-1.104})$$

όπου τα $E_n^{m'}(\rho)$ για τις τιμές του βαθμού που μας ενδιαφέρουν, δηλ., $n = 0, 1, 2, 3$ και τάξη $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ δίνονται από τις εκφράσεις (IV-1.94)–(IV-1.101), ενώ τα

$E_n^m(\rho)$ για τις ίδιες τιμές των n και m που χρειαζόμαστε στην παρούσα εργασία δηλώνονται από τις σχέσεις (IV-1.85)–(IV-1.93). Φυσικά, όλες οι πιο πάνω σχέσεις ισχύουν για κάθε τιμή της “ακτινικής” μεταβλητής στην επιφάνεια $\rho = \rho_0$.

Τις περισσότερες φορές, στα διάφορα προβλήματα, οι συμπαγείς ελλειψοειδείς συναρτήσεις δεν χρησιμοποιούνται στην ελλειψοειδή μορφή τους αλλά στη Καρτεσιανή τους αναπαράσταση. Συνεπώς, για κάθε βαθμό $n=0,1,2,3$ και τάξη $m=1,2,\dots,2n+1$, στην εξέλιξη της παρούσας Διατριβής, κάναμε εκτεταμένη χρήση των παρακάτω εκφράσεων των εσωτερικών συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών σε Καρτεσιανές συντεταγμένες [58],

$$IE_0^1(\mathbf{r}) = 1 \quad (\text{IV-1.105})$$

$$IE_1^\kappa(\mathbf{r}) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\kappa} x_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.106})$$

$$IE_2^1(\mathbf{r}) = (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\Lambda - \alpha_i^2} + 1 \right] \equiv IE_2^1(\Lambda), \quad (\text{IV-1.107})$$

$$IE_2^2(\mathbf{r}) = IE_2^1(\Lambda'), \quad (\text{IV-1.108})$$

$$IE_2^{6-\kappa}(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3 h_\kappa \frac{x_1 x_2 x_3}{x_\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-1.109})$$

και με διαφορετικό συμβολισμό,

$$IE_2^{\kappa+l}(\mathbf{r}) = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa h_l} x_\kappa x_l, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-1.110})$$

$$IE_3^{2\kappa-1}(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3 (\Lambda_\kappa - \alpha_1^2)(\Lambda_\kappa - \alpha_2^2)(\Lambda_\kappa - \alpha_3^2) \frac{x_\kappa}{h_\kappa} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\Lambda_\kappa - \alpha_i^2} + 1 \right] \\ \equiv IE_3^{2\kappa-1}(\Lambda_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.111})$$

$$IE_3^{2\kappa}(\mathbf{r}) = IE_3^{2\kappa-1}(\Lambda'_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.112})$$

$$IE_3^7(\mathbf{r}) = h_1^2 h_2^2 h_3^2 x_1 x_2 x_3, \quad (\text{IV-1.113})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{8}^3)$. Τα Καρτεσιανά μονώνυμα βαθμού μικρότερου ή ίσου του τρίτου εκφράζονται, μέσω των παραπάνω σχέσεων (IV-1.105)–(IV-1.113), συναρτήσει ελλειψοειδών αρμονικών μέσα από τις εκφράσεις

$$1 = IE_0^1(\mathbf{r}) = E_0^1(\rho) E_0^1(\mu) E_0^1(v) \quad (\text{IV-1.114})$$

$$x_\kappa = \frac{h_\kappa}{h_1 h_2 h_3} IE_1^\kappa(\mathbf{r}) = \frac{h_\kappa}{h_1 h_2 h_3} E_1^\kappa(\rho) E_1^\kappa(\mu) E_1^\kappa(v), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.115})$$

$$x_\kappa^2 = \frac{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}{3} \left[1 - \frac{E_2^1(\mu)E_2^1(\nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_\kappa^2)} + \frac{E_2^2(\mu)E_2^2(\nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)} \right], \quad (\text{IV-1.116})$$

$$\begin{aligned} \frac{x_1 x_2 x_3}{x_\kappa} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_\kappa} I E_2^{6-\kappa}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_\kappa} E_2^{6-\kappa}(\rho) E_2^{6-\kappa}(\mu) E_2^{6-\kappa}(\nu), \quad \kappa = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{IV-1.117})$$

και με διαφορετικό συμβολισμό,

$$\begin{aligned} x_\kappa x_l &= \frac{h_\kappa h_l}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} I E_2^{\kappa+l}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{h_\kappa h_l}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} E_2^{\kappa+l}(\rho) E_2^{\kappa+l}(\mu) E_2^{\kappa+l}(\nu), \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \end{aligned} \quad (\text{IV-1.118})$$

$$\begin{aligned} x_\kappa x_l^2 &= \frac{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2} (\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_l^2) h_\kappa}{5 h_1 h_2 h_3} \left\{ (1 + 2\delta_{\kappa l}) E_1^\kappa(\mu) E_1^\kappa(\nu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{5(-1)^l h_l^2}{h_1^2 h_2^2 h_3^2 (\Lambda_\kappa - \Lambda'_\kappa)} \left[(\Lambda'_\kappa - \alpha_l^2) E_3^{2\kappa-1}(\mu) E_3^{2\kappa-1}(\nu) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\Lambda_\kappa - \alpha_l^2) E_3^{2\kappa}(\mu) E_3^{2\kappa}(\nu) \right] \right\}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (\text{IV-1.119})$$

(IV-1.120)

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} I E_3^7(\mathbf{r}) = \frac{1}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} E_3^7(\rho) E_3^7(\mu) E_3^7(\nu), \quad (\text{IV-1.121})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ και $\delta_{\kappa l}$, $\kappa, l = 1, 2, 3$ είναι το δέλτα του Kronecker. Οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} x_\kappa^2 - x_l^2 &= \frac{\alpha_l^2 - \alpha_\kappa^2}{3} - \frac{I E_2^1(\mathbf{r})}{3(\Lambda - \Lambda')} \left[\frac{1}{\Lambda - \alpha_l^2} - \frac{1}{\Lambda - \alpha_\kappa^2} \right] \\ &\quad + \frac{I E_2^2(\mathbf{r})}{3(\Lambda - \Lambda')} \left[\frac{1}{\Lambda' - \alpha_l^2} - \frac{1}{\Lambda' - \alpha_\kappa^2} \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{IV-1.122})$$

για κάθε $\kappa, l = 1, 2, 3$, είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Σχετικά με τα ελλειπτικά ολοκληρώματα $I_n^m(\rho)$ που εμφανίζονται στις εξωτερικές χωρικές ελλειψοειδείς αρμονικές $I F_n^m$, $n \leq 3$, $m = 1, 2, \dots, 2n+1$, αναφερόμαστε στις ακόλουθες σχέσεις που συνδέουν μεταξύ τους,

$$\sum_{i=1}^3 I_1^i(\rho) = \frac{1}{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} = \frac{1}{E_3^7(\rho)}, \quad (\text{IV-1.123})$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i I_1^i(\rho) = I_0^1(\rho) - \frac{\rho^2 - \alpha_1^2}{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}, \quad (\text{IV-1.124})$$

$$I_2^1(\rho) = \frac{1}{2(\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2) \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{I_1^i(\rho)}{\Lambda - \alpha_i^2}, \quad (\text{IV-1.125})$$

$$I_2^2(\rho) = \frac{1}{2(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2) \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{I_1^i(\rho)}{\Lambda' - \alpha_i^2}, \quad (\text{IV-1.126})$$

$$I_2^{\kappa+l}(\rho) = \frac{I_1^l(\rho) - I_1^\kappa(\rho)}{\alpha_\kappa^2 - \alpha_l^2}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-1.127})$$

$$I_3^7(\rho) = \frac{1}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} h_i^2 I_1^i(\rho) = \frac{1}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} \alpha_i^2 h_i^2 I_2^{6-i}(\rho) \quad (\text{IV-1.128})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{I_1^i(\rho)}{(\Lambda - \alpha_i^2)(\Lambda' - \alpha_i^2)} = 3I_3^7(\rho), \quad (\text{IV-1.129})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2 I_1^i(\rho)}{(\Lambda - \alpha_i^2)(\Lambda' - \alpha_i^2)} &= \frac{3}{h_1^2} [I_1^2(\rho) - I_1^3(\rho)] + 3\alpha_1^2 I_3^7(\rho) \\ &= -3I_2^5(\rho) + 3\alpha_1^2 I_3^7(\rho), \end{aligned} \quad (\text{IV-1.130})$$

$$\begin{aligned} [\alpha_l^2 I_1^\kappa(\rho) + \alpha_\kappa^2 I_1^l(\rho)] &= [\alpha_l^2 I_1^l(\rho) + \alpha_\kappa^2 I_1^\kappa(\rho)] \\ &+ (\alpha_l^2 - \alpha_\kappa^2)^2 I_2^{\kappa+l}(\rho), \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \end{aligned} \quad (\text{IV-1.131})$$

$$\sum_{i=1}^3 (-1)^i h_i^2 I_2^{6-i}(\rho) = 0 \quad (\text{IV-1.132})$$

για κάθε τιμή του διαστήματος $\rho \in (h_2, +\infty)$. Οι αποδείξεις των σχέσεων αυτών αποτελούν ένα μακροσκελές εγχείρημα επίπονων, αλλά ως επί το πλείστον ευθέων, αλγεβρικών και αναλυτικών χειρισμών, μεταξύ των ολοκληρωμάτων (IV-1.59) που ορίζουν τα $I_n^m(\rho)$, $\rho \in (h_2, +\infty)$, $n = 0, 1, 2, 3$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$. Σχέσεις που να αφορούν τα ελλειπτικά ολοκληρώματα τρίτου βαθμού, $I_3^{2\kappa-1}(\rho)$ και $I_3^{2\kappa}(\rho)$ για $\kappa = 1, 2, 3$, $\rho \in (h_2, +\infty)$, δεν υπάρχουν και δεν είναι απαραίτητα στην παρουσίαση αυτής της Διατριβής. Αυτό που στην ουσία δείχνουν οι (IV-1.123)–(IV-1.132) είναι ότι μεταξύ των δέκα ολοκληρωμάτων $I_n^m(\rho)$ με $n \leq 2$ και $I_3^7(\rho)$, $\rho \in (h_2, +\infty)$, μόνον

δύο είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Για παράδειγμα, εάν τα I_0^1 και I_3^7 είναι γνωστά, τα άλλα οχτώ ολοκληρώματα μπορούν να εκφραστούν μέσω των σχέσεων (IV-1.123)–(IV-1.132), συναρτήσει αυτών των δύο. Φυσικά, όλες οι πιο πάνω σχέσεις ισχύουν για κάθε τιμή της “ακτινικής” μεταβλητής στην επιφάνεια $\rho = \rho_0$.

Στη συνέχεια, παραθέτουμε και τις πιο χρήσιμες, για την παρούσα Διατριβή, από τις σχέσεις που συνδέουν τις σταθερές Λ , Λ' , τους ημιιάξονες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και τις ημιοστικές αποστάσεις h_1 , h_2 και h_3 του ελλειψοειδούς και άρα,

$$\Lambda + \Lambda' = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2, \quad (\text{IV-1.133})$$

$$\Lambda - \Lambda' = \frac{2}{3} \sqrt{h_1^4 + h_2^2 h_3^2}, \quad (\text{IV-1.134})$$

$$\Lambda \Lambda' = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\alpha_i^2} \quad (\text{IV-1.135})$$

καθώς επίσης,

$$\sum_{i=1}^3 (-1)^i (\Lambda - \alpha_i^2) h_i^2 = \sum_{i=1}^3 (-1)^i (\Lambda' - \alpha_i^2) h_i^2 = 0, \quad (\text{IV-1.136})$$

$$\sum_{i=1}^3 (-1)^i (\Lambda - \alpha_i^2) h_i^2 \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^3 (-1)^i (\Lambda' - \alpha_i^2) h_i^2 \alpha_i^2 = h_1^2 h_2^2 h_3^2, \quad (\text{IV-1.137})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{\Lambda - \alpha_i^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{\Lambda' - \alpha_i^2} = -3 \quad (\text{IV-1.138})$$

και αναφέροντας τον πιο σημαντικό τύπο,

$$(\Lambda - \alpha_\kappa^2)(\Lambda' - \alpha_\kappa^2) = \frac{(-1)^{\kappa+1} h_1^2 h_2^2 h_3^2}{3 h_\kappa^2}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.139})$$

συνεχίζουμε,

$$\frac{3}{2}(\Lambda - \Lambda') - 3(\Lambda - \alpha_1^2) = -\frac{3}{2}(\Lambda - \Lambda') - 3(\Lambda' - \alpha_1^2) = h_2^2 + h_3^2, \quad (\text{IV-1.140})$$

$$(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2) + (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_3^2) + (\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) = 0, \quad (\text{IV-1.141})$$

$$(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2) + (\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) + (\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) = 0. \quad (\text{IV-1.142})$$

Προχωράμε σε δευτερεύουσας σημασίας τύπους,

$$\frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{(\Lambda - \alpha_\kappa^2)} = (-1)^{\kappa+1} \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{3 h_\kappa^2} - \frac{(\Lambda - \alpha_\kappa^2)(\Lambda - \Lambda')}{2}, \quad (\text{IV-1.143})$$

$$\frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)} = (-1)^{\kappa+1} \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{3h_\kappa^2} + \frac{(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)(\Lambda - \Lambda')}{2} \quad (\text{IV-1.144})$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, 3$, ενώ

$$\frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{(\Lambda - \alpha_\kappa^2)(\Lambda - \alpha_l^2)} = \alpha_\kappa^2 + \alpha_l^2 - \frac{\Lambda + 3\Lambda'}{2} + 3(\Lambda' - \alpha_l^2)\delta_{\kappa l}, \quad (\text{IV-1.145})$$

$$\frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)(\Lambda' - \alpha_l^2)} = \alpha_\kappa^2 + \alpha_l^2 - \frac{3\Lambda + \Lambda'}{2} + 3(\Lambda - \alpha_l^2)\delta_{\kappa l}, \quad (\text{IV-1.146})$$

όπου $\delta_{\kappa l}$, $\kappa, l = 1, 2, 3$ είναι το δέλτα του Kronecker και συνεχίζοντας,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^4}{\Lambda - \alpha_i^2} = -\frac{3}{2}(3\Lambda + \Lambda'), \quad (\text{IV-1.147})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^4}{\Lambda' - \alpha_i^2} = -\frac{3}{2}(3\Lambda' + \Lambda), \quad (\text{IV-1.148})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^4}{(\Lambda - \alpha_i^2)^2} = 3 - 3 \frac{\Lambda^2(\Lambda - \Lambda')}{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}, \quad (\text{IV-1.149})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^4}{(\Lambda' - \alpha_i^2)^2} = 3 + 3 \frac{\Lambda^2(\Lambda - \Lambda')}{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)} \quad (\text{IV-1.150})$$

και εύκολα προκύπτει

$$\sum_{i=1}^3 \left[\frac{\alpha_i^4}{\Lambda - \alpha_i^2} - \frac{\alpha_i^4}{\Lambda' - \alpha_i^2} \right] = -3(\Lambda - \Lambda'). \quad (\text{IV-1.151})$$

Στη συνέχεια,

$$2 \left[\frac{\alpha_2^2}{\Lambda - \alpha_1^2} + \frac{\alpha_3^2}{\Lambda - \alpha_2^2} + \frac{\alpha_1^2}{\Lambda - \alpha_3^2} \right] = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)} + 3, \quad (\text{IV-1.152})$$

$$2 \left[\frac{\alpha_2^2}{\Lambda' - \alpha_1^2} + \frac{\alpha_3^2}{\Lambda' - \alpha_2^2} + \frac{\alpha_1^2}{\Lambda' - \alpha_3^2} \right] = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)} + 3, \quad (\text{IV-1.153})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{(\Lambda - \alpha_i^2)^2} = \Lambda \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\Lambda - \alpha_i^2)^2} = -\frac{3\Lambda(\Lambda - \Lambda')}{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}, \quad (\text{IV-1.154})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{(\Lambda' - \alpha_i^2)^2} = \Lambda' \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\Lambda' - \alpha_i^2)^2} = \frac{3\Lambda'(\Lambda - \Lambda')}{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}, \quad (\text{IV-1.155})$$

όπως επίσης,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(-1)^{i+1} h_i^2}{\Lambda - \alpha_i^2} = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}, \quad (\text{IV-1.156})$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(-1)^{i+1} h_i^2}{\Lambda' - \alpha_i^2} = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)} \quad (\text{IV-1.157})$$

και

$$-\frac{h_2^2}{\Lambda - \alpha_1^2} - \frac{h_1^2}{\Lambda - \alpha_2^2} = \frac{h_3^2}{\Lambda - \alpha_2^2} + \frac{h_2^2}{\Lambda - \alpha_3^2} = \frac{h_1^2}{\Lambda - \alpha_3^2} - \frac{h_3^2}{\Lambda - \alpha_1^2} = 3, \quad (\text{IV-1.158})$$

$$-\frac{h_2^2}{\Lambda' - \alpha_1^2} - \frac{h_1^2}{\Lambda' - \alpha_2^2} = \frac{h_3^2}{\Lambda' - \alpha_2^2} + \frac{h_2^2}{\Lambda' - \alpha_3^2} = \frac{h_1^2}{\Lambda' - \alpha_3^2} - \frac{h_3^2}{\Lambda' - \alpha_1^2} = 3, \quad (\text{IV-1.159})$$

$$\frac{-h_2^2 - h_3^2}{\Lambda - \alpha_1^2} + \frac{-h_1^2 + h_3^2}{\Lambda - \alpha_2^2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{\Lambda - \alpha_3^2} = \frac{-h_2^2 - h_3^2}{\Lambda' - \alpha_1^2} + \frac{-h_1^2 + h_3^2}{\Lambda' - \alpha_2^2} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{\Lambda' - \alpha_3^2} = 9. \quad (\text{IV-1.160})$$

Επισημαίνουμε δύο χρήσιμους τύπους,

$$(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) - (\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) = -\frac{1}{2}(\Lambda - \Lambda')^3, \quad (\text{IV-1.161})$$

$$\left[(\Lambda - \alpha_2^2) + (\Lambda - \alpha_3^2) \right] \left[(\Lambda' - \alpha_2^2) + (\Lambda' - \alpha_3^2) \right] = -\frac{h_1^4}{3}. \quad (\text{IV-1.162})$$

Τελειώνοντας, παραθέτουμε τις πιο κάτω απλές σχέσεις μεταξύ των ημισυνιστικών αποστάσεων και των αξόνων ενός ελλειψοειδούς, δηλ.,

$$\alpha_1^2 h_1^2 - \alpha_2^2 h_2^2 + \alpha_3^2 h_3^2 = 0, \quad (\text{IV-1.163})$$

$$\alpha_1^2 h_1^2 (h_2^2 + h_3^2) - \alpha_2^2 h_2^4 + \alpha_3^2 h_3^4 = h_1^2 h_2^2 h_3^2, \quad (\text{IV-1.164})$$

$$\alpha_1^4 h_1^2 - \alpha_2^4 h_2^2 + \alpha_3^4 h_3^2 = h_1^2 h_2^2 h_3^2, \quad (\text{IV-1.165})$$

$$h_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 - \alpha_1^2 h_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 h_3^2 = h_1^2 h_2^2 h_3^2, \quad (\text{IV-1.166})$$

$$(\alpha_1^4 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2^4) + (\alpha_2^4 \alpha_3^2 - \alpha_2^2 \alpha_3^4) + (\alpha_3^4 \alpha_1^2 - \alpha_3^2 \alpha_1^4) = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \quad (\text{IV-1.167})$$

και, φυσικά, τις αυτονόητες εκφράσεις

$$h_1^2 - h_2^2 + h_3^2 = 0, \quad (\text{IV-1.168})$$

$$h_l h_{\kappa} h_{6-(\kappa+l)} = h_1 h_2 h_3, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l. \quad (\text{IV-1.169})$$

Σε αυτό το σημείο συμπληρώνουμε την παραπάνω παράθεση τύπων με ένα ζεύγος εξίσου σημαντικών τύπων σύνδεσης των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του ελλειψοειδούς με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες, πράγμα που θα χρησιμεύσει στις οριακές διαδικασίες που θα δούμε αργότερα. Πιο αναλυτικά, έχουμε

$$(\alpha_k^2 - \alpha_l^2)(\Lambda - \alpha_s^2) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\Lambda - \alpha_i^2} = 3(\Lambda' - \alpha_k^2)x_k^2 - 3(\Lambda' - \alpha_l^2)x_l^2 + (\alpha_k^2 - \alpha_l^2)\|\mathbf{r}\|^2, \quad (\text{IV-1.170})$$

$$(\alpha_k^2 - \alpha_l^2)(\Lambda' - \alpha_s^2) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\Lambda' - \alpha_i^2} = 3(\Lambda - \alpha_k^2)x_k^2 - 3(\Lambda - \alpha_l^2)x_l^2 + (\alpha_k^2 - \alpha_l^2)\|\mathbf{r}\|^2, \quad (\text{IV-1.171})$$

όπου $\kappa, l, s = 1, 2, 3$ και $\kappa \neq l, \kappa \neq s, l \neq s$.

Υπάρχουν παραπλήσιες σχέσεις με τις παραπάνω που να αφορούν τις σταθερές Λ_κ και Λ'_κ για $\kappa = 1, 2, 3$, αλλά δεν χρησιμοποιήθηκαν τέτοιου είδους σχέσεις στην συγκεκριμένη Διατριβή και ούτε είναι απαραίτητο να γραφούν εδώ. Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώσαμε την μελέτη των ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ και κυρίως αυτών με βαθμό μικρότερου ή ίσου του τρίτου, $n \leq 3$.

Ο τελεστής της βάθμωσης ∇ στις συμπαγείς ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις.

Στη συνέχεια, όπως και στα Κεφάλαια II-1 και III-1, παραθέτουμε σχέσεις που εκφράζουν τις κλίσεις των ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων επίσης ελλειψοειδών αρμονικών, ώστε να ισχύει η ταυτότητα (A.50) του Παραρτήματος A, δηλ.,

$$\Delta(\nabla u_{el}(\mathbf{r})) = \nabla(\Delta u_{el}(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{E}^3) \quad (\text{IV-1.172})$$

για πεδία ομαλά, χωρίς ιδιομορφίες, όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$, ενώ παραμένουμε στις πρώτες τιμές του βαθμού (που αντιστοιχεί στους πρώτους όρους) οι οποίες και δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα για τα περισσότερα προβλήματα, όχι μόνο στον τομέα της Ρευστομηχανικής, αλλά και σε άλλους τομείς (Ακουστική, Ηλεκτρομαγνητισμό και Ελαστικότητα). Επομένως, ότι υπολογίζουμε από σε αυτή την παράγραφο θα αναφέρεται σε βαθμό ελλειψοειδών αρμονικών μέχρι τρία, δηλαδή, $n = 0, 1, 2, 3$ και τάξη $m = 1, 2, \dots, 2n+1$, άρα δεκαέξι ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις. Με απευθείας υπολογισμούς, για την εύρεση των ∇IE_n^m , αποδεικνύεται ότι

$$\nabla IE_0^1(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (\text{IV-1.173})$$

$$\nabla IE_1^\kappa(\mathbf{r}) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\kappa} \hat{\mathbf{x}}_\kappa = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\kappa} IE_0^1(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.174})$$

$$\begin{aligned} \nabla IE_2^1(\mathbf{r}) &= 2(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{\mathbf{x}}_i}{\Lambda - \alpha_i^2} \\ &= 2 \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{h_i}{\Lambda - \alpha_i^2} IE_1^i(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i \equiv \nabla IE_2^1(\Lambda), \quad (\text{IV-1.175}) \end{aligned}$$

$$\nabla IE_2^2(\mathbf{r}) = \nabla IE_2^1(\Lambda'), \quad (\text{IV-1.176})$$

$$\begin{aligned} \nabla IE_2^{6-\kappa}(\mathbf{r}) &= h_1 h_2 h_3 h_\kappa \sum_{i=1}^3 (1 - \delta_{\kappa i}) \frac{x_1 x_2 x_3}{x_\kappa x_i} \hat{\mathbf{x}}_i \\ &= h_1 h_2 h_3 \sum_{i=1}^3 \frac{(1 - \delta_{\kappa i})}{h_i} IE_1^{6-(\kappa+i)}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.177}) \end{aligned}$$

όπου $\delta_{\kappa l}$, $\kappa, l = 1, 2, 3$ είναι το δέλτα του Kronecker και με διαφορετικό συμβολισμό,

$$\begin{aligned} \nabla IE_2^{\kappa+l}(\mathbf{r}) &= \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa h_l} (x_\kappa \hat{\mathbf{x}}_l + x_l \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \\ &= h_1 h_2 h_3 \left(\frac{1}{h_l} IE_1^\kappa(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_l + \frac{1}{h_\kappa} IE_1^l(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_\kappa \right), \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-1.178}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla IE_3^{2\kappa-1}(\mathbf{r}) &= \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\kappa} (\Lambda_\kappa - \alpha_1^2)(\Lambda_\kappa - \alpha_2^2)(\Lambda_\kappa - \alpha_3^2) \left[\hat{\mathbf{x}}_\kappa \left(\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\Lambda_\kappa - \alpha_i^2} + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2x_\kappa \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{\mathbf{x}}_i}{\Lambda_\kappa - \alpha_i^2} \right] \equiv \nabla IE_3^{2\kappa-1}(\Lambda_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.179}) \end{aligned}$$

$$\nabla IE_3^{2\kappa}(\mathbf{r}) = \nabla IE_3^{2\kappa-1}(\Lambda'_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.180})$$

$$\nabla IE_3^7(\mathbf{r}) = h_1^2 h_2^2 h_3^2 \sum_{i=1}^3 \frac{x_1 x_2 x_3}{x_i} \hat{\mathbf{x}}_i = h_1 h_2 h_3 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} IE_2^{6-i}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (\text{IV-1.181})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ και $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, 3$ είναι η Καρτεσιανή ορθοκανονική βάση. Στον υπολογισμό των βαθμώσεων των ελλειψοειδών αρμονικών τρίτου βαθμού και τάξης $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, στις σχέσεις (IV-1.179) και (IV-1.180) δεν γράφτηκαν συναρτήσεις ελλειψοειδών αρμονικών διότι πέρα από το γεγονός ότι είναι δύσχρηστες, δεν χρησιμοποιούνται παρά μόνο με τη μορφή που δόθηκαν σε αυτές τις σχέσεις.

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (IV-1.173)–(IV-1.181) για να υπολογίσουμε τη “διπλή” κλίση των εσωτερικών συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών και με απλή άλγεβρα λαμβάνουμε,

$$\nabla \otimes \nabla IE_0^1(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{0}} \quad (\text{IV-1.182})$$

$$\nabla \otimes \nabla IE_1^\kappa(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{0}}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.183})$$

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla IE_2^1(\mathbf{r}) &= 2(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\Lambda - \alpha_i^2} \\ &= 2(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) IE_0^1(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\Lambda - \alpha_i^2} \\ &\equiv \nabla \otimes \nabla IE_2^1(\Lambda), \end{aligned} \quad (\text{IV-1.184})$$

$$\nabla \otimes \nabla IE_2^2(\mathbf{r}) = \nabla \otimes \nabla IE_2^1(\Lambda'), \quad (\text{IV-1.185})$$

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla IE_2^{6-\kappa}(\mathbf{r}) &= h_1 h_2 h_3 h_\kappa \sum_{i=1}^3 (1 - \delta_{\kappa i}) (\hat{\mathbf{x}}_{6-(\kappa+i)} \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \\ &= h_1 h_2 h_3 h_\kappa IE_0^1(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^3 (1 - \delta_{\kappa i}) (\hat{\mathbf{x}}_{6-(\kappa+i)} \otimes \hat{\mathbf{x}}_i), \quad \kappa = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{IV-1.186})$$

και με διαφορετικό συμβολισμό για κάθε $\kappa, l = 1, 2, 3$ και $\kappa \neq l$,

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla IE_2^{\kappa+l}(\mathbf{r}) &= \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa h_l} (\hat{\mathbf{x}}_\kappa \otimes \hat{\mathbf{x}}_l + \hat{\mathbf{x}}_l \otimes \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \\ &= \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa h_l} IE_0^1(\mathbf{r}) (\hat{\mathbf{x}}_\kappa \otimes \hat{\mathbf{x}}_l + \hat{\mathbf{x}}_l \otimes \hat{\mathbf{x}}_\kappa), \end{aligned} \quad (\text{IV-1.187})$$

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla IE_3^{2\kappa-1}(\mathbf{r}) &= \frac{2h_1 h_2 h_3}{h_\kappa} (\Lambda_\kappa - \alpha_1^2)(\Lambda_\kappa - \alpha_2^2)(\Lambda_\kappa - \alpha_3^2) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{x_\kappa}{\Lambda_\kappa - \alpha_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{\Lambda_\kappa - \alpha_i^2} (\hat{\mathbf{x}}_\kappa \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \right] \\ &= \frac{2}{h_\kappa} (\Lambda_\kappa - \alpha_1^2)(\Lambda_\kappa - \alpha_2^2)(\Lambda_\kappa - \alpha_3^2) \left[h_\kappa IE_1^\kappa(\mathbf{r}) \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\Lambda_\kappa - \alpha_i^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{h_i IE_1^i(\mathbf{r})}{\Lambda_\kappa - \alpha_i^2} (\hat{\mathbf{x}}_\kappa \otimes \hat{\mathbf{x}}_i + \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \right] \\ &\equiv \nabla \otimes \nabla IE_3^{2\kappa-1}(\Lambda_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (\text{IV-1.188})$$

$$\nabla \otimes \nabla IE_3^{2\kappa}(\mathbf{r}) = \nabla \otimes \nabla IE_3^{2\kappa-1}(\Lambda'_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.189})$$

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla IE_3^7(\mathbf{r}) &= h_1^2 h_2^2 h_3^2 \sum_{i,j=1}^3 (1 - \delta_{ij}) \frac{x_i x_2 x_3}{x_i x_j} (\hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i) \\ &= h_1^2 h_2^2 h_3^2 \sum_{i,j=1}^3 (1 - \delta_{ij}) \frac{\hat{\mathbf{x}}_j \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{h_i h_j} IE_1^{6-(i+j)}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{IV-1.190})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ και $\delta_{\kappa l}$, $\kappa, l=1,2,3$ είναι το δέλτα του Kronecker. Στις εκφράσεις (IV-1.110), (IV-1.178) και (IV-1.187) που υιοθετείται ο συμβολισμός $\kappa, l=1,2,3$ με $\kappa \neq l$, πρέπει να προσεχθεί η χρήση του σε σειρά, όπου όταν αθροίζουμε σε $i, j=1,2,3$ με $i \neq j$, παίρνουμε τα αποτελέσματα δύο φορές!.

Δυστυχώς, δεν είναι εφικτή η εύρεση παρόμοιων εκφράσεων Καρτεσιανής μορφής για τις κλίσεις των εξωτερικών συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων, γεγονός που οφείλεται στην ύπαρξη των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων στη γενική σχέση (IV-1.64). Αν πάρουμε τη βάρμωση σε αυτή τη σχέση προκύπτει ότι για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$, $\rho \in (h_2, +\infty)$ και $n=0,1,2,\dots$, $m=1,2,\dots,2n+1$

$$\begin{aligned} \nabla I_n^m(\mathbf{r}) &= (2n+1) \nabla (I_n^m(\mathbf{r}) I_n^m(\rho)) \\ &= (2n+1) \left[(\nabla I_n^m(\mathbf{r})) I_n^m(\rho) + (\nabla I_n^m(\rho)) I_n^m(\mathbf{r}) \right] \\ &= (2n+1) \left[(\nabla I_n^m(\mathbf{r})) I_n^m(\rho) + I_n^m(\mathbf{r}) \frac{\hat{\rho}}{h_\rho} I_n^{m'}(\rho) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-1.191})$$

και σε συνδυασμό με την σχέση (IV-1.103) και τον ορισμό (IV-1.31), η (IV-1.191) συνεπάγεται

$$\nabla I_n^m(\mathbf{r}) = (2n+1) \left[(\nabla I_n^m(\mathbf{r})) I_n^m(\rho) - I_n^m(\mathbf{r}) \frac{\hat{\rho}}{h_\rho} \frac{1}{[E_n^m(\rho)]^2 \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \right]$$

με

$$h_\rho = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3), \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad (\text{IV-1.192})$$

από όπου

$$\nabla I_n^m(\mathbf{r}) = (2n+1) \left[I_n^m(\rho) (\nabla I_n^m(\mathbf{r})) - \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \frac{I_n^m(\mathbf{r})}{[E_n^m(\rho)]^2} \right] \quad (\text{IV-1.193})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3)$ και $\rho \in (h_2, +\infty)$, όπου η μορφή (IV-1.193) ισχύει για βαθμό $n=0,1,2,\dots$ (στην περίπτωσή μας $n=0,1,2,3$) και τάξη $m=1,2,\dots,2n+1$ των εξωτερικών συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων. Για τις τιμές του βαθμού που έχουμε πληροφορία και μας ενδιαφέρει, δηλ., $n \leq 3$, τα I_n^m και ∇I_n^m δίνονται από τις εκφράσεις (IV-1.105)–(IV-1.113) και (IV-1.173)–(IV-1.181),

αντίστοιχα. Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα I_n^m ικανοποιούν την εξίσωση (IV-1.59) ή την (IV-1.60), αλλά σχεδόν πάντα τα χρησιμοποιούμε στην μορφή αυτή στους διάφορους υπολογισμούς. Η έκφραση (IV-1.193) είναι η πλέον πιο απλή σχέση που χρησιμοποιείται και είναι, όμως, και αυτή που επιφέρει τις περισσότερες δυσκολίες όταν ασχολούμαστε με προβλήματα ροής που εμπεριέχουν εξωτερικές αρμονικές συναρτήσεις. Αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στον παράγοντα

$$\mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}, \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad (\text{IV-1.194})$$

όπου από την (IV-1.35) και τις (IV-1.31), (IV-1.115) και (IV-1.86), (IV-1.93) έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{\mathbf{x}}_i}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} \\ &= \frac{E_3^7(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{\mathbf{x}}_i}{(E_1^i(\rho))^2} \\ &= \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{h_1 h_2 h_3 \sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{h_i E_1^i(\mathbf{r})}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i \\ &= \frac{E_3^7(\rho)}{h_1 h_2 h_3 \sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{h_i E_1^i(\mathbf{r})}{(E_1^i(\rho))^2} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{IV-1.195})$$

για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$. Ο ελλειψοειδής παράγοντας $\mathbf{R}^{el}$

είναι “δυσκίνητος” στις πράξεις διότι μεταφέρει τον όρο $\left[(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2) \right]^{-1/2}$ και είναι δύσκολη η εφαρμογή της ορθογωνιότητας (IV-1.66) και (IV-1.67). Στα προβλήματα, λοιπόν, μοντέλο σε κύτταρο που παρουσιάζονται και εξωτερικές αρμονικές συναρτήσεις, αυτός ο παράγοντας εισάγει και τη βασική δυσκολία αντιμετώπισης των συνοριακών συνθηκών και άρα τον υπολογισμό των σταθερών συντελεστών σε προβλήματα συνοριακών συνθηκών. Εκεί έγκειται και ο λόγος της χρήσης των διαφορικών αναπαραστάσεων και κυρίως της διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber που, σύμφωνα με την αναφορά [48], μας επιτρέπει τον ευέλικτο χειρισμό των αρμονικών δυναμικών κατάλληλα ώστε να αίρονται τυχόν απροσδιοριστίες. Συνεπώς, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο που λύνεται συγκεκριμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών, η “απροσδιοριστία” που παρουσιάζεται

με τον όρο $\mathbf{R}^{el}$, αντιμετωπίζεται με την ευελιξία της αναπαράστασης, αλλά αυτό θα το δούμε αργότερα.

Το πρόβλημα πολλαπλασιάζεται όταν θελήσουμε να πάρουμε τη “διπλή” κλίση στις εξωτερικές συμπαγείς ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις, όπου τότε για κάθε τιμή του $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$

$$\begin{aligned}\nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) &= (2n+1) \nabla \otimes \nabla (I_n^m(\mathbf{r}) I_n^m(\rho)) \\ &= (2n+1) \nabla \otimes \left[(\nabla I_n^m(\mathbf{r})) I_n^m(\rho) + (\nabla I_n^m(\rho)) I_n^m(\mathbf{r}) \right] \quad (\text{IV-1.196})\end{aligned}$$

και με αυτόματη χρήση της ταυτότητας (A.2),

$$\begin{aligned}\nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) &= (2n+1) \left[I_n^m(\rho) (\nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r})) + \nabla I_n^m(\rho) \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \otimes \nabla I_n^m(\rho) + I_n^m(\mathbf{r}) (\nabla \otimes \nabla I_n^m(\rho)) \right], \quad (\text{IV-1.197})\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ και $\rho \in (h_2, +\infty)$ και, τότε, η μορφή (IV-1.197) ισχύει για βαθμό $n = 0, 1, 2, \dots$ (στην περίπτωση μας $n = 0, 1, 2, 3$) και τάξη $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ των εξωτερικών συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων. Για τις τιμές του βαθμού που έχουμε πληροφορία και μας ενδιαφέρει, δηλ., $n \leq 3$, τα I_n^m και $\nabla \otimes \nabla I_n^m$ δίνονται από τις προαναφερθείσες εκφράσεις (IV-1.105)–(IV-1.113) και (IV-1.182)–(IV-1.190), αντίστοιχα. Τα ελλειπτικά ολοκληρώματα I_n^m ικανοποιούν την εξίσωση (IV-1.59) ή την (IV-1.60) και η βάρθρωσή τους ∇I_n^m την εξίσωση

$$\nabla I_n^m(\rho) = \frac{\hat{\rho}}{h_p} \frac{d}{d\rho} I_n^m(\rho) = \frac{\hat{\rho}}{h_p} I_n^{m'}(\rho), \quad \rho \in (h_2, +\infty) \quad (\text{IV-1.198})$$

ή χρησιμοποιώντας την (IV-1.103),

$$\nabla I_n^m(\rho) = - \frac{\hat{\rho}}{\left[E_n^m(\rho) \right]^2 \sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} = - \frac{1}{\left[E_n^m(\rho) \right]^2} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}), \quad (\text{IV-1.199})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ και $\rho \in (h_2, +\infty)$. Τέλος, για τον υπολογισμό του $\nabla \otimes \nabla I_n^m$, απαιτείται η εύρεση της κλίσης του μοναδιαίου καθέτου διανύσματος στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς. Μετά από επίπονους υπολογισμούς (δεν είναι απαραίτητοι να παρουσιαστούν εδώ), παίρνοντας την μορφή του τελεστή της βάρθρωσης (IV-1.47) και το μοναδιαίο κάθετο (IV-1.195) καταλήγουμε στην

$$\nabla \otimes \hat{\rho} = \frac{\rho}{h_\rho} \left[\frac{\hat{\mu} \otimes \hat{\mu}}{\rho^2 - \mu^2} + \frac{\hat{\nu} \otimes \hat{\nu}}{\rho^2 - \nu^2} \right] + \frac{\mu}{h_\mu} \frac{\hat{\rho} \otimes \hat{\mu}}{\rho^2 - \mu^2} + \frac{\nu}{h_\nu} \frac{\hat{\rho} \otimes \hat{\nu}}{\rho^2 - \nu^2} \quad (\text{IV-1.200})$$

με τους μετρικούς συντελεστές να δίνονται από τις (IV-1.31)–(IV-1.33) για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$. Το πρόβλημα αυτή τη φορά οφείλεται σε δύο “απροσδιοριστίες”, αυτή που εισάγεται από την εξίσωση (IV-1.194) και αυτή που μεταφέρει η, φανερά πιο πολύπλοκη, έκφραση

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \right), \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad (\text{IV-1.201})$$

όπου την αντιμετωπίζουμε με τον ίδιο τρόπο που χειριστήκαμε την (IV-1.194). Κάνοντας τις σύνθετες παραγωγίσεις στην (IV-1.201) και βοηθούμενοι από τη σχέση (IV-1.200), παίρνουμε τελικά για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{E}^3)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \left\{ -\frac{2\rho(2\rho^2 - \mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \hat{\rho} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \left[(2\rho^2 - h_3^2 - h_2^2) x_1 \hat{x}_1 + (2\rho^2 - h_2^2) x_2 \hat{x}_2 + (2\rho^2 - h_3^2) x_3 \hat{x}_3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-1.202})$$

ή σε καθαρά ελλειψοειδείς συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} (\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \left[-2\rho(2\rho^2 - \mu^2 - \nu^2) \frac{\rho}{h_\rho} \hat{\rho} \right. \\ & \left. + (\rho^2 - \nu^2) \frac{\mu}{h_\mu} \hat{\mu} + (\rho^2 - \mu^2) \frac{\nu}{h_\nu} \hat{\nu} \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{E}^3). \end{aligned} \quad (\text{IV-1.203})$$

Μπορεί οι εκφράσεις (IV-1.202) και (IV-1.203) να φαίνονται εκ πρώτης όψεως δύσχρηστες, αλλά στην εφαρμογή συνοριακών συνθηκών η μορφή τους είναι αρκετά χρήσιμη.

IV-1.3 Γεωμετρικός εκφυλισμός σε σφαιροειδείς συντεταγμένες.

Η ανισότητα των αξόνων του ελλειψοειδούς είναι το κρίσιμο χαρακτηριστικό με το οποίο το τριαξονικό ελλειψοειδές αντανακλά την πλήρη ανισοτροπία του

τρισδιάστατου χώρου. Έτσι, αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ είναι οι τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς (IV-1.4) με

$$0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty, \quad (\text{IV-1.204})$$

τότε η ισότητα δύο εκ των αξόνων εκφυλίζει το τριαξονικό ελλειψοειδές σε ένα σφαιροειδές, το οποίο ως στερεό εκ περιστροφής έχει αξονική συμμετρία και αντανakλά έτσι τη μερική ισοτροπία του τρισδιάστατου χώρου. Ειδικά, η ισότητα των δύο μικρών ημιαξόνων

$$0 < \alpha_3 = \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty \quad (\text{IV-1.205})$$

καθορίζει το επίμηκες σφαιροειδές, ενώ η ισότητα των δύο μεγάλων ημιαξόνων

$$0 < \alpha_3 < \alpha_2 = \alpha_1 < +\infty \quad (\text{IV-1.206})$$

καθορίζει το πεπλατυσμένο σφαιροειδές. Ο άξονας συμμετρίας περιστροφής, ο οποίος αποτελεί και τη διεύθυνση ως προς την οποία ο χώρος είναι αναλλοίωτος στις στροφές, είναι σε κάθε περίπτωση αυτός που είναι κάθετος στο επίπεδο των δύο ίσων ημιαξόνων, δηλαδή, ο x_1 άξονας για το επίμηκες σφαιροειδές και ο x_3 άξονας για το πεπλατυσμένο σφαιροειδές. Η οριακή περίπτωση του επιμήκους σφαιροειδούς, όπου οι δύο ίσοι ημιάξονες είναι ασυμπτωτικά μικρότεροι από τον τρίτο ημιάξονα, δηλ.,

$$0 < \alpha_3 = \alpha_2 \ll \alpha_1 < +\infty, \quad (\text{IV-1.207})$$

οδηγεί στην ασυμπτωτική περίπτωση της “βελόνας”. Η αντίστοιχη περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς, με τους δύο ίσους ημιάξονες ασυμπτωτικά μεγαλύτερους του τρίτου, δηλ.,

$$0 < \alpha_3 \ll \alpha_2 = \alpha_1 < +\infty, \quad (\text{IV-1.208})$$

περιγράφει ασυμπτωτικά την αναγωγή του σφαιροειδούς σε κυκλικό “δίσκο”.

Η διαδοχική πορεία του εκφυλισμού του ελλειψοειδούς σε σφαιροειδές, συνεπιφέρει αντίστοιχες μετατοπίσεις των τριών εστιών του ελλειψοειδούς, οι οποίες αντανakλώνται στις τιμές που παίρνουν διαδοχικά οι ημιεστιακές αποστάσεις h_1, h_2, h_3 . Συνεπώς, όταν το ελλειψοειδές γίνεται επίμηκες σφαιροειδές, μια εστία του συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και οι άλλες δύο ταυτίζονται στη μοναδική εστία του σφαιροειδούς c ,

$$h_1 = 0 \quad \text{και} \quad h_2 = h_3 = c, \quad c > 0, \quad (\text{IV-1.209})$$

που είδαμε και στο Κεφάλαιο III-1. Αντίστοιχα, στην περίπτωση του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς η μια εστία συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, ενώ η κοινή απόσταση

των άλλων δύο από την αρχή, καθορίζει την ακτίνα του εστιακού κύκλου του σφαιροειδούς $\bar{c}$,

$$h_3 = 0 \quad \text{και} \quad h_1 = h_2 = \bar{c}, \quad \bar{c} > 0, \quad (\text{IV-1.210})$$

που είδαμε και στο Κεφάλαιο III-1. Είναι προφανές ότι και στις δύο περιπτώσεις, ο εκφυλισμός του ελλειψοειδούς αντανακλάται σε μηδενισμό μιας από τις ημiesτιακές αποστάσεις και σε ταύτιση των άλλων δύο. Ο οριακός μηδενισμός των αντίστοιχων ημiesτιακών αποστάσεων είναι αυτός που μεταφέρει το γεωμετρικό εκφυλισμό του ελλειψοειδούς προτύπου στις προαναφερθείσες μορφές, μέσω της αλγεβρικής αναγωγής των αποτελεσμάτων του ελλειψοειδούς στις ανάλογες περιπτώσεις.

Ο μετασχηματισμός

$$c \rightarrow -i\bar{c}, \quad c, \bar{c} > 0 \quad (\text{IV-1.211})$$

επιτρέπει τη μετάπτωση από το επίμηκες σφαιροειδές στο πεπλατυσμένο ενώ ο μετασχηματισμός

$$\bar{c} \rightarrow ic, \quad c, \bar{c} > 0 \quad (\text{IV-1.212})$$

κάνει ακριβώς το αντίστροφο. Ακολουθώντας το γνωστό συμβολισμό για τις τροποποιημένες επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες του Κεφαλαίου III-1 τ, ζ, φ και γνωρίζοντας ότι η τροποποιημένη μεταβλητή του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος $\tau = \cosh \eta$ για κάθε $0 < \eta < +\infty$ ή $1 < \tau < +\infty$ σχετίζεται με την αντίστοιχη τροποποιημένη μεταβλητή του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς συστήματος $\lambda = \sinh \eta$ για κάθε $0 < \eta < +\infty$ ή $0 < \lambda < +\infty$ μέσω της

$$\tau \rightarrow i\lambda, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad 0 < \lambda < +\infty, \quad (\text{IV-1.213})$$

καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να ασχοληθούμε μόνο με τον εκφυλισμό του ελλειψοειδούς στις επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες. Φυσικά, ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$\lambda \rightarrow -i\tau, \quad 1 < \tau < +\infty, \quad 0 < \lambda < +\infty \quad (\text{IV-1.214})$$

επιτρέπει και το πέρασμα από τις πεπλατυσμένες στις επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες. Εμμένοντας, λοιπόν, στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία, αφού τα αποτελέσματα για την πεπλατυσμένη τα λαμβάνουμε από τους μετασχηματισμούς (IV-1.211) και (IV-1.213), οι εξισώσεις (IV-1.27)–(IV-1.29) της ελλειψοειδούς γεωμετρίας συνδυάζονται με τις αντίστοιχες (III-1.3)–(III-1.5) της επιμήκους σφαιροειδούς γεωμετρίας για να οδηγήσουν στην “ακτινική” σύνδεση

$$\rho = c\tau \quad \text{και} \quad \hat{\rho} \rightarrow \hat{\tau}, \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad 1 < \tau < +\infty \quad (\text{IV-1.215})$$

και στην αντίστοιχη “γωνιακή” (κοίτα και αναφορά [58])

$$\frac{\mu\nu}{h_2 h_3} = \zeta, \quad (\text{IV-1.216})$$

$$\frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1 h_3} = \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi, \quad (\text{IV-1.217})$$

$$\frac{\sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1 h_2} = \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi, \quad (\text{IV-1.218})$$

όπου $\zeta = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$ με $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$ και $-1 \leq \zeta \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Λαμβάνοντας υπ' όψη τα όρια μεταβολής των μ και ν είναι προφανές ότι η

ποσότητα $\frac{\mu\nu}{h_2 h_3}$ μεταβάλλεται στο διάστημα $[-1, 1]$ και επομένως μπορεί να θεωρηθεί

ως συνημίτονο μιας γωνιακής μεταβλητής [58]. Ομοίως δικαιολογούνται και οι θεωρήσεις (IV-1.217) και (IV-1.218) [58], οι οποίες τεκμηριώνουν το μετασχηματισμό που εισήγαγε ο Lamé κατά την ταξινόμηση των ομωνύμων συναρτήσεων. Αυτές είναι, λοιπόν, και οι αρχικές βασικές σχέσεις του εκφυλισμού του ελλειψοειδούς συστήματος στο επίμηκες σφαιροειδές σύστημα (ή πεπλατυσμένο με τον γνωστό μετασχηματισμό).

Για $\alpha_2 = \alpha_3$ (επίμηκες σφαιροειδές) οι εξισώσεις (IV-1.81) δίνουν τα παρακάτω όρια,

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \Lambda = \frac{2\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{3}, \quad (\text{IV-1.219})$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \Lambda' = \alpha_2^2, \quad (\text{IV-1.220})$$

ενώ οι ακόλουθες σχέσεις είναι άμεσες συνέπειες αυτών για $\alpha_2 = \alpha_3$,

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda - \Lambda') = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda - \alpha_2^2) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda - \alpha_3^2) = \frac{2c^2}{3}, \quad (\text{IV-1.221})$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda - \alpha_1^2) = -\frac{c^2}{3}, \quad (\text{IV-1.222})$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda' - \alpha_1^2) = -c^2, \quad (\text{IV-1.223})$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda' - \alpha_2^2) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} (\Lambda' - \alpha_3^2) = 0. \quad (\text{IV-1.224})$$

Επίσης, οι εξισώσεις (IV-1.83) για $\alpha_2 = \alpha_3$ (επίμηκες σφαιροειδές) δίνουν λίγο πιο πολύπλοκες εκφράσεις που δεν αναλύουμε μέχρι τέλους εδώ, αλλά σε κάθε περίπτωση δίνονται από τις σχέσεις για κάθε $\kappa = 1, 2$ ($\Lambda_2 = \Lambda_3$, $\Lambda'_2 = \Lambda'_3$)

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} \left\{ \frac{\Lambda_\kappa}{\Lambda'_\kappa} \right\} = \frac{2}{5} (\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2) - \frac{1}{5} \alpha_\kappa^2 \pm \frac{1}{5} \left\{ 4(\alpha_1^4 + 2\alpha_2^4) - 3\alpha_\kappa^4 - \alpha_1^2 \alpha_2^4 \left[\left(\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{2}{\alpha_2^2} \right) + \frac{6}{\alpha_\kappa^2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (\text{IV-1.225})$$

από όπου, αν χρειαστεί, βρίσκουμε τα $(\Lambda_\kappa - \alpha_l^2)$ και $(\Lambda'_\kappa - \alpha_l^2)$ για $\kappa, l = 1, 2, 3$. Από την άλλη μεριά, τα ελλειπτικά ολοκληρώματα I_n^m , τα οποία για $\alpha_2 = \alpha_3$ (επίμηκες σφαιροειδές) γίνονται μέσω της (IV-1.59)

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{du}{\left[\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} E_n^m(u) \right]^2 |u^2 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2|}, \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad (\text{IV-1.226})$$

δεν είναι πια ελλειπτικά και κατά συνέπεια υπολογίζονται ακριβώς με αναλυτικούς χειρισμούς [61]. Ειδικότερα, ο υπολογισμός του I_0^1 απαιτεί τον υπολογισμό του αντίστοιχου ολοκληρώματος (IV-1.226) για $n=0, m=1$, ο οποίος μαζί με την εξίσωση (IV-1.215) άμεσα δίνει για $\alpha_2 = \alpha_3$ (επίμηκες σφαιροειδές)

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) = \frac{1}{2c} \ln \frac{\tau + 1}{\tau - 1}, \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad 1 < \tau < +\infty. \quad (\text{IV-1.227})$$

Ο υπολογισμός του ορίου των υπολοίπων ελλειπτικών ολοκληρωμάτων για $\alpha_2 = \alpha_3$ (επίμηκες σφαιροειδές) και για βαθμό $n=1, 2, 3$ και τάξη $m=1, 2, \dots, 2n+1$ γίνεται συναρτήσεως του I_0^1 . Πιο συγκεκριμένα, οι σχέσεις (IV-1.123) και (IV-1.124) με δεδομένη τις (IV-1.227), (IV-1.209) και (IV-1.215) δίνουν τις παρακάτω τιμές,

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_1^1(\rho) = \frac{1}{c^2} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{1}{c\tau} \right), \quad c > 0, \quad (\text{IV-1.228})$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_1^2(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_1^3(\rho) = -\frac{1}{2c^2} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{\tau}{c(\tau^2 - 1)} \right), \quad c > 0 \quad (\text{IV-1.229})$$

για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$ και $1 < \tau < +\infty$. Συνεχίζοντας, ομοίως με πριν οι (IV-1.125)–(IV-1.127) εξασφαλίζουν τον άμεσο υπολογισμό των

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^1(\rho) = \frac{9}{4c^4} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{\tau}{c(3\tau^2 - 1)} \right), \quad c > 0, \quad (\text{IV-1.230})$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^2(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^5(\rho) = \frac{3}{8c^4} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{\tau(3\tau^2 - 5)}{3c(\tau^2 - 1)^2} \right), \quad c > 0, \quad (\text{IV-1.231})$$

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^3(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_2^4(\rho) = -\frac{3}{2c^4} \left(\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{3\tau^2 - 2}{3c\tau(\tau^2 - 1)} \right), \quad c > 0, \quad (\text{IV-1.232})$$

όπου $\rho \in (h_2, +\infty)$ και $1 < \tau < +\infty$. Αρκετά πιο επίπονοι υπολογισμοί οδηγούν στα αντίστοιχα όρια για τα ελλειπτικά ολοκληρώματα τρίτου βαθμού και οπότε,

$$\lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_3^1(\rho) = \frac{25}{c^6} \left(\frac{1}{4} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{25\tau}{36c(5\tau^2 - 3)} - \frac{1}{9c\tau} \right), \quad c > 0, \quad (\text{IV-1.233})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_3^2(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_3^7(\rho) = \frac{1}{c^6} & \left(\frac{15}{8} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) + \frac{\tau}{4c(\tau^2 - 1)^2} \right. \\ & \left. - \frac{7\tau}{8c(\tau^2 - 1)} - \frac{1}{c\tau} \right), \quad c > 0, \quad (\text{IV-1.234}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_3^3(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_3^5(\rho) = -\frac{25}{c^6} & \left(\frac{3}{16} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{\tau}{32c(\tau^2 - 1)} \right. \\ & \left. - \frac{25\tau}{32c(5\tau^2 - 1)} \right), \quad c > 0, \quad (\text{IV-1.235}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_3^4(\rho) = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_3^6(\rho) = -\frac{1}{c^6} & \left(\frac{5}{16} \lim_{\alpha_2 \rightarrow \alpha_3} I_0^1(\rho) - \frac{\tau}{6c(\tau^2 - 1)^3} \right. \\ & \left. + \frac{5\tau}{24c(\tau^2 - 1)^2} - \frac{5\tau}{16c(\tau^2 - 1)} \right), \quad c > 0 \quad (\text{IV-1.236}) \end{aligned}$$

για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$ και $1 < \tau < +\infty$. Για $n \geq 3$ δεν υπάρχουν πρακτικά ελλειψοειδείς αρμονικές και για το βαθμό που μας ικανοποιεί οι πάνω μεταβατικές σχέσεις αρκούν.

Όσον αφορά τις ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις, τη βάθμωσή τους και την “διπλή” κλίση τους, όλες όπως είδαμε και πιο πάνω, δίνονται σε Καρτεσιανές συντεταγμένες που είναι αναλλοίωτες. Συνεπώς, ο εκφυλισμός τους σε επιμήκεις σφαιροειδείς συντεταγμένες είναι απλός* και αυτόματος.

Όταν τα αποτελέσματα εκφυλιστούν από την ελλειψοειδή στην επιμήκη σφαιροειδή γεωμετρία, τότε ο μετασχηματισμός [56,77]

$$\tau \rightarrow i\lambda \quad \text{και} \quad c \rightarrow -i\bar{c}, \quad (\text{IV-1.237})$$

όπου $0 \leq \lambda \equiv \sinh \eta < +\infty$ και $\bar{c} > 0$ είναι οι καινούργιες χαρακτηριστικές μεταβλητές της πεπλατυσμένης σφαιροειδούς γεωμετρίας και i είναι η μιγαδική φανταστική μονάδα, δηλώνει τον αλγόριθμο μετατροπής αποτελεσμάτων από το επίμηκες σφαιροειδές στο πεπλατυσμένο σύστημα.

Τέλος οι περιπτώσεις της “βελόνας” και του “δίσκου” αποτελούν ασυμπτωτικές περιπτώσεις του επιμήκους και του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς, αντίστοιχα.

Ειδικότερα στην περίπτωση της “βελόνας” ισχύει ότι $\alpha_1 / \alpha_2 = \tau / \sqrt{\tau^2 - 1} \rightarrow +\infty$, ενώ

στην περίπτωση του “δίσκου” έχουμε ότι $\alpha_3 / \alpha_2 = \lambda / \sqrt{\lambda^2 + 1} \rightarrow 0^+$.

IV-1.4 Γεωμετρικός εκφυλισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων εκφυλίζεται στο αντίστοιχο σφαιρικό, καθώς οι τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς γίνονται ίσοι, δηλ.,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \quad (\text{IV-1.238})$$

όπου α είναι η ακτίνα μιας σφαίρας $r = \alpha$ και τότε η σχέση (IV-1.238) αντανakλά τον πλήρως ισότροπο τρισδιάστατο χώρο. Στην περίπτωση αυτή, λόγω των σχέσεων (IV-1.11)–(IV-1.13), προκύπτει ότι

$$h_\kappa = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.239})$$

που σημαίνει ότι όλες οι ημιεστιακές αποστάσεις του ελλειψοειδούς συμπίπτουν γεωμετρικά στην αρχή των αξόνων, που είναι και το κέντρο της εκφυλισμένης σφαίρας.

* Πρέπει, βεβαίως, να δοθεί πολύ προσοχή στις απροσδιοριστίες που μπορεί να εμφανιστούν κατά τη διάρκεια του εκφυλισμού λόγω μηδενικών στον παρανομαστή. Σε αυτή την περίπτωση, οι όροι θα πρέπει να οργανωθούν κατάλληλα ώστε να αίρονται αυτές οι απροσδιοριστίες με κάποιο τρόπο. Αυτή η δυσκολία διαφέρει από πρόβλημα σε πρόβλημα, ανάλογα με τις εμφανιζόμενες εκφράσεις και απαιτεί εξαιρετική προσοχή και δεξιότητα σε τέτοιους χειρισμούς αν και η μεγάλη πολυπλοκότητα βιώνεται στις σφαιρικές συντεταγμένες όπως και θα δούμε.

Από τις (IV–1.81) φαίνεται κατ’ αρχήν άμεσα ότι

$$\lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} \Lambda = \lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} \Lambda' = \alpha^2, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV–1.240})$$

ενώ από τις (IV–1.83), επίσης αυτόματα, εξάγουμε

$$\lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} \Lambda_\kappa = \lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} \Lambda'_\kappa = \alpha^2, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV–1.241})$$

και, τότε, οι ακόλουθες σχέσεις είναι άμεσες συνέπειες αυτών για $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$,

$$\lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} (\Lambda - \Lambda') = \lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} (\Lambda_\kappa - \Lambda'_\kappa) = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV–1.242})$$

$$\lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} (\Lambda - \alpha_\kappa^2) = \lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} (\Lambda' - \alpha_\kappa^2) = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV–1.243})$$

$$\lim_{\alpha_l \rightarrow \alpha} (\Lambda_\kappa - \alpha_l^2) = \lim_{\alpha_l \rightarrow \alpha} (\Lambda'_\kappa - \alpha_l^2) = 0, \quad \kappa, l = 1, 2, 3. \quad (\text{IV–1.244})$$

Τα διαστήματα μεταβολής των “γωνιακών” μεταβλητών μ και ν , σε συνδυασμό με την (IV–1.239) έχουν ως συνέπεια την

$$\lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} \mu = \lim_{\alpha_\kappa \rightarrow \alpha} \nu = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV–1.245})$$

ενώ για την ακτινική μεταβλητή ισχύει η σχέση (IV–1.41),

$$\rho^2 + \mu^2 + \nu^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 + h_2^2 + h_3^2, \quad (\text{IV–1.246})$$

καθώς και $\hat{\rho} \rightarrow \hat{r}$, ενώ εύκολα υπολογίζεται ότι

$$\rho^2 \mu^2 + \rho^2 \nu^2 + \mu^2 \nu^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 x_i^2 + 2x_1^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2 \quad (\text{IV–1.247})$$

και από την (IV–1.27),

$$\rho^2 \mu^2 \nu^2 = x_1^2 h_2^2 h_3^2, \quad (\text{IV–1.248})$$

όπου $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $\nu \in (-h_3, h_3)$.

Σύμφωνα, τώρα, με τις εξισώσεις (IV–1.27)–(IV–1.29) της ελλειψοειδούς γεωμετρίας και συνδυάζοντας με τις αντίστοιχες (II–1.2)–(II–1.4) της σφαιρικής γεωμετρίας, καταλήγουμε στην “ακτινική” σύνδεση

$$\rho = \sqrt{\rho^2 - h_2^2} = \sqrt{\rho^2 - h_3^2} = r, \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad r > 0 \quad (\text{IV–1.249})$$

και στην αντίστοιχη “γωνιακή” (κοίτα και αναφορά [58])

$$\frac{\mu\nu}{h_2 h_3} = \zeta, \quad (\text{IV–1.250})$$

$$\frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - v^2}}{h_1 h_3} = \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \varphi, \quad (\text{IV-1.251})$$

$$\frac{\sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - v^2}}{h_1 h_2} = \sqrt{1 - \zeta^2} \sin \varphi, \quad (\text{IV-1.252})$$

όπου $\zeta = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$ με $\mu \in (h_3, h_2)$, $v \in (-h_3, h_3)$ και $-1 \leq \zeta \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
Λαμβάνοντας υπ' όψη τα όρια μεταβολής των μ και v είναι προφανές και πάλι,

όπως και στα σφαιροειδή, ότι η ποσότητα $\frac{\mu v}{h_2 h_3}$ μεταβάλλεται στο διάστημα $[-1, 1]$ και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως συνημίτονο μιας γωνιακής μεταβλητής [58]. Ομοίως δικαιολογούνται και οι θεωρήσεις (IV-1.217) και (IV-1.218) [58], σύμφωνα με την θεώρηση του Lamé. Αυτές είναι, τώρα, και οι αρχικές βασικές σχέσεις του εκφυλισμού του ελλειψοειδούς συστήματος στο σφαιρικό σύστημα.

Επιπλέον, ο ορισμός των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, I_n^m , (IV-1.59), καθώς και οι σχέσεις (B.60)–(B.75) του Παραρτήματος Β δίνουν με τη βοήθεια των παραπάνω τις

$$\lim_{\alpha_k \rightarrow \alpha} I_n^m(\rho) = \frac{1}{(2n+1)r^{2n+1}}, \quad n \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-1.253})$$

για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$ και $r > 0$.

IV-1.5 Βασικές σχέσεις χωρίς απροσδιοριστίες στον εκφυλισμό του ελλειψοειδούς σε σφαιροειδές και σφαίρα.

Στην περίπτωση του εκφυλισμού του ελλειψοειδούς στο σφαιροειδές και στη σφαίρα γνωρίζουμε ότι η γεωμετρική οριακή διαδικασία αντανακλάται στην αλγεβρική. Επίσης, η Καρτεσιανή μορφή των ελλειψοειδών αρμονικών βοηθάει πολύ στην εύρεση των αντιστοίχων σφαιροειδών ή σφαιρικών εκφράσεων. Παρόλα αυτά, όσο εύκολο φαίνεται και γίνεται αντιληπτός ο γεωμετρικός εκφυλισμός, άλλο τόσο δύσκολο είναι τις περισσότερες φορές να γίνει ο αλγεβρικός στους διάφορους ελλειψοειδείς τύπους. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πολλές ελλειψοειδείς ποσότητες που βρίσκονται σε παρανομαστές μηδενίζονται με αποτέλεσμα την εμφάνιση απροσδιοριστιών σε βαθμό, ίσως, συχνότερο από ότι στα σφαιροειδή. Η επεξεργασία τέτοιων ειδών όρων απαιτεί τη χρήση μερικών ταυτοτήτων οι οποίες

απομακρύνουν αλγεβρικά αυτούς τους παράγοντες. Η αναλυτική μελέτη αυτών των όρων και μερικές από τις αποδείξεις των πιο κάτω εκφράσεων βρίσκονται στην [61]. Επομένως, οι πιο συχνά εμφανιζόμενες απροσδιοριστίες σε φυσικά προβλήματα Ρευστομηχανικής, Ακουστικής, Ηλεκτρομαγνητισμού και Ελαστικότητας στον εκφυλισμό από ελλειψοειδείς συντεταγμένες σε σφαιροειδείς και, πολύ περισσότερο, σε σφαιρικές αντιμετωπίζονται από τις παρακάτω βασικές σχέσεις,

$$\frac{IE_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_\kappa^2)} - \frac{IE_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)} = \|\mathbf{r}\|^2 - 3x_\kappa^2 + \alpha_\kappa^2 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \quad (\text{IV-1.254})$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, 3$, όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$. Αυτή είναι μια πολύ βασική ταυτότητα που με τη βοήθεια της

$$\frac{I_2^1(\rho) - I_2^2(\rho)}{\Lambda - \Lambda'} = \frac{3}{2} I_3^7(\rho) - \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\rho^2 - h_2^2}(\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2)(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2)} \quad (\text{IV-1.255})$$

για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} & \frac{IE_2^1(\mathbf{r})I_2^1(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_\kappa^2)} - \frac{IE_2^2(\mathbf{r})I_2^2(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)} \\ &= \left(\|\mathbf{r}\|^2 - 3x_\kappa^2 + \alpha_\kappa^2 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) I_2^1(\rho) \\ &+ \frac{IE_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda' - \alpha_\kappa^2} \left[\frac{3}{2} I_3^7(\rho) - \frac{1}{2\rho\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\rho^2 - h_2^2}(\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2)(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-1.256})$$

για $\kappa = 1, 2, 3$, όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$. Ο παράγοντας που πολλαπλασιάζει την αγκύλη στο δεύτερο μέρος του δεξιού σκέλους της (IV-1.256) μπορεί να υπολογιστεί από τις παρακάτω σχέσεις,

$$\frac{IE_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda - \alpha_\kappa^2} = (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2 - x_\kappa^2}{\Lambda - \alpha_i^2} + 1 \right] \frac{1}{\Lambda - \alpha_\kappa^2} \quad (\text{IV-1.257})$$

και

$$\frac{IE_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda' - \alpha_\kappa^2} = (\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2 - x_\kappa^2}{\Lambda' - \alpha_i^2} + 1 \right] \frac{1}{\Lambda' - \alpha_\kappa^2}, \quad (\text{IV-1.258})$$

όπου $\kappa = 1, 2, 3$ και $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$. Δύο εξίσου σημαντικές εκφράσεις αποτελούν και οι πιο κάτω,

$$\frac{\Lambda' IE_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_\kappa^2)} - \frac{\Lambda IE_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)} = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \left[\frac{3}{2} (\Lambda + \Lambda') - \alpha_i^2 - \alpha_\kappa^2 + 3\delta_{ik} (\alpha_i^2 - \Lambda - \Lambda') \right] + \Lambda \Lambda' - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{\alpha_\kappa^2}, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-1.259})$$

και

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_\kappa^2 - \alpha_l^2) \Lambda IE_2^1(\mathbf{r}) I_2^1(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_\kappa^2)(\Lambda - \alpha_l^2)} - \frac{(\alpha_\kappa^2 - \alpha_l^2) \Lambda' IE_2^2(\mathbf{r}) I_2^2(\rho)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)(\Lambda' - \alpha_l^2)} \\ &= \alpha_\kappa^2 \left(\|\mathbf{r}\|^2 - 3x_\kappa^2 + \alpha_\kappa^2 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) I_2^1(\rho) - \alpha_l^2 \left(\|\mathbf{r}\|^2 - 3x_l^2 + \alpha_l^2 - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \right) I_2^2(\rho) \\ &+ \left(\frac{\alpha_\kappa^2 IE_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda' - \alpha_\kappa^2} - \frac{\alpha_l^2 IE_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda' - \alpha_l^2} \right) \left[\frac{3}{2} I_3^7(\rho) - \frac{1}{2\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} (\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2)(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2)} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-1.260})$$

1.260)

για κάθε $\kappa, l = 1, 2, 3$, $\kappa \neq l$ και $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{8}^3)$. Συνεχίζουμε με την παρουσίαση μιας χρήσιμης έκφρασης για τα ελλειπτικά ολοκληρώματα δευτέρου βαθμού και πρώτης και δεύτερης τάξης ανάλογη με την (IV-1.255),

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda I_2^1(\rho) - \Lambda' I_2^2(\rho)}{\Lambda - \Lambda'} &= \frac{3}{2} [\alpha_1^2 I_3^7(\rho) - I_2^5(\rho)] \\ &+ \frac{(\rho^2 - \alpha_1^2)}{2\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} (\Lambda - \alpha_1^2 + \rho^2)(\Lambda' - \alpha_1^2 + \rho^2)} \end{aligned} \quad (\text{IV-1.261})$$

με $\rho \in (h_2, +\infty)$.

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν ταυτότητες αναλλοίωτες στο σύστημα συντεταγμένων όταν εκφυλίζεται το ελλειψοειδές σε σφαιροειδές ή σφαίρα. Έτσι, στα αντίστοιχα όρια, και κυρίως στο σφαιρικό όριο, αυτές οι απροσδιόριστες εκφράσεις δίνονται μέσα από πεπερασμένα όρια, εύκολο να υπολογιστούν.

Παρατηρούμε ότι οι προαναφερθείσες σχέσεις αναφέρονται σε ελλειψοειδείς συναρτήσεις δευτέρου βαθμού ($n=2$) και τάξης $m=1, 2$. Αυτό γίνεται αντιληπτό αφού η μορφή αυτών των ελλειψοειδών αρμονικών μεταφέρει τις απροσδιόριστες μορφές που υπεισέρχονται στις σχέσεις από τους παράγοντες $\Lambda - \Lambda'$, $\Lambda - \alpha_\kappa^2$ και $\Lambda' - \alpha_\kappa^2$, $\kappa = 1, 2, 3$ που εμφανίζονται στους παρανομαστές. Οι ελλειψοειδείς συναρτήσεις μηδενικού και πρώτου βαθμού δεν έχουν τέτοιου είδους εκφράσεις στους τύπους τους, οπότε δεν υφίσταται πρόβλημα στον εκφυλισμό τους που γίνεται

με τις απλές μεθόδους που περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Τέλος, τέτοιου είδους “προβληματικοί” όροι εμφανίζονται στις ελλειψοειδείς αρμονικές τρίτου βαθμού. Όμως, αφενός μεν, όπως θα δούμε και αργότερα τα πεδία ροής που υπολογίζουμε δεν έχουν όρους με βαθμό μεγαλύτερου του δύο, οπότε και δεν είναι απαραίτητοι ανάλογοι τύποι, αφετέρου δε, ο υπολογισμός παρόμοιων σχέσεων με τους παράγοντες $\Lambda_k - \Lambda'_k$, $\Lambda_k - \alpha_l^2$ και $\Lambda'_k - \alpha_l^2$ για $k, l = 1, 2, 3$ είναι αρκετά επίπονος και δεν αποτελεί αντικείμενο της παρούσας Διατριβής.

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώσαμε όλες τις απαραίτητες πληροφορίες γύρω από το ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων καλύπτοντας όσο πιο καλά ήταν δυνατόν το μεγαλύτερο μέρος αυτής της θεωρίας. Για επιπλέον εμβάθυνση και συλλογή περισσότερων πληροφοριών για το συγκεκριμένο σύστημα, ο αναγνώστης παραπέμπεται στη διδακτορική Διατριβή της κ. Καριώτου [61].

ΜΕΡΟΣ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV-2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΡΟΗΣ ΣΕ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ ΚΥΤΤΑΡΑ (EL)

IV-2.1 Τα ελλειψοειδή πεδία ροής στο μοντέλο Happel (3-D).

Μέχρι και αυτό το κεφάλαιο αναφερθήκαμε σε μοντέλα κυττάρων σε σφαιρικές και σφαιροειδείς συντεταγμένες, όπου το είδος της γεωμετρίας επιβάλλει αξονική συμμετρία. Ωστόσο, μια διαφορετική προσέγγιση αξονοσυμμετρικών σχημάτων μέσα από επιβολή τρισδιάστατων ροών μας προσέλκυσε το ενδιαφέρον στο Κεφάλαιο II-3, όπου η επιβαλλόμενη περιστροφή σφαιρικών σωματιδίων μαζί με τη μεταφορά μετέτρεψε το αντίστοιχο πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel σε μη αξονοσυμμετρικό. Συνεπώς, η αίσθηση του τι μπορεί να δημιουργήσει η επέμβαση στη φυσική σε απλές γεωμετρίες, μας έδωσε το έναυσμα για να “τολμήσουμε” να επεκταθούμε σε σωματίδια που προσεγγίζουν ακόμα πιο πολύ τη πραγματικότητα και μας παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τα πεδία ροής.

Μια περιοχή εξαιρετικού ενδιαφέροντος αποτελεί και η μελέτη της έρπουσας ροής σωματιδίων αυθαίρετου σχήματος εντός ενός ιζώδους και ασυμπίεστου ρευστού.

Πολλές φορές η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας συνεπάγεται και άμεση αλλαγή στη φυσική μελέτη του φαινομένου, γεγονός που καθιστά αυτόματα τις ήδη γνωστές μαθηματικές μεθόδους ανεπαρκείς. Το αμέσως πιο περίπλοκο σχήμα μετά το σφαιροειδές το οποίο είναι ορθογώνιο και καμπυλόγραμμο, όπου εισάγει τη γενικότητα μέσα από την απουσία κάθε μορφής αξονοσυμμετρίας, είναι το τριαξονικό ελλειψοειδές.

Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο I-4, υπάρχουν αρκετές εργασίες στην πρόσφατη βιβλιογραφία που να αναφέρονται σε ροές γύρω από ελλειψοειδή σωματίδια. Οι περισσότερες αφορούν κατανομές πηγών, ξεκινώντας από τον Miloh [75] το 1974, συνεχίζοντας με τον Dabros [33] το 1985 και καταλήγοντας στις σπουδαίες εργασίες του Kim το 1986 [62] και το 1987 [63], που ανέπτυξε μια γενική λύση για έρπουσα ροή γύρω από ένα ελλειψοειδές με τη μέθοδο των ιδιομορφιών και χρήση των ελλειψοειδών αρμονικών με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Παρόλα αυτά, όλες οι μελέτες μέχρι σήμερα για ροή γύρω από ελλειψοειδή σωματίδια περιορίζονται στην επίπονη χρήση κωδικών υπολογιστή για την ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης. Αναλυτικές, όμως, λύσεις δεν είχαν αναφερθεί για μοντέλα ελλειψοειδών σωματιδίων σε κύτταρο μέχρι το 2003.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε μια αναλυτική λύση για ροή σμήνους ελλειψοειδών σωματιδίων σε πορώδες μέσο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του σωματιδίου σε κύτταρο εισάγοντας τις συνοριακές συνθήκες τύπου Happel για την εύρεση των πεδίων ροής. Το ίδιο ακριβώς πρόβλημα επιλύθηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο II-3, παράγραφος II-3.3 στην περίπτωση σφαιρικών σωματιδίων, ώστε να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης και επιβεβαίωσης των αποτελεσμάτων μας για την ελλειψοειδή γεωμετρία. Η διαφορά με το κυτταρικό μοντέλο που πρότεινε ο ίδιος ο Happel [54] έγκειται στο γεγονός ότι το σφαιρικό σωματίδιο πέρα από τη μεταφορική κίνηση υφίσταται και περιστροφική κίνηση η οποία και δημιουργεί την τρισδιάστατη ροή. Το ύψος των ελλειψοειδών σωματιδίων επιφέρει ακριβώς την ίδια αλλαγή και η αντιμετώπιση είναι παρόμοια, αφού λόγω των τριών διαφορετικών αξόνων, η κίνηση είναι αυθαίρετη και τυχαία.

Πάλι εδώ, η ροή γύρω από οποιοδήποτε στερεό ελλειψοειδές σωματίδιο του σμήνους, προσεγγίζεται με τη ροή μέσα σε ένα ρευστό ελλειψοειδές στρώμα που περιβάλλει το στερεό ελλειψοειδές. Το πάχος του ρευστού στρώματος υπολογίζεται έτσι ώστε το κλάσμα του στερεού όγκου του κυττάρου, που δηλώνει το στερεό ελλειψοειδές με το

ρευστό φλοιό, να είναι ίσο με το κλάσμα του στερεού όγκου όλου του σμήνους. Με αυτό τον τρόπο μελετάμε τη ροή στον ρευστό φλοιό μεταξύ των δύο ελλειψοειδών επιφανειών που δημιουργούνται, δηλαδή της επιφάνειας του σωματιδίου και της φανταστικής ρευστής ελλειψοειδούς επιφάνειας που υποθέτουμε για να μοντελοποιήσουμε τη ροή.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τα σημαντικά πεδία ροής σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση, χρησιμοποιούμε το κύτταρο Happel (μηδενισμός εφαπτομενικών συνιστωσών της τάσης στο εξωτερικό σύνορο) όπου, σε αντίθεση με το αντίστοιχο κύτταρο Kuwabara (μηδενισμός στροβιλισμού στο εξωτερικό σύνορο), η μορφή των συνοριακών συνθηκών το καθιστά ενεργειακά αυτόνομο, όσον αφορά την ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον. Εξάλλου, όταν ασχολούμαστε με τρισδιάστατα μοντέλα, η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών τύπου Kuwabara είναι αδύνατη. Παρόλα αυτά το μειονέκτημα της μη πλήρης κάλυψης του πορώδους μέσου από τα ελλειψοειδή σωματίδια εξακολουθεί να υφίσταται και απαιτείται ειδική επεξεργασία για την εύρεση της ταχύτητας διακένου όταν αναφερόμαστε σε ολόκληρο το πορώδες μέσο.

Η χρήση δύο συναρτήσεων ροής για επίλυση τρισδιάστατων προβλημάτων δεν είναι επαρκής και παρουσιάζει σημαντικές αναλυτικές δυσκολίες. Δηλαδή, οι μέθοδοι συνάρτησης ροής πολλαπλασιάζουν τα προβλήματα που ήδη παρουσιάστηκαν από τη σφαιροειδή γεωμετρία. Οπότε, είναι επιτακτική η ανάγκη για χρήση τρισδιάστατων διαφορικών αναπαραστάσεων για την μελέτη τρισδιάστατων προβλημάτων ροής γύρω από ελλειψοειδή σωματίδια. Όπως θα δούμε και στην κυρίως ανάλυση, η εμφάνιση συγκεκριμένων δυσκολιών, αποτέλεσμα της πολυπλοκότητας της ελλειψοειδούς γεωμετρίας, αντιμετωπίζεται μόνο μέσα από την ευελιξία που προσφέρει η γενική διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber.

Λόγω της γνώσης περιορισμένου αριθμού ελλειψοειδών αρμονικών (κοίτα Κεφάλαιο IV-1) η αναλυτική λύση περιορίζεται στους πρώτους όρους, που παρέχουν, όμως, την πιο σημαντική συνεισφορά για το μέγεθος των ελλειψοειδών σωματιδίων που ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Τέλος, ένας επίπονος και κατάλληλος γεωμετρικός εκφυλισμός καταλήγει στους αντίστοιχους σφαιρικούς όρους του τρισδιάστατου προτύπου “σφαίρα σε κύτταρο” με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel [44] του Κεφαλαίου II-3.

Ασχολούμαστε με τρισδιάστατα συμπαγή ελλειψοειδή ομαλά και φραγμένα χωρία

$$\mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \equiv \{(\rho, \mu, \nu) : \rho \in (h_2, +\infty), \mu \in (h_3, h_2), \nu \in (-h_3, h_3)\}, \quad (\text{IV-2.1})$$

όπου η ελλειψοειδής μεταβλητή ρ είναι φραγμένη, και με $3-D$,

$$\hat{\mathbf{r}} \in \partial \Omega(\mathfrak{B}^3) \equiv \{(\mu, \nu) : \mu \in (h_3, h_2), \nu \in (-h_3, h_3)\} \quad (\text{IV-2.2})$$

επιφανειακά ελλειψοειδή ομαλά πεδία. Γενικά ισχύει

$$\partial \Omega(\mathfrak{B}^3) = \partial \Omega_i(\mathfrak{B}^3) \cup \partial \Omega_e(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{IV-2.3})$$

Το σύμβολο $\partial \Omega_i$ δηλώνει την επιφάνεια του στερεού ελλειψοειδούς σωματιδίου, ενώ το σύμβολο $\partial \Omega_e$ υποδεικνύει το ρευστό σύνορο του μοναδιαίου κυττάρου που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της ροής σμήνους ελλειψοειδών σωματιδίων. Τελικά, η ολική επιφάνεια $\partial \Omega$ καθορίζεται από την ένωση αυτών των δύο επιφανειών των ομοεστιακών ελλειψοειδών. Υπενθυμίζουμε ότι τα h_1 , h_2 και h_3 είναι οι εστίες του ελλειψοειδούς που εκφράζονται μέσω των τριών αξόνων του,

$$h_1^2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \quad (\text{IV-2.4})$$

$$h_2^2 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2, \quad (\text{IV-2.5})$$

$$h_3^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = h_2^2 - h_1^2 \quad (\text{IV-2.6})$$

για κάθε $0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty$.

Στο Κεφάλαιο I-4 παρουσιάσαμε το γενικό πρότυπο Happel, σχηματικά από το Γράφημα I-4.3, ενώ οι γενικές συνοριακές συνθήκες λαμβάνονται από τις εκφράσεις (I-4.7)–(I-4.11) για τη θεώρηση Happel.

Σύμφωνα με την τρισδιάστατη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber (PN) [81,123], υπάρχουν αρμονικά δυναμικά Φ_{el} και Φ_{0el} , τέτοια ώστε τα πεδία ροής να δίνονται από την

$$\mathbf{v}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_{el}(\cdot) - \frac{1}{2} \nabla (\Phi \cdot \mathbf{r}_{el}(\cdot) + \Phi_{0el}(\cdot)), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{IV-2.7})$$

για την ταχύτητα και

$$P_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = p_{el}^{PN}(\mathbf{r}) + \rho_0 g x_1 = P_{0el}^{PN} - \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{r}_{el}(\cdot), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \quad (\text{IV-2.8})$$

για την ολική πίεση, όπου P_{0el}^{PN} είναι η πίεση αναφοράς ορισμένη στον ισημερινό και

$$\Delta \Phi_{el}(\mathbf{r}) = 0, \quad \Delta \Phi_{0el}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{IV-2.9})$$

Επιπλέον, p_{el}^{PN} είναι η θερμοδυναμική πίεση και $\rho_0 g x_1$ είναι η βαρυτική δύναμη, όπου g είναι το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας και μ_0, ρ_0 είναι οι χαρακτηριστικές ιδιότητες του Νευτώνειου ρευστού.

Απαραίτητο πεδίο στην εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (αυτό θα το δούμε και μετέπειτα) αποτελεί και το πεδίο του ολικού τανυστή των τάσεων, το οποίο δίνεται μέσω της βάρμωσης της ταχύτητας και σαν συνάρτηση της θερμοδυναμικής πίεσεως,

$\tilde{\mathbf{\Pi}}_{el}^{PN}$, δηλ.,

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = -p_{el}^{PN}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \left[\nabla \otimes \mathbf{v}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) + \left(\nabla \otimes \mathbf{v}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) \right)^T \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{E}^3), \quad (\text{IV-2.10})$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό και σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες,

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{x}}_2 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{\mathbf{x}}_3 \otimes \hat{\mathbf{x}}_3 = \hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}} + \hat{\boldsymbol{\mu}} \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}} \quad (\text{IV-2.11})$$

και το σύμβολο “ T ” δηλώνει αναστροφή.

Το πεδίο στροβιλισμού $\boldsymbol{\omega}_{el}^{PN}$ είναι

$$\boldsymbol{\omega}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_{el}^{PN}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{E}^3), \quad (\text{IV-2.11})$$

όπου οι βασικοί διαφορικοί τελεστές της βάρμωσης ∇ και του Laplace Δ έχουν την παρακάτω ελλειψοειδή αναπαράσταση,

$$\begin{aligned} \nabla = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - v^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ &+ \hat{\boldsymbol{\mu}} \frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - v^2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \\ &+ \hat{\mathbf{v}} \frac{\sqrt{h_3^2 - v^2} \sqrt{h_2^2 - v^2}}{\sqrt{\rho^2 - v^2} \sqrt{\mu^2 - v^2}} \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned} \quad (\text{IV-2.12})$$

και

$$\begin{aligned} \Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} &= \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - v^2)} \left[\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \left[\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \\ &+ \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - v^2)} \left[\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \left[\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(\rho^2 - v^2)(\mu^2 - v^2)} \left[\sqrt{h_3^2 - v^2} \sqrt{h_2^2 - v^2} \frac{\partial}{\partial v} \right] \left[\sqrt{h_3^2 - v^2} \sqrt{h_2^2 - v^2} \frac{\partial}{\partial v} \right] \quad (\text{IV-2.13})$$

για κάθε $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $v \in (-h_3, h_3)$, όπου $\hat{\rho}, \hat{\mu}, \hat{v}$ αντιπροσωπεύουν τα μοναδιαία διανύσματα της ελλειψοειδούς γεωμετρίας, για τα οποία ισχύει

$$\hat{\rho} = \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - v^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{x}_i}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2}, \quad (\text{IV-2.14})$$

$$\hat{\mu} = \frac{\mu \sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_2^2 - \mu^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\mu^2 - v^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{x}_i}{\mu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2}, \quad (\text{IV-2.15})$$

$$\hat{v} = \frac{v \sqrt{h_3^2 - v^2} \sqrt{h_2^2 - v^2}}{\sqrt{\rho^2 - v^2} \sqrt{\mu^2 - v^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{x}_i}{v^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2}, \quad (\text{IV-2.16})$$

από όπου με αντιστροφή παίρνουμε την Καρτεσιανή βάση $\hat{x}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, 3$, όπου

$$x_\kappa = \frac{h_\kappa}{h_1 h_2 h_3} \sqrt{|\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2|} \sqrt{|\mu^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2|} \sqrt{|v^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2|} \quad (\text{IV-2.17})$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, 3$ και $\rho \in (h_2, +\infty)$, $\mu \in (h_3, h_2)$, $v \in (-h_3, h_3)$.

Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς συμπίπτει με το “ακτινικό” ορθομοναδιαίο ελλειψοειδές διάνυσμα $\hat{\rho}$, δηλ.,

$$\begin{aligned} \hat{n}_{el}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - v^2}} \left[\frac{x_1 \hat{x}_1}{\rho^2} + \frac{x_2 \hat{x}_2}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{x_3 \hat{x}_3}{\rho^2 - h_2^2} \right] \\ &= \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - v^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{x}_i \otimes \hat{x}_i}{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{IV-2.18})$$

για $0 < v^2 < h_3^2 < \mu^2 < h_2^2 < \rho^2 < +\infty$, και οπότε επειδή $\mathbf{r} = x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2 + x_3 \hat{x}_3$,

$$\mathbf{r} \cdot \hat{n}_{el} = \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - v^2}}, \quad (\text{IV-2.19})$$

ενώ

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 = \rho^2 + \mu^2 + v^2 - (h_2^2 + h_3^2) \quad (\text{IV-2.20})$$

για τις ίδιες τιμές των ελλειψοειδών μεταβλητών ρ , μ και ν .

Ολοκληρώσαμε, λοιπόν, τη συγκέντρωση των βασικών εργαλείων επίλυσης των μοντέλων σωματιδίου-ρευστού και την παράθεση των κύριων πεδίων ροής (ταχύτητα, ολική πίεση, ολικός τανυστής των τάσεων και στροβιλισμός) που υπεισέρχονται στις συνοριακές συνθήκες τύπου Happel σε τρισδιάστατα χωρία, χρησιμοποιώντας τη γενική διαφορική λύση που προτάθηκε από τους Parkovich – Neuber. Όλα τα παραπάνω, αλλά και σε ότι αναφερθούμε από εδώ και πέρα στηρίζονται στις αναλυτικές πληροφορίες του Κεφαλαίου IV-1.

Δεδομένου ότι ασχολούμαστε με πεδία ροής απουσία πηγών ή ιδιομορφιών, εισάγουμε τις εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές IE_n^m ,

$$IE_n^m(\mathbf{r}) = E_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{E}^3) \quad (\text{IV-2.21})$$

και τις εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές IF_n^m ,

$$IF_n^m(\mathbf{r}) = F_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu) = (2n+1)IE_n^m(\mathbf{r})I_n^m(\rho), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{E}^3) \quad (\text{IV-2.22})$$

για κάθε $n=0,1,2,3$ και $m=1,2,\dots,2n+1$, όπου τα ελλειπτικά ολοκληρώματα I_n^m δίνονται από την ολοκληρωτική μορφή

$$I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{+\infty} \frac{du}{\left[E_n^m(u)\right]^2 \sqrt{u^2 - h_2^2} \sqrt{u^2 - h_3^2}}, \quad \rho \in (h_2, +\infty) \quad (\text{IV-2.23})$$

για $n=0,1,2,3$ και $m=1,2,\dots,2n+1$, από όπου προκύπτει ότι

$$I_n^m(\rho) = -\frac{1}{\left[E_n^m(\rho)\right]^2 \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}, \quad \rho \in (h_2, +\infty). \quad (\text{IV-2.24})$$

Οι επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές $E_n^m(\mu)E_n^m(\nu)$ ικανοποιούν τις πιο κάτω σχέσεις ορθογωνιότητας,

$$\iint_{\rho=\rho_0} E_n^m(\mu)E_n^m(\nu)E_{n'}^{m'}(\mu)E_{n'}^{m'}(\nu)l_{\rho_0}(\mu,\nu)dS = 0, \quad n \neq n', \quad m \neq m' \quad (\text{IV-2.25})$$

και

$$\iint_{\rho=\rho_0} \left(E_n^m(\mu)E_n^m(\nu)\right)^2 l_{\rho_0}(\mu,\nu)dS = \gamma_n^m, \quad n = n', \quad m = m' \quad (\text{IV-2.26})$$

πάνω στην επιφάνεια ενός σταθερού ελλειψοειδούς για $\rho = \rho_0$, όπου $n=0,1,2,\dots$, $m=1,2,\dots,2n+1$ και γ_n^m είναι οι σταθερές κανονικοποίησης, όπου η ποσότητα l_{ρ_0} ορίζεται από τη σχέση

$$l_{\rho_0}(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}}, \quad \mu \in (h_3, h_2), \quad \nu \in (-h_3, h_3). \quad (\text{IV-2.27})$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η πλήρης αναπαράσταση του διανυσματικού χώρου λύσεων των ελλειψοειδών δυναμικών της αναπαράστασης Papkovitch – Neuber, εξίσωση (IV-2.9), μας εφοδιάζει με τις παρακάτω σειρές,

$$\Phi_{el}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} IE_n^m(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} IF_n^m(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{IV-2.28})$$

και

$$\Phi_{0el}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[d_{n,el}^{(i)m} IE_n^m(\mathbf{r}) + d_{n,el}^{(e)m} IF_n^m(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\text{IV-2.29})$$

Παρατηρούμε ότι για $n \geq 0$ οι

$$\mathbf{e}_{n,el}^{(i/e)m} = c_{n,el}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_1 + a_{n,el}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_2 + b_{n,el}^{(i/e)m} \hat{\mathbf{x}}_3, \quad d_{n,el}^{(i/e)m}, \quad m=1,2,\dots,2n+1 \quad (\text{IV-2.30})$$

είναι οι εσωτερικοί και εξωτερικοί πραγματικοί σταθεροί συντελεστές των δυναμικών Φ_{el} και Φ_{0el} .

Σε όρους των δυναμικών (IV-2.28) και (IV-2.29), το πεδίο ταχύτητας (IV-2.7), με χρήση των ταυτοτήτων (A.1), (A.2) και (A.6) του Παραρτήματος A, υποθέτει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left\{ \mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} IE_n^m(\mathbf{r}) - \left[\left(\mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,el}^{(i)m} \right] \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. + \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} IF_n^m(\mathbf{r}) - \left[\left(\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,el}^{(e)m} \right] \nabla IF_n^m(\mathbf{r}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{IV-2.31})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, ενώ για το πεδίο ολικής πίεσης (IV-2.8) με βοήθεια της σχέσης (A.11) καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} P_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = & P_{0el}^{PN} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left\{ \mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} \cdot \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \nabla IF_n^m(\mathbf{r}) \right\} \\ = & p_{el}^{PN}(\mathbf{r}) + \rho_0 g x_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \end{aligned} \quad (\text{IV-2.32})$$

όπου όλων των ειδών οι ιδιομορφίες έχουν εξαιρεθεί.

Έχοντας υπολογίσει το πεδίο ταχύτητας, ο ολικός τανυστής των τάσεων (IV-2.10) σε συνδυασμό με τις ταυτότητες του Παραρτήματος A, οδηγεί στην

$$\tilde{\mathbf{P}}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = -p_{el}^{PN}(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left\{ \left[\left(\mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,el}^{(i)m} \right] \nabla \otimes \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \right.$$

$$+ \left[\left(\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r} \right) + d_{n,el}^{(e)m} \right] \nabla \otimes \nabla F_n^m(\mathbf{r}) \Big\} \quad (\text{IV-2.33})$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, ενώ το πεδίο στροβιλισμού (IV-2.11), με την άμεση χρήση της (A.24), μας δίνει

$$\boldsymbol{\omega}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left\{ \nabla F_n^m(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} + \nabla F_n^m(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\text{IV-2.34})$$

Οι γενικές εκφράσεις (IV-2.31)–(IV-2.34) αποτελούν τα βασικά ελλειψοειδή πεδία ροής σε όρους των γνωστών εσωτερικών και εξωτερικών συμπαγών ελλειψοειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων και της βάθμωσής τους.

Οι ελλειψοειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις οι οποίες είναι γνωστές μέχρι και σήμερα είναι αυτές που περιορίζονται στον υπόχωρο βαθμού $n \leq 3$. Η μη εύρεση των υπολοίπων οφείλεται καθαρά στην δυσκολία επίλυσης των εξισώσεων Lamé. Ωστόσο, στην παρούσα εργασία της εύρεσης των πεδίων ροής του τρισδιάστατου κυτταρικού μοντέλου με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel μέσω της διαφορικής λύσης Parkovich – Neuber θα περιοριστούμε στις ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις βαθμού $n=0,1,2$, όπου με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σε μια ικανοποιητική προσέγγιση για τα πεδία ροής. Φυσικά, σημειώνουμε εδώ, ότι η αντίστοιχη εργασία που είναι στο στάδιο του γραψίματος εμπεριέχει και ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις βαθμού $n=3$, αλλά δεν είναι μέσα στο πλαίσιο της διδακτορικής Διατριβής, εφόσον δεν έχει ολοκληρωθεί ακόμα. Παρόλα αυτά τα αποτελέσματα για $n=0,1,2$ προσφέρουν ένα ικανοποιητικό υπόβαθρο (μια πρώτη προσέγγιση) για την προαναφερθείσα επέκταση σε ιδιοσυναρτήσεις τρίτου βαθμού και είναι και ο σκοπός της παρούσας μελέτης.

Για αυτές τις τιμές του βαθμού,

$$\gamma_0^1 = 4\pi, \quad (\text{IV-2.35})$$

$$\gamma_1^\kappa = \frac{4\pi}{3} \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa^2}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.36})$$

$$\gamma_2^1 = -\frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda - \alpha_1^2) (\Lambda - \alpha_2^2) (\Lambda - \alpha_3^2), \quad (\text{IV-2.37})$$

$$\gamma_2^2 = \frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda' - \alpha_1^2) (\Lambda' - \alpha_2^2) (\Lambda' - \alpha_3^2), \quad (\text{IV-2.38})$$

$$\gamma_2^{6-\kappa} = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_\kappa^2, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-2.39})$$

ή αλλάζοντας τον συμβολισμό στην (IV-2.32),

$$\gamma_2^{\kappa+l} = \frac{4\pi}{15} \frac{h_1^4 h_2^4 h_3^4}{h_\kappa^2 h_l^2}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-2.40})$$

όπου οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \pm \frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\alpha_i^4 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{\alpha_i^2} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{IV-2.41})$$

ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Lambda - \alpha_i^2} = 0. \quad (\text{IV-2.42})$$

Επιπλέον για $n = 0, 1, 2$,

$$E_0^1(\rho) = 1, \quad (\text{IV-2.43})$$

$$E_1^\kappa(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.44})$$

$$E_2^1(\rho) = \rho^2 - \alpha_1^2 + \Lambda, \quad (\text{IV-2.45})$$

$$E_2^2(\rho) = \rho^2 - \alpha_1^2 + \Lambda', \quad (\text{IV-2.46})$$

$$E_2^{6-\kappa}(\rho) = \frac{\rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2}}, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-2.47})$$

ή αλλάζοντας, πάλι, τον συμβολισμό στην (IV-2.40),

$$E_2^{\kappa+l}(\rho) = \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_\kappa^2} \sqrt{\rho^2 - \alpha_1^2 + \alpha_l^2}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l. \quad (\text{IV-2.48})$$

Τις περισσότερες φορές δεν είναι εύχρηστες οι εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές σε ελλειψοειδή μορφή, αλλά σε Καρτεσιανή. Σε συνέπεια, λοιπόν, με το προηγούμενο κεφάλαιο και για $n = 0, 1, 2$,

$$IE_0^1(\mathbf{r}) = 1 \quad (\text{IV-2.49})$$

$$IE_1^\kappa(\mathbf{r}) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\kappa} x_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.50})$$

$$IE_2^1(\mathbf{r}) = (\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \left[\sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\Lambda - \alpha_i^2} + 1 \right] \equiv IE_2^1(\Lambda), \quad (\text{IV-2.51})$$

$$IE_2^2(\mathbf{r}) = IE_2^1(\Lambda'), \quad (\text{IV-2.52})$$

$$IE_2^{6-\kappa}(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3 h_\kappa \frac{x_1 x_2 x_3}{x_\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-2.53})$$

και με διαφορετικό συμβολισμό,

$$IE_2^{\kappa+l}(\mathbf{r}) = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa h_l} x_\kappa x_l, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \quad (\text{IV-2.54})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, ενώ αντιστρόφως,

$$1 = IE_0^1(\mathbf{r}) \quad (\text{IV-2.55})$$

$$x_\kappa = \frac{h_\kappa}{h_1 h_2 h_3} IE_1^\kappa(\mathbf{r}), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.56})$$

$$x_\kappa^2 = \frac{(E_1^\kappa(\rho))^2}{3} \left[1 - \frac{E_2^1(\mu) E_2^1(\nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda - \alpha_\kappa^2)} + \frac{E_2^2(\mu) E_2^2(\nu)}{(\Lambda - \Lambda')(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)} \right], \quad (\text{IV-2.57})$$

$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_\kappa} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3 h_\kappa} IE_2^{6-\kappa}(\mathbf{r}), \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-2.58})$$

και με διαφορετικό συμβολισμό,

$$x_\kappa x_l = \frac{h_\kappa h_l}{h_1^2 h_2^2 h_3^2} IE_2^{\kappa+l}(\mathbf{r}), \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-2.59})$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ και $\delta_{\kappa l}$, $\kappa, l = 1, 2, 3$ είναι το δέλτα του Kronecker.

Αν εφαρμόσουμε τον διαφορικό τελεστή ∇ στις εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις παίρνουμε

$$\nabla IE_0^1(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (\text{IV-2.60})$$

$$\nabla IE_1^\kappa(\mathbf{r}) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_\kappa} \hat{\mathbf{x}}_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.61})$$

$$\nabla IE_2^1(\mathbf{r}) = 2(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{\mathbf{x}}_i}{\Lambda - \alpha_i^2} \equiv \nabla IE_2^1(\Lambda), \quad (\text{IV-2.62})$$

$$\nabla IE_2^2(\mathbf{r}) = \nabla IE_2^1(\Lambda'), \quad (\text{IV-2.63})$$

$$\nabla IE_2^{6-\kappa}(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3 h_\kappa \sum_{i=1}^3 (1 - \delta_{\kappa i}) \frac{x_i x_2 x_3}{x_\kappa x_i} \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.64})$$

όπου $\delta_{\kappa l}$, $\kappa, l = 1, 2, 3$ είναι το δέλτα του Kronecker και με διαφορετικό συμβολισμό,

$$\nabla IE_2^{\kappa+l}(\mathbf{r}) = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa h_l} (x_\kappa \hat{\mathbf{x}}_l + x_l \hat{\mathbf{x}}_\kappa), \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \quad (\text{IV-2.65})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, ενώ με μια ακόμη δράση του ίδιου διαφορικού τελεστή της βάθμωσης καταλήγουμε στις απαραίτητες μορφές που υπεισέρχονται στον ολικό τανυστή των τάσεων, δηλαδή,

$$\nabla \otimes \nabla IE_0^1(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{0}} \quad (\text{IV-2.66})$$

$$\nabla \otimes \nabla IE_1^\kappa(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{0}}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.67})$$

$$\nabla \otimes \nabla IE_2^1(\mathbf{r}) = 2(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2) \sum_{i=1}^3 \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{\Lambda - \alpha_i^2} \equiv \nabla \otimes \nabla IE_2^1(\Lambda), \quad (\text{IV-2.68})$$

$$\nabla \otimes \nabla IE_2^2(\mathbf{r}) = \nabla \otimes \nabla IE_2^1(\Lambda'), \quad (\text{IV-2.69})$$

$$\nabla \otimes \nabla IE_2^{6-\kappa}(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3 h_\kappa \sum_{i=1}^3 (1 - \delta_{\kappa i}) (\hat{\mathbf{x}}_{6-(\kappa+i)} \otimes \hat{\mathbf{x}}_i), \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-2.70})$$

και με διαφορετικό συμβολισμό για κάθε $\kappa, l = 1, 2, 3$ και $\kappa \neq l$,

$$\nabla \otimes \nabla IE_2^{\kappa+l}(\mathbf{r}) = \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa h_l} (\hat{\mathbf{x}}_\kappa \otimes \hat{\mathbf{x}}_l + \hat{\mathbf{x}}_l \otimes \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \quad (\text{IV-2.71})$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$.

Αντίστοιχα, για τις εξωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις αποδείξαμε στο Κεφάλαιο IV-1 ότι, λόγω της εμφάνισης του ελλειψοειδούς παράγοντα που είναι δύσχρηστος όταν θέλουμε να εφαρμόσουμε σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\rho}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}, \quad \rho \in (h_2, +\infty), \quad (\text{IV-2.72})$$

η μορφή της κλίσης των εξωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών μεταφέρει αυτή τη δυσκολία, όπως φαίνεται και από την έκφραση

$$\nabla IF_n^m(\mathbf{r}) = (2n+1) \left[I_n^m(\rho) (\nabla IE_n^m(\mathbf{r})) - \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) \frac{IE_n^m(\mathbf{r})}{[E_n^m(\rho)]^2} \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\text{IV-2.73})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$. Τη δυσκολία του παράγοντα (IV-2.72), καθώς και τον τρόπο αντιμετώπισής του μέσω της γενικής λύσης Parkovich – Neuber τη συζητήσαμε εκτενώς στο προηγούμενο κεφάλαιο και θα τη δούμε και στην πράξη και στο παρόν κεφάλαιο. Η έλλειψη ευκινησίας του συγκεκριμένου όρου μεγαλώνει ακόμα πιο πολύ όταν χρειαστεί να εφαρμόσουμε άλλη μια φορά τον τελεστή της βάθμωσης στην (IV-2.73). Πιο αναλυτικά,

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \nabla IF_n^m(\mathbf{r}) = (2n+1) & \left[I_n^m(\rho) (\nabla \otimes \nabla IE_n^m(\mathbf{r})) + \nabla I_n^m(\rho) \otimes \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. + \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \otimes \nabla I_n^m(\rho) + IE_n^m(\mathbf{r}) (\nabla \otimes \nabla I_n^m(\rho)) \right], \quad (\text{IV-2.74}) \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ και $\rho \in (h_2, +\infty)$ για $n = 0, 1, 2$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$, ενώ ισχύει

$$\nabla I_n^m(\rho) = -\frac{1}{[E_n^m(\rho)]^2} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3). \quad (\text{IV-2.75})$$

Οι εκφράσεις ∇I_n^m , $\nabla \otimes \nabla I_n^m$ και I_n^m για κάθε $n=0,1,2$ και $m=1,2,\dots,2n+1$ δίνονται από τις πιο πάνω σχέσεις, ενώ για την αντιμετώπιση του όρου $\nabla \otimes \nabla I_n^m$ χρειαζόμαστε τις σχέσεις παραγώγου ως προς τη μεταβλητή ρ του ελλειψοειδούς παράγοντα $\mathbf{R}^{el}$. Δηλαδή, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} \left\{ -\frac{2\rho(2\rho^2 - \mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \hat{\rho} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2}\sqrt{\rho^2 - h_2^2}} \left[(2\rho^2 - h_3^2 - h_2^2)x_1\hat{x}_1 + (2\rho^2 - h_2^2)x_2\hat{x}_2 + (2\rho^2 - h_3^2)x_3\hat{x}_3 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IV-2.76})$$

Τελικά, κατασκευάσαμε τα πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης, στροβιλισμού και ολικού τανυστή των τάσεων σε μορφές κατάλληλες για να δεχτούν τις συνοριακές συνθήκες του μοντέλου ελλειψοειδούς σωματιδίου σε κύτταρο τύπου Happel που θα μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο. Όλες οι πληροφορίες είναι συγκεντρωμένες ενώ βασικές σχέσεις που αφορούν τα ελλειπτικά ολοκληρώματα, καθώς και τις σταθερές Λ , Λ' περιγράφονται στο Κεφάλαιο IV-1 μέσα από αρκετές αναλυτικές εξισώσεις.

IV-2.2 Το κύτταρο Happel (3-D) για τρισδιάστατη ροή Stokes σμήνους ελλειψοειδών σωματιδίων σε ηρεμούν ρευστό.

Προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα ροής Stokes μέσα σε ένα ρευστό κέλυφος το οποίο περιορίζεται από δύο ομοεστιακές ελλειψοειδείς επιφάνειες και μοντελοποιεί την κίνηση σμήνους σωματιδίων μέσα σε πορώδες μέσο η οποία περιγράφεται από το κυτταρικό μοντέλο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel, χρησιμοποιούμε τη γενική διαφορική αναπαράσταση Papkonovich – Neuber, όπου αποτελεί έναν από τους πιο αξιόπιστους τρόπους επίλυσης τέτοιου είδους προβλημάτων. Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ανάλογο του μοντέλου “σφαίρα σε κύτταρο” τύπου Happel, απουσία ιδιομορφιών ή πηγών, πιθανώς κατανεμημένες στον εστιακό δίσκο του ελλειψοειδούς σωματιδίου. Η ευελιξία της διαφορικής λύσης που χρησιμοποιείται, φανερώνει και

την ιδιότητα της πληρότητας της αναπαράστασης [48] που μας επιτρέπει τον “αυθαίρετο” χειρισμό των δυναμικών της αναπαράστασης με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\Phi_{0el} = f(\Phi_{el}) \quad \text{ή} \quad \Phi_{el} = f^{-1}(\Phi_{0el}). \quad (\text{IV-2.77})$$

Η σύνδεση των δυναμικών μέσω της (IV-2.77) θα χρειαστεί στην περαιτέρω ανάλυση των πεδίων ροής με τη χρήση των συνοριακών συνθηκών. Αλλά αυτό θα το δούμε στη πράξη αργότερα.

IV-2.2α Το 3-D κύτταρο Happel, οι συνοριακές συνθήκες και τα πεδία ροής.

Από γεωμετρικής άποψης, τα χαρακτηριστικά αυτού του κυττάρου είναι ίδια με αυτά του κυττάρου Kuwabara, αλλά η διαφορά έγκειται από τη μια πλευρά στον τρισδιάστατο χαρακτήρα του εν λόγω μοντέλου, αποτέλεσμα της ομοιόμορφης έρπουσας μεταφοράς και περιστροφής σωματιδίων και από την άλλη πλευρά στην συμβατότητά του με τη φυσική, αφού εξασφαλίζει ότι κάθε μοναδιαίο κύτταρο είναι ενεργειακά αυτόνομο. Η απουσία αξονικής συμμετρίας οφείλεται στην επιβαλλόμενη περιστροφή των ελλειψοειδών σωματιδίων και αποδίδει τον πιο γενικό 3-D χαρακτήρα του συγκεκριμένου μοντέλου.

Με άλλα λόγια, σε συμφωνία με την αποδοχή του Happel [54], θεωρούμε δύο ομοεστιακά (κοινές εστίες h_κ , $\kappa = 1, 2, 3$) ελλειψοειδή. Το εσωτερικό, όπου δηλώνεται από την επιφάνεια $\partial \Omega_i$ για $\rho = \rho_a$ (κοίτα και το γενικό Σχήμα I-4.3) είναι στερεό, κινείται με μια σταθερή αυθαίρετη ταχύτητα μεταφοράς U_{el} και, επιπλέον, περιστρέφεται, επίσης αυθαίρετα, με μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω_{el} . Οι γενικές μορφές των σταθερών επιβαλλόμενων πεδίων U_{el} και Ω_{el} δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις,

$$U_{el} = \sum_{i=1}^3 U_{i,el} \hat{x}_i \quad \text{και} \quad \Omega_{el} = \sum_{i=1}^3 \Omega_{i,el} \hat{x}_i, \quad (\text{IV-2.78})$$

όπου τα $\hat{x}_\kappa$, $\kappa = 1, 2, 3$ αποτελούν την Καρτεσιανή ορθοκανονική βάση. Το εξωτερικό ελλειψοειδές δηλώνεται από την επιφάνεια $\partial \Omega_e$ για $\rho = \rho_b$ και αναπαριστά το φανταστικό σύνορο του μοναδιαίου κυττάρου (“ελλειψοειδές σε κύτταρο”) που χρησιμοποιείται για να μοντελοποιηθεί η ροή του σμήνους των ελλειψοειδών

σωματιδίων. Πρέπει να προσεχθεί ακόμη μια φορά η περίπτωση όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε όλο το πορώδες μέσο, όπου τότε η ταχύτητα διακένου $\bar{U}_{el}$ διαφέρει από την U_{el} , φαινόμενο που οφείλεται στο γεγονός της μη πλήρους κάλυψης του πορώδους μέσου σαν συνέπεια της ελλειψοειδούς γεωμετρίας της εξωτερικής φανταστικής επιφάνειας.

Η επιβαλλόμενη περιστροφή μαζί με τη μεταφορά δημιουργούν την τρισδιάστατη ροή στο ρευστό φλοιό $\Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ ανάμεσα στα δύο ελλειψοειδή για $\rho_a \leq \rho \leq \rho_b$, όπου υπολογίζονται τα πεδία ροής.

Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται, είναι ανάλογες με εκείνες του σφαιρικού κυτταρικού μοντέλου Happel για αζονοσυμμετρικές ροές 1958 [54]. Πράγματι, οι ελλειψοειδείς συνοριακές συνθήκες τύπου Happel εκφράζονται από τις

$$\Sigma.\Sigma.(1): \quad \mathbf{v}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = U_{el} \mathbf{\hat{r}} + \mathbf{\hat{r}} \times \mathbf{r} \quad \text{για} \quad \rho = \rho_a, \quad (\text{IV-2.79})$$

$$\Sigma.\Sigma.(2): \quad \hat{\rho} \cdot \mathbf{v}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{για} \quad \rho = \rho_b, \quad (\text{IV-2.80})$$

$$\Sigma.\Sigma.(3): \quad \hat{\rho} \cdot \tilde{\mathbf{\Pi}}_{el}^{PN}(\mathbf{r}) \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}) = 0 \quad \text{για} \quad \rho = \rho_b, \quad (\text{IV-2.81})$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό που δίνεται από την (IV-2.11). Η συνοριακή συνθήκη (IV-2.79) εκφράζει την υπόθεση μη ολίσθησης στην επιφάνεια του στερεού σωματιδίου, ενώ η εξίσωση (IV-2.80) συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει κάθετη ροή που να διαπερνάει το ρευστό ελλειψοειδές φλοιό. Επιπλέον, η μη ανταλλαγή μηχανικής ενέργειας με το περιβάλλον εξασφαλίζεται από την συνοριακή συνθήκη (IV-2.81), όπου μηδενίζονται οι επιφανειακές συνιστώσες του ολικού τανυστή των τάσεων. Έτσι το έργο που παράγουν οι διατμητικές τάσεις πάνω στον εξωτερικό φλοιό ισοσκελίζεται με συνέπεια το κυτταρικό μοντέλο να καθίσταται ενεργειακά αυτόνομο. Και με αυτό τον τρόπο ολοκληρώνεται η παράθεση ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος τύπου Happel μέσα σε 3-D χωρία, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ με $\rho_a \leq \rho \leq \rho_b$.

Υποθέτοντας μικρούς αριθμούς Reynolds και ψευδομόνιμη κατάσταση, λόγω των τρισδιάστατων χωρίων, και συμβιβασόμενοι με την ιδέα του σωματιδίου σε κύτταρο που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο I-4, ενδιαφερόμαστε να λύσουμε την έρπουσα ροή μεταξύ του ρευστού φλοιού των δύο ομοεστιακών ελλειψοειδών κάνοντας εκτενή χρήση της τρισδιάστατης γενικής λύσης Parkovich – Neuber. Αυτό που θα κάνουμε,

δηλαδή, είναι να υπολογίσουμε τους σταθερούς συντελεστές $e_{n,el}^{(i/e)m}$ και $d_{n,el}^{(i/e)m}$ για κάθε $n \geq 0$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$, αφού εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες στα πεδία ταχύτητας (IV–2.31) και ολικού τανυστή τάσεων (IV–2.33).

Για συγκεκριμένα μεγέθη ελλειψοειδών σωματιδίων τα οποία καθορίζονται από τη φυσική και το είδος της ροής, ο υπολογισμός των πρώτων κύριων όρων των αναπτυγμάτων είναι επαρκής. Σε αυτή την εργασία, στόχος μας είναι να υπολογίσουμε όσο το δυνατόν περισσότερους όρους του αναπτύγματος ταχύτητας, διατηρούμενοι την ίδια στιγμή σε επίπεδο ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων βαθμού $n \leq 2$ (η επέκταση των αποτελεσμάτων μετά τη χρήση και ελλειψοειδών αρμονικών βαθμού $n = 3$ εξετάζεται αυτή την περίοδο και θα αποτελέσει μέρος της εργασίας [45]). Για να γίνει αυτό, λόγω της μορφής (IV–2.31) του πεδίου ταχύτητας, πρέπει το δυναμικό Φ_{el} να είναι πρώτου βαθμού και το δυναμικό Φ_{0el} να είναι δευτέρου βαθμού. Σε αυτή τη περίπτωση το πεδίο ταχύτητας είναι πρώτου βαθμού. Για να ισχύουν τα παραπάνω, τα δυναμικά (IV–2.28) και (IV–2.29) περιορίζουν τους σταθερούς συντελεστές προς υπολογισμό από τις σχέσεις μηδενισμού

$$e_{n,el}^{(i)m} = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n+1 \quad (\text{IV–2.82})$$

και

$$e_{n,el}^{(e)m} = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad (\text{IV–2.83})$$

ενώ

$$d_{n,el}^{(i)m} = 0, \quad n = 3, 4, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n+1 \quad (\text{IV–2.84})$$

και

$$d_{n,el}^{(e)m} = 0, \quad n = 3, 4, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n+1. \quad (\text{IV–2.85})$$

Δηλαδή, περιορίζουμε κατάλληλα τον υπόχωρο σε εκείνες τις ιδιοσυναρτήσεις που δίνουν πεδίο ταχύτητας πρώτου βαθμού. Τότε, τα πεδία ροής (IV–2.31)–(IV–2.34) λαμβάνουν την πεπερασμένη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[e_{n,el}^{(i)m} \cdot \left(\tilde{\mathbf{I}} E_n^m(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \otimes \nabla E_n^m(\mathbf{r}) \right) + e_{n,el}^{(e)m} \cdot \left(\tilde{\mathbf{I}} F_n^m(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \otimes \nabla F_n^m(\mathbf{r}) \right) \right] \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[d_{n,el}^{(i)m} \nabla E_n^m(\mathbf{r}) + d_{n,el}^{(e)m} \nabla F_n^m(\mathbf{r}) \right] \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathfrak{B}^3) \end{aligned} \quad (\text{IV–2.86})$$

για το πεδίο ταχύτητας,

$$\begin{aligned}
P_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r}) &= P_{0el}^{PN} - \mu_0 \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left\{ \mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} \cdot \nabla I_n^m(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right\} \\
&= p_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r}) + \rho_0 g x_1, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)
\end{aligned} \tag{IV-2.87}$$

για το πεδίο ολικής πίεσης,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r}) &= -p_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{I}} - \mu_0 \left\{ \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\left(\mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} \cdot \mathbf{r} \right) \nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) + \left(\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r} \right) \nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[d_{n,el}^{(i)m} \nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) + d_{n,el}^{(e)m} \nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{IV-2.88}$$

για τον ολικό τανυστή τάσεων, όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$. Τέλος, το πεδίο στροβιλισμού είναι

$$\omega_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left\{ \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} + \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \times \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \tag{IV-2.89}$$

Επομένως, οι εναπομείναντες σταθεροί συντελεστές, δηλαδή οι $\mathbf{e}_{0,el}^{(i)1}$, $\mathbf{e}_{0,el}^{(e)1}$ για $n=0$ και $\mathbf{e}_{1,el}^{(i)\kappa}$, $\mathbf{e}_{1,el}^{(e)\kappa}$, $\kappa=1,2,3$ για $n=1$ του διανυσματικού αρμονικού δυναμικού Φ_{el} πρώτου βαθμού (σύνολο 24 $\mathbf{e}$ -σταθερές), καθώς, επίσης, οι $d_{0,el}^{(i)1}$, $d_{0,el}^{(e)1}$ για $n=0$, $d_{1,el}^{(i)\kappa}$, $d_{1,el}^{(e)\kappa}$, $\kappa=1,2,3$ για $n=1$ και $d_{2,el}^{(i)1}$, $d_{2,el}^{(e)1}$, $d_{2,el}^{(i)2}$, $d_{2,el}^{(e)2}$, $d_{2,el}^{(i)6-\kappa}$, $d_{2,el}^{(e)6-\kappa}$, $\kappa=1,2,3$ ή $d_{2,el}^{(i)\kappa+l}$, $d_{2,el}^{(e)\kappa+l}$, $\kappa, l=1,2,3$, $\kappa \neq l$ για $n=2$ του βαθμωτού αρμονικού δυναμικού Φ_{0el} δευτέρου βαθμού (σύνολο 18 d -σταθερές), πρέπει να υπολογιστούν από τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (IV-2.79)–(IV-2.81) που επιδρούν στα πεδία (IV-2.86) και (IV-2.88). Από τις παραπάνω παρατηρούμε ότι το πεδίο ταχύτητας είναι πρώτου βαθμού, ενώ τα πεδία ολικής πίεσης, ολικού τανυστή τάσεων και στροβιλισμού είναι μηδενικού βαθμού.

Θα ξεκινήσουμε από τη συνοριακή συνθήκη (IV-2.79), όπου αντικαθιστούμε το πεδίο ταχύτητας από την (IV-2.86) υπολογισμένο στην επιφάνεια $\rho = \rho_a$ και αν γράψουμε την κλίση των εξωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων από τη σχέση (IV-2.73) με τη βοήθεια του ορισμού τους (IV-2.22) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned}
&\left\{ \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\left(\mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} + (2n+1) I_n^m(\rho) \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{I}} I_n^m(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\left(d_{n,el}^{(i)m} + (2n+1) I_n^m(\rho) d_{n,el}^{(e)m} \right) \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) \left\{ \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[(2n+1) (\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r}) [E_n^m(\rho)]^{-2} I E_n^m(\mathbf{r}) \right] \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[(2n+1) d_{n,el}^{(e)m} [E_n^m(\rho)]^{-2} I E_n^m(\mathbf{r}) \right] \right\} = 2(\mathbf{U}_{el} + \boldsymbol{\omega}_{el} \times \mathbf{r}), \quad (\text{IV-2.90})
\end{aligned}$$

όπου η (IV-2.90) υπολογίζεται πάνω στο στερεό ελλειψοειδές σωματίδιο $\rho = \rho_a$.

Παρατηρούμε ότι λόγω της παρουσίας του όρου $\mathbf{R}^{el}$ στο δεύτερο κομμάτι της παραπάνω συνοριακής εξίσωσης, είναι αδύνατο να εκφράσουμε αυτό το κομμάτι σε όρους μιας πεπερασμένης έκφρασης ελλειψοειδών αρμονικών. Άρα δεν είναι εφικτή η εφαρμογή ορθογωνιότητας ώστε να υπολογιστούν οι σταθεροί συντελεστές, γεγονός που εμφανίζει και το πρώτο σημαντικό πρόβλημα (οφειλόμενο στο $\mathbf{R}^{el}$) που προκύπτει από την πολυπλοκότητα της ελλειψοειδούς γεωμετρίας.

Παρόλα αυτά, εφόσον τα δυναμικά Φ_{el} και Φ_{0el} δεν είναι ανεξάρτητα [48], όπως δείχνει και η (IV-2.77), οι αντίστοιχοι σταθεροί συντελεστές $e_{n,el}^{(i/e)m}$ για $n=0,1$, $m=1,2,\dots,2n+1$ και $d_{n,el}^{(i/e)m}$ για $n=0,1,2$, $m=1,2,\dots,2n+1$ δεν είναι, επίσης, ανεξάρτητοι. Συγκεκριμένα, μας επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση σύνδεσης (IV-2.77) δύο φορές, εφόσον έχουμε δύο επιφάνειες για να ικανοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες, τις ελλειψοειδείς επιφάνειες για $\rho = \rho_a$ (τέχνασμα K) και για $\rho = \rho_b$ (τέχνασμα K'). Βασικά, έχουμε και διπλάσιο αριθμό σταθερών συντελεστών να υπολογίσουμε, τους εσωτερικούς και τους εξωτερικούς με συνέπεια να δικαιολογούνται και οι δύο βαθμοί ελευθερίας που προσφέρονται. Συνεπώς, δυνάμεθα να εκμεταλλευτούμε την ευελιξία της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber μια φορά στην επιφάνεια $\rho = \rho_a$ και άλλη μια φορά στην επιφάνεια της φανταστικής ρευστής ελλειψοειδούς επιφάνειας $\rho = \rho_b$. Στο σημείο αυτό κάνουμε χρήση αυτής της ευελιξίας στην επιφάνεια του στερεού σωματιδίου και διαλέγουμε να εκφράσουμε τους d -συντελεστές σε όρους των e -συντελεστών με τέτοιο τρόπο ώστε η ποσότητα στη δεύτερη αγκύλη της (IV-2.90) που πολλαπλασιάζεται με τον “κακό” όρο $\mathbf{R}^{el}$ να μηδενιστεί για $\rho = \rho_a$. Αυτό είναι και το “κλειδί” της μεθόδου μας. Ειδικότερα, θέτουμε

- Τέχνασμα K

$$\left\{ \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[(2n+1) \left(\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r} \right) \left[E_n^m(\rho) \right]^{-2} I E_n^m(\mathbf{r}) \right] \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[(2n+1) d_{n,el}^{(e)m} \left[E_n^m(\rho) \right]^{-2} I E_n^m(\mathbf{r}) \right] \right\} = 0, \quad \rho = \rho_a. \quad (\text{IV-2.91})$$

Αν γράψουμε τις εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις σε Καρτεσιανή μορφή μέσω των (IV-2.49)–(IV-2.54), αν αναπτύξουμε το διάνυσμα θέσης στη Καρτεσιανή αναπαράσταση, αν κάνουμε χρήση των (IV-2.43)–(IV-2.48), αν χρησιμοποιήσουμε τις αντίστροφες σχέσεις επαναφοράς των ελλειψοειδών συναρτήσεων (IV-2.55)–(IV-2.59) και στο τέλος εκμεταλλευτούμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας (IV-2.25)–(IV-2.27) στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς $\rho = \rho_a$, καταλήγουμε στις εκφράσεις που συνδέουν τους σταθερούς συντελεστές της διαφορικής λύσης και προέρχονται από την εφαρμογή του πρώτου βαθμού ελευθερίας [48]. Δηλαδή, χρησιμοποιούμε την Καρτεσιανή αναπαράσταση των ελλειψοειδών αρμονικών ώστε να εκτελέσουμε τις εύκολες αλγεβρικές πράξεις και μετά με αντίστροφους μετασχηματισμούς επανερχόμαστε στην ελλειψοειδή μορφή, έτοιμη πια για ορθογωνιότητα. Άρα, ο μηδενισμός (IV-2.91) και η κατάλληλη χρήση των πολύ χρήσιμων σχέσεων του προηγούμενου κεφαλαίου (IV-1.139), (IV-1.154) και (IV-1.155) συνεπάγεται ότι

$$d_{0,el}^{(e)1} = -h_1 h_2 h_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \right)}{h_i} \quad (\text{IV-2.92})$$

$$d_{1,el}^{(e)\kappa} = -\frac{h_\kappa \left[E_1^\kappa(\rho_a) \right]^2}{3h_1 h_2 h_3} \left(\mathbf{e}_{0,el}^{(e)1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa \right), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.93})$$

$$d_{2,el}^{(e)1} = \frac{h_1 h_2 h_3}{5(\Lambda - \Lambda')} E_2^1(\rho_a) \sum_{i=1}^3 \frac{\left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \right)}{h_i (\Lambda - \alpha_i^2)}, \quad (\text{IV-2.94})$$

$$d_{2,el}^{(e)2} = -\frac{h_1 h_2 h_3}{5(\Lambda - \Lambda')} E_2^1(\rho_a) \sum_{i=1}^3 \frac{\left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \right)}{h_i (\Lambda' - \alpha_i^2)}, \quad (\text{IV-2.95})$$

$$d_{2,el}^{(e)\kappa+l} = -\frac{3}{5h_1 h_2 h_3} \left[h_\kappa \left(E_1^\kappa(\rho_a) \right)^2 \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa \right) \right. \\ \left. + h_l \left(E_1^l(\rho_a) \right)^2 \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_l \right) \right], \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-2.96})$$

όπου αυτή η σύνδεση των συντελεστών απαλείφει τον δυσκίνητο όρο που πολλαπλασιάζεται με το $\mathbf{R}^{el}$ στην (IV-2.90), οπότε τότε η τελευταία μαζί με την (IV-2.91) δίνουν

$$\left\{ \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\left(\mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} + (2n+1)I_n^m(\rho) \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \right) \cdot \left(\tilde{\mathbf{I}} IE_n^m(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \otimes \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \right) \right] \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\left(d_{n,el}^{(i)m} + (2n+1)I_n^m(\rho) d_{n,el}^{(e)m} \right) \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \right] \right\} \\ = 2(\mathbf{U}_{el} + \boldsymbol{\Omega}_{el} \times \mathbf{r}), \quad \rho = \rho_a, \quad (\text{IV-2.97})$$

όπου έχουν εξαφανιστεί όλων των ειδών οι απροσδιοριστίες. Την διανυσματική συνθήκη (IV-2.97) την αντιμετωπίζουμε ως εξής. Αναλύουμε τα επιβαλλόμενα πεδία ταχύτητας $\mathbf{U}_{el}$ και περιστροφής $\boldsymbol{\Omega}_{el}$ από τις (IV-2.78) και, όπως πριν, γράφουμε σε Καρτεσιανή μορφή τις εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις. Επίσης, προσθέτουμε και τις μορφές για την κλίση τους από τις (IV-2.60)–(IV-2.65) και, αφού πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της σχέσης (IV-2.97) με την Καρτεσιανή ορθοκανονική βάση $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$, $\kappa=1,2,3$, οδηγούμαστε με ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα ορθογωνιότητας στις παρακάτω εκφράσεις,

$$\frac{h_1 h_2 h_3}{h_\kappa} d_{1,el}^{(i)\kappa} = -2(\mathbf{U}_{el} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa) + (\mathbf{e}_{0,el}^{(i)1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \\ + \left[I_0^1(\rho_a) + (E_1^\kappa(\rho_a))^2 I_1^\kappa(\rho_a) \right] (\mathbf{e}_{0,el}^{(e)1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa), \quad \kappa=1,2,3, \quad (\text{IV-2.98})$$

καθώς επίσης στις σχέσεις

$$- \left[\frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{(\Lambda - \alpha_\kappa^2)} \frac{d_{2,el}^{(i)1}}{h_1 h_2 h_3} + \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)} \frac{d_{2,el}^{(i)2}}{h_1 h_2 h_3} \right] \\ = \frac{(\Lambda - \alpha_1^2)(\Lambda - \alpha_2^2)(\Lambda - \alpha_3^2)}{(\Lambda - \alpha_\kappa^2)} \frac{E_2^1(\rho_a) I_2^1(\rho_a)}{(\Lambda - \Lambda')} \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{h_i (\Lambda - \alpha_i^2)} \\ - \frac{(\Lambda' - \alpha_1^2)(\Lambda' - \alpha_2^2)(\Lambda' - \alpha_3^2)}{(\Lambda' - \alpha_\kappa^2)} \frac{E_2^2(\rho_a) I_2^2(\rho_a)}{(\Lambda - \Lambda')} \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{h_i (\Lambda' - \alpha_i^2)}, \quad (\text{IV-2.99})$$

και

$$h_\kappa \left[(\mathbf{e}_{1,el}^{(i)l} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa) + 3I_1^l(\rho_a) (\mathbf{e}_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \right] - h_l \left[(\mathbf{e}_{1,el}^{(i)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_l) + 3I_1^\kappa(\rho_a) (\mathbf{e}_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_l) \right] \\ - h_1 h_2 h_3 \left[d_{2,el}^{(i)\kappa+l} + I_2^{\kappa+l}(\rho_a) d_{2,el}^{(e)\kappa+l} \right]$$

$$= \frac{2\lambda_{\kappa l}}{h_{6-(\kappa+l)}} \left(\mathbf{\Omega}_{el} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{6-(\kappa+l)} \right), \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l, \quad (\text{IV-2.100})$$

όπου

$$\lambda_{\kappa l} = \begin{cases} +1, & (\kappa, l) = (1, 3), (2, 1), (3, 2) \\ -1, & (\kappa, l) = (1, 2), (2, 3), (3, 1) \end{cases}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l. \quad (\text{IV-2.101})$$

Για την εξαγωγή των (IV-2.98)–(IV-2.101) χρησιμοποιήσαμε τις εκφράσεις απαλοιφής του “κακού” όρου, εξισώσεις (IV-2.92)–(IV-2.96), και με τις τελευταίες ολοκληρώσαμε την επεξεργασία της πρώτης συνοριακής συνθήκης (IV-2.79).

Προχωρώντας στη δεύτερη συνοριακή συνθήκη (IV-2.80) στη ρευστή ελλειψοειδή επιφάνεια $\rho = \rho_b$, τα πράγματα προχωράνε ομαλά, χωρίς να εμφανίζεται κάποιου είδους απροσδιοριστία όπως στη προηγούμενη συνοριακή συνθήκη. Πιο αναλυτικά, εφαρμόζουμε την (IV-2.80) στο πεδίο ταχύτητας (IV-2.86),

$$\left\{ \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} \right) IE_n^m(\mathbf{r}) - \left(\mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} \cdot \mathbf{r} \right) \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \right) IF_n^m(\mathbf{r}) - \left(\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r} \right) \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla IF_n^m(\mathbf{r}) \right) \right] \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[d_{n,el}^{(i)m} \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \right) + d_{n,el}^{(e)m} \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla IF_n^m(\mathbf{r}) \right) \right] \right\} = 0, \quad \rho = \rho_b, \quad (\text{IV-2.102})$$

όπου τώρα η εμφάνιση του μοναδιαίου καθέτου ελλειψοειδούς διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ (σχέση (IV-2.14)) ανεβάζει τον βαθμό των ελλειψοειδών αρμονικών που εμπλέκονται στην αντίστοιχη βαθμωτή αλγεβρική σχέση που παράγεται σε δύο. Δηλαδή, η σχέση ορθογωνιότητας αφορά και ελλειψοειδείς αρμονικές δευτέρου βαθμού. Ακολουθούμε την ίδια πορεία μετατροπής σε Καρτεσιανή μορφή των ελλειψοειδών αρμονικών, παίρνουμε την Καρτεσιανή αναπαράσταση της βάθμωσής τους και ανακτούμε την ελλειψοειδή μορφή μετά από την εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων με τις Καρτεσιανές μεταβλητές. Άρα, σύμφωνα με την

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla IF_n^m(\mathbf{r}) = (2n+1) \left[I_n^m(\rho) \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla IE_n^m(\mathbf{r}) \right) - \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) \frac{IE_n^m(\mathbf{r})}{\left[E_n^m(\rho) \right]^2} \right] \quad (\text{IV-2.103})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$, όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ και

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}, \quad \rho \in (h_2, +\infty) \quad (\text{IV-2.104})$$

και αναπτύσσοντας τις ποσότητες $(\hat{\rho} \cdot \nabla I E_n^m)$, όπου $n = 0, 1, 2$, $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ και $(\hat{\rho} \cdot \mathbf{e}_{n,el}^{(i/e)m})$, $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_{n,el}^{(i/e)m})$, όπου $n = 0, 1$, $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ σε ελλειψοειδείς αρμονικές, μετά από μερικές απλές αλγεβρικές πράξεις και χρήση γνωστών σχέσεων που έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, φτάνουμε σε μια αλγεβρική εξίσωση βαθμωτού χαρακτήρα που περιέχει ελλειψοειδείς σταθερές, άγνωστους σταθερούς συντελεστές και επιφανειακές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις μέχρι δευτέρου βαθμού. Όλα τα παραπάνω δεν θεωρείται σκόπιμο να γραφούν σε αυτό το σημείο. Τελικά, εξάγουμε με επιχειρήματα ορθογωνιότητας άλλες εννιά σχέσεις για τους άγνωστους σταθερούς συντελεστές (όσες είναι και οι επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές για $n \leq 2$).

Αναλυτικότερα, η ορθογωνιότητα ως προς το ζεύγος $E_0^1(\mu)E_0^1(\nu)$ μας εφοδιάζει με την ήδη γνωστή σχέση (IV-2.92) που είναι ανεξάρτητη του συνόρου.

Η ορθογωνιότητα των $E_1^\kappa(\mu)E_1^\kappa(\nu)$, $\kappa = 1, 2, 3$, σε συνδυασμό με τα $d_{1,el}^{(e)\kappa}$ και $d_{1,el}^{(i)\kappa}$, $\kappa = 1, 2, 3$ που δίνονται από τις (IV-2.93) και (IV-2.98), αντίστοιχα, βοηθάει στο να υπολογίσουμε πλήρως τρεις σταθερούς συντελεστές. Με άλλα λόγια, με χρήση της

$$E_3^7(\rho) = \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}, \quad \rho \in (h_2, +\infty) \quad (\text{IV-2.105})$$

παίρνουμε

$$(\mathbf{e}_{0,el}^{(e)1} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa) = -\frac{2E_3^7(\rho_b)}{N_\kappa} (\mathbf{U}_{el} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.106})$$

$$N_\kappa = E_3^7(\rho_b) \left[(I_0^1(\rho_b) - I_0^1(\rho_a)) + (E_1^\kappa(\rho_a))^2 (I_1^\kappa(\rho_b) - I_1^\kappa(\rho_a)) \right] + (E_1^\kappa(\rho_b))^2 - (E_1^\kappa(\rho_a))^2, \quad \kappa = 1, 2, 3. \quad (\text{IV-2.107})$$

Στη συνέχεια, η καθετότητα των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών $E_2^1(\mu)E_2^1(\nu)$

και $E_2^2(\mu)E_2^2(\nu)$ συνεπάγεται, αντίστοιχα

$$-5d_{2,el}^{(e)1} + 2E_2^1(\rho_b)E_3^7(\rho_b) \left(d_{2,el}^{(i)1} + 5I_2^1(\rho_b)d_{2,el}^{(e)1} \right) + \frac{h_1 h_2 h_3 E_2^1(\rho_b)}{(\Lambda - \Lambda')} \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{h_i (\Lambda - \alpha_i^2)} = 0 \quad (\text{IV-2.108})$$

και

$$-5d_{2,el}^{(e)2} + 2E_2^2(\rho_b)E_3^7(\rho_b) \left(d_{2,el}^{(i)2} + 5I_2^2(\rho_b)d_{2,el}^{(e)2} \right) - \frac{h_1 h_2 h_3 E_2^2(\rho_b)}{(\Lambda - \Lambda')} \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{h_i (\Lambda' - \alpha_i^2)} = 0$$

$$(IV-2.109)$$

με την εισαγωγή της ταυτότητας (IV-1.139). Όμως, αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (IV-2.94) και (IV-2.95) στην έκφραση (IV-2.99) και γράψουμε την τελευταία για $\kappa = 1, 2$ (είτε για $\kappa = 1, 3$ ή για $\kappa = 2, 3$), τότε παίρνουμε τους εσωτερικούς σταθερούς συντελεστές βαθμού $n = 2$ και τάξης $m = 1, 2$ σαν συνάρτηση των αντίστοιχων εξωτερικών, δηλ.,

$$d_{2,el}^{(i)1} = -5I_2^1(\rho_a)d_{2,el}^{(e)1} \quad (IV-2.110)$$

και

$$d_{2,el}^{(i)2} = -5I_2^2(\rho_a)d_{2,el}^{(e)2}. \quad (IV-2.111)$$

Στο επόμενο βήμα εισάγουμε τις (IV-2.110) και (IV-2.111) στις σχέσεις (IV-2.108) και (IV-2.109) και με τη βοήθεια των (IV-2.94) και (IV-2.95) οδηγούμαστε στις

$$\frac{h_1 h_2 h_3 E_2^1(\rho_b)}{(\Lambda - \Lambda')} \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{h_i (\Lambda - \alpha_i^2)} \left[1 - \frac{E_2^1(\rho_a)}{E_2^1(\rho_b)} + 2E_3^7(\rho_b)E_2^1(\rho_a)(I_2^1(\rho_b) - I_2^1(\rho_a)) \right] = 0 \quad (IV-2.112)$$

και

$$\frac{h_1 h_2 h_3 E_2^2(\rho_b)}{(\Lambda - \Lambda')} \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{h_i (\Lambda' - \alpha_i^2)} \left[1 - \frac{E_2^2(\rho_a)}{E_2^2(\rho_b)} + 2E_3^7(\rho_b)E_2^2(\rho_a)(I_2^2(\rho_b) - I_2^2(\rho_a)) \right] = 0, \quad (IV-2.113)$$

όπου ο μη μηδενισμός των παραστάσεων στις αγκύλες συνεπάγεται τον μηδενισμό των παραστάσεων

$$\sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{h_i (\Lambda - \alpha_i^2)} = \sum_{i=1}^3 \frac{(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i)}{h_i (\Lambda' - \alpha_i^2)} = 0. \quad (IV-2.114)$$

Άμεση συνέπεια των (IV-2.114) είναι ο μηδενισμός των παρακάτω σταθερών συντελεστών, δηλαδή, οι σχέσεις (IV-2.94) και (IV-2.95) με τις προηγούμενες εκφράσεις (IV-2.110) και (IV-2.111) μας δίνουν

$$d_{2,el}^{(i)1} = d_{2,el}^{(e)1} = 0 \quad (IV-2.115)$$

και

$$d_{2,el}^{(i)2} = d_{2,el}^{(e)2} = 0. \quad (IV-2.116)$$

Προχωράμε, τώρα, στην ορθογωνιότητα των $E_2^{6-\kappa}(\mu)E_2^{6-\kappa}(\nu)$, $\kappa = 1, 2, 3$, όπου προκύπτει η πολύπλοκη αλγεβρική παράσταση

$$\begin{aligned}
0 = & h_1 h_2 h_3 \left[5d_{2,el}^{(e)\kappa+l} - E_3^7(\rho_b) \left((E_1^\kappa(\rho_b))^2 + (E_1^l(\rho_b))^2 \right) (d_{2,el}^{(i)\kappa+l} + 5I_2^{\kappa+l}(\rho_b) d_{2,el}^{(e)\kappa+l}) \right] \\
& + \left[3h_\kappa (E_1^\kappa(\rho_a))^2 (e_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{x}_\kappa) + 3h_l (E_1^l(\rho_a))^2 (e_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{x}_l) \right] \\
& + E_3^7(\rho_b) h_{6-(\kappa+l)}^2 \left[h_\kappa (e_{1,el}^{(i)l} \cdot \hat{x}_\kappa) + 3I_1^l(\rho_b) (e_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{x}_\kappa) \right. \\
& \left. - h_l (e_{1,el}^{(i)\kappa} \cdot \hat{x}_l) - 3I_1^\kappa(\rho_b) (e_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{x}_l) \right], \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa > l, \quad (\text{IV-2.117})
\end{aligned}$$

όπου το $\kappa > l$ σημαίνει ότι το ζεύγος (κ, l) παίρνει τις τιμές $(2,1), (3,1), (3,2)$. Σε αυτό το σημείο αφαιρούμε κατά μέλη ανά δύο (αυτές που περιέχουν την ίδια συνιστώσα του επιβαλλόμενου στροβιλισμού $\mathbf{\Omega}_{el}$) τις έξι εξισώσεις που προκύπτουν από τη σχέση (IV-2.100) και εύκολα προκύπτει

$$d_{2,el}^{(i)\kappa+l} = -5I_2^{\kappa+l}(\rho_a) d_{2,el}^{(e)\kappa+l}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l. \quad (\text{IV-2.118})$$

Όπως προείπαμε, από την (IV-2.117) προκύπτουν τρεις σχέσεις. Για αυτά τα ζεύγη των $(\kappa, l) = (2,1), (3,1), (3,2)$ αναφερόμαστε στις (IV-2.96) και (IV-2.100), όπου σε συνδυασμό με την (IV-2.118) φτάνουμε μετά από μια σειρά από αλγεβρικές πράξεις στις τρεις σχέσεις

$$P_\kappa^l h_\kappa (e_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{x}_\kappa) + P_l^\kappa h_l (e_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{x}_l) = R^{\kappa+l}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \quad (\text{IV-2.119})$$

με

$$\begin{aligned}
P_\kappa^l = & \frac{\rho_b^2 - \rho_a^2}{(E_2^{\kappa+l}(\rho_b))^2} + E_3^7(\rho_b) \frac{\alpha_l^2 - \alpha_\kappa^2}{(E_2^{\kappa+l}(\rho_b))^2} (I_1^l(\rho_b) - I_1^l(\rho_a)) \\
& + E_3^7(\rho_b) (E_1^\kappa(\rho_a))^2 \left(\frac{1}{(E_1^\kappa(\rho_b))^2} + \frac{1}{(E_1^l(\rho_b))^2} \right) (I_2^{\kappa+l}(\rho_b) - I_2^{\kappa+l}(\rho_a)) \quad (\text{IV-}
\end{aligned}$$

2.120)

για $\kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l$, ενώ

$$\begin{aligned}
R^{\kappa+l} = & \frac{2h_3 \mathbf{\Omega}_{6-(\kappa+l),el}}{3} (-1)^{\kappa+l} \frac{E_1^{6-(\kappa+l)}(\rho_b)}{E_2^{\kappa+l}(\rho_b)} \\
= & \frac{2h_1 h_2 h_3 \mathbf{\Omega}_{6-(\kappa+l),el}}{3h_l h_\kappa} (-1)^{\kappa+l} \frac{E_3^7(\rho_b)}{(E_2^{\kappa+l}(\rho_b))^2}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l. \quad (\text{IV-2.121})
\end{aligned}$$

Προτού υπεισέλθουμε στην ανάλυση της τελευταίας συνοριακής συνθήκης (IV-2.81) ας δούμε μέχρι τώρα την μορφή του κυρίου πεδίου του προβλήματος, δηλαδή του

πεδίου ταχύτητας. Ειδικότερα, το ανάπτυγμα (IV-2.86) για την ταχύτητα κάνοντας κάποιες επίπινες αλγεβρικές πράξεις, αντικαθιστώντας τους μέχρι τώρα υπολογισμένους σταθερούς συντελεστές και ακολουθώντας τους ορισμούς (IV-2.78) για τα επιβαλλόμενα πεδία μεταφοράς και περιστροφής για τη γραφή των ποσοτήτων U_{el} και $\mathbf{\Omega}_{el} \times \mathbf{r}$, μετατρέπεται στην παράσταση

$$\mathbf{v}_{el}^{(0)PN}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_{el} + \mathbf{\Omega}_{el} \times \mathbf{r} + \sum_{j=1}^3 \Theta_j(\rho) IE_1^j(\mathbf{r}) + \frac{\hat{\rho}}{2\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \left[\sum_{j=1}^3 \Theta_j(\rho) IE_1^j(\mathbf{r}) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 M_i^j(\rho) IE_2^{i+j}(\mathbf{r}) \right] \quad (\text{IV-2.122})$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, όπου ορίσαμε

$$\mathbf{Z}(\rho) = -E_3^7(\rho_b) \mathbf{U}_{el} \cdot \sum_{i=1}^3 \left[\left(I_0^1(\rho) - I_0^1(\rho_a) \right) + \left(E_1^i(\rho_a) \right)^2 \left(I_1^i(\rho) - I_1^i(\rho_a) \right) \right] \frac{\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_i}{N_i} \quad (\text{IV-2.123})$$

για κάθε $\rho_a \leq \rho \leq \rho_b$ με

$$N_\kappa = E_3^7(\rho_b) \left[\left(I_0^1(\rho_b) - I_0^1(\rho_a) \right) + \left(E_1^\kappa(\rho_a) \right)^2 \left(I_1^\kappa(\rho_b) - I_1^\kappa(\rho_a) \right) \right] + \left(E_1^\kappa(\rho_b) \right)^2 - \left(E_1^\kappa(\rho_a) \right)^2, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\text{IV-2.124})$$

ενώ

$$\mathbf{H}_\kappa(\rho) = \frac{3}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \kappa}}^3 \left\{ h_i \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(\epsilon)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \right) \left(I_1^\kappa(\rho) - I_1^\kappa(\rho_a) \right) - h_\kappa \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(\epsilon)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa \right) \left(I_1^i(\rho) - I_1^i(\rho_a) \right) \right. \\ \left. + \left[h_i \left(E_1^i(\rho_a) \right)^2 \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(\epsilon)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \right) + h_\kappa \left(E_1^\kappa(\rho_a) \right)^2 \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(\epsilon)i} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa \right) \right] \left(I_2^{i+\kappa}(\rho) - I_2^{i+\kappa}(\rho_a) \right) \right\} \frac{\hat{\mathbf{x}}_i}{h_i}, \quad (\text{IV-2.125})$$

όπου, πάλι, $\rho_a \leq \rho \leq \rho_b$ και $\kappa = 1, 2, 3$. Επίσης,

$$\Theta_\kappa(\rho) = -\frac{2h_\kappa E_3^7(\rho_b)}{h_1 h_2 h_3} \frac{(\mathbf{U}_{el} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa)}{N_\kappa} \left[1 - \left(\frac{E_1^\kappa(\rho_a)}{E_1^\kappa(\rho)} \right)^2 \right], \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-2.126})$$

και

$$M_\kappa^l(\rho) = \frac{3h_\kappa}{h_1 h_2 h_3} \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(\epsilon)l} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa \right) \left[1 - \left(\frac{E_1^\kappa(\rho_a)}{E_1^\kappa(\rho)} \right)^2 \right] \frac{1}{\left(E_1^l(\rho) \right)^2}, \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \quad (\text{IV-2.127})$$

για $\rho \in (h_2, +\infty)$, όπου οι σχέσεις που εμπλέκουν τους σταθερούς συντελεστές που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί ακόμα είναι οι (IV–2.114) και (IV–2.119), μαζί και με τις εξισώσεις (IV–2.120), (IV–2.121).

Ανακεφαλαιώνοντας τις συνέπειες των δύο πρώτων συνοριακών συνθηκών (IV–2.79) και (IV–2.80) βλέπουμε ότι η σταθερά $e_{0,el}^{(e)1}$ υπολογίζεται από τη σχέση (IV–2.106) και μένουμε με τρία διανύσματα $e_{1,el}^{(e)1}$, $e_{1,el}^{(e)2}$ και $e_{1,el}^{(e)3}$, δηλαδή με εννιά βαθμωτές σταθερές. Τα τρία διαγώνια στοιχεία $(e_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{x}_\kappa)$, $\kappa = 1, 2, 3$ συνδέονται μέσω των δύο σχέσεων (IV–2.114). Ο τρόπος που συνδέονται γίνεται κατανοητός αν “ανοίξουμε” τα αθροίσματα και λύσουμε ως προς τις δύο από τις τρεις διαγώνιες σταθερές. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες του Κεφαλαίου IV–1, σχέσεις (IV–1.141) και (IV–1.142), βρίσκουμε εύκολα

$$(e_{1,el}^{(e)1} \cdot \hat{x}_1) = \frac{h_1}{h_3} (e_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{x}_3) \quad \text{και} \quad (e_{1,el}^{(e)2} \cdot \hat{x}_2) = \frac{h_2}{h_3} (e_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{x}_3) \quad (\text{IV–2.128})$$

ή

$$(e_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{x}_3) = \frac{h_3}{h_1} (e_{1,el}^{(e)1} \cdot \hat{x}_1) = \frac{h_3}{h_2} (e_{1,el}^{(e)2} \cdot \hat{x}_2), \quad (\text{IV–2.129})$$

οπότε η συνιστώσα $(e_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{x}_3)$ είναι ελεύθερη προς υπολογισμό. Τέλος, οι έξι συνιστώσες $(e_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{x}_\kappa)$, $\kappa, l = 1, 2, 3$, $\kappa \neq l$, συνδέονται μέσω των τριών σχέσεων (IV–2.119). Ως αποτέλεσμα, έχουμε τέσσερις ελεύθερους σταθερούς συντελεστές που εμπλέκονται στο πεδίο (IV–2.122)–(IV–2.127) για να ικανοποιήσουμε την τελευταία και πιο δύσκολη συνοριακή συνθήκη (IV–2.81). Στην ουσία, όμως, είναι τρεις οι άγνωστοι συντελεστές αφού ο $(e_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{x}_3)$ δεν εμφανίζεται στο κύριο πεδίο ταχύτητας. Υπενθυμίζουμε, δε, ότι έχουμε χρησιμοποιήσει τον έναν βαθμό ελευθερίας στη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber πάνω στην επιφάνεια του στερεού ελλειψοειδούς σωματιδίου $\rho = \rho_a$. Η παρουσία, όμως, και της εξωτερικής ελλειψοειδούς ρευστής επιφάνειας για $\rho = \rho_b$, φράσσει το χωρίο του υπολογισμού των πεδίων ροής και αυτόματα καθιστά το πρόβλημά μας μικτού χαρακτήρα (εσωτερικό και εξωτερικό) διπλασιάζοντας με αυτό τον τρόπο τον αριθμό των προς υπολογισμό σταθερών συντελεστών που αντιστοιχούν στα αρμόδια δυναμικά της

αναπαράστασης. Έτσι, η ευελιξία της γενικής μας λύσης [48] επεκτείνεται σε έναν ακόμα βαθμό ελευθερίας που μας προσφέρεται, ώστε να συνδέσουμε τους σταθερούς συντελεστές στην επιφάνεια $\rho = \rho_b$ όπως μας συμφέρει κάνοντας χρήση ενός τεχνάσματος K' τώρα. Το πώς και αν θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ελευθερία θα το δούμε αργότερα.

Η τρίτη συνοριακή συνθήκη (IV-2.81) συνδυάζεται με το πεδίο του ολικού τανυστή των τάσεων για να δώσει

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}) \cdot \left\{ \sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[\left(\mathbf{e}_{n,el}^{(i)m} \cdot \mathbf{r} \right) \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right) + \left(\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r} \right) \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right) \right] \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \left[d_{n,el}^{(i)m} \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right) + d_{n,el}^{(e)m} \left(\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla \otimes \nabla I_n^m(\mathbf{r}) \right) \right] \right\} = \mathbf{0}, \quad \rho = \rho_b, \end{aligned} \quad (\text{IV-2.130})$$

αφού άμεσα η (IV-2.11) συνεπάγεται άμεσα

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}) = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\mu}} \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (\text{IV-2.131})$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις της διπλής βάρθρωσης των εσωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών (IV-2.66)–(IV-2.71) για να αντιμετωπίσουμε τους εσωτερικούς όρους της (IV-2.130), ενώ για τους εξωτερικούς όρους κάνουμε τις παρακάτω κινήσεις.

Κατ' αρχάς, γράφουμε το ορθομοναδιαίο κάθετο διάνυσμα (IV-2.14) στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς ως

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{E_3^7(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{\mathbf{x}}_i}{(E_1^i(\rho))^2}, \quad \rho = \rho_b \quad (\text{IV-2.132})$$

και, συνεπώς, το εσωτερικό του γινόμενο με την (IV-2.75) δίνει

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla I_n^m(\rho) = -\frac{1}{[E_n^m(\rho)]^2 \sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}, \quad \rho = \rho_b, \quad (\text{IV-2.133})$$

αφού

$$\mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}}, \quad \rho = \rho_b, \quad (\text{IV-2.134})$$

ενώ σύμφωνα με τον ορισμό (IV-2.12) και με τη βοήθεια της (IV-2.75) παίρνουμε

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla \nabla I_n^m(\rho) = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla I_n^m(\rho)$$

$$= -\frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} [E_n^m(\rho)]^{-2} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) + [E_n^m(\rho)]^{-2} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) \right], \quad \rho = \rho_b. \quad (\text{IV-2.135})$$

Λίγες αλγεβρικές πράξεις στην (IV-2.135) υπό το πρίσμα των (IV-2.43)–(IV-2.48) καταλήγουν εύκολα στην έκφραση

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla \nabla I_n^m(\rho) = \frac{\sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2}}{[E_n^m(\rho)]^3 \sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} \left[2E_n^{m'}(\rho) \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) - E_n^m(\rho) \frac{\partial \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r})}{\partial \rho} \right], \quad (\text{IV-2.136})$$

όπου $\rho = \rho_b$.

Έτσι αν γράψουμε την διπλή κλίση των εξωτερικών ελλειψοειδών αρμονικών από την (IV-2.74) και αντικαταστήσουμε τις (IV-2.133) και (IV-2.136), μαζί με τις σχέσεις (IV-2.60)–(IV-2.71), στη συνοριακή συνθήκη (IV-2.130) και την ίδια ώρα θέσουμε την

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}} &= E_3^7(\rho) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{(E_1^i(\rho))^2} \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) \\ &= E_3^7(\rho) \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{(E_1^i(\rho))^2} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) \otimes \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \rho = \rho_b \end{aligned} \quad (\text{IV-2.137})$$

στην ίδια συνοριακή συνθήκη, τότε εκτελούμε τις συνήθεις απλές πράξεις και φτάνουμε στην παρακάτω σχέση που αποτελεί τη συνοριακή συνθήκη (IV-2.81) σε μια πιο εκλεπτυσμένη μορφή, δηλ.,

$$\begin{aligned} &(-\tilde{\mathbf{I}} + \hat{\boldsymbol{\rho}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}) \cdot \left\{ \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{R}^{el}(\mathbf{r}) \left[\sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{(2n+1)}{[E_n^m(\rho)]^2} I E_n^m(\mathbf{r}) (\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{(2n+1)}{[E_n^m(\rho)]^2} I E_n^m(\mathbf{r}) d_{n,el}^{(e)m} \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^5 \left[(d_{2,el}^{(i)m} + 5I_2^m(\rho) d_{2,el}^{(e)m}) \sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2} \hat{\boldsymbol{\rho}} \cdot \nabla \otimes \nabla I E_n^m(\rho) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{n=0}^1 \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{(2n+1)}{[E_n^m(\rho)]^2} \nabla I E_n^m(\mathbf{r}) (\mathbf{e}_{n,el}^{(e)m} \cdot \mathbf{r}) + \sum_{n=0}^2 \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{(2n+1)}{[E_n^m(\rho)]^2} \nabla I E_n^m(\mathbf{r}) d_{n,el}^{(e)m} \right] \right\} = \mathbf{0}, \quad \rho = \rho_b. \end{aligned}$$

(IV-2.138)

Προκειμένου να επεξεργαστούμε την παραπάνω παράσταση κάνουμε τα εξής λογικά βήματα. Αρχικά, αναλύουμε όλες τις παραστάσεις μέσα στις παρενθέσεις σε όρους σταθερών και Καρτεσιανών συντεταγμένων σύμφωνα με τις (IV-2.49)–(IV-2.65) και αντικαθιστούμε όλες τις ήδη υπολογισμένες σταθερές από τα προηγούμενα βήματα. Επιπλέον, κάνουμε χρήση των εκφράσεων (IV-2.76) και (IV-2.11), ενώ τον όρο που περιέχει τα διαγώνια στοιχεία $(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa)$, $\kappa = 1, 2, 3$ με τη βοήθεια της (IV-2.128) ή της (IV-2.129), τον χειριζόμαστε χωριστά ως εξής,

$$\begin{aligned} & (\hat{\boldsymbol{\mu}} \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\mathbf{v}}) \cdot \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{x}}_i \frac{3h_1 h_2 h_3}{h_\kappa (E_1^\kappa(\rho_b))^2} (\mathbf{e}_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa) \\ &= 3h_1 h_2 (\mathbf{e}_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{\mathbf{x}}_3) (\hat{\boldsymbol{\mu}} \otimes \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}} \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{x_i \hat{\mathbf{x}}_i}{(E_1^\kappa(\rho_b))^2} = \mathbf{0}, \quad \rho = \rho_b, \quad (\text{IV-2.139}) \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση του ορισμού (IV-2.14). Αν γίνουν τα παραπάνω, η (IV-2.138) εκφυλίζεται σε μια μορφή

$$A(\rho_b, \mu, \nu) \hat{\boldsymbol{\mu}} + B(\rho_b, \mu, \nu) \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad (\text{IV-2.140})$$

όπου οι παραστάσεις A και B περιέχουν τους σταθερούς συντελεστές που είναι προς υπολογισμό και σταθερές. Η (IV-2.140) επιβάλλει τον ξεχωριστό μηδενισμό των A και B . Τελικά καταλήγουμε σε δύο σχέσεις οι οποίες υποθέτουν τη μορφή

$$\sum_{i=1}^3 B_i \left(\frac{(E_1^i(\rho_a))^2}{x^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} - 1 \right) E_1^i(\mu) E_1^i(\nu) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left(\frac{A_i^j + (E_1^i(\rho_b))^2 C_i^j}{x^2 - \alpha_1^2 + \alpha_i^2} - C_i^j \right) E_2^{i+j}(\mu) E_2^{i+j}(\nu) = 0, \quad (\text{IV-2.141})$$

όπου η (IV-2.141) αναπαριστά δύο σχέσεις για τις διαφορετικές τιμές της μεταβλητής $x = \mu, \nu$ για κάθε $\mu \in (h_3, h_2)$ και $\nu \in (-h_3, h_3)$. Οι σταθερές μέσα στη συνοριακή συνθήκη (IV-2.141) περιέχουν και τους άγνωστους σταθερούς συντελεστές και δίνονται από τις σχέσεις,

$$A_\kappa^l = \frac{3(E_1^\kappa(\rho_b))^2 (\rho_b^2 - \rho_a^2) h_l}{E_2^{\kappa+l}(\rho_b)} (\mathbf{e}_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_l), \quad \kappa, l = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \quad (\text{IV-2.142})$$

$$B_\kappa = \frac{2E_3^7(\rho_b) E_1^\kappa(\rho_b) h_\kappa U_\kappa}{N_\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\text{IV-2.143})$$

και

$$C_{\kappa}^l = \frac{3}{E_2^{\kappa+l}(\rho_b)} \left[-h_{\kappa} \left(E_1^{\kappa}(\rho_a) \right)^2 \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{\kappa} \right) \right. \\ \left. + E_3^7(\rho_b) \left(E_1^{\kappa}(\rho_b) \right)^2 \left(I_2^{\kappa+l}(\rho_b) - I_2^{\kappa+l}(\rho_a) \right) \left(h_{\kappa} \left(E_1^{\kappa}(\rho_a) \right)^2 \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{\kappa} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + h_l \left(E_1^l(\rho_a) \right)^2 \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)\kappa} \cdot \hat{\mathbf{x}}_l \right) \right) \right] \quad (\text{IV-2.144})$$

για κάθε $\kappa, l=1,2,3$ και $\kappa \neq l$.

Σε αυτό το σημείο ορίζουμε τα ολοκληρώματα $J_{n,\kappa}^m$ πάνω σε μια σταθερή επιφάνεια ελλειψοειδούς $\rho = \rho_0$ από τις σχέσεις

$$J_{n,\kappa}^m(\rho_0) = \iint_{\rho=\rho_0} \frac{E_n^m(\mu) E_n^m(\nu)}{\left(x^2 - \alpha_1^2 + \alpha_{\kappa}^2 \right) \sqrt{\rho_0^2 - \mu^2} \sqrt{\rho_0^2 - \nu^2}} dS, \quad \kappa=1,2,3 \quad (\text{IV-2.145})$$

για $\mu \in (h_3, h_2)$ και $\nu \in (-h_3, h_3)$ και για κάθε $n=0,1,2,\dots$ και $m=1,2,\dots,2n+1$, όπου ισχύει,

$$x=\mu \Rightarrow J_{n,\kappa}^m = M_{n,\kappa}^m \quad \text{και} \quad x=\nu \Rightarrow J_{n,\kappa}^m = N_{n,\kappa}^m. \quad (\text{IV-2.146})$$

Παραμένοντας στο παραπάνω σκεπτικό, προχωράμε στην (IV-2.141), όπου μετά από αρκετές πράξεις φτάνουμε σε δύο σχέσεις που περιέχουν τους άγνωστους σταθερούς συντελεστές και τα προαναφερθέντα ολοκληρώματα. Συνεπώς, εφόσον είναι αδύνατο να εφαρμόσουμε επιχειρήματα ορθογωνιότητας στη συνοριακή συνθήκη (IV-2.141), ακολουθούμε την πιο πάνω υπόθεση και, τελικά, οι (IV-2.141)–(IV-2.144) μας οδηγούν στις

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 X_i^j h_i \left(\mathbf{e}_{1,el}^{(e)j} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i \right) = Q_x, \quad x=\mu, \nu, \quad \mu \in (h_3, h_2), \quad \nu \in (-h_3, h_3), \quad (\text{IV-2.147})$$

όπου

$$X_{\kappa}^l = \frac{3}{E_2^{\kappa+l}(\rho_b)} \left\{ \left(E_1^l(\rho_b) \right)^4 J_{2,l}^{\kappa+l}(\rho_b) - \right. \\ \left. - \left(E_1^{\kappa}(\rho_a) \right)^2 \left[J_{2,l}^{\kappa+l}(\rho_b) \left(E_1^l(\rho_b) \right)^2 \left(1 - E_3^7(\rho_b) \left(E_1^l(\rho_b) \right)^2 \left(I_2^{\kappa+l}(\rho_b) - I_2^{\kappa+l}(\rho_a) \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + J_{2,\kappa}^{\kappa+l}(\rho_b) \left(E_1^{\kappa}(\rho_b) \right)^2 \left(1 - E_3^7(\rho_b) \left(E_1^{\kappa}(\rho_b) \right)^2 \left(I_2^{\kappa+l}(\rho_b) - I_2^{\kappa+l}(\rho_a) \right) \right) \right] \right\}, \quad (\text{IV-2.148})$$

για κάθε $\kappa, l=1,2,3$ και $\kappa \neq l$, ενώ

$$Q_x = - \sum_{i=1}^3 \frac{2E_3^7(\rho_b)E_1^i(\rho_b)(E_1^i(\rho_a))^2 h_i U_i}{N_i} J_{1,i}^i(\rho_b) \quad (\text{IV-2.149})$$

για κάθε $x = \mu, \nu$, όπου $\mu \in (h_3, h_2)$ και $\nu \in (-h_3, h_3)$. Ανάλογα, δηλαδή, με τη τιμή του $x = \mu, \nu$ παίρνουν και τις αντίστοιχες μορφές τα ολοκληρώματα από τις εκφράσεις (IV-2.145) και (IV-2.146).

Συνοψίζοντας, η τελευταία συνοριακή συνθήκη δεν μας έδωσε επιπλέον πληροφορία για το διαγώνιο στοιχείο $(e_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{x}_3)$, το οποίο ούτως ή άλλως δεν λαμβάνει μέρος στο πεδίο της ταχύτητας, ενώ μας εφοδίασε με άλλες δύο σχέσεις (IV-2.147)–(IV-2.149) για τον υπολογισμό των υπολοίπων αγνώστων σταθερών συντελεστών $(e_{1,el}^{(e)l} \cdot \hat{x}_\kappa)$, $\kappa, l = 1, 2, 3$, $\kappa \neq l$. Οπότε, για να ολοκληρωθεί η λύση του προβλήματος μένει να υπολογιστεί μια από τις αναφερθείσες σταθερές που παραμένει ακόμα ελεύθερη. Εδώ λοιπόν εισάγουμε το δεύτερο τέχνασμα K' σύμφωνα με το οποίο διαλέγουμε αυθαίρετα [48] να μηδενίσουμε τον έναν από τους έξι άγνωστους σταθερούς συντελεστές, έστω τον $(e_{1,el}^{(e)1} \cdot \hat{x}_2)$. Άρα,

- **Τέχνασμα K'**

$$(e_{1,el}^{(e)1} \cdot \hat{x}_2) = 0, \quad \rho = \rho_b. \quad (\text{IV-2.150})$$

Πράττοντας με αυτό το σκεπτικό, καθορίζουμε πλήρως τους υπόλοιπους πέντε σταθερούς συντελεστές $(e_{1,el}^{(e)2} \cdot \hat{x}_1)$, $(e_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{x}_1)$, $(e_{1,el}^{(e)1} \cdot \hat{x}_3)$, $(e_{1,el}^{(e)3} \cdot \hat{x}_2)$ και $(e_{1,el}^{(e)2} \cdot \hat{x}_3)$ από τις σχέσεις (IV-2.147)–(IV-2.149), μαζί με τις εξισώσεις (IV-2.119)–(IV-2.121) και οπότε το πρόβλημα λύθηκε πλήρως. Το πεδίο ταχύτητας δίνεται από την έκφραση (IV-2.122)–(IV-2.127) και τα υπόλοιπα πεδία από τις σχέσεις (IV-2.87)–(IV-2.89), που αφορούν τους πρώτους κύριους όρους, σαν συνάρτηση των ορισμένων ολοκληρωμάτων (IV-2.145) με (IV-2.146). Σημειώνουμε ότι η επιλογή του μηδενισμού (IV-2.150) είναι αυθαίρετος και θα μπορούσαμε να μηδενίσουμε κάποια άλλη από τις σταθερές χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα.

IV-2.2β Γεωμετρικός εκφυλισμός στο σφαιρικό κυτταρικό μοντέλο *Happel*.

Ένας επίπονος και χρονοβόρος γεωμετρικός εκφυλισμός ακολουθεί τα βήματα του Κεφαλαίου IV–1 και οδηγεί στο αντίστοιχο σφαιρικό πρότυπο για τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν και στο ελλειψοειδές πρότυπο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παράγραφο αυτή θα συνοψίσουμε τα νέα αποτελέσματα που συνεισέφερε η παρούσα Διατριβή στη μελέτη των διαφορικών αναπαραστάσεων στη ροή Stokes, καθώς και η εφαρμογή τους στην επίλυση διαφόρων εφαρμογών που αφορούν τρισδιάστατα ή αξονοσυμμετρικά κυτταρικά μοντέλα για ροή σμήνους σωματιδίων σε πορώδη μέσα για θεώρηση σφαιρικών, σφαιροειδών και ελλειψοειδών σωματιδίων με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel και Kuwabara. Βασικά, η σύνοψη για το περιεχόμενο των κυρίων μερών της εργασίας έγινε στην εισαγωγή. Ωστόσο, η συγκεκριμένη Διατριβή αποτελείται από δύο ενότητες, μια που αφορά το θεωρητικό μαθηματικό υπόβαθρο και μια που αναφέρεται σε εφαρμογές.

Η πρώτη ενότητα εμπεριέχει τις συσχετίσεις των διαφορικών αναπαραστάσεων σε επίπεδο συναρτήσεων δυναμικών σε διάφορα ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων. Αναλυτικότερα, ξεκινήσαμε με τη σφαιρική γεωμετρία και συσχετίσαμε τη διαφορική αναπαράσταση που προτάθηκε από τους Parkovich – Neuber με τις διαφορικές λύσεις των Boussinesq – Galerkin και Palaniappan *et al.* για 3-D χωρία και με την αναπαράσταση Stokes για διδιάστατα πεδία. Η διαδικασία της συσχέτισης βασίστηκε στην εξίσωση των πεδίων ροής, και αφού φάνηκε ότι η γενική λύση των Parkovich – Neuber παρουσιάζεται σε πλεονεκτικότερη θέση έναντι των άλλων, συνεχίσαμε στην αναλυτική σύνδεσή της με την αντίστοιχη του Stokes σε αξονοσυμμετρικά σφαιροειδή χωρία ροής. Διαγραμματικά, αυτό που κάναμε καταγράφεται ως εξής:

ΡΟΗ STOKES

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{TAXYTHTA (I)} \\ \hline \text{ΟΛΙΚΗ ΠΙΕΣΗ (I)} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{TAXYTHTA (II)} \\ \hline \text{ΟΛΙΚΗ ΠΙΕΣΗ (II)} \\ \hline \end{array}$$

Δηλαδή, στην παρούσα ανακοίνωση συσχέτισαμε τις αναφερθείσες διαφορικές αναπαραστάσεις αποδεικνύοντας την ισοδυναμία δύο τυχαίων υπό σύνδεση αναπαραστάσεων (I) και (II) σε επίπεδο δυναμικών. Ειδικότερα, θεωρώντας τις σφαιρικές και σφαιροειδείς αρμονικές και διαρμονικές ιδιοσυναρτήσεις, κατασκευάσαμε αρχικά τα πεδία ροής (ταχύτητας και ολικής πίεσης) που γεννούν οι συγκεκριμένες ιδιοσυναρτήσεις μέσω της αναπαράστασης Parkovich – Neuber, όπου τη θεωρούμε σαν τη γενική λύση (I). Στη συνέχεια αντιμετωπίσαμε το αντίστροφο πρόβλημα του καθορισμού εκείνων των ιδιοσυναρτήσεων, οι οποίες μέσω των αναπαραστάσεων (II) γεννούν ακριβώς τα ίδια πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης. Η συσχέτιση επιτυγχάνεται μέσω ενός “πίνακα” μετασχηματισμού, που συνδέει τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις. Η αντίστροφη διαδικασία, όποτε είναι εφικτή, επιτυγχάνεται με αντιστροφή του παραπάνω “πίνακα” μετασχηματισμού.

Εμείς ασχοληθήκαμε συνολικά με τέσσερις διαφορετικές διαδικασίες συσχετισμού, όπου η διαφορική λύση Parkovich – Neuber συνδέθηκε σε σφαιρικές συντεταγμένες με την αναπαράσταση Boussinesq – Galerkin,

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\Phi_{sr}, \Phi_{0sr}) = \mathbf{B}_{sr}^{BG}(b_{sr}) \quad \text{και} \quad P_{sr}^{PN}(\Phi_{sr}, \Phi_{0sr}) = P_{sr}^{BG}(B_{sr}, b_{sr}) \quad (\Sigma.1)$$

και τη γενική λύση Palaniappan *et al.*,

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\Phi_{sr}, \Phi_{0sr}) = \mathbf{P}_{sr}^{PNAU}(A_{sr}, B_{sr}) \quad \text{και} \quad P_{sr}^{PN}(\Phi_{sr}, \Phi_{0sr}) = P_{sr}^{PNAU}(A_{sr}, B_{sr})$$

(Σ.2)

για τρισδιάστατα χωρία, ενώ η ίδια γενική διαφορική αναπαράσταση προτεινόμενη από τους Parkovich – Neuber, σχετίστηκε με την αντίστοιχη του Stokes,

$$\mathbf{v}_{sr}^{PN}(\Phi_{sr}, \Phi_{0sr}) = \mathbf{S}_{sr}(\psi_{sr}) \quad \text{και} \quad P_{sr}^{PN}(\Phi_{sr}, \Phi_{0sr}) = P_{sr}^S(\psi_{sr}) \quad (\Sigma.3)$$

για διδιάστατα πεδία ροής. Τέλος, στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε τη μορφή και το είδος των απροσδιοριστιών που εμφανίζονται όταν λύνονται προβλήματα συνοριακών τιμών σε μοντέλα σφαιροειδών σωματιδίων σε κύτταρο, προχωρήσαμε σε μια παρόμοια σύνδεση με την (Σ.3), αλλά σε σφαιροειδείς συντεταγμένες,

$$\mathbf{v}_{sd}^{PN}(\Phi_{sd}, \Phi_{0sd}) = \mathbf{S}_{sd}(\psi_{sd}) \quad \text{και} \quad P_{sd}^{PN}(\Phi_{sd}, \Phi_{0sd}) = P_{sd}^S(\psi_{sd}) \quad (\Sigma.4)$$

για αξονοσυμμετρικές ροές που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes.

Αποτέλεσμα των εκφράσεων (Σ.1)–(Σ.4) ήταν η εξαγωγή τύπων σύνδεσης των σταθερών συντελεστών των δυναμικών των αναπαραστάσεων για ροές απουσία ιδιομορφιών στον άξονα συμμετρίας x_1 στα δύο συστήματα συντεταγμένων. Δηλαδή, ο τρόπος συμπεριφοράς των δυναμικών στην επιβολή κοινών πεδίων ροής αντιπροσωπεύτηκε από την ανταπόκριση των αντίστοιχων σταθερών συντελεστών. Η αντιστρεψιμότητα της διαδικασίας εξαρτιόταν κάθε φορά είτε από το είδος και την πολυπλοκότητα της αναπαράστασης, είτε από τη γεωμετρία. Οπότε, ο “πίνακας” μετασχηματισμού που προέκυψε από την (Σ.3) αντιστρέφεται, κάτι που δεν συμβαίνει στις σχέσεις μετασχηματισμού (Σ.1), (Σ.2) και (Σ.4). Η αντιστρεψιμότητα αποκαθίσταται αν κάνουμε επιλεκτική χρήση της ευελιξίας της διαφορικής λύσης των Parkovich – Neuber που οφείλεται στην [48],

$$\Phi_{0sr} = f(\Phi_{sr}) \quad \text{και} \quad \Phi_{0sd} = f(\Phi_{sd}), \quad (\Sigma.5)$$

ώστε να γράψουμε το ένα δυναμικό της αναπαράστασης συναρτήσει του άλλου και να καθορίσουμε εμείς τις απαραίτητες πρόσθετες εξισώσεις που θα αντιστρέψουν τη διαδικασία.

Εφόσον προσδιορίστηκε πλήρως η χρησιμότητα της λύσης Parkovich – Neuber για ροές Stokes απουσία ιδιομορφιών, δεν κρίθηκε αναγκαίο να γίνει μια παραπλήσια συσχέτιση σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες, αλλά θεωρήθηκε σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν οι βαθμοί ελευθερίας (Σ.5) σε εφαρμογές μοντέλων για ροή ελλειψοειδών σωματιδίων, εισάγοντας μια εξάρτηση της μορφής

$$\Phi_{0el} = f(\Phi_{el}) \quad (\Sigma.6)$$

στις αρμόδιες συνοριακές συνθήκες.

Η δεύτερη ενότητα της Διατριβής ασχολείται καθαρά με εφαρμογές σε μοντέλα κυττάρων. Οι δύο βασικές θεωρήσεις που ακολουθήθηκαν ήταν των Kuwabara και Happel. Πιο ειδικά, σε πρώτη φάση αναπτύσσουμε τα δύο βασικά μοντέλα σφαιρικού σωματιδίου σε ρευστό για τη ροή σμήνους σωματιδίων μέσα σε πορώδες μέσο. Δηλαδή, εφαρμόζοντας τη διαφορική αναπαράσταση Parkovich – Neuber λύνουμε αρχικά το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα (2-D) της έρπουσας κίνησης ρευστού γύρω από ακίνητο σφαιρικό σωματίδιο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara και παράγουμε σε κλειστή μορφή τα διδιάστατα πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης και στροβιλισμού, ανακτώντας με αυτό τον τρόπο τα διορθωμένα πεδία από την ήδη γνωστή εργασία. Στη συνέχεια, στην ίδια γεωμετρία, επεκτείνουμε τις διαστάσεις σε

τρεις αναλύοντας το τρισδιάστατο πρόβλημα ($3-D$) της μεταφορικής και περιστροφικής ροής Stokes σφαιρικού σωματιδίου μέσα σε ηρεμούν ρευστό με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel. Σε αυτή την εφαρμογή καθορίζονται τα πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης, στροβιλισμού και ολικού τανυστή των τάσεων για ροές χωρίς αξονική συμμετρία. Σε κάθε περίπτωση έχουν αποκλειστεί κάθε είδους ανωμαλιών ή πηγών στο χωρίο ροής και στο σωματίδιο. Ο βαθμός δυσκολίας αυξάνεται εκθετικά όταν προσπαθούμε να κατασκευάσουμε τα επιμήκη σφαιροειδή πεδία ροής στο μοντέλο Kuwabara ($2-D$). Τότε, μελετήσαμε την αξονοσυμμετρική ροής σμήνους σφαιροειδών σωματιδίων εντός πορώδους μέσου με την ανάπτυξη της θεωρίας του μοντέλου σωματιδίου σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara, όπου η λύση προέκυψε σε μορφή αναπτυγμάτων σε σειρές για την ταχύτητα, την ολική πίεση και το στροβιλισμό. Φαίνεται πως ο πρώτος όρος για συγκεκριμένο μέγεθος σωματιδίων αρκεί για τις περισσότερες εργαστηριακές και βιομηχανικές εφαρμογές. Η ίδια απροσδιοριστία που είχε εμφανιστεί όταν το ίδιο πρόβλημα είχε λυθεί με τη μέθοδο των γενικευμένων ιδιοσυναρτήσεων για τη συνάρτηση ροής, που προκύπτουν από τον ημιδιαχωρισμό μεταβλητών για την εξίσωση κινήσεως, εμφανίζεται και τώρα. Όμως, οι βαθμοί ελευθερίας που μας προσφέρει η διαφορική λύση των Parkovich – Neuber μας επιτρέπει την αποφυγή αυτού του προβλήματος μέσω μιας μαθηματικής δικαιολόγησης η οποία, βέβαια, δεν έχει φυσική υπόσταση. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την πεπλατυσμένη γεωμετρία μπορούν να παραχθούν εύκολα με την εφαρμογή απλού μετασχηματισμού, ενώ με μια επιλεκτικά κατάλληλη οριακή διαδικασία ανακτήθηκαν τα πεδία ροής για το αντίστοιχο πρότυπο στη σφαιρική γεωμετρία. Φυσικά, πάλι εξαιρέσαμε όλων των ειδών τις ιδιομορφίες. Τέλος, προχωρήσαμε σε πιο πολύπλοκες γεωμετρίες, δηλαδή την ελλειψοειδή γεωμετρία, όπου η πλήρης ανισοτροπία του χώρου καθιστά επιβεβλημένη τη χρήση της θεωρίας των διαφορικών αναπαραστάσεων για την επίλυση προβλημάτων ροής. Συνεπώς, η ίδια γενική λύση χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση ενός μοντέλου ελλειψοειδούς σε κύτταρο για τη μεταφορική κίνηση και περιστροφή ελλειψοειδών σωματιδίων με εφαρμογή τρισδιάστατων συνοριακών συνθηκών τύπου Happel. Λόγω της γνώσης περιορισμένου αριθμού ελλειψοειδών αρμονικών η αναλυτική λύση περιορίζεται στους πρώτους όρους, που παρέχουν, όμως, την πιο σημαντική συνεισφορά για το μέγεθος των ελλειψοειδών σωματιδίων που ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Τελικά, υπολογίσαμε τους κύριους όρους για τα πεδία ταχύτητας, ολικής πίεσης, στροβιλισμού και ολικού τανυστή των

τάσεων, από όπου ένας επίπονος και κατάλληλος γεωμετρικός εκφυλισμός οδήγησε στο αντίστοιχο σφαιρικό πρότυπο. Ιδιομορφίες στη ροή ή κατανεμημένες στην επιφάνεια του στερεού ελλειψοειδούς σωματιδίου και στην εστιακή έλλειψη δεν λήφθηκαν υπόψη.

Κατά την επίλυση των παραπάνω μοντέλων η βασική θεώρηση περιλάμβανε το στερεό σωματίδιο και το ρευστό κάλυμμα που απαιτείται για να μοντελοποιηθεί η ροή. Οι συνοριακές συνθήκες και στα δύο είδη μοντέλων που αναλύσαμε λαμβάνονται σε αυτές τις επιφάνειες, ενώ τα πεδία ροής υπολογίζονται στο ρευστό φλοιό που περιορίζεται μεταξύ της στερεής επιφάνειας του υπό μελέτη σωματιδίου και της φανταστικής ρευστής επιφάνειας που περικλείει το σωματίδιο. Πάντως, σε οποιαδήποτε περίπτωση μοντέλου με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara (Σχήμα I-4.2) και Happel (Σχήμα I-4.3), σε τρισδιάστατα ή διδιάστατα (αξονοσυμμετρικά) πεδία ροής, σε σφαιρικές, σφαιροειδείς και ελλειψοειδείς συντεταγμένες, φτάσαμε σε εκφράσεις για το πεδίο ταχύτητας $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, το πεδίο ολικής πίεσης $P(\mathbf{r})$, το πεδίο στροβιλισμού $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ και το πεδίο ολικού τανυστή των τάσεων $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r})$, για κάθε τιμή του $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2)$. Το χωρίο $\Omega(\mathbf{B}^3)$ έχει σαν σύνορα την εσωτερική στερεή επιφάνεια $\partial \Omega_i(\mathbf{B}^3)$ και την εξωτερική ρευστή επιφάνεια $\partial \Omega_e(\mathbf{B}^3)$, όπου $\partial \Omega(\mathbf{B}^3) = \partial \Omega_i(\mathbf{B}^3) \cup \partial \Omega_e(\mathbf{B}^3)$, ενώ το χωρίο $\Omega(\mathbf{B}^2)$ περιορίζεται από τις αντίστοιχες διδιάστατες επιφάνειες, όπου $\partial \Omega(\mathbf{B}^2) = \partial \Omega_i(\mathbf{B}^2) \cup \partial \Omega_e(\mathbf{B}^2)$. Τα παραπάνω ροϊκά πεδία υπολογίζονται σε όρους της επιβαλλόμενης μεταφορικής ταχύτητας $\mathbf{U}$, της επιβαλλόμενης γωνιακής περιστροφής $\boldsymbol{\Omega}$ και των γεωμετρικών και αλγεβρικών χαρακτηριστικών του εκάστοτε συστήματος. Στην περίπτωση των ροών με αξονική συμμετρία η μεταφορική ταχύτητα βρίσκεται στη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας, ενώ δεν υπάρχει επιβαλλόμενη γωνιακή ταχύτητα. Δηλαδή, το $\boldsymbol{\Omega}$ μαζί με τον μη αξονοσυμμετρικό χαρακτήρα της γεωμετρίας είναι οι αιτίες δημιουργίας της τρισδιάστατης ροής.

Σε αυτό το σημείο θα παραθέσουμε μερικές βασικές ποσότητες, εκτός των βασικών πεδίων ροής, που είναι χρήσιμες στις πρακτικές εφαρμογές. Έτσι, όταν είναι υπολογισμένα τα πεδία ροής στο χωρίο του τρισδιάστατου ή αξονοσυμμετρικού ρευστού φλοιού Ω , μπορούμε να καθορίσουμε τη γενική μορφή της οπισθέλκουσας δύναμης $\mathbf{F}_D$ στη επιφάνεια του στερεού σωματιδίου από την έκφραση

$$\mathbf{F}_D = \sum_{i=1}^3 F_{D\kappa} \hat{\mathbf{x}}_\kappa = \iint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \mathbf{I} \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) d\mathcal{S}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \text{ ή } \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\Sigma.7)$$

όπου $F_{D\kappa}$ είναι οι συνιστώσες της οπισθέλκουσας στις αντίστοιχες διευθύνσεις, ενώ ισχύει $dS = J dv dw$ με u, v, w να αποτελούν τις χαρακτηριστικές μεταβλητές του κάθε συστήματος. Το $\hat{\mathbf{n}}$ αντιπροσωπεύει το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο ή ορθομοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας. Όταν γνωρίζουμε την οπισθέλκουσα δύναμη από την (Σ.7), υπολογίζουμε τον συντελεστή οπισθέλκουσας $C_{D\kappa}$ από τη σχέση

$$C_{D\kappa} = \frac{F_{D\kappa}}{\left[\frac{1}{2} \rho_0 (\mathbf{U} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa)^2 \right] S_{C\kappa}}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\Sigma.8)$$

όπου η έκφραση (Σ.8) αποτελεί το γενικό τύπο του συντελεστή οπισθέλκουσας για σώματα μέσα σε ροές, η οποία ορίζεται σαν το λόγο της ιξώδους δύναμης $F_{D\kappa}$ στην $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$ διεύθυνση προς το γινόμενο της χαρακτηριστικής κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου επί την χαρακτηριστική επιφάνεια $S_{C\kappa}$ κάθετη στην ίδια διεύθυνση. Ανάλογα με τη γεωμετρία το $S_{C\kappa}$ είναι διαφορετικό, ενώ ρ_0 είναι η πυκνότητα του ρευστού.

Τέλος, μια επίσης ενδιαφέρουσα ποσότητα είναι η παροχή Q_C διαμέσου του κυττάρου, όπου εδώ υπάρχει μια συγκεκριμένη διαφοροποίηση όταν μιλάμε για το κύτταρο Kuwabara ή όταν μιλάμε για το κύτταρο Happel, η οποία οφείλεται στο ότι ενώ στη μια περίπτωση το ρευστό προσεγγίζει το σωματίδιο, στην άλλη το σωματίδιο κινείται. Συνεπώς, στην περίπτωση του μοντέλου Kuwabara που η εξωτερική επιφάνεια διαπερνάται από ρευστό, ολοκληρώνουμε στον ισημερινό και έχουμε

$$Q_C^K = \iint_{\partial\Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}| dS(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \text{ ή } \Omega(\mathbf{\Theta}^2), \quad (\Sigma.9)$$

ενώ για το μοντέλο Happel, εφόσον είναι υδατοστεγές, ακολουθείται η εξής διαδικασία. Αν υποθέσουμε ότι ένα ομογενές πεδίο ταχυτήτων $-\mathbf{U}$ εφαρμόζεται πάνω σε κάθε σημείο της εξωτερικής ρευστής επιφάνειας ίσο κατά μέτρο και με διεύθυνση αντίθετη της κίνησης του εσωτερικού στερεού σωματιδίου, τότε ένας παρατηρητής στο κέντρο του στερεού σωματιδίου θεωρείται ακίνητος και παρατηρεί ροή διαμέσου της δακτυλιοειδούς επιφάνειας από την τομή του ισημερινού επιπέδου με το ρευστό φλοιό. Οπότε, ολοκληρώνοντας στον ισημερινό έχουμε,

$$Q_C^H = \iint_{\partial\Omega} |(\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{U}) \cdot \hat{\mathbf{t}}| dS(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \text{ ή } \Omega(\mathbf{\Theta}^2). \quad (\Sigma.10)$$

Το $\hat{\mathbf{i}}$ αντιπροσωπεύει το σύνολο των καθέτων διανυσμάτων στο $\hat{\mathbf{n}}$.

Ολοκληρώνοντας κάποια βασικά χαρακτηριστικά των μοντέλων κυττάρων, αξίζει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής όταν προσπαθούμε να περάσουμε από την ιδέα του μοναδιαίου κυττάρου στην ιδέα του πορώδους μέσου. Το πέραςμα αυτό συνδέεται άμεσα με τη διαπερατότητα του σμήνους και μας δίνει πληροφορία για την επιβαλλόμενη ταχύτητα διακένου, όταν λαμβάνουμε υπόψη και τα κενά μεταξύ των εξωτερικών φανταστικών επιφανειών των σωματιδίων. Επιδιώκοντας να παραχθεί μια έκφραση για τη διαπερατότητα του σμήνους k_p γίνεται η εξής θεώρηση. Έστω ένας σταθερός όγκος ελέγχου που έχει εμβαδόν $A_{p\kappa}$ και μήκος $\ell_{p\kappa}$ σε μια από τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$ της ροής. Ας θεωρηθεί, επίσης, ότι $\Delta P_{p\kappa}$ είναι η επιφανειακή πτώση πίεσης κατά μήκος του $\ell_{p\kappa}$, που αντιστοιχεί στην ταχύτητα διακένου ή φαινόμενη ταχύτητα, όπως λέγεται, $\bar{U}$, η οποία λαμβάνει υπόψη και τα κενά του πορώδους μέσου, αφού τα μοντέλα σωματιδίων που ασχολούμαστε δεν καλύπτουν πλήρως το χώρο. Μέσα από αυτή τη διαδικασία θα καθορίσουμε αυτή την ταχύτητα. Λοιπόν, αν γ_p είναι το στερεό κλάσμα όγκου του πορώδους, το πλήθος των στερεών σωματιδίων στον όγκο ελέγχου N_p δίνεται από τον λόγο του όγκου του όγκου ελέγχου προς τον χαρακτηριστικό όγκο του σωματιδίου V_p πολλαπλασιασμένο με το γ_p , δηλαδή

$$N_p = \frac{A_{p\kappa} \ell_{p\kappa}}{V_p} \gamma_p. \quad (\Sigma.11)$$

Από ένα ισοζύγιο γραμμικής ορμής στο ρευστό που περιέχεται μέσα στον όγκο ελέγχου, υποθέτοντας μόνιμη κατάσταση, παίρνουμε ότι

$$A_{p\kappa} \Delta P_{p\kappa} - N_p F_{D\kappa} = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (\Sigma.12)$$

από όπου με τη βοήθεια και της (Σ.11) προκύπτει

$$\frac{\Delta P_{p\kappa}}{\ell_{p\kappa}} = \frac{\gamma_p}{V_p} F_{D\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, 3. \quad (\Sigma.13)$$

Τώρα, η διαπερατότητα ορίζεται ως εξής,

$$k_p = \frac{\mu_0 (\bar{U} \cdot \hat{\mathbf{x}}_\kappa)}{\left(\frac{\Delta P_{p\kappa}}{\ell_{p\kappa}} \right)}, \quad \kappa = 1, 2, 3 \quad (\Sigma.14)$$

και εισάγοντας τον λόγο της πτώσης πίεσης ως προς μήκος του όγκου ελέγχου από την (Σ.13), φτάνουμε, τελικά, στην παρακάτω σχέση για τη διαπερατότητα,

$$k_p = \frac{\mu_0 V_p (\bar{U} \cdot \hat{x}_\kappa)}{\gamma_p F_{D\kappa}}, \quad \kappa = 1, 2, 3. \quad (\Sigma.15)$$

Το ερώτημα, τώρα, έγκειται στο ποια είναι η σχέση της επιβαλλόμενης ταχύτητας U με τη φαινόμενη ταχύτητα διακένου $\bar{U}$ όταν παίρνουμε υπόψη όλο το πορώδες μέσο με τα σμήνη σωματιδίων. Για να προσδιορίσουμε αυτή τη σχέση πρέπει πρώτα να καθοριστεί η ενεργή επιφάνεια διατομής $A_{C\kappa}$ που αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό “σωματίδιο σε κύτταρο”. Αφού το σχήμα που χρησιμοποιούμε για τα σωματίδια (σφαίρα, σφαιροειδές, ελλειψοειδές) δεν είναι σχήμα που πληροί το χώρο, γίνεται ο πιο κάτω υπολογισμός. Θεωρείται ένας μοναδιαίος όγκος πρισματικού σχήματος που έχει μήκος $\ell_{C\kappa}$ κατά τη διεύθυνση $\hat{x}_\kappa$ της μακροσκοπικής ροής και επιφάνεια διατομής $A_{C\kappa}$. Η επιφάνεια διατομής μπορεί να έχει οποιοδήποτε σχήμα που να πληροί το επίπεδο, όπως τετράγωνο ή εξάγωνο. Ο όγκος αυτού του μοναδιαίου πρίσματος πρέπει να είναι ίσος με αυτόν του σωματιδίου σε κύτταρο, δηλ.,

$$\gamma_p A_{C\kappa} \ell_{C\kappa} = V_p, \quad \kappa = 1, 2, 3. \quad (\Sigma.16)$$

Αν εισάγουμε, τώρα, μια σταθερά αναλογίας χ τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$A_{C\kappa} = 4\chi^2 \alpha_l \alpha_r \quad \text{και} \quad \ell_{C\kappa} = 2\chi \alpha_\kappa, \quad \kappa, l, r = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \neq r \quad (\Sigma.17)$$

όπου α_κ , α_l και α_r είναι οι χαρακτηριστικές “ακτίνες” του σωματιδίου (για επίμηκες σφαιροειδές $\alpha_2 = \alpha_3$ και η διεύθυνση ροής είναι στην $\hat{x}_1$ διεύθυνση, ενώ για σφαίρα $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ και η διεύθυνση ροής είναι στην $\hat{x}_1$ διεύθυνση). Αν αντικαταστήσουμε τις (Σ.17) στην (Σ.16) και κάνουμε χρήση της

$$V_p = \frac{4\pi}{3} \alpha_\kappa \alpha_l \alpha_r, \quad \kappa, l, r = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \neq r, \quad (\Sigma.18)$$

τότε παίρνουμε

$$\chi = \left(\frac{\pi}{6\gamma_p} \right)^{1/3}. \quad (\Sigma.19)$$

Η παροχή διαμέσου ενός τέτοιου μοναδιαίου πρίσματος ισούται με την παροχή διαμέσου ενός σωματιδίου σε κύτταρο και για αυτό

$$Q_C = A_{C\kappa} (\bar{U} \cdot \hat{x}_\kappa), \quad \kappa = 1, 2, 3. \quad (\Sigma.20)$$

ή

$$Q_C = 4 \left(\frac{\pi}{6\gamma_p} \right)^{2/3} \alpha_l \alpha_r (\bar{U} \cdot \hat{x}_\kappa), \quad \kappa, l, r = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \neq r. \quad (\Sigma.21)$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (Σ.21) και (Σ.9) ή (Σ.10) μας εφοδιάζει με τη σχέση των δύο ταχυτήτων, δηλ.,

$$\iint_{\partial\Omega} |\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{t}}| dS(\mathbf{r}) = 4 \left(\frac{\pi}{6\gamma_p} \right)^{2/3} \alpha_l \alpha_r (\bar{U} \cdot \hat{x}_\kappa), \quad \kappa, l, r = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \neq r \quad (\Sigma.22)$$

για το κύτταρο Kuwabara και

$$\iint_{\partial\Omega} |(\mathbf{v}(\mathbf{r}) - \mathbf{U}) \cdot \hat{\mathbf{t}}| dS(\mathbf{r}) = 4 \left(\frac{\pi}{6\gamma_p} \right)^{2/3} \alpha_l \alpha_r (\bar{U} \cdot \hat{x}_\kappa), \quad \kappa, l, r = 1, 2, 3, \quad \kappa \neq l \neq r \quad (\Sigma.23)$$

για το κύτταρο Happel, όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ ή $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^2)$. Οι σχέσεις (Σ.22) και (Σ.23) αποτελούν τις γενικές σχέσεις σύνδεσης σε κάθε σύστημα συντεταγμένων. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να σκεφτόμαστε είτε σύμφωνα με το μοναδιαίο κύτταρο, είτε με όλο το πορώδες μέσο.

Όλες οι παραπάνω σχέσεις για την παροχή, την οπισθέλκουσα δύναμη, το συντελεστή οπισθέλκουσας και τη διαπερατότητα απλοποιούνται αισθητά στην περίπτωση των αξονοσυμμετρικών ροών, δηλαδή, όταν αναφερόμαστε σε σφαιρικές και σφαιροειδείς συντεταγμένες με άξονα συμμετρίας τον άξονα x_1 . Αυτό που αλλάζει είναι η ομοιόμορφη ταχύτητα προσέγγισης η οποία τώρα έχει μια μόνο συνιστώσα, δηλ.,

$$\mathbf{U} = U \hat{x}_1, \quad (\Sigma.24)$$

κάτι που οδηγεί σε μια συνιστώσα για την οπισθέλκουσα στην διεύθυνση $\hat{x}_1$, ενώ και η φαινόμενη ταχύτητα διακένου έχει τη μορφή

$$\bar{\mathbf{U}} = \bar{U} \hat{x}_1. \quad (\Sigma.25)$$

Για πρακτική εφαρμογή σε σμήνη σφαιρικών σωματιδίων ο αναγνώστης πρέπει να μελετήσει την [56], ενώ για ροή σμήνους σφαιροειδών σωματιδίων, οι παραπάνω ποσότητες υπολογίζονται αναλυτικά στην αναφορά [38]. Ειδικότερα αν μείνουμε σε αυτή την εργασία, φαίνεται καθαρά μέσα από γραφικές παραστάσεις ότι η ανάγκη που υπάρχει στο κύτταρο τύπου Kuwabara για ανταλλαγή ενέργειας με το περιβάλλον αντιτίθεται στην αρχή της διάσπασης του σμήνους σε ανεξάρτητα κύτταρα. Για αυτό η συνθήκη του Kuwabara για μηδενισμό του στροβιλισμού αποδεικνύεται

ακατάλληλη για να καταστήσει το πρότυπο ενεργειακά αυτόνομο, γεγονός που εξασφαλίζεται από την συνθήκη μη ύπαρξης εφαιπτομενικών τάσεων στο κύτταρο του Happel.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα αποτελέσματα μοντέλων σε κύτταρο οφείλουν να κωδικοποιηθούν ώστε να γίνει η υπολογιστική επεξεργασία τους μέσω ηλεκτρονικού υπολογιστή και να παραχθούν τα κατάλληλα διαγράμματα. Η πληροφορία που αναμένεται να διαβαστεί μέσω των διαγραμμάτων αυτών αφορά κυρίως τις ομοιότητες και τις παρεκκλίσεις στη συμπεριφορά των μελετούμενων πεδίων στα τρία γεωμετρικά μοντέλα της σφαίρας, του σφαιροειδούς και του ελλειψοειδούς. Η πληροφορία αυτή θα δώσει τη διάσταση της ποσοτικής και ποιοτικής συνεισφοράς της εισαγωγής της πλήρους ανισοτροπίας της ελλειψοειδούς γεωμετρίας στη μελέτη προβλημάτων για ροή σωματιδίων σε πορώδη μέσα, θεωρώντας μοντέλα σωματιδίων σε κύτταρο με συνοριακές συνθήκες τύπου Kuwabara και Happel.

Τελειώνοντας, η παρούσα Διατριβή προσφέρει μερικές ενδιαφέρουσες απόψεις για επιστημονική έρευνα που επεκτείνεται στη μελέτη πιο πολύπλοκων προβλημάτων ρευστομηχανικής. Μερικές μελλοντικές κατευθύνσεις αφορούν κατ' αρχάς την εμπειρισματοειδή αναζήτηση του φυσικού υπόβαθρου του μηδενισμού της επιπλέον σταθεράς που εμφανίζεται στα μοντέλα τύπου Happel και Kuwabara σε σφαιροειδείς συντεταγμένες. Δυστυχώς, η εφαρμογή της διαφορικής αναπαράστασης Parkovich – Neuber, ενώ δικαιολογεί πλήρως τον μηδενισμό της συγκεκριμένης σταθεράς από μαθηματικής απόψεως, το κενό στη φυσική δικαιολόγηση παραμένει και αποτελεί πρόκληση η εξήγησή του από φυσική άποψη. Παρόλα αυτά, η χρήση των δύο αναπαραστάσεων οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα με τη διαφορική λύση Parkovich – Neuber να πλεονεκτεί της αναπαράστασης Stokes, λόγω της πιο πάνω μαθηματικής δικαιολόγησης.

Επίσης, αναφερόμενοι στο ελλειψοειδές πρότυπο με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel, το επόμενο βήμα, το οποίο βρίσκεται ήδη σε εφαρμογή, αφορά την αύξηση του βαθμού της ταχύτητας κατά ένα βαθμό, γεγονός που απαιτεί τη χρήση ελλειψοειδών αρμονικών τρίτου βαθμού, αυξάνοντας, συγχρόνως, εκθετικά το βαθμό δυσκολίας. Η δυσκολία έγκειται όχι μόνο στην εξαγωγή της λύσης αλλά και στο επίπονο έργο του εκφυλισμού σε ήδη γνωστά αποτελέσματα στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Το περιεχόμενο της εργασίας [45] που συγγράφεται περιλαμβάνει αυτά τα νέα αποτελέσματα.

Προχωρώντας, αξίζει να δώσουμε έμφαση στην ανάλυση ροών Stokes παρουσία ιδιομορφιών στην επιφάνεια του σωματιδίου. Η εύρεση των πεδίων ροής (ταχύτητας και ολικής πίεσης) είναι εφικτή μέσω της αναπαράστασης Papkovitch – Neuber. Ειδικότερα, ενδιαφερόμαστε για τον υπολογισμό των πεδίων ροής γύρω από ένα επίμηκες σφαιροειδές σωματίδιο συναρτήσει μιας κατανομής πηγών στην ημιστιακή απόσταση ή, ένα επίπεδο παραπάνω, ψάχνουμε τα πεδία ταχύτητας και ολικής πίεσης για ροή γύρω από ελλειψοειδές σωματίδιο συναρτήσει μιας κατανομής πηγών στην εστιακή έλλειψη του σωματιδίου.

Τέλος, η περίπτωση του πορώδους ελλειψοειδούς σωματιδίου σε σμήνη σωματιδίων με συνοριακές συνθήκες τύπου Happel, όπου για το εσωτερικό του στερεού διαπερατού ελλειψοειδούς χρησιμοποιείται το πρότυπο Brinkman, ενώ για το εξωτερικό πεδίο υποθέτουμε έρπουσα ροή Stokes. Τα παραπάνω ανοιχτά προβλήματα βρίσκονται ήδη υπό εξέταση και σε αρκετά από αυτά έχουν γίνει σημαντικά βήματα στη μαθηματική τους προτυποποίηση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε μερικές βασικές και χρήσιμες ταυτότητες που χρησιμοποιήθηκαν καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας. Οι ταυτότητες αυτές αφορούν τους δύο διαφορικούς τελεστές της βάθμωσης ∇ και του Laplace Δ . Έστω, λοιπόν, ότι τα σύμβολα u , v και τα σύμβολα f , g , h , q δηλώνουν δύο βαθμωτές και τέσσερις διανυσματικές συναρτήσεις, αντίστοιχα. Τότε, αν ορίσουμε με $\tilde{\cdot}$ ένα δυαδικό (τανυστής δευτέρας τάξης [14,72,88,109]), με $\tilde{\mathbf{I}}$ το μοναδιαίο δυαδικό και διατηρήσουμε τον ίδιο τρόπο αναπαράστασης του διπλού εσωτερικού γινομένου*, παρουσιάζουμε τις κάτωθι ταυτότητες.

A.1 Ταυτότητες του διαφορικού τελεστή της βάθμωσης.

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \otimes (uf) = u\nabla \otimes f + \nabla u \otimes f, \quad (\text{A.2})$$

* Ο συμβολισμός που ακολουθείται για το διπλό εσωτερικό γινόμενο είναι και ο πιο συχνά εμφανιζόμενος στη βιβλιογραφία, $(f \otimes g) : (h \otimes q) = (f \cdot q)(g \cdot h)$.

$$\nabla \otimes (\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) = (\nabla \otimes \mathbf{f}) \otimes \mathbf{g} + [\mathbf{f} \otimes (\nabla \otimes \mathbf{g})]^{213}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \otimes (u\tilde{\mathbf{S}}) = u\nabla \otimes \tilde{\mathbf{S}} + \nabla u \otimes \tilde{\mathbf{S}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla \otimes (u\tilde{\mathbf{I}}) = \nabla u \otimes \tilde{\mathbf{I}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\nabla \otimes \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} + (\nabla \otimes \mathbf{g}) \cdot \mathbf{f}, \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla \otimes (\tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{f} + (\nabla \otimes \mathbf{f}) \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \otimes (\mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{S}}) = (\nabla \otimes \mathbf{f}) \cdot \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{f} \cdot (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{S}})^{213}, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \otimes (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \otimes \mathbf{f}) \times \mathbf{g} - (\nabla \otimes \mathbf{g}) \times \mathbf{f}, \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \otimes (\mathbf{f} \times \tilde{\mathbf{I}}) = \nabla \otimes (\tilde{\mathbf{I}} \times \mathbf{f}) = (\nabla \otimes \mathbf{f}) \times \tilde{\mathbf{I}}, \quad (\text{A.10})$$

$$\nabla \cdot (u\mathbf{f}) = u\nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla u \cdot \mathbf{f}, \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) = (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{g}), \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \cdot (u\tilde{\mathbf{S}}) = u\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}} + \nabla u \cdot \tilde{\mathbf{S}}, \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \cdot (u\tilde{\mathbf{I}}) = \nabla u, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}} \otimes \mathbf{f}) = (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}) \otimes \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{S}}^T \cdot (\nabla \otimes \mathbf{f}), \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \tilde{\mathbf{S}}) = (\nabla \cdot \mathbf{f}) \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{f} \cdot (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{S}}), \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{I}} \otimes \mathbf{f}) = \nabla \otimes \mathbf{f}, \quad (\text{A.17})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \otimes \tilde{\mathbf{I}}) = (\nabla \cdot \mathbf{f}) \tilde{\mathbf{I}}, \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{f} + \tilde{\mathbf{S}}^T : (\nabla \otimes \mathbf{f}), \quad (\text{A.19})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{S}}) = (\nabla \otimes \mathbf{f}) : \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{f} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T), \quad (\text{A.20})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}), \quad (\text{A.21})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \tilde{\mathbf{S}}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \tilde{\mathbf{S}} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{S}}), \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{I}} \times \mathbf{f}) = \nabla \times \mathbf{f}, \quad (\text{A.23})$$

$$\nabla \times (u\mathbf{f}) = u\nabla \times \mathbf{f} + \nabla u \times \mathbf{f}, \quad (\text{A.24})$$

$$\nabla \times (\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f}) \otimes \mathbf{g} - \mathbf{f} \times (\nabla \otimes \mathbf{g}), \quad (\text{A.25})$$

$$\nabla \times (u\tilde{S}) = u\nabla \times \tilde{S} + \nabla u \times \tilde{S}, \quad (\text{A.26})$$

$$\nabla \times (u\tilde{\mathbf{I}}) = \nabla u \times \tilde{\mathbf{I}}, \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + \mathbf{g} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{g}), \quad (\text{A.28})$$

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \tilde{\mathbf{I}}) = \nabla \times (\tilde{\mathbf{I}} \times \mathbf{f}) = (\nabla \otimes \mathbf{f})^T - \tilde{\mathbf{I}}(\nabla \cdot \mathbf{f}). \quad (\text{A.29})$$

A.2 Ταυτότητες του διαφορικού τελεστή του Laplace.

$$\Delta(uv) = (\Delta u)v + u(\Delta v) + 2(\nabla u) \cdot (\nabla v), \quad (\text{A.30})$$

$$\Delta(u\mathbf{f}) = (\Delta u)\mathbf{f} + u(\Delta \mathbf{f}) + 2(\nabla u) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{f}), \quad (\text{A.31})$$

$$\Delta(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) = (\Delta \mathbf{f}) \otimes \mathbf{g} + \mathbf{f} \otimes (\Delta \mathbf{g}) + 2(\nabla \otimes \mathbf{f})^T \cdot (\nabla \otimes \mathbf{g}), \quad (\text{A.32})$$

$$\Delta(uv) = (\Delta u)v + u(\Delta v) + 2(\nabla u) \cdot (\nabla v), \quad (\text{A.33})$$

$$\Delta(u\tilde{S}) = (\Delta u)\tilde{S} + u(\Delta \tilde{S}) + 2(\nabla u) \cdot (\nabla \otimes \tilde{S}), \quad (\text{A.34})$$

$$\Delta(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\Delta \mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot (\Delta \mathbf{g}) + 2(\nabla \otimes \mathbf{f})^T : (\nabla \otimes \mathbf{g}), \quad (\text{A.35})$$

$$\Delta(\mathbf{f} \cdot \tilde{S}) = (\Delta \mathbf{f}) \cdot \tilde{S} + \mathbf{f} \cdot (\Delta \tilde{S}) + 2(\nabla \otimes \mathbf{f})^T : (\nabla \otimes \tilde{S}), \quad (\text{A.36})$$

$$\Delta(\tilde{S} \cdot \mathbf{f}) = (\Delta \tilde{S}) \cdot \mathbf{f} + \tilde{S} \cdot (\Delta \mathbf{f}) + 2(\nabla \otimes \tilde{S})^{231} : (\nabla \otimes \mathbf{f}), \quad (\text{A.37})$$

$$\Delta(\mathbf{f} \times \tilde{\mathbf{I}}) = \Delta(\tilde{\mathbf{I}} \times \mathbf{f}) = \Delta \mathbf{f} \times \tilde{\mathbf{I}}. \quad (\text{A.38})$$

A.3 Άλλες ταυτότητες.

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u, \quad (\text{A.39})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \otimes \mathbf{f}) = \Delta \mathbf{f}, \quad (\text{A.40})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \otimes \mathbf{f})^T = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}), \quad (\text{A.41})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \otimes \tilde{S}) = \Delta \tilde{S}, \quad (\text{A.42})$$

$$\nabla \times \nabla u = \mathbf{0}, \quad (\text{A.43})$$

$$\nabla \times (\nabla \otimes \mathbf{f}) = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (\text{A.44})$$

$$\nabla \times (\nabla \otimes \mathbf{f})^T = [\nabla \otimes (\nabla \times \mathbf{f})]^T, \quad (\text{A.45})$$

$$\nabla \times (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{S}}) = \tilde{\mathbf{0}}, \quad (\text{A.46})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{f} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}, \quad (\text{A.47})$$

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{S}} = \nabla \otimes (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}) - \Delta \tilde{\mathbf{S}}, \quad (\text{A.48})$$

$$\tilde{\mathbf{I}} : (\nabla \otimes \mathbf{f}) = \nabla \cdot \mathbf{f}, \quad (\text{A.49})$$

$$\Delta \nabla u = \nabla \Delta u, \quad (\text{A.50})$$

$$\Delta (\nabla \otimes \mathbf{f}) = \nabla \otimes (\Delta \mathbf{f}), \quad (\text{A.51})$$

$$\Delta (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{S}}) = \nabla \otimes (\Delta \tilde{\mathbf{S}}), \quad (\text{A.52})$$

$$\Delta (\nabla \cdot \mathbf{f}) = \nabla \cdot (\Delta \mathbf{f}), \quad (\text{A.53})$$

$$\Delta (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}) = \nabla \cdot (\Delta \tilde{\mathbf{S}}), \quad (\text{A.54})$$

$$\Delta (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla \times (\Delta \mathbf{f}), \quad (\text{A.55})$$

$$\Delta (\nabla \times \tilde{\mathbf{S}}) = \nabla \times (\Delta \tilde{\mathbf{S}}), \quad (\text{A.56})$$

$$\Delta (\nabla \times \nabla \times \mathbf{f}) = \nabla \times \nabla \times (\Delta \mathbf{f}), \quad (\text{A.57})$$

$$\Delta (\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{S}}) = \nabla \times \nabla \times (\Delta \tilde{\mathbf{S}}), \quad (\text{A.58})$$

$$\nabla \times \nabla \times (u \tilde{\mathbf{I}}) = \nabla \times (\nabla u \times \tilde{\mathbf{I}}) = \nabla \otimes \nabla u - \tilde{\mathbf{I}} \Delta u, \quad (\text{A.59})$$

$$\mathbf{f} \times (\mathbf{g} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{g} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) \mathbf{h}, \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{f} \times \nabla \times \mathbf{g} = (\nabla \otimes \mathbf{g}) \cdot \mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{g}). \quad (\text{A.61})$$

Επομένως, ολοκληρώσαμε την παράθεση βασικών ταυτοτήτων, όπου οι αποδείξεις τους δεν θεωρείται απαραίτητο να γίνουν αφού στηρίζονται σε απλή άλγεβρα. Στις σχέσεις (A.1)–(A.61)* το σύμβολο $\tilde{\mathbf{S}}^T$ είναι το ανάστροφο δυαδικό, το σύμβολο $(\)^{213}$ δηλώνει αριστερή αναστροφή ενός τριαδικού [72] και ο συμβολισμός $(\)^{231}$ είναι η αναδιάταξη της αρχικής διάταξης 123 των διανυσμάτων βάσης. Τέλος, για περισσότερες πληροφορίες και ταυτότητες γύρω από τριαδικά, τετραδικά ή και

* Τα σύμβολα $\times, \cdot, \otimes$ που εμφανίστηκαν σε αυτές τις σχέσεις δηλώνουν εξωτερικό, εσωτερικό και τανυστικό γινόμενο, αντίστοιχα.

τανυστές ανωτέρας τάξης, η αναφορά [72] αποτελεί το πλέον κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η ιστορία των ειδικών συναρτήσεων είναι στενά συνδεδεμένη με τα προβλήματα της Μηχανικής του 18^{ου} αιώνα, τα συνοριακά προβλήματα του ηλεκτρομαγνητισμού και της θερμότητας του 19^{ου} αιώνα και τα προβλήματα ιδιοτιμών της κβαντικής Μηχανικής τον 20^ο αιώνα. Το πρόβλημα ήταν η επίλυση μιας συνήθους ή με μερικές παραγώγους διαφορικής εξίσωσης, όπου η λύση δεν εκφραζόταν με τις στοιχειώδεις συναρτήσεις, αλλά με καινούργιες συναρτήσεις των οποίων οι ιδιότητες έπρεπε να μελετηθούν. Η μελέτη των ειδικών συναρτήσεων αναπτύχθηκε ταυτόχρονα με το Λογισμό και συνεπώς είναι ένας από τους παλαιότερους κλάδους της Ανάλυσης. Σε αυτή την ενότητα θα διατυπώσουμε μερικές βασικές ιδιότητες και ορισμούς για τις σημαντικότερες ειδικές συναρτήσεις [6,36,39,58,69,76,78,95,103] της Διατριβής.

B.1 Συναρτήσεις Legendre.

Οι συσχετισμένες ή προσαρτημένες ειδικές συναρτήσεις Legendre πρώτου P_n^m και δευτέρου Q_n^m είδους βαθμού n και τάξης m αποτελούν γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της συσχετισμένης ή προσαρτημένης συνήθους διαφορικής εξίσωσης του Legendre

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y(x) = 0 \quad (\text{B.1})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$, που ισχύει στα διαστήματα $|x| < 1$, $x > 1$ και για $m = 0$ εκφυλίζεται στην εξίσωση του Legendre

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0, \quad (\text{B.2})$$

όπου το x παίρνει τις ίδιες τιμές. Οι συναρτήσεις που επιλύουν την (B.1) ορίζονται ως εξής,

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad |x| < 1 \quad (\text{B.3})$$

και

$$P_n^m(x) = (x^2-1)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad x > 1, \quad (\text{B.4})$$

όπου τα πολυώνυμα του Legendre* P_n είναι λύσεις της εκφυλισμένης διαφορικής εξίσωσης (B.2) και δίνονται από τον τύπο του Rodrigues,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.5})$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Ισοδύναμα, για τις ίδιες τιμές των n και m ,

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x), \quad |x| < 1 \quad (\text{B.6})$$

και

$$Q_n^m(x) = (x^2-1)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x), \quad x > 1, \quad (\text{B.7})$$

όπου, εδώ, οι συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους Q_n εμφανίζονται με τη μορφή

*

Τα πολυώνυμα του Legendre δίνονται, επίσης, από τη σχέση

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.5a})$$

όπου $\lfloor n/2 \rfloor$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του $n/2$. Το πολυώνυμο του Legendre έχει βαθμό n και είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση του x , ανάλογα με το αν το n , είναι άρτιος ή περιττός φυσικός αριθμός.

$$Q_n(x) = P_n(x)Q_0(x) - \sum_{\kappa=1}^{[n/2]} \frac{(2n-4\kappa+3)}{(2\kappa-1)(n-\kappa+1)} P_{n-2\kappa+1}(x), \quad x \in \mathfrak{B}, \quad (\text{B.8})$$

με

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1. \quad (\text{B.9})$$

Οι λογαριθμικοί παράγοντες στην (B.9) μπορούν επίσης να εκφραστούν συναρτήσει υπερβολικών συναρτήσεων [14] μέσω των

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \tanh^{-1} x \quad |x| < 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \coth^{-1} x \quad x > 1. \quad (\text{B.10})$$

Οι συναρτήσεις $P_n^m(x)$, $|x| < 1$, $n \geq 0$, $m \leq n$ ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας

$$(P_n^m(x), P_{n'}^{m'}(x)) = \int_{-1}^{+1} P_n^m(x) P_{n'}^{m'}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}, \quad n \geq 0, \quad n' \geq 0, \quad (\text{B.11})$$

με $\delta_{nn'}$ να συμβολίζει το δέλτα του Kronecker και $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Το ολοκλήρωμα στην (B.10) γίνεται ιδιόμορφο για την ομάδα των συναρτήσεων $Q_n^m(x)$, $|x| < 1$, $n \geq 0$, $m \leq n$.

Οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους μπορεί να αποδειχτεί [6,58,69,103] ότι ικανοποιούν μερικές βασικές αναγωγικές σχέσεις, όπως

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n+m)P_{n-1}^m(x) + (n-m+1)P_{n+1}^m(x), \quad x \in \mathfrak{B}, \quad (\text{B.12})$$

ή για την πρώτη παράγωγο,

$$(2n+1)(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^m(x) = (n+1)(n+m)P_{n-1}^m(x) - n(n-m+1)P_{n+1}^m(x), \quad |x| < 1, \quad (\text{B.13})$$

ενώ

$$(2n+1)(x^2-1) \frac{d}{dx} P_n^m(x) = n(n-m+1)P_{n+1}^m(x) - (n+1)(n+m)P_{n-1}^m(x), \quad x > 1, \quad (\text{B.14})$$

καθώς επίσης,

$$\begin{aligned} (2n+1)\sqrt{1-x^2} P_n^m(x) &= P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x) \\ &= (n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(x) - (n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(x), \quad |x| < 1, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

ενώ

$$\begin{aligned}
(2n+1)\sqrt{x^2-1}P_n^m(x) &= P_{n+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x) \\
&= (n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}(x) - (n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(x), \quad x > 1 \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

και επιπλέον,

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_n^m(x) = \frac{1}{2m}[(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x) + P_n^{m+1}(x)], \quad |x| < 1, \quad (\text{B.17})$$

αλλά

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}P_n^m(x) = \frac{1}{2m}[(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x) - P_n^{m+1}(x)], \quad x > 1. \quad (\text{B.18})$$

Τέλος,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}P_n^m(x) = \frac{1}{2m}[(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(x) + P_{n-1}^{m+1}(x)], \quad |x| < 1 \quad (\text{B.19})$$

και

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}P_n^m(x) = \frac{1}{2m}[(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x)], \quad x > 1. \quad (\text{B.20})$$

Οι αναγωγικές σχέσεις (B.12)–(B.20) ισχύουν και για τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους $Q_n^m(x)$, $x \in \mathbf{3}$ για τις διάφορες τιμές του $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Εξ' ορισμού,

$$P_\kappa^l(x) \equiv 0, \quad l > \kappa, \quad P_\kappa^l(x) = Q_\kappa^l(x) \equiv 0, \quad l < 0, \quad \kappa < 0, \quad x \in \mathbf{3}, \quad (\text{B.21})$$

καθώς και για τις ειδικές τιμές του x

$$P_n^m(\pm 1) = 0, \quad m \neq 0 \quad \text{και} \quad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad n \geq 0. \quad (\text{B.22})$$

Στο χωρισμό μεταβλητών στην εξίσωση του Laplace σε σφαιρικές και σφαιροειδείς συντεταγμένες οι ιδιολύσεις που αφορούν την αζιμουθιακή γωνία Φ αναφέρονται στις γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημίτονου και του συνημίτονου. Οι συναρτήσεις αυτές σε συνδυασμό με τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου και δευτέρου είδους συνθέτουν τη γωνιακή εξάρτηση. Άρα, παραθέτουμε τις κάτωθι βασικές αναγωγικές σχέσεις για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που ενδιαφέρουν την παρούσα εργασία για κάθε $m = 0, 1, 2, \dots, n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, δηλ.,

$$\sin \varphi \sin m\varphi = \frac{1}{2}[\cos(m-1)\varphi - \cos(m+1)\varphi], \quad (\text{B.23})$$

$$\cos \varphi \cos m\varphi = \frac{1}{2} [\cos (m-1)\varphi + \cos (m+1)\varphi], \quad (\text{B.24})$$

$$\cos \varphi \sin m\varphi = \frac{1}{2} [\sin (m+1)\varphi + \sin (m-1)\varphi], \quad (\text{B.25})$$

$$\sin \varphi \cos m\varphi = \frac{1}{2} [\sin (m+1)\varphi - \sin (m-1)\varphi]. \quad (\text{B.26})$$

Οι $\sin m\varphi$, $\sin m'\varphi$, $\cos m\varphi$, $\cos m'\varphi$ για $m \neq m'$ είναι, φυσικά, ορθογώνιες.

B.2 Συναρτήσεις Gegenbauer.

Οι ειδικές συναρτήσεις Gegenbauer G_n και H_n (βαθμού n) πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα, αποτελούν γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της συνήθους διαφορικής εξίσωσης του Gegenbauer

$$(1-x^2)y''(x) + n(n-1)y(x) = 0, \quad x \in \mathfrak{B} \quad (\text{B.27})$$

για $n = 0, 1, 2, \dots$ και ορίζονται από τις εκφράσεις

$$G_n(x) = \frac{1}{(2n-1)} [P_{n-2}(x) - P_n(x)], \quad x \in \mathfrak{B} \quad (\text{B.28})$$

και

$$H_n(x) = \frac{1}{(2n-1)} [Q_{n-2}(x) - Q_n(x)], \quad x \in \mathfrak{B} \quad (\text{B.29})$$

για κάθε $n \geq 2$, ενώ οι συναρτήσεις Gegenbauer μηδενικού και πρώτου βαθμού $G_0(x)$, $G_1(x)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$, $x \in \mathfrak{B}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες από τις συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου είδους $G_n(x)$, $n \geq 2$, δηλ.,

$$G_0(x) = -H_1(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (4n-1)G_{2n}(x), \quad x \in \mathfrak{B}, \quad (\text{B.30})$$

$$G_1(x) = H_0(x) = -x = \sum_{n=1}^{\infty} (4n+1)G_{2n+1}(x), \quad x \in \mathfrak{B}. \quad (\text{B.31})$$

Οι σχέσεις (B.30) και (B.31) παράγονται εύκολα με κατάλληλη χρήση της θεωρίας των τηλεσκοπικών σειρών [14], αφού παρατηρούμε ότι οι άρτιες συναρτήσεις Gegenbauer πρώτου είδους (ή πολώνυμα Gegenbauer όπως αλλιώς λέγονται) είναι

άρτιες συναρτήσεις του x , ενώ τα περιττού βαθμού πολυώνυμα Gegenbauer είναι περιττές συναρτήσεις του x . Πράγματι, εξαιτίας της εξίσωσης (B.28) σε συνδυασμό με τον ορισμό (B.5) και οι δύο σειρές (B.30) και (B.31) είναι τηλεσκοπικές σειρές που συγκλίνουν για κάθε $x \in (-1, +1)$, αφού για $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = 0, \quad x \in (-1, +1). \quad (\text{B.32})$$

Το όριο (B.32) είναι απλό επακόλουθο του Θεωρήματος 61 Rainville [95].

Οι συναρτήσεις Gegenbauer βαθμού $n \geq 2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επίσης, τα πολυώνυμα Gegenbauer G_n για $n \geq 2$ είναι ορθογώνια ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$(G_n(x), G_{n'}(x)) = \int_{-1}^{+1} \frac{G_n(x)G_{n'}(x)}{(1-x^2)} dx = \frac{2}{n(n-1)(2n-1)} \delta_{nn'}, \quad n \geq 2, \quad n' \geq 2, \quad (\text{B.33})$$

όπου $\delta_{nn'}$ είναι το δέλτα του Kronecker. Το εσωτερικό γινόμενο (B.33) γίνεται ιδιόμορφο για το σύνολο των συναρτήσεων $G_0(x)$, $G_1(x)$ και $H_n(x)$, $n \geq 0$, $|x| < 1$.

Με τη χρήση των εξισώσεων (B.27)–(B.31) εύκολα αποδεικνύονται οι αναδρομικές σχέσεις για κάθε $x \in \textcircled{8}$,

$$x^2 G_0(x) = G_0(x) - 2G_2(x), \quad (\text{B.34})$$

$$x^2 G_1(x) = G_1(x) + 2G_3(x), \quad (\text{B.35})$$

$$x^2 G_2(x) = \frac{1}{5} G_2(x) + \frac{4}{5} G_4(x), \quad (\text{B.36})$$

$$x^2 G_3(x) = \frac{3}{7} G_3(x) + \frac{4}{7} G_5(x), \quad (\text{B.37})$$

ενώ για $n \geq 4$ και $x \in \textcircled{8}$,

$$x^2 G_n(x) = \alpha_n G_{n-2}(x) + \gamma_n G_n(x) + \beta_n G_{n+2}(x). \quad (\text{B.38})$$

Αντίστοιχα, έχουμε ότι για το ίδιο διάστημα $x \in \textcircled{8}$,

$$x^2 H_0(x) = x^2 G_1(x), \quad (\text{B.39})$$

$$x^2 H_1(x) = -x^2 G_0(x), \quad (\text{B.40})$$

$$x^2 H_2(x) = -\frac{1}{3} G_1(x) + \frac{1}{5} H_2(x) + \frac{4}{5} H_4(x), \quad (\text{B.41})$$

$$x^2 H_3(x) = \frac{1}{15} G_0(x) + \frac{3}{7} H_3(x) + \frac{4}{7} H_5(x), \quad (\text{B.42})$$

ενώ πάλι για $n \geq 4$ και $x \in \mathfrak{B}$,

$$x^2 H_n(x) = \alpha_n H_{n-2}(x) + \gamma_n H_n(x) + \beta_n H_{n+2}(x), \quad (\text{B.43})$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{(n-3)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)} \quad \text{και} \quad \beta_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n-1)(2n+1)}, \quad n \geq 4, \quad (\text{B.44})$$

ενώ

$$\gamma_n = \frac{n}{(n-3)} \alpha_n + \frac{(n-1)}{(n-2)} \beta_n = \frac{(2n^2 - 2n - 3)}{(2n+1)(2n-3)}, \quad n \geq 4. \quad (\text{B.45})$$

Η σχέση της πρώτης παραγώγου για τις συναρτήσεις Gegenbauer προκύπτει αυτόματα από τους ορισμούς (B.28) και (B.29), δηλ.,

$$\frac{d}{dx} G_n(x) = -P_{n-1}(x), \quad n \geq 2, \quad x \in \mathfrak{B} \quad (\text{B.46})$$

και

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = -Q_{n-1}(x), \quad n \geq 2, \quad x \in \mathfrak{B}, \quad (\text{B.47})$$

όπου για $n = 0, 1$ εύκολα φαίνεται από τις (B.30) και (B.31) ότι

$$G'_0(x) = H'_1(x) = 0 \quad \text{και} \quad G'_1(x) = H'_0(x) = -1, \quad x \in \mathfrak{B}. \quad (\text{B.48})$$

Παρόμοια με την (B.21) ορίζουμε

$$G_\kappa(x) = H_\kappa(x) \equiv 0, \quad \kappa < 0, \quad x \in \mathfrak{B}. \quad (\text{B.49})$$

B.3 Συναρτήσεις Lamé.

Ο Lamé, στη δεκαετία 1837–1847 [58], επιχείρησε το χωρισμό μεταβλητών του τελεστή του Laplace σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες* και κατασκεύασε τις ομώνυμες

* Η αναφορά στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων γίνεται για την καλύτερη κατανόηση της αναγκαιότητας της εισαγωγής των συναρτήσεων Lamé, που τις βλέπουμε σαν ειδικές συναρτήσεις. Η αναλυτική μελέτη του συστήματος γίνεται στο κύριο μέρος της Διατριβής, όπου δίνονται και αναλυτικά οι απαραίτητοι ορισμοί.

ιδιοσυναρτήσεις, καθώς και τα γινόμενα Lamé που είναι γνωστά και ως ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις τις οποίες είδαμε και στο κύριο μέρος της Διατριβής. Στην προσπάθειά του να κατασκευάσει ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις, ακολούθησε τη γνωστή μεθοδολογία του χωρισμού μεταβλητών [36] εισάγοντας τρεις συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής και χρησιμοποιώντας αλγεβρικά τεχνάσματα προς αυτή την κατεύθυνση απέδειξε ότι η κάθε μια από αυτές τις τρεις συναρτήσεις ικανοποιούν όλες την ίδια συνήθη διαφορική εξίσωση στο αντίστοιχο για την κάθε μια διάστημα μεταβολής της μεταβλητής της. Αυτή η εξίσωση έμεινε στην Ιστορία των Μαθηματικών με το όνομα εξίσωση του Lamé και δίνεται, για $x \in \mathfrak{B}$, από τη παράσταση

$$(x^2 - h_3^2)(x^2 - h_2^2)E''(x) + x(2x^2 - h_3^2 - h_2^2)E'(x) + (Ax^2 + B)E(x) = 0, \quad (\text{B.50})$$

όπου $A, B \in \mathfrak{B}$ είναι σταθερές και h_2, h_3 είναι παράμετροι του ελλειψοειδούς συστήματος που ονομάζονται εστίες του ελλειψοειδούς [58] για τις οποίες ισχύει

$$0 < h_3^2 < h_2^2 < +\infty. \quad (\text{B.51})$$

Τα τρία διαστήματα μεταβολής του x αναφέρεται στις τρεις συντεταγμένες μεταβλητές του ελλειψοειδούς συστήματος ρ, μ, ν και εμπεριέχουν τις προαναφερθείσες παραμέτρους, δηλαδή

$$x \equiv \rho \in (h_2, +\infty), \quad x \equiv \mu \in (h_3, h_2), \quad x \equiv \nu \in (-h_3, h_3) \quad (\text{B.52})$$

ή

$$x^2 \equiv \rho^2 \in (h_2^2, +\infty), \quad x^2 \equiv \mu^2 \in (h_3^2, h_2^2), \quad x^2 \equiv \nu^2 \in (0, h_3^2). \quad (\text{B.53})$$

Η αναζήτηση λύσεων της (B.50) με τη μορφή φθινουσών δυνάμεων του x

$$E_n(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_{\kappa} x^{n-\kappa} \quad (\text{B.54})$$

και η απαίτηση ο μεγιστοβάθμιος όρος να είναι ο $\alpha_0 x^n$, οδήγησε στην εξής επιλογή για τη σταθερά A

$$A = -n(n+1), \quad n \geq 0. \quad (\text{B.55})$$

Ορίζοντας αυθαίρετα τη σταθερά B ,

$$B = (h_2^2 + h_3^2)p, \quad (\text{B.56})$$

η εξίσωση Lamé (B.50) παίρνει τη μορφή

$$(x^2 - h_3^2)(x^2 - h_2^2)E''(x) + x(2x^2 - h_3^2 - h_2^2)E'(x) + [(h_2^2 + h_3^2)p - n(n+1)x^2]E(x) = 0 \quad (\text{B.57})$$

για κάθε $x \in \mathfrak{B}$. Οι ιδιολύσεις της εξίσωσης Lamé ονομάζονται συναρτήσεις Lamé.

Η (B.57) ως συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως έχει δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, την εσωτερική $E_n(x)$, ομαλή στην περιοχή του $x=0$ και την εξωτερική $F_n(x)$, ομαλή στην περιοχή του απείρου. Εφ' όσον, όπως θα δούμε, γίνει δυνατό να προσδιοριστεί η εσωτερική λύση $E_n(x)$ της εξίσωσης (B.57), τότε η εξωτερική συνάρτηση Lamé $F_n(x)$ μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει της $E_n(x)$, με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης [35]. Πράγματι, αναζητώντας λύση της μορφής

$$F_n(x) = E_n(x)\Psi_n(x) \quad (\text{B.58})$$

και αντικαθιστώντας στην (B.57), οδηγούμαστε στην

$$F_n(x) = (2n+1)E_n(x) \int \frac{du}{[E_n(u)]^2 \sqrt{|u^2 - h_3^2|} |u^2 - h_2^2|}, \quad n \geq 0, \quad (\text{B.59})$$

όπου τα όρια ολοκλήρωσης καθορίζονται από το διάστημα μεταβολής της μεταβλητής x , όπου το $2n+1$ μπαίνει για λόγους κανονικοποίησης [61].

Μέσα στα πλαίσια της ιδέας του Lamé για την κατασκευή των ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων, σκοπός είναι η εύρεση των εσωτερικών λύσεων $E_n(x)$, $x \in \mathfrak{B}$. Η διαδικασία εύρεσης των συναρτήσεων Lamé στηρίζεται σε μια σειρά από λογικά βήματα που οδηγούν στην κατασκευή ομάδων συναρτήσεων που ονομάζονται κλάσεις και αυτές είναι οι κλάσεις K, L, M, N . Συνολικά, με τον τρόπο αυτό ορίζονται, όπως ήταν αναμενόμενο $2n+1$, $n \geq 0$ συναρτήσεις από όλες τις κλάσεις, όπου υπολογίζεται για κάθε $n \geq 0$ ο σταθερός αριθμός P που εμφανίζεται στην σχέση (B.57). Η διαδικασία αυτή που ακολουθήθηκε από τον Lamé [58] δεν θεωρείται σκόπιμο να αναλυθεί αφού πέραν της αναφοράς του Hobson, αναλυτικά αναπτύσσεται το παραπάνω σκεπτικό στην διδακτορική Διατριβή [61]. Συγκεκριμένα, εφικτός είναι ο υπολογισμός μόνο των τεσσάρων πρώτων εσωτερικών λύσεων $E_n(x)$ για $n=0,1,2,3$ για διάφορες τιμές του P , γεγονός που σχετίζεται με την ευκολία υπολογισμού αυτής της σταθεράς P . Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύεται πως για $n=4,5,6,7$ οδηγούμαστε σε ανάγκη επίλυσης μιας πολυωνυμικής εξίσωσης τρίτου βαθμού, η οποία, λύνεται αναλυτικά μέσω των τύπων του Cardano [61], οι οποίοι όμως στην πράξη αποδεικνύονται εξαιρετικά δύσχρηστοι. Απ' την άλλη πλευρά, για $n \geq 8$, καταλήγουμε σε μη αναγώγιμες πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του πέμπτου, για τις οποίες όπως απέδειξε ο Galois το 1830, δεν

είναι δυνατόν να εκφρασθούν σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων μέσω ριζικών και των τεσσάρων πράξεων ενός σώματος.

Όπως είναι αναμενόμενο, λοιπόν, κλειστή αναλυτική μορφή για τις συναρτήσεις Lamé υπάρχει μόνον για $n = 0, 1, 2, 3$, ενώ για $n = 4, 5, 6$ υπάρχει μόνον σε θεωρητικό επίπεδο και για $n \geq 8$ δεν υπάρχει καθόλου.

Οι συναρτήσεις Lamé, $2n+1$ στον αριθμό, που προκύπτουν από τις τέσσερις κλάσεις K, L, M, N για $n = 0, 1, 2, 3$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ δίνονται παρακάτω,

$$E_0^1(x) = 1 \quad (n=0, m \neq 1 \text{ κ}K \text{ ση}) \quad (\text{B.60})$$

$$E_1^1(x) = x \quad (n=1, m \neq 1 \text{ κ}K \text{ ση}) \quad (\text{B.61})$$

$$E_1^2(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (n=1, m \neq 2 \text{ κ}L \text{ ση}) \quad (\text{B.62})$$

$$E_1^3(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (n=1, m \neq 3 \text{ κ}M \text{ ση}) \quad (\text{B.63})$$

$$E_2^1(x) = x^2 + \Lambda - \alpha_1^2 \quad (n=2, m \neq 1 \text{ κ}K \text{ ση}) \quad (\text{B.64})$$

$$E_2^2(x) = x^2 + \Lambda' - \alpha_1^2 \quad (n=2, m \neq 2 \text{ κ}L \text{ ση}) \quad (\text{B.65})$$

$$E_2^3(x) = x\sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (n=2, m \neq 3 \text{ κ}L \text{ ση}) \quad (\text{B.66})$$

$$E_2^4(x) = x\sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (n=2, m \neq 4 \text{ κ}M \text{ ση}) \quad (\text{B.67})$$

$$E_2^5(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|}\sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (n=2, m \neq 5 \text{ κ}N \text{ ση}) \quad (\text{B.68})$$

$$E_3^1(x) = x(x^2 + \Lambda_1 - \alpha_1^2) \quad (n=3, m \neq 1 \text{ κ}K \text{ ση}) \quad (\text{B.69})$$

$$E_3^2(x) = x(x^2 + \Lambda_1' - \alpha_1^2) \quad (n=3, m \neq 2 \text{ κ}L \text{ ση}) \quad (\text{B.70})$$

$$E_3^3(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|}(x^2 + \Lambda_2 - \alpha_1^2) \quad (n=3, m \neq 3 \text{ κ}L \text{ ση}) \quad (\text{B.71})$$

$$E_3^4(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|}(x^2 + \Lambda_2' - \alpha_1^2) \quad (n=3, m \neq 4 \text{ κ}L \text{ ση}) \quad (\text{B.72})$$

$$E_3^5(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|}(x^2 + \Lambda_3 - \alpha_1^2) \quad (n=3, m \neq 5 \text{ κ}M \text{ ση}) \quad (\text{B.73})$$

$$E_3^6(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|}(x^2 + \Lambda_3' - \alpha_1^2) \quad (n=3, m \neq 6 \text{ κ}M \text{ ση}) \quad (\text{B.74})$$

$$E_3^7(x) = x\sqrt{|x^2 - h_2^2|}\sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (n=3, m \neq 7 \text{ κ}N \text{ ση}) \quad (\text{B.75})$$

όπου οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \pm \frac{1}{3} \left[\sum_{i=1}^3 \left(\alpha_i^4 - \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{\alpha_i^2} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{B.76})$$

ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\Lambda - \alpha_i^2} = 0 \quad (\text{B.77})$$

και οι σταθερές

$$\left. \begin{matrix} \Lambda_\kappa \\ \Lambda'_\kappa \end{matrix} \right\} = \frac{2}{5} \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 - \frac{1}{5} \alpha_\kappa^2 \pm \frac{1}{5} \left\{ 4 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^4 - 3 \alpha_\kappa^4 - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\alpha_i^2} + \frac{6}{\alpha_\kappa^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (\text{B.78})$$

για $\kappa = 1, 2, 3$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1 + 2\delta_{i\kappa}}{(\Lambda_\kappa - \alpha_i^2)} = 0. \quad (\text{B.79})$$

Οι σταθερές α_κ , $\kappa = 1, 2, 3$ από φυσικής πλευράς αποτελούν τους τρεις άξονες του ελλειψοειδούς συστήματος συντεταγμένων [58,61], ενώ από μαθηματικής σκοπιάς, μέσα στα πλαίσια του παραρτήματος, είναι σταθερές οι οποίες συνδέονται με τα h_2 , h_3 μέσω των σχέσεων

$$h_2^2 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2, \quad h_3^2 = \alpha_1^2 - \alpha_2^2. \quad (\text{B.80})$$

Τα απόλυτα στα ριζικά στις σχέσεις (B.60)–(B.75) είναι απαραίτητα εφόσον το διάστημα μεταβολής του x αλλάζει κάθε φορά σύμφωνα με την (B.52).

Σχέση ορθογωνιότητας κατά αναλογία με τις (B.11) και (B.33) δεν υπάρχει, αλλά υπάρχει ένας κατάλληλος συνδυασμός των εσωτερικών συναρτήσεων Lamé για συγκεκριμένα διαστήματα του x σύμφωνα με την (B.52). Πιο αναλυτικά, η ορθογωνιότητα των εσωτερικών συναρτήσεων $E_n(x)$ ως προς τη συνάρτηση βάρους για $x \equiv \rho = \rho_s = \text{σταθερό}$ (επιφάνεια ελλειψοειδούς)

$$l_{\rho_s}(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{(\rho_s^2 - \mu^2)(\rho_s^2 - \nu^2)}} \quad (\text{B.81})$$

οδηγεί στις σχέσεις

$$\iint_{\rho=\rho_s} E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) E_{n'}^{m'}(\mu) E_{n'}^{m'}(\nu) l_{\rho_s}(\mu, \nu) dS = 0, \quad n \neq n', \quad m \neq m' \quad (\text{B.82})$$

και

$$\iint_{\rho=\rho_s} (E_n^m(\mu) E_n^m(\nu))^2 l_{\rho_s}(\mu, \nu) dS = \gamma_n^m, \quad n = n', \quad m = m', \quad (\text{B.83})$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, 2n+1$ και γ_n^m είναι οι σταθερές κανονικοποίησης. Οι σταθερές κανονικοποίησης που ενδιαφέρουν είναι αυτές για $n = 0, 1, 2, 3$. Για $n = 3$ δεν υπάρχει συγκεκριμένη βιβλιογραφία, ενώ για $n = 0, 1, 2$ είναι οι εξής,

$$\gamma_0^1 = 4\pi, \quad (B.84)$$

$$\gamma_1^\kappa = \frac{4\pi}{3} \frac{h_1^2 h_2^2 h_3^2}{h_\kappa^2}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (B.85)$$

$$\gamma_2^1 = -\frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda - \alpha_1^2) (\Lambda - \alpha_2^2) (\Lambda - \alpha_3^2), \quad (B.86)$$

$$\gamma_2^2 = \frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda' - \alpha_1^2) (\Lambda' - \alpha_2^2) (\Lambda' - \alpha_3^2), \quad (B.87)$$

$$\gamma_2^{6-\kappa} = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_\kappa^2, \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (B.88)$$

όπου μπορεί να αποδειχτεί με αναλυτικές μεθόδους ότι οι παράγοντες $\Lambda - \Lambda'$, $\Lambda - \alpha_2^2$, $\Lambda - \alpha_3^2$ και $\Lambda' - \alpha_3^2$ είναι θετικοί, ενώ οι παράγοντες $\Lambda - \alpha_1^2$, $\Lambda' - \alpha_1^2$ και $\Lambda' - \alpha_2^2$ είναι αρνητικοί, ενώ ισχύει

$$h_1^2 = h_2^2 - h_3^2. \quad (B.89)$$

Για $n = 3$, χωρίς να υπάρχει η αντίστοιχη δημοσίευση, οι Γ. Δάσιος και Α. Χαραλαμπίδου έχουν βρει ότι

$$\gamma_3^1 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda'_1 - \Lambda_1) (\Lambda_1 - \alpha_1^2) h_2^2 h_3^2 \left[(\Lambda_1 - \alpha_1^2) (h_2^2 + h_3^2) + 2h_2^2 h_3^2 \right], \quad (B.90)$$

$$\gamma_3^2 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_1 - \Lambda'_1) (\Lambda'_1 - \alpha_1^2) h_2^2 h_3^2 \left[(\Lambda'_1 - \alpha_1^2) (h_2^2 + h_3^2) + 2h_2^2 h_3^2 \right], \quad (B.91)$$

$$\gamma_3^3 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_2 - \Lambda'_2) (\Lambda_2 - \alpha_2^2) h_1^2 h_3^2 \left[(\Lambda_2 - \alpha_2^2) (h_3^2 - h_1^2) + h_2^2 h_3^2 \right], \quad (B.92)$$

$$\gamma_3^4 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda'_2 - \Lambda_2) (\Lambda'_2 - \alpha_2^2) h_1^2 h_3^2 \left[(\Lambda'_2 - \alpha_2^2) (h_3^2 - h_1^2) + h_2^2 h_3^2 \right], \quad (B.93)$$

$$\gamma_3^5 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda_3 - \Lambda'_3) (\Lambda_3 - \alpha_3^2) h_1^2 h_2^2 \left[(\Lambda_3 - \alpha_3^2) (h_1^2 + h_2^2) + h_2^2 h_3^2 \right], \quad (B.94)$$

$$\gamma_3^6 = \frac{8\pi}{7 \cdot 15} (\Lambda'_3 - \Lambda_3) (\Lambda'_3 - \alpha_3^2) h_1^2 h_2^2 \left[(\Lambda'_3 - \alpha_3^2) (h_1^2 + h_2^2) + h_2^2 h_3^2 \right], \quad (B.95)$$

$$\gamma_3^7 = \frac{4\pi}{7 \cdot 15} h_1^4 h_2^4 h_3^4. \quad (B.96)$$

Όταν οι εσωτερικές συναρτήσεις Lamé υπολογιστούν, τότε, άμεσα οι εξωτερικές συναρτήσεις Lamé δίνονται από την ολοκληρωτική έκφραση (B.59). Η δυσκολία βέβαια έγκειται στον υπολογισμό του ελλειπτικού ολοκληρώματος. Σε αυτό το σημείο κάνουμε μια μικρή αναφορά στα πιο βασικά είδη ελλειπτικών ολοκληρωμάτων. Λόγω της αναλυτικής μορφής αυτής της εργασίας τα ελλειπτικά ολοκληρώματα θα συνοδεύουν τις πράξεις στη μορφή που ορίστηκαν.

Ελλειπτικά ολοκληρώματα.

Οι ελλειπτικές συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, προέκυψαν μέσα από τη μελέτη της κίνησης του απλού εκκρεμούς για κάθε αρχική γωνία και από τον υπολογισμό του μήκους της έλλειψης [61]. Τα προβλήματα αυτά απασχολούσαν για αρκετούς αιώνες την αναλυτική σκέψη, λύθηκαν δε μέσω του ορισμού και της μελέτης των συναρτήσεων αυτών από τους Legendre και Jacobi στη δεκαετία του 1820. Αναφορικά, υπάρχουν τα παρακάτω είδη ελλειπτικών ολοκληρωμάτων.

- *ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους:*

$$F(\phi, k) = \int_0^{\phi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k < 1. \quad (\text{B.97})$$

- *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους:*

$$F(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \quad 0 < k < 1. \quad (\text{B.98})$$

- *ελλειπτικό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους:*

$$E(\phi, k) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k < 1. \quad (\text{B.99})$$

- *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους:*

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx, \quad 0 < k < 1. \quad (\text{B.100})$$

- *ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους:*

$$\Pi(\phi, \eta, k) = \int_0^\phi \frac{dx}{(1 + \eta \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k < 1. \quad (\text{B.101})$$

- *πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα τρίτου είδους:*

$$\Pi(\eta, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \eta, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 + \eta \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k < 1. \quad (\text{B.102})$$

Θέτοντας

$$t = \sin x \quad (\text{B.103})$$

στα τρία είδη ολοκληρωμάτων, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση γίνεται συνάρτηση του t και οι (B.97), (B.99) και (B.101) παίρνουν τη μορφή

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k < 1, \quad (\text{B.104})$$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k < 1, \quad (\text{B.105})$$

$$\Pi(\phi, \eta, k) = \int_0^\phi \frac{dt}{(1 - \eta t^2) \sqrt{1-k^2 t^2} \sqrt{1-t^2}}, \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < k < 1. \quad (\text{B.106})$$

Τα αντίστοιχα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα προκύπτουν από την αντικατάσταση του ορίσματος ϕ από την τιμή $\frac{\pi}{2}$.

Όπως και στα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου είδους, έτσι και στα ολοκληρώματα δευτέρου και τρίτου είδους, ο υπολογισμός τους προϋποθέτει το ανάπτυγμα της υπό ολοκλήρωση ποσότητας σε διωνυμική σειρά και την ολοκλήρωση της αντίστοιχης σειράς μέσα στο διάστημα ομοιόμορφης σύγκλισής τους, στο οποίο ορίζονται οι παράμετροί τους. Έτσι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα και των τριών ειδών υπολογίζονται μόνον προσεγγιστικά, μέσω των αντίστοιχων αναπτυγμάτων, η συμβολή όμως των H/Y κάνει την προσέγγιση να είναι εφικτή σε κάθε επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ALMANSI ΓΙΑ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο παράρτημα αυτό παραθέτουμε τη μαθηματική ανάλυση του θεωρήματος αναπαράστασης του Almansi όπως δόθηκε για πρώτη φορά το 1897 και η οποία εμφανίστηκε στη θεωρία των διαφορικών αναπαραστάσεων με κίνητρο την απαίτηση επίλυσης διαρμονικών συναρτήσεων [123]. Οι διαρμονικές συναρτήσεις ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή Δ^2 ο οποίος αποτελεί τον διαφορικό τελεστή της σύνθεσης δύο τελεστών του Laplace

$$\Delta^2 = \Delta \circ \Delta, \quad (\Gamma.1)$$

οπότε κάθε διαρμονική συνάρτηση* $B(\mathbf{r}) \equiv B$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta^2 B = 0. \quad (\Gamma.2)$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με το θεώρημα του Almansi, κάθε συνάρτηση που επιλύει την (Γ.2) μπορεί να γραφτεί σαν συνδυασμός δύο αρμονικών συναρτήσεων, δηλ.,

* Η απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης του Almansi πραγματοποιείται, για ευκολία, με χρήση μιας βαθμωτής συνάρτησης B , αλλά το συγκεκριμένο θεώρημα ισχύει και για διανυσματικές διαρμονικές συναρτήσεις. Επιπλέον, η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων, αλλά όπως θα δούμε και στο τέλος της απόδειξης το θεώρημα του Almansi γενικεύεται για κάθε καμπυλόγραμμο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

$$B = B_1 + r^2 B_2, \quad (\Gamma.3)$$

όπου r είναι η σφαιρική ακτινική συνιστώσα και επιπλέον

$$\Delta B_1 = \Delta B_2 = 0. \quad (\Gamma.4)$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή, κάθε συνάρτηση που έχει τη μορφή (Γ.3) είναι διαρμονική συνάρτηση που ανήκει στον πυρήνα του τελεστή (Γ.1). Επακολουθεί η απόδειξη με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων για ευκολία.

Απόδειξη.

Προτού προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος ας σημειώσουμε ότι σε σφαιρικές συντεταγμένες ο τελεστής της βάρμωσης και ο τελεστής του Laplace έχουν τις πιο κάτω μορφές (περισσότερα για τις σφαιρικές συντεταγμένες δες το Μέρος II)

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\Gamma.5)$$

και

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (\Gamma.6)$$

όπου $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ αποτελούν το σύνολο των μοναδιαίων διανυσμάτων σε σφαιρικές συντεταγμένες και r, θ, ϕ είναι οι σφαιρικές συνιστώσες. Αν $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης τότε

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \nabla \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{I}}, \quad (\Gamma.7)$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό.

Τέλος, ισχύει χωρίς να είναι απαραίτητη η απόδειξη, ότι αν $X = X(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3)$ είναι μια τρισδιάστατη εσωτερική αρμονική, τότε για κάθε $k > 0$ η

$$\Psi(\mathbf{r}) = r^{-k} \int_0^r \rho^{k-1} X(\rho \hat{\mathbf{r}}) d\rho, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{B}^3) \quad (\Gamma.8)$$

είναι μια τρισδιάστατη εσωτερική αρμονική.

Συνεχίζουμε στην απόδειξη, τώρα, του ευθέως και του αντιστρόφου του θεωρήματος.

- Ευθύ: Αν $B = B_1 + r^2 B_2$ με $\Delta B_1 = \Delta B_2 = 0$ τότε $\Delta^2 B = 0$.

Με απευθείας διαφορίση της (Γ.3) λαμβάνουμε

$$\Delta^2 B = \Delta \circ \Delta B = \Delta \left[\Delta B_1 + \Delta (r^2 B_2) \right]. \quad (\Gamma.9)$$

Λόγω της σχέσης (Γ.4) και με χρήση της ταυτότητας (Α.30) η σχέση (Γ.9) δίνει

$$\Delta^2 B = \Delta \left[(\Delta r^2) B_2 + 2 \nabla r^2 \cdot \nabla B_2 \right], \quad (\Gamma.10)$$

όπου η εφαρμογή των τελεστών (Γ.5) και (Γ.6) στη ποσότητα r^2 εύκολα μας οδηγεί στις σχέσεις

$$\nabla r^2 = 2r\hat{\mathbf{r}} \quad \text{και} \quad \Delta r^2 = 6. \quad (\Gamma.11)$$

Επομένως η (Γ.10), σε συνδυασμό με την

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \quad (\Gamma.12)$$

και τη σχέση (Γ.4), γίνεται

$$\Delta^2 B = \Delta \left[6B_2 + 4r \frac{\partial}{\partial r} B_2 \right] = \Delta [6B_2 + 4\mathbf{r} \cdot \nabla B_2] = 4\Delta (\mathbf{r} \cdot \nabla B_2). \quad (\Gamma.13)$$

Τώρα λόγω της ταυτότητας (Α.35) έχουμε

$$\Delta^2 B = 4\Delta (\mathbf{r} \cdot \nabla B_2) = 4 \left[(\Delta \mathbf{r}) \cdot \nabla B_2 + \mathbf{r} \cdot \Delta (\nabla B_2) + 2(\nabla \mathbf{r})^T : \nabla \otimes \nabla B_2 \right] \quad (\Gamma.14)$$

και η χρήση των εξισώσεων (Γ.4), (Γ.7) και των ταυτοτήτων (Α.49) και (Α.50) οδηγεί στη σχέση

$$\Delta^2 B = 4 \left[\tilde{\mathbf{I}} : \nabla \otimes \nabla B_2 \right] = \nabla \cdot \nabla B_2 = \Delta B_2 = 0, \quad (\Gamma.15)$$

δηλαδή,

$$\Delta^2 B = 0, \quad (\Gamma.16)$$

οπότε και ολοκληρώθηκε η απόδειξη του ευθέως του θεωρήματος του Almansi.

Αντιστρόφως τώρα,

- Αντίστροφο: Αν $\Delta^2 B = 0$ τότε $\exists B_1, B_2$ με $\Delta B_1 = \Delta B_2 = 0$ τέτοια ώστε $B = B_1 + r^2 B_2$.

Ορίζουμε μια συνάρτηση $X = X(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{B}^3)$ ως εξής,

$$X = \Delta B, \quad (\Gamma.17)$$

οπότε, λόγω της υπόθεσης (Γ.2), η X είναι μια αρμονική συνάρτηση, δηλ.,

$$\Delta X = 0. \quad (\Gamma.18)$$

Ψάχνουμε, λοιπόν, αν υπάρχουν B_1, B_2 τέτοια ώστε

$$B = B_1 + r^2 B_2. \quad (\Gamma.19)$$

Έστω ότι B_1 είναι μια αρμονική συνάρτηση. Θα βρούμε, επίσης, μια αρμονική συνάρτηση B_2 ώστε να είναι αληθής η (Γ.19). Άρα το ερώτημα ανάγεται στην εύρεση της συναρτήσεως B_2 η οποία ζητείται να ανήκει στον πυρήνα του τελεστή Δ . Από πριν γνωρίζουμε ότι

$$\Delta(r^2 B_2) = 6B_2 + 4r \frac{\partial}{\partial r} B_2. \quad (\Gamma.20)$$

Συνεπώς, με εφαρμογή του τελεστή του Laplace στην (Γ.19) και σύμφωνα με την υπόθεση του ορισμού μιας αυθαίρετης αρμονικής συνάρτησης B_1 οδηγούμαστε στη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$X \equiv \Delta B = \Delta B_1 + \Delta(r^2 B_2) = 6B_2 + 4r \frac{\partial}{\partial r} B_2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} B_2 + \frac{3}{2r} B_2 = \frac{X}{4r} \quad (\Gamma.21)$$

με πολλαπλασιαστή Euler [35] $e^{\int \frac{3}{2r} dr} = e^{\frac{3}{2} \ln r} = r^{\frac{3}{2}}$. Επομένως η συνήθης διαφορική εξίσωση (Γ.21) λύνεται

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^{\frac{3}{2}} B_2) = \frac{1}{4} r^{\frac{1}{2}} X \Rightarrow r^{\frac{3}{2}} B_2 = \frac{1}{4} \int_0^r \rho^{\frac{1}{2}} X d\rho \quad (\Gamma.22)$$

και προκύπτει η πιο κάτω σχέση για την συνάρτηση B_2 ,

$$B_2 = B_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} r^{-\frac{3}{2}} \int_0^r \rho^{\frac{3}{2}-1} X(\rho \hat{\mathbf{r}}) d\rho, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\Gamma.23)$$

Άρα, επειδή η X είναι αρμονική συνάρτηση από την (Γ.18) τότε, λόγω της (Γ.8) για $k = \frac{3}{2}$, και η B_2 είναι μια αρμονική συνάρτηση. Δηλαδή, βρήκαμε την συνάρτηση B_2 η οποία είναι και αρμονική. Ειδικότερα, θεωρώντας όπως προαναφέραμε, μια άλλη αρμονική B_1 έχουμε

$$B = B_1 + r^2 B_2 \quad \text{με} \quad \Delta B_1 = \Delta B_2 = 0. \quad (\Gamma.24)$$

Συνεπώς, ολοκληρώθηκε και η απόδειξη του αντιστρόφου του θεωρήματος αναπαράστασης του Almansi.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, το θεώρημα αναπαράστασης του Almansi για διαρμονικές συναρτήσεις* μπορεί να γενικευτεί για κάθε σύστημα συντεταγμένων πέρα από το σφαιρικό. Συγκεκριμένα, γνωρίζοντας ότι

$$r^2 = \|\mathbf{r}\|^2 \quad (\Gamma.25)$$

τότε, τελικά, παίρνουμε

$$\Delta^2 B(\mathbf{r}) = 0 \Leftrightarrow B(\mathbf{r}) = B_1(\mathbf{r}) + \|\mathbf{r}\|^2 B_2(\mathbf{r}), \quad \Delta B_1(\mathbf{r}) = \Delta B_2(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3). \quad (\Gamma.26)$$

Φυσικά, το θεώρημα (Γ.26) ισχύει και για διανυσματικές διαρμονικές συναρτήσεις ενώ $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης τρισδιάστατων χωρίων στο εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων.

* Πρόσφατα έχει αποδειχτεί [24] ότι το συγκεκριμένο θεώρημα ισχύει και για τη συνάρτηση ροής Ψ (θεώρημα αποσύνθεσης για αξονοσυμμετρικές ροές Stokes) με τη μορφή

$$E^4 \Psi(\mathbf{r}) = 0 \Leftrightarrow \Psi(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) + \|\mathbf{r}\|^2 \Psi_2(\mathbf{r}), \quad E^2 \Psi_1(\mathbf{r}) = E^2 \Psi_2(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^2), \quad (\Gamma.26a)$$

όπου Ψ είναι συνάρτηση ροής που ανήκει στον πυρήνα του τελεστή $E^4 = E^2 \circ E^2$ και Ψ_1, Ψ_2 είναι συναρτήσεις ροής που ανήκουν στον πυρήνα του τελεστή E^2 . Για πιο αναλυτική μελέτη για τη συνάρτηση ροής διδιάστατων ροών Stokes ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Κεφάλαιο I-1.2.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ 3-D ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΡΟΗ STOKES

Θα αποδείξουμε, για πληρότητα, τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των εξισώσεων του Stokes που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο I-3. Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις προσφέρουν το μεγάλο πλεονέκτημα της έκφρασης των πεδίων ταχύτητας $\mathbf{v}$ και ολικής πίεσης P συναρτήσεων ολοκληρωμάτων στο σύνορο που περιέχουν τα ίδια τα πεδία ροής και τις κάθετες παραγώγους αυτών, με συνέπεια την δυνατότητα άμεσης χρήσης των βασικών τύπων συνοριακών συνθηκών που εμφανίζονται στη φύση. Από την άλλη, μέσα από τις ολοκληρωτικές μορφές διακρίνονται τα φυσικά νοήματα των εξισώσεων με αποτέλεσμα την “φυσική” απόληξη κάθε μαθηματικού όρου.

Δ.1 Βασική ολοκληρωτική μορφή του πεδίου ταχύτητας.

Θα θεωρήσουμε το τρισδιάστατο, ομαλό και φραγμένο χωρίο $\Omega(\mathbf{R}^3)$ με το σύνορό του $\partial\Omega(\mathbf{R}^3)$. Έστω $\mathbf{v}$ και $\mathbf{v}'$ δύο πεδία ταχύτητας που ικανοποιούν τις εξισώσεις Stokes

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v} = \nabla P \quad \left| \quad \mu_0 \Delta \mathbf{v}' = \nabla P' \right. \quad (\Delta.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (\Delta.2)$$

στο $\Omega(\mathbb{B}^3)$ και, επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι τα τανυστικά πεδία $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ και $\tilde{\boldsymbol{\tau}}'$ εκφράζονται μέσω σχέσεων αντιστοίχων των τανυστικών πεδίων τάσεων $\tilde{\mathbf{P}}$ και $\tilde{\mathbf{P}}'$ που ήδη γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο I-1, σχέση (I-1.62), δηλαδή,

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = -P\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \left(\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T \right), \quad (\Delta.3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}' = -P'\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \left(\nabla \otimes \mathbf{v}' + (\nabla \otimes \mathbf{v}')^T \right). \quad (\Delta.4)$$

Η διαφορά των σχέσεων (Δ.3) και (Δ.4) με τον ορισμό (I-1.62) έγκειται στο γεγονός ότι, η θερμοδυναμική πίεση P δεν συμπίπτει εν γένει με την ολική πίεση P^* , μ_0 αντιπροσωπεύει το δυναμικό ιξώδες, ενώ $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι το μοναδιαίο δυαδικό και το σύμβολο “T” δηλώνει αναστροφή.

Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε το παρακάτω λήμμα.

• Λήμμα

Ισχύει η ταυτότητα

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}') = \nabla \cdot (\mathbf{v}' \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \quad (\Delta.5)$$

για κάθε $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ και $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}'$ που ικανοποιούν τις (Δ.1), (Δ.2) και (Δ.3), (Δ.4), αντίστοιχα.

Απόδειξη.

Από την ταυτότητα (A.20),

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{S}}) = (\nabla \otimes \mathbf{f}) : \tilde{\mathbf{S}} + \mathbf{f} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}^T), \quad (\Delta.6)$$

έπεται ότι αρκεί να δείξουμε την

$$(\nabla \otimes \mathbf{v}) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}' + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}') = (\nabla \otimes \mathbf{v}') : \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{v}' \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}), \quad (\Delta.7)$$

εφόσον τα τανυστικά πεδία $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ και $\tilde{\boldsymbol{\tau}}'$ είναι συμμετρικά. Αλλά, λόγω του ορισμού (Δ.3) και των σχέσεων (A.13), (A.40) και (A.41) του Παραρτήματος Α,

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \nabla \cdot \left[-P\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \nabla \otimes \mathbf{v} + \mu_0 (\nabla \otimes \mathbf{v})^T \right]$$

* Στην περίπτωση που οι βαρυτικές δυνάμεις αμελούνται τότε τα δύο αυτά είδη τανυστικών πεδίων συμπίπτουν, οπότε, τότε, $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \equiv \tilde{\mathbf{P}}$ και $\tilde{\boldsymbol{\tau}}' \equiv \tilde{\mathbf{P}}'$.

$$= -\nabla P + \mu_0 \Delta \mathbf{v} + \mu_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (\Delta.8)$$

αφού αναφερόμαστε σε ασυμπίεστα ρευστά ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes. Ομοίως,

$$\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}' = \mathbf{0}. \quad (\Delta.9)$$

Άρα, η (Δ.7) γράφεται

$$(\nabla \otimes \mathbf{v}) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}' = (\nabla \otimes \mathbf{v}') : \tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad (\Delta.10)$$

ή λόγω των (Δ.3) και (Δ.4),

$$\begin{aligned} (\nabla \otimes \mathbf{v}) : \left[-P' \tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \nabla \otimes \mathbf{v}' + \mu_0 (\nabla \otimes \mathbf{v}')^T \right] \\ = (\nabla \otimes \mathbf{v}') : \left[-P \tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \nabla \otimes \mathbf{v} + \mu_0 (\nabla \otimes \mathbf{v})^T \right] \end{aligned} \quad (\Delta.11)$$

ή αν κάνουμε χρήση της ταυτότητας (Α.49) σε συνδυασμό με τον ορισμό της ασυμπίεστης ροής,

$$(\nabla \otimes \mathbf{v}) : \left[\nabla \otimes \mathbf{v}' + (\nabla \otimes \mathbf{v}')^T \right] = (\nabla \otimes \mathbf{v}') : \left[\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T \right] \quad (\Delta.12)$$

ή σε μορφή αθροισμάτων,

$$\sum_{i,j=1}^3 v_{i,j} (v'_{j,i} + v'_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^3 v'_{i,j} (v_{j,i} + v_{i,j}) \quad (\Delta.13)$$

η οποία είναι η ίδια αν αντιμεταθέσουμε τους δείκτες i, j , ως ακολούθως

$$\sum_{i,j=1}^3 v_{j,i} (v'_{j,i} + v'_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^3 v'_{j,i} (v_{j,i} + v_{i,j}). \quad (\Delta.14)$$

Αθροίζοντας τις (Δ.13) και (Δ.14) παίρνουμε

$$\sum_{i,j=1}^3 (v_{i,j} + v_{j,i}) (v'_{i,j} + v'_{j,i}) = \sum_{i,j=1}^3 (v'_{i,j} + v'_{j,i}) (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\Delta.15)$$

η οποία προφανώς ισχύει και, συνεπώς, το Λήμμα αποδείχθηκε. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε το θεώρημα αμοιβαιότητας του Lorentz όπως ο ίδιος το διατύπωσε πρώτα το 1896 [14].

Θεώρημα Αμοιβαιότητας του Lorentz.

Αν $\boldsymbol{\tau}_{(n)}$ και $\boldsymbol{\tau}'_{(n)}$ είναι οι επιφανειακές τάσεις που αντιστοιχούν στα τανυστικά πεδία $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ και $\tilde{\boldsymbol{\tau}}'$ των (Δ.3) και (Δ.4), αντίστοιχα, τότε ισχύει ότι

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}'_{(n)} dS = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau}_{(n)} dS. \quad (\Delta.16)$$

Απόδειξη.

Η επιφανειακές τάσεις $\tau_{(n)}$ και $\tau'_{(n)}$ ορίζονται από σχέσεις ανάλογες της έκφρασης (I-1.27) του Κεφαλαίου I-1, δηλαδή,

$$\tau_{(n)} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{και} \quad \tau'_{(n)} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}' = \tilde{\boldsymbol{\tau}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (\Delta.17)$$

Οι τύποι (Δ.17) είναι παρόμοιας μορφής με τους τύπους που αφορούν την επιφανειακή τάση $\mathbf{t}_{(n)}$ του τανυστή των τάσεων $\tilde{\mathbf{\Pi}}^*$. Άρα, το θεώρημα (Δ.16) είναι μια απλή εφαρμογή του Θεωρήματος του Gauss [14] και της σχέσης (Δ.5) του προηγούμενου λήμματος. Δηλαδή,

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) dU = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{v}' \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) dU, \quad (\Delta.18)$$

όπου αν $\hat{\mathbf{n}}$ είναι η εξωτερική κάθετος,

$$\iint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) dS = \iint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{v}' \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) dS \quad (\text{Θεώρημα Gauss}) \quad (\Delta.19)$$

ή

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{v}' \cdot (\tilde{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS \quad (\Delta.20)$$

από την οποία έπεται η (Δ.16) μέσω της (Δ.17) και το θεώρημα αποδείχθηκε.

Για την απόδειξη του θεωρήματος του Lorentz υποθέσαμε ότι τα πεδία $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{P}, \mathbf{P}'$ δεν έχουν ανωμαλίες ή ιδιομορφίες στο χωρίο $\Omega(\mathbf{B}^3)$. Δηλαδή, ότι ικανοποιούνται οι εξισώσεις (Δ.1) και (Δ.2). Αν όμως οι εξισώσεις (Δ.1) δεν είναι ομογενείς τότε ισχύουν τα ακόλουθα. Αν τα πεδία $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{P}, \mathbf{P}'$ ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v} - \nabla P = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} \neq \mathbf{0}, \quad (\text{πηγές}) \quad (\Delta.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\Delta.22)$$

και

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v}' - \nabla P' = \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}' \neq \mathbf{0}, \quad (\text{πηγές}) \quad (\Delta.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (\Delta.24)$$

τότε από την (Δ.6) συνεπάγεται ότι

* Στην περίπτωση που οι βαρυτικές δυνάμεις αμελούνται τότε οι επιφανειακές τάσεις συμπίπτουν, δηλ., $\tau_{(n)} \equiv \mathbf{t}_{(n)}$

και $\tau'_{(n)} \equiv \mathbf{t}'_{(n)}$.

$$(\nabla \otimes \mathbf{v}) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}' = \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}') - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}') \quad (\Delta.25)$$

και

$$(\nabla \otimes \mathbf{v}') : \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \nabla \cdot (\mathbf{v}' \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) - \mathbf{v}' \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \quad (\Delta.26)$$

και επειδή από την (Δ.15) έχουμε ότι

$$(\nabla \otimes \mathbf{v}) : \tilde{\boldsymbol{\tau}}' = (\nabla \otimes \mathbf{v}') : \tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad (\Delta.27)$$

οι (Δ.25), (Δ.26) και το θεώρημα του Gauss [14] δίνουν

$$\iint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{v} \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}') dS - \iiint_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}') dU = \iint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{v}' \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) dS - \iiint_{\Omega} \mathbf{v}' \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}) dU. \quad (\Delta.28)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην σχέση σε συνδυασμό με τις (Δ.17)

$$\iiint_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}') - \mathbf{v}' \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}})] dU = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}'_{(n)} - \mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\tau}_{(n)}) dS, \quad (\Delta.29)$$

που αποτελεί το ανάλογο της τρίτης ταυτότητας του Green [36,39] για τη ροή Stokes.

Θεωρούμε, τώρα, τα πεδία $\mathbf{v}, P$ και $\bar{\mathbf{v}}_{\kappa}, \bar{P}_{\kappa}$ που επιλύουν τις εξισώσεις

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) - \nabla P(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{3}) \quad (\Delta.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{3}). \quad (\Delta.31)$$

και

$$\mu_0 \Delta \bar{\mathbf{v}}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \nabla \bar{P}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{x}}_{\kappa}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{3}) \quad (\Delta.32)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{3}) \quad (\Delta.33)$$

για $\kappa = 1, 2, 3$.

Προφανώς, η λύση $\bar{\mathbf{v}}_{\kappa}$, $\kappa = 1, 2, 3$ δίνεται μέσω του δυαδικού του Oseen [56]

$$\bar{\mathbf{v}}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\hat{\mathbf{x}}_{\kappa}}{8\pi\mu_0} \cdot \left(\frac{\tilde{\mathbf{I}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{3}) \quad (\Delta.34)$$

και αν $\bar{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{\kappa}$ το δυαδικό των τάσεων που γεννά η $\bar{\mathbf{v}}_{\kappa}$ τότε

$$\nabla \cdot \bar{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{x}}_{\kappa}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{3}). \quad (\Delta.35)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την (Δ.29) για την $\mathbf{v}$ και την $\bar{\mathbf{v}}_{\kappa}$ και παίρνουμε

$$\iiint_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_{\kappa}) - \bar{\mathbf{v}}_{\kappa} \cdot (\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}})] dU = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{(n)\kappa} - \bar{\mathbf{v}}_{\kappa} \cdot \boldsymbol{\tau}_{(n)}) dS \quad (\Delta.36)$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, 3$. Η (Δ.36) λόγω των (Δ.30) ($\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}$) και (Δ.35) γράφεται

$$\iiint_{\Omega} [\mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot (-\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{x}}_{\kappa})] dU(\mathbf{r}')$$

$$= \iint_{\partial\Omega} \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}_{(n)\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \bar{\mathbf{v}}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\tau}_{(n)}(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\Delta.37)$$

για $\kappa = 1, 2, 3$.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{(n)\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \bar{\boldsymbol{\tau}}_{\kappa}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{8\pi\mu_0} \hat{\mathbf{x}}_{\kappa} \cdot \left[-6\mu_0 \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \\ &= -\frac{3}{4\pi} \hat{\mathbf{x}}_{\kappa} \cdot \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\Delta.38) \end{aligned}$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, 3$ και λόγω της (Δ.3)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{(n)}(\mathbf{r}') &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \\ &= \left[-P(\mathbf{r}')\tilde{\mathbf{I}} + \mu_0 \nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}') + \mu_0 (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}'))^T \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\Delta.39) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η (Δ.37), σύμφωνα με τον ορισμό για το συναρτησιακό του Dirac στον υπολογισμό του ολοκληρώματος όγκου στο αριστερό μέρος της, γράφεται

$$\begin{aligned} -\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{x}}_{\kappa} &= -\frac{3}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}') \otimes \hat{\mathbf{x}}_{\kappa} \right) : \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}') \\ &\quad - \frac{1}{8\pi\mu_0} \iint_{\partial\Omega} \left(\hat{\mathbf{x}}_{\kappa} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \hat{\mathbf{x}}_{\kappa} \cdot \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}') \quad (\Delta.40) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ και $\kappa = 1, 2, 3$.

Παίρνοντας διάταξη της (Δ.40) από αριστερά με $\hat{\mathbf{x}}_{\kappa}$ και αθροίζοντας καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \frac{3}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}') \\ &\quad + \frac{1}{8\pi\mu_0} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{\tilde{\mathbf{I}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\Delta.41) \end{aligned}$$

η οποία τελικά γράφεται

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu_0} \iint_{\partial\Omega} \left[\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}') - \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot {}^{(3)}\tilde{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}') \quad (\Delta.42)$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, όπου

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\Delta.43)$$

είναι το δυαδικό του Oseen [56] και

$$^{(3)}\tilde{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -6\mu_0 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3) \quad (\Delta.44)$$

είναι το τριαδικό [72] των τάσεων που γεννά το δυαδικό του Oseen [56]. Προφανώς, αν το $\mathbf{r}$ ανήκει στο εξωτερικό του $\Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, τότε το αριστερό μέλος της αναπαράστασης (Δ.42) μηδενίζεται.

Στην αναπαράσταση (Δ.41) (ή (Δ.42)) το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\Omega} [\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}')] dS(\mathbf{r}') \\ &= \iint_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\tilde{\mathbf{I}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \right] dS(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\Delta.45)$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, περιγράφει μια κατανομή μονοπόλων [74] επάνω στην επιφάνεια $\partial\Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ με πυκνότητα σημειακών δυνάμεων που δίνεται από την $\tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}')$.

Ανάλογα, το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\Omega} [^{(3)}\tilde{\Sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') : (\mathbf{v}(\mathbf{r}') \otimes \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}'))] dS(\mathbf{r}') \\ &= -6\mu_0 \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} : (\mathbf{v}(\mathbf{r}') \otimes \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}')) \right] dS(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\Delta.46)$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$, περιγράφει μια κατανομή διπόλων [74] επάνω στην επιφάνεια $\partial\Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ με πυκνότητα σημειακών ζευγών δυνάμεων που δίνεται από την $\mathbf{v}(\mathbf{r}')$.

Για εξωτερικά πεδία, απαιτείται κατάλληλος ρυθμός απόσβεσης στο άπειρο και η σχέση αναπαράστασης (Δ.41) ισχύει με αλλαγή πρόσημου των δύο ολοκληρωμάτων στο δεύτερο μέλος.

Σε αντίθεση με τα πολυπολικά αναπτύγματα* [41] που εισήγαγε πρώτος ο Maxwell το 1954 [74] που μας δίνουν τα πεδία σαν σειρές αντιστρόφων δυνάμεων της απόστασης

* Το αντικείμενο της συγκεκριμένης διατριβής σχετίζεται με τη μελέτη διαφορικών αναπαραστάσεων στη ροή κατά Stokes. Για αυτό τον λόγο δεν απαιτείται και δεν είναι αναγκαία η περαιτέρω επέκταση στις έννοιες που αφορούν τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις, τα πολυπολικά αναπτύγματα, τα μονόπολα και τα δίπολα καθώς και ροές μέσα σε πεδία που εμφανίζουν ανωμαλίες ή όπως λέγονται ιδιομορφίες. Οι κατάλληλες αναφορές μπορούν να κατατοπίσουν ικανοποιητικά τον αναγνώστη προς αυτές τις κατευθύνσεις.

οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις μας δίνουν τα πεδία σαν κατανομές μονοπόλων και διπόλων μόνον, επάνω στην δοσμένη επιφάνεια $\partial \Omega(\mathbf{e}^3)$.

Δ.2 Ολοκληρωτική αναπαράσταση για το πεδίο ολικής πίεσης.

Για το πεδίο ταχύτητας και ολικής πίεσης $\mathbf{v}, P$ στο ομαλό και φραγμένο χωρίο $\Omega(\mathbf{e}^3)$, παρουσία μιας συνάρτησης κατανομής πηγών $\mathbf{f}$,

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla P(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{e}^3), \quad (\Delta.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{e}^3). \quad (\Delta.48)$$

Όμοια για τη θεμελιώδη λύση

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\Delta.49)$$

με $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{e}^3)$ έχουμε

$$\Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{e}^3). \quad (\Delta.50)$$

Ο τρίτος τύπος του Green (Δ.29) για τις συναρτήσεις $\mathbf{v}$ και $\mathbf{P}$ δίνει

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} [\mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}')] dU(\mathbf{r}') \\ &= \iint_{\partial \Omega} \left[\mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \right] dS(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (\Delta.51)$$

όπου $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{e}^3)$. Λόγω των (Δ.47) και (Δ.50) η σχέση (Δ.51) γράφεται

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left[-4\pi \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot (\nabla_{\mathbf{r}'} P(\mathbf{r}') + \mathbf{f}(\mathbf{r}')) \right] dU(\mathbf{r}') \\ &= \iint_{\partial \Omega} \left[\mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \frac{\partial}{\partial n'} \mathbf{v}(\mathbf{r}') \right] dS(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\Delta.52)$$

για $\mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{e}^3)$. Αλλά, λόγω γνωστών ιδιοτήτων*

$$\begin{aligned} & -4\pi \iiint_{\Omega} [\mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dU(\mathbf{r}') \\ &= 4\pi \iiint_{\Omega} [(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dU(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

* Μερικές από τις βασικές ιδιότητες που χρησιμοποιούμε είναι οι πιο κάτω,

$$\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \text{και} \quad \iiint_{\Omega} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dU(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{e}^3). \quad (\Delta.53\alpha)$$

$$= 4\pi (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3). \quad (\text{ασυμπίεστο ρευστό}) \quad (\Delta.53)$$

Επίσης, λόγω των ιδιοτήτων (Δ.53α) και του ορισμού της θεμελιώδους λύσης Laplace

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} P(\mathbf{r}') dU(\mathbf{r}') = \\ & = -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} P(\mathbf{r}') \right) dU(\mathbf{r}') + \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\Omega} P(\mathbf{r}') \left(\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) dU(\mathbf{r}') \\ & = -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} P(\mathbf{r}') \right) dU(\mathbf{r}') + \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\Omega} P(\mathbf{r}') \left(\Delta_{\mathbf{r}'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) dU(\mathbf{r}') \\ & = -\frac{1}{\mu_0} \iint_{\partial\Omega} P(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}') - \frac{4\pi}{\mu_0} \iiint_{\Omega} P(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dU(\mathbf{r}') \\ & = -\frac{1}{\mu_0} \iint_{\partial\Omega} P(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}') - \frac{4\pi}{\mu_0} P(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3), \end{aligned} \quad (\Delta.54)$$

όπου κάναμε και χρήση του θεωρήματος του Gauss [14].

Αντικαθιστώντας, τις σχέσεις (Δ.53) και (Δ.54) στην (Δ.52) παίρνουμε τελικά την αναπαράσταση για το πεδίο ολικής πίεσης,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} & \left\{ -\iiint_{\Omega} \left[\mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right] dU(\mathbf{r}') \right. \\ & + \iint_{\partial\Omega} \left[\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \cdot \left(\mu_0 \frac{\partial}{\partial n'} \mathbf{v}(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') P(\mathbf{r}') \right) \right. \\ & \left. \left. - \mu_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \left(\frac{\partial}{\partial n'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \right] dS(\mathbf{r}') \right\}, \end{aligned} \quad (\Delta.55)$$

με το $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{\Theta}^3)$ να εκφράζεται μέσω της εξίσωσης (Δ.49).

Η παραπάνω μέθοδος που οδήγησε στην (Δ.55) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή μιας ανάλογης αναπαράστασης για το πεδίο ταχύτητας $\mathbf{v}$, ως ακολούθως.

Δ.3 Ολοκληρωτική αναπαράσταση για το πεδίο ταχύτητας.

Το ζευγάρι ταχύτητας και ολικής πίεσης $\mathbf{v}, P$ ικανοποιεί τις μη ομογενείς εξισώσεις Stokes,

$$\mu_0 \Delta \mathbf{v} = \nabla P + \mathbf{f}, \quad (\Delta.56)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\Delta.57)$$

και το ζευγάρι των θεμελιωδών λύσεων, θεωρώντας τον πόλο στο μηδέν και $r \equiv \|\mathbf{r}\|$,

$$\tilde{\mathbf{G}} = \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{r} + \frac{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}}{r^3} \quad (\Delta.58)$$

και

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (\Delta.59)$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\mu_0 \Delta \tilde{\mathbf{G}} = 2\mu_0 (\nabla \otimes \mathbf{P}) - 8\pi\mu_0 \delta \tilde{\mathbf{I}}, \quad (\Delta.60)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{0}. \quad (\Delta.61)$$

Όλα αυτά σε ένα ομαλό και φραγμένο χωρίο $\Omega(\mathbf{0}^3)$.

Από τον τρίτο τύπο του Green (Δ.29) παίρνουμε όπως πριν

$$\iiint_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}} \cdot \Delta \mathbf{v}] dU = \iint_{\partial\Omega} \left[\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \mathbf{v} \right] dS, \quad (\Delta.62)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Δ.56) και (Δ.60) στην (Δ.62) εισάγουμε το πεδίο πίεσης μέσα στην ολοκληρωτική σχέση και καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left[2\mathbf{v} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{P}) - \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{G}} \cdot (\nabla \mathbf{P} + \mathbf{f}) \right] dU &= \iint_{\partial\Omega} \left[\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \mathbf{v} \right] dS \\ &+ 8\pi \iiint_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \delta \tilde{\mathbf{I}}) dU. \end{aligned} \quad (\Delta.63)$$

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι οι ταυτότητες (Α.13) και (Α.12), αντίστοιχα μας οδηγούν στις

$$\mathbf{v} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{P}) = \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{P}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{P} \quad (\Delta.64)$$

και

$$\tilde{\mathbf{G}} \cdot \nabla \mathbf{P} = \nabla \cdot (\mathbf{P} \tilde{\mathbf{G}}) - \mathbf{P} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{G}}). \quad (\Delta.65)$$

Συνεπώς, λόγω των (Δ.57) και (Δ.61) και του θεωρήματος του Gauss [14] έχουμε

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left[2\mathbf{v} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{P}) - \frac{1}{\mu_0} \tilde{\mathbf{G}} \cdot \nabla \mathbf{P} \right] dU &= \iiint_{\Omega} \left[2\nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{P}) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{G}} \mathbf{P}) \right] dU \\ &= \iint_{\partial\Omega} \left[2\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{P}) - \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\tilde{\mathbf{G}} \mathbf{P}) \right] dS. \end{aligned} \quad (\Delta.66)$$

Εξισώνοντας, λοιπόν, τα δεύτερα μέλη των εκφράσεων (Δ.63) και (Δ.66) εκτός του όρου των πηγών και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (Δ.53α) παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\mu_0} \left\{ - \iiint_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{r}') \cdot \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dU(\mathbf{r}') \right. \\ \left. + \iint_{\partial\Omega} \left[\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \left(\mu_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \mathbf{v}(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}') \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - 2\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \otimes \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) \right] dS(\mathbf{r}') \right\} \quad (\Delta.69) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \Omega(\Theta^3)$, όπου, υπενθυμίζουμε,

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\Theta^3) \quad (\Delta.68)$$

και

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\Theta^3). \quad (\Delta.69)$$

Η αναπαράσταση (Δ.67) είναι πολύ σχετική με την αναπαράσταση (Δ.55). Η διαφορά βρίσκεται κυρίως στις θεμελιώδεις λύσεις που χρησιμοποιούνται.

Δ.4 Ανακεφαλαίωση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων.

Προτού ανακεφαλαιώσουμε μερικές στοιχειώδεις ιδέες γύρω από τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις, επισημαίνουμε στον αναγνώστη τις βασικές πηγές στη βιβλιογραφία που αφορούν τις θεμελιώδεις λύσεις, τις συναρτήσεις Green, τις ιδιομορφίες ή συναρτήσεις κατανομής πηγών, τα πολυπολικά αναπτύγματα καθώς και τις βασικές έννοιες γύρω από τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις. Αυτές συνοψίζονται στα βασικά συγγράμματα [4,5,41,51,53,64,74,75,98,105].

Ο τρίτος τύπος του Green (Δ.29) για τη ροή Stokes παρέχει τη βασική σχέση που οδηγεί, με κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης για τα πεδία ροής (Δ.55) και (Δ.69). Στη γενική του μορφή που αφορά έναν γενικό διαφορικό τελεστή L που δρα σε δύο συναρτήσεις u και v γράφεται ως εξής,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (v(\mathbf{r}') L u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') L v(\mathbf{r}')) dU(\mathbf{r}') \\ = \iint_{\partial\Omega} \left(v(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} v(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}'), \quad (\Delta.70) \end{aligned}$$

όπου αποτελεί τον δεύτερο τύπο του Green για τον τελεστή L . Η σπουδαιότητα, όμως, του τύπου αυτού οφείλεται στο γεγονός ότι περιγράφει πως η δράση διαφορικών τελεστών στο εσωτερικό του θεμελιώδους πεδίου μεταφέρεται στην συμπεριφορά των λύσεων στο σύνορο του θεμελιώδους πεδίου. Με άλλα λόγια, ο τύπος (Δ.70) παρέχει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης των συνοριακών συνθηκών σε μια ολική αναπαράσταση της λύσης. Αποτελεί δηλαδή μια γενίκευση του θεωρήματος Gauss που αποτέλεσε την αρχή για την εξαγωγή των ολοκληρωτικών μας αναπαράστάσεων σε ομαλά και φραγμένα χωρία $\Omega(\mathbb{R}^3)$.

Στη συνέχεια, στο ίδιο πνεύμα γενικότητας, οι μη ομογενείς εξισώσεις Stokes είναι της μορφής που επιλύουν το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$Lu(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\Delta.71)$$

και

$$Bu(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega(\mathbb{R}^3), \quad (\Delta.72)$$

όπου B είναι ο τελεστής των συνοριακών συνθηκών, g είναι η συνάρτηση των συνοριακών συνθηκών και f είναι το μη ομογενές κομμάτι της διαφορικής μας εξίσωσης που αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση κατανομής πηγών. Η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης u του προβλήματος (Δ.71) και (Δ.72) είναι απόρροια του τύπου (Δ.70) αν επιλέξουμε για συνάρτηση v τη θεμελιώδη λύση του τελεστή L . Πράγματι, αν

$$L_r E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbb{R}^3), \quad (\Delta.73)$$

τότε ο δεύτερος τύπος του Green (Δ.70), μας οδηγεί στην αναπαράσταση

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_{\Omega} f(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dU(\mathbf{r}') - \iint_{\partial\Omega} \left(v(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} v(\mathbf{r}') \right) dS(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \Omega(\mathbb{R}^3) \quad (\Delta.74)$$

και τα συνοριακά δεδομένα (Δ.72) μπορούν να ενσωματωθούν στο συνοριακό ολοκλήρωμα της (Δ.74). Έτσι, η συνεισφορά του όρου των πηγών εκφράζεται με ένα ολοκλήρωμα όγκου σε ολόκληρο το θεμελιώδες πεδίο, ενώ η συνεισφορά των συνοριακών συνθηκών εκφράζεται με ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα επάνω στο σύνορο του θεμελιώδους πεδίου. Η σχέση (Δ.74) αποτελεί γενίκευση των σχέσεων για τα πεδία ταχύτητας (Δ.69) και ολικής πίεσης (Δ.55). Σε αυτό το σημείο συνοψίζουμε τα βασικά είδη συνοριακών συνθηκών που εμφανίζονται στη φύση για

ελλειπτικούς τελεστές L . Ανάλογα, λοιπόν, με τη μορφή του τελεστή των συνοριακών συνθηκών B , διαχωρίζουμε και τα παρακάτω είδη προβλημάτων συνοριακών συνθηκών [36,39].

- *Πρόβλημα Dirichlet:*

$$u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega(\mathbb{B}^3). \quad (\Delta.75)$$

- *Πρόβλημα Neumann:*

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \cdot \nabla u(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega(\mathbb{B}^3). \quad (\Delta.76)$$

- *Πρόβλημα Robin:*

$$\frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) + h(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega(\mathbb{B}^3). \quad (\Delta.77)$$

Τόσο ο δεύτερος τύπος του Green (Δ.70) όσο και η ολοκληρωτική αναπαράσταση (Δ.74) ισχύουν για προβλήματα συνοριακών συνθηκών σε φραγμένα χωρία. Αν το αντίστοιχο πρόβλημα αφορά χωρία με επέκταση στο άπειρο πρέπει πρώτα να εισαχθούν επιπλέον συνοριακές συνθήκες που να καθορίζουν την συμπεριφορά στο άπειρο των υπό ολοκλήρωση συναρτήσεων. Οι συνθήκες αυτές έχουν ασυμπτωτική μορφή για $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ και καθορίζουν το ρυθμό εξασθένησης της λύσης, που είναι απαραίτητος για να υπάρχουν τα εμφανιζόμενα γενικευμένα ολοκληρώματα. Επιπλέον, σε τέτοιου είδους προβλήματα, επιβάλλεται μια μετατροπή που αφορά την αλλαγή πρόσημου σε όλους τους όρους που εκφράζονται με επιφανειακό ολοκλήρωμα, γιατί η εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss γίνεται τώρα στον εξωτερικό χώρο με αποτέλεσμα, αν θέλουμε να διατηρούμε εξωτερική κάθετη παράγωγο στους τύπους, να αλλάζει η φορά της κάθετης διεύθυνσης. Κατά τα άλλα, οι αντίστοιχοι τύποι για τα μη φραγμένα προβλήματα είναι οι ίδιοι.

Η σπουδαιότητα των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων είναι πολλαπλή. Πρώτον, προσφέρουν μια πολύ συμπαγή μορφή της λύσης μέσω ενός φραγμένου τελεστή, η οποία είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για θεωρητική μελέτη. Δεύτερον, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις οδηγούν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις [39] οι οποίες, σε ορισμένες περιπτώσεις, επιλύονται ευκολότερα από τις ισοδύναμες διαφορικές. Τρίτον, και σπουδαιότερων από πλευράς εφαρμογών, είναι ότι για ομογενείς εξισώσεις απουσία πηγών η λύση δίνεται μέσω ενός επιφανειακού ολοκληρώματος στο σύνορο $\partial\Omega(\mathbb{B}^3)$ του θεμελιώδους πεδίου $\Omega(\mathbb{B}^3)$. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε αριθμητική αντιμετώπιση του προβλήματος απαιτεί διακριτοποίηση ενός συνόλου με μια

διάσταση λιγότερη, πράγμα που απλουστεύει εντυπωσιακά την αριθμητική επίλυση. Ειδικότερα, για μη φραγμένα χωρία, όπου το άπειρο θεμελιώδες χωρίο $\Omega(\mathbf{3}^3)$ αντικαθίσταται από το πεπερασμένο σύνολο $\partial\Omega(\mathbf{3}^3)$, η χρήση ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων είναι εντυπωσιακά αποτελεσματική. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων [94], όταν εφαρμόζεται σε συνδυασμό με ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις της λύσης, είναι γνωστή σαν μέθοδος συνοριακών στοιχείων γιατί αντί να αναζητεί μια διαμέριση του $\Omega(\mathbf{3}^3)$ σε στοιχεία n διαστάσεων, αναζητεί μια διαμέριση του συνόλου $\partial\Omega(\mathbf{3}^3)$ στοιχεία $(n-1)$ διαστάσεων.

Παρόλα τα σημαντικά πλεονεκτήματα των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων, όπως προαναφέραμε και στο Κεφάλαιο I-3, η έλλειψη ιδιομορφιών και πηγών στα προβλήματα συνοριακών τιμών που λύνουμε καθώς και η πιο απλή και εύχρηστη αντιμετώπιση των διαφορικών αναπαραστάσεων κάνει αυτόματα τις τελευταίες το ικανό και απαραίτητο εργαλείο επίλυσης φυσικών προβλημάτων ροής που ακολουθούν τους κανόνες του Stokes, χωρίς αυτό να μειώνει την αναγκαιότητα των αντίστοιχων ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων.

Αναπτύγματα της θεμελιώδους λύσης του διαφορικού τελεστή του Laplace.

Όταν ο διαφορικός τελεστής L είναι ο τελεστής του Laplace, δηλαδή $L \equiv \Delta$, τότε η θεμελιώδης λύση είναι

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{3}^3) \quad (\Delta.78)$$

για την οποία ισχύει η σχέση (Δ.73), δηλ.,

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left(-\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{3}^3). \quad (\Delta.79)$$

Σε πολλά προβλήματα, λοιπόν, είναι απαραίτητη η ανάπτυξη της θεμελιώδους λύσης σε αρμονικές συναρτήσεις στα εκάστοτε συστήματα συντεταγμένων τα οποία είναι και τα βασικά ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα της σφαιρικής, σφαιροειδούς και ελλειψοειδούς γεωμετρίας που είδαμε στο κύριο μέρος της εργασίας.

Υπενθυμίζουμε περιληπτικά μερικά βασικά χαρακτηριστικά των συστημάτων αυτών που χρειαζόμαστε:

- $\mathbf{r}$ = διάνυσμα θέσης ή παρατήρησης,

- $\mathbf{r}'$ = θέση της πηγής ή της ιδιομορφίας,
- r, ζ, φ = τροποποιημένες σφαιρικές συντεταγμένες,
- τ, ζ, φ = τροποποιημένες επιμήκειες σφαιροειδείς συντεταγμένες,
- $c > 0$ = ημιεστιακή απόσταση επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος,
- $\tau \rightarrow i\lambda$ και $c \rightarrow -i\bar{c}$ = μετασχηματισμός από επιμήκη σε πεπλατυσμένη γεωμετρία,
- P_n^m, Q_n^m = συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα, βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 0, 1, 2, \dots, n$,
- ε_m = παράγοντας Neumann ($\varepsilon_m = 1, m = 0$ και $\varepsilon_m = 2, m \geq 1$),
- IE_n^m, IF_n^m = εσωτερικές και εξωτερικές, αντίστοιχα, συμπαγείς ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις βαθμού $n = 0, 1, 2, \dots$ και τάξης $m = 1, 2, \dots, 2n+1$,
- γ_n^m = συντελεστές της ορθογωνιότητας των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων για $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n+1$.

Συνεπώς, σύμφωνα με τα παραπάνω, το ανάπτυγμα του $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων εξαρτάται κάθε φορά από το αν το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ βρίσκεται εσωτερικά ή εξωτερικά της θέσης της πηγής $\mathbf{r}'$. Άρα, χωρίς απόδειξη, τα παρακάτω αναπτύγματα είναι αληθή,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{r}'\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varepsilon_m P_n^m(\zeta') \left\{ \begin{array}{l} \frac{r^n}{r'^{n+1}}, r < r' \\ \frac{r'^n}{r^{n+1}}, r > r' \end{array} \right\} P_n^m(\zeta) \cos m(\varphi - \varphi') \\
 &= \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1) \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^2 (-1)^m \varepsilon_m P_n^m(\zeta') \left\{ \begin{array}{l} Q_n^m(\tau') P_n^m(\tau), \tau < \tau' \\ P_n^m(\tau') Q_n^m(\tau), \tau > \tau' \end{array} \right\} P_n^m(\zeta) \cos m(\varphi - \varphi') \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)\gamma_n^m} \left\{ \begin{array}{l} IF_n^m(\rho', \mu', \nu') IE_n^m(\rho, \mu, \nu), \rho < \rho' \\ IE_n^m(\rho', \mu', \nu') IF_n^m(\rho, \mu, \nu), \rho > \rho' \end{array} \right\}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \Omega(\mathbf{3}), \quad (\Delta.80)
 \end{aligned}$$

για την σφαιρική, επιμήκη σφαιροειδή και ελλειψοειδή γεωμετρία, ανάλογα με τη θέση του σημείου παρατήρησης ως προς την πηγή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η παρακάτω βιβλιογραφία αποτελεί μια ικανοποιητική συλλογή συγγραμμάτων στα οποία μπορεί να ανατρέξει ο αναγνώστης για την συμπλήρωση ορισμένων θεμάτων που δεν καλύπτονται επαρκώς σε αυτή την εργασία. Η προτεινόμενη βιβλιογραφία αναφέρεται σε θέματα Ρευστομηχανικής, Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, Διαφορικών και Ολοκληρωτικών Αναπαραστάσεων και σε θέματα Ειδικών Συναρτήσεων.

- [1] Abramovich, M. and Stegun, I.A., *The Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York (1965).
- [2] Anderson, J.D., *Computational Fluid Dynamics – The Basics with Applications*, McGraw–Hill, Inc., New York (1995).
- [3] Atkins, P.W., *Physical Chemistry*, Freeman, San Francisco (1978).
- [4] Baker, B.B. and Copson, E.T., *The Mathematical Theory of Huygen’s Principle*, Oxford University Press, Clarendon (1939).
- [5] Barton, G., *Elements of Green’s Functions and Propagation. Potentials, Diffusion and Waves*, Oxford University Press, Clarendon (1989).
- [6] Bell, W.W., *Special Functions for Scientists and Engineers*, D. Van Nostrand Company LTD, London (1967).
- [7] Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1960).
- [8] Bourganos, V.N., Coutelieris, F.A., Dassios, G. and Payatakes, A.C., “On the Rapid Convergence of the Analytical Solution of Stokes Flow Around Spheroids–in–cell”, *Chem. Eng. Sci.*, **50**, 3313–3317 (1995).
- [9] Bourganos, V.N., Coutelieris, F.A. and Payatakes, A.C., “Sherwood Number for a Swarm of Adsorbing Spheroidal Particles at any Peclet Number”, *A. I. Ch. E. Jl*, **43**, 844–846 (1997).
- [10] Boussinesq, M.J., *Application des Potentiels a l’ Étude de l’ Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques*, Gauthier–Villars, Paris (1885).
- [11] Brady, J.F. and Bossis, G., “Dynamic Simulation of Sheared Suspensions. I. General Method”, *J. Chem. Phys.*, **80**, 5141–5154 (1984).

- [12] Brady, J.F. and Bossis, G., “Dynamic Simulation of Hydrodynamically Interacting Particles”, *J. Fluid Mech.*, **180**, 21–49 (1987).
- [13] Brady, J.F. and Bossis, G., “Stokesian Dynamics”, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20**, 111–157 (1988).
- [14] Brand, L., *Μαθηματική Ανάλυση (Advanced Calculus)*, John Wiley & Sons, Inc., 1955, Μετάφραση από τα Μέλη Ε.Μ.Ε., Ελληνική Μαθηματική Εταιρία, Αθήνα (1984).
- [15] Brenner, H., *Eng. Sc.*, Doctorate Thesis, New York University (1957).
- [16] Brenner, H., “The Stokes Resistance of an Arbitrary Particle”, *Chemical Engineering Science*, **18**, 1–25 (1963).
- [17] Brenner, H., “The Stokes Resistance of a Slightly Deformed Sphere”, *Chemical Engineering Science*, **19**, 519–539 (1964).
- [18] Brenner, H., “The Stokes Resistance of an Arbitrary Particle–II. An extension”, *Chemical Engineering Science*, **19**, 599–629 (1964).
- [19] Brenner, H., “The Stokes Resistance of an Arbitrary Particle–III. Shear Fields”, *Chemical Engineering Science*, **19**, 631–651 (1964).
- [20] Brenner, H., “The Stokes Resistance of an Arbitrary Particle–IV. Arbitrary Fields of Flow”, *Chemical Engineering Science*, **19**, 703–727 (1964).
- [21] Brenner, H., “The Stokes Resistance of an Arbitrary Particle–Part V. Symbolic Operator Representation of Intrinsic Resistance”, *Chemical Engineering Science*, **21**, 97–109 (1966).
- [22] Brinkman, H.C., “A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles”, *Appl. Sci. Res. A1*, 27 (1947).
- [23] Chadwick, P. and Trowbridge, E.A., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **63**, 1177–1187 (1967).
- [24] Charalambopoulos, A. and Dassios, G., “Complete Decomposition of Axisymmetric Stokes Flow”, *International Journal of Engineering Science*, **40**, 1099–1111 (2002).
- [25] Chwang, A.T. and Wu, T.Y., *Jl Fluid Mech.*, **63**, 607, (1974).
- [26] Chwang, A.T., *Jl. Fluid Mech.*, **72**, 17, (1975).
- [27] Chwang, A.T. and Wu, T.Y., *Jl Fluid Mech.*, **67**, 787, (1975).
- [28] Chwang, A.T. and Wu, T.Y., *Jl Fluid Mech.*, **75**, 677, (1976).

- [29] Coutelieiris, F.A., Bourganos, V.N. and Payatakes, A.C., “On Mass Transfer from a Newtonian Fluid to a Swarm of Absorbing Spheroidal Particles for High Peclet Numbers”, *J. Colloid Interface Sci.*, **161**, 43–52 (1993).
- [30] Coutelieiris, F.A., Bourganos, V.N. and Payatakes, A.C., “Convective Diffusion and Adsorption in a Swarm of Spheroidal Particles”, *A. I. Ch. E. Jl*, **41**, 1122–1134 (1995).
- [31] Cramer, R.K. and Pai, I.S., *Magnetofluid Dynamics for Engineers and Applied Physicists*, McGraw–Hill, Inc., New York (1973).
- [32] Cunningham, E., *Proc. Roy. Soc.*, A83, London (1910).
- [33] Dabros, T., *Jl Fluid Mech.*, **156**, 1 (1985).
- [34] Dalla Valle, J.M., *Micromeritics – The Technology of Fine Particles*, Pitman, Second Edition, New York (1948).
- [35] Δάσιος, Γ., *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Εκτυπωτικό Κέντρο, Πάτρα (1991).
- [36] Δάσιος, Γ. και Κυριάκη, Κ., *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Εκτυπωτικό Κέντρο, Αθήνα (1994).
- [37] Dassios, G., Hadjinicolaou, M. and Payatakes, A.C., “Generalized Eigenfunctions and Complete Semiseparable Solutions for Stokes Flow in Spheroidal Coordinates”, *Quart. of Appl. Math.*, **52**, 157–191 (1994).
- [38] Dassios, G., Hadjinicolaou, M., Coutelieiris, F.A. and Payatakes, A.C., “Stokes Flow in Spheroidal Particle–in–cell Models with Happel and Kuwabara Boundary Conditions”, *Intern. Jl Eng. Sci.*, **33**, 1465–1490 (1995).
- [39] Δάσιος, Γ., *10 Διαλέξεις*, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος, Πάτρα (1997).
- [40] Dassios, G. and Vafeas, P., “Connection Formulae for Differential Representations in Stokes Flow”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **133**, 283–294 (2001).
- [41] Dassios, G. and Hadjinicolaou, M., “Multipole Expansions in Stokes Flow”, *International Journal of Engineering Science*, **40**, 223–229 (2002).
- [42] Dassios, G., Payatakes, A.C. and Vafeas, P., “Interrelation between Papkovitch – Neuber and Stokes General Solutions of the Stokes Equations in Spheroidal Geometry”, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, submitted (2002).

- [43] Dassios, G. and Vafeas, P., “Comparison of Differential Representations for Radially Symmetric Stokes Flow”, *Abstract and Applied Analysis*, in press (2002).
- [44] Dassios, G. and Vafeas, P., “The 3-D Happel Model for Complete Isotropic Stokes Flow”, *European Journal of Mechanics – B (Fluids)*, submitted (2003).
- [45] Dassios, G. and Vafeas, P., “Stokes Flow in Ellipsoidal Geometry”, in writing (2003).
- [46] Davies, J.T., *Turbulence Phenomena*, Academic Press, Inc., New York (1972).
- [47] Epstein, N. and Masliyah, J.H., “Creeping Flow through Clusters of Spheroids and Elliptical Cylinders”, *Chem. Engng. J.*, **3**, 169–175 (1972).
- [48] Eubanks, R.A. and Sternberg, E., “On the Completeness of the Boussinesq – Papkovitch Stress Functions”, *J. Rational Mech. Anal.*, **5**, 735–746 (1956).
- [49] Finn, R. and Noll, W., “On the Uniqueness and Non-Existence of Stokes Flows”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **1**, 97–106 (1957).
- [50] Fox, R.W. and McDonald, A.T., *Introduction to Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., Third Edition, New York (1985).
- [51] Garabedian, P.R., *Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1964).
- [52] Gerhart, P.M. and Gross, R.J., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts (1985).
- [53] Greenberg, M.D., *Applications of Green’s Functions in Science and Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1971).
- [54] Happel, J., “Viscous Flow in Multiparticle Systems: Slow Motion of Fluids Relative to Beds of Spherical Particles”, *A. I. Ch. E. Jl*, **4**, 197–201 (1958).
- [55] Happel, J., “Viscous Flow Relative to Arrays of Cylinders”, *A. I. Ch. E. Jl*, **5**, 174 (1959).
- [56] Happel, J. and Brenner, H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1965) and Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht (1986).
- [57] Hinze, J.O., *Turbulence*, McGraw-Hill, Inc., Second Edition, New York (1975).
- [58] Hobson, E.W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Chelsea Publishing Company, New York (1965).

-
- [59] Jeffrey, D.J. and Onishi, Y., *Jl Fluid Mech.*, **139**, 261 (1985).
- [60] Kalarakis, A.N., Burganos, V.N. and Payatakes, A.C., “Gallilean Invariant Lattice – Boltzmann Simulation of Liquid–Vapor Interface Dynamics”, *Phys. Rev. E.*, in press (2002).
- [61] Καριώτου, Φ.Β., *Μαθηματικά Προβλήματα Ηλεκτρομαγνητικής Δραστηριότητας στη Νευροφυσιολογία του Εγκεφάλου*, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών, Εκτυπωτικό Κέντρο, Πάτρα (2002).
- [62] Kim, S., “Singularity Solutions for Ellipsoids in Low–Reynolds–Number Flows: with Applications to the Calculation of Hydrodynamic Interactions in Suspensions of Ellipsoids”, *Int. J. Multiphase Flow*, **12**, 469–491 (1986).
- [63] Kim, S. and Arunachalam, P.V., “The General Solution for an Ellipsoid in Low–Reynolds–Number Flow”, *J. Fluid Mech.*, **178**, 535–547 (1987).
- [64] Kim, S and Karrila, S.J., *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*, Butterworth–Heinemann Series in Chemical Engineering, a division of Reed Publishing, Inc., USA (1991).
- [65] Kollmann, W., *Computational Fluid Dynamics*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington (1980).
- [66] Kuwabara, S., “The Forces Experienced by Randomly Distributed Parallel Circular Cylinders or Spheres in a Viscous Flow at Small Reynolds Number”, *J. Phys. Soc. Japan*, **14**, 527–532 (1959).
- [67] Ladyzhenskaya, O.A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach (1963).
- [68] Lamb, H.S., *Hydrodynamics*, Dover Publications, Inc., Sixth Edition, New York (1932).
- [69] Lebedev, N.N., *Special Functions and their Applications*, Dover Publications, Inc., New York (1972).
- [70] Levich, V.G., *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice–Hall International, Inc., London (1962).
- [71] Liao, Wei–His and Krueger, D.A., “Multipole Expansions Calculation of Slow Viscous Flow about Spheroids of Different Sizes”, *Jl Fluid Mech.*, **96**, Part 2, 223–241 (1980).
- [72] Lindell, I.V., *Methods for Electromagnetic Field Analysis*, Oxford University Press, Second Edition, Oxford (1995).

- [73] Marrucci, G. and Astarita, G., *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, Inc., London (1974).
- [74] Maxwell, J.C., *Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover Publications, Inc., Third Edition, vols I, II, New York (1954).
- [75] Miloh, T., “The Ultimate Image Singularities for External Ellipsoidal Harmonics”, *SIAM J. Appl. Math.*, **26**, 334–344 (1974).
- [76] Moon, P. and Spencer, E., *Partial Differential Equations*, Heath & Co., Lexington (1969).
- [77] Moon, P. and Spencer, E., *Field Theory Handbook*, Springer-Verlag, Second Edition, Berlin (1971).
- [78] Morse, P.M. and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, vols I, II, McGraw-Hill, Inc., New York (1953).
- [79] Naghdi, P.M. and Hsu, C.S., “On the Representation of Displacements in Linear Elasticity in terms of three Stress Functions”, *J. Math. Mech.*, **10**, 233–245 (1961).
- [80] Neale, G.H. and Nader, W.K., “Prediction of Transport Processes within Porous Media: Creeping Flow Relative to a Fixed Swarm of Spherical Particles”, *A. I. Ch. E. Jl*, **20**, 530–538 (1974).
- [81] Neuber, H., “Ein neuer Ansatz zur Lösung räumblicher Probleme der Elastizitätstheorie”, *Z. Angew. Math. Mech.*, **14**, 203–212 (1934).
- [82] Oberbeck, A., “Ueber stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung”, *Jl Reine Angew. Math.*, **81**, 62 (1876).
- [83] Oosthuizen, P.H. and Carscallen, W.E., *Compressible Fluid Flow*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York (1997).
- [84] Παγιατάκης, Α.Χ., *Εισαγωγή στην Ρευστομηχανική*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Εκτυπωτικό Κέντρο, Πάτρα (1996).
- [85] Padmavathi, B.S., Raja Sekhar, G.P. and Amaranath, T., “A Note on Complete General Solutions of Stokes Equations”, *Quart.J. Mech. Appl. Math.*, **51**, 383–388 (1998).
- [86] Palaniappan, D., Nigam, S.D., Amaranath, T. and Usha, R., “Lamb’s Solution of Stokes’s Equations: A Sphere Theorem”, *Quart.J. Mech. Appl. Math.*, **45**, 47–56 (1992).

-
- [87] Παπαϊωάννου, Α.Θ., *Μηχανική των Ρευστών Ι, Φωτοστοιχειοθεσία* – Εκτύπωση: Σ. Αθανασόπουλος, Σ. Παπαδάμης & ΣΙΑ Ε.Ε., Αθήνα (1993).
- [88] Παπαϊωάννου, Α.Θ., *Ανύσματα και Τανυστές*, Αθήνα (1993).
- [89] Patterson, G.N., *Introduction to Kinetic Theory of Gas*, University of Toronto Press, Toronto (1971).
- [90] Perry, R.H., *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, Inc., Sixth Edition, New York (1984).
- [91] Pfeffer, R. and Happel, J., “Analytical Study of Heat and Mass Transfer in Multiparticle Systems at Low Reynolds Numbers”, *A. I. Ch. E. Jl*, **10**, 605 (1964).
- [92] Pfeffer, R., “Heat and Mass Transfer in Multiparticle Systems”, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, **3**, 380 (1964).
- [93] Power, H. and Miranda, G., “Integral Equation Formulation for the Creeping of an Incompressible Viscous Fluid between Two Arbitrarily Closed Surfaces, and a Possible Mathematical Model for the Brain Fluid Dynamics”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **137**, 1–16 (1989).
- [94] Pozrikides, C., *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
- [95] Rainville, E.R., *Special Functions*, Chelsea Publishing Company, New York (1971).
- [96] Rallison, J.M. and Acrivos, A., *Jl. Fluid Mech.*, **89**, 191 (1978).
- [97] Reynolds, O., *An Experimental Investigation of the Circumstances with Determine whether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous and the Law of Resistance in Parallel Channels*, Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A, London (1883).
- [98] Roach, G.F., *Green's Functions. Introductory Theory with Applications*, D. Van Nostrand Company LTD, London (1970).
- [99] Sampson, R.A., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A182**, 449 (1891).
- [100] Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, Inc., Seventh Edition, New York (1979).
- [101] Schowalter, W.R., *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon, Oxford (1978).
- [102] Shapiro, A.H., *Shape and Flow – the Fluid Dynamics of Drag*, Anchor Books: Science Study Series, New York (1961).

- [103] Σιαφαρίκας, Π.Δ., *Ειδικές Συναρτήσεις*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Εκτυπωτικό Κέντρο, Πάτρα (1997).
- [104] Snyder, L.J. and Stewart, W.E., “Velocity and Pressure Profiles for Newtonian Creeping Flow in Regular Packed Beds of Spheres”, *A. I. Ch. E. Jl.*, **12**, 167 (1966).
- [105] Sommerfeld, A., *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, New York (1949).
- [106] Sorensen, J.P. and Stewart, W.E., “Computation of Forced Convection in Slow Flow through Ducts and Packed Beds—II Velocity Profile in a Simple Cubic Array of Spheres”, *Chem. Eng. Sci.*, **29**, 819 (1974).
- [107] Stippes, M., *J. Elast.*, **1**, 93–94 (1971).
- [108] Stokes, G., *Trans. Cambr. Phil. Soc.* vol 9, part II, pp. 8–126 (1851).
- [109] Strang, G., *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές (Linear Algebra and its Applications)*, Harcourt Brace Jovanovich, 1988, Μετάφραση από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Πέμπτη Έκδοση, Κρήτη (2002).
- [110] Streeter, V.L., *Handbook of Fluid Dynamics*, McGraw–Hill, Inc., New York (1961).
- [111] Streeter, V.L. and Wylie, E.B., *Fluid Mechanics*, McGraw–Hill, Inc., Eighth Edition, New York (1985).
- [112] Sutton, W.G. and Sherman, A., *Engineering Magnetohydrodynamics*, McGraw–Hill, Inc., New York (1965).
- [113] Tardos, G.L., Gutfinger, C. and Abuaf, C., “High Peclet Number Mass Transfer to a Sphere in a Fixed or Fluidized Bed”, *A. I. Ch. E. Jl.*, **22**, 1147 (1976).
- [114] Thomson, P.A., *Compressible Fluid Mechanics*, McGraw–Hill, Inc., New York (1972).
- [115] Tien, C., *Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols*, Butterworths, Boston (1989).
- [116] Uchida, S., *Inst. Sci. Technol. Univ. Tokyo* (in Japanese) **3**, 97 (1949); Abstract, “Slow Viscous Flow through a Mass of Particles”, *Ind. Engng. Chem.*, **46**, 1194–1195 (1954) (translation by T. Motai).

- [117] Vafeas, P., “On the Connection Between Stokes and Papkovich – Neuber Spherical Eigenfunctions in Stokes Flow”, *Bulletin of the Greek Mathematical Society*, in press (2002).
- [118] Wangyi, W.V., “A new Approach of Treating the Stokes Flow of Nonslender Prolate Arbitrary Axisymmetrical Body”, *Scientia Sinica* (series A), **XXVII**, No. 7, 731–744 (1984).
- [119] White, F.M., *Fluid Mechanics*, International Student Edition, McGraw–Hill, Inc., Second Edition, New York (1986).
- [120] Wymer, S.A., Lakhtakia, A. and Engel, R.S., “Extinction Cross Section of an Arbitrary Body in a Viscous Incompressible Fluid”, *Physical Review E*, **52**, 1857–1865 (1995).
- [121] Wymer, S.A., Lakhtakia, A. and Engel, R.S., “The Huygens Principle for Flow around an Arbitrary Body in a Viscous Incompressible Fluid”, *Fluid Dynamic Research*, **17**, 213–223 (1996).
- [122] Wymer, S.A., Lakhtakia, A. and Engel, R.S., “Point–Matching Method for Examining Time–Dependent Stokesian Flow around a Stationary Axisymmetric Body”, *Fluid Dynamic Research*, **19**, 91–114 (1997).
- [123] Xu, X. and Wang, M., “General Complete Solutions of the Equations of Spatial and Axisymmetric Stokes Flow”, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **44**, 537–548 (1991).
- [124] Yoon, B.J. and Kim, S., *Int Jl Multiphase Flow*, **16**, 639 (1990).
- [125] Zlatanovski, T., “Axisymmetric Creeping Flow Past a Porous Prolate Spheroidal Particle using the Brinkman Model” *Q. Jl Mech. Appl. Math*, **52**, 111–126 (1999).
- [126] Zucrov, M.J. and Hoffman, J.D., *Gas Dynamics I*, Wiley, New York (1976).

Οποιαδήποτε έλλειψη ή κάθε είδους λεπτομέρεια στη βιβλιογραφική επισκόπηση μπορεί να καλυφθεί με μελέτη περισσότερων συγγραμμάτων που εμπεριέχονται στις επιμέρους αναφορές των 126 βιβλίων και εργασιών που παρουσιάστηκαν.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	Παναγιώτης Βαφέας
ΤΙΤΛΟΣ	Υποψήφιος Διδάκτορας του Τμήματος Χημικών Μηχανικών
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΓΕΝΝΗΣΗΣ	1 Σεπτεμβρίου 1974
ΥΠΗΚΟΟΤΗΤΑ	Ελληνική
ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ	Ανύπαντρος
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ	Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Τμήμα Χημικών Μηχανικών Πανεπιστήμιο Πατρών TK 265 04 Πάτρα ΕΛΛΑΔΑ Τηλ. : +30 2610 997 373 +30 2610 997 224 Fax : +30 2610 997 137 e-mail(1) : vafeas@pat.forthnet.gr e-mail(2) : vafeas@chemeng.upatras.gr
ΚΑΙ	Ερευνητικό Ινστιτούτο Χημικής Μηχανικής και Διεργασιών Υψηλών Θερμοκρασιών Ταχυδρομική Θυρίδα 1414 TK 265 04 Πάτρα ΕΛΛΑΔΑ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΙΤΙΟΥ	οδός Αγίου Δημητρίου 55 TK 263 31 Πάτρα ΕΛΛΑΔΑ Τηλ. : +30 2610 624 080 +30 2610 270 070 Κινητό : +30 6974 452 995

ΣΠΟΥΔΕΣ

1. Δίπλωμα Χημικού Μηχανικού (1997), Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα, ΕΛΛΑΔΑ (με βαθμό 7,73 με άριστα το 10).
1. Μεταπτυχιακές Σπουδές: Επιτυχής Παρακολούθηση των Βασικών Οχτώ (8) Μεταπτυχιακών Μαθημάτων στο Τμήμα Χημικών Μηχανικών,
 - Μαθηματικά Γενικής Παιδείας (με βαθμό 10 στα 10),
 - Φυσικοχημεία (με βαθμό 10 στα 10),
 - Βιοχημικές Διεργασίες (με βαθμό 8,5 στα 10),
 - Διεργασίες Διαχωρισμού (με βαθμό 9 στα 10),
 - L.A.S.E.R.S. και Εφαρμογές (με βαθμό 10 στα 10),
 - Ειδικά Κεφάλαια Μεταλλουργίας (με βαθμό 9,5 στα 10),
 - Θεωρία Κυματιδίων (με βαθμό 10 στα 10),
 - Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (με βαθμό 10 στα 10).

ΞΕΝΕΣ ΓΛΩΣΣΕΣ

1. Αγγλικά (Lower του Cambridge και Proficiency του Michigan).
1. Γαλλικά (Δίπλωμα του D.E.L.F., A1, A2, A3, A4).

ΚΥΡΙΕΣ ΘΕΣΕΙΣ

1. 1997 – σήμερα : Μεταπτυχιακός Φοιτητής και Υποψήφιος Διδάκτορας του Τμήματος Χημικών Μηχανικών, Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, ΕΛΛΑΔΑ.
- 1997 – 1999 : Επιπλέον, Διδάσκαλος των Φροντιστηρίων των Μαθημάτων:
 - Φαινόμενα Μεταφοράς,
 - Φυσικές Διεργασίες,
 - Ροή Ρευστών

στους Προπτυχιακούς Φοιτητές του Τμήματος Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, ΕΛΛΑΔΑ.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

1. Ιατρική Τεχνολογία,
2. Ανάλυση Βιοιατρικών Μοντέλων,
3. Αναλυτικές Μέθοδοι στη Φυσική και Μηχανική,
4. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Μαθηματικής Φυσικής,
5. Ελλειψοειδή Συστήματα,
6. Υδροδυναμική Χαμηλών Αριθμών Reynolds,
7. Θεωρία Κυματιδίων.

ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ

1. Τρίτος έως Ένατος στην Τάξη κατά τη διάρκεια της Πενταετούς μου Φοίτησης στο Τμήμα Χημικών Μηχανικών.
2. Ειδικό Βραβείο στο Τέταρτο Έτος Σπουδών (1996, Τρίτος στην Τάξη).

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ – ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΓΝΩΣΕΙΣ

1. Βασικές Γνώσεις γύρω από τη Λειτουργία και τη Χρήση Υπολογιστών. Εμπειρία στα Λειτουργικά Συστήματα Windows '95/'98/2000 και στα Προγράμματα Word 7.0, Mathematica 4.0, Origin 5.0, Excel και λίγες Γνώσεις στον Προγραμματισμό με Fortran (Fortran Power Station).
2. Υποτροφία από τη Γαλλική Πρεσβεία για μία Τριών (3)–Μηνών (από 1 Απριλίου μέχρι 30 Ιουνίου, 2001) Συνεργασία με το Εργαστήριο: “Département de Recherche en Électromagnetisme, Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS–SUPÉLEC–UPS), Supélec, FRANCE” με τον Δοκτ. *Dominique Lesselier*.

ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΣΕ ΣΥΝΕΔΡΙΑ

1. Πρώτο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής, Πάτρα, Ελλάδα (1997).
2. Πέμπτο Πανελλήνιο Συνέδριο Μηχανικής, Ιωάννινα, Ελλάδα (1998).

3. Δωδέκατο Καλοκαιρινό Σχολείο / Πανελλήνιο Συνέδριο Μη-Γραμμικής Δυναμικής: Χάος και Πολυπλοκότητα, Πάτρα, Ελλάδα (1999).
4. Το Διεθνές Γιώργος Παπαθεοδώρου Συμπόσιο (Στα Εξηκοστά του Γενέθλια), Πάτρα-Ρίο, Ελλάδα (1999).
5. Τέταρτο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών Μεθόδων στη Θεωρία Σκέδασης και στη Βιοϊατρική Τεχνολογία (στη μνήμη του Καθ. *Ralph Kleinman*), Πέρδικα, Θεσπρωτία, Ελλάδα (1999).

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ ΣΕ ΣΥΝΕΔΡΙΑ

1. “Συσχέτιση Διαφορικών Αναπαραστάσεων Papkovich – Neuber και Boussinesq – Galerkin για Ροή Stokes σε Σφαιρική Γεωμετρία”, *Δεύτερο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής*, Πρακτικά, **Τόμος Β**, σελ. 795–798, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα (1999).
1. “Connection Formulae for Differential Representations in Stokes Flow” (με Καθ. *Γ. Λάσιο*), Πέμπτο Διεθνές Συμπόσιο Ορθογωνίων Πολυωνύμων, Ειδικών Συναρτήσεων και Εφαρμογών τους (στην τιμή του *Theodore Chihara*), Βιβλίο Περιλήψεων, σελ. 89, Δημοσίευση, Πάτρα, Ελλάδα (1999).
2. “Συσχέτιση Μεταξύ Stokes και Papkovich – Neuber Ιδιομορφών για Ροή Stokes σε Σφαιροειδή Γεωμετρία”, *Τρίτο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής*, Πρακτικά, **Τόμος Β**, σελ. 849–852, Αθήνα, Ελλάδα (1999).
2. “Interrelation Between Stokes and Papkovich – Neuber Eigenmodes for Spheroidal Stokes Flow” (με Καθ. *Μ. Χατζηνικολάου*), *Έκτο Πανελλήνιο Συνέδριο Μηχανικής*, Βιβλίο Περιλήψεων, σελ. 14, Πρακτικά, **Τόμος Ι**, σελ. 58–65, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα (2001).
3. “The Kuwabara Model for a Spheroid via Papkovich – Neuber Representation” (με Καθ. *Γ. Λάσιο*), *Πέμπτο Διεθνές Συνέδριο σε Μαθηματικές Μεθόδους στη Θεωρία Σκέδασης και στη Βιοϊατρική Τεχνολογία*, Βιβλίο Περιλήψεων, σελ. 36, Πρακτικά, σελ. 44–54, Κέρκυρα, Ελλάδα (2001).
4. “Low-Frequency Electromagnetic Modeling and Retrieval of Simple Orebodies in a Conductive Earth” (με *G. Perrusson*, *Dr. D. Lesselier*, Καθ. *Γ. Λάσιο* και *Γ.*

Καμβύσσα), *Τρίτο Συνέδριο της Διεθνούς Κοινότητας για Ανάλυση, Εφαρμογές και Υπολογισμό (ISAAC)*, Βιβλίο Περιλήψεων, σελ. 221–222, Πρακτικά, World Scientific London (εκτύπωση), Γερμανία (2001).

5. “Low–Frequency Models and Characterization of an Ellipsoidal body in the Context of Earth’s Exploration” (με *G. Perrusson*, *Dr. D. Lesselier* και Καθ. *Γ. Δάσιο*), *PIERS*, Πρακτικά, Cambridge, σελ. 337, Μασαχουσέτη, ΗΠΑ (2002).
6. “Comparison of Differential Representations for Radially Symmetric Stokes Flow” (με Καθ. *Γ. Δάσιο*), *Διεθνές Συνέδριο σε Διαφορικές Εξισώσεις, Εξισώσεις Διαφορών και Εφαρμογές τους (ICDDEA)*, Βιβλίο Περιλήψεων, σελ. 64, Δημοσίευση, Πάτρα, Ελλάδα (2002).
7. “Το Κύτταρο Happel για Τρισδιάστατη Ροή Stokes”, *Τρίτο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής*, Πρακτικά, σελ. 785–788, Πάτρα, Ελλάδα (2003).
8. “The 3D Happel Model for Complete Isotropic Stokes Flow” (με Καθ. *Γ. Δάσιο*), *Όγδοο Διεθνές Συνέδριο σε Εξισώσεις Διαφορών και Εφαρμογές (ICDEA)*, Βιβλίο Περιλήψεων, σελ. 65, Δημοσίευση, Μπρνό (Brno), Δημοκρατία της Τσεχίας (2003).
9. “The Happel Model for an Ellipsoid via Papkovich – Neuber Representation” (με Καθ. *Γ. Δάσιο*), *Έκτο Διεθνές Συνέδριο σε Μαθηματικές Μεθόδους στη Θεωρία Σκέδασης και στη Βιοϊατρική Τεχνολογία*, Τσεπέλοβο, Ελλάδα (εμφάνιση, 2003).

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ ΣΕ ΔΙΕΘΝΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

1. “Connection Formulae for Differential Representations in Stokes Flow” (με Καθ. *Γ. Δάσιο*), *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **133**, σελ. 283–294 (2001).
2. “On the Connection Between Stokes and Papkovich – Neuber Spherical Eigenfunctions in Stokes Flow”, *Bulletin of the Greek Mathematical Society*, δεκτό για δημοσίευση (2002).

3. “Comparison of Differential Representations for Radially Symmetric Stokes Flow” (με Καθ. Γ. Δάσιο), *Abstract and Applied Analysis*, δεκτό για δημοσίευση (2002).
4. “Interrelation between Papkovitch – Neuber and Stokes General Solutions of the Stokes Equations in Spheroidal Geometry” (με Καθ. Γ. Δάσιο και Καθ. Α.Χ. Παγιατάκη), *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, απεσταλμένο για δημοσίευση (2002).
5. “The 3-D Happel Model for Complete Isotropic Stokes Flow” (με Καθ. Γ. Δάσιο), *European Journal of Mechanics – B (Fluids)*, απεσταλμένο για δημοσίευση (2003).
6. “Stokes Flow in Ellipsoidal Geometry”, (με Καθ. Γ. Δάσιο), γράφεται (2003).