ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ Ν. ΒΡΟΝΤΑΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΕΠΙ ΤΟΥ ΣΥΝΟΡΟΥ ΤΩΝ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΥΜΠΛΟΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΤΡΑ 2008

Στην οικογένειά μου

*Εξώφυλλο:
“Sierpinski Triangles on a 60-sided Polyhedron”,
by Sandor Kabai.*

Ευχαριστίες

Θεωρώ καθήκον μου να εκφράσω τις ειλικρινείς και θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή κ. Βασίλειο Παπαντωνίου που ήταν ο Επιβλέπων της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, καθώς και στον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Χαρίτο για την υπόδειξη του θέματος της διατριβής, για το συνεχές ενδιαφέρον και την αποφασιστική συμβολή του στην ολοκλήρωση αυτής.

Θερμά ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Θεμιστοκλή Κουφογιώργο για τη συμβολή του στην τελειοποίηση της διατριβής. Επίσης, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Τσαπόγα Γεώργιο, τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Παπαδοπεράκη Ιωάννη και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για τις χρήσιμες συζητήσεις που είχα μαζί τους.

Τέλος ευχαριστώ το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.) για τη μεταπτυχιακή υποτροφία την οποία μου παρείχε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της Διδακτορικής μου Διατριβής.

Εμμανουήλ Ν. Βροντάκης
Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	6
1.1 Περιληπτική παρουσίαση της διατριβής και ανασκόπηση της βιβλιογραφίας των εξεταζόμενων προβλημάτων.	6
2. Βασικές Έννοιες	10
2.1 Ιστορικά Στοιχεία - Εισαγωγή.	10
2.2 Στοιχεία από τη Θεωρία Ομάδων.	18
2.3 Χώροι Κάλυψης.	22
2.4 Μετρική Μήκους – Χώροι Μήκους.	28
2.5 Γεωδαισιακοί Χώροι.	32
2.6 Υπερβολικοί Χώροι κατά Gromov.	34
2.7 Χώροι CAT(-1).	39
2.8 Το Σύνορο.	43
3. Επί του Συνόρου των Δισδιάστατων Ιδεωδών Πολυέδρων	50
3.1 Κατασκευή και Ιδιότητες Ιδεώδους Πολυέδρου Διάστασης 2.	50
3.2 Το Καθολικό Κάλυμμα του Δισδιάστατου Ιδεώδους Πολυέδρου.	54
3.3 Το Σύνορο του Δισδιάστατου Ιδεώδους Πολυέδρου.	59

4. Επί του Συνόρου Μιας Ειδικής Κλάσης Υπερβολικών Δισδιάστατων Συμπλόκων.	66
4.1 Κατασκευή και Ιδιότητες Μιας Ειδικής Κλάσης Συμπλόκων.	66
4.2 Το Καθολικό Κάλυμμα του Δισδιάστατου Συμπλόκου.	72
4.3 Το Σύνολο των Οριακών Σημείων της $\pi_1(X)$.	79
4.4 Το Σύνоро του Δισδιάστατου Συμπλόκου.	83
4.5 Παράδειγμα Συγκεκριμένου Δισδιάστατου Συμπλόκου.	87
 5. Το Σύνоро των Ιδεωδών Πολυέδρων.	 94
 Βιβλιογραφία	 110

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : Εισαγωγή

1.1 Περιληπτική Παρουσίαση της Διατριβής και Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας των Εξεταζόμενων Προβλημάτων.

Η παρούσα διατριβή αφορά στη μελέτη του συνόρου υπερβολικών δισδιάστατων πολυέδρων. Οι χώροι οι οποίοι μελετώνται κατασκευάζονται κολλώντας υπερβολικά τρίγωνα τα οποία έχουν 2 τουλάχιστον κορυφές στο άπειρο. Οι συγκολλήσεις γίνονται με ισομετρίες κατά μήκος των πλευρών των τριγώνων και οι χώροι οι οποίοι προκύπτουν εφοδιάζονται φυσιολογικά με μία γεωμετρία η οποία έχει ομοιότητες με την γεωμετρία των υπερβολικών πολλαπλοτήτων. Η μελέτη του συνόρου των υπερβολικών πολυέδρων πέρα από από το γεγονός ότι είναι από μόνη της ένα ενδιαφέρον πρόβλημα, βοηθάει επίσης στην κατανόηση της γεωμετρίας των χώρων.

Υποθέτουμε ότι M είναι μια πολλαπλότητα διάστασης n , η οποία έχει παντού σταθερή καμπυλότητα -1 (υπερβολική πολλαπλότητα). Υποθέτουμε επίσης ότι η M είναι πλήρης και πεπερασμένου όγκου. Το καθολικό κάλυμμα της M είναι ισομετρικό με τον υπερβολικό χώρο H^n . Αν G είναι η ομάδα ισομετριών της M , τότε η G δρα διακριτά και ελεύθερα στον H^n και ο χώρος πηλίκου H^n/G , με την επαγόμενη γεωμετρία, είναι ισομετρικός με την M . Το σύνορο του H^n είναι η σφαίρα S^{n-1} και η δράση της G στον H^n επεκτείνεται φυσιολογικά στην S^{n-1} . Το οριακό σύνολο της G είναι όλο το σύνορο S^{n-1} . Η γεωμετρία της M συνδέεται άμεσα με την μελέτη της G καθώς και με την δράση της G στον $H^n \cup S^{n-1}$. Παρόμοια συμπεριφορά με τις υπερβολικές πολλαπλότητες έχουν οι μετρικοί γεωδαισιακοί χώροι οι οποίοι καμπυλώνουν αρνητικά, δηλαδή τοπικά κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο είναι συγκρίσιμο με ένα τρίγωνο του H^2 που έχει τα ίδια μήκη πλευρών. Το καθολικό κάλυμμα αυτών των χώρων ικανοποιεί ολικά την CAT(-1) ανισότητα (ανισότητα των Cartan-Alexandron-Toropogon) η οποία εξασφαλίζει ότι κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο του καθολικού καλύμματος είναι συγκρίσιμο με ένα τρίγωνο του H^2 που έχει τα ίδια μήκη πλευρών.

Οι παραπάνω χώροι έγιναν αντικείμενο μεγάλου ερευνητικού ενδιαφέροντος μετά την δημοσίευση της εργασίας του M. Gromov [28]. Το σύνορο των CAT(-1) μελετήθηκε ευρέως από πολλούς ερευνητές και κατασκευάστηκαν πολλά παραδείγματα υπερβολικών πολυέδρων διάστασης 2 [5, 6, 7, 29, 30]. Τέλος, πολλές ιδιότητες των υπερβολικών πολλαπλοτήτων αποδείχθηκαν για χώρους που δεν είναι πολλαπλότητες αλλά καμπυλώνουν αρνητικά [3, 24, 35].

Τα αποτελέσματα της διατριβής κινούνται στο παραπάνω πλαίσιο και χωρίζονται σε τρεις ενότητες.

Στην πρώτη ενότητα, μελετώνται βασικές ιδιότητες των δισδιάστατων ιδεωδών πολυέδρων. Ένα δισδιάστατο υπερβολικό πολύεδρο X κατασκευάζεται κολλώντας πεπερασμένα ιδεώδη υπερβολικά τρίγωνα με ισομετρίες κατά μήκος των πλευρών τους. Οι ισομετρίες συγκόλλησης επιλέγονται έτσι ώστε ο X να είναι πλήρης. Η γεωμετρία των χώρων αυτών επάγεται από την γεωμετρία των ιδεωδών υπερβολικών τριγώνων και είναι σχετικά απλή στην κατανόησή της. Κάθε σημείο του X έχει μια περιοχή ισομετρική είτε με ανοικτή μπάλλα του H^2 , είτε με πεπερασμένο πλήθος ημιδίσκων του H^2 , συγκολλημένων κατά μήκος των ίσων διαμέτρων τους. Με $\tilde{X}$ συμβολίζεται το καθολικό κάλυμμα του X και αποδεικνύεται εύκολα ότι ο $\tilde{X}$ ικανοποιεί την CAT(-1) ανισότητα. Το σύνορο $\partial_{vis} \tilde{X}$ του $\tilde{X}$ ορίζεται όπως για όλους τους CAT(-1) χώρους, ως το σύνολο όλων των γεωδαισιακών ακτίνων που ξεκινούν από ένα σταθερό σημείο [10, 36]. Εφοδιάζοντας το $\partial_{vis} \tilde{X}$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή, το σύνορο γίνεται ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος ο οποίος συμπαγοποιεί τον $\tilde{X}$. Το Θεώρημα το οποίο αποδεικνύεται είναι το εξής: *Για κάθε δύο σημεία ξ και η του $\partial_{vis} \tilde{X}$ υπάρχει άπειρο πλήθος υποχώρων C_i του $\partial_{vis} \tilde{X}$, ομοιομορφικών με το S^1 , οι οποίοι περιέχουν τα ξ, η .*

Η ιδέα της απόδειξης είναι μάλλον στοιχειώδης. Ακριβώς επειδή ο X δεν περιέχει μεμονωμένες ανωμαλίες-κορυφές, είναι δυνατόν να κοπεί κατά μήκος των ανώμαλων ακμών αυτού έτσι ώστε, ξανακολλώντας κατάλληλα τις διάφορες συνιστώσες να πάρουμε μια υπερβολική επιφάνεια Y , όχι κατ'ανάγκη συνεκτική. Αν Z είναι τυχαία συνιστώσα της Y αποδεικνύεται ότι το καθολικό κάλυμμα της Z εμφυτεύεται τοπικά

ισομετρικά στο X . Από αυτό συνάγουμε ότι το σύνορο S^1 του $\tilde{Z}$ εμφυτεύεται στο $\partial_{vis} \tilde{X}$.

Στη δεύτερη ενότητα κατασκευάζονται πολύεδρα X κολλώντας με ισομετρίες κατά μήκος των πλευρών τους, πεπερασμένα υπερβολικά τρίγωνα τα οποία έχουν δύο κορυφές στο άπειρο. Εκ νέου, ο χώρος X εφοδιάζεται με τη γεωμετρία η οποία επάγεται από τα υπερβολικά τρίγωνα και υποθέτουμε ότι οι ισομετρίες συγκολλήσης επιλέγονται έτσι ώστε ο X να είναι πλήρης. Ο X σε σύγκριση με τα ιδεώδη πολύεδρα της προηγούμενης ενότητας είναι τοπολογικά πιο σύνθετος διότι εκτός από ανώμαλες πλευρές περιέχει και μεμονωμένα ανώμαλα σημεία. Το link αυτών των σημείων στον X είναι κλειστά γραφήματα τα οποία δεν είναι κύκλοι. Τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία ονομάζονται ανώμαλες κορυφές. Επιπλέον, ο X ικανοποιεί κάποιες γεωμετρικές συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν ότι το καθολικό κάλυμμα $\tilde{X}$ του X ικανοποιεί την CAT(-1) ανισότητα. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται ξανά το σύνορο $\partial_{vis} \tilde{X}$ του $\tilde{X}$. Οι παραπάνω χώροι αναφέρονται ως δισδιάστατα υπερβολικά σύμπλοκα της κλάσης S . Το θεώρημα το οποίο αποδεικνύεται σ' αυτή την ενότητα διατυπώνεται ως εξής: *Έστω X υπερβολικό σύμπλοκο της κλάσης S , το οποίο περιέχει είτε μια ανώμαλη κορυφή είτε μια ανώμαλη ακμή. Τότε, για κάθε ξ, η στο $\partial_{vis} \tilde{X}$ υπάρχουν άπειροι υπόχωροι C_i του $\partial_{vis} \tilde{X}$, ομοιομορφικοί με το S^1 , που περιέχουν τα ξ, η . Κάθε C_i είναι σύνορο ενός υπερβολικού επιπέδου με κορυφές. Επιπλέον το $\partial_{vis} \tilde{X}$ είναι τοπικά συνεκτικό κατά τόξα. Τέλος, σ' αυτή την ενότητα δίδεται παράδειγμα υπερβολικού σύμπλοκου Y της κλάσης S , του οποίου το σύνορο έχει επιπρόσθετες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Για παράδειγμα το $\partial_{vis} \tilde{Y}$ δεν έχει τοπικά σημεία διαχωρισμού, δηλαδή για κάθε γειτονιά U του ξ στο $\partial_{vis} \tilde{Y}$, ο χώρος $U - \{\xi\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός. Η παραπάνω ιδιότητα είναι σημαντική στην μελέτη του συνόρου υπερβολικών ομάδων [11].*

Η απόδειξη του Θεωρήματος της δεύτερης ενότητας είναι τελείως διαφορετική από την απόδειξη του Θεωρήματος της πρώτης ενότητας, η οποία σημειωτέον δε γενικεύεται στην προκειμένη περίπτωση. Ο λόγος είναι ότι οι ανώμαλες κορυφές δε μας επιτρέπουν να κόψουμε τον X κατά μήκος των ανώμαλων ακμών και να πάρουμε απλές συνιστώσες.

Η ιδέα της απόδειξης είναι η εξής: Για δεδομένα σημεία ξ , η του συνόρου θεωρούμε τη μοναδική γεωδαισιακή γ που τα ενώνει και στη συνέχεια κατασκευάζονται υπόχωροι P του $\tilde{X}$, ισομετρικοί με υπερβολικά επίπεδα που έχουν κορυφές και τα οποία περιέχουν τη γ . Επειδή το σύνορο του P είναι ομοιομορφικό με S^1 αποδεικνύουμε το πρώτο μέρος του Θεωρήματος. Για να αποδείξουμε ότι το σύνορο είναι τοπικά συνεκτικό κατά τόξα, η αποδεικτική διαδικασία είναι λιγότερο στοιχειώδης. Έτσι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε δύο επιπλέον εργαλεία. Πρώτον να αποδείξουμε ότι το οριακό σύνολο της G , όπου G είναι η ομάδα ισομετριών του X , είναι όλο το σύνορο $\partial_{vis} \tilde{X}$ και δεύτερον να εφοδιάσουμε το $\partial_{vis} \tilde{X}$ με τις λεγόμενες visual μετρικές του Gromov [8].

Η τρίτη ενότητα δίνει μια τοπολογική περιγραφή του συνόρου των ιδεωδών πολυέδρων διάστασης 2 τα οποία εθεωρήθησαν στην πρώτη ενότητα. Πιο συγκεκριμένα αν X είναι ένα ιδεώδες πολύεδρο διάστασης 2, αποδεικνύεται ότι το $\partial_{vis} \tilde{X}$ είναι ένα είδος συνόλου Sierpinski, το οποίο προκύπτει αφαιρώντας διαδοχικά ανοικτά σύνολα από ένα κλειστό δίσκο του επιπέδου. Η απόδειξη γίνεται αντιστοιχώντας το σύνορο του $\tilde{X}$ με στοιχεία του συνόλου $\{0,1\}^N \times \{0,2\}^N$ το οποίο εφοδιάζεται με κατάλληλη σχέση ισοδυναμίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : Βασικές Έννοιες

2.1 Ιστορικά Στοιχεία - Εισαγωγή

Ο Ευκλείδης έγραψε τα περίφημα «Στοιχεία», περί το 300 π.Χ. Στο έργο αυτό των 13 βιβλίων, οργάνωσε και παρουσίασε τις θεμελιώδεις προτάσεις της Γεωμετρίας. Στο 1^ο βιβλίο των «Στοιχείων» ο Ευκλείδης αναπτύσσει τη Γεωμετρία του επιπέδου, ξεκινώντας με βασικές υποθέσεις οι οποίες αποτελούνται από μια σειρά ορισμών γεωμετρικών όρων, από πέντε «κοινές έννοιες» που αφορούν στα μεγέθη καθώς και από τα παρακάτω πέντε αξιώματα-αιτήματα:

1. «Μια ευθεία μπορεί να σχεδιασθεί από ένα σημείο προς ένα άλλο».
2. «Μια πεπερασμένη ευθεία μπορεί να επεκταθεί συνεχώς».
3. «Οποιοσδήποτε κύκλος μπορεί να σχεδιασθεί με δοθείσα ακτίνα και δοθέν κέντρο».
4. «Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες».
5. «Αν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ'άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές».

Το 5^ο αξίωμα του Ευκλείδη είναι ισοδύναμο με το αξίωμα παραλληλίας: «Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία και μόνο μία ευθεία παράλληλη προς τη δοθείσα».

Τα «Στοιχεία» για πάρα πολλούς αιώνες παρέμεναν το ιδεώδες της μαθηματικής αυστηρότητας και το πρότυπο της επιστημονικής μεθόδου. Όμως, ακόμα και για τους πρώτους σχολιαστές, το 5^ο αξίωμα δημιουργούσε πρόβλημα. Η κριτική εστιαζόταν στο γεγονός ότι δεν ήταν τόσο προφανές, ώστε να γίνει αποδεκτό χωρίς απόδειξη. Στον προβληματισμό συνέτεινε και το γεγονός ότι το αντίστροφο του αξιώματος, («το άθροισμα των δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180^ο») ήταν μία από τις προτάσεις που ο Ευκλείδης απεδείκνυε, (Πρόταση 17, 1^ο βιβλίο). Πως θα μπορούσε λοιπόν ένα αξίωμα να μην αποδεικνύεται, όταν το αντίστροφό του αποδεικνυόταν;

Επίσης αξιοπερίεργο ήταν το γεγονός ότι σχεδόν ολόκληρη η Γεωμετρία του επιπέδου μπορούσε να αποδειχθεί χωρίς τη χρήση του 5^{ου} αξιώματος. (Δε χρησιμοποιείται μέχρι την Πρόταση 29 του 1^{ου} βιβλίου). Όλα έδειχναν ότι το 5^ο αξίωμα δεν ήταν πραγματικά αναγκαίο. Πολλοί πίστευαν ότι θα μπορούσε να αποδειχθεί μέσω των άλλων τεσσάρων αξιωμάτων και προσπάθησαν στην κατεύθυνση αυτή για πάνω από 2000 χρόνια. Μόλις τον 19^ο αιώνα απεδείχθη ότι το 5^ο αξίωμα είναι ανεξάρτητο των υπολοίπων και η απόδειξη αυτής της ανεξαρτησίας ήταν το αποτέλεσμα μιας αναπάντεχης και συγχρόνως ρηζικέλευθης ανακάλυψης. Η άρνηση του 5^{ου} αξιώματος οδηγεί σε ένα νέο είδος Γεωμετρίας και ο C. F. Gauss ήταν ο πρώτος που το παρατήρησε. Μετά από 30 περίπου χρόνια ερευνών πείσθηκε απόλυτα για το γεγονός ότι τα τέσσερα πρώτα αξιώματα του Ευκλείδη είναι μεταξύ τους συμβιβαστά και παράγουν μια νέα Γεωμετρία την οποία ονόμασε: «Μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία». Δυστυχώς ο Gauss ποτέ δε δημοσίευσε τα αποτελέσματά του, αν και το 1824 σε ένα γράμμα του προς τον F. A. Taurinus ανέφερε χαρακτηριστικά: «Η υπόθεση ότι το άθροισμα των τριών γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180^ο οδηγεί σε μια Γεωμετρία τελείως διαφορετική από τη δική μας (εννοεί την Ευκλείδεια), η οποία όμως είναι απόλυτα συμβιβαστή (δηλαδή είναι μη-αντιφατική)». Μόλις μετά από μερικά χρόνια οι N. Lobachevsky και J. Bolyai, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, δημοσίευσαν σχετικά αποτελέσματα: ο πρώτος το 1829 στην εργασία του με τίτλο “On the principles of Geometry” και ο δεύτερος το 1832 με την εργασία “The absolute science of space”. Στις μέρες μας η «Μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία» των Gauss, Lobachevsky και Bolyai αναφέρεται ως «Υπερβολική Γεωμετρία», ενώ ο όρος «Μη-Ευκλείδεια» αναφέρεται σε κάθε Γεωμετρία που δεν είναι Ευκλείδεια. Τελικά, το αξίωμα παραλληλίας στην Υπερβολική Γεωμετρία λαμβάνει τη μορφή: «Από σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες ευθείες παράλληλες προς τη δοθείσα».

Μετά από 20 αιώνες κριτικής, η θεωρία των παραλλήλων του Ευκλείδη δικαιώθηκε πλήρως, όταν το 1868 ο E. Beltrami απέδειξε την ανεξαρτησία του 5^{ου} αξιώματος, κατασκευάζοντας ένα μοντέλο του *Υπερβολικού Επιπέδου*. Τα σημεία του μοντέλου είναι τα εσωτερικά σημεία ενός σταθερού κύκλου στο Ευκλείδειο επίπεδο, που καλείται «κύκλος στο άπειρο». Οι γραμμές του μοντέλου αυτού είναι όλες οι ανοικτές χορδές του συγκεκριμένου κύκλου, ενώ δύο από αυτές θα είναι μεταξύ τους «παράλληλες» αν δεν

τέμνονται. Είναι προφανές ότι στο **μοντέλο του Beltrami** από ένα σημείο, P , εκτός ευθείας L , διέρχονται περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες προς την L .

Το 1871 ο F. Klein έδωσε την εικόνα του μοντέλου του Beltrami μέσα από την Προβολική Γεωμετρία, μετονομάζοντάς το σε **μοντέλο του Klein**. Το μοντέλο των Klein και Beltrami ή **το προβολικό μοντέλο του δίσκου**, όπως ισοδύναμα αποκαλείται, έχει το πλεονέκτημα ότι οι γραμμές του είναι ευθείες και το μειονέκτημα ότι οι γωνίες του δεν είναι κατ'ανάγκη οι Ευκλείδειες γωνίες! Για παράδειγμα, αν L είναι μια ευθεία του μοντέλου (όχι διάμετρος) και P το σημείο τομής των εφαπτομένων του κύκλου στο άπειρο, στα άκρα της L , τότε η ευθεία L' θα είναι κάθετη στην L αν και μόνο αν η Ευκλείδεια προέκταση της L' διέρχεται από το P .

Ένα άλλο μοντέλο του υπερβολικού επιπέδου του οποίου τα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία ενός κύκλου στο Ευκλείδειο επίπεδο, αλλά οι γωνίες του είναι οι Ευκλείδειες γωνίες, είναι το **σύμμορφο μοντέλο του δίσκου**. Στο μοντέλο αυτό οι ευθείες είναι οι ανοικτές διαμέτροι του κύκλου του συνόρου, μαζί με τα ανοικτά κυκλικά τόξα που είναι κάθετα στον κύκλο του συνόρου.

Το προβολικό και το σύμμορφο μοντέλο του δίσκου επιδεικνύουν την Ευκλείδεια συμμετρία περιστροφής ως προς τα Ευκλείδεια κέντρα τους.

Υπάρχει άλλο ένα σύμμορφο μοντέλο του υπερβολικού επιπέδου, το οποίο στο εξής θα συμβολίζουμε με H^2 , που επιδεικνύει την Ευκλείδεια συμμετρία μεταφοράς και καλείται: **το μοντέλο του άνω ημι-επιπέδου**. Τα σημεία του άνω ημι-επιπέδου είναι οι μιγαδικοί αριθμοί άνωθεν του άξονα των πραγματικών, στο μιγαδικό επίπεδο. Οι γραμμές του μοντέλου, ας τις ονομάσουμε **Υπερβολικές Ευθείες** (ή Υ-ευθείες), είναι οι ημιευθείες και τα ημικύκλια που είναι κάθετα στον άξονα των πραγματικών και περιέχονται στο άνω ημιεπίπεδο. Τα σημεία του άξονα των πραγματικών δε συμπεριλαμβάνονται στο υπερβολικό επίπεδο και τα λέμε σημεία του **ορίζοντα**.

Αναλυτικότερα, για τα μοντέλα που αναφέραμε (στη διάσταση 2) έχουμε: για το άνω

ημιεπίπεδο $H^2 = \{z = x + iy : y > 0\}$, μετρική που προκύπτει από το διαφορικό $ds = \frac{|dz|}{\text{Im } z}$

ή για το μοναδιαίο δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, μετρική που προκύπτει από το διαφορικό

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Τα δύο αυτά μοντέλα είναι ισομετρικά μεταξύ τους μέσω της σύμμορφης απεικόνισης: $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow D$, με $f(z) = \frac{z-i}{z+1}$. (Ο μετασχηματισμός $w = \frac{z-i}{z+1}$ απεικονίζει την ευθεία $y=0$ στον κύκλο $|w|=1$ και το άνω ημιεπίπεδο στο εσωτερικό του $|w|=1$).

Ένα από τα πλεονεκτήματα της αντιμετώπισης της υπερβολικής γεωμετρίας με Ευκλείδειους όρους είναι ο ορισμός του κύκλου σημείων στο άπειρο: δηλαδή του συνόλου $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ για το $\mathbb{H}^2$ και $\{z: |z|=1\}$ για το D . Αυτά δεν είναι σημεία του υπερβολικού επιπέδου, όμως έχουν ιδιαίτερη σημασία για κάθε αντικείμενο μελέτης της υπερβολικής γεωμετρίας. Η ένωση του υπερβολικού επιπέδου και του κύκλου στο άπειρο καλείται: **κλειστό υπερβολικό επίπεδο**.

Αν $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ είναι μια κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη, τότε ορίζουμε το μήκος $\|g\|$, ως εξής: $\|g\| = \int_a^b \frac{|g'(t)|}{\text{Im}[g(t)]} dt$ και τη μετρική d , ως εξής:

$d(z, w) = \inf \|g\|$. Αν επιπλέον έχουμε δύο σημεία του $\mathbb{H}^2$ έστω $z = ip$, $w = iq$, με $0 < p < q$, όπου τα z, w ανήκουν σε έναν Ευκλείδειο κύκλο ή σε ευθεία κάθετη στον άξονα των πραγματικών, τότε εύκολα λαμβάνουμε ότι η απόσταση μεταξύ αυτών των σημείων δίνεται από τον τύπο: $d(z, w) = \ln \frac{q}{p}$.

Το σύνολο των ισομετριών του $(\mathbb{H}^2, d)$ είναι ακριβώς η ομάδα των απεικονίσεων της μορφής: $z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $z \mapsto \frac{\alpha(-\bar{z}) + \beta}{\gamma(-\bar{z}) + \delta}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$.

Πρόκειται για υποομάδα της ομάδας των μετασχηματισμών Möbius του $\mathbb{C}$, που απεικονίζει το $\mathbb{H}^2$ στο $\mathbb{H}^2$. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε ισομετρία του $\mathbb{H}^2$ γράφεται ως σύνθεση ανακλάσεων ως προς Y -ευθείες (δηλαδή ως προς ημικύκλια ή ευθείες που είναι κάθετες στον ορίζοντα).

Ως προς την τοπολογία του υπερβολικού επιπέδου αναφέρουμε ότι η Ευκλείδεια και η υπερβολική μετρική επάγουν την ίδια τοπολογία.

Δοθέντων δύο διαφορετικών σημείων z, w πάνω σε μια Y -ευθεία, L , το σύνολο $L - \{z, w\}$ έχει ακριβώς τρεις συνιστώσες, μία εκ των οποίων έχει συμπαγή κλειστότητα ως προς το υπερβολικό επίπεδο. Η συνιστώσα αυτή είναι το ανοικτό τμήμα (z, w) και η κλειστότητά της συμβολίζεται με $[z, w]$.

Αν θεωρήσουμε μια καμπύλη g που ενώνει τα σημεία z, w , τότε αυτή θα ικανοποιεί τη σχέση $\|g\| = d(z, w)$, αν και μόνο αν η g είναι μια παραμετρικοποίηση του $[z, w]$.

Για το λόγο αυτό οι Y -ευθείες καλούνται και γεωδαισιακές (δηλαδή καμπύλες ελαχίστου μήκους). Κάθε γεωδαισιακή έχει δύο άκρα στον κύκλο στο άπειρο, ενώ αν θεωρήσουμε δύο διαφορετικές γεωδαισιακές L_1 και L_2 τότε λέμε ότι είναι:

- παράλληλες, αν και μόνο αν έχουν ακριβώς ένα κοινό άκρο, (βλ. σχήμα 1),
- τεμνόμενες, αν δεν έχουν κοινό άκρο και $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, (βλ. σχήμα 3) και
- ξένες, αν $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, (βλ. σχήμα 2).

(σχήμα 1)

(σχήμα 2)

(σχήμα 3)

Ένα σημαντικό είδος απλών καμπυλών για την υπερβολική γεωμετρία, είναι και οι **ορόκυκλοι**. Είναι εφαπτόμενοι του κύκλου στο άπειρο και με την επαγόμενη μετρική είναι ισομετρικοί με Ευκλείδειους κύκλους. Ο ορόκυκλος Σ στο D , με βάση το σημείο b του S^1 , ορίζεται ως η τομή με το D , ενός Ευκλείδειου κύκλου εφαπτόμενου του S^1 στο b .

Αν η βάση είναι στο άπειρο, οι ορόκυκλοι γίνονται παράλληλες ευθείες προς τον ορίζοντα:

Για παράδειγμα σχεδιάζουμε ορόκυκλους σε τρίγωνο του H^2 :

Χρήσιμο για τη συνέχεια είναι το ακόλουθο:

Λήμμα 2.1.1: [37, σελ.421] Έστω δύο κατακόρυφες ευθείες K, L , του H^2 και α, β οριζόντια οροτόξα που συνδέουν τις K, L , σε υπερβολική απόσταση d (έστω το β άνωθεν του α). Τότε, $\frac{|\alpha|}{|\beta|} = e^{-d}$.

Έστω x, y, z τρία μη-συγγραμμικά σημεία του H^2 . Με $L(x, y)$ συμβολίζουμε τη μοναδική Υ-ευθεία που περιέχει τα x, y και με $H(x, y, z)$ το κλειστό ημι-επίπεδο του H^2 που έχει το $L(x, y)$ ως σύνορο και το z στο εσωτερικό του. Τότε το **υπερβολικό τρίγωνο** με κορυφές τα x, y, z και πλευρές $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$, ορίζεται ως εξής:

$$T(x, y, z) = H(x, y, z) \cap H(y, z, x) \cap H(z, x, y).$$

Ένα **γενικευμένο υπερβολικό τρίγωνο** στο H^2 ορίζεται όπως ακριβώς ένα υπερβολικό τρίγωνο, με τη διαφορά ότι κάποιες από τις κορυφές του μπορεί να είναι ιδεώδεις, δηλαδή να βρίσκονται στον κύκλο στο άπειρο. Ένα **άπειρο υπερβολικό τρίγωνο** στο H^2 είναι ένα γενικευμένο τρίγωνο με τουλάχιστον μία ιδεώδη κορυφή. Τέλος, ένα άπειρο υπερβολικό τρίγωνο με τρεις ιδεώδεις κορυφές, καλείται **ιδεώδες υπερβολικό τρίγωνο** (βλ. ακόλουθο σχήμα).

Σημείωση 2.1.2: Στη συνέχεια οι χώροι που θα μελετήσουμε κατασκευάζονται κολλώντας άπειρα ιδεώδη υπερβολικά τρίγωνα, με ισομετρίες, κατά μήκος των πλευρών τους. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται χώροι των οποίων το καθολικό κάλυμμα έχει τις ιδιότητες του H^2 . Μπορούμε κατά συνέπεια να ορίσουμε και να μελετήσουμε το σύνορο του καθολικού καλύμματος αυτών των χώρων.

Παρατήρηση 2.1.3: Κλείνοντας αναφέρουμε ότι εντελώς ανάλογα, μοντέλο για την υπερβολική γεωμετρία στη διάσταση 3, είναι ο άνω ημίχωρος $H^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, με μετρική $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$ ή η μοναδιαία μπάλλα $B^3 = \{w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |w| < 1\}$, με μετρική $ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(1 - r^2)^2}$.

2.2 Στοιχεία από τη Θεωρία Ομάδων

Ορισμός 2.2.1: [37] Μια ομάδα G **δρα** σε σύνολο X αν υπάρχει απεικόνιση

$$f : G \times X \rightarrow X \text{ με } (g, x) \mapsto g \cdot x, \text{ ώστε για κάθε } g, h \in G$$

και $x \in X$ να έχουμε: (i) $1 \cdot x = x$ και (ii) $g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$.

Στην περίπτωση αυτή η f καλείται **δράση** της ομάδας G .

Αν η G είναι τοπολογική ομάδα, το X τοπολογικός χώρος και η f συνεχής, τότε η δράση της G επί του X καλείται **συνεχής**.

(Όλες οι δράσεις που θα μελετήσουμε θα είναι συνεχείς).

Παράδειγμα: Αν το X είναι μετρικός χώρος, τότε η ομάδα $I(X)$

των ισομετριών του X , δρα στο X μέσω της σχέσης:

$$\varphi x = \varphi(x), \text{ όπου } \varphi \text{ ισομετρία.}$$

Η υποομάδα $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ της G , καλείται **σταθεροποιητής**

του x στη G , ενώ το υποσύνολο $Gx = \{g \cdot x : g \in G\}$ καλείται

G-τροχιά μέσω του x . (Οι G -τροχιές διαμερίζουν το X).

Ορισμοί 2.2.2: [37, 25] **1.** Μια ομάδα G δρα **καθαρά ασυνεχώς (properly**

discontinuously) σε ένα τοπολογικό χώρο X αν η G δρα στο X και για

κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X , το σύνολο $K \cap g \cdot K$ είναι

μη-κενό, για πεπερασμένα $g \in G$ μόνο.

2. Μια ομάδα G δρα **ελεύθερα** στο X , αν για κάθε $x \in X$ ο

σταθεροποιητής είναι τετριμμένος, δηλαδή $g \equiv id$, αν $g \cdot x = x$.

3. Μια **διακριτή ομάδα** είναι μια τοπολογική ομάδα G της οποίας όλα τα στοιχεία-σημεία είναι ανοικτά.

Κάθε ομάδα μπορεί να γίνει διακριτή αν της δώσουμε τη διακριτή τοπολογία. Η συγκεκριμένη τοπολογία από μόνη της δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε αντίθεση με τη μελέτη των διακριτών υποομάδων μιας μη-διακριτής τοπολογικής ομάδας.

Παραδείγματα 2.2.3:

- (1) Το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι μια διακριτή υποομάδα του συνόλου των πραγματικών $\mathbb{R}$.
- (2) Οι ακέραιοι Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{m + in : m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι μια διακριτή υποομάδα του συνόλου των μιγαδικών $\mathbb{C}$.
- (3) Το σύνολο $\{k^n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι μια διακριτή υποομάδα του $\mathbb{R}_+$ για κάθε $k > 0$.
- (4) Η ομάδα που παράγεται από την αντισυμμετρική απεικόνιση $A : S^n \rightarrow S^n$, με $A(x) = -x$, δρα ελεύθερα στη μοναδιαία σφαίρα $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$.
- (5) Η υποομάδα ισομετριών του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από δύο μεταφορές σε δύο γραμμικά ανεξάρτητες διευθύνσεις, είναι αβελιανή και διακριτή ομάδα με δύο γεννήτορες.
- (6) Η υποομάδα ισομετριών του υπερβολικού μοντέλου του δίσκου D που περιγράφεται παρακάτω, είναι ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες.

Έστω U η περιοχή του D που περικλείεται μεταξύ των γεωδαισιακών $\{s_1, s'_1\}, \{s_2, s'_2\}$ όπως στο σχήμα:

Ορίζουμε τις υπερβολικές ισομετρίες φ_i , $i = 1, 2$, οι οποίες διατηρούν το δίσκο, ώστε $\varphi_i(s_i) = s'_i$ και οι φ_i μεταφέρουν την περιοχή εκτός του s_i , εντός της περιοχής του s'_i . Η ομάδα G που γεννάται από τις φ_1, φ_2 είναι διακριτή που δρα ελεύθερα και καθαρά ασυνεχώς.

Παρατηρήσεις 2.2.4:

- (1) [38, σελ.154] Μια ομάδα G δρα καθαρά ασυνεχώς στον τοπικά συμπαγή χώρο X αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X , το σύνολο $\{g \in G : g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο.
- (2) [4, σελ.94] Κάθε υποομάδα της G δρα καθαρά ασυνεχώς στο X , αν η G δρα καθαρά ασυνεχώς στο X .
- (3) [4, σελ.94] Αν $x \in X$, τότε ο σταθεροποιητής G_x είναι πεπερασμένος, αν η G δρα καθαρά ασυνεχώς στο X .
- (4) [4, σελ.94] Αν $x \in X$ και τα $g_1, g_2, \dots$, είναι διαφορετικά στοιχεία της G , (καθώς η G δρα καθαρά ασυνεχώς στο X), τότε η ακολουθία $g_1(x), g_2(x), \dots$ δε συγκλίνει σε κανένα σημείο $y \in X$.

Στη συνέχεια ο X θα είναι ένας μετρικός χώρος και η δράση θα είναι μέσω ισομετριών τέτοια ώστε οι ομοιομορφισμοί του X που δίνονται από την αριστερή μεταφορά $x \mapsto g \cdot x$, $g \in G$, $x \in X$, να είναι ισομετρίες του X . Τέτοιες δράσεις καλούνται **ισομετρικές**.

Ορισμός 2.2.5: [37, σελ.155] Ένας μετρικός χώρος X λέγεται **πεπερασμένα συμπαγής**, αν όλες οι κλειστές μπάλλες είναι συμπαγείς, δηλαδή είναι συμπαγή τα σύνολα $B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$, για κάθε $a \in X$ και $r > 0$.

Θεώρημα 2.2.6: [37, σελ.155] Αν ο X είναι πεπερασμένα συμπαγής μετρικός χώρος, τότε η ομάδα ισομετριών του X είναι τοπολογική ομάδα.

Θεώρημα 2.2.7: [37, σελ.168] Έστω X ένας πεπερασμένα συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε, μια ομάδα ισομετριών G του X θα είναι διακριτή αν και μόνο αν η G δρα καθαρά ασυνεχώς στο X .

Ορισμός 2.2.8: [37, σελ.233] Έστω ομάδα G η οποία δρα σε μετρικό χώρο X . Ο χώρος τροχιών της δράσης της G στο X , ορίζεται ως το σύνολο των G -τροχιών: $X/G = \{Gx : x \in X\}$, εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκου από το X . Η απεικόνιση πηλίκου θα συμβολίζεται ως $p : X \mapsto X/G$.

Ορισμός 2.2.9: [25, σελ.9] Αν μια ομάδα G δρα καθαρά ασυνεχώς στο X έτσι ώστε ο χώρος τροχιών X/G να είναι συμπαγής, τότε λέμε ότι η G δρα **συσυμπαγώς** στο X .

Υπενθυμίζουμε ότι αν τα A, B είναι υποσύνολα του X , τότε η **απόσταση** από το A στο B , στο X , ορίζεται ως: $\text{dist}(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

Η συνάρτηση απόστασης στο χώρο τροχιών, $d_G : X/G \times X/G \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζεται ως ακολούθως: $d_G(Gx, Gy) = \text{dist}(Gx, Gy)$. Αν η d_G είναι μια μετρική στο X/G , τότε καλείται: **μετρική του χώρου τροχιών**.

Θεώρημα 2.2.10: [37, σελ.233] Έστω G μια ομάδα ισομετριών ενός μετρικού χώρου X . Τότε η d_G είναι μια μετρική στο X/G αν και μόνο αν κάθε G -τροχιά είναι κλειστό υποσύνολο του X .

Πόρισμα 2.2.11: [37, σελ.234] Αν G είναι μια ομάδα ισομετριών που δρα καθαρά ασυνεχώς σε μετρικό χώρο X , τότε η d_G είναι μια μετρική στο X/G .

2.3 Χώροι Κάλυψης

Ορισμοί 2.3.1: 1. Μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$, όπου X, Y είναι τοπολογικοί χώροι καλείται **ομοιομορφισμός**, αν είναι "1-1" και "επί" και οι απεικονίσεις f, f^{-1} είναι συνεχείς.

2. Έστω απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$, η οποία είναι "1-1" και συνεχής.

Η f θα λέγεται **(τοπολογική) εμφύτευση** εάν η απεικόνιση

$f : X \rightarrow f(X) \subset Y$ είναι ομοιομορφισμός, όπου το $f(X)$ είναι εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία από το X .

Ορισμός 2.3.2: [33, σελ.145] Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, κατά τόξα συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός. Ο **χώρος κάλυψης** του X είναι ένα ζεύγος που αποτελείται από ένα τοπολογικό χώρο $\tilde{X}$ και μια συνεχή απεικόνιση $p : \tilde{X} \rightarrow X$, ώστε: « για κάθε σημείο $x \in X$ υπάρχει μια κατά τόξα συνεκτική, ανοικτή γειτονιά U_x , ώστε κάθε συνιστώσα τόξου $p^{-1}(U_x)$ να είναι ένωση ξένων ανοικτών που απεικονίζονται, μέσω της p , ομοιομορφικά πάνω στη U_x ».

Η U_x καλείται **στοιχειώδης γειτονιά**, ενώ η απεικόνιση p **προβολή**.

Αν το $\tilde{X}$ είναι απλά συνεκτικό, καλείται **καθολικός χώρος κάλυψης** όπου για κάθε $x \in X$, $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$, ώστε:

Ορισμός 2.3.3: Ο ομοιομορφισμός $f : M_1 \rightarrow M_2$, όπου M_1, M_2 είναι διαφορίσιμες πολλαπλότητες, καλείται **διαφορομορφισμός**, αν είναι "1-1" και "επί" και οι απεικονίσεις f, f^{-1} είναι διαφορίσιμες.

Παρατηρήσεις 2.3.4:

- (1) Μέσω της απεικόνισης προβολή $p : \tilde{X} \rightarrow X$, ο χώρος κάλυψης $\tilde{X}$ κληρονομεί όλη την τοπική δομή του χώρου βάσης X . Συγκεκριμένα, μέσω του Ορισμού 2.3.2, αν ο X έχει μια επιπρόσθετη δομή, για παράδειγμα αν είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα ή πολλαπλότητα Riemann, μέσω της απεικόνισης p , η οποία θα είναι αμφιδιαφόριση ή ισομετρία, αντίστοιχα, μπορούμε να εφοδιάσουμε το $\tilde{X}$ με την επιπρόσθετη αυτή δομή του X .
- (2) Κάθε χώρος έχει καθολικό κάλυμμα.

Ορισμός 2.3.5: Ως **δρόμο** ορίζουμε μια συνεχή απεικόνιση $\gamma : I \rightarrow X$, όπου X τοπολογικός χώρος και I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, δηλαδή οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, κλειστό ή ανοικτό, πεπερασμένο ή άπειρο.

Ορισμός 2.3.6: [33, σελ.56] Έστω $f_0, f_1 : [a, b] \rightarrow X$ δύο δρόμοι στον τοπολογικό χώρο X , ώστε: $f_0(a) = f_1(a)$, $f_0(b) = f_1(b)$ (δηλαδή, οι δύο δρόμοι έχουν τα ίδια αρχικά και τα ίδια τελικά σημεία). Οι δύο δρόμοι θα καλούνται **ισοδύναμοι**, (συμβολισμός: $f_0 \sim f_1$), αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : [a, b] \times I \rightarrow X$, (στο εξής: $I = [0, 1]$) έτσι ώστε:

$$\left. \begin{aligned} f(t, 0) &= f_0(t) \\ f(t, 1) &= f_1(t) \end{aligned} \right\} t \in [a, b]$$

$$\left. \begin{aligned} f(a, s) &= f_0(a) = f_1(a) \\ f(b, s) &= f_0(b) = f_1(b) \end{aligned} \right\} s \in I$$

(Διαισθητικά, δύο δρόμοι θα είναι ισοδύναμοι, αν ο ένας μπορεί να παραμορφωθεί συνεχώς ώστε να «πέσει» πάνω στον άλλο, στο χώρο X).

Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η παραπάνω σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική, δηλαδή είναι **σχέση ισοδυναμίας**.

Ορισμός 2.3.7: [33, σελ.56] Έστω $f : [a, b] \rightarrow X$ και $g : [b, c] \rightarrow X$ δύο δρόμοι έτσι ώστε $f(b) = g(b)$ (εδώ $a < b < c$). Ορίζουμε το **γινόμενο των δρόμων**

$$(\text{συμβολισμός: } f \cdot g), \text{ ως εξής: } (f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, b] \\ g(t), & t \in [b, c] \end{cases}.$$

Στην περίπτωση όπου θεωρήσουμε τους δρόμους να ορίζονται στο $I = [0, 1]$ και με δεδομένο ότι το τελικό σημείο του f είναι το αρχικό σημείο του g , ορίζουμε το γινόμενο $f \cdot g$ ως εξής:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Λήμμα 2.3.8: Η σχέση ισοδυναμίας και το γινόμενο των δρόμων είναι συμβατά μεταξύ τους υπό την εξής έννοια: «Αν $f_0 \sim f_1$ και $g_0 \sim g_1$, τότε έχουμε $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$ (αν φυσικά το τελικό σημείο του f_0 είναι το αρχικό σημείο του g_0).

Ορισμοί 2.3.9: [33, σελ.62] **1.** Ένας δρόμος ή μια κλάση δρόμων καλείται **κλειστός** ή **βρόγχος** αν το αρχικό και το τελικό του σημείο συμπίπτουν. Λέμε τότε ότι ο βρόγχος εδράζεται στο κοινό αυτό σημείο.

2. Αν x τυχαίο σημείο του X , τότε το σύνολο όλων των βρόγχων που εδράζονται στο x είναι μια ομάδα, (ως προς τη σχέση ισοδυναμίας του Ορισμού 2.3.6 και ως προς την πράξη του Ορισμού 2.3.7), η οποία καλείται **θεμελιώδης ομάδα** του X στο σημείο βάσης x και συμβολίζεται με $\pi_1(X, x)$.

Έστω $(\tilde{X}, p)$ χώρος κάλυψης του X και $g : I \rightarrow \tilde{X}$ ένας δρόμος στο $\tilde{X}$. Τότε η απεικόνιση $p \circ g$ είναι ένας δρόμος στο X . Επίσης, αν $g_0, g_1 : I \rightarrow \tilde{X}$ και $g_0 \sim g_1$, τότε $p \circ g_0 \sim p \circ g_1$. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε δύο βασικές ιδιότητες των χώρων κάλυψης. Συγκεκριμένα, αν $f : I \rightarrow X$ είναι ένας δρόμος στο X , τότε υπάρχει δρόμος $g : I \rightarrow \tilde{X}$, ώστε να ισχύει $p \circ g = f$. Επίσης, αν $g_0, g_1 : I \rightarrow \tilde{X}$ και $p \circ g_0 \sim p \circ g_1$, τότε έπεται ότι $g_0 \sim g_1$.

Λήμμα 2.3.10: (Ανύψωση δρόμου) [33, σελ.151]

Έστω $(\tilde{X}, p)$ ένας χώρος κάλυψης του X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ και $x_0 = p(\tilde{x}_0)$.

Τότε, για κάθε δρόμο $f : I \rightarrow X$ με αρχικό σημείο x_0 , υπάρχει

μοναδικός δρόμος $g : I \rightarrow \tilde{X}$ με αρχικό σημείο $\tilde{x}_0$, ώστε $p \circ g = f$.

Προχωρούμε στο ανάλογο πρόβλημα για απεικονίσεις μεταξύ δύο χώρων. Εισάγουμε το συμβολισμό: αν Y, X τοπολογικοί χώροι με $x \in X, y \in Y$, τότε $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ σημαίνει ότι η f είναι συνεχής απεικόνιση του X στον Y , με $y = f(x)$. Έστω $(\tilde{X}, p)$ ένας χώρος κάλυψης του X , $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, $y_0 \in Y$ και $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$. Στο ερώτημα υπό ποιες συνθήκες υπάρχει απεικόνιση $\tilde{\varphi}$ με $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό, η απάντηση προκύπτει από το παρακάτω θεώρημα (όπου δίνεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη).

Αν υπάρχει μια τέτοια απεικόνιση $\tilde{\varphi}$, τότε λέμε ότι η $\tilde{\varphi}$ αποτελεί **ανύψωση της απεικόνισης φ** .

Θεώρημα 2.3.11: (Ανύψωση απεικόνισης) [33, σελ.156]

Έστωσαν $(\tilde{X}, p)$ ένας χώρος κάλυψης του X , Y ένας συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός, $y_0 \in Y$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ και $x_0 = p(\tilde{x}_0)$.
Δοθείσης απεικόνισης $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, υπάρχει ανύψωση $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ αν και μόνο αν $\varphi_* \pi_1(Y, y_0) \subset p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$,
όπου: $\varphi_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ και $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Θεώρημα 2.3.12: [37, σελ.333] Έστω X ένας μετρικός χώρος και G μια ομάδα ισομετριών η οποία δρα ελεύθερα και καθαρά ασυνεχώς στο X . Τότε η φυσική απεικόνιση $p : X \mapsto X/G$ είναι μια απεικόνιση κάλυψης (προβολή) και ιδιαίτερα μια τοπική ισομετρία.

Παραδείγματα 2.3.13:

(1) Τοπολογικοί Χώροι (εδώ η απεικόνιση p είναι ομοιομορφισμός)

- Το ζεύγος $(\mathbb{R}, p)$ όπου $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ώστε $t \mapsto p(t) = (\cos t, \sin t)$ είναι ο καθολικός χώρος κάλυψης του S^1 .

- Το ζεύγος (S^1, p_n) , όπου $p_n : S^1 \rightarrow S^1$, ώστε $(\cos t, \sin t) \mapsto p_n(\cos t, \sin t) = (\cos nt, \sin nt)$, $t \in [0, 2\pi]$, είναι ένας χώρος κάλυψης (όχι όμως καθολικός) του S^1 .

- Το ζεύγος $(\mathbb{R}^2, p)$ όπου $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$, ώστε $(x, y) \mapsto p(x, y) = ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y))$, είναι ο καθολικός χώρος κάλυψης του τόρου $T^2 = S^1 \times S^1$.

(2) Γεωμετρικοί Χώροι (εδώ η απεικόνιση p είναι τοπική ισομετρία)

- Αν E^2 ο Ευκλείδειος χώρος και G η υποομάδα ισομετριών που παράγεται από δύο μεταφορές σε δύο γραμμικά ανεξάρτητες διευθύνσεις (παράδειγμα 2.2.3 (5)), τότε η επιφάνεια E^2/G είναι ομοιομορφική με τόρο και έχει σταθερή καμπυλότητα 0 (μηδέν).
- Αν H^2 ο Υπερβολικός χώρος και G η υποομάδα ισομετριών που περιγράφεται στο παράδειγμα 2.2.3 (6), τότε η επιφάνεια H^2/G είναι ομοιομορφική με τόρο από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει ένα σημείο και έχει σταθερή καμπυλότητα -1.

2.4 Μετρική Μήκους (Length Metric) - Χώροι Μήκους

Μια δομή μήκους αποτελείται από μία κλάση επιτρεπτών δρόμων για τους οποίους μπορούμε να μετρήσουμε το **μήκος** τους, το οποίο σε κάθε δρόμο της κλάσης αντιστοιχεί ένα μη-αρνητικό αριθμό.

Ορισμός 2.4.1: [14, σελ.26] Μια **δομή μήκους** στον τοπολογικό και κατά τόξα συνεκτικό χώρο X είναι μια κλάση A επιτρεπτών δρόμων, (υποσύνολο του συνόλου των συνεχών δρόμων του X), μαζί με μια απεικόνιση $L : A \rightarrow \mathbb{R}_+$, που καλείται μήκος του δρόμου.

➤ **Η κλάση A πρέπει να ικανοποιεί τα εξής:**

- (1) Η κλάση A είναι κλειστή ως προς τον περιορισμό: « αν $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ είναι ένας επιτρεπτός δρόμος και $a \leq c \leq d \leq b$, τότε ο περιορισμός του γ στο $[c, d]$ είναι επίσης επιτρεπτός ».
- (2) Η κλάση A είναι κλειστή ως προς το γινόμενο των δρόμων: « αν ο δρόμος $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ είναι τέτοιος ώστε οι περιορισμοί του γ_1, γ_2 στα $[a, c], [c, b]$ αντίστοιχα, να είναι επιτρεπτοί δρόμοι και το γινόμενο $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ είναι επίσης επιτρεπτός δρόμος ».
- (3) Η κλάση A είναι κλειστή ως προς τις γραμμικές αναπαραμετρήσεις: « αν $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ είναι ένας επιτρεπτός δρόμος και $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ένας ομοιομορφισμός της μορφής $\varphi(t) = \alpha t + \beta$, τότε η σύνθεση $\gamma \circ \varphi(t) = \gamma(\varphi(t))$ είναι επίσης ένας επιτρεπτός δρόμος ».

➤ **Η απεικόνιση L πρέπει να ικανοποιεί τα εξής:**

- (1) Το μήκος των δρόμων είναι προσθετικό, δηλαδή: για κάθε $c \in [a, b]$ ισχύει $L(\gamma|_{[a,b]}) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.
- (2) Το μήκος ενός τμήματος του δρόμου εξαρτάται συνεχώς από το τμήμα.
- (3) Το μήκος είναι αναλλοίωτο ως προς αναπαραμετρήσεις, δηλαδή $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$, για ένα γραμμικό ομοιομορφισμό φ .
- (4) Για μια γειτονιά U_x , το μήκος των δρόμων που συνδέουν το $x \in X$ με σημεία του συμπληρώματος του U_x , ισχύει: $\inf \{L(\gamma) : \gamma(a) = x, \gamma(b) \in X - U_x\} > 0$

Από τη στιγμή που έχουμε τη δομή μήκους, είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τη συνάρτηση απόστασης, δηλαδή τη μετρική, που είναι σχετική με τη δομή αυτή.

Ορισμός 2.4.2: Έστω (X, d_L) ένας μετρικός χώρος. Η d_L καλείται **μετρική μήκους** αν η απόσταση μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων $x, y \in X$ ισούται με το infimum των μηκών όλων των επιτρεπτών δρόμων που τα συνδέουν. Δηλαδή: $d_L(x, y) = \inf \{L(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow X, \gamma \in A, \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}$. Αν η d_L είναι μετρική μήκους, τότε ο χώρος (X, d_L) καλείται: **χώρος μήκους**.

Μέσω της σχέσης (4) παραπάνω, έχουμε ότι η τοπολογία της d_L συμπίπτει με την τοπολογία του χώρου X .

Παρατήρηση 2.4.3: Η d_L δεν είναι κατ' ανάγκη μετρική, αλλά εν γένει ψευδομετρική. (δηλαδή: $d_L(x, y) = 0 \not\Rightarrow x = y$). Στα παρακάτω παραδείγματα η d_L είναι μετρική, ενώ στους χώρους που θα μελετήσουμε στο κύριο μέρος της διατριβής, θα αποδείξουμε ότι η d_L είναι μετρική.

Παραδείγματα 2.4.4:

- (1) Ο χώρος E^n , $n \geq 1$ (πρόκειται για το χώρο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική), είναι χώρος μήκους.
- (2) Ο χώρος H^2 , είναι χώρος μήκους.
- (3) Ένα πρίσμα P στο χώρο E^3 με έδρες Ευκλείδεια πολύγωνα, δέχεται μια μετρική μήκους. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι το μήκος $l_P(f)$ ενός δρόμου $f: [\alpha, \beta] \rightarrow P$, ορίζεται ως το άθροισμα των μηκών των συνιστωσών τομής της f με τα πολύγωνα στο P , τότε για $x, y \in P$ αν ορίσουμε ως $d_P(x, y)$ να είναι το infimum του συνόλου των μηκών όλων των δρόμων που συνδέουν τα x, y , έχουμε ότι η d_P είναι μετρική μήκους.

Ορισμός 2.4.5: [12, σελ.2] Ένας χώρος μήκους, (X, d_L) , λέγεται **γνήσιος (proper)** όταν κάθε κλειστή μπάλλα είναι συμπαγής.

Θεώρημα 2.4.6: [12, σελ.36] Ένας χώρος μήκους, (X, d_L) , είναι **γνήσιος** αν και μόνο αν είναι πλήρης και τοπικά συμπαγής.

Η ορολογία «γνήσιος μετρικός χώρος» προκύπτει από το γεγονός ότι για δεδομένο σημείο βάσης $x_0 \in X$, η απεικόνιση $x \mapsto d_L(x, x_0)$ είναι μια γνήσια απεικόνιση από το X στο $\mathbb{R}$ με τη γνωστή τοπολογική έννοια, δηλαδή η αντίστροφη εικόνα κάθε συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγής.

Επίσης, «πλήρης μετρικός χώρος» σημαίνει ότι κάθε ακολουθία Cauchy του X , συγκλίνει στο χώρο X .

Ορισμός 2.4.7: Έστω X, X' δύο μετρικοί χώροι. Μια απεικόνιση $f: X \rightarrow X'$ καλείται **ισομετρία** αν $d_X(x, y) = d_{X'}(f(x), f(y))$, για κάθε $x, y \in X$.

Ορισμός 2.4.8: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος, έτσι ώστε κάθε δύο σημεία του X να μπορούν να συνδεθούν μέσω ενός δρόμου πεπερασμένου μήκους, στο X . Έστω ότι για κάθε $x, y \in X$, το $\tilde{d}(x, y)$ είναι το infimum του μήκους όλων των συνεχών δρόμων στο X μεταξύ των x, y . Τότε η $\tilde{d}$ είναι μια μετρική στο X , που καλείται **επαγόμενη μετρική** και ο $(X, \tilde{d})$ είναι χώρος μήκους.

Καθώς η μέτρηση του μήκους ενός δρόμου σε ένα μετρικό χώρο είναι καθαρά τοπική διαδικασία, υπάρχει ένας φυσικός τρόπος για τον ορισμό της αντίστοιχης διαδικασίας μέτρησης στο χώρο κάλυψης αυτού.

Ορισμός 2.4.9: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $\tilde{X}$ ο χώρος κάλυψης με απεικόνιση προβολή $p : \tilde{X} \rightarrow X$. Δοθέντος ενός δρόμου $c : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$, ορίζουμε το μήκος του $l(c)$ να είναι το μήκος της καμπύλης $p \circ c$ στο X . Ορίζουμε μια ψευδομετρική στο $\tilde{X}$ θέτοντας την απόσταση $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$ μεταξύ δύο σημείων $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$, να είναι το infimum των μηκών όλων των δρόμων που τα συνδέουν στο $\tilde{X}$. Η μετρική $\tilde{d}$ καλείται **επαγόμενη μετρική στο $\tilde{X}$** μέσω της p .

Πρόταση 2.4.10: [12, σελ.42] Έστω X ένας χώρος μήκους και $\tilde{X}$ ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος. Έστω $p : \tilde{X} \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση που είναι τοπικός ομοιομορφισμός και $\tilde{d}$ η επαγόμενη μετρική στο $\tilde{X}$. Τότε:

- (1) Η p γίνεται τοπική ισομετρία.
- (2) Η $\tilde{d}$ είναι μετρική μήκους.
- (3) Η $\tilde{d}$ είναι η μοναδική μετρική στο χώρο $\tilde{X}$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) και (2).

Καθώς θα το χρειαστούμε παρακάτω, αναφέρουμε το κλασσικό θεώρημα των Arzelà – Ascoli. Υπενθυμίζουμε ότι μια οικογένεια απεικονίσεων f_n από ένα μετρικό χώρο σε έναν άλλο λέγεται **ισοσυνεχής** αν: « για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ ».

Θεώρημα 2.4.11: (Arzelà – Ascoli) [12, σελ.36]

Αν X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και Y ένας χώρος Hausdorff (διαχωρίσιμος), τότε κάθε ακολουθία ισοσυνεχών συναρτήσεων $f_n : Y \rightarrow X$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει (ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα) σε μια συνεχή απεικόνιση $f : Y \rightarrow X$.

2.5 Γεωδαισιακοί Χώροι

Έστω X μετρικός χώρος. Συμβολίζουμε με $d(x, y)$ την απόσταση μεταξύ δύο σημείων $x, y \in X$. Θυμίζουμε ότι μια **γεωδαισιακή** στο X είναι μια απεικόνιση $g : I \rightarrow X$ που ορίζεται σε διάστημα I του $\mathbb{R}$ ώστε: $|t_1 - t_2| = d(g(t_1), g(t_2))$ για κάθε $t_1, t_2 \in I$. Αν $I = [a, b]$ (ή $[0, +\infty)$), καλούμε τη g **γεωδαισιακό τμήμα** (ή **γεωδαισιακή ακτίνα**, αντίστοιχα). Μια **τοπική γεωδαισιακή** στο X είναι μια απεικόνιση $g : I \rightarrow X$ ώστε για κάθε $t \in I$ υπάρχει διάστημα $I(t) \subset I$ (γειτονιά του t στο I) με τον περιορισμό της g στο $I(t)$ να είναι γεωδαισιακή. Τέλος, μια **κλειστή γεωδαισιακή** στο X είναι μια περιοδική απεικόνιση $g : (-\infty, +\infty) \rightarrow X$ που είναι τοπική γεωδαισιακή. Συμβολίζουμε με $[x, y]$ την εικόνα κάθε γεωδαισιακού τμήματος, $f : [a, b] \rightarrow X$, με $f(a) = x$, $f(b) = y$, που συνδέει δύο σημεία $x, y \in X$. Στη συνέχεια, το $[x, y]$ θα αναφέρεται επίσης ως γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα σημεία $x, y \in X$.

Τα σημεία ενός γεωδαισιακού τμήματος $[x, y]$ δέχονται μια φυσική παραμέτρηση από το διάστημα $[0, 1]$, όπου σύμφωνα με αυτή το σημείο z του τμήματος $[x, y]$, που βρίσκεται σε απόσταση $t \cdot |x - y|$ από το x , θα παριστάνεται ως $(1 - t) \cdot x + t \cdot y$.

Λήμμα 2.5.1: [34, σελ.40] Έστω ένα γεωδαισιακό τμήμα $[x, y]$ σε ένα μετρικό χώρο X και $g_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow X$, $g_2 : [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow X$ δύο γεωδαισιακές, των οποίων οι εικόνες είναι το $[x, y]$. Τότε τα διαστήματα $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$ (του $\mathbb{R}$) έχουν το ίδιο μήκος και υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός a ώστε $g_2(t) = g_1(t + a)$ για όλα τα $t \in [\alpha_2, \beta_2]$. Προφανώς, οι δρόμοι g_1, g_2 έχουν το ίδιο μήκος.

Το μήκος ενός γεωδαισιακού τμήματος $[x, y]$ σε ένα μετρικό χώρο X , ορίζεται ως η απόσταση $d(x, y)$ και ισούται με το μήκος ενός τυχαίου δρόμου στο X , του οποίου η εικόνα είναι το $[x, y]$.

Ορισμός 2.5.2: Ο μετρικός χώρος X καλείται **γεωδαισιακός** αν κάθε δύο σημεία του συνδέονται με γεωδαισιακό τμήμα.

Πρόταση 2.5.3: [34, σελ.44] Ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος, είναι χώρος μήκους.

Θεώρημα 2.5.4: (Cohn – Vossen) [35, σελ.317]

Αν ο (X, d) είναι ένας τοπικά συμπαγής, πλήρης χώρος μήκους, τότε είναι και γεωδαισιακός χώρος, ενώ οι μπάλλες πεπερασμένης ακτίνας είναι συμπαγείς.

Θεώρημα 2.5.5: (Hopf – Rinow) [2, σελ.14]

Αν ο (X, d) είναι ένας γνήσιος χώρος μήκους, τότε είναι και γεωδαισιακός.

Παραδείγματα 2.5.6:

- (1) Για κάθε $n \geq 0$ ο Ευκλείδειος χώρος E^n είναι γεωδαισιακός.
- (2) Για κάθε $n \geq 2$ ο Υπερβολικός χώρος H^n είναι γεωδαισιακός.
- (3) Αν $f : [a, b] \rightarrow X$ είναι μια γεωδαισιακή, τότε το μήκος της είναι το ελάχιστο μήκος όλων των δρόμων μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ ενώ $d(f(a), f(b)) = |a - b|$.
- (4) Ο χώρος $R^2 - \{0\}$ με την επαγόμενη μετρική είναι χώρος μήκους, αλλά όχι γεωδαισιακός.

2.6 Υπερβολικοί Χώροι κατά Gromov

Ορισμός 2.6.1: [23, σελ.6] Έστω X μετρικός χώρος και $x_0 \in X$ ένα σημείο βάσης (basepoint) του X . Συμβολίζουμε με $d(x, y)$ την απόσταση μεταξύ δύο σημείων $x, y \in X$. Το **γινόμενο Gromov** των $x, y \in X$, είναι ο μη αρνητικός αριθμός: $(x \cdot y) = (x \cdot y)_{x_0} = \frac{1}{2}[d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)]$.

Ισχύουν οι σχέσεις:

i) $(x \cdot y) = (y \cdot x)$, **ii)** $(x \cdot x) > 0$ και **iii)** $(x \cdot x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, όμως το γινόμενο Gromov δεν είναι εσωτερικό γινόμενο (καθώς δεν είναι διγραμμικό).

Ορισμός 2.6.2: [23, σελ.6] Έστω $\delta \in \mathbb{R}$ μη-αρνητικός. Ο μετρικός χώρος X καλείται **δ-υπερβολικός** αν: $(x \cdot y) \geq \min[(x \cdot z), (y \cdot z)] - \delta$, για κάθε $x, y, z \in X$ και κάθε εκλογή σημείου βάσης x_0 .

(Ο μετρικός χώρος X καλείται **υπερβολικός**, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός δ , ώστε ο X να είναι δ-υπερβολικός).

Σε ένα υπερβολικό χώρο το γινόμενο Gromon δύο σημείων είναι ομοιόμορφα κοντά με την απόσταση του σημείου βάσης από οποιοδήποτε γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα σημεία αυτά. Ειδικότερα:

Πρόταση 2.6.3: [23, σελ.7] Έστω X γεωδαισιακός χώρος που είναι δ-υπερβολικός και έστω x_0 σημείο βάσης αυτού. Αν $x, y \in X$ τότε:

$$d(x_0, [x, y]) - 4\delta \leq (x \cdot y) \leq d(x_0, [x, y]), \text{ για κάθε γεωδαισιακό τμήμα } [x, y] \text{ που συνδέει τα } x, y.$$

Έστω H^2 το υπερβολικό επίπεδο και (X, d) μετρικός και γεωδαισιακός χώρος. Ένα **γεωδαισιακό τρίγωνο** T (στο εξής θα το αποκαλούμε απλά **τρίγωνο**) στο χώρο X , είναι μια τριάδα (a, b, c) σημείων του X που λέγονται **κορυφές**, καθώς και μια τριάδα $[a, b], [b, c], [a, c]$, γεωδαισιακών τμημάτων τα οποία είναι οι πλευρές που τις συνδέουν.

Στο υπερβολικό επίπεδο H^2 τα τρίγωνα δεν έχουν τις ίδιες ιδιότητες όπως αυτά στο Ευκλείδειο επίπεδο. Για παράδειγμα, στο Ευκλείδειο επίπεδο, σε ένα «ψηλό» ισοσκελές τρίγωνο, το μέσο της τρίτης πλευράς μεταξύ των ίσων σκελών απέχει πολύ από τις άλλες δύο πλευρές, γεγονός που δε μπορεί να συμβεί στο υπερβολικό επίπεδο (βλ. και παρακάτω, Παρατήρηση 2.6.7 (4)). Σε αυτή την ιδιότητα οφείλεται ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 2.6.4: [1, σελ.9] Δοθέντων τριών σημείων $x, y, z \in X$ λέμε ότι το τρίγωνο (x, y, z) των γεωδαισιακών που τα ενώνουν είναι **δ -slim** αν για κάθε σημείο w στο γεωδαισιακό τμήμα $[x, y]$ έχουμε ότι:

$$\min[d(w, [x, z]), d(w, [y, z])] \leq \delta.$$

Λέμε ότι τρίγωνα στο χώρο X είναι **slim** αν υπάρχει σταθερά δ ώστε όλα τα γεωδαισιακά τρίγωνα στο X να είναι δ -slim.

Ορισμός 2.6.5: [1, σελ.10] Δοθέντος ενός γεωδαισιακού τριγώνου $T = (x, y, z) \in X$, έστω $\bar{T} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ένα Ευκλείδειο τρίγωνο του οποίου οι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος με τις αντίστοιχες πλευρές του T . Υπάρχει μια φυσική απεικόνιση ταύτισης $f : T \rightarrow \bar{T}$, ενώ ο εγγεγραμμένος κύκλος του $\bar{T}$ εφάπτεται των πλευρών $[\bar{x}, \bar{y}]$, $[\bar{x}, \bar{z}]$, $[\bar{y}, \bar{z}]$ στα σημεία c_z, c_y, c_x αντίστοιχα, ώστε $d(\bar{x}, c_z) = d(\bar{x}, c_y)$, $d(\bar{y}, c_z) = d(\bar{y}, c_x)$ και $d(\bar{z}, c_y) = d(\bar{z}, c_x)$. Τα σημεία c_z, c_y, c_x ονομάζονται **εσωτερικά σημεία του τριγώνου T** και σημειώνουμε ότι:

$$d(\bar{x}, c_z) = \frac{1}{2} [d(\bar{x}, c_z) + d(\bar{x}, c_y)] = \frac{1}{2} [d(\bar{x}, z) + d(\bar{x}, y) - d(\bar{z}, y)].$$

Υπάρχει μοναδική απεικόνιση (της οποίας ο περιορισμός διατηρεί την απόσταση) i_T ανάμεσα στο τρίγωνο $\bar{T}$ και στο τρίποδο R_T , ένα δέντρο με μια κορυφή w βαθμού 3 και κορυφές x', y', z' , βαθμού ένα έκαστη, ώστε $d(w, z') = d(\bar{z}, c_y) = d(\bar{z}, c_x)$, $d(w, x') = d(\bar{x}, c_y) = d(\bar{x}, c_z)$ και $d(w, y') = d(\bar{y}, c_x) = d(\bar{y}, c_z)$.

Αν f_T είναι η απεικόνιση σύνθεσης $f_T = i_T \circ f : T \rightarrow R_T$, τότε το τρίγωνο $T = (x, y, z)$ είναι **δ -thin** αν για κάθε $p, q \in T$,
 $f_T(p) = f_T(q) \Rightarrow d_X(p, q) \leq \delta$.

Λέμε ότι τρίγωνα στο χώρο X είναι **thin** αν υπάρχει σταθερά δ ώστε όλα τα γεωδαισιακά τρίγωνα στο X να είναι δ -thin.

Πρόταση 2.6.6: [1, σελ.16] Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα σε ένα μετρικό γεωδαισιακό χώρο X .

- (i) Τα τρίγωνα είναι slim στο χώρο X .
- (ii) Τα τρίγωνα είναι thin στο χώρο X .
- (iii) Ο χώρος X είναι δ -υπερβολικός.

Παρατηρήσεις 2.6.7:

(1) Τι δηλώνει το γινόμενο Gromov;

Έστω Ευκλείδειο τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο εγγεγραμμένος κύκλος αυτού, με σημεία επαφής Δ, E, Z , αντίστοιχα. Θεωρούμε ότι το $AB\Gamma$ είναι το τρίγωνο του οποίου οι πλευρές έχουν το ίδιο μήκος με τις αντίστοιχες πλευρές του τριγώνου xyx_0 , όπου x_0 το σημείο βάσης και $x, y \in X$.

Κατασκευάζουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο αυτού με αντίστοιχα σημεία επαφής c_x, c_y, c_{x_0} και έχουμε το ακόλουθο σχήμα:

Εύκολα βλέπουμε ότι: $(x \cdot y) = (x \cdot y)_{x_0} = x_0 c_x = x_0 c_y$.

- (2) Σε υπερβολικούς χώρους, το γινόμενο Gromov μετράει για πόσο χρόνο δύο γεωδαισιακές προχωρούν ευρισκόμενες αρκετά κοντά η μία με την άλλη. Ειδικότερα, αν x, y, z είναι σημεία ενός δ-υπερβολικού μετρικού χώρου (X, d) , τότε αρχικά τμήματα μήκους $(y \cdot z)_x$ από οποιοσδήποτε γεωδαισιακές $[x, y]$ και $[x, z]$, είναι 2δ-κοντά. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή το γινόμενο Gromov $(y \cdot z)_x$ δίνει μια 2δ-προσέγγιση της απόστασης του x από τη γεωδιασιακή $[y, z]$.

- (3) Ο υπερβολικός χώρος κατά Gromov γενικεύει την έννοια του H^2 .

- (4) Το δ φράσσει τις αποστάσεις από εσωτερικό σημείο τριγώνου προς τις πλευρές (μιμείται το H^2 , σε αντίθεση με το R^2).

Πράγματι, σε Ευκλείδειο χώρο για όμοια ισόπλευρα τρίγωνα, καθώς ο λόγος ομοιότητας μεγαλώνει, έχουμε ότι η απόσταση του σημείου M από τις AB και AΓ δεν είναι φραγμένη, ενώ στο H^2 τα τρίγωνα τείνουν σε ένα ιδεώδες τρίγωνο και η συγκεκριμένη απόσταση είναι φραγμένη! (όπως δείχνει το σχήμα που ακολουθεί)

Παραδείγματα 2.6.8:

- (1) Κάθε δέντρο είναι 0-υπερβολικός χώρος (για τα δέντρα βλ. παρακάτω σελ. 43)
- (2) Ο H^2 είναι δ -υπερβολικός χώρος με $\delta=2$.
- (3) Κάθε πλήρης, απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann με καμπυλότητα τομής $\leq -a^2$, είναι δ -υπερβολικός χώρος με $\delta = \frac{\log 3}{a}$.

2.7 Χώροι CAT(-1)

Έστω H^2 το υπερβολικό επίπεδο και (X, d) μετρικός και γεωδαισιακός χώρος. Δοθέντος ενός γεωδαισιακού τριγώνου $T = (x, y, z) \in X$, το τρίγωνο $\bar{T} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ του H^2 καλείται **τρίγωνο σύγκρισης** για το T , όταν οι πλευρές του $\bar{T}$ έχουν το ίδιο μήκος με τις αντίστοιχες πλευρές του T και συγχρόνως υπάρχει απεικόνιση f από την ξένη ένωση των πλευρών του T στις πλευρές του $\bar{T}$, ώστε η f να είναι συμβιβαστή στις κορυφές του T και ο περιορισμός αυτής σε κάθε πλευρά του T να είναι ισομετρία. Η f καλείται **απεικόνιση σύγκρισης** για το T . (Το τρίγωνο σύγκρισης καθώς και η απεικόνιση σύγκρισης για το T είναι μοναδικά μέσω ισομετρίας του H^2).

Ορισμός 2.7.1: [35, σελ.320] Ένα γεωδαισιακό τρίγωνο T στο χώρο X λέμε ότι ικανοποιεί την **ανισότητα CAT(-1)** αν η απεικόνιση σύγκρισης f δεν ελαττώνει την απόσταση, δηλαδή για κάθε $x, y \in T$, ισχύει:

$$d_X(x, y) \leq d_{H^2}(f(x), f(y)).$$

Δηλαδή, αν p, q σημεία δύο πλευρών του T και $\bar{p}, \bar{q}$ αντίστοιχα σημεία του $\bar{T}$ ληφθέντα σε ίσες, αντίστοιχα, αποστάσεις από τις αντίστοιχες κορυφές, τότε: $d_X(p, q) \leq d_{H^2}(\bar{p}, \bar{q})$.

Ο X καλείται **χώρος CAT(-1)**, αν κάθε γεωδαισιακό τρίγωνο σε αυτόν ικανοποιεί την ανισότητα CAT(-1), ενώ καλείται **χώρος τοπικά CAT(-1)**, αν κάθε σημείο σε αυτόν έχει γειτονιά που είναι χώρος CAT(-1) ως προς την επαγόμενη μετρική.

Ορισμός 2.7.2: [12, σελ.159] Ένας μετρικός χώρος X λέμε ότι είναι καμπυλότητας ≤ -1 αν είναι χώρος τοπικά CAT(-1).

Σημείωση 2.7.3: Ο παραπάνω ορισμός οφείλεται στον A.D.Alexandron και δίνει μια πολύ καλή ερμηνεία στην έννοια του άνω φράγματος για την καμπυλότητα ενός αυθαίρετου μετρικού χώρου. Τα κλασσικά θεωρήματα σύγκρισης της Διαφορικής Γεωμετρίας δείχνουν ότι αν μια πολλαπλότητα Riemann είναι επαρκώς λεία (για παράδειγμα αν είναι C^3), τότε έχει καμπυλότητα ≤ -1 αν και μόνο αν όλες οι καμπυλότητες τομής αυτής είναι ≤ -1 .

Ο συμβολισμός "CAT(-1)" οφείλεται στον M.Gromov, όπου τα αρχικά γράμματα είναι προς τιμήν των E. Cartan, A.D. Alexandron και V.A. Toponogon οι οποίοι θεώρησαν παρόμοιες συνθήκες.

Συνέπειες 2.7.4 (του Ορισμού 2.7.1):

- Αν ένας μετρικός γεωδαισιακός χώρος X ικανοποιεί την ανισότητα CAT(-1), τότε είναι δ -υπερβολικός χώρος με $\delta = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{-(-1)}}$.
- Τα γεωδαισιακά τρίγωνα που ικανοποιούν την ανισότητα CAT(-1) σε ένα μετρικό χώρο, είναι λεπτότερα εκείνων του H^2 .

Θεμελιώδες Λήμμα Συγκόλλησης 2.7.5: (Gromov - Ballman) [35, σελ.321]

Έστω $(a_0, b, c_0), (a_1, b, c_1)$ δύο γεωδαισιακά τρίγωνα σε ένα μετρικό χώρο X με κοινή πλευρά b και κοινές κορυφές A, C . Αν τα $(a_0, b, c_0), (a_1, b, c_1)$ ικανοποιούν την CAT(-1) ανισότητα, τότε και το τρίγωνο $(a_0, a_1, c_0 \cup c_1)$ ικανοποιεί την ανισότητα CAT(-1).

Ορισμός 2.7.6: [35, σελ.323] Ένας **κυρτός χώρος** είναι ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος (X, d) , τέτοιος ώστε για κάθε ζεύγος γεωδαισιακών του (με φυσική παραμέτρηση), $f : [0,1] \rightarrow X$ και $g : [0,1] \rightarrow X$, η απεικόνιση $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται καθώς $x \mapsto d(f(x), g(x))$ να είναι κυρτή, δηλαδή για κάθε $x, y, t \in [0,1]$ έχουμε:

$$d[f(tx + (1-t)y), g(tx + (1-t)y)] \leq td(f(x), g(x)) + (1-t)d(f(y), g(y))$$

Παράδειγμα 2.7.7: Ο χώρος $\mathbb{R}^2$ είναι κυρτός.

Πρόταση 2.7.8: [35, σελ.323] Ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος που ικανοποιεί την ανισότητα CAT(-1) είναι κυρτός.

Ορισμός 2.7.9: [35, σελ.323] Ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι **τοπικά κυρτός**, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει γειτονιά U του x ώστε κάθε δύο σημεία της U να συνδέονται με γεωδαισιακή που περιέχεται στη U και για κάθε ζεύγος γεωδαισιακών (με φυσική παραμέτρηση) $f : [0,1] \rightarrow X$ και $g : [0,1] \rightarrow X$, με εικόνα που περιέχεται στη U , η απεικόνιση $x \mapsto d(f(x), g(x))$ είναι κυρτή.

Θεώρημα 2.7.10: (Gromov) [35, σελ.325]

Ένας πλήρης, απλά συνεκτικός, τοπικά κυρτός, γεωδαισιακός μετρικός χώρος X είναι κυρτός.

Πόρισμα 2.7.11: (Cartan - Hadamard - Alexandrov - Gromov) [35, σελ.327]

Έστω X πλήρης, απλά συνεκτικός, γεωδαισιακός χώρος με καμπυλότητα ≤ -1 . Τότε ο X ικανοποιεί την ανισότητα CAT(-1). (Δηλαδή κάθε χώρος τοπικά CAT(-1) ο οποίος είναι και απλά συνεκτικός, τελικά είναι χώρος CAT(-1)).

Πρόταση 2.7.12: [12, σελ.160] Έστω X ένας πλήρης γεωδαισιακός μετρικός χώρος που ικανοποιεί την ανισότητα CAT(-1). Τότε κάθε τοπικό γεωδαισιακό τμήμα του X , είναι γεωδαισιακό τμήμα.

Υποθέτουμε ότι X_1, X_2 είναι τοπικά συμπαγείς και πλήρεις χώροι μήκους και έστω ότι $A_1 \subset X_1$ και $A_2 \subset X_2$ είναι κλειστά και κυρτά υποσύνολα. Αν υπάρχει ισομετρία $i : A_1 \rightarrow A_2$, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να συγκολλήσουμε τους χώρους X_1, X_2 , κατά μήκος των A_1, A_2 , ώστε να προκύψει χώρος $Y = X_1 \cup X_2$. Οι δομές των X_1, X_2 καθορίζουν μια δομή μήκους στον Y , ο οποίος γίνεται τοπικά συμπαγής και πλήρης χώρος μήκους.

Μια εφαρμογή του Λήμματος 2.7.5 είναι το εξής:

Πόρισμα 2.7.13: [3, σελ.192] Αν όλα τα τρίγωνα στους χώρους X_1, X_2 ικανοποιούν την ανισότητα CAT(-1), τότε και ο χώρος $Y = X_1 \cup X_2$ ικανοποιεί την ανισότητα CAT(-1).

Παραδείγματα 2.7.14:

(1) Το συμπλήρωμα μιας ανοικτής ορόμπαλλας του H^2 , όταν αυτή έχει εφοδιασθεί με την επαγόμενη μετρική μήκους, είναι χώρος CAT(-1).

(2) Ένα R -δέντρο είναι ένας μετρικός χώρος ώστε:

- ο Υπάρχει μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα $[x, y]$ που ενώνει κάθε ζεύγος σημείων x, y του χώρου.
- ο Αν $[y, x] \cap [x, z] = \{x\}$ τότε: $[y, x] \cup [x, z] = [y, z]$.

Τα R -δέντρα είναι χώροι CAT(-1).

2.8 Το Σύνоро

Η μελέτη του συνόρου, καθώς και του ομοιομορφικού τύπου αυτού, είναι εξαιρετικά σημαντική, καθώς αυτή συνδέεται με τη γεωμετρία του χώρου. Κάθε πολλαπλότητα M αρνητικής καμπυλότητας, λαμβάνεται ως ο χώρος πηλίκου του καθολικού καλύμματος του χώρου ως προς μια διακριτή ομάδα ισομετριών G που δρα σε αυτόν: $M = \tilde{M}/G$, $G \cong \pi_1(M)$. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η δράση της ομάδας G επεκτείνεται από το M στο σύνορο του καθολικού καλύμματος, $\partial\tilde{M}$, οπότε η γεωμετρία της πολλαπλότητας M συνδέεται άμεσα με τη δράση της G στο $\partial\tilde{M}$ (για παράδειγμα, η G καθορίζει είδη ισομετριών, γεωδαισιακών κλπ.).

Ο Μ. Gromov, στο πλαίσιο της μελέτης πέραν των πολλαπλοτήτων (π.χ. πολύεδρα), θεώρησε χώρους που είναι εφοδιασμένοι με μετρική που δεν είναι Riemann, αλλά ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες: είναι πλήρεις, γεωδαισιακοί και CAT(-1). Σε τέτοιους χώρους έχει ενδιαφέρον η μελέτη του συνόρου του καθολικού τους καλύμματος ως προς τον τοπολογικό τύπο αυτού (για παράδειγμα αν είναι συνεκτικό κλπ). Αντίστοιχη μελέτη γίνεται επίσης από πολλούς άλλους ερευνητές (για παράδειγμα Benakli, Haglund, Kapovich κ.α).

Ορισμός 2.8.1: [23, σελ.9] Έστω X ένας υπερβολικός χώρος και x_0 σημείο βάσης αυτού. Θα λέμε ότι η ακολουθία (x_n) σημείων του X **συγκλίνει στο άπειρο**, αν το γινόμενο Gromov $(x_n \cdot x_p)$ τείνει στο άπειρο, καθώς το (n, p) τείνει στο άπειρο.
(Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της εκλογής του x_0).

Ορισμός 2.8.2: [23, σελ.9] Έστω X ένας υπερβολικός χώρος. Ορίζουμε την ακόλουθη σχέση $\mathcal{R}$ στο σύνολο των ακολουθιών του X :

$$(x_n) \mathcal{R} (y_n) \Leftrightarrow (x_n \cdot y_n) \rightarrow \infty \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Ο περιορισμός της σχέσης $\mathcal{R}$ στο σύνολο των ακολουθιών που συγκλίνουν στο άπειρο, είναι σχέση ισοδυναμίας το σύνολο πηλίκου της οποίας ορίζουμε ως το **(υπερβολικό) σύνορο** του χώρου X και το συμβολίζουμε ∂X .

Θα λέμε ότι η ακολουθία (x_n) σημείων του X **συγκλίνει σε σημείο του συνόρου**, δηλαδή $(x_n) \rightarrow \xi \in \partial X$ αν η (x_n) συγκλίνει στο άπειρο και ξ είναι η κλάση ισοδυναμίας της (x_n)

Η ακόλουθη πρόταση προκύπτει άμεσα από τους παραπάνω ορισμούς:

Πρόταση 2.8.3: [23, σελ.9] Έστω (x_n) και (y_n) ακολουθίες σημείων του X .

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε σημείο ξ του ∂X καθώς επίσης ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός C ώστε $d(x_n, y_n) \leq C$ για κάθε n . Τότε η (y_n) συγκλίνει επίσης στο ξ .

Παρατήρηση 2.8.4: Ως συνέπεια της Πρότασης 2.6.3 έχουμε ότι για ένα χώρο X που είναι δ-υπερβολικός και γεωδαισιακός, αν εκλέξουμε, για κάθε n , ένα γεωδαισιακό τμήμα $[x_n, y_n]$ που συνδέει τα $x, y \in X$, τότε έχουμε $(x_n) \mathcal{R} (y_n)$ αν και μόνο αν η απόσταση από το σημείο βάσης προς το τμήμα $[x_n, y_n]$ τείνει στο άπειρο, όταν το n τείνει στο άπειρο.

Στη συνέχεια δίνουμε ένα άλλο ορισμό για το σύνορο (πιο γεωμετρικό), όταν ο χώρος X είναι γεωδαισιακός.

Ορισμός 2.8.5: [32, σελ.4] Δύο γεωδαισιακές ακτίνες $r_1 : [0, +\infty) \rightarrow X$, $r_2 : [0, +\infty) \rightarrow X$ θα λέγονται **ισοδύναμες** και θα γράφουμε $r_1 \sim r_2$, όταν υπάρχει $K > 0$ έτσι ώστε για κάθε $t \geq 0$, $d(r_1(t), r_2(t)) \leq K$.

Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, στο σύνολο των γεωδαισιακών ακτίνων. Την αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας τη συμβολίζουμε με $[r]$.

Συμβολίζουμε με R_{x_0} το σύνολο των γεωδαισιακών ακτίνων που

ξεκινούν από συγκεκριμένο σημείο βάσης x_0 του X και το εφοδιάζουμε με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή (όπως παρουσιάζεται παρακάτω).

Ο χώρος πηλίκου $R_{x_0} / \sim$ ο οποίος εφοδιάζεται με την τοπολογία πηλίκου, ορίζεται ως το **οπτικό (visual) σύνορο** του X και συμβολίζεται με $\partial_{vis} X$.

Θεώρημα 2.8.6: Η απεικόνιση $\varphi: \partial_{vis} X \rightarrow \partial X$, όπου $x_n = r(t_n)$ καθώς $t_n \rightarrow +\infty$
 $[r] \mapsto (x_n)$

είναι ομοιομορφισμός.

Στη συνέχεια προχωρούμε στη **συμπαγοποίηση** του χώρου χρησιμοποιώντας το οπτικό σύνορο: (βλ. σχετικά [23, σελ.11] και [12, σελ.429])

Έστω x_0 το σημείο βάσης του X και $\bar{R}_{x_0}$ το σύνολο των γεωδαισιακών $r: I \rightarrow X$ όπου $I = [0, T]$, $T \geq 0$ ή το $[0, +\infty)$ με $r(0) = x_0$. Στην περίπτωση όπου $I = [0, T]$, επεκτείνουμε κάθε $r \in \bar{R}_{x_0}$ από το $[0, T]$ στο $[0, +\infty)$, θεωρώντας ότι $r(t) = r(T)$ για κάθε $t \geq T$. Το $\bar{R}_{x_0}$ είναι ένα σύνολο ισοσυνεχών απεικονίσεων από το $[0, +\infty)$ στο X και το οποίο εφοδιάζουμε με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή σύνολα. Συγκεκριμένα, ορίζουμε τη σύγκλιση στο $\bar{R}_{x_0}$ ως εξής:

Θεωρούμε τις γεωδαισιακές r_n με $r(0) = x_0$ και $r_n(\infty) = x_n$, έτσι ώστε κάθε υπακολουθία της (r_n) να περιέχει υπακολουθία η οποία να συγκλίνει σε γεωδαισιακή ακτίνα r με $r(\infty) = x$. Δηλαδή, $r_n (n \rightarrow \infty) \rightarrow r$ αν και μόνο αν:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall T > 0: |r_n(t) - r(t)| \leq \varepsilon, \forall n \geq N, \forall t \in [0, T]$. Πρακτικά οι r_n

«πέφτουν» όσο κοντά θέλουμε στην r για το συμπαγές $[0, T]$. Τότε $x_n \rightarrow x$.

(“Uniform Convergence On Compact Sets”)

Ονομάζουμε τις παραπάνω γεωδαισιακές **γενικευμένες**, ενώ υπάρχει μια φυσική απεικόνιση «επί», $\tau : \overline{R}_{x_0} \rightarrow X \cup \partial_{vis} X$ που ορίζεται ως εξής $\tau(\sigma) = \sigma(\infty)$, για $\sigma \in \overline{R}_{x_0}$. Το χώρο $\overline{X} = X \cup \partial_{vis} X$, τον εφοδιάζουμε με την τοπολογία πηλίκου που ορίζεται μέσω της απεικόνισης τ : τα κλειστά υποσύνολα $B \subset \overline{X}$ είναι εκείνα που ικανοποιούν τη συνθήκη: $[x_n \in B, \forall n > 0 \text{ και } x_n \rightarrow x] \Rightarrow x \in B$.

Υποθέτοντας επιπλέον ότι ο χώρος X είναι γεωδαισιακός και γνήσιος, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.8.7: [23, σελ.11] Ο χώρος $X \cup \partial_{vis} X$ είναι συμπαγής και το X είναι ανοικτό και πυκνό σε αυτόν.

Παράδειγμα 2.8.8: Αν ο χώρος X είναι ένα $\mathbb{R}$ -δέντρο, οπότε είναι γνήσιος, γεωδαισιακός και CAT(-1), η απεικόνιση που αντιστοιχίζει στη γεωδαισιακή r το σημείο $r(\infty)$, είναι ένας ομοιομορφισμός από το σύνολο των γεωδαισιακών ακτίνων που ξεκινούν από σημείο βάσης, $x_0 \in X$, εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή σύνολα του $[0, +\infty)$, στο $\partial_{vis} X$. Επιπλέον αποδεικνύεται ότι το $\partial_{vis} X$ στην περίπτωση αυτή είναι ολικά μη συνεκτικό.

Παράδειγμα 2.8.9: $\partial H^2 \cong S^1$, όπου έχουμε συμπαγοποίηση του B^2 με το S^1 (Σύνоро Ευκλείδειας μπάλλας με μετρική: $ds^2 = dx^2 + dy^2$).

Προκειμένου να θεωρήσουμε μετρικές στο σύνορο ενός υπερβολικού χώρου X , επεκτείνουμε τον ορισμό του γινομένου Gromon στο $\partial_{vis} X$.

Ορισμός 2.8.10: [12, σελ.432] Έστω X ένας δ-υπερβολικός χώρος με σημείο βάσης x_0 .

Επεκτείνουμε το γινόμενο Gromon στο $\bar{X} = X \cup \partial_{vis} X$ μέσω της σχέσης: $(x \cdot y)_{x_0} = \sup \liminf_{i,j \rightarrow \infty} (x_i \cdot y_j)_{x_0}$, όπου το supremum λαμβάνεται από τις ακολουθίες $(x_i), (y_j)$ του X , ώστε: $x = \lim x_i$ και $y = \lim y_j$.

Ορισμός 2.8.11: [12, σελ.434] Έστω X ένας δ-υπερβολικός χώρος με σημείο βάσης x_0 .

Μια μετρική d στο $\partial_{vis} X$, καλείται **οπτική (visual) μετρική** με παράμετρο α , αν υπάρχουν σταθερές $k_1, k_2 > 0$, έτσι ώστε για κάθε $\xi, \xi' \in \partial_{vis} X$ να ισχύει: $k_1 \cdot \alpha^{-(\xi \cdot \xi')_{x_0}} \leq d(\xi, \xi') \leq k_2 \cdot \alpha^{-(\xi \cdot \xi')_{x_0}}$.

Σημείωση 2.8.12: Ο M. Bourdon [9] έχει αποδείξει ότι αν ο X είναι γνήσιος CAT (-1) χώρος, τότε για κάθε $\alpha \in (1, e]$ και για κάθε $x_0 \in X$, ο τύπος

$$d(\xi, \xi') = e^{-(\xi \cdot \xi')_{x_0}}, \text{ ορίζει μια μετρική στο } \partial_{vis} X.$$

Πρόταση 2.8.13: [23, σελ.12] Αν ο X είναι δέντρο έχουμε: $d(\xi, \xi') = \left(\frac{2}{\log \alpha} \right) \alpha^{-(\xi \cdot \xi')_{x_0}}$,

για όλα τα σημεία $\xi, \xi' \in \partial_{vis} X$ και για κάθε $\alpha > 1$.

(Στην περίπτωση του δέντρου, η επέκταση του γινομένου Gromon στο $\partial_{vis} X$ έχει μια πολύ απλή γεωμετρική ερμηνεία:

για σημεία $\xi, \xi' \in \partial_{vis} X$, το $(\xi \cdot \xi')$ είναι το μήκος του κοινού δρόμου των δύο γεωδαισιακών ακτίνων που ξεκινούν από το x_0 και καταλήγουν στα ξ και ξ' αντίστοιχα).

Έστω X ένας χώρος CAT (-1) με σημείο βάσης x_0 . Δοθέντος ενός γεωδαισιακού τριγώνου $T = (x_0, y, z) \in X$, θεωρούμε το τρίγωνο σύγκρισης

$$\bar{T} = (\bar{x}_0, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{H}^2 \text{ του } T \text{ και ορίζουμε τη γωνία: } a_{x_0}(y, z) = \sin \frac{y\hat{x}_0z}{2}.$$

Ισχύει το ακόλουθο σημαντικό λήμμα, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια:

Λήμμα 2.8.14: [8, σελ.87] Αν $\xi, \xi' \in \partial_{vis} X$ και y, y' σημεία των γεωδαισιακών ακτίνων

που συνδέουν το σημείο βάσης x_0 του X με τα ξ, ξ'

αντίστοιχα, τότε ισχύει: $\lim_{\substack{y \rightarrow \xi \\ y' \rightarrow \xi'}} a_{x_0}(y, y') = d_{x_0}(\xi, \xi')$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : *Επί του Συνόρου των* *Δισδιάστατων Ιδεωδών Πολυέδρων*

3.1 Κατασκευή και Ιδιότητες Ιδεωδών Πολυέδρων Διάστασης 2

Η μελέτη του ομοιομορφικού τύπου του συνόρου ενός CAT(-1) χώρου είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα και αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με αυτό, βλ. σχετικά [5], [29], [32]. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε κάποιες ιδιότητες του συνόρου ενός ιδεωδούς πολυέδρου διάστασης 2. Ειδικότερα, θεωρούμε μια οικογένεια $\mathcal{T}$ ιδεωδών τριγώνων του H^2 , τα οποία συγκολλούμε κατά μήκος των πλευρών τους, μέσω ισομετριών. Συμβολίζουμε με X το χώρο που προκύπτει και προχωρούμε στη μελέτη του συνόρου του χώρου αυτού. Τα αποτελέσματα της προσπάθειας αυτής είναι πρωτότυπα και έχουν δημοσιευθεί στην εργασία με τίτλο: “On the boundary of 2-dimensional ideal polyhedra”, [39].

Θεωρούμε την ξένη ένωση $\bigcup T$, ιδεωδών τριγώνων του H^2 , όπου το σύνορο ενός ιδεωδούς τριγώνου T το συμβολίζουμε με ∂T , την οικογένεια F των ισομετριών $f : e \rightarrow e'$, όπου e, e' είναι πλευρές των υπερβολικών τριγώνων T, T' αντίστοιχα, καθώς και τη σχέση ισοδυναμίας: « $x \sim y$ αν και μόνο αν $x \in \partial T, y \in \partial T'$ και υπάρχει ισομετρία f , με $y = f(x)$ (από την οικογένεια των παραπάνω ισομετριών) ».

Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω σημεία x, y μπορεί να ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές του ίδιου τριγώνου T . Αν ορίσουμε το χώρο $X = \bigcup T / \sim$ και την απεικόνιση προβολής $\pi : \bigcup T \rightarrow X$, τότε στο X ισχύουν οι ακόλουθοι ορισμοί:

Ορισμοί 3.1.1: 1. Μια **πλευρά e στο χώρο X** (δηλαδή ένα μονοδιάστατο ανοικτό simplex του X) είναι η εικόνα στο X μιας πλευράς ιδεώδους τριγώνου $T \in \mathcal{T}$.

2. Μια **ιδεώδης κορυφή (ή cusp) στο χώρο X** , είναι η εικόνα στο X μιας ιδεώδους κορυφής κάποιου τριγώνου $T \in \mathcal{T}$.

3. Μια πλευρά e του X λέμε ότι έχει **τάξη (ή δείκτη) k** , $k > 1$, αν η e προκύπτει μετά από ταύτιση k το πλήθος πλευρών ιδεωδών τριγώνων της οικογένειας $\mathcal{T}$.

4. Αν μια πλευρά e του X έχει τάξη $k > 2$, τότε θα ονομάζεται **ανώμαλη πλευρά (singular edge)**.

Παρατήρηση 3.1.2: Σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε, μια πλευρά e του X ορίζεται ως ανώμαλη, όταν: « για κάθε σημείο $p \in e$ η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(p)$ περιέχει περισσότερα από δύο σημεία στην ξένη ένωση $\bigcup T$ ».

Για το χώρο X θεωρούμε ότι ισχύουν οι εξής συνθήκες:

Σ1. Είναι τοπικά πεπερασμένος, δηλαδή κάθε σημείο του ανήκει σε πεπερασμένο πλήθος πλευρών.

Σ2. Κάθε πλευρά του ανήκει σε τουλάχιστον δύο τρίγωνα.

Σ3. Η μετρική $d_X(\cdot, \cdot)$ είναι πλήρης.

Ο X γίνεται μετρικός χώρος εφοδιασμένος με τη μετρική μήκους, $d_X(\cdot, \cdot)$, η οποία προκύπτει από τα ιδεώδη τρίγωνα ως εξής: το μήκος $l_X(f)$ ενός δρόμου $f: [\alpha, \beta] \rightarrow X$, ορίζεται ως το άθροισμα των μηκών των συνιστωσών τομής της f με τα τρίγωνα στο X . Για $x, y \in X$ ορίζουμε ως $d_X(x, y)$ να είναι το infimum του συνόλου των μηκών

όλων των δρόμων που συνδέουν τα x, y . Καθώς ο χώρος μας είναι τοπικά πεπερασμένος έχουμε ότι η $d_x(x, y)$ είναι μετρική, [15, πρόταση 1.2].

Παρατήρηση 3.1.3: Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.4 έχουμε ότι ο X είναι χώρος γεωδαισιακός, καθώς είναι τοπικά συμπαγής και πλήρης, [27].

Η πληρότητα της μετρικής $d_x(\cdot, \cdot)$ θέτει συγκεκριμένους περιορισμούς στις ισομετρίες συγκόλλησης μεταξύ των πλευρών των ιδεωδών τριγώνων της $\mathcal{T}$:

Αφαιρώντας ανοικτές περιοχές γύρω από τις ιδεώδεις κορυφές, παίρνουμε συμπαγή υπόχωρο του X ο οποίος είναι πλήρης με τον περιορισμό της μετρικής πάνω σε αυτόν. Επομένως η μελέτη της πληρότητας ανάγεται στην πληρότητα της μετρικής $d_x(\cdot, \cdot)$ στη γειτονιά των ιδεωδών κορυφών. Αν ο X αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος ιδεωδών τριγώνων, τότε μπορούμε να περιγράψουμε την πληρότητα μέσω μιας γεωμετρικής ιδιότητας στις ιδεώδεις κορυφές του X . Για κάθε ιδεώδη κορυφή, v , του X θεωρούμε κατάλληλη «γειτονιά» λαμβάνοντας αρχικά ένα τρίγωνο T που έχει τη v ως ιδεώδη κορυφή. Θεωρούμε μια ορόμπαλλα στη v και h το τμήμα του ορόκυκλου στο T που είναι ορθογώνιο προς τις δύο πλευρές του τριγώνου. Εκτείνουμε το h μέσω οροκυκλικών τμημάτων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, τα οποία συναντούν τις πλευρές ορθογώνια και ορίζουν σημεία $x_1, x_2, \dots, x_m$. Όταν η οροκυκλική αυτή καμπύλη επιστρέψει στο αρχικό τρίγωνο T (ομοκεντρικά του h), αρκεί η καμπύλη να «κλείνει», δηλαδή να ισχύει $d(v) = 0$ (βλ. σχήμα 1).

(σχήμα 1)

Η παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία δίνει την πληρότητα:

Η οροκυκλική καμπύλη έχει πεπερασμένο μήκος καθώς το μήκος κάθε περιέλιξης γύρω από την ιδεώδη κορυφή, ν , ελαττώνεται μέσω μιας σταθεράς (< 1), σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.1. Η οροκυκλική καμπύλη είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους κινήσεων (διαδοχικών περιελίξεων), των οποίων τα μήκη l_i , $i = 1, 2, \dots, m$ συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$\begin{cases} l_0 \\ l_1 = l_0 \cdot e^{-d} \\ \vdots \\ l_m = l_0 \cdot e^{-md} \end{cases}, \text{ (όπου } l_0 \text{ το μήκος της αρχικής περιέλιξης)}$$

και καθορίζουν, μέσω της συνολικής κίνησης περιέλιξης, συγκλίνουσα σειρά, $\sum l_i < +\infty$ η οποία με τη σειρά της κάνει την ακολουθία σημείων $\{x_i\}$, ακολουθία Cauchy (που ορίζουν τα διαδοχικά οροτόξα $\{\alpha_i\}$ καθώς τέμνουν διαδοχικά τα τρίγωνα), η οποία αποδεικνύεται ότι συγκλίνει αν και μόνο αν $d(\nu) = 0$, [38, σελ 148].

Για κάθε $x \in X$, υπάρχει γειτονιά U του x η οποία είναι ισομετρική:

- είτε με μια ανοικτή μπάλλα του H^2 ,
- είτε με πεπερασμένο πλήθος ημιδίσκων του H^2 , συγκολλημένων κατά μήκος των ίσων διαμέτρων τους.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.7.13 ο χώρος X είναι καμπυλότητας ≤ -1 , δηλαδή είναι χώρος τοπικά CAT(-1), [26, σελ.192].

Ορισμός 3.1.4: Ο χώρος X εφοδιασμένος με την τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ υπερβολικών ιδεωδών τριγώνων, ονομάζεται **ιδεώδες πολύεδρο διάστασης 2**, ενώ η αντίστοιχη τριγωνοποίηση καλείται **ιδεώδης τριγωνοποίηση**.

Έχουν μελετηθεί διάφορες ιδιότητες των ιδεωδών πολυέδρων, βλ.σχετικά: [15], [16], [18], [19].

Σημείωση 3.1.5: Για τη συνέχεια υποθέτουμε ότι η τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του X , περιέχει πεπερασμένο πλήθος ιδεωδών τριγώνων, οπότε έχουμε ένα **πεπερασμένο ιδεώδες πολυέδρο διάστασης 2**, καθώς και ότι ο X περιέχει τουλάχιστον μία ανώμαλη πλευρά, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.1. (Αν δεν υπάρχει ανώμαλη πλευρά, τότε ο X είναι μια επιφάνεια και το σύνορό του είναι ο S^1).

Το βασικό συμπέρασμα της παραγράφου είναι συνοπτικά το ακόλουθο:
« Για κάθε δύο σημεία η, ξ του οπτικού (visual) συνόρου του καλυμματικού χώρου του X ($\partial_{vis} \tilde{X}$), υπάρχει άπειρο (μη-αριθμήσιμο) πλήθος διαφορετικών υποχώρων C_i του $\partial_{vis} \tilde{X}$, ομοιομορφικών με το S^1 , οι οποίοι περιέχουν τα η, ξ ».

3.2 Το Καθολικό Κάλυμμα του Δισδιάστατου Ιδεώδους Πολυέδρου

Ακολουθώντας την εισαγωγή της παραγράφου 2.8 (βλ. σελ.43), ορίζουμε το καθολικό κάλυμμα $\tilde{X}$ του χώρου X , το οποίο αρχικά κληρονομεί τη δομή του ιδεώδους πολυέδρου, καθώς η τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ ορίζει αντίστοιχη τριγωνοποίηση $\tilde{\mathcal{T}}$ στο $\tilde{X}$, [33, σελ.145].

Ο $\tilde{X}$ είναι απλά συνεκτικός, γεωδαισιακός μετρικός χώρος, τοπικά συμπαγής, πλήρης καθώς και CAT(-1), σύμφωνα με το Πρόγραμμα 2.7.11. Τέλος, το σύνορο $\partial_{vis} \tilde{X}$ του $\tilde{X}$ ορίζεται μέσω των γεωδαισιακών ακτίνων που ξεκινούν από σταθερό σημείο του $\tilde{X}$ (βλ. Ορισμό 2.8.5).

Ορισμός 3.2.1: Ονομάζουμε **υποπολύεδρο** στο χώρο $\tilde{X}$ ένα συνεκτικό υποσύνολο

P του $\tilde{X}$, εφοδιασμένο με ιδεώδη τριγωνοποίηση $\tilde{T}_P$, ώστε κάθε τρίγωνο της $\tilde{T}_P$ να ανήκει στην $\tilde{T}$.

(Η μετρική του P προκύπτει από τη μετρική του $\tilde{X}$).

Λήμμα 3.2.2: Υποθέτουμε ότι P είναι ένα ιδεώδες πολύεδρο και $h : P \rightarrow \tilde{X}$ μια τοπική ισομετρία. Τότε η h είναι ισομετρία και το P είναι απλά συνεκτικό.

Απόδειξη:

Αν το P δεν είναι απλά συνεκτικό θεωρούμε το καθολικό κάλυμμα $\tilde{P}$ του P . Αν $p_1 : \tilde{P} \rightarrow P$ είναι η προβολή κάλυψης, αρχικά θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $h \circ p_1 : \tilde{P} \rightarrow \tilde{X}$ είναι ισομετρία, δηλαδή θα ισχύει:
 $d_{\tilde{P}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_{\tilde{X}}(h \circ p_1(\tilde{x}), h \circ p_1(\tilde{y}))$. Κάθε δύο σημεία των χώρων $\tilde{P}$ και $\tilde{X}$ μπορούν να ενωθούν με μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα στους $\tilde{P}$ και $\tilde{X}$ αντίστοιχα. Επομένως, για να δείξουμε ότι η $h \circ p_1$ είναι ισομετρία, αρκεί να δείξουμε ότι οι γεωδαισιακές του $\tilde{P}$ απεικονίζονται σε γεωδαισιακές του $\tilde{X}$. Όμως, ο ισχυρισμός αυτός αληθεύει επειδή οι h, p_1 είναι τοπικές ισομετρίες και επειδή κάθε τοπική γεωδαισιακή του $\tilde{X}$ είναι γεωδαισιακή στο $\tilde{X}$, [17, Πρόταση 1.4]. Συνεπώς, η $h \circ p_1$ είναι ισομετρία και άρα η p_1 πρέπει να είναι ισομετρία. Τελικά το P είναι απλά συνεκτικό και η h είναι ισομετρία.

□

Όταν το P είναι υποπολύεδρο του $\tilde{X}$, το Λήμμα 3.2.2 δίνει ότι η φυσική εμφύτευση (βλ. Ορισμό 2.3.1 (2)) $h: P \rightarrow \tilde{X}$ είναι ισομετρική. Επομένως, σύμφωνα με ένα Θεώρημα του Gromov [28] ο χώρος $\partial_{vis} P$ εμφυτεύεται στο χώρο $\partial_{vis} \tilde{X}$.

Θεωρούμε σημεία $\eta, \xi \in \partial_{vis} \tilde{X}$ και γεωδαισιακή $\tilde{g}: (-\infty, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$, με $\tilde{g}(-\infty) = \eta$ και $\tilde{g}(+\infty) = \xi$, ενώ με $\text{Im } \tilde{g}$ συμβολίζουμε την εικόνα της $\tilde{g}$. Αποδεικνύουμε το ακόλουθο στοιχειώδες λήμμα.

Λήμμα 3.2.3: Α) Αν e είναι μια πλευρά στο χώρο $\tilde{X}$ και αν $e \neq \text{Im } \tilde{g}$, τότε η τομή

$e \cap \text{Im } \tilde{g}$ αποτελείται μόνο από ένα σημείο, εφόσον $e \cap \text{Im } \tilde{g} \neq \emptyset$.

Β) Δεν υπάρχουν $t_1, t_2, t_3 \in (-\infty, +\infty)$, με $t_1 < t_2 < t_3$, ώστε να ισχύει:

$\tilde{g}(t_1), \tilde{g}(t_3) \in T_j$ και $\tilde{g}(t_2) \in T_i$, καθώς $T_i, T_j \in \tilde{\mathcal{T}}$ και $T_i \neq T_j$.

Απόδειξη:

Η απόδειξη των Α) και Β) έπεται άμεσα από το γεγονός ότι τα e και T_j είναι κυρτά υποσύνολα του $\tilde{X}$ και ο $\tilde{X}$ είναι χώρος CAT(-1). Επομένως, οποιαδήποτε δύο σημεία είτε στο T_j , είτε στην e , μπορούν να ενωθούν με μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα που ανήκει στο T_j ή στην e αντίστοιχα. $\square$

Θεωρούμε γεωδαισιακή $\tilde{g}: (-\infty, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$, ώστε η $\text{Im } \tilde{g}$ να μη συμπίπτει με καμμία πλευρά e του $\tilde{X}$. Έστω $S = \{T \in \tilde{\mathcal{T}} : T \cap \text{Im } \tilde{g} \neq \emptyset\}$ το σύνολο των τριγώνων που τέμνονται από την $\text{Im } \tilde{g}$. Διατάσσουμε τα στοιχεία της S ως εξής:

Θεωρούμε μια διαμέριση του $(-\infty, +\infty)$ ως ένωση κλειστών διαστημάτων $\bigcup I_i$, $i \in I$, ώστε για κάθε $i \in I$, το $\tilde{g}(I_i)$ να ανήκει σε μοναδικό τρίγωνο T , το οποίο συμβολίζουμε T_i , ενώ η τομή $I_i \cap I_{i+1}$ να περιέχει μοναδικό σημείο t_i , καθώς τα τρίγωνα T_i, T_{i+1} έχουν μοναδική κοινή πλευρά, που περιέχει το $\tilde{g}(t_i)$.

Καλούμε $\{T_i\}_{i \in I}$ την **διατεταγμένη ακολουθία τριγώνων που τέμνονται από τη $\tilde{g}$** . Επομένως η $\text{Im } \tilde{g}$ μπορεί να τέμνει δύο διαδοχικά τρίγωνα T_i, T_{i+1} ως εξής: τα T_i, T_{i+1} έχουν κοινή πλευρά που συμπίπτει με μια πλευρά e του $\tilde{X}$ και η $\tilde{g}$ τέμνει την e εγκάρσια, περνώντας από το εσωτερικό του T_i στο εσωτερικό του T_{i+1} .

Παρατήρηση 3.2.4: Το πλήθος των τριγώνων $\{T_i\}_{i \in I}$ μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο, ενώ σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.3 έχουμε ότι $T_i \neq T_j$ αν $i \neq j$.

Λήμμα 3.2.5: Αν e είναι μια πλευρά στο $\tilde{X}$ τάξης k , $k > 1$, τότε υπάρχουν ακριβώς k το πλήθος, ιδεώδη τρίγωνα της $\tilde{\mathcal{T}}$ τα οποία έχουν την e ως κοινή πλευρά.

Απόδειξη:

Αν ο ισχυρισμός του λήμματος δεν αληθεύει, τότε θα υπάρχει τρίγωνο $T_i \in \tilde{\mathcal{T}}$ που θα έχει δύο διαφορετικές πλευρές του να ταυτίζονται σε μια πλευρά e του $\tilde{X}$. Επομένως θα μπορούμε να βρούμε ένα απλό και κλειστό βρόγχο α στο T_i , ο οποίος θα τέμνει την e μία φορά.

Όμως ο α θα πρέπει να είναι μηδέν-ομοτοπικός στο $\tilde{X}$ και σύμφωνα με το Πρόγραμμα 2.4 του [19], θα πρέπει να ανήκει στο εσωτερικό του T_i , γεγονός που οδηγεί σε άτοπο. □

Λήμμα 3.2.6: Έστω R ένα υποπολύεδρο του $\tilde{X}$ ισομετρικό με το H^2 , το οποίο περιέχει τουλάχιστον μία ανώμαλη πλευρά $\tilde{e}$ του $\tilde{X}$. Έστω ότι $p|_R(R) = Y$, όπου με $p|_R$ συμβολίζουμε τον περιορισμό της προβολής κάλυψης $p: \tilde{X} \rightarrow X$ στο R . Αν $z, \omega \in \partial_{\text{vis}} R$ και αν με $\text{arc}[z\omega]$

συμβολίσουμε ένα τόξο στο $\partial_{vis} R$ που συνδέει τα z, ω , τότε υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος ξένων υποτόξων $arc[z_i \omega_i]$ του $arc[z \omega]$ ώστε:

$$p|_R((z_i, \omega_i)) = p(\tilde{e}), \text{ για κάθε } i, \text{ όπου με } (z_i, \omega_i) \text{ συμβολίζουμε τη}$$

γεωδαισιακή που συνδέει τα z_i και ω_i στο R .

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι $X = \tilde{X} / Isom(\tilde{X})$, όπου με $Isom(\tilde{X})$ συμβολίζουμε τη

διακριτή ομάδα ισομετριών του $\tilde{X}$. Έστω G η υποομάδα της $Isom(\tilde{X})$, της οποίας τα στοιχεία αφήνουν το R αναλλοίωτο, δηλαδή για κάθε $\varphi \in G$ θα ισχύει: $\varphi(R) = R$. Επομένως, $Y = R / G$.

Η απεικόνιση $p|_R$ είναι τοπική ισομετρία, οπότε κάθε τοπική γεωδαισιακή g του Y δίνει αντίστοιχη τοπική γεωδαισιακή $\tilde{g}$ στο R , άρα και στο $\tilde{X}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.4 του [17], η $\tilde{g}$ είναι γεωδαισιακή στο $\tilde{X}$. Θεωρούμε πλευρά $\tilde{e}$ του R ώστε η $p(\tilde{e}) = e$ να είναι ανώμαλη πλευρά του X . Επίσης, έστω $arc[z \omega]$ τόξο του $\partial_{vis} R \approx S^1$ και $y \in Int(arc[z \omega])$. Έστω $\tilde{g} : (-\infty, +\infty) \rightarrow R$ γεωδαισιακή με $\tilde{g}(+\infty) = y$, η οποία τέμνει την πλευρά $\tilde{e}$.

Έχουμε ότι το R είναι πεπερασμένο ιδεώδες πολύεδρο, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα 2 του [18] το σύνολο των κλειστών γεωδαισιακών του Y είναι πυκνό στο σύνολο των τοπικών γεωδαισιακών του Y εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή. Άρα, υπάρχει γεωδαισιακή $\tilde{h} : (-\infty, +\infty) \rightarrow R$ οσοδήποτε κοντά θέλουμε στη $\tilde{g}$, της οποίας η εικόνα μέσω της $p|_R$ είναι κλειστή γεωδαισιακή του Y . Συνεπώς υπάρχει ισομετρία $\sigma \in G$ η οποία αφήνει την $\tilde{h}$ αναλλοίωτη. Προφανώς η σ είναι υπερβολική ισομετρία του $\tilde{X}$ που έχει τη γεωδαισιακή $\tilde{h}$ ως άξονα. Έτσι, η σ μεταφέρει την $\tilde{e}$ έως ότου τα άκρα της στο $\partial_{vis} R$ να

είναι οσοδήποτε κοντά στο $\tilde{h}(+\infty)$ (βλ. Πρόταση 7.2 στο [21]).

Συνεπώς υπάρχει $n \in N$ ώστε τα άκρα της $\sigma^n(\tilde{\epsilon})$ να βρίσκονται στο εσωτερικό του $\text{arc}[z\omega]$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με ένα τόξο $\text{arc}[z'\omega'] \subset \partial_{\text{vis}} R - \text{arc}[z\omega]$, αντί του $\text{arc}[z\omega]$, αποδεικνύουμε το Λήμμα. □

3.3 Το Σύνορο του Δισδιάστατου Ιδεώδους Πολυέδρου

Το βασικό συμπέρασμα του κεφαλαίου, περιγράφεται αναλυτικά στο Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 3.3.1: Έστω X ένα ιδεώδες πολυέδρο διάστασης 2 το οποίο υποθέτουμε ότι περιέχει τουλάχιστον μία ανώμαλη πλευρά. Τότε έχουμε:

Για κάθε $\eta, \xi \in \partial_{\text{vis}} \tilde{X}$ υπάρχει άπειρο (μη-αριθμήσιμο) πλήθος διαφορετικών υποχώρων C_i του $\partial_{\text{vis}} \tilde{X}$, ομοιομορφικών με το S^1 , οι οποίοι περιέχουν τα η, ξ . Επιπλέον, κάθε C_i είναι το σύνορο ενός υποπολυέδρου P_i του $\tilde{X}$ που είναι ισομετρικό με το H^2 .

Απόδειξη:

Θεωρούμε σημεία $\eta, \xi \in \partial_{\text{vis}} \tilde{X}$ και γεωδαισιακή $\tilde{g} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$, με $\tilde{g}(-\infty) = \eta$ και $\tilde{g}(+\infty) = \xi$. Αρχικά υποθέτουμε ότι η $\text{Im } \tilde{g}$ δε συμπίπτει με καμία πλευρά του $\tilde{X}$ και παίρνουμε τη διατεταγμένη ακολουθία ιδεωδών τριγώνων $\{T_i\}_{i \in I}$ που τέμνονται από την $\text{Im } \tilde{g}$.

Θα κατασκευάσουμε ένα υποπολύεδρο P του $\tilde{X}$ ώστε:

(1) Το P να περιέχει τη γεωδαισιακή $\tilde{g}$.

(2) Το P να είναι ισομετρικό με το H^2 .

Η όλη κατασκευή θα βασισθεί στη συγκεκριμένη γεωδαισιακή και στη διαδρομή της μέσα από τα τρίγωνα $\{T_i\}_{i \in I}$. Θα χρησιμοποιήσουμε μια διαδικασία «κοψίματος» κατά μήκος των ανώμαλων πλευρών του $\tilde{X}$ και κατάλληλης «επανασυγκόλλησης», με σκοπό την εξάλειψη αυτών των ανωμαλιών. Μέσω αυτής της διαδικασίας θα βρούμε επιφάνεια P με τις ζητούμενες ιδιότητες (1) και (2).

Θεωρούμε όλες τις ανώμαλες πλευρές e_j του $\tilde{X}$ με τάξη k , $k > 3$

τις οποίες και αποκολλάμε μεταξύ τους, κόβοντας το $\tilde{X}$ κατά μήκος αυτών των πλευρών. Ο χώρος που προκύπτει, ας τον ονομάσουμε Z , έχει ιδεώδη τρίγωνα με ελεύθερες πλευρές, δηλαδή πλευρές που ανήκουν μόνο σε ένα ιδεώδες τρίγωνο. Επανασυγκολλούμε τα ιδεώδη αυτά τρίγωνα στο Z , μέσω ισομετριών, κατά μήκος των ελεύθερων πλευρών τους ως εξής:

Αν υποθέσουμε ότι η τάξη της πλευράς e_j είναι k_j , τότε κόβοντας κατά μήκος της e_j δημιουργούμε τις ελεύθερες πλευρές $\{e_{j,i}\}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$. Έστω $T_{j,i}$ το ιδεώδες τρίγωνο που περιέχει την πλευρά $e_{j,i}$. Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.5 όλα αυτά τα τρίγωνα $T_{j,i}$ είναι μεταξύ τους διαφορετικά για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$. Αν $\text{Im } \tilde{g} \cap e_j \neq \emptyset$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.3 θα υπάρχουν ακριβώς δύο τρίγωνα της οικογένειας $\{T_{j,i}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, k_j\}$, τα οποία θα τέμνονται εγκάρσια από τη $\tilde{g}$ και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι τα $T_{j,1}$ και $T_{j,2}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I) Η τάξη της ανωμαλίας είναι άρτιος αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή κολλάμε τα $T_{j,1}$ και $T_{j,2}$ μέσω ισομετρίας που ταυτίζει την $e_{j,1}$ με την $e_{j,2}$, ενώ στη συνέχεια κολλάμε τα υπόλοιπα τρίγωνα $T_{j,i}$ ανά ζεύγη, κατά μήκος των ελεύθερων πλευρών τους, μέσω ισομετριών.

II) Η τάξη της ανωμαλίας είναι περιττός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή κολλάμε τα $T_{j,1}$, $T_{j,2}$ και $T_{j,3}$ μέσω ισομετρίας που ταυτίζει τις $e_{j,1}$, $e_{j,2}$, $e_{j,3}$, ενώ στη συνέχεια κολλάμε τα υπόλοιπα τρίγωνα $T_{j,i}$ ανά ζεύγη, κατά μήκος των ελεύθερων πλευρών τους, μέσω ισομετριών.

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι οι ισομετρίες που επανασυγκολλούν δύο ιδεώδη τρίγωνα, είναι οι ίδιες ακριβώς ισομετρίες που τα συγκολλούν αρχικά στο χώρο $\tilde{X}$. Μέσω της παραπάνω διαδικασίας, κατασκευάζουμε ένα συνεκτικό ιδεώδες πολύεδρο R , το οποίο περιέχει τη γεωδαισιακή $\tilde{g}$ και όλες οι ανώμαλες πλευρές του είναι τάξης 3. Προφανώς το R εφοδιάζεται με ιδεώδη τριγωνοποίηση $\tilde{T}_R$ που επάγεται από την $\tilde{T}$. Ας συμβολίσουμε με d_j τις ανώμαλες πλευρές του R .

Παριστάνουμε με $T_{j,1}$, $T_{j,2}$ και $T_{j,3}$ τα ιδεώδη τρίγωνα που μοιράζονται την πλευρά d_j . Μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε (μετονομάζοντας αν χρειάζεται) ότι καθώς ο χρόνος αυξάνει η $\tilde{g}$ διέρχεται από το $T_{j,1}$ στο $T_{j,2}$. Θεωρούμε στη συνέχεια τέσσερα αντίτυπα του χώρου R , έστω $R^{(a)}$, $R^{(b)}$, $R^{(c)}$ και $R^{(d)}$, με τρίγωνα $T_{j,i}^{(a)}$, $T_{j,i}^{(b)}$, $T_{j,i}^{(c)}$ και $T_{j,i}^{(d)}$, $i \in \{1,2,3\}$, αντίστοιχα. Προχωρούμε, κόβοντας κατά μήκος όλων των ανώμαλων πλευρών, σε όλα τα αντίτυπα του R . Τότε, για κάθε ανώμαλη πλευρά d_j θα έχουμε ένα σύνολο δώδεκα τριγώνων καθένα από τα οποία έχει μια ελεύθερη πλευρά.

Επανασυγκολλούμε τα τρίγωνα αυτά κατά μήκος των ελεύθερων πλευρών τους, μέσω ισομετριών, σύμφωνα με την ακόλουθη διάταξη:

$$T_{j,1}^{(a)} \text{ με } T_{j,2}^{(b)}$$

$$T_{j,1}^{(b)} \text{ με } T_{j,2}^{(a)}$$

$$T_{j,1}^{(c)} \text{ με } T_{j,3}^{(a)}$$

$$T_{j,3}^{(b)} \text{ με } T_{j,2}^{(c)}$$

$$T_{j,1}^{(d)} \text{ με } T_{j,3}^{(c)}$$

$$T_{j,3}^{(d)} \text{ με } T_{j,2}^{(d)}$$

Ο χώρος που προκύπτει, είναι μια επιφάνεια S (όχι κατ'ανάγκη συνεκτική), καθώς κάθε πλευρά της θα έχει τάξη 2. Κατά την παραπάνω κατασκευή, προσέχουμε έτσι ώστε να υπάρχει συνιστώσα P της S , η οποία να περιέχει τη γεωδαισιακή $\tilde{g}$. Πράγματι, καθώς έχουμε υποθέσει ότι η $\tilde{g}$ διέρχεται από το $T_{j,1}$ στο $T_{j,2}$, στο R , μέσω της συγκόλλησης του $T_{j,1}^{(a)}$ με το $T_{j,2}^{(b)}$ και του $T_{j,1}^{(b)}$ με το $T_{j,2}^{(a)}$, υπάρχει μια τέτοια συνιστώσα P . Στην ειδική περίπτωση όπου η $\text{Im } \tilde{g}$ συμπίπτει με πλευρά e του $\tilde{X}$, προχωρούμε με την ίδια μέθοδο για την κατασκευή της P .

Στη συγκεκριμένη περίπτωση δε χρειάζεται να προσέξουμε το πως θα κολλήσουμε τα τρίγωνα ανά ζεύγη κατά μήκος των ελεύθερων πλευρών τους. Η επιφάνεια P είναι καμπυλότητας ≤ -1 , γεγονός που σημαίνει ότι η καμπυλότητα Riemann της P είναι ίση με -1 . Από την κατασκευή της P έχουμε μια τοπική ισομετρία $f : P \rightarrow \tilde{X}$, η οποία μέσω του Λήμματος 3.2.2 είναι τελικά ισομετρία καθώς η P είναι απλά συνεκτική.

Ταυτίζοντας την P , μέσω της f , με την εικόνα της λαμβάνουμε το υποπολύεδρο P του $\tilde{X}$. Μέσω του Uniformization Theorem [38, σελ.117] συνάγουμε ότι το P είναι ισομετρικό με το υπερβολικό επίπεδο H^2 .

Επίσης, όπως σημειώσαμε αμέσως μετά το Λήμμα 3.2.2, το σύνορο $\partial_{\text{vis}} P$ που είναι ομοιομορφικό με το S^1 , εμφυτεύεται στο $\partial_{\text{vis}} \tilde{X}$.

Επομένως έχουμε βρει ένα κύκλο $C = \partial_{vis} P$ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος.

Έστω $Y = p(P)$, όπου $p: \tilde{X} \rightarrow X$ η προβολή κάλυψης. Το Y είναι ένα πεπερασμένο ιδεώδες πολύεδρο που περιέχεται στο X και αναγκαστικά περιέχει μια ανώμαλη πλευρά e_1 του X , καθώς το P εκ κατασκευής περιέχει μια ανώμαλη πλευρά $\tilde{e}_1$ του $\tilde{X}$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.6 έχουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος ξένων τόξων $arc[z_k \omega_k]$, $k \in N$ στο $\partial_{vis} P$, έτσι ώστε:

- i) Οι (z_k, ω_k) είναι ανώμαλες πλευρές του $\tilde{X}$.
 - ii) Τα σημεία $z_1, \omega_1, z_2, \omega_2, \dots, z_k, \omega_k, \dots$ είναι διαδοχικά στο $\partial_{vis} P \approx S^1$.
- Έστω $\tilde{e}_i = (z_i, \omega_i)$ μια τέτοια ανώμαλη πλευρά στο $\tilde{X}$.

Προφανώς, θα υπάρχει ιδεώδες τρίγωνο $T_i \in \tilde{\mathcal{T}}$ ώστε $T_i \cap P = \tilde{e}_i$ και γεωδαισιακή $\tilde{h}: (-\infty, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$ η οποία τέμνει την $\tilde{e}$ μία φορά και διέρχεται από το T_i . Χρησιμοποιώντας την παραπάνω διαδικασία συγκόλλησης, μπορούμε να κατασκευάσουμε υποπολύεδρο P_i του $\tilde{X}$ ώστε: $\text{Im } \tilde{h} \subset P_i$, $T_i \subset P_i$ και το P_i να είναι ισομετρικό με το H^2 .

Συμβολίζουμε με P_i^+ το υποπολύεδρο του P_i (άρα και του $\tilde{X}$), που περιέχει το T_i ώστε $\partial P_i^+ = \tilde{e}_i$, όπου με ∂P_i^+ παριστάνουμε το τοπολογικό σύνορο του P_i^+ . Προφανώς το P_i^+ είναι ισομετρικό με το $H^+ = \{(x, y) \in H^2 : x \geq 0\}$ και καθώς το P_i^+ είναι κυρτό υποσύνολο του $\tilde{X}$, μέσω του Λήμματος 3.2.2 το σύνορο $\partial_{vis} P_i^+$ είναι υπόχωρος του $\partial_{vis} \tilde{X}$ ομοιομορφικός με το $[0, 1]$. Τα συνοριακά σημεία του $\partial_{vis} P_i^+$ στο $\partial_{vis} \tilde{X}$ είναι τα z_i, ω_i , οπότε και συμβολίζουμε το $\partial_{vis} P_i^+$ με $arc[z_i \omega_i]$.

Εφαρμόζοντας ξανά το Λήμμα 3.2.6 βρίσκουμε ξένα τόξα $arc[z_{i,k} \omega_{i,k}]$ στο $arc[z_i \omega_i]$, $k \in N$, τα οποία ικανοποιούν τις ιδιότητες

i), ii) παραπάνω. Για κάθε $i, k \in N$ συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία με το $\text{arc}[z_{i,k}\omega_{i,k}]$ στη θέση του $\text{arc}[z_i\omega_i]$ και κατασκευάζουμε ξένα τόξα $\text{arc}[z_{i,k,j}\omega_{i,k,j}]$ στο $\text{arc}[z_{i,k}\omega_{i,k}]$ $j \in N$ και ούτω καθεξής. Συνδυάζοντας τα τόξα $\text{arc}[z_{i_1,i_2,\dots,i_k}\omega_{i_1,i_2,\dots,i_k}]$, όπου $i_1, i_2, \dots, i_k \in N$ και $k \rightarrow \infty$, μπορούμε να βρούμε ένα μη αριθμήσιμο πλήθος απλών δρόμων στο $\partial_{\text{vis}}\tilde{X}$ οι οποίοι συνδέουν τα η, ξ . $\square$

Σημείωση 3.3.2: Αν από το $\partial_{\text{vis}}\tilde{X}$ αφαιρέσουμε δύο σημεία z, ω με την ιδιότητα ότι η γεωδαισιακή γραμμή (z, ω) στο $\tilde{X}$ είναι μια πλευρά του $\tilde{X}$, τότε το $\partial_{\text{vis}}\tilde{X} - \{z, \omega\}$ δεν είναι συνεκτικό.

Πόρισμα 3.3.3: Υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο A του $\partial_{\text{vis}}\tilde{X}$ με $\text{Int}(A) = \emptyset$, ώστε το $\partial_{\text{vis}}\tilde{X} - A$ να είναι κατά τόξα συνεκτικό.

Απόδειξη:

Με το συμβολισμό του Θεωρήματος 3.3.1, κατασκευάζουμε το σύνολο A λαμβάνοντας ένα σημείο από το εσωτερικό κάθε $\text{arc}[z_i\omega_i]$, $i \in N$ στο $\partial_{\text{vis}}P$. Προφανώς το $\partial_{\text{vis}}\tilde{X} - A$ είναι κατά τόξα συνεκτικό. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο : Επί του Συνόρου μιας Ειδικής Κλάσης Υπερβολικών Δισδιάστατων Συμπλόκων

4.1 Κατασκευή - Ιδιότητες μιας Ειδικής Κλάσης Συμπλόκων

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε κάποιες ιδιότητες του συνόρου μιας ειδικής κλάσης ενός υπερβολικού συμπλόκου διάστασης 2. Επίσης θα περιγράψουμε ένα είδος συνόλου Sierpinski που είναι ομοιομορφικό με το σύνορο συγκεκριμένων ιδεωδών πολυέδρων, όπως αυτά ορίστηκαν στο κεφάλαιο 3. Ειδικότερα, θεωρούμε μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υπερβολικών τριγώνων του H^2 ώστε κάθε $T \in \mathcal{T}$ να έχει δύο κορυφές στο σύνορο του H^2 και μία κορυφή στο εσωτερικό του H^2 , τα οποία συγκολλάμε κατά μήκος των πλευρών τους, μέσω ισομετριών. Συμβολίζουμε με X το χώρο που προκύπτει και προχωρούμε στη μελέτη του συνόρου του χώρου αυτού. Τα αποτελέσματα της προσπάθειας αυτής είναι πρωτότυπα και έχουν γίνει δεκτά προς δημοσίευση στην εργασία με τίτλο “On the boundary of a special class of hyperbolic 2-dimensional simplicial complexes”, [20].

Θεωρούμε την ξένη ένωση $\bigcup T$, υπερβολικών τριγώνων του H^2 , ώστε κάθε $T \in \mathcal{T}$ να έχει δύο κορυφές στο σύνορο του H^2 και μία κορυφή στο εσωτερικό του H^2 , όπου το σύνορο ενός τριγώνου T το συμβολίζουμε με ∂T . Επίσης θεωρούμε την οικογένεια, F , ισομετριών $f : e \rightarrow e'$, όπου e, e' είναι πλευρές των υπερβολικών τριγώνων T, T' αντίστοιχα, καθώς και τη σχέση ισοδυναμίας: « $x \sim y$ αν και μόνο αν $x \in \partial T, y \in \partial T'$ και υπάρχει ισομετρία f , με $y = f(x)$ ».

Σημειώνουμε ότι τα παραπάνω σημεία x, y μπορεί να ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές του ίδιου τριγώνου T . Αν ορίσουμε το χώρο $X = \bigcup T / \sim$ και την απεικόνιση προβολής $\pi : \bigcup T \rightarrow X$, τότε στο X ισχύουν οι παρακάτω ορισμοί:

- Ορισμοί 4.1.1:** 1. Κάθε τρίγωνο του X θα έχει δύο πλευρές e_1, e_2 οι οποίες είναι ισομετρικές με το $[0, +\infty)$ και θα καλούνται **semi-infinite** και μία πλευρά e_3 ισομετρική με το $(-\infty, +\infty)$ η οποία θα καλείται **bi-infinite**.
2. Μια **κορυφή** v είναι το μοναδικό κοινό σημείο των πλευρών e_1, e_2 , ενώ οι κορυφές στο άπειρο καλούνται **ιδεώδεις κορυφές**.

Σχετικά με τις ισομετρίες συγκόλλησης θεωρούμε την οικογένεια, F των ισομετριών $f : e \rightarrow e'$, όπου e, e' είναι πλευρές των τριγώνων T, T' αντίστοιχα, ώστε:

- Αν $f_1 : e_1 \rightarrow e_2$ και $f_2 : e_1 \rightarrow e_2$, είναι στοιχεία της F , τότε $f_1 = f_2$.
- Αν $f_1 : e_1 \rightarrow e_2$ είναι στοιχείο της F και η e_2 είναι μια semi-infinite πλευρά, τότε η f_1 είναι « επί ».
- Αν $f_1 : e_1 \rightarrow e_2$ και $f_2 : e_2 \rightarrow e_3$, είναι στοιχεία της F , τότε η $f_2 \circ f_1$ είναι στοιχείο της F .
- Αν οι e_1, e_2 είναι semi-infinite πλευρές και οι $f_1 : e_1 \rightarrow e_2, f_2 : e_2 \rightarrow e_3$ είναι στοιχεία της F , τότε $f_1(e_1) = f_2(e_2)$ ή $f_1(e_1) \cap f_2(e_2) = \{p\}$.

Προφανώς, το p είναι η εικόνα της κορυφής της e_1 και της κορυφής της e_2 , μέσω των f_1, f_2 αντίστοιχα.

Παρατήρηση 4.1.2: Σύμφωνα με την τελευταία συνθήκη κατά τη συγκόλληση δύο semi-infinite πλευρών σε μια bi-infinite, θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε μόνο άλλη μία κορυφή (επί της e_3).

- Ορισμοί 4.1.3:** 1. Η εικόνα στο X , μέσω της π , ενός τριγώνου $T \in \mathcal{T}$ καλείται **έδρα** στο X .
2. Η εικόνα στο X , μέσω της π , μιας πλευράς τριγώνου T καλείται **ακμή** (semi-infinite ή bi-infinite) στο X ή **πλευρά** της έδρας T .
3. Η εικόνα στο X , μέσω της π , μιας κορυφής του T καλείται **κορυφή** στο X .
4. Η εικόνα στο X , μέσω της π , μιας ιδεώδους κορυφής του T καλείται **ιδεώδης κορυφή (cusp)** στο X .

Σημείωση 4.1.4: Σύμφωνα με τις συνθήκες των ισομετριών συγκόλλησης που αναφέραμε, κάθε ακμή του X περιέχει το πολύ μία κορυφή.

Παρατήρηση 4.1.5: Σύμφωνα με την κατασκευή του χώρου X , μια ακμή e του X ορίζεται ως:

- **ανώμαλη (singular)**, όταν: « για κάθε σημείο $p \in e$ η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(p)$ περιέχει περισσότερα από δύο σημεία στην ξένη ένωση $\cup T$ ».
- **ελεύθερη (free)**, όταν: « υπάρχει σημείο $p \in e$ και γειτονιά U του p στο X ομοιομορφική με τον ημι-δίσκο $D^+ = \{(x, y) \in D^2 : y \geq 0\}$ ».

Για το χώρο X θεωρούμε ότι ισχύουν οι εξής συνθήκες:

- Σ1.** Είναι τοπικά πεπερασμένος, δηλαδή κάθε σημείο του ανήκει σε πεπερασμένο πλήθος εδρών.
- Σ2.** Κάθε πλευρά του ανήκει σε τουλάχιστον δύο τρίγωνα, δηλαδή δεν έχει ελεύθερες ακμές.
- Σ3.** Είναι κατά τόξα συνεκτικός.
- Σ4.** Είναι καμπυλότητας ≤ -1 , δηλαδή είναι χώρος τοπικά CAT(-1).
- Σ5.** Η μετρική $d_X(\cdot, \cdot)$ είναι πλήρης.
- Σ6.** (βλ. σελίδα 70).

Ο X γίνεται μετρικός χώρος εφοδιασμένος με τη μετρική μήκους, $d_x(\cdot, \cdot)$, η οποία προκύπτει από τα υπερβολικά τρίγωνα ως εξής:

Το μήκος $l_x(f)$ ενός δρόμου $f : [\alpha, \beta] \rightarrow X$, ορίζεται ως το άθροισμα των μηκών των συνιστωσών τομής της f με τα τρίγωνα στο X . Για $x, y \in X$ ορίζουμε ως $d_x(x, y)$ να είναι το infimum του συνόλου των μηκών όλων των δρόμων που συνδέουν τα x, y . Καθώς ο χώρος μας είναι τοπικά πεπερασμένος έχουμε ότι η $d_x(x, y)$ είναι μετρική, [15, Πρόταση 1.2].

Παρατήρηση 4.1.6: Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.4 έχουμε ότι ο X είναι χώρος γεωδαισιακός, καθώς είναι τοπικά συμπαγής και πλήρης, [27].

Η πληρότητα της μετρικής $d_x(\cdot, \cdot)$ θέτει συγκεκριμένους περιορισμούς στις ισομετρίες συγκόλλησης μεταξύ των πλευρών των υπερβολικών τριγώνων της $\mathcal{T}$ και μπορούμε να την περιγράψουμε μέσω μιας γεωμετρικής ιδιότητας στις ιδεώδεις κορυφές του X . (Βλ. σχετικά Κεφάλαιο 3^ο, σελ.52 του παρόντος).

Για κάθε $x \in X$ που δεν είναι κορυφή, υπάρχει γειτονιά U του x η οποία είναι ισομετρική:

- είτε με μια ανοικτή μπάλλα του H^2 ,
- είτε με πεπερασμένο πλήθος ημιδίσκων του H^2 , συγκολλημένων κατά μήκος των ίσων διαμέτρων τους.

Το **link**, $L(v)$, μιας κορυφής v , ορίζεται ως το σύνολο μιας κλειστής μπάλλας $B(v)$, η οποία περιέχεται σε μια γειτονιά της v . Είναι το γράφημα (**graph**) του οποίου οι κορυφές είναι τα σημεία τομής της $B(v)$ με τις ακμές περί τη v . Καθώς ο X είναι τοπικά πεπερασμένος, το $L(v)$ είναι πεπερασμένο και συνεκτικό. Προφανώς το $B(v)$ έχει τη δομή ενός κώνου της μορφής $v \cdot L(v)$. Εφοδιάζουμε το $L(v)$ με την εξής «σφαιρική» μετρική:

«για κάθε y, z σε μια ακμή του $L(v)$ ορίζουμε η απόσταση $\rho_v(y, z)$ να ισούται με τη γωνία των γεωδαισιακών τμημάτων $[v, y]$, $[v, z]$ στη v και στο υπερβολικό τρίγωνο του X που τα περιέχει»:

Για δύο οποιαδήποτε σημεία του $L(v)$ και ένα συγκεκριμένο δρόμο που τα συνδέει, ορίζουμε το μήκος του δρόμου. Επεκτείνουμε την απόσταση αυτή σε μια μετρική μήκους ρ_v σε ολόκληρο το $L(v)$, λαμβάνοντας το infimum του συνόλου των μηκών όλων των δρόμων που συνδέουν τα παραπάνω σημεία. Έτσι, ένα τρίγωνο στη $U = v \cdot L(v)$ ικανοποιεί την ανισότητα CAT(-1) αν και μόνο αν το μήκος κάθε απλής και κλειστής καμπύλης του $L(v)$ είναι $\geq 2\pi$, ως προς τη μετρική ρ_v , [28, Πρόταση 4.2D].

Ορισμός 4.1.7: Έστω v κορυφή στο X . Η v καλείται **ανώμαλη κορυφή (singular vertex)** αν το $L(v)$ δεν είναι ομοιομορφικό με το S^1 .

Για το χώρο X θεωρούμε επιπλέον ότι ισχύει η εξής συνθήκη:

Σ6. Αν v είναι μια ανώμαλη κορυφή στο X , τότε το γράφημα $L(v)$ δεν έχει κανένα σημείο που να διαχωρίζει.

Παρατήρηση 4.1.8: Από την προηγούμενη συνθήκη, Σ6, προκύπτει ότι:

«Για κάθε $y, z \in L(v)$ υπάρχει υπογράφημα $G(v)$ του $L(v)$ που είναι ομοιομορφικό με το S^1 και περιέχει τα y, z ».

Ορισμός 4.1.9: Έστω S το σύνολο των χώρων X που ικανοποιούν τις ιδιότητες $\Sigma 1$, $\Sigma 2$, $\Sigma 3$, $\Sigma 4$, $\Sigma 5$ και $\Sigma 6$ και έστω $\mathcal{T}$ η τριγωνοποίηση του X που προκύπτει από την οικογένεια υπερβολικών τριγώνων $T \in \mathcal{T}$. Ο χώρος X εφοδιασμένος με την παραπάνω τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ καλείται: **σύμπλοκο (simplicial complex) διάστασης 2, της κλάσης S .**

Παρατήρηση 4.1.10: Τα σύμπλοκα διάστασης 2, αποτελούν γενίκευση των ιδεωδών πολυέδρων διάστασης 2 (βλ. Ορισμό 3.1.4 του παρόντος), καθώς κάθε ιδεώδες πολύεδρο μπορεί να τριγωνοποιηθεί με τρίγωνα της οικογένειας $\mathcal{T}$ (βλ. Σημείωση 4.4.2 παρακάτω).

Για τη συνέχεια υποθέτουμε ότι η τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ του X , περιέχει πεπερασμένο πλήθος υπερβολικών τριγώνων, οπότε έχουμε ένα **πεπερασμένο σύμπλοκο διάστασης 2**, καθώς και ότι ο X περιέχει τουλάχιστον μία ανώμαλη ακμή ή μία ανώμαλη κορυφή.

Ορισμός 4.1.11: Έστω X ένα σύμπλοκο διάστασης 2, της κλάσης S και G_X ο χώρος όλων των τοπικών γεωδαισιακών $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$, εφοδιασμένος με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή. Η **γεωδαισιακή ροή** ορίζεται μέσω της απεικόνισης $\Phi : \mathbb{R} \times G_X \rightarrow X$, όπου η δράση του $\mathbb{R}$ δίνεται από τη δεξιά μεταφορά, δηλαδή «για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $\gamma \in G_X$, έχουμε $\Phi(t, \gamma) = \gamma_t$, όπου $\gamma_t : \mathbb{R} \rightarrow X$ είναι η γεωδαισιακή που ορίζεται από τη σχέση $\gamma_t(s) = \gamma(t + s)$, $s \in \mathbb{R}$ ».

Το βασικό συμπέρασμα της παραγράφου είναι συνοπτικά το ακόλουθο:
« Για κάθε δύο σημεία η, ξ του οπτικού (visual) συνόρου του καλυμματικού χώρου του X ($\partial_{\text{vis}} \tilde{X}$), υπάρχει άπειρο πλήθος διαφορετικών υποχώρων S_i του $\partial_{\text{vis}} \tilde{X}$, ομοιομορφικών με το S^1 , οι οποίοι περιέχουν τα η, ξ ».

4.2 Το Καθολικό Κάλυμμα του Δισδιάστατου Συμπλόκου

Ακολουθώντας το εισαγωγικό σημείωμα της παραγράφου 2.8 (σελ.43), ορίζουμε το καθολικό κάλυμμα $\tilde{X}$ του χώρου X , το οποίο αρχικά κληρονομεί τη δομή του υπερβολικού δισδιάστατου συμπλόκου της κλάσης S , καθώς η τριγωνοποίηση $\mathcal{T}$ ορίζει αντίστοιχη τριγωνοποίηση $\tilde{\mathcal{T}}$ στο $\tilde{X}$, [33, σελ.145].

Ο $\tilde{X}$ είναι γεωδαισιακός μετρικός χώρος, τοπικά συμπαγής, πλήρης καθώς και CAT(-1), σύμφωνα με το Πόρισμα 2.7.11. Το σύνορο $\partial_{\text{vis}}\tilde{X}$ του $\tilde{X}$ ορίζεται μέσω των γεωδαισιακών ακτίνων που ξεκινούν από σταθερό σημείο του $\tilde{X}$ (βλ. Ορισμό 2.8.5). Τέλος, υπάρχει υποομάδα G της ομάδας ισομετριών $\text{Isom}(\tilde{X})$, η οποία είναι διακριτή και δρα ελεύθερα ώστε $\tilde{X}/G = X$ και $G \cong \pi_1(X)$.

Ορισμός 4.2.1: Ένα σημείο $\xi \in \partial_{\text{vis}}\tilde{X}$ καλείται **ιδεώδης κορυφή** αν υπάρχει $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$, ώστε το ξ να είναι ιδεώδης κορυφή του $\tilde{T}$.

Σημειώνουμε ότι, αν $x_0 \in \tilde{X}$ και $\eta, \xi \in \partial_{\text{vis}}\tilde{X}$ θα συμβολίζουμε με $[x_0, \eta)$ τη γεωδαισιακή ακτίνα και με (η, ξ) τη γεωδαισιακή γραμμή, που συνδέουν το x_0 με το η και το η με το ξ αντίστοιχα (βλ. και σελ. 32).

Ορισμός 4.2.2: Για ένα σύνολο C υποσύνολο του $\tilde{X}$, συμβολίζουμε με ∂C το (τοπολογικό) σύνορο του C . Ονομάζουμε **υποσύμπλοκο** στο χώρο $\tilde{X}$ ένα συνεκτικό υποσύνολο C του $\tilde{X}$, εφοδιασμένο με μετρική d_C που προκύπτει από τη μετρική $d_{\tilde{X}}$ του $\tilde{X}$ και με τριγωνοποίηση $\tilde{\mathcal{T}}_C$, ώστε κάθε τρίγωνο της $\tilde{\mathcal{T}}_C$ να ανήκει στην $\tilde{\mathcal{T}}$. Επίσης, αν $\partial C \neq \emptyset$, τότε κάθε συνιστώσα του ∂C είναι γεωδαισιακή γραμμή του $\tilde{X}$.

Λήμμα 4.2.3: Έστω C ένα υποσύμπλοκο του $\tilde{X}$, εφοδιασμένο με τη μετρική d_C .

Τότε έχουμε:

- i) Ο υπόχωρος C του $\tilde{X}$ είναι πλήρης, απλά συνεκτικός και κυρτός.
- ii) Η φυσική εμβύθιση $h: C \rightarrow \tilde{X}$, είναι ισομετρία.
- iii) Το $\partial_{vis} C$ εμφυτεύεται στο $\partial_{vis} \tilde{X}$.

Απόδειξη:

Αρχικά θα δείξουμε ότι ο χώρος (C, d_C) είναι πλήρης. Πράγματι, έστω (x_n) μια ακολουθία Cauchy στο C και x το οριακό σημείο αυτής στο $\tilde{X}$.

Τότε για n επαρκώς μεγάλο, υπάρχει σημείο x_n οσοδήποτε κοντά στο x και καθώς ο $\tilde{X}$ είναι τοπικά πεπερασμένος, συνάγουμε ότι το x ανήκει στο C . Σύμφωνα με τον ορισμό του C , ο συγκεκριμένος χώρος είναι τοπικά κυρτό υποσύνολο του $\tilde{X}$. Επομένως, η φυσική εμβύθιση $h: C \rightarrow \tilde{X}$, είναι τοπική ισομετρία.

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι η h είναι ισομετρία:

Αν το C δεν είναι απλά συνεκτικό θεωρούμε το καθολικό κάλυμμα $\tilde{C}$ του C . Αν $p_1: \tilde{C} \rightarrow C$ είναι η προβολή κάλυψης, αρχικά θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $h \circ p_1: \tilde{C} \rightarrow \tilde{X}$ είναι ισομετρία, δηλαδή ότι ισχύει:

$$d_{\tilde{C}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_{\tilde{X}}(h \circ p_1(\tilde{x}), h \circ p_1(\tilde{y})).$$

Κάθε δύο σημεία των χώρων $\tilde{C}$ και $\tilde{X}$ μπορούν να ενωθούν με μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα στους $\tilde{C}$ και $\tilde{X}$ αντίστοιχα. Επομένως, για να δείξουμε ότι η $h \circ p_1$ είναι ισομετρία,

αρκεί να δείξουμε ότι οι γεωδαισιακές του $\tilde{C}$ απεικονίζονται σε γεωδαισιακές του $\tilde{X}$. Όμως, ο ισχυρισμός αυτός αληθεύει επειδή οι h, p_1 είναι τοπικές ισομετρίες και επειδή κάθε τοπική γεωδαισιακή των $\tilde{C}$, $\tilde{X}$ είναι γεωδαισιακή στους $\tilde{C}$, $\tilde{X}$, αντίστοιχα. Συνεπώς, η $h \circ p_1$ είναι ισομετρία και άρα η p_1 πρέπει να είναι ισομετρία. Τελικά το $\tilde{C}$ είναι απλά συνεκτικό και η h είναι ισομετρία.

Το C είναι ισομετρικά εμφυτευμένο στο $\tilde{X}$, οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα του Gromov [22, Θεώρημα 2.2], ο χώρος $\partial_{vis} C$ εμφυτεύεται στο χώρο $\partial_{vis} \tilde{X}$. □

Υπάρχουν δύο βασικά είδη υποσυμπλόκων $C \subset \tilde{X}$, τα οποία θα παίξουν ένα σημαντικό ρόλο στη συνέχεια:

I) Το C είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^2$.

Στην περίπτωση αυτή το C καλείται **υπερβολικό επίπεδο με κορυφές**.

Αν v είναι μια κορυφή στο C τότε μια γειτονιά της v είναι ένας κώνος πάνω από κύκλο S , του οποίου το μήκος ως προς τη «σφαιρική» μετρική ρ_v (σελ.70) είναι $> 2\pi$.

Αν $v \in C$ και η v δεν είναι κορυφή, τότε έχει γειτονιά ισομετρική με ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{H}^2$.

II) Το C περιέχει μια μοναδική ανώμαλη κορυφή v_0 και δεν περιέχει καμμία ελεύθερη ακμή.

Στην περίπτωση αυτή το C καλείται **υποσύμπλοκο με μοναδική ανώμαλη κορυφή**. Τότε, υπάρχει γειτονιά της v_0 στο C ομοιομορφική με κώνο της μορφής $v_0 \cdot L(v_0)$, όπου το $L(v_0)$ είναι πεπερασμένο κλειστό γράφημα. Αν v είναι μια κορυφή με $v \neq v_0$, τότε μια γειτονιά της v στο C είναι κώνος πάνω από κύκλο S , του οποίου το μήκος ως προς τη «σφαιρική» μετρική ρ_v είναι $> 2\pi$.

Λήμμα 4.2.4: Έστω C ένα υποσύμπλοκο του $\tilde{X}$, το οποίο είναι είτε:

(I) υπερβολικό επίπεδο με κορυφές, είτε (II) υποσύμπλοκο με μοναδική ανώμαλη κορυφή v_0 .

Τότε, το σύνορο του C είναι ομοιομορφικό με το S^1 στην περίπτωση (I) ή ομοιομορφικό με το $L(v_0)$ στην περίπτωση (II), όπου $L(v_0)$ είναι το γράφημα που αντιστοιχεί στην κορυφή v_0 .

Απόδειξη:

Έστω x_0 σημείο βάσης του $\tilde{X}$.

(I) Αν το C είναι ένα υπερβολικό επίπεδο με κορυφές, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 του [24], έπεται ότι το $\partial_{vis} C$ είναι ομοιομορφικό με το S^1 . Θεωρούμε ένα κυρτό υποσύνολο W του C το οποίο φράσσεται από δύο γεωδαισιακές ακτίνες $[x_0, \xi)$ και $[x_0, \eta)$. Το W είναι ομοιομορφικό με το ημιεπίπεδο $R^{2,+} = \{(x, y) \in R^2 : y \geq 0\}$ και θα καλείται «σφήνα» με κορυφές. Καθώς το $\partial_{vis} W$ εμβυθίζεται στο $\partial_{vis} C$, εύκολα βλέπουμε ότι το $\partial_{vis} W$ είναι ομοιομορφικό με το $[0, 1]$.

(II) Έστω C ένα υποσύμπλοκο με μοναδική ανώμαλη κορυφή v_0 . Τότε, θα λέμε ότι η γεωδαισιακή ακτίνα $[v_0, \eta)$ επεκτείνει το γεωδαισιακό τμήμα $[v_0, z]$ αν $[v_0, z] \subset [v_0, \eta)$. Έστω $L[x, y]$ ένα υποτόξο του $L(v_0)$ και $[v_0, \xi_1), [v_0, \xi_2)$ δύο γεωδαισιακές ακτίνες οι οποίες επεκτείνουν τα $[v_0, x]$ και $[v_0, y]$, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια ορίζουμε μοναδική «σφήνα» με κορυφές, $W \subset C$ ώστε: το W φράσσεται από τις $[v_0, \xi_1), [v_0, \xi_2)$ και περιέχει όλες τις γεωδαισιακές ακτίνες που επεκτείνουν τα γεωδαισιακά τμήματα $[v_0, z]$, για κάθε z στο εσωτερικό του $L[x, y]$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το ∂W είναι ομοιομορφικό με το $[0, 1]$. Εκφράζουμε το γράφημα $L(v_0)$ ως $L(v_0) = \bigcup_{i=1, \dots, n} L[x_i, x_{i+1}]$, ώστε τα εσωτερικά των $L[x_i, y_i]$ να είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Σε κάθε τέτοιο $L[x_i, y_i]$ αντιστοιχίζουμε μια «σφήνα» με κορυφές W_i ώστε $\bigcup_i W_i = C$ και τα εσωτερικά των W_i να είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ομοιομορφισμό από το $L(v_0)$ στο $\partial_{vis} C$. $\square$

Ορισμός 4.2.5: Ως **ιδεώδες πολύγωνο** P στο $\tilde{X}$ ορίζουμε ένα υποσύμπλοκο του $\tilde{X}$, το οποίο είναι ομοιομορφικό με ένα κλειστό 2-δίσκο D , μείον πεπερασμένο πλήθος σημείων από το ∂D .

Ορισμός 4.2.6: Ως **πλευρά** ενός ιδεώδους πολυγώνου P ορίζουμε κάθε συνιστώσα του ∂P .

Έστω v κορυφή στο $\tilde{X}$ και P_v το σύνολο όλων των ιδεωδών πολυγώνων P του $\tilde{X}$ έτσι ώστε αν T είναι μια έδρα του $\tilde{X}$ με $T \subset P$, τότε η v να είναι κορυφή της T . Προφανώς το σύνολο P_v είναι μη-κενό. Εφοδιάζουμε το P_v με τη διάταξη του εγκλεισμού και εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχει ιδεώδες πολύγωνο $P(v)$ το οποίο είναι ελαχιστικό στοιχείο του P_v . Ένας γεωμετρικός τρόπος κατασκευής του $P(v)$ είναι ο ακόλουθος:

Θεωρούμε το γράφημα $L(v)$ που αντιστοιχεί στην κορυφή v και ένα υπογράφημα $G(v)$ του $L(v)$, ομοιομορφικό με το S^1 . Χρησιμοποιώντας το $G(v)$ ως οδηγό, βρίσκουμε τρίγωνα $\{T_i\}_{i=1,\dots,n}$ της $\mathcal{T}$ τα οποία μοιράζονται την κορυφή v , ώστε η τομή $T_i \cap T_{(i+1) \bmod n}$ να είναι semi-infinite πλευρά για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Η ένωση των τριγώνων $\{T_i\}_{i=1,\dots,n}$ δημιουργεί το ιδεώδες πολύγωνο $P(v)$ που περιέχει την κορυφή v στο εσωτερικό του ή στο σύνορό του. Ονομάζουμε το $P(v)$ **ελαχιστικό ιδεώδες πολύγωνο** το οποίο περιέχει τη v , η οποία θα καλείται **κορυφή** του $P(v)$.

Λήμμα 4.2.7: Έστω v, v' δύο διαφορετικές κορυφές του $\tilde{X}$, καθώς και $P(v), P(v')$ δύο ελαχιστικά ιδεώδη πολύγωνα που περιέχουν τις v, v' αντίστοιχα. Τότε έχουμε είτε $P(v) \cap P(v') = \emptyset$, είτε $P(v) \cap P(v') = s$, όπου s είναι η κοινή πλευρά των $P(v)$ και $P(v')$.

Απόδειξη:

Έστω $P(v) \cap P(v') = P \neq \emptyset$. Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.3, το P είναι κυρτό υποσύνολο του $\tilde{X}$. Αν το P δεν εκφυλίζεται σε κοινή πλευρά s των $P(v)$ και $P(v')$, συμπεραίνουμε ότι το P είναι ιδεώδες πολύγωνο. Από την κατασκευή του $P(v)$ έχουμε ότι κάθε έδρα T του $P(v) \cap \tilde{X}$ περιέχει την κορυφή v . Επομένως, $v \in P \subset P(v)$ το οποίο αντιβαίνει στο γεγονός ότι το $P(v)$ είναι ελαχιστικό. $\square$

Θεωρούμε σημεία $\eta, \xi \in \partial_{vis} \tilde{X}$ και γεωδαισιακή $\tilde{g} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$, με $\tilde{g}(-\infty) = \eta$ και $\tilde{g}(+\infty) = \xi$, ενώ με $\text{Im } \tilde{g}$ συμβολίζουμε την εικόνα της $\tilde{g}$. Αποδεικνύουμε το ακόλουθο στοιχειώδες λήμμα: (βλ. επίσης Λήμμα 2, [39])

Λήμμα 4.2.8: Α) Αν e είναι μια ακμή στο χώρο $\tilde{X}$, τότε είτε η τομή $e \cap \text{Im } \tilde{g}$ αποτελείται μόνο από ένα σημείο, είτε $e \subset \text{Im } \tilde{g}$.
Β) Δεν υπάρχουν $t_1, t_2, t_3 \in (-\infty, +\infty)$, με $t_1 < t_2 < t_3$, ώστε να ισχύει:
 $\tilde{g}(t_1), \tilde{g}(t_3) \in P$ και $\tilde{g}(t_2) \notin P$, καθώς το P είναι ένα ιδεώδες πολύγωνο στο $\tilde{X}$.

Απόδειξη:

Η απόδειξη των Α) και Β) έπεται άμεσα από το γεγονός ότι τα e και P_j είναι κυρτά υποσύνολα του $\tilde{X}$ και ο $\tilde{X}$ είναι χώρος CAT(-1). Επομένως, οποιαδήποτε δύο σημεία είτε στο P_j , είτε στην e , μπορούν να ενωθούν με μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα που ανήκει στο P_j ή στην e αντίστοιχα. $\square$

Θεωρούμε $\gamma : I \rightarrow \tilde{X}$ γεωδαισιακή ακτίνα ή γεωδαισιακή γραμμή. Τότε υπάρχει οικογένεια (πεπερασμένη ή άπειρη) ελαχιστικών ιδεωδών πολυγώνων $\{P_i\}$, τα οποία καλύπτουν την εικόνα της γ . Θεωρούμε μια διαμέριση του I ως ένωση (πεπερασμένη ή άπειρη) κλειστών διαστημάτων $I = \bigcup I_i$ και αριθμούμε τα $\{P_i\}$ έτσι ώστε: για κάθε i , $\gamma(I_i) \subset P_i$ και τα P_i, P_{i+1} έχουν κοινή πλευρά που περιέχει τη $\gamma(t_i)$ όπου $t_i = I_i \cap I_{i+1}$. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει πάντοτε, σύμφωνα με τα Λήμματα 4.2.7 και 4.2.8. Καλούμε την $\{P_i\}$ **διατεταγμένη ακολουθία ελαχιστικών ιδεωδών πολυγώνων που τέμνονται από τη γ** . Η ένωση $\bigcup_i P_i$ ορίζει ένα σύμπλοκο S_γ του $\tilde{X}$ ομοιομορφικό με επιφάνεια. Η S_γ θα καλείται **αναπτυκτική επιφάνεια συσχετισμένη με τη γ** . Η ακολουθία $\{P_i\}$ και κατά συνέπεια η επιφάνεια S_γ , είναι μοναδική αν η $\gamma(I)$ δεν περιέχει μια ολόκληρη ακμή του $\tilde{X}$.

Λήμμα 4.2.9: Υπάρχει ένα υποσύμπλοκο C_γ του $\tilde{X}$, ώστε $S_\gamma \subset C_\gamma$ και το C_γ είναι ισομετρικό με ένα υπερβολικό επίπεδο με κορυφές.

Απόδειξη:

Συμβολίζουμε με E το σύνολο των ελεύθερων ακμών της S_γ . Για κάθε $e \in E$ μπορούμε να βρούμε ιδεώδες πολύγωνο P_e του $\tilde{X}$, ώστε $S_\gamma \cap P_e = e$. Το $S_\gamma \cup P_e$ είναι υποσύμπλοκο του $\tilde{X}$ και επομένως, μέσω του Λήμματος 4.2.3, το $S_\gamma \cup P_e$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\tilde{X}$. Θέτουμε $S_\gamma^1 = S_\gamma \cup \{P_e : e \in E\}$. Προφανώς το S_γ^1 είναι ένα νέο υποσύμπλοκο του $\tilde{X}$ με $S_\gamma \subset S_\gamma^1$. Συμβολίζουμε με E^1 το σύνολο των ελεύθερων ακμών της S_γ^1 και στη συνέχεια θέτουμε $S_\gamma^2 = S_\gamma^1 \cup \{P_e : e \in E^1\}$. Επαγωγικά ορίζουμε τα υποσύμπλοκα S_γ^n , $n=1,2,\dots$ και θέτουμε $C_\gamma = \bigcup_n S_\gamma^n$.

Προφανώς το C_γ είναι ένα υποσύμπλοκο και μπορεί να εκφρασθεί ως μια αύξουσα ένωση ανοικτών 2-κελιών (cells). Συνεπώς, μέσω του [13] έχουμε ότι το C_γ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbf{R}^2$. Τελικά το C_γ είναι ένα υπερβολικό επίπεδο με κορυφές στο $\tilde{X}$. $\square$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.7, ο $\tilde{X}$ μπορεί να καλυφθεί από ελαχιστικά ιδεώδη πολύγωνα P_i , $i \in N$. Συμβολίζουμε με $\tilde{\Delta}$ το άπειρο γράφημα που λαμβάνουμε αν ενώσουμε τις κορυφές των P_i με γεωδαισιακά τμήματα του $\tilde{X}$. Μέσω των Λημμάτων 4.2.7 και 4.2.8 έχουμε ότι το $\tilde{\Delta}$ είναι δέντρο.

Θεωρούμε γεωδαισιακή ακτίνα $\delta: [0, +\infty) \rightarrow \tilde{\Delta}$, η οποία είναι κατά τμήματα γεωδαισιακή ακτίνα στο $\tilde{X}$. Έστω P_i^δ , $i \in N$ τα άπειρα ελαχιστικά ιδεώδη πολύγωνα που τέμνονται από την εικόνα της δ . Έτσι μπορούμε να συσχετίσουμε τη δ με μια επιφάνεια $S_\delta \subset \tilde{X}$ η οποία περιέχει την $\text{Im } \delta$ και θα καλείται **αναπτυκτική επιφάνεια συσχετισμένη με τη δ** . Επιπλέον, παρόμοια με την απόδειξη του Λήμματος 4.2.9 μπορούμε να βρούμε ένα υπερβολικό επίπεδο με κορυφές $C_\delta \subset \tilde{X}$, ώστε $S_\delta \subset C_\delta$.

4.3 Το Σύνολο Των Οριακών Σημείων της $\pi_1(X)$

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα αποδείξουμε ότι αν $X = \tilde{X}/G$, όπου G υποομάδα της ομάδας $\text{Isom}(\tilde{X})$ των ισομετριών του $\tilde{X}$, τότε το σύνολο των οριακών σημείων της G είναι ολόκληρο το σύνορο $\partial_{\text{vis}} \tilde{X}$. Από αυτό το γεγονός θα συνάγουμε ότι ο χώρος των κλειστών γεωδαισιακών του X είναι πυκνός στο χώρο των γεωδαισιακών του X .

Ορισμός 4.3.1: [37, σελ.573] Έστωσαν X γνήσιος, γεωδαισιακός, $\text{CAT}(-1)$ χώρος, $\partial_{\text{vis}} X$ το σύνορό του και G μια διακριτή ομάδα ισομετριών του X που δρα στο X καθαρά ασυνεχώς. Ένα σημείο $\xi \in \partial_{\text{vis}} X$ λέγεται **οριακό σημείο** της G , αν υπάρχει $x \in X$ και $\{g_i\} \in G$ ώστε $\{g_i x\} \rightarrow \xi$. Το **οριακό σύνολο**, $A(G)$ της G , είναι το σύνολο όλων των οριακών σημείων της G . Αν $x \in X$ τότε $A(G) = \overline{Gx} \cap \partial_{\text{vis}} X$ (προφανώς $A(G) \subset \partial_{\text{vis}} X$).

Λήμμα 4.3.2: Έστω $\delta: [0, +\infty) \rightarrow \tilde{\Delta}$ γεωδαισιακή ακτίνα. Το σύνολο των ιδεωδών κορυφών της S_δ στο $\partial_{\text{vis}} C_\delta$, έχει μοναδικό σημείο συσσώρευσης $v(\delta) \in \partial_{\text{vis}} C_\delta$. Επιπλέον:

- i) Αν έχουμε $v \in \partial_{\text{vis}} C_\delta$ ώστε η v να είναι ιδεώδης κορυφή άπειρου πλήθους ιδεωδών πολυγώνων της S_δ , τότε $v = v(\delta)$.
- ii) Αν $\{p_n\}$ είναι μια ακολουθία στο $S_\delta = \bigcup P_i^\delta: p_n \in P_n^\delta, \forall n$, τότε $p_n \rightarrow v(\delta)$.

Απόδειξη:

Εργαζόμαστε όπως ακριβώς και στο Λήμμα 7 του [18], με τη διαφορά ότι εδώ χρησιμοποιούμε ελαχιστικά ιδεώδη πολύγωνα, αντί για ιδεώδη τρίγωνα. Επίσης, εδώ το C_δ έχει το ρόλο του H^2 .

Μέσω της κατασκευής της S_δ βλέπουμε εύκολα ότι το σύνολο των ιδεωδών κορυφών αυτής, έχει το πολύ δύο σημεία συσσώρευσης στο $\partial_{\text{vis}} C_\delta$, έστω ξ και η . Έστω $P_i^\delta, P_{i+1}^\delta$ δύο ελαχιστικά ιδεώδη πολύγωνα της S_δ , τα οποία μοιράζονται μια κοινή πλευρά s_i . Συμβολίζουμε με μ_i, λ_i τις προβολές των κορυφών $v_i \in P_i^\delta, v_{i+1} \in P_{i+1}^\delta$ αντίστοιχα, στην κοινή πλευρά s_i .

Η απόσταση $d_{s_i}(\mu_i, \lambda_i)$ των σημείων μ_i, λ_i , μετρημένη στην κοινή πλευρά s_i , καθορίζεται από την ισομετρία που χρησιμοποιήσαμε κατά τη συγκόλληση των $P_i^\delta, P_{i+1}^\delta$. Επιλέγοντας, αν είναι απαραίτητο, κατάλληλη υπακολουθία, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι: $\mu_i \rightarrow \eta$ και $\lambda_i \rightarrow \xi$, οπότε ως συνέπεια έχουμε ότι: $d_{s_i}(\mu_i, \lambda_i) \rightarrow \infty$. Καθώς όμως το X είναι ένα πεπερασμένο πολύεδρο, το σύνολο $\{d_{s_i}(\mu_i, \lambda_i) : i = 1, 2, \dots, \infty\}$ είναι πεπερασμένο. Τελικά έχουμε ότι $\xi = \eta$.

Οι αποδείξεις των ισχυρισμών i), ii) αποδεικνύονται παρόμοια με το Λήμμα 7 του [18]. □

Η δράση της $G \cong \pi_1(X)$ στο $\tilde{X}$ περιορίζεται σε δράση της G στο $\tilde{A}$, έτσι ώστε το $\tilde{A}/G = A$ να είναι ένα κλειστό γράφημα που περιέχεται στο X . Καθώς όμως ο χώρος $\tilde{A}$ είναι CAT(-1) και η G δρα συσυμπαγώς και καθαρά ασυνεχώς στο $\tilde{A}$, είναι γνωστό το γεγονός ότι το σύνολο των οριακών σημείων $A_\infty(G)$ της δράσης της G στο $\tilde{A}$, ισούται με το $\partial_{vis} \tilde{A}$. [18]

Πρόταση 4.3.3: Υπάρχει μια συνεχής και «επί» απεικόνιση $f : \partial_{vis} \tilde{A} \rightarrow \partial_{vis} \tilde{X}$.

Απόδειξη:

Έστω $\xi \in \partial_{vis} \tilde{A}$ και $\delta : [0, +\infty) \rightarrow \partial_{vis} \tilde{A}$ μια γεωδαισιακή ακτίνα που αντιπροσωπεύει το ξ . Θεωρώντας την αναπτυκτική επιφάνεια $S_\delta = \bigcup P_i^\delta$ που είναι συσχετισμένη με τη δ , έστω v_i η κορυφή του ιδεώδους πολυγώνου P_i , για κάθε i . Μέσω του Λήμματος 4.3.2, η ακολουθία $\{v_i\}$ συγκλίνει σε μοναδικό σημείο v του $\partial_{vis} \tilde{X}$, οπότε και θέτουμε $f(\xi) = v$. Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f είναι καλά ορισμένη και όπως στην Πρόταση 8 του [18], να δείξουμε ότι είναι συνεχής και «επί».

Στην πραγματικότητα η απόδειξη εδώ είναι πιο εύκολη, καθώς το $\tilde{Z}$ είναι δέντρο. □

Πόρισμα 4.3.4: Το σύνολο των οριακών σημείων $A(G)$ της δράσης της G στο $\tilde{X}$, είναι ολόκληρο το σύνορο $\partial_{vis} \tilde{X}$.

Απόδειξη:

Καθώς η f είναι συνεχής και «επί», και καθώς $A_{\tilde{Z}}(G) = \partial_{vis} \tilde{Z}$, συνάγουμε άμεσα ότι $A(G) = \partial_{vis} \tilde{X}$. □

Μέσω του Πορίσματος 4.3.4 λαμβάνουμε τα δύο επόμενα θεωρήματα για τα δισδιάστατα σύμπλοκα X της κλάσης S . (Οι αποδείξεις τους είναι παρόμοιες με αυτές των Θεωρημάτων 1 και 2 του [18]).

Θεώρημα 4.3.5: Υπάρχει γεωδαισιακή $\gamma \in GX$ της οποίας η τροχιά $R\gamma$ υπό τη γεωδαισιακή ροή, είναι πυκνή στο GX .

Θεώρημα 4.3.6: Οι κλειστές γεωδαισιακές είναι πυκνές στο GX .

4.4 Το Σύνορο του Δισδιάστατου Συμπλόκου

Έστω X υπερβολικό σύμπλοκο της κλάσης S . Αν το X έχει μια ανώμαλη semi-infinite ακμή, τότε το X έχει αναγκαστικά μια ανώμαλη κορυφή. Όμως είναι πιθανό να έχει μια ανώμαλη bi-infinite ακμή και να μην έχει ανώμαλες κορυφές. (Αυτό το αναφέρουμε για να φανεί ότι το πρόβλημα δεν το δημιουργούν μόνο οι ανώμαλες κορυφές). Αν το X δεν έχει ούτε ανώμαλες κορυφές, ούτε ανώμαλες bi-infinite ακμές, είναι πλήρης επιφάνεια πεπερασμένου όγκου με κορυφές. Τότε το $\tilde{X}$ είναι ένα υπερβολικό επίπεδο με κορυφές και $\partial_{vis} \tilde{X} \cong S^1$.

Το βασικό συμπέρασμα της παραγράφου είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.4.1: Έστω X υπερβολικό σύμπλοκο της κλάσης S .

Υποθέτουμε ότι περιέχει είτε μία ανώμαλη κορυφή, είτε μία ανώμαλη bi-infinite ακμή. Τότε:

(I) Για κάθε $\xi, \eta \in \partial_{vis} \tilde{X}$ υπάρχει απειρία διακριτών υποχώρων S_i του $\partial \tilde{X}$, ομοιομορφικών με το S^1 που περιέχουν τα ξ, η .

Επιπλέον, κάθε S_i είναι το σύνορο ενός υπερβολικού επιπέδου με κορυφές, $C_i \subset \tilde{X}$.

(II) Το $\partial_{vis} \tilde{X}$ είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικό.

Απόδειξη:

(I) Έστω $\gamma : (-\infty, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$ η μοναδική γεωδαισιακή του $\tilde{X}$ με $\gamma(-\infty) = \eta$ και $\gamma(+\infty) = \xi$. Θεωρούμε την, S_γ , αναπτυκτική επιφάνεια που είναι συσχετισμένη με τη γ , $S_\gamma \subset \tilde{X}$ και μέσω του Λήμματος 4.2.9, υπάρχει υπερβολικό επίπεδο με κορυφές $C \subset \tilde{X}$, ώστε $S_\gamma \subset C$. Μέσω του Λήμματος 4.2.4 έχουμε $\partial_{vis} C \cong S^1$ και σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.3, το $\partial_{vis} C$ εμφυτεύεται στο $\partial_{vis} \tilde{X}$.

Υποθέτουμε ότι το X περιέχει μια ανώμαλη κορυφή (αντίστοιχα, μια ανώμαλη bi-infinite ακμή). Μέσω του Πορίσματος 4.3.4 (λόγω της δράσης της G στο $\tilde{X}$ που δίνει $A(G) = \partial_{\text{vis}} \tilde{X}$, μια ανώμαλη κορυφή μπορεί να τη βλέπει η S_γ ως απλή), συνάγουμε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος ανώμαλων κορυφών (αντίστοιχα ανώμαλων bi-infinite ακμών) στο $\tilde{X} - S_\gamma$. Επομένως μπορούμε να βρούμε άπειρο πλήθος διακριτών υποσυμπλόκων $C_i \subset \tilde{X}$, ώστε να περιέχουν την S_γ και να είναι υπερβολικά επίπεδα με κορυφές. Πράγματι, η ύπαρξη μιας ανώμαλης κορυφής (αντίστοιχα ανώμαλης bi-infinite ακμής) στο $\tilde{X}$, μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε υπερβολικό επίπεδο με κορυφές, C , που περιέχει την S_γ , με πολλούς (άπειρους) τρόπους.

Έστω v_0 ανώμαλη κορυφή στο $\tilde{X} - S_\gamma$. Καθώς η v_0 είναι ανώμαλη, θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον διακριτά ιδεώδη πολύγωνα $P(v_0)$, $P'(v_0)$ που την περιέχουν, ως απλή κορυφή έκαστο. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε δύο τουλάχιστον διακριτά υπερβολικά επίπεδα με κορυφές, έστω C , C' , ώστε $P(v_0) \cup S_\gamma \subset C$ και $P'(v_0) \cup S_\gamma \subset C'$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε γεωδαισιακή ακτίνα $\delta : [0, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$ ώστε $\delta(0) \in S_\gamma$ και $\delta(t_0) \in P(v_0)$ για τυχαίο $t_0 \in [0, +\infty)$, (ώστε να είναι «οδηγός» της σύνδεσης S_γ , $P(v_0)$).

Εύκολα, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία του Λήμματος 4.2.9, μπορούμε να συμπληρώσουμε (βήμα-βήμα) την S_γ σε ένα υπερβολικό επίπεδο με κορυφές, C , ώστε $P(v_0) \cup \text{Im } \delta \subset C$.

Σχηματικά:

Καθώς όμως έχουμε μια απειρία διακριτών ανώμαλων κορυφών $v_0 \in \tilde{X} - S_\gamma$, μπορούμε να κατασκευάσουμε απειρία υπερβολικών χώρων με κορυφές, C_i , ώστε $S_\gamma \subset C_i$.

(II) Έστω $x \in \tilde{X}$ σημείο βάσης. Στο $\partial_{\text{vis}} \tilde{X}$ θεωρούμε τη μετρική $d_x^{\partial_{\text{vis}} \tilde{X}}(\xi, \xi')$ ως εξής:

«Για $y, y' \in \tilde{X}$ ορίζουμε $\alpha_x(y, y') = \sin \frac{(y \hat{x} y')}{2}$, όπου $(y \hat{x} y')$ η γωνία του τριγώνου σύγκρισης στο H^2 . Για $\xi, \xi' \in \partial_{\text{vis}} \tilde{X}$ συμβολίζουμε με $[x, \xi), [x, \xi')$ τις αντίστοιχες γεωδαισιακές ακτίνες. Έχει αποδειχθεί στο Λήμμα 2.5.6 του [8] ότι: $d_x^{\partial_{\text{vis}} \tilde{X}}(\xi, \xi') = \lim \alpha_x(y, y')$, όπου $y \in [x, \xi)$, $y' \in [x, \xi')$ αντίστοιχα και $y \rightarrow \xi$, $y' \rightarrow \xi'$ ».

Έστω $\xi_0 \in \partial_{\text{vis}} \tilde{X}$ και γειτονιά U του ξ_0 στο $\partial_{\text{vis}} \tilde{X}$. Αν $\xi, \eta \in U$ και (ξ, η) η εικόνα μιας γεωδαισιακής γραμμής του $\tilde{X}$ που συνδέει τα ξ, η , διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) Η (ξ, η) δεν περιέχει ανώμαλη κορυφή.

Αν $y \in (\xi, \eta)$, θεωρούμε το γεωδαισιακό τμήμα $[x, y]$ και βρίσκουμε ιδεώδες πολύγωνο P του $\tilde{X}$ που περιέχει το $[x, y]$. Καθώς το (ξ, η) δεν περιέχει ανώμαλη κορυφή, μπορούμε να βρούμε υπερβολικό επίπεδο με κορυφές $C \subset \tilde{X}$ ώστε: $[x, y] \cup (\xi, \eta) \subset C$.

2) Η (ξ, η) περιέχει μια ανώμαλη κορυφή, v .

Έστω $L(v)$ κλειστό γράφημα αντίστοιχο της κορυφής v .

Θέτουμε: $a = [x, v] \cap L(v)$, $b = [v, \xi] \cap L(v)$, $c = [v, \eta] \cap L(v)$.

Έστω $G(v)$ το ελαχιστικό υπογράφημα του $L(v)$, που περιέχει τα σημεία a, b, c . Τότε, υπάρχει υποσύμπλοκο C , του $\tilde{X}$ που περιέχει τη v (ως μοναδική ανώμαλη κορυφή), ώστε: $[x, y] \cup (\xi, \eta) \subset C$.

Σε κάθε περίπτωση, καθώς το C είναι κυρτό υποσύνολο του $\tilde{X}$, συμπεραίνουμε ότι τα $[x, \xi)$, $[x, \xi')$ περιέχονται στο C . Έτσι, ως προς την επαγόμενη μετρική στο $\partial_{vis} C$, $d_x^{\partial_{vis} C}(\xi, \xi')$, έχουμε:

$d_x^{\partial_{vis} \tilde{X}}(\xi, \xi') = d_x^{\partial_{vis} C}(\xi, \xi')$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ένα εκ των τόξων του $\partial_{vis} C$ που συνδέει τα ξ_0, ξ ανήκει στη U .

Άρα το $\partial_{vis} \tilde{X}$ είναι κατά τόξα συνεκτικό. □

Σημείωση 4.4.2: Είναι προφανές ότι τα δισδιάστατα ιδεώδη πολύεδρα, όπως ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 3, ανήκουν στην κλάση των χώρων που μελετήθηκαν στο παρόν Κεφάλαιο. Ο ισχυρισμός αυτός οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε ιδεώδες τρίγωνο T μπορεί να τριγωνοποιηθεί με τρία τρίγωνα που θα έχουν μία κορυφή στο εσωτερικό του T και τις άλλες δύο κορυφές στο άπειρο.

Σχηματικά:

Επομένως, το Θεώρημα 4.4.1 ισχύει και για το σύνορο του καθολικού καλύμματος των δισδιάστατων ιδεωδών πολυέδρων.

4.5 Παράδειγμα Συγκεκριμένου Δισδιάστατου Συμπλόκου

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε ένα απλό παράδειγμα υπερβολικού συμπλόκου X της κλάσης S και θα αποδείξουμε κάποιες επιπρόσθετες ιδιότητες του συνόρου $\partial_{vis} \tilde{X}$.

Παράδειγμα 4.5.1: Θεωρούμε δύο ιδεώδη τρίγωνα T_1, T_2 και πλευρά e_i του τριγώνου T_i , $i = 1, 2$. Κολλάμε τα T_1, T_2 ταυτίζοντας την e_1 με την e_2 , μέσω ισομετρίας h . Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε ιδεώδες τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί:

Στη συνέχεια κολλάμε, μέσω ισομετριών, τις προσανατολισμένες πλευρές $AB, \Delta\Gamma, A\Gamma$, καθώς και τις προσανατολισμένες πλευρές $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$. Ο τρόπος συγκόλλησης των παραπάνω πλευρών είναι μοναδικός, ώστε ο χώρος X που θα προκύψει να είναι πλήρης. Επίσης είναι φανερό ότι ο X είναι ένα υπερβολικό δισδιάστατο σύμπλοκο, της κλάσης S .

Αξίζει να σημειώσουμε ότι με παρόμοιο τρόπο (δηλαδή θεωρώντας τετράπλευρα με τις διαγωνίους τους και κολλώντας κατάλληλα), μπορούμε να κατασκευάσουμε πληθώρα παραδειγμάτων υπερβολικών δισδιάστατων συμπλόκων, της κλάσης S .

Ορισμός 4.5.2: Μια bi-infinite ακμή e του X θα καλείται **ανώμαλη ακμή τάξης k** , $k, k \geq 3$, αν για κάθε σημείο $x \in e$, υπάρχει γειτονιά U του x στο X , η οποία είναι ισομετρική με k ημι-δίσκους του H^2 συγκολλημένων κατά μήκος των ίσων διαμέτρων τους.

Παρατήρηση 4.5.3: Προφανώς, αν η e είναι μια bi-infinite ανώμαλη ακμή τάξης k και αν $\tilde{e} \subset \tilde{X}$ είναι μια ανύψωση της e , τότε υπάρχουν υποσύμπλοκα $R_1, R_2, \dots, R_k$ του $\tilde{X}$ ώστε κάθε R_i να είναι ομοιομορφικό με το ημιεπίπεδο $R^{2,+} = \{(x, y) : y \geq 0\}$ και $R_i \cap R_j = \tilde{e}$ για $i \neq j$.

Στο παράδειγμα αυτό αποδεικνύουμε ότι πέραν των αποτελεσμάτων του βασικού θεωρήματος, ισχύουν επιπρόσθετα οι εξής ιδιότητες:

1^η: αν τα ξ, η είναι αυθαίρετα σημεία του $\partial_{vis} \tilde{X}$, τότε ο χώρος

$\partial_{vis} \tilde{X} - \{\xi, \eta\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός (βλ. και Σημείωση 3.3.2)

και

2^η: αν $\xi \in \partial_{vis} \tilde{X}$ και το ξ δεν είναι ιδεώδης κορυφή στο $\tilde{X}$, τότε το ξ δεν είναι σημείο τοπικού διαχωρισμού (δηλαδή, για κάθε γειτονιά U του ξ στο $\partial_{vis} \tilde{X}$, ο χώρος $U - \{\xi\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικός).

Οι δύο αυτές επιπλέον ιδιότητες προκύπτουν από το γεγονός ότι κάθε γεωδαισιακή του χώρου τέμνει εγκάρσια μία ανώμαλη ακμή.

Απόδειξη:

1^η ιδιότητα: Θεωρούμε δύο αυθαίρετα σημεία μ, ν στο $\partial_{vis} \tilde{X}$ διαφορετικά από τα ξ, η . Όπως έχουμε δει, υπάρχει υπερβολικό επίπεδο με κορυφές $C \subset \tilde{X}$, του οποίου το σύνορο $\partial_{vis} C$ είναι ομοιομορφικό με το S^1 και τα $\mu, \nu \in \partial_{vis} C \subset \partial_{vis} \tilde{X}$. Υποθέτουμε ότι τα ξ, η ανήκουν στο $\partial_{vis} C$ και διαχωρίζουν τα μ, ν . Αυτή είναι και η μοναδική περίπτωση κατά την οποία τα μ, ν δε συνδέονται με τόξο στο $\partial_{vis} C - \{\xi, \eta\}$, οπότε θα πρέπει να βρούμε ένα τόξο στο $\partial_{vis} \tilde{X}$ το οποίο να συνδέει τα μ, ν χωρίς να συναντάει τα ξ, η . Πράγματι, εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχει μια bi-infinite ανώμαλη ακμή $\tilde{e}$ τάξης 4 του $\tilde{X}$, ώστε:

- $\tilde{e} \subset C$ και η $\tilde{e}$ τέμνει τη γεωδαισιακή γραμμή (ξ, η)
- Υπάρχει σύμπλοκο $R \subset \tilde{X}$ ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^{2,+}$, με $\partial R = \tilde{e}$ και $R \cap C = \tilde{e}$.

Αν $\partial \tilde{e} = \{\kappa, \lambda\}$ τότε τα σημεία κ, λ στο $\partial_{vis} C$ διαχωρίζονται από τα ξ, η . Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κ (αντίστοιχα το λ) βρίσκεται στην ίδια συνιστώσα του $\partial_{vis} C - \{\xi, \eta\}$ μαζί με το μ (αντίστοιχα με το ν).

Επομένως, αν ενώσουμε το κ με το μ , το λ με το ν στο $\partial_{vis} C - \{\xi, \eta\}$, καθώς και το μ με το ν στο $\partial_{vis} R$, μπορούμε να βρούμε ένα δρόμο από το κ στο λ , στο $\partial_{vis} \tilde{X}$, ο οποίος δε συναντάει τα ξ, η . $\square$

Σημειώνουμε ότι η βασική υπόθεση που χρειάζεται για την απόδειξη της πρώτης ιδιότητας, είναι ότι κάθε γεωδαισιακή γραμμή του $\tilde{X}$ τέμνει μια ανώμαλη bi-infinite ακμή του $\tilde{X}$. Έτσι, κάθε χώρος X της S που ικανοποιεί την υπόθεση αυτή, έχει τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

2^η ιδιότητα: Θεωρούμε σημείο βάσης $x_0 \in \tilde{X}$, καθώς και σημείο ξ_0 στο $\partial_{vis} \tilde{X}$, το οποίο δεν είναι ιδεώδης κορυφή. Έστω $r: [0, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$ γεωδαισιακή ακτίνα με $r(0) = x_0$ και $r(+\infty) = \xi_0$, καθώς και $U \subset \partial_{vis} \tilde{X}$ αυθαίρετη γειτονιά του ξ_0 . Θεωρούμε ένα υπερβολικό επίπεδο με κορυφές C , το οποίο περιέχει την εικόνα της γεωδαισιακής. Αν $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ είναι η προβολή κάλυψης, θεωρούμε την τοπική γεωδαισιακή $\rho = r \circ \pi: [0, +\infty) \rightarrow X$. Τότε η εικόνα της ρ τέμνει μια ανώμαλη bi-infinite ακμή e , του X άπειρες φορές. Έστω $z_i = \rho(t_i)$, $i = 1, 2, \dots$, τα συγκεκριμένα σημεία τομής με $t_i \rightarrow \infty$ καθώς $i \rightarrow \infty$. Μέσω του Θεωρήματος 4.3.6 υπάρχει κλειστή γεωδαισιακή $h: (-\infty, +\infty) \rightarrow X$ η οποία τέμνει την e και έστω $z \in \text{Im } h \cap e$. Επιλέγουμε ακμές $\tilde{e}_i \subset C$ και σημεία $w_i \in \tilde{e}_i$, $i = 1, 2, \dots$, ώστε $p(\tilde{e}_i) = e$ και $p(w_i) = z_i$, $\forall i$. Έστω x_i σημεία στις $\tilde{e}_i$ με $p(x_i) = z$, $\forall i$.

Ισχυρισμός 1: Υπάρχει σταθερά $K > 0$ ώστε $d_{\tilde{X}}(x_i, w_i) < K$, για κάθε i

Απόδειξη:

Αν ο ισχυρισμός δεν ισχύει, τότε συνάγουμε ότι $d_e(z, z_i) \rightarrow \infty$, καθώς $i \rightarrow \infty$, όπου d_e είναι η επαγόμενη στην ακμή e μετρική. Αυτό σημαίνει ότι η z_i συγκλίνει σε ένα cusp c , του X .

Επομένως κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σημείων στην $\bigcup_i p^{-1}(z_i)$, άρα και η ακολουθία (w_i) , πρέπει να συγκλίνει σε ένα σημείο της $p^{-1}(c)$. Όμως η $p^{-1}(c)$ αποτελείται μόνο από ιδεώδεις κορυφές του $\partial_{\text{vis}} \tilde{X}$. Συνεπώς οδηγούμαστε σε άτοπο το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. $\square$

Ισχυρισμός 2: Η οξεία γωνία στην (w_i) , μεταξύ των r και $\tilde{e}_i$ (συμβολισμός: $\theta_i = \angle(w_i; r, \tilde{e}_i)$), δε συγκλίνει στο μηδέν, καθώς $i \rightarrow \infty$.

Απόδειξη:

Προφανώς, $\theta_i = \angle(z_i; \rho, e)$, είναι η οξεία γωνία στην $z_i \in X$, μεταξύ των ρ και e . Αν $\theta_i \rightarrow 0$, τότε $\angle(z_i; \rho, e) \rightarrow 0$, για $i \rightarrow \infty$. Καθώς υπάρχει σταθερά $K > 0$ ώστε $d_e(z, z_i) < K$, $\forall i$, συμπεραίνουμε ότι η (z_i) συγκλίνει σε ένα cusp c του X , γεγονός που οδηγεί σε άτοπο, όπως και προηγουμένως. $\square$

Έστω ξ_i, η_i τα άκρα των $\tilde{e}_i$ στο $\partial_{vis} C \subset \partial_{vis} \tilde{X}$. Με τη βοήθεια των Ισχυρισμών 1, 2 μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\xi_i \rightarrow \xi_0$ και $\eta_i \rightarrow \xi_0$ καθώς $i \rightarrow \infty$. Επομένως θα υπάρξει i_0 ώστε τα ξ_{i_0} και η_{i_0} να ανήκουν στη U . Έστω $r(t_0) = r([0, +\infty)) \cap \tilde{e}_{i_0}$. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 μπορούμε να βρούμε ένα σύμπλοκο R του $\tilde{X}$ με μοναδική ανώμαλη κορυφή ώστε: $\tilde{e}_{i_0} \subset R$, $r([0, t_0]) \subset R$ και $r([t_0, +\infty)) \cap R = r(t_0)$. Έτσι, μπορούμε να βρούμε στο $\partial_{vis} R$ ένα τόξο $A(\xi_{i_0}, \eta_{i_0})$, το οποίο συνδέει τα ξ_{i_0}, η_{i_0} , χωρίς να συναντά το ξ_0 . Με τη μετρική $d_{x_0}^{\partial_{vis} \tilde{X}}(\cdot, \cdot)$ όπως αυτή ορίστηκε στο Θεώρημα 4.4.1, βλέπουμε ότι $d_{x_0}^{\partial_{vis} \tilde{X}}(\xi_{i_0}, \eta_{i_0}) = d_{x_0}^{\partial_{vis} R}(\xi_{i_0}, \eta_{i_0})$. Συνεπώς $A(\xi_{i_0}, \eta_{i_0}) \subset U$, γεγονός που αποδεικνύει ότι το ξ_0 δεν είναι σημείο τοπικού διαχωρισμού.

Σημειώνουμε ότι η βασική υπόθεση που χρειάστηκε στη δεύτερη ιδιότητα είναι πως κάθε γεωδαισιακή ακτίνα $r: [0, +\infty) \rightarrow \tilde{X}$, έτσι ώστε η $r(+\infty)$ να μην είναι ιδεώδης κορυφή κάποιας έδρας του $\tilde{X}$, τέμνει μια ανώμαλη bi-infinite ακμή του $\tilde{X}$ άπειρες φορές. Έτσι, κάθε χώρος X της S που ικανοποιεί την υπόθεση αυτή, έχει τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο : Το Σύνορο των Ιδεωδών Πολυέδρων

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ένα πεπερασμένο ιδεώδες πολύεδρο, Y διάστασης 2. Υπενθυμίζουμε ότι το Y είναι ένας πλήρης χώρος που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος υπερβολικών ιδεωδών τριγώνων, τα οποία συγκολλώνται κατά μήκος των πλευρών τους, μέσω ισομετριών. (Για λεπτομέρειες δες Παράγραφο 3.1). Επίσης, υποθέτουμε ότι κάθε πλευρά του Y είναι τάξης 3, δηλαδή κάθε πλευρά του χώρου προκύπτει από τη συγκόλληση τριών πλευρών ιδεωδών υπερβολικών τριγώνων. Αν $\tilde{Y}$ είναι το καθολικό κάλυμμα του Y , θα αποδείξουμε ότι το $\partial_{vis}\tilde{Y}$ είναι ένα είδος συνόλου Sierpinski, το οποίο προκύπτει αφαιρώντας διαδοχικά ανοικτά σύνολα, από ένα κλειστό δίσκο του επιπέδου.

Συμβολίζουμε με $\{T_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ το σύνολο των ιδεωδών τριγώνων του $\tilde{Y}$. Ονομάζουμε τις πλευρές του τυχαίου T_l ως a_l, b_l, c_l και τις αντίστοιχες κορυφές A_l, B_l, C_l , σύμφωνα με την ακόλουθη διαδικασία:

Σταθεροποιούμε σημείο p_0 στο τρίγωνο T_0 και θεωρούμε τυχαίο σημείο p_l στο εσωτερικό κάθε T_l . Για κάθε l θεωρούμε το γεωδαισιακό τμήμα $[p_0, p_l]$ στο οποίο σταθεροποιούμε κατεύθυνση από το p_0 προς το p_l . Μέσω της συγκεκριμένης αυτής κατεύθυνσης, καθορίζεται το πότε ένα σημείο βρίσκεται δεξιά ή αριστερά του $[p_0, p_l]$. Συνεπώς, για την ονομασία των πλευρών και των κορυφών καθενός εκ των T_l , ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

- 1) Οι κορυφές στο άπειρο A_l, B_l, C_l βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές a_l, b_l, c_l .
- 2) Οι κορυφές του τριγώνου T_0 ονομάζονται A_0, B_0, C_0 , ακολουθώντας τη φορά των δεικτών του ρολογιού.
- 3) Οι πλευρές a_l και b_l συγκολλώνται μόνο με πλευρές c_m .
- 4) Η κορυφή A_l βρίσκεται δεξιά, ενώ η κορυφή B_l βρίσκεται αριστερά του $[p_0, p_l]$.

Έστω Ω η κλειστότητα της συνιστώσας του $\tilde{X} - c_0$, η οποία περιέχει το T_0 και χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι οι πλευρές του Ω αποτελούνται από τα ιδεώδη τρίγωνα $\{T_l\}_{l \in \mathbf{N}_0}$, όπου $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Αρχικά θα μελετήσουμε το $\partial_{vis} \Omega$.

Θέτουμε $\Theta_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} : \bar{x} \in \{0, 1\}^n, \bar{y} \in \{0, 2\}^n, n \in \mathbf{N} \right\}$. Προφανώς ένα στοιχείο $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ του Θ_0 ,

έχει τη μορφή: $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix}$. Ορίζουμε επαγωγικά, μια απεικόνιση

$\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \Theta_0$ ως εξής:

Αν T_{l_1}, T_{l_2} είναι τα τρίγωνα που συγκολλώνται κατά μήκος της πλευράς a_0 του T_0 και αν $T_{l'_1}, T_{l'_2}$ είναι τα τρίγωνα που συγκολλώνται κατά μήκος της πλευράς b_0 του T_0 , τότε

θέτουμε: $\sigma(l_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(l_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\sigma(l'_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(l'_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Αν για κάποιο $l \in \mathbf{N}$ έχουμε $\sigma(l) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix}$ και αν T_{l_1}, T_{l_2} είναι τα τρίγωνα που συγκολλώνται κατά μήκος της πλευράς a_l του T_l και $T_{l'_1}, T_{l'_2}$ είναι τα τρίγωνα που συγκολλώνται κατά μήκος της πλευράς b_l του T_l , τότε θέτουμε:

$\sigma(l_1) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 0 \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(l_2) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 0 \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & 2 \end{pmatrix}$,

$\sigma(l'_1) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 1 \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma(l'_2) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 1 \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & 2 \end{pmatrix}$.

Προφανώς η απεικόνιση $\sigma : \mathbf{N} \rightarrow \Theta_0$ είναι «1-1» και «επί».

Στη συνέχεια ορίζουμε μια νέα απεικόνιση $\tau_0 : \Theta_0 \rightarrow \partial_{vis} \Omega$, θέτοντας:

$\tau_0 \left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right) = C_l$, όπου $l \in \mathbf{N}$ είναι τέτοιο ώστε $\sigma(l) = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ και η C_l είναι η κορυφή της πλευράς T_l .

Έστω $\xi, \eta \in \partial_{vis} \Omega$. Συμβολίζουμε με $d^{\partial_{vis} \Omega}(\xi, \eta)$ την απόσταση των ξ, η στο $\partial_{vis} \Omega$, ως προς το σημείο βάσης p_0 , όπως ορίσαμε στην παράγραφο 4.4.

Επίσης συμβολίζουμε με $d(p_0, (\xi, \eta))$, (αντίστοιχα $d(p_0, c_l)$), την απόσταση του p_0 από τη γεωδαισιακή γραμμή (ξ, η) , (αντίστοιχα από την πλευρά c_l), $l \in \mathbb{N}$, στο $\tilde{X}$. Μέσω ενός Θεωρήματος του Gromov (βλ. Θεώρημα 1.5.2, Σημείωση 1.5.3 και Θεώρημα 2.5.1 στο [8]), έχουμε την ύπαρξη μιας σταθεράς $M > 0$ έτσι ώστε:

$$\frac{1}{M} e^{-d(p_0, (\xi, \eta))} < d^{\partial_{\text{vis}} \Omega}(\xi, \eta) < M e^{-d(p_0, (\xi, \eta))} \quad (*), \text{ για κάθε } \xi, \eta \in \partial_{\text{vis}} \Omega.$$

Λήμμα 5.1: Έχουμε $d^{\partial_{\text{vis}} \Omega}(\tau_0 \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}} \right), \tau_0 \left(\frac{\bar{x}'}{\bar{y}'} \right)) < M e^{-\delta}$, όπου:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & x_{n+1} & \cdot & \cdot & x_N \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y_{n+1} & \cdot & \cdot & y_N \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & x'_{n+1} & \cdot & \cdot & x'_K \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y'_{n+1} & \cdot & \cdot & y'_K \end{pmatrix},$$

$$l = \sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix} \text{ και } \delta = d(p_0, c_l).$$

Απόδειξη:

$$\text{Έστω } \xi = \tau_0 \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & x_{n+1} & \cdot & \cdot & x_N \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y_{n+1} & \cdot & \cdot & y_N \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\eta = \tau_0 \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & x'_{n+1} & \cdot & \cdot & x'_K \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y'_{n+1} & \cdot & \cdot & y'_K \end{pmatrix}. \text{ Το γεωδαισιακό τμήμα } [p_0, q]$$

το οποίο πραγματοποιεί την απόσταση $d(p_0, (\xi, \eta))$, προφανώς τέμνει την πλευρά c_l . Το ζητούμενο έπεται άμεσα. $\square$

Έστω $\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} : \hat{x} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \hat{y} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$, οπότε ένα στοιχείο του Θ έχει τη

μορφή: $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. Προφανώς το Θ μπορεί να ταυτισθεί με το

χώρο-γινόμενο $\{0,1\}^N \times \{0,2\}^N$ και κατά συνέπεια, το Θ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινομένου, είναι συμπαγής χώρος.

Πόρισμα 5.2: Αν $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \in \Theta$, τότε υπάρχει το όριο

$$\lim \tau_0 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix} \text{ στο } \partial_{vis} \Omega \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα 5.1, έπεται άμεσα ότι η ακολουθία

$$\tau_0 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix}, \text{ στο } \partial_{vis} \Omega, \text{ είναι Cauchy.} \quad \square$$

Έστω η απεικόνιση $\tau : \Theta \rightarrow \partial_{vis} \Omega$ με:

$$\tau \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \lim \tau_0 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix}, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Λήμμα 5.3: Η απεικόνιση τ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \tau \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y_{n+1} & y_{n+2} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{n+m} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \\ & = \tau \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 0 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y'_{n+1} & y'_{n+2} & \cdot & \cdot & \cdot & y'_{n+m} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \\ & = \tau_0 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdot & \cdot & y_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = A_0, \text{ όπου } A_0 \text{ κορυφή του } T_0.$$

$$\text{(iii)} \quad \tau \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdot & \cdot & y_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = B_0, \text{ όπου } B_0 \text{ κορυφή του } T_0.$$

Απόδειξη:

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα με εφαρμογή του Λήμματος 4.3.2. $\square$

Στο χώρο Θ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ώστε:

$$(i) \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y_{n+1} & y_{n+2} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{n+m} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 0 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y'_{n+1} & y'_{n+2} & \cdot & \cdot & \cdot & y'_{n+m} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$(ii) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdot & \cdot & y_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & \cdot & \cdot & y'_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$(iii) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdot & \cdot & y_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & \cdot & \cdot & y'_n & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Επίσης, ορίζουμε την απεικόνιση πηλίκου $\tilde{\tau} : \Theta / \sim \rightarrow \partial_{vis} \Omega$ με $\tilde{\tau} \left(\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} \right) = \tau \left(\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} \right)$, όπου με

$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$, στο $\Theta / \sim$. Σύμφωνα με το Λήμμα

5.3, έχουμε άμεσα ότι η $\tilde{\tau}$ είναι καλά ορισμένη και επιπλέον ισχύει:

Πόρισμα 5.4: (i) Η απεικόνιση $\tilde{\tau}$ είναι συνεχής.

(ii) $\tau(\Theta) = \tilde{\tau}(\Theta / \sim) = \partial_{vis} \Omega$.

Απόδειξη:

Σύμφωνα με τον ορισμό της τ είναι συνεχής απεικόνιση και κατά συνέπεια και η απεικόνιση πηλίκου $\tilde{\tau}$ θα είναι συνεχής.

Για το (ii), σημειώνουμε ότι το σύνολο των κορυφών $\{C_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ είναι πυκνό στο $\partial_{vis} \Omega$. Καθώς όμως το Θ είναι συμπαγές, έχουμε ότι το $\tau(\Theta)$ είναι

κλειστό υποσύνολο του $\partial_{\text{vis}}\Omega$ οπότε και συμπεραίνουμε ότι το $\tau(\Theta)$ περιέχει το σύνολο $\{C_l\}_{l \in \mathbb{N}}$. Επομένως, το $\tau(\Theta)$, άρα και το $\tilde{\tau}(\Theta/\sim)$ ισούται με το $\partial_{\text{vis}}\Omega$. $\square$

Πρόταση 5.5: Η απεικόνιση $\tilde{\tau} : \Theta/\sim \rightarrow \partial_{\text{vis}}\Omega$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\tilde{\tau}$ είναι ομοιομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι είναι «1-1», καθώς ο χώρος $\Theta/\sim$ είναι συμπαγής.

Οι ακόλουθες ανισότητες έπονται άμεσα από τη σχέση (*) (βλ. σελίδα 96)

$$(i) \frac{1}{M} e^{-\delta} < d^{\partial_{\text{vis}}\Omega}(\tau(\hat{x}), \tau(\hat{x}')), \text{ όπου:}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 1 & x_{n+2} & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y_{n+1} & y_{n+2} & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & x_n & 0 & 0 & \omega_{n+3} & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & y_n & y'_{n+1} & y'_{n+2} & y'_{n+3} & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$l = \sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & x_n & 0 & 1 \\ y_1 & \cdot & y_n & y'_{n+1} & y''_{n+2} \end{pmatrix} \text{ και } \delta = d(p_0, c_l).$$

$$(ii) \frac{1}{M} e^{-\delta} < d^{\partial_{\text{vis}}\Omega}(\tau(\hat{x}), \tau(\hat{x}')), \text{ όπου:}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 0 & x_{n+2} & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y_{n+1} & y_{n+2} & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & x_n & 1 & 1 & \omega_{n+3} & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & y_n & y'_{n+1} & y'_{n+2} & y'_{n+3} & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$l = \sigma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & x_n & 1 & 0 \\ y_1 & \cdot & y_n & y'_{n+1} & y''_{n+2} \end{pmatrix} \text{ και } \delta = d(p_0, c_l).$$

Από τις ανισότητες αυτές συνάγουμε ότι:

$$\tau \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 1 & x_{n+2} & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y_{n+1} & y_{n+2} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq \tau \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & x_n & 0 & 0 & \omega_{n+3} & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & y_n & y'_{n+1} & y'_{n+2} & y'_{n+3} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (\text{I})$$

καθώς και:

$$\tau \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & x_n & 0 & x_{n+2} & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & \cdot & y_n & y_{n+1} & y_{n+2} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq \tau \begin{pmatrix} x_1 & \cdot & x_n & 1 & 1 & \omega_{n+3} & \cdot & \cdot \\ y_1 & \cdot & y_n & y'_{n+1} & y'_{n+2} & y'_{n+3} & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (\text{II}) .$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (I) και (II) συνάγουμε ότι η $\tilde{\tau}$ είναι «1-1». $\square$

Θεωρούμε το σύνολο Cantor $C = \left\{ x \in [0,1] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, x_n \in \{0,2\} \right\}$.

Στο σύνολο $[0,1] \times C \subset \mathbb{R}^2$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ ώστε: $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ αν και μόνο αν:

είτε, $x = x' = \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{2^n}$, με $x_n \in \{0,1\}$ και $x_N = 1$,

$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y'_n}{3^n}$, με $y_n, y'_n \in \{0,2\}$ και $y_n = y'_n$, για

$n = 1, 2, \dots, N-1$, καθώς $N \geq 2$

είτε,

$x = x' = 0$,

είτε,

$x = x' = 1$.

Πρόταση 5.6: Η απεικόνιση $\phi: \Theta / \sim \rightarrow ([0,1] \times C) / \mathcal{R}$, με

$$\phi\left(\left[\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_n & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n & \cdot & \cdot \end{array}\right]\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}\right) / \mathcal{R}, \text{ όπου:}$$

$x_n \in \{0,1\}$ και $y_n \in \{0,2\}$, είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη:

Άμεσα διαπιστώνουμε ότι η ϕ είναι συνεχής, «1-1» και «επί». $\square$

Παρατήρηση 5.7: Το $([0,1] \times C) / \mathcal{R}$, είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με μέτρο μηδέν.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε ένα υποσύνολο Σ του $\mathbb{R}^2$ που είναι ένα είδος συνόλου Sierpinski, το οποίο προκύπτει αφαιρώντας διαδοχικά ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^2$ και θα αποδείξουμε ότι το $([0,1] \times C) / \mathcal{R}$, άρα και το $\partial_{vis}\Omega$ είναι ομοιομορφικό με το Σ .

Ονομάζουμε **κλειστό μοναδιαίο δίσκο** Δ ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που είναι ισομετρικό, ως προς την επαγόμενη μετρική, με τον κλειστό δίσκο $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Επομένως, το υποσύνολο Σ θα είναι μια ένωση $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ώστε:

(i) $\Sigma_1 \subset \Delta_1$, $\Sigma_2 \subset \Delta_2$, όπου Δ_1, Δ_2 κλειστοί μοναδιαίοι δίσκοι.

(ii) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Delta_1 \cap \Delta_2$, είναι μοναδικό σημείο, έστω p_0 .

(iii) Το Σ_1 είναι ομοιομορφικό με το Σ_2 .

Κατασκευή του Σ (επαγωγικά):

ο Για $N = 1$.

Θεωρούμε το σύνολο $[0,1] \times [0,1]$ εφοδιασμένο με τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_1$ η οποία ταυτίζει:

- τα σημεία $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$ σε σημείο p_1 ,
- τα σημεία $\left(\frac{1}{2}, y\right)$, $y \in \mathbb{R}$ σε σημείο p_0 ,
- τα σημεία $(1, y)$, $y \in \mathbb{R}$ σε σημείο p_2 .

Ο χώρος πηλίκο $([0,1] \times [0,1]) / \mathcal{R}_1$ είναι ομοιομορφικός με την ένωση δύο κλειστών μοναδιαίων δίσκων $\Delta_1 \cup \Delta_2$ έτσι ώστε $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2 = \{p_0\}$ (βλ. σχήμα 1α).

(Σχήμα 1)

Σημειώνουμε ότι αν θεωρήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ (βλ. σελίδα 100) και αν υποθέσουμε ότι $N = 1$ στην ισότητα $x = x' = \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{2^n}$, τότε προκύπτει μια νέα σχέση $\mathcal{R}'_1$ στο $[0,1] \times C$, η οποία ταυτίζεται με τον περιορισμό της σχέσης $\mathcal{R}_1$ στο υποσύνολο $[0,1] \times C$ του $[0,1] \times [0,1]$.

ο Για $N = 2$.

Θεωρούμε το σύνολο $[0,1] \times \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \right)$ εφοδιασμένο με τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_2$ η οποία ταυτίζει:

- τα σημεία $(0, y)$, $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ σε σημείο p_1 ,
- τα σημεία $\left(\frac{1}{2}, y\right)$, $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ σε σημείο p_0 ,

- τα σημεία $(1, y)$, $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ σε σημείο p_2 ,
- τα σημεία $\left(\frac{1}{4}, y\right)$, $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ σε σημείο q_1 ,
- τα σημεία $\left(\frac{1}{4}, y\right)$, $y \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ σε σημείο r_1 ,
- τα σημεία $\left(\frac{3}{4}, y\right)$, $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ σε σημείο q_2 ,
- τα σημεία $\left(\frac{3}{4}, y\right)$, $y \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ σε σημείο r_2 .

Ο χώρος πηλίκου $\left([0,1] \times \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right)\right) / \mathcal{R}_2$ είναι ομοιομορφικός με την

ένωση δύο κλειστών υποσυνόλων $\Sigma_1^2 \cup \Sigma_2^2$ με $\Sigma_i^2 \subset \Delta_i$, $i = 1, 2$, έτσι ώστε

$\Sigma_1^2 \cup \Sigma_2^2 = \Delta_1 \cup \Delta_2 - E_1 \cup E_2$, όπου E_1, E_2 είναι τα σκιασμένα υποσύνολα των Δ_1, Δ_2 αντίστοιχα (βλ. σχήμα 1b).

Σημειώνουμε ότι αν θεωρήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ (βλ. σελίδα 100) και

αν υποθέσουμε ότι $N \leq 2$ στην ισότητα $x = x' = \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{2^n}$, τότε προκύπτει μια

νέα σχέση $\mathcal{R}'_2$ στο $[0,1] \times C$, η οποία ταυτίζεται με τον περιορισμό της σχέσης

$\mathcal{R}_2$ στο υποσύνολο $[0,1] \times C$ του $\left([0,1] \times \left(\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right)\right)$.

ο Για $N = 3$.

Θεωρούμε το σύνολο $[0,1] \times \left(\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]\right)$ εφοδιασμένο

με τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_3$ ώστε ο χώρος πηλίκου:

$[0,1] \times \left(\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]\right) / \mathcal{R}_3$, είναι ομοιομορφικός με την

ένωση δύο κλειστών υποσυνόλων $\Sigma_1^3 \cup \Sigma_2^3$ με $\Sigma_i^3 \subset \Delta_i$, $i = 1, 2$, έτσι ώστε το $\Sigma_1^3 \cup \Sigma_2^3$ να είναι ίσο με το $\Delta_1 \cup \Delta_2$ εκτός του σκιασμένου υποσυνόλου που φαίνεται στο σχήμα 1c.

Σημειώνουμε ότι αν θεωρήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ (βλ. σελίδα 100) και

αν υποθέσουμε ότι $N \leq 3$ στην ισότητα $x = x' = \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{2^n}$, τότε προκύπτει μια

νέα σχέση $\mathcal{R}'_3$ στο $[0, 1] \times C$, η οποία ταυτίζεται με τον περιορισμό της σχέσης

$\mathcal{R}_3$ στο υποσύνολο $[0, 1] \times C$ του $[0, 1] \times \left(\left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9} \right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right] \right)$.

Επομένως, με επαγωγή μπορούμε να αποδείξουμε ότι το $([0, 1] \times C) / \mathcal{R}$ είναι ομοιομορφικό με το χώρο $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, όπου τα σύνολα Σ_i , $i = 1, 2$ κατασκευάζονται ως εξής:

Το σύνολο Σ_i^k προκύπτει επαγωγικά αφαιρώντας από κάθε μη σκιασμένο υποσύνολο του $\Delta_i - \Sigma_i^{k-1}$, ένα σκιασμένο τετράπλευρο, όπως στο σχήμα 2:

(Σχήμα 2)

Επομένως το $\partial_{vis} \Omega$ είναι ομοιομορφικό με το Σ , μέσω ενός ομοιομορφισμού f ο οποίος αντιστοιχίζει τα σημεία A_0, B_0, C_0 του $\partial_{vis} \Omega$ στα σημεία p_1, p_2, p_0 του Σ , αντίστοιχα.

Τελικά, αν αντί του Ω θεωρήσουμε το Ω' να είναι η κλειστότητα του $\tilde{X} - b_0$ που περιέχει το T_0 , μπορούμε να αποδείξουμε όπως προηγουμένως ότι

το $\partial_{vis}\Omega'$ είναι ομοιομορφικό με ένα ανάτυπο του Σ , έστω Σ' , μέσω ενός ομοιομορφισμού f' . Επομένως το $\partial_{vis}\tilde{X}$ είναι ομοιομορφικό με το χώρο $\Sigma_0 = (\Sigma \cup \Sigma')/\sim$, ο οποίος προκύπτει επισυνάπτοντας το Σ στο Σ' μέσω της σχέσης, $f(A_0) \sim f'(A_0)$, $f(B_0) \sim f'(B_0)$, $f(C_0) \sim f'(C_0)$, όπως στο σχήμα 3:

(Σχήμα 3)

Σημείωση 5.8: Η προηγούμενη περιγραφή του $\partial_{vis}\tilde{Y}$ είναι ιδιαίτερης σημασίας, καθώς, όπως θα αποδείξουμε στους ακόλουθους ισχυρισμούς, το $\partial_{vis}\tilde{Y}$ εμβυθίζεται στο σύνορο του καθολικού καλύμματος διαφόρων συμπλόκων.

Παρακάτω, συμβολίζουμε με Y ένα πεπερασμένο ιδεώδες πολύεδρο του οποίου όλες οι πλευρές είναι ανώμαλες τάξης 3.

Ισχυρισμός 1: Έστω X ένα πεπερασμένο ιδεώδες πολύεδρο, ώστε για κάθε πλευρά e του X , η τάξη k_e της e είναι ≥ 3 .

Τότε το $\partial_{vis}\tilde{Y}$ εμβυθίζεται στο $\partial_{vis}\tilde{X}$.

Απόδειξη:

Ξεκινάμε με εισαγωγικές έννοιες (βλ. Ορισμό 3.2 στο [16]).

Θυμίζουμε ότι κάθε ιδεώδες τρίγωνο έχει ένα καλά ορισμένο «κέντρο», καθώς και το γεγονός ότι σε κάθε πλευρά του τριγώνου υπάρχει ένα καλά ορισμένο «διακεκριμένο σημείο», το οποίο είναι η προβολή του κέντρου πάνω στην πλευρά. Επιλέγουμε από την αρχή τον προσανατολισμό σε κάθε πλευρά του χώρου X . Αν T, T' είναι δύο ιδεώδη τρίγωνα στο X με μια κοινή πλευρά e , ορίζουμε την ποσότητα $\chi(T, T'; e)$, ως την αλγεβρική απόσταση στην e από το διακεκριμένο σημείο του T , στο διακεκριμένο σημείο του T' , την οποία και θα καλούμε **παράμετρο μετατόπισης** της προσανατολισμένης πλευράς e , σε σχέση με το διατεταγμένο ζεύγος (T, T') . Συγκεκριμένα, αν P, P' είναι τα διακεκριμένα σημεία στην e των τριγώνων T, T' αντίστοιχα, τότε η ποσότητα $\chi(T, T'; e)$ θα είναι θετική, αν ο προσανατολισμός του τμήματος PP' συμπίπτει με τον προσανατολισμό της e , ενώ αντίθετα θα είναι αρνητική. Στη συνέχεια, κόβουμε το χώρο X κατά μήκος όλων των πλευρών του. Έτσι, λαμβάνουμε μια συλλογή ιδεωδών τριγώνων, τα οποία στην πραγματικότητα είναι έδρες του X . Συμβολίζουμε με X' τη συγκεκριμένη συλλογή. Θεωρούμε τρία ανάτυπα του X' , έστω $X'_i, i = 1, 2, 3$. Τότε μπορούμε να συγκολλήσουμε τα ιδεώδη τρίγωνα της $\bigcup_{i=1,2,3} X'_i$ κατά μήκος των πλευρών τους, μέσω ισομετριών, ώστε το ιδεώδες πολύεδρο Y που προκύπτει να ικανοποιεί τα εξής:

- Για κάθε πλευρά e του Y , είναι $k_e = 3$.
- Υπάρχει μια φυσική απεικόνιση $\phi: Y \rightarrow X$ η οποία είναι τοπική ισομετρία, δηλαδή για κάθε σημείο $p \in Y$ υπάρχει γειτονιά U του p στο Y , η οποία εμβυθίζεται ισομετρικά σε υποσύνολο V του $\phi(p)$ στο X .

Για την κατασκευή του Y , αρχικά θεωρούμε ένα αυθαίρετο ιδεώδες τρίγωνο T'_1 στο χώρο X'_1 , καθώς και πλευρά e'_1 του T'_1 , η οποία προκύπτει (μετά τη διαδικασία κοψίματος) από την έδρα T_1 και την πλευρά e του X . Καθώς $k_e \geq 3$ στο X , υπάρχουν τουλάχιστον τρεις έδρες T_1, T_2, T_3 (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές), οι οποίες έχουν την e ως κοινή πλευρά. Συμβολίζουμε με T'_2 (αντίστοιχα T'_3) το ιδεώδες τρίγωνο στο χώρο X'_2 (αντίστοιχα X'_3), που αντιστοιχεί στην έδρα T_2 (αντίστοιχα T_3) του X και με e'_2 (αντίστοιχα e'_3) την πλευρά του T'_2 (αντίστοιχα T'_3), που αντιστοιχεί στην πλευρά e του X .

Στη συνέχεια, κολλάμε τα T'_1, T'_2, T'_3 , ταυτίζοντας τις e'_1, e'_2, e'_3 σε μια κοινή πλευρά e' , ώστε $\chi(T_i, T_j; e) = \chi(T'_i, T'_j; e')$, για $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με κάθε ιδεώδες τρίγωνο T' στο X' , κατασκευάζουμε το χώρο Y . Τελικά, η απεικόνιση ϕ προκύπτει με φυσικό τρόπο από την κατασκευή του Y .

Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το Y είναι συνεκτικό (αν όχι, εκλέγουμε κατάλληλη συνιστώσα του Y). Η απεικόνιση ϕ ανυψώνεται σε τοπική ισομετρία $\tilde{\phi} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$, η οποία συνδέει απλά συνεκτικούς χώρους. Εύκολα αποδεικνύουμε ότι η $\tilde{\phi}$ είναι μια ισομετρική εμβύθιση. Επομένως το $\partial_{vis} \tilde{Y}$ εμφυτεύεται στο $\partial_{vis} \tilde{X}$.

Στη συνέχεια θεωρούμε το υπερβολικό σύμπλοκο X της παραγράφου 4.5 και θα κατασκευάσουμε ιδεώδες πολύεδρο Y του οποίου όλες οι πλευρές είναι ανώμαλες τάξης 3, καθώς και μια τοπική ισομετρία $h : Y \rightarrow X$. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η h ανυψώνεται σε ισομετρική εμβύθιση $\tilde{h} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$, οπότε και το $\partial_{vis} \tilde{Y}$ εμφυτεύεται στο $\partial_{vis} \tilde{X}$. □

Ισχυρισμός 2: Έστω X ένα υπερβολικό σύμπλοκο X της

παραγράφου 4.5. Τότε το $\partial_{vis} \tilde{Y}$ εμβυθίζεται στο $\partial_{vis} \tilde{X}$.

Απόδειξη:

Θεωρούμε δύο ιδεώδη τετράπλευρα $A_1B_1C_1D_1$ και $A_2B_2C_2D_2$ τα οποία είναι ισομετρικά, μέσω ισομετριών ϕ_1, ϕ_2 , αντίστοιχα, με το τετράπλευρο $ABCD$ της παραγράφου 4.5. Θεωρούμε τις διαγωνίους A_1C_1 του $A_1B_1C_1D_1$ και B_2D_2 του $A_2B_2C_2D_2$, καθώς και τα ιδεώδη τρίγωνα $T_1 = A_1B_1C_1$, $T'_1 = A_1C_1D_1$, $T_2 = A_2B_2D_2$, $T'_2 = B_2C_2D_2$, $T = ABC$, $T' = ACD$, $T'' = ABD$, $T''' = BCD$. Επίσης συμβολίζουμε με e, e' τις πλευρές $AB = AC = DC$ και $AD = BC = BD$, αντίστοιχα στο X .

Προκειμένου να κατασκευάσουμε ένα ιδεώδες πολύεδρο Y , του οποίου όλες οι πλευρές θα έχουν τάξη 3, κολλάμε μέσω ισομετριών, τις ακόλουθες πλευρές των $A_1B_1C_1D_1$ και $A_2B_2C_2D_2$:

- A_1B_1 με A_1C_1 και ονομάζουμε e_1 τη σχετική πλευρά στο Y .
- A_2D_2 με B_2D_2 και ονομάζουμε e_2 τη σχετική πλευρά στο Y .
- D_1C_1, A_2B_2 με D_2C_2 και ονομάζουμε e_3 τη σχετική πλευρά στο Y .
- B_1C_1, A_1D_1 με B_2C_2 και ονομάζουμε e_4 τη σχετική πλευρά στο Y .

Οι παραπάνω πλευρές συγκολλώνται έτσι ώστε:

- Το $\chi(T_1, T'_1; e_1)$ στο Y , να είναι ίσο με το $\chi(T, T; e)$ στο X .
- Το $\chi(T_2, T'_2; e_2)$ στο Y , να είναι ίσο με το $\chi(T'', T''; e')$ στο X .
- Το $\chi(T'_2, T'_1; e_3)$ στο Y , να είναι ίσο με το $\chi(T'', T''; e)$ στο X και το $\chi(T'_2, T'_1; e_3)$ στο Y , να είναι ίσο με το $\chi(T''', T''; e)$ στο X .
- Το $\chi(T'_1, T'_2; e_4)$ στο Y , να είναι ίσο με το $\chi(T', T; e')$ στο X και το $\chi(T_1, T'_2; e_4)$ στο Y , να είναι ίσο με το $\chi(T, T''; e')$ στο X .

Επομένως, μπορούμε να κατασκευάσουμε το χώρο Y και το γεγονός ότι ο X είναι πλήρης, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και ο Y είναι πλήρης. Επίσης, είναι εύκολο να δούμε την ύπαρξη μιας τοπικής ισομετρίας $\phi: Y \rightarrow X$ η οποία επεκτείνει τις ϕ_1 και ϕ_2 .

Βιβλιογραφία

- [1] Alonso J.M.- Brady T. – Cooper D. – Ferlini V.- Lustig M. – Mihalik M. – Shapiro M. – Short H., *Notes on Word Hyperbolic Groups*, Group theory from a geometrical viewpoint. ICTP, Trieste, Italy, (1990), World Scientific Publishing, 3-63, (1991).
- [2] Ballman W., *Lectures on Spaces of Non-Positive Curvature*, DMV Seminar, Band 25, Birkhäuser, Basel, (1995).
- [3] Ballman W., *Singular Spaces of Non-Positive Curvature*, *Sur le groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Chapter 10, Progress in Mathematics, 83, Birkhäuser Boston, (1990).
- [4] Beardon A., *The geometry of discrete groups*, Graduate Text in Mathematics, 91, Springer-Verlag, (1983).
- [5] Benakli N., *Polyèdres hyperboliques, passage du local au global*, Thèse, Université de Paris-Sud, (1992).
- [6] Benakli N., *Polyèdres à géométrie locale donnée*, C.R. Acad. Sci. Paris 313, 561-564, (1991).
- [7] Benakli N., *Polyèdres hyperboliques à group d'automorphismes non discret*, C.R. Acad. Sci. Paris 313, 667-669, (1991)
- [8] Bourdon M., *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1) espace*, Enseign. Math. 41, 63-102, (1995).

- [9] Bourdon M., *Sur le birapport au bord des CAT(-1) espaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 83, 95-104, (1996).
- [10] Bourdon M., *Au bord de certains polyèdres hyperboliques*, Ann. Inst. Fourier 45, 119-141, (1995).
- [11] Bowditch B., *Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups*, Acta Math. 180, no 2, 145-186, (1998).
- [12] Bridson M. – Haefliger A., *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 319, Springer-Verlag, (1999).
- [13] Brown M., *The monotone union of open n -cells is an open n -cell*, Proc. Amer. Math. Soc. 12, 812-814, (1961).
- [14] Burago D. – Burago Y. – Ivanov S., *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 33, Amer. Math. Soc., (2001).
- [15] Charitos C. – Papadopoulos A., *The geometry of ideal 2-dimensional simplicial complexes*, Glasgow Math. Journal, 43, 39-66, (2001).
- [16] Charitos C. – Papadopoulos A., *Hyperbolic Structures and Measured Foliations on 2-dimensional Complexes*, Monatsh. Math., 139, 1-17, (2003).
- [17] Charitos C. – Papadopoulos A., *On the isometries of ideal polyhedra*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 54, 71-80, (2005).
- [18] Charitos C. – Tsapogas G., *Geodesic flow on ideal polyhedra*, Can. J. Math., 49 (4), 696-707, (1997).

- [19] Charitos C. – Tsapogas G., *Complexity of geodesics on 2-dimensional ideal polyhedra and isotopies*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 121, 343, (1997).
- [20] Charitos C. – Papadoperakis I. – Vrontakis E., *On the boundary of a special class of hyperbolic 2-dimensional simplicial complexes*, έχει γίνει δεκτή προς δημοσίευση από το περιοδικό: Journal of Geometry, (2009).
- [21] Coornaert M., *Sur le groupes proprement discontinus d'isometries des espaces hyperboliques au sens de Gromov*, Thèse, U.L.P, (1990).
- [22] Coornaert M. – Delzant T. – Papadopoulos A., *Géometrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1441, Springer-Verlag, (1990).
- [23] Coornaert M. – Papadopoulos A., *Symbolic Dynamics and Hyperbolic Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1539, Springer-Verlag, (1993).
- [24] Davis M. – Januszkiewich T., *Hyperbolization of Polyhedra*, Journal of Differential Geometry, Vol. 34, 347-388, (1991).
- [25] Gersten S.M., *Introduction To Hyperbolic and Automatic Groups*, Summer School in Group Theory in Banff, 1996, 45-70, CRM Proc.Lecture Notes, 17, Amer. Math. Soc., (1999).
- [26] Ghys E. - de la Harpe P., *Sur le groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83, Birkhäuser Boston, (1990).
- [27] Gromov M., *Structures Métriques pour le Variétés Riemanniennes* (régidé par J. Lafontaine et P.Pansu), Fernand Nathan, Paris, (1981).
- [28] Gromov M., *Hyperbolic Groups*, Essays in group theory, Editor S. M. Gersten, MSRI Publications, Springer-Verlag, (1988).

- [29] Haglund F., *Les Polyèdres de Gromov*, Thèse, Université de Lyon I, (1992).
- [30] Haglund F., *Les polyèdres de Gromov*, C.R. Acad. Sci. Paris 313, 603-606, (1991).
- [31] Iversen B., *Hyperbolic Geometry*, London Mathematical Society Student Texts, 25, Cambridge University Press, (1992).
- [32] Kapovich I. - Benakli N., *Boundaries of Hyperbolic Groups*, Combinatorial and Geometric Group Theory, Contemp. Math., 296, Amer. Math. Soc., 39-93, (2002).
- [33] Massey W., *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt Brace World, (1967).
- [34] Papadopoulos A., *Metric Spaces, Convexity and Non-Positive Curvature*, IRMA, Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 6, E.M.S. (2005).
- [35] Paulin F., *Constructions of hyperbolic groups via hyperbolization of polyhedra*, Group theory from a geometrical viewpoint. ICTP, Trieste, Italy, (1990), E. Ghys and A. Haefliger eds, World Scientific Publishing, 313-372, (1991).
- [36] Paulin F., *Un group hyperbolique est déterminé par son bord*, J. London Math. Soc. 54, 50-74, (1996).
- [37] Ratcliffe J., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 149, Springer-Verlag, (1994).
- [38] Thurston W.P., *Three-dimensional Geometry and Topology*, edited by Silvio Levy Princeton University Press, (1997).
- [39] Vrontakis E., *On the boundary of 2-dimensional ideal polyhedra*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 47 (2), 359-367, (2006).