ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

**Μελέτη της Διδιάστατης Μαγνητοϋδροδυναμικής
Συμπιεστής Ροής στο Οριακό Στρώμα πάνω από Επίπεδη
Επιφάνεια με Αντίξοη Βαθμίδα Πίεσης και Μεταφορά
Θερμότητας και Μάζας**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Μιχάλης Α. Ξένος
Μαθηματικός

ΠΑΤΡΑ 2002

The speculations of today may be the standard methods, or the anathemata,
of tomorrow.

W.C. Reynolds and T. Cebeci

Στη Φωτεινή

Πρόλογος

Η παρούσα διατριβή αποτελεί την ολοκλήρωση μιας προσπάθειας σειράς ετών που ξεκινούν από τα προπτυχιακά μου χρόνια κατά την διάρκεια των οποίων ήλθα για πρώτη φορά σε επαφή με το αντικείμενο της Μηχανικής των Ρευστών και γνώρισα τον διδάσκοντα Καθηγητή κ. Ν. Καφούσια. Η εργατικότητα, η σοβαρότητα και η υπευθυνότητα την οποία επιδεικνύει ο κ. Καφούσιος στην αντιμετώπιση των διδακτικών και ερευνητικών του υποχρεώσεων αποτέλεσε για μένα το σπουδαιότερο μάθημα και ενέπνευσε την αγάπη μου στα μαθήματά του. Από αυτόν πήρα τις πρώτες βάσεις στην Μηχανική των Ρευστών αλλά και θεμελίωσα μέσα μου πολλές γνώσεις πάνω στα Μαθηματικά. Οφείλω λοιπόν τις πρώτες μου και πιο θερμές ευχαριστίες να τις εκφράσω σ' αυτόν. Τον ευχαριστώ για την υπόδειξη του θέματος, αλλά κυρίως για το γεγονός ότι καθ' όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στάθηκε δίπλα μου με υπομονή και κατανόηση. Με βοήθησε στην συγγραφή της διπλωματικής μου εργασίας, όπως και στην συγγραφή της διδακτορικής μου διατριβής, υποδεικνύοντας πάντα και με σαφήνεια τον δρόμο που πρέπει να ακολουθηθεί.

Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής κ. Γ. Καραχάλιο και κ. Π. Χατζηκωνσταντίνου για την εμπιστοσύνη τους στις ιδέες και απόψεις μου καθώς επίσης για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους σε διάφορα επιστημονικά θέματα. Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες και φίλους μου κ. Ε. Τζιρτζιλάκη και Α. Καραμπή. Τον τελευταίο για την βοήθεια του στα πρώτα βήματα των μεταπτυχιακών μου σπουδών και τον πρώτο για την βοήθεια του οποιαδήποτε στιγμή του την ζήτησα.

Είναι επίσης υποχρέωση μου να ευχαριστήσω τους γονείς μου Ανδρέα και Μαρία για την υπομονή και κατανόηση που έδειξαν απέναντι μου καθώς και για την οικονομική και ηθική υποστήριξη που μου προσέφεραν και μου προσφέρουν. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω θερμά την κ. Φ. Δελή για την αμέριστη της συμπαράσταση, υπομονή και υποστήριξη στην ολοκλήρωση της προσπάθειας αυτής.

Μιχάλης Ξένος

Πάτρα 2002

Περιεχόμενα

Περίληψη Διατριβής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Εισαγωγικές έννοιες

Περίληψη	1
1.1 Αεροδυναμική	1
1.1.1 Οριακό στρώμα	2
1.1.2 Τύποι ροής και αριθμός Reynolds	3
1.1.3 Βαθμίδα πίεσης	5
1.1.4 Αποκόλληση του οριακού στρώματος	7
1.1.5 Μέθοδοι πρόληψης της αποκόλλησης	8
1.2 Μαγνητορευστοδυναμική (MFD)	11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

Μαγνητοϋδροδυναμική συμπιεστή ροή στρωτού οριακού στρώματος με αντίζωση βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας.

Περίληψη	17
2.1 Εισαγωγή	17
2.2 Περιγραφή και μαθηματική διατύπωση του προβλήματος	20
2.3 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	23
2.4 Επεξηγηματική περιγραφή της αριθμητικής μεθόδου	25
2.4.1 Αριθμητική μέθοδος	25
2.4.2 Ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου	26
2.4.3 Μέθοδος τριδιαγωνίας απαλοιφής κατά πίνακα του συστήματος των εξισώσεων	29
2.4.4 Διακριτοποίηση των εξισώσεων του οριακού στρώματος και εξισώσεις διαφορών – Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης	30
2.4.5 Επαναληπτική μέθοδος Newton	33
2.4.6 Σύντομη περιγραφή του προγράμματος	34

2.5 Αριθμητική λύση του προβλήματος	38
2.6 Ανάλυση των αποτελεσμάτων	41
2.7 Συμπεράσματα	75
ΚΕΦΑΛΑΙΟ III	
Μαγνητοϋδροδυναμική συμπιεστή ροή τυρβώδους οριακού στρώματος με αντίζωση βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας.	
Περίληψη	79
3.1 Εισαγωγή	79
3.2 Φορμαλισμός του προβλήματος και μαθηματική ανάλυση	83
3.2.1 Το μοντέλο των μέσων τιμών των εξισώσεων οριακού στρώματος που πρότεινε ο Reynolds	83
3.2.2 Μαθηματική περιγραφή του προβλήματος	87
3.2.3 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων	89
3.3 Μοντέλα τύρβης	91
3.3.1 Εισαγωγή	91
3.3.2 Αλγεβρικά μοντέλα τύρβης ή μοντέλα μηδενικού αριθμού εξισώσεων	92
3.3.3 Μοντέλα μιας εξίσωσης	98
3.3.4 Μοντέλα δύο εξισώσεων	99
3.3.5 Μοντέλα των εξισώσεων διάτμησης - Προσομοίωση των μεγάλων δινών	100
3.3.6 Μοντελοποίηση του τυρβώδη αριθμού Prandtl	101
3.4 Αριθμητική λύση του προβλήματος	102
3.5 Σύνδεση τοπικού αριθμού Stanton και τοπικού αριθμού Nusselt	106
3.6 Ανάλυση των αποτελεσμάτων	107
3.7 Συμπεράσματα	157
Summary	161
4. Βιβλιογραφία - Αναφορές	163

Περίληψη Διατριβής

Ένα από τα σπουδαιότερα προβλήματα της σύγχρονης αεροδυναμικής και διαστημικής τεχνολογίας, αν όχι το σπουδαιότερο, είναι αυτό του ελέγχου (control) του οριακού στρώματος (boundary layer) που αναπτύσσεται (περιβάλλει) ένα στερεό σώμα που κινείται μέσα σ' ένα ρευστό. Παρ' όλο που στην αρχή του αιώνα που διανύουμε συμπληρώνονται εκατό περίπου χρόνια από την διατύπωση της έννοιας του οριακού στρώματος από τον L. Prandtl (1904), η έρευνα στο πρόβλημα αυτό εξακολουθεί να παραμένει επιτακτική και αναγκαία όσο και κατά τα πρώτα χρόνια της ανάπτυξης της αεροπορικής και διαστημικής τεχνολογίας.

Με τον όρο έλεγχο του οριακού στρώματος εννοούμε την ανάπτυξη μεθόδων - τεχνικών ή εφαρμογή των οποίων πάνω στην ροή θα της μεταβάλλει την δομή και θα της προσδώσει επιθυμητά χαρακτηριστικά. Από τις αρχές του εικοστού αιώνα (1904) ο Prandtl περιέγραψε αρκετές πειραματικές διατάξεις μέσω των οποίων πραγματοποιούσε έλεγχο του οριακού στρώματος.

Με την ανάπτυξη της αεροπορικής τεχνολογίας κατά και μετά τον Δεύτερο Παγκόσμιο Πόλεμο, και αργότερα της διαστημικής, το πρόβλημα του ελέγχου του οριακού στρώματος απέκτησε τεράστια σημασία, ειδικά για την αποφυγή του διαχωρισμού ή της αποκόλλησης (separation) αυτού, της ελάττωσης της αντίστασης (drag) και την αύξηση της άντωσης (lift).

Μεταξύ των σπουδαιότερων και πιο αποτελεσματικών μεθόδων – τεχνικών που αναπτύχθηκαν για τον σκοπό αυτό μπορεί να αναφερθούν:

1. Η κίνηση του στερεού τοιχώματος (motion of the solid wall)
2. Η επιτάχυνση του οριακού στρώματος (blowing)
3. Η απορρόφηση (suction)
4. Η έγχυση ίδιου ή διαφορετικού ρευστού (injection, binary boundary layers)
5. Πρόληψη της μετάπτωσης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη με διαμόρφωση κατάλληλων σχημάτων των στερεών τοιχωμάτων (laminar airfoils)
6. Ψύξη των τοιχωμάτων (cooling)

Η προσπάθεια υπολογισμού του σημείου αποκόλλησης και των συνθηκών που οδηγούν σ' αυτήν οδήγησε στην επινόηση διαφόρων μεθόδων για την τεχνική της παρεμπόδιση. Σε μια ροή η αποκόλληση μπορεί να εμποδιστεί ή να καθυστερήσει, όπως αναφέρθηκε, με την εφαρμογή ενεργητικών ή παθητικών μεθόδων ελέγχου, όπως απορρόφηση, έγχυση, παθητικές διατάξεις, ψύξη ή θέρμανση, κλπ. Τέτοιες τεχνικές ελέγχου χρησιμοποιούνται στις άκρες των πτερύγων των αεροσκαφών της Boeing (γεννήτριες στροβίλων), στα αεροσκάφη παλαιότερης γενιάς στις πίσω επιφάνειες καμπυλότητας (flaps) ή στην οδηγούσα ακμή της πτέρυγας στις νεώτερες γενιές, με τις εμπρόσθιες επιφάνειες καμπυλότητας (slats).

Η πιο αποδεκτή τεχνική ελέγχου του οριακού στρώματος είναι η τεχνική της έγχυσης/απορρόφησης. Σαν τεχνική ελέγχου χρησιμοποιείται από παλιά. Κατά την δεκαετία του '60 δοκιμαστικές πτήσεις του πειραματικού αεροσκάφους X-21 έδειξαν ότι η στρωτή ροή διατηρείται πάνω από την πτέρυγα με την χρήση απορρόφησης μέσα από πολλές σχισμές πάνω σ' αυτήν. Πρόσφατες δοκιμαστικές πτήσεις ενός μετασκευασμένου αεροσκάφους F-16XL, που χρησιμοποιεί την τεχνική της απορρόφησης πάνω σε ειδικές διατάξεις LERX (LEading Root eXtensions), έδειξαν διατήρηση της στρωτής ροής και μείωση της αντίστασης. Πρόσφατα πειράματα εφαρμογής απορρόφησης κατά μήκος της οδηγούσας ακμής πτέρυγας έδειξαν ότι, κάτω

από κατάλληλες συνθήκες, καθυστερεί η “μόλυνση” (contamination) της ακμής που οφείλεται στις γειτονικές μ’ αυτήν δομές (κινητήρας, άτρακτος, λοιπές αεροδυναμικές διατάξεις) που συμμετέχουν στην ροή. Πολλοί είναι αυτοί που έχουν προτείνει διάφορες διατάξεις έγχυσης/απορρόφησης. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγεται η υβριδική επιφάνεια απορρόφησης (hybrid suction surface) που αποτελείται από μια συστοιχία σχισμών κοντά η μια στην άλλη προς την διεύθυνση της μέσης ροής και η επιλεκτική απορρόφηση (selective suction), στην οποία μικρής έντασης απορρόφηση εφαρμόζεται σε σχισμές τοποθετημένες σε κατάλληλες θέσεις. Τέλος, και η τοπική απορρόφηση (localized suction) που εφαρμόζεται σ’ ένα μικρό τμήμα της επιφάνειας.

Επίσης, με την ανάπτυξη της μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD), της επιστήμης δηλαδή που μελετά τα ροϊκά φαινόμενα όταν το ηλεκτρικά αγώγιμο ρευστό υπόκειται στην επίδραση ενός ηλεκτρικού ή και μαγνητικού πεδίου, προστέθηκε στα μέσα ελέγχου του οριακού στρώματος ένα επιπλέον. Από την δεκαετία του ’60 το μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιείται επίσης σαν τεχνική ελέγχου στην σύγχρονη αεροδυναμική, λόγω της ικανότητας του να σταθεροποιεί την ροή και να εμποδίζει την μετάπτωση της. Χρησιμοποιήθηκε σαν τεχνική ελέγχου στα διαστημικά οχήματα που επανέρχονται στην ατμόσφαιρα από το διάστημα και σε αεροσκάφη που πετούν σε μεγάλα ύψη με μεγάλες ταχύτητες. Βρίσκει όμως εφαρμογές και στις MHD ροές μέσα σε σήραγγες όπου κι εκεί οι ροές είναι συμπιεστές (γεννήτριες πλάσματος, MHD επιταχυντές, συσκευές πυρηνικής σύντηξης). Εφαρμογές της MHD υπάρχουν επίσης στα αέρια των νεφελωμάτων που συνθέτουν τα άστρα, στην κίνηση του υδρογόνου του Ήλιου ή ακόμα και στον ηλιακό άνεμο που μεταφέρει τα ιονισμένα σωματίδια στην επιφάνεια της Γης.

Η παρούσα διατριβή αναφέρεται στην μελέτη της χρονοανεξάρτητης διδιάστατης μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD) συμπιεστής ροής οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη επιφάνεια με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας. Το ερευνητικό μέρος της εργασίας αυτής μπορεί να χωριστεί σε δύο κύρια μέρη (Κεφάλαια II και III).

Στο πρώτο μέρος (Κεφάλαιο II) γίνεται μελέτη της MHD συμπιεστής ροής **στρωτού** οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας πάνω από επίπεδη πλάκα.

Στο δεύτερο μέρος (Κεφάλαιο III) μελετάται η MHD συμπιεστή ροή **τυρβώδους** οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας πάνω από επίπεδη πλάκα.

Αρχικά, σε ένα εισαγωγικό Κεφάλαιο (Κεφάλαιο I), παρουσιάζονται, πολύ περιληπτικά, οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόηση της διατριβής καθώς και οι θεμελιώδεις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής που διέπουν την κίνηση ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού που κινείται υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου.

Στο πρώτο μέρος της διατριβής (Κεφάλαιο II), όπως αναφέρθηκε, μελετάται αριθμητικά η MHD συμπιεστή ροή **στρωτού** οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας. Το ρευστό (αέρας) θεωρείται ιδανικό, νευτώνειο, ηλεκτρικά αγώγιμο και το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό και κάθετα εφαρμοζόμενο ως προς την πλάκα και συνεπώς ως προς την κατεύθυνση της ροής. Η αντίξοη βαθμίδα πίεσης, που επιβάλλεται στην ροή, γνωστή ως ροή τύπου Howarth, προκύπτει από μια γραμμικά ελαττούμενη ταχύτητα. Το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα έχει αδιαστατοποιηθεί με τον μετασχηματισμό των Falkner-Skan, για συμπιεστή ροή, και επιλύεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Keller.

Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου αυτού αναφέρονται σε τρία είδη ροής: (i) αδιαβατική ροή ρευστού πάνω από την πλάκα, (ii) σε ροή πάνω από θερμαινόμενη πλάκα και (iii) σε ροή πάνω από ψυχόμενη πλάκα. Γίνονται αριθμητικοί υπολογισμοί για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις εφαρμόζοντας συνεχή ή τοπική έγχυση/απορρόφηση, για διάφορες τιμές της έντασης του μαγνητικού πεδίου και για διάφορες τιμές αριθμού Mach του ελεύθερου ρεύματος πάνω από την επίπεδη επιφάνεια. Εξετάζεται η επίδραση των ανωτέρω μεγεθών σε αυτόν τον τύπο της ροής. Αναλυτικότερα, δείχθηκε μετά τους αριθμητικούς υπολογισμούς, ότι η τεχνική της απορρόφησης διατηρεί την ροή για περισσότερο διάστημα πάνω από την πλάκα μετατοπίζοντας το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής. Τα αντίθετα αποτελέσματα δίνει η εφαρμογή έγχυσης. Το μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται στην πλάκα βοηθά την ροή και την διατηρεί στρωτή πάνω από αυτήν για μεγαλύτερο διάστημα κατά μήκος της πλάκας. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν για τις τρεις περιπτώσεις της στρωτής ροής (αδιαβατική ροή, θερμαινόμενη και ψυχόμενη πλάκα) και για διάφορους αριθμούς Mach.

Στο δεύτερο μέρος (Κεφάλαιο III) μελετάται αριθμητικά η MHD συμπιεστή ροή **τυρβώδους** οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας. Για το ρευστό (αέρας) και το μαγνητικό πεδίο ακολουθούνται οι ίδιες παραδοχές με την περίπτωση της στρωτής ροής. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα προκύπτουν από τις εξισώσεις που έχει προτείνει ο Reynolds για την τυρβώδη ροή οριακού στρώματος, κατάλληλα τροποποιημένες για την περίπτωση MHD ροής. Οι εξισώσεις αυτές αδιαστατοποιούνται με τον μετασχηματισμό των Falkner-Skan για συμπιεστή ροή και επιλύονται με την ίδια μέθοδο με την στρωτή MHD ροή (μέθοδος Keller). Για το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες χρησιμοποιούνται δύο διαφορετικά αλγεβρικά μοντέλα τύρβης, αυτά των Cebeci-Smith και Baldwin-Lomax. Τα μοντέλα αυτά τροποποιήθηκαν ώστε να περιγράφουν το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες και στην περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης. Για τον τυρβώδη αριθμό Prandtl χρησιμοποιήθηκε μια τροποποίηση του μοντέλου των Kays και Crawford.

Αριθμητικοί υπολογισμοί έγιναν για τον αέρα, για την περίπτωση που η ροή πάνω από την οριακή επιφάνεια ήταν αδιαβατική ή η επιφάνεια θερμαινόταν ή ψυχόταν. Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις εξετάζεται η επίδραση του μαγνητικού πεδίου, της τοπικής ή συνεχούς έγχυσης/απορρόφησης και του αριθμού Mach του ελεύθερου ρεύματος πάνω στο τυρβώδες οριακό στρώμα. Μετά τους αριθμητικούς υπολογισμούς, τα συμπεράσματα που προκύπτουν για την τυρβώδη ροή είναι παρόμοια με την στρωτή. Η τεχνική της απορρόφησης βοηθάει στην διατήρηση του τυρβώδους οριακού στρώματος πάνω από την πλάκα σε αντίθεση με την έγχυση. Ο συνδυασμός αρχικά έγχυσης και έπειτα απορρόφησης βοηθά στην διατήρηση της ροής για μεγαλύτερο διάστημα πάνω από την πλάκα, δηλαδή στην μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής ελαττώνοντας ταυτόχρονα την συνολική αντίσταση σε αυτήν. Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει και στην στρωτή ροή. Το μαγνητικό πεδίο βοηθάει την τυρβώδη ροή μετατοπίζοντας το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λιγότερο έντονο στην τυρβώδη ροή από ότι στην στρωτή. Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται για τις τρεις περιπτώσεις της τυρβώδους ροής (αδιαβατική ροή, θερμαινόμενη και ψυχόμενη πλάκα), για διάφορους αριθμούς Mach ($M_\infty \leq 2.0$) και για τα δύο μοντέλα τύρβης (C-S και B-L). Στο τέλος του Κεφαλαίου γίνεται σύγκριση των δύο τύπων ροών, στρωτής και τυρβώδους. Λόγω της απουσίας ερευνητικών αποτελεσμάτων πάνω στο συγκεκριμένο αυτό πρόβλημα, τα παραπάνω αποτελέσματα εκτιμάται ότι είναι πολύ ενδιαφέροντα για την περιγραφή του μηχανισμού ελέγχου του στρωτού και τυρβώδους οριακού στρώματος για συμπιεστές ροές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Εισαγωγικές Έννοιες

Περίληψη

Στο Κεφάλαιο αυτό, το οποίο είναι εισαγωγικό της διατριβής, παρουσιάζονται, πολύ περιληπτικά, όλες εκείνες οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την κατανόησή της. Μεταξύ των εννοιών αυτών ιδιαίτερη σημασία έχει η έννοια της “αντίξωσης βαθμίδας πίεσης” και η σχέση της με το ανεπιθύμητο φαινόμενο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος. Παρουσιάζονται επίσης οι θεμελιώδεις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD) που διέπουν την κίνηση ενός ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού που κινείται υπό την επίδραση ενός μαγνητικού πεδίου. Καθοριστικό ρόλο σε μια τέτοια ροή παίζει ο μαγνητικός αριθμός Reynolds Re_m που είναι μια από τις σπουδαιότερες αδιάστατες παραμέτρους της MHD.

1.1 Αεροδυναμική

Η αεροδυναμική με το τέλος του εικοστού αιώνα, ως ανεξάρτητη πλέον επιστήμη, έχει να επιδείξει μεγάλο έργο. Ειδικά τις τελευταίες τρεις δεκαετίες η εξέλιξη της υπήρξε αλματώδης. Οι συνέπειες της ανάπτυξης αυτής είναι προφανείς στην σύγχρονη αεροπορική και διαστημική τεχνολογία. Η εξέλιξη αυτή οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στην ανάπτυξη της Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής (CFD) και των υπολογιστικών μεθόδων. Μεγάλο ρόλο στην εξέλιξη της αεροδυναμικής έπαιξε επίσης και η ανάπτυξη των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών (H/Y) ως μέσο για την εφαρμογή των υπολογιστικών μεθόδων. Καθοριστικής σημασίας ρόλο στην εξέλιξη της αεροδυναμικής, σε συνδυασμό με τους H/Y, έπαιξε επίσης η χρήση των αεροσηράγγων για την πραγματοποίηση πειραμάτων και μετρήσεων διαφόρων αεροδυναμικών μεγεθών. Ο επιτυχής συνδυασμός των υπολογιστικών τεχνικών και της τεχνολογίας των αεροσηράγγων επιτρέπει σήμερα την μελέτη και την κατανόηση πολύπλοκων φαινομένων της αεροδυναμικής που πριν από λίγα χρόνια η αντιμετώπιση τους θεωρείτο δύσκολη αν όχι αδύνατη. Με την συνεχή βελτίωση των υπολογιστικών τεχνικών και των H/Y η χρήση των αεροσηράγγων συνεχώς περιορίζεται αφού είναι δυνατόν με την αριθμητική προσομοίωση να εξοικονομηθούν χρήματα και χρόνος που απαιτεί η χρήση των αεροσηράγγων. Όπως χαρακτηριστικά είχε προβλέψει ο Charman το 1975, “οι υπολογιστές θα πρέπει να αρχίσουν να υποκαθιστούν τις αεροσήραγγες στον αεροδυναμικό σχεδιασμό και στην διαδικασία ελέγχου”. Η χρήση της αεροσήραγγας κρίνεται πολυέξοδη και αντιοικονομική σε σχέση με τον H/Y, που δίνει προσομοιώσεις της ροής πολύ κοντά στην πραγματικότητα. Ο συνδυασμός και των δύο όμως κρίνεται, πολλές φορές, ως η καλύτερη λύση για τον επιτυχή σχεδιασμό ενός αεροπορικού ή διαστημικού οχήματος [3].

Η παρούσα διατριβή έχει ως θέμα την αριθμητική μελέτη της χρονοανεξάρτητης, διδιάστατης, μαγνητοϋδροδυναμικής συμπιεστής ροής, στρωτού ή τυρβώδους οριακού στρώματος, πάνω από επίπεδη επιφάνεια (πλάκα), με αντίξωση βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας. Θα ήταν σκόπιμο, πριν την ανάπτυξη της παρούσας διατριβής να αναφερθούν επιγραμματικά μερικές έννοιες τόσο της αεροδυναμικής όσο και της μαγνητοϋδροδυναμικής, απαραίτητες για την περαιτέρω κατανόηση της

εργασίας. Η αναφορά αυτή θα βοηθήσει τον αναγνώστη να εξοικειωθεί με τις βασικές αυτές έννοιες και να κατανοήσει την σκοπιμότητα και την συμβολή αυτής της διατριβής.

Αρχικά αναφέρονται έννοιες της αεροδυναμικής, ξεκινώντας από τον ορισμό του οριακού στρώματος, όπως αυτός διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τους Blasius και Prandtl. Στην συνέχεια περιγράφονται οι τρεις τύποι ροών που εμφανίζονται μέσα στο οριακό στρώμα, στρωτή, μεταπτωτική και τυρβώδης ροή καθώς επίσης και η έννοια της βαθμίδας πίεσης, ευνοϊκής ή αντίξοης. Η αντίξοη βαθμίδα πίεσης οδηγεί γενικά στο ανεπιθύμητο φαινόμενο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος. Με κατάλληλες όμως τεχνικές προλαμβάνεται η αποκόλληση του οριακού στρώματος πάνω από την συνοριακή επιφάνεια ή η μετάπτωση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη. Οι πιο σημαντικές από αυτές τις τεχνικές είναι η απορρόφηση τμήματος του οριακού στρώματος ή η έγχυση ρευστού, μέσω σχισμών, στο οριακό στρώμα. Η ψύξη ή η θέρμανση της επιφάνειας είναι μια άλλη τεχνική που προλαμβάνει την αποκόλληση και διατηρεί το οριακό στρώμα προσκολλημένο πάνω στην πλάκα. Τέλος, έχουν αναπτυχθεί και άλλες τεχνικές πρόληψης της αποκόλλησης του οριακού στρώματος, όπως π.χ. η χρήση μαγνητικού πεδίου, που επιδρά στην ροή πάνω από την πλάκα.

1.1.1 Οριακό στρώμα

Η ροή ρευστού γύρω από στερεό όριο δημιουργεί στην άμεση περιοχή του στερεού μια έντονη μεταβολή της ταχύτητας του ρευστού. Αυτό συμβαίνει γιατί σύμφωνα με την φυσική οριακή συνθήκη τα ρευστά σωματίδια που βρίσκονται σε επαφή με το στερεό, προσκολλώνται πάνω σ' αυτό και εφ' όσον η επιφάνεια είναι ακίνητη, η ταχύτητα των σωματιδίων είναι μηδενική. Η βαθμίδα της ταχύτητας ($\partial u / \partial y$) στην περιοχή του στερεού ορίου, κατά διεύθυνση κάθετη πάνω σ' αυτό, παίρνει πολύ μεγάλες τιμές με αποτέλεσμα όσο μικρό και να είναι το ιξώδες μ του ρευστού, η διατμητική τάση που δίνεται από τον πειραματικό νόμο του Νεύτωνα, $\tau = \mu \partial u / \partial y$, να παίρνει μεγάλες τιμές. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αντίστασης κατά την κίνηση ενός στερεού σώματος (π.χ. αυτοκινήτου, αεροσκάφους, διαστημικού οχήματος) μέσα στο ρευστό. Επομένως η επίδραση του ιξώδους στην περιοχή του στερεού ορίου δεν μπορεί να αμεληθεί.

Η περιοχή της ροής, το λεπτό στρώμα γύρω από το στερεό, μέσα στην οποία η ταχύτητα του ρευστού αυξάνει από την τιμή μηδέν, πάνω στην επιφάνεια του ορίου, έως την τιμή της ταχύτητας του ελευθέρου ρεύματος όπου η ροή θεωρείται ιδανική (χωρίς τριβή), ονομάζεται **οριακό στρώμα** ή **οριακή στοιβάδα** (boundary layer). Η θεωρία του οριακού στρώματος καταδεικνύει ότι όλοι οι όροι των εξισώσεων Navier-Stokes δεν έχουν την ίδια βαρύτητα και ορισμένοι από αυτούς μπορούν να παραληφθούν σε σχέση με άλλους. Η εκτίμηση της τάξης μεγέθους κάθε όρου των εξισώσεων Navier-Stokes διαμορφώνει τελικά τις εξισώσεις οριακού στρώματος. Η έννοια του οριακού στρώματος αναπτύχθηκε από τον Γερμανό καθηγητή της αεροδυναμικής του Ινστιτούτου αεροδυναμικής της Γερμανίας στο Goettingen. Στην εργασία που παρουσίασε το 1904 στο τρίτο διεθνές Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης στην Χαϊδελβέργη [124] ο L. Prandtl έδειξε πως η ροή γύρω από στερεό όριο είναι δυνατόν να αναλυθεί σε δύο περιοχές. Μια λεπτή στοιβάδα πολύ κοντά στην περιοχή του στερεού ορίου, το γνωστό οριακό στρώμα και μια περιοχή έξω από αυτό όπου η τριβή μπορεί να αγνοηθεί και η ροή εκεί χαρακτηρίζεται ως δυναμική (potential flow).

Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του οριακού στρώματος είναι το πάχος του δ , το πάχος μετατόπισης δ^* και το πάχος ορμής θ [124]. Πάχος του οριακού στρώματος δ καλείται η απόσταση εκείνη, κάθετη από την επιφάνεια της πλάκας, που η ταχύτητα του ρευστού γίνεται ίση με τα 99% της ελεύθερης ρευματικής ταχύτητας u_∞ . Η νοητή γραμμή που σχηματίζεται εκεί που η ταχύτητα είναι μόλις 1% μικρότερη της ελεύθερης ρευματικής ταχύτητας u_∞ , ονομάζεται ακμή (edge) του οριακού στρώματος και κάθε μέγεθος εκεί συμβολίζεται με τον δείκτη e . Πάχος μετατόπισης δ^* ονομάζεται το πάχος ιδεατού στρώματος ρευστού, ταχύτητας ίσης με την ελεύθερη ρευματική ταχύτητα, μέσα στο οποίο η παροχή του ρευστού είναι ίση με την μείωση της παροχής μέσα στο οριακό στρώμα λόγω επιβράδυνσης της ροής. Το πάχος μετατόπισης δίνεται από την σχέση

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy . \quad (1.1)$$

Τέλος ως πάχος ορμής θ ορίζεται το πάχος ιδεατού στρώματος ρευστού, ταχύτητας ίσης με την ελεύθερη ρευματική ταχύτητα, που η εισροή ποσότητας κίνησης (ορμής) είναι ίση προς την αντίστοιχη μείωση δια μέσου του οριακού στρώματος, λόγω επιβράδυνσης της ροής. Το πάχος ορμής θ δίνεται από την σχέση

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy . \quad (1.2)$$

Άλλη μια σημαντική παράμετρος του οριακού στρώματος, καθοριστικής σημασίας στην αεροδυναμική, είναι η συμπίεστικότητα. Γενικά οι ροές διακρίνονται σε συμπίεστες (ροή αερίων) και σε ασυμπίεστες (ροή υγρών). Συμπίεστικότητα είναι το μέτρο της μεταβολής του όγκου ή της πυκνότητας, ενός υγρού ή αερίου κάτω από την επίδραση των εξωτερικών δυνάμεων [124].

Η αδιάστατη παράμετρος που αναφέρεται στην συμπίεστικότητα του ρευστού είναι ο αριθμός Mach. Ο αριθμός Mach είναι ο λόγος της ταχύτητας της ροής, u , προς την ταχύτητα του ήχου, c , δηλαδή

$$M = \frac{u}{c} . \quad (1.3)$$

Στην περίπτωση του αέρα και για ταχύτητα ροής $u = 102m/sec = 371km/h$, με την ταχύτητα του ήχου στην επιφάνεια της θάλασσας να ισούται με $c = 340m/sec = 1224km/h$, ο αριθμός Mach είναι $M = 0.3$. Αυτή η τιμή μπορεί να θεωρηθεί ως το ανώτερο όριο που η ροή αερίου είναι ασυμπίεστη. Αντίθετα, για τιμές του αριθμού Mach μεγαλύτερες από 0.3 η ροή θα θεωρείται συμπίεστη για την περίπτωση του αέρα.

1.1.2 Τύποι ροής και αριθμός Reynolds

Όταν ένα ρευστό κινείται μέσα σ' ένα αγωγό ή γενικότερα γύρω από ένα στερεό όριο, ο τύπος της ροής του καθορίζεται από τον αριθμό Reynolds. Ο αριθμός αυτός

είναι αδιάστατος και αποτελεί τον λόγο των δυνάμεων αδρανείας προς τις δυνάμεις τριβής. Για παράδειγμα, στην κίνηση ρευστού μέσα σε αγωγό κυκλικής διατομής ο αριθμός Reynolds δίνεται από την σχέση

$$\text{Re}_D = \frac{\text{δυνάμεις αδρανείας}}{\text{δυνάμεις τριβής}} = \frac{\bar{U}D}{\nu}, \quad (1.4)$$

όπου το χαρακτηριστικό μήκος είναι η διάμετρος D του αγωγού, $\bar{U}$ είναι η μέση ταχύτητα της ροής, και ν το κινηματικό ιξώδες του ρευστού. Ο αριθμός Reynolds εισήχθη σαν έννοια από τον Ο. Reynolds το 1883 ως αποτέλεσμα των πειραμάτων του σε σωλήνες [124]. Στο οριακό στρώμα ο λόγος των δυνάμεων αδρανείας προς τις δυνάμεις τριβής ορίζεται λίγο διαφορετικά. Εισάγεται έτσι μια πολύ σημαντική ποσότητα για την αεροδυναμική, ο τοπικός αριθμός Reynolds. Ο αριθμός αυτός είναι αδιάστατος, αλλά αποκτά έναν τοπικό χαρακτήρα και παύει να είναι σταθερός για ολόκληρη την ροή όπως ο ολικός αριθμός Reynolds Re_D . Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από την θέση που βρίσκεται το ρευστό σωματίδιο και όχι από ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής που παραμένει πάντα σταθερό. Έτσι αποκτά μια δυναμική, δείχνοντας σε κάθε σημείο το πόσο μεταβάλλεται ο λόγος των δυνάμεων και ορίζεται ως

$$\text{Re}_x = \frac{u_e x}{\nu_e}, \quad (1.5)$$

όπου u_e είναι η ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος στην ακμή του οριακού στρώματος, x το εκάστοτε μήκος και ν_e το κινηματικό ιξώδες του ρευστού στην ακμή.

Τρεις είναι οι βασικοί τύποι ροής που εμφανίζονται στην φύση, η **στρωτή ροή**, η **μεταβατική** ή **μεταπτωτική ροή** και η **τυρβώδης**. Κάθε μια από αυτές τις ροές έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά και συμπεριφορά. Στον πρώτο τύπο ροής, την στρωτή (laminar flow), τα ρευστά σωματίδια κινούνται σε παράλληλες στρώσεις χωρίς μακροσκοπική μίξη μεταξύ των μορίων της μιας στρώσης με τις γειτονικές της. Η τροχιά των σωματιδίων του ρευστού στη στρωτή ροή είναι προβλέψιμη και όχι τυχαία. Στο δεύτερο τύπο ροής, στη μεταβατική ή μεταπτωτική ροή (transitional flow) τα σωματίδια του ρευστού, λόγω διαφόρων διαταραχών που επιδρούν στην ροή (εξωτερικοί παράγοντες, τραχύτητα της επιφάνειας, θέρμανση λόγω τριβής κ.α.), αλλάζουν κατάσταση μετακινούμενα από την μια στρώση στην άλλη με ένα ταλαντούμενο τρόπο που συνεχώς αυξάνεται και γρήγορα δημιουργείται ένα ασταθές πεδίο ροής. Η περιοχή της ροής που λαμβάνει χώρα η μεταβατική ροή είναι συνήθως πολύ μικρή, συγκρινόμενη με την περιοχή των άλλων δυο τύπων ροής. Στο τρίτο και τελευταίο τύπο ροής, την τυρβώδη ροή (turbulent flow) τα ρευστά σωματίδια κινούνται και στις τρεις διαστάσεις με τελείως ακανόνιστο τρόπο. Η ακανόνιστη αυτή κίνηση των ρευστών σωματιδίων οδηγεί στην εμφάνιση δινών, μέσα σε ολόκληρο το πεδίο ροής, που διαφέρουν σε μέγεθος και κάνουν την ανάλυση του φαινομένου πολύ δύσκολη και χαοτική. Η ανάλυση τέτοιων ροών δεν μπορεί να γίνει με τις γνωστές τεχνικές που εφαρμόζονται στην περίπτωση της στρωτής ροής και αντιμετωπίζεται κυρίως με την βοήθεια στατιστικών μεθόδων [147]. Η μελέτη της τυρβώδους ροής αποτελεί δύσκολο, αν όχι ανέφικτο, επιχείρημα γι' αυτό οι ασχολούμενοι με το θέμα αυτό ερευνητές καταφεύγουν πολλές φορές στο πείραμα. Οι πειραματικές μετρήσεις βοήθησαν στην στατιστική μελέτη του φαινομένου και την εξαγωγή τεχνικών που περιγράφουν ικανοποιητικά την τυρβώδη ροή.

Κάτω από κανονικές συνθήκες, η στρωτή ροή ενός ρευστού διατηρείται για αριθμούς Reynolds μικρότερους μιας ορισμένης τιμής του. Αυτός ο αριθμός Reynolds ονομάζεται **κρίσιμος αριθμός Reynolds** και δηλώνει την μετάβαση από την στρωτή στην τυρβώδη ροή. Το σημείο στο οποίο ο αριθμός Reynolds παίρνει αυτή του την τιμή λέγεται **κρίσιμο σημείο** και είναι ένα σημείο της μεταβατικής ροής. Τέλος η ροή μπορεί να είναι πλήρως τυρβώδης (fully turbulent flow), δηλαδή καθ' όλο το μήκος της συνοριακής επιφάνειας γύρω από την οποία πραγματοποιείται η ροή.

Οι τρεις τύποι ροής που αναφέρθηκαν, δεν είναι ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλο. Τις περισσότερες φορές η μια ροή διαδέχεται την άλλη. Για την περίπτωση της ροής πάνω από επίπεδη επιφάνεια (πλάκα) ξεκινώντας από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, η ροή είναι συνήθως στρωτή και ο αριθμός Reynolds που περιγράφει την ροή, είναι ο Re_x . Μετά από συγκεκριμένη απόσταση, η ροή γίνεται μεταβατική και ο αριθμός Reynolds που περιγράφει αυτή την ροή $Re_{x_{tr}}$, είναι μεγαλύτερος απ' αυτόν της στρωτής ($0 < Re_x < Re_{x_{tr}}$). Τέλος, η μεταβατική ροή μεταπίπτει σε τυρβώδη, καθώς ο αριθμός Reynolds συνεχώς αυξάνεται φθάνοντας στην τιμή Re_{x_t} ($Re_{x_{tr}} < Re_{x_t}$). Ο αριθμός Reynolds Re_{x_t} εξαρτάται τόσο από την τύρβη του ελεύθερου ρεύματος όσο και από τον αριθμό Mach του ομοιομόρφου ρεύματος (όσο μεγαλώνει ο αριθμός Mach τόσο πιο μικρός γίνεται ο αριθμός Re_{x_t}) καθώς επίσης και από τις συνθήκες που ισχύουν στην επιφάνεια του στερεού ορίου. Τέτοιες συνθήκες είναι η θέρμανση ή ψύξη της συνοριακής επιφάνειας, η τραχύτητα αυτής, η βαθμίδα πίεσης και η απορρόφηση ή έγχυση που εφαρμόζεται σ' αυτήν. Ο αριθμός Reynolds της μετάβασης $Re_{x_{tr}}$, για την περίπτωση της πλάκας, μπορεί να μεταβάλλεται από 4×10^5 έως 4×10^6 [29]. Μέσα στη μεταβατική περιοχή υπάρχει ένα σημείο που ονομάζεται εικονική αρχή (virtual origin) του τυρβώδους οριακού στρώματος πέραν του οποίου η ροή θεωρείται τυρβώδης. Συνήθως στις υποθέσεις που γίνονται δεν λαμβάνεται υπόψη η μεταβατική περιοχή. Δηλαδή, από την στρωτή περιοχή η ροή περνά κατευθείαν στην τυρβώδη χωρίς την μεσολάβηση της μεταβατικής περιοχής. Αυτό είναι αληθές σε κάποιες περιπτώσεις ροών, όταν η συνοριακή επιφάνεια είναι πολύ τραχιά, ή όταν τα επίπεδα τύρβης του ελεύθερου ρεύματος είναι πολύ μεγάλα.

1.1.3 Βαθμίδα πίεσης

Είναι γνωστό ότι όπως η ροή ηλεκτρικού ρεύματος σ' ένα κύκλωμα εξασφαλίζεται από την πτώση τάσης (διαφορά δυναμικού) έτσι και η ροή ενός ρευστού, π.χ. μέσα σ' ένα αγωγό, εξασφαλίζεται από την πτώση της πίεσης. Ορίζεται ως **βαθμίδα πίεσης** ο ρυθμός μεταβολής της πίεσης κατά την κύρια διεύθυνση της ροής ($\partial p / \partial x$). Εάν $\partial p / \partial x > 0$ έχουμε **αντίξοη** βαθμίδα πίεσης (adverse pressure gradient) ενώ αν $\partial p / \partial x < 0$ έχουμε **ευνοϊκή** βαθμίδα πίεσης (favorable pressure gradient).

Η βαθμίδα πίεσης, κατά μήκος του στερεού ορίου, ασκεί σημαντική επίδραση στην ροή επηρεάζοντας τόσο την θέση του σημείου μετάπτωσης του οριακού στρώματος όσο και την ίδια την ύπαρξη του. Σε περιοχές όπου έχουμε μείωση της πίεσης ($\partial p / \partial x < 0$, επιταχυνόμενη ροή), το οριακό στρώμα διατηρείται στρωτό, ενώ αύξηση της πίεσης ($\partial p / \partial x > 0$, επιβραδυνόμενη ροή) θα μπορούσε να προκαλέσει την αποκόλλησή του. Μπορεί να ισχυριστεί κανείς ότι, είναι πάντα δυνατόν να μειωθεί η επιδερμική τριβή σε λεπτά στερεά όρια (στις αεροτομές ή σε επίπεδη πλάκα) μετατοπίζοντας το σημείο μετάπτωσης όσο το δυνατόν πιο μακριά από την οδηγούσα ακμή κατά την διεύθυνση

της ροής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με μια κατάλληλη επιλογή του σχήματος του στερεού ορίου και της αντίστοιχης κατανομής της πίεσης. Η επιδερμική τριβή (αντίσταση) των σωμάτων με αεροδυναμικό σχήμα, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται στρωτό οριακό στρώμα, μπορεί να είναι πολύ μικρότερη από εκείνη σε ένα σώμα με μη αεροδυναμικό σχήμα.

Οι ροές με αντίξοη βαθμίδα πίεσης είναι αυτές με την μεγαλύτερη πρακτική σημασία και με αυτές ασχολείται η διατριβή. Ροή με αντίξοη βαθμίδα πίεσης οδηγεί κατά κανόνα στην αποκόλληση του οριακού στρώματος από την στερεή επιφάνεια, γι' αυτό και η μελέτη της παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Η μελέτη της ροής οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης δείχνει ότι όταν αυτό αποκολλάται από το τοίχωμα του στερεού ορίου συχνά επανέρχεται σε επαφή με το στερεό όριο αφού έχει μετατραπεί όμως σε τυρβώδες. Το φαινόμενο αυτό είναι ένα σύνθετο φαινόμενο και δεν εξετάζεται στην παρούσα διατριβή. Εάν αποκολληθεί η ροή δεν εξετάζεται η επαναφορά της και η αριθμητική διαδικασία σταματά στο σημείο αποκόλλησης x^* .

Ένα απλό μοντέλο ροής που εμφανίζει αντίξοη βαθμίδα πίεσης είναι εκείνο με γραμμικά ελαττούμενη ταχύτητα ή ροή Howarth [73] η οποία αναπαριστά την δυναμική ροή, κατά μήκος μιας επίπεδης πλάκας μήκους L , που ξεκινά από το σημείο $x = 0$ και καταλήγει σε μια άλλη πλάκα κάθετη στην πρώτη και κάθετη στην διεύθυνση του ρεύματος στο σημείο $x = L$. Η ταχύτητα στην ακμή του οριακού στρώματος γι' αυτήν την ροή είναι ανάλογη του x και ο τύπος της γενικά δίνεται από τη σχέση

$$u_e = u_\infty \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad (1.6)$$

όπου u_∞ η ταχύτητα του ελεύθερου ρεύματος και L το μήκος της πλάκας. Αυτή η ροή ενώ ξεκινά με σταθερή ταχύτητα u_∞ , για πλάκα αμελητέου πάχους, στο $x = 0$, λόγω της αντίξοης βαθμίδας πίεσης παρουσιάζει τελικά αποκόλληση του οριακού στρώματος η οποία πραγματοποιείται στην θέση x^* με $x^* < L$.

Η απόδειξη του ότι η βαθμίδα πίεσης σ' αυτή την ροή είναι αντίξοη προκύπτει εύκολα ως εξής. Παραγωγίζοντας την σχέση (1.6) ως προς x , προκύπτει ότι

$$\frac{du_e}{dx} = -\frac{u_\infty}{L}. \quad (1.7)$$

Επίσης από την εξίσωση του Bernoulli προκύπτει

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}. \quad (1.8)$$

Αντικαθιστώντας την (1.7) στην (1.8) προκύπτει ότι

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho_e u_e u_\infty}{L} > 0. \quad (1.9)$$

Εφ' όσον η βαθμίδα πίεσης είναι θετική η πίεση αυξάνει με την απόσταση x με αρνητικές συνέπειες για το οριακό στρώμα.

Με την περίπτωση της αντίξοης βαθμίδας πίεσης έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές. Πειραματικές και θεωρητικές εργασίες υπάρχουν τόσο στην περίπτωση της στρωτής

όσο και στην περίπτωση της τυρβώδους ροής οριακού στρώματος. Οι θεωρητικές μελέτες της συμπεριφοράς του στρωτού οριακού στρώματος στην περιοχή του σημείου αποκόλλησης των Goldstein [57] και Stratford [137] καθώς και η ανασκόπηση των Brown και Stewartson [21] θεωρούνται από τις πρώτες και κλασικές εργασίες στον τομέα αυτόν. Για περισσότερες πληροφορίες για την περίπτωση της στρωτής ροής με αντίξοη βαθμίδα πίεσης ο αναγνώστης παραπέμπεται στα συγγράμματα των Schlichting [124], Cebeci-Bradshaw [29] και White [147]. Ωστόσο, υπάρχουν πολύ πιο σύγχρονες εργασίες, πειραματικές ή θεωρητικές, στην περίπτωση της τυρβώδους ροής με αντίξοη βαθμίδα πίεσης. Οι πειραματικές αυτές εργασίες είναι σημαντικές για την μοντελοποίηση της τυρβώδους ροής με αντίξοη βαθμίδα. Μερικές από τις πρόσφατες πειραματικές μελέτες της τυρβώδους ροής με την επίδραση της αντίξοης βαθμίδας πίεσης είναι οι εργασίες των Brown και Joubert [20], Hopkins και Inouye [70], Simpson et. al. [128-130], Collins και Simpson [38], Murthy και Rose [104], Kader και Yaglom [80], Coles και Wadcock [36], Frei και Thomann [51], Inman και Bradshaw [78], Thompson και Whitelaw [144], Hirt και Thomann [69], Dengel και Frenholz [47], Spalart και Watmuff [132], Nagano et. al. [106, 107] κ.α. Παλιότερες πειραματικές μελέτες μέχρι το 1968 αναφέρονται στην εργασία των Coles και Hirst [37].

Μερικές σύγχρονες εργασίες μελέτης στρωτού ή τυρβώδους οριακού στρώματος με την βοήθεια αριθμητικών τεχνικών είναι αυτές των Hung [76], Wu και Squires [151], Wolf και Ochs [149], Ilinca et. al [77] και των Spyropoulos και Blaisdell [136]. Συγκεκριμένα στις εργασίες τους οι Wu και Squires καθώς και οι Spyropoulos και Blaisdell, χρησιμοποιούν την θεωρία της προσομοίωσης των μεγάλων δινών, που είναι μια πολλά υποσχόμενη τεχνική. Στην εργασία τους οι Wolf και Ochs χρησιμοποιούν μια σειρά από μοντέλα τύρβης, όπως το μοντέλο των Baldwin-Lomax, το k- ω και το k- ϵ μοντέλο τύρβης. Οι Ilinca et. al χρησιμοποιούν το k- ϵ μοντέλο, ενώ ο Hung επιλύει τις εξισώσεις Navier-Stokes χωρίς την χρήση κάποιου μοντέλου τύρβης (DNS).

1.1.4 Αποκόλληση του οριακού στρώματος

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε ο όρος διαχωρισμός ή αποκόλληση (separation) του οριακού στρώματος, φαινόμενο ανεπιθύμητο αφού προκαλεί πολλά προβλήματα όταν εμφανίζεται στην ροή. Τα ρευστά σωματίδια μέσα στο οριακό στρώμα, κοντά στο τοίχωμα του στερεού ορίου, επιβραδύνονται από την τριβή και από την αντίξοη βαθμίδα πίεσης που υπάρχει στην ροή, λόγω γεωμετρίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα ρευστά σωματίδια κοντά στο τοίχωμα που δεν έχουν αρκετή ορμή να συνεχίσουν την κίνηση τους, να ακινητοποιούνται. Το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνει κατά πολύ κατά την κατεύθυνση της κίνησης και η ροή μέσα σε αυτό αντιστρέφεται. Αυτό αναγκάζει τα επιβραδυνόμενα ρευστά σωματίδια στην επιφάνεια του στερεού ορίου να κινηθούν προς τα έξω και να αποκολληθούν από το τοίχωμα. Το παραπάνω φυσικό φαινόμενο ονομάζεται “αποκόλληση του οριακού στρώματος” και σχετίζεται με το σχηματισμό στροβίλων, με μεγάλες απώλειες ενέργειας στο πίσω μέρος του σώματος. Στην περιοχή του σημείου αποκόλλησης η ταχύτητα είναι μηδενική όχι μόνον πάνω στο στερεό όριο, όπως απαιτεί η φυσική οριακή συνθήκη, αλλά και σε κάποιο διάστημα κατά την διεύθυνση της καθέτου στο στερεό όριο και μέσα στο οριακό στρώμα. Το σημείο διαχωρισμού λοιπόν καθορίζεται από τη συνθήκη ότι η βαθμίδα της ταχύτητας πάνω στο τοίχωμα, μηδενίζεται, δηλαδή

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\text{τοιχώμα}} = 0, \quad (1.10)$$

που σημαίνει ότι και η διατμητική τάση σ' εκείνο το σημείο μηδενίζεται. Το φαινόμενο της αποκόλλησης παρουσιάζεται στο παρακάτω Σχήμα 1.1.

Σχήμα 1.1. Ρευματικές γραμμές και κατανομή ταχύτητας σε οριακό στρώμα στο σημείο αποκόλλησης.

Το φαινόμενο της αποκόλλησης εμφανίζεται κυρίως σε σώματα με κυκλική διατομή (μη αεροδυναμικά) όπως κύλινδροι και σφαίρες. Πάνω σε τέτοια σώματα υπάρχει μια περιοχή που το ρευστό επιβραδύνεται έντονα και η κατανομή της πίεσης αποκλίνει από αυτήν των ιδανικών ρευστών. Η μεγάλη αντίσταση σε τέτοια σώματα μπορεί να ερμηνευτεί από την ύπαρξη μεγάλης αντίξοης βαθμίδας πίεσης που έχει ως συνέπεια την αποκόλληση. Κατά τον Prandtl, το σημείο αποκόλλησης καθορίζεται εξ ολοκλήρου από εξωτερικές συνθήκες. Η λύση των εξισώσεων της μόνιμης, διδιάστατης, στρωτής ροής οριακού στρώματος με εξωτερικά επιβαλλόμενη πίεση ισχύει μόνο μέχρι το σημείο αποκόλλησης. Αυτό είναι γνωστό ως ανωμαλία του Goldstein (1948) [57] προς τιμήν του S. Goldstein, που ήταν ο πρώτος που αναφέρθηκε στην ανώμαλη συμπεριφορά της λύσης κοντά στο σημείο μηδενικής επιδερμικής τριβής.

1.1.5 Μέθοδοι πρόληψης της αποκόλλησης

Από τα ανωτέρω γίνεται κατανοητό ότι πρέπει να βρεθεί τρόπος για τον τεχνητό έλεγχο της συμπεριφοράς του οριακού στρώματος, ώστε να προλαμβάνεται ή τουλάχιστον να καθυστερεί το φαινόμενο της αποκόλλησης. Στα πλαίσια αυτά έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι. Ο σκοπός αυτών των μεθόδων είναι να ελέγξουν ολόκληρη την ροή και να την οδηγήσουν προς μια συγκεκριμένη κατάσταση επιδρώντας στην δομή του οριακού στρώματος. Ο Prandtl ήταν ο πρώτος που ανέφερε τεχνικές ελέγχου και έκανε αρκετά πειράματα στα οποία έλεγχε την συμπεριφορά του οριακού στρώματος. Απέδειξε την εγκυρότητα των ιδεών του με κατάλληλα σχεδιασμένα πειράματα και πέτυχε αξιοσημείωτα αποτελέσματα.

Στο στρωτό οριακό στρώμα αρκεί μικρή τιμή της αντίξοης βαθμίδας πίεσης για την εμφάνιση αποκόλλησης. Στην περίπτωση τυρβώδους ροής ο κίνδυνος της αποκόλλησης πραγματικά μειώνεται, σε σχέση με την στρωτή ροή, γιατί εξ' αιτίας της τυρβώδους ανάμιξης υπάρχει μια συνεχής ανταλλαγή της ορμής από έξω (δυναμική ροή) προς τα μέσα (ροή στο οριακό στρώμα). Ωστόσο, ακόμα και στην τυρβώδη ροή είναι συχνά επιθυμητό να προλαμβάνεται η αποκόλληση εφαρμόζοντας κατάλληλες τεχνικές ελέγχου του οριακού στρώματος. Ο έλεγχος του οριακού στρώματος εφαρμόζεται ως τεχνική κυρίως στην αεροναυπηγική, όπου στην πράξη χρειάζεται συχνά η πρόληψη

και αποφυγή της αποκόλλησης για μείωση της οπισθέλκουσας (τριβής). Αρκετές μέθοδοι ελέγχου του οριακού στρώματος έχουν αναπτυχθεί πειραματικά, αλλά και βάσει θεωρητικής μελέτης [53]. Μια από αυτές είναι η κίνηση του στερεού ορίου. Χαρακτηριστικά φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα από την εργασία των Gal-el-Hak και Bushnell [54] ότι με την εφαρμογή κινούμενων ορίων μπορεί να αυξηθεί η άντωση μιας πτέρυγας και να αποφευχθεί η απώλεια στήριξης της.

Σχήμα 1.2. Διάφορες διατάξεις πτέρυγας με εφαρμογή κινούμενων στερεών ορίων

Μια σημαντική και πρόσφατη εργασία, από τις πολλές εργασίες που ασχολούνται με κινούμενα όρια ως τεχνικές ελέγχου του οριακού στρώματος, είναι αυτή των Barakos και Drikakis [13]. Η σημαντικότερη όμως μέθοδος για τον έλεγχο του οριακού στρώματος και την αποφυγή της αποκόλλησης είναι η απορρόφηση (suction) μέρους του οριακού στρώματος δια μέσου οπών ή σχισμών της συνοριακής επιφάνειας. Η επίδραση της απορρόφησης συνίσταται στην απομάκρυνση των επιβραδυνόμενων ρευστών σωματιδίων από το οριακό στρώμα πριν προκληθεί αποκόλληση αυτού. Σχηματίζεται έτσι ένα νέο οριακό στρώμα που είναι ικανό να υπερνικήσει την αντίξοχη βαθμίδα πίεσης στην περιοχή πίσω από την σχισμή. Με κατάλληλη κατανομή των σχισμών και κάτω από κατάλληλες συνθήκες η αποκόλληση μπορεί να αποφευχθεί πλήρως. Η απορρόφηση χρησιμοποιείται ευρύτατα στον σχεδιασμό των πτερύγων των αεροσκαφών. Εφαρμόζοντας απορρόφηση, επιτυγχάνονται μεταβολές της πίεσης στην πάνω μεριά της αεροτομής (στην επιφάνεια χαμηλής πίεσης) σε μεγάλες γωνίες προσβολής και συνεπώς, μεγαλύτερες τιμές άντωσης. Ήδη από τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο έχει μελετηθεί ένας μεγάλος αριθμός διατάξεων με διαφορετικά τοποθετημένες σχισμές και η επίδραση τους στην μέγιστη άντωση [124].

Η απορρόφηση επίσης χρησιμοποιείται ως τεχνική για την μείωση της τριβής. Με την χρήση κατάλληλων διατάξεων σχισμών απορρόφησης, είναι δυνατό να μετατοπιστεί το σημείο μετάπτωσης στο οριακό στρώμα μακρύτερα προς την κατεύθυνση της κίνησης του ρεύματος. Αυτό προκαλεί μείωση στον συντελεστή τριβής, γιατί η τριβή στην στρωτή ροή είναι σημαντικά μικρότερη από ότι στην τυρβώδη.

Είναι βέβαια σημαντικό να εκτιμηθεί η ποσότητα του ρευστού που πρέπει να απορροφάται μέσα από ένα οριακό στρώμα. Μια μεγάλη ταχύτητα απορρόφησης αφ' ενός μεν είναι αντισυμβατική, διότι απαιτείται μεγάλη ισχύς για την εφαρμογή της, αφ' ετέρου δε δεν επιτρέπει την εφαρμογή της θεωρίας του οριακού στρώματος. Συνεπώς, είναι σημαντικό να καθοριστεί η “ελάχιστη ταχύτητα απορρόφησης” που απαιτείται για την αποφυγή αποκόλλησης του οριακού στρώματος. Η ποσότητα ρευστού που αφαιρείται από την ροή πρέπει να είναι τόσο μικρή ώστε μόνο τα ρευστά σωματίδια στην άμεση περιοχή του τοίχου να απορροφώνται. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το

πηλίκο της ταχύτητας απορρόφησης $u_w(x)$ προς την ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος u_∞ είναι πολύ μικρό, δηλαδή $u_w/u_\infty = 0.0001$ έως 0.01 . Με αυτή την υπόθεση ικανοποιούνται οι απλοποιήσεις που συνιστούν την βασική θεωρία του οριακού στρώματος. Όταν η ταχύτητα απορρόφησης είναι τόσο μικρή, μπορούμε επίσης να αγνοούμε την απώλεια μάζας ή το φαινόμενο καταβόθρας “sink-effect” στην εξωτερική δυναμική ροή. Με άλλα λόγια η δυναμική ροή μπορεί να θεωρηθεί ότι παραμένει ανεπηρέαστη από απορρόφηση ή έγχυση που εφαρμόζεται στην επιφάνεια του στερεού ορίου. Η συνθήκη μη ολίσθησης στο τοίχωμα ικανοποιείται με την παρουσία απορρόφησης, καθώς και η έκφραση $\tau_w = \mu(\partial u / \partial y)_w$ της διατμητικής τάσης πάνω σ' αυτό.

Τα τελευταία χρόνια έχει χρησιμοποιηθεί πάρα πολύ στην αεροδυναμική η τεχνική της απορρόφησης/έγχυσης. Κάποιες σύγχρονες εργασίες που αναφέρονται στην απορρόφηση/έγχυση ως τεχνική ελέγχου είναι οι [55, 10]. Μια χαρακτηριστική εφαρμογή τους είναι οι παθητικές διατάξεις απορρόφησης/έγχυσης που χρησιμοποιούνται στις πτέρυγες των αεροσκαφών, κυρίως κατά την προσγείωση ή απογείωση τους (υπεραντωτικές διατάξεις). Όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα τέτοιες παθητικές διατάξεις χρησιμοποιούνται τόσο στην οδηγούσα ακμή της πτέρυγας όσο και στο χείλος εκφυγής.

Σχήμα 1.3. Παθητικές διατάξεις απορρόφησης/έγχυσης πάνω σε πτέρυγα και αναπαράσταση οριακών στρωμάτων γρίλιας και κυρίως πτέρυγας.

Εκτός από τις παραπάνω τεχνικές έχουν αναπτυχθεί και αρκετές άλλες, όπως ο σχεδιασμός του στερεού σώματος με κατάλληλο αεροδυναμικό σχήμα (laminar airfoils). Αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται πάρα πολύ σήμερα και είναι αντικείμενο έρευνας της σύγχρονης αεροπορικής βιομηχανίας. Τέλος η τεχνική της ψύξης/θέρμανσης των τοιχωμάτων του στερεού ορίου βοηθά στον έλεγχο του οριακού στρώματος. Η τεχνική ψύξης περιορίζει το φαινόμενο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος και σταθεροποιεί τη ροή πάνω από την πλάκα. Αντίθετα, η θέρμανση αποσταθεροποιεί την ροή και την οδηγεί πιο γρήγορα στην αποκόλληση. Για περισσότερες λεπτομέρειες για την τεχνική της ψύξης/θέρμανσης των τοιχωμάτων του στερεού ορίου, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα συγγράμματα των Cebeci και Smith [27] και Cebeci και Bradshaw [29] και στις πρόσφατες εργασίες των Hossain et. al. [72] και Acharya et. al. [1].

1.2 Μαγνητορευστοδυναμική (MFD)

Ο όρος μαγνητορευστοδυναμική αναφέρεται στη μελέτη της ροής των ηλεκτρικά αγώγιμων ρευστών μέσα σε ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Ενοποιεί σ' ένα κοινό πλαίσιο την ηλεκτρομαγνητική θεωρία με την Μηχανική των Ρευστών περιγράφοντας τα αποτελέσματα του μαγνητικού πεδίου στην ροή και το αντίστροφο. Η μαγνητορευστοδυναμική (MFD) ασχολείται με ηλεκτρικά αγώγιμα ρευστά, ενώ οι υποδιαίρεσεις της, μαγνητοϋδροδυναμική (MHD) και μαγνητοαεροδυναμική (MGD), ασχολούνται με ηλεκτρικά αγώγιμα υγρά και ιονισμένα συμπιεστικά αέρια [40]. Ωστόσο έχει καθιερωθεί τόσο για την μαγνητοϋδροδυναμική όσο και για την μαγνητοαεροδυναμική να αναφέρεται ο ίδιος όρος, μαγνητοϋδροδυναμική (MHD). Έτσι, στην διατριβή με τον όρο MHD ροή θεωρείται η ροή ηλεκτρικά αγώγιμου αερίου πάνω από επίπεδη πλάκα με την εφαρμογή μαγνητικού πεδίου.

Πολλά φυσικά φαινόμενα και μηχανολογικά προβλήματα υπόκεινται στην μαγνητορευστοδυναμική. Είναι απαραίτητη στην αστροφυσική γιατί το σύμπαν είναι γεμάτο από φορτισμένα σωματίδια και νέφη αερίων τα οποία διαπερνώνται από μαγνητικά πεδία. Από την άλλη πλευρά οι γεωφυσικοί ασχολούνται με μαγνητορευστοδυναμικά φαινόμενα στις αλληλεπιδράσεις των αγώγιμων ρευστών και μαγνητικών πεδίων μέσα και γύρω από ουράνια σώματα, όπως στην περίπτωση του Ήλιου, όπου το υδρογόνο που τον συνθέτει είναι πάρα πολύ ιονισμένο (πλάσμα). Οι μηχανικοί χρησιμοποιούν τις μαγνητορευστοδυναμικές αρχές στον σχεδιασμό διαφόρων συσκευών, όπως θερμοανταλλάκτες (heat exchangers), ηλεκτρομαγνητικές αντλίες, που χρησιμοποιούνται σε εργοστάσια παραγωγής ατομικής ενέργειας για την μεταφορά ραδιενεργών διαλυμάτων και συσκευών μέτρησης της ροής (flow meters). Με αυτό τον τρόπο λύνουν πολλά προβλήματα, όπως την προώθηση διαστημικών οχημάτων με την κατασκευή ηλεκτρομαγνητικών κινητήρων ή κινητήρων ιόντων. Βελτιώνουν τον έλεγχο κατά την επανείσοδο του οχήματος στην ατμόσφαιρα, αλλά και τον έλεγχο του οριακού στρώματος πάνω από αεροσκάφη που κινούνται μέσα στην ατμόσφαιρα με υπερηχητικές ταχύτητες, παρά τον περιορισμό που προκύπτει λόγω του μεγάλου βάρους των μαγνητικών διατάξεων. Επίσης στον σχεδιασμό τηλεπικοινωνιών και συστημάτων ραντάρ. Στην κατασκευή νέων συστημάτων παραγωγής ενέργειας, όπως τα πυρηνικά εργοστάσια παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, και στην εξέλιξη συσκευών για ελεγχόμενη σύντηξη. Η κατασκευή τέτοιων συσκευών αποτελεί σημαντικό επίτευγμα, διότι θα έδινε καθαρή ενέργεια χωρίς υπολείμματα καύσης ή ραδιενεργά απόβλητα. Τέτοιες συσκευές πρωτοχρησιμοποιήθηκαν στην πρώτη Σοβιετική Ένωση [40, 120].

Οι παλαιότερες εργασίες που μελετούν το πρόβλημα της ροής ενός ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού διαμέσου μαγνητικού πεδίου είναι οι εργασίες των Hartmann [66] και Hartmann-Lazarus [67], οι οποίοι μελέτησαν την ροή υδραργύρου μέσα σε σωλήνα. Η πρώτη αστρονομική εφαρμογή της MFD θεωρίας έγινε το 1899 από τον Bigelow, ο οποίος θεώρησε τον Ήλιο σαν ένα γιγάντιο μαγνητικό σύστημα. Ωστόσο, αυτός που ανακάλυψε τα MFD κύματα στον Ήλιο ήταν ο Alfvén [40]. Ο πρώτος που μελέτησε την ροή ενός ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού πάνω από επίπεδη πλάκα με την παρουσία μαγνητικού πεδίου ήταν ο Rossow το 1957 [120].

Στις εξισώσεις της κλασικής Υδροδυναμικής η εξίσωση ορμής εκφράζει την ισορροπία των δυνάμεων αδρανείας, τριβής, πίεσης και του εξωτερικού πεδίου δυνάμεων ανά μονάδα μάζας. Όταν στο ρευστό εφαρμοστεί ένα μαγνητικό πεδίο και αυτό είναι ηλεκτρικά αγώγιμο, τότε ασκείται σ' αυτό μια επιπρόσθετη δύναμη εξωτερικού πεδίου, γνωστή ως δύναμη Lorentz (ανά μονάδα όγκου) η οποία εκφράζεται ως

$$\vec{F}_L = \rho_e \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (1.11)$$

Στην ανωτέρω εξίσωση ο όρος $\rho_e \vec{E}$, όπου ρ_e η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, παριστά την ηλεκτροστατική δύναμη που αναπτύσσεται πάνω στα φορτία λόγω της παρουσίας του εφαρμοζόμενου ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ και ο δεύτερος όρος περιγράφει την δύναμη που αναπτύσσεται στο ρευστό λόγω της αλληλεπίδρασης της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος $\vec{J}$ και της πυκνότητας των μαγνητικών γραμμών $\vec{B}$ (ένταση μαγνητικού πεδίου). Αυτή η δύναμη αναπτύσσεται σε κάθε φορτισμένο ρευστό ή στερεό σωματίδιο κινούμενο σε μαγνητικό πεδίο.

Από τον νόμο του Ohm για κινούμενα μέσα (γενικευμένη έκφραση του νόμου του Ohm) η ολική πυκνότητα $\vec{J}$ του ηλεκτρικού ρεύματος είναι το άθροισμα των δύο ρευμάτων

$$\vec{J} = \vec{J}_v + \vec{J}_c. \quad (1.12)$$

Το $\vec{J}_v$ ονομάζεται ρεύμα μεταφοράς “convection current” και ισούται με $\vec{J}_v = \rho_e \vec{q}$, όπου ρ_e είναι η πυκνότητα του φορτίου (charge density) και $\vec{q}$ το πεδίο ταχύτητας. Το $\vec{J}_c$ ονομάζεται ρεύμα αγωγιμότητας “conduction current” και ισούται με $\vec{J}_c = \sigma(\vec{E} + \vec{q} \times \vec{B})$, όπου σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού. Ο όρος $\vec{J}_v$ θεωρείται γενικά αμελητέος σε σχέση με τον $\vec{J}_c$ και δεν λαμβάνεται υπόψη [140]. Τότε το ολικό ρεύμα δίνεται από την σχέση

$$\vec{J} = \vec{J}_c = \sigma(\vec{E} + \vec{q} \times \vec{B}). \quad (1.13)$$

Μετά τα παραπάνω οι εξισώσεις Navier-Stokes, σε διανυσματική μορφή, γράφονται τώρα

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \nabla^2 (\mu \vec{q}) + \frac{\vec{E}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B}, \quad (1.14)$$

όπου D/Dt ο τελεστής του Stokes, ρ η πυκνότητα του ρευστού και μ το ιξώδες του. Μια απλοποιημένη μορφή των εξισώσεων Maxwell, κατάλληλες για το παρόν πρόβλημα, είναι η εξής

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{div} \vec{J} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \text{curl} \vec{H} = 4\pi \vec{J}, \quad (1.15)$$

με μ_0 την μαγνητική διαπερατότητα του ρευστού και $\vec{H}$ την ένταση του μαγνητικού πεδίου.

Όταν ένα ηλεκτρικά αγώγιμο ρευστό κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_0$, τότε τα θετικά και αρνητικά φορτία του κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε η μέση τους κίνηση να παράγει ένα ηλεκτρικό ρεύμα έντασης, π.χ. $\vec{J}_c$. Η ύπαρξη ηλεκτρικού ρεύματος όμως (ροή φορτίων) δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\vec{b}$, το εξ επαγωγής μαγνητικό πεδίο

(induced magnetic field). Μπορούμε τότε να γράψουμε $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$. Το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{b}$ είναι γενικά πολύ μικρό και θεωρείται αμελητέο. Κριτήριο για την διατήρηση ή όχι του $\vec{b}$ αποτελεί μια παράμετρος, η οποία ορίζεται κατωτέρω και καλείται μαγνητικός αριθμός Reynolds Re_m . Για $Re_m \ll 1$ το $\vec{b}$ θεωρείται αμελητέο.

Από την άλλη πλευρά η εξίσωση για την θερμοκρασία T του ρευστού στην Υδροδυναμική προκύπτει από την εφαρμογή του πρώτου θερμοδυναμικού αξιώματος στο πεδίο ροής και αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας του ρευστού με οποιαδήποτε μορφή νοείται αυτή. Με την εφαρμογή όμως μαγνητικού πεδίου στην ροή του ρευστού η θερμική ενέργεια αυξάνεται. Αυτό συμβαίνει λόγω της θερμότητας Joule, η οποία οφείλεται στην αντίσταση που εμφανίζει το ρευστό στην ροή του ηλεκτρικού ρεύματος δια μέσου του. Η ανά μονάδα όγκου θερμική ισχύς που οφείλεται στην θερμότητα Joule δίνεται από την σχέση

$$\frac{\vec{J}_c \cdot \vec{J}_c}{\sigma} = \sigma (\vec{E} + \vec{q} \times \vec{B})^2 \quad (1.16)$$

και έτσι η κλασική εξίσωση ενέργειας μετασχηματίζεται τώρα στην

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla^2 (kT) + \frac{Dp}{Dt} + \frac{\vec{J}_c \cdot \vec{J}_c}{\sigma} + \mu \Phi, \quad (1.17)$$

όπου c_p είναι η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση του ρευστού, k ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας και

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] &+ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ &- \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.18)$$

είναι η συνάρτηση απωλειών τριβής η οποία καλείται συνάρτηση σκέδασης (dissipation function). Η τρίτη εξίσωση, η εξίσωση συνέχειας, που αποτελεί την μαθηματική διατύπωση της αρχής διατήρησης της μάζας στην Μηχανική των Ρευστών, παραμένει αμετάβλητη στην MHD και είναι η

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (1.19)$$

όπου ρ η πυκνότητα του ρευστού και $\vec{q}$ το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας του ρευστού. Για την περίπτωση μόνιμης (σταθερής) διδιάστατης ροής, που αποτελεί και το αντικείμενο της διατριβής αυτής, η ανωτέρω γράφεται

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (1.20)$$

Τέλος, όπως στην αεροδυναμική έτσι και στην μαγνητορευστοδυναμική εισάγονται κάποιες αδιάστατοι παράμετροι που χαρακτηρίζουν τα MFD φαινόμενα. Μια από τις βασικότερες παραμέτρους είναι ο μαγνητικός αριθμός Reynolds, που ορίζεται ως

$$\text{Re}_m = \frac{u_\infty L}{\frac{1}{\mu_0 \sigma}}, \quad (1.21)$$

όπου u_∞ είναι η ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος, L ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής, μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα και σ η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού. Ο μαγνητικός αριθμός Reynolds είναι ο λόγος της παροχής ρευστού (ανά μονάδα μήκους, $u_\infty L$) προς την μαγνητική διάχυση ($1/\mu_0 \sigma$) και αποτελεί μια πολύ σημαντική ποσότητα. Ο Re_m καθορίζει την διάχυση του μαγνητικού πεδίου, κατά μήκος των ρευματικών γραμμών, κατά τον ίδιο τρόπο που ο συνήθης αριθμός Reynolds Re καθορίζει την διάχυση της στροβιλότητας κατά μήκος αυτών. Στα μηχανολογικά προβλήματα και ειδικότερα στην αεροδυναμική, ο μαγνητικός αριθμός Reynolds είναι μικρότερος της μονάδας. Σε προβλήματα αστροφυσικής όπου το χαρακτηριστικό μήκος L είναι πολύ μεγάλο (διάμετρος αστέρα) και η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ πολύ μεγάλη ο Re_m παίρνει μεγάλες τιμές. Ο μαγνητικός αριθμός Reynolds αποτελεί ένα μέτρο της επίδρασης της ροής του ρευστού στο εφαρμοζόμενο σ' αυτήν μαγνητικό πεδίο [40].

Έχει δειχθεί, κατά το παρελθόν, ότι η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ του αέρα αυξάνεται αν αυξηθεί ο αριθμός των φορτισμένων σωματιδίων και μειώνεται αυξάνοντας την πιθανότητα σύγκρουσης των φορτισμένων σωματιδίων με άλλα σωματίδια που υπάρχουν μέσα στο ρευστό και που παρεμποδίζουν τα πρώτα στην κίνηση τους [116]. Όταν ένα αέριο κινείται με μεγάλη ταχύτητα μέσα στο οριακό στρώμα, δηλαδή κοντά στην ταχύτητα του ήχου ή πολύ πιο πάνω από αυτήν, ιονίζεται λόγω της θερμότητας από τριβή. Το αέριο τότε γίνεται ηλεκτρικός αγωγός και μπορεί να δέχεται την επίδραση μαγνητικού πεδίου. Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου επηρεάζει όλες τις παραμέτρους του οριακού στρώματος, όπως την επιδερμική τριβή, την μεταφορά θερμότητας, αλλά και την ολική αντίσταση [15]. Όταν το αέριο είναι πολύ ιονισμένο έχει μεγάλη ηλεκτρική αγωγιμότητα σ και αυτό σημαίνει ότι ακόμα και μικρής έντασης μαγνητικό πεδίο επηρεάζει την ροή του. Γενικά ο αέρας δεν είναι πολύ ιονισμένος κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας αλλά και σε μικρό ύψος πάνω από αυτήν. Όπως χαρακτηριστικά φαίνεται και στην αναφορά του Hulburt [75], έντονα ιονισμένος αέρας υπάρχει σε πολύ μεγάλα ύψη, από 94 km και πάνω. Αυτός ο ιονισμός του αέρα σε μεγάλα ύψη, κοντά στην ιονόσφαιρα, οφείλεται στην επίδραση του Ήλιου πάνω στα αέρια που συνθέτουν την ατμόσφαιρα της Γης (οξυγόνο, άζωτο, κλπ).

Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Resler και Sears [116], η αγωγιμότητα του αέρα δεν υπερβαίνει τα 0.1 mho/cm (10 mho/m) ακόμα και για πολύ υψηλές θερμοκρασίες, όπως αυτές που αναπτύσσονται στους δορυφόρους και τα διαστημικά οχήματα όταν εισέρχονται μέσα στην ατμόσφαιρα κατά την κάθοδο τους. Από την άλλη, μπορούν να επιτευχθούν τιμές της αγωγιμότητας της τάξης του 1 mho/cm (100 mho/m) εμπλουτίζοντας τον αέρα με κάποιο ιόν (seeding), ακόμα και σε αριθμούς Mach που αντιστοιχούν σε επανδρωμένα αεροσκάφη. Λόγω της μικρής αγωγιμότητας του αέρα, στην διατριβή έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή 1 mho/m που αποτελεί μια αποδεκτή τιμή της ηλεκτρικής αγωγιμότητας του.

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας [121]. Ωστόσο, κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορεί να μεταβάλλεται ελάχιστα ή να παραμένει σταθερή.

Αυτό μπορεί να συμβαίνει για παράδειγμα 1) στο οριακό στρώμα ταχέως κινούμενων αεροσκαφών, 2) στην περιοχή μεταξύ της επιφάνειας ενός σώματος με αμβλύ σχήμα και του κρουστικού κύματος, 3) στην περιοχή κοντά σ' ένα αεροσκάφος όπου υλικό εξαχνούται από την επιφάνεια του ή 4) μέσα στην ιονόσφαιρα όπου ο αέρας ιονίζεται λόγω της ακτινοβολίας του ηλίου και θεωρείται τότε ένας ομοιόμορφος αγωγός. Αν το αγώγιμο στρώμα είναι αρκετά λεπτό οι εξισώσεις που περιγράφουν την ροή του ιονισμένου αέρα αποτελούν μια καλή εκτίμηση του φυσικού προβλήματος ακόμα και αν το σ παραμένει σταθερό [120].

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο, αλλά και ολόκληρη την εισαγωγή, παραθέτουμε μερικές σύγχρονες εργασίες σε MHD οριακά στρώματα σχετικές με την παρούσα διατριβή όσον αφορά την στρωτή ροή. Τέτοιες εργασίες είναι των Pop et. al. [112], Kumari [94], Takhar et. al. [143] και Takhar και Nath [142]. Υπάρχουν πολύ λίγες πειραματικές εργασίες πάνω στην ροή ηλεκτρικά αγώγιμων ρευστών υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου [61]. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι δύσκολο και πολυέξοδο να κατασκευαστούν διατάξεις για την πειραματική μελέτη τέτοιων ροών. Παρ' όλο που κατά τα τελευταία χρόνια έχει σημειωθεί σημαντική πρόοδος στην μελέτη, θεωρητική και πειραματική, των διαφόρων MHD φαινομένων, εντούτοις απαιτείται ακόμα πολύ προσπάθεια για την εφαρμογή της MHD θεωρίας στα αεροσκάφη, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πειραματικό επίπεδο. Προς αυτόν τον στόχο κατευθύνεται και η διατριβή αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

Μαγνητοϋδροδυναμική συμπιεστή ροή στρωτού οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας.

Περίληψη

Στο Κεφάλαιο αυτό μελετάται η μαγνητοϋδροδυναμική συμπιεστή ροή **στρωτού οριακού στρώματος** με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας. Αρχικά περιγράφεται το υπό μελέτη πρόβλημα. Ακολουθεί η μαθηματική του διατύπωση, δηλαδή οι εξισώσεις που περιγράφουν την στρωτή ροή ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού πάνω από επίπεδη πλάκα με την επίδραση μαγνητικού πεδίου και αντίξοη βαθμίδα πίεσης καθώς και οι συνοριακές συνθήκες. Το μη γραμμικό συζευγμένο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, με τις αντίστοιχες συνθήκες του, που περιγράφει το εν λόγω πρόβλημα μετασχηματίζεται με τον μετασχηματισμό των Falkner και Skan, για συμπιεστή ροή, σ' ένα απλούστερο σύστημα κατάλληλο για την αριθμητική του επίλυση. Μετά την περιγραφή της αριθμητικής μεθόδου τριδιαγώνιας απαλοιφής κατά πίνακα του συστήματος εξισώσεων και του τρόπου εφαρμογής της σ' ένα απλό παράδειγμα, εφαρμόζεται αυτή για την επίλυση του εν λόγω συστήματος. Επιτυγχάνονται αριθμητικά αποτελέσματα, για τις διάφορες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα, τα οποία και παρουσιάζονται σε γραφικές παραστάσεις. Εξετάζεται και αναλύεται η επίδραση αυτών των παραμέτρων στο φυσικό πρόβλημα για τρεις περιπτώσεις. (i) Για την περίπτωση που δεν πραγματοποιείται ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ της οριακής επιφάνειας και του ρευστού (αδιαβατική ροή $S'_w = 0$). (ii) Για την περίπτωση θερμαινόμενης πλάκας ($S_w > 1$). (iii) Για την περίπτωση ψυχόμενης πλάκας ($S_w < 1$). Το Κεφάλαιο κλείνει με την παράθεση των σημαντικότερων και κυριότερων συμπερασμάτων της μελέτης αυτής.

2.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια έχει σημειωθεί μεγάλη πρόοδος στη μελέτη της συμπιεστής ροής. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πολλές ροές από την φύση τους είναι συμπιεστές όπως, για παράδειγμα, οι ροές με υπερηχητικές ή υπερπεντηχητικές ταχύτητες γύρω από αεροσκάφη ή διαστημικά οχήματα. Επίσης, η γνώση της επίδρασης της συμπιεστότητας του αέρα στη ροή είναι απαραίτητη για πολλές βιομηχανικές και μηχανολογικές εφαρμογές της αεροδυναμικής, της αεροδιαστημικής και γενικότερα της μηχανικής. Μολονότι οι πιο προφανείς εφαρμογές της θεωρίας της συμπιεστής ροής ρευστού αναφέρονται στον σχεδιασμό αεροσκαφών υψηλών ταχυτήτων, γνώση της συμπιεστής ροής επίσης απαιτείται για τον σχεδιασμό και την λειτουργία πολλών κοινών συσκευών που χρησιμοποιούνται στην μηχανολογία. Μεταξύ αυτών των εφαρμογών είναι: τουρμπίνες αερίων, τουρμπίνες ατμού, παλινδρομικές μηχανές, αγωγοί μεταφοράς φυσικού αερίου, θάλαμοι καύσης, κλπ [82].

Λόγω της τριβής που αναπτύσσεται σε μια ροή συμπιεστού οριακού στρώματος η πρόβλεψη της εξέλιξης αυτού είναι δύσκολη, με αποτέλεσμα την εμφάνιση

προβλημάτων ελέγχου. Τέτοια προβλήματα είναι, για παράδειγμα, η δημιουργία ασταθειών και η μετάπτωση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη, ή ακόμα χειρότερα η αποκόλληση της ροής πάνω από το στερεό όριο. Το γεγονός αυτό δημιουργεί την ανάγκη ανάπτυξης μεθόδων ελέγχου της ροής που θα αποτρέπουν ή θα καθυστερούν την μετάπτωση ή την αποκόλληση του οριακού στρώματος [99].

Ο έλεγχος όμως της ροής γίνεται ακόμα πιο δύσκολος στην περίπτωση που στο οριακό στρώμα υπάρχει αντίξοη βαθμίδα πίεσης, όπως στην ροή με γραμμικά ελαττούμενη ταχύτητα, ροή Howarth [73], ή σε ροή με εκθετικά ελαττούμενη ταχύτητα [32]. Σε τέτοιες περιπτώσεις το πάχος του οριακού στρώματος αυξάνεται πολύ κατά την διεύθυνση της ροής και η ροή σ' αυτό είναι δυνατόν να αναστραφεί. Μια από τις αρνητικές επιπτώσεις είναι και το φαινόμενο της αποκόλλησης του οριακού στρώματος που γενικά είναι ανεπιθύμητο διότι συνεπάγεται μεγάλες απώλειες ενέργειας και αύξηση της αντίστασης. Για την περίπτωση της ροής του αέρα πάνω από μια πτέρυγα αεροσκάφους το φαινόμενο της αποκόλλησης μπορεί να οδηγήσει σε “απώλεια στήριξης” με καταστροφικές συνέπειες για την ασφάλεια της πτήσης. Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς την σπουδαιότητα ελέγχου το οριακού στρώματος για την αποφυγή του ανεπιθύμητου φαινομένου της αποκόλλησης. Μερικές πρόσφατες αντιπροσωπευτικές πειραματικές και αριθμητικές μελέτες οριακού στρώματος, με βαθμίδα πίεσης, παρουσιάζονται στις εργασίες [47, 69, 132].

Μια αποτελεσματική μέθοδος για την πρόληψη της αποκόλλησης είναι η απορρόφηση τμήματος του οριακού στρώματος (suction). Χρησιμοποιείται ευρύτατα για τον σχεδιασμό των πτερύγων των αεροσκαφών και για την ελάττωση της αντίστασης [8]. Ως μέθοδος απαιτεί βέβαια κάποιο κόστος στην εφαρμογή της, δίνει όμως πιο σταθερά και στρωτά οριακά στρώματα μετατοπίζοντας το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής. Μια αριθμητική μελέτη της διδιάστατης στρωτής ροής συμπιεστού οριακού στρώματος παρουσιάζεται στην [82] και δείχνει ότι οι τεχνικές της απορρόφησης ή ψύξης της πλάκας σταθεροποιούν το οριακό στρώμα και επιβραδύνουν την αποκόλληση. Αντίθετα, η θέρμανση της πλάκας αποσταθεροποιεί την ροή και την οδηγεί πιο γρήγορα σε αποκόλληση. Όμως και η έγχυση είναι μια τεχνική που μπορεί μερικές φορές να επιβραδύνει το φαινόμενο της αποκόλλησης συμβάλλοντας στην ευστάθεια του οριακού στρώματος [123]. Εάν εφαρμοστεί μη ομοιόμορφη κατανομή έγχυσης/απορρόφησης τότε το σημείο αποκόλλησης είναι δυνατόν να μετατοπιστεί ακόμα περισσότερο κατά τη φορά της ροής, δηλαδή η ροή διατηρείται στρωτή για μεγαλύτερο διάστημα. Γενικά, η έγχυση ελαττώνει την αντίσταση πάνω από το σταθερό όριο κερδίζοντας έτσι σε ενέργεια. Η εφαρμογή και των δύο αυτών τεχνικών σε ροή πάνω από επίπεδη πλάκα δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα, μειώνοντας την αντίσταση και μετατοπίζοντας το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής. Έτσι, το οριακό στρώμα γίνεται σταθερό, διατηρείται στρωτό για μεγαλύτερο μήκος της πλάκας και επιτυγχάνεται οικονομία με ελάττωση της αντίστασης.

Από την άλλη πλευρά, πολλοί είναι οι ερευνητές εκείνοι που έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη της ροής ενός ηλεκτρικά αγωγίμου ρευστού υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου. Το ενδιαφέρον των ερευνητών οφείλεται στο πλήθος εφαρμογών της ροής υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου όπως, για παράδειγμα, στις μαγνητοϋδροδυναμικές γεννήτριες, στους γραμμικούς επιταχυντές, στην μελέτη του πλάσματος, στους πυρηνικούς αντιδραστήρες και στην ροή των υγρών μετάλλων. Αντιπροσωπευτικά συγγράμματα στα οποία αναφέρονται οι θεμελιώδεις εξισώσεις της MHD και οι κυριότερες εφαρμογές τους είναι αυτά των Sutton και Sherman [140], Hughes και Young [74], Cabannes [24], Cramer και Pai [40], Branover [19] και Yoshizawa [155].

Από τα τέλη της δεκαετίας του 1950 [120] μέχρι σήμερα έχει αναπτυχθεί μια πλούσια βιβλιογραφία στην υδροδυναμική συμπεριφορά του οριακού στρώματος πάνω από ημιάπειρη πλάκα με την παρουσία ομοιόμορφου μαγνητικού πεδίου. Μια ανασκόπηση αυτού του θέματος μέχρι τις αρχές του ογδόντα γίνεται στην [45].

Η μελέτη του MHD οριακού στρώματος σε αγωγούς ορθογώνιας διατομής είναι ένα ελκυστικό πεδίο έρευνας. Εργασίες πάνω σ' αυτό το θέμα περιγράφουν, με την μέθοδο ομοιότητας και την εφαρμογή ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού, το οριακό στρώμα σε ροή πάνω από μονωμένο τοίχωμα [30]. Η θεωρία του MHD οριακού στρώματος χρησιμοποιήθηκε επίσης για την μελέτη της χρονοεξαρτώμενης ροής ενός ασυμπίεστου, ηλεκτρικά αγώγιμου ρευστού πάνω από πορώδη επιφάνεια [62] καθώς και πάνω από κυρτή επιφάνεια [33]. Υπολογισμοί των κατανομών της ταχύτητας, της θερμοκρασίας και της μεταφοράς θερμότητας για MHD πίδακα κοντά στο τοίχωμα παρουσιάζονται στην [141]. Η επίδραση της θερμότητας Joule και της ιξώδους διάχυσης σε υγρά μέταλλα που ρέουν πάνω σε επιφάνεια για την δημιουργία ρευμάτων υψηλής τάσης παρουσιάζεται στην [86]. Μετρήσεις της αύξησης της θερμικής ροής ενός υπερηχητικού, σε υψηλή θερμοκρασία αδρανούς αερίου κοντά στα ηλεκτρόδια μιας MHD γεννήτριας, με αύξηση του μαγνητικού πεδίου, περιγράφεται στην [90].

Το πρόβλημα της ροής στο οριακό στρώμα που αναπτύσσεται γύρω από στερεά, υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου, έχει μελετηθεί εκτενώς στην περίπτωση των ασυμπίεστων ροών στις εργασίες [4-6, 58, 59, 84, 94, 97, 111, 112, 145 και 154]. Ωστόσο, υπάρχει πολύ μικρότερη βιβλιογραφία για την επίδραση της αντίξωσης βαθμίδας πίεσης στην αποκόλληση του MHD οριακού στρώματος με την παρουσία μεταφοράς θερμότητας για τα συμπιεστά ρευστά. Αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της θεωρίας του οριακού στρώματος διότι σε πολλά σχεδιαστικά προβλήματα, όπως στον σχεδιασμό των πτερυγίων των αεροστροβίλων ή των αεροτομών, είναι απαραίτητο να προλαμβάνεται η αποκόλληση της ροής για ελάττωση της αντίστασης ή επίτευξη μεγάλης άντωσης [99].

Σε αυτό το Κεφάλαιο πραγματοποιείται η αριθμητική μελέτη της μόνιμης, μαγνητοϋδροδυναμικής, διδιάστατης, στρωτής, συμπιεστής ροής οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη πλάκα με αντίξωση βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας.

Η περιγραφή του φυσικού προβλήματος και η μαθηματική διατύπωση του παρουσιάζεται στην δεύτερη παράγραφο.

Στην τρίτη παράγραφο εισάγεται ο μετασχηματισμός των Falkner-Skan, για συμπιεστή ροή, καθώς και η αδιάστατη ολική ενέργεια και η αδιάστατη ρευματική συνάρτηση. Η εισαγωγή των μεγεθών αυτών επιτρέπει την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων του προβλήματος η οποία ενδείκνυται για την αριθμητική επίλυση αυτών.

Πριν την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων εκρίθη σκόπιμο να αναπτυχθεί, περιληπτικά, η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται στο Κεφάλαιο αυτό, αλλά και σε όλη την διατριβή, και που είναι η μέθοδος (αριθμητικό σχήμα) Keller-box [88]. Έτσι στην παράγραφο 2.4 παρουσιάζεται μια επεξηγηματική περιγραφή της αριθμητικής μεθόδου και γίνεται εφαρμογή της για την επίλυση της διδιάστατης στρωτής υδροδυναμικής ροής στο οριακό στρώμα, για συμπιεστή ροή, με μεταφορά θερμότητας και μάζας [82]. Η εφαρμογή της μεθόδου στην μαγνητοϋδροδυναμική περίπτωση που μελετάται στο παρόν Κεφάλαιο, αλλά και στο επόμενο Κεφάλαιο στο οποίο μελετάται η τυρβώδης ροή, γίνεται προφανώς με παρόμοια διαδικασία στην παράγραφο 2.5.

Τέλος, στην έκτη παράγραφο γίνεται παρουσίαση και ανάλυση αποτελεσμάτων για διάφορες τιμές των αδιαστάτων παραμέτρων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Τα κυριότερα συμπεράσματα συνοψίζονται στην έβδομη και τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου αυτού.

2.2 Περιγραφή και μαθηματική διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε την μόνιμη διδιάστατη στρωτή ροή, συμπιεστού ρευστού (αέρα) στο οριακό στρώμα που αναπτύσσεται πάνω από μια επίπεδη λεία και διαπερατή (πορώδη) επιφάνεια (πλάκα) που παρεμβάλλεται παράλληλα στο ρεύμα ρευστού ταχύτητας u_∞ . Μια σχηματική αναπαράσταση της υπό μελέτη ροής δίνεται στο **Σχήμα 2.2.1**. Για την περιγραφή της ροής χρησιμοποιείται σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $Oxyz$. Σε αυτό το σύστημα η λεία επιφάνεια (πλάκα) προσδιορίζεται από τις σχέσεις

$$y = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad -\infty < z < +\infty,$$

και είναι παράλληλη στο ελεύθερο ρεύμα που κινείται κατά την θετική φορά του x -άξονα. Το ρευστό είναι επιπλέον νευτώνειο, ηλεκτρικά αγωγίμο και η πλάκα είναι ηλεκτρικά μονωμένη. Ένα μαγνητικό πεδίο σταθερής έντασης $\vec{B} = (0, B_0, 0)$ εφαρμόζεται κάθετα στην διεύθυνση της ροής και στο επίπεδο της πλάκας.

Σχήμα 2.2.1 Σχηματική αναπαράσταση της ροής.

Το μαγνητικό πεδίο θεωρείται σταθερό σε σχέση με την πλάκα και ο μαγνητικός αριθμός Reynolds της ροής είναι πολύ μικρότερος της μονάδας έτσι, ώστε το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο να μπορεί να αγνοηθεί. Εφ' όσον δεν εφαρμόζεται κανένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο και το φαινόμενο της πόλωσης του ιονισμένου ρευστού θεωρείται αμελητέο [112] το ρευστό δεν υπόκειται στην επίδραση ηλεκτρικού πεδίου ($\vec{E} = \vec{0}$).

Με τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν, οι εξισώσεις του MHD οριακού στρώματος, συνέχειας, ορμής και ενέργειας, αγνοώντας το εξωτερικό πεδίο δυνάμεων (βαρυτικές δυνάμεις), μπορούν να γραφούν ως

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (\text{συνέχειας}) \quad (2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + (\vec{J}_c \times \vec{B})_x, \quad (\text{ορμής}) \quad (2.2)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\vec{J}_c \cdot \vec{J}_c}{\sigma}. \quad (\text{ενέργειας}) \quad (2.3)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, συμπεριλαμβανομένης και της ταχύτητας έγχυσης/απορρόφησης v_w που μπορεί να εφαρμοστεί πάνω στην διαπερατή επιφάνεια (wall), είναι

$$\begin{aligned} y=0 : u=0, v=v_w(x), T=T_w(x), \\ y \rightarrow \delta : u=u_e(x), T=T_e(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού, u, v είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας ως προς τον x και y -άξονα, αντίστοιχα, p είναι η πίεση, T η θερμοκρασία του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα, μ το ιξώδες, k είναι ο συντελεστής της θερμικής αγωγιμότητας, c_p είναι η ειδική θερμότητα υπό σταθερά πίεση, δ είναι το πάχος του οριακού στρώματος, u_e είναι η συνιστώσα της ταχύτητας του ρευστού στην ακμή του οριακού στρώματος, κατά την x -διεύθυνση, και T_e η θερμοκρασία του ρευστού στην ακμή του οριακού στρώματος. Επίσης $T_w(x)$ είναι η θερμοκρασία της πλάκας, σ είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού, $\vec{B}$ είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου και $\vec{J}_c$ είναι η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος, που στην περίπτωση μας ορίζεται από τον νόμο του Ohm ως

$$\vec{J}_c = \sigma(\vec{q} \times \vec{B}), \quad (\vec{E} = \vec{0}) \quad (2.5)$$

όπου $\vec{q} = (u, v)$ είναι η ταχύτητα του πεδίου ροής.

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (2.2) παριστά την κατά τον άξονα των x συνιστώσα της ανά μονάδα όγκου δύναμης Lorentz που ασκείται στο ηλεκτρικά αγωγίμο ρευστό από την επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Στο υπό μελέτη πρόβλημα ο όρος αυτός γίνεται

$$(\vec{J}_c \times \vec{B})_x = -\sigma u B_0^2. \quad (2.6)$$

Ο τελευταίος όρος στην εξίσωση (2.3) είναι ο όρος της θερμότητας Joule, ο οποίος στο πρόβλημα μας γίνεται

$$\frac{\vec{J}_c \cdot \vec{J}_c}{\sigma} = \sigma u^2 B_0^2. \quad (2.7)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (2.3) θεωρούνται γενικά, για προβλήματα μαγνητοϋδροδυναμικής συμπίεστης ροής, της ίδιας τάξης μεγέθους και εκφράζουν, αντίστοιχα, την θερμότητα λόγω τριβής και την θερμότητα Joule [40, 74, 140].

Συμβολίζοντας ως H το άθροισμα της θερμικής και κινητικής ενέργειας (ολική ενέργεια), ανά μονάδα μάζας του ρευστού, οριζόμενη για ιδανικό αέριο από την σχέση

$H = c_p T + u^2 / 2$, το σύστημα των εξισώσεων του προβλήματος αποδεικνύεται ότι μπορεί να πάρει την μορφή

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (2.8)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sigma B_0^2 u, \quad (2.9)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right]. \quad (2.10)$$

Στην εξίσωση ενέργειας (2.10) Pr είναι ο αριθμός Prandtl, που συνδέει το πάχος του ιξώδους οριακού στρώματος με το αντίστοιχο του θερμικού και δίνεται από την σχέση

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}. \quad (2.11)$$

Οι συνοριακές συνθήκες (2.4) γράφονται τώρα ως

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u = 0, \quad v = v_w(x), \quad H = H_w(x), \\ y \rightarrow \delta: \quad u = u_e(x), \quad H = H_e(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\text{όπου } H_w(x) = c_p T_w(x) \text{ και } H_e(x) = c_p T_e(x) + \frac{1}{2} u_e^2(x). \quad (2.13)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Bernoulli, για την περίπτωση της μαγνητοϋδροδυναμικής ροής,

$$-\frac{dp}{dx} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \sigma B_0^2 u_e, \quad (2.14)$$

όπου ο δείκτης e αναφέρεται στην κατάσταση που επικρατεί στην ακμή του οριακού στρώματος, η εξίσωση (2.9) μπορεί τώρα να γραφεί ως

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \sigma B_0^2 u_e + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sigma B_0^2 u. \quad (2.15)$$

Η μόνιμη διδιάστατη συμπιεστή MHD στρωτή ροή οριακού στρώματος, του υπό μελέτη προβλήματος, περιγράφεται τελικά από τις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (2.16)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sigma B_0^2 (u - u_e), \quad (2.17)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad (2.18)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u &= 0, \quad v = v_w(x), \quad H = H_w(x), \\ y \rightarrow \delta: \quad u &= u_e(x), \quad H = H_e(x). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Το ιξώδες μ στον δεύτερο όρο της εξίσωσης ορμής (2.17) είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας T και κατά συνέπεια της ολικής ενέργειας H . Συνεπώς, αφού $\mu = \mu(H)$, το σύστημα των εξισώσεων (2.16)-(2.18) αποτελεί ένα συζευγμένο μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, παραβολικού τύπου, με άγνωστες τις συναρτήσεις $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ και $H = H(x, y)$ ορισμένες στο ορθογώνιο χωρίο $D = \{ (x, y) / 0 < x < L, 0 < y < \delta (\delta \rightarrow \infty) \}$ που υπόκεινται στις συνοριακές συνθήκες (2.19). Η λύση ενός τέτοιου συστήματος αναλυτικά είναι πάρα πολύ δύσκολη αν όχι αδύνατη. Για την μελέτη του προβλήματος θα πρέπει να μετατρέψουμε τις εξισώσεις (2.16)-(2.18) με τις συνοριακές τους συνθήκες (2.19) σε αδιάστατη μορφή. Η αδιαστατοποίηση των εξισώσεων θα βοηθήσει στην απλοποίηση της μορφής των και στην καλύτερη αντιμετώπιση αυτών για την επίτευξη αριθμητικής λύσης.

2.3 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Στην μαθηματική διατύπωση του προβλήματος που μελετάμε σε αυτό το Κεφάλαιο, καταλήξαμε σε ένα συζευγμένο και μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Για την επίτευξη λύσης αυτού του προβλήματος είναι απαραίτητη η αδιαστατοποίηση τόσο των εξισώσεων όσο και των συνθηκών που διέπουν το πρόβλημα. Όταν οι εξισώσεις ενός φυσικού προβλήματος μετασχηματίζονται σε αδιάστατη μορφή πολλές από τις παραμέτρους του προβλήματος ενσωματώνονται σε μια μόνο παράμετρο (ή και απαλείφονται), με προφανή την σημασία αυτού του γεγονότος. Το όλο πρόβλημα αποκτά περισσότερη γενικότητα αλλά και απλότητα [85].

Για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων και των συνοριακών συνθηκών του συστήματος (2.16)-(2.19) εισάγεται ο μετασχηματισμός των Falkner-Skan για συμπίεστη ροή [29]

$$\eta(x, y) = \int_0^y \left(\frac{u_e(x)}{x v_e(x)} \right)^{1/2} \frac{\rho(x, y)}{\rho_e(x)} dy, \quad \psi(x, y) = (\rho_e \mu_e u_e x)^{1/2} f(x, \eta), \quad (2.20)$$

όπου $v_e(x)$ είναι το κινηματικό ιξώδες στην ακμή του οριακού στρώματος ($v_e = \mu_e / \rho_e$) και $\psi(x, y)$ είναι η ρευματική συνάρτηση μέσω της οποίας ορίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας. Ο μετασχηματισμός των Falkner-Skan, μπορεί να

χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψει τις εξισώσεις του οριακού στρώματος σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για ροές που επιδέχονται λύσεις ομοιότητας. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για ροές που δεν επιδέχονται λύσεις ομοιότητας για να διευκολυνθεί η αριθμητική επίλυση, διότι έτσι περιορίζεται η εξάρτηση των εξισώσεων από το x [29].

Ορίζοντας την αδιάστατη ολική ενέργεια S ως το λόγο H/H_e και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ρευματικής συνάρτησης ψ , για συμπιεστή ροή, που δίνεται από τις σχέσεις

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.21)$$

η εξίσωση συνέχειας (2.16) ικανοποιείται αυτόματα και το σύστημα των εξισώσεων (2.17)-(2.19) αποδεικνύεται τελικά ότι παίρνει την μορφή

$$(bf'')' + m_1 f f'' + m_2 [c - (f')^2] = x \left[m_3 (f' - 1) + f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right], \quad (2.22)$$

$$(eS' + d f' f'')' + m_1 f S' = x \left(f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (2.23)$$

$$\eta = 0: f' = 0, f_w = f(x, 0) = -\frac{1}{(u_e \mu_e \rho_e x)^{1/2}} \int_0^x \rho_w v_w(x) dx, S = S_w(x) \quad (2.24)$$

$$\eta = \eta_e: f' = 1, S = 1,$$

όπου η_e το αδιάστατο πάχος του οριακού στρώματος, οι τόνοι δηλώνουν μερική παραγωγή ως προς η ($(())' = \partial(())/\partial \eta$) και οι ποσότητες b, m_1, m_2, m_3 ορίζονται ως

$$\begin{aligned} b = C, \quad C = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}, \quad c = \frac{\rho_e}{\rho}, \quad d = \frac{C u_e^2}{H_e} \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right), \\ e = \frac{b}{\text{Pr}}, \quad S = \frac{H}{H_e}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left[1 + m_2 + \frac{x}{\rho_e \mu_e} \frac{d}{dx} (\rho_e \mu_e) \right], \quad m_2 = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx}, \quad R_x = \frac{u_e x}{\nu_e},$$

$$m_3 = \frac{m_0 C}{\rho_e u_e}, \quad m_0 = \sigma B_0^2.$$

Το πρόβλημα περιγράφεται τελικά από το σύστημα των εξισώσεων (2.22) και (2.23), με συνοριακές συνθήκες τις (2.24), ενώ οι διάφοροι συντελεστές των εξισώσεων ορίζονται στην (2.25).

Ο συντελεστής m_3 καλείται "μαγνητική παράμετρος" και αξίζει να σημειωθεί ότι με την απουσία μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 0$) ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης ορμής (2.22) μηδενίζεται, κάνοντας δυνατή την συγκριτική μελέτη με την

αεροδυναμική περίπτωση που έχει ήδη μελετηθεί στην [82]. Στα προβλήματα της μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD) η "μαγνητική παράμετρος" m_3 , που ορίζεται ως

$$m_3 = \frac{m_0 c}{\rho_e u_e}, \text{ όπου } c = \frac{\rho_e}{\rho} \text{ και } m_0 = \sigma B_0^2, \quad (2.26)$$

παίζει σημαντικό ρόλο και αναπαριστά την επίδραση του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου στο πεδίο ροής. Ορίζοντας τον τοπικό αριθμό Hartmann ως $Ha_x = \left(\frac{\sigma B_0^2}{\mu_e} \right)^{\frac{1}{2}} x$, μπορεί ναδειχθεί ότι η **μαγνητική παράμετρος** $m^* = m_3 x$, συνδέεται με τον τοπικό αριθμό Reynolds Re_x και τον τοπικό αριθμό Hartmann Ha_x με την σχέση

$$m^* = m_3 x = c \frac{Ha_x^2}{Re_x}, \quad (2.27)$$

και είναι, ουσιαστικά, το πηλίκο των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων προς τις δυνάμεις αδρανείας, που δρουν στα στοιχειώδη ρευστά σωματίδια. Έτσι, η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων και τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας, που αφορούν στο πεδίο ταχυτήτων, στο πεδίο θερμοκρασίας, στον συντελεστή επιδερμικής τριβής (skin friction coefficient) και στον συντελεστή μεταφοράς θερμότητας (heat transfer coefficient), επιτυγχάνονται για $Pr = 0.708$ (αέρας), για διάφορες τιμές του αριθμού Mach M_∞ και της "μαγνητικής παραμέτρου" m^* (m_0) για την περίπτωση της **τοπικής** όπως επίσης και της **συνεχούς** απορρόφησης/έγχυσης επάνω στην πλάκα της οποίας το μήκος L λαμβάνεται ίσο με 8 m.

2.4 Επεξηγηματική περιγραφή της αριθμητικής μεθόδου

2.4.1 Αριθμητική μέθοδος

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή του Κεφαλαίου αυτού κρίνεται σκόπιμο να αναπτυχθεί, περιληπτικά, η αριθμητική τεχνική που χρησιμοποιείται σε αυτή την διατριβή. Για την κατανόηση της τεχνικής αυτής κρίνεται επίσης σκόπιμο να παρατίθεται ένα παράδειγμα για την εφαρμογή του αριθμητικού σχήματος που χρησιμοποιείται. Γίνεται επίσης μια σύντομη περιγραφή της επαναληπτικής μεθόδου Newton και του προγράμματος που χρησιμοποιείται για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων με τις οποίες ασχολείται η διατριβή.

Οι εξισώσεις του οριακού στρώματος, που από την φύση τους είναι παραβολικού τύπου, μπορούν να λυθούν αριθμητικά με την χρήση διαφόρων αριθμητικών τεχνικών. Μερικές από αυτές τις τεχνικές έχουν χρησιμοποιηθεί πολλές φορές και έχουν γραφεί γι' αυτές πολλά κλασικά συγγράμματα, όπως είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών [27, 29]. Επίσης η μέθοδος Galerkin και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι άλλες δύο αριθμητικές τεχνικές που έχουν χρησιμοποιηθεί πάρα πολύ στην λύση των εξισώσεων οριακού στρώματος [50]. Τέλος μια πιο σύγχρονη και ακριβέστερη τεχνική είναι αυτή των φασματικών μεθόδων [16, 25, 81]. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών είναι η πιο διαδεδομένη τεχνική για τις εξισώσεις του οριακού

στρώματος και στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε αυτή την μέθοδο. Το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται για την λύση του συστήματος των εξισώσεων αναπτύχθηκε από τον H. B. Keller και αναφέρεται σαν μέθοδος box [27, 29, 88]. Αυτή η μέθοδος έχει τέτοια χαρακτηριστικά που την κάνουν κατάλληλη για την λύση όλων των μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού τύπου. Τα κύρια χαρακτηριστικά της μεθόδου είναι:

1. Το υπολογιστικό κόστος της είναι κατά τι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο της μεθόδου Crank-Nicolson [85].
2. Η ακρίβεια της είναι δεύτερης τάξης για αυθαίρετες τιμές των βημάτων κατά τους x και y άξονες (μη ομοιόμορφο πλέγμα).
3. Επιτρέπει μεγάλες μεταβολές του βήματος κατά τον x -άξονα.
4. Είναι κατάλληλη για εύκολο προγραμματισμό της λύσης μεγάλου αριθμού συζευγμένων εξισώσεων.

Η λύση μιας εξίσωσης με αυτή την μέθοδο μπορεί να επιτευχθεί με τα ακόλουθα τέσσερα βήματα:

1. Μετασχηματισμός της εξίσωσης ή των εξισώσεων σε ένα σύστημα πρώτης τάξης.
2. Διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων με κεντρικές διαφορές.
3. Γραμμικοποίηση των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτουν (αν είναι μη γραμμικές) και γραφή σε μορφή πίνακα με στοιχεία πίνακες.
4. Λύση του γραμμικού συστήματος με την μέθοδο τριδιαγώνιας απαλοιφής κατά πίνακα του συστήματος των εξισώσεων (block-tridiagonal-elimination method).

Ακολουθεί ένα απλό παράδειγμα για το πως εφαρμόζεται η μέθοδος που χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία.

2.4.2 Ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου

Για να κατανοηθεί ο τρόπος εφαρμογής της μεθόδου αναφέρουμε το παρακάτω ενδεικτικό παράδειγμα. Θεωρούμε την εξίσωση ενέργειας για μια διδιάστατη και με σταθερή πυκνότητα ροή, που είναι της μορφής

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.28)$$

με συνοριακές συνθήκες $\begin{cases} y = 0, & T = T_w \\ y = \delta, & T = T_e \end{cases}$ και αρχικές συνθήκες: $x = x_0, T = T(x_0, y)$

Για να λύσουμε την (2.28) με την μέθοδο Keller-box εργαζόμαστε ως εξής.

(i) Αρχικά μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων πρώτης τάξης θέτοντας

$$T' = p \quad \left(()' = \frac{\partial ()}{\partial y} \right) \quad (2.29)$$

και γράφουμε την εξίσωση (2.28) ως εξής

$$p' = \frac{\text{Pr}}{\nu} u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.30)$$

Εδώ οι τόνοι δηλώνουν παραγωγή ως προς y .

(ii) Η διακριτοποίηση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (2.29), με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές, γίνεται στο μέσον $(x_n, y_{j-1/2})$ του τμήματος P_1P_2 του πλέγματος που φαίνεται στο **Σχήμα 2.4.2.1**, και η διακριτοποίηση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (2.30), επίσης με κεντρικές διαφορές, γίνεται στο κεντρικό σημείο $(x_{n-1/2}, y_{j-1/2})$ του ορθογωνίου $P_1P_2P_3P_4$. Επίσης η τιμή της p στο σημείο $(n, j-1/2)$ λαμβάνεται ίση με τον αριθμητικό μέσο της p στα σημεία $(n, j-1)$ και (n, j) . Δηλαδή $p_{j-1/2}^n = (p_j^n + p_{j-1}^n) / 2$. Έτσι έχουμε, αντίστοιχα, ότι

$$\frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{2h_j/2} = \frac{p_j^n + p_{j-1}^n}{2} = p_{j-1/2}^n, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} p_{j-1/2}^{n-1/2} &= \frac{p_{j-1/2}^{n-1} + p_{j-1/2}^{n-1}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{h_j} + \frac{p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}}{h_j} \right) \\ &= \frac{\text{Pr}}{\nu} u_{j-1/2}^{n-1/2} \frac{T_{j-1/2}^n - T_{j-1/2}^{n-1}}{k_n}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Σχήμα 2.4.2.1 Πλέγμα πεπερασμένων διαφορών στο xy -επίπεδο της μεθόδου Keller-box. Σημειώνουμε εδώ ότι τα h_j και k_n μπορεί να μην είναι ίσα. Εδώ $x_{n-1/2} \equiv (x_n + x_{n-1})/2$ και $y_{j-1/2} \equiv (y_j + y_{j-1})/2$

(iii) Αναδιατάσσοντας και τις δύο εκφράσεις μπορούμε να τις γράψουμε στην μορφή

$$\begin{aligned} T_j^n - T_{j-1}^n - \frac{h_j}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) &= 0 \\ (s_1)_j p_j^n + (s_2)_j p_{j-1}^n + (s_3)_j (T_j^n + T_{j-1}^n) &= R_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

όπου

$$\begin{aligned} (s_1)_j &= 1, (s_2)_j = -1, (s_3)_j = -\frac{\lambda_j}{2} \\ R_{j-1/2}^{n-1} &= -\lambda_j T_{j-1/2}^{n-1} + p_{j-1}^{n-1} - p_j^{n-1} \quad \text{και} \\ \lambda_j &= \frac{2\text{Pr}}{\nu} u_{j-1/2}^{n-1/2} \frac{h_j}{k_n} \end{aligned} \quad (2.34)$$

(iv) Οι εξισώσεις (2.33) εφαρμόζονται στο τυχόν σημείο x_n της x -διεύθυνσης σε όλα τα εσωτερικά σημεία $j=1, 2, \dots, J-1$. Για $j=0$ και J , έχουμε τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες

$$T_0 = T_w, \quad T_J = T_e$$

Τόσο οι εξισώσεις του συστήματος (2.33) όσο και οι συνοριακές συνθήκες είναι γραμμικές. Το σύστημα λοιπόν μπορεί να γραφεί σε μορφή πίνακα όπως φαίνεται παρακάτω, χωρίς να χρειάζεται γραμμικοποίηση για την περίπτωση αυτών των εξισώσεων

$$\begin{array}{c} \sigma.\sigma. \\ (2.31) \\ (2.32) \\ \sigma.\sigma. \end{array} \begin{array}{c} T_0 \quad P_0 \quad T_j \quad P_j \quad T_J \quad P_J \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ -1 & \frac{-h_1}{2} & 1 & \frac{-h_1}{2} & & \\ \hline (s_3)_j & (s_2)_j & (s_3)_j & (s_1)_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-h_{j+1}}{2} & 1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \\ \hline & & (s_3)_J & (s_2)_J & (s_3)_J & (s_1)_J \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} T_0 \\ P_0 \\ T_j \\ P_j \\ T_J \\ P_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_0 \\ (r_2)_0 \\ (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_1)_J \\ (r_2)_J \end{bmatrix} \end{array} \quad (2.35)$$

όπου

$$\begin{aligned} (r_1)_0 &= T_w, \quad (r_1)_j = R_{j-1/2}^{n-1}, \quad 1 \leq j \leq J, \\ (r_2)_j &= 0, \quad 0 \leq j \leq J-1, \quad (r_2)_J = T_e \end{aligned} \quad (2.36)$$

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται κατανοητό ότι, όπως συμβαίνει γενικά στην μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, έτσι και εδώ καταλήγουμε σ' ένα αλγεβρικό σύστημα της μορφής

$$A \delta = r \quad (2.37)$$

με άγνωστον τον πίνακα στήλη δ . Δηλαδή το παραπάνω σύστημα γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ B_1 & A_1 & C_1 & & \\ & & & B_j & A_j & C_j \\ & & & & B_{j-1} & A_{j-1} & C_{j-1} \\ & & & & & B_j & A_j \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_J \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_J \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

$$\text{Όπου} \quad \delta_j \equiv \begin{bmatrix} T_j \\ p_j \end{bmatrix}, \quad r_j \equiv \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

και οι A_j , B_j και C_j είναι πίνακες 2×2 που ορίζονται

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{-h_1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_j \equiv \begin{bmatrix} (s_3)_j & (s_1)_j \\ -1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J-1, \\ A_J &\equiv \begin{bmatrix} (s_3)_J & (s_1)_J \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_j \equiv \begin{bmatrix} (s_3)_j & (s_2)_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J, \\ C_j &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq j \leq J-1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Επισημαίνεται ότι στην περίπτωση αυτή ο πίνακας A είναι ένας τριδιαγώνιος πίνακας με στοιχεία πίνακες 2×2 και όχι βαθμωτά στοιχεία όπως στην μέθοδο Crank-Nicolson. Τα διανύσματα στήλη δ και r έχουν και αυτά σαν στοιχεία τους πίνακες στήλη όπως φαίνεται στην σχέση (2.35). Το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα (2.37) λύνεται με την μέθοδο τριδιαγώνιας απαλοιφής κατά πίνακα του συστήματος των εξισώσεων (block-tridiagonal-elimination method) που περιγράφεται περιληπτικά στην παρακάτω παράγραφο.

2.4.3 Μέθοδος τριδιαγώνιας απαλοιφής κατά πίνακα του συστήματος των εξισώσεων (Block-tridiagonal-elimination method)

Η λύση του αλγεβρικού συστήματος (2.37) με την βοήθεια της μεθόδου τριδιαγώνιας απαλοιφής κατά πίνακα του συστήματος των εξισώσεων (block-tridiagonal-elimination method) συνίσταται σε δύο διαδικασίες (σαρώματα).

Στη πρώτη (εμπρόσθιο σάρωμα) υπολογίζονται τα Γ_j , Δ_j και w_j από τους τύπους

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= A_0, \\ \Gamma_j \Delta_{j-1} &= B_j, \\ \Delta_j &= A_j - \Gamma_j C_{j-1} \\ w_0 &= r_0 \\ w_j &= r_j - \Gamma_j w_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq J. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Εδώ ο πίνακας Γ_j έχει την ίδια δομή με τον πίνακα B_j , και είναι

$$\Gamma_j \equiv \begin{bmatrix} (\gamma_{11})_j & (\gamma_{12})_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Μολονότι η δεύτερη γραμμή του Δ_j έχει την ίδια δομή με την δεύτερη γραμμή του A_j ,

$$\Delta_j \equiv \begin{bmatrix} (a_{11})_j & (a_{12})_j \\ -1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{bmatrix},$$

ο πίνακας Δ_j γράφεται, γενικότερα, στην μορφή

$$\Delta_j \equiv \begin{bmatrix} (a_{11})_j & (a_{12})_j \\ (a_{21})_j & (a_{22})_j \end{bmatrix}.$$

Στην δεύτερη διαδικασία (οπίσθιο σάρωμα), ο πίνακας δ_j υπολογίζεται από τους ακόλουθους τύπους

$$\begin{aligned} \Delta_j \delta_j &= w_j, \\ \Delta_j \delta_j &= w_j - C_j \delta_{j+1}, \quad j = J-1, J-2, \dots, 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Με την ολοκλήρωση της δεύτερης διαδικασίας υπολογίζονται, στη θέση x_n , τα στοιχεία $\delta_j = \begin{pmatrix} T_j \\ p_j \end{pmatrix}$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, J-1$, δηλαδή η λύση.

2.4.4 Διακριτοποίηση των εξισώσεων του οριακού στρώματος και εξισώσεις διαφορών – Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Σε αυτή την παράγραφο γίνεται αναφορά στον τρόπο με τον οποίο διακριτοποιούνται οι εξισώσεις των υπό μελέτη προβλημάτων. Για να περιγραφεί η αριθμητική λύση των εξισώσεων οριακού στρώματος πάνω από επίπεδη πλάκα για διδιάστατες στρωτές ή τυρβώδεις ροές, με μεταφορά θερμότητας και μάζας, χρησιμοποιούμε τις αδιαστατοποιημένες εξισώσεις που περιγράφουν το αντίστοιχο φυσικό πρόβλημα του Κεφαλαίου αυτού, για την αεροδυναμική περίπτωση, δηλαδή απουσία μαγνητικού πεδίου [82]. Οι εξισώσεις αυτές είναι

$$(bf'')' + m_1 f f'' + m_2 [c - (f')^2] = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (2.43)$$

$$(eS' + d f' f'')' + m_1 f S' = x \left(f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad (2.44)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned}\eta = 0: f' = 0, f_w = f(0, x), S = S_w(x) \text{ ή } S' = S'_w(x), \\ \eta = \eta_e: f' = 1, S = 1.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Οι ποσότητες b, m_1, m_2 , κλπ. ορίζονται ως εξής

$$\begin{aligned}b = C, \quad C = \frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e}, \quad c = \frac{\rho_e}{\rho}, \quad d = \frac{Cu_e^2}{H_e} \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}}\right), \\ e = \frac{b}{\text{Pr}}, \quad S = \frac{H}{H_e},\end{aligned}\tag{2.46}$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left[1 + m_2 + \frac{x}{\rho_e\mu_e} \frac{d}{dx} (\rho_e\mu_e) \right], \quad m_2 = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx}, \quad R_x = \frac{u_e x}{\nu_e}.$$

Οι εξισώσεις (2.43), (2.44) με τις συνοριακές συνθήκες (2.45) περιγράφουν ροές τόσο στρωτές όσο και τυρβώδεις. Για τις δεύτερες ροές βέβαια πρέπει να γίνει η χρήση και ενός μοντέλου τύρβης. Το θέμα αυτό αποτελεί αντικείμενο μελέτης του επομένου Κεφαλαίου για την MHD περίπτωση.

Αρχικά οι εξισώσεις (2.43), (2.44) και οι συνοριακές τους συνθήκες γράφονται σαν ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης. Για αυτό τον σκοπό πρέπει να εισαχθούν νέες εξαρτημένες μεταβλητές, όπως οι $u(x, \eta), v(x, \eta), p(x, \eta)$ τέτοιες ώστε οι αδιαστατοποιημένες εξισώσεις ορμής και ενέργειας να γραφούν σαν ένα σύστημα πρώτης τάξης της μορφής

$$f' = u, \tag{2.47}$$

$$u' = v, \tag{2.48}$$

$$g' = p, \tag{2.49}$$

$$(bv)' + m_1 f v + m_2 [c - u^2] = x \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial x} \right), \tag{2.50}$$

$$(ep + duv)' + m_1 f p = x \left(u \frac{\partial g}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x} \right), \tag{2.51}$$

όπου g είναι ο λόγος της ολικής ενέργειας (ολική ενθαλπία) προς την ενέργεια στην ακμή του οριακού στρώματος, $g = H/H_e$, που στην εξίσωση (2.44) ορίζεται ως S . Οι συνοριακές συνθήκες μετασχηματίζονται στις

$$\begin{aligned}f(x, 0) = f_w(x), \quad u(x, 0) = 0, \quad g(x, 0) = g_w(x) \text{ ή } p(x, 0) = p_w(x) \\ u(x, \eta_e) = 1, \quad g(x, \eta_e) = 1\end{aligned}\tag{2.52}$$

Θεωρώντας τώρα παρόμοιο χωρίο διακριτοποίησης με αυτό του **Σχήματος 2.4.2.1**, αλλά στο $x\eta$ -επίπεδο, η διακριτοποίηση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (2.47)-(2.49), με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές, γίνεται στο μέσον $(x_n, \eta_{j-1/2})$ του τμήματος P_1P_2 και η διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων (3.24) και (3.25) γίνεται στο κεντρικό σημείο $(x_{n-1/2}, \eta_{j-1/2})$ του ορθογωνίου $P_1P_2P_3P_4$. Αυτή η διαδικασία δίνει τις εξής εξισώσεις διαφορών

$$h_j^{-1}(f_j^n - f_{j-1}^n) = u_{j-1/2}^n, \quad (2.53)$$

$$h_j^{-1}(u_j^n - u_{j-1}^n) = v_{j-1/2}^n, \quad (2.54)$$

$$h_j^{-1}(g_j^n - g_{j-1}^n) = p_{j-1/2}^n, \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} h_j^{-1}(b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n) + (m_1^n + a_n)(fv)_{j-1/2}^n - (m_2^n + a_n)(u^2)_{j-1/2}^n \\ + a_n(v_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^n) = R_{j-1/2}^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} h_j^{-1}(e_j^n p_j^n - e_{j-1}^n p_{j-1}^n) + h_j^{-1}(d_j^n u_j^n v_j^n - d_{j-1}^n u_{j-1}^n v_{j-1}^n) + (m_1^n + a_n)(fp)_{j-1/2}^n \\ - a_n[(ug)_{j-1/2}^n + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n - g_{j-1/2}^{n-1} u_{j-1/2}^n + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n - p_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n] = T_{j-1/2}^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

όπου

$$a_n = \frac{x^{n-1/2}}{k_n} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} R_{j-1/2}^{n-1} &= -L_{j-1/2}^{n-1} + a_n[(fv)_{j-1/2}^{n-1} - (u^2)_{j-1/2}^{n-1}] - m_2^n c_{j-1/2}^n, \\ L_{j-1/2}^{n-1} &= \{h_j^{-1}(b_j v_j - b_{j-1} v_{j-1}) + m_1(fv)_{j-1/2} + m_2[c_{j-1/2} - (u^2)_{j-1/2}]\}^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$T_{j-1/2}^{n-1} = -M_{j-1/2}^{n-1} + a_n[(fp)_{j-1/2}^{n-1} - (ug)_{j-1/2}^{n-1}], \quad (2.60)$$

$$M_{j-1/2}^{n-1} = [h_j^{-1}(e_j p_j - e_{j-1} p_{j-1}) + h_j^{-1}(d_j u_j v_j - d_{j-1} u_{j-1} v_{j-1}) + m_1(fp)_{j-1/2}]^{n-1}.$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (2.53)-(2.60) αποτελούν τις διακριτοποιημένες εξισώσεις ή εξισώσεις διαφορών του υπό μελέτη προβλήματος με την μέθοδο διακριτοποίησης Keller-box.

Όσον αφορά στην ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης των διακριτοποιημένων εξισώσεων οριακού στρώματος ή γενικότερα οποιονδήποτε “μερικών εξισώσεων διαφορών” (δηλαδή εξισώσεων διαφορών όπου η άγνωστη ακολουθία είναι συνάρτηση δύο ή περισσότερων φυσικών μεταβλητών) δεν υπάρχουν πολλά αποτελέσματα.

Ωστόσο, κάποιοι ερευνητές ασχολούνται με την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης αυτών των εξισώσεων διαφορών. Πρόσφατα [110], μελετήθηκε η διακριτοποιημένη εξίσωση ορμής κατά την x -διεύθυνση της (2.50), υπό τις προϋποθέσεις ότι η ροή είναι στρωτή, ασυμπίεστη, χωρίς βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας. Σ’ αυτή την εργασία αποδείχθηκε ως εφαρμογή ενός γενικότερου θεωρήματος ότι η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση στον χώρο Banach $\ell_{N_I \times N_J}^1$ ⁽¹⁾ υπό κάποιες

⁽¹⁾ $\ell_{N_I \times N_J}^1 = \left\{ f(i, j) : N_I \times N_J \rightarrow R / \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |f(i, j)| < +\infty \right\}$

συνθήκες που αφορούν στα αρχικά δεδομένα. Επιπλέον δίνεται ένα φράγμα της λύσης. Χρησιμοποιώντας αυτό το φράγμα αποδεικνύεται ότι για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων (του x και των βημάτων h και k) η $u(u = f')$ φράσσεται από τιμές που συμφωνούν με τα αριθμητικά αποτελέσματα. Η διακριτοποίηση της εξίσωσης έγινε με κεντρικές διαφορές που έχουν την ίδια τάξη ακρίβειας με το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται στην παρούσα διατριβή.

Το γενικότερο θεώρημα της [110] θεμελιώνει την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στον χώρο $\ell^1_{N \times N}$ ⁽²⁾ μη γραμμικών μερικών εξισώσεων διαφορών της μορφής

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a_n(i, j) f(i - \sigma_{n1}, j - \tau_{n1}) + \sum_{m=1}^M b_m(i, j) f(i + \sigma_{m2}, j + \tau_{m2}) + \\ & \sum_{k=1}^K c_k(i, j) f(i - \sigma_{k3}, j + \tau_{k3}) + \sum_{l=1}^L d_l(i, j) f(i + \sigma_{l4}, j - \tau_{l4}) = p(i, j) + \\ & \sum_{s=2}^{\infty} g_s(i, j) [f(i + \sigma, j + \tau)]^s + \sum_{t=1}^T q_t(i, j) f(i + \sigma_{t5}, j + \tau_{t5}) f(i + \sigma_{t6}, j + \tau_{t6}), \end{aligned} \quad (2.61)$$

όπου οι ακολουθίες $a_n(i, j), b_m(i, j), c_k(i, j), d_l(i, j), g_s(i, j), q_t(i, j), p(i, j)$, ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες. Η απόδειξη του θεωρήματος έχει κατασκευαστικό χαρακτήρα, συνέπεια του οποίου είναι η εύρεση ενός φράγματος της λύσης στον χώρο Banach $\ell^1_{N \times N}$ καθώς και μιας περιοχής στην οποία η λύση αυτή ισχύει. Για γραμμικές μερικές εξισώσεις διαφορών έχει αποδειχθεί στην [109] ένα αντίστοιχο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας στον χώρο Hilbert $\ell^2_{N \times N}$ ⁽³⁾.

2.4.5 Επαναληπτική μέθοδος Newton

Αν υποθέσουμε ότι οι τιμές των $f_j^{n-1}, u_j^{n-1}, v_j^{n-1}, g_j^{n-1}, p_j^{n-1}$, δηλαδή στην θέση x_{n-1} είναι γνωστές για $0 \leq j \leq J$, τότε το σύστημα των εξισώσεων (2.53)-(2.60) αποτελεί ένα σύστημα $5J+5$ μη-γραμμικών εξισώσεων με $5J+5$ αγνώστους, $f_j^n, u_j^n, v_j^n, g_j^n, p_j^n$, για $j=0,1,\dots,J$. Για να λυθεί αυτό το μη-γραμμικό συζευγμένο σύστημα, χρησιμοποιείται η επαναληπτική μέθοδος του Newton. Δηλαδή, για τις άγνωστες συναρτήσεις f, u, v, g, p , στην θέση x_n θεωρούνται αρχικές προσεγγίσεις ίσες με τις τιμές τους στο προηγούμενο βήμα που είναι οι καλύτερες αρχικές προσεγγίσεις που διαθέτουμε. Με επαναλήψεις (μέσω της μεθόδου Newton) καταλήγουμε στις νέες τιμές των αγνώστων συναρτήσεων $f_j^n, u_j^n, v_j^n, g_j^n, p_j^n$. Θα μπορούσε ο Ιακωβιανός (ή επαναληπτικός) πίνακας που απαιτείται για την εφαρμογή της μεθόδου να υπολογίζεται αριθμητικά αντί να καθορίζεται από τον προγραμματιστή

$$^{(2)} \ell^1_{N \times N} = \left\{ f(i, j) : N \times N \rightarrow C / \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f(i, j)| < +\infty \right\}$$

$$^{(3)} \ell^2_{N \times N} = \left\{ f(i, j) : N \times N \rightarrow C / \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f(i, j)|^2 < +\infty \right\}$$

όπως εδώ. Αυτή η τεχνική έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε πολλές πρόσφατες εργασίες όπου ο Ιακωβιανός πίνακας είναι εξαιρετικά εκτενής [115].

Η μέθοδος Newton είναι μια από τις πιο δημοφιλείς μεθόδους για την λύση ενός συστήματος εξισώσεων, μεταξύ όλων των επαναληπτικών μεθόδων, για δύο λόγους. Ο πρώτος λόγος είναι ότι η μέθοδος είναι τουλάχιστον τετραγωνικής σύγκλισης ακόμα και για σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων όπως στην περίπτωση μας [22]. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι η μέθοδος αυτή προγραμματίζεται εύκολα σε έναν Η/Υ και δεν απαιτείται καμία συνθήκη για τις παραγώγους των άγνωστων συναρτήσεων όπως σε άλλες μεθόδους [152].

Βέβαια πρέπει να εξασφαλίζεται το γεγονός της συνέχειας και παραγωγισιμότητας των άγνωστων συναρτήσεων, κάτι που ισχύει σε όλες τις επαναληπτικές μεθόδους. Επίσης θα πρέπει οι αρχικές προσεγγίσεις που δίνονται για τις άγνωστες συναρτήσεις να είναι σχετικά κοντά στην λύση του συστήματος, αλλιώς η επαναληπτική μέθοδος μπορεί να αποκλίνει [103]. Στην επόμενη και τελευταία υποπαράγραφο αυτής της παραγράφου θα γίνει μια περιληπτική παρουσίαση του προγράμματος που χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση του υπό μελέτη συστήματος εξισώσεων.

2.4.6 Σύντομη περιγραφή του προγράμματος

Για την αριθμητική επίλυση του ανωτέρω συστήματος εξισώσεων, αλλά και των υπολοίπων, πιο σύνθετων συστημάτων, που αναφέρονται στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκε κώδικας γραμμένος σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN (Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.1.0). Ο κώδικας αυτός έδωσε αποτελέσματα σε προσωπικούς υπολογιστές βασισμένους στους επεξεργαστές Intel Pentium II & III και AMD Duron (350, 450 και 750 Mhz, αντίστοιχα).

Το πρόγραμμα αποτελείται από το κύριο μέρος που ονομάζεται **MAIN** και τις υπορουτίνες, που καλούνται μέσω του κυρίως προγράμματος για την αριθμητική επίλυση του υπό μελέτη συστήματος εξισώσεων. Οι υπορουτίνες με την σειρά που πρωτοεμφανίζονται στο κύριο μέρος είναι οι εξής **INPUT**, **IVPL**, **EDDYCS**, **EDDYBL**, **COEF**, **SOLVE5**, **OUTPUT** και περιγράφονται πιο κάτω. Στο τέλος αυτής της παραγράφου δίνεται διάγραμμα ροής του προγράμματος που χρησιμοποιείται σε αυτή την διατριβή.

MAIN

Αρχικά στο κυρίως πρόγραμμα καλείται η **INPUT** για τον υπολογισμό των βασικών παραμέτρων της ροής στο ελεύθερο ρεύμα και στην ακμή του οριακού στρώματος. Κατασκευάζεται το πλέγμα των κομβικών σημείων που απαιτείται για την αριθμητική ολοκλήρωση των αδιάστατων εξισώσεων που περιγράφουν την ροή. Καλείται η υπορουτίνα **IVPL**, όπου δίνονται αρχικές κατανομές για την ταχύτητα και θερμοκρασία στο $x = 0$. Υπολογίζονται οι ιδιότητες του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα, όπως το ιξώδες μ και οι ποσότητες που ορίζονται στις σχέσεις (2.46). Με την κλήση των υπορουτινών **COEF** και **SOLVE5** επιλύεται το σύστημα των εξισώσεων αφού έχει προηγηθεί η κλήση της **EDDYCS** ή **EDDYBL** αν πρόκειται για τυρβώδη ροή. Γίνεται ο υπολογισμός για την αύξηση του πάχους του οριακού στρώματος εξετάζοντας αν $|f''| \leq 10^{-3}$ στο τελικό σημείο της κατανομής της f'' κατά την η -διεύθυνση. Αν δεν ισχύει αυτό το κριτήριο τότε προστίθενται νέα σημεία στις κατανομές της ταχύτητας και θερμοκρασίας κατά την η -διεύθυνση (κάθε φορά που δεν ικανοποιείται το κριτήριο προστίθενται τρία νέα σημεία στις κατανομές). Στο κυρίως πρόγραμμα ελέγχεται η

σύγκλιση των επαναλήψεων της Newton χρησιμοποιώντας σαν κριτήριο σύγκλισης την παράμετρο διάτμησης στο τοίχωμα, f_w'' . Για την περίπτωση στρωτής ή τυρβώδους ροής χρησιμοποιούνται διαφορετικά κριτήρια σύγκλισης της παραμέτρου διάτμησης που περιγράφονται στα αντίστοιχα κεφάλαια, καθώς και τα βήματα που λαμβάνονται για την κάθε περίπτωση. Για στρωτές ροές το μετασχηματισμένο πάχος του οριακού στρώματος $\eta_e(x)$ είναι σταθερό, για κάθε x με $0 < x < x^* < L$, και λαμβάνεται ίσο με 8. Για τα τυρβώδη οριακά στρώματα το πάχος αυτό δεν είναι σταθερό, λαμβάνεται αρχικά ίσο με 10 και κατά μήκος της πλάκας αυξάνεται. Έτσι είναι δυνατό μέχρι το σημείο αποκόλλησης x^* το η_e να είναι ίσο με 200. Τέλος καλείται η **OUTPUT** για τον υπολογισμό βασικών παραμέτρων της ροής και αποθήκευση κατανομών των αγνώστων συναρτήσεων (ταχύτητα, θερμοκρασία, κλπ.).

INPUT

Σε αυτήν την υπορουτίνα εισάγονται ο συνολικός αριθμός των σημείων του x (NXT) και το σημείο μετάπτωσης (NTR). Εισάγονται οι συνοριακές συνθήκες του τοιχώματος για την εξίσωση ενέργειας, καθώς και οι παράμετροι του ελεύθερου ρεύματος $M_\infty, T_\infty, p_\infty$ (RMI, TI, PI) και ο αριθμός Prandtl (PR). Από αυτές τις τιμές υπολογίζονται μέσα στην υπορουτίνα οι υπόλοιπες παράμετροι του ελεύθερου ρεύματος, όπως είναι οι $\mu_\infty, u_\infty, \rho_\infty$ (RMUI, UI, RM0) καθώς και οι τιμές των παραμέτρων στην ακμή του οριακού στρώματος, $T_e, H_e, \mu_e, u_e, \rho_e$ (TE, HE, RMUE, UE, RHOE) για κάθε σημείο της x -διεύθυνσης. Επίσης γίνεται ο υπολογισμός των παραμέτρων m_1 (αδιάστατη βαθμίδα πίεσης, P1) και m_2 (P2) για κάθε σημείο x του πλέγματος. Η παράγωγος du_e/dx που εμφανίζεται στις προηγούμενες παραμέτρους υπολογίζεται μέσω παρεμβολής Lagrange τριών σημείων εκτός από το πρώτο και το τελευταίο [29].

IVPL

Αυτή η υπορουτίνα καλείται από το κυρίως πρόγραμμα για την δημιουργία αρχικών κατανομών ταχύτητας $f'(x_0, \eta)$ για συμπιεστή στρωτή ροή (αρχικές συνθήκες). Ωστόσο, στην αρχή οι υπολογισμοί της υπορουτίνας ξεκινούν με κατανομές για ασυμπίεστη ροή που βελτιώνονται επαναληπτικά μέχρι να επιτευχθούν κατανομές συμπιεστή ροής. Για τον υπολογισμό των κατανομών των συναρτήσεων f_j, u_j και v_j , χρησιμοποιούνται οι εξής αρχικές κατανομές ταχύτητας [29]

$$\begin{aligned} f_j &= \frac{\eta_e}{4} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \left[3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right], \\ u_j &= \frac{1}{2} \frac{\eta_j}{\eta_e} \left[3 - \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right], \\ v_j &= \frac{3}{2} \frac{1}{\eta_e} \left[1 - \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Η αδιάστατη ολική ενέργεια g_j και η παράγωγος της p_j τίθενται

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{\eta_j}{\eta_e}, \\ p_j &= \frac{1}{\eta_e}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

EDDYCS και EDDYBL

Οι δύο αυτές υπορουτίνες καλούνται από το κυρίως πρόγραμμα μόνο στην περίπτωση της τυρβώδους ροής. Η πρώτη χρησιμοποιεί το μοντέλο τύρβης των Cebeci-Smith ενώ η δεύτερη υπορουτίνα χρησιμοποιεί το μοντέλο τύρβης των Baldwin-Lomax. Και στις δύο υπορουτίνες έχει μοντελοποιηθεί η μεταφορά μάζας, δηλαδή μπορεί να εξεταστεί η συνεχής ή τοπική έγχυση-απορρόφηση. Επίσης σε αυτές τις υπορουτίνες ο τυρβώδης αριθμός Prandtl Pr_t δεν παραμένει σταθερός αλλά μεταβάλλεται σύμφωνα με τον νόμο των Kays και Crawford. Περισσότερα για αυτά τα μοντέλα τύρβης αλλά και τον μεταβαλλόμενο αριθμό Prandtl αναφέρονται στο Κεφάλαιο της τυρβώδους ροής.

COEF

Η υπορουτίνα αυτή περιέχει τους συντελεστές των γραμμικοποιημένων εξισώσεων ορμής και ενέργειας που κατασκευάζονται από την μοντελοποίηση που γίνεται με την εφαρμογή της μεθόδου Keller-box.

SOLVE5

Η υπορουτίνα αυτή περιέχει τον αλγόριθμο της μεθόδου τριδιαγωνίας απαλοιφής κατά πίνακα του συστήματος των εξισώσεων για ένα σύστημα πέντε εξισώσεων πρώτης τάξεως η κάθε μια. Καλείται από το κυρίως πρόγραμμα, μετά την υπορουτίνα **COEF** που κατασκευάζει τους συντελεστές του συστήματος, για να επιλύσει το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει. Σύντομη περιγραφή αυτής της μεθόδου γίνεται σε αυτό το Κεφάλαιο στην παράγραφο **2.4.3**.

OUTPUT

Με αυτή την υπορουτίνα το πρόγραμμα αποθηκεύει όλες εκείνες τις τιμές των υπολογιζόμενων συναρτήσεων και παραμέτρων που απαιτούνται για να γίνουν γραφικές παραστάσεις. Αναλυτικότερα η υπορουτίνα αυτή τυπώνει τις κατανομές των f_j, u_j, v_j, g_j, p_j και b_j σαν συναρτήσεις του η_j . Επίσης τυπώνει τις εξής παραμέτρους του οριακού στρώματος $\theta, \delta^*, H, c_f, Nu_x, St_x, R_\theta, R_{\delta^*}$ και R_x .

Σχήμα 2.4.6.1 Διάγραμμα ροής του προγράμματος.

2.5 Αριθμητική λύση του προβλήματος

Το σύστημα των εξισώσεων (2.22)-(2.25) που περιγράφει την μαγνητουδροδυναμική συμπίεστη ροή στρωτού οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας, είναι ένα παραβολικού τύπου συζευγμένο, μη γραμμικό σύστημα πέμπτης τάξης, δύο μερικών διαφορικών εξισώσεων με άγνωστες συναρτήσεις τις f και S . Το σύστημα αυτό επιλύεται αριθμητικά και το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται για την λύση του είναι αυτό που περιγράφηκε στις προηγούμενες παραγράφους. Τα βήματα κατά την x και η -διεύθυνση που χρησιμοποιήθηκαν είναι σταθερά και ίσα με $\Delta x = 0.01$ και $\Delta \eta = 0.2$ αντίστοιχα. Η επαναληπτική διαδικασία για την στρωτή ροή που εξετάζεται σε αυτό το κεφάλαιο σταματά χρησιμοποιώντας σαν κριτήριο σύγκλισης ότι το

$$|\delta f_w''| < 10^{-5} \quad (2.64)$$

όπου $f_w'' = f''(x,0)$ είναι ο αδιάστατος συντελεστής επιδερμικής τριβής, και δίνει ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων για τις ποσότητες που υπολογίζονται. Αν το f_w'' γίνει αρνητικό κατά την διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας τότε το πρόγραμμα σταματά.

Όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο I, παράγραφος 1.1.5, στις μεθόδους πρόληψης της αποκόλλησης του οριακού στρώματος, καθοριστικό ρόλο στο φαινόμενο αυτό παίζει η ψύξη ή θέρμανση του στερεού ορίου και κυρίως η εφαρμογή απορρόφησης ή έγχυσης πάνω σ' αυτό.

Για την μελέτη λοιπόν του φυσικού προβλήματος που εξετάζεται στο Κεφάλαιο αυτό και την πραγματοποίηση υπολογισμών που βοηθούν στην κατανόηση του φυσικού φαινομένου, έγιναν οι ακόλουθες παραδοχές:

- (i) Ο αριθμός Prandtl Pr του ρευστού ελήφθη ίσος με 0.708. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε ατμοσφαιρικό αέρα θερμοκρασίας $T_\infty = 300K$ σε πίεση μιας ατμόσφαιρας.
- (ii) Η αδιάστατη ολική ενέργεια επί του στερεού ορίου S_w ελήφθη σταθερά ($T_w(x) = T_w = \text{σταθ.}$) και παίρνει τις τιμές $S_w = 2$ και $S_w = 0.5$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η περίπτωση $S_w > 1$ αντιστοιχεί σε θερμαινόμενο στερεό όριο (πλάκα) ενώ η περίπτωση $S_w < 1$ αντιστοιχεί σε ψυχόμενο. Τέλος, η περίπτωση $S_w = 1$, ή ακριβέστερα $S_w' = 0$, αντιστοιχεί σε θερμικά μονωμένη πλάκα, δηλαδή σε περίπτωση κατά την οποία δεν υπάρχει ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ της πλάκας και του ρευστού (αδιαβατική).
- (iii) Η ταχύτητα απορρόφησης/έγχυσης v_w λαμβάνει θετικές και αρνητικές τιμές. Η περίπτωση $v_w > 0$ αντιστοιχεί σε έγχυση ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα, δια μέσου της πλάκας, ενώ η περίπτωση $v_w < 0$ σε απορρόφηση. Η περίπτωση $v_w = 0$ αντιστοιχεί σε μη διαπερατή πλάκα.

Είναι γνωστό ότι ο καλύτερος τρόπος για την μετακίνηση μιας ποσότητας ρευστού μικρού τμήματος του οριακού στρώματος είναι η χρησιμοποίηση πορώδους επιφάνειας και η εφαρμογή απορρόφησης δια μέσου των πόρων αυτής. Αυτή η λύση δεν είναι πάντα εύκολο να εφαρμοστεί λόγω κατασκευαστικών και αεροδυναμικών δυσκολιών. Προς το παρόν, η καλύτερη μέθοδος για να εφαρμόσουμε συνεχή απορρόφηση είναι η χρήση σχισμών ή λουρίδων κατά μήκος της συνοριακής επιφάνειας. Η απορρόφηση έχει χρησιμοποιηθεί πολύ συχνά σαν μια τεχνική ελέγχου

της συμπίεστης ροής για την παρεμπόδιση της μετάβασης της από στρωτή σε τυρβώδη καθώς και της αποκόλλησης. Εφαρμογή της απορρόφησης στην οδηγούσα ακμή της πτέρυγας σταθεροποιεί το οριακό στρώμα και εμποδίζει την μετάβαση από στρωτή σε τυρβώδη ροή πάνω από αυτήν [7]. Μικρής έντασης απορρόφηση είναι πολύ αποτελεσματική για τον έλεγχο της μετάβασης. Ωστόσο, αν η ταχύτητα απορρόφησης u_w είναι πολύ μεγάλη το οριακό στρώμα είναι πολύ λεπτό και τα φαινόμενα τραχύτητας γίνονται πιο έντονα. Σαν αποτέλεσμα, μπορεί να έχουμε αρνητική επίδραση στην ελάττωση της τριβής [99]. Για την αδιαβατική ροή ($S'_w = 0$), η ταχύτητα απορρόφησης/έγχυσης, u_w , θεωρήθηκε σταθερή και ίση με $u_w = \pm 10^{-5} u_\infty$. Στην περίπτωση θέρμανσης της πλάκας ($S_w = 2$), η ταχύτητα απορρόφησης/έγχυσης, u_w , θεωρήθηκε σταθερή και ίση με $u_w = \pm 5 \times 10^{-5} u_\infty$, ενώ στην περίπτωση ψύξης ($S_w = 0.5$) θεωρήθηκε σταθερή και ίση με $u_w = \pm 10^{-5} u_\infty$, η οποία είναι μια κατάλληλη υπόθεση που και για τις τρεις περιπτώσεις εξασφαλίζει ότι η ροή με απορρόφηση ή έγχυση στην πλάκα ικανοποιεί τις απλοποιήσεις της θεωρίας του οριακού στρώματος [124].

Από την άλλη μεριά, είναι γνωστό ότι μεγάλης έντασης απορρόφηση είναι αντικοινομική, διότι μπορεί να μειώνεται η τριβή ή να μετατοπίζεται το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής αλλά χρειάζεται και μεγάλη ισχύς για την εφαρμογή της απορρόφησης. Είναι λοιπόν σημαντικό να προσδιορίσουμε την ελάχιστη ένταση απορρόφησης ή την περιοχή απορρόφησης, στην περίπτωση της τοπικής απορρόφησης, που πρέπει να εφαρμοστεί για τον έλεγχο του οριακού στρώματος. Μικρής έντασης απορρόφηση είναι πολύ αποτελεσματική όσον αφορά την ευστάθεια του στρωτού οριακού στρώματος και τον έλεγχο του σημείου μετάπτωσης [9]. Ενδιαφέρουσες πληροφορίες που αφορούν στην θέση της τοπικής απορρόφησης στην ευστάθεια του οριακού στρώματος έχουν αποκτηθεί από την χρήση της μη γραμμικής προσέγγισης των Παραβολοποιημένων Εξισώσεων Ευστάθειας (PSE) [8].

Για την μελέτη της επίδρασης της τοπικής απορρόφησης/έγχυσης στο στρωτό οριακό στρώμα, εφαρμόστηκε συνεχής απορρόφηση/έγχυση σε μια περιοχή (σχισμή) που περιορίζεται μεταξύ των θέσεων $x = x_s - s$ και $x = x_s + s$ όπου x_s είναι η θέση του κέντρου της σχισμής και $2s$ είναι το μήκος της σχισμής [35], η ταχύτητα της οποίας δίνεται από την έκφραση

$$u_w(x) = \mp A_s e^{-(x-x_s)^2/s^2}, \quad (2.65)$$

όπου A_s είναι η μέγιστη ένταση της απορρόφησης/έγχυσης. Σε μια τέτοια περίπτωση ο όγκος του ρευστού που περνάει από την σχισμή είναι $\sqrt{\pi} s^2 A_s$. Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς του προβλήματος ελήφθη $A_s = 10^{-4} u_\infty$ για την περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας, $A_s = 5 \times 10^{-5} u_\infty$ για την περίπτωση της ψυχόμενης πλάκας και $A_s = 10^{-4} u_\infty$ για την αδιαβατική περίπτωση, το δε s ελήφθη ίσο με 0.1 για διάφορες τιμές του x_s .

(iv) Είναι γνωστό ότι το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται πάνω από επίπεδη επιφάνεια οφείλεται στην ροή ενός ρεύματος που κινείται παράλληλα προς την επιφάνεια κατά μήκος της και με αριθμό Mach M_∞ . Το ιξώδες μ_∞ του αέρα, η ταχύτητα u_∞ , η πυκνότητα του ρ_∞ και η ολική του ενέργεια H_∞ υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\mu_{\infty} = 1.45 \times 10^{-6} T_{\infty}^{3/2} / (T_{\infty} + 110.33), \quad (\text{Νόμος του Sutherland}) \quad (2.66)$$

$$u_{\infty} = 20.04 M_{\infty} \sqrt{T_{\infty}}, \quad (2.67)$$

$$\rho_{\infty} = p_{\infty} / 287 T_{\infty}, \quad (2.68)$$

$$H_{\infty} = 1005.7 T_{\infty} + \frac{1}{2} u_{\infty}^2, \quad (c_p = 1005.7) \quad (2.69)$$

για διάφορες τιμές του αριθμού Mach του ελευθέρου ρεύματος M_{∞} ($M_{\infty} = 0.375, 0.75, 1.5$). Επίσης οι τιμές, στην ακμή του οριακού στρώματος, των T_e και p_e υπολογίζονται από τους τύπους [29]

$$T_e = T_{\infty} \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \left[\left(\frac{u_e}{u_{\infty}} \right)^2 - 1 \right] \right\}, \quad p_e = p_{\infty} \left(\frac{T_e}{T_{\infty}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (2.70)$$

όπου $\gamma = c_p / c_v = 1.4$. Οι τιμές στην ακμή του οριακού στρώματος των μ_e, ρ_e και H_e υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας σχέσεις όμοιες με αυτές που δίνονται στις εξισώσεις (2.66), (2.68) και (2.69), αντίστοιχα, εκτός από το ότι οι τιμές του ελευθέρου ρεύματος (∞) για την θερμοκρασία, πίεση και ταχύτητα αντικαταστάθηκαν από τις αντίστοιχες τιμές της ακμής (e).

Θα ήταν σκόπιμο να γίνει μια πιο εκτενής αναφορά στο νόμο του Sutherland για τον υπολογισμό του ιξώδους ως συνάρτηση της θερμοκρασίας. Είναι γνωστό ότι σε υπερηχητικές ροές ($M_{\infty} < 6$ για τον αέρα), η αύξηση της θερμοκρασίας μέσα στην ροή είναι τέτοια, έτσι ώστε να πρέπει να ληφθεί υπόψη η επίδραση της πάνω στις ιδιότητες του ρευστού, και συγκεκριμένα, πάνω στο ιξώδες. Το κινηματικό ιξώδες για τα περισσότερα αέρια και για τον αέρα, αυξάνει με την αύξηση της θερμοκρασίας. Για την περίπτωση του αέρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια εμπειρική σχέση (Interpolation formula) βασισμένη στην θεωρία του D.M. Sutherland για το ιξώδες. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι ο νόμος του Sutherland (2.66) είναι μια ικανοποιητική προσέγγιση για την μεταβολή του ιξώδους μ με την θερμοκρασία T , για τον αέρα [147].

(v) Αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.2 του Κεφαλαίου I ότι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ρευστού, εν προκειμένω του αέρα, οφείλεται στον ιονισμό του λόγω τριβής ή ανάπτυξης υψηλής θερμοκρασίας [15, 116]. Για την περίπτωση που εξετάζεται σε αυτό το Κεφάλαιο θεωρούμε ότι η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ ισούται με 1 mho/m, που είναι μια αποδεκτή τιμή για την ηλεκτρική αγωγιμότητα του αέρα. Για το μαγνητικό πεδίο B_0 θεωρούνται τιμές μέχρι 3.0 Weber/m², που είναι αποδεκτές, αφού το μαγνητικό πεδίο θεωρείται ότι εφαρμόζεται επί της πλάκας [120]. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις η

ποσότητα $m_0 = \sigma B_0^2$ μπορεί να μεταβάλλεται από 0.0 έως 9.0 $\frac{\text{mho}}{\text{m}} \left(\frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} \right)^2$ και

αυτές είναι οι τιμές που δίνονται στο πρόβλημα που μελετάται σε αυτό το Κεφάλαιο. Έτσι, στις γραφικές παραστάσεις που παρατίθενται στην παρακάτω παράγραφο του Κεφαλαίου εξετάζονται οι περιπτώσεις υδροδυναμικής ροής ($m_0 = 0$) και μαγνητοϋδροδυναμικής ροής ($m_0 = 4$. ή $m_0 = 8$).

(vi) Ως τελευταία παραδοχή θεωρείται αυτή της βαθμίδας πίεσης. Υπενθυμίζουμε ότι, όπως αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο I, η ταχύτητα $u_e(x)$ στην ακμή του οριακού

στρώματος δίνεται από την σχέση $u_e(x) = u_\infty \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ (σχέση (1.6)). Στην περίπτωση

αυτή η αδιάστατη βαθμίδα πίεσης $m_2 = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx}$ δίνεται από την έκφραση $m_2 = \frac{x}{x-L}$,

όπου L το μήκος της πλάκας το οποίο όπως ήδη αναφέρθηκε λαμβάνεται ίσο προς 8m.

2.6 Ανάλυση των αποτελεσμάτων

Μια λεπτομερής ανάλυση του υπό μελέτη φυσικού προβλήματος πρέπει να περιλαμβάνει την μελέτη του πεδίου της ταχύτητας, του πεδίου της θερμοκρασίας, την παράμετρο διάτμησης στο τοίχωμα της πλάκας (αδιάστατος συντελεστής επιδερμικής τριβής), την παράμετρο μεταφοράς θερμότητας στην πλάκα και την επίδραση των αδιάστατων παραμέτρων, που εισάγονται στο πρόβλημα, πάνω στις ανωτέρω ποσότητες. Είναι επίσης ενδιαφέρον να εξετάσουμε την συμπεριφορά των παραμέτρων του οριακού στρώματος όπως το πάχος ορμής θ (momentum thickness), το πάχος μετατόπισης δ^* (displacement thickness), τον συντελεστή σχήματος $H = \delta^*/\theta$ (shape factor), κλπ.

Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς ότι λεπτομερής μελέτη και παρουσίαση των μεταβολών όλων των ανωτέρω μεγεθών είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί. Επικεντρώνουμε λοιπόν την προσοχή μας στα κυριότερα μεγέθη της ροής για τα οποία πραγματοποιούνται αριθμητικοί υπολογισμοί. Τα μεγέθη αυτά αφορούν στις κατανομές της αδιάστατης συνιστώσας της ταχύτητας $f'(x, \eta)$ ($f' = u$ (2.47)), της αδιάστατης ολικής ενέργειας (θερμοκρασίας) $S(x, \eta)$ αλλά κυρίως στον αδιάστατο συντελεστή επιδερμικής τριβής $f_w''(x) = f''(x, 0)$ και στον αδιάστατο συντελεστή μεταφοράς θερμότητας πάνω στην πλάκα $S'_w(x) = S'(x, 0)$. Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται στα Σχήματα που ακολουθούν, για διαφορετικές τιμές των αδιαστάτων παραμέτρων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Αυτά τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για την περίπτωση της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης/έγχυσης, καθώς και για την περίπτωση της αδιαπέραστης πλάκας ($v_w = 0$) όταν το ρευστό είναι αέρας ($Pr = 0.708$) και για διαφορετικές τιμές του αριθμού Mach $M_\infty = M_{inf}$ και της μαγνητικής παραμέτρου $m_0 = \sigma B_0^2$. Η περίπτωση $m_0 \neq 0$ αντιστοιχεί στην μαγνητοϋδροδυναμική ροή ενώ η περίπτωση $m_0 = 0$ στην υδροδυναμική (αεροδυναμική). Σε αυτή την εργασία εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις. Αυτές είναι: (i) $S'_w = 0$ (αδιαβατική ροή), (ii) $S_w > 1$ (θερμαινόμενη πλάκα) και (iii) $S_w < 1$ (ψυχόμενη πλάκα). Γίνεται δηλαδή αναφορά και στην περίπτωση της MHD ροής ($m_0 \neq 0$) χωρίς αγωγή θερμότητας, μεταξύ της πλάκας και του ρευστού (αδιαβατική, $S'_w = 0$) [153] για λόγους πληρότητας και σύγκρισης των αποτελεσμάτων για διάφορες περιπτώσεις του S_w .

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η αδιάστατη ολική ενέργεια S ορίζεται από την έκφραση $S = H/H_e$, όπου H είναι η ολική ενέργεια του ρευστού, δηλαδή $H = c_p T + u^2/2$. Είναι προφανές λοιπόν ότι η περίπτωση $S_w > 1$ (θερμαινόμενη πλάκα) σημαίνει ότι $c_p(T_w - T_e) > u_e^2/2$, ενώ η περίπτωση $S_w < 1$ (ψυχόμενη πλάκα) σημαίνει ότι $c_p(T_w - T_e) < u_e^2/2$. Η περίπτωση $S_w = 1$, ή για να είμαστε πιο ακριβείς, $S'_w = 0$, αντιστοιχεί σε αδιαβατική ροή πάνω από πλάκα.

Οι σημαντικότερες ποσότητες στην αεροδυναμική, είναι ο αδιάστατος συντελεστής επιδερμικής τριβής και ο αδιάστατος συντελεστής μεταφοράς θερμότητας από την πλάκα προς το ρευστό ή αντίστροφα, που ορίζονται ως

$$C_{f_x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2}, \text{ όπου } \tau_w = \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0}, \quad (2.71)$$

$$Nu_x = \frac{\dot{q}_w x}{k(T_w - T_e)}, \text{ όπου } \dot{q}_w = - \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0}, \quad (2.72)$$

αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.20), (2.21) και (2.25) οι ανωτέρω ποσότητες μετασχηματίζονται στις

$$C_{f_x} = \frac{2C_w}{\sqrt{R_x}} f_w'', \quad (2.73)$$

$$Nu_x = - \frac{C_w \sqrt{R_x}}{1 - S_w} S_w' \quad (S_w \neq 1), \quad (2.74)$$

όπου $f_w'' = f''(x,0)$ και $S_w' = S'(x,0)$. Επίσης, η αντίσταση D πάνω στην πλάκα, δίνεται από την σχέση

$$D = \int_0^b \int_0^{x^*} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} dx dz, \quad (2.75)$$

όπου b είναι το πλάτος της πλάκας και x^* η απόσταση του σημείου αποκόλλησης από την οδηγούσα ακμή της πλάκας. Συνεπώς, η ανά μονάδα πλάτους αντίσταση D , υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση

$$D = \int_0^{x^*} \frac{C_w f_w''(x,0)}{\sqrt{Re_x}} \rho_e(x) u_e^2(x) dx, \quad (2.76)$$

όπου $C_w = \rho_w \mu_w / \rho_e \mu_e$ και είναι συνάρτηση του x .

(i) Αδιαβατική πλάκα ($S_w' = 0$)

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι δεν υπάρχει θερμική ροή μεταξύ του ρευστού και της πλάκας. Το παραγόμενο ποσό θερμότητας, μέσα στο οριακό στρώμα, λόγω τριβής ή θερμότητας Joule παραμένει εντός αυτού συμβάλλοντας στην αύξηση της θερμοκρασίας του ρευστού. Οι μεταβολές των κατανομών της αδιάστατης ταχύτητας $f'(x,\eta)$, σε μια τυπική απόσταση $x=0.7m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, φαίνονται στα Σχήματα 2.6.1 έως 2.6.4. Το Σχήμα 2.6.1 δείχνει την μεταβολή της $f'(\eta)$ για $M_\infty=0.5$ για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας ($v_w=0$) και για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 . Παρατηρείται ότι εφαρμογή του

Σχήμα 2.6.1: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0, 4$, και 8.

Σχήμα 2.6.2: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0$, και 8.

Σχήμα 2.6.3: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 4.0$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.4: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

μαγνητικού πεδίου αυξάνει την ταχύτητα του αέρα μέσα στο οριακό στρώμα. Η επίδραση αυτή του μαγνητικού πεδίου πάνω στο πεδίο ταχύτητας ελαττώνεται καθώς ο αριθμός Mach του ελευθέρου ρεύματος αυξάνεται (Σχήμα 2.6.2). Ποσοτικά, όταν $\eta = 3$ και $M_\infty = 0.5$ εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου βοηθάει στην αύξηση της $f'(\eta)$ κατά 5.17%, ενώ η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση που $M_\infty = 1.5$ είναι μόνο 3.92%. Επίσης, εφαρμογή απορρόφησης ($v_w < 0$) αυξάνει την ταχύτητα του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα και μεταβάλλει την κατανομή της ταχύτητας έτσι ώστε να μην εμφανίζονται σημεία καμπής (inflection points) που αποτελούν προμήνυμα αποκόλλησης (Σχήμα 2.6.3). Με αυτή την αλλαγή, όπως θα δούμε αργότερα και στον συντελεστή επιδερμικής τριβής (Σχήματα 2.6.9-2.6.13), το σημείο αποκόλλησης μετατοπίζεται προς το χείλος εκφυγής της πλάκας. Ωστόσο, το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της έγχυσης ($v_w > 0$).

Η συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τεχνικής έγχυσης/απορρόφησης για τον έλεγχο του οριακού στρώματος φαίνεται στο Σχήμα 2.6.4. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι, όταν $\eta = 3$, $m_0 = 0$, και $v_w > 0$ (καμπύλη (3)), η ταχύτητα του ρευστού μειώνεται κατά 10.68% σε σχέση με την περίπτωση της απορρόφησης ($v_w < 0$) (καμπύλη (5)) και με την παρουσία μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8$).

Οι μεταβολές του λόγου της ολικής ενέργειας ή η αδιάστατη «θερμοκρασία» $S = H/H_e$, σε μια τυπική απόσταση $x = 0.7m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, παρουσιάζονται ως προς την αδιάστατη απόσταση η μέσα στο οριακό στρώμα στα Σχήματα 2.6.5-2.6.8, για διαφορετικές τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 , του αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής και για την περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης και για αδιαπέραστη πλάκα ($v_w = 0$). Αφού η ροή θεωρείται αδιαβατική και δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας μεταξύ πλάκας και ρευστού ($S'_w = 0$) η θερμοκρασία αυξάνεται μέσα στο θερμικό οριακό στρώμα λόγω της τριβής και της θερμότητας Joule. Παρατηρείται σε όλα τα Σχήματα ότι αρχικά η θερμοκρασία του ρευστού αυξάνεται και φτάνει στην μέγιστη τιμή της μέσα στο θερμικό οριακό στρώμα, έπειτα ελαττώνεται τείνοντας ασυμπτωτικά στην οριακή της τιμή στο άπειρο. Αυτή η μεταβολή της θερμοκρασίας του ρευστού είναι πιο φανερή για μεγαλύτερες τιμές του αριθμού Mach (Σχήμα 2.6.6). Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι στην περιοχή του τοιχώματος καθώς επίσης και μέσα στην ελεύθερη ροή, η παρουσία του μαγνητικού πεδίου ελαττώνει την θερμοκρασία του ρευστού, αλλά το αντίθετο συμβαίνει στο εσωτερικό του οριακού στρώματος. Η επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης πάνω στο θερμικό οριακό στρώμα φαίνεται στα Σχήματα 2.6.7 και 2.6.8. Στην περιοχή του τοιχώματος, η θερμοκρασία του ρευστού είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση της απορρόφησης ($v_w < 0$) από την αντίστοιχη περίπτωση της αδιαπέραστης πλάκας ($v_w = 0$) ή την περίπτωση της έγχυσης ($v_w > 0$). Ωστόσο, το αντίθετο συμβαίνει καθώς πλησιάζουμε στην ακμή του οριακού στρώματος. Η συνδυασμένη επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης και του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου πάνω στην θερμοκρασία φαίνεται στο Σχήμα 2.6.8. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση της απορρόφησης ($v_w < 0$) και όταν $\eta = 3$ και το m_0 αυξάνεται από 0, έως 8, υπάρχει αύξηση κατά 0.033% στην τιμή της S , ενώ κάτω από τις ίδιες συνθήκες η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση της έγχυσης ($v_w > 0$) είναι 0.053%. Επομένως, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της S (0.7, 3.0) μεταξύ των περιπτώσεων $m_0 = 0$, $v_w > 0$ και

Σχήμα 2.6.5: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$, 4. και 8.

Σχήμα 2.6.6: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$ και 8.

Σχήμα 2.6.7: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 4.0$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.8: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0.$, $8.$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

$m_0 = 8.$, $v_w < 0$ είναι 0.109%. Υπενθυμίζεται εδώ ότι η ολική ενέργεια H ορίζεται ως

$$H = H_e S \left(H_e(x) = c_p T_e(x) + \frac{1}{2} u_e^2(x) \right). \text{ Έτσι, μολονότι οι ποσοστιαίες αλλαγές της } S$$

είναι πολύ μικρές δεν σημαίνει ότι οι αντίστοιχες αλλαγές της H είναι μικρές.

Στα Σχήματα 2.6.9-2.6.10 απεικονίζονται οι μεταβολές της αδιάστατης παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα, f_w'' , με την απόσταση x για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 και αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής, για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας και για συνεχή έγχυση/απορρόφηση εφαρμοζόμενη στο τοίχωμα. Οι αντίστοιχες μεταβολές για την περίπτωση της συνεχούς ή τοπικής έγχυσης/απορρόφησης φαίνονται στα Σχήματα 2.6.11-2.6.13. Οι τιμές της D για κάθε περίπτωση απεικονίζονται πάνω στα Σχήματα.

Σχήμα 2.6.9: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f_w'' για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$. και 8. και $v_w = 0, > 0, < 0$.

Το συμπέρασμα που συνάγεται από το Σχήμα 2.6.9 είναι ότι η παρουσία μαγνητικού πεδίου πάντα βοηθάει στην αύξηση της αντίστασης λόγω τριβής πάνω στην πλάκα είτε στην περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης είτε σε αδιαπέραστη πλάκα. Επίσης, εφαρμογή απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας, ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της έγχυσης. Από το Σχήμα 2.6.10 συμπεραίνουμε ότι στην αεροδυναμική περίπτωση ($m_0 = 0$.) το σημείο αποκόλλησης x^* πάντα μετατοπίζεται προς την οδηγούσα ακμή καθώς ο αριθμός Mach της ελεύθερης ροής αυξάνεται και αυτή η μετατόπιση είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερες τιμές του M_∞ . Παρόμοια συμπεράσματα εξάγονται και στην MHD περίπτωση ($m_0 = 8$.) αλλά αυτή η μετατόπιση είναι μεγαλύτερη για μικρές τιμές του M_∞ . Έμφαση μπορεί να δοθεί στο ότι για κάθε τιμή του αριθμού Mach της ελεύθερης ροής, εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας.

Σχήμα 2.6.10: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $v_w = 0$, $m_0 = 0.$, 8. και για $M_\infty = 0.375, 0.75$ και 1.5 .

Σχήμα 2.6.11: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$, 8. και $v_w = 0$ και για $v_w < 0$ συνεχής ή τοπική στο $x_s = 0.7$.

Σχήμα 2.6.12: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$, $v_w = 0$, και τοπική απορρόφηση στο $x_s = 0.4, 0.6, 0.8$ και 0.9 .

Σχήμα 2.6.13: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$, $8.$, $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 0.9$ και 0.3 , αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 2.6.11 παρουσιάζονται οι μεταβολές της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f_w'' τόσο για αδιαπέραστη πλάκα όσο και για την περίπτωση της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης, για $m_0 = 0$ και $m_0 = 8.0$, στο $x = 0.7 m$. Παρατηρείται ότι εφαρμογή της τοπικής απορρόφησης αντί της συνεχούς, βοηθά στην ελάττωση της αντίστασης D . Η τοπική απορρόφηση μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής της πλάκας σε σχέση με την αδιαπέραστη πλάκα. Σε σχέση όμως με την συνεχή απορρόφηση η επίδραση της τοπικής είναι μικρότερη και αυτό το γεγονός είναι πιο φανερό στην μαγνητοϋδροδυναμική περίπτωση ($m_0 = 8$). Αξίζει να σημειωθεί εδώ η διαφορά των τιμών στην παροχή όγκου ρευστού, διαμέσου της πλάκας, μεταξύ των περιπτώσεων της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης. Σύμφωνα με την εξίσωση (2.65), στην περίπτωση της τοπικής απορρόφησης η παροχή όγκου ρευστού διαμέσου της σχισμής πλάτους $2s$, είναι $Q_\ell = \sqrt{\pi} s^2 A_s$. Στην περίπτωση της συνεχούς απορρόφησης η αντίστοιχη παροχή όγκου ρευστού (ανά μονάδα πλάτους της πλάκας) είναι $Q_c = \nu_w x^*$. Πιο συγκεκριμένα, για $s = 0.1 m$ και $A_s = 5 \times 10^{-5} u_\infty$, η Q_ℓ είναι ίση με $8.86 \times 10^{-7} u_\infty$ ενώ στην περίπτωση της συνεχούς απορρόφησης με $\nu_w = 10^{-5} u_\infty$ και για $x^* = 1 m$, η αντίστοιχη παροχή όγκου ρευστού Q_c είναι ίση με $10^{-5} u_\infty$. Από τα ανωτέρω καταδεικνύεται η χρησιμότητα, από την άποψη οικονομίας, εφαρμογής τοπικής απορρόφησης/έγχυσης αντί της συνεχούς. Εκτός αυτού υπενθυμίζεται για άλλη μια φορά η δυσκολία, για τεχνικούς λόγους, εφαρμογής συνεχούς απορρόφησης/έγχυσης σε σχέση με την εφαρμογή τοπικής. Στο Σχήμα 2.6.12 φαίνεται ότι εφαρμογή της τοπικής απορρόφησης σε διαφορετικές θέσεις x_s από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* κατά το χείλος εκφυγής και ελαττώνει την αντίσταση λόγω τριβής D . Τελικά, το Σχήμα 2.6.13 δείχνει την συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης πάνω στην παράμετρο διάτμησης στο τοίχωμα f_w'' . Συνάγεται το συμπέρασμα ότι εφαρμογή τοπικής απορρόφησης και τοπικής έγχυσης στις θέσεις $x_s = 0.9 m$ και $x_s = 0.3 m$, αντίστοιχα, μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας και ελαττώνει την αντίσταση λόγω τριβής. Η παραπάνω ανάλυση επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό ότι η τεχνική της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για έλεγχο του οριακού στρώματος [8, 9] και γίνεται πιο αποτελεσματική όταν το ρευστό υπόκειται στην επίδραση ενός μαγνητικού πεδίου.

(ii) Θερμαινόμενη πλάκα ($S_w = 2.0$).

Για την θερμαινόμενη πλάκα τώρα οι μεταβολές των κατανομών της αδιάστατης ταχύτητας $f'(x, \eta)$, σε μια τυπική απόσταση $x = 0.45 m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, φαίνονται στα Σχήματα 2.6.14 έως 2.6.17. Το Σχήμα 2.6.14 δείχνει την μεταβολή της $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$ για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας ($\nu_w = 0$) και για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 . Εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου αυξάνει και εδώ, όπως και στην αδιαβατική ροή, την ταχύτητα του αέρα μέσα στο οριακό στρώμα. Η επίδραση αυτή του μαγνητικού πεδίου πάνω στο πεδίο ταχύτητας ελαττώνεται καθώς ο αριθμός Mach του ελευθέρου ρεύματος αυξάνεται (Σχήμα 2.6.15). Ποσοτικά, όταν $\eta = 3$ και $M_\infty = 0.5$ εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου βοηθάει στην αύξηση της $f'(\eta)$ κατά 4.13%, ενώ η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση που $M_\infty = 1.5$ είναι 3.21%. Επίσης, εφαρμογή απορρόφησης ($\nu_w < 0$)

αυξάνει την ταχύτητα του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα όπως και στην περίπτωση της αδιαβατικής ροής (Σχήμα 2.6.16). Με αυτή την αλλαγή, όπως θα δούμε και αργότερα στον συντελεστή επιδερμικής τριβής (Σχήματα 2.6.22-2.6.26), το σημείο αποκόλλησης μετατοπίζεται προς το χείλος εκφυγής της πλάκας. Ωστόσο, το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της έγχυσης ($v_w > 0$). Η συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τεχνικής έγχυσης/απορρόφησης για τον έλεγχο του οριακού στρώματος φαίνεται στο Σχήμα 2.6.17. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι, όταν $\eta = 3$, $m_0 = 0$. και $v_w > 0$ (καμπύλη (3)), η ταχύτητα του ρευστού μειώνεται κατά 17% σε σχέση με την περίπτωση της απορρόφησης ($v_w < 0$) (καμπύλη (5)) και με την παρουσία μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8$).

Οι μεταβολές του λόγου της ολικής ενέργειας ή της αδιάστατης «θερμοκρασίας» $S = H/H_e$, σε μια τυπική απόσταση $x = 0.45 m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, με την αδιάστατη απόσταση η μέσα στο οριακό στρώμα, παρουσιάζονται στα Σχήματα 2.6.18-2.6.21, για διαφορετικές τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 , του αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής και για την περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης ή για αδιαπέραστη πλάκα ($v_w = 0$). Σε όλα τα Σχήματα η θερμοκρασία του ρευστού ελαττώνεται καθώς το η αυξάνει τείνοντας ασυμπτωτικά στην οριακή της τιμή στο άπειρο. Στο Σχήμα 2.6.18 παρατηρείται ότι η εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου ελαττώνει την αδιάστατη θερμοκρασία του ρευστού πάνω από την πλάκα και η μείωση αυτή γίνεται πιο έντονη όσο αυξάνεται η μαγνητική παράμετρος ($m_0 = 8$). Με την αύξηση του αριθμού Mach ($M_\infty = 1.5$) παρατηρείται μικρότερη μείωση της αδιάστατης θερμοκρασίας πάνω από την πλάκα από ότι σε μικρότερους αριθμούς Mach ($M_\infty = 0.5$) (Σχήμα 2.6.19). Η επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης πάνω στο θερμικό οριακό στρώμα φαίνεται στα Σχήματα 2.6.20 και 2.6.21. Στο οριακό στρώμα η θερμοκρασία του ρευστού είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση της έγχυσης ($v_w > 0$) από την αντίστοιχη περίπτωση της αδιαπέραστης πλάκας ($v_w = 0$) ή την περίπτωση της απορρόφησης ($v_w < 0$). Η συνδυασμένη επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης και του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου πάνω στην αδιάστατη θερμοκρασία φαίνεται στο Σχήμα 2.6.21. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση της απορρόφησης ($v_w < 0$) και όταν $\eta = 3$ και m_0 αυξάνεται από 0. έως 8. υπάρχει ελάττωση κατά 1.25% στην τιμή της S , ενώ κάτω από τις ίδιες συνθήκες η αντίστοιχη ελάττωση στην περίπτωση της έγχυσης ($v_w > 0$) είναι 2.74%. Επομένως, η ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της S (0.45, 3.0) μεταξύ των περιπτώσεων $m_0 = 0$., $v_w > 0$ και $m_0 = 8$., $v_w < 0$ είναι 7.4%.

Στα Σχήματα 2.6.22-2.6.23 απεικονίζονται οι μεταβολές της αδιάστατης παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα, f_w'' , με την απόσταση x , για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 και αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής, για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας και για συνεχή έγχυση/απορρόφηση εφαρμοζόμενη στο τοίχωμα. Οι αντίστοιχες μεταβολές για την περίπτωση της συνεχούς ή τοπικής έγχυσης/απορρόφησης φαίνονται στα Σχήματα 2.6.24-2.6.25. Οι τιμές της D για κάθε περίπτωση απεικονίζονται πάνω στα Σχήματα. Το συμπέρασμα που συνάγεται

Σχήμα 2.6.14: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0, 4$, και 8.

Σχήμα 2.6.15: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0$, και 8.

Σχήμα 2.6.16: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 4.0$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.17: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0, 8$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.18: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0$, 4, και 8.

Σχήμα 2.6.19: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0$, και 8.

Σχήμα 2.6.20: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 4.0$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.21: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0, 8$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.22: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f_w'' για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$. και 8. και $v_w = 0, > 0, < 0$.

από το Σχήμα 2.6.22 είναι ότι η παρουσία μαγνητικού πεδίου πάντα βοηθάει στην αύξηση της αντίστασης λόγω τριβής πάνω στην πλάκα τόσο για την περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης όσο και για αδιαπέραστη πλάκα. Επίσης, εφαρμογή απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας, ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της έγχυσης.

Στα Σχήματα 2.6.23 και 2.6.24 απεικονίζεται η μεταβολή του αδιάστατου συντελεστή επιδερμικής τριβής f_w'' , με την απόσταση x , για θερμαινόμενη πλάκα. Συγκεκριμένα στο Σχήμα 2.6.23, απεικονίζεται το f_w'' , με την απόσταση x , για τρεις αριθμούς Mach, $M_\infty = 0.375, 0.75, 1.5$ και για δύο τιμές της μαγνητικής παραμέτρου $m_0 = 0$. και 8., αντίστοιχα, για την περίπτωση μη διαπερατής πλάκας. Παρατηρείται ότι ο αριθμός Mach έχει σημαντική επίδραση στο σημείο αποκόλλησης το οποίο μετακινείται προς την οδηγούσα ακμή καθώς το M_∞ αυξάνει. Επίσης το μαγνητικό πεδίο επηρεάζει την ροή του ρευστού (αέρα) και μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής. Έτσι, για παράδειγμα, όταν το $M_\infty = 1.5$ το σημείο αποκόλλησης μετατοπίζεται από $x^* \approx 0.48$ όταν $m_0 = 0.$, στο $x^* \approx 0.52$ όταν $m_0 = 8$. Παρατηρούμε επίσης ότι η επίδραση αυτή του μαγνητικού πεδίου είναι μεγαλύτερη για μικρότερες τιμές του αριθμού Mach. Στο Σχήμα 2.6.24 απεικονίζεται η επίδραση της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης στον συντελεστή επιδερμικής τριβής f_w'' και στο σημείο αποκόλλησης, με ή χωρίς μαγνητικό πεδίο. Έτσι, τόσο η συνεχής όσο και η τοπική απορρόφηση μετατοπίζουν το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής τόσο στην περίπτωση που $m_0 = 0$. όσο και όταν $m_0 = 8$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αντίσταση D πάνω στην πλάκα, όπως φαίνεται και από τα Σχήματα, αυξάνεται όταν εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο στην ροή αλλά και συνεχής ή τοπική απορρόφηση.

Σχήμα 2.6.23: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $v_w = 0$, $m_0 = 0.$, 8. και για $M_\infty = 0.375, 0.75$ και 1.5 .

Σχήμα 2.6.24: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$, 8. και $v_w = 0$ και για $v_w < 0$ συνεχής ή τοπική στο $x_s = 0.5$ m.

Σχήμα 2.6.25: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$, $v_w = 0$, και τοπική απορρόφηση στο $x_s = 0.2, 0.4$ και 0.6 m.

Σχήμα 2.6.26: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$, $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 0.6$ m και 0.2 m, αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 2.6.25 φαίνεται ότι εφαρμογή της τοπικής απορρόφησης σε διαφορετικές θέσεις x_s από την οδηγούσα ακμή της πλάκας μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής και ελαττώνει την αντίσταση D λόγω τριβής. Το Σχήμα 2.6.26 παρουσιάζει την συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης πάνω στην παράμετρο διάτμησης στο τοίχωμα f_w'' . Συνάγεται το συμπέρασμα ότι εφαρμογή τοπικής απορρόφησης και τοπικής έγχυσης στις θέσεις $x_s = 0.6 m$ και $x_s = 0.2 m$, αντίστοιχα, μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας και ελαττώνει την αντίσταση λόγω τριβής στην περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας όπως και στην περίπτωση της αδιαβατικής ροής.

Στα Σχήματα 2.6.27 έως και 2.6.31 απεικονίζεται η μεταβολή του αδιάστατου συντελεστή θερμότητας $-S_w'$ κάτω από τις ίδιες συνθήκες με αυτές του f_w'' . Στο Σχήμα 2.6.27, που παρουσιάζει την μεταβολή του $-S_w'$ με την απόσταση x , με απορρόφηση/έγχυση, παρατηρείται αύξηση του $-S_w'$ με την επίδραση του μαγνητικού πεδίου (αύξηση του m_0). Στο Σχήμα 2.6.28, απεικονίζεται το $-S_w'$ με την απόσταση x για τρεις αριθμούς Mach, $M_\infty = 0.375, 0.75, 1.5$ και για δύο τιμές της μαγνητικής παραμέτρου $m_0 = 0$ και 8 , αντίστοιχα, για την περίπτωση μη διαπερατής πλάκας. Από αυτό το Σχήμα συμπεραίνεται ότι για διάφορες τιμές του M_∞ και του m_0 , παρατηρείται αύξηση του $-S_w'$ αυξανόμενου του αριθμού Mach. Το μαγνητικό πεδίο, για μικρά x , δεν έχει μεγάλη επίδραση στον $-S_w'$ για κάθε τιμή του αριθμού Mach, αλλά η επίδραση του καθίσταται εμφανής για μεγαλύτερες τιμές του x . Τέλος στα Σχήματα 2.6.29-2.6.31 παρουσιάζεται η μεταβολή του $-S_w'$ με το x , για την περίπτωση της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης. Στο Σχήμα 2.6.29 παρουσιάζεται η μεταβολή του $-S_w'$, με την απόσταση x , για $M_\infty = 0.5$ και για την περίπτωση απορρόφησης, συνεχούς ή τοπικής, αλλά και για την περίπτωση μη διαπερατής πλάκας για $m_0 = 0$ και 8 . Παρατηρείται αύξηση του $-S_w'$ με εφαρμογή τοπικής ή συνεχούς απορρόφησης τόσο στην αεροδυναμική περίπτωση όσο και στην MHD. Στο Σχήμα 2.6.30 παρουσιάζεται η μεταβολή του $-S_w'$ όταν μετατοπίζεται το σημείο της τοπικής απορρόφησης. Παρατηρείται αύξηση του $-S_w'$ με την μετατόπιση του σημείου τοπικής απορρόφησης από το χείλος προσβολής της πλάκας. Σε κάθε περίπτωση το $-S_w'$, από το σημείο που εμφανίζεται η τοπική απορρόφηση μέχρι το σημείο αποκόλλησης είναι μεγαλύτερο από εκείνο για την περίπτωση $\nu_w = 0$ καθώς και εκείνου για το οποίο εφαρμόστηκε απορρόφηση πιο πριν, δηλαδή για μικρότερο x_s . Τέλος, στο Σχήμα 2.6.31 παρουσιάζεται η μεταβολή του $-S_w'$, με την απόσταση x , όταν πάνω από την θερμαινόμενη πλάκα εφαρμοστεί αρχικά τοπική έγχυση και έπειτα τοπική απορρόφηση, στις θέσεις $x_s = 0.2 m$ και $x_s = 0.6 m$, αντίστοιχα. Συνάγεται το συμπέρασμα ότι ο συνδυασμένος αυτός τρόπος εφαρμογής τοπικής έγχυσης-απορρόφησης και μαγνητικού πεδίου μεταβάλλει δραστικά την αδιάστατη παράμετρο μεταφοράς θερμότητας και ταυτόχρονα μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης αρκετά προς το χείλος εκφυγής γεγονός που έχει ιδιαίτερη σημασία στην αεροδυναμική.

Σχήμα 2.6.27: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$ και $8.$ και $v_w = 0, > 0, < 0.$

Σχήμα 2.6.28: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $v_w = 0$, $m_0 = 0., 8.$ και για $M_\infty = 0.375, 0.75$ και $1.5.$

Σχήμα 2.6.29: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$ και για $v_w < 0$ συνεχής ή τοπική στο $x_s = 0.5$ m.

Σχήμα 2.6.30: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0., v_w = 0.$ και τοπική απορρόφηση στο $x_s = 0.2, 0.4$ και 0.6 m.

Σχήμα 2.6.31: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0, 8$, $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 0.6$ m και 0.2 m, αντίστοιχα

(iii) Ψυχόμενη πλάκα ($S_w = 0.5$).

Παρόμοια αποτελέσματα με αυτά της αδιαβατικής πλάκας και της θερμαινόμενης πλάκας λαμβάνονται και στην περίπτωση της ψυχόμενης. Συγκεκριμένα για την ψυχόμενη πλάκα οι μεταβολές των κατανομών της αδιάστατης ταχύτητας $f'(x, \eta)$, σε μια τυπική απόσταση $x = 0.9$ m από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, φαίνονται στα Σχήματα 2.6.32 έως 2.6.35. Το Σχήμα 2.6.32 δείχνει την μεταβολή της $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$ για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας ($v_w = 0$) και για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 . Εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου αυξάνει και εδώ όπως και στην αδιαβατική ροή ή στην θερμαινόμενη πλάκα την ταχύτητα του αέρα μέσα στο οριακό στρώμα. Η επίδραση αυτή του μαγνητικού πεδίου πάνω στην ταχύτητα ελαττώνεται καθώς ο αριθμός Mach του ελευθέρου ρεύματος αυξάνεται (Σχήμα 2.6.33). Ποσοτικά, όταν $\eta = 3$ και $M_\infty = 0.5$ εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου βοηθάει στην αύξηση της $f'(\eta)$ κατά 4.45%, ενώ η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση που $M_\infty = 1.5$ είναι μόνο 1.76%. Επίσης, εφαρμογή απορρόφησης ($v_w < 0$) αυξάνει την ταχύτητα του ρευστού μέσα στο ψυχόμενο οριακό στρώμα όπως και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις (Σχήμα 2.6.34). Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της έγχυσης ($v_w > 0$). Η συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τεχνικής έγχυσης/απορρόφησης για τον έλεγχο του οριακού στρώματος φαίνεται στο Σχήμα 2.6.35. Παρατηρείται εδώ ότι, όταν $\eta = 3$, $m_0 = 0$ και $v_w > 0$ (καμπύλη (3)), η ταχύτητα του ρευστού μειώνεται κατά 16.12% σε σχέση με την περίπτωση της

απορρόφησης ($\nu_w < 0$) (καμπύλη (5)) και με την παρουσία μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.$).

Οι μεταβολές του λόγου της ολικής ενέργειας $S = H / H_e$, σε μια τυπική απόσταση $x = 0.9m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, με την αδιάστατη απόσταση η , μέσα στο οριακό στρώμα, παρουσιάζονται στα Σχήματα 2.6.36-2.6.39, για διαφορετικές τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 , του αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής και για την περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης ή για αδιαπέραστη πλάκα ($\nu_w = 0$). Σε όλα τα Σχήματα η θερμοκρασία του ρευστού αυξάνεται τείνοντας ασυμπτωτικά στην οριακή της τιμή στο άπειρο. Στο Σχήμα 2.6.36 παρατηρούμε ότι η εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου αυξάνει την θερμοκρασία του ρευστού πάνω από την πλάκα και η αύξηση αυτή γίνεται πιο έντονη όσο αυξάνεται η μαγνητική παράμετρος ($m_0 = 8.$). Αυξάνοντας τον αριθμό Mach ($M_\infty = 1.5$) παρατηρείται μικρότερη αύξηση της θερμοκρασίας πάνω από την πλάκα από ότι σε μικρότερους αριθμούς Mach ($M_\infty = 0.5$) (Σχήμα 2.6.37). Η επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης πάνω στο θερμικό οριακό στρώμα φαίνεται στα Σχήματα 2.6.38 και 2.6.39. Στην περιοχή του τοιχώματος, η θερμοκρασία του ρευστού είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση της απορρόφησης ($\nu_w < 0$) από την αντίστοιχη περίπτωση της αδιαπέραστης πλάκας ($\nu_w = 0$) ή την περίπτωση της έγχυσης ($\nu_w > 0$). Η συνδυασμένη επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης και του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου πάνω στην θερμοκρασία φαίνεται στο Σχήμα 2.6.39. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση της απορρόφησης ($\nu_w < 0$) και όταν $\eta = 3$ και το m_0 αυξάνεται από 0. έως 8. υπάρχει αύξηση κατά 0.87% στην τιμή της S , ενώ κάτω από τις ίδιες συνθήκες η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση της έγχυσης ($\nu_w > 0$) είναι 1.68%. Επομένως, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της S (0.9, 3.0) μεταξύ των περιπτώσεων $m_0 = 0.$, $\nu_w > 0$ και $m_0 = 8.$, $\nu_w < 0$ είναι 6.13%.

Στα Σχήματα 2.6.40-2.6.44 απεικονίζονται οι μεταβολές της αδιάστατης παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f_w'' , με την απόσταση x , για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 και του αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής, για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας και για συνεχή ή τοπική έγχυση/απορρόφηση. Οι τιμές της D για κάθε περίπτωση απεικονίζονται πάνω στα Σχήματα

Το συμπέρασμα που συνάγεται από το Σχήμα 2.6.40 είναι ότι η παρουσία μαγνητικού πεδίου συμβάλει πάντοτε στην αύξηση της αντίστασης λόγω τριβής πάνω στην πλάκα τόσο στην περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης όσο και στην περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας. Επίσης, εφαρμογή απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας, ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της έγχυσης. Στα Σχήματα 2.6.41 και 2.6.42 απεικονίζεται η μεταβολή του αδιάστατου συντελεστή επιδερμικής τριβής f_w'' , με την απόσταση x . Συγκεκριμένα στο Σχήμα 2.6.41, απεικονίζεται το f_w'' , με την απόσταση x , για τρεις αριθμούς Mach, $M_\infty = 0.375, 0.75, 1.5$ και για δύο τιμές της μαγνητικής παραμέτρου $m_0 = 0.$ και $8.$, αντίστοιχα, για την περίπτωση μη διαπερατής πλάκας. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός Mach έχει σημαντική επίδραση στο σημείο αποκόλλησης το οποίο μετακινείται προς την οδηγούσα ακμή καθώς το M_∞ αυξάνει. Επίσης το μαγνητικό πεδίο επηρεάζει την ροή του ρευστού (αέρα) και αντίθετα μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής. Για παράδειγμα, όταν το $M_\infty = 1.5$ το σημείο αποκόλλησης από $x^* \approx 1.27$ για $m_0 = 0.$ μετατοπίζεται στο $x^* \approx 1.36$ για $m_0 = 8.$

Σχήμα 2.6.32: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$, $4.$ και $8.$

Σχήμα 2.6.33: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$ και $8.$

Σχήμα 2.6.34: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 4.0$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.35: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0, 8$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.36: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0, 4$, και 8 .

Σχήμα 2.6.37: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0$, και 8 .

Σχήμα 2.6.38: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 4.0$ και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.39: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0, 8$, και $v_w = 0, < 0, > 0$.

Σχήμα 2.6.40: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0$. και 8. και $v_w = 0, > 0, < 0$.

Σχήμα 2.6.41: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $v_w = 0$, $m_0 = 0$, 8. και για $M_{\infty} = 0.375, 0.75$ και 1.5 .

Σχήμα 2.6.42: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0.$, 8. και $v_w = 0$ και για $v_w < 0$ συνεχής ή τοπική στο $x_s = 1.4$ m (1.77 m).

Σχήμα 2.6.43: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f''_w για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0.$, $v_w = 0$. και τοπική απορρόφηση στο $x_s = 0.6, 0.8$ και 1.0 m.

Σχήμα 2.6.44: Μεταβολή της παραμέτρου διάτμησης στο τοίχωμα f_w'' για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$, 8 , $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.3 \text{ m}$ (1.6 m) και 0.3 m , αντίστοιχα.

Παρατηρούμε επίσης ότι η επίδραση αυτή του μαγνητικού πεδίου είναι μεγαλύτερη για μικρότερες τιμές του αριθμού Mach. Στο Σχήμα 2.6.42 απεικονίζεται η επίδραση της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης στον συντελεστή επιδερμικής τριβής f_w'' και στο σημείο αποκόλλησης, με ή χωρίς μαγνητικό πεδίο. Έτσι, τόσο η συνεχής όσο και η τοπική απορρόφηση μετατοπίζουν το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής τόσο στην περίπτωση που $m_0 = 0$ όσο και όταν $m_0 = 8$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αντίσταση D πάνω στην πλάκα, όπως φαίνεται και από τα Σχήματα, αυξάνεται όταν εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο στην ροή αλλά και συνεχής ή τοπική απορρόφηση πάνω στην ψυχόμενη πλάκα όπως και στις άλλες δύο περιπτώσεις της θερμαινόμενης και της αδιαβατικής. Στο Σχήμα 2.6.43 φαίνεται ότι εφαρμογή της τοπικής απορρόφησης, σε διαφορετικές θέσεις x_s από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής και ελαττώνει την αντίσταση λόγω τριβής D . Το Σχήμα 2.6.44 δείχνει την συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης πάνω στην παράμετρο διάτμησης στο τοίχωμα f_w'' . Συνάγεται το συμπέρασμα ότι εφαρμογή τοπικής απορρόφησης και τοπικής έγχυσης στις θέσεις $x_s = 0.3 \text{ m}$ και $x_s = 1.3 \text{ m}$, αντίστοιχα, μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας και ελαττώνει την αντίσταση λόγω τριβής.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στην περίπτωση ψυχόμενης πλάκας ($S_w = 0.5$) το σημείο αποκόλλησης x^* βρίσκεται σημαντικά δεξιά προς το χείλος εκφυγής της πλάκας, σε σχέση με την περίπτωση της θερμαινόμενης, συμβάλλοντας έτσι στην σταθερότητα της ροής μέσα στο οριακό στρώμα και επιβεβαιώνοντας ότι η μέθοδος ψύξης ή θέρμανσης τοιχωμάτων, όπως και η μέθοδος έγχυσης/απορρόφησης, είναι μια

από τις μεθόδους ελέγχου του οριακού στρώματος. Το τίμημα όμως στην περίπτωση αυτή είναι η αύξηση της αντίστασης D σε σχέση με εκείνη της θερμαινόμενης πλάκας.

Στα Σχήματα 2.6.45-2.6.49 απεικονίζεται η μεταβολή του αδιάστατου συντελεστή μεταφοράς θερμότητας $-S'_w$ κάτω από τις ίδιες συνθήκες με αυτές του f''_w . Στο Σχήμα 2.6.45, που παρουσιάζει την μεταβολή του $-S'_w$ με την απόσταση x , με απορρόφηση/έγχυση, παρατηρείται ελάττωση του $-S'_w$ με την επίδραση του μαγνητικού πεδίου (αύξηση του m_0). Στο Σχήμα 2.6.46, απεικονίζεται το $-S'_w$, με την απόσταση x , για τρεις αριθμούς Mach, $M_\infty = 0.375, 0.75, 1.5$ και για δύο τιμές της μαγνητικής παραμέτρου $m_0 = 0$ και 8., αντίστοιχα, για την περίπτωση μη διαπερατής πλάκας. Από το Σχήμα παρατηρείται ελάττωση του $-S'_w$ αυξανόμενου του αριθμού Mach. Το μαγνητικό πεδίο, για μικρά x , δεν έχει μεγάλη επίδραση στον $-S'_w$ για κάθε τιμή του αριθμού Mach, η επίδραση του καθίσταται όμως εμφανής για μεγαλύτερες τιμές του x . Τέλος, στα Σχήματα 2.6.47-2.6.49 παρουσιάζεται το $-S'_w$ συναρτήσει του x , για την συνθήκη της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης. Στο Σχήμα 2.6.47 παρουσιάζεται η μεταβολή του $-S'_w$, με την απόσταση x , για $M_\infty = 0.5$ και για την περίπτωση απορρόφησης, συνεχούς ή τοπικής, αλλά και για την περίπτωση μη διαπερατής πλάκας. Παρατηρείται ελάττωση του $-S'_w$ με εφαρμογή τοπικής ή συνεχούς απορρόφησης. Στα Σχήματα 2.6.48 και 2.6.49 παρουσιάζονται οι μεταβολές του $-S'_w$, με την απόσταση x , για διάφορες τιμές του x_s . Δηλαδή της θέσης εφαρμογής της τοπικής απορρόφησης. Παρατηρείται ότι για κάθε θέση x της ψυχόμενης πλάκας μεγαλύτερη της τιμής x_s ο $-S'_w$ έχει τιμή μικρότερη εκείνης την οποία θα είχε εάν δεν είχε εφαρμοστεί απορρόφηση.

Σχήμα 2.6.45: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$ και 8. και $v_w = 0, > 0, < 0$.

Σχήμα 2.6.46: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $v_w = 0$, $m_0 = 0., 8.$ και για $M_\infty = 0.375, 0.75$ και 1.5 .

Σχήμα 2.6.47: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$ και για $v_w < 0$ συνεχής ή τοπική στο $x_s = 1.4$ m (1.77 m).

Σχήμα 2.6.48: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$, $v_w = 0$ και τοπική απορρόφηση στο $x_s = 0.6, 0.8$ και 1.0 m.

Σχήμα 2.6.49: Μεταβολή της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$, $8.$, $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.3$ m και 0.3 m, αντίστοιχα.

Η μείωση αυτή του $-S'_w$ καθίσταται περισσότερο εμφανής καθώς το x_s πλησιάζει προς το χείλος εκφυγής της πλάκας. Τέλος, στο Σχήμα 2.6.49 παρουσιάζεται η μεταβολή του αδιάστατου συντελεστού μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα $-S'_w$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0., 8.$, για αδιαπέρστη πλάκα και για την περίπτωση όπου εφαρμόζεται αρχικά τοπική έγχυση στη θέση $x_s = 0.3 m$ και έπειτα τοπική απορρόφηση στη θέση $x_s = 1.3 m$. Παρατηρείται ότι το $-S'_w$ ελαττώνεται με την εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου ανεξάρτητα από την εφαρμογή της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης. Η εφαρμογή τοπικής έγχυσης έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του $-S'_w$, σε σχέση με εκείνη της αδιαπέραστης πλάκας, ενώ η εφαρμογή τοπικής απορρόφησης έχει σαν αποτέλεσμα την ελάττωση. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση της απορρόφησης η ποσοστιαία μεταβολή του $-S'_w$ είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της έγχυσης και αυτό ανεξάρτητα από την τιμή της μαγνητικής παραμέτρου m_0 .

2.7 Συμπεράσματα

Μετά την ανάλυση των αποτελεσμάτων της προηγούμενης παραγράφου παρατίθενται τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανωτέρω ανάλυση της στρωτής ροής.

(i) Αδιαβατική ροή ($S'_w = 0$)

- Το πεδίο ροής επηρεάζεται σημαντικά από την ταχύτητα έγχυσης/απορρόφησης, από την ένταση του μαγνητικού πεδίου, και από τον αριθμό Mach του ελευθέρου ρεύματος.
- Η παρουσία του μαγνητικού πεδίου αυξάνει την αντίσταση που ασκείται στην πλάκα, είτε στην περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης είτε στην αδιαπέραστη πλάκα, αλλά μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας.
- Εφαρμογή μαγνητικού πεδίου μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας για κάθε τιμή του αριθμού Mach ($M_\infty < 2.0$). Αυτή η μετατόπιση είναι μεγαλύτερη για μικρές τιμές του αριθμού Mach.
- Η εφαρμογή **συνεχούς** απορρόφησης πάνω στην πλάκα αυξάνει την ολική αντίσταση, σε σχέση με εκείνη της αδιαπέραστης πλάκας, μετατοπίζει όμως το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής. Αντίθετα η εφαρμογή συνεχούς έγχυσης ελαττώνει την αντίσταση αλλά μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος προσβολής.
- Εφαρμογή **τοπικής** απορρόφησης σε διαφορετικές θέσεις από την οδηγούσα ακμή της πλάκας βοηθά στην ελάττωση της αντίστασης και στην μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής
- Η εφαρμογή τοπικής απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής αισθητά (περίπου όσο και η συνεχής απορρόφηση) και ελαττώνει

την αντίσταση σε σχέση με την συνεχή. Η εφαρμογή δε, αρχικά τοπικής έγχυσης και μετά τοπικής απορρόφησης, ελαττώνει την αντίσταση σε σχέση με την αδιαπέραστη πλάκα και μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής.

- Η αύξηση του αριθμού Mach μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος προσβολής.

(ii) Θερμαινόμενη πλάκα ($S_w = 2.0$)

- Το πεδίο ροής επηρεάζεται σε εντονότερο βαθμό στην θερμαινόμενη πλάκα από την ταχύτητα έγχυσης/απορρόφησης, από την ένταση του μαγνητικού πεδίου, και από τον αριθμό Mach του ελευθέρου ρεύματος απ' ότι στην περίπτωση (i).
- Στην θερμαινόμενη πλάκα το οριακό στρώμα αποκολλάται πολύ πιο κοντά στο χείλος προσβολής από ότι στην αδιαβατική ροή. Η επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης πάνω στην θερμαινόμενη πλάκα είναι μικρότερη από εκείνη της αδιαβατικής ροής. Γι' αυτόν τον λόγο εφαρμόζεται πάνω στην θερμαινόμενη πλάκα μεγαλύτερης έντασης έγχυση/απορρόφηση, για την επίτευξη παρόμοιων αποτελεσμάτων.
- Η παρουσία του μαγνητικού πεδίου έχει και σε αυτήν την περίπτωση παρόμοια αποτελέσματα με την προηγούμενη. Εφαρμογή μαγνητικού πεδίου μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας για κάθε τιμή του αριθμού Mach ($M_\infty < 2.0$) και αυτή η μετατόπιση είναι μεγαλύτερη για μικρές τιμές του αριθμού Mach.
- Η εφαρμογή συνεχούς απορρόφησης πάνω στην θερμαινόμενη πλάκα αυξάνει την ολική αντίσταση αλλά μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής. Το αντίθετο συμβαίνει στην εφαρμογή έγχυσης. Η παράμετρος διάτμησης στο τοίχωμα αυξάνεται στην εφαρμογή απορρόφησης.
- Η παράμετρος μεταφοράς θερμότητας ελαττώνεται με την εφαρμογή έγχυσης, αυξάνεται όμως όταν πάνω στην θερμαινόμενη πλάκα εφαρμόζεται απορρόφηση ή μαγνητικό πεδίο. Επίσης επηρεάζεται από την συμπίεστικότητα. Συγκεκριμένα για μικρές αποστάσεις από την οδηγούσα ακμή της πλάκας η παράμετρος μεταφοράς θερμότητας αυξάνει με τον αριθμό Mach του ελευθέρου ρεύματος.
- Η εφαρμογή τοπικής απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής και ελαττώνει την αντίσταση σε σχέση με την συνεχή. Η εφαρμογή αρχικά τοπικής έγχυσης και μετά τοπικής απορρόφησης ελαττώνει την αντίσταση, σε σχέση με την αδιαπέραστη πλάκα, και μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής.

(iii) Ψυχόμενη πλάκα ($S_w = 0.5$)

- Οι μεταβολές των βασικών ποσοτήτων του πεδίου ροής, εκτός της παραμέτρου μεταφοράς θερμότητας, στην ψυχόμενη πλάκα επηρεάζονται ποιοτικά όμοια με αυτές της θερμαινόμενης πλάκας ($S_w = 2.0$) τόσο από την ταχύτητα

έγχυσης/απορρόφησης καθώς και από την ένταση του μαγνητικού πεδίου και του αριθμού Mach του ελευθέρου ρεύματος. Η παράμετρος μεταφοράς θερμότητας ελαττώνεται με την εφαρμογή απορρόφησης ή μαγνητικού πεδίου και αυξάνεται όταν πάνω στην ψυχόμενη πλάκα εφαρμόζεται έγχυση.

- Στην ψυχόμενη πλάκα το οριακό στρώμα αποκολλάται σε μεγαλύτερη απόσταση από την οδηγούσα ακμή από ότι στην αδιαβατική ροή ή την θερμαινόμενη πλάκα.
- Η παρουσία του μαγνητικού πεδίου καθώς και της συνεχούς ή τοπικής έγχυσης/απορρόφησης επιδρούν με παρόμοιο τρόπο στην ροή πάνω από την ψυχόμενη πλάκα με τις προηγούμενες περιπτώσεις.
- Για τον έλεγχο του οριακού στρώματος με την μέθοδο της έγχυσης/απορρόφησης, τοπικής ή συνεχούς, απαιτείται μικρότερης έντασης ταχύτητα (απορρόφησης /έγχυσης) απ' ότι στην περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας.
- Η επίδραση του αριθμού Mach στην θέση αποκόλλησης του οριακού στρώματος στην περίπτωση της ψυχόμενης πλάκας είναι η ίδια όπως και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

Μαγνητοϋδροδυναμική συμπίεστή ροή τυρβώδους οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας.

Περίληψη

Στο Κεφάλαιο αυτό, που αποτελεί και το τελευταίο της διατριβής, μελετάται η μαγνητοϋδροδυναμική συμπίεστή ροή **τυρβώδους οριακού στρώματος** με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας. Αρχικά γίνεται αναφορά στις εξισώσεις που περιγράφουν γενικά τυρβώδη ροή οριακού στρώματος, δηλαδή στο μοντέλο των μέσων τιμών των εξισώσεων οριακού στρώματος που πρότεινε ο Reynolds (Reynolds – averaged equations) αναφέροντας αναλυτικά τις απλοποιήσεις που γίνονται για την παραγωγή των εξισώσεων αυτών. Οι εξισώσεις αυτές τροποποιούνται κατάλληλα για την περίπτωση MHD ροής. Στην συνέχεια γίνεται γενική αναφορά των μοντέλων τύρβης που υπάρχουν, καταλήγοντας στα δύο βασικά μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται στην διατριβή αυτή. Αυτά είναι τα μοντέλα των Cebeci – Smith και Baldwin – Lomax, τα οποία, ως γνωστόν, είναι αλγεβρικά μοντέλα τύρβης εύκολα στον προγραμματισμό τους και αξιόπιστα. Περιγράφεται η μοντελοποίηση του τυρβώδους αριθμού Prandtl Pr_t και οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του στην παρούσα μελέτη.

Η αριθμητική λύση των εξισώσεων του προβλήματος αυτού της τυρβώδους ροής επιτυγχάνεται με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο επετεύχθη η λύση για την περίπτωση της στρωτής ροής με την διαφορά ότι εδώ το χωρικό βήμα, κατά διεύθυνση εγκάρσια του οριακού στρώματος, είναι μεταβαλλόμενο. Οι υποθέσεις που αφορούν στο μαγνητικό πεδίο, την αντίξοη βαθμίδα πίεσης, την κατανομή έγχυσης/απορρόφησης, κλπ. που υιοθετήθηκαν στο Κεφάλαιο ΙΙ ισχύουν και σ' αυτό στο οποίο μελετάται η τυρβώδης ροή. Στο τέλος του Κεφαλαίου παρουσιάζονται σε γραφικές παραστάσεις τα αποτελέσματα του υπό μελέτη προβλήματος για τις ίδιες τιμές του S_w με την στρωτή ροή και γίνεται ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτών. Συμπεράσματα με τα βασικότερα αποτελέσματα παρατίθενται στο τέλος του Κεφαλαίου για την καλύτερη κατανόηση και αξιοποίηση τους.

3.1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι οι περισσότερες ροές, που υπάρχουν στην φύση και εμφανίζονται σε πρακτικές εφαρμογές, είναι τυρβώδεις. Ο όρος αυτός δηλώνει μια κίνηση στην οποία μια ακανόνιστη διακύμανση επιβάλλεται στην κύρια ροή. Αυτή η ακανόνιστη διακύμανση (ανάμιξη ή στροβιλώδης κίνηση) είναι υπεύθυνη για την μεγάλη αντίσταση που δημιουργείται από την τύρβη στους σωλήνες, για την οπισθέλκουσα που αναπτύσσεται στα πλοία και στα αεροπλάνα και για τις απώλειες στις τουρμπίνες και στους υπερσυμπιεστές. Η απλούστερη περίπτωση τυρβώδους οριακού στρώματος απαντάται σε επίπεδη πλάκα με μηδενική γωνία προσπτώσεως (παράλληλο ρεύμα).

Ωστόσο, η μελέτη αυτού του μοντέλου έχει μεγάλη σημασία και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό της αντίστασης λόγω επιδερμικής τριβής στα πλοία, στις αντωτικές επιφάνειες και στα σώματα των αεροσκαφών στην αεροναυπηγική και στα πτερύγια των τουρμπίνων και των περιστροφικών συμπιεστών [124].

Εκτός από τον υπολογισμό της αντίστασης λόγω επιδερμικής τριβής είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πότε το τυρβώδες οριακό στρώμα αποκολλάται και κάτω από ποιες συνθήκες. Είναι χρήσιμο λοιπόν να υπολογίζεται στην μελέτη του οριακού στρώματος το σημείο αποκόλλησης. Η αποκόλληση είναι ένα ανεπιθύμητο γενικά φαινόμενο λόγω της μεγάλης απώλειας ενέργειας και για αυτό τον λόγο έχουν επινοηθεί διάφορες μέθοδοι για την τεχνητή παρεμπόδιση της. Όπως είναι ευρέως γνωστό, ο έλεγχος της ροής συνήθως σχετίζεται με αύξηση της απόδοσης στις μηχανολογικές εφαρμογές, λόγω της εξάλειψης της επιβλαβούς αποκόλλησης και αποκατάσταση του πεδίου ροής πάνω στην επιφάνεια [23, 52, 53]. Σε μια διδιάστατη χρονοανεξάρτητη ροή, η αποκόλληση μπορεί να εμποδιστεί ή να καθυστερήσει με εφαρμογή βασικών ενεργητικών και παθητικών μεθόδων ελέγχου, όπως απορρόφηση, έγχυση, παθητικές διατάξεις, ψύξη ή θέρμανση της επιφάνειας, κλπ. Τέτοιες τεχνικές ελέγχου έχουν χρησιμοποιηθεί στις άκρες των πτερύγων των αεροσκαφών της Boeing (γεννήτριες στροβίλων), στα μαχητικά αεροσκάφη παλαιότερης γενιάς στις πίσω επιφάνειες καμπυλότητας (flaps) ή στην οδηγούσα ακμή της πτέρυγας στις νεώτερες γενιές αεροσκαφών με τις εμπρόσθιες επιφάνειες καμπυλότητας (slats) [54]. Στις διδιάστατες ροές στο πάνω μέρος της πτέρυγας η γεννήτρια στροβίλων παράγει έναν ελαφρύ στροβιλισμό που επαν-ενεργοποιεί την μέση ροή στην περιοχή της πτέρυγας, για να υπερνικήσει την αντίξοχη βαθμίδα πίεσης.

Οι διάφορες υποθέσεις που έχουν γίνει για να εξηγηθεί πως οι συσκευές ελέγχου της ροής δρουν στο τυρβώδες οριακό στρώμα και στην αποκόλληση της ροής, στηριζόμενες σε θεωρήσεις του ίδιου του τυρβώδους οριακού στρώματος και σε πλήρη περιγραφή της δομής του, μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [14, 89, 91, 118]. Μολονότι δεν υπάρχει ακόμα αποδεκτή θεωρία, που να περιγράφει λεπτομερώς την συμπεριφορά της τυρβώδους ροής, η πιο αποδεκτή τεχνική ελέγχου του τυρβώδους οριακού στρώματος είναι η τεχνική της έγχυσης/απορρόφησης. Η απορρόφηση είναι μια τεχνική ελέγχου της ροής που αφενός μεν εμποδίζει την μετάπτωση της ροής από στρωτή σε τυρβώδη, αφετέρου δε εμποδίζει την αποκόλληση του τυρβώδους οριακού στρώματος. Σαν τεχνική ελέγχου χρησιμοποιείται από παλιά. Κατά την δεκαετία του '60, δοκιμαστικές πτήσεις του πειραματικού αεροσκάφους X-21 έδειξαν την επίτευξη και διατήρηση της στρωτής ροής πάνω από την πτέρυγα με την χρήση απορρόφησης μέσα από πολλές μικρές σχισμές πάνω σε αυτήν. Πρόσφατες δοκιμαστικές πτήσεις ενός μετασκευασμένου αεροσκάφους F-16XL που χρησιμοποιεί την τεχνική της απορρόφησης πάνω σε ειδικές διατάξεις που βρίσκονται στην ειδική πτέρυγα σπαστού δέλτα, σχηματίζοντας LERX (LEading Root eXtensions), έδειξαν διατήρηση της στρωτής ροής και μείωση της αντίστασης κατά 8%. Επίσης, πρόσφατα πειράματα με εφαρμογή της απορρόφησης κατά μήκος της οδηγούσας ακμής της πτέρυγας έδειξαν την πιθανότητα, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, να καθυστερήσουν την "μόλυνση" (contamination) της ακμής [7]. Η "μόλυνση" της ακμής είναι φαινόμενο που εμφανίζεται κατά μήκος του χείλους προσβολής της πτέρυγας η οποία προσβάλλεται από ελεύθερο ρεύμα αέρος. Συνήθως η πτέρυγα βρίσκεται σε επαφή με άλλες δομές, όπως ο κινητήρας ή άτρακτος του αεροσκάφους ή ακόμα και το τοίχωμα της αεροσήραγγας. Οι δομές αυτές επηρεάζουν την ροή του ομοιομόρφου ρεύματος γύρω τους και συνεπώς και γύρω από την πτέρυγα αφού συνορεύουν με αυτήν. Το φαινόμενο αυτό καλείται "μόλυνση" της ακμής και οδηγεί σε μετάπτωση της στρωτής ροής σε τυρβώδη από πολύ νωρίς (αμέσως μετά το χείλος προσβολής της πτέρυγας). Στα

τυρβώδη οριακά στρώματα, εφαρμόζεται απορρόφηση για να προληφθεί το φαινόμενο της αποκόλλησης. Ο συντελεστής απορρόφησης C_q , οριζόμενος ως ο λόγος της ταχύτητας απορρόφησης $|u_0|$ προς την ελεύθερη ρευματική ταχύτητα u_∞ ($C_q = |u_0|/u_\infty$), είναι σχετικά μικρός και παίρνει τιμές στο διάστημα από 0.002 έως 0.004 [55]. Για βελτιστοποίηση της άντωσης, η απορρόφηση θα πρέπει να εφαρμόζεται στην επιφάνεια χαμηλής πίεσης της πτέρυγας (ράχη της πτέρυγας), σε μικρή απόσταση από την μύτη της, όπου εμφανίζεται μεγάλη αντίξοη βαθμίδα πίεσης, σε μεγάλες γωνίες προσβολής [53].

Από την άλλη πλευρά, οι Sokolon και Antonia [131] μελέτησαν την αντίδραση του τυρβώδους οριακού στρώματος σε *έντονη απορρόφηση* μέσα από λωρίδα πλάτους 40mm, για ροή με χαμηλό αριθμό Reynolds πάχους ορμής (momentum thickness Reynolds number). Μεγάλος αριθμός εργασιών έχει πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας μεγάλες ή μικρές ομοιόμορφα κατανεμημένες οπές, για την εφαρμογή απορρόφησης μέσω πορώδους επιφάνειας, με σκοπό τον έλεγχο του τυρβώδους οριακού στρώματος. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι οι πορώδεις επιφάνειες προσφέρουν σχεδόν ομοιόμορφη απορρόφηση, με μικρότερη αύξηση της τριβής για μια συγκεκριμένη τιμή απορρόφησης, από την έντονη απορρόφηση μέσα από διακριτές οπές ή σχισμές. Οι Wilkinson et. al. [148] κατασκεύασαν μια *υβριδική επιφάνεια απορρόφησης* (hybrid suction surface) για τυρβώδεις ροές. Είναι μια επιφάνεια που αποτελείται από μια συστοιχία σχισμών πολύ κοντά η μια στην άλλη προς την διεύθυνση της μέσης ροής. Οι Gad-el-Hak και Blackwelder [56] για τον έλεγχο του οριακού στρώματος πρότειναν μια προσέγγιση που καλείται *επιλεκτική απορρόφηση* (selective suction), στην οποία μικρή τιμή απορρόφησης εφαρμόζεται σε σχισμές χαμηλής ταχύτητας απορρόφησης για να μειωθεί η ένταση των εξώσεων (ejection) και η μείωση της διαδικασίας εκτόξευσης (bursting process). Η επιλεκτική απορρόφηση έχει χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο των δινών που σχηματίζονται κατά την εξέλιξη της ροής, παραγόμενες από την αστάθεια Görtler σε κοίλο τοίχωμα και βρέθηκε ότι μικρές τιμές απορρόφησης επαρκούν για να καθυστερήσουν την αποσύνθεση (κατάρρευση) των δινών [105].

Μια άλλη δυνατότητα ελέγχου του τυρβώδους οριακού στρώματος είναι η χρήση της *τοπικής απορρόφησης* (localized suction). Με την τεχνική αυτή εφαρμόζεται συνεχής απορρόφηση σε μια περιοχή μεταξύ των θέσεων $x = a$ και $x = b$, $0 < a < b \ll L$, όπου L είναι το συνολικό μήκος της επιφάνειας. Θεμελιώδη πειράματα σε αεροδυναμική σήραγγα που έγιναν από τους Reynolds και Saric [117] έδειξαν ότι η απορρόφηση είναι πιο αποτελεσματική όταν ο αριθμός Reynolds της ροής, στην οποία εφαρμόζεται η τοπική απορρόφηση, έχει περίπου την ίδια τιμή με εκείνον που αντιστοιχεί στον κατώτερο κλάδο της καμπύλης ουδέτερης ευστάθειας. Τα πειραματικά αυτά αποτελέσματα συμφωνούν ποιοτικά με προηγούμενα θεωρητικά αποτελέσματα [26]. Τέλος, ένας άλλος τρόπος ελέγχου του τυρβώδους οριακού στρώματος είναι αυτός της *θέρμανσης ή ψύξης του τοιχώματος* του στερεού ορίου (πτέρυγα) γύρω από το οποίο πραγματοποιείται η ροή. Επίσης, θα πρέπει να αναφερθεί ότι στην ελάττωση της επιδερμικής τριβής με την εφαρμογή έγχυσης ή απορρόφησης, καθοριστικό ρόλο παίζουν πολλές παράμετροι, όπως ο συντελεστής έγχυσης, η γωνία μέσω της οποίας εγχέεται ή απορροφάται ρευστό, το πάχος του χείλους της σχισμής, κλπ. Η αποδοτικότητα των σχισμών παρουσιάζεται στην [68] όπου φαίνεται ότι η εφαπτομενική έγχυση βελτιώνει τον έλεγχο του αεροσκάφους όταν αυτό πετάει με μεγάλη γωνία προσβολής [41]. Επιπλέον, με απευθείας λύση των εξισώσεων Navier-Stokes (Direct Numerical Simulation (DNS)) εξετάστηκε η πλήρως αναπτυγμένη τυρβώδης ροή σε κανάλι με ομοιόμορφη έγχυση από τους Sumitani και Kasagi [139]. Σ' αυτή την εργασία βρέθηκε ότι η έγχυση έχει την αντίθετη επίδραση στην ροή σε

σχέση με αυτή της ομοιόμορφης απορρόφησης, δηλαδή ελάττωση του συντελεστή τριβής και ενίσχυση της τύρβης κοντά στο τοίχωμα.

Όπως ήδη αναφέρθηκε πριν, το πρόβλημα του ελέγχου του τυρβώδους οριακού στρώματος είναι ευρύ και έχει γίνει πολύ έρευνα πάνω σ' αυτό το θέμα, αριθμητικά ή πειραματικά [98, 132-134]. Ωστόσο, έχει γίνει πολύ λιγότερη δουλειά στην έρευνα για συμπίεστές ροές σε τυρβώδη οριακά στρώματα με επίδραση αντίξοης βαθμίδας πίεσης και μεταφορά θερμότητας ή μάζας [83]. Το παραπάνω είναι ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα της αεροδυναμικής διότι για μια αξιόπιστη μελέτη τυρβώδους συμπίεστου οριακού στρώματος είναι απαραίτητο να γνωρίζει κανείς την εξάρτηση της ροής από τις διάφορες παραμέτρους ελέγχου όπως ο αριθμός Mach, η βαθμίδα πίεσης, η παράμετρος μεταφοράς θερμότητας και η παράμετρος μεταφοράς μάζας.

Από την άλλη μεριά λίγες είναι οι εργασίες που μελετούν την επίδραση του μαγνητικού πεδίου στην τυρβώδη ροή. Παλαιότερες εργασίες μελετούσαν απλώς την επίδραση του μαγνητικού πεδίου σε στρωτές ροές (βλ. Κεφάλαιο Ι). Όμως, τις τελευταίες δεκαετίες υπάρχουν εργασίες που μελετούν μαγνητοϋδροδυναμικές τυρβώδεις ροές. Βέβαια τέτοια άρθρα επικεντρώνονται κυρίως σε ροές υγρών μετάλλων ή ροές πλάσματος, δηλαδή μελετούν την ροή ρευστών που δέχονται πολύ ισχυρά μαγνητικά πεδία και είναι πολύ ισχυρά ιονισμένα [43, 100]. Όπως συμβαίνει στα αέρια των νεφελωμάτων που συνθέτουν τα άστρα, στον ήλιο όπου το ισχυρά ιονισμένο υδρογόνο του πραγματοποιεί μια πολύπλοκη κίνηση, ή ακόμα και στον ηλιακό άνεμο που μεταφέρει ιονισμένα σωματίδια στην επιφάνεια της Γης.

Το ενδιαφέρον των ερευνητών επικεντρώνεται επίσης και στις μαγνητοϋδροδυναμικές ροές μέσα σε σήραγγα, εκεί όπου το ισχυρά ιονισμένο ρευστό κινείται με πολύ μεγάλη ταχύτητα (>10 Mach) και ασκείται σε αυτό πολύ μεγάλη πίεση με αποτέλεσμα να θερμαίνεται και να αναπτύσσονται πολύ υψηλές θερμοκρασίες της τάξης των 3000-6000 K. Τέτοιες ροές βρίσκουν εφαρμογές στους MHD επιταχυντές και στις γεννήτριες πλάσματος [2, 127]. Αρκετές εργασίες μελετούν επίσης MHD συμπίεστές ροές [126] οι οποίες έχουν πολλές εφαρμογές, εκτός αυτών που αναφέρθηκαν παραπάνω (συσκευές πυρηνικής σύντηξης, ουράνια σώματα, κλπ.). Μερικές ακόμα εφαρμογές αυτών των ροών είναι η κίνηση σωμάτων στην ιονόσφαιρα, η κίνηση σωμάτων με υπερηχητικές ή υπερπεντηχητικές ταχύτητες (διαστημόπλοια που εισέρχονται στην ατμόσφαιρα), κλπ. Σε όλες αυτές τις ροές πάντα υπάρχει το μαγνητικό πεδίο της Γης που επιδρά στο ιονισμένο αέριο γύρω από το κινούμενο σώμα, παρόλο που το πεδίο αυτό είναι σχετικά ασθενές (60.000 nT ή 0.2 Gauss). Μπορεί όμως το σώμα που κινείται μέσα στο ρευστό να δέχεται και την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου εκτός του πεδίου της Γης. Είναι σημαντικό να εξεταστεί η επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω σε συμπίεστές ροές και αν είναι δυνατόν αυτό να ελέγξει το οριακό στρώμα πάνω από την επιφάνεια. Το μαγνητικό πεδίο σαν τεχνική ελέγχου χρησιμοποιείται από την σύγχρονη αεροδυναμική εδώ και αρκετές δεκαετίες, λόγω της ικανότητας του να σταθεροποιεί την ροή και να εμποδίζει την μετάπτωση της από στρωτή σε τυρβώδη. Χρησιμοποιήθηκε σαν τεχνική ελέγχου στα διαστημικά οχήματα που επανέρχονται στην ατμόσφαιρα από το διάστημα και σε αεροσκάφη που πετούσαν σε μεγάλα ύψη με μεγάλες ταχύτητες. Οι πρώτες αναφορές εφαρμογής της τεχνικής αυτής εμφανίστηκαν στο τέλος της δεκαετίας του 50 [120].

Αν και οι αριθμητικές μελέτες τέτοιων ροών δεν είναι πολλές, ωστόσο υπάρχουν αριθμητικές εργασίες, όπως των Dahlburg και Picone που χρησιμοποιούν μια πολύ ακριβή τεχνική για να μελετήσουν MHD συμπίεστές τυρβώδεις ροές [42]. Πάντως λίγες είναι οι αναφορές για MHD συμπίεστές τυρβώδεις ροές με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας.

Στο Κεφάλαιο αυτό γίνεται αριθμητική μελέτη της διδιάστατης MHD τυρβώδους συμπίεστης ροής οριακού στρώματος, πάνω από λεία διαπερατή και πεπερασμένη πλάκα, με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας.

Η περιγραφή του υπό μελέτη προβλήματος καθώς και η μαθηματική ανάλυσή του παρουσιάζονται στην παράγραφο 3.2. Στην παράγραφο 3.3 γίνεται παρουσίαση των αλγεβρικών μοντέλων τύρβης που χρησιμοποιούνται σ' αυτή την διατριβή, καθώς και μια περιληπτική παρουσίαση των μοντέλων τύρβης που υπάρχουν και ο φορμαλισμός του τυρβώδους αριθμού Prandtl. Στην παράγραφο 3.4 γίνεται αναφορά στην αριθμητική λύση του προβλήματος. Στην παράγραφο 3.5 περιγράφεται η σχέση του αριθμού Stanton με τον αριθμό Nusselt. Τέλος στην παράγραφο 3.6 παρατίθεται λεπτομερής ανάλυση των αποτελεσμάτων για διάφορες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων και με την ύπαρξη ή όχι μαγνητικού πεδίου ακολουθούμενα από τα τελικά συμπεράσματα της μελέτης στην παράγραφο 3.7.

3.2 Φορμαλισμός του προβλήματος και μαθηματική ανάλυση

Η θεώρηση του προβλήματος είναι παρόμοια με αυτή που αναφέρεται στο προηγούμενο Κεφάλαιο της στρωτής ροής. Βέβαια, εδώ θεωρούμε την μόνιμη διδιάστατη μαγνητοϋδροδυναμική συμπίεστη ροή τυρβώδους οριακού στρώματος πάνω από λεία και διαπερατή επίπεδη επιφάνεια. Η επιφάνεια ορίζεται από τις σχέσεις

$$y = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad -\infty < z < +\infty$$

και είναι παράλληλη σε ελεύθερο ρεύμα ενός θερμικά αγωγίμου αερίου ταχύτητας u_∞ που κινείται κατά την θετική φορά του x-άξονα (Σχήμα 2.2.1 Κεφαλαίου II). Το ρευστό είναι νευτώνειο, ηλεκτρικά αγωγίμο και η πλάκα είναι ηλεκτρικά μονωμένη. Ένα μαγνητικό πεδίο σταθερής έντασης $\vec{B} = (0, B_0, 0)$ εφαρμόζεται κάθετα στην επίπεδη επιφάνεια και στην διεύθυνση της ροής. Το μαγνητικό πεδίο θεωρούμε ότι είναι σταθερό σε σχέση με την ακίνητη πλάκα και ότι ο μαγνητικός αριθμός Reynolds της ροής είναι πολύ μικρότερος της μονάδας έτσι ώστε το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο να μπορεί να αγνοηθεί. Τέλος, το φαινόμενο της πόλωσης θεωρείται αμελητέο όπως και ότι το ρευστό δεν υπόκειται στην επίδραση ηλεκτρικού πεδίου ($\vec{E} = \vec{0}$).

3.2.1 Το μοντέλο των μέσων τιμών των εξισώσεων οριακού στρώματος που πρότεινε ο Reynolds (Reynolds-averaged equations)

Για την μελέτη τυρβωδών ροών έχουν αναπτυχθεί ειδικές τεχνικές έτσι ώστε οι τελικές εξισώσεις που προκύπτουν να περιγράφουν τις ροές αυτές. Μετά από παρατήρηση αυτών των ροών προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι φυσικές μεταβλητές της ροής (π.χ. η ταχύτητα και η πίεση) σε συγκεκριμένο σημείο της ροής δεν παραμένουν σταθερές με τον χρόνο αλλά πραγματοποιούν ακανόνιστες διακυμάνσεις υψηλής συχνότητας γύρω από μια μέση τιμή [124]. Αυτές οι διακυμάνσεις γίνονται ορατές από το γεγονός ότι ολόκληρα κομμάτια του ρευστού (αποτελούμενα από πολλά ρευστά σωματίδια) κάνουν δικές τους κινήσεις που υπερθέτονται στην κύρια ροή. Έτσι, παρατηρούνται ακανόνιστες κινήσεις με την μορφή δινών ή ανάμιξης των στρωμάτων της ροής. Το μέγεθος αυτών των δομών καθορίζει κατ' αποκλειστικότητα το *επίπεδο της τύρβης*. Το μέγεθος αυτών των δομών μέσα στην κύρια ροή καθορίζεται κυρίως από

εξωτερικούς παράγοντες, όπως την τύρβη του ελευθέρου ρεύματος, την τραχύτητα των επιφανειών, κλπ. Για μια ποιο εκτενή εισαγωγή στην φυσική της τύρβης ο αναγνώστης μπορεί να δει την αναφορά [17].

Η συνήθης διαδικασία που εφαρμόζεται για την μελέτη τυρβωδών ροών είναι να θεωρείται ότι κάθε φυσική μεταβλητή της ροής αποτελείται από το άθροισμα της μέσης (ως προς τον χρόνο) τιμής της και της στιγμιαίας της διακύμανσης στο τυχόν σημείο του χώρου. Έτσι και σε αυτή την εργασία, στις εξισώσεις του στρωτού οριακού στρώματος αντικαθίστανται οι στιγμιαίες ποσότητες από το άθροισμα των μέσων τους τιμών και των διακυμάνσεων τους. Δηλαδή έχουμε ότι

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (3.1)$$

Επειδή η τυρβώδης ροή που μελετάται εδώ είναι συμπιεστή, πρέπει να συμπεριληφθούν διακυμάνσεις στην πυκνότητα ρ και στην θερμοκρασία T , δηλαδή

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad T = \bar{T} + T'. \quad (3.2)$$

Η μέση τιμή ως προς τον χρόνο μιας χρονοεξαρτώμενης ποσότητας $f(\bar{r}, t)$ σε ένα σταθερό σημείο του χώρου συμβολίζεται $\bar{f}(\bar{r})$ και ορίζεται ως

$$\bar{f}(\bar{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\bar{r}, t) dt. \quad (3.3)$$

Ουσιαστικά αντί του $\lim_{T \rightarrow \infty}$ θεωρούμε ότι το χρονικό διάστημα T είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε η ποσότητα $\frac{1}{T} \int_0^T f(\bar{r}, t) dt$ να είναι ανεξάρτητη του χρόνου t . Οι μέσες τιμές των διακυμάνσεων εξ ορισμού είναι μηδέν, δηλαδή

$$\overline{u'} = 0, \quad \overline{v'} = 0, \quad \overline{p'} = 0, \quad \overline{\rho'} = 0, \quad \overline{T'} = 0, \quad (3.4)$$

αλλά όροι της μορφής $\overline{u'^2}$ είναι θετικοί αφού πάντα $u'^2 \geq 0$. Θεωρώντας τώρα τις εξισώσεις του στρωτού συμπιεστού οριακού στρώματος με την ύπαρξη ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου (βλ. εξισώσεις (2.1)-(2.3), Κεφαλαίου II) και αντικαθιστώντας στις στιγμιαίες ποσότητες το άθροισμα των μέσων τους τιμών και των διακυμάνσεων τους καταλήγουμε στο μοντέλο των μέσων τιμών των εξισώσεων οριακού στρώματος που πρότεινε ο Reynolds για διδιάστατη ροή σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) , που για την περίπτωση ύπαρξης του μαγνητικού πεδίου οι εξισώσεις αυτές είναι οι εξής:

εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'}) = 0, \quad (3.5)$$

εξίσωση ορμής κατά τον x-άξονα

$$(\bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (\bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - (\overline{\rho u' v'} + \overline{\rho' u' v'}) \right] - \sigma B_0^2 \bar{u}, \quad (3.6)$$

εξίσωση ορμής κατά τον y-άξονα

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (3.7)$$

εξίσωση ενέργειας

$$c_p \left[(\bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + (\bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'}) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - c_p \bar{\rho} \overline{T' v'} - c_p \overline{\rho' T' v'} \right] + \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \sigma B_0^2 (\bar{u} + u')^2. \quad (3.8)$$

Το κριτήριο για να θεωρηθεί ο όρος της θερμότητας λόγω τριβής $\mu(\partial \bar{u} / \partial y)^2$ αμελητέος στην εξίσωση (3.8), συγκρινόμενος με τον όρο της μεταφοράς θερμότητας λόγω αγωγής, είναι $\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \ll \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)$ ή, ισοδύναμα ότι ο αριθμός Mach της ροής πρέπει να είναι πολύ μικρότερος της ποσοστιαίας μεταβολής της θερμοκρασίας που οφείλεται στην μεταφορά θερμότητας από ή προς την ροή $\left(M_\infty^2 \ll \frac{1}{(\gamma-1)\text{Pr}} \frac{\Delta T}{T_\infty} \right)$ [29].

Με την ανωτέρω υπόθεση και συμβολίζοντας ως H την ολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας (ενθαλπία ανακοπής (stagnation enthalpy) ή “ενθαλπία”), που για ένα ιδανικό αέριο δίνεται από την σχέση

$$H = c_p T + \frac{1}{2} u^2, \quad (3.9)$$

αποδεικνύεται ότι το σύστημα των εξισώσεων (3.5)-(3.8) του προβλήματος μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'}) = 0, \quad (3.10)$$

εξίσωση ορμής κατά τον x-άξονα

$$(\bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (\bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - (\bar{\rho} \overline{u' v'} + \overline{\rho' u' v'}) \right] - \sigma B_0^2 \bar{u}, \quad (3.11)$$

εξίσωση ορμής κατά τον y-άξονα

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \quad (3.12)$$

εξίσωση ολικής ενέργειας

$$(\bar{\rho} \bar{u} + \overline{\rho' u'}) \frac{\partial H}{\partial x} + (\bar{\rho} \bar{v} + \overline{\rho' v'}) \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - c_p \bar{\rho} \overline{T' v'} - c_p \overline{\rho' T' v'} + \bar{u} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\rho} \overline{u' v'} - \overline{\rho' u' v'} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Το πρώτο συμπέρασμα που συνάγεται από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων (3.10)-(3.13) και συγκεκριμένα από την εξίσωση (3.12), είναι ότι η πίεση $\bar{p}$ είναι συνάρτηση μόνο του x και όχι του y , δηλαδή $\bar{p} = \bar{p}(x)$. Αυτό το συμπέρασμα είναι αναμενόμενο αφού αποδεικνύεται ότι η πίεση επιβάλλεται από το ελεύθερο ρεύμα στο οριακό στρώμα.

Εξετάζοντας την τάξη μεγέθους κάθε όρου στις παραπάνω εξισώσεις, αποδεικνύεται ότι οι διακυμάνσεις της πυκνότητας είναι πρακτικά πολύ μικρές, τόσο στις ροές με μικρή ταχύτητα και μεγάλη μεταφορά θερμότητας όσο και στις αδιαβατικές ροές με μεγάλη ταχύτητα [29]. Έτσι, όροι που περιέχουν ρ' μπορούν να απαλειφθούν για λεπτά οριακά στρώματα (thin shear layers). Επίσης ο όρος $\overline{\rho'u'}$ είναι αμελητέος συγκρινόμενος με τον $\overline{\rho u}$, αρκεί το $(\gamma - 1)M^2$ να μην είναι μεγαλύτερο της τάξεως της μονάδας. Από την άλλη πλευρά ο όρος $\overline{\rho'u'}$ δεν μπορεί να παραληφθεί, συγκρινόμενος με τον $\overline{\rho v}$, στις παραπάνω εξισώσεις, συνέχειας, ορμής και ενέργειας. Είναι δυνατό οι όροι $\overline{\rho'u'v'}$ και $\overline{\rho'T'u'}$ των εξισώσεων ορμής και ενέργειας, συγκρινόμενοι με τους όρους $\overline{\rho u'u'}$ και $\overline{\rho T'u'}$, αντίστοιχα, να αγνοηθούν, διότι ο λόγος των πυκνοτήτων $\rho'/\bar{\rho}$ είναι πολύ μικρός. Τέλος, κάνοντας την συντόμευση $\overline{\rho v}$ αντί για $\overline{\rho v} + \overline{\rho'u'}$ και συμβολίζοντας, για ευκολία, το $\bar{u}$ με u και το $\bar{T}$ με T , οι εξισώσεις του υπό μελέτη προβλήματος αποδεικνύεται ότι γράφονται τελικά ως εξής

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho v}) = 0, \quad (3.14)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho u'u' \right] - \sigma B_0^2 u, \quad (3.15)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \overline{\rho v} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} - c_p \overline{\rho T'u'} + u \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho u'u' \right) \right]. \quad (3.16)$$

Οι εξισώσεις αυτές, με την παραπάνω ανάλυση, περιγράφουν γενικά την συμπίεστη τυρβώδη ροή ρευστού μέσα σε οριακό στρώμα πάνω από επίπεδη πλάκα με την επίδραση μαγνητικού πεδίου κάθετου σ' αυτήν. Για την μαθηματική αντιμετώπιση του συστήματος αυτού είναι απαραίτητο να αντικατασταθεί η βαθμίδα πίεσης μέσω γνωστών ποσοτήτων της ροής. Επίσης, οι "φαινομενολογικές" τάσεις ή τάσεις Reynolds $\overline{\rho u'u'}$ της εξίσωσης ορμής και οι όροι $c_p \overline{\rho T'u'}$ και $u \overline{\rho u'u'}$ της εξίσωσης ενέργειας, που συνδέονται με την μετατροπή της κινητικής ενέργειας του ρευστού σε θερμότητα λόγω των διακυμάνσεων της ροής, θα πρέπει να συνδεθούν με τις μεταβλητές της μέσης ροής και με μεγέθη που θα μας επιτρέψουν στην συνέχεια την υιοθέτηση κάποιου μοντέλου τύρβης. Στην παρακάτω λοιπόν παράγραφο πραγματοποιείται η διαδικασία αυτή και δίνεται η κατάλληλη μορφή του συστήματος, με τις συνοριακές του συνθήκες, έτσι ώστε να περιγράψει το πρόβλημα που μελετάται στο Κεφάλαιο αυτό.

3.2.2 Μαθηματική περιγραφή του προβλήματος

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Bernoulli, για την περίπτωση της μαγνητοϋδροδυναμικής ροής [140],

$$-\frac{dp}{dx} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \sigma B_0^2 u_e, \quad (3.17)$$

η εξίσωση (3.15) μπορεί τώρα να γραφεί ως

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\rho u} \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \sigma B_0^2 u_e + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho u'v' \right] - \sigma B_0^2 u. \quad (3.18)$$

Η μόνιμη διδιάστατη συμπιεστή MHD τυρβώδης ροή οριακού στρώματος, του υπό μελέτη προβλήματος, περιγράφεται τελικά από τις παρακάτω εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho u}) = 0, \quad (3.19)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\rho u} \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho u'v' \right] - \sigma B_0^2 (u - u_e), \quad (3.20)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \overline{\rho u} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} - c_p \rho T'v' + u \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho u'v' \right) \right]. \quad (3.21)$$

Η παραβολική φύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων απαιτεί συνοριακές συνθήκες και στα δύο σύνορα του χωρίου ολοκλήρωσης D ($y=0$ και $y=\delta$) εκτός από τις αρχικές συνθήκες στο $x=x_0$. Έτσι, οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που μελετάται είναι

$$y=0: u=0, v=v_w(x), H=H_w(x), \quad (3.22)$$

$$y=\delta: u=u_e(x), H=H_e(x),$$

όπου δ είναι μια απόσταση αρκετά μακριά από το τοίχωμα της πλάκας όπου η ταχύτητα u και η ολική ενέργεια H γίνονται ίσες με την ταχύτητα και “ενθαλπία” του ελεύθερου ρεύματος και $v_w(x)$ είναι η ταχύτητα μεταφοράς μάζας (απορρόφησης/έγχυσης) στο τοίχωμα. Σε περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας η ταχύτητα μεταφοράς μάζας είναι ίση με μηδέν ($v_w(x)=0$). Όπως αναφέρθηκε και πιο πριν η ολική ενέργεια H για ιδανικό αέριο δίνεται από την εξίσωση (3.9) και συνεπώς οι συνοριακές συνθήκες, που αναφέρονται στην ολική ενέργεια H στο τοίχωμα και στο ελεύθερο ρεύμα, ορίζονται ως εξής

$$y=0: H=H_w(x)=c_p T_w(x), \quad y=\delta: H=H_e(x)=c_p T_e(x) + \frac{1}{2} u_e^2(x). \quad (3.23)$$

Πριν γίνει προσπάθεια για την επίλυση των εξισώσεων (3.19)-(3.21), που περιγράφουν την MHD τυρβώδη ροή, υποκείμενες στις συνοριακές συνθήκες (3.22), είναι απαραίτητο να θεωρηθεί ένα μοντέλο για τους όρους $-\rho \overline{u'v'}$ (τάση Reynolds) και $-c_p \rho \overline{T'v'}$ (ταχύτητας τυρβώδους θερμικής ροής). Για την τυρβώδη διατμητική τάση $-\rho \overline{u'v'}$, σε διδιάστατα λεπτά οριακά στρώματα, το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες ε_m ορίζεται από την έκφραση

$$\varepsilon_m = \frac{-\overline{u'v'}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (3.24)$$

ενώ η τυρβώδης διάχυση της θερμότητας ε_h , για την τυρβώδη θερμική ροή, ορίζεται από την σχέση

$$\varepsilon_h = \frac{-\overline{T'v'}}{\frac{\partial T}{\partial y}} \quad (3.25)$$

Ο λόγος $\varepsilon_m / \varepsilon_h$, των παραπάνω ποσοτήτων, καλείται τυρβώδης αριθμός Prandtl Pr_t σε αναλογία με τον μοριακό αριθμό Prandtl, $Pr = \mu c_p / k$. Ορίζοντας το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες ε_m και τον τυρβώδη αριθμό Prandtl Pr_t , όπως φαίνεται στις παρακάτω εκφράσεις

$$-\overline{u'v'} = \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\overline{T'v'} = \frac{\varepsilon_m}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (3.26)$$

οι εξισώσεις, που τελικά περιγράφουν το υπό μελέτη πρόβλημα, γράφονται

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (3.27)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \rho \varepsilon_m) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \sigma B_0^2 (u - u_e), \quad (3.28)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{\mu}{Pr} + \rho \frac{\varepsilon_m}{Pr_t} \right) \frac{\partial H}{\partial y} + \left[\mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) + \rho \varepsilon_m \left(1 - \frac{1}{Pr_t} \right) \right] u \frac{\partial u}{\partial y} \right\}, \quad (3.29)$$

με συνοριακές συνθήκες τις

$$\begin{aligned} y=0: u=0, v=v_w(x), H=H_w(x), \\ y=\delta: u=u_e(x), H=H_e(x). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.27)-(3.29) αποτελεί ένα συζευγμένο μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, παραβολικού τύπου, με άγνωστες τις συναρτήσεις $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ και $H = H(x, y)$ ορισμένες στο ορθογώνιο χωρίο $D = \{(x, y) / 0 < x < L, 0 < y < \delta (\delta \rightarrow \infty)\}$ που υπόκεινται στις συνοριακές συνθήκες (3.30). Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων με τις συνοριακές συνθήκες του, περιγράφουν την MHD τυρβώδη ροή συμπίεστου οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας. Για την περαιτέρω ανάλυση και μελέτη του προβλήματος θα πρέπει να μετατρέψουμε τις εξισώσεις με τις συνοριακές τους συνθήκες σε αδιάστατη μορφή.

3.2.3 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων

Στην παραπάνω παράγραφο, καταλήξαμε στο σύστημα των εξισώσεων (3.27)-(3.30), συζευγμένο και μη γραμμικό που περιγράφει την MHD τυρβώδη και συμπίεστη ροή. Για την λύση αυτού του συστήματος είναι απαραίτητη η αδιαστατοποίηση των εξισώσεων και των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος. Για τον σκοπό αυτό εισάγουμε τον μετασχηματισμό των Falkner-Skan, για συμπίεστη ροή, που ορίζεται ως

$$\eta(x, y) = \int_0^y \left(\frac{u_e(x)}{v_e(x)} x \right)^{1/2} \frac{\rho(x, y)}{\rho_e(x)} dy \quad (3.31)$$

$$\psi(x, y) = (\rho_e \mu_e u_e x)^{1/2} f(x, \eta)$$

και τον ορισμό της ρευματικής συνάρτησης ψ , για τυρβώδη συμπίεστη ροή, ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας, εξίσωση (3.27), και δίνεται από τις σχέσεις

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \overline{\rho v} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.32)$$

Ορίζοντας επίσης την αδιάστατη ταχύτητα $f' = u / u_e$ και την αδιάστατη ολική ενέργεια $S = H / H_e$, το υπό μελέτη σύστημα των εξισώσεων αποδεικνύεται ότι παίρνει την μορφή

$$(bf'')' + m_1 f f'' + m_2 [c - (f')^2] = x \left\{ m_3 (f' - 1) + f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right\}, \quad (3.33)$$

$$(eS' + d f' - f'')' + m_1 f S' = x \left\{ f' \frac{\partial S}{\partial x} - S' \frac{\partial f}{\partial x} \right\}, \quad (3.34)$$

$$\eta = 0 : f' = 0, f_w(x) = f(x, 0) = - \frac{1}{(u_e \mu_e \rho_e x)^{1/2}} \int_0^x \rho_w(x, 0) v_w(x) dx, S = S_w(x, 0), \quad (3.35)$$

$$\eta = \eta_e : f' = 1, S = 1,$$

όπου η_e το αδιάστατο πάχος του οριακού στρώματος, οι τόνοι δηλώνουν μερική παραγωγή ως προς η ($(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\eta$) και οι ποσότητες b, m_1, m_2, m_3 , κλπ ορίζονται ως

$$\begin{aligned}
 b &= C(1 + \varepsilon_m^+), \quad C = \frac{\rho(x, \eta)\mu(x, \eta)}{\rho_e(x)\mu_e(x)}, \quad c = \frac{\rho_e(x)}{\rho(x, \eta)}, \\
 d &= \frac{Cu_e^2(x)}{H_e(x)} \left[1 - \frac{1}{\text{Pr}} + \varepsilon_m^+ \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}_t} \right) \right], \quad \varepsilon_m^+ = \frac{\varepsilon_m}{v(x, \eta)}, \\
 e &= \frac{C}{\text{Pr}} \left(1 + \varepsilon_m^+ \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t} \right), \quad m_2 = \frac{x}{u_e(x)} \frac{du_e(x)}{dx}, \quad R_x = \frac{u_e(x) x}{v_e(x)} \\
 m_1 &= \frac{1}{2} \left[1 + m_2 + \frac{x}{\rho_e(x)\mu_e(x)} \frac{d}{dx} (\rho_e \mu_e) \right], \\
 m_3 &= \frac{m_0 c}{\rho_e u_e}, \quad m_0 = \sigma B_0^2.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Ο συντελεστής m_3 καλείται "μαγνητική παράμετρος" και αξίζει να σημειωθεί ότι με την απουσία μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 0$) ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης ορμής (3.33) μηδενίζεται, κάνοντας δυνατή την συγκριτική μελέτη με την αεροδυναμική περίπτωση που έχει ήδη μελετηθεί στην [83]. Στα προβλήματα της μαγνητοϋδροδυναμικής (MHD) η "μαγνητική παράμετρος" m_3 , παίζει σημαντικό ρόλο και αναπαριστά την επίδραση του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου στο πεδίο ροής. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στην περίπτωση της στρωτής συμπίεστης ροής, το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες ε_m και ο τυρβώδης αριθμός Prandtl Pr_t είναι μηδέν και τότε οι ποσότητες b, d και e ορίζονται ως (βλ. Κεφάλαιο II, παραγ. 2.4.4)

$$b = C, \quad d = \frac{Cu_e^2(x)}{H_e(x)} \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \quad \text{και} \quad e = \frac{b}{\text{Pr}}. \tag{3.37}$$

Το πρόβλημα τελικά περιγράφεται από το σύστημα των εξισώσεων (3.33) και (3.34), με συνοριακές συνθήκες τις (3.35), ενώ οι διάφοροι συντελεστές των εξισώσεων ορίζονται στην (3.36). Σε αυτή την περίπτωση, όπως και σε πολλές άλλες, το σύστημα των εξισώσεων του τυρβώδους οριακού στρώματος παραμένει παραβολικού τύπου και μπορεί να λυθεί αριθμητικά με τον ίδιο τρόπο όπως και το σύστημα των εξισώσεων της στρωτής ροής. Ωστόσο, πριν προχωρήσουμε στην αριθμητική λύση του συστήματος, θα πρέπει να υιοθετηθεί κάποιο μοντέλο τύρβης. Στην επόμενη παράγραφο γίνεται αναφορά γενικά στα μοντέλα τύρβης και ειδική ανάλυση των αλγεβρικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται σε αυτό το Κεφάλαιο για την μελέτη της τυρβώδους ροής.

3.3 Μοντέλα τύρβης

Σε αυτή την παράγραφο θα γίνει μια γενική παρουσίαση μερικών μοντέλων τύρβης που έχουν αναπτυχθεί για την μελέτη τυρβωδών ροών. Το αντικείμενο αυτής της παραγράφου είναι κυρίως η ανάπτυξη των αλγεβρικών μοντέλων, αφού αυτά είναι τα μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται σε αυτή την διατριβή. Συγκεκριμένα, γίνεται χρήση δύο διαφορετικών αλγεβρικών μοντέλων τύρβης, το μοντέλο των Cebeci και Smith, καθώς και το μοντέλο των Baldwin και Lomax. Αναλυτική παρουσίαση των μοντέλων αυτών γίνεται σε ξεχωριστή παράγραφο. Παρουσιάζονται επίσης περιληπτικά πιο σύγχρονα μοντέλα τύρβης από τα χρησιμοποιούμενα.

3.3.1 Εισαγωγή

Ο υπολογισμός των τυρβωδών ροών, ουσιαστικά η αναζήτηση ενός μοντέλου για τις τυρβώδεις διατμητικές τάσεις ή διατμήσεις Reynolds, ξεκινά από την εποχή του Osborne Reynolds. Η απουσία υπολογιστικών μηχανών είχε αναγκάσει τους ερευνητές να περιορίσουν τη μελέτη προβλημάτων τυρβωδών ροών σε απλές γεωμετρίες. Αρχικά οι περισσότερες μέθοδοι πρόβλεψης του οριακού στρώματος ήταν εμπειρικές και βασίζονταν σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Κατά τα μέσα αυτού του αιώνα πραγματοποιήθηκε μια αλματώδης εξέλιξη των υπολογιστών. Αυτή η εξέλιξη είχε ως αποτέλεσμα, από τα μέσα της δεκαετίας του '60, την ανάπτυξη μοντέλων βασισμένων σε μερικές διαφορικές εξισώσεις. Πρόσφατα, μερικοί από τους πιο μεγάλους σε ισχύ υπολογιστές χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση των τρισδιάστατων, χρονοεξαρτημένων τυρβωδών εξισώσεων Navier-Stokes με μεγάλο επίπεδο τύρβης. Για την αριθμητική λύση χρησιμοποιήθηκε ένα απλό ημι-εμπειρικό μοντέλο τύρβης με την στατιστική της κίνησης σε κλίμακα μικρότερη από το μέγεθος του πλέγματος των πεπερασμένων διαφορών που διακριτοποίησαν το χωρίο ολοκλήρωσης [18].

Η ανάπτυξη των υπολογιστών αλλά και η ανάγκη μελέτης της τυρβώδους ροής, ανάγκασαν τους επιστήμονες, με το πέρασμα των δεκαετιών, να αναπτύξουν αρκετά μοντέλα τύρβης προσεγγίζοντας λίγο ή πολύ το πολύπλοκο αυτό φαινόμενο. Οι λόγοι μελέτης της τυρβώδους ροής ξεκινούν από καθαρά επιστημονικό ενδιαφέρον αλλά και από την ανάγκη του ανθρώπου να κατασκευάσει πιο οικονομικές μηχανές που θα δίνουν την δυνατότητα σε οχήματα να κινούνται μέσα στην ατμόσφαιρα ή το νερό με όσο το δυνατόν πιο μεγάλες ταχύτητες, αλλά μικρότερη τριβή, άρα και μικρότερη κατανάλωση ενέργειας. Μερικά από τα μοντέλα αυτά είναι

1. **Αλγεβρικά μοντέλα ή μοντέλα μηδενικού αριθμού εξισώσεων.** Αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιούν μόνο μερικές διαφορικές εξισώσεις για την μέση ταχύτητα και αλγεβρικές εξισώσεις για την μοντελοποίηση της τύρβης.
2. **Μοντέλα μιας εξίσωσης.** Αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιούν μια μερική διαφορική εξίσωση για την τυρβώδη ταχύτητα μαζί με τις εξισώσεις της μέσης ροής.
3. **Μοντέλα δύο εξισώσεων.** Είναι μοντέλα που χρησιμοποιούν μια επιπλέον εξίσωση από τα προηγούμενα. Δηλαδή εκτός από την μερική διαφορική εξίσωση για την τυρβώδη ταχύτητα χρησιμοποιούν και μια ακόμα εξίσωση για το μέγεθος της τύρβης (turbulence length scale).
4. **Μοντέλα των εξισώσεων διάτμησης.** Αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιούν μερικές διαφορικές εξισώσεις για όλους τους όρους του τανυστή τάσεων του Reynolds, καθώς και για το μέγεθος της τύρβης.

5. **Προσομοίωση των μεγάλων δινών (Large Eddy Simulation - LES).** Σε αυτή την μέθοδο γίνονται υπολογισμοί για την τριδιάστατη, χρονοεξαρτώμενη δομή των μεγάλων δινών, καθώς και η χρήση ενός μοντέλου χαμηλού επιπέδου για την μικρού μεγέθους τύρβη της ροής.

Τα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης είναι τα πιο παλιά μοντέλα που υπάρχουν και τα πιο απλά σε σύλληψη και εφαρμογή. Η χρήση τους όμως ενδείκνυται λόγω ορισμένων πλεονεκτημάτων που παρουσιάζουν. Ένα από αυτά είναι η ορθότητα τους που έχει πιστοποιηθεί μετά από πολύχρονη χρήση. Λόγω της απλότητας τους είναι εύκολα στον προγραμματισμό για την μελέτη τυρβωδών ροών. Από πλευράς εξέλιξης όμως έχουν πλέον φτάσει σε οριακό σημείο. Τα μοντέλα εκείνα που χρησιμοποιούν μερικές διαφορικές εξισώσεις για την τύρβη αποτελούν εξέλιξη των αλγεβρικών μοντέλων. Αυτό σημαίνει ότι αποτελούν πιο σύγχρονες και πιο γενικές τεχνικές αφού εφαρμόζονται σε μεγαλύτερο φάσμα ροών. Ωστόσο, οι ικανότητες τους δεν έχουν πλήρως δοκιμαστεί, λόγω έλλειψης πειραματικών δεδομένων. Τα βήματα εξέλιξης τους είναι αρκετά ακόμα, παρά τα καλύτερα αποτελέσματα που δίνουν σε σχέση με τα αλγεβρικά μοντέλα.

Τα αλγεβρικά μοντέλα χρησιμοποιούνται ευρέως από τις πιο έμπειρες μηχανολογικές εταιρίες, ενώ τα μοντέλα μιας εξίσωσης χρησιμοποιούνται περιστασιακά από αυτές. Τα μοντέλα δύο εξισώσεων είναι πιο δημοφιλή στους ακαδημαϊκούς κύκλους, ενώ τα μοντέλα των εξισώσεων διάτμησης ακόμα και σήμερα είναι υπό εξέλιξη. Τέλος, η μέθοδος της προσομοίωσης των μεγάλων δινών φαίνεται πως είναι η τεχνική εκείνη που θα μπορεί να χειρίζεται με ακρίβεια τις πολύπλοκες και δύσκολες σε γεωμετρία ροές αν και είναι νωρίς ακόμα για συμπεράσματα. Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζονται τα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης και επικεντρώνεται η προσοχή σε αυτά που χρησιμοποιούνται στην διατριβή αυτή.

3.3.2 Αλγεβρικά μοντέλα τύρβης ή μοντέλα μηδενικού αριθμού εξισώσεων

Τα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης και γενικότερα τα μοντέλα τύρβης διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, στα διαφορικά (Differential) και στα ολοκληρωτικά μοντέλα τύρβης (Integral). Τα διαφορικά μοντέλα περιέχουν άμεσες υποθέσεις για τις τυρβώδεις διατμητικές τάσεις σε κάθε σημείο και αναζητούν την λύση των εξισώσεων του υπό μελέτη προβλήματος μέσω των εξισώσεων (αλγεβρικών ή διαφορικών) που τα δομούν. Από την άλλη πλευρά τα ολοκληρωτικά μοντέλα τύρβης περιέχουν ολοκληρωτικές παραμέτρους του οριακού στρώματος (πάχος ορμής, συντελεστής σχήματος, συντελεστής επιδερμικής τριβής, κλπ.). Έτσι αποφεύγεται η απευθείας επίλυση των μερικών διαφορικών εξισώσεων του προβλήματος που πολλές φορές είναι δύσκολη ή και αδύνατη. Σε αυτή την παράγραφο θα γίνει λόγος μόνο για τα διαφορικά μοντέλα τύρβης. Συγκεκριμένα θα μιλήσουμε αρχικά για το αλγεβρικό μοντέλο των Cebeci-Smith και στην συνέχεια για το αλγεβρικό μοντέλο των Baldwin-Lomax. Πριν όμως περιγράψουμε αυτά τα μοντέλα θα ήταν καλό να αναφερθούμε στο μήκος ανάμιξης (mixing length).

Μήκος ανάμιξης

Πριν αναφερθούμε στα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης θα ήταν σκόπιμο να εισαγάγουμε την έννοια του μήκους ανάμιξης. Το μήκος ανάμιξης προτάθηκε από τον Prandtl το 1925 [124]. Ο Prandtl, σε αναλογία με την κινητική θεωρία των αερίων,

θεώρησε ότι, κάθε διακύμανση λόγω τύρβης συσχετίζεται με μια κλίμακα μήκους και μια βαθμίδα ταχύτητας. Έτσι ο πρώτος όρος της (3.26) μπορεί να εκφραστεί ως

$$-\overline{u'v'} \sim C \left(l_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left(l_2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right), \quad (3.38)$$

όπου C μια σταθερά και τα l_1 και l_2 λέγονται μήκη ανάμιξης και αντιστοιχούν σ' ένα μέσο μέγεθος δινών. Αυτά τα μήκη, l_1 και l_2 , είναι πολύ μεγαλύτερα από τον μέσο ελεύθερο δρόμο των ρευστών σωματιδίων. Αντικαθιστώντας το Cl_1l_2 με μια κλίμακα μήκους l^2 έχουμε ότι

$$\varepsilon_m \sim l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (3.39)$$

Αυτή είναι η βασική έκφραση του μοντέλου του μήκους ανάμιξης. Για την πληρότητα του μοντέλου πρέπει επιπλέον να συσχετιστεί το μήκος l με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ροής. Η βασική παράμετρος είναι η απόσταση από το τοίχωμα. Έτσι οι Prandtl και Karman πρότειναν για το ιξώδες υπόστρωμα το l να είναι ανάλογο του y^2 ($l \sim y^2$). Στο αλληλοκαλυπτόμενο στρώμα το l να είναι ανάλογο με το ky ($l \sim ky$) όπου k μια σταθερά για την οποία θα γίνει λόγος πιο κάτω. Στο εξωτερικό στρώμα πρότειναν το $l \sim C$ (σταθερά), κλπ. Όλες αυτές οι εκφράσεις μπορούν να περιγραφούν από την συνάρτηση που εισήγαγε ο van Driest [29] και δίνεται από την σχέση

$$l \sim ky \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right], \quad (3.40)$$

όπου η σταθερά A εξαρτάται από τις συνθήκες της ροής όπως η βαθμίδα πίεσης, η τραχύτητα του τοιχώματος, η έγχυση/απορρόφηση ρευστού, κλπ. Η τιμή του A για λεία μη διαπερατή πλάκα είναι ίση με 26.

Μοντέλο τύρβης των Cebeci-Smith (C-S)

Όπως αναφέρθηκε αναλυτικά παραπάνω υπάρχουν αρκετά μοντέλα τύρβης που μοντελοποιούν το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες ε_m και τον τυρβώδη αριθμό Prandtl Pr_t . Για το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες ε_m χρησιμοποιείται αρχικά το μοντέλο των Cebeci και Smith [18, 27] που περιγράφεται αναλυτικά στην αναφορά [29]. Αυτό το μοντέλο είναι ένα από τα πιο απλά με αποδεκτή γενικότητα και η ακρίβεια του έχει επιβεβαιωθεί για ένα ευρύ φάσμα ροών με την βοήθεια πειραματικών δεδομένων. Έχει επίσης αποδειχτεί ότι δίνει επαρκώς ακριβή αποτελέσματα για πολλά μηχανολογικά προβλήματα [29, 101].

Για την μοντελοποίηση του τυρβώδους κινηματικού ιξώδους υιοθετείται η άποψη ότι το πεδίο ροής στο οριακό στρώμα αποτελείται από εσωτερική και εξωτερική περιοχή, με κάθε περιοχή να έχει τον δικό της τύπο για το ιξώδες. Αναλυτικότερα, το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες δίνεται από την σχέση

$$\varepsilon_m = \begin{cases} (\varepsilon_m)_i, & (\varepsilon_m)_i \leq (\varepsilon_m)_o \\ (\varepsilon_m)_o, & (\varepsilon_m)_i \geq (\varepsilon_m)_o \end{cases} \quad (3.41)$$

Για διδιάστατες ροές, όπως αυτή που μελετάται σε αυτή την εργασία, οι Cebeci-Smith για την εσωτερική περιοχή θεωρούν την μοντελοποίηση των Prandtl και Van Driest

$$(\varepsilon_m)_i = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \gamma_{ir} \gamma, \quad (3.42)$$

όπου

$$l = ky \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right], \quad (3.43)$$

$$\text{με } A = 26 \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{1/2} \frac{v_e}{N} u_\tau^{-1}, \quad u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{1/2}. \quad (3.44)$$

Στις ανωτέρω εκφράσεις ο συντελεστής A στον συντελεστή απόσβεσης (η ποσότητα σε αγκύλες της σχέσης (3.43)), διαφέρει από την τιμή 26 που έδωσε ο Van Driest, έτσι ώστε να βελτιώνεται η εκτιμητική ακρίβεια για οριακά στρώματα με βαθμίδα πίεσης. Το N για διαπερατή ή μη-διαπερατή επιφάνεια δίνεται από την σχέση

$$N = \left\{ \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\rho_e}{\rho_w} \right)^2 \left(\frac{p^+}{v_w^+} \right) \left[1 - \exp\left(11.8 \frac{\mu_w}{\mu} v_w^+ \right) \right] + \exp\left(11.8 \frac{\mu_w}{\mu} v_w^+ \right) \right\}^{1/2}, \quad (3.45)$$

$$\text{όπου } p^+ = \frac{v_e u_e}{u_\tau^3} \frac{du_e}{dx} \text{ και } v_w^+ = \frac{v_w}{u_\tau}, \quad (3.46)$$

όπου v_w είναι η ταχύτητα έγχυσης/απορρόφησης που εφαρμόζεται στην επιφάνεια, $k = 0.4$, ενώ τα γ_{ir} και γ δίνονται από τις σχέσεις

$$\gamma_{ir} = 1 - \exp\left[-G_{ir} (x - x_{ir}) \int_{x_{ir}}^x \frac{dx}{u_e} \right], \quad \gamma = \left[1 + 5.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1}, \text{ αντίστοιχα,} \quad (3.47)$$

$$\text{με } G_{ir} = 8.33 \times 10^{-4} \frac{u_e^3}{v_e^2} (R_x)^{-1.34}, \quad R_x = \frac{u_e x}{v_e}. \quad (3.48)$$

Το γ_{ir} καλείται συντελεστής διαλειπτότητας (intermittency factor) και χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει την περιοχή μετάπτωσης από στρωτή σε τυρβώδη ροή. Το γ είναι ένας δεύτερος συντελεστής διαλειπτότητας ο οποίος χρησιμοποιείται για τον λόγο του ότι στην περιοχή του ελευθέρου ρεύματος, η τύρβη γίνεται ασυνεχής. Τέλος το όρος G_{ir} έχει διαστάσεις ταχύτητας/(μήκος)² και υπολογίζεται στο σημείο μετάπτωσης της ροής από στρωτή σε τυρβώδη. Για την εξωτερική περιοχή θεωρούν ότι

$$(\varepsilon_m)_o = K \left| \int_0^\infty (u_e - u) dy \right| \gamma_r \gamma, \quad (3.49)$$

όπου $K = 0.0168$ είναι η σταθερά του Clauser.

Αυτό το μοντέλο τύρβης έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές εκτός από τους Cebeci και Smith. Για παράδειγμα, ο Harris [65] ανέπτυξε μια ακριβή και αποτελεσματική μέθοδο για τον υπολογισμό συμπιεστού στρωτού, μεταβατικού και τυρβώδους οριακού στρώματος χρησιμοποιώντας το μοντέλο C-S και διαφορετική αριθμητική τεχνική από τους τελευταίους. Οι Lewis et al. [96], Hopkins et al. [71] και Deboy και Abbot [46] χρησιμοποίησαν το μοντέλο Cebeci-Smith για τυρβώδη συμπιεστά οριακά στρώματα. Ο Cooper [39] επέκτεινε το μοντέλο τύρβης για τυρβώδη οριακά στρώματα πάνω από περιστρεφόμενο δίσκο. Αργότερα το μοντέλο αυτό χρησιμοποιήθηκε από τους Cebeci και Bradshaw [29]. Επίσης αρκετές είναι και οι σύγχρονες εργασίες που χρησιμοποιούν αυτό το μοντέλο τύρβης [83].

Πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι το μοντέλο όπως περιγράφεται δεν περιλαμβάνει τη περίπτωση ροής με μικρούς αριθμούς Reynolds. Εξάλλου μια τέτοια μοντελοποίηση είναι εκτός του περιεχομένου αυτής της διατριβής. Είναι προφανές ότι η γενικότητα και λειτουργικότητα του μοντέλου το καθιστούν κατάλληλο εργαλείο για τυρβώδεις συμπιεστές ροές, ροές με τις οποίες ασχολείται αυτή η εργασία. Πάνω σε αυτό το μοντέλο στηρίχτηκαν αργότερα οι Baldwin και Lomax για να δώσουν ένα πιο εξελιγμένο αλγεβρικό μοντέλο τύρβης.

Μοντέλο τύρβης των Baldwin-Lomax (B-L)

Οι B. Baldwin και H. Lomax [12] βελτίωσαν το προηγούμενο μοντέλο τύρβης αποφεύγοντας την αναγκαιότητα του προσδιορισμού της ακμής του οριακού στρώματος του μοντέλου των Cebeci-Smith. Οι Baldwin-Lomax δοκίμασαν αριθμητικά αυτό το μοντέλο με την βοήθεια κώδικα που αναπτύχθηκε από τον Steger [114, 138] και επιβεβαίωσαν τα αποτελέσματα τους με την βοήθεια πειραματικών δεδομένων [12]. Το μοντέλο αυτό είναι παρόμοιο με το προηγούμενο αφού στηρίζεται στο μοντέλο των Cebeci-Smith. Αποτελείται δηλαδή από εσωτερική και εξωτερική περιοχή για την μοντελοποίηση του τυρβώδους κινηματικού ιξώδους, με κάθε περιοχή να έχει τον δικό της τύπο για αυτό. Αναλυτικότερα, το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες δίνεται από την σχέση

$$\varepsilon_m = \begin{cases} (\varepsilon_m)_i, & (\varepsilon_m)_i \leq (\varepsilon_m)_o \\ (\varepsilon_m)_o, & (\varepsilon_m)_i \geq (\varepsilon_m)_o \end{cases}, \quad (3.50)$$

δηλαδή όπως αυτό των C-S (σχέση (3.41)). Για διδιάστατες ροές και για την εσωτερική περιοχή, οι Baldwin-Lomax θεωρούν, ουσιαστικά, την μοντελοποίηση των Prandtl-Van Driest, που δίνεται από την σχέση

$$(\varepsilon_m)_i = l^2 |\omega|. \quad (3.51)$$

Η σχέση αυτή στηρίζεται στην αρχή του μήκους ανάμιξης l (mixing-length concept) που δίνεται από την σχέση

$$l = ky \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right], \quad (3.52)$$

που πρώτοι οι Patankar και Spalding [27] διετύπωσαν. Επίσης $|\omega|$ είναι το μέτρο του στροβιλισμού του πεδίου ταχυτήτων της ροής. Για τριδιάστατες ροές το $|\omega|$ δίνεται από την σχέση

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}, \quad (3.53)$$

όπου u, v, w είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας, ενώ για διδιάστατες ροές, όπως η μοντελοποίηση που γίνεται εδώ, δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$|\omega| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right|, \quad (3.54)$$

με u, v την συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον x και y -άξονα, αντίστοιχα. Αν χρησιμοποιείται η θεώρηση του οριακού στρώματος για διδιάστατες ροές $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, τότε ο στροβιλισμός υπολογίζεται από την σχέση

$$|\omega| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \quad (3.55)$$

Το y^+ ισούται με

$$y^+ = \frac{\rho_w u_\tau y}{\mu_w} = \frac{\sqrt{\rho_w \tau_w} y}{\mu_w}, \quad (3.56)$$

και το $k = 0.4$. Ο συντελεστής A^+ διαφέρει από την τιμή που έδωσε ο van Driest στον συντελεστή απόσβεσης, έτσι ώστε να βελτιώνεται η εκτιμητική ακρίβεια για οριακά στρώματα με βαθμίδα πίεσης. Η μοντελοποίηση που γίνεται για τον A^+ είναι όμοια με αυτή που ακολουθείται και στο μοντέλο των Cebeci-Smith στην προηγούμενη παράγραφο για την περιγραφή τόσο ροών με βαθμίδα πίεσης όσο και ροών που εφαρμόζεται απορρόφηση ή έγχυση πάνω στην πλάκα. Για την εξωτερική περιοχή θεωρούν την μοντελοποίηση του Clauser με $K = 0.0168$. Σύμφωνα με αυτήν το ιξώδες της τύρβης για την εξωτερική στοιβάδα προσδιορίζεται από την σχέση

$$(\varepsilon_m)_o = KC_{CP} F_{WAKE} F_{KLEB}(y), \quad (3.57)$$

με C_{CP} μια ακόμη σταθερά ίση με 1.6 και

$$F_{WAKE} = \begin{cases} y_{MAX} F_{MAX} \\ \dot{\eta} \\ C_{WK} y_{MAX} U_{DIF}^2 / F_{MAX} \end{cases} \quad (3.58)$$

όπου $C_{WK} = 0.25$. Στην παραπάνω σχέση επιλέγεται κάθε φορά ως F_{WAKE} η έκφραση εκείνη από το μέλος της (3.58) που παίρνει την μικρότερη τιμή. Οι ποσότητες y_{MAX} και F_{MAX} καθορίζονται από την σχέση

$$F(y) = y |\omega| \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right]. \quad (3.59)$$

Στην περίπτωση αύλακας (απορεύματος (wake)), ο εκθετικός όρος της (3.59) τίθεται ίσος με μηδέν. Η ποσότητα F_{MAX} είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $F(y)$ και y_{MAX} είναι η τιμή του y για την οποία η $F(y)$ γίνεται μέγιστη. Η συνάρτηση $F_{KLEB}(y)$ είναι ο ασυνεχής παράγοντας του Klebanoff, που δίνεται από την σχέση

$$F_{KLEB}(y) = \left[1 + 5.5 \left(\frac{C_{KLEB} y}{y_{MAX}} \right)^6 \right]^{-1}, \quad (3.60)$$

με $C_{KLEB} = 0.3$. Η ποσότητα U_{DIF} είναι η διαφορά μεταξύ μέγιστης και ελάχιστης ολικής ταχύτητας μέσα στο πεδίο ροής. Δηλαδή για διδιάστατες ροές έχουμε

$$U_{DIF} = \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)_{MAX} - \left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)_{MIN}. \quad (3.61)$$

Ο δεύτερος όρος της U_{DIF} θεωρείται πάντα μηδέν εκτός από την περίπτωση ροής σε αύλακα.

Οι σχέσεις που δίνουν το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες στην εξωτερική περιοχή, εξισώσεις (3.57), (3.59) μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε αύλακα όπως επίσης και σε οριακό στρώμα που μένει προσκολλημένο πάνω στην πλάκα ή αποκολλάται. Το γινόμενο $y_{MAX} F_{MAX}$ αντικαθιστά το $\delta^* u_e$ στην μοντελοποίηση του Clauser και ο συνδυασμός $y_{MAX} U_{DIF}^2 / F_{MAX}$ αντικαθιστά το γινόμενο δU_{DIF} στην μοντελοποίηση της αύλακας. Κατ' ουσία, στο μοντέλο των B-L η κατανομή του στροβιλισμού χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της κλίμακας διαφόρων μηκών, χαρακτηριστικών του οριακού στρώματος, έτσι ώστε να αποφεύγεται τελικά η ανάγκη να εκτιμηθεί η ακμή του οριακού στρώματος όπως στο C-S μοντέλο.

Με την περιγραφή και αυτού του μοντέλου, κλείνει η παρουσίαση των αλγεβρικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται σε αυτή την διατριβή. Αυτά τα δύο μοντέλα αποτελούν τα πιο σημαντικά και πιο σύγχρονα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης. Παρακάτω γίνεται μια περιληπτική παρουσίαση των άλλων μοντέλων τύρβης που κατά καιρούς έχουν εξελιχθεί και χρησιμοποιηθεί από ερευνητές.

3.3.3 Μοντέλα μιας εξίσωσης

Επειδή το μήκος ανάμιξης l βασίζεται σε συσχετίσεις απλών διατμητικών ροών, η εφαρμογή του είναι περιορισμένη και δεν συνίσταται για πολύ σύνθετες ροές. Επομένως απαιτείται χρήση πιο εξελιγμένων μοντέλων τύρβης, που χειρίζονται τις φυσικές διαδικασίες μεταφοράς με πιο λεπτομερή τρόπο και χρησιμοποιούνται για μια πιο γενική κλάση τυρβωδών ροών. Οι πρώτοι που κατανόησαν την αδυναμία εφαρμογής του μήκους ανάμιξης l για κάθε ροή και πρότειναν το τυρβώδες ιξώδες να περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση παρά από ένα αλγεβρικό μοντέλο ήταν οι Kolmogorov [92] και Prandtl [113]. Οι τελευταίοι, αντί να συνδέσουν το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες με την βάρθρωση της ταχύτητας ή τον στροβιλισμό, θεώρησαν ότι αυτό πρέπει να συνδέεται με την τετραγωνική ρίζα της μέσης τυρβώδους κινητικής ενέργειας (ανά μονάδα μάζας), όπου για διδιάστατες ροές δίνεται από την σχέση

$$\sqrt{k} = \sqrt{\frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2})}. \quad (3.62)$$

Το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες δίνεται από την σχέση

$$\varepsilon_m = C_\mu \sqrt{k} l, \quad (3.63)$$

όπου C_μ είναι μια εμπειρική σταθερά ($C_\mu = 1.0$) και l είναι το μήκος ανάμιξης. Η μερική διαφορική εξίσωση από την οποία υπολογίζεται το k , για διδιάστατη χρονοανεξάρτητη, ροή είναι

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\varepsilon_m}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \varepsilon_m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \quad (3.64)$$

όπου ε είναι ο ρυθμός διάχυσης της τυρβώδους κινητικής ενέργειας (k) ο οποίος εκφράζεται ως

$$\varepsilon = C_D k^{3/2} / l. \quad (3.65)$$

Τέλος, C_D είναι μια άλλη εμπειρική σταθερά ($C_D = 0.08$), ενώ η σ_k είναι η σταθερά διάχυσης ($\sigma_k = 1.0$).

Εκτός των Kolmogorov και Prandtl, μοντέλα τύρβης μιας εξίσωσης αναπτύχθηκαν και από άλλους ερευνητές όπως το μοντέλο των Norris και Reynolds [108] με εφαρμογές στο ιξώδες υπόστρωμα και σε πλήρως τυρβώδεις ροές. Μια παρόμοια προσέγγιση με την προηγούμενη υιοθετήθηκε από μια ερευνητική ομάδα του Imperial College, συγκεκριμένα από τον Wolfstein [150]. Τέλος, οι Baldwin και Bath [11] ανέπτυξαν ένα πιο σύγχρονο μοντέλο τύρβης μιας εξίσωσης για μεγάλους αριθμούς Reynolds. Οι περισσότεροι ερευνητές εγκατέλειψαν τα μοντέλα μιας εξίσωσης. Ωστόσο τα μοντέλα αυτά μπορούν να δώσουν καλά αποτελέσματα για τις περισσότερες ροές, αφού αρκετές φορές είναι πιο εύκολο να προσδιορίζεται η κατανομή της κλίμακας μήκους (length-scale distribution) από το να υπολογίζεται από μια μερική διαφορική εξίσωση. Αυτό είναι προφανές στην περίπτωση που το μήκος, το οποίο εξαρτάται από τα κύρια χαρακτηριστικά της ροής, περιγράφεται από μια ολοκληρωδιαφορική εξίσωση.

3.3.4 Μοντέλα δύο εξισώσεων

Η προσπάθεια των ερευνητών για εξάλειψη της ανάγκης υπολογισμού του μήκους ανάμιξης l , σαν συνάρτηση της θέσης μέσα στην ροή, οδήγησε στην δημιουργία των μοντέλων τύρβης δύο εξισώσεων. Αυτά τα μοντέλα αποτελούνται από δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις που με την βοήθεια τους μοντελοποιείται το τυρβώδες κινηματικό ιζώδες ε_m . Μολονότι το πιο δημοφιλές και ακριβές μοντέλο είναι το k - ε , υπάρχουν και άλλα παρόμοια μοντέλα. Οι Spalding και Rodi [135] χρησιμοποίησαν το k - l μοντέλο για την πρόβλεψη των προφίλ της ταχύτητας, διάτμησης και της ενέργειας σε διδιάστατο τυρβώδη πίδακα και σύγκριναν τα αποτελέσματα τους με πειραματικά αποτελέσματα των Bradbury και Robbins όπου και διαπίστωσαν μεγάλη σύμπτωση. Το k - ω μοντέλο χρησιμοποιήθηκε από τον Runchal για την μελέτη ροής σε σωλήνα και από τον Wolfsthein για την πρόβλεψη των χαρακτηριστικών ενός πίδακα ρευστού που αναδύεται από σωλήνα και προσκρούει σε παρακείμενο τοίχωμα [60]. Ακολουθεί μια συνοπτική περιγραφή του k - ε μοντέλου τύρβης για μεγάλους αριθμούς Reynolds [93], αφού οι ροές που μελετώνται σε αυτή τη διατριβή αναφέρονται σε μεγάλους αριθμούς Reynolds (ροές κοντά στην ταχύτητα του ήχου). Το μοντέλο αυτό περιγράφει και ροές με μικρούς αριθμούς Reynolds, αλλά δεν αναφέρεται εδώ γιατί ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτής της διατριβής.

Για την περιγραφή του k - ε μοντέλου εισάγεται αρχικά η έννοια της τυρβώδους κινητικής ενέργειας k , που ορίζεται ως

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} \right), \quad (3.66)$$

για δύο διαστάσεις καθώς και η έννοια του ρυθμού διάχυσης αυτής ε , όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενη παράγραφο. Οι δύο αυτές ποσότητες υπολογίζονται μέσω μερικών διαφορικών εξισώσεων και συνδέονται με το τυρβώδες κινηματικό ιζώδες μέσω της σχέσης

$$\varepsilon_m = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.67)$$

όπου C_μ είναι μια σταθερά ($C_\mu = 0.09$). Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες υπολογίζονται τα k και ε είναι, αντίστοιχα, για διδιάστατη χρονοανεξάρτητη ροή

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu + \frac{\varepsilon_m}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\varepsilon_m}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \varepsilon_m \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \quad (3.68)$$

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\nu + \frac{\varepsilon_m}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\varepsilon_m}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_1 \varepsilon_m \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (3.69)$$

όπου C_1 και C_2 οι σταθερές αναλογίας, όπως επίσης και οι σ_k , σ_ε είναι σταθερές. Όλες αυτές υπολογίζονται από πειραματικά αποτελέσματα και ισούνται με

$$C_1 = 1.55, \quad C_2 = 2.0, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (3.70)$$

Η παραπάνω μεθοδολογία καλείται, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, *k-ε* μοντέλο τύρβης για μεγάλους αριθμούς Reynolds. Σε αυτό το μοντέλο το ιξώδες υπόστρωμα κοντά στο τοίχωμα της επιφάνειας, θεωρείται αμελητέο λόγω του μικρού του πάχους. Το παραπάνω μοντέλο θεωρείται το πιο αξιόπιστο από τα μοντέλα τύρβης. Ωστόσο τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί πιο αξιόπιστες τεχνικές από τα παραπάνω μοντέλα τύρβης, οι τεχνικές αυτές όμως βρίσκονται ακόμα σε αρχικό στάδιο και απαιτείται πολύ δουλειά για να αποδώσουν τα προσδοκώμενα αποτελέσματα.

3.3.5 Μοντέλα των εξισώσεων διάτμησης - Προσομοίωση των μεγάλων δινών.

Αυτές οι δύο τεχνικές βρίσκονται ακόμα στα αρχικά στάδια εξέλιξης τους και αναμένεται η ανάπτυξη τους να δώσει πολλές απαντήσεις για το σύνθετο και χαοτικό φαινόμενο της τύρβης. Τα μοντέλα των εξισώσεων διάτμησης ονομάζονται και μοντέλα πολλών εξισώσεων. Αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιούν διαφορετικές εξισώσεις για να εκφράσουν κάθε όρο του τανυστή τάσεων ή τανυστή Reynolds. Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι αποτελούνται από περισσότερες των δύο εξισώσεων για την μοντελοποίηση της τύρβης [18]. Μερικοί από τους ερευνητές που έχουν προτείνει τέτοια μοντέλα είναι οι Chou [34], Rotta [122], Davidov [44], Donaldson [48, 49], Harlow et al. [64], Hanjalic και Launder [63], Launder et. al. [95] κ.α. [60]. Όπως γίνεται κατανοητό γι' αυτά τα μοντέλα, ο αριθμός των εξισώσεων που πρέπει να λυθεί είναι πολύ μεγάλος, αφού στις μέσες εξισώσεις Navier-Stokes που περιγράφουν την ροή προστίθενται, στην καλύτερη περίπτωση, άλλες τρεις διαφορετικές εξισώσεις για να περιγράψουν την τύρβη. Τότε όμως οι υπολογισμοί γίνονται πολύ εκτενείς. Αποτέλεσμα αυτού είναι η εξέλιξη των μοντέλων αυτών να είναι σχετικά μικρή λόγω μειωμένης υπολογιστικής ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών, σε σχέση με αυτή που απαιτείται από τις παραπάνω τεχνικές.

Η πιο σύγχρονη μέθοδος για την μοντελοποίηση τυρβωδών ροών είναι η προσομοίωση των μεγάλων δινών (Large Eddy Simulation (LES)). Αν και αυτή η τεχνική μόλις τώρα αρχίζει να δίνει καρπούς είναι η μόνη από τις προαναφερθείσες μεθόδους που αποδίδει καλύτερα την φυσική των προβλημάτων της τυρβώδους ροής. Σ' αυτή την μέθοδο χρησιμοποιείται ένα πλέγμα τόσο πυκνό όσο απαιτείται για την ανάλυση των δινών μεγάλου μεγέθους της τυρβώδους ροής. Η συμπεριφορά των μικρότερων δινών περιγράφεται είτε με μοντέλα χαμηλού επιπέδου, που προκύπτουν από πειραματικές μετρήσεις, ή με την απευθείας επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν την ροή [18]. Τέλος, ένας ακόμα τρόπος αντιμετώπισης των προβλημάτων τυρβώδους ροής είναι η απευθείας επίλυση των εξισώσεων που διέπουν την ροή ή αλλιώς απευθείας αριθμητική προσομοίωση (Direct Numerical Simulation (DNS)). Σε αυτή την μέθοδο δεν χρειάζεται να γίνει καμιά απλοποίηση στις εξισώσεις Navier-Stokes, αλλά αυτές επιλύονται απευθείας για να δώσουν λύση στα βασικά μεγέθη της ροής, όπως οι ταχύτητες, πίεση, πυκνότητα και θερμοκρασία.

Από την παραπάνω ανάλυση είναι κατανοητό ότι η μελέτη της τυρβώδους ροής δεν είναι εύκολη. Πολλοί ερευνητές έχουν για δεκαετίες ασχοληθεί με το φαινόμενο και έχουν προσφέρει πολλές τεχνικές για την περιγραφή του. Ωστόσο απαιτείται πολύς δρόμος ακόμα για την πλήρη περιγραφή του. Οι μέθοδοι που αναφέρονται σε αυτή την παράγραφο ενδέχεται να προσφέρουν πολλά στην περιγραφή της τύρβης. Όμως είναι ακόμα νωρίς και απαιτούνται αρκετές προσπάθειες. Ένα μεγάλο πρόβλημα για την εφαρμογή των τεχνικών αυτών είναι η ανεπαρκής ισχύς των υπολογιστών. Παρά την τεράστια ανάπτυξη των υπολογιστικών μηχανών τις τελευταίες δεκαετίες, χρειάζεται

ακόμα μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύς για την πλήρη λύση των εξισώσεων Navier-Stokes. Το πρόβλημα επικεντρώνεται στην πολύπλοκη δομή των τυρβωδών ροών, η οποία για να περιγραφεί χρειάζεται πολύ πυκνό υπολογιστικό πλέγμα. Υπάρχουν βέβαια και οι υπερυπολογιστές που μπορούν να αντιμετωπίσουν τις εξισώσεις Navier-Stokes. Η χρήση όμως ακόμα και αυτών των μηχανών θα απαιτούσε πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα για τον υπολογισμό ενός μικρού χρονικού διαστήματος της ροής και μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

3.3.6 Μοντελοποίηση του τυρβώδη αριθμού Prandtl

Τα προηγούμενα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης μοντελοποιούν το τυρβώδες κινηματικό ιξώδες και θεωρούν τον τυρβώδη αριθμό Prandtl σταθερό. Πολλοί ήταν εκείνοι που σκέφτηκαν να μην διατηρήσουν τον τυρβώδη αριθμό Prandtl σταθερό αλλά να τον μεταβάλλουν σύμφωνα με κάποια σχέση. Πολλές και διαφορετικές εκφράσεις έχουν προταθεί από διάφορους για τον Pr_t . Ο Cebeci υιοθετώντας την ιδέα του Van Driest για την απόσβεση του μήκους ανάμιξης κοντά στο τοίχωμα πρότεινε ένα μοντέλο για τον τυρβώδη αριθμό Prandtl [28]. Το μοντέλο των Cebeci-Smith εξελίχτηκε από τους Chen και Chiu [31] για ροή υγρού μετάλλου σε σωλήνα συμπεριλαμβάνοντας το πάχος ενθαλπίας δ_T στον τυρβώδη αριθμό Prandtl Pr_t . Οι Jischa και Rieke [79] ανέπτυξαν ένα μοντέλο για τον Pr_t , από τις εξισώσεις μεταφοράς (modeled transport equations), που δίνεται από την έκφραση

$$Pr_t = 0.9 + \frac{182.4}{Pr R_x^{0.888}}. \quad (3.71)$$

Οι Kays και Crawford [87] ανέπτυξαν ένα μοντέλο υπολογισμού του Pr_t , το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλους τους μοριακούς αριθμούς Prandtl και δίνεται από την σχέση

$$Pr_t = 1 / \left\{ \frac{1}{2 Pr_{t_\infty}} + C Pe_t \sqrt{\frac{1}{Pr_{t_\infty}}} - (C Pe_t)^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{C Pe_t \sqrt{Pr_{t_\infty}}}\right) \right] \right\}, \quad (3.72)$$

$$\text{όπου} \quad Pe_t = Pr \varepsilon_m^+, \quad (3.73)$$

Pr_{t_∞} είναι η τιμή του Pr_t αρκετά μακριά από το τοίχωμα της πλάκας και $C = 0.3$ είναι μια σταθερά που περιγράφει την χωρική κατανομή του Pr_t συναρτήσει του Pe_t . Στο μοντέλο που αρχικά προτάθηκε από τους Kays και Crawford [87], ο Pr_{t_∞} θεωρήθηκε σταθερός και ίσος με 0.85. Αυτό είχε το μειονέκτημα ότι ο Pr_t παρέμενε μικρότερος από 1.7 και επίσης δημιουργείται μια ανεπιθύμητη συμπεριφορά στο μοντέλο, διότι για $Pr \rightarrow 0$ η θερμότητα θα μεταφέρεται αποκλειστικά από μοριακή αγωγή και γι' αυτό ο Pr_t θα έτεινε σε μεγάλη τιμή.

Από την άλλη μεριά, το μοντέλο για τον Pr_t , που δίνεται από την σχέση (3.71), δεν θεωρεί την χωρική κατανομή του Pr_t , έτσι η τιμή που δίνεται για τον Pr_t από την εξίσωση (3.71) μπορεί να θεωρηθεί σαν μια μέση τιμή του Pr_t δια μέσου ολόκληρου

του οριακού στρώματος . Για να ξεπεραστεί η παραπάνω ανεπιθύμητη συμπεριφορά του μοντέλου Jischa και Rieke και του αρχικού μοντέλου των Kays και Crawford οι Weigand et al. [146] υιοθέτησαν ένα συνδυασμό και των δύο μοντέλων χρησιμοποιώντας την συναρτησιακή μορφή του Pr_t που αναπτύχθηκε από τους Jischa και Rieke [79] σαν προσέγγιση για τον Pr_{t_∞} στην εξίσωση (3.71). Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία [146], αλλά έχει χρησιμοποιηθεί και σε άλλες εργασίες με επιτυχία [83]. Επιπλέον, για την προσέγγιση του τυρβώδους αριθμού Prandtl Pr_{t_∞} , μακριά από την οριακή επιφάνεια (τοίχωμα), χρησιμοποιούνται οι εκφράσεις

$$Pr_{t_\infty} = 0.9 + \frac{182.4}{Pr R_{\infty,x}^{0.888}}, \quad (3.74)$$

$$\text{όπου } R_{\infty,x} = \frac{u_\infty x}{\nu_\infty}. \quad (3.75)$$

Με την ανάπτυξη της μοντελοποίησης του τυρβώδη αριθμού Prandtl τελειώνει αυτή η παράγραφος. Εδώ επιχειρήθηκε να γίνει μια περιγραφή όλων εκείνων των μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί όλα αυτά τα χρόνια και χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση της τύρβης. Αναλυτικότερα περιγράφονται τα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται σε αυτή την διατριβή. Ωστόσο ο αναγνώστης θα μπορούσε να βρει πολύ περισσότερα στοιχεία για τα μοντέλα τύρβης στα συγγράμματα των W. Rodi [119], Cebeci και Bradshaw [29], Cebeci και Smith [27].

3.4 Αριθμητική λύση του προβλήματος

Για την αριθμητική μελέτη της μαγνητοϋδροδυναμικής ροής τυρβώδους συμπίεστου οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας, πρέπει να λυθεί το παραβολικού τύπου συζευγμένο, μη γραμμικό σύστημα πέμπτης τάξης, δύο μερικών διαφορικών εξισώσεων (3.33)-(3.34) με άγνωστες συναρτήσεις τις $f(x,\eta)$ και $S(x,\eta)$ το οποίο υπόκειται στις συνοριακές συνθήκες (3.35). Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί με την βοήθεια αρκετών αριθμητικών τεχνικών, όπως αυτές που αναφέρονται στα συγγράμματα των Cebeci και Smith [27], Cebeci και Bradshaw [29], Schreier [125], Fletcher [50], Minkowycz et al. [101] ή ακόμα και με την βοήθεια των φασματικών μεθόδων της αριθμητικής ανάλυσης [16, 25]. Το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιείται για την λύση του συστήματος των παραπάνω εξισώσεων είναι η μέθοδος του Keller και αναφέρεται σαν μέθοδος box [88]. Αυτή η μέθοδος έχει εκείνα τα χαρακτηριστικά που την κάνουν κατάλληλη για την λύση όλων των μερικών διαφορικών εξισώσεων παραβολικού τύπου και αναφέρεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο II της διατριβής όπως επίσης και στις αναφορές [27] και [29]. Μια τροποποίηση αυτής της μεθόδου περιγράφεται στην αναφορά [115].

Μια από τις απαιτήσεις της μεθόδου είναι οι εξισώσεις που επιλύονται αριθμητικά να γράφονται σε σύστημα πρώτης τάξης και οι παράγωγοι ως προς η των άγνωστων συναρτήσεων $f(x,\eta)$, $S(x,\eta)$ να εκφράζονται σαν νέες συναρτήσεις. Το σύστημα των πρώτης τάξης εξισώσεων που προκύπτει διακριτοποιείται στα κομβικά σημεία ενός ανομοιόμορφου ορθογώνιου πλέγματος. Η ακρίβεια της μεθόδου είναι δεύτερης τάξης,

δηλαδή το σφάλμα αποκοπής είναι της τάξης του $(\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2$. Το βήμα κατά την x -διεύθυνση θεωρήθηκε σταθερό και ίσο με $\Delta x = 0.02$ ενώ κατά την η -διεύθυνση χρησιμοποιήθηκε μεταβαλλόμενο βήμα. Το αρχικό βήμα της η -διεύθυνσης θεωρήθηκε ίσο με $\Delta\eta_1 = 0.01$ και ο λόγος K αύξησης των βημάτων ίσος με 1.14. Ο μέγιστος αριθμός των σημείων αλλά και το βήμα σε κάθε σημείο της διακριτοποίησης μέσα στο πλέγμα κατά την η -διεύθυνση υπολογίζονται από το ίδιο το πρόγραμμα με την βοήθεια των παρακάτω σχέσεων

$$J = \frac{\ln[1 + (K-1)(\eta_e / \Delta\eta_1)]}{\ln K}, \quad (3.76)$$

$$\Delta\eta_j = \eta_j - \eta_{j-1}, \quad \text{όπου} \quad \eta_j = \Delta\eta_1 \frac{K^j - 1}{K - 1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, J, \quad K > 1, \quad (3.77)$$

και το η_e , για την περίπτωση της τυρβώδους ροής, λαμβάνεται αρχικά ίσο με 10. Αυτό δίνει αρχικά ένα πλέγμα 30 κομβικών σημείων κατά την η -διεύθυνση. Κατά μήκος της πλάκας όμως, με την ανάπτυξη του τυρβώδους οριακού στρώματος και την αύξηση του πάχους του, το η_e αυξάνεται φθάνοντας, σε ορισμένες περιπτώσεις, στην τιμή $\eta_e = 200$. Τα ίδια βήματα μπορεί να χρησιμοποιηθούν για ροές που ξεκινούν στρωτές αλλά μεταπίπτουν σε τυρβώδεις στην συνέχεια. Το παραγόμενο σύστημα των εξισώσεων διαφορών είναι μη εκπεφρασμένο και μη γραμμικό. Αρχικά γραμμικοποιείται και λύνεται με την βοήθεια της μεθόδου block-elimination και το πολυδιάστατο αριθμητικό σχήμα των Newton-Raphson. Η επαναληπτική διαδικασία για την τυρβώδη ροή σταματά χρησιμοποιώντας σαν κριτήριο σύγκλισης ότι το

$$\left| \frac{\delta f_w''}{f_w'' + \delta f_w'' / 2} \right| < 0.02, \quad (3.78)$$

που αποτελεί μια ποσοστιαία έκφραση της αντίστοιχης (2.64) για την περίπτωση της στρωτής ροής. Αν το f_w'' γίνει αρνητικό κατά την διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας τότε το πρόγραμμα σταματά. Περισσότερες λεπτομέρειες τόσο για την μέθοδο Keller-box όσο και για την αριθμητική λύση του συστήματος αναφέρονται στο Κεφάλαιο II.

Αριθμητικοί υπολογισμοί έγιναν για τον αέρα, με $T_\infty = 300K$ ($Pr = 0.708$) για $S_w' = 0$, ($S'(0) = 0$), εξετάζοντας την περίπτωση που δεν υπάρχει μεταφορά θερμότητας μεταξύ πλάκας και ρευστού (αδιαβατική ροή) και τις περιπτώσεις όπου $S_w \neq 1$ ($S_w = 2$ ή $S_w = 0.5$), δηλαδή όταν η πλάκα θεωρείται ότι έχει θερμοκρασία $T_w(x)$ και θερμαίνεται ή ψύχεται ανάλογα με το αν $S_w > 1$ ή $S_w < 1$, αντίστοιχα. Στην περίπτωση της τυρβώδους ροής, όπως και στην στρωτή, για να περιγραφεί η αντίξοη βαθμίδα πίεσης γίνεται χρήση της ροής με γραμμικά ελαττούμενη ταχύτητα γνωστή ως ροή Howarth. Σε αυτό το μοντέλο, όπως έχει αναφερθεί εκτενώς και στα Κεφάλαια I και II, η ταχύτητα του ελευθέρου ρεύματος μεταβάλλεται (μειώνεται) γραμμικά συναρτήσει του x όπως φαίνεται στην σχέση (1.6). Σε αυτή την περίπτωση και σύμφωνα με την σχέση (3.36), ο αδιάστατη παράμετρος της βαθμίδας πίεσης m_2 δίνεται από την σχέση

$$m_2 = m_2(x) = -\frac{x}{(8-x)}, \quad 0 < x < 8. \quad (3.79)$$

Στην περίπτωση του οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης, είναι απαραίτητη η μελέτη του οριακού στρώματος σε όλο του το μήκος. Αυτό σημαίνει ότι για δοσμένη ταχύτητα ελευθέρου ρεύματος και γνωστές κατανομές της θερμοκρασίας ή της θερμικής ροής στο τοίχωμα και για προκαθορισμένο σημείο μετάπτωσης, είναι απαραίτητο να υπολογίζονται τόσο το στρωτό όσο και το μεταπτωτικό και τυρβώδες οριακό στρώμα, ξεκινώντας τον υπολογισμό από την οδηγούσα ακμή της πλάκας ($x = 0$).

Ξεκινώντας από την οδηγούσα ακμή, υπάρχει μια περιοχή ($0 < R_x < R_{x_{tr}}$) στην οποία η ροή παραμένει στρωτή. Μετά από μια συγκεκριμένη απόσταση, υπάρχει μια περιοχή της ροής ($R_{x_{tr}} < R_x < R_{x_c}$) στην οποία η ροή είναι μεταπτωτική και στην τρίτη και τελευταία περιοχή η ροή έχει αναπτυχθεί σε πλήρως τυρβώδη ($R_x \geq R_{x_c}$). Είναι γνωστό ότι ο μεταπτωτικός αριθμός Reynolds $R_{x_{tr}}$, στην αρχή της μετάπτωσης, εξαρτάται μερικώς από τα επίπεδα τύρβης του ελευθέρου ρεύματος και ιδιαίτερα από της συνθήκες των τοιχωμάτων της πλάκας, όπως είναι η ψύξη ή θέρμανση του τοιχώματος και η τραχύτητα της επιφάνειας. Αυτός ο αριθμός μπορεί να μεταβάλλεται από 4×10^5 έως 4×10^6 [29].

Για παράδειγμα, αν η πλάκα θερμαίνεται, η θέση της περιοχής μετάπτωσης μετατοπίζεται αντίθετα προς την κίνηση της ροής για την περίπτωση της ροής αέρα, ελαττώνοντας την τιμή του μεταπτωτικού αριθμού Reynolds. Ενώ αν η πλάκα ψύχεται, η θέση της μετάπτωσης μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση της ροής. Για την περίπτωση της υδροδυναμικής ροής τυρβώδους συμπιεστού οριακού στρώματος με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας [83] θεωρήθηκε ότι ο υπολογισμός της ροής ξεκινά με στρωτή ροή από την οδηγούσα ακμή της πλάκας στο $x = 0$ και το σημείο μετάπτωσης καθορίστηκε στο (i) $x_{tr} = 0.066$ m για την περίπτωση που $S'_w = 0$, ($R_{x_{tr}} = 22 \times 10^5$), (ii) $x_{tr} = 0.012$ για την περίπτωση $S_w = 2$. ($R_{x_{tr}} = 4 \times 10^5$) και (iii) $x_{tr} = 0.12$ για την περίπτωση $S_w = 0.5$ ($R_{x_{tr}} = 4 \times 10^6$) υποθέτοντας ότι η ροή από εκεί και κάτω είναι πλήρως τυρβώδης. Ωστόσο, θα μπορούσε να υποθέσει κανείς ότι η ροή είναι τυρβώδης από την αρχή της πλάκας ($x_{tr} = 0$).

Μια πιο σωστή μέθοδος πρόβλεψης του σημείου μετάπτωσης για την περίπτωση **ασυμπίεστης** ροής είναι η μέθοδος του Michel. Αυτή στηρίζεται στην υπόθεση ότι ο αριθμός Reynolds του πάχους ορμής $R_{\theta_{tr}}$ συνδέεται με τον τοπικό αριθμό Reynolds $R_{x_{tr}}$. Από τις μετρήσεις που έκανε ο Michel και οι οποίες περιορίζονται για τιμές του Reynolds από 0.4×10^6 έως 7×10^6 , οι Cebeci και Smith [27] κατέληξαν στην εξής σχέση

$$R_{\theta_{tr}} = 1.174[1 + (22.400/R_x)]R_x^{0.46}, \quad 0.1 \times 10^6 \leq R_x \leq 40 \times 10^6, \quad (3.80)$$

δηλαδή, ότι ο αριθμός Reynolds μετάπτωσης του πάχους ορμής $R_{\theta_{tr}}$, καθορίζεται από τον $R_{x_{tr}}$ σύμφωνα με την σχέση (3.80). Για την εκτίμηση του σημείου μετάπτωσης σε **συμπιεστές** ροές με αντίξοη βαθμίδα πίεσης μπορεί επίσης να θεωρηθεί ότι η ροή

μεταπίπτει από στρωτή σε τυρβώδη όταν ο R_{θ_r} γίνεται ίσος με 400 [27]. Αυτό υιοθετείται και εδώ για την πραγματοποίηση των υπολογισμών που θα ακολουθήσουν.

Οι τιμές των $\mu_\infty, u_\infty, \rho_\infty$ και H_∞ υπολογίζονται από σχέσεις που αναφέρονται στο Κεφάλαιο II, (2.66)-(2.69) για διάφορες τιμές του αριθμού Mach του ελευθέρου ρεύματος M_∞ ($M_\infty = 0.375, 0.75, 1.5$). Επίσης οι τιμές στην ακμή του οριακού στρώματος των T_e και p_e υπολογίζονται από τους τύπους της σχέσης (2.70). Οι τιμές στην ακμή του οριακού στρώματος των μ_e, ρ_e και H_e υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας σχέσεις όμοιες με αυτές που δίνονται στις εξισώσεις (2.66), (2.68) και (2.69), αντίστοιχα, εκτός από το ότι οι τιμές του ελευθέρου ρεύματος (∞) για την θερμοκρασία, πίεση και ταχύτητα αντικαταστάθηκαν από τις αντίστοιχες τιμές της ακμής (e).

Η συνεχής απορόφηση/έγχυση είναι μια τεχνική ελέγχου της συμπιεστής ροής για την παρεμπόδιση της μετάβασης της από στρωτή σε τυρβώδη ροή όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Όμως η συνεχής απορόφηση/έγχυση χρησιμοποιείται και στην τυρβώδη συμπιεστή ροή για την πρόληψη του φαινομένου της αποκόλλησης. Ωστόσο, αν η ταχύτητα απορρόφησης v_w είναι πολύ μεγάλη το οριακό στρώμα είναι πολύ λεπτό και τα φαινόμενα τραχύτητας γίνονται έντονα με αποτέλεσμα την αρνητική επίδραση στην ελάττωση της τριβής [99]. Για την αδιαβατική ροή ($S'_w = 0$), η ταχύτητα απορρόφησης/έγχυσης, v_w , θεωρήθηκε σταθερή και ίση με $v_w = \mp 10^{-4} u_\infty$. Στην περίπτωση θέρμανσης της πλάκας ($S_w = 2$), η ταχύτητα απορρόφησης/έγχυσης, v_w , θεωρήθηκε σταθερή και ίση με $v_w = \mp 2 \times 10^{-4} u_\infty$, ενώ στην περίπτωση ψύξης ($S_w = 0.5$) θεωρήθηκε σταθερή και ίση με $v_w = \mp 10^{-4} u_\infty$, η οποία είναι μια κατάλληλη υπόθεση που και για τις τρεις περιπτώσεις εξασφαλίζει ότι η ροή με απορρόφηση ή έγχυση στην πλάκα ικανοποιεί τις απλοποιήσεις της θεωρίας του οριακού στρώματος [124]. Επίσης, η v_w παριστά την ταχύτητα απορρόφησης ή έγχυσης στην πλάκα σύμφωνα με το αν $v_w < 0$ ή $v_w > 0$, αντίστοιχα. Η περίπτωση $v_w = 0$ αντιστοιχεί σε αδιαπέραστη πλάκα (χωρίς απορρόφηση/έγχυση).

Από την άλλη μεριά, είναι γνωστό ότι μεγάλης έντασης απορρόφηση είναι αντισυμβατική, διότι μπορεί να μειώνεται η τριβή ή να καθυστερεί το φαινόμενο της αποκόλλησης αλλά χρειάζεται και μεγάλη ισχύς για την εφαρμογή της. Για να μελετηθεί η επίδραση της τοπικής απορρόφησης/έγχυσης στο τυρβώδες οριακό στρώμα, εφαρμόστηκε συνεχής απορρόφηση/έγχυση σε μια περιοχή (σχισμή). Η κατανομή της απορρόφησης/έγχυσης που εφαρμόζεται δίνεται από την σχέση (2.65) και αποτελεί μια κατανομή Gauss. Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς του προβλήματος ελήφθη $A_s = \mp 8 \times 10^{-4} u_\infty$ ή $\mp 1.2 \times 10^{-3} u_\infty$ για την περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας, $A_s = \mp 4 \times 10^{-4} u_\infty$ ή $\mp 6 \times 10^{-4} u_\infty$ για την περίπτωση της ψυχόμενης πλάκας και $A_s = \mp 4 \times 10^{-4} u_\infty$ ή $\mp 6 \times 10^{-4} u_\infty$ για την περίπτωση της αδιαβατικής ροής, το s θεωρήθηκε ίσο με 0.7 για διάφορες τιμές του x_s . Επίσης για να μελετηθεί η επίδραση της τοπικής απορρόφησης/έγχυσης θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τις εξής σχέσεις

$$v_w(x) = \frac{1}{2} v_0 [1 + \tanh \beta(x-a)] \quad 0 < x \leq \frac{a+b}{2}, \quad (3.81)$$

και

$$v_w(x) = \frac{1}{2} v_0 [1 - \tanh \beta(x-b)] \quad x > \frac{a+b}{2}, \quad (3.82)$$

με $u_w(x)$ η ταχύτητα απορρόφησης/έγχυσης και a και b να δηλώνουν την αρχική και τελική θέση της σχισμής. Το β είναι ίσο με 10. Στις ανωτέρω εκφράσεις u_0 είναι η μέγιστη τιμή της απορρόφησης/έγχυσης σύμφωνα με το αν $u_0 < 0$ ή $u_0 > 0$, αντίστοιχα. Η μέγιστη τιμή παίρνει τις ίδιες τιμές που λαμβάνει και η μέγιστη τιμή απορρόφησης/έγχυσης στην κατανομή Gauss [83].

Για το μαγνητικό πεδίο B_0 λαμβάνονται τιμές μέχρι 3.0 Weber/m², το μαγνητικό πεδίο θεωρείται ότι είναι σταθερό και ότι εφαρμόζεται κάθετα στην πλάκα [120] ενώ η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ του ιονισμένου αέρα ισούται με 1 mho/m. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις η ποσότητα $m_0 = \sigma B_0^2$ μπορεί να μεταβάλλεται από 0.0 έως 9.0

$\frac{\text{mho}}{\text{m}} \left(\frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} \right)^2$ και αυτές είναι οι τιμές που δίνονται στο πρόβλημα που μελετάται.

Έτσι στις γραφικές παραστάσεις που παρατίθενται στην παρακάτω ενότητα του Κεφαλαίου εξετάζονται οι περιπτώσεις υδροδυναμικής ροής ($m_0 = 0$) και μαγνητοϋδροδυναμικής ροής ($m_0 = 4$. ή $m_0 = 8$).

3.5 Σύνδεση τοπικού αριθμού Stanton και τοπικού αριθμού Nusselt

Υποθέτοντας ότι η θερμότητα λόγω τριβής είναι αμελητέα και ο αριθμός Prandtl είναι μονάδα αποδεικνύεται ότι τα προφίλ ταχύτητας και θερμοκρασίας είναι όμοια στην στρωτή ροή πάνω από επίπεδη πλάκα με μηδενική γωνία προσπτώσεως. Το ίδιο μπορεί να υποθέσει κανείς και στις τυρβώδεις ροές, θεωρώντας ότι ο τυρβώδης αριθμός Prandtl Pr_t είναι μονάδα όπως και ο Pr . Αυτό σημαίνει ότι ο ίδιος μηχανισμός που περιγράφει την διάχυση της ορμής περιγράφει και την διάχυση της θερμότητας [124]. Ωστόσο, η αναλογία αυτή μεταξύ διάχυσης θερμότητας και ορμής δεν είναι ακριβής.

Στις στρωτές ροές για τον υπολογισμό της θερμικής ροής μεταξύ πλάκας και πεδίου ροής συνήθως χρησιμοποιείται ο τοπικός αριθμός Nusselt. Ο αριθμός αυτός σχηματίζεται με την διαφορά μεταξύ της θερμοκρασίας στο τοίχωμα και της θερμοκρασίας του ρευστού στην ακμή του οριακού στρώματος και ορίζεται ως

$$Nu_x = \frac{\dot{q}_w x}{k(T_w - T_e)}, \quad (3.83)$$

όπου το $\dot{q}_w$ εκφράζεται με τον νόμο του Fourier ως $\dot{q}_w = - \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0}$ και δίνει την

απόλυτη τιμή της θερμικής ροής στο τοίχωμα της πλάκας. Ο παρονομαστής αποτελεί τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα (ο αριθμός Nusselt αναφέρεται και στο Κεφάλαιο II). Εύκολα μπορεί να συνδεθεί ο Nu_x με τον τοπικό συντελεστή επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} μέσω της σχέσης

$$Nu_x = \frac{1}{2} R_x C_{f_x}, \quad (Pr = Pr_t = 1). \quad (3.84)$$

όπου R_x είναι ο τοπικός αριθμός Reynolds. Η σχέση (3.84) διατηρεί την ισχύ της και στις τυρβώδεις ροές όπως και στις στρωτές. Συχνά όμως αντί του Nu_x χρησιμοποιείται ο τοπικός αριθμός Stanton, που ορίζεται ως

$$St_x = \frac{\dot{q}_w}{\rho_e c_p (T_w - T_e) u_e}. \quad (3.85)$$

Ο τοπικός αριθμός Stanton συνδέεται με το C_{f_x} μέσω της σχέσης

$$St_x = \frac{1}{2} C_{f_x}, \quad (\text{Pr} = \text{Pr}_t = 1). \quad (3.86)$$

Τέλος όταν ο Pr είναι διάφορος από την μονάδα οι δύο αριθμοί συνδέονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$St_x = \frac{Nu_x}{R_x \text{Pr}}. \quad (3.87)$$

Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζεται μια όσο το δυνατόν πιο εκτενής ανάλυση των αποτελεσμάτων που ευρέθησαν με την αριθμητική επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (3.33), (3.34) που υπόκεινται στις συνοριακές συνθήκες (3.35), για τα μοντέλα τύρβης των Cebeci-Smith και Baldwin-Lomax καθώς και αυτό των Weigand et. al για τον τυρβώδη αριθμό Prandtl. Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται κατανοητό επίσης ότι αντί του Nu_x στην ανάλυση αυτή θα γίνει χρήση του St_x αφού μελετάται η τυρβώδης συμπιεστή ροή πάνω από πλάκα.

3.6 Ανάλυση των αποτελεσμάτων

Το Κεφάλαιο της μελέτης της μαγνητοϋδροδυναμικής τυρβώδους συμπιεστής ροής με αντίξοη βαθμίδα πίεσης και μεταφορά θερμότητας και μάζας κλείνει με την ανάλυση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την αριθμητική μελέτη. Μελετώνται και οι τρεις περιπτώσεις, της αδιαβατικής ροής, της θερμαινόμενης και της ψυχόμενης πλάκας, για διάφορες τιμές των παραμέτρων που υπεισέρχονται στο πρόβλημα.

Στα Σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα, που αφορούν στις κατανομές της αδιάστατης ταχύτητας $f'(x, \eta)$, της αδιάστατης ολικής ενέργειας (θερμοκρασίας) $S(x, \eta)$ αλλά κυρίως στον αδιάστατο τοπικό συντελεστή επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} και στον αδιάστατο τοπικό αριθμό Stanton πάνω στην πλάκα St_x ($S_w \neq 1$), για διάφορες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων. Αυτά τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για την περίπτωση της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης/έγχυσης, καθώς και για την περίπτωση της αδιαπέραστης πλάκας ($\nu_w = 0$) όταν το ρευστό είναι αέρας ($\text{Pr} = 0.708$) και για διαφορετικές τιμές του αριθμού Mach $M_\infty = M_{\text{inf}}$ και της μαγνητικής παραμέτρου $m_0 = \sigma B_0^2$. Η περίπτωση $m_0 \neq 0$ αντιστοιχεί στην μαγνητοϋδροδυναμική ροή ενώ η περίπτωση $m_0 = 0$ στην υδροδυναμική (αεροδυναμική). Όπως θα δούμε η συνεχής ή τοπική απορρόφηση/έγχυση στο τοίχωμα έχει μεγάλη επίδραση πάνω στην τυρβώδη μεταφορά

θερμότητας και επομένως στον τοπικό αριθμό Stanton, όπως πρωτοαναφέρθηκε από τους Moffat και Kays [102] αλλά και τον F. White [147]. Σύμφωνα με τον White, η απορρόφηση αυξάνει τον τοπικό αριθμό Stanton, ενώ τα αντίθετα αποτελέσματα έχει η έγχυση. Επίσης μικρότερη αλλά σημαντική είναι και η επίδραση του μαγνητικού πεδίου τόσο στον C_{f_x} όσο και στον St_x .

Ο αδιάστατος τοπικός συντελεστής επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} και ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Stanton St_x είναι δύο πολύ σημαντικές ποσότητες στις μηχανολογικές εφαρμογές και στην αεροδυναμική και ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$C_{f_x} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_e u_e^2} \quad \text{και} \quad St_x = \frac{\dot{q}_w}{\rho_e (H_w - H_e) u_e}, \quad (3.88)$$

$$\text{όπου } \tau_w = \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=0} \quad \text{και} \quad \dot{q}_w = - \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0}. \quad (3.89)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.31), (3.32) και (3.36) οι ποσότητες αυτές γράφονται ως

$$C_{f_x} = \frac{2C_w}{\sqrt{R_x}} f_w'' \quad \text{και} \quad St_x = \frac{C_w S_w'}{\text{Pr} \sqrt{R_x} (1 - S_w)} \quad (S_w \neq 1), \quad (3.90)$$

όπου $f_w'' = f''(x,0)$ είναι η αδιάστατη παράμετρος διάτμησης στο τοίχωμα και $S_w' = S'(x,0)$ είναι η αδιάστατη παράμετρος μεταφοράς θερμότητας ενώ $S_w = H_w / H_e$ είναι η αδιάστατη ολική ενέργεια (ενθαλπία) ή παράμετρος μεταφοράς θερμότητας στο τοίχωμα.

Επίσης, η αντίσταση D πάνω στην πλάκα υπολογίζεται από την ίδια σχέση με αυτή της στρωτής ροής και δίνεται από την έκφραση

$$D = \int_0^{x^*} \frac{C_w f_w''(x,0)}{\sqrt{\text{Re}_x}} \rho_e(x) u_e^2(x) dx, \quad (3.91)$$

όπου x^* η απόσταση του σημείου αποκόλλησης από την οδηγούσα ακμή της πλάκας. Η αντίσταση D , υπολογίζεται από την παραπάνω σχέση, θεωρώντας το πλάτος b της πλάκας μοναδιαίο και το $C_w = \rho_w \mu_w / \rho_e \mu_e$ ως συνάρτηση του x .

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται αποτελέσματα και των δύο μοντέλων τύρβης που έχουν περιγραφεί αναλυτικά παραπάνω. Δηλαδή τα αλγεβρικά μοντέλα τύρβης των Cebeci - Smith και Baldwin - Lomax. Όπως είναι γνωστό η τύρβη είναι ένα πολύπλοκο και χαοτικό φαινόμενο, αυτό έγινε κατανοητό από τις πρώτες μόλις σελίδες του Κεφαλαίου. Αναμενόμενο λοιπόν είναι το κάθε μοντέλο τύρβης να δίνει διαφορετικά αποτελέσματα που βέβαια ποιοτικά μεταξύ τους είναι ίδια. Έτσι από τους αριθμητικούς υπολογισμούς φαίνεται (όπως θα δειχθεί παρακάτω) ότι το μοντέλο τύρβης των Baldwin και Lomax δίνει διαφορετικό σημείο αποκόλλησης από το μοντέλο των Cebeci και Smith, το οποίο είναι μετατοπισμένο προς το χέιλος εκφυγής. Ποσοτικές διαφορές στα ευρεθέντα αποτελέσματα, που επιτυγχάνονται με εφαρμογή

των δύο μοντέλων, υπάρχουν σε όλες τις παραμέτρους που μελετώνται στην διατριβή αυτή, τόσο στον αδιάστατο τοπικό συντελεστή επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} όσο και στον αδιάστατο τοπικό αριθμό Stanton πάνω στην πλάκα St_x . Ποσοτικές διαφορές επίσης παρατηρούνται μεταξύ των δύο μοντέλων στην αδιάστατη ταχύτητα $f'(x, \eta)$ και στην αδιάστατη ολική ενέργεια (θερμοκρασία) $S(x, \eta)$.

Κάθε μοντέλο προσπαθεί με τον τρόπο του να περιγράψει το πολύπλοκο φαινόμενο της τύρβης και να δώσει όσο το δυνατόν πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα. Παρά την διαφορετική, ενδεχόμενα, πρόβλεψη των δύο μοντέλων το καθένα από αυτά δίνει σημείο αποκόλλησης που δεν απέχει πολύ από την πρόβλεψη του άλλου. Επομένως, εξαρτάται από τον εκάστοτε ερευνητή πιο από τα δύο θα χρησιμοποιήσει και καθένα από τα μοντέλα παρουσιάζει τα δικά του συγκριτικά πλεονεκτήματα. Το μοντέλο τύρβης Baldwin - Lomax είναι νεότερο και πιο εξελιγμένο αλγεβρικό μοντέλο τύρβης, αφού δεν απαιτεί την πρόβλεψη του πάχους του οριακού στρώματος και της ταχύτητας στην ακμή του οριακού στρώματος στις αλγεβρικές του εξισώσεις, όπως το Cebeci - Smith. Είναι όμως στηριγμένο στο μοντέλο Cebeci - Smith και ακολουθεί την φιλοσοφία του πράγμα που κάνει το μοντέλο των Baldwin και Lomax συγγενές με το προηγούμενο. Και τα δύο μοντέλα είναι από τα πλέον αξιόπιστα, εύχρηστα και περιγράφουν ικανοποιητικά την τυρβώδη ροή.

(i) Αδιαβατική ροή ($S'_w = 0$)

Στην τυρβώδη ροή όπως και στην στρωτή θεωρούμε ότι δεν υπάρχει σε αυτή την περίπτωση θερμική ροή μεταξύ ρευστού και πλάκας (αδιαβατική ροή). Το παραγόμενο ποσό θερμότητας μέσα στο οριακό στρώμα λόγω τριβής ή θερμότητας Joule συμβάλλει στην αύξηση της θερμοκρασίας του ρευστού μέσα σ' αυτό. Οι μεταβολές των κατανομών της αδιάστατης ταχύτητας $f'(x, \eta)$, σε μια τυπική απόσταση $x = 4\text{ m}$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, φαίνονται στα Σχήματα 3.6.1 έως 3.6.4. Το Σχήμα 3.6.1 δείχνει την μεταβολή της $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$ για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας ($u_w = 0$) και για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 . Όπως και στην στρωτή ροή έτσι κι εδώ παρατηρείται ότι εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου αυξάνει την ταχύτητα μέσα στο οριακό στρώμα. Η αύξηση αυτή της ταχύτητας είναι πιο εμφανής όσο το μαγνητικό πεδίο αυξάνει ($m_0 = 8.0$). Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω στο πεδίο ταχύτητας ελαττώνεται αυξανόμενου του αριθμού Mach του ελευθέρου ρεύματος (Σχήμα 3.6.2). Ποσοτικά, για την περίπτωση της τυρβώδους ροής πάνω από αδιαβατική πλάκα, έχουμε ότι αν $\eta = 50$ και $M_\infty = 0.5$ εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου βοηθάει στην αύξηση της $f'(\eta)$ κατά 14.6% ενώ η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση που $M_\infty = 1.5$ είναι μόνο 2.55%.

Εφαρμογή απορρόφησης ($u_w < 0$) αυξάνει την ταχύτητα του ρευστού μέσα στο τυρβώδες οριακό στρώμα και αλλάζει το σχήμα της κατανομής της ταχύτητας δίνοντας ένα προφίλ, ενδεχόμενα, χωρίς σημεία καμψής, αν και αυτό είναι πιο εμφανές στην στρωτή ροή (Σχήμα 3.6.3). Τα αντίθετα αποτελέσματα έχουμε στην περίπτωση της έγχυσης. Η συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τεχνικής έγχυσης/απορρόφησης για τον έλεγχο του τυρβώδους οριακού στρώματος φαίνεται στο Σχήμα 3.6.4. Σημειώνεται εδώ ότι, όταν το $\eta = 50$, και $u_w > 0$ (καμπύλη (3)), η ταχύτητα του ρευστού μειώνεται κατά 17.4% σε σχέση με την περίπτωση της απορρόφησης ($u_w < 0$) (καμπύλη (5)) και με την παρουσία μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.0$).

Σχήμα 3.6.1: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$, $4.$ και $8.$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.2: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$ και $8.$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.3: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 4$. και $v_w = 0, <0, >0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.4: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0., 8$. και $v_w = 0, <0, >0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.5: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$, $4.$ και $8.$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.6: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$ και $8.$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.7: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 4$, και $v_w = 0, <0, >0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.8: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0, 8$, και $v_w = 0, <0, >0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Παρόμοια αποτελέσματα για την αδιάστατη ταχύτητα δίνει και το δεύτερο μοντέλο τύρβης (B-L). Αυτά τα αποτελέσματα φαίνονται στα Σχήματα 3.6.5 έως 3.6.8. Τόσο το μαγνητικό πεδίο όσο και η έγχυση/απορρόφηση έχουν την ίδια επίδραση στην ταχύτητα που εμφανίζουν και στο μοντέλο τύρβης των Cebeci - Smith. Η επίδραση στην αδιάστατη ταχύτητα όμως είναι ασθενέστερη όταν η μελέτη της τυρβώδους ροής γίνεται με το μοντέλο τύρβης των Baldwin - Lomax, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στα Σχήματα. Έτσι, ποσοτικά, έχουμε ότι για το μοντέλο τύρβης C-S όταν $\eta = 50$ και $M_\infty = 0.5$ η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.0$) βοηθάει στην αύξηση της ταχύτητας $f'(\eta)$ κατά 14.6%, (Σχήμα 3.6.1), ενώ για το μοντέλο B-L όταν $\eta = 50$ και $M_\infty = 0.5$ η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.0$) βοηθάει στην αύξηση της ταχύτητας $f'(\eta)$ κατά 9.26%, (Σχήμα 3.6.5). Στο Σχήμα 3.6.3 φαίνεται ότι η εφαρμογή απορρόφησης για το C-S, όταν $\eta = 50$ και $M_\infty = 0.5$, αυξάνει την ταχύτητα $f'(\eta)$ κατά 3.86%, ενώ η εφαρμογή απορρόφησης για το B-L αυξάνει την ταχύτητα $f'(\eta)$ κατά 2.83% (Σχήμα 3.6.7).

Οι μεταβολές του λόγου της ολικής ενέργειας $S = H / H_e$ ή αλλιώς της αδιάστατης θερμοκρασίας σε μια τυπική απόσταση $x = 4m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, με την αδιάστατη απόσταση η παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.6.9 - 3.6.16. Σε αυτά τα Σχήματα παρουσιάζεται η αδιάστατη θερμοκρασία, συναρτήσει της αδιάστατης απόστασης η μέσα στο οριακό στρώμα, για τα δύο μοντέλα τύρβης (Cebeci - Smith και Baldwin - Lomax) και για διαφορετικές τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 , του αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής και για την περίπτωση έγχυσης/απορρόφησης και αδιαπέραστης πλάκας. Στην αδιαβατική περίπτωση ($S'_w = 0$) η θερμοκρασία αυξάνεται μέσα στο θερμικό οριακό στρώμα. Επειδή οι μεταβολές της αδιάστατης θερμοκρασίας στην αδιαβατική ροή είναι μικρές παρατίθενται γραφικές παραστάσεις της παραμέτρου S^* συναρτήσει του η , όπου $S^* = (S - 1) \times 10^3$. Με αυτόν τον μετασχηματισμό οι διαφορές μεταξύ των περιπτώσεων φαίνονται πιο εύκολα με αποτέλεσμα την πιο εύκολη εξαγωγή συμπερασμάτων. Η κατανομή της θερμοκρασίας σ' αυτές τις γραφικές είναι παρόμοια για όλες τις περιπτώσεις και παρατηρείται ότι μόλις η ροή μεταπέσει σε τυρβώδη η αδιάστατη θερμοκρασία του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα αυξάνεται φτάνοντας στην μέγιστη τιμή της μέσα σ' αυτό, έπειτα ελαττώνεται μέχρι την τιμή μηδέν για το S^* ($S^* = 0$) ή την τιμή ένα για το S ($S = 1$). Από τα πρώτα κιόλας Σχήματα (Σχήματα 3.6.9 και 3.6.10) παρατηρείται ότι η αδιάστατη θερμοκρασία αυξάνεται κοντά στην περιοχή της πλάκας με την εφαρμογή μαγνητικού πεδίου. Αυτή η αύξηση είναι πιο έντονη όσο το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται ($m_0 = 8.0$). Το αντίθετο συμβαίνει προχωρώντας προς την ακμή του οριακού στρώματος όπου η επίδραση του μαγνητικού πεδίου ελαττώνει την θερμοκρασία σε εκείνη την περιοχή. Παρατηρούνται πιο έντονες θερμοκρασιακές μεταβολές όσο ο αριθμός Mach του ελεύθερου ρεύματος αυξάνει. Έτσι στα Σχήματα 3.6.11 - 3.6.12 που δίνονται γραφικές παραστάσεις για δύο αριθμούς Mach ($M_\infty = 0.5$ και 1.5) παρατηρείται μια πιο έντονη μεταβολή της κατανομής της αδιάστατης θερμοκρασίας ως προς η για $x = 4m$ για $M_\infty = 1.5$ από αυτή για $M_\infty = 0.5$. Επίσης και στις δύο περιπτώσεις το μαγνητικό πεδίο αυξάνει την θερμοκρασία κοντά στην πλάκα και μέσα στο οριακό στρώμα ενώ την ελαττώνει κοντά στην ακμή. Η επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης πάνω στο θερμικό οριακό στρώμα φαίνεται στα Σχήματα 3.6.13 - 3.6.16. Κοντά στην πλάκα και μέσα στο οριακό στρώμα, η θερμοκρασία του ρευστού είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση της απορρόφησης ($v_w < 0$) από την αντίστοιχη περίπτωση της αδιαπέραστης πλάκας ($v_w = 0$) ή την περίπτωση της έγχυσης ($v_w > 0$).

Σχήμα 3.6.9: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S^*(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0$, 4, και 8. (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.10: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S^*(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0$, 4, και 8. (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.11: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S^*(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0., 8$. (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.12: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S^*(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0., 8$. (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.13: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S^*(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 4$. και $v_w = 0, < 0, > 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.14: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S^*(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 4$. και $v_w = 0, < 0, > 0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.15: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S^*(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0, 8$ και $v_w = 0, < 0, > 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.16: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S^*(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0, 8$ και $v_w = 0, < 0, > 0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Ωστόσο, το αντίθετο συμβαίνει καθώς πλησιάζουμε στην ακμή του οριακού στρώματος. Η συνδυασμένη επίδραση έγχυσης/απορρόφησης και μαγνητικού πεδίου φαίνεται στα Σχήματα 3.6.15 και 3.6.16 και για τα δύο μοντέλα τύρβης (Cebeci - Smith και Baldwin - Lomax, αντίστοιχα). Στην περίπτωση της απορρόφησης ($u_w < 0$) και όταν $\eta = 50$ και το m_0 αυξάνει από 0. έως 8. υπάρχει αύξηση κατά 0.0071% στην τιμή της S , ενώ κάτω από τις ίδιες συνθήκες η αύξηση στην περίπτωση της έγχυσης ($u_w > 0$) είναι 0.009% αντίστοιχα (για το C-S μοντέλο τύρβης). Οπότε, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της $S(4., 50)$ μεταξύ των περιπτώσεων $m_0 = 0.$, $u_w > 0$ και $m_0 = 8.$, $u_w < 0$ είναι 0.014%. Μπορεί οι ποσοστιαίες μεταβολές της S να είναι μικρές, αλλά δεν σημαίνει ότι και οι αντίστοιχες μεταβολές της ολικής ενέργειας (ενθαλπίας) H είναι μικρές (βλέπε Κεφάλαιο II, σελ. 48).

Στα Σχήματα 3.6.17 - 3.6.20 απεικονίζεται ο αδιάστατος τοπικός συντελεστής επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} , με την απόσταση x για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 , του αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής, για την περίπτωση συνεχούς έγχυσης/απορρόφησης στο τοίχωμα και αδιαπέραστης πλάκας, για τα δύο μοντέλα τύρβης. Οι αντίστοιχες μεταβολές για την περίπτωση της συνεχούς ή τοπικής έγχυσης/απορρόφησης φαίνονται στα Σχήματα 3.6.21 έως 3.6.24. Τέλος, στο Σχήμα 3.6.25 απεικονίζεται ο αδιάστατος τοπικός συντελεστής επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} με την απόσταση x για $M_\infty = 2.0$ με την επίδραση μαγνητικού πεδίου και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Οι τιμές της ολικής αντίστασης λόγω τριβής D , όπως αυτή έχει οριστεί στην αρχή της παραγράφου, για κάθε περίπτωση απεικονίζονται πάνω στα Σχήματα. Στα Σχήματα 3.6.17 και 3.6.18 παρατηρείται ότι η παρουσία μαγνητικού πεδίου πάντα αυξάνει την αντίσταση D πάνω στην πλάκα είτε στην περίπτωση της έγχυσης/απορρόφησης είτε σε αδιαπέραστη πλάκα, και βοηθάει στην μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής. Αυτό είναι φανερό και στα δύο Σχήματα, δηλαδή και στα δύο μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται σ' αυτή την διατριβή. Εφαρμογή απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας, ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της έγχυσης και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Έτσι ο συνδυασμός μαγνητικού πεδίου και απορρόφησης (καμπύλη (5)) μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης κατά $0.56m$ σε σχέση με την αδιαπέραστη πλάκα χωρίς μαγνητικό πεδίο (καμπύλη (1)) για το C-S και $0.55m$ για το B-L μοντέλο τύρβης. Από τα Σχήματα 3.6.19 και 3.6.20 γίνεται φανερό ότι στην τυρβώδη ροή, σε αντίθεση με την στρωτή ροή, στην αεροδυναμική περίπτωση ($m_0 = 0.$) το σημείο αποκόλλησης x^* μετατοπίζεται πάντα προς το χείλος εκφυγής της πλάκας καθώς ο αριθμός Mach της ελεύθερης ροής αυξάνεται και αυτή η μετατόπιση είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερες τιμές του M_∞ . Εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας για κάθε τιμή του αριθμού Mach της ελεύθερης ροής. Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω στην ροή είναι πιο έντονη όσο μικρότερος είναι ο αριθμός Mach. Όσο ο αριθμός Mach του ελεύθερου ρεύματος μεγαλώνει τόσο η επίδραση του μαγνητικού πεδίου καθίσταται ασθενέστερη.

Στα Σχήματα 3.6.21 και 3.6.22 παρουσιάζονται οι μεταβολές του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} με την απόσταση x , τόσο για αδιαπέραστη πλάκα όσο και για την περίπτωση της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης, για $m_0 = 0.$ και $m_0 = 8.$ και για τα δύο μοντέλα τύρβης, αντίστοιχα. Η τοπική απορρόφηση εφαρμόζεται σε απόσταση $x_s = 4.2m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας.

Σχήμα 3.6.17: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$ και $8.$ και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.18: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$ και $8.$ και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin-Lomax)

Σχήμα 3.6.19: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $u_w = 0$, $m_0 = 0$. και 8. και για $M_{\infty} = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.20: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $u_w = 0$, $m_0 = 0$. και 8. και για $M_{\infty} = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.21: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, και για $v_w < 0$ συνεχής ή τοπική στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.22: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, και για $v_w < 0$ συνεχής ή τοπική στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.23: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.24: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.25: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{f_x} για $M_\infty = 2.0$, $m_0 = 0., 8.$ και $u_w = 0$ και για τα δύο μοντέλα τύρβης

Παρατηρείται ότι εφαρμογή τοπικής απορρόφησης, κοντά στο σημείο αποκόλλησης της ροής από την πλάκα, αντί συνεχούς, βοηθά στην ελάττωση της αντίστασης D και στην μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής της πλάκας. Αυτό το γεγονός είναι πιο φανερό στην μαγνητοϋδροδυναμική περίπτωση ($m_0 = 8.$). Στα Σχήματα 3.6.23 και 3.6.24 παρουσιάζεται η συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης πάνω στον αδιάστατο τοπικό συντελεστή επιδερμικής τριβής C_{f_x} . Συνάγεται το συμπέρασμα ότι εφαρμογή τοπικής απορρόφησης και τοπικής έγχυσης στις θέσεις $x_s = 4.2m$ και $x_s = 1.2m$, αντίστοιχα, μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας και ελαττώνει την αντίσταση D . Αυτό καθίσταται φανερό και στα δύο Σχήματα, δηλαδή και στα δύο μοντέλα τύρβης που εξετάζονται εδώ. Το σημείο αποκόλλησης x^* μετατοπίζεται ακόμη πιο κάτω προς το χείλος εκφυγής με την εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.$). Τέλος, στο Σχήμα 3.6.25 παρουσιάζεται η επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω στην τυρβώδη ροή για αριθμό Mach της ελεύθερης ροής $M_\infty = 2.0$ και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Παρατηρείται ότι για $M_\infty = 2.0$ η επίδραση του μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.$) είναι μικρή και το σημείο αποκόλλησης x^* μετατοπίζεται προς το χείλος εκφυγής μόνο μερικά εκατοστά (π.χ. για το μοντέλο τύρβης C-S μετατοπίζεται το σημείο αποκόλλησης κατά 4 cm ενώ για το μοντέλο τύρβης B-L κατά 2 cm). Είναι προφανές ότι η επίδραση του μαγνητικού πεδίου γίνεται πιο έντονη αν αυξηθεί η μαγνητική παράμετρος m_0 , πράγμα όμως που σημαίνει πιο ισχυρής έντασης μαγνητικό πεδίο. Υπενθυμίζεται ότι η μαγνητική παράμετρος $m_0 = 8.$ αντιστοιχεί σε μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 2.8 Tesla$.

(ii) Θερμαινόμενη πλάκα ($S_w > 1$)

Για την θερμαινόμενη πλάκα οι μεταβολές των κατανομών της αδιάστατης ταχύτητας, σε μια τυπική απόσταση $x = 3m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας φαίνονται στα Σχήματα 3.6.26 έως 3.6.29. Σε αυτή την περίπτωση παρατίθενται Σχήματα της αδιάστατης ταχύτητας μόνο από το ένα μοντέλο τύρβης (το μοντέλο των Cebeci - Smith) αφού και για τα δύο μοντέλα όπως φαίνεται και στην αδιαβατική ροή ($S'_w = 0$) τα αποτελέσματα για την ταχύτητα είναι σχεδόν τα ίδια. Έτσι, για λόγους οικονομίας παρατίθενται μόνο τα Σχήματα που αφορούν το ένα μοντέλο τύρβης. Το Σχήμα 3.6.26 δείχνει την μεταβολή της $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$ για την περίπτωση της αδιαπέραστης πλάκας ($u_w = 0$) και για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 . Εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου αυξάνει την ταχύτητα του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα όπως ακριβώς και στην αδιαβατική ροή. Αυτή η αύξηση της ταχύτητας είναι πιο μεγάλη όσο αυξάνει η μαγνητική παράμετρος m_0 . Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω στο πεδίο ταχύτητας ελαττώνεται όσο ο αριθμός Mach του ελευθέρου ρεύματος αυξάνεται, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο Σχήμα 3.6.27. Ποσοτικά όταν $\eta = 50$ και $M_\infty = 0.5$ εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου βοηθάει στην αύξηση της $f'(\eta)$ κατά 4.9%, ενώ η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση που $M_\infty = 1.5$ είναι 1.2%. Εφαρμογή απορρόφησης ($u_w < 0$) αυξάνει την ταχύτητα του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα και αλλάζει την κατανομή της ταχύτητας δίνοντας προφίλ χωρίς σημεία καμψής. Τα σημεία καμψής στο προφίλ της ταχύτητας δηλώνουν ότι η ροή αποσταθεροποιείται και το οριακό στρώμα πιθανόν να αποκολληθεί (Σχήμα 3.6.28). Το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της έγχυσης ($u_w > 0$). Στο Σχήμα 3.6.29 παρουσιάζεται η συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τεχνικής της έγχυσης/απορρόφησης για τον έλεγχο του οριακού στρώματος. Σημειώνεται εδώ ότι, όταν $\eta = 50$, $m_0 = 0$ και $u_w > 0$ (καμπύλη (3)), η ταχύτητα του ρευστού μειώνεται κατά 9.5% σε σχέση με την περίπτωση της απορρόφησης ($u_w < 0$) (καμπύλη (5)) και την παρουσία μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8$).

Οι μεταβολές της αδιάστατης θερμοκρασίας $S = H / H_e$, σε μια τυπική απόσταση $x = 3m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, με την αδιάστατη απόσταση η μέσα στο οριακό στρώμα, παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.6.30 - 3.6.33, για διαφορετικές τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 , του αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής και για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας και έγχυσης/απορρόφησης. Παρατηρείται σ' όλα τα Σχήματα η ελάττωση της θερμοκρασίας του ρευστού όσο απομακρυνόμαστε από την πλάκα τείνοντας ασυμπτωτικά στην οριακή της τιμή στο άπειρο. Στο Σχήμα 3.6.30 παρατηρείται ότι εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου ελαττώνει την θερμοκρασία του ρευστού πάνω από την πλάκα κοντά στην ακμή του οριακού στρώματος ενώ κοντά στην πλάκα την αυξάνει ελάχιστα. Αυτή η μεταβολή στην θερμοκρασία είναι πιο έντονη όσο αυξάνεται η μαγνητική παράμετρος ($m_0 = 8$). Στο Σχήμα 3.6.31 παρατηρείται ότι όταν αυξάνεται ο αριθμός Mach η μεταβολή της θερμοκρασίας μέσα στο οριακό στρώμα είναι μικρότερη. Έτσι για παράδειγμα όταν $M_\infty = 1.5$ η μεταβολή της θερμοκρασίας είναι σχεδόν αμελητέα σε σχέση με την περίπτωση που το $M_\infty = 0.5$. Στο Σχήμα 3.6.32 παριστάνεται η επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης πάνω στο θερμικό οριακό στρώμα. Έτσι η θερμοκρασία του

Σχήμα 3.6.26: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$, $4.$ και $8.$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.27: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$ και $8.$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.28: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 4$, και $v_w = 0, <0, >0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.29: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0, 8$, και $v_w = 0, <0, >0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.30: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$, 4. και 8. (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.31: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0., 8.$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.32: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 4$, και $v_w = 0, < 0, > 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.33: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0, 8$, και $v_w = 0, < 0, > 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

ρευστού αυξάνεται στην περίπτωση της έγχυσης ($u_w > 0$) και ελαττώνεται στην περίπτωση της απορρόφησης ($u_w < 0$) σε σχέση με την αδιαπέραστη πλάκα ($u_w = 0$). Η συνδυασμένη επίδραση έγχυσης/απορρόφησης και εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου πάνω στην αδιάστατη θερμοκρασία φαίνεται στο Σχήμα 3.6.33. Στην περίπτωση απορρόφησης ($u_w < 0$) και όταν $\eta = 50$ και το m_0 αυξάνεται από 0. έως 8. υπάρχει ελάττωση της θερμοκρασίας S κατά 0.66% ενώ κάτω από τις ίδιες συνθήκες η αντίστοιχη ελάττωση στην περίπτωση της έγχυσης ($u_w > 0$) είναι ίση με 0.67%. Άρα, η ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή της $S(3.,50)$ μεταξύ των περιπτώσεων $m_0 = 0.$, $u_w > 0$ και $m_0 = 8.$, $u_w < 0$ είναι 2.22%.

Στα Σχήματα 3.6.34 - 3.6.38 απεικονίζονται οι μεταβολές του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{fx} , με την απόσταση x , για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 και του αριθμού Mach M_∞ του ελευθέρου ρεύματος για τις περιπτώσεις της συνεχούς έγχυσης/απορρόφησης και αδιαπέραστης πλάκας. Οι τιμές της αντίστασης D , για κάθε περίπτωση, αναγράφονται πάνω στα Σχήματα. Στα Σχήματα 3.6.34 και 3.6.35 παρατηρείται ότι η παρουσία μαγνητικού πεδίου αυξάνει την αντίσταση D που ασκείται στην πλάκα αλλά μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής. Αυτό είναι εμφανές και στα δύο Σχήματα δηλαδή και για το μοντέλο τύρβης των Cebeci - Smith (Σχήμα 3.6.34) αλλά και για το μοντέλο τύρβης των Baldwin - Lomax (Σχήμα 3.6.35). Επίσης, εφαρμογή απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας, αυξάνοντας την αντίσταση D ενώ εφαρμογή έγχυσης έχει ακριβώς τα αντίθετα αποτελέσματα και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Ο αριθμός Mach έχει σημαντική επίδραση στο σημείο αποκόλλησης. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.6.36 και 3.6.37, όταν αυξάνεται ο αριθμός Mach, δηλαδή από 0.375 σε 0.75 και 1.5, το σημείο αποκόλλησης μετατοπίζεται προς το χείλος εκφυγής της θερμαινόμενης πλάκας, όπως ακριβώς και στην τυρβώδη αδιαβατική ροή, σε αντιδιαστολή με την στρωτή ροή που αύξηση του αριθμού Mach δίνει αντίθετα αποτελέσματα. Το μαγνητικό πεδίο επιδρά στην ροή αλλά αυτή η επίδραση είναι πιο έντονη σε μικρότερους αριθμούς Mach. Έτσι, για παράδειγμα, όταν $M_\infty = 0.375$ η μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης x^* λόγω της επίδρασης του μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.$) είναι 0.64 m ενώ όταν $M_\infty = 1.5$ η μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης x^* είναι 0.08 m , για το μοντέλο των C-S. Τις ίδιες ακριβώς μετατοπίσεις του σημείου αποκόλλησης δίνει και το μοντέλο τύρβης των Baldwin - Lomax.

Όπως στην περίπτωση της τυρβώδους αδιαβατικής ροής έτσι και στην περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας η επίδραση του μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.$), όπως είναι φυσικό, παύει να είναι ουσιαστική πάνω στην ροή, από έναν αριθμό Mach και πάνω. Στο Σχήμα 3.6.38 παρατηρείται ότι και για τα δύο μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται σ' αυτήν την διατριβή, το μαγνητικό πεδίο δεν μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης αισθητά. Έτσι, το μοντέλο τύρβης των C-S δίνει μια μετατόπιση του σημείου αποκόλλησης x^* κατά 4.5 cm ενώ το μοντέλο τύρβης των B-L δίνει μετατόπιση κατά 3 cm. Αυξάνοντας βέβαια την μαγνητική παράμετρο αυξάνεται και η επίδραση του πεδίου πάνω στην ροή. Το παραπάνω σημαίνει όμως αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου ή του ιονισμού του ρευστού, παράμετροι που δύσκολα αυξάνουν πάνω από τις τιμές που δίδονται εδώ.

Σχήμα 3.6.34: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$ και $8.$ και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.35: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$ και $8.$ και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin-Lomax)

Σχήμα 3.6.36: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $u_w = 0$, $m_0 = 0$ και 8, και για $M_{\infty} = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.37: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $u_w = 0$, $m_0 = 0$ και 8, και για $M_{\infty} = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.38: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 2.0$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$ και για τα δύο μοντέλα τύρβης

Σχήμα 3.6.39: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, και για $v_w < 0$, συνεχή ή τοπική στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.40: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, και για $v_w < 0$, συνεχή ή τοπική στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.41: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.42: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{f_x} για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Στα Σχήματα 3.6.39 έως 3.6.42 απεικονίζεται η επίδραση της συνεχούς ή τοπικής έγχυσης/απορρόφησης στον αδιάστατο τοπικό συντελεστή επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} , με ή χωρίς την παρουσία μαγνητικού πεδίου, για την περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας. Παρατηρείται ότι εφαρμογή τοπικής απορρόφησης κοντά στο σημείο αποκόλλησης $x_s = 3.9m$ βοηθάει την ροή και μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής ελαττώνοντας την αντίσταση D , σε σχέση με την περίπτωση της συνεχούς απορρόφησης, τόσο στην αεροδυναμική περίπτωση ($m_0 = 0.$) όσο και στην μαγνητοϋδροδυναμική ($m_0 = 8.$) (Σχήματα 3.6.39 και 3.6.40) και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Τέλος, στα Σχήματα 3.6.41 και 3.6.42 απεικονίζεται ο τοπικός συντελεστής επιδερμικής τριβής C_{f_x} με την απόσταση x , για την περίπτωση εφαρμογής τοπικής έγχυσης και απορρόφησης, στις θέσεις $x_s = 0.8m$ και $x_s = 3.9m$ από την οδηγούσα ακμή, αντίστοιχα, με την ύπαρξη ή όχι μαγνητικού πεδίου και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Το συμπέρασμα που συνάγεται από τα παραπάνω Σχήματα είναι ότι η συνδυασμένη εφαρμογή τοπικής έγχυσης και απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας και ελαττώνει την αντίσταση λόγω τριβής D σ' αυτήν. Αυτό είναι φανερό τόσο στην περίπτωση εφαρμογής μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.$) όσο και στην αεροδυναμική περίπτωση ($m_0 = 0.$) για την θερμαινόμενη πλάκα, όπως ακριβώς και στην αδιαβατική ροή. Επομένως, για την ελάττωση της αντίστασης και διατήρηση της ροής πάνω από την πλάκα για όσο το δυνατόν περισσότερο διάστημα, ο συνδυασμός της έγχυσης και απορρόφησης είναι η καλύτερη τεχνική. Εφαρμογή μαγνητικού πεδίου μετατοπίζει ακόμα περισσότερο το

σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής της πλάκας με κάποιο κόστος στην αντίσταση D σε σχέση με την αεροδυναμική περίπτωση.

Στα Σχήματα 3.6.43 έως 3.6.50 απεικονίζεται ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Stanton πάνω στην πλάκα St_x κάτω από τις ίδιες συνθήκες με αυτές του τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής C_{f_x} . Στα Σχήματα 3.6.43 και 3.6.44 παρουσιάζεται η μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton St_x , με την απόσταση x , για $M_\infty = 0.5$ και για τις περιπτώσεις αδιαπέραστης πλάκας και έγχυσης/απορρόφησης, με την επίδραση ή όχι μαγνητικού πεδίου και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Παρατηρείται αύξηση του τοπικού αριθμού Stanton St_x αυξανόμενου του μαγνητικού πεδίου. Επίσης, στην περίπτωση της έγχυσης ο τοπικός αριθμός Stanton St_x ελαττώνεται σε σχέση με την αδιαπέραστη πλάκα ενώ το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση της απορρόφησης. Στα Σχήματα 3.6.45 και 3.6.46 παριστάνεται ο τοπικός αριθμός Stanton St_x , συναρτήσει του x , για διαφορετικούς αριθμούς Mach ($M_\infty = 0.375, 0.75, 1.5$) και για δύο τιμές της μαγνητικής παραμέτρου ($m_0 = 0$ και 8.), για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας. Συμπεραίνεται ότι ο τοπικός αριθμός Stanton St_x ελαττώνεται αυξανόμενου του αριθμού Mach σε αντιδιαστολή με την στρωτή ροή που παρατηρείται το ακριβώς αντίθετο. Το μαγνητικό πεδίο στην αρχή της πλάκας, δηλαδή σε μικρή απόσταση x από την οδηγούσα ακμή, δεν έχει μεγάλη επίδραση στον τοπικό αριθμό Stanton St_x , η επίδραση του όμως καθίσταται εμφανής καθώς η απόσταση x αυξάνεται και πλησιάζει στο σημείο αποκόλλησης x^* . Τέλος, σε μικρούς αριθμούς Mach το μαγνητικό πεδίο επιδρά πιο έντονα στον τοπικό αριθμό Stanton απ' ό,τι σε μεγαλύτερους αριθμούς Mach όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στα Σχήματα αυτά.

Σχήμα 3.6.43: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$ και 8. και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.44: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$, και 8, και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin Lomax)

Σχήμα 3.6.45: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $v_w = 0$, $m_0 = 0$, και 8, και για $M_\infty = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.46: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $v_w = 0$, $m_0 = 0$, και 8, και για $M_{\infty} = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.47: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0, 8$, και $v_w = 0$, και για $v_w < 0$, συνεχή ή τοπική στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.48: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, και για $v_w < 0$, συνεχή ή τοπική στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.49: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.50: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Τα Σχήματα 3.6.47 έως 3.6.50 παρουσιάζουν αποτελέσματα για την επίδραση της τοπικής έγχυσης/απορρόφησης, ή συνδυασμού αυτών των δύο, πάνω στον τοπικό αριθμό Stanton St_x . Έτσι, στα Σχήματα 3.6.47 και 3.6.48 παρουσιάζεται η μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton, με την απόσταση x , για $M_\infty = 1.5$ για την περίπτωση της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης, αλλά και για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας, με την παρουσία ή όχι μαγνητικού πεδίου. Παρατηρείται αύξηση του St_x με την εφαρμογή τόσο τοπικής όσο και συνεχούς απορρόφησης. Η αύξηση αυτή για την τοπική απορρόφηση είναι εμφανής μόνο στην περιοχή εφαρμογής της. Η αύξηση του St_x για την τοπική ή συνεχή απορρόφηση παρατηρείται τόσο στην αεροδυναμική όσο και στην MHD περίπτωση, και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Τέλος, στα Σχήματα 3.6.49 και 3.6.50 παρουσιάζεται η μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton St_x , με την απόσταση x , όταν στην θερμαινόμενη πλάκα εφαρμοστεί αρχικά τοπική έγχυση και έπειτα τοπική απορρόφηση, στις θέσεις $x_s = 0.8m$ και $x_s = 3.9m$, αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι εφαρμογή τοπικής έγχυσης αρχικά και τοπικής απορρόφησης έπειτα μεταβάλλει δραστικά τον αριθμό Stanton, αρχικά μειώνοντας τον και έπειτα αυξάνοντας τον, τόσο στην αεροδυναμική ($m_0 = 0.$) όσο και στην μαγνητοϋδροδυναμική περίπτωση ($m_0 = 8.$). Το συμπέρασμα αυτό είναι όμοιο και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Ο συνδυασμός τοπικής έγχυσης αρχικά και τοπικής απορρόφησης έπειτα, μπορεί να δημιουργεί έντονη μεταβολή του αριθμού Stanton αλλά όπως αναφέρεται και προηγούμενα συμβάλλει στην καλύτερη συμπεριφορά του τυρβώδους οριακού στρώματος πάνω από την θερμαινόμενη πλάκα. Επίσης η

εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου μετατοπίζει προς το χείλος εκφυγής το σημείο αποκόλλησης x^* του οριακού στρώματος πάνω από την πλάκα. Αυτό είναι πολύ σημαντικό στην περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας που το οριακό στρώμα πάνω από αυτήν αποκολλάται πιο εύκολα από ότι στην περίπτωση της αδιαβατικής ροής ή της ψυχόμενης.

(iii) Ψυχόμενη πλάκα ($S_w < 1$)

Τα αποτελέσματα που επιτυγχάνονται για την περίπτωση της τυρβώδους ροής πάνω από ψυχόμενη πλάκα είναι παρόμοια με αυτά των δύο προηγούμενων περιπτώσεων. Στην περίπτωση αυτή το οριακό στρώμα διατηρείται για μεγαλύτερο διάστημα x πάνω από την πλάκα απ' ό,τι στις άλλες δύο περιπτώσεις. Αυτό, όπως έχει ήδη αναφερθεί, οφείλεται στην ψύξη της πλάκας που ευνοεί την ροή και διατηρεί το οριακό στρώμα προσκολλημένο πάνω στην πλάκα για μεγαλύτερο διάστημα παρά την έντονη αντίξοη βαθμίδα πίεσης που εφαρμόζεται στην ροή. Οι μεταβολές των κατανομών της αδιάστατης ταχύτητας $f'(x, \eta)$, σε μια τυπική απόσταση $x = 4m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας φαίνονται στα Σχήματα 3.6.51 - 3.6.54. Οι γραφικές παραστάσεις της $f'(\eta)$ που παρατίθενται για την τυρβώδη ροή πάνω από ψυχόμενη πλάκα έχουν γίνει χρησιμοποιώντας το μοντέλο τύρβης των C-S, όπως και στην θερμαινόμενη πλάκα. Οι γραφικές παραστάσεις της $f'(\eta)$ με το μοντέλο τύρβης των B-L είναι παρόμοιες και δεν κρίνεται σκόπιμη η παράθεση τους για λόγους μεγέθους της διατριβής. Το Σχήμα 3.6.51 δείχνει την μεταβολή της $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$ για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας ($u_w = 0$) και για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου m_0 . Εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου αυξάνει την ταχύτητα του αέρα μέσα στο οριακό στρώμα όπως ακριβώς και στις άλλες δύο περιπτώσεις (αδιαβατική ροή, θερμαινόμενη πλάκα). Η αύξηση αυτή της ταχύτητας μέσα στο οριακό στρώμα γίνεται πιο μεγάλη όσο αυξάνεται το μαγνητικό πεδίο. Η επίδραση όμως του μαγνητικού πεδίου πάνω στην ροή περιορίζεται όσο αυξάνεται ο αριθμός Mach του ελεύθερου ρεύματος, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο Σχήμα 3.6.52. Ποσοτικά, όταν $\eta = 50$ και $M_\infty = 0.5$ εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου βοηθάει στην αύξηση της $f'(\eta)$ κατά 10.2%, ενώ η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση που $M_\infty = 1.5$ είναι μόλις 2%. Εφαρμογή απορρόφησης ($u_w < 0$) αυξάνει την ταχύτητα του ρευστού μέσα στο τυρβώδες οριακό στρώμα πάνω από την ψυχόμενη πλάκα η κατανομή της ταχύτητας όμως παραμένει σχεδόν η ίδια (Σχήμα 3.6.53). Εφαρμογή έγχυσης ($u_w > 0$) αντιθέτως ελαττώνει την ταχύτητα του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα. Ο συνδυασμός της τεχνικής έγχυσης/απορρόφησης και εφαρμογής μαγνητικού πεδίου για τον έλεγχο της ροής πάνω από την ψυχόμενη πλάκα φαίνεται στο Σχήμα 3.6.54. Έτσι, όταν $\eta = 50$, $m_0 = 0.$, $u_w > 0$ (καμπύλη (3)), η ταχύτητα του ρευστού πάνω από την ψυχόμενη πλάκα μειώνεται κατά 18.8% σε σχέση με την περίπτωση της απορρόφησης ($u_w < 0$) (καμπύλη (5)) και παρουσία μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8.$).

Οι μεταβολές του λόγου της ολικής ενέργειας $S = H / H_e$, σε μια απόσταση $x = 4m$ από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, με την αδιάστατη απόσταση η , μέσα στο οριακό στρώμα παρουσιάζεται στα Σχήματα 3.6.55 έως 3.6.58, για το μοντέλο τύρβης των Cebeci και Smith. Παρατηρείται ότι σ' όλα τα Σχήματα η θερμοκρασία του ρευστού αυξάνει με την αδιάστατη απόσταση η τείνοντας ασυμπτωτικά στην

Σχήμα 3.6.51: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $v_w = 0$, $m_0 = 0.$, $4.$ και $8.$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.52: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $v_w = 0$, $m_0 = 0.$ και $8.$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.53: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 4$, και $v_w = 0, <0, >0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.54: Μεταβολή της αδιάστατης ταχύτητας $f'(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0, 8$, και $v_w = 0, <0, >0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.55: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_\infty = 0.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0.$, 4. και 8. (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.56: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_\infty = 0.5, 1.5$, $\nu_w = 0$, $m_0 = 0., 8.$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.57: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 4$, και $v_w = 0, < 0, > 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.58: Μεταβολή της αδιάστατης θερμοκρασίας $S(\eta)$ για $M_{\infty} = 0.5$, $m_0 = 0, 8$, και $v_w = 0, < 0, > 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

οριακή της τιμή στο άπειρο. Η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου στο πεδίο ροής ελαττώνει πολύ λίγο την θερμοκρασία του ρευστού κοντά στην περιοχή της πλάκας ενώ στο μέσον και προς την ακμή του οριακού στρώματος την αυξάνει (Σχήμα 3.6.55). Η μεταβολή αυτή της θερμοκρασίας είναι πιο έντονη όσο αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Στο Σχήμα 3.6.56 παρατηρείται ότι αυξανόμενου του αριθμού Mach περιορίζεται η επίδραση του μαγνητικού πεδίου και για την περίπτωση της τυρβώδους ροής πάνω από επίπεδη ψυχόμενη πλάκα όπως ακριβώς και στις άλλες περιπτώσεις (αδιαβατική ροή, θερμαινόμενη πλάκα). Η εφαρμογή της τεχνικής απορρόφησης ($u_w < 0$) στην ψυχόμενη πλάκα αυξάνει την θερμοκρασία του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα, αντίθετα η τεχνική έγχυσης ($u_w > 0$) ελαττώνει την θερμοκρασία του ρευστού μέσα στο οριακό στρώμα, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται στο Σχήμα 3.6.57. Τέλος, στο Σχήμα 3.6.58 παριστάνεται η συνδυασμένη επίδραση του μαγνητικού πεδίου και της τεχνικής έγχυσης/απορρόφησης επί της θερμοκρασίας του ρευστού. Παρατηρείται ότι στην περίπτωση της απορρόφησης ($u_w < 0$), όταν $\eta = 50$ και το m_0 αυξάνει από 0. έως 8., υπάρχει αύξηση κατά 0.4% στην τιμή της S . Κάτω από τις ίδιες συνθήκες η αντίστοιχη αύξηση στην περίπτωση της έγχυσης ($u_w > 0$) είναι επίσης 0.4%. Τέλος, η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της $S(4.,50)$ μεταξύ των περιπτώσεων $m_0 = 0.$, $u_w > 0$ και $m_0 = 8.$, $u_w < 0$ είναι 2.3%.

Στα Σχήματα 3.6.59 - 3.6.67 απεικονίζονται οι μεταβολές του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} , με την απόσταση x , για διάφορες τιμές της μαγνητικής παραμέτρου, m_0 και του αριθμού Mach M_∞ της ελεύθερης ροής για συνεχή ή τοπική έγχυση απορρόφηση και αδιαπέραστη ψυχόμενη πλάκα. Οι τιμές της αντίστασης D απεικονίζονται, για κάθε περίπτωση πάνω στα Σχήματα όπως και στην αδιαβατική ροή και την θερμαινόμενη πλάκα. Το μαγνητικό πεδίο στην ψυχόμενη πλάκα, όπως και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας αυξάνοντας όμως την αντίσταση. Αυτό είναι φανερό και για τα δύο μοντέλα τύρβης, των Cebeci - Smith και Baldwin - Lomax όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.6.59 και 3.6.60, αντίστοιχα. Επίσης, από τα Σχήματα αυτά φαίνεται ότι η εφαρμογή απορρόφησης αυξάνει μεν την αντίσταση D αλλά μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής της. Το αντίθετο συμβαίνει με την εφαρμογή της έγχυσης. Στα Σχήματα 3.6.61 και 3.6.62 παρουσιάζεται η επίδραση του αριθμού Mach στην ροή καθώς και η επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Έτσι, αύξηση του αριθμού Mach ($M_\infty = 0.375, 0.75, 1.5$) μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* της ροής προς το χείλος εκφυγής σε αντίθεση με την ψυχόμενη πλάκα στην στρωτή ροή. Αυτό το συμπέρασμα είναι φανερό και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Επίσης, η επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω στην ροή ελαττώνεται αυξανόμενου του αριθμού Mach αν και πάντα το μαγνητικό πεδίο δρα ευεργετικά στην ροή μετατοπίζοντας το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας. Έτσι, όταν $M_\infty = 1.5$ και $m_0 = 0.$ το οριακό στρώμα αποκολλάται στο $x^* = 4.92$ ενώ όταν $m_0 = 8.$ η αποκόλληση επέρχεται στο $x^* = 5.015$ δηλαδή μεταβολή κατά $9.5cm$. Για $M_\infty = 0.375$ όμως η μεταβολή αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη και ίση με $73.5cm$ για το μοντέλο των C-S. Το μοντέλο των B-L δίνει μεταβολές $7.5cm$ και $70.5cm$, αντίστοιχα.

Στα Σχήματα 3.6.63 και 3.6.64 απεικονίζεται η επίδραση της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης στον αδιάστατο τοπικό συντελεστή επιδερμικής τριβής C_{f_x} και στο

Σχήμα 3.6.59: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$ και $8.$ και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.60: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0.$ και $8.$ και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin Lomax)

Σχήμα 3.6.61: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $u_w = 0$, $m_0 = 0$ και 8. και για $M_{\infty} = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.62: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $u_w = 0$, $m_0 = 0$ και 8. και για $M_{\infty} = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.63: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, και για $v_w < 0$, συνεχή ή τοπική, στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.64: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, και για $v_w < 0$, συνεχή ή τοπική στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.65: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.66: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{fx} για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0., 8.$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.67: Μεταβολή του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής στο τοίχωμα C_{f_x} για $M_\infty = 2.0$, $m_0 = 0., 8.$ και $u_w = 0$ και για τα δύο μοντέλα τύρβης

σημείο αποκόλλησης με την παρουσία ή όχι μαγνητικού πεδίου. Τόσο η συνεχής όσο και η τοπική απορρόφηση μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής της πλάκας. Αυτό ισχύει και στην περίπτωση που $m_0 = 0.$ όσο και στην περίπτωση που $m_0 = 8.$ Η τοπική απορρόφηση εφαρμόζεται λίγο πριν το σημείο αποκόλλησης, $x_s = 4.2m$, όπως ακριβώς και στις άλλες δύο περιπτώσεις που εξετάστηκαν νωρίτερα. Το σημαντικό εδώ είναι ότι η αντίσταση D που ασκείται πάνω στην πλάκα κατά την εφαρμογή της τοπικής απορρόφησης είναι λίγο μεγαλύτερη από ότι στην συνεχή. Όμως, τόσο η εφαρμογή της συνεχούς ή τοπικής απορρόφησης όσο και η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου αυξάνουν την αντίσταση στην ψυχόμενη πλάκα όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις (αδιαβατική ροή, θερμαινόμενη πλάκα). Καλύτερα αποτελέσματα, όπως χαρακτηριστικά φαίνεται και στα Σχήματα 3.6.65 και 3.6.66 για τα δύο μοντέλα τύρβης, επιτυγχάνονται με την συνδυασμένη επίδραση τοπικής απορρόφησης και τοπικής έγχυσης στις θέσεις $x_s = 4.2m$ και $x_s = 1.0m$, αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι ο συνδυασμός αυτός όχι μόνο μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής της πλάκας αλλά επίσης ελαττώνει και την αντίσταση D , τόσο χωρίς την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 0.$) όσο και με την ύπαρξη αυτού ($m_0 = 8.$), σε σχέση με την αδιαπέραστη πλάκα. Τέλος, στο Σχήμα 3.6.67 απεικονίζεται ο C_{f_x} με την απόσταση x για $M_\infty = 2.0$. Παρατηρείται ότι γι' αυτήν την τιμή του M_∞ , όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, όσον αφορά την κατάσταση της πλάκας ($S'_w = 0, S_w > 1$) η επίδραση του μαγνητικού πεδίου είναι πολύ μικρή. Αξίζει να σημειωθεί, για άλλη μια φορά, και στην τυρβώδη ροή, όπως αναφέρθηκε και στην στρωτή, ότι στην περίπτωση της ψυχόμενης πλάκας ($S_w = 0.5$) το

σημείο αποκόλλησης της ροής x^* βρίσκεται σημαντικά πιο κοντά στο χείλος εκφυγής σε σχέση με την θερμαινόμενη πλάκα συμβάλλοντας μεν στην σταθερότητα της ροής αλλά αυξάνοντας την ολική αντίσταση D πάνω από αυτήν. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει την αξία της μεθόδου ψύξης/θέρμανσης των τοιχωμάτων για την τυρβώδη όπως και στην στρωτή ροή. Επίσης, η τεχνική της έγχυσης/απορρόφησης αποτελεί μια πολύ καλή τεχνική ελέγχου του οριακού στρώματος τόσο στην στρωτή όσο και στην τυρβώδη ροή. Τέλος, η εφαρμογή μαγνητικού πεδίου επιδρά θετικά στην τυρβώδη ροή και βοηθά το οριακό στρώμα να διατηρείται όσο το δυνατόν περισσότερο πάνω από την πλάκα.

Στα Σχήματα 3.6.68 έως και 3.6.75 απεικονίζεται ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Stanton πάνω στην πλάκα St_x με την απόσταση x , κάτω από τις ίδιες συνθήκες με αυτές του αδιάστατου τοπικού συντελεστή επιδερμικής τριβής C_{f_x} . Στα Σχήματα 3.6.68 και 3.6.69 που παρουσιάζουν την μεταβολή του St_x με έγχυση/απορρόφηση, παρατηρείται αύξηση αυτού με την επίδραση μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 8$.) και για τα δύο μοντέλα τύρβης. Πρέπει να αναφερθεί εδώ ότι κοντά στην οδηγούσα ακμή της πλάκας, η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στον αδιάστατο τοπικό αριθμό Stanton St_x δεν είναι σημαντική προχωρώντας όμως προς το σημείο αποκόλλησης αυτή η επίδραση καθίσταται εντονότερη. Αυτό είναι φανερό και στην θερμαινόμενη πλάκα, όπως αναφέρθηκε εκεί. Επίσης εφαρμογή έγχυσης πάνω στην ψυχόμενη πλάκα ελαττώνει τον αδιάστατο τοπικό αριθμό Stanton St_x ενώ η απορρόφηση τον αυξάνει

Σχήμα 3.6.68: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$ και 8 , και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.69: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 0.5$, $m_0 = 0$ και 8, και $v_w = 0, > 0, < 0$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin Lomax)

Σχήμα 3.6.70: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $v_w = 0$, $m_0 = 0$ και 8, και για $M_\infty = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.71: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $v_w = 0$, $m_0 = 0$, και 8, και για $M_{\infty} = 0.375, 0.5$ και 1.5 (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.72: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_{\infty} = 1.5$, $m_0 = 0, 8$, και $v_w = 0$ και για $v_w < 0$, συνεχή ή τοπική, στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.73: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8$, και $v_w = 0$ και για $v_w < 0$, συνεχή ή τοπική, στο $x_s = 4.2$ (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

Σχήμα 3.6.74: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0., 8$, και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Cebeci – Smith)

Σχήμα 3.6.75: Μεταβολή του τοπικού αριθμού Stanton στο τοίχωμα St_x για $M_\infty = 1.5$, $m_0 = 0, 8$ και $v_w = 0$, τοπική απορρόφηση και τοπική έγχυση στα $x_s = 1.2$ και 4.2 , αντίστοιχα (μοντέλο τύρβης των Baldwin – Lomax)

σε σχέση με την αδιαπέραστη πλάκα. Στα Σχήματα 3.6.70 και 3.6.71 απεικονίζεται ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Stanton St_x με την απόσταση x , για τρεις αριθμούς Mach, $M_\infty = 0.375, 0.75, 1.5$ και για δύο τιμές της μαγνητικής παραμέτρου $m_0 = 0$ και 8 , για την περίπτωση αδιαπέραστης πλάκας. Από τα Σχήματα αυτά συνάγονται τα εξής συμπεράσματα. Ελάττωση του αδιάστατου τοπικού αριθμού Stanton St_x αυξανόμενου του αριθμού Mach της ελεύθερης ροής. Επίσης αύξηση του αδιάστατου τοπικού αριθμού Stanton St_x με την επίδραση του μαγνητικού πεδίου που είναι πιο έντονη για μικρές τιμές του αριθμού Mach και καθίσταται ασθενέστερη όσο ο αριθμός Mach αυξάνει. Τα συμπεράσματα αυτά είναι όμοια και για τα δύο μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται στην διατριβή. Τα αποτελέσματα που δίνουν και τα δύο μοντέλα τύρβης, τόσο το μοντέλο τύρβης των C-S όσο και το B-L, είναι παρόμοια και ποιοτικά ακολουθούν την ίδια συμπεριφορά και στην ψυχόμενη πλάκα όπως ήταν αναμενόμενο.

Τέλος, στα Σχήματα 3.6.72 - 3.6.75 παρουσιάζονται οι μεταβολές του αδιάστατου τοπικού αριθμού Stanton St_x , με εφαρμογή τοπικής έγχυσης/απορρόφησης, καθώς και η επίδραση της στο θερμικό οριακό στρώμα. Παρατηρείται ότι η εφαρμογή τόσο συνεχούς όσο και τοπικής απορρόφησης, λίγο πριν το σημείο αποκόλλησης $x_s = 4.2m$, με την παρουσία ($m_0 = 8$.) ή όχι μαγνητικού πεδίου ($m_0 = 0$.), αυξάνει τον αδιάστατο τοπικό αριθμό Stanton St_x . Για την τοπική απορρόφηση αυτή η αύξηση του St_x παρατηρείται μόνο στην περιοχή εφαρμογής της απορρόφησης. Αυτό είναι φανερό τόσο για το C-S μοντέλο τύρβης (Σχήμα 3.6.72) όσο και για το B-L (Σχήμα 3.6.73). Στα Σχήματα 3.6.74 και 3.6.75 παρουσιάζεται ο St_x , με την απόσταση x , για $M_\infty = 1.5$,

$m_0 = 0$. και 8., για αδιαπέραστη πλάκα και για την περίπτωση όπου εφαρμόζεται αρχικά τοπική έγχυση στην θέση $x_s = 1.0m$ και έπειτα τοπική απορρόφηση στην θέση $x_s = 4.2m$. Παρατηρείται ότι στην περιοχή εφαρμογής τοπικής έγχυσης ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Stanton St_x ελαττώνεται ενώ στην περιοχή τοπικής απορρόφησης αυξάνει, τόσο με την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου ή χωρίς. Η αύξηση του St_x , στην περιοχή της τοπικής απορρόφησης, είναι μεγαλύτερη από την ελάττωση του στην περιοχή της τοπικής έγχυσης. Αυτό οφείλεται αφενός μεν στο ότι η απορρόφηση επιδρά πιο έντονα στον St_x από την έγχυση και αφετέρου στο γεγονός εφαρμογής μεγαλύτερης έντασης απορρόφησης από την ένταση της έγχυσης.

Με τον σχολιασμό των Σχημάτων της ψυχόμενης πλάκας κλείνει η παράγραφος αυτή. Ακολουθούν κάποια συνοπτικά συμπεράσματα που βοηθούν τον αναγνώστη στην ανακεφαλαίωση και συγκέντρωση των αποτελεσμάτων αυτής της εργασίας για την τυρβώδη ροή.

3.7 Συμπεράσματα

Παρατίθενται τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανωτέρω ανάλυση της τυρβώδους ροής.

Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου προκύπτουν με την χρήση δύο μοντέλων τύρβης, των Cebeci - Smith και Baldwin - Lomax. Και τα δύο μοντέλα είναι αλγεβρικά, όπως έχει αναφερθεί, εύκολα στον προγραμματισμό έχουν χρησιμοποιηθεί σε πάρα πολλές ερευνητικές εργασίες και είναι αξιόπιστα. Παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα και με τα δύο μοντέλα τύρβης είναι ποιοτικά όμοια και μόνο μικρές ποσοτικές διαφορές υπάρχουν μεταξύ των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, το C-S μοντέλο παρουσιάζει πιο νωρίς αποκόλληση του οριακού στρώματος απ' ότι το B-L και γενικότερα οι αριθμητικές τιμές διαφόρων φυσικών μεγεθών που υπολογίζει είναι μικρότερες από τις αντίστοιχες του B-L.

Στην τυρβώδη ροή το οριακό στρώμα διατηρείται πάνω από την πλάκα για πολύ μεγαλύτερη απόσταση σε σχέση με την στρωτή. Έτσι, ενώ στην στρωτή ροή το οριακό στρώμα φαίνεται να αποκολλάται κοντά στο ένα μέτρο από την οδηγούσα ακμή της πλάκας, ανάλογα με την περίπτωση που εξετάζεται, στην τυρβώδη διατηρείται για τετραπλάσιο ή ακόμα και πενταπλάσιο μήκος. Μπορεί να σημειωθεί λοιπόν ότι για να διατηρηθεί το οριακό στρώμα για μεγαλύτερο διάστημα πάνω από την πλάκα καλό θα ήταν η ροή να είναι τυρβώδης. Αυτό σημαίνει όμως μεγαλύτερες απώλειες ενέργειας λόγω της φύσεως της τυρβώδους ροής. Στην φύση, η ροή που συναντάται κυρίως είναι η τυρβώδης, ενώ η στρωτή ροή υπάρχει κάτω από προϋποθέσεις. Στα παρακάτω συμπεράσματα της τυρβώδους ροής εμπεριέχονται και συγκρίσεις των δύο ροών για την αντιπαράβολή τους.

(i) Αδιαβατική ροή ($S'_w = 0$)

- Το μαγνητικό πεδίο επηρεάζει την τυρβώδη αδιαβατική ροή πάνω από επίπεδη πλάκα μετατοπίζοντας το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής αλλά αυξάνοντας την αντίσταση D . Η μετατόπιση αυτή του σημείου αποκόλλησης είναι μεγαλύτερη για μικρότερες τιμές του αριθμού Mach M_∞ . Επίσης σημαντικά επηρεάζει το πεδίο ταχύτητας, αυξάνοντας την ταχύτητα στο οριακό στρώμα. Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως με την θερμοκρασία η οποία επηρεάζεται μεν από την

επίδραση του μαγνητικού πεδίου αλλά όχι τόσο όσο η ταχύτητα. Το μαγνητικό πεδίο επηρεάζει την τυρβώδη ροή πάνω από την πλάκα με όμοιο τρόπο με αυτόν που επηρεάζει την στρωτή ροή.

- Η τεχνική της έγχυσης/απορρόφησης αποδεικνύεται και εδώ ως αποτελεσματική μέθοδος ελέγχου του οριακού στρώματος. Έτσι, η εφαρμογή έγχυσης βοηθά στην ελάττωση της επιδερμικής τριβής αλλά μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης του οριακού στρώματος προς την οδηγούσα ακμή της πλάκας. Αντίθετα, η απορρόφηση αυξάνει την επιδερμική τριβή αλλά μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης του οριακού στρώματος προς το χείλος εκφυγής.
- Η εφαρμογή τοπικής απορρόφησης κοντά στο σημείο αποκόλλησης του οριακού στρώματος βοηθά στην μετατόπιση του προς το χείλος εκφυγής της πλάκας και η αντίσταση D πάνω από αυτήν είναι μικρότερη της αντίστοιχης της συνεχούς. Η εφαρμογή αρχικά τοπικής έγχυσης και έπειτα τοπικής απορρόφησης μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας και ελαττώνει την αντίσταση D πάνω από αυτήν. Η επίδραση της τοπικής ή συνεχούς έγχυσης/απορρόφησης στην τυρβώδη ροή είναι ποιοτικά όμοια με την στρωτή.
- Αύξηση του αριθμού Mach (αύξηση συμπίεστικότητας) μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας στην τυρβώδη ροή σε αντίθεση με την στρωτή.

(ii) Θερμαινόμενη πλάκα ($S_w = 2.0$)

- Στην θερμαινόμενη πλάκα το οριακό στρώμα πάνω από αυτήν αποκολλάται νωρίτερα (με την χωρική έννοια) από ότι στην αδιαβατική ροή. Το αποτέλεσμα αυτό είναι όμοιο με την στρωτή ροή.
- Το μαγνητικό πεδίο επιδρά τόσο στο πεδίο ταχύτητας, αυξάνοντας το πάνω από την θερμαινόμενη πλάκα, όσο και στην θερμοκρασία του ρευστού μεταβάλλοντας την. Στην περιοχή της πλάκας το μαγνητικό πεδίο ελαττώνει ελάχιστα την θερμοκρασία ενώ μέσα στο οριακό στρώμα την αυξάνει. Εφαρμογή μαγνητικού πεδίου επιδρά στον αδιάστατο τοπικό συντελεστή επιδερμικής τριβής πάνω στην πλάκα C_{f_x} αυξάνοντας τον όπως και στην αδιαβατική ροή, μετατοπίζοντας το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής της πλάκας. Επίσης, παρατηρείται αύξηση της ολικής αντίστασης D σε σχέση με την αεροδυναμική ροή. Ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Stanton πάνω στην πλάκα St_x επηρεάζεται από το μαγνητικό πεδίο και παρατηρείται αύξηση του. Η επίδραση του μαγνητικού πεδίου εδώ, όπως και στην αδιαβατική ροή, είναι πιο έντονη για μικρούς αριθμούς Mach M_∞ . Παρόμοια αποτελέσματα έχουν παρατηρηθεί και στην στρωτή ροή.
- Το οριακό στρώμα πάνω από την θερμαινόμενη πλάκα επιδέχεται μεγαλύτερης έντασης έγχυσης/απορρόφησης από εκείνη της αδιαβατικής ροής ή της ροής πάνω από ψυχόμενη πλάκα. Φυσικό είναι λόγω της μεγαλύτερης τιμής της ταχύτητας έγχυσης/απορρόφησης η επίδραση της να είναι πιο έντονη στην περίπτωση αυτή.
- Η τεχνική της έγχυσης/απορρόφησης επηρεάζει την ροή πάνω από θερμαινόμενη πλάκα με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της αδιαβατικής ροής. Έτσι, η απορρόφηση

αυξάνει την αντίσταση D αλλά μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης x^* προς το χείλος εκφυγής της πλάκας στην τυρβώδη ροή σε αντίθεση με την στρωτή. Ο αδιάστατος τοπικός αριθμός Stanton πάνω στην πλάκα St_x επηρεάζεται από την έγχυση/απορρόφηση που εφαρμόζεται στο τοίχωμα αλλά και από την συμπιεστότητα.

- Η τεχνική της εφαρμογής τοπικής έγχυσης/απορρόφησης κοντά στο σημείο αποκόλλησης δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την συνεχή. Μάλιστα, η εφαρμογή αρχικά τοπικής έγχυσης και έπειτα τοπικής απορρόφησης όχι μόνο μετατοπίζει το σημείο αποκόλλησης προς το χείλος εκφυγής της πλάκας αλλά ελαττώνει και την συνολική αντίσταση D πάνω από αυτήν και στην περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας όπως και στην αδιαβατική ροή.

(iii) Ψυχόμενη πλάκα ($S_w = 0.5$)

- Στην ψυχόμενη πλάκα η ροή αποκολλάται πιο κοντά προς το χείλος εκφυγής σε σχέση με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις (αδιαβατική ροή, θερμαινόμενη πλάκα). Σαν συμπέρασμα μπορεί να αναφερθεί ότι με την ψύξη της πλάκας το τυρβώδες οριακό στρώμα διατηρείται όσο το δυνατόν περισσότερο πάνω αυτήν. Τα ίδια ακριβώς για την ψύξη/θέρμανση της πλάκας ισχύουν και στην στρωτή ροή.
- Το μαγνητικό πεδίο και σ' αυτήν την περίπτωση επιδρά με τον ίδιο τρόπο όπως και στις προηγούμενες, βοηθώντας την ροή να διατηρηθεί πάνω από την ψυχόμενη πλάκα, αυξάνοντας τον αδιάστατο τοπικό συντελεστή επιδερμικής τριβής C_{f_x} καθώς και τον αδιάστατο τοπικό αριθμό Stanton St_x και την αντίσταση D πάνω στην πλάκα.
- Το πεδίο ταχύτητας αυξάνεται με την εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου και η θερμοκρασία μεταβάλλεται με ανάλογο τρόπο όπως στην θερμαινόμενη πλάκα. Μεγαλύτερη είναι η επίδραση του μαγνητικού πεδίου πάνω στην αδιάστατη ταχύτητα στην αδιαβατική ροή και μικρότερη στην θερμαινόμενη πλάκα. Ενώ για την αδιάστατη θερμοκρασία οι μεταβολές της στην αδιαβατική ροή είναι πολύ μικρές και μεγαλύτερες μεταβολές υπάρχουν στην θερμαινόμενη πλάκα.
- Οι μεταβολές των βασικών μεγεθών του πεδίου ροής, που οφείλονται στην επίδραση των διάφορων αδιάστατων παραμέτρων αυτής, είναι ποιοτικά όμοιες με αυτές της θερμαινόμενης πλάκας ($S_w = 2.0$).
- Η επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης στην ροή, στην περίπτωση της ψυχόμενης πλάκας είναι παρόμοια με αυτήν της θερμαινόμενης. Η διαφορά είναι ότι στην προκειμένη περίπτωση η επίδραση της έγχυσης/απορρόφησης στην ροή είναι πιο έντονη και πιο αποτελεσματική από την αντίστοιχη στην περίπτωση της θερμαινόμενης πλάκας.
- Η τοπική έγχυση/απορρόφηση, και σ' αυτήν την περίπτωση, παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα από την περίπτωση της συνεχούς. Ο συνδυασμός δε τοπικής έγχυσης και τοπικής απορρόφησης στην πλάκα ελαττώνει την αντίσταση D σε σχέση με εκείνη της συνεχούς έγχυσης/απορρόφησης.

- Η ένταση της τοπικής ή συνεχούς έγχυσης/απορρόφησης που χρησιμοποιείται στην ψυχόμενη πλάκα είναι σαφώς μικρότερη από αυτήν στην θερμαινόμενη. Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς ότι κατά την εξέταση της επίδρασης της εφαρμογής της τεχνικής της έγχυσης/απορρόφησης στο οριακό στρώμα μεταξύ των περιπτώσεων $S'_w = 0$, $S_w > 1$ και $S_w < 1$, πρέπει να γίνεται μόνο ποιοτική σύγκριση των αποτελεσμάτων των περιπτώσεων αυτών.

Numerical Study of Magnetohydrodynamic Compressible Boundary Layer Flow Over a Flat Plate with Adverse Pressure Gradient and Heat and Mass Transfer

Summary

In this thesis the steady two-dimensional magnetohydrodynamic (MHD), compressible boundary layer flow, over a flat plate is numerically studied. The flow is subjected to an adverse pressure gradient, due to a linearly retarded velocity, that is known as Howarth's flow. The plate is electrically non-conducting and it is subjected to a suction/injection velocity, continuous or localized, normal to it. The case of an impermeable plate is also studied. The plate is parallel to the free stream of a heat-conducting perfect gas (air) flowing with velocity u_∞ along the plate. The flow field is subjected to the action of a constant magnetic field which acts normal to the plate. The fluid (air) is considered Newtonian, compressible and electrically conducting.

The fundamental equations of MHD flow are presented in Chapter I as well as the characteristic quantities of the boundary layer which are used in this study.

The laminar flow is studied in Chapter II where as the turbulent flow is studied in Chapter III. For both cases (laminar and turbulent) the partial differential equations and their boundary conditions, describing the problem under consideration, are transformed using the compressible Falkner-Skan transformation and the numerical solution of the problem is obtained by using a modification of the well known Keller's box method. The obtained numerical results for the velocity and temperature field, as well as for the associated boundary layer parameters, are shown in figures for different free-stream Mach numbers M_∞ and for the case (i) of an adiabatic flow ($S'_w = 0$), (ii) heating of the wall ($S_w > 1$) and (iii) cooling of the wall ($S_w < 1$), followed by an extensive discussion.

For turbulent flow, in Chapter III, the Reynolds-averaged boundary layer equations are used. Two different turbulent models, namely the model of Cebeci-Smith and Baldwin-Lomax, are used to represent eddy kinematic viscosity and eddy diffusivity of heat. These models are the most simple with acceptable generality and their accuracy has been explored for a wide range of flows for which there are experimental data. It has also been found that they give results sufficiently accurate for most engineering problems. For the turbulent Prandtl number model a modification of the extended Kays and Crawford's model is also used.

In the case of laminar flow (Chapter II) the numerical calculations showed that the application of suction moves separation point downstream, whereas injection moves the separation point towards the leading edge of the plate. The presence of the magnetic field always increases frictional drag on the wall but moves the separation point downstream for every value of free-stream Mach number. This displacement is greater for small values of M_∞ . The combined influence of the magnetic field, localized injection and localized suction moves separation point downstream reducing frictional drag. These results confirmed for the three cases (adiabatic flow, heating of the wall, cooling of the wall) of the laminar flow and for various free-stream Mach numbers.

Since most flows, which occur in practical applications, are turbulent the results in this case (Chapter III) are more important and are similar with those in laminar flow.

Precisely, application of suction moves separation point downstream but injection moves separation point towards the leading edge of the plate reducing drag. Application of localized injection and localized suction moves the separation point downstream reducing total drag. The presence of the magnetic field moves separation point downstream increasing frictional drag. The combined influence of magnetic field, localized injection and localized suction moves separation point further downstream as regards the other cases. These results confirmed for the three cases (adiabatic flow, heating of the wall, cooling of the wall) of turbulent flow, for various free-stream numbers and for two turbulent models (C-S and B-L).

It is hoped that, in the absence of detailed investigations of this problem, the obtained results, are very interesting and give a clearer insight into the mechanism of controlling a laminar or turbulent boundary layer compressible flow.

Βιβλιογραφία - Αναφορές

- [1] M. Acharya, L.P. Singh and G.C. Dash, Heat and mass transfer over an accelerating surface with heat source in presence of suction and blowing, *Int. J. Engn. Sci.*, Vol. 37, pp. 189-211, 1999.
- [2] I.V. Adamovich, J.W. Rich, G.L. Nelson, Feasibility study of magnetohydrodynamic acceleration of unseeded and seeded airflows, *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 590-597, 1998.
- [3] R. Agarwal, Computational fluid dynamics of whole-body aircraft, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 31, pp. 125-169, 1999.
- [4] M.E.S. Ahmed and H.A. Attia, Magnetohydrodynamic flow and heat transfer of a non-Newtonian fluid in an eccentric annulus, *Can. J. Phys.*, Vol. 76, pp. 391-401, 1998.
- [5] P.D. Ariel, Hiemenz flow in hydromagnetics, *Acta Mechanica*, Vol. 103, pp. 31-43, 1994.
- [6] P.D. Ariel, MHD flow of a viscoelastic fluid past a stretching sheet with suction, *Acta Mechanica*, Vol. 105, pp. 49-56, 1994.
- [7] D. Arnal, Control of laminar-turbulent transition for skin friction drag reduction, in: *Control of Flow Instabilities and Unsteady Flows*, CISM Course, September 18-22, 1995.
- [8] D. Arnal, In *Proceedings of the CISM Courses and Lectures on Control of Flow Instabilities and Unsteady Flows*, Udine, Italy, 18-22 September, No. 369, 1995. Edited by G.E.A. Meier and G.H. Schnerr, Springer-Verlag, 1996.
- [9] D. Arnal, Numerical and experimental studies on laminar flow control, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 30, pp. 193-204, 1999.
- [10] P. Balakumar and P. Hall, Optimum suction distribution for transition control, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. 13, pp. 1-19, 1999.
- [11] B. Baldwin and T. Bath, A one-equation turbulence transport model for high Reynolds number in wall bounded flows, *NASA Technical Memorandum* 102847, 1978.
- [12] B. Baldwin and H. Lomax, Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows, *AIAA Paper* 78-205, 1978.
- [13] G. Barakos and D. Drikakis, An implicit unfactored method for unsteady turbulent compressible flows with moving boundaries, *Computers & Fluids*, Vol. 28, pp. 899-922, 1999.

- [14] R.F. Blackwelder, The eddy structures in bounded shear flows, in: Special Course on Skin Friction Drag Reduction (ed. J. Cousteix) AGARD Report 786, Paper 6, 1992.
- [15] Z.O. Bleviss, Magnetogasdynamics of hypersonic couette flow, J. Aero/Space Sci., Vol. 25, No. 10, pp. 601-615, 1958.
- [16] J.P. Boyd, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Dover, 2000.
- [17] P. Bradshaw, Turbulence, in Science Progress, 67: 185, Oxford, 1981.
- [18] P. Bradshaw (ed.), Turbulence, Topics in Applied Physics, Springer-Verlag, Berlin, Vol. 12, 1976.
- [19] H. Branover (ed.), MHD – flows and turbulence, Proceedings of the Bat-Sheva international seminar, Beersheva, March 17-20, 1975.
- [20] K.C. Brown and P.N. Joubert, The measurement of skin friction in turbulent boundary layer with adverse pressure gradients, J. Fluid Mech., Vol. 35, pp. 737-757, 1969.
- [21] S.N. Brown and K. Stewartson, Laminar separation, Annual Review of Fluid Mech., Vol. 1, pp. 45-72, 1969.
- [22] R.L. Burden, J.D. Faires, A.C. Reynolds, Numerical Analysis, Prindle, Weber & Schmidt, Second edition, 1981.
- [23] D.M. Bushnell, Longitudinal vortex control-techniques and applications, The 32nd Lanchester Lecture, Aeronautical Quarterly, 293-312, October 1992.
- [24] H. Cabannes, Theoretical magnetofluid dynamics, Academic Press, New York, 1970.
- [25] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1988.
- [26] G. Casalis, M.L. Copie, Ch. Airiau, D. Arnal, Nonlinear analysis with PSE approach, IUTAM Symposium on Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers, Manchester, July 1995.
- [27] T. Cebeci and A.M.O. Smith, Analysis of turbulent boundary layers, Academic Press, New York, 1974.
- [28] T. Cebeci, A model for eddy conductivity and turbulent Prandtl number, ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 95, pp. 227-234, 1973.
- [29] T. Cebeci and P. Bradshaw, Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer, Springer-Verlag, 1984.

- [30] J.M.G. Chanty, Magnetized plasma flow over an insulator at high magnetic Reynolds number, *J. Thermoph. Heat Transfer*, Vol. 8, No. 4, p. 795, 1994.
- [31] C.J. Chen and J.S. Chiou, Laminar and turbulent heat transfer in the pipe entrance region for liquid metals, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 1179-1189, 1981.
- [32] T.C. Chiam, A numerical solution for the laminar boundary layer flow with an exponentially decreasing velocity distribution, *Acta Mechanica*, Vol. 129, pp. 255-261, 1998.
- [33] J.S. Chiou and H.N. Kao, Heat transfer characteristics of a MHD laminar jet flowing over a convex surface, *Appl. Math. Modelling*, Vol. 18, No. 12, pp. 679-684, 1994.
- [34] P.Y. Chou, On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulence fluctuations, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 3, pp. 38-564, 1945.
- [35] Y.M. Chung, H.J. Sung and A.V. Boiko, Spatial simulation of the instability of channel flow with local suction/blowing, *Phys. Fluids*, Vol. 9, No. 11, pp. 3258-3266, 1997.
- [36] D. Coles and A.J. Wadcock, Flying-hot-wire study of flow past an NACA 4412 airfoil at maximum lift, *AIAA Journal*, Vol. 17, No. 4, 1979.
- [37] D.E. Coles and E.A. Hirst, *Proc. AFOSF-IFP-Stanford Conf. On Computation of Turbulent Boundary Layers*, Stanford, Aug. 18-25, 1968.
- [38] M.A. Collins and R.L. Simpson, Flowfield prediction of separating turbulent shear layers, *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 4, pp. 291-292, 1978.
- [39] P. Cooper, Turbulent boundary layer on a rotating disk calculated with an effective viscosity, *AIAA Journal*, Vol. 9, p. 255, 1971.
- [40] K.R. Cramer and S.I. Pai, *Magnetofluid dynamics for engineers and applied physicists*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [41] R.M. Cummings, L.B. Schiff, J.D. Duino, Experimental investigation of tangential slot blowing on a generic chined forebody, *Journal of Aircraft*, Vol. 32, No. 4, pp. 812-824, 1995.
- [42] R.B. Dahlburg, and J.M. Picone, Pseudospectral simulation of compressible magnetohydrodynamic turbulence, *International Conference on Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, pp. 409-416, 1990.
- [43] R.B. Dahlburg, J.P. Dahlburg and J.T. Mariska, Helical magnetohydrodynamic turbulence and the coronal heating problem, *Astron. Astrophys*, Vol. 198, pp. 300-310, 1989.

- [44] B.I. Davidov, On the statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid, Dokl. Akad Nauk SSSR, Vol. 136, p. 47, 1961.
- [45] J.H. Davidson, F.A. Kulacki and P.F. Dunn, Handbook of single-phase convective heat transfer, Edited by S. Kakac, R. K. Shah and W. Aung, John Wiley & Sons, 1987.
- [46] G.R. Deboy and D.E. Abbot, Examination of turbulent shear models and the prediction of compressible turbulent boundary layers by the method of weighted residuals, Tech. Rep. No FMTR-71-1, Purdue Univ. Press, Lafayette, Indiana, 1971.
- [47] P. Dengel and H.H. Fernholz, An experimental investigation of an incompressible turbulent boundary layer in the vicinity of separation, J. Fluid Mech., Vol. 212, pp. 615-636, 1990.
- [48] C.duP. Donaldson and H. Rosenbaum, Calculation of turbulent shear flows through closure of the Reynolds equations by invariant modeling, ARAP Inc. Rep., 127, also NASA-CR-128172, 1968.
- [49] C.duP. Donaldson and R.D. Sullivan, An invariant second-order closure model of the compressible turbulent boundary layer on a flat plate, ARAP Inc. Rep., 178, 1972.
- [50] C.A.J. Fletcher, Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. I & II, Springer-Verlag, 1991.
- [51] D. Frei and H. Thomann, Direct measurements of skin friction in a turbulent boundary layer with a strong adverse pressure gradient, J. Fluid Mech., Vol. 101, pp. 79-95, 1980.
- [52] M. Gad-el-Hak, A. Pollard, J.P. Bonnet (eds.), Flow control: Fundamentals and Practices, Springer, 1998.
- [53] M. Gad-el-Hak and D.M. Bushnell, Separation control: review, J. Fluid Eng., Transactions of the ASME, Vol. 113, pp. 5-29, 1991.
- [54] M. Gad-el-Hak and D.M. Bushnell, Status and outlook of flow separation control, AIAA Paper 91-0037, 1991.
- [55] M. Gad-el-Hak, Flow control by suction, in: Structure of Turbulence and Drag Reduction (ed. A. Gyr) IUTAM Symposium, Zurich, Switzerland, Springer-Verlag, pp. 357-360, 1990.
- [56] M. Gad-el-Hak and R.F. Blackwelder, Selective suction of controlling bursting events in a boundary layer, AIAA Journal, Vol. 27, No. 3, pp. 308-314, 1989.
- [57] S. Goldstein, On laminar boundary layer flow near a point of separation, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 1, pp. 43-69, 1948.

- [58] R.S.R. Gorla, H.S. Takhar and A. Slaouti, Magnetohydrodynamic free convection boundary layer flow of a thermomicropolar fluid over a vertical plate, *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 36, No. 3, pp. 315-327, 1998.
- [59] R.S.R. Gorla, J.K. Lee, S. Nakamura and I. Pop, Effects of transverse magnetic field on mixed convection in wall plume of power-law fluids, *Int. J. Engn. Sci.*, Vol. 31, No. 7, pp. 1035-1045, 1993.
- [60] R.J. Grade, *Turbulent Flow*, John Wiley & sons, New York, 1994.
- [61] F.D. Hains and Y.A. Yoler, Axisymmetric magnetohydrodynamic flow, *J. Aerospace Sci.*, pp. 143-150, February 1962.
- [62] D.D. Haldavnekar, S.S. Santpur and V.M. Soundalgekar, Unsteady MHD flow and heat transfer in boundary layers in a rotating flow with variable suction, *Modeling, Simulation & Control B: Mechanical and Thermal Engineering, Materials & Resources, Chemistry*, Vol. 54, p. 1, 1994.
- [63] K. Hanjalic and B.E. Launder, A Reynolds-stress model of turbulence, and its application to thin shear flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 52, p. 609, 1972.
- [64] F.H. Harlow and P.I. Nakayama, Turbulence transport equations, *Phys. Fluids*, Vol. 10, p. 2323, 1967.
- [65] J.E. Harris, Numerical solution of the equation for compressible laminar, transitional, and turbulent boundary layers and comparisons with experimental data, *NASA Tech. Rep. No R-368*, 1971.
- [66] J. Hartmann, Hg-Dynamics I, Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogenous magnetic field, *Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddeleser*, XV, 6, 1937.
- [67] J. Hartmann and F. Lazarus, Hg-Dynamics II, Experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field, *Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddeleser*, XV, 7, 1937.
- [68] J.N. Hefner, D.M. Bushnell, Surface drag reduction via surface mass injection, in: *Viscous drag reduction in boundary layers, Progress in Astronautics and Aeronautics 123*, AIAA Washington D. C., pp. 457-476, 1990.
- [69] F. Hirt and H. Thomann, Measurements of wall shear stress in turbulent boundary layers subject to strong pressure gradients, *J. Fluid Mech.*, Vol. 171, pp. 547-562, 1986.
- [70] E.J. Hopkins and M. Inouye, An evaluation of theories for predicting turbulent skin friction and heat transfer on flat plates at supersonic and hypersonic mach numbers, *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 6, pp. 993-1003, June 1971.

- [71] E.J. Hopkins, E.R. Keener, T.E. Polek and H.A. Dwyer, Hypersonic turbulent skin-friction and boundary layer profiles on nonadiabatic flat plates, *AIAA Journal*, Vol. 10, p. 40, 1972.
- [72] M.A. Hossain, I. Pop and T.Y. Na, Effect of heat transfer on compressible boundary layer flow over a circular cylinder, *Acta Mechanica*, Vol. 131, pp. 267-272, 1998.
- [73] L. Howarth, *On the solution of the Laminar Boundary Layer in Compressible Fluids*, Oxford, 1964.
- [74] W.F. Hughes and F.J. Young, *The Electromagnetodynamics of Fluids*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1st Ed., 1966.
- [75] E.O. Hulburt, Advances in the physics of the upper air since 1950, *NRL Report* 4600, October 25, 1955.
- [76] C.M. Hung, Computation of Navier-Stokes equations for three-dimensional flow separation, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 10, pp. 1659-1667, 1991.
- [77] F. Ilinca, D. Pelletier and L. Ignat, Adaptive finite element solution of compressible turbulent flows, *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 12, pp. 2187-2194, 1998.
- [78] P.N. Inman and P. Bradshaw, Mixing length in low Reynolds number turbulent boundary layers, *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 5, pp. 653-655, 1981.
- [79] M. Jischa, H.B. Rieke, About the prediction of turbulent Prandtl and Schmidt number, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 22, pp. 1547-1555, 1979.
- [80] B.A. Kader and A.M. Yaglom, Similarity treatment of moving-equilibrium turbulent boundary layers in adverse pressure gradients, *J. Fluid Mech.*, Vol. 89, pp. 305-342, 1978.
- [81] Α. Καραμπής, Διδακτορική Διατριβή, Αριθμητική μελέτη της Γραμμικής Ανιζωδικής Ευστάθειας Συμπιεστού Υπερηχητικού Οριακού Στρώματος Γύρω από Κόνο, 2000.
- [82] N. Kafoussias, A. Karabis and M. Xenos, Numerical study of two dimensional laminar boundary layer compressible flow with pressure gradient and heat and mass transfer, *Inter. J. Engn. Sci.*, Vol. 37, pp. 1795-1812, 1999.
- [83] N.G. Kafoussias and M.A. Xenos, Numerical investigation of two-dimensional turbulent boundary-layer compressible flow with adverse pressure gradient and heat and mass transfer, *Acta Mechanica*, Vol. 141, pp. 201-223, 2000.
- [84] N.G. Kafoussias and N.D. Nanousis, Magnetohydrodynamic laminar boundary-layer flow over a wedge with suction or injection, *Can. J. Phys.* Vol. 75, pp. 733-745, 1997.

- [85] Ν. Καφούσιας, Υπολογιστική Ρευστοδυναμική Ι & ΙΙ, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 1996.
- [86] A.K. Kalkan and G. Talmage, Heat transfer in liquid metals with electric currents and magnetic fields: the conduction case, I. J. Heat Mass Transfer, Vol. 37, No. 3, pp. 511-521, 1994.
- [87] W.M. Kays and M.E. Crawford, Convective Heat and Mass Transfer, 3rd edn., McGraw-Hill, New York, 1993.
- [88] H.B. Keller, A new difference scheme for parabolic problems. Numerical Solutions of Partial Differential Equations, II, J. Bramble (ed.). Academic Press, New York, pp. 265- 293, 1970.
- [89] J.J. Kim, Study of turbulence structure through numerical simulations : the perspective of drag and reduction, in : Special Course on Skin Friction Drag Reduction (ed. J. Cousteix) AGARD Report 786, Paper 7, 1992.
- [90] K. Kinoshita, K. Tsunoda and K. Yoshikawa, Heat transfer in a disk MHD generator under the influence of a Lorentz force, Heat Transfer Japanese Research, Vol. 23, No. 3, pp. 230- , 1994.
- [91] S.J. Kline, S.K. Robinson, Turbulent boundary layer structure: progress, status and challenges, in: Structure of Turbulence and Drag Reduction (ed. A. Gyr) IUTAM Symposium, Zurich, Spriger-Verlag, pp. 3-22, 1990.
- [92] A.N. Kolmogorov, Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Turbulent Fluid, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser Phys. VI, No. 1-2, 1942.
- [93] S. Kotake, K. Hijikata, Numerical Simulations of Heat Transfer and Fluid Flow on a Personal Computer, Transport Processes in Engineering, 3, Elsevier, Amsterdam, 1993.
- [94] M. Kumari, MHD flows over a wedge with large blowing rates, Int. J. Engng. Sci., Vol. 36, No. 3, pp. 299-314, 1988.
- [95] B.E. Launder, A. Morse, W. Rodi and D.B. Spalding, The prediction of free shear flows-a comparison of the performance of six turbulent models, Proc. Conf. Free Turbulent Shear Flows, NASA-SP-321, 1973.
- [96] C.H. Lewis, E.W. Miner and E.C. Anderson, Effects of strong axial pressure gradients on turbulent boundary-layer flows, AGARD Conf. Proc. No 93, Turbulent Shear Flows, London, Proc. N72-20273, paper N72-20281, 1971.
- [97] C.R. Lin and C.K. Chen, Hydromagnetic flow and heat transfer about a fluid underlying the axisymmetric spreading surface, Int. J. Engn. Sci., Vol. 31, No. 2, pp. 251-261, 1993.

- [98] I. Marusic, A.E. Perry, A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layers, Part 2, Further experimental support, *J. Fluid Mech.*, Vol. 298, pp. 389-407, 1995.
- [99] G.E.A. Meier, In *Proceedings of the CISM Courses and Lectures on Control of Flow Instabilities and Unsteady Flows*, Udine, Italy, 18-22 September, No. 369, 1995. Edited by G.E.A. Meier and G.H. Schnerr, Springer-Verlag, 1996.
- [100] M. Meneguzzi, A. Pouquet, P.L. Sulem (eds.), *Turbulence and Nonlinear Dynamics in MHD Flows*, *Proceedings of the Workshop on Turbulence and Nonlinear Dynamics in MHD Flows*, Cargèse, France, July 4-8, North-Holland, 1988.
- [101] W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, Schneider, G.E., Pletcher, R. H.: *Handbook of Numerical Heat Transfer*, John Wiley & Sons, Inc. 1988.
- [102] R.J. Moffat and W.M. Kays, A review of turbulent boundary layer heat transfer, *Research at Stanford, 1958-1983*, *Adv. In Heat Transfer*, Vol. 16, pp. 241-365. 1984.
- [103] Α. Μπακόπουλος, Ι. Χρυσοβέργης, Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Εκδόσεις Ι. Συμεών, 1985.
- [104] V.S. Murthy and W.C. Rose, Wall shear stress measurements in a shock-wave boundary-layer interaction, *AIAA Journal*, Vol. 16, No. 7, pp. 667-672, 1978.
- [105] R.Y. Myose, R.F. Blackwelder, Control of streamwise vortices using selective suction, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 6, pp. 1076-1080, 1995.
- [106] Y. Nagano, M. Shimada, H. Yamada and M. Kuroishi, Effects of adverse pressure gradient of mean and fluctuating flow characteristics of turbulent boundary layer, *National Heat Transfer Symposium of Japan*, Vol. 33, No. 1, pp. 1-2, 1996.
- [107] Y. Nagano, M. Tagawa and T. Tsuji, Effects of adverse pressure gradients on mean flows and turbulent statistics in a boundary layer, *Eighth Symp. On Turbulent Shear Flows*, Sept. 9-11, Munich, Springer, 1991.
- [108] L.H. Norris, W.C. Reynolds, *Turbulent channel flow with a moving wavy boundary*, Rept. No. FM – 10, Stanford Univ. Mech. Eng. Dept., USA, 1975.
- [109] E.N. Petropoulou and P.D. Sifarakas, Bounded solutions of a class of linear delay and advanced partial difference equations, *Dynamics Systems and Applications*, Vol. 10, pp. 243-260, 2001.
- [110] E.N. Petropoulou and P.D. Sifarakas, Solutions of non-linear delay and advanced partial difference equations in the space $\ell^1_{N \times N}$, *Computers and Mathematics with Applications*, Special Issue: *Advances in Difference IV*, (to appear)
- [111] I. Pop and T.Y. Na, A note on MHD flow over a stretching permeable surface, *Mech. Res. Comm.*, Vol. 25, No. 3, pp. 263-269, 1998.

- [112]I. Pop, M. Kumari and G. Nath, Conjugate MHD flow past a flat plate, *Acta Mechanica*, Vol. 106, pp. 215-220, 1994.
- [113]L. Prandtl, *Über Ein Neues Formelsystem für die ausgebildete Trubulenz*. Nachrichten van der Akad der Wissenschaft in Gottingen, 1945.
- [114]T.H. Pulliam and J. L. Steger, Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow, *AIAA Journal*, Vol. 18, No. 2, pp. 159-167, 1980.
- [115]D.A.S. Rees, Three dimensional free convection boundary layers in porous media induced by a heated surface with spanwise temperature variations, *Transactions ASME, J. of Heat Transfer*, Vol. 119, pp. 792-798, 1997.
- [116]E.L. Resler and W.R. Sears, The prospects for magneto-aerodynamics, *J. Aeronautical Sci.*, Vol. 25, No. 4, pp. 235-258, 1958.
- [117]W.S. Reynolds, W.S. Saric, Experiments on the stability of the flat plate boundary layer with suction, *AIAA Paper 82-1026*, 1982.
- [118]S.K. Robinson, Coherent motions in the turbulent boundary layer, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 23, pp. 603-639, 1991.
- [119]W. Rodi, Turbulence models and their applications in hydraulics, A state-of-the-art review, A.A. Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1993.
- [120]V.J. Rossow, On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field, *Report 1358*, 1957.
- [121]V.J. Rossow, On magneto-aerodynamic boundary layers, *ZAMP*, Vol. IX b, pp. 519-527, 1958.
- [122]J.C. Rotta, Statistische theorie nichthomogener turbulenz, *Z. Phys.*, Vol. 129, pp. 547-572, 1951.
- [123]S. Roy, Nonuniform slot injection (suction) into a compressible flow, *Acta Mechanica*, Vol. 139, pp. 43-56, 2000.
- [124]H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, Trans. by Kestin J., 7th Ed., McGraw-Hill, Inc. New York, 1979.
- [125]S. Schreier, *Compressible Flow*, Wiley, New York, 1982.
- [126]J.V. Shebalin and D. Montgomery, Magnetic field amplification in mechanically driven compressible magnetohydrodynamic turbulence, *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 8, pp. 1360-1368, 1990.
- [127]Y. Shimomura, Large eddy simulation of magnetohydrodynamic turbulent channel flow under a uniform magnetic field, *Phys. Fluids A*, Vol. 3, No. 12, pp. 3098-3106, 1991.

- [128]R.L. Simpson, J.H. Strickland, and P.W. Berr, Features of a separating turbulent boundary layer in the vicinity of separation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 79, pp. 553-594, 1977.
- [129]R.L. Simpson, Y.T. Chew, and B.G. Shivaprasad, The structure of a separating turbulent boundary layer. Part 1. Mean flow and Reynolds stresses, *J. Fluid Mech.*, Vol. 113, pp. 23-51, 1981.
- [130]R.L. Simpson, Y.T. Chew, and B.G. Shivaprasad, The structure of a separating turbulent boundary layer. Part 2. Higher-order turbulence results, *J. Fluid Mech.*, Vol. 113, pp. 53-73, 1981.
- [131]M. Sokolov, R.A. Antonia, Response of a turbulent boundary layer to intensive suction through a porous strip, in: *Proceedings 9th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Kyoto Japan, Paper 5-3, 1993.
- [132]P.R. Spalart and J.H. Watmuff, Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with pressure gradients, *J. Fluid Mech.*, Vol. 249, pp. 337-371, 1993.
- [133]P.R. Spalart, G.N. Coleman, Numerical study of a separation bubble with heat transfer, *Europ. J. Mech. B16*, pp. 169-189, 1997.
- [134]P.R. Spalart, R.D. Moser, M.M. Rogers, Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions, *J. Comp. Phys.*, Vol. 96, pp. 297-324, 1991.
- [135]D.B. Spalding and W. Rodi, A two parameter model of turbulence and its application to free jets, *Wärme und Stoffübertragung*, No. 3, p. 85, 1970.
- [136]E.T. Spyropoulos and G.A. Blaisdell, Large-eddy simulation of a spatially evolving supersonic turbulent boundary-layer flow, *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 11, pp. 1983-1990, 1998.
- [137]B.S. Stratford, Flow in the laminar boundary layer near separation, *ARC, RM 3002*, pp. 1-27, 1957.
- [138]J.L. Steger, Implicit finite difference simulation of flow about arbitrary geometries with application to airfoils, *AIAA Paper 77-665*, presented at *AIAA 12th Thermophysics Conference* at Albuquerque, New Mex., June 27-29, 1977.
- [139]Y. Sumitani, N. Kasagi, Direct Numerical Simulation of turbulent transport with uniform wall injection and suction, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 7, pp. 1220-1228, 1995.
- [140]G.W. Sutton and A. Sherman, *Engineering Magnetohydrodynamics*, McGraw-Hill, Inc. New York, 1965.

- [141]S. Suwa and Y. Sasaki, On the magnetohydrodynamical incompressible radial wall jet in the presence of a transverse magnetic field, Transac. Japanese Soc. Aeron. Space Sci., Vol. 37, No. 115, p. 42, 1994.
- [142]H.S. Takar and G. Nath, Self-similar solution of the unsteady flow in the stagnation point region of a rotating sphere with a magnetic field, Heat and Mass Transfer, Vol. 36, pp. 89-96, 2000.
- [143]H.S. Takar, A.J. Chamkha and G. Nath, Unsteady flow and heat transfer on a semi-infinite flat plate with an aligned magnetic field, Int. J. Engng. Sci., Vol. 37, pp. 1723-1736, 1999.
- [144]B.E. Thompson and J.H. Whitelaw, Characteristics of a trailing-edge flow with turbulent boundary-layer separation, J. Fluid Mech., Vol. 157, pp. 305-326, 1985.
- [145]T. Watanabe and I. Pop, Thermal boundary layers in magnetohydrodynamic flow over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field, Acta Mechanica, Vol. 105, pp. 233-238, 1994.
- [146]B. Weigand, J.R. Ferguson, M.E. Crawford, An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, No. 17, pp. 4191-4196, 1997.
- [147]F.M. White, Viscous Fluid Flow, Second Edition, McGraw-Hill, New-York, 1991.
- [148]S.P. Wilkinson, J.B. Anders, B.S. Lazos, D.M. Bushnell, Turbulent drag reduction research of NASA Langley: progress and plans, Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol. 9, pp. 266-277, 1988.
- [149]W.P. Wolf and S.S. Ochs, CFD calculations of S809 aerodynamic characteristics, AIAA Paper 97-0973, 1997.
- [150]M. Wolfstein, The velocity and temperature distributions of one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient, Inter. J. Heat Mass Transfer, Vol. 12, pp. 301-318, 1969.
- [151]X. Wu and K.D. Squires, Large eddy simulation of an equilibrium three-dimensional turbulent boundary layer, AIAA Journal, Vol. 35, No. 1, pp. 67-74, 1997.
- [152]Α. Χατζηδήμου, Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήνα, 1997.
- [153]M. Xenos, N. Kafoussias and G. Karahalios, Magnetohydrodynamic compressible laminar boundary layer adiabatic flow with adverse pressure gradient and continuous or localized mass transfer, Canadian Journal of Physics, Vol. 79, pp. 247-1263, 2001.

- [154] K.A. Yih, The effect of uniform suction/blowing on heat transfer of magnetohydrodynamic Hiemenz flow through porous media, *Acta Mechanica*, Vol. 130, pp. 147-158, 1998.
- [155] A. Yoshizawa, Hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulent flows, Modelling and statistical theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.