ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΚΑΙ
ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

**"ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΣΤΟΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ
ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ"**

Διδακτορική διατριβή της υποψηφίας

Δ. Ι. Λεκού

Διπλ. Μηχανολόγου Μηχανικού

ΠΑΤΡΑ
Φεβρουάριος 2010

Συμβουλευτική Επιτροπή Διδακτορικής Διατριβής:

Θεόδωρος Π. Φιλιππίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής
Επιβλέπων Καθηγητής

Δημοσθένης Πολύζος, Καθηγητής
Βασίλειος Παπάζογλου, Καθηγητής

Εξεταστική Επιτροπή:

Καθηγητής Νικόλαος Ανυφαντής,
Καθηγητής Δημήτριος Σαραβάνος,
Καθηγητής Αθανάσιος Τριανταφύλλου,
Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Τσούβαλης

Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών και Αεροναυπηγών

Τομέας Εφαρμοσμένης Μηχανικής, Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Μηχανικής

Τ.Θ. 1401

Πανεπιστημιούπολη, Ρίο, Πάτρα, GR 26504

Τηλ.: +30 2610 969450

Fax: +30 2610 969417

e-mail: dlekou@cres.gr

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου, καθηγητή του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, Θ. Π. Φιλιππίδη, χωρίς την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές του οποίου δεν θα μπορούσα να εκπονήσω την εργασία αυτή. Η συνεργασία μου μαζί του, όλα αυτά τα χρόνια μου άνοιξε νέους ορίζοντες, ως προς την επιστήμη του Μηχανολόγου Μηχανικού και την σημασία της μέσα στην Ελληνική κοινωνία. Καθόλη την διάρκεια της εργασίας η συνδιαλλαγή και συνεργασία με συναδέλφους, καθηγητές και προϊσταμένους συνέβαλε λιγότερο ή περισσότερο στην ολοκλήρωση της εργασίας. Καθότι δε η εκπόνηση της εργασίας διήρκεσε κάπως περισσότερο από το συνηθισμένο, τα άτομα που συνέβαλαν άμεσα ή έμμεσα και θα πρέπει να αναφέρω είναι πλήστα. Επιλέγω να κρατήσω τις ευχαριστίες σε ανθρώπους που συνέβαλαν κυρίως την περίοδο που βρισκόμουν στην Πάτρα (1995-2000), όπως τις συνέταξα το 2000 ξεκινώντας τον μαραθώνιο της συγγραφής της εργασίας: «Βεβαίως, σημαντική στην εργασία μου ήταν η συνεισφορά των καθηγητών της σχολής κ. Σ. Α. Παϊπέτη και Θ. Κερμανίδη, χωρίς την σύμφωνη γνώμη των οποίων δεν μπορούσαν να έχουν ολοκληρωθεί τμήματα της πειραματικής εργασίας. Δεν θα πρέπει να ξεχάσω και την βοήθεια των συναδέλφων και συνεργατών στο εργαστήριο, κ.κ Ι. Κολαζή, Α. Βασιλόπουλο και Α. Κουτσαμπέση, που αβίαστα έδιναν λύσεις σε λεπτομέρειες της εργασίας μου, χωρίς τις οποίες όμως δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωσή της. Τέλος θα πρέπει να ευχαριστήσω το Τμήμα Αιολικών του Κέντρου Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας και ιδιαίτερα τον κ. Π. Βιώνη για την βοήθεια που προσέφεραν στην πραγματοποίηση των πειραμάτων που εκτέλεσα στο πλαίσιο της διδακτορικής μου διατριβής. Από την άλλη πλευρά αισθάνομαι ότι πρέπει να αναφέρω τους γονείς και φίλους μου που συνέβαλαν στην ψυχολογική μου στήριξη όλα αυτά τα χρόνια, η συμμετοχή των οποίων μπορεί να είναι αφανής στην ολοκλήρωση της εργασίας, εξακολουθεί να είναι όμως ιδιαίτερα σημαντική». Στο διάστημα που μεσολάβησε μέχρι σήμερα (2000-2009), η συνεισφορά στην εργασία μου ήταν περισσότερο έμμεση, καθώς χρησιμοποιούσα τις γνώσεις που αποκτούσα μέσω της συνεργασίας με τους συναδέλφους μου και τους προϊσταμένους μου κατά την εργασία μου στο ΚΑΠΕ, μεταξύ των οποίων οι κ.κ. Δ. Ψυχογιός, Δ. Φουσέκης, Ε. Πολίτης, Φ. Μουζάκης και Π. Βιώνης τους οποίους οφείλω να αναφέρω (τον κ. Βιώνη με την ιδιότητα του προϊσταμένου σε αυτή την περίοδο). Καθώς η περίοδος είναι μεγάλη, αισθάνομαι ότι οφείλω να υπενθυμίσω την υποστήριξη (και μερικές φορές και πίεση) των γονιών μου και του Γιάννη όλα αυτά τα χρόνια, τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά. Τέλος, θα πρέπει να ευχαριστήσω έμμεσα και τις κόρες μου, στις οποίες στερήσα πολύτιμες ώρες για την ολοκλήρωση της εργασίας και να ζητήσω να με συγχωρήσουν (και ο Γιάννης) για τον εκνευρισμό στον οποίο τους επέβαλα εξαιτίας της πίεσης για την ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Ευχαριστώ,

Ντένια Λεκού

Στον Πατέρα μου

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΟΝΟΜΑΤΟΛΟΓΙΑ.....	10
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	16
1.1 Περιγραφή του τεχνολογικού προβλήματος.....	16
1.2 Γενική Επισκόπηση: Μέθοδοι προσδιορισμού αξιοπιστίας κατασκευής	18
1.3 Γενική Επισκόπηση: Σύνθετα υλικά.....	22
1.4 Γενική Επισκόπηση: Πτερύγια ανεμογεννήτριας.....	25
1.5 Σκοπός της εργασίας	26
1.6 Μεθοδολογία	27
1.7 Διάρθρωση της εργασίας.....	30
1.8 Βιβλιογραφία.....	31
2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ	36
2.1 Υλικά.....	37
2.2 Πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό των Μηχανικών Ιδιοτήτων	39
2.3 Πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό των Θερμικών Ιδιοτήτων	42
2.4 Πειραματικά αποτελέσματα αντοχής και ελαστικών ιδιοτήτων συνθέτου υλικού ινών άνθρακα σε εποξειδική ρητίνη.....	43
2.5 Πειραματικά αποτελέσματα αντοχής και ελαστικών ιδιοτήτων ινωδών συνθέτων υλικών γυαλιού/ πολυεστέρα (GI/P)	48
2.6 Πειραματικά αποτελέσματα συντελεστών θερμικής διαστολής ινωδών συνθέτων υλικών Glass/Polyester	53
2.7 Βιβλιογραφία.....	54
3 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ	57
3.1 Βασικές έννοιες στατιστικής ανάλυσης	57
3.1.1 Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και κατανομής πιθανότητας.....	57
3.1.2 Χαρακτηριστικά κατανομών.....	58
3.2 Υπολογισμός Χαρακτηριστικών Δείγματος.....	59
3.3 Στατιστικά μοντέλα	60
3.3.1 Κανονική (Gauss) κατανομή.....	61
3.3.2 Κατανομή Γ.....	62
3.3.3 Λογαριθμική κανονική κατανομή (log-normal).....	62
3.3.4 Κατανομή Weibull.....	62
3.3.5 Ακραίες κατανομές.....	63
3.4 Εφαρμογή του στατιστικού μοντέλου	64
3.4.1 Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας	64
3.4.2 Η μέθοδος των ροπών.....	65
3.5 Ανάπτυγμα Edgeworth	65
3.6 Pearson	66
3.7 Στατιστικοί έλεγχοι	67
3.8 Στατιστική αξιολόγηση αντοχής και ελαστικών ιδιοτήτων ινωδών συνθέτων υλικών Carbon/Epoxy	69
3.9 Στατιστική αξιολόγηση αντοχής και ελαστικών ιδιοτήτων ινωδών συνθέτων υλικών Glass/Polyester	78
3.10 Στατιστική αξιολόγηση συντελεστών θερμικής διαστολής ινωδών συνθέτων υλικών Glass/Polyester	85
3.11 Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth	88
3.12 Παράδειγμα εφαρμογής αθροιστικής κατανομής από την οικογένεια Pearson	90
3.13 Συμπεράσματα.....	90
3.14 Βιβλιογραφία.....	91
4 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	93
4.1 Ροπές συνάρτησης πολλών μεταβλητών	93

Πίνακας Περιεχομένων

4.2	Ροπές φαινόμενου συντελεστού θερμικής διαστολής	94
4.3	Κοινή συνάρτηση κατανομής πιθανότητας	95
4.3.1	Monte Carlo προσομοίωση.....	95
4.3.2	Μέθοδος ποσοστιαίων σημείων βασικών μεταβλητών	97
4.4	Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας φαινόμενου συντελεστού θερμικής διαστολής.....	98
4.4.1	Ανάλυση ευαισθησίας.....	101
4.5	Συνάρτηση αστοχίας στρώσης	103
4.6	Αθροιστική κατανομή πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας.....	105
4.7	Μοντελοποίηση της κατανομής πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας σε μονοαξονική εντατική κατάσταση	106
4.8	Βιβλιογραφία.....	108
5	ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΔΟΜΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ.....	110
5.1	Ταξινόμηση των μεθόδων αξιοπιστίας.....	111
5.1.1	Μοντέλα τυχαίων μεταβλητών.....	112
5.1.2	Μοντέλα αξιοπιστίας τυχαίων διαδικασιών.....	113
5.1.3	Μοντέλα αξιοπιστίας τυχαίων πεδίων	113
5.2	Μέθοδος επιμέρους συντελεστών ασφαλείας	113
5.2.1	Μέθοδος ποσοστιαίων σημείων βασικών μεταβλητών	115
5.3	Monte Carlo προσομοίωση.....	116
5.4	Μέθοδος Μέσης Τιμής (Mean Value method)	116
5.4.1	Μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth.....	117
5.4.2	Μέθοδος Pearson.....	118
5.5	Μέθοδοι αξιοπιστίας πρώτης τάξης (First order reliability method).....	118
5.5.1	Μέθοδος Hasofer-Lind	118
5.5.2	Μέθοδος Rackwitz-Fiessler	121
5.5.3	Μη γραμμικές συναρτήσεις αστοχίας.....	122
5.5.4	Αλγόριθμοι διαδικασίας προσδιορισμού δείκτη β	124
5.6	Πιθανότητα αστοχίας στρώσης συνθέτου υλικού σε μονοαξονική φόρτιση	124
5.6.1	Επίδραση των όρων της μεθόδου Edgeworth στην εκτίμηση αξιοπιστίας.....	126
5.6.2	Επίδραση του κριτηρίου αστοχίας στην εκτίμηση της αξιοπιστίας	127
5.6.3	Ανάλυση της ευαισθησίας για την πιθανότητα αστοχίας σε μονοαξονική φόρτιση	128
5.7	Σύγκριση των μεθόδων για την εκτίμηση της αξιοπιστίας.....	129
5.7.1	Σύγκριση μεθόδων σε μικρές πιθανότητες αστοχίας	130
5.8	Τόπος αστοχίας στρώσης	132
5.8.1	Επίδραση του κριτηρίου αστοχίας	135
5.8.2	Τόπος αστοχίας στρώσης σε μεγάλα επίπεδα αξιοπιστίας.....	136
5.8.3	Τόπος αστοχίας στρώσης στο χώρο των παραμορφώσεων.....	138
5.9	Βιβλιογραφία.....	143
6	ΔΟΜΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ	146
6.1	Σχολιασμός Αστοχία πρώτης Στρώσης (FPF) ή ολική αστοχία πολύστρωτης πλάκας (LPF)	147
6.2	Προσδιορισμός τόπου αστοχίας πολύστρωτης πλάκας σε προκαθορισμένο επίπεδο αξιοπιστίας.....	151
6.3	Επίδραση της στοχαστικότητας των διαφόρων ιδιοτήτων του υλικού	157
6.4	Βιβλιογραφία.....	165
7	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ.....	167
7.1	Ντετερμινιστικός σχεδιασμός και συντελεστές ασφαλείας.....	168
7.2	Σύγκριση ντετερμινιστικού και πιθανολογικού σχεδιασμού	171
7.2.1	Επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας	171
7.2.2	Σύγκριση ντετερμινιστικού και στοχαστικού τόπου αστοχίας.....	171
7.2.3	Επίδραση των ιδιοτήτων ελαστικότητας.....	173
7.3	Εφαρμογή σε περύγιο ανεμογεννήτριας	175
7.3.1	Δομική ανάλυση	175
7.3.2	Πιθανότητα Αστοχίας.....	180
7.3.3	Παραδείγματα και σχολιασμός.....	181
7.4	Εισαγωγή της στοχαστικότητας της φόρτισης	186
7.5	Συμπεράσματα.....	191

Πίνακας Περιεχομένων

7.6	Βιβλιογραφία.....	192
8	ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.....	195
8.1	Πρωτότυπα στοιχεία.....	196
8.2	Μελλοντική εργασία	197
8.3	Βιβλιογραφία.....	198
A.	ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.....	199
A.1	Πειραματικά αποτελέσματα C/Ep	200
A.2	Πειραματικά Αποτελέσματα GI/P	204
A.3.	Αποτελέσματα δοκιμών συντελεστών θερμικής διαστολής υλικού GI/P	211
A.4	Πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για σύγκριση με τα αποτελέσματα της εργασίας.....	214
A.4.1	Πειραματικά δεδομένα από [CT Sun, SE Yamada, Strength distribution of a unidirectional fiber composite, J. of Composite Materials, Vol.12, pp.169-176, 1978]	214
A.4.2	Πειραματικά δεδομένα από [EM Wu, Phenomological Anisotropic Failure Criterion, Composite Materials Vol.2, Mechanics of Composite Materials, Ed. GP Sendekyj, Academic Press, N. York, pp. 353-431, 1973].....	215
A.4.3	Πειραματικά δεδομένα από το [EM Wu, JK Scheublin, Laminate Strength - A Direct Characterization Procedure, Composite Materials: Testing and Design (3rd Conf.), ASTM STP 546, (American Society for testing and Materials, 1974), 188-206]	219
A.5	Πειραματικά δεδομένα υλικού GI/P για τον σχεδιασμό πτερυγίου Α/Γ	219
B.	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ	221
B.1	Εισαγωγή.....	222
B.2	Χαρακτηριστικές Τιμές	222
B.2.1	Datastat	222
B.2.2	Diststat	222
B.3	Υπολογισμός Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής Πιθανότητας.....	222
B.3.1	Datacum	222
B.3.2	Cumulati	223
B.4	Εκτίμηση Παραμέτρων Στατιστικών Μοντέλων.....	223
B.4.1	Momest	223
B.4.2	Mle_est	223
B.5	Έλεγχος Υποθέσεων.....	224
B.5.1	Ks_test	224
B.5.2	Chs_test	224
Γ.	ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE CARLO	225
Γ.1.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	226
Γ.2.	ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ.....	226
Γ.2.1	Βασικός αλγόριθμος [Γ.1].....	228
Γ.2.2	Γεννήτρια με μεγάλη περίοδο	229
Γ.2.3	Εναλλακτική μέθοδος.....	229
Γ.2.4	Η μέθοδος της ανακίνησης (Shuffling) [Γ.1].....	230
Γ.2.5	Γεννήτριες που χρησιμοποιούνται κατά την εφαρμογή του προβλήματος.....	231
Γ.3.	ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΕ ΑΛΛΕΣ.....	232
Γ.3.1	Η μέθοδος αντίστροφου μετασχηματισμού	232
Γ.3.2	Η μέθοδος απόρριψης.....	233
Γ.3.3	Αλγόριθμοι για διάφορες κατανομές.....	234
Γ.4.	ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ.....	236
Γ.4.1	Βασικές έννοιες στατιστικών ελέγχων [Γ.8]	237
Γ.4.2	Ελεγχοι που χρησιμοποιούνται	240
Γ.5.	ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΠΟΟΜΑΔΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ.....	246
Γ.5.1	Στρώση με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής.....	246
Γ.5.2	Πολύστρωτη πλάκα με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής	247
Γ.5.3	Πολύστρωτη πλάκα με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας.....	249
Γ.6.	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΩΝ ΕΛΕΓΧΩΝ	249
Γ.6.1	Έλεγχος ψευδοτυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή.....	249

Πίνακας Περιεχομένων

Γ.6.2 Έλεγχος μετασχηματισμού ψευδοτυχαίων αριθμών σε άλλες κατανομές	258
Γ.6.3 Έλεγχος της εφαρμογής MC	260
Γ.7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	266
Γ.8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	267
Δ. ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ PRE-THIN, THIN, POST-THIN	269
Δ.1. Περίπτωση στοχαστικών ιδιοτήτων αντοχής.....	270
Δ.1.1 PRE-THIN	270
Δ.1.2 THIN.....	275
Δ.1.3 POST-THIN.....	284
Δ.2 Περίπτωση στοχαστικών ιδιοτήτων αντοχής και ελαστικότητας	289
Δ.2.1 PRE-THIN	289
Δ.2.2 THIN.....	291
Δ.2.3 POST-THIN.....	294
Δ.3 Περίπτωση στοχαστικών ιδιοτήτων υλικού και φόρτισης.....	295

ΟΝΟΜΑΤΟΛΟΓΙΑ

Στην ενότητα αυτή δίνονται οι συντομογραφίες και τα σύμβολα (με ελληνικούς και λατινικούς) χαρακτήρες που χρησιμοποιούνται ευρύτερα στην εργασία.

Συντομογραφίες

BD:	(Bidirectional) Πλαστικό ενισχυμένο σε δύο διευθύνσεις
BVM:	(Basic Variable Method) Μέθοδος Βασικών Μεταβλητών
C/Ep:	(Carbon/ Epoxy) Εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με ίνες άνθρακα
CDF:	(Cumulative Distribution Function) (Αθροιστική Συνάρτηση) Κατανομή(ς) Πιθανότητας
COV:	(Coefficient of Variation) Συντελεστής μεταβλητότητας
DET:	(Deterministic) Ντετερμινιστικό
EDW:	Ανάπτυγμα Edgeworth
EPFS:	Κριτήριο Αστοχίας EPFS (Elliptic Failure Surface Paraboloid)
Exp.:	(Experimental data) Πειραματικά δεδομένα
FPF:	(First Ply Failure) Αστοχία πρώτης στρώσης
FRP:	(Fibre reinforced plastic) Πλαστικό ενισχυμένο με ίνες
GI/Ep:	(Glass/Epoxy) Εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με ίνες γυαλιού
GI/P:	(Glass/Polyester) Πολυεστέρας ενισχυμένος με ίνες γυαλιού
IEC:	International Electrotechnical Committee
K-S:	Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov
LARGEST:	Κατανομή μεγίστου στοιχείου
LOGNORMAL:	Λογαριθμική κανονική κατανομή
LPF:	(Last Ply Failure) Αστοχία τελευταίας στρώσης στην πολύστρωτη διάταξη
MC:	Monte Carlo
MD:	(Multidirectional) Πλαστικό ενισχυμένο σε περισσότερες διεύθυνσεις
MLE:	(Maximum Likelihood Estimation) Εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας
NORMAL:	Κανονική (Gauss) κατανομή
POF:	(Probability of Failure) Πιθανότητα αστοχίας
PRS:	Pearson κατανομή
SMALLEST:	Κατανομή ελαχίστου στοιχείου
TH:	Κριτήριο αστοχίας Tsai-Hahn
UD:	(Unidirectional) Πλαστικό ενισχυμένο σε μία μόνο διεύθυνση
χ^2 :	Στατιστικός έλεγχος χ τετράγωνο
KII:	Κατανομή πιθανότητας
ΣΘΔ:	Συντελεστής Θερμικής Διαστολής

Λατινικά Σύμβολα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} : \text{Μητρώο εκτατικής δυσκαμψίας (extensional stiffness matrix)}$$

$\mathbf{A}'$: Μητρώο εκτατικής ενδόσεως (βλέπε σχέση 6.6)

$\mathbf{B}$: Μητρώο σύζευξης (coupling stiffness matrix)

$\mathbf{B}'$: Μητρώο ενδόσεως σύζευξης (βλέπε σχέση 6.6)

b_1 : Σχετικό μέτρο της ασυμμετρίας του δείγματος

b_2 : Σχετικό μέτρο της κύρτωσης του δείγματος

$B(\cdot)$: Συνάρτηση Βήτα

$\mathbf{D}$: Μητρώο καμπτικής δυσκαμψίας (flexural stiffness matrix)

$\mathbf{D}'$: Μητρώο καμπτικής ενδόσεως (βλέπε σχέση 6.6)

D_N : Μέτρο του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov

D_N^{CR} : Κρίσιμη τιμή κατά τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov

e : Διάστημα εμπιστοσύνης

$E[\cdot]$: (Expectation) Μέση τιμή

E_i : Μέτρο ελαστικότητας κατά την i διεύθυνση

E_X^D : Μέτρο ελαστικότητας σε εφελκυσμό στις 45° ως προς την x διεύθυνση του υλικού

EA : Αξονική δυσκαμψία (διατομής)

EI_{yy}, EI_{zz} : Καμπτική δυσκαμψία (διατομής) στην διεύθυνση y και z

EI_{yz} : Μικτή καμπτική δυσκαμψία (διατομής)

$F(\cdot)$: Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας (Κατανομή Πιθανότητας)

$f(\cdot)$: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Στην γραφή $f(x, y, z)$ αριστερά του «;» παρουσιάζεται η μεταβλητή και δεξιά οι παράμετροι (στο παράδειγμα y και z) της συνάρτησης

$G(\cdot)$: Συνάρτηση αστοχίας ορισμένη έτσι ώστε $G(\cdot) < 0$ να σημαίνει αστοχία

G_{ij} : Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο ij

GJ : Στρεπτική Δυσκαμψία

h : Πάχος (h_k : Πάχος στρώσης k)

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ 0 \end{Bmatrix} : \text{Τανυστές αστοχίας (τανυστικού πολωνύμου αστοχίας)}$$

$\mathbf{k}$: Τανυστής ορθών καμπυλοτήτων k_x, k_y και διατμητικής, k_s , καμπυλότητας

$\mathbf{k}^0$: Τανυστής ορθών και διατμητικής καμπυλότητας στο μέσο επίπεδο της πολύστρωτης

Ονοματολογία

$K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})$:	Συνάρτηση του κριτηρίου αστοχίας ως προς τις ιδιότητες αντοχής ($\mathbf{X}$) και τις αναπτυσσόμενες τάσεις ($\boldsymbol{\sigma}$) στο επίπεδο της στρώσης
$l()$:	Λογάριθμος συνάρτησης μέγιστης πιθανοφάνειας
$L()$:	Συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood function)
$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix}$:	Συνισταμένες συνεπίπεδες ροπές ανά μονάδα μήκους της πλάκας
$\mathbf{M}_B = \begin{Bmatrix} M_{XB} \\ M_{YB} \\ M_{ZB} \end{Bmatrix}$:	Εσωτερικές αντιδράσεις ροπών στην διατομή πτερυγίου
m'_1, m_1 :	Μέση τιμή δείγματος (Εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού).
m'_k :	k ροπή δείγματος (Εκτιμήτρια της k ροπής του πληθυσμού)
m_k :	k κεντρική ροπή δείγματος (Εκτιμήτρια της k κεντρικής ροπής του πληθυσμού)
N :	Αριθμός δοκιμών
$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix}$:	Συνισταμένες συνεπίπεδες δυνάμεις ανά μονάδα μήκους της πλάκας
n_S :	Αριθμός επαναλήψεων με επιτυχία
n_{TOT} :	Συνολικός αριθμός επαναλήψεων
N_{XB} :	Εσωτερική αντίδραση αξονικής δύναμης στην διατομή του πτερυγίου
$P()$:	Πιθανότητα
P_F :	Πιθανότητα αστοχίας
P_R :	Αξιοπιστία
P_R^* :	Επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας (Target reliability)
P_S :	Πιθανότητα επιβίωσης (μη αστοχίας)
R :	Λόγος ασφάλειας (Strength ratio)
$\mathbf{Q}$:	Συνεπίπεδο μητρώο δυσκαμψίας της στρώσης στο κύριο σύστημα της στρώσης (βλέπε σχέση 5.18)
$\mathbf{Q}'$:	Συνεπίπεδο μητρώο δυσκαμψίας της στρώσης στο κύριο σύστημα της πολύστρωτης (βλέπε σχέση 6.8)
Q_{KS} :	Κατανομή στατιστικού ελέγχου Kolmogorov-Smirnov
$s = \sqrt{m_2}$:	Τυπική απόκλιση δείγματος
S :	Τάση αστοχίας σε διάτμηση στο επίπεδο της στρώσης
S_N :	Πειραματική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας
t :	Χρόνος
t_{095} :	Ποσοστιαίο σημείο κατανομής Student

Ονοματολογία

T :	Περίοδος αναφοράς
$\mathbf{T}$:	Μητρώο μετασχηματισμού (στροφής)
T_G :	Θερμοκρασία μετάβασης υαλώδους κατάστασης (Glass transition temperature)
v_R :	Ονομαστική Ταχύτητα ανέμου (rated wind speed)
v_{out} :	Ταχύτητα ανέμου αποκοπής της μηχανής (cut-out wind speed)
V_y, V_z :	Εσωτερική αντίδραση διατμητικής δύναμης στην y και z διεύθυνση στην διατομή του πτερυγίου
$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \end{Bmatrix}$	Βασικές Μεταβλητές σε διανυσματική μορφή
$\mathbf{X}^*$:	Πιθανότερο σημείο αστοχίας (most probable failure point) στην επιφάνεια αστοχίας
$\mathbf{X}'$:	Διάνυσμα κανονικοποιημένων βασικών μεταβλητών
$\mathbf{X}^{*}$:	Πιθανότερο σημείο αστοχίας (most probable failure point) στην επιφάνεια αστοχίας στον χώρο των κανονικοποιημένων μεταβλητών
$x-y$:	Διευθύνσεις στο φυσικό επίπεδο
X_C :	Τάση αστοχίας σε θλίψη στην x διεύθυνση
$X_{Fi,C}$:	Χαρακτηριστική Τιμή για την Μεταβλητή φορτίου i
$X_{Fi,D}$:	Τιμή σχεδιασμού για την Μεταβλητή φορτίου i
$X_{Mi,C}$:	Χαρακτηριστική Τιμή για την Μεταβλητή αντοχής i
$X_{Mi,D}$:	Τιμή σχεδιασμού για την Μεταβλητή αντοχής i
X_T :	Τάση Αστοχίας σε εφελκυσμό στην x διεύθυνση
X_T^D :	Τάση αστοχίας σε μονοαξονικό εφελκυσμό δοκιμών στις 45° ως προς την x -διεύθυνση του υλικού
$Y()$:	Συνάρτηση μεταβαλλόμενη με το χρόνο
Y_C :	Τάση αστοχίας σε θλίψη στην y διεύθυνση
Y_T :	Τάση αστοχίας σε εφελκυσμό στην y διεύθυνση
z_k :	απόσταση της στρώσης k από το μέσο επίπεδο της πολύστρωτης

Ελληνικά σύμβολα

α :	Επίπεδο σημαντικότητας
$\alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_s \end{Bmatrix}$:	Τανυστής συντελεστών θερμικής διαστολής
α_z :	Συντελεστής θερμικής διαστολής κατά το πάχος της στρώσης
α_i^{eff} :	Ισοδύναμος συντελεστής θερμικής διαστολής πολύστρωτης στην διεύθυνση i

Ονοματολογία

β :	Δείκτης αξιοπιστίας (reliability index) μεθόδου αξιοπιστίας πρώτης τάξης
β_1 :	Σχετικό μέτρο της ασυμμετρίας της στατιστικής κατανομής
β_2 :	Σχετικό μέτρο της κύρτωσης της στατιστικής κατανομής
γ :	Συντελεστής ασφάλειας
$\Gamma()$:	Η συνάρτηση Γάμα
$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$:	Τανυστής παραμορφώσεων στο επίπεδο x-y
$\boldsymbol{\varepsilon}^0$:	Τανυστής παραμορφώσεων στο μέσο επίπεδο της πολύστρωτης
$\boldsymbol{\varepsilon}'$:	Τανυστής παραμορφώσεων της στρώσης στο κύριο σύστημα της πολύστρωτης
η :	παράμετρος στατιστικής κατανομής (Γάμα ή Weibull)
λ :	παράμετρος στατιστικής κατανομής Γάμα
μ :	παράμετρος στατιστικής κατανομής (κανονικής, λογαριθμικής κανονικής, μεγίστου ή ελαχίστου στοιχείου)
μ'_1, μ_1 :	Μέση τιμή πληθυσμού.
μ_2 :	Διασπορά πληθυσμού (Δεύτερη κεντρική ροπή πληθυσμού)
μ_3 :	Τρίτη κεντρική ροπή πληθυσμού
$\mu_k = E[x - \mu'_1]^k$:	k κεντρική ροπή πληθυσμού
$\mu'_k = E[x^k]$:	k ροπή πληθυσμού
$\nu_{ij} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i$:	Λόγος Poisson στο επίπεδο i-j.
ν_{XY}^D :	Λόγος Poisson δοκιμών υποβαλλόμενων σε εφελκυσμό στις 45° ως προς την x διεύθυνση του υλικού
ρ :	Πυκνότητα
ρA :	Γραμμική πυκνότητα (linear mass)
ρ_{ij} :	Συντελεστής συνδιασποράς
$\rho I_{YY}, \rho I_{ZZ}$:	Καμπτική ροπή μάζας στην y και z διεύθυνση
ρI_{YZ} :	Μικτή ροπή μάζας
ρI_P :	Πολική ροπή αδράνειας (διατομής)
σ :	παράμετρος στατιστικής κατανομής (κανονικής, λογαριθμικής κανονικής, Weibull, μεγίστου ή ελαχίστου στοιχείου)
$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix}$:	Τανυστής τάσεων στο επίπεδο της στρώσης

Ονοματολογία

$\Phi(\cdot)$: Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής (Normal/ Gauss) κατανομής

$\Phi^{(i)}(\cdot)$: i παράγωγος της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας της κανονικής (Normal/ Gauss) κατανομής

Εκθέτες & Δείκτες

C: (Characteristic) Χαρακτηριστική τιμή παραμέτρου (Δείκτης)

D: Δοκίμια σε εφελκυσμό στις 45° ως προς τον x άξονα στο επίπεδο της στρώσης (Εκθέτης)

D: (Design) Τιμή Σχεδιασμού παραμέτρου (Δείκτης)

Eff.: Ισοδύναμη ιδιότητα (Εκθέτης)

F: (Force) Μεταβλητή φορτίου (Δείκτης)

M: (Material) Μεταβλητή υλικού (Δείκτης)

T: (Transpose) Ανάστροφος (Εκθέτης)

X: Διεύθυνση x στο σύστημα συντεταγμένων x-y (φυσικό σύστημα συντεταγμένων) (Δείκτης)

Y: Διεύθυνση y στο σύστημα συντεταγμένων x-y (φυσικό σύστημα συντεταγμένων) (Δείκτης)

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Περιγραφή του τεχνολογικού προβλήματος

Σε κατασκευές όπου το βάρος έχει ιδιαίτερη σημασία, τα σύνθετα υλικά έχουν καταστεί τα τελευταία χρόνια πολύτιμοι αντικαταστάτες των συμβατικών. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι κατασκευές, στις οποίες τα σύνθετα υλικά αποτελούν τον φέροντα σκελετό, κατατάσσονται στις εφαρμογές υψηλής τεχνολογίας, όπου οι απαιτήσεις για αξιοπιστία είναι αντίστοιχα ιδιαίτερα υψηλές. Παράλληλα οι αξιώσεις για μείωση κόστους, μαζί με κοινωνικές αλλαγές έχουν οδηγήσει στην απαίτηση για την ποσοτικοποίηση της αξιοπιστίας των κατασκευών. Η ποσοτικοποίηση αυτή γίνεται με στοιχεία πιθανολογικού λογισμού, υπολογίζοντας την πιθανότητα αστοχίας της κατασκευής. Λέγοντας δε "αστοχία κατασκευής", αναφερόμαστε είτε στην αδυναμία της κατασκευής να φέρει τα επιβαλλόμενα φορτία κατά την λειτουργία της, είτε με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να μην ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις λειτουργίας της, όπως για παράδειγμα η ανάπτυξη μεγαλύτερων μετατοπίσεων από τις επιτρεπτές, η ανάπτυξη ταλαντώσεων στην κατασκευή εξαιτίας μεταβολής των ιδιοσυχνοτήτων της, κλπ.

Ο σχεδιασμός κατασκευών ώστε να εξασφαλίζονται ορισμένα επίπεδα αξιοπιστίας παραδοσιακά γίνεται με ντετερμινιστικούς υπολογισμούς και χρησιμοποιώντας συντελεστές ασφαλείας στις μεταβλητές του προβλήματος. Όμως οι συντελεστές ασφαλείας που χρησιμοποιούνται και ορίζονται σε κανονισμούς σχεδιασμού είναι συνήθως απόρροια στατιστικών υπολογισμών ή αποδεδειγμένοι δια της εμπειρίας ότι επαρκούν για παραπλήσιες κατασκευές. Η προσέγγιση αυτή είναι πιο επιτακτική στην περίπτωση κατασκευών από σύνθετα υλικά. Ενώ αυτή η διαδικασία επαρκεί για κατασκευές συμβατικών υλικών, όπου και η εμπειρία υπάρχει και η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων του υλικού με τις σύγχρονες μεθόδους κατεργασίας διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα, στα σύνθετα υλικά, όπου οι εφαρμογές είναι συνήθως καινούριες, σε συνδυασμό με την αβεβαιότητα των ιδιοτήτων τους (διαφορετικός συνδυασμός συνιστωσών ίνας-μήτρας, διαφορετική μέθοδος κατασκευής κλπ.) η διαδικασία για τον προσδιορισμό συντελεστών ασφαλείας μπορεί να οδηγήσει σε ασαφή ως προς την ακρίβεια και γενικότητά τους αποτελέσματα. Μία ενδιαφέρουσα εργασία στο θέμα του συσχετισμού των συντελεστών ασφαλείας και της αξιοπιστίας παρουσιάζεται στο [1.1], όπου καταλήγει στο ότι «η έννοια της αξιοπιστίας παρέχει τις ακριβείς τιμές των συντελεστών ασφαλείας, ειδάλλως, χωρίς δηλαδή την έννοια της αξιοπιστίας, ο συντελεστής ασφαλείας παραμένει ως ένας εμπειρικός συντελεστής, αλλά ένας συντελεστής θεωρητικής άγνοιας». Έτσι, κατά τον Elishakoff [1.1] οι πιθανολογικές μέθοδοι δεν αποτελούν μία «επανάσταση», αλλά μία φυσική «εξέλιξη». Η ανάγκη, δηλαδή για την ποσοτικοποίηση του επιπέδου της αξιοπιστίας της κατασκευής οδήγησε σταδιακά στην ολοένα και μεγαλύτερη χρήση στοιχείων στατιστικού λογισμού για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας της κατασκευής.

Οι ιδιαιτερότητες των συνθέτων υλικών, καθώς και η νεότητα των εφαρμογών με αυτά, σε σύγκριση με αυτές των συμβατικών υλικών, έχουν καταστήσει γενικά αποδεκτό το ότι η στατιστική αξιολόγηση της αστοχίας κατασκευαστικών στοιχείων είναι πιο κατάλληλη από μία ντετερμινιστική ανάλυση, καθώς η τελευταία μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένες εκτιμήσεις. Αυτό τονίζεται ακόμα περισσότερο εξαιτίας του ότι οι ιδιότητες αντοχής των συνθέτων υλικών ενισχυμένων με ίνες, fibre reinforced plastics (FRP), παρουσιάζουν μεγάλη διασπορά. Η μεγάλη διασπορά είναι αποτέλεσμα της ποικιλίας τους και της αλληλεπίδρασης των μορφών αστοχίας, της ανομοιογένειάς τους, της ανισοτροπίας και των ατελειών που δημιουργούνται στο υλικό κατά την κατασκευή είτε οι πολύστρωτες διατάξεις έχουν ίνες προσανατολισμένες σε μία μόνο διεύθυνση, unidirectional, είτε σε περισσότερες, multidirectional. Εξαιτίας της ραγδαίας διάδοσης της χρήσης αυτών των υλικών, είναι επομένως επιτακτική ανάγκη να στραφούμε σε αναλύσεις στατιστικού λογισμού, αν

επιζητούμε τεχνολογική πρόοδο και εξοικονόμηση ενέργειας μέσω ελαφρύτερων κατασκευών σε ένα έντονα ανταγωνιστικό περιβάλλον.

Για τον σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι εκτίμησης της αξιοπιστίας, αναλυτικές, αριθμητικής προσομοίωσης, προσεγγιστικές, οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή σε κατασκευές από συμβατικά υλικά. Υπάρχουν και εναλλακτικές μέθοδοι για την αντιμετώπιση της αβεβαιότητας, όπως είναι η θεωρία συνόλων αβεβαιοτήτων (fuzzy set theory), η θεωρία δυνατοτήτων (possibility theory), αλλά στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστούν μέθοδοι που βασίζονται στην θεωρία πιθανοτήτων (probability theory). Πρωταρχικός στόχος όλων αυτών των μεθόδων είναι ο χαρακτηρισμός της αβεβαιότητας της απόκρισης συστημάτων εξαιτίας αβεβαιοτήτων είτε σε εσωτερικές παραμέτρους του συστήματος, όπως είναι η τάση αστοχίας ή το μέτρο ελαστικότητας, είτε σε εξωτερικές, όπως είναι η θερμοκρασία περιβάλλοντος ή το φορτίο.

Από την άλλη πλευρά, πρέπει να σημειωθεί ότι παρόλο που υπάρχουν αρκετές μέθοδοι ήδη ανεπτυγμένες σε αυτή την κατηγορία, η μεγάλη διασπορά των ιδιοτήτων των συνθέτων υλικών σε συνδυασμό με το απαιτητικότερο υπολογιστικό κόστος σχεδιασμού εξαιτίας της ανισοτροπίας τους και του μεγάλου αριθμού μεταβλητών που εισέρχονται στο πρόβλημα, έχουν περιορίσει τις εφαρμογές σε τέτοιες κατασκευές.

Έτσι, υπάρχει μία σειρά εργασιών, όπως για παράδειγμα οι [1.2] και [1.3], προσανατολισμένες σε αεροπορικές κατασκευές, όπου περιγράφονται ακριβώς υπολογιστικά μοντέλα για την εκτίμηση του επιπέδου αξιοπιστίας της κατασκευής. Οι μέθοδοι όμως αυτοί αντενδείκνυνται για ευρεία χρήση σε καθημερινή πρακτική, παρά την εκθετική αύξηση της υπολογιστικής ισχύος, στην οποία έχει πρόσβαση ο κάθε μηχανικός. Εκτός αυτού, εξαιτίας του υψηλά ανταγωνιστικού περιβάλλοντος στον χώρο, η μετάδοση της γνώσης σε τέτοια θέματα διατηρείται σε χαμηλά επίπεδα.

Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν αρκετές εργασίες, οι οποίες βασίζονται στην μέθοδο FORM/SORM, ή μέθοδο δείκτη β (β -index method). Η επαναληπτική αυτή μέθοδος δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα για μικρές πιθανότητες αστοχίας, δηλαδή είναι κατάλληλη μόνο κατά την τελική φάση του σχεδιασμού. Επίσης εξαιτίας των ιδιοτήτων του αλγορίθμου της κατά την εκτέλεσή της, κυρίως σε προβλήματα μη γραμμικών εξισώσεων, όπως αυτές που διέπουν τα προβλήματα αστοχίας με σύνθετα υλικά, συνήθως οι μηχανικοί που την χρησιμοποιούν για εφαρμογές προμηθεύονται τον εμπορικό κώδικα και αναπτύσσουν τις εφαρμογές τους πάνω σε αυτόν.

Η χρήση της μεθόδου όμως σε εφαρμογές κατασκευών από σύνθετα υλικά εξακολουθεί να είναι μικρή στην βιβλιογραφία, με παραδείγματα όπως το [1.4] για εφαρμογή σε σκελετό πλοίου από σύνθετο υλικό, και τα [1.5] και [1.6] με εφαρμογή σε πτερύγιο ανεμογεννήτριας. Έτσι, παρόλο που είναι γενικά εμφανής η ανάγκη για να συμπεριληφθεί η στοχαστικότητα των ιδιοτήτων του υλικού στον σχεδιασμό κατασκευών, οι λύσεις που υποδεικνύονται στην βιβλιογραφία ως κατάλληλες είναι είτε ακριβές υπολογιστικά, είτε ακριβές οικονομικά, εφόσον διατίθενται ως εμπορικά πακέτα.

Γίνεται εξ αυτού φανερή η ανάγκη για την ανάπτυξη μεθόδων κατάλληλων να εκτιμήσουν την αξιοπιστία κατασκευών από σύνθετα υλικά, αλλά ταυτόχρονα ευκολόχρηστων, ώστε να βρουν ευρεία χρήση σε πραγματικά προβλήματα σχεδιασμού.

Στόχος της εργασίας είναι επομένως να βρεθεί μία μέθοδος ευκολόχρηστη και αξιόπιστη, ώστε να καταστεί πρακτική για εφαρμογές σχεδιασμού κατασκευών από σύνθετα υλικά. Ουσιαστικά, χρειάζεται μία μέθοδος, ούτως ώστε οι σχεδιαστές να μπορούν εύκολα να καταλήγουν σε κατασκευές με συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας (όπως απαιτείται από τους κανονισμούς).

Πέρα όμως από την εύρεση μίας μεθόδου κατάλληλης να αντικαταστήσει τους ντετερμινιστικούς υπολογισμούς κατά τον σχεδιασμό πραγματικών κατασκευών από σύνθετα υλικά, χωρίς σημαντική υπολογιστική επιβάρυνση των μηχανικών, στην εργασία αυτή επιζητείται και η κάλυψη του κενού που υπάρχει στις διάφορες θεματικές ενότητες που

άπτονται του αντικειμένου του προσδιορισμού της αξιοπιστίας κατασκευών από σύνθετα υλικά και ιδιαίτερα των πτερυγίων ανεμογεννητριών:

- Στο επίπεδο των (συνθέτων) υλικών και των ιδιοτήτων τους

Στόχος μέσω των πειραματικών αποτελεσμάτων της εργασίας είναι να δημιουργηθεί μία πλήρης βάση δεδομένων για τον χαρακτηρισμό των θερμομηχανικών ιδιοτήτων υλικού σε στατιστικούς όρους που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή πτερυγίων ανεμογεννητριών.

- Στο επίπεδο του σχεδιασμού πτερυγίων ανεμογεννητριών

Στόχος της εργασίας είναι να ληφθεί υπόψη η στοχαστικότητα των ιδιοτήτων του υλικού, ιδιαίτερα των ελαστικών ιδιοτήτων και των συντελεστών θερμικής διαστολής, κατά τον δομικό σχεδιασμό των πτερυγίων ανεμογεννητριών. Το θέμα αυτό αφορά όχι μόνο την κατασκευή του πτερυγίου, αλλά και όλης της ανεμογεννήτριας, καθώς τα πτερύγια αποτελούν από τα πιο βασικά τμήματα του συστήματος. Από την μία πλευρά η απόκριση των πτερυγίων της ανεμογεννήτριας επηρεάζουν την όλη λειτουργία της ανεμογεννήτριας, από την άλλη πλευρά, έστω και μικρή μείωση του βάρους των πτερυγίων, αποτελεί μείωση της φόρτισης για όλο το σύστημα.

1.2 Γενική Επισκόπηση: Μέθοδοι προσδιορισμού αξιοπιστίας κατασκευής

Η ανάλυση κατασκευών με την μέθοδο των πιθανοτήτων είναι ο τρόπος με τον οποίο στήνεται το μαθηματικό μοντέλο για να δοθεί η απάντηση στο ερώτημα: Ποια είναι η πιθανότητα η κατασκευή να συμπεριφερθεί με ένα συγκεκριμένο τρόπο, δοθέντος ότι μία ή περισσότερες παράμετροι του προβλήματος είναι είτε τυχαίες μεταβλητές είτε η φύση τους είναι εν μέρει άγνωστη και/ ή τα φορτία που επιβάλλονται στην κατασκευή έχουν τυχαίες ή αβέβαια γνωστές ιδιότητες; Τέτοιου είδους ανάλυση μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση των ντετερμινιστικών αναλύσεων των κατασκευών, κατά τις οποίες δίνεται απάντηση στο ερώτημα: Ποια είναι η απόκριση του συστήματος/ της κατασκευής όταν οι ιδιότητές της και εν γένει οι παράμετροι του προβλήματος είναι κατά ένα και μοναδικό τρόπο προσδιορισμένες;

Πέρα από αυτό, ο κυρίαρχος στόχος των υπολογισμών στον δομικό σχεδιασμό κατασκευών είναι η ασφάλεια έναντι αστοχίας. Η ασφάλεια είναι μία έννοια πιθανότητας και μπορεί να διερευνηθεί με την συνήθη θεωρία πιθανοτήτων της αξιοπιστίας κατασκευών.

Γενικά στην εφαρμογή του προσδιορισμού της αξιοπιστίας μίας κατασκευής ακολουθείται μία μέθοδος τεσσάρων βημάτων [1.7]:

1. Προσδιορισμός του μοντέλου αστοχίας
2. Προσδιορισμός του μοντέλου σχεδιασμού
3. Προσδιορισμός του μοντέλου προσδιορισμού της αξιοπιστίας
4. Υπολογισμός της πιθανότητας αστοχίας

Στο πρώτο βήμα προσδιορίζεται η μορφή αστοχίας, δηλαδή αναγνωρίζονται οι μηχανισμοί αστοχίας στο σύστημα και προσδιορίζονται οι βασικές μεταβλητές του προβλήματος και τα κριτήρια αστοχίας. Στο δεύτερο βήμα περιγράφεται το σύστημα και εισάγονται οι μεταβλητές του σχεδιασμού και οι συναρτήσεις αυτού. Στην μοντελοποίηση του προβλήματος της αξιοπιστίας πρέπει να συμπεριληφθούν οι οριακές συνθήκες του προβλήματος να προσδιορισθούν οι συναρτήσεις οριακής κατάστασης βάσει ενός ντετερμινιστικού προβλήματος και να προσδιορισθούν οι στατιστικές κατανομές και οι παράμετροι αυτών των βασικών μεταβλητών του προβλήματος.

Οι μέθοδοι προσδιορισμού της δομικής αξιοπιστίας είναι μία οικογένεια μεθόδων ανάλυσης, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της ασφάλειας της κατασκευής μέσα σε ένα στατιστικό πλαίσιο. Η ασφάλεια της κατασκευής εκφράζεται έτσι σε όρους της πιθανότητας επιβίωσης, ή εναλλακτικά σε όρους του συμπληρώματος αυτής, δηλαδή σε

όρους της πιθανότητας αστοχίας της. Μία παραδοσιακή ανάλυση δομικού σχεδιασμού, με τον έλεγχο της δομικής ασφάλειας σύμφωνα με κάποιο κώδικα δομικού σχεδιασμού κατασκευών, είναι ένας απλουστευμένος τρόπος για την επιβεβαίωση ότι η πιθανότητα αστοχίας είναι αποδεκτά μικρή. Οι χαρακτηριστικές τιμές των φορτίων και των ιδιοτήτων (γεωμετρικών, μηχανικών) της κατασκευής, που προσδιορίζονται σε τέτοιους κώδικες και που χρησιμοποιούνται για αυτό τον σκοπό, προσδιορίζονται συχνά ως συγκεκριμένα ποσοστιαία σημεία των αντιστοιχών κατανομών πιθανότητας των παραμέτρων του προβλήματος. Οι μέθοδοι δομικής αξιοπιστίας επεκτείνουν αυτή την ανάλυση κατά ένα βήμα, χρησιμοποιώντας περισσότερες πληροφορίες, οι οποίες ενσωματώνονται σε αυτές τις κατανομές πιθανοτήτων, για να υπολογισθούν πραγματικά οι πιθανότητες αστοχίας. Κατ' αυτό τον τρόπο οι μέθοδοι αυτές σχηματίζουν την λογική βάση για την βαθμονόμηση των μερικών συντελεστών ασφαλείας, οι οποίοι χρησιμοποιούνται στον παραδοσιακό ντετερμινιστικό σχεδιασμό. Μία βαθμονόμηση των μερικών συντελεστών ασφαλείας υπονοεί τον υπολογισμό των τιμών που χρειάζεται να λάβουν αυτοί ώστε, όταν χρησιμοποιούνται στον συνήθη σχεδιασμό να εξασφαλίζεται η απαιτούμενη μικρή πιθανότητα αστοχίας.

Μία ανάλυση αξιοπιστίας, στην πιο ανοιχτή της έννοια, είναι μία μέθοδος για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας P_R του εξιδανικευμένου συστήματος ως προς ένα συγκεκριμένο σύνολο σεναρίων αστοχίας. Έτσι το P_R χρησιμοποιείται ως προσέγγιση του P_R , δηλαδή της αξιοπιστίας του πραγματικού συστήματος. Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί μία σειρά χρήσιμων μεθόδων σχεδιασμού βασισμένες σε έννοιες αξιοπιστίας. Πολλές από αυτές δεν υπολογίζουν πιθανότητες αξιοπιστίας. Παρόλα αυτά έχουν ως στόχο την παραγωγή κατασκευών με προδιαγεγραμμένη αξιοπιστία, ή στοχεύουν στην σύγκριση της αξιοπιστίας των κατασκευών. Συνεπώς μία μέθοδος αξιοπιστίας ορίζεται, σε μία πλατιά έννοια, ως η μέθοδος για να ληφθεί η απόφαση αν μία κατασκευή είναι αποδεκτά αξιόπιστη ή όχι. Οι απαιτήσεις για ακρίβεια και αποτελεσματικότητα είναι δύσκολο να ποσοτικοποιηθούν, έτσι γίνεται διάκριση μεταξύ δύο ειδών μοντέλων. Το ένα έχει ως στόχο την καλύτερη κατανόηση της δομικής αξιοπιστίας, με έμφαση στην ακρίβεια. Το ιδανικότερο τέτοιο μοντέλο ελαχιστοποιεί την διαφορά $P_R - P_R$. Το δεύτερο μοντέλο, αντίθετα είναι ένα σχεδιαστικό εργαλείο, ένα βοήθημα για την λήψη αποφάσεων, με έμφαση στην επιλογή των αποφάσεων. Συνήθως ο μηχανικός πρέπει να επιλέξει τον πιο κατάλληλο συμβιβασμό μεταξύ αυτών των δύο ακραίων μοντέλων, θεωρώντας τις αλληλοσυγκρουόμενες απαιτήσεις ακρίβειας και απλότητας αναπαράστασης.

Στο [1.3] γίνεται μία γενική επισκόπηση των μεθόδων σχεδιασμού κατασκευών από σύνθετα υλικά με στατιστικούς όρους. Σε αυτό φαίνεται ότι οι μεθοδολογίες παρουσιάζουν διαφοροποιήσεις ως προς την θέση τους στην ζωή της κατασκευής, το στόχο της ανάλυσης την μαθηματική τους προσέγγιση, κλπ. Η εργασία περιορίζεται σε εφαρμογή συνθέτων υλικών σε αεροπορικές κατασκευές, όμως οι διαφορές μεταξύ των πιθανολογικών μεθόδων σχεδιασμού κατασκευών μπορούν να γενικευτούν σε όλες τις κατασκευές ανεξάρτητα από το φέρον υλικό της κατασκευής.

Έτσι, ορισμένες μεθοδολογίες επικεντρώνονται στην διαδικασία σχεδιασμού και περιλαμβάνουν ένα μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων ως ένα αυτόνομο μέρος. Αυτές οι μεθοδολογίες δεν απαιτούν ένα βασικό (πρώτο) ντετερμινιστικό σχεδιασμό. Άλλες πάλι ξεκινούν με ένα ντετερμινιστικό σχεδιασμό και υπολογίζουν την πιθανότητα αστοχίας χρησιμοποιώντας θεωρίες διαταραχής ή τεχνικές βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς (constraint optimization techniques).

Ένας ακόμη διαχωρισμός είναι η θέση της μεθοδολογίας στην ζωή της κατασκευής, για παράδειγμα μέθοδοι που καλύπτουν τον σχεδιασμό της κατασκευής, μέθοδοι που επικεντρώνονται στην πιστοποίηση και αποδοχής της κατασκευής, άλλες που προσδιορίζουν μόνο τα διαστήματα επιθεώρησης κατά την διάρκεια της λειτουργίας/ζωής της κατασκευής, κλπ.

Επίσης οι μέθοδοι μπορούν να διαχωριστούν ως προς την εφαρμογή στην οποία εστιάζονται, που μπορεί να περιλαμβάνει: στατιστική εκτίμηση της αντοχής του υλικού, πιστοποίηση

υλικών, διαστασιολόγηση της κατασκευής, πρόβλεψη της μορφής αστοχίας, πιστοποίηση της κατασκευής, κλπ.

Αντίστοιχα, οι διάφορες μέθοδοι διαφοροποιούνται ως προς την μαθηματική τους προσέγγιση και μπορούν να ταξινομούνται ανάλογα με την μαθηματική ή στατιστική τους προσέγγιση ως [1.3]:

α. Προσδιορισμός της επιφάνειας απόκρισης (response surface evaluation): Πολλαπλή παλινδρόμηση (Multiple regression), Ανάλυση διασποράς (ANOVA), ανάλυση υπολοίπων (analysis of residuals).

β. Εξισώσεις οριακών καταστάσεων: Προσδιορισμός της συνάρτησης αστοχίας, υπολογισμός του πιο πιθανού σημείου (most probable point), συσχετισμένες μεταβλητές σχεδιασμού, προσεγγίσεις στην κανονική κατανομή, γραμμικοποίηση της συνάρτησης αστοχίας, μέθοδοι πρώτης (FORM) και δεύτερης τάξεως (SORM), μη γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης αστοχίας.

γ. Προσομοίωση Monte Carlo: Βασική προσομοίωση Monte Carlo, αποτελεσματικές MC προσομοιώσεις, Δειγματοληψία βάσει σημαντικότητας (Importance sampling), Προσαρμοζόμενη δειγματοληψία βάσει σημαντικότητας (Adaptive importance sampling), κ.α.

Πληροφορίες για τις έννοιες και τις μεθόδους που υπεισέρχονται στα προβλήματα προσδιορισμού της αξιοπιστίας κατασκευών, μπορεί κανείς να βρει σε διάφορα βιβλία, μεταξύ άλλων, στα [1.8] και [1.9].

Τα τελευταία χρόνια η πρόοδος που έχει επιτευχθεί στις υπολογιστικές μηχανές και η ταυτόχρονη ανάπτυξη εργαλείων που βασίζονται στις μεθόδους προσδιορισμού της αξιοπιστίας κατασκευών, έχει επιτρέψει την ανάπτυξη υπολογιστικών εργαλείων (software) γενικής εφαρμογής. Τεύχος του επιστημονικού περιοδικού Structural Safety [1.10] είναι αφιερωμένο σε αυτά τα υπολογιστικά εργαλεία, τα οποία είναι εμπορικά διαθέσιμα. Στο [1.11] γίνεται μία γενική επισκόπηση των διαφόρων αυτών υπολογιστικών εργαλείων και μία κριτική ως προς τα υπάρχοντα κενά αυτών των εργαλείων. Η συνεργασία των υπολογιστικών εργαλείων με κώδικες πεπερασμένων στοιχείων θεωρείται ένα από τα βασικά στοιχεία που πρέπει να περιλαμβάνονται στους κώδικες για τον προσδιορισμό της αξιοπιστίας κατασκευών. Επίσης, σημειώνεται ότι από τα παραδείγματα που παρουσιάζουν οι δημιουργοί των εμπορικών εργαλείων φαίνεται ότι εξακολουθούν και υπάρχουν περιορισμοί στον αριθμό των τυχαίων μεταβλητών που μπορούν να αναλυθούν σε ένα πρόβλημα καθώς επίσης και στον υπολογισμό πολύ μικρών πιθανοτήτων αστοχίας. Μεταξύ των εργαλείων που εξετάστηκαν αξίζει ίσως να αναφερθούν τα παρακάτω, όχι επειδή κρίνονται ως καλύτερα από τα υπόλοιπα, αλλά λόγω της εφαρμογής τους σε προβλήματα που άπτονται της παρούσας εργασίας:

- PERMAS-RA/STRUREL [1.12]. Το εργαλείο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση προβλημάτων υπολογισμού αξιοπιστίας με μεταβλητές σταθερές αλλά και μεταβαλλόμενες ως προς το χρόνο. Για το σκοπό αυτό η ανάλυση βασίζεται στις μεθόδους FORM/SORM αλλά και στην Monte Carlo (την οποία συνιστά να χρησιμοποιηθεί για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων μέσω της FORM). Ο υπολογιστικός κώδικας χρησιμοποιείται στο FAROW [1.13] για την εκτίμηση της αξιοπιστίας κατασκευαστικών τμημάτων της ανεμογεννήτριας, όπως περιγράφεται και σε επόμενο εδάφιο της παρούσας εργασίας.
- PROBAN [1.14]: Το εργαλείο αυτό προσφέρει μία σειρά από διαφορετικές μεθόδους ανάλυσης (περιλαμβάνοντας μεταξύ άλλων την Monte Carlo, FORM, SORM και την μέθοδο προσδιορισμού της επιφάνειας απόκρισης), ενώ η συνάρτηση που δέπει το πρόβλημα προγραμματίζεται. Το υπολογιστικό πρόγραμμα έχει χρησιμοποιηθεί στο [1.5] για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας πτερυγίου όπως περιγράφεται αναλυτικά σε επόμενο εδάφιο.

- NESSUS [1.15], [1.16]: Το εργαλείο αυτό είναι ένα από τα πιο ολοκληρωμένα εργαλεία προσδιορισμού αξιοπιστίας, όσον αφορά στην δυνατότητα συνδυασμού του με εργαλεία πεπερασμένων στοιχείων καθώς επίσης και όσον αφορά στις στατιστικές μεθόδους ανάλυσης που περιλαμβάνονται. Το υπολογιστικό αυτό πακέτο έχει χρησιμοποιηθεί κατά την ανάλυση πτερυγίου αεροσκάφους στα [1.2] και [1.17]. Συγκεκριμένα στο NESSUS βασίζεται το ανεπτυγμένο εργαλείο IPACS (Integrated Probabilistic Analysis of Composite Structures – Ολοκληρωμένη πιθανολογική ανάλυση κατασκευών από σύνθετα υλικά), το οποίο είναι ειδικά διαμορφωμένο για την ανάλυση κατασκευών από σύνθετα υλικά. Η μέθοδος δεν χρειάζεται αρχικό σχεδιασμό και δεν χρειάζεται πειράματα σε δοκίμια στο επίπεδο της στρώσης για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων του υλικού, αλλά στηρίζεται στις ιδιότητες των συνιστωσών του υλικού (ίνας – μήτρας). Βασίζεται όμως σε υποθέσεις για τις κατανομές που ακολουθούν οι ιδιότητες των υλικών στο μικροσκοπικό επίπεδο ίνας – μήτρας [1.2], [1.17].
- ANSYS [1.18]: Το εμπορικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ANSYS περιλαμβάνει και επιμέρους εργαλείο για την ανάλυση αξιοπιστίας κατασκευών. Όμως, το εργαλείο δέχεται την κριτική των συγγραφέων του [1.11], εφόσον στην νεώτερη έκδοσή του περιλαμβάνει μόνο την μέθοδο επιφάνειας απόκρισης (response surface method), η οποία θέτει περιορισμούς στον αριθμό των τυχαίων μεταβλητών του προβλήματος.

Γενικό συμπέρασμα από την εργασία των Pellissetti και Schueller [1.11] είναι ότι τα γενικότερα εργαλεία για την εκτίμηση της αξιοπιστίας κατασκευών βρίσκονται ακόμα σε στάδιο που δεν είναι εύκολο να χρησιμοποιηθούν κατά το στάδιο του σχεδιασμού μίας κατασκευής, όπου απαιτούνται πολλές επαναληπτικές δοκιμές μέχρι το τελικό σχέδιο.

Για αυτό το λόγο το ερευνητικό ενδιαφέρον εξακολουθεί στην περιοχή ανάπτυξης εργαλείων, τα οποία να δίνουν την δυνατότητα στο χρήστη να συνδυάζει την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων με τις στοχαστικές μεθόδους που αναπτύσσονται, για χρήση σε προβλήματα μηχανικής κατασκευών λαμβάνοντας υπόψη και την μεταβλητότητα των παραμέτρων εισόδου. Για παράδειγμα στο [1.19] παρουσιάζονται στρατηγικές συνδυασμού στοχαστικών μεθόδων επίλυσης σε συνδυασμό με υπάρχοντα εργαλεία ντετερμινιστικών μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων για μια ολοκληρωμένη ανάλυση σε όρους πιθανοτήτων.

Ταυτόχρονα, εξαιτίας των διαφορετικών μεθόδων και προσεγγίσεων του στοχαστικού προβλήματος για την εκτίμηση της αξιοπιστίας μίας κατασκευής, δεν είναι ακόμα ξεκάθαρο το ποια μέθοδος είναι καταλληλότερη από άποψη ακρίβειας επαναληψιμότητας και υπολογιστικού κόστους, για την επίλυση των διαφόρων προβλημάτων. Έτσι, για παράδειγμα στο [1.20] παρουσιάζεται μια αξιολόγηση διαφόρων μεθόδων προσδιορισμού της αξιοπιστίας της κατασκευής, ανάλογα με την ακρίβειά τους και την αποδοτικότητά τους στην επίλυση των προβλημάτων βάσει του αριθμού των τυχαίων μεταβλητών που εισάγονται στο πρόβλημα, της μορφής της συνάρτησης αστοχίας (γραμμική, μη-γραμμική). Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την εργασία, η κλασσική προσομοίωση με την μέθοδο Monte Carlo δίνει καλά αποτελέσματα και συνιστάται σχεδόν για όλους τους τύπους προβλημάτων. Αντίθετα η FORM ενώ διαπρέπει σε περιπτώσεις γραμμικών οριακών καταστάσεων, αναμένεται να εμφανίσει προβλήματα σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση αστοχίας είναι μη γραμμική ή έχει μεγάλο αριθμό τυχαίων μεταβλητών. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουν οι συγγραφείς και στο [1.21] για περιπτώσεις προβλημάτων με πολλές μεταβλητές και μη γραμμικές συναρτήσεις αστοχίας.

Εξαιτίας αυτού, και εφόσον οι μέθοδοι εξισώσεων οριακών καταστάσεων (π.χ. FORM, SORM) έχουν πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος σε σύγκριση με τις μεθόδους δειγματοληψίας τύπου Monte Carlo, υπάρχουν αρκετές εργασίες στις οποίες γίνεται προσπάθεια βελτίωσης της βασικής μεθόδου υπολογισμού [1.22].

1.3 Γενική Επισκόπηση: Σύνθετα υλικά

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω για να γίνει η εφαρμογή μίας μεθόδου προσδιορισμού αξιοπιστίας της κατασκευής, απαιτείται η στατιστική αξιολόγηση των ιδιοτήτων του υλικού της κατασκευής (και της φόρτισης) καθώς επίσης και το κριτήριο αστοχίας για την μοντελοποίηση του προβλήματος. Βλέποντας την χρήση των συνθέτων υλικών σε εφαρμογές και ιδιαίτερα σε κατασκευές υψηλών απαιτήσεων, όπως είναι οι αεροπορικές κατασκευές, η οποία συνεχώς διευρύνεται, θα περίμενε κανείς ότι βασικά θέματα που άπτονται του σχεδιασμού τέτοιων κατασκευών, όπως είναι ο προσδιορισμός των ιδιοτήτων του υλικού, η πρόβλεψη της αστοχίας, η μοντελοποίηση κ.α., θα είχαν λυθεί. Όμως μία ματιά στην σύγχρονη βιβλιογραφία δείχνει κάθε άλλο παρά αυτό.

Ο προσδιορισμός των μακροσκοπικών ιδιοτήτων των υλικών (στο επίπεδο της στρώσης) στην πράξη γίνεται με πειράματα. Ακόμα όμως και στο απλό φαινομενικά πρόβλημα του προσδιορισμού των ιδιοτήτων του υλικού, υπάρχουν θέματα τα οποία ακόμα διερευνώνται. Συγκεκριμένα, ενώ οι ιδιότητες του υλικού της στρώσης σε εφελκυσμό προσδιορίζονται σύμφωνα με τα αναγνωρισμένα και πλήρως τεκμηριωμένα πρότυπα ASTM D3909 και ISO 527, για τις ιδιότητες σε θλίψη η έρευνα για την εύρεση της καλύτερης μεθόδου συνεχίζεται [1.23]. Η σημαντικότερη δυσκολία φαίνεται ότι είναι η αποτροπή του φαινομένου του λυγισμού κατά την διάρκεια της φόρτισης του δοκιμίου. Έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι για την εισαγωγή της θλιπτικής δύναμης με, ή χωρίς την χρήση στηρίξεων του δοκιμίου για την αποτροπή του λυγισμού (της μετατόπισης του δοκιμίου κάθετα στο επίπεδο της πλάκας), οι οποίες περιγράφονται στα πρότυπα ASTM D3410, ASTM D695 και στο ISO 14126. Παρόλα αυτά τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά, ιδιαίτερα για τις ιδιότητες παράλληλα με την διεύθυνση των ινών σε εποξειδικές ρητίνες ενισχυμένες με ίνες άνθρακα [1.23]. Για τις ιδιότητες σε διάτμηση στην ίδια εργασία [1.23] προτείνεται η χρήση της μεθόδου V-notch που περιγράφεται στο πρότυπο ASTM D5379 για τον προσδιορισμό του μέτρου διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης και η μέθοδος εφελκυσμού $\pm 45^\circ$ που παρουσιάζεται στο ISO 14129 για τον προσδιορισμό της αντοχής σε διάτμηση στο επίπεδο της στρώσης. Στην πράξη όμως, καθώς οι δύο ιδιότητες, δηλαδή το μέτρο διάτμησης και η αντοχή σε διάτμηση, μπορούν να προσδιοριστούν και με τις δύο μεθόδους, γίνεται η επιλογή μόνο μίας εκ των δύο, για λόγους κόστους. Οι διάφορες μέθοδοι όμως δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα η κάθε μία ακόμα και στο ίδιο υλικό (π.χ. [1.24]). Μία εκτενής συζήτηση για τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των πειραματικών μεθόδων που περιγράφονται στα διάφορα πρότυπα βρίσκεται στο MIL-HDBK-17-1F [1.25].

Από την άλλη πλευρά, για την στατιστική αξιολόγηση των ιδιοτήτων του υλικού, απαιτείται ο διαχωρισμός της μεταβλητότητας των πειραματικών αποτελεσμάτων που είναι απόρροια της αβεβαιότητας που εισέρχεται στην μέτρηση από την πειραματική μέθοδο και της διασποράς των ιδιοτήτων του υλικού. Ειδικά για τα σύνθετα υλικά, επειδή δεν υπάρχει υλικό αναφοράς, η μεροληψία της πειραματικής μεθόδου μπορεί να προσδιοριστεί μόνο ποιοτικά [1.25]. Έτσι για να μειωθεί η αβεβαιότητα που εισάγεται από την πειραματική μέθοδο, αλλά και να προσδιοριστεί η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων για την χρήση σε κατασκευές, στις περισσότερες περιπτώσεις συνιστάται η εκτέλεση πειραμάτων σε πλάκες που έχουν κατασκευαστεί από διαφορετικές παρτίδες υλικού [1.25], [1.26], [1.27]. Όπως γίνεται κατανοητό, το κόστος για τον πειραματικό προσδιορισμό των ιδιοτήτων του συνθέτου υλικού που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή είναι εξαιρετικά μεγάλο.

Έτσι, σε κάποιες περιπτώσεις, αντί για την εκτέλεση ακριβών πειραματικών προτείνεται η χρήση κανόνων μικρομηχανικής για τον προσδιορισμό των μακροσκοπικών ιδιοτήτων των συνθέτων υλικών, όπως για παράδειγμα περιγράφεται στο VDI 2014 [1.28]. Αυτό βέβαια περιορίζεται στην εκτίμηση των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού και όχι στις ιδιότητες αντοχής. Παράλληλα, η ακρίβεια της εκτίμησης των διαφόρων ελαστικών ιδιοτήτων, μέτρο ελαστικότητας κατά την διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτή, το μέτρο διάτμησης και ο συντελεστής Poisson στο επίπεδο της στρώσης, με χρήση τέτοιων μοντέλων διαφέρει από υλικό σε υλικό. Η διαφορά αυτή οφείλεται όχι μόνο στην χρήση διαφορετικών υλικών για

την ίνα και την μήτρα, αλλά και τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους κατασκευάζεται το τελικό προϊόν, μέθοδος εμφάνισης της ίνας, τρόπος διάταξης της ίνας (roving, υφάσματα) κλπ. Στο πεδίο αυτό γίνεται εντατική έρευνα, ώστε να μειωθεί ο αριθμός των πειραμάτων για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων. Όμως τα αποτελέσματα των θεωρητικών προβλέψεων πρέπει ακόμα να επιβεβαιώνονται με πειραματικά αποτελέσματα, για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων που θα χρησιμοποιηθούν για τον σχεδιασμό κατασκευών.

Η μοντελοποίηση της αστοχίας των συνθέτων υλικών, επίσης, δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κλειστό θέμα [1.29], το οποίο φαίνεται και από τον αριθμό και την συχνότητα νέων κριτηρίων αστοχίας, ακόμα και στην περίπτωση στατικής φόρτισης. Το 2002 και 2004 δημοσιεύτηκαν τα τελικά αποτελέσματα και τα συμπεράσματα από την Παγκόσμια Άσκηση Αστοχίας (World Wide Failure Exercise) σε ειδικό τεύχος (Special Issue) του επιστημονικού περιοδικού Composites Science and Technology [1.30], [1.31], η οποία άρχισε το 1995 και περιλάμβανε την σύγκριση και αξιολόγηση 19 διαφορετικών θεωρητικών μεθοδολογιών για την πρόβλεψη αστοχίας πολυστρώτων πλακών συνθέτου υλικού. Στο πλαίσιο της άσκησης αυτής οι θεωρίες συγκρίθηκαν και μεταξύ τους, αλλά και με πειραματικά αποτελέσματα, τα οποία ήταν κοινά για όλους τους συμμετέχοντες. Στα συμπεράσματα της άσκησης περιλαμβάνονται και οι ακόλουθες παρατηρήσεις [1.31]:

- Οι περισσότερες μέθοδοι σχεδιασμού χρησιμοποιούν την στρώση του συνθέτου υλικού ως το βασικό στοιχείο, χρησιμοποιώντας πειραματικά αποτελέσματα από το επίπεδο της στρώσης. Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να ξεκινήσει από το επίπεδο των συνιστωσών του συνθέτου υλικού (ίνα – μήτρα) και να χρησιμοποιήσει τις ιδιότητες αυτών για την πρόβλεψη της μακροσκοπικής συμπεριφοράς του υλικού. Παρόλα αυτά, ξεκινώντας στο επίπεδο της μικρο-μηχανικής, εισάγονται επιπρόσθετοι υπολογισμοί, αλλά και η πιθανότητα εισαγωγής ανακριβών ιδιοτήτων στρώσης. Τρεις μέθοδοι (από αυτές που εξετάστηκαν στο πλαίσιο της άσκησης) κάνουν χρήση της μικρομηχανικής (Chamis [1.32], Mayes [1.33], Huang [1.34]). Τα αποτελέσματα που προέκυψαν με χρήση αυτών των μεθόδων για την εκτίμηση της αστοχίας της πολυστρώτης κρίθηκαν μέτρια, σε σχέση με τα αποτελέσματα άλλων μεθόδων. Υπάρχουν και άλλες θεωρίες που χρησιμοποιούν κανόνες μικρομηχανικής, αλλά σε μικρότερη έκταση (Hart-Smith [1.35], Puck [1.36]-[1.37], Rotem [1.38]-[1.39], Tsai [1.40]-[1.41]).
- Πέντε θεωρητικές μέθοδοι επιλέχθηκαν ως καλύτερες, από την ποσοτική αξιολόγηση που έγινε στα πλαίσια της άσκησης. Αυτές είναι: Zinoviev [1.42]-[1.43], Bogetti [1.44]-[1.45], Puck [1.36]-[1.37], Cuntze [1.46]-[1.47] και Tsai [1.40]-[1.41].
- Στην πρόβλεψη της αστοχίας στρώσης με ίνες προσανατολισμένες σε μία μόνο διεύθυνση υπό σύνθετη εντατική κατάσταση οι θεωρίες του Puck [1.36]-[1.37] (ή του Cuntze [1.46]-[1.47]) και του Tsai [1.40]-[1.41] έδωσαν τα καλύτερα αποτελέσματα. Στην περίπτωση σχεδιασμού προτείνεται να χρησιμοποιούνται μαζί, για την πρόβλεψη της αντοχής σε αυτή την περίπτωση.
- Για την πρόβλεψη της αρχικής αστοχίας στην περίπτωση πολυστρώτων πλακών οι θεωρίες του Bogetti [1.44]-[1.45] και του Zinoviev [1.42]-[1.43] έδωσαν τα καλύτερα αποτελέσματα. Όμως, για διάφορους λόγους που περιγράφονται αναλυτικά για την περίπτωση αυτή, οι συγγραφείς [1.31] δεν μπορούν να καταλήξουν στην πρόταση για κάποια από τις μεθόδους που εξετάστηκαν για αυτή την περίπτωση.
- Στην περίπτωση της πρόβλεψης της τελικής αστοχίας πολυστρώτου πλακός, καμία θεωρία δεν ήταν δυνατό να προβλέψει μέσα στο $\pm 10\%$ της μετρημένης αντοχής σε περισσότερο από το 40% των περιπτώσεων που εξετάστηκαν. Οι πέντε καλύτερες θεωρίες κατάφεραν να προβλέψουν μέσα στο όριο του $\pm 50\%$ της μετρημένης τελικής αστοχίας σε περισσότερες από το 75% των περιπτώσεων που εξετάστηκαν, ενώ οι θεωρίες των Puck [1.36]-[1.37] και Cuntze [1.46]-[1.47] προέβλεψαν με αυτή την ακρίβεια περισσότερες από 85% των περιπτώσεων. Έτσι, προτείνεται η χρήση των

μεθόδων Puck [1.36]-[1.37] και Cuntze [1.46]-[1.47] για την πρόβλεψη της τελικής αστοχίας πολυστρώτων συνθέτων υλικών, ενώ παράλληλα, και η μέθοδος του Zinoviev [1.42]-[1.43] θεωρείται ότι έχει αξία για τον σχεδιαστή. Η μέθοδος του Tsai [1.40]-[1.41] θεωρείται ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τις άλλες μεθόδους.

Σε κάθε περίπτωση σημειώνεται ότι για την καλύτερη αξιολόγηση των θεωριών αστοχίας των συνθέτων υλικών χρειάζονται περισσότερα πειραματικά αποτελέσματα, κυρίως για την απαλοιφή αβεβαιοτήτων των ήδη υπαρχόντων πειραματικών δεδομένων, αλλά και για να διερευνηθούν νέες καταστάσεις φόρτισης [1.31]. Επίσης, επισημαίνεται ότι απαιτείται περαιτέρω θεωρητική ανάπτυξη των μεθόδων πρόβλεψης της συμπεριφοράς των συνθέτων υλικών.

Έχοντας υπόψη τους περιορισμούς για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων αλλά και την μοντελοποίηση της συμπεριφοράς του υλικού, για το πρόβλημα της εισαγωγής της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων του υλικού σε κατασκευές εν γένει αλλά και συγκεκριμένα από σύνθετα υλικά, βρίσκει κανείς δύο τάσεις στην βιβλιογραφία [1.48]: η πρώτη που μοντελοποιεί τις αβεβαιότητες των ιδιοτήτων των συνθέτων υλικών ως τυχαίες μεταβλητές, π.χ. [1.49], και η άλλη στην οποία χρησιμοποιούνται τυχαία πεδία, π.χ. [1.50]. Οι εργασίες που ακολουθούν την δεύτερη περίπτωση, δηλαδή την μοντελοποίηση της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων των υλικών ως τυχαία πεδία, οδήγησαν στην ανάπτυξη της μεθόδου των στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων (stochastic finite element method - SFEM), αλλά λόγω της έλλειψης πειραματικών δεδομένων, τα αποτελέσματα των οποίων να μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά την μοντελοποίηση ώστε να αποφευχθούν οι υποθέσεις, σήμερα οι επιστήμονες που ασχολούνται με αυτό το πεδίο έρευνας βρίσκονται μπροστά σε αδιέξοδο [1.48]. Στο [1.48] αναφέρεται επίσης, ότι η τάση στην οποία στηρίζονται είναι η εξαγωγή της στατιστικής πληροφορίας για τις μακροσκοπικές ιδιότητες των υλικών, να γίνεται εξετάζοντας τα μικρο-μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού.

Όμως οι εργασίες στο πεδίο της μικροδομής του υλικού βρίσκονται σε εξέλιξη και ακόμα δεν έχουν οδηγήσει σε αποτελέσματα τα οποία να είναι άμεσα εκμεταλλεύσιμα για την εκτίμηση των μακροσκοπικών ιδιοτήτων του υλικού και των στατιστικών τους χαρακτηριστικών. Επίσης, το φαινόμενο της κλίμακας είναι αρκετά σημαντικό, ώστε να μην επιτρέπει το απρόσκοπτο πέρασμα από το μικροσκοπικό στο μακροσκοπικό επίπεδο που τελικά ενδιαφέρει. Πρέπει όμως να σημειωθεί, ότι τα τελευταία χρόνια γίνεται προσπάθεια σύνδεσης των αποτελεσμάτων της μικρομηχανικής ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο επόμενο επίπεδο ανάλυσης (π.χ. [1.51] και [1.52]).

Όσον αφορά στην περίπτωση της διερεύνησης του προβλήματος της αξιοπιστίας των κατασκευών από σύνθετα υλικά δεν υπάρχουν αναλυτικές λύσεις για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας, εξαιτίας αφενός των πολλών μεταβλητών που εμπεριέχονται (4 ιδιότητες ελαστικότητας και 5 αντοχής στο επίπεδο της στρώσης – μακροσκοπικό επίπεδο για δισδιάστατη ανάλυση) και την μη γραμμικότητα των συναρτήσεων που διέπουν το πρόβλημα.

Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιείται η μέθοδος Monte Carlo (MC) για την προσεγγιστική εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας. Χαρακτηριστικό ίσως παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου Monte Carlo είναι η μεθοδολογία NGCAD [1.53] που αναπτύχθηκε ως εργαλείο για αεροπορικές εφαρμογές με έμφαση στα κατασκευαστικά τμήματα από σύνθετα υλικά. Όμως, η μέθοδος NGCAD αναπτύχθηκε ως εργαλείο ελέγχου του σχεδιασμού κατασκευών τέτοιου τύπου και όχι ως εργαλείο αρχικού σχεδιασμού.

Γενικά η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo εξαιτίας της επαναληπτικής της φύσης είναι εξαιρετικά χρονοβόρα ακόμα και στην περίπτωση απλών προβλημάτων. Υπάρχουν ασφαλώς μέθοδοι βελτίωσης της MC, όπως για παράδειγμα η τεχνική δειγματοληψίας σπουδαιότητας (importance sampling), συνήθως όμως χρειάζεται μία περαιτέρω στοχαστική ανάλυση.

Ενώ η MC αποτελεί μία μέθοδο προσομοίωσης της κατασκευής, έχουν αναπτυχθεί παράλληλα προσεγγιστικές μέθοδοι για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Στην βιβλιογραφία βρίσκει κανείς την μέθοδο των στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων (SFEM) που βασίζονται στον προσδιορισμό της επιφάνειας απόκρισης ή μεθόδους αξιοπιστίας πρώτης τάξεων (FORM). Σε κάθε περίπτωση η εφαρμογή των μεθόδων αυτών, όπως προαναφέρθηκε βασίζεται σε υποθέσεις για την μοντελοποίηση των ιδιοτήτων (και όχι σε πειραματικά αποτελέσματα), ενώ η επαλήθευση με πειραματικά δεδομένα είναι εξαιρετικά δύσκολη αλλά και ακριβή [1.48].

Στο [1.54] γίνεται μία εκτενής ανασκόπηση των μεθόδων προσδιορισμού της αξιοπιστίας στοιχείων συνθέτων υλικών, ξεκινώντας από το μικρομηχανικό επίπεδο ίνας-μήτρας και καταλήγοντας σε συζήτηση για το σύστημα πολύστρωτης πλάκας.

1.4 Γενική Επισκόπηση: Πτερύγια ανεμογεννήτριας

Οι ανεμογεννήτριες και ένα από τα σημαντικότερα δομικά στοιχεία αυτών, τα πτερύγια, είναι κατασκευές που αναπτύχθηκαν τα τελευταία 30 χρόνια. Οι ανεμογεννήτριες ήρθαν να δώσουν λύση στο ενεργειακό πρόβλημα που δημιουργείται παγκοσμίως εξ αιτίας της εξάρτησης από το πετρέλαιο και τους διάφορους ενεργειακούς πόρους, που είναι πεπερασμένοι και επομένως αλόγιστη χρήση τους μπορεί να οδηγήσει στην εξάντλησή τους. Εξαιτίας διάφορων οικονομο-τεχνικών συγκυριών η βιομηχανία γύρω από τις ανεμογεννήτριες ζει τα τελευταία χρόνια μια επιταχυνόμενη αύξηση του κύκλου εργασιών της. Ο ανταγωνισμός των εταιρειών του κλάδου είναι μεγάλος και μέχρι τώρα η βελτίωση του προϊόντος έχει ως κύριο στόχο την αύξηση του μεγέθους της ανεμογεννήτριας και επομένως των πτερυγίων.

Η έρευνα σε διεθνές επίπεδο που σχετίζεται με τα πτερύγια ανεμογεννητριών κάλυψε θέματα που άπτονται των δοκιμών και ελέγχων των πτερυγίων Α/Γ, για παράδειγμα με τα έργα SMT [1.55], και AEGIS [1.56], θέματα που άπτονται της προσαρμογής του σχεδιασμού του πτερυγίου σε διάφορες κλιματικές συνθήκες π.χ. στα πλαίσια των έργων ADAPTURB [1.57] και MEGAWIND [1.58], θέματα που στόχο έχουν την χρήση εγγενών ιδιοτήτων των υλικών για την βελτίωση της απόκρισης των πτερυγίων, για παράδειγμα βελτιώνοντας την απόσβεση των υλικών σε ταλαντώσεις, όπως έγινε στο πλαίσιο του έργου DAMPBLADE [1.59]. Παράλληλα, μακροχρόνια έρευνα στο επίπεδο της φόρτισης των πτερυγίων εξαιτίας της μεταβλητότητας του ανέμου και της λειτουργίας της ανεμογεννήτριας έχει οδηγήσει στην στοχαστική μοντελοποίηση της φόρτισης της ανεμογεννήτριας και των τμημάτων της, όπως αυτό καταγράφεται στο πρότυπο σχεδιασμού ανεμογεννητριών IEC 61400-1:2005.

Πολύ λίγες ερευνητικές εργασίες, όμως, έχουν εστιάσει στο πρόβλημα της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων των υλικών και στην μοντελοποίησή της. Για παράδειγμα στο έργο PROFAR [1.60], έγινε μία προσπάθεια για τον προσδιορισμό της μεταβλητότητας της αντοχής των πτερυγίων σε κόπωση, αλλά ο κύριος στόχος του έργου ήταν ο προσδιορισμός κατάλληλου συντελεστή ασφαλείας ώστε να λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα αυτή κατά τον σχεδιασμό των πτερυγίων. Στόχος του έργου PRODETO [1.61], [1.62] ήταν η ανάπτυξη μεθοδολογίας για την πιθανολογική μοντελοποίηση της ανεμογεννήτριας (και εξ' αυτού και του πτερυγίου), παρόλα αυτά η έρευνα επικεντρώθηκε στην μοντελοποίηση της στοχαστικότητας του φορτίου (εξαιτίας της μεταβλητότητας του αέρα), ενώ η αντοχή του υλικού του πτερυγίου μοντελοποιήθηκε ως μία μεταβλητή για όλη την πολύστρωτη πλάκα. Το PRODETO βασίστηκε στα εργαλεία που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο του έργου EWTS, [1.63], το οποίο αποτέλεσε την βάση για την διαδικασία «βαθμονόμησης» των συντελεστών ασφαλείας που χρησιμοποιούνται στον σχεδιασμό ανεμογεννητριών (και των πτερυγίων αυτών) κατά IEC 61400-1. Η μεθοδολογία αυτής της βαθμονόμησης εμπεριέχει πιθανολογική ανάλυση, η οποία όμως στήθηκε θεωρώντας μία και μόνο ιδιότητα αντοχής της πολύστρωτης πλάκας ως μεταβλητή, η ιδιότητα ελαστικότητας θεωρείται ντετερμινιστική, ενώ η ανάλυση περιλαμβάνει μόνο την περίπτωση αστοχίας λόγω κόπωσης εξαιτίας της καμπτικής ροπής που αναπτύσσεται στην ρίζα του πτερυγίου. Στους στόχους του ακόλουθου του παραπάνω

έργου, δηλαδή στο EWTS II [1.64] περιλαμβανόταν και ο προσδιορισμός του επιθυμητού επιπέδου αξιοπιστίας (target reliability level) της ανεμογεννήτριας. Και σε αυτό το έργο οι υπολογισμοί εκτελέστηκαν ακολουθώντας το παράδειγμα του προγενέστερου. Η τελική πρόταση του έργου κατέληγε στην χρήση πιθανότητας αστοχίας 10^{-6} /έτος για τον δομικό σχεδιασμό της ανεμογεννήτριας. Στο ίδιο πλαίσιο κινήθηκε και το έργο RECOFF (Recommendations for Design of Offshore Wind Turbines, ENK5-CT-2000-00322), όσον αφορά την βαθμονόμηση των μερικών συντελεστών ασφαλείας για τις ακραίες φορτίσεις των πτερυγίων ανεμογεννητριών [1.65].

Λεπτομερέστερη ανάλυση της στοχαστικότητας των ιδιοτήτων του υλικού που χρησιμοποιείται στην κατασκευή πτερυγίων έγινε στο πλαίσιο του έργου OPTIMAT BLADES [1.66]. Το OPTIMAT BLADES ήταν ένα φιλόδοξο έργο, όπου στόχος ήταν να εξεταστούν όλα τα θέματα που άπτονται της χρήσης συνθέτων υλικών στην κατασκευή του πτερυγίου (συμπεριλαμβανομένου και της επιδιόρθωσης πολυστρώτων πλακών). Αλλά και σε αυτή την περίπτωση η ανάλυση επικεντρώθηκε στα προβλήματα κατά την κόπωση.

Τέλος στο [1.67] ο προσδιορισμός της πιθανότητας αστοχίας γίνεται και σε αυτή την περίπτωση για την ρίζα του πτερυγίου και περιπτώσεις κόπωσης.

Η βασική διαφορά των πτερυγίων ανεμογεννητριών σε σχέση με αεροπορικές/διαστημικές εφαρμογές όπου χρησιμοποιούνται σύνθετα υλικά έγκειται σε δύο σημεία, χαρακτηριστικά όμως ώστε να δώσουν το έναυσμα της παρούσης εργασίας. Το πρώτο είναι ότι στα πτερύγια ανεμογεννητριών ως επί το πλείστον το σύνθετο υλικό αποτελεί το μοναδικό φέρον υλικό της κατασκευής. Το δεύτερο είναι ότι η βιομηχανία πτερυγίων ανεμογεννητριών πρέπει να κρατήσει το κόστος κατασκευής σε πολύ χαμηλά επίπεδα για την επιβίωσή της. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα υλικά και οι μέθοδοι παραγωγής που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των πτερυγίων ανεμογεννητριών να έχουν διαφορετικές ιδιότητες αυτών που χρησιμοποιούνται στην αεροπορική βιομηχανία. Χαρακτηριστικό είναι ότι τα πτερύγια ανεμογεννητριών συνήθως κατασκευάζονται από ίνες γυαλιού, ενώ στις εφαρμογές της αεροπορίας χρησιμοποιούνται συνήθως ίνες άνθρακα, ενώ όταν χρησιμοποιούνται ίνες γυαλιού, αυτές είναι τύπου S-glass, καλύτερων ιδιοτήτων από το τύπο που χρησιμοποιείται για την κατασκευή πτερυγίων. Τέλος, η μέθοδος παραγωγής για την κατασκευή των πτερυγίων είναι διαφορετική από αυτή των αεροπορικών/διαστημικών εφαρμογών, κυρίως εξαιτίας του μεγέθους του πτερυγίου, το οποίο κατασκευάζεται στις περισσότερες περιπτώσεις σε ένα ενιαίο τμήμα κατά το μήκος του (σήμερα περίπου 30m - 40m, ενώ το μεγαλύτερο πτερύγιο που έχει κατασκευαστεί είναι 61.5m για δρομείς διαμέτρου μέχρι 126m), ενώ στις αεροπορικές τα κομμάτια από σύνθετο υλικό είναι σαφώς μικρότερων διαστάσεων. Αυτές οι διαφορές έχουν ως αποτέλεσμα, τα ευρήματα της έρευνας στο πλαίσιο της αεροπορικής βιομηχανίας ως προς τις ιδιότητες του υλικού και τις μεθόδους μέτρησης να μην είναι πάντα δυνατόν να εφαρμοστούν για τα υλικά της βιομηχανίας πτερυγίων.

1.5 Σκοπός της εργασίας

Στόχος της εργασίας είναι να αναπτυχθεί μία μέθοδος προσδιορισμού του επιπέδου αξιοπιστίας κατασκευών από σύνθετα υλικά, η οποία να είναι ευκολόχρηστη και αρκετά ακριβής, ώστε να καταστεί πρακτική για χρήση κατά την διάρκεια του σχεδιασμού τέτοιων κατασκευών, κατά την οποία μέχρι το τελικό αποτέλεσμα απαιτούνται πολλές επαναληπτικές δοκιμές. Ουσιαστικά, χρειάζεται μία μέθοδος, ούτως ώστε οι σχεδιαστές να μπορούν εύκολα να παρακάμψουν την χρήση συντελεστών ασφαλείας, οι οποίοι δεν βοηθούν στην εξασφάλιση συγκεκριμένου επιπέδου αξιοπιστίας της κατασκευής, και ταυτόχρονα να μην οδηγούνται σε υπερδιαστασιολόγισή της.

Πέρα όμως από την εύρεση μίας μεθόδου κατάλληλης να αντικαταστήσει τους ντετερμινιστικούς υπολογισμούς κατά τον σχεδιασμό πραγματικών κατασκευών από σύνθετα υλικά, χωρίς σημαντική υπολογιστική επιβάρυνση των μηχανικών, στην εργασία αυτή επιζητείται και η κάλυψη του κενού που έχει δημιουργηθεί μεταξύ των μεθόδων

προσδιορισμού αξιοπιστίας προβλημάτων κόπωσης και αυτών σε στατική φόρτιση, όπως είναι η εξέταση κατασκευών υπό ακραίες περιπτώσεις φόρτισης. Ιδιαίτερα στον χώρο πτερυγίων ανεμογεννητριών, εφαρμογές υψηλής τεχνολογίας, ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για τον ελλαδικό χώρο, οι αναλύσεις που έχουν παρουσιαστεί συγκεντρώνονται κυρίως στην ρίζα του πτερυγίου και περιορίζονται σε φόρτιση μίας μόνο διεύθυνσης (flap), λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις αξονικές (κατά το μήκος του πτερυγίου) παραμορφώσεις που αναπτύσσονται και αμελώντας τις διατμητικές και τις εφαιπτομενικές, οι οποίες μπορεί να είναι σημαντικές σε ορισμένα σημεία του πτερυγίου.

1.6 Μεθοδολογία

Για την επίτευξη του στόχου της εργασίας, οι θεματικές περιοχές που χρειάζεται να αναπτυχθούν είναι ουσιαστικά δύο: Η εκτίμηση της αξιοπιστίας μίας κατασκευής σε όρους πιθανοτήτων και η ανάλυση κατασκευών από σύνθετα υλικά. Τέλος, γίνεται και αναφορά στις ιδιαιτερότητες των πτερυγίων ανεμογεννητριών, ιδιαιτερότητες που δεν συναντώνται σε άλλες κατασκευές από σύνθετα υλικά.

Το πρώτο βήμα στην εφαρμογή μεθόδων προσδιορισμού αξιοπιστίας εν γένει, είναι η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος και κυρίως της αστοχίας της. Στην περίπτωση κατασκευών που ελέγχονται ως προς την αντοχή τους, ενδιαφερόμαστε για ένα σύστημα R-S, δηλαδή ενδιαφερόμαστε για την σχέση μεταξύ των εξωτερικά επιβαλλόμενων φορτίων και την αντίσταση της κατασκευής. Αφού καταστρωθεί το μαθηματικό πρόβλημα, χρειάζεται ο εντοπισμός των παραμέτρων, των οποίων η στοχαστικότητα αναμένεται να επηρεάσει την λύση του.

Στα συμβατικά υλικά, αρκεί η εισαγωγή της στοχαστικότητας της αντοχής για τον προσδιορισμό του επιπέδου αξιοπιστίας. Σε κατασκευές από σύνθετα υλικά, η αυξημένη διασπορά και των ελαστικών ιδιοτήτων καθιστά επιτακτική τουλάχιστον την έρευνα για το αν θα πρέπει να συμπεριλαμβάνονται ως στοχαστικές αυτές οι μεταβλητές σε τέτοια προβλήματα. Σημειώνεται δε, ότι για την ανάλυση κατασκευών από σύνθετα υλικά χρειάζεται ο πειραματικός προσδιορισμός των ιδιοτήτων αντοχής, ελαστικότητας και των συντελεστών θερμικής διαστολής στις διάφορες διευθύνσεις συμμετρίας του υλικού. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι η ανάλυση στην εργασία αυτή πραγματοποιείται για το διδιάστατο πρόβλημα, δηλαδή αμελούνται η εγκάρσια ορθή και οι εγκάρσιες διατμητικές παραμορφώσεις. Υπό αυτή την παραδοχή, για πλαστικά υλικά ενισχυμένα με ίνες προσανατολισμένες σε μία διεύθυνση μόνο οι βασικές ιδιότητες αντοχής που πρέπει να προσδιοριστούν είναι αυτές σε εφελκυσμό και θλίψη κατά την διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτήν, καθώς επίσης και η κατανομή της αντοχής σε διάτμηση στο κυρίως επίπεδο. Αντίστοιχα για τις ελαστικές ιδιότητες πρέπει να προσδιοριστούν τα μέτρα ελαστικότητας στην διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτή, ο λόγος Poisson και το μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης. Τέλος για τον ολοκληρωμένο, από άποψη θερμομηχανικών ιδιοτήτων, χαρακτηρισμό της στρώσης χρειάζεται η γνώση των συντελεστών θερμικής διαστολής στην διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτή.

Στην γνώση της συγγραφώς δεν υπάρχει εργασία που να περιγράφει στατιστικά πειραματικά αποτελέσματα όλων των μηχανικών και θερμομηχανικών ιδιοτήτων ορθότροπης στρώσης συνθέτου υλικού. Συγκεκριμένα, σε εργασίες που θεωρείται σημαντική η στοχαστικότητα των ελαστικών ιδιοτήτων δεν γίνεται ανάλυση αντοχής, εφόσον εξετάζεται η συμπεριφορά σε λυγισμό ή οι ιδιοσυχνότητες της κατασκευής, όπου πράγματι, οι ελαστικές ιδιότητες είναι οι βασικές μεταβλητές που «ελέγχουν» την απόκριση της κατασκευής. Υπάρχουν επίσης αρκετές εργασίες στις οποίες λαμβάνονται υπόψη οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού π.χ. [1.2], [1.17] χωρίς όμως την υποστήριξη πειραματικών αποτελεσμάτων. Στα πλαίσια του ερευνητικού έργου OPTIMAT BLADES [1.66] έχει αναπτυχθεί μία πολύ μεγάλη βάση δεδομένων για σύνθετο υλικό που χρησιμοποιείται σε πτερύγια ανεμογεννητριών, παρόλα αυτά δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία για την διασπορά των ιδιοτήτων του υλικού.

Επίσης, στην γνώση της συγγραφέως δεν υπάρχει εργασία για πειραματική εκτίμηση της διασποράς των συντελεστών θερμικής διαστολής στρώσεων πολυστρώτων πλακών. Σε πρόσφατο ερευνητικό πρόγραμμα, στο οποίο διερευνούταν η πρόβλεψη της συμπεριφοράς της κατασκευής κατά την διάρκεια λειτουργίας της, βρέθηκε ότι η μεταβλητότητα της απόκρισης της κατασκευής εξαρτάται σημαντικά όχι μόνο από τις ελαστικές της ιδιότητες, αλλά και από τις τιμές των θερμομηχανικών παραμέτρων [1.68]-[1.69]. Εκτός από αυτή την πειραματική έρευνα η ανάγκη να ληφθεί υπόψη η μεταβλητότητα πολλών ιδιοτήτων που σχετίζονται με την συμπεριφορά κατασκευών εκ συνθέτων υλικών έχει προταθεί νωρίτερα στα [1.2]-[1.17].

Έτσι, με σκοπό την ολοκληρωμένη μελέτη της στοχαστικότητας των μηχανικών και θερμομηχανικών ιδιοτήτων της στρώσης, αντοχή, ελαστικότητα, συντελεστές θερμικής διαστολής, οι οποίες αποτελούν μεταβλητές του προβλήματος σχεδιασμού κατασκευών από σύνθετα υλικά, και επειδή στην βιβλιογραφία δεν υπάρχουν ολοκληρωμένες αναφορές για την στοχαστικότητα όλων των ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν θερμομηχανικά μία στρώση, εκτελέστηκε σειρά πειραμάτων για την εκτίμηση της διασποράς των ιδιοτήτων αντοχής, ελαστικότητας και συντελεστών θερμικής διαστολής. Η δημιουργία αυτής της βάσεων δεδομένων στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για την εισαγωγή των θερμικών ιδιοτήτων σε μία πρόβλεψη της συμπεριφοράς της κατασκευής υπό θερμομηχανικά φορτία εν γένει σε όρους αξιοπιστίας.

Ταυτόχρονα, για την επίτευξη των στόχων που τέθηκαν στην εργασία αυτή, διερευνήθηκαν πρακτικές μέθοδοι προσδιορισμού αξιοπιστίας ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων τους και την ευκολία εφαρμογής τους σε συνάρτηση με το υπολογιστικό κόστος. Η διερεύνηση γίνεται σταδιακά, εφόσον το πρόβλημα εξετάζεται μακρομηχανικά, αναπτύσσοντας τις μεθόδους προσδιορισμού της αξιοπιστίας για εφαρμογές στην απλή περίπτωση της στρώσης, γενικεύοντας για την γενική πολύστρωτη πλάκα και φθάνοντας τελικά μέχρι την κατασκευή.

Εφόσον ο στόχος τέτοιου είδους μελετών όπως η παρούσα, π.χ. [1.70], είναι να προετοιμάσει το έδαφος για τον εύκολο προσδιορισμό επιτρεπόμενων αντοχών για τον σχεδιασμό κατασκευών εκ συνθέτων υλικών, εισάγεται και μία απλή ημι-προσδιοριστέα μέθοδος για την αξιοπιστία αντοχής. Σε αυτή την μέθοδο γίνεται χρήση διακεκριμένων τιμών των βασικών αντοχών ενός δοθέντος επιπέδου αξιοπιστίας και η συνάρτηση αστοχίας χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη του τύπου αστοχίας, ο οποίος συγκρίνεται με τον πιθανολογικό στο ίδιο επίπεδο αξιοπιστίας όπως και οι βασικές αντοχές του πρώτου.

Από την άλλη πλευρά, εξαιτίας της φύσης των συνθέτων υλικών εισάγουμε σταδιακά ομάδες βασικών μεταβλητών του προβλήματος, αυξάνοντας κατ' αυτό τον τρόπο την ακρίβεια του στοχαστικού μοντέλου. Παράλληλα, γίνεται και διερεύνηση για το ποιες μεταβλητές επηρεάζουν σημαντικά την λύση του προβλήματος, υποδεικνύοντας κατά πόσο είναι αναγκαίο να συμπεριλαμβάνονται ως στοχαστικές μεταβλητές.

Για την πρόβλεψη της κατανομής αντοχής του συνθέτου υλικού υπό πολυαξονική, multiaxial, φόρτιση, βασιζόμενοι στις μεμονωμένες κατανομές των ιδιοτήτων του υλικού και χρησιμοποιώντας μία κατάλληλη συνάρτηση αστοχίας, μπορούν να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές και αναλυτικές μέθοδοι.

Στην πρώτη περίπτωση, έχει χρησιμοποιηθεί η αριθμητική προσομοίωση με την τεχνική Monte Carlo, για την πρόβλεψη off-axis αντοχής σε δοκίμια από εποξειδική ρητίνη ενισχυμένα με ίνες γυαλιού, GI/Ep, σε εφελκυσμό [1.71], ενώ ο αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος της κοινής πιθανότητας, δοθέντων των βασικών κατανομών αντοχής και μία κατάλληλη συνάρτηση αστοχίας, ήταν μέρος μίας πιο γενικής ανάλυσης αξιοπιστίας της τελικής αστοχίας πολυστρώτων πλακών [1.72].

Μία αναλυτική προσέγγιση, η οποία περιέχει μία τεχνική συναρτησιακού αναπτύγματος, παρουσιάστηκε στο [1.73] για την πρόβλεψη της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής πιθανότητας της αστοχίας κάτω από μονοαξονική φόρτιση σε off-axis δοκίμια από σύνθετο

υλικό. Η παραπάνω μέθοδος, που βασίζεται στο ανάπτυγμα Gram-Charlier ή αλλιώς Edgeworth [1.74], χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της αθροιστική κατανομής πιθανότητας πεπλεγμένων συναρτήσεων σε όρους των μεμονωμένων ροπών των συνιστωσών. Στο [1.73] ως συνάρτηση αστοχίας χρησιμοποιήθηκε το κριτήριο Hill.

Η μέθοδος συναρτησιακού αναπτύγματος Edgeworth χρησιμοποιείται και σε αυτή την εργασία, αυτή την φορά όμως σε συνάρτηση με το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας και αναπτύσσεται επιπλέον για την πρόβλεψη ολόκληρου του τόπου αστοχίας μίας πολύστρωτης με ίνες προσανατολισμένες σε περισσότερες των μία διευθύνσεις σε συνθήκες γενικής επίπεδης εντατικής κατάστασης.

Από την άλλη πλευρά, ως προς τις μεθόδους για την εκτίμηση του επιπέδου αξιοπιστίας, είναι η πρώτη φορά που γίνεται προσπάθεια προσέγγισης της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας απευθείας του κριτηρίου αστοχίας, με εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής (οικογένεια Pearson) ή και με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth. Συγκεκριμένα, η οικογένεια κατανομών Pearson δεν έχει χρησιμοποιηθεί ποτέ σε προβλήματα μηχανικής για την εκτίμηση της απόκρισης μίας κατασκευής, ενώ η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth χρησιμοποιήθηκε [1.73] για την επίλυση του προβλήματος θεωρώντας την περίπτωση στρώσης υπό μονοαξονική φόρτιση και λαμβάνοντας υπόψη μόνο την στοχαστικότητα των ιδιοτήτων αντοχής.

Επίσης παρουσιάζεται η πρακτική ντετερμινιστική μέθοδος βασικών μεταβλητών στην περίπτωση που θεωρούνται στοχαστικές μόνο οι ιδιότητες αντοχής. Ουσιαστικά η εργασία αυτή εισαγάγει ένα νέο τρόπο σκέψης στην αντιμετώπιση του προβλήματος προσδιορισμού επιπέδου αξιοπιστίας, δίνοντας έμφαση στην πρακτικότητα και οικονομία της λύσης, ώστε να καταστεί εύκολα εφαρμόσιμη για πραγματικά προβλήματα σχεδιασμού κατασκευών. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ακρίβεια της μεθόδου είναι συγκρίσιμη με αυτή ακριβών υπολογιστικά λύσεων.

Ως προς την επιλογή της κατασκευής που χρησιμοποιείται ως εφαρμογή των μεθόδων που αναπτύχθηκαν στην εργασία, για την αξιολόγησή τους ως σχεδιαστικά εργαλεία δηλαδή του πτερυγίου ανεμογεννήτριας, πρέπει να αναφερθεί ότι είναι η πρώτη φορά που συμπεριλαμβάνεται στον σχεδιασμό τέτοιας κατασκευής η στοχαστικότητα των ελαστικών και κυρίως των θερμικών ιδιοτήτων. Προηγούμενη εργασία για την εύρεση της αξιοπιστίας της κατασκευής υπό κοπωτικά φορτία, αλλά και στατική φόρτιση, συμπεριλάμβανε ανάλυση μόνο στην ρίζα του πτερυγίου, η οποία έχει συμμετρική γεωμετρία και είναι μονοκυψελική διατομή [1.5], [1.6]. Επιπρόσθετα στις εργασίες που έχουν παρουσιαστεί μέχρι τώρα, [1.5], [1.6], λαμβάνεται υπόψη μόνο η επίδραση της καμπτικής ροπής στην ρίζα του πτερυγίου, θεωρώντας στοχαστική την αντοχή του υλικού παράλληλα στην διεύθυνση του πτερυγίου, ενώ αμελούνται οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται στην διατομή και η επίδραση αυτών στην αξιοπιστία της κατασκευής. Επίσης η εφαρμογή γίνεται για πρώτη φορά σε πολυκυψελική διατομή πτερυγίου ανεμογεννήτριας υπό στατική φόρτιση. Εργασία σε πολυκυψελικές διατομές συνθέτων υλικών έχει παρουσιαστεί στο [1.2], όπου αναλύεται στοχαστικά η κατασκευή πτερυγίου αεροσκάφους, λαμβάνοντας υπόψη και την μεταβλητότητα των ελαστικών ιδιοτήτων (μεταξύ άλλων). Σε αυτή την εργασία όμως το ενδιαφέρον επικεντρωνόταν στην πρόβλεψη της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας του βέλους κάμψης του ελεύθερου άκρου του πτερυγίου, καθώς επίσης και της αντίστοιχης πιθανότητας της αξονικής (κατά το μήκος του πτερυγίου) τάσης που αναπτύσσεται στην ρίζα του πτερυγίου. Έτσι είναι η πρώτη φορά που στην εκτίμηση της αξιοπιστίας του πτερυγίου λαμβάνεται υπόψη εκτός από την επίδραση των καμπτικών ροπών και η επίδραση των διατμητικών και αξονικών δυνάμεων που αναπτύσσονται σε οποιαδήποτε διατομή του πτερυγίου. Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι στις εργασίες που αφορούν την ανάλυση πτερυγίων Α/Γ για την πιθανολογική ανάλυση (εφαρμογή της μεθόδου πιθανοτήτων) στην μεν πρώτη, [1.5], χρησιμοποιήθηκε το εμπορικό πρόγραμμα PROBANS Version 2 [1.14], ενώ στην άλλη [1.6] η εφαρμογή αναπτύχθηκε γύρω από το εμπορικό πρόγραμμα, RELIAB01, της CSRconsult. Επίσης, η εφαρμογή που παρουσιάστηκε για πτερύγιο αεροσκάφους βασίζεται στην χρήση του προγράμματος IPACS, NASA, το οποίο είναι σύνθεση των

NESSUS [1.15], [1.16] και PICAN. Τέλος ο υπολογιστικός κώδικας FAROW [1.13], με τον οποίο δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού της αξιοπιστίας κατασκευαστικών τμημάτων μίας ανεμογεννήτριας, υπό κοπωτική φόρτιση χωρίς να γίνεται συγκεκριμένη αναφορά και εφαρμογή για τμήματα συνθέτων υλικών, όπως τα πτερύγια, βασίζεται στο STRUREL της RCP GmbH [1.12].

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι στην παρούσα εργασία ο έλεγχος της εξεταζόμενης κατασκευής γίνεται θεωρώντας στατική φόρτιση και ιδιότητες μη μεταβαλλόμενες στον χρόνο, ενώ ως αστοχία ορίζεται η κατάσταση κατά την οποία η κατασκευή δεν μπορεί να φέρει φορτία, ουσιαστικά όταν τα εξωτερικά φορτία ξεπεράσουν την αντοχή της κατασκευής.

1.7 Διάρθρωση της εργασίας

Η διάρθρωση της εργασίας γίνεται ξεκινώντας από την περιγραφή του πειραματικού προσδιορισμού των θερμομηχανικών ιδιοτήτων των συνθέτων υλικών, όπου θέτονται οι βάσεις γύρω από τα υλικά που εξετάζονται και γίνεται η περιγραφή των μεταβλητών που εισέρχονται στο πρόβλημα του προσδιορισμού επιπέδου αξιοπιστίας των κατασκευών από σύνθετα υλικά. Ουσιαστικά παρουσιάζονται αναλυτικά οι μεθοδολογίες που ακολουθούνται για τον προσδιορισμό των μηχανικών και θερμικών ιδιοτήτων των υλικών καθώς επίσης και τα αποτελέσματα των πειραμάτων που εκτελέστηκαν για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων δύο υλικών, το πρώτο ινών άνθρακα σε εποξειδική ρητίνη και το δεύτερο ινών γυαλιού σε πολυεστερική ρητίνη, και για τον προσδιορισμό των θερμικών ιδιοτήτων του δεύτερου υλικού.

Κεφάλαιο 3:

Τα εργαλεία της στατιστικής ανάλυσης που χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων και την στατιστική μοντελοποίηση των ιδιοτήτων των υλικών, η οποία είναι απαραίτητη για την εισαγωγή των στοχαστικών ιδιοτήτων στο πρόβλημα προσδιορισμού της αξιοπιστίας της κατασκευής, παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης που εκτελέστηκε στα πειραματικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό γίνεται εισαγωγή στην χρήση εμπειρικών στατιστικών κατανομών για την στατιστική μοντελοποίηση των ιδιοτήτων των υλικών, οι οποίες χρησιμοποιούνται στο επόμενο κεφάλαιο για την μοντελοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και στην συνέχεια για την στατιστική μοντελοποίηση της συνάρτησης αστοχίας της στρώσης συνθέτου υλικού.

Κεφάλαιο 4:

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται η περιγραφή της στατιστικής μοντελοποίησης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, όπως είναι οι περισσότερες, αν όχι όλες οι συναρτήσεις που διέπουν το πρόβλημα της δομικής ανάλυσης κατασκευών από σύνθετα υλικά. Ξεκινώντας από την μοντελοποίηση του φαινομένου συντελεστή θερμικής διαστολής πολύστρωτης πλάκας παρουσιάζεται η μεθοδολογία για τον προσδιορισμό στατιστικών χαρακτηριστικών της συνάρτησης πολλών μεταβλητών βάσει των χαρακτηριστικών των παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται η ζητούμενη μεταβλητή. Στην συνέχεια περιγράφεται η μεθοδολογία για τον προσδιορισμό της κοινής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της συνάρτησης πολλών μεταβλητών, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον στην εκτίμηση της κοινής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας της στρώσης συνθέτου υλικού. Η συνάρτηση αστοχίας της στρώσης συνθέτου υλικού και η στατιστική της μοντελοποίηση αποτελεί την βάση για τον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας της κατασκευής από σύνθετα υλικά και κατά συνέπεια του προσδιορισμού της αξιοπιστίας της κατασκευής.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Κεφάλαιο 5:

Στο Κεφάλαιο 5 περιγράφονται οι διάφορες μέθοδοι προσέγγισης της αξιοπιστίας δομικού σχεδιασμού, ενώ το ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε αυτές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό του επιπέδου αξιοπιστίας κατασκευών από σύνθετα υλικά υπό στατική φόρτιση. Η αξιολόγηση των διαφόρων μεθόδων γίνεται με εφαρμογή των μεθόδων στο επίπεδο της στρώσης για μονοαξονική εντατική κατάσταση και γενικεύεται για την περίπτωση στρώσης υπό γενική επίπεδη εντατική κατάσταση.

Κεφάλαιο 6:

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζεται η μεθοδολογία ανάλυσης κατασκευών από σύνθετα υλικά όταν λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων του υλικού. Παρουσιάζονται εφαρμογές για την ανάλυση σε στατιστικούς όρους της αντοχής πολυστρώτων πλακών, οι οποίες θεωρούνται τα βασικά δομικά στοιχεία των κατασκευών από σύνθετα υλικά, υπό γενική επίπεδη εντατική κατάσταση.

Κεφάλαιο 7:

Στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο της εργασίας αυτής για τον προσδιορισμό αξιοπιστίας κατασκευής από σύνθετα υλικά. Οι μέθοδοι εφαρμόζονται σε πτερύγιο ανεμογεννήτριας και εξάγονται συμπεράσματα ως προς την καταλληλότητα για την χρήση τους κατά την διάρκεια σχεδιασμού μίας τέτοιας κατασκευής.

Κεφάλαιο 8:

Τέλος στο όγδοο κεφάλαιο γίνεται μία κριτική της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε και των αποτελεσμάτων της εργασίας αυτής ως προς την υπάρχουσα γνώση στην θεματική περιοχή προσδιορισμού της αξιοπιστίας κατασκευών από σύνθετα υλικά. Γίνεται δηλαδή μία αποτίμηση της εργασίας ως προς την επίτευξη των στόχων που τέθηκαν, ξεχωρίζοντας τα σημεία στα οποία δόθηκαν απαντήσεις στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας και στα σημεία τα οποία εξακολουθούν να χρήζουν περαιτέρω έρευνας.

1.8 Βιβλιογραφία

- [1.1] I. Elishakoff, Interrelation between safety factors and reliability, NASA/CR-2001-211309, 2001
- [1.2] C. C. Chamis, M. C. Shiao, Probabilistic Assessment of Composite Structures, NASA TM-106024, 1993
- [1.3] P. M. Gary, M. G. Riskalla, Development of Probabilistic Design Methodology of Composite Structures, DOT/FAA/AR-95/17, 1997
- [1.4] N.-Z. Chen, H.-H. Sun, C. Guedes Soares, Reliability analysis of a ship hull in composite material, Composite Structures, Vol. 62, pp.59-66, 2003
- [1.5] K. O. Ronold, G. C. Larsen, Reliability-based design of wind-turbine rotor blades against failure in ultimate loading, Engineering Structures, Vol. 22, pp. 565-574, 2000
- [1.6] H. Braam, C. J. Christensen, K. O. Ronold, M.L. Thogersen, PRODETO, a computer code for probabilistic fatigue design, in “Wind Energy for the Next Millenium”, Proc. of EWEC 1999, Nice, France, 1-5 March 1999, eds. E. L. Petersen, P. Hjulær Jenssen, K. Rave, P. Helm, H. Ehmann, publ. by James & James Science Publishers, London, 1999
- [1.7] C. J. Christensen, E. Joergensen, K. O. Ronold, J. Wedel-Heinen, B. van den Horn, L. Rademakers, European Wind Turbine Standards, Part 2: Calibration of Safety Factors, Final Report JOU2-CT93-0387, EUR 16898 EN, 1996
- [1.8] A. H.- S. Ang, W. H. Tang, Probability concepts in engineering planning and design, Vol.II, 1984

- [1.9] H. O. Madsen, S. Krenk, N. C. Lind, *Methods of structural safety*, 1986
- [1.10] *Structural Safety*, Vol. 28, Issues 1-2, January – April 2006
- [1.11] M. F. Pellissetti, G. I. Schueller, “On general purpose software in structural reliability – An overview, *Structural Safety*, Vol 28, Issues 1-2, January – April 2006, pp.3-16
- [1.12] S. Gollwitzer, B. Kirchgaessner, R. Fischer, R. Rackwitz, PERMAS-RA/STRUREL system of programs for probabilistic reliability analysis *Structural Safety*, Vol. 28, Issues 1-2, Jan. – Apr. 2006, pp.108-129
- [1.13] S. R. Winterstein, P. S. Veers, *Theory manual of FAROW Version 1.1: A numerical analysis of the fatigue and reliability of wind turbine components*, SAND94-2459, 2000
- [1.14] L. Tvedt, Proban – probabilistic analysis, *Structural Safety*, Vol. 28, Issue 1-2, Jan. – Apr. 2006, pp. 150-163
- [1.15] B. H. Thacker, D. S. Riha, S. H. K. Fitch, L. J. Huyse, J. B. Pleming, Probabilistic engineering analysis using the NESSUS software, *Structural Safety*, Vol. 28, Issue 1-2, Jan. – Apr. 2006, pp. 83-107
- [1.16] D. S. Riha, B. H. Thacker, M. P. Enright, L. Huyse, Recent advances of the NESSUS® Probabilistic analysis software for Engineering Applications, 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials conference and Exhibit; Non-Deterministic Approaches Forum, AIAA 2002-1268, 2002
- [1.17] M. C. Shiao, C. C. Chamis, Probabilistic evaluation of fuselage-type composite structures, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.14, pp.179-187, 1999
- [1.18] S. Reh, J.-D. Beley, S. Mukherjee, E. H. Khor, Probabilistic finite element analysis using ANSYS, *structural safety*, Vol. 28, Issue 1-2, Jan.-Apr. 2006, pp.17-43
- [1.19] S. K. Sachdeva, P. B. Nair, A. J. Keane, On using the deterministic FEA software to solve problems in stochastic structural mechanics, *Computers and Structures*, Vol.85, pp.277-290, 2007
- [1.20] C. D. Eamon, M. Thompson, Z. Liu, Evaluation of accuracy and efficiency of some simulation and sampling methods in structural reliability analysis, *Structural Safety*, Vol. 27(4), pp. 356-392, 2005
- [1.21] G. I. Schueller, H. J. Pradlwarter, P. S. Koutsourelakis, A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimensions, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, pp. 463-474, 2004
- [1.22] A. Der Kiureghian, T. Dakessian, Multiple design points in first and second-order reliability, *Structural Safety*, Vol. 20(1), pp. 37-49, 1998
- [1.23] P. Broensted, H. Lilholt, A. Lystrup, Composite materials for wind power turbine blades, *Ann. Rev. Mater. Res.*, 2005, 35: 505-538
- [1.24] M. Megnis, P. Broendsted, Measurements of an in-plane shear properties of GEV206 at ambient room conditions using V-notched beam test specimen, OPTIMAT BLADES report, OB_TG3_R009, Rev.000, 2003
- [1.25] MIL-HDBK-17-1F, *Composite materials handbook; Volume 1: Polymer Matrix Composites – Guidelines for characterization of structural materials*, Department of Defense Handbook, USA, 2002
- [1.26] J. S. Tomblin, Y.C. Ng and K.Suresh Raju, Material qualification and equivalency for polymer matrix composite material systems, DOT/FAA/AR-00/47, 2001
- [1.27] DNV-OS-C501, *Offshore Standard; Composite Components*, Det Norske Veritas, January 2003

- [1.28] VDI 2014, Design and construction of Fibre Reinforced Plastic components; Blatt 1 Basics, 1989 (Στα Γερμανικά)
- [1.29] F. Paris, A study of failure criteria of fibrous composite materials, NASA Technical Report, NASA/CR-2001-210661, 2001
- [1.30] Special Issue of Composites Science and Technology, 2002; 62:12-3
- [1.31] P. D. Soden, A. S. Kaddour, M. J. Hinton, Recommendations for designers and researches resulting from the world-wide failure exercise, Composites Science and Technology, 2004; 64:589-604
- [1.32] P. K. Gotsis, C. C. Chamis, L. Minnetyan, Prediction of composite laminate failure: micromechanics and progressive fracture, Composites Science and Technology, 1998; 58:1137-1150
- [1.33] S. J. Mayes, A. C. Hansen, Composite laminate failure analysis using multicontinuum theory, Composites Science and Technology, 2004; 64: 379-394
- [1.34] Z. M. Huang, A bridging model prediction of the tensile strength of composite laminates subject to biaxial loads, Composites Science and Technology, 2004; 64: 395-448
- [1.35] L. J. Hart-Smith, Predictions of a generalized maximum-shear-stress failure criterion for certain fibrous composite laminates, Composites Science and Technology, 1998; 58: 1179-1208
- [1.36] A. Puck, H. Schuermann, Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models, Composites Science and Technology, 1998; 58: 1045-1068
- [1.37] A. Puck, H. Schuermann, Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models – Part B, Composites Science and Technology, 2002; 62: 1633-1662
- [1.38] A. Rotem, Prediction of laminate failure with Rotem failure criterion, Composites Science and Technology, 1998; 58: 1083-1094
- [1.39] A. Rotem, The Rotem failure criterion theory and practice, Composites Science and Technology, 2002; 62: 1663-1671
- [1.40] K.-S. Liu, S. W. Tsai, A progressive quadratic failure criterion of a laminate, Composites Science and Technology, 1998; 58: 1023-1032
- [1.41] A. Kuraishi, S. W. Tsai, K. K. S. Liu, A progressive quadratic failure criterion, Part B, Composites Science and Technology, 2002; 62: 1683-1695
- [1.42] P. Zinoviev, S. V. Grigoriev, O. V. Labedeva, L. R. Tairova, Strength of multilayered composites under plane stress state, Composites Science and Technology, 1998; 58: 1029-1224
- [1.43] P. A. Zinoviev, O. V. Lebedeva, L. P. Tairova, Coupled analysis of experimental and theoretical results on the deformation and failure of laminated composites under plane state of stress, Composites Science and Technology, 2002; 62: 1711-1723
- [1.44] T. A. Bogetti, C. P. R. Hoppel, V. M. Harik, J. F. Newill, B. P. Burns, Predicting the nonlinear response and progressive failure of composite laminates, Composites Science and Technology, 2004; 64: 329-342
- [1.45] T. A. Bogetti, C. P. R. Hoppel, V. M. Harik, J. F. Newill, B. P. Burns, Predicting the nonlinear response and failure of composite laminates: correlation with experimental results, Composites Science and Technology, 2004; 64: 477-485

- [1.46] R. G. Cuntze, A. Freund, The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates, *Composites Science and Technology*, 2004; 64: 343-377
- [1.47] R. G. Cuntze, The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates: Part B, *Composites Science and Technology*, 2004; 64: 487-516
- [1.48] D. C. Charnpis, G. I. Schueller, M. F. Pelissetti, The need for linking micromechanics of materials with stochastic finite elements: A challenge for materials science, *Computational Materials Science*, Vol.41, pp.27-37, 2007
- [1.49] A. Nowak, K. Collins, *Reliability of Structures*, McGraw-Hill, New York, 2000
- [1.50] E. Vanmarcke, *Random Fields: Analysis and Synthesis*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1983; Web Edition by Rare Book Services, Princeton University, Princeton NJ, 1998
- [1.51] M. Kaminski, M. Kleiber, Perturbation based stochastic finite element method for homogenization of two-phase elastic composites, *Computers and Structures*, Vol. 78, pp. 811-826, 2000
- [1.52] L.L. Graham, K. Gurley, F. Masters, Non-Gaussian simulation of local material properties based on a moving-window technique, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 18, pp.223-234, 2003
- [1.53] P. M. Gary, M. G. Riskalla, *Development of Probabilistic Design Methodology of Composite Structures*, DOT/FAA/AR-95/17, 1997
- [1.54] C.Guedes Soares, *Reliability of components in composite materials*, *Reliability Engineering and system safety*, Vol.55, (1997), pp.171-177
- [1.55] B. Boulder, J. van Dam, D. van Delft, M. W. Jenssen, E. R. Joergensen, V. Kolovos, S. Larwood, W. Musial, A. Verheul, P. Vionis, T. F. Pedersen, *European wind turbine testing procedures development, Task 2: Blade Testing Methods*, SMT4-CT96-2116, Final Report, Ed. B. H. Boulder, J. J. Van Dam, 2000
- [1.56] D. J. Lekou, P. Vionis, P. A. Joosse, D. R. V. van Delft, D. Kourousis, N. Anastassopoulos, M. J. Blanch, A. G. Dutton, A. Proust, *Full-scale blade testing enhanced by acoustic emission monitoring*, *European Wind Energy Conference, EWEC 2003*, Madrid
- [1.57] P. Vionis, D. J. Lekou, *Adaptation of Existing Wind Turbines for Operation on High Wind Speed Complex Terrain Sites; kWh Cost Reduction (ADAPTURB)*, Final publishable report, Contract JOR3-CT98-0251, CRES report, 2003
- [1.58] P. Vionis, *Development of a MW Scale Wind Turbine for High Wind Complex Terrain Sites; MEGAWIND*, Final Technical Report, ENK5-CT2000-00328, 2005
- [1.59] P. Chaviaropoulos, E. Politis, D. J. Lekou, M. Hansen, N. Sorensen, B. Bulder, D. Winkelaar, D. Saravanos, T. P. Philippidis, C. Galiotis, I. Parthenios, T. Kossivas, *Wind Turbine Rotor Blades for Enhanced Aeroelastic Stability and Fatigue Life Using Passively Damped Composites; DAMPBLADE*, Final Technical Report, ENK6-CT2000-00320, CRES Report, Ed. by P. Chaviaropoulos, 2005
- [1.60] H. Braam, J. J. Heijdra, D. R. V. van Delft, H. van Leeuwen, E. R. Joergensen, D. J. Lekou, P. S. Vionis, *Probability distribution of fatigue strength of rotor blades (PROFAR): publishable final report; EU joule III project JOR3-CT98-0266, ECN-C--01-116*; November, 2001
- [1.61] H. Braam, J. J. D. van Dam, C. J. Christensen, M. L. Thoergensen, G. C. Larsen, K. O. Ronold, *Methods for probabilistic design of wind turbines*, *Risoe Report, RISOE-R-1082(EN)*, 1998

- [1.62] H. Braam, K.O. Ronold, C. J. Christensen, PRODETO – Computer Program; Theory and Program Structure, ECN Report, ECN-C--97-093, 1998
- [1.63] L. Rademakers, R. Hunter, European Wind Turbine Standards; Project Results, Final Report of JOU2-CT93-0387, 1996, EUR 16898EN
- [1.64] European Wind Turbine Standards II, Final Report, JOR3-CT95-0064, 1998
- [1.65] N. J. Tarp-Johansen, P. H. Madsen, S. Frandsen, Partial Safety Factors for Extreme Load Effects, Risoe Report, RISOE-R-1319(EN), 2002
- [1.66] L.G.J. Janssen, A.M. van Wingerde, Ch. W. Kensche, T. P. Philippidis, P. Broendsted, A.G. Dutton, R.P.L. Nijssen, O. Krause, Reliable Optimal Use of Materials for Wind Turbine Rotor Blades; OPTIMAT BLADES, Final Technical Report, ENK6-CT-2001-00552, ECN Report, ECN-C--06-023, OPTIMAT BLADES Report, OB_PC_R017 rev. 001, 2006, http://www.wmc.eu/public_docs/index.htm
- [1.67] D. Veldkamp, Chances in Wind Energy; A probabilistic approach to wind turbine fatigue design, διδακτορική διατριβή Delft University Wind Energy Research Institute, 2006
- [1.68] Papadopoulos K, Morfiadakis E. Laboratory test for blade load measurements: European wind turbine testing procedure developments, Task 3: Wind turbine load measurement instrumentation, SMT4-CT96-2116 Project, CRES Report, 1998
- [1.69] Morfiadakis E, Papadopoulos KH, Philippidis TP, Lekou DJ. Assessment of the strain gage technique for measurement of wind turbine blade loads. In: Proceedings of European Wind Energy Conference & Exhibition, Nice, 1999
- [1.70] B. H. Jones, Probabilistic design and reliability, *Composite Materials, Vol.8, Structural Design and Analysis*, Part II, C.C. Chamis, ed, (Academic Press, N. York, 1975) 37-72
- [1.71] C. T. Sun, S. E. Yamada, Strength distribution of a unidirectional fiber composite, *J. Comp. Mat.* 12, 169-176 (1978).
- [1.72] V. J. Papazoglou, J. V. Sanoudos, Introducing structural reliability concepts into laminate analysis, *Advanced Composites in Emerging Technologies*, S. A. Paipetis and T. P. Philippidis, eds, (1991) 559-573.
- [1.73] R. C. Wetherhold, Reliability calculations for strength of a fibrous composite under multiaxial loading, *J. Comp. Mat.* 15, 240-248 (1981).
- [1.74] H. Cramer, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1971.

2 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Στον σχεδιασμό κατασκευών από σύνθετα υλικά υπεισέρχεται ένας μεγάλος αριθμός παραμέτρων στο πρόβλημα, εξαιτίας της φύσης τους, όπως οι φυσικές, μηχανικές και γεωμετρικές ιδιότητες των υλικών. Στην ιδανική περίπτωση, το μοντέλο σχεδιασμού της κατασκευής θα επιτρέπει στον σχεδιαστή να προβλέψει την συμπεριφορά της κατασκευής πλήρους κλίμακας, άμεσα, χρησιμοποιώντας μία βάση δεδομένων ιδιοτήτων υλικού στρώσης. Στην πραγματικότητα, στις περισσότερες περιπτώσεις απαιτείται επιβεβαίωση της ανάλυσης με πειραματικές δοκιμές σε όλα τα επίπεδα - στοιχείο, υποσύστημα, σύστημα – εξαιτίας όχι μόνο της έλλειψης ακριβών ή έστω προσεγγιστικών λύσεων ανάλυσης τάσεων κατασκευαστικών λεπτομερειών, όπως για παράδειγμα των περιοχών σύνδεσης δύο τμημάτων από σύνθετα υλικά, αλλά και της άγνωστης επίδρασης κλίμακας από το επίπεδο της στρώσης στην κατασκευή. Εκτός αυτών, εξαιτίας της φύσης των συνθέτων υλικών οι ιδιότητες τους εξαρτώνται όχι μόνο από τις βασικές συνιστώσες του υλικού, ίνα – μήτρα, αλλά και από την μέθοδο κατασκευής τους. Έτσι η βάση δεδομένων θερμομηχανικών ιδιοτήτων που πρέπει να έχει ένας σχεδιαστής στην διάθεσή του, θα πρέπει να ανανεώνεται, ώστε να περιλαμβάνει όχι μόνο το συγκεκριμένο σύστημα ίνας – μήτρας, αλλά και την μέθοδο κατασκευής, όπως υγρή επίστρωση (wet lay-up), προεμβαπτισμένων στρώσεων (prepregs), περιέλιξη ινών (filament winding), κλπ.

Λέγοντας θερμομηχανικές ιδιότητες της στρώσης εννοούμε τις ιδιότητες ελαστικότητας και αντοχής, καθώς και τον τανυστή θερμικής διαστολής του μέσου. Ο τελευταίος είναι ιδιαίτερα απαραίτητος όταν πρόκειται για κατασκευές που λειτουργούν σε εξωτερικό περιβάλλον, καθώς η απόκριση των συνθέτων υλικών μεταβάλλεται επηρεαζόμενη από την θερμοκρασία. Επίσης από τον τανυστή θερμικής διαστολής εξαρτώνται οι εναπομένουσες τάσεις στην πολυστρωτη, η οποία υποβάλλεται σε αρκετά υψηλές θερμοκρασίες κατά την διαδικασία σκλήρυνσης της μήτρας.

Ο πειραματικός προσδιορισμός των ιδιοτήτων του υλικού δεν είναι ένα τετριμμένο πρόβλημα. Αυτό διαφαίνεται αφ' ενός από την έλλειψη κανονισμών για τον προσδιορισμό ορισμένων ιδιοτήτων, όπως για παράδειγμα των ιδιοτήτων κατά το πάχος της πλάκας [2.1] και αφ' ετέρου από την συνεχή βελτίωση και ανανέωση των υπαρχόντων. Εκτός αυτού, η ανάλυση μίας κατασκευής σε όρους πιθανότητας αστοχίας προϋποθέτει την γνώση της στοχαστικής φύσης των ιδιοτήτων. Δεν αρκεί δηλαδή η γνώση της μέσης τους τιμής (ή μίας χαρακτηριστικής τιμής), όπως στην περίπτωση του ντετερμινιστικού σχεδιασμού. Όμως, ταυτόχρονα θα πρέπει να είναι δυνατόν να μπορούμε να ξεχωρίσουμε την διασπορά που παρουσιάζουν οι μετρούμενες ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας εξαιτίας αβεβαιότητας της πειραματικής διαδικασίας από την εγγενή διασπορά του συνθέτου υλικού (και των ιδιοτήτων του). Με αυτό τον στόχο, παρουσιάστηκε κατάλληλη μεθοδολογία στο [2.2] για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας μέτρησης των ιδιοτήτων συνθέτων υλικών.

Επειδή δεν ήταν διαθέσιμες βάσεις δεδομένων που να περιγράφουν στατιστικά όλες τις θερμομηχανικές ιδιότητες ενός συνθέτου υλικού, ήταν απαραίτητος ο πειραματικός τους προσδιορισμός, στα πλαίσια της εργασίας αυτής. Παράλληλα δόθηκε η δυνατότητα για μία εκτενή διερεύνηση της στοχαστικής φύσης τους, ξεκινώντας από τις βασικές παραμέτρους σχεδιασμού, με σκοπό την εύρεση της ομάδας ιδιοτήτων, η στοχαστικότητα των οποίων επηρεάζει σημαντικά την αξιοπιστία της κατασκευής. Παρόλο που υπάρχουν εργασίες, στις οποίες τονίζεται η ανάγκη να εισαχθεί η διασπορά όλων των ιδιοτήτων του υλικού σε ολοκληρωμένες μεθόδους προσδιορισμού αξιοπιστίας κατασκευών από σύνθετα υλικά [2.3], [2.4] αυτές στηρίζονται σε θεωρητικές τιμές διασποράς των υλικών. Επίσης, μέσω της βάσης που δημιουργήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, δίνεται η δυνατότητα μελλοντικής χρήσης των ίδιων υλικών σε πειράματα φόρτισης σε δύο ή περισσότερες διευθύνσεις για την επιβεβαίωση των μεθόδων προσδιορισμού της αξιοπιστίας που αναπτύχθηκαν.

Έτσι επιλέχθηκαν δύο υλικά, το πρώτο ινών άνθρακα σε εποξειδική ρητίνη (carbon/epoxy) και το δεύτερο ινών γυαλιού σε πολυεστερική μήτρα (glass/polyester). Για το πρώτο υλικό, carbon/epoxy, έγινε ο προσδιορισμός των μηχανικών του ιδιοτήτων, δηλαδή των μέτρων ελαστικότητας και διάτμησης και του λόγου Poisson, ενώ για το δεύτερο, glass/polyester, εκτός από τις μηχανικές ιδιότητες, προσδιορίστηκε και ο τανυστής συντελεστών θερμικής διαστολής.

Ασφαλώς, υπάρχουν αρκετές εργασίες στις οποίες περιγράφονται πειραματικά αποτελέσματα για τις μακροσκοπικές ιδιότητες της στρώσης. Αυτό που απουσιάζει, όμως, είναι μία ολοκληρωμένη μελέτη της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων. Σε προηγούμενη εργασία [2.5] εξετάστηκαν οι στατιστικές ιδιότητες της αντοχής σε εφελκυσμό τριών διαφορετικών συστημάτων υλικών, συγκεκριμένα των Kevlar 49/5209, T300/5208 and 181 GI/Ep συνθέτων υλικών με ίνες προσανατολισμένες σε μία διεύθυνση (unidirectional). Παρόμοια στο [2.6] μοντελοποιήθηκαν η αντοχή σε εφελκυσμό και διάτμηση στρώσης ενισχυμένης σε μία μόνο διεύθυνση ινών γυαλιού σε εποξειδική μήτρα, GI/Ep, ενώ θεωρήθηκε ότι οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού δεν παρουσιάζουν σημαντική διασπορά.

Σε ανεξάρτητη εργασία, έχει παρατηρηθεί ότι η διασπορά του μέτρου ελαστικότητας στην διεύθυνση των ινών στρώσης συνθέτου υλικού είναι αρκετά μεγάλη, λίγο μικρότερη από την αντίστοιχη αντοχή [2.7].

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται οι μέθοδοι σύμφωνα με τις οποίες εκτελέστηκαν τα πειράματα για τον προσδιορισμό των θερμομηχανικών ιδιοτήτων των συνθέτων υλικών. Για μεγαλύτερη σαφήνεια γίνεται διαχωρισμός μεταξύ του προσδιορισμού των μηχανικών ιδιοτήτων, δηλαδή της αντοχής και της ελαστικότητας του ορθοτρόπου υλικού και αυτού των θερμικών ιδιοτήτων, δηλαδή του τανυστή συντελεστών θερμικής διαστολής. Για κάθε τύπο πειραμάτων γίνεται επίσης αναφορά στους κανονισμούς ή στις διαφορές μεθόδους που υπάρχουν για τον προσδιορισμό των υπό εξέταση ιδιοτήτων των υλικών και επισημαίνονται οι ομοιότητες και διαφορές στον τρόπο με τον οποίο εκτελέστηκαν τα πειράματα για κάθε ιδιότητα και κάθε υλικό στην παρούσα εργασία.

2.1 Υλικά

Τα δύο υλικά που επιλέχθηκαν χρησιμοποιούνται σε κατασκευές πτερυγίων ανεμογεννητριών. Κατά κύριο λόγο, τα πτερύγια μέχρι σήμερα κατασκευάζονταν από GI/P, το οποίο αποτελεί το φέρον δομικό στοιχείο της κατασκευής. Σε κατασκευαστικές λεπτομέρειες του πτερυγίου, όπως άξονες αερόφρενων, ή για την αύξηση της δυσκαμψίας του πτερυγίου τοπικά, χρησιμοποιούνται, εναλλακτικά των ινών γυαλιού, ίνες άνθρακα.

Οι συνιστώσες που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των δοκιμών carbon/epoxy (C/Ep) ήταν ίνες άνθρακα υψηλής αντοχής T400 Torayca σε εποξειδική μήτρα LY 564 Araldit. Τα δοκίμια κατασκευάστηκαν με την τεχνική περιέλιξης ινών. Με αυτή την μέθοδο οι ίνες τυλίγονται γύρω από έναν άξονα περιέλιξης με γωνία θ ως προς τον άξονα και βρέχονται με ρητίνη. Για τους σκοπούς της πειραματικής διαδικασίας ο λεπτότοιχος κύλινδρος συνθέτου υλικού που προέκυψε κόπηκε πριν στερεοποιηθεί από τον άξονα περιέλιξης και ανοίχτηκε σε πλάκα ώστε κατά την στερεοποίηση να προκύψουν επίπεδα δοκίμια. Περισσότερες λεπτομέρειες για την κατασκευή των δοκιμών μπορούν να βρεθούν στο [2.8].

Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις δύο γωνιών περιέλιξης, δηλαδή περιέλιξη στις $\pm 45^\circ$ και στις $\pm 55^\circ$, όπου η γωνία περιέλιξης ορίζεται όπως στο Σχ. 1, με x την αξονική διεύθυνση του κυλίνδρου και y την περιφερειακή, καθώς αυτές οι γωνίες είναι συνήθως χρησιμοποιούμενες για την κατασκευή σωλήνων υπό εσωτερική πίεση, π.χ. [2.8], [2.9]. Για αυτό το υλικό είχαν αρχικά σχεδιαστεί πειράματα μόνο για τον στατιστικό προσδιορισμό των ιδιοτήτων αντοχής. Με την διερεύνηση όμως των πειραματικών αποτελεσμάτων βρέθηκε ιδιαίτερα υψηλή και η διασπορά των ελαστικών ιδιοτήτων του. Έτσι σχεδιάστηκε εκ νέου ένα πρόγραμμα δοκιμών, αυτή την φορά για τον πλήρη στατιστικό χαρακτηρισμό των θερμομηχανικών ιδιοτήτων της στρώσης.

Σχ. 1 Σύστημα συντεταγμένων των υλικών: (α) C/Ep, (β) GI/P unidirectional, (c) GI/P bi-directional. (A: Δοκίμια που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό ιδιοτήτων στην x διεύθυνση, H: Δοκίμια για τον προσδιορισμό ιδιοτήτων στην y διεύθυνση και D: Δοκίμια για τον προσδιορισμό ιδιοτήτων σε διάτμηση)

Στο πρόγραμμα δοκιμών του συνθέτου υλικού glass/polyester (GI/P), χρησιμοποιήθηκαν δοκίμια που αποτελούντο από stitched υαλοϋφασμα με ίνες τύπου E-glass εμβαπτισμένο σε ακόρεστη θιξοτροπική πολυεστερική μήτρα (unsaturated thixotropic polyester matrix), κατασκευασμένα με την μέθοδο της επίστρωσης με το χέρι (hand lay-up). Για τον προσδιορισμό των θερμομηχανικών ιδιοτήτων του υλικού επιλέχθηκε υαλοϋφασμα με ίνες προσανατολισμένες σε μία διεύθυνση, βάρους 670 g/m^2 , οι οποίες συγκρατούνται μεταξύ τους με ίνες κάθετες στην διεύθυνση του πανιού, βάρους 30 g/m^2 . Για τον προσδιορισμό των θερμικών ιδιοτήτων του υλικού μόνο επιλέχθηκε ένα ακόμα υαλοϋφασμα, με ίνες προσανατολισμένες σε δύο διευθύνσεις (bi-directional) $[\pm 45]$ ως προς την διεύθυνση του υφάσματος και βάρους 450 g/m^2 . Το σύστημα συντεταγμένων της εκάστοτε στρώσης παρουσιάζεται στο Σχ. 1 και επιλέχθηκε έτσι ώστε η x- διεύθυνση να συμπίπτει με την διεύθυνση του υαλοϋφάσματος και η y να είναι η κάθετη σε αυτή στο επίπεδο της στρώσης. Σημειώνεται ότι τα δοκίμια A χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων στην x-διεύθυνση, τα H για τις ιδιότητες της y-διεύθυνσης και τα D για τις ιδιότητες διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης.

Η στρώση συνθέτων υλικών ενισχυμένη με μακριές ίνες χαρακτηρίζεται ως εγκάρσιως ισότροπη όταν οι ίνες είναι προσανατολισμένες σε μία μόνο διεύθυνση (unidirectional), ενώ χαρακτηρίζεται ως ορθότροπη όταν οι ίνες είναι προσανατολισμένες σε δύο συμμετρικές ως προς τον x- άξονα διευθύνσεις, όπως στην περίπτωση του bi-directional υφάσματος που χρησιμοποιείται. Η ίδια θεώρηση μπορεί να γίνει και για το C/Ep, που έχει κατασκευασθεί με την μέθοδο περιέλιξης ινών. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι η στρώση έχει ίνες προσανατολισμένες σε δύο διευθύνσεις $[\pm \theta]$ ως προς την x-διεύθυνση.

Εξ' αυτού και για την περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης, απαιτείται ο προσδιορισμός 4 ελαστικών ιδιοτήτων, δηλαδή του μέτρου ελαστικότητας στην x-διεύθυνση και κάθετα σε αυτήν, E_X και E_Y αντίστοιχα, του μέτρου διάτμησης και του λόγου Poisson στο επίπεδο της στρώσης G_{XY} και ν_{XY} , αντίστοιχα. Παράλληλα, για την περιγραφή της αντοχής της στρώσης απαιτείται ο προσδιορισμός της αντοχής σε εφελκυσμό και θλίψη κατά την x και y διεύθυνση X_T , X_C , Y_T και Y_C αντίστοιχα καθώς επίσης και η αντοχή σε διάτμηση στο επίπεδο της στρώσης, S . Συνήθως τα πειράματα για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων ελαστικότητας των υλικών συνδυάζονται με αυτά για τον προσδιορισμό της αντοχής τους, για λόγους οικονομίας.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην εργασία αυτή γίνεται η θεώρηση ότι οι ελαστικές ιδιότητες των υλικών δεν εξαρτώνται από το πρόσημο της δύναμης. Η ίδια υπόθεση γίνεται και για την αντοχή της στρώσης σε διάτμηση.

2.2 Πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό των Μηχανικών Ιδιοτήτων

Για τον προσδιορισμό των μέτρων ελαστικότητας, E_X και E_Y , και του λόγου Poisson ν_{XY} , καθώς επίσης και για τις ιδιότητες αντοχής X_T και Y_T , χρησιμοποιούνται δοκίμια κατάλληλου πάχους που εξετάζονται κατά την x - και y -διεύθυνση, αντίστοιχα, σε εφελκυσμό κατά τον κανονισμό ISO 527-4 [2.11]. Οι διαστάσεις των δοκιμίων, για την περίπτωση θερμοσκληρυνόμενης μήτρας ενισχυμένης με μακριές ίνες κατά τον κανονισμό, όπως χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα που εκτελέστηκαν, παρουσιάζονται στο Σχ. 2. Η διαφορά σε σχέση με τον κανονισμό είναι ότι το πάχος των δοκιμίων C/E_p ήταν 1-1.5mm, ενώ αυτό των GI/P περίπου 1.9mm, δηλαδή μικρότερο από αυτό που ορίζεται στον κανονισμό. Σημειώνεται ότι για τα δοκίμια με ίνες προσανατολισμένες κυρίως σε μία διεύθυνση δεν ακολουθήθηκε ο κανονισμός ISO 527-5 [2.12], καθώς το υαλοϋφασμα περιλαμβάνει και ενίσχυση κάθετα στην διεύθυνσή του.

Σχ. 2 Διαστάσεις δοκιμίων για τον προσδιορισμό μηχανικών ιδιοτήτων της στρώσης (Α: Δοκίμια που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό ιδιοτήτων στην x διεύθυνση, Η: Δοκίμια για τον προσδιορισμό ιδιοτήτων στην y διεύθυνση και Δ: Δοκίμια για τον προσδιορισμό ιδιοτήτων σε διάτμηση)

Τα δοκίμια σύμφωνα με τον κανονισμό ISO 527-4 [2.11] δύνανται να χρησιμοποιηθούν με ή χωρίς ενίσχυση άκρων (end tabs). Στα πειράματα που εκτελέστηκαν χρησιμοποιήθηκαν tabs από αλουμίνιο, όπως φαίνεται στο Σχ. 2, τα οποία επικολλήθηκαν με κυανοακρυλική κόλλα. Η εμπειρία στο εργαστήριο έχει δείξει ότι το υλικό αυτό ενδείκνυται για αυτά τα πειράματα και δεν οδηγούν σε μεγαλύτερο συντελεστή διασποράς. Σημειώνεται ότι σύμφωνα με τον κανονισμό ο ελάχιστος αριθμός δοκιμίων που απαιτείται για τον προσδιορισμό κάποιας ιδιότητας είναι 5.

Για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων αντοχής σε θλίψη X_C και Y_C , ως προς την x - και y -διεύθυνση αντίστοιχα, έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι, κυρίως για την αντιμετώπιση του προβλήματος του λυγισμού του δοκιμίου πριν την αστοχία σε θλίψη [2.1]. Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε η μέθοδος που παρουσιάζεται στο DIN 65 586 [2.13]. Σύμφωνα με τον κανονισμό αυτό, οι διαστάσεις των δοκιμίων που χρησιμοποιούνται στα πειράματα θλίψης είναι όμοιες με αυτές για τα πειράματα εφελκυσμού, με την διαφορά ότι το πάχος των

δοκιμίων πρέπει να είναι 2 ± 0.2 mm. Εξωτερικά του δοκιμίου τοποθετείται μηχανισμός αποτροπής του λυγισμού (antibuckling device), όπως φαίνεται στο Σχ. 3.

Σχ. 3 Μηχανισμός αποφυγής λυγισμού (antibuckling device) κατά τα πειράματα σε θλίψη

Για τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν σε πειράματα θλίψης τα tabs ήταν κατασκευασμένα από σύνθετο υλικό ινών γυαλιού σε πολυεστερική μήτρα (Glass/Polyester) $[\pm 45^\circ]_s$, τα οποία δεν επικολλήθηκαν στην επιφάνεια του εκάστοτε δοκιμίου αλλά ήταν κολλημένα στην χαλύβδινη διάταξη.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι ο κανονισμός DIN 65 586 [2.13] αναφέρεται στον προσδιορισμό ιδιοτήτων αντοχής συνθέτων υλικών σε κόπωση. Επειδή όμως ο προσδιορισμός των ιδιοτήτων αυτών απαιτεί και τον προσδιορισμό των στατικών τιμών αντοχής των υλικών, ο κανονισμός περιγράφει διεξοδικά την διαδικασία στατικών δοκιμών. Έτσι ο αριθμός των πειραμάτων για τον προσδιορισμό των στατικών αντοχών εφελκυσμού και θλίψης ορίζεται σε 3 ανά περίπτωση, ενώ ο ρυθμός μετατόπισης κατά το πείραμα ορίζεται σε 1mm/min.

Από τις διάφορες μεθόδους για τον προσδιορισμό του μέτρου διάτμησης και της αντοχής σε διάτμηση στο επίπεδο της στρώσης [2.14], [2.1], επιλέχθηκε η μέθοδος [45]_n, που περιγράφεται στο [2.15] και γενικεύεται στο [2.16]. Αυτή η πειραματική διαδικασία περιλαμβάνει δοκιμές εφελκυσμού σε δοκίμια των οποίων η διεύθυνση φόρτισης είναι στραμμένη στις 45° ως την x- διεύθυνση του υλικού (διεύθυνση των ινών ή του υφάσματος). Έτσι, τα πειράματα για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης εκτελέστηκαν όπως τα πειράματα σε εφελκυσμό για την ελαστικές ιδιότητες στην x- και y- διεύθυνση, που περιγράφηκαν παραπάνω και τα δοκίμια είχαν τις διαστάσεις που παρουσιάζονται στο Σχ. 2.

Η σχέση που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του μέτρου διάτμησης και της αντοχής σε διάτμηση του υλικού είναι, σύμφωνα με το [2.16]:

$$G_{XY} = \frac{E_X^D}{2(1 + \nu_{XY}^D)} \quad (2.1)$$

$$S = \frac{X_T^D}{2} \quad (2.2)$$

Όπου E_X^D είναι το μέτρο ελαστικότητας, ν_{XY}^D είναι ο λόγος Poisson και X_T^D η τάση θραύσης των δοκιμίων στις 45° ως προς την x-διεύθυνση του υλικού.

Βάσει των πειραματικών μεθόδων που επιλέχθηκαν για τον πλήρη χαρακτηρισμό των μηχανικών ιδιοτήτων στρώσης συνθέτου υλικού απαιτούνται δοκιμές σε τρεις διευθύνσεις κατά τον εφελκυσμό, x, y και στις 45° ως προς την x-διεύθυνση, και σε δύο διευθύνσεις, x και y, κατά την θλίψη.

Τα δοκίμια από C/Ep παρελήφθησαν στις τελικές τους διαστάσεις, ενώ τα δοκίμια από GI/P κόπηκαν από πλάκες 1m x 1m στις τελικές του διαστάσεις με αδαμαντοτροχό στο εργαστήριο Εφαρμοσμένης Μηχανικής του τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Κατά την προετοιμασία των δοκιμίων έγινε η προβλεπόμενη επεξεργασία των άκρων τους και επιβεβαιώθηκε ότι αυτές εμπίπτουν στις ανοχές που προσδιορίζει ο κανονισμός ISO 527-4 [2.11] για το υλικό. Οι διαστάσεις των δοκιμίων, πλάτος και πάχος, προσδιορίστηκαν με μικρόμετρα σε τουλάχιστον τρεις διατομές κατά το μήκος τους, ενώ για τον προσδιορισμό της διατομής του δοκιμίου χρησιμοποιείται ο μέσος όρος αυτών.

Ο ρυθμός μετατόπισης της αρπάγης κατά την διάρκεια όλων των δοκιμών σε εφελκυσμό και θλίψη ήταν σταθερός και ίσος με 1mm/min. Καθ' όλη την διάρκεια των πειραμάτων γινόταν καταγραφή της εφαρμοζόμενης δύναμης και της μετατόπισης της αρπάγης. Σε περίπτωση που το δοκίμιο χρησιμοποιείται για την μέτρηση των ελαστικών ιδιοτήτων, σε δοκιμές εφελκυσμού, τότε γινόταν παράλληλα καταγραφή της παραμόρφωσης, για την μέτρηση της οποίας χρησιμοποιήθηκαν ροζέτες μηχανοσυόμετρων. Οι ροζέτες μηχανοσυόμετρων που χρησιμοποιήθηκαν αποτελούνταν από δύο μηχανοσυόμετρα σε διευθύνσεις 0° και 90° ως προς την διεύθυνση του φορτίου τύπου KFG-5-120-D16-11N30C2 της εταιρίας KYOWA.

Η αναπτυσσόμενη τάση υπολογίζεται διαιρώντας την δύναμη με την διατομή του δοκιμίου, όπως προέκυψε από την μέτρηση των διαστάσεών του. Ο υπολογισμός των ελαστικών ιδιοτήτων με γραμμική προσέγγιση έγινε στην γραμμική περιοχή του υλικού, η οποία για τα πειράματα αυτά λαμβάνεται από 500με ως 2500με, σύμφωνα με τον κανονισμό ISO 527-1 [2.10].

Όλα τα πειράματα σε εφελκυσμό των C/Ep δοκιμίων εκτελέστηκαν στην μηχανή δοκιμών τύπου Universal μεγίστου φορτίου 20kN, εκτός από 10 δοκίμια, για τον προσδιορισμό της αντοχής σε εφελκυσμό στην περιφερειακή διεύθυνση, Y_T , τα πειράματα των οποίων εκτελέστηκαν στην σερβο-υδραυλική μηχανή τύπου Mayes DH 100S, μεγίστου φορτίου 100kN, του εργαστηρίου Εφαρμοσμένης Μηχανικής του τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών Πανεπιστημίου Πατρών. Τα πειράματα για τον προσδιορισμό της αντοχής σε θλίψη εκτελέστηκαν στην σερβο-υδραυλική μηχανή MTS 250kN του εργαστηρίου Αντοχής Υλικών του τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών Πανεπιστημίου Πατρών. Οι μετρήσεις φορτίου και μετατόπισης λαμβάνονταν ανά 2sec.

Τα ηλεκτρομηχανοσυόμετρα που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτά τα πειράματα για την μέτρηση των ελαστικών ιδιοτήτων, συνδεόντουσαν με ηλεκτρονικό υπολογιστή μέσω ενισχυτή της KYOWA και οι μετρήσεις λαμβάνονταν με ρυθμό δειγματοληψίας 0.5Hz.

Όλα τα πειράματα για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων της unidirectional GI/P στρώσης εκτελέστηκαν σε σερβο-υδραυλική μηχανή MTS 250kN του εργαστηρίου δοκιμών πτερυγίων ανεμογεννητριών του ΚΑΠΕ, η οποία βαθμονομήθηκε πριν την εκτέλεση δοκιμών για μέγιστη ένδειξη φορτίου 75kN. Η ταχύτητα δοκιμών σε εφελκυσμό και θλίψη ήταν σταθερή και ίση με 1mm/min, ενώ οι μετρήσεις φορτίου και μετατόπισης λαμβάνονταν ανά 0.5sec.

Τα μηκυνσιόμετρα, που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού GI/P, συνδέονταν με ηλεκτρονικό υπολογιστή, ο οποίος κατέγραφε τις μετρήσεις ανά 0.5sec. Το σήμα των μηκυνσιομέτρων ενισχυόταν με την βοήθεια ενισχυτή HBM τύπου ME30. Το εύρος της αναλογιστικής (A/D) κάρτας που χρησιμοποιήθηκε ήταν $\pm 10V$. Για αυτό τον λόγο έπρεπε να προεπιλεγεί το εύρος των παραμορφώσεων που έπρεπε να μετρηθούν και στην συνέχεια να βαθμονομηθεί το σύστημα για την ακριβή ρύθμιση του κέρδους του ενισχυτή για το εύρος των παραμορφώσεων που είναι επιθυμητό να μετρηθούν. Έτσι η μέγιστη παραμόρφωση κατά την διεύθυνση του φορτίου προεπιλέχθηκε 15000με, ενώ κατά την εγκάρσια διεύθυνση 7500με. Οι τιμές αυτές επιλέχθηκαν ώστε να υπάρχει συνδυασμός της ακρίβειας στις μετρήσεις και παρακολούθηση της παραμόρφωσης των δοκιμών καθ' όλη την διάρκεια του πειράματος. Επιπλέον της μέτρησης του φορτίου και των παραμορφώσεων κατά την διάρκεια αυτών των πειραμάτων σε εφελκυσμό πριν από κάθε δοκιμή λαμβανόταν μέτρηση της θερμοκρασίας και της σχετικής υγρασίας με ένα θερμοϋγρόμετρο Vaisala ηλεκτρονικά δίπλα στην πειραματική διάταξη των στατικών δοκιμών.

Πρέπει να σημειωθεί ότι γενικά κατά τον πειραματικό προσδιορισμό ελαστικών ιδιοτήτων συνθέτων υλικών, προκύπτει το εξής πρόβλημα. Όταν χρησιμοποιούνται δύο πειράματα εφελκυσμού παράλληλα στην διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτήν καθώς και ένα επιπλέον στις 45° ως προς την διεύθυνση των ινών, τότε προκύπτουν 6 μετρήσεις ελαστικών ιδιοτήτων (3 μετρήσεις μέτρου ελαστικότητας και 3 μετρήσεις λόγου Poisson), αλλά οι ανεξάρτητες μεταβλητές που πρέπει να προσδιοριστούν είναι μόνο 4. Γενικά, οι 6 αυτές μετρήσεις δεν θα είναι συνεπείς εξαιτίας αναπόφευκτων σφαλμάτων μέτρησης [2.17]. Αυτό σημαίνει ότι για τον προσδιορισμό των ανεξάρτητων ελαστικών ιδιοτήτων πρέπει να εκτελεστεί παρεμβολή βέλτιστης προσέγγισης στα πειραματικά αποτελέσματα. Στην παρούσα εργασία η διαφορά αυτή μεταξύ των δεδομένων θεωρήθηκε αμελητέα και δεν εκτελέστηκε παρεμβολή ανάμεσα στις διάφορες μετρήσεις, αλλά τα αποτελέσματα χρησιμοποιήθηκαν όπως ακριβώς περιγράφηκε στα ανωτέρω.

2.3 Πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό των Θερμικών Ιδιοτήτων

Η μέτρηση των συντελεστών θερμικής διαστολής έγινε χρησιμοποιώντας ένα σύστημα θερμικής ανάλυσης, 943 TMA της Du Pont 2000 Thermal Analyst System του εργαστηρίου Εφαρμοσμένης Μηχανικής του τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Όλες οι μονάδες του συστήματος ελέγχονταν από το πρόγραμμα 9900 Du Pont Programmer, μέσω προσωπικού υπολογιστή τύπου PS/2 IBM. Οι παράμετροι των πειραμάτων, όπως η εισαγωγή δεδομένων, η καταγραφή σε πραγματικό χρόνο και η επεξεργασία των αποτελεσμάτων προδιαγράφονταν μέσω υπολογιστή.

Οι πολύστρωτες που εξετάστηκαν επιλέχθηκαν έτσι ώστε να καλύπτονται οι βασικές διατάξεις στρώσεων υαλοϋφασμάτων που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή πτερυγίων ανεμογεννητριών, δηλαδή υαλοϋφάσματα με ίνες προσανατολισμένες σε μία μόνο διεύθυνση [0], υαλοϋφάσματα σε δύο διευθύνσεις [± 45] και ένας συνδυασμός αυτών [$0_2/(\pm 45)_2/0_2$]. Έτσι εξετάστηκαν οι παρακάτω πολύστρωτες πλάκες:

α. Για τον προσδιορισμό των συντελεστών θερμικής διαστολής της στρώσης UD (υαλοϋφασμα 700 g/m³), μία πολύστρωτη πλάκα 5 στρώσεων,

β. Για τον προσδιορισμό των συντελεστών θερμικής διαστολής της στρώσης BD (βάρους 450 g/m³), μία πολύστρωτη πλάκα 7 ($\pm 45^\circ$) στρώσεων,

γ. Για την αξιολόγηση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη των στατιστικών κατανομών των ισοδυνάμων συντελεστών θερμικής διαστολής, μία πολύστρωτη πλάκα (MD), με την παρακάτω διάταξη στρώσεων [$UD_2/BD_2/UD_2$] ή [$0_2/(\pm 45)_2/0_2$].

Θεωρώντας τις πολύστρωτες ως ορθότροπο υλικό, αντίστοιχα με τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων απαιτούνται πειράματα σε δύο διευθύνσεις, x και y- διεύθυνση (Σχ. 1)

για τον προσδιορισμό των συντελεστών θερμικής διαστολής της στρώσης. Επίσης, εκτελέστηκαν πειράματα και κατά το πάχος της πολυστρωτής. Σημειώνεται ότι για την BD πλάκα, απαιτούνται πειράματα μόνο σε δύο διευθύνσεις, x ή y και ως προς το πάχος, εξαιτίας της ελαστικής της συμμετρίας. Οι διαστάσεις, σε mm, των δοκιμίων που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στο Σχ. 4, όπου με A συμβολίζονται τα δοκίμια που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των συντελεστών θερμικής διαστολής (ΣΘΔ) στην x - διεύθυνση, με T για την y - διεύθυνση και T_T για αυτόν κατά το πάχος της πλάκας.

Όλα τα πειράματα εκτελέστηκαν με σταθερό ρυθμό θέρμανσης $5\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{min}$ στο διάστημα θερμοκρασιών $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ έως $60\text{ }^{\circ}\text{C}$. Οι χαμηλές θερμοκρασίες στην αρχή κάθε πειράματος επιτεύχθηκαν εμβαπτίζοντας το εκάστοτε δοκίμιο σε υγρό άζωτο. Η παραμόρφωση των δοκιμίων ως προς την θερμοκρασία καταγραφόταν καθ' όλη την διάρκεια του εκάστοτε πειράματος.

Η τιμή του ΣΘΔ κάθε δοκιμίου αντιστοιχεί στην κλίση της καμπύλης παραμόρφωσης θερμοκρασίας για το διάστημα $[-20, 40]\text{ }^{\circ}\text{C}$. Όπου η θερμοκρασία μετάβασης υαλώδους κατάστασης ήταν χαμηλότερη των $40\text{ }^{\circ}\text{C}$, η κλίση προσδιοριζόταν ως την αντίστοιχη θερμοκρασία μετάβασης υαλώδους κατάστασης, T_G .

Σχ. 4 Σύστημα συντεταγμένων και διαστάσεις δοκιμίων για τον προσδιορισμό συντελεστών θερμικής διαστολής (A: Δοκίμια που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του ΣΘΔ στην x διεύθυνση, T: Δοκίμια για τον προσδιορισμό ΣΘΔ στην y διεύθυνση και T_T : Δοκίμια για τον προσδιορισμό ΣΘΔ κατά το πάχος της πλάκας)

2.4 Πειραματικά αποτελέσματα αντοχής και ελαστικών ιδιοτήτων συνθέτου υλικού ινών άνθρακα σε εποξειδική ρητίνη

Στο παρόν εδάφιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των στατικών πειραμάτων που εκτελέστηκαν για την στατιστική αξιολόγηση συνθέτων υλικών ινών άνθρακα σε εποξειδική ρητίνη (carbon/epoxy), τα οποία κατασκευάστηκαν με την μέθοδο περιέλιξης των ινών (filament winding). Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις δύο γωνιών περιέλιξης, δηλαδή περιέλιξη στις $\pm 45^{\circ}$ και στις $\pm 55^{\circ}$, όπου η γωνία περιέλιξης ορίζεται όπως στο Σχ. 1, όπου x - η αξονική διεύθυνση του κυλίνδρου και y - η περιφερειακή.

Τα υλικά αυτά δοκιμάστηκαν σε στατικές δοκιμές εφελκυσμού και θλίψης, έτσι ώστε να μπορούν να χαρακτηριστούν πλήρως οι ελαστικές ιδιότητές τους και οι αντοχές τους σε κάθε διεύθυνση, θεωρώντας ότι το υλικό είναι ορθότροπο. Το υλικό αυτό εξετάστηκε χρονικά πρώτο στην εργασία. Παρασυρμένοι από την συνήθη πρακτική που ακολουθείται στην βιβλιογραφία [2.5], [2.6], όπου μοντελοποιούνται ως στοχαστικές μόνο οι ιδιότητες αντοχής και αμελείται η διασπορά των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού, για αυτό το υλικό το δείγμα για τις ελαστικές του ιδιότητες ήταν μικρότερο από αυτό για τις ιδιότητες αντοχής.

Για να μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως το υλικό με γωνία περιέλιξης $\pm 55^{\circ}$, όπως προαναφέρθηκε, απαιτούνται 4 ελαστικές σταθερές, E_x , E_y , G_{xy} και ν_{xy} , και 5 ιδιότητες

αντοχής, X_T , X_C , Y_T , Y_C και S . Με σκοπό τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων αντοχής και την στατιστική τους αξιολόγηση εκτελέστηκαν συνολικά 20 πειράματα σε εφελκυσμό και 30 πειράματα σε θλίψη δοκιμίων για τον χαρακτηρισμό των ιδιοτήτων στην x-διεύθυνση, 20 πειράματα σε εφελκυσμό και 30 πειράματα σε θλίψη δοκιμίων για τις ιδιότητες στην y-διεύθυνση και 9 πειράματα σε εφελκυσμό για την αντοχή σε διάτμηση. Για την μέτρηση των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού χρησιμοποιήθηκαν από 10 μηκυνσιόμετρα για τις μετρήσεις σε κάθε διεύθυνση.

Αντίστοιχα, για να τον πλήρη χαρακτηρισμό του υλικού με γωνία περιέλιξης $\pm 45^\circ$ απαιτούνται 3 ελαστικές σταθερές και 3 ιδιότητες αντοχής, αφού λόγω της συμμετρίας του υλικού ισχύει:

$$Y_T = X_T, Y_C = X_C, E_Y = E_X$$

Για την στατιστική αξιολόγηση των ιδιοτήτων αντοχής της στρώσης του υλικού αυτού εκτελέστηκαν 35 πειράματα κατά τον εφελκυσμό και από 30 πειράματα για θλίψη και διάτμηση. Για την μέτρηση των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού χρησιμοποιήθηκαν, αντίστοιχα με το υλικό $\pm 55^\circ$, 10 μηκυνσιόμετρα σε κάθε διεύθυνση.

Χαρακτηριστικά διαγράμματα τάσης-παραμόρφωσης για τον προσδιορισμό των τάσεων αστοχίας και των μέτρων ελαστικότητας των δοκιμίων καθώς και εγκάρσιας – αξονικής παραμόρφωσης για τον προσδιορισμό του λόγου Poisson παρουσιάζονται στα Σχ. 5 ως Σχ. 10 για δοκίμια $\pm 45^\circ$ και $\pm 55^\circ$.

Σχ. 5 Διαγράμματα τάσης-παραμόρφωσης δοκιμίων $\pm 45^\circ$ για τον προσδιορισμό του X_T και E_X

Σχ. 6 Διαγράμματα εγκάρσιας και αξονικής παραμόρφωσης δοκιμίων $\pm 45^\circ$ για τον προσδιορισμό του λόγου Poisson, ν_{xy}

Σχ. 7 Διαγράμματα τάσης-παραμόρφωσης δοκιμίων $\pm 45^\circ$ για τον προσδιορισμό των S και G_{xy}

Σχ. 8 Διαγράμματα τάσης-παραμόρφωσης των δοκιμών $\pm 55^\circ$ για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων χ_T , γ_T , E_χ και E_γ αντίστοιχα

Σχ. 9 Διαγράμματα εγκάρσιας και αξονικής παραμόρφωσης δοκιμών $\pm 55^\circ$ για τον προσδιορισμό του λόγου Poisson, $\nu_{\chi\gamma}$

Σχ. 10 Διαγράμματα τάσης-παραμόρφωσης δοκιμίων $\pm 55^\circ$ για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων S και G_{xy}

Τα πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στους Πίνακες Π. 1 και Π. 2 για τα δοκίμια $\pm 55^\circ$ και $\pm 45^\circ$ αντίστοιχα. Στους πίνακες αυτούς παρουσιάζεται ο αριθμός των πειραμάτων που εκτελέστηκαν επιτυχώς, N, η μέση τιμή, m'_i καθώς επίσης και ο συντελεστής μεταβλητότητας, COV, δηλαδή ο λόγος της τυπικής απόκλισης του δείγματος δια της μέσης τιμής. Ο συντελεστής αυτός χρησιμοποιείται για την σύγκριση της διασποράς δειγμάτων με διαφορετική μέση τιμή.

Π. 1 Χαρακτηριστικά του δείγματος των ιδιοτήτων υλικού των δοκιμίων $\pm 55^\circ$

Ιδιότητα	N	m'_i	COV (%)
X_T (MPa)	19	40.483	5.442
X_C (MPa)	24	140.662	16.044
Y_T (MPa)	20	177.391	17.656
Y_C (MPa)	24	128.661	15.897
S (MPa)	9	63.895	10.721
E_X (GPa)	9	6.512	9.987
E_Y (GPa)	10	14.665	15.849
G_{XY} (GPa)	8	18.004	19.927
ν_{XY}	9	0.496	10.760

Π. 2 Χαρακτηριστικά του δείγματος των ιδιοτήτων του υλικού των δοκιμών $\pm 45^\circ$

Ιδιότητα	N	m'	COV (%)
X_T (MPa)	35	61.649	8.802
X_C (MPa)	29	124.086	14.925
S (MPa)	29	188.002	21.811
E_X (GPa)	10	8.130	19.074
G_{XY} (GPa)	10	15.417	18.464
ν_{XY}	10	0.825	6.350

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι η διασπορά του δείγματος τόσο των ιδιοτήτων αντοχής όσο και των ιδιοτήτων ελαστικότητας είναι μεγάλη. Έτσι, παρόλο που το δείγμα για τον προσδιορισμό των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού μπορεί να θεωρηθεί μικρό για μία στατιστική ανάλυση, σημειώνεται ότι σύμφωνα με τον κανονισμό ISO 527-4 [2.11], για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων της στρώσης επαρκεί δείγμα 5 δοκιμών. Άλλωστε, το υλικό αυτό χρησιμοποιήθηκε για να γίνει μία αρχική διερεύνηση του βαθμού διασποράς των μηχανικών του ιδιοτήτων. Έτσι, βρέθηκε ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας, COV, για τις περισσότερες ιδιότητες εκτός από την εφελκυστική αντοχή στην διεύθυνση x των υλικών είναι κοντά ή μεγαλύτερος του 10%. Σημαντικό είναι επίσης να παρατηρηθεί ότι στις περισσότερες περιπτώσεις ο συντελεστής μεταβλητότητας της ελαστικής ιδιότητας είναι μεγαλύτερος από αυτόν της αντίστοιχης αντοχής. Παράδειγμα το μέτρο ελαστικότητας E_X των δοκιμών $\pm 45^\circ$ έχει COV περίπου 20%, ενώ ο COV της αντοχής X_T του υλικού είναι περίπου 9%. Η παρατήρηση αυτή ενισχύεται από τα πειραματικά αποτελέσματα του GI/P, που παρουσιάζονται στην συνέχεια και όπου το δείγμα για τον προσδιορισμό των ελαστικών ιδιοτήτων ήταν μεγαλύτερο. Αναλυτικά τα πειραματικά αποτελέσματα και τα χαρακτηριστικά του δείγματος δίνονται στα [2.18] και [2.19] καθώς και στο Παράρτημα Α.1.

2.5 Πειραματικά αποτελέσματα αντοχής και ελαστικών ιδιοτήτων ινωδών συνθέτων υλικών γυαλιού/ πολυεστέρα (GI/P)

Αντίστοιχα με την ανάλυση που εκτελέστηκε για το υλικό Carbon/Epoxy ερευνήθηκαν οι ελαστικές ιδιότητες και οι τάσεις αστοχίας της ορθότροπης πλάκας των δύο στρώσεων πολυεστέρα ενισχυμένου με ίνες γυαλιού (GI/P), έτσι ώστε να μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως το υλικό. Στην περίπτωση όμως του υλικού GI/P το δείγμα για τις ελαστικές ιδιότητες ήταν ικανό για στατιστική αξιολόγηση. Για τον χαρακτηρισμό του ορθοτρόπου αυτού υλικού απαιτούνται 4 ελαστικές ιδιότητες και 5 ιδιότητες αντοχής, όπως περιγράφηκε σε προηγούμενο εδάφιο. Σε αυτό το εδάφιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης που εκτελέστηκε για τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης που εκτελέστηκε είναι αντίστοιχα με αυτά για το υλικό C/Ep. Επίσης, μεγαλώνοντας το δείγμα, η στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η διασπορά των ελαστικών ιδιοτήτων των υλικών είναι σημαντική, αντίστοιχα με τις ιδιότητες του υλικού C/Ep.

Συνολικά για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων του υλικού GI/P εκτελέστηκαν 160 πειράματα, μέγεθος δείγματος που επιλέχθηκε έτσι ώστε να καταστεί δυνατή μία περαιτέρω στατιστική επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων και να προσεγγιστεί κατά το βέλτιστο δυνατό τρόπο η διασπορά του πληθυσμού. Για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων του υλικού κατά την διεύθυνση των ινών, δηλαδή της τάσης αστοχίας σε εφελκυσμό και θλίψη, X_T και X_C αντίστοιχα, του μέτρου ελαστικότητας, E_X , και του λόγου Poisson, ν_{XY} , έγιναν συνολικά 30 δοκιμές στην θλίψη και 41 δοκιμές σε εφελκυσμό. Σε 26 δοκίμια από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για τα πειράματα εφελκυσμού είχαν τοποθετηθεί ροζέτες μηχανομετρώων ώστε να μετρηθούν οι ελαστικές ιδιότητες κατά την διεύθυνση των ινών του

υλικού. Αντίστοιχα, για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων του υλικού κάθετα στην διεύθυνση των ινών, δηλαδή της τάσης αστοχίας σε εφελκυσμό και θλίψη, Y_T και Y_C και του μέτρου ελαστικότητας, E_Y , εκτελέστηκαν 30 πειράματα σε θλίψη και 30 πειράματα σε εφελκυσμό. Από τα πειράματα σε εφελκυσμό χρησιμοποιήθηκαν 25 πειράματα για τον προσδιορισμό των ελαστικών ιδιοτήτων κάθετα στην διεύθυνση των ινών. Τέλος, για τον προσδιορισμό της τάσης αστοχίας σε διάτμηση, S , εκτελέστηκαν 37 πειράματα σε εφελκυσμό. Σε 30 δοκίμια από αυτά είχαν τοποθετηθεί ροζέτες μηχανοσιμετρών για την μέτρηση του μέτρου διάτμησης στο επίπεδο του υλικού, G_{XY} .

Στο Σχ. 11 παρουσιάζονται τα διαγράμματα τάσης παραμόρφωσης για ορισμένα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν για τα πειράματα κατά την x- διεύθυνση. Πρέπει να σημειωθεί ότι σε αυτά τα διαγράμματα δεν παρουσιάζεται η παραμόρφωση και η τάση αστοχίας, καθώς, όπως προαναφέρθηκε, η μέγιστη ένδειξη παραμόρφωσης που μπορούσε να μετρηθεί για αυτό το υλικό ήταν 15000με.

Σχ. 11 Διάγραμμα αξονικής τάσης- παραμόρφωσης για τα δοκίμια A-11 έως A-15 για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων X_T και E_X .

Αντίστοιχα, στο Σχ. 12 παρουσιάζονται τα διαγράμματα τάσης παραμόρφωσης για ορισμένα χαρακτηριστικά δοκίμια κατά την y-διεύθυνση. Και σε αυτή την περίπτωση δεν φαίνεται η μέγιστη τιμή της παραμόρφωσης και της τάσης, καθώς μετά την γραμμική περιοχή στο δοκίμιο αναπτύσσονταν ρωγμές λόγω της δομής του και οι μετρήσεις των μηχανοσιμετρών έχαναν την ακρίβειά τους. Από τα 26 δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας στην y-διεύθυνση, δηλαδή κάθετα στην διεύθυνση των ινών, τα περισσότερα ανέπτυσαν μικρορωγμές σε τιμές παραμόρφωσης μικρότερης από 2500με. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η γραμμική περιοχή των δοκιμίων αυτών να μην φθάνει τα 2500με. Για τα δοκίμια αυτά χρησιμοποιήθηκε επομένως ως γραμμική περιοχή η περιοχή από τα 500με έως την παραμόρφωση εκείνη στην οποία αναπτυσσόταν η πρώτη μικρορωγή. Στο Σχ. 13 φαίνεται το τμήμα του διαγράμματος τάσης παραμόρφωσης που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό των ελαστικών ιδιοτήτων για τα δοκίμια του Σχ. 12.

Σχ. 12 Διάγραμμα αξονικής τάσης-παραμόρφωσης για τα δοκίμια K-1, K-3 και K-5 έως K-7, για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων γ_T και E_T .

Σχ. 13 Διάγραμμα αξονικής τάσης-παραμόρφωσης για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας E_T για τα δοκίμια K-1, K-3, K-5 και K-6

Στο Σχ. 14 παρουσιάζονται τα διαγράμματα τάσης παραμόρφωσης των δοκιμίων που χρησιμοποιήθηκαν για την μέτρηση των ιδιοτήτων σε διάτμηση. Στα περισσότερα από αυτά γίνεται φανερή η μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού κατά την διεύθυνση αυτή. Τέλος, στο Σχ. 15 παρουσιάζονται ενδεικτικά διαγράμματα εγκάρσιας και αξονικής παραμόρφωσης για τα πειράματα στην x-διεύθυνση, που χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό του λόγου Poisson, ν_{xy} .

Σχ. 14 Διάγραμμα αξονικής τάσης- παραμόρφωσης των δοκίμων D-13 ως D-17, για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων S και G_{xy} .

Κατά τα πειράματα εφελκυσμού μετρήθηκε η θερμοκρασία και η σχετική υγρασία, έτσι ώστε να μελετηθεί τυχόν επίδραση της υγραστικής φόρτισης στις ελαστικές ιδιότητες του υλικού. Στατιστική ανάλυση που εκτελέστηκε στα πειραματικά αποτελέσματα για την εξέταση τυχόν σύνδεσης των υγραστικών φορτίσεων με τις ιδιότητες του υλικού έδειξε ότι η συσχέτιση αυτή είναι αμελητέα για την περιοχή των θερμοκρασιών στις οποίες εκτελέστηκαν τα πειράματα. Συγκεκριμένα, τα πειράματα εκτελέστηκαν σε θερμοκρασίες 10-20 °C, ενώ η σχετική υγρασία του περιβάλλοντος κυμαινόταν μεταξύ 50% και 85%, ενώ η ακρίβεια των μετρήσεων υγρασίας και θερμοκρασίας ήταν $\pm 0.5\%$ και $\pm 0.2^\circ\text{C}$ αντίστοιχα. Ανάλυση συσχέτισης που εκτελέστηκε μεταξύ των ελαστικών ιδιοτήτων και των περιβαλλοντικών συνθηκών κατά την διάρκεια των πειραμάτων δείχνει μικρή συσχέτιση μεταξύ των δύο αυτών στοιχείων. Οι συντελεστές συσχέτισης, ρ_{ij} , για κάθε ελαστική ιδιότητα του υλικού ως προς την θερμοκρασία και σχετική υγρασία της δοκιμής παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 3.

Σημειώνεται ότι για συντελεστή συσχέτισης, $\rho_{ij} = 0$, δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών i και j , για $\rho_{ij} > 0$ η συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών είναι θετική, δηλαδή όταν μεγαλώνει η τιμή της μεταβλητής i μεγαλώνει και η τιμή της j , ενώ το αντίθετο συμβαίνει για αρνητική συσχέτιση, δηλαδή $\rho_{ij} < 0$. Τέλεια συσχετισμένες μεταβλητές έχουμε όταν $\rho_{ij} = \pm 1$. Έτσι, στον πίνακα Π. 3 παρατηρούμε ότι όλες οι ελαστικές ιδιότητες εκτός από το μέτρο διάτμησης είναι αρνητικά συσχετισμένες με τις περιβαλλοντολογικές συνθήκες. Επίσης, η πιο "ευαίσθητη" στην υγρασία και θερμοκρασία μεταβλητή είναι ο λόγος Poisson, ν_{xy} .

Π. 3 Συντελεστές συσχέτισης ελαστικών ιδιοτήτων υλικού με την θερμοκρασία και την σχετική υγρασία

	E_x	E_y	ν_{xy}	G_{xy}
Θερμοκρασία	-0.26	-0.25	-0.35	0.18
Σχετική Υγρασία	-0.14	-0.32	-0.44	0.28

Σχ. 15 Χαρακτηριστικά διαγράμματα αξονικής -εγκάρσιας παραμόρφωσης για τον προσδιορισμό του λόγου Poisson, ν_{xy}

Τα πειραματικά αποτελέσματα για το GI/P παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον πίνακα Π. 4 για τις ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας του υλικού. Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι η διασπορά του δείγματος είναι μεγάλη σε όλες τις ιδιότητες του υλικού, ακριβώς όπως και στην περίπτωση του C/Ep. Ο συντελεστής μεταβλητότητας, για τις ελαστικές ιδιότητες εκτός από το μέτρο ελαστικότητας στην κύρια διεύθυνση του υλικού, E_x , είναι μεγαλύτερος του 15%. Αντίστοιχα στις ιδιότητες αντοχής του υλικού τη μεγαλύτερη διασπορά παρουσιάζει η τάση αστοχίας σε εφελκυσμό κάθετα στην διεύθυνση των ινών, Y_T . Σημειώνεται ότι αναλυτικά τα αποτελέσματα των πειραματικών μετρήσεων για τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού GI/P παρουσιάζονται στο [2.20], καθώς και στο Παράρτημα Α.2.

Πρέπει, δε, σε αυτό το σημείο να τονισθεί ότι εκτός από τις διαφορετικές συνιστώσες, ίνα – μήτρα, των δύο υπό εξέταση υλικών, ήταν διαφορετικός και ο τρόπος κατασκευής τους, αφού το C/Ep έχει κατασκευασθεί με την μέθοδο περιέλιξης ινών, ενώ το GI/P με επίστρωση με το χέρι. Η μέθοδος περιέλιξης ινών θεωρείται δε ότι έχει καλύτερα αποτελέσματα ως προς τις κατασκευαστικές ατέλειες, εφόσον είναι αυτοματοποιημένη. Το ότι μία μέθοδος χειρωνακτική οδηγεί σε παρόμοια αποτελέσματα με μία αυτοματοποιημένη είναι πιθανόν ένδειξη ότι η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων είναι εγγενής στα σύνθετα υλικά.

Π. 4 Χαρακτηριστικά του δείγματος των δοκιμών για την αντοχή του υλικού

Ιδιότητα	N	m'	COV (%)
X _T (MPa)	32	397.94	14.28
X _C (MPa)	30	329.11	10.00
Y _T (MPa)	30	36.22	16.50
Y _C (MPa)	30	147.34	10.15
S (MPa)	33	16.02	14.59
E _X (GPa)	26	22.88	9.24
E _Y (GPa)	25	7.88	20.41
G _{XY} (GPa)	26	1.67	22.59
ν_{XY}	25	0.30	16.93

2.6 Πειραματικά αποτελέσματα συντελεστών θερμικής διαστολής ινωδών συνθέτων υλικών Glass/Polyester

Για την στατιστική αξιολόγηση των συντελεστών θερμικής διαστολής, ΣΘΔ, στις κύριες διευθύνσεις του υλικού εκτελέστηκαν συνολικά 155 πειράματα για τρεις διαφορετικές διατάξεις στρώσεων, τα οποία κόπηκαν κατά τις κύριες διευθύνσεις των υλικών. Για τον προσδιορισμό των συνεπίπεδων ΣΘΔ χρησιμοποιήθηκαν 30 δοκίμια κάθε διεύθυνσης και κάθε πλάκας, ενώ για τον κατά το πάχος ΣΘΔ εκτελέστηκαν για λόγους σύγκρισης μόνο 5 για κάθε πλάκα. Ως εξαίρεση 20 δοκίμια χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό του ΣΘΔ της UD πλάκας κατά την y- διεύθυνση.

Τα αποτελέσματα του προγράμματος δοκιμών παρουσιάζονται συγκεντρωτικά για τα δοκίμια UD, BD και MD στον πίνακα Π. 5, ενώ στο Παράρτημα Α.3 δίνονται αναλυτικά τα αποτελέσματα κάθε δοκιμής. Σημειώνεται ότι με α_x συμβολίζεται ο ΣΘΔ κατά την διεύθυνση x, με α_y ο συντελεστής κατά την y- διεύθυνση και με α_z συμβολίζεται ο ΣΘΔ κατά το πάχος της πλάκας.

Π. 5 Πειραματικά αποτελέσματα των ΣΘΔ για τις GI/P πλάκες

	UD			BD		MD		
	α_x	α_y	α_z	α_x	α_z	α_x	α_y	α_z
N	29	18	5	30	5	30	30	5
m' (*10 ⁻⁶ °C ⁻¹)	9.132	46.044	48.374	26.867	71.37	10.260	37.357	59.136
COV (%)	11.00	6.75	18.61	22.150	6.07	13.13	11.33	8.24

Έλλειψη γραμμικότητας παρουσιάστηκε σε όλα τα γραφήματα παραμόρφωσης - θερμοκρασίας μετά την θερμοκρασία μετάβασης υαλώδους κατάστασης, T_G. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της συνεισφοράς της βισκοελαστικής μήτρας στην θερμική απόκριση των δοκιμών. Όλα τα δοκίμια παρουσίασαν μεγάλη ποικιλία στην μη- γραμμική τους συμπεριφορά, ιδιαίτερα τα δοκίμια με την μεγαλύτερη συνεισφορά της πολυμερούς μήτρας. Τα δοκίμια που παρουσίασαν έντονη μη-γραμμικότητα και μεγάλες παραμορφώσεις ήταν περισσότερο τα UD που δοκιμάστηκαν κάθετα στην διεύθυνση των ινών. Υπάρχουν σημαντικές διαφορές από ένα δοκίμιο στο άλλο στον υπολογισμό της θερμοκρασίας μετάβασης υαλώδους κατάστασης, T_G. Για αυτό το λόγο υπάρχουν ορισμένα δοκίμια, όπως τα UD που εξετάστηκαν κατά την διεύθυνση του πάχους της πλάκας, για τα οποία η υπολογισμένη θερμοκρασία T_G είναι στους

20-25 °C, ενώ συνήθως η T_G κυμαίνεται από 40 ως 50 °C. Η εμφάνιση ασυνεχειών στις καταγραφές των παραμορφώσεων παρατηρήθηκαν για ορισμένα δοκίμια. Αυτές πιθανότατα να οφείλονται σε ατέλειες στην μικροδομή των συγκεκριμένων δοκιμίων, οι οποίες εισήχθησαν κατά την κατασκευή των πολυστρώτων πλακών ή κατά την προετοιμασία των δοκιμίων. Στο Σχ. 16 παρουσιάζονται τυπικές καμπύλες από όλες τις ομάδες πειραμάτων που εκτελέστηκαν, όπου είναι φανερή η μη γραμμική συμπεριφορά της σχέσης παραμόρφωσης-θερμοκρασίας.

Σχ. 16 Τυπική απόκριση θερμικής διαστολής δοκιμίων GI/P

Περισσότερες λεπτομέρειες για τα πειραματικά αποτελέσματα και την πειραματική διαδικασία παρουσιάζονται στο [2.21].

Μία παράμετρος που επηρεάζει την διασπορά των συντελεστών θερμικής διαστολής είναι η κατ' όγκο περιεκτικότητα ινών και η μεταβολή της από σημείο σε σημείο στην πολύστρωτη πλάκα. Μία άλλη αιτία είναι η τυπική απόκλιση της διεύθυνσης των ινών από την προκαθορισμένη. Εξαιτίας αυτών, φαίνεται ότι η κατασκευή με την μέθοδο της επίστρωσης με το χέρι απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή και εμπειρία για την αποφυγή της απόκλισης της διεύθυνσης των ινών από την επιθυμητή και της τοπικής διαφοροποίησης της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε ίνες, παρόλο που αποκλίσσεις από τις ονομαστικές τιμές των δύο αυτών παραμέτρων είναι αναπόφευκτη σε τέτοιες διαδικασίες και εξ' αυτού θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στην διαστασιολόγηση κατασκευών. Εκτός από τις προαναφερθείσες ατέλειες, μπορεί να εμφανιστούν και άλλες κατά την διάρκεια της προετοιμασίας των δοκιμίων. Διαφορές στις διαστάσεις των δοκιμίων, παρόλο που περιορίζονται στο ελάχιστο και απόκλιση από την ονομαστική διεύθυνση των ινών, μπορεί να έχουν άμεση επίδραση στα πειραματικά αποτελέσματα.

2.7 Βιβλιογραφία

[2.1] MIL-HDBK-17-1E, Working Draft, 2000

- [2.2] D. J. Lekou, T. Assimakopoulou, T. P. Philippidis, Estimation of the uncertainty in measurement of composite material mechanical properties during static testing, Scientific Proceedings of the European Wind Energy Conference EWEC 2009, pp. 36-41, Marseille, France, 16 – 19 March 2009.
- [2.3] Chamis CC, Shiao MC, Probabilistic Evaluation of Fuselage-type composite structures, Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 14, pp. 179-187, 1999
- [2.4] Chamis CC, Shiao MC, Probabilistic assessment of composite structures, NASA TM-106024, 1993
- [2.5] Tenn L. F., Statistical Analysis of Fibrous Composite Strength data in *Test Methods and Design Allowables for Fibrous Composites*, ASTM STP 734, C.C. Chamis, Ed., American Society for Testing and Materials, pp. 229-244, 1981
- [2.6] Sun C.T. and Yamada S.E., *Strength distribution of a unidirectional fiber composite*, J. Comp. Mat., Vol. 12, pp. 169-176, 1978
- [2.7] N. Oya, H. Hamada, *Effects of reinforcing fibre properties on various mechanical behaviour of unidirectional Carbon/Epoxy laminates*, Science and Engineering of composite materials, Vol.5, No.3-4, 1996, pp.105-129
- [2.8] Gargiulo C. Marchetti M., Philippidis T.P., Lekou D.J.. *Failure of $[\pm\theta]$ filament wound structural components under biaxial loading*, Proc. of the First Hellenic Conference on Composite Materials and Structures, Vol.2, pp 51-75, Eds. S. A. Paipetis, E. E. Gdoutos, Xanthi, Greece, 1997
- [2.9] A. Beakou, A. Mohamed, Influence of variable scattering on the optimum winding angle of cylindrical laminated composites, Composite Structures, Vol. 53, pp. 287-293, 2001
- [2.10] BS EN ISO 527-1, *Plastics – Determination of tensile properties*, Part 1: General Principles, 1996
- [2.11] BS EN ISO 527-4, *Plastics – Determination of tensile properties*, Part 4: Test conditions for isotropic and orthotropic fibre-reinforced plastic composites, 1997
- [2.12] BS EN ISO 527-5, *Plastics – Determination of tensile properties*, Part 5: Test conditions for unidirectional fibre-reinforced plastic composites, 1997
- [2.13] DIN 65 586, *Fatigue Strength behaviour of fibre composite materials under one-stage loading*, Aerospace; Fiber Reinforced Plastics, Vorlage, 1992 (στα Γερμανικά)
- [2.14] R. F. Gibson, *Principles of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill, Singapore, 1994
- [2.15] B. W. Rosen, *A simple procedure for experimental determination of the longitudinal shear modulus of unidirectional composites*, J. Composite Materials, Vol. 6, pp. 552-554, 1972
- [2.16] S. W. Fowser, R. B. Pipes, D. W. Wilson, *On the determination of laminate and lamina shear response by tension tests*, Composites Science and Technology, Vol. 26, pp. 31-36, 1986
- [2.17] B. Gommers, I. Verpoest, P. Van Houtte, *Determination of the mechanical properties of composite materials by tensile tests. Part I: Elastic Properties*, J. Composite Materials, Vol. 32, No. 4, pp. 310-334, 1998
- [2.18] Δ. Ι. Λεκού, *Στατιστική αξιολόγηση πειραματικών μετρήσεων θερμομηχανικών ιδιοτήτων συνθέτων υλικών*, Εσ. Αναφορά, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1998
- [2.19] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, D. Aggelis, *Mechanical property distribution of CFRP filament wound composites*, Composite Structures, Vol.45, pp. 41-50, 1999

Κεφάλαιο 2: Πειραματικός Προσδιορισμός Ιδιοτήτων Υλικών

- [2.20] Θ. Π. Φιλιππίδης, Δ. Ι. Λεκού, Πειραματικός Προσδιορισμός ιδιοτήτων συνθέτου υλικού UD για το πτερύγιο 19m, 6η Εξαμηνιαία Έκθεση προόδου, Έργο ΕΠΕΤ II #573, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πάτρα, Ιούλιος 1998
- [2.21] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, G. A. Kalogiannakis, On the stochastic nature of thermomechanical properties in Glass reinforced polyester laminates, Composite Structures, Vol.49, pp. 293-301, 2000

3 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Τα αποτελέσματα του προγράμματος δοκιμών χρησιμοποιήθηκαν για την στατιστική αξιολόγηση των ιδιοτήτων των υλικών. Γενικά η αξιολόγηση των πειραματικών αποτελεσμάτων περιλαμβάνει τον προσδιορισμό της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για τις δύο αυτές τιμές, θεωρώντας ότι το δείγμα ακολουθεί την κανονική κατανομή, όπως περιγράφεται στο ISO 2602 [3.1], DIN53598 [3.2], DIN 53804 [3.3]. Για τις ανάγκες όμως μίας ανάλυσης όλης της κατασκευής σε όρους πιθανοτήτων, που είναι ο απώτερος στόχος της εργασίας, δεν αρκεί μόνο η εξαγωγή της μέσης τιμής και της διασποράς του δείγματος, όπως παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά χρειάζονται πληροφορίες για την κατανομή του πληθυσμού, έτσι ώστε το αποτέλεσμα της ανάλυσης να είναι το δυνατόν πλησιέστερα στην πραγματικότητα. Ένα παράδειγμα για την σημασία που έχει η επιλογή της κατανομής του πληθυσμού στην εκτίμηση της αξιοπιστίας ενός στοιχείου μπορεί κανείς να βρει στο [3.4], όπου παρουσιάζεται η επίλυση θεωρώντας την πρώτη φορά ότι οι μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή και την δεύτερη ότι ακολουθούν μία μη κανονική με αποτέλεσμα για την πιθανότητα αστοχίας $1 \cdot 10^{-3}$ και $3 \cdot 10^{-3}$ αντίστοιχα.

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται καταρχήν μία εκτενής αναφορά σε στατιστικά εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την στατιστική αξιολόγηση πειραματικών αποτελεσμάτων, κυρίως ως προετοιμασία για την εισαγωγή των δεδομένων των βασικών μεταβλητών σε προβλήματα προσδιορισμού πιθανότητας αστοχίας κατασκευών. Συγκεκριμένα δίνονται οι βασικές έννοιες στατιστικής ανάλυσης και μέθοδοι για την επεξεργασία στατιστικών αποτελεσμάτων καθώς επίσης αρχές στατιστικού ελέγχου των αποτελεσμάτων μίας ανάλυσης αυτών. Στο παράρτημα Β περιγράφονται οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για την στατιστική επεξεργασία πειραματικών αποτελεσμάτων, καθώς επίσης και η χρήση των υπολογιστικών κωδικών που αναπτύχθηκαν για τον σκοπό αυτό.

Στην συνέχεια οι μέθοδοι εφαρμόζονται στα πειραματικά αποτελέσματα για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων των υλικών. Σκοπός της ανάλυσης αυτής είναι να διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά των κατανομών πιθανοτήτων τις οποίες ακολουθούν οι εκάστοτε θερμομηχανικές ιδιότητες των υπό εξέταση υλικών. Ουσιαστικά, χρησιμοποιώντας το δείγμα των δοκιμών, οδηγούμαστε μέσω στατιστικού λογισμού σε εκτιμήσεις των ιδιοτήτων του πληθυσμού. Ασφαλώς στην περίπτωση των ιδιοτήτων ενός συνεχούς σώματος υπεισέρχονται και θέματα κλίμακας. Ιδιαίτερα στην περίπτωση συνθέτων υλικών, όπου υπάρχουν και προβλήματα εξαιτίας της ανομοιομορφής φύσης τους, π.χ. στο επίπεδο ίνας-μήτρας.

3.1 Βασικές έννοιες στατιστικής ανάλυσης

3.1.1 Συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και κατανομής πιθανότητας

Ο χαρακτηρισμός του πληθυσμού, γίνεται συνήθως με την εκτίμηση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας ή με την πρώτη παράγωγο αυτής, δηλαδή της συνάρτησης κατανομής πυκνότητας πιθανότητας. Η εκτίμηση αυτή γίνεται ταξινομώντας τα δεδομένα του δείγματος ή τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά. Ομαδοποιώντας τα ταξινομημένα αυτά δεδομένα σε κατηγορίες ή κλάσεις προκύπτει η κατανομή συχνότητας και μία γραφική παράσταση αυτής είναι το ιστόγραμμα. Η σχετική συχνότητα (ή πυκνότητα πιθανότητας) κάθε κλάσης είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων σε αυτό το διάστημα δια του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων. Η αθροιστική συχνότητα (ή απλά πιθανότητα) είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων, που έχουν μία τιμή μικρότερη από κάποια συγκεκριμένη τιμή, δια του συνολικού αριθμού των παρατηρήσεων.

Καθώς αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος και μικραίνει το πλάτος κάθε κλάσης, και εφόσον η μεταβλητή που ενδιαφέρει, X , είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή, το διάγραμμα σχετικής συχνότητας τείνει προς μία ομαλή καμπύλη, η οποία είναι γνωστή ως συνάρτηση πυκνότητας

πιθανότητας (ΣΠΠ), probability density function (PDF), της τυχαίας μεταβλητής X και επομένως του πληθυσμού.

Υπάρχει επίσης η *αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, ή κατανομή πιθανότητας* (ΚΠ), cumulative distribution function (CDF), που ορίζεται με παρόμοιο τρόπο ως το όριο του διαγράμματος αθροιστικής συχνότητας, καθώς ο συνολικός αριθμός του δείγματος αυξάνει.

Μαθηματικά οι δύο αυτές αλληλεξαρτούμενες συναρτήσεις μπορούν να οριστούν ως εξής:

Για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή x , η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x_i)$ δίνει την πιθανότητα το x να πάρει μία τιμή ίση ή μικρότερη από μία συγκεκριμένη τιμή x_i , δηλαδή:

$$F(x_i) = P(x \leq x_i) \quad (3.1)$$

ενώ στην οριακή περίπτωση που το x_i τείνει στο $-\infty$ ή το x_i τείνεται στο $+\infty$ ισχύει:

$$F(x_i \rightarrow -\infty) = F(-\infty) = 0$$

$$F(x_i \rightarrow +\infty) = F(+\infty) = 1$$

Επίσης ισχύει:

$$F(x_i) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x_i$$

$$F(x_i) \geq F(x_j) \quad \text{αν } x_i > x_j$$

Επειδή ο δειγματοχώρος μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής περιέχει άπειρο αριθμό σημείων, η πιθανότητα που σχετίζεται με οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής είναι μηδέν. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, x , ορίζεται ως προς την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας ως ακολούθως:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_i \leq x \leq x_i + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} [F(x)] \quad (3.2)$$

ή ισοδυνάμως:

$$P(x_i < x \leq x_j) = \int_{x_i}^{x_j} f(x) dx \quad (3.3)$$

ενώ ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1$$

και

$$f(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x_i$$

3.1.2 Χαρακτηριστικά κατανομών

Οι κατανομές εκτός από την μαθηματική συνάρτηση που τις διέπει, μπορούν να περιγραφούν και βάσει ορισμένων χαρακτηριστικών, κυρίως των ροπών τους, τα οποία περιγράφονται στην συνέχεια [3.5].

Για μία συνεχή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ η k -τάξεως ροπή μ'_k της κατανομής γύρω από το μηδέν, ή γύρω από την αρχή ορίζεται ως:

$$\mu'_k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (3.4)$$

Έτσι με μ'_1 ή $E[x]$ συμβολίζεται η μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής, x .

Η k -τάξεως ροπή γύρω από την μέση τιμή ή κεντρική ροπή μίας συνεχούς κατανομής ορίζεται ως:

$$\mu_k = E[x - \mu_1]^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^k f(x) dx \quad (3.5)$$

Από τον ορισμό των κεντρικών ροπών εύκολα συνάγεται το συμπέρασμα ότι η πρώτη κεντρική ροπή μ_1 είναι πάντα ίση με το μηδέν, $\mu_1 = 0$. Η δεύτερη ροπή γύρω από την μέση τιμή, μ_2 , είναι γνωστή ως *διασπορά*. Η τρίτη κεντρική ροπή μίας κατανομής σχετίζεται με την *ασυμμετρία* ή την *λοξότητα* (skewness) μίας κατανομής. Δηλαδή μία κατανομή με ένα και μοναδικό μέγιστο με $\mu_3 < 0$ έχει άκρα (ή ουρά) που εκτείνονται περισσότερο προς τα αριστερά της μέσης τιμής της κατανομής, ενώ όταν $\mu_3 > 0$ η ουρά της συνάρτησης εκτείνεται περισσότερο προς τα δεξιά της μέσης τιμής. Αντίστοιχα όταν $\mu_3 = 0$ τότε η κατανομή είναι συμμετρική. Η ποσότητα

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} \quad (3.6)$$

μετράει την ασυμμετρία της συνάρτησης σε σχέση με τον βαθμό της διασποράς της. Αυτή η αδιαστατοποίηση μας επιτρέπει να συγκρίνουμε την ασυμμετρία δύο διαφορετικών κατανομών.

Η τέταρτη ροπή γύρω από την μέση τιμή, *κύρτωση*, σχετίζεται με την καμπυλότητα της κατανομής και χαρακτηρίζει την σχετική οξύτητα ή ομαλότητά της. Η ποσότητα

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad (3.7)$$

είναι ένα σχετικό μέτρο της κύρτωσης της κατανομής. Συχνά ως μέτρο σύγκρισης χρησιμοποιείται η κανονική κατανομή η οποία έχει $\beta_2 = 3$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι για $\beta_2 > 3$ η κατανομή είναι σχετικά οξεία, ενώ για $\beta_2 < 3$ η κατανομή είναι σχετικά ομαλή.

Πολλές κατανομές μπορούν να περιγραφούν επαρκώς από τις τέσσερις πρώτες ροπές τους [3.5]. Εκτός από το ότι οι κεντρικές ροπές είναι χρήσιμες για την περιγραφή μίας κατανομής, οι τέσσερις πρώτες κεντρικές ροπές έχουν ιδιαίτερη σημασία για την προσαρμογή εμπειρικών κατανομών σε πειραματικά δεδομένα, για την προσέγγιση της κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής.

3.2 Υπολογισμός Χαρακτηριστικών Δείγματος

Αν δεν γνωρίζουμε την μορφή και τις παραμέτρους της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ενός πληθυσμού, για τον οποίο έχουμε x_i , $i=1,2,\dots,N$, παρατηρήσεις, με N το μέγεθος του δείγματος, τότε οι κεντρικές ροπές, μ_k , πληθυσμού μπορούν να εκτιμηθούν με τον τρόπο που παρουσιάζεται στην συνέχεια. Σκοπός είναι οι εκτιμήτριες των ροπών να είναι όσο το δυνατόν ανεπηρέαστες από το δείγμα, δηλαδή να είναι *αμερόληπτες εκτιμήτριες*. Στην συνέχεια με m_k συμβολίζεται η εκτιμήτρια της ροπής μ_k του πληθυσμού.

Έτσι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής ενός δείγματος N στοιχείων υπολογίζεται βάσει του ορισμού της μέσης τιμής από την σχέση:

$$m'_1 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \quad (3.8)$$

όπου x_i η τιμή της τυχαίας μεταβλητής στην i - δοκιμή.

Αντίστοιχα, η διασπορά ενός δείγματος N στοιχείων υπολογίζεται με βάση τον ορισμό για την διασπορά και με διόρθωση της τιμής N του δείγματος, για να εξαλειφθεί η επίδραση του αριθμού του δείγματος και έτσι η εκτιμήτρια της διασποράς του πληθυσμού να είναι αμερόληπτη, βάσει της σχέσης:

$$m_2 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m'_1)^2}{N-1} \quad (3.9)$$

ενώ η τυπική απόκλιση του δείγματος ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διασποράς του, δηλαδή:

$$s = \sqrt{m_2} \quad (3.10)$$

Ένα αδιάστατο μέγεθος της διασπορά του δείγματος, ο συντελεστής μεταβλητότητας, coefficient of variation (COV), δίνεται από την σχέση:

$$COV = \frac{s}{m'_1} \quad (3.11)$$

Οι αδιάστατοι εκτιμητές της ασυμμετρίας και της κύρτωσης ενός πληθυσμού, $\sqrt{b_1}$ και b_2 αντίστοιχα, δύναται να υπολογιστούν βάσει του ορισμού των κεντρικών ροπών κατανομής από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\sqrt{b_1} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^3}{Ns^3} \quad (3.12)$$

για την ασυμμετρία, αφού

$$m_3 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m'_1)^3}{N} \quad (3.13)$$

η εκτιμήτρια της τρίτης κεντρικής ροπής, και

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^4}{Nm_2^2} \quad (3.14)$$

για την κύρτωση, αφού

$$m_4 = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m'_1)^4}{N} \quad (3.15)$$

η εκτιμήτρια της τέταρτης κεντρικής ροπής. Σύμφωνα με το [3.6], αμερόληπτες εκτιμήτριες των m_3 και m_4 είναι οι εξής:

$$m_3 = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^3 \quad (3.16)$$

$$m_4 = \frac{(N^2 - 2N + 3)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^4 - \frac{3(2N-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \left[\sum_{i=1}^N (x_i - m'_1)^2 \right]^2 \quad (3.17)$$

Βάσει των ανωτέρω σχέσεων προσαρμόζονται αντίστοιχα και οι εκτιμητές της ασυμμετρίας και κύρτωσης του δείγματος.

3.3 Στατιστικά μοντέλα

Για την περιγραφή και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς του υπό εξέταση πληθυσμού χρησιμοποιούνται στατιστικά μοντέλα. Ο καλύτερος τρόπος επιλογής ενός μοντέλου γίνεται έχοντας κατανοήσει τις φυσικές ιδιότητες ή αρχές λειτουργίας ενός συστήματος, και επιλέγοντας ένα μοντέλο, το οποίο διέπεται από τις ίδιες, μαθηματικά, αρχές. Όταν αυτό δεν είναι δυνατό, (αφού σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι καθαρά κατανοητές οι βασικές αρχές που διέπουν το σύστημα) μία λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί με

επιτυχία κατά το παρελθόν σε παρόμοια συστήματα και ελέγχοντας την υπόθεση, εφόσον υπάρχουν δεδομένα. Μία άλλη λύση είναι να επιλέξουμε ένα μοντέλο μεταξύ άλλων με την μέθοδο δοκιμής- λάθους, το οποίο φαίνεται να είναι το καλύτερο για την ικανοποίηση ορισμένων δεδομένων κριτηρίων. Αυτή η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν υπάρχουν δεδομένα για την αξιολόγηση της επιλογής. Επίσης, όταν υπάρχουν δεδομένα μπορεί κανείς να προσαρμόσει ένα από τα μοντέλα μίας γενικευμένης οικογένειας στις παρατηρήσεις. Γενικευμένες οικογένειες κατανομών, όπως η Pearson και η Johnson [3.5] μπορούν να πάρουν μία μεγάλη ποικιλία μορφών, οι οποίες προσδιορίζονται από κάποιες παραμέτρους, και μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν στις παρατηρήσεις. Τέλος, για την μοντελοποίηση δεδομένων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εμπειρικές κατανομές που προκύπτουν ως ανάπτυγμα σειρών της κανονικής κατανομής, όπως είναι το ανάπτυγμα Gram-Charlier και το ανάπτυγμα Edgeworth [3.6].

Στην περίπτωση των θερμομηχανικών ιδιοτήτων στρώσης που εξετάζεται, η επιλογή των υποψηφίων μοντέλων έγινε με συνδυασμό των περιπτώσεων όπου ένα μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν με επιτυχία και με την μέθοδο δοκιμής-λάθους. Κατά το παρελθόν, για παράδειγμα στο [3.7], χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικά στατιστικά μοντέλα για τον προσδιορισμό της τάσης αστοχίας συνθέτων, κανονικής κατανομής, λογαριθμικής κανονικής, Weibull, κανένα εκ των οποίων δεν απορρίφθηκε κατά τον στατιστικό έλεγχο που ακολούθησε. Σε άλλη περίπτωση, σε πειραματική εργασία για την στατιστική εκτίμηση των ιδιοτήτων ελαστικότητας και αντοχής σε εφελκυσμό στο [3.8] χρησιμοποιήθηκαν οι κατανομές κανονική, λογαριθμική κανονική, Weibull, ακραίου τύπου I για τα μέγιστα και ελάχιστα στοιχεία. Με αυτές τις κατανομές μοντελοποιήθηκαν το μέτρο ελαστικότητας και η αντοχή σε εφελκυσμό παράλληλα και κάθετα στην διεύθυνση των ινών στρώσης C/Ep καθώς και ο λόγος Poisson. Σχεδόν καμία κατανομή δεν απορρίφθηκε κατά τον στατιστικό έλεγχο για την καταλληλότητά τους.

Στην συνέχεια περιγράφονται τύποι μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν στην στατιστική ανάλυση για τις υπό εξέταση συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Για κάθε ένα από αυτά τα μοντέλα, δίνονται οι βασικές αρχές. Έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την περιγραφή συστημάτων που ακολουθούν τις ίδιες αρχές. Εξαιτίας όμως της πολυπλοκότητας των συστημάτων που εξετάζονται, τα στατιστικά μοντέλα επιλέχθηκαν για την ικανότητά τους να προσεγγίζουν το σύνολο δεδομένων παρατηρήσεων παρά εξαιτίας της σχέσης τους με τον υπό εξέταση μηχανισμό.

Γενικά, μία ορθή διαδικασία προσαρμογής δεδομένων πρέπει να περιλαμβάνει τα παρακάτω στάδια:

- Προσέγγιση παραμέτρων
- Εκτίμηση του σφάλματος των παραμέτρων
- Ένα στατιστικό μέτρο της καταλληλότητας της προσαρμογής

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονιστεί ότι οι στατιστικοί έλεγχοι μπορεί να μην παρέχουν απόλυτες πληροφορίες, εφόσον το αν μία υπόθεση γίνεται αποδεκτή ή όχι εξαρτάται από το επίπεδο εμπιστοσύνης το οποίο εμείς επιλέγουμε. Ωστόσο οι έλεγχοι αυτοί παραμένουν χρήσιμοι, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για την σύγκριση της καταλληλότητας δύο ή περισσότερων στατιστικών μοντέλων να προσαρμοστούν σε κάποια πειραματικά δεδομένα.

3.3.1 Κανονική (Gauss) κατανομή

Ίσως η πιο γνωστή και περισσότερο χρησιμοποιούμενη κατανομή για την περιγραφή των στατιστικών μοντέλων. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής κατανομής ορίζεται ως [3.5]:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \begin{array}{l} -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \\ -\infty < x < \infty \end{array} \quad (3.18)$$

όπου μ η παράμετρος θέσης, σ η παράμετρος κλίμακας της κανονικής κατανομής και x η τυχαία συνεχής μεταβλητή.

3.3.2 Κατανομή Γ

Η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται για την περιγραφή τυχαίων μεταβλητών όταν ο δειγματοχώρος της μεταβλητής είναι φραγμένος στο ένα άκρο. Η κατανομή Γ είναι το κατάλληλο μοντέλο για τον χρόνο που απαιτείται για ένα σύνολο ακριβώς N ανεξαρτήτων γεγονότων να συμβεί, αν τα γεγονότα συμβαίνουν με ένα σταθερό ρυθμό λ . Παρόλα αυτά, πολλά φαινόμενα για τα οποία δεν δύναται να εξηγηθεί θεωρητικά γιατί είναι γάμα μεταβλητές έχει βρεθεί εμπειρικά ότι μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά με αυτό το μοντέλο. Καθώς η επιλογή ενός μοντέλου στην εργασία αυτή γίνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο δοκιμής-λάθους, η κατανομή κρίθηκε κατάλληλη για την δοκιμαστική εφαρμογή της στα πειραματικά αποτελέσματα, εξαιτίας της ανωτέρω ιδιότητάς της. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Γ ορίζεται ως [3.5]:

$$f(x; \lambda, \eta) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-\lambda x} \quad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \lambda, \eta > 0 \end{array} \quad (3.19)$$

Οι παράμετροι της κατανομής Γ είναι λ και η , ενώ $\Gamma(\eta)$ είναι η συνάρτηση Γ :

$$\Gamma(\eta) = \int_0^\infty x^{\eta-1} e^{-x} dx \quad (3.20)$$

3.3.3 Λογαριθμική κανονική κατανομή (log-normal)

Η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται ως στατιστικό μοντέλο τυχαίων μεταβλητών των οποίων ο λογάριθμος ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ . Στο [3.9] περιγράφεται η συχνή χρήση της για την πρόβλεψη της αντοχής σε κόπωση, ενώ έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία για την πρόβλεψη της τάσης αστοχίας σε εφελκυσμό για παράδειγμα στα [3.7] και [3.8]. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι [3.5]:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \begin{array}{l} x > 0 \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{array} \quad (3.21)$$

Σε αντίθεση με την κανονική κατανομή, μ είναι η παράμετρος κλίμακας, και σ η παράμετρος σχήματος.

3.3.4 Κατανομή Weibull

Σε πολλές περιπτώσεις η αδυναμία της αρνητικής εκθετικής κατανομής να περιγράψει τον χρόνο ως την αστοχία οφείλεται στην περιοριστική υπόθεση του σταθερού ρυθμού αστοχίας. Συνεπώς, απαιτούνται πιο γενικές κατανομές για τις περιπτώσεις όπου η πιθανότητα αστοχίας μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Μία τέτοια κατανομή είναι η κατανομή Weibull, η οποία περιγράφεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας [3.5]:

$$f(x; \eta, \sigma) = \frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\eta-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{\sigma} \right)^{\eta} \right] \quad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sigma, \eta > 0 \end{array} \quad (3.22)$$

Όπου σ η παράμετρος κλίμακας και η η παράμετρος σχήματος της κατανομής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν $\eta = 1$ η κατανομή Weibull είναι ισοδύναμα μία αρνητική εκθετική κατανομή, ενώ για $\eta = 2$ η κατανομή γίνεται Rayleigh [3.5], ενώ η χρήση της κατανομής είναι εκτενής για την μοντελοποίηση της αντοχής σε εφελκυσμό παράλληλα στην διεύθυνση των ινών, [3.9], αλλά και κάθετα στην διεύθυνση των ινών, καθώς και σε διάτμηση στο επίπεδο της στρώσης, όπως στο [3.10].

3.3.5 Ακραίες κατανομές

Η αστοχία μίας συνιστώσας ή ενός συστήματος μπορεί συχνά να σχετίζεται με ακραία φαινόμενα που εξαρτώνται άμεσα είτε με μία ελάχιστη τιμή είτε με μία μέγιστη τιμή ενός δείγματος από μία συγκεκριμένη κατανομή. Σε αυτές τις περιπτώσεις μας ενδιαφέρει η κατανομή του μικρότερου στοιχείου (ελάχιστη τιμή) ή του μεγαλύτερου στοιχείου (μέγιστη τιμή) ενός δείγματος από μία αρχική κατανομή.

Η κατανομή του μικρότερου ή του μεγαλύτερου στοιχείου εν γένει εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος N και από την φύση της αρχικής κατανομής. Παρόλα αυτά, επειδή η αρχική κατανομή είναι συχνά άγνωστη, αν το N είναι μεγάλο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γενικά ασυμπτωτικά αποτελέσματα που εξαρτώνται από μερικές μόνο υποθέσεις όσον αφορά την αρχική κατανομή.

Για αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί τρεις τύποι ασυμπτωτικών κατανομών για τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές, οι οποίοι βασίζονται σε διαφορετικές (όχι όλες πιθανές) αρχικές κατανομές. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν η περίπτωση του τύπου I ασυμπτωτικής κατανομής για τις μέγιστες τιμές, ή για τις ελάχιστες, καθώς επίσης και ο τύπος III ασυμπτωτικής κατανομής για τις ελάχιστες τιμές, ο οποίος είναι η κατανομή Weibull. Ο τύπος I ασυμπτωτικής κατανομής για τις μέγιστες τιμές μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του χρόνου ως την αστοχία για ένα σύστημα N στοιχείων εν παραλλήλω, θεωρώντας ότι το N είναι μεγάλο. Αντίστοιχα ο τύπος I ασυμπτωτικής κατανομής για τις ελάχιστες τιμές μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του χρόνου ως την αστοχία για ένα σύστημα N στοιχείων εν σειρά. Παρόλα αυτά τα μοντέλα αυτά δεν περιορίζονται μόνο σε προβλήματα διάρκειας ζωής και αξιοπιστίας. Για παράδειγμα, η κατανομή ακραίου τύπου για τα μέγιστα στοιχεία έχει χρησιμοποιηθεί στο [3.8] και κρίθηκε καταλληλότερη για την μοντελοποίηση της κατανομής του μέτρου ελαστικότητας παράλληλα στην διεύθυνση των ινών και του λόγου Poisson της στρώσης, ενώ στην ίδια εργασία η ακραίου τύπου κατανομή για τα ελάχιστα στοιχεία χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία για την μοντελοποίηση της αντοχής κάθετα στην διεύθυνση των ινών σε εφελκυσμό.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τον τύπο I ασυμπτωτικής κατανομής για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές δίνεται αντίστοιχα από [3.5]:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[- \frac{(x - \mu)}{\sigma} - \exp \left(- \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right) \right] \quad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{array} \quad (3.23)$$

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{(x - \mu)}{\sigma} - \exp \left(\frac{(x - \mu)}{\sigma} \right) \right] \quad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{array} \quad (3.24)$$

Στις ανωτέρω σχέσεις μ είναι η παράμετρος θέσης των κατανομών και σ η παράμετρος κλίμακας.

3.4 Εφαρμογή του στατιστικού μοντέλου

Μόλις επιλεγεί το στατιστικό μοντέλο, πρέπει να υπολογιστούν οι παράμετροί του από τα δεδομένα. Τα δεδομένα θεωρούνται τυχαίο δείγμα ενός πληθυσμού, ο οποίος περιγράφεται από την επιλεγμένη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας. Εξαιτίας της τυχαίας φύσης των δεδομένων, η εκτίμηση των παραμέτρων είναι επίσης στοχαστική. Για αυτό είναι αναγκαίο να σχηματιστούν προσεγγιστικά διαστήματα εμπιστοσύνης για τις πραγματικές τιμές των παραμέτρων, δηλαδή, στοχαστικά διαστήματα που περιέχουν την τιμή της πραγματικής παραμέτρου με μία συγκεκριμένη πιθανότητα. Η βασική προσέγγιση έγκειται στην επιλογή μίας “συνάρτησης αξίας”, η οποία μετράει την συμφωνία μεταξύ των δεδομένων και του στατιστικού μοντέλου με μία συγκεκριμένη επιλογή παραμέτρων. Οι παράμετροι που επιτυγχάνουν ένα ελάχιστο στην συνάρτηση αξίας ονομάζονται “παράμετροι καλύτερης προσέγγισης”. Οι γενικές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων είναι οι εξής:

- Η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας
- Η μέθοδος των ροπών
- Το διάγραμμα πιθανότητας

Στην εργασία αυτή για την εκτίμηση των παραμέτρων έχουν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE) και η μέθοδος των ροπών, οι οποίες περιγράφονται στα επόμενα εδάφια

3.4.1 Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Έστω $X_1, \dots, X_N$ τυχαίες τιμές από δείγμα N πληθυσμού με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \theta)$ όπου θ η παράμετρος της συνάρτησης. Δεδομένων των παρατηρήσεων $X_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) η συνάρτηση πιθανοφάνειας του θ ορίζεται ως [3.11]:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i; \theta) \quad (3.25)$$

Η μορφή της συνάρτησης των περισσότερων κατανομών καθιστά πιο εύκολη την μεγιστοποίηση του λογάριθμου της συνάρτησης πιθανοφάνειας της μεταβλητής θ , η οποία δίνεται από την σχέση:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln[f(x_i; \theta)] \quad (3.26)$$

Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας, Maximum Likelihood Estimation (mle), του θ είναι η τιμή του θ που μεγιστοποιεί την (λογαριθμική) συνάρτηση πιθανοφάνειας, δηλαδή μετατρέπει τις παρατηρήσεις σε “πιο πιθανές”. Η τιμή αυτή υπολογίζεται θέτοντας την μερική παράγωγο της (λογαριθμικής) συνάρτησης πιθανοφάνειας, $\partial L(\theta)/\partial \theta$ ή $\partial l(\theta)/\partial \theta$, ίση με το μηδέν.

Τα βασικά βήματα για τον προσδιορισμό της παραμέτρου ενός στατιστικού μοντέλου με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας συνοψίζονται ως:

- Υπολογισμός της συνάρτησης πιθανοφάνειας ή της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας από το στατιστικό μοντέλο του πληθυσμού.
- Υπολογισμός των μερικών παραγώγων της συνάρτησης ως προς τις παραμέτρους του στατιστικού μοντέλου.
- Μηδενισμός των μερικών αυτών παραγώγων και επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτουν για τον υπολογισμό των παραμέτρων, εισάγοντας τις τιμές των παρατηρήσεων του δείγματος.

Εν γένει με την μέθοδο αυτή προκύπτει ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων το οποίο όμως συνήθως δύναται να επιλυθεί αριθμητικά.

3.4.2 Η μέθοδος των ροπών

Η μέθοδος έγκειται στον προσδιορισμό των παραμέτρων του στατιστικού μοντέλου εξισώνοντας τις ροπές του δείγματος με αυτές του μοντέλου. Για την μέθοδο αυτή οι παράμετροι του στατιστικού μοντέλου πρέπει να εκφράζονται συναρτήσει των ελαχίστης τάξεως ροπών του [3.11].

Τα βασικά βήματα για τον προσδιορισμό των παραμέτρων ενός στατιστικού μοντέλου συνοψίζονται ως:

- Υπολογισμός τόσων ροπών, όσες και οι παράμετροι της κατανομής, αρχίζοντας από τον υπολογισμό της πρώτης τάξεως ροπής, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής
- Λύση των εκφράσεων αυτών ως προς τις παραμέτρους της κατανομής.
- Εισαγωγή των ροπών του δείγματος στις παραπάνω εκφράσεις και υπολογισμός των εκτιμητριών για τις παραμέτρους του στατιστικού μοντέλου.

Σημειώνεται ότι στο Παράρτημα Β δίνονται αναλυτικά εκτός από τις χαρακτηριστικές τιμές κάθε κατανομής, τα συστήματα προσδιορισμού παραμέτρων μέσω της μεθόδου ροπών και της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας.

3.5 Ανάπτυγμα Edgeworth

Η μέθοδος χρησιμοποιεί ένα ανάπτυγμα σε σειρά της Κανονικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας, $\Phi(x)$, για την προσέγγιση της άγνωστης συνάρτησης κατανομής πιθανότητας σε όρους των κεντρικών ροπών της τυχαίας μεταβλητής, x . Αυτό δίνεται από [3.6]:

$$\begin{aligned} F(x) = \Phi(x) & - \frac{1}{3!} \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \Phi^{(3)}(x) + \\ & + \frac{1}{4!} \left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \right) \Phi^{(4)}(x) + \frac{10}{6!} \left(\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \right)^2 \Phi^{(6)}(x) + \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

όπου $\Phi^{(n)}(x)$ είναι η n -τάξης παράγωγος της Κανονικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας.

Παρόλο που η προσέγγιση είναι ασυμπτωτική, σύμφωνα με το [3.6] δεν συνιστάται να χρησιμοποιούνται όροι που περιλαμβάνουν μεγαλύτερη ροπή από την τρίτη ή τέταρτη καθώς αυτές είναι δύσκολο να εκτιμηθούν από μικρό αριθμό πειραμάτων. Επίσης, το θέμα που τίθεται είναι αν μπορούμε να προσεγγίσουμε με λίγους όρους καλά την άγνωστη συνάρτηση πιθανότητας.

Έτσι, η προσέγγιση με δύο όρους του παραπάνω αναπτύγματος σε σειρά για την συνάρτηση κατανομής του κριτηρίου αστοχίας σε όρους της κανονικοποιημένης μεταβλητής, z , δίνεται από:

$$F(a) = P(x \leq a) \approx \Phi(z) - \frac{1}{3!} \frac{\mu_3(x)}{(\mu_2(x))^{3/2}} \Phi^{(3)}(z) \quad (3.28)$$

όπου:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-s^2/2} ds \quad (3.29)$$

$$z = \frac{a - E[x]}{\sqrt{\mu_2(x)}} \quad (3.30)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι για μεγάλο x , η έκφραση (3.28) μπορεί μερικές φορές να δώσει αρνητικές τιμές για την $F(a)$, αλλά αυτό είναι αποτέλεσμα της προσεγγιστικής φύσης της κατανομής πιθανότητας, καθώς η έκφραση δεν δίνει την ακριβή τιμή της κατανομής [3.6].

Επιπρόσθετα, εξαιτίας του ότι οι εκτιμήσεις των ροπών τρίτης και τέταρτης τάξης είναι εξαιρετικά ευαίσθητες σε μερικές ακραίες παρατηρήσεις, η μέθοδος πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για λίγες παρατηρήσεις (λιγότερες από 200) [3.5]. Η καταλληλότητα της προσέγγισης θα πρέπει να ελέγχεται με στατιστικές μεθόδους, όπως για παράδειγμα με τον έλεγχο Kolmogorov - Smirnov.

3.6 Pearson

Η οικογένεια κατανομών πιθανότητας Pearson, όπως παρουσιάζεται στο [3.12] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας από πειραματικά δεδομένα, εφόσον υπολογιστούν οι ροπές του δείγματος. Κάθε οικογένεια από το σύστημα Pearson μπορεί να παραχθεί ως η λύση στην διαφορική εξίσωση:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(x - \alpha)}{b_0 + b_1x + b_2x^2} f(x) \quad (3.31)$$

για την τυχαία μεταβλητή x με συνάρτηση κατανομής $f(x)$, με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων α , b_i ($i = 0, 1, 2$). Οι οικογένειες κατανομών Pearson περιλαμβάνουν την κανονική, την Βήτα (Pearson Type I), και την Γάμα (Pearson Type III). Η σωστή επιλογή της κατάλληλης προσεγγιστικής οικογένειας συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας βασίζεται στην εξέταση των σχετικών μέτρων ασυμμετρίας και κύρτωσης, β_1 και β_2 αντίστοιχα [3.12].

Έτσι, εξετάζοντας την σχετική ασυμμετρία και κύρτωση του δείγματος μπορεί κανείς να δει με πιο τύπο της οικογένειας Pearson μπορεί να προσομοιωθεί κατάλληλα ο πληθυσμός. Επειδή οι εμπειρικές κατανομές Pearson χρησιμοποιούνται σε αυτή την εργασία για λόγους σύγκρισης, στον υπολογιστικό κώδικα που αναπτύχθηκε δεν περιλαμβάνονται όλοι οι τύποι της οικογένειας, ιδιαίτερα καθώς δηλώνεται στο [3.12], οι δύο τύποι, IV και VI είναι δύσκολο να χειριστούν στην πράξη, εφόσον ο τύπος συνάρτησης κατανομής IV δεν έχει λύση κλειστής μορφής, ενώ ο τύπος VI απαιτεί πολλούς μετασχηματισμούς για τον προσδιορισμό της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας.

Από την εξ.(3.31), μετά από ορισμένες αλγεβρικές μετατροπές οι σταθεροί παράμετροι μπορούν να εκφραστούν με χρήση των κεντρικών ροπών της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας ως:

$$\begin{aligned} \alpha &= b_1 = -\mu_3 \frac{\mu_4 + 3\mu_2^2}{A} \\ b_0 &= -\mu_2 \frac{4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2}{A} \\ b_2 &= \frac{-(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3)}{A} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\text{όπου } A = 10\mu_2\mu_4 - 12\mu_3^2 - 18\mu_2^3$$

Εκφράζοντας την διαφορική εξίσωση της συνάρτησης πιθανότητας (εξ.(3.31)) θεωρώντας ως αρχή των αξόνων την κορυφή της κατανομής, η εξίσωση μετατρέπεται στην:

$$\frac{df(X)}{dX} = \frac{X}{B_0 + B_1X + B_2X^2} f(X) \quad (3.33)$$

όπου $X = x - \alpha$ και B_i δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} B_0 &= b_0 + \alpha^2(1 + b_2) \\ B_1 &= \alpha(1 + 2b_2) \\ B_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Αν οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή της Εξ.(3.33) είναι πραγματικές και αντιθέτου πρόσημου, αποδεικνύεται [3.12] ότι χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $z = \frac{X - a_1}{a_2 - a_1}$, όπου a_1, a_2 είναι οι ρίζες ($a_1 < 0 < a_2$), η κατανομή που εκφράζεται με την Εξ.(3.33) συμπίπτει με την κατανομή Βήτα, δηλαδή

$$f(z) = \frac{1}{B(p, q)} z^{p-1} (1-z)^{q-1} \quad (p, q > 0) \quad (3.35)$$

Η μεταβλητή μετασχηματισμού X είναι τέτοια ώστε το z να κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1. Πρέπει δε να σημειωθεί ότι αν οι ρίζες είναι πραγματικές αλλά του ιδίου πρόσημου τότε η κατανομή μπορεί να προσεγγισθεί με τον τύπο Pearson VI, ενώ αν οι ρίζες του πολυωνύμου είναι μιγαδικές τότε μπορεί να προσεγγισθεί με τον τύπο IV [3.12].

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής πιθανότητας, η οποία είναι η ατελής συνάρτηση Βήτα, που δίνεται από την σχέση:

$$F(z \leq a) = I_a(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \int_0^z z^{p-1} (1-z)^{q-1} dx \quad (p, q > 0, 0 \leq z \leq 1) \quad (3.36)$$

στον υπολογιστικό κώδικα που αναπτύχθηκε, εισήχθηκε υπορουτίνα που δίνεται στο [3.13].

Οι παράμετροι της κατανομής Βήτα p, q εκτιμούνται εξισώνοντας τις ροπές της κατανομής Pearson με τις αντίστοιχες της συνάρτησης αστοχίας, που οδηγεί στις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\mu'_2 - \mu'_1}{\mu'^2_1 - \mu'_2} \mu'_1 \\ q &= \frac{1 - \mu'_1}{\mu'_1} p \end{aligned} \quad (3.37)$$

όπου μ'_1 είναι οι ροπές της άγνωστης συνάρτησης κατανομής πιθανότητας που υπολογίζονται στην νέα αρχή, που προσδιορίζεται από την ρίζα a_1 της Εξ.(3.33).

Αντίστοιχα με την περίπτωση προσέγγισης της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας με το ανάπτυγμα Edgeworth, στην περίπτωση προσέγγισης με μία κατανομή από την οικογένεια Pearson, συνιστάται ιδιαίτερη προσοχή, εξαιτίας της χρήσης της τρίτης και τέταρτης ροπής του δείγματος [3.5], ενώ θεωρείται απαραίτητος ο στατιστικός έλεγχος για την καταλληλότητα της προσέγγισης.

3.7 Στατιστικοί έλεγχοι

Αφού επιλεγεί ένα στατιστικό μοντέλο και εκτιμηθούν οι παράμετροί του, πρέπει να εκτελεστεί ένας στατιστικός έλεγχος ως προς το αν το στατιστικό μοντέλο μπορεί να προσομοιάσει καλά τα δεδομένα. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για τον έλεγχο της καταλληλότητας του μοντέλου. Οι ίδιες τεχνικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βοηθήσουν στην επιλογή ενός μοντέλου, προσδιορίζοντας, για συγκεκριμένες παρατηρήσεις, ποιο μοντέλο μπορεί να επιλεγεί ως προς το υπό εξέταση σύστημα.

Οι περισσότερες από αυτές τις τεχνικές ακολουθούν την κλασσική διαδικασία για έλεγχο υποθέσεων, δηλαδή, με επίπεδο σημαντικότητας α και μηδενική υπόθεση ότι τα δεδομένα του προβλήματος ακολουθούν την επιλεγείσα στατιστική κατανομή, προσδιορίζεται η πιθανότητα του

στατιστικού μεγέθους του ελέγχου και εξετάζεται αν περιέχεται σε μία κρίσιμη περιοχή μεγέθους α . Απορρίπτουμε το μοντέλο αν το στατιστικό μέγεθος είναι σε αυτή την κρίσιμη περιοχή, ενώ το μοντέλο γίνεται αποδεκτό σε αντίθετη περίπτωση.

Οι σημαντικότεροι στατιστικοί έλεγχοι περιλαμβάνουν τον έλεγχο X^2 και τον έλεγχο Kolmogorov - Smirnov. Η πιο παλιά και η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος ελέγχου υποθέσεων είναι ο έλεγχος X^2 . Το προτέρημα του είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί με οποιαδήποτε κατανομή, χωρίς να χρειάζεται να είναι γνωστές οι παράμετροι της κατανομής. Αντίθετα, μειονεκτήματα της μεθόδου είναι η έλλειψη ευαισθησίας στην ανίχνευση ακατάλληλων μοντέλων όταν δεν υπάρχουν αρκετά πειραματικά δεδομένα και η ανάγκη να ταξινομούνται τα δεδομένα σε αυθαίρετα κελιά, τα οποία μπορούν να επηρεάσουν το αποτέλεσμα του ελέγχου. Εξαιτίας του ότι τα πειραματικά αποτελέσματα στην εργασία αυτή είναι μικρά δείγματα, δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί αξιόπιστα ο έλεγχος X^2 και για αυτό τον λόγο δεν θα αναλυθεί περαιτέρω.

Αντ' αυτού χρησιμοποιείται ο έλεγχος Kolmogorov - Smirnov (K-S). Ο έλεγχος αυτός εφαρμόζεται σε μη ομαδοποιημένες κατανομές, οι οποίες είναι συναρτήσεις μίας και μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλαδή σε ομάδες παρατηρήσεων όπου το κάθε σημείο παρατήρησης μπορεί να συσχετισθεί με μία μόνο τιμή. Το στατιστικό μέγεθος, D_N , του ελέγχου K-S είναι εξαιρετικά απλό, αφού ορίζεται ως η μέγιστη τιμή της απόλυτης διαφοράς μεταξύ δύο συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας. Με αυτό τον τρόπο, για την σύγκριση του $S_N(x)$ μίας ομάδας δεδομένων με μία γνωστή συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $P(x)$, το στατιστικό μέγεθος του ελέγχου K-S ορίζεται ως:

$$D_N = \max_{-\infty < x < \infty} |S_N(x) - P(x)| \quad (3.38)$$

Η τιμή του D_N υπολογίζεται για να προσδιορίσουμε πόσο καλά μπορούν να προσαρμοστούν στην στατιστική κατανομή. Αν αυτή η τιμή είναι μηδέν τότε η προσαρμογή είναι τέλεια. Αλλά τιμές μεγαλύτερες του μηδενός δεικνύουν μία πιθανότητα τα δεδομένα να μην μπορούν να προσαρμοστούν στην συγκεκριμένη κατανομή.

Η κατανομή του στατιστικού μεγέθους του ελέγχου K-S μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά, δίνοντας έτσι το επίπεδο σημαντικότητας για οποιαδήποτε μη μηδενική τιμή του D_N . Η κατανομή που χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό του επιπέδου σημαντικότητας μπορεί να γραφεί με τον παρακάτω τρόπο [3.13]:

$$Q_{KS}(\lambda) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(-2j^2 \lambda^2) \quad (3.39)$$

Η τιμή αυτή δίνει ουσιαστικά την πιθανότητα η τιμή D_N να μην υπερβεί την κρίσιμη τιμή. Σε όρους αυτής της συνάρτησης το επίπεδο σημαντικότητας μίας παρατηρούμενης τιμής του D_N για την περίπτωση μίας κατανομής δίνεται από:

$$P(D_N < D_N^{cr}) = Q_{KS}(\sqrt{N} D_N) = \alpha \quad (3.40)$$

όπου N είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων. Η προσέγγιση που εμπεριέχεται στην παραπάνω σχέση μετατρέπεται ασυμπτωτικά σε ακρίβεια καθώς η τιμή του N μεγαλώνει, ενώ για αξιόπιστες μετρήσεις το N θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 8 [3.14].

Συνήθως για την απόρριψη μίας υπόθεσης η τιμή του επιπέδου σημαντικότητας, α , πρέπει να είναι μικρότερη από 5%.

Ο έλεγχος K-S μπορεί να συνοψιστεί ως ακολούθως: Υπολογίζουμε την πιθανότητα $Q_{KS}(\sqrt{N} D_N)$, η οποία σχετίζεται με το παρατηρούμενο στατιστικό μέγεθος του ελέγχου K-S και απορρίπτουμε την υπόθεση ότι τα πειραματικά αποτελέσματα ακολουθούν την επιλεγείσα στατιστική κατανομή αν η τιμή του $Q_{KS}(\sqrt{N} D_N)$ είναι μικρότερη από το προεπιλεγμένο επίπεδο σημαντικότητας α .

3.8 Στατιστική αξιολόγηση αντοχής και ελαστικών ιδιοτήτων ινωδών συνθέτων υλικών Carbon/Epoxy

Εκτελέστηκε στατιστική αξιολόγηση των πειραματικών αποτελεσμάτων ώστε ο χαρακτηρισμός των ιδιοτήτων των υλικών αυτών να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να περιλαμβάνεται πληροφορία για την κατανομή του πληθυσμού τους. Τα στατιστικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τον σκοπό αυτό περιγράφηκαν στα προηγούμενα. Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της στατιστικής ανάλυσης.

Στα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας έγινε στατιστική ανάλυση, η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά για κάθε διαφορετικό τύπο υλικού. Από τα πειραματικά αυτά αποτελέσματα εκτιμήθηκαν οι παράμετροι των κατανομών Κανονικής, Λογαριθμικής Κανονικής, Γάμα, Weibull, Ασυμπτωτικής κατανομή τύπου I μικρότερου στοιχείου και Ασυμπτωτική κατανομή τύπου I μέγιστου στοιχείου. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των κατανομών αυτών έγιναν με δύο τρόπους, δηλαδή χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών, MOM, και με χρήση της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας, MLE. Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων με τις δύο μεθόδους παρουσιάζονται στους πίνακες Π. 6 και Π. 7 για ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας του υλικού $\pm 55^\circ$, αντίστοιχα, ενώ στον πίνακα Π. 8 παρουσιάζονται συγκεντρωμένα τα αποτελέσματα για όλες τις ιδιότητες του υλικού $\pm 45^\circ$. Στους πίνακες αυτούς, στην πρώτη στήλη αναγράφεται η κατανομή της οποίας εκτιμήθηκαν οι παράμετροι, ενώ τα σύμβολα των παραμέτρων αναγράφονται στην παρένθεση. Για κάθε ιδιότητα και για κάθε κατανομή στην πρώτη σειρά στο αντίστοιχο κελίο αναγράφεται η τιμή για την πρώτη παράμετρο της κατανομής, ενώ στην δεύτερη αναγράφεται η τιμή της δεύτερης παραμέτρου.

Στους πίνακες αυτούς μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι οι τιμές των παραμέτρων με τις δύο μεθόδους εκτίμησης είναι ικανοποιητικά κοντά, με τις μεγαλύτερες συγκριτικά διαφορές να παρατηρούνται στην παράμετρο η της Weibull κατανομής και σ των κατανομών ακραίων στοιχείων μεγίστης και ελάχιστης τιμής. Σημειώνεται ότι για αυτές τις κατανομές κατά την μέθοδο MLE επιλύεται ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων και εξ' αυτού υπεισέρχεται και το αριθμητικό σφάλμα της επίλυσης.

Μία πρώτη ένδειξη για το αν οι κατανομές αυτές μπορούν να περιγράψουν σωστά τις υπό εξέταση τυχαίες μεταβλητές είναι η σύγκριση των ροπών των κατανομών αυτών με αυτές του δείγματος. Για παράδειγμα παρουσιάζονται στους πίνακες Π. 9 και Π. 10 οι αμερόληπτες εκτιμήτριες των τεσσάρων πρώτων ροπών του δείγματος για την αντοχή σε εφελκυσμό X_T και το μέτρο ελαστικότητας στην x- διεύθυνση του υλικού $\pm 55^\circ$ και αντίστοιχα αυτές των κατανομών, με χρήση των παραμέτρων που εκτιμήθηκαν. Σημειώνεται ότι για την μέθοδο των ροπών δεν αναγράφεται η μέση τιμή και η διασπορά των κατανομών που προκύπτουν, αφού για την εκτίμηση των παραμέτρων οι δύο πρώτες ροπές του δείγματος πρέπει να εξισωθούν με αυτές των κατανομών. Αυτό ισχύει για όλες τις κατανομές που έχουν επιλεγεί σε αυτή την εφαρμογή, εφόσον αυτές έχουν δύο παραμέτρους.

Έτσι, φαίνεται ότι θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τις κατανομές κανονική ή την γάμα για την ιδιότητα αντοχής και για το μέτρο ελαστικότητας. Αντίστοιχα αποτελέσματα για τις υπόλοιπες ιδιότητες των υλικών παρουσιάζονται στο [3.15]. Η ακρίβεια της μοντελοποίησης των ιδιοτήτων του υλικού μετά από την επιλογή των κατάλληλων κατανομών μπορεί να διερευνηθεί με στατιστικούς ελέγχους. Για πληρότητα, έχουν εκτελεστεί στατιστικοί έλεγχοι για όλες τις κατανομές που παρουσιάστηκαν. Οι έλεγχοι αυτοί παρουσιάζονται στους πίνακες Π. 11 και Π. 12 για τις ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας του υλικού $\pm 55^\circ$, αντίστοιχα, ενώ στον Π. 13 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για τις ιδιότητες του υλικού $\pm 45^\circ$.

Π. 6 Εκτιμήσεις παραμέτρων για τις ιδιότητες αντοχής του υλικού $\pm 55^\circ \text{C/Ep}$

	X_T		X_C		Y_T		Y_C		S	
	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE
Κανονική (μ, σ)	40.490 2.270	40.490 2.210	141.670 23.800	141.670 23.300	177.800 32.360	177.800 31.540	128.660 20.890	128.660 20.450	63.900 7.270	63.900 6.860
Γάμα (λ, η)	7.880 319.100	8.300 335.930	0.250 35.420	0.250 35.080	0.170 30.190	0.180 32.140	0.295 37.920	0.353 45.390	1.210 77.170	1.470 93.770
Λογαριθμική Κανονική (μ, σ)	3.700 0.056	3.700 0.055	4.940 0.170	4.940 0.170	5.160 0.180	5.170 0.180	4.840 0.160	4.850 0.150	4.150 0.110	4.150 0.100
Weibull (σ, η)	41.490 22.210	41.540 19.890	151.450 7.000	151.470 6.800	190.940 6.420	191.240 6.160	137.280 7.260	137.770 5.370	67.000 10.600	67.180 8.360
Ελάχιστο Στοιχείο (μ, σ)	41.510 1.770	41.600 2.080	152.380 18.560	153.200 22.110	192.360 25.230	193.850 30.680	138.060 16.290	140.490 29.240	67.170 5.670	67.710 8.380
Μέγιστο Στοιχείο (μ, σ)	39.470 1.770	39.390 2.020	130.970 18.560	129.840 23.500	163.240 25.230	162.540 26.170	119.260 16.290	120.100 14.980	60.630 5.670	60.910 5.190

Π. 7 Εκτιμήσεις παραμέτρων για τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού $\pm 55^\circ \text{C/Ep}$

	E_X		E_Y		G_{XY}		ν_{XY}	
	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE
Κανονική (μ, σ)	6.380 0726	6.380 0.685	14.190 1.660	14.190 1.580	17.190 2.560	17.190 2.410	0.500 0.058	0.500 0.055
Γάμα (λ, η)	12.100 77.130	13.600 87.060	5.120 72.650	6.060 86.010	2.630 45.210	2.780 47.840	147.000 73.710	178.000 88.890
Λογαριθμική Κανονική (μ, σ)	1.850 0.110	1.850 0.110	2.650 0.120	2.650 0.110	2.820 0.150	2.830 0.150	-0.700 0.110	-0.700 0.110
Weibull (σ, η)	6.690 10.600	6.690 10.680	14.900 10.270	14.930 8.350	18.260 7.980	18.210 8.690	0.525 10.350	0.525 9.150
Ελάχιστο Στοιχείο (μ, σ)	6.710 0.566	6.720 0.652	14.940 1.300	15.050 1.850	18.350 1.990	18.340 2.020	0.530 0.045	0.529 0.057
Μέγιστο Στοιχείο (μ, σ)	6.050 0.566	6.040 0.598	13.440 1.300	13.480 1.230	16.040 1.990	15.940 2.450	0.474 0.045	0.475 0.038

Π. 8 Εκτιμήσεις παραμέτρων για τις ιδιότητες του υλικού $\pm 45^\circ$ C/Ep

	X_T		X_C		S		E_x		G_{xy}		v_{xy}	
	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE
Κανονική (μ, σ)	61.390 5.450	61.390 5.370	123.800 18.680	123.800 18.360	195.130 44.840	195.130 44.090	7.920 1.460	7.920 1.390	15.450 3.070	15.450 2.910	0.830 0.053	0.830 0.050
Γάμα (λ, η)	2.070 127.050	2.210 135.710	0.355 43.900	0.350 43.270	0.097 18.930	0.010 19.470	3.700 29.280	4.030 31.950	1.640 25.350	1.910 29.450	296.000 244.480	338.000 279.310
Λογαριθμική Κανονική (μ, σ)	4.110 0.090	4.110 0.090	4.810 0.150	4.810 0.160	5.250 0.230	5.250 0.230	2.050 0.180	2.050 0.180	2.720 0.200	2.720 0.180	-0.190 0.066	-0.190 0.060
Weibull (σ, η)	63.740 13.780	63.980 10.990	131.580 7.860	131.610 7.700	212.560 4.980	212.640 4.530	8.520 6.320	8.510 6.380	16.680 5.840	16.690 5.600	0.850 19.360	0.850 16.300
Ελάχιστο Στοιχείο (μ, σ)	63.840 4.250	64.260 5.910	132.210 14.570	132.780 16.820	215.300 34.960	218.220 51.200	8.580 1.140	8.620 1.300	16.830 2.390	16.970 2.950	0.850 0.041	0.850 0.053
Μέγιστο Στοιχείο (μ, σ)	58.940 4.250	58.950 3.980	115.400 14.570	114.420 18.530	174.950 34.960	173.880 40.380	7.260 1.140	7.240 1.270	14.070 2.390	14.090 2.260	0.800 0.041	0.800 0.046

Π. 9 Σύγκριση των ροπών για την τάση αστοχίας σε εφελκυσμό X_T

	MOM		MLE			
	$\sqrt{b_1}$	b_2	m'_1	m_2	$\sqrt{b_1}$	b_2
ΔΕΙΓΜΑ	0.054	1.909	40.487	5.137	0.054	1.909
Κανονική	0.000	3.000	40.487	5.137	0.000	3.000
Γάμα	0.112	3.019	40.487	4.880	0.109	3.018
Λογαριθμική Κανονική	0.168	3.050	40.487	4.883	0.164	3.048
Weibull	-0.893	4.410	40.432	6.349	-0.866	4.247
Ελάχιστο Στοιχείο	-1.140	5.400	40.394	7.105	-1.140	5.400
Μέγιστο Στοιχείο	1.140	5.400	40.558	6.709	1.140	5.400

Π. 10 Σύγκριση των ροπών για το μέτρο ελαστικότητας E_x

	MOM		MLE			
	$\sqrt{b_1}$	b_2	m'_1	m_2	$\sqrt{b_1}$	b_2
ΔΕΙΓΜΑ	0.105	1.523	6.379	0.528	0.105	1.523
Κανονική	0.000	3.000	6.379	0.528	0.000	3.000
Γάμα	0.228	3.078	6.379	0.467	0.214	3.069
Λογαριθμική Κανονική	0.343	3.210	6.379	0.473	0.325	3.188
Weibull	-0.662	3.633	6.369	0.567	-0.646	3.591
Ελάχιστο Στοιχείο	-1.140	5.400	6.348	0.699	-1.140	5.400
Μέγιστο Στοιχείο	1.140	5.400	6.387	0.589	1.140	5.400

Συγκεκριμένα, στους πίνακες Π. 11 - Π. 13 παρουσιάζεται η πιθανότητα το δείγμα των διαφόρων ιδιοτήτων του υλικού να ακολουθεί την συγκεκριμένη κατανομή με τις παραμέτρους που έχουν εκτιμηθεί, σύμφωνα με το στατιστικό έλεγχο Kolmogorov-Smirnov. Έτσι λοιπόν ανάλογα με το επίπεδο σημαντικότητας που επιλέγουμε, μπορούμε αντίστοιχα να δεχτούμε ότι το δείγμα ακολουθεί μία συγκεκριμένη κατανομή. Για παράδειγμα, για τις ιδιότητες αντοχής του υλικού, με επίπεδο εμπιστοσύνης 5%, δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία κατανομή, εκτός από την ακραία κατανομή ελαχίστου στοιχείου, η οποία απορρίπτεται για την αντοχή Y_C του υλικού $\pm 55^\circ$, με παραμέτρους προσδιορισμένες με την μέθοδο MLE. Η ίδια κατανομή για την αντοχή Y_C , γίνεται οριακά δεκτή όταν οι παράμετροι της υπολογίζονται με την μέθοδο ροπών. Αντίθετα για τις ιδιότητες αντοχής δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία κατανομή από τις επιλεγμένες. Παρόμοια για τις ιδιότητες του υλικού $\pm 45^\circ$ δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία από τις επιλεγείσες κατανομές, όπως φαίνεται από τον Π. 13.

Στους ίδιους πίνακες παρουσιάζονται με έντονους χαρακτήρες για τις δύο μεθόδους οι κατανομές, οι οποίες έχουν την μεγαλύτερη πιθανότητα να ακολουθούνται από το δείγμα, σύμφωνα με τον στατιστικό έλεγχο, που παρουσιάζεται. Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι παρόλο που σε ορισμένες περιπτώσεις η βέλτιστη κατανομή διαφοροποιείται ανάλογα με την μέθοδο προσδιορισμού των παραμέτρων των κατανομών, εντούτοις οι τιμές είναι πολύ κοντά στις δύο αυτές περιπτώσεις. Τέτοιο παράδειγμα είναι το μέτρο ελαστικότητας E_x του υλικού $\pm 55^\circ$, για το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε την κατανομή Weibull ως καλύτερο μοντέλο για την ιδιότητα με παραμέτρους εκτιμημένες σύμφωνα με την μέθοδο των ροπών, ενώ όταν χρησιμοποιείται η μέθοδος MLE τότε καλύτερη είναι η ακραία κατανομή ελαχίστου στοιχείου. Παρόλα αυτά για την Weibull κατανομή ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov δίνει για τις δύο μεθόδους εκτίμησης παραμέτρων επίπεδο εμπιστοσύνης 80 και 82%.

Για την αποδοχή ή την απόρριψη μίας κατανομής μπορεί να γίνει και γραφικός έλεγχος. Για παράδειγμα στο Σχ. 17 παρουσιάζονται οι αθροιστικές συναρτήσεις πιθανότητας, $F(x)$, για κάθε μία από τις κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν μαζί με την αντίστοιχη του δείγματος για την ιδιότητα αντοχής του υλικού $\pm 45^\circ X_C$. Στο σχήμα, για τον υπολογισμό των αθροιστικών συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι που προέκυψαν από την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Όπως παρατηρείται στο σχήμα η Weibull κατανομή προσομοιάζει τις πειραματικές τιμές καλύτερα από τις υπόλοιπες, όπως υποδεικνύουν και τα αποτελέσματα του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov. Παρόλα αυτά η κατανομή ακραίων στοιχείων ελαχίστων τιμών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ικανοποιητικά για την μοντελοποίηση του δείγματος.

Π. 11 Έλεγχος Kolmogorov-Smirnoff για τις ιδιότητες αντοχής του $\pm 55^\circ \text{C/Ep}$

	X_T		X_C		Y_T		Y_C		S	
Κατανομή	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE
Κανονική	0.976	0.975	0.991	0.993	0.241	0.218	0.184	0.197	0.559	0.568
Γάμα	0.956	0.954	0.937	0.913	0.317	0.282	0.270	0.338	0.603	0.681
Λογ. Κανονική	0.958	0.941	0.884	0.866	0.291	0.302	0.378	0.403	0.617	0.686
Weibull	0.931	0.970	0.959	0.956	0.181	0.215	0.095	0.081	0.345	0.446
Ελάχιστο Στοιχείο	0.875	0.941	0.808	0.782	0.092	0.219	0.055	0.030	0.261	0.382
Μέγιστο Στοιχείο	0.551	0.658	0.681	0.651	0.219	0.237	0.549	0.629	0.467	0.562

Π. 12 Έλεγχος Kolmogorov-Smirnoff για τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού $\pm 55^\circ \text{C/Ep}$

	E_X		E_Y		G_{XY}		v_{XY}	
Κατανομή	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE
Κανονική	0.653	0.600	0.909	0.926	0.899	0.920	0.771	0.740
Γάμα	0.583	0.610	0.949	0.956	0.820	0.848	0.794	0.809
Λογ. Κανονική	0.594	0.531	0.917	0.972	0.591	0.789	0.848	0.816
Weibull	0.803	0.818	0.729	0.731	0.983	0.985	0.560	0.697
Ελάχιστο Στοιχείο	0.707	0.834	0.602	0.612	0.995	0.996	0.452	0.634
Μέγιστο Στοιχείο	0.380	0.425	0.950	0.975	0.606	0.618	0.951	0.896

Π. 13 Έλεγχος Kolmogorov-Smirnoff για τις ιδιότητες του υλικού $\pm 45^\circ \text{C/Ep}$

	X_T		X_C		S		E_X		G_{XY}		v_{XY}	
Κατανομή	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE	MOM	MLE
Κανονική	0.441	0.422	0.933	0.939	0.908	0.927	0.954	0.934	0.722	0.719	0.988	0.996
Γάμα	0.526	0.474	0.773	0.760	0.837	0.863	0.990	0.975	0.853	0.865	0.991	0.998
Λογ. Κανονική	0.728	0.499	0.776	0.698	0.829	0.795	0.988	0.990	0.893	0.898	0.961	0.998
Weibull	0.132	0.222	0.996	0.994	0.924	0.725	0.884	0.879	0.570	0.599	0.894	0.909
Ελάχιστο Στοιχείο	0.075	0.150	0.983	0.916	0.604	0.452	0.699	0.829	0.355	0.454	0.831	0.853
Μέγιστο Στοιχείο	0.804	0.760	0.387	0.473	0.830	0.634	0.981	0.994	0.978	0.951	0.988	0.973

Στο Σχ. 18 παρουσιάζεται το αντίστοιχο με το παραπάνω διάγραμμα για την ιδιότητα αντοχής Y_T του υλικού $\pm 55^\circ$, όπου φαίνεται καθαρά, ότι το δείγμα χωρίζεται σε δύο ομάδες. Οι ομάδες αυτές των πειραματικών αποτελεσμάτων έχουν προκύψει από την χρήση δύο διαφορετικών μηχανών εφελκυσμού, όπως προαναφέρθηκε. Παρόλο που δεν ξεχωρίζει κάποια κατανομή για την ικανοποιητική προσέγγιση του δείγματος, φαίνεται η σχέση των διαφόρων κατανομών που εξετάζονται στην παρούσα εργασία. Η κατανομή γάμα σχεδόν ταυτίζεται με την λογαριθμική κανονική και για αυτό τον λόγο δεν παρουσιάζεται στο σχήμα. Οι κατανομές ακραίων στοιχείων για τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές φαίνεται ότι δημιουργούν μία ζώνη, μέσα στην οποία περιέχονται οι υπόλοιπες κατανομές. Η κατανομή Weibull είναι πιο κοντά στην κατανομή ελαχίστου στοιχείου, ενώ η λογαριθμική κανονική βρίσκεται κοντύτερα στην κατανομή μεγίστου στοιχείου. Η κανονική κατανομή περνάει στο κέντρο της ζώνης. Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι καμία κατανομή δεν έχει απορριφθεί κατά τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov για την ιδιότητα αυτή, όταν η εκτίμηση παραμέτρων γίνεται με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

Σχ. 17 Αθροιστική πιθανότητα για την τάση αστοχίας σε θλίψη X_c του υλικού $\pm 45^\circ$

Στο Σχ. 19 παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας του μέτρου ελαστικότητας κατά την x- διεύθυνση, E_x , του υλικού $\pm 55^\circ$. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι το μέγεθος του δείγματος δεν είναι ικανοποιητικό για την οριστική επιλογή μίας κατανομής, σε σχέση με την βέλτιστη προσομοίωση των πειραματικών αποτελεσμάτων. Για αυτή την ιδιότητα, η Weibull κατανομή προσεγγίζει καλύτερα την πειραματική αθροιστική πιθανότητα στις δύο άκρες, ενώ ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov, έδειξε ότι η καλύτερη επιλογή κατανομής για αυτή την περίπτωση είναι η λογαριθμική κανονική. Παρόλα αυτά, ασχέτως με τον τύπο της κατανομής που επιλέγεται για την μοντελοποίηση του μέτρου ελαστικότητας του υλικού, γίνεται ξεκάθαρη η ανάγκη να περιληφθεί η στοχαστική φύση της ιδιότητας στις αναλύσεις κατασκευών με πιθανότητες. Διαγράμματα αθροιστικής πιθανότητας για τις υπόλοιπες ιδιότητες των υλικών παρουσιάζονται αναλυτικά στο [3.16].

Από την άλλη μεριά, για να δοθεί μία γραφική παράσταση της περιοχής που γίνεται αποδεκτή κατά τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov, παρουσιάζεται για παράδειγμα στο Σχ. 20 το διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας της κανονικής κατανομής, με παραμέτρους που εκτιμήθηκαν με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, για την αντοχή σε διάτμηση, S , του υλικού $\pm 55^\circ$, μαζί με τα όρια που προκύπτουν από τον έλεγχο, καθώς επίσης και τα πειραματικά αποτελέσματα. Τα όρια που προκύπτουν από τον έλεγχο υπολογίζονται αφαιρώντας και προσθέτοντας σε κάθε τιμή της θεωρητικής συνάρτησης πιθανότητας (στην συγκεκριμένη περίπτωση της κανονικής κατανομής), αντίστοιχα για το άνω και κάτω όριο,

την κρίσιμη τιμή του κριτηρίου K-S, D_N^{CR} , όπως αυτή δίνεται σε πίνακες για συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης (σε αυτή την περίπτωση επιλέχθηκε το 5%) και για τον αριθμό των πειραματικών αποτελεσμάτων (σε αυτή την περίπτωση 9). Επομένως για το παράδειγμα της αντοχής σε διάτμηση, S , η κρίσιμη τιμή D_N^{CR} , είναι 0.432. Στο σχήμα το άνω και κάτω όριο παρουσιάζονται με διακεκομμένες γραμμές, ενώ όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει όλες οι πειραματικές τιμές βρίσκονται μέσα στην ζώνη των ορίων. Σε περίπτωση που κάποιο από αυτά έπεφτε έξω από αυτή την ζώνη, τότε η κατανομή θα έπρεπε να απορριφθεί σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5%.

Σχ. 18 Αθροιστική πιθανότητα για την τάση αστοχίας σε θλίψη Y_T του υλικού $\pm 55^\circ$

Σχ. 19 Αθροιστική πιθανότητα για το μέτρο ελαστικότητας E_X του υλικού $\pm 55^\circ$

Σχ. 20 Όρια κατά τον έλεγχο Kolmogorov – Smirnov, για την αθροιστική πιθανότητα της αντοχής σε διάτμηση, S , του υλικού $\pm 55^\circ$

Τα πειραματικά αποτελέσματα έδειξαν ότι η διασπορά των ιδιοτήτων ελαστικότητας είναι το ίδιο σημαντική ή σε ορισμένες περιπτώσεις και μεγαλύτερη με την διασπορά που παρουσιάζουν τα υλικά αυτά στις ιδιότητες αντοχής τους. Σε μία στοχαστική ανάλυση επομένως δεν μπορεί να αμελείται ο παράγοντας της στοχαστικής φύσης των ελαστικών ιδιοτήτων των υλικών αυτών.

Συγκεκριμένα για την τάση αστοχίας των δοκιμών $\pm 55^\circ$, Y_T , όπως φαίνεται από το διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας καμία κατανομή δεν μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά το δείγμα. Αυτό συμβαίνει πιθανώς επειδή κατά την διάρκεια των δοκιμών για τον προσδιορισμό αυτής της τάσης αστοχίας χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές μηχανές λόγω βλάβης της πρώτης μηχανής. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, το σφάλμα της μηχανής στην περίπτωση αυτή μεγεθύνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να γίνεται φανερό στα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα, λοιπόν μπορούν να χωριστούν καθαρά σε δύο ομάδες ανάλογα με την μηχανή. Το σφάλμα της εκάστοτε μηχανής εμπεριέχεται ασφαλώς στα πειραματικά αποτελέσματα των άλλων ιδιοτήτων που εξετάστηκαν, αλλά δεν γίνεται εμφανές στην διασπορά του δείγματος, εφόσον όλα τα πειράματα εκτελέστηκαν στην ίδια κάθε φορά μηχανή. Αντίθετα, στα αποτελέσματα για την τάση αστοχίας Y_T , που εκτελέστηκαν σε διαφορετικές μηχανές ο συντελεστής διασποράς του δείγματος παρουσιάζεται λανθασμένα μεγαλύτερος, καθώς κάνοντας στατιστική ανάλυση ξεχωριστά στις δύο ομάδες ο συντελεστής διασποράς προκύπτει περίπου 6% για την κάθε ομάδα.

Αντίστοιχα θέλοντας να βελτιώσουμε την εικόνα του δείγματος για κάθε μία από τις ιδιότητες των υλικών θα μπορούσαμε να απορρίψουμε κάποιες ακραίες τιμές που παρουσιάζονται, 2 ή 3 σε κάθε ομάδα, πετυχαίνοντας κατ' αυτό το τρόπο μεγαλύτερη ομοιομορφία των αποτελεσμάτων. Αυτό συμβαίνει κυρίως στα πειράματα κατά την θλίψη που ορισμένες μικρές τιμές αστοχίας δοκιμών, πολύ μικρότερες από το μέσο όρο του δείγματος μπορούν να αποδοθούν σε λυγισμό του δοκιμίου, παρόλο που είχε προβλεφθεί διάταξη αποτροπής του λυγισμού των δοκιμών κατά την πειραματική διαδικασία. Ο λυγισμός αυτός πιθανόν να έγινε σε μικρό μέρος του δοκιμίου και επειδή δεν υπήρχε συσκευή που να ανιχνεύει μετατοπίσεις εκτός του επιπέδου του δοκιμίου ή μικρές αποστρωματοποιήσεις δεν μπόρεσε να γίνει αντιληπτός.

Εκτός αυτού πολύ μεγάλες τιμές αστοχίας κατά την διάρκεια των θλιπτικών πειραμάτων μπορούν να αποδοθούν σε στιγμιαία επαφή της αντιλυγισμικής διάταξης, με αποτέλεσμα μέρος του φορτίου να παραλαμβάνεται από τα χαλύβδινα μέρη της διάταξης και όχι από το δοκίμιο. Έτσι απορρίπτοντας και αυτές τις τιμές των τάσεων αστοχίας πετυχαίνουμε μικρότερο συντελεστή διασποράς για το συγκεκριμένο δείγμα.

Η αρνητική εκθετική κατανομή καθώς επίσης και η κατανομή Rayleigh δεν είναι κατάλληλες για την περιγραφή των ιδιοτήτων ελαστικότητας και αντοχής των υπό εξέταση υλικών. Αυτό γίνεται φανερό όχι μόνο από την εξέταση των διαγραμμάτων αθροιστικής πιθανότητας της κάθε ιδιότητας, αλλά και από τις ροπές, που ήδη από την δεύτερης τάξης ροπή (διασπορά) έχουν μεγάλη διαφορά από αυτή του δείγματος. Ίσως να μπορούμε να πάρουμε μία πιο συγκεκριμένη εικόνα του δείγματος εκτελώντας περισσότερα πειράματα κυρίως για τις ελαστικές ιδιότητες των υπό εξέταση υλικών, όπως έγινε στην περίπτωση του συνθέτου υλικού γυαλιού πολυεστέρα.

3.9 Στατιστική αξιολόγηση αντοχής και ελαστικών ιδιοτήτων ινωδών συνθέτων υλικών Glass/Polyester

Από τα πειραματικά αποτελέσματα για τα δοκίμια GI/P εκτιμήθηκαν οι παράμετροι των στατιστικών κατανομών Κανονική, Λογαριθμική Κανονική, Γάμα, Weibull, Ασυμπτωτική κατανομή τύπου I μικρότερου στοιχείου και Ασυμπτωτική κατανομή τύπου I μέγιστου στοιχείου, σε αντιστοιχία με την στατιστική ανάλυση που εκτελέστηκε για το υλικό C/Ep. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των κατανομών αυτών έγινε με την μέθοδο των ροπών και με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας. Στον πίνακα Π. 14 παρουσιάζονται για κάθε ιδιότητα του υλικού GI/P μόνο τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων των παραμέτρων των συναρτήσεων με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, αφού οι διαφορές που προέκυψαν ανάμεσα στα αποτελέσματα των δύο μεθόδων εκτίμησης ήταν αντίστοιχες με αυτές που παρουσιάστηκαν για το C/Ep στο προηγούμενο εδάφιο.

Π. 14 Παράμετροι κατανομών για τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού GI/P

Ιδιότητα	Κανονική (μ, σ)	Weibull (σ, η)	Λογ. Κανονική (μ, σ)	Γάμα (λ, η)	Μεγίστου Στ. (μ, σ)	Ελαχίστου Στ. (μ, σ)
X_T (MPa)	397.94 55.93	442.49 7.56	5.98 0.14	0.13 50.32	372.37 44.31	423.50 44.31
X_C (MPa)	329.11 32.34	344.24 10.36	5.79 0.10	0.32 106.30	314.31 25.65	343.91 25.65
Y_T (MPa)	36.22 5.88	38.78 6.37	3.58 0.16	1.08 39.00	33.53 4.66	38.91 4.66
Y_C (MPa)	147.34 14.70	154.08 10.60	4.99 0.10	0.68 100.59	140.62 11.66	154.07 11.66
S (MPa)	16.02 2.30	17.00 8.00	2.76 0.15	2.79 44.75	14.97 1.82	17.08 1.82
E_X (GPa)	22.88 2.07	23.88 9.81	3.13 0.09	5.58 127.82	21.93 1.65	23.84 1.65
E_Y (GPa)	7.88 1.58	8.54 4.98	2.05 0.19	3.39 26.74	7.16 1.25	8.61 1.25
G_{XY} (GPa)	1.67 0.37	1.82 4.62	0.49 0.21	13.07 21.77	1.50 0.29	1.84 0.29
ν_{XY}	0.30 0.05	0.32 6.91	-1.21 0.17	113.33 34.30	0.28 0.04	0.32 0.04

Στην συνέχεια εκτελέστηκε στατιστικός έλεγχος Kolmogorov-Smirnov, για να εξετασθεί αν οι κατανομές αυτές γίνονται αποδεκτές για την περιγραφή των δειγμάτων των ιδιοτήτων του υλικού. Τα αποτελέσματα του ελέγχου παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 15, δηλαδή το επίπεδο σημαντικότητας για το οποίο το δείγμα των διαφόρων ιδιοτήτων του υλικού

Κεφάλαιο 3: Στατιστική Αξιολόγηση Πειραματικών Μετρήσεων

ακολουθεί την συγκεκριμένη κατανομή με τις παραμέτρους που έχουν εκτιμηθεί, σύμφωνα με το στατιστικό έλεγχο Kolmogorov-Smirnov. Παρατηρούμε ότι για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ δεν απορρίπτεται καμία κατανομή. Με έντονους χαρακτήρες σημειώνεται η κατανομή που προσεγγίζει κατά τον βέλτιστο δυνατό τρόπο το δείγμα, δηλαδή παρουσιάζει το μέγιστο επίπεδο σημαντικότητας ανάμεσα στις επιλεγείσες κατανομές. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο στατιστικός έλεγχος εκτελέστηκε για τα αποτελέσματα και των δύο μεθόδων προσέγγισης παραμέτρων, με παρόμοια αποτελέσματα. Στον πίνακα Π. 15 όμως, αναγράφονται μόνο τα αποτελέσματα για παραμέτρους κατανομών προσδιορισμένες με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας.

Π. 15 Έλεγχος Kolmogorov-Smirnoff για τις ιδιότητες του υλικού GI/P

Ιδιότητα	Κανονική	Weibull	Λογ. Κανονική	Γάμα	Μεγίστου Στ.	Ελαχίστου Στ.
X_T (MPa)	.9913	.8187	.9367	.9725	.5887	.4978
X_C (MPa)	.7699	.5943	.8911	.8509	.9561	.2357
Y_T (MPa)	.7956	.4986	.9114	.8868	.9634	.2625
Y_C (MPa)	.7763	.5444	.9147	.8756	.9823	.2350
S (MPa)	.9795	.9278	.7887	.8802	.5673	.8536
E_X (GPa)	.8765	.4963	.9437	.9222	.8986	.3635
E_Y (GPa)	.9467	.8081	.9986	.9949	.9998	.4134
G_{XY} (GPa)	.6043	.6642	.7922	.7219	.9315	.2365
ν_{XY}	.9901	.9888	.8770	.9294	.5548	.8286

Από τα αποτελέσματα του ελέγχου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι πιο πολλές ιδιότητες μοντελοποιούνται εξ' ίσου καλά με περισσότερες της μίας κατανομές. Για παράδειγμα το μέτρο ελαστικότητας κάθετα στην διεύθυνση των ινών, E_Y , μοντελοποιείται εξ' ίσου καλά με την ακραίου τύπου κατανομή μεγίστου στοιχείου, αλλά και με την Κανονική, την Λογαριθμική κανονική και την Γάμα, όπου όλες έχουν επίπεδο εμπιστοσύνης μεγαλύτερο του 90%. Αντίστοιχα, ο λόγος Poisson, μπορεί να μοντελοποιηθεί εκτός από την Κανονική κατανομή με τις Weibull και Γάμα.

Στα Σχ. 21 ως Σχ. 25 παρουσιάζονται οι αθροιστικές συναρτήσεις πιθανότητας για ορισμένες κάθε φορά από τις κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν μαζί με την αντίστοιχη του δείγματος για τις ιδιότητες αντοχής του υλικού X_T , X_C , Y_T , Y_C , S αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό των αθροιστικών συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι που προέκυψαν από την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Με αυτό τον τρόπο γίνεται δυνατός και ο γραφικός έλεγχος των αποτελεσμάτων.

Στο Σχ. 21 παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας από τις πειραματικές τιμές για την τάση αστοχίας σε εφελκυσμό παράλληλα στην διεύθυνση των ινών, X_T , μαζί με τις αντίστοιχες από τις κατανομές Κανονική (NORMAL), ακραία κατανομή μεγίστου στοιχείου (LARGEST) και Λογαριθμική κανονική (LOGNORMAL). Ενώ είναι σαφές ότι ο γραφικός έλεγχος επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα του στατιστικού, εφόσον η Κανονική κατανομή προσεγγίζει καλύτερα τις πειραματικές τιμές, η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας για την ακραίου τύπου κατανομή μεγίστου στοιχείου είναι αρκετά κοντά στο δείγμα, κυρίως σε μέσες τιμές πιθανότητας. Αυτό επιβεβαιώνει εξάλλου το γεγονός ότι καμία κατανομή δεν απορρίφθηκε κατά τον στατιστικό έλεγχο.

Σχ. 21 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας για την τάση αστοχίας σε εφελκυσμό X_T

Αντίθετα, στο Σχ. 22, όπου παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας για την αντοχή σε θλίψη παράλληλα με την διεύθυνση των ινών, X_C , παρατηρούμε μεγαλύτερη απόκλιση από τα πειραματικά δεδομένα για τις αθροιστικές συναρτήσεις πιθανότητας της κανονικής και της Weibull κατανομής. Όμως, ενώ η ακραίου τύπου κατανομή μεγίστου στοιχείου ακολουθεί τα δεδομένα καλύτερα από τις άλλες δύο, για μικρές τιμές πιθανότητας, π.χ. 10% οι πειραματικές τιμές βρίσκονται ανάμεσα στην κανονική κατανομή και στην μεγίστου στοιχείου. Σημειώνεται, δε, ότι ούτε σε αυτή την περίπτωση έχει απορριφθεί καμία κατανομή κατά τον στατιστικό έλεγχο.

Το ίδιο συμβαίνει και στο Σχ. 23, όπου παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για την αντοχή σε εφελκυσμό κάθετα στην διεύθυνση των ινών, Y_T . Στο διάγραμμα αυτό παρουσιάζεται και η συνάρτηση της γάμα κατανομής, η οποία διαφέρει ελάχιστα από τις άλλες δύο, ενώ σημειώνεται ότι η λογαριθμική κατανομή σχεδόν ταυτίζεται με την γάμα. Αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα για την τάση αστοχίας σε θλίψη κάθετα στην διεύθυνση των ινών, Y_C , που παρουσιάζονται στο Σχ. 24.

Με οπτικό έλεγχο του διαγράμματος αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας για την αντοχή σε διάτμηση, S , είναι δύσκολο να εξαγεί κανείς συμπέρασμα για το ποιά από τις κατανομές είναι καταλληλότερη να προσεγγίσει τα πειραματικά αποτελέσματα. Και οι τρεις κατανομές που φαίνονται στο Σχ. 25, Κανονική, Weibull και Λογαριθμική κανονική είναι πολύ κοντά στο δείγμα. Με μία πιο λεπτομερειακή παρατήρηση, θα ξεχώριζε κανείς ότι στο πρώτο μισό του διαγράμματος, δηλαδή μέχρι πιθανότητα 50% τα δεδομένα ακολουθούνται από την κατανομή Weibull, ενώ στο δεύτερο μισό είναι λίγο πιο κοντά στην κανονική κατανομή, μέχρι να ξαναγυρίσουν σε πολύ μεγάλες τιμές της πιθανότητας στην Weibull.

Σχ. 22 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας για την τάση αστοχίας σε θλίψη X_c

Σχ. 23 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας για την τάση αστοχίας σε εφελκυσμό Y_t

Αντίστοιχα στα Σχ. 26 ως Σχ. 29 παρουσιάζονται οι αθροιστικές συναρτήσεις πιθανότητας για τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού E_x , E_y , G_{xy} , ν_{xy} , αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που προκύπτουν με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας. Συγκεκριμένα στο Σχ. 26, όπου παρουσιάζεται το διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας του μέτρου ελαστικότητας παράλληλα στην διεύθυνση των ινών, E_x , μπορούμε να παρατηρήσουμε την ύπαρξη μίας ακραίας, μεμονωμένης πειραματικής τιμής. Η τιμή αυτή θα μπορούσε να απορριφθεί, ούτως ώστε να μειωθεί η διασπορά του δείγματος. Επειδή δεν υπήρχε καμία ένδειξη ότι το πείραμα διέφερε από τα υπόλοιπα, δεν ήταν δυνατή η απόρριψή της, μόνο εκ του αποτελέσματος. Παρατηρούμε επίσης, ότι το δείγμα περνάει ανάμεσα από τις κατανομές κανονική και ακραίου τύπου I μεγίστου στοιχείου, όπου ακριβώς είναι η θέση της λογαριθμικής κανονικής κατανομής, που δεν παρουσιάζεται εδώ για λόγους ευκρίνειας.

Σχ. 24 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας της τάσης αστοχίας σε θλίψη Y_c

Σχ. 25 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας της τάσης αστοχίας σε διάτμηση S

Σχ. 26 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας του μέτρου ελαστικότητας E_x

Τα διαγράμματα αθροιστικών συναρτήσεων πιθανότητας του μέτρου ελαστικότητας κάθετα στην διεύθυνση των ινών, E_y και του μέτρου διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης, G_{xy} , στα Σχ. 27 και Σχ. 28 παρουσιάζουν μεγάλες ομοιότητες μεταξύ τους. Έτσι και στα δύο φαίνεται ότι η κατανομή που προσεγγίζει τα πειραματικά αποτελέσματα κατά τον καλύτερο τρόπο είναι η ακραίου τύπου I για τις μέγιστες τιμές, επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματα του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov.

Σχ. 27 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας του μέτρου ελαστικότητας E_y

Σχ. 28 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας του μέτρου διάτμησης G_{XY}

Τέλος στο Σχ. 29 όπου παρουσιάζεται το διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας για τον λόγο Poisson, ν_{XY} , δεν είναι εύκολο να βγει συμπέρασμα οπτικά για την καλύτερη κατανομή. Φαίνεται ότι στο μεγαλύτερο τμήμα του διαγράμματος, στην κεντρική περιοχή, τιμές πιθανότητας από 20-80%, οι πειραματικές τιμές είναι πολύ κοντά στην κανονική κατανομή. Στις ακραίες τιμές, όμως, το δείγμα προσεγγίζεται καλύτερα από την κατανομή Weibull.

Σχ. 29 Διάγραμμα αθροιστικής πιθανότητας του λόγου Poisson ν_{XY}

Στην αναζήτηση της κατανομής που προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά δεδομένα, δεν έχει σημασία μόνο κάποιος στατιστικός έλεγχος. Ιδιαίτερο ρόλο για παράδειγμα, όσον αφορά τις ιδιότητες αντοχής του υλικού, έχει και πόσο καλά προσεγγίζει το μοντέλο το δείγμα για τιμές πιθανότητας έως 10%, εφόσον από εκεί εξάγονται συμπεράσματα για τις επιτρεπόμενες τάσεις κατά τον σχεδιασμό κατασκευών. Για παράδειγμα αν θέλουμε να εξάγουμε το ποσοστιαίο σημείο 5% για την αντοχή σε θλίψη παράλληλα στην διεύθυνση των ινών, X_C , και επιλέξουμε ανάμεσα στις κατανομές που φαίνονται στο Σχ. 22 τότε θα καταλήξουμε σε

τιμή 260MPa περίπου αν το δείγμα ακολουθεί την Weibull κατανομή, σε 275MPa αν ακολουθεί την κανονική και 285MPa αν θεωρήσουμε ότι το δείγμα ακολουθεί την ακραίου τύπου I κατανομή για τις μέγιστες τιμές.

Περισσότερες λεπτομέρειες για την στατιστική ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων αντοχής και ελαστικότητας Glass/Polyester παρουσιάζονται στο [3.17].

3.10 Στατιστική αξιολόγηση συντελεστών θερμικής διαστολής ινωδών συνθέτων υλικών Glass/Polyester

Για τον στατιστικό προσδιορισμό του τανυστή των συντελεστών θερμικής διαστολής, εκπονήθηκε ένα πρόγραμμα 155 πειραμάτων χρησιμοποιώντας δύο βασικά υαλοϋφάσματα που χρησιμοποιούνται εκτεταμένα για την κατασκευή πτερυγίων ανεμογεννητριών από σύνθετα υλικά και πολύστρωτη πλάκα με συνδυασμό στρώσεων των παραπάνω βασικών υαλοϋφασμάτων. Για την μοντελοποίηση της κατανομής πιθανότητας των συντελεστών θερμικής διαστολής της πειραματικής βάσης δεδομένων των δοκιμών που εξετάστηκαν χρησιμοποιήθηκαν δύο στατιστικές κατανομές, η Κανονική κατανομή και η κατανομή Weibull, ενώ οι παράμετροι των κατανομών αυτών προσδιορίστηκαν με την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας. Η καταλληλότητά αυτών των κατανομών, για την μοντελοποίηση των συγκεκριμένων τυχαίων μεταβλητών εξετάστηκε με τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov και βρέθηκε ότι και οι δύο μπορούν εξίσου καλά να χρησιμοποιηθούν για την προσομοίωση των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Το μέγεθος του δείγματος των μετρήσεων των ΣΘΔ είναι αρκετά μεγάλο για να γίνει η στατιστική τους μοντελοποίηση εκτός από τις θερμικές ιδιότητες κατά το πάχος των πλακών, όπου τα πειράματα εκτελέστηκαν μόνο για λόγους σύγκρισης. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας εκτιμήθηκαν οι παράμετροι κάθε κατανομής, Κανονικής και Weibull, όπως παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 16.

Π. 16 Παράμετροι κατανομών συντελεστών θερμικής διαστολής GI/P

		Κανονική		Weibull	
Διάταξη	Ιδιότητα	μ	σ	σ	η
UD	α_x	9.132	0.987	9.589	9.051
	α_y	46.044	3.021	47.429	18.451
BD	α_x	26.867	5.851	29.096	5.982
MD	α_x	10.260	1.324	10.810	9.308
	α_y	37.357	4.161	39.157	10.647

Για την εξέταση της καταλληλότητας των κατανομών με τις συγκεκριμένες παραμέτρους, εκτελέστηκαν έλεγχοι Kolmogorov-Smirnov. Τα αποτελέσματα των ελέγχων, όπου D_N είναι τα στατιστικό μέγεθος του ελέγχου και $P(D > D_N)$ είναι η πιθανότητα ότι η κατανομή του πληθυσμού να ακολουθεί την συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 17. Από τον πίνακα αυτό φαίνεται ότι παρόλο που και οι δύο θεωρητικές κατανομές γίνονται αποδεκτές, η Κανονική κατανομή ταιριάζει περισσότερο στα πειραματικά αποτελέσματα του ΣΘΔ των UD δοκιμών κατά την διεύθυνση των ινών, ενώ η κατανομή Weibull ταιριάζει καλύτερα στα υπόλοιπα. Παρόλα αυτά και οι δύο κατανομές συμπεριφέρονται καλά εφόσον οι προαναφερθείσες διαφορές επικεντρώνονται στις ακραίες τιμές.

Π. 17 Αποτελέσματα ελέγχου Kolmogorov-Smirnov

Διάταξη	Ιδιότητα	Κανονική		Weibull	
		D_N	$P(D > D_N)$	D_N	$P(D > D_N)$
UD	α_x	.099	.927	.133	.649
	α_y	.158	.720	.128	.910
BD	α_x	.212	.118	.175	.286
MD	α_x	.087	.970	.074	.995
	α_y	.135	.616	.105	.879

Χαρακτηριστικά γραφήματα πειραματικών αθροιστικών κατανομών σε σύγκριση με τις αντίστοιχες θεωρητικές παρουσιάζονται στα Σχ. 30 ως Σχ. 32. Συγκεκριμένα, στο Σχ. 30 όπου παρουσιάζεται η αθροιστική κατανομή για τον ΣΘΔ κατά την διεύθυνση των ινών της UD πλάκας, φαίνεται ότι και οι δύο θεωρητικές κατανομές προσεγγίζουν καλά τα πειραματικά δεδομένα. Αντίστοιχα στο Σχ. 31 παρουσιάζεται η αθροιστική κατανομή του ΣΘΔ της BD πλάκας. Σε αυτό το διάγραμμα, ενώ φαίνεται ότι καμία από τις δύο θεωρητικές κατανομές δεν προσεγγίζει καλά τα πειραματικά αποτελέσματα, δεν μπορεί να απορριφθεί καμία από τις δύο, όπως έδειξε ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov. Τέλος, στο Σχ. 32 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα του ΣΘΔ της MD πλάκας στην y -διεύθυνση. Οπτική παρατήρηση σε αυτή την περίπτωση έρχεται να ενισχύσει τα αποτελέσματα του στατιστικού ελέγχου υποθέσεων, όπου οι δύο θεωρητικές κατανομές φαίνεται ότι ακολουθούν καλά τα πειραματικά δεδομένα.

Σχ. 30 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του συντελεστού θερμικής διαστολής κατά την διεύθυνση των ινών των UD στρώσεων

Σχ. 31 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του συντελεστού θερμικής διαστολής των BD στρώσεων

Σχ. 32 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του συντελεστού θερμικής διαστολής στην y- διεύθυνση της πολύστρωτης MD

Περισσότερες λεπτομέρειες για την στατιστική ανάλυση των πειραματικών αποτελεσμάτων συντελεστών θερμικής διαστολής βρίσκονται στο [3.18].

3.11 Παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth

Ως παράδειγμα για την εφαρμογή του αναπτύγματος Edgeworth, που παρουσιάστηκε σε προηγούμενο εδάφιο επιλέχθηκε η κατανομή της τάσης αστοχίας παράλληλα στην διεύθυνση των ινών σε εφελκυσμό και θλίψη, X_T και X_C αντίστοιχα. Υπενθυμίζεται ότι για αυτές τις μεταβλητές βρέθηκε από την παραπάνω στατιστική ανάλυση ότι καταλληλότερες για την προσέγγιση των πειραματικών αποτελεσμάτων ήταν η κανονική κατανομή (NORMAL) και η κατανομή μεγίστου στοιχείου (LARGEST) αντίστοιχα. Έτσι στο Σχ. 33 παρουσιάζεται η αθροιστική κατανομή των πειραματικών αποτελεσμάτων για την X_T σε σύγκριση με την εκτίμηση της αθροιστικής κατανομής με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth (EDW) και την κανονική κατανομή (NORMAL). Όπως παρατηρείται από το σχήμα η ήδη καλή προσέγγιση με την κανονική κατανομή βελτιώνεται ελάχιστα, εφόσον η κανονική και το ανάπτυγμα Edgeworth με δύο όρους είναι σχεδόν ταυτόσημα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι για την εφαρμογή με το ανάπτυγμα Edgeworth, χρησιμοποιείται η σχέση (3.27), ανάλογα με τον αριθμό των όρων με τους οποίους θέλουμε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής. Έτσι, κανονικοποιούμε την μεταβλητή, x , εφαρμόζοντας την σχέση (3.30) και χρησιμοποιώντας την μέση τιμή και την διασπορά της μεταβλητής (στην συγκεκριμένη περίπτωση, η μέση τιμή και η διασπορά υπολογίστηκαν από την στατιστική ανάλυση των πειραματικών δεδομένων). Στην συνέχεια εισάγουμε στην σχέση (3.27), έχοντας υπόψη ότι οι τρίτης, τέταρτη και έκτης τάξης παράγωγοι, $\Phi^{(3)}(z)$, $\Phi^{(4)}(z)$ και $\Phi^{(6)}(z)$ αντίστοιχα, της Κανονικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας $\Phi(z)$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\Phi^{(3)}(z) = (z^2 - 1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$\Phi^{(4)}(z) = -(z^3 - 3z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

$$\Phi^{(6)}(z) = -(z^5 - 10z^3 + 15z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.27) και χρησιμοποιώντας την τρίτη κεντρική ροπή (όταν χρησιμοποιείται το ανάπτυγμα με δύο όρους) ή και την τέταρτη κεντρική ροπή (όταν χρησιμοποιείται το ανάπτυγμα με τρεις όρους) υπολογίζεται η $F(a)$ για τις τιμές του a που μας ενδιαφέρουν.

Σχ. 33 Σύγκριση της αθροιστικής κατανομής της X_T με την κατανομή με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth

Μεγαλύτερη βελτίωση της προσέγγισης της αθροιστικής κατανομής της μεταβλητής με την μέθοδο Edgeworth παρατηρούμε στο Σχ. 34 όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την μεταβλητή X_C . Υπενθυμίζοντας ότι το ανάπτυγμα Edgeworth με ένα όρο ταυτίζεται με την κανονική κατανομή, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση της μεταβλητής X_C με δύο όρους (EDW) είναι σαφώς βελτιωμένη. Η προσέγγιση με τρεις όρους δεν βελτιώνει σημαντικά το αποτέλεσμα και δεν δείχνεται στο σχήμα για λόγους ευκρίνειας. Στην περίπτωση της μεταβλητής X_C η βέλτιστη προσέγγιση εξακολουθεί και γίνεται με την κατανομή ακραίου τύπου για τα μέγιστα στοιχεία (LARGEST).

Σχ. 34 Σύγκριση της αθροιστικής κατανομής X_C με αυτή από την μέθοδο Edgeworth

3.12 Παράδειγμα εφαρμογής αθροιστικής κατανομής από την οικογένεια Pearson

Ως παράδειγμα της εφαρμογής της μεθόδου επιλέχθηκε η μεταβλητή του λόγου Poisson στο επίπεδο της στρώσης v_{xy} . Στο Σχ. 35 παρουσιάζεται η πειραματική αθροιστική κατανομή του v_{xy} , σε σύγκριση με την προσέγγιση με τύπου I κατανομή από την οικογένεια κατανομών Pearson. Σημειώνεται ότι εν γένει για την εφαρμογή της κατανομής Pearson, πρώτα διερευνάται ποιος τύπος κατανομής ακολουθείται χρησιμοποιώντας τις ροπές της μεταβλητής. Ο συνδυασμός των στατιστικών ροπών του δείγματος από τα πειραματικά δεδομένα του v_{xy} , σε συνδυασμό με τις εξισώσεις (3.32) και (3.34), έχουν ως αποτέλεσμα το πολυώνυμο της Εξ.(3.33) να έχει ρίζες πραγματικές και αντιθέτου πρόσημου. Έτσι οι παράμετροι της τύπου I κατανομής υπολογίστηκαν μέσω των σχέσεων (3.37) και εισήχθησαν στην (3.36) για τον υπολογισμό του $F(a)$ για ένα εύρος τιμών του a (δηλαδή τιμών λόγου Poisson) και προσεγγίστηκε η κατανομή.

Η προσέγγιση φαίνεται ιδιαίτερα ικανοποιητική. Στο ίδιο διάγραμμα παρατίθεται και η κανονική κατανομή, η οποία για την συγκεκριμένη παράμετρο βρέθηκε ότι προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα με τον έλεγχο Kolmogorov – Smirnov. Παρόλο όμως που η προσέγγιση είναι αρκετά καλή μέσω των εμπειρικών κατανομών της οικογένειας Pearson, δεν υπάρχει σημαντική βελτίωση σε σχέση με την ήδη καλή πρόβλεψη με την κανονική κατανομή.

Σχ. 35 Σύγκριση αθροιστικής κατανομής του v_{xy} με προσέγγιση από την οικογένεια κατανομών Pearson

3.13 Συμπεράσματα

Η στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η διασπορά των ελαστικών ιδιοτήτων των υλικών είναι σημαντική, αντίθετα με τα όσα αναφέρονται στην βιβλιογραφία. Αυτό σημαίνει ότι για μία στοχαστική σχεδιαστική ανάλυση πρέπει να συμπεριλαμβάνεται η στοχαστική φύση των ελαστικών ιδιοτήτων τέτοιων υλικών.

Επίσης η στατιστική ανάλυση κυρίως των ιδιοτήτων της αντοχής των υλικών αυτών έδειξε ότι τα στοχαστικά αυτά μεγέθη μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά με αρκετά από τα γνωστά στατιστικά μοντέλα, όπως είναι η κανονική κατανομή και η κατανομή Weibull.

Από την άλλη πλευρά, η στατιστική επεξεργασία των συντελεστών θερμικής διαστολής ορισμένων πολυστρώτων πλακών ινών γυαλιού σε πολυεστερική μήτρα, φανερώνει ότι η διασπορά τους είναι αρκετά μεγάλη και πιθανόν σημαντική για έναν ολοκληρωμένο σχεδιασμό βάσει της αξιοπιστίας. Τα πειραματικά αποτελέσματα των ΣΘΔ του GRP συνθέτου υλικού που χρησιμοποιήθηκαν μοντελοποιήθηκαν με δύο στατιστικές κατανομές, την Κανονική και την Weibull, οι οποίες βρέθηκαν εξίσου κατάλληλες για τον σκοπό αυτό.

3.14 Βιβλιογραφία

- [3.1] ISO 2602-1980, *Statistical interpretation of test results - Estimation of the mean – Confidence interval*, 2nd Edition, 1980.
- [3.2] DIN 53 598, *Prüfung von Kautschuk und Elastomeren; Statistische Auswertung von Messergebnissen*, Vornorm, Blatt 1, Juli 1967 (στα Γερμανικά)
- [3.3] DIN 53 804, *Prüfung von Textilien; Auswertung der Messergebnisse*, Januar 1961 (στα Γερμανικά)
- [3.4] A. H.-S. Ang, W. H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design; Decision, Risk, and Reliability*, Vol. II, John Wiley & Sons, New York, 1984
- [3.5] G. J. Hahn & S. S. Shapiro, *Statistical Models in Engineering*, John Wiley & Sons, Inc, 1994
- [3.6] H. Cramer, *Mathematical methods of statistics*, Princeton University Press, Princeton, 1971
- [3.7] L. F. Tenn, Statistical analysis of fibrous composite strength data, in *Test methods and design allowables for fibrous composites*, ASTM STP 734, pp. 229-244, 1981
- [3.8] G. Van Vinckenroy, *Monte Carlo-based Stochastic Finite Element Method: An application to Composite Structures*, Doctor thesis, Vrije Universiteit Brussel, 1994
- [3.9] B. H. Jones, *Probabilistic Design and Reliability*, in *Composite Materials*, Vol.8, Structural design and Analysis, Part II, ed. L. J. Broutman, R. H. Krock, Academic Press, New York, 1975
- [3.10] C. T. Sun, S. E. Yamada, *Strength distribution of a unidirectional fiber composite*, J. Composite Materials, Vol. 12, pp. 169-176, April 1978
- [3.11] A. H.-S. Ang, W. H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design- basic principles*, Vol.1, John Wiley & Sons, 1975
- [3.12] A. Stuart, J. K. Ord, *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, 5th Edition, Vol.1, Charles Griffin & Co. Ltd, London, 1987
- [3.13] W. H. Press, S. A. Teukolosky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran-The art of scientific computing*, Cambridge University Press, 2nd Ed., 1994
- [3.14] M. A. Stephens, *Use of Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises and related statistics without extensive Tables*, J. of the Royal Statistical Society, ser. B, Vol. 32, pp. 115-122, 1970
- [3.15] Θ. Π. Φιλίππιδης, Δ. Ι. Λεκού, *Στατιστική αξιολόγηση πειραματικών μετρήσεων θερμομηχανικών ιδιοτήτων ινωδών συνθέτων υλικών*, Εσ. Αναφορά, Πανεπιστήμιο Πατρών 1998
- [3.16] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, D. G. Aggelis, *Mechanical property distribution of CFRP filament wound composites*, Composite Structures, Vol. 45, pp. 41-50, 1999
- [3.17] D. J. Lekou, T. P. Philippidis, *Mechanical property variability in FRP laminates and its effect on failure prediction*, Composites Part B: Engineering, Vol. 39, pp. 1247-1256 2008

- [3.18] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, G. A. Kalogiannakis, *On the stochastic nature of thermomechanical properties in Glass reinforced polyester laminates*, Composite Structures, Vo. 49, pp.293-301, 2000

4 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Πολλές φορές κάποια παράμετρος του προβλήματος δίνεται ως συνάρτηση περισσότερων μεταβλητών. Στην περίπτωση κατασκευών από σύνθετα υλικά τέτοιες παράμετροι μπορεί να είναι απλά το πάχος της πολύστρωτης, το οποίο δίνεται ως το άθροισμα του πάχους των στρώσεων που την απαρτίζουν, ή πιο πολύπλοκες παράμετροι, όπως οι φαινόμενες ιδιότητες της πολύστρωτης ή η συνάρτηση αστοχίας. Σε περίπτωση που είναι γνωστά τα στατιστικά χαρακτηριστικά των βασικών παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται η ζητούμενη μεταβλητή μία πρώτη προσέγγιση των στατιστικών χαρακτηριστικών αυτής είναι οι ροπές.

4.1 Ροπές συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η μέθοδος των ροπών (generation of system moments), η οποία λέγεται και διάδοση του στατιστικού σφάλματος (statistical error propagation) ή μέθοδος δέλτα (delta method) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των ροπών της παραμέτρου που δίνεται ως συνάρτηση πολλών μεταβλητών, ή αλλιώς του συστήματος [4.1].

Έστω παράμετρος (ή σύστημα) $z = z(\mathbf{X})$ με $\mathbf{X}$ το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών. Τότε αναπτύσσοντας την z σε σειρά Taylor των n μεταβλητών γύρω από το $\boldsymbol{\mu}_{1X}$, $\boldsymbol{\mu}_{1X}^T = [\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1n}]$, όπου μ_{1i} είναι η μέση τιμή της μεταβλητής X_i και αμελώντας όρους μεγαλύτερης της δεύτερης τάξης είναι:

$$z(\mathbf{X}) \cong z(\boldsymbol{\mu}_{1X}) + z_i(\boldsymbol{\mu}_{1X})\bar{X}_i + \frac{1}{2} z_i^{(2)}(\boldsymbol{\mu}_{1X})\bar{X}_i^2 + z_{ij}^{(2)}(\boldsymbol{\mu}_{1X})\bar{X}_i \bar{X}_j \quad (4.1)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός:

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_{1X} \quad (4.2)$$

ενώ στην έκφραση (4.1) υπονοείται η άθροιση όρων επαναλαμβανόμενων δεικτών και οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $z(\mathbf{X})$ ως προς τις μεταβλητές X_i συμβολίζονται με:

$$z_i(\mathbf{X}) = \frac{\partial z(\mathbf{X})}{\partial X_i} \quad z_i^{(2)}(\mathbf{X}) = \frac{\partial^2 z(\mathbf{X})}{\partial X_i^2} \quad z_{ij}^{(2)}(\mathbf{X}) = \frac{\partial^2 z(\mathbf{X})}{\partial X_i \partial X_j} \quad (4.3)$$

Η μέθοδος των ροπών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό των κεντρικών ροπών της $z(\mathbf{X})$ σε όρους των αντίστοιχων των μεταβλητών X_i , που ορίζονται ως:

$$\mu_{k_i} = \mu_k(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - \mu_{1i})^k f(X_i) dX_i \quad k = 2, 3, 4 \quad (4.4)$$

όπου με $f(X_i)$ συμβολίζεται η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (PDF) της μεταβλητής X_i .

Οι τέσσερις πρώτες κεντρικές ροπές της $z(\mathbf{X})$, στην περίπτωση όπου οι βασικές μεταβλητές του διανύσματος $\mathbf{X}$ είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, δίνονται από [4.1]:

$$E[z] = \mu_1'(z) = z(\boldsymbol{\mu}_{1X}) + \frac{1}{2} z_i^{(2)}(\boldsymbol{\mu}_{1X}) \mu_{2i} \quad (4.5)$$

$$\mu_2(z) = (z_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}))^2 \mu_{2i} + z_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}) z_i^{(2)}(\boldsymbol{\mu}_{1X}) \mu_{3i} \quad (4.6)$$

$$\mu_3(z) = (z_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}))^3 \mu_{3i} \quad (4.7)$$

$$\mu_4(z) = (z_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}))^4 \mu_{4i} + 6(z_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}) z_j(\boldsymbol{\mu}_{1X}))^2 \mu_{2i} \mu_{2j} \quad (i < j) \quad (4.8)$$

Η μέθοδος των ροπών είναι προσεγγιστική, ενώ η ακρίβειά της εξαρτάται από την συνάρτηση που εξετάζεται. Κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης βελτιώνεται το αποτέλεσμα για μη γραμμικές συναρτήσεις. Όμως, η ακρίβεια των εκτιμήσεων εξαρτώνται και από την ποιότητα της στατιστικής πληροφορίας των βασικών παραμέτρων. Αν δηλαδή χρησιμοποιούνται πειραματικά αποτελέσματα μικρού δείγματος, το σφάλμα που μπορεί να εισαχθεί στην εκτίμηση των ροπών του συστήματος μπορεί να είναι κατά πολύ μεγαλύτερο αυτού της αμέλειας όρων μεγαλύτερης τάξης [4.1].

4.2 Ροπές φαινομένου συντελεστού θερμικής διαστολής

Κατά τον σχεδιασμό κατασκευών από σύνθετα υλικά εφαρμόζονται συχνά τεχνικές ομογενοποίησης για την μείωση των χρόνων υπολογισμού. Κατ' αυτό τον τρόπο ορίζονται οι φαινόμενες ιδιότητες για το ανισότροπο, αλλά "ομογενές" πλέον μέσο σε όρους των αντιστοιχών ιδιοτήτων των συνιστωσών στρώσεων.

Για παράδειγμα, από την κλασική θεωρία πολυστρώτων πλακών, οι συνεπίπεδοι συντελεστές θερμικής διαστολής (ΣΘΔ) μίας συμμετρικής πολύστρωτης, θεωρώντας σταθερές ιδιότητες κατά το πάχος κάθε στρώσης, μπορούν να εκφραστούν σε όρους των μεμονωμένων ιδιοτήτων των στρώσεων ως:

$$\alpha_i^{\text{eff}} = A'_{ij} \sum_{k=1}^n Q_{jp}^{(k)} \alpha_p^{(k)} h_k, \quad i, j, p = x, y, s \quad (4.9)$$

όπου x, y είναι το φυσικό σύστημα συντεταγμένων της πολύστρωτης, A'_{ij} , $Q_{ij}^{(k)}$ είναι οι συνιστώσες του μητρώου εκτατικής ενδόσεως της πολύστρωτης και του μητρώου δυσκαμψίας της k -στρώσης αντίστοιχα, h_k και $\alpha_i^{(k)}$ είναι το πάχος και ο ΣΘΔ της στρώσης k , και n είναι ο συνολικός αριθμός στρώσεων στην πολύστρωτη. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες υπονοούν άθροιση.

Σε αυτή την εφαρμογή, θεωρείται ότι οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού είναι ντετερμινιστικές και ανεξάρτητες της θερμοκρασίας. Για αυτό τον λόγο ο ισοδύναμος ΣΘΔ μίας συμμετρικής πολύστρωτης μπορεί να γραφεί σαν μία πρώτης τάξεως γραμμική συνάρτηση των συντελεστών θερμικής διαστολής των συνιστωσών στρώσεων.

Θεωρώντας ότι η πολύστρωτη αποτελείται από m διαφορετικά ειδικώς ορθότροπα υλικά ορίζουμε:

$$\alpha_x^{(1)} = \alpha_1, \alpha_y^{(1)} = \alpha_2, \alpha_x^{(2)} = \alpha_3, \alpha_y^{(2)} = \alpha_4, \dots, \alpha_x^{(m)} = \alpha_{2m-1}, \alpha_y^{(m)} = \alpha_{2m} \quad (4.10)$$

όπου $\alpha_x^{(i)}$ και $\alpha_y^{(i)}$ είναι οι ΣΘΔ του i υλικού κατά τις κύριες διευθύνσεις του υλικού.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό οι α_x^{eff} και α_y^{eff} μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας την Εξ.(4.9) ως:

$$\alpha_x^{\text{eff}} = g_x(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}) \text{ και } \alpha_y^{\text{eff}} = g_y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}) \quad (4.11)$$

Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα την πολύστρωτη πλάκα για την οποία εκτελέστηκαν πειράματα προσδιορισμού των ΣΘΔ, οι ισοδύναμοι ΣΘΔ εξαρτώνται από 4 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες στο εξής θα καλούνται βασικές μεταβλητές.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των ροπών, όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο εδάφιο, προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις για την μέση τιμή, την διασπορά και την τρίτη κεντρική ροπή της γραμμικής συνάρτησης g :

$$E[g] = g(E[\alpha_1], E[\alpha_2], \dots, E[\alpha_{2m}])$$

$$\mu_2(g) = \sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \right)^2 \mu_2(\alpha_i) \quad (4.12)$$

$$\mu_3(g) = \sum_{i=1}^{2m} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \right)^3 \mu_3(\alpha_i)$$

όπου $g(E[\alpha_1], E[\alpha_2], \dots, E[\alpha_{2m}])$ είναι η τιμή της συνάρτησης στην μέση τιμή των βασικών μεταβλητών και $\partial g / \partial \alpha_i$ είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης υπολογισμένη στην μέση τιμή των $2m$ βασικών μεταβλητών. Τα πειραματικά αποτελέσματα για τις πρώτες τρεις ροπές των ισοδύναμων συντελεστών θερμικής διαστολής παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 18 σε σύγκριση με αυτές που προκύπτουν με χρήση της μεθόδου των ροπών.

Π. 18 Πειραματικά και θεωρητικά στατιστικά χαρακτηριστικά των ΣΘΔ της MD πλάκας

	Πειράματα		Πρόβλεψη	
	α_x	α_y	α_x^{eff}	α_y^{eff}
Μέση Τιμή ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)	10.260	37.357	10.292	42.597
Διασπορά ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) ²	1.814	17.910	1.069	9.495
3η κεντρική ροπή ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) ³	-1.943	-37.750	37.148	-9.935

Σύγκριση μεταξύ των πειραματικών και θεωρητικών αποτελεσμάτων δείχνει ότι η πρόβλεψη της μέσης τιμής και διασποράς του φαινομένου ΣΘΔ στην x διεύθυνση είναι πολύ καλή. Αντίθετα, στην y-διεύθυνση υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των δύο τιμών.

4.3 Κοινή συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

Έχοντας τις τέσσερις πρώτες ροπές της συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία από τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της εξαρτημένης μεταβλητής. Έτσι για παράδειγμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των ροπών για την προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας από ένα από τα γνωστά στατιστικά μοντέλα, ή να γίνει η προσέγγιση μέσω του αναπτύγματος Edgeworth, ή να χρησιμοποιηθεί η οικογένεια κατανομών Pearson. Εκτός όμως από τα παραπάνω, για την εκτίμηση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Monte Carlo.

4.3.1 Monte Carlo προσομοίωση

Η απλή στην εφαρμογή μέθοδος βασίζεται στην επαναληπτική επίλυση του ντετερμινιστικού προβλήματος, ουσιαστικά παράγοντας σε κάθε επανάληψη μία πιθανή τιμή για κάθε στοχαστική μεταβλητή του προβλήματος. Σε ένα πρόβλημα που εμπεριέχει στοχαστικές μεταβλητές, οι οποίες ακολουθούν κάποια κατανομή πιθανότητας, η μέθοδος Monte Carlo (MC) αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

- Παραγωγή δείγματος για κάθε μία βασική στοχαστική μεταβλητή ανάλογα με την κατανομή πιθανότητάς τους
- Για κάθε μία τιμή των δειγμάτων επίλυση του προσδιοριστέου (deterministic) προβλήματος και εύρεση της απόκρισης
- Σχηματισμός του δείγματος της απόκρισης από το αποτέλεσμα όλων των προσδιοριστέων προβλημάτων και τέλος

- Στατιστική επεξεργασία του δείγματος της απόκρισης

Κατ' αυτό τον τρόπο, ένα δείγμα τιμών από μία προσομοίωση MC είναι παρόμοιο με ένα δείγμα πειραματικών παρατηρήσεων. Η μέθοδος είναι δηλαδή μία μέθοδος δειγματοληψίας και ως εκ τούτου τα αποτελέσματά της υπόκεινται σε σφάλματα. Η λύση με την μέθοδο MC από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών δεν είναι ακριβής. Συγκεκριμένα η εκτιμώμενη πιθανότητα, που είναι και το αντικείμενο έρευνας στα προβλήματα που εξετάζονται, μπορεί να διαφέρει από προσομοίωση σε προσομοίωση, αλλάζοντας μόνο τα αρχικά δείγματα των βασικών μεταβλητών.

Το πρώτο βήμα της μεθόδου, το οποίο είναι και το σημαντικότερο από άποψης ορθότητας, στηρίζεται στην ύπαρξη μίας διαδικασίας κατά την οποία παράγονται ακολουθίες αριθμών. Η διαδικασία αυτή γίνεται μέσω μίας γεννήτριας ψευδοτυχαίων αριθμών. Στην παρούσα εργασία έγινε χρήση υπορουτινών παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών, όπως αυτές περιγράφονται στο [4.2]. Στο παράρτημα Γ δίνονται αναλυτικά οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών. Από την άλλη πλευρά, όσον αφορά το δείγμα που χρησιμοποιείται κατά την προσομοίωση, μπορεί για μία εφαρμογή να μην είναι αρκετά καλό, όσο για μία άλλη. Για τον έλεγχο της καταλληλότητας των αριθμογεννητριών υπάρχουν αρκετοί στατιστικοί έλεγχοι. Οι καλές γεννήτριες τυχαίων αριθμών πρέπει να περνούν όλους αυτούς τους ελέγχους, ή διαφορετικά ο χρήστης θα πρέπει να γνωρίζει σε ποιους από αυτούς απορρίπτεται η καταλληλότητά της [4.2]. Σημειώνεται δε, ότι ένας συγκεκριμένος αλγόριθμος πρέπει να ελέγχεται μαζί με την γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών που χρησιμοποιείται ανεξάρτητα από τον αριθμό των ελέγχων που περνάει η ίδια η γεννήτρια [4.3].

Επειδή η μέθοδος χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία ως βάση για την σύγκριση αποτελεσμάτων από άλλες μεθόδους προσδιορισμού της κατανομής πιθανότητας έγινε διεξοδικός έλεγχος για την ορθότητα της εφαρμογής της μεθόδου. Έτσι σημειώνεται ότι γενικά όσον αφορά την μέθοδο Monte Carlo και τον έλεγχο της υπάρχουν δύο τάσεις στην βιβλιογραφία. Αυτή των μαθηματικών [4.4], [4.3], [4.5], [4.6] και αυτή των μηχανικών [4.7] και [4.8]. Οι μεν πρώτοι ελέγχουν την μέθοδο από την βάση της, δηλαδή από την μέθοδο παραγωγής τυχαίων αριθμών, ενώ οι δεύτεροι χρησιμοποιούν την μέθοδο παραλείποντας συχνά να εξετάσουν τα δείγματα που χρησιμοποιούν κατά την διάρκεια της προσομοίωσης και περιορίζονται στον έλεγχο της σύγκλισης και της ακρίβειας της πρόβλεψης.

Εξετάζοντας λοιπόν την εφαρμογή της προσομοίωσης από μαθηματικής άποψης είναι κανείς αναγκασμένος να ελέγξει τον αλγόριθμό του από την γεννήτρια παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών μέχρι την έξοδό του. Απαιτούνται δηλαδή θεωρητικοί έλεγχοι για την ορθότητα της γεννήτριας, εμπειρικοί έλεγχοι για τα δείγματα ψευδοτυχαίων αριθμών που παράγονται, έλεγχος των μετασχηματισμών που χρησιμοποιούνται για τα δείγματα από την ομοιόμορφη κατανομή σε μία άλλη και τέλος έλεγχος της εφαρμογής της μεθόδου. Από την πλευρά των μηχανικών αντιθέτως, απαιτείται μόνο ο έλεγχος της σύγκλισης του μοντέλου, δηλαδή η καλή επιλογή μεγέθους δείγματος και η μείωση κατά το δυνατόν της τυπικής απόκλισης της πρόβλεψης.

Εκτός αυτών, επειδή στην πράξη, για ένα πρόβλημα όπως αυτά που εξετάζονται στην παρούσα εργασία, σπάνια απαιτείται η παραγωγή δείγματος για μία και μόνη μεταβλητή, συνήθως τα δείγματα μίας γεννήτριας χωρίζονται σε υποομάδες για την παραγωγή δειγμάτων περισσότερων μεταβλητών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αλλοιώνεται η συμπεριφορά των δειγμάτων μιας γεννήτριας ως προς την τυχαιότητά τους [4.3]. Έτσι η σωστή αντιμετώπιση του προβλήματος είναι αφού επιλεγεί μία καλή γεννήτρια από θεωρητική άποψη, να γίνει έλεγχος στα δείγματα που θα παραχθούν κατά την διάρκεια της εφαρμογής, σύμφωνα με τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται και τέλος να ελέγξει την σύγκλιση και την ακρίβεια της πρόβλεψης του συγκεκριμένου προβλήματος.

Στην παρούσα εργασία εκτελέστηκαν έλεγχοι σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη εξετάστηκε η συμπεριφορά των γεννητριών ως προς τα δείγματα που παράγονται και χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή τους στα προβλήματα που εξετάζονται. Στην δεύτερη

Κεφάλαιο 4: Στοχαστικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

εξετάστηκε η καταλληλότητα των δειγμάτων που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή μετά την μετατροπή τους σε δείγματα άλλης κατανομής για την προσομοίωση πειραματικών αποτελεσμάτων των ιδιοτήτων του υλικού της στρώσης. Η δεύτερη αυτή περίπτωση εξετάστηκε κυρίως για να εξασφαλισθεί ότι ο μετασχηματισμός από την μία κατανομή στην άλλη δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα.

Στο πρώτο μέρος, κατά το οποίο έγινε ο εμπειρικός έλεγχος των αριθμογεννητριών χρησιμοποιήθηκαν οι εξής έλεγχοι:

- Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov
- Έλεγχος κενού
- Έλεγχος σειριακής συσχέτισης
- Έλεγχος αυξήσεων και μειώσεων
- Έλεγχος μεγίστου t
- Έλεγχος μετάθεσης

Όλοι οι έλεγχοι που πραγματοποιήθηκαν σκοπό είχαν την επιβεβαίωση της ορθής χρήσης της μεθόδου στην παρούσα εργασία. Όσον αφορά τους εμπειρικούς ελέγχους για τον σκοπό αυτό από σειρά ελέγχων της βιβλιογραφίας [4.3], [4.5] έχουν επιλεγεί οι πιο χαρακτηριστικοί. Αναλυτικά η περιγραφή των ελέγχων καθώς και τα αποτελέσματα αυτών περιγράφονται στο παράρτημα Γ.

Στο δεύτερο μέρος, που σκοπό είχε την επιβεβαίωση της ορθότητας των μετασχηματισμών των δειγμάτων από την ομοιόμορφη κατανομή σε μία άλλη πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω στατιστικοί έλεγχοι:

- Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov
- Έλεγχος X^2

Σημειώνεται ότι για την διερεύνηση της ορθότητας των μετασχηματισμών ένας εκ των δύο ελέγχων που εκτελέστηκαν ήταν αρκετός για τον σκοπό της εργασίας. Η χρήση και του δεύτερου ελέγχου έγινε μόνο για λόγους πληρότητας και σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο. Συγκεκριμένα οι δύο αυτοί έλεγχοι σκοπό είχαν να επιβεβαιώσουν ότι το δείγμα των ψευδοτυχαίων αριθμών μετά το μετασχηματισμό του ακολουθεί την κατανομή πιθανοτήτων που μας ενδιαφέρει. Έτσι ενώ στο πρώτο μέρος ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov χρησιμοποιείται για να ξεχωρίσει μία καλή αριθμογεννήτρια από μία κακή, στο δεύτερο μέρος χρησιμοποιείται για να επιβεβαιώσει τον μετασχηματισμό.

Σημειώνεται ότι όλοι οι έλεγχοι εκτελέστηκαν σε συνδυασμό με τους αλγόριθμους παραγωγής δειγμάτων που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές που εξετάζονται, αναλύοντας έτσι όχι μόνο την καταλληλότητα των αριθμογεννητριών που επιλέχθηκαν, αλλά και τις υποομάδες των δειγμάτων που σχηματίζονται. Στο παράρτημα Γ δίνονται όλες οι λεπτομέρειες για την εκτέλεση των ελέγχων καθώς και τα αποτελέσματα από τα δείγματα που εξετάστηκαν. Επίσης, στο ίδιο παράρτημα παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι για τον σχηματισμό υποομάδων δειγμάτων, σε συνδυασμό με τις εφαρμογές που εκτελέστηκαν στην εργασία αυτή.

4.3.2 Μέθοδος ποσοστιαίων σημείων βασικών μεταβλητών

Στο πλαίσιο της εργασίας αναπτύχθηκε επίσης μία ημι-προσδιοριστέα μέθοδος, κατ' αναλογία με την μέθοδο για τον προσδιορισμό χαρακτηριστικών τιμών αντοχής, της οποίας η εφαρμογή ζητείται από κώδικες σχεδιασμού κατασκευών, όπως για παράδειγμα το GL [4.9]. Η μέθοδος, που στο εξής θα καλείται μέθοδος ποσοστιαίων σημείων βασικών μεταβλητών ή BVM (basic variable method), είναι μία καθαρά ντετερμινιστική ανάλυση του προβλήματος, αλλά αντί να χρησιμοποιούνται οι μέσες τιμές κάθε βασικής μεταβλητής του προβλήματος, ή

κάποιες αντίστοιχες με συντελεστές ασφαλείας χρησιμοποιείται ένα συγκεκριμένο ποσοστιαίο σημείο, fractile, π.χ. 5%, το οποίο αντικαθίσταται στην εξίσωση του ντετερμινιστικού προβλήματος και θεωρείται ότι έτσι υπολογίζεται η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης πιθανότητας της εξαρτημένης μεταβλητής. Αυτό σημαίνει ότι κάθε βασική μεταβλητή (ιδιότητα αντοχής, συντελεστής θερμικής διαστολής κλπ.) προσδιορίστηκε για μία συγκεκριμένη πιθανότητα, επιλύοντας:

$$P(X_i \leq z(a)) = F_{X_i}(z(a)) = \int_0^{z(a)} f(X_i) dX_i = a \quad (4.13)$$

όπου X_i είναι η μεταβλητή ιδιότητας αντοχής, $f(X_i)$ είναι η κατανομή πιθανότητάς της και $z(a)$ είναι η τιμή της βασικής μεταβλητής για την οποία επιλύεται η εξ. (4.13). Σημειώνεται ότι ένα ποσοστιαίο σημείο 5% σημαίνει ότι το 95% του πληθυσμού θα έχει μεγαλύτερη τιμή από το $z(a)$.

Ουσιαστικά, θεωρείται ότι η αθροιστική κατανομή πιθανότητας της πολυδιάστατης εξαρτημένης μεταβλητής προκύπτει από τις τιμές των σχετιζόμενων ανεξάρτητων μεταβλητών σε ένα συγκεκριμένο ποσοστιαίο σημείο. Για αυτό, η τιμή της εξαρτημένης, από n μεταβλητές, μεταβλητής $w = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ για ένα συγκεκριμένο ποσοστιαίο σημείο, q , προκύπτει με αντικατάσταση των x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, για το σημείο αυτό.

4.4 Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας φαινομένου συντελεστού θερμικής διαστολής

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, cumulative distribution function (CDF), μίας ισοδύναμης ιδιότητας είναι η κοινή κατανομή πιθανότητας των εμπλεκόμενων στοχαστικών ιδιοτήτων κάθε στρώσης. Στην περίπτωση των φαινομένων ΣΘΔ, ο αναλυτικός υπολογισμός της κοινής συνάρτησης πιθανότητας δεν είναι δυνατός και για αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο προσεγγιστικές τεχνικές. Στο πλαίσιο της παρούσης εργασίας εφαρμόστηκαν οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν, για τον προσδιορισμό της κατανομής πιθανότητας μίας συνάρτησης πολλών τυχαίων μεταβλητών, συγκεκριμένα η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth και η Monte Carlo.

Για τον προσδιορισμό των αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας (CDF) των συνεπίπεδων ΣΘΔ μίας συμμετρικής πολύστρωτης, α_x^{eff} και α_y^{eff} , με χρήση της μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth βρέθηκε ότι με χρήση των δύο πρώτων όρων της σειράς προκύπτουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Για την εφαρμογή της τεχνικής αναπτύγματος Edgeworth χρειάζεται να προσδιοριστούν οι τρεις πρώτες ροπές της συνάρτησης, $\mu_i(g)$, της οποίας ζητείται ο προσδιορισμός της αθροιστικής κατανομής πιθανότητας. Ο υπολογισμός αυτών παρουσιάστηκε σε προηγούμενο εδάφιο

Η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth χρησιμοποιήθηκε για την πρόβλεψη της άγνωστης συνάρτησης κατανομής των θερμικών ιδιοτήτων της MD πλάκας, ως συνάρτηση των τριών πρώτων ροπών των θερμικών ιδιοτήτων των συνιστωσών στρώσεων. Από την άλλη πλευρά, για την χρήση της μεθόδου MC χρειάζεται η αθροιστική κατανομή πιθανότητας των ανεξάρτητων μεταβλητών. Έτσι, χρησιμοποιώντας τα πειραματικά αποτελέσματα για τους ΣΘΔ που προσδιορίστηκαν σε αυτή την εργασία και τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού των στρώσεων που προσδιορίστηκαν πειραματικά σε προηγούμενη εργασία, προέκυψαν οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας, $F(\alpha_x^{\text{eff}})$ και $F(\alpha_y^{\text{eff}})$ με εφαρμογή των μεθόδων αναπτύγματος Edgeworth (EDW) και Monte Carlo (MC). Γραφική σύγκριση των θεωρητικών αυτών κατανομών με τις αντίστοιχες πειραματικές γίνεται στα Σχ. 36, Σχ. 37, για την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του ισοδύναμου ΣΘΔ στην διεύθυνση x - και y -, αντίστοιχα.

Σχ. 36 Σύγκριση της θεωρητικής και της πειραματικής αθροιστικής κατανομής πιθανότητας για τον α_x^{eff}

Πρέπει να σημειωθεί ότι η MC μέθοδος εφαρμόστηκε επιλέγοντας μεταξύ των δύο την κατανομή που ταιριάζει καλύτερα στα πειραματικά αποτελέσματα των θερμικών ιδιοτήτων των υλικών των συνιστωσών στρώσεων, όπως προέκυψαν από τον έλεγχο K-S. Έτσι, ο α_x^{UD} μοντελοποιήθηκε ως μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή, ενώ οι υπόλοιπες θεωρείται ότι ακολουθούν την κατανομή Weibull.

Σύγκριση μεταξύ της θεωρητικής πρόβλεψης και των πειραματικών αποτελεσμάτων αποδεικνύει ότι η προσέγγιση του ΣΘΔ α_x^{eff} της MD πλάκας είναι πολύ καλή. Αντίθετα, η θεωρητική πρόβλεψη για τον ισοδύναμο ΣΘΔ α_y^{eff} δεν επαληθεύεται από τα πειραματικά αποτελέσματα. Το γεγονός ότι υπάρχει μία μετάθεση της τάξεως των 5 μονάδων, ενώ η κλίση κάθε γραφήματος είναι σχεδόν ίδια, υποδεικνύει ότι οι κατανομές διαφοροποιούνται κυρίως ως προς την μέση τιμή τους και όχι τόσο ως προς την τυπική απόκλιση. Όπως φαίνεται στο Σχ. 37, η πειραματική μέση τιμή είναι μικρότερη από την αναμενόμενη.

Σχ. 37 Σύγκριση της θεωρητικής και της πειραματικής αθροιστικής κατανομής πιθανότητας για το α_Y^{eff}

Στο Σχ. 38 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου BVM σε σύγκριση με τα πειραματικά και τα θεωρητικά μέσω της μεθόδου EDW. Η καλή προσαρμογή των δεδομένων και με αυτή την μέθοδο είναι φανερή. Παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνονται και για τον ΣΘΔ στην y -διεύθυνση, α_Y^{eff} , [4.10]. Για την εφαρμογή της μεθόδου BVM χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες κατανομές όπως και για την μέθοδο MC. Παρόλο δε που και οι δύο μέθοδοι BVM και EDW προσεγγίζουν το ίδιο καλά τα πειραματικά αποτελέσματα η μέθοδος BVM έχει ένα πλεονέκτημα έναντι της EDW, εξαιτίας του μηδενικού της υπολογιστικού κόστους. Σημειώνεται, επίσης ότι τα αποτελέσματα με την μέθοδο MC δεν παρουσιάζονται στο ίδιο σχήμα για λόγους ευκρίνειας.

Σχ. 38 Σύγκριση αποτελεσμάτων μεθόδου BVM με πειραματικά για το α_X^{eff}

4.4.1 Ανάλυση ευαισθησίας

Για την διερεύνηση των αιτιών της παρατηρούμενης διαφοράς μεταξύ πρόβλεψης και πειράματος για την μέση τιμή του α_y^{eff} , εκτελέστηκε ανάλυση ευαισθησίας. Τα πιθανά σφάλματα της πειραματικής διαδικασίας στο μακροσκοπικό επίπεδο προσδιορίζονται είτε ως απόκλιση της διεύθυνσης των υαλοϋφασμάτων κατά την διάρκεια της κατασκευής των δοκιμίων, είτε ως μεταβολή του πάχους της στρώσης εξαιτίας της μεταβολής της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε ίνες. Στην πρώτη περίπτωση η απόκλιση της διεύθυνσης των υαλοϋφασμάτων, κατά την κατασκευή των πλακών ή κατά την κοπή των δοκιμίων, ή (τοπική) απόκλιση της διεύθυνσης των ινών, έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της αποτελεσματικής επίδρασης των ινών στην εκτατική απόκριση της πλάκας και έτσι μία μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής. Στην δεύτερη περίπτωση η τοπική μεταβολή του πάχους της στρώσης και επομένως και της πολύστρωτης πλάκας, εξαιτίας αύξησης της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε ίνες, οδηγεί σε μείωση της συνεισφοράς της μήτρας στην απόκριση του δοκιμίου υπό θερμική φόρτιση. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι η μέτρηση του ολικού πάχους των δοκιμίων που κόπηκαν από την MD πλάκα έδειξε μέσο όρο του συνολικού πάχους ίσο 3.87mm έναντι της ονομαστικής τιμής των 4.4mm.

Η επίδραση της απόκλισης της διεύθυνσης του υαλοϋφάσματος στην αθροιστική κατανομή πιθανότητας του α_y^{eff} είναι αμελητέα. Μία πιο δραστική επίδραση επιτυγχάνεται όταν μεταβάλλουμε το πάχος των UD στρώσεων. Σε αυτή την περίπτωση η μετάθεση της αθροιστικής κατανομής πιθανότητας προς τα αριστερά ως προς την αρχική θεωρητική καμπύλη του Σχ. 37 είναι πιο εμφανής. Από την άλλη μεριά, μικρότερο πάχος των στρώσεων BD έχει ως αποτέλεσμα την μετάθεση προς τα δεξιά της αθροιστικής κατανομής πιθανότητας.

Τέλος όπως παρατηρήθηκε κατά την διάρκεια της κατασκευής των πλακών, το υαλοϋφασμα με ίνες προσανατολισμένες σε δύο διευθύνσεις, όταν κοβόταν από το ρολό, είχε την τάση να αυξάνει την διεύθυνση προσανατολισμού των ινών από $\pm 45^\circ$ μέχρι και $\pm 50^\circ$. Από την άλλη πλευρά τα πειραματικά αποτελέσματα των ΣΘΔ της BD πλάκας είναι χωρισμένα σε δύο

ομάδες, οι οποίες φαίνονται καθαρά στο Σχ. 31. Για να εξετάσουμε αυτή την επίδραση, τα αποτελέσματα από την BD πλάκα χωρίστηκαν στην ομάδα των 24 πειραματικών αποτελεσμάτων, η οποία θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει τον ΣΘΔ της στρώσης στην x-διεύθυνση και στην ομάδα των 6 πειραματικών αποτελεσμάτων που θεωρείται ότι αντιπροσωπεύει τον ΣΘΔ της στρώσης στην y-διεύθυνση. Στην συνέχεια υπολογίστηκαν εκ νέου οι τρεις πρώτες ροπές κάθε ΣΘΔ. Για το συγκεκριμένο υλικό που εξετάζεται προσδιορίστηκε ότι ο λόγος α_x/α_y είναι ίδιος με αυτόν μίας $[\pm 49]$ πολύστρωτης πλάκας. Ο αντίστοιχος λόγος των μέτρων ελαστικότητας για την συγκεκριμένη διάταξη είναι: $E_x/E_y = 0.8$. Έτσι, προσαρμόζοντας το μέτρο ελαστικότητας στην y-διεύθυνση και χρησιμοποιώντας τα νέα στατιστικά δεδομένα για τους συνεπίπεδους ΣΘΔ επαναπροσδιορίστηκαν οι ιδιότητες της BD στρώσης. Η πρόβλεψη της αθροιστικής κατανομής πιθανότητας με αυτές τις μετατροπές παρουσιάζεται με την dashed-dotted γραμμή, που συμβολίζεται με (± 49) στο Σχ. 39, σε σύγκριση με την αρχική πρόβλεψη του α_y^{eff} (IN.) και τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα. Φαίνεται καθαρά ότι η πρόβλεψη προσεγγίζει τα πειραματικά αποτελέσματα. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η πρόβλεψη για τον α_x^{eff} δεν επηρεάζεται από αυτές τις αλλαγές, όπως δείχνεται στο [4.10].

Σχ. 39 Επίδραση διαφόρων κατασκευαστικών παραμέτρων στην πρόβλεψη της αθροιστικής κατανομής πιθανότητας του α_y^{eff} (In.: αρχική πρόβλεψη, Exp.: Πειραματικά δεδομένα, (± 49) : θεωρώντας διάταξη για την BD στρώση $\pm 49^\circ$, αντί για $\pm 45^\circ$, ALL: θεωρώντας διάταξη $\pm 49^\circ$ για την BD και αύξηση του πάχους των στρώσεων της UD)

Για να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο η πρόβλεψη, εισάγεται και η επίδραση του πάχους των UD στρώσεων. Η πρόβλεψη με τις δύο αυτές αλλαγές παρουσιάζεται με την συνεχή γραμμή που συμβολίζεται με (ALL). Η κλίση της πρόβλεψης εξαιτίας της εισαγωγής των μετατροπών που περιγράφηκαν στα παραπάνω είναι μεγαλύτερη από αυτή των πειραματικών δεδομένων και της (IN.) πρόβλεψης. Αυτή η διαφορά μπορεί να αποδοθεί στην μικρότερη διασπορά κάθε ανεξάρτητης ομάδας δεδομένων της BD πολύστρωτης σε σύγκριση με την ενιαία ομάδα που χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή των (IN.) αποτελεσμάτων.

4.5 Συνάρτηση αστοχίας στρώσης

Στην περίπτωση των συνθέτων υλικών, όταν ο μηχανικός χρειάζεται να μοντελοποιήσει την αστοχία του δομικού στοιχείου, δηλαδή της στρώσης, στην γενική περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης, βρίσκεται μπροστά σε ποικιλία από διατυπώσεις για την αστοχία, οι οποίες έχουν διαφορετικό βαθμό ακρίβειας. Από τις θεωρίες που έχουν κατά καιρούς αναπτυχθεί, άλλες βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στον σχεδιασμό δομικών στοιχείων, ενώ άλλες δεν έχουν επιβεβαιωθεί ακόμα πειραματικά, ή χρειάζονται καλύτερη κατανόηση του προβλήματος που εξετάζεται. Γενικά τα μοντέλα αστοχίας στρώσης μπορούν να χωριστούν σε μοντέλα μικρομηχανικής, δηλαδή όσα εξετάζουν την αστοχία της στρώσης από το επίπεδο ίνας-μήτρας και σε μακροσκοπικά μοντέλα, τα οποία βασίζονται συνήθως στην περιγραφή της αστοχίας του μέσου χωρίς να ενδιαφέρονται για τις λεπτομέρειες της θραύσης στο επίπεδο ίνας-μήτρας [4.11].

Τα φαινόμενα που αναπτύσσονται στο μικροσκοπικό επίπεδο της αστοχίας είναι αρκετά πολύπλοκα, με αποτέλεσμα να οδηγούν σε μοντέλα εξίσου πολύπλοκα και αμφιβόλου ακρίβειας, ώστε να είναι δύσκολα να εφαρμοστούν στην πράξη κατά τον σχεδιασμό κατασκευών [4.12]. Παρόλη την ανάπτυξη που υπάρχει στο θέμα, όλα αυτά τα χρόνια η αντίληψη για την ακαταλληλότητα των μοντέλων που βασίζονται στην μικρομηχανική εξακολουθεί να υπάρχει. Στο [4.13] γίνεται μία ανασκόπηση των μεθόδων πρόβλεψης αστοχίας των συνθέτων υλικών, βάσει μικρομηχανικής ανάλυσης και θεωριών διάδοσης αστοχιών χρησιμοποιώντας θεωρίες πιθανοτήτων. Γενικό συμπέρασμα αυτής της διεξοδικής ανασκόπησης είναι ότι σε πολλές περιπτώσεις οι θεωρίες που αναπτύσσονται δεν επαληθεύονται από τα πειραματικά αποτελέσματα. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε τρεις βασικούς παράγοντες: Το ευρύ πεδίο των υλικών σε συνδυασμό με τις διαφορετικές πειραματικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται κατά την σύγκριση θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων, οι διαφορετικές μέθοδοι κατασκευής που μπορεί να κρύβουν κάποιες υπάρχουσες τάσεις των αποτελεσμάτων, καθώς επίσης οι δυσκολίες που εμπεριέχονται στον ορθό προσδιορισμό των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται κατά την θεωρητική ανάλυση, όπως για παράδειγμα το μήκος επίδρασης μίας μικρορωγμής στο τασικό πεδίο. Οι τρεις αυτές αιτίες σε συνδυασμό με την έλλειψη δεδομένων για τις ιδιότητες συνθέτων υλικών δεν βοηθούν στην επιβεβαίωση κάποιας γενικής θεωρίας. Επίσης επισημαίνεται ότι ενώ οι μέθοδοι πρόβλεψης είναι αρκετά ανεπτυγμένες μαθηματικά, είναι συνήθως πολύπλοκες για τον μηχανικό. Περαιτέρω ανάπτυξη των μεθόδων θα οδηγήσει με βεβαιότητα σε πιο πολύπλοκες μαθηματικές διατυπώσεις, χωρίς όμως απαραίτητα να δώσει λύση για το πρόβλημα [4.13].

Από την άλλη πλευρά, στην μακρομηχανική αντιμετώπιση του προβλήματος, τα κριτήρια αστοχίας μπορούν να χωριστούν σε παραμετρικά και σε φαινομενολογικά. Τα πρώτα βασίζονται στην προσέγγιση πειραματικών δεδομένων αστοχίας με παραμετρικές εξισώσεις, με γεωμετρικά κριτήρια και χωρίς να υπόκεινται σε περιορισμούς εξαιτίας των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα, όπως μη γραμμική συμπεριφορά [4.14]. Σκοπός αυτών των μεθόδων είναι μία πιο ακριβής μοντελοποίηση πειραματικών αποτελεσμάτων, κυρίως σε περιπτώσεις όπου η χρήση συναρτήσεων φαινομενολογικών κριτηρίων αστοχίας αποτυγχάνουν. Μία τέτοια προσέγγιση όμως απαιτεί μεγάλο αριθμό πειραματικών αποτελεσμάτων σε όλο το χώρο τασικής κατάστασης για να προσεγγισθεί ο βασικός τόπος αστοχίας με ακρίβεια, ενώ δεν είναι ιδιαίτερα πιο απλές στην εφαρμογή από τις άλλες [4.15].

Τα φαινομενολογικά κριτήρια αστοχίας, συνδυάζουν στοιχεία από την μικρομηχανική ανάλυση της αστοχίας σε μία συνάρτηση που είναι εύκολο να εφαρμοστεί για την πρόβλεψη αστοχίας συνθέτων υλικών. Έτσι, βασίζόμενα στις ιδιότητες αντοχής της στρώσης, χωρίς όμως να εξετάζουν το υπόβαθρο του μηχανισμού αστοχίας, βρίσκουν ευρεία εφαρμογή σε προβλήματα σχεδιασμού συνθέτων υλικών εξαιτίας του ότι παρουσιάζουν αφενός ευκολία στην εφαρμογή αλλά και της καλής πειραματικής επαλήθευσης. Και σε αυτή την περίπτωση όμως οι διαφορές μεταξύ των διαφόρων διατυπώσεων κριτηρίων αστοχίας είναι αρκετές, καθώς αναπτύσσονται συνέχεια καινούριες μορφές κριτηρίων, με τα οποία γίνεται

προσπάθεια να εξηγηθούν αποκλίσεις των παλαιότερων σε καινούρια πειραματικά δεδομένα. Τα κριτήρια αυτά μπορούν να γραφούν ως τανυστικά πολυώνυμα αστοχίας [4.16], στα οποία συμπεριλαμβάνονται και το κριτήριο μέγιστης παραμόρφωσης και το κριτήριο μέγιστης τάσης. Τα δύο αυτά κριτήρια δε (μέγιστης τάσης και μέγιστης παραμόρφωσης), κατατάσσονται στα κριτήρια που αμελούν όρους αλληλεπίδρασης τάσεων (ή παραμορφώσεων), με αποτέλεσμα να μην μπορούν να προσεγγίσουν σε όλες τις περιπτώσεις τον τόπο αστοχίας συνθέτων υλικών. Εξακολουθούν και βρίσκουν εφαρμογή όμως, όπως στο [4.17], όπου χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση αστοχίας πολυστρώτων κυλινδρικών δοκιμίων $[90/\pm 45/0]_S$ υπό εσωτερική πίεση και αξονικό εφελκυσμό. Συνήθως τα κριτήρια αστοχίας που προτείνονται παρουσιάζονται στην τετραγωνική μορφή, έτσι σε αυτή την περίπτωση, τα κριτήρια μέγιστης τάσης και μέγιστης παραμόρφωσης παρουσιάζουν ένα ακόμα μειονέκτημα σε σχέση με αυτά, ως προς την εφαρμογή τους, εξαιτίας των όρων τρίτης και τέταρτης τάξης που υπεισέρχονται στην συνάρτηση αστοχίας [4.16].

Έστω στρώση με ίνες προσανατολισμένες σε μία τυχαία διεύθυνση (off-axis unidirectional), σε συνθήκες επίπεδης εντατικής κατάστασης, όπως φαίνεται στο Σχ. 40.

Σχ. 40 Συστήματα συντεταγμένων για μία στρώση με ίνες προσανατολισμένες σε τυχαία διεύθυνση

Το τανυστικό πολυώνυμο αστοχίας χρησιμοποιείται στην τετραγωνική του μορφή, η οποία στις κύριες διευθύνσεις του υλικού σε επίπεδη εντατική κατάσταση γράφεται ως [4.18]:

$$H_{ij}\sigma_i\sigma_j + H_i\sigma_i - 1 \leq 0 \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4.14)$$

Οι διαγώνιοι όροι των τανυστών αστοχίας για μία unidirectional (UD) στρώση από FRP δίνονται από:

$$\begin{aligned} H_{11} &= (X_1 X_2)^{-1} & H_{22} &= (X_3 X_4)^{-1} & H_{66} &= X_5^{-2} \\ H_1 &= X_1^{-1} - X_2^{-1} & H_2 &= X_3^{-1} - X_4^{-1} & H_6 &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

όπου η τάση αστοχίας σε εφελκυσμό και θλίψη στην διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτή, X_T , X_C , Y_T , Y_C , αντίστοιχα και η τάση αστοχίας σε διάτμηση, S , για ευκολία θα συμβολίζονται ως:

$$X_T = X_1, \quad X_C = X_2, \quad Y_T = X_3, \quad Y_C = X_4, \quad S = X_5 \quad (4.16)$$

Η επιλογή του μη διαγώνιου όρου, H_{12} , οδηγεί σε διαφορετικές φαινομενολογικά θεωρίες αστοχίας, των οποίων οι προβλέψεις μπορεί να έχουν σημαντικές διαφορές [4.19], [4.20]. Το κριτήριο αστοχίας στην μορφή που προτάθηκε από Tsai και Hahn (TH) [4.21] χρησιμοποιεί τον παρακάτω ορισμό για τον όρο H_{12} :

$$H_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{H_{11}H_{22}} \quad (4.17)$$

ενώ μία άλλη ευρέως διαδεδομένη έκφραση για τον μη-διαγώνιο όρο H_{12} είναι η παρακάτω [4.22] - [4.23]:

$$H_{12} = -\frac{H_{11}}{2} \quad (4.18)$$

Προσπάθειες για βελτίωση της πρόβλεψης αστοχίας, όπου πειραματικά αποτελέσματα κυρίως σε διατάξεις γύρω στις 45° δεν μπορούσαν να προσεγγισθούν καλά χρησιμοποιώντας τετραγωνικά κριτήρια αστοχίας, οδήγησαν στην διερεύνηση κριτηρίων τρίτης τάξης, όπως για παράδειγμα στο [4.24], [4.25]. Στην περιοχή αυτή η συμπεριφορά των συνθέτων υλικών είναι συνήθως μη γραμμική. Έτσι στο [4.26] όπου χρησιμοποιήθηκε το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας με διαγώνιο όρο όπως στην Εξ.(4.18), αλλά λήφθηκε υπόψη και η μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού, η απόκλιση των προβλέψεων από τα πειραματικά αποτελέσματα ήταν σαφώς μικρότερη.

Σε μία κάπως διαφορετική θεώρηση (μικρο-μηχανικής) του προβλήματος της οριακής κατάστασης στρώσης συνθέτου υλικού στο [4.12] και στο [4.27] προτάθηκαν κριτήρια αστοχίας, τα οποία διαχωρίζουν την περίπτωση θραύσης ινών από την αστοχία της μήτρας. Σύμφωνα με αυτά τα κριτήρια, για την διερεύνηση της αστοχίας στρώσης στην γενική ή στην επίπεδη εντατική κατάσταση θα πρέπει να ελέγχονται δύο εξισώσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι τέτοιου είδους κριτήρια προτείνονται και από οδηγίες σχεδιασμού κατασκευών από σύνθετα υλικά, όπως π.χ. στο VDI 2014 [4.28], στο οποίο μάλιστα τα υπόλοιπα τετραγωνικά κριτήρια θεωρούνται ακατάλληλα, καθώς δεν επιτρέπουν τον διαχωρισμό της αστοχίας στην στρώση εξαιτίας της θραύσης των ινών ή της αστοχίας της μήτρας.

Η διασπορά των πειραματικών αποτελεσμάτων που παρατηρήθηκε οδήγησε στον προσδιορισμό βέλτιστης γωνίας μεταξύ των ινών και της διεύθυνσης του φορτίου για την εκτίμηση των συντελεστών που εισέρχονται στις συναρτήσεις κριτηρίων αστοχίας, με σκοπό την μείωση του σφάλματος υπολογισμού τους [4.29], [4.30]. Από την άλλη μεριά, η διασπορά των πειραματικών αποτελεσμάτων, μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένα συμπεράσματα κατά την επαλήθευση των κριτηρίων αστοχίας [4.12].

Έτσι, ενώ η ανάλυση των τάσεων γίνεται σε κατασκευές από σύνθετα υλικά με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, στην ερώτηση τελικά αστοχεί ή δεν αστοχεί η κατασκευή υπό αυτά τα φορτία ακόμα και στην ντετερμινιστική περίπτωση, ο μηχανικός δυσκολεύεται να απαντήσει, καθώς υπάρχει πληθώρα κριτηρίων αστοχίας, με αρκετά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Για αυτό τον λόγο, στην εργασία αυτή, διερευνήθηκε και η επίδραση της επιλογής του κριτηρίου αστοχίας στην πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας συνθέτων υλικών. Το βασικό κριτήριο όμως με το οποίο γίνεται η ανάλυση, είναι το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας Tsai-Hahn (TH), όπως περιγράφεται στην εξ.(4.14) με τον διαγώνιο όρο που δίνεται στην εξ. (4.17), ή εναλλακτικά το κριτήριο EPFS με τον διαγώνιο όρο που δίνεται στην σχέση (4.18), ενώ το κριτήριο αστοχίας σε ταυστική μορφή, με $\mathbf{X}$ το διάνυσμα των τάσεων αστοχίας ($\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_5]^T$), εκφράζεται από την:

$$K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{h} \boldsymbol{\sigma} - 1 \leq 0 \quad (4.19)$$

όπου θεωρείται ότι αν $K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}) < 0$ η στρώση βρίσκεται σε ασφαλή κατάσταση, δηλαδή δεν υπάρχει αστοχία, αν $K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}) = 0$ τότε θεωρείται ότι η στρώση αστοχεί, ενώ το $K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}) > 0$ δεν έχει φυσική σημασία εφ' όσον έχει επέλθει προηγουμένως αστοχία της στρώσης.

4.6 Αθροιστική κατανομή πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας

Για την επεξήγηση της στατιστικής πλευράς της αστοχίας, θεωρούμε μία στρώση με ίνες προσανατολισμένες σε μία τυχαία διεύθυνση (off-axis unidirectional), σε συνθήκες επίπεδης εντατικής κατάστασης, όπως φαίνεται στο Σχ. 40. Θεωρούμε ότι μόνο οι τάσεις αστοχίας του υλικού είναι τυχαίες μεταβλητές και έστω ότι ακολουθούν μία κατανομή Weibull, παρόλο που άλλες κατανομές όπως η Κανονική, η Λογαριθμική Κανονική για παράδειγμα μπορούν εξίσου καλά να χρησιμοποιηθούν για την στατιστική περιγραφή των ιδιοτήτων αστοχίας των συνθέτων υλικών FRP [4.31] όπως δείχθηκε και στο Κεφάλαιο 3.

Για τον προσδιορισμό των ροπών της συνάρτησης $K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})$ και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας (cumulative distribution function, CDF), $F(K)$, της συνάρτησης αστοχίας $K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})$, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι για στοχαστικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενο εδάφιο, δηλαδή η Edgeworth, η Monte Carlo και η μέθοδος βασικών μεταβλητών BVM.

4.7 Μοντελοποίηση της κατανομής πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας σε μονοαξονική εντατική κατάσταση

Για την αξιολόγηση των διαφόρων μεθόδων για την μοντελοποίηση της κατανομής πιθανότητας αστοχίας, που χρησιμοποιούνται για πρώτη φορά για αυτό τον σκοπό, δηλαδή της μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth (EDW) και της μεθόδου ποσοστιαίων σημείων βασικών μεταβλητών (BVM) που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή εξετάστηκαν εκτενώς οι προβλέψεις αστοχίας και έγινε σύγκριση με αποτελέσματα αριθμητικής προσομοίωσης. Στρώσεις με ίνες προσανατολισμένες σε μία μόνο διεύθυνση και όχι παράλληλα με αυτήν της φόρτισης εξετάστηκαν υπό μονοαξονική φόρτιση, ενώ για την αξιολόγηση των θεωρητικών αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν για σύγκριση αποτελέσματα από προσομοίωση με την μέθοδο Monte Carlo.

Όλες οι μέθοδοι, δηλαδή η EDW, η Monte Carlo (MC) και η προσδιοριστέα όπως ορίστηκε σε προηγούμενο εδάφιο (BVM), εφαρμόστηκαν για την περίπτωση μίας off-axis unidirectional στρώσης από GI/Ep που φορτίζεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Η στατιστική πληροφορία για τις ιδιότητες αντοχής σε εφελκυσμό και διάτμηση λαμβάνεται από το [4.32], ενώ για τις τάσεις σε θλίψη, για τις οποίες δεν υπήρχαν πειραματικά αποτελέσματα έχουν γίνει κάποιες υποθέσεις. Οι μέσες τιμές και οι διασπορές των αντοχών, μαζί με τις παραμέτρους της κατανομής Weibull, που χρησιμοποιήθηκαν για αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 19.

Π. 19 Στατιστικά δεδομένα ιδιοτήτων αντοχής για δοκίμια GI/Ep

Ιδιότητα	Μέση Τιμή (MPa)	Διασπορά (MPa ²)	Κατανομή	Παράμετροι κατανομής	
				σ (MPa)	η
X_T	853.17	2665.29	Weibull	875.86	20.50
X_C	511.90	1621.58	Weibull	529.44	15.61
Y_T	6.82	1.94	Weibull	7.37	5.66
Y_C	27.29	52.63	Weibull	30.00	4.24
S	20.11	7.19	Weibull	21.24	8.96

Το εξωτερικό φορτίο σε αυτή την περίπτωση θεωρείται δεδομένο και ντετερμινιστικό, ενώ ως συνάρτηση αστοχίας θεωρείται το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας Tsai-Hahn (TH).

Ειδικά για την εφαρμογή της μεθόδου EDW απαιτείται η εύρεση των ροπών της συνάρτησης αστοχίας $K = K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})$, με $\mathbf{X}$ το διάνυσμα των αντοχών, $\mathbf{X}^T = [X_1, \dots, X_5]$, για μία δεδομένη τασική κατάσταση $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6]$. χρησιμοποιείται η μέθοδος της γεννήτριας των ροπών, όπως αυτή αναπτύχθηκε στα προηγούμενα. Έτσι οι τέσσερις πρώτες κεντρικές ροπές της συνάρτησης αστοχίας δίνονται ως:

$$E[K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})] = K(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2} K_i^{(2)}(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}) \mu_{2i} \quad (4.20)$$

$$\mu_2(K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})) = (K_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}))^2 \mu_{2i} + K_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}) K_i^{(2)}(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}) \mu_{3i} \quad (4.21)$$

$$\mu_3(K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})) = (K_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}))^3 \mu_{3i} \quad (4.22)$$

$$\mu_4(K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})) = (K_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}))^4 \mu_{4i} + 6(K_i(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}) K_j(\boldsymbol{\mu}_{1X}, \boldsymbol{\sigma}))^2 \mu_{2i} \mu_{2j} \quad (i < j) \quad (4.23)$$

όπου στην παραπάνω έκφραση υπονοείται η άθροιση όρων επαναλαμβανόμενων δεικτών και με μ_{1X} , $\mu_{1X}^T = [\mu'_{11}, \mu'_{12}, \dots, \mu'_{15}]$ συμβολίζεται το διάνυσμα της μέσης τιμής των μεταβλητών X_i ($i = 1, \dots, 5$), με μ_{ki} ($k = 2, \dots, 4$) συμβολίζονται οι κεντρικές ροπές k των μεταβλητών X_i , ενώ οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αστοχίας $K(\mathbf{X})$ ως προς τις μεταβλητές X_i συμβολίζονται με:

$$K_i(\mathbf{X}, \sigma) = \frac{\partial K(\mathbf{X}, \sigma)}{\partial X_i} \quad K_i^{(2)}(\mathbf{X}, \sigma) = \frac{\partial^2 K(\mathbf{X}, \sigma)}{\partial X_i^2} \quad K_{ij}^{(2)}(\mathbf{X}, \sigma) = \frac{\partial^2 K(\mathbf{X}, \sigma)}{\partial X_i \partial X_j} \quad (4.24)$$

Στο Σχ. 41 παρουσιάζεται η συνάρτηση κατανομής της συνάρτησης αστοχίας K , όταν εξετάζεται στρώση στις 30°, υπό τάση 20MPa σε εφελκυσμό. Σύγκριση μεταξύ των μεθόδων δείχνει ότι η EDW και η BVM ακολουθούν ικανοποιητικά την στατιστική κατανομή της συνάρτησης, με την BVM να δίνει λίγο καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την μέθοδο MC. Όμως, στην περίπτωση που εξετάζεται η συνάρτηση αστοχίας δεν μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η ακριβής τιμή της συνάρτησης. Ως μηχανικοί ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα επιβίωσης ή αλλιώς την αξιοπιστία της κατασκευής που βρίσκεται σε μία δεδομένη τασική κατάσταση, δηλαδή, για την πιθανότητα το K να λάβει τιμή μικρότερη από μηδέν, $P(K \leq 0)$. Αντίστροφα, η πιθανότητα αστοχίας (POF), εκφράζεται από την σχέση $P(K > 0) = 1 - P(K \leq 0)$, αφού τα δύο γεγονότα είναι συμπληρωματικά. Έτσι ουσιαστικά από το Σχ. 41, στο σημείο όπου η τιμή της συνάρτησης λαμβάνει την τιμή μηδέν, προκύπτει ότι για τάση 20MPa η πιθανότητα επιβίωσης είναι περίπου 75%, ενώ αντίστοιχα η πιθανότητα αστοχίας είναι 25%.

Σχ. 41 Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας K

Έτσι ουσιαστικά δεν ενδιαφερόμαστε για μεθόδους μοντελοποίησης όλης της κατανομής της συνάρτησης αστοχίας, αλλά για την πιθανότητα η τιμή της να είναι μικρότερη του μηδενός. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για αυτό το λόγο αναπτύσσονται στο επόμενο κεφάλαιο.

4.8 Βιβλιογραφία

- [4.1] G. J. Hahn, S. S. Shapiro, *Statistical Models in Engineering*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994
- [4.2] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical recipes in Fortran - The Art of Scientific Computing*, 2nd Ed. Cambridge University Press, 1994
- [4.3] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol.2, Seminumerical Algorithms, Addison Wesley Longman, 3rd Ed., USA, 1998
- [4.4] G. S. Fishman, *Monte Carlo- Concepts, Algorithms, and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1996
- [4.5] A. R. Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, Wiley, USA, 1981
- [4.6] S. Wegenkittl, *Empirical Testing of Pseudorandom Number Generators*, Diplom thesis, University of Salzburg, 1995
- [4.7] A. H-S. Ang, W. H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Vol. II, Decision, Risk and Reliability, John Wiley & Sons, USA, 1984
- [4.8] P. Bjerager, *Methods for Structural Reliability Computations*, in Reliability Problems: General Principles and Applications, in Mechanics of Solids and Structures, Ch.3, F. Casciati, J. B. Roberts, Eds., Springer Verlag, Italy, pp.89-135, 1991
- [4.9] Germanischer Lloyd, *Rules and Regulations*, Part IV Non-Marine Technology; 1. Regulations for the Certification of Wind Energy Conversion Systems, 1999
- [4.10] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, G. A. Kalogiannakis, On the stochastic nature of thermomechanical properties in Glass reinforced polyester laminates, *Composite Structures*, Vol. 49, pp. 293-301, 2000
- [4.11] R. F. Gibson, *Principles of composite material mechanics*, McGraw-Hill, Inc., Singapore, 1994
- [4.12] Z. Hashin, *Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites*, J. of Applied Mechanics, Vol. 47, pp.329-334, June 1980
- [4.13] L. S. Sutherland and C. Guedes Soares, *Review of probabilistic models of the strength of composite materials*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 56, pp.183-196, 1997
- [4.14] J. Echaabi, F. Trochu, *A methodology to derive the implicit equation of failure criteria for fibrous composite laminates*, J. of composite materials, Vol. 30, no.10, pp. 1088-1114, 1996
- [4.15] C. S. Lee, H. Wang, *Biaxial strength of cross-ply carbon fiber-reinforced composite laminates fabricated by lapped molding technique*, Material Science and Engineering, Vol. A271, pp. 496-502, publ. Elsevier Science S.A., 1999
- [4.16] E. M. Wu, Phenomological Anisotropic Failure Criterion, *Composite Materials Vol.2, Mechanics of Composite Materials*, G. P. Sendeckyj, ed, pp. 353-431, Academic Press, N. York, 1973
- [4.17] R. S. Swanson, A. P. Christophorou, *Response of quasi-isotropic Carbon/epoxy laminates to biaxial stress*, J. of Composite Materials, Vol. 20, pp.457-471, September 1986
- [4.18] S. W. Tsai, E. M. Wu, *A general theory of strength for anisotropic materials*, J. of Composite Materials, Vol. 5, pp. 58-80, 1971

- [4.19] P. S. Theocaris, T. P. Philippidis, *On the validity of the tensor polynomial failure theory with stress interaction terms omitted*, Comp. Sci. Tech., Vol. 40, pp. 181-191, 1991
- [4.20] T. P. Philippidis, P. S. Theocaris, *Failure prediction of fiber reinforce laminates under hygrothermal and mechanical in-plane loads*, Advances in Polymer Technology, Vol.12, No.3, pp.271-279, 1993
- [4.21] S. W. Tsai, H. T. Hahn, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Co., 1980
- [4.22] O. Hoffman, *The brittle strength of orthotropic materials*, J. Composite Materials, Vol. 1, pp. 200-206, 1967
- [4.23] P. S. Theocaris, T. P. Philippidis, *The Paraboloidal Failure Surface of Initially Anisotropic Elastic Solids*, J. Reinf. Plast. Comp., Vol. 6, pp. 378-395, 1989
- [4.24] E. M. Wu, J. K. Scheublein, *Laminate strength-a direct characterization procedure*, Composite materials: Testing and Design (Third Conference), ASTM STP 546, American Society for Testing and Materials 1974, pp. 188-206
- [4.25] R. C. Tennyson, D. MacDonald, A. P. Nanyaro, *Evaluation of the tensor polynomial failure criterion for composite materials*, J. of Composite Materials, Vol. 12, pp. 63-74, 1978
- [4.26] C. Gargiulo, M. Marchetti, T. P. Philippidis, D. J. Lekou, *Failure of $[\pm\theta]$ filament wound structural components under biaxial loading*, Proc. of the 1st Hellenic Conf. on composite materials and structures, Xanthi, Greece, Vol. II, Eds. S. A. Paipetis, E.E. Gdoutos, Publ. Kyriakidis Brothers S.A, Thessaloniki, Greece, pp. 51-75, 1997
- [4.27] A. Puck, *Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff - Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung; Bruchhypothesen und Schichtenweise Bruchanalyse*, Kunststoffe, Bd. 59, Heft 11, pp.780-787, 1969
- [4.28] VDI 2014, Blatt 3, Entwurf, *Entwicklung von Bauteilen aus Fasern-Kunststoff-Verbund; Berechnung*, April 1997
- [4.29] E. M. Wu, *Optimal experimental measurements of anisotropic failure tensors*, J. of composite materials, Vol. 6, pp. 472-489, October 1972
- [4.30] B. Gommers, I. Verpoest, P. Van Houtte, *Determination of the mechanical properties of composite materials by tensile tests. Part II: Strength properties*, J. of Composite Materials, Vol. 32, No. 2, pp. 102-122, 1998
- [4.31] L. F. Tenn, *Statistical Analysis of Fibrous Composite Strength data, Test Methods and Design Allowables for Fibrous Composites*, ASTM STP734, C.C. Chamis, ed, American Society for Testing and Materials, pp. 229-244, 1981
- [4.32] C. T. Sun, S. E. Yamada, *Strength distribution of a unidirectional fiber composite*, J. Composite Materials, Vol. 12, pp. 169-176, 1978

5 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΔΟΜΙΚΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Για την εκτίμηση της αξιοπιστίας μία κατασκευής με ένα ποσοτικοποιημένο τρόπο χρησιμοποιείται στατιστικός ή πιθανολογικός λογισμός. Οι μέθοδοι πιθανοτήτων εφαρμόζονται συνήθως για να απαντήσουν σε μία από τις δύο βασικές ερωτήσεις: Ποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της απόκρισης του συστήματος; Ή εναλλακτικά και λίγο πιο επικεντρωμένα στο πρόβλημα: Ποια είναι η πιθανότητα η απόκριση του συστήματος να ξεπεράσει μία συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή; Από την θέση της δομικής ανάλυσης και του σχεδιασμού βάσει αξιοπιστίας η δεύτερη προσέγγιση είναι πιο συνηθισμένη, επειδή οι μηχανικοί που ασχολούνται με την ανάλυση κατασκευών είναι συνήθως υπεύθυνοι για την περιγραφή της πιθανότητας αστοχίας του συστήματος σχετικά με μία ομάδα κανονισμών ή προδιαγραφών σχεδιασμού.

Σύμφωνα με το ISO 2394 [5.1], κατά τον σχεδιασμό η συμπεριφορά της όλης κατασκευής ή μέρους αυτής πρέπει να περιγράφεται ως προς ένα καθορισμένο σύνολο οριακών καταστάσεων, πέραν των οποίων η κατασκευή δεν ικανοποιεί τις προδιαγραφές του σχεδιασμού. Ο όρος *αστοχία* χρησιμοποιείται επομένως με την γενικότερη έννοια της λέξης και δηλώνει την αδυναμία της κατασκευής να ικανοποιήσει ένα συγκεκριμένο κριτήριο οριακής κατάστασης, η οποία μπορεί να είναι ή όχι η ολική αστοχία της κατασκευής.

Έχοντας αποδεχτεί την διαίρεση του πεδίου συμπεριφοράς μίας κατασκευής σε περιοχή αστοχίας και ασφαλή περιοχή (ή κατάσταση μη αστοχίας) μπορούμε να θεωρήσουμε μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό της πιθανότητας κάθε μιας κατάστασης. Μία μέθοδος προσδιορισμού αξιοπιστίας, στην πιο στενή της έννοια είναι μία μέθοδος για τον προσδιορισμό της πιθανότητας αστοχίας, P_F , ενός συστήματος. Σημειώνεται ότι η πιθανότητα αξιοπιστίας, P_R , είναι η συμπληρωματική της πιθανότητας αστοχίας.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας πρέπει να διενεργηθούν αρκετά βήματα. Πρώτα από όλα πρέπει να προσδιορισθούν οι βασικές μεταβλητές του προβλήματος, όπως θερμομηχανικές ιδιότητες υλικών, γεωμετρία της κατασκευής, περιβαλλοντολογικές συνθήκες λειτουργίας (θερμοκρασία, υγρασία), εξωτερικά φορτία. Ο συνδυασμός γεωμετρίας και ιδιοτήτων υλικού ορίζει την αντίσταση (resistance), ή στην συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζεται την αντοχή του συστήματος. Οι μεταβλητές που περιγράφουν τα χαρακτηριστικά της αντίστασης/ αντοχής καλούνται μεταβλητές σχεδιασμού. Ορισμένες από αυτές, αν όχι όλες, έχουν στοχαστική φύση. Προσδιορισμός των βασικών μεταβλητών σημαίνει την επιλογή των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας και την εκτίμηση των στατιστικών παραμέτρων των κατανομών, εφόσον χαρακτηρίζονται ως στοχαστικές, είτε εξαιτίας φυσικής διασποράς, είτε εξαιτίας της αβέβαιης γνώσης που έχουμε για αυτές. Οι δύο πηγές αβεβαιοτήτων, δηλαδή των εξωτερικών παραμέτρων και των εσωτερικών, ομαδοποιούνται σε ένα γενικευμένο διάνυσμα βασικών μεταβλητών, $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Οι διακυμάνσεις αυτών των μεταβλητών μπορεί να εξαρτώνται από τον χρόνο, μπορεί και όχι. Στην παρούσα εργασία η ανάλυση περιορίζεται στις καταστάσεις εκείνες όπου οι αβεβαιότητες μπορούν να χαρακτηρισθούν ανεξάρτητα του χρόνου. Η απόκριση του συστήματος σε μία συγκεκριμένη τιμή αυτού του διανύσματος συμβολίζεται με $G(\mathbf{X})$.

Στην συνέχεια υποθέτοντας την ύπαρξη ενός κρίσιμου σημείου στην απόκριση του συστήματος, το αποτέλεσμα είναι ο διαχωρισμός του χώρου των παραμέτρων του συστήματος $\mathbf{X}$ σε δύο υποχώρους: Μία περιοχή Ω όπου ο συνδυασμός των παραμέτρων οδηγεί σε μία μη αποδεκτή ή μη ασφαλή απόκριση και σε μία περιοχή ασφαλή Ω' , όπου η απόκριση του συστήματος γίνεται αποδεκτή. Η επιφάνεια που χωρίζει τις δύο αυτές περιοχές ονομάζεται επιφάνεια οριακής κατάστασης (limit state surface) ή συνάρτηση οριακής κατάστασης (limit state function). Η πιθανότητα αστοχίας του συστήματος ορίζεται από την έκφραση:

$$P_F = \iiint_{\Omega} \dots \int f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (5.1)$$

όπου $f(\mathbf{X})$ είναι η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Εκτός από ορισμένες μεμονωμένες συναρτήσεις αστοχίας και τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή, το ολοκλήρωμα της κοινής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας είναι δύσκολο να υπολογισθεί με αναλυτικό τρόπο. Στην περίπτωση αυτή ανήκει και η συνάρτηση αστοχίας στρώσης συνθέτου υλικού υπό επίπεδη εντατική κατάσταση. Για την εκτίμηση έτσι της πιθανότητας αστοχίας έχουν αναπτυχθεί προσεγγιστικές μέθοδοι. Εδώ περιγράφονται μερικές από αυτές, σχολιάζοντας τα υπέρ και κατά της κάθε μιας ως προς την καταλληλότητά τους για χρήση στον σχεδιασμό κατασκευών από σύνθετα υλικά.

5.1 Ταξινόμηση των μεθόδων αξιοπιστίας

Η μεγάλη ποικιλία των εξιδανικεύσεων των μοντέλων αξιοπιστίας των κατασκευών και οι πολυάριθμοι τρόποι που μπορεί κανείς να συνδυάσει αυτές τις εξιδανικεύσεις για να ταιριάζουν σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα σχεδιασμού καθιστά επιθυμητή την ταξινόμηση αυτών των μοντέλων. Οι μέθοδοι δομικής αξιοπιστίας χωρίζονται σε βαθμίδες, οι οποίες χαρακτηρίζονται από την έκταση της πληροφορίας που υπάρχει και χρησιμοποιείται γύρω από το δομικό πρόβλημα. Υπάρχουν τέσσερις κύριες βαθμίδες, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτή η ταξινόμηση των μεθόδων είναι αποκλειστική [5.2].

Βαθμίδα I: Οι μέθοδοι αξιοπιστίας που χρησιμοποιούν μόνο μία «χαρακτηριστική» τιμή για κάθε μία παράμετρο ονομάζονται βαθμίδας I. Πρόκειται για μεθόδους σχεδιασμού που εμπεριέχουν χαρακτηριστικές τιμές και μερικούς συντελεστές ασφάλειας.

Βαθμίδα II: Οι μέθοδοι αξιοπιστίας που χρησιμοποιούν δύο τιμές για κάθε στοχαστική παράμετρο, συνήθως την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, και που περιλαμβάνουν ένα μέτρο συσχέτισης μεταξύ των παραμέτρων, συνήθως την συνδιασπορά, καλούνται μέθοδοι βαθμίδας II. Οι μέθοδοι δείκτη αξιοπιστίας (reliability index) όπως θα περιγραφεί στην συνέχεια ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Πρόκειται για μεθόδους ανάλυσης της αξιοπιστίας της κατασκευής, που χρησιμοποιούν έλεγχοι για την ασφάλεια σε ένα προεπιλεγμένο σημείο (ή σημεία) πάνω στην επιφάνεια αστοχίας, την κατάλληλη δηλαδή συνάρτηση οριακής κατάστασης.

Βαθμίδα III: Οι μέθοδοι αξιοπιστίας που χρησιμοποιούν την πιθανότητα αστοχίας ως ένα μέτρο, και οι οποίες εξ' αυτού απαιτούν την γνώση της συνάρτησης κοινής κατανομής πιθανότητας όλων των στοχαστικών παραμέτρων καλούνται μέθοδοι επιπέδου III. Πρόκειται για μεθόδους καθαρά στατιστικής ανάλυσης κατά τις οποίες οι έλεγχοι για την ασφάλεια γίνονται για όλο το σύστημα της κατασκευής με ταυτόχρονη χρήση των κατανομών πιθανότητας των μεταβλητών του συστήματος.

Βαθμίδα IV: Τέλος μία μέθοδος αξιοπιστίας που συγκρίνει ένα υποψήφιο δομικό σχεδιασμό με ένα δομικό σχεδιασμό αναφοράς, σύμφωνα με τις αρχές οικονομικής ανάλυσης από μηχανική άποψη, κάτω από αβεβαιότητα, περιλαμβάνοντας προτερήματα και μειονεκτήματα της κατασκευής, συντήρησης και επισκευής, επιπτώσεις της αστοχίας και επιτόκια κεφαλαίου κλπ. καλείται μέθοδος επιπέδου IV. Τέτοιες μέθοδοι είναι κατάλληλες για κατασκευές που είναι ύψιστης οικονομικής σημασίας στις οποίες η προοπτική απώλειας ζωής, αναπηρίας και άλλων περιβαλλοντολογικών και μη επιδράσεων πρέπει να είναι ελάχιστα.

Η προσέγγιση τύπου I είναι η καλύτερη περίπτωση για χρήση από μηχανικούς για τον σχεδιασμό κατασκευών, αλλά δεν έχει αναπτυχθεί τόσο ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις. Η μέθοδος δεν απαιτεί τον ακριβή προσδιορισμό της τιμής της πιθανότητας αστοχίας, καθώς μία συγκεκριμένη οριακή κατάσταση θα θεωρείται ασφαλής αν δεν ξεπερνιούνται οι κατάλληλοι μερικοί συντελεστές ασφάλειας. Ένας κατάλογος τέτοιων μερικών συντελεστών ασφαλείας δίνεται σε κώδικες σχεδιασμού για περιπτώσεις

που έχουν ήδη αναλυθεί. Το πρόβλημα είναι ότι οι τιμές αυτών των μερικών συντελεστών ασφαλείας, για την ζητούμενη περιοχή αξιοπιστίας των κατασκευαστικών στοιχείων, πρέπει πρώτα να προκύψουν από μία ανάλυση αξιοπιστίας που γίνεται είτε με την μέθοδο τύπου II είτε με την τύπου III.

Η μέθοδος τύπου III είναι στην πραγματικότητα μία καθαρά μαθηματική μέθοδος και θα πρέπει πιθανόν να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση ειδικών κατασκευών, στις οποίες το επίπεδο αξιοπιστίας είναι εξαιρετικής σημασίας, ή σε περιπτώσεις όπου είναι ιδιαίτερα σημαντικό να βελτιστοποιηθεί η κατασκευή.

Η μέθοδος τύπου II, συχνά αναφέρεται σαν μέθοδος δείκτη αξιοπιστίας, reliability index method, εμπεριέχει απλά μαθηματικά και είναι γενικά αποδεκτό ότι αυτή η μέθοδος έχει την δυνατότητα είτε να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό κατάλληλων μερικών συντελεστών ασφαλείας για την μέθοδο τύπου I, είτε να χρησιμοποιηθεί άμεσα ως μία μέθοδος σχεδιασμού.

Για τις μεθόδους τύπου II και III η ταξινόμησή τους μπορεί να γίνει επίσης βάσει της μορφής της συνάρτησης αστοχίας, εφόσον για την ανάλυση της αξιοπιστίας μίας κατασκευής απαιτείται αρχικά ο ορισμός της αστοχίας της μαθηματικά. Η μοντελοποίησή της πρέπει να γίνεται δε με τέτοιο τρόπο ώστε να διαχωρίζεται σαφώς η ασφαλής (και αποδεκτή) περιοχή λειτουργίας από την μη αποδεκτή περιοχή. Έτσι ανάλογα με το επίπεδο περιγραφής που εφαρμόζεται στην μοντελοποίηση της αβεβαιότητας μπορούμε να χωρίσουμε τις μεθόδους προσδιορισμού σε τρεις κατηγορίες: α) Μοντέλα τυχαίων μεταβλητών, β) Μοντέλα τυχαίων διαδικασιών και γ) μοντέλα τυχαίων πεδίων [5.3].

5.1.1 Μοντέλα τυχαίων μεταβλητών

Τα μοντέλα τυχαίων μεταβλητών περιγράφουν προβλήματα αξιοπιστίας, τα οποία χαρακτηρίζονται από την συνάρτηση αστοχίας $G(X)$, όπου G η συνάρτηση αστοχίας και X το σύνολο των βασικών τυχαίων μεταβλητών. Η αστοχία κατά σύμβαση, ορίζεται ως το γεγονός ($G(X) \leq 0$), ενώ ($G(X) \geq 0$) υποδηλώνει την ασφαλή περιοχή. Η πιθανότητα αστοχίας ορίζεται ως:

$$P_F = P(G(X) \leq 0) = \int_{G(x) \leq 0} f_x(x) dx \quad (5.2)$$

όπου $f_x(x)$ η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών του X , που δεν εξαρτώνται από τον χρόνο.

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες μεθόδων πιθανότητας που μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση των εν λόγω προβλημάτων.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει μία μεγάλη ομάδα μεθόδων τυχαίας δειγματοληψίας, όπως είναι η μέθοδος Monte Carlo ή οι τεχνικές σημαντικής δειγματοληψίας (importance sampling technique). Αυτές χαρακτηρίζονται από την τυχαία επιλογή παρατηρήσεων κάθε παραμέτρου x_i του συστήματος ώστε να ικανοποιείται η συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής και αυτές οι τιμές εφαρμόζονται στην συνέχεια στην συνάρτηση απόκρισης του συστήματος $G(X)$.

Η δεύτερη κατηγορία μεθόδων χαρακτηρίζεται από την χρήση αναλυτικών τεχνικών για την εύρεση ενός συγκεκριμένου σημείου στο χώρο σχεδιασμού, που μπορεί να συσχετισθεί, τουλάχιστον προσεγγιστικά, με την πιθανότητα αστοχίας του συστήματος. Στο [5.4] παρουσιάζεται μια ανασκόπηση των μεθόδων αυτών.

Καθώς στην παρούσα εργασία, όπως προαναφέρθηκε, η ανάλυση περιορίζεται στα μοντέλα τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή θεωρούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές που διέπουν το πρόβλημα είναι ανεξάρτητες του χρόνου, αλλά και του χώρου, οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται θα αναλυθούν λεπτομερέστερα σε επόμενα εδάφια.

5.1.2 Μοντέλα αξιοπιστίας τυχαίων διαδικασιών

Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα ορίζεται από το μέγεθος $\min_{t \in T} G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t))$, όπου G είναι μία συνάρτηση αστοχίας, $\mathbf{X}$ είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών, $\mathbf{Y}(t)$ ένα σύνολο τυχαίων διαδικασιών με t το χρόνο και T μία περίοδος αναφοράς, τυπικά ο χρόνος ζωής της κατασκευής. Η πιθανότητα αστοχίας είναι εν γένει η πιθανότητα πρώτης υπέρβασης. Στην πιο απλή περίπτωση η επιφάνεια αστοχίας στον χώρο $\mathbf{Y}$ είναι ντετερμινιστική και ανεξάρτητη του χρόνου [5.3].

Βασικές αρχές που διέπουν το πρόβλημα δίνονται στο [5.5]. Σε εφαρμογές για προβλήματα συνθέτων υλικών, μοντέλο τυχαίας διαδικασίας χρησιμοποιήθηκε μεταξύ άλλων στο [5.6], όπου εξετάζεται το πρόβλημα της αστοχίας συνθέτων υλικών υπό τυχαία φόρτιση μονοτονικά αυξανόμενη. Σε άλλη περίπτωση, στο [5.7] επεκτείνεται ένα ντετερμινιστικό μοντέλο εξαρτημένο από τον χρόνο για την πρόβλεψη της έναρξης αποστρωματοποίησης, ώστε να περιλαμβάνονται τα τυχαία επιβαλλόμενα φορτία (μοντελοποιημένα ως τυχαίες διαδικασίες) και οι τυχαίες ιδιότητες ανισότροπου βισκοελαστικού υλικού.

5.1.3 Μοντέλα αξιοπιστίας τυχαίων πεδίων

Ένα πρόβλημα αξιοπιστίας τυχαίου πεδίου περιγράφεται από την συνάρτηση $G(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}(q, t))$ όπου $\mathbf{X}$ είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών, $\mathbf{Y}(t)$ ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών εξαρτημένων από τον χρόνο και $\mathbf{Z}(q, t)$ είναι ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών εξαρτημένων από την θέση στο πεδίο, q , όπου το q εκφράζει για παράδειγμα συντεταγμένες θέσης, και από τον χρόνο, t . Τυχαία πεδία είναι ιδανικά για την μοντελοποίηση μεταβλητότητας στον χώρο, όπως συμβαίνει με τις ιδιότητες υλικών ή την μεταβλητότητα κατανεμημένων φορτίων πάνω σε μία κατασκευή. Επισκόπηση των βασικών αρχών που διέπουν τέτοιου είδους προβλήματα γίνεται στο [5.8]. Τα τυχαία πεδία έχουν χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση της μοντελοποίησης σε στοχαστικά πεπερασμένα στοιχεία, για τις ιδιότητες του στοιχείου ή για τις δυνάμεις των κόμβων, όπως περιγράφεται μεταξύ άλλων στο [5.9].

Μοντέλα τυχαίων πεδίων ανεξάρτητα του χρόνου έχουν βρει εφαρμογή σε προβλήματα συνθέτων υλικών, όταν πρόκειται για την εξέταση της αστοχίας τους στο επίπεδο μικρομηχανικής [5.10]. Στο επίπεδο μακρομηχανικής, εφαρμογές τυχαίων πεδίων περιγράφονται στο [5.11], όπου ως τυχαίο πεδίο μοντελοποιείται η αντοχή του υλικού και στο [5.12] όπου εκτός της αντοχής περιλαμβάνονται και οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού με μοντέλο τυχαίου πεδίου. Και στις δύο περιπτώσεις η πρόβλεψη της απόκρισης της κατασκευής γίνεται με την μέθοδο Monte Carlo. Από την άλλη πλευρά στο [5.13] ως τυχαία πεδία μοντελοποιούνται οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού και η πυκνότητά του για την εκτίμηση της απόκρισης πλάκας από σύνθετο υλικό σε ελεύθερη ταλάντωση.

Ως εφαρμογή συνδυασμού μοντέλων τυχαίων διαδικασιών και τυχαίων πεδίων σε προβλήματα συνθέτων υλικών στο [5.14] επεκτείνεται η μέθοδος που εφαρμόστηκε στο [5.6], ώστε να συμπεριλαμβάνεται η στοχαστική φύση των ελαστικών ιδιοτήτων και της αντοχής των υλικών, μέσω της χρήσης μοντέλων τυχαίων πεδίων για να γίνει η πρόβλεψη της διάδοσης θραύσης των συνθέτων υλικών μέχρι την τελική αστοχία. Αντίστοιχη εφαρμογή τυχαίων διαδικασιών και πεδίων βρίσκεται επίσης στο [5.15].

5.2 Μέθοδος επιμέρους συντελεστών ασφαλείας

Οι τιμές σχεδιασμού των βασικών μεταβλητών συμβολίζονται με X_{ID} . Οι τιμές αυτές μπορούν να γραφούν στην περίπτωση των φορτίων ως:

$$X_{FiD} = \gamma_{Fi} X_{FiC},$$

όπου X_{FiC} είναι χαρακτηριστική (ή αντιπροσωπευτικές) τιμή της παραμέτρου φόρτισης X_{Fi} , γ_{Fi} είναι ο μερικός συντελεστής ασφαλείας της παραμέτρου φόρτισης X_{Fi} , ενώ δεν υπονοείται

άθροιση όρων επαναλαμβανόμενων δεικτών στην σχέση αυτή. Αντίστοιχα στην περίπτωση αντοχής υλικών οι τιμές σχεδιασμού γράφονται ως:

$$X_{Mid} = X_{MiC} / \gamma_{Mi}$$

όπου X_{MiC} είναι η χαρακτηριστική τιμή της ιδιότητας του υλικού, για παράδειγμα της αντοχής και γ_{Mi} είναι ο μερικός συντελεστής ασφάλειας υλικού.

Η επιβεβαίωση της κατασκευής ως προς την οριακή κατάσταση γίνεται εισάγοντας τις τιμές σχεδιασμού και τις παραμέτρους διαστασιολόγησης στην συνάρτηση αστοχίας για να επιβεβαιωθεί ότι:

$$G(X_D) \geq 0.$$

Οι χαρακτηριστικές τιμές είναι συχνά οι μέσες τιμές, το 95%, ή το 98% ποσοστιαίο σημείο για τα φορτία και αντίστοιχα το 5% ή το 2% για τις ιδιότητες αντοχής. Οι μερικοί συντελεστές ασφαλείας επιλέγονται έτσι ώστε να λαμβάνεται υπόψη η αβεβαιότητα και η μεταβλητότητα των βασικών μεταβλητών του προβλήματος, ενώ εξαρτώνται και από την οριακή κατάσταση που εξετάζεται [5.1].

Στην περίπτωση σχεδιασμού περυγίων ανεμογεννητριών, όπως φαίνεται από τους αντίστοιχους κώδικες σχεδιασμού GL [5.16] και IEC [5.17], χρησιμοποιείται η έννοια της χαρακτηριστικής τιμής τάσεων αστοχίας, X_{MiC} . Η χαρακτηριστική αυτή τιμή της τάσης αστοχίας, ορίζεται ως το ποσοστιαίο σημείο (fractile) συνήθως 5% της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας της υπό εξέταση αντοχής του υλικού, δηλαδή η τιμή της αντοχής $z(a)$ για την οποία ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{z(a)} f(x)dx = F(z(a)) = a = 0.05 \quad (5.3)$$

όπου $f(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και $F(x)$ η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής που ακολουθεί η τάση αστοχίας του υλικού. Συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι η κατανομή που ακολουθεί η ιδιότητα αντοχής του υλικού είναι η κανονική κατανομή [5.18], [5.16], και έτσι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\int_{-\infty}^{z(a)} \varphi(x)dx = \Phi(z(a)) = a = 0.05 \quad (5.4)$$

όπου $\varphi(x)$ και $\Phi(x)$ η συνάρτηση πυκνότητας και η αθροιστική κατανομή αντιστοίχως της κανονικής κατανομής, βλ. Σχ. 42.

Σχ. 42 Ορισμός της 5% fractile χαρακτηριστικής τάσεως αστοχίας

Για την κανονικοποιημένη μεταβλητή $z = \frac{X_{M,C} - m'_1}{s}$, όπου m'_1 και s η μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντιστοίχως του δείγματος για την X ιδιότητα αντοχής, ισχύει ότι $z(0.05) = -1.645$ και άρα:

$$X_{M,C} = m'_1 - 1.645s \quad (5.5)$$

Αυτό σημαίνει ότι το 95% του πληθυσμού έχει τιμή αντοχής μεγαλύτερη της χαρακτηριστικής αυτής $X_{M,C}$ που προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης.

Επίσης, επειδή η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ιδιότητας αντοχής του υλικού (δηλαδή του πληθυσμού) έχουν εκτιμηθεί μέσω ενός δείγματος, για να ληφθεί υπόψη η πιθανότητα μίας χαμηλότερης μέσης τιμής για το υλικό από αυτή του δείγματος, χρησιμοποιείται διάστημα εμπιστοσύνης (confidence interval) για την χαμηλότερη τιμή της μέσης τιμής του δείγματος, m'_{1L} , η οποία πρέπει να χρησιμοποιηθεί κατά τον προσδιορισμό της χαρακτηριστικής τιμής αντοχής. Για το διάστημα αυτό επιλέγεται συνήθως η τιμή 95%. Η κάτωθι σχέση θα ισχύει (υποθέτοντας ότι ο πληθυσμός ακολουθεί την κανονική κατανομή):

$$m'_{1L} = m'_1 - t_{0.95} \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (5.6)$$

όπου $t_{0.95}$ είναι το 95% ποσοστιαίο σημείο της κατανομής Student με $v = N-1$ βαθμούς ελευθερίας. Για παράδειγμα σε περίπτωση που το δείγμα περιλαμβάνει $N = 10$ δοκίμια η τιμή $t_{0.95}$ είναι ίση με 1.833, ενώ για πολύ μεγάλο αριθμό δοκιμίων (N) η κατανομή Student προσεγγίζει την κανονική κατανομή και το $t_{0.95}$ είναι 1.645.

Τελικώς, για την χαρακτηριστική τιμή, $X_{M,C}$, δια συνδυασμού των ανωτέρω εξισώσεων (5.5)-(5.6) εξάγεται η ακόλουθη σχέση σύμφωνα με τις απαιτήσεις των κανονισμών:

$$X_{M,C}(a, e, s, N) = X_{M,C}(5\%, 95\%, s, N) = m'_1 - s \left(1.645 + \frac{t_{0.95}}{\sqrt{N}} \right) \quad (5.7)$$

όπου a είναι το ζητούμενο ποσοστιαίο σημείο της αντοχής και e το διάστημα εμπιστοσύνης, N ο αριθμός των δοκιμίων για κάθε τύπο πειράματος και m'_1 η μέση τιμή του δείγματος.

Πολλές φορές, σε ορισμένους κώδικες σχεδιασμού κάποιος μερικός συντελεστής ασφαλείας μπορεί να γραφεί ως:

$$\gamma_i = \gamma_{i1} \gamma_{i2} \dots \gamma_{in},$$

όπου γ_{i1} : επιλέγεται για τις επιπτώσεις αστοχίας, γ_{i2} για την αβεβαιότητα της θερμικής επεξεργασίας κλπ.

Οι χαρακτηριστικές τιμές, τα επίπεδα εμπιστοσύνης, οι μερικοί συντελεστές ασφαλείας κλπ., δηλαδή όλοι οι αριθμοί που προδιαγράφονται σε ένα κώδικα ασφαλείας, εκτός από τις μαθηματικές ή τις φυσικές σταθερές, αποτελούν τις παραμέτρους του κανονισμού. Η επιλογή ενός συνόλου αριθμητικών τιμών για τις παραμέτρους του κώδικα καλείται βαθμονόμηση της μορφής του κώδικα. Πάρα πολλοί κανονισμοί σχεδιασμού που χρησιμοποιούνται έχουν προσαρμοστεί τουλάχιστον εν μέρει με μεθόδους προσδιορισμού αξιοπιστίας επιπέδου II, ενώ η μέθοδος μερικών συντελεστών ασφαλείας είναι μία μέθοδος βαθμίδας I [5.2].

5.2.1 Μέθοδος ποσοστιαίων σημείων βασικών μεταβλητών

Η μέθοδος βασικών μεταβλητών (BVM) όπως περιγράφηκε για τον προσδιορισμό της συνάρτησης κατανομής κοινής πιθανότητας εφαρμόζεται στην εργασία αυτή για την εύρεση της αξιοπιστίας. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε ότι η πιθανότητα αστοχίας ισούται με την πιθανότητα των αντίστοιχων ποσοστιαίων σημείων, fractiles, των βασικών μεταβλητών του προβλήματος. Η μέθοδος, δηλαδή είναι μία καθαρά ντετερμινιστική ανάλυση του

προβλήματος, αλλά αντί να χρησιμοποιούνται οι μέσες τιμές κάθε βασικής μεταβλητής, ή κάποιες αντίστοιχες με συντελεστές ασφαλείας χρησιμοποιείται ένα συγκεκριμένο ποσοστιαίο σημείο, fractile, π.χ. 5%, το οποίο αντικαθίσταται στην εξίσωση του ντετερμινιστικού προβλήματος και θεωρείται ότι έτσι υπολογίζεται η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης πιθανότητας της εξαρτημένης μεταβλητής.

5.3 Monte Carlo προσομοίωση

Η μέθοδος βασίζεται στην επαναληπτική επίλυση του ντετερμινιστικού προβλήματος, ουσιαστικά παράγοντας σε κάθε επανάληψη μία πιθανή τιμή για κάθε στοχαστική μεταβλητή του προβλήματος, όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Στο πρόβλημα προσδιορισμού της αξιοπιστίας μίας κατασκευής, η ανάλυση απλοποιείται αφού αρκεί ο έλεγχος για το αν αστοχεί το δομικό στοιχείο ή όχι. Έτσι, η αξιοπιστία του στοιχείου δίνεται ως:

$$P_R = \frac{n_S}{n_{tot}} \quad (5.19)$$

όπου n_S ο αριθμός των επαναλήψεων κατά την προσομοίωση όπου η συνάρτηση αστοχίας ελάμβανε μικρότερες τιμές του 0 και επομένως δεν επέρχεται αστοχία του στοιχείου και n_{tot} ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων. Για τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται ώστε να προβλέπεται με ακρίβεια η πιθανότητα αστοχίας των συστημάτων που εξετάζονται βρέθηκε ότι απαιτούνται περίπου $100/P_F$ δείγματα, όπου P_F η πιθανότητα αστοχίας που αναμένεται [5.3]. Πρέπει να σημειωθεί ότι για την χρήση της μεθόδου Monte Carlo έγινε διεξοδική διερεύνηση στα πλαίσια της εργασίας αυτής τόσο για τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για την σύγκλιση της μεθόδου, όσο και για τους αλγορίθμους παραγωγής τυχαίων αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν. Τα αποτελέσματα της διερεύνησης αυτής παρουσιάστηκαν στο [5.19].

Η μέθοδος εξαιτίας της ευκολίας εφαρμογής της έχει χρησιμοποιηθεί αρκετές φορές σε προβλήματα με σύνθετα υλικά. Για παράδειγμα η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε αποκλειστικά στο [5.20] για την πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας σε μονοαξονικό εφελκυσμό off-axis στρώσεων όπου ως στοχαστικές παράμετροι θεωρούνται οι ιδιότητες αντοχής του υλικού, ενώ στο [5.21] εφαρμόζεται η μέθοδος για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας κάθε στρώσης πολύστρωτης πλάκας υπό κατακόρυφο φορτίο. Στην δεύτερη αυτή περίπτωση ως στοχαστικές λαμβάνονται εκτός από τις ιδιότητες αντοχής, οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού και οι διαστάσεις της πλάκας. Εξαιτίας του μεγάλου υπολογιστικού της κόστους όμως, δεν ενδείκνυται για την εφαρμογή σε κατασκευές σύνθετης γεωμετρίας όπου το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων αποτελείται από μεγάλο αριθμό στοιχείων. Παρόλα αυτά, η μέθοδος παραμένει ένα πολύτιμο εργαλείο για την επιβεβαίωση μεθόδων που αναπτύσσονται για την πρόβλεψη αξιοπιστίας.

5.4 Μέθοδος Μέσης Τιμής (Mean Value method)

Συχνά οι διαθέσιμες πληροφορίες ή τα δεδομένα επαρκούν μόνο για τον υπολογισμό της πρώτης και δεύτερης ροπής, δηλαδή της μέσης τιμής και της διασποράς των τυχαίων μεταβλητών. Έτσι για να μπορούμε να εκτιμήσουμε την αξιοπιστία ενός μηχανικού συστήματος πρέπει τα συναρτησιακά των μεθόδων που χρησιμοποιούμε να περιορίζονται σε συναρτήσεις αυτών των δύο πρώτων ροπών. Με αυτή την διατύπωση, η αξιοπιστία μπορεί να υπολογισθεί εξ' ολοκλήρου με μία συνάρτηση των πρώτων και δεύτερων ροπών των μεταβλητών που εμπεριέχονται στον σχεδιασμό, όταν δεν υπάρχουν πληροφορίες για την κατανομή πιθανότητας.

Επομένως με αυτή την πληροφορία μπορούν να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της συνάρτησης αστοχίας, όπως περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4, αναπτύσσοντας την συνάρτηση αστοχίας $G(\mathbf{X})$ σε σειρές Taylor γύρω από την μέση τιμή της. Στις εφαρμογές που

παρουσιάζονται συνήθως ο υπολογισμός των δύο πρώτων ροπών της συνάρτησης γίνεται με όρους μόνο πρώτης τάξεως, μειώνοντας έτσι την ακρίβεια του υπολογισμού, όταν πρόκειται για μη γραμμικές συναρτήσεις. Στην παρούσα εργασία ο υπολογισμός των ροπών γίνεται κρατώντας όρους δεύτερης τάξης.

Στην πιο απλή περίπτωση, βάσει αυτών των δύο ροπών, γίνεται η προσέγγιση της πιθανότητας αστοχίας, θεωρώντας συνήθως ότι η συνάρτηση ακολουθεί την κανονική κατανομή. Στο [5.4] αναφέρεται ότι οι βασικές αιτίες σφάλματος που σχετίζονται με την μέθοδο μέσης τιμής είναι ακριβώς αυτή η υπόθεση ότι η απόκριση ακολουθεί την κανονική κατανομή σε συνδυασμό με το ανάπτυγμα Taylor σαν μία προσέγγιση της συνάρτησης.

Από την άλλη πλευρά, σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα οποιασδήποτε μεθόδου ανάλυσης αβεβαιότητας είναι απαραίτητο να είναι ανεξάρτητα από την μαθηματική έκφραση της συνάρτησης αστοχίας του προβλήματος, όταν διατηρείται ο αρχικός ορισμός της αστοχίας. Δηλαδή αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση αστοχίας ενός προβλήματος ορίζεται από την:

$$G = R - S$$

τα αποτελέσματα της ανάλυσης της πιθανότητας αστοχίας $P_F = P(R < S)$ πρέπει να είναι ισοδύναμα με αυτά της πιθανότητας $P_F = P(R - S < 0)$ ή της $P_F = P(R/S < 1)$. Η συνθήκη αυτή όμως δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις για την μέθοδο της μέσης τιμής. Για παράδειγμα θεωρώντας τις παρακάτω δύο ισοδύναμες εκφράσεις για κριτήριο αστοχίας συνθέτων υλικών TH:

$$K = \frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + \sigma_1 \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) + \sigma_2 \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}} \leq 1$$

και

$$K = \sigma_1^2 Y_T Y_C S^2 + \sigma_2^2 X_T X_C S^2 + \sigma_6^2 X_T X_C Y_T Y_C + \sigma_1 Y_T Y_C S^2 (X_C - X_T) + \sigma_2 X_T X_C S^2 (Y_C - Y_T) - \sigma_1 \sigma_2 S^2 \sqrt{X_T X_C Y_T Y_C} - X_T X_C Y_T Y_C S^2 \leq 0$$

τα αποτελέσματα για την πιθανότητα αστοχίας που προκύπτουν από την χρήση της μεθόδου είναι διαφορετικά.

Ως προς τις εφαρμογές σε προβλήματα συνθέτων υλικών, η μέθοδος μέσης τιμής σε συνδυασμό με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων έχει χρησιμοποιηθεί στο [5.22] για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας πολύστρωτης πλάκας ως προς την αστοχία πρώτης στρώσης και τον λυγισμό. Στην εφαρμογή αυτή οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού, ο προσανατολισμός και το πάχος των στρώσεων λαμβάνονται ως στοχαστικές μεταβλητές. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά που προέκυψαν από προσομοίωση με Monte Carlo, φαίνεται ότι η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι ικανοποιητική.

Σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες πληροφορίες για τις βασικές μεταβλητές που διέπουν το πρόβλημα, όπως για παράδειγμα η κατανομή την οποία ακολουθούν ή ροπές ανώτερης τάξης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να βελτιωθεί η ακρίβεια υπολογισμού της πιθανότητας αστοχίας. Στο [5.23] παρουσιάζεται μία μέθοδος κατά την οποία γνωρίζοντας τις ροπές της συνάρτησης αστοχίας, προσεγγίζεται η κατανομή πιθανοτήτων της συνάρτησης αυτής χρησιμοποιώντας την οικογένεια κατανομών λάμδα. Αντίστοιχα με την εργασία στο [5.23] μπορούν να χρησιμοποιηθούν η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth και η οικογένεια κατανομών Pearson, όπως περιγράφεται στην συνέχεια.

5.4.1 Μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth

Η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο εφαρμόστηκε αρχικά στο [5.24] για την προσέγγιση της πιθανότητας αστοχίας στρώσης συνθέτου υλικού υπό μονοαξονική φόρτιση, σε διαφορετική διεύθυνση από αυτή των ινών, χρησιμοποιώντας το κριτήριο Hill ως συνάρτηση αστοχίας. Η μέθοδος αυτή, χρησιμοποιείται

και στην παρούσα εργασία και αναπτύχθηκε περαιτέρω για την εφαρμογή της στο σχεδιασμό κατασκευών από σύνθετα υλικά.

Σε σχέση με την μέθοδο μέσης τιμής, η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth εκ πρώτης όψεως παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες. Οι βασικές διαφορές μεταξύ των δύο μεθόδων είναι δύο: Η πρώτη έγκειται στο γεγονός ότι ο υπολογισμός των δύο πρώτων ροπών της συνάρτησης αστοχίας γίνεται κατά την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth κρατώντας όρους δεύτερης τάξεως, αυξάνοντας έτσι την ακρίβεια υπολογισμού για μη γραμμικές συναρτήσεις. Η δεύτερη σχετίζεται με το γεγονός ότι για την προσέγγιση της πιθανότητας αστοχίας κατά την μέθοδο μέσης τιμής θεωρείται ότι η συνάρτηση ακολουθεί την κανονική κατανομή, ενώ στην περίπτωση του αναπτύγματος Edgeworth γίνεται διόρθωση της πρόβλεψης χρησιμοποιώντας και τις υπόλοιπες ροπές της συνάρτησης αστοχίας.

Η συνθήκη, του ότι οποιαδήποτε μέθοδος προσδιορισμού αξιοπιστίας πρέπει να είναι ανεξάρτητη της μορφής της συνάρτησης, δεν ισχύει για πολλά προβλήματα ούτε στην περίπτωση της μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth, όπως και στην μέθοδο μέσης τιμής. Το θέμα όμως είναι ότι όπως εφαρμόζεται στα προβλήματα που ακολουθούν, η μέθοδος αυτή αποδεικνύεται ικανοποιητικά ακριβής με σχετικά μικρό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με τις υπόλοιπες που αναλύονται.

Όσον αφορά στον αριθμό των όρων του αναπτύγματος που θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την παρούσα μέθοδο για την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας η χρήση μόνο δύο όρων είναι επαρκής, όπως δείχθηκε στο [5.25].

5.4.2 Μέθοδος Pearson

Η οικογένεια κατανομών πιθανότητας Pearson, μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντίστοιχα με το ανάπτυγμα Edgeworth. Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούνται η τρίτη και η τέταρτη ροπή της συνάρτησης αστοχίας, εν αντιθέσει με την μέθοδο μέσης τιμής που χρησιμοποιεί μόνο τις δύο πρώτες. Η συνάρτηση κατανομής που χρησιμοποιείται για την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας, κατά την εφαρμογή της μεθόδου Pearson, δεν είναι η κανονική κατανομή, όπως στην περίπτωση της μεθόδου μέσης τιμής, αλλά ανάλογα με τις ροπές τις συνάρτησης αστοχίας κάποια εμπειρική κατανομή Pearson.

Στην περίπτωση του τετραγωνικού κριτηρίου αστοχίας για στρώση συνθέτου υλικού, εξετάζοντας την σχετική ασυμμετρία και κύρτωση της συνάρτησης βρέθηκε ότι η κατανομή πιθανότητας της συνάρτησης αυτής μπορεί να προσομοιωθεί κατάλληλα με την Pearson Type I (κατανομή Βήτα) σχεδόν για κάθε συνδυασμό εφαρμοζόμενης τάσης κάτω από συνθήκες επίπεδης έντασης [5.25]. Υπάρχουν ορισμένες περιοχές του επιπέδου συνεπίπεδων τάσεων όπου οι τύποι Pearson Type VI ή IV είναι πιο κατάλληλοι, επειδή όμως οι εμπειρικές κατανομές Pearson χρησιμοποιούνται σε αυτή την εργασία για λόγους σύγκρισης, μόνο η κατανομή Βήτα εισήχθηκε στον υπολογιστικό κώδικα που αναπτύχθηκε για την πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας κάτω από συνθήκες επίπεδης εντατικής κατάστασης.

5.5 Μέθοδοι αξιοπιστίας πρώτης τάξης (First order reliability method)

Οι μέθοδοι αξιοπιστίας πρώτης τάξης (FORM) μπορούν να χαρακτηριστούν ως επεκτάσεις της μεθόδου μέσης τιμής, οι οποίες αναπτύχθηκαν για να ξεπεραστούν ορισμένες τεχνικές δυσκολίες που σχετίζονται με αυτή την βασική μέθοδο [5.4]. Η βασική τους διαφορά είναι ότι το ανάπτυγμα της συνάρτησης αστοχίας σε σειρά Taylor, δεν γίνεται γύρω από την μέση τιμή της συνάρτησης, αλλά γύρω από ένα άλλο σημείο, το οποίο καλείται σημείο πιο πιθανής αστοχίας (most probable failure point), όπως περιγράφεται στην συνέχεια.

5.5.1 Μέθοδος Hasofer-Lind

Το πρώτο βήμα για να ξεπεραστεί το πρόβλημα της μη μεταβλητότητας ως προς την μαθηματική έκφραση της συνάρτησης αστοχίας είναι ο μετασχηματισμός των τυχαιών

μεταβλητών του προβλήματος σε ένα σύνολο κανονικοποιημένων ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών μέσω ενός ορθοκανονικού μετασχηματισμού [5.26], [5.4]. Εκτός από τον μετασχηματισμό για τις τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική και την λογαριθμική κανονική κατανομή, έχουν προταθεί αρκετοί μετασχηματισμοί είτε ακριβείς είτε προσεγγιστικοί [5.27], [5.28]. Ο πιο σημαντικός από αυτούς τους μετασχηματισμούς είναι ο μετασχηματισμός Rosenblatt [5.29]. Στην συνέχεια η συνάρτηση αστοχίας ορίζεται σε όρους πλέον των κανονικοποιημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών.

Αυτή η προσέγγιση είναι ανεξάρτητη από τις κατανομές που ακολουθούν οι τυχαίες μεταβλητές, εφόσον για αυτό τον μετασχηματισμό χρειάζονται μόνο οι δύο πρώτες ροπές τους (μέση τιμή και διασπορά). Η εκτίμηση του δείκτη ασφάλειας (safety index) μπορεί να γίνει ανεξάρτητα από την πληροφορία για το ποιες κατανομές ακολουθούν οι μεταβλητές του προβλήματος και έτσι να γίνει μία πρώτη εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας. Σε περίπτωση όμως, που επιθυμείται ένας πιο ακριβής χαρακτηρισμός της απόκρισης σε όρους πιθανοτήτων, τότε απαιτείται η γνώση των κατανομών που ακολουθούν οι τυχαίες μεταβλητές του προβλήματος και η πληροφορία αυτή να εισαχθεί στην λύση του προβλήματος, όπως εξηγείται στο επόμενο εδάφιο.

Εισάγοντας το σύνολο των ανεξαρτήτων κανονικοποιημένων μεταβλητών:

$$X'_i = \frac{X_i - \mu'_{1i}}{\sqrt{\mu_{2i}}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.8)$$

όπου μ'_{1i} η μέση τιμή και $\sqrt{\mu_{2i}}$ η τυπική απόκλιση της μεταβλητής X_i , η ασφαλής κατάσταση και η κατάσταση αστοχίας μπορούν να παρουσιαστούν στο χώρο των παραπάνω ανηγμένων μεταβλητών, οι οποίες διαχωρίζονται από την εξίσωση της οριακής κατάστασης. Σε όρους των ανηγμένων μεταβλητών X'_i η εξίσωση της οριακής κατάστασης γράφεται:

$$G(\sqrt{\mu_{21}}X'_1 + \mu'_{11}, \sqrt{\mu_{22}}X'_2 + \mu'_{12}, \dots, \sqrt{\mu_{2n}}X'_n + \mu'_{1n}) = 0 \quad (5.9)$$

Για παράδειγμα στο Σχ. 43 παρουσιάζεται η οριακή κατάσταση στρώσης συνθέτου υλικού με ίνες προσανατολισμένες σε μία διεύθυνση, στον χώρο των τυχαίων μεταβλητών X και στο χώρο των ανηγμένων μεταβλητών X' . Το κριτήριο που χρησιμοποιήθηκε είναι το τανυστικό πολυώνυμο αστοχίας, με τον μη διαγώνιο όρο $H_{12} = -\frac{H_{11}}{2}$, που γράφεται ως προς τις τυχαίες μεταβλητές του προβλήματος ως:

$$K(\mathbf{X}) = -G(\mathbf{X}) = \frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + \sigma_1 \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) + \sigma_2 \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_T X_C} - 1 = 0$$

Για την παράσταση στον χώρο των δύο μεταβλητών δε, έχει θεωρηθεί ότι τυχαίες μεταβλητές είναι μόνο οι τάσεις αστοχίας σε εφελκυσμό παράλληλα στην διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτήν, ενώ επίσης θεωρείται ότι δεν εφαρμόζεται διατμητική τάση.

Σχ. 43 Παράδειγμα οριακής κατάστασης στον χώρο των αρχικών μεταβλητών του προβλήματος (αριστερά) και των αντίστοιχων ανηγμένων μεταβλητών (δεξιά)

Παρατηρείστε στο Σχ. 43 ότι αυτή η επιφάνεια οριακής κατάστασης $G(\mathbf{X}') = 0$ πλησιάζει ή απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων καθώς η ασφαλής περιοχή μειώνεται ή αυξάνεται αντίστοιχα (αύξηση της ασφαλούς περιοχής επιτυγχάνεται στο συγκεκριμένο παράδειγμα με μείωση της τάσης κάθετα στην διεύθυνση των ινών σ_2). Για αυτό το λόγο, η θέση της επιφάνειας αστοχίας σε σχέση με την αρχή των αξόνων στο χώρο των ανηγμένων μεταβλητών προσδιορίζει την ασφάλεια ή την αξιοπιστία του συστήματος. Η θέση του τόπου αστοχίας, η οποία στο χώρο των δύο μεταβλητών είναι μία καμπύλη γραμμή, μπορεί να προσδιοριστεί από την ελάχιστη απόσταση της επιφάνειας $G(\mathbf{X}') = 0$ από την αρχή των αξόνων των ανηγμένων βασικών μεταβλητών του συστήματος.

Έχει αποδειχθεί, [5.30], ότι το σημείο του τόπου αστοχίας, το οποίο προσδιορίζει την ελάχιστη απόσταση της επιφάνειας οριακής κατάστασης από την αρχή των αξόνων στο χώρο των ανηγμένων μεταβλητών είναι το πιο πιθανό σημείο αστοχίας.

Έτσι, σε μία προσεγγιστική έννοια αυτή η ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα μέτρο της αξιοπιστίας [5.31]. Η ζητούμενη ελάχιστη απόσταση από ένα σημείο $\mathbf{X}' = (X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$, το οποίο βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια αστοχίας $G(\mathbf{X}) = 0$, ως την αρχή των αξόνων των $\mathbf{X}'$ είναι [5.30]:

$$D = \sqrt{X_1'^2 + X_2'^2 + \dots + X_n'^2} = (\mathbf{X}'^T \mathbf{X}')^{1/2} \quad (5.10)$$

Το σημείο της επιφάνειας αστοχίας $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, που έχει και την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων μπορεί να υπολογιστεί ελαχιστοποιώντας την συνάρτηση D , με την προϋπόθεση ότι $G(\mathbf{X}) = 0$ χρησιμοποιώντας για παράδειγμα την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange [5.31]. Η ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων ορίζεται ως δείκτης αξιοπιστίας, reliability index, β , ενώ έτσι η πιθανότητα αστοχίας ορίζεται ως:

$$P_F \approx \Phi(-\beta)$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση πιθανότητας της κανονικής κατανομής.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν η εξίσωση $G(\mathbf{X}')$ είναι γραμμική ως προς τις κανονικοποιημένες μεταβλητές, τότε η λύση αυτή είναι η ακριβής, ενώ στο Σχ. 43 η συνάρτηση αστοχίας θα παρουσιαζόταν ως μία ευθεία γραμμή.

Η μέθοδος άρχισε να εφαρμόζεται ολοένα και περισσότερο σε προβλήματα συνθέτων υλικών την δεκαετία του 1990, ενώ μία από τις πρώτες εργασίες για την εκτίμηση αξιοπιστίας πολύστρωτης πλάκας, είναι η [5.32], όπου στοχαστικές μεταβλητές θεωρούνται τα εξωτερικά φορτία, ή για την ακρίβεια οι τάσεις που αναπτύσσονται στις στρώσεις.

5.5.2 Μέθοδος Rackwitz-Fiessler

Η μέθοδος Rackwitz-Fiessler, ουσιαστικά έρχεται να βελτιώσει την θεώρηση ότι οι κατανομές που ακολουθούν οι τυχαίες μεταβλητές του προβλήματος είναι κανονικές, επηρεάζοντας έτσι θετικά την ακρίβεια του αποτελέσματος της πιθανότητας. Δηλαδή, αν η κατανομή πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών, $X_1, X_2, \dots, X_n$, δεν είναι κανονική, η πιθανότητα αστοχίας P_F ή πιθανότητα επιβίωσης P_R μπορεί να υπολογιστεί με χρήση μίας ισοδύναμης κανονικής κατανομής. Θεωρητικά μία τέτοια ισοδύναμη κανονική κατανομή μπορεί να προκύψει μέσω του μετασχηματισμού Rosenblatt, όπως δείχθηκε στο [5.27]. Με μία τέτοια ισοδύναμη κατανομή οι υπολογισμοί της P_R ακολουθούν την ίδια διαδικασία όπως για την περίπτωση μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Για μια μεταβλητή που δεν ακολουθεί την κανονική κατανομή, η ισοδύναμη κανονική μπορεί να προσεγγιστεί έτσι ώστε η αθροιστική πιθανότητα και η πυκνότητα πιθανότητας της ισοδύναμης κανονικής κατανομής να είναι ίσες με αυτές που αντιστοιχούν στην μη κανονική κατανομή στο κατάλληλο σημείο x_i^* , πάνω στην επιφάνεια αστοχίας [5.31].

Εξισώνοντας τις αθροιστικές πιθανότητες και τις αντίστοιχες τιμές της πυκνότητας πιθανότητας όπως προαναφέρθηκε στο σημείο αστοχίας x_i^* , έχουμε:

$$\Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = F_{X_i}(x_i^*)$$

$$\frac{1}{\sigma_{X_i}^N} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = f_{X_i}(x_i^*)$$
(5.11)

όπου $\mu_{X_i}^N$ και $\sigma_{X_i}^N$ είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα της ισοδύναμης κανονικής κατανομής για το X_i , $F_{X_i}(x_i^*)$ είναι η αρχική αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας για το X_i και $\Phi(-)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής, ενώ $f_{X_i}(x_i^*)$ και $\phi(-)$ είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας.

Επιλύοντας τις παραπάνω ισότητες για την άγνωστη μέση τιμή και τυπική απόκλιση της ισοδύναμης κανονικής κατανομής για το X_i , στο x_i^* έχουμε αντίστοιχα:

$$\mu_{X_i}^N = x_i^* - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]$$
(5.12)

$$\sigma_{X_i}^N = \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\}}{f_{X_i}(x_i^*)}$$
(5.13)

Έτσι η μεταβλητή X_i στο σημείο αστοχίας x_i^* κανονικοποιείται ως:

$$x_i'^* = \frac{x_i^* - \mu_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}$$
(5.14)

Κατά την διάρκεια της επαναληπτικής διαδικασίας προσέγγισης του πιο πιθανού σημείου αστοχίας, δηλαδή του σημείου πάνω στην επιφάνεια της συνάρτησης αστοχίας $G(\mathbf{X}') = 0$ που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, πρέπει κάθε φορά να υπολογίζεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ισοδύναμης κανονικής κατανομής με τις σχέσεις της εξ. (5.13). Έτσι, ουσιαστικά κάθε φορά για την κανονικοποίηση της μεταβλητής γίνεται αντικατάσταση της πραγματικής μέσης τιμής της μεταβλητής και της διασποράς της με αυτές της ισοδύναμης κανονικής κατανομής [5.31]. Στο [5.27] δίνεται αλγόριθμος για την επαναληπτική διαδικασία που ακολουθείται για την προσέγγιση του πιο

πιθανού σημείου αστοχίας και του δείκτη β . Με αυτή την προσέγγιση περιλαμβάνεται ο μετασχηματισμός των πρωτογενών τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή και μπορεί να είναι εξαρτημένες μεταξύ τους, σε ανεξάρτητες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Η μέθοδος όπως περιγράφηκε παραπάνω, που στο εξής θα καλείται FORM, εφαρμόστηκε στο [5.33] για την πρόβλεψη της αξιοπιστίας στρώσης συνθέτου υλικού υπό μονοαξονική φόρτιση, θεωρώντας τις ιδιότητες αντοχής και την γωνία προσανατολισμού της στρώσης, μαζί με τις τάσεις που αναπτύσσονται στην στρώση ως στοχαστικές μεταβλητές. Στην ίδια εργασία γίνεται σύγκριση της πρόβλεψης με αποτελέσματα από την Hasofer-Lind, όπου φαίνεται ότι η τελευταία αυτή μέθοδος δίνει αποτελέσματα λιγότερο συντηρητικά από την μέθοδο FORM. Στο [5.34] η μέθοδος εφαρμόζεται για την πρόβλεψη αστοχίας τελευταίας στρώσης (last ply failure) πολύστρωτης πλάκας υπό κατακόρυφη φόρτιση, θεωρώντας στοχαστικές μεταβλητές τις ιδιότητες αντοχής του υλικού και το κατακόρυφο φορτίο. Τα αποτελέσματα της μεθόδου είναι σε πολύ καλή σύγκλιση με αυτά από την μέθοδο προσομοίωσης MC. Στο [5.35] χρησιμοποιείται η μέθοδος FORM για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας πρώτης στρώσης σε συνδυασμό με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για πολύστρωτη πλάκα υπό κατακόρυφη φόρτιση. Στην περίπτωση αυτή ως στοχαστική μεταβλητή θεωρούνται μόνο οι ιδιότητες αντοχής του υλικού.

5.5.3 Μη γραμμικές συναρτήσεις αστοχίας

Για συναρτήσεις αστοχίας, $G(\mathbf{X})$, οι οποίες είναι μη γραμμικές, όπως στην περίπτωση της συνάρτησης αστοχίας στρώσης συνθέτου υλικού, ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας αστοχίας ή αξιοπιστίας εμπεριέχει γενικά δυσκολίες μαθηματικές και αριθμητικές. Η εξίσωση οριακής κατάστασης, $G(\mathbf{X})=0$, θα είναι επίσης μη γραμμική. Αντίθετα με την γραμμική περίπτωση, δεν υπάρχει πάντα μία και μοναδική ελάχιστη απόσταση από την επιφάνεια αστοχίας ως προς την αρχή των αξόνων στο χώρο των ανηγμένων μεταβλητών.

Για πρακτικές περιπτώσεις είναι αναγκαία η προσέγγιση αυτής της πιθανότητας, θεωρώντας ότι το σημείο $\mathbf{X}^*$ πάνω στην επιφάνεια αστοχίας με την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων στο χώρο των ανηγμένων μεταβλητών είναι το πιο πιθανό σημείο αστοχίας. Το εφαπτόμενο στην επιφάνεια αστοχίας επίπεδο στο σημείο $\mathbf{X}^*$ μπορεί τότε να χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση της πραγματικής επιφάνειας αστοχίας και η ζητούμενη αξιοπιστία ή πιθανότητα ασφάλειας να υπολογιστεί όπως και στην γραμμική περίπτωση [5.31]. Ανάλογα με το αν η πραγματική μη γραμμική επιφάνεια αστοχίας είναι κοίλη ή κυρτή ως προς την αρχή των αξόνων, αυτή η προσέγγιση είναι μη συντηρητική ή συντηρητική αντίστοιχα, όπως παρουσιάζεται στο Σχ. 44 για την περίπτωση δύο βασικών μεταβλητών.

Σχ. 44 Μη γραμμικές οριακές καταστάσεις στον χώρο των ανοιγμένων μεταβλητών

Το ζητούμενο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\mathbf{X}'^*$ είναι:

$$\sum_{i=1}^n (X'_i - x'_{i*}) \left(\frac{\partial G}{\partial X'_i} \right)_* = 0 \quad (5.15)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $\mathbf{X}'^*$.

Βάσει της παραπάνω προσέγγισης, η απόσταση από το ελάχιστο εφαπτόμενο επίπεδο στην αρχή των αξόνων στο χώρο των ανοιγμένων μεταβλητών είναι ο κατάλληλος δείκτης αξιοπιστίας (reliability index), ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση της αξιοπιστίας [5.31].

Στην περίπτωση μίας μη γραμμικής συνάρτησης αστοχίας, το ζητούμενο σημείο πάνω στην επιφάνεια αστοχίας δεν είναι γνωστό από την αρχή. Για αυτό το λόγο ο προσδιορισμός του ζητούμενου δείκτη αξιοπιστίας δεν είναι τόσο απλός όσο στην γραμμική περίπτωση, παρόλο που εμπεριέχεται και σε αυτή την περίπτωση γραμμική προσέγγιση. Το ελάχιστο σημείο στο οποίο εφάπτεται το επίπεδο πάνω στην επιφάνεια αστοχίας μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Εν γένει, η γραμμική προσέγγιση μη γραμμικών συναρτήσεων αστοχίας ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της N-διάστατης επιφάνειας αστοχίας (υπερ-επιφάνειας) με ένα υπερ-επίπεδο, το οποίο εφάπτεται στην επιφάνεια αστοχίας στο πιο πιθανό σημείο αστοχίας. Εν γένει, η ακρίβεια της γραμμικής προσέγγισης δεύτερης ροπής είναι δύσκολο να προσδιοριστεί και αυτό εξαρτάται από το βαθμό της μη γραμμικότητας της συνάρτησης $G(\mathbf{X})$. Για μία γενική μη γραμμική $G(\mathbf{X})$, η ακρίβεια μπορεί μόνο να προσδιοριστεί αριθμητικά για συγκεκριμένες μορφές συναρτήσεων αστοχίας [5.31]. Η ακρίβεια μπορεί να βελτιωθεί θεωρώντας τετραγωνική ή πολυωνυμική προσέγγιση, το οποίο συνεπάγεται βέβαια μεγαλύτερο κόστος σε μαθηματικά ή αριθμητικά προβλήματα [5.36].

Στα [5.37] και [5.38] εφαρμόζεται η μέθοδος χρησιμοποιώντας τετραγωνική προσέγγιση για την εκτίμηση της αξιοπιστίας πολύστρωτης πλάκας στο πρώτο και στρώσης στο δεύτερο. Και στις δύο περιπτώσεις όμως τα αποτελέσματα είναι πολύ κοντά με αυτά της FORM, έτσι δεν είναι απαραίτητο να επωμιστεί κανείς το υπολογιστικό κόστος από την χρήση της τετραγωνικής προσέγγισης.

5.5.4 Αλγόριθμοι διαδικασίας προσδιορισμού δείκτη β

Για τον προσδιορισμό του πιο πιθανού σημείου αστοχίας καθώς και του δείκτη β έχουν προταθεί αρκετοί αλγόριθμοι [5.31], [5.4], [5.2].

Στο [5.39] γίνεται μία σύγκριση μεταξύ πέντε αλγορίθμων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση του πιο πιθανού σημείου αστοχίας. Γενικό συμπέρασμα της εργασίας είναι ότι η εύρεση του κατάλληλου αλγορίθμου εξαρτάται από το πρόβλημα που εξετάζεται (την συνάρτηση αστοχίας). Στο [5.40] προτείνεται ένας νέος αλγόριθμος για τον υπολογισμό του δείκτη β , ενώ συγκρίνονται και πάλι οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται.

Στην παρούσα εργασία, ένας από τους λόγους για την διερεύνηση νέων μεθόδων προσδιορισμού αξιοπιστίας σε κατασκευές ήταν το ότι η εφαρμογή της μεθόδου δείκτη β αποτελεί επαναληπτική διαδικασία, η οποία δεν είναι σίγουρο ότι θα συγκλίνει για κάθε πρόβλημα που εξετάζεται. Έτσι δεν είναι βέβαιο ότι υπάρχει αποτέλεσμα κατά την διάρκεια σχεδιασμού.

Καθώς η μέθοδος δείκτη β χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία για λόγους σύγκρισης, δεν θεωρήθηκε απαραίτητο να γίνει διερεύνηση των διαφόρων αλγορίθμων που παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία. Έτσι, ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται στην εργασία αυτή περιγράφεται στο [5.2] και είναι αρκετά διαδεδομένος. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει εγγύηση ότι ο αλγόριθμος αυτός συγκλίνει σε όλες τις περιπτώσεις, ενώ είναι πιθανό κατά την επαναληπτική διαδικασία να εμφανιστούν τιμές για τις βασικές μεταβλητές που είναι εκτός των φυσικών τους ορίων [5.2].

5.6 Πιθανότητα αστοχίας στρώσης συνθέτου υλικού σε μονοαξονική φόρτιση

Για την αρχική διερεύνηση των προτερημάτων και δυσκολιών των μεθόδων προσδιορισμού αξιοπιστίας σε κατασκευές από σύνθετα υλικά γίνεται αρχικά ο προσδιορισμός της αξιοπιστίας στρώσης σε μονοαξονική εντατική κατάσταση, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με αυτά που προέκυψαν από την προσομοίωση Monte Carlo και πειραματικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, ως πρώτη εφαρμογή εξετάζεται η περίπτωση στρώσεων σε εφελκυσμό με ίνες προσανατολισμένες σε μία διεύθυνση (UD) και διαφορετική αυτής της φόρτισης (off axis), ενώ τα αποτελέσματα των αναλυτικών μεθόδων συγκρίνονται με τα αριθμητικά και πειραματικά από την βιβλιογραφία.

Από τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν, οι μέθοδοι που εφαρμόζονται είναι η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth και η μέθοδος Pearson, καθώς και η ημι-προσδιοριστέα μέθοδος βασικών μεταβλητών, η οποία συμβολίζεται ως BVM. Αυτές εφαρμόστηκαν για την περίπτωση off-axis unidirectional στρώσης από GI/Ep που φορτίζεται σε μονοαξονικό εφελκυσμό για σύγκριση με τα αποτελέσματα των [5.20], [5.24]. Η χρήση της μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth, EDW, για την πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας σε off-axis δοκίμια σε εφελκυσμό, σε συνδυασμό με το κριτήριο αστοχίας Hill [5.41] παρουσιάστηκε αρχικά από τον Wetherhold στο [5.24]. Παρόλα αυτά, στο [5.25] δείχθηκε ότι η τεχνική αναπτύγματος Edgeworth δίνει καλύτερα αποτελέσματα όταν χρησιμοποιείται με το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας. Επιπλέον στο [5.24] δείχθηκε ότι τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας είτε το κριτήριο αστοχίας μέγιστης τάσης είτε αυτό μέγιστης παραμόρφωσης δεν ήταν σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα. Εξ' αυτού στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται μόνο η πιο γενική μορφή του τετραγωνικού κριτηρίου αστοχίας.

Ουσιαστικά, στο παρόν εδάφιο δίνεται έμφαση στην πρόβλεψη μόνο της πιθανότητας αστοχίας, η οποία αποτελεί και το αντικείμενο της μελέτης, σε αντίθεση με το παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου (Παράγραφος 4.7), όπου έγινε η εκτίμηση της κοινής συνάρτησης πιθανότητας του κριτηρίου αστοχίας.

Η στατιστική πληροφορία για τις ιδιότητες αντοχής σε εφελκυσμό και διάτμηση λαμβάνονται και σε αυτή την περίπτωση από το [5.20], ενώ για τις τάσεις σε θλίψη, για τις

οποίες δεν υπήρχαν πειραματικά αποτελέσματα έχουν γίνει κάποιες υποθέσεις. Οι μέσες τιμές και οι διασπορές των αντοχών, μαζί με τις παραμέτρους της κατανομής Weibull, που χρησιμοποιήθηκαν για αυτή την περίπτωση παρουσιάστηκαν στον πίνακα Π. 19.

Στα Σχ. 45 και Σχ. 46 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα πειραματικά αποτελέσματα από το [5.20] που αφορούν την πιθανότητα αστοχίας υπό εφελκυσμό για τέσσερις διαφορετικές off-axis διευθύνσεις και συγκρίνονται με θεωρητικές προβλέψεις από την εφαρμογή των EDW και BVM. Οι τιμές των πειραματικών αποτελεσμάτων από το [5.20] όπως ψηφιοποιήθηκαν για την σύγκριση με τις εφαρμογές της παρούσας εργασίας δίνονται και στο Παράρτημα Α.4. Σημειώνεται ότι στον οριζόντιο άξονα παρουσιάζεται η αναπτυσσόμενη τάση εξαιτίας του μονοαξονικού εξωτερικού φορτίου, ενώ στον κατακόρυφο η πιθανότητα αστοχίας της στρώσης. Ουσιαστικά, για κάθε εφαρμοζόμενη εφελκυστική τάση σ_x , αντικαθιστούμε στην συνάρτηση αστοχίας της στρώσης, σε αυτή την περίπτωση το ταυυστικό πολυώνυμο αστοχίας, με τον μη διαγώνιο όρο ίσο με $H_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{H_{11}H_{22}}$ και αναζητείται η πιθανότητα αστοχίας της στρώσης, υπό την συγκεκριμένη αυτή τάση.

Γενικά η συμφωνία μεταξύ θεωρίας και πειράματος είναι ικανοποιητική με εξαίρεση τα δοκίμια των 45° , όπου παρατηρείται μία ομοιόμορφη μετάθεση όλων των πειραματικών δεδομένων ως προς τις θεωρητικές καμπύλες. Τα αριθμητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας την προσομοίωση MC βρέθηκε ότι ήταν σχεδόν ταυτόσημα με τα θεωρητικά αποτελέσματα των σχημάτων αυτών και δεν παρουσιάζονται εδώ για λόγους ευκρίνειας.

Σχ. 45 Πιθανότητα αστοχίας συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάσης σε off-axis δοκίμια GI/Ep 15° , 20° και 45°

Σχ. 46 Πιθανότητα αστοχίας συναρτήσει της εφαρμοζόμενης τάσης για off-axis δοκίμια GI/Ep 30° και 60°

Όλες οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν, αποδεικνύεται ότι δίνουν αποτελέσματα σε συμφωνία με τα πειραματικά, ενώ η ημι-προσδιοριστέα προσέγγιση, εξαιτίας της αποτελεσματικότητάς της και της ταχύτητάς της εφαρμογής, φαίνεται να υπερτερεί ως εργαλείο σχεδιασμού.

5.6.1 Επίδραση των όρων της μεθόδου Edgeworth στην εκτίμηση αξιοπιστίας

Κατά την εξέταση της καταλληλότητας της μεθόδου Edgeworth για την προσέγγιση της πιθανότητας αστοχίας στρώσης συνθέτου υλικού διερευνήθηκε και η επίδραση των όρων. Έτσι στο Σχ. 47 φαίνεται η εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας με ένα, δύο και τρεις όρους αντίστοιχα σε σύγκριση με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης Monte Carlo (MC) και τα πειραματικά δεδομένα από το [5.20] (Exp.). Μπορεί κανείς να παρατηρήσει, ότι η βελτίωση που επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας δύο αντί για ένα όρο, δηλαδή βελτιώνοντας την υπόθεση ότι η συνάρτηση αστοχίας ακολουθεί την κανονική κατανομή δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική σε αυτή την περίπτωση. Επίσης, η διαφορά της πρόβλεψης μεταξύ δύο και τριών όρων της μεθόδου Edgeworth, δηλαδή χρησιμοποιώντας την τέταρτη ροπή της συνάρτησης αστοχίας είναι σαφώς μικρότερη από αυτή με ένα ή δύο όρους. Παρόλα αυτά, εξακολουθούν και υπάρχουν διαφορές, ιδιαίτερα για μικρές τιμές της πιθανότητας αστοχίας, που όμως είναι πιο ενδιαφέρουσες, καθώς κατά τον σχεδιασμό κατασκευών επιθυμούμε η πιθανότητα αστοχίας να είναι ιδιαίτερα μικρή.

Σχ. 47 Επίδραση του αριθμού των όρων του αναπτύγματος στην μέθοδο Edgeworth (Το ανάπτυγμα με ένα όρο ισοδυναμεί με την Κανονική κατανομή)

5.6.2 Επίδραση του κριτηρίου αστοχίας στην εκτίμηση της αξιοπιστίας

Εξαιτίας της χρήσης του τετραγωνικού κριτηρίου αστοχίας Tsai-Wu, και επειδή αρκετοί έχουν αμφισβητήσει την αξιοπιστία του, λόγω του ότι όταν για παράδειγμα έχουμε εφελκυσμό στην διεύθυνση των ινών η αστοχία του συστήματος να εξαρτάται και από την αντοχή σε θλίψη, η ίδια εκτίμηση της αξιοπιστίας εκτελέστηκε και για στρώση στις 0°. Το αποτέλεσμα συγκρίνεται με την θεωρητική Weibull κατανομή, την οποία έχουμε υποθέσει ότι ακολουθεί η αντοχή της στρώσης σε εφελκυσμό παράλληλα στην διεύθυνση των ινών.

Σχ. 48 Σύγκριση της καταλληλότητας του τετραγωνικού κριτηρίου σε 0n-axis στρώση

Στο Σχ. 48 φαίνεται καθαρά ότι το αποτέλεσμα της προσομοίωσης με την μέθοδο Monte Carlo (MC-(TH)) συμπίπτει με την θεωρητική κατανομή για την τάση αστοχίας σε εφελκυσμό, X_T , όταν αυτή ακολουθεί την κατανομή Weibull. Το αποτέλεσμα της μεθόδου Edgeworth έχει μία μικρή απόκλιση, αλλά αυτό είναι συνέπεια της προσεγγιστικής λύσης που προσφέρεται με αυτή την μέθοδο. Σημειώνεται ότι το ανάπτυγμα έγινε με 2 όρους.

Από την άλλη πλευρά, η επίδραση του H_{12} στο τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας παρουσιάζεται για παράδειγμα στο Σχ. 49 για την περίπτωση δοκιμών off-axis 15° . Όπως προαναφέρθηκε υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ του κριτηρίου Hill, όπου αμελείται η διαφορά μεταξύ τάσης αστοχίας σε εφελκυσμό και θλίψη, ενώ η διαφορά μεταξύ των δύο τετραγωνικών κριτηρίων αστοχίας, EPFS και TH, είναι μικρή, ενώ τα δύο αυτά κριτήρια δίνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα από το [5.20] (Exp.). Σημειώνεται ότι το κριτήριο με $H_{12} = 0$ έδινε προβλέψεις ταυτόσημες με αυτές του κριτηρίου

EPFS, δηλαδή με διαγώνιο όρο $H_{12} = -\frac{H_{11}}{2}$, και εξ' αυτού δεν παρουσιάζεται στο

διάγραμμα. Αν το αποτέλεσμα αυτό συγκριθεί με την διαφορά μεταξύ των μεθόδων πρόβλεψης, παρατηρεί κανείς ότι η επίδραση δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική για την περίπτωση στρώσης σε μονοαξονικό εφελκυσμό.

Σχ. 49 Επίδραση του κριτηρίου στην πρόβλεψη πιθανότητας αστοχίας για off-axis δοκίμια 15°

5.6.3 Ανάλυση της ευαισθησίας για την πιθανότητα αστοχίας σε μονοαξονική φόρτιση

Στο [5.25], διερευνήθηκε η ευαισθησία της πιθανότητας αστοχίας ως προς την διασπορά των ιδιοτήτων αντοχής. Στο Σχ. 50 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης με την χρήση της μεθόδου EDW σε συνδυασμό με το κριτήριο TH. Η συνεχής γραμμή είναι η πρόβλεψη της EDW με τις στατιστικές ιδιότητες του υλικού από το [5.20] για τα off-axis δοκίμια των 45° . Από την ανάλυση της ευαισθησίας που εκτελέστηκε, βρέθηκε ότι μόνο η διασπορά της αντοχής σε εφελκυσμό, Y_T επηρεάζει το αποτέλεσμα. Μία αύξηση κατά 50% της διασποράς, όπως αυτή βρέθηκε βάσει πειραματικών δεδομένων, δίνει την καμπύλη που συμβολίζεται ως 45° -var. Μια πιο δραστική μεταβολή λαμβάνεται αν γίνει η υπόθεση ότι η off-axis γωνία δεν είναι 45° , αλλά 50° . Τα αποτελέσματα με αυτή την υπόθεση παρουσιάζονται στο σχήμα με την διακεκομμένη-εστιγμένη γραμμή. Τα αποτελέσματα αυτής της πρόβλεψης φαίνονται να πλησιάζουν τα πειραματικά δεδομένα από το [5.20].

Σχ. 50 Ανάλυση ευαισθησίας για την πρόβλεψη πιθανότητας αστοχίας σε μονοαξονική φόρτιση (σε παρένθεση η γωνία off-axis της στρώσης, - Var: Αυξημένη κατά 50% διασπορά για την Y_T)

5.7 Σύγκριση των μεθόδων για την εκτίμηση της αξιοπιστίας

Στο Σχ. 51 γίνεται σύγκριση των μεθόδων που εφαρμόστηκαν για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας στρώσης 15° σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Το κριτήριο αστοχίας που χρησιμοποιήθηκε για όλες τις περιπτώσεις είναι το κριτήριο TH. Εκτός από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, στο ίδιο σχήμα δείχνονται και τα αποτελέσματα με την μέθοδο Pearson και την μέθοδο FORM. Εξαιτίας του ότι η μέθοδος Pearson (PRS) δεν ακολουθεί τον τύπο I σε μικρές τιμές της πιθανότητας αστοχίας για αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχουν σημεία εκτίμησης σε αυτές. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι όλες οι μέθοδοι δίνουν αποτελέσματα σχετικά κοντά μεταξύ τους, ενώ δεν φαίνεται να ξεχωρίζει καμία σε σχέση με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Η μέθοδος EDW φαίνεται να προσεγγίζει καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα από το [5.20] (Exp.), το ίδιο και η PRS στο διάστημα που προσεγγίζεται με την τύπου I κατανομή. Και οι δύο ακολουθούν τα αποτελέσματα με την μέθοδο MC αρκετά καλά. Οι μέθοδοι βασικών μεταβλητών (BVM) και η FORM δίνουν αποτελέσματα πολύ κοντά στις προβλέψεις της μεθόδου MC όταν η πιθανότητα αστοχίας λαμβάνει είτε πολύ μικρές, είτε πολύ μεγάλες τιμές, ενώ στο ενδιάμεσο τα αποτελέσματα και των δύο μεθόδων απομακρύνονται από τα υπόλοιπα. Ασφαλώς, πρέπει να σημειωθεί ότι η μέθοδος FORM είναι σχεδιασμένη ώστε να δίνει καλά αποτελέσματα σε περιπτώσεις όπου η πιθανότητα αστοχίας είναι πολύ μικρή. Αντίθετα οι προβλέψεις της απλής ντετερμινιστικής μεθόδου BVM, είναι πολύ καλά, αν αναλογιστεί κανείς το μικρό υπολογιστικό της κόστος.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η αποτελεσματικότητα των μεθόδων σε μικρές πιθανότητες αστοχίας, καθώς στο σχεδιασμό το ενδιαφέρον επικεντρώνεται σε κατασκευές με μεγάλη αξιοπιστία. Μέχρι αυτό το σημείο έχει διερευνηθεί ουσιαστικά μόνο το κατά πόσο μπορεί να προσεγγίσουν οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται την κατανομή πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας.

Σχ. 51 Σύγκριση των προβλέψεων των μεθόδων

5.7.1 Σύγκριση μεθόδων σε μικρές πιθανότητες αστοχίας

Στο [5.33] παρουσιάστηκε η μέθοδος FORM για την εκτίμηση της αξιοπιστίας στρώσης υπό επίπεδη εντατική κατάσταση. Ως εφαρμογή θεωρείται μία στρώση off-axis, στην οποία αναπτύσσεται ορθή και διαμητική τάση, σ_x και σ_s αντίστοιχα, ενώ γίνεται η υπόθεση ότι οι ιδιότητες αντοχής της ακολουθούν την κανονική κατανομή με συντελεστή μεταβλητότητας 10%. Το υλικό θεωρείται ως C/Ep με μέσες τιμές για τις ιδιότητες αντοχής που φαίνονται στον πίνακα Π. 20. Το κριτήριο αστοχίας που χρησιμοποιείται είναι το τετραγωνικό κριτήριο TH που εκφράζεται από την σχέση στην ασφαλή περιοχή, που υπενθυμίζεται εδώ:

$$K = \frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}} + \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) \sigma_2 - 1 \leq 0$$

Θεωρείται ότι στην off-axis στρώση εφαρμόζεται ορθή τάση, σ_x , ίση με 300MPa και διαμητική, σ_s , ίση με 250MPa.

Οι τάσεις στο κύριο σύστημα της στρώσης ως προς τις τάσεις στο φυσικό σύστημα δίνονται από τον μετασχηματισμό:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

όπου θ η γωνία του κυρίως συστήματος της στρώσης ως προς το φυσικό.

Στο Σχ. 52 παρουσιάζεται η εκτιμώμενη αξιοπιστία που προκύπτει με χρήση της μεθόδου FORM, σε αντιστοιχία με το [5.33] για γωνίες προσανατολισμού της στρώσης στο διάστημα 25° με 40° . Η γωνία προσανατολισμού της στρώσης φαίνεται στον οριζόντιο άξονα, ενώ ο κατακόρυφος άξονας του σχήματος δίνει από την αριστερή πλευρά την τιμή του δείκτη β , ο οποίος έχει έννοια μόνο για την ανάλυση FORM, ενώ στον δεξιό κατακόρυφο άξονα φαίνεται η ποσοστιαία τιμή της αξιοπιστίας της στρώσης υπό την εντατική κατάσταση που προαναφέρθηκε. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζεται και τα αποτελέσματα της προσομοίωσης MC με συνεχή γραμμή, τα οποία συμπίπτουν με την εκτίμηση FORM. Τα αποτελέσματα της μεθόδου EDW, τα οποία παρουσιάζονται με την εστιγμένη γραμμή, στο ίδιο σχήμα, φαίνεται

να υπερεκτιμούν την αξιοπιστία του κατασκευαστικού στοιχείου σε περίπτωση όπου η πιθανότητα αστοχίας είναι ιδιαίτερα μικρή.

Σε περίπτωση αύξησης της διατμητικής τάσης σ_s που εφαρμόζεται στην στρώση κατά 10%, τα αποτελέσματα των μεθόδων συμβολίζονται ($\sigma_s + 10\%$) στο Σχ. 52. Στην περίπτωση αυτή, όπου η αξιοπιστία της στρώσης είναι μικρότερη φαίνεται ότι η διαφορά της εκτίμησης με την μέθοδο EDW μειώνεται σε σχέση με τις άλλες δύο (FORM και MC). Οι προβλέψεις όμως είναι συγκρίσιμες για περιοχές με πιθανότητα αστοχίας μέτριες, της τάξης του 5% (όπου η αντίστοιχη τιμή του β είναι 1.645). Η προσέγγιση με τρεις όρους για την μέθοδο EDW δεν αλλάζει το αποτέλεσμα στην περίπτωση που οι μεταβλητές θεωρούνται ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Π. 20 Ιδιότητες υλικού C/Ep για σύγκριση με αποτελέσματα από [5.33]

Υλικό	X_T (MPa)	X_C (MPa)	Y_T (MPa)	Y_C (MPa)	S (MPa)
C/Ep	1500	1500	40	246	68

Σχ. 52 Σύγκριση των αποτελεσμάτων των μεθόδων για βασικές μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή για δύο περιπτώσεις φόρτισης

Παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνονται αν θεωρηθεί όπως και στο [5.33] ότι οι ιδιότητες αντοχής του υλικού ακολουθούν την κατανομή Weibull, με τον ίδιο συντελεστή μεταβλητότητας, όπως φαίνεται στο Σχ. 53 από τις καμπύλες FORM, EDW και MC. Στο ίδιο διάγραμμα παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα σε περίπτωση που η παράμετρος σχήματος της κατανομής Weibull ληφθεί για κάθε ιδιότητα αντοχής ίση με αυτή του [5.20]. Σημειώνεται δε, ότι η παράμετρος σχήματος της κατανομής Weibull, εξαρτάται από την διασπορά της μεταβλητής, έτσι ουσιαστικά στο παράδειγμα θεωρούμε αυξημένη διασπορά των μεταβλητών, πιο κοντά σε πειραματικά αποτελέσματα. Με αυτές τις παραμέτρους η αξιοπιστία για τις περιπτώσεις γωνίας προσανατολισμού που εξετάζονται μειώνεται και τα αποτελέσματα της μεθόδου EDW πλησιάζουν αυτά των άλλων δύο. Τέλος να σημειωθεί ότι και σε αυτή την περίπτωση η προσέγγιση της EDW με τρεις όρους δεν αλλάζει το αποτέλεσμα.

Σχ. 53 Σύγκριση των μεθόδων για Weibull κατανομές βασικών μεταβλητών και δύο περιπτώσεις διασποράς ιδιοτήτων (COV: μεγαλύτερη διασπορά)

Έτσι, παρόλο που η μέθοδος EDW δείχνει να υπερεκτιμά την αξιοπιστία του δομικού στοιχείου σε πολύ μικρές πιθανότητες αστοχίας, η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά την διάρκεια του σχεδιασμού, εξαιτίας του μικρού της υπολογιστικού κόστους, σε αντίθεση με την μέθοδο MC και την FORM. Σημειώνεται επίσης ότι η FORM μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά μόνο σε περιπτώσεις όπου η πιθανότητα αστοχίας είναι μικρή. Παρόμοια είναι και τα αποτελέσματα που αφορούν την περίπτωση επιβολής μόνο αξονικής τάσης, σ_x , ή μόνο διατμητικής τάσης, σ_s .

Η μέθοδος βασικών μεταβλητών για αυτό το πρόβλημα δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα, καθώς δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων η αξιοπιστία του δομικού στοιχείου, σε αντίθεση με την περίπτωση δομικού σχεδιασμού, όπου η αξιοπιστία του στοιχείου είναι δεδομένη, από τις προδιαγραφές. Έτσι δεν μπορεί κάποιο δεδομένο ποσοστιαίο στοιχείο να αντικαταστήσει τις μέσες τιμές των μεταβλητών του προβλήματος για να εφαρμοστεί το ντετερμινιστικό πρόβλημα.

5.8 Τόπος αστοχίας στρώσης

Πολλές φορές κατά τον ντετερμινιστικό σχεδιασμό χρησιμοποιούνται οι τόποι αστοχίας στρώσεων υπό διάφορες γωνίες προσανατολισμού για την εκτίμηση της συμπεριφοράς τους σε επίπεδη εντατική κατάσταση. Για την σύγκριση με το επίπεδο αξιοπιστίας που επιτυγχάνεται μέσω χρήσης συντελεστών ασφαλείας κατά τον ντετερμινιστικό σχεδιασμό έγινε η πρόβλεψη αστοχίας σε συγκεκριμένα επίπεδα αξιοπιστίας.

Η πρόβλεψη της αστοχίας σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας για τις μεθόδους EDW, Pearson, FORM και MC εκτελείται ερευνώντας στον χώρο των συνεπίπεδων τάσεων το συνδυασμό εκείνο που δίνει το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας. Ο σχεδιασμός αντίθετα του τόπου αστοχίας σε συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας με την μέθοδο βασικών μεταβλητών, BVM, γίνεται απλούστατα, αντικαθιστώντας τις μέσες τιμές των τάσεων αστοχίας με το συγκεκριμένο ποσοστιαίο σημείο στο κριτήριο αστοχίας.

Ως παράδειγμα, γίνεται σύγκριση των προβλέψεων των τόπων αστοχίας σε συγκεκριμένα επίπεδα αξιοπιστίας μίας στρώσης με πειραματικά αποτελέσματα που λαμβάνονται από το

[5.42]. Τα στατιστικά δεδομένα που χρειάζονται για τις ιδιότητες αντοχής της unidirectional στρώσης από C/Ep λήφθηκαν απευθείας από τον υπολογισμό των ροπών των ψηφιοποιημένων πειραματικών αποτελεσμάτων από τα αντίστοιχα γραφήματα του [5.42]. Τα ψηφιοποιημένα δεδομένα δίνονται στο παράρτημα Α (Α.4.2) για πληρότητα. Οι ιδιότητες αντοχής θεωρείται και σε αυτή την περίπτωση ότι ακολουθούν την κατανομή Weibull και οι χαρακτηριστικές τιμές για τις πέντε βασικές αντοχές παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 21.

Π. 21 Χαρακτηριστικά αντοχής μίας unidirectional στρώσης από C/Ep από το [5.42]

Ιδιότητα	Μέση Τιμή (MPa)	Διασπορά (MPa ²)	Κατανομή	Παράμετροι κατανομής	
				σ (MPa)	η
X _T	1029.78	15842.82	Weibull	1083.21	9.83
X _C	710.17	8285.41	Weibull	748.66	9.35
Y _T	45.55	81.28	Weibull	49.16	5.86
Y _C	129.27	306.21	Weibull	136.63	8.82
S	70.71	128.95	Weibull	75.39	7.34

Στο Σχ. 54 παρουσιάζεται η πρόβλεψη για τον τόπο αστοχίας μίας UD στρώσης από C/Ep με χρήση του κριτηρίου EPFS για δύο διαφορετικά επίπεδα αξιοπιστίας, συγκεκριμένα για 95% και για 10%, σε σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα από το [5.42]. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται επίσης και τα αποτελέσματα που προκύπτουν με χρήση της προσομοίωσης Monte Carlo (MC) και οι αντίστοιχες προβλέψεις με την μέθοδο ποσοστιαίων βασικών μεταβλητών (BVM). Τα αποτελέσματα της BVM φαίνεται ότι ακολουθούν ικανοποιητικά τα αντίστοιχα της περισσότερο ακριβούς υπολογιστικά EDW καθώς και της MC. Το ίδιο συμβαίνει και με τα αποτελέσματα από την μέθοδο FORM για επίπεδο αξιοπιστίας 95%, που όμως δεν παρουσιάζονται στο διάγραμμα για λόγους ευκρίνειας. Επιπρόσθετα, στο Σχ. 54 παρουσιάζεται και ο καθαρά ντετερμινιστικός τόπος αστοχίας με λόγο αντοχής, strength ratio, R, ίσο με 1.5, ο οποίος είναι πολύ συντηρητικός σε σχέση με τα αποτελέσματα σε επίπεδο αξιοπιστίας 95% των τριών στατιστικών μεθόδων. Ο λόγος αντοχής που χρησιμοποιήθηκε είναι συνήθως αυτός που προτείνεται για χρήση κατά τον σχεδιασμό κατασκευών από σύνθετα υλικά. Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα πειραματικά αποτελέσματα των σχημάτων ψηφιοποιήθηκαν από τα αντίστοιχα του [5.42] και μπορεί να εμπεριέχουν ένα μικρό συστηματικό λάθος. Αναλυτικά τα δεδομένα όπως ψηφιοποιήθηκαν δίνονται στο Παράρτημα Α (Α.4.2).

Σχ. 54 Τόπος αστοχίας για on-axis στρώση από C/Ερ σε δύο επίπεδα αξιοπιστίας

Για την πρόβλεψη διαφόρων τόπων αστοχίας σε επίπεδη εντατική κατάσταση off-axis UD στρώσεων, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος EDW, καθώς επίσης η ημι-ντετερμινιστική, BVM. Στα Σχ. 55 και Σχ. 56 παρουσιάζονται οι τόποι αστοχίας για off-axis στρώσεις από C/Ερ στις 30° και 60°, αντίστοιχα και για δύο διαφορετικά επίπεδα αξιοπιστίας σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα από το [5.42] και τον αντίστοιχο ντετερμινιστικό τόπο με συντελεστή ασφάλειας 1.5. Όπως φαίνεται σε αυτά τα σχήματα ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις που έγιναν και για την on-axis στρώση. Και πάλι συμπεραίνουμε ότι οι προβλέψεις με την BVM και την EDW είναι πολύ κοντά στις αντίστοιχες της προσομοίωσης MC και ότι ο ντετερμινιστικός τόπος αστοχίας με $R=1.5$ διαφέρει από τους προηγούμενους. Η μέθοδος BVM φαίνεται μία γρήγορη και αποτελεσματική διαδικασία για προβλέψεις αστοχίας βάσει της αξιοπιστίας.

Σχ. 55 Τόποι αστοχίας για 30° off-axis στρώση από C/Ερ σε δύο επίπεδα αξιοπιστίας

Σχ. 56 Τόποι αστοχίας για μία 60° off-axis στρώση από C/Ep σε δύο επίπεδα αξιοπιστίας

Μία γενική παρατήρηση για τα Σχ. 54 ως Σχ. 56 είναι ότι οι τόποι αστοχίας που προκύπτουν με χρήση των στατιστικών μεθόδων δεν είναι ελλείψεις και ανάλογα με το επίπεδο αξιοπιστίας μπορεί να έχουν ακανόνιστο σχήμα, παρόλα αυτά είναι συνεχείς καμπύλες. Αυτό είναι ανεξάρτητο του γεγονότος ότι χρησιμοποιήθηκε το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας. Για αυτό από όλους τους τόπους αστοχίας που παρουσιάστηκαν ως τώρα μόνο οι προβλέψεις με την μέθοδο BVM και οι ντετερμινιστικές είναι καθαρά ελλείψεις.

5.8.1 Επίδραση του κριτηρίου αστοχίας

Στο [5.25] δείχθηκε ότι η επιλογή του όρου αλληλεπίδρασης του κριτηρίου αστοχίας, H_{12} , δεν έχει καμία επίδραση στην πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας σε off-axis UD δοκίμια σε εφελκυσμό. Παρόλα αυτά, η επιλογή του H_{12} έχει δραστηκή επιρροή στην πρόβλεψη του τόπου αστοχίας off-axis στρώσεων, όπως φαίνεται στο Σχ. 57, όπου παρουσιάζεται ο τόπος αστοχίας UD στρώσης από C/Ep για δύο διαφορετικά κριτήρια αστοχίας. Όσον αφορά στα δύο διαφορετικά κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν, συγκεκριμένα η περίπτωση TH με τον H_{12} να δίνεται από την σχέση (4.17) και το Hoffman ή EPFS (Elliptic paraboloid failure surface) κριτήριο [5.43], [5.44] με τον H_{12} από την σχέση (4.18), φαίνεται ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις προβλέψεις τους σχεδόν σε ολόκληρο τον τόπο αστοχίας. Καθώς το κριτήριο EPFS είναι σε καλύτερη συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα μόνο αυτό θα χρησιμοποιείται εφεξής για την πρόβλεψη του τόπου αστοχίας στρώσεων με ίνες προσανατολισμένες σε μία διεύθυνση.

Σχ. 57 Τόπος αστοχίας για on-axis στρώση C/Ερ σε δύο επίπεδα αξιοπιστίας και για δύο διαφορετικές συναρτήσεις αστοχίας

5.8.2 Τόπος αστοχίας στρώσης σε μεγάλα επίπεδα αξιοπιστίας

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των διαφόρων μεθόδων εκτίμησης της αξιοπιστίας εκτελέστηκε και σε μεγαλύτερα επίπεδα αξιοπιστίας, αντίστοιχα με αυτά που απαιτούνται από τους κανονισμούς σχεδιασμού κατασκευών. Για παράδειγμα στο Σχ. 58 παρουσιάζονται οι τόποι αστοχίας στρώσης off-axis 30° σε επίπεδα αξιοπιστίας 98% ($\beta = 2$) και 99.997% ($\beta = 4$), όπως προκύπτουν με εφαρμογή των μεθόδων BVM, EDW και FORM. Όπως και στα προηγούμενα παρατηρούμε ότι στο επίπεδο αξιοπιστίας 98% όλες οι μέθοδοι δίνουν παραπλήσια αποτελέσματα. Στο επίπεδο αξιοπιστίας 99.997% τα αποτελέσματα των μεθόδων παρουσιάζουν διαφορές. Συγκεκριμένα, η EDW μέθοδος με χρήση 2 όρων δίνει αποτελέσματα που είναι λιγότερο συντηρητικά σε σχέση με την FORM, ιδιαίτερα στο 3 τεταρτημόριο. Αντίθετα στην περίπτωση όπου η EDW εφαρμόζεται με χρήση 3 όρων στο ανάπτυγμα τα αποτελέσματα μεταξύ των δύο μεθόδων είναι συγκρίσιμα. Η BVM μέθοδος από την άλλη παρουσιάζει περιοχές όπου η πρόβλεψη είναι λιγότερο συντηρητική από την FORM και περιοχές όπου η πρόβλεψη είναι συντηρητική. Παρόλα αυτά η μέθοδος μπορεί κάλλιστα να θεωρηθεί ως μία πρώτη προσέγγιση εξαιτίας της απλής της εφαρμογής και του χαμηλού της υπολογιστικού κόστους.

Σχ. 58 Τόπος αστοχίας στρώσης 30° σε δύο μεγάλα επίπεδα αξιοπιστίας (κέντρο) και μεγέθυνση των τεσσάρων τεταρτημορίων (στις γωνίες)

Πρέπει να σημειωθεί ότι για αυτό το παράδειγμα οι τάσεις αστοχίας της στρώσης θεωρούνται ότι ακολουθούν την λογαριθμική κανονική κατανομή, ενώ χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα για την μέση τιμή και τυπική απόκλιση από το [5.38], όπως δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Οι παράμετροι της λογαριθμικής κανονικής κατανομής, που δίνονται στις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα Π. 22, βρέθηκαν χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών από τα δεδομένα του [5.38].

Π. 22 Χαρακτηριστικά αντοχής μίας unidirectional στρώσης από C/Ερ από το [5.38]

Ιδιότητα	Μέση Τιμή (MPa)	Τυπική απόκλιση (MPa)	Κατανομή	Παράμετροι κατανομής	
				μ	σ
X _T	1500	150.00	LogNormal	7.3082	0.0998
X _C	1500	180.00	LogNormal	7.3082	0.1196
Y _T	40	4.40	LogNormal	3.6829	0.1097
Y _C	246	19.68	LogNormal	5.5021	0.0799
S	68	4.08	LogNormal	4.2197	0.0599

5.8.3 Τόπος αστοχίας στρώσης στο χώρο των παραμορφώσεων

Αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν αν αντί για τον χώρο των τάσεων θεωρήσει κανείς τον τόπο αστοχίας της στρώσης στο χώρο των παραμορφώσεων. Ξεκινώντας από την σχέση τάσεων παραμορφώσεων στο κύριο σύστημα της στρώσης:

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (5.17)$$

όπου Q το συνεπίπεδο μητρώο δυσκαμψίας, που δίνεται για την on-axis στρώση ως προς τις ελαστικές ιδιότητες της ορθότροπης στρώσης (μέτρο ελαστικότητας παράλληλα και κάθετα στην διεύθυνση των ινών, E₁ και E₂, αντίστοιχα, το συνεπίπεδο μέτρο διάτμησης, G₁₂, και λόγος Poisson, ν₁₂) από την [5.45]:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \frac{E_2 \nu_{12}^2}{E_1}} & \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \frac{E_2 \nu_{12}^2}{E_1}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \frac{E_2 \nu_{12}^2}{E_1}} & \frac{E_2}{1 - \frac{E_2 \nu_{12}^2}{E_1}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

το τανυστικό πολώνυμο αστοχίας (από την εξ.(4.14)) μπορεί να εκφραστεί ως προς τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στην στρώση [5.45]:

$$H_{ij} [Q_{ik} \varepsilon_k] [Q_{jl} \varepsilon_l] + H_i [Q_{ij} \varepsilon_j] - 1 \leq 0 \quad i, j, k, l = 1, 2, 6 \quad (5.19)$$

όπου υπονοείται άθροιση όρων επαναλαμβανόμενων δεικτών.

Θεωρώντας ότι οι ιδιότητες ελαστικότητας της στρώσης είναι ντετερμινιστικές ο τόπος αστοχίας στρώσης on-axis σε συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας προκύπτει με τον ίδιο

ακριβώς τρόπο όπως και για τις τάσεις, δηλαδή, χρησιμοποιώντας τους αλγόριθμους ανεύρεσης του συνδυασμού των παραμορφώσεων που δίνουν την επιθυμητή αξιοπιστία.

Για παράδειγμα, στο Σχ. 59 παρουσιάζεται ο τύπος αστοχίας στρώσης on-axis στο επίπεδο παραμορφώσεων ε_x - ε_y σε επίπεδα αξιοπιστίας 98% ($\beta = 2$) και 99.997% ($\beta = 4$). Όπως και στην περίπτωση των τύπων αστοχίας στον χώρο των τάσεων σε πολύ μεγάλα επίπεδα αξιοπιστίας (99.997%) η μέθοδος EDW με δύο όρους δίνει αποτελέσματα που υπερεκτιμούν την ικανότητα του δομικού στοιχείου. Αντίθετα η χρήση 3 όρων στο ανάπτυγμα EDW δίνει αποτελέσματα συγκρίσιμα με αυτά της μεθόδου FORM. Σημειώνεται ότι τα δεδομένα για τις ιδιότητες αντοχής της στρώσης δίνονται στον πίνακα Π. 22.

Σχ. 59 Τύπος αστοχίας στρώσης on-axis σε συγκεκριμένα επίπεδα αξιοπιστίας στον χώρο των παραμορφώσεων (και επίδραση των όρων στο ανάπτυγμα EDW)

5.8.3.1 Εισάγοντας την στοχαστικότητα των ελαστικών ιδιοτήτων στρώσης

Σε περίπτωση που θεωρηθούν στοχαστικές και οι ελαστικές ιδιότητες της στρώσης, τότε χρησιμοποιώντας τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενα εδάφια, Monte Carlo, Edgeworth, Pearson ή την FORM, μπορούμε να προσεγγίσουμε την αξιοπιστία της στρώσης σε κάθε συνδυασμό αξονικών και διατμητικών παραμορφώσεων (θεωρώντας επίπεδη εντατική κατάσταση).

Η εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo γίνεται όπως και στην περίπτωση όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές, παράγοντας τις τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή τις πέντε ιδιότητες αντοχής και τις τέσσερις ιδιότητες ελαστικότητας της στρώσης και επιλύοντας το ντετερμινιστικό πρόβλημα πολλές φορές, καταγράφοντας ασφαλώς σε κάθε επανάληψη αν το αποτέλεσμα ήταν αστοχία ή όχι.

Η μέθοδος των βασικών μεταβλητών δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ άμεσα, καθώς τίθεται ένα θέμα για τις ελαστικές ιδιότητες της στρώσης και την κατάλληλη επιλογή του ποσοστιαίου σημείου της κατανομής πιθανότητας που θα χρησιμοποιηθεί. Για παράδειγμα, θεωρώντας ότι θα χρησιμοποιηθεί το μικρότερο μέτρο ελαστικότητας κατά την διεύθυνση των ινών, E_1 , όπως γίνεται και για τις τάσεις αστοχίας, οδηγούμαστε σε κατασκευή μικρότερης δυσκαμψίας και άρα μείωση των αναπτυσσόμενων τάσεων. Τα πράγματα είναι

ακόμα πιο πολύπλοκα για την επιλογή του σωστού ποσοστιαίου σημείου του λόγου Poisson, ν_{12} .

Για την εφαρμογή των υπολοίπων μεθόδων, Edgeworth, Pearson και FORM, χρειάζεται ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων της συνάρτησης αστοχίας ως προς τις ελαστικές ιδιότητες της στρώσης, οι οποίες εισέρχονται στην συνάρτηση αστοχίας μέσω των αναπτυσσόμενων τάσεων. Πιο συγκεκριμένα για την εφαρμογή της μεθόδου Edgeworth και της Pearson χρειάζονται οι μερικοί παράγωγοι της συνάρτησης αστοχίας ως προς τις βασικές μεταβλητές του προβλήματος, δηλαδή των ιδιοτήτων αντοχής και ελαστικότητας, μέχρι δεύτερης τάξης για τον πιο ακριβή υπολογισμό των ροπών της συνάρτησης αστοχίας. Για την εφαρμογή της μεθόδου FORM χρειάζεται ο υπολογισμός μόνο της πρώτης τάξης μερικών παραγώγων της συνάρτησης αστοχίας.

Έτσι ξεκινώντας από την συνάρτηση αστοχίας και με συνεχείς αντικαταστάσεις χρησιμοποιώντας τις σχέσεις τάσης – παραμόρφωσης και του συνεπίπεδου μητρώου δυσκαμψίας ως προς τις 4 ελαστικές ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την στρώση του σύνθετου υλικού, μπορούμε να εφαρμόσουμε τις παραπάνω μεθόδους για την εύρεση της αξιοπιστίας της στρώσης, με δεδομένες τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε αυτή.

Ξεκινώντας από την σχέση τάσεων παραμορφώσεων στο κύριο σύστημα της στρώσης:

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (5.20)$$

οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης αστοχίας της στρώσης, ως προς την μεταβλητή E_k , όπου $k = 1, 2, \dots, 4$ εισάγοντας το διάνυσμα $\mathbf{E} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]^T$ δίνονται από την:

$$\frac{\partial K}{\partial \mathbf{E}} = (2H_{11}\sigma_1 + 2H_{12}\sigma_2 + H_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{E}} + (2H_{22}\sigma_2 + 2H_{12}\sigma_1 + H_2) \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mathbf{E}} + 2H_{66}\sigma_6 \frac{\partial \sigma_6}{\partial \mathbf{E}} \quad (5.21)$$

ενώ οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι προκύπτουν από την:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial \mathbf{E}^2} = & (2H_{11}\sigma_1 + 2H_{12}\sigma_2 + H_1) \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \mathbf{E}^2} + (2H_{22}\sigma_2 + 2H_{12}\sigma_1 + H_2) \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial \mathbf{E}^2} + \\ & 2H_{66}\sigma_6 \frac{\partial^2 \sigma_6}{\partial \mathbf{E}^2} + 2H_{11} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{E}} \right)^2 + 2H_{22} \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial \mathbf{E}} \right)^2 + 4H_{12} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \sigma_2}{\partial \mathbf{E}} + 2H_{66} \left(\frac{\partial \sigma_6}{\partial \mathbf{E}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Οι μερικές παράγωγοι των τάσεων ως προς τις ελαστικές ιδιότητες της στρώσης, εφόσον οι παραμορφώσεις της στρώσης θεωρηθούν δεδομένες και ανεξάρτητες των ελαστικών ιδιοτήτων της υπολογίζονται από τις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \mathbf{E}} &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \mathbf{E}} \varepsilon_j \\ \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \mathbf{E}^2} &= \frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial \mathbf{E}^2} \varepsilon_j \end{aligned} \quad \begin{aligned} i, j &= 1, 2, 6 \\ \mathbf{E} &= E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των στοιχείων του συνεπίπεδου μητρώου δυσκαμψίας, $\mathbf{Q}$, ως προς τις ελαστικές ιδιότητες της στρώσης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q_{11}}{\partial E_1} &= \frac{E_1(E_1 - 2E_2 v_{12}^2)}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} & \frac{\partial Q_{11}}{\partial E_2} &= \frac{v_{12}^2 E_1^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} \\
 \frac{\partial Q_{11}}{\partial v_{12}} &= \frac{2v_{12} E_2 E_1^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} & \frac{\partial Q_{11}}{\partial G_{12}} &= 0 \\
 \frac{\partial Q_{22}}{\partial E_1} &= \frac{-v_{12}^2 E_2^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} & \frac{\partial Q_{22}}{\partial E_2} &= \frac{E_1^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} \\
 \frac{\partial Q_{22}}{\partial v_{12}} &= \frac{2v_{12} E_1 E_2^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} & \frac{\partial Q_{22}}{\partial G_{12}} &= 0 \\
 \frac{\partial Q_{12}}{\partial E_1} &= \frac{-v_{12}^3 E_2^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} & \frac{\partial Q_{12}}{\partial E_2} &= \frac{v_{12} E_1^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} \\
 \frac{\partial Q_{12}}{\partial v_{12}} &= \frac{E_1^2 E_2 + v_{12}^2 E_1 E_2^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^2} & \frac{\partial Q_{12}}{\partial G_{12}} &= 0 \\
 \frac{\partial Q_{66}}{\partial E_1} &= \frac{\partial Q_{66}}{\partial E_2} = \frac{\partial Q_{66}}{\partial v_{12}} = 0 & \frac{\partial Q_{66}}{\partial G_{12}} &= 1
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Αντίστοιχα οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης δίνονται από τις:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 Q_{11}}{\partial E_1^2} &= \frac{2v_{12}^4 E_2^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} & \frac{\partial^2 Q_{11}}{\partial E_2^2} &= \frac{2v_{12}^4 E_1^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} \\
 \frac{\partial^2 Q_{11}}{\partial v_{12}^2} &= \frac{2E_2 E_1^3 + 6v_{12}^2 E_1^2 E_2^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} & \frac{\partial^2 Q_{11}}{\partial G_{12}^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 Q_{22}}{\partial E_1^2} &= \frac{2v_{12}^2 E_2^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} & \frac{\partial^2 Q_{22}}{\partial E_2^2} &= \frac{2v_{12}^2 E_1^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} \\
 \frac{\partial^2 Q_{22}}{\partial v_{12}^2} &= \frac{2E_1^2 E_2^2 + 6v_{12}^2 E_1 E_2^3}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} & \frac{\partial^2 Q_{22}}{\partial G_{12}^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 Q_{12}}{\partial E_1^2} &= \frac{2v_{12}^3 E_2^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} & \frac{\partial^2 Q_{12}}{\partial E_2^2} &= \frac{2v_{12}^3 E_1^2}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} \\
 \frac{\partial^2 Q_{12}}{\partial v_{12}^2} &= \frac{2v_{12} E_1 E_2^2 (3E_1 + v_{12}^2 E_2)}{(E_1 - v_{12}^2 E_2)^3} & \frac{\partial^2 Q_{12}}{\partial G_{12}^2} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 Q_{66}}{\partial E_1^2} &= \frac{\partial^2 Q_{66}}{\partial E_2^2} = \frac{\partial^2 Q_{66}}{\partial v_{12}^2} = \frac{\partial^2 Q_{66}}{\partial G_{12}^2} = 0
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Στο [5.38] παρουσιάστηκαν τόποι αστοχίας στρώσης σε συγκεκριμένα επίπεδα αξιοπιστίας στο χώρο των παραμορφώσεων θεωρώντας στοχαστικές παραμέτρους εκτός από τις τάσεις αστοχίας και τις ιδιότητες ελαστικότητας, καθώς επίσης και τις γεωμετρικές παραμέτρους της στρώσης (πάχος, γωνία προσανατολισμού ινών, κλπ.), ενώ η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν η FORM. Στην εφαρμογή που παρουσιάζεται σε αυτό εδώ το εδάφιο οι γεωμετρικές παράμετροι της στρώσης θεωρούνται ντετερμινιστικές.

Στο Σχ. 60 παρουσιάζεται ο τόπος αστοχίας στρώσης off-axis 30° στο επίπεδο ϵ_x - ϵ_y και για επίπεδο αξιοπιστίας 99.997% ($\beta = 4$), όπως προκύπτει με χρήση των μεθόδων EDW και FORM. Στο ίδιο διάγραμμα παρουσιάζεται και η αντίστοιχη πρόβλεψη, θεωρώντας όμως εκτός από τις ιδιότητες αντοχής και τις ιδιότητες ελαστικότητας του υλικού της στρώσης ως στοχαστικές παραμέτρους (τόποι με την ένδειξη (elasticity)). Στην περίπτωση που θεωρούνται και οι ελαστικές ιδιότητες της στρώσης ως στοχαστικές, τότε γίνεται η υπόθεση ότι αυτές ακολουθούν την κανονική κατανομή, ενώ οι ιδιότητες λαμβάνονται από το [5.38] και παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 23. Από τα αποτελέσματα παρατηρείται καταρχήν ότι

και οι δύο μέθοδοι (FORM και EDW με τρεις όρους) δίνουν παραπλήσια αποτελέσματα και στην περίπτωση όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής λαμβάνονται ως στοχαστικές μεταβλητές, αλλά και στην περίπτωση όπου όλες οι ιδιότητες του υλικού της στρώσης θεωρούνται στοχαστικές. Στην δεύτερη αυτή περίπτωση φαίνεται ότι η στοχαστικότητα των ελαστικών ιδιοτήτων επηρεάζει την πρόβλεψη, δίνοντας πιο συντηρητικά αποτελέσματα, από ότι στην περίπτωση που οι ιδιότητες ελαστικότητας θεωρούνται ντετερμινιστικές. Παρόλο που επίδραση φαίνεται μικρή στην συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζεται, αυτό δεν σημαίνει ότι σε περίπτωση που αμελείται η στοχαστικότητα των ελαστικών ιδιοτήτων δεν προκύπτει υπερεκτίμηση της αξιοπιστίας της στρώσης. Πρέπει δε να τονισθεί ότι οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν, σύμφωνα με το [5.38], προϋποθέτουν συντελεστή μεταβλητότητας για τις ελαστικές ιδιότητες 5%, ενώ για τις ιδιότητες αντοχής περίπου 10%. Αυτή η θεώρηση όμως για τις ελαστικές ιδιότητες είναι κατά πολύ μικρότερη από αυτή που βρέθηκε κατά την πειραματική αξιολόγηση των συνθέτων υλικών στην διάρκεια της παρούσης εργασίας.

Παρόμοια αποτελέσματα λαμβάνονται και στην περίπτωση που εξετάζονται στρώσεις on-axis, ή στην περίπτωση που θεωρηθεί επιπλέον διατμητική παραμόρφωση ε_s .

Π. 23 Χαρακτηριστικά ελαστικότητας στρώσης από C/Ep από το [5.38]

Ιδιότητα	Μέση Τιμή	Τυπική απόκλιση	Κατανομή	Παράμετροι κατανομής	
				μ	σ
E_1 (MPa)	181000	9050.00	Normal	181000	9050.00
E_2 (MPa)	10300	515.00	Normal	10300	515.00
ν_{12}	0.28	0.0028	Normal	0.28	0.0028
G_{12} (MPa)	7170	358.5	Normal	7170	358.5

Σχ. 60 Τόπος αστοχίας στρώσης 30° στον χώρο παραμορφώσεων σε επίπεδο αξιοπιστίας 99.997% θεωρώντας στοχαστικές τις ιδιότητες αντοχής (Str.) ή τις ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας (Str. + Elas.)

5.9 Βιβλιογραφία

- [5.1] ISO 2394 –1986 (E), *General Principles on reliability for structures*, 2nd Ed., 1986
- [5.2] H. O. Madsen, S. Krenk, N. C. Lind, *Methods of structural safety*, Prentice-Hall, Inc., NJ, 1986
- [5.3] P. Bjerager, Methods for structural reliability computations, in *Reliability Problems; General Principles and applications in mechanics of solids and structures*, Courses and Lectures, No. 317, chapter 3, pp. 89-135, Eds. F. Casciati, J. B. Roberts, Springer Verlag, 1991
- [5.4] D. G. Robinson, *A survey of probabilistic Methods used in reliability, risk and uncertainty analysis: Analytical Techniques I*, Sandia Report, SAND98-1189, Sandia National Laboratories, California, USA, 1998
- [5.5] G. Augusti, A. Baratta, F. Casciati, *Probabilistic Methods in Structural Engineering*, Chapman & Hall, 1984
- [5.6] Y. A. Dzenis, S. P. Joshi, A. E. Bogdanovich, *Behavior of laminated composites under monotonically increasing random load*, AIAA J., Vol. 31, No. 12, pp. 2329-2334, 1993
- [5.7] H. H. Hilton, S. Yi, *Stochastic viscoelastic delamination onset failure analysis of composites*, J. of Composite Materials, Vol. 27, No. 11, pp. 1097-1113, 1993
- [5.8] E. Vanmarcke, M. Shinozuka, S. Nagagiri, G. I. Schueller, M. Grigoriu, *Random fields and stochastic finite elements*, Structural Safety, Vol. 3, pp. 143-166, 1986
- [5.9] W. K. Liu, T. Belytschko, A. Mani, *Random field finite elements*, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 1831-1845, 1986
- [5.10] B. N. Cassenti, *Probabilistic static failure of composite materials*, AIAA J., Vol. 22, No. 1, pp. 103-110, 1984
- [5.11] G. Deodatis, M. Shinozuka, D. Neal, *Spatial strength variation of laminated orthotropic composites*, J. of Composite Materials, Vol. 23, pp. 1256-1272, 1989
- [5.12] G. Van Vinckenroy, *Monte Carlo based stochastic Finite Element Method; an application to composite structures*, Doctor thesis, Vrije Universiteit Brussels, Brussels, Belgium, 1994
- [5.13] P. Venini, C. Mariani, *Free vibration of uncertain composite plates via stochastic Rayleigh-Ritz approach*, Computers and Structures, Vol. 64, No. 1-4, pp. 407-423, 1997
- [5.14] Y. A. Dzenis, S. P. Joshi, A. E. Bogdanovich, *Damage evolution modeling in orthotropic laminated composites*, AIAA J., Vol. 32, No. 2, pp. 357-364, 1994
- [5.15] S. P. Yushanov, A. E. Bogdanovich, *Analytical probabilistic modeling of initial failure and reliability of laminated composite structures*, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 35, No. 7-8, pp. 665-685, 1998
- [5.16] Germanischer Lloyd, Rules and Regulations, IV Non-Marine Technology, Part 1 Regulations for the certification of wind energy conversion systems, 1999
- [5.17] IEC 61400-1, Ed. 2: Wind turbine generator systems – Part 1: Safety requirements, 1998
- [5.18] ECN -R-94-005, *Regulations for the Type-Certification of Wind Turbines: Technical criteria*, W. J. Stam (Ed.), 2nd edition, preliminary draft of NEN 6096/2, 1994
- [5.19] Δ. Ι. Λεκού, Θ. Π. Φιλιππίδης, *Έλεγχος της μεθόδου προσομοίωσης Monte Carlo*, Εσωτερική έκθεση, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πάτρα, 2000

- [5.20] C. T. Sun, S. E. Yamada, *Strength distribution of a unidirectional fiber composite*, J. of Composite Materials, Vol. 12, pp. 169-176, 1978
- [5.21] H. K. Jeong, R. A. Shenoi, *Reliability analysis of mid-plane symmetric laminated plates using direct simulation method*, Composite Structures, Vol. 43, pp. 1-13, 1998
- [5.22] S. C. Lin, T. Y. Kam, K. H. Chu, *Evaluation of buckling and first ply failure probabilities of composite laminates*, Int. J. Of Solids Structures, Vol. 35, No. 13, pp. 1395-1410, 1998
- [5.23] M. Grigoriu, *Approximate analysis of complex reliability problems*, Structural Safety, Vol. 1, pp. 277-288, 1983
- [5.24] R. C. Wetherhold, *Reliability calculations for strength of a fibrous composite under multiaxial loading*, J. of Composite Materials, Vol. 15, pp. 240-248, 1981
- [5.25] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, *Probabilistic Failure Prediction for FRP composites*, Composites Science and Technology, Vol. 58, pp. 1973-1982, 1998
- [5.26] O. Ditlevsen, H. O. Madsen, *Structural reliability methods*, John Wiley and Sons, 1996
- [5.27] M. Hohenbichler, R. Rackwitz, *Non-normal dependent vectors in structural safety*, J. of Engineering Mechanics Division, Vol. 107, No. EM6, pp. 1227-1283, 1981
- [5.28] A. Der Kiureghian, P.-L. Liu, *Structural reliability under incomplete probability information*, J. of Engineering Mechanics, Vol. 112, No. 1, pp. 85-104, 1986
- [5.29] R. Rackwitz, *Reliability analysis – a review and some perspectives*, Structural Safety, Vol. 23, pp. 365-395, 2001
- [5.30] M. Shinozuka, *Basic analysis of structural safety*, J. of Structural Engineering, Vol. 109, No. 3, pp. 721-740, 1983
- [5.31] A. H-S. Ang, W. H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Vol. II, Decision, Risk and Reliability, John Wiley & Sons, USA, 1984
- [5.32] G. Cederbaum, I. Elishakoff, L. Librescu, *Reliability of laminated plates via the first order second moment method*, Composite Structures, Vol. 15, pp. 161-167, 1990
- [5.33] M. Miki, Y. Murotsu, T. Tanaka, S. Shao, *Reliability of unidirectional fibrous composites*, AIAA J., Vol. 28, No. 11, pp. 1980-1986, 1990
- [5.34] V. J. Papazoglou, J. V. Sanoudos, *Introducing structural reliability concepts into laminate analysis*, in S. A. Paipetis and T. P. Philippidis (eds.), Advanced Composites in Emerging Technologies, pp. 559-573, publ. AMATEC, Patras, 1991
- [5.35] T. Y. Kam, E. S. Chang, *Reliability formulation for composite laminates subject to first-ply failure*, Composite Structures, Vol. 38, No. 1-4, pp. 447-452, 1997
- [5.36] B. Fiessler, H.-J. Neumann, R. Rackwitz, *Quadratic limit states in structural reliability*, J. of Engineering Mechanics Division, Vol. 105, No. EM4, pp. 661-676, 1979
- [5.37] C. Boyer, A. Beakou, M. Lemaire, *Design of a composite structure to achieve a specified reliability level*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 56, pp. 273-283, 1997
- [5.38] H. Nakayasu, Z. Maekawa, *A comparative study of failure criteria in probabilistic fields and stochastic failure envelopes of composite materials*, Reliability Engineering and System Safety, Vol. 56, pp. 209-220, 1997
- [5.39] P.-L. Liu, A. Der Kiureghian, *Optimization Algorithms for structural reliability*, Structural Safety, Vol. 9, pp. 161-177, 1991

- [5.40] L. Wang, R. V. Grandhi, *Efficient safety index calculation for structural reliability analysis*, Computers and Structures, Vol. 52, No. 1, pp. 103-111, 1994
- [5.41] R. Hill, A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic materials, Proc. of the Royal Society A193, pp. 281-297, 1948
- [5.42] E. M. Wu, *Phenomological Anisotropic Failure Criterion*, Composite Materials Vol.2, Mechanics of Composite Materials, Ed. G. P. Sendeckyj, Academic Press, N. York, pp. 353-431, 1973
- [5.43] O. Hoffman, *The brittle strength of orthotropic materials*, J. of Composite Materials, Vol. 1, pp. 200-206, 1967
- [5.44] P. S. Theocaris, T. P. Philippidis, *The Paraboloidal Failure Surface of Initially Anisotropic Elastic Solids*, J. Reinforced Plastic Composites, Vol. 6, pp. 378-395, 1989
- [5.45] S. Tsai, *Theory of composite design*, Think Composites, 1992

6 ΔΟΜΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΥΛΙΚΑ

Γενικά, όταν αναφερόμαστε στον δομικό σχεδιασμό κατασκευών, ουσιαστικά επιζητούμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού, συνδυασμός των οποίων θα έχουν ως αποτέλεσμα μία κατασκευή αποδεκτή από άποψη λειτουργικότητας, δηλαδή μίας κατασκευής, που υπό την επιβολή των εξωτερικών φορτίων θα συμπεριφέρεται μέσα σε κάποια προδιαγεγραμμένα όρια. Αυτά τα όρια συνήθως περιλαμβάνουν προδιαγραφές αντοχής, που αναφέρονται δηλαδή στην ικανότητα της κατασκευής να φέρει φορτία χωρίς να εμφανιστεί αστοχία (π.χ. ρωγμή), προδιαγραφές για την ελαστικότητα, δηλαδή την μη υπέρβαση ορίων μετατοπίσεων ή/ και παραμορφώσεων, προδιαγραφές ευστάθειας, όπως την αποφυγή φαινομένων λυγισμού και διάφορες άλλες, ανάλογα με την κατασκευή.

Η αστοχία μπορεί να συμβεί εξαιτίας διαφορετικών αιτιών, κάθε μία από τις οποίες χρειάζεται μία ξεχωριστή εκτίμηση της ασφάλειας. Καθώς η μέθοδος προσδιορισμού της αξιοπιστίας είναι πολύ διαφορετική για τις διαφορετικές περιπτώσεις, είναι πρακτικό σε αυτή την εργασία να γίνει ο εξής διαχωρισμός:

- **Αστοχία ακραίας φόρτισης (Ultimate failure):** Είναι η αστοχία εξαιτίας ακραίας στατικής φόρτισης, η οποία εμφανίζεται πολύ λίγες φορές στην ζωή της κατασκευής. Για παράδειγμα στην περίπτωση πτερυγίων ανεμογεννητριών θα μπορούσε να είναι η φόρτιση εξαιτίας της ριπής του ανέμου που αναπτύσσεται σε καταιγίδα με περίοδο επανεμφάνισης 50 χρόνια.
- **Αστοχία λόγω κόπωσης (fatigue failure):** Είναι η αστοχία εξαιτίας πολλών επαναλαμβανόμενων εναλλαγών στα φορτία, συχνά κυρίως λόγω των κανονικών συνθηκών λειτουργίας της κατασκευής.

Στην εργασία αυτή ενδιαφερόμαστε για την αστοχία υπό στατική φόρτιση ή αλλιώς την αστοχία ακραίας φόρτισης, ενώ ο έλεγχος της κατασκευής γίνεται θεωρώντας ιδιότητες μη μεταβαλλόμενες στον χρόνο. Για αυτήν την μορφή αστοχίας συμπεριλαμβάνονται εκτός των μηχανικών φορτίσεων και τυχόν επιδράσεις λόγω διαφοράς θερμοκρασίας. Κάθε μορφή αστοχίας εμφανίζεται εξαιτίας της επίδρασης κάποιου συγκεκριμένου φορτίου. Κάθε φόρτιση που επιβάλλεται σε ένα σύστημα διεγείρει μία συγκεκριμένη απόκρισή του. Για παράδειγμα τα στατικά φορτία με τα οποία ασχολούμαστε μπορεί να γίνουν η αιτία για μη αποδεκτές ελαστικές μετατοπίσεις ή παραμορφώσεις και τάσεις. Στην εργασία αυτή όμως ενδιαφερόμαστε για τις τάσεις, που αναπτύσσονται και μπορεί να οδηγήσουν στην ολοκληρωτική αστοχία ενός στοιχείου της κατασκευής.

Ο σκοπός των υπολογισμών κατά τον σχεδιασμό, σύμφωνα με το ISO 2394 [6.1] είναι να διατηρηθεί η πιθανότητα να προκύψει μία οριακή κατάσταση κάτω από μία προκαθορισμένη τιμή για τον τύπο της κατασκευής που εξετάζεται. Αυτός ο ορισμός στην πραγματικότητα καθιστά το πρόβλημα του προσδιορισμού της αξιοπιστίας της κατασκευής ένα πρόβλημα πιθανοτήτων.

Παραδοσιακά ο δομικός σχεδιασμός βασίζεται στην ντετερμινιστική ανάλυση. Σε αυτή την περίπτωση, προσδιορίζονται κατάλληλες διαστάσεις, ιδιότητες υλικών και φορτία και ακολουθεί μία ανάλυση για να προκύψει μία λίγο ως πολύ λεπτομερής περιγραφή της κατασκευής. Καθώς οι διακυμάνσεις των φορτίων και των ιδιοτήτων των υλικών καθώς και οι αβεβαιότητες που σχετίζονται με τα αναλυτικά μοντέλα συνεισφέρουν σε μία εν γένει μικρή πιθανότητα η κατασκευή να μην αποκρίνεται όπως θα έπρεπε, αναπτύσσονται μέθοδοι για να συμπεριληφθεί η στατιστική φύση των φορτίων και των ιδιοτήτων των υλικών.

Σε ένα σχεδιασμό με πιθανότητες η ανάλυση αξιοπιστίας επιτυγχάνεται προσαρμόζοντας τον δομικό σχεδιασμό κατάλληλα μέχρι να προκύψει το απαιτούμενο επίπεδο ασφάλειας σε όρους μίας συγκεκριμένης προδιαγεγραμμένης πιθανότητας αστοχίας.

Πολλές διαδικασίες σχεδιασμού φερόντων κατασκευαστικών στοιχείων βασίζονται σε υποθέσεις ως προς την διασπορά των φορτίων και της απόκρισης της κατασκευής, οι οποίες με την σειρά τους βασίζονται σε προηγούμενη εμπειρία με παρόμοιες κατασκευές. Παρόλα αυτά τα μέγεθος της

αβεβαιότητας στα χαρακτηριστικά των υλικών, τις καταστάσεις φόρτισης, της γήρανσης του υλικού και των διαδικασιών κατασκευής είναι συχνά ανεπαρκώς αντικατοπτριζόμενα στις μεθοδολογίες σχεδιασμού. Η επίδραση των αβεβαιοτήτων στον κλασσικό σχεδιασμό λαμβάνεται υπόψη με την εφαρμογή μερικών συντελεστών ασφαλείας στις ιδιότητες υλικού ή στα φορτία, με σκοπό την μεγαλύτερη ασφάλεια της κατασκευής. Αυτή η προσέγγιση όμως μπορεί να οδηγήσει σε αμφιβολίες ως προς την ακεραιότητα και την αξιοπιστία της κατασκευής και πιθανόν και σε μία λιγότερο βελτιστοποιημένη οικονομικά κατασκευή. Για τον λόγο αυτό ολοένα και περισσότεροι κλάδοι των μηχανικών λαμβάνουν υπόψη τους την επίδραση των αβεβαιοτήτων με χρήση τεχνικών προσδιορισμού της αξιοπιστίας των κατασκευών, όπως αυτές περιγράφηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Η κατάσταση μίας κατασκευής μπορεί να διαφοροποιείται λίγο έως πολύ, συνεχώς από την κατάσταση όπου υφίσταται δομική ακεραιότητα στην κατάσταση αστοχίας. Ως μία απλούστευση, θεωρείται ότι στην κατάσταση σχεδιασμού ότι δυσμενής λειτουργία μπορεί να συμβεί μόνο με ένα πεπερασμένο αριθμό μορφών (modes). Κάθε μορφή απορριπτέας λειτουργίας (ή αστοχίας) μπορεί να δώσει μία σχεδιαστική ανισότητα. Ο δομικός σχεδιασμός στην στενή του έννοια είναι να προσδιοριστεί ένα σύνολο ιδιοτήτων των κατασκευαστικών στοιχείων τέτοιο ώστε να ικανοποιούνται αυτές οι σχεδιαστικές ανισότητες.

Η ανάλυση της αξιοπιστίας αποτελεί πλέον ένα βασικό εργαλείο της διαδικασίας σχεδιασμού των κατασκευών. Για κάθε μορφή αστοχίας ενός συστήματος μία επιθυμητή ή αποδεκτή τιμή της αξιοπιστίας πρέπει να είναι προσδιορισμένη για τον σχεδιαστή, συνήθως μέσω κανονισμών. Αυτή η επιθυμητή αξιοπιστία (target reliability) P_R^* μπορεί να επιλεγεί βάσει κριτηρίων ή βάσει μίας λογικής ανάλυσης.

Στην πράξη μία κατασκευή αποτελείται από πολλά στοιχεία και σε κάθε στοιχείο μπορεί να αντιστοιχούν αρκετές μορφές αστοχίας. Οι μέθοδοι που παρουσιάστηκαν ως αυτό το σημείο πρωταρχικό σκοπό έχουν τον προσδιορισμό της αξιοπιστίας ενός στοιχείου ως προς μία μορφή αστοχίας. Η κατασκευή θεωρείται σε ένα σταθερό σημείο στο χρόνο και η κατάστασή της θεωρείται ότι εξαρτάται με ένα μοναδικό τρόπο μόνο από τις παρούσες καταστάσεις των στοιχείων της. Κάθε στοιχείο θεωρείται ότι βρίσκεται σε κατάσταση αστοχίας. Αυτό υποτίθεται και για την κατασκευή και το πρώτο βήμα είναι η έκφραση της κατάστασης της κατασκευής σε όρους της κατάστασης των επί μέρους στοιχείων της.

Κάθε κατασκευή, της οποίας η αστοχία προσδιορίζεται ως η πρώτη αστοχία οποιουδήποτε στοιχείου της, μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα εν σειρά και η ανάλυση σε ένα τέτοιο σύστημα θα δώσει την αξιοπιστία της όλης κατασκευής. Αντίστοιχα κάθε κατασκευή στην οποία θεωρείται ότι η αστοχία επέρχεται όταν όλα τα στοιχεία της έχουν αστοχήσει θεωρείται σύστημα εν παραλλήλω και η αξιοπιστία της κατασκευής υπολογίζεται θεωρώντας της αρχές που διέπουν τέτοια συστήματα.

6.1 Σχολιασμός Αστοχία πρώτης Στρώσης (FPF) ή ολική αστοχία πολύστρωτης πλάκας (LPF)

Μία πολύστρωτη πλάκα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύστημα πολλών συνιστωσών, κάθε μία από τις οποίες χαρακτηρίζεται από την δική της συνάρτηση αστοχίας. Η αστοχία μίας πολύστρωτης πλάκας, μπορεί να χαρακτηριστεί είτε από την αστοχία της πρώτης στρώσης, first ply failure (FPF), είτε από την ολική της αστοχία, δηλαδή την διαδοχική αστοχία όλων των στρώσεων, last ply failure (LPF). Όταν η πολύστρωτη πλάκα σχεδιάζεται έτσι ώστε οριακά να μην υπερβαίνει την FPF- κατάσταση, σκοπός είναι η αποφυγή οποιασδήποτε ανάπτυξης μικρορωγμών στο υλικό, ή η αστοχία γενικά, η εξέλιξη και η διάδοση της οποίας είναι δύσκολο να προβλεφθεί αποτελεσματικά [6.2]. Από την άλλη πλευρά όταν ο σχεδιασμός εκτελείται έτσι ώστε οριακά να μην υπάρχει υπέρβαση της LPF – κατάστασης, τότε αποσκοπούμε στην καλύτερη εκμετάλλευση και (βέλτιστη) χρήση της πολύστρωτης πλάκας.

Στην εργασία αυτή η αστοχία της πολύστρωτης πλάκας θεωρείται ότι χαρακτηρίζεται από την FPF μέθοδο για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι ότι για την πρόβλεψη LPF απαιτείται η υπόθεση

συντελεστών υποβάθμισης (degradation factors) των ιδιοτήτων του υλικού κατά την διαδικασία υπολογισμού του φορτίου αστοχίας. Επειδή όμως για την τιμή του συντελεστού υποβάθμισης υπάρχουν αρκετές διαφορετικές απόψεις, όπως για παράδειγμα στα [6.3] και [6.4] και ο πιο συνηθισμένος τρόπος προσδιορισμού τους είναι η επιβεβαίωση της παραδοχής με πειραματικά αποτελέσματα, η επιλογή του θα εισήγαγε μεγαλύτερη αβεβαιότητα, αλλοιώνοντας κατ' αυτό τον τρόπο τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας.

Ο δεύτερος λόγος είναι ότι παρόλο που η θεώρηση FPF αστοχίας υποεκτιμά την τελική αστοχία της πολύστρωτης πλάκας, η θεώρηση αυτή αποτελεί μία συντηρητική και ταυτόχρονα μία ασφαλή προσέγγιση κατά τον σχεδιασμό κατασκευών με σύνθετα υλικά.

Για να περάσουμε λοιπόν από την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας της στρώσης στην πιθανότητα αστοχίας της πολύστρωτης πλάκας, δηλαδή του δομικού στοιχείου της κατασκευής, πρέπει να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα ως ένα σύστημα, όπως περιγράφεται στην θεωρία πιθανοτήτων. Έτσι θεωρώντας ως σύστημα την πολύστρωτη η στρώσεων και ως στοιχεία του συστήματος τις η στρώσεις, σύμφωνα με την FPF υπόθεση, ότι δηλαδή αστοχία της πρώτης στρώσης συνεπάγεται την αστοχία της πολύστρωτης, το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως εν σειρά. Αντίστοιχα στην περίπτωση LPF, όπου αστοχία του συστήματος επέρχεται με αστοχία όλων των στοιχείων του, το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα εν παραλλήλω. Καθώς ο σχεδιασμός γίνεται βάσει της FPF αστοχίας, η ανάλυση λοιπόν του συστήματος εν σειρά μπορεί να μας δώσει την πιθανότητα αστοχίας όλης της πολύστρωτης πλάκας.

Έστω μία πολύστρωτη πλάκα με k στρώσεις. Οι στρώσεις αυτές θα έχουν διαφορετικές συναρτήσεις οριακής κατάστασης. Έστω ότι η αντίστοιχη συνάρτηση οριακής κατάστασης της στρώσης i περιγράφεται από:

$$G_i(X) = G_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

τέτοιες ώστε το μεμονωμένο γεγονός αστοχίας είναι:

$$A_i = [G_i(X) \leq 0]$$

Τότε το συμπλήρωμα του A_i είναι το ασφαλές γεγονός, δηλαδή:

$$\overline{A_i} = [G_i(X) > 0]$$

Η ασφάλεια της πολύστρωτης πλάκας, στην περίπτωση που θεωρούμε την FPF αστοχία περιγράφεται από το γεγονός ότι καμία από τις k στρώσεις δεν βρίσκεται σε κατάσταση αστοχίας, δηλαδή:

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k}$$

αντίστροφα το γεγονός της αστοχίας της πολύστρωτης πλάκας (του συστήματος) είναι:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

Η παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι μία ή περισσότερες από τις στρώσεις βρίσκεται σε κατάσταση αστοχίας. Θεωρητικά, εξ' αυτού, η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε ασφαλή κατάσταση λειτουργίας εκφράζεται από το χωρικό ολοκλήρωμα:

$$P_S = \int_{(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_k})} \dots \int f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(X_1, X_2, \dots, X_k) dX_1 dX_2 \dots dX_k$$

όπου $f_{X_1, X_2, \dots, X_k}$ η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών X .

Ο υπολογισμός της πιθανότητας αυτής ή της αντίστοιχης πιθανότητας αστοχίας μίας πολύστρωτης πλάκας μέσω του παραπάνω χωρικού ολοκληρώματος είναι εν γένει δύσκολος. Σχεδόν πάντα είναι απαραίτητες προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης. Από αυτή την άποψη, τα όρια της αντίστοιχης πιθανότητας είναι επίσης χρήσιμα. Τα όρια της πιθανότητας να μην αστοχήσει μία πολύστρωτη

πλάκα, P_S , της οποίας οι αστοχίες των στρώσεων της είναι θετικά συσχετισμένες δίνονται από [6.5]:

$$\prod_{i=1}^k P_{Si} \leq P_S \leq \min_i P_{Si}$$

όπου με P_{Si} συμβολίζεται η πιθανότητα να μην αστοχήσει η στρώση i . Αντίστροφα, τα αντίστοιχα όρια για την πιθανότητα αστοχίας, P_F , αυτής της πολύστρωτης είναι [6.5]:

$$\max_i P_{Fi} \leq P_F \leq 1 - \prod_{i=1}^k (1 - P_{Fi})$$

όπου με P_{Fi} συμβολίζεται η πιθανότητα αστοχίας της στρώσης i .

Η απόσταση μεταξύ του άνω και κάτω ορίου, προφανώς εξαρτάται από τον αριθμό των στρώσεων και τις σχετικές τιμές των πιθανοτήτων εμφάνισής τους. Για παράδειγμα αν υπάρχει μία κυρίαρχη αστοχία στρώσης τότε η αξιοπιστία του συστήματος θα εξαρτάται από την πιθανότητα αυτής να εμφανισθεί και μπορεί κάλλιστα να παρασταθεί από την πιθανότητα αυτής και μόνο. Σε τέτοια περίπτωση τα όρια θα είναι στενά. Γενικά όμως τα όρια θα είναι αρκετά ανοιχτά, ειδικά αν ο αριθμός ανεξάρτητων μορφών αστοχίας είναι μεγάλος. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση των συνθέτων υλικών, όπως εξετάζονται στην παρούσα εργασία οι ανεξάρτητες μορφές αστοχίας είναι ίσες με τον αριθμό των στρώσεων της πολύστρωτης πλάκας, εφόσον κάθε στρώση χαρακτηρίζεται από το δικό της κριτήριο αστοχίας (όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο).

Ειδικότερα, στην περίπτωση κατά την οποία η αστοχία κάθε στρώσης είναι εντελώς ανεξάρτητη από την αστοχία κάθε άλλης η πιθανότητα αστοχίας και αξιοπιστίας της πολύστρωτης πλάκας δίνονται από τις Εξ.(6.1) και (6.2) αντίστοιχα.

$$P_F = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - P_{Fi}) \quad (6.1)$$

$$P_S = \prod_{i=1}^k P_{Si} \quad (6.2)$$

Ενώ στην περίπτωση όπου οι αστοχίες των στρώσεων να είναι εντελώς θετικά συσχετισμένες η πιθανότητα αστοχίας και αξιοπιστίας της πολύστρωτης πλάκας δίνονται αντιστοίχως από:

$$P_F = \max_i P_{Fi} \quad (6.3)$$

$$P_S = \min_i P_{Si} \quad (6.4)$$

Σε περίπτωση που επιθυμείται ο προσδιορισμός πιο στενών ορίων για την πιθανότητα αστοχίας της πολύστρωτης πλάκας, θα πρέπει να προσδιορισθεί ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ της αστοχίας των στρώσεων. Ο συντελεστής συσχέτισης, όπως και οι συντελεστές υποβάθμισης των στρώσεων, είναι δύσκολο να προσδιορισθεί, εφ' όσον ο βαθμός εξάρτησης των ιδιοτήτων των στρώσεων σε μία πολύστρωτη εξαρτάται για παράδειγμα από την διαδικασία παραγωγής της πολύστρωτης πλάκας, την χωρική στατιστική κατανομή (spatial distribution) των ιδιοτήτων του υφάσματος και την διάταξη των στρώσεων στην πολύστρωτη. Συγκεκριμένα, μπορεί κανείς να υποθέσει ότι για όμοιες στρώσεις όσο πιο τυποποιημένη είναι η διαδικασία κατασκευής του συνθέτου υλικού, τόσο πιο θετικά συσχετισμένες είναι οι ιδιότητες των στρώσεων.

Για παράδειγμα όταν εκτελούνται πειράματα για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων αντοχής ενός συνθέτου υλικού, κατασκευάζονται δοκίμια αρκετών στρώσεων ανάλογα με το πάχος της μεμονωμένης στρώσης, τα οποία υποβάλλονται σε μονοαξονική εντατική κατάσταση μέχρι είτε τον ολικό αποχωρισμό του δοκιμίου είτε την κατάσταση κατά την οποία δεν δύναται να φέρει μεγαλύτερο φορτίο. Σε αυτή την περίπτωση όμως ενώ στην ουσία έχουμε μία πολύστρωτη πλάκα, θεωρούμε ότι οι ιδιότητες αυτής συμπίπτουν με τις ιδιότητες της μεμονωμένης στρώσης. Ή

αλλιώς, θεωρούμε ότι οι ιδιότητες όλων των στρώσεων στην πολύστρωτη είναι ίδιες. Πίσω από αυτή την θεώρηση κρύβεται η υπόθεση ότι οι ιδιότητες των στρώσεων είναι τέλεια θετικά συσχετισμένες.

Στο [6.6] και στο [6.7] αναφέρεται η θεώρηση του συστήματος ως εν σειρά και ως εν παραλλήλω, εκτιμώντας το άνω και κάτω όριο της πιθανότητας αστοχίας ανάλογα με την θεώρηση, υποθέτοντας όμως ότι οι αστοχία κάθε στρώσης συμβαίνει ανεξάρτητα από την αστοχία κάποιας άλλης. Αντίστοιχα στο [6.8] προτείνεται η θεώρηση του συστήματος ως εν σειρά, δηλαδή θεωρείται ότι αστοχία της πολύστρωτης επέρχεται ταυτόχρονα με την αστοχία της πρώτης στρώσης. Για την εκτίμηση της πιθανότητας το σύστημα να βρίσκεται σε ασφαλή κατάσταση λειτουργίας προτείνεται η χρήση άνω και κάτω ορίου, όπως για παράδειγμα η χρήση των ορίων Ditlevsen. Παρόμοια ανάλυση προτείνεται και στο [6.9]. Στο ίδιο άρθρο όμως επισημαίνεται ότι για το συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζεται, όπου ερευνώνται $[\pm\phi]_n$ πολύστρωτες, η πιθανότητα αστοχίας όλων των επιμέρους στρώσεων είναι ίσες μεταξύ τους, επομένως και η πιθανότητα αστοχίας του συστήματος (της πολύστρωτης) ισούται με την πιθανότητα αστοχίας οποιασδήποτε στρώσης. Στο [6.10] παρόλο που αναγνωρίζεται ότι η αστοχία της πολύστρωτης δεν συμπίπτει απαραίτητα με την αστοχία της πρώτης στρώσης, θεωρείται ότι ως πρώτη προσέγγιση του προβλήματος είναι απαραίτητη η θεώρηση του συστήματος ως εν σειρά, εφόσον η εκτίμηση της αστοχίας (ή της πιθανότητας αστοχίας) της τελευταίας στρώσης συνεπάγεται ανάλυση προοδευτικής αστοχίας. Επίσης γίνεται η θεώρηση ότι οι στρώσεις είναι εξαρτημένες έτσι ώστε $P_F = \max_i P_{Fi}$, καθώς η θεώρηση ότι οι στρώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους προϋποθέτουν ότι οι συντελεστές συσχέτισης είναι γνωστοί.

Στο [6.11] υπολογίζεται η αστοχία τελευταίας στρώσης. Για την εκτίμηση αυτή, αυξανόμενου του φορτίου, όταν διαπιστωθεί η αστοχία μίας στρώσης, τότε αφενός υπολογίζεται εξαιτίας ποιας τάσης αστόχησε η στρώση (σε διάτμηση, εξαιτίας αστοχίας μήτρας κλπ) και ανάλογα θεωρούνται αρνητικές οι ελαστικές ιδιότητες που σχετίζονται με την τάση αυτή. Κατά την περαιτέρω αύξηση του φορτίου (στην προκειμένη περίπτωση της εσωτερικής πίεσης ενός δοχείου από σύνθετα υλικά) οι ελαστικές ιδιότητες των στρώσεων που έχουν αστοχήσει εξακολουθούν να θεωρούνται αρνητικές μέχρις ότου μηδενιστούν οι αντίστοιχες τάσεις των στρώσεων. Μετά από αυτό, οι ελαστικές ιδιότητες (καθώς και οι αντίστοιχες τάσεις) θεωρούνται μηδενικές. Η αστοχία όλης της πολύστρωτης θεωρείται είτε όταν συμβεί αστοχία κάποιας στρώσης εξαιτίας θραύσης των ινών, είτε όταν γίνει μικρότερος του μηδέν ο πίνακας δυσκαμψίας της πολύστρωτης, δηλαδή χάσει τον ορισμό του ως θετικός.

Στο [6.12] γίνεται μία πολύ καλή περιγραφή των μορφών τελικής αστοχίας μίας πολύστρωτης πλάκας. Επισημαίνεται ότι για να βρεθεί η πιθανότητα η πολύστρωτη πλάκα που εξετάζεται να βρίσκεται σε ασφαλή κατάσταση λειτουργίας με ακριβή τρόπο πρέπει να γίνει διερεύνηση των σειρών αστοχίας στρώσεων μέχρι την τελική της αστοχίας και στην συνέχεια να προσεγγισθεί η πιθανότητα αστοχίας της πολύστρωτης χρησιμοποιώντας θεωρία πιθανοτήτων γεγονότων. Μετά την αστοχία της πρώτης στρώσης, για τον υπολογισμό της αστοχίας της επόμενης, γίνεται η παραδοχή ότι οι ελαστικές ιδιότητες της στρώσης που αστόχησε είναι ίσες με μηδέν. Εξαιτίας του μεγέθους του προβλήματος για τον υπολογισμό όλων των σειρών αστοχίας και της πιθανότητάς τους να εμφανιστούν, ακόμα και στην περίπτωση όπου η πολύστρωτη αποτελείται από 10 στρώσεις, από όλες τις πιθανές ακολουθίες αστοχίας επιλέγονται μόνο οι πιο πιθανές, για την εκτίμηση της ζητούμενης πιθανότητας του συστήματος. Επίσης, αναφέρεται ότι στην περίπτωση των συνθέτων υλικών δεν συμβαίνει συχνά στην πράξη να μπορούν να παραλάβουν φορτίο μετά την αστοχία της τρίτης στρώσης, ενώ συχνά οι πολύστρωτες μπορούν να παραλάβουν φορτία μετά την αστοχία και δεύτερης στρώσης. Για την προσέγγιση της πιθανότητας ολικής αστοχίας πολύστρωτης πλάκας, πρέπει να διερευνάται και ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η σταδιακή αύξηση του φορτίου. Σε περίπτωση που η αύξηση του εξωτερικού φορτίου γίνεται μονοσήμαντα η επίλυση επικεντρώνεται μόνο στην διερεύνηση της αστοχίας των στρώσεων. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν η εξωτερική φόρτιση μπορεί να αυξηθεί με διάφορους τρόπους, τότε θα πρέπει να εξετάζεται και ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η αύξηση του φορτίου.

6.2 Προσδιορισμός τύπου αστοχίας πολύστρωτης πλάκας σε προκαθορισμένο επίπεδο αξιοπιστίας

Για την πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας μίας πολύστρωτης πλάκας υπό συνεπίπεδη φόρτιση χρησιμοποιήθηκε η κλασσική θεωρία πολυστρώτων πλακών για τον προσδιορισμό του τανυστή τάσεων που αναπτύσσεται σε κάθε στρώση. Οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού καθώς επίσης και οι συνεπίπεδες ανηγμένες δυνάμεις της πολύστρωτης πλάκας θεωρούνται σε πρώτη φάση ντετερμινιστικές. Έτσι ο προσδιορισμός των αναπτυσσόμενων τάσεων σε κάθε στρώση δεν εμπεριέχει δυσκολία.

Πιο συγκεκριμένα, οι παραμορφώσεις, ϵ^0 , και οι καμπυλότητες, $\mathbf{k}^0$, του μέσου επιπέδου της πολύστρωτης πλάκας υπολογίζονται μέσω της κλασσικής θεωρίας πολυστρώτων πλακών μέσω της σχέσης:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \mathbf{k}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{B}'^T & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

όπου $\mathbf{N}$, οι αναπτυσσόμενες (στην περίπτωση που εξετάζεται ντετερμινιστικές) ανηγμένες δυνάμεις και $\mathbf{M}$ οι αντίστοιχες ροπές και $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{B}'^T, \mathbf{D}'$ είναι τα χαρακτηριστικά μητρώα της πολύστρωτης που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B} \left(-\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \right) \\ \mathbf{B}' &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} [\mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \\ \mathbf{D}' &= [\mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Τα στοιχεία των μητρώων $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$, με $i, j = x, y, s$, δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k h_k \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n z_k h_k Q_{ij}^k \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k \left(h_k z_k^2 + \frac{h_k^3}{12} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

όπου n είναι ο αριθμός των στρώσεων στην πολύστρωτη, h_k το πάχος της k στρώσης και με Q'^k συμβολίζεται το μητρώο δυσκαμψίας της στρώσης στο σύστημα συντεταγμένων της πολύστρωτης. Τα στοιχεία αυτού του μητρώου, δίνονται συναρτήσει του μητρώου δυσκαμψίας της στρώσης $\mathbf{Q}$, βάσει του μετασχηματισμού:

$$\begin{aligned} Q_{xx}'^k &= Q_{11}^k \cos^4 \theta_k + 2Q_{12}^k \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + 4Q_{66}^k \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + Q_{22}^k \sin^4 \theta_k \\ Q_{xy}'^k &= (Q_{11}^k + Q_{22}^k - 4Q_{66}^k) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + Q_{12}^k (\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k) \\ Q_{yy}'^k &= Q_{11}^k \sin^4 \theta_k + 2Q_{12}^k \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + 4Q_{66}^k \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + Q_{22}^k \cos^4 \theta_k \\ Q_{xs}'^k &= (Q_{11}^k - Q_{12}^k - 2Q_{66}^k) \cos^3 \theta_k \sin \theta_k + (Q_{12}^k - Q_{22}^k + 2Q_{66}^k) \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \\ Q_{ys}'^k &= (Q_{12}^k - Q_{22}^k + 2Q_{66}^k) \cos^3 \theta_k \sin \theta_k + (Q_{11}^k - Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \\ Q_{ss}'^k &= (Q_{11}^k + Q_{22}^k - 2Q_{12}^k - 2Q_{66}^k) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + Q_{66}^k (\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k) \end{aligned} \quad (6.8)$$

όπου θ_k η γωνία του κύριου άξονα της k στρώσης ως προς τον κύριο άξονα της πολύστρωτης.

Ενώ το συνεπίπεδο μητρώο δυσκαμψίας της στρώσης στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης είναι συνάρτηση των ελαστικών ιδιοτήτων της στρώσης και δίνεται από την σχέση (5.18), που επαναλαμβάνεται εδώ για λόγους πληρότητας.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \frac{E_2 \nu_{12}^2}{E_1}} & \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \frac{E_2 \nu_{12}^2}{E_1}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \frac{E_2 \nu_{12}^2}{E_1}} & \frac{E_2}{1 - \frac{E_2 \nu_{12}^2}{E_1}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

Οι παραμορφώσεις της k στρώσης της πολύστρωτης στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της πολύστρωτης, ε_i^k , υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση συναρτήσεως των παραμορφώσεων και καμπυλοτήτων του μέσου επιπέδου της πολύστρωτης:

$$\varepsilon_i^k = \varepsilon_i^0 + z_k k_i \quad (6.9)$$

όπου z_k είναι η απόσταση του μέσου επιπέδου της k στρώσης από το μέσο επίπεδο της πολύστρωτης. Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση μετασχηματίζονται στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης μέσω του παρακάτω μετασχηματισμού:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^k = \mathbf{T}^k \boldsymbol{\varepsilon}'^k \quad (6.10)$$

όπου το μητρώο μετασχηματισμού $\mathbf{T}^k$ δίνεται από την:

$$\mathbf{T}^k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \cos \theta_k \sin \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\cos \theta_k \sin \theta_k \\ -2 \cos \theta_k \sin \theta_k & 2 \cos \theta_k \sin \theta_k & (\cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Η αξιοπιστία της αντοχής πολύστρωτης πλάκας προσδιορίζεται για κάθε συνδυασμό ανηγμένων στο πάχος των στρώσεων δυνάμεων από την στρώση που παρουσιάζει το μικρότερο επίπεδο αξιοπιστίας, δηλαδή βασίζεται στην αρχή της αστοχίας της πρώτης στρώσης (με χρήση της σχέσης (6.3)).

Ο υπολογιστικός κώδικας που δημιουργήθηκε για τον προσδιορισμό της πιθανότητας αστοχίας της πολύστρωτης με τις αναλυτικές μεθόδους (FORM και EDW) περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. Εισαγωγή των ιδιοτήτων της κάθε στρώσης ως προς το κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης και εισαγωγή των 4 πρώτων ροπών για κάθε μία από τις πέντε ιδιότητες αντοχής της στρώσης.
2. Εισαγωγή των ανηγμένων δυνάμεων και ροπών που εφαρμόζονται στην πολύστρωτη.
3. Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας $\mathbf{Q}$ κάθε στρώσης στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης και κατόπιν στροφή του μητρώου κάθε στρώσης στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων της πολύστρωτης για τον υπολογισμό των $\mathbf{Q}'$.
4. Υπολογισμός των μητρώων $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ και $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{D}'$ της πολύστρωτης.
5. Υπολογισμός των παραμορφώσεων και καμπυλοτήτων στο μέσο επίπεδο της πολύστρωτης, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ και $\mathbf{k}$.
6. Υπολογισμός των παραμορφώσεων κάθε στρώσης $\boldsymbol{\varepsilon}^k$.
7. Υπολογισμός των τάσεων κάθε στρώσης $\boldsymbol{\sigma}^k$.

8. Υπολογισμός της αξιοπιστίας κάθε στρώσης P_R^k .
9. Εύρεση της στρώσης με την μικρότερη αξιοπιστία.

Μία σχηματική αναπαράσταση της λογικής του προγράμματος παρουσιάζεται στο Σχ. 61.

Όμοια για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας πολύστρωτης θεωρώντας στοχαστικές μεταβλητές τις ιδιότητες αντοχής της στρώσης, τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα εξής:

1. Εισαγωγή των ιδιοτήτων κάθε στρώσης στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης, $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \theta, h$, και των παραμέτρων των στατιστικών κατανομών για κάθε μία από τις 5 βασικές ιδιότητες αντοχής της στρώσης.
2. Εισαγωγή των ανηγμένων δυνάμεων και ροπών
3. Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας $\mathbf{Q}$ κάθε στρώσης στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης και κατόπιν στροφή του μητρώου κάθε στρώσης στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων της πολύστρωτης για τον υπολογισμό των $\mathbf{Q}'$.
4. Υπολογισμός των μητρώων $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ και $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{D}'$ της πολύστρωτης.
5. Υπολογισμός των παραμορφώσεων και καμπυλοτήτων στο μέσο επίπεδο της πολύστρωτης, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ και $\mathbf{k}$.
6. Υπολογισμός των παραμορφώσεων κάθε στρώσης $\boldsymbol{\varepsilon}^k$.
7. Υπολογισμός των τάσεων κάθε στρώσης $\boldsymbol{\sigma}^k$ στο κύριο σύστημα της στρώσης.
8. Για κάθε στρώση εκκίνηση n_{tot} επαναλήψεων για την παραγωγή $n_{tot} * 5$ τυχαίων ιδιοτήτων αντοχής, όπου 5 είναι οι βασικές μεταβλητές αντοχής.
9. Υπολογισμός της αξιοπιστίας κάθε στρώσης.
10. Υπολογισμός της ελάχιστης τιμής από την αξιοπιστία των στρώσεων

Μία σχηματική αναπαράσταση των βημάτων που ακολουθούνται για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo παρουσιάζεται στο Σχ. 62.

Σχ. 61 Σχηματική αναπαράσταση της λογικής που ακολουθείται για τις αναλυτικές μεθόδους

Σχ. 62 Λογικό Διάγραμμα για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo

Η διαφορά της αναλυτικής και αριθμητικής λύσης, έγκειται στα τρία τελευταία βήματα. Ενώ κατά την εφαρμογή αναλυτικής λύσης δύο στρώσεις με το ίδιο υλικό και την ίδια γωνία προσανατολισμού υπό συνεπίπεδη εντατική κατάσταση, έχουν εξ' ορισμού την ίδια τιμή αξιοπιστίας, για την προσομοίωση Monte Carlo δεν ισχύει αυτό, καθώς η παραγωγή τυχαίων αριθμών επαναλαμβάνεται για κάθε στρώση. Παρόλα αυτά, καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων είναι αρκετά μεγάλος, έτσι ώστε οι παραγόμενες ιδιότητες να ακολουθούν την ίδια στατιστική

κατανομή, όπως ορίζεται στην εισαγωγή των παραμέτρων, επιτυγχάνεται τελικά ίδια αξιοπιστία για οποιεσδήποτε δύο στρώσεις με το ίδιο υλικό και την ίδια γωνία προσανατολισμού.

Τα αποτελέσματα για αυτή την περίπτωση συγκρίνονται με πειραματικά αποτελέσματα από το [6.13]. Φαίνεται ότι οι μέθοδοι όπως αναπτύχθηκαν και εφαρμόστηκαν για το επίπεδο της στρώσης διατηρούν την αποτελεσματικότητά τους και στην περίπτωση της πολύστρωτης πλάκας.

Η στατιστική πληροφορία που χρειάζεται για την μοντελοποίηση των ιδιοτήτων αντοχής της UD στρώσης από C/Ep (ίνες άνθρακα εμβαπτισμένες σε εποξειδική ρητίνη) λήφθηκαν απευθείας από τον υπολογισμό των ροπών των ψηφιοποιημένων πειραματικών δεδομένων του [6.14]. Τα ψηφιοποιημένα δεδομένα δίνονται για πληρότητα στο Παράρτημα Α (Α.4.2). Οι ιδιότητες αντοχής υποθέτεται ότι ακολουθούν την κατανομή Weibull. Έτσι η μέση τιμή, η διασπορά και οι παράμετροι της κατανομής Weibull που χρησιμοποιήθηκαν δίνονται στον Π. 24 για τις πέντε βασικές ιδιότητες αντοχής της στρώσης.

Π. 24 Χαρακτηριστικά αντοχής στρώσης C/Ep

Ιδιότητα	Μέση τιμή (MPa)	Διασπορά (MPa ²)	Παράμετροι Weibull	
			σ (MPa)	η
X _T	1029.78	15842.82	1083.21	9.83
X _C	710.17	8285.41	748.66	9.35
Y _T	45.55	81.28	49.16	5.86
Y _C	129.27	306.21	136.63	8.82
S	70.71	128.95	75.39	7.34

Στο Σχ. 63 παρουσιάζεται ως παράδειγμα ο τόπος αστοχίας μίας πολύστρωτης πλάκας με διάταξη [0/90]_{2S} από C/Ep για διάφορα επίπεδα αξιοπιστίας, ο οποίος προέκυψε με χρήση των μεθόδων EDW και BVM, σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα από το [6.13] με τις ιδιότητες που δίνονται στον Π. 24. Για λόγους πληρότητας τα πειραματικά δεδομένα από το [6.13] δίνονται στο Παράρτημα Α (Α.4.3). Επίσης παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα προσομοίωσης με την μέθοδο MC για λόγους σύγκρισης. Χρησιμοποιήθηκε το τανυστικό πολυώνυμο αστοχίας TH, δηλαδή με

τον μη διαγώνιο όρο $H_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{H_{11}H_{22}}$, και όλες οι μέθοδοι φαίνονται να δίνουν καλές

προβλέψεις σε σχέση με τα πειραματικά αποτελέσματα. Σημειώνεται ότι οι εσωτερικοί τόποι αστοχίας αναφέρονται σε επίπεδο αξιοπιστίας 95%, ενώ οι αντίστοιχοι εξωτερικοί αναφέρονται σε επίπεδο αξιοπιστίας 10% (πιθανότητα αστοχίας ίση με 90%).

Ασφαλώς, σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι για την πειραματική επαλήθευση του τύπου αστοχίας σε συγκεκριμένη πιθανότητα αξιοπιστίας είναι απαραίτητος μεγάλος αριθμός πειραμάτων, έτσι ώστε αφενός να καλύπτει όλους του συνδυασμούς τάσεων, αλλά και να υπάρχει επαρκής αριθμός πειραμάτων σε κάθε συνδυασμό τάσεων για την στατιστική τους ανάλυση. Σύγκριση με τα υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα μπορεί απλά να επιβεβαιώσει ότι η πρόβλεψη για πιθανότητα αστοχίας ίση με 90% βρίσκεται στην εξωτερική πλευρά των πειραματικών δεδομένων, ενώ πρόβλεψη για πιθανότητα αστοχίας ίση με 5% βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά.

Στο ίδιο σχήμα για λόγους σύγκρισης παρουσιάζεται και ο ντετερμινιστικός τόπος αστοχίας, με χρήση του συντελεστή ασφαλείας 1.5 (συμβολίζεται με DET R = 1.5 στο σχήμα). Σημειώνεται ότι ο συντελεστής ασφαλείας ίσος με 1.5 προτείνεται σε διάφορα τεχνικά εγχειρίδια ως ο καταλληλότερος για εφαρμογή κατά τον σχεδιασμό κατασκευών από σύνθετα υλικά.

Σχ. 63 Τόποι αστοχίας σε δύο επίπεδα αξιοπιστίας για πολύστρωτη πλάκα $[0/90]_{2s}$ από C/Ep (με h το συνολικό πάχος της πολύστρωτης)

6.3 Επίδραση της στοχαστικότητας των διαφόρων ιδιοτήτων του υλικού

Σε περίπτωση που θεωρήσουμε ως στοχαστικές τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού, δηλαδή το μέτρο ελαστικότητας στην διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτές, τον λόγο Poisson και το μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της ορθότροπης στρώσης τότε η τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση της πολύστρωτης εξαιτίας των εξωτερικά επιβαλλόμενων δυνάμεων εξαρτώνται από την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων αυτών. Σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση αστοχίας στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται αναλυτικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό της αξιοπιστίας της πολύστρωτης πλάκας, εκφράζεται σε όρους όχι μόνο των ροπών των ιδιοτήτων αντοχής, αλλά και των ροπών των τάσεων της εκάστοτε στρώσης, οι οποίες με την σειρά τους εκφράζονται σε όρους των ιδιοτήτων ελαστικότητας της στρώσης.

Έτσι, ουσιαστικά για τις αναλυτικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην εργασία αυτή, σε περίπτωση όπου οι ελαστικές ιδιότητες των στρώσεων και οι συντελεστές θερμικής διαστολής θεωρούνται στοχαστικές απαιτείται η εύρεση των μερικών παραγώγων ως προς τις μεταβλητές αυτές όλων των σχέσεων που χρησιμοποιούνται μέχρι την συνάρτηση αστοχίας της στρώσης σε αναλογία με την μέθοδο που παρουσιάστηκε στο εδάφιο 5.8.3.1.

Χωρίς να χάνεται η γενικότητα, στο εδάφιο αυτό παρουσιάζεται η μέθοδος για μία συμμετρική και ισοσταθμισμένη πολύστρωτη, αμελώντας τυχόν εναπομένουσες θερμικές τάσεις (και την μεταβλητότητα των συντελεστών θερμικής διαστολής). Έτσι, θεωρώντας το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας της στρώσης k στην γενική του μορφή:

$$K^k = H_{ij}^k \sigma_i^k \sigma_j^k + H_i^k \sigma_i^k - 1 \leq 0$$

οι H_{ij}^k και H_i^k είναι συναρτήσεις μόνο των ιδιοτήτων αντοχής, ενώ οι τάσεις, σ_i , σ_j , στην περίπτωση της πολύστρωτης είναι συναρτήσεις των εξωτερικά επιβαλλόμενων φορτίων, της διάταξης των στρώσεων στην πολύστρωτη και των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού. Εξ' αυτού, για τον

υπολογισμό των ροπών της συνάρτησης αστοχίας, οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αστοχίας ως προς τις ιδιότητες αντοχής της στρώσης βρίσκονται άμεσα, από την συνάρτηση αστοχίας. Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης αστοχίας ως προς τις ελαστικές σταθερές μπορούν να υπολογιστούν μέσω συνεχών αντικαταστάσεων.

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης αστοχίας της στρώσης, ως προς την μεταβλητή E , εισάγοντας το διάνυσμα $\mathbf{E} = [E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}]^T$ δίνονται από τις σχέσεις (5.21) και (5.22) που επαναλαμβάνονται εδώ για λόγους πληρότητας:

$$\frac{\partial K}{\partial E} = (2H_{11}\sigma_1 + 2H_{12}\sigma_2 + H_1) \frac{\partial \sigma_1}{\partial E} + (2H_{22}\sigma_2 + 2H_{12}\sigma_1 + H_2) \frac{\partial \sigma_2}{\partial E} + 2H_{66}\sigma_6 \frac{\partial \sigma_6}{\partial E} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial E^2} = & (2H_{11}\sigma_1 + 2H_{12}\sigma_2 + H_1) \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial E^2} + (2H_{22}\sigma_2 + 2H_{12}\sigma_1 + H_2) \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial E^2} + \\ & 2H_{66}\sigma_6 \frac{\partial^2 \sigma_6}{\partial E^2} + 2H_{11} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial E} \right)^2 + 2H_{22} \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial E} \right)^2 + 4H_{12} \frac{\partial \sigma_1}{\partial E} \frac{\partial \sigma_2}{\partial E} + 2H_{66} \left(\frac{\partial \sigma_6}{\partial E} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Σε αντιδιαστολή με την ανάπτυξη της μεθόδου στο εδάφιο 5.8.3.1 οι μερικές παράγωγοι των τάσεων ως προς τις ελαστικές ιδιότητες της στρώσης, υπολογίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις, εφόσον οι παραμορφώσεις της στρώσης δεν είναι ανεξάρτητες των ελαστικών ιδιοτήτων της, από την σχέση τάσεων-παραμορφώσεων στο κύριο σύστημα της στρώσης (5.20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial E} &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial E} \varepsilon_j + Q_{ij} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial E} \quad i, j = 1, 2, 6 \\ E &= E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12} \\ \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial E^2} &= \frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial E^2} \varepsilon_j + Q_{ij} \frac{\partial^2 \varepsilon_j}{\partial E^2} + 2 \frac{\partial Q_{ij}}{\partial E} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial E} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Οι μερικές παράγωγοι των Q_{ij} ως προς τις ελαστικές ιδιότητες της στρώσης δόθηκαν στο εδάφιο 5.8.3.1 από τις σχέσεις (5.24) – (5.25).

Από την σχέση (6.10) οι μερικές παράγωγοι των παραμορφώσεων στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης ως προς τις ελαστικές παραμέτρους υπολογίζονται από:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial E} &= T_{ij} \frac{\partial \varepsilon'_j}{\partial E} \quad i, j = 1, 2, 6 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial E^2} &= T_{ij} \frac{\partial^2 \varepsilon'_j}{\partial E^2} \quad E = E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12} \end{aligned} \quad (6.13)$$

όπου οι T_{ij} δίνονται από την εξ.(6.11).

Έτσι, οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων (x-y) της συμμετρικής και ισοσταθμισμένης πολύστρωτης όταν στην πολύστρωτη εφαρμόζονται μόνο ανηγμένες ορθές και διατμητικές δυνάμεις (και όχι ροπές) δίνονται από την:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{xx} & A'_{xy} & 0 \\ A'_{xy} & A'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & A'_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Καθώς οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις είναι ανεξάρτητες από τις ελαστικές ιδιότητες των στρώσεων και τις ιδιότητες αντοχής, ενώ αντίστοιχα οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση είναι ανεξάρτητες από τις ιδιότητες αντοχής της στρώσης, οι μερικές παράγωγοι των παραμορφώσεων ως προς τις ελαστικές ιδιότητες των στρώσεων δίνονται από:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon'_i}{\partial E} &= \frac{\partial A'_{ij}}{\partial E} N_j & i, j &= x, y, s \\ \frac{\partial^2 \epsilon'_i}{\partial E^2} &= \frac{\partial^2 A'_{ij}}{\partial E^2} N_j & E &= E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}\end{aligned}\quad (6.15)$$

Για μία συμμετρική και ισοσταθμισμένη πολύστρωτη, τα στοιχεία του μητρώου A' δίνονται από τις:

$$\begin{aligned}A'_{xx} &= \frac{A_{yy}}{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2} & A'_{yy} &= \frac{A_{xx}}{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2} \\ A'_{xy} &= \frac{-A_{xy}}{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2} & A'_{ss} &= \frac{1}{A_{ss}}\end{aligned}\quad (6.16)$$

Έτσι, οι μερικές παράγωγοι των A'_{ij} ως προς τις ελαστικές σταθερές των στρώσεων δίνονται από:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A'_{xx}}{\partial E} &= \frac{\frac{\partial A_{yy}}{\partial E} A - \frac{\partial A}{\partial E} A_{yy}}{A^2} & \frac{\partial A'_{yy}}{\partial E} &= \frac{\frac{\partial A_{xx}}{\partial E} A - \frac{\partial A}{\partial E} A_{xx}}{A^2} \\ \frac{\partial A'_{xy}}{\partial E} &= \frac{\frac{\partial A_{xy}}{\partial E} A - \frac{\partial A}{\partial E} A_{xy}}{A^2} & \frac{\partial A'_{ss}}{\partial E} &= \frac{-\partial A_{ss}/\partial E}{A_{ss}^2}\end{aligned}\quad (6.17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A'_{xx}}{\partial E^2} &= \frac{A^2 \frac{\partial^2 A_{yy}}{\partial E^2} - A A_{yy} \frac{\partial^2 A}{\partial E^2} - 2A \frac{\partial A}{\partial E} \frac{\partial A_{yy}}{\partial E} + 2A_{yy} \left(\frac{\partial A}{\partial E} \right)^2}{A^3} \\ \frac{\partial^2 A'_{yy}}{\partial E^2} &= \frac{A^2 \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial E^2} - A A_{xx} \frac{\partial^2 A}{\partial E^2} - 2A \frac{\partial A}{\partial E} \frac{\partial A_{xx}}{\partial E} + 2A_{xx} \left(\frac{\partial A}{\partial E} \right)^2}{A^3} \\ \frac{\partial^2 A'_{xy}}{\partial E^2} &= - \frac{A^2 \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial E^2} - A A_{xy} \frac{\partial^2 A}{\partial E^2} - 2A \frac{\partial A}{\partial E} \frac{\partial A_{xy}}{\partial E} + 2A_{xy} \left(\frac{\partial A}{\partial E} \right)^2}{A^3} \\ \frac{\partial^2 A'_{ss}}{\partial E^2} &= \frac{-A_{ss} \frac{\partial^2 A_{ss}}{\partial E^2} + 2 \left(\frac{\partial A_{ss}}{\partial E} \right)^2}{A_{ss}^3}\end{aligned}\quad (6.18)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι του $A = A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2$ δίνονται από τις σχέσεις (6.19):

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial E} &= \frac{\partial A_{xx}}{\partial E} A_{yy} + A_{xx} \frac{\partial A_{yy}}{\partial E} - 2A_{xy} \frac{\partial A_{xy}}{\partial E} \\ \frac{\partial^2 A}{\partial E^2} &= \frac{\partial^2 A_{xx}}{\partial E^2} A_{yy} + 2 \frac{\partial A_{xx}}{\partial E} \frac{\partial A_{yy}}{\partial E} + A_{xx} \frac{\partial^2 A_{yy}}{\partial E^2} - 2 \left(\frac{\partial A_{xy}}{\partial E} \right)^2 - 2A_{xy} \frac{\partial^2 A_{xy}}{\partial E^2}\end{aligned}\quad (6.19)$$

Από την εξίσωση (6.7) οι μερικές παράγωγοι του A_{ij} ως προς τις ελαστικές ιδιότητες της στρώσης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{ij}}{\partial E} &= \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial Q_{ij}^k}{\partial E} \\ \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial E^2} &= \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial^2 Q_{ij}^k}{\partial E^2}\end{aligned}\quad \begin{aligned}i, j &= x, y, s \\ E &= E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}\end{aligned}\quad (6.20)$$

ενώ οι μερικές παράγωγοι των Q_{ij}^k πρώτης τάξης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_{xx}^k}{\partial E} &= \frac{\partial Q_{11}^k}{\partial E} \cos^4 \theta_k + 2 \left(\frac{\partial Q_{12}^k}{\partial E} + 2 \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\partial Q_{22}^k}{\partial E} \sin^4 \theta_k \\ \frac{\partial Q_{xy}^k}{\partial E} &= \left(\frac{\partial Q_{11}^k}{\partial E} + \frac{\partial Q_{22}^k}{\partial E} - 4 \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\partial Q_{12}^k}{\partial E} (\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k) \\ \frac{\partial Q_{yy}^k}{\partial E} &= \frac{\partial Q_{11}^k}{\partial E} \sin^4 \theta_k + 2 \left(\frac{\partial Q_{12}^k}{\partial E} + 2 \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\partial Q_{22}^k}{\partial E} \cos^4 \theta_k \\ \frac{\partial Q_{xs}^k}{\partial E} &= \left(\frac{\partial Q_{11}^k}{\partial E} - \frac{\partial Q_{12}^k}{\partial E} - 2 \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} \right) \cos^3 \theta_k \sin \theta_k + \left(\frac{\partial Q_{12}^k}{\partial E} - \frac{\partial Q_{22}^k}{\partial E} + 2 \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} \right) \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \\ \frac{\partial Q_{ys}^k}{\partial E} &= \left(\frac{\partial Q_{12}^k}{\partial E} - \frac{\partial Q_{22}^k}{\partial E} + 2 \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} \right) \cos^3 \theta_k \sin \theta_k + \left(\frac{\partial Q_{11}^k}{\partial E} - \frac{\partial Q_{12}^k}{\partial E} + 2 \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} \right) \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \\ \frac{\partial Q_{ss}^k}{\partial E} &= \left(\frac{\partial Q_{11}^k}{\partial E} + \frac{\partial Q_{22}^k}{\partial E} - 2 \frac{\partial Q_{12}^k}{\partial E} - 2 \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\partial Q_{66}^k}{\partial E} (\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k)\end{aligned}\quad (6.21)$$

και οι δευτέρης τάξης μερικές παράγωγοι δίνονται από:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q_{xx}^k}{\partial E^2} &= \frac{\partial^2 Q_{11}^k}{\partial E^2} \cos^4 \theta_k + 2 \left(\frac{\partial^2 Q_{12}^k}{\partial E^2} + 2 \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\partial^2 Q_{22}^k}{\partial E^2} \sin^4 \theta_k \\ \frac{\partial^2 Q_{xy}^k}{\partial E^2} &= \left(\frac{\partial^2 Q_{11}^k}{\partial E^2} + \frac{\partial^2 Q_{22}^k}{\partial E^2} - 4 \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\partial^2 Q_{12}^k}{\partial E^2} (\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k) \\ \frac{\partial^2 Q_{yy}^k}{\partial E^2} &= \frac{\partial^2 Q_{11}^k}{\partial E^2} \sin^4 \theta_k + 2 \left(\frac{\partial^2 Q_{12}^k}{\partial E^2} + 2 \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\partial^2 Q_{22}^k}{\partial E^2} \cos^4 \theta_k \\ \frac{\partial^2 Q_{xs}^k}{\partial E^2} &= \left(\frac{\partial^2 Q_{11}^k}{\partial E^2} - \frac{\partial^2 Q_{12}^k}{\partial E^2} - 2 \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} \right) \cos^3 \theta_k \sin \theta_k + \left(\frac{\partial^2 Q_{12}^k}{\partial E^2} - \frac{\partial^2 Q_{22}^k}{\partial E^2} + 2 \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} \right) \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \\ \frac{\partial^2 Q_{ys}^k}{\partial E^2} &= \left(\frac{\partial^2 Q_{12}^k}{\partial E^2} - \frac{\partial^2 Q_{22}^k}{\partial E^2} + 2 \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} \right) \cos^3 \theta_k \sin \theta_k + \left(\frac{\partial^2 Q_{11}^k}{\partial E^2} - \frac{\partial^2 Q_{12}^k}{\partial E^2} + 2 \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} \right) \cos \theta_k \sin^3 \theta_k \\ \frac{\partial^2 Q_{ss}^k}{\partial E^2} &= \left(\frac{\partial^2 Q_{11}^k}{\partial E^2} + \frac{\partial^2 Q_{22}^k}{\partial E^2} - 2 \frac{\partial^2 Q_{12}^k}{\partial E^2} - 2 \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} \right) \cos^2 \theta_k \sin^2 \theta_k + \frac{\partial^2 Q_{66}^k}{\partial E^2} (\cos^4 \theta_k + \sin^4 \theta_k)\end{aligned}\quad (6.22)$$

Ενώ και πάλι οι μερικές παράγωγοι των Q_{ij} ως προς τις ελαστικές ιδιότητες της στρώσης δόθηκαν στο εδάφιο 5.8.3.1 από τις σχέσεις (5.24) – (5.25).

Τα βήματα που ακολουθούνται για την πρόβλεψη της αξιοπιστίας με χρήση των αναλυτικών μεθόδων (EDW, FORM, κλπ.) είναι τα παρακάτω:

1. Εισαγωγή των τεσσάρων πρώτων ροπών των 9 βασικών μεταβλητών κάθε στρώσης, καθώς και τις γωνίες προσανατολισμού της κύριας διεύθυνσης της στρώσης ως προς το φυσικό σύστημα συντεταγμένων της πολύστρωτης, οι οποίες θεωρούνται ντετερμινιστικές.
2. Εισαγωγή των ανηγμένων δυνάμεων.
3. Υπολογισμός των $\mathbf{Q}$ και των μερικών παραγώγων τους ως προς τις βασικές μεταβλητές $\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{X}$, όπου $\mathbf{X}$ είναι το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών του προβλήματος
4. Υπολογισμός των $\mathbf{Q}'$ και των $\partial\mathbf{Q}'/\partial\mathbf{X}$
5. Υπολογισμός του μητρώου $\mathbf{A}$ και των μερικών παραγώγων των στοιχείων του μητρώου ως προς τις βασικές μεταβλητές, $\partial\mathbf{A}/\partial\mathbf{X}$.
6. Υπολογισμός του αντιστρόφου μητρώου $\mathbf{A}'$ και των $\partial\mathbf{A}'/\partial\mathbf{X}$.
7. Υπολογισμός των αναπτυσσόμενων παραμορφώσεων, στο μέσο επίπεδο της πολύστρωτης, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ και των μερικών παραγώγων τους ως προς τις βασικές μεταβλητές, $\partial\boldsymbol{\varepsilon}_0/\partial\mathbf{X}$.
8. Υπολογισμός των αναπτυσσόμενων τάσεων κάθε στρώσης $\boldsymbol{\sigma}^k$ και των μερικών παραγώγων τους ως προς τις βασικές μεταβλητές, $\partial\boldsymbol{\sigma}^k/\partial\mathbf{X}$.
9. Υπολογισμός της αξιοπιστίας.

Στο Σχ. 64 παρουσιάζονται τα βήματα που ακολουθούνται για την πρόβλεψη της αξιοπιστίας της πολύστρωτης με χρήση της μεθόδου EDW.

Για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo στο πρόβλημα προσέγγισης της αξιοπιστίας της πολύστρωτης με στοχαστικές μεταβλητές τις ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας των στρώσεων τα βήματα που ακολουθούνται είναι τα παρακάτω:

1. Εισαγωγή των παραμέτρων των στατιστικών κατανομών των 9 βασικών μεταβλητών, καθώς και εισαγωγή του πάχους και της γωνίας της κύριας διεύθυνσης της στρώσης ως προς την κύρια διεύθυνση της πολύστρωτης.
2. Εισαγωγή των εφαρμοζόμενων ανηγμένων δυνάμεων
3. Για κάθε στρώση παραγωγή τυχαίων αριθμών για τις ελαστικές ιδιότητες.
4. Υπολογισμός του $\mathbf{Q}$, στροφή του $\mathbf{Q}$ στο κύριο σύστημα της πολύστρωτης για τον υπολογισμό του $\mathbf{Q}'$.
5. Υπολογισμός του μητρώου $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}'$.
6. Υπολογισμός των παραμορφώσεων, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$.
7. Υπολογισμός των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}^k$, κάθε στρώσης και στροφή αυτών στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης.
8. Παραγωγή τυχαίων αριθμών για τις ιδιότητες αντοχής κάθε στρώσης.
9. Υπολογισμός της αξιοπιστίας κάθε στρώσης
10. Εύρεση της μικρότερης αξιοπιστίας στις στρώσεις.

Όπως και στην περίπτωση όπου οι ελαστικές ιδιότητες της στρώσης θεωρούνται ντετερμινιστικές, θεωρείται ότι οι στρώσεις ιδίου υλικού και γωνίας προσανατολισμού έχουν τις ίδιες ελαστικές ιδιότητες, όταν γίνεται εφαρμογή της μεθόδου EDW, αλλά στην περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου Monte Carlo, όλες οι στρώσεις θεωρείται ότι έχουν διαφορετικές ιδιότητες. Παρόλα αυτά ο αριθμός των επαναλήψεων στην περίπτωση της Monte Carlo, είναι αρκετά μεγάλος, ώστε η

αξιοπιστία ίδιων στρώσεων να είναι ίση. Στο Σχ. 65 παρουσιάζονται τα βήματα που ακολουθούνται για την εύρεση της αξιοπιστίας της πολύστρωτης με την μέθοδο Monte Carlo.

Σχ. 64 Λογικό διάγραμμα για την εφαρμογή της μεθόδου EDW σε πολύστρωτη με βασικές μεταβλητές τις ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας της στρώσης

Σχ. 65 Λογικό διάγραμμα για την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo σε πολύστρωτη με βασικές μεταβλητές τις ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας της στρώσης

Ως παράδειγμα στο Σχ. 66 γίνεται σύγκριση της επίδρασης των διαφόρων βασικών μεταβλητών του προβλήματος στον τύπο αστοχίας της πολύστρωτης πλάκας. Το υλικό είναι GI/P, με ιδιότητες αυτές που μετρήθηκαν πειραματικά κατά το πρώτο μέρος της εργασίας, όπως παρουσιάστηκαν στο

Κεφάλαιο 2 και δίνονται στο Παράρτημα Α.2. Οι στατιστικές κατανομές, καθώς επίσης και η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβλητότητας που θεωρήθηκε κατά την ανάλυση παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 25. Η διάταξη είναι $[\pm 45/0_2]_s$, ενώ η πιθανότητα αστοχίας είναι 1% και η διαφορά θερμοκρασίας θεωρείται ίση με $+30^\circ\text{C}$. Το κριτήριο αστοχίας που χρησιμοποιήθηκε είναι το TH. Έτσι εδώ παρατηρούμε την πρόβλεψη με την μέθοδο Edgeworth, όταν βασικές μεταβλητές του προβλήματος θεωρούνται μόνο οι ιδιότητες αντοχής, η οποία φαίνεται με την συνεχή γραμμή (EDW-Str.), ενώ όταν ως στοχαστικές λαμβάνονται οι ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας, η πρόβλεψη παρουσιάζεται με την εστιγμένη γραμμή (EDW-Str.+Elast.). Παράλληλα γίνεται σύγκριση με τα αποτελέσματα που προκύπτουν με χρήση της μεθόδου MC. Έτσι με κύκλους παρουσιάζεται ο τόπος αστοχίας όταν θεωρούνται στοχαστικές μόνο οι ιδιότητες αντοχής της κάθε στρώσης (MC-Str.), με τετράγωνα όταν όλες οι μηχανικές ιδιότητες θεωρούνται βασικές μεταβλητές (MC-Str.+Elast.) και με τρίγωνα όταν ως βασικές μεταβλητές θεωρούνται και οι συντελεστές θερμικής διαστολής (MC-Str.+Elast.+Therm.). Παρατηρούμε λοιπόν αρχικά την διαφορά μεταξύ της μεθόδου EDW και της MC. Η μέθοδος EDW παρουσιάζεται να υπερεκτιμά την ικανότητα της πολύστρωτης, ενώ τα αποτελέσματα της μεθόδου MC και της μεθόδου δείκτη β (FORM-Str.) είναι σε πολύ καλή συμφωνία. Στην συνέχεια παρατηρούμε την επίδραση των ελαστικών ιδιοτήτων που και στις δύο περιπτώσεις φαίνεται ότι είναι έντονες. Τέλος παρατηρούμε ότι οι θερμικές ιδιότητες των στρώσεων δεν επηρεάζουν τον τόπο αστοχίας της πολύστρωτης. Το ίδιο συμβαίνει και για την EDW, αλλά η πρόβλεψη δεν παρουσιάζεται στο γράφημα, για λόγους ευκρίνειας, επειδή ο ένας τόπος πέφτει πάνω στον άλλο.

Σχ. 66 Επίδραση των ελαστικών ιδιοτήτων στην αξιοπιστία της πολύστρωτης $[\pm 45/0_2]_s$ με πιθανότητα αστοχίας 1% και $\Delta T = 30^\circ\text{C}$, με h το συνολικό πάχος της πολύστρωτης, θεωρώντας στοχαστικές τις ιδιότητες αντοχής (-str.), τις ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας (-str.+elast.) και τις ιδιότητες αντοχής ελαστικότητας και συντελεστών θερμικής διαστολής (-str.+elast.+therm.)

Π. 25 Μέση τιμή, συντελεστής μεταβλητότητας, στατιστικές κατανομές και παράμετροι αυτών για τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού GI/P

Ιδιότητα	Μέση τιμή	COV (%)	Κατανομή	Παράμετροι κατανομής	
				Παράμετρος 1	Παράμετρος 2
X_T (MPa)	417.64	15.07	Weibull (σ, η)	$\sigma = 443.67E6$	$\eta = 7.76$
X_C (MPa)	340.99	10.09	Lognormal (μ, σ)	$\mu = 19.64$	$\sigma = 0.10$
Y_T (MPa)	41.60	14.99	Lognormal (μ, σ)	$\mu = 17.53$	$\sigma = 0.15$
Y_C (MPa)	171.13	13.49	Lognormal (μ, σ)	$\mu = 18.95$	$\sigma = 0.13$
S (MPa)	17.54	18.06	Weibull (σ, η)	$\sigma = 18.85E6$	$\eta = 6.17$
E_1 (GPa)	24.08	8.94	Weibull (σ, η)	$\sigma = 25.04E9$	$\eta = 12.78$
E_2 (GPa)	8.20	14.81	Lognormal (μ, σ)	$\mu = 22.82$	$\sigma = 0.15$
ν_{12}	0.305	18.68	Normal (μ, σ)	$\mu = 0.305$	$\sigma = 0.057$
G_{12} (GPa)	1.66	24.90	Lognormal (μ, σ)	$\mu = 21.20$	$\sigma = 0.24$
α_x ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)	9.13	11.00	Normal (μ, σ)	$\mu = 9.132E-6$	$\sigma = 0.987E-6$
α_y ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)	46.04	6.75	Weibull (σ, η)	$\sigma = 47.429E-6$	$\eta = 18.451$

Περαιτέρω διερεύνηση της διαφοράς των αποτελεσμάτων μεταξύ EDW και MC, όπως παρουσιάστηκε και στο [6.15], έδειξε ότι η διαφορά οφείλεται στο μέγεθος της διασποράς των μηχανικών ιδιοτήτων του υλικού. Δηλαδή σε περιπτώσεις όπου ο συντελεστής διασποράς των ιδιοτήτων ήταν μικρότερος από 10% τα αποτελέσματα των τριών μεθόδων ήταν συγκρίσιμα, όπως δείχθηκε στο [6.16]. Επίσης, στο ίδιο διάγραμμα, Σχ. 66, παρουσιάζονται και σημεία στα οποία η μέθοδος δείκτη β συνέκλινε σε εσφαλμένο αποτέλεσμα. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι οι μέθοδοι MC και δείκτη β έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος συγκρινόμενες με την EDW, ενώ η β είναι δύσχρηστη, εφόσον σε αρκετά σημεία στο εσωτερικό ή εξωτερικό του τόπου αστοχίας δεν συγκλίνει, ή συγκλίνει σε λάθος αποτέλεσμα όπως φαίνεται στο Σχ. 66. Παρόλο λοιπόν που η μέθοδος EDW δείχνει να έχει κάποια απόκλιση σε σχέση με την MC, θεωρείται ότι είναι κατάλληλη για τον στοχαστικό σχεδιασμό, ιδιαίτερα στα αρχικά του στάδια όπου απαιτούνται αρκετές επαναλήψεις έως ότου καταλήξουμε σε ένα αποδεκτό αποτέλεσμα.

Σημειώνεται ότι στην παραπάνω εφαρμογή, στις περιπτώσεις όπου δεν λαμβάνεται υπόψη η στοχαστικότητα των ελαστικών ιδιοτήτων ή και των συντελεστών θερμικής διαστολής, χρησιμοποιείται η μέση τιμή των εν λόγω ιδιοτήτων.

6.4 Βιβλιογραφία

- [6.1] ISO 2394: 1986/Add.1: 1988 (E), *General Principles on reliability for structures*
- [6.2] Θ. Π. Φιλίππιδης, Σημειώσεις του μαθήματος *Σχεδιασμός με Σύνθετα Υλικά*, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1995
- [6.3] S. W. Tsai, *Theory of composite design*, Think Composites, USA, 1992
- [6.4] R. M. Jones, *Mechanics of composite materials*, McGraw-Hill, Kogakusha, 1975
- [6.5] A. H-S. Ang, W. H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Vol. II, Decision Risk and Reliability, John Wiley & Sons, USA, 1984

- [6.6] C. Guedes Soares, *Reliability of components in composite materials*, Reliability Engineering & System Safety, Vol. 55, (1997), pp.171-177
- [6.7] S. P. Yushanov, A. E. Bogdanovich, *Analytical probabilistic modeling of initial failure and reliability of laminated composite structures*, Int. J. Solid Structures, Vol. 35, No.7-8, pp.665-685, 1998
- [6.8] M. Miki, Y. Murotsu, T. Tanaka, S. Shao, *Reliability-based optimization of fibrous laminated composites*, Reliability Engineering & System Safety, Vol. 56, (1997), pp. 285-290
- [6.9] F. Richard, D. Perreux, *A reliability method for optimization of $[+\phi, -\phi]_n$ fiber reinforced composite pipes*, Reliability Engineering & System Safety, Vol. 68, (2000), pp. 53-59
- [6.10] S. Mahadevan, X. Liu, *Probabilistic optimum design of composite laminates*, J. of Composite Materials, Vol. 32, No. 1, 1998, pp. 68-82
- [6.11] M. Uemura, H. Fukunaga, *Probabilistic Burst Strength of filament-wound cylinders under internal pressure*, J. Composite Materials, Vol. 15, 1981, pp. 462-480
- [6.12] V. J. Papazoglou, J. V. Sanoudos, *Introducing structural reliability concepts into laminate analysis*, in S. A. Paipetis and T. P. Philippidis (eds.), *Advanced Composites in Emerging Technologies*, pp. 559-573, AMATEC publ., Patras, 1991
- [6.13] E. M. Wu, J. K. Scheublin, *Laminate Strength - A Direct Characterization Procedure, Composite Materials: Testing and Design (3rd Conf.)*, ASTM STP 546, (American Society for testing and Materials, 1974), 188-206
- [6.14] E. M. Wu, *Phenomological Anisotropic Failure Criterion*, *Composite Materials Vol.2, Mechanics of Composite Materials*, G. P. Sendeckyj, ed, (Academic Press, N. York, 1973), 353-431
- [6.15] D. J. Lekou, T. P. Philippidis, *Mechanical property variability in FRP laminates and its effect on failure prediction*, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 39, pp.1247-1256, 2008
- [6.16] D. J. Lekou, T. P. Philippidis, *Influence of mechanical property variability on failure prediction of FRP Laminates*, Proc. of the 27th Risoe International Symposium on Material Science – Polymer Composite Materials for Wind Power Turbines, H. Lilholt, B. Madsen, T. L. Andersen, L. P. Mikkelsen, A. Thygesen, Eds., Risoe National Laboratory, publ., Roskilde, Denmark, 4-7 September 2006, pp. 197-204

7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΘΟΔΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ

Κατασκευές συνθέτων υλικών όπου τα σύνθετα υλικά αποτελούν το φέρον δομικό στοιχείο της κατασκευής βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορους τομείς της τεχνολογίας, όπως σε πτερύγια ελικοπτερίων, σε τμήματα αεροπλάνων, σε ναυτιλιακές εφαρμογές κλπ. Η κάθε μία από αυτές τις εφαρμογές παρουσιάζει και τις ιδιαιτερότητές τις, ενώ διαφορετική σημασία έχουν και οι διάφορες σχεδιαστικές παράμετροι, όπως αξιοπιστία της κατασκευής, βάρος, φορτία, περιβαλλοντολογικές συνθήκες. Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκαν για την εφαρμογή των μεθόδων προσδιορισμού αξιοπιστίας τα πτερύγια ανεμογεννητριών, τα οποία κατασκευάζονται συνήθως εξ' ολοκλήρου από σύνθετα υλικά (με εξαίρεση κάποιες λεπτομέρειες της κατασκευής, όπου χρησιμοποιούνται μεταλλικά στοιχεία, όπως στο σημείο σύνδεσης του πτερυγίου με την πλήμνη της ανεμογεννήτριας). Οι κατασκευές αυτές παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον εξαιτίας αφενός των μεγάλων τους διαστάσεων (μήκος από 20 m μέχρι πλέον των 60 m), αφετέρου εξαιτίας του ότι το βάρος των πτερυγίων έχει ιδιαίτερη επίδραση στην όλη κατασκευή της ανεμογεννήτριας, επομένως ο σχεδιασμός των πτερυγίων πρέπει να είναι βελτιστοποιημένος ως προς την χρήση των υλικών ώστε να καθίσταται οικονομικά εφικτή και αποδοτική η κατασκευή των ανεμογεννητριών εν γένει. Επιπρόσθετα τα πτερύγια ανεμογεννητριών παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την Ελλάδα, από την μία πλευρά εξαιτίας του καλού αιολικού δυναμικού της χώρας, που επιτρέπει την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από ανεμογεννήτριες, από την άλλη πλευρά εξαιτίας του ότι είναι δυνατή η κατασκευή πτερυγίων ανεμογεννητριών από ελληνικές βιομηχανίες, ενώ πρώτες επιτυχείς προσπάθειες στο πεδίο αυτό παρουσιάζονται στα [7.1] - [7.3] για πτερύγια μήκους από 9m ως 30m.

Τα πτερύγια ανεμογεννητριών είναι κατασκευές από σύνθετα υλικά σχεδιασμένες για ασφαλή ζωή (Safe life), έναντι της εναλλακτικής μεθόδου σχεδιασμού για ασφαλή αστοχία (Fail Safe). Ο λειτουργικός χρόνος ζωής των πτερυγίων, έτσι ώστε να είναι βιώσιμη η εφαρμογή από πλευράς κόστους είναι 20 έτη, ενώ τελευταίες μελέτες για την εφαρμογή των ανεμογεννητριών παράκτια έρχονται να θέσουν νέα όρια ζωής στα 30 έτη. Η φόρτιση των πτερυγίων κατά την διάρκεια της ζωής τους συντίθεται από διαφορετικές στοχαστικές και ντετερμινιστικές καταστάσεις, οι οποίες προσδιορίζονται από μεγάλες διακυμάνσεις του φορτίου εξαιτίας της μεταβαλλόμενης ταχύτητας και διεύθυνσης του αέρα, την ατμοσφαιρική τύρβη και επιδράσεις της τοπογραφίας του εδάφους.

Τα σύγχρονα πτερύγια ανεμογεννητριών έχουν διατομές που είναι συνήθως πολυκυβελικές, με τοιχία λεπτά ως παχιά, κατασκευασμένα από πολύστρωτα κελύφη συνθέτων υλικών. Στο Σχ.1 φαίνεται μία τυπική διατομή πτερυγίου, όπου παρουσιάζεται οι βασικές θέσεις των στρώσεων συνθέτου υλικού ενισχυμένου με μακριές ίνες σε μία μόνο διεύθυνση (UD), για την παραλαβή της αξονικής φόρτισης, του αφρού (ή ξύλου), για την αποτροπή φαινομένων λυγισμού και των γενικών πολυστρώτων διατάξεων, που αποτελούνται από στρώσεις με μακριές ίνες σε δύο διευθύνσεις, $\pm 45^\circ$, ως προς την αξονική, για την παραλαβή των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στις διατομές.

Σχ. 67 Τυπική διατομή πτερυγίου

Για τον σχεδιασμό πτερυγίων ανεμογεννητριών έχουν αναπτυχθεί διάφοροι κανονισμοί, ενώ στην Ελλάδα θα πρέπει να ακολουθείται ο κώδικας IEC-61400-1 [7.4]. Ο κανονισμός αυτός αναπτύχθηκε εξαιτίας των διαφορών που υπήρχαν μεταξύ κωδικών σχεδιασμού διαφόρων χωρών, όπως είναι το GL [7.5] και το DNV [7.6]. Όλοι αυτοί οι κανονισμοί, IEC 61400-1, GL και το DNV-OS-J102 χρησιμοποιούν για την ανάλυση μερικούς συντελεστές ασφαλείας, οι οποίοι τουλάχιστον για τις ιδιότητες του υλικού, διαφέρουν μεταξύ των κανονισμών. Το GL και το DNV-OS-J102, για τα σύνθετα υλικά συμβουλεύουν την χρήση κριτηρίων αστοχίας ανάλογα με το αν εξετάζεται η αστοχία ίνας ή η αστοχία μήτρας. Ένα κριτήριο που συνιστάται και το οποίο δίνει την δυνατότητα να διαχωρίζεται η θραύση της ίνας ή μήτρας είναι το κριτήριο Puck [7.7]. Παρόλα αυτά, για τους λόγους που αναπτύχθηκαν στο Κεφάλαιο 4 και χωρίς να χάνεται η γενικότητα στην εργασία αυτή για τις εφαρμογές που παρουσιάζονται χρησιμοποιούνται γενικευμένα κριτήρια αστοχίας, όπως είναι το Tsai-Wu.

Η εφαρμογή των μεθόδων πιθανοτήτων στο πεδίο των ανεμογεννητριών και περισσότερο των πτερυγίων ανεμογεννητριών είναι σχετικά καινούρια. Κατά την εργασία ανάπτυξης κωδικών σχεδιασμού για ανεμογεννήτριες τα τελευταία χρόνια, η ανάγκη για μοντέλα πιθανοτήτων των φορτίων και των μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών έχει γίνει πιο ξεκάθαρη, ιδιαίτερα σε μία προσπάθεια μείωσης του κόστους των κατασκευών. Τα τελευταία χρόνια έχει εξετασθεί εξ' αιτίας αυτού ο τρόπος για την ανάπτυξη τέτοιων στατιστικών μοντέλων.

7.1 Ντετερμινιστικός σχεδιασμός και συντελεστές ασφαλείας

Σύμφωνα με το IEC 61400-1, στις ιδιότητες αντοχής του υλικού θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μερικοί συντελεστές ασφαλείας (partial safety factors) που θα λαμβάνουν υπόψη τους πιθανή απόκλιση ή αβεβαιότητα της αντοχής από την χαρακτηριστική τιμή που εκτιμήθηκε, πιθανό ανακριβή υπολογισμό της δυσκαμψίας των διατομών, αβεβαιότητες σε γεωμετρικές παραμέτρους, αβεβαιότητες στις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων που εκτιμήθηκαν με πειραματικές δοκιμές και την ίδια την κατασκευή και τέλος αβεβαιότητες στους συντελεστές μετατροπής. Επίσης, κατά τον κανονισμό ορίζεται μερικός συντελεστής ασφάλειας, ως προς τις συνέπειες από την αστοχία κατασκευαστικού στοιχείου της ανεμογεννήτριας, γ_n , ο οποίος για τα πτερύγια στην περίπτωση που εξετάζεται στατική φόρτιση θεωρείται ίσος με $\gamma_n = 1.0$.

Η θερμοκρασία λειτουργίας των πτερυγίων πρέπει να λαμβάνεται τουλάχιστον στο διάστημα -20°C ως $+50^{\circ}\text{C}$.

Μεταξύ των δύο τελευταίων εκδόσεων του IEC 61400-1, δηλαδή της 2^{ης} έκδοσης [7.8] και της 3^{ης} έκδοσης [7.4] υπάρχουν διαφορές στους μερικούς συντελεστές ασφάλειας που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για τις ιδιότητες των υλικών. Συγκεκριμένα, στην 2^η έκδοση [7.8] ο υπολογισμός του μερικού συντελεστού ασφάλειας ήταν συνάρτηση του τρόπου υπολογισμού της χαρακτηριστικής αντοχής και του συντελεστή μεταβλητότητας αυτής. Σύμφωνα με την τελευταία έκδοση του κανονισμού IEC 61400-1 (έκδοση 3) [7.4] ο βασικός συντελεστής ασφάλειας που πρέπει να εφαρμόζεται στις χαρακτηριστικές τιμές των ιδιοτήτων αντοχής, γ_m , όταν αυτές υπολογίζονται με 95% πιθανότητα επιβίωσης σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% λαμβάνεται ίσος με 1.3 για αστοχία ψαθυρού υλικού, του οποίου η αστοχία οδηγεί άμεσα σε αστοχία βασικού τμήματος της ανεμογεννήτριας, όταν εξετάζεται η αντοχή σε στατική φόρτιση του υλικού. Όμως, στην τελευταία αυτή έκδοση του κανονισμού [7.4] αφήνεται ένα ενδεχόμενο να επιλεγεί μικρότερος συντελεστής ασφάλειας υλικού, ίσος ή μεγαλύτερος του 1.1, στην περίπτωση όπου εξετάζονται τμήματα κατασκευής με όλκιμο υλικό, όπου ως όλκιμη συμπεριφορά υλικού περιλαμβάνονται και κατασκευαστικά τμήματα, τα οποία συμπεριφέρονται ως όλκιμα εξαιτίας ανοχής έναντι βλάβης και αναδιανομής των τάσεων (internal redundancy). Επειδή τα σύνθετα υλικά χαρακτηρίζονται από αυτή την ιδιότητα, μπορεί κανείς να βασίσει σε αυτή την επιλογή μικρότερου συντελεστή ασφάλειας. Στις δύο εκδόσεις ο συντελεστής αυτός, γ_m , θεωρείται ότι λαμβάνει υπόψη του την εγγενή μεταβλητότητα της αντοχής. Σε κάθε περίπτωση, η αλλαγή αυτή, μεταξύ των δύο εκδόσεων

του κανονισμού δείχνει ότι η τιμή των μερικών συντελεστών ασφάλειας για το υλικό εξακολουθεί και είναι πεδίο έρευνας για αυτή την εφαρμογή.

Άλλοι συντελεστές ασφάλειας που χρησιμοποιούνται κατά τον σχεδιασμό πτερυγίων ανεμογεννητριών, αλλά δεν θα ληφθούν υπόψη στην παρούσα εργασία, αφορούν την επίδραση γήρανσης του υλικού στις ιδιότητές του και τις περιβαλλοντολογικές επιδράσεις, όπως η επίδραση της υπερϊώδους ακτινοβολίας και της υγρασίας.

Επίσης επισημαίνεται ότι δεν υπάρχει πρόβλεψη για συντελεστή ασφάλειας που επιβάλλεται στις ελαστικές ιδιότητες του υλικού, όταν εξετάζεται η αστοχία υπό στατική φόρτιση. Στον πίνακα Π. 26 παρουσιάζονται οι χαρακτηριστικές τιμές αντοχής, $X_{Mi,C}$, καθώς επίσης και οι τιμές σχεδιασμού, $X_{Mi,D}$, όπως προκύπτουν μετά την χρήση του μερικού συντελεστού ασφαλείας, $\gamma_M = 1.3$, στις χαρακτηριστικές τιμές, βασισμένες στα πειραματικά αποτελέσματα για το GI/P που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 (Πίνακας 4). Όμως για την εφαρμογή στον σχεδιασμό κατασκευής από σύνθετα υλικά, οι πειραματικές τιμές έχουν αναχθεί στο ονομαστικό πάχος της στρώσης. Επίσης η βάση δεδομένων συμπεριλαμβάνει και πειράματα κατά την διεύθυνση των ινών σε εφελκυσμό από το ίδιο υλικό, τα οποία όμως εκτελέστηκαν σε διαφορετική μηχανή εφελκυσμού. Για λόγους πληρότητας η βάση πειραματικών δεδομένων που χρησιμοποιήθηκε για τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 26 παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α.5.

Σημειώνεται ότι οι χαρακτηριστικές τιμές αντοχής, $X_{Mi,C}$, που παρουσιάζονται στον πίνακα Π. 26, υπολογίστηκαν με την μέθοδο που περιγράφηκε στο Εδάφιο 5.2. Οι ελαστικές ιδιότητες, καθώς και οι συντελεστές θερμικής διαστολής του υλικού, παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα για λόγους πληρότητας. Σημειώνεται ότι στην τελευταία στήλη του πίνακα με $X_{Mi,D}^{old}$, παρουσιάζονται οι τιμές σχεδιασμού των ιδιοτήτων, που προκύπτουν από την χαρακτηριστική τιμή με χρήση των συντελεστών ασφαλείας σύμφωνα με την παλαιότερη έκδοση του IEC 61400-1 (Έκδοση 2) [7.8]. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι μεταξύ των δύο εκδόσεων του κανονισμού η διαφορά των τιμών σχεδιασμού μπορεί να φτάσουν και το 20%, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στην περίπτωση της τάσης αστοχίας σε θλίψη κατά την διεύθυνση των ινών. Από την άλλη πλευρά πρέπει να τονιστεί ότι στην περίπτωση της τελευταίας έκδοσης (έκδοση 3) χρησιμοποιήθηκε ο μεγαλύτερος μερικός συντελεστής ασφαλείας (ίσος δηλαδή με 1.3 όπως εφαρμόζεται για ψαθυρά υλικά). Ο συντελεστής ασφαλείας που προδιαγράφεται βάσει του συντελεστή μεταβλητότητας για κάθε παράμετρο στην παλαιότερη έκδοση του IEC 61400-1 παρουσιάζεται στον πίνακα Π. 26 μαζί με την τιμή σχεδιασμού της παραμέτρου σε παρένθεση.

Π. 26 Χαρακτηριστικές τιμές αντοχής και παράμετροι σχεδιασμού για το υλικό GI/P.

Ιδιότητα	N	m'_1	COV (%)	$X_{Mi,C}$	$X_{Mi,D}$ ($\gamma=1.3$)	$X_{Mi,D}^{old}$ (γ)
X_T (MPa)	43	417.64	15.07	297.96	229.20	257.17 (1.16)
X_C (MPa)	30	340.99	10.09	273.72	210.55	249.15 (1.10)
Y_T (MPa)	29	41.60	14.99	29.37	22.59	25.38 (1.16)
Y_C (MPa)	30	171.13	13.49	125.99	96.92	108.82 (1.16)
S (MPa)	35	17.54	18.06	11.42	8.79	9.38 (1.21)
E_1 (GPa)	26	24.08	8.94			
E_2 (GPa)	23	8.20	14.81			
G_{12} (GPa)	25	1.66	24.90			
ν_{12}	26	0.305	18.68			
α_1 ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)	29	9.13	11.00			
α_2 ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)	18	46.04	6.75			

Για να φανεί η επίδραση των συντελεστών αστοχίας στον τόπο αστοχίας μίας πολύστρωτης, όπως παρουσιάστηκαν ανωτέρω, ως παράδειγμα, παρουσιάζεται στο Σχ.68 ο

ντετερμινιστικός τύπος αστοχίας πολύστρωτης διασταυρούμενων στρώσεων $[0/90]_s$, όταν για τις τάσεις αστοχίας κάθε στρώσης χρησιμοποιούνται οι τιμές σχεδιασμού των παραμέτρων.

Στο διάγραμμα αυτό όλοι οι τύποι αστοχίας που παρουσιάζονται είναι ντετερμινιστικοί και το κριτήριο αστοχίας που χρησιμοποιείται είναι το Tsai-Hahn (βλ. Εξ.(4.17)). Εδώ, λοιπόν παρουσιάζεται με την συνεχή γραμμή ο τύπος αστοχίας της πολυστρώτου κατά IEC, χωρίς να περιλαμβάνεται η επίδραση της θερμοκρασίας. Όταν λέμε κατά IEC, σημαίνει ότι οι τάσεις αστοχίας κάθε στρώσης λαμβάνονται ίσες με το 5% ποσοστιαίο σημείο της κατανομής πιθανότητάς τους και με σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% για την μέση τιμή τους, ενώ θεωρείται επίσης και ένας επιπλέον γενικός συντελεστής ασφάλειας ίσος με 1.3 (σύμφωνα με την καινούρια έκδοση του IEC). Αν θεωρήσουμε μία διαφορά θερμοκρασίας ίση με -40°C ο τύπος αστοχίας που προκύπτει με αναλυτικό υπολογισμό των θερμικών τάσεων φαίνεται με την εστιγμένη γραμμή (IEC, $\Delta T = -40^{\circ}\text{C}$). Παράλληλα, αν αντί να θεωρήσουμε την διαφορά θερμοκρασίας, στον τύπο αστοχίας κατά IEC προσθέσουμε την επίδραση της θερμοκρασίας μέσω συντελεστή ασφάλειας ίσο με 1.1, τότε ο τύπος αστοχίας φαίνεται με την διακεκομμένη και εστιγμένη γραμμή (IEC $\gamma_m(\text{temperature})$). Η πρώτη παρατήρηση που γίνεται είναι ότι η χρήση του συντελεστή ασφάλειας για την επίδραση της θερμοκρασίας, έναντι της περίπτωσης του κατ' ευθείαν υπολογισμού της επίδρασής της δίνει αποτελέσματα συντηρητικά στο τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο, ενώ στο 1 και 2 τεταρτημόριο γίνεται μία υπερεκτίμηση της ικανότητας της κατασκευής. Τέλος για λόγους σύγκρισης παρουσιάζεται και ο τύπος αστοχίας αν συμπεριλάβουμε εκτός του συντελεστή για την θερμοκρασία (1.1) και την επίδραση της γήρανσης του υλικού με ένα συντελεστή ασφάλειας $\gamma_m(\text{Aging})$ ίσο με 1.5. Επειδή στην εργασία αυτή δεν ελέγχουμε την επίδραση της γήρανσης ο συντελεστής αυτός στις επόμενες περιπτώσεις που θα παρουσιαστούν αμελείται.

Σχ. 68 Επίδραση των συντελεστών ασφαλείας στον (ντετερμινιστικό) τύπο αστοχίας πολύστρωτης (Σύγκριση αναλυτικού υπολογισμού των θερμικών τάσεων (IEC $\Delta T = -40^{\circ}\text{C}$) με αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας συντελεστή ασφαλείας (IEC $\gamma_m(\text{temperature})$), επίδραση του συντελεστή ασφαλείας έναντι γήρανσης του υλικού (IEC $\gamma_m(\text{Aging})$) με βασική περίπτωση (IEC))

7.2 Σύγκριση ντετερμινιστικού και πιθανολογικού σχεδιασμού

7.2.1 Επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας

Η επιθυμητή πιθανότητα αστοχίας δεν δηλώνεται ξεκάθαρα στον κανονισμό IEC 61400-1, όπως θα έπρεπε, καθώς ρητά αναφέρει ότι ο δομικός σχεδιασμός θα πρέπει να ακολουθεί τον κανονισμό ISO 2394 [7.9], ο οποίος με την σειρά του ορίζει ότι πρέπει να υπάρχει σαφής στόχος για την αξιοπιστία της κατασκευής. Για αυτό τον λόγο, κατά καιρούς ερευνητές και φορείς στο χώρο των ανεμογεννητριών, εκφράζουν την άποψη ότι η δήλωση στον κανονισμό IEC 61400-1 όσον αφορά το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας πρέπει να αποσαφηνιστεί. Για παράδειγμα, το συν-χρηματοδοτημένο από την Ευρωπαϊκή Ένωση ερευνητικό έργο “European Wind Turbine Standards II” (JOR3-CT95-0064), περιλάμβανε στους στόχους του τον προσδιορισμό του επιθυμητού επιπέδου αξιοπιστίας για τις ανεμογεννήτριες [7.10]. Στο [7.11] γίνεται μία εκτενής ανάλυση για το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας κατά τον σχεδιασμό ανεμογεννητριών, όπως δηλώνονται από τους σχετικούς σύγχρονους κώδικες σχεδιασμού, καθώς επίσης γίνεται μία προσπάθεια να προσεγγιστεί το βέλτιστο επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας τόσο από πλευράς αποδοχής της κοινής γνώμης όσο και από οικονομικής άποψης. Οι κώδικες που διέπουν τον σχεδιασμό ανεμογεννητριών είναι συνήθως απόρροια κανονισμών που διέπουν κατασκευές πολιτικών μηχανικών [7.11] και εξαιτίας αυτού, χρησιμοποιούνται τα ίδια επίπεδα αξιοπιστίας, τα οποία εξασφαλίζουν μία αποδεκτά μικρή πιθανότητα θανάτου ή τραυματισμού όπως σε κατασκευές γεφυρών και κτιρίων. Όμως στην περίπτωση των ανεμογεννητριών οι συνέπειες από μία αστοχία της κατασκευής (αριθμός θανάτων ή τραυματισμών) είναι πιθανό να είναι πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες για κτίρια και γέφυρες, καθώς η εγκατάσταση και λειτουργία τους είναι συνήθως σε περιοχές απόμακρες. Έτσι θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι για τον σχεδιασμό των ανεμογεννητριών και των κατασκευαστικών τους τμημάτων το επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας πρέπει να είναι μικρότερο, ώστε ταυτόχρονα να οδηγηθούμε σε μείωση του κόστους κατασκευής μίας ανεμογεννήτριας. Παρόλα αυτά, εφόσον οι ανεμογεννήτριες ως προϊόν βρίσκονται ακόμα στην φάση ανάπτυξης, καθώς επίσης αποζητείται η αποδοχή της κοινής γνώμης για την περεταίρω εφαρμογή τους, πρέπει κανείς να συνυπολογίσει το κόστος από την αστοχία μίας ανεμογεννήτριας στην φάσης ανάπτυξης του προϊόντος.

Εφόσον ο κανονισμός που πρέπει να ακολουθείται για τον σχεδιασμό των πτερυγίων ανεμογεννητριών στην Ελλάδα είναι ο IEC-61400-1, στον οποίο όμως η επιθυμητή πιθανότητα αστοχίας δεν δηλώνεται ξεκάθαρα, όπως θα έπρεπε στην εργασία αυτή γίνεται η ακόλουθη παραδοχή: Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πτερύγια A/Γ σχεδιάζονται για περίοδο 20ετίας, καθώς επίσης ότι μία πιθανότητα αστοχίας το χρόνο ίση με 10^{-5} είναι αποδεκτή σύμφωνα με την φύση της κατασκευής [7.12] και [7.10], κάτω από μια υπόθεση Poisson για σπάνιες περιπτώσεις αστοχίας, η αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας σε διάρκεια ζωής 20 ετών της κατασκευής είναι $2 \cdot 10^{-4}$ [7.13].

7.2.2 Σύγκριση ντετερμινιστικού και στοχαστικού τύπου αστοχίας

Όπως προαναφέρθηκε, στον κανονισμό δεν γίνεται ξεκάθαρη η πιθανότητα αστοχίας που επιτρέπεται στην κατασκευή. Έτσι στην εργασία αυτή θεωρείται ότι αποδεκτή πιθανότητα αστοχίας κατά τον δομικό σχεδιασμό πτερυγίων είναι ίση με 10^{-4} . Στο παρόν εδάφιο γίνεται μία σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν βάσει του ντετερμινιστικού σχεδιασμού και του στοχαστικού. Συγκεκριμένα, στο Σχ. 69 παρουσιάζεται ο τύπος αστοχίας μίας πολύστρωτης διασταυρούμενων στρώσεων [0/90]_s, όταν θεωρούνται στοχαστικές μόνο οι ιδιότητες αντοχής. Οι ιδιότητες του υλικού που χρησιμοποιείται είναι αυτές του υλικού GI/P τα πειραματικά αποτελέσματα του οποίου παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 και δίνονται αναλυτικά για τις εφαρμογές σχεδιασμού του πτερυγίου στο Παράρτημα Α.5. Η επίδραση της θερμοκρασίας δεν λαμβάνεται υπόψη σε καμία περίπτωση.

Φαίνεται ότι ο ντετερμινιστικός τύπος αστοχίας υποεκτιμά κατά τι την ικανότητα του στοιχείου κυρίως στο δεύτερο και στο τέταρτο τεταρτημόριο σε σχέση με την πρόβλεψη που

γίνεται με την προσομοίωση Monte Carlo και επομένως βρίσκεται στην συντηρητική πλευρά, όπως θα έπρεπε. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται το ανάπτυγμα EDW έχει γίνει με χρήση τριών όρων. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί η επίδραση των ελαστικών ιδιοτήτων στην πρόβλεψη, η οποία δεν φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Σχ. 69 Σύγκριση ντετερμινιστικού (IEC) και στοχαστικού τύπου αστοχίας με διάφορες μεθόδους, λαμβάνοντας υπόψη μόνο την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων αντοχής (για το ανάπτυγμα EDW χρησιμοποιήθηκαν 3 όροι)

Τα αποτελέσματα του ντετερμινιστικού σχεδιασμού για την συγκεκριμένη περίπτωση είναι σχετικά ικανοποιητικά. Σε περίπτωση όμως, όπου τα υλικά που εξετάζονται δεν εμφανίζουν τόσο μεγάλη μεταβλητότητα, όσο το υλικό της συγκεκριμένης περίπτωσης, η εκτίμηση του ντετερμινιστικού σχεδιασμού είναι εξαιρετικά συντηρητική, εφόσον δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη η διασπορά των ιδιοτήτων των υλικών.

Στο Σχ. 70 φαίνεται για παράδειγμα η περίπτωση της ίδιας πολύστρωτης πλάκας, αλλά με υλικό GI/Ep. Τα πειραματικά αποτελέσματα για τις ιδιότητες του υλικού (μέσες τιμές και διασπορά) λήφθηκαν από το [7.14]. Σε αντίθεση με το υλικό GI/P, τα αποτελέσματα για το οποίο παρουσιάστηκαν παραπάνω, το εν λόγω υλικό παρουσιάζει μεταβλητότητα 2-5% στις ιδιότητες αντοχής. Φαίνεται καθαρά ότι χρήση του ίδιου συντελεστή ασφαλείας, όπως για την περίπτωση του GI/P υποεκτιμά σημαντικά την ικανότητα της κατασκευής να φέρει φορτία, με άμεσα αποτελέσματα στο βάρος της κατασκευής.

Για παράδειγμα θεωρούμε την απλή περίπτωση ενός στοιχείου σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Ακολουθώντας τις απαιτήσεις κατά IEC για τον προσδιορισμό της αντοχής σχεδιασμού (της μέγιστης επιτρεπόμενης τάσης σχεδιασμού), μπορούμε να διαπιστώσουμε από τα στοιχεία του πίνακα Π. 27, ότι ανάλογα με τον συντελεστή διασποράς που θεωρείται για το υλικό υπάρχουν διαφορές στις μέγιστες επιτρεπόμενες τάσεις σχεδιασμού ($X_{Mi,D}$ για την τρέχουσα έκδοση του IEC και $X_{Mi,D}^{old}$ για την παλαιότερη έκδοση του IEC). Αν θεωρήσουμε περαιτέρω ότι η αντοχή ακολουθεί την κανονική κατανομή και υπολογίσουμε το ποσοστιαίο σημείο για πιθανότητα αστοχίας 10^{-4} της κατανομής, τότε προκύπτει η εκτίμηση για την τάση

($X_{\text{INVN}(10^{-4})}$) στην οποία η πιθανότητα αστοχίας είναι 0.01%. Οι λόγοι των ντετερμινιστικών επιτρεπόμενων τάσεων αστοχίας με την αντίστοιχη πιθανολογική εκτίμηση ($X_{\text{Mi,D}}/X_{\text{INVN}(10^{-4})}$) για την τρέχουσα έκδοση του IEC και $X_{\text{Mi,D}}^{\text{old}}/X_{\text{INVN}(10^{-4})}$ για την παλαιότερη έκδοση) δεν είναι σταθεροί ανάλογα με την διασπορά που έχει θεωρηθεί. Έτσι γίνεται κατανοητή η διαφορά στην εκτίμηση που προκύπτει μεταξύ των περιπτώσεων υλικού GI/P με σχετικά μεγάλη διασπορά και του υλικού GI/Ep με την πολύ μικρή διασπορά.

Σχ. 70 Σύγκριση ντετερμινιστικού (IEC) και στοχαστικού τύπου αστοχίας με διάφορες μεθόδους για το υλικό GI/Ep, λαμβάνοντας υπόψη μόνο την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων αντοχής

Π. 27 Παράδειγμα Διαφοράς Αντοχής σχεδιασμού και πιθανολογικής αστοχίας

	Αρχική Διασπορά	Πολύ μικρή Διασπορά	Μικρότερη Διασπορά	Μεγαλύτερη Διασπορά
Μέση Τιμή (MPa)	417.64	417.64	417.64	417.64
COV (%)	15.00	5.00	10.00	20.00
$X_{\text{Mi,C}}$ (MPa)	298.52	377.93	338.23	258.81
$X_{\text{Mi,D}}$ (MPa)	229.63	290.72	260.17	199.09
$X_{\text{Mi,D}}^{\text{old}}$ (MPa)	257.34	343.58	307.48	212.14
$X_{\text{INVN}(10^{-4})}$ (MPa)	184.66	339.98	262.32	107.00
$X_{\text{Mi,D}}/X_{\text{INVN}(10^{-4})}$	1.2	0.9	1.0	1.9
$X_{\text{Mi,D}}^{\text{old}}/X_{\text{INVN}(10^{-4})}$	1.4	1.0	1.2	2.0

7.2.3 Επίδραση των ιδιοτήτων ελαστικότητας

Σε αυτό το διάγραμμα παρουσιάζεται η επίδραση των ελαστικών ιδιοτήτων σε σχέση με τον ντετερμινιστικό τύπο αστοχίας κατά IEC. Η πιθανότητα αστοχίας της ψευδο-ισότροπης πολύστρωτης και σε αυτή την περίπτωση λαμβάνεται ίση με $P_F = 10^{-4}$. Η διαφορά

θερμοκρασίας λειτουργίας από την θερμοκρασία πολυμερισμού της πλάκας είναι $\Delta T = -40^{\circ}\text{C}$, ενώ στον ντετερμινιστικό τόπο, η διαφορά αυτή έχει ληφθεί υπόψη μέσω του συντελεστή ασφάλειας 1.1. Φαίνεται καθαρά ότι ο ντετερμινιστικός υπολογισμός δίνει μία υπερεκτίμηση της ικανότητας του στοιχείου να φέρει φορτία, κυρίως στο πρώτο και στο τέταρτο τεταρτημόριο. Επίσης σημαντικό είναι το ότι η υπερεκτίμηση είναι μεγαλύτερη όσο πιο κοντά είμαστε στον άξονα της ορθής τάσης, εφόσον στο μεγαλύτερο τμήμα των περυγίων Α/Γ επιδρούν κυρίως ορθές τάσεις (εξαιτίας της κάμψης του περυγίου και των φυγοκεντρικών δυνάμεων), ενώ οι διατμητικές (καθώς και οι περιμετρικές τάσεις) είναι κατά πολύ μικρότερες.

Τα πράγματα δείχνουν πολύ χειρότερα για τα ντετερμινιστικά αποτελέσματα όταν συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της μεθόδου δείκτη β . Σε αυτό το σημείο πρέπει να γίνει η υπενθύμιση ότι η μεγάλη απόκλιση της μεθόδου EDW με τα αποτελέσματα της μεθόδου δείκτη β έγκειται στην μεγάλη διασπορά που παρουσιάζουν οι ιδιότητες του υλικού που εξετάζεται, όπως επεξηγήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Παρόλα αυτά, οι μέθοδοι MC και δείκτη β έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος συγκρινόμενες με την EDW, ενώ η β είναι δύσχρηστη, εφόσον σε αρκετά σημεία στο εσωτερικό ή εξωτερικό του τόπου αστοχίας δεν συγκλίνει. Παρόλο λοιπόν που η μέθοδος EDW δείχνει να έχει κάποια απόκλιση σε σχέση με την μέθοδο δείκτη β (FORM στο σχήμα), όπως επισημάνθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μέθοδος είναι ταχύτερη και εξ' αυτού θεωρείται κατάλληλη για χρήση κατά την διάρκεια του σχεδιασμού. Το τελικό αποτέλεσμα μπορεί σε κάθε περίπτωση να επιβεβαιώνεται με τις πιο ακριβείς μεθόδους όπως η μέθοδος δείκτη β και η MC.

Σχ. 71 Σύγκριση ντετερμινιστικού (IEC) και στοχαστικού τόπου αστοχίας με διάφορες μεθόδους, λαμβάνοντας υπόψη την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων ελαστικότητας του υλικού (το ανάπτυγμα EDW έγινε με τρεις όρους)

7.3 Εφαρμογή σε πτερύγιο ανεμογεννήτριας

Η αξιοπιστία της κατασκευής είναι ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες κατά τον σχεδιασμό πτερυγίων ανεμογεννητριών. Παρόλα αυτά, η χρήση συνθέτων υλικών στην κατασκευή πτερυγίων και οι πολλές στοχαστικές μεταβλητές που υπεισέρχονται με αυτό τον τρόπο στην ανάλυση σε συνδυασμό με την υψηλότερη περιπλοκότητα των υπαρχόντων πιθανολογικών μεθόδων, αποτρέπει την χρήση των μεθόδων αυτών κατά την διάρκεια του δομικού σχεδιασμού. Δηλαδή, στην καλύτερη περίπτωση, η χρήση στοχαστικών μεθόδων εφαρμόζεται μόνο κατά το τελευταίο στάδιο του σχεδιασμού, και μόνο για την επιβεβαίωση ότι η αξιοπιστία της κατασκευής είναι αποδεκτή σε όρους πιθανοτήτων. Αυτό όμως αποτελεί εμπόδιο στην βελτιστοποίηση του σχεδιασμού, καθώς η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων των υλικών, δεν μπορεί να ληφθεί υπόψη καθ' όλη την διαδικασία του σχεδιασμού.

Με στόχο την βελτίωση της κατάστασης, σε αυτή την εργασία παρουσιάζεται ένα αριθμητικό υπολογιστικό εργαλείο για την ανάλυση αντοχής πτερυγίων ανεμογεννητριών σε όρους πιθανοτήτων. Η υπολογιστική διαδικασία που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα εδάφια για τον προσδιορισμό της αντοχής μίας πολύστρωτης πλάκας από σύνθετα υλικά, λαμβάνοντας υπόψη την στοχαστική φύση των ιδιοτήτων αντοχής και ελαστικότητας των ανισότροπων υλικών, εφαρμόζοντας διάφορα κατάλληλα κριτήρια αστοχίας εισάγεται για τον σκοπό αυτό σε κατάλληλες υπολογιστικές ρουτίνες στην μορφή προ-επεξεργαστών και επεξεργαστών των αποτελεσμάτων, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν μαζί με σύγχρονους αεροελαστικούς κώδικες. Αυτή η μέθοδος καθιστά δυνατή την ποσοτικοποίηση της αξιοπιστίας του σχεδιασθέντος πτερυγίου ανεμογεννήτριας.

Η πρόβλεψη αξιοπιστίας κάθε πολύστρωτης πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας την τεχνική αναπτύγματος Edgeworth στο επίπεδο της στρώσης. Ως στοχαστικές παράμετροι του προβλήματος δεν θεωρούνται μόνο οι ιδιότητες αντοχής των υλικών, αλλά λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα των ελαστικών ιδιοτήτων καθώς επίσης και των θερμικών ιδιοτήτων κάθε στρώσης στην πολύστρωτη. Η δομική ανάλυση του πτερυγίου πραγματοποιείται θεωρώντας πολυκυψελικές λεπτότοιχες ετερογενείς διατομές από σύνθετα υλικά ενισχυμένα με ίνες, λαμβάνοντας υπόψη την εγγενή ανομοιογένεια και την ελαστική ανισοτροπία των στοιχείων της διατομής. Εκτός από τις μηχανικές ορθές και διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται εξαιτίας των εξωτερικά εφαρμοζόμενων φορτίων, μπορούν να υπολογιστούν και οι υγροθερμικές τάσεις, που αναπτύσσονται εξαιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας και της συγκέντρωσης υγρασίας.

Οι δυνατότητες της μεθόδου που αναπτύχθηκε, παρουσιάζονται με παραδείγματα για την απόκριση του πτερυγίου υπό ακραία φόρτιση. Εξετάζονται περιπτώσεις όπου η εξωτερικά επιβαλλόμενη φόρτιση λαμβάνεται ως ντετερμινιστική, έτσι ώστε να είναι δυνατή η εκτίμηση της επίδρασης της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων των υλικών στην αξιοπιστία της κατασκευής. Σε άλλες περιπτώσεις η εξωτερικά επιβαλλόμενη φόρτιση θεωρείται και αυτή ως στοχαστική, έτσι ώστε να συντεθεί μία ολοκληρωμένη ανάλυση αξιοπιστίας. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αντίστοιχα από προσομοιώσεις με χρήση της μεθόδου Monte Carlo και βρέθηκε ότι είναι σε καλή συμφωνία.

7.3.1 Δομική ανάλυση

Όπως προαναφέρθηκε οι διατομές των πτερυγίων ανεμογεννητριών είναι συνήθως λεπτότοιχες πολυκυψελικές κατασκευές, από πολύστρωτα κελύφη συνθέτων υλικών. Για την λεπτομερή δομική ανάλυση ενός πτερυγίου, ελέγχοντας την κατανομή των τάσεων που αναπτύσσονται σε κάθε σημείο της κατασκευής απαιτείται ένα τρι-διάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων [7.15], το οποίο θα πρέπει να αποτελείται συνήθως από χιλιάδες κελυφοειδή στοιχεία συνθέτων υλικών, με χρήση μεγάλων εμπορικών πακέτων ανάλυσης (π.χ. [7.16], [7.17]). Όμως παρόλο που τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων είναι απαραίτητα για τον τελικό σχεδιασμό του πτερυγίου, είναι πολύ ακριβά [7.15] και πολύ λεπτομερή [7.18] για χρήση σε ένα σύστημα αεροελαστικής ανάλυσης. Παράλληλα, το μέγεθος των ανεμογεννητριών, ιδιαίτερα των πολύ μεγάλων σύγχρονων πτερυγίων ανεμογεννητριών,

καθιστά αναγκαία την θεώρηση της δομής του πτερυγίου πολύ νωρίς στο πλαίσιο της διαδικασίας σχεδιασμού της ανεμογεννήτριας [7.15], έτσι, είναι αναγκαία η αποτελεσματική συνεργασία εργαλείων αεροελαστικής ανάλυσης του συστήματος της ανεμογεννήτριας και εργαλείων που χρησιμοποιούνται κατά τον δομικό σχεδιασμό του πτερυγίου. Παρόλα αυτά, τα αερο-ελαστικά υπολογιστικά εργαλεία τελευταίας γενιάς, που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη των φορτίων των πτερυγίων της ανεμογεννήτριας, αλλά και για την επιβεβαίωση της συμπεριφοράς όλης της ανεμογεννήτριας, μοντελοποιούν τα πτερύγια χρησιμοποιώντας στοιχεία δοκών, τα οποία έχουν προσαρμοστεί ειδικά για την εφαρμογή, έτσι ώστε να λαμβάνονται πιο ακριβείς προβλέψεις για την απόκριση της ανεμογεννήτριας (π.χ. [7.19], [7.20]). Έχοντας ως στόχο την χρήση των υπάρχοντων αερο-ελαστικών κωδικών για την εκτίμηση των φορτίων στην κατασκευή, αλλά ταυτόχρονα την ακριβή απεικόνιση των μηχανικών ιδιοτήτων του πλήρους τρισδιάστατου πτερυγίου στα μονοδιάστατα στοιχεία δοκών, έτσι ώστε να γίνεται δυνατή η λεπτομερής ανάλυση αντοχής, αφού έχουν προσδιοριστεί τα φορτία σε κάθε διατομή, το εργαλείο που αναπτύχθηκε χωρίστηκε σε 3 ενότητες: PRE-THIN, THIN και POST-THIN.

Η εκτίμηση των ιδιοτήτων τέτοιων πολυστρώτων πλακών πρέπει να λαμβάνει υπόψη της την ελαστική ανισοτροπία και την ετερογένεια του πολυστρώτου κελύφους. Για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων κάθε λεπτότοιχης διατομής έχει γίνει αρκετή δουλειά στο παρελθόν. Πληροφορίες για το θεωρητικό υπόβαθρο της κάμψης, διάτμησης και στρέψης λεπτότοιχων δοκών μπορούν να βρεθούν για παράδειγμα στο [7.21]. Υπολογιστικοί κώδικες για τον υπολογισμό των ιδιοτήτων των διατομών, οι οποίοι χρειάζονται ως δεδομένα σε μοντέλα δοκών πεπερασμένων στοιχείων έχουν παρουσιασθεί επίσης στο παρελθόν, [7.22]-[7.24], για ισότροπες και ομογενείς κατασκευές. Για να συμπεριληφθεί η ανομοιογένεια των διατομών που κατασκευάζονται από δομικά στοιχεία πολυστρώτων πλακών πλαστικών ενισχυμένων με ίνες υλικών, η προσέγγιση πρέπει να τροποποιηθεί κατά κάποιο τρόπο. Η ελαστική ανισοτροπία δεν λαμβάνεται ακόμα υπόψη, αλλά για κατασκευαστικά στοιχεία όπως πτερύγια ανεμογεννητριών και ελικοπτέρων που σχεδιάζονται με πολύστρωτα κελύφη συνθέτων υλικών ισοσταθμισμένων και σχεδόν συμμετρικών διατάξεων, τα αποτελέσματα για την δυσκαμψία στην διατομή είναι σε ικανοποιητική συμφωνία με αυτά από πιο λεπτομερείς θεωρίες ανισοτροπίας, [7.25].

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μία διαδικασία αριθμητικής ανάλυσης, η οποία βασίζεται στην θεωρία λεπτότοιχων κελυφών, λαμβάνοντας υπόψη την ανομοιογένεια και την ελαστική ανισοτροπία των στοιχείων της διατομής, ακολουθώντας το [7.26]. Εκτός από τις μηχανικές ορθές και διατμητικές τάσεις εξαιτίας των εφαρμοζόμενων φορτίων, υπολογίζονται και οι υγροθερμικές τάσεις εξαιτίας των διαφορών θερμοκρασίας και της υγρασίας. Θεωρώντας μία τυπική διατομή πτερυγίου, όπως παρουσιάστηκε στο Σχ. 67, στα επόμενα εδάφια δίνεται η περιγραφή των υπολογιστικών ενοτήτων που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία. Το λογικό διάγραμμα της δομικής ανάλυσης με το εργαλείο που αναπτύχθηκε παρουσιάζεται στο Σχ. 72, όπου φαίνεται και η μεταφορά δεδομένων από και προς τον αερο-ελαστικό κώδικα (ο οποίος δεν αποτελεί μέρος της παρούσης εργασίας).

Σχ. 72 Λογικό διάγραμμα εργαλείου δομικής ανάλυσης

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι παρόλο που υπάρχουν διαθέσιμα εργαλεία, για την μετατροπή της τρι-διάστατης δομής των περυγίων συνθέτων υλικών σε κατάλληλες πληροφορίες για την μονο-διάστατη μοντελοποίησή τους ως στοιχεία δοκών, π.χ. [7.27], [7.28], πολύ λιγότερες εργασίες ασχολούνται με την μετατροπή των μονο-διάστατων αποτελεσμάτων των αερο-ελαστικών εργαλείων σε πληροφορίες κατάλληλες για την λεπτομερή ανάλυση των αναπτυσσόμενων τάσεων/παραμορφώσεων της τρι-διάστατης κατασκευής. Όμως, αυτό είναι ένα βασικό βήμα για τον κύκλο του δομικού σχεδιασμού του περυγίου ανεμογεννήτριας, αν η ανάλυση με χρήση λεπτομερούς μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, ενώ ταυτόχρονα να διατηρείται η πληροφορία για τις απαραίτητες δομικές αλλαγές του περυγίου κατά την διάρκεια της ολοκληρωμένης αερο-ελαστικής ανάλυσης της ανεμογεννήτριας.

7.3.1.1 PRE-THIN

Το PRE-THIN είναι η ενότητα όπου χρησιμοποιώντας την λεπτομερή πληροφορία για τις ιδιότητες του υλικού, καθώς επίσης και δεδομένα για την διάταξη των πολυστρώτων σε κάθε σημείο της διατομής, υπολογίζονται οι ισοδύναμες ιδιότητες κάθε πολύστρωτης χρησιμοποιώντας την Κλασική Θεωρία Πολυστρώτων πλακών (CLT). Συγκεκριμένα, οι ιδιότητες των υλικών που απαιτούνται ως δεδομένα είναι το πάχος, η πυκνότητα και οι ελαστικές ιδιότητες κάθε ορθότροπης στρώσης που υπάρχει σε οποιαδήποτε πολύστρωτη διάταξη της διατομής, δηλαδή το μέτρο ελαστικότητας στις δύο κύριες διευθύνσεις της στρώσης, ο συνεπίπεδος λόγος Poisson, και το συνεπίπεδο μέτρο διάτμησης της στρώσης. Αυτά τα δεδομένα χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ισοδύναμων ιδιοτήτων του ομογενοποιημένου πολύστρωτου κελύφους, δηλαδή του συνολικού πάχους της πολύστρωτης, της πυκνότητας και των μέτρων ελαστικότητας και διάτμησης στην κύρια διεύθυνση της πολύστρωτης (θεωρώντας ότι αυτή συμπίπτει με τον άξονα του περυγίου). Για την ανάλυση σε πιθανολογικούς όρους, εκτός από τις ιδιότητες αντοχής κάθε στρώσης, οι βασικές μεταβλητές του προβλήματος, δηλαδή οι μεταβλητές που θεωρούνται στοχαστικές, είναι οι 4 ελαστικές ιδιότητες της στρώσης κάθε υλικού που χρησιμοποιείται στην διατομή του περυγίου. Με άλλα λόγια, σε περίπτωση που έχουμε 4 διαφορετικά υλικά στρώσεων, τότε οι βασικές μεταβλητές του προβλήματος (χωρίς να περιλαμβάνονται οι ιδιότητες αντοχής) θα είναι 16.

Για αυτές τις μεταβλητές, δηλαδή για τις ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας των διαφόρων υλικών, τα δεδομένα που χρειάζονται ως είσοδος στο PRE-THIN είναι τα κατάλληλα στατιστικά χαρακτηριστικά τους. Με άλλα λόγια, ανάλογα με την μέθοδο αξιοπιστίας που επιλέγεται (Edgeworth ή Προσομοίωση Monte Carlo), ως είσοδος στο PRE-THIN δίνονται οι

δύο πρώτες ή οι τέσσερις πρώτες στατιστικές ροπές ή η στατιστική κατανομή και οι αντίστοιχες παράμετροι αυτής για κάθε μεταβλητή. Αυτή η στατιστική πληροφορία όπως έχει προαναφερθεί λαμβάνεται συνήθως από πειράματα στα διάφορα υλικά που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του περυγίου και εμπεριέχει την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων του συνθέτου υλικού, εξαιτίας της εγγενούς ανομοιομορφίας τους, της ανισοτροπίας τους και πιθανές ατέλειες που δημιουργήθηκαν κατά την διάρκεια της παραγωγής τους.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων αντοχής του υλικού δεν επηρεάζει την ανάλυση τάσεων που πραγματοποιείται με την ενότητα THIN (ούτε και την αερο-ελαστική ανάλυση), έτσι, αυτές οι μεταβλητές εισάγονται κατ' ευθείαν στην ενότητα επεξεργασίας των αποτελεσμάτων της ανάλυσης τάσεων του εργαλείου που αναπτύχθηκε για την εκτίμηση της αξιοπιστίας της κατασκευής, δηλαδή στο POST-THIN.

Σε περίπτωση που λαμβάνονται υπόψη και οι υγρο-θερμικές τάσεις, τότε απαιτείται η εισαγωγή στο PRE-THIN ως δεδομένα των συντελεστών θερμικής διαστολής, καθώς επίσης και των συντελεστών υγροσκοπικής διόγκωσης κάθε στρώσης (θεωρώντας την ως ορθότροπο μέσο). Σε αυτή την περίπτωση, υπολογίζονται από το εργαλείο οι ισοδύναμοι συντελεστές θερμικής διαστολής και υγροσκοπικής διόγκωσης κάθε πολύστρωτης στην διατομή.

Οι ισοδύναμες ιδιότητες που υπολογίστηκαν για κάθε πολύστρωτη εισάγονται ως δεδομένα στην κεντρική υπολογιστική ενότητα, το THIN. Για την λεπτομερή ανάλυση αντοχής κάθε στρώσης, όλες οι πληροφορίες για τα υλικά και τις πολύστρωτες διατάξεις, συμπεριλαμβανομένων και των υπολογισμένων μητρώων δυσκαμψίας, που περιλαμβάνουν τα μητρώα εκτατικής δυσκαμψίας, **A**, σύζευξης, **B**, και καμπτικής δυσκαμψίας, **D**, καθώς και τα αντίστροφα αυτών για κάθε πολύστρωτη εισάγονται στην ενότητα επεξεργασίας των αποτελεσμάτων, όπου πραγματοποιείται η ανάλυση αντοχής, POST-THIN.

Για την εφαρμογή της μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth, στην ανάλυση σε όρους πιθανοτήτων, στην ενότητα του προ-επεξεργαστή, υπολογίζονται επίσης και οι απαραίτητες μερικές παράγωγοι των διαφόρων ιδιοτήτων, ως προς τις βασικές μεταβλητές του προβλήματος, δηλαδή των ελαστικών ιδιοτήτων των στρώσεων. Και αυτές εισάγονται ως δεδομένα στο THIN ή κατ' ευθείαν στο POST-THIN, ανάλογα με την εκάστοτε περίπτωση.

7.3.1.2 THIN

Ο βασικός επεξεργαστής THIN, ο οποίος βασίζεται στην θεωρία λεπτότοιχων κατασκευών, λαμβάνοντας υπόψη την ανομοιογένεια και την ελαστική ανισοτροπία των στοιχείων της διατομής, έχει περιγραφεί με λεπτομέρεια στο [7.26] για την ντετερμινιστική περίπτωση.

Τα δεδομένα που απαιτούνται είναι η γεωμετρία της διατομής, τα εφαρμοζόμενα φορτία, το πάχος και οι ιδιότητες των υλικών κάθε στοιχείου και ορισμένα επιπλέον στοιχεία για την συνδεσμολογία των κόμβων. Οι διατομές που εξετάζονται σε αυτή την εργασία είναι του τύπου που φαίνεται στο Σχ. 67, δηλαδή κλειστές, πολυκυψελικές και ετερογενείς. Παρόλο που δεν υπάρχει θεωρητικά περιορισμός ως προς την θέση των διαφόρων κυψελών, στον υπολογιστικό κώδικα της παρούσας εφαρμογής θεωρείται ότι η διάταξή τους είναι τέτοια ώστε μία κυψέλη να μην μπορεί να περιέχει μία άλλη. Τα διάφορα στοιχεία της διατομής, οι ενισχυτικές δοκίδες για την παραλαβή της διάτμησης, οι άνω και κάτω επίπεδες επιφάνειες (top and bottom flanges), είναι κατασκευασμένα από διαφορετικές διατάξεις και πιθανώς και διαφορετικές στρώσεις συνθέτων υλικών.

Στην εφαρμογή η διατομή θεωρείται λεπτότοιχη και διακριτικοποιείται σε n - γραμμικά στοιχεία. Κάθε στοιχείο της διατομής, για παράδειγμα το k , χαρακτηρίζεται από το μέτρο ελαστικότητας και διάτμησης, E_{Xk} και G_{XYk} αντίστοιχα, την πυκνότητα ρ_k , τον συντελεστή θερμικής διαστολής α_{Xk} και τον συντελεστή υγροσκοπικής διόγκωσης (swelling) β_{Xk} . Οι παραπάνω μηχανικές ιδιότητες είναι αυτές μίας ομογενοποιημένης πολύστρωτης κατασκευής, αποτελούμενης από στρώσεις συνθέτου υλικού, δηλαδή είναι οι ισοδύναμες ιδιότητες των πολυστρώτων, όπως αυτές έχουν προκύψει κατά την ανάλυση με το PRE-THIN.

Ο επεξεργαστής υπολογίζει για κάθε διατομή του πτερυγίου το κέντρο μάζας, το ελαστικό κέντρο, το κέντρο διάτμησης και τις ιδιότητες της διατομής ως προς το κέντρο μάζας, στην περίπτωση της γραμμικής πυκνότητας ρA και των ροπών μάζας στις διευθύνσεις περιστροφής (edge) και περυγισμού (flap), ρI_{YY} και ρI_{ZZ} , αντίστοιχα, η μικτή ροπή μάζας, ρI_{YZ} και η πολική ροπή μάζας ρI_P , ή ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής για τις ιδιότητες της αξονικής δυσκαμψίας, EA , της καμπτικής δυσκαμψίας στις διευθύνσεις περιστροφής (edge) και περυγισμού (flap), EI_{YY} και EI_{ZZ} , αντίστοιχα της μικτής καμπτικής δυσκαμψίας EI_{YZ} και τις στρεπτικής δυσκαμψίας GJ . Αυτές οι ιδιότητες των διατομών του πτερυγίου μπορούν να χρησιμοποιηθούν, ως έξοδος του κώδικα, με υπάρχοντα αερο-ελαστικά εργαλεία για την προσομοίωση της απόκρισης της ανεμογεννήτριας και για την πρόβλεψη της φόρτισης στο πτερύγιο.

Για την ντετερμινιστική περίπτωση ο υπολογισμός των παραπάνω ιδιοτήτων της διατομής, οι οποίες είναι απαραίτητα στοιχεία εισόδου στα εργαλεία αερο-ελαστικών υπολογισμών, έχει επιβεβαιωθεί στο παρελθόν στο [7.29]. Σε αυτή την εργασία συγκρίθηκε η πρόβλεψη της δυναμικής απόκρισης πτερυγίου μήκους 10m όπως προέκυψε από προσομοιώσεις με μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιώντας στοιχεία δοκού και χρησιμοποιώντας το πλήρες μοντέλο κελυφοειδών στοιχείων συνθέτων υλικών με πειραματικά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα τις μεταβατικής απόκρισης του πτερυγίου υπό δυναμική φόρτιση ήταν σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά αποτελέσματα, ακόμα και στην περίπτωση μοντέλου δοκού του πτερυγίου.

Τα αποτελέσματα των αερο-ελαστικών προσομοιώσεων περιλαμβάνουν για κάθε περίπτωση φόρτισης της εσωτερικές αξονικές και διατμητικές δυνάμεις, N_{XB} , V_{YB} και V_{ZB} , αντίστοιχα και τις εσωτερικές καμπτικές και στρεπτικές ροπές, M_{ZB} , M_{YB} και M_{XB} , αντίστοιχα σε κάθε επιλεγμένη διατομή κατά μήκος του πτερυγίου. Αυτές οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές χρησιμοποιούνται ως δεδομένα από το THIN, για την πραγματοποίηση αναλυτικότερης ανάλυσης τάσεων σε κάθε διατομή. Με άλλα λόγια, από τις ανηγμένες τάσεις της διατομής, όπως αυτές προκύπτουν από τον κώδικα αερο-ελαστικότητας με χρήση πεπερασμένων στοιχείων δοκού, υπολογίζονται οι ανηγμένες τάσεις στα τοιχία κάθε στοιχείου που αποτελεί την μη ομογενή διατομή με χρήση του THIN. Η έξοδος του THIN στέλνεται στο POST-THIN για τον υπολογισμό των τριών συνιστωσών συνεπίπεδων τάσεων για κάθε στρώση των πολυστρώτων τοιχίων της διατομής. Επιπρόσθετα των ανηγμένων τάσεων εξαιτίας των μηχανικών φορτίων, υπολογίζονται επίσης οι ανηγμένες τάσεις (αξονικές και καμπτικές) εξαιτίας της διαφοράς των θερμικών συντελεστών των επιμέρους υλικών της διατομής, οι οποίες και λαμβάνονται υπόψη κατά την ανάλυση των τάσεων.

Αυτό σημαίνει ότι στον κάθε κόμβο κάθε στοιχείου της διατομής υπολογίζονται ανηγμένες αξονικές δυνάμεις, που αναπτύσσονται εξαιτίας της εξωτερικής μηχανικής αξονικής δύναμης και των καμπτικών ροπών, λαμβάνοντας υπόψη και τις αντίστοιχες υδρο-θερμικές δυνάμεις και ροπές [7.26]. Υπολογίζονται επίσης για κάθε κυψέλη της πολυκυψελικής διατομής οι σταθερές διατμητικές ροές που αναπτύσσονται εξαιτίας της στρέψης στην διατομή, καθώς και οι επιμέρους διατμητικές ροές που αναπτύσσονται εξαιτίας των διατμητικών δυνάμεων που επιδρούν στην διατομή [7.26]. Έτσι, το αποτέλεσμα της ανάλυσης με το THIN, δηλαδή η έξοδος του κώδικα, είναι οι ανηγμένες ορθές και διατμητικές τάσεις στον κόμβο κάθε στοιχείου της διατομής.

Κατά την ανάλυση όλα τα τοιχία που σχηματίζουν την διατομή θεωρούνται ότι παραλαμβάνουν αξονικές και διατμητικές τάσεις. Η ανάλυση γίνεται βασιζόμενη στις συνήθεις υποθέσεις Euler-Bernoulli, δηλαδή ότι οι επίπεδες διατομές που είναι κάθετες στον άξονα του πτερυγίου κατά την απαραμόρφωτη κατάσταση παραμένουν επίπεδες και κάθετες και κατά την κατάσταση φόρτισης.

Για την ανάλυση σε όρους πιθανοτήτων με χρήση της τεχνικής αναπτύγματος Edgeworth, το THIN έχει επεκταθεί, ούτως ώστε, να υπολογίζονται οι απαραίτητες μερικές παράγωγοι των ανηγμένων ορθών και διατμητικών τάσεων σε κάθε κόμβο των στοιχείων της διατομής, ως

προς τις βασικές μεταβλητές του προβλήματος, καθώς αυτές οι παράγωγοι δίνονται από το THIN στην ενότητα όπου πραγματοποιείται η ανάλυση αντοχής, το POST-THIN.

7.3.1.3 POST-THIN

Το POST-THIN αποτελεί το τελικό στάδιο, όπου πραγματοποιείται η λεπτομερής ανάλυση αντοχής της διατομής του πετυγίου. Με δεδομένα τις ιδιότητες των υλικών και των πολυστρώτων διατάξεων, όπως προκύπτουν από το PRE-THIN, καθώς επίσης, τις ανηγμένες ορθές και διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε κόμβο, κάθε στοιχείου στην διατομή, υπολογίζεται η εντατική κατάσταση και η αξιοπιστία κάθε στρώσης, σε κάθε πολύστρωτη διάταξη. Συγκεκριμένα, βάσει των ανηγμένων ορθών και διατμητικών τάσεων σε κάθε κόμβο, υπολογίζονται οι παραμορφώσεις και καμπυλότητες του μέσου επιπέδου της πολύστρωτης (στον συγκεκριμένο κόμβο), από τις οποίες, χρησιμοποιώντας CLT, εκτιμούνται οι παραμορφώσεις στο άνω και κάτω άκρο της κάθε στρώσης στην συγκεκριμένη πολύστρωτη διάταξη. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι τάσεις στο επίπεδο της στρώσης στο άνω και κάτω άκρο της, λαμβάνοντας υπόψη τυχόν (υδρο-θερμικές) παραμένουσες τάσεις.

Από αυτή την άποψη, κατά την ντετερμινιστική ανάλυση, οι τάσεις που αναπτύσσονται στην στρώση, εισάγονται στο κατάλληλο κριτήριο αστοχίας και ελέγχεται η στρώση ως προς την αντοχή της. Σε μία στοχαστική ανάλυση, ακολουθείται η ίδια διαδικασία, αλλά το τελικό αποτέλεσμα με την χρήση του κατάλληλου κριτηρίου αστοχίας δείχνει την αξιοπιστία της στρώσης (ή την πιθανότητα αστοχίας).

Για την εφαρμογή της ανάλυσης σε όρους πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Edgeworth, στο POST-THIN, μαζί με τον υπολογισμό των παραμορφώσεων και τάσεων στην στρώση, υπολογίζονται και οι μερικές τους παράγωγοι ως προς τις βασικές (ελαστικές) ιδιότητες του υλικού, ενώ η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων αντοχής εισάγεται στην συνάρτηση αστοχίας της στρώσης.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo, η ανάλυση με το PRE-THIN και το THIN πραγματοποιείται επαναλαμβανόμενα, χρησιμοποιώντας σε κάθε επανάληψη τις εκ νέου παραγόμενες ελαστικές ιδιότητες των υλικών. Τα αποτελέσματα όλων των επαναλήψεων συγκεντρώνονται και δίνονται ως είσοδος στο POST-THIN. Στο POST-THIN για κάθε στοιχείο και στρώση, παράγονται σε κάθε επανάληψη τις ιδιότητες αντοχής των υλικών και πραγματοποιείται η ανάλυση αντοχής της κάθε στρώσης, κάθε στοιχείου.

7.3.2 Πιθανότητα Αστοχίας

7.3.2.1 Πιθανότητα αστοχίας στρώσης

Για την πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας στρώσης συνθέτου υλικού, στην περίπτωση που υπόκειται σε γενική εντατική κατάσταση, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορα κριτήρια αστοχίας, όπως περιγράφηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο [7.30]-[7.32]. Χωρίς να χάνεται η γενικότητα, στην παρούσα εφαρμογή το κριτήριο αστοχίας που χρησιμοποιείται είναι το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας εκφρασμένο στην κύρια διεύθυνση της στρώσης, όπως δίνεται από τους Tsai-Hahn στο [7.33]:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}} + \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) \sigma_2 - 1 \leq 0 \quad (7.1)$$

Συμβολίζοντας το αριστερό μέρος της ανισότητας με $K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})$, θεωρείται ότι επέρχεται αστοχία όταν:

$$K(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}) > 0 \quad (7.2)$$

Έτσι όπως περιγράφηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο η πιθανότητα αστοχίας της στρώσης, P_F , εκφράζεται από την: $P_F = P(K > 0)$

Για την εκτίμηση σε όρους πιθανότητας της δομικής αστοχίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο, π.χ. μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth, η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo και η μέθοδος δείκτη β (FORM).

7.3.2.2 Πιθανότητα Αστοχίας Πολύστρωτης

Όπως παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο μία πολύστρωτη πλάκα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σύστημα πολλών στοιχείων (στρώσεων), όπου το κάθε ένα από αυτά χαρακτηρίζεται από την δική του συνάρτηση αστοχίας. Η αστοχία της πολύστρωτης μπορεί εν συνεχεία να χαρακτηριστεί από την αστοχία της πρώτης στρώσης (FPF), ή από την αστοχία της τελευταίας στρώσης (LPF). Για τους λόγους που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, στην παρούσα εργασία η πολύστρωτη θεωρείται ότι αστοχεί όταν επέλθει αστοχία της πρώτης στρώσης (FPF) και έτσι σε αυτή την περίπτωση το σύστημα των στρώσεων αναλύεται ως ένα σύστημα εν σειρά.

Πιο συγκεκριμένα θεωρείται ότι η κάθε στρώση χαρακτηρίζεται από την δική της συνάρτηση αστοχίας, με την δική της πιθανότητα αστοχίας (P_{Fi}), ενώ γίνεται η θεώρηση ότι οι ιδιότητες παρόμοιων στρώσεων είναι θετικά συσχετισμένες, εφόσον γίνεται η υπόθεση τυποποιημένης διαδικασίας κατασκευής. Έτσι, θεωρείται ότι η πιθανότητα αστοχίας της πολύστρωτης μπορεί να προσεγγιστεί από την μέγιστη πιθανότητα αστοχίας που προβλέπεται για οποιαδήποτε στρώση στην διάταξη:

$$P_F = \max_i P_{Fi} \quad (7.5)$$

Με αυτές τις υποθέσεις, στόχος της ανάλυσης είναι ο προσδιορισμός της συνάρτησης πιθανότητας της συνάρτησης αστοχίας κάθε στρώσης στην πολύστρωτη και στην συνέχεια η πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας της πολύστρωτης.

7.3.2.3 Πιθανότητα Αστοχίας της Διατομής του Πτερυγίου

Εφόσον εξετάζουμε την αστοχία ενός πτερυγίου από σύνθετα υλικά, και πιο συγκεκριμένα μίας πολυκυψελικής λεπτότοιχης, ετερογενούς διατομής, κατασκευασμένης από πολύστρωτες συνθέτου υλικού ενισχυμένου με ίνες, πρέπει να προσδιοριστεί η έννοια της «αστοχίας της διατομής του πτερυγίου». Σκεπτόμενοι ανάλογα με την περίπτωση του προσδιορισμού της αστοχίας της πολύστρωτης, η διατομή του πτερυγίου σε αυτή την εργασία θεωρείται ως ένα σύστημα εν σειρά. Αυτό σημαίνει ότι η αστοχία οποιουδήποτε στοιχείου στην διατομή, θεωρείται ότι συνεπάγεται αστοχία της διατομής του πτερυγίου. Επιπρόσθετα, οι αστοχίες των στοιχείων στην διατομή, θεωρείται ότι είναι θετικά συσχετισμένες.

Εξ' αυτών, θεωρείται ότι η πιθανότητα αστοχίας της διατομής μπορεί να προσεγγιστεί από την μέγιστη πιθανότητα αστοχίας που προβλέπεται για οποιοδήποτε στοιχείο (πολύστρωτη) στην διατομή, θεωρώντας ότι η διατομή είναι ένα σύστημα εν σειρά και ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ της συμπεριφοράς των στοιχείων της. Αυτό μπορεί να υποστηριχθεί, εφόσον μία τυποποιημένη διαδικασία κατασκευής έχει ως αποτέλεσμα μία πιο θετική συσχέτιση μεταξύ των ιδιοτήτων των επιμέρους στοιχείων.

7.3.3 Παραδείγματα και σχολιασμός

Ως παράδειγμα επιλέχθηκε μία τυπική αεροδυναμική διατομή, με τις αντίστοιχες διατάξεις στρώσεων, όπως παρουσιάζεται στο Σχ. 67. Οι ιδιότητες υλικού της στρώσης με ίνες διατεταγμένες σε μία μόνο διεύθυνση (UD) από το [7.14] που χρησιμοποιήθηκαν παρουσιάζονται στον Π. 28. Για την στρώση με ίνες προσανατολισμένες σε δύο διευθύνσεις ($\pm 45^\circ$), εφόσον δεν υπήρχαν διαθέσιμα στατιστικά στοιχεία, έγινε η υπόθεση ότι η στρώση αυτή δημιουργείται ως πολύστρωτη πλάκα με διάταξη [+45/-45] από στρώσεις UD. Το πάχος όμως των στρώσεων αυτών θεωρείται περίπου ίσο με το 1/3 του πάχους της UD στρώσης. Επιπρόσθετα, για τις ιδιότητες του δομικού αφρού που χρησιμοποιείται στην ακμή εκφυγής (trailing edge) και στις ενισχυτικές δοκίδες (shear webs) της διατομής χρησιμοποιήθηκαν οι μέσες τιμές των ιδιοτήτων που δίνονται στο [7.34], ενώ η μεταβλητότητα της πυκνότητας του

υλικού, όπως δίνεται στο [7.34] θεωρείται καθοριστική για την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων αντοχής και ελαστικότητας του υλικού. Οι μέσες τιμές, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβλητότητας των ιδιοτήτων του δομικού αφρού δίνονται στον Π. 29. Κατά την εφαρμογή, γίνεται η υπόθεση ότι οι βασικές μεταβλητές ακολουθούν την κανονική κατανομή, παρόλο που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν άλλες στατιστικές κατανομές για την μοντελοποίηση των ιδιοτήτων, όπως είναι η κατανομή Weibull και η Λογαριθμική Κανονική.

Π. 28 Ιδιότητες υλικού για την στρώση UD

Ιδιότητα	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	COV (%)
E ₁ (GPa)	39.04	1.032	2.64
E ₂ (GPa)	14.08	0.325	2.31
G ₁₂ (GPa)	4.24	0.099	2.34
ν_{12}	0.291	0.0271	9.34
X _T (MPa)	776.50	36.143	4.65
X _C (MPa)	521.82	16.500	3.16
Y _T (MPa)	53.95	2.576	4.78
Y _C (MPa)	165.00	4.849	2.94
S (MPa)	56.08	1.119	2.00
h (mm)	0.938	-	-

Π. 29 Ιδιότητες υλικού για τον δομικό αφρό.

Ιδιότητα	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση	COV (%)
E ₁ =E ₂ (MPa)	75.0	9.00	12.00
G ₁₂ (GPa)	20.0	1.00	5.00
ν_{12}	0.420	0.0450	10.71
X _T (MPa)	1.800	0.150	8.33
X _C (MPa)	1.000	0.075	7.50
S (MPa)	0.900	0.075	8.33
h (mm)	10.000	-	-

Στο Σχ. 73 παρουσιάζεται η αρίθμηση των κόμβων στην διατομή. Επίσης, οι γραμμές με διαφορετικό χρώμα αποτελούν ένδειξη της αλλαγής στην διάταξη των στρώσεων στις πολύστρωτες που απαρτίζουν την διατομή. Οι 160 κόμβοι αριθμούνται με την σειρά γύρω από την διατομή, ξεκινώντας στην ακμή εκφυγής (trailing edge) της διατομής με τον κόμβο #1 και στην συνέχεια αριθμώντας του κόμβους στην εφελκόμενη πλευρά, στην ακμή πρόσπτωσης (leading edge) και στην θλιβόμενη πλευρά του περυγίου. Στην συνέχεια αριθμούνται οι κόμβοι που χαρακτηρίζουν τις ενισχυτικές δοκίδες (shear webs) της διατομής, ξεκινώντας με τον κόμβο #161 κοντά στην θλιβόμενη πλευρά του περυγίου και τελειώνοντας στον κόμβο #167 στην εφελκόμενη πλευρά του περυγίου για την ενισχυτική δοκίδα που βρίσκεται πλησιέστερα στην ακμή εκφυγής (trailing edge) και αντίστοιχα αριθμώντας τους κόμβους από 168 ως 174 για την ενισχυτική δοκίδα που είναι πλησιέστερα στην ακμή πρόσπτωσης (leading edge) της διατομής. Οι αριθμοί των στοιχείων που δεν παρουσιάζονται σε αυτό το σχήμα ξεκινούν από το 1 για το στοιχείο που συνδέει τους κόμβους #1 και #2 και συνεχίζοντας περιμετρικά ως το στοιχείο 160, το οποίο συνδέει τους κόμβους #160 και #1. Στην συνέχεια αριθμούνται τα στοιχεία που αποτελούν τις ενισχυτικές δοκίδες, ξεκινώντας από αυτήν πλησίον της ακμής εκφυγής με το στοιχείο 161 να αντιστοιχεί στο στοιχείο που συνδέει τους κόμβους 25 και 167 και το στοιχείο 168 να συνδέει τους κόμβους 161 και 137. Τα στοιχεία της ενισχυτής δοκίδας που βρίσκεται κοντύτερα στην ακμή πρόσπτωσης ξεκινούν με το στοιχείο 169 που συνδέει τους κόμβους 57 και 174, ως το στοιχείο 176, το οποίο συνδέει τους κόμβους 168 και 105.

Σχ. 73 Αρίθμηση κόμβων στην διατομή.

Έχοντας ως στόχο την σύγκριση της αποτελεσματικότητας και της ακρίβειας της τεχνικής αναπτύγματος Edgeworth, που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία, η διατομή σχεδιάστηκε έτσι ώστε από σημείο σε σημείο, ή καλύτερα από κόμβο σε κόμβο, να προκύπτουν οι καταστάσεις αστοχίας και μη αστοχίας με διάφορα επίπεδα πιθανότητας. Ασφαλώς, υπό αυτές τις συνθήκες το συνολικό αποτέλεσμα της διατομής είναι αστοχία (με πιθανότητα αστοχίας ίση με 1).

Στο Σχ. 74 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση της διατομής, όπου λαμβάνεται υπόψη μόνο η στοχαστικότητα των ιδιοτήτων αντοχής. Σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης με την μέθοδο Monte Carlo και των αποτελεσμάτων της μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth, δείχνει ότι τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων είναι σε καλή συμφωνία. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να αναφερθεί ότι ο απαιτούμενος χρόνος για την προσομοίωση με την μέθοδο Monte Carlo (χρησιμοποιώντας 2 εκατομμύρια επαναλήψεις) ήταν περίπου 24 ώρες (PC, με CPU Pentium 4 - 3.4 GHz), ενώ η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth (στον ίδιο υπολογιστή) δεν χρειαζόταν παραπάνω χρόνο από μία ντετερμινιστική ανάλυση, όπου το αποτέλεσμα δίνεται σε χρόνο λιγότερο από 10 δευτερόλεπτα. Στο ίδιο σχήμα, παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα της ντετερμινιστικής ανάλυσης, χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές για τις ιδιότητες αντοχής. Πρέπει να σημειωθεί ότι για τον ντετερμινιστικό λόγο ασφαλείας, R , η αστοχία θεωρείται όταν $R < 1$. Επιπρόσθετα, πρέπει να τονισθεί ότι ο ντετερμινιστικός λόγος ασφαλείας που παρουσιάζεται δεν μπορεί να συνδεθεί με το επίπεδο αξιοπιστίας της κατασκευής. Στο παράδειγμα που παρουσιάζεται εδώ ο ντετερμινιστικός συντελεστής ασφαλείας στο εύρος 1.0 ως 1.3 αντιστοιχεί σε πιθανότητα αστοχίας 0.5 ως $1.5E-6$, όπως προκύπτει από την προσομοίωση με την μέθοδο MC. Έτσι προβλέπεται αστοχία για τα στοιχεία που βρίσκονται στην εφελκυστική πλευρά του πτερυγίου, κυρίως στα στοιχεία που αποτελούν το κεντρικό τμήμα της πλευράς, αλλά και σε ορισμένα στοιχεία πιο κοντά στην ακμή εκφυγής, κοντά στην αντίστοιχη ενισχυτική δοκίδα. Παρόλα αυτά, πρέπει να υπενθυμίσω, ότι η συγκεκριμένη διατομή δεν έχει σχεδιαστεί κατάλληλα για να επιβιώσει της επιβαλλόμενης φόρτισης, αλλά και η διατομή και τα επιβαλλόμενα φορτία έχουν τροποποιηθεί κατάλληλα, έτσι ώστε οι προβλέψεις να περιλαμβάνουν διάφορα επίπεδα πιθανότητας αστοχίας μεταξύ των στοιχείων της διατομής.

Σχ. 74 Πιθανότητα αστοχίας για κάθε στοιχείο της διατομής όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές με τις EDW και MC μεθόδους (και ντετερμινιστικός λόγος ασφάλειας (DET))

Στο Σχ. 75 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση όπου οι ιδιότητες αντοχής και οι ιδιότητες ελαστικότητας θεωρούνται στοχαστικές. Και σε αυτή την περίπτωση, τα αποτελέσματα της τεχνικής αναπτύγματος Edgeworth είναι κοντά σε αυτά της Monte Carlo προσομοίωσης. Το ακρωνύμιο –EL στην λεζάντα του σχήματος συμβολίζει το ότι εκτός από τις ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές και οι ιδιότητες ελαστικότητας των υλικών.

Η επίδραση της μεταβλητότητας των ελαστικών ιδιοτήτων στα αποτελέσματα για την πιθανότητα αστοχίας της διατομής, όπως παρουσιάστηκε και το [7.35], φαίνονται καλύτερα στο Σχ. 76, όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεθόδου Monte Carlo για την περίπτωση όπου λαμβάνονται ως στοχαστικές μόνο οι ιδιότητες αντοχής των υλικών (η οποία συμβολίζεται με κύκλους) και για την περίπτωση όπου οι ιδιότητες ελαστικότητας και αντοχής θεωρούνται στοχαστικές (η οποία συμβολίζεται με σταυρούς). Στο σχήμα μπορούμε να παρατηρήσουμε, ότι για τα στοιχεία όπου η πιθανότητα αστοχίας είναι μικρότερη από 0.5, τα οποία μας ενδιαφέρουν κατά τον δομικό σχεδιασμό, αμέλεια της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων ελαστικότητας του υλικού οδηγεί σε υπερεκτίμηση της αξιοπιστίας της κατασκευής. Το αντίθετο παρατηρείται για τα στοιχεία με πιθανότητες αστοχίας μεγαλύτερες του 0.5. Δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων ελαστικότητας του υλικού, η πιθανότητα αστοχίας προβλέπεται μικρότερη από την περίπτωση στην οποία θεωρούνται στοχαστικές μόνο οι ιδιότητες αντοχής.

Παρόλα αυτά πρέπει να σημειωθεί ότι η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων της στρώσης UD, θεωρείται σχετικά μικρή, καθώς τα πειραματικά στοιχεία, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν κατά την στατιστική ανάλυση (όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο [7.14]) περιλάμβαναν μόνο πειραματικά αποτελέσματα από μία μοναδική πλάκα, έτσι ώστε η μεταβλητότητα που εισέρχεται από την χρήση διαφορετικών παρτίδων υλικού (ινών και ρητίνης) και η οποία πρέπει να συμπεριληφθεί κατά την συνήθη διαδικασία σχεδιασμού του περυγίου εκμηδενίζεται. Το γεγονός αυτό, αναμένεται ότι επηρεάζει και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται για την πιθανότητα αστοχίας της διατομής, στην περίπτωση που λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων ελαστικότητας του υλικού.

Σχ. 75 Πιθανότητα αστοχίας για κάθε στοιχείο της διατομής όταν οι ιδιότητες ελαστικότητας και αντοχής θεωρούνται στοχαστικές με τις EDW και MC μεθόδους (και ντετερμινιστικός λόγος ασφάλειας (DET))

Σχ. 76 Σύγκριση της πιθανότητα αστοχίας των στοιχείων της διατομής όταν μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές (MC) με την πιθανότητα αστοχίας όταν θεωρούνται στοχαστικές οι ιδιότητες ελαστικότητας και αντοχής (MC_EL).

Ένα παράγωγο αποτέλεσμα της ανάλυσης που παρουσιάζεται είναι η εκτίμηση της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων της διατομής, για την περίπτωση όπου θεωρούνται στοχαστικές οι ιδιότητες ελαστικότητας των υλικών. Για την παρούσα περίπτωση, η μέση τιμή και ο συντελεστής μεταβλητότητας των ομογενοποιημένων ιδιοτήτων της διατομής, όπως αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo (με 2 εκατομμύρια επαναλήψεις) και της ανάλυσης με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth, παρουσιάζονται στον Π. 30. Και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων είναι σε καλή

συμφωνία, ενώ η αναλυτική μέθοδος δείχνει μία μικρότερη εκτίμηση της μεταβλητότητας, σε σχέση με το αποτέλεσμα της Monte Carlo.

Π. 30 Ιδιότητες διατομής και διασπορά

Ιδιότητα	Monte Carlo		EDW	
	Μέση Τιμή	COV (%)	Μέση Τιμή	COV (%)
EA (N)	1.52E9	2.51	1.50E9	2.38
E _{IYY} (Nm ²)	1.29E8	2.38	1.30E8	2.26
E _{IZZ} (Nm ²)	4.78E7	2.48	4.77E7	2.45
E _{IYZ} (Nm ²)	7.99E6	2.18	7.98E6	2.15
GJ (Nm ²)	1.69E7	1.73	1.69E7	1.43

Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με αερο-ελαστικούς κώδικες, για την εκτίμηση της επίδρασης της μεταβλητότητας των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού στην πρόβλεψη της απόκρισης της ανεμογεννήτριας και της φόρτισης των διαφόρων μηχανικών δομικών στοιχείων της μηχανής, συμπεριλαμβανομένων των περυγίων. Επιπρόσθετα, αυτά τα αποτελέσματα μπορεί πιθανόν να χρησιμοποιηθούν σε μία ανάλυση σε όρους πιθανοτήτων της εκτίμησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του περυγίου.

7.4 Εισαγωγή της στοχαστικότητας της φόρτισης

Εκτός από τις διαφορές μεταξύ της δεύτερης και τρίτης έκδοσης του IEC 61400-1, [7.8] και [7.4], αντίστοιχα, στους μερικούς συντελεστές ασφαλείας των ιδιοτήτων υλικών που πρέπει να χρησιμοποιηθούν, οι οποίες περιγράφηκαν ανωτέρω, στην νέα έκδοση του κανονισμού IEC 61400-1:2005 [7.4] έχει αλλάξει και η μέθοδος προσδιορισμού των ακραίων φορτίσεων για τον σχεδιασμό της ανεμογεννήτριας. Συγκεκριμένα στην νέα έκδοση έχουν αντικατασταθεί αρκετές ντετερμινιστικές περιπτώσεις φόρτισης της παλαιότερης IEC 61400-1: 1999 [7.8], εισάγοντας μία προσέγγιση βασισμένη περισσότερο στην στατιστική ανάλυση [7.36].

Έτσι, για την εκτίμηση της επίδρασης της στοχαστικότητας της εξωτερικής φόρτισης στην αντοχή του περυγίου, το υπολογιστικό εργαλείο επεκτάθηκε κατάλληλα, ώστε να καθίσταται δυνατή η εισαγωγή της μεταβλητότητας της φόρτισης.

Αντίστοιχα με την εισαγωγή της στοχαστικότητας των ιδιοτήτων των υλικών στο πρόβλημα, για την εισαγωγή της στοχαστικότητας της φόρτισης, απαιτείται ο στατιστικός χαρακτηρισμός των εσωτερικών αξονικών και διατμητικών δυνάμεων, N_{XB} , V_{YB} και V_{ZB} , αντίστοιχα και των εσωτερικών καμπτικών και στρεπτικών ροπών, M_{ZB} , M_{YB} και M_{XB} , αντίστοιχα σε κάθε επιλεγμένη διατομή κατά μήκος του περυγίου. Αυτές οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές χρησιμοποιούνται ως δεδομένα από το THIN, για την πραγματοποίηση αναλυτικότερης ανάλυσης τάσεων σε κάθε διατομή. Για την μοντελοποίηση της μεταβλητότητας της φόρτισης στην διατομή, χρησιμοποιήθηκαν στοιχεία από δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη περιλαμβάνει το χαρακτηρισμό των δυνάμεων και ροπών βάσει πειραματικών μετρήσεων, ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει το χαρακτηρισμό των δυνάμεων και ροπών βάσει μίας πιο θεωρητικής προσέγγισης.

Για την πρώτη περίπτωση, από μετρήσεις των καμπτικών ροπών στην ρίζα του περυγίου προσδιορίστηκε ο συντελεστής διασποράς για τις ακραίες φορτίσεις. Όμως πρέπει σε αυτό το σημείο να τονιστεί, ότι κατά την διάρκεια μετρήσεων φορτίων σε Α/Γ δεν αποτυπώνονται μετρήσεις σε ακραίες φορτίσεις, καθότι αυτές εξαρτώνται από τις περιβαλλοντολογικές συνθήκες κατά την διάρκεια των μετρήσεων. Οι μετρήσεις φορτίων σε Α/Γ πραγματοποιούνται σε διάστημα τουλάχιστον 6 μηνών και στόχος των μετρήσεων είναι να «συλλάβουν» τις περιπτώσεις (καιρικές συνθήκες) που προδιαγράφονται στο πρότυπο IEC/TS 61400-13 [7.37]. Κατ' αυτήν την έννοια οι μετρήσεις μπορεί να μην περιλαμβάνουν περίπτωση ακραίας φόρτισης (που ούτως ή άλλως μία μηχανή εν λειτουργία μπορεί να μην

δεν ποτέ στην ζωή της). Έτσι οι μετρήσεις φορτίων κυρίως εστιάζονται σε μετρήσεις που καλύπτουν το φάσμα λειτουργίας της μηχανής (συνήθως μέχρι ταχύτητες ανέμου αποκοπής της μηχανής (cut-out), v_{out} , που είναι συνήθως 20-25m/s), ενώ ακόμα και για την περιοχή ταχυτήτων ανέμου στο διάστημα μεταξύ της ταχύτητας ανέμου ονομαστικής λειτουργίας της μηχανής, v_R (rated) και της ταχύτητας αποκοπής, η οδηγία IEC/TS 61400-13 [7.37] έχει μειωμένες απαιτήσεις. Στοιχεία από δοκιμή μέτρησης φορτίων σε Α/Γ δείχνουν ότι στην περιοχή της ταχύτητας αποκοπής της μηχανής ο συντελεστής μεταβλητότητας (coefficient of variation) στην διάρκεια δεκαλέπτου της καμπτικής ροπής στην ρίζα του πτερυγίου ως προς την διεύθυνση πτερυγισμού (flap) ήταν περίπου 17%, ενώ στην διεύθυνση περιστροφής (lead-lag) ο συντελεστής μεταβλητότητας ήταν περίπου 200%. Η μεγάλη διακύμανση που παρατηρείται στην καμπτική ροπή κατά την διεύθυνση της περιστροφής είναι ασφαλώς αποτέλεσμα του ότι τα μετρημένα στοιχεία αφορούν κατάσταση κανονικής λειτουργίας της Α/Γ με τα πτερύγια σε περιστροφή. Η χρήση περίπτωσης που αφορά φόρτιση σε κανονική λειτουργία της μηχανής, παρόλο που σε μία πρώτη ματιά θα φαινόταν μη αποδεκτή, έγινε εξαιτίας του ότι στις περιπτώσεις φόρτισης που πρέπει να ληφθούν υπόψη ως ακραίες φορτίσεις κατά το IEC 61400-1 [7.4] περιλαμβάνονται και περιπτώσεις κανονικής λειτουργίας της μηχανής (με ακραίες συνθήκες ριπής ανέμου), οι οποίες όμως δεν διαχωρίζονται κατά την διάρκεια μέτρησης φορτίων σε Α/Γ και στην μετέπειτα ανάλυση τους.

Στην δεύτερη περίπτωση (όπου τα στατιστικά στοιχεία των συνιστωσών είναι απόρροια θεωρητικής προσέγγισης, η εκτίμηση των στατιστικών παραμέτρων έγινε χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το [7.38], όπου παρουσιάζονται στοιχεία για την καμπτική ροπή κατά την διεύθυνση πτερυγισμού (flap) στην ρίζα του πτερυγίου, και από το [7.39], όπου παρουσιάζονται αποτελέσματα για την ρίζα του πτερυγίου των καμπτικών ροπών κατά την διεύθυνση πτερυγισμού (flap) αλλά και κατά την διεύθυνση περιστροφής (edge). Έτσι, στο [7.39] ο συντελεστής μεταβλητότητας της ροπής κατά την διεύθυνση πτερυγισμού (flap) είναι περίπου 9%, ενώ για την διεύθυνση περιστροφής (edge) είναι περίπου 11%, για ταχύτητα ανέμου 50m/s (που θεωρείται ως ακραία φόρτιση με την ανεμογεννήτρια σε στάση, η οποία θα πρέπει να αναλυθεί θεωρώντας στατική φόρτιση). Αντίστοιχα στο [7.38] ο συντελεστής μεταβλητότητας της μέγιστης ροπής στην ρίζα του πτερυγίου κατά την διεύθυνση πτερυγισμού (flap) είναι περίπου 4% ως αποτέλεσμα της απόκρισης της ανεμογεννήτριας σε ριπές ανέμου με μέση ταχύτητα ανέμου 13m/s. Υπενθυμίζεται ότι σε αυτή την περιοχή ταχυτήτων ανέμου υπολογίζεται η ακραία περίπτωση φόρτισης κατά IEC 61400-1 (ECD: Extreme coherent gust with direction change).

Βέβαια και σε αυτή την περίπτωση, όπου ακολουθήθηκε μια πιο θεωρητική προσέγγιση των στατιστικών χαρακτηριστικών της ακραίας φόρτισης, πρέπει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας που χρησιμοποιήθηκαν έχουν εξαχθεί από προσομοιώσεις με αερο-ελαστικούς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα δεδομένα εισόδου (μοντέλο ανεμογεννήτριας, χαρακτηριστικά λειτουργίας, χαρακτηριστικά εξωτερικών συνθηκών, κλπ.). Κατ' αυτήν την έννοια από τα αποτελέσματα δεν μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για όλες τις ανεμογεννήτριες και τις συνθήκες εγκατάστασής τους, αλλά μόνο μία γενική εικόνα.

Σε κάθε περίπτωση πρέπει να τονιστεί ότι ο στατιστικός χαρακτηρισμός των εσωτερικών αντιδράσεων, όπως υπολογίζονται από τους κώδικες αερο-ελαστικής ανάλυσης δεν αποτελούν μέρος αυτής της εργασίας. Αποτελούν ένα σύγχρονο αντικείμενο έρευνας, για τον ολοκληρωμένο σχεδιασμό Α/Γ και σε αυτό το πεδίο γίνονται συνεχώς τα τελευταία χρόνια δημοσιεύσεις.

Χρησιμοποιώντας τον συντελεστή διασποράς, και θεωρώντας ότι οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές ακολουθούν την κανονική κατανομή, χωρίς να χάνεται η γενικότητα της μεθόδου από την επιλογή της κατανομής που ακολουθεί η κάθε συνιστώσα, υπολογίστηκαν για την περίπτωση της μεθόδου EDW η διασπορά, η τρίτη και τέταρτη ροπή κάθε συνιστώσας, ενώ για την μέθοδο Monte Carlo υπολογίστηκε η τυπική απόκλιση κάθε συνιστώσας. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι η μέση τιμή κάθε συνιστώσας φορτίου διατηρήθηκε ίδια με

αυτή του προηγούμενου παραδείγματος για λόγους σύγκρισης. Στον πίνακα Π. 31 παρουσιάζονται τα στατιστικά χαρακτηριστικά των συνιστωσών της φόρτισης που εφαρμόστηκαν στα παραδείγματα ανάλυσης που παρουσιάζονται στον παρόν εδάφιο. Σημειώνεται ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν δίνεται για την στρεπτική ροπή (M_x), για την οποία η μέση τιμή έχει ληφθεί ως μηδενική.

Π. 31 Στατιστικά χαρακτηριστικά των συνιστωσών εσωτερικών αντιδράσεων στην διατομή του πτερυγίου

Συνιστώσα	Μέση Τιμή	Περίπτωση 1 (μεγάλη διασπορά)		Περίπτωση 2 (ενδιάμεση διασπορά)	
		Τυπική Απόκλιση	COV (%)	Τυπική Απόκλιση	COV (%)
N_{XB} (kN)	452.416	0.905	0.2	0.905	0.2
V_{YB} (kN)	278.391	46.390	16.7	13.928	5.0
V_{ZB} (kN)	-73.184	146.287	200.0	7.348	10.0
M_{ZB} (kNm)	1529.867	254.971	16.7	76.485	5.0
M_{YB} (kNm)	-399.311	798.622	200.0	39.931	10.0
M_{XB} (Nm)	0.000	10.000	-	10.000	-

Ως παράδειγμα στο Σχ. 77 παρουσιάζεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου EDW με τα αντίστοιχα από την προσομοίωση με την μέθοδο Monte Carlo για τις μέσες ανηγμένες αξονικές τάσεις, N_x , διαιρεμένες με το πάχος της πολύστρωτης σε κάθε στοιχείο της διατομής, h , για την περίπτωση 1 (με μεγάλη διασπορά). Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης Monte Carlo έχουν γίνει με 180,000 δείγματα και όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει οι προβλέψεις για την μέση τιμή είναι ταυτόσημες. Το ίδιο συμβαίνει και για την πρόβλεψη της μέσης διατμητικής τάσης, το οποίο όμως δεν παρουσιάζεται στο σχήμα για λόγους ευκρίνειας.

Σχ. 77 Μέσες τιμές ανηγμένων αξονικών δυνάμεων, N_x , στα στοιχεία της διατομής (h το συνολικό πάχος της πολύστρωτης) με την μέθοδο MC και EDW.

Αντίστοιχα στο Σχ. 78 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την πρόβλεψη της τυπικής απόκλισης των ανηγμένων διατμητικών δυνάμεων, διαιρεμένης με το πάχος της πολύστρωτης στα στοιχεία της διατομής, για την ίδια περίπτωση φόρτισης. Στο ίδιο σχήμα δίνεται και η ποσοστιαία διαφορά μεταξύ της πρόβλεψης με την μέθοδο Monte Carlo και των

αποτελεσμάτων της μεθόδου Edgeworth (diff). Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει η διαφορά είναι μικρότερη του 0.5% στην εκτίμηση της διασποράς, σε όλα τα στοιχεία της διατομής. Αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα για την διασπορά της ανηγμένης αξονικής τάσης στα στοιχεία.

Σχ. 78 Τυπική απόκλιση των ανηγμένων διατμητικών τάσεων, N_s , στα στοιχεία της διατομής υπολογισμένης με την μέθοδο MC και EDW (h το πάχος της πολύστρωτης) και η ποσοστιαία διαφορά (diff.)

Στο Σχ. 79 παρουσιάζεται η επίδραση της στοχαστικότητας της φόρτισης (για την περίπτωση φόρτισης 1) στην πιθανότητα αστοχίας των στοιχείων της διατομής ως αποτέλεσμα των μεθόδων Monte Carlo και Edgeworth σε σχέση με την περίπτωση όπου η μεταβλητότητα της φόρτισης αμελείται. Στην περιοχή ενδιαφέροντος, δηλαδή για την περίπτωση των στοιχείων όπου η πιθανότητα αστοχίας τους ήταν μικρή, εφόσον δεν λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα της φόρτισης (στοιχεία 1... 16 και 64... 160) παρατηρείται εύκολα μία ραγδαία αύξηση της πιθανότητας αστοχίας στην περίπτωση όπου λαμβάνεται υπόψη η στοχαστικότητα της φόρτισης. Βέβαια, σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι η μεταβλητότητα της φόρτισης που θεωρήθηκε για αυτό το παράδειγμα πρέπει να χαρακτηριστεί ως πολύ μεγάλη.

Για να γίνει αυτό κατανοητό, στο Σχ. 80 παρουσιάζεται η επίδραση της διασποράς της φόρτισης στην πιθανότητα αστοχίας των στοιχείων της διατομής για τις περιπτώσεις όπου η διασπορά θεωρείται μηδενική (περίπτωση EDW-no variance), σε περίπτωση όπου θεωρηθεί ενδιάμεση διασπορά, όπου έχουν χρησιμοποιηθεί τα στοιχεία της περίπτωσης φόρτισης 2 (περίπτωση EDW- low variance) και στην περίπτωση όπου η διασπορά είναι μεγάλη, όπως παρουσιάστηκε ανωτέρω (περίπτωση EDW- high variance).

Τέλος, σημειώνεται ότι για τα αποτελέσματα των δύο περιπτώσεων που εξετάστηκαν για μία διατομή του πετυγίου χρειαζόντουσαν 24 ώρες για την προσομοίωση με την μέθοδο της Monte Carlo και μόνο ελάχιστα δευτερόλεπτα για την αναλυτική μέθοδο Edgeworth.

Σχ. 79 Πιθανότητα αστοχίας με την μέθοδο MC και EDW των στοιχείων της διατομής όταν δεν λαμβάνεται υπόψη η στοχαστικότητα του φορτίου (-EL) και όταν λαμβάνεται (-LD).

Σχ. 80 Επίδραση της διασποράς της φόρτισης στην πιθανότητα αστοχίας με την μέθοδο EDW για τρεις περιπτώσεις (no variance: φόρτιση ντετερμινιστική, low variance: μικρή διασπορά και high variance: μεγάλη διασπορά).

Η ακρίβεια της μεθόδου EDW (στην πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας) είναι γεγονός ότι δεν είναι ιδιαίτερα καλή, στις περιοχές με μικρές πιθανότητες αστοχίας που ενδιαφέρουν. Παρόλα αυτά, εφόσον αναλογιστεί κανείς το ιδιαίτερα υψηλό υπολογιστικό κόστος της «ακριβέστερης» μεθόδου Monte Carlo, καθώς και τον χρόνο υπολογισμού που απαιτείται για το αποτέλεσμα μίας και μόνο διατομής, το πλεονέκτημα της αναλυτικής μεθόδου γίνεται ξεκάθαρο. Το πλεονέκτημα αυτό κάνει την μέθοδο ακόμα πιο ελκυστική κατά την διάρκεια

του σχεδιασμού ενός πτερυγίου, όπου χρειάζονται πολλές επαναλήψεις, ώστε να καταλήξει κανείς κοντά στην βέλτιστη λύση. Έτσι για παράδειγμα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μία πιο ακριβής μέθοδος μόνο για την επιβεβαίωση του σχεδιασμού στο τελικό στάδιο.

7.5 Συμπεράσματα

Αναπτύχθηκε ένα εργαλείο προ-επεξεργασίας και επεξεργασίας, το οποίο μπορεί εύκολα να συνδυαστεί με διαθέσιμους αερο-ελαστικούς κώδικες, για την αξιολόγηση του δομικού σχεδιασμού πτερυγίων ανεμογεννητριών σε όρους πιθανοτήτων. Αυτό επιτεύχθηκε συνδυάζοντας τις μεθοδολογίες που αναπτύχθηκαν για την πιθανολογική εκτίμηση της συμπεριφοράς πολυστρώτων πλακών υπό γενική επίπεδη εντατική κατάσταση με τις μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί για την αυτοματοποιημένη, ντετερμινιστική ανάλυση αντοχής πτερυγίων ανεμογεννητριών, σε ένα ολοκληρωμένο λογισμικό.

Για την επιβεβαίωση των προβλέψεων αξιοπιστίας με χρήση της μεθόδου αναπτύγματος Edgeworth, τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με αντίστοιχα αποτελέσματα προσομοίωσης με την μέθοδο Monte Carlo και βρέθηκαν σε καλή συμφωνία. Παρόλο που η μέθοδος αναπτύγματος Edgeworth δεν είναι ιδιαίτερα καλή για την πρόβλεψη της πιθανότητας σε περιοχές με μικρές πιθανότητες αστοχίας, είναι συνεπείς ως προς τις προβλέψεις της, ακολουθώντας σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν τις προβλέψεις με την μέθοδο Monte Carlo. Σκοπός του εργαλείου που αναπτύχθηκε είναι η διευκόλυνση της εισαγωγής της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων υλικού στον ολοκληρωμένο δομικό σχεδιασμό ενός πτερυγίου ανεμογεννήτριας. Το λογισμικό που αναπτύχθηκε και βασίζεται στην τεχνική αναπτύγματος Edgeworth, μέσω της οποίας μπορεί να ληφθεί άμεσα μία εκτίμηση για το επίπεδο αξιοπιστίας του πτερυγίου, έχει ένα υπολογιστικό κόστος ελαφρώς μεγαλύτερο από ένα οποιαδήποτε εργαλείο ντετερμινιστικής ανάλυσης. Το στοιχείο αυτό, καθιστά δυνατή την χρήση του στοχαστικού εργαλείου που αναπτύχθηκε στην εργασία αυτή κατά την διάρκεια του δομικού σχεδιασμού πτερυγίων ανεμογεννητριών, όπου απαιτείται μεγάλος αριθμός δοκιμαστικών (επαναλαμβανόμενων) αναλύσεων ως τον τελικό σχεδιασμό του κατασκευαστικού στοιχείου. Η δυνατότητα της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε παρουσιάστηκε σε αυτή την περίπτωση με ένα παράδειγμα περίπτωσης ακραίας φόρτισης, το οποίο σχεδιάστηκε προσεκτικά, έτσι ώστε να γίνει η επαλήθευση των αποτελεσμάτων, για διάφορα επίπεδα αξιοπιστίας των στοιχείων της διατομής.

Το THIN είναι στην πραγματικότητα ένα εργαλείο ανάλυσης διατομών, το οποίο δίνει στους κώδικες αερο-ελαστικής ανάλυσης τις κατάλληλες παραμέτρους από την τρισδιάστατη κατασκευή του πτερυγίου από σύνθετα υλικά. Το εργαλείο που αναπτύχθηκε λαμβάνει επίσης ως είσοδο τις ανηγμένες τάσεις της διατομής και να πραγματοποιήσει λεπτομερή ανάλυση σε κάθε στρώση τάσεων παραμορφώσεων. Παρόλο που η εφαρμογή περιλαμβάνει υποθέσεις και απλοποιήσεις της τρισδιάστατης κατασκευής, οι δυνατότητες μίας τέτοιας ανάλυσης, όπως παρουσιάστηκε είναι πολλές. Κατ' αρχήν, είναι η πρώτη φορά που προσδιορίζεται η μεταβλητότητα των ελαστικών ιδιοτήτων των διατομών πτερυγίου ανεμογεννήτριας και μπορούν κατ' επέκταση να εισαχθούν κατά την αερο-ελαστική ανάλυση όλης της κατασκευής της ανεμογεννήτριας, στην οποία θα περιλαμβάνονται η μεταβλητότητα της φόρτισης (εξαιτίας του ανέμου) και της κατασκευής. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την εκτίμηση της αλληλεπίδρασης του εξωτερικού περιβάλλοντος και της κατασκευής σε στατιστικούς όρους. Δεύτερον, δομικές αλλαγές του πτερυγίου, ακόμα και στο επίπεδο στρώσεων (π.χ. πρόσθεση ή αφαίρεση στρώσης του πτερυγίου), μπορούν να εισαχθούν εύκολα και να ληφθούν υπόψη κατά την αερο-ελαστική ανάλυση, χωρίς να χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί το πιο ακριβό (λεπτομερές) τρισδιάστατο μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων. Επιπρόσθετα, η ταυτόχρονη εκτίμηση της αξιοπιστίας στο επίπεδο της στρώσης, δίνει την δυνατότητα βελτιστοποίησης της κατασκευής ακόμα και κατά την διάρκεια των αρχικών φάσεων του σχεδιασμού και επομένως μειώνοντας τους αναγκαίους κύκλους σχεδιασμού μέχρι το τελικό αποτέλεσμα. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο κώδικας THIN είχε χρησιμοποιηθεί αρχικά για την ανάλυση σε κόπωση των πτερυγίων ανεμογεννητριών στο [7.26]. Έτσι, θα

μπορούσε να επεκτείνει κανείς την παρούσα πιθανολογική μέθοδο σε μία πιο ολοκληρωμένη διαδικασία πιθανολογικού σχεδιασμού που να περιλαμβάνει και την εξέταση της κόπωσης του πτερυγίου.

Περαιτέρω βελτιώσεις της μεθοδολογίας όσον αφορά διαφορετικά κριτήρια αστοχίας είναι στόχος μελλοντικών εργασιών.

7.6 Βιβλιογραφία

- [7.1] Ανάπτυξη Ελληνικής Τεχνολογίας Ανεμογεννητριών μεγεθών 400-500kW και ταυτόχρονη ανάπτυξη Ελληνικής Τεχνολογίας Πτερυγίων Ανεμογεννητριών, ΕΠΕΤ II, #573, Ιούλιος 1995 – Σεπτέμβριος 1999
- [7.2] P. Vionis, D. J. Lekou, F. Mouzakis, S. Petersen, I. Carlen, M. Esteban, S. Voutsinas, V. Riziotis, T. Kossivas, D. Winkelaar, A. Cuerva, T. P. Philippidis, A. Vassilopoulos, *Adaptation of existing wind turbines for operation on high wind speed complex terrain sites; kWh cost reduction (ADAPTURB)*, JOR3-CT93-0251, Final Report, Centre for Renewable Energy Sources, November 2002
- [7.3] P. Vionis, *Development of a MW Scale Wind Turbine for High Wind Complex Terrain Sites (MEGAWIND)*, ENK5-CT2000-00328, Final Report, Centre for Renewable Energy Sources, July 2005
- [7.4] IEC 61400-1:2005(E), Wind Turbines – Part 1: Design requirements, 3rd edition
- [7.5] Germanischer Lloyd WindEnergie GmbH, Guideline for the Certification of Wind Turbines, Edition 2003 with supplement 2004
- [7.6] DNV-OS-J102, Design and Manufacture of Wind Turbine Blades, Det Norske Veritas, Working draft, 3 October 2005
- [7.7] A. Puck, Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff - Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung; Bruchhypothesen und Schichtenweise Bruchanalyse, Kunststoffe, Bd. 59, Heft 11, pp.780-787, 1969
- [7.8] IEC 61400-1:1999(E), Wind Turbine generator systems – Part 1: Safety requirements, 2nd edition
- [7.9] ISO 2394:1986, General principles on reliability of structures
- [7.10] H. Braam, A. J. Seebregts, M. W. Jensen, P. Christensen, C. J. C. Christensen, E. Hinrichsen, Quantification of Failure Probabilities, in European Wind Turbine Standards II, Part 2, JOR3-CT95-0064, 1998
- [7.11] D. Veldkamp, Chances in Wind Energy: A probabilistic approach to wind turbine fatigue design, DUWIND Delft University Wind Energy Research Institute, Διδακτορική διατριβή, 2006
- [7.12] DNV-OS-C501, Offshore Standard; Composite Components, Det Norske Veritas, January 2003
- [7.13] C. J. Christensen, E. Joergensen, K. O. Ronold, J. Wedel-Heinen, B. van den Horn, L. Rademakers, Calibration of Safety Factors, in European Wind Turbine Standards, Part 2, JOU2-CT93-0387, Final Report, EU 16898 EN, 1996
- [7.14] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, C. Baharoudis, Assessment of failure probability under uni-axial and multi-axial static and fatigue load, OPTIMAT BLADES report, OB_TG2_R035_rev.000, www.wmc.eu/public_docs/index.htm, 2006
- [7.15] Veers PS, Ashwill TD, Sutherland HJ, Laird DL, Lobitz DW, Griffin DA, Mandell JF, Musial WD, Jackson K, Zuteck M, Miravete A, Tsai SW, Richmond JL. Trends in

- the design, manufacture and evaluation of wind turbine blades. *Wind Energy* 2003; 6 : 245-259
- [7.16] Philippidis TP, Roupakias GS, Vionis P. Assessment of composite rotor blade structural modelling efficiency through comparison of FEM numerical results and experimental data. *Proc. of EWEC 94*, pp. 155-160, ed. J.L. Tsipouridis, 1994
- [7.17] Kong C, Bang J, Sugiyama Y. Structural investigation of composite wind turbine blade considering various load cases and fatigue life. *Energy* 2005; 30 : 2101-2114
- [7.18] Malcolm DJ, Laird DL. Modeling of blades as equivalent beams for aeroelastic analysis. AIAA-2003-870; 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, Jan. 6-9, 2003
- [7.19] V. A. Riziotis, S. G. Voutsinas, E. S. Politis, P. K. Chaviaropoulos, Aeroelastic Stability of Wind Turbines : The Problem, the Methods, the Issues, *Wind Energy*, 7, pp.373-392, 2004
- [7.20] J. M. Jonkman, M. L. Jr. Buhl, Fast User's Guide, NREL Technical Report, NREL/EL-500-38230, 2005
- [7.21] J. D. Oden, *Mechanics of elastic Structures*, McGraw-Hill, N. York, 1967
- [7.22] M. Paz, C. P. Strehl, P. Schrader, Computer determination of the shear center of open and closed sections, *Computers & Structures*, 6, pp.117-125, 1976
- [7.23] P. Waldron, Sectorial properties of straight thin walled beams, *Computers & Structures*, 24(1), pp.147-156, 1986
- [7.24] C. H. Yoo, S. V. Acra, Cross-Sectional properties of thin-walled multi-cellular section, *Computers & Structures*, 22(1), pp. 53-61, 1986
- [7.25] H. Rapp, Non-homogenous bars under tension, pure bending and thermal loads, *Composites Science and Technology*, 44, pp. 21-28, 1992
- [7.26] T. P. Philippidis, A. P. Vassilopoulos, K. G. Katopis, S. G. Voutsinas, THIN/PROBEAM: A software for fatigue design and analysis of composite rotor blades, *Wind Engineering*, 20(5), pp. 349-362, 1996
- [7.27] Malcolm DJ, Laird DL. Extraction of Equivalent Beam properties from blade models. *Wind Energy* 2007; 10 : 135-157
- [7.28] Hodges DH, Yu W. A rigorous, engineer-friendly approach for modelling realistic, composite rotor blades. *Wind Energy* 2007; 10 : 179-193
- [7.29] Philippidis TP, Vionis PS, Lekou DJ, Fragoulis AN. Rotor blade design verification by means of full scale testing, *Proc. of the EWEC97*, Dublin, Ireland, ed. R. Watson, publ. Irish Wind Energy Association, 1998; pp. 512-516
- [7.30] M. J. Hinton, P. D. Soden, Failure criteria for composite laminates, *Composites Science and Technology*, 58, pp. 1001-1010, 1998
- [7.31] P. D. Soden, M. J. Hinton, A. S. Kaddour, Comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, *Composites Science and Technology*, 58, pp. 1225-1254, 1998
- [7.32] M. J. Hinton, A. S. Kaddour, P. D. Soden, Comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates judged against experimental evidence, *Composites Science and Technology*, 62, pp. 1725-1797, 2002
- [7.33] S. W. Tsai, H. T. Hahn, *Introduction to Composite Materials*, (Technomic Publishing Co., 1980).
- [7.34] DIAB International AB., Divinycell HP, Technical Manual, www.diabgroup.com, 2007

- [7.35] D. J. Lekou, T. P. Philippidis, PRE- & POST-THIN: A Tool for the Probabilistic Design and Analysis of Composite Rotor Blade Strength, Wind Energy, Vol. 12 (7), pp. 676-691, 2009
- [7.36] K. Freudenreich, K. Argyriadis, Wind turbine load level based on extrapolation and simplified methods, Wind Energy, DOI: 10.1002/we.279, 2008
- [7.37] IEC/TS 61400-13:2001(E), Wind Turbine generator systems – Part 13: Measurement of mechanical loads, First Edition, 2001
- [7.38] P. W. Cheng, A reliability based design methodology for extreme responses of offshore wind turbines, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Delft, Ολλανδία, 2002
- [7.39] L. M. Fitzwater, Estimation of fatigue and Extreme load distributions from limited data with application to wind energy systems, Sandia Report, SAND-2004-0001, 2004

8 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Διεξήχθη μία θεωρητική και πειραματική μελέτη για την πρόβλεψη αστοχίας πολυστρώτων πλακών από πλαστικά ενισχυμένα με ίνες σε γενική επίπεδη εντατική κατάσταση, λαμβάνοντας υπόψη την στοχαστική φύση των βασικών μηχανικών και θερμομηχανικών ιδιοτήτων (αντοχής, ελαστικότητας, συντελεστών θερμικής διαστολής) του ορθοτρόπου μέσου καθώς και την επίδραση της στοχαστικότητας της φόρτισης. Σκοπός αυτής της μελέτης είναι η διαμόρφωση κανόνων και μεθοδολογίας για την πρόβλεψη της πιθανότητας αστοχίας κατασκευής από σύνθετα υλικά.

Σε μαθηματικούς όρους, το πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής πιθανότητας του κριτηρίου αστοχίας σε κάθε στρώση και σε κάθε σημείο μίας κατασκευής από σύνθετα υλικά, αν οι συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας των πέντε βασικών ιδιοτήτων αντοχής, των τεσσάρων ιδιοτήτων ελαστικότητας και των δύο συντελεστών θερμικής διαστολής του ορθοτρόπου μέσου (ή των ορθοτρόπων μέσων) είναι γνωστές από πειράματα, ενώ έχει γίνει εκτίμηση της στοχαστικότητας του φορτίου που αναπτύσσεται στην κατασκευή.

Στο πλαίσιο αυτό εκτελέστηκαν πειράματα σε σύνθετα υλικά (Carbon/Epoxy και Glass/Polyester) για την εκτίμηση της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων τους (5 ιδιότητες αντοχής, 4 ελαστικότητας και 2 συντελεστές θερμικής διαστολής), έγινε στατιστική αξιολόγηση των πειραματικών αποτελεσμάτων και μοντελοποιήθηκαν οι ιδιότητες αντοχής, ελαστικότητας και συντελεστών θερμικής διαστολής των στρώσεων των υλικών ως στοχαστικές και αναπτύχθηκαν μέθοδοι προσδιορισμού της πιθανότητας αστοχίας. Η ανάπτυξη των μεθόδων έγινε σταδιακά, ξεκινώντας από το επίπεδο της στρώσης θεωρώντας αρχικά μόνο τις ιδιότητες αντοχής ως στοχαστικές και στην συνέχεια της πολύστρωτης πλάκας, εισάγοντας και την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων ελαστικότητας και των συντελεστών θερμικής διαστολής, ενώ σε κάθε περίπτωση τα αποτελέσματα συγκρίνονταν είτε με διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα (κυρίως στο επίπεδο της στρώσης) είτε με αποτελέσματα προσομοίωσης με την μέθοδο Monte Carlo και την μέθοδο δείκτη β. Ουσιαστικά, αναπτύχθηκαν τρεις μέθοδοι και εισήχθησαν σε υπολογιστικό κώδικα, συγκεκριμένα δύο αναλυτικές (Edgeworth και Pearson) και μία ημι-ντετερμινιστική (μέθοδος βασικών μεταβλητών), ενώ εξετάστηκαν τα προτερήματα και τα μειονεκτήματα αυτών και παρουσιάστηκαν μέσω ορισμένων παραδειγμάτων.

Η ημι-ντετερμινιστική προσέγγιση (μέθοδος ποσοστιαίων σημείων βασικών μεταβλητών - BVM), προτάθηκε αρχικά για την περίπτωση όπου δεν λαμβάνεται υπόψη η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων ελαστικότητας. Σε αυτή την μέθοδο χρησιμοποιείται το κριτήριο αστοχίας όπως και στην συνηθισμένη ντετερμινιστική ανάλυση, αλλά οι τιμές των βασικών αντοχών ανταποκρίνονται σε συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας. Τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου συγκρινόμενα με την αναλυτική και με δεδομένα από προσομοίωση με την MC μέθοδο φαίνεται ότι είναι πολύ κοντά. Όμως, η μέθοδος BVM δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων ελαστικότητας αναμένεται να επηρεάσουν το αποτέλεσμα.

Η αναλυτική μέθοδος που βασίζεται στην μοντελοποίηση της κοινής συνάρτησης κατανομής της συνάρτησης αστοχίας μέσω της οικογένειας κατανομών πιθανότητας Pearson, εφαρμόστηκε μονό στο αρχικό μέρος της εργασίας για λόγους σύγκρισης για την περίπτωση στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής.

Η αναλυτική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε σε όλα τα στάδια της εργασίας, βασίζεται στην τεχνική ανάπτυγματος Edgeworth, όταν χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με το τετραγωνικό κριτήριο αστοχίας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για την πρόβλεψη του τόπου αστοχίας UD και MD πολυστρώτων σε γενική συνεπίπεδη κατάσταση φόρτισης, όταν συγκρίνεται με δεδομένα πειραματικά και προσομοίωσης με την μέθοδο MC καθώς και με την μέθοδο

δείκτη β. Ταυτόχρονα η αναλυτική μέθοδος που αναπτύχθηκε έχει πολύ μικρότερο υπολογιστικό κόστος από την μέθοδο δείκτη β και ασφαλώς από την Monte Carlo, αφού ο χρόνος ανάλυσης είναι συγκρίσιμος με τους χρόνους ντετερμινιστικών αναλύσεων.

Πρέπει δε να σημειωθεί ότι μέρος της εργασίας αφιερώθηκε στην ανάπτυξη κατάλληλου υπολογιστικού κώδικα για την εφαρμογή της μεθόδου δείκτη β, καθώς η μέθοδος δεν συνέκλινε σε ορισμένα σημεία κατά την διάρκεια των προσομοιώσεων που εκτελέστηκαν, ενώ σε άλλα συνέκλινε σε λάθος αποτέλεσμα.

Τέλος, αναπτύχθηκε ένα υπολογιστικό εργαλείο για την πιθανολογική ανάλυση αντοχής περυγίων ανεμογεννητριών, κατασκευασμένων από σύνθετα υλικά. Συγκεκριμένα, η αναλυτική μέθοδος που αναπτύχθηκε, βασισμένη στο ανάπτυγμα Edgeworth για την πρόβλεψη πιθανότητας αστοχίας των πολυστρώτων πλακών, εισήχθηκε σε κατάλληλες υπολογιστικές ρουτίνες, στην μορφή προ-επεξεργαστών και επεξεργαστών των αποτελεσμάτων, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με σύγχρονους αερο-ελαστικούς κώδικες. Έτσι το υπολογιστικό εργαλείο που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της εργασίας καθιστά δυνατή την ποσοτικοποίηση της αξιοπιστίας του σχεδιασθέντος περυγίου ανεμογεννήτριας.

Η εκτίμηση της αξιοπιστίας για το περύγιο γίνεται στο επίπεδο της στρώσης, ενώ δεν θεωρείται μόνο η στοχαστικότητα της φόρτισης του περυγίου και των ιδιοτήτων αντοχής του υλικού, αλλά λαμβάνεται υπόψη και η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων ελαστικότητας του υλικού κάθε στρώσης στην πολύστρωτη διάταξη. Η ανάλυση της κατασκευής του περυγίου εκτελείται θεωρώντας πολυκυψελικές λεπτότοιχες ετερογενείς διατομές από σύνθετα υλικά ενισχυμένα με ίνες, λαμβάνοντας υπόψη την εγγενή ανομοιογένεια και την ελαστική ανισοτροπία των στοιχείων της εκάστης διατομής του περυγίου. Εκτός από τις μηχανικές ορθές και διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται εξαιτίας των εξωτερικά εφαρμοζόμενων περυγίων, υπολογίζονται οι υγροθερμικές τάσεις που αναπτύσσονται εξαιτίας θερμοκρασιακών διαφορών και διαφορών στην συγκέντρωση υγρασίας.

Οι δυνατότητες της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε παρουσιάστηκαν μέσω παραδειγμάτων για την απόκριση του περυγίου υπό ακραία (στατική) φόρτιση, με τα αποτελέσματα από την μέθοδο ανάπτγματος Edgeworth να συγκρίνονται με αποτελέσματα με την μέθοδο Monte Carlo. Η καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων, καθώς και η ταχύτητα της ανάλυσης με την μέθοδο που αναπτύχθηκε έδειξε την καταλληλότητα του εργαλείου ως εργαλείο σχεδιασμού της κατασκευής, όταν ενδιαφερόμαστε για τον δομικό σχεδιασμό του περυγίου με επιθυμητό επίπεδο αξιοπιστίας.

8.1 Πρωτότυπα στοιχεία

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας δημιουργήθηκε μία ολοκληρωμένη βάση πειραματικών αποτελεσμάτων για τον στατιστικό χαρακτηρισμό των ιδιοτήτων συνθέτου υλικού που χρησιμοποιείται στην κατασκευή περυγίων ανεμογεννητριών. Είναι η πρώτη φορά που εκτός από τις ιδιότητες αντοχής, δημοσιεύονται αποτελέσματα για την μεταβλητότητα των ελαστικών ιδιοτήτων και των συντελεστών θερμικής διαστολής του υλικού.

Όσον αφορά την χρήση μεθόδων προσδιορισμού αξιοπιστίας κατασκευών είναι η πρώτη φορά που γίνεται εφαρμογή της τεχνικής ανάπτγματος Edgeworth. Παρόλο που η μέθοδος δεν δίνει πάντα αποτελέσματα με μεγάλη ακρίβεια σε μικρές πιθανότητες αστοχίας, ακολουθεί σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν τις προβλέψεις με την μέθοδο Monte Carlo (και την μέθοδο δείκτη β) είναι ιδιαίτερα εύχρηστη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά την διάρκεια του σχεδιασμού κατασκευών, χωρίς να προσφεύγουμε στην λύση της ντετερμινιστικής ανάλυσης, από την οποία δεν προκύπτει άμεσα γνώση για το επίπεδο αξιοπιστίας της κατασκευής, αλλά ούτε και να επιβραδύνουμε την διαδικασία σχεδιασμού χρησιμοποιώντας μεθόδους που απαιτούν επαναλήψεις (όπως είναι η Monte Carlo, αλλά και η μέθοδος δείκτη β).

Επίσης είναι η πρώτη φορά που προτείνεται η ημι-ντετερμινιστική προσέγγιση για τον σχεδιασμό υπό συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας κατασκευής συνθέτων υλικών. Η μέθοδος είναι απλούστατη, αλλά χρήζει περαιτέρω διερεύνησης, κυρίως όσον αφορά την εφαρμογή της σε κατασκευές όπου η μεταβλητότητα των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού αναμένεται να επηρεάσει την απόκριση της κατασκευής.

Στο πλαίσιο της εργασίας για πρώτη φορά έγινε εκτίμηση της μεταβλητότητας των ιδιοτήτων της διατομής πτερυγίου ανεμογεννήτριας βάσει της μεταβλητότητας των ελαστικών ιδιοτήτων των στρώσεων. Αυτό δίνει μία σημαντική δυνατότητα για την βελτίωση των πτερυγίων ανεμογεννητριών και κατ' επέκταση των ίδιων των ανεμογεννητριών, μέσω αεροελαστικών προσομοιώσεων της απόκρισης της κατασκευής λαμβάνοντας υπόψη όχι μόνο την στοχαστικότητα του αέρα, αλλά και την στοχαστικότητα της ίδιας της κατασκευής.

Τέλος στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας αναπτύχθηκε μεθοδολογία για την εκτίμηση της αξιοπιστίας πτερυγίου ανεμογεννήτριας υπό ακραία φόρτιση, λαμβάνοντας υπόψη όχι μόνο τις ορθές, αλλά και τις διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε σημείο της κατασκευής, καθώς επίσης εισάγοντας εκτός από την μεταβλητότητα των ιδιοτήτων αντοχής και την στοχαστική φύση των ιδιοτήτων ελαστικότητας. Επίσης, για πρώτη φορά η εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας στο περύγιο γίνεται στο επίπεδο της στρώσης, χρησιμοποιώντας κριτήρια αστοχίας κατάλληλα για στρώσεις συνθέτου υλικού και όχι στο επίπεδο της πολύστρωτης. Επιπρόσθετα η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε δεν έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος, με αποτέλεσμα να μπορεί να εφαρμοστεί κατά την διάρκεια του σχεδιασμού πτερυγίων ανεμογεννητριών, όπου απαιτείται μεγάλος αριθμός δοκιμαστικών αναλύσεων έως ότου καταλήξει κανείς στα τελικά κατασκευαστικά σχέδια.

8.2 Μελλοντική εργασία

Λογική συνέχεια της παρούσας εργασίας είναι αφενός η επιβεβαίωση των θεωρητικών αποτελεσμάτων με πειράματα. Τα προβλήματα όμως που υπάρχουν για να εκτελεστεί ένα πρόγραμμα για την επιβεβαίωση θεωρητικών προβλέψεων όχι μόνο της εργασίας αυτής, αλλά και άλλων συναφών, δοθέντος ότι τα πειράματα σε σύνθετα υλικά είναι εξαιρετικά ακριβά είναι τα παρακάτω:

1. Πειράματα σε στρώσεις σε γενική επίπεδη εντατική κατάσταση: θα πρέπει να μπορεί να εφαρμοστεί φορτίο σε δύο διευθύνσεις, ξεπερνώντας τα προβλήματα των πειραματικών μεθόδων. Από τις ήδη ανεπτυγμένες πειραματικές μεθόδους, δεν υπάρχουν σαφή συμπεράσματα, όσον αφορά τις διαστάσεις των δοκιμίων, την μορφή των δοκιμίων, και τις πειραματικές ιδιοσυσκευές που απαιτούνται για την εκτέλεση τέτοιων πειραμάτων [8.1].
2. Πειράματα σε στρώσεις: Θα πρέπει να βρεθεί σαφής σχέση ελαστικότητας, αντοχής, διαστάσεων και διαφόρων άλλων πειραματικών παραμέτρων, όπως για παράδειγμα η ταχύτητα φόρτισης, ώστε τα πειραματικά αποτελέσματα που εξάγονται σε αυτό το επίπεδο να μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στο επίπεδο της πολύστρωτης ή ακόμα και της κατασκευής.
3. Πειράματα σε πολύστρωτες: Θα πρέπει καταρχήν να προσδιοριστεί η αστοχία της πολύστρωτης. Δηλαδή θα πρέπει να ξεκαθαριστεί αν αναφερόμαστε στην αστοχία πρώτης στρώσης ή στην ολική αστοχία της πολύστρωτης. Σε περίπτωση που γίνεται θεώρηση της αστοχίας πρώτης στρώσης θα πρέπει να βρεθεί κατάλληλη μέθοδος για την μέτρησή της, όπως ακουστική εκπομπή.

Όσον αφορά την ολική αστοχία της πολύστρωτης, η μέθοδος θα πρέπει να αναπτυχθεί περαιτέρω, σε συνδυασμό πιθανόν με υπάρχουσες θεωρητικές μεθόδους για την πρόβλεψη της αξιοπιστίας (ή της πιθανότητας αστοχίας) όταν η ανάλυση γίνεται με σταδιακή αστοχία (progressive damage).

Τα πρωτότυπα στοιχεία της εργασίας όσον αφορά την εφαρμογή της μεθοδολογίας για την εκτίμηση αξιοπιστίας πτερυγίου ανεμογεννήτριας, ανοίγουν νέους δρόμους έρευνας για τις συγκεκριμένες κατασκευές. Δίνεται η δυνατότητα αφενός να ληφθεί υπόψη η μεταβλητότητα των ελαστικών ιδιοτήτων του πτερυγίου κατά τις αεροελαστικές αναλύσεις που πραγματοποιούνται για την πρόβλεψη της απόκρισης της κατασκευής (ανεμογεννήτριας) καθώς και την πρόβλεψη των φορτίων που αναπτύσσονται στην κατασκευή (ανεμογεννήτρια και πτερύγια). Αφετέρου δίνεται η δυνατότητα σχεδιασμού πτερυγίων ανεμογεννητριών με συγκεκριμένο επίπεδο αξιοπιστίας, περιορίζοντας την χρήση συντελεστών ασφαλείας για τις ιδιότητες των υλικών. Η δεύτερη αυτή δυνατότητα ανοίγει νέους δρόμους στην περιοχή της αιολικής ενέργειας, αφού εφαρμογή τέτοιας μεθοδολογίας αναμένεται να μειώσει το βάρος της κατασκευής βελτιστοποιώντας την χρήση υλικού στην κατασκευή με τα επακόλουθα αποτελέσματα.

Περαιτέρω ανάπτυξη της μεθοδολογίας ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί και για την πρόβλεψη αξιοπιστίας της κατασκευής υπό ελαστική ευστάθεια και κοπωτική φόρτιση θα είχε ως αποτέλεσμα την ολοκλήρωση της έρευνας σε αυτή την διεύθυνση.

8.3 Βιβλιογραφία

- [8.1] Found MS, “A review of the multiaxial fatigue testing of fiber reinforced plastics”, *Multiaxial Fatigue*, ASTM STP 853, K. J. Miller and M. W. Braun, Eds., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1985, pp. 381-395

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Α. ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

A.1 Πειραματικά αποτελέσματα C/Er

Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζονται οι πίνακες με τα αποτελέσματα των δοκιμών που διενεργήθηκαν στα δοκίμια ινών άνθρακα σε εποξειδική ρητίνη C/Er, τα οποία κατασκευάστηκαν με την μέθοδο της περιέλιξης στις $\pm 55^\circ$ και στις $\pm 45^\circ$.

Τα δοκίμια κόπηκαν από πλάκες που δημιουργήθηκαν μετά την δημιουργία σωλήνα (με την μέθοδο της περιέλιξης των ινών). Κάποιες από τις πλάκες (με διεύθυνση ινών $\pm 55^\circ$) που παραδόθηκαν από τον κατασκευαστή για την πειραματική εργασία είχαν επιφάνειες που παρουσίαζαν εμφανείς ατέλειες. Έτσι πριν από την εκκίνηση της πειραματικής εργασίας είχε αποφασιστεί η διερεύνηση της καταλληλότητας των συγκεκριμένων πλακών για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων του υλικού και η σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο ομάδων πλακών. Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα (ιδιαίτερα για τις δοκιμές σε εφελκυσμό, όπου γινόταν και μετρήσεις για τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού) και από τις δύο ομάδες δοκιμών. Όμως οι δοκιμές που απορρίπτονται σημειώνονται καθαρά στα πειραματικά αποτελέσματα. Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι για τα πειράματα σε θλίψη, εξαιτίας της μεγάλης διαφοράς των αποτελεσμάτων μεταξύ των πλακών σε εφελκυσμό, κόπηκαν και δοκιμάστηκαν δοκίμια μόνο από τις πλάκες που δεν είχαν εμφανείς ατέλειες.

Π.Α.1. Πειράματα κατά την αξονική διεύθυνση των δοκιμών με ίνες στις $\pm 55^\circ$ σε εφελκυσμό και θλίψη

Εφελκυσμός					Θλίψη		
Κωδικός	Τάση (MPa)	E_x (GPa)	ν_{xy}	Παρατηρήσεις	Κωδικός	Τάση (MPa)	Παρατηρήσεις
55A1	17.33			Απορρίπτεται	C-55A1	172.21	
55A2	20.77			Απορρίπτεται	C-55A2	109.27	
55A3	15.22			Απορρίπτεται	C-55A3	185.75	
55A4	16.58			Απορρίπτεται	C-55A4	152.46	
55A5	13.93			Απορρίπτεται	C-55A5	135.72	
55A6	17.59	2.43	0.312	Απορρίπτεται	C-55A6	138.25	
55A7	15.42	4.83	0.445	Απορρίπτεται	C-55A7	151.97	
55A8	18.55	2.75	0.316	Απορρίπτεται	C-55A8	157.80	
55A9	12.26	2.10	0.271	Απορρίπτεται	C-55A9	91.02	
55A10	13.40	1.82	0.202	Απορρίπτεται	C-55A10	151.91	
55A11	44.08				C-55A11	185.43	
55A12	44.45				C-55A12	146.98	
55A13	41.85				C-55A13	131.09	
55A14	40.74				C-55A14	134.32	
55A15	36.69				C-55A15	145.65	
55A16	43.23				C-55A16	117.02	
55A17	37.02				C-55A17	127.57	
55A18	40.91				C-55A18	137.84	
55A19	41.31				C-55A19	125.84	
55A20	42.94				C-55A20	137.27	
55A21	40.78	5.87	0.453	Αρχική ολίσθηση	C-55A21	142.19	
55A22	39.04	6.78	0.455		C-55A22	98.71	
55A23				No record	C-55A23	158.89	
55A24	39.61	6.83	0.597		C-55A24	165.05	
55A25	41.78	6.75		Πρόβλημα στο ϵ_y			
55A26	38.92	5.50	0.448				
55A27	40.64	5.92	0.469				
55A28	37.94	6.71	0.578				
55A29	38.00	7.60	0.486				
55A30	39.31	5.44	0.511				

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

Π.Α.2. Πειράματα κατά την περιμετρική διεύθυνση των δοκιμίων με ίνες στις $\pm 55^\circ$

Εφελκυσμός					Θλίψη		
Κωδικός	Τάση (MPa)	E_Y (GPa)	ν_{YX}	Παρατηρήσεις	Κωδικός	Τάση (MPa)	Παρατηρήσεις
55H1	119.09			Απορρίπτεται	C-55H1	121.79	
55H2	125.83			Απορρίπτεται	C-55H2	117.59	
55H3	118.82			Απορρίπτεται	C-55H3	115.27	
55H4	95.54			Απορρίπτεται	C-55H4	122.11	
55H5	112.30			Απορρίπτεται	C-55H5	134.62	
55H6	134.86	16.36	1.392	Απορρίπτεται	C-55H6	127.83	
55H7	126.78	21.60	1.666	Απορρίπτεται	C-55H7	98.60	
55H8	80.35	10.80	1.503	Απορρίπτεται	C-55H8	137.18	
55H9	91.14	13.55	1.677	Απορρίπτεται	C-55H9	130.95	
55H10	114.65	17.65	1.231	Απορρίπτεται	C-55H10	107.97	
55H11	217.31				C-55H11	120.10	
55H12	204.18				C-55H12	203.70	
55H13	202.65				C-55H13	99.54	
55H14	217.35				C-55H14	133.77	
55H15	243.29				C-55H15	127.36	
55H16	192.06				C-55H16	134.77	
55H17	198.54				C-55H17	131.87	
55H18	198.79				C-55H18	123.92	
55H19	198.07				C-55H19	115.06	
55H20	198.70				C-55H20	135.18	
55H21	154.39	12.59	1.322		C-55H21	160.46	
55H22	154.84	13.83	1.233		C-55H22	115.76	
55H23	146.29	13.40	1.372		C-55H23	132.17	
55H24	158.68	14.63	1.223		C-55H24	140.29	
55H25	134.85	13.93	1.127				
55H26	143.87	11.96	1.066				
55H27	136.90	14.74	1.302				
55H28	144.46	17.96	1.588				
55H29	158.58	15.36	1.290	Θραύση κοντά στο tab			
55H30	152.24	13.48	1.265	Αποκόλληση tab			

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

Π.Α.3. Πειράματα στις 45° ως προς την αξονική διεύθυνση των δοκιμών με ίνες στις ±55°

Κωδικός	Τάση (MPa)	E (GPa)	Λόγος Poisson	Διατμητική Αντοχή (MPa)	G _{xy} (MPa)	Παρατηρήσεις
55D1	61.29			30.65		Απορρίπτεται
55D2	33.85			16.93		Απορρίπτεται
55D3	69.20			34.60		Απορρίπτεται
55D4	49.45			24.73		Απορρίπτεται
55D5	64.13			32.07		Απορρίπτεται
55D6	82.46	16.83	-0.267	41.23	11.48	Απορρίπτεται
55D7	88.13	15.14	-0.203	44.07	9.50	Απορρίπτεται
55D8	68.83	17.53	-0.524	34.41	18.41	Απορρίπτεται
55D9	50.48	12.41	-0.423	25.24	10.75	Απορρίπτεται
55D10	81.50	19.43	-0.230	40.75	12.62	Απορρίπτεται
55D21	123.90	31.00	-0.192	61.95	19.18	
55D22	128.79	36.12	-0.315	64.40	20.88	
55D23	135.76	32.43	-0.144	67.88	18.93	Απόκλιση μηκυνσιομέτρου από άξονα
55D24	161.25	30.73	-0.104	80.63	17.14	
55D25	121.89	24.64	-0.256	60.94	16.57	
55D26	121.62	22.39	-0.179	60.81	13.63	
55D27	107.88	30.31	-0.149	53.94	17.82	
55D28	125.81	22.74	-0.122	62.90	12.94	
55D29	123.26	27.71	-0.215	61.63	17.66	

Π.Α.4. Πειράματα κατά την Αξονική διεύθυνση των δοκιμίων με ίνες στις $\pm 45^\circ$

Εφελκυσμός					Θλίψη		
Κωδικός	Τάση (MPa)	E_Y (GPa)	ν_{YX}	Παρατηρήσεις	Κωδικός	Τάση (MPa)	Παρατηρήσεις
45A1	60.82				C-45A1	112.65	
45A2	66.11				C-45A2	126.67	
45A3	61.79				C-45A3	154.76	
45A4	69.24				C-45A4	149.06	
45A5	61.56				C-45A5	130.69	
45A6	58.41	5.54	0.810		C-45A6	133.96	
45A7	55.87	6.74	0.863		C-45A7	121.09	
45A8	59.18	8.39	0.838		C-45A8	122.79	
45A9	62.29	8.10	0.931		C-45A9	84.00	
45A10	58.37	6.77	0.792		C-45A10	88.12	
45A11	70.44	9.27	0.864		C-45A11	129.54	
45A12	60.48	7.27	0.815		C-45A12	109.90	
45A13	70.68	10.23	0.824		C-45A13	114.78	
45A14	74.61	7.34	0.736	Πιθανό πρόβλημα ηλεκτρομηκυσιομέτρου	C-45A14	113.29	
45A15	59.89	9.58	0.787		C-45A15	141.06	
45A16	58.40				C-45A16	145.09	
45A17	62.54				C-45A17	104.22	
45A18	55.21				C-45A18	96.08	
45A19	70.81				C-45A19	124.33	
45A20	56.26				C-45A20	136.78	
45A21	71.31				C-45A21	110.71	
45A22	54.26				C-45A22	159.64	
45A23	59.09				C-45A23	122.51	
45A24	64.85				C-45A24	100.09	
45A25	57.48				C-45A25	132.69	
45A26	57.38				C-45A26	121.12	
45A27	65.44				C-45A27	131.68	
45A28	58.20				C-45A28	131.58	
45A29	64.21				C-45A29	141.40	
45A30	58.30						
45A31	57.26						
45A32	60.70						
45A33	54.15						
45A34	56.53						
45A35	56.39						

Π.Α.5. Πειράματα στις 45° ως προς την αξονική διεύθυνση των δοκιμίων με ίνες στις ±45°

Κωδικός	Τάση (MPa)	E (GPa)	Λόγος Poisson	Διατμητική Τάση (MPa)	G _{xy} (GPa)	Παρατηρήσεις
45D1	656.76			328.38		Δεν έγραφε δεκαδικά
45D2	338.18			169.09		
45D3	259.42			129.71		
45D4	364.10			182.05		
45D5	381.08	25.93	0.006	190.54	12.887	Έσπασε το tab
45D6	444.42	30.97	0.112	222.21	13.919	
45D7	451.42	47.95	0.161	225.71	20.657	
45D8	407.44	24.15	0.036	203.72	11.654	
45D9	421.22	27.21	0.078	210.61	12.620	Έσπασε το tab
45D11	481.14	39.50	0.008	240.57	19.593	
45D12	492.3	38.91	0.063	246.15	18.299	
45D13	458.92	31.33	0.056	229.46	14.828	
45D14	433.94	37.66	0.284	216.97	14.658	Διαφορετική μορφή θραύσης
45D15	293.10	35.49	0.154	146.55	15.380	
45D16	401.12			200.56		
45D17	446.80			223.40		
45D18	340.74			170.37		Έσπασε η αρπάγη
45D19	222.20			111.10		
45D20	343.42			171.71		
45D21	370.46			185.23		
45D22	326.12			163.06		
45D23	340.04			170.02		
45D24	347.92			173.96		
45D25	325.10			162.55		
45D26	418.16			209.08		
45D27	227.94			113.97		
45D28	466.10			233.05		
45D29	509.24			254.62		
45D30	399.44			199.72		
45D31	339.38			169.69		

A.2 Πειραματικά Αποτελέσματα GI/P

Στους πίνακες που ακολουθούν παρατίθενται τα αποτελέσματα αναλυτικά για κάθε δοκίμιο από την πειραματική εργασία που εκτελέστηκε για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων αντοχής και ελαστικότητας του σύνθετου υλικού ινών γυαλιού σε πολυεστερική μήτρα (με ίνες προσανατολισμένες σε μία διεύθυνση). Στους πίνακες αυτούς όπου δεν αναγράφεται το πλάτος και το πάχος αντίστοιχα είναι το μέσο πλάτος και πάχος, όπως προέκυψε από μέτρηση σε 5 σημεία κατά μήκος του δοκιμίου. Στον πίνακα Π. Α.6, τα αποτελέσματα για τα δοκίμια A-01 ως A-10 δεν συμπεριλαμβάνονται στην στατιστική ανάλυση, εφόσον εκτελέστηκαν σε διαφορετική μηχανή εφελκυσμού (Mayes). Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι από τα αποτελέσματα των δοκιμών σε εφελκυσμό κατά την διεύθυνση των ινών, που παρουσιάζονται στον πίνακα Π. Α.6, τα αποτελέσματα του δοκιμίου A-33 απορρίφθηκαν, εξαιτίας της μεγάλης διασποράς που παρουσίαζε η γεωμετρία του, σε συνδυασμό με την θραύση του κατά την οποία φάνηκε ότι δεν είναι χαρακτηριστική για τα δοκίμια αυτού του τύπου. Επίσης τα αποτελέσματα του δοκιμίου A-38 για τον προσδιορισμό του λόγου Poisson απορρίφθηκαν, λόγω της μεγάλης διασποράς που παρουσιάζει το διάγραμμα αξονικής και εγκάρσιας παραμόρφωσης στην γραμμική περιοχή, με αποτέλεσμα την αδυναμία προσδιορισμού του λόγου Poisson για αυτό το δοκίμιο. Στον πίνακα Π. Α.7, όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δοκιμών που εκτελέστηκαν σε δοκίμια σε θλίψη κατά την διεύθυνση των ινών, σημειώνεται ότι στα δοκίμια που έχουν σημειωθεί με * η θραύση έγινε πολύ κοντά στην περιοχή των αρπαγών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

Π.Α.6. Πειράματα σε εφελκυσμό κατά την διεύθυνση των ινών

Κωδικός	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Διατομή (mm ²)	Μεγ. Δύναμη (kN)	Χ _T (MPa)	E _X (GPa)	ν _{XY}	Θερμ/σία (°C)	Υγρασία (%RH)
A-01	26.7	1.82	48.741	13.65	280.05				
A-02	25.7	1.91	49.174	14.24	289.58				
A-03	25.5	1.88	48.051	16.00	332.98				
A-04	24.9	1.82	45.217	16.18	357.83				
A-05	25.6	1.95	49.948	18.00	360.38				
A-06	25.2	1.94	48.919	19.41	396.78				
A-07	24.6	1.98	48.763	14.80	303.51				
A-08	25.3	1.95	49.311	16.01	324.67				
A-09	25.7	1.99	51.178	17.35	339.01				
A-10	25.8	1.91	49.289	17.04	345.71				
A-11	25.2	1.94	48.907	17.64	360.75	22.090	0.27	16.88	74.12
A-12	26.5	1.92	50.944	15.81	310.40	24.000	0.31	16.41	75.10
A-13	24.8	1.94	48.123	17.45	362.55	20.680	0.34	17.81	74.51
A-14	26.1	1.93	50.504	17.67	349.82	20.890	0.40	12.81	66.70
A-15	24.9	1.80	44.988	17.17	381.76	25.090	0.32	13.44	68.36
A-16	24.3	1.85	44.907	14.64	326.02	23.100	0.25	17.19	75.29
A-17	25.8	1.89	48.901	19.80	404.94	21.770	0.27	19.34	75.40
A-18	26.5	1.89	50.142	21.69	432.60				
A-19	25.8	1.83	47.251	19.73	417.62	21.210	0.33	13.10	73.50
A-20	26.5	2.09	55.374	19.56	353.25	22.290	0.30	18.59	81.93
A-21	24.0	1.85	44.433	17.58	395.74			11.95	50.10
A-22	25.5	1.87	47.593	17.68	371.44	24.790	0.32	13.28	71.39
A-23	26.6	1.80	47.881	21.32	445.25	20.380	0.28	19.34	75.40
A-24	25.2	1.96	49.256	19.71	400.20	23.160	0.38	12.97	68.46
A-25	26.0	1.96	50.929	20.38	400.26	23.090	0.29	17.58	72.27
A-26	26.3	1.85	48.550	17.73	365.26	24.650	0.34	13.13	66.99
A-27	25.5	1.90	48.522	16.97	349.83	21.980	0.32	13.59	68.65
A-28	26.7	1.90	50.627	19.94	393.79	23.670	0.36	19.20	75.10
A-29	26.8	1.80	48.344	20.35	420.88			16.72	84.96
A-30	26.9	1.84	49.626	16.97	341.91	22.250	0.21	12.73	65.92
A-31	26.4	1.82	48.079	20.57	427.78	21.240	0.31	19.80	74.90
A-32	26.0	1.80	46.777	15.17	324.26			16.95	85.25
A-33*	26.3	1.92	50.401	10.19	202.10			11.64	52.15
A-34	25.1	2.03	50.853	14.09	277.12	23.690	0.36	13.05	67.38
A-35	25.1	1.79	44.947	23.51	523.10	24.930	0.27	13.52	71.09
A-36	26.2	1.89	49.480	23.05	465.91	24.930	0.26		
A-37	26.1	1.90	49.533	20.03	404.30	24.470	0.34	17.81	74.51
A-38*	25.0	1.80	44.964	20.98	466.62	21.010	0.18	19.80	74.90
A-39	25.0	1.91	47.788	20.12	420.93	20.460	0.29	20.23	72.46
A-40	25.1	1.83	45.878	20.43	445.37	19.710	0.18		
A-41	26.3	1.73	45.568	22.81	500.53	29.450	0.22	17.04	76.43
A-42	26.7	1.61	42.987	21.22	493.53			11.64	52.15
A-43	25.4	1.68	42.588	17.05	400.28			11.95	50.10

Π. Α.7. Πειράματα σε θλίψη κατά την διεύθυνση των ινών

Κωδικός	Μέσο Πλάτος (mm)	Μέσο Πάχος (mm)	Διατομή (mm ²)	Μέγ. Δύναμη (kN)	X _c (MPa)
C-A-1	24.9	1.86	46.406	-14.82	319.38
C-A-2	25.1	1.72	43.194	-14.86	344.09
C-A-3	24.2	1.74	42.001	-14.18	337.61
C-A-4	24.4	1.83	44.650	-14.67	328.47
C-A-5	24.1	1.78	42.763	-11.77	275.32
C-A-6	24.9	1.82	45.502	-15.01	329.98
C-A-7*	24.1	1.74	41.900	-13.13	313.33
C-A-8*	24.3	1.75	42.455	-15.90	374.45
C-A-9	24.7	1.77	43.758	-13.88	317.20
C-A-10	25.0	1.87	46.760	-16.98	363.05
C-A-11	25.4	1.85	46.844	-13.90	296.67
C-A-12	24.5	1.82	44.565	-14.82	332.66
C-A-13	24.5	1.74	42.619	-17.11	401.40
C-A-14*	24.8	1.73	42.894	-15.12	352.53
C-A-15	25.5	1.76	44.903	-13.28	295.75
C-A-16*	25.0	1.74	43.483	-16.22	373.12
C-A-17	25.2	1.92	48.408	-15.40	318.21
C-A-18	26.4	1.73	45.741	-14.60	319.20
C-A-19	26.2	1.66	43.459	-15.75	362.38
C-A-20	26.5	1.81	48.037	-13.86	288.51
C-A-21	25.9	1.64	42.443	-14.45	340.35
C-A-22*	24.7	1.68	41.412	-16.22	391.78
C-A-23	26.2	1.65	43.148	-13.90	322.25
C-A-24	26.0	1.68	43.730	-13.46	307.70
C-A-25	26.0	1.69	43.923	-13.63	310.28
C-A-26	25.2	1.88	47.451	-14.19	298.98
C-A-27	26.8	1.72	46.027	-13.13	285.31
C-A-28	26.6	1.70	45.186	-14.14	312.98
C-A-29	26.5	1.66	44.040	-12.66	287.54
C-A-30	26.7	1.74	46.475	-17.33	372.84

Π. Α.8. Πειράματα σε εφελκυσμό κάθετα στην διεύθυνση των ινών

Κωδικός	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Διατομή (mm ²)	Μέγ. Δύναμη (kN)	Y _T (MPa)	E _y (GPa)	Θερ/σία (°C)	Υγρασία (%RH)
K-1	26.8	1.88	50.448	2.40	47.59	8.613	11.80	50.29
K-2	25.5	2.07	52.915	1.86	35.14		12.89	53.91
K-3	26.0	1.88	48.999	1.49	30.49	6.456	16.41	74.41
K-4	25.1	2.15	53.972	2.68	49.59		13.13	52.44
K-5	25.8	1.96	50.585	1.54	30.42	8.258	16.41	74.41
K-6	24.9	1.85	46.205	2.06	44.49	6.026	11.80	55.27
K-7	26.4	2.00	52.666	2.39	45.39	11.63	13.98	52.44
K-8	25.4	2.05	52.001	2.30	44.24	6.794	12.89	53.91
K-9	25.8	1.83	47.104	1.73	36.76	7.875	11.80	55.27
K-10	25.7	1.99	51.103	1.75	34.29		16.56	85.45
K-11	25.3	1.99	50.407	1.49	29.64	7.868	12.11	50.39
K-12	24.7	1.90	46.892	1.52	32.37	7.612	17.11	79.20
K-13	23.8	1.83	43.554	1.87	43.01		13.13	52.44
K-14	25.1	1.98	49.619	1.92	38.79	7.636	13.44	52.34
K-15	26.2	2.28	59.827	2.24	37.47	6.162	17.27	77.71

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

K-16	24.3	2.25	54.653	1.59	29.16	7.087		
K-17	26.2	1.83	47.891	1.73	36.16	9.704	11.88	49.90
K-18	26.4	2.00	52.700	1.33	25.21	6.349	17.19	77.83
K-19	26.9	1.84	49.533	1.84	37.12	9.132	13.44	52.34
K-20	26.0	1.94	50.343	2.01	39.88	6.41	13.59	52.73
K-21	26.4	1.92	50.726	1.57	30.94	6.865	16.80	79.70
K-22	23.5	1.93	45.355	1.81	39.93	8.88	12.19	54.10
K-23	25.8	1.94	50.033	1.73	34.61	7.093	12.19	54.10
K-24	26.3	2.15	56.545	1.82	32.15	5.324	12.27	50.29
K-25	26.2	2.13	55.891	1.77	31.66	8.218	13.59	52.73
K-26	26.2	1.94	50.906	1.79	35.10	9.151	11.80	55.27
K-27	25.3	1.91	48.380	1.79	37.01	7.264	12.27	50.29
K-28	26.2	2.11	55.324	2.00	36.22	8.85	12.58	53.80
K-29	26.7	1.96	52.332	1.58	30.26		13.13	52.44
K-30	25.4	1.91	48.495	1.52	31.44	11.8	12.81	53.91

Π. Α.9. Πειράματα σε θλίψη κάθετα στην διεύθυνση των ινών

Κωδικός	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Διατομή (mm ²)	Μέγ. Δύναμη (kN)	Y _c (MPa)	Παρατηρήσεις
C-K-1	25.8	2.02	52.253	-8.76	167.71	Λυγισμός
C-K-2	26.3	1.90	49.876	-8.74	175.15	
C-K-3	24.1	2.55	61.389	-8.50	138.43	
C-K-4	26.0	1.98	51.388	-8.29	161.34	
C-K-5	25.4	1.98	50.394	-7.01	139.08	
C-K-6	25.3	1.86	46.965	-7.42	157.97	
C-K-7	25.8	1.85	47.652	-6.82	143.17	
C-K-8	25.0	2.31	57.792	-7.77	134.40	
C-K-9	24.5	1.79	43.983	-6.23	141.71	
C-K-10	25.6	1.81	46.496	-6.56	141.02	
C-K-11	24.5	2.14	52.462	-5.84	111.38	
C-K-12	25.3	1.89	47.792	-7.15	149.53	
C-K-13	25.4	1.88	47.797	-6.70	140.14	
C-K-14	25.2	1.85	46.624	-6.08	130.43	
C-K-15	25.3	1.80	45.537	-6.57	144.22	
C-K-16	24.7	1.89	46.614	-7.04	150.94	
C-K-17	24.9	2.83	70.435	-9.47	134.40	
C-K-18	25.0	1.87	46.802	-6.58	140.54	Νερό Κόλλησε το antibuckling Κόλλησε το antibuckling
C-K-19	25.1	1.90	47.703	-7.14	149.74	
C-K-20	24.8	2.00	49.746	-8.36	168.13	
C-K-21	25.5	1.85	47.099	-6.94	147.41	
C-K-22	25.4	1.80	45.883	-8.05	175.37	
C-K-23	25.8	2.09	53.919	-8.17	151.53	Κόλλησε το antibuckling
C-K-24	25.4	1.84	46.772	-6.62	141.59	
C-K-25	25.4	1.90	48.227	-7.58	157.19	
C-K-26	26.8	1.79	48.097	-7.51	156.04	
C-K-27	25.9	1.87	48.560	-6.49	133.68	
C-K-28	24.4	2.11	51.507	-8.87	172.15	
C-K-29	25.9	1.78	46.070	-5.90	128.03	
C-K-30	25.1	1.99	49.777	-6.86	137.89	

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

Π. Α.10. Πειράματα σε εφελκυσμό στις 45° ως προς την διεύθυνση των ινών

Κωδικός	Πλάτος (mm)	Πάχος (mm)	Διατομή (mm ²)	Μέγ. Δύναμη (kN)	Τάση (MPa)	E (GPa)	Poisson	Θερμ/σία (°C)	Υγρασία (%RH)
Δ-1	25.3	2.20	55.640	1.70	30.57			11.64	52.15
Δ-2	24.9	1.92	47.678	1.78	37.33			12.27	51.37
Δ-3	27.6	1.86	51.192	1.73	33.83			12.27	51.37
Δ-4	23.9	1.84	43.961	1.51	34.37			12.27	51.37
Δ-5	23.4	1.88	44.091	0.00	0.00				
Δ-6	24.2	2.34	56.534	1.90	33.62	5.357	0.45	16.88	74.80
Δ-7	25.2	1.91	48.252	1.46	30.24	6.323	0.44	15.63	75.29
Δ-8	25.8	1.94	50.133	1.60	31.85				
Δ-9	24.4	1.90	46.288	1.58	34.21			12.27	51.37
Δ-10	25.3	1.80	45.374	1.13	24.87	4.889	0.65	16.17	74.80
Δ-11	25.6	1.88	48.087	1.54	32.00	5.544	0.46	12.19	53.13
Δ-12	25.5	1.88	47.774	1.70	35.67	4.064	0.39	10.59	57.80
Δ-13	25.2	1.86	46.747	1.43	30.55	4.957	0.53	15.78	74.90
Δ-14	25.7	2.31	59.424	1.85	31.12	4.807	0.52	16.09	73.93
Δ-15	24.9	1.83	45.692	1.62	35.41	6.304	0.42	13.05	65.23
Δ-16	24.1	1.88	45.234	1.86	41.18	7.316	0.39	10.59	57.80
Δ-17	24.8	1.95	48.455	1.56	32.25	5.681	0.41	16.09	74.51
Δ-18	26.0	1.74	45.112	1.79	39.69	5.981	0.72	12.03	51.86
Δ-19	24.3	1.82	44.231	0.82	18.65	3.419	0.73	12.89	65.53
Δ-20	25.5	2.13	54.221	2.11	39.00	6.207	0.41	11.95	54.00
Δ-21	26.8	1.78	47.544	1.18	24.89	4.333	0.64	10.55	59.47
Δ-22	25.9	1.67	43.236	1.58	36.62	3.863	0.58	12.27	51.07
Δ-23	26.3	1.73	45.473	1.26	27.70	3.646	0.51	11.95	54.00
Δ-24	25.9	1.80	46.715	1.28	27.40	4.143	0.65	11.56	56.30
Δ-25	26.2	1.81	47.332	1.59	33.67	4.206	0.68	12.73	66.02
Δ-26	27.2	1.83	49.739	1.62	32.53			11.80	52.05
Δ-27	26.1	1.79	46.773	1.49	31.94	4.391	0.52	11.41	55.86
Δ-28	26.2	1.72	45.081	1.48	32.91	5.231	0.62	12.81	65.53
Δ-29	25.2	1.81	45.684	1.35	29.53	4.134	0.66	12.19	53.13
Δ-30	26.5	1.74	46.110	1.46	31.57	4.619	0.64	12.11	50.98
Δ-31	26.6	1.88	49.970	1.29	25.89	2.204	0.69	11.95	54.00
Δ-32	25.0	1.89	47.326	0.77	16.34	3.233	0.69	11.80	52.05
Δ-33	25.6	1.88	48.147	0.91	18.85	4.922	0.65	12.89	65.63
Δ-34	26.2	1.87	48.975	1.29	26.35	4.935	0.40	12.89	64.94
Δ-35	27.7	1.79	49.637	1.88	37.81	5.575	0.57	12.97	64.94
Δ-36	26.2	1.79	46.826	1.10	23.58	3.493	0.64	12.42	66.31
Δ-37	26.6	1.86	49.457	1.47	29.79	5.544	0.37	13.13	64.55
Δ-38	26.3	1.74	45.727	1.29	28.30	4.683	0.67	11.80	52.05

Π. Α.11. Αποτελέσματα Δοκιμών για την Διατμητική Αντοχή και το μέτρο Διάτμησης του Υλικού

Κωδικός	S (MPa)	G _{xy} (MPa)	Παρατηρήσεις
45-1	15.283		
45-2	18.667		
45-3	16.914		
45-4	17.186		
45-5			
45-6	16.810	1.850	
45-7	15.122	2.196	

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

45-8	15.927		
45-9	17.105		
45-10	12.434	1.478	
45-11	15.999	1.895	
45-12	17.836	1.467	
45-13	15.277	1.624	
45-14	15.558	1.586	
45-15	17.705	2.224	
45-16	20.590	2.641	
45-17	16.126	2.008	
45-18	19.844	1.738	
45-19	9.326	0.987	Απορρίπτεται
45-20	19.498	2.204	
45-21	12.447	1.319	
45-22	18.312	1.221	
45-23	13.848	1.204	
45-24	13.701	1.254	
45-25	16.837	1.251	
45-26	16.264		
45-27	15.969	1.447	
45-28	16.454	1.619	
45-29	14.765	1.244	
45-30	15.787	1.407	
45-31	12.946	0.652	Απορρίπτεται
45-32	8.169	0.955	Απορρίπτεται
45-33	9.426	1.489	
45-34	13.174	1.761	
45-35	18.903	1.771	
45-36	11.791	1.063	Απορρίπτεται
45-37	14.893	2.022	
45-38	14.148	1.403	

Μερικές χαρακτηριστικές φωτογραφίες από την εκτέλεση των πειραμάτων σε εφελκυσμό παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα.

Σχ.Α.1. Θραύση σε εφελκυσμό κατά την διεύθυνση των ινών

Σχ.Α.2. Θραύση σε εφελκυσμό κατά την διεύθυνση των ινών (αριστερά) και κάθετα σε αυτή (δεξιά)

Σχ.Α.3 Θραύση σε εφελκυσμό στις 45° ως προς την διεύθυνση των ινών

A.3. Αποτελέσματα δοκιμών συντελεστών θερμικής διαστολής υλικού GI/P

Στους ακόλουθους πίνακες δίνονται τα πειραματικά αποτελέσματα των δοκιμών για τον προσδιορισμό των συντελεστών θερμικής διαστολής υλικού GI/P. Αναγράφεται ο κωδικός του δοκιμίου, το χαρακτηριστικό του μήκος και η μέτρηση του συντελεστή θερμικής διαστολής.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

Π. Α.12. Συντελεστής θερμικής διαστολής υλικού GI/P με ίνες προσανατολισμένες σε μία διεύθυνση (UD) παράλληλα (α_x) και κάθετα (α_y) στην διεύθυνση των ινών και κάθετα στο επίπεδο της στρώσης (α_z)

Κωδικός	Μήκος (mm)	α_x (*10 ⁻⁶ °C ⁻¹)	Κωδικός	Μήκος (mm)	α_y (*10 ⁻⁶ °C ⁻¹)	Κωδικός	Μήκος (mm)	α_z (*10 ⁻⁶ °C ⁻¹)
GPUDX1	15.00	--	GPUDY1	15.04	45.180	GPUDZ1	3.38	56.02
GPUDX2	15.20	8.100	GPUDY2	14.16	44.930	GPUDZ2	3.19	43.34
GPUDX3	15.59	9.272	GPUDY3	15.45	43.550	GPUDZ3	3.47	42.72
GPUDX4	14.59	11.700	GPUDY4	12.77	47.960	GPUDZ4	2.81	59.99
GPUDX5	15.15	7.647	GPUDY5	13.30	47.260	GPUDZ5	3.26	39.80
GPUDX6	15.66	9.774	GPUDY6	12.84	47.750			
GPUDX7	15.62	8.375	GPUDY7	15.10	50.290			
GPUDX8	13.98	7.266	GPUDY8	14.58	48.550			
GPUDX9	16.22	8.641	GPUDY9	13.00	50.260			
GPUDX10	15.21	8.127	GPUDY10	13.29	48.570			
GPUDX11	15.45	8.974	GPUDY11	14.18	41.520			
GPUDX12	15.01	11.120	GPUDY12	14.68	48.950			
GPUDX13	15.60	9.029	GPUDY13	14.08	41.400			
GPUDX14	15.22	9.233	GPUDY14	15.16	44.220			
GPUDX15	15.52	9.761	GPUDY15	13.66	41.840			
GPUDX16	15.36	8.779	GPUDY16	14.32	41.590			
GPUDX17	14.60	10.650	GPUDY17	14.38	46.070			
GPUDX18	15.62	9.233	GPUDY18	13.48	48.910			
GPUDX19	15.49	8.502						
GPUDX20	15.45	9.056						
GPUDX21	15.61	8.731						
GPUDX22	15.00	8.728						
GPUDX23	15.35	8.152						
GPUDX24	15.28	9.466						
GPUDX25	15.27	8.883						
GPUDX26	14.12	9.895						
GPUDX27	13.52	7.989						
GPUDX28	15.78	10.290						
GPUDX29	14.96	9.674						
GPUDX30	14.91	9.783						

Π. Α.13. Συντελεστής θερμικής διαστολής υλικού GI/P με ίνες προσανατολισμένες σε δύο διευθύνσεις (BD) στην διεύθυνση της στρώσης (α_x) και κατά το πάχος της (α_z)

Κωδικός	Μήκος (mm)	α_x (*10 ⁻⁶ °C ⁻¹)	Κωδικός	Μήκος (mm)	α_z (*10 ⁻⁶ °C ⁻¹)
GPR6X1	15.29	34.13	GPR6Z1	4.47	73.72
GPR6X2	14.16	25.84	GPR6Z2	4.43	68.27
GPR6X3	14.79	31.08	GPR6Z3	4.53	75.30
GPR6X4	15.66	35.13	GPR6Z4	4.49	74.26
GPR6X5	15.16	15.32	GPR6Z5	4.43	65.30
GPR6X6	14.91	28.25			
GPR6X7	14.09	31.35			
GPR6X8	13.25	34.74			
GPR6X9	15.08	27.06			
GPR6X10	14.15	30.30			
GPR6X11	15.32	29.97			
GPR6X12	16.07	27.35			
GPR6X13	15.87	15.99			
GPR6X14	15.30	30.06			
GPR6X15	15.66	30.03			
GPR6X16	13.84	29.78			
GPR6X17	14.67	26.22			
GPR6X18	15.11	27.59			
GPR6X19	15.25	15.41			
GPR6X20	14.49	24.40			
GPR6X21	14.85	27.47			
GPR6X22	15.37	30.29			
GPR6X23	15.88	33.52			
GPR6X24	15.03	27.04			
GPR6X25	14.93	29.68			
GPR6X26	14.12	17.21			
GPR6X27	15.62	15.89			
GPR6X28	15.47	29.48			
GPR6X29	15.25	27.37			
GPR6X30	14.66	18.050			

Π. Α.14. Συντελεστής θερμικής διαστολής πολύστρωτης (MD) πλάκας από GI/P αποτελούμενη από UD και BD στρώσεις παράλληλα (α_x) και κάθετα (α_y) στην διεύθυνση των ινών (της UD) και κάθετα στο επίπεδο της πλάκας (α_z)

Κωδικός	Μήκος (mm)	α_x ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)	Κωδικός	Μήκος (mm)	α_y ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)	Κωδικός	Μήκος (mm)	α_z ($\cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)
GPMDX1	16.24	12.610	GPMDY1	14.21	32.68	GPMDZ1	3.59	50.52
GPMDX2	15.89	10.380	GPMDY2	14.45	37.94	GPMDZ2	3.97	61.27
GPMDX3	14.64	11.110	GPMDY3	14.32	41.20	GPMDZ3	3.87	62.44
GPMDX4	15.76	9.278	GPMDY4	12.32	39.46	GPMDZ4	3.74	60.34
GPMDX5	16.15	10.550	GPMDY5	16.81	44.19	GPMDZ5	3.66	61.11
GPMDX6	15.58	11.330	GPMDY6	17.56	44.82			
GPMDX7	16.44	9.236	GPMDY7	15.36	38.95			
GPMDX8	13.90	11.000	GPMDY8	14.61	38.79			
GPMDX9	14.41	6.053	GPMDY9	12.69	39.10			
GPMDX10	16.61	9.616	GPMDY10	13.49	42.45			
GPMDX11	16.84	10.980	GPMDY11	14.76	35.70			
GPMDX12	15.12	11.330	GPMDY12	15.40	42.09			
GPMDX13	15.49	10.510	GPMDY13	15.32	40.55			
GPMDX14	15.96	9.911	GPMDY14	15.94	34.20			
GPMDX15	14.77	9.615	GPMDY15	14.60	34.34			
GPMDX16	14.59	11.710	GPMDY16	14.32	38.82			
GPMDX17	15.16	10.200	GPMDY17	15.14	37.12			
GPMDX18	14.76	10.630	GPMDY18	13.96	40.29			
GPMDX19	16.42	11.490	GPMDY19	14.74	33.61			
GPMDX20	15.69	8.594	GPMDY20	14.88	40.25			
GPMDX21	16.20	9.731	GPMDY21	13.82	41.09			
GPMDX22	15.10	12.640	GPMDY22	13.84	38.95			
GPMDX23	15.74	9.429	GPMDY23	14.50	34.88			
GPMDX24	16.78	10.070	GPMDY24	15.08	30.40			
GPMDX25	16.54	8.175	GPMDY25	15.36	34.75			
GPMDX26	15.35	11.030	GPMDY26	13.14	25.85			
GPMDX27	15.03	10.130	GPMDY27	14.36	36.59			
GPMDX28	14.98	11.490	GPMDY28	15.84	35.00			
GPMDX29	14.11	10.270	GPMDY29	12.84	35.01			
GPMDX30	15.40	8.697	GPMDY30	14.42	31.64			

Α.4 Πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για σύγκριση με τα αποτελέσματα της εργασίας

A.4.1 Πειραματικά δεδομένα από [CT Sun, SE Yamada, Strength distribution of a unidirectional fiber composite, J. of Composite Materials, Vol.12, pp.169-176, 1978]

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα πειραματικά δεδομένα από την εργασία των Sun και Yamada [CT Sun, SE Yamada, Strength distribution of a unidirectional fiber composite, J. of Composite Materials, Vol.12, pp.169-176, 1978], όπως ψηφιοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσης εργασίας. Σημειώνεται ότι στην αρχική εργασία τα δεδομένα των τάσεων ήταν σε μονάδες (psi) και επομένως έγινε μετατροπή στις συνήθεις μονάδες SI.

Π. Α.15. Πειραματικά δεδομένα για off-axis γωνίες 15°, 20° και 30°

15° off-axis		20° off-axis		30° off-axis	
Τάση Αστοχίας (MPa)	Πιθανότητα	Τάση Αστοχίας (MPa)	Πιθανότητα	Τάση Αστοχίας (MPa)	Πιθανότητα
46.86053	0.026369	32.66805	0.103967	16.24139	0.105265
47.44717	0.052383	34.45239	0.202301	17.20141	0.205420
48.52808	0.076831	36.57570	0.31112	17.96909	0.307253
50.12316	0.111256	37.14691	0.405533	21.79675	0.415974
51.41638	0.220839	40.33352	0.504062	22.02755	0.504084
52.92999	0.324525	43.10285	0.611542	25.52353	0.611483
53.78367	0.437144	43.36551	0.69799	27.43834	0.705743
56.28673	0.543678	52.94125	0.89831	27.72944	0.799407
57.57272	0.662479			33.41256	0.892016
73.28117	0.899744				

Π. Α.16. Πειραματικά δεδομένα για off-axis γωνίες 45° και 60°

45° off-axis		60° off-axis	
Τάση Αστοχίας (MPa)	Πιθανότητα	Τάση Αστοχίας (MPa)	Πιθανότητα
6.976256	0.067513	5.882179	0.062593
7.901023	0.110749	6.233144	0.119895
8.201295	0.162635	6.857163	0.175416
8.483448	0.213312	7.131800	0.217724
8.687390	0.272087	7.316283	0.300636
9.229443	0.327901	7.361005	0.351447
9.450424	0.383379	7.455525	0.408087
9.484069	0.440211	7.551418	0.467718
9.485717	0.491851	7.934950	0.519170
10.42001	0.548464	8.282051	0.580410
10.45644	0.594266	12.60814	0.905128
11.03403	0.656002	17.00515	0.951699
11.07253	0.699470		
11.14851	0.744340		
11.41499	0.798596		
11.61019	0.855765		
12.00792	0.900438		
13.41482	0.949650		

A.4.2 Πειραματικά δεδομένα από [EM Wu, Phenomological Anisotropic Failure Criterion, Composite Materials Vol.2, Mechanics of Composite Materials, Ed. GP Sendeckyj, Academic Press, N. York, pp. 353-431, 1973]

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα πειραματικά δεδομένα από την εργασία του Wu [EM Wu, Phenomological Anisotropic Failure Criterion, Composite Materials Vol.2, Mechanics of Composite Materials, Ed. GP Sendeckyj, Academic Press, N. York, pp. 353-431, 1973], όπως ψηφιοποιήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσης εργασίας. Σημειώνεται ότι στην αρχική εργασία τα δεδομένα των τάσεων ήταν σε μονάδες (psi) και επομένως έγινε μετατροπή στις συνήθεις μονάδες SI, οι οποίες παρουσιάζονται στις δύο τελευταίες στήλες του κάθε πίνακα.

Συγκεκριμένα στον πίνακα Π. Α.17 παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα όπως ψηφιοποιήθηκαν από το σχήμα 15 της εργασίας [EM Wu, Phenomological Anisotropic Failure Criterion, Composite Materials Vol.2, Mechanics of Composite Materials, Ed. GP Sendeckyj,

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

Academic Press, N. York, pp. 353-431, 1973] και χρησιμοποιήθηκαν για τον στατιστικό χαρακτηρισμό των ιδιοτήτων του υλικού. Ειδικά για την περίπτωση της αντοχής σε διάτμηση S, χρησιμοποιήθηκαν και οι θετικές και οι αρνητικές τιμές που ψηφιοποιήθηκαν, οι οποίες παρουσιάζονται στον πίνακα χρησιμοποιώντας το πρόσημο της τιμής που ψηφιοποιήθηκε σε παρένθεση.

Στους πίνακες Π. Α.18 και Π. Α.19 παρουσιάζονται τα πειραματικά δεδομένα όπως ψηφιοποιήθηκαν από τα σχήματα 16(b) και 16(d) αντίστοιχα για τις περιπτώσεις αξονικής τάσης και διάτμησης σε off axis στρώσεις 30° και 60°, αντίστοιχα. Τέλος στον πίνακα Π. Α.20 παρουσιάζονται τα πειραματικά δεδομένα όπως ψηφιοποιήθηκαν από το σχήμα 18 της εργασίας [EM Wu, Phenomological Anisotropic Failure Criterion, Composite Materials Vol.2, Mechanics of Composite Materials, Ed. GP Sendekyj, Academic Press, N. York, pp. 353-431, 1973] για την περίπτωση αξονικής φόρτισης στους δύο κύριους άξονες του υλικού.

Π. Α.17 Πειραματικά δεδομένα για την στατιστική αξιολόγηση των ιδιοτήτων του υλικού

X _T (ksi)	X _C (ksi)	Y _T (ksi)	Y _C (ksi)	S (ksi)	X _T (MPa)	X _C (MPa)	Y _T (MPa)	Y _C (MPa)	S (MPa)
125.3	-84.7	5.0	-15.8	8.4	864.03	-583.80	34.53	-108.64	57.83
126.1	-89.3	6.5	-17.6	9.4	869.22	-615.84	44.85	-121.67	64.88
131.4	-92.3	6.7	-20.2	10.6	905.96	-636.27	46.25	-139.09	73.35
137.1	-102.7	8.2	-21.4	12.3	945.14	-708.22	56.57	-147.67	84.64
144.8	-106.0			(-)9.0	998.24	-730.86			(-)62.27
150.1	-111.8			(-)8.8	1034.62	-771.12			(-)60.69
154.1	-116.5			(-)10.6	1062.57	-803.05			(-)73.36
161.0	-120.7			(-)12.9	1110.11	-832.21			(-)88.68
164.7					1135.25				
167.6					1155.35				
180.9					1247.13				

Π. Α.18 Πειραματικά δεδομένα και μετατροπή τους σε MPa για την περίπτωση στρώσης 30° off axis

σ _x (ksi)	σ _s (ksi)	σ _x (MPa)	σ _s (MPa)
-31.9	0.1	-220.1	0.9
-30.6	1.1	-211.3	7.7
-29.3	0.0	-201.8	0.1
-25.6	0.1	-176.5	0.4
12.5	0.2	86.1	1.5
16.3	-0.2	112.6	-1.2
17.5	0.5	120.5	3.5
20.4	0.1	140.9	0.7
0.2	6.2	1.0	42.6
0.2	7.7	1.5	53.3
-0.4	-19.9	-2.7	-136.9
0.7	-23.8	4.7	-164.0
-20.7	9.4	-143.0	64.9
-22.6	10.8	-155.6	74.5
29.8	-8.8	205.6	-60.6
45.6	-15.7	314.3	-108.0
54.7	-24.9	377.2	-171.8
35.0	-32.2	241.6	-222.1
37.0	-33.8	255.3	-232.7

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

Π. Α.19 Πειραματικά δεδομένα και μετατροπή τους σε MPa για την περίπτωση στρώσης 60° off axis

σ_x (ksi)	σ_s (ksi)	σ_x (MPa)	σ_s (MPa)
-26.5	-0.3	-182.4	-2.3
-21.9	-0.3	-151.0	-1.9
4.9	-0.2	33.5	-1.6
8.7	-0.1	59.9	-0.7
-0.4	5.4	-3.0	37.0
0.3	-20.3	2.3	-139.8
-0.2	-17.9	-1.6	-123.6
2.9	-18.7	20.0	-128.8
-11.1	-13.1	-76.4	-90.4
-10.4	10.3	-71.7	71.3

Π. Α.20 Πειραματικά αποτελέσματα για την περίπτωση διαξονικής φόρτισης στις κύριες διευθύνσεις του υλικού

σ_x (ksi)	σ_y (ksi)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)
-118.9	0.4	-819.7	2.7
-115.4	0.2	-796.0	1.3
-111.3	0.3	-767.1	1.7
-105.8	0.3	-729.8	2.2
-101.9	0.4	-702.6	3.0
-99.2	0.1	-684.0	0.8
-97.4	0.2	-671.2	1.7
-89.8	0.3	-619.5	2.1
-86.5	0.3	-596.5	2.1
-82.8	0.2	-571.1	1.6
-80.6	0.2	-555.8	1.6
-70.4	0.2	-485.4	1.2
122.3	-0.3	843.5	-1.8
124.4	0.1	857.9	0.4
128.7	-0.2	887.6	-1.4
133.7	-0.2	921.6	-1.4
143.1	0.0	986.9	-0.1
147.7	-0.1	1018.3	-1.0
152.1	-0.2	1048.8	-1.5
159.0	-0.3	1096.4	-1.9
163.4	-0.2	1126.9	-1.5
184.4	-0.3	1271.2	-2.0
117.5	-0.3	810.4	-2.2
-0.4	-14.8	-2.7	-102.0
0.1	-16.0	0.6	-110.4
-1.0	-17.4	-7.0	-120.2
-0.5	-20.6	-3.7	-141.9
-0.4	-21.5	-2.8	-148.1
-0.7	-27.9	-4.6	-192.4
-0.9	-24.6	-6.3	-169.4
-2.1	-22.9	-14.7	-157.8
-2.8	-21.4	-19.0	-147.6
-2.7	-19.0	-18.9	-130.8
0.6	-19.4	4.0	-133.5
0.8	-18.6	5.7	-128.1
0.7	3.7	5.1	25.3
-1.0	4.1	-6.7	28.4
-0.4	6.2	-2.5	43.0
0.0	8.4	0.1	57.6
166.0	-13.3	1144.6	-92.0

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

σ_x (ksi)	σ_y (ksi)	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)
170.9	-13.4	1178.5	-92.4
181.9	-13.8	1254.0	-95.1
-98.4	-7.3	-678.1	-50.6
-101.8	-7.2	-701.9	-49.7
-104.1	-7.1	-718.0	-49.3
-107.2	-7.8	-739.2	-53.7
-48.6	-16.0	-335.4	-110.2
-57.1	-19.4	-394.0	-133.7
-59.0	-19.8	-406.7	-136.8
-60.5	-20.7	-416.9	-142.5
-34.9	-15.6	-240.4	-107.6
-13.5	-20.1	-92.8	-138.3
-20.6	-21.1	-142.0	-145.4
-21.8	-22.3	-150.5	-153.8
-6.6	-20.0	-45.3	-137.9
-6.6	-20.7	-45.3	-142.7
-7.1	-23.2	-48.7	-160.0
-7.6	-24.7	-52.1	-170.2
18.1	-19.2	124.5	-132.6
18.5	-19.8	127.9	-136.6
20.9	-21.4	144.0	-147.3
21.5	-23.0	148.2	-158.8
23.2	-23.6	160.1	-162.8
24.8	-25.5	171.1	-175.7
25.3	-26.4	174.4	-181.9
24.0	-20.8	165.2	-143.7
35.3	-16.7	243.3	-115.0
43.0	-20.5	296.7	-141.2
51.7	-18.2	356.2	-125.7
54.9	-18.9	378.2	-130.6
62.4	-21.0	429.9	-144.8
73.8	-16.9	508.9	-116.4
73.9	-18.8	509.7	-129.3
84.5	-19.4	582.7	-133.8
106.3	-20.2	732.9	-139.2
112.8	-20.1	777.9	-138.3
137.0	-16.6	944.2	-114.5
164.0	-18.6	1130.9	-128.3
180.7	-7.9	1245.6	-54.8
75.0	5.0	516.9	34.3
76.4	5.3	527.0	36.5
11.7	3.9	80.7	26.6
14.0	4.8	96.8	32.8
17.5	5.5	120.6	37.6
19.2	6.6	132.5	45.6
23.5	8.0	162.2	54.9
5.3	5.5	36.6	37.7
6.9	6.7	47.6	46.5
8.9	8.1	61.2	55.8
9.1	8.7	62.9	60.3
-4.9	4.5	-33.9	31.1
-6.4	5.7	-44.0	39.5
-7.9	7.5	-54.2	51.5
-31.7	3.6	-218.9	24.9
-34.9	4.0	-240.9	27.6
-39.6	4.4	-273.2	30.3
-43.2	4.7	-297.8	32.1
-55.5	4.5	-382.6	30.8
-64.2	3.7	-442.9	25.5

A.4.3 Πειραματικά δεδομένα από το [EM Wu, JK Scheublin, *Laminate Strength - A Direct Characterization Procedure, Composite Materials: Testing and Design (3rd Conf.), ASTM STP 546, (American Society for testing and Materials, 1974), 188-206*]

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα πειραματικά δεδομένα από την εργασία των Wu και Scheublin [EM Wu, JK Scheublin, *Laminate Strength - A Direct Characterization Procedure, Composite Materials: Testing and Design (3rd Conf.), ASTM STP 546, (American Society for testing and Materials, 1974), 188-206*], όπως δίνονται στον Πίνακα 1, της εν λόγω εργασίας. Στις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα Π. Α.21 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σε MPa, ενώ στις τελευταίες τρεις σειρές του πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την χρήση της συμμετρίας της διάταξης.

Π. Α.21 Αρχικά Πειραματικά αποτελέσματα και μετατροπές

Αρχικά		Μετατροπή	
N_x/h (ksi)	N_y/h (ksi)	N_x/h (MPa)	N_y/h (MPa)
40.8	0.0	281.31	0.00
-72.6	0.0	-500.56	0.00
-35.0	35.0	-241.32	241.32
51.8	51.8	357.15	357.15
42.0	42.0	289.58	289.58
0.0^I	40.8	0.00	281.31
0.0^I	-72.6	0.00	-500.56
35.0^I	-35.0	241.32	-241.32

^I Αποτελέσματα λόγω συμμετρίας

A.5 Πειραματικά δεδομένα υλικού GI/P για τον σχεδιασμό πτερυγίου A/T

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα πειραματικά δεδομένα, όπως χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων του υλικού που χρησιμοποιήθηκε στην εφαρμογή του σχεδιασμού του πτερυγίου ανεμογεννήτριας. Η βασική διαφορά σε σχέση με τα πρωτογενή πειραματικά δεδομένα που δόθηκαν στο Α.3 είναι ότι εξαιτίας της μεταβλητότητας του πάχους των δοκιμών οι παράμετροι τάση αστοχίας και μέτρο ελαστικότητας κάθε δοκιμίου υπολογίζονται βάσει του ονομαστικού πάχους της στρώσης του συνθέτου υλικού. Το ονομαστικό πάχος της στρώσης εκτιμάται από την παρακάτω σχέση:

$$h_{\text{nom}} = \frac{m_f^A}{\rho_f \phi}$$

Όπου m_f^A είναι η επιφανειακή πυκνότητα της ενίσχυσης της στρώσης, η οποία δίνεται από τον προμηθευτή του υαλοϋφάσματος και στην συγκεκριμένη περίπτωση ήταν 700g/m^2 , ρ_f η πυκνότητα της ενίσχυσης, στην συγκεκριμένη περίπτωση του γυαλιού $\rho_f = 2560\text{kg/m}^3$ και ϕ η κατ' όγκο περιεκτικότητα ινών στο σύνθετο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το ϕ εκτιμήθηκε σε 0.34% βάσει πληροφοριών για την κατά βάρος περιεκτικότητα ινών στο σύνθετο.

Επίσης, κατά τον σχεδιασμό του πτερυγίου χρησιμοποιούνται και τα 10 πειράματα σε εφελκυσμό κατά την διεύθυνση των ινών της στρώσης, τα οποία εκτελέστηκαν στην μηχανή εφελκυσμού Mayes και είχαν σε πρώτη φάση απορριφθεί για την ομοιογένεια του δείγματος κατά την στατιστική του ανάλυση. Σημειώνεται ότι οι τιμές με την ένδειξη * δεν λαμβάνονται υπόψη στα αποτελέσματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: Πειραματικά Αποτελέσματα

Π. Α.22 Πειραματικά δεδομένα για χρήση στον σχεδιασμό πτερυγίου

A/A	X _T (MPa)	X _C (MPa)	Y _T (MPa)	Y _C (MPa)	S (MPa)	E ₁ (GPa)	E ₂ (GPa)	G ₁₂ (GPa)	ν ₁₂
1	301.70	351.62	52.84	200.29	19.88		7.60		
2	327.36	349.15	43.00	196.35	21.12				
3	370.13	346.57	33.92	208.49	18.56		6.82		
4	384.22	355.42	63.03*	188.30	18.66				
5	415.48	288.80	35.28	162.97			9.08		
6	454.17	355.49	48.72	173.54	23.23		6.23	2.554	
7	355.66	321.26	53.50	156.44	17.10		13.71*	2.355	
8	374.32	387.03	53.46	183.37	18.25		7.75		
9	398.86	331.61	39.69	149.99	19.19		8.11		
10	390.82	400.55	40.31	151.09	13.19			1.480	
11	413.79	323.46	34.83	140.64	17.76	24.17	7.55	1.992	0.28
12	352.72	356.80	36.33	167.10	19.76	25.92	8.72	1.399	0.32
13	415.85	412.04	46.48	155.61	16.76	22.22		1.690	0.35
14	399.59	360.21	45.37	142.51	21.26	22.30	7.90	2.043	0.40
15	406.76	307.09	50.46	153.49	19.18	25.26	7.87	2.189	0.32
16	356.23	382.57	38.75	168.14	22.84	23.91	8.70	2.730*	0.26
17	452.51	361.61	39.08	224.34	18.61	23.10	10.07	2.181	0.29
18	483.93	326.16	29.77	155.22	20.37		7.09	1.710	
19	452.37	355.30	40.34	168.39	10.04*	22.17	9.39	1.005*	0.34
20	435.63	308.43	45.69	198.80	24.51	26.09	6.99	2.635*	0.31
21	432.88	329.67	35.09	160.73	13.06		7.40	1.318	
22	409.81	388.75	45.52	186.85	18.06	25.72	9.68	1.133	0.32
23	472.83	314.04	39.66	187.23	14.12	20.48	7.65	1.174	0.29
24	462.34	305.32	40.83	154.04	14.58	25.25	6.24	1.269	0.39
25	463.35	309.71	39.83	176.58	18.00	25.34	9.51	1.266	0.30
26	398.24	331.98	40.22	165.15	17.58	25.39	9.80		0.35
27	392.58	289.84	41.75	147.80	16.88	23.25	7.98	1.479	0.33
28	441.44	314.25	45.14	214.33	16.71	25.17	10.50	1.546	0.37
29	448.44	281.91	35.03	134.60	15.78			1.281	
30	372.39	383.17	35.47	161.74	16.22	22.89	13.31*	1.377	0.21
31	460.35				14.38	21.67			0.33
32	344.35				9.12*				
33	228.94				10.47				
34	331.60				14.55	26.77			0.37
35	553.03				19.98	24.88			0.28
36	520.09				12.47	26.47			0.27
37	453.70				16.36	25.97			0.35
38	496.08				14.54	21.18			0.19
39	474.85					21.93			0.29
40	481.38					20.01			0.19
41	511.44					28.51			0.23
42	469.31								
43	397.18								

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Β. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ

B.1 Εισαγωγή

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι των υπολογιστικών κωδίκων που χρησιμοποιούνται για την στατιστική επεξεργασία πειραματικών αποτελεσμάτων, καθώς και μία σύντομη περιγραφή της χρήσης τους. Τα προγράμματα αυτά κατασκευάστηκαν με βάση την θεωρία που περιγράφηκε στα προηγούμενα.

B.2 Χαρακτηριστικές Τιμές

Για τον υπολογισμό των τεσσάρων πρώτων ροπών και άλλων χαρακτηριστικών τιμών ενός δείγματος ή ενός στατιστικού μοντέλου χρησιμοποιούνται οι υπολογιστικοί κώδικες που περιγράφονται στην συνέχεια. Συγκεκριμένα και τα δύο προγράμματα υπολογίζουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- α. Μέση τιμή δείγματος
- β. Διασπορά, τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβλητότητας του δείγματος
- γ. Λοξότητα, κύρτωση, τρίτη και τέταρτη ροπή του δείγματος

B.2.1 Datastat

Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών του δείγματος, όπως αυτά περιγράφηκαν στα προηγούμενα. Συγκεκριμένα δίνοντας το όνομα του αρχείου στο οποίο υπάρχουν τα πειραματικά αποτελέσματα σε στήλη, το πρόγραμμα υπολογίζει τα εκτός από τις τέσσερις πρώτες ροπές του δείγματος και τις σταθερές που προκύπτουν από αυτές και την ελάχιστη και μέγιστη τιμή, το διάστημα και τον διάμεσο του δείγματος.

Τα χαρακτηριστικά αυτά του δείγματος καταγράφονται σε αρχείο του οποίου το όνομα ζητείται από το χρήστη.

B.2.2 Diststat

Το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει τις χαρακτηριστικές τιμές μίας κατανομής (μέση τιμή, διασπορά, τρίτη και τέταρτη ροπή κτλ.) που επιλέγει ο χρήστης, όταν δίνονται οι παράμετροι της κατανομής αυτής. Οι χαρακτηριστικές αυτές τιμές καταγράφονται σε αρχείο του οποίου το όνομα δίνει ο χρήστης.

B.3 Υπολογισμός Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής Πιθανότητας

Για τον υπολογισμό της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας του δείγματος και αυτή ενός στατιστικού μοντέλου χρησιμοποιούνται οι υπολογιστικοί κώδικες που περιγράφονται στην συνέχεια.

B.3.1 Dacum

Το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του δείγματος, παίρνοντας τα δεδομένα από το αρχείο στο οποίο είναι καταγεγραμμένα τα πειραματικά αποτελέσματα σε στήλη. Το πρόγραμμα ταξινομεί κατά αύξουσα σειρά τα πειραματικά δεδομένα και κατόπιν υπολογίζει την αθροιστική πιθανότητα για κάθε μία τιμή ως:

$$F(x_i) = \frac{i}{N} \quad (B.1)$$

όπου N ο αριθμός των πειραματικών αποτελεσμάτων και x_i η i πειραματική τιμή του ταξινομημένου δείγματος.

Στην συνέχεια το πρόγραμμα καταγράφει σε αρχείο, του οποίου το όνομα ζητείται από το χρήστη, την αθροιστική κατανομή πιθανότητας συναρτήσει των πειραματικών τιμών.

B.3.2 Cumulati

Το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας του στατιστικού μοντέλου που επιλέγει ο χρήστης μέσα σε όρια που ορίζονται από τον χρήστη. Για τον υπολογισμό της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας απαιτούνται από το χρήστη οι τιμές των παραμέτρων του στατιστικού μοντέλου. Τα αποτελέσματα καταγράφονται σε αρχείο του οποίου το όνομα δίνεται από το χρήστη.

B.4 Εκτίμηση Παραμέτρων Στατιστικών Μοντέλων

Για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός στατιστικού μοντέλου χρησιμοποιούνται δύο υπολογιστικοί κώδικες, ανάλογα με την μέθοδο (ροπών, μέγιστης πιθανοφάνειας) που επιλέγει ο χρήστης. Οι υπολογιστικοί κώδικες για κάθε μία από τις μεθόδους αυτές περιγράφονται στην συνέχεια. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα προγράμματα αυτά έχουν γραφεί έτσι ώστε από το χρήστη να ζητούνται τα ελάχιστα στοιχεία που απαιτούνται για την προσέγγιση των παραμέτρων ενός στατιστικού μοντέλου.

B.4.1 Momest

Το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει τις παραμέτρους μίας συνάρτησης που επιλέγεται από το χρήστη, βάσει των χαρακτηριστικών του δείγματος που δίνονται επίσης από το χρήστη. Συγκεκριμένα ο χρήστης μπορεί να επιλέξει ένα στατιστικό μοντέλο από αυτά που περιγράφηκαν στα προηγούμενα ακολουθώντας τις οδηγίες του προγράμματος. Για τις κατανομές δύο παραμέτρων ζητείται από το χρήστη η μέση τιμή και η διασπορά του δείγματος που πρέπει να προσεγγιστεί από την στατιστική κατανομή, ενώ για τις κατανομές μίας παραμέτρου (αρνητική εκθετική και Rayleigh) ζητείται από το χρήστη μόνο η μέση τιμή του δείγματος.

Στην συνέχεια το πρόγραμμα καταγράφει σε αρχείο του οποίου το όνομα δίνει ο χρήστης τις παραμέτρους της κατανομής που έχει επιλεγεί, καθώς επίσης και τις ροπές της κατανομής με βάση τις παραμέτρους που υπολογίστηκαν από τα χαρακτηριστικά του δείγματος. Πρέπει να σημειωθεί ότι η καταγραφή των ροπών της κατανομής, γίνεται για να έχει ο χρήστης μία πρώτη εικόνα για το αν η κατανομή που έχει επιλέξει μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά το δείγμα του.

Για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων της Weibull κατανομής χρησιμοποιείται ειδικός αλγόριθμος για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης.

B.4.2 Mle_est

Όμοια με το MOMEST το πρόγραμμα αυτό υπολογίζει τις παραμέτρους του στατιστικού μοντέλου που επιλέγεται από το χρήστη με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός των παραμέτρων της Βήτα κατανομής (γ , η) δεν έχει συμπεριληφθεί στον υπολογιστικό αυτό κώδικα. Ο υπολογιστικός αυτός κώδικας είναι έτσι γραμμένος ώστε να ζητά από τον χρήστη τις κατά το δυνατόν ελάχιστες πληροφορίες για το δείγμα, για τον υπολογισμό των παραμέτρων της κατανομής που επιλέγεται.

Συγκεκριμένα για τον υπολογισμό των παραμέτρων της κανονικής κατανομής και της κατανομής Rayleigh με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας πρέπει να δοθούν από το χρήστη η μέση τιμή, η διασπορά και ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος.

Για την κατανομή Γ , για την λογαριθμική κανονική κατανομή και για την κατανομή Weibull ζητείται το όνομα του αρχείου στο οποίο είναι καταγεγραμμένες σε στήλη οι τιμές του δείγματος. Σημειώνεται ότι για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης των δύο αυτών κατανομών αντίστοιχα για τον προσδιορισμό της παραμέτρου τους χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος που προαναφέρθηκε. Αντίστοιχα για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων για τον προσδιορισμό των παραμέτρων των ασυμπτωτικών κατανομών μέγιστου και ελάχιστου στοιχείου χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson για μη γραμμικά συστήματα εξισώσεων που περιγράφεται στην ανωτέρω αναφορά.

Για τον υπολογισμό της παραμέτρου της αρνητικής εκθετικής κατανομής ζητείται από το χρήστη η μέση τιμή του δείγματος, ενώ για τις ασυμπτωτικές κατανομές μέγιστης και ελάχιστης τιμής ζητείται από το χρήστη το όνομα του αρχείου, όπου είναι καταγεγραμμένες σε στήλη οι τιμές των παρατηρήσεων, καθώς επίσης και ο αριθμός αυτών των παρατηρήσεων.

B.5 Έλεγχος Υποθέσεων

Για τον έλεγχο υποθέσεων δημιουργήθηκαν υπολογιστικοί κώδικες για τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnoff και για τον έλεγχο X^2 , η χρήση των οποίων περιγράφεται στην συνέχεια. Η υπόθεση που ελέγχεται με αυτά τα προγράμματα είναι το αν και κατά πόσο το στατιστικό μοντέλο που έχει επιλεγεί από τον χρήστη με τις συγκεκριμένες παραμέτρους προσεγγίζει το δείγμα. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο έλεγχος X^2 δεν χρησιμοποιήθηκε για την επεξεργασία των πειραματικών αποτελεσμάτων που περιγράφηκαν στα παραπάνω επειδή ο αριθμός του δείγματος ήταν μικρός για αξιόπιστα αποτελέσματα με αυτή την μέθοδο.

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας τα πειραματικά αποτελέσματα να ακολουθούν το επιλεγμένο στατιστικό μοντέλο και για τις δύο μεθόδους χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι που περιγράφονται επίσης στο “Numerical recipes in Fortran”.

B.5.1 Ks_test

Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιείται για έλεγχο Kolmogorov- Smirnov. Ζητά από το χρήστη το όνομα του αρχείου στο οποίο είναι καταγεγραμμένες σε στήλη οι πειραματικές τιμές του δείγματος, τις τιμές των παραμέτρων του στατιστικού μοντέλου που επιλέγει και το επίπεδο εμπιστοσύνης για την απόρριψη ή όχι της υπόθεσης ότι το δείγμα μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από το στατιστικό μοντέλο.

Σε αρχείο, του οποίου το όνομα δίνει ο χρήστης καταγράφονται: το αν η υπόθεση της καταλληλότητας της κατανομής για την προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται δεκτή ή όχι, το στατιστικό μέγεθος του ελέγχου Kolmogorov- Smirnov και η τιμή $Q_{KS}(\sqrt{ND})$, με την οποία γίνεται ο έλεγχος της υπόθεσης και η οποία συγκρίνεται με το επίπεδο εμπιστοσύνης που έχει προεπιλεχθεί. Αν η τιμή $Q_{KS}(\sqrt{ND})$ είναι μικρότερη από το επίπεδο εμπιστοσύνης που έχει επιλεγεί τότε η υπόθεση (ότι τα δεδομένα ακολουθούν την επιλεγμένη στατιστική κατανομή με τις συγκεκριμένες παραμέτρους) απορρίπτεται.

B.5.2 Chs_test

Το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιείται για τον έλεγχο X^2 . Από τον χρήστη ζητείται να επιλέξει ένα στατιστικό μοντέλο και να δώσει τις παραμέτρους αυτού, το επίπεδο εμπιστοσύνης για το οποίο μπορεί να γίνει δεκτή η υπόθεση ότι τα πειραματικά αποτελέσματα ακολουθούν το στατιστικό μοντέλο που προεπιλέχθηκε, καθώς επίσης και το όνομα του αρχείου στο οποίο είναι καταγεγραμμένα τα πειραματικά αποτελέσματα σε στήλη.

Στην συνέχεια τα πειραματικά αποτελέσματα ταξινομούνται κατά αύξουσα σειρά και επιμερίζονται σε κλάσεις έτσι ώστε κάθε κλάση να περιέχει 5 τουλάχιστον πειραματικά αποτελέσματα, που είναι αναγκαίο για την αξιοπιστία του αποτελέσματος. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που τα πειραματικά αποτελέσματα δεν επαρκούν το πρόγραμμα διακόπτεται.

Το πρόγραμμα υπολογίζει και καταγράφει σε αρχείο του οποίου το όνομα ορίζεται από το χρήστη το αν η υπόθεση γίνεται δεκτή ή όχι, το επίπεδο εμπιστοσύνης $[1 - Q(x^2/k - r - 1)]$ και το στατιστικό μέγεθος X^2 .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Γ. ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE CARLO

Γ.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το παράρτημα περιγράφεται η χρήση της μεθόδου προσομοίωσης με την βοήθεια ενός δείγματος τυχαίων αριθμών, Monte Carlo, όπως αυτή έγινε στα πλαίσια της εργασίας. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο παράγονται υπολογιστικά οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί, που χρησιμοποιούνται κατά την προσομοίωση, καθώς επίσης και οι μέθοδοι ελέγχου του δείγματος ως προς την καταλληλότητά του για την εφαρμογή της μεθόδου στο πρόβλημα της αστοχίας πολυστρώτου πλακός εκ συνθέτου υλικού. Γίνεται, δηλαδή μία προσπάθεια να δοθούν οι βάσεις ώστε να μπορεί κανείς να περνάει από όλους τους ελέγχους πριν και κατά την διάρκεια οποιασδήποτε εφαρμογής της μεθόδου.

Στην παρούσα εργασία, η μέθοδος MC χρησιμοποιήθηκε σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, δηλαδή για την προσομοίωση των ιδιοτήτων αντοχής στρώσεων από σύνθετο υλικό, των ιδιοτήτων αντοχής των στρώσεων πολυστρώτου πλακός και τέλος των ιδιοτήτων αντοχής και ελαστικότητας των στρώσεων συμμετρικής πολυστρώτου πλακός. Σε όλες τις περιπτώσεις η στρώση ή η πολύστρωτη πλάκα θεωρείται ότι βρίσκεται σε επίπεδη εντατική κατάσταση φόρτισης.

Έτσι, το παράρτημα χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία των μεθόδων παραγωγής τυχαίων αριθμών, καθώς επίσης και οι έλεγχοι ανεξαρτησίας και “τυχειότητας” αυτών. Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι για τον σχηματισμό υποομάδων δειγμάτων που χρησιμοποιούνται κατά την προσομοίωση, σε συνδυασμό με τις εφαρμογές της εργασίας, καθώς επίσης και αποτελέσματα των διαφόρων ελέγχων που έγιναν ως προς την ορθότητά τους για την σωστή εφαρμογή της μεθόδου MC. Τέλος γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων σε χαρακτηριστικά προβλήματα, τα οποία προέκυψαν από την χρήση των διαφόρων γεννητριών και αλγορίθμων εφαρμογής και σε κάθε περίπτωση επιλέγεται η ταχύτερη μέθοδος, η οποία δίνει αποτελέσματα μέσα στο όριο της ακρίβειας που απαιτείται.

Γ.2. ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η σχετική καταλληλότητα των γεννητριών εξαρτάται από την ταχύτητα υπολογισμού, την ευκολία της χρήσης και την δυνατότητά τους να μεταφέρονται. Ο όρος δυνατότητα μεταφοράς σημαίνει την ιδιότητα να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας αλγόριθμος ή μία διαδικασία σε πλήθος διαφορετικών υπολογιστών, οι οποίοι εμφανίζουν διαφορετικές ιδιοτροπίες ανάλογα με την ηλεκτρονική τους δομή. Παρόλο που ο χρόνος υπολογισμού, η ευκολία της χρήσης και η δυνατότητα μεταφοράς αποτελούν βασικές παραμέτρους για την επιλογή μίας γεννήτριας, τα χαρακτηριστικά αυτά ωχριούν σε σημαντικότητα μπροστά στην ανάγκη να συγκρατηθεί το σφάλμα της προσέγγισης σε ανεκτά όρια, όπου με τον όρο σφάλμα προσέγγισης εννοούμε την διαφορά του αποτελέσματος της προσομοίωσης από την θεωρητικά αναμενόμενη τιμή ενός προβλήματος. Συγκεκριμένα, διάφορες στατιστικές αναλύσεις δείχνουν ότι το σφάλμα που προέρχεται από την χρήση ενός δείγματος (και όχι ολόκληρου του πληθυσμού) μειώνεται και τείνει να εκμηδενιστεί καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Αλλά το αναπόφευκτο σφάλμα που υπεισέρχεται στην πρόβλεψη εξαιτίας της παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών δεν μειώνεται αυξανόμενου του δείγματος. Για τον λόγο αυτό όλες οι αναλύσεις του σφάλματος εξαιτίας της δειγματοληψίας που αγνοούν το σφάλμα εξαιτίας της παραγωγής αριθμών υπερεκτιμούν την ακρίβεια των αποτελεσμάτων [Γ.2].

Για ένα δεδομένο μέγεθος δείγματος, επιθυμείται η χρήση μίας γεννήτριας (ψευδο-) τυχαίων αριθμών που διατηρεί το σφάλμα της πρόβλεψης εξαιτίας της παραγωγής όσο το δυνατόν μικρότερο. Αντίστροφα, για μία γεννήτρια με προσδιορισμένο διάστημα σφάλματος εξαιτίας της παραγωγής επιθυμείται η αποφυγή μίας λανθασμένης τάξης ακρίβειας του αποτελέσματος της εφαρμογής, επιλέγοντας κατάλληλο μέγεθος δείγματος, τέτοιο ώστε το στατιστικό σφάλμα εξαιτίας της δειγματοληψίας να είναι σχετικά μικρό σε σχέση με το ήδη προσδιορισμένο όριο σφάλματος εξαιτίας της παραγωγής τυχαίων αριθμών. Για παράδειγμα, παρουσιάζοντας ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% (0.37436549, 0.37436873) με πλάτος διαστήματος $.324 \times 10^{-5}$ δεν

έχει νόημα αν η παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών εισάγει ένα σφάλμα πρόβλεψης της τάξης 10^{-3} [Γ.2].

Όλοι οι τύποι γεννητριών έχουν κοινή βάση. Κάθε μία προσομοιάζει ένα διακριτό δυναμικό σύστημα που βασίζεται σε μία ακολουθία (recursive sequence) για να παράγει την έξοδο του. Έστω $\mathbf{Z}_i = (Z_i, Z_{i-1}, \dots, Z_{i-k+1})$ οι τελευταίοι k ψευδοτυχαίοι αριθμοί που παράγει η γεννήτρια, όπου οι Z_j είναι ακέραιοι από ένα πεπερασμένο σύνολο ακεραίων Z . Κάθε γεννήτρια έχει μία συνάρτηση ακεραίων τιμών στο Z και παράμετρο $\mathbf{a}$ ένα διάνυσμα ακεραίων τιμών, έτσι ώστε για ένα δεδομένο διάνυσμα αρχικοποίησης (initializing vector) $\mathbf{Z}_0$ να υπολογίζει την ακολουθία ως [Γ.2]:

$$Z_1 = f(\mathbf{a}, \mathbf{Z}_0)$$

$$Z_2 = f(\mathbf{a}, \mathbf{Z}_1) = f(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}, \mathbf{Z}_0))$$

$$Z_3 = f(\mathbf{a}, \mathbf{Z}_2) = f(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}, \mathbf{Z}_1)) = f(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}, \mathbf{Z}_0)))$$

...

Ο συνηθέστερος γενικός αλγόριθμος για την παραγωγή μίας ακολουθίας τυχαίων αριθμών Z_i είναι μία αναδρομική εξίσωση της μορφής [Γ.8]:

$$Z_{i+1} = f(Z_i, Z_{i-1}, \dots, Z_{i-k+1}) - m \operatorname{int} \left[\frac{f(Z_i, Z_{i-1}, \dots, Z_{i-k+1})}{m} \right],$$

όπου $\operatorname{int}[\]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος του αριθμού. Με αυτό τον συμβολισμό το Z_{i+1} είναι το ακέραιο υπόλοιπο της διαίρεσης της τιμής της $f(Z_i, Z_{i-1}, \dots, Z_{i-k+1})$ με το m . Στην γενική περίπτωση, η παραπάνω είναι μία μη γραμμική αναδρομική σχέση, που εκφράζει τον Z_{i+1} σε όρους της σταθεράς m , της συνάρτησης f και των αρχικών τιμών $\mathbf{Z}_i$. Η ποιότητα της γεννήτριας εξαρτάται από την μορφή της f . Μπορεί να φαίνεται ότι καλές γεννήτριες είναι το αποτέλεσμα μίας πολύπλοκης συνάρτησης f . Αντιθέτως όμως, η εμπειρία έχει δείξει ότι αυτό δεν ισχύει. Οι περισσότεροι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται είναι γραμμικές αναδρομικές σχέσεις 1ης τάξεως [Γ.8].

Οι πιο γνωστές αριθμογεννήτριες που χρησιμοποιούνται σήμερα [Γ.3] είναι οι γραμμικές γεννήτριες ομοιότητας (linear congruential generators) και ειδικές περιπτώσεις τους. Αυτές παράγουν μία σειρά ακεραίων $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ οι οποίοι βρίσκονται μεταξύ 0 και $m-1$, όπου $m-1$ είναι ένας μεγάλος ακέραιος αριθμός, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση [Γ.3]:

$$Z_{i+1} = (\alpha Z_i + c) - m \operatorname{int} \left[\frac{(\alpha Z_i + c)}{m} \right]$$

Στην σχέση αυτή επιλέγονται τέσσερις σταθερές, δηλαδή:

m , το μέτρο (modulus), $m > 0$

α , ο πολλαπλασιαστής (multiplier), $0 \leq \alpha < m$

c , το βήμα (increment), $0 \leq c < m$

Z_i , η αρχική τιμή, $0 \leq Z_i < m$

Η παραπάνω αναδρομική σχέση θα οδηγήσει τελικά σε επανάληψη της σειράς με μία περίοδο, η οποία δεν είναι μεγαλύτερη από m . Η ιδιότητα αυτή, που είναι κοινή στις γεννήτριες με την μορφή $Z_{i+1} = f(\mathbf{Z}_i)$, δίνει την περίοδο της γεννήτριας, δηλαδή των αριθμό των ψευδοτυχαίων αριθμών που παράγονται ως ότου ξαναεμφανιστεί ο πρώτος. Αν τα m , α και c επιλεγούν κατάλληλα, τότε η περίοδος θα μεγιστοποιηθεί, δηλαδή θα γίνει ίση με m . Σε αυτή την περίπτωση όλοι οι πιθανοί ακέραιοι μεταξύ 0 και $m-1$ θα παραχθούν σε κάποιο σημείο. Έτσι οποιαδήποτε αρχική επιλογή του Z_0 είναι εξίσου καλή με οποιαδήποτε άλλη. Η ακολουθία απλά ξεκινά από αυτό το σημείο. Ο πραγματικός αριθμός μεταξύ 0 και 1, ο οποίος είναι η έξοδος της γεννήτριας

είναι γενικά Z_{i+1}/m , έτσι ώστε να είναι αυστηρά μικρότερο από 1, αλλά περιστασιακά (μία φορά στις m κλήσεις της ρουτίνας) να είναι ακριβώς ίσος με μηδέν.

Πρέπει να σημειωθεί ότι για την επιλογή των σταθερών m , α και c χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή. Αυτές επιλέγονται μεν έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η περίοδος της γεννήτριας, αλλά θα πρέπει ταυτόχρονα να διατηρείται η τυχαιότητα (randomness) και η ανεξαρτησία των ψευδοτυχαίων αριθμών, στα πλαίσια της ακρίβειας του υπολογιστή.

Η μέθοδος αυτή έχει το προτέρημα να είναι πολύ γρήγορη, απαιτώντας μόνο λίγες πράξεις σε κάθε κλήση. Η αδυναμία της όμως έγκειται στο ότι υπάρχει σειριακή συσχέτιση σε συνεχόμενες (successive) κλήσεις [Γ.2]. Αν k τυχαίοι αριθμοί όλοι μαζί μονομιάς χρησιμοποιηθούν για τον σχεδιασμό σημείων στον χώρο k διαστάσεων (με κάθε διάσταση μεταξύ 0 και 1), τότε τα σημεία αυτά δεν θα τείνουν να "γεμίσουν" τον χώρο των k διαστάσεων, αλλά θα βρίσκονται σε $(k-1)$ διαστάσεως επίπεδα. Θα υπάρχουν το πολύ $m^{1/k}$ τέτοια επίπεδα. Αν οι σταθερές m , α και c δεν επιλεγούν με προσοχή, τότε θα υπάρχουν πολύ λιγότερα επίπεδα από αυτά. Ο αριθμός m συνήθως επιλέγεται κοντά στον μεγαλύτερο ακέραιο που μπορεί να παρουσιασθεί από τον υπολογιστή, δηλαδή $\sim 2^{32}$. Έτσι για παράδειγμα ο αριθμός των επιπέδων στα οποία θα βρίσκονται τριάδες σημείων στον τρισδιάστατο χώρο δεν είναι συνήθως μεγαλύτερος από την κυβική ρίζα του 2^{32} , δηλαδή περίπου 1600. Σε ένα πρόβλημα μπορεί να επικεντρώνεται το ενδιαφέρον σε μία φυσική διεργασία που συμβαίνει σε ένα μικρότερο ποσοστό του συνολικού όγκου, έτσι ώστε η διακριτότητα (discreteness) των επιπέδων να γίνει σημαντική [Γ.2].

Επίσης τέτοιου είδους γεννήτριες συχνά έχουν τα μικρότερης τάξης ψηφία τους (low-order bits), τα οποία είναι λιγότερο σημαντικά, πολύ λιγότερο τυχαία από τα ψηφία μεγαλύτερης τάξης (higher order bits).

Οι όροι πολλαπλασιαστική μέθοδος ομοιότητας (multiplicative congruential method) και μικτή μέθοδος ομοιότητας (mixed congruential method) χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν τις γραμμικές ακολουθίες ομοιότητας με $c = 0$ και $c \neq 0$ αντίστοιχα.

Γ.2.1 Βασικός αλγόριθμος [Γ.1]

Υπάρχουν καλές ενδείξεις, εμπειρικά και θεωρητικά, ότι η απλή πολλαπλασιαστική γεννήτρια ομοιότητας,

$$Z_{i+1} = \alpha Z_i - m \operatorname{int} \left[\frac{\alpha Z_i}{m} \right]$$

μπορεί να είναι όσο καλή είναι και αυτή που δίνεται από την πιο γενική γραμμική μέθοδο ομοιότητας, αν ο συντελεστής α και το μέτρο (modulus) m επιλεγούν εξαιρετικά προσεκτικά. Συγκεκριμένα έχει προταθεί γεννήτρια βασισμένη στις επιλογές:

$$\alpha = 7^5 = 16807, m = 2^{31} - 1 = 2147483647$$

Η περίοδος της γεννήτριας αυτής είναι $2^{31} - 2 = 2.1 \cdot 10^9$. Ο αλγόριθμος με αυτές τις επιλογές έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά από το 1969, ικανοποιεί τα στατιστικά κριτήρια και έχει αποκτηθεί αρκετή εμπειρία από την χρήση του.

Παρόλα αυτά, δεν είναι δυνατόν να εισαχθεί η εξίσωση για την παραγωγή τυχαίων αριθμών χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες προτεινόμενες παραμέτρους άμεσα σε μία γλώσσα προγραμματισμού, αφού το γινόμενο α επί $m-1$ ξεπερνάει την μέγιστη τιμή ενός ακεραίου 32-ψηφίων (32-bit). Μία τεχνική για τον υπολογισμό του ακεραίου υπολοίπου του γινομένου δύο ακεραίων 32 ψηφίων δια μίας 32 ψηφίων σταθεράς περιγράφεται στο [Γ.1] αναλυτικά.

Εναλλακτικά της παραπάνω αριθμογεννήτριας προτείνεται η χρήση των παρακάτω συντελεστών α με $m = 2^{31} - 1$:

$$\alpha = 48271 \text{ και}$$

$$\alpha = 69621.$$

Η αδυναμία αυτού του βασικού αλγορίθμου έγκειται στο γεγονός ότι μπορεί σε ορισμένες καταστάσεις να χρησιμοποιηθεί ακολουθία τυχαίων αριθμών κατά τέτοιο τρόπο ώστε κατά λάθος να αντιτίθεται με τον αλγόριθμο. Για παράδειγμα αφού οι συνεχόμενοι τυχαίοι αριθμοί (successive numbers) διαφέρουν κατά ένα πολλαπλασιαστή μόνο $1.6 \cdot 10^4$ από ένα μέτρο (modulus) μεγαλύτερο από $2 \cdot 10^9$, πολλοί μικροί τυχαίοι αριθμοί θα τείνουν να ακολουθούνται από μικρότερες τιμές από τις μέσες. Μία φορά στις 10^6 , για παράδειγμα, θα υπάρχει μία τιμή $< 10^6$ (όπως πρέπει), αλλά αυτή πάντα θα ακολουθείται από τιμές μικρότερες από την μέση τιμή κατά περίπου 0.0168.

Επίσης υπάρχει μία άλλη σειριακή συσχέτιση που κρύβεται στον αλγόριθμο αυτό. Για παράδειγμα αν συνεχόμενα (successive) σημεία (Z_i, Z_{i+1}) ομαδοποιούνται σε ένα διδιάστατο επίπεδο για $i = 1, 2, \dots, N$, τότε η προκύπτουσα κατανομή δεν ικανοποιεί τον στατιστικό έλεγχο χ^2 όταν το N είναι μεγαλύτερο από 10^7 , πολύ μικρότερο δηλαδή από την περίοδο $m-2$. Τα προβλήματα αυτά μπορούν να εξαλειφθούν, αν χρησιμοποιήσει κανείς την μέθοδο της ανακίνησης (shuffling), η οποία θα περιγραφεί σε επόμενο εδάφιο.

Γ.2.2 Γεννήτρια με μεγάλη περίοδο

Για περιπτώσεις όπου απαιτούνται μακρύτερες τυχαίες ακολουθίες έχει προταθεί μία μέθοδος παραγωγής τυχαίων αριθμών που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή, στην οποία συνδυάζονται δύο διαφορετικές ακολουθίες με διαφορετικές περιόδους, ούτως ώστε να προκύπτει μία νέα ακολουθία, η περίοδος της οποίας είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δύο άλλων. Η βασική ιδέα έγκειται απλά στην πρόσθεση των δύο ακολουθιών, στην συνέχεια στην εύρεση του ακεραίου υπολοίπου της διαίρεσης μεταξύ του αθροίσματός τους και του μέτρου (modulus) μιας από αυτές, το οποίο έστω ότι ονομάζεται m . Δηλαδή η αναδρομική σχέση της γεννήτριας είναι:

$$Z_i = (X_i + Y_i) - m \cdot \text{int} \left[\frac{(X_i + Y_i)}{m} \right]$$

όπου X_i τυχαίος αριθμός, που προέκυψε με χρήση της πολλαπλασιαστικής αριθμογεννήτριας με m_1 και α_1 και Y_i τυχαίος αριθμός από την δεύτερη γεννήτρια με m_2 και α_2 , ενώ έστω $m = m_1$.

Ένα τέχνασμα για την αποφυγή μίας ενδιάμεσης τιμής που ξεπερνάει το μέγιστο ακέραιο μέγεθος (integer word size), που μπορεί να αναπαρασταθεί από τον υπολογιστή, είναι να αφαιρούμε, παρά να προσθέτουμε και στην συνέχεια να προσθέτουμε την σταθερά $m-1$ αν το αποτέλεσμα είναι μικρότερο ή ίσο με το 0 (≤ 0), έτσι ώστε να βρισκόμαστε μέσα στο επιθυμητό διάστημα $0, \dots, m-1$.

Προτείνεται η χρήση δύο γεννητριών με $m_1 = 2147483563$ με $\alpha_1 = 40014$ ($q_1 = 53668$, $r_1 = 12211$) και $m_2 = 2147483399$ και $\alpha_2 = 40692$ ($q_2 = 52774$, $r_2 = 3791$) αντίστοιχα. Η περίοδος της συνδυασμένης γεννήτριας να είναι περίπου ίση με $2.3 \cdot 10^{18}$. Στους σημερινούς υπολογιστές η κατανάλωση (exhaustion) αυτής της περιόδου είναι πρακτικά αδύνατη [Γ.1].

Ο συνδυασμός των δύο γεννητριών αποτρέπει την σειριακή συσχέτιση σε ένα σημαντικό βαθμό. Παρόλα αυτά προτείνεται επιπλέον η χρήση της μεθόδου ανακίνησης.

Γ.2.3 Εναλλακτική μέθοδος

Αυτός ο αλγόριθμος δεν βασίζεται στην γραμμική μέθοδο ομοιότητας, αλλά σε μία αφαιρετική μέθοδο. Ο τύπος αυτός της γεννήτριας ορίζεται από την αναδρομική σχέση [Γ.3]:

$$Z_n = (Z_{n-24} + Z_{n-55}) - \text{mint} \left[\frac{(Z_{n-24} + Z_{n-55})}{m} \right], n \geq 55$$

όπου το m είναι ζυγός και $Z_0, \dots, Z_{54}$ είναι τυχαίοι ακέραιοι όχι όλοι ζυγοί. Οι σταθερές 24 και 55 δεν είναι επιλεγμένες τυχαία. Είναι ειδικές τιμές που τυχαίνει να ορίζουν μία ακολουθία, τις

οποίας τα λιγότερο σημαντικά ψηφία (least significant bits), $Z_n \bmod 2$, θα έχουν μία περίοδο $2^{55}-1$. Αποδεικνύεται ότι η περίοδος της ακολουθίας Z_n είναι ακριβώς $2^{e-1}(2^{55}-1)$ όταν $m = 2^e$.

Εκτός από την μεγάλη περίοδο αυτής της γεννήτριας, ένα άλλο προτέρημά της είναι η ταχύτητά της. Παρόλα αυτά, το μειονέκτημα της γεννήτριας είναι ότι δεν έχει διερευνηθεί θεωρητικά αρκετά, ώστε να είμαστε βέβαιοι για την τυχαιότητα των ακολουθιών που παράγονται με την χρήση της. Αν υπάρχουν αδυναμίες στην μέθοδο αυτή, τότε αυτές είναι τελείως διαφορετικές από αυτές τις βασικής γραμμικής μεθόδου ομοιότητας που περιγράφηκε παραπάνω [Γ.1].

Στα ίδια αποτελέσματα μπορούμε να καταλήξουμε αν χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία [Γ.3]:

$$Z_n = (Z_{n-24} - Z_{n-55}) - m \operatorname{int} \left[\frac{(Z_{n-24} - Z_{n-55})}{m} \right], \quad n \geq 55$$

όπου η αφαίρεση κάνει την παραγωγή αριθμών ταχύτερη.

Γ.2.4 Η μέθοδος της ανακίνησης (Shuffling) [Γ.1]

Η μέθοδος της ανακίνησης χρησιμοποιείται για την αποφυγή μικρότερης τάξης σειριακών συσχετίσεων (low-order serial correlations). Ένας τυχαίος αριθμός από την ομοιόμορφη κατανομή, ο οποίος προκύπτει για την j τιμή της ακολουθίας της ακολουθίας, Z_j , δεν είναι η έξοδος της j κλήσης, αλλά μίας μετέπειτα τυχαιοποιημένης (randomised) κλήσης, $j+32$ κατά μέσο όρο. Ο αλγόριθμός της μεθόδου αυτής παρουσιάζεται στο Σχ.Γ.1.

Στο σχήμα αυτό οι αριθμοί σε κύκλο δείχνουν την ακολουθία των γεγονότων: Σε κάθε κλήση, ο τυχαίος αριθμός y χρησιμοποιείται για την επιλογή ενός τυχαίου στοιχείου του διανύσματος V . Αυτό το στοιχείο γίνεται η έξοδος της αριθμογεννήτριας, καθώς και το επόμενο y . Το σημείο στο διάνυσμα V ξαναγεμίζει με τον αριθμό που παρήγαγε η αριθμογεννήτρια.

Ο βασικός αλγόριθμος που περιγράφηκε στο εδάφιο Γ.1.1 με την εισαγωγή της διαδικασίας ανακίνησης (shuffling) περνάει τους στατιστικούς ελέγχους τους οποίους χωρίς βελτιστοποιήσεις είναι γνωστό ότι αποτυγχάνει. Σύμφωνα με το [Γ.1] δεν είναι γνωστός κανένας στατιστικός έλεγχος τον οποίο δεν ικανοποιεί ο βασικός αλγόριθμος σε συνδυασμό με την διαδικασία της ανακίνησης, εκτός από την περίπτωση που η ακολουθία των τυχαίων αριθμών χρειάζεται να γίνει της τάξης της περιόδου της, δηλαδή μεγαλύτερη από $10^8 \approx m/20$.

Σχ.Γ.1: Η διαδικασία ανακίνησης (shuffling)

Γ.2.5 Γεννήτριες που χρησιμοποιούνται κατά την εφαρμογή του προβλήματος

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούνται τέσσερις αριθμογεννήτριες. Η απλή γεννήτρια τυχαίων αριθμών που δίνεται από την γλώσσα προγραμματισμού Fortran, η οποία είναι η βασική πολλαπλασιαστική γεννήτρια ομοιότητας με $\alpha = 16807$, $m = 2^{31}-1$, χωρίς την χρήση της μεθόδου ανακίνησης και την οποία στο εξής θα ονομάζουμε OLD. Η γεννήτρια RAN1, η οποία είναι ίδια με την προηγούμενη, με την μόνη διαφορά ότι γίνεται χρήση της μεθόδου ανακίνησης. Η γεννήτρια RAN2, η οποία βασίζεται στην άθροιση δύο γεννητριών, με τους συντελεστές που προτάθηκαν σε προηγούμενα εδάφια, κάνοντας χρήση και εδώ της μεθόδου ανακίνησης. Τέλος χρησιμοποιείται και η γεννήτρια RAN3, η οποία βασίζεται στην μέθοδο της αφαίρεσης, όπως περιγράφηκε σε προηγούμενα εδάφια. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι γεννήτριες RAN1 και RAN2 έχουν εξετασθεί θεωρητικά ως προς την καταλληλότητά τους στα [Γ.2]-[Γ.3] και [Γ.5], [Γ.9], [Γ.10] με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ειδικότερα στο [Γ.10] η γεννήτρια RAN2 χωρίς την μέθοδο ανακίνησης εξετάζεται ως προς τις υποομάδες της και χαρακτηρίζεται ως μία από τις καλύτερες αριθμογεννήτριες. Στο [Γ.3] παράλληλα αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι η μέθοδος ανακίνησης απλά την σειρά με την οποία δίνονται οι παραγόμενες τιμές και δεν αλλάζουν οι ίδιες οι τιμές. Αντίστοιχα, η OLD εξετάζεται ως προς τις υποομάδες της στο [Γ.9] και χαρακτηρίζεται ως μέτρια, επομένως αποτελεί μία καλή βάση για σύγκριση. Η γεννήτρια RAN3 προτείνεται από το [Γ.1] ως εναλλακτική και γρήγορη λύση της RAN2. Η γεννήτρια αυτή χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία ακριβώς για αυτό τον λόγο, παρόλο που είναι γνωστά ορισμένα προβλήματα της μεθόδου σε εμπειρικούς ελέγχους [Γ.3].

Οι αλγόριθμοι των γεννητριών εκτός από την OLD δίνονται στο [Γ.1], ενώ η υπορουτίνα της OLD είναι ενσωματωμένη στην FORTRAN PowerStation V.4. Η τιμή έναρξης όλων των γεννητριών γίνεται χρησιμοποιώντας την τιμή της χρονικής στιγμής που ξεκινάει η παραγωγή του δείγματος, πολλαπλασιασμένης επί μία σταθερά, ούτως ώστε να μεγαλώσει η διαφορά της τιμής έναρξης μεταξύ των δειγμάτων που παράγονται σε παρεμφερή χρόνο, δηλαδή είναι

1000*εκατοστά*(εκατοστά+ ώρα+ λεπτό+ δευτερόλεπτο), όπου τα εκατοστά είναι εκατοστά του λεπτού της χρονικής στιγμής. Η αρχικοποίηση αυτού του είδους χρησιμοποιείται για να μην παραχθούν συσχετισμένα ή υπερκαλυπτόμενα δείγματα, ούτως ώστε να μπορούν να εκτελεστούν οι εμπειρικοί έλεγχοι, που απαιτούν ανεξάρτητα δείγματα. Η εναρκτήρια σταθερά σώζεται σε κάθε αρχείο. Σε περίπτωση που δύο αρχεία, της ίδιας γεννήτριας έχουν την ίδια σταθερά έναρξης, τότε δημιουργείται ένα επιπλέον δείγμα.

Γ.3. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΕ ΑΛΛΕΣ

Οι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή (Uniform deviates) συχνά χρησιμοποιούνται και για την παραγωγή τυχαίων αριθμών που ακολουθούν άλλες κατανομές εισάγοντας στον αλγόριθμο έναν μετασχηματισμό μεταξύ των δύο μεταβλητών. Οι τυχαίοι αυτοί αριθμοί που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή είναι απλά τυχαίοι αριθμοί που βρίσκονται σε ένα προσδιορισμένο διάστημα (τυπικά μεταξύ 0 και 1), με οποιοδήποτε αριθμό στο διάστημα αυτό να έχει ίση πιθανότητα να παρατηρηθεί με οποιοδήποτε άλλο στο ίδιο διάστημα. Έτσι μία αξιόπιστη πηγή παραγωγής τυχαίων αριθμών που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή είναι ένα βασικό στάδιο για οποιαδήποτε στοχαστική μοντελοποίηση με την χρήση της μεθόδου Monte Carlo [Γ.2].

Μία σοβαρή πηγή σφάλματος είναι το σφάλμα που υπεισέρχεται όταν θεωρητικά ακριβείς μέθοδοι, που θα περιγραφούν σε αυτή την ενότητα, χρησιμοποιούν ακολουθίες ψευδοτυχαίων αριθμών για τον μετασχηματισμό των ομοιόμορφων τυχαίων αριθμών σε ένα δείγμα μίας άλλης συγκεκριμένης κατανομής. Ορισμένοι τέτοιοι μετασχηματισμοί είναι σημαντικά πιο ευαίσθητοι από άλλους, ενώ υπάρχουν ενδείξεις ότι η ευαισθησία αυτή αυξάνει όσο μεγαλώνει ο αριθμός των ψευδοτυχαίων αριθμών που χρειάζεται μία μέθοδος για την παραγωγή μίας μόνο τιμής από την προκαθορισμένη κατανομή [Γ.2]. Στην πράξη, όταν επιλέγεται μία μέθοδος για την παραγωγή δειγμάτων από συγκεκριμένες κατανομές, πρέπει κανείς να προτιμάει αυτές που απαιτούν λίγους ψευδοτυχαίους αριθμούς ανά δείγμα. Η πρόταση αυτή ενισχύει την χρήση της μεθόδου αντίστροφου μετασχηματισμού, όσον αφορά τις περισσότερες από τις γνωστές κατανομές.

Στην συνέχεια περιγράφονται δύο βασικές μέθοδοι μετασχηματισμού τυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$ σε δείγματα μίας άλλης προκαθορισμένης κατανομής. Αυτές είναι η μέθοδος αντίστροφου μετασχηματισμού (inverse transformation method) και η μέθοδος αποδοχής- απόρριψης (acceptance-rejection method). Για την μετατροπή αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιες άλλες σε ορισμένες περιπτώσεις χρειάζεται συνδυασμός των παραπάνω μεθόδων.

Γ.3.1 Η μέθοδος αντίστροφου μετασχηματισμού

Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή x , με συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F_X(x)$. Έστω η τυχαία μεταβλητή u , που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$. Αποδεικνύεται [Γ.8] ότι η τυχαία μεταβλητή $u = F_X(x)$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή ανεξάρτητα από την μορφή της $F_X(x)$. Συμβολίζοντας με $F_X^{(-1)}(x)$ την αντίστροφη συνάρτηση της $F_X(x)$, συνεπάγεται ότι ο:

$$x = F_X^{(-1)}(u)$$

είναι τυχαίος αριθμός που ακολουθεί την κατανομή $F_X(x)$. Έτσι για να βρει κανείς μία ακολουθία τυχαίων αριθμών x_i που ακολουθούν μία δεδομένη κατανομή πιθανότητας $F_X(x)$ αρκεί να προσδιοριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της $F_X(x)$ και να υπολογιστεί η τιμή της $F_X^{(-1)}(u_i)$ [Γ.2].

Το κατά πόσο είναι εύκολο να βρεθεί η $F_X^{(-1)}(x)$ είτε αναλυτικά, είτε αριθμητικά εξαρτάται από την μορφή της $F_X(x)$.

Για τις συνεχείς κατανομές των οποίων η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής υπολογίζεται αναλυτικά, η μέθοδος αυτή προσφέρει την πιο άμεση μέθοδο για δειγματοληψία. Αν δεν υπάρχει κλειστή λύση, αλλά η $F_X(x)$ μπορεί να υπολογισθεί εύκολα, μία επαναληπτική μέθοδος για την

εύρεση της ρίζας της $k(x) = F_X(x) - u$, όπως είναι η μέθοδος της διχοτόμησης ή η Newton-Raphson, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του x και επομένως να διευκολύνει την δειγματοληψία. Βεβαίως σε μία τέτοια περίπτωση, επιπρόσθετα στο αριθμητικό σφάλμα που είναι αναπόφευκτο σε έναν υπολογιστή πεπερασμένων τιμών (και ακρίβειας), οι μέθοδοι εύρεσης ριζών εισάγουν ένα επιπλέον σφάλμα, βασισμένο στις προκαθορισμένες ανοχές σφάλματός τους. Επειδή μειώνοντας το όριο σφάλματος αυξάνει ο αριθμός των επαναλήψεων, πρέπει κανείς αναπόφευκτα να εξισορροπήσει το κόστος και την ακρίβεια [Γ.2].

Στον πίνακα Π. Γ.1 δίνονται η κανονική κατανομή και η Weibull και οι αντίστροφές τους [Γ.2].

Για την κανονική κατανομή στον πίνακα Π. Γ.1 είναι:

$$A = \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3},$$

$$t = \sqrt{-\ln[\min(u, 1-u)]^2}$$

ενώ οι σταθερές δίνονται:

$$c_0 = 2.515517, c_1 = 0.802853, c_2 = 0.010328 \\ d_1 = 1.432788, d_2 = 0.189269, d_3 = 0.001308$$

Π. Γ.1: Αντίστροφες συναρτήσεις κανονικής κατανομής και κατανομής Weibull

Κατανομή	$F_X(x)$	$F_X^{(-1)}(u)$
Κανονική $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\mu + \text{sign}(u - 1/2)\sigma(t - A)$
Weibull $W(\sigma, \eta)$	$\frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta\right]$	$\sigma[-\ln(1-u)]^{1/\eta}$

Η σχέση για την κανονική κατανομή δίνει απόλυτο λάθος μικρότερο του $0.45 \cdot 10^{-3}$ σύμφωνα με το [Γ.2].

Όταν χρησιμοποιείται η προτιμητέα μορφή που αναγράφεται στον πίνακα, κερδίζει κανείς σε υπολογιστική ικανότητα, ενώ διατηρεί την κατανομή του x .

Παρόλο που η ευκολία της εφαρμογής της μεθόδου αντίστροφου μετασχηματισμού καθιστά την μέθοδο ελκυστική, δεν είναι απαραίτητα η πιο ικανοποιητική μέθοδος για δειγματοληψία από συγκεκριμένες κατανομές. Το αδύνατο σημείο της είναι ότι βασίζεται ισχυρά στον μετασχηματισμό της συνάρτησης, εφόσον για μερικές συναρτήσεις απαιτούνται δύο μετασχηματισμοί (π.χ. για την κατανομή B).

Γ.3.2 Η μέθοδος απόρριψης

Η μέθοδος απόρριψης (rejection method) ή αποδοχής- απόρριψης (acceptance-rejection method) επιτρέπει την αποφυγή δύσκολων υπολογισμών εκμεταλλευόμενη τις ιδιότητες των δεσμευμένων πιθανοτήτων [Γ.2]. Σύμφωνα με την μέθοδο, για την παραγωγή μίας τυχαίας μεταβλητής x , με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X , θεωρούμε μία βοηθητική συνάρτηση πυκνότητας g , τέτοια ώστε [Γ.3]:

$$f_X \leq cg(x), \forall x$$

όπου c είναι μία σταθερά. Θεωρούμε μία τιμή X , η οποία να ακολουθεί την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας g και επίσης παράγουμε μία ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή u από την

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$. Αν $u \geq \frac{f_X(X)}{cg(X)}$, απορρίπτουμε το X και επαναλαμβάνουμε την

διαδικασία με καινούρια X και u . Όταν ικανοποιηθεί η συνθήκη $u < \frac{f_X(X)}{cg(X)}$, τότε το επιλεγμένο X θα ακολουθεί την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$, όπως ακριβώς επιθυμούμε [Γ.3].

Η μέθοδος απόρριψης λειτουργεί καλά όταν το c είναι μικρό, επειδή χρειάζονται κατά μέσο όρο c επαναλήψεις ως ότου γίνει αποδεκτή μία τιμή. Σε ορισμένες περιπτώσεις αν το $\frac{f_X(x)}{cg(x)}$ είναι πάντα

0 ή 1, τότε δεν χρειάζεται η παραγωγή της u . Σε άλλες πάλι περιπτώσεις αν το $\frac{f_X(x)}{cg(x)}$ είναι δύσκολο να υπολογισθεί τότε μπορούμε να το προσδιορίσουμε μεταξύ δύο ορίων:

$$r(x) \leq \frac{f_X(x)}{cg(x)} \leq s(x)$$

και δεν χρειάζεται να βρεθεί η ακριβής τιμή του $\frac{f_X(x)}{cg(x)}$ αν δεν ισχύει η συνθήκη $r(x) \leq u \leq s(x)$.

Όσον αφορά την βοηθητική συνάρτηση g , αυτή θα πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε το αόριστο ολοκλήρωμά της να είναι γνωστό αναλυτικά και να είναι επίσης αναλυτικά αντιστρέψιμη ώστε να δώσει το X [Γ.1].

Όπως και η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού, η μέθοδος αποδοχής είναι μία θεωρητικά ακριβής προσέγγιση του δείγματος, υπό την προϋπόθεση ότι τα ανεξάρτητα δείγματα λαμβάνονται από την $U(0,1)$. Αφού κάθε Monte Carlo εφαρμογή βασίζεται στην παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών υπάρχει πάντα ένα σφάλμα προσέγγισης. Αυτό όμως το σφάλμα έχει πιο δυσχερή επίδραση στην μέθοδο αποδοχής- απόρριψης από ότι στην μέθοδο αντίστροφου μετασχηματισμού [Γ.2].

Γ.3.3 Αλγόριθμοι για διάφορες κατανομές

Για τις κατανομές που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση των τυχαίων μεταβλητών στο πρόβλημα του σχεδιασμού με σύνθετα υλικά προτείνονται οι παρακάτω μέθοδοι μετασχηματισμού, για κάθε μία κατανομή ξεχωριστά:

Γ.3.3.1. Κατανομή Weibull

Προτείνεται η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού χρησιμοποιώντας την σχέση που παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

Γ.3.3.2 Κανονική Κατανομή [Γ.1]

Επειδή οι μέθοδοι μετασχηματισμού μπορούν να γενικευτούν για περισσότερες της μίας διάστασης, αν τα $x_1, x_2, \dots$ είναι τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots$ και αν $y_1, y_2, \dots$ είναι το κάθε ένα συνάρτηση των x , τότε η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των y είναι:

$$p(y_1, y_2, \dots) dy_1 dy_2 \dots = p(x_1, x_2, \dots) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots)}{\partial(y_1, y_2, \dots)} \right| dy_1 dy_2 \dots$$

όπου $\left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots)}{\partial(y_1, y_2, \dots)} \right|$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα των x ως προς y .

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό μεταξύ δύο μεταβλητών που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$, x_1, x_2 και δύο ποσοτήτων y_1, y_2 , ως:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2) \\ y_2 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2) \end{aligned} \quad (\Gamma.1)$$

ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp\left[-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)\right] \\ x_2 &= \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{y_2}{y_1} \end{aligned}$$

Η Ιακωβιανή μπορεί να υπολογισθεί ως:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = - \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_1^2/2} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_2^2/2} \right]$$

Επειδή αυτή η σχέση είναι το γινόμενο μίας συνάρτησης μόνο του y_2 και μίας συνάρτησης μόνο του y_1 , βλέπουμε ότι κάθε y είναι κατανεμημένο ανεξάρτητα κατά την κανονική κατανομή $N(0,1)$.

Για την εφαρμογή της σχέσης (Γ.1), είναι πιο απλό να υποθέσουμε ότι επιλέγουμε μεταβλητές v_1 και v_2 ως τις δύο συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου που βρίσκεται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο γύρω από την αρχή των αξόνων, αντί για τις ομοιόμορφες μεταβλητές u_1 και u_2 . Τότε το άθροισμα των τετραγώνων τους $R^2 = v_1^2 + v_2^2$ είναι μία ομοιόμορφη μεταβλητή, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί του u_1 , ενώ η γωνία που ορίζουν τα (v_1, v_2) ως προς τον άξονα των v_1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως η τυχαία γωνία $2\pi x_2$. Έτσι στην (Γ.1) η συνάρτηση ημιτόνου και συνημίτονου μπορούν να γραφούν ως $\frac{v_1}{\sqrt{R^2}}$ και $\frac{v_2}{\sqrt{R^2}}$, ώστε να μην χρησιμοποιούνται τριγωνομετρικές σχέσεις στον αλγόριθμο.

Χρησιμοποιώντας το δείγμα από την κανονική κατανομή $(0,1)$ μπορούμε να το μετατρέψουμε σε δείγμα, z , από την γενική κανονική $N(\mu, \sigma)$ με την σχέση:

$$z = \sigma x + \mu$$

Γ.3.3.3 Λογαριθμική κανονική κατανομή

Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο για την παραγωγή δείγματος από την κανονική κατανομή και χρησιμοποιούμε το $x = e^z$ ως δείγμα από την λογαριθμική κατανομή.

Γ.3.3.4. Κατανομή Γ [Γ.1]

Ο αλγόριθμος για μία κατανομή Γ , με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \lambda, \eta) = \frac{x^{\eta-1} e^{-x}}{\Gamma(\eta)}$, με $x > 0$, $\lambda = 1$ και η ακέραιο αριθμό, βασίζεται στην μέθοδο απόρριψης. Ως βοηθητική συνάρτηση επιλέγουμε την συνάρτηση που προκύπτει από την κατανομή Lorentz

$$p(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+y^2)}$$

της οποίας το αόριστο ολοκλήρωμα είναι η συνάρτηση εφαπτομένης. Συνεπάγεται ότι η βοηθητική συνάρτηση είναι η:

$$g(x) = \frac{c_0}{1 + \frac{(x - x_0)^2}{\alpha_0}}$$

για οποιεσδήποτε σταθερές τιμές α_0 , c_0 και x_0 , ενώ το x δίνεται από την εξίσωση:

$$x = \alpha_0 \tan(\pi u) + x_0$$

όπου u είναι τυχαία μεταβλητή από την ομοιόμορφη κατανομή $U(0,1)$.

Γ.3.3.5 Ασυμπτωτική κατανομή μεγίστου στοιχείου (largest element distribution)

Με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού καταλήγουμε στην:

$$x = \mu - \sigma \ln \left(\ln \frac{1}{u} \right)$$

όπου u τυχαίος αριθμός της ομοιόμορφης κατανομής $(0,1)$

Γ.3.3.6 Ασυμπτωτική κατανομή ελαχίστου στοιχείου (smallest element distribution)

Αντίστοιχα για την κατανομή ελαχίστου στοιχείου με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού καταλήγουμε στην:

$$x = \mu + \sigma \ln \left(\ln \frac{1}{1-u} \right)$$

όπου u τυχαίος αριθμός της ομοιόμορφης κατανομής $(0,1)$

Γ. 4. ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Η αρχική επιλογή μίας αριθμογεννήτριας πρέπει να βασίζεται σε θεωρητικές αποδείξεις για την ποιότητά της, ώστε να αποφεύγεται η χρήση στην τύχη επιλεγμένων μεθόδων, που παράγουν ψευδοτυχαίους αριθμούς [Γ.3]. Στα πλαίσια αυτής της θεωρητικής απόδειξης της ποιότητας των αριθμογεννητριών χρειάζονται στατιστικοί έλεγχοι, οι οποίοι πρέπει να εκτελούνται σε όλη την περίοδο της γεννήτριας. Όπως έχει παρατηρηθεί, όμως, η χρήση μίας γεννήτριας σε μία συγκεκριμένη εφαρμογή, όσο καλή και αν είναι η γεννήτρια, δεν συνεπάγεται την ορθότητα των αποτελεσμάτων, εξαιτίας του ότι δεν χρησιμοποιείται όλη η περίοδος της γεννήτριας, παρά μόνο μία υποακολουθία αριθμών αυτής. Για αυτό τον λόγο θα πρέπει να γίνεται έλεγχος και στις υποακολουθίες δειγμάτων που παράγονται από τις αριθμογεννήτριες, με στόχο την εξέταση της διατήρησης ή μη των καλών στατιστικών χαρακτηριστικών της γεννήτριας και στα δείγματα που έχουν παραχθεί.

Η διαδικασία επιλογής και χρήσης της γεννήτριας πρέπει να αποτελείται επομένως από τα παρακάτω στάδια:

- Θεωρητική απόδειξη της καταλληλότητας της γεννήτριας.
- Θεωρητικοί στατιστικοί έλεγχοι για την ποιότητα των ακολουθιών της γεννήτριας, που αφορούν ολόκληρη την περίοδό της.
- Εμπειρικοί στατιστικοί έλεγχοι για την ποιότητα των υποακολουθιών της γεννήτριας που θα χρησιμοποιηθούν στην εκάστοτε εφαρμογή.

Οι θεωρητικοί στατιστικοί έλεγχοι, μπορούν να θεωρηθούν ως προκαταρκτικοί. Τα αποτελέσματα αυτών, αναφέρονται σε όλη την περίοδο της αριθμογεννήτριας, ενώ εξασφαλίζουν την *ολική* τυχαιότητα των ακολουθιών, δηλαδή την καταλληλότητα πολύ μεγάλων δειγμάτων.

Η θεωρητική βάση των γεννητριών που έχουν επιλεγεί για τις εφαρμογές σε αυτή την εργασία έχει ήδη αποδειχθεί [Γ.2], [Γ.3]. Εξαιτίας αυτού, στο παρόν εδάφιο θα δοθούν οι βασικές έννοιες

για τους στατιστικούς και εμπειρικούς ελέγχους εν γένει, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανίχνευση τοπικής μη τυχαιότητας σε υποακολουθίες των γεννητριών.

Γ.4.1 Βασικές έννοιες στατιστικών ελέγχων [Γ.8]

Μία στατιστική υπόθεση είναι μία πρόταση που αναφέρεται είτε στην δυνατότητα μία ή περισσότερες παράμετροι ενός στατιστικού μοντέλου να πάρουν μία συγκεκριμένη τιμή, είτε στην μορφή της κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής. Ο έλεγχος υποθέσεων είναι μία διαδικασία έρευνας της ορθότητας ή μη της υπόθεσης, με την βοήθεια ενός τυχαίου δείγματος [Γ.8], [Γ.11].

Η εισαγωγή στα βασικά θέματα του ελέγχου υποθέσεων γίνεται μέσα από το παρακάτω πρόβλημα: Η κατανομή μίας τυχαίας μεταβλητής x είναι γνωστή συνάρτηση $F_X(x, \theta)$, η οποία εξαρτάται από την παράμετρο θ . Επιθυμείται ο έλεγχος της υπόθεσης $\theta = \theta_0$ ως προς την εναλλακτική πρόταση $\theta \neq \theta_0$. Η πρόταση ότι $\theta = \theta_0$ συμβολίζεται με H_0 και λέγεται μηδενική υπόθεση. Αντίστοιχα η πρόταση $\theta \neq \theta_0$ συμβολίζεται με H_1 και καλείται εναλλακτική υπόθεση. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η θ κάτω από την εναλλακτική υπόθεση αποτελούν ένα σύνολο Θ_1 στον χώρο της παραμέτρου. Αν το Θ_1 αποτελείται από ένα και μόνο σημείο $\theta = \theta_1$, η υπόθεση καλείται απλή, αλλιώς καλείται σύνθετη [Γ.8].

Ο σκοπός του ελέγχου υποθέσεων είναι η διερεύνηση του αν υπάρχουν πειραματικές ενδείξεις που να υποστηρίζουν την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Η απόφαση της απόρριψης ή της αποδοχής, βασίζεται στην τοποθεσία (location) του παρατηρούμενου δείγματος X του x . Έστω ότι κάτω από την υπόθεση H_0 η πυκνότητα πιθανότητας $f_X(X, \theta_0)$ του δείγματος είναι αμελητέα σε μία συγκεκριμένη περιοχή D_C του δειγματοχώρου, ενώ λαμβάνει σημαντικές τιμές μόνο στην συμπληρωματική περιοχή $\bar{D}_C$, του D_C . Είναι λογικό να απορρίψουμε την H_0 αν το X ανήκει στο D_C και να την αποδεχθούμε αν το X ανήκει στο $\bar{D}_C$. Το σύνολο D_C λέγεται κρίσιμη περιοχή ή περιοχή απόρριψης του ελέγχου, ενώ το σύνολο $\bar{D}_C$ ονομάζεται περιοχή αποδοχής της H_0 . Έτσι ο έλεγχος καθορίζεται σε όρους του συνόλου D_C .

Πρέπει να τονισθεί ότι ο σκοπός του ελέγχου υποθέσεων δεν είναι να προσδιορίσει το ποια από τις H_0 ή H_1 είναι αληθής, αλλά είναι να εξακριβώσει αν υπάρχουν ενδείξεις που να υποστηρίζουν την απόρριψη της H_0 . Επομένως, οι όροι *αποδέχομαι* και *απορρίπτω* πρέπει να έχουν την ανάλογη σημασία.

Στον έλεγχο υποθέσεων μπορεί να γίνουν δύο ειδών σφάλματα, τα οποία εξαρτώνται από την τοποθεσία του δείγματος X .

- Έστω ότι η H_0 είναι αληθής. Αν $X \in D_C$, απορρίπτουμε την H_0 , παρόλο που είναι αληθής. Το σφάλμα που γίνεται σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται Σφάλμα Τύπου I. Η πιθανότητα ενός τέτοιου σφάλματος συμβολίζεται με α και ονομάζεται επίπεδο σημαντικότητας. Έτσι:

$$\alpha = P(\text{Απόρριψη της } H_0 / H_0 \text{ είναι αληθής}) = P(X \in D_C / H_0)$$

Η διαφορά $1 - \alpha = P(X \notin D_C / H_0)$ ισούται με την πιθανότητα να αποδεχθούμε την H_0 όταν αυτή είναι αληθής.

- Έστω ότι η H_0 είναι ψευδής. Αν $X \notin D_C$ αποδεχόμαστε την H_0 , παρόλο που η H_0 είναι ψευδής. Το σφάλμα που γίνεται σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται Σφάλμα Τύπου II. Η πιθανότητα ενός τέτοιου σφάλματος είναι μία συνάρτηση $\beta(\theta)$ του θ και λέγεται χαρακτηριστικό λειτουργίας του ελέγχου (operating characteristic). Έτσι:

$$\beta(\theta) = P(X \notin D_C)$$

Η διαφορά $1 - \beta(\theta)$ είναι η πιθανότητα να απορρίψουμε την H_0 όταν αυτή είναι ψευδής. Αυτή συμβολίζεται με $P(\theta)$ και καλείται ισχύς του ελέγχου (power). Έτσι:

$$P(\theta) = 1 - \beta(\theta) = P(X \in D_C / H_1)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

Υπάρχουν επομένως τέσσερις πιθανές καταστάσεις στον έλεγχο υποθέσεων, οι οποίες φαίνονται στο Σχ.Γ.2. Αντίστοιχα στο Σχ.Γ.3 παρουσιάζεται το πρόβλημα των αποφάσεων εκπεφρασμένο σε όρους πιθανότητας για κάθε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις.

		Η διαδικασία δίνει	
		H_0 είναι αληθής	H_0 είναι ψευδής
Απόφαση	Αποδοχή της H_0	Σωστή απόφαση	Λάθος απόφαση (Λάθος τύπου Ι)
	Απόρριψη της H_0	Λάθος απόφαση (Λάθος τύπου ΙΙ)	Σωστή απόφαση

Σχ. Γ.2: Πιθανές καταστάσεις κατά τον έλεγχο υποθέσεων

Ο έλεγχος μίας υπόθεσης προσδιορίζεται σε όρους της κρίσιμης περιοχής D_C . Η περιοχή αυτή επιλέγεται έτσι ώστε να κρατάει μικρές τις πιθανότητες και των δύο τύπων σφάλματος. Παρόλα αυτά, οι δύο πιθανότητες δεν μπορεί να είναι αυθαίρετα μικρές, αφού μείωση του α επιφέρει μία αύξηση του β . Στις περισσότερες εφαρμογές είναι σημαντικό να ελέγχεται το α .

Για πρακτικούς λόγους ενεργούμε ως εξής: Πριν από κάθε πειραματισμό (experimentation) επιλέγουμε μία συνάρτηση $q = g(x)$, του δείγματος X . Βρίσκουμε ένα σύνολο R_C πάνω στον πραγματικό άξονα, όπου κάτω από την υπόθεση H_0 η πυκνότητα πιθανότητας του q είναι αμελητέα και απορρίπτουμε την H_0 όταν η τιμή του $q = g(X)$ βρίσκεται στο R_C . Το σύνολο R_C είναι η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου, ενώ η τυχαία μεταβλητή q ονομάζεται στατιστικό μέγεθος του ελέγχου. Στην επιλογή της συνάρτησης $g(x)$ οδηγούμαστε από την σημειακή εκτίμηση του θ .

		Η διαδικασία δίνει	
		H_0 είναι αληθής	H_0 είναι ψευδής
Απόφαση	Αποδοχή της H_0	$1 - \alpha$	β (χαρακτηριστικό λειτουργίας)
	Απόρριψη της H_0	α (επίπεδο σημαντικότητας)	$1 - \beta$ (ισχύς ελέγχου)

Σχ. Γ.3: Πιθανές καταστάσεις κατά τον έλεγχο υποθέσεων εκπεφρασμένες σε όρους πιθανοτήτων

Αν ο έλεγχος υποθέσεων βασίζεται σε ένα στατιστικό μέγεθος, οι δύο τύποι σφάλματος εκφράζονται σε όρους της περιοχής R_C του πραγματικού άξονα και της πυκνότητας πιθανότητας $f_q(q, \theta)$ του στατιστικού μεγέθους q .

$$\alpha = P(q \in R_C / H_0) = \int_{R_C} f_q(q, \theta_0) dq$$

$$\beta(\theta) = P(q \in R_C / H_1) = \int_{R_C} f_q(q, \theta) dq$$

Σκοπός μας είναι να ελέγξουμε την υπόθεση $\theta = \theta_0$ ως προς τις εναλλακτικές υποθέσεις $\theta \neq \theta_0$, $\theta > \theta_0$ και $\theta < \theta_0$. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f_q(q, \theta)$ συγκεντρώνεται στα αριστερά του $f_q(q, \theta_0)$ για $\theta > \theta_0$ και στα δεξιά για την περίπτωση $\theta < \theta_0$, όπως φαίνεται στο Σχ.Γ.4.

Σχ.Γ.4: Σχηματική παράσταση των ελέγχων υποθέσεων

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

Υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις, οι πιο πιθανές τιμές του q είναι στα δεξιά του $f_q(q, \theta_0)$ αν $\theta > \theta_0$ και στα αριστερά, αν $\theta < \theta_0$. Για αυτό επιθυμείται η απόρριψη της H_0 αν $q < c_1$ ή $q > c_2$. Η κρίσιμη περιοχή που προκύπτει αποτελείται από τους ημιάξονες $q < c_1$ και $q > c_2$. Για ευκολία επιλέγουμε τις σταθερές c_1 και c_2 έτσι ώστε:

$$P(q < c_1 / H_0) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(q > c_2 / H_0) = \frac{\alpha}{2}$$

Συμβολίζοντας ως q_u το ποσοστιαίο σημείο (percentile) του q κάτω από την υπόθεση H_0 , συμπεραίνουμε ότι $c_1 = q_{\alpha/2}$ και $c_2 = q_{1-\alpha/2}$. Αυτό δίνει τον ακόλουθο έλεγχο:

Αποδεχόμαστε την H_0 αν και μόνο αν $q_{\alpha/2} < q < q_{1-\alpha/2}$

$$H_1: \theta > \theta_0$$

Υπό την υπόθεση H_1 , οι πιο πιθανές τιμές του q είναι στα δεξιά του $f_q(q, \theta_0)$. Για αυτό επιθυμείται η απόρριψη της H_0 αν $q > c$. Η κρίσιμη περιοχή που προκύπτει ορίζεται από τον ημιάξονα $q > c$, όπου το c είναι τέτοιο ώστε:

$$P(q > c / H_0) = \alpha$$

$c = q_{1-\alpha}$ και το ακόλουθο αποτέλεσμα ελέγχου:

Αποδεχόμαστε την H_0 αν και μόνο αν $q < q_{1-\alpha}$

$$H_1: \theta < \theta_0$$

Όμοια με την προηγούμενη περίπτωση επιλέγουμε κρίσιμη περιοχή τέτοια ώστε:

$$P(q < c / H_0) = \alpha$$

$$c = q_\alpha$$

Αυτό συνεπάγεται τον ακόλουθο έλεγχο:

Αποδεχόμαστε την H_0 αν και μόνο αν $q > q_\alpha$

Ο έλεγχος μίας υπόθεσης λοιπόν, αποτελείται από τα παρακάτω βήματα: Επιλέγουμε ένα στατιστικό μέγεθος ελέγχου $q = g(x)$ και προσδιορίζουμε την πυκνότητα πιθανότητας του. Παρατηρούμε το δείγμα X και υπολογίζουμε την συνάρτηση $q = g(X)$. Καθορίζουμε την τιμή του α και προσδιορίζουμε την κρίσιμη περιοχή R_C . Απορρίπτουμε την H_0 αν και μόνο αν $q \in R_C$.

Στις περισσότερες περιπτώσεις γνωστών ελέγχων η πυκνότητα πιθανότητας του q είναι γνωστή μόνο για $\theta = \theta_0$. Αυτό αρκεί για τον προσδιορισμό της κρίσιμης περιοχής, αλλά η συνάρτηση χαρακτηριστικού λειτουργίας $\beta(\theta)$ δεν μπορεί να υπολογισθεί.

Η εκλογή του επιπέδου σημαντικότητας του ελέγχου είναι σημαντική και οι πιο συνηθισμένες τιμές που χρησιμοποιούνται είναι $\alpha = 0.05$ και $\alpha = 0.01$. Μερικές φορές χρησιμοποιούνται και οι τιμές 0.1 και 0.001. Σε κάθε περίπτωση πρέπει κανείς να θυμάται ότι πρέπει να επιλέγεται σχετικά μικρή τιμή για το α , αν είναι μεγάλος ο κίνδυνος λανθασμένης απόρριψης μίας σωστής μηδενικής υπόθεσης [Γ.11].

Γ.4.2 Έλεγχοι που χρησιμοποιούνται

Όπως προαναφέρθηκε στην εργασία που εκτελέστηκε πραγματοποιήθηκαν έλεγχοι σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη εξετάστηκε η συμπεριφορά των γεννητριών ως προς τα δείγματα που παράγονται και χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή τους στο πρόβλημα της αξιοπιστίας πολυστρώτων πλακών, ενώ στην δεύτερη εξετάστηκε η καταλληλότητα των δειγμάτων που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή μετά την μετατροπή τους σε δείγματα άλλης κατανομής για την προσομοίωση πειραματικών αποτελεσμάτων των ιδιοτήτων του υλικού της στρώσης. Η δεύτερη αυτή περίπτωση εξετάστηκε κυρίως για να εξασφαλισθεί ότι ο μετασχηματισμός από την μία κατανομή σε μία δεύτερη δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα.

Στο πρώτο μέρος, κατά το οποίο γίνεται ο εμπειρικός έλεγχος των αριθμογεννητριών χρησιμοποιήθηκαν οι εξής έλεγχοι:

- a. Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov
- b. Έλεγχος κενού
- c. Έλεγχος σειριακής συσχέτισης
- d. Έλεγχος αυξήσεων και μειώσεων
- e. Έλεγχος μεγίστου t
- f. Έλεγχος μετάθεσης

Όλοι οι έλεγχοι που πραγματοποιήθηκαν σκοπό είχαν να επιβεβαιώσουν την ορθή χρήση της μεθόδου στο πρόβλημα της αξιοπιστίας πολυστρώτων πλακών. Όσον αφορά τους εμπειρικούς ελέγχους για τον σκοπό αυτό από σειρά ελέγχων της βιβλιογραφίας [Γ.3], [Γ.4] έχουν επιλεγεί οι πιο χαρακτηριστικοί. Ο έλεγχος birthday spacing, παρόλο που θεωρείται χαρακτηριστικός [Γ.3], δεν χρησιμοποιήθηκε μίας και όπως προαναφέρθηκε τα αποτελέσματα την τέταρτης γεννήτριας δεν γίνονται αποδεκτά.

Συγκεκριμένα ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov και ο έλεγχος σειριακής συσχέτισης θεωρούνται οι πιο αδύναμοι για να ξεχωρίσουν μία καλή γεννήτρια από μία άλλη [Γ.3]. Αντιθέτως ο έλεγχος αυξομειώσεων θεωρείται σχετικά αυστηρός. Ειδικά για τις γραμμικά ομοιόμορφες γεννήτριες ο έλεγχος συνιστάται ιδιαίτερα όταν αυτές δεν έχουν μεγάλο πολλαπλασιαστή. Το ίδιο και ο έλεγχος μεγίστου t [Γ.3]. Έτσι για την επιβεβαίωση των γεννητριών που χρησιμοποιούνται οι έλεγχοι αυτοί θεωρούνται αρκετοί.

Οι έλεγχοι αυτοί πραγματοποιούνται σε ικανό αριθμό δειγμάτων ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο καθολικός έλεγχος που περιγράφεται σε επόμενο εδάφιο.

Στο δεύτερο μέρος, που στόχο έχει την επιβεβαίωση της ορθότητας των μετασχηματισμών δειγμάτων από μία κατανομή σε μία άλλη πραγματοποιήθηκαν οι παρακάτω έλεγχοι:

- a. Έλεγχος Kolmogorov - Smirnov
- b. Έλεγχος X^2

Όσον αφορά τους ελέγχους για την ορθότητα των μετασχηματισμών ενός δείγματος από την ομοιόμορφη κατανομή σε δείγμα μία άλλης κατανομής, θεωρείται ότι υπερκαλύπτουν τον σκοπό της εργασίας, εφόσον ένας έλεγχος ήταν αρκετός για τον σκοπό αυτό. Συγκεκριμένα οι δύο αυτοί έλεγχοι σκοπό έχουν να επιβεβαιώσουν ότι η το δείγμα των ψευδοτυχαίων αριθμών μετά τον μετασχηματισμό τους ακολουθούν την κατανομή πιθανοτήτων που μας ενδιαφέρει. Σημειώνεται δε ότι ενώ στο πρώτο μέρος ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov χρησιμοποιείται για να ξεχωρίσει

μία καλή γεννήτρια από μία κακή, στο δεύτερο χρησιμοποιείται για να επιβεβαιώσει τον μετασχηματισμό ενός δείγματος της ομοιόμορφης κατανομής από μία καλή αριθμογεννήτρια σε δείγμα μίας άλλης κατανομής. Υπενθυμίζεται, ότι μία καλή γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών δεν αρκεί να παράγει δείγματα που να ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή, αλλά πρέπει να πληροί και άλλα χαρακτηριστικά, όπως αυτό της μη σειριακής συσχέτισης των παραγόμενων αριθμών. Στο πρόβλημα που εξετάζουμε μετά τον μετασχηματισμό του δείγματος από την ομοιόμορφη σε μία άλλη κατανομή, μας ενδιαφέρει μόνο να ακολουθεί την επιθυμητή κατανομή.

Γ.4.2.1 Ο έλεγχος καλής προσαρμογής X^2 [Γ.3]

Ο έλεγχος καλής προσαρμογής X^2 είναι ο πιο διαδεδομένος από όλους τους στατιστικούς ελέγχους. Έστω $x_1, \dots, x_N$ ένα δείγμα από πληθυσμό με άγνωστη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F_X(x)$. Θέλουμε να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση

$$H_0: F_X(x) = F_0(x) \text{ για όλα τα } x$$

όπου $F_0(x)$ είναι μία εντελώς προσδιορισμένη κατανομή, έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης:

$$H_1: F_X(x) \neq F_0(x) \text{ για κάποιο } x.$$

Υποθέτουμε ότι οι N παρατηρήσεις έχουν ομαδοποιηθεί σε k ξένες μεταξύ τους (mutually exclusive) κατηγορίες και συμβολίζουμε με N_j και $N_{p_j}^0$ τον παρατηρούμενο αριθμό των δοκιμών και την αναμενόμενη τιμή για την j κατηγορία, $j = 1, \dots, k$, αντίστοιχα όταν η H_0 είναι αληθής.

Το κριτήριο ελέγχου χρησιμοποιεί το ακόλουθο στατιστικό μέγεθος [Γ.3]:

$$\tilde{O} = \sum_{j=1}^N \frac{(N_j - N_{p_j}^0)^2}{N p_j^0},$$

$$\text{όπου } \sum_{j=1}^N N_j = N.$$

Το στατιστικό μέγεθος του ελέγχου τείνει να είναι μικρό όταν η H_0 είναι αληθής και μεγάλο όταν η H_0 είναι ψευδής. Η ακριβής κατανομή του $\tilde{O}$ είναι αρκετά περίπλοκη, αλλά για μεγάλα δείγματα η κατανομή του μπορεί να προσεγγισθεί από την X^2 με $k-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Κάτω από την υπόθεση H_0 αναμένουμε:

$$P(Y > X_{1-\alpha}^2) = \alpha$$

όπου α είναι το επίπεδο σημαντικότητας, έστω $\alpha = 0.05$ ή 0.1 , ενώ η τιμή $X_{1-\alpha}^2$ που αντιστοιχεί στην πιθανότητα $1-\alpha$ προσδιορίζεται από υπολογιστικό κώδικα για την X^2 κατανομή. Για να εξασφαλίσουμε τις ασυμπτωτικές ιδιότητες του $\tilde{O}$ συχνά συνίσταται η επιλογή $N > 5k$ και $k > 1000$ [Γ.3].

Γ.4.2.2 Έλεγχος καλής προσαρμογής Kolmogorov- Smirnov [Γ.1]

Ένας άλλος πολύ γνωστός έλεγχος στην στατιστική είναι ο έλεγχος Kolmogorov- Smirnov. Έστω $x_1, \dots, x_N$ ένα τυχαίο δείγμα από μία άγνωστη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F_X(x)$. Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του δείγματος, που συμβολίζεται με $F_N(x)$, ορίζεται ως:

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{(-\infty, x)}(X_i)$$

όπου $I_{(-\infty, x)}(X_i)$ είναι ο δείκτης της τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή:

$$I_{(-\infty, x)}(X) = \begin{cases} 1 & \text{για } -\infty < X \leq x \\ 0 & \text{παντού αλλού} \end{cases}$$

Η τυχαία ποσότητα

$$D_N = \sup_{-\infty < X < \infty} |F_N(x) - F_X(x)|$$

που μετράει κατά πόσο αποκλίνει η $F_N(x)$ από την $F_X(x)$ ονομάζεται στατιστικό μέγεθος Kolmogorov-Smirnov για ένα δείγμα. Αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε συνεχή κατανομή $F_X(x)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sqrt{N} D_N \leq x) = \left[1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(-2j^2 x^2) \right] = H(x)$$

Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της $H(x)$ δεν εξαρτάται από αυτή από την οποία λήφθηκε το δείγμα, δηλαδή η οριακή συνάρτηση $\sqrt{N} D_N$ είναι ανεξάρτητη κατανομής. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την χρήση του D_N σαν ένα στατιστικό μέγεθος καλής προσαρμογής.

Για παράδειγμα υποθέτουμε ότι έχουμε το τυχαίο δείγμα $x_1, \dots, x_N$ και επιθυμούμε να ελέγξουμε την υπόθεση $H_0: F_X(x) = F_0(x)$ για κάθε x , όπου $F_0(x)$ είναι μία εντελώς προσδιορισμένη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας. Αν η H_0 είναι αληθής τότε η ποσότητα

$$\sqrt{N} D_N = \sqrt{N} \sup_{-\infty < X < \infty} |F_N(x) - F_X(x)|$$

είναι προσεγγιστικά κατανομημένη όπως η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $H(x)$.

Αν η H_0 είναι ψευδής τότε η $F_N(x)$ θα τείνει να είναι πλησιέστερη στην $F_X(x)$ παρά στην $F_0(x)$, και συνεπώς το $\sup_{-\infty < X < \infty} |F_N(x) - F_X(x)|$ θα τείνει να είναι μεγάλο. Έτσι ένα λογικό κριτήριο ελέγχου

είναι να απορρίψουμε την H_0 αν $\sup_{-\infty < X < \infty} |F_N(x) - F_X(x)|$ είναι μεγάλο.

Ο έλεγχος καλής προσαρμογής K-S με επίπεδο σημαντικότητας α απορρίπτει την H_0 αν και μόνο αν $\sqrt{N} D_N > x_{1-\alpha}$ όπου η ποσότητα $x_{1-\alpha}$ βρίσκεται συνήθως από πίνακες.

Για την αποφυγή της χρήσης στατιστικών πινάκων χρησιμοποιήθηκε η μετασχηματισμένη μεταβλητή [Γ.3]:

$$D_1^* = D_1 \left(\sqrt{N} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{N}} \right)$$

Για τον έλεγχο K-S το επίπεδο σημαντικότητας υπολογίζεται από την σχέση [Γ.12]:

$$\alpha = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \exp(-2j^2 D_N^{*2})$$

Αν $\alpha(D_N^*) > \alpha_0$, όπου α_0 το προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, τότε η μηδενική υπόθεση, H_0 , γίνεται αποδεκτή.

Σύγκριση των δύο ελέγχων καλής προσαρμογής, X^2 και K-S δείχνει ότι η ομοιότητά τους έγκειται στο γεγονός ότι και οι δύο αποφαίνονται για το πόσο καλά ένα δεδομένο σύνολο παρατηρήσεων (ψευδοτυχαίων αριθμών) προσομοιάζει κάποια προσδιορισμένη κατανομή. Η διαφορά τους αντίστοιχα έγκειται στο ότι ο έλεγχος K-S εφαρμόζεται σε συνεχείς συναρτήσεις κατανομών πιθανότητας, ενώ ο X^2 έλεγχος εφαρμόζεται σε κατανομές που αποτελούνται αποκλειστικά από άλματα (αφού όλες οι παρατηρήσεις διαιρούνται σε k κατηγορίες). Παρόλα αυτά ο έλεγχος X^2 μπορεί να εφαρμοσθεί σε συνεχείς $F_X(x)$, υπό την προϋπόθεση ότι το πεδίο ορισμού της μπορεί να διαιρεθεί σε k τμήματα και οι μεταβλητές μέσα σε κάθε τμήμα να αμεληθούν. Όταν

χρησιμοποιείται ο έλεγχος X^2 πρέπει να ληφθεί υπόψη η ευαισθησία του στον αριθμό των κλάσεων και στο πλάτος τους, τα οποία επιλέγονται αυθαίρετα από τον χρήστη.

Μία άλλη διαφορά είναι ότι ο έλεγχος X^2 απαιτεί ομαδοποιημένα δεδομένα ενώ ο έλεγχος K-S δεν υπόκειται σε τέτοιο περιορισμό. Για αυτό τον λόγο όταν η υποτιθέμενη κατανομή είναι συνεχής ο έλεγχος K-S επιτρέπει τον έλεγχο καλής προσαρμογής για κάθε μία από τις N παρατηρήσεις, αντί για μόνο k κλάσεις, όπου $k \leq N$. Υπό αυτό το πρίσμα ο έλεγχος K-S χρησιμοποιεί πιο ολοκληρωμένα τα υπάρχοντα δεδομένα [Γ.3].

Όσον αφορά την αποτελεσματικότητα των δύο αυτών ελέγχων δεν υπάρχουν αρκετά θεωρητικά αποτελέσματα για να μπορεί κανείς να τους κρίνει εκτενέστερα.

Γ.4.2.3 Έλεγχος καλής προσαρμογής Cramer- von Mises [Γ.7]

Ο έλεγχος αυτός, όπως και οι έλεγχοι X^2 και KS, ανήκει στους ελέγχους καλής προσαρμογής και το αντικείμενό του είναι το ίδιο με αυτών. Για ένα δεδομένο δείγμα $x_1, \dots, x_N$ από μία άγνωστη κατανομή πιθανότητας θέλουμε να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση:

$$H_0: F_X(x) = F_0(x)$$

όπου $F_0(x)$ είναι μία εντελώς προσδιορισμένη κατανομή, ως προς την εναλλακτική υπόθεση:

$$H_1: F_X(x) \neq F_0(x)$$

για τουλάχιστον μία τιμή του x . Συμβολίζοντας με $X_{(1)}, \dots, X_{(N)}$ την διατεταγμένη ακολουθία θεωρούμε το παρακάτω στατιστικό μέγεθος ελέγχου:

$$Y = \frac{1}{12N} + \sum_{i=1}^N \left[F_0(X_{(i)}) - \frac{2i-1}{2N} \right]^2$$

Με άλλα λόγια, βρίσκουμε την τιμή της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας για κάθε τιμή του τυχαίου δείγματος, $X_{(i)}$, και από αυτή αφαιρούμε την ποσότητα $\frac{2i-1}{2N}$, η οποία είναι ο μέσος όρος

αμέσως πριν και αμέσως μετά το άλμα στο $X_{(i)}$, δηλαδή ο μέσος όρος των $\frac{i-1}{N}$ και $\frac{i}{N}$. Η διαφορά αυτή υψώνεται στο τετράγωνο, έτσι ώστε θετικές διαφορές να μην ακυρώνουν τις αρνητικές και το αποτέλεσμα για τις μεμονωμένες τιμές να αθροίζεται.

Οι ποσότητες των Y πινακοποιούνται χρησιμοποιώντας μία ασυμπτωτική κατανομή του Y . Ο έλεγχος Cramer- von Mises για την καλή προσαρμογή, με επίπεδο σημαντικότητας α , απορρίπτει την υπόθεση H_0 αν και μόνο αν $Y > y_{1-\alpha}$ όπου η ποσότητα $y_{1-\alpha}$ μπορεί να βρεθεί από κατάλληλους πίνακες.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση για την αποφυγή της χρήσης των πινάκων χρησιμοποιήθηκε η μετασχηματισμένη μεταβλητή [Γ.4]:

$$Y^* = \left(Y - \frac{0.2}{N} + \frac{0.6}{N^2} \right) \left(1 + \frac{1}{N} \right)$$

Με αυτή το επίπεδο σημαντικότητας α υπολογίζεται από την εμπειρική σχέση [Γ.4]:

$$\alpha(Y^*) = 0.05 \exp(2.79 - 6Y^*)$$

Αν $\alpha(Y^*) > \alpha_0$, όπου α_0 το επιλεγμένο επίπεδο σημαντικότητας τότε η H_0 γίνεται αποδεκτή.

Γ.4.2.4 Έλεγχος κενού (Gap Test)

Ο έλεγχος κενού εξετάζει το πόσο τυχαία είναι τα ψηφία σε ένα δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή. Έστω $U_1, \dots, U_N$ ένα τέτοιο δείγμα. Θεωρούμε ότι οποιαδήποτε υποακολουθία

(subsequence) $U_j, U_{j+1}, \dots, U_{j+r}, r+1$ αριθμών αντιπροσωπεύει ένα κενό μήκους r αν τα U_j και U_{j+r} βρίσκονται μεταξύ α και β ($0 \leq \alpha < \beta \leq 1$) αλλά το $U_{j+i}, i = 1, \dots, r-1$ δεν βρίσκεται.

Αν N_C είναι ο αριθμός των $U_1, \dots, U_N$ που βρίσκονται στην περιοχή $\alpha \leq U_i < \beta$ τότε υπάρχουν N_C κενά στην κυκλική μετάθεσή τους. Έστω Z_r ο αριθμός των κενών μήκους r , για $0 \leq r \leq t-1$ και έστω Z_t ο αριθμός των κενών μήκους $\geq t$. Τότε το στατιστικό μέγεθος

$$V = \sum_{0 \leq r \leq t} \frac{(Z_r - N_C P_r)^2}{N_C P_r}$$

πρέπει να ακολουθεί την κατανομή X^2 με t βαθμούς ελευθερίας, καθώς το N τείνει στο άπειρο, όπου P_r δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$P_r = (\beta - \alpha)(1 - \beta + \alpha)^r, \text{ για } 0 \leq r \leq t-1$$

$$P_t = (1 - \beta + \alpha)^t$$

Σημειώνεται ότι t επιλέγεται από τον χρήστη έτσι ώστε το Z_t να αναμένεται να τουλάχιστον ίσο ή μεγαλύτερο του 5 και να μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία ο έλεγχος X^2 . Στην συγκεκριμένη περίπτωση το t έχει ληφθεί ίσο με 10.

Γ.4.2.5 Έλεγχος σειριακής συσχέτισης (Serial correlation test) [Γ.3]

Έστω $U_1, \dots, U_N$ ένα δείγμα ψευδοτυχαίων αριθμών που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή. Για να εξετάσουμε το πόσο το U_{j+1} εξαρτάται από το U_j υπολογίζουμε το παρακάτω στατιστικό μέγεθος:

$$C = \frac{N(U_1 U_2 + U_2 U_3 + \dots + U_{N-1} U_N + U_N U_1) - (U_1 + U_2 + \dots + U_N)^2}{N(U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_N^2) - (U_1 + U_2 + \dots + U_N)^2}$$

το οποίο καλούμε συντελεστή σειριακής συσχέτισης. Ο συντελεστής συσχέτισης βρίσκεται πάντα μεταξύ -1 και +1. Όταν είναι μηδέν ή πολύ μικρός δείχνει ότι δεν υπάρχει σειριακή συσχέτιση, ή αλλιώς τα στοιχεία είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. Από την άλλη πλευρά η τιμή ± 1 δείχνει ολική γραμμική συσχέτιση.

Για τον λόγο αυτό επιθυμούμε η τιμή του C να είναι κοντά στο μηδέν. Επειδή το $U_1 U_2$ δεν είναι τελείως ανεξάρτητο του $U_2 U_3$ μία “καλή” τιμή του C είναι μεταξύ $\mu_N - 2\sigma_N$ και $\mu_N + 2\sigma_N$, όπου

$$\mu_N = \frac{-1}{N-1} \text{ και } \sigma_N^2 = \frac{N^2}{(N-1)^2(N-2)} \text{ για } N > 2$$

Το C αναμένεται να βρίσκεται μέσα σε αυτά τα όρια στο 95% των δειγμάτων

Γ.4.2.6 Έλεγχος αυξομείωσης (Run test) [Γ.3]

Για τον έλεγχο αυτό το μέγεθος κάθε στοιχείου ενός δείγματος ψευδοτυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή συγκρίνεται με αυτό του αμέσως προηγούμενου του. Αν το επόμενο στοιχείο είναι μεγαλύτερο τότε έχουμε μία αύξηση, αν είναι μικρότερο έχουμε μία μείωση. Έτσι παρατηρούμε αν η ακολουθία αυξάνει ή μειώνεται και για ποιο διάστημα. Μία απόφαση για την γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών μπορεί κατά αυτό τον τρόπο να βασισθεί στον αριθμό και το διάστημα των αυξήσεων ή μειώσεων.

Για παράδειγμα η παρακάτω ακολουθία επτά όρων

0.2, 0.4, 0.1, 0.3, 0.6, 0.7, 0.5

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

αποτελείται από μία αύξηση μήκους 1, που ακολουθείται από μία μείωση μήκους 1, που ακολουθείται από μία αύξηση μήκους 3 και τελικά μία μείωση μήκους 1 και μπορεί να χαρακτηριστεί με το δυαδικό σύμβολο

1 0 1 1 1 0,

όπου 1 συμβολίζει μία αύξηση και 0 μία μείωση.

Όταν έχουν υπολογιστεί οι αυξήσεις μήκους από 1 έως 5 και μήκους ίσου ή μεγαλύτερου του 6 για μία ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών τότε μπορεί να υπολογισθεί το παρακάτω στατιστικό μέγεθος:

$$V = \frac{1}{N-6} \sum_{1 \leq i, j \leq 6} (\text{COUNT}[i] - Nb_i)(\text{COUNT}[j] - Nb_j) a_{ij}$$

όπου N είναι το μέγεθος της ακολουθίας, Count(i) είναι ο αριθμός των αυξήσεων μήκους (i) και τα στοιχεία των πινάκων $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 6}$ και $B = \{b_i\}_{1 \leq i \leq 6}$ δίνονται ως:

$$A = \begin{bmatrix} 4529.4 & & & & & \\ 9044.9 & 18097 & & & & \text{SYM.} \\ 13568 & 27139 & 40721 & & & \\ 18091 & 36187 & 54281 & 72414 & & \\ 22615 & 45234 & 67852 & 90470 & 113262 & \\ 27892 & 55789 & 83685 & 111580 & 139476 & 172860 \end{bmatrix}$$

$$B = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{24}, \frac{11}{120}, \frac{19}{720}, \frac{29}{5040}, \frac{1}{840} \right)^T$$

Το στατιστικό μέγεθος V πρέπει να ακολουθεί την κατανομή X^2 με 6 βαθμούς ελευθερίας όταν το N είναι αρκετά μεγάλο. Το μέγεθος του N πρέπει να είναι μεγαλύτερο του 4000, ούτως ώστε να προκύψουν αξιόπιστα αποτελέσματα.

Ο ίδιος έλεγχος μπορεί να εφαρμοσθεί κατ' αντιστοιχία για τον αριθμό των μειώσεων σε μία ακολουθία.

Γ.4.2.7 Έλεγχος μετάθεσης (Permutation test) [Γ.3]

Χωρίζοντας ένα δείγμα ψευδοτυχαίων αριθμών N στοιχείων σε ομάδες των t, δηλαδή $(U_{jt}, U_{j(t+1)}, \dots, U_{j(t+t-1)})$ για $0 \leq j < N$, τα στοιχεία κάθε ομάδας μπορεί να έχουν t! πιθανές σχετικές διατάξεις. Ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται η κάθε πιθανή διάταξη καταγράφεται και μπορεί να εφαρμοστεί ο έλεγχος X^2 με t! βαθμούς ελευθερίας και αναμενόμενη πιθανότητα $1/t!$ για κάθε μία σχετική διάταξη.

Για παράδειγμα, αν $t = 3$ έχουμε 6 πιθανές κατηγορίες, ανάλογα με το αν $U_{3j} < U_{3j+1} < U_{3j+2}$ ή $U_{3j} < U_{3j+2} < U_{3j+1}$ ή ... ή $U_{3j+2} < U_{3j+1} < U_{3j}$

Γ.4.2.8 Έλεγχος μεγίστου t στοιχείων (Maximum-of-t test) [Γ.3]

Για $0 \leq j < N$, έστω $V_j = \max(U_{jt}, U_{j(t+1)}, \dots, U_{j(t+t-1)})$. Τώρα εφαρμόζοντας τον έλεγχο K-S στην ακολουθία $V_0^t, V_1^t, \dots, V_{N-1}^t$ η οποία θα πρέπει να ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή.

Γ.4.2.9 Ένας καθολικός έλεγχος

Ο κάθε εμπειρικός έλεγχος εκτελείται σε αριθμό δειγμάτων n, για να μπορεί να εξαχθεί ένα αξιόπιστο συμπέρασμα για την κάθε αριθμογεννήτρια και τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται

κατά την εφαρμογή. Παρατηρώντας όμως απλά τις τιμές του κάθε στατιστικού μεγέθους για κάθε ένα δείγμα δεν είναι εύκολο να προκύψει ένα αντικειμενικό συμπέρασμα, το οποίο δεν θα εμπεριέχει την γνώμη του χρήστη. Εξαιτίας αυτού οι έλεγχοι τελικά πραγματοποιούνται σε δύο στάδια, όπως προτείνεται στο [Γ.3]. Κατά το πρώτο εκτελείται ο έλεγχος όπως περιγράφηκε σε προηγούμενα εδάφια για κάθε ένα δείγμα χωριστά, ενώ στο δεύτερο ελέγχονται τα αποτελέσματα για το κάθε δείγμα όπως περιγράφεται στην συνέχεια.

Υποθέτοντας ότι υπάρχουν n ανεξάρτητες δειγματοληψίες $U^{(1)}, \dots, U^{(n)}$ όπου $U^{(i)} = (U_1^{(i)}, \dots, U_N^{(i)})$ $1 \leq i \leq n$ και $U_m^{(i)}$ είναι ο m τυχαίος αριθμός του δείγματος i , που υποθέτουμε ότι ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή. Έστω ότι τα $T_{1j}, \dots, T_{nj}$ συμβολίζουν ένα σύνολο δεδομένων σχεδιασμένων να ελέγχουν την H_j , όπου: $T_{ij} = T_j(U^{(i)})$, συμβολίζει ένα στατιστικό μέγεθος που βασίζεται στα δεδομένα του δείγματος i . Έστω ότι η T_{ij} ακολουθεί μία συνεχή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας G_j κάτω από την υπόθεση j . Τότε οι $G_j(T_{ij})$ και $P_{i,j} = 1 - G_j(T_{ij})$ είναι κατανεμημένες ομοιόμορφα στο $(0,1)$ και για $0 < t < 1$

$$F_{n,j}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[0,t]} P_{i,j}$$

όπου I_B συμβολίζει μία συνάρτηση δείκτη στο σύνολο B και $F_{n,j}(t)$ είναι μία εμπειρική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας [Γ.2].

Αν η H_j είναι αληθής τότε το στατιστικό μέγεθος:

$$D_{n,j} = \sup_t |F_{n,j}(t) - t|$$

ακολουθεί την κατανομή Kolmogorov-Smirnov [Γ.2].

Έτσι για κάθε έλεγχο δειγμάτων πραγματοποιείται στην συνέχεια ο έλεγχος K-S στα αποτελέσματα αυτών.

Γ.5. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΠΟΟΜΑΔΩΝ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Γ.5.1 Στρώση με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής

Θεωρείται στρώση ορθοτρόπου συνθέτου υλικού με συνεχείς ίνες προσανατολισμένες σε μία και μόνο διεύθυνση. Για τον πλήρη χαρακτηρισμό της αντοχής της υπό επίπεδη εντατική κατάσταση απαιτείται η γνώση πέντε ιδιοτήτων, δηλαδή της αντοχής σε εφελκυσμό και θλίψη κατά την διεύθυνση των ινών (X_T, X_C) και κάθετα σε αυτήν (Y_T, Y_C) και της διατμητικής αντοχής (S). Οι πέντε αυτές στοχαστικές ιδιότητες μπορούν να μοντελοποιηθούν από πλήθος στατιστικών κατανομών, όπως είναι η κανονική κατανομή, $N(\mu, \sigma)$, η κατανομή Weibull, $W(\sigma, \eta)$, η λογαριθμική κανονική κατανομή $LnL(\mu, \sigma)$ κ.α. [Γ.13]

Για την εύρεση με την μέθοδο MC της πιθανότητας αστοχίας, ή της αξιοπιστίας της στρώσης όταν αυτή υποβάλλεται σε επίπεδη εντατική κατάσταση, τα δείγματα για τις ιδιότητες αντοχής μπορούν να παραχθούν κατά δύο τρόπους.

A. Χρησιμοποιώντας μία αριθμογεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών και για μέγεθος δείγματος n , παράγουμε $5n$ τυχαίους αριθμούς με την ακόλουθη σειρά:

$$u_1 = u_{XT1}, u_2 = u_{XC1}, u_3 = u_{YT1}, u_4 = u_{YC1}, u_5 = u_{S1}$$

$$u_6 = u_{XT2}, u_7 = u_{XC2}, u_8 = u_{YT2}, u_9 = u_{YC2}, u_{10} = u_{S2}$$

...

$$u_{5i-4} = u_{XTi}, u_{5i-3} = u_{XCi}, u_{5i-2} = u_{YTi}, u_{5i-1} = u_{YCi}, u_{5i} = u_{Si}$$

...

$$u_{5n-4} = u_{XTn}, u_{5n-3} = u_{XCn}, u_{5n-2} = u_{YTn}, u_{5n-1} = u_{YCn}, u_{5n} = u_{Sn}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

$i = 1, 2, \dots, n$

Για την εξέταση της αστοχίας κατά την i επανάληψη της προσομοίωσης MC χρησιμοποιούνται οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί $\mathbf{u}_{Xi} = [u_{XTi}, u_{XCi}, u_{YTi}, u_{YCi}, u_{Si}]$. Οι αριθμοί αυτοί μετατρέπονται στους αντίστοιχους αριθμούς από τις συγκεκριμένες κατανομές, που χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση κάθε μίας από τις πέντε ιδιότητες αντοχής.

Σημειώνεται ότι σε αυτή την περίπτωση η επίπεδη εντατική κατάσταση της στρώσης είναι γνωστή και προσδιορίζεται από τις τάσεις σ_X , σ_Y και σ_S .

Β. Κατ' αντιστοιχία με την προηγούμενη περίπτωση, χρησιμοποιώντας την αριθμογεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών και για μέγεθος δείγματος n παράγονται $5n$ τυχαίοι αριθμοί, αλλά με την ακόλουθη σειρά.

$$u_1 = u_{XT1}, u_2 = u_{XT2}, \dots, u_i = u_{XTi}, \dots, u_n = u_{XTn}$$

$$u_{n+1} = u_{XC1}, u_{n+2} = u_{XC2}, \dots, u_{n+i} = u_{XCi}, \dots, u_{n+n} = u_{XCn}$$

$$u_{2n+1} = u_{YT1}, u_{2n+2} = u_{YT2}, \dots, u_{2n+i} = u_{YTi}, \dots, u_{2n+n} = u_{YTn}$$

$$u_{3n+1} = u_{YC1}, u_{3n+2} = u_{YC2}, \dots, u_{3n+i} = u_{YCi}, \dots, u_{3n+n} = u_{YCn}$$

$$u_{4n+1} = u_{S1}, u_{4n+2} = u_{S2}, \dots, u_{4n+i} = u_{Si}, \dots, u_{4n+n} = u_{Sn}$$

Η πρώτη μέθοδος είναι εύκολο να χρησιμοποιηθεί όταν η παραγωγή του δείγματος γίνεται στο ίδιο πρόγραμμα, στο οποίο εκτελείται η μέθοδος MC. Έτσι για διαφορετικές συνθήκες φόρτισης έχουμε ένα καινούριο και ανεξάρτητο του προηγούμενου δείγμα. Η δεύτερη μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περίπτωση που η παραγωγή του δείγματος γίνεται πριν την εφαρμογή της μεθόδου προσομοίωσης στο πρόβλημα, ενώ κατά την εφαρμογή χρησιμοποιείται πάντα το ίδιο δείγμα ανεξαρτήτως των συνθηκών φόρτισης. Η πρώτη μέθοδος είναι ασφαλώς πιο αργή από την δεύτερη, αλλά η εκ νέου παραγωγή δείγματος για κάθε μία κατάσταση φόρτισης, εξαλείφει τυχόν σφάλματα του δείγματος που χρησιμοποιείται. Αντιθέτως η δεύτερη μέθοδος είναι ταχύτερη, αλλά θα πρέπει προκαταρκτικά να ελεγχθεί το δείγμα που θα χρησιμοποιηθεί κατά την προσομοίωση ως προς την καταλληλότητά του. Δηλαδή θα πρέπει να εκτελεστούν στατιστικοί έλεγχοι που να δείχνουν ότι τα δείγματα ακολουθούν τις επιθυμητές κατανομές πιθανότητας και δεν έχουμε πέσει σε μία περίπτωση που η υπόθεση αυτή απορρίπτεται.

Γ.5.2 Πολύστρωτη πλάκα με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής

Για αυτή την εφαρμογή, ορίζουμε ως αστοχία της πολυστρώτου πλακός την περίπτωση κατά την οποία έστω και μία στρώση αστοχεί υπό την δεδομένη και προσδιοριστέα επίπεδη εντατική κατάσταση, στην οποία βρίσκεται η πλάκα. Οι ιδιότητες των στρώσεων θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους, παρόλο που η κατανομή την οποία ακολουθεί κάθε μία από τις βασικές ιδιότητες της μίας στρώσης είναι αντιστοίχως η ίδια με αυτή των άλλων στρώσεων. Αυτό γίνεται έτσι ώστε η αστοχία μίας στρώσης να μην συνεπάγεται την αστοχία κάποιας άλλης, λαμβάνοντας υπόψη ατέλειες που μπορεί να παρουσιασθούν σε μία στρώση και να μην υπάρχουν σε άλλη όμοιά της στην διάταξη.

Οι τρόποι με τους οποίους παράγονται οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί και δηλώνονται για κάθε μία στοχαστική ιδιότητα της στρώσης παραμένουν οι ίδιοι με τους παραπάνω. Η διαφορά σε αυτή την περίπτωση έγκειται στον τρόπο με τον οποίο αντιστοιχεί το διάνυσμα των ιδιοτήτων σε κάθε μία στρώση. Για μία προσομοίωση n επαναλήψεων με την μέθοδο MC, απαιτείται η παραγωγή $k(5n)$ ψευδοτυχαίων αριθμών, όπου k ο αριθμός των στρώσεων της πολύστρωτης. Ορίζοντας το διάνυσμα των ψευδοτυχαίων αριθμών για την προσομοίωση των στοχαστικών ιδιοτήτων αντοχής της στρώσης k της πλάκας για την i επανάληψη της μεθόδου ως $\mathbf{u}_i^{(k)}$, τελικά προκύπτουν οι τέσσερις παρακάτω συνδυασμοί παραγωγής των ψευδοτυχαίων αριθμών και αντιστοίχισής τους με τις ιδιότητες κάθε στρώσεως:

$$1. \quad \mathbf{u}_1^A = \mathbf{u}_1^{(1)}, \mathbf{u}_2^A = \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_k^A = \mathbf{u}_1^{(k)}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

$$\mathbf{u}_{k+1}^A = \mathbf{u}_2^{(1)}, \mathbf{u}_{k+2}^A = \mathbf{u}_2^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{k+k}^A = \mathbf{u}_2^{(k)}$$

...

$$\mathbf{u}_{(n-1)k+1}^A = \mathbf{u}_n^{(1)}, \mathbf{u}_{(n-1)k+2}^A = \mathbf{u}_n^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{(n-1)k+k}^A = \mathbf{u}_n^{(k)}$$

όπου $\mathbf{u}_i^A$ συμβολίζει την παραγωγή του διανύσματος $\mathbf{u}_i^{(j)}$ με την πρώτη μέθοδο που περιγράφηκε στο προηγούμενο εδάφιο.

$$2. \mathbf{u}_1^A = \mathbf{u}_1^{(1)}, \mathbf{u}_2^A = \mathbf{u}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_n^A = \mathbf{u}_n^{(1)}$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^A = \mathbf{u}_1^{(2)}, \mathbf{u}_{n+2}^A = \mathbf{u}_2^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{n+n}^A = \mathbf{u}_n^{(2)}$$

...

$$\mathbf{u}_{(k-1)n+1}^A = \mathbf{u}_1^{(k)}, \mathbf{u}_{(k-1)n+2}^A = \mathbf{u}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{(k-1)n+n}^A = \mathbf{u}_n^{(k)}$$

$$3. \mathbf{u}_1^B = \mathbf{u}_1^{(1)}, \mathbf{u}_2^B = \mathbf{u}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_k^B = \mathbf{u}_1^{(k)}$$

$$\mathbf{u}_{k+1}^B = \mathbf{u}_2^{(1)}, \mathbf{u}_{k+2}^B = \mathbf{u}_2^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{k+k}^B = \mathbf{u}_2^{(k)}$$

...

$$\mathbf{u}_{(n-1)k+1}^B = \mathbf{u}_n^{(1)}, \mathbf{u}_{(n-1)k+2}^B = \mathbf{u}_n^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{(n-1)k+k}^B = \mathbf{u}_n^{(k)}$$

όπου $\mathbf{u}_i^B$ συμβολίζει την παραγωγή του διανύσματος $\mathbf{u}_i^{(j)}$ με την δεύτερη μέθοδο που περιγράφηκε στο προηγούμενο εδάφιο.

$$4. \mathbf{u}_1^B = \mathbf{u}_1^{(1)}, \mathbf{u}_2^B = \mathbf{u}_2^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_n^B = \mathbf{u}_n^{(1)}$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^B = \mathbf{u}_1^{(2)}, \mathbf{u}_{n+2}^B = \mathbf{u}_2^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{n+n}^B = \mathbf{u}_n^{(2)}$$

...

$$\mathbf{u}_{(k-1)n+1}^B = \mathbf{u}_1^{(k)}, \mathbf{u}_{(k-1)n+2}^B = \mathbf{u}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{(k-1)n+n}^B = \mathbf{u}_n^{(k)}$$

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο παρακάτω τρόπος:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{XT1}^{(1)}, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{XT2}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{XTn}^{(1)}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{XC1}^{(1)}, \mathbf{u}_{n+2} = \mathbf{u}_{XC2}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{n+n} = \mathbf{u}_{XCn}^{(1)}$$

...

$$\mathbf{u}_{4n+1} = \mathbf{u}_{S1}^{(1)}, \mathbf{u}_{4n+2} = \mathbf{u}_{S2}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{4n+n} = \mathbf{u}_{Sn}^{(1)}$$

$$\mathbf{u}_{5n+1} = \mathbf{u}_{XT1}^{(2)}, \mathbf{u}_{5n+2} = \mathbf{u}_{XT2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{5n+n} = \mathbf{u}_{XTn}^{(2)}$$

...

$$\mathbf{u}_{6n+1} = \mathbf{u}_{S1}^{(2)}, \mathbf{u}_{6n+2} = \mathbf{u}_{S2}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}_{6n+n} = \mathbf{u}_{Sn}^{(2)}$$

...

...

$$\mathbf{u}_{5n(k-1)+1} = \mathbf{u}_{XT1}^{(k)}, \mathbf{u}_{5n(k-1)+2} = \mathbf{u}_{XT2}^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{5n(k-1)+n} = \mathbf{u}_{XTn}^{(k)}$$

...

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

$$u_{5n(k-1)+4n+1} = u_{S1}^{(k)}, u_{5n(k-1)+4n+2} = u_{S2}^{(k)}, \dots, u_{5n(k-1)+4n+n} = u_{Sn}^{(k)}$$

Αντίστοιχα με την περίπτωση της στρώσης, ο μόνος τρόπος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί, έτσι ώστε να γίνεται η παραγωγή των δειγμάτων κατά την διάρκεια του προγράμματος προσομοίωσης με την μέθοδο MC είναι ο πρώτος. Οι υπόλοιποι μπορούν να χρησιμοποιηθούν αν έχει γίνει η παραγωγή των δειγμάτων εκ των προτέρων.

Γ.5.3 Πολύστρωτη πλάκα με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας

Για την εφαρμογή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθούν οι ίδιοι μέθοδοι με την προηγούμενη περίπτωση. Η μόνη διαφορά έγκειται στο γεγονός, ότι οι επαναλήψεις για την προσομοίωση MC γίνονται έτσι ώστε να λύνεται το ελαστικό πρόβλημα επίπεδης εντατικής κατάστασης της πλάκας σε κάθε επανάληψη, θεωρώντας διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες σε κάθε επανάληψη για κάθε στρώση.

Οι απαραίτητες ελαστικές ιδιότητες για τον χαρακτηρισμό των ορθοτρόπων στρώσεων της πολύστρωτης είναι οι εξής: μέτρο ελαστικότητας κατά την διεύθυνση των ινών και κάθετα σε αυτήν (E_X και E_Y), μέτρο διάτμησης (G_{XY}) και λόγος Poisson (ν_{XY}). Αντίστοιχα με τις ιδιότητες αντοχής, οι ελαστικές ιδιότητες μπορούν να μοντελοποιηθούν χρησιμοποιώντας διάφορες στατιστικές κατανομές [Γ.13]. Όμοια μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι παραγωγής ψευδοτυχαίων αριθμών και η αντιστοιχία τους με τις ιδιότητες των στρώσεων που περιγράφηκαν στο προηγούμενο εδάφιο, με την μόνη διαφορά ότι το διάνυσμα θα περιλαμβάνει 9 συνιστώσες αντί για 5.

Πρέπει να σημειωθεί ότι ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται, σε περίπτωση που η παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών γίνεται κατευθείαν για κάποια συγκεκριμένη στατιστική κατανομή. Ορισμένες μέθοδοι παραγωγής αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή, χρησιμοποιούν περισσότερες της μίας μεταβλητές, όπως για παράδειγμα ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για την παραγωγή αριθμών που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Γ.6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΩΝ ΕΛΕΓΧΩΝ

Γ.6.1 Έλεγχος ψευδοτυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή

Ο έλεγχος αυτός γίνεται σε μικρά, σχετικά με την περίοδο των γεννητριών, δείγματα. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται 30 δείγματα από κάθε γεννήτρια, με μέγεθος δείγματος 1000, 5000 και 10000 σημεία, όσο δηλαδή και το αντιπροσωπευτικό δείγμα που χρησιμοποιείται κατά την εφαρμογή της μεθόδου MC.

Στην δεύτερη φάση τα δείγματα γίνονται 25 για κάθε γεννήτρια και ελέγχονται οι αλγόριθμοι με τους οποίους παράγονται ψευδοτυχαίοι αριθμοί για την περίπτωση της στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής, σύμφωνα με την μέθοδο A, που περιγράφηκε σε προηγούμενο εδάφιο. Συγκεκριμένα παράγονται 5 δείγματα των 50000 από κάθε γεννήτρια και στην συνέχεια αυτά μετατρέπονται σε δείγματα των 10000 σημείων, σύμφωνα με την μέθοδο, ούτως ώστε να επιβεβαιωθεί η ανεξαρτησία μεταξύ των δειγμάτων.

Με παραπλήσιο τρόπο γίνεται και ο έλεγχος για την περίπτωση της πολύστρωτης πλάκας με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής. Συγκεκριμένα εξετάζονται οι περιπτώσεις (1) και (3). Για την περίπτωση (1) παράγεται ένα δείγμα 200,000 σημείων από κάθε γεννήτρια και αυτό μετατρέπεται σε 20 ανεξάρτητα δείγματα, θεωρώντας ότι η πολύστρωτη αποτελείται από 4 στρώσεις και στην συνέχεια εκτελούνται οι εμπειρικοί έλεγχοι σε αυτά τα 20 δείγματα των 10000 σημείων. Για την περίπτωση (3) παράγονται 5 δείγματα των 40000 σημείων και από αυτά προκύπτουν 20 δείγματα των 10000 σημείων προς εξέταση.

Για την περίπτωση της πολύστρωτης πλάκας, όπου θεωρούνται στοχαστικές οι ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας, εξετάζεται η μέθοδος παραγωγής (1). Για τον σκοπό αυτό δημιουργείται για

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

κάθε γεννήτρια ένα δείγμα 360000 σημείων και από αυτό προκύπτουν 36 δείγματα των 10000 σημείων, ένα για κάθε μεταβλητή, θεωρώντας ότι η πολύστρωτη αποτελείται από 4 στρώσεις.

Για έλεγχο της αξιοπιστίας των γεννητριών που χρησιμοποιούνται κατά την εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo εκτελέστηκαν οι παρακάτω εμπειρικοί έλεγχοι που περιγράφηκαν σε προηγούμενα εδάφια:

a. Έλεγχος κενού για διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.0, 0.5)$ και $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.0)$

b. Έλεγχος αυξήσεων και έλεγχος μειώσεων

c. Έλεγχος συσχέτισης

d. Έλεγχος συχνότητας

e. Έλεγχος μεγίστου $t = 2, 3, \dots, 30$ στοιχείων

f. Έλεγχος Μετάθεσης $t = 3, 4, 5$ στοιχείων

Στο παρόν εδάφιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του καθολικού ελέγχου. Για μεγαλύτερη ευκρίνεια των αποτελεσμάτων χρησιμοποιούνται σκιαγραφήσεις, οι οποίες έχουν ως εξής:

Απορρίπτουμε σε επίπεδο εμπιστοσύνης 10.0%

Απορρίπτουμε σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5.0%

Απορρίπτουμε σε επίπεδο εμπιστοσύνης 1.0%

Γ.6.1.1. Έλεγχος αρχικών δειγμάτων από την ομοιόμορφη κατανομή

Γ. 6.1.1.a Έλεγχος κενού

Στον Πίνακα Π. Γ.2 παρουσιάζεται το επίπεδο εμπιστοσύνης ως αποτέλεσμα του ελέγχου K - S για τον έλεγχο κενού στο διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.0, 0.5)$. Στους πίνακες ο αριθμός δείγματος αναφέρεται στα αρχικά δείγματα, καθώς ο δεύτερος έλεγχος, τα αποτελέσματα του οποίου αναγράφονται πραγματοποιήθηκε με μέγεθος δείγματος 30. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα όλες οι γεννήτριες περνούν τον έλεγχο, ακόμα και για τα μικρά δείγματα των 1000 αριθμών. Καλύτερη συμπεριφορά επιδεικνύεται από τις γεννήτριες RAN2 και RAN3, των οποίων τα αποτελέσματα γίνονται δεκτά ακόμη και για επίπεδο εμπιστοσύνης 10%.

Π. Γ.2. Έλεγχος κενού στο διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.0, 0.5)$

N	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
1,000	.6895	.0796	.4882	.8505
5,000	.0988	.8263	.4646	.6529
10,000	.7659	.2793	.4755	.8312

Αντίστροφη συμπεριφορά των αριθμογεννητριών παρατηρούμε στον έλεγχο κενού για διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.0)$, τα αποτελέσματα του οποίου παρουσιάζονται στον πίνακα Π. Γ.3 κατ' αντιστοιχία. Οι τιμές με πλάγιους χαρακτήρες δείχνουν ότι ο έλεγχος απορρίπτει την υπόθεση με επίπεδο εμπιστοσύνης 5%, για τα δείγματα των 1000 αριθμών.

Π. Γ.3. Έλεγχος κενού στο διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.0)$

N	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
1,000	.6951	.1512	.0185	.0316
5,000	.1644	.9729	.1877	.3400
10,000	.7054	.7111	.3000	.8676

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι ο έλεγχος κενού πραγματοποιείται με τον έλεγχο χ^2 , ο οποίος απαιτεί μεγάλο μέγεθος δείγματος. Το ότι απορρίπτονται τα μικρά δείγματα δεν σημαίνει

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

ότι οι γεννήτριες δεν είναι καλές, αλλά πιθανόν ο έλεγχος αυτός να μην βρίσκεται σε περιοχή ασφαλών αποτελεσμάτων για τα δείγματα αυτά.

Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι επειδή ο κίνδυνος να απορρίψουμε μία σωστή υπόθεση, δεδομένου ότι οι γεννήτριες αυτές σε μεγαλύτερα δείγματα έχουν ελεγχθεί και αποδειχθεί καλές θα έπρεπε να χρησιμοποιηθεί επίπεδο εμπιστοσύνης 1% για την απόρριψη της υπόθεσης. Σε αυτή την περίπτωση δεν θα μπορούσε να απορριφθεί το αποτέλεσμα για καμία γεννήτρια και κανένα δείγμα

Γ.6.1.1.b Έλεγχος αυξήσεων και μειώσεων

Εξαιτίας του ότι για τον έλεγχο αυτό απαιτείται μέγεθος δείγματος μεγαλύτερο του 4000, τα δείγματα των 1000 αριθμών αντικαταστήθηκαν με δείγματα μεγέθους 50000. Τα αποτελέσματα για τον έλεγχο αυξήσεων και μειώσεων που εκτελέστηκε παρατίθενται στους παρακάτω πίνακες.

Συγκεκριμένα, στον πίνακα Π. Γ.4 δίνεται το επίπεδο εμπιστοσύνης του ελέγχου K-S, ο οποίος πραγματοποιήθηκε στα αποτελέσματα των αυξήσεων για τα δείγματα των αριθμογεννητριών.

Π. Γ.4. Έλεγχος αυξήσεων

N	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
5,000	.0078	.0012	.0828	.0000
10,000	.1103	.5449	.4075	.3047
50,000	.8096	.8678	.9990	.1116

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα όλες οι γεννήτριες εκτός από την RAN2 δεν περνούν τον έλεγχο όταν χρησιμοποιούνται δείγματα 5000 σημείων. Όπως αναφέρθηκε για τα αποτελέσματα του προηγούμενου ελέγχου όμως, το πιο πιθανό είναι ότι δεν έχει συγκλίνει ακόμα ο έλεγχος χ^2 που πραγματοποιείται στα αρχικά δείγματα των 5000.

Στον Πίνακα Π. Γ.5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του δεύτερου ελέγχου για το μήκος των μειώσεων στα δείγματα των γεννητριών. Και σε αυτή την περίπτωση όλες οι αριθμογεννήτριες, εκτός από την RAN3 αυτή την φορά, δεν περνούν τον έλεγχο K-S για μέγεθος δειγμάτων 5000. Οι γεννήτριες OLD και RAN3 δεν περνούν τον έλεγχο ούτε κατά την εξέταση 10000 σημείων, ενώ όλες οι γεννήτριες περνούν τον έλεγχο στην περίπτωση που τα δείγματα είναι 50000 αριθμών.

Π. Γ.5. Έλεγχος μειώσεων

N	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
5,000	.0003	.0000	.0046	.0664
10,000	.0014	.0916	.3228	.0039
50,000	.2538	.0844	.9881	.9091

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο έλεγχος αυτός είναι ιδιαίτερα αυστηρός. Μάλιστα όταν αναφερόμαστε σε γεννήτριες που χρησιμοποιούν την γραμμική μέθοδο ομοιότητας είναι πιθανό ο έλεγχος αυτός να τις απορρίψει, εξαιτίας της μορφής τους, αν δεν χρησιμοποιηθεί κάποια μέθοδος βελτίωσης της παραγωγής των αριθμών όπως είναι η μέθοδος ανακίνησης. Αυτό γίνεται φανερό στα αποτελέσματα που λαμβάνονται με χρήση της γεννήτριας OLD, κατά την εφαρμογή της οποίας δεν χρησιμοποιείται η μέθοδος της ανακίνησης.

Γ.6.1.1.c Έλεγχος συσχέτισης

Στον πίνακα Π. Γ.6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του δεύτερου ελέγχου που πραγματοποιήθηκε για τον έλεγχο της συσχέτισης μέσα στα δείγματα από τις τέσσερις γεννήτριες και για μεγέθη δειγμάτων 1000, 5000 και 10000. Σημειώνεται ότι ο έλεγχος K-S πραγματοποιήθηκε εξετάζοντας αν το στατιστικό μέγεθος της συσχέτισης ακολουθεί την

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

κανονική κατανομή με $\mu_n = \frac{-1}{n-1}$ και $\sigma_n^2 = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}$, όπου n το μέγεθος των αρχικών δειγμάτων.

Π. Γ.6. Έλεγχος συσχέτισης

N	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
1,000	.3196	.3921	.0170	.5183
5,000	.4430	.0141	.2826	.1590
10,000	.4420	.7413	.2142	.0572

Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% απορρίπτονται δύο υποθέσεις μία για την γεννήτρια RAN1 και μέγεθος δείγματος 5000 και μία για την γεννήτρια RAN2 με μέγεθος δείγματος 1000. Οι ίδιες υποθέσεις δεν μπορούν να απορριφθούν για επίπεδο εμπιστοσύνης 1%. Σε αυτό το σημείο πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι οι δύο αυτές γεννήτριες χρησιμοποιούν την μέθοδο της ανακίνησης για την παραγωγή των ψευδοτυχαίων αριθμών.

Γ.6.1.1.d Έλεγχος συχνότητας

Στον Πίνακα Π. Γ.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου συχνότητας για τις τέσσερις αριθμογεννήτριες που χρησιμοποιούνται και για μεγέθη αρχικών δειγμάτων 1000, 5000 και 10000.

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα για τον έλεγχο συχνότητας που εκτελέστηκε, όλες οι γεννήτριες περνούν τον έλεγχο για όλα τα μεγέθη δείγματος. Έτσι δεν μπορούμε να έχουμε κάποια ένδειξη για το πια γεννήτρια συμπεριφέρεται καλύτερα από τις άλλες, βάσει αυτού του ελέγχου.

Π. Γ.7. Έλεγχος συχνότητας

N	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
1,000	.7129	.9868	.7878	.9850
5,000	.5547	.1544	.6907	.4926
10,000	.9722	.5210	.9142	.9027

Γ.6.1.1.e Έλεγχος μεγίστου t στοιχείων

Ο έλεγχος αυτός εκτελέστηκε για $t = 2, 3, \dots, 30$, για κάθε μία από τις γεννήτριες που εξετάζονται. Τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα Π. Γ.8 συγκεντρωτικά για όλα τα μεγέθη δείγματος.

Π. Γ.8: Έλεγχος μεγίστου t

	OLD			RAN1			RAN2			RAN3		
t	1000	5000	10000	1000	5000	10000	1000	5000	10000	1000	5000	10000
2	.5258	.5023	.7176	.1983	.1247	.7453	.2207	.1677	.7095	.6393	.2150	.9805
3	.3743	.2515	.5685	.9110	.0231	.5225	.1504	.4996	.5038	.7481	.7799	.9279
4	.4094	.2105	.9978	.7898	.5070	.6586	.3217	.7614	.2803	.7686	.3663	.2002
5	.6166	.7936	.9884	.9853	.2725	.2300	.6554	.9990	.4879	.8803	.6150	.6384
6	.5246	.3753	.2370	.4738	.5978	.3158	.4408	.7979	.7988	.1741	.9165	.6154
7	.7668	.0316	.1213	.4680	.1372	.6081	.8221	.3240	.1912	.3507	.5593	.3290
8	.9955	.5477	.3142	.1210	.4528	.3864	.7602	.7441	.5231	.5630	.5568	.0092
9	.8243	.1705	.9216	.8654	.0140	.9054	.4604	.8606	.9987	.7086	.2729	.2489
10	.7232	.1738	.2140	.9555	.9530	.1378	.7772	.1618	.6794	.4833	.1962	.4033
11	.3414	.7904	.3078	.6346	.0874	.5267	.3322	.9692	.9723	.1253	.3705	.7026
12	.4312	.6548	.0061	.8486	.0567	.5627	.4497	.7058	.9740	.2008	.1114	.2169
13	.7581	.2508	.1656	.1214	.0433	.7045	.1129	.0560	.5627	.1846	.0466	.6009
14	.8971	.3723	.8543	.4142	.6923	.8838	.7892	.7275	.9321	.6110	.6276	.7632
15	.5115	.6000	.1083	.8604	.2717	.3430	.3796	.4091	.7611	.6598	.1860	.3318
16	.6611	.8909	.5249	.2630	.6116	.6835	.2768	.4115	.9438	.0328	.1459	.2072
17	.7965	.2215	.5300	.3221	.1313	.8866	.5473	.2907	.8185	.3957	.0364	.1859
18	.7126	.3414	.2916	.7238	.0738	.3461	.1512	.5486	.4163	.5434	.1047	.3371
19	.2636	.0537	.9620	.3986	.0707	.7173	.2003	.7611	.3981	.0559	.2508	.4287
20	.5975	.2328	.0854	.2155	.3781	.6160	.6589	.4309	.3867	.4334	.0514	.5035
21	.2201	.6655	.0797	.1220	.5501	.2886	.0787	.8099	.7898	.2427	.4938	.3831
22	.2750	.3288	.1073	.0573	.3142	.1796	.6003	.5959	.9741	.1169	.1322	.8076
23	.0915	.1793	.0789	.8373	.2954	.8373	.2314	.7033	.4411	.6069	.1587	.7095
24	.1003	.7541	.5455	.1596	.5778	.8606	.2531	.2496	.8695	.1824	.3318	.1118
25	.3260	.2793	.2782	.1615	.2372	.9766	.7526	.1360	.0406	.3619	.3626	.2924
26	.0314	.5741	.4772	.5246	.0505	.5331	.0473	.0772	.4749	.5467	.0724	.1422
27	.5915	.8363	.4472	.5388	.5504	.4007	.6122	.5565	.9297	.9120	.2667	.5419
28	.4821	.4873	.8096	.3996	.9173	.6213	.3249	.2838	.2746	.3183	.2310	.3715
29	.6453	.9828	.0913	.3411	.1702	.8599	.7120	.1376	.3509	.5303	.0427	.3452
30	.1463	.1056	.4380	.1959	.5841	.4383	.1945	.6403	.8429	.5014	.1668	.7493

Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα το μέγεθος του δείγματος δεν φαίνεται να παίζει κάποιο ιδιαίτερο ρόλο, αφού για παράδειγμα για την RAN3 αυξάνουν οι απορρίψεις δείγματος από την περίπτωση του μεγέθους δείγματος 1000 στο 5000, ενώ μειώνονται από τα δείγματα των 5000 σε αυτά των 10000 κάτι που συμβαίνει και στην περίπτωση της RAN1.

Γ.6.1.1.f Έλεγχος μετάθεσης t στοιχείων

Ο έλεγχος εκτελέστηκε για $t = 3, 4$ και 5 για όλα τα δείγματα. Ο τρόπος παρουσίασης των αποτελεσμάτων είναι όμοιος με τον τρόπο παρουσίασης των αποτελεσμάτων για τον έλεγχο μεγίστου t στοιχείων.

Π. Γ.9: Έλεγχος μετάθεσης $t = 3$ στοιχείων

	OLD			RAN1			RAN2			RAN3		
t	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3	4	5
1000	.4723	.7695	.2556	.0762	.6851	.1983	.3094	.4914	.3357	.0403	.0155	.3203
5000	.2127	.8817	.2257	.0716	.4225	.9146	.1289	.6267	.0052	.3606	.8213	.9999
10000	.3388	.0777	.9983	.0273	.0626	.1589	.3720	.4544	.6377	.0728	.4958	.0202

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι το μέγεθος του δείγματος δεν έχει ιδιαίτερο ρόλο για αυτό τον έλεγχο, ενώ δεν συμπεριφέρονται όλες οι γεννήτριες με τον ίδιο τρόπο. Φαίνεται καθαρά ότι η RAN1 δεν δίνει καλά αποτελέσματα για την μετάθεση 3 στοιχείων. Παράλληλα η RAN3 για μικρό μέγεθος δείγματος αποτυγχάνει στους ελέγχους μετάθεσης 3 και 4 στοιχείων.

Γ.6.1.2 Έλεγχος υποομάδων ψευδοτυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή

Στο εδάφιο αυτό αναλύονται τα αποτελέσματα της δεύτερης φάση ελέγχου των αριθμογεννητριών. Συγκεκριμένα, δίνονται τα αποτελέσματα 25 δειγμάτων κάθε γεννήτριας για την περίπτωση της στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής (Α περίπτωση), τα οποία παρήχθησαν όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο εδάφιο.

Για την περίπτωση του ελέγχου των αριθμογεννητριών με σκοπό την παραγωγή δειγμάτων για την πολύστρωτη πλάκα με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής εξετάζονται οι περιπτώσεις (1) και (3) που περιγράφηκαν στο προηγούμενο εδάφιο. Στην συνέχεια οι περιπτώσεις αυτές θα καλούνται Β και Γ αντίστοιχα. Τα δείγματα και για τις δύο αυτές περιπτώσεις υπενθυμίζεται ότι είναι 20. Επίσης υπενθυμίζεται ότι η περίπτωση Γ αντιστοιχεί στην Α, ως προς το ότι δημιουργούνται 5 ενδιάμεσα δείγματα.

Τέλος για τον έλεγχο της περίπτωσης της πολύστρωτης πλάκας, όπου θεωρούνται στοχαστικές οι ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας, εξετάζονται 36 δείγματα των 10000 σημείων, ενώ η περίπτωση αυτή θα ονομάζεται στην συνέχεια Δ. Η περίπτωση αυτή μοιάζει με την περίπτωση Β, όπου δημιουργούμε μόνο ένα ενδιάμεσο δείγμα για την παραγωγή των ανεξαρτήτων μεταβλητών.

Οι έλεγχοι που εκτελέστηκαν σε κάθε ένα από αυτά τα δείγματα είναι οι ίδιοι με αυτούς που χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο των γεννητριών. Υπενθυμίζεται ότι ο κάθε έλεγχος εκτελέστηκε σε δύο στάδια. Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου K-S που εκτελέστηκε στο δεύτερο στάδιο χάριν συντομίας.

Γ.6.1.2.a Έλεγχος κενού

Στον πίνακα Π. Γ.10 παρουσιάζεται το επίπεδο εμπιστοσύνης ως αποτέλεσμα του ελέγχου K - S για τον έλεγχο κενού στο διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.0, 0.5)$. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα όλες οι γεννήτριες περνούν τον έλεγχο. Αυτό αποτελεί και μία πρώτη ένδειξη ότι η συμπεριφορά των αριθμογεννητριών δεν μεταβάλλεται όταν χρησιμοποιούνται οι συγκεκριμένες υποομάδες δειγμάτων.

Π. Γ.10. Έλεγχος κενού στο διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.0, 0.5)$

Περίπτωση	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
A	.6476	.8927	.8358	.8749
B	.4774	.5019	.7812	.5614
Γ	.7948	.4190	.1281	.8689
Δ	.2284	.9308	.6518	.9842

Στον πίνακα Π. Γ.11 αντίστοιχα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του καθολικού ελέγχου κενού στο διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.0)$. Και σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα είναι όμοια με εκείνα των αρχικών δειγμάτων των αριθμογεννητριών.

Π. Γ.11. Έλεγχος κενού στο διάστημα $(\alpha, \beta) = (0.5, 1.0)$

Περίπτωση	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
A	.6329	.6329	.9108	.0961
B	.7848	.9253	.7137	.5150
Γ	.4358	.0646	.9770	.6983
Δ	.3908	.1907	.2663	.8414

Γ.6.1.2.b Έλεγχος αυξήσεων και μειώσεων

Τα αποτελέσματα για τον έλεγχο αυξήσεων και μειώσεων που εκτελέστηκε παρατίθενται στους παρακάτω πίνακες. Συγκεκριμένα, στον πίνακα Π. Γ.12 δίνεται το επίπεδο εμπιστοσύνης του ελέγχου K-S, ο οποίος πραγματοποιήθηκε στα αποτελέσματα των αυξήσεων για τα δείγματα των αριθμογεννητριών, ενώ στον πίνακα Π. Γ.13 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του δεύτερου ελέγχου για το μήκος των μειώσεων στα δείγματα των γεννητριών.

Π. Γ.12. Έλεγχος αυξήσεων

Περίπτωση	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
A	.2542	.6311	.3465	.3754
B	.2903	.0636	.3025	.5508
Γ	.8824	.1050	.2685	.0351
Δ	.0450	.1331	.6552	.0105

Η RAN3 δείχνει να έχει κάποια ευαισθησία σε αυτόν τον έλεγχο. Όπως και για τα αρχικά δείγματα έτσι και στις περισσότερες περιπτώσεις υποομάδων αποτυγχάνει στον έλεγχο αυτό. Οι υπόλοιπες μεμονωμένες απορρίψεις των άλλων αριθμογεννητριών μπορεί να οφείλονται στο γεγονός ότι το μέγεθος του δείγματος είναι οριακό.

Π. Γ.13. Έλεγχος μειώσεων

Περίπτωση	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
A	.1898	.9091	.8016	.0043
B	.9079	.2415	.0090	.0346
Γ	.9587	.1416	.0580	.1148
Δ	.9601	.0035	.6677	.0425

Γ.6.1.2.c Έλεγχος συσχέτισης

Στον πίνακα Π. Γ.14 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του δεύτερου ελέγχου που πραγματοποιήθηκε για τον έλεγχο της συσχέτισης μέσα στα δείγματα από τις τέσσερις γεννήτριες. Σημειώνεται ότι ο έλεγχος K-S πραγματοποιήθηκε εξετάζοντας αν το στατιστικό

μέγεθος της συσχέτισης ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu_n = \frac{-1}{n-1}$ και

$$\sigma_n^2 = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}, \text{ όπου } n = 10,000 \text{ το μέγεθος των αρχικών δειγμάτων.}$$

Π. Γ.14. Έλεγχος συσχέτισης

Περίπτωση	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
A	.0082	.1914	.5372	.0851
B	.1327	.5923	.3769	.0605
Γ	.8641	.9785	.7275	.9294
Δ	.9481	.1562	.9481	.5871

Εδώ έχουμε και πάλι αντιστοιχία των αποτελεσμάτων μεταξύ υποομάδων και αρχικών δειγμάτων.

Γ.6.1.2.d Έλεγχος συχνότητας

Στον πίνακα Π. Γ.15 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου συχνότητας για τις τέσσερις αριθμογεννήτριες που χρησιμοποιούνται και για όλες τις περιπτώσεις υποομάδων που εξετάζονται με μέγεθος αρχικών δειγμάτων 10000.

Π. Γ.15. Έλεγχος συχνότητας

Περίπτωση	OLD	RAN1	RAN2	RAN3
A	.4030	.1661	.1469	.3310
B	.3178	.9903	.9999	.9502
Γ	.9491	.4230	.9239	.6844
Δ	.9228	.8098	.1868	.5829

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

Και σε αυτόν τον έλεγχο υπάρχει η συσχέτιση μεταξύ των αποτελεσμάτων των αρχικών δειγμάτων και των υποομάδων. Πρέπει όμως να τονισθεί ότι ο συγκεκριμένος έλεγχος θεωρείται επιεικής.

Γ.6.1.2.e Έλεγχος μεγίστου t στοιχείων

Ο έλεγχος αυτός εκτελέστηκε για $t = 2, 3, \dots, 30$, για κάθε μία από τις περιπτώσεις υποομάδων και για όλες τις γεννήτριες που εξετάζονται. Τα αποτελέσματα δίνονται στους παρακάτω πίνακες συγκεντρωτικά για όλες τις περιπτώσεις παραγωγής δειγμάτων. Συγκεκριμένα στον πρώτο πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα για την Α και Γ περίπτωση, ενώ στον δεύτερο πίνακα τα αντίστοιχα για τις Β και Γ περιπτώσεις. Ο διαχωρισμός των περιπτώσεων αυτών έγινε κατ' αυτό τον τρόπο, ώστε να γίνεται σύγκριση ανά δύο ανάμεσα στις μεθόδους που μοιάζουν.

Π. Γ.16: Έλεγχος μεγίστου t για τις περιπτώσεις Α και Γ

	OLD		RAN1		RAN2		RAN3	
t	A	Γ	A	Γ	A	Γ	A	Γ
2	.5617	.5410	.0160	.7351	.7969	.2893	.0740	.4257
3	.8775	.4398	.1623	.6836	.9435	.2636	.3887	.7797
4	.1511	.8903	.2032	.1955	.7446	.8920	.2449	.1733
5	.5282	.6190	.7719	.2545	.9216	.6291	.5752	.2438
6	.2037	.7680	.0750	.1297	.3014	.2636	.3439	.4059
7	.7149	.0724	.2949	.1062	.7269	.8096	.0098	.5440
8	.5012	.2191	.1715	.5974	.4339	.4257	.0266	.9257
9	.2348	.5143	.0845	.6913	.3686	.2780	.4161	.9163
10	.8284	.8374	.3887	.3307	.1742	.3791	.0459	.9173
11	.8216	.4591	.7554	.2229	.0032	.0469	.3184	.9685
12	.7438	.7502	.2516	.9183	.0486	.2914	.0421	.9253
13	.1320	.9446	.4740	.9442	.3014	.9119	.0218	.7761
14	.2868	.4522	.6641	.4111	.7471	.9280	.0130	.7260
15	.0500	.9520	.2749	.9554	.7345	.9593	.4883	.7833
16	.3387	.5380	.1102	.8458	.3458	.6338	.0350	.5851
17	.7744	.7546	.3706	.9079	.8642	.8925	.1336	.9284
18	.2269	.1337	.1953	.9752	.7563	.4767	.1680	.2656
19	.0308	.4939	.2373	.3729	.0642	.6416	.1184	.5313
20	.1742	.7129	.6398	.7175	.8877	.2966	.0491	.4824
21	.2183	.7848	.3105	.8824	.7158	.2531	.1033	.5395
22	.9654	.9271	.2127	.2325	.1564	.2951	.1988	.5246
23	.5440	.9438	.1438	.2046	.9119	.3405	.2828	.3074
24	.4317	.4217	.4843	.3905	.1766	.2598	.0786	.1952
25	.0798	.7221	.2932	.0733	.6182	.5261	.0138	.9074
26	.4037	.5728	.5457	.1762	.5718	.3161	.1301	.7724
27	.0899	.4223	.5524	.1401	.4234	.5736	.0794	.5040
28	.7471	.1226	.2850	.5070	.0241	.4371	.1405	.0033
29	.1586	.7955	.3098	.0096	.8078	.3348	.0422	.6183
30	.9091	.2961	.2532	.6944	.0427	.7267	.2622	.1366

Η RAN3 έχει τις περισσότερες απορρίψεις σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτού του ελέγχου, για όλες τις περιπτώσεις εκτός από την Γ κάτι που παρατηρήθηκε και στην περίπτωση του ελέγχου μειώσεων. Η συμπεριφορά αυτή είναι εντελώς διαφορετική από αυτή των αρχικών δειγμάτων. Το αποτέλεσμα αυτό σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα των ελέγχων αυξήσεων και μειώσεων θα πρέπει να μας καταστήσει επιφυλακτικούς ως προς την χρήση αυτής της γεννήτριας στην συγκεκριμένη εφαρμογή. Αντίθετα οι άλλες τρεις γεννήτριες δείχνουν εφάμιλλα αποτελέσματα. Παρόλα αυτά τα δείγματα από την RAN3 θα χρησιμοποιηθούν κανονικά και στην συνέχεια για να βοηθήσουν στην εύρεση της ευαισθησίας της εφαρμογής ως προς τα δείγματα που χρησιμοποιούνται.

Π. Γ.17: Έλεγχος μεγίστου t για τις περιπτώσεις Β και Δ

	OLD		RAN1		RAN2		RAN3	
t	B	Δ	B	Δ	B	Δ	B	Δ
2	.1171	.5102	.8980	.1023	.5599	.0081	.3905	.2004
3	.1751	.0983	.0588	.0572	.5335	.0999	.5143	.4023
4	.0420	.3701	.6782	.9668	.6704	.2783	.8683	.4042
5	.7374	.7995	.3004	.9553	.4344	.2798	.1798	.0180
6	.2720	.9139	.8347	.8951	.2191	.3068	.2325	.7274
7	.6463	.4769	.5470	.9045	.6354	.5578	.7891	.9835
8	.5239	.8764	.8068	.8565	.8124	.9828	.2564	.6684
9	.2392	.7226	.9202	.6989	.4059	.6688	.0216	.6649
10	.2149	.8119	.5614	.6978	.6867	.9897	.6991	.0258
11	.1805	.9855	.5843	.8233	.4144	.9818	.0152	.7473
12	.8683	.3004	.7812	.8683	.7862	.9871	.2676	.5328
13	.6712	.6250	.7636	.5126	.5172	.9803	.1506	.3426
14	.9109	.3953	.9757	.4684	.6906	.9257	.0202	.5633
15	.2512	.2432	.9328	.2858	.6338	.7360	.9001	.1663
16	.5629	.3386	.8980	.3329	.8529	.4661	.4183	.1709
17	.5328	.4830	.4536	.2381	.2182	.3939	.3256	.0986
18	.3529	.9240	.9266	.1386	.9665	.2420	.8853	.2011
19	.4046	.0625	.1688	.4387	.7464	.6369	.5736	.0430
20	.9721	.0462	.7076	.1719	.8841	.3234	.0052	.2434
21	.7168	.1000	.2909	.6986	.7554	.9927	.1613	.0878
22	.9828	.3754	.4432	.0397	.2352	.5273	.0047	.2680
23	.8287	.2343	.6400	.8930	.8131	.6040	.0989	.0322
24	.9615	.3994	.3476	.3639	.6774	.7816	.3150	.1015
25	.2811	.0892	.2564	.1015	.4725	.8543	.6494	.0668
26	.8179	.1363	.1237	.5577	.7569	.6683	.1459	.0523
27	.9726	.5423	.6665	.5599	.6665	.3068	.0940	.0803
28	.2165	.4303	.4881	.4864	.3680	.6660	.3036	.4431
29	.9716	.3096	.8019	.1307	.2191	.4160	.2841	.3766
30	.6245	.5894	.7411	.4508	.7855	.9817	.0828	.2282

Γ.6.1.2.γ Έλεγχος μετάθεσης t στοιχείων

Ο έλεγχος εκτελέστηκε για $t = 3, 4$ και 5 για όλα τα δείγματα. και τα αποτελέσματα του καθολικού ελέγχου παρουσιάζονται στον πίνακα Π. Γ.18. Από τα αποτελέσματα αυτά φαίνεται και πάλι η ευαισθησία της RAN1 ως προς τον έλεγχο μετάθεσης 3 στοιχείων για όλες τις περιπτώσεις, αντίστοιχα με εκείνη που παρουσίαζαν τα αρχικά δείγματα. Όμοια φαίνεται και η ευαισθησία της RAN3 στον έλεγχο μετάθεσης 3 στοιχείων. Οι διαφορές όμως που παρατηρείται ως προς τα αρχικά δείγματα είναι η απόρριψη της RAN2 για την μετάθεση 4 και 5 στοιχείων της περίπτωσης Δ. Διαφορές ως προς τα αρχικά δείγματα παρουσιάζει και η γεννήτρια OLD κατά τον έλεγχο μετάθεσης τριών στοιχείων.

Π. Γ.18: Έλεγχος μετάθεσης t στοιχείων

	OLD			RAN1			RAN2			RAN3		
t	3	4	5	3	4	5	3	4	5	3	4	5
A	.1405	.5166	.1207	.3215	.1561	.8945	.1992	.5574	.3929	.0338	.0522	.4332
B	.0003	.1169	.3656	.0890	.6183	.5599	.5313	.5380	.9206	.3559	.8452	.9701
Γ	.0251	.5433	.6797	.0998	.7076	.2598	.0386	.5239	.5463	.1590	.7479	.0073
Δ	.0021	.0385	.7733	.0290	.8752	.6010	.8568	.0246	.0086	.0823	.8049	.6801

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ίσως μία ένδειξη για την μη καταλληλότητα παραγωγής υποομάδων με την Δ μέθοδο, που χρησιμοποιείται στην περίπτωση πλάκας με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής και

ελαστικότητας. Επειδή όμως αυτός είναι ο μοναδικός έλεγχος που δείχνει κάποια ακαταλληλότητα, η μέθοδος παραγωγής υποομάδων θα χρησιμοποιηθεί κανονικά και στην συνέχεια, με την δέουσα προσοχή όμως.

Γ.6.2 Έλεγχος μετασχηματισμού ψευδοτυχαίων αριθμών σε άλλες κατανομές

Σε συνέχεια του ελέγχου των ψευδοτυχαίων αριθμών γίνεται έλεγχος των μεθόδων που χρησιμοποιούνται κατά την εφαρμογή της μεθόδου MC, για την μετατροπή των αριθμών που παράγονται από τις γεννήτριες και ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή, σε αριθμούς άλλων κατανομών. Ο έλεγχος γίνεται στα όλα τα δείγματα που παρήχθησαν και εξετάστηκαν με τους εμπειρικούς ελέγχους, που περιγράφηκαν στα προηγούμενα εδάφια. Σκοπός του ελέγχου είναι να γίνει σαφές ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί μετά την μετατροπή τους σε αριθμούς άλλης κατανομής, ακολουθούν πράγματι την επιθυμητή κατανομή, ενώ παράλληλα ο διαχωρισμός τους σε υποομάδες δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου των μετασχηματισμών των ψευδοτυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή στην Κανονική ή στην Weibull. Οι δύο αυτές κατανομές επιλέχθηκαν επειδή κατά την εφαρμογή για τον προσδιορισμό της αξιοπιστίας πλακός εκ συνθέτου υλικού οι βασικές μεταβλητές του προβλήματος θεωρείται ότι ακολουθούν μία εξ αυτών. Ο έλεγχος και σε αυτή την περίπτωση πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Κατά το πρώτο στάδιο ελέγχεται κάθε ένα δείγμα με τον έλεγχο KS ή τον X^2 ως προς το αν ακολουθείται η εκάστοτε κατανομή. Στο δεύτερο στάδιο ελέγχεται με τον έλεγχο KS αν τα αποτελέσματα των δειγμάτων ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή. Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του δευτέρου (καθολικού) ελέγχου.

Γ.6.2.1 Κατανομή Weibull

Επειδή για αυτή την κατανομή δεν υπάρχει κάποια τυποποιημένη, ως παράμετροι για τον μετασχηματισμό χρησιμοποιήθηκαν οι $\sigma = 100$ και $\eta = 10$. Οι παράμετροι αυτοί επιλέχθηκαν έτσι ώστε να μπορούν να αντιπροσωπεύσουν παραμέτρους που έχουν οι στοχαστικές ιδιότητες πολυστρώτων πλακών που εξετάζονται.

Γ.6.2.1.1 Έλεγχος αριθμογεννητριών

Στον πίνακα Π. Γ.19 παρουσιάζεται το επίπεδο εμπιστοσύνης του καθολικού ελέγχου, που προκύπτει από τον επιμέρους έλεγχο των δειγμάτων με K-S και X^2 , της υπόθεσης ότι τα δείγματα από τις γεννήτριες ακολουθούν την κατανομή Weibull με $\sigma = 100$ και $\eta = 10$. Παρατηρούμε ότι καμία ομάδα δειγμάτων δεν απορρίπτεται κατ' αυτόν τον έλεγχο.

Π. Γ.19. Αποτελέσματα καθολικού ελέγχου για τα δείγματα μετά τον μετασχηματισμό σε W(100,10)

	OLD		RAN1		RAN2		RAN3	
N	KS	X^2	KS	X^2	KS	X^2	KS	X^2
1,000	.7129	.5337	.9868	.6766	.7869	.8257	.9850	.2078
5,000	.5547	.3824	.1544	.7438	.6907	.4131	.4926	.5473
10,000	.9722	.4358	.5210	.6488	.9142	.7716	.9027	.2298
50,000	.4632	.6687	.6766	.9453	.7593	.7517	.3723	.1453

Γ.6.2.1.2 Έλεγχος υποομάδων

Στον πίνακα Π. Γ.20 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τον μετασχηματισμό των δειγμάτων που έχουν σχηματισθεί δημιουργώντας υποομάδες από τα αρχικά δείγματα

Π. Γ.20. Αποτελέσματα του καθολικού ελέγχου για τις υποομάδες μετά τον μετασχηματισμό σε $W(100,10)$

	OLD		RAN1		RAN2		RAN3	
Περίπτωση	KS	X^2	KS	X^2	KS	X^2	KS	X^2
A	.4022	.2666	.1661	.5473	.1469	.1669	.3316	.6701
B	.3178	.5782	.9903	.4419	.9999	.7275	.9502	.8387
Γ	.9491	.8026	.4230	.5553	.9239	.7739	.6844	.5705
Δ	.9228	.0927	.8098	.9275	.1868	.9378	.5819	.0180

Κατά τον μετασχηματισμό αυτό απορρίπτονται μέσω του ελέγχου X^2 δύο περιπτώσεις: δείγματα που παρήχθησαν από την γεννήτρια OLD και με την RAN3 και ομαδοποιήθηκαν με την μέθοδο Δ. Τα ίδια δείγματα είχαν απορριφθεί και κατά τον έλεγχο αυξήσεων.

Γ.6.2.2 Κανονική Κατανομή

Θεωρείται ότι οι τυχαίες μεταβλητές από την ομοιόμορφη κατανομή μετασχηματίζονται στην κανονική κατανομή $N(0,1)$. Πρέπει δε να σημειωθεί ότι στην πραγματικότητα ο αριθμός του τελικού δείγματος της μεταβλητής από την κανονική κατανομή δεν είναι ο ίδιος με αυτόν του αρχικού δείγματος. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του τρόπου μετασχηματισμού, κατά τον οποίο ορισμένες δυνάδες τιμών από την ομοιόμορφη κατανομή απορρίπτονται εφόσον δεν πληρούν το κριτήριο $(2u_1 - 1)^2 + (2u_2 - 1)^2 \leq 1$ και $(2u_1 - 1)^2 + (2u_2 - 1)^2 \neq 0$. Για παράδειγμα το αρχικό δείγμα των 10,000 τιμών μετά τον μετασχηματισμό δίνει δείγματα με μέγεθος 7,800-9,000.

Γ.6.2.2.1 Έλεγχος αριθμογεννητριών

Στον πίνακα Π. Γ.21 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του καθολικού ελέγχου στα δείγματα των αριθμογεννητριών χωρίς την χρήση ομαδοποίησης, μετά τον μετασχηματισμό τους σε $N(0,1)$. Σε αυτή την περίπτωση απορρίπτονται με τον έλεγχο X^2 τα δείγματα των 5,000 της γεννήτριας RAN1 και τα δείγματα των 50,000 της γεννήτριας OLD. Σε αυτή την περίπτωση όμως, δεν μπορεί να γίνει συσχέτιση αυτού του αποτελέσματος με το αποτέλεσμα κάποιου προηγούμενου ελέγχου. Από την άλλη πλευρά φαίνεται ότι η απόρριψη των δειγμάτων δεν έχει σχέση με το μέγεθός τους.

Π. Γ.21. Αποτελέσματα καθολικού ελέγχου για τα δείγματα μετά τον μετασχηματισμό σε $N(0,1)$

	OLD		RAN1		RAN2		RAN3	
N	KS	X^2	KS	X^2	KS	X^2	KS	X^2
1,000	.3390	.6412	.5064	.2645	.4233	.3304	.1638	.9018
5,000	.2622	.3740	.1350	.0357	.2037	.5763	.9615	.3788
10,000	.6031	.8629	.8988	.2748	.6860	.7054	.5844	.4778
50,000	.2005	.0537	.1906	.1962	.5744	.6185	.5452	.1458

Γ.6.2.2.2 Έλεγχος υποομάδων

Στον πίνακα Π. Γ.22 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τον έλεγχο του μετασχηματισμού σε κανονική κατανομή των δειγμάτων που έχουν δημιουργηθεί από υποομάδες αρχικών δειγμάτων των γεννητριών.

Π. Γ.22. Αποτελέσματα του καθολικού ελέγχου για τις υποομάδες μετά τον μετασχηματισμό σε $N(0,1)$

	OLD		RAN1		RAN2		RAN3	
Περίπτωση	KS	X^2	KS	X^2	KS	X^2	KS	X^2
A	.7320	.4560	.4476	.5932	.2485	.1150	.0216	.5166
B	.1944	.3854	.6159	.9759	.4078	.0610	.1314	.9952
Γ	.4563	.5920	.0600	.0925	.3470	.6867	.4689	.2730
Δ	.0724	.7951	.5555	.5821	.9609	.0814	.8642	.1644

Τα αποτελέσματα αυτά με μία πρώτη ματιά δείχνουν ότι υπάρχουν περισσότερες απορρίψεις κατά τον μετασχηματισμό ψευδοτυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή στην κανονική. Το γεγονός αυτό πιθανόν να οφείλεται στο ότι για τον σχηματισμό αριθμού που ακολουθεί την Κανονική κατανομή απαιτούνται δύο ψευδοτυχαίοι αριθμοί, ενώ στην περίπτωση της Weibull ο μετασχηματισμός θεωρείται ακριβής.

Μία ακόμη παρατήρηση είναι ότι τα αποτελέσματα του ελέγχου KS διαφέρουν σημαντικά από αυτά του χ^2 . Έτσι για παράδειγμα έχουμε περισσότερες απορρίψεις από τον έλεγχο χ^2 , εκτός της περίπτωσης υποομάδων από την κανονική κατανομή όπου οι περισσότερες απορρίψεις έρχονται από τον έλεγχο KS. Αν μπορεί να στηριχθεί κανείς σε αυτά τα αποτελέσματα πρέπει να παρατηρηθεί επίσης ότι οι απορρίψεις αυξάνονται όταν περνάμε από ομάδες σε υποομάδες ψευδοτυχαίων αριθμών. Συγκεκριμένα στην περίπτωση της κατανομής Weibull, ενώ δεν έχουμε καμία απόρριψη στα δείγματα που δεν έχουν χωριστεί σε υποομάδες, στην δεύτερη περίπτωση έχουμε δύο απορρίψεις στην Δ. Όμοια είναι τα αποτελέσματα και στην περίπτωση της Κανονικής κατανομής όπου οι απορρίψεις αυξάνουν όταν δημιουργούνται υποομάδες, αλλά αυτή την φορά είναι ανεξάρτητες από τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται αυτές. Χαρακτηριστικό δε είναι ότι δεν υπάρχει συσχέτιση των απορρίψεων με το μέγεθος του δείγματος.

Γ.6.3 Έλεγχος της εφαρμογής MC

Στο εδάφιο αυτό ελέγχονται οι εφαρμογές που έχουν ήδη αναπτυχθεί στο πλαίσιο προηγούμενων εργασιών [Γ.14]-[Γ.15] ως προς την σύγκλιση της μεθόδου, σύμφωνα με τα [Γ.6]-[Γ.7]. Συγκεκριμένα ερευνάται η τυπική απόκλιση μεταξύ προσομοιώσεων του ίδιου προβλήματος με διαφορετικό δείγμα των βασικών μεταβλητών. Σημειώνεται ότι η είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της εκτιμώμενης πιθανότητας μειώνεται καθώς αυξάνεται το δείγμα [Γ.6]-[Γ.7]. Το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτιμώμενης πιθανότητας μπορεί να εκτιμηθεί σε συνάρτηση με το μέγεθος του δείγματος, θεωρώντας ότι η εκτίμηση ακολουθεί την κανονική κατανομή, βάσει της σχέσης:

$$p = p \pm \Phi_{1-\alpha/2}^{-1} \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \quad (\Gamma.2)$$

όπου α είναι το επίπεδο εμπιστοσύνης, p η εκτιμώμενη πιθανότητα, N το μέγεθος του δείγματος και Φ^{-1} η αντίστροφη κανονική κατανομή $N(0,1)$ [Γ.6]. Σαν γενικός κανόνας προτείνεται το απαιτούμενο δείγμα για την εκτίμηση της πιθανότητας σε καλό διάστημα εμπιστοσύνης να είναι περίπου [Γ.7]:

$$N = 100/p \quad (\Gamma.3)$$

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι στην ανάλυση της αξιοπιστίας κατασκευών η πιθανότητα αστοχίας που επιθυμείται κατά τον σχεδιασμό τους είναι 10^{-4} ή μικρότερη [Γ.7]. Ειδικότερα στην περίπτωση πτερυγίων ανεμογεννητριών η επιθυμητή πιθανότητα αστοχίας κατά τον σχεδιασμό με 20ετή περίοδο αναφοράς είναι $1 \cdot 10^{-4}$ - $2 \cdot 10^{-4}$ [Γ.16].

Μία μέθοδος, για να δούμε αν το μέγεθος του δείγματος επαρκεί για την προσομοίωση που εκτελείται είναι ο έλεγχος της διασποράς της εκτιμώμενης πιθανότητας. Η διασπορά αυτή δίνεται από την σχέση [Γ.6]:

$$\text{Var}(p) = \frac{p(1-p)}{N} \quad (\Gamma.4)$$

ή σε αδιάστατη μορφή, χρησιμοποιώντας τον συντελεστή μεταβλητότητας είναι:

$$\text{Cov}(p) = \frac{\sqrt{\text{Var}(p)}}{p} \quad (\Gamma.5)$$

Έτσι ελέγχοντας τον συντελεστή μεταβλητότητας, $\text{Cov}(p)$, ώστε να είναι μικρότερος από μία συγκεκριμένη τιμή, έστω 0.1 (10%), ελέγχουμε και το διάστημα εμπιστοσύνης, βάση της Εξ.(Γ.2).

Ο έλεγχος της εφαρμογής της μεθόδου στο πρόβλημα της αξιοπιστίας πολυστρώτων πλακών γίνεται σε τρία στάδια. Κατά το πρώτο ελέγχεται η εφαρμογή που αφορά στην εκτίμηση της αξιοπιστίας στρώσης εκ συνθέτου υλικού σε μονοαξονικό εφελκυσμό, όταν οι ιδιότητες αντοχής της στρώσης θεωρούνται στοχαστικές. Στο δεύτερο στάδιο εξετάζεται η στρώση συνθέτου υλικού σε επίπεδη εντατική κατάσταση, όταν και πάλι στοχαστικές θεωρούνται μόνο οι ιδιότητες αντοχής. Αυτό το στάδιο περιλαμβάνει και την περίπτωση της πολύστρωτης πλάκας με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής, εφόσον κατά την ανάλυση που πραγματοποιείται εξετάζεται η αξιοπιστία, ή η πιθανότητα αστοχίας κάθε μίας στρώσης ξεχωριστά. Στο τρίτο στάδιο εξετάζεται η στρώση συνθέτου υλικού σε επίπεδη εντατική κατάσταση, της οποίας οι ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας θεωρούνται στοχαστικές. Αυτό το στάδιο είναι υποπερίπτωση της γενικής κατάστασης όπου θεωρείται πολύστρωτη πλάκα και χρησιμοποιείται για λόγους σύγκρισης.

Πρέπει σε αυτό το σημείο να τονισθεί ότι τα δείγματα που χρησιμοποιούνται σε αυτές τις εφαρμογές είναι τα ίδια δείγματα που εξετάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Για αυτό το λόγο οι προσομοιώσεις που εκτελούνται είναι μικρές σε αριθμό, εξαιτίας του ότι ένα δείγμα χρησιμοποιείται για μία και μόνο μεταβλητή του προβλήματος. Έτσι, ενώ κατά τον έλεγχο των γεννητριών είχαμε 20-30 δείγματα για έλεγχο, στην περίπτωση της προσομοίωσης, ανάλογα με την εφαρμογή (στοχαστικές ιδιότητες αντοχής ή/ και ελαστικότητας) μπορούμε να έχουμε μόνο 3-6 προσομοιώσεις. Ο αριθμός αυτός θεωρείται όμως επαρκής για την εξέταση του μεγέθους του δείγματος που γίνεται σε αυτή την εργασία.

Γ.6.3.1. Αποτελέσματα στρώσης σε μονοαξονικό εφελκυσμό

Στο πρώτο στάδιο γίνεται έλεγχος της σύγκλισης των αποτελεσμάτων για την περίπτωση στρώσης σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Το σύνθετο υλικό θεωρείται ότι έχει στοχαστικές ιδιότητες αντοχής, ενώ εξετάζεται η κατανομή πιθανότητας αστοχίας του σε συνάρτηση με την μονοαξονική τάση που αναπτύσσεται στην στρώση. Σε αυτό το στάδιο χρησιμοποιούνται τα αρχικά δείγματα των 50,000 σημείων των γεννητριών OLD για γωνία στρώσης ως προς την εξωτερικά εφαρμοζόμενη δύναμη 45° και της RAN2 για γωνία 15° . Συγκεκριμένα γίνεται προσομοίωση με αριθμό δειγμάτων 500, 1000, 5000, 10000, 25000 και 50000 ανά περίπτωση τασιακής κατάστασης και ελέγχεται η σύγκλιση της κατανομής πιθανότητας γραφικά.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι η συνάρτηση πιθανότητας που ζητείται σε αυτή την περίπτωση διαφέρει από τις συνηθισμένες, στο ότι δεν κάνουμε προσομοίωση και ζητούμε την τάση στην οποία θα αστοχήσει η στρώση, αλλά εφαρμόζουμε την συγκεκριμένη τάση και σημειώνουμε πόσες φορές αστόχησε η στρώση υπό την τάση αυτή. Επομένως δεν μπορούν να εφαρμοστούν οι κανόνες [Γ.17]-[Γ.18] για την εύρεση του μεγέθους του δείγματος που δίνει την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας μέσα σε αποδεκτά διαστήματα εμπιστοσύνης. Οι κανόνες αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν για παράδειγμα στο πρόβλημα της κατανομής του ισοδύναμου συντελεστή θερμικής διαστολής μίας πολύστρωτης (effective thermal expansion coefficient), όπως αυτό παρουσιάζεται στο [Γ.19].

Στο Σχ.Γ.5 παρουσιάζεται η κατανομή πιθανότητας αστοχίας της στρώσης των 45° , με δείγματα από την OLD. Όπως φαίνεται από το γράφημα για μέγεθος δείγματος μεγαλύτερο των 5000 επέρχεται σύγκλιση των αποτελεσμάτων. Αν όμως εξετάσουμε μικρότερες πιθανότητες αστοχίας, οι οποίες μας ενδιαφέρουν για τον σχεδιασμό κατασκευών, έστω μικρότερες του 5% (0.05 στο διάγραμμα) τότε, όπως φαίνεται στο Σχ.Γ.6 παρατηρούμε κυρίως ότι μόνο η καμπύλη των 500 σημείων κάνει άλματα γύρω από μία μέση τιμή. Φαίνεται δηλαδή, η τυπική απόκλιση της εκτιμώμενης πιθανότητας των προσομοιώσεων.

Σχ.Γ.5 Πιθανότητα αστοχίας σε συνάρτηση με την εφαρμοζόμενη τάση σε στρώση 45°

Παρόμοια αποτελέσματα προκύπτουν από την προσομοίωση της αστοχίας στρώσης σε 15° ως προς την εφαρμοζόμενη φόρτιση με δείγματα από την RAN2, όπως φαίνεται από τα Σχ.Γ.7 και Γ.8. Σε αυτή την περίπτωση όμως όταν ελέγχουμε την πιθανότητα αστοχίας έως 5% παρατηρούμε ότι η ζώνη των προβλέψεων είναι μεγαλύτερη από αυτή για την στρώση των 45°. Ασφαλώς μεγαλύτερο είναι και το διάστημα της εφαρμοζόμενης τάσης. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μεγαλύτερη τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων, ενώ πρέπει να σημειωθεί ότι εφόσον χρησιμοποιούμε δείγματα μεγαλύτερα των 5000 σημείων για αυτή την περιοχή θα πρέπει να αναμένουμε καλό διάστημα εμπιστοσύνης για αυτές τις περιοχές πιθανότητας αστοχίας.

Σχ.Γ.6 Πιθανότητα αστοχίας έως 5% σε συνάρτηση με την εφαρμοζόμενη τάση για στρώση 45°

Σχ.Γ.7 Πιθανότητα αστοχίας σε συνάρτηση με την εφαρμοζόμενη τάση για στρώση 15°

Σχ.Γ.8 Πιθανότητα αστοχίας έως 5% σε συνάρτηση με την εφαρμοζόμενη τάση για στρώση 15°

Γ.6.3.2. Αποτελέσματα στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής

Γ.6.3.2.1 Έλεγχος γεννητριών

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η μέση τιμή και ο μέγιστος συντελεστής μεταβλητότητας της πιθανότητας αστοχίας των 6 προσομοιώσεων με 10,000, 25,000 και 50,000 δείγματα για κάθε γεννήτρια ξεχωριστά. Η περίπτωση που εξετάζεται είναι στρώση σε 60° με $\sigma_x = -15\text{MPa}$, $\sigma_y = 0\text{MPa}$ και $\sigma_s = -10\text{MPa}$. Σημειώνεται ότι τα δείγματα που χρησιμοποιούνται είναι τα δείγματα των 50000 σημείων, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για τον έλεγχο αυξήσεων και μειώσεων των αριθμογεννητριών και για τον έλεγχο του μετασχηματισμού από ομοιόμορφη σε Κανονική ή Weibull. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο 30 δείγματα, τα οποία οδηγούν σε σύνολο 6 προσομοιώσεων.

Φαίνεται καθαρά ότι όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος τόσο μειώνεται ο συντελεστής μεταβλητότητας. Τον μεγαλύτερο συντελεστή μεταβλητότητας παρουσιάζει η γεννήτρια OLD, ενώ τον μικρότερο η γεννήτρια RAN3. Τα αποτελέσματα για την εκτίμηση πιθανότητας των γεννητριών OLD, RAN2 και RAN3 είναι πάρα πολύ κοντά, ενώ τα αποτελέσματα της γεννήτριας RAN1 είναι κάπως μεγαλύτερα από τον μέσο όρο. Παράλληλα θεωρώντας την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας ως τον μέσο όρο όλων των προσομοιώσεων, δηλαδή $p_f = 2.294\text{E-}03$, τότε το διάστημα εμπιστοσύνης με 95% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι: $(1.356\text{E-}03, 3.231\text{E-}03)$ για μέγεθος δείγματος 10,000, σύμφωνα με την Εξ.(Γ.2).

Π. Γ.23. Μέση τιμή και συντελεστής μεταβλητότητας πιθανότητας αστοχίας στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής με διαφορετικό μέγεθος δείγματος

N		OLD	RAN1	RAN2	RAN3
10,000	MEAN	2.283E-03	2.550E-03	2.150E-03	2.283E-03
	MAX COV (%)	27.72	20.83	25.80	21.80
25,000	MEAN	2.313E-03	2.347E-03	2.320E-03	2.220E-03
	MAX COV (%)	15.06	13.59	14.27	13.99
50,000	MEAN	2.233E-03	2.383E-03	2.260E-03	2.180E-03
	MAX COV (%)	9.89	9.52	9.84	9.75

Αν θεωρήσουμε ότι το όριο για τον συντελεστή μεταβλητότητας είναι 10%, τότε όλες οι γεννήτριες έχουν συγκλίνει για μέγεθος δείγματος 50000 σημείων. Βάσει της Εξ.(Γ.3) το κατάλληλο μέγεθος δείγματος είναι 44000. Το ότι η γεννήτρια RAN1 παρουσιάζει τον μικρότερο συντελεστή μεταβλητότητας της πιθανότητας αστοχίας σε σχέση με τα αποτελέσματα των άλλων γεννητριών, οφείλεται στο γεγονός ότι η πρόβλεψη μέσω των δειγμάτων της για την πιθανότητα αστοχίας είναι μεγαλύτερη των υπολοίπων.

Γ.6.3.2.2 Έλεγχος υποομάδων

Στον πίνακα Π. Γ.24 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ίδιου προβλήματος χρησιμοποιώντας όμως τα δείγματα που παρήχθησαν δημιουργώντας υποομάδες και ελέγχθηκαν σε προηγούμενα εδάφια. Το μέγεθος του δείγματος για όλες τις περιπτώσεις υποομάδων είναι 10000, ενώ ο αριθμός των προσομοιώσεων ήταν 5 για την Α μέθοδο και 4 για τις δύο άλλες.

Π. Γ.24. Μέση τιμή και συντελεστής μεταβλητότητας πιθανότητας αστοχίας στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής με δείγματα υποομάδων

Μέθοδος		OLD	RAN1	RAN2	RAN3
Α	MEAN	2. 440E-03	2. 160E-03	2. 180E-03	2. 320E-03
	MAX COV (%)	21.80	22.92	23.55	21.80
Β	MEAN	2. 050E-03	2. 500E-03	2. 250E-03	2. 250E-03
	MAX COV (%)	24.23	21.30	25.80	26.71
Γ	MEAN	2. 350E-03	2. 100E-03	2. 050E-03	1.850E-03
	MAX COV (%)	21.80	23.55	27.72	26.71

Γενικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο μέγιστος συντελεστής μεταβλητότητας είναι αντίστοιχος με αυτόν των δειγμάτων χωρίς τον σχηματισμό υποομάδων. Αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα για την μέση τιμή της εκτιμώμενης πιθανότητας αστοχίας, ενώ σημειώνεται ότι όλα πλην ενός έδωσαν αποτελέσματα μέσα στο όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης. Το δείγμα που ήταν έξω από αυτό το όριο ήταν το ένα από τα τέσσερα της RAN2, με δείγματα που ομαδοποιήθηκαν με την μέθοδο Γ, το οποίο όμως είναι αναμενόμενο, εφόσον το διάστημα που έχει επιλεγεί αναφέρεται σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% και έχουν εκτελεστεί συνολικά 52 προσομοιώσεις.

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι ικανοποιητικά, εφόσον η μέση τιμή της πιθανότητας αστοχίας αυτών των προσομοιώσεων είναι πολύ κοντά στην εκτίμηση με μέγεθος δείγματος 50000, παρόλο που σύμφωνα με τον γενικό κανόνα [Γ.7] θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν δείγματα μεγέθους 44,000 σημείων. Πρέπει να σημειωθεί δε ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας μεταξύ των πειραμάτων (προσομοιώσεων) είναι μικρότερος από τον συντελεστή μεταβλητότητας της εκτιμώμενης τιμής πιθανότητας αστοχίας.

Γ.6.3.3. Αποτελέσματα στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας**Γ.6.3.3.1 Έλεγχος γεννητριών**

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η μέση τιμή και ο μέγιστος συντελεστής μεταβλητότητας των 3 προσομοιώσεων με 7,500, 15,000 και 30,000 δείγματα για κάθε γεννήτρια ξεχωριστά. Για

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo

αυτές τις προσομοιώσεις χρησιμοποιούνται τα δείγματα των 50000, που ελέγχθηκαν σε προηγούμενα εδάφια. Η περίπτωση που εξετάζεται είναι πολύστρωτη διάταξης $[0/\pm 45]_s$, όπου οι ιδιότητες της πρώτης στρώσης των 45° θεωρούνται στοχαστικές, ενώ οι ιδιότητες όλων των υπολοίπων στρώσεων θεωρούνται ντετερμινιστικές. Η φόρτιση που επιβάλλεται είναι $N_x = -720\text{kN/m}$, $N_y = 0\text{kN/m}$ και $N_s = -50\text{kN/m}$.

Π. Γ.25. Μέση τιμή και συντελεστής μεταβλητότητας πιθανότητας αστοχίας στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας με διαφορετικό μέγεθος δείγματος

N		OLD	RAN1	RAN2	RAN3
7,500	MEAN	1.066E-02	1.205E-02	1.067E-02	1.160E-02
	MAX COV (%)	11.46	11.21	11.92	11.36
15,000	MEAN	1.095E-02	1.062E-02	1.129E-02	1.086E-02
	MAX COV (%)	7.82	8.46	7.83	8.09
30,000	MEAN	1.060E-02	1.044E-02	1.104E-02	1.051E-02
	MAX COV (%)	5.64	5.82	5.53	5.81

Η μέση τιμή όλων των προσομοιώσεων είναι $1.094\text{E-}02$, ενώ το διάστημα εμπιστοσύνης με 95% επίπεδο εμπιστοσύνης είναι: $(8.966\text{E-}03, 1.292\text{E-}02)$ για μέγεθος δείγματος 7,500. Ο συντελεστής μεταβλητότητας των περιπτώσεων αυτών είναι συνήθως μικρότερος από ότι για την προηγούμενη περίπτωση που εξετάστηκε, ενώ τα δείγματα είναι μικρότερου μεγέθους. Αυτό συμβαίνει, επειδή η εκτιμώμενη πιθανότητα αστοχίας είναι μίας τάξεως μεγαλύτερη. Έτσι αν ακολουθούσαμε τον γενικό κανόνα, δηλαδή $N = 100/p_f$ [Γ.7], για να έχουμε καλά αποτελέσματα θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε δείγματα 9200.

Γ.6.3.3.2 Έλεγχος υποομάδων

Στον πίνακα Π. Γ.26 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ίδιου προβλήματος χρησιμοποιώντας όμως τα δείγματα που παρήχθησαν δημιουργώντας υποομάδες με την μέθοδο Δ. Το μέγεθος του δείγματος για όλες τις περιπτώσεις υποομάδων είναι 7500. Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν τα δείγματα των 10000 σημείων που ελέγχθηκαν στα προηγούμενα εδάφια, ενώ ο αριθμός των προσομοιώσεων ήταν 4.

Π. Γ.26. Μέση τιμή και συντελεστής μεταβλητότητας πιθανότητας αστοχίας στρώσης με στοχαστικές ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας με δείγματα υποομάδες

Μέθοδος		OLD	RAN1	RAN2	RAN3
Δ	MEAN	1.093E-02	1.043E-02	1.097E-02	9.900E-03
	MAX COV (%)	11.44	11.51	11.27	12.06

Γενικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι αντίστοιχος με αυτόν των δειγμάτων χωρίς τον σχηματισμό υποομάδων. Αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα για την μέση τιμή της εκτιμώμενης πιθανότητας αστοχίας. Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας που παρουσιάζεται στους πίνακες Π. Γ.23-Γ.25 είναι ο μέγιστος που παρατηρήθηκε σε όλες τις προσομοιώσεις και δεν αναφέρεται στην μέση τιμή της εκτιμώμενης πιθανότητας αστοχίας. Επίσης, σε περίπτωση που επιλεγεί η μέθοδος διατήρησης του συντελεστή διασποράς κάτω από ένα προκαθορισμένο όριο, ως αρχική προσέγγιση του μεγέθους του δείγματος η εμπειρική σχέση της Εξ.(Γ.3) παρουσιάζει μια καλή τιμή, όπως φαίνεται από τα παραπάνω παραδείγματα.

Γ.7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή περάσαμε σταδιακά από τους ελέγχους που χρησιμοποιούνται για την μαθηματική επιβεβαίωση των αλγορίθμων, σε αυτούς για τα αποτελέσματα της εφαρμογής. Οι έλεγχοι που πραγματοποιήθηκαν είναι τυπικοί και δεν αποτελούν απόδειξη σε καμία περίπτωση της ορθότητας της εφαρμογής. Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν για την μερική επαλήθευση των αποτελεσμάτων και να γίνουν η απαρχή για την επιλογή του αλγορίθμου εκείνου που δίνει τα

καλύτερα αποτελέσματα από πλευράς εφαρμογής. Η πλήρης μαθηματική απόδειξη αποτελεί χρονοβόρα διαδικασία και δεν είναι αντικείμενο αυτής της εργασίας.

Στην συνέχεια ο έλεγχος επεκτείνεται και στην εξέταση της ορθότητας των αποτελεσμάτων που προκύπτουν με χρήση της μεθόδου Monte Carlo. Ο δεύτερος αυτός έλεγχος περιλαμβάνει σύγκριση των γραφημάτων που προκύπτουν από απλή εφαρμογή της μεθόδου με αντίστοιχα γραφήματα που προκύπτουν με χρήση πιο ανεπτυγμένων αλγορίθμων γεννητριών τυχαίων αριθμών. Το αποτέλεσμα της έρευνας έδειξε ότι οι γεννήτριες συμπεριφέρονται ικανοποιητικά ως προς την χρήση τους με τους κώδικες εφαρμογής. Παράλληλα εξετάστηκαν και τα αποτελέσματα της μεθόδου σε μικρές πιθανότητες αστοχίας, $2 \cdot 10^{-3}$ - $1 \cdot 10^{-2}$, τα οποία βρέθηκαν ικανοποιητικά. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι σε προηγούμενες εργασίες, [Γ.14]-[Γ.15], η ακρίβεια στην πιθανότητα αστοχίας που απαιτείτο ήταν $1 \cdot 10^{-2}$, εφόσον εξεταζόταν ο τόπος αστοχίας στρώσεων ή πολυστρώτων πλακών εκ συνθέτων υλικών με 95% και 99% αξιοπιστία. Το μέγεθος δείγματος που χρησιμοποιείτο ήταν 10,000, το οποίο αποδείχθηκε ικανοποιητικό για αυτή την ακρίβεια. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από παλαιότερες προσομοιάσεις με χρήση της μεθόδου Monte Carlo, δεν διαφοροποιούνται με χρήση εξελιγμένων γεννητριών από άποψη στατιστικής.

Έτσι, στις περισσότερες εφαρμογές της παρούσης εργασίας το μέγεθος του δείγματος επιλέχθηκε σύμφωνα με την εμπειρική σχέση $100/p_f$ [Γ.7], ενώ χρησιμοποιήθηκαν δύο γεννήτριες ψευδοτυχαίων αριθμών, συγκεκριμένα έγινε χρήση των γεννητριών RAN2 και RAN1, εφόσον η πρώτη έχει μεγάλη περίοδο και θεωρείται από μαθηματικής πλευρά μία πολύ καλή γεννήτρια και η δεύτερη είναι λίγο πιο γρήγορη από την RAN2. Παράλληλα, η δημιουργία υποομάδων δειγμάτων δεν έδειξε να επηρεάζει το αποτέλεσμα. Σε περίπτωση που η παραγωγή του δείγματος γίνεται μέσα στην εφαρμογή δεν αναμένεται να δώσει εσφαλμένες προβλέψεις, ενώ από την άλλη η δημιουργία εκ των προτέρων δειγμάτων των βασικών μεταβλητών απαιτεί και μεγάλο χώρο αποθήκευσης, ιδιαίτερα αν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο και οι βασικές μεταβλητές πολλές.

Γ.8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [Γ.1] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical recipes in Fortran - The Art of Scientific Computing*, 2nd Ed. Cambridge University Press, 1994 bookmark
- [Γ.2] G. S. Fishman, *Monte Carlo- Concepts, Algorithms, and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1996
- [Γ.3] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol.2, Seminumerical Algorithms, Addison Wesley Longman, 3rd Ed., USA, 1998
- [Γ.4] A. R. Y. Rubinstein, *Simulation and the Monte Carlo Method*, Wiley, USA, 1981
- [Γ.5] S. Wegenkittl, *Empirical Testing of Pseudorandom Number Generators*, Diplom thesis, University of Salzburg, 1995
- [Γ.6] A. H-S. Ang, W. H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Vol. II, Decision, Risk and Reliability, John Wiley & Sons, USA, 1984
- [Γ.7] P. Bjerager, *Methods for Structural Reliability Computations*, in Reliability Problems: General Principles and Applications, in Mechanics of Solids and Structures, Ch.3, F. Casciati, J. B. Roberts, Eds., Springer Verlag, Italy, 1991, pp.89-135
- [Γ.8] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 3rd Ed., McGraw-Hill, Inc., Singapore, 1991
- [Γ.9] H. Leeb, S. Wegenkittl, *Inversive and Linear Congruential Pseudorandom Number Generators in Empirical Tests*, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, Vol. 7, No.2, 1997, pp. 272-286

- [Γ.10] K. Entacher, *Bad Subsequences of Well-Known Linear Congruential Pseudorandom Number Generators*, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, Vol. 8, No.1, 1998, pp. 61-70
- [Γ.11] Μ. Μανατάκης, *Εφαρμοσμένη Στατιστική*, Εκδόσεις Συμμετρία, Πάτρα, 1993
- [Γ.12] M. A. Stephens, *Use of the Kolmogorov- Smirnov, Cramer- Von Mises and Related Statistics without Extensive Tables*, J. Of the Royal Statistical Society, Ser. B, Vol. 32, pp. 115-122, 1970
- [Γ.13] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, D. G. Aggelis, *Mechanical Property distribution of CFRP Filament Wound Composites*, J. of Composite Structures, Vol. 45(1), pp. 41-50, 1999
- [Γ.14] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, *Probabilistic Failure Prediction for FRP composites*, Comp. Sci. Tech., Vol. 58, pp. 1973-1982, 1998
- [Γ.15] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, *A Probabilistic Approach to Failure Prediction of FRP Laminated Composites*, Mechanics of Composite Materials and Structures, Vol. 5(4), pp.371-382,1998
- [Γ.16] E. Jorgensen, K. O. Ronold, J. Wedel-Heinen, B. van de Horn, L. Rademakers, Vol.4, *Calibration of Safety Factors*, C. J. Christensen, Ed., Report of “European Wind Turbine Standards”, Joule-II, CT-93-0387, 1996
- [Γ.17] F. J. Massey, *The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit*, J. of the American Statistical Association, Vol. 46, pp. 68-78, 1951
- [Γ.18] Z. W. Birnbaum, *Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistic for finite sample size*, J. of the American Statistical Association, Vol. 47, pp. 425-441, 1952
- [Γ.19] T. P. Philippidis, D. J. Lekou, G. A. Kalogiannakis, *On the stochastic nature of thermomechanical properties in Glass reinforced polyester laminates*, Composite Structures, Vol. 49, pp. 293-301, 2000

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

Δ. ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ PRE-THIN, THIN, POST-THIN

Στο παρόν παράρτημα περιγράφεται η χρήση των υπολογιστικών κωδίκων για την εκτίμηση της πιθανότητας αστοχίας σε διατομή λεπτότοιχης κατασκευής από σύνθετα υλικά.

Υπενθυμίζεται ότι το υπολογιστικό εργαλείο που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο αυτής της εργασίας αποτελείται από τρεις ενότητες, το PRE-THIN, το THIN και το POST-THIN. Για κάθε μία από αυτές τις ενότητες στο παρόν παράρτημα παρουσιάζονται αναλυτικά τα αρχεία εισόδου, τα αρχεία εξόδου και οι παράμετροι που ζητούνται κατά την διάρκεια της εκτέλεσης της κάθε ενότητας. Ανάλογα με το ποιες ιδιότητες θεωρούνται στοχαστικές επιλέγουμε την κατάλληλη έκδοση του υπολογιστικού εργαλείου. Επίσης ανάλογα με το αν επιθυμούμε την επίλυση χρησιμοποιώντας την μέθοδο Edgeworth (EDW) ή την προσομοίωση με Monte Carlo (MC) επιλέγουμε επίσης την ανάλογη περίπτωση.

Δ.1. Περίπτωση στοχαστικών ιδιοτήτων αντοχής

Εξαιτίας του ότι στην περίπτωση που οι ελαστικές ιδιότητες των υλικών δεν θεωρούνται στοχαστικές η μόνη ενότητα στην οποία διαφοροποιείται η ανάλυση είναι το POST-THIN (εφόσον μόνο σε αυτό το τμήμα εισέρχονται στοχαστικές μεταβλητές). Έτσι σε αυτή την ενότητα περιγράφεται το PRE-THIN και το THIN, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανεξάρτητα από το αν η ανάλυση που ακολουθείται είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική.

Δ.1.1 PRE-THIN

Το PRETHIN ζητάει τουλάχιστον δύο αρχεία εισόδου. Στο ένα αρχείο περιγράφονται οι πολύστρωτες, καθώς επίσης δίνεται και το όνομα του αρχείου (ή των αρχείων) για το υλικό (ή τα υλικά) των στρώσεων που αποτελούν τις πολύστρωτες. Στο άλλο αρχείο (ή στην περίπτωση πολλών υλικών, στα υπόλοιπα αρχεία) περιγράφονται αναλυτικά οι ιδιότητες των υλικών των στρώσεων που χρησιμοποιούνται στην δομή της κατασκευής που πρόκειται να μοντελοποιηθεί. Τα αρχεία εισόδου του PRETHIN είναι όλα ASCII αρχεία.

Επίσης, το PRE-THIN παράγει δύο αρχεία εξόδου με την ονομασία MATCONST.OUT και POST.INP. Το πρώτο αρχείο χρησιμοποιείται από το THIN ενώ το δεύτερο αποτελεί αρχείο εισόδου του POST-THIN.

Κατά την εκτέλεση του προγράμματος ζητείται από τον χρήστη μόνο το όνομα του αρχείου που περιλαμβάνει την περιγραφή των πολυστρώτων διατάξεων.

Στην συνέχεια περιγράφονται αναλυτικά τα παραπάνω αρχεία εισόδου και εξόδου του PRE-THIN.

Δ.1.1.1 Αρχείο Εισόδου Ιδιοτήτων Υλικού

Το αρχείο εισόδου, στο οποίο περιγράφονται οι ιδιότητες για κάθε ένα από τα υλικά που εμπεριέχεται στις διατάξεις στρώσεων του περυγίου, ξεχωριστά είναι όπως προαναφέρθηκε ένα αρχείο ASCII, το οποίο πρέπει να έχει την παρακάτω δομή σε γραμμές:

Πάχος, Πυκνότητα

E_x , E_y , ν_{xy} , G_{xy} (Μέτρο ελαστικότητας στην x διεύθυνση - που αντιστοιχεί σε 0° προσανατολισμό του υλικού), Μέτρο ελαστικότητας στην y διεύθυνση, λόγος Poisson, Μέτρο διάτμησης στο επίπεδο της στρώσης)

α_x , α_y (Συντελεστής θερμικής διαστολής στην x διεύθυνση και κάθετα σε αυτή)

β_x , β_y (Συντελεστής υγροσκοπικής διόγκωσης στην x διεύθυνση και κάθετα σε αυτή)

Πληροφορίες για την αντοχή στην x διεύθυνση σε εφελκυσμό

Πληροφορίες για την αντοχή στην x διεύθυνση σε θλίψη

Πληροφορίες για την αντοχή στην y διεύθυνση σε εφελκυσμό

Πληροφορίες για την αντοχή στην y διεύθυνση σε θλίψη

Πληροφορίες για την αντοχή σε διάτμηση στο επίπεδο της στρώσης

Σε περίπτωση που χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το PRE-THIN μόνο για την εξαγωγή των ισοδύναμων ιδιοτήτων των πολυστρώτων διατάξεων και όχι για να κάνουμε ανάλυση αντοχής, δεν χρειάζεται να δώσουμε καμία πληροφορία για τις ιδιότητες αντοχής (τελευταίες πέντε γραμμές). Οι πληροφορίες αυτές απαιτούνται όμως, όταν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το POST-THIN, όπου πραγματοποιείται ανάλυση αντοχής.

Στην περίπτωση που δεν απαιτείται να συμπεριληφθεί στην ανάλυση η επίδραση της θερμοκρασίας ή της υγρασίας, τότε οι τιμές των ιδιοτήτων θερμικής διαστολής του υλικού ή/ και των ιδιοτήτων υδροσκοπικής διόγκωσης μπορεί να είναι μηδενικές (αλλά όχι κενές).

Στην περίπτωση που απαιτείται ανάλυση αντοχής (δηλαδή, τα δεδομένα που απαιτούνται ως «πληροφορίες αντοχής» εξαρτώνται από την ανάλυση που θα πραγματοποιηθεί (ντετερμινιστική, EDW, MC).

Στην περίπτωση ντετερμινιστικού υπολογισμού οι «πληροφορίες για κάποια από τις ιδιότητες αντοχής» περιορίζονται σε μία τιμή, δηλαδή την τιμή αντοχής σχεδιασμού (design value).

Σε περίπτωση που στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε την πιθανότητα αστοχίας χρησιμοποιώντας την μέθοδο EDW τότε οι «πληροφορίες για κάποια από τις ιδιότητες αντοχής» είναι οι τέσσερις πρώτες κεντρικές ροπές της αντίστοιχης ιδιότητας αντοχής. Δηλαδή, η μέση τιμή, η διασπορά (και όχι η τυπική απόκλιση), η τρίτη και η τέταρτη κεντρική ροπή.

Στην περίπτωση που χρησιμοποιήσουμε ανάπτυγμα Edgeworth με ένα ή δύο όρους, τότε η τέταρτη κεντρική ροπή των ιδιοτήτων αντοχής μπορεί να λάβει μηδενική τιμή (αλλά όχι κενό). Σε κάθε άλλη περίπτωση η μέση τιμή και η διασπορά της αντοχής δεν πρέπει να είναι ίση με μηδέν.

Στην περίπτωση της προσομοίωσης MC οι «πληροφορίες για κάποια από τις ιδιότητες αντοχής» δίνονται σε δύο γραμμές για την κάθε ιδιότητα, ως εξής:

KATANOMH

Παράμετροι κατανομής

Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει μεταξύ της Weibull δηλώνοντας ως όνομα κατανομής: WEIBULL, της κανονικής κατανομής, δηλώνοντας ως όνομα κατανομής: NORMAL και της λογαριθμικής κανονικής κατανομής, δηλώνοντάς την ως LOGNORMAL.

Προσοχή: Το όνομα της κατανομής πρέπει να είναι με κεφαλαία γράμματα.

Οι παράμετροι των κατανομών δίνονται υποχρεωτικά με την σειρά που δηλώνονται οι παράμετροι σύμφωνα με τους παρακάτω ορισμούς των κατανομών:

Weibull: $W(\sigma, \eta)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x; \sigma, \eta) = \frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta}\right]$

Κανονική κατανομή: $N(\mu, \sigma)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Λογαριθμική κανονική κατανομή: $LOGN(\mu, \sigma)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Οδηγίες χρήσεις των εργαλείων PRE-THIN, THIN, POST-THIN

Σε περίπτωση που κατά την ανάλυση αντοχής χρησιμοποιηθεί το κριτήριο αστοχίας Hill, το οποίο δεν διαφοροποιεί μεταξύ αντοχής σε εφελκυσμό και θλίψη, τότε οι τιμές για τις παραμέτρους αντοχής σε θλίψη μπορεί να είναι μηδενικές (αλλά όχι κενές).

Τα δεδομένα πρέπει να δίνονται σε μονάδες SI, ενώ απαιτείται να περιλαμβάνονται συντελεστές ασφαλείας υλικών.

Ένα παράδειγμα για το αρχείο που περιγράφει το υλικό της στρώσης για την περίπτωση όπου θα ακολουθήσει ανάλυση με την μέθοδο EDW φαίνεται στην συνέχεια:

```
0.845E-3, 1822.48
24.05E9, 8.20E9, 0.3051, 1.656E9
9.13E-6, 46.04E-6
0., 0.
417.20e6, 4057.e12, -133900.e18, 0.5422e32
340.99e6, 1144.e12, 11540.e18, 0.4131e31
41.60e6, 37.40e12, 101.6e18, 4689.e24
171.12e6, 495.4e12, 4326.e18, 803600.e24
17.51e6, 10.95e12, -14.12e18, 366.9e24
```

Στο αρχείο αυτό, στην πρώτη σειρά δίνονται το πάχος της στρώσης και η πυκνότητα του υλικού (στο συγκεκριμένο παράδειγμα το πάχος της στρώσης είναι 0.845 mm, ενώ η πυκνότητα του υλικού είναι 1822.48 kg/m³). Στην δεύτερη γραμμή δίνονται οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού με την σειρά E_X , E_Y , ν_{XY} , G_{XY} , όπου οι τιμές των ιδιοτήτων είναι $E_X = 24.05$ GPa, $E_Y = 8.20$ GPa, $\nu_{XY} = 0.305$, $G_{XY} = 1.656$ GPa. Στην επόμενη γραμμή δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής στις κύριες διευθύνσεις του υλικού (α_x και α_y) αντίστοιχα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο συντελεστής θερμικής διαστολής στις κύριες διευθύνσεις του υλικού είναι 9.13 $\mu\text{m/m}/^\circ\text{C}$ και 46.04 $\mu\text{m/m}/^\circ\text{C}$. Στην συνέχεια δίνονται οι υδροσκοπικές ιδιότητες του υλικού στις κύριες διευθύνσεις του υλικού, οι οποίες για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ίσες με 0, εφόσον δεν εξετάστηκε η επίδραση αυτών των ιδιοτήτων. Τέλος δίνονται οι τέσσερις πρώτες κεντρικές ροπές των ιδιοτήτων αντοχής. Στο παραπάνω παράδειγμα οι μέσες τιμές για τις X_T , X_C , Y_T , Y_C και S είναι αντίστοιχα 417.20 MPa, 340.99 MPa, 41.60 MPa, 171.12 MPa και 17.51 MPa, ενώ οι τιμές τυπικής απόκλισης (προσοχή όχι οι τιμές διασποράς που δίνονται στο αρχείο) είναι 63.69 MPa, 33.82 MPa, 6.12 MPa, 22.26 MPa και 3.31 MPa, αντίστοιχα.

Το αντίστοιχο αρχείο για τον ντετερμινιστικό υπολογισμό της αντοχής θα περιλάμβανε μόνο την τιμή σχεδιασμού της κάθε αντοχής (δηλαδή μία τιμή ανά σειρά για τις τελευταίες 5 σειρές του αρχείου).

Κατ' αναλογία το αντίστοιχο αρχείο που θα χρησιμοποιηθεί για προσομοίωση με MC είναι:

```
0.845E-3, 1822.48
24.05E9, 8.20E9, 0.3051, 1.656E9
9.13E-6, 46.04E-6
0., 0.
WEIBULL
443.6708e6, 7.7593
LOGNORMAL
19.642511, 0.0989
LOGNORMAL
17.532911, 0.1462
LOGNORMAL
18.949511, 0.1295
WEIBULL
18.8475e6, 6.1667
```


Δ.1.1.2 Αρχείο Εισόδου Πολυστρώτων Διατάξεων

Το αρχείο εισόδου για την περιγραφή της διάταξης των στρώσεων στις πολύστρωτες που αποτελούν την κάθε διατομή του πτερυγίου είναι ένα απλό αρχείο ASCII. Το αρχείο αυτό είναι το ίδιο ανεξάρτητα από την ανάλυση που τυχόν θα χρησιμοποιηθεί με το POST-THIN. Σε αυτό το αρχείο, στην πρώτη σειρά αναγράφεται ο αριθμός των διαφορετικών υλικών που χρησιμοποιούνται στην διάταξη, π.χ. 3. Στις αμέσως επόμενες σειρές αναγράφεται το όνομα του αρχείου που περιέχει τις ιδιότητες του κάθε υλικού, έτσι για παράδειγμα έχουμε:

```
3
mat1.txt
mat2.txt
mat3.txt
```

Στην αμέσως επόμενη σειρά αναγράφεται ο αριθμός των πολυστρώτων διατάξεων που θα αναλυθεί, δηλαδή που αποτελεί την διατομή του πτερυγίου. Για παράδειγμα στην περίπτωση του Σχ.Δ1 θα είχαμε 6 διατάξεις, συμπεριλαμβάνοντας την διάταξη των ενισχυτικών δοκίδων.

Σχ.Δ.1 Παράδειγμα χωρισμού υλικών σε διατομή του πτερυγίου

Στην συνέχεια αναγράφονται τα δεδομένα για κάθε διάταξη, τα οποία είναι: Ο αριθμός των στρώσεων στην διάταξη και σε κάθε σειρά ξεχωριστά για κάθε στρώση η γωνία προσανατολισμού της και το υλικό της. Για παράδειγμα η διάταξη: $[0^{\text{mat1}} / 45^{\text{mat2}} / -45^{\text{mat2}} / 0^{\text{mat1}} / 0_4^{\text{mat3}}]_T$ θα δηλωνόταν:

```
8
0.      1
45.     2
-45.    2
0.      1
0.      3
0.      3
0.      3
0.      3
```

Όπου ο πρώτος αριθμός αντιστοιχεί στην γωνία προσανατολισμού της στρώσης σε σχέση με τον άξονα του πτερυγίου (δηλαδή κάθετα στο επίπεδο της διατομής) και ο δεύτερος αντιστοιχεί στον αριθμό του υλικού, δηλαδή της σειράς στην οποία δηλώθηκε το όνομα του αρχείου που περιλαμβάνει τις ιδιότητες του υλικού.

Μόλις ολοκληρωθεί η περιγραφή της πρώτης διάταξης ακολουθεί η επόμενη, δηλαδή πρώτα ο αριθμός των στρώσεων που περιλαμβάνονται στην διάταξη της επόμενης πολύστρωτης και κατόπιν η σειρά για κάθε στρώση στην διάταξη. Σημειώνεται ότι η αρίθμηση των

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Οδηγίες χρήσεις των εργαλείων PRE-THIN, THIN, POST-THIN

πολυστρώτων διατάξεων γίνεται εσωτερικά στο PRETHIN, κατ' αύξουσα σειρά καθώς διαβάζονται τα στοιχεία της κάθε πολύστρωτης.

Προαιρετικά, στην περίπτωση πολλών διαφορετικών διατάξεων ή/και μεγάλου αριθμού στρώσεων μπορούμε στην γραμμή όπου δηλώνεται ο αριθμός των στρώσεων στην διάταξη να δίνουμε (χωρισμένο με tab) από τον αριθμό των στρώσεων ένα όνομα (ή αριθμό στην διάταξη). Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι το PRETHIN θα χρησιμοποιήσει την πληροφορία αυτή. Το PRETHIN είναι προγραμματισμένο να διαβάζει έναν αριθμό και να αλλάζει σειρά στο ASCII αρχείο. Έτσι για παράδειγμα η περιγραφή της παραπάνω πολύστρωτης διάταξης θα ήταν:

8	spar-tension
0.	1
45.	2
-45.	2
0.	1
0.	3
0.	3
0.	3
0.	3

Δ.1.1.3 Αρχείο Εξόδου MATCONST.OUT

Το αρχείο εξόδου του PRETHIN, το οποίο χρησιμοποιείται ως είσοδος του THIN είναι ένα ASCII αρχείο, το οποίο περιλαμβάνει για κάθε πολύστρωτη διάταξη το συνολικό πάχος και τις ισοδύναμες ελαστικές ιδιότητες της διάταξης. Το όνομα του αρχείου είναι MATCONST.OUT

Συγκεκριμένα δίνονται για κάθε διάταξη με την σειρά που αυτές δηλώθηκαν στο αρχείο εισόδου περιγραφής των διατάξεων:

Το συνολικό πάχος της διάταξης και το μέτρο ελαστικότητας, το μέτρο διάτμησης, ο συντελεστής θερμικής διαστολής και ο συντελεστής υγροσκοπικής διόγκωσης κατά τον άξονα του πτερυγίου και η πυκνότητα της διάταξης.

Όλες οι τιμές δίνονται σε SI, εφόσον οι τιμές των ιδιοτήτων των υλικών δόθηκαν σε SI.

Δ.1.1.4 Αρχείο Εξόδου POST.INP

Το αρχείο εξόδου του PRETHIN, το οποίο χρησιμοποιείται ως είσοδος του POSTTHIN είναι ένα ASCII αρχείο, το οποίο περιλαμβάνει στοιχεία για τις διατάξεις και τα ονόματα των αρχείων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάλυση με το PRETHIN, ώστε να μην χρειάζεται να τα ξανα-δηλώσει ο χρήστης. Το όνομα του αρχείου αυτού είναι POST.INP.

Στην πρώτη σειρά του αρχείου δηλώνεται το αρχείο που χρησιμοποιήθηκε κατά την ανάλυση με το PRETHIN. Το αρχείο αυτό χρησιμοποιείται και από το POSTTHIN.

Στην επόμενη σειρά δίνεται ο αριθμός των πολυστρώτων διατάξεων που αναλύθηκαν με το PRETHIN.

Και στην συνέχεια δίνονται για κάθε πολύστρωτη τα στοιχεία των μητρώων **A'**, **B'** και **D'** με την εξής σειρά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Οδηγίες χρήσεις των εργαλείων PRE-THIN, THIN, POST-THIN

A'_{xx}	B'_{xx}	D'_{xx}
A'_{xy}	B'_{xy}	D'_{xy}
A'_{xs}	B'_{xs}	D'_{xs}
A'_{yx}	B'_{yx}	D'_{yx}
A'_{yy}	B'_{yy}	D'_{yy}
...		
A'_{ss}	B'_{ss}	D'_{ss}

Όλες οι τιμές δίνονται σε SI, εφόσον οι τιμές των ιδιοτήτων των υλικών δόθηκαν σε SI.

Δ.1.2 THIN

Το THIN χρησιμοποιεί το αρχείο εξόδου του PRE-THIN με την ονομασία MATCONST.OUT. Επίσης, χρησιμοποιεί ένα ακόμα αρχείο εισόδου, το οποίο δίνεται από το χρήστη κατά την εκτέλεση του προγράμματος. Το αρχείο αυτό σε ASCII μορφή περιέχει τα γεωμετρικά στοιχεία και την περιγραφή της αεροτομής του περυγίου που πρόκειται να αναλυθεί, καθώς επίσης και τις εσωτερικές αξονικές και διατμητικές δυνάμεις και ροπές στην διατομή (όπως δίνονται από αερο-ελαστικούς υπολογισμούς).

Ως έξοδος του THIN περιλαμβάνονται το αρχεία με τις ισοδύναμες ιδιότητες της ομογενοποιημένης διατομής και τα αρχεία stress.out, shear.out και torsion.out, τα οποία περιλαμβάνουν αποτελέσματα για τις ανηγμένες τάσεις που αναπτύσσονται στα στοιχεία της διατομής που αναλύεται.

Κατά την εκτέλεση του προγράμματος ζητείται από τον χρήστη το όνομα του αρχείου εισόδου που περιλαμβάνει την περιγραφή της διατομής καθώς και το όνομα του αρχείου εξόδου, στο οποίο θα δίνονται οι ισοδύναμες ιδιότητες της διατομής με την ολοκλήρωση της εκτέλεσης του THIN.

Στην συνέχεια περιγράφονται αναλυτικά το αρχείο εισόδου και τα αρχεία εξόδου του THIN. Σημειώνεται ότι για την εκτέλεση του THIN απαιτείται και το αρχείο εισόδου MATCONST.OUT, το οποίο περιγράφηκε παραπάνω ως αρχείο εξόδου του PRE-THIN.

Δ.1.2.1 Αρχείο Εισόδου Διατομής

Το αρχείο αυτό είναι ένα ASCII αρχείο, στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι πληροφορίες της διατομής για την εκτέλεση του THIN.

Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στο THIN φαίνεται στο Σχ.Δ.2.

Στην πρώτη γραμμή του αρχείου καταγράφονται:

Nnode, Nelem, Ncell, Nshw, Nlam

όπου Nnode = Συνολικός αριθμός κόμβων, για παράδειγμα 110, Nelem = Συνολικός αριθμός στοιχείων, για παράδειγμα 112, Ncell = συνολικός αριθμός κελιών, στο παράδειγμα 3, Nshw = συνολικός αριθμός ενισχυτικών δοκίδων, στο παράδειγμα 2, Nmat = συνολικός αριθμός υλικών στην διατομή, όπου αν χρησιμοποιήσουμε τον διαχωρισμό σε υλικά της διατομής του Σχ.Δ1 είναι 6 συμπεριλαμβανομένου του υλικού της ενισχυτικής δοκίδας. Έτσι τελικά για διατομή με αυτά τα στοιχεία η πρώτη γραμμή του αρχείου εισόδου του THIN θα ήταν:

110, 112, 3, 2, 6

Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι για το THIN συνιστάται η χρήση 60 κόμβων στην διατομή και τουλάχιστον 3 ή 4 σε κάθε ενισχυτική δοκίδα (shear web).

Σχ. Δ.2: Σύστημα συντεταγμένων για τις διατομές του πτερυγίου στο THIN

Στην δεύτερη γραμμή του αρχείου αναγράφονται:

$\Delta T, \Delta C$

όπου ΔT η διαφορά θερμοκρασίας και ΔC η διαφορά υγρασίας. Σε περίπτωση που η ανάλυση με το THIN χρησιμοποιηθεί μόνο για την εξαγωγή των ισοδύναμων ιδιοτήτων της διατομής και δεν ακολουθήσει ανάλυση αντοχής οι τιμές για το ΔT και ΔC μπορεί να τεθούν ως μηδενικές (αλλά όχι κενές).

Στην τρίτη γραμμή του αρχείου αναγράφονται οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές, που αναπτύσσονται στην διατομή, ως:

$N_{XB}, M_{YB}, M_{ZB}, M_{XB}, V_{YB}, V_{ZB}$
--

με N_{XB} την εσωτερική αξονική δύναμη στην διατομή, M_{YB}, M_{ZB} την εσωτερική καμπτική ροπή στον y και z άξονα αντίστοιχα, M_{XB} την εσωτερική στρεπτική ροπή και V_{YB} και V_{ZB} τις εσωτερικές διατμητικές δυνάμεις στον y και z άξονα αντίστοιχα. Οι τιμές των εσωτερικών δυνάμεων και ροπών δίνονται σε SI. Σε περίπτωση που δεν εκτελεστεί ανάλυση αντοχής, οι τιμές αυτές μπορούν να είναι τυχαίες (αλλά όχι κενές).

Στις γραμμές που ακολουθούν αναγράφονται οι συντεταγμένες των Nnode κόμβων που περιγράφουν την διατομή. Το THIN για τον κόμβο inode για παράδειγμα, με $inode \in [1, Nnode]$ διαβάζει:

y-coordinate, z-coordinate

ενώ οι κόμβοι αριθμούνται εσωτερικά κατά αύξουσα σειρά.

Ένα παράδειγμα αρίθμησης των κόμβων για μία διατομή του πτερυγίου φαίνεται στο Σχ.Δ.3, όπου για λόγους ευκρίνειας παρουσιάζονται μόνο ορισμένοι κόμβοι της διατομής.

Σχ. Δ.3: Παράδειγμα αρίθμησης κόμβων στο THIN

Αφού τελειώσει η αναγραφή των κόμβων, σειρά έχουν τα στοιχεία. Δηλαδή, καταγράφεται η συνδεσμολογία κόμβων – στοιχείων. Η κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε πληροφορία για ένα και μόνο στοιχείο. Σε αυτή αναγράφονται:

Πρώτος κόμβος στοιχείου, Δεύτερος κόμβος στοιχείου, Αριθμός υλικού στοιχείου

Η σειρά με την οποία θα δηλώσουμε τα στοιχεία δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Σημασία μεγάλη όμως έχει η διεύθυνση του στοιχείου, δηλαδή η σειρά με την οποία θα δηλώσουμε τους κόμβους που ορίζουν το στοιχείο. Για παράδειγμα, θεωρούμε τα τρία στοιχεία, A, B, C, όπως φαίνεται στο Σχ. Δ.4.

Σχ. Δ.4: Παράδειγμα στοιχείων στο THIN

Τα στοιχεία αυτά ορίζονται αντίστοιχα από τους κόμβους: (a1, a2), (b1, b2), (c1,c2), επομένως αν τα υλικά στα στοιχεία αυτά είναι am, bm, cm, τότε υπάρχουν οι εξής τρόποι για να περιγράψουμε το κάθε στοιχείο:

x1, x2, xm

x2, x1, xm

όπου x = a, b, c.

Ο τρόπος με τον οποίο θα δηλωθούν τελικά, εξαρτάται από την φορά με την οποία θα καταγραφεί το κάθε κελίο της διατομής, που περιγράφεται στην συνέχεια. Προτείνεται, όμως η εξής δήλωση:

a1, a2, am b1, b2, bm c2, c1, cm
--

Δηλαδή τα στοιχεία του κελύφους δίνονται με ωρολογιακή φορά, ενώ τα στοιχεία των ενισχυτικών δοκίδων δίνονται με φορά από τα θετικά y προς τα αρνητικά σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων του THIN.

Ο ορισμός των υλικών στην διατομή, ανά στοιχείο έχει ιδιαίτερη σημασία, εφόσον για τις πολύστρωτες διατάξεις πρέπει να χρησιμοποιηθεί η αρίθμηση που προκύπτει από την χρήση του PRETHIN. Αν δεν χρησιμοποιείται το PRETHIN για την εισαγωγή των δεδομένων των ισοδύναμων ιδιοτήτων των πολυστρώτων διατάξεων, τότε ο αριθμός του υλικού (που δηλώνεται για κάθε στοιχείο) θα πρέπει να συμφωνεί με την αύξουσα αρίθμηση των ιδιοτήτων για κάθε πολύστρωτη διάταξη του αρχείου MATCONST.OUT. Έτσι, έστω ότι χρησιμοποιούμε τον διαχωρισμό των πολυστρώτων διατάξεων που περιγράφεται στο Σχ. Δ.1, ενώ στο PRETHIN έχουμε δηλώσει τις διατάξεις με την σειρά που παρουσιάζονται στο Σχ. Δ.5. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να αντιστοιχήσουμε το εκάστοτε στοιχείο της διατομής με τον αντίστοιχο αριθμό πολύστρωτης διάταξης. Γυρίζοντας στο παράδειγμα του Σχ. Δ.4 για τα στοιχεία A και C οι κόμβοι και η πολύστρωτη διάταξη θα πρέπει να δηλωθούν ως:

a1, a2, 4
c2, c1, 6

Σχ. Δ.5 Παράδειγμα αρίθμησης των υλικών σε διατομή του πτερυγίου

Έτσι για παράδειγμα, ακολουθώντας την αρίθμηση των κόμβων όπως παρουσιάζεται στο Σχ. Δ.3, τα στοιχεία μπορούν να δηλωθούν ως εξής:

1	2	1
2	3	1
3	4	1
4	5	2
...	...	...
95	96	1
96	1	1
a	103	6
103	102	6
102	101	6
...	...	...
98	97	6
97	b	6
c	110	6
110	109	6
...	...	...
105	104	6
104	d	6

όπου a, b, c, d οι κόμβοι όπου συνδέονται οι ενισχυτικές δοκίδες με το κέλυφος του πτερυγίου. Με αυτό τον τρόπο έχουμε την αρίθμηση και φορά των στοιχείων, που φαίνεται στο Σχ. Δ.6, εφόσον τα στοιχεία αριθμούνται εσωτερικά κατά αύξουσα σειρά, καθώς διαβάζεται η κάθε σειρά εισόδου από το THIN.

Σχ. Δ.6: Παράδειγμα αρίθμησης στοιχείων στο THIN

Στην συνέχεια ορίζονται τα κελία της διατομής. Για κάθε κελίο, στην πρώτη σειρά αναγράφεται:

icell, icel_nel

όπου icell είναι ο αύξων αριθμός κελίου και icel_nel είναι ο συνολικός αριθμός στοιχείων στο κελίο i

Ενώ στις επόμενες σειρές αναγράφονται:

αριθμός στοιχείου, φορά

όπου φορά είναι ένας πραγματικός αριθμός ίσος με 1.00 όταν η διεύθυνση του στοιχείου συμπίπτει με την φορά του κελίου και με -1.00 όταν η διεύθυνση του στοιχείου είναι αντίστροφη αυτής του κελίου.

Η σειρά με την οποία δηλώνονται τα στοιχεία του κελίου έχει σημασία, καθώς συνδέεται άμεσα με την σειρά που δηλώνονται τα στοιχεία των κλάδων. Έτσι μία πρόταση για τον ορισμό των κελίων παρουσιάζεται στο Σχ. Δ.7 όπου το κάθε κελίο περιγράφεται με διαφορετικό χρώμα.

Σχ. Δ.7: Παράδειγμα ορισμού κελίων στο THIN

Στο Σχ. Δ.7 παρουσιάζονται επίσης τα δύο πρώτα στοιχεία κάθε κελίου, καθώς και η φορά με την οποία ορίζονται τα στοιχεία σε κάθε ένα από αυτά. Με αυτό τον τρόπο, τα δεδομένα για το πρώτο κελίο θα μπορούσαν να είναι:

1, 40
33, 1.00
34, 1.00
35, 1.00
...
64, 1.00
104, -1.00
103, -1.00
...
97, -1.00

Στην συνέχεια δηλώνονται τα δεδομένα των ενισχυτικών δοκίδων. Συγκεκριμένα για κάθε δοκίδα στην πρώτη γραμμή αναγράφεται:

Αύξων αριθμός της δοκίδας, συνολικός αριθμός των στοιχείων στην δοκίδα

Στις επόμενες σειρές αναγράφονται τα στοιχεία με την σειρά τους που αποτελούν την δοκίδα. Η αλληλουχία των στοιχείων έχει και σε αυτή την περίπτωση σημασία για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα τα δεδομένα για την δεύτερη ενισχυτική δοκίδα του παραδείγματος είναι:

2, 8
105
106
107
...
110

Στην συνέχεια ορίζονται οι κλάδοι στους οποίους χωρίζεται η διατομή, για την εύρεση του κέντρου διάτμησης και των διατμητικών τάσεων που αναπτύσσονται στην διατομή. Ο συνολικός αριθμός των κλάδων ισούται με τον συνολικό αριθμό των κελίων συν τον συνολικό αριθμό των ενισχυτικών δοκίδων. Όπως προαναφέρθηκε, επειδή ο τρόπος με τον

οποίο γίνεται η αρίθμηση των στοιχείων στο κελίο συνδέεται εσωτερικά με το πως δηλώνουμε τις απαραίτητες παραμέτρους των κλάδων, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή σε αυτό το σημείο. Για κάθε κλάδο στην πρώτη σειρά δεδομένων του αναγράφονται:

Αύξων αριθμός κλάδου, συνολικός αριθμός στοιχείων στον κλάδο

Ενώ στις επόμενες σειρές αναγράφονται τα στοιχεία του κλάδου. Στο Σχ. Δ.8 παρουσιάζεται παράδειγμα διαχωρισμού των κλάδων σε μία διατομή. Κάθε κλάδος συμβολίζεται με διαφορετικό χρώμα, ενώ παρουσιάζεται και η φορά με την οποία δηλώνονται τα στοιχεία στον κλάδο, καθώς επίσης και τα δύο πρώτα στοιχεία του.

Σχ. Δ.8: Παράδειγμα ορισμού κλάδων στο THIN

Έτσι για παράδειγμα τα δεδομένα για τον τέταρτο κλάδο είναι:

4, 24
1
2
3
...
16
105
106
...
111
112

Με αυτά τα στοιχεία τελειώνει το αρχείο για τα δεδομένα που απαιτούνται για την ανάλυση με το THIN. Σημειώνεται ότι το αρχείο αυτό δεν πρέπει να περιέχει κενές σειρές.

Δ.1.2.2 Αρχείο εξόδου ιδιοτήτων διατομής

Το THIN έχει ως έξοδο (μεταξύ άλλων) το αρχείο εξόδου της διατομής, ένα ASCII αρχείο, το όνομα του οποίου καθορίζεται από τον χρήστη κατά την εκτέλεση του THIN, όπως προαναφέρθηκε. Παράδειγμα τέτοιου αρχείου παρουσιάζεται παρακάτω:

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Οδηγίες χρήσεις των εργαλείων PRE-THIN, THIN, POST-THIN

```

Yel=      -0.0418  Zel=      -0.1951
Ym=      -0.0426  Zm=      -0.2065
A= 0.6891E-01
stiffnessA= 0.1582E+10
massA= 0.9139E+02
Iy= 0.1417E+09 Iz= 0.4917E+08 Iyz= 0.9025E+07
EM= 0.7167E+10
pmIy= 0.9012E+01 pmIz= 0.2702E+01 pmIyz= 0.6149E+00
pm= 0.5561E+03
GJeq= 0.1544E+08
Yshear,Zshear
1.2286335E-02 0.1046483
    
```

Τα στοιχεία που δίνονται είναι τα παρακάτω:

- Οι συντεταγμένες του ελαστικού κέντρου της διατομής ως Yel και Zel ως προς την αρχή των αξόνων (στο επίπεδο της διατομής). Σημειώνεται ότι η αρχή των αξόνων δεν υπολογίζεται σε σχέση με την διατομή, αλλά προκύπτει εσωτερικά από τον ορισμό των κόμβων της διατομής.
- Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας της διατομής, Ym και Zm, ως προς την αρχή των αξόνων (στο επίπεδο της διατομής).
- Η επιφάνεια της διατομής, A. (Η επιφάνεια που καλύπτεται από υλικό).
- Η αξονική δυσκαμψία, EA, δίνεται με την ονομασία stiffnessA, ως προς το ελαστικό κέντρο.
- Η γραμμική πυκνότητα της διατομής, ρA, δίνεται με το συμβολισμό massA, ως προς το κέντρο μάζας της διατομής.
- Η καμπτική δυσκαμψία στις διευθύνσεις y και z, EIyy και EIzz αντίστοιχα, δίνονται ως προς το ελαστικό κέντρο με τον συμβολισμό Iy και Iz αντίστοιχα, μαζί με την μικτή καμπτική δυσκαμψία EIyz, η οποία συμβολίζεται ως Iyz (και δίνεται επίσης ως προς το ελαστικό κέντρο).
- Το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας της πολύστρωτης διάταξης (της διατομής), με το οποίο έγινε η κανονικοποίηση για την εύρεση των ισοδύναμων ιδιοτήτων καμπτικής και αξονικής δυσκαμψίας.
- Οι ροπές μάζας κατά την y και z διεύθυνση, ρIyy και ρIzz αντίστοιχα, ως προς το κέντρο μάζας της διατομής δίνονται με τον συμβολισμό pmIy και pmIz αντίστοιχα, μαζί με την μικτή ροπή μάζας, ρIyz, η οποία δίνεται με τον συμβολισμό pmIyz, επίσης ως προς το κέντρο μάζας.
- Η πυκνότητα της πολύστρωτης διάταξης (στην διατομή), η οποία χρησιμοποιήθηκε για την κανονικοποίηση για τον υπολογισμό της γραμμικής πυκνότητας της διατομής και των ροπών μάζας.
- Η ισοδύναμη στρεπτική δυσκαμψία GJ, δίνεται με τον συμβολισμό GJeq, ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής.
- Τέλος δίνονται οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής, με τον συμβολισμό Yshear και Zshear στην τελευταία γραμμή του αρχείου.

Σημειώνεται ότι όλα τα παραπάνω στοιχεία δίνονται σε SI μονάδες, ακολουθώντας τα στοιχεία εισόδου του THIN.

Δ.1.2.3 Αρχείο εξόδου STRESS.OUT

Το αρχείο εξόδου του THIN, το οποίο αποτελεί και αρχείο εισόδου του POST-THIN, σε περίπτωση που απαιτείται περαιτέρω η ανάλυση αντοχής της διατομής. Στο ASCII αυτό αρχείο δίνονται οι αξονικές ανηγμένες τάσεις (Nx) για κάθε κόμβο κάθε στοιχείου πολύστρωτης διάταξης (εξαιτίας αξονικών και καμπτικών δυνάμεων που εφαρμόζονται στην διατομή καθώς και των τυχόν υδροσκοπικών δυνάμεων και ροπών, εξαιτίας των διαφορετικών υδροσκοπικών ιδιοτήτων των στοιχείων της διατομής).

Στην πρώτη σειρά του αρχείου δίνονται οι διαφορά θερμοκρασίας και η διαφορά σχετικής υγρασίας, ΔΤ και ΔC αντίστοιχα, (όπως δόθηκαν ως είσοδος στο αρχείο εισόδου του THIN).

Στην δεύτερη σειρά του αρχείου δίνεται ο συνολικός αριθμός των στοιχείων της διατομής που αναλύθηκε με το THIN.

Στις επόμενες σειρές, για κάθε στοιχείο δίνονται σε σειρά οι παρακάτω πληροφορίες:

- Αριθμός του στοιχείου
- Οι συντεταγμένες στην Y και Z διεύθυνση (στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων) του πρώτου κόμβου του στοιχείου.
- Οι συντεταγμένες στην Y και Z διεύθυνση (στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων) του δεύτερου κόμβου του στοιχείου.
- Η ανηγμένη τάση στον πρώτο και δεύτερο κόμβο του στοιχείου.
- Ο αριθμός της πολύστρωτης διάταξης του στοιχείου.
- Οι καμπτικές ενώ οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας και του κέντρου διάτμησης ως προς το ελαστικό κέντρο. Όλες οι ροπές αδρανείας δίνονται ως προς το ελαστικό κέντρο.

Όλα τα παραπάνω στοιχεία (εκτός από τον αριθμό του στοιχείου και τον αριθμό της πολύστρωτης διάταξης του στοιχείου) δίνονται σε μονάδες SI, ακολουθώντας τα στοιχεία εισόδου του THIN.

Παράδειγμα αρχείου STRESS.OUT, το οποίο περιλαμβάνει τα αποτελέσματα των ανηγμένων αξονικών τάσεων για τα δύο πρώτα στοιχεία της διατομής, παρουσιάζεται στην συνέχεια.

0.0000000E+00	0.0000000E+00			
176				
1	-0.1060120	-1.021530	-0.1153800	-1.054910
322535.6	302739.7	1		
2	-0.1012130	-1.002950	-0.1060120	-1.021530
331643.1	322535.6	1		

Έτσι σε αυτή την περίπτωση η διαφορά θερμοκρασίας που εξετάστηκε ήταν ΔΤ = 0°C και αντίστοιχα μηδενική ήταν και η διαφορά υγρασίας ΔC που φαίνονται στην πρώτη γραμμή. Στην δεύτερη γραμμή φαίνεται ότι ο αριθμός των στοιχείων της διατομής είναι 176.

Στις επόμενες γραμμές έχουμε για το στοιχείο #1 τις συντεταγμένες του πρώτου κόμβου στην Y και Z διεύθυνση ως (-0.106012 m, -1.02153 m), τις συντεταγμένες του δεύτερου κόμβου (-0.11538 m, -1.05491 m), τις ανηγμένες αξονικές τάσεις στον πρώτο και δεύτερο κόμβο του στοιχείου ίσες με 322535.6 N/m και 302739.7 N/m, καθώς και το αριθμό της πολύστρωτης διάταξης που είναι η #1. Αντίστοιχες πληροφορίες βρίσκουμε για το στοιχείο #2 της διατομής, όπως φαίνονται στις δύο τελευταίες σειρές του παραδείγματος.

Δ.1.2.4 Αρχείο εξόδου SHEAR.OUT

Σε αυτό το αρχείο εξόδου του THIN περιλαμβάνονται οι πληροφορίες για τις ανηγμένες διατμητικές τάσεις (Ns) που αναπτύσσονται στην διατομή εξαιτίας των διατμητικών δυνάμεων και των στρεπτικών ροπών που εφαρμόζονται.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Οδηγίες χρήσεις των εργαλείων PRE-THIN, THIN, POST-THIN

Συγκεκριμένα για κάθε στοιχείο της διατομής δίνονται στην σειρά ο αριθμός του πρώτου κόμβου του στοιχείου, η ανηγμένη διατμητική τάση στον πρώτο κόμβο, ο αριθμός του δεύτερου κόμβου και η αντίστοιχη ανηγμένη διατμητική τάση στο κόμβο του στοιχείου. Για παράδειγμα παρακάτω παρουσιάζονται οι τρεις γραμμές του εν λόγω αρχείου.

2	41381.40	1	43034.47
3	40421.98	2	41381.40
4	39970.23	3	40421.98

Έτσι για το στοιχείο #1 στην πρώτη σειρά, ο αριθμός του πρώτου κόμβου του είναι 2 ενώ η ανηγμένη διατμητική τάση στον κόμβο αυτό είναι ίση με 14381.4 N/m. Αντίστοιχα ο δεύτερος κόμβος του στοιχείου είναι ο #1 και η ανηγμένη διατμητική τάση είναι ίση με 43034.47 N/m. Αντίστοιχα οι πληροφορίες για το #2 και #3 στοιχείο της διατομής που φαίνονται στις δύο τελευταίες σειρές του παραδείγματος.

Δ.1.2.5 Αρχείο εξόδου TORSION.OUT

Το αρχείο εξόδου TORSION.OUT του THIN περιλαμβάνει πληροφορίες για τις ανηγμένες διατμητικές τάσεις εξαιτίας μόνο των στρεπτικών ροπών (σε αντίθεση με το SHEAR.OUT, το οποίο περιλαμβάνει την συνολική επίδραση των διατμητικών δυνάμεων και στρεπτικής ροπής που εφαρμόζονται στην διατομή). Τα στοιχεία εξόδου του δίνονται ανά κελίο της διατομής.

Συγκεκριμένα στην αρχή δίνονται για κάθε κελίο της διατομής η επιφάνεια του κελίου (που χρησιμοποιείται για την ανάλυση των τάσεων εξαιτίας στρέψης). Στην συνέχεια δίνονται οι διατμητικές ροές σε κάθε κελίο. Το παρακάτω είναι ένα παράδειγμα αρχείου TORSION.OUT, για την ανάλυση διατομής τριών κελίων.

OMEG (1)=	0.0874
OMEG (2)=	0.2483
OMEG (3)=	0.0542
q_tors(1)=	0.0000E+00
q_tors(2)=	0.0000E+00
q_tors(3)=	0.0000E+00

Η επιφάνεια του κελίου #1 δίνεται στην πρώτη σειρά ίση με 0.0874 m², στην συνέχεια δίνονται οι επιφάνειες των κελίων #2 και #3. Τέλος ακολουθούν οι διατμητικές ροές εξαιτίας της ροπής στρέψης στην διατομή για τα τρία κελία. Στο παράδειγμα οι διατμητικές ροές είναι μηδενικές, εφόσον η ροπή στρέψης της διατομής δόθηκε μηδενική.

Δ.1.3 POST-THIN

Το POST-THIN χρειάζεται τα αρχεία εισόδου του PRETHIN, δηλαδή το αρχείο με την περιγραφή των πολυστρώτων διατάξεων και τα αρχεία με τις ιδιότητες των υλικών, το αρχείο εξόδου του PRETHIN, POST.INP, τα οποία περιγράφηκαν στην ενότητα για το PRETHIN, καθώς και τα αρχεία εξόδου του THIN STRESS.OUT και SHEAR.OUT, τα οποία περιγράφηκαν στην αντίστοιχη ενότητα. Όμως κατά την εκτέλεση του POST-THIN, δεν ζητούνται στοιχεία για τα αρχεία αυτά καθώς τα ονόματα των αρχείων διαβάζονται μέσω των αρχείων POST.INP και STRESS.OUT. Κάποιες επιπρόσθετες πληροφορίες ζητούνται από τον χρήστη κατά την εκτέλεση του προγράμματος.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το POST-THIN έχει ένα περιορισμό στον αριθμό των στρώσεων ανά πολύστρωτη που επιδέχεται. Ο μέγιστος αριθμός στρώσεων σε μία πολύστρωτη διάταξη μπορεί να είναι 100.

Αρχικά κατά την εκτέλεση του POST-THIN ο χρήστης πρέπει να επιλέξει το κριτηρίου αστοχίας που θα χρησιμοποιηθεί μεταξύ των Tsai-Hahn (TH), EPFS (EPFS), Hill (H), F12=0 (F), πληκτρολογώντας τα κεφαλαία γράμματα που βρίσκονται στην παρένθεση, δίπλα σε κάθε κριτήριο. Για παράδειγμα, αν το κριτήριο αστοχίας θέλουμε να είναι το κριτήριο Hill τότε εισάγουμε το γράμμα H.

Τα κριτήρια Tsai-Hahn, EPFS, Hill και αυτό που ορίζεται ως F12=0 είναι παραλλαγές του τετραγωνικού κριτηρίου αστοχίας. Συγκεκριμένα, το κριτήριο Tsai Hahn δίνεται από την παρακάτω ανισότητα, θεωρώντας την ασφαλή κατάσταση:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + \sigma_1 \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) + \sigma_2 \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}} \leq 1$$

Το κριτήριο EPFS δίνεται από την ακόλουθη ανισότητα

$$\frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + \sigma_1 \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) + \sigma_2 \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_T X_C} \leq 1$$

Το κριτήριο F12=0 δίνεται από:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} + \sigma_1 \left(\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \right) + \sigma_2 \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) \leq 1$$

Και τέλος το κριτήριο Hill δίνεται από την:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_T^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} \leq 1$$

Στην συνέχεια ζητείται από τον χρήστη να επιλέξει μέθοδο ανάλυσης, μεταξύ της ντετερμινιστικής πληκτρολογώντας DET, της στοχαστικής ανάλυσης χρησιμοποιώντας την μέθοδο Edgeworth, πληκτρολογώντας EDW και της στοχαστικής ανάλυσης με προσομοίωση Monte Carlo, πληκτρολογώντας MC.

Στην περίπτωση που ο χρήστης επιλέξει ντετερμινιστική ανάλυση τότε του δίνεται η δυνατότητα να επιλέξει διαφορετικό λόγο αντοχής (strength ratio) από την προκαθορισμένη τιμή του λόγου για τις υδροσκοπικές φορτίσεις που είναι ίσος με την μονάδα (1.0). Αν επιθυμεί διαφορετικό τότε πληκτρολογεί Y αν όχι πληκτρολογεί N. Αν έχει επιλέξει Y, τότε θα του ζητηθεί η νέα τιμή για τον λόγο αντοχής για τα υδροσκοπικά φορτία.

Στην περίπτωση που ο χρήστης επιλέξει ανάλυση με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth, τότε θα του ζητηθεί να επιλέξει πόσους όρους επιθυμεί στο ανάπτυγμα. Η προκαθορισμένη τιμή για το ανάπτυγμα είναι με δύο όρους. Επομένως, μπορεί να επιλέξει το ανάπτυγμα με ένα μόνο όρο (που ισοδυναμεί με την κανονική κατανομή) πληκτρολογώντας την τιμή 1, ή να επιλέξει το ανάπτυγμα με τρεις όρους, πληκτρολογώντας την τιμή 3.

Στην συνέχεια ο χρήστης καλείται να επιλέξει για τα αρχεία εξόδου. Δηλαδή καλείται να επιλέξει (πληκτρολογώντας Y σε θετική απάντηση και N στην περίπτωση αρνητικής απάντησης) αν επιθυμεί την καταγραφή των τάσεων κάθε στρώσης. Στην περίπτωση που επιθυμεί την καταγραφή των τάσεων που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση, τότε μπορεί να επιλέξει αν επιθυμεί την καταγραφή στο κύριο σύστημα της κάθε στρώσης (on axis) ή την καταγραφή στο κύριο σύστημα της πολύστρωτης (off axis), ή την καταγραφή και των δύο. Για να καταγραφούν οι τάσεις των στρώσεων στο κύριο σύστημα της κάθε στρώσης πληκτρολογεί O, για την καταγραφή των τάσεων στο σύστημα της πολύστρωτης πληκτρολογεί F, ενώ για την καταγραφή των τάσεων και ως προς τα δύο συστήματα πληκτρολογεί B. Το ακριβές περιεχόμενο των αρχείων περιγράφεται στα επόμενα εδάφια του παραρτήματος.

Τα αρχεία εξόδου του POST-THIN είναι το ELEMRES.OUT, το RESULTS.OUT και ανάλογα με την επιλογή του χρήστη τα αρχεία ON_AX_STRESS.OUT και OFF_AX_STRESS.OUT για τις τάσεις ανά στρώση. Αυτά τα αρχεία περιγράφονται στην συνέχεια.

Δ.1.3.1 Αρχείο εξόδου ELEMRES.OUT

Στο αρχείο αυτό περιλαμβάνονται ανάλογα με την ανάλυση τα αποτελέσματα συγκεντρωτικά για κάθε στοιχείο και για κάθε κόμβο του στοιχείου. Συγκεκριμένα, σε κάθε γραμμή του αρχείου δίνονται:

- Ο αριθμός του στοιχείου
- Ο αριθμός 1 για τον πρώτο κόμβο του στοιχείου
- Το αποτέλεσμα για την πολύστρωτη διάταξη του στοιχείου στον πρώτο κόμβο. Το αποτέλεσμα της ανάλυσης εξαρτάται από την μέθοδο που έχει προεπιλεγεί. Δηλαδή σε περίπτωση ντετερμινιστικού υπολογισμού το αποτέλεσμα σε κάθε κόμβο είναι ο μικρότερος λόγος ασφαλείας, R , που υπολογίστηκε στις στρώσεις της πολύστρωτης διάταξης. Πρέπει να σημειωθεί ότι για τον ντετερμινιστικό λόγο ασφαλείας, R , η αστοχία θεωρείται όταν $R < 1$. Στην περίπτωση στοχαστικών υπολογισμών (EDW και MC) δίνεται η πιθανότητα αστοχίας της πολύστρωτης, η οποία ισούται με την μέγιστη πιθανότητα αστοχίας μεταξύ των στρώσεων της πολύστρωτης στον συγκεκριμένο κόμβο του στοιχείου..
- Ο αριθμός 2 για τον δεύτερο κόμβο του στοιχείου
- Το αποτέλεσμα για την πολύστρωτη διάταξη στον δεύτερο κόμβο του στοιχείου.

Το παρακάτω παράδειγμα είναι αποτέλεσμα ντετερμινιστικού υπολογισμού. Φαίνεται ότι ο ντετερμινιστικός λόγος ασφαλείας κυμαίνεται μεταξύ 1.28 και 0.84. Υπάρχουν δηλαδή κόμβοι στους οποίους εκτιμάται αστοχία, όπως ο κόμβος 1 του στοιχείου 19 και όλοι οι κόμβοι των στοιχείων 20 ως 24.

13	1	1.235849	2	1.284196
14	1	1.188679	2	1.235849
15	1	1.143005	2	1.188679
16	1	1.099059	2	1.143005
17	1	1.057906	2	1.099059
18	1	1.019123	2	1.057906
19	1	0.9829695	2	1.019123
20	1	0.9495926	2	0.9829695
21	1	0.9190656	2	0.9495926
22	1	0.8914045	2	0.9190656
23	1	0.8665956	2	0.8914045
24	1	0.8420056	2	0.8665956

Το παρακάτω παράδειγμα είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα στοχαστικού υπολογισμού (με την μέθοδο EDW και MC η παρουσίαση των αποτελεσμάτων είναι η ίδια), όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα στοιχεία 13 ως 24 και όπου φαίνεται ότι υπάρχουν κόμβοι με μηδενικές ως πολύ μικρές πιθανότητες αστοχίας, όπως για παράδειγμα ο κόμβος 1 των στοιχείων 14 και 15, καθώς και κόμβοι με πιθανότητες αστοχίας πάνω από 50% και κοντά στο 100% όπως ο πρώτος κόμβος των στοιχείων 23 και 24. Στον κόμβο 1 του στοιχείου 19 φαίνεται ότι η πιθανότητα αστοχίας είναι πάνω από 50% (την μέση τιμή δηλαδή), ενώ στον κόμβο 2 προβλέπεται πιθανότητα αστοχίας 26%. Αντίστοιχα είναι και τα αποτελέσματα του ντετερμινιστικού υπολογισμού, όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω όπου για τον κόμβο 1 του συγκεκριμένου στοιχείου προβλέπεται αστοχία, ενώ για τον κόμβο 2 όχι. Όμως η τιμή του λόγου ασφαλείας στον ντετερμινιστικό υπολογισμό δεν μας δίνει καμία πληροφορία για το επίπεδο αξιοπιστίας (ή την πιθανότητα αστοχίας).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Οδηγίες χρήσεις των εργαλείων PRE-THIN, THIN, POST-THIN

13	1	1.0192394E-05	2	0.0000000E+00
14	1	0.0000000E+00	2	1.0192394E-05
15	1	5.3644180E-07	2	0.0000000E+00
16	1	3.1435490E-04	2	5.3644180E-07
17	1	2.2531748E-02	2	3.1435490E-04
18	1	0.2630250	2	2.2531748E-02
19	1	0.7505575	2	0.2630250
20	1	0.9722751	2	0.7505575
21	1	0.9989451	2	0.9722751
22	1	0.9999831	2	0.9989451
23	1	0.9999998	2	0.9999831
24	1	1.000000	2	0.9999998

Δ.1.3.2 Αρχείο εξόδου RESULTS.OUT

Στο αρχείο αυτό δίνονται κατά την έξοδο από το POST-THIN τα αναλυτικά αποτελέσματα ανά στρώση στο άνω και κάτω σημείο της στρώσης, για κάθε κόμβο και για κάθε στοιχείο. Σε περίπτωση ντετερμινιστικού υπολογισμού το αποτέλεσμα σε κάθε σημείο είναι ο λόγος ασφαλείας, ενώ σε περίπτωση πιθανολογικής ανάλυσης (EDW και MC) το αποτέλεσμα είναι η πιθανότητα αστοχίας της στρώσης στο σημείο αυτό.

Το παρακάτω παράδειγμα είναι αποτέλεσμα ντετερμινιστικού υπολογισμού, όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την στρώση 1 του στοιχείου 18 και για τις στρώσεις 6 ως 8 του στοιχείου 19. Έτσι στην πρώτη σειρά αναγράφεται ο αριθμός του στοιχείου, ο αριθμός της στρώσης και το αποτέλεσμα στο πάνω μέρος της στρώσης (UPPER) για τον πρώτο και τον δεύτερο κόμβο αντίστοιχα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο λόγος ασφαλείας για τον πρώτο κόμβο είναι 2.079, ενώ για τον δεύτερο κόμβο είναι ίσος με 2.221. Στην επόμενη γραμμή του παραδείγματος αναγράφεται το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το ίδιο στοιχείο και για την ίδια στρώση, αλλά αυτή την φορά στο κάτω (LOWER) σημείο της στρώσης. Στην συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το στοιχείο 19, στρώση 8 και το άνω σημείο της στρώσης στον πρώτο και στον δεύτερο κόμβο του στοιχείου, ενώ στην επόμενη σειρά αναγράφονται τα αποτελέσματα για το κατώτερο σημείο της στρώσης κ.ο.κ.

18	1	UPPER	0.2079E+01	0.2221E+01
		LOWER	0.2118E+01	0.2263E+01
19	8	UPPER	0.9830E+00	0.1019E+01
		LOWER	0.9925E+00	0.1029E+01
19	7	UPPER	0.1080E+01	0.1145E+01
		LOWER	0.1091E+01	0.1157E+01
19	6	UPPER	0.3000E+01	0.3135E+01
		LOWER	0.3102E+01	0.3241E+01

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα από μία πιθανολογική ανάλυση παρουσιάζονται στην συνέχεια. Σε αυτή την περίπτωση φαίνεται ότι για την στρώση 7 για παράδειγμα του στοιχείου 19 στο άνω μέρος της στρώσης και στον πρώτο κόμβο του στοιχείου η πιθανότητα αστοχίας της στρώσης είναι 0.24E-2, ενώ το αποτέλεσμα στο ίδιο σημείο για τον δεύτερο κόμβο είναι 0.10E-5.

18	1	UPPER	0.0000E+00	0.0000E+00
		LOWER	0.0000E+00	0.0000E+00
19	8	UPPER	0.7491E+00	0.2589E+00
		LOWER	0.6157E+00	0.1639E+00
19	7	UPPER	0.2404E-02	0.1013E-05
		LOWER	0.7988E-03	0.0000E+00
19	6	UPPER	0.0000E+00	0.0000E+00
		LOWER	0.0000E+00	0.0000E+00

Δ.1.3.3 Αρχείο εξόδου ON_AX_STRESS.OUT

Στο αρχείο αυτό δίνονται κατά την έξοδο από το POST-THIN τα αποτελέσματα των τάσεων ανά στρώση στο άνω και κάτω σημείο της στρώσης, για κάθε στοιχείο και για κάθε κόμβο, στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της κάθε στρώσης.

Το παρακάτω παράδειγμα είναι από ένα αρχείο ON_AX_STRESS.OUT. Στην πρώτη γραμμή του παραδείγματος παρουσιάζεται ο αριθμός του στοιχείου (1) ο αριθμός ένα (1) που αντιστοιχεί στον πρώτο κόμβο του στοιχείου, ο αριθμός της στρώσης (4), η λέξη UPPER που δηλώνει ότι το αποτέλεσμα είναι για το ανώτερο σημείο της στρώσης και το αποτέλεσμα για τις τάσεις σ_x , σ_y και σ_s , αντίστοιχα στο κύριο σύστημα συντεταγμένων της στρώσης. Το αποτέλεσμα για το συγκεκριμένο σημείο είναι $\sigma_x = 1.356 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -1.052 \text{ MPa}$ και $\sigma_s = -5.591 \text{ MPa}$. Στην επόμενη σειρά δίνονται τα αποτελέσματα για τις τάσεις σ_x , σ_y και σ_s για το ίδιο στοιχείο, κόμβο, στρώση, αλλά στο κατώτερο (LOWER) σημείο της στρώσης. Σε αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα είναι $\sigma_x = 1.464 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -1.003 \text{ MPa}$ και $\sigma_s = -5.590 \text{ MPa}$. Στην συνέχεια δίνονται τα αποτελέσματα για το στοιχείο 1, στον πρώτο κόμβο του στοιχείου αυτού (1), στην τρίτη στρώση του στοιχείου (3) και στο ανώτερο σημείο της στρώσης κ.ο.κ. Στις δύο τελευταίες γραμμές του παραδείγματος δίνονται τα στοιχεία για το στοιχείο 1, στον δεύτερο κόμβο του στοιχείου (2) στην στρώση 8 για το ανώτερο και κατώτερο σημείο της στρώσης. Σημειώνεται ότι τα αποτελέσματα δίνονται σε μονάδες SI ανάλογα με τα στοιχεία εισόδου.

1	1	4	UPPER	0.1356E+07	-0.1052E+07	-0.5591E+07
			LOWER	0.1464E+07	-0.1003E+07	-0.5590E+07
1	1	3	UPPER	-0.3120E+07	0.3057E+06	0.5590E+07
			LOWER	-0.3005E+07	0.3516E+06	0.5589E+07
1	1	2	UPPER	-0.2448E+08	0.6485E+07	-0.5381E+06
			LOWER	-0.2436E+08	0.6530E+07	-0.5372E+06
1	1	1	UPPER	0.2315E+08	-0.7040E+07	0.5372E+06
			LOWER	0.2326E+08	-0.6991E+07	0.5363E+06
1	2	9	UPPER	-0.2810E+08	0.5032E+07	-0.1289E+07
			LOWER	-0.2793E+08	0.5091E+07	-0.1282E+07
1	2	8	UPPER	0.1977E+08	-0.8532E+07	0.1282E+07
			LOWER	0.1990E+08	-0.8466E+07	0.1274E+07

Δ.1.3.4 Αρχείο εξόδου OFF_AX_STRESS.OUT

Στο αρχείο αυτό δίνονται κατά την έξοδο από το POST-THIN τα αποτελέσματα των τάσεων ανά στρώση στο άνω και κάτω σημείο της στρώσης, για κάθε κόμβο και για κάθε στοιχείο, στο σύστημα συντεταγμένων της πολύστρωτης.

Τα αποτελέσματα αναγράφονται στο αρχείο με την ίδια μορφή που αναγράφονται και στο αρχείο ON_AX_STRESS.OUT, μόνο που σε αυτή την περίπτωση οι τάσεις αναγράφονται ως προς το κύριο σύστημα της πολύστρωτης. Το παρακάτω παράδειγμα είναι αντίστοιχο με το παράδειγμα που παρουσιάστηκε στο εδάφιο που περιγράφει το αρχείο εξόδου ON_AX_STRESS.OUT. Τα ίδια αποτελέσματα για την στρώση 3 του στοιχείου 1 δείχνουν ότι αυτή η στρώση είναι προσανατολισμένη με 0° ως προς το σύστημα της πολύστρωτης διάταξης.

1	1	4	UPPER	-0.1052E+07	0.1356E+07	0.5591E+07
			LOWER	-0.1003E+07	0.1464E+07	0.5590E+07
1	1	3	UPPER	-0.3120E+07	0.3057E+06	0.5590E+07
			LOWER	-0.3005E+07	0.3516E+06	0.5589E+07
1	1	2	UPPER	-0.9535E+07	-0.8459E+07	0.1548E+08
			LOWER	-0.9453E+07	-0.8379E+07	0.1545E+08
1	1	1	UPPER	0.7519E+07	0.8593E+07	0.1510E+08
			LOWER	0.7597E+07	0.8669E+07	0.1512E+08
1	2	9	UPPER	-0.1282E+08	-0.1024E+08	0.1656E+08
			LOWER	-0.1270E+08	-0.1014E+08	0.1651E+08
1	2	8	UPPER	0.4336E+07	0.6899E+07	0.1415E+08
			LOWER	0.4444E+07	0.6992E+07	0.1418E+08

Δ.2 Περίπτωση στοχαστικών ιδιοτήτων αντοχής και ελαστικότητας

Σε αυτή την περίπτωση η ανάλυση γίνεται χρησιμοποιώντας μόνο το κατάλληλο υπολογιστικό κώδικα που αναπτύχθηκε ανάλογα με την μέθοδο ανάλυσης που θα χρησιμοποιηθεί (Edgeworth ή Monte Carlo). Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για την ανάλυση με MC εφόσον για κάθε επανάληψη της προσομοίωσης απαιτείται η παραγωγή τυχαίων αριθμών και για τις ελαστικές ιδιότητες και για την ιδιότητες αντοχής. Ο ενιαίος υπολογιστικός κώδικας αποτελείται από τον συνδυασμό των υπορουτινών PRE-THIN, THIN και POST-THIN, οι οποίες όμως εκτελούνται στην σειρά, χωρίς να δίνεται να εκτελεστούν ανεξάρτητα, όπως στην προηγούμενη περίπτωση όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές.

Τα αρχεία εισόδου και εξόδου των υπολογιστικών προγραμμάτων είναι παραπλήσια με αυτά της περίπτωσης όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές. Οι διαφορές και οι ομοιότητες των αρχείων περιγράφονται στην συνέχεια αναλυτικά. Πρέπει, όμως, να σημειωθεί ότι ενώ τα αρχεία εισόδου και εξόδου περιγράφονται ξεχωριστά για το PRE-THIN, το THIN και το POST-THIN, η εκτέλεση του προγράμματος (ανάλογα με την μέθοδο ανάλυσης) γίνεται ενιαία και για τις τρεις υπορουτίνες.

Δ.2.1 PRE-THIN

Το PRETHIN και σε αυτή την περίπτωση, όπως και στην περίπτωση όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές, ζητάει τουλάχιστον δύο αρχεία εισόδου. Στο ένα αρχείο περιγράφονται οι πολύστρωτες, καθώς επίσης δίνεται και το όνομα του αρχείου (ή των αρχείων) για το υλικό (ή τα υλικά) των στρώσεων που αποτελούν τις πολύστρωτες. Στο άλλο αρχείο το όνομα του οποίου δίνεται στο αρχείο όπου περιγράφονται οι πολύστρωτες διατάξεις (ή στην περίπτωση πολλών υλικών στα υπόλοιπα αρχεία) περιγράφονται αναλυτικά οι ιδιότητες των υλικών των στρώσεων που χρησιμοποιούνται στην δομή της κατασκευής που πρόκειται να μοντελοποιηθεί. Τα αρχεία εισόδου του PRETHIN είναι όλα ASCII αρχεία.

Το αρχείο εισόδου περιγραφής των πολυστρώτων διατάξεων δεν έχει καμία διαφορά με το αρχείο που χρησιμοποιείται όταν μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές (ή όταν η ανάλυση είναι ντετερμινιστική). Το αρχείο αυτό περιγράφηκε στην ενότητα του παραρτήματος Δ.1.1.1.

Τα αρχεία εξόδου του PRE-THIN στην περίπτωση όπου η μέθοδος ανάλυσης είναι η Edgeworth είναι ακριβώς τα ίδια με την περίπτωση όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής του υλικού θεωρούνται στοχαστικές. Σε αυτή την περίπτωση δίνονται ως έξοδος δίνονται μόνο τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται από το THIN και το POST-THIN στην συνέχεια της ανάλυσης, όπως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές των ιδιοτήτων των υλικών, όπως και στην ντετερμινιστική περίπτωση. Τα υπόλοιπα στατιστικά στοιχεία διαβάζονται εσωτερικά κατά την εκτέλεση του συνολικού υπολογιστικού προγράμματος. Στην περίπτωση της Monte Carlo δεν καταγράφονται αρχεία εξόδου από το POST-THIN.

Δ.2.1.1 Αρχείο Εισόδου Ιδιοτήτων Υλικού (όταν οι ιδιότητες ελαστικότητας υλικού είναι στοχαστικές)

Η διαφορά σε αυτή την περίπτωση, σε σχέση με την περίπτωση όπου οι ελαστικές ιδιότητες θεωρούνται ντετερμινιστικές είναι ότι η γραμμή όπου δίνονταν οι ελαστικές ιδιότητες (E_x , E_y , ν_{xy} και G_{xy}) δίνεται στο τέλος του αρχείου και για κάθε ιδιότητα χρησιμοποιείται μία ξεχωριστή γραμμή. Συγκεκριμένα ένα παράδειγμα για το αρχείο που περιγράφει το υλικό της στρώσης, όταν οι ιδιότητες ελαστικότητας θεωρούνται στοχαστικές και θα χρησιμοποιηθεί ανάλυση αναπτύγματος Edgeworth, φαίνεται στην συνέχεια:

```
0.845E-3, 1822.48
9.13E-6, 46.04E-6
0., 0.
417.1991e6, 4057.e12, -133900.e18, 0.5422e32
340.9918e6, 1144.e12, 11540.e18, 0.4131e31
41.5984e6, 37.40e12, 101.6e18, 4689.e24
171.1165e6, 495.4e12, 4326.e18, 803600.e24
17.5116e6, 10.95e12, -14.12e18, 366.9e24
24.0479E9, 5.254e18, -8.838e27, 105.7e36
8.2003E9, 1.429e18, 0.7525e27, 6.836e36
0.3051, 0.3249e-2, 0, 0.3167e-4
1.6556E9, 0.1591e18, 0.04676e27, 0.1007e36
```

Στο αρχείο αυτό, στην πρώτη σειρά δίνονται το πάχος της στρώσης και η πυκνότητα του υλικού (στο συγκεκριμένο παράδειγμα το πάχος της στρώσης είναι 0.845 mm, ενώ η πυκνότητα του υλικού είναι 1822.48 kg/m³). Στην επόμενη γραμμή δίνεται ο συντελεστής θερμικής διαστολής στις κύριες διευθύνσεις του υλικού (α_x και α_y) αντίστοιχα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο συντελεστής θερμικής διαστολής στις κύριες διευθύνσεις του υλικού είναι 9.13 $\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$ και 46.04 $\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$. Στην συνέχεια δίνονται οι υδροσκοπικές ιδιότητες του υλικού στις κύριες διευθύνσεις του υλικού, οι οποίες για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ίσες με 0, εφόσον δεν εξετάστηκε η επίδραση αυτών των ιδιοτήτων.

Στην συνέχεια δίνονται οι τέσσερις πρώτες στατιστικές ροπές, δηλαδή η μέση τιμή, η διασπορά, η τρίτη κεντρική ροπή και η τέταρτη κεντρική ροπή αντίστοιχα, των ιδιοτήτων αντοχής και ελαστικότητας του υλικού με την ακόλουθη σειρά:

Αντοχή σε εφελκυσμό (X_T) στην x-διεύθυνση,

Αντοχή σε θλίψη (X_C) στην x-διεύθυνση

Αντοχή σε εφελκυσμό (Y_T) στην y-διεύθυνση,

Αντοχή σε θλίψη (Y_C) στην y-διεύθυνση,

Αντοχή σε διάτμηση (S) στο επίπεδο της στρώσης,

Μέτρο ελαστικότητας (E_X) στη x-διεύθυνση,

Μέτρο ελαστικότητας (E_Y) στην y-διεύθυνση,

Λόγος Poisson (ν_{XY}) στο επίπεδο της στρώσης

Και τέλος, μέτρο διάτμησης (G_{XY}) στο επίπεδο της στρώσης.

Τα δεδομένα όπως και στην περίπτωση που οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού είναι ντετερμινιστικές πρέπει να δίνονται στις βασικές μονάδες SI.

Το αντίστοιχο αρχείο που περιγράφει το υλικό της στρώσης για χρήση με την μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo, όπου δίνεται και η ονομασία της συνάρτησης πιθανότητας των ιδιοτήτων φαίνεται στην συνέχεια:

```
0.845E-3, 1822.48
9.13E-6, 46.04E-6
0., 0.
WEIBULL
443.6708e6, 7.7593
LOGNORMAL
19.642511, 0.0989
LOGNORMAL
17.532911, 0.1462
LOGNORMAL
18.949511, 0.1295
WEIBULL
18.8475e6, 6.1667
WEIBULL
25.0371E9, 12.7807
LOGNORMAL
22.816966, 0.1450
NORMAL
0.3051, 0.0559
LOGNORMAL
21.198766, 0.2376
```

Όπως για τις ιδιότητες αντοχής του υλικού, έτσι και για τις ιδιότητες ελαστικότητας κατά την προσομοίωση Monte Carlo μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι κατανομές Κανονική (NORMAL), Λογαριθμική-Κανονική (LOGNORMAL) και Weibull (WEIBULL), όπως περιγράφηκε στο εδάφιο όπου οι ελαστικές ιδιότητες θεωρούνται ντετερμινιστικές.

4.2.2 THIN

Το THIN στην περίπτωση όπου θεωρούνται στοχαστικές εκτός από τις ιδιότητες αντοχής και οι ελαστικές ιδιότητες των υλικών, χρειάζεται ως αρχείου εισόδου το αρχείο όπου περιγράφεται η διατομή που θα αναλυθεί, ακριβώς όπως και στην περίπτωση ανάλυσης όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής των υλικών θεωρούνται στοχαστικές. Το αρχείο αυτό είναι το ίδιο με αυτό που περιγράφηκε στο Εδάφιο Δ.1.2.1 για την περίπτωση όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές.

Το αρχείο εξόδου του THIN, όπου δίνονται οι ισοδύναμες ελαστικές ιδιότητες της διατομής (και οι ιδιότητες ως προς την μάζα), δηλαδή τα στοιχεία που απαιτούνται για την εκτέλεση αεροελαστικής ανάλυσης του περυγίου, περιγράφεται σε επόμενο εδάφιο.

Τα αρχεία εξόδου του THIN που χρησιμοποιούνται περαιτέρω από το POST-THIN για την ανάλυση αντοχής, δηλαδή το STRESS.OUT, το SHEAR.OUT και το TORSION.out, είναι τα ίδια με την ντετερμινιστική περίπτωση, όπως περιγράφηκαν στην ενότητα Δ.1.2 του παρόντος παραρτήματος, για την περίπτωση ανάλυσης με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth. Στα αρχεία αυτά οι τιμές που δίδονται υπολογίζονται όπως και στην ντετερμινιστική περίπτωση χρησιμοποιώντας τις μέσες τιμές των ελαστικών ιδιοτήτων των υλικών. Όλα τα υπόλοιπα στοιχεία που χρειάζονται κατά την εκτέλεση της εφαρμογής, όπως οι τιμές των μερικών παραγώγων των τάσεων ως προς τις ιδιότητες των υλικών, περνούν εσωτερικά από τον ένα υπολογιστικό κώδικα στον άλλον (THIN και POST-THIN).

Στην περίπτωση ανάλυσης με την Monte Carlo το THIN δεν παράγει κανένα αρχείο εξόδου, εκτός από το αρχείο με τις ιδιότητες της διατομής που χρειάζονται για αεροελαστικές αναλύσεις. Το αρχείο αυτό περιγράφεται στο αντίστοιχο εδάφιο, στην συνέχεια. Όλα τα άλλα δεδομένα περνούν εσωτερικά από το THIN στο POST-THIN, χωρίς να καταγράφονται σε αρχεία.

Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι το THIN που αναπτύχθηκε για την περίπτωση όπου θεωρούνται στοχαστικές οι ελαστικές ιδιότητες των υλικών υπάρχουν και οι ακόλουθοι περιορισμοί:

- Ο συνολικός αριθμός των κελίων στην διατομή πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του 10.
- Ο αριθμός των στοιχείων σε κάθε κελί (όχι ο συνολικός αριθμός των στοιχείων) πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος από 200.
- Ο συνολικός αριθμός των ενισχυτικών δοκίδων (Shear Webs) πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του 10.
- Ο αριθμός των στοιχείων σε κάθε ενισχυτική δοκίδα (shear web) πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος από 50.
- Ο συνολικός αριθμός των κλάδων (στους οποίους χωρίζεται η διατομή) πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος του 20. Ουσιαστικά δεν πληρούνται οι περιορισμοί για τον συνολικό αριθμό των κελίων και τον συνολικό αριθμό των ενισχυτικών δοκίδων.
- Ο αριθμός των στοιχείων κάθε κλάδου πρέπει να είναι μικρότερος ή ίσος από 200.

Δ.2.2.1 Αρχείο εξόδου ιδιοτήτων διατομής

Το THIN στην περίπτωση που η ανάλυση εκτελείται με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth έχει ως έξοδο (μεταξύ άλλων) το αρχείο εξόδου της διατομής, ένα ASCII αρχείο, το όνομα του οποίου καθορίζεται από τον χρήστη κατά την εκτέλεση του υπολογιστικού κώδικα, όπως και στην ντετερμινιστική περίπτωση. Παράδειγμα τέτοιου αρχείου παρουσιάζεται παρακάτω:

```
Yel= -4.1766237E-02 Zel= -0.1936513
Mean Yel= -4.1766331E-02 STD= 2.4191356E-06
Mean Zel= -0.1936541 STD= 6.2364066E-05
Ym= -0.0423 Zm= -0.2020
A= 0.6706E-01
stiffnessA= 0.1503E+10
MEANEA= 1.5033043E+09 STD= 3.5744504E+07
massA= 0.8785E+02
Em= 5.2833690E+09
MEANEm= 5.2842112E+09 STD= 8.4882432E+07
EIY= 1.2972192E+08 EIZ= 4.7726404E+07 EIYZ= 7977194.
MEANEIY= 1.2973374E+08 STD= 2934862.
MEANEIZ= 4.7728908E+07 STD= 1169641.
MEANEIYZ= 7978108. STD= 171250.1
MASS WEIGHTED 2nd order moments on elastic center
pmIy= 0.8324E+01 pmIz= 0.2620E+01 pmIyz= 0.5574E+00
pm= 0.5561E+03
MASS WEIGHTED 2nd order moments on mass center
pmIy= 0.8318E+01 pmIz= 0.2620E+01 pmIyz= 0.5571E+00
GJeq= 0.1695E+08
MEANGJ= 1.6860860E+07 STD= 240810.9
Yshear, Zshear
9.2136189E-03 7.2427467E-02
```

Τα στοιχεία που δίνονται είναι τα ίδια όπως και στην ντετερμινιστική περίπτωση, όπως περιγράφηκε στο Εδάφιο Δ.1.2.2, με την διαφορά ότι δίνονται επιπλέον οι μέσες τιμές των ισοδύναμων ιδιοτήτων τις διατομής (που εξαρτώνται από τις ελαστικές ιδιότητες των υλικών) καθώς και οι τυπικές αποκλίσεις των ιδιοτήτων αυτών. Έτσι, μετά την αναγραφή των στοιχείων που υπολογίζονται, όπως και στην περίπτωση ενός ντετερμινιστικού υπολογισμού, χρησιμοποιώντας όμως σε αυτή την περίπτωση τις μέσες τιμές των ιδιοτήτων των υλικών,

ακολουθεί η αναγραφή της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης των συγκεκριμένων ιδιοτήτων. Συγκεκριμένα δίνονται τα παρακάτω:

- Οι συντεταγμένες του ελαστικού κέντρου της διατομής ως Y_{el} και Z_{el} ως προς την αρχή των αξόνων (στο επίπεδο της διατομής). Σημειώνεται ότι η αρχή των αξόνων δεν υπολογίζεται σε σχέση με την διατομή, αλλά προκύπτει εσωτερικά από τον ορισμό των κόμβων της διατομής. Στις αμέσως επόμενες γραμμές δίνονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των Y_{el} και Z_{el} αντίστοιχα, δηλαδή των συντεταγμένων του ελαστικού κέντρου της διατομής.

Η μικρή διαφορά που παρατηρείται από στα αποτελέσματα μεταξύ της τιμής που δηλώνεται ως Y_{el} , ίση με -41.7662 mm για παράδειγμα και της μέσης τιμής της παραμέτρου ίση με -41.7663 mm είναι εξαιτίας της επίδρασης της διασποράς των ελαστικών ιδιοτήτων του υλικού κατά τον υπολογισμό της μέσης τιμής της παραμέτρου.

Υπενθυμίζεται ότι η μέση τιμή μίας στοχαστικής μεταβλητής που εξαρτάται από άλλες στοχαστικές μεταβλητές υπολογίζεται εφαρμόζοντας την μέθοδο των ροπών, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4 της παρούσης εργασίας. Έτσι, η μέση τιμή μίας παραμέτρου $z(\mathbf{X})$, στην περίπτωση όπου οι βασικές μεταβλητές του διανύσματος $\mathbf{X}$ είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, δίνεται από την

$$E[z] = \mu'_1(z) = z(\mu_{1X}) + \frac{1}{2} z''_1(z)(\mu_{1X}) \mu_{2i} \quad (\text{βλέπε εξίσωση (4.5) κεφαλαίου 4}), \text{ ενώ η}$$

διασπορά της δίνεται αντίστοιχα από την $\mu_2(z) = (z'_1(\mu_{1X}))^2 \mu_{2i} + z''_1(z)(\mu_{1X}) \mu_{3i}$, (βλέπε εξίσωση (4.6) κεφαλαίου 4). Η τυπική απόκλιση, υπενθυμίζεται ότι είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της στοχαστικής μεταβλητής.

- Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας της διατομής, Y_m και Z_m , ως προς την αρχή των αξόνων (στο επίπεδο της διατομής). Οι παράμετροι αυτοί δεν εξαρτώνται από τις ελαστικές ιδιότητες των υλικών και επομένως δεν απαιτείται ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης αυτών.
- Η επιφάνεια της διατομής, A . (Η επιφάνεια που καλύπτεται από υλικό). Όμοια και η επιφάνεια της διατομής δεν εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες των υλικών των στρώσεων.
- Η αξονική δυσκαμψία, EA , δίνεται με την ονομασία $stiffnessA$, ως προς το ελαστικό κέντρο. Στην επόμενη γραμμή ακολουθεί η εκτίμηση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης της ισοδύναμης ιδιότητας της διατομής.
- Η γραμμική πυκνότητα της διατομής, ρA , δίνεται με το συμβολισμό $massA$, ως προς το κέντρο μάζας της διατομής. Η ιδιότητα αυτή δεν εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες των υλικών των στρώσεων.
- Το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας της πολύστρωτης διάταξης (της διατομής), E_m , με το οποίο έγινε η κανονικοποίηση για την εύρεση των ισοδύναμων ιδιοτήτων καμπτικής και αξονικής δυσκαμψίας. Στην επόμενη σειρά δίνεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του E_m .
- Η καμπτική δυσκαμψία στις διευθύνσεις y και z , EI_{yy} και EI_{zz} αντίστοιχα, δίνονται ως προς το ελαστικό κέντρο με τον συμβολισμό I_y και I_z αντίστοιχα, μαζί με την μικτή καμπτική δυσκαμψία EI_{yz} , η οποία συμβολίζεται ως I_{yz} (και δίνεται επίσης ως προς το ελαστικό κέντρο. Στις επόμενες τρεις σειρές δίνονται οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις για κάθε μία από τις ισοδύναμες ιδιότητες της διατομής, EI_{yy} , EI_{zz} και EI_{yz} , αντίστοιχα.
- Οι ροπές μάζας κατά την y και z διεύθυνση, ρI_{yy} και ρI_{zz} αντίστοιχα, ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής δίνονται με τον συμβολισμό pmI_y και pmI_z

αντίστοιχα, μαζί με την μικτή ροπή μάζας, ρI_{yz} , η οποία δίνεται με τον συμβολισμό $\rho m I_{yz}$, επίσης ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής.

- Η πυκνότητα της πολύστρωτης διάταξης (στην διατομή), η οποία χρησιμοποιήθηκε για την κανονικοποίηση για τον υπολογισμό της γραμμικής πυκνότητας της διατομής και των ροπών μάζας. Η ιδιότητα αυτή δεν εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες των υλικών.
- Οι ροπές μάζας κατά την y και z διεύθυνση, ρI_{yy} και ρI_{zz} αντίστοιχα, ως προς το κέντρο μάζας της διατομής δίνονται με τον συμβολισμό $\rho m I_y$ και $\rho m I_z$ αντίστοιχα, μαζί με την μικτή ροπή μάζας, ρI_{yz} , η οποία δίνεται με τον συμβολισμό $\rho m I_{yz}$, επίσης ως προς το κέντρο μάζας. Οι ιδιότητες αυτές δεν εξαρτώνται από τις ελαστικές ιδιότητες των υλικών των πολυστρώτων διατάξεων.
- Η ισοδύναμη στρεπτική δυσκαμψία GJ , δίνεται με τον συμβολισμό GJ_{eq} , ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής. Στην αμέσως επόμενη γραμμή του αρχείου εξόδου δίνεται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ισοδύναμης αυτής ιδιότητας της διατομής.
- Τέλος δίνονται οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής, με τον συμβολισμό Y_{shear} και Z_{shear} στην τελευταία γραμμή του αρχείου. Για τις ιδιότητες αυτές δεν δίνονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση.

Σημειώνεται ότι όλα τα παραπάνω στοιχεία δίνονται στις βασικές μονάδες SI, ακολουθώντας τα στοιχεία εισόδου του THIN.

Στην περίπτωση όπου η ανάλυση εκτελείται με την μέθοδο Monte Carlo, η έξοδος του THIN περιλαμβάνει ένα αρχείο binary, όπου καταγράφονται οι ιδιότητες της διατομής μετά από κάθε επανάληψη Monte Carlo. Στο binary αρχείο καταγράφονται με την σειρά (στην ίδια γραμμή) μετά από κάθε επανάληψη:

- Οι συντεταγμένες του ελαστικού κέντρου της διατομής ως προς την αρχή των αξόνων (στο επίπεδο της διατομής) YEL και ZEL
- Η αξονική δυσκαμψία ως προς το ελαστικό κέντρο, EA .
- Η καμπτική δυσκαμψία στις διευθύνσεις y και z , μαζί με την μικτή καμπτική δυσκαμψία ως προς το ελαστικό κέντρο EI_Y , EI_Z και EI_{YZ} ,
- Το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας της πολύστρωτης διάταξης (της διατομής) με το οποίο έγινε η κανονικοποίηση για την εύρεση των ισοδύναμων ιδιοτήτων καμπτικής και αξονικής δυσκαμψίας, EM
- Η ισοδύναμη στρεπτική δυσκαμψία ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής GJ_{eq} και τέλος
- οι συντεταγμένες του κέντρου διάτμησης ως προς το ελαστικό κέντρο της διατομής, Y_{shear} και Z_{shear}

Για την στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε υπολογιστικός κώδικας που δημιουργήθηκε για τον σκοπό αυτό για τον υπολογισμό της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής του δείγματος.

4.2.3 POST-THIN

Το POST-THIN και σε αυτή την περίπτωση, όπως και στην περίπτωση όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές, ανεξάρτητα από το αν η ανάλυση γίνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth ή την προσομοίωση Monte Carlo, χρειάζεται τα αρχεία εισόδου του PRETHIN, δηλαδή το αρχείο με την περιγραφή των πολυστρώτων διατάξεων και τα αρχεία με τις ιδιότητες των υλικών, το αρχείο εξόδου του PRETHIN, POST.INP, τα οποία περιγράφηκαν στην ενότητα για το PRETHIN, καθώς και τα

αρχεία εξόδου του THIN STRESS.OUT και SHEAR.OUT, τα οποία περιγράφηκαν στην αντίστοιχη ενότητα. Όμως κατά την εκτέλεση του POST-THIN, δεν ζητούνται στοιχεία για τα αρχεία αυτά καθώς τα ονόματα των αρχείων διαβάζονται μέσω των αρχείων POST.INP και STRESS.OUT. Τα αρχεία εξόδου του POST-THIN στην περίπτωση όπου θεωρούνται στοχαστικές εκτός από τις ιδιότητες αντοχής και οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού είναι ακριβώς τα ίδια με την περίπτωση όπου οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού θεωρούνται ντετερμινιστικές. Επίσης, οι επιπρόσθετες πληροφορίες που ζητούνται από τον χρήστη κατά την εκτέλεση του προγράμματος στην ενότητα του POST-THIN είναι ίδιες με την περίπτωση όπου μόνο οι ιδιότητες αντοχής θεωρούνται στοχαστικές.

Στην περίπτωση ανάλυσης με την Monte Carlo, δεν δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη να καταγράφει τις τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε στρώση. Δηλαδή κατά την εφαρμογή με την μέθοδο Monte Carlo δεν καταγράφονται τα αρχεία ON_AX_STRESS.OUT και OFF_AX_STRESS.OUT, όπως επιτρέπεται κατά την ανάλυση με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth. Αυτό γίνεται εξαιτίας του μεγέθους του αρχείου, αφού η καταγραφή των τάσεων θα πρέπει να γίνεται μετά από κάθε επανάληψη της ανάλυσης.

Δ.3 Περίπτωση στοχαστικών ιδιοτήτων υλικού και φόρτισης

Τα αρχεία εξόδου και εισόδου των υπολογιστικών εργαλείων PRE-THIN, THIN και POST-THIN είναι ίδια με την περίπτωση όπου θεωρούνται στοχαστικές οι ιδιότητες αντοχής και ελαστικότητας. Η μόνη διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση έγκειται στην μικρή διαφοροποίηση του αρχείου εισόδου του THIN, όπου δηλώνονται τα στατιστικά στοιχεία της φόρτισης της διατομής.

Συγκεκριμένα οι πρώτες γραμμές του αρχείου εισόδου περιγραφής της διατομής και της φόρτισης για το THIN, με τις αλλαγές στις γραμμές (από την τρίτη γραμμή μέχρι και την όγδοη γραμμή) όπου αναγράφονται οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές, που αναπτύσσονται στην διατομή, φαίνονται στην συνέχεια για την περίπτωση ανάλυσης με την μέθοδο αναπτύγματος Edgeworth:

```
174, 176, 3, 2, 9
.0, .0
452416.0, 818720.95, 0., 2.0109E12
-399310.8, 637.7965E9, 0., 1.220E24
1529867.6, 65.01E9, 0., 126.80E20
0., 100, 0., 30000
278391.2, 2.152E9, 0., 13.90E18
-73183.6, 21.4E9, 0., 13.7388E20
-1.15380E-01      -1.05491E+00  1.01600E+01
```

Έτσι η πρώτη σειρά όπου αναγράφονται ο αριθμός των κόμβων, στοιχείων, κλπ. της διατομής παραμένει ίδια με τις προηγούμενες περιπτώσεις ανάλυσης, όπου η φόρτιση του περυγίου θεωρείται ντετερμινιστική.

Επίσης, η δεύτερη γραμμή όπου δηλώνονται η Διαφορά Θερμοκρασίας, ΔT και υγρασίας ΔC της ανάλυσης παραμένει ίδια, στην περίπτωση του παραδείγματος $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, $\Delta C = 0\%$.

Από την τρίτη μέχρι και την όγδοη σειρά του παραδείγματος δίνονται τα στοιχεία για την στοχαστική φόρτιση. Κάθε γραμμή περιλαμβάνει τα στατιστικά δεδομένα για την εκάστοτε εσωτερικών δυνάμεων και ροπών. Οι εσωτερικές δυνάμεις και ροπές δίνονται με την εξής σειρά, ανά γραμμή:

N_{XB} , M_{YB} , M_{ZB} , M_{XB} , V_{YB} , V_{ZB}

με N_{XB} την εσωτερική αξονική δύναμη στην διατομή, M_{YB} , M_{ZB} την εσωτερική καμπτική ροπή στον y και z άξονα αντίστοιχα, M_{XB} την εσωτερική στρεπτική ροπή και V_{YB} και V_{ZB} τις εσωτερικές διατμητικές δυνάμεις στον y και z άξονα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: Οδηγίες χρήσεις των εργαλείων PRE-THIN, THIN, POST-THIN

Σε κάθε γραμμή (για την εκάστοτε εσωτερική δύναμη ή ροπή) δίνονται η μέση τιμή της, η διασπορά της, η τρίτη και η τέταρτη κεντρική ροπή της αντίστοιχα.

Στην τελευταία γραμμή του παραδείγματος δίνονται οι συντεταγμένες του πρώτου κόμβου της διατομής. Στο παράδειγμα η γραμμή αυτή παρουσιάζεται για να δηλώσει ότι το αρχείο εισόδου του THIN συνεχίζει όπως ακριβώς και για την περίπτωση όπου η φόρτιση του περυγίου δεν λαμβάνονται ως στοχαστική.

Για την περίπτωση της ανάλυσης με την μέθοδο Monte Carlo κατ' αντιστοιχία με την δήλωση των στοχαστικών ιδιοτήτων αντοχής ή ελαστικότητας, για την στατιστική περιγραφή κάθε συνιστώσας απαιτούνται δύο γραμμές. Στην πρώτη αναγράφεται η στατιστική κατανομή που ακολουθεί η συνιστώσα, ενώ στην επόμενη αναγράφονται οι παράμετροι της κατανομής. Έτσι για τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές, οι οποίες δηλώνονται με την εξής σειρά: N_{XB} , M_{YB} , M_{ZB} , M_{XB} , V_{YB} , V_{ZB} , με N_{XB} την εσωτερική αξονική δύναμη στην διατομή, M_{YB} , M_{ZB} την εσωτερική καμπτική ροπή στον y και z άξονα αντίστοιχα, M_{XB} την εσωτερική στρεπτική ροπή και V_{YB} και V_{ZB} τις εσωτερικές διατμητικές δυνάμεις στον y και z άξονα αντίστοιχα τα στοιχεία θα δηλώνονταν για παράδειγμα ξεκινώντας από την τρίτη γραμμή του αρχείου ως εξής:

NORMAL 452416.0, 904.832 NORMAL -399310.8, 39931.19 NORMAL 1529867.6, 76485.29 NORMAL 0., 10.0 NORMAL 278391.2, 13928.39 NORMAL -73183.6, 7348.469