ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ GALOIS ΚΑΙ ΜΗ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ
ΤΟΥ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ STØRMER
ΚΑΙ ΤΟΥ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΡΙΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Γ. ΝΟΜΙΚΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2010

Η παρούσα διατριβή αποτελεί προσωπικό σταθμό σε μια μακρά πορεία εξερεύνησης των μαθηματικών. Όπως είναι ευνόητο, όσοι στήριξαν αυτή την πορεία χρήζουν ιδιαίτερης αναφοράς και τους ευχαριστώ από τα βάθη της καρδιάς μου.

Η εξέλιξή μου εδράζεται, άμεσα ως άνθρωπος και έμμεσα ως μαθηματικός, στην οικογένεια μου και ιδιαίτερα στους γονείς μου. Στις χαρές αποτελούν έναν ευχάριστο σύντροφο, ενώ στους κλυδωνισμούς και τις λύπες με περιβάλλουν πάντα με ζεστασιά, θεμελιώνοντας την ανάταση μου.

Η σύνδεση της ολοκληρωσιμότητας με τη διαφορική θεωρία Galois, μου έγινε γνωστή από τον κ. Βασίλειο Παπαγεωργίου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Η διαρκής συνεργασία μαζί του διέυρυνε τις γνώσεις μου και με βοήθησε να κατανοήσω το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο, ενώ η αδιάλειπτη επίβλεψη και αρωγή του συνδέθηκαν οργανικά με την ολοκλήρωση της διατριβής.

Ως μεταπτυχιακός φοιτητής, η πρώτη μου επαφή με τα δυναμικά συστήματα πραγματοποιήθηκε με διδάσκοντα τον κ. Αναστάσιο Μπούντη, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Ο κ. Μπούντης υπήρξε μια αστείρευτη πηγή ερεθισμάτων, γνώσεων και συμβουλών που συνέβαλαν ουσιωδώς στη διαμόρφωση της παρούσας διατριβής.

Η συνεργασία μου με τον κ. Δημήτριο Τσουμπελή, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, ήταν συνεχής και πολυεπίπεδη. Η επικουρική βοήθεια σε μαθήματα που δίδασκε ο κ. Τσουμπελής και η επαφή με το ευρύ φάσμα γνώσεων του με ωρίμασε ως μαθηματικό και ως σκεπτόμενη οντότητα. Η συμβολή του σε αυτή τη διατριβή είναι σημαντική.

Η διαβίωση εντός και εκτός του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών θα ήταν πολύ φτωχότερη χωρίς την παρουσία καλών φίλων. Οι υποψήφιοι Διδάκτορες Ελένη Χριστοδουλίδη, Θεόδωρος Κουλούκας, Σταύρος Αναστασίου, Γρηγόρης Προτσώνης, Άκης Μάτζαρης ήταν εκλεκτοί και χαρισματικοί συνοδοιπόροι σε εξερευνήσεις με μαθηματικό υπόβαθρο και σε στιγμές ξενοιασιάς.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για την οικονομική ενίσχυση που μου παρείχε, η οποία με βοήθησε να προσηλωθώ στο ερευνητικό μου έργο.

Δημήτριος Γ. Νομικός
Πάτρα, Ιανουάριος 2010

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

Πρόλογος	iii
1 Διαφορική Θεωρία Galois	1
1.1 Εισαγωγή	5
1.2 Διαφορικά Ιδεώδη	6
1.3 Διαφορικά Πολυώνυμα	8
1.4 Γραμμικές ομογενείς συνήθεις διαφορικές εξισώσεις	11
1.5 Επεκτάσεις διαφορικών σωμάτων	13
1.6 Διαφορική ομάδα Galois	16
1.7 Μονόδρομη ομάδα	22
2 Επιλυσιμότητα Γραμμικών Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων τάξης 2	27
2.1 Εισαγωγή	31
2.2 Επίλυση με τη χρήση σειρών	33
2.3 Λύσεις Liouville	36
2.4 Η γενικευμένη υπεργεωμετρική εξίσωση	46
2.5 Η εξίσωση Lamé	54
3 Διαφορική Θεωρία Galois και Μη-Ολοκληρωσιμότητα Συστημάτων Hamil- ton	57
3.1 Εισαγωγή	61
3.2 Εξισώσεις μεταβολών	65
3.3 Θεωρίες Morales-Ramis και Morales-Ramis-Simó	75
4 Μη-Ολοκληρωσιμότητα του Ανισοτροπικού Προβλήματος Størmer και του Ισοσκελούς Προβλήματος Τριών Σωμάτων	87
4.1 Το ανισοτροπικό πρόβλημα Størmer	87
4.2 Το ισοσκελές πρόβλημα τριών σωμάτων	105
4.3 Συμπεράσματα	116
Βιβλιογραφία	123
Ευρετήριο	131

Πρόλογος

Isaac Newton 1643-1727

Gottfried Leibniz 1646-1716

Τα Μαθηματικά πρόσφεραν σημαντική αρωγή στην αέναη προσπάθεια του ανθρώπινου είδους να κατανοήσει το φυσικό του περιβάλλον. Κανόνες και πρότυπα που διέπουν τον κόσμο μας μπόρεσαν να διατυπωθούν σε μαθηματικές σχέσεις, ρίχνοντας φως στην πολυπλοκότητα της ζωής και ικανοποιώντας την έμφυτη περιέργεια μας. Μείζονα ρόλο διαδραμάτισε η ανακάλυψη μαθηματικών ιδιοτήτων που χαρακτήριζαν την εξέλιξη κάποιων φυσικών διεργασιών, συνιστώντας ένα πολύτιμο εργαλείο για τον έλεγχο και την πρόβλεψη της δυναμικής τους. Τον 17ο αιώνα, η θεμελίωση του διαφορικού λογισμού από τους I. Newton, G. Leibniz και η διατύπωση, από τον πρώτο, των τριών νόμων κίνησης, συνέδεσαν απαρέγκλιτα τη μελέτη της δυναμικής με την ανάλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

Στα μέσα του 19ου αιώνα, ο J. Liouville έστρεψε την προσοχή του σε συστήματα μη-γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, τα συστήματα Hamilton (S_H). Οι μαθηματικές οντότητες που χαρακτηρίζουν ένα S_H και ενδιέφεραν τον J. Liouville ήταν βαθμωτές συναρτήσεις που, κατά μήκος των λύσεων του S_H , παραμέναν αναλλοίωτες ως προς την εξέλιξη της ανεξάρτητης μεταβλητής, δηλαδή τα ονομαζόμενα πρώτα ολοκληρώματα. Το συμπέρασμα ήταν ότι ένας ικανός αριθμός πρώτων ολοκληρωμάτων μπορεί να οδηγήσει στην επίλυση του S_H και συνεπώς στην αποκρυπτογράφηση της δυναμικής του.

Ο H. Poincaré [104] το 1892 αναζήτησε τις συνθήκες που επιβάλλει η ύπαρξη πρώτων ολοκληρωμάτων, στο σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από τη γραμμικοποίηση ενός S_H κατά μήκος μιας περιοδικής λύσης με περίοδο T , που είναι οι αποκαλούμενες εξισώσεις μεταβολών (VEs). Συμπέρανε ότι αν υπάρχουν k ανεξάρτητα και σε ενέλιξη πρώτα ολοκληρώματα του S_H ,

τότε $2k$ χαρακτηριστικοί εκθέτες είναι μηδενικοί. Οι χαρακτηριστικοί εκθέτες είναι οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα που αντιστοιχεί στην T και απεικονίζει μια λύση $x(t)$ στην $x(t+T)$.

Ο S.L. Ziglin [135] το 1983 μελέτησε την ύπαρξη μη-μονότιμων λύσεων των VEs ενός S_H , θεωρώντας την αναλυτική συνέχιση της ανεξάρτητης μεταβλητής σε μιγαδικές τιμές. Η έρευνά του έδειξε ότι ένας ικανός αριθμός πρώτων ολοκληρωμάτων και η ύπαρξη ενός μη-συντονισμένου (non-resonant) μονόδρομου πίνακα M επιβάλλει στους υπόλοιπους μονόδρομους πίνακες των VEs να διατηρούν ή να μεταθέτουν τους ιδιόχωρους του M . Η θεωρία αυτή αποτέλεσε το εργαλείο για τη διερεύνηση της ολοκληρωσιμότητας πολλών συστημάτων [15], [30]-[32], [49, 51, 53, 54, 122], [129]-[132], [136] και λειτούργησε ως έναυσμα για επιπλέον διερεύνηση των VEs .

Η προσέγγιση του S.L. Ziglin ενέπνευσε τους J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis [88] να μελετήσουν τη διαφορική ομάδα Galois G των VEs , η οποία περιέχει τη μονόδρομη ομάδα. Το 1999 οι Morales, Ramis απέδειξαν ότι η ταυτοτική συνιστώσα της G (η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο) είναι αβελιανή, αν το αντίστοιχο S_H είναι ολοκληρώσιμο. Η θεωρία Morales-Ramis εφαρμόστηκε σε πολλά συστήματα [7]-[11], [13], [14], [18]-[19], [26], [36], [40]-[42], [51], [55], [56], [69]-[76], [80], [81], [89]-[93], [95], [127], [128], για ορισμένα από τα οποία η θεωρία Ziglin ήταν ανεπαρκής ή πρακτικά ανεφάρμοστη. Το 2007 δημοσιεύτηκε μια γενίκευση [94] της θεωρίας Morales-Ramis, που ενδυναμωσε ακόμα περισσότερο το θεωρητικό πλαίσιο και βρήκε άμεσα εφαρμογές [20, 21, 78, 77, 79, 84, 100, 107, 108].

Στην παρούσα διατριβή θα επικεντρωθούμε στην θεωρία των Morales, Ramis [88] και την γενίκευση αυτής σε εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης [94], που θεμελιώσαν μαζί με τον C. Simó. Το προαναφερόμενο θεωρητικό πλαίσιο συνδυάζει γνώσεις διαφορικής άλγεβρας, αλγεβρικής γεωμετρίας, γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων και δυναμικών συστημάτων. Για να καταστήσουμε (όσο είναι δυνατό) αυτόνομη τη διατριβή, παρουσιάζουμε τα απαραίτητα θεωρητικά εργαλεία πάνω στα οποία εδράζεται η μελέτη των εξισώσεων μεταβολών με χρήση της διαφορικής θεωρίας Galois και στη συνέχεια παραθέτουμε τις εφαρμογές μας.

Το κεφάλαιο 1 ξεκινά με κάποιες γενικές γνώσεις διαφορικής άλγεβρας και την εφαρμογή τους σε συστήματα διαφορικών πολυωνύμων, που περιέχονται στις τρεις πρώτες ενότητες. Οι υπόλοιπες ενότητες μας είναι άμεσα χρήσιμες, καθώς αναφέρονται σε συστήματα ομογενών γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων και τις λύσεις τους. Η μορφή των λύσεων έχει άμεση επίδραση στη μορφή της διαφορικής ομάδας Galois G , που είναι μια ομάδα αυτομορφισμών του διαφορικού σώματος που περιέχει τις λύσεις. Η μονόδρομη ομάδα είναι μια υποομάδα της G και υπό κατάλληλες συνθήκες παράγει την G . Ιδιαίτερης προσοχής χρήζει η σχέση της G με την ταυτοτική της συνιστώσα και τη μονόδρομη ομάδα.

Το κεφάλαιο 2 αφιερώνεται στην ανάλυση γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων τάξης 2. Οι πρώτες δύο ενότητες περιέχουν κλασικά αποτελέσματα όπως ο υποβιβασμός τάξης, η μέθοδος της μεταβολής παραμέτρων και η μέθοδος Frobenius. Στην τρίτη ενότητα παραθέτουμε ένα σύγχρονο αλγόριθμο για την κατασκευή λύσεων τύπου Liouville ($Lsols$), μιας εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η υπεργεωμετρική εξίσωση του Gauss να επιδέχεται $Lsols$ παρουσιάζονται στην τέταρτη ενότητα. Η πέμπτη ενότητα εξετάζει την εξίσωση Lamé, που περιέχει στο συντελεστή της μια ελλειπτική συνάρτηση και επιδέχεται πάντα $Lsols$.

Το κεφάλαιο 3 περιέχει το βασικό μέρος του θεωρητικού πλαισίου που εφαρμόζουμε. Η πρώτη ενότητα εισάγει τις βασικές έννοιες της παραγώγου Lie, της αγκύλης Poisson και της συμπλεκτικής πολλαπλότητας. Η δεύτερη ενότητα εξειδικεύεται στις εξισώσεις κάθετων μεταβολών καθώς και τις εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης, οι οποίες είναι μη-γραμμικές. Στην τρίτη ενότητα περιγράφουμε τη θεωρία Morales-Ramis, που αναφέρεται στις ιδιότητες της διαφορικής ομάδας Galois των εξισώσεων μεταβολών ενός ολοκληρώσιμου μιγαδικού συστήματος Hamil-

ton. Επίσης, διατυπώνουμε το θεώρημα των Morales, Ramis, Simó που περιγράφει αντίστοιχες ιδιότητες για τις εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης. Οι προαναφερόμενες ιδιότητες αποτελούν αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας και ταυτόχρονα ικανές συνθήκες μη-ολοκληρωσιμότητας ενός συστήματος Hamilton.

Το κεφάλαιο 4 περιέχει τα αποτελέσματα που παραγάγαμε από την εφαρμογή του προαναφερόμενου θεωρητικού πλαισίου σε δυο συστήματα Hamilton, τα οποία συμπεριλαμβάνονται και στη δημοσίευση [100]. Το πρώτο σύστημα είναι το ανισοτροπικό πρόβλημα Størmer (*ASP*), που σχετίζεται με την κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου υπό την επίδραση του μαγνητικού πεδίου ενός διπόλου. Η ολοκληρωσιμότητα του *ASP* εξετάσθηκε από τους Almeida et al. [6, 8] και διαπιστώθηκε ότι είναι μη-ολοκληρώσιμο για όλες τις τιμές των παραμέτρων εκτός από δύο. Η διερεύνησή μας απέδειξε τη μη-ολοκληρωσιμότητα των υπόλοιπων περιπτώσεων του *ASP*. Για τη μια από τις προαναφερόμενες περιπτώσεις χρειάστηκε να διερευνήσουμε τις εξισώσεις μεταβολών τάξης 3. Στη δεύτερη ενότητα εξετάζουμε την ολοκληρωσιμότητα μιας υποπερίπτωσης του προβλήματος τριών σωμάτων, που είναι το ισοσκελές πρόβλημα (*IP*), με τα τρία σώματα να σχηματίζουν πάντα ένα ισοσκελές τρίγωνο. Η ολοκληρωσιμότητα του *IP* είχε μελετηθεί μόνο με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Η ανάλυσή μας απέδειξε ότι το *IP* είναι μη-ολοκληρώσιμο για οποιαδήποτε τιμή των παραμέτρων του. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την τρίτη ενότητα, όπου αναπτύσσουμε συμπεράσματα και σχόλια ως προς το θεωρητικό πλαίσιο που εφαρμόστηκε.

Κεφάλαιο 1

Διαφορική Θεωρία Galois

Joseph Liouville 1809-1882

Évariste Galois 1811-1832

Emile Picard 1856-1941

David Hilbert 1862-1943

Ernest Vessiot 1865-1952

Joseph Ritt 1893-1951

Ellis Kolchin 1916-1991

Irving Kaplansky 1917-2006

Michael Singer

Στο παρόν κεφάλαιο θα εισαγάγουμε βασικές έννοιες της Διαφορικής Άλγεβρας. Ξεκινώντας από τον ορισμό μιας διαφορίσης θα οδηγηθούμε στη μελέτη διαφορικών δακτυλίων και των ιδεωδών τους, τα οποία χρησιμεύουν στην διερεύνηση των λύσεων συστημάτων διαφορικών πολυωνυμικών εξισώσεων. Στη συνέχεια θα περιοριστούμε στη μελέτη συστημάτων ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ένας συγκεκριμένος τύπος λύσεων αυτών, που είναι οι λύσεις Liouville. Η ύπαρξη λύσεων Liouville επάγει ιδιότητες στην αντίστοιχη διαφορική ομάδα Galois G και την ταυτοτική συνιστώσα αυτής. Επίσης, θα δούμε τις προϋποθέσεις υπό τις οποίες μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την G από μια υποομάδα της, που είναι η μονόδρομη ομάδα.

Οι δακτύλιοι στους οποίους θα αναφερθούμε θα είναι μοναδιαίοι, αντιμεταθετικοί και με χαρακτηριστική 0.

Οι πληροφορίες αυτού του κεφαλαίου αντλήθηκαν από τα [58, 60, 88, 109, 114].

1.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε έναν δακτύλιο R εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και μια διαφορίση D ορισμένη στον R , δηλαδή μια απεικόνιση $D : R \rightarrow R$ που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\begin{aligned} D(a+b) &= D(a) + D(b), \quad a, b \in R \\ D(ab) &= D(a)b + aD(b), \quad a, b \in R. \quad (\text{νόμος του Leibniz}) \end{aligned}$$

Ο R εφοδιασμένος με την D καλείται ένας διαφορικός δακτύλιος. Το στοιχείο $D(a) \in R$ καλείται παράγωγος του $a \in R$, την οποία θα συμβολίζουμε ως $a' \in R$. Ένα διαφορικό σώμα ορίζεται παρομοίως.

Λήμμα 1.1.1. Έστω $\mathbf{K}$ ένα διαφορικό σώμα με $a, b \in \mathbf{K}$ και $b \neq 0$. Τότε ισχύει

- (i) $1' = 0$, όπου $0, 1$ είναι τα ουδέτερα στοιχεία ως προς πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, αντιστοίχως.
- (ii) $(b^{-1})' = -b'(b^{-1})^2$
- (iii) $(a/b)' = (a'b - ab')/b^2$
- (iv) $(a^n)' = na^{n-1}a'$
- (v) το σύνολο $\mathbf{C} \equiv \{c \in \mathbf{K} \mid c' = 0\}$ είναι σώμα, το οποίο καλείται σώμα των σταθερών του $\mathbf{K}$.

Απόδειξη.

- (i) Γνωρίζουμε ότι $1 = 1 \cdot 1$, οπότε προκύπτει ότι

$$1' = (1 \cdot 1)' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' = 2 \cdot 1'.$$

Το $\mathbf{K}$ είναι σώμα, άρα δεν περιέχει διαιρέτες του μηδενός, οπότε από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $1' = 0$.

- (ii) Παραγωγίζοντας τη σχέση $1 = b \cdot b^{-1}$ και χρησιμοποιώντας το (i) προκύπτει ότι

$$0 = b' \cdot b^{-1} + b \cdot (b^{-1})' \Rightarrow (b^{-1})' = -b'(b^{-1})^2.$$

(iii) Με εφαρμογή του (ii) προκύπτει ότι

$$(a/b)' = (a b^{-1})' = a'b^{-1} + a(b^{-1})' = a'b^{-1} - a b' b^{-2} = (a'b - a b')/b^2.$$

(iv) Προκύπτει με επαγωγή στο n .

(v) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbf{C} \equiv \{c \in \mathbf{K} \mid c' = 0\}$. Από τον ορισμό της διαφόρισης προκύπτει ότι αν $c \in \mathbf{C}$ τότε $-c \in \mathbf{C}$. Σύμφωνα με το (i) έχουμε ότι $1 \in \mathbf{C}$, ενώ από το (ii) προκύπτει ότι αν $c' = 0$ τότε $(c^{-1})' = 0 \Rightarrow c^{-1} \in \mathbf{C}$. Οι υπόλοιπες ιδιότητες από τις οποίες προκύπτει ότι το $\mathbf{C}$ είναι σώμα έπονται άμεσα από τις ιδιότητες του $\mathbf{K}$ και τον ορισμό της διαφόρισης.

Οποιοσδήποτε μοναδιαίος αντιμεταθετικός δακτύλιος μπορεί να μετατραπεί σε διαφορικό δακτύλιο, αν τον εφοδιάσουμε με την τετριμμένη διαφόριση, δηλαδή εκείνη που η παράγωγος κάθε στοιχείου είναι μηδέν. Ο δακτύλιος των ακέραιων αριθμών είναι διαφορικός δακτύλιος αν τον εφοδιάσουμε με την τετριμμένη διαφόριση. Αντίστοιχα τα σώματα των ρητών, πραγματικών, μιγαδικών αριθμών μετατρέπονται σε διαφορικά σώματα αν τα εφοδιάσουμε με την τετριμμένη διαφόριση. Οι δακτύλιοι των απείρως παραγωγίσιμων συναρτήσεων, ολόμορφων συναρτήσεων ως προς μια μεταβλητή z εφοδιασμένοι με την διαφόριση $D = d/dz$ είναι διαφορικοί δακτύλιοι. Από το διαφορικό δακτύλιο των ολόμορφων συναρτήσεων ως προς z μπορούμε να κατασκευάσουμε το διαφορικό σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων, θεωρώντας όλες τις ρητές παραστάσεις των ολόμορφων συναρτήσεων. Ένα υπόσωμα του προαναφερόμενου διαφορικού σώματος είναι και το σύνολο των ελλειπτικών συναρτήσεων με κοινό θεμελιώδες παραλληλόγραμμο περιόδων.

1.2 Διαφορικά Ιδεώδη

Ένα ιδεώδες I ενός διαφορικού δακτυλίου R καλείται διαφορικό ιδεώδες αν είναι κλειστό ως προς τη διαφόριση, δηλαδή αν ισχύει $a \in I \Rightarrow a' \in I$ ή πιο απλά αν $I' \subset I$. Στον δακτύλιο R/I εισάγουμε μια διαφόριση ορίζοντας την παράγωγο του $a + I$ να είναι $a' + I$.

Έστω R_1, R_2 διαφορικοί δακτύλιοι. Ένας διαφορικός ομομορφισμός (ισομορφισμός) από το R_1 στο R_2 είναι ένας ομομορφισμός (ισομορφισμός) που αντιμετατίθεται με τη διαφόριση. Αν το I είναι ένα διαφορικό ιδεώδες του διαφορικού δακτυλίου R , τότε ο φυσικός ομομορφισμός από το I στο R/I είναι διαφορικός.

Ορισμός 1.2.1. Ένα ιδεώδες I καλείται ριζικό (radical) ή τέλειο (perfect) αν ισχύει $a^n \in I \Rightarrow a \in I$.

Οπότε ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες είναι ένα ριζικό ιδεώδες που είναι κλειστό ως προς τη διαφόριση.

Λήμμα 1.2.2 ([58]). Αν το ab ανήκει σε ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες I , τότε $a b' \in I$ και $a'b \in I$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $(ab)' = a'b + a b' \in I$. Πολλαπλασιάζοντας με $a b'$ προκύπτει ότι $(a b')^2 \in I$ οπότε $a b' \in I$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $a'b \in I$. $\square$

Λήμμα 1.2.3 ([58]). Έστω I ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες του διαφορικού δακτυλίου R και S ένα υποσύνολο του R . Αν T είναι το σύνολο όλων των στοιχείων $q \in R$ τέτοια ώστε $qS \subset I$, τότε το T είναι ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες του R .

Απόδειξη. Το T είναι ιδεώδες και από το παραπάνω λήμμα προκύπτει ότι είναι διαφορικό ιδεώδες. Έστω $q^n \in T$, τότε για κάθε $s \in S$ ισχύει $q^n s^n \in I$. Το I είναι διαφορικό ριζικό ιδεώδες οπότε $qs \in I$ και $q \in T$. $\square$

Σε κάθε αντιμεταθετικό δακτύλιο η τομή ενός συνόλου ριζικών ιδεωδών είναι ριζικό ιδεώδες. Σε ένα διαφορικό δακτύλιο η τομή ενός συνόλου διαφορικών ιδεωδών είναι διαφορικό ιδεώδες. Άρα η τομή ενός συνόλου διαφορικών ριζικών ιδεωδών είναι ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες. Για κάθε υποσύνολο S ενός διαφορικού δακτυλίου σημειώνουμε ως $\{S\}$ το μικρότερο διαφορικό ριζικό ιδεώδες που περιέχει το S .

Λήμμα 1.2.4 ([58]). *Αν a είναι ένα στοιχείο και S ένα υποσύνολο ενός διαφορικού δακτυλίου R , τότε $a\{S\} \subset \{aS\}$.*

Απόδειξη. Έστω T το σύνολο όλων των στοιχείων $q \in R$ για τα οποία ισχύει $aq \in \{aS\}$. Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι το T είναι διαφορικό ριζικό ιδεώδες. Το T περιέχει το S και είναι διαφορικό ριζικό ιδεώδες, οπότε περιέχει και το $\{S\}$. $\square$

Λήμμα 1.2.5 ([58]). *Αν S, T είναι υποσύνολα ενός διαφορικού δακτυλίου R , τότε $\{S\}\{T\} \subset \{ST\}$.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι το σύνολο όλων των $q \in R$ για τα οποία ισχύει $q\{T\} \subset \{ST\}$ περιέχει το S και σύμφωνα με το λήμμα 1.2.3 είναι ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες, οπότε περιέχει το $\{S\}$. $\square$

Ορισμός 1.2.6. Ένα ιδεώδες I καλείται πρώτο (*prime*) αν ισχύει $ab \in I \Rightarrow a \in I$ ή $b \in I$.

Παρατηρούμε ότι ένα πρώτο ιδεώδες είναι ριζικό ιδεώδες. Επίσης ένα ριζικό ιδεώδες είναι η τομή πρώτων ιδεωδών και όπως θα δούμε ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα και για ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες.

Λήμμα 1.2.7 ([58]). *Έστω T ένα υποσύνολο ενός διαφορικού δακτυλίου R που είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και T^c το συμπλήρωμα του. Αν $I \subset T^c$ είναι ένα μεγιστικό (*maximal*) διαφορικό ριζικό ιδεώδες του R , τότε το I είναι πρώτο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για δύο στοιχεία $a, b \in R$ ισχύει $ab \in I$ με $a \notin I$ και $b \notin I$. Τότε το $\{I\} = I$ είναι γνήσιο υποσύνολο των $\{I, a\}, \{I, b\}$ τα οποία περιέχουν στοιχεία του T . Έστω $t_1 \in T \cap \{I, a\}$ και $t_2 \in T \cap \{I, b\}$, τότε από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει $t_1 t_2 \in \{I, a\}\{I, b\} \subset \{I\} = I$ που είναι μια αντίφαση. $\square$

Θεώρημα 1.2.8 ([58]). *Αν I είναι ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες του διαφορικού δακτυλίου R , τότε το I είναι η τομή διαφορικών πρώτων ιδεωδών.*

Απόδειξη. Έστω $q \notin I, T_q \subset R$ το σύνολο των δυνάμεων του q και $T_q^c \subset R$ το συμπλήρωμα του T_q . Από το λήμμα του Zorn προκύπτει ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα μεγιστικό διαφορικό ριζικό ιδεώδες $Z_q \subset T_q^c$ που να περιέχει το I . Εφόσον το T_q είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι το Z_q είναι πρώτο. Άρα το Z_q είναι ένα πρώτο διαφορικό ιδεώδες που περιέχει το I και δεν περιέχει το q . Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία για κάθε $q \notin I$ συμπεραίνουμε ότι το I είναι η τομή των αντίστοιχων Z_q . $\square$

Έστω R ένας δακτύλιος και $I \subset R$ ένα ιδεώδες του R . Το ριζικό $\sqrt{I}$ του I ορίζεται ως το σύνολο $\sqrt{I} = \{x \in R : x^n \in I\}$ για κάποιο θετικό ακέραιο n και είναι ένα ιδεώδες του R , το οποίο περιέχει το I . Αυτό δεν ισχύει και για ένα τυχαίο διαφορικό δακτύλιο R .

Παράδειγμα 1.2.9. Έστω R μια διδιάστατη άλγεβρα πάνω από ένα σώμα χαρακτηριστικής 2 με βάση $1, x$, όπου $x^2 = 0$. Θέτοντας $1' = 0, x' = 1$ ορίζουμε μια διαφύριση της R . Έστω I_0 το μηδενικό ιδεώδες της R . Παρατηρούμε ότι $x^2 \in I_0$ άρα $x \in \sqrt{I_0}$, όμως $x' = 1 \notin \sqrt{I_0}$ άρα το $\sqrt{I_0}$ δεν είναι διαφορικό ιδεώδες.

Ορισμός 1.2.10. Μία άλγεβρα Ritt είναι ένας διαφορικός δακτύλιος που περιέχει το σώμα των ρητών αριθμών.

Λήμμα 1.2.11 ([58]). Έστω I ένα διαφορικό ιδεώδες μιας άλγεβρας Ritt R . Αν για το $x \in R$ ισχύει $x^n \in I$, τότε $(x')^{2n-1} \in I$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει ο τύπος

$$x^{n-i}(x')^{(2i-1)} \in I \quad (1.2.1)$$

με επαγωγή ως προς το $i \leq n$. Για $i = 1$ ο (1.2.1) ισχύει επειδή $1/n x^n \in I$, οπότε παραγωγίζοντας προκύπτει $x^{n-1}x' \in I$. Θεωρούμε ότι ο (1.2.1) ισχύει για $i = k$, οπότε $1/(n-k)(x^{n-k}(x')^{(2k-1)})' \in I$ και προκύπτει $x^{n-k-1}(x')^{(2k)} + (2k-1)/(n-k)x^{n-k}(x')^{(2k-2)} \in I$. Πολλαπλασιάζοντας αυτή την παράσταση με x' έχουμε $x^{n-k-1}(x')^{(2k+1)} + (2k-1)/(n-k)x^{n-k}(x')^{(2k-1)} \in I$ και ο δεξιός όρος ανήκει στο I , άρα $x^{n-k-1}(x')^{(2k+1)} \in I$ που είναι ο τύπος (1.2.1) για $i = k+1$. Άρα για $i = n$ ισχύει $(x')^{2n-1} \in I$. $\square$

Από το παραπάνω λήμμα προκύπτει ότι σε μια άλγεβρα Ritt το ριζικό ενός διαφορικού ιδεώδους είναι ένα διαφορικό ιδεώδες.

Τα ριζικά διαφορικά ιδεώδη έχουν κεντρικό ρόλο στην ανάλυση των διαφορικών πολυωνυμικών εξισώσεων, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

1.3 Διαφορικά Πολυώνυμα

Έστω $R[x]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων ως προς τη μεταβλητή x , με συντελεστές που ανήκουν στον διαφορικό δακτύλιο R . Ο $R[x]$ είναι ένας διαφορικός δακτύλιος αν επεκτείνουμε τη διαφύριση του R θέτοντας $x' = a \in R[x]$ και ορίζοντας $(x^i)' = ix^{i-1}x', (c_1x^n)' = c_1'x^n + c_1(x^n)', (c_1x^n + c_2x^m)' = (c_1x^n)' + (c_2x^m)'$ για $c_1, c_2 \in R$ και $i, n, m \in \mathbb{N}$. Ομοίως αν ο R είναι διαφορικό σώμα τότε μπορούμε να ορίσουμε το αντίστοιχο διαφορικό σώμα $R(x)$ των ρητών παραστάσεων ως προς x .

Έστω $R[x_0, x_1, x_2, \dots]$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων ως προς τις μεταβλητές $x_0, x_1, x_2, \dots$, με συντελεστές που ανήκουν στον διαφορικό δακτύλιο R . Θέτοντας $x_{i+1} = x'_i, i = 0, 1, 2, \dots$ και $x_0 = x, x_n = x^{(n)}, n = 1, 2, \dots$ ορίζεται με μοναδικό τρόπο μια διαφύριση του $R[x_0, x_1, x_2, \dots]$. Συμβολίζουμε ως $R\{x\}$ τον επαγόμενο διαφορικό δακτύλιο. Τα στοιχεία του $R\{x\}$ καλούνται διαφορικά πολυώνυμα ως προς x . Αν ο R είναι σώμα τότε ο $R\{x\}$ είναι μια διαφορική ακέραια περιοχή και η διαφύριση του $R\{x\}$ μπορεί να επεκταθεί με μοναδικό τρόπο σε μια διαφύριση του σώματος $R < x >$ των λόγων διαφορικών πολυωνύμων ως προς x .

Ένα υποσύνολο $S \subset R$ ενός δακτυλίου R καλείται πεπερασμένως παραγόμενο αν υπάρχουν στοιχεία $a_i \in S, i = 1, \dots, n$ τέτοια ώστε $S = \{c_1a_1 + \dots + c_na_n : c_i \in R\}$, δηλαδή αν κάθε

στοιχείο του S είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των a_i πάνω από το R . Το θεώρημα βάσης του Hilbert αποδεικνύει ότι αν τα ιδεώδη του R είναι πεπερασμένως παραγόμενα, τότε το ίδιο ισχύει και για τα ιδεώδη του δακτύλιου $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ των πολυωνύμων ως προς $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ένα πεπερασμένο υποσύνολο B ενός υποσυνόλου S ενός διαφορικού δακτύλιου R καλείται βάση του S αν για κάθε στοιχείο $s \in S$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος r τέτοιος ώστε $s^r \in [B]$, όπου $[B]$ είναι το ιδεώδες που παράγεται από το B και αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του B και των παραγώγων τους πάνω από τον R . Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι το B είναι βάση του S αν $S \subset \{B\}$, όπου $\{B\}$ είναι το ριζικό του $[B]$.

Το ανάλογο του θεωρήματος βάσης του Hilbert για διαφορικούς δακτύλιους αποδείχθη από τους J.F. Ritt, H.W. Raudenbush.

Θεώρημα 1.3.1. [112, 114] *Αν ο R είναι μια άλγεβρα Ritt της οποίας τα διαφορικά ριζικά έχουν βάση, τότε το ίδιο ισχύει και για τα διαφορικά ριζικά ιδεώδη του διαφορικού δακτύλιου $R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ των διαφορικών πολυωνύμων ως προς $x_1, x_2, \dots, x_n$.*

Έστω F ένα διαφορικό σώμα και $F\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ο δακτύλιος των διαφορικών πολυωνύμων ως προς $x_1, x_2, \dots, x_n$ πάνω από το F . Θεωρούμε ένα μη-πεπερασμένο υποσύνολο $S \subset F\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και το μικρότερο ριζικό ιδεώδες $\{S\}$ που περιέχει το S . Μια ρίζα του S είναι μια λύση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτουν θέτοντας κάθε στοιχείο του S ίσο με το μηδέν. Το σύνολο όλων των ριζών του S καλείται αλγεβρική πολλαπλότητα M του S . Το σύνολο όλων των διαφορικών πολυωνύμων που επιδέχονται την M ως αλγεβρική πολλαπλότητα είναι το $\{S\}$. Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι υπάρχει μια βάση $B \subset S$ του S . Εφόσον $B \subset S$ κάθε ρίζα του S είναι και ρίζα της B . Εφόσον $S \subset \{B\}$ για κάθε $P \in S$ υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $P^k \in [B]$, άρα κάθε ρίζα της B είναι και ρίζα του S . Συμπεραίνουμε ότι η B και το S έχουν τις ίδιες ρίζες. Άρα η αλγεβρική πολλαπλότητα ενός μη-πεπερασμένου συνόλου S διαφορικών πολυωνύμων είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα ενός πεπερασμένου υποσυνόλου του S .

Αν M_1, M_2 είναι οι αλγεβρικές πολλαπλότητες των συνόλων S_1, S_2 , αντιστοίχως, τότε η τομή $M_1 \cap M_2$ είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα του συνόλου όλων των αθροισμάτων $A + B$ για $A \in S_1 \cup \{0\}$ και $B \in S_2 \cup \{0\}$, ενώ η ένωση $M_1 \cup M_2$ είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα του συνόλου όλων των γινομένων $A \cdot B$ για $A \in S_1$ και $B \in S_2$.

Μια αλγεβρική πολλαπλότητα M καλείται *αναγώγιμη* (reducible) αν είναι η ένωση δύο γνήσιων υποσυνόλων της. Μια αλγεβρική πολλαπλότητα που δεν είναι αναγώγιμη καλείται *ανάγωγη* (irreducible). Μια αλγεβρική πολλαπλότητα M ενός συνόλου διαφορικών πολυωνύμων S είναι ανάγωγη αν και μόνο αν για κάθε $A \cdot B$ που μηδενίζεται στην M τουλάχιστον ένα από τα A, B μηδενίζεται στην M . Το διαφορικό ριζικό ιδεώδες $\{S\}$ είναι το σύνολο όλων των διαφορικών πολυωνύμων που επιδέχονται την M ως αλγεβρική πολλαπλότητα και είναι πρώτο αν και μόνο αν η M είναι ανάγωγη.

Θεώρημα 1.3.2. [114] *Κάθε αλγεβρική πολλαπλότητα είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους ανάγωγων αλγεβρικών πολλαπλοτήτων.*

Απόδειξη. Έστω ότι το σύνολο S διαφορικών πολυωνύμων επιδέχεται την M ως αλγεβρική πολλαπλότητα, η οποία είναι μια μη-πεπερασμένη ένωση ανάγωγων αλγεβρικών πολλαπλοτήτων. Άρα η M είναι αναγώγιμη και υπάρχουν A, B τέτοια ώστε το γινόμενο AB να μηδενίζεται στην M ενώ τα A και B δεν μηδενίζονται στην M . Άρα η M είναι η ένωση των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων M_A, M_B των συνόλων $S \cup A, S \cup B$ αντιστοίχως. Τουλάχιστον μια από τις M_A, M_B είναι μια μη-πεπερασμένη ένωση ανάγωγων αλγεβρικών πολλαπλοτήτων. Έστω ότι αυτό ισχύει για την M_A της οποίας το αντίστοιχο σύνολο διαφορικών πολυωνύμων συμβολίζουμε ως

$S_1 = S \cup A \supset S$. Το S_1 δεν μηδενίζεται στην M και η M_A είναι αναγώγιμη. Συνεχίζοντας όπως και παραπάνω μπορούμε να παράγουμε μια μη-πεπερασμένη ακολουθία $S \subset S_1 \subset \dots \subset S_q \subset \dots$ όπου κάθε όρος δεν μηδενίζεται στην αλγεβρική πολλαπλότητα του προηγούμενου όρου. Έστω ότι O είναι η ένωση των συνόλων της προαναφερόμενης ακολουθίας και έστω B μια βάση της O . Η B περιέχεται σε κάποιον από τους όρους της ακολουθίας. Έστω ότι περιέχεται στον S_q . Η B είναι μια βάση του S_q οπότε έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό, όμως η B είναι μια βάση και του S_{q+1} οπότε έχει τις ίδιες ρίζες και με το S_{q+1} . Άρα τα S_q, S_{q+1} έχουν τις ίδιες ρίζες που είναι μια αντίφαση καθώς το S_{q+1} δεν μηδενίζεται στην αλγεβρική πολλαπλότητα του S_q . $\square$

Μια αναπαράσταση $H = \cup_{i=1}^r H_i$ ($H = \cap_{i=1}^r H_i$) ενός συνόλου H ως η ένωση (τομή) κάποιων συνόλων καλείται μη-πλεονάζουσα (irredundant) αν κανένα από τα H_i δεν μπορεί να παραληφθεί, δηλαδή αν κανένα από τα H_i δεν περιέχει κάποιο από τα υπόλοιπα.

Το θεώρημα 1.2.8 μας πληροφορεί ότι τα ριζικά ιδεώδη ενός διαφορικού δακτυλίου είναι η τομή πρώτων ιδεωδών. Υπό μια ισχυρότερη προϋπόθεση μπορεί να επιτευχθεί ένα καλύτερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.3.3. [112] Σε ένα διαφορικό δακτύλιο R όπου όλα τα διαφορικά ριζικά ιδεώδη I έχουν βάση, κάθε I μπορεί να αναπαρασταθεί με μοναδικό τρόπο ως η μη-πλεονάζουσα πεπερασμένη τομή διαφορικών πρώτων ιδεωδών.

Απόδειξη.

(Περατότητα) Έστω ότι υπάρχουν διαφορικά ριζικά ιδεώδη του R που δεν είναι η πεπερασμένη τομή πρώτων ιδεωδών και το I είναι μεγιστικό ανάμεσα τους. Το I δεν είναι πρώτο οπότε υπάρχουν στοιχεία $a, b \in R$ τέτοια ώστε $ab \in I$ με $a \notin I$ και $b \notin I$. Τα διαφορικά ριζικά ιδεώδη $\{I, a\}, \{I, b\}$ περιέχουν το $I \subset \{I, a\} \cap \{I, b\}$ και είναι η πεπερασμένη τομή διαφορικών πρώτων ιδεωδών. Από το λήμμα 1.2.5 προκύπτει $\{I, a\} \{I, b\} \subset \{ab, I\} \subset I$. Άρα για κάθε $c \in \{I, a\} \cap \{I, b\}$ ισχύει $c^2 \in I$, οπότε $\{I, a\} \cap \{I, b\} \subset I$. Δηλαδή $I = \{I, a\} \cap \{I, b\}$ που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το I δεν είναι η πεπερασμένη τομή πρώτων ιδεωδών.

(Μοναδικότητα) Έστω ότι το I είναι ένα διαφορικό ριζικό ιδεώδες του R και επιδέχεται δύο μη-πλεονάζουσες αναπαραστάσεις $I = P_1 \cap \dots \cap P_r = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$, όπου τα P_i, Q_j είναι πρώτα. Άρα $P_1 \cap \dots \cap P_r \subset Q_1$ και $P_1 P_2 \dots P_r \subset Q_1$. Εφόσον το Q_1 είναι πρώτο κάποιο από τα P_i περιέχεται στο Q_1 . Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P_1 \subset Q_1$. Ομοίως κάποιο από τα Q_i περιέχεται στο P_1 και εφόσον κανένα από τα $P_i, i \neq 1$ δεν περιέχει το P_1 προκύπτει $P_1 = Q_1$. Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $r = s$ και καθένα από τα P_i είναι ίσο με κάποιο από τα Q_j . $\square$

Έστω M η αλγεβρική πολλαπλότητα ενός συνόλου $S \subset F\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ διαφορικών πολυωνύμων πάνω από ένα σώμα F . Από το θεώρημα 1.3.2 προκύπτει ότι υπάρχει μια μη-πλεονάζουσα αναπαράσταση

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n,$$

όπου οι $M_i, i = 1, \dots, n$ είναι ανάγωγες αλγεβρικές πολλαπλότητες. Από το θεώρημα 1.3.3 προκύπτει ότι το διαφορικό ριζικό ιδεώδες $\{S\}$ του συνόλου των διαφορικών πολυωνύμων που επιδέχονται την M ως αλγεβρική πολλαπλότητα έχει μια μη-πλεονάζουσα αναπαράσταση

$$\{S\} = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n,$$

όπου κάθε $I_i, i = 1, \dots, n$ είναι το διαφορικό πρώτο ιδεώδες του συνόλου των διαφορικών πολυωνύμων που επιδέχονται την M_i ως αλγεβρική πολλαπλότητα. Έστω $P_i \in F\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \setminus [S]$ για

$i = 1, \dots, n$ τέτοια ώστε να μην έχουν κοινές ρίζες ανά δύο, το γινόμενο $P_1 \dots P_n \in [S]$ και η M_i να είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα του συνόλου $S_i = S \cup P_i$, τότε $I_i = \{S_i\}$ και

$$\{S\} = \{S_1\} \cap \{S_2\} \cap \dots \cap \{S_n\}.$$

Στα επόμενα δύο παραδείγματα θεωρούμε ως F το σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων ως προς x που ορίζονται σε ένα χωρίο του μιγαδικού επιπέδου.

Παράδειγμα 1.3.4. Θεωρούμε το διαφορικό πολυώνυμο $S = y'^2 - 4y \in F\{y\}$. Το S δεν παραγοντοποιείται και η αλγεβρική του πολλαπλότητα M αποτελείται από τις συναρτήσεις $y = 0, (x+c)^2$ όπου c μια σταθερά. Η παράγωγος $S' = 2y'(y'' - 2) \in [S]$ του S μηδενίζεται στην M όμως ο όρος y' μηδενίζεται μόνο για $y = 0$, ενώ ο όρος $y'' - 2$ μηδενίζεται μόνο για $y = (x+c)^2$. Άρα η M είναι αναγώγιμη $M = M_1 \cup M_2$ όπου η M_1 αποτελείται από τη λύση $y_0 = 0$ και η M_2 αποτελείται από τη μονοπαριμετρική οικογένεια παραβολών $y_c = (x+c)^2$. Η M_1 είναι ανάγωγη και είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα του διαφορικού πρώτου ιδεώδους $\{S, y'\}$. Έστω $A, B \in F\{y\}$ με το γινόμενο AB να μηδενίζεται στην M_2 . Αν αντικαταστήσουμε το y με τις $(x+c)^2$ τότε τα A, B είναι πολυωνυμικά ως προς c με μερόμορφους συντελεστές ως προς x . Αν το AB μηδενίζεται ταυτοτικά ως προς x, c τότε κάποιο από τα A, B μηδενίζεται ταυτοτικά ως προς x, c . Άρα η M_2 είναι ανάγωγη και είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα του διαφορικού πρώτου ιδεώδους $\{S, y'' - 2\}$. Άρα έχουμε $M = y_0 \cup y_c$ και $\{S\} = \{S, y'\} \cap \{S, y'' - 2\}$.

Παράδειγμα 1.3.5. Θεωρούμε το σύνολο $S \subset F\{y, z\}$ που αποτελείται από τα διαφορικά πολυώνυμα $P_1 = y - xy' + y'z'/4, P_2 = z - xz' + y'z'/4$. Η αλγεβρική πολλαπλότητα M του S αποτελείται από τις συναρτήσεις $(y, z) = (ax - ab/4, bx - ab/4), ((x+c)^2, (x-c)^2)$, όπου a, b, c σταθερές. Παραγωγίζουμε τα P_1, P_2 και θεωρούμε την εξίσωση $P'_1 - P'_2 = 0$ οπότε προκύπτει $y'' = z''$. Παραγωγίζοντας μια φορά το P_1 και αντικαθιστώντας το z'' με το y'' προκύπτει το διαφορικό πολυώνυμο $P_3 = y''(x - z'/4 - y'/4) \in [S]$. Το P_3 μηδενίζεται στην M όμως ο όρος y'' μηδενίζεται μόνο για $u_{ab} = (y, z) = (ax - ab/4, bx - ab/4)$, ενώ ο όρος $x - z'/4 - y'/4$ μηδενίζεται μόνο για $u_c = (y, z) = ((x+c)^2, (x-c)^2)$. Η M είναι η ένωση $M = M_1 \cup M_2$ των ανάγωγων $M_1 = u_{ab}, M_2 = u_c$, ενώ το $\{S\}$ είναι η τομή $\{S\} = \{S_1\} \cap \{S_2\}$ των διαφορικών πρώτων ιδεωδών $\{S_1\} = \{S, y''\}, \{S_2\} = \{S, x - z'/4 - y'/4\}$.

1.4 Γραμμικές ομογενείς συνήθειες διαφορικές εξισώσεις

Έστω $\mathbf{K}$ ένα διαφορικό σώμα με ένα σώμα σταθερών $\mathbf{C}$.

Λήμμα 1.4.1 ([109]). Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, όπου ο A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbf{K}$, δηλαδή $A \in M(\mathbf{K}, n)$. Έστω $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r \in \mathbf{K}^n$ λύσεις της εξίσωσης αυτής, δηλαδή $\mathbf{u}'_i = A\mathbf{u}_i$ για $i = 1, \dots, r$. Αν τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα πάνω από το $\mathbf{K}$, τότε είναι γραμμικώς εξαρτημένα πάνω από το $\mathbf{C}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη πραγματοποιείται με επαγωγή στο δείκτη r . Η περίπτωση $r = 1$ είναι τετριμμένη. Έστω $r > 1$ και θεωρούμε ότι τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα επί του $\mathbf{K}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε υποσύνολο του $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbf{K}^n$. Τότε υπάρχει μοναδικός γραμμικός συνδυασμός, τέτοιος ώστε να ισχύει $\mathbf{u}_1 = \sum_{i=2}^r a_i \mathbf{u}_i$ με $a_i \in \mathbf{K}$. Παρατηρούμε ότι

$$0 = \mathbf{u}'_1 - A\mathbf{u}_1 = \sum_{i=2}^r a'_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=2}^r a_i (\mathbf{u}'_i - A\mathbf{u}_i) = \sum_{i=2}^r a'_i \mathbf{u}_i.$$

Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η παραπάνω σχέση υποδηλώνει ότι για κάθε a_i ισχύει $a'_i = 0$, οπότε όλοι οι συντελεστές a_i ανήκουν στο $\mathbf{C}$. $\square$

Λήμμα 1.4.2 ([109]). *Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ πάνω από το $\mathbf{K}$ διάστασης n . Ο χώρος των λύσεων V της εξίσωσης εντός του $\mathbf{K}$, ορίζεται ως $\{\mathbf{u} \in \mathbf{K}^n | \mathbf{u}' = A\mathbf{u}\}$. Τότε ο V είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης μικρότερης ή ίσης του n .*

Απόδειξη. Ο V είναι εξ ορισμού ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbf{C}$. Οποιαδήποτε $n+1$ διανύσματα του V θα είναι γραμμικώς εξαρτημένα πάνω από το $\mathbf{K}$, οπότε από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι θα είναι και γραμμικώς εξαρτημένα από το $\mathbf{C}$, άρα η διάσταση του V πάνω από το $\mathbf{C}$ θα είναι το πολύ n . $\square$

Υποθέτουμε ότι ο χώρος λύσεων $V \subset \mathbf{K}^n$, της n -διάστατης εξίσωσης $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, έχει διάσταση n , δηλαδή ισχύει $\dim_{\mathbf{C}} V = n$. Έστω ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ είναι μια βάση του V . Έστω ότι ο $F \in GL(\mathbf{K}, n)$ είναι ένας πίνακας με στήλες τις συντεταγμένες των $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Τότε ο F ικανοποιεί την $F' = AF$.

Ορισμός 1.4.3. Έστω $\mathbf{R}$ ένας διαφορικός δακτύλιος, που περιέχει το διαφορικό σώμα $\mathbf{K}$ και έχει ως σύνολο σταθερών το $\mathbf{C}$. Έστω $A \in M(\mathbf{K}, n)$. Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $F \in GL(\mathbf{R}, n)$ καλείται θεμελειώδης πίνακας για την εξίσωση $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ αν ικανοποιεί την $F' = AF$.

Μια βαθμωτή γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση, ορισμένη επί του σώματος $\mathbf{K}$, έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} L(y) &= 0 \quad \text{με} \\ L(y) &= y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y, \end{aligned}$$

όπου για κάθε $i = 0, 1, \dots, n-1$ ισχύει $a_i \in \mathbf{K}$. Μια λύση της άνωθεν εξίσωσης εντός μιας διαφορικής επέκτασης $\mathbf{R} \supset \mathbf{K}$, είναι ένα στοιχείο $f \in \mathbf{R}$, που ικανοποιεί την εξίσωση $L(y) = 0$.

Από τη βαθμωτή γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση $L(y) = 0$ μπορεί πάντα να οριστεί μια διαφορική εξίσωση πινάκων $\mathbf{y}' = A_L\mathbf{y}$. Ο συνοδεύων πίνακας A_L της L έχει τη μορφή

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Για κάθε επέκταση διαφορικών δακτυλίων $\mathbf{R} \supset \mathbf{K}$, η απεικόνιση $y \mapsto Y = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ είναι ένας ισομορφισμός του χώρου λύσεων $\{y \in \mathbf{R} | L(y) = 0\}$ της L επί του χώρου λύσεων $\{Y \in \mathbf{R}^n | Y' = A_L Y\}$ της $Y' = A_L Y$. Άρα κάθε βαθμωτή γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση μιας διαφορικής εξίσωσης πινάκων.

Για μια βαθμωτή γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση $L(y) = 0$ τάξης n ορισμένης πάνω από το σώμα $\mathbf{K}$, ένα σύνολο λύσεων $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ αυτής, που ανήκουν σε μια διαφορική επέκταση $\mathbf{R} \supset \mathbf{K}$ με σύνολο σταθερών το $\mathbf{C}$ και είναι γραμμικώς ανεξάρτητες πάνω από το $\mathbf{C}$, είναι ένα θεμελειώδες σύνολο λύσεων της $L(y) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος λύσεων της L έχει διάσταση n πάνω από το $\mathbf{C}$ και ότι το σύνολο $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ είναι μια βάση του χώρου αυτού.

Ορισμός 1.4.4. Έστω ότι το $\mathbf{R}$ είναι ένα διαφορικό σώμα και έστω ότι $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R}$. Ο πίνακας Wronski των $y_1, \dots, y_n$ είναι ο $n \times n$ πίνακας

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα Wronski των $y_1, \dots, y_n$ θα συμβολίζεται $wr(y_1, \dots, y_n) = \det(W(y_1, \dots, y_n))$.

Λήμμα 1.4.5 ([109]). Τα στοιχεία $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbf{K}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα πάνω από το $\mathbf{C}$ αν και μόνο αν $wr(y_1, \dots, y_n) = 0$.

Απόδειξη. Υπάρχει μια μονική βαθμωτή διαφορική εξίσωση $L(y) = 0$ τάξης n πάνω από το $\mathbf{K}$, που ικανοποιείται από τα $y_1, y_2, \dots, y_n$. Θα κατασκευάσουμε την L επαγωγικά. Θέτουμε $L_1(y) = y' - \frac{y'_1}{y_1}y$, όπου ο όρος $\frac{y'_1}{y_1}$ αντικαθίσταται με μηδέν αν $y_1 = 0$. Θεωρούμε ότι η $L_m(y)$ είναι έτσι κατασκευασμένη, ώστε να ισχύει $L_m(y_i) = 0$ για $i = 1, \dots, m$. Ορίζουμε την $L_{m+1}(y) = L_m(y)' - \frac{L_m(y_{m+1})'}{L_m(y_{m+1})}L_m(y)$, όπου ο όρος $\frac{L_m(y_{m+1})'}{L_m(y_{m+1})}$ αντικαθίσταται με μηδέν αν $L_m(y_{m+1}) = 0$. Για την L_{m+1} ισχύει $L_{m+1}(y_i) = 0$ για $i = 1, \dots, m+1$. Οπότε η $L = L_n$ έχει την απαιτούμενη ιδιότητα. Οι στήλες του πίνακα Wronski είναι οι λύσεις της αντίστοιχης συνοδεύουσας διαφορικής εξίσωσης πινάκων $Y' = A_L Y$ της L , της οποίας ο χώρος λύσεων είναι ισόμορφος του χώρου λύσεων της L .

Έστω ότι $wr(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του πίνακα θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες πάνω από το $\mathbf{K}$. Από το λήμμα 1.4.1 προκύπτει ότι θα είναι γραμμικώς εξαρτημένες και πάνω από το $\mathbf{C}$. Λόγω του ισομορφισμού $y \mapsto Y = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ανάμεσα στο χώρο λύσεων της L και της $Y' = A_L Y$, οι $y_1, y_2, \dots, y_n$ θα είναι και αυτές γραμμικώς εξαρτημένες πάνω από το $\mathbf{C}$.

Αν οι $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες πάνω από το σώμα σταθερών $\mathbf{C}$, τότε η τάξη του πίνακα Wronski αυτών θα είναι μικρότερη από n , οπότε θα ισχύει $wr(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$. $\square$

1.5 Επεκτάσεις διαφορικών σωμάτων

Έστω $\mathbf{K}$ ένα διαφορικό σώμα με ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα σταθερών $\mathbf{C} \supset \mathbb{Q}$ και τα στοιχεία $y_i \notin \mathbf{K}$ $i = 1, \dots, n$. Από τη διαφορική επισύναψη των y_i στο $\mathbf{K}$, δηλαδή την επισύναψη των y_i και των παραγώγων τους, προκύπτει ο δακτύλιος $\mathbf{K}\{y_1, \dots, y_n\}$ των διαφορικών πολυωνύμων ως προς $\{y_1, \dots, y_n\}$ πάνω από το $\mathbf{K}$. Ως $\mathbf{K} \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ θα συμβολίζουμε το διαφορικό σώμα των λόγων διαφορικών πολυωνύμων ως προς τις μεταβλητές $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ των οποίων οι συντελεστές ανήκουν στο $\mathbf{K}$.

Ορισμός 1.5.1. Έστω ότι η $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πάνω από το $\mathbf{K}$, δηλαδή $A \in M(\mathbf{K}, n)$, διάστασης n . Ένα διαφορικό σώμα $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ καλείται Picard-Vessiot επέκταση του $\mathbf{K}$, για την εξίσωση αυτή, αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- (i) Το σώμα των σταθερών του $\mathbf{L}$ είναι το $\mathbf{C}$.
- (ii) Υπάρχει ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων $F \in GL(\mathbf{L}, n)$ της εξίσωσης.
- (iii) Το $\mathbf{L}$ παράγεται πάνω από το $\mathbf{K}$ από τα στοιχεία του F .

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται μια Picard-Vessiot επέκταση, που αντιστοιχεί σε μια βαθμωτή γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1.5.1)$$

που είναι ορισμένη πάνω από το $\mathbf{K}$.

Ορισμός 1.5.2. Ένα διαφορικό σώμα $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ καλείται *Picard-Vessiot επέκταση του $\mathbf{K}$* , για την εξίσωση (1.5.1), αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- (i) Το σώμα των σταθερών του $\mathbf{L}$ είναι το $\mathbf{C}$.
- (ii) $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$, όπου $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (1.5.1).

Για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ πάνω από το διαφορικό σώμα $\mathbf{K}$ διάστασης n , η ύπαρξη μιας Picard-Vessiot επέκτασης του $\mathbf{K}$ εξασφαλίζεται αν το $\mathbf{K}$ είναι χαρακτηριστικής 0 και το σώμα σταθερών $\mathbf{C}$ του $\mathbf{K}$ είναι αλγεβρικά κλειστό [61].

Κεντρικό ρόλο στις επόμενες ενότητες διαδραματίζουν δύο είδη επέκτασης, που προκύπτουν από την διαφορική επισύναψη ενός αόριστου ολοκληρώματος ή την διαφορική επισύναψη του εκθετικού ενός αόριστου ολοκληρώματος.

Λήμμα 1.5.3. [58] Έστω $\mathbf{K}$ ένα διαφορικό σώμα χαρακτηριστικής 0 με ένα σώμα σταθερών $\mathbf{C}$. Έστω u ένα στοιχείο τέτοιο ώστε $u' = a \in \mathbf{K}$. Αν το a δεν είναι η παράγωγος ενός στοιχείου του $\mathbf{K}$, τότε το u είναι υπερβατικό πάνω από το $\mathbf{K}$ και το $\mathbf{K} \langle u \rangle$ είναι μια επέκταση Picard-Vessiot.

Απόδειξη.

Έστω ότι το u είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbf{K}$ με αντίστοιχη ανάγωγη εξίσωση $u^n + b u^{n-1} + \dots = 0$, την οποία παραγωγίζουμε οπότε προκύπτει $n u^{n-1} a + b' u^{n-1} + \dots = 0$. Άρα $b' = -n a$ και το a είναι η παράγωγος του $-b/n$ που είναι άτοπο.

Για να είναι το $\mathbf{K} \langle u \rangle$ μια επέκταση Picard-Vessiot πρέπει το σώμα σταθερών του να είναι το $\mathbf{C}$ και το u πρέπει να ικανοποιεί μια γραμμική ομογενή συνήθης διαφορική εξίσωση.

Έστω ότι το πολυώνυμο $b_1 u^n + b_2 u^{n-1} + \dots$ είναι ίσο με μια σταθερά, από το οποίο παραγωγίζοντας προκύπτει $b_1' u^n + (n b_1 a + b_2') u^{n-1} + \dots = 0$. Συνεπώς, $b_1' = n b_1 a + b_2' = 0$ και το a είναι η παράγωγος του $-b_2/(n b_1)$, που είναι μια αντίφαση. Έστω ότι τα πολυώνυμα $f(u), g(u) \in \mathbf{K} \langle u \rangle$ έχουν τους μικρότερους βαθμούς ώστε το $f(u)/g(u)$ να είναι ίσο με μια σταθερά, όπου το $f(u)$ δεν είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $g(u)$ και το $g(u)$ είναι μονικό και μη-μηδενικού βαθμού. Παραγωγίζοντας προκύπτει $f'(u)/g'(u) = f(u)/g(u)$ όπου το $g'(u)$ είναι μη-μηδενικό και έχει μικρότερο βαθμό από το $g(u)$, που είναι παράδοξο. Επομένως, το σώμα σταθερών του $\mathbf{K} \langle u \rangle$ είναι το $\mathbf{C}$.

Το σύνολο $\{1, u\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της $x'' - (a'/a)x' = 0$. □

Λήμμα 1.5.4. [109] Έστω $\mathbf{K}$ ένα διαφορικό σώμα χαρακτηριστικής 0 με ένα σώμα σταθερών $\mathbf{C}$. Αν u είναι ένα στοιχείο τέτοιο ώστε $u' = a u$ για $a \in \mathbf{K}$, τότε το $\mathbf{K} \langle u \rangle$ είναι μια επέκταση Picard-Vessiot.

Απόδειξη. Η $u' = a u$, $a \in \mathbf{K}$ είναι μια γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση πάνω από το $\mathbf{K}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το σώμα σταθερών της $\mathbf{K} \langle u \rangle$ είναι το $\mathbf{C}$. Η συνέχεια της απόδειξης χωρίζεται σε δύο μέρη.

A. Έστω ότι για κάθε $l \in \mathbb{Z}^*$ το $\mathbf{K}$ δεν περιέχει κάποιο στοιχείο $z \neq 0$ που να ικανοποιεί την εξίσωση $z' = l a z$.

Έστω ότι το u είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbf{K}$ με αντίστοιχο ανάγωγο μονικό πολύωνυμο $R(u) = u^n + b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_0$ ελάχιστου βαθμού $n > 0$, όπου $b_0 \neq 0$ και $b_i \in \mathbf{K}$ για $i = 0, \dots, n-1$. Έχουμε ότι $R'(u) = n a u^n + \dots + b'_0$. Εφόσον το $R(u)$ είναι ελάχιστου βαθμού ισχύει $R'(u) = n a R(u)$, οπότε $b'_0 = n a b_0$, που είναι μια αντίφαση. Άρα το u είναι υπερβατικό πάνω από το $\mathbf{K}$.

Έστω ότι το $L(u) = s_n u^n + s_{n-1} u^{n-1} + \dots + s_0$, $s_i \in \mathbf{K}$ είναι ίσο με μια σταθερά, οπότε $L'(u) = 0$ και $s'_i + i a s_i = 0$ για $i = 1, \dots, n$, που είναι παράδοξο. Έστω ότι τα πολυώνυμα $f(u), g(u) \in \mathbf{K} < u >$ έχουν τους μικρότερους βαθμούς ώστε το $f(u)/g(u)$ να είναι ίσο με μια σταθερά, όπου το $f(u)$ δεν είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $g(u)$ και $g(u) = u^d + \dots + g_0$ με $d > 0$. Παραγωγίζοντας προκύπτει $f'(u)/g'(u) = f(u)/g(u)$ όπου $g'(u) = d a u^d + (g'_{n-1} + (n-1) a g_{n-1})u^{n-1} + \dots + g'_0$. Εφόσον τα $g(u), f(u)$ είναι ελάχιστου βαθμού προκύπτει $g'(u) = d a g(u)$, $f'(u) = d a f(u)$ που είναι άτοπο. Επομένως, το σώμα σταθερών του $\mathbf{K} < u >$ είναι το $\mathbf{C}$.

B. Έστω n ο μικρότερος θετικός ακέραιος, τέτοιος ώστε να υπάρχει ένα $z \in \mathbf{K}$ με $z \neq 0$ που να ικανοποιεί την εξίσωση $z' = n a z$. Ο αντίστροφος $z_{-1} \in \mathbf{K}$ του z θα ικανοποιεί την εξίσωση $z'_{-1} = -n a z_{-1}$, οπότε ο $-n$ θα είναι ο μεγαλύτερος αρνητικός ακέραιος, τέτοιος ώστε να υπάρχει ένα $z_* \in \mathbf{K}$ με $z_* \neq 0$ που να ικανοποιεί την εξίσωση $z'_* = -n a z_*$.

Η u^n ικανοποιεί την εξίσωση $(u^n)' = n a u^n$, άρα $u^n \in \mathbf{K}$ και το u είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbf{K}$. Τα πολυώνυμα του $\mathbf{K} < u >$ έχουν τη μορφή $b_d u^d + \dots + b_0$ όπου $0 \leq d < n$ και $b_i \in \mathbf{K}$ για $i = 0, \dots, d$. Με μεθόδους όμοιες με αυτές της περίπτωσης A αποδεικνύεται ότι το σώμα σταθερών του $\mathbf{K} < u >$ είναι το $\mathbf{C}$. $\square$

Έστω ένα διαφορικό σώμα $\mathbf{K}$ με ένα σώμα σταθερών $\mathbf{C}$.

Ορισμός 1.5.5. Μια επέκταση $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ διαφορικών σωμάτων καλείται επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$, αν το σώμα σταθερών της $\mathbf{L}$ είναι το $\mathbf{C}$ και αν υπάρχει μια πεπερασμένη σειρά σωμάτων $\mathbf{K} = \mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}_1 \subset \dots \subset \mathbf{L}_n = \mathbf{L}$, τέτοια ώστε να ισχύει $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{i-1} < t_i >$ για $i = 1, \dots, n$, όπου

- (i) ή $t'_i \in \mathbf{L}_{i-1}$, δηλαδή το t_i είναι το αόριστο ολοκλήρωμα ενός στοιχείου του $\mathbf{L}_{i-1}$,
- (ii) ή $t_i \neq 0$ και $t'_i/t_i \in \mathbf{L}_{i-1}$, δηλαδή το t_i είναι το εκθετικό του αόριστου ολοκληρώματος ενός στοιχείου του $\mathbf{L}_{i-1}$,
- (iii) ή το t_i είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbf{L}_{i-1}$.

Παράδειγμα 1.5.6. Έστω $E : L(y) = 0$ μια γραμμική συνήθης ομογενής διαφορική εξίσωση πάνω από το διαφορικό σώμα $\mathbf{K}$ με σώμα σταθερών το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ και $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ η επέκταση Picard-Vessiot της E . Θεωρούμε ότι $y = y(z)$ και συμβολίζουμε με y' την παράγωγο της συνάρτησης y ως προς z .

1. Για $L(y) = y''$ η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{1, z\}$. Αν $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ τότε $\mathbf{L} = \mathbf{K} < 1, z > = \mathbb{C}(z)$, όπου $\mathbb{C}(z)$ είναι το διαφορικό σώμα των ρητών μιγαδικών συναρτήσεων. Η $\mathbf{L}$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$ επειδή $z' = 1 \in \mathbf{K}$.

2. Για $L(y) = z y'' + y'$ η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{1, \ln(z)\}$. Αν $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z)$ τότε $\mathbf{L} = \mathbf{K} < 1, \ln(z) > = \mathbb{C}(z) < \ln(z) >$, δηλαδή η $\mathbf{L}$ αποτελείται από ρητές

συναρτήσεις ως προς $\ln(z)$ πάνω από το $\mathbb{C}(z)$. Η $\mathbf{L}$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$ επειδή $\ln(z)' = 1/z \in \mathbf{K}$.

3. Για $L(y) = z^2 y'' + \frac{1}{4}y$ η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{\sqrt{z}, \sqrt{z} \ln(z)\}$. Αν $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z)$ τότε $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle \sqrt{z}, \sqrt{z} \ln(z) \rangle = \mathbb{C}(z) \langle \sqrt{z}, \ln(z) \rangle$, δηλαδή η $\mathbf{L}$ αποτελείται από ρητές συναρτήσεις ως προς $\sqrt{z}, \ln(z)$ πάνω από το $\mathbb{C}(z)$. Η $\mathbf{L}$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$ επειδή $\ln(z)' = 1/z \in \mathbf{K}$ και η $\sqrt{z}$ είναι αλγεβρική πάνω από το $\mathbb{C}(z)$.

4. Για $L(y) = y'' - k^2 y$, $k \in \mathbb{C}^*$ η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{\exp(kz), \exp(-kz)\}$. Αν $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ τότε $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle \exp(kz), \exp(-kz) \rangle = \mathbb{C} \langle \exp(kz) \rangle$, δηλαδή η $\mathbf{L}$ αποτελείται από ρητές μιγαδικές συναρτήσεις ως προς $\exp(kz)$. Η $\mathbf{L}$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$ επειδή $\exp(kz)' = k \exp(kz)$.

5. Αν $L(y) = y'' + a_1(z)y' + a_2(z)y$ με $a_i \in \mathbf{K}$ και $y_1(z)$ είναι μια λύση της E , τότε η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{y_1(z), y_1(z) \int y_1(z)^{-2} \exp(-\int a_1(z)dz)dz\}$ και $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle y_1(z), y_2(z) \rangle$, όπου $y_2(z) = y_1(z) \int y_1(z)^{-2} \exp(-\int a_1(z)dz)dz$. Θεωρούμε τις επεκτάσεις $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2 \subset \mathbf{K}_3$, όπου $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K} \langle y_1(z) \rangle$, $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1 \langle \exp(\int a_1(z)dz) \rangle$, $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_2 \langle \int y_1(z)^{-2} \exp(-\int a_1(z)dz)dz \rangle$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}_3$ και η $\mathbf{K}_3$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}_1$. Άρα αν η $y_1(z)$ περιέχεται σε μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$, τότε η $\mathbf{L}$ περιέχεται σε μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$.

1.6 Διαφορική ομάδα Galois

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε ότι το $\mathbf{K}$ είναι ένα διαφορικό σώμα χαρακτηριστικής 0 με ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα σταθερών $\mathbf{C}$. Έστω $\mathbf{L}$ μια επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$.

Ορισμός 1.6.1. Η διαφορική ομάδα Galois $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι η ομάδα όλων των διαφορικών αυτομορφισμών του $\mathbf{L}$, που ο περιορισμός τους στο $\mathbf{K}$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ πάνω από το $\mathbf{K}$ διάστασης n και τον αντίστοιχο θεμελειώδη πίνακα F . Εφόσον η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ αντιμετατίθεται με τη διαφορίση και αφήνει αναλλοίωτα τα στοιχεία του $\mathbf{K}$, προκύπτει για κάθε $g \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ ότι $g(F)' = Ag(F)$. Άρα $g(F) = F G_g$ για κάποιο $G_g \in GL(\mathbf{C}, n)$ και η απεικόνιση $g \mapsto G_g$ είναι ένας αμφιμονοσήμαντος ομομορφισμός ομάδων, οπότε μπορούμε να ταυτοποιήσουμε την g με την G_g . Αν F_2 είναι ένας άλλος θεμελειώδης πίνακας, τότε ισχύει $g(F_2) = B g(F) B^{-1}$ για κάποιο $B \in GL(\mathbf{C}, n)$.

Ορισμός 1.6.2. Μια υποομάδα της $GL(\mathbf{C}, n)$ καλείται γραμμική αλγεβρική αν τα στοιχεία των πινάκων της είναι οι ρίζες ενός συστήματος πολυωνύμων ως προς n^2 μεταβλητές.

Αν $F = (f_{ij})$ για $i, j = 1, \dots, n$ τότε η Picard-Vessiot επέκταση $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle f_{11}, \dots, f_{nn} \rangle$ του $\mathbf{K}$ αποτελείται από ρητές παραστάσεις ως προς τα $\{f_{11}, \dots, f_{nn}\}$. Αν $I \subset \mathbf{L}$ είναι το σύνολο των πολυωνύμων P με την ιδιότητα $P(f_{11}, \dots, f_{nn}) = 0$, τότε για κάθε $P \in I$ και $g = (c_{ij}) \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \subset GL(\mathbf{C}, n)$ ισχύει $g(P(f_{11}, \dots, f_{nn})) = 0 \Rightarrow P(g(f_{11}), \dots, g(f_{nn})) = 0 \Rightarrow P(\sum c_{i1} f_{1i}, \dots, \sum c_{in} f_{ni}) = 0$. Το σύνολο S , των συντελεστών των μονώνυμων ως προς $f_{11}, \dots, f_{nn}$ των $g(P(f_{11}, \dots, f_{nn}))$ για κάθε $P \in I$, αποτελείται από πολυώνυμα ως προς $c_{11}, \dots, c_{nn}$ πάνω από το $\mathbf{C}$.

Θεώρημα 1.6.3. [60] Η διαφορική ομάδα Galois $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι μια γραμμική αλγεβρική ομάδα, της οποίας η διάσταση είναι ίση με το βαθμό υπερβατικότητας της $\mathbf{L}$ πάνω από το $\mathbf{K}$.

Σχόλιο 1.6.4. Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν τα στοιχεία f_{ij} του $F = (f_{ij})$ για $i, j = 1, \dots, n$ είναι αλγεβρικά πάνω από το $\mathbf{K}$, οπότε η $\mathbf{L}$ είναι μια αλγεβρική επέκταση του $\mathbf{K}$.

Το σύνολο ριζών $R(S)$ του προαναφερόμενου S καλείται αφινική ποικιλία (affine variety) του S και κάθε στοιχείο $(c_{11}, \dots, c_{nn}) \in R(S)$ αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο $g = (c_{ij}) \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \subset GL(\mathbf{C}, n)$. Η ένωση πεπερασμένου πλήθους ή η τομή (πεπερασμένου πλήθους ή μη) αφινικών ποικιλιών είναι αφινική ποικιλία. Οι αφινικές ποικιλίες είναι τα κλειστά σύνολα της αποκαλούμενης τοπολογίας του Zariski. Θα αποκαλούμε ένα υποσύνολο $Q \subset G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ “κλειστό” (“συνεκτικό”), αν αντιστοιχεί σε μια αφινική ποικιλία που είναι κλειστή (συνεκτική) ως προς την τοπολογία του Zariski. Αντίστοιχα ορίζεται και η κλειστή θήκη $\bar{Q}$ του Q . Από το θεώρημα βάσης του Hilbert [27, 67] προκύπτει ότι το $R(S)$ είναι η ένωση πεπερασμένου πλήθους ανοικτών και κλειστών, ξένων ανά δύο, συνεκτικών συνιστώσων ως προς την τοπολογία του Zariski.

Ορισμός 1.6.5. Έστω $R(S)^0 \subset R(S)$ η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει το στοιχείο που αντιστοιχεί στο ταυτοτικό στοιχείο $\mathbf{1}$ της $G(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \subset GL(\mathbf{C}, n)$. Η ταυτοτική συνιστώσα G^0 (identity component) είναι το υποσύνολο της $G(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \subset GL(\mathbf{C}, n)$ που αντιστοιχεί στη $R(S)^0$.

Για κάθε $a, b \in GL(\mathbf{C}, n)$ οι απεικονίσεις $a \mapsto a^{-1}$, $(a, b) \mapsto ab$ είναι συνεχείς ως προς την τοπολογία του Zariski.

Λήμμα 1.6.6. [60] Η G^0 είναι μια κανονική υποομάδα της $G(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \subset GL(\mathbf{C}, n)$ πεπερασμένου δείκτη

Απόδειξη. Το σύνολο των αντίστροφων στοιχείων $(G^0)^{-1}$ της G^0 είναι συνεκτικό, ως εικόνα ενός συνεκτικού συνόλου, και περιέχει το $\mathbf{1}$, οπότε $(G^0)^{-1} \subseteq G^0$. Για κάθε $g \in G^0$ το σύνολο gG^0 είναι συνεκτικό και έχει το g ως κοινό στοιχείο με τη G^0 , άρα $gG^0 \subseteq G^0$. Άρα η G^0 είναι υποομάδα. Για κάθε $x \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$, το σύνολο $x^{-1}G^0x$ είναι συνεκτικό και έχει κοινό στοιχείο με την G^0 το $\mathbf{1}$, άρα $x^{-1}G^0x \subseteq G^0$ και η G^0 είναι κανονική υποομάδα. Τα σύμπλοκα της G^0 είναι συνεκτικά και αντιστοιχούν στις (πεπερασμένου πλήθους) συνεκτικές συνιστώσες της αφινικής ποικιλίας $R(S)$. $\square$

Αν H είναι μια υποομάδα της $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ ορίζουμε ως $\mathbf{L}^H$ το σύνολο $\mathbf{L}^H = \{l \in \mathbf{L} : g(l) = l \text{ για κάθε } g \in H\}$. Αντίστοιχα αν $M \subset \mathbf{L}$ ορίζουμε ως $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})^M$ το σύνολο $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})^M = \{g \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K}) : g(m) = m \text{ για κάθε } m \in M\}$. Το επόμενο θεώρημα απεδείχθη από τον E.R. Kolchin και αποκαλείται το θεμελιώδες θεώρημα της διαφορικής θεωρίας Galois ή το θεώρημα της αντιστοιχίας Galois (Galois correspondence) για διαφορικά σώματα.

Θεώρημα 1.6.7. [60] Έστω $\mathbf{L}$ μια επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$ με αντίστοιχη διαφορική ομάδα Galois $G = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$.

1. Αν $l \in \mathbf{L}$ είναι τέτοιο ώστε $G^l = G$, τότε $l \in \mathbf{K}$.
2. Αν H είναι μια αλγεβρική υποομάδα της G τέτοια ώστε $\mathbf{L}^H = \mathbf{K}$, τότε $H = G$.
3. Υπάρχει η παρακάτω 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα στις κλειστές κανονικές υποομάδες $H \subset G$ και τα διαφορικά υποσώματα $\mathbf{M}$, $\mathbf{K} \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{L}$,

$$\begin{aligned} H &\mapsto \mathbf{L}^H = \mathbf{M} \\ \mathbf{M} &\mapsto G(\mathbf{L}/\mathbf{M}) = G^{\mathbf{M}} = H. \end{aligned}$$

4. Ένα διαφορικό υπόσωμα $\mathbf{M}$, $\mathbf{K} \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{L}$, είναι μια επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$ αν και μόνο αν η $G(\mathbf{L}/\mathbf{M})$ είναι μια κλειστή κανονική υποομάδα της G . Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει $G(\mathbf{M}/\mathbf{K}) = G/G(\mathbf{L}/\mathbf{M})$.

Σχόλιο 1.6.8. Η G^0 είναι μια κλειστή, πεπερασμένου δείκτη, κανονική υποομάδα της $G = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$. Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι η $\mathbf{L}^{G^0}$, όπου $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}^{G^0} \subset \mathbf{L}$, είναι μια επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$ και $G^0 = G(\mathbf{L}/\mathbf{L}^{G^0})$, $G(\mathbf{L}^{G^0}/\mathbf{K}) = G/G^0$. Η G/G^0 είναι πεπερασμένη άρα διάστασης 0, οπότε από το θεώρημα 1.6.3 προκύπτει ότι η $\mathbf{L}^{G^0}/\mathbf{K}$ είναι μια αλγεβρική επέκταση. Αν η $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ είναι μια υπερβατική επέκταση τότε $\mathbf{L}^{G^0} = \mathbf{K}$, $G = G^0$ και αυτή είναι η μόνη περίπτωση όπου η G είναι συνεκτική. Αν η $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ είναι μια αλγεβρική επέκταση τότε $\mathbf{L}^{G^0} = \mathbf{L}$, $G^0 = \{1\}$ και αυτή είναι η μόνη περίπτωση όπου η G είναι πεπερασμένη και συμπίπτει με την (αλγεβρική) ομάδα Galois της $\mathbf{L}/\mathbf{K}$.

Σχόλιο 1.6.9. Αν H είναι μια υποομάδα της $G = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$, τότε από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι $\overline{H} = G$ αν και μόνο αν $\mathbf{L}^H = \mathbf{K}$.

Λήμμα 1.6.10. [58] Έστω $\mathbf{K}$ ένα διαφορικό σώμα χαρακτηριστικής 0 με ένα σώμα σταθερών $\mathbf{C}$. Έστω u ένα στοιχείο τέτοιο ώστε $u' = a \in \mathbf{K}$. Αν το a δεν είναι η παράγωγος ενός στοιχείου του $\mathbf{K}$, τότε το u είναι υπερβατικό πάνω από το $\mathbf{K}$ και το $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle u \rangle$ είναι μια επέκταση Picard-Vessiot. Η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα του $\mathbf{C}$.

Απόδειξη. Στο λήμμα 1.5.4 αποδείξαμε ότι η $\mathbf{L}$ είναι μια επέκταση Picard-Vessiot, που αντιστοιχεί στην εξίσωση $x'' - (a'/a)x' = 0$. Η βάση του χώρου των λύσεων της τελευταίας έχει τη μορφή $\{1, u\}$ οπότε για κάθε $g \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ ισχύει $g(u) = a_1 u + a_2$ για $a_1, a_2 \in \mathbf{C}$. Ισχύει ότι $g'(u) = (a_1 u + a_2)' = a_1 a$ και $g'(u) = g(u') = g(a) = a$, άρα $a_1 = 1$. Η απεικόνιση $u \mapsto u + c$ επάγει έναν αυτομορφισμό του $\mathbf{L}$, ο οποίος είναι διαφορικός αυτομορφισμός διότι $g'(P) = g'(\sum_{i=0}^d b_i u^i) = \sum_{i=0}^d (b_i (u + c)^i)' = \sum_{i=0}^d b'_i (u + c)^i + i b_i (u + c)^{i-1} a = g(P')$. Για κάθε $g_1, g_2 \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ ισχύει $g_1(g_2(u)) = u + c_1 + c_2$ και η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι ισόμορφη με την

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbf{C} \right\}.$$

□

Στο παραπάνω λήμμα ισχύει $G^0 = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ εφόσον η $\mathbf{K} \langle u \rangle$ είναι μια υπερβατική επέκταση του $\mathbf{K}$. Η διάσταση της $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι 1. Παρατηρούμε ότι η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι αντιμεταθετική.

Λήμμα 1.6.11. [109] Έστω $\mathbf{K}$ ένα διαφορικό σώμα χαρακτηριστικής 0 με ένα σώμα σταθερών $\mathbf{C}$. Αν u είναι ένα στοιχείο τέτοιο ώστε $u' = a u$ για $a \in \mathbf{K}$, τότε η $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle u \rangle$ είναι μια επέκταση Picard-Vessiot. Η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι ισόμορφη είτε με την πολλαπλασιαστική ομάδα του $\mathbf{C}$ είτε με την $\{c \in \mathbf{C} : c^n = 1\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Στο λήμμα 1.5.4 δείξαμε ότι η $\mathbf{L}$ είναι μια επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$. Για κάθε $g \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ ισχύει $g(u) = c u$ όπου $c \in \mathbf{C}^*$. Αν το u είναι υπερβατικό πάνω από το $\mathbf{K}$ τότε η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbf{C}^*$ της $\mathbf{C}$. Αν το u είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbf{K}$ τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n που είναι ο μικρότερος ως προς την ιδιότητα $u^n \in \mathbf{K}$. Σε αυτή την περίπτωση για κάθε $g \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ ισχύει $g(u^n) = u^n \Rightarrow c^n u^n = u^n \Rightarrow c^n = 1$ και η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι ισόμορφη με το σύνολο $\{c \in \mathbf{C} : c^n = 1\}$. □

Στο παραπάνω λήμμα αν το u είναι υπερβατικό πάνω από το $\mathbf{K}$ τότε ισχύει $G^0 = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ και η διάσταση της $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι 1. Αν το u είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbf{K}$ τότε ισχύει $G^0 = \{1\}$ και η διάσταση της $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι 0. Σε κάθε περίπτωση η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι αντιμεταθετική.

Ορισμός 1.6.12. Μια ομάδα G καλείται επιλύσιμη αν έχει μια κανονική σειρά

$$e = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G,$$

τέτοια ώστε όλες οι ομάδες πηλίκα G_{i+1}/G_i να είναι αντιμεταθετικές.

Αν η ομάδα G είναι αντιμεταθετική, τότε η G είναι επιλύσιμη.

Θεώρημα 1.6.13. [58] Έστω $\mathbf{L}$ μια επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$, τέτοια ώστε $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}_1 \subset \dots \subset \mathbf{K}_n = \mathbf{L}$ και για κάθε $i = 0, 1, \dots, n-1$ να ισχύει $\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{K}_i \langle t_{i+1} \rangle$ με $t'_{i+1} = a_i$ ή $t'_{i+1} = a_i t_{i+1}$ για $a_i \in \mathbf{K}_i$. Τότε η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι επιλύσιμη.

Απόδειξη. Απο το θεώρημα 1.6.7 προκύπτει ότι η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ έχει μια κανονική σειρά $\mathbf{1} = G(\mathbf{L}/\mathbf{K}_n) \subset G(\mathbf{L}/\mathbf{K}_{n-1}) \subset \dots \subset G(\mathbf{L}/\mathbf{K}_1) \subset G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ και $G(\mathbf{K}_{i+1}/\mathbf{K}_i) = G(\mathbf{L}/\mathbf{K}_i)/G(\mathbf{L}/\mathbf{K}_{i+1})$ για $i = 0, 1, \dots, n-1$. Από τα λήμματα 1.6.10, 1.6.11 προκύπτει ότι οι $G(\mathbf{K}_{i+1}/\mathbf{K}_i)$ είναι αντιμεταθετικές, οπότε η $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι επιλύσιμη. $\square$

Αν η $\mathbf{L}$ είναι όπως παραπάνω και για κάποια i η αντίστοιχη $\mathbf{K}_{i+1}$ είναι μια αλγεβρική επέκταση του $\mathbf{K}_i$, τότε η $\mathbf{L}$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$.

Θεώρημα 1.6.14. [60] Έστω $\mathbf{L}$ μια επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$. Η ταυτοτική συνιστώσα της $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η $\mathbf{L}$ είναι (ή περιέχεται σε) μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$.

Έστω $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ ένα σύστημα $n \in \mathbb{N}$ διαφορικών εξισώσεων πάνω από ένα διαφορικό σώμα $\mathbf{K}$ με σώμα σταθερών $\mathbf{C}$. Αν $\mathbf{L}$ είναι η αντίστοιχη επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$ με διαφορική ομάδα Galois $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $G(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \subset GL(\mathbf{C}, n)$.

Πρόταση 1.6.15. [109] Αν $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ είναι όπως παραπάνω και F είναι ένας θεμελιώδης πίνακας του $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, τότε $G(\mathbf{L}/\mathbf{K}) \subset SL(\mathbf{C}, n)$ αν και μόνο αν $\det(F) \in \mathbf{K}$ και $\det(F) \in \mathbf{K}$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη-μηδενικό $u \in \mathbf{K}$ τέτοιο ώστε $u' = \text{tr}(A)u$.

Απόδειξη. Για κάθε $g \in G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ ισχύει $g(F) = FC_g$ με $C_g \in GL(\mathbf{C}, n)$. Θεωρώντας τις ορίζουσες της προηγούμενης ισότητας προκύπτει $g(\det(F)) = \det(F) \det(C_g)$, οπότε $\det(F) \in \mathbf{K}$ αν και μόνο αν $\det(C_g) = 1$. Από τη σχέση $F' = AF$ προκύπτει $\det(F)' = \text{tr}(A) \det(F)$ και η δεύτερη ικανή και αναγκαία συνθήκη της πρότασης επάγεται άμεσα. $\square$

Από την παραπάνω πρόταση έπεται ότι η διαφορική ομάδα Galois G της εξίσωσης $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$, με $a_i \in \mathbf{K}$ για $i = 0, 1, \dots, n-1$, είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της $SL(\mathbf{C}, n)$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη-μηδενικό $u \in \mathbf{K}$ τέτοιο ώστε $u' = -a_{n-1}u$. Άρα για $a_{n-1} = 0$ ισχύει $G \subset SL(\mathbf{C}, n)$. Οπότε για $n = 2$ και $a_1 = 0$ προκύπτει, για τις εξισώσεις της μορφής $u'' + a_0u = 0$, ότι $G \subset SL(\mathbf{C}, 2)$.

Ο E.R. Kolchin [60] απέδειξε ότι μια συνεκτική αλγεβρική ομάδα πινάκων είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν ανάγεται σε τριγωνική μορφή. Το παρακάτω θεώρημα απεδείχθη από τον I. Kaplansky.

Θεώρημα 1.6.16 ([58]). Έστω ότι η $G \subset SL(\mathbf{C}, 2)$ είναι μια αλγεβρική ομάδα ορισμένη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα $\mathbf{C}$. Αν η ταυτοτική συνιστώσα G^0 της G είναι επιλύσιμη, τότε τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω ισχύει:

(i) $H G$ είναι πεπερασμένη.

(ii) $H G^0$ ανάγεται σε διαγώνια μορφή και $[G : G^0] = 2$,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & -v^{-1} \\ v & 0 \end{pmatrix} : a, v \in \mathbf{C} \text{ και } a, v \neq 0 \right\}$$

(iii) $H G$ ανάγεται σε τριγωνική μορφή.

Απόδειξη. Στην περίπτωση όπου η G^0 είναι πεπερασμένη, από το λήμμα 1.6.6 προκύπτει ότι και η G θα είναι πεπερασμένη.

Στη συνέχεια διερευνούμε την περίπτωση όπου η G^0 δεν είναι πεπερασμένη.

Έστω ότι η G^0 ανάγεται σε διαγώνια μορφή. Σε αυτή την περίπτωση, με την επιλογή μιας κατάλληλης βάσης, τα στοιχεία της G^0 ανάγονται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Έστω W ο χώρος που παράγεται από τα κοινά ιδιοδιανύσματα των στοιχείων της G^0 και $\mathbf{u}$ ένα από τα κοινά ιδιοδιανύσματα. Για το $\mathbf{u}$ ισχύει ότι $T\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}$ για κάθε $T \in G^0$. Εφόσον η G^0 είναι κανονική υποομάδα της G ισχύει ότι $S^{-1}TS \in G^0$ για κάθε $S \in G$, άρα θα έχουμε $S^{-1}TS\mathbf{u} = c_2\mathbf{u}$ και $TS\mathbf{u} = c_2S\mathbf{u}$. Οπότε τα κοινά ιδιοδιανύσματα της G^0 μετασχηματίζονται σε κοινά ιδιοδιανύσματα της G^0 , υπό τη δράση της G , δηλαδή η G αφήνει αναλλοίωτο τον W . Άρα κάθε στοιχείο της G αφήνει αναλλοίωτους ή μεταθέτει τους μονοδιάστατους χώρους που παράγονται από τα διανύσματα της βάσης, οπότε ο δείκτης της G^0 μέσα στη G θα είναι 1 ή 2 αντιστοίχως.

Υπάρχει άλλη μια περίπτωση κατά την οποία η G^0 δεν ανάγεται σε διαγώνια μορφή. Ως συνεκτική επιλύσιμη αλγεβρική ομάδα θα ανάγεται σε τριγωνική μορφή, άρα θα έχει μόνο ένα κοινό ιδιοδιάνυσμα. Αυτό θα πρέπει να είναι αναλλοίωτο ως προς τη δράση της G , οπότε η G θα ανάγεται σε τριγωνική μορφή. $\square$

Παράδειγμα 1.6.17. Έστω $E : L(y) = 0, y' = \frac{dy}{dz}$ μια γραμμική συνήθης ομογενής διαφορική εξίσωση πάνω από το διαφορικό σώμα $\mathbf{K}$ με σώμα σταθερών το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Έστω $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ η επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$, $G = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ η αντίστοιχη διαφορική ομάδα Galois και G^0 η ταυτοτική συνιστώσα της G .

1. Για $L(y) = y''$ η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{1, z\}$ και η $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle 1, z \rangle = \mathbb{C}(z)$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ επειδή $z' = 1 \in \mathbf{K}$, οπότε η G^0 είναι επιλύσιμη. Ο συντελεστής του όρου y' είναι 0, συνεπώς $G \subset SL(\mathbb{C}, 2)$. Το z είναι υπερβατικό πάνω από το $\mathbf{K}$, επομένως $G = G^0$. Για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$g(z)' = g(z') = g(1) = 1 \Rightarrow g(z)' = 1 \Rightarrow g(z) = z + c,$$

άρα

$$G = G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Αν επιλέξουμε $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z)$ τότε $\mathbf{L} = \mathbf{K}$ και $g(z) = z$ για κάθε $g \in G$, οπότε $G = G^0 = I_2$.

2. Για $L(y) = z y'' + y'$ η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{1, \ln(z)\}$ και η $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle 1, \ln(z) \rangle = \mathbb{C}(z) \langle \ln(z) \rangle$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z)$ επειδή $\ln(z)' = 1/z \in \mathbf{K}$, οπότε η G^0 είναι επιλύσιμη. Η $\ln(z)$ είναι υπερβατική πάνω από το $\mathbf{K}$, συνεπώς $G = G^0$. Εφόσον $\exp(-\int 1/z dz) = 1/z \in \mathbf{K}$ θα ισχύει $G \subset SL(\mathbf{K}, 2)$. Για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$g(\ln(z))' = g(\ln(z)') = g(1/z) = 1/z \Rightarrow g(\ln(z))' = 1/z \Rightarrow g(\ln(z)) = \ln(z) + c,$$

άρα

$$G = G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}.$$

3. Για $L(y) = z^2 y'' + \frac{1}{4}y$ η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{\sqrt{z}, \sqrt{z} \ln(z)\}$ και η $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle \sqrt{z}, \sqrt{z} \ln(z) \rangle = \mathbb{C}(z) \langle \sqrt{z}, \ln(z) \rangle$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z)$ επειδή $\ln(z)' = 1/z \in \mathbf{K}$ και η $\sqrt{z}$ είναι αλγεβρική πάνω από το $\mathbb{C}(z)$, άρα η G^0 είναι επιλύσιμη. Ο συντελεστής του όρου y' είναι 0, συνεπώς $G \subset SL(\mathbb{C}, 2)$. Η $\sqrt{z}$ είναι αλγεβρική πάνω από το $\mathbf{K}$, οπότε $G^0 \subset G$. Για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$g(\sqrt{z})' = g(\sqrt{z}') = \frac{1}{2}g(\sqrt{z})^{-1} \Rightarrow 2g(\sqrt{z})g(\sqrt{z})' = 1 \Rightarrow g(\sqrt{z})^2 = z + b \Rightarrow g(\sqrt{z}) = \pm\sqrt{z+b}.$$

Εφόσον η $g(\sqrt{z})$ είναι μια λύση της E προκύπτει $b = 0$, άρα $g(\sqrt{z}) = \pm\sqrt{z}$. Από το προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι $g(\ln(z)) = \ln(z) + c$, άρα $g(\sqrt{z} \ln(z)) = \pm\sqrt{z} \ln(z) \pm \tilde{c} \sqrt{z} = \pm\sqrt{z} \ln(z) + c \sqrt{z}$ και

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & c \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}, \quad G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Αν επιλέξουμε $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z) \langle \sqrt{z} \rangle$ τότε $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle \sqrt{z}, \sqrt{z} \ln(z) \rangle = \mathbf{K} \langle \ln(z) \rangle$ και

$$G = G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}.$$

4. Για $L(y) = y'' - k^2 y$, $k \in \mathbb{C}^*$ η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{\exp(kz), \exp(-kz)\}$ και η $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle \exp(kz), \exp(-kz) \rangle = \mathbb{C}(z) \langle \exp(kz) \rangle$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z)$ επειδή $\exp(kz)' = k \exp(kz)$, οπότε η G^0 είναι επιλύσιμη. Ο συντελεστής του όρου y' είναι 0, συνεπώς $G \subset SL(\mathbb{C}, 2)$. Η $\exp(kz)$ είναι υπερβατική πάνω από το $\mathbf{K}$, επομένως $G = G^0$. Για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$g(\exp(kz))' = k g(\exp(kz)) \Rightarrow g(\exp(kz)) = c_1 \exp(kz), \quad c_1 \in \mathbb{C}^*$$

$$g(\exp(-kz))' = -k g(\exp(-kz)) \Rightarrow g(\exp(-kz)) = c_2 \exp(-kz), \quad c_2 \in \mathbb{C}^*.$$

Από τη σχέση $g(\exp(kz) \exp(-kz)) = g(1) = 1$ προκύπτει $c_1 c_2 = 1$, οπότε

$$G = G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

5. Για $L(y) = y'' + \frac{16z^2-3}{16z^2}y$, η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\mathbf{u}(z) = \{z^{1/4} \exp(2\sqrt{z}), z^{1/4} \exp(-2\sqrt{z})\}$. Η $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle z^{1/4} \exp(2\sqrt{z}), z^{1/4} \exp(-2\sqrt{z}) \rangle = \mathbb{C}(z) \langle z^{1/4}, \exp(2\sqrt{z}) \rangle$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z)$ επειδή η $z^{1/4}$ είναι αλγεβρική πάνω από το $\mathbb{C}(z)$ και $\exp(2\sqrt{z})' = z^{-1/2} \exp(2\sqrt{z})$ όπου $z^{-1/2} \in \mathbb{C}(z) \langle z^{1/4} \rangle$, οπότε η G^0 είναι επιλύσιμη. Ο συντελεστής του όρου y' είναι 0, συνεπώς $G \subset SL(\mathbb{C}, 2)$. Η $z^{1/4}$ είναι αλγεβρική πάνω από το $\mathbf{K}$, επομένως $G^0 \subset G$. Για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$\begin{aligned} g(z^{1/4})^4 &= z \Rightarrow g(z^{1/4}) = c_4 z^{1/4}, \quad c_4^4 = 1 \\ g(\sqrt{z})^2 &= z \Rightarrow g(\sqrt{z}) = \pm\sqrt{z} \\ g(\exp(2\sqrt{z}))' &= \pm z^{-1/2} g(\exp(2\sqrt{z})) \Rightarrow \\ g(\exp(2\sqrt{z})) &= c \exp(\pm 2\sqrt{z}) \Rightarrow g(\exp(-2\sqrt{z})) = c^{-1} \exp(\mp 2\sqrt{z}), \quad c \in \mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v^{-1} & 0 \end{pmatrix} : c, v \in \mathbb{C}^* \right\}, \quad G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Αν επιλέξουμε $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z) \langle z^{1/4} \rangle$ τότε $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle z^{1/4} \exp(2\sqrt{z}), z^{1/4} \exp(-2\sqrt{z}) \rangle = \mathbb{C}(z) \langle \exp(2\sqrt{z}) \rangle$ και

$$G = G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

1.7 Μονόδρομη ομάδα

Έστω U ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο της μιγαδικής σφαίρας $\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Θεωρούμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων $Y' = AY$, με A έναν $n \times n$ πίνακα με στοιχεία που είναι μερόμορφες συναρτήσεις στο U . Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ για κάθε σημείο $p \in U$. Αυτές οι λύσεις παράγουν ένα n -διάστατο χώρο V_p . Αν ορίσουμε τον πίνακα F_p ως τον πίνακα που έχει ως στήλες τα διανύσματα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$, τότε ο F_p είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της εξίσωσης. Το ερώτημα που μπορεί να τεθεί είναι αν υπάρχει σε όλο το U ένας χώρος λύσεων με διάσταση n .

Το βασικό εργαλείο για την απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι η αναλυτική συνέχιση. Έστω $p, q \in U$ και λ ένας δρόμος από το p στο q που κείται στο U , δηλαδή μια συνεχής απεικόνιση $\lambda : [0, 1] \rightarrow U$ με $\lambda(0) = p$ και $\lambda(1) = q$. Για κάθε σημείο $\lambda(t)$ αυτού του δρόμου, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο $O_{\lambda(t)} \subset U$ και ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων $F_{\lambda(t)}$ του οποίου τα στοιχεία συγχλίνουν στο $O_{\lambda(t)}$. Από τη συμπίεση του διαστήματος $[0, 1]$ έπεται η συμπίεση του δρόμου, οπότε μπορούμε να τον καλύψουμε με πεπερασμένο πλήθος από αυτά τα ανοικτά σύνολα, $\{O_{\lambda(t_i)}\}$, με $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$. Οι απεικονίσεις, που παράγονται από την αντιστοίχιση των στηλών του $F_{\lambda(t_i)}$ με αυτές του $F_{\lambda(t_{i+1})}$, είναι $\mathbb{C}$ -γραμμικές αμφιμονοσήμαντες και επί απεικονίσεις ανάμεσα στους χώρους $V_{\lambda(t_i)}$ και $V_{\lambda(t_{i+1})}$. Οπότε παράγεται μια $\mathbb{C}$ -γραμμική, αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση $V_p \rightarrow V_q$, που προκύπτει ότι εξαρτάται μόνο από την κλάση ομοτοπίας του δρόμου λ . Η απεικόνιση αυτή καλείται αναλυτική συνέχιση κατά μήκος του λ .

Για την ειδική περίπτωση όπου $\lambda(0) = \lambda(1) = p$ προκύπτει ένας ισομορφισμός $M(\lambda) : V_p \rightarrow V_p$. Το σύνολο όλων των κλάσεων ομοτοπίας των δρόμων, με αρχή και τέλος το σημείο p , καλείται θεμελιώδης ομάδα ομοτοπίας και συμβολίζεται $\pi_1(U, p)$. Η δομή ομάδας στην $\pi_1(U, p)$ προκύπτει από τη σύνθεση δρόμων. Ο επαγόμενος ισομορφισμός ομάδων $M : \pi_1(U, p) \rightarrow$

$GL(V_p)$ καλείται μονόδρομη απεικόνιση. Η εικόνα του M εντός της $GL(V_p)$ καλείται μονόδρομη ομάδα και είναι υποομάδα της διαφορικής ομάδας Galois. Το ανοικτό συνεκτικό σύνολο U καλείται απλά συνεκτικό όταν $\pi_1(U, p) = \{1\}$. Αν το U είναι απλά συνεκτικό, τότε η αναλυτική συνέχιση παράγει n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος διαφορικών εξισώσεων $Y' = AY$ σε όλο το U .

Ορισμός 1.7.1. Θεωρούμε δύο συστήματα διαφορικών εξισώσεων $S_i : \mathbf{y}'_i = A_i \mathbf{y}_i$ για $i = 1, 2$, όπου A_i είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα διαφορικό σώμα $\mathbf{K}$ με ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα σταθερών $\mathbf{C}$. Τα S_1, S_2 καλούνται "ισοδύναμα" αν υπάρχει ένας πίνακας $B \in GL(\mathbf{K}, n)$ τέτοιος ώστε $A_1 = B^{-1} A_2 B - B^{-1} B'$.

Εστω F ένας θεμελειώδης πίνακας του προαναφερόμενου S_1 και $\mathbf{L}$ η αντίστοιχη επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$. Αν τα S_1, S_2 είναι ισοδύναμα τότε ο $F_2 = B F_1$ είναι ένας θεμελειώδης πίνακας του S_2 και η αντίστοιχη επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$ είναι η $\mathbf{L}$. Έστω G η διαφορική ομάδα Galois της επέκτασης $\mathbf{L}/\mathbf{K}$, τότε για κάθε $g \in G$ ισχύει $g(F_1) = F_1 C_g$ όπου $C_g \in GL(\mathbf{C}, n)$ και από τη σχέση $F_2 = B F_1$ προκύπτει ότι $g(F_2) = F_2 C_g$. Άρα αν τα S_1, S_2 είναι ισοδύναμα, τότε έχουν την ίδια διαφορική ομάδα Galois.

Ορισμός 1.7.2. Έστω $\mathbf{K} = \mathbb{C}(\{z\})$ το διαφορικό σώμα των συγκλίνουσων σειρών Laurent με διαφόριση $\partial = \frac{d}{dz}$ και $S : d\mathbf{y} = A \mathbf{y}$ ($\delta = z \frac{d}{dz}$) ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας που αποτελείται από στοιχεία του $\mathbf{K}$. Αν το S είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα $\delta \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{A} \tilde{\mathbf{y}}$, όπου $\tilde{A}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας που αποτελείται από ολόμορφες συναρτήσεις σε μια περιοχή του $z = 0$, τότε το S καλείται "κανονικώς ιδόμορφο" (regular singular) στο $z = 0$.

Έστω $d\mathbf{y} = A \mathbf{y}$ ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας που αποτελείται από ολόμορφες συναρτήσεις σε μια περιοχή του $z = 0$. Θεωρούμε το ανάπτυγμα $A = A_0 + A_1 z + \dots$, όπου A_i σταθεροί πίνακες, και τον πίνακα $P = I + P_1 z + \dots$ τέτοιος ώστε $P A_0 = A P - \delta P$, όπου P_i σταθεροί πίνακες και I ο μοναδιαίος πίνακας. Εξισώνοντας τους ομοβάθμιους όρους ως προς z της τελευταίας σχέσης προκύπτουν οι εξισώσεις $A_0 P_i - P_i (A_0 - i I) = A_i + A_{i-1} P_1 + \dots + A_1 P_{i-1}$ για $i = 1, 2, \dots$, τις οποίες επιλύουμε ως προς P_i . Το επαγόμενο ανάπτυγμα του P συγκλίνει και θέτοντας $\mathbf{y} = P \tilde{\mathbf{y}}$ προκύπτει ότι το $d\mathbf{y} = A \mathbf{y}$ είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\delta \tilde{\mathbf{y}} = A_0 \tilde{\mathbf{y}}$.

Θεώρημα 1.7.3. [109] Αν το S είναι όπως παραπάνω και είναι κανονικώς ιδόμορφο στο $z = 0$, τότε η διαφορική ομάδα Galois G του S είναι η κλειστή θήκη $\overline{M}$, ως προς την τοπολογία του Zariski, της μονόδρομης ομάδας M που παράγεται από το μονόδρομο πίνακα που αντιστοιχεί στο σημείο $z = 0$.

Απόδειξη. Το S είναι ισοδύναμο με κάποιο $\delta \tilde{\mathbf{y}} = C \tilde{\mathbf{y}}$, όπου C ένας $n \times n$ σταθερός πίνακας. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο C είναι σε κανονική μορφή Jordan, οπότε η αντίστοιχη επέκταση Picard-Vessiot $\mathbf{L}$ του $\mathbf{K} = \mathbb{C}(\{z\})$ θα έχει τη μορφή $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle z^{a_1}, z^{a_2}, \dots, z^{a_r}, \varepsilon \log(z) \rangle$, όπου $a_1, a_2, \dots, a_r$ είναι οι ιδιοτιμές του C και $\varepsilon = 0$ αν ο C είναι διαγώνιος, αλλιώς $\varepsilon = 1$. Κάθε στοιχείο $f \in \mathbf{L}$ είναι μερόμορφο σε κάθε κυκλικό τομέα με κέντρο το $z = 0$ και άνοιγμα μικρότερο του 2π . Αν η αναλυτική συνέχιση γύρω από το $z = 0$ αφήνει το f αναλλοίωτο τότε το f είναι αναλυτικό σε μια διάτρητη (punctured) περιοχή του $z = 0$. Σε αυτή την περιοχή το $|f|$ φράσσεται από το $|z|^N$, για κατάλληλο N , οπότε είναι μερόμορφο στο $z = 0$ και $f \in \mathbf{K}$. Από το θεώρημα 1.6.7 προκύπτει ότι $\overline{M} = G$. $\square$

Ορισμός 1.7.4. Έστω $d\mathbf{y} = A \mathbf{y}$ όπου $A = GL(\mathbb{C}(\{z\}), n)$. Το $d\mathbf{y} = A \mathbf{y}$ έχει λύσεις με "ήπια ανάπτυξη" (moderate growth) στο $z = 0$, αν για κάθε κυκλικό τομέα T (με κέντρο το

$z = 0$, άνοηγμα μικρότερο του 2π και κατάλληλη ακτίνα r) υπάρχει ένας θεμελειώδης πίνακας $F_T = (f_{ij}(z))$ του $\delta \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $|f_{ij}(z)| < |z|^N$ για κάποιο $N \in \mathbb{Z}$.

Θεώρημα 1.7.5. [109] Έστω $S : \delta \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{y}$ όπου $\mathbf{A} = GL(\mathbb{C}(\{z\}), n)$. Οι λύσεις του S έχουν ήπια ανάπτυξη στο $z = 0$ αν και μόνο αν το S είναι κανονικώς ιδιόμορφο στο $z = 0$.

Απόδειξη. Αν το S είναι κανονικώς ιδιόμορφο στο $z = 0$ τότε είναι ισοδύναμο με κάποιο $\delta \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{y}}$, όπου $\mathbf{C}$ ένας $n \times n$ σταθερός πίνακας, οπότε οι λύσεις του έχουν ήπια ανάπτυξη. Έστω ότι οι λύσεις του S έχουν ήπια ανάπτυξη, $e^{i2\pi C}$ είναι ο μονόδρομος πίνακας που αντιστοιχεί στο $z = 0$ και F είναι ένας θεμελειώδης πίνακας του S σε κάποιο κυκλικό τομέα που περιέχει το $z = 1$. Θεωρούμε τον πίνακα $B = F e^{-C \log(z)}$. Η αναλυτική συνέχιση γύρω από το $z = 0$ αφήνει τον B αναλλοίωτο, άρα τα στοιχεία του B είναι αναλυτικά σε μια διάτρητη περιοχή του $z = 0$. Εφόσον τα στοιχεία του F έχουν ήπια ανάπτυξη, τα στοιχεία του B είναι μερόμορφα στο $z = 0$, οπότε $B \in GL(\mathbb{C}(\{z\}), n)$. Από τη σχέση $C = B^{-1} A B - B^{-1} \delta B$ προκύπτει ότι το S και το $\delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{y}$ είναι ισοδύναμα. $\square$

Θεωρούμε τον τελεστή $L = \delta^n + a_{n-1} \delta^{n-1} + \dots a_0$. Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι οι λύσεις της εξίσωσης $L(y) = 0$ έχουν ήπια ανάπτυξη στο $z = 0$ αν και μόνο αν οι συντελεστές $a_i \in \mathbb{C}(\{z\})$ είναι ολόμορφες συναρτήσεις στο $z = 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $z^n \frac{d^n}{dz^n} = \delta(\delta - 1) \dots (\delta - n + 1)$ η $L(y) = 0$ έρχεται στη μορφή $y^{(n)} + \frac{\tilde{a}_{n-1}}{z} y^{(n-1)} + \dots \frac{\tilde{a}_0}{z^n} y = 0$, όπου $y^{(j)} = \frac{d^j y}{dz^j}$, $j \in \mathbb{N}$ και οι συντελεστές $\tilde{a}_j$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των a_j πάνω από το $\mathbb{N}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι λύσεις της εξίσωσης $y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots b_0 y = 0$, $b_i \in \mathbb{C}(\{z\})$, έχουν ήπια ανάπτυξη στο $z = 0$ αν και μόνο αν το $z^i b_i$ είναι ολόμορφο στο $z = 0$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Το σημείο $z = p$ καλείται κανονικώς ιδιόμορφο σημείο του $S : \mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$, αν το S είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα $\tilde{\mathbf{y}}' = \frac{1}{z-p} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{y}}$ σε μια περιοχή του $z = p$ και τα στοιχεία του $\tilde{\mathbf{A}}$ είναι ολόμορφα στο $z = p$. Το S καλείται κανονικώς ιδιόμορφο αν κάθε ιδιόμορφο σημείο του είναι κανονικό.

Έστω ότι το S είναι κανονικώς ιδιόμορφο και $\Sigma = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ είναι το σύνολο των ιδιομορφιών του. Θεωρούμε τις κλειστές καμπύλες λ_i , με αρχή και τέλος ένα κανονικό σημείο q του S και φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, τέτοιες ώστε το μόνο στοιχείο του Σ που περιβάλλεται από κάθε λ_i να είναι το p_i . Από την αναλυτική συνέχιση του θεμελειώδους πίνακα F του S κατά μήκος κάθε λ_i προκύπτει ο αντίστοιχος μονόδρομος πίνακας M_i . Για το σύνολο $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ ισχύει η σχέση $M_1 M_2 \dots M_k = I$, οπότε η μονόδρομη ομάδα M του S παράγεται από $k - 1$ γεννήτορες. Για τη διαφορική ομάδα Galois G του S ισχύει $\overline{M} = G$, ως προς την τοπολογία του Zariski.

Παράδειγμα 1.7.6. Έστω $E : L(y) = 0$, $y' = \frac{dy}{dz}$ μια γραμμική συνήθης ομογενής διαφορική εξίσωση πάνω από το διαφορικό σώμα $\mathbf{K} = \mathbb{C}(z)$ με σώμα σταθερών το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Έστω $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ η επέκταση Picard-Vessiot του $\mathbf{K}$, $G = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ η αντίστοιχη διαφορική ομάδα Galois, G^0 η ταυτοτική συνιστώσα της G και M η μονόδρομη ομάδα της E .

1. Η μοναδική ιδιομορφία της $L(y) = y''$ είναι το $z = \infty$, κάτι που γίνεται εμφανές θέτοντας $t = 1/z$, οπότε η E έρχεται στη μορφή $\ddot{y} + \frac{2}{t} \dot{y} = 0$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. Το $t = 0$ είναι μια κανονική ιδιομορφία οπότε $\overline{M} = G$. Η αναλυτική συνέχιση γύρω από το $t = 0$ αφήνει αναλλοίωτη τη βάση του χώρου των λύσεων $\mathbf{u}(t) = \{1, 1/t\}$ της E , οπότε $M = \overline{M} = G = I_2$.

2. Το σύνολο S των ιδιομορφιών της $L(y) = z y'' + y'$ είναι το $S = \{0, \infty\}$ και αποτελείται

από κανονικές ιδιομορφίες, οπότε

$$\overline{M} = G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\{u_1(z), u_2(z)\} = \{1, \ln(z)\}$ και από την αναλυτική συνέχιση γύρω από το $z = 0$ προκύπτει $u_2(z \exp(\mathbf{i}2\pi)) = \ln(z) + \mathbf{i}2\pi$, οπότε

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i}2\pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Το σύνολο S των ιδιομορφιών της $L(y) = z^2 y'' + \frac{1}{4}y$ είναι το $S = \{0, \infty\}$ και αποτελείται από κανονικές ιδιομορφίες, οπότε

$$\overline{M} = G = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & c \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\{u_1(z), u_2(z)\} = \{\sqrt{z}, \sqrt{z} \ln(z)\}$ και από την αναλυτική συνέχιση γύρω από το $z = 0$ προκύπτει $u_1(z \exp(\mathbf{i}2\pi)) = -\sqrt{z}$, $u_2(z \exp(\mathbf{i}2\pi)) = -\mathbf{i}2\pi \sqrt{z} - \sqrt{z} \ln(z)$, οπότε

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -\mathbf{i}2\pi \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Η μοναδική ιδιομορφία της $L(y) = y'' - k^2 y$, $k \in \mathbb{C}^*$ είναι το $z = \infty$. Θέτοντας $t = 1/z$ η E γίνεται $\ddot{y} + \frac{2t-1}{t^2}\dot{y} + \frac{k^2}{t^4}y = 0$, οπότε το $t = 0$ δεν είναι κανονική ιδιομορφία. Η αναλυτική συνέχιση γύρω από το $t = 0$ αφήνει αναλλοίωτη τη βάση του χώρου των λύσεων $\mathbf{u}(t) = \{\exp(k/t), \exp(-k/t)\}$ της E , οπότε $M = \overline{M} = I_2$ ενώ

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

5. Οι ιδιομορφίες της $L(y) = y'' + \frac{16z^2-3}{16z^2}y$, βρίσκονται στα σημεία $\{0, \infty\}$, όπου το $z = 0$ είναι κανονική ιδιομορφία ενώ το $z = \infty$ δεν είναι κανονική ιδιομορφία. Η βάση του χώρου των λύσεων της E είναι η $\{u_1(z), u_2(z)\} = \{z^{1/4} \exp(2\sqrt{z}), z^{1/4} \exp(-2\sqrt{z})\}$ και από την αναλυτική συνέχιση γύρω από το $z = 0$ προκύπτει $\{u_1(z \exp(\mathbf{i}2\pi)), u_2(z \exp(\mathbf{i}2\pi))\} = \mathbf{i}\{u_2(z), u_1(z)\}$. Η M είναι μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα με γεννήτορα το

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$M = \overline{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

ενώ

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v^{-1} & 0 \end{pmatrix} : c, v \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Κεφάλαιο 2

Επιλυσιμότητα Γραμμικών Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων τάξης 2

Jean d'Alembert 1717-1783

Johann Gauss 1777-1855

Gabriel Lamé 1795-1870

Niels Abel 1802-1829

Karl Weierstrass 1815-1897

Georg Riemann 1826-1866

Lazarus Fuchs 1833-1902

Ferdinand Frobenius 1849-1917

Jerald Kovacic 1941-2009

Οι εξισώσεις μεταβολών ενός συστήματος Hamilton είναι ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και θα τις χρησιμοποιήσουμε εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια. Σε αυτό το κεφάλαιο παραθέτουμε απαραίτητες πληροφορίες για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξης 2 (DE_2), ξεκινώντας από δύο μεθόδους κατασκευής λύσεων αυτών. Δηλαδή, τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης μιας ομογενούς DE_2 και τη μέθοδο μεταβολής παραμέτρων για μια μη-ομογενή DE_2 . Αν η DE_2 είναι κανονικώς ιδιόμορφη, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε συγκλίνοντα αναπτύγματα των λύσεων της, στην περιοχή κάθε ιδιομορφίας, με τη μέθοδο Frobenius. Για τις DE_2 που οι συντελεστές τους είναι ρητές συναρτήσεις, ο J. Kovacic παρήγαγε ένα αλγόριθμο που ελέγχει αν η εξίσωση επιδέχεται λύσεις Liouville. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο μελετώντας δυο κλασικές οικογένειες εξισώσεων, την υπεργεωμετρική εξίσωση του Gauss και την εξίσωση Lamé, τις οποίες θα συναντήσουμε και στα επερχόμενα κεφάλαια.

2.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε τον γραμμικό διαφορικό τελεστή

$$L = \frac{d^2}{dz^2} + p(z)\frac{d}{dz} + q(z), \quad (2.1.1)$$

όπου οι μιγαδικές συναρτήσεις $p(z)$, $q(z)$ είναι αναλυτικές για $z \in \mathbb{C} \setminus S$ και $S = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ είναι το πεπερασμένο σύνολο ιδιομορφιών τους.

Η αντικατάσταση $y(z) = u(z) e^{-\frac{1}{2} \int p(z) dz}$ μετασχηματίζει την εξίσωση $Ly(z) = 0$ στην

$$\begin{aligned} u''(z) + h(z)u(z) &= 0, \quad f'(z) = \frac{d}{dz}f(z) \\ h(z) &= \frac{1}{4}(4q(z) - 2p'(z) - p(z)^2). \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Η (2.1.2) καλείται “ανηγμένη” (reduced) μορφή της $Ly(z) = 0$. Θέτοντας $u(z) = e^{-\int \xi(z) dz}$ στην (2.1.2) προκύπτει η “προσαρτημένη” (associated) εξίσωση Riccati

$$\xi'(z) = h(z) + \xi(z)^2.$$

Έστω ότι η $u_1(z)$ είναι μια λύση της γραμμικής ομογενούς εξίσωσης $Ly(z) = 0$. Αν η $u_1(z)$ έχει ιδιομορφίες, τότε αυτές βρίσκονται αναγκαστικά σε κάποια από τα σημεία του S . Εφαρμόζοντας τη μέθοδο “υποβιβασμού τάξης” μπορούμε να κατασκευάσουμε μια δεύτερη, γραμμικώς ανεξάρτητη της $u_1(z)$, λύση της $Ly(z) = 0$. Θέτοντας $u_2(z) = c(z)u_1(z)$ και αντικαθιστώντας την $u_2(z)$ στην $Ly(z) = 0$ προκύπτει

$$Lu_2(z) = 0 \Rightarrow c''(z) + \left(2\frac{u_1'(z)}{u_1(z)} + p(z)\right)c'(z) = 0 \Rightarrow c(z) = \int u_1(z)^{-2} e^{-\int p(z) dz} dz.$$

Η γενική λύση της $Ly(z) = 0$ έχει τη μορφή $y_0 = c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z) = \int u_1(z)^{-2} e^{-\int p(z) dz} dz$ για $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Η γενική λύση της γραμμικής μη-ομογενούς εξίσωσης $Ly(z) = b(z)$ έχει τη μορφή $y_g = y_0 + y_\varepsilon$, όπου $y_0 = c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z)$ είναι η γενική λύση της $Ly(z) = 0$, ενώ η y_ε είναι μια ειδική λύση της $Ly(z) = b(z)$. Η τεχνική της “μεταβολής των παραμέτρων” έγκειται στην κατασκευή της y_ε με χρήση της y_0 . Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τις συναρτήσεις $c_1(z)$, $c_2(z)$

και θέτουμε $y_\varepsilon = c_1(z)u_1(z) + c_2(z)u_2(z)$ με σκοπό να βρούμε κατάλληλες $c_1(z)$, $c_2(z)$ ώστε η y_ε να είναι μια ειδική λύση της $Ly(z) = b(z)$. Στη συνέχεια, επιβάλλουμε τη συνθήκη

$$c'_1(z)u_1(z) + c'_2(z)u_2(z) = 0 \quad (2.1.3)$$

και αντικαθιστούμε την $y_\varepsilon = c_1(z)u_1(z) + c_2(z)u_2(z)$ στην $Ly(z) = b(z)$ χρησιμοποιώντας την (2.1.3), οπότε προκύπτει

$$c'_1(z)u'_1(z) + c'_2(z)u'_2(z) = b(z). \quad (2.1.4)$$

Από τις (2.1.3) και (2.1.4) επάγεται το σύστημα

$$\begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u'_1(z) & u'_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(z) \\ c'_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(z) \end{pmatrix}$$

το οποίο επιλύουμε ως προς $c_1(z)$, $c_2(z)$

$$\begin{pmatrix} c'_1(z) \\ c'_2(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{wr(u_1, u_2)} \begin{pmatrix} u'_2(z) & -u_2(z) \\ -u'_1(z) & u_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(z) \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} c_1(z) \\ c_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int \frac{u_2(z)b(z)}{wr(u_1, u_2)} dz \\ \int \frac{u_1(z)b(z)}{wr(u_1, u_2)} dz \end{pmatrix},$$

όπου $wr(u_1, u_2)$ είναι η ορίζουσα *Wronski* των $u_1(z)$, $u_2(z)$. Άρα η γενική λύση της $Ly(z) = b(z)$ έχει τη μορφή $y_g = y_0 - u_1(z) \int \frac{u_2(z)b(z)}{wr(u_1, u_2)} dz + u_2(z) \int \frac{u_1(z)b(z)}{wr(u_1, u_2)} dz$.

Παράδειγμα 2.1.1. Θεωρούμε την εξίσωση

$$y''(z) + \frac{(2-3z)}{(1-z)z}y'(z) - \frac{1}{(1-z)z}y(z) = b(z). \quad (2.1.5)$$

Έστω $b(z) = 0$. Η (2.1.5) επιδέχεται τη λύση $y_1(z) = 1/z$ και η ανηγμένη της μορφή είναι

$$u''(z) + \frac{u(z)}{4(z-1)^2} = 0.$$

Θέτοντας $y_2(z) = c(z)y_1(z)$ και αντικαθιστώντας την $y_2(z)$ στην (2.1.5) προκύπτει

$$c''(z) + \frac{1}{z-1}c'(z) = 0 \Rightarrow c(z) = \int u_1(z)^{-2} e^{-\int \frac{(2-3z)}{(1-z)z} dz} dz = \ln(z-1).$$

Άρα για $b(z) = 0$ η γενική λύση έχει τη μορφή $y_0(z) = c_1 z^{-1} + c_2 z^{-1} \ln(z-1)$.

Έστω $b(z) = 1/z$. Η γενική λύση της (2.1.5) είναι η $y_g = y_0 + y_\varepsilon$, όπου

$$y_\varepsilon = c_1(z)y_1(z) + c_2(z)y_2(z) = \frac{z^2 - 2z - 2\ln(z-1)}{4z}, \\ \begin{pmatrix} c_1(z) \\ c_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int \frac{u_2(z)b(z)}{wr(u_1, u_2)} dz \\ \int \frac{u_1(z)b(z)}{wr(u_1, u_2)} dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} ((z-2)z - 2(z-1)^2 \ln(z-1)) \\ \frac{1}{2}(z-2)z \end{pmatrix}.$$

2.2 Επίλυση με τη χρήση σειρών

Θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή

$$L = z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z p(z) \frac{d}{dz} + q(z), \quad (2.2.1)$$

όπου $p(z)$, $q(z)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις σε μια περιοχή του $z = 0$ και τη σειρά

$$W(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{r+n}, \quad c_0 \neq 0. \quad (2.2.2)$$

Η μέθοδος του Frobenius [44, 43, 52, 106, 124] οδηγεί στον καθορισμό των r , c_n ώστε η (2.2.2) να είναι μια λύση της $Ly(z) = 0$ και να συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια περιοχή του $z = 0$. Από τη δράση του L στην $W(z, r)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} LW(z, r) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n Lz^{r+n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{r+n} f(z, r+n), \\ f(z, r+n) &= (r+n)(r+n-1) + (r+n)p(z) + q(z). \end{aligned}$$

Η $f(z, r+n)$ είναι αναλυτική στην περιοχή του $z = 0$ και επιδέχεται ένα ανάπτυγμα Taylor της μορφής

$$f(z, r+n) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(r+n) z^j.$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω ανάπτυγμα στην $LW(z, r)$ έπεται

$$LW(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n c_j f_{n-j}(r+j) \right) z^{r+n}.$$

Αν $LW(z, r) = 0$ τότε ο συντελεστής κάθε δύναμης του z θα πρέπει να είναι ίσος με το μηδέν, οπότε προκύπτει το παρακάτω σύνολο εξισώσεων

$$\begin{aligned} c_0 f_0(r) &= 0, \\ c_1 f_0(r+1) + c_0 f_1(r) &= 0 \\ &\dots \\ c_n f_0(r+n) + c_{n-1} f_1(r+n-1) + \dots + c_0 f_n(r) &= 0 \end{aligned}$$

Η $f_0(r) = r(r-1) + r p(0) + q(0) = 0$ καλείται “εξίσωση δεικτών” (indicial equation) και οι ρίζες της r_1, r_2 καλούνται εκθέτες της $W(z, r)$ στο $z = 0$. Αν $\hat{r}$ είναι μια ρίζα της $f_0(r)$ τέτοια

ώστε για κάθε $s \in \mathbb{Z}^*$ να ισχύει $f_0(\hat{r} + s) \neq 0$, τότε οι c_n για $n = 1, 2, \dots$ έχουν τη μορφή

$$c_n = \frac{(-1)^n F_n(\hat{r}) c_0}{f_0(\hat{r} + 1) f_0(\hat{r} + 2) \dots f_0(\hat{r} + n)} \quad (2.2.3)$$

$$F_n(\hat{r}) = \begin{vmatrix} f_1(\hat{r} + n - 1) & f_2(\hat{r} + n - 2) & \dots & f_{n-1}(\hat{r} + 1) & f_n(\hat{r}) \\ f_0(\hat{r} + n - 1) & f_1(\hat{r} + n - 2) & \dots & f_{n-2}(\hat{r} + 1) & f_{n-1}(\hat{r}) \\ 0 & f_0(\hat{r} + n - 2) & \dots & f_{n-3}(\hat{r} + 1) & f_{n-2}(\hat{r}) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & f_0(\hat{r} + 1) & f_1(\hat{r}) \end{vmatrix} \quad (2.2.4)$$

και η αντίστοιχη

$$W(z, \hat{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{\hat{r}+n}$$

είναι μια λύση της $Ly(z) = 0$.

Αν $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, τότε για κάθε εκθέτη r_i με $i = 1, 2$ η (2.2.3) ορίζει τους συντελεστές της αντίστοιχης σειράς $W(z, r_i)$ και οι $W(z, r_1)$, $W(z, r_2)$ αποτελούν μια βάση του χώρου των λύσεων της $Ly(z) = 0$ σε μια περιοχή του $z = 0$.

Έστω ότι $r_1 - r_2 = s \in \mathbb{Z}$ και το πραγματικό μέρος του r_1 είναι μεγαλύτερο ή ίσο του r_2 . Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής του δεξιού μέλους της (2.2.3) δεν ορίζεται για $\hat{r} = r_2$ και $n \geq s$, οπότε δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη $W(z, r_2)$. Η $W(z, r_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{r_1+n}$, με τους c_n να καθορίζονται από τη σχέση (2.2.3), είναι μια λύση της $Ly(z) = 0$ σε μια περιοχή του $z = 0$. Οι συναρτήσεις $p(z)$, $q(z)$ είναι αναλυτικές στο $z = 0$ και επιδέχονται αναπτύγματα της μορφής

$$p(z) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n,$$

$$q(z) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης κατασκευάζουμε μια δεύτερη λύση $W_2(z) = W(z, r_1)v(z)$, όπου

$$\begin{aligned} v(z) &= \int W(z, r_1)^{-2} e^{-\int \frac{p(z)}{z} dz} dz, \\ &= \int z^{-p_0-2r_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right)^{-2} e^{-\int \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n dz} dz \\ &= \int z^{-p_0-2r_1} g(z) dz, \\ g(z) &= \frac{1}{c_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n. \end{aligned}$$

Από την εξίσωση δεικτών $f_0(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$ προκύπτει ότι $2r_1 + p_0 = s + 1 \geq 1$. Αν $s = 0$, δηλαδή $r_1 = r_2$, τότε $v(z) = c_0^{-2} \ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n} z^n$ και η $W_2(z) = W(z, r_1)v(z)$ περιέχει λογαριθμικό όρο. Αν $s \in \mathbb{N}^*$ τότε $v(z) = -\frac{z^{-s}}{s c_0^2} + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{g_n}{n-s} z^{n-s} + g_s \ln(z) + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{g_n}{n-s} z^{n-s}$ και η λύση $W_2(z) = W(z, r_1)v(z) = g_s W(z, r_1) \ln(z) + z^{r_2} \left(-\frac{1}{s c_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n \right)$, που αντιστοιχεί στον εκθέτη r_2 , περιέχει λογάριθμο αν και μόνο αν $g_s \neq 0$.

Σχόλιο 2.2.1 ([43, 52]). Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} y(z) + z p(z) \frac{d}{dz} y(z) + q(z) y(z) = 0, \quad (2.2.5)$$

όπου $p(z), q(z)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις σε μια περιοχή του $z = 0$. Έστω ότι για τους εκθέτες r_1, r_2 , των λύσεων της (2.2.5) στο $z = 0$, ισχύει $r_1 - r_2 = s \in \mathbb{N}$. Αν $r_1 = r_2$ η γενική λύση της (2.2.5) περιέχει λογαριθμικό όρο. Αν $r_1 - r_2 = s \in \mathbb{N}^*$ η γενική λύση της (2.2.5) περιέχει λογαριθμικό όρο αν και μόνο αν $F_s(r_2) \neq 0$.

Παράδειγμα 2.2.2. Θεωρούμε την οικογένεια διαφορικών εξισώσεων

$$y''(z) + \frac{c - (b+2)z}{z(1-z)} y'(z) - \frac{b}{z(1-z)} y(z) = 0, \quad b \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{C} \quad (2.2.6)$$

και το ανάπτυγμα της $y(z)$ στην περιοχή του $z = 0$

$$y = z^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

το οποίο αντικαθιστούμε στην (2.2.6), οπότε προκύπτει η εξίσωση δεικτών $r(r-1+c) = 0$ με λύσεις $r_1 = 0, r_2 = 1 - c$ και ο αναδρομικός τύπος

$$(n+r+c-1)a_n = (n+r+b-1)a_{n-1}, \quad a_0 = 1, n = 1, 2, \dots \quad (2.2.7)$$

Για $c \notin \mathbb{Z}$ από τον παραπάνω τύπο έπεται ότι

$$y_i(z) = z^{r_i} + z^{r_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_i+b)_n}{(r_i+c)_n} z^n, \quad (l)_n = l(l+1)\dots(l+n-1), \quad i = 1, 2.$$

Για $c \in \mathbb{Z}, b \neq c$ και $\hat{r} = \max(r_1, r_2)$ ισχύει

$$y_1(z) = z^{\hat{r}} + z^{\hat{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\hat{r}+b)_n}{(\hat{r}+c)_n} z^n$$

και η $y_2(z)$ πρέπει να κατασκευαστεί με τη μέθοδο του υποβιβασμού τάξης. Αν $\hat{r} = 0$ τότε η $y_2(z)$ δεν περιέχει λογαριθμικούς όρους, ενώ αν $\hat{r} = 1 - c$ τότε η $y_2(z)$ μπορεί να περιέχει λογαριθμικούς όρους. Για $c = 0, b = -1$ από την (2.2.4) προκύπτει $F_1(0) = 1$ και σύμφωνα με το σχόλιο 2.2.1 η γενική λύση περιέχει λογαριθμικό όρο. Για $c = 0, b = -1$ η γενική λύση της εξίσωσης έχει τη μορφή $y(z) = c_1 z + c_2(z \ln(z) - z \ln(z-1) - 1)$.

Για $b = c \neq 1$ από τον τύπο (2.2.7) συνάγεται η σχέση $a_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$, οπότε

$$y_i(z) = z^{r_i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{z^{r_i}}{1-z}, \quad |z| < 1, \quad i = 1, 2.$$

Για $b = c = 1$ ισχύει $r_1 = r_2 = 0$ και $a_n = 1$, $n = 1, 2, \dots$, οπότε

$$y_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

$$y_2(z) = y_1(z) \int y_1(z)^{-2} e^{-\int \frac{1-3z}{z(1-z)} dz} dz = \frac{\ln(z)}{1-z}$$

Για $c = 1$ ισχύει $r_1 = r_2 = 0$ και $a_n = (b)_n$, $n = 1, 2, \dots$, οπότε

$$y_1(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (b)_n z^n = (1-z)^{-b}, \quad |z| < 1$$

$$y_2(z) = y_1(z) \int y_1(z)^{-2} e^{-\int \frac{1-(b+2)z}{z(1-z)} dz} dz = y_1(z) \int \frac{(1-z)^{b-1}}{z} dz$$

$$= y_1(z) \ln(z) + (1-b)z y_1(z) + \dots$$

2.3 Λύσεις Liouville

Έστω ένα διαφορικό σώμα $\mathbf{K}$ με ένα σώμα σταθερών $\mathbf{C}$ και μια επέκταση $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ διαφορικών σωμάτων. Σύμφωνα με τον ορισμό 1.5.5, η $\mathbf{L}$ είναι μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$, αν το σώμα σταθερών της είναι το $\mathbf{C}$ και αν υπάρχει μια πεπερασμένη σειρά σωμάτων $\mathbf{K} = \mathbf{L}_0 \subset \mathbf{L}_1 \subset \dots \subset \mathbf{L}_n = \mathbf{L}$, τέτοια ώστε να ισχύει $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{i-1} \langle t_i \rangle$ για $i = 1, \dots, n$, όπου

- (i) ή $t'_i \in \mathbf{L}_{i-1}$, δηλαδή το t_i είναι το αόριστο ολοκλήρωμα ενός στοιχείου του $\mathbf{L}_{i-1}$,
- (ii) ή $t_i \neq 0$ και $t'_i/t_i \in \mathbf{L}_{i-1}$, δηλαδή το t_i είναι το εκθετικό του αόριστου ολοκληρώματος ενός στοιχείου του $\mathbf{L}_{i-1}$,
- (iii) ή το t_i είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbf{L}_{i-1}$.

Μια συνάρτηση καλείται “ συνάρτηση Liouville ” (Liouvillian function) αν περιέχεται σε μια επέκταση Liouville του $\mathbf{K}$. Αν η y_1 είναι μια λύση της $y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$, όπου $p(z), q(z) \in \mathbf{K}$, τότε με τη μέθοδο του υποβιβασμού τάξης παράγεται μια δεύτερη, γραμμικώς ανεξάρτητη της y_1 , λύση $y_2 = y_1(z) \int y_1(z)^{-2} e^{-\int p(z) dz} dz$. Παρατηρούμε ότι αν η y_1 είναι μια συνάρτηση Liouville το ίδιο ισχύει και για την y_2 . Θέτοντας $y(z) = u(z) e^{-\frac{1}{2} \int p(z) dz}$ η εξίσωση $y'' + p(z)y' + q(z)y = 0$ μετασχηματίζεται στην $u''(z) + h(z)u(z) = 0$, όπου $h(z) = \frac{1}{4}(4q(z) - 2p'(z) - p(z)^2)$. Η y είναι μια συνάρτηση Liouville αν και μόνο αν η u είναι μια συνάρτηση Liouville.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y'' = r(z)y, \quad r(z) \in \mathbb{C}(z), \quad \Delta\mathbf{E}$$

όπου $\mathbb{C}(z)$ είναι το διαφορικό σώμα των ρητών μιγαδικών συναρτήσεων, $r(z) \neq \mathbb{C}$ και $y \neq 0$. Έστω $r(z) = s(z)/t(z)$, όπου $s(z), t(z)$ (μεταξύ τους πρώτα) μιγαδικά πολυώνυμα. Οι πόλοι (στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο) του $r(z)$ είναι οι ρίζες του $t(z)$ και η τάξη κάθε πόλου είναι

η πολλαπλότητα αυτού ως ρίζα του $t(z)$. Η τάξη του $r(z)$ στο ∞ είναι ίση με $\deg t - \deg s$, όπου $\deg t, \deg s$ είναι οι αντίστοιχοι βαθμοί των t, s .

Από την πρόταση 1.6.15 συνάγεται ότι η διαφορική ομάδα Galois G της ΔE είναι υποσύνολο της $SL(2, \mathbb{C})$ και το θεώρημα 1.6.16 καθορίζει τις πιθανές μορφές των στοιχείων της G , όταν η ταυτοτική συνιστώσα αυτής είναι επιλύσιμη. Ο J.J. Kovacic [62] προχώρησε ένα βήμα παραπέρα, καθορίζοντας τη μορφή των λύσεων Liouville της ΔE για κάθε περίπτωση του θεωρήματος 1.6.16.

Θεώρημα 2.3.1 ([62]). *Μόνο μια από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει για τη διαφορική ομάδα Galois G της ΔE $y'' = r(z)y$, $r(z) \in \mathbb{C}(z)$.*

(i) *$H G$ είναι συζυγής (conjugate) με μια τριγωνική ομάδα και η ΔE επιδέχεται μια λύση της μορφής $n = \exp(\int \omega)$, όπου $\omega \in \mathbb{C}(z)$. Η τάξη κάθε πόλου του $r(z)$ είναι άρτια ή ίση με 1 και η τάξη του $r(z)$ στο ∞ είναι άρτια ή μεγαλύτερη από 2.*

(ii) *$H G$ είναι συζυγής με μια υποομάδα της*

$$D^\dagger = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & -v^{-1} \\ v & 0 \end{pmatrix} \mid c, v \in \mathbb{C}^* \right\}$$

και η ΔE επιδέχεται μια λύση της μορφής $n = \exp(\int \omega)$, όπου το ω είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{C}(z)$ βαθμού 2. Η $r(z)$ πρέπει να έχει έναν τουλάχιστον πόλο που είτε έχει περιττή τάξη μεγαλύτερη από 2 είτε έχει τάξη 2.

(iii) *$H G$ είναι πεπερασμένη και όλες οι λύσεις της ΔE είναι αλγεβρικές. Η τάξη κάθε πόλου του $r(z)$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από 2 και η τάξη του $r(z)$ στο ∞ πρέπει να είναι τουλάχιστον 2. Επίσης, αν το μερικό ανάπτυγμα σε κλάσματα (partial fraction expansion) του $r(z)$ έχει τη μορφή*

$$r(z) = \sum_i \frac{a_i}{(z - c_i)^2} + \sum_j \frac{b_j}{z - d_j},$$

τότε για κάθε τιμή του i ισχύει $\sqrt{1 + 4a_i} \in \mathbb{Q}$ και $\sum_j b_j = 0$. Αν $g = \sum_i a_i + \sum_j b_j d_j$, τότε $\sqrt{1 + 4g} \in \mathbb{Q}$.

(iv) *$G = SL(2, \mathbb{C})$ και η ΔE δεν επιδέχεται λύσεις Liouville.*

Απόδειξη. Έστω $\{n, x\}$ η βάση του χώρου των λύσεων της ΔE , $\mathbf{L} = \mathbb{C}(z) \langle n, x \rangle$ η Picard-Vessiot επέκταση του $\mathbb{C}(z)$, G η διαφορική ομάδα Galois της ΔE και G^0 η ταυτοτική συνιστώσα της G .

(i) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G είναι σε τριγωνική μορφή, οπότε για κάθε $g \in G$ ισχύει $g(n) = c_g n$ με $c_g \in \mathbb{C}^*$. Άρα για $\omega = n'/n$ και για κάθε $g \in G$ ισχύει $g(\omega) = \omega$, επομένως $\omega \in \mathbb{C}(z)$.

Εφόσον η $n = \exp(\int \omega)$ ικανοποιεί την ΔE , η προσαρτημένη εξίσωση Riccati έχει τη μορφή $\omega' + \omega^2 = r(z)$. Στην περιοχή κάθε σημείου $z = c$ (για ευκολία θεωρούμε $c = 0$) οι $r(z), \omega$ επιδέχονται αναπτύγματα Laurent

$$\begin{aligned} \omega &= bz^m + O(z^{m+1}), \quad b \neq 0 \\ r(z) &= az^n + O(z^{n+1}), \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

Αφού θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάθε πόλος της $r(z)$ είναι τάξης 1 ή άρτιας τάξης, θεωρούμε $n \leq -3$. Από τη προσαρτημένη Riccati προκύπτει

$$bmz^{m-1} + \dots + b^2z^{2m} + \dots = az^n + \dots$$

Άρα $\min(m-1, 2m) = n \leq -3$, οπότε $m < -1$, $2m < m-1$ και $2m = n$.

Θεωρούμε τα αναπτύγματα Laurent των $r(z)$, ω στο $z = \infty$

$$\begin{aligned}\omega &= \hat{b}/z^{\hat{m}} + O(1/z^{\hat{m}+1}), \quad \hat{b} \neq 0 \\ r(z) &= \hat{a}/z^{\hat{n}} + O(1/z^{\hat{n}+1}), \quad \hat{a} \neq 0,\end{aligned}$$

όπου $\hat{m}$, $\hat{n}$ είναι οι τάξεις στο $z = \infty$ των ω , $r(z)$, αντιστοίχως. Αφού θέλουμε να δείξουμε ότι η τάξη του $r(z)$ στο $z = \infty$ είναι μεγαλύτερη από 2 ή είναι άρτια, υποθέτουμε $n \leq 1$. Από τη προσαρτημένη Riccati επάγεται

$$-\hat{b}\hat{m}/z^{\hat{m}+1} + \dots + \hat{b}^2/z^{2\hat{m}} + \dots = \hat{a}/z^{\hat{n}} + \dots$$

Άρα $\min(\hat{m}+1, 2\hat{m}) = \hat{n} \leq 1$, οπότε $m < 1$, $2m < m+1$ και $2m = n$.

- (ii) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G είναι μια υποομάδα της $D^\dagger$. Αν $\omega = n'/n$ και $\phi = x'/x$ τότε για κάθε $g \in G$ ισχύει είτε $g(\omega) = \omega$, $g(\phi) = \phi$ είτε $g(\omega) = \phi$, $g(\phi) = \omega$, συνεπώς το ω είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{C}(z)$ βαθμού 2.

Για κάθε $g \in G$ ισχύει $g(n) = c_g n$, $g(x) = c_g^{-1} x$ ή $g(n) = -c_g^{-1} x$, $g(x) = c_g n$, επομένως η συνάρτηση $n^2 x^2$ είναι αναλλοίωτη υπό τη δράση της G , δηλαδή $n^2 x^2 \in \mathbb{C}(z)$. Εφόσον η G δε διαγωνοποιείται, $nx \notin \mathbb{C}(z)$ και θέτοντας $n^2 x^2 = \prod (x - c_i)^{s_i}$, για $s_i \in \mathbb{Z}$, ένας από τους εκθέτες s_i είναι αναγκάια περιττός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $n^2 x^2 = x^s \prod (x - c_i)^{s_i}$ για περιττό s . Έστω ότι το ανάπτυγμα Laurent της $r(z)$ στο $z = 0$ είναι $r(z) = az^n + O(n+1)$ για $a \neq 0$ και $\theta = (nx)'/(nx) = \frac{1}{2}(n^2 x^2)'/(n^2 x^2) = \frac{1}{2}sz^{-1} + O(1)$. Επειδή οι n, x ικανοποιούν τη ΔΕ, ισχύει

$$\theta''' + 3\theta'\theta + \theta^3 = 4r\theta + 2r' \Rightarrow (s - \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{8}s^3)z^{-3} + \dots = 2a(s+n)z^{n-1} + \dots$$

Αν $n > -2$, τότε $0 = s - \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{8}s^3 = \frac{1}{8}s(s-2)(s-4)$ που είναι μια αντίφαση. Άρα $n \leq -2$. Αν $n < -2$, τότε $s+n=0$ και το n είναι περιττός.

- (iii) Σε αυτή την περίπτωση $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Εφόσον η στοιχειώδης (elementary) συμμετρική συνάρτηση των $g_1(n), g_2(n), \dots, g_n(n)$ παραμένει αμετάβλητη υπό τη δράση της G , η n είναι αλγεβρική πάνω από το $\mathbb{C}(z)$. Ομοίως προκύπτει ότι η x είναι αλγεβρική πάνω από το $\mathbb{C}(z)$.

Η n επιδέχεται ένα ανάπτυγμα Puiseux σε κάθε σημείο $z = c \in \mathbb{C}$ (για ευκολία θεωρούμε $c = 0$) $n = bz^m + O(z^{m+1})$ με $b \in \mathbb{C}^*$, $m \in \mathbb{Q}$ και το αντίστοιχο ανάπτυγμα Laurent της $r(z) \in \mathbb{C}(z)$ είναι $r(z) = az^n + O(z^{n+1})$ με $a \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{Z}$. Από τη ΔΕ επάγεται $m(m-1)bz^{m-2} + \dots = ba z^{n+m} + \dots$, οπότε $n \geq -2$. Για $n = -2$, $m(m-1) = a$. Εφόσον $m \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{1+4a} \in \mathbb{Q}$.

Ως τώρα έχουμε δείξει ότι το μερικό ανάπτυγμα σε κλάσματα του $r(z)$ έχει τη μορφή

$$r(z) = \sum_i \frac{a_i}{(z - c_i)^2} + \sum_j \frac{b_j}{z - d_j} + P(z), \quad P(z) \in \mathbb{C}[z]$$

και για κάθε τιμή του i ισχύει $\sqrt{1+4a_i} \in \mathbb{Q}$.

Θεωρούμε τα αναπτύγματα Laurent των $r(z)$, n στο $z = \infty$

$$\begin{aligned} n &= \hat{b}/z^{\hat{m}} + O(1/z^{\hat{m}+1}), \quad \hat{b} \neq 0 \\ r(z) &= g/z^{\hat{n}} + O(1/z^{\hat{n}+1}), \quad \hat{a} \neq 0. \end{aligned}$$

Από τη ΔΕ προκύπτει $m(m+1)\hat{b}/z^{\hat{m}+2} + \dots = g\hat{b}/z^{\hat{n}+\hat{m}} + \dots$, επομένως $n \geq 2$ και $P(z) = 0$, που σημαίνει ότι

$$r(z) = \sum_i \frac{a_i}{(z-c_i)^2} + \sum_j \frac{b_j}{z-d_j} = \left(\sum_j b_j \right) / z + \left(\sum_i a_i + \sum_j b_j d_j \right) / z^2 + \dots$$

Ακολουθώντας, $\sum_j b_j = 0$ και $g = \sum_i a_i + \sum_j b_j d_j = m(m+1)$. Εφόσον $m \in \mathbb{Q}$, ισχύει $\sqrt{1+4g} \in \mathbb{Q}$.

(iv) Έστω ότι η ΔΕ επιδέχεται μια λύση Liouville. Άρα το $\mathbf{L}$ περιέχεται σε μια επέκταση Liouville του $\mathbb{C}(z)$ και σύμφωνα με το θεώρημα 1.6.14 η G^0 είναι επιλύσιμη. Εφόσον $G^0 = SL(2, \mathbb{C})$ η G^0 δεν είναι επιλύσιμη, ακολούθως η ΔΕ δεν επιδέχεται λύσεις Liouville.

□

Σχόλιο 2.3.2. Οι *D. Boucher* και *J.A. Weil* [18, 19] απέδειξαν ότι αν το ανάπτυγμα μια λύσης της ΔΕ, στην περιοχή μιας ιδιομορφίας, περιέχει λογαριθμικό όρο, τότε ισχύει η περίπτωση (i) ή η περίπτωση (iv) του θεωρήματος 2.3.1.

Παράδειγμα 2.3.3. Θεωρούμε την εξίσωση $y'' = r(z)y$ για $r(z) \in \mathbb{C}(z)$.

Αν η $r(z)$ είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού, τότε οι αναγκαίες συνθήκες των περιπτώσεων (i) – (iii) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ικανοποιούνται και η εξίσωση δεν επιδέχεται λύσεις Liouville. Η εξίσωση Airy αντιστοιχεί στη $r(z) = z$.

Για $r(z) = \frac{4(n^2-x^2)-1}{4x^2}$, $n \in \mathbb{C}$ έχουμε την εξίσωση Bessel, η οποία ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες των (i), (ii) του θεωρήματος 2.3.1.

Η εξίσωση Weber αντιστοιχεί στη $r(z) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} - n$, $n \in \mathbb{C}$ και ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες της περίπτωσης (i) του θεωρήματος 2.3.1.

Ο J.J. Kovacic [62] δημιούργησε ένα αλγόριθμο που κατασκευάζει τη λύση της ΔΕ, που αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση του θεωρήματος 2.3.1.

Έστω I το σύνολο των πόλων της $r(z)$.

Αλγόριθμος για την περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.3.1: Η λύση n της ΔΕ έχει τη μορφή $n = \exp(\int \omega)$, όπου $\omega \in \mathbb{C}(z)$. Θεωρούμε ότι $\omega = P'/P + v$ με $P \in \mathbb{C}[z]$, $v \in \mathbb{C}(z)$, επομένως $n = P \exp(\int v)$. Θεωρούμε ότι οι αναγκαίες συνθήκες αυτής της περίπτωσης ικανοποιούνται.

Βήμα 1: Καθορισμός των κλασματικών όρων του $v \in \mathbb{C}(z)$. Για κάθε $c \in I \cup \{\infty\}$ ορίζουμε μια ρητή συνάρτηση $[\sqrt{r}]_c$ και δύο μιγαδικούς αριθμούς $a_c^\pm$.

(c₁) Αν το $c \in I$ είναι πόλος τάξης 1, τότε $[\sqrt{r}]_c = 0$ και $a_c^\pm = 1$. Οι εκθέτες της ΔΕ στο c είναι ίσοι με 0, 1.

- (c₂) Αν το $c \in I$ είναι πόλος τάξης 2, τότε $[\sqrt{r}]_c = 0$. Αν b είναι ο συντελεστής του όρου $1/(x-c)^2$ στο μερικό ανάπτυγμα σε κλάσματα του $r(z)$, τότε $a_c^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4b})$ που είναι οι εκθέτες της ΔΕ στο $z = c$.
- (c₃) Αν το $c \in I$ είναι πόλος τάξης $2n \geq 4$, τότε το $[\sqrt{r}]_c$ είναι το ακόλουθο τμήμα του αναπτύγματος Laurent της $\sqrt{r}$ στο $z = c$

$$[\sqrt{r}]_c = \frac{a}{(z-c)^n} + \dots + \frac{d}{(z-c)^2}.$$

Υπάρχουν δύο δυνατότητες για τη μορφή του $[\sqrt{r}]_c$, η μια αρνητική της άλλης, από τις οποίες μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε. Αν b είναι ο συντελεστής του $1/(x-c)^{n+1}$ στο ανάπτυγμα Laurent της r μείον το συντελεστή του $1/(x-c)^{n+1}$ του $([\sqrt{r}]_c)^2$, τότε $a_c^\pm = \frac{1}{2}(\pm \frac{b}{a} + n)$.

- (∞₁) Αν η τάξη του r στο ∞ είναι μεγαλύτερη από 2, τότε $[\sqrt{r}]_\infty = 0$ και $a_\infty^+ = 0$, $a_\infty^- = 1$. Οι εκθέτες της ΔΕ στο ∞ είναι ίσοι με $-a_\infty^\pm$.
- (∞₂) Αν η τάξη του r στο ∞ είναι ίση με 2, τότε $[\sqrt{r}]_\infty = 0$. Έστω $r(z) = s/t$ με $s, t \in \mathbb{C}[z]$. Ο συντελεστής b του $1/z^2$ στο ανάπτυγμα Laurent του $r(z)$ στο ∞ είναι ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου όρου του s διαιρούμενος από τον αντίστοιχο συντελεστή του t και $a_\infty^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4b})$. Οι εκθέτες της ΔΕ στο ∞ είναι ίσοι με $-a_\infty^\pm$.
- (∞₃) Αν η τάξη του r στο ∞ είναι $-2n \leq 0$, τότε το $[\sqrt{r}]_\infty$ είναι το ακόλουθο τμήμα του αναπτύγματος Laurent της $\sqrt{r}$ στο ∞

$$[\sqrt{r}]_\infty = a z^n + \dots + d.$$

Υπάρχουν δύο δυνατότητες για τη μορφή του $[\sqrt{r}]_\infty$, η μια αρνητική της άλλης, από τις οποίες μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε. Αν b είναι ο συντελεστής του x^{n-1} στο ανάπτυγμα Laurent της r μείον το συντελεστή του x^{n-1} του $([\sqrt{r}]_\infty)^2$, τότε $a_\infty^\pm = \frac{1}{2}(\pm \frac{b}{a} - n)$.

Βήμα 2: Καθορισμός του $v \in \mathbb{C}(z)$. Θεωρούμε το σύνολο $s = \{s(c) : c \in I \cup \{\infty\}, s(c) \in \{+, -\}\}$ και τον αντίστοιχο αριθμό $q = a_\infty^{s(\infty)} - \sum_{c \in I} a_c^{s(c)}$. Αν ο q είναι

μη-αρνητικός ακέραιος τότε $v = \sum_{c \in I} \left(s(c)[\sqrt{r}]_c + \frac{a_c^{s(c)}}{z-c} \right) + s(\infty)[\sqrt{r}]_\infty$. Αν το q είναι αρνητικός ή δεν είναι ακέραιος, τότε δεν λαμβάνουμε υπόψη την αντίστοιχη οικογένεια s . Αν από όλα τα σύνολα s δεν προκύψει κάποιος μη-αρνητικός ακέραιος q , τότε η περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Βήμα 3: Καθορισμός του P . Για κάθε $u \in \mathbb{C}(z)$ και αντίστοιχο q , που έχει προσδιοριστεί από το προηγούμενο βήμα, αναζητούμε ένα μονικό πολυώνυμο $P \in \mathbb{C}[z]$, βαθμού q , που να ικανοποιεί την εξίσωση $P'' + 2vP' + (v' + v^2 - r)P = 0$. Αν βρεθεί ένα τέτοιο P , τότε η $n = P \exp(\int v)$ είναι μια λύση της ΔΕ. Αν δε βρεθεί ένα τέτοιο P , τότε η περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Αλγόριθμος για την περίπτωση (ii) του θεωρήματος 2.3.1: Η λύση n της ΔΕ έχει τη μορφή $n = \exp(\int \omega)$, όπου το ω είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{C}(z)$ βαθμού 2. Όπως και στην περίπτωση (i), στο πρώτο βήμα συλλέγουμε δεδομένα για κάθε $c \in I \cup \{\infty\}$, τα οποία καθορίζουν κάποιους αριθμούς q στο δεύτερο βήμα. Στο τρίτο βήμα, για κάθε

μη-αρνητικό ακέραιο q , αναζητούμε ένα πολυώνυμο P , βαθμού q , που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη γραμμική διαφορική εξίσωση. Αν βρεθεί ένα τέτοιο πολυώνυμο, τότε παράγεται μια λύση της ΔΕ, ενώ αν δε βρεθεί η περίπτωση (ii) δεν ισχύει.

Βήμα 1: Συλλογή δεδομένων για κάθε $c \in I \cup \{\infty\}$. Για κάθε $c \in I \cup \{\infty\}$ ορίζουμε το σύνολο E_c ως εξής:

- (c₁) Αν το $c \in I$ είναι πόλος τάξης 1, τότε $E_c = \{4\}$.
- (c₂) Αν το $c \in I$ είναι πόλος τάξης 2, τότε $[\sqrt{r}]_c = 0$. Αν b είναι ο συντελεστής του όρου $1/(z-c)^2$ στο μερικό ανάπτυγμα σε κλάσματα του $r(z)$, τότε $E_c = \{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z}$.
- (c₃) Αν το $c \in I$ είναι πόλος τάξης $n > 2$, τότε $E_c = \{n\}$.
- (∞₁) Αν η τάξη του r στο ∞ είναι μεγαλύτερη από 2, τότε $E_\infty = \{0, 2, 4\}$.
- (∞₂) Αν η τάξη του r στο ∞ είναι ίση με 2 και b είναι ο συντελεστής του $1/z^2$ στο ανάπτυγμα Laurent του $r(z)$ στο ∞ , τότε $E_\infty = \{2 + k\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z}$.
- (∞₃) Αν η τάξη του r στο ∞ είναι $n < 2$, τότε $E_\infty = \{n\}$.

Βήμα 2: Καθορισμός του q . Θεωρούμε το σύνολο $s = \{e_c : e_c \in E_c\}$. Αν το s αποτελείται αποκλειστικά από άρτιους αριθμούς απορρίπτεται, διαφορετικά ορίζουμε τον αντίστοιχο αριθμό $q = \frac{1}{2}(e_\infty - \sum_{c \in I} e_c)$. Αν ο q είναι μη-αρνητικός ακέραιος διατηρείται, διαφορετικά απορρίπτεται. Αν απορριφθούν όλοι οι q που αντιστοιχούν σε όλα τα σύνολα s , τότε η περίπτωση (ii) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Βήμα 3: Καθορισμός του P και της λύσης της ΔΕ. Για κάθε s και αντίστοιχο q , που έχει διατηρηθεί από το προηγούμενο βήμα, αναζητούμε ένα μονικό πολυώνυμο $P \in \mathbb{C}[z]$, βαθμού q , που να ικανοποιεί την εξίσωση $P'' + 3\theta P'' + (3\theta^2 + 3\theta' - 4r)P' + (\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4r\theta - 2r')P = 0$, όπου $\theta = \frac{1}{2} \sum_{c \in I} \frac{e_c}{z-c}$. Αν δε βρεθεί ένα τέτοιο P η περίπτωση (ii) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει, διαφορετικά θεωρούμε την αντίστοιχη $\phi = \theta + P'/P$. Αν ω είναι μια λύση της $\omega^2 + \phi\omega + (\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^2 - r) = 0$, τότε η $n = \exp(\int \omega)$ είναι μια λύση της ΔΕ.

Αλγόριθμος για την περίπτωση (iii) του θεωρήματος 2.3.1: Η λύση n της ΔΕ είναι αλγεβρική. Η $\omega = n'/n$ ικανοποιεί μια πολυωνμική εξίσωση βαθμού $n \in \{4, 6, 12\}$. Στο πρώτο βήμα ορίζουμε το σύνολο E_c για κάθε $c \in I \cup \{\infty\}$. Στο δεύτερο βήμα, για κάθε E_c ορίζουμε τον αντίστοιχο αριθμό q . Στο τρίτο βήμα, για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο q , αναζητούμε ένα πολυώνυμο P , βαθμού q , που ικανοποιεί μια συγκεκριμένη αναδρομική σχέση. Αν βρεθεί ένα τέτοιο πολυώνυμο, τότε παράγεται μια λύση της ΔΕ, ενώ αν δε βρεθεί η περίπτωση (iii) δεν ισχύει.

Βήμα 1: Συλλογή δεδομένων για κάθε $c \in I \cup \{\infty\}$. Για κάθε $c \in I \cup \{\infty\}$ ορίζουμε το σύνολο E_c ως εξής:

- (c₁) Αν το $c \in I$ είναι πόλος τάξης 1, τότε $E_c = \{12\}$.
- (c₂) Αν το $c \in I$ είναι πόλος τάξης 2 και a είναι ο συντελεστής του όρου $1/(x-c)^2$ στο μερικό ανάπτυγμα σε κλάσματα του $r(z)$, τότε $E_c = \{6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1+4a} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n}{2}\} \cap \mathbb{Z}$.
- (∞) Αν το ανάπτυγμα Laurent του $r(z)$ στο ∞ είναι $r = bz^{-2} + \dots$, τότε $E_c = \{6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1+4b} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n}{2}\} \cap \mathbb{Z}$.

Βήμα 2: Καθορισμός του q . Θεωρούμε το σύνολο $s = \{e_c : e_c \in E_c\}$ και ορίζουμε τον αντίστοιχο αριθμό $q = \frac{n}{12}(e_\infty - \sum_{c \in I} e_c)$. Αν ο q είναι μη-αρνητικός ακέραιος διατηρείται, διαφορετικά απορρίπτεται. Αν απορριφθούν όλοι οι q που αντιστοιχούν σε όλα τα σύνολα s , τότε η περίπτωση (iii) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Βήμα 3: Καθορισμός του P και της λύσης της ΔΕ. Για κάθε s και αντίστοιχο q , που έχει διατηρηθεί από το προηγούμενο βήμα, ορίζουμε τις $\theta = \frac{n}{12} \sum_{c \in I} \frac{e_c}{z-c}$, $T = \prod_{c \in I} (z - c)$. Στη συνέχεια αναζητούμε ένα μονικό πολυώνυμο $P \in \mathbb{C}[z]$, βαθμού q , τέτοιο ώστε όταν ορίζονται τα $P_n, P_{n-1}, \dots, P_{-1}$ από τον αναδρομικό τύπο

$$P_n = -P$$

$$P_{i-1} = -T P'_i + ((n-i)T' - T\theta)P_i - (n-i)(i+1)T^2 P_{i+1} r, \quad i = n-1, \dots, 0$$

να ισχύει $P_{-1} = 0$ ταυτοτικά. Αν δε βρεθεί ένα τέτοιο P η περίπτωση (iii) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει, διαφορετικά η $n = \exp(\int \omega)$ είναι μια λύση της ΔΕ, όπου ω είναι μια λύση της $\sum_{i=0}^n \frac{T^i P_i}{(n-i)!} \omega^i = 0$.

Σχόλιο 2.3.4. Έστω I το σύνολο των ιδιομορφιών (στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο) και $G \in SL(2, \mathbb{C})$ η διαφορική ομάδα Galois της $y'' = r(z)y$ με $r(z) \in \mathbb{C}(z)$. Αν η $y'' = r(z)y$ είναι κανονικώς ιδιόμορφη, τότε στην περιοχή κάθε $c \in I \cup \{\infty\}$ επιδέχεται δύο εκθέτες. Αν ισχύει η περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.3.1, τότε η $y'' = r(z)y$ καλείται “αναγώγιμη” (reducible). Από την ανάλυση του αλγόριθμου για αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι η $y'' = r(z)y$ επιδέχεται μια λύση της μορφής

$$n(z) = P(z) \prod_{c \in I} (z - c)^{e_c}, \quad (2.3.1)$$

όπου $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ είναι βαθμού

$$\deg P(z) = -e_\infty - \sum_{c \in I} e_c \quad (2.3.2)$$

και e_t είναι ένας εκθέτης στο $t \in I \cup \{\infty\}$. Αν κάποιο $c \in I$ είναι πόλος τάξης 1, τότε $e_c = 1$.

Παράδειγμα 2.3.5. Θεωρούμε την εξίσωση $y'' = r(z)y$, όπου $r(z) \in \mathbb{C}(z)$.

1. Για

$$r(z) = z^2 - 2z + 3 + \frac{1}{z} + \frac{7}{4z^2} - \frac{5}{z^3} + \frac{1}{z^4}$$

μόνο οι αναγκαίες συνθήκες της περίπτωσης (i) του θεωρήματος 2.3.1 ικανοποιούνται.

Η τάξη του πόλου $z = 0$ της $r(z)$ είναι $2n = 4$, άρα $[\sqrt{r}]_0 = a/x^2$ με $a^2 = 1$. Επιλέγουμε $a = 1$, οπότε $[\sqrt{r}]_0 = 1/x^2$ και $b = -5 - 0 = -5$. Άρα $a_0^\pm = \frac{1}{2}(\pm(-5/1) + 2)$ και $a_0^+ = -3/2$, $a_0^- = 7/2$.

Η τάξη της $r(z)$ στο ∞ είναι $-2n = -2$, οπότε $[\sqrt{r}]_\infty = ax + d$ και $([\sqrt{r}]_\infty) = ax^2 + 2adx + d^2$ με $a^2 = 1$, $2ad = -2$. Επιλέγουμε $a = 1$, $d = -1$, επομένως $[\sqrt{r}]_\infty = x - 1$, $b = 3 - 1 = 2$. Άρα $a_\infty^\pm = \frac{1}{2}(\pm 2/1 - 1)$ και $a_\infty^+ = 1/2$, $a_\infty^- = -3/2$.

Θεωρούμε όλα τα σύνολα της μορφής $s = \{s(0), s(\infty)\} : s(c) \in \{+, -\}, c \in \{0, \infty\}$ και τον αντίστοιχο αριθμό $q = a_\infty^{s(\infty)} - a_0^{s(0)}$ για καθένα από αυτά.

$s(0)$	$s(\infty)$	q
+	+	2
+	-	0
-	+	-3
-	-	-5

Για $q = 2$ προκύπτει $v = [\sqrt{r}]_0 + \frac{a_0^+}{z} + [\sqrt{r}]_\infty = \frac{1}{z^2} - \frac{3}{2z} + z - 1$. Αναζητούμε ένα μονικό πολυώνυμο P βαθμού 2 που να ικανοποιεί την εξίσωση $P'' + 2vP' + (v' + v^2 - r)P = 0$, από την οποία έπεται $P = z^2 - 1$. Μια λύση της $y'' = r(z)y$ είναι η $n = P \exp(\int v) = z^{-3/2}(z^2 - 1) \exp(-\frac{1}{z} + \frac{z^2}{2} - z)$.

2. Για $r(z) = (az + d)^2 + b$ με $a, b, d \in \mathbb{C}$ μόνο οι αναγκαίες συνθήκες της περίπτωσης (i) του θεωρήματος 2.3.1 μπορούν να ικανοποιηθούν.

Η τάξη της $r(z)$ στο ∞ είναι $-2n = -2$, οπότε $[\sqrt{r}]_\infty = ax + d$. Άρα $a_\infty^\pm = \frac{1}{2}(\pm b/a - 1)$ και $q = a_\infty^+$ ή $q = a_\infty^-$.

Αν η περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.3.1 ισχύει, τότε ο $q \in \{a_\infty^+, a_\infty^-\}$ πρέπει να είναι μη-αρνητικός ακέραιος, συνεπώς το b/a πρέπει να είναι ένας περιττός ακέραιος.

Αν το b/a είναι ένας περιττός ακέραιος, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $b/a = 2k + 1$ για $k \in \mathbb{N}$. Για να ισχύει η περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.3.1 πρέπει να υπάρχει ένα μονικό πολυώνυμο P , βαθμού k , που να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} P'' + 2vP' + (v' + v^2 - r)P &= 0 \\ P'' + 2(az + d)P' - 2kaP &= 0. \end{aligned}$$

Θέτοντας $P = \sum_{i=0}^k P_i z^i$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι τα P_i ορίζονται από τον αναδρομικό τύπο

$$P_i = \frac{(2k+1)(i+1)}{k-i} P_{i+1} + \frac{(i+2)(i+1)}{2a(k-i)} P_{i+2}, \quad i = k-1, \dots, 0,$$

όπου $P_{k+1} = 0, P_k = 1$.

Άρα, η $y'' = ((az + d)^2 + b)y$ έχει λύσεις Liouville αν και μόνο αν το b/a είναι περιττός ακέραιος.

Θέτοντας $a = -1/2, d = 0, b = -1/2 - n$ για $n \in \mathbb{C}$ προκύπτει η εξίσωση Weber

$$y'' = \left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2} - n\right)y.$$

Συνεπώς, $b/a = 2n + 1$ και η διαφορική εξίσωση Weber έχει λύσεις Liouville αν και μόνο αν ο n είναι ακέραιος.

3. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση Bessel $y'' = r(z)y$ με $r(z) = \frac{4n^2-1}{4z^2} - 1$. Μόνο οι αναγκαίες συνθήκες των περιπτώσεων (i), (ii) του θεωρήματος 2.3.1 μπορούν να ικανοποιηθούν.

Περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.3.1. Το $z = 0$ είναι πόλος τάξης 2, οπότε $[\sqrt{r}]_0 = 0$, $b = (4n^2 - 1)/4$, $a_0^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4b}) = \frac{1}{2} \pm n$.

Η τάξη της $r(z)$ στο ∞ είναι 0 και $[\sqrt{r}]_\infty = \mathbf{i}$. Επίσης $b = 0$ και $a_\infty^\pm = 0$.

Θεωρούμε όλα τα σύνολα της μορφής $s = \{s(0), s(\infty)\} : s(c) \in \{+, -\}$, $c \in \{0, \infty\}$ και τον αντίστοιχο αριθμό $q = a_\infty^{s(\infty)} - a_0^{s(0)}$ για καθένα από αυτά.

$s(0)$	$s(\infty)$	q
+	+	$-1/2 - n$
+	-	$-1/2 - n$
-	+	$-1/2 + n$
-	-	$-1/2 + n$

Αν η περίπτωση (i) ισχύει, τότε κάποιος από τους παραπάνω q πρέπει να είναι μη-αρνητικός ακέραιος, δηλαδή πρέπει να ισχύει $n = (2k + 1)/2$ για $k \in \mathbb{Z}$.

Αν $n = (2k + 1)/2 < 0$ για $k \in \mathbb{Z}$, τότε $q = -1/2 - n \in \mathbb{N}$. Θεωρώντας $\{s(0), s(\infty)\} = \{+, +\}$, προκύπτει $v = -q/z + \mathbf{i}$. Για να ισχύει η περίπτωση (i) πρέπει να υπάρχει ένα πολυώνυμο P βαθμού q που να ικανοποιεί την

$$P'' + 2vP' + (v' + v^2 - r)P = 0$$

$$P'' + 2\left(-\frac{q}{z} + \mathbf{i}\right)P' - \mathbf{i}\frac{2q}{z}P = 0.$$

Η

$$P = \sum_{j=0}^q (-2\mathbf{i})^{j-m} \frac{(2q-j)!}{j!(m-j)!} x^j$$

είναι μια λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης και η $n = z^{-q}e^{\mathbf{i}z}P$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel.

Αν $n = (2k + 1)/2 > 0$ για $k \in \mathbb{Z}$, τότε $q = -1/2 + n \in \mathbb{N}$. Θεωρώντας $\{s(0), s(\infty)\} = \{-, +\}$ έπεται $v = -q/z + \mathbf{i}$, οπότε προκύπτει η ίδια λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel με την παραπάνω.

Περίπτωση (ii) του θεωρήματος 2.3.1. Εφόσον για $n = (2k + 1)/2$, $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει η περίπτωση (i), θεωρούμε $n \neq (2k + 1)/2$.

Το $z = 0$ είναι πόλος τάξης 2, οπότε $E_0 = \{2 + p\sqrt{1 + 4b} : p = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z} = \{2 + 2pn : p = 0, \pm 2\} \cap \mathbb{Z}$ για $b = (4n^2 - 1)/4$. Αν $4n \in \mathbb{Z}$ τότε $E_0 = \{2, 2 + 4n, 2 - 4n\}$, αλλιώς $E_0 = \{2\}$.

Η τάξη της $r(z)$ στο ∞ είναι 0, οπότε $E_\infty = \{0\}$.

Αν $4n \notin \mathbb{Z}$ τότε $(e_0, e_\infty, q) = (2, 0, -1)$ για $e_c \in E_c$, συνεπώς η περίπτωση (ii) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Αν $4n \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν οι περιπτώσεις

e_0	e_∞	q
2	0	-1
$2 + 4n$	0	$-1 - 2n$
$2 - 4n$	0	$-1 + 2n$.

Για να είναι το q μη-αρνητικός ακέραιος πρέπει το n να είναι το μισό ενός ακεραίου. Εφόσον $n \neq (2k+1)/2$, ισχύει $n \in \mathbb{Z}$. Όμως σε αυτή την περίπτωση τα e_0, e_∞ είναι άρτιοι, συνεπώς η περίπτωση (ii) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Άρα η διαφορική εξίσωση Bessel επιδέχεται λύσεις Liouville αν και μόνο αν $n = (2k+1)/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Για $r(z) = -\frac{5z^2+27}{36(z^2-1)^2}$ η $y'' = r(z)y$ ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες όλων των περιπτώσεων του θεωρήματος 2.3.1. Η $r(z)$ έχει πόλους στα σημεία $z = \pm 1$ τάξης 2, ενώ η τάξη της στο ∞ είναι 2. Το μερικό ανάπτυγμα σε κλάσματα της $r(z)$ έχει τη μορφή

$$r(z) = -\frac{2}{9(z+1)^2} + \dots - \frac{2}{9(z-1)^2} + \dots$$

Το ανάπτυγμα Laurent της $r(z)$ στο ∞ είναι

$$r(z) = -\frac{5}{36z^2} + \dots$$

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο για την περίπτωση (i), προκύπτει $(a_{-1}^+, a_{-1}^-) = (2/3, 1/3)$, $(a_1^+, a_1^-) = (2/3, 1/3)$, $(a_\infty^+, a_\infty^-) = (5/6, 1/6)$, οπότε ο $q = a_\infty^\pm - a_{-1}^\pm - a_1^\pm$ δεν είναι μη-αρνητικός ακέραιος για οποιαδήποτε επιλογή προσήμων. Άρα η περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο για την περίπτωση (ii) προκύπτει $E_{-1} = E_1 = E_\infty = \{2\}$. Εφόσον τα στοιχεία των E_c είναι άρτιοι, η περίπτωση (ii) του θεωρήματος 2.3.1 δεν ισχύει.

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο για την περίπτωση (iii), προσπαθώντας να βρούμε μια λύση $n = \exp(\int \omega)$, όπου το ω είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbb{C}(z)$ βαθμού $n = 4$.

Στο πρώτο βήμα καθορίζουμε τα σύνολα $E_c = \{6 + \frac{12k}{n}\sqrt{1+4a} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n}{2}\} \cap \mathbb{Z}$ για $c \in I \cup \{\infty\}$, όπου a είναι ο συντελεστής του όρου $1/(x-c)^2$ στο μερικό ανάπτυγμα σε κλάσματα του $r(z)$. Άρα $E_{-1} = \{4, 4, 6, 7, 8\}$, $E_1 = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $E_\infty = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τους συνδυασμούς των $e_c \in E_c$ για $c \in I \cup \{\infty\}$ ώστε ο αντίστοιχος αριθμός $q = \frac{1}{3}(e_\infty - e_{-1} - e_1)$ να είναι μη-αρνητικός ακέραιος. Προκύπτουν τα σύνολα

e_∞	e_{-1}	e_1	q
8	4	4	0
10	4	6	0
10	5	5	0
10	6	4	0

Η πρώτη από τις παραπάνω περιπτώσεις δίνει

$$\theta = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{z+1} + \frac{4}{z-1} \right) = \frac{8z}{3(z^2-1)}.$$

Θέτοντας $T = z^2 - 1$, έχουμε $T\theta = \frac{8}{3}z$, $T^2r = -\frac{1}{36}(5z^2 + 27)$ και

$$\begin{aligned} P_4 &= -1 \\ P_3 &= \frac{8}{3}z \\ P_2 &= -\frac{1}{3}(15z^2 + 1) \\ P_1 &= \frac{1}{9}(50z^3 + 14z) \\ P_0 &= -\frac{1}{54}(125z^4 + 134z^2 + -3) \\ P_{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Το ω ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 \frac{T^i P_i}{(n-i)!} \omega^i &= 0 \Rightarrow \\ -T\omega^4 + \frac{8}{3}zT\omega^3 - \frac{1}{6}(15z^2 + 1)T\omega^2 + \frac{1}{27}(25z^3 + 7z)T\omega - \frac{1}{1296}(125z^4 + 134z^2 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός $6T\omega = w + 4z$ μετατρέπει την προηγούμενη εξίσωση στην

$$-w^4 + 6(z^2 - 1)w^2 - 8z(z^2 - 1)w + 3(z^2 - 1)^2 = 0$$

και η $n = \exp(\int \omega) = (z^2 - 1)^{1/3} \exp(\int \frac{w}{z^2-1} dz)$ είναι μια λύση της $y'' = r(z)y$.

2.4 Η γενικευμένη υπεργεωμετρική εξίσωση

Θεωρούμε μια διαφορική εξίσωση

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0 \tag{2.4.1}$$

που οι μόνες ιδιομορφίες της $z = a, b, c$ βρίσκονται στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο και είναι κανονικές. Έστω $\{\rho, \hat{\rho}\}, \{\sigma, \hat{\sigma}\}, \{\tau, \hat{\tau}\}$ τα ζεύγη των εκθετών στις αντίστοιχες ιδιομορφίες $z = a, b, c$. Στην περιοχή κάθε $s \in I = \{a, b, c\}$, οι $p(z), q(z)$ επιδέχονται αναπτύγματα Laurent

$$p(z) = p_{0,s}(z-s)^{-1} + \dots, \quad q(z) = q_{0,s}(z-s)^{-2} + q_{1,s}(z-s)^{-1} + \dots$$

και η εξίσωση δεικτών έχει τη μορφή

$$r^2 + (p_{0,s} - 1)r + q_{0,s} = 0.$$

Συνεπώς αν r_1, r_2 είναι οι εκθέτες στο $s \in I = \{a, b, c\}$, τότε $p_{0,s} = 1 - r_1 - r_2$ και $q_{0,s} = r_1 r_2$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{(1 - \rho - \hat{\rho})}{(z - a)} + \frac{(1 - \sigma - \hat{\sigma})}{(z - b)} + \frac{(1 - \tau - \hat{\tau})}{(z - c)} + u(z), \\ q(z) &= \frac{\rho \hat{\rho}}{(z - a)^2} + \frac{\sigma \hat{\sigma}}{(z - b)^2} + \frac{\tau \hat{\tau}}{(z - c)^2} + \frac{q_{1,a}}{(z - a)} + \frac{q_{1,b}}{(z - b)} + \frac{q_{1,c}}{(z - c)} + h(z), \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

όπου $u(z)$, $h(z)$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις. Θέτοντας $z = 1/w$ η (2.4.1) γίνεται

$$\ddot{y} + \left(\frac{2}{w} + \frac{p(1/w)}{w^2} \right) \dot{y} + \frac{q(1/w)}{w^4} y = 0$$

και το $w = 0 (z = \infty)$ είναι κανονικό σημείο, οπότε στην περιοχή του ισχύει

$$p(1/w) = 2w + O(w^2), \quad q(1/w) = O(w^4). \quad (2.4.3)$$

Θέτοντας $z = 1/w$ στις (2.4.2) και εξισώνοντας με τις (2.4.3) προκύπτει $u(z) = h(z) = 0$, $\rho + \hat{\rho} + \sigma + \hat{\sigma} + \tau + \hat{\tau} = 1$ και

$$q(z) = \left(\frac{\rho \hat{\rho}(a - b)(a - c)}{z - a} + \frac{\sigma \hat{\sigma}(b - c)(b - a)}{z - b} + \frac{\tau \hat{\tau}(c - a)(c - b)}{z - c} \right) \frac{1}{(z - a)(z - b)(z - c)}.$$

Η εξίσωση

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = 0, \quad (2.4.4)$$

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{(1 - \rho - \hat{\rho})}{(z - a)} + \frac{(1 - \sigma - \hat{\sigma})}{(z - b)} + \frac{(1 - \tau - \hat{\tau})}{(z - c)}, \\ q(z) &= \left(\frac{\rho \hat{\rho}(a - b)(a - c)}{z - a} + \frac{\sigma \hat{\sigma}(b - c)(b - a)}{z - b} + \frac{\tau \hat{\tau}(c - a)(c - b)}{z - c} \right) \frac{1}{(z - a)(z - b)(z - c)} \end{aligned}$$

διατυπώθηκε και μελετήθηκε, για πρώτη φορά, σε αυτή τη μορφή από τον E. Papperitz [103] το 1885. Η (2.4.4) καλείται γενικευμένη υπεργεωμετρική εξίσωση [52] ή εξίσωση του Riemann [3, 106, 124], επειδή το 1857 ο G. Riemann [113] μελέτησε τη γενική της λύση $y = P$ για

$$P = P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \rho & \sigma & \tau & z \\ \hat{\rho} & \hat{\sigma} & \hat{\tau} \end{matrix} \right\}, \quad (2.4.5)$$

χωρίς να διατυπώσει τη μορφή της (2.4.4). Δύο σημαντικές ιδιότητες της συνάρτησης P του Riemann (2.4.5) είναι οι

$$\begin{aligned} \left(\frac{z - a}{z - c} \right)^k \left(\frac{z - b}{z - c} \right)^l P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \rho & \sigma & \tau & z \\ \hat{\rho} & \hat{\sigma} & \hat{\tau} \end{matrix} \right\} &= P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \rho + k & \sigma + l & \tau - k - l & z \\ \hat{\rho} + k & \hat{\sigma} + l & \hat{\tau} - k - l \end{matrix} \right\} \\ P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \rho & \sigma & \tau & z \\ \hat{\rho} & \hat{\sigma} & \hat{\tau} \end{matrix} \right\} &= P \left\{ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \rho & \sigma & \tau & z_1 \\ \hat{\rho} & \hat{\sigma} & \hat{\tau} \end{matrix} \right\}, \quad q = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad AD - BC \neq 0. \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Ο H.A. Schwarz [117] παρήγαγε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η γενικευμένη υπεργεωμετρική εξίσωση (2.4.4) να έχει μόνο αλγεβρικές λύσεις.

Θεώρημα 2.4.1. [117] Η γενικευμένη υπεργεωμετρική εξίσωση (2.4.4) έχει μόνο αλγεβρικές λύσεις αν και μόνο αν όλοι οι εκθέτες της είναι ρητοί αριθμοί και

- A.** είτε ακριβώς δύο ή τέσσερα από τα αθροίσματα $\lambda + \mu + \nu$, $-\lambda + \mu + \nu$, $\lambda - \mu + \nu$, $\lambda + \mu - \nu$ είναι περιττοί ακέραιοι και καμιά από τις ιδιομορφίες δεν είναι λογαριθμική,
- B.** είτε οι ποσότητες λ ή $-\lambda$, μ ή $-\mu$, ν ή $-\nu$, με τυχαία σειρά, παίρνουν τις τιμές που παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα του Schwarz, για $l, m, n \in \mathbb{Z}$.

1	$1/2 + l$	$1/2 + m$	ρητός	
2	$1/2 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	
3	$2/3 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
4	$1/2 + l$	$1/3 + m$	$1/4 + n$	
5	$2/3 + l$	$1/4 + m$	$1/4 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
6	$1/2 + l$	$1/3 + m$	$1/5 + n$	
7	$2/5 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
8	$2/3 + l$	$1/5 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
9	$1/2 + l$	$2/5 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
10	$3/5 + l$	$1/3 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
11	$2/5 + l$	$2/5 + m$	$2/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
12	$2/3 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
13	$4/5 + l$	$1/5 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
14	$1/2 + l$	$2/5 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
15	$3/5 + l$	$2/5 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$

Οι M. Hukuhara και S. Ohasi [50] παρουσίασαν ικανές συνθήκες για να είναι αναγώγιμη η (2.4.4).

Θεώρημα 2.4.2. [50] Η γενικευμένη υπεργεωμετρική εξίσωση (2.4.4) είναι αναγώγιμη αν

- A.** είτε τουλάχιστον ένα από τα αθροίσματα $\lambda + \mu + \nu$, $-\lambda + \mu + \nu$, $\lambda - \mu + \nu$, $\lambda + \mu - \nu$ είναι περιττός ακέραιος,
- B.** είτε οι ποσότητες λ ή $-\lambda$, μ ή $-\mu$, ν ή $-\nu$, με τυχαία σειρά, παίρνουν τις τιμές που παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα για $l, m, n \in \mathbb{Z}$.

1	$1/2 + l$	$1/2 + m$	μγαδικός	
2	$1/2 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	
3	$2/3 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
4	$1/2 + l$	$1/3 + m$	$1/4 + n$	
5	$2/3 + l$	$1/4 + m$	$1/4 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$

Με χρήση των παραπάνω θεωρημάτων, ο T. Kimura [59] παρήγαγε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η (2.4.4) να επιδέχεται λύσεις Liouville.

Θεώρημα 2.4.3. Η γενικευμένη υπεργεωμετρική εξίσωση (2.4.4) επιδέχεται λύσεις Liouville αν και μόνο αν

- A.** είτε τουλάχιστον ένα από τα αθροίσματα $\lambda + \mu + \nu$, $-\lambda + \mu + \nu$, $\lambda - \mu + \nu$, $\lambda + \mu - \nu$ είναι περιττός ακέραιος,

1	$1/2 + l$	$1/2 + m$	μυγαδικός	
2	$1/2 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	
3	$2/3 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
4	$1/2 + l$	$1/3 + m$	$1/4 + n$	
5	$2/3 + l$	$1/4 + m$	$1/4 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
6	$1/2 + l$	$1/3 + m$	$1/5 + n$	
7	$2/5 + l$	$1/3 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
8	$2/3 + l$	$1/5 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
9	$1/2 + l$	$2/5 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
10	$3/5 + l$	$1/3 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
11	$2/5 + l$	$2/5 + m$	$2/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
12	$2/3 + l$	$1/3 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
13	$4/5 + l$	$1/5 + m$	$1/5 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
14	$1/2 + l$	$2/5 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$
15	$3/5 + l$	$2/5 + m$	$1/3 + n$	$l + m + n = \text{άρτιος}$

Πίνακας 2.1: Η ένωση των πινάκων των Schwarz και Hukuhara-Ohasi

B. είτε οι ποσότητες λ ή $-\lambda$, μ ή $-\mu$, ν ή $-\nu$, με τυχαία σειρά, παίρνουν τις τιμές που παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα για $l, m, n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Η ικανότητα είναι άμεση συνέπεια των θεωρημάτων των Schwarz και Hukuhara-Ohasi. Άρα θα χρειαστεί να αποδείξουμε μόνο την αναγκαιότητα.

Έστω ότι η Picard-Vessiot επέκταση L της γενικευμένης υπεργεωμετρικής εξίσωσης (2.4.4) είναι μια επέκταση Liouville του σώματος των ρητών συναρτήσεων $K = \mathbb{C}(z)$. Θεωρούμε, αντί για το σύνολο λύσεων (2.4.5) τη συνάρτηση P

$$\hat{y} = P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \frac{1-\lambda}{2} & \frac{1-\mu}{2} & -\frac{\nu+1}{2} \\ \frac{1+\lambda}{2} & \frac{1+\mu}{2} & \frac{\nu-1}{2} \end{array} \quad z \right\}, \quad (2.4.7)$$

που έχει τις ίδιες εκθετικές διαφορές με την (2.4.5). Η εξίσωση που αντιστοιχεί στην (2.4.7) έχει τη μορφή

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dz^2} + \frac{2}{z-c} \frac{d\hat{y}}{dz} + \frac{1}{4} \left[(1-\lambda^2) \frac{(a-b)(a-c)}{z-a} + \dots \right] \frac{\hat{y}}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0. \quad (2.4.8)$$

Έστω $\hat{L} \supset K$ η Picard-Vessiot επέκταση και $(\hat{\phi}, \hat{\psi})$ ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (2.4.8), της οποίας τη διαφορική ομάδα Galois και τη μονόδρομη ομάδα συμβολίζουμε ως $\hat{G}$ και $\hat{M}$ αντίστοιχως. Από τις ιδιότητες (2.4.6) έπεται

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \frac{1-\lambda}{2} & \frac{1-\mu}{2} & -\frac{\nu+1}{2} \\ \frac{1+\lambda}{2} & \frac{1+\mu}{2} & \frac{\nu-1}{2} \end{array} \quad z \right\} = \varphi(x) P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \rho & \sigma & \tau \\ \rho' & \sigma' & \tau' \end{array} \quad z \right\}$$

για

$$\varphi(z) = \left(\frac{z-a}{z-c} \right)^{\frac{1-\rho-\rho'}{2}} \left(\frac{z-b}{z-c} \right)^{\frac{1-\sigma-\sigma'}{2}},$$

οπότε

$$\hat{L} \subset L < \varphi > .$$

Εφόσον ισχύει ότι $\varphi'/\varphi \in K$, η $L < \varphi >$ είναι μια επέκταση Liouville του K , οπότε και η $\hat{L}$ είναι μια επέκταση Liouville του K . Συνεπώς η ταυτοτική συνιστώσα $\hat{G}_0$ της $\hat{G}$ είναι επιλύσιμη.

Για $u(z) = 1/(z - c)^2$ ισχύει $u'(z) = -u(z)/(z - c)$, οπότε από την πρόταση 1.6.15 επάγεται ότι $\hat{G} \subset SL(2, \mathbb{C})$.

Από το θεώρημα 2.3.1 προκύπτει ότι

- (i) είτε η $\hat{G}$ ανάγεται σε τριγωνική μορφή και είναι αναγώγιμη,
- (ii) είτε η $\hat{G}^0$ ανάγεται σε διαγώνια μορφή και $[\hat{G} : \hat{G}^0] = 2$,
- (iii) είτε η $\hat{G}$ είναι πεπερασμένη και όλες οι λύσεις της είναι αλγεβρικές.

Στην περίπτωση (i) το θεώρημα 2.3.1 και η συνθήκη $\rho + \hat{\rho} + \sigma + \hat{\sigma} + \tau + \hat{\tau} = 1$ επάγει τη συνθήκη **A**. Στην περίπτωση (iii) η ομάδα $\hat{G}$ είναι πεπερασμένη, οπότε οι ποσότητες λ ή $-\lambda$, μ ή $-\mu$, ν ή $-\nu$, με τυχαία σειρά, παίρνουν τις τιμές που παρατίθενται στον πίνακα του Schwarz.

Στο υπόλοιπο της απόδειξης διερευνούμε την περίπτωση (ii). Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η $\hat{G}$ είναι μη-πεπερασμένη και μη-αναγώγιμη σε τριγωνική μορφή. Έστω $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ οι μονόδρομοι πίνακες στα ιδιόμορφα σημεία a, b, c , αντιστοίχως. Οι $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ παράγουν την $\hat{G}$, επειδή η (2.4.8) είναι κανονικώς ιδιόμορφη.

Η $\hat{G}_0$ δε μπορεί να περιέχει και τους τρεις πίνακες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, που είναι οι γεννήτορες της μονόδρομης ομάδας, διότι $[\hat{G} : \hat{G}_0] = 2$. Επίσης η $\hat{G}_0$ δε μπορεί να περιέχει δύο εκ των $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, διότι σε αυτή την περίπτωση θα προέκυπτε, από τη σχέση $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = I$, ότι ανήκει σε αυτήν και ο τρίτος.

Αρκεί να εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου $\hat{A} \notin \hat{G}_0$ και $\hat{B} \notin \hat{G}_0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχει επιλεγεί ένα θεμελειώδες σύνολο λύσεων $(\hat{\phi}, \hat{\psi})$ τέτοιο ώστε οι $\hat{A}, \hat{B}$ να έχουν τη μορφή

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\exp(-i\pi\lambda) & \hat{\alpha} \\ 0 & -\exp(i\pi\lambda) \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} -\exp(-i\pi\mu) & 0 \\ \hat{\beta} & -\exp(i\pi\mu) \end{pmatrix}$$

με $\hat{\alpha}\hat{\beta} \neq 0$.

Από τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in \hat{G}_0$, που επάγεται μέσω της κανονικής υποομάδας $\hat{G}_0$ και το γεγονός $[\hat{G} : \hat{G}_0] = 2$, προκύπτει ότι οι πίνακες $\hat{A}^2$ και $\hat{B}\hat{A}$ ανήκουν στη $\hat{G}_0$. Άρα οι πίνακες

$$\hat{A}^2 = \begin{pmatrix} \exp(-i2\pi\lambda) & -\hat{\alpha}(\exp(-i\pi\lambda) + \exp(i\pi\lambda)) \\ 0 & \exp(i2\pi\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}\hat{A} = \begin{pmatrix} \exp(-i\pi(\lambda + \mu)) & -\hat{\alpha}\exp(-i\pi\mu) \\ -\hat{\beta}\exp(-i\pi\lambda) & \exp(i\pi(\lambda + \mu)) + \hat{\alpha}\hat{\beta} \end{pmatrix}$$

μπορούν να τεθούν ταυτόχρονα σε διαγώνια μορφή.

Όταν $\exp(-i2\pi\lambda) = \exp(i2\pi\lambda)$ τότε $\exp(-i\pi\lambda) + \exp(i\pi\lambda) = 0$, κάτι που συμβαίνει όταν $\pm\lambda = 1/2 + l$, για $l \in \mathbb{Z}$. Σε αυτή την περίπτωση οι πίνακες διαγωνοποιούνται με χρήση του ίδιου πίνακα ομοιότητας.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\exp(-i2\pi\lambda) \neq \exp(i2\pi\lambda)$. Υπό αυτή την προϋπόθεση ο $\hat{A}^2$ υπό τη δράση των πινάκων

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} p & \hat{\alpha} \frac{\exp(-i\pi\lambda) + \exp(i\pi\lambda)}{\exp(-i2\pi\lambda) - \exp(i2\pi\lambda)} q \\ 0 & q \end{pmatrix} \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \frac{\exp(-i\pi\lambda) + \exp(i\pi\lambda)}{\exp(-i2\pi\lambda) - \exp(i2\pi\lambda)} p & q \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

μετατρέπεται στους διαγώνιους πίνακες

$$\hat{P}^{-1}\hat{A}^2\hat{P} = \begin{pmatrix} \exp(-i2\pi\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(i2\pi\lambda) \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^{-1}\hat{A}^2\hat{Q} = \begin{pmatrix} \exp(i2\pi\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(-i2\pi\lambda) \end{pmatrix},$$

όπου $p, q \in \mathbb{C}^*$. Ο πίνακας $\hat{B}\hat{A}$ μετασχηματίζεται από τους $\hat{P}, \hat{Q}$ στους παρακάτω πίνακες

$$\hat{P}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{P} = \begin{pmatrix} * & * \\ -pq^{-1}\hat{\beta}\exp(-i\pi\lambda) & * \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{Q} = \begin{pmatrix} * & -pq^{-1}\hat{\beta}\exp(-i\pi\lambda) \\ * & * \end{pmatrix},$$

όπου οι αστερίσκοι συμβολίζουν μη-μηδενικές παραστάσεις. Για να είναι είτε ο $\hat{P}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{P}$ είτε ο $\hat{P}^{-1}\hat{B}\hat{A}\hat{P}$ διαγώνιος, αναγκαία συνθήκη είναι η

$$\hat{\beta} = 0,$$

που όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση $\hat{\alpha}\hat{\beta} \neq 0$.

Άρα για έρθουν σε διαγώνια μορφή οι πίνακες $\hat{A}^2$ και $\hat{B}\hat{A}$ ταυτόχρονα πρέπει να ισχύει

$$\pm\lambda = \frac{1}{2} + l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Θεωρώντας τους πίνακες $\hat{A}\hat{B}$, $\hat{B}^2$ και ορίζοντας τους πίνακες

$$\hat{P}' = \begin{pmatrix} p & 0 \\ -\hat{\beta} \frac{\exp(-i\pi\lambda) + \exp(i\pi\lambda)}{\exp(-i2\pi\lambda) - \exp(i2\pi\lambda)} p & q \end{pmatrix} \quad \hat{Q}' = \begin{pmatrix} 0 & q \\ p & -\hat{\beta} \frac{\exp(-i\pi\lambda) + \exp(i\pi\lambda)}{\exp(-i2\pi\lambda) - \exp(i2\pi\lambda)} q \end{pmatrix}$$

προκύπτει με όμοιο τρόπο ότι αναγκαία συνθήκη για έρθουν σε διαγώνια μορφή οι πίνακες $\hat{B}^2$ και $\hat{A}\hat{B}$ ταυτόχρονα είναι η

$$\pm\mu = \frac{1}{2} + j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

□

Από τις ιδιότητες (2.4.6) προκύπτει

$$P \left\{ \begin{matrix} a & b & c \\ \rho & \sigma & \tau \\ \hat{\rho} & \hat{\sigma} & \hat{\tau} \end{matrix} \middle| z \right\} = \left(\frac{z-a}{z-c} \right)^\rho \left(\frac{z-b}{z-c} \right)^\sigma P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \rho + \sigma + \tau \\ \hat{\rho} - \rho & \hat{\sigma} - \sigma & \rho + \sigma + \hat{\tau} \end{matrix} \middle| x \right\}, \quad x = \frac{(z-a)(b-c)}{(z-c)(b-a)}$$

και η συνάρτηση P στο δεξί μέλος ικανοποιεί την υπεργεωμετρική εξίσωση του Gauss [45]

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0 \quad (2.4.9)$$

με γενική λύση

$$y = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta \end{matrix} \middle| x \right\}, \quad (2.4.10)$$

όπου $\alpha = \rho + \sigma + \tau$, $\beta = \rho + \sigma + \hat{\tau}$ και $\gamma = 1 + \rho - \hat{\rho}$.

Σχόλιο 2.4.4. Η υπεργεωμετρική εξίσωση του Gauss (2.4.9) είναι μια ειδική περίπτωση της γενικευμένης υπεργεωμετρικής εξίσωσης (2.4.4), οπότε η (2.4.9) επιδέχεται λύσεις *Liouville* αν και μόνο αν οι εκθετικές διαφορές $\lambda = 1 - \gamma$, $\mu = \gamma - \alpha - \beta$, $\nu = \beta - \alpha$ ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος 2.4.3.

Η υπεργεωμετρική εξίσωση είναι κανονικώς ιδιόμορφη, οπότε στην περιοχή κάθε ιδιομορφίας μπορούμε να κατασκευάσουμε συγκλίνον ανάπτυγμα της γενικής λύσης της με τη μέθοδο του Frobenius. Θεωρούμε το ανάπτυγμα

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

το οποίο αντικαθιστούμε στην (2.4.9), οπότε προκύπτει η εξίσωση δεικτών $r(r-1+\gamma)=0$ (με τις αναμενόμενες λύσεις $r_1=0$, $r_2=1-\gamma$) και ο αναδρομικός τύπος

$$c_n = \frac{(r+\alpha)_n(r+\beta)_n}{(r+1)_n(r+\gamma)_n} c_0, \quad (l)_n = l(l+1)\dots(l+n-1).$$

Για $\gamma \notin \mathbb{Z}$ και $0 < |z| < 1$ το συγκλίνον ανάπτυγμα της (2.4.10) έχει τη μορφή

$$y_0 = A F(\alpha, \beta, \gamma, x) + B x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x),$$

όπου

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} x^n$$

είναι η υπεργεωμετρική συνάρτηση.

Στη συνέχεια θέτουμε $z = 1 - x$ και η (2.4.9) γίνεται

$$z(1-z)\ddot{y} + (\alpha + \beta - \gamma + 1 - (1 + \alpha + \beta)z)\dot{y} - \alpha\beta y = 0$$

η οποία έχει την ίδια μορφή με την (2.4.9), με τη διαφορά ότι το γ έχει αντικατασταθεί από την παράσταση $\alpha + \beta - \gamma + 1$. Για $\alpha + \beta - \gamma \notin \mathbb{Z}$ και $0 < |x-1| < 1$ το συγκλίνον ανάπτυγμα της (2.4.10) έχει τη μορφή

$$y_1 = A F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1-x) + B(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1-x).$$

Για τη μελέτη της (2.4.10) στο $x = \infty$ θέτουμε $x = 1/s$ στην υπεργεωμετρική εξίσωση (2.4.9) και έχουμε

$$s(s^2 - s)\frac{d^2 y}{ds^2} + s((2 - \gamma)s + (\alpha + \beta - 1))\frac{dy}{ds} - \alpha\beta y = 0.$$

Ομοίως με τα παραπάνω προκύπτει ότι για $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$ και $|x| > 1$ το συγκλίνον ανάπτυγμα της (2.4.10) έχει τη μορφή

$$y_{\infty} = A x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta, 1/x) + B x^{-\beta} F(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta + 1 - \alpha, 1/x).$$

Παράδειγμα 2.4.5. Θεωρούμε την οικογένεια υπεργεωμετρικών εξισώσεων

$$z(1-z)y'' + (c - (b+a+1)z)y' - aby = 0 \quad (2.4.11)$$

με γενική λύση την

$$y = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-b-a & b \end{matrix} \begin{matrix} z \\ \\ \end{matrix} \right\} \quad (2.4.12)$$

και εκθετικές διαφορές $\lambda = 1 - c$, $\mu = c - b - a$, $\nu = b - a$, των οποίων το άθροισμα είναι $\lambda + \mu + \nu = 1 - 2a$.

Θέτοντας

$$y(z) = u(z) \exp \left(\int \frac{c - (b + a + 1)}{2z(z-1)} dz \right) = u(z) z^{-\frac{c}{2}} (z-1)^{\frac{c-a-b-1}{2}} \quad (2.4.13)$$

προκύπτει η ανηγμένη μορφή της (2.4.11)

$$u'' + \frac{(1 - (a-b)^2) z^2 + (2c(a+b-1) - 4ab) z - (c-2)c}{4(z-1)^2 z^2} u = 0. \quad (2.4.14)$$

Από την (2.4.13) επάγεται ότι η (2.4.14) επιδέχεται μια λύση της μορφής $u = \exp(\int \omega dz)$ αν και μόνο αν η (2.4.11) επιδέχεται μια λύση της μορφής $y = \exp(\int \hat{\omega} dz)$, όπου $\omega, \hat{\omega} \in \mathbb{C}(z)$ ή $\omega, \hat{\omega}$ είναι αλγεβρικά βαθμού 2 πάνω από το $\mathbb{C}(z)$. Επίσης η (2.4.11) επιδέχεται μια αλγεβρική λύση αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει και για την (2.4.14). Άρα η (2.4.14) ικανοποιεί τις περιπτώσεις (i), (ii), (iii) του θεωρήματος του Kovacic 2.3.1 αν και μόνο αν για την (2.4.11) ισχύουν οι αντίστοιχες περιπτώσεις (i), 1 του πίνακα 2.1, 2-15 του πίνακα 2.1 του θεωρήματος του Kimura 2.4.3.

Για $a = 1$ η οικογένεια (2.4.11) συμπίπτει με αυτή που μελετήθηκε στο παράδειγμα 2.2.2. Παρατηρούμε ότι $\lambda + \mu + \nu = -1$, οπότε βρισκόμαστε στην περίπτωση (i) του θεωρήματος 2.4.3. Η μια λύση έχει τη μορφή

$$y_1(z) = z^{1-c}(1-z)^{c-b-1} = \exp\left(\int \frac{bz - c + 1}{z - z^2} dz\right)$$

και αντιστοιχεί στη μορφή της λύσης Liouville της περίπτωσης (i) του θεωρήματος 2.3.1.

Για $c = 1$ το ανάπτυγμα της (2.4.12) στην περιοχή του $z = 0$ περιέχει λογαριθμικό όρο και οι εκθετικές διαφορές είναι $\lambda = 0, \mu = 1 - a - b, \nu = b - a$. Θεωρούμε το σύνολο $S = \{\lambda + \mu + \nu, -\lambda + \mu + \nu, \lambda - \mu + \nu, \lambda + \mu - \nu\} = \{1 - 2a, 1 - 2a, 2b - 1, 1 - 2b\}$. Από το σχόλιο 2.3.2 και το θεώρημα 2.4.3 προκύπτει ότι η (2.4.11) έχει λύσεις Liouville αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα στοιχεία του S είναι περιττός ακέραιος, κάτι που ισχύει αν $a \in \mathbb{Z}$ ή $b \in \mathbb{Z}$. Για $a = 1, b = 2, c = 1$ η γενική λύση της (2.4.11) είναι $y = (z-1)^{-2}(c_1 + c_2(\ln(z) - z))$.

Για $b = a + 1/2, c = 2a + 1$ οι εκθετικές διαφορές είναι $\lambda = -2a, \mu = \nu = 1/2$ και ικανοποιούνται οι συνθήκες της περίπτωσης 1 του πίνακα 2.1, οπότε από την περίπτωση (ii) του θεωρήματος 2.3.1 έπεται ότι η (2.4.11) επιδέχεται μια λύση της μορφής $y = \exp(\int \omega dz)$ με το ω αλγεβρικό βαθμού 2 πάνω από το $\mathbb{C}(z)$. Οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (2.4.11) έχουν τη μορφή

$$y_i = \exp \left(\int \omega_i dz \right) = z^{-a} e^{\pm i2a \arctan(\sqrt{z-1})}, \quad i = 1, 2$$

και τα ω_i είναι οι λύσεις της εξίσωσης $(z-1)(z\omega + a)^2 = -1$.

Για $a = -1/12, b = 1/4, c = 1/2$ οι εκθετικές διαφορές είναι $\lambda = 1/2, \mu = \nu = 1/3$ και ικανοποιούνται οι συνθήκες της περίπτωσης 2 του πίνακα 2.1, δηλαδή η (2.4.11) έχει αλγεβρικές λύσεις. Από την περίπτωση (iii) του θεωρήματος 2.3.1 έπεται ότι η (2.4.11) επιδέχεται μια λύση της μορφής $y = \exp(\int \omega dz)$ με το ω αλγεβρικό βαθμού 4 ή 6 ή 12 πάνω από το $\mathbb{C}(z)$. Η αλγεβρική εξίσωση για το ω είναι η

$$z^4(z-1)^4\omega^4 - \frac{1}{3}z^3(z-1)^3\omega^3 + \frac{1}{24}z^2(z-1)^2(48z^2 - 41z + 9)\omega^2 - \frac{1}{432}z(z-1)(320z^3 - 409z^2 + 180z - 27)\omega + \frac{1}{20736}(2048z^4 - 3484z^3 + 2313z^2 - 702z + 81) = 0.$$

2.5 Η εξίσωση Lamé

Θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων

$$S_p = \frac{x^2}{e_1 - s_p} + \frac{y^2}{e_2 - s_p} + \frac{z^2}{e_3 - s_p} - 1,$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 > e_2 > e_3, \quad s_p \in \mathbb{R} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}, \quad p = 1, 2, \dots$$

και τις συναρτήσεις

$$V = g(x, y, z) S_1 S_2 \dots S_m, \quad g(x, y, z) \in \{1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz\},$$

$$E(s) = (s - e_1)^{k_1} (s - e_2)^{k_2} (s - e_3)^{k_3} (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_m), \quad k_i = 0 \text{ ή } 1/2.$$

Ο G. Lamé [66] μελέτησε τις συνθήκες υπό τις οποίες οποιαδήποτε από τις μορφές της V είναι μια αρμονική συνάρτηση και συμπέρανε ότι για να ισχύει $\nabla^2 V = 0$ πρέπει η $y = E(s)$ να ικανοποιεί την αποκαλούμενη “αλγεβρική μορφή” της εξίσωσης Lamé

$$f(s)\ddot{y} + \frac{1}{2}\dot{f}(s)\dot{y} - (n(n+1)s + B)y = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$f(s) = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3) = 4s^3 - g_2s - g_3. \quad (2.5.1)$$

Η συνάρτηση $P(z) = \wp(z, g_2, g_3)$ του Weierstrass [126] ικανοποιεί την εξίσωση

$$P'(z)^2 = 4P(z)^3 - g_2P(z) - g_3 \quad (2.5.2)$$

και για $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ είναι μια ελλειπτική συνάρτηση με περιόδους $2\omega_1, 2\omega_2$, όπου $P(\omega_1) = e_1$ και $P(\omega_2) = e_2$. Η μοναδική ιδιομορφία της $\wp(z, g_2, g_3)$, μέσα στο θεμελιώδες παραλληλόγραμμο περιόδων της, είναι το $z = 0$ που είναι πόλος τάξης 2. Θέτοντας

$$\wp(z, g_2, g_3) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{i-2}, \quad d_0 = 1$$

στην (2.5.2) οδηγούμαστε στον αναδρομικό τύπο

$$d_i = \frac{\sum_{j=1}^i \left((j-2)(i-j-2)d_j d_{i-j-4} \sum_{k=0}^j d_k d_{i-j-d_{j-k}} \right) + g_2 d_{i-4}}{2i}, \quad i = 7, 8, \dots,$$

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_5 = 0, \quad d_4 = g_2/20, \quad d_6 = g_3/28$$

από τον οποίο προκύπτει ότι $d_{2l+1} = 0$ για $l = 0, 1, \dots$, οπότε η $\wp(z, g_2, g_3)$ είναι άρτια.

Θέτοντας $s = \wp(z, g_2, g_3)$ στην (2.5.1) προκύπτει η αποκαλούμενη “εξίσωση Lamé”

$$y''(z) - (n(n+1)\wp(z, g_2, g_3) + B)y(z) = 0. \quad (2.5.3)$$

Η εξίσωση Lamé είναι κανονικώς ιδιόμορφη στο $z = 0$ και η εξίσωση δεικτών έχει τη μορφή $r^2 - r - n(n+1) = 0$, οπότε $r_1 = n+1$, $r_2 = -n$. Η διαφορά των εκθετών είναι ίση με $2n+1$ και πρέπει να εξετάσουμε την πιθανότητα ύπαρξης λογαριθμικού όρου. Η αντικατάσταση των αναπτυγμάτων

$$\wp(z, g_2, g_3) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{i-2}, \quad y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i+r}$$

στην (2.5.3) παράγει τον αναδρομικό τύπο

$$c_i = \frac{Bc_{i-2} - n(n+1) \sum_{k=1}^i d_k c_{i-k}}{(i+r-1)(i+r) - n(n+1)}, \quad c_1 = 0, \quad i = 2, 3, \dots$$

Εφόσον η $\wp(z, g_2, g_3)$ είναι άρτια, θα ισχύει $d_{2j+1} = 0$ για $j = 0, 1, \dots$ και από τον αναδρομικό τύπο έπεται ότι $c_{2j+3} = 0$. Άρα, το συγκλίνων ανάπτυγμα της λύσης $y_1(z)$ που αντιστοιχεί στον $r = \max(r_1, r_2)$ θα έχει τη μορφή

$$y_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i} z^{2i+r}$$

και η δεύτερη λύση $y_2(z)$ της (2.5.3), που μπορεί να περιέχει λογάριθμο, είναι η $y_2(z) = y_1(z) \int y_1(z)^{-2} dz$. Η $y_1(z)^{-2}$ είναι άρτια, άρα το ολοκληρωτικό της υπόλοιπο είναι μηδενικό και η γενική λύση της εξίσωσης Lamé (2.5.3) δεν περιέχει λογαριθμικό όρο.

Σχόλιο 2.5.1. Ο χώρος πάνω από τον οποίο ορίζεται η εξίσωση Lamé (2.5.3) είναι η εικόνα της $\wp(z, g_2, g_3)$, που είναι ομοιομορφική με ένα διάτρητο τώρο $\mathbb{T}$ από τον οποίο λείπει το σημείο που αντιστοιχεί στο $z = 0 \bmod(2\omega_1, 2\omega_2)$. Οι γεννήτορες της θεμελειώδους ομάδας ομοτοπίας του $\mathbb{T}$ είναι οι κλειστές καμπύλες που αντιστοιχούν στις περιόδους $2\omega_1, 2\omega_2$. Η αναλυτική συνέχιση του συνόλου των λύσεων $\mathbf{Y}(z) = \{y_1(z), y_2(z)\}$ της (2.5.3) κατά μήκος των περιόδων $2\omega_1, 2\omega_2$ παράγει τους αντίστοιχους μονόδρομους πίνακες M_1, M_2 που είναι οι γεννήτορες της μονόδρομης ομάδας M . Ο αντιμεταθέτης (commutator) $[M_1, M_2] = M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1}$ των M_1, M_2 αντιστοιχεί στην αναλυτική συνέχιση του $\mathbf{Y}(z)$ γύρω από το $z = 0$. Εφόσον δεν υπάρχει λογαριθμικός όρος στο $\mathbf{Y}(z)$ για $n \in \mathbb{Z}$, ισχύει $\mathbf{Y}(z)[M_1, M_2] = \mathbf{Y}(ze^{i2\pi}) = \mathbf{Y}(z)$, οπότε $[M_1, M_2] = I$ και η M είναι αβελιανή.

Σχόλιο 2.5.2. Η εξίσωση Lamé (2.5.3) ορίζεται πάνω από το μιγαδικό σώμα $\mathbf{K}$ των ελλειπτικών συναρτήσεων με περιόδους $2\omega_1, 2\omega_2$. Για $n \in \mathbb{Z}$ η (2.5.3) επιδέχεται πάντα μια λύση που ανήκει στο $\mathbf{K}$ [88, 106, 124], ενώ η δεύτερη λύση είναι μια (μη-αλγεβρική) συνάρτηση Liouville του $\psi \mathbf{K}$. Άρα, η Picard-Vessiot επέκταση του $\mathbf{K}$ είναι μια υπερβατική επέκταση και η διαφορική ομάδα Galois G είναι συνεκτική, δηλαδή ισχύει $G = G_0$ όπου G_0 είναι η ταυτοτική συνιστώσα της G . Εφόσον η (2.5.3) έχει κανονικές ιδιομορφίες, η M είναι πυκνή μέσα στην G_0 (ως προς την τοπολογία του Zariski) και η G_0 είναι αβελιανή αν και μόνο αν οι M_1, M_2 αντιμετατίθενται. Από το προηγούμενο σχόλιο προκύπτει ότι η G_0 είναι αβελιανή.

Παράδειγμα 2.5.3. Θεωρούμε την εξίσωση Lamé

$$y'' - 12P(z)y = 0, \quad P(z) = \wp(z, 4, 0) \quad (2.5.4)$$

η οποία επιδέχεται τις λύσεις

$$y_1(z) = P'(z), \quad y_2(z) = 3P'(z)\zeta(z) + 6P(z)^2 - 4.$$

Η συνάρτηση $\zeta(z)$ του Weierstrass [126] ορίζεται από τον τύπο

$$\zeta'(z) = -P(z)$$

και έχει τις ιδιότητες

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1, \quad \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2, \quad \zeta(\omega_i) = \eta_i.$$

Η $y_1(z)$ είναι περιοδική ενώ για την $y_2(z)$ ισχύει $y_2(z + 2\omega_i) = y_2(z) + 6\eta_i y_1(z)$, οπότε οι μονόδρομοι πίνακες M_1, M_2 που αντιστοιχούν στις $2\omega_1, 2\omega_2$ έχουν τη μορφή

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 6\eta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και αντιμετατίθενται.

Έστω $\mathbf{K}$ το διαφορικό σώμα των ελλειπτικών συναρτήσεων με περιόδους $2\omega_1, 2\omega_2$. Η *Picard-Vessiot επέκταση* $\mathbf{L} \supset \mathbf{K}$ της (2.5.4) είναι μια υπερβατική επέκταση *Liouville* του $\mathbf{K}$, επειδή $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle \zeta(z) \rangle$, $\zeta(z) \notin \mathbf{K}$ και $\zeta'(z) = -\wp(z, g_2, g_3) \in \mathbf{K}$. Η δράση της διαφορικής ομάδας *Galois* G της (2.5.4) αφήνει ανέλλοιώτη την $y_1(z)$, ενώ για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$g'(\zeta(z)) = g(\zeta'(z)) = -g(P(z)) = -P(z) = \zeta'(z) \Rightarrow g(\zeta(z)) = \zeta(z) + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Συνεπώς $g(y_2(z)) = y_2(z) + 3c y_1(z)$ και η G είναι αβελιανή, αφού αποτελείται από πίνακες της μορφής

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{c} = 3c.$$

Κεφάλαιο 3

Διαφορική Θεωρία Galois και Μη-Ολοκληρωσιμότητα Συστημάτων Hamilton

Joseph Lagrange 1736-1813

William Hamilton 1805-1865

Sofia Kovalevskaya 1850-1891

Henri Poincaré 1854-1912

Aleksandr Lyapunov 1857-1918

Paul Painlevé 1863-1933

Vladimir Arnold

Juan Jose Morales-Ruiz

Jean-Pierre Ramis

Το κεντρικό σημείο του παρόντος κεφαλαίου είναι η σχέση της ολοκληρωσιμότητας ενός συστήματος Hamilton S_H με τη διαφορική ομάδα Galois G_k των εξισώσεων μεταβολών VE_k τάξης $k \in \mathbb{N}^*$. Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζουμε βασικές έννοιες για διανυσματικά πεδία και διανυσματικά πεδία Hamilton. Στη συνέχεια αναφερόμαστε στις VE_k , οι οποίες για $k = 1$ είναι ένα γραμμικό ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Για $k > 1$, οι VE_k είναι μη-ομογενείς και μη-γραμμικές, αλλά μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε ένα αντίστοιχο σύστημα γραμμικών ομογενών εξισώσεων (LVE_k) του οποίου οι λύσεις βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία με αυτές των VE_k , ορίζοντας παράλληλα και την αντίστοιχη G_k . Αν κάποια ανεξάρτητα και σε ενέλιξη πρώτα ολοκληρώματα ενός S_H είναι γνωστά, τότε μπορούμε να παραγάγουμε από τις VE_1 τις εξισώσεις κάθετων μεταβολών NVE , που είναι ένα σύστημα μικρότερης διάστασης. Η ύπαρξη N ανεξάρτητων και σε ενέλιξη ολοκληρωμάτων ενός S_H N βαθμών ελευθερίας επάγει N αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις ως προς τη δράση της G_k , οι οποίες επιβάλλουν περιορισμούς στην αντίστοιχη G_k^0 . Οι Morales, Ramis, Simó απέδειξαν ότι σε αυτή την περίπτωση η ταυτοτική συνιστώσα G_k^0 της G_k είναι αβελιανή. Προάγγελος αυτού του θεωρήματος ήταν το αντίστοιχο θεώρημα για την G_1^0 , που είχαν αποδείξει οι Morales, Ramis. Αν το S_H παράγεται από μια ομογενή συνάρτηση δυναμικού, τότε η διερεύνηση των NVE είναι αλγοριθμική.

3.1 Εισαγωγή

Οι πληροφορίες αυτής της ενότητας αντλήθηκαν από τα βιβλία [1, 2, 9, 83].

Στην ενότητα αυτή θα συμβολίζουμε με

- M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα πεπερασμένης διάστασης,
- $\mathcal{X}^r(M)$ ($\mathcal{X}(M)$) το σύνολο των $\mathcal{C}^r$ αυτόνομων διανυσματικών πεδίων που ορίζονται στην M , που είναι διαφορίσιμα τάξης $r \geq 1$ ($r = \infty$),
- $\mathcal{F}^r(M)$ ($\mathcal{F}(M)$) το σύνολο των $\mathcal{C}^r$ βαθμωτών συναρτήσεων που ορίζονται στην M , που είναι διαφορίσιμες τάξης $r \geq 1$ ($r = \infty$).

Η παράγωγος Lie $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} : \mathcal{F}^r(M) \rightarrow \mathcal{F}^{r-1}(M)$ μιας $f \in \mathcal{F}^r(M)$ κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{X} \in \mathcal{X}^{r-1}(M)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f(m) = \mathbf{X}[f](m) = \mathbf{d}f(m) \cdot \mathbf{X}(m) \quad (3.1.1)$$

για κάθε $m \in M$ και σε τοπικές συντεταγμένες $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ έχει τη μορφή

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} X_i. \quad (3.1.2)$$

Η $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ είναι μια διαφορίση του $\mathcal{F}(M)$, δηλαδή το $\mathcal{F}(M)$ είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ και για κάθε $f, g \in \mathcal{F}(M)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(f + g) &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}f + \mathcal{L}_{\mathbf{X}}g \\ \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(fg) &= g \mathcal{L}_{\mathbf{X}}f + f \mathcal{L}_{\mathbf{X}}g. \end{aligned}$$

Το σύνολο όλων των διαφορίσεων του $\mathcal{F}(M)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος που είναι ισόμορφος με το $\mathcal{X}(M)$. Συγκεκριμένα, για κάθε διαφορίση θ υπάρχει μοναδικό $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(M)$ τέτοιο ώστε $\theta = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}$. Οι n , γραμμικώς ανεξάρτητες πάνω από το $\mathcal{F}(M)$, διαφορίσεις $\frac{\partial}{\partial z_i}$ συνιστούν μια

τοπική βάση για κάθε $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, δηλαδή αν $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ είναι η μορφή του $\mathbf{X}$ σε τοπικές συντεταγμένες, τότε

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Τα $\frac{\partial}{\partial z_i}$ παράγουν μια τοπική βάση του $\mathfrak{X}(M)$, ενώ μια καθολική (global) βάση του $\mathfrak{X}(M)$ (n στοιχεία του $\mathfrak{X}(M)$ που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα πάνω από το $\mathfrak{F}(M)$) δεν υπάρχει πάντα.

Έστω $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}^r(M)$. Η παράγωγος Lie $\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}$ του $\mathbf{Y}$ ως προς το $\mathbf{X}$ ή αλλιώς η αγκύλη Lie των $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{Y}} - \mathfrak{L}_{\mathbf{Y}} \circ \mathfrak{L}_{\mathbf{X}} \quad (3.1.3)$$

και σε τοπικές συντεταγμένες $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ έχει τη μορφή

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = D\mathbf{Y} \cdot \mathbf{X} - D\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = ([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_1, \dots, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_n) \quad (3.1.4)$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_j = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial z_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial z_i}.$$

Το σύνολο $\mathfrak{X}(M)$ μαζί με την αγκύλη Lie $[\cdot, \cdot]$ συνιστούν μια άλγεβρα Lie. Δηλαδή, ισχύουν τα παρακάτω:

- η $[\cdot, \cdot]$ είναι διγραμμική,
- $[\mathbf{X}, \mathbf{X}] = 0$ για κάθε $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$,
- $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] = 0$ (ταυτότητα Jacobi) για κάθε $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$.

Μια διαφορίσιμη καμπύλη $\mathbf{c} : \mathbb{R} \rightarrow M$ της M καλείται “ ολοκληρωτική καμπύλη ” του $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^r(M)$ αν ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{c}(t)). \quad (3.1.5)$$

Μια συνάρτηση $f \in \mathfrak{F}^r(M)$ καλείται πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος (3.1.5) αν είναι σταθερή κατά μήκος κάθε ολοκληρωτικής καμπύλης $\mathbf{c}(t)$ του $\mathbf{X}$, δηλαδή αν ισχύει $f(\mathbf{c}(t)) = c \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t)) = 0 \Rightarrow d\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = 0 \Rightarrow d\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{c}(t)) = 0 \Rightarrow \mathfrak{L}_{\mathbf{X}}f(\mathbf{c}(t)) = 0.$$

Η ροή του $\mathbf{X}$ είναι το σύνολο των απεικονίσεων $\phi_t : M \rightarrow M$, τέτοιες ώστε η $t \rightarrow \phi_t(m)$ να είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του $\mathbf{X}$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\phi_0(m) = m$. Η $\phi_t(m)$ είναι λεία ως προς m, t αν το ίδιο ισχύει και για το $\mathbf{X}$.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και Ω μια διγραμμική μορφή που ορίζεται στον V . Η Ω καλείται “ μη-εκφυλισμένη ” (non-degenerate) αν από τη σχέση $\Omega(v_1, v_2) = 0$ για κάθε $v_2 \in V$ προκύπτει ότι $v_1 = 0$. Αν $\Omega = (\Omega_{ij})$ είναι ο πίνακας της Ω ως προς μια βάση, τότε ο μη-εκφυλισμός της Ω είναι ισοδύναμος με τη συνθήκη $\det(\Omega_{ij}) \neq 0$. Η Ω καλείται “ αντισυμμετρική ” (skew-symmetric) αν ισχύει $\Omega(v_1, v_2) = -\Omega(v_2, v_1)$. Η ορίζουσα ενός αντισυμμετρικού πίνακα με περιττό πλήθος γραμμών και στηλών είναι μηδενική, οπότε αν η Ω είναι μη-εκφυλισμένη και αντισυμμετρική, τότε ο V έχει άρτια διάσταση.

Ορισμός 3.1.1. Μία συμπλεκτική μορφή Ω σε ένα διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης είναι μια μη-εκφυλισμένη αντισυμμετρική μορφή στον V . Το ζεύγος (Ω, V) καλείται συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος.

Έστω $T_m M$ ο εφαπτόμενος χώρος της M στο $m \in M$.

Ορισμός 3.1.2. Μία συμπλεκτική πολλαπλότητα είναι ένα ζεύγος (M, Ω) , όπου η Ω για κάθε $m \in M$ είναι μια συμπλεκτική μορφή Ω που ορίζεται στον $T_m M$ και είναι κλειστή, δηλαδή $d\Omega = 0$.

Για κάθε $m \in M$, ο $T_m M$ έχει διάσταση ίση με αυτή της M . Εφόσον η Ω είναι μια συμπλεκτική μορφή στον $T_m M$, η πολλαπλότητα M έχει άρτια διάσταση.

Από την Ω επάγεται ο ισομορφισμός $\Omega^\flat : T_m M \rightarrow T_m^* M$ και ο αντίστροφός του $\Omega^\sharp = (\Omega^\flat)^{-1}$. Ο J. Darboux [35] απέδειξε ότι στην περιοχή κάθε $m \in M$ υπάρχουν κατάλληλες συντεταγμένες ("κανονικές συντεταγμένες") ως προς τις οποίες η Ω είναι σταθερή. Από αυτό προκύπτει ότι, σε κανονικές συντεταγμένες, ο πίνακας (Ω_{ij}) της Ω έχει τη μορφή

$$(\Omega_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbb{J},$$

όπου $\mathbf{0}$ είναι ο $n \times n$ μηδενικός πίνακας και $\mathbf{I}$ είναι ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας για $n \in \mathbb{N}^*$.

Ορισμός 3.1.3. Έστω (M, Ω) μια συμπλεκτική πολλαπλότητα. Το $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ καλείται διανυσματικό πεδίο Hamilton αν υπάρχει μια συνάρτηση $H \in \mathfrak{F}^r(M)$, τέτοια ώστε $\mathbf{X} = \Omega^\sharp dH$. Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε ως $\mathbf{X}_H$ το $\mathbf{X}$. Οι αντίστοιχες εξισώσεις (ή συστήμα) Hamilton έχουν τη μορφή $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}_H(\mathbf{z})$ και σε κανονικές συντεταγμένες $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, όπου $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, έχουν την μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right) \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Αν $\mathbf{c}(t)$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $\mathbf{X}_H$, τότε

$$\frac{dH(\mathbf{c}(t))}{dt} = dH(\mathbf{c}(t)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \Omega^\flat \mathbf{X}_H(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{X}_H(\mathbf{c}(t)) = \Omega(\mathbf{X}_H(\mathbf{c}(t)), \mathbf{X}_H(\mathbf{c}(t))) = 0.$$

Δηλαδή αποδείξαμε ότι

Πρόταση 3.1.4. Η $H \in \mathfrak{F}^r(M)$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα του αντίστοιχου συστήματος Hamilton $\dot{\mathbf{z}} = \Omega^\sharp dH$.

Ορισμός 3.1.5. Έστω (M, Ω) μια συμπλεκτική πολλαπλότητα. Η αγκύλη Poisson $\{F, G\} \in \mathfrak{F}^{r-1}(M)$ των $F, G \in \mathfrak{F}^r(M)$ ορίζεται από τη σχέση $\{F, G\} = \Omega(\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G) = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}_G} F = -\mathfrak{L}_{\mathbf{X}_F} G$ και σε κανονικές συντεταγμένες $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, όπου $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ έχει τη μορφή

$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \right) \mathbb{J} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}.$$

Έστω $\mathfrak{X}_{Ham}(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ το σύνολο των λείων διανυσματικών πεδίων Hamilton. Για τα $\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G \in \mathfrak{X}_{Ham}(M)$ ισχύει $[\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G] \in \mathfrak{X}(M)$.

Πρόταση 3.1.6. Αν $F, G \in \mathfrak{F}(M)$, τότε $\mathbf{X}_{\{F,G\}} = -[\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G]$.
Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{X}_{\{F,G\}}, \mathbf{u}) &= \mathbf{d}\{F, G\} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{d}\Omega(\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G) \cdot \mathbf{u} \\ &= \Omega(D\mathbf{X}_F \mathbf{u}, \mathbf{X}_G) + \Omega(\mathbf{X}_F, D\mathbf{X}_G \mathbf{u}) \\ &= \Omega(D\mathbf{X}_F \mathbf{X}_G, \mathbf{u}) - \Omega(D\mathbf{X}_G \mathbf{X}_F, \mathbf{u}) \\ &= \Omega(D\mathbf{X}_F \mathbf{X}_G - D\mathbf{X}_G \mathbf{X}_F, \mathbf{u}) \\ &= \Omega(-[\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G], \mathbf{u}),\end{aligned}$$

όπου $D\mathbf{X}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του $\mathbf{X}$ στο $m \in M$. □

Άρα $[\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G] \in \mathfrak{X}_{Ham}(M)$ και το ζεύγος $(\mathfrak{X}_{Ham}(M), [\cdot])$ είναι μια υποάλγεβρα Lie του $(\mathfrak{X}(M), [\cdot])$.

Πρόταση 3.1.7 (ταυτότητα Jacobi). Αν $F, G, H \in \mathfrak{F}(M)$, τότε $\{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{F, \{G, H\}\} = 0$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\{H, \{F, G\}\} &= \mathfrak{L}_{\mathbf{X}_{\{F,G\}}} H, \\ \{F, \{G, H\}\} &= -\mathfrak{L}_{\mathbf{X}_F} \{G, H\} = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}_F} \mathfrak{L}_{\mathbf{X}_G} H, \\ \{G, \{H, F\}\} &= -\mathfrak{L}_{\mathbf{X}_G} \{H, F\} = -\mathfrak{L}_{\mathbf{X}_G} \mathfrak{L}_{\mathbf{X}_F} H,\end{aligned}$$

οπότε $\{H, \{F, G\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{F, \{G, H\}\} = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}_{\{F,G\}}} H + \mathfrak{L}_{[\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G]} H$ και σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση το δεξί μέλος είναι ίσο με 0. □

Η αγκύλη Poisson $\{\cdot\} : \mathfrak{F}(M) \times \mathfrak{F}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ είναι διγραμμική και αντισυμμετρική και από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι το ζεύγος $(\mathfrak{F}(M), \{\cdot\})$ είναι μια άλγεβρα Lie.

Ορισμός 3.1.8. Μια άλγεβρα Lie που τα στοιχεία της ικανοποιούν το νόμο του Leibniz, ως προς την αντίστοιχη αγκύλη Lie, καλείται άλγεβρα Poisson.

Τα στοιχεία του $(\mathfrak{F}(M), \{\cdot\})$ ικανοποιούν το νόμο του Leibniz ως προς την $\{\cdot\}$. Δηλαδή, για κάθε $F, G, H \in \mathfrak{F}(M)$ ισχύει $\{H, F \cdot G\} = \{H, F\} \cdot G + F \cdot \{H, G\}$. Συνεπώς, το ζεύγος $(\mathfrak{F}(M), \{\cdot\})$ είναι μια άλγεβρα Poisson.

Θεωρούμε τις συμπλεκτικές πολλαπλότητες $(M_1, \Omega_1), (M_2, \Omega_2)$ με αντίστοιχες τοπικές συντεταγμένες $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ και τη λεία απεικόνιση $\mathbf{z}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{z}_1)$. Έστω ότι η καμπύλη $\mathbf{z}_1(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Hamilton $\dot{\mathbf{z}}_1(t) = \mathbf{X}_H(\mathbf{z}_1(t))$, οπότε για την αντίστοιχη $\mathbf{z}_2(t)$ θα ισχύει $\dot{\mathbf{z}}_2(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1(t)) \dot{\mathbf{z}}_1(t)$, όπου $D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1(t))$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της $\mathbf{f}(\mathbf{z}_1)$ στο $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_1(t)$. Επομένως

$$\dot{\mathbf{z}}_2(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1) \mathbf{X}_H(\mathbf{z}_1(t)) = D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1) \Omega_1^\sharp dH(\mathbf{z}_1(t)) = D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1) \Omega_1^\sharp D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1)^T dH(\mathbf{z}_2(t)). \quad (3.1.7)$$

Το (3.1.7) είναι σύστημα Hamilton αν και μόνο αν ισχύει

$$D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1(t)) \Omega_1^\sharp D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1(t))^T = \Omega_2^\sharp$$

από την οποία έπεται

$$(D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1(t))^T)^{-1} \Omega_1^\sharp D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1(t))^{-1} = \Omega_2^\sharp \Rightarrow D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1(t))^T \Omega_2^\sharp D\mathbf{f}(\mathbf{z}_1(t)) = \Omega_1^\sharp.$$

Ορισμός 3.1.9. Αν οι $(M_1, \Omega_1), (M_2, \Omega_2)$ είναι συμπλεκτικές πολλαπλότητες, τότε μια λεία απεικόνιση $\mathbf{f} : M_1 \rightarrow M_2$ καλείται συμπλεκτική ή κανονική αν διατηρεί τις συμπλεκτικές μορφές, δηλαδή αν ισχύει

$$\Omega_2(D\mathbf{f}\mathbf{u}, D\mathbf{f}\mathbf{v}) = \Omega_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

για κάθε $m \in M$ και $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_m M$, όπου $D\mathbf{f}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της $\mathbf{f}$ στο $m \in M$.

Αν $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, τότε το $\mathbf{X}$ είναι διανυσματικό πεδίο Hamilton αν και μόνο αν $\Omega(D\mathbf{X}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\Omega(\mathbf{u}, D\mathbf{X}\mathbf{v})$ για κάθε $m \in M$ και $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_m M$.

Πρόταση 3.1.10. Αν $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, τότε το $\mathbf{X}$ είναι διανυσματικό πεδίο Hamilton αν και μόνο αν η ροή του ϕ_t αποτελείται από κανονικούς μετασχηματισμούς.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\frac{d}{dt}\Omega(D\phi_t\mathbf{u}, D\phi_t\mathbf{v}) = \Omega(D\mathbf{X}(\phi_t)(D\phi_t\mathbf{u}), D\phi_t\mathbf{v}) + \Omega(D\phi_t\mathbf{u}, D\mathbf{X}(\phi_t)(D\phi_t\mathbf{v})). \quad (3.1.8)$$

Αν το $\mathbf{X}$ είναι διανυσματικό πεδίο Hamilton τότε το δεξί μέλος είναι ίσο με 0, οπότε $\Omega(D\phi_t\mathbf{u}, D\phi_t\mathbf{v}) = \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ επειδή για $t = 0$ ισχύει $\Omega(D\phi_0\mathbf{u}, D\phi_0\mathbf{v}) = \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ και η $\Omega(D\phi_t\mathbf{u}, D\phi_t\mathbf{v})$ είναι σταθερή.

Αν ϕ_t αποτελείται από κανονικούς μετασχηματισμούς τότε το αριστερό μέλος της (3.1.8) είναι μηδέν, οπότε από τη επαγόμενη σχέση προκύπτει ότι το $\mathbf{X}$ είναι διανυσματικό πεδίο Hamilton. $\square$

Έστω $f : M \rightarrow M$ ένας διαφορομορφισμός (diffeomorphism). Ο f είναι μια κανονική απεικόνιση αν και μόνο αν διατηρεί τις αγκύλες Poisson, που σημαίνει $\{F \circ f, G \circ f\} = \{F, G\} \circ f$.

Πρόταση 3.1.11. Έστω ϕ_t η ροή του $\mathbf{X}_H \in \mathfrak{X}_{Ham}^r(M)$. Για την $F \in \mathfrak{F}^r(M)$ ισχύει $\frac{d}{dt}(F \circ \phi_t) = \{F \circ \phi_t, H\} = \{F, H\} \circ \phi_t$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\frac{d}{dt}(F \circ \phi_t) = \mathbf{d}F(\phi_t) \cdot \mathbf{X}_H(\phi_t) = \Omega(\mathbf{X}_F(\phi_t), \mathbf{X}_H(\phi_t)) = \{F, H\}(\phi_t)$. Η H αποτελείται από κανονικές απεικονίσεις, οπότε $\{F, H\}(\phi_t) = \{F \circ \phi_t, H \circ \phi_t\}$. Η H είναι σταθερή κατά μήκος της ϕ_t , άρα $\{F \circ \phi_t, H \circ \phi_t\} = \{F \circ \phi_t, H\}$. $\square$

Από την παραπάνω πρόταση και τη σχέση $\{F, G\} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}_G}F = -\mathcal{L}_{\mathbf{X}_F}G$ συνάγεται το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 3.1.12. Έστω $F, G \in \mathfrak{F}^r(M)$. Η F είναι πρώτο ολοκλήρωμα του $\mathbf{X}_G$ αν και μόνο αν η G είναι πρώτο ολοκλήρωμα του $\mathbf{X}_F$ και αυτό μπορεί να συμβεί αν και μόνο αν $\{F, H\} = 0$.

Δύο συναρτήσεις $F, G \in \mathfrak{F}^r(M)$ για τις οποίες ισχύει $\{F, H\} = 0$ λέμε ότι βρίσκονται σε ενέλιξη (involution).

3.2 Εξισώσεις μεταβολών

Όσα παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα περιέχονται στα βιβλία [88, 109] και τις εργασίες [16, 33, 90, 94].

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n επί ενός διαφορικού σώματος K με διαφορίση $k \in K \rightarrow k' \in K$. Ορίζουμε την απεικόνιση $D : V \rightarrow V$ που ικανοποιεί

$$D(u + v) = Du + Dv$$

$$D(ku) = k'u + kDu,$$

για κάθε $u, v \in V$. Τα διανύσματα $u \in V$ για τα οποία ισχύει $Du = 0$ καλούνται οριζόντια. Το ζεύγος (V, D) καλείται διαφορικό K -πρότυπο (module). Αν $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ είναι μια βάση του V τότε $D\mathbf{e}_j = -\sum_{i=1}^N a_{ij} \mathbf{e}_i$ με $a_{ij} \in K$ και για κάθε $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i \in V$ θα ισχύει $D\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n (u'_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j) \mathbf{e}_i$. Η τελευταία σχέση μπορεί να διατυπωθεί στη μορφή

$$D\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e' - A\mathbf{u}_e,$$

όπου $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας της D ως προς τη βάση $\mathbf{e}$ και $\mathbf{u}_e = (u_1, \dots, u_n)^T$. Άρα τα οριζόντια διανύσματα της D ικανοποιούν την εξίσωση

$$\mathbf{u}_e' = A\mathbf{u}_e. \quad (3.2.1)$$

Αν $\tilde{\mathbf{e}}$ είναι μια νέα βάση του V και P είναι ο πίνακας μετάβασης από την $\tilde{\mathbf{e}}$ στην $\mathbf{e}$, τότε ισχύει

$$\mathbf{e} = P\tilde{\mathbf{e}} \Rightarrow D\mathbf{e} = P'\tilde{\mathbf{e}} + P D\tilde{\mathbf{e}} \Rightarrow D\tilde{\mathbf{e}} = P^{-1}A P\tilde{\mathbf{e}} - P^{-1}P'\tilde{\mathbf{e}}.$$

Δηλαδή, ο πίνακας B της D ως προς την $\tilde{\mathbf{e}}$ είναι ο

$$B = P^{-1}A P - P^{-1}P' \quad (3.2.2)$$

και η εξίσωση που ικανοποιούν τα οριζόντια διανύσματα της D στη νέα βάση έχει τη μορφή

$$\mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{e}}} = (P^{-1}A P - P^{-1}P')\mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{e}}}.$$

Ένας υπόχωρος $E \subset V$ διάστασης $m < n$ καλείται αναλλοίωτος ως προς την D αν ισχύει $D : E \rightarrow E$ και από τον περιορισμό της D στον E προκύπτει το διαφορικό K -πρότυπο (E, D_1) . Η απεικόνιση D_2 προκύπτει από την επαγόμενη δράση της D στο χώρο πηλίκου $N = V/E$. Αν $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ είναι μια βάση του V τέτοια ώστε η $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ να είναι μια βάση του E , τότε ο πίνακας A της D θα έχει τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ \mathbf{0} & A_2 \end{pmatrix}$$

όπου ο A_1 είναι ο πίνακας της D_1 και A_2 είναι ο πίνακας της D_2 . Ο θεμελειώδης πίνακας του συστήματος (3.2.1) έχει τη μορφή

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & W \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix}$$

και ο W ικανοποιεί το μη-ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{W} = A_1 W + B U_2.$$

Η λύση του ομογενούς μέρους είναι ο U_1 , οπότε εφαρμόζοντας τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων θέτουμε $W = U_1 C(t)$ και αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση, από την οποία έπεται ότι $\dot{C}(t) = U_1^{-1} B U_2$. Η επέκταση Picard-Vessiot $L = K(U_1, U_2, W)$ προκύπτει από την αλυσίδα επεκτάσεων $K \subset K_1 \subset K_2 \subset L$, όπου $K_1 = K \langle U_1 \rangle$, $K_2 = K_1 \langle U_2 \rangle$ και η L προκύπτει από τη διαφορική επισύναψη ολοκληρωμάτων στο K_2 . Η επέκταση L/K_2 είναι μια επέκταση Liouville οπότε από το θεώρημα 1.6.14 η αντίστοιχη ταυτοτική συνιστώσα $G^0(L/K_2)$ της διαφορικής ομάδας Galois $G(L/K_2)$ είναι επιλυσίμη. Εφόσον $G^0(K_2/K) = G^0(L/K)/G(L/K_2)$,

η $G^0(K_2/K)$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η $G^0(L/K)$ είναι επιλύσιμη. Ανάλογες περιπτώσεις θα συναντήσουμε στη συνέχεια της παρούσας ενότητας.

Θεωρούμε μια πολλαπλότητα M διάστασης N , ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ για $\mathbf{z} \in M$ και το αυτόνομο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z}). \quad (3.2.3)$$

Θεωρούμε ότι η $\mathbf{s}(t)$ είναι μια ειδική λύση του (3.2.3) και θέτουμε

$$\mathbf{z} = \mathbf{s}(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \mathbf{n}_l,$$

όπου $0 < \varepsilon \ll 1$ και $\mathbf{n}_l = (n_{(l,1)}, \dots, n_{(l,N)})$. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το παραπάνω ανάπτυγμα στο (3.2.3) και θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor του δεξιού μέλους στην περιοχή του $\varepsilon = 0$, οπότε προκύπτει η σχέση

$$\dot{\mathbf{s}}(t) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l \dot{\mathbf{n}}_l = \mathbf{X}(\mathbf{s}(t)) + \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^l (\mathbf{X}'(\mathbf{s}(t))\mathbf{n}_l + \mathbf{f}_l), \quad (3.2.4)$$

όπου

$$\mathbf{X}'(\mathbf{s}(t)) = \left(\frac{\partial X_i}{\partial z_j} \right) |_{\mathbf{z}=\mathbf{s}(t)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2.5)$$

$$\mathbf{f}_l = \mathbf{f}_l(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_{(l-1)}) = (f_{(l,1)}, f_{(l,2)}, \dots, f_{(l,N)}), \quad l = 2, 3, \dots$$

και $\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}$.

Η ισότητα (3.2.4) πρέπει να ικανοποιείται ταυτοτικά ως προς ε , οπότε οι όροι του αριστερού και δεξιού μέλους που αντιστοιχούν σε ίσες δυνάμεις του ε πρέπει να είναι ίσοι.

Από τους όρους που αντιστοιχούν στο ε^0 προκύπτει το $\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{s}(t))$, που ικανοποιείται εφόσον η $\mathbf{s}(t)$ είναι ειδική λύση του $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z})$.

Από τους όρους που αντιστοιχούν στο ε^1 προκύπτουν οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 (VE_1)

$$\dot{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{X}'(\mathbf{s}(t))\mathbf{n}_1, \quad (3.2.6)$$

που είναι ένα ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Αν TM είναι η εφαπτόμενη δέσμη της M τότε $\mathbf{n}_1 \in T_{\Gamma}M$, όπου $\Gamma \subset M$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη που αντιστοιχεί στην ειδική λύση $\mathbf{s}(t)$ και $T_{\Gamma}M$ είναι ο περιορισμός της TM κατά μήκος της Γ . Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}(\mathbf{s}(t))$, κατά μήκος της $\mathbf{s}(t)$, είναι μια ειδική λύση του συστήματος (3.2.6) και τα διανύσματα που αντιστοιχούν στο $\mathbf{X}(\mathbf{s}(t))$ είναι στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου $T\Gamma \subset T_{\Gamma}M$ της Γ .

Αν το $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ είναι ένα μερόμορφο διανυσματικό πεδίο, τότε οι συντελεστές των (3.2.6) ανήκουν στο διαφορικό σώμα $\mathfrak{M}(\Gamma)$ των μερόμορφων συναρτήσεων ως προς τις συνιστώσες της $\mathbf{s}(t)$. Για κάθε $p \in \Gamma$ η εφαπτόμενη T_pM είναι ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathfrak{M}(\Gamma)$ και ο περιορισμός της παραγώγου $\text{Lie } \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{n} = \mathfrak{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}_{\Gamma}$ ($\mathbf{n} \in T_pM$, $\mathbf{Y} \in TM$) κατά μήκος της Γ μετατρέπει το ζεύγος $(T_pM, \nabla_{\mathbf{X}})$ σε ένα διαφορικό $\mathfrak{M}(\Gamma)$ -πρότυπο. Η απεικόνιση $\nabla_{\mathbf{X}}$ καλείται σύνδεση (connection) και ο πίνακάς της ως προς τη βάση $\partial/\partial z_j$ είναι ο $\mathbf{X}'(\mathbf{s}(t))$. Ο χώρος λύσεων των εξισώσεων μεταβολών 1ης τάξης (3.2.6) είναι ισόμορφος με το χώρο των οριζόντιων διανυσμάτων της $\nabla_{\mathbf{X}}$.

Για $l \geq 2$ από την (3.2.4) προκύπτουν οι εξισώσεις μεταβολών τάξης l (VE_l)

$$\dot{\mathbf{n}}_l = \mathbf{X}'(\mathbf{s}(t))\mathbf{n}_l + \mathbf{f}_l, \quad (3.2.7)$$

όπου

$$\mathbf{f}_l = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \varepsilon^l} \mathbf{X} \left(\mathbf{s}(t) + \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon^j \mathbf{n}_j \right) \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (3.2.8)$$

Οι VE_l (3.2.7) είναι μη-ομογενείς για $l \geq 2$, αλλά έχουν κοινό ομογενές μέρος. Συνεπώς, αν $\Phi(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς μέρους τότε μια ειδική λύση του μη-ομογενούς συστήματος προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου της μεταβολής παραμέτρων. Δηλαδή, θέτοντας $U_l(t) = \Phi(t)\mathbf{c}_l(t)$ προκύπτει ότι η $U_l(t)$ είναι μια λύση του μη-ομογενούς συστήματος αν και μόνο αν το διάνυσμα $\mathbf{c}_l(t)$ ικανοποιεί τη διανυσματική διαφορική εξίσωση

$$\dot{\mathbf{c}}_l(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{f}_l, \quad (3.2.9)$$

οπότε η γενική λύση $\Phi_l(t)$ των VE_l έχει τη μορφή

$$\Phi_l(t) = \Phi(t) + \Phi(t)\mathbf{c}_l(t). \quad (3.2.10)$$

Από την ισότητα (3.2.8) έπεται ότι οι συνιστώσες του μη-ομογενούς όρου $\mathbf{f}_l$ της VE_l αποτελούνται από αθροίσματα (μη-γραμμικών) μονονύμων βαθμού $2, 3, \dots, l$ ως προς τις συνιστώσες των λύσεων των εξισώσεων μεταβολών των χαμηλότερων τάξεων, με συντελεστές που ανήκουν στο $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Για παράδειγμα,

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1),$$

όπου $\mathbf{n}_j = (n_{j1}, \dots, n_{jN})$ είναι η γενική λύση της εξίσωσης μεταβολών τάξης j και $\mathbf{X}^{(k)}(\mathbf{s}(t))$ είναι η πολυ-γραμμική απεικόνιση που προκύπτει από την παράγωγο k -τάξης, ως προς $\mathbf{z}$, του $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ υπολογισμένη στο $\mathbf{z} = \mathbf{s}(t)$. Θέτοντας

$$\frac{1}{2} \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_i(z)}{\partial z_j \partial z_w} \right) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{s}(t)} = (a_{ijw})$$

προκύπτει ότι η i -συνιστώσα f_{2i} του $\mathbf{f}_2$ έχει τη μορφή

$$f_{2i} = \sum_{j,w=1}^N a_{ijw} n_{1j} n_{1w}.$$

Θέτοντας

$$\mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{s}(t)) = \left(\frac{\partial X_i(z)}{\partial z_j} \right) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{s}(t)} = (b_{ij}),$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 = (n_{11}n_{11}, n_{11}n_{12}, \dots, n_{11}n_{1N}, n_{12}n_{12}, n_{12}n_{13}, \dots, n_{1N}n_{1N})^T,$$

επάγεται ότι η συνιστώσα $n_{1j}n_{1w}$ του $\hat{\mathbf{n}}_1$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}(n_{1j}n_{1w}) = \dot{n}_{1j}n_{1w} + n_{1j}\dot{n}_{1w} = n_{1w} \sum_{v=1}^N b_{jv}n_{1v} + n_{1j} \sum_{u=1}^N b_{wu}n_{1u}.$$

Συνεπώς, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα B , που αποτελείται από στοιχεία του $\mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{s}(t))$, τέτοιον ώστε

$$\dot{\mathbf{n}}_1 = B \mathbf{n}_1$$

και αντίστοιχα μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα A , που αποτελείται από στοιχεία του $\mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))$, τέτοιον ώστε

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) = A \mathbf{n}_1.$$

Συμπερασματικά, μπορούμε να μετατρέψουμε το μη-γραμμικό, μη-ομογενές σύστημα εξισώσεων μεταβολών τάξης 2 (SVE_2)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{n}}_1 &= \mathbf{X}'(\mathbf{s}(t))\mathbf{n}_1 \\ \dot{\mathbf{n}}_2 &= \mathbf{X}'(\mathbf{s}(t))\mathbf{n}_2 + \mathbf{f}_2\end{aligned}$$

στο αντίστοιχο γραμμικό, ομογενές σύστημα εξισώσεων μεταβολών τάξης 2 ($LSVE_2$)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}'(\mathbf{s}(t)) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}'(\mathbf{s}(t)) & A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_1 \end{pmatrix}.$$

Η Picard-Vessiot επέκταση $\mathbf{L}_2$ της $LSVE_2$ προκύπτει από την αλυσίδα επεκτάσεων

$$\mathfrak{M}(\Gamma) \subset \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2,$$

όπου η $\mathbf{L}_1$ προκύπτει από τη διαφορική επισύναψη των στοιχείων του θεμελειώδους πίνακα Φ της εξίσωσης μεταβολών τάξης 1 (που είναι γραμμική και ομογενής) στο $\mathfrak{M}(\Gamma)$ και $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_1 < \mathbf{u}_2 >$, όπου η $\mathbf{u}_2$ είναι η ειδική λύση της εξίσωσης μεταβολών τάξης 2 που κατασκευάζεται (μέσω των Φ , $\mathbf{f}_2$) με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Η $\mathbf{L}_2$ προκύπτει από τη διαφορική επισύναψη στην $\mathbf{L}_1$ αόριστων ολοκληρωμάτων (στοιχείων της $\mathbf{L}_1$), οπότε η επέκταση $\mathbf{L}_2/\mathbf{L}_1$ είναι μια επέκταση Liouville. Συνεπώς, η επέκταση $\mathbf{L}_2/\mathfrak{M}(\Gamma)$ της $LSVE_2$ είναι μια επέκταση Liouville αν και μόνο αν η επέκταση $\mathbf{L}_1/\mathfrak{M}(\Gamma)$ της VE_1 είναι μια επέκταση Liouville. Αντιστοίχως, η ταυτοτική συνιστώσα G_2^0 της διαφορικής ομάδας Galois $G(\mathbf{L}_2/\mathfrak{M}(\Gamma))$ της $\mathbf{L}_2/\mathfrak{M}(\Gamma)$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η G_1^0 είναι επιλύσιμη.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να μετατρέψουμε το μη-γραμμικό, μη-ομογενές σύστημα εξισώσεων μεταβολών τάξης l (SVE_l) για $l \geq 3$ στο αντίστοιχο γραμμικό, ομογενές σύστημα εξισώσεων μεταβολών τάξης l ($LSVE_l$). Η Picard-Vessiot επέκταση $\mathbf{L}_l$ της VE_l προκύπτει από την αλυσίδα επεκτάσεων

$$\mathfrak{M}(\Gamma) \subset \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2 \subset \dots \subset \mathbf{L}_l.$$

Για $l \geq 2$ η επέκταση $\mathbf{L}_l/\mathbf{L}_1$ προκύπτει από τη διαφορική επισύναψη αόριστων ολοκληρωμάτων, οπότε είναι μια επέκταση Liouville. Η $\mathbf{L}_l/\mathfrak{M}(\Gamma)$ είναι μια επέκταση Liouville αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει και για την $\mathbf{L}_1/\mathfrak{M}(\Gamma)$ και κατά συνέπεια η ταυτοτική συνιστώσα G_l^0 της διαφορικής ομάδας Galois $G(\mathbf{L}_l/\mathfrak{M}(\Gamma))$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η ταυτοτική συνιστώσα G_1^0 της διαφορικής ομάδας Galois $G(\mathbf{L}_1/\mathfrak{M}(\Gamma))$ είναι επιλύσιμη. Αν η G_1^0 είναι αβελιανή τότε η G_l^0 είναι επιλύσιμη. Επίσης, η $LSVE_l$ είναι κανονικώς ιδιόμορφη αν και μόνο αν η $LSVE_1$ είναι κανονικώς ιδιόμορφη.

Μια κάλυψη (covering) είναι μια μη-σταθερή ολόμορφη συνάρτηση $f : M \rightarrow N$, όπου κάθε σημείο του N επιδέχεται μια ανοιχτή περιοχή U και η $f^{-1}(U)$ αποτελείται από (ξένα ανά δύο) ανοιχτά σύνολα του M , που το καθένα είναι ομοιομορφικό με το U . Σημεία διακλάδωσης (ramification points) καλούνται τα (πεπερασμένου πλήθους) σημεία της M στην περιοχή των

οποίων η f δεν είναι μια κάλυψη. Στην περιοχή των σημείων διακλάδωσης z_i η f έχει τη μορφή $f(z) = (z - z_i)^k g(z)$, όπου η $g(z)$ είναι ολόμορφη και ο ακέραιος $k \neq \pm 1, 0$ καλείται δείκτης διακλάδωσης (ramification index). Η f καλείται πεπερασμένως διακλαδισμένη (finite ramified) όταν ο k είναι πεπερασμένος.

Θεώρημα 3.2.1. [88, 90] Έστω Γ μια ολοκληρωτική καμπύλη ενός διανυσματικού πεδίου, VE_Γ οι εξισώσεις μεταβολών που ορίζονται κατά μήκος της Γ , G_Γ η διαφορική ομάδα Galois της VE_Γ και G_Γ^0 η ταυτοτική συνιστώσα της G_Γ . Αν $f : \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ είναι μια πεπερασμένως διακλαδισμένη κάλυψη, τότε η $G_{\bar{\Gamma}}$ είναι μια κανονική υποομάδα της G_Γ και $G_{\bar{\Gamma}}^0 = G_\Gamma^0$.

Ορισμένες φορές είναι αναγκαίο να μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις μεταβολών για να υπολογίσουμε τη μορφή της διαφορικής ομάδας Galois G . Το παραπάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει ικανές συνθήκες ώστε ο μετασχηματισμός να μην επηρεάζει την ταυτοτική συνιστώσα G^0 της G . Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο η G^0 συνδέεται με την ολοκληρωσιμότητα (κατά Liouville) ενός συστήματος Hamilton.

Έστω (M, Ω) μια συμπλεκτική πολλαπλότητα διάστασης $2N$ και H μια συνάρτηση Hamilton που ορίζεται στην M . Το αντίστοιχο σύστημα Hamilton, σε κανονικές συντεταγμένες, έχει τη μορφή

$$\frac{d}{dt} \mathbf{z} = \mathbf{X}_H(\mathbf{z}) = J H_{\mathbf{z}}, \quad (3.2.11)$$

όπου $H_{\mathbf{z}}$ είναι η παράγωγος της H ως προς τις συνιστώσες του $\mathbf{z}$. Αν $\mathbf{s}(t)$ είναι μια ειδική λύση του παραπάνω συστήματος, τότε οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 κατά μήκος της αντίστοιχης ολοκληρωτικής καμπύλης Γ είναι οι

$$\frac{d}{dt} \mathbf{n} = J H_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\mathbf{s}(t)) \mathbf{n}, \quad (3.2.12)$$

όπου $H_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\mathbf{s}(t))$ είναι ο Εσσιανός πίνακας της H υπολογισμένος για $\mathbf{z} = \mathbf{s}(t)$.

Θεωρούμε τη σύνδεση $\nabla_{\mathbf{X}_H}$, που προκύπτει από τον περιορισμό της παραγώγου Lie κατά μήκος της Γ , της οποίας ο πίνακας είναι ο $J H_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\mathbf{s}(t))$. Για την $\nabla_{\mathbf{X}_H}$ ισχύει $\nabla_{\mathbf{X}_H} \Omega = 0$ και από αυτή τη σχέση προκύπτει

$$\frac{d}{dt} (\Omega(u, w)) = \Omega(\nabla_{\mathbf{X}_H} u, w) + \Omega(u, \nabla_{\mathbf{X}_H} w)$$

για κάθε $p \in \Gamma$ και $u, w \in T_p M$. Έστω ότι τα $H_1, H_2, \dots, H_k$, όπου $H = H_1$ και $k \leq N$, είναι (συναρτησιακώς) ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα του X_H που βρίσκονται σε ενέλιξη ανά δυο και $M_{\mathbf{c}} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{c})$ είναι η ισοσταθμική επιφάνεια της απεικόνισης $\mathbf{h} = \{H_1, H_2, \dots, H_k\} : M \rightarrow \mathbb{C}^k$, όπου $\mathbf{h}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{c}$ για $\mathbf{z}_0 \in \Gamma$. Τα H_i βρίσκονται σε ενέλιξη, συνεπώς είναι σταθερά κατά μήκος της Γ και $\Gamma \subset M_{\mathbf{c}}$. Έστω $E = T_\Gamma M_{\mathbf{c}}$ και $E^\perp = \{u \in E : \Omega(u, w) = 0 \text{ για κάθε } w \in E\}$.

Πρόταση 3.2.2. [16, 88, 90] Ισχύουν τα παρακάτω:

- (i). Τα $\mathbf{X}_{H_i}$ αποτελούν βάση του $E^\perp$.
- (ii). $E^\perp \subset E$.
- (iii). Τα $\mathbf{X}_{H_i}$ είναι οριζόντια διανύσματα της $\nabla_{\mathbf{X}_H}$.
- (iv). Τα σύνολα $E, E^\perp$ είναι αναλλοίωτα ως προς την $\nabla_{\mathbf{X}_H}$.

Απόδειξη.

(i). Έχουμε ότι $E = \{u \in T_\Gamma M_{\mathbf{c}} : \langle dH_i, u \rangle = 0, i = 1, \dots, k\}$, οπότε ο εκμηδενιστής (annihilator) $E^0 \subset T_p^* M_{\mathbf{c}}$, για κάθε $p \in \Gamma$, παράγεται από τα dH_i και μέσω του ισομορφισμού $\sharp : T_p^* M_{\mathbf{c}} \rightarrow T_p M_{\mathbf{c}}$ προκύπτει $\sharp(dH_i) = \mathbf{X}_{H_i}$.

(ii). Από τη σχέση $\Omega(\mathbf{X}_{H_i}, \mathbf{X}_{H_j}) = \{H_i, H_j\} = 0$, έπεται ότι ο $E^\perp$ είναι αυτο-ορθογώνιος και $E^\perp \subset E$.

(iii). Η ιδιότητα $\nabla_{\mathbf{X}_H} \mathbf{X}_{H_i} = 0$ προκύπτει από το γεγονός ότι η $\nabla_{\mathbf{X}_H}$ είναι ο περιορισμός της παραγώγου Lie κατά μήκος της Γ , οπότε $\nabla_{\mathbf{X}_H} \mathbf{X}_{H_i} = [\mathbf{X}_H, \mathbf{X}_{H_i}] = -\mathbf{X}_{\{H, H_i\}} = 0$.

(iv). Για κάθε $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k f_i \mathbf{X}_{H_i} \in E^\perp$, όπου $f_i \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, ισχύει

$$\nabla_{\mathbf{X}_H} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \dot{f}_i \mathbf{X}_{H_i} + \sum_{i=1}^k f_i \nabla_{\mathbf{X}_H} \mathbf{X}_{H_i} = \sum_{i=1}^k \dot{f}_i \mathbf{X}_{H_i},$$

οπότε $\nabla_{\mathbf{X}_H} \mathbf{u} \in E^\perp$. Έστω $\mathbf{u} \in E^\perp$ και $\mathbf{w} \in E$, από τη σχέση

$$\frac{d}{dt} (\Omega(u, w)) = \Omega(\nabla_{\mathbf{X}_H} u, w) + \Omega(u, \nabla_{\mathbf{X}_H} w) \Rightarrow \Omega(u, \nabla_{\mathbf{X}_H} w) = 0$$

προκύπτει ότι ο E είναι αναλλοίωτος ως προς την $\nabla_{\mathbf{X}_H}$. $\square$

Απο τη συμπλεκτική μορφή Ω και τη σύνδεση $\nabla_{\mathbf{X}_H}$ επάγεται μια συμπλεκτική μορφή Ω_F και μια σύνδεση ∇_F για το χώρο-πηλίκο $F = E/E^\perp$, ο οποίος έχει διάσταση $2N - 2k$. Για την ∇_F ισχύει $\nabla_F \Omega_F = 0$, οπότε ο πίνακας $A = A(t)$ της ∇_F ικανοποιεί τη σχέση $A^T J + J A = 0$ ή ισοδύναμα υπάρχει ένας συμμετρικός πίνακας $S = S(t)$ τέτοιος ώστε $A = J S$. Τα οριζόντια διανύσματα $\mathbf{u} \in F$ της ∇_F ικανοποιούν τη σχέση $\nabla_F \mathbf{u} = 0$, οπότε οι συνιστώσες τους θα ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = J S(t) \mathbf{x}. \quad (3.2.13)$$

Οι (3.2.13) καλούνται εξισώσεις κάθετων μεταβολών (NVE) (Normal Variational Equations) και είναι ένα μη-αυτόνομο γραμμικό σύστημα Hamilton, που επιδέχεται τη συνάρτηση Hamilton

$$H_L = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T S(t) \mathbf{x}.$$

Στο βιβλίο [85] χρησιμοποιήθηκε μια μέθοδος υποβιβασμού για να αποδειχθεί ότι αν υπάρχουν $k = N$ ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα, που βρίσκονται σε ενέλιξη, του συστήματος Hamilton (3.2.11), τότε οι λύσεις των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1 (VE_1) (3.2.12) προκύπτουν μέσω αόριστων ολοκληρωμάτων του $\mathfrak{M}(\Gamma)$. Στην εργασία [90] η προαναφερόμενη μέθοδος υποβιβασμού χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των NVE για $k < N$. Θέτοντας $\mathbf{n} = P\mathbf{w}$ οι VE_1 (3.2.12) μετασχηματίζονται στο σύστημα

$$\frac{d}{dt} \mathbf{w} = P^{-1} (J H_{\mathbf{z}\mathbf{z}}(\mathbf{s}(t)) P - \dot{P}) \mathbf{w} = B(t) \mathbf{w}.$$

Αν ο $P = P(t)$ είναι συμπλεκτικός τότε ο $B = B(t)$ είναι απειροστικά συμπλεκτικός δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $B^T J + J B = 0$. Θεωρούμε τον $2N \times N$ πίνακα $C = (C_1, C_2)$, όπου $C_2 = (\mathbf{X}_{H_1}, \dots, \mathbf{X}_{H_k})$, τέτοιον ώστε $C^T J C = 0$ και η τάξη του C να είναι N . Κατασκευάζουμε

έναν πίνακα $D = (D_1, D_2)$, όπου ο D_2 είναι διάστασης $2N \times k$, τέτοιο ώστε $D^T J D = 0$ και $C^T J D = -I$. Ο $P = (D, C) = (D_1, D_2, C_1, C_2)$ είναι συμπλεκτικός,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -C_1^T J \\ -C_2^T J \\ D_1^T J \\ D_2^T J \end{pmatrix}$$

και

$$B(t) = \begin{pmatrix} C_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1) & G & C_1^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1) & 0 \\ C_2^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1) & C_2^T(H_{zz}D_2 + J\dot{D}_2) & C_2^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1) & 0 \\ -D_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1) & Q & -D_1^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1) & 0 \\ R & S & T & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $H_{zz} = H_{zz}(\mathbf{s}(t))$. Ο $B(t)$ είναι απειροστικά συμπλεκτικός, συνεπώς για $i = 1, 2$, $C_2^T(H_{zz}D_i + J\dot{D}_i) = C_2^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1) = 0$, $T = -G^T$, $R = Q^T$, $C_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1) = (D_1^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1))^T$ και οι S , $C_1^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1)$, $-D_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1)$ είναι συμμετρικοί. Η τελική μορφή του $B(t)$ είναι

$$B(t) = \begin{pmatrix} C_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1) & G & C_1^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1) & Q & -(D_1^T H_{zz} + \dot{D}_1^T J)C_1 & 0 \\ Q^T & T & -G^T & 0 \end{pmatrix}$$

και οι μετασχηματισμένες VE_1 μπορούν να γραφούν ως το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= C_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1)\mathbf{u} + C_1^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1)\mathbf{v} + G\mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -D_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1)\mathbf{u} - (D_1^T H_{zz} + \dot{D}_1^T J)C_1\mathbf{v} + Q\mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{w}} &= 0 \\ \dot{\mathbf{x}} &= Q^T\mathbf{u} - G^T\mathbf{v} + T\mathbf{w}, \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

ενώ ο πίνακας $JS(t)$ της ∇_F είναι ο

$$JS(t) = \begin{pmatrix} C_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1) & C_1^T(H_{zz}C_1 + J\dot{C}_1) \\ -D_1^T(H_{zz}D_1 + J\dot{D}_1) & -(D_1^T H_{zz} + \dot{D}_1^T J)C_1 \end{pmatrix}.$$

Λύνοντας τις NVE (3.2.13) προκύπτει η επέκταση Picard-Vessiot $\mathbf{L}_{NVE}/\mathfrak{M}(\Gamma)$ και από τη μορφή του συστήματος (3.2.14) συνάγεται ότι η Picard-Vessiot επέκταση $\mathbf{L}$ των μετασχηματισμένων VE_1 απορρέει από τη διαφορική επισύναψη, στην $\mathbf{L}_{NVE}$, αόριστων ολοκληρωμάτων στοιχείων της $\mathbf{L}_{NVE}$. Συνολικά, έχουμε την αλυσίδα επεκτάσεων $\mathfrak{M}(\Gamma) \subset \mathbf{L}_{NVE} \subset \mathbf{L}$, όπου η $\mathbf{L}/\mathbf{L}_{NVE}$ είναι μια επέκταση Liouville.

Πρόταση 3.2.3. [88, 90] Έστω ότι ένα σύστημα Hamilton N βαθμών ελευθερίας επιδέχεται $k \leq N$ συναρτησιακά ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα που βρίσκονται σε ενέλιξη. Η Picard-Vessiot $(P - V)$ επέκταση $\mathbf{L}$ των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1 (VE_1) είναι μια επέκταση Liouville αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για την $P - V$ επέκταση $\mathbf{L}_{NVE}$ των εξισώσεων κάθετων μεταβολών (NVE). Αντίστοιχα, η ταυτοτική συνιστώσα G^0 της διαφορικής ομάδας Galois $G(\mathbf{L}/\mathfrak{M}(\Gamma))$ των VE_1 είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η ταυτοτική συνιστώσα G_{NVE}^0 της διαφορικής ομάδας Galois $G(\mathbf{L}_{NVE}/\mathfrak{M}(\Gamma))$ των NVE είναι επιλύσιμη. Αν η G^0 είναι αβελιανή τότε το ίδιο ισχύει και για την G_{NVE}^0 .

Απόδειξη. Θεωρούμε την αλυσίδα επεκτάσεων

$$\mathfrak{M}(\Gamma) \subset \mathbf{K} \subset \mathbf{L}_{NVE} \subset \mathbf{L},$$

όπου $\mathbf{K}/\mathfrak{M}(\Gamma)$ είναι αλγεβρική επέκταση και $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ είναι υπερβατική επέκταση. Η επέκταση $\mathbf{L}/\mathbf{L}_{NVE}$ είναι μια επέκταση Liouville, οπότε η $\mathbf{L}/\mathfrak{M}(\Gamma)$ είναι μια επέκταση Liouville αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει και για την $\mathbf{L}_{NVE}/\mathfrak{M}(\Gamma)$. Από το θεώρημα 1.6.14 προκύπτει ότι η G^0 είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η G_{NVE}^0 είναι επιλύσιμη. Η $G^0 = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ αντιστοιχεί στη μεγιστική συνεκτική συνιστώσα (ως προς την τοπολογία του Zariski) που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο. Η $G(\mathbf{L}/\mathbf{L}_{NVE})$ προκύπτει από τη διαφορική επισύναψη αόριστων ολοκληρωμάτων και είναι συνεκτική, οπότε είναι μια κανονική υποομάδα της G^0 . Για την $G_{NVE}^0 = G(\mathbf{L}_{NVE}/\mathbf{K})$ από το θεώρημα 1.6.7 έχουμε

$$G(\mathbf{L}_{NVE}/\mathbf{K}) = G(\mathbf{L}/\mathbf{K})/G(\mathbf{L}/\mathbf{L}_{NVE}) = G^0/G(\mathbf{L}/\mathbf{L}_{NVE}). \quad (3.2.15)$$

Αν μια ομάδα R είναι επιλύσιμη το ίδιο ισχύει για κάθε υποομάδα R_s και την αντίστοιχη ομάδα-πηλίκο R/R_s , ενώ αν οι R_s , R/R_s είναι επιλύσιμες τότε η R είναι επιλύσιμη. Από τη σχέση (3.2.15) έπεται ότι η G^0 είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η G_{NVE}^0 είναι επιλύσιμη. Αν μια ομάδα είναι αβελιανή το ίδιο ισχύει για κάθε υποομάδα και την αντίστοιχη ομάδα-πηλίκο. Άρα, αν η G^0 είναι αβελιανή τότε και η G_{NVE}^0 είναι αβελιανή. $\square$

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε πως συνδέεται η ολοκληρωσιμότητα ενός συστήματος Hamilton S_H με την επιλυσιμότητα της αντίστοιχης G^0 . Από την παραπάνω πρόταση επάγεται ότι για να μελετήσουμε την επιλυσιμότητα της G^0 αρκεί να μελετήσουμε την επιλυσιμότητα της G_{NVE}^0 . Συνεπώς, η διερεύνηση των NVE , που έχουν μικρότερη διάσταση από τις VE_1 , μπορεί να είναι αρκετή για τη μελέτη της ολοκληρωσιμότητας ενός S_H .

Παράδειγμα 3.2.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση *Hamilton*

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + V(x_1, x_2) \quad (3.2.16)$$

με τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} V(x_1, x_2) \\ \dot{y}_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_2} V(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Έστω $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t))$ μια ειδική λύση του παραπάνω συστήματος, κατά μήκος της οποίας οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 (VE_1) έχουν τη μορφή

$$\dot{\mathbf{n}} = A \mathbf{n}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -V_{11} & -V_{12} & 0 & 0 \\ -V_{12} & -V_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

όπου $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)^T$ και $V_{ij} = V_{x_i x_j}(s_1(t), s_2(t))$. $H \dot{\mathbf{s}}(t) = (\dot{s}_1(t), \dot{s}_2(t), -V_{x_1}(s_1(t), s_2(t)), -V_{x_2}(s_1(t), s_2(t))) = (s_3, s_4, -V_1, -V_2)$ είναι μια ειδική λύση των VE_1 . Θεωρούμε τον πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s_3 \\ -\frac{s_4}{s_3} & 0 & 0 & s_4 \\ 0 & \frac{1}{s_3} & 1 & -V_1 \\ \frac{V_2}{s_3} & 0 & -\frac{s_3}{s_4} & -V_2 \end{pmatrix}$$

με αντίστροφο

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s_3}{s_4} & 0 & 0 \\ -V_1 & -V_2 & -s_3 & -s_4 \\ 0 & -\frac{V_2}{s_3} & 0 & -\frac{s_4}{s_3} \\ \frac{1}{s_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $B = P^{-1}(AP - \dot{P})$ έχει τη μορφή

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{V_1}{s_3} & -\frac{1}{s_3} & \frac{s_3^2}{s_4^2} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_4 V_{12}}{s_3} & 0 & \frac{V_1}{s_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s_3^2} & \frac{1}{s_3} & 0 \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας που αντιστοιχεί στις εξισώσεις κάθετων μεταβολών (NVE) είναι ο

$$B_{\perp} = \begin{pmatrix} -\frac{V_1}{s_3} & \frac{s_3^2}{s_4^2} + 1 \\ \frac{s_4 V_{12}}{s_3} & \frac{V_1}{s_3} \end{pmatrix}.$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, ο $B_{\perp}$ ικανοποιεί τη συνθήκη $B_{\perp}^T J + J B_{\perp} = 0$, δηλαδή είναι απειροστικά συμπλεκτικός.

Θέτοντας $V = x_1^2 x_2 + \frac{c}{3} x_2^3$ στην συνάρτηση Hamilton (3.3.12) προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_1 &= -2x_1 x_2 \\ \dot{y}_2 &= -x_1^2 - c x_2^2. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Το παραπάνω σύστημα επιδέχεται ως ειδική λύση την $\mathbf{s}_1(t) = (\frac{\sqrt{2-c}}{2}s(t), \frac{1}{2}s(t), \frac{\sqrt{2-c}}{2}\dot{s}(t), \frac{1}{2}\dot{s}(t))$ και οι VE_1

$$\dot{\mathbf{n}} = A_1 \mathbf{n}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -s(t) & -\sqrt{2-c}s(t) & 0 & 0 \\ -\sqrt{2-c}s(t) & -cs(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ορίζονται κατά μήκος της ελλειπτικής καμπύλης $s'(t)^2 = -\frac{2}{3}s(t)^3 - \frac{8h}{c-3}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, μέσω του πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2-c}}{2}s'(t) \\ -\frac{1}{\sqrt{2-c}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}s'(t) \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2-c}s'(t)} & 1 & -\frac{\sqrt{2-c}}{2}s(t)^2 \\ \frac{s(t)^2}{\sqrt{2-c}s'(t)} & 0 & -\sqrt{2-c} & -\frac{1}{2}s(t)^2 \end{pmatrix}$$

οι VE_1 μετασχηματίζονται στις $\dot{\mathbf{u}} = B\mathbf{u}$ με

$$B = P^{-1}(A_1 P - \dot{P}) = \begin{pmatrix} -\frac{s(t)^2}{s'(t)} & -\frac{2}{\sqrt{2-c}s'(t)} & 3-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s(t) & 0 & \frac{s(t)^2}{s'(t)} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{(2-c)s'(t)^2} & \frac{2}{\sqrt{2-c}s'(t)} & 0 \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας $B_{\perp}$ των NVE είναι ο

$$B_{\perp} = \begin{pmatrix} -\frac{s(t)^2}{s'(t)} & 3-c \\ s(t) & \frac{s(t)^2}{s'(t)} \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα (3.2.17) επιδέχεται και την ειδική λύση $\mathbf{s}_2(t) = (0, s(t), 0, \dot{s}(t))$ και οι VE_1 κατά μήκος της αντίστοιχης ελλειπτικής ολοκληρωτικής καμπύλης $\dot{s}(t)^2 = -\frac{2c}{3}s(t)^3 + 2h$ έχουν τη μορφή

$$\dot{\mathbf{n}} = A_2 \mathbf{n}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2s(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2cs(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η NVE σε αυτή την περίπτωση είναι η $\ddot{n}_1 + 2s(t)n_1 = 0$ και οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 2, 3 (VE_2, VE_3) έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_i &= A_2 \mathbf{n}_i + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2, 3 \\ \mathbf{f}_1 &= (0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) = (0, 0, -2n_{1,1}n_{1,2}, -cn_{1,2}^2 - n_{1,1}^2)^T \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + \frac{1}{6} \mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) \\ &= (0, 0, -2(n_{1,2}n_{2,1} + n_{1,1}n_{2,2}), -2(cn_{1,2}n_{2,2} + n_{1,1}n_{2,1}))^T, \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{X}^{(j)}(\mathbf{s}(t))$ είναι η παράγωγος τάξης j του διανυσματικού πεδίου *Hamilton* που αντιστοιχεί στο σύστημα (3.2.17) υπολογισμένη στην $\mathbf{s}(t)$ και $\mathbf{n}_i = (n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3}, n_{i,4})$ για $i = 1, 2$.

Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε διεξοδικά την επιλυσιμότητα των παραπάνω εξισώσεων μεταβολών και τη σύνδεση τους με την ολοκληρωσιμότητα του συστήματος (3.2.17).

3.3 Θεωρίες Morales-Ramis και Morales-Ramis-Simó

Ο J. Liouville απέδειξε ότι ένα σύστημα *Hamilton* N βαθμών ελευθερίας μπορεί να επιλυθεί (με χρήση αόριστων ολοκληρωμάτων) αν επιδέχεται ένα σύνολο N συναρτησιακά ανεξάρτητων πρώτων ολοκληρωμάτων, τα οποία βρίσκονται (ανά δύο) σε ενέλιξη. Ο V. Arnold [9] απέδειξε το θεώρημα του J. Liouville, παρέχοντας ταυτόχρονα πληροφορίες για τις γεωμετρικές ιδιότητες των λύσεων.

Θεώρημα 3.3.1. [9] Έστω $\mathbf{X}_{H_1}$ ένα πραγματικό (real) διανυσματικό πεδίο *Hamilton* το οποίο ορίζεται σε μια πραγματική πολλαπλότητα M διάστασης $2N$. Έστω $\mathbf{h} = \{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ ένα σύνολο πρώτων ολοκληρωμάτων που βρίσκονται σε ενέλιξη και $M_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{z} \in M : H_i(\mathbf{z}) = a_i, i = 1, \dots, N, \mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_N\}\}$ μια ισοσταθμική των $\mathbf{h}$, τέτοια ώστε $\text{rank}(dH_1, \dots, dH_N) = N$ για κάθε $\mathbf{z} \in M_{\mathbf{a}}$. Τότε

- (i). Η $M_{\mathbf{a}}$ είναι μια αναλλοίωτη πολλαπλότητα ως προς τη ροή του $\mathbf{X}_{H_1}$ και αν η $M_{\mathbf{a}}$ είναι συμπαγής και συνεκτική τότε είναι διαφορομορφική με έναν τόρο διάστασης N .

- (ii). Στην περιοχή της $M_{\mathbf{a}}$ υπάρχει ένα κανονικό σύστημα συντεταγμένων $(\mathbf{I}, \mathbf{f}) = (I_1, \dots, I_N, \phi_1, \dots, \phi_N)$, $\phi_i \bmod 2\pi$, ως προς το οποίο οι εξισώσεις Hamilton έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\dot{I}_i &= 0 \\ \dot{\phi}_i &= \omega_i(I)\end{aligned}$$

και οι εξισώσεις Hamilton που αντιστοιχούν στο $\mathbf{X}_{H_1}$ μπορούν να επιλυθούν με χρήση αόριστων ολοκληρωμάτων.

Τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{X}_{H_i}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα σε κάθε σημείο $m \in M$ και οι ροές τους αντιμετατίθενται επειδή τα $\{H_1, H_2, \dots, H_N\}$ βρίσκονται σε ενέλιξη. Μέσω των ροών μπορούμε να ορίσουμε μια δράση του $\mathbb{R}^N$ στην $M_{\mathbf{a}}$ με ομάδα ιστροπίας ένα διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Το διακριτό υποσύνολο είναι ισόμορφο με τον $\mathbb{Z}^N$ και η $M_{\mathbf{a}}$ είναι διαφορομορφική με τον χώρο-πηλίκιο $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$.

Η κατασκευή των μεταβλητών γωνίας-δράσης (action-angle variables) $(\mathbf{I}, \mathbf{f})$ βασίζεται στη θεωρία κανονικών μετασχηματισμών Hamilton-Jacobi. Οι μεταβλητές δράσης $\mathbf{I}$ καθορίζουν τον τόρο στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση, ενώ οι μεταβλητές γωνίας $\mathbf{f}$ περιγράφουν την κίνηση πάνω στον τόρο. Η επίλυση του συστήματος ως προς τις αρχικές μεταβλητές προϋποθέτει την ολοκλήρωση και αντιστροφή συναρτήσεων, κάτι δύσκολο αλλά θεωρητικά εφικτό. Ένα πυκνό υποσύνολο του χώρου φάσεων αποτελείται από αναλλοίωτες πολλαπλότητες, πάνω στις οποίες η ροή είναι γραμμική.

Ορισμός 3.3.2. Έστω M μια μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα διάστασης $2N$, $\mathbf{X}_H$ ένα μερόμορφο διανυσματικό πεδίο Hamilton που ορίζεται στην M και $\mathbf{S}_H$ το αντίστοιχο σύστημα Hamilton. Το $\mathbf{S}_H$ (ή το $\mathbf{X}_H$) καλείται ολοκληρώσιμο αν υπάρχουν N μερόμορφα, συναρτησιακά ανεξάρτητα, πρώτα ολοκληρώματα του $\mathbf{S}_H$ που βρίσκονται σε ενέλιξη ανά δύο.

Στη μιγαδική περίπτωση ο χώρος φάσεων αποτελείται και πάλι από αναλλοίωτες πολλαπλότητες, όμως λείπει η περιγραφή της δυναμικής του συστήματος. Σε επίπεδο εφαρμογών, μας ενδιαφέρουν συστήματα Hamilton που όταν οι συντεταγμένες είναι πραγματικές τότε και τα συστήματα είναι πραγματικά. Δηλαδή, το πραγματικό σύστημα Hamilton περιέχεται ως υποσύστημα και αντιστοιχεί στον περιορισμό των μεταβλητών (εξαρτημένων και ανεξάρτητης) σε πραγματικές τιμές. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.3.1 στο υποσύστημα και στη συνέχεια να πραγματοποιήσουμε αναλυτική συνέχιση, δηλαδή να θεωρήσουμε τις μεταβλητές μιγαδικές. Πολλές μέθοδοι ανάλυσης δυναμικών συστημάτων, ως προς την ολοκληρωσιμότητά τους, βασίζονται στην αναλυτική επέκταση στο μιγαδικό επίπεδο και έχουν οδηγήσει στην εύρεση ολοκληρώσιμων περιπτώσεων των υποσυστημάτων που αντιστοιχούν σε πραγματικές μεταβλητές.

Θεωρούμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση $y'' = F(y', y, z)$, όπου η F είναι ρητή ως προς τις εξαρτημένες μιγαδικές μεταβλητές y, y' και αναλυτική ως προς την ανεξάρτητη μιγαδική μεταβλητή z . Στα τέλη του 19ου αιώνα ο γάλλος μαθηματικός (και πρωθυπουργός!) P. Painlevé [102] μελέτησε τις διαφορικές εξισώσεις με την προαναφερόμενη μορφή (υπό την προϋπόθεση ότι οι μόνες κινητές ιδιομορφίες των λύσεων τους είναι πόλοι) και τις ταξινόμησε με τη συνδρομή των B. Gambier, R. Fuchs, βρίσκοντας 50 διαφορετικές περιπτώσεις [48, 52]. Η προαναφερόμενη ιδιότητα των λύσεων καλείται “ιδιότητα Painleve”. Από το 1980 [4] και έπειτα μελετήθηκαν πολλά συστήματα ως προς την ιδιότητα Painleve. Μια ανασκόπηση των αποτελεσμάτων μέχρι και το 1989 περιέχεται στην αναφορά [110]. Σε πολλές περιπτώσεις παρατηρήθηκε ότι τα συστήματα που έχουν την ιδιότητα Painleve είναι και ολοκληρώσιμα, κάτι που οδήγησε στην εικασία ότι η ιδιότητα Painleve είναι ικανή συνθήκη ολοκληρωσιμότητας.

Το 1889 η S. Kovalevskaya [63] μελέτησε το πρόβλημα του περιστρεφόμενου σώματος γύρω από ένα σταθερό σημείο ως προς την ιδιότητα Painleve και βρήκε ότι, εκτός από ορισμένες ειδικές λύσεις, μόνο σε τρεις περιπτώσεις η γενική λύση έχει πόλους ως τις μόνες κινητές ιδιομορφίες της. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις είναι ολοκληρώσιμες. Το 1894 ο A.M. Lyapounov [68] απέδειξε ότι, εκτός από ορισμένες ειδικές λύσεις, η γενική λύση είναι μονότιμη μόνο στις προαναφερόμενες τρεις περιπτώσεις. Η μέθοδός του βασίστηκε στην ανάλυση των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1.

Η μελέτη των εξισώσεων κάθετων μεταβολών οδήγησε το 1983 τον S.L. Ziglin [135] στην διατύπωση αναγκαίων συνθηκών ολοκληρωσιμότητας ενός μιγαδικού συστήματος Hamilton $\mathbf{X}_H$. Ο Ziglin θεώρησε ένα σύστημα Hamilton N βαθμών ελευθερίας που επιδέχεται N ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα, από τα οποία μόνο $k \leq N$ βρίσκονται σε ενέλιξη ανά δύο. Σε αυτή την περίπτωση, αν η μονόδρομη ομάδα $\mathcal{M}$ των εξισώσεων κάθετων μεταβολών περιέχει ένα μη-συντονισμένο στοιχείο $m \in \mathcal{M}$, τότε κάθε $\hat{m} \in \mathcal{M}$ μεταθέτει τους ιδιόχωρους του m . Από τη θεωρία Ziglin προήλθαν πολλές εργασίες [15], [30]-[32], [49, 51, 53, 54, 122], [129]-[132], [136] με τις οποίες αποδείχθηκε η μη-ολοκληρωσιμότητα πολλών προβλημάτων που ανταποκρίνονται σε φυσικά μοντέλα. Στην [129] ο H. Yoshida μελέτησε συστήματα Hamilton που παράγονται από παραμετρικές οικογένειες ομογενών συναρτήσεων δυναμικού και με εφαρμογή της θεωρίας Ziglin παρήγαγε ανοικτά διαστήματα για τις τιμές των παραμέτρων τα οποία αντιστοιχούν σε μη-ολοκληρώσιμα συστήματα 2 βαθμών ελευθερίας.

Η μονόδρομη ομάδα των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1 περιέχεται στην αντίστοιχη διαφορική ομάδα Galois G_1 . Οι J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis [88] το 1999 γενίκευσαν τα αποτελέσματα του Ziglin, παράγοντας αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας ενός $\mathbf{X}_H$, με διερεύνηση της G_1 . Συγκεκριμένα, αν το $\mathbf{X}_H$ είναι ολοκληρώσιμο τότε η ταυτοτική συνιστώσα G_1^0 της G_1 είναι αβελιανή. Οι J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, C. Simó [94] το 2007 δημοσίευσαν μια γενίκευση σε εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης, η οποία είχε διατυπωθεί ως εικασία στο βιβλίο [88], ενώ η απόδειξη του θεωρήματος είχε ανακοινωθεί το 2000 [89]. Σύμφωνα με τη γενίκευση, αν το $\mathbf{X}_H$ είναι ολοκληρώσιμο τότε η ταυτοτική συνιστώσα G_k^0 της διαφορικής ομάδας Galois G_k των εξισώσεων μεταβολών τάξης k είναι αβελιανή για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τα δύο θεωρήματα εφαρμόστηκαν στη μελέτη της ολοκληρωσιμότητας πολλών συστημάτων Hamilton όπως τα παρακάτω:

- (i). Συστήματα με συναρτήσεις δυναμικού που είναι ομογενείς [26, 36, 42, 74, 78, 79, 92, 97, 98, 122, 133, 134, 107, 108] ή αποτελούνται από ομογενείς όρους [10, 11, 123].
- (ii). Συστήματα σωμάτων [17]-[19], [55, 56, 72, 93, 100, 121].
- (iii). Κοσμολογικά μοντέλα [21], [69]-[71].
- (iv). Κίνηση σωματιδίων [7, 8, 40, 41, 100, 116].
- (v). Κίνηση δορυφόρων [13, 20, 73], εκκρεμές με ελατήριο [77, 84], περιστρεφόμενο σώμα [76, 80], εγκάρσια τομή διαχωριστικών καμπυλών [87, 128].
- (vi). Άλλου είδους συστήματα [12, 75, 86, 91, 127].

Από τις παραπάνω εργασίες, μόνο στις [20, 21, 78, 77, 79, 84, 100, 107, 108] γίνεται χρήση εξισώσεων μεταβολών ανώτερης τάξης.

Η εφαρμογή της θεωρίας Ziglin, σε παραμετρικές οικογένειες συναρτήσεων Hamilton με ομογενή δυναμικά, παρέχει ανοικτά διαστήματα τιμών των παραμέτρων που αντιστοιχούν σε μη-ολοκληρωσιμότητα συστημάτων 2 βαθμών ελευθερίας, ενώ η εφαρμογή της θεωρίας Morales-Ramis [88] παρέχει ανοικτά διαστήματα (που το συμπλήρωμα τους είναι διακριτές τιμές) που αντιστοιχούν σε μη-ολοκληρωσιμότητα συστημάτων N βαθμών ελευθερίας [92].

Στο υπόλοιπο της παρούσας ενότητας θα περιγράψουμε τη θεωρία Morales-Ramis [88] και τη γενίκευσή της σε εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης [94].

Έστω V ένας συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος διάστασης $2N$ και $sp(V)$ η άλγεβρα Lie των συμπλεκτικών πινάκων $SP(V)$, που αποτελείται από τους πίνακες $M : V \rightarrow V$ για τους οποίους ισχύει $M^T J + JM = 0$, όπου

$$J = \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix}$$

και $I_N, 0_N$ είναι ο $N \times N$ μοναδιαίος και ο $N \times N$ μηδενικός πίνακας, αντιστοίχως. Για κάθε $M \in sp(V)$ ο JM είναι συμμετρικός, ενώ η αγκύλη Lie $[\cdot, \cdot]$ έχει τη μορφή

$$[M_1, M_2] = M_1 M_2 - M_2 M_1$$

για κάθε $M_1, M_2 \in sp(V)$. Θεωρούμε την $1 - 1$ και επί απεικόνιση $\phi(M) = \frac{1}{2}JM$ η οποία απεικονίζει κάθε $M \in sp(V)$ σε ένα συμμετρικό πίνακα $\widehat{M} = \frac{1}{2}JM$. Για $X \in V$, η συνάρτηση $f = X^T \widehat{M} X$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού δύο και είναι η συνάρτηση Hamilton του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{X}_f = 2J\widehat{M}X = -MX$. Έστω $f_i = X^T \phi(M_i)X$ για $M_i \in sp(V)$ και $i = 1, 2$. Από την αγκύλη Lie και την αγκύλη Poisson των αντίστοιχων $\mathbf{X}_{f_i}$, f_i προκύπτει

$$\mathbf{X}_{\{f_1, f_2\}} = -[\mathbf{X}_{f_1}, \mathbf{X}_{f_2}] = (M_1 M_2 - M_2 M_1)X = [M_1, M_2]X. \quad (3.3.1)$$

Άρα, αν οι $f_i = X^T \phi(M_i)X$ είναι σε ενέλιξη τότε οι $M_1, M_2 \in sp(V)$ αντιμετατίθενται.

Έστω $\mathbb{C}(V)$ ο χώρος των ρητών συναρτήσεων ως προς τις συνιστώσες των διανυσμάτων του V . Θα λέμε ότι το $R(V) \in \mathbb{C}(V)$ είναι μια αναλλοίωτη της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ αν για κάθε $M \in \mathfrak{g}$ ισχύει $dR M = 0$.

Θεώρημα 3.3.3. [88, 90] Έστω V ένας μιγαδικός συμπλεκτικός διανυσματικός χώρος διάστασης $2N$, $\mathfrak{g} \subset sp(V)$ μια υποάλγεβρα Lie και $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}(V)$ αλγεβρικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbb{C}(V)$ που βρίσκονται σε ενέλιξη ανα δύο. Αν τα $a_1, \dots, a_N$ είναι αναλλοίωτες της $\mathfrak{g}$, τότε η $\mathfrak{g}$ είναι αβελιανή.

Απόδειξη. Θεωρούμε την άλγεβρα A που παράγεται από τα $a_1, \dots, a_N$ και το σύνολο $A^\perp = \{u \in \mathbb{C}(V) : \{u, a_i\} = 0 \text{ για } i = 1, \dots, N\}$. Εφόσον τα $a_1, \dots, a_N$ είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα και σε ενέλιξη, ισχύει $A \subset A^{\perp\perp} = A^\perp$ και τα $A, A^\perp, A^{\perp\perp}$ είναι άλγεβρες (ως προς το συνηθισμένο γινόμενο) και άλγεβρες Poisson (ως προς την αγκύλη Poisson). Η σχέση $da_i M = 0$, για $M \in \mathfrak{g}$, ισοδυναμεί με $\{X^T \phi(M)X, a_i\} = 0$, οπότε $X^T \phi(\mathfrak{g})X \subset A^\perp$ και τα στοιχεία του συνόλου $X^T \phi(\mathfrak{g})X$ είναι σε ενέλιξη. Από τη σχέση (3.3.1) προκύπτει ότι η $\mathfrak{g}$ είναι αβελιανή. $\square$

Έστω M μια μιγαδική συμπλεκτική πολλαπλότητα διάστασης $2N$, $\mathbf{X}_H$ ένα μερόμορφο διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στην M και $\mathbf{h} = \{H_1, \dots, H_N\}$ ($H = H_1$) ένα σύνολο από (συναρτησιακά) ανεξάρτητα μερόμορφα πρώτα ολοκληρώματα του $\mathbf{X}_H$ που βρίσκονται σε ενέλιξη ανά δύο. Για κάθε $p \in M$ και $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{2N})$ ένα κανονικό τοπικό σύστημα συντεταγμένων μιας γειτονιάς του p ($\mathbf{z}(p) = (0, \dots, 0)$), το ανάπτυγμα ενός H_i στην περιοχή του p έχει τη μορφή $H_i = H_{ik}(\mathbf{z}) + O(k+1)$, όπου το $H_{ik}(\mathbf{z})$ είναι μια ομογενής ρητή συνάρτηση ως προς $\mathbf{z}$, βαθμού $k \in \mathbb{Z}$. Αν Γ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $\mathbf{X}_H$ και $\mathbf{n} \in T_p M$, τότε η συνάρτηση $H_i^0 = H_{ik}(\mathbf{n})$ καλείται “μικρότερος ομογενής όρος” (junior homogeneous term) [135]. Τα H_i, H_j βρίσκονται σε ενέλιξη, οπότε το ίδιο ισχύει και για τα $H_{ik}(\mathbf{z}), H_{jm}(\mathbf{z})$ και έπεται

$$\{H_i^0, H_j^0\} = \sum_{l=1}^N \frac{\partial H_i}{\partial n_{N+l}} \frac{\partial H_j}{\partial n_l} - \frac{\partial H_i}{\partial n_l} \frac{\partial H_j}{\partial n_{N+l}} = 0. \quad (3.3.2)$$

Τα $\{H_1, \dots, H_N\}$ μπορούν να επεκταθούν σε ένα σύστημα κανονικών συντεταγμένων, ως προς τις οποίες $\Omega = \mathbf{t} \wedge \mathbf{h} = \sum_{i=1}^N dt_i \wedge H_i$. Ως προς αυτές τις συντεταγμένες (με $(\mathbf{t}(p), \mathbf{h}(p)) = (0, 0)$), αν f είναι ένα μερόμορφο πρώτο ολοκλήρωμα των $\mathbf{X}_{H_i} = \mathbf{X}_i$, τότε $\frac{\partial f}{\partial t_i} = \mathbf{X}_i(f) = 0$. Έστω, $U \times V$ μια συνεκτική περιοχή του $(\mathbf{t}, \mathbf{h}) = (0, 0)$ όπου η f έχει τη μορφή

$$f = \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{t}, \mathbf{h})}{\tilde{\psi}(\mathbf{t}, \mathbf{h})}$$

με $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ ολόμορφες συναρτήσεις. Εφόσον $\tilde{\psi} \neq 0$ και $\frac{\partial f}{\partial t_i} = 0$, η f είναι ολόμορφη και ανεξάρτητη του $\mathbf{t}$ σε ένα υποσύνολο $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ και με αναλυτική συνέχιση σε όλο το $U \times V$. Άρα,

$$f = \frac{\tilde{\phi}(\mathbf{t}, \mathbf{h})}{\tilde{\psi}(\mathbf{t}, \mathbf{h})} = \frac{\phi(\mathbf{h})}{\psi(\mathbf{h})}.$$

Η τοπική παράμετρος για τη Γ είναι η $t = t_1$. Οι εξισώσεις κίνησης για το $\mathbf{X}_1$ έχουν τη μορφή $\dot{z}_j = \delta_{1j}$ και οι εξισώσεις μεταβολών κατά μήκος της Γ είναι οι $\dot{\mathbf{n}} = 0$, όπου $\mathbf{z} = (\mathbf{t}, \mathbf{h})$ και $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_t, \mathbf{n}_h)$. Ισχύει λοιπόν

$$f = \frac{\phi(\mathbf{h})}{\psi(\mathbf{h})} = \frac{\phi_m(\mathbf{h}) + O(m+1)}{\psi_k(\mathbf{h} + O(k+1))}$$

και

$$f^0 = \frac{\phi_m(\mathbf{n}_h)}{\psi_k(\mathbf{n}_h)}.$$

Εφόσον $\dot{\mathbf{n}}_h = 0$, ο μικρότερος ομογενής όρος f^0 είναι σταθερός και η αναλυτική συνέχιση ως προς t_1 τον αφήνει αναλλοίωτο.

Πρόταση 3.3.4. [16, 135] Οι μικρότεροι ομογενείς όροι $\{H_1^0, \dots, H_N^0\}$ είναι πρώτα ολοκληρώματα των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1 και είναι αναλλοίωτοι ως προς τη δράση της μονόδρομης ομάδας.

Έστω $\mathbf{K} \subset \mathbf{L} = \mathbf{K}(x)$ μια επέκταση διαφορικών σωμάτων με χαρακτηριστική 0. Αν το x είναι υπερβατικό πάνω από το $\mathbf{K}$ τότε η διαφόριση D του $\mathbf{K}$ επεκτείνεται στο $\mathbf{L}$ θέτοντας $\tilde{D}(x) = q$ για τυχαίο $q \in \mathbf{L}$. Αν το x είναι αλγεβρικό πάνω από το $\mathbf{K}$, τότε η τιμή της $\tilde{D}(x)$ καθορίζεται από το ελάχιστο πολυώνυμο του x .

Πρόταση 3.3.5. [16, 67] Αν $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$ είναι μια επέκταση διαφορικών σωμάτων με χαρακτηριστική 0, τότε κάθε διαφόριση του $\mathbf{K}$ επεκτείνεται σε μια διαφόριση του $\mathbf{L}$.

Έστω $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_m\}$, όπου οι $f_i = f_i(\mathbf{x})$ ανήκουν στο διαφορικό σώμα $\mathbb{C}(\mathbf{x})$ των μιγαδικών ρητών συναρτήσεων ως προς τις μεταβλητές $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$.

Αν οι $f_1, \dots, f_m$ είναι αλγεβρικές εξαρτημένες, δηλαδή υπάρχει πολυώνυμο $P \in \mathbb{C}(\mathbf{x})$ τέτοιο ώστε $P(\mathbf{f}) = 0$, τότε $dP(\mathbf{f}) = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} P(\mathbf{f}) df_i = 0$. Δηλαδή, οι $f_1, \dots, f_m$ είναι συναρτησιακά εξαρτημένες.

Αν οι $f_1, \dots, f_m$ είναι αλγεβρικές ανεξάρτητες, τότε η $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(f_1, \dots, f_m)$ είναι μια υπερβατική επέκταση οι οποία επιδέχεται τους τελεστές διαφόρισης $\partial/\partial f_i$, όπου $\partial f_j/\partial f_i = \delta_{ij}$. Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι στην επέκταση $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$ μπορούμε να επεκτείνουμε τους $\partial/\partial f_i$ σε διαφορίσεις D_i του $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$, όπου $D_i(f_j) = \delta_{ij}$. Θεωρούμε τα

διανυσματικά πεδία $\mathbf{X}_k = \sum_{j=1}^m D_k(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}$ για $k = 1, \dots, m$. Για κάθε $h \in \mathbb{C}(\mathbf{x})$ ισχύει $\mathbf{X}_k(h) = \langle dh, \mathbf{X}_k \rangle = D_k(h)$. Έστω $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}(\mathbf{x})$ τέτοιες ώστε $\sum_{i=1}^m g_i df_i = \sum_{i,j=1}^m g_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = 0$. Από το εσωτερικό γινόμενο της τελευταίας παράστασης με το $\mathbf{X}_k$ προκύπτει $g_k = 0$ για $k = 1, \dots, m$, οπότε οι $f_1, \dots, f_m$ είναι συναρτησιακώς ανεξάρτητες.

Πρόταση 3.3.6. [16] Στο σώμα των ρητών συναρτήσεων $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$ η αλγεβρική και η συναρτησιακή εξάρτηση είναι ισοδύναμες.

Οι μικρότεροι ομογενείς όροι $H_1^0, \dots, H_N^0 \in \mathbb{C}(\mathbf{n})$ είναι σε ενέλιξη, ως προς τις συνιστώσες του $\mathbf{n} \in T_p M$ (3.3.2), αλλά μπορεί να είναι συναρτησιακώς εξαρτημένοι. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα που απέδειξε ο Ziglin [135].

Λήμμα 3.3.7. [135] Αν οι $H_1, \dots, H_N$ είναι συναρτησιακώς ανεξάρτητες, τότε υπάρχουν πολυώνυμα $P_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_i]$ τέτοια ώστε αν $g_i = P_i(H_1, \dots, H_i)$ οι μικρότεροι ομογενείς όροι $g_1^0, \dots, g_N^0 \in \mathbb{C}(\mathbf{n})$ να είναι αλγεβρικώς ανεξάρτητοι.

Από τα δυο παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $H_1^0, \dots, H_N^0 \in \mathbb{C}(\mathbf{n})$ είναι συναρτησιακώς και αλγεβρικώς ανεξάρτητοι και βρίσκονται σε ενέλιξη.

Έστω $\mathbf{h}_0 \subset \mathbb{C}(\mathbf{n})$ η υποάλγεβρα που παράγεται από τους $H_1^0, \dots, H_N^0 \in \mathbb{C}(\mathbf{n})$. Η $\mathbf{h}_0^\perp \subset \mathbb{C}(\mathbf{n})$ ορίζεται ως το σύνολο $\mathbf{h}_0^\perp = \{f \in \mathbb{C}(\mathbf{n}) : \{f, g\} = 0 \text{ για κάθε } g \in \mathbf{h}_0\}$. Οι $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_0^\perp, \mathbf{h}_0^{\perp\perp} \subset \mathbb{C}(\mathbf{n})$ είναι υποάλγεβρες (ως προς το συνηθισμένο γινόμενο) και υποάλγεβρες Poisson (ως προς την αγκύλη Poisson) για τις οποίες ισχύει $\mathbf{h}_0 \subset \mathbf{h}_0^{\perp\perp} = \mathbf{h}_0^\perp$.

Έστω Γ μια ολοκληρωτική καμπύλη (που δεν είναι σταθερό σημείο) του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{X}_H$ κατά μήκος της οποίας ορίζουμε τις εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 (VE_1), οι οποίες υποθέτουμε ότι έχουν κανονικές ιδιομορφίες. Από την πρόταση (3.3.4) προκύπτει ότι το σύνολο $\mathbf{h}_0$ είναι αναλλοίωτο ως προς τη δράση της μονόδρομης ομάδας των VE_1 . Εφόσον οι VE_1 έχουν κανονικές ιδιομορφίες, η μονόδρομη ομάδα είναι πυκνή (ως προς την τοπολογία του Zariski) μέσα στη διαφορική ομάδα Galois G_1 των VE_1 . Άρα, το $\mathbf{h}_0$ είναι αναλλοίωτο και ως προς τη δράση της G_1 . Οι VE_1 είναι ένα γραμμικό σύστημα Hamilton, άρα η G_1 είναι υποομάδα της συμπλεκτικής ομάδας. Έστω $f \in \mathbf{h}_0$. Από τη σχέση $f(g(\mathbf{n})) = f(\mathbf{n})$ για κάθε $g \in G_1$, προκύπτει $df M = 0$ για κάθε στοιχείο M της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}_1$ της G_1 . Από το θεώρημα 3.3.3 προκύπτει ότι η $\mathfrak{g}_1$ είναι αβελιανή, άρα και η ταυτοτική συνεκτική συνιστώσα G_1^0 της G_1 είναι αβελιανή.

Θεώρημα 3.3.8. [88, 90] Έστω ότι το N βαθμών ελευθερίας διανυσματικό πεδίο Hamilton $\mathbf{X}_H$ επιδέχεται N συναρτησιακώς ανεξάρτητα μερόμορφα πρώτα ολοκληρώματα, που βρίσκονται σε ενέλιξη ανά δύο. Αν Γ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $\mathbf{X}_H$, κατά μήκος της οποίας οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 (VE_1) έχουν κανονικές ιδιομορφίες, τότε η ταυτοτική συνιστώσα G_1^0 της διαφορικής ομάδας Galois G_1 των VE_1 είναι αβελιανή.

Αν η VE_1 περιέχει και μη-κανονικές ιδιομορφίες, τότε η μονόδρομη ομάδα δεν είναι πυκνή μέσα στην G_1 . Ο J.P. Ramis [111] απέδειξε ότι σε αυτή την περίπτωση η G_1 παράγεται από τους πίνακες Stokes (που αντιστοιχούν σε κάθε μη-κανονική ιδιομορφία) και τη μονόδρομη ομάδα. Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση μη-κανονικών ιδιομορφιών, με ένα τίμημα ως προς το είδος των πρώτων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 3.3.9. [88, 90] Έστω ότι το N βαθμών ελευθερίας διανυσματικό πεδίο Hamilton $\mathbf{X}_H$ επιδέχεται N συναρτησιακώς ανεξάρτητα ρητά πρώτα ολοκληρώματα, που βρίσκονται σε ενέλιξη

ανά δύο. Αν Γ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $\mathbf{X}_H$, κατά μήκος της οποίας οι VE_1 έχουν μη-κανονικές ιδιομορφίες, τότε η ταυτοτική συνιστώσα G_1^0 της διαφορικής ομάδας Galois G_1 των VE_1 είναι αβελιανή.

Οι εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης VE_k είναι μη-γραμμικές και μη ομογενείς. Μπορούμε όμως πάντα να κατασκευάσουμε ένα αντίστοιχο γραμμικό ομογενές σύστημα εξισώσεων LVE_k του οποίου οι λύσεις βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία με τις λύσεις του VE_k . Αν η VE_1 , που είναι γραμμική και ομογενής, είναι κανονικώς ιδιόμορφη, τότε και οι LVE_k είναι κανονικώς ιδιόμορφες για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Σε αυτή την περίπτωση η μονόδρομη ομάδα των LVE_k είναι πυκνή μέσα στη διαφορική ομάδα Galois G_k . Οι J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, C. Simó γενίκευσαν τα δύο παραπάνω θεωρήματα σε εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης, χρησιμοποιώντας παρόμοιες τεχνικές με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν για τις VE_1 .

Θεώρημα 3.3.10. [94] Έστω ότι το N βαθμών ελευθερίας διανυσματικό πεδίο Hamilton $\mathbf{X}_H$ επιδέχεται N συναρτησιακώς ανεξάρτητα μερόμορφα πρώτα ολοκληρώματα, που βρίσκονται σε ενέλιξη ανά δύο. Αν Γ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $\mathbf{X}_H$, κατά μήκος της οποίας οι VE_1 έχουν κανονικές ιδιομορφίες, τότε η ταυτοτική συνιστώσα G_k^0 της διαφορικής ομάδας Galois G_k των LVE_k είναι αβελιανή για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Θεώρημα 3.3.11. [94] Έστω ότι το N βαθμών ελευθερίας διανυσματικό πεδίο Hamilton $\mathbf{X}_H$ επιδέχεται N συναρτησιακώς ανεξάρτητα ρητά πρώτα ολοκληρώματα, που βρίσκονται σε ενέλιξη ανά δύο. Αν Γ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του $\mathbf{X}_H$, κατά μήκος της οποίας οι VE_1 έχουν μη-κανονικές ιδιομορφίες, τότε η ταυτοτική συνιστώσα G_k^0 της διαφορικής ομάδας Galois G_k των LVE_k είναι αβελιανή για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση Hamilton

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + \dots y_N^2) + V(\mathbf{x}), \quad (3.3.3)$$

όπου $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$ είναι ένα κανονικό σύστημα συντεταγμένων και η συνάρτηση δυναμικού $V(\mathbf{x})$ είναι ομογενής βαθμού $k \in \mathbb{Z}^*$. Το αντίστοιχο σύστημα Hamilton N βαθμών ελευθερίας έχει τη μορφή

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \quad (3.3.4)$$

όπου $V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (V_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, V_{x_N}(\mathbf{x}))$. Το παραπάνω σύστημα επιδέχεται λύσεις ευθείας γραμμής (SLS) της μορφής $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}s(t) = (c_1, \dots, c_N)s(t)$, $\mathbf{y}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ αν οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{c}$ είναι μια λύση του συστήματος

$$\mathbf{c} = V_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}) \quad (3.3.5)$$

και η βαθμωτή συνάρτηση $s(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{s}(t)^2 = \frac{2}{k}(1 - s(t)^k) \Rightarrow \ddot{s}(t) = -s(t)^{k-1}. \quad (3.3.6)$$

Οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 (VE_1) κατά μήκος των SLS είναι το σύστημα

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = s(t)^{k-2} \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c}) & 0_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}$$

ή πιο απλά

$$\ddot{\mathbf{u}} = -s(t)^{k-2} V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c}) \mathbf{u}, \quad (3.3.7)$$

όπου $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)^T$, $V_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{c})$ είναι ο Ερμιτιανός πίνακας της $V(\mathbf{x})$ υπολογισμένος στο $\mathbf{c}$ και O_N, I_N είναι ο $N \times N$ μηδενικός, ταυτοτικός πίνακας, αντιστοίχως.

Αφού η $V = V(\mathbf{x})$ είναι ομογενής βαθμού k , ικανοποιεί τη σχέση του Euler

$$V_{\mathbf{x}}\mathbf{x}^T = kV$$

από την οποία προκύπτει

$$V_{\mathbf{x}\mathbf{x}}\mathbf{x}^T = (k-1)V_{\mathbf{x}}^T.$$

Θεωρώντας την παραπάνω σχέση κατά μήκος των $SLS \mathbf{x}(t) = \mathbf{c}s(t)$ έπεται ότι

$$V_{\mathbf{x}\mathbf{x}}\mathbf{c}^T = (k-1)\mathbf{c}^T,$$

οπότε το $\mathbf{c}^T$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $V_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{c})$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $k-1$.

Ο $V_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{c})$ είναι ένας μιγαδικός συμμετρικός πίνακας και (σε αντίθεση με τους πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες) δε διαγωνοποιείται πάντα [34]. Αν ο $V_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{c})$ διαγωνοποιείται, τότε στο καινούριο σύστημα συντεταγμένων οι (3.3.7) διαχωρίζονται (SVE_1)

$$\ddot{\mathbf{u}} = -s(t)^{k-2} \text{diag}(l_1, \dots, l_N)\mathbf{u}, \quad (3.3.8)$$

όπου $l_1, \dots, l_N$ είναι οι ιδιοτιμές του $V_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\mathbf{c})$.

Αν $l_N = k-1$, τότε από τη σχέση (3.3.6) επάγεται ότι η βαθμωτή εξίσωση μεταβολών $\ddot{u}_N = -(k-1)s(t)u_N$ επιδέχεται τη λύση $\dot{s}(t)$. Έστω $\mathbf{K} = \mathcal{M}(s(t), \dot{s}(t))$ το διαφορικό σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων ως προς τις $s(t), \dot{s}(t)$. Οι συντελεστές των SVE_1 (3.3.8) ανήκουν στο $\mathbf{K}$. Η επέκταση Picard-Vessiot $\mathbf{L} = \mathbf{K} \langle \int \dot{s}(t)dt \rangle$ είναι μια επέκταση Liouville, άρα η ταυτοτική συνιστώσα της διαφορικής ομάδας Galois της $\ddot{u}_N = -(k-1)s(t)u_N$ είναι επιλύσιμη.

Οι SVE_1 (3.3.8) έχουν τη μορφή

$$\ddot{u}_i = -l_i s(t)^{k-2} u_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3.9)$$

Ο H. Yoshida παρατήρησε ότι οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να μετασχηματιστούν σε ένα σύστημα υπεργεωμετρικών εξισώσεων ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή $z = s(t)^k$. Από το μετασχηματισμό $z = s(t)^k$ προκύπτει

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \frac{d^2 u_i}{dz^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{du_i}{dz},$$

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 2kz(1-z)s(t)^{k-2}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = [2(k-1) - (3k-2)z]s(t)^{k-2}$$

και αντικαθιστώντας στις SVE_1 (3.3.9) προκύπτει το σύστημα υπεργεωμετρικών εξισώσεων (AVE_1)

$$z(1-z) \frac{d^2 u_i}{dz^2} + \left(\frac{k-1}{k} - \frac{3k-2}{2k} z \right) \frac{du_i}{dz} + \frac{l_i}{2k} u_i = 0. \quad (3.3.10)$$

Το παραπάνω σύστημα αποτελείται από εξισώσεις που έχουν κανονικές ιδιομορφίες στα σημεία $z = 0, 1, \infty$ και αντίστοιχες εκθετικές διαφορές $\lambda = 1/k$, $\mu = 1/2$, $\nu_i = (2k)^{-1} \sqrt{(k-2)^2 + 8kl_i}$. Ο μετασχηματισμός $z = s(t)^k$ επάγει μια πεπερασμένως διακλαδισμένη κάλυψη της ολοκληρωτικής καμπύλης των SLS και σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.1 η ταυτοτική συνιστώσα της διαφορικής ομάδας Galois των SVE_1 (3.3.9) είναι ίδια με την ταυτοτική συνιστώσα G^0 της διαφορικής ομάδας

Galois των AVE_1 (3.3.10). Αφού το σύστημα υπεργεωμετρικών εξισώσεων AVE_1 (3.3.10) αποτελείται από εξισώσεις με κανονικές ιδιομορφίες, σύμφωνα με το θεώρημα των Morales-Ramis 3.3.8 αν το σύστημα Hamilton (3.3.4) είναι ολοκληρώσιμο τότε η G^0 είναι αβελιανή. Η αντιμεταθετικότητα της G^0 επάγει την επιλυσιμότητα της και επειδή οι AVE_1 είναι ένα σύστημα διαχωρισμένων υπεργεωμετρικών εξισώσεων, οι εκθετικές διαφορές λ, μ, ν_i θα πρέπει να παίρνουν τις τιμές που καθορίζονται από το θεώρημα του Kimura 2.4.3 για κάθε $i = 1, \dots, N$.

Θεώρημα 3.3.12 ([88]). Έστω $V(\mathbf{x})$ μια ομογενής συνάρτηση δυναμικού βαθμού $k \in \mathbb{Z}^*$ και $\mathbf{c}$ μια μη-μηδενική λύση του συστήματος $V_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$. Αν ο $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$ διαγωνοποιείται και το σύστημα N βαθμών ελευθερίας $\ddot{\mathbf{x}} = -V_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ είναι ολοκληρώσιμο, τότε για τις ιδιοτιμές $l_1, \dots, l_N$ ($l_N = k - 1$) του $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$ ισχύουν τα παρακάτω:

(A) Για $|k| = 1$ ή $|k| \geq 6$ κάθε $l_i, i = 1, 2, \dots, N - 1$ ανήκει στο σύνολο I_k .

(B) Για $k = \pm 3, \pm 4, \pm 5$ κάθε $l_i, i = 1, 2, \dots, N - 1$ ανήκει στο σύνολο $I_k \cup B_k$, όπου

$$\begin{aligned} I_k &= \left\{ j + \frac{j(j-1)}{2}k, \frac{k-1}{2k} + \frac{j(j+1)}{2}k : j \in \mathbb{Z} \right\}, \\ B_{-5} &= \left\{ \frac{49 - (10/3 + 10j)^2}{40}, \frac{49 - (4 + 10j)^2}{40} : j \in \mathbb{Z} \right\}, \\ B_{-4} &= \left\{ \frac{9 - (4/3 + 4j)^2}{8} : j \in \mathbb{Z} \right\}, \\ B_{-3} &= \left\{ \frac{25 - (2+6j)^2}{24}, \frac{25 - (3/2+6j)^2}{24}, \frac{25 - (6/5+6j)^2}{24}, \frac{25 - (12/5+6j)^2}{24} : j \in \mathbb{Z} \right\}, \\ B_3 &= \left\{ \frac{(2+6j)^2 - 1}{24}, \frac{(3/2+6j)^2 - 1}{24}, \frac{(6/5+6j)^2 - 1}{24}, \frac{(12/5+6j)^2 - 1}{24} : j \in \mathbb{Z} \right\}, \\ B_4 &= \left\{ \frac{(4/3 + 4j)^2 - 1}{8} : j \in \mathbb{Z} \right\}, \\ B_5 &= \left\{ \frac{(10/3 + 10j)^2 - 9}{40}, \frac{(4 + 10j)^2 - 9}{40} : j \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η εξίσωση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $l_N = k - 1$ επιδέχεται πάντα λύσεις Liouville. Στο παραπάνω θεώρημα αυτό αποτυπώνεται στο γεγονός ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}^*$ η $l_N = k - 1$ ανήκει πάντα στο σύνολο I_k ($j = -1$).

Πρόσφατα, οι G. Duval et al. [36] απέδειξαν ότι για $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 2\}$ ακόμα και αν ο $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$ δε διαγωνοποιείται για τη μη-μηδενική λύση $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^N$, οι ιδιοτιμές του ανήκουν στα σύνολα που καθορίζονται στο παραπάνω θεώρημα. Επίσης, έδειξαν ότι ο $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$ δεν μπορεί να περιέχει υποπίνακες Jordan διάστασης μεγαλύτερης από 2×2 .

Το παραπάνω θεώρημα δεν αναφέρεται καθόλου στις περιπτώσεις όπου ο βαθμός ομογένειας είναι $k = 0, \pm 2$. Για $N = 2$ και $k = -2$ τα αντίστοιχα συστήματα επιδέχονται πάντα το επιπλέον πρώτο ολοκλήρωμα $H_2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)V(x, y)$ [129]. Για $k = 0$ οι G. Casale et al. [26] απέδειξαν, προσφάτως, ότι αν το αντίστοιχο σύστημα είναι ολοκληρώσιμο με ρητά ολοκληρώματα, τότε ο $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$ είναι διαγωνοποιήσιμος και οι ιδιοτιμές του είναι ακέραιες.

Πρόταση 3.3.13. Έστω $V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2)$ μια ομογενής συνάρτηση βαθμού k . Αν για τη λύση $\mathbf{c}$ του συστήματος $V_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ ισχύει $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, τότε ο $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$ είτε είναι διαγώνιος είτε διαγωνοποιείται μέσω ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Για το διάνυσμα $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ ισχύει $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})\mathbf{c}^T = (k-1)\mathbf{c}^T$, οπότε

$$\begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(k-1) \\ c_2(k-1) \end{pmatrix}. \quad (3.3.11)$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι αν ένας μόνο από τους c_1, c_2 είναι μηδενικός, τότε $a_{12} = 0$ και ο $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$ είναι διαγώνιος. Έστω $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ και

$$U = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \begin{pmatrix} c_2 & c_1 \\ -c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Επιλύοντας το (3.3.11) ως προς a_{11}, a_{22} και αντικαθιστώντας στον $U^T V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c}) U$ προκύπτει

$$U^T V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c}) U = \begin{pmatrix} -\frac{a_{12}(c_1^2 + c_2^2)}{c_1 c_2} + k - 1 & 0 \\ 0 & k - 1 \end{pmatrix}.$$

□

Σχόλιο 3.3.14. Έστω $V(\mathbf{x}) = V(x_1, x_2)$ μια ομογενής συνάρτηση βαθμού k , $\mathbf{c}$ μια λύση του συστήματος $V_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ και $(l_1, l_2) = (l, k-1)$ οι ιδιοτιμές του $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$. Η ιδιοτιμή l καθορίζεται από τη σχέση

$$l = \text{tr}(V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})) - l_2 = V_{x_1 x_1}(\mathbf{c}) + V_{x_2 x_2}(\mathbf{c}) - (k-1).$$

Παράδειγμα 3.3.15. Θεωρούμε τη συνάρτηση *Hamilton*

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + V(x_1, x_2), \quad V(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + \frac{d}{3} x_2^3 \quad (3.3.12)$$

με τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1 \\ \dot{x}_2 &= y_2 \\ \dot{y}_1 &= -2x_1 x_2 \\ \dot{y}_2 &= -x_1^2 - d x_2^2. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Επιλύοντας το σύστημα $V_{\mathbf{x}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ προκύπτει

$$\begin{pmatrix} 2c_1 c_2 \\ c_1^2 + d c_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow (c_1, c_2) = (0, \frac{1}{d}), (\frac{\sqrt{2-d}}{2}, \frac{1}{2}).$$

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, οπότε σύμφωνα με την πρόταση 3.3.13 οι αντίστοιχοι $V_{\mathbf{xx}}(\mathbf{c})$ διαγωνοποιούνται και η μια ιδιοτιμή τους είναι ίση με 2. Η δεύτερη ιδιοτιμή τους καθορίζεται από τη σχέση

$$l = V_{x_1 x_1}(\mathbf{c}) + V_{x_2 x_2}(\mathbf{c}) - (k-1) = 2c_2 + 2d c_2 - 2. \quad (3.3.14)$$

Για $(c_1, c_2) = (0, \frac{1}{d})$ η αντίστοιχη τιμή της l (3.3.14) είναι $l_1 = 2/d$, ενώ για $(c_1, c_2) = (\frac{\sqrt{2-d}}{2}, \frac{1}{2})$ η αντίστοιχη τιμή της l (3.3.14) είναι $l_2 = d - 1$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.12 οι l_1, l_2 θα πρέπει να ανήκουν ταυτόχρονα στο σύνολο

$$I_3 \cup B_3 = \left\{ j + \frac{j(j-1)3}{2}, \frac{1}{3} + \frac{j(j+1)3}{2}, \frac{(2+6j)^2-1}{24}, \frac{(3/2+6j)^2-1}{24}, \frac{(6/5+6j)^2-1}{24}, \frac{(12/5+6j)^2-1}{24} : j \in \mathbb{Z} \right\},$$

κάτι που μπορεί να συμβεί μόνο για $d = 1, 2, 6, 16$.

Οι περιπτώσεις $d = 1, 6, 16$ αντιστοιχούν σε ολοκληρώσιμα συστήματα [47, 110].

Η διερεύνηση της περίπτωσης $d = 2$ έχει δείξει ότι δεν έχει την ιδιότητα Painlevé [22] και η αριθμητική ανάλυση του συστήματος υποδεικνύει ότι είναι μη-ολοκληρώσιμο.

Το σύστημα (3.3.13) επιδέχεται τη λύση $\mathbf{s}(t) = (0, s(t), 0, \dot{s}(t))$. Για $d = 2$ οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1, 2, 3 (VE_1, VE_2, VE_3 αντιστοίχως) κατά μήκος της ολοκληρωτικής καμπύλης $\Gamma : \dot{s}(t)^2 = -\frac{4}{3}s(t)^3 + 2h$ έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{n}}_i &= A(t) \mathbf{n}_i + \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ A(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2s(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4s(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{r}_1 &= (0, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) = (0, 0, -2n_{1,1}n_{1,2}, -2n_{1,2}^2 - n_{1,1}^2)^T, \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + \frac{1}{6} \mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1), \\ &= (0, 0, -2(n_{1,2}n_{2,1} + n_{1,1}n_{2,2}), -2(2n_{1,2}n_{2,2} + n_{1,1}n_{2,1}))^T, \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{X}^{(j)}(\mathbf{s}(t))$ είναι η παράγωγος τάξης j ως προς x_1, x_2, y_1, y_2 του διανυσματικού πεδίου *Hamilton* που αντιστοιχεί στο σύστημα (3.3.13) υπολογισμένη στην $\mathbf{s}(t)$ και $\mathbf{n}_i = (n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3}, n_{i,4})^T$ για $i = 1, 2$.

Θέτοντας $s(t) = -3q(t)$ η Γ έρχεται στη μορφή $\dot{q}(t)^2 = 4q(t)^3 + \frac{2h}{9}$ που είναι μια ελλειπτική καμπύλη και η λύση της είναι η συνάρτηση $\wp(t, 0, -2h/9)$ του *Weierstrass*. Η $\wp(t, e_1, e_2)$ είναι μια ελλειπτική συνάρτηση (διπλά περιδοτική και μερόμορφη) και μέσα στο θεμελειώδες παραλληλόγραμμα περιόδων της η μοναδική ιδιομορφία είναι στο $t = 0$, που είναι πόλος τάξης 2. Το ανάπτυγμα *Laurent* της $s(t) = -3\wp(t, 0, -2h/9)$ στην περιοχή του 0 είναι

$$s(t) = -\frac{3}{t^2} - \frac{ht^4}{42} - \frac{h^2t^{10}}{68796} + O(t^{11}).$$

Οι VE_1 είναι κανονικώς ιδιόμορφες, οπότε ακολουθώντας όσα παρουσιάστηκαν στην ενότητα 2.2 βρίσκουμε τα αναπτύγματα των γενικών τους λύσεων στην περιοχή του 0

$$\begin{aligned} n_{1,1} &= \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = \lambda_1 \left(z^3 + \frac{hz^9}{1386} + O(t^{10}) \right) + \lambda_2 \left(-\frac{1}{5z^2} + b_n z^3 - \frac{hz^4}{630} + O(t^5) \right), \\ n_{1,2} &= \lambda_3 g_1(t) + \lambda_4 g_2(t) = \lambda_3 \left(z^4 + \frac{hz^{10}}{819} + O(t^{11}) \right) + \lambda_2 \left(-\frac{1}{7z^3} + \frac{hz^3}{441} + b_t z^4 + O(t^5) \right), \end{aligned}$$

και κατασκευάζουμε τον θεμελιώδη πίνακα

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & 0 & f_2(t) & 0 \\ 0 & g_1(t) & 0 & g_2(t) \\ \dot{f}_1(t) & 0 & \dot{f}_2(t) & 0 \\ 0 & \dot{g}_1(t) & 0 & \dot{g}_2(t) \end{pmatrix}$$

των VE_1 , όπου b_n, b_t είναι τυχαίες σταθερές. Ο $\Phi(t)$ δεν περιέχει λογαριθμικούς όρους. Οι λύσεις των VE_2, VE_3 έχουν τη μορφή $\Phi_i(t) = \Phi(t) + \Phi(t)\mathbf{c}_i(t)$ για $i = 2, 3$. Το διάνυσμα $\mathbf{c}_i(t) = (c_{i,1}, c_{i,2}, c_{i,3}, c_{i,4})^T$ είναι μια λύση του συστήματος $\dot{\mathbf{c}}_i(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{r}_i$. Για $i = 2$, αντικαθιστούμε $\mathbf{n}_1 = (f_2(t), 0, \dot{f}_2(t), 0)$ στην $\mathbf{r}_2$ και προκύπτει

$$\dot{\mathbf{c}}_2(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{175z^7} + \frac{2b_n}{35z^2} + \frac{b_t}{25} + O(t) \\ 0 \\ -\frac{1}{25} + \frac{2b_n z^5}{5} + O(t^6) \end{pmatrix},$$

οπότε η λύση των VE_2 $\Phi_2(t) = \Phi(t) + \Phi(t)\mathbf{c}_2(t)$ δεν περιέχει λογαρίθμους. Για $i = 3$, αντικαθιστούμε $\mathbf{n}_1 = (f_2(t), 0, \dot{f}_2(t), 0)$ και $\mathbf{n}_2 = \Phi(t)\mathbf{c}_2(t)$ στην $\mathbf{r}_3$, οπότε έχουμε

$$\dot{\mathbf{c}}_3(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2625z^7} - \frac{b_n}{175z^2} - \frac{17h}{2315250z} + O(1) \\ 0 \\ \frac{1}{525z^2} - \frac{2b_n z^3}{105} + O(t^4) \\ 0 \end{pmatrix}$$

και η $\Phi_3(t) = \Phi(t) + \Phi(t)\mathbf{c}_3(t)$ περιέχει λογαριθμικούς όρους για $h \neq 0$.

Αφού η $\Phi_3(t)$ περιέχει λογαριθμικούς όρους, τότε το ίδιο ισχύει και για τη γενική λύση $L\Phi_3(t)$ του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος εξισώσεων μεταβολών τάξης 3 LVE_3 . Οι VE_1 είναι κανονικώς ιδιόμορφες, άρα και το LVE_3 είναι κανονικώς ιδιόμορφο και η διαφορική ομάδα Galois G_3 του LVE_3 παράγεται από την αντίστοιχη μονόδρομη ομάδα M του LVE_3 . Αν το σύστημα Hamilton (3.3.13) για $d = 2$ είναι ολοκληρώσιμο, τότε σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.10 η ταυτοτική συνιστώσα G_3^0 της G_3 είναι αβελιανή. Αν η G_3^0 είναι αβελιανή, τότε και η M είναι αβελιανή. Οι γεννήτορες M_1, M_2 της M αντιστοιχούν στην αναλυτική συνέχιση της $L\Phi_3(t)$ κατά μήκος των αντίστοιχων περιόδων ω_1, ω_2 της $s(t) = -3\wp(t, 0, -2h/9)$. Η αναλυτική συνέχιση $L\Phi_3(te^{i2\pi})$ της $L\Phi_3(t)$ γύρω από το $t = 0$ αντιστοιχεί στον αντιμεταθέτη $[M_1, M_2] = M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1}$ των M_1, M_2 . Εφόσον η $L\Phi_3(t)$ περιέχει λογαριθμικούς όρους, ισχύει $L\Phi_3(te^{i2\pi}) \neq L\Phi_3(t)$, οπότε $[M_1, M_2] \neq I$. Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα (3.3.13) είναι μη-ολοκληρώσιμο για $d = 2$.

Κεφάλαιο 4

Μη-Ολοκληρωσιμότητα του Ανισοτροπικού Προβλήματος Størmer και του Ισοσκελούς Προβλήματος Τριών Σωμάτων

Το παρόν κεφάλαιο περιέχει τη συνεισφορά μας στην ολοκλήρωση της μελέτης της ολοκληρωσιμότητας του ανηγμένου ανισοτροπικού προβλήματος Størmer και στην απόδειξη της μη-ολοκληρωσιμότητας του ανηγμένου ισοσκελούς προβλήματος τριών σωμάτων. Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας στηρίχθηκαν στην εφαρμογή των θεωριών Morales-Ramis [88], Morales-Rami-Simó [94] και περιέχονται και στην εργασία [100]. Το ανηγμένο ανισοτροπικό πρόβλημα Størmer είχε αποδειχθεί, στην εργασία [8], ότι είναι μη-ολοκληρώσιμο για όλες τιμές των παραμέτρων του εκτός από δυο περιπτώσεις. Οι συγγραφείς της [8] στηρίχθηκαν στην εύρεση μιας ειδικής λύσης και την ανάλυση των αντίστοιχων εξισώσεων μεταβολών πρώτης τάξης. Για να αποδείξουμε τη μη-ολοκληρωσιμότητα των δυο εκκρεμών περιπτώσεων του ανηγμένου ανισοτροπικού προβλήματος Størmer χρειάστηκε να ανακαλύψουμε μια επιπλέον ειδική λύση και να διερευνήσουμε τις εξισώσεις μεταβολών τρίτης τάξης. Η μελέτη της ολοκληρωσιμότητας του ανηγμένου ισοσκελούς προβλήματος τριών σωμάτων είχε πραγματοποιηθεί με χρήση αριθμητικών μεθόδων [28, 29, 37, 101] και τα αποτελέσματα υπεδείκνυν τη μη-ολοκληρωσιμότητά του. Αναλύοντας τις εξισώσεις μεταβολών πρώτης τάξης και κάνοντας εκτενή χρήση του αλγόριθμου Kovacic [62], αποδείξαμε ότι το ισοσκελές πρόβλημα τριών σωμάτων είναι μη-ολοκληρώσιμο για όλες τις τιμές των παραμέτρων του.

4.1 Το ανισοτροπικό πρόβλημα Størmer

4.1.1 Εισαγωγή

Η τροχιά $\mathbf{c}(t)$ ενός σωματιδίου με φορτίο q και μάζα m υπό την επίδραση ενός μαγνητικού πεδίου $\mathbf{B}$ περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων

$$m \ddot{\mathbf{c}}(t) = q (\dot{\mathbf{c}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{c}(t))), \quad (4.1.1)$$

όπου $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ και $\mathbf{A}$ είναι το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό (magnetic vector potential).

Ο Carl Størmer (1874-1957) [119] μελέτησε την κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου εντός του μαγνητικού πεδίου ενός διπόλου $\mathbf{M}$ και τη σύνδεση αυτού του προβλήματος με το βόρειο και νότιο Σέλας. Το αντίστοιχο πρόβλημα Størmer (*SP*) προκύπτει από το σύστημα (4.1.1) θεωρώντας ότι το μαγνητικό δίπολο $\mathbf{M}$ είναι κατά μήκος του άξονα z ($\mathbf{M} = (0, 0, M)$) και θέτοντας $\mathbf{A} = M \left(-\frac{y}{\rho^3}, \frac{x}{\rho^3}, 0 \right)$ με $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Το *SP* επιδέχεται τη συνάρτηση Hamilton

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2m} p_z^2 + \frac{qM}{m\rho^3} (yp_x - xp_y) + \frac{q^2 M^2 (x^2 + y^2)}{2m\rho^6} \quad (4.1.2)$$

και είναι ένα σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας που επιδέχεται το επιπλέον πρώτο ολοκλήρωμα της z -συνιστώσας της γωνιακής ορμής $L_z = yp_x - xp_y$. Θεωρώντας τον κανονικό μετασχηματισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$(x, y, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z),$$

$$(p_x, p_y, p_z) = \left(p_r \cos \phi - \frac{p_\phi \sin \phi}{r}, \frac{p_\phi \cos \phi}{r} + p_r \sin \phi, p_z \right),$$

και κατάλληλες μονάδες ώστε $qM = m = 1$, η (4.1.2) έρχεται στη μορφή

$$H = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{r} - \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2, \quad (4.1.3)$$

όπου $L_z = p_\phi$. Εφόσον η p_ϕ είναι μια σταθερά, η παραπάνω συνάρτηση Hamilton μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε ένα σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας με συντεταγμένες (r, z, p_r, p_z) , δηλαδή το ανηγμένο (reduced) *SP*.

Το ανηγμένο *SP* μελετήθηκε, ως προς την ολοκληρωσιμότητά του, στις εργασίες [5, 6, 115] και το συμπέρασμα είναι ότι δεν επιδέχεται ένα επιπλέον ανεξάρτητο πρώτο ολοκλήρωμα. Στις προαναφερόμενες εργασίες εφαρμόστηκαν μέθοδοι [31, 129] που προέκυψαν από τη θεωρία Ziglin [135] και σχετίζονται με τη μονόδρομη ομάδα των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1.

Στις εργασίες [6, 8] εισήχθη το ανισοτροπικό πρόβλημα Størmer (*ASP*) που, σε κυλινδρικές συντεταγμένες $(r, \phi, z, p_r, p_\phi, p_z)$, επιδέχεται τη συνάρτηση Hamilton

$$H = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{r} - \frac{r}{(r^2 + \nu^2 z^2)^{3/2}} \right)^2. \quad (4.1.4)$$

Η παράμετρος ανισοτροπίας $\nu^2 = m_t/m_l > 0$ είναι ο λόγος της εγκάρσιας (transverse) μάζας m_t προς τη διαμήκη (longitudinal) μάζα m_l (ως προς την κίνηση του σωματιδίου) και η εισαγωγή της καθιστά το *ASP* κατάλληλο για την περιγραφή της κίνησης ατόμων Μαγγανίου σε μαγνητικούς ημιαγωγούς τύπου $Ga_{1-x}Mn_xAs$ [8].

Το *ASP* (4.1.4) είναι ένα σύστημα 3 βαθμών ελευθερίας και, όπως και στο *SP* (4.1.3), η συντεταγμένη ϕ είναι κυκλική. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε το αντίστοιχο ανηγμένο *ASP* που είναι 2 βαθμών ελευθερίας (r, z, p_r, p_z) και εμπεριέχει την p_ϕ ως παράμετρο.

Για $p_\phi = 0$ η συνάρτηση δυναμικού

$$V(r, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{r} - \frac{r}{(r^2 + \nu^2 z^2)^{3/2}} \right)^2. \quad (4.1.5)$$

της συνάρτησης Hamilton (4.1.4) του ανηγμένου *ASP* είναι ομογενής βαθμού -4.

Ο Η. Yoshida [129] μελέτησε τη μονόδρομη ομάδα των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1 των συστημάτων Hamilton που προκύπτουν από ομογενείς συναρτήσεις δυναμικού και εφαρμόζοντας τη θεωρία Ziglin [135] παρήγαγε ανοικτά διαστήματα για τις τιμές των παραμέτρων, που αντιστοιχούν σε μη-ολοκληρώσιμα συστήματα. Τα αποτελέσματα του Η. Yoshida χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία [6], όπου και αποδείχθηκε ότι για $p_\phi = 0$ και $\nu^2 > 2/3$ το ASP είναι μη-ολοκληρώσιμο. Το ανηγμένο ASP μελετήθηκε και στην εργασία [8] το 2004, όπου εφαρμόστηκε το θεώρημα των Morales-Ramis 3.3.12 για ομογενείς συναρτήσεις δυναμικού και ο αλγόριθμος των Churchill-Rod [31] για την εύρεση των συνθηκών υπό τις οποίες η μονόδρομη ομάδα, των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1, αφήνει αναλλοίωτη μια ρητή συνάρτηση. Στην προαναφερόμενη εργασία αποδείχθηκε ότι για $p_\phi \neq 0$ το ανηγμένο ASP δεν επιδέχεται ένα επιπλέον (συναρτησιακά ανεξάρτητο της συνάρτησης Hamilton) πρώτο ολοκλήρωμα, ενώ για $p_\phi = 0$ το ASP είναι μη-ολοκληρώσιμο για $\nu^2 \neq 5/12, 2/3$.

Στην εργασία [100] επανεξετάσαμε το ASP για $p_\phi = 0$ και αποκλείσαμε την ολοκληρωσιμότητά του για κάθε $\nu^2 > 0$.

Θεώρημα 4.1.1 ([100]). *Το ανηγμένο ανισοτροπικό πρόβλημα Størmer είναι μη-ολοκληρώσιμο για $p_\phi = 0$.*

Για το υπόλοιπο της ενότητας 4.1 η συντομογραφία ASP_0 θα αναφέρεται στο ανηγμένο ανισοτροπικό πρόβλημα Størmer με $p_\phi = 0$, το οποίο είναι ένα σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας και επιδέχεται τη συνάρτηση Hamilton

$$\begin{aligned} H_0(r, z, p_r, p_z) &= \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2}p_z^2 + V_0(r, z) \\ V_0(r, z) &= \frac{r^2}{2(r^2 + \nu^2 z^2)^3}. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Στην υποενότητα 4.1.2 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της διερεύνησης του ASP_0 με εφαρμογή του θεωρήματος των Morales-Ramis 3.3.12, για συστήματα που αντιστοιχούν σε ομογενείς συναρτήσεις δυναμικού. Με το προαναφερόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε ότι το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο για $\nu^2 \neq 2/3$. Η περίπτωση $\nu^2 = 2/3$ του ASP_0 εξετάζεται στην υποενότητα 4.1.3. Σε αυτήν αναπτύσσουμε τις εξισώσεις μεταβολών τάξης 3 και εφαρμόζουμε το θεώρημα των Morales-Ramis-Simó για τις εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης, αποδεικνύοντας τη μη-ολοκληρωσιμότητα του ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$. Τέλος, στην υποενότητα 4.1.4 παρουσιάζουμε αριθμητικές προσομοιώσεις του ASP για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

4.1.2 Μη-ολοκληρωσιμότητα του ASP για $p_\phi = 0$ και $\nu^2 \neq 2/3$

Από την (4.1.6) προκύπτει ότι οι εξισώσεις κίνησης του ASP_0 έχουν τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_r V_0(r, z) \\ -\partial_z V_0(r, z) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2r^3 - rz^2\nu^2}{(r^2 + z^2\nu^2)^4} \\ \frac{3r^2 z \nu^2}{(r^2 + z^2\nu^2)^4} \end{pmatrix}, \quad (4.1.7)$$

όπου $\partial_r V_0(r, z)$, $\partial_z V_0(r, z)$ είναι η μερική παράγωγος της συνάρτησης $V_0(r, z)$ ως προς r , z αντιστοίχως.

Έστω ότι οι σταθερές $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ είναι μια λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r V_0(c_1, c_2) \\ \partial_z V_0(c_1, c_2) \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

και η συνάρτηση $s(t)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{s}(t)^2 = -\frac{1}{2}(1 - s(t)^{-4}).$$

Σύμφωνα με όσα παρουσιάσαμε στην ενότητα 3.3, το ASP_0 (4.1.7) επιδέχεται την ειδική λύση $(r(t), z(t)) = (c_1, c_2)s(t)$, $(\dot{r}(t), \dot{z}(t)) = (c_1, c_2)\dot{s}(t)$ και οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1, κατά μήκος αυτής, έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{n}} &= -s(t)^{-6} D^2 V_0(c_1, c_2) \mathbf{n} \Rightarrow \\ \ddot{\mathbf{n}} &= -s(t)^{-6} \begin{pmatrix} \frac{c_2^4 \nu^4 - 13c_2^2 c_1^2 \nu^2 + 10c_1^4}{(c_2^2 \nu^2 + c_1^2)^5} & \frac{6(3c_1^3 c_2 \nu^2 - c_1 c_2^3 \nu^4)}{(c_2^2 \nu^2 + c_1^2)^5} \\ \frac{6(3c_1^3 c_2 \nu^2 - c_1 c_2^3 \nu^4)}{(c_2^2 \nu^2 + c_1^2)^5} & -\frac{3(c_1^4 \nu^2 - 7c_1^2 c_2^2 \nu^4)}{(c_2^2 \nu^2 + c_1^2)^5} \end{pmatrix} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

όπου $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ και $D^2 V_0(c_1, c_2)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας της $V_0(r, z)$ (4.1.6) υπολογισμένος στο $(r, z) = (c_1, c_2)$. Το άθροισμα των ιδιοτιμών του $D^2 V_0(c_1, c_2)$ είναι ίσο με το ίχνος του και μια ιδιοτιμή του είναι -5 . Άρα η δεύτερη ιδιοτιμή l του $D^2 V_0(c_1, c_2)$ είναι ίση με

$$l = \frac{c_2^4 \nu^4 + c_1^4 (10 - 3\nu^2) + c_2^2 c_1^2 \nu^2 (21\nu^2 - 13)}{(c_2^2 \nu^2 + c_1^2)^5} + 5. \quad (4.1.10)$$

Μια λύση του συστήματος (4.1.8) είναι η $(c_1, c_2) = ((-2)^{1/6}, 0)$ και η αντίστοιχη ιδιοτιμή l (4.1.10) είναι

$$l_1 = \frac{3\nu^2}{2}. \quad (4.1.11)$$

Οι εξισώσεις μεταβολών (4.1.9) έχουν τη μορφή

$$\ddot{\mathbf{n}} = -s(t)^{-6} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & l_1 \end{pmatrix} \mathbf{n}$$

και εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $z = s(t)^{-4}$ το παραπάνω σύστημα έρχεται στη μορφή

$$z(1-z) \frac{d^2 n_1}{dz^2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{4}z \right) \frac{dn_1}{dz} + \frac{1}{8}n_1 = 0 \quad (4.1.12)$$

$$z(1-z) \frac{d^2 n_2}{dz^2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{4}z \right) \frac{dn_2}{dz} - \frac{l_1}{8}n_2 = 0 \quad (4.1.13)$$

που είναι δύο υπεργεωμετρικές εξισώσεις. Σύμφωνα με το θεώρημα των Morales-Ramis 3.3.8, αν το ASP_0 είναι ολοκληρώσιμο τότε η ταυτοτική συνιστώσα G^0 της διαφορικής ομάδας Galois G των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1 (4.1.9) είναι αβελιανή, κάτι που επάγει ότι οι (4.1.12), (4.1.13) πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος του Kimura 2.4.3. Η (4.1.12) ικανοποιεί τις προαναφερόμενες συνθήκες, ενώ η (4.1.13) τις ικανοποιεί αν και μόνο αν η $l_1 = 3\nu^2/2$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος των Morales-Ramis 3.3.12 για ομογενείς συναρτήσεις δυναμικού, δηλαδή αν και μόνο αν $l_1 \in I_{-4} \cup B_{-4}$ με

$$I_{-4} \cup B_{-4} = \left\{ j(3-2j), \frac{5}{8} - 2j(j+1), \frac{9 - (4/3 + 4j)^2}{8} : j \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (4.1.14)$$

Η συνθήκη $l_1 \in I_{-4} \cup B_{-4}$ ισχύει μόνο για $\nu^2 \in \{17/108, 5/12, 65/108, 2/3\}$. Άρα, για $\nu^2 \notin \{17/108, 5/12, 65/108, 2/3\}$ το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο.

Η παραπάνω ανάλυση για το ASP_0 και την ιδιοτιμή $l_1 = 3\nu^2/2$ έγινε και στην εργασία [8], όπου στη συνέχεια εφαρμόσθηκε μια παραλλαγή των Churchill-Rod [31] του αλγόριθμου Kovacic [62] για να αποδειχθεί ότι το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο για $\nu^2 \notin \{5/12, 2/3\}$. Στο υπόλοιπο της παρούσας υποενότητας θα παρουσιάσουμε πώς μπορούμε να βελτιώσουμε το αποτέλεσμα της εργασίας [8], δίδως να χρειαστεί να εφαρμόσουμε τους περίπλοκους υπολογισμούς που προϋποθέτει ο αλγόριθμος των Churchill-Rod [31]. Η ανάλυση είναι αντίστοιχη με αυτή για την l_1 , αλλά θα στηριχθεί σε μια δεύτερη λύση των αλγεβρικών εξισώσεων (4.1.8) που επάγει μια δεύτερη ειδική λύση του ASP_0 (4.1.7).

Η επιπλέον λύση που βρήκαμε για το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (4.1.8) είναι η

$$\hat{\mathbf{c}} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2) = \left(\mathbf{i} \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\nu^{1/3}}{(\nu^2 - 1)^{2/3}}, \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{(3\nu^2 - 2)^{1/2}}{\nu^{2/3}(\nu^2 - 1)^{2/3}} \right),$$

η οποία ορίζεται για $\nu^2 \neq 1$, ενώ η αντίστοιχη ιδιοτιμή l (4.1.10) είναι η

$$l_2 = \frac{4}{3\nu^2} - 1. \quad (4.1.15)$$

Οι εξισώσεις μεταβολών (4.1.9) που αντιστοιχούν στην $\hat{\mathbf{c}}$ έχουν τη μορφή

$$\ddot{\mathbf{n}} = -s(t)^{-6} \begin{pmatrix} \frac{-3\nu^4 - 9\nu^2 + 4}{3\nu^2 - 3\nu^4} & -\frac{2i\sqrt{3\nu^2 - 2}(3\nu^2 + 1)}{3\nu(\nu^2 - 1)} \\ -\frac{2i\sqrt{3\nu^2 - 2}(3\nu^2 + 1)}{3\nu(\nu^2 - 1)} & \frac{13 - 21\nu^2}{3(\nu^2 - 1)} \end{pmatrix} \mathbf{n}$$

και θέτοντας $\mathbf{n} = U \mathbf{v}$, όπου U είναι ο ορθογώνιος μετασχηματισμός

$$U = \frac{1}{\sqrt{\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2}} \begin{pmatrix} \hat{c}_2 & \hat{c}_1 \\ -\hat{c}_1 & \hat{c}_2 \end{pmatrix},$$

διαχωρίζονται

$$\ddot{\mathbf{v}} = -s(t)^{-6} \begin{pmatrix} l_2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{v}. \quad (4.1.16)$$

Όπως και παραπάνω, ο μετασχηματισμός $z = s(t)^{-4}$ μετατρέπει το (4.1.16) στο σύστημα υπεργεωμετρικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} z(1-z) \frac{d^2 n_1}{dz^2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{4}z \right) \frac{dn_1}{dz} + \frac{1}{8}n_1 &= 0 \\ z(1-z) \frac{d^2 n_2}{dz^2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{4}z \right) \frac{dn_2}{dz} - \frac{l_2}{8}n_2 &= 0 \end{aligned}$$

και η ολοκληρωσιμότητα του ASP_0 επάγει ότι ο l_2 ανήκει στο σύνολο $I_{-4} \cup B_{-4}$ (4.1.14), κάτι που ισχύει μόνο για $\nu^2 \in \{2/3, 96/137, 32/39, 96/89, 4/3\}$. Λαμβάνοντας υπόψιν την ανάλυση μόνο για την ιδιοτιμή l_2 , το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο για $\nu^2 \notin \{2/3, 96/137, 32/39, 96/89, 4/3\}$.

Αν το ASP_0 ήταν ολοκληρώσιμο, τότε ο l_1 (4.1.11) και ο l_2 (4.1.15) θα έπρεπε να ανήκουν ταυτόχρονα στο σύνολο $I_{-4} \cup B_{-4}$ (4.1.14) και αυτό μπορεί να συμβεί μόνο για $\nu^2 = 2/3$, όπου $l_1 = l_2 = 1$. Δηλαδή έχουμε αποδείξει το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.1.2 ([100]). Το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο για $\nu^2 \neq 2/3$.

Για $\nu^2 = 2/3$ ισχύει $l_1 = l_2 = 1$ και οι αντίστοιχες εξισώσεις μεταβολών τάξης 1, κατά μήκος και των δύο προαναφερόμενων ειδικών λύσεων, έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} z(1-z) \frac{d^2 n_1}{dz^2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{4}z \right) \frac{dn_1}{dz} + \frac{1}{8}n_1 &= 0 \\ z(1-z) \frac{d^2 n_2}{dz^2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{4}z \right) \frac{dn_2}{dz} - \frac{1}{8}n_2 &= 0. \end{aligned}$$

και οι συντελεστές τους ανήκουν στο διαφορικό σώμα $K = \mathbb{C}(z)$ των ρητών συναρτήσεων ως προς z . Η

$$z(1-z) \frac{d^2 n}{dz^2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{4}z \right) \frac{dn}{dz} + \frac{1}{8}n = 0 \quad (4.1.17)$$

ικανοποιεί τις συνθήκες της περίπτωσης **A**. του θεωρήματος του Kimura 2.4.3, οπότε η ταυτοτική συνιστώσα G^0 της αντίστοιχης διαφορικής ομάδας Galois G ανάγεται σε τριγωνική μορφή και είναι επιλύσιμη, αλλά δεν είναι αναγκαία και αβελιανή.

Έστω Φ ο θεμελιώδης πίνακας της (4.1.17). Για κάθε $g \in G$ ισχύει $g(\Phi) = \Phi C_g$ και $g(\det(\Phi)) = \det(\Phi) \det(C_g)$, όπου $C_g \in GL(2, \mathbb{C})$ είναι η αναπαράσταση του g . Από τον τύπο του Abel προκύπτει

$$\det(\Phi) = \exp \left(- \int \frac{5-7z}{4z(1-z)} dz \right) = \frac{1}{z^{5/4} \sqrt{z-1}}, \quad (4.1.18)$$

δηλαδή η $\det(\Phi)$ είναι μια αλγεβρική συνάρτηση πάνω από το K , οπότε για κάθε $g^0 \in G^0$ ισχύει $g^0(\det(\Phi)) = \det(\Phi) = \det(\Phi) \det(C_{g^0})$. Δηλαδή $G^0 \subset SL(2, \mathbb{C})$ και εφόσον ανάγεται σε τριγωνική μορφή μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$G^0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}. \quad (4.1.19)$$

Σε αυτό το συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και πιο σύντομα, παρατηρώντας ότι η διαφορική ομάδα Galois των (4.1.16) είναι ένα υποσύνολο της $SL(4, \mathbb{C})$ και ο μετασχηματισμός της ανεξάρτητης μεταβλητής $z = s(t)^{-4}$ αφήνει αναλλοίωτη την ταυτοτική της συνιστώσα.

Παρατηρούμε ότι για $a = 1$, όπου η G^0 είναι αβελιανή, ικανοποιούνται οι αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας του ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$, που επάγονται από το θεώρημα των Morales-Ramis 3.3.8.

Θέτοντας

$$n = u \exp \left(- \int \frac{5-7z}{8z(1-z)} dz \right) = u \frac{1}{z^{5/8} \sqrt[4]{z-1}} \quad (4.1.20)$$

προκύπτει η ανάγωγη μορφή

$$u''(z) + \frac{3(5z^2 - 6z + 5)}{64(z-1)^2 z^2} u(z) = 0 \quad (4.1.21)$$

της (4.1.17). Ο μετασχηματισμός (4.1.20) αφήνει αναλλοίωτη τη G^0 , επειδή η $\frac{1}{z^{5/8} \sqrt[4]{z-1}}$ είναι αλγεβρική πάνω από το $K = \mathbb{C}(z)$. Από την περίπτωση **(i)** του θεωρήματος (2.3.1) του Kovacic και το σχόλιο (2.3.4) προκύπτει ότι η (4.1.21) επιδέχεται μια λύση της μορφής

$$n(z) = P(z) z^{e_0} (z-1)^{e_1},$$

οπου το πολυώνυμο $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ είναι βαθμού

$$\deg P(z) = -e_\infty - e_0 - e_1$$

και e_t είναι ένας εκθέτης στο $t \in \{0, 1, \infty\}$. Οι εκθέτες της (4.1.21) στα $z = 0, 1, \infty$ αντιστοιχούν στα σύνολα $E_0 = \{3/8, 5/8\}$, $E_1 = \{1/4, 3/4\}$, $E_\infty = \{-3/8, -5/8\}$. Για $e_0 = 3/8$, $e_1 = 1/4$ και $e_\infty = -5/8$, προκύπτει ότι η

$$u_1(z) = z^{3/8} (z - 1)^{1/4}$$

είναι μια ειδική λύση της (4.1.21). Η $u_1(z)$ είναι αλγεβρική πάνω από το K , οπότε για κάθε $g^0 \in G^0$ ισχύει $g^0(u_1(z)) = u_1(z)$. Η δεύτερη λύση της (4.1.21) έχει τη μορφή

$$u_2(z) = u_1(z) \int u_1(z)^{-2} dz$$

και για κάθε $g^0 \in G^0$ ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} g^0 \left(\int u_1(z)^{-2} dz \right) &= g^0 \left(\frac{d}{dz} \int u_1(z)^{-2} dz \right) = g^0(u_1(z)^{-2}) = u_1(z)^{-2} \Rightarrow \\ g^0 \left(\int u_1(z)^{-2} dz \right) &= \int u_1(z)^{-2} dz + b, \end{aligned}$$

οπότε $g^0(u_2(z)) = u_2(z) + b u_1(z)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η G^0 έχει τη μορφή

$$G^0 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}$$

και είναι αβελιανή. Άρα, το ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$ ικανοποιεί της αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας του θεωρήματος των Morales-Ramis 3.3.8.

Η αριθμητική επεξεργασία της περίπτωσης $\nu^2 = 2/3$ του ASP_0 υποδηλώνει ότι το σύστημα είναι μη-ολοκληρώσιμο. Όμως, η αναλυτική διερεύνηση που πραγματοποιήθηκε στην εργασία [8], αλλά και αυτή που έχουμε διεξάγει ως τώρα δεν μπορούν να αποδείξουν τη μη-ολοκληρωσιμότητα της προαναφερόμενης περίπτωσης. Όλες αυτές οι ενδείξεις μας προτρέπουν να προχωρήσουμε στη διερεύνηση εξισώσεων μεταβολών ανώτερης τάξης για την περίπτωση του ASP_0 με $\nu^2 = 2/3$.

4.1.3 Μη-ολοκληρωσιμότητα του ASP για $p_\phi = 0$ και $\nu^2 = 2/3$

Σε αυτή την υποενότητα θα μελετήσουμε το ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$, το οποίο επιδέχεται τη συνάρτηση Hamilton

$$\begin{aligned} H_0(r, z, p_r, p_z) &= \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{1}{2} p_z^2 + V_0(r, z) \\ V_0(r, z) &= \frac{r^2}{2 \left(r^2 + \frac{2}{3} z^2 \right)^3} \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

και περιγράφεται από το αντίστοιχο σύστημα Hamilton

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{z} \\ \dot{p}_r \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{H_0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{z} \\ \dot{p}_r \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r \\ p_z \\ \frac{4r^3 - rz^2}{3 \left(r^2 + \frac{2}{3} z^2 \right)^4} \\ \frac{2r^2 z}{\left(r^2 + \frac{2}{3} z^2 \right)^4} \end{pmatrix}. \tag{4.1.23}$$

Το επίπεδο $z = p_z = 0$ είναι αναλλοίωτο ως προς το $\mathbf{X}_{H_0}$ και για κάθε $h > 0$ η $p_r^2 + r^{-4} = 2h$ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη του ASP_0 . Θεωρώντας την αναλυτική επέκταση σε μιγαδικό χρόνο $t \in \mathbb{C}$, προκύπτει η οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών

$$\Pi_h = \left\{ (r, 0, p_r, 0) \in \mathbb{C}^4 : \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2}r^{-4} = h \right\}, \quad p_r = \frac{d}{dt}r(t) = \dot{r}(t). \quad (4.1.24)$$

Έστω $\mathbf{X}^{(j)}(\mathbf{s}(t))$ η παράγωγος τάξης j ως προς r, z, p_r, p_z του διανυσματικού πεδίου Hamilton $\mathbf{X}_{H_0}$ (4.1.23) υπολογισμένη κατά μήκος της Π_h (4.1.24). Έχουμε ότι

$$\mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t)) = \begin{pmatrix} 0_{4,1} & 0_{4,1} & 0_{4,1} & 0_{4,1} \\ 0_{4,1} & 0_{4,1} & 0_{4,1} & 0_{4,1} \\ A_{4,1} & B_{4,1} & 0_{4,1} & 0_{4,1} \\ B_{4,1} & C_{4,1} & 0_{4,1} & 0_{4,1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{s}(t)) = \begin{pmatrix} 0_{4,4} & 0_{4,4} & 0_{4,4} & 0_{4,4} \\ 0_{4,4} & 0_{4,4} & 0_{4,4} & 0_{4,4} \\ A_{4,4} & B_{4,4} & 0_{4,4} & 0_{4,4} \\ B_{4,4} & C_{4,4} & 0_{4,4} & 0_{4,4} \end{pmatrix},$$

όπου $F_{i,j}$ είναι ένας $i \times j$ πίνακας, $O_{i,j}$, $I_{i,j}$ είναι ο αντίστοιχος $i \times j$ μηδενικός, μοναδιαίος πίνακας και

$$\begin{aligned} A_{4,1} &= \left(-V^{(3,0)}(r(t), 0), -V^{(2,1)}(r(t), 0), 0, 0 \right)^T = (60r(t)^{-7}, 0, 0, 0)^T, \\ B_{4,1} &= \left(-V^{(2,1)}(r(t), 0), -V^{(1,2)}(r(t), 0), 0, 0 \right)^T = (0, -12r(t)^{-7}, 0, 0)^T, \\ C_{4,1} &= \left(-V^{(1,2)}(r(t), 0), -V^{(0,3)}(r(t), 0), 0, 0 \right)^T = (-12r(t)^{-7}, 0, 0, 0)^T, \end{aligned}$$

$$A_{4,4} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -V^{(4,0)}(r(t), 0) & -V^{(3,1)}(r(t), 0) \\ -V^{(3,1)}(r(t), 0) & -V^{(2,2)}(r(t), 0) \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & 0_{2,2} \end{pmatrix} = r(t)^{-8} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -420 & 0 \\ 0 & 84 \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & 0_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$B_{4,4} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -V^{(3,1)}(r(t), 0) & -V^{(2,2)}(r(t), 0) \\ -V^{(2,2)}(r(t), 0) & -V^{(1,3)}(r(t), 0) \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & 0_{2,2} \end{pmatrix} = r(t)^{-8} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 84 \\ 84 & 0 \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & 0_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$C_{4,4} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -V^{(2,2)}(r(t), 0) & -V^{(1,3)}(r(t), 0) \\ -V^{(1,3)}(r(t), 0) & -V^{(0,4)}(r(t), 0) \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & 0_{2,2} \end{pmatrix} = r(t)^{-8} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 84 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & 0_{2,2} \end{pmatrix}$$

όπου $V^{(i,j)}(r(t), 0) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial r^i \partial z^j} V_0(r, z)|_{(r,z)=(r(t),0)}$.

Οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1, 2, 3 (VE_1, VE_2, VE_3 αντιστοίχως) κατά μήκος της Π_h

έχουν τη μορφή

$$\dot{\mathbf{n}}_i = A(t) \mathbf{n}_i + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1.25)$$

$$A(t) = \hat{A}(r(t)^2) = X^{(1)}(\mathbf{s}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{10}{r(t)^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r(t)^6} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1 = (0, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2(r(t), n_{1,1}, n_{1,2}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) = \left(0, 0, \frac{30n_{1,1}^2 - 6n_{1,2}^2}{r(t)^7}, -\frac{12n_{1,1}n_{1,2}}{r(t)^7} \right)^T,$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_3(r(t), n_{1,1}, n_{1,2}, n_{2,1}, n_{2,2}) = \mathbf{X}^{(2)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + \frac{1}{6} \mathbf{X}^{(3)}(\mathbf{s}(t))(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1) \quad (4.1.26)$$

$$= (0, 0, f_{3,3}, f_{3,4})^T,$$

$$f_{3,3} = \frac{6n_{1,1}(10n_{2,1}r(t) + 7n_{1,2}^2) - 12n_{1,2}n_{2,2}r(t) - 70n_{1,1}^3}{r(t)^8}$$

$$f_{3,4} = -\frac{2(18n_{2,1}n_{1,2}r(t) + 18n_{1,1}n_{2,2}r(t) + 8n_{1,2}^3 - 63n_{1,1}^2n_{1,2})}{3r(t)^8},$$

όπου $\mathbf{n}_i = (n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3}, n_{i,4})^T$ για $i = 1, 2$.

Οι VE_1 μπορούν να γράφουν

$$\ddot{n}_T + \frac{10}{r(t)^6} n_T = 0, \quad (4.1.27)$$

$$\ddot{n}_N - \frac{2}{r(t)^6} n_N = 0. \quad (4.1.28)$$

Το $\mathbf{X}_{H_0}$ (4.1.23) υπολογισμένο κατά μήκος της Π_h (4.1.24) είναι μια ειδική λύση των VE_1 , οπότε η συνάρτηση $\dot{r}(t) = \sqrt{2h - r(t)^4}$ είναι μια ειδική λύση της (4.1.27), την οποία θα αποκαλούμε εξίσωση εφαπτόμενων μεταβολών (TVE). Η (4.1.28) είναι η εξίσωση κάθετων μεταβολών που περιγράψαμε στην ενότητα 3.2.

Θέτοντας

$$\begin{aligned} (\hat{r}, \hat{p}) &= (r, r^2 p), \\ \frac{dt}{dw} &= \hat{r}(w)^2, \\ \hat{r}(w) &= r(t(w)) \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

η Π_h μετασχηματίζεται στην

$$\hat{\Pi}_h = \{(\hat{r}, \hat{p}) \in \mathbb{C}^2 : \hat{p}^2 = 2h\hat{r}^4 - 1\}, \quad \hat{p} = \frac{d}{dw} \hat{r}(w). \quad (4.1.30)$$

Επίσης, θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$(x, y) = (2h\hat{r}^2, 4h\hat{r}\hat{p}), \quad (4.1.31)$$

ο οποίος μετατρέπει την $\hat{\Pi}_h$ στην

$$\tilde{\Pi}_h = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^3 - 8hx\}, \quad y = \frac{d}{dw} x(w) = x'(w). \quad (4.1.32)$$

Από τους παραπάνω μετασχηματισμούς προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \frac{d^2}{dw^2} + \frac{d^2 w}{dt^2} \frac{d}{dw} \\ &= \hat{r}^{-4} \frac{d^2}{dw^2} - \frac{d^2 t}{dw^2} \left(\frac{dw}{dt} \right)^3 \frac{d}{dw} \\ &= \left(\frac{2h}{x(w)} \right)^2 \frac{d^2}{dw^2} - \left(\frac{2h}{x(w)} \right)^2 \frac{x'(w)}{x(w)} \frac{d}{dw}, \end{aligned}$$

συνεπώς οι εξισώσεις μεταβολών (4.1.27), (4.1.28) έρχονται στη μορφή

$$\begin{aligned} n_T'' - \frac{x'(w)}{x(w)} n_T' + \frac{20h}{x(w)} n_T &= 0, \\ n_N'' - \frac{x'(w)}{x(w)} n_N' - \frac{4h}{x(w)} n_N &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

Οι μετασχηματισμοί (4.1.29), (4.1.31) είναι πεπερασμένως διακλαδισμένες καλύψεις και σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.1 οι ταυτοτικές συνιστώσες των διαφορικών ομάδων Galois του συστήματος εξισώσεων (4.1.27), (4.1.28) και του συστήματος (4.1.33) είναι ισόμορφες. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.8 αν το ASP_0 με $\nu^2 = 2/3$ (4.1.23) είναι ολοκληρώσιμο, τότε οι προαναφερόμενες ταυτοτικές συνιστώσες είναι αβελιανές.

Στη συνέχεια θέτουμε $(n_T, n_N) = x(w)^{1/2}(v_T, v_N)$ για να καταλήξουμε στην ανάγωγη μορφή του συστήματος (4.1.33)

$$\begin{aligned} v_T'' + \frac{2x(w)(40h + x''(w)) - 3x'(w)^2}{4x(w)^2} v_T &= 0, \\ v_N'' + \frac{2x(w)(x''(w) - 8h) - 3x'(w)^2}{4x(w)^2} v_N &= 0. \end{aligned}$$

η οποία με χρήση της (4.1.32) γίνεται

$$\begin{aligned} v_T'' + \frac{24h}{x(w)} v_T &= 0, \\ v_N'' &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.34}$$

Έστω $K = \mathfrak{M}(x(w), x'(w))$ το διαφορικό σώμα των μερόμορφων συναρτήσεων ως προς $(x(w), x'(w))$ και $L, \hat{L}$ οι επεκτάσεις Picard-Vessiot των αντίστοιχων συστημάτων (4.1.33) και (4.1.34). Η $x(w)^{1/2}$ είναι αλγεβρική πάνω από το K και τα υπερβατικά στοιχεία των $L, \hat{L}$ είναι ίδια, εφόσον $(n_T, n_N) = x(w)^{1/2}(v_T, v_N)$. Εφόσον οι ταυτοτικές συνιστώσες των διαφορικών ομάδων Galois που αντιστοιχούν στις $L, \hat{L}$ δρουν ταυτοτικά στις αλγεβρικές επεκτάσεις του K , ο μετασχηματισμός $(n_T, n_N) = x(w)^{1/2}(v_T, v_N)$ αφήνει αναλλοίωτη την ταυτοτική συνιστώσα του συστήματος (4.1.33). Άρα, η ολοκληρωσιμότητα του ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$ (4.1.23) επάγει ότι η ταυτοτική συνιστώσα G^0 , της διαφορικής ομάδας Galois G που αντιστοιχεί στο σύστημα (4.1.34) για $K = \mathfrak{M}(x(w), x'(w))$, είναι αβελιανή.

Η οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών

$$\tilde{P}_h = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = 4x^3 - 8hx \right\}, \quad y = \frac{d}{dw} x(w) = x'(w).$$

αποτελείται από ελλειπτικές αλγεβρικές καμπύλες, για τις οποίες ισχύει $x(w) = \wp(w, 8h, 0)$. Η $P(w) = \wp(w, g_2, g_3)$ είναι η ελλειπτική συνάρτηση του Weierstrass [3, 124, 126], δηλαδή η μερόμορφη, διπλά περιοδική συνάρτηση (για $g_2^2 - 27g_3^2 \neq 0$) για την οποία ισχύει

$$P'(w)^2 = 4P(w)^3 - g_2P(w) - g_3.$$

Εντός του θεμελειώδους παραλληλογράμμου περιόδων της $\wp(w, g_2, g_3)$ υπάρχει μια μόνο ιδιομορφία στο $w = 0$, που είναι πόλος τάξης 2. Αν $g_2 > 0$ και $g_3 = 0$, τότε ισχύει $\wp(w, g_2, 0) = g_2^{1/2} \wp(g_2^{1/4} w, 1, 0)$. Η $\wp(w, 1, 0)$ έχει περιόδους $2\omega, i2\omega$ με $\omega = \Gamma^2(1/4)/(4\sqrt{\pi})$ και μια ρίζα βαθμού 2 στο $w_0 = \omega + i\omega$. Αν $g_2 < 0$ και $g_3 = 0$, τότε ισχύει $\wp(w, g_2, 0) = |g_2|^{1/2} \wp(|g_2|^{1/4} w, -1, 0)$, όπου $\wp(w, -1, 0) = i\wp(e^{i\pi/4} w, 1, 0)$.

Άρα, το $K = \mathfrak{M}(x(w), x'(w))$ αποτελείται από διπλά περιοδικές μερόμορφες συναρτήσεις, με περιόδους $2\hat{\omega}, i2\hat{\omega}$ και $\hat{\omega} = \Gamma^2(1/4)/(4\sqrt{\pi}(8h)^{1/4})$ για $h > 0$. Μέσα στο θεμελειώδες παραλληλόγραμμο περιόδων της, η $x(w) = \wp(w, 8h, 0)$ έχει μια ρίζα στο $w_0 = \hat{\omega} + i\hat{\omega}$ βαθμού 2. Συνεπώς, οι εξισώσεις μεταβολών (4.1.34) είναι κανονικώς ιδιόμορφες.

Η γενική λύση της $v_N'' = 0$ είναι η $v_N = c_1 w + c_2$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Η διαφορική επισύναψη του w στο $K = \mathfrak{M}(x(w), x'(w))$ παράγει μια υπερβατική επέκταση Liouville του K , αφού $w \notin K$ και $w' = 1 \in K$.

Η $u_1(t) = \dot{r}(t)$ είναι μια ειδική λύση της $TVE \ddot{n}_T + 10r(t)^{-6} n_T = 0$ και μέσω των μετασχηματισμών (4.1.30), (4.1.32), $(n_T, n_N) = x(w)^{1/2}(v_T, v_N)$ μετατρέπεται στην ειδική λύση $u_1(w) = x(w)^{-2} x'(w)$ της $v_T'' + 24hx(w)^{-1} v_T = 0$. Μια δεύτερη, γραμμικώς ανεξάρτητη της $u_1(w)$, λύση προκύπτει από τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης και έχει τη μορφή $u_2(w) = u_1(w) \int u_1(w)^{-2} dw$, όπου

$$\begin{aligned} \int u_1(w)^{-2} dw &= \int \frac{x(w)^4}{x'(w)^2} dw = \int \frac{x^4}{(4x^3 - 8hx)^{3/2}} dx = \frac{1}{8} \int \frac{x^{5/2}}{(x^2 - 2h)^{3/2}} dx \\ &= -\frac{1}{8} \int \left[(x^2 - 2h)^{-1/2} \right]' x^{3/2} dx \\ &= -\frac{1}{8} \left[\frac{x^{3/2}}{(x^2 - 2h)^{1/2}} - \frac{3}{2} \int \frac{x^{1/2}}{(x^2 - 2h)^{1/2}} dx \right] \\ &= -\frac{1}{8} \left[2 \frac{x^2}{(4x^3 - 8hx)^{1/2}} - 3 \int \frac{x}{(4x^3 - 8hx)^{1/2}} dx \right] \\ &= -\frac{1}{16} \left[\frac{x(w)^2}{x'(w)} - \frac{3}{2} \int x(w) dw \right]. \end{aligned}$$

Συνεπώς, μια δεύτερη λύση της $v_T'' + 24hx(w)^{-1} v_T = 0$ είναι η $u_2(w) = \frac{3}{2} u_1(w) Z(w) + 1$, όπου $Z(w) = \zeta(w, 8h, 0)$ είναι η σχεδόν περιοδική συνάρτηση του Weierstrass για την οποία ισχύει $\zeta'(w, 8h, 0) = -\wp(w, 8h, 0)$. Η γενική λύση είναι η $v_T = c_1 u_1(w) + c_2 u_2(w)$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Η διαφορική επισύναψη της $\zeta(w, 8h, 0)$ στο $K = \mathfrak{M}(x(w), x'(w))$ παράγει μια υπερβατική επέκταση Liouville του K , εφόσον $\zeta(w, 8h, 0) \notin K$ και $\zeta'(w, 8h, 0) = -\wp(w, 8h, 0) \in K$.

Η επέκταση Picard-Vessiot $\hat{L} = K \langle w, \zeta(w, 8h, 0) \rangle$ του K είναι μια υπερβατική επέκταση και η διαφορική ομάδα Galois G που αντιστοιχεί στο σύστημα (4.1.34) για $K = \mathfrak{M}(x(w), x'(w))$ είναι συνεκτική ως προς την τοπολογία του Zariski. Δηλαδή $G^0 = G$, όπου G^0 η ταυτοτική συνιστώσα της G . Επιπλέον, η G^0 είναι επιλύσιμη, επειδή η $\hat{L}$ είναι μια επέκταση Liouville. Για κάθε $g \in G^0$ ισχύει

$$\begin{aligned} g'(w) &= g(w') = g(1) = 1 \Rightarrow g(w) = w + c_1 \\ g'(Z(w)) &= g(Z'(w)) = g(-x(w)) = -x(w) \Rightarrow g(Z(w)) = Z(w) + c_2 \end{aligned}$$

και έπεται

$$G = G^0 = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

δηλαδή η G^0 είναι αβελιανή και οι αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας του ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$ ικανοποιούνται.

Σχόλιο 4.1.3. Έστω $\tilde{G}$ η διαφορική ομάδα Galois του συστήματος εξισώσεων (4.1.33). Για κάθε $\tilde{g} \in \tilde{G}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(x(w)^{1/2}) &= \frac{1}{2} \tilde{g}(x(w)^{1/2} x(w)^{-1} x'(w)) = \frac{1}{2} \tilde{g}(x(w)^{1/2}) x(w)^{-1} x'(w) \Rightarrow \\ \frac{\tilde{g}'(x(w)^{1/2})}{\tilde{g}(x(w)^{1/2})} &= \frac{1}{2} \frac{x'(w)}{x(w)} \Rightarrow \tilde{g}(x(w)^{1/2}) = \tilde{c} x(w)^{1/2}, \end{aligned}$$

με $\tilde{c} = \pm 1$, επειδή $\tilde{g}(x(w)^{1/2})^2 = \tilde{g}(x(w)) = x(w)$. Από το μετασχηματισμό $(n_T, n_N) = x(w)^{1/2}(v_T, v_N)$ προκύπτει

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \pm 1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}^0 = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\tilde{G}$ δεν είναι συνεκτική, ενώ η $\tilde{G}^0 = G^0$ είναι αβελιανή, όπως ήταν αναμενόμενο.

Εφόσον οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 VE_1 ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας του θεωρήματος 3.3.8 των Morales-Ramis [88, 90], θα ορίσουμε τις εξισώσεις μεταβολών τάξης k (VE_k) για $k = 1, 2, 3$ για να εφαρμόσουμε το αντίστοιχο θεώρημα 3.3.10 των Morales-Ramis-Simó [94].

Η ανάγωγη μορφή των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1, 2, 3 κατά μήκος της $\tilde{\Pi}_h$ (4.1.32) προκύπτει από τις (4.1.25) ως εξής:

$$VE_i : \mathbf{v}'_i = \tilde{\mathbf{A}}(w) \mathbf{v}_i + \tilde{\mathbf{f}}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \tilde{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{0}, \quad (4.1.35)$$

όπου $\mathbf{v}_i = (v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, v_{1,4})^T$ και

$$\tilde{\mathbf{A}}(w) = B(w)^{-1} \left(\frac{x(w)}{2h} \hat{\mathbf{A}} \left(\frac{x(w)}{2h} \right) B(w) - B'(w) \right) = \begin{pmatrix} 0_{2,2} & I_{2,2} \\ \begin{pmatrix} -\frac{24h}{x(w)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0_{2,2} \end{pmatrix},$$

$$B(w) = \begin{pmatrix} \sqrt{x(w)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{x(w)} & 0 & 0 \\ \frac{hx'(w)}{x(w)^{3/2}} & 0 & \frac{2h}{\sqrt{x(w)}} & 0 \\ 0 & \frac{hx'(w)}{x(w)^{3/2}} & 0 & \frac{2h}{\sqrt{x(w)}} \end{pmatrix}$$

$$B(w)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x(w)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x(w)}} & 0 & 0 \\ -\frac{x'(w)}{2x(w)^{3/2}} & 0 & \frac{\sqrt{x(w)}}{2h} & 0 \\ 0 & \frac{x'(w)}{2x(w)^{3/2}} & 0 & \frac{\sqrt{x(w)}}{2h} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_2(\mathbf{v}_1) &= B(w)^{-1} \frac{x(w)}{2h} \mathbf{f}_2 \left(\sqrt{x(w)/2h}, x(w)^{1/2} v_{1,1}, x(w)^{1/2} v_{1,2} \right) \\ &= \left(0, 0, 12\sqrt{2} h^{3/2} x(w)^{-1} (5v_{1,1}^2 - v_{1,2}^2), -24\sqrt{2} h^{3/2} x(w)^{-1} v_{1,1} v_{1,2} \right)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= B(w)^{-1} \frac{x(w)}{2h} \mathbf{f}_3 \left(\sqrt{x(w)/2h}, x(w)^{1/2} v_{1,1}, x(w)^{1/2} v_{1,2}, x(w)^{1/2} v_{2,1}, x(w)^{1/2} v_{2,2} \right) \\ &= (0, 0, \tilde{f}_{3,3}, \tilde{f}_{3,4})^T, \\ \tilde{f}_{3,3} &= -8h^{3/2} x(w)^{-1} (35\sqrt{h} v_{1,1}^3 - 21\sqrt{h} v_{1,2}^2 v_{1,1} - 15\sqrt{2} v_{2,1} v_{1,1} + 3\sqrt{2} v_{1,2} v_{2,2}), \\ \tilde{f}_{3,4} &= \frac{8}{3} h^{3/2} x(w)^{-1} (63\sqrt{h} v_{1,1}^2 v_{1,2} - 8\sqrt{h} v_{1,2}^3 - 9\sqrt{2} v_{2,1} v_{1,2} - 9\sqrt{2} v_{1,1} v_{2,2}). \end{aligned}$$

Στην ενότητα 3.2 δείξαμε ότι από τις μη-γραμμικές, μη-ομογενείς $VE_1 - VE_3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αντίστοιχο γραμμικό ομογενές σύστημα LVE_3 . Οι λύσεις του συστήματος των $VE_1 - VE_3$ βρίσκονται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις λύσεις του LVE_3 . Σύμφωνα με το θεώρημα των Morales-Ramis-Simó [94], αν το ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$ είναι ολοκληρώσιμο, τότε η ταυτοτική συνιστώσα G_3^0 της διαφορικής ομάδας Galois G_3 του LVE_3 είναι αβελιανή.

Αν το ανάπτυγμα της γενικής λύσης της VE_i στην περιοχή του w_0 περιέχει λογαρίθμους, το ίδιο ισχύει για το ανάπτυγμα της γενικής λύσης του αντίστοιχου συστήματος LVE_i . Όπως δείξαμε παραπάνω το ανάπτυγμα της γενικής λύσης της VE_1 δεν περιέχει λογαρίθμους στην περιοχή του w_0 . Θα εξετάσουμε τα αναπτύγματα των λύσεων των VE_2, VE_3 .

Θεωρούμε τον θεμελιώδη πίνακα

$$\Phi(w) = \begin{pmatrix} \frac{u_2(w)}{2} & 0 & \frac{u_1(w)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w \\ \frac{u_2'(w)}{2} & 0 & \frac{u_1'(w)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \Phi = 1$$

της VE_1 , όπου υπενθυμίζουμε $u_1(w) = x(w)^{-2} x'(w)$, $u_2(w) = \frac{3}{2} u_1(z) Z(w) + 1$, $x(w) = \wp(w, 8h, 0)$ και $Z(w) = \zeta(w, 8h, 0)$. Ο αντίστροφος του $\Phi(w)$ είναι ο

$$\Phi^{-1}(w) = \begin{pmatrix} \frac{u_1'(w)}{2} & 0 & -\frac{u_1(w)}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w \\ -\frac{u_2'(w)}{2} & 0 & \frac{u_2(w)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Μια ειδική λύση $\mathbf{S}_2 = (S_{2,1}, S_{2,2}, S_{2,3}, S_{2,4})$ της VE_2 είναι η

$$\mathbf{S}_2 = \Phi(w)\mathbf{c}_2(w) = \left(\frac{1}{4} (c_{2,3}u_1(w) + c_{2,1}u_2(w)), wc_{2,4} + c_{2,2}, \frac{1}{4} (c_{2,3}u'_1(w) + c_{2,1}u'_2(w)), c_{2,4} \right)^T,$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{c}_2(w) = (c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3}, c_{2,4})^T$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_2(w) &= \Phi^{-1}(w)\tilde{\mathbf{f}}_2(\mathbf{S}_1) \\ &= \frac{3\sqrt{2}h^{3/2}}{x(w)} \left(-(5S_{1,1}^2 - S_{1,2}^2)u_1(w), 8wS_{1,1}S_{1,2}, (5S_{1,1}^2 - S_{1,2}^2)u_2(w), -8S_{1,1}S_{1,2} \right)^T \end{aligned}$$

και η $\mathbf{S}_1 = (S_{1,1}, S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4})$ είναι μια λύση της VE_1 . Για $S_1 = (0, 1, 0, 0)$ προκύπτει

$$\mathbf{c}'_2(w) = \Phi(w)^{-1}\tilde{\mathbf{f}}_2 = \frac{3\sqrt{2}h^{3/2}}{x(w)} (u_1(w), 0, -u_2(w), 0)^T.$$

Τα αναπτύγματα των $x(w)$, $u_1(w)$, $u_2(w)$ στην περιοχή της κανονικής ιδιομορφίας $w_0 = \hat{\omega} + \mathbf{i}\hat{\omega}$, ($\hat{\omega} = \Gamma^2(1/4)/(4\sqrt{\pi}(8h)^{1/4})$) για $h > 0$ είναι τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} x(w) &= -2hw_*^2 + \frac{4}{5}h^2w_*^6 - \frac{16}{75}h^3w_*^{10} + O(w_*^{14}), \quad x(w)^{-1} = -\frac{1}{2hw_*^2} - \frac{w_*^2}{5} - \frac{2hw_*^6}{75} + O(w_*^{10}), \\ u_1(w) &= -\frac{1}{hw_*^3} + \frac{2w_*}{5} + \frac{4hw_*^5}{25} + O(w_*^9), \quad u_2(w) = -\frac{3n_0}{2hw_*^3} + \frac{3n_0w_*}{5} + \frac{4hw_*^4}{7} + O(w_*^5), \end{aligned}$$

όπου $w_* = w - w_0$ και $n_0 = \zeta(w_0, 8h, 0) \neq 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_2(w) &= 6\sqrt{2}h^{3/2} \left(\frac{1}{2h^2w_*^5} - \frac{2w_*^3}{15} - \frac{16}{325}hw_*^7 + O(w_*^{11}), 0, -\frac{3n_0}{4h^2w_*^5} + \frac{2w_*^2}{7} + \frac{1}{5}n_0w_*^3 + O(w_*^5), 0 \right)^T, \\ \mathbf{S}_2 &= (S_{2,1}(w), 0, S'_{2,1}(w), 0)^T \\ S_{2,1}(w) &= -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{35}\sqrt{2}h^{3/2}w_*^4 + \frac{6\sqrt{2}h^{5/2}w_*^8}{1925} + O(w_*^{12}) \end{aligned}$$

και το ανάπτυγμα της $\mathbf{S}_2$ δεν περιέχει λογαρίθμους στην περιοχή του w_0 .

Αντίστοιχα με τα παραπάνω, μια ειδική λύση $\mathbf{S}_3 = (S_{3,1}, S_{3,2}, S_{3,3}, S_{3,4})$ της VE_3 είναι η

$$\mathbf{S}_3 = \Phi(w)\mathbf{c}_3(w) = \left(\frac{1}{4} (c_{3,3}u_1(w) + c_{3,1}u_2(w)), wc_{3,4} + c_{3,2}, \frac{1}{4} (c_{3,3}u'_1(w) + c_{3,1}u'_2(w)), c_{3,4} \right)^T,$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{c}_3(w) = (c_{3,1}, c_{3,2}, c_{3,3}, c_{3,4})^T$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_3(w) &= \Phi^{-1}(w)\tilde{\mathbf{f}}_3(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = (c'_{3,1}(w), c'_{3,2}(w), c'_{3,3}(w), c'_{3,4}(w)) \\ c'_{3,1}(w) &= \frac{2h^{3/2}u_1(w) \left(35\sqrt{h}S_{1,1}^3 - 3S_{1,1} \left(7\sqrt{h}S_{1,2}^2 + 5\sqrt{2}S_{2,1} \right) + 3\sqrt{2}S_{1,2}S_{2,2} \right)}{x(w)}, \\ c'_{3,2}(w) &= -\frac{8h^{3/2}w \left(-8\sqrt{h}S_{1,2}^3 + 63\sqrt{h}S_{1,1}^2S_{1,2} - 9\sqrt{2}S_{2,1}S_{1,2} - 9\sqrt{2}S_{1,1}S_{2,2} \right)}{3x(w)}, \\ c'_{3,3}(w) &= -\frac{2h^{3/2}u_2(w) \left(35\sqrt{h}S_{1,1}^3 - 3S_{1,1} \left(7\sqrt{h}S_{1,2}^2 + 5\sqrt{2}S_{2,1} \right) + 3\sqrt{2}S_{1,2}S_{2,2} \right)}{x(w)}, \\ c'_{3,4}(w) &= \frac{8h^{3/2} \left(-8\sqrt{h}S_{1,2}^3 + 63\sqrt{h}S_{1,1}^2S_{1,2} - 9\sqrt{2}S_{2,1}S_{1,2} - 9\sqrt{2}S_{1,1}S_{2,2} \right)}{3x(w)} \end{aligned}$$

και οι $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ είναι οι προαναφερόμενες λύσεις των αντίστοιχων VE_1, VE_2 . Για $S_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{S}_2 = (S_{2,1}(w), 0, S'_{2,1}(w), 0)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_3(w) &= \left(0, \frac{8(9\sqrt{2}h^{3/2}wS_{2,1} + 8h^2w)}{3x(w)}, 0, -\frac{8(9\sqrt{2}h^{3/2}S_{2,1} + 8h^2)}{3x(w)} \right)^T, \\ &= \left(0, \frac{4w_0h}{3w_*^2} + \frac{4h}{3w_*} + O(w_*^2), 0, -\frac{4h}{3w_*^2} + \frac{16}{105}h^2w_*^2 + O(w_*^6) \right)^T, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι για $h > 0$ το ανάπτυγμα της $\mathbf{S}_3 = \Phi(w)\mathbf{c}_3(w)$, στην περιοχή του w_0 , περιέχει λογαριθμικούς όρους. Άρα, το ανάπτυγμα της γενικής λύσης των VE_3, LVE_3 , στην περιοχή του w_0 , περιέχει λογαριθμικούς όρους.

Η VE_1 είναι κανονικώς ιδιόμορφη, συνεπώς και η LVE_3 είναι κανονικώς ιδιόμορφη. Οι συντελεστές της LVE_3 είναι διπλά περιοδικές μερόμορφες συναρτήσεις, με περιόδους $T_1 = 2\hat{\omega}$, $T_2 = i2\hat{\omega}$, όπου $\hat{\omega} = \Gamma^2(1/4)/(4\sqrt{\pi}(8h)^{1/4})$ για $h > 0$. Η αναλυτική συνέχιση του θεμελιώδους πίνακα $\Phi_3(w)$ της LVE_3 κατά μήκος των T_1, T_2 παράγει τους αντίστοιχους μονόδρομους πίνακες M_1, M_2 . Οι M_1, M_2 είναι οι γεννήτορες της μονόδρομης ομάδας M της LVE_3 . Έστω γ μια απλή κλειστή καμπύλη που βρίσκεται εντός του θεμελιώδους παραλληλόγραμμου περιόδων της $x(w) = \wp(w, 8h, 0)$ και περιβάλλει τη ρίζα $w_0 = \hat{\omega} + i\hat{\omega}$ της $\wp(w, 8h, 0)$ και $\Phi_3(w\gamma)$ ο πίνακας που προκύπτει από την αναλυτική συνέχιση του $\Phi_3(w)$ κατά μήκος της γ . Για τον $\Phi_3(w\gamma)$ ισχύει $\Phi_3(w\gamma) = \Phi_3(w)[M_1, M_2]$, όπου $[M_1, M_2] = M_1M_2M_1^{-1}M_2^{-1}$. Το ανάπτυγμα της $\Phi_3(w)$ στην περιοχή του w_0 περιέχει λογαριθμικούς όρους και έπεται ότι $\Phi_3(w\gamma) \neq \Phi_3(w)$. Άρα, $[M_1, M_2] \neq I$ και η μονόδρομη ομάδα M της LVE_3 δεν είναι αβελιανή.

Έστω L_i η επέκταση Picard-Vessiot που αντιστοιχεί στην LVE_i για $i = 1, 2, 3$. Η $L_1 = K < w, \zeta(w, 8h, 0) >$ είναι μια υπερβατική επέκταση Liouville του $K = \mathfrak{M}(x(w), x'(w))$, επειδή $w, \zeta(w, 8h, 0) \notin K$ και $w', \zeta'(w, 8h, 0) \in K$. Η επέκταση L_j για $j = 2, 3$ είναι υπερβατική επέκταση της L_{j-1} , επειδή προκύπτει από την L_{j-1} μέσω της μεθόδου της μεταβολής παραμέτρων, δηλαδή από τη διαφορική επισύναψη στην L_{j-1} συναρτήσεων που είναι αόριστα ολοκληρώματα στοιχείων της L_{j-1} . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η επέκταση Picard-Vessiot L_3 που αντιστοιχεί στην LVE_3 είναι μια υπερβατική επέκταση Liouville του $K = \mathfrak{M}(x(w), x'(w))$. Άρα, η διαφορική ομάδα Galois G_3 της LVE_3 είναι συνεκτική (ως προς την τοπολογία του Zariski) και $G_3^0 = G_3$, όπου G_3^0 είναι η ταυτοτική συνιστώσα της G_3 .

Σύμφωνα με το θεώρημα των Morales-Ramis-Simó 3.3.10, αν το ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$ ήταν ολοκληρώσιμο τότε η G_3^0 θα έπρεπε να είναι αβελιανή. Η LVE_3 είναι κανονικώς ιδιόμορφη, οπότε η M είναι πυκνή (ως προς την τοπολογία του Zariski) μέσα στην G_3 και ακολούθως είναι πυκνή μέσα στην G_3^0 , επειδή $G_3^0 = G_3$. Άρα, η G_3^0 είναι αβελιανή αν και μόνο αν η M είναι αβελιανή. Εφόσον $[M_1, M_2] \neq I$, καταλήγουμε ότι η G_3^0 είναι μη-αβελιανή, άρα και το ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$ είναι μη-ολοκληρώσιμο. Δηλαδή αποδείχτηκε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.1.4 ([100]). Το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο για $\nu^2 = 2/3$.

Από τα λήμματα 4.1.2, 4.1.4 έπεται το θεώρημα 4.1.1

Οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν για $h > 0$. Απο τις σχέσεις $\wp(w, g_2, 0) = |g_2|^{1/2}\wp(|g_2|^{1/4}w, -1, 0)$ και $\wp(w, -1, 0) = i\wp(e^{i\pi/4}w, 1, 0)$ για $g_2 < 0$, προκύπτει ότι αν θεωρήσουμε την $x(w) = \wp(w, 8h, 0)$ για $h < 0$ θα καταλήξουμε στα ίδια συμπεράσματα. Άρα, από τη μαθηματική σκοπιά η επέκταση σε μιγαδικές τιμές των μεταβλητών (ανεξάρτητης και εξαρτημένων) του ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$ μας επιτρέπει να αποδείξουμε τη μη-ολοκληρωσιμότητα

του συστήματος για $h \neq 0$. Όμως, από τη συνάρτηση Hamilton του ASP_0

$$H_0(r, z, p_r, p_z) = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2}p_z^2 + V_0(r, z)$$

$$V_0(r, z) = \frac{r^2}{2(r^2 + \nu^2 z^2)^3},$$

προκύπτει ότι το υποσύστημα που αντιστοιχεί σε πραγματικές τιμές των μεταβλητών δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές της h .

4.1.4 Αριθμητική επεξεργασία του ASP

Το ανηγμένο ASP επιδέχεται τη συνάρτηση Hamilton

$$H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{r} - \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2,$$

και στο χώρο θέσεων (r, z) η κίνηση πραγματοποιείται στην περιοχή

$$O = \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{r} - \frac{r}{(r^2 + \nu^2 z^2)^{3/2}} \right)^2 \leq h \right\}, \quad (4.1.36)$$

της οποίας το σύνορο είναι οι αποκαλούμενες “καμπύλες μηδενικής ταχύτητας” (ZVC) (zero-velocity curves), που αντιστοιχούν στις καμπύλες που ορίζονται από τη συνάρτηση Hamilton για $p_1 = p_2 = 0$.

Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου υπό την επίδραση ενός μαγνητικού πεδίου μπορεί (υπό συνθήκες) να περιγραφεί ως ο συνδυασμός της κίνησης του σωματιδίου γύρω από ένα σημείο που καλείται “κέντρο καθοδήγησης” (GC) (guiding center) και της μετατόπισης του GC . Τα κέντρα καθοδήγησης του ASP κινούνται πάνω στην καμπύλη

$$|z| = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{r^{4/3}}{p_\phi^{2/3}} - r^2}. \quad (4.1.37)$$

Για $p_\phi = 0$ η καμπύλη δεν ορίζεται και αυτό αποτελεί μια ένδειξη της μη-ολοκληρωσιμότητας του ASP_0 .

Για $h > p_\phi^4/32$ οι ZVC δε σχηματίζουν μια κλειστή καμπύλη και οι περισσότερες τροχιές οδηγούν στην διαφυγή του σωματιδίου από την επίδραση του μαγνητικού πεδίου.

Για $p_\phi = 0$, όπου τα GC δεν ορίζονται, οι τομές Poincare δε χρησιμεύουν για την εποπτεία επί της δυναμικής του συστήματος επειδή οι τροχιές δεν επιστρέφουν για τις τμήσουν. Εναλλακτικά, παραθέτουμε τομές Poincare για πολύ μικρές θετικές τιμές του p_ϕ και ένα ζεύγος τιμών των ν^2, h .

Τα σχήματα 4.2 υποδεικνύουν ότι όσο μικραίνουμε την τιμή της σταθεράς p_ϕ το σύστημα γίνεται πιο ασταθές, κάτι που παρατηρήθηκε και στην εργασία [8] για $\nu^2 = 2/3$. Το σχήμα 4.2 (i) αντιστοιχεί στην περίπτωση $h > p_\phi^4/32$, όπου το σύνορο της O (4.1.36) δεν είναι μια κλειστή καμπύλη. Σε αυτή την περίπτωση οι περισσότερες τροχιές τέμνουν το επίπεδο $z = 0$ μερικές φορές και μετά δεν επιστρέφουν, δηλαδή οι τροχιές αντιστοιχούν σε διαφυγή του σωματιδίου από την επίδραση του μαγνητικού πεδίου. Η εικόνα 4.2 (i) αντιστοιχεί σε 115 αρχικές συνθήκες κατά μήκος του άξονα r για $r=84, 85, \dots, 197, 198$.

Το σύνορο κάθε περιοχής στα σχήματα 4.2 αντιστοιχεί στην καμπύλη

$$\frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_\phi}{r} - \frac{1}{r^2} \right)^2 = h \quad (4.1.38)$$

η οποία για $p_\phi = 0$ συμπίπτει με την καμπύλη Π_h (4.1.24) που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε τη μη-ολοκληρωσιμότητα του ASP_0 . Η καμπύλη (4.1.38) για $h = 1/2$ χρησιμοποιήθηκε στη διερεύνηση του ανηγμένου ASP στην εργασία [8]

Σχήμα 4.1: Η περιοχή O (4.1.36) (γκρι περιοχή) και τα κέντρα καθοδήγησης (4.1.37) (διακεκομμένες γραμμές) του ανηγμένου ASP για $\nu^2 = 2/3$ και $h = 1/32 \cdot 10^{-8}$.

Σχήμα 4.2: Οι τομές Poincaré $z = 0$ του ανηγμένου ASP για $\nu^2 = 2/3$ και $h = 1/32 \cdot 10^{-8}$. Ο οριζόντιος και ο κάθετος άξονας αντιστοιχούν στους άξονες r, p_r .

4.2 Το ισοσκελές πρόβλημα τριών σωμάτων

4.2.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα N -σωμάτων (NBP) $b_i, i = 1, \dots, N$ με μάζες m_i επιδέχεται τη συνάρτηση Hamilton

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\|\mathbf{p}_i\|^2}{2m_i} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_i m_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|},$$

όπου $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ είναι η αντίστοιχη θέση και ορμή του b_i , ενώ $\|\mathbf{v}\|$ είναι το μέτρο του $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Το NBP επιδέχεται 10 ολοκληρώματα (3 από τα οποία είναι χρονο-εξαρτώμενα) και ο E. Juillard-Tosel [57] απέδειξε το 2000 ότι δεν υπάρχουν επιπλέον, αλγεβρικά ανεξάρτητα των 10 προαναφερόμενων, ολοκληρώματα που να είναι αλγεβρικά ως προς $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i, t$, γενικεύοντας το αντίστοιχο θεώρημα του H. Bruns [23] (1887) που ίσχυε για $N=3$. Το 2009 οι J.J. Morales-Ruiz, S. Simon [95] απέδειξαν ότι για $N \geq 3$ και ίσες m_i το πρόβλημα είναι μη-ολοκληρώσιμο. Ο Q. Wang το 1991 κατασκεύασε τη λύση του προβλήματος σε μορφή συγκλίνουσων σειρών για $N > 3$ και $N = 3$ με μηδενική γωνιακή ορμή, γενικεύοντας το αντίστοιχο θεώρημα του K.F. Sundman [120] (1913) που ίσχυε για μη-μηδενική γωνιακή ορμή και $N = 3$.

Το 1687 ο I. Newton [99] εισήγαγε το πρόβλημα 3 σωμάτων (TBP) που κινούνται στο χώρο, υπό την επίδραση της μεταξύ τους βαρυτικής έλξης. Το TBP , η περίπτωση όπου τα σώματα κινούνται σε ένα επίπεδο ($PTBP$) και η περίπτωση που το ένα από τα σώματα έχει αμελητέα μάζα ($RTBP$) έχουν μελετηθεί ευρέως από κάθε σκοπιά. Το TBP και το $PTBP$ είναι μη-ολοκληρώσιμα [95]. Μεταξύ άλλων, οι L. Euler [39], J.L. Lagrange [65], H. Poincaré [105] μελέτησαν τις ολοκληρώσιμες υποπερίπτώσεις του $RTBP$ όπου τα δύο σώματα (με μη-αμελητέα μάζα) κινούνται σε κυκλικές ή ελλειπτικές τροχιές. Το 1960 ο K. Sitnikov [118] μελέτησε την υποπερίπτωση του $RTBP$ όπου τα δύο σώματα b_1, b_2 με μη-αμελητέες ίσες μάζες κινούνται συμμετρικά γύρω από το κέντρο μάζας τους $\mathbf{\Delta}$, ενώ το τρίτο b_3 κινείται στην ευθεία που περνά από το $\mathbf{\Delta}$ και είναι κάθετη στο επίπεδο κίνησης των άλλων δύο. Μια λύση του προβλήματος (SP) του K. Sitnikov, σε μορφή συγκλίνουσων σειρών, είχε κατασκευαστεί από τον W.D. Macmillan [82] το 1913, για την περίπτωση όπου τα b_1, b_2 κινούνται σε κυκλικές τροχιές. Το SP είναι μη-ολοκληρώσιμο [96, 88].

Το ισοσκελές πρόβλημα τριών σωμάτων [24, 28, 29, 37, 38, 101] μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση του SP και αποτελείται από δύο σώματα b_1, b_2 με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m$ που κινούνται συμμετρικά γύρω από το κέντρο μάζας τους $\mathbf{\Delta}$, ενώ το τρίτο b_3 με (μη-αμελητέα) μάζα m_3 κινείται στην ευθεία που περνά από το $\mathbf{\Delta}$ και είναι κάθετη στο επίπεδο κίνησης των άλλων δύο. Τα σώματα σχηματίζουν πάντα ένα ισοσκελές τρίγωνο.

Έστω (x_i, y_i, z_i) οι καρτεσιανές συντεταγμένες του σώματος b_i με μάζα $m_i \neq 0$ για $i = 1, 2, 3$. Θέτουμε $m_1 = m_2 = m$ και θεωρούμε τις παρακάτω συνθήκες στο χώρο φάσεων $\mathbf{T}$ του TBP

$$x_1 = -x_2 = x, y_1 = -y_2 = y, x_3 = y_3 = 0, z_1 = z_2 = -\frac{m_3}{2m} z_3 = z$$

με τις αντίστοιχες συνθήκες για τις συζυγείς ορμές. Οι προαναφερόμενες συνθήκες ορίζουν ένα αναλλοίωτο υπόχωρο του $\mathbf{T}$ διάστασης 6 με συντεταγμένες $\mathbf{q} = (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$. Οι διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι $\mathbf{q}$ συνιστούν τις εξισώσεις κίνησης του ισοσκελούς προβλήματος τριών σωμάτων, που επιδέχεται τη συνάρτηση Hamilton

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} - \frac{m}{4\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{m_3}{\sqrt{x^2 + y^2 + a z^2}}, \quad (4.2.1)$$

όπου $a = (2m + m_3)/m_3$ και η z -συνιστώσα $L_z = x p_y - p_x y$ της γωνιακής ορμής είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα. Θεωρώντας τον κανονικό μετασχηματισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$(x, y, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z),$$

$$(p_x, p_y, p_z) = (p_r \cos \phi - \frac{p_\phi \sin \phi}{r}, \frac{p_\phi \cos \phi}{r} + p_r \sin \phi, p_z),$$

η (4.2.1) έρχεται στη μορφή

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{m}{4r} - \frac{m_3}{\sqrt{r^2 + a z^2}}, \quad (4.2.2)$$

όπου $L_z = p_\phi$. Η p_ϕ είναι μια σταθερά, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η παραπάνω συνάρτηση Hamilton αντιστοιχεί σε ένα σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας με συντεταγμένες (r, z, p_r, p_z) , το οποίο ενσωματώνει την p_ϕ ως παράμετρο. Για το υπόλοιπο της παρούσας ενότητας θα καλούμε το προαναφερόμενο σύστημα 2 βαθμών ελευθερίας ως το ανηγμένο (reduced) ισοσκελές πρόβλημα τριών σωμάτων (*IP*).

Το 1915 ο D. Buchanan [24] κατασκεύασε τη λύση του *IP* σε μορφή συγκλινουσών σειρών, ενώ η αριθμητική επεξεργασία στις [28, 29, 37, 101] υποδεικνύει ότι το *IP* είναι μη-ολοκληρώσιμο. Στην εργασία [100] αποδείξαμε το εξής:

Θεώρημα 4.2.1 ([100]). *Το IP δεν επιδέχεται ένα επιπλέον μερόμορφο πρώτο ολοκλήρωμα που να είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο της συνάρτησης Hamilton (4.2.2).*

Για την αναλυτική διερεύνηση της ολοκληρωσιμότητας του *IP*, με εφαρμογή της διαφορικής θεωρίας Galois, είναι απαραίτητο να επεκτείνουμε αναλυτικά τις μεταβλητές r, z, p_r, p_z, t σε μιγαδικές τιμές. Έστω

$$\widehat{\mathbf{M}} = \{(r, z, p_r, p_z) \in \mathbb{C}^4 : r \neq 0, r^2 + a z^2 \neq 0\}$$

ο επεκταμένος χώρος φάσεων του *IP* και $\widehat{H}$ η επέκταση της H (4.2.2) στον $\widehat{\mathbf{M}}$. Η ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας $\sqrt{r^2 + a z^2}$ στη συνάρτηση Hamilton (4.2.2) επάγει ότι η $\widehat{H}$ είναι πλειότιμη.

Ακολουθώντας τις εργασίες [64, 74, 115] θεωρούμε το σύνολο

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \{(r, z, p_r, p_z, w) \in \mathbb{C}^5 : r \neq 0, r^2 + a z^2 \neq 0, w^2 - r^2 - a z^2 = 0\}$$

και τη συνάρτηση $pr : \widetilde{\mathbf{M}} \rightarrow \widehat{\mathbf{M}}$, όπου $pr(r, z, p_r, p_z, w) = (r, z, p_r, p_z)$. Η pr είναι μια πεπερασμένως διακλαδισμένη κάλυψη του $\widehat{\mathbf{M}}$ και η επέκταση $\widehat{H}$ της H στο $\widetilde{\mathbf{M}}$ είναι μονότιμη. Έστω $\widehat{F}$ μια, συναρτησιακά ανεξάρτητη της $\widehat{H}$, μερόμορφη συνάρτηση που είναι σε ενέλιξη με την $\widehat{H}$. Η $\widetilde{F}(r, z, p_r, p_z, w) = \widehat{F}(pr(r, z, p_r, p_z, w))$ είναι μια, συναρτησιακά ανεξάρτητη της H , μερόμορφη συνάρτηση που είναι σε ενέλιξη με την $\widehat{H}$. Έστω $\widehat{\Gamma}_h \subset \widehat{\mathbf{M}}$ μια ολοκληρωτική καμπύλη του *IP* και $\widetilde{\Gamma}_h$ μια εμβύθιση (embedding) της $\widehat{\Gamma}_h$ στον $\widetilde{\mathbf{M}}$. Η ύπαρξη της $\widehat{F}$ επάγει, μέσω του θεωρήματος των Morales-Ramis 3.3.8, ότι οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 που ορίζονται κατά μήκος της $\widetilde{\Gamma}_h$ επιδέχονται λύσεις Liouville. Πιο απλά, αν S είναι το σύστημα Hamilton που αντιστοιχεί σε ένα κλάδο B της $\widehat{H}$, τότε το $\widehat{F}$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα του S και το S είναι ολοκληρώσιμο. Άρα μπορούμε να εφαρμοστούμε τη θεωρία Morales-Ramis περιορισμένοι στο B . Συμπερασματικά, με εφαρμογή της διαφορικής θεωρίας Galois μπορούμε να αναζητήσουμε αν το *IP* επιδέχεται ένα επιπλέον πρώτο ολοκλήρωμα που είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο της $\widehat{H}$.

Για το υπόλοιπο της ενότητας 4.2 η φράση “μη-ολοκληρωσιμότητα του IP ” θα υπονοεί τη μη-ύπαρξη ενός μερόμορφου πρώτου ολοκληρώματος του IP που να είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο της H (4.2.2).

Στην υποενότητα 4.2.2 αποδεικνύουμε τη μη-ολοκληρωσιμότητα του IP για $p_\phi = 0$, με εφαρμογή του θεωρήματος των Morales-Ramis 3.3.12, για συστήματα που αντιστοιχούν σε ομογενείς συναρτήσεις δυναμικού. Η περίπτωση $p_\phi \neq 0$ του IP εξετάζεται στην υποενότητα 4.2.3. Σε αυτήν, αναπτύσσουμε τις εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 VE_1 και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Kovacic 2.3.1 για να δείξουμε ότι VE_1 δεν επιδέχονται λύσεις Liouville, κάτι που επάγει τη μη-ολοκληρωσιμότητα του IP για $p_\phi \neq 0$. Τέλος, στην υποενότητα 4.2.4 παρουσιάζουμε αριθμητικές προσομοιώσεις του IP για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

4.2.2 Μη-ολοκληρωσιμότητα του IP για $p_\phi = 0$

Για $p_\phi = 0$ η συνάρτηση Hamilton (4.2.2) έρχεται στη μορφή

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} - \frac{m}{4r} - \frac{m_3}{\sqrt{r^2 + a} z^2}$$

και η συνάρτηση δυναμικού

$$V = -\frac{m}{4r} - \frac{m_3}{\sqrt{r^2 + a} z^2} \quad (4.2.3)$$

είναι ομογενής βαθμού -1. Το αντίστοιχο σύστημα Hamilton (IP_0) έρχεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_r(r, z) \\ -V_z(r, z) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{m_3 r}{(az^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{m}{4r^2} \\ -\frac{am_3 z}{(az^2 + r^2)^{3/2}} \end{pmatrix}, \quad (4.2.4)$$

όπου $V_r(r, z)$, $V_z(r, z)$ είναι η μερική παράγωγος της συνάρτησης $V(r, z)$ (4.2.3) ως προς r , z , αντιστοίχως.

Σύμφωνα με τις παρατηρήσεις του H. Yoshida [129] το IP_0 (4.2.4) επιδέχεται λύσεις ευθείας γραμμής (SLS) της μορφής $(r(t), z(t)) = (c_1, c_2)s(t)$, $(\dot{r}(t), \dot{z}(t)) = (c_1, c_2)\dot{s}(t)$, όπου τα (c_1, c_2) ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_r(c_1, c_2) \\ V_z(c_1, c_2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1 m_3}{(ac_2^2 + c_1^2)^{3/2}} - \frac{m}{4c_1^2} \\ -\frac{ac_2 m_3}{(ac_2^2 + c_1^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

και η $s(t)$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{s}(t)^2 = -2(1 - s(t)^{-1}).$$

Οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 κατά μήκος των SLS είναι το σύστημα

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{n}} &= -s(t)^{-3} D^2 V(c_1, c_2) \mathbf{n} \Rightarrow \\ \ddot{\mathbf{n}} &= -s(t)^{-3} \begin{pmatrix} -\frac{3c_1^2 m_3}{(ac_2^2 + c_1^2)^{5/2}} + \frac{m_3}{(ac_2^2 + c_1^2)^{3/2}} - \frac{m}{2c_1^3} & -\frac{3ac_1 c_2 m_3}{(ac_2^2 + c_1^2)^{5/2}} \\ -\frac{3ac_1 c_2 m_3}{(ac_2^2 + c_1^2)^{5/2}} & \frac{am_3(c_1^2 - 2ac_2^2)}{(ac_2^2 + c_1^2)^{5/2}} \end{pmatrix} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

όπου $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ και $D^2V(c_1, c_2)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας της V (4.2.3) υπολογισμένος στο (c_1, c_2) . Μια ιδιοτιμή του $D^2V(c_1, c_2)$ είναι ίση με -2 , οπότε η δεύτερη ιδιοτιμή είναι η

$$l = \frac{(2m - m_3)c_1^2 - (4m + m_3)ac_2^2}{(c_1^2 + ac_2^2)^{5/2}} - \frac{m}{2c_1^3} + 2. \quad (4.2.7)$$

Μια λύση του συστήματος (4.2.5) έχει τη μορφή $(c_1, c_2) = ((m + 4m_3)^{1/3}/2^{2/3}, 0)$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή l (4.2.7)

$$l_1 = 4\frac{2q + 1}{q + 4}, \quad (4.2.8)$$

όπου $q = m/m_3 > 0$ και για την l ισχύει $l > 1$. Οι αντίστοιχες, των (4.2.6), εξισώσεις μεταβολών τάξης 1

$$\ddot{\mathbf{n}} = -s(t)^{-3} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & l_1 \end{pmatrix} \mathbf{n},$$

με εφαρμογή του μετασχηματισμού $w = s(t)^{-1}$ έρχονται στη μορφή

$$z(1 - z)\frac{d^2n_1}{dz^2} + \left(2 - \frac{5}{2}z\right)\frac{dn_1}{dz} + n_1 = 0, \quad (4.2.9)$$

$$z(1 - z)\frac{d^2n_2}{dz^2} + \left(2 - \frac{5}{2}z\right)\frac{dn_2}{dz} - \frac{l_1}{2}n_2 = 0, \quad (4.2.10)$$

που είναι ένα διαχωρισμένο σύστημα υπεργεωμετρικών εξισώσεων.

Σύμφωνα με το θεώρημα 3.3.8, αν το IP_0 (4.2.4) είναι ολοκληρώσιμο τότε η ταυτοτική συνιστώσα G^0 της διαφορικής ομάδας Galois των παραπάνω εξισώσεων είναι αβελιανή. Αν η G^0 είναι αβελιανή είναι και επιλύσιμη, οπότε οι (4.2.9), (4.2.10) ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος 2.4.3 του Kimura. Η (4.2.9) ικανοποιεί τις προαναφερόμενες συνθήκες, ενώ για να ισχύει το ίδιο και για την (4.2.10) πρέπει ο l_1 (4.2.8) να ανήκει στο σύνολο

$$I_{-1} = \left\{ j - \frac{j(j-1)}{2} : j \in \mathbb{Z} \right\}$$

που καθορίζεται στο θεώρημα 3.3.12. Για τον l_1 (4.2.8) ισχύει $l_1 > 1$, ενώ η μέγιστη τιμή των στοιχείων του I_{-1} είναι ίση με 1, οπότε $l_1 \notin I_{-1}$.

Λήμμα 4.2.2 ([100]). *Το IP δεν επιδέχεται ένα επιπλέον μερόμορφο πρώτο ολοκλήρωμα που να είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο της συνάρτησης Hamilton (4.2.2) για $p_\phi = 0$.*

4.2.3 Μη-ολοκληρωσιμότητα του IP για $p_\phi \neq 0$

Το IP

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_r(r, z) \\ -V_z(r, z) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_\phi^2}{r^3} - \frac{m_3 r}{(az^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{m}{4r^2} \\ -\frac{am_3 z}{(az^2 + r^2)^{3/2}} \end{pmatrix}, \quad (4.2.11)$$

επιδέχεται την οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών

$$\Gamma_h = \left\{ (r, 0, p_r, 0) \in \mathbb{C}^4 : \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{4m_3 + m}{4r} = h \right\}, \quad p_r = \dot{r}(t). \quad (4.2.12)$$

Οι εξισώσεις μεταβολών τάξης 1 κατά μήκος της Γ_h έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{n}} &= -D^2V(r(t), 0) \mathbf{n} \Rightarrow \\ \ddot{\mathbf{n}} &= \begin{pmatrix} \frac{(m+4m_3)r(t)-6p_\phi^2}{2r(t)^4} & 0 \\ 0 & -\frac{2m+m_3}{r(t)^3} \end{pmatrix} \mathbf{n},\end{aligned}\quad (4.2.13)$$

όπου $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ και $D^2V(r(t), 0)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας της

$$V = \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{m}{4r} - \frac{m_3}{\sqrt{r^2 + az^2}}, \quad a = \frac{2m + m_3}{m_3} \quad (4.2.14)$$

υπολογισμένος στο $(r(t), 0)$. Η εξίσωση των (4.2.13) που αντιστοιχεί στο n_1 επιδέχεται την ειδική λύση $\dot{r}(t)$, ενώ η

$$\ddot{n}(t) + \frac{2m + m_3}{r(t)^3} n(t) = 0 \quad (4.2.15)$$

είναι η εξίσωση κάθετων μεταβολών. Θέτοντας $w = r(t)$ προκύπτει

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} &= \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 \frac{d^2}{dw^2} + \frac{d^2w}{dt^2} \frac{d}{dw} \\ &= r'(t)^2 \frac{d^2}{dw^2} + r''(t) \frac{d}{dw} \\ &= \frac{w(4hw + m) + 4m_3w - 2p_\phi^2}{2w^2} \frac{d^2}{dw^2} - \frac{mw + 4m_3w - 4p_\phi^2}{4w^3} \frac{d}{dw},\end{aligned}$$

και η (4.2.15) μετασχηματίζεται στην

$$\tilde{n}''(w) + \frac{4p_\phi^2 - (m+4m_3)w}{2w(4hw^2 + (m+4m_3)w - 2p_\phi^2)} \tilde{n}'(w) + \frac{2(2m+m_3)}{w(4hw^2 + (m+4m_3)w - 2p_\phi^2)} \tilde{n}(w) = 0. \quad (4.2.16)$$

Ο μετασχηματισμός $w = r(t)$ επάγει μια πεπερασμένως διακλαδισμένη κάλυψη της Γ_h (4.2.12) και σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.1 αφήνει αναλλοίωτη την ταυτοτική συνιστώσα της διαφορικής ομάδας Galois της (4.2.15).

Θέτοντας

$$\begin{aligned}\tilde{n} &= u \exp\left(-\frac{1}{2} \int P\right) = \frac{\sqrt{w}}{(w(4(hw + m_3) + m) - 2p_\phi^2)^{1/4}} u, \\ P &= \frac{4p_\phi^2 - (m + 4m_3)w}{2w(4hw^2 + (m + 4m_3)w - 2p_\phi^2)}\end{aligned}$$

προκύπτει η ανάγωγη μορφή (RNVE)

$$\begin{aligned}u''(w) + I(w)u(w) &= 0, \\ I(w) &= \frac{224hmw^3 + (59m^2 + 248m m_3 + 48m_3^2 + 192hp_\phi^2)w^2 + 8p_\phi^2(12m_3 - 11m)w - 48p_\phi^4}{16w^2(4hw^2 + (m+4m_3)w - 2p_\phi^2)^2}.\end{aligned}\quad (4.2.17)$$

της (4.2.16).

Οι συντελεστές της (4.2.16) ανήκουν στο διαφορικό σώμα $\mathbb{C}(w)$ των ρητών συναρτήσεων ως προς w . Έστω G^0 η ταυτοτική συνιστώσα της διαφορικής ομάδας Galois G που αντιστοιχεί στην

(4.2.16). Εφόσον η G^0 αφήνει αναλλοίωτα τα στοιχεία που ανήκουν σε αλγεβρικές επεκτάσεις του $\mathbb{C}(w)$, ο μετασχηματισμός $\tilde{n} = u \exp(-\frac{1}{2} \int P)$ αφήνει αναλλοίωτη την G^0 .

Από το θεώρημα 3.3.8 προκύπτει ότι η ολοκληρωσιμότητα του IP (4.2.11) επάγει την επιλυσιμότητα της ταυτοτικής συνιστώσας $\tilde{G}^0$ της διαφορικής ομάδας Galois των εξισώσεων μεταβολών τάξης 1 (4.2.13). Σύμφωνα με την πρόταση 3.2.3, η $\tilde{G}^0$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν το ίδιο ισχύει για την ταυτοτική συνιστώσα G^0 της διαφορικής ομάδας Galois της εξίσωσης κάθετων μεταβολών (4.2.15). Η G^0 συμπίπτει με την ταυτοτική συνιστώσα της διαφορικής ομάδας Galois της $RNVE$ (4.2.17), επειδή η $RNVE$ προκύπτει από την (4.2.15) μέσω μιας πεπερασμένης διακλαδισμένης κάλυψης και ενός μετασχηματισμού που περιέχει αλγεβρικές συναρτήσεις επί του $\mathbb{C}(w)$. Συμπερασματικά, η ολοκληρωσιμότητα του IP (4.2.11) επάγει την επιλυσιμότητα της ταυτοτικής συνιστώσας G^0 της διαφορικής ομάδας Galois της $RNVE$ (4.2.17).

Η G^0 είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η $RNVE$ (4.2.17) επιδέχεται λύσεις Liouville ($Lsols$). Θα εξετάσουμε αν η $RNVE$ επιδέχεται $Lsols$ με εφαρμογή του θεωρήματος του Kovacic 2.3.1 και του αντίστοιχου αλγόριθμου.

Για $p_\phi \neq 0$ και $h \notin \{0, -(m+4m_3)/(32p_\phi^2)\}$ η $RNVE$ έχει τέσσερις κανονικές ιδιομορφίες στα σημεία w_0, w_1, w_2, w_∞ , όπου $w_0 = 0, w_1, w_2$ είναι οι ρίζες του $4hw^2 + (m+4m_3)w - 2p_\phi^2$ και $w_\infty = \infty$.

Ακολουθώντας την ενότητα 2.2, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(w, p) = p(p-1) + (w - w_i)^2 I(w), \quad i = 0, 1, 2.$$

Οι εκθέτες των λύσεων της $RNVE$ στις ιδιομορφίες w_0, w_1, w_2 ανήκουν στα αντίστοιχα σύνολα $E_0 = \{-1/2, 3/2\}, E_1 = E_2 = \{1/4, 3/4\}$ και είναι οι ρίζες των αντίστοιχων $f(w_i, p) = 0$ για $i = 0, 1, 2$.

Η διαφορά των εκθετών στο $w_0 = 0$ είναι ακέραιος αριθμός, οπότε στην περιοχή του w_0 το ανάπτυγμα της λύσης της $RNVE$ (4.2.17), που αντιστοιχεί στον εκθέτη $-1/2$, μπορεί να περιέχει λογαριθμικούς όρους. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f_j(p) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial w^j} f(w, p)|_{w=0}, \quad f(w, p) = p(p-1) + w^2 I(w).$$

και υπολογίζουμε την ποσότητα

$$\begin{aligned} F_2(-1/2) &= \begin{vmatrix} f_1(1/2) & f_2(-1/2) \\ f_0(1/2) & f_1(-1/2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{17m+12m_3}{8p_\phi^2} & -\frac{65m^2+296m_3m+144m_3^2}{64p_\phi^4} \\ -1 & -\frac{17m+12m_3}{8p_\phi^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{7m(2m+m_3)}{4p_\phi^4}. \end{aligned}$$

Από το σχόλιο 2.2.1, έπεται ότι για $p_\phi \neq 0$ το ανάπτυγμα της γενικής λύσης της $RNVE$ (4.2.17) περιέχει λογαριθμικούς όρους.

Για υπολογίσουμε τους εκθέτες στο $w_\infty = \infty$ θέτουμε $w = 1/s$, οπότε η $RNVE$ μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \hat{u}''(s) + \frac{2}{s} \hat{u}'(s) + \hat{a}(s) \hat{u}(s) &= 0 \\ \hat{a}(s) &= \frac{I(1/s)}{s^4} = \frac{-48p_\phi^4 s^3 - 8p_\phi^2(11m-12m_3)s^2 + (59m^2+248m_3m+48m_3^2+192hp_\phi^2)s + 224hm}{16s(2p_\phi^2 s^2 - (m+4m_3)s - 4h)}. \end{aligned}$$

Όπως παραπάνω, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\hat{f}(s, p) = p(p-1) + 2p + s^2 \hat{a}(s)$$

και από την εξίσωση δεικτών $\hat{f}(0, p) = 0$ προκύπτει το σύνολο εκθετών $E_\infty = \{-1, 0\}$ στο $w_\infty = \infty$. Η διαφορά των εκθετών είναι ακέραιος αριθμός και για να ελέγξουμε την ύπαρξη λογαριθμικών όρων ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\hat{f}_j(p) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial s^j} \hat{f}(s, p)|_{s=0}.$$

και υπολογίζουμε την

$$\hat{F}_1(-1) = \hat{f}_1(-1) = \frac{7m}{8h},$$

οπότε για $h \neq 0$ το ανάπτυγμα στο $w_\infty = \infty$ της γενικής λύσης της $RNVE$ (4.2.17) περιέχει λογαριθμικούς όρους.

Σύμφωνα με το σχόλιο 2.3.2, από την ύπαρξη λογαριθμικών όρων στο ανάπτυγμα της γενικής λύσης της $RNVE$ (4.2.17) στα w_0, w_∞ έπεται ότι μόνο οι περιπτώσεις (i), (iv) του θεωρήματος του Kovacic 2.3.1 μπορεί να ισχύουν.

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Kovacic, στην περίπτωση (i) η G^0 είναι επιλύσιμη και η $RNVE$ επιδέχεται $Lsols$ της μορφής

$$u(w) = w^{q_0} (w - w_1)^{q_1} (w - w_2)^{q_2} R(w), \quad (4.2.18)$$

όπου q_i είναι ένας εκθέτης στο w_i για $i = 0, 1, 2, \infty$ και $R(w)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού

$$\deg R(w) = -q_\infty - q_0 - q_1 - q_2. \quad (4.2.19)$$

Το ανάπτυγμα, στο w_i για $i = 0, 1, 2, \infty$, μιας λύσης της μορφής (4.2.18) δεν περιέχει λογαριθμικούς όρους. Τα αναπτύγματα στα w_0, w_∞ των λύσεων της $RNVE$ (4.2.17) που αντιστοιχούν στους μικρότερους εκθέτες περιέχουν λογάριθμους. Επομένως, αν η $RNVE$ επιδέχεται λύσεις της μορφής (4.2.18) θα ισχύει $q_0 = 3/2, q_\infty = 0$. Εφόσον $q_1, q_2 \in \{1/4, 3/4\}$, από την (4.2.19) προκύπτει ότι ο βαθμός του πολυωνύμου $R(w)$ είναι $\deg R(w) = -\frac{3}{2} - q_1 - q_2 < 0$. Άρα, η περίπτωση (i) δεν ισχύει για την $RNVE$.

Συνεπώς, ισχύει η περίπτωση (iv) του θεωρήματος του Kovacic 2.3.1, όπου η διαφορική ομάδα Galois G που αντιστοιχεί στην $RNVE$ (4.2.17) είναι ίση με $G = SL(2, \mathbb{C})$ και η G^0 δεν είναι επιλύσιμη. Άρα η G^0 δεν είναι και αβελιανή, κάτι που καθιστά το IP μη-ολοκληρώσιμο για $p_\phi \neq 0$ σύμφωνα με το θεώρημα των Morales-Ramis 3.3.8.

Λήμμα 4.2.3 ([100]). *Το IP δεν επιδέχεται ένα επιπλέον μερόμορφο πρώτο ολοκλήρωμα που να είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο της συνάρτησης $Hamilton$ (4.2.2) για $p_\phi \neq 0$.*

Από τα λήμματα 4.2.2, 4.2.3 προκύπτει το θεώρημα 4.2.1.

Για λόγους πληρότητας εξετάζουμε και την περίπτωση $p_\phi \neq 0$ και $h = 0$, όπου η $RNVE$ (4.2.17) έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} u''(w) + I(w)u(w) &= 0, \\ I(w) &= \frac{(59m^2 + 248m_3m + 48m_3^2)w^2 + 8(12m_3 - 11m)wp_\phi^2 - 48p_\phi^4}{16w^2(mw + 4m_3w - 2p_\phi^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Η (4.2.20) έχει τρεις κανονικές ιδιομορφίες στα σημεία $w_0 = 0$, $w_1 = \frac{2p_\phi^2}{m+4m_3}$ και $w_\infty = \infty$. Στα w_0, w_1, w_∞ αντιστοιχούν οι εκθέτες $E_0 = \{-1/2, 3/2\}$, $E_1 = \{1/4, 3/4\}$ και $E_\infty = \{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-(1/55)(s-4/55)}}{4\sqrt{s+4}}\}$ για $s = m/m_3 > 0$. Για $p_\phi \neq 0$ το ανάπτυγμα της λύσης που αντιστοιχεί στον εκθέτη $-1/2$ στην περιοχή του w_0 περιέχει λογάριθμους, άρα αν η G^0 είναι επιλύσιμη τότε ικανοποιεί την περίπτωση (i) του θεωρήματος του Kovacic 2.3.1. Συνεπώς, επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$u(w) = w^{q_0}(w - w_1)^{q_1}R(w), \quad (4.2.21)$$

όπου q_i είναι ένας εκθέτης στο w_i για $i = 0, 1, \infty$ και $R(w)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού

$$\deg R(w) = -q_\infty - q_0 - q_1. \quad (4.2.22)$$

Για να είναι ο $\deg R(w)$ πραγματικός πρέπει $s \in (0, 4/55]$, όπου για κάθε $q_\infty \in E_\infty$ ισχύει $q_\infty \in (-3/4, -1/4)$. Αναγκαστικά, αντικαθιστούμε στην (4.2.22) $q_0 = 3/2$ και για κάθε $q_1 \in E_1 = \{1/4, 3/4\}$, $q_\infty \in E_\infty$ ισχύει $\deg R(w) = -q_\infty - 3/2 - q_1 < 0$. Άρα, η $RNVE$ δεν επιδέχεται λύσεις Liouville σε αυτή την περίπτωση.

Για $p_\phi \neq 0$ και $h = -(m + 4m_3)/(32p_\phi^2)$ η $RNVE$ (4.2.17) έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} u''(w) + I(w)u(w) &= 0, \\ I(w) &= -\frac{4(7mp_\phi^2w + 3p_\phi^4)}{w^2((m + 4m_3)w - 4p_\phi^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει τρεις κανονικές ιδιομορφίες στα σημεία $w_0 = 0$, $w_1 = 4p_\phi^2/(m + 4m_3)$, $w_\infty = \infty$ με αντίστοιχους εκθέτες $E_0 = \{-1/2, 3/2\}$, $E_1 = \{\frac{1}{2} \pm \frac{2\sqrt{2s^2+9s+4}}{(s+4)}\}$ και $E_\infty = \{-1, 0\}$ για $s = m/m_3 > 0$. Το IP (4.2.11) για $p_\phi \neq 0$ έχει σταθερό σημείο στο $(r, z, p_r, p_z) = (4p_\phi^2/(m + 4m_3), 0, 0, 0)$ και οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα (υπολογισμένου στο σταθερό σημείο) του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου έχουν μηδενικό πραγματικό μέρος. Το σταθερό σημείο κείται στην ισοσταθμική επιφάνεια της συνάρτησης Hamilton 4.2.2 που αντιστοιχεί στην τιμή $h = -(m + 4m_3)/(32p_\phi^2)$. Η $RNVE$ (4.2.17) προέκυψε θέτοντας $w = r(t)$ και αυτός ο μετασχηματισμός απεικόνισε το σταθερό σημείο του IP (4.2.11) στο ιδιόμορφο σημείο w_1 της αντίστοιχης $RNVE$ (4.2.23). Στα σημεία w_0, w_∞ , τα αναπτύγματα των λύσεων της (4.2.23) περιέχουν λογαριθμικούς όρους, οπότε η εξίσωση είτε δεν επιδέχεται λύσεις Liouville είτε επιδέχεται μια λύση της μορφής (4.2.21) με

$$\deg R(w) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2s^2+9s+4}}{(s+4)}. \quad (4.2.24)$$

Ο $\deg R(w)$ είναι μη-αρνητικός ακέραιος μόνο για $s = 3$ με $\deg R(w) = 0$. Η αντίστοιχη συνάρτηση (4.2.21) έχει τη μορφή

$$u_1(w) = w^{3/2}(w - w_1)^{-3/2}$$

και είναι μια ειδική λύση της (4.2.23), ενώ μια δεύτερη ειδική λύση που προκύπτει από τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης είναι η

$$u_2(w) = u_1(w) \left(\frac{32p_\phi^6}{w^2} - \frac{336m_3p_\phi^4}{w} + 343m_3^3w - 588m_3^2p_\phi^2 \ln(w) \right).$$

Για κάθε $g^0 \in G^0$ ισχύει $g^0(u_1(w)) = u_1(w)$, επειδή $u_1(w) \in \mathbb{C}(w)$. Επίσης, ισχύει $g^0(\ln(w)) = \ln(w) + c$ από το οποίο προκύπτει $g^0(u_2(w)) = u_2(w) + c u_1(w)$ για $c \in \mathbb{C}$. Συνεπώς, η G^0 έχει τη μορφή

$$G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C} \right\}$$

και είναι αβελιανή. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $p_\phi \neq 0$, $h = -(m+4m_3)/(32p_\phi^2)$ και $m = 3m_3$ το IP ικανοποιεί τις αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας του θεωρήματος των Morales-Ramis 3.3.8, δίχως να είναι ολοκληρώσιμο.

Ομοίως, μπορούμε να χειριστούμε και την περίπτωση $p_\phi = 0$, που διερευνήσαμε στην προηγούμενη υποενότητα. Για $p_\phi = 0$ και $h \neq 0$ η $RNVE$ (4.2.17) έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} u''(w) + I(w)u(w) &= 0, \\ I(w) &= \frac{8m(28hw + 31m_3) + 59m^2 + 48m_3^2}{16w^2(4(hw + m_3) + m)^2} \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

και έχει τρεις κανονικές ιδιομορφίες στα σημεία $w_0 = 0$, $w_1 = -\frac{m+4m_3}{4h}$, $w_\infty = \infty$ με αντίστοιχους εκθέτες $E_0 = \{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-(1/55)(s-4/55)}}{4\sqrt{s+4}}\}$, $E_1 = \{1/4, 3/4\}$ και $E_\infty = \{-1, 0\}$ για $s = m/m_3 > 0$. Στο w_∞ το ανάπτυγμα της λύσης της (4.2.25) που αντιστοιχεί στον εκθέτη -1 περιέχει λογαριθμικούς όρους για $h \neq 0$, οπότε αναζητούμε τους καταλλήλους $q_i \in E_i$ για $i = 0, 1$ ώστε ο, αντίστοιχος του (4.2.22), αριθμός $\deg R(w) = -q_0 - q_1$ να είναι φυσικός αριθμός. Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση, έχουμε αναγκαία $s \in (0, 4/55]$ και για κάθε $q_0 \in E_0$ ισχύει $q_0 \in (1/4, 3/4)$, καθιστώντας το $\deg R(w) = -q_0 - q_1$ αρνητικό. Άρα, καταλήγουμε σε μια δεύτερη απόδειξη του λήμματος 4.2.2.

Για $p_\phi = 0$ και $h = 0$ η $RNVE$ (4.2.17) γίνεται

$$\begin{aligned} u''(w) + I(w)u(w) &= 0, \\ I(w) &= \frac{59s + 12}{16(s+4)w^2} \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

για $s = m/m_3 > 0$ και είναι μια εξίσωση τύπου Euler. Για $s \neq 4/55$ η γενική λύση της (4.2.26) είναι η

$$u(w) = c_1 w^{q_+} + c_2 w^{q_-}, \quad q_{\pm} = \frac{1}{4} \left(2 \pm \sqrt{\frac{4-55s}{s+4}} \right).$$

Παρατηρούμε ότι $w^{q_{\pm}} = \exp(q_{\pm} \int w^{-1} dw)$, οπότε οι w^{q_+} , w^{q_-} ανήκουν σε μια επέκταση Liouville του $\mathbb{C}(w)$. Έστω G η διαφορική ομάδα Galois που αντιστοιχεί στην (4.2.26). Για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$\frac{d}{dw} g(w^{q_+}) = g\left(\frac{d}{dw} w^{q_+}\right) = g(q_+ w^{q_+} w^{-1}) = q_+ g(w^{q_+}) w^{-1} \Rightarrow g(w^{q_+}) = c w^{q_+}$$

για $c \in \mathbb{C}^*$. Από τη σχέση $q_- = 1 - q_+$ προκύπτει

$$g(w^{q_+})g(w^{q_-}) = g(w^{q_+}w^{q_-}) = g(w) = w \Rightarrow g(w^{q_-}) = c^{-1}w^{q_-}.$$

Οπότε η μορφή της G για $s \neq 4/55$ είναι

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}^* \right\}$$

και είναι αβελιανή. Για $q_+ \in \mathbb{Q}$ με $q_+ = n/k$ και $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^*$ ισχύει $g(w^{q_+})^k = c^k w^n$, ενώ $g(w^{q_+})^k = g(w^{k q_+}) = g(w^n) = w^n$, επειδή $w^n \in \mathbb{C}(w)$. Συνεπώς, για $q_+ \in \mathbb{Q}$ η G έχει την προαναφερόμενη μορφή με $c^k = 1$ και είναι μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα. Για $s = 4/55$ η γενική λύση της (4.2.26) είναι η

$$u(w) = c_1 w^{1/2} + c_2 w^{1/2} \ln(w)$$

Όμοια με παραπάνω, προκύπτει ότι $g(w^{1/2}) = c w^{1/2}$ με $c^2 = 1$. Επίσης, από τη σχέση $g(\ln(w)) = \ln(w) + a$ με $a \in \mathbb{C}$, έπεται ότι $g(w^{1/2} \ln(w)) = \pm a w^{1/2} \pm w^{1/2} \ln(w)$. Άρα, η μορφή της G για $s = 4/55$ είναι

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$$

και είναι αβελιανή. Δηλαδή, οι αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας του θεωρήματος Morales-Ramis ικανοποιούνται από το IP για $p_\phi = 0$ και $h = 0$.

4.2.4 Αριθμητική επεξεργασία του IP

Στην παρούσα υποενότητα διερευνούμε το χώρο φάσεων του IP με χρήση τομών Poincaré.

Η περιοχή κίνησης των τριών σωμάτων που απαρτίζουν το IP είναι το σύνολο

$$\mathcal{O} = \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{m}{4r} - \frac{m_3}{\sqrt{r^2 + az^2}} \leq h, \ a = \frac{2m+m_3}{m_3} \right\}, \quad (4.2.27)$$

όπου η ισότητα αντιστοιχεί στις καμπύλες μηδενικής ταχύτητας (zero velocity curves) (ZVC). Για $h < -m^2/(32p_\phi^2)$ οι ZVC σχηματίζουν μια κλειστή καμπύλη και το σώμα b_3 με μάζα m_3 που κινείται κατά μήκος του άξονα z δε διαφεύγει από τη βαρυτική έλξη των άλλων δυο, που έχουν ίση μάζα $m_1 = m_2 = m$.

Το σχήμα 4.4 αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου οι μάζες όλων των σωμάτων είναι ίσες, η οποία έχει μελετηθεί στην εργασία [37]. Παρατηρούμε ότι κρατώντας σταθερές τις τιμές των $m = m_3$, h και αυξάνοντας την τιμή της γωνιακής ορμής p_ϕ μειώνεται το εύρος των χαοτικών περιοχών. Το αντίθετο αποτέλεσμα έχει η αύξηση της τιμής της m_3 για σταθερές τιμές των m , h , p_ϕ , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5. Στις εικόνες 4.4 (iii), 4.5 (i) η χαοτική συμπεριφορά είναι εμφανής μόνο σε μικρές περιοχές των υπερβολικών σταθερών σημείων της απεικόνισης Poincaré.

Τα σύνορα των περιοχών στα σχήματα 4.4, 4.5 αντιστοιχούν στην ολοκληρωτική καμπύλη

$$\frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{4m_3 + m}{4r} = h,$$

που χρησιμοποιήσαμε για τη διερεύνηση της ολοκληρωσιμότητας του IP

Σχήμα 4.3: Η περιοχή $\mathcal{O}$ (4.2.27) (γκρι περιοχή) και οι ZVC (μαύρες γραμμές) του IP για $m = m_3 = 1/4$ και $h = -1$.

Σχήμα 4.4: Οι τομές Poincaré $z = 0$ του IP $m = m_3 = 1/4$ και $h = -1$. Οι οριζόντιοι και οι κάθετοι άξονες αντιστοιχούν στις συντεταγμένες $r, r'(t)$.

Σχήμα 4.5: Οι τομές Poincaré $z = 0$ του IP για $m = 1/4, h = -1$ και $p_\phi = 0.15$. Οι οριζόντιοι και οι κάθετοι άξονες αντιστοιχούν στις συντεταγμένες $r, r'(t)$.

4.3 Συμπεράσματα

Η εφαρμογή της θεωρίας Morales-Ramis [88] και της επέκτασής της σε εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης [94] συνοψίζεται σε τρία βήματα:

- (i). Εύρεση μιας ειδικής λύσης του συστήματος Hamilton.
- (ii). Ορισμός των εξισώσεων μεταβολών (VE) κατά μήκος της ειδικής λύσης.
- (iii). Ανάλυση των συνθηκών υπό τις οποίες η ταυτοτική συνιστώσα της διαφορικής ομάδας Galois των VE είναι αβελιανή.

Η μελέτη του ανηγμένου ανισοτροπικού προβλήματος Størmer με μηδενική γωνιακή ορμή (ASP_0) και αντίστοιχη συνάρτηση Hamilton

$$H = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{r^2}{2(r^2 + \nu^2 z^2)^3},$$

καθώς και η μελέτη του ανηγμένου ισοσκελούς προβλήματος τριών σωμάτων (IP) με αντίστοιχη συνάρτηση Hamilton

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_z^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{m}{4r} - \frac{m_3}{\sqrt{r^2 + az^2}}, \quad a = \frac{2m+m_3}{m_3}$$

μας βοήθησαν να εντυφώσουμε στις ιδιαιτερότητες της προαναφερόμενης θεωρίας.

Για συστήματα που προκύπτουν από συναρτήσεις Hamilton της μορφής

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + V(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in \mathbb{C}^N, \quad (4.3.1)$$

όπου $V(\mathbf{q})$ είναι ομογενής βαθμού $k \in \mathbb{Z}$, η εφαρμογή της θεωρίας Morales-Ramis είναι αλγοριθμική. Όπως περιγράψαμε στην ενότητα 3.3, κάθε μη-μηδενική λύση του συστήματος

$$V_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}) = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{C}^N, \quad (4.3.2)$$

οδηγεί σε μια ειδική λύση του συστήματος Hamilton και τις αντίστοιχες εξισώσεις κάθετων μεταβολών πρώτης τάξης (NVE_1). Αν οι NVE_1 μπορούν να διαχωριστούν, τότε κάθε μια από αυτές μπορεί να μετασχηματιστεί στην υπεργεωμετρική εξίσωση του Gauss. Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι επιλύσιμη η ταυτοτική συνιστώσα της διαφορικής ομάδας Galois της υπεργεωμετρικής εξίσωσης περιέχονται στο θεώρημα του Kimura 2.4.3. Από το προαναφερόμενο θεώρημα και τη θεωρία Morales-Ramis προκύπτει ότι αν το σύστημα Hamilton είναι ολοκληρώσιμο, τότε οι ιδιοτιμές του Εσσιανού πίνακα της $V(\mathbf{q})$, για $\mathbf{q} = \mathbf{c}$, έχουν συγκεκριμένες διακριτές τιμές, που περιγράφονται στο θεώρημα 3.3.12.

Ο αλγοριθμικός χαρακτήρας και η επαγόμενη απλότητα στη διερεύνηση συναρτήσεων Hamilton της μορφής (4.3.1) είναι εμφανής στην ανάλυση του IP για $p_\phi=0$. Η λύση

$$(c_1, c_2) = \left((m + 4m_3)^{1/3} / 2^{2/3}, 0 \right)$$

του αντίστοιχου συστήματος (4.3.2) είναι αρκετή για να αποδειχθεί η μη-ολοκληρωσιμότητα αυτής της περίπτωσης, για κάθε τιμή των m, m_3 .

Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος λύσεων του συστήματος (4.3.2), που αντιστοιχούν σε διαφορετικές NVE_1 , τόσο περισσότερες συνθήκες προκύπτουν για την ολοκληρωσιμότητα του συστήματος Hamilton. Η ύπαρξη περισσότερων από μίας λύσεων του (4.3.2) μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη για συστήματα που εξαρτώνται από παραμέτρους, όπως το ASP_0 . Στην εργασία [8], η λύση $(c_1, c_2) = ((-2)^{1/6}, 0)$ του αντίστοιχου συστήματος (4.3.2) και η εφαρμογή του θεωρήματος 3.3.12 οδήγησε στο συμπέρασμα ότι για $\nu^2 \notin \{17/108, 5/12, 65/108, 2/3\}$ το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο. Στη συνέχεια, οι συγγραφείς της προαναφερόμενης εργασίας, στηριζόμενοι στην ίδια ειδική λύση, εφάρμοσαν μια παραλλαγή του αλγόριθμου Kovacic και μετά από πολύπλοκους υπολογισμούς κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο για $\nu^2 \notin \{5/12, 2/3\}$. Στην παρούσα διερεύνηση η επιπλέον λύση

$$(c_1, c_2) = \left(i \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\nu^{1/3}}{(\nu^2 - 1)^{2/3}}, \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{(3\nu^2 - 2)^{1/2}}{\nu^{2/3}(\nu^2 - 1)^{2/3}} \right)$$

του αντίστοιχου συστήματος (4.3.2), σε συνδυασμό με τους περιορισμούς που προκύπτουν από τη λύση $(c_1, c_2) = ((-2)^{1/6}, 0)$, μας έδωσε τη δυνατότητα να αποδείξουμε ότι το ASP_0 είναι μη-ολοκληρώσιμο για $\nu^2 \neq 2/3$, με αποκλειστική εφαρμογή του θεωρήματος 3.3.12.

Για συστήματα Hamilton που δεν είναι της μορφής (4.3.1) η εφαρμογή της θεωρίας Morales-Ramis παύει να είναι αλγοριθμική. Αν είναι εφικτή η εύρεση μιας ειδικής λύσης, τότε το επόμενο βήμα είναι να διαχωριστούν οι επαγόμενες NVE_1 . Σε περίπτωση που το σύστημα διαχωρισμένων NVE_1 περιέχει μια εξίσωση Lamé, η διερεύνηση διευκολύνεται σημαντικά επειδή είναι γνωστές οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε μια εξίσωση τύπου Lamé να επιδέχεται λύσεις τύπου Liouville [88]. Μια διαφορετική προσέγγιση έγκειται στο μετασχηματισμό τουλάχιστον μιας από τις NVE_1 σε μια διαφορική εξίσωση τάξης 2 με ρητούς συντελεστές ($RNVE$). Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με το μετασχηματισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής, ο οποίος πρέπει να είναι μια πεπερασμένως διακλαδισμένη κάλυψη, ώστε να παραμένει αναλλοίωτη η ταυτοτική συνιστώσα της διαφορικής ομάδας Galois των NVE_1 . Αν η $RNVE$ είναι μια εξίσωση τύπου Bessel, Whittaker, Weber ή μια υπεργεωμετρική εξίσωση, η ολοκληρωσιμότητα του συστήματος Hamilton κρίνεται μέσω των γνωστών αναγκαιών και ικανών συνθηκών, υπό τις οποίες οι προαναφερόμενες εξισώσεις επιδέχονται λύσεις Liouville [62, 88]. Αν η $RNVE$ δεν ανήκει σε καμία από τις προαναφερόμενες οικογένειες, τότε γίνεται επιτακτική η εφαρμογή του αλγόριθμου Kovacic [62], που περιγράψαμε στην ενότητα 2.3, με τον οποίο μπορούμε (θεωρητικά) να κατασκευάσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε μια διαφορική εξίσωση τάξης 2 με ρητούς συντελεστές να επιδέχεται λύσεις Liouville.

Η συνάρτηση δυναμικού του IP για $p_\phi \neq 0$ δεν είναι ομογενής. Το επίπεδο $z = p_z = 0$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του IP , ο οποίος περιέχει την οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών

$$\Gamma_h : \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} - \frac{4m_3 + m}{4r} = h.$$

Θέτοντας $w = r(t)$ επάγεται μια πεπερασμένως διακλαδισμένη κάλυψη της Γ_h και η αντίστοιχη εξίσωση κάθετων μεταβολών μετασχηματίζεται σε μια εξίσωση με ρητούς συντελεστές ($RNVE$), που δεν ανήκει σε καμία από τις προαναφερόμενες οικογένειες εξισώσεων. Για $h \neq 0$ η $RNVE$ έχει τέσσερις κανονικές ιδιομορφίες και με εφαρμογή της μεθόδου του Frobenius δείξαμε ότι σε δύο από αυτές οι εκθετικές διαφορές είναι ακέραιες. Η διερεύνηση των αναπτυγμάτων των λύσεων στις περιοχές των δύο προαναφερόμενων ιδιομορφιών ανέδειξε την ύπαρξη λογαριθμικών όρων, κάτι που υποδεικνύει ότι η διαφορική ομάδα Galois της $RNVE$ είτε ανάγεται σε τριγωνική μορφή (περίπτωση (i) του αλγόριθμου Kovacic) και έχει επιλύσιμη ταυτοτική συνιστώσα (G^0), είτε είναι

ισόμορφη με την $SL(2, \mathbb{C})$ (περίπτωση (iv) του αλγόριθμου Kovacic) με μη-επιλύσιμη G^0 . Εφαρμόζοντας την περίπτωση (i) του αλγόριθμου Kovacic αποδείξαμε ότι οι αναγκαίες συνθήκες αυτής της περίπτωσης δεν ικανοποιούνται από την $RNVE$. Άρα, η G^0 είναι μη-επιλύσιμη και ακολούθως μη-αβελιανή, οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι το IP για $p_\phi \neq 0$ είναι μη-ολοκληρώσιμο, σύμφωνα με το θεώρημα των Morales-Ramis 3.3.8.

Ως τώρα έχουμε αναφερθεί στην ανάλυση των εξισώσεων μεταβολών πρώτης τάξης (VE_1) και πιο συγκεκριμένα στη διερεύνηση των εξισώσεων κάθετων μεταβολών (NVE), στις οποίες επικεντρώνεται η θεωρία Morales-Ramis. Οι VE_1 προκύπτουν από τον Εσσιανό πίνακα της συνάρτησης Hamilton, όπως αυτός ορίζεται κατά μήκος μιας ειδικής λύσης του αντίστοιχου συστήματος Hamilton (S_H). Εξαιτίας αυτού, δύο διαφορετικές συναρτήσεις Hamilton μπορεί να έχουν τις ίδιες NVE ή ακόμα και τις ίδιες VE_1 , κατά μήκος κατάλληλων ειδικών λύσεων. Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση Hamilton

$$H_1 = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_z^2) + \frac{1}{2(r^2 + z^2)^2}$$

και αυτήν του ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$

$$H_{SP} = \frac{1}{2}(p_r^2 + p_z^2) + \frac{r^2}{2(r^2 + \frac{2}{3}z^2)^3}.$$

Το επίπεδο $z = p_z = 0$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος των S_{H_1} , $S_{H_{SP}}$, στο οποίο κείται η οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών

$$\frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2r^4} = h.$$

Οι αντίστοιχες VE_1 έχουν τη μορφή

$$\dot{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{10}{r^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r^6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{n},$$

όπου $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)^T$ και η εξίσωση $\ddot{n} = 2r^{-6}n$ είναι η NVE . Όπως δείξαμε στην υποενότητα 4.1.2, η NVE επιδέχεται λύσεις Liouville και η G_0 είναι αβελιανή. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η θεωρία Morales-Ramis δεν “διακρίνει” τις διαφορές ανάμεσα στα S_{H_1} , $S_{H_{SP}}$, παρόλο που το S_{H_1} είναι ολοκληρώσιμο, ενώ το $S_{H_{SP}}$ είναι μη-ολοκληρώσιμο. Οι παράγωγοι τάξης μέχρι 3 των H_1 , H_{SP} είναι ταυτόσημες για $z = p_z = 0$, ενώ στην παράγωγο τάξης 4 συναντούμε την πρώτη διαφορά και συγκεκριμένα μόνο στους όρους $\frac{\partial^4 H_1}{\partial z^4}(r, 0, p_r, 0) = \frac{36}{r^8}$, $\frac{\partial^4 H_{SP}}{\partial z^4}(r, 0, p_r, 0) = \frac{32}{r^8}$. Διαισθητικά, είναι φανερό ότι χρειάζεται μια προσέγγιση που θα λαμβάνει υπόψιν τις παραγώγους των H_1 , H_{SP} μέχρι και τάξης 4, τουλάχιστον. Αυτή την ανάγκη ικανοποιεί το θεώρημα των Morales-Ramis-Simó 3.3.10, που είναι η γενίκευση του θεωρήματος των Morales-Ramis 3.3.8 σε εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης.

Οι εξισώσεις μεταβολών τάξης $k \geq 2$ (VE_k) είναι ένα μη-ομογενές, μη-γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Όπως δείξαμε στην ενότητα 3.2, οι VE_k μπορούν πάντα να μετατραπούν σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων (LVE_k), του οποίου οι λύσεις βρίσκονται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις λύσεις των VE_k . Αυτό ήταν το κομβικό σημείο που επέτρεψε στους Morales-Ramis-Simó να αποδείξουν ότι η ταυτοτική συνιστώσα G_k^0 της διαφορικής

ομάδας Galois των LVE_k , που αντιστοιχεί σε ένα ολοκληρώσιμο σύστημα Hamilton, είναι αβελιανή. Η διερεύνηση των συνθηκών για να είναι αβελιανή η G_k^0 είναι σε πολλά προβλήματα, πρακτικά, ανέφικτη. Στις περισσότερες δημοσιεύσεις, η προαναφερόμενη δυσκολία ξεπεράστηκε όταν οι VE_1 , που είναι ένα γραμμικό ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων, αποτελούνταν από εξισώσεις τύπου Lamé

$$\ddot{n} - (l(l+1)\wp(t, g_2, g_3) + A)n = 0, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad B \in \mathbb{C},$$

όπου $\wp(t, g_2, g_3)$ είναι η ελλειπτική συνάρτηση $\wp$ του Weierstrass, η οποία ικανοποιεί την εξίσωση

$$\dot{\mathcal{P}}(t)^2 = 4\mathcal{P}(t)^3 - g_2\mathcal{P}(t) - g_3, \quad \mathcal{P}(t) = \wp(t, g_2, g_3).$$

Μέσα στο θεμελιώδες παραλληλόγραμμο περιόδων, η μοναδική ιδιομορφία της $\wp(t, g_2, g_3)$ είναι ένας πόλος τάξης 2 στο $t = 0$. Στην ενότητα 2.5 δείξαμε ότι οι παραπάνω εξισώσεις επιδέχονται λύσεις Liouville, ενώ η διαφορική τους ομάδα Galois συμπίπτει με την ταυτοτική της συνιστώσα και είναι αβελιανή, επειδή τα αναπτύγματα των λύσεων δεν περιέχουν λογαριθμικούς όρους στην περιοχή του $t = 0$. Το γραμμικό ομογενές μέρος των VE_k συμπίπτει πάντα με τις VE_1 , ενώ οι αντίστοιχες LVE_k έχουν τις ίδιες ιδιομορφίες με τις VE_1 . Συνεπώς, η ύπαρξη λογαριθμικών όρων στα αναπτύγματα των λύσεων μιας VE_k για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$ αρκεί για να αποδειχθεί ότι η αντίστοιχη G_k^0 είναι μη-αβελιανή, στην περίπτωση όπου οι VE_1 αποτελούνται από εξισώσεις τύπου Lamé.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, το ASP_0 επιδέχεται την οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών

$$\frac{1}{2}p_r^2 + \frac{1}{2r^4} = h, \quad p_r = \dot{r}(t), \quad (4.3.3)$$

που περιέχεται στο αναλλοίωτο επίπεδο $z = p_z = 0$ και οι αντίστοιχες VE_1 για $\nu^2 = 2/3$ έχουν τη μορφή

$$\dot{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{10}{r(t)^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r(t)^6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{n} \quad (4.3.4)$$

για $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)^T$. Η μορφή των VE_1 δεν μας επιτρέπει να αντλήσουμε πληροφορίες για τις ιδιομορφίες του συστήματος, που βρίσκονται στις ρίζες της $r(t)$. Εφαρμόζοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτη την G_1^0 , φέραμε τις (4.3.3), (4.3.4) στη μορφή

$$x'(w)^2 = 4x(w)^3 - 8hx(w)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{24h}{x(w)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{n},$$

όπου $x(w) = \wp(w, 8h, 0)$. Οι μετασχηματισμένες VE_1 (για απλότητα θα τις σημειώνουμε και πάλι ως VE_1) δεν αποτελούνται από εξισώσεις Lamé. Παρόλα αυτά, εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της $\wp(w, 8h, 0)$, αποδείξαμε ότι επιδέχονται υπερβατικές λύσεις Liouville και ότι η G_1^0 είναι αβελιανή. Αφού οι VE_1 ικανοποιούν τις αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας του θεωρήματος 3.3.8, ορίσαμε τις VE_2 , VE_3 για να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.3.10. Μέσα στο θεμελιώδες παραλληλόγραμμο περιόδων, η $\wp(w, 8h, 0)$ έχει μια ρίζα w_0 βαθμού 2, στην περιοχή της οποίας

τα αναπτύγματα των λύσεων της VE_1 δεν περιέχουν λογάριθμους. Το γραμμικό ομογενές μέρος των VE_2, VE_3 ταυτίζεται με την VE_1 , ενώ οι αντίστοιχες LVE_2, LVE_3 έχουν τις ίδιες ιδιομορφίες με αυτές των VE_1 , οπότε οι LVE_2, LVE_3 είναι κανονικώς ιδιόμορφες. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, κατασκευάσαμε τις λύσεις των VE_2, VE_3 και δείξαμε ότι το ανάπτυγμα της γενικής λύσης της VE_3 , στην περιοχή του w_0 , περιέχει λογαριθμικούς όρους. Αυτό σημαίνει ότι η αναλυτική συνέχιση της γενικής λύσης των VE_3 γύρω από το w_0 δεν την αφήνει αναλλοίωτη, κάτι που ισοδυναμεί με το ότι η μονόδρομη ομάδα M_3 των LVE_3 δεν είναι αβελιανή. Επειδή η LVE_3 έχει κανονικές ιδιομορφίες, η M_3 παράγει τη διαφορική ομάδα Galois των LVE_3 . Επίσης, η VE_1 δεν επιδέχεται αλγεβρικές λύσεις Liouville, οπότε η διαφορική ομάδα Galois των LVE_3 είναι συνεκτική (ως προς την τοπολογία Zariski) και ταυτίζεται με την ταυτοτική της συνιστώσα G_3^0 . Άρα, η M_3 παράγει την G_3^0 και η G_3^0 είναι μη-αβελιανή. Συνεπώς, οι αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας του θεωρήματος 3.3.10 δεν ικανοποιούνται και το ASP_0 για $\nu^2 = 2/3$ είναι μη-ολοκληρώσιμο.

Όπως είδαμε, η εφαρμογή του προαναφερόμενου θεωρητικού πλαισίου μας βοήθησε να αποδείξουμε τη μη-ολοκληρωσιμότητα του ASP_0 και του IP [100]. Κομβικά σημεία στην ανάλυση του ASP_0 ήταν η εύρεση μιας επιπλέον οικογένειας ειδικών λύσεων του συστήματος και η γενίκευση της θεωρίας Morales-Ramis σε εξισώσεις ανώτερης τάξης. Τα αποτελέσματά μας ολοκλήρωσαν τη διερεύνηση της ολοκληρωσιμότητας του ανισοτροπικού προβλήματος Størmer, που είχε ξεκινήσει στις εργασίες [6, 8] από τους Almeida et al. Η ανάλυση του χώρου φάσεων του IP έχει τις ρίζες της στις αρχές του 20ου αιώνα [24] και από τότε έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον των ερευνητών. Παρ' όλ' αυτά, δεν είχε διερευνηθεί η ολοκληρωσιμότητα του IP , με εφαρμογή αναλυτικών μεθόδων. Η θεωρία Morales-Ramis μας έδωσε τη δυνατότητα να αποδείξουμε ότι το IP δεν επιδέχεται ένα επιπλέον μερόμορφο πρώτο ολοκλήρωμα, που να είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο της συνάρτησης Hamilton. Ξεχωριστή σημασία στην απόδειξη είχε ο αλγόριθμος Kovacic, που προσφέρει ένα αλγοριθμικό τρόπο για τον έλεγχο των αναγκαιών συνθηκών ολοκληρωσιμότητας, που προκύπτουν από τη θεωρία Morales-Ramis.

Η θεωρία Morales-Ramis βασίζεται στη διαφορική θεωρία Galois, η οποία απαιτεί την αναλυτική συνέχιση σε μιγαδικές τιμές των (εξαρτημένων και ανεξάρτητων) μεταβλητών του, υπό διερεύνηση, συστήματος Hamilton (S_H). Κάθε ειδική λύση του S_H αντιστοιχεί σε μια επιφάνεια Riemann Γ και η ύπαρξη των επιπλέον ανεξάρτητων πρώτων ολοκληρωμάτων, σε μια συνεκτική περιοχή της Γ , επάγει συνθήκες για τις εξισώσεις μεταβολών που ορίζονται κατά μήκος της Γ . Αν οι προαναφερόμενες συνθήκες δεν ικανοποιούνται, τότε δεν υπάρχει κατάλληλο πλήθος μιγαδικών μερόμορφων πρώτων ολοκληρωμάτων του μιγαδικού S_H . Αυτό σημαίνει ότι το αρχικό σύστημα, που αντιστοιχεί σε πραγματικές μεταβλητές, δεν επιδέχεται κατάλληλο πλήθος πρώτων ολοκληρωμάτων (με πραγματικές μεταβλητές) που να επιδέχονται αναλυτική συνέχιση σε μιγαδικές τιμές σε μια περιοχή της Γ . Δηλαδή, δεν αποκλείεται να υπάρχουν πρώτα ολοκληρώματα του συστήματος που δεν επιδέχονται αναλυτική συνέχιση στους μιγαδικούς.

Γενικά, η αναλυτική συνέχιση σε μιγαδικές τιμές "εμπλουτίζει" τη δυναμική του συστήματος. Για παράδειγμα θεωρούμε τη συνάρτηση Hamilton

$$H_{GN} = p_x^2 - p_x p_y + p_y^2 + 2 \cosh(x) + 2 \cosh(y) + 2 \cosh(x + y)$$

η οποία σχετίζεται με τα αποκαλούμενα μοντέλα Gross-Neveu [46]. Στην εργασία [81] αποδείχτηκε ότι το αντίστοιχο σύστημα Hamilton $S_{H_{GN}}$ δεν επιδέχεται ένα επιπλέον ανεξάρτητο μιγαδικό μερόμορφο πρώτο ολοκλήρωμα. Η χρήση τομών Poincare για διάφορες τιμές της H_{GN} δεν φανέρωσε χαοτική δυναμική, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6.

Σχήμα 4.6: Οι τομές Poincare $x = 0$ του $S_{H_{GN}}$ για $H_{GN} = 8$. Ο οριζόντιος και ο κάθετος άξονας αντιστοιχούν στους άξονες y, p_y .

Θέτοντας $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (\mathbf{i}x, \mathbf{i}y, -\mathbf{i}p_x, -\mathbf{i}p_y)$ προκύπτει η συνάρτηση Hamilton $K_{GN}(x, y, p_x, p_y) = H_{GN}(\mathbf{i}x, \mathbf{i}y, -\mathbf{i}p_x, -\mathbf{i}p_y)$, όπου

$$K_{GN} = -p_x^2 + p_x p_y - p_y^2 + 2 \cos(x) + 2 \cos(y) + 2 \cos(x + y).$$

Ο μετασχηματισμός $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (\mathbf{i}x, \mathbf{i}y, -\mathbf{i}p_x, -\mathbf{i}p_y)$, παρόλη τη φαινομενική του απλότητα, έχει δραματική επίδραση στη δυναμική του συστήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.7.

Σχήμα 4.7: Οι τομές Poincare $x = 0$ του $S_{K_{GN}}$ για $K_{GN} = -2$. Ο οριζόντιος και ο κάθετος άξονας αντιστοιχούν στους άξονες y, p_y .

Ο $(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (\mathbf{i}x, \mathbf{i}y, -\mathbf{i}p_x, -\mathbf{i}p_y)$ είναι ένας κανονικός μετασχηματισμός, οπότε το $S_{H_{GN}}$ επιδέχεται ένα επιπλέον ανεξάρτητο πρώτο ολοκλήρωμα (με πραγματικές μεταβλητές) αν και μόνο

αν το ίδιο ισχύει και για το $S_{K_{GN}}$. Η εικόνα του χώρου φάσεων του $S_{H_{GN}}$ παραπέμπει σε ολοκληρώσιμο σύστημα. Παρ' όλ' αυτά, ο προαναφερόμενος μετασχηματισμός και η αριθμητική επεξεργασία του $S_{K_{GN}}$ έκαναν εμφανές το αντίθετο. Τα προαναφερόμενα συνθέτουν άλλο ένα παράδειγμα που υποδεικνύει ότι η αναλυτική συνέχιση σε μιγαδικές τιμές, ενώ είναι μια μαθηματική διεργασία χωρίς φυσική έννοια, μπορεί να αποτελέσει ένα πολύτιμο εργαλείο για τη διερεύνηση της ολοκληρωσιμότητας ενός συστήματος με πραγματικές μεταβλητές.

Στην παρούσα διατριβή παρουσιάσαμε και εφαρμόσαμε τη θεωρία Morales-Ramis [88] και τη γενίκευσή της σε εξισώσεις μεταβολών ανώτερης τάξης [94] στη μελέτη της ολοκληρωσιμότητας του ανισοτροπικού προβλήματος Størmer και του ισοσκελούς προβλήματος 3-σωμάτων. Η ενσωμάτωση εννοιών από πολλούς κλάδους των μαθηματικών, παρόλο που την καθιστά απαιτητική για οποιονδήποτε σκοπεύει να εμβαθύνει σε αυτήν, έχει προσελκύσει πολλούς ερευνητές με διαφορετικές εξειδικεύσεις ώστε να συνεισφέρουν, ο καθένας από τη σκοπιά του. Μολονότι το θεωρητικό πλαίσιο παρουσιάστηκε μόλις το 1999, ήδη πολυάριθμες εφαρμογές του έχουν αποδείξει τη μη-ολοκληρωσιμότητα συστημάτων που μελετούνταν δεκαετίες, ενώ έχει οδηγήσει στην ανακάλυψη νέων ολοκληρώσιμων περιπτώσεων σε συστήματα όπως το κοσμολογικό μοντέλο Friedmann-Robertson-Walker [21] και συστήματα Hamilton 3 βαθμών ελευθερίας με ομογενείς πολυωνυμικές συναρτήσεις δυναμικού βαθμού 3 [107, 108]. Στόχος μας είναι να συνεχίσουμε την εφαρμογή της προαναφερόμενης θεωρίας σε συστήματα με εκκρεμότητες ως προς την ολοκληρωσιμότητα, καθώς και να μελετήσουμε τις πρόσφατες επεκτάσεις του θεωρητικού πλαισίου σε συστήματα που δεν παράγονται από συναρτήσεις Hamilton [14] και σε συστήματα ρητών συμπλεκτικών απεικονίσεων [25].

Βιβλιογραφία

- [1] R. Abraham, J. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, tensor analysis and applications*, AMS 75, Springer-Verlag, New York, 1988
- [2] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of mechanics*, TAM 17, Springer-Verlag, New York, 1991
- [3] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1972
- [4] M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur, *A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type I, II*, J. Math. Phys., 21, no. 5, 715-721, 1006-1015, 1980
- [5] M.A. Almeida, I.C. Moreira, H. Yoshida, *On the non-integrability of the Stormer problem*, J. Phys. A Math. Gen., 25, 227-230, 1992
- [6] M.A. Almeida, I.C. Moreira, F.C. Santos, *On the Ziglin-Yoshida analysis for some classes of homogeneous Hamiltonian systems*, Rev. Bras. Fisica, 28, 4, 1998
- [7] A. Almeida, A. Lopez-Castillo, T. Stuchi, *Non-integrability proof of the frozen planetary atom configuration*, J. Phys. A: Math. Gen., 36, 4805-4814, 2003
- [8] A. Almeida, T. Stuchi, *Non-integrability of the anisotropic Stormer problem with angular momentum*, Phys. D, 189, 219-233, 2004
- [9] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978
- [10] M. Arribas, A. Elipe, *Non Integrability of the motion of a particle around a massive straight segment*, Phys. Lett. A, 281, 142-148, 2001
- [11] M. Arribas, A. Elipe, A. Riaguas, *Non-integrability of anisotropic quasi-homogeneous Hamiltonian systems*, Mech. Res. Commun., 30, 209-216, 2003
- [12] M. Audin, *Exemples de hamiltoniens non intégrables en mécanique analytique réelle*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 12, 1-23, 2003
- [13] M. Audin, *La réduction symplectique appliquée á la non-intégrabilité du problème du satellite*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 12, 25-46, 2003
- [14] M. Ayoul, N.T. Zung, *Galoisian obstructions to non-hamiltonian integrability*, arXiv:0901.4586v1, 2009

- [15] A. Baider, R. C. Churchill, D. L. Rod, *Monodromy and non-integrability in complex Hamiltonian systems*, J. Dyn. Diff. Eq., 2, 451-481, 1990
- [16] A. Baider, R. C. Churchill, D. L. Rod, M. F. Singer, *On the infinitesimal Geometry of Integrable Systems*, Fiel. Inst. Comm. 7, AMS, Providence, Rhode Island, 1996
- [17] D. Boucher, *Sur la non-intégrabilité du problème plan des trois corps de masses égales à un le long de la solution de Lagrange*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 331, 391-394, 2000
- [18] D. Boucher, *Sur les équations différentiels linéaires paramétrées, une application aux systèmes hamiltoniens*, Thèse de l'Université de Limoges, LACO, Octobre, 2000
- [19] D. Boucher, J.A. Weil, *Application of J.J. Morales and J.P. Ramis' theorem to test the non complete integrability of the planar three-body problem*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys, 3, 163-177, 2003
- [20] D. Boucher, *Non complete integrability of a satellite in circular orbit*, Portugaliae Mathematica, 63, 69-89, 2006
- [21] D. Boucher, J.A. Weil, *About the Non-Integrability in the Friedmann-Robertson-Walker Cosmological Model*, Brazil. J. of Phys., 37, 2A, 2007
- [22] T. Bountis, H. Segur, F. Vivaldi, *Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property*, Phys. Rev. A, 25, 3, 1982
- [23] H. Bruns, *Über die integrale des vielkörper-problems*, Acta Math., 11, 25-96, 1887
- [24] D. Buchanan, *A new isosceles-triangle solution of the three-body problem*, Tran. Am. Math. Soc., 16, 3, 259-274, 1915
- [25] G. Casale, J. Roques, *Dynamics of Rational Symplectic Mappings and Difference Galois Theory*, Int. Math. Res. Notices, 2008, 23 p., 2008
- [26] G. Casale, G. Duval, A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *Integrability of natural Hamiltonian systems with homogeneous potentials of degree zero*, arXiv:0903.5199v1, March, 2009
- [27] P.M. Cohn, *Algebra*, John Wiley and sons, London, 1981
- [28] S. Chesley, *The isosceles three-body problem: A global geometric analysis*, Ph.D. Thesis, University of Texas at Austin, 1998
- [29] S. Chesley, *A global analysis of the generalized Sitnikov problem*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 73, 291-302, 1999
- [30] R.C. Churchill, D.L. Rod *Geometrical aspects of Ziglin's non-integrability theorem for complex Hamiltonian systems*, J. Diff. Eq., 76, 91-114, 1988
- [31] R.C. Churchill, D.L. Rod *On the determination of Ziglin monodromy groups*, SIAM J. Math. Anal., 22, 1790-1802, 1991
- [32] R.C. Churchill, J. Delgado, D.L. Rod *The spring-pendulum system and the Riemann equation*, New trends for Hamiltonian systems and celestial mechanics, E.A. Lacomba, J.L. Libre, Ed., World Scientific, Singapore, 1993

- [33] R.C. Churchill, *A geometric approach to linear ordinary differential equations*, Kolchin Seminar on Differential Algebra, Graduate Center, City University of New York, 2006
- [34] B.D. Craven, *Complex symmetric matrices*, J. Austral. Math. Soc., 10, 341-354, 1969
- [35] J.G. Darboux, *Sur le problème de Pfaff*, Bull. Sci. Math. 6, 14-36, 49-68, 1882
- [36] G. Duval, A.J. Maciejewski, *Jordan obstruction to the integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potentials*, arXiv:0902.0891v1, February, 2009
- [37] R. Dvorak, Y. Sui Sun, *The phase space structure of the Extended Sitnikov Problem*, Cel. Mech. and Dyn. Astr., 67, 87-106, 1997
- [38] M. H. ElBiali, *Triple collisions in the isosceles three body problem with small mass ratio*, J. Appl. Math. Ph., 40, 645-664, 1989
- [39] L. Euler, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 11, 144-151, 1767
- [40] S. Ferrer, F. Mondejar, *On the non-integrability of the Zeemann-Stark Hamiltonian system*, Comm. Math. Phys., 208, 55-63, 1999
- [41] S. Ferrer, F. Mondejar, *Non-integrability of the 3-D Hydrogen atom under motional Stark effect or circularly polarized microwave combined with magnetic fields*, Phys. Lett. A, 264, 74-83, 1999
- [42] S. Ferrer, F. Mondejar, *On the non-integrability of the generalized van der Waals Hamiltonian*, J. Math. Phys., 41, 5445-5452, 2000
- [43] A.R. Forsyth, *Theory of differential equations*, part 3, Vol. 4, Cambridge University Press, 1902
- [44] G. Frobenius, *Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen*, J. reine angew. Math. 76, 214-235, 1873
- [45] C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, Werke, 3, 123-162, 1813
- [46] D.J. Gross, A. Neveu, *Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories*, Phys. Rev. D, 10, 10, 3235-3253, 1974
- [47] J. Hietarinta, *Direct methods for the search of the second invariant*, Phys. Repor., 147, 2, 87-154, 1987
- [48] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the complex domain*, Dover, New York, 1997
- [49] E. Horozov, *On the non-integrability of the Gross-Neweu models*, Ann. Phys., 174, 430-441, 1987
- [50] M. Hukuhara, S. Ohasi, *On Riemann's P-functions which are expressible in terms of elementary functions (in Japanese)*, Sugaku, 2, 227-230, 1949-50; 8, 27-29, 1956
- [51] M. Irigoyen, C. Simo, *Non-integrability of the J2 problem*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 55, 281-287, 1993

- [52] E.L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956
- [53] H. Ito, *Non-integrability of Henon-Heiles system and a theorem of Ziglin*, Kodai Math. J., 8, 1985, 120-138
- [54] H. Ito, *A criterion for non-integrability of Hamiltonian systems with nonhomogeneous potentials*, J. Appl. Math. Phys., 38, 1987, 459-476
- [55] E. Juillard-Tosel, *Non-intégrabilité algébrique et méromorphe de problèmes de N corps*, Thèse, Univ. Paris VI, janvier, 1999
- [56] E. Juillard-Tosel, *Meromorphic parametric non-integrability; the inverse square potential*, Arch. Rat. Mech. Anal., 152, 187-207, 2000
- [57] E. Juillard-Tosel, *Bruns' theorem: The proof and some generalizations*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 76, 241-281, 2000
- [58] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, 1976
- [59] T. Kimura, *On Riemann's equations which are solvable by quadratures*, Funkcialaj Ekvacioj 12, 269-281, 1969
- [60] E.R. Kolchin, *Algebraic matrix groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations*, Ann. of Math., 49, 1-42, 1948
- [61] E.R. Kolchin, *Existence theorems connected with the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 54, 927-932, 1948
- [62] J.J. Kovacic, *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations*, J. Symb. Comp., 2, 1, 3-43, 1986
- [63] S. Kovalevskaya, *Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math., 12, 177-232, 1889
- [64] M. Kummer, A.W. Saenz, *Nonintegrability of the classical Zeeman Hamiltonian*, Commun. Math. Phys., 162, 447-465, 1994
- [65] J.L. Lagrange, *Essay sur le probleme des trois corps*, Prix de l'Académie, 9, Paris, 1772
- [66] G. Lamé, *Sur les surfaces isothermes dans les corps homogènes en équilibre de température*, J. Math. Pures Appl., 2, 147-188, 1837
- [67] S. Lang, *Algebra*, GTM 211, Springer, New York, 2002
- [68] A.M. Lyapounov, *On a certain property of the differential equations of the problem of motion of a heavy rigid body having a fixed point*, Soobsch. Kharkov Math. Obsch., Ser. 2, 4, 1894, 123-140
- [69] A.J. Maciejewski, A.J. Szydlowski, *Towards a description of complexity of the simplest cosmological systems*, J. Phys. A: Math. Gen., 33, 9241-9254, 2000
- [70] A.J. Maciejewski, J.M. Strelcyn, A.J. Szydlowski, *Non-integrability of Bianchi VIII Hamiltonian system*, J. Math. Phys. 42, 1728-1743, 2001

- [71] A.J. Maciejewski, A.J. Szydlowski, *Integrability and non-integrability of planar Hamiltonian systems of cosmological origin*, J. Nonlinear Math. Phys., 8, 200-206, 2001
- [72] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *Non-integrability of restricted two-body problems in constant curvature spaces*, Regul. Chaotic Dyn., 8, 4, 413-430, 2003
- [73] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *Non-integrability of the problem of a rigid satellite in gravitational and magnetic fields*, Celest. Mech. Dynam. Astron., 87, 317-351, 2003
- [74] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *Non-integrability of the generalised two fixed centres problem*, Celest. Mech. Dynam. Astron., 89, 145-164, 2004
- [75] A.J. Maciejewski, *Non-integrability of certain Hamiltonian systems, applications of the Morales-Ramis differential Galois extension of Ziglin theory*, Banach Cent. Publ., 58, 139-150, 2002
- [76] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *Non-integrability of the Suslov problem*, J. Math. Phys., 45, 1065-1078, 2004
- [77] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, J.A. Weil, *Non-integrability of the generalized spring-pendulum problem*, J. Phys. A: Math. Gen., 37, 2579-2597, 2004
- [78] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *All meromorphically integrable 2D Hamiltonian systems with homogeneous potential of degree 3*, Phys. Lett. A, 327, 461-473, 2004
- [79] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *Darboux points and integrability of Hamiltonian systems with homogeneous polynomial potential*, J. Math. Phys., 46, 6, 062901, 1-33, 2005
- [80] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, *Differential Galois approach to the non-integrability of the heavy top problem*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Ser., 6, 14, 123-160, 2005
- [81] A.J. Maciejewski, M. Przybylska, T. Stachowiak, *Non integrability of Gross-Neveu systems*, Phys. D, 201, 249-267, 2005
- [82] W.D. Macmillan, *An integrable case in the restricted problem of three bodies*, Astron. J., 27, 11-13, 1913
- [83] J. Marsden, T. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, Springer, New York, 2002
- [84] R. Martinez, C. Simo, *Non-integrability of Hamiltonian systems through high order variational equations: Summary of results and examples*, Reg. Chaot. Dyn., 14, 3, 323-348, 2009
- [85] K.R. Meyer, G.R. Hall, *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, AMS 90, Springer, 2009
- [86] J.J. Morales-Ruiz, C. Simo, *Non-integrability criteria for Hamiltonians in the case of Lamé normal variational equations*, J. Diff. Eq., 129, 111-135, 1996
- [87] J.J. Morales-Ruiz, J.M. Peris, *On a Galoisian approach to the splitting of separatrices*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 8, 125-141, 1999

- [88] J.J. Morales-Ruiz, *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Birkhauser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1999
- [89] J.J. Morales-Ruiz, *Kovalevskaya, Liapounov, Painlevé, Ziglin and the differential Galois theory*, Reg. Chaot. Dynam., 5, 251-272, 2000
- [90] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems*, Meth. Appl. Anal., 8, 33-96, 2001
- [91] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems II*, Meth. Appl. Anal., 8, 97-112, 2001
- [92] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, *A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential*, Meth. Appl. Anal., 8, 113-120, 2001
- [93] J.J. Morales-Ruiz, C. Simo, S. Simon, *Algebraic proof of the non-integrability of Hill's problem*, Ergod. Th. Dynam. Sys., 25, 1237-1256, 2005
- [94] J.J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, C. Simó, *Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations*, Ann. Sci. École. Norm. Sup., 40, 845-884, 2007
- [95] J.J. Morales-Ruiz, S. Simon, *On the meromorphic non-integrability of some N-body problems*, Discr. Cont. Dyn. Syst., 24, 4, 1225-1273, 2009
- [96] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973
- [97] K. Nakagawa, H. Yoshida, *A necessary condition for the integrability of homogeneous Hamiltonian systems with two degrees of freedom*, J. Phys. A: Math. Gen., 34, 2137-2148, 2001
- [98] K. Nakagawa, *Direct construction of polynomial first integrals for Hamiltonian systems with a two-dimensional homogeneous polynomial potential*, Dep. of Astronomical Science, The Graduate University for Advanced Study and the National Astronomical Observatory of Japan, Ph.D. Thesis, 2002
- [99] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687
- [100] D.G. Nomikos, V.G. Papageorgiou, *Non-integrability of the anisotropic Stormer problem and the isosceles three-body problem*, Phys. D, 238, 3, 273-289, 2009
- [101] V. Orlov, A. Martynova, *Characteristics of motions in the 2D isosceles three-body problem with unequal masses*, Astr. Rep., 47, 11, 963-973, 2003
- [102] P. Painlevé, *Memoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme*, Bull. Soc. Math. Phys. 28, 201-261, 1900
- [103] E. Papperitz, *Ueber verwandte s-Functionen*, Math. Ann., 25, 212-221, 1885
- [104] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vol. 1*, Gauthier-Villars, Paris, 1892

- [105] H. Poincaré, *Euvres d'Henri Poincaré, Tome I*, Gauthier-Villars, Paris, 1951
- [106] E.G.C. Poole, *Introduction to the theory of linear differential equations*, Oxford University Press, 1936
- [107] M. Przybylska, *Darboux points and integrability of homogenous Hamiltonian systems with three and more degrees of freedom*, Regul. Chaotic Dyn., 14, 2, 263-311, 2009
- [108] M. Przybylska, *Darboux points and integrability of homogenous Hamiltonian systems with three and more degrees of freedom. Nongeneric cases.*, Regul. Chaotic Dyn., 14, 3, 349-388, 2009
- [109] M. van der Put, M.F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2003
- [110] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Bountis, *The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems*, Phys. Rep. 180, 3, 159-245, 1989
- [111] J.P. Ramis, *Phénomène de Stokes et filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot*, C. R. Acad. Sci. Paris, 301, 165-167, 1985
- [112] H.W. Raudenbush, *Ideal theory and algebraic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 36, 361-368, 1934
- [113] G.F.B. Riemann, *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(a, b, c, x)$ darstellbaren Functionen*, Abh. Ges. Wiss. Gött. 7, 3-32, 1857
- [114] J.F. Ritt, *Differential algebra*, American Mathematical Society, Colloquim Publications, 33, 1948
- [115] A.W. Saenz, M. Kummer, *Nonintegrability of the Stormer problem*, Physica D, 86, 363-372, 1995
- [116] A.W. Saenz, *Nonintegrability of the Dragt-Finn model of magnetic confinement: A Galoisian-group approach*, Phys. D, 144, 37-43, 2000
- [117] H.A. Schwarz, *Über diejenigen Falle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt*, J. für die reine und angew. Math., 75, 292-335, 1872
- [118] K. Sitnikov, *Existence of oscillatory motions for the three-body problem*, Dokl. Akad. Nauk., 133, 2, 303-306, 1960
- [119] C. Størmer, *The Polar Aurora*, Oxford University Press, 1955
- [120] K.F. Sundman, *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math., 36, 105-179, 1913
- [121] A. Tsygvintsev, *Sur l'absence d'une intégrale première méromorphe supplémentaire dans le problème plan des trois corps*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 333, 241-244, 2001
- [122] K. Umeno, *Non-integrable character of Hamiltonian systems with global and symmetric coupling*, Phys. D, 82, 11-35, 1995

- [123] M.I. Vigo-Aguiar, *No integrabilidad del problema del satélite*, Ph.D. Thesis, Departamento de Analisis Matematico y Matematica Aplicada, Universidad de Alicante, 1999
- [124] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, 1978
- [125] Q. Wang, *The global solution of the n-body problem*, Cel. Mech. Dyn. Astr., 50, 1, 73-88, 1991
- [126] K. Weierstrass, *Zur thoerie deer elliptischen functionen*, Sitz. Konigl. Akad. Wissen., 27, 443-451, 1882
- [127] K. Yagasaki, *Non-integrability of an infinite-degree-of-freedom model for unforced and undamped straight beams*, J. Appl. Mech., 70, 732-738, 2003
- [128] K. Yagasaki, *Galoisian obstructions to integrability and Melnikov criteria for chaos in two-degree of freedom Hamiltonian systems with saddle-centers*, Nonlinearity, 16, 2003-2013, 2003
- [129] H. Yoshida, *A criterion for the non-existence of an additional integral in Hamiltonian systems with a homogeneous potential*, Physica D 29, 1987, 128-142
- [130] H. Yoshida, *Non-integrability of the truncated Toda lattice Hamiltonian at any order*, Commun. Math. Phys. 116, 1988, 529-538
- [131] H. Yoshida, *Ziglin analysis for proving non-integrability of Hamiltonian system*, in: P.G.L. Leach, W.H. Steeb (Eds), *Finite Dimensional Integrable Non-Linear Systems*, World Scientific, Singapore, 1988, 74-93
- [132] H. Yoshida, A. Ramani, B. Dorizzi, B. Grammatikos, *Non-integrability of the fourth order truncated Toda Hamiltonian*, Physica D, 30, 1988, 151-163
- [133] H. Yoshida, *A new necessary condition for the integrability of Hamiltonian systems with a two-dimensional homogeneous potential*, Phys. D, 128, 1999, 53-69
- [134] H. Yoshida, *Justification of Painlevé Analysis for Hamiltonian systems by differential Galois theory*, Physica A, 228, 424-430, 2000
- [135] S.L. Ziglin, *Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanichs I*, Functional Anal. Appl. 16, 181-189, 1983
- [136] S.L. Ziglin, *Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanichs II*, Functional Anal. Appl. 17, 6-17, 1983

Ευρετήριο

- αγκύλη
 - Lie, 62
 - Poisson, 63
- άλγεβρα
 - Lie, 62
 - των συμπλεκτικών πινάκων, 78
 - Poisson, 64
- αλγόριθμος Kovacic, 39
- αφινική ποικιλία, 17
- γραμμική αλγεβρική ομάδα, 16
- διανυσματικό πεδίο Hamilton, 63
- διαφορική, -ό, -ός
 - δακτύλιος, 5
 - επισύναψη, 13
 - ιδεώδες, 6
 - K —πρότυπο, 66
 - ομάδα Galois, 16
 - ομομορφισμός, 6
 - πολυώνυμο, 8
 - σώμα, 5
- διαφόριση, 5
- ενέλιξη, 65
- εξισώσεις
 - κάθετων μεταβολών, 71
 - μεταβολών, 67, 68
- εξίσωση
 - Airy, 39
 - Bessel, 44
 - Lamé, 54
 - αλγεβρική μορφή, 54
 - Ricatti, 31
 - Riemann, 47
 - Weber, 39
 - ανηγμένη, 31
 - γενικευμένη υπεργεωμετρική, 47
 - γραμμική μη-ομογενής, 31
 - γραμμική ομογενής, 31
 - δεικτών, 33
 - υπεργεωμετρική, 52
- επέκταση
 - Liouville, 15
 - Picard-Vessiot, 13
- ιδεώδες
 - διαφορικό, 6
 - πρώτο, 7
 - ριζικό, 6
 - τέλειο, 6
- κάλυψη, 69
 - πεπερασμένως διακλαδισμένη, 70
- καμπύλες μηδενικής ταχύτητας, 102
- κανονικός μετασχηματισμός, 65
- κανονικώς ιδιόμορφο, 23
- κέντρο καθοδήγησης, 102
- κυλινδρικές συντεταγμένες, 88
- λύσεις ευθείας γραμμής, 81
- μέθοδος Frobenius, 33
- μεταβολή παραμέτρων, 31
- μετριοπαθής ανάπτυξη, 23
- μικρότερος ομογενής όρος, 78
- μορφή
 - αντισυμμετρική, 62
 - διγραμμική, 62
 - μη-εκφυλισμένη, 62
 - συμπλεκτική, 63
- νόμος του Leibniz, 5
- ολοκληρώσιμο, 76
- ολοκληρωτική καμπύλη, 62
- ομάδα
 - επιλύσιμη, 19
 - γραμμική αλγεβρική, 16

μονόδρομη, 23
ομογενής συνάρτηση δυναμικού, 81
οριζόντιο διάνυσμα, 66
ορίζουσα Wronski, 13

πίνακας

Wronski, 13
θεμελειώδης, 12
μονόδρομος, 24
συνοδεύων, 12

παράγωγος Lie, 61

πολλαπλότητα

αλγεβρική, 9
ανάγωγη, 9
αναγωγή, 9
συμπλεκτική, 63

πρόβλημα

Sitnikov, 105
Størmer, 88
ανηγμένο, 88
ανηγμένο ανισοτροπικό, 88
ανισοτροπικό, 88
3-σωμάτων, 105
ανηγμένο ισοσκελές, 106
ισοσκελές, 105
N-σωμάτων, 105

πρώτο ολοκλήρωμα, 62

ριζικό ιδεώδους, 8

ροή διανυσματικού πεδίου, 62

συνάρτηση

Liouville, 36
Riemann, 47
Weierstrass, 54

σύστημα Hamilton, 63

σώμα σταθερών, 5

ταυτότητα Jacobi, 62

ταυτοτική συνιστώσα, 17

τοπολογία Zariski, 17

υποβιβασμός τάξης, 31