Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Θεωρητικής και Μαθηματικής
Φυσικής,
Αστρονομίας και Αστροφυσικής

Θέμα:
Μελέτη Ιδιοτήτων της Κβαντικής
Πληροφορίας
σε Κβαντικά Συστήματα

Γιώργος Σταματίου
Διδακτορική Διατριβή

Ι . Χ . Ν Ι . Κ Α .

Πάτρα 2010

Στην Μητέρα μου

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

1. Δημήτριος Γκίκας (Επιβλέπων). Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών
2. Βασίλειος Γερογιάννης. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών
3. Κωνσταντίνος Βλάχος. Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

1. Βασίλειος Γερογιάννης. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών
2. Αναστάσιος Μπούνης. Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών
3. Μιχαήλ Βραχάτης. Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών
4. Κωνσταντίνος Βλάχος. Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών
5. Δημήτριος Γκίκας. Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών
6. Ζαχαρίας Ψυλλάκης. Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών
7. Ανδρέας Τερζής. Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών

Ευχαριστίες

Οφείλω να ευχαριστήσω τον Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών Δημήτρη Γκίκα ο οποίος ως Επιβλέπων της εργασίας μου με προέτρεψε να ασχοληθώ με το θεματικό πεδίο της Κβαντικής Πληροφορίας. Ο Δημήτρης Γκίκας υπήρξε υπομονετικός, πράος και καλόγνωμος σε όλη την διάρκεια της πνευματικής μου προσπάθειας. Στο επιστημονικό πεδίο μου δίδαξε την ενότητα της επιστημονικής γνώσης και μου εμφύσησε την αγάπη για την πολύπλευρη, χωρίς προκαταλήψεις, θεώρηση των επιστημονικών ερωτημάτων. Στο τεχνικό μέρος οι παρατηρήσεις του ήταν πάντοτε εύστοχες τόσο στο στάδιο παραγωγής πρωτότυπης επιστημονικής πληροφορίας όσο και στο στάδιο κοινοποίησης της στην επιστημονική κοινότητα.

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη στην Μητέρα μου Αγγελική Αρχιμανδρίτου. Η Μητέρα μου υπήρξε ουσιαστικός υποκινητής και αρωγός σε όλα τα στάδια πραγματοποίησης της εργασίας αυτής. Προστάτιδα καθόλη την διάρκεια της ζωής μου, μου δίδαξε έμπρακτα την σημασία της ψυχικής δύναμης. Με την έμφυτη ικανότητα της να ξεχωρίζει μέσα από τις μικρές διαφορές το αληθινό από το επίπλαστο, ικανότητα δηλωτική μιας εγγενούς σχέσης με το Αγαθό, αποτελεί συμπαραστάτη μου στις κρίσιμες αποφάσεις της καθημερινότητας. Με την πρακτική της να αντιπαρατάσσει στο κουραστικό, το δυσάρεστο και το εξοργιστικό· το κωμικό και το ανάλαφρο μου δίδαξε την επιείκεια απέναντι στις αδυναμίες της ανθρώπινης φύσης. Το αξιακό της σύστημα θα αποτελέσει οδηγό μου στο διηνεκές. Η Μητέρα μου συνεχίζει να είναι ο καθημερινός μου σύμβουλος.

Επίσης οφείλω να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ) για την υποτροφία που μου παρείχε, κατόπιν εξετάσεων, κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης.

Σχετικά με την ορολογία.

Κατά την διάρκεια συγγραφής του παρακάτω κειμένου έγινε μια προσπάθεια μεταφοράς επιστημονικών όρων από τα αγγλικά στα ελληνικά. Θέλουμε να πιστεύουμε ότι η μεταφορά της ορολογίας, από την μία γλώσσα στην άλλη, ήταν επιτυχής. Δυστυχώς δεν μπόρεσε να καταστεί δυνατόν από τον συγγραφέα να αποδοθούν όλοι οι αγγλικοί όροι στα ελληνικά. Έτσι προτιμήσαμε να διατηρήσουμε κάποιους από τους όρους αυτούς στην αγγλική γλώσσα λόγω του κινδύνου να χρησιμοποιήσουμε κάποιο αδόκιμο ή ακόμη και παραπλανητικό ελληνικό όρο. Το γεγονός αυτό έχει ως δυσάρεστη συνέπεια ο αναγνώστης του κειμένου να συναντήσει αρκετές ξενόγλωσσες εκφράσεις. Παραθέτουμε ακολούθως μερικούς από τους αγγλικούς όρους τους οποίους επιλέξαμε να διατηρήσουμε στην εργασία αυτή.

Entanglement, Entangled, Disentangled, Unentagled, Quantum Kicked Rotor, Quantum Kicked Top, Majorization, Majorized, Distillable Entanglement, Entanglement Cost, Entanglement of Formation, Cross Norm, Robustness, Squashed Entanglement, Bit, Qubit, Qutrit, Ancilla, Saturation Index, Entangling Power.

Η κεντρική έννοια της εργασίας μας είναι το Entanglement. Λόγω του μεγάλου πλήθους διαφορετικών ελληνικών όρων που έχουν χρησιμοποιηθεί για την απόδοση της έννοιας αυτής, προτιμήσαμε τον πρωτότυπο αγγλικό όρο. Ενδεικτικά αναφέρουμε τους ακόλουθους όρους: Ενδιαπλοκή, Διαπλοκή, Εναγκαλισμός, Κβαντική Διεμπλοκή, Κβαντική Σύμπλεξη. Τέλος δηλώνουμε ότι θα δεχθούμε με ευχαρίστηση οποιαδήποτε γόνιμη παρατήρηση από τον αναγνώστη σχετικά με την ορολογία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η Κβαντική Πληροφορία είναι μια ιδιαίτερη ιδιότητα των κβαντικών συστημάτων που σχετίζεται με την κβαντομηχανική επαλληλία και την συσχέτιση των συστημάτων σε Ενδιαπλοκή (Entanglement). Συνδέεται με θεμελιακές ιδιότητες της Κβαντικής Φυσικής και έχει πάρα πολλές εν δυνάμει δυνατότητες εφαρμογής. Εν τούτοις, η βασική αυτή ιδιότητα των κβαντικών συστημάτων, λόγω της αλληλεπίδρασης με το κλασικό περιβάλλον, χάνεται ταχύτατα, με συνέπεια να περιορίζεται δραματικά η πρακτική της χρησιμότητα. Υπάρχουν πάμπολλες μέθοδοι αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος με περιορισμένα αποτελέσματα όμως. Μια κατηγορία μεθόδων σχετίζεται με το ερώτημα της σχέσης μεταξύ της κλασικής συμπεριφοράς (χάος-ολοκληρωσιμότητα) των κλασικών συστημάτων και των ιδιοτήτων των αντίστοιχων κβαντικών συστημάτων ή ενός κβαντικού συστήματος σε σύζευξη με ένα κλασικό. Το παρόν ερευνητικό έργο περιστρέφεται γύρω από την μελέτη διαφόρων διατάξεων κβαντικών συστημάτων είτε σε αλληλεπίδραση με άλλα συστήματα είτε μεμονωμένων, αλλά με την συνθήκη το αντίστοιχο κλασικό μη γραμμικό σύστημα να είναι χαοτικό ή ολοκληρώσιμο.

Επιμέρους ερευνητικά αποτελέσματα.

1. Η εξάρτηση της ενδιαπλοκής (entanglement) δύο υποσυστημάτων ενός κβαντικού συστήματος από την συμπεριφορά του αντίστοιχου κλασικού μη γραμμικού συστήματος έχει μελετηθεί εκτενώς με χρήση συγκεκριμένων μοντέλων. Επειδή τα αποτελέσματα στην βιβλιογραφία δίνουν μία μη ξεκάθαρη, και εν πολλοίς συγκεχυμένη διασύνδεση, υπάρχει η ανάγκη μιας γενικότερης αντιμετώπισης με γενικά μοντέλα. Προς αυτήν την κατεύθυνση, το μέρος αυτό της εργασίας περιέχει την απόδειξη μιας γενικής ανισότητας. Σύμφωνα με αυτήν, ο ρυθμός μεταβολής της ενδιαπλοκής με την μεταβολή μιας παραμέτρου σύζευξης φράσσεται από την καμπυλότητα των ενεργειακών επιπέδων. Το αποτέλεσμα αυτό έχει γενική ισχύ, διότι βασίζεται σε γενικές ιδιότητες των τυχαίων πινάκων που κωδικοποιούν την

χαοτική ή την κανονική συμπεριφορά των φυσικών συστημάτων.

2. Στα πλαίσια της ιδιότυπης σχέσης που υπάρχει μεταξύ των κλασικών ιδιοτήτων και της κβαντικής συμπεριφοράς τίθεται το ερώτημα του ρόλου της λεπτομερούς δομής του κλασικού χώρου των φάσεων. Για το θέμα αυτό έγινε η μελέτη της εξάρτησης της ενδιαπλοκής από την θέση μιας παραμέτρου σύζευξης σε σχέση με το διάγραμμα διακλαδώσεων στο μοντέλο ενός εξωτερικά διαταρασσόμενου στρόβου, καθώς και σε σχέση με την ύπαρξη ουλών (scars). Για το θέμα αυτό έγινε εκτενής ανάλυση.

3. Το θερμικό περιβάλλον, γενικά, καταστρέφει την ενδιαπλοκή. Εν τούτοις, η μη γραμμικότητα συστημάτων σε συνδυασμό με την παρουσία εξωτερικών πεδίων μπορεί να οδηγήσει σε βέλτιστες τιμές ορισμένων παραμέτρων που ευνοούν την δημιουργία ενδιαπλοκής θερμικά. Μελετήθηκε ένα κατάλληλο μοντέλο, στο οποίο παρατηρείται η συμπεριφορά αυτή. Η μελέτη του θέματος συνεχίζεται.

4. Ένας κβαντικός δίαυλος βρίσκεται σε συνεχή αλληλεπίδραση με το τοπικό περιβάλλον, με συνέπεια να μειώνεται η χωρητικότητά του. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν οι ιδιότητες του τοπικού περιβάλλοντος (χάος ή κανονικότητα) μπορεί να επηρεάσουν τις δυνατότητες του διαύλου. Υπήρξαν τα πρώτα αποτελέσματα της μελέτης αυτής, η οποία συνεχίζεται.

5. Ένα ανοικτό κβαντικό σύστημα αλληλεπιδρά με ένα τοπικό περιβάλλον, που εν γένει έχει λίγους βαθμούς ελευθερίας και είναι κβαντικό, καθώς και με ένα ολικό περιβάλλον, άπειρο, που ανταλλάσσει ενέργεια με το σύστημα και τελικά προκαλεί απώλεια κβαντικής συνάφειας. Διερευνήθηκε, αριθμητικά, ο τρόπος με τον οποίο, οι κλασικές ιδιότητες του τοπικού περιβάλλοντος επηρεάζουν τον ρυθμό απώλειας συνάφειας του συστήματος.

Δημοσιεύσεις:

1. Demetris P.K. Ghikas, Georgios Stamatiou: A curvature dependent bound for entanglement change in classically chaotic systems, *International Journal of Quantum Information*, Vol. 5 (2007) 685-704.
2. Georgios Stamatiou, Demetris P.K. Ghikas: Quantum entanglement dependence on bifurcations and scars in non-autonomous systems. The case of quantum kicked top, *Physics Letters A* 368 (2007) 206-214.

ABSTRACT

Quantum Information is a particular property of quantum systems which is associated with the quantum mechanical superposition principle and the correlation of the systems in the entangled states. It is related to fundamental properties of Quantum Physics and it has very many potential applications. Nevertheless, due to the interaction with the classical environment, this basic property of quantum systems is lost very quickly, with the result, its practical usefulness to be dramatically reduced. There are many methods of dealing with this problem, but with partial success. One category of methods, not extensively investigated, is associated with the question of the relation between the behavior of the classical systems (chaos-integrability) and the properties of the corresponding quantum systems, or of a quantum system interacting with a classical one. The present Thesis is concerned with the study of various arrangements of quantum systems either in interaction with other systems, or isolated, but with the condition that the corresponding classical non linear system is chaotic or integrable.

Results presented in the thesis.

1. The dependence of entanglement of two subsystems of a quantum system on the behavior of the corresponding classical non linear system has been studied extensively with the use of concrete models. Because the results in the literature do not give a clear, and in many cases give a contradicting picture, a more general approach is needed with generic models. To this purpose, in this part of the thesis the proof of a general inequality is presented. According to this, the rate of change of entanglement with respect to the change of an interaction parameter is bounded by the curvature of the energy levels. This result has a general validity, because it is based on general properties of random matrices, which may encode the regular or chaotic behavior of physical systems.
2. In the framework of the particular relation that exists between classical properties and quantum

- behavior, a question is posed about the role of the detailed structure of the classical phase space. For this matter, the dependence of entanglement on the position of a parameter of interaction in connection to the bifurcation diagram in the model of quantum kicked top was studied. Also an analysis was carried out for a possible impact of the existence of scars on the behavior of entanglement. This problem was extensively analyzed numerically.
3. In general, a hot environment destroys entanglement. Nevertheless, the non linearity of systems combined with the presence of external fields may lead to optimal values of certain parameters which favor the thermal creation of entanglement. A particular model was studied in which this behavior is observed.
 4. A quantum channel is in constant interaction with its local environment, and as a result its capacity is reduced. The question posed, is whether the properties of the local environment (chaos or integrability) may influence the capabilities of the channel. The first results of this study are presented.
 5. An open quantum system interacts with a quantum local environment, which in general has few degrees of freedom, and a global infinite one, which exchanges energy with the system and leads finally to the loss of quantum coherence. It was numerically investigated how the classical properties of the local environment influence the decoherence rate of the system

Publications:

1. Demetris P.K. Ghikas, Georgios Stamatiou: A curvature dependent bound for entanglement change in classically chaotic systems, *International Journal of Quantum Information*, Vol. 5 (2007) 685-704.
2. Georgios Stamatiou, Demetris P.K. Ghikas: Quantum entanglement dependence on bifurcations and scars in non-autonomous systems. The case of quantum kicked top, *Physics Letters A* 368 (2007) 206-214.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1
ΕΝΟΤΗΤΑ Α' ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΑΝΟΙΚΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ	7
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ.	8
ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ.	12
ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΩΝ EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN (EPR PARADOX). ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΤΟΠΙΚΟΤΗΤΑ. ΚΡΥΜΜΕΝΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ (HIDDEN VARIABLES). ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BELL.	16
ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ BELL ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑ.	20
ΠΕΡΑΝ ΤΩΝ ΚΑΘΑΡΩΝ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ. Ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (DENSITY MATRIX).	23
ΕΙΚΟΝΑ HEISENBERG ΚΑΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ.	29
ΑΝΟΙΧΤΑ ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ. Η ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΩΣ ΠΡΩΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ.	32
ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MASTER.	36
ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΗΜΙΟΜΑΔΕΣ.	40
ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ MASTER, ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LINDBLAD.	42
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ, ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LINDBLAD.	47
ΜΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ MASTER.	48
ΑΝΑΦΟΡΕΣ.	51
ΕΝΟΤΗΤΑ Β' ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ENTANGLEMENT	55
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ.	56
Η ΕΝΤΡΟΠΙΑ SHANNON.	61
ΣΧΕΤΙΚΗ ΕΝΤΡΟΠΙΑ (RELATIVE ENTROPY).	65
ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ SHANNON.	66
ΕΝΤΡΟΠΙΕΣ ΤΥΠΟΥ RENYI.	68
ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΤΑΞΗΣ α (ENTROPY OF DEGREE α)	69
ΚΛΑΣΙΚΗ ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ (CLASSICAL SOURCE ENCODING) ΚΑΙ ΕΝΤΡΟΠΙΑ SHANNON.	70
ΚΛΑΣΙΚΑ ΚΑΝΑΛΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ SHANNON.	71
ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗΣ, ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ TURING.	73
ΤΟ ΚΥΤΤΑΡΟ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ. ΤΟ ΚΒΑΝΤΙΚΟ BIT (QUBIT)	76
ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ.	82
ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΠΥΛΕΣ ΚΑΙ ΠΑΓΚΟΣΜΙΟΤΗΤΑ (UNIVERSALITY).	86
ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ.	90
Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΟΥ SHOR.	93

ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΕΝΤΡΟΠΙΕΣ	97
ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΤΟΥ VON NEUMANN	97
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΝΤΡΟΠΙΑ (LINEAR ENTROPY)	100
ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΗ ΕΝΤΡΟΠΙΑ	101
Η ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ HOLEVO (HOLEVO QUANTITY)	103
ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ (ENTROPY OF EXCHANGE)	105
ΆΛΛΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΕΝΤΡΟΠΙΕΣ	107
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ – ΠΙΣΤΟΤΗΣ (FIDELITY)	108
ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΒΑΝΤΙΚΟΥ ΚΑΝΑΛΙΟΥ	111
ΜΗ ΤΟΠΙΚΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ-ENTANGLEMENT	112
ΜΕΡΙΚΗ ΑΝΑΣΤΡΟΦΗ	116
MAJORIZATION	118
ΜΕΤΡΑ ΤΟΥ ENTANGLEMENT	120
ENTANGLEMENT OF FORMATION	123
ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΕΝΤΡΟΠΙΕΣ ΤΟΥ ENTANGLEMENT	124
Ο ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΤΗΣ ΑΡΝΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (NEGATIVITY)	125
MONOTONA ΤΟΥ ENTANGLEMENT ΒΑΣΙΣΜΕΝΑ ΣΕ ΝΟΡΜΑ	127
CROSS NORM	128
ΤΟ SQUASHED ENTANGLEMENT	129
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	131
ΕΝΟΤΗΤΑ Γ' ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΒΑΝΤΙΚΟΥ ΧΑΟΥΣ	140
ΚΒΑΝΤΙΚΟ ΧΑΟΣ	141
ΚΒΑΝΤΙΚΑ ΜΠΙΛΙΑΡΔΑ	147
ΜΠΙΛΙΑΡΔΑ ΜΙΚΡΟΚΥΜΑΤΩΝ, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ	152
ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΑΜΥΧΕΣ (QUANTUM SCARS)	157
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ FLOQUET. ΔΙΑΤΑΡΑΣΣΟΜΕΝΟΣ ΣΤΡΟΦΕΑΣ (KICKED TOP). ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	161
ΤΥΧΑΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ (RANDOM MATRICES)	166
ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	179
ΟΙ ΙΔΙΟΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΩΣ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ PECHUKAS-YUKAWA	185
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	189
ΕΝΟΤΗΤΑ Δ' ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ENTANGLEMENT ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ HAMILTON	195
ΣΧΕΣΗ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ENTANGLEMENT ΣΤΟ CALOGERO-MOSER SYSTEM	197
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ:	197
ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΟΥ ENTANGLEMENT ΚΑΙ ΑΠΩΘΗΜΕΝΕΣ ΔΙΑΣΤΑΥΡΩΣΕΙΣ	200
ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ENTANGLEMENT	204
ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΓΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΟΤΕΛΟΥΜΕΝΟ ΑΠΟ N-QUBITS	206
ΡΥΘΜΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΟΥ ENTANGLEMENT ΚΑΙ ΒΑΘΜΟΣ ΧΑΟΥΣ	209
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ENTANGLEMENT ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΣΥΛΛΟΓΕΣ	211

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.	213
ΓΕΝΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ ΑΝΑΦΟΡΙΚΑ ΜΕ ΤΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.	213
ΕΛΕΓΧΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ.	214
ΜΟΝΤΕΛΟ Α.	215
ΜΟΝΤΕΛΟ Β.	215
ΜΟΝΤΕΛΟ C.	216
ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ B ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΧΑΟΣ.	220
ΜΟΝΤΕΛΟ D.	221
ΜΟΝΤΕΛΟ E.	224
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.	228
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Η ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ. Η ΣΧΕΣΗ.	230
ΑΝΑΦΟΡΕΣ.	233
ΕΝΟΤΗΤΑ Ε' ENTANGLEMENT, ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΑΜΥΧΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ. Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ QUANTUM KICKED TOP.	235
ΓΕΝΙΚΑ.	237
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.	238
ΒΑΣΙΚΕΣ ΈΝΝΟΙΕΣ.	240
ΚΛΑΣΙΚΟ ΚΑΙ ΚΒΑΝΤΙΚΟ KICKED TOP.	240
ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΑΜΥΧΕΣ (QUANTUM SCARS).	244
ΜΕΤΡΑ ΤΟΥ ENTANGLEMENT.	246
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.	249
Η ΚΛΑΣΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ.	249
ΟΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΟ ENTANGLEMENT ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΑΜΥΧΩΝ.	254
ENTANGLEMENT ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΡΟΧΙΕΣ.	256
ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ENTANGLEMENT.	257
ΕΠΙΛΟΓΟΣ.	259
ΑΝΑΦΟΡΕΣ.	263
ΕΝΟΤΗΤΑ ΣΤ' ΘΕΡΜΙΚΟ ENTANGLEMENT ΣΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΙΑΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ΤΟΥ NI(II)	266
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.	267
ΤΟ ΜΟΡΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ.	268
Η ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ.	269
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.	273
ΑΝΑΦΟΡΕΣ.	274

ΕΝΟΤΗΤΑ Ζ΄ ΧΑΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΔΙΑΜΕΣΟΥ ΚΒΑΝΤΙΚΟΥ ΚΑΝΑΛΙΟΥ. ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΚΑΝΑΛΙΟΥ ΚΑΙ ΧΑΟΣ. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΟΥ ENTANGLEMENT ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ.	275
.....	275
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	276
CLASSICAL KICKED ROTOR	278
QUANTUM KICKED ROTOR	286
ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ.	289
ENTANGLEMENT OF FORMATION	293
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΙΣΤΟΤΗΣ (DYNAMIC FIDELITY)	295
ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ (NOISE) I	297
ΕΝΤΡΟΠΙΑ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ (NOISE) II	299
ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ	304
ΠΕΡΙΟΧΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΟ $\kappa=3.2$, $A=1.0$, $\Gamma=0.2$	309
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	317
ΕΝΟΤΗΤΑ Η΄ ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΑΠΟΣΥΜΦΩΝΙΑΣ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (HOST SYSTEM) ΣΕ ΛΟΥΤΡΟ ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ. Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ ΤΟΥ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΝ ΡΥΘΜΟ ΑΠΟΣΥΜΦΩΝΙΑΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΝΗΜΗΣ.	319
ΠΕΡΙΛΗΨΗ – ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ	320
ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	321
ΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ	324
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.	328
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.	329
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	334
ΣΥΝΟΨΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ.	336
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	Π1-Π6

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η κβαντική φυσική έχει αναμφίβολα επηρεάσει σε τεράστιο βαθμό τις ιδέες για τον κόσμο που μας περιβάλλει. Για ένα περίπου αιώνα γίνεται μια μεγάλη προσπάθεια από τους φυσικούς για την κατανόηση του ακριβούς νοήματος των εννοιών της κβαντικής θεωρίας. Στις μέρες μας μπορούμε πλέον να θεωρήσουμε ότι έχουμε κατανοήσει σε πάρα πολύ ικανοποιητικό βαθμό τις ιδέες αυτές. Η ιδέα ότι το ηλεκτρόνιο μπορεί να συμπεριφέρεται σαν κύμα και το φωτόνιο σαν σωματίδιο έχει συνέπειες στην φιλοσοφία, την επιστημολογία, την επιστήμη και την τεχνολογία. Από την αρχή τα αποτελέσματα της νέας θεωρίας βοήθησαν στην βαθύτερη κατανόηση των νόμων της χημείας, της μοριακής και της ατομικής δομής. Ο περιοδικός πίνακας μπορούσε πλέον να εξηγηθεί πλήρως από την φυσική.

Στον αιώνα της κβαντομηχανικής υπήρξε παράλληλα ανάπτυξη της τεχνολογίας στον τομέα της ηλεκτρονικής, της δομής των υλικών, της νανοτεχνολογίας και της διαχείρισης της πληροφορίας με την βοήθεια μηχανών. Τις τελευταίες δεκαετίες του εικοστού αιώνα κατασκευάστηκαν σε ευρεία κλίμακα συσκευές οι οποίες υλοποιούν τα συμπεράσματα της κβαντικής θεωρίας. Τα χρόνια αυτά ο άνθρωπος κατέκτησε την τεχνολογική δυνατότητα να μπορεί να παρατηρήσει αλλά και να διαμορφώσει την ύλη σε μικροσκοπικό επίπεδο έτσι ώστε να μπορεί να δημιουργήσει δομές με διαστάσεις κβαντικής κλίμακας. Μπορούμε δηλαδή πλέον να κατασκευάσουμε αλλά και να ελέγξουμε μικροσκοπικά συστήματα, τα οποία δεν προϋπάρχουν στην φύση, που οι διαστάσεις τους είναι εξαιρετικά μικροσκοπικές σε βαθμό που μπορεί να συνίστανται από έναν μικρό αριθμό ατόμων. Μπορούμε επίσης να δίδουμε συγκεκριμένες φυσικές ιδιότητες (ηλεκτρικές, μαγνητικές κ.α.) στα συστήματα αυτά όπως και να καθορίζουμε την γεωμετρία τους κατά την βούληση μας. Σε τόσο μικρές κλίμακες η περιγραφή του συστήματος μπορεί να γίνεται μόνο κβαντικά και έτσι έχουμε την δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε τεχνολογικά τις ιδιαιτερότητες της φυσικής του μικρόκοσμου. Επίσης μας δίνεται ένα εργαλείο μελέτης με μεγαλύτερη λεπτομέρεια των αρχών της κβαντικής θεωρίας.

Πράγματι οι εφαρμογές στο πεδίο της κβαντικής τεχνολογίας είναι ήδη πολλές. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα laser, τους υπεραγωγούς, τα φωτοηλεκτρικά συστήματα αλλά

και το τρανζίστορ η κατανόηση του οποίου σε πολλές περιπτώσεις προϋποθέτει την εφαρμογή των αρχών της κβαντομηχανικής. Τα συστήματα αυτά σηματοδοτούν την απαρχή μιας εποχής όπου η κβαντομηχανική θα συναντάται όλο και περισσότερο σε τεχνολογικές εφαρμογές. Για τον λόγο αυτό κάποιοι επιστήμονες ονομάζουν την τρέχουσα περίοδο ως «δεύτερη κβαντική επανάσταση». Οι τομείς της εφαρμοσμένης έρευνας στην περιοχή αυτή είναι πολλοί. Ακολουθώντας αναφέρουμε κάποιους από τους βασικούς τομείς: τα συστήματα εκτέλεσης κβαντικών αλγορίθμων, η κβαντική κρυπτογραφία, τα κβαντικά ηλεκτρομηχανικά συστήματα (QEMS), η μικροσκοπία με μαγνητικό συντονισμό του ηλεκτρονίου, τα κβαντικά ηλεκτρονικά και τα κβαντικά ηλεκτρονικά *Σύμφωνων (Coherent)* ηλεκτρονίων, τα υπεραγώγιμα κβαντικά κυκλώματα, κβαντική φωτονική και κβαντική οπτική, σπιντρονική, κβαντικοί υπολογιστές στερεάς κατάστασης, η ηλεκτρονική των Σύμφωνων μορίων, η κβαντική οπτική συμβολομετρία και λιθογραφία, τα ατομικά laser και η ατομική οπτική, το κβαντικό ατομικό βαρυτόμετρο.

Σε τεχνολογικό επίπεδο γίνεται προσπάθεια αξιοποίησης κάποιων πολύ ιδιαιτέρων κβαντικών ιδιοτήτων της ύλης. Για παράδειγμα γίνεται προσπάθεια αξιοποίησης της μη τοπικής κβαντικής συσχέτισης (Entanglement) και του κβαντικού *Φαινομένου Σήραγγας (Quantum Tunneling)*. Για το λόγο αυτό αναπτύσσονται μέθοδοι ελέγχου των ιδιοτήτων αυτών. Η βασική δυσκολία στην κατασκευή κβαντικών συσκευών με εμπορική αξία έγκειται στην φυσική διαδικασία η οποία είναι γνωστή με το όνομα *Κβαντική Αποσυμφωνία* ή απλά *Αποσυμφωνία (Decoherence)*. Η Κβαντική Αποσυμφωνία προκαλεί ταχεία τυχαιοποίηση της φάσης των Σύμφωνων κβαντικών καταστάσεων με συνέπεια την σταδιακή απώλεια των κβαντικών στατιστικών συσχετίσεων. Ο έλεγχος της Κβαντικής Αποσυμφωνίας είναι το μεγάλο στοίχημα της κβαντικής τεχνολογίας.

Στην διατριβή αυτή γίνεται μια προσπάθεια παραγωγής νέων συμπερασμάτων όσον αφορά τον τρόπο συσχέτισης της κβαντικής μη τοπικότητας ενός συστήματος με την δυναμική του κλασικού αναλόγου του. Οι κβαντικές μη τοπικές συσχετίσεις περιγράφονται με την έννοια του Entanglement. Επίσης προσπαθούμε να εξετάσουμε την πιθανότητα κατασκευής βιώσιμων Entangled καταστάσεων σε ανοιχτά συστήματα με μη

γραμμικό κλασικό ανάλογο. Η κωδικοποίηση του περιβάλλοντος γίνεται με διάφορους τρόπους (θερμικό περιβάλλον, ιεραρχικά με Ενδιάμεσο (host) Σύστημα και θερμικό περιβάλλον, τυχαίους πίνακες). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι πράγματι υπάρχει ουσιαστική σχέση μεταξύ του Entanglement και της μη γραμμικής δυναμικής.

Πιο αναλυτικά καταλήξαμε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα στις εξής περιπτώσεις:

(α). Μελετήσαμε το *Kicked Top* σε κβαντικό και σε κλασικό επίπεδο και διαπιστώσαμε ότι κλασικά χαρακτηριστικά, όπως οι Διακλαδώσεις (*Bifurcations*), επηρεάζουν την δυναμική του Entanglement.

(β). Χρησιμοποιήσαμε το Quantum Kicked Rotor για να προσομοιώσουμε το περιβάλλον που περιβάλλει ένα απλούστερο κβαντικό σύστημα. Διαπιστώσαμε ξανά ότι η ύπαρξη ή όχι χάους επηρεάζει την ικανότητα του μικρότερου συστήματος να διατηρεί Entangled καταστάσεις. Επίσης διαπιστώσαμε ότι επηρεάζονται και άλλες πληροφοριακές ποσότητες όπως η Πιστότης (*Fidelity*), η Εντροπία Ανταλλαγής (*Entropy of Exchange*) και η Χωρητικότητα του Καναλιού (*Channel Capacity*).

(γ). Παρατηρήσαμε κβαντικές ενδείξεις ενός μη γραμμικού φαινομένου, των κλασικών συστημάτων, που ονομάζεται στοχαστικός συντονισμός. Ο στοχαστικός συντονισμός είναι φαινόμενο που έχει να κάνει με την σχέση θορύβου και σήματος σε ένα σύστημα.

(δ). Παρεμβάλαμε μεταξύ του κβαντικού συστήματος και του θερμικού περιβάλλοντος Ενδιάμεσο Σύστημα (host system). Το ενδιάμεσο σύστημα θεωρήθηκε πλήρως ελέγξιμο μέσω κάποιων παραμέτρων ελέγχου. Είδαμε ότι οι ρυθμοί μεταβολής του Entanglement μεταβάλλονται δραστικά ανάλογα με το εάν οι τιμές των παραμέτρων ελέγχου ρυθμίζονται έτσι ώστε το ενδιάμεσο σύστημα ακολουθεί (στο κλασικό όριο) χαοτική δυναμική. Να σημειωθεί εδώ ότι ποιοτικά τα αποτελέσματα παραμένουν ίδια ακόμα και όταν είμαστε μακριά από το ημικλασικό όριο.

(ε). Μελετήσαμε την δυναμική του Entanglement με μοντέλα Τυχαίων Πινάκων. Έτσι βγάλαμε χρήσιμα γενικά συμπεράσματα σχετικά με την συμπεριφορά του Entanglement σε συστήματα τα οποία υπακούουν σε διαφορετικές συμμετρίες.

(στ). Διερευνήσαμε την σχέση του Entanglement με την δυναμική των ιδιοενεργειών στα πλαίσια του δυναμικού συστήματος Pechukas-Yukawa. Καταλήξαμε σε ένα άνω φράγμα όσον αφορά τις μεταβολές του Entanglement το οποίο εκφράζεται ως συνάρτηση της κυρτότητας των ιδιοκαταστάσεων στο παραπάνω μοντέλο.

(ζ). Μελετήσαμε την ευστάθεια του Entanglement σε σχέση με τις διαταραχές του περιβάλλοντος κάνοντας χρήση Τυχαίων Πινάκων αλλά και Παγκόσμιων (*Universal*) συμμετριών της στατιστικής των κυρτοτήτων των ιδιοτιμών στις διαφορετικές συμμετρίες της χαοτικής δυναμικής.

(η). Δείξαμε ότι είναι δυνατόν να δημιουργηθεί Entanglement σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον σε συγκεκριμένο μαγνητικό κρύσταλλο με μη γραμμικό όρο στην Χαμιλτονιανή του.

(θ). Κάναμε χρήση κατανομών στον χώρο των φάσεων (Husimi) για να αναδείξουμε ιδιότητες Entangled καταστάσεων.

Επίσης έγινε ένα εκτεταμένο πλήθος υπολογισμών σε σχέση με άλλα χαρακτηριστικά του χάους τα οποία θα μπορούσαν να επηρεάσουν το Entanglement όπως τα *Μορφοκλασματικά Σύνολα (fractals)* , ο *Έγχρωμος Θόρυβος (colored noise)* κ.α.

Κατόπιν όλων αυτών έχουμε καταλήξει στο εξαιρετικά ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι κάποια χαρακτηριστικά της κλασικής δυναμικής μπορεί να αντανakλούν στον τρόπο που συμπεριφέρεται μια καθαρά κβαντική ιδιότητα χωρίς κλασικό ανάλογο. Η ιδιότητα αυτή είναι το Entanglement.

Το κείμενο που ακολουθεί συνίσταται από ενότητες οι οποίες διατηρούν μια σχετική αυτοτέλεια. Έτσι η βιβλιογραφία οργανώνεται ανά ενότητα. Επίσης κάποιες έννοιες επαναλαμβάνονται εν συντομία όταν πρέπει να χρησιμοποιηθούν σε μια νέα ενότητα του κειμένου. Οι πρώτες ενότητες (Α' - Γ') περιλαμβάνουν συνοπτικά τις βασικές

έννοιες της κβαντομηχανικής με έμφαση στην ανοικτή δυναμική, της κβαντικής θεωρίας της πληροφορίας και του κβαντικού χάους έτσι όπως οι ιδέες αυτές εκφράζονται στην σχετική βιβλιογραφία. Οι τελευταίες ενότητες (Δ'–Η') περιλαμβάνουν πρωτότυπα αποτελέσματα. Ένα μέρος αυτών είναι δημοσιευμένο.

ΕΝΟΤΗΤΑ Α΄

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΑΝΟΙΚΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Εισαγωγικά στοιχεία κβαντομηχανικής.

Η κβαντική φυσική γεννήθηκε το 1900 βασιζόμενη στην υπόθεση του Max Planck [1] ότι τα άτομα εκπέμπουν και απορροφούν ενέργεια με τρόπο διακριτό. Τα διακριτά πακέτα ενέργειας ονομάσθηκαν quanta και η καινούργια φυσική κβαντομηχανική. Η νέα θεωρία εφαρμόστηκε με επιτυχία στην ερμηνεία της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος [2,3] (black body radiation). Επίσης ο Einstein κατάφερε να δώσει ικανοποιητική εξήγηση στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο αναγνωρίζοντας την ύπαρξη ενεργειακών δεμάτων. Κατόπιν ακολούθησε η κβάντωση του ατόμου από τον Bohr (1913) και πραγματοποιήθηκε το περιβόητο πείραμα Stern-Gerlach και διατυπώθηκε η υπόθεση de Broglie (1924) η οποία παραδέχεται ότι τα σωματίδια έχουν κυματικά χαρακτηριστικά. Οι πρώτοι που πραγματοποίησαν πείραμα συμβολής ηλεκτρονίων είναι οι C. J. Davidson and L. H. Germer (1927). Την ίδια εποχή διερευνήθηκε η θεωρία των φωτονίων, μελετήθηκε το φαινόμενο Compton και δημοσιεύτηκε η αρχή της αντιστοιχίας [4,5] του Bohr. Η αρχή της αντιστοιχίας εκφράζει την θέση ότι «η κβαντική φυσική θα πρέπει να προσεγγίζει ασυμπτωτικά την κλασική θεωρία στο όριο των μεγάλων κβαντικών αριθμών». Επίσης την περίοδο αυτή ήταν σε ισχύ οι κανόνες κβάντωσης των Bohr-Sommerfeld. Η κβαντική θεωρία της περιόδου αυτής είναι γνωστή και ως «Παλιά κβαντική θεωρία» [6].

Η κβαντική θεωρία ως ολοκληρωμένη φυσική θεωρία με συγκεκριμένο μαθηματικό φορμαλισμό και σαφή φυσική ερμηνεία βασίσθηκε κυρίως στις εργασίες των M. Born, P. A. M. Dirac, P. Jordan, W. Pauli, E. Schrodinger και W. Heisenberg. Οι θεμελιώδεις αρχές της κβαντομηχανικής που χρησιμοποιούμε μέχρι και σήμερα παγιώθηκαν μέσα στην χρονική περίοδο 1923 – 1927 και αντικατέστησαν τις αρχές της «παλιάς κβαντικής θεωρίας». Η κυματομηχανική του Schrodinger και η μηχανική των μητρών (matrix mechanics) αποτελούν τους δυο ισοδύναμους θεμελιώδεις φορμαλισμούς της κβαντικής θεωρίας [39]. Την ίδια περίοδο ο Dirac με την θεωρία των μετασχηματισμών (transformation theory) γενίκευσε τις αρχές των δυο προηγούμενων προσεγγίσεων. Η «Νέα» κβαντική θεωρία παραδέχεται ότι οι κβαντικές καταστάσεις εκφράζουν τις πιθανότητες με τις οποίες εμφανίζονται οι διάφορες δυνατές

τιμές των φυσικά μετρήσιμων ποσοτήτων. Οι ποσότητες αυτές ονομάστηκαν «παρατηρήσιμα» (observables) .

Η κβαντική θεωρία αποτελεί στις μέρες μας κατά κοινή ομολογία την περιγραφή των ιδιοτήτων της ύλης. Παρόλα αυτά υπάρχουν ακόμα προβλήματα. Το πρόβλημα της κβαντικής θεωρίας δεν έγκειται στην υπολογιστική της αξία αλλά στην ερμηνεία της. Θεμελιώδη ερωτήματα υπάρχουν σχετικά με την ακριβή έννοια του παρατηρητή, της κβαντικής μέτρησης και της πραγματικής προέλευσης των κβαντικών αβεβαιοτήτων.

Το γεγονός ότι η κβαντική στοχαστικότητα φαίνεται να πηγάζει πέραν της κλασικής αποτελεί ένα μεγάλο μυστήριο. Συγκεκριμένα θεωρήματα δείχνουν ότι η κβαντική τυχαιότητα δεν μπορεί να ερμηνευτεί με κλασικούς όρους. Επίσης οι μη τοπικές ιδιότητες των κβαντικών συστημάτων συνεχίζουν να δημιουργούν απορίες και ερωτήματα [22]. Ως αποτέλεσμα των δυσκολιών στην προσέγγιση των εννοιών έχουν επινοηθεί διαφορετικές *Ερμηνείες* (interpretations) της κβαντικής θεωρίας. Οι Ερμηνείες αυτές είναι ισοδύναμες όσον αφορά τις τιμές των παρατηρήσιμων όπως αυτά εμφανίζονται στο πείραμα διαφέρουν όμως όσον αφορά την ερμηνεία των βαθύτερων αιτιών της κβαντικής συμπεριφοράς. Οι διαφορετικές Ερμηνείες μπορεί να είναι χρήσιμες στην περιγραφή κβαντικών ιδιοτήτων χωρίς κλασικό ανάλογο ή το αντίστροφο. Ένα παράδειγμα είναι ο υπολογισμός του μέσου χρόνου διαφυγής [11] για κβαντικά συστήματα με την βοήθεια της στοχαστικής μηχανικής του Nelson [12]. Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι η δυνατότητα κατασκευής ομάδων τροχιών με θετικούς εκθέτες Lyapunov με την βοήθεια της Ερμηνείας του Bohm [9,10]. Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε αρκετά ακόμα παραδείγματα αλλά αυτό ξεφεύγει από τον σκοπό αυτής της σύντομης εισαγωγής.

Ενδεικτικά παραθέτουμε τον ακόλουθο συγκριτικό πίνακα των διάφορων Ερμηνειών της κβαντικής θεωρίας.

Interpretation	Deterministic?	Waveform Real?	Unique History?	Hidden Variables?	Collapsing Wavefunctions?	Observer role?
Copenhagen interpretation (Waveform not real)	No	No	Yes	No	NA	NA
Ensemble interpretation (Waveform not real)	No	No	Yes	Agnostic	No	None
Copenhagen interpretation (Waveform real) Objective collapse theories	No	Yes	Yes	No	Yes	None
Consistent histories (Decoherent approach)	Agnostic ¹	Agnostic ¹	No	No	No	Interpretational ²
Quantum logic	Agnostic	Agnostic	Yes ³	No	No	Interpretational ²
Many-worlds interpretation (Decoherent approach)	Yes	Yes	No	No	No	None
Stochastic mechanics	No	No	Yes	No	No	None
Many-minds interpretation	Yes	Yes	No	No	No	Interpretational ⁴
Bohm-de Broglie interpretation ("Pilot-wave" approach)	Yes	Yes ⁵	Yes ⁶	Yes	No	None
Transactional interpretation	No	Yes	Yes	No	Yes ⁷	None
Consciousness causes collapse	No	Yes	Yes	No	Yes	Causal
Relational Quantum Mechanics	No	Yes	Agnostic ⁸	No	Yes ⁹	None

Incomplete measurements	No	No ¹⁰	Yes	No	Yes ¹⁰	Interpretational ²
-------------------------	----	------------------	-----	----	-------------------	-------------------------------

¹ If wavefunction is real then this becomes the many-worlds interpretation. If wavefunction less than real, but more than just information, then Zurek calls this the "existential interpretation".

² Quantum mechanics is regarded as a way of predicting observations, or a theory of measurement..

³ But quantum logic is more limited in applicability than Coherent Histories.

⁴ Observers separate the universal wavefunction into orthogonal sets of experiences.

⁵ Both particle AND guiding wavefunction are real.

⁶ Unique particle history, but multiple wave histories.

⁷ In the TI the collapse of the state vector is interpreted as the completion of the transaction between emitter and absorber.

⁸ Comparing histories between systems in this interpretation has no well-defined meaning.

⁹ Any physical interaction is treated as a collapse event relative to the systems involved, not just macroscopic or conscious observers.

¹⁰ The nature and collapse of the wave function are derived, not axiomatic.

Σημείωση : Ο πίνακας είναι δανεισμένος από την ιστοσελίδα http://en.wikipedia.org/wiki/Interpretation_of_quantum_mechanics. Για τον λόγο αυτό δεν έχει γίνει κάποια προσπάθεια τροποποίησης του.

Οι απόψεις σχετικά με την σημασία αλλά και την αναγκαιότητα των διαφορετικών Ερμηνειών της κβαντικής θεωρίας διίστανται. Πολλοί φυσικοί πιστεύουν ότι η αναζήτηση αυτή είναι εντελώς άσκοπη εφόσον όλες οι θεωρίες συμφωνούν με το πείραμα και με την έννοια αυτή είναι ισοδύναμες. Όμως όπως και να έχει ακόμα και από αισθητικής άποψης οι διάφορες εκδοχές της κβαντομηχανικής έχουν κάτι να προσφέρουν. Επίσης σε κάποιες περιπτώσεις οι διάφορες Ερμηνείες αποτελούν ισχυρότατα εργαλεία της υπολογιστικής φυσικής. Εξετάζοντας το ενδεχόμενο η κβαντομηχανική να μην είναι πλήρης θεωρία, είναι πιθανόν, κάποια από τις διαφορετικές Ερμηνείες, να συμβάλει στην κατασκευή μιας πληρέστερης θεωρίας.

Τα αξιώματα της κβαντικής μηχανικής.

Στο σημείο αυτό θα προχωρήσουμε σε μια σύντομη επισκόπηση των βασικών αρχών της κβαντομηχανικής, των αξιωμάτων της και του μαθηματικού φορμαλισμού της [8].

Η κβαντική θεωρία είναι ένα μαθηματικό μοντέλο του φυσικού κόσμου. Για να είμαστε επαρκείς στην περιγραφή της θεωρίας θα πρέπει να παρουσιάσουμε πως η κβαντομηχανική διαχειρίζεται την έννοια της φυσικής κατάστασης (quantum state), του Παρατηρήσιμου (observable), της μέτρησης (measurement) και ποια η δυναμική του κβαντικού συστήματος. Θα ακολουθήσουμε περιγραφική προσέγγιση χωρίς πολύ μεγάλη μαθηματική αυστηρότητα. Να σημειωθεί εδώ ότι αυστηρότερος ορισμός των βασικών αξιωμάτων μπορεί να δοθεί στον φορμαλισμό της C^* -Algebra.

Αξίωμα 1:

«Η κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος περιγράφεται με ένα διάνυσμα του χώρου Hilbert»

Με τον όρο κβαντική κατάσταση εννοούμε εκείνο το μαθηματικό αντικείμενο το οποίο περιγράφει πλήρως την κατάσταση στην οποία βρίσκεται μια καθορισμένη στιγμή το σύστημα. Από την κβαντική κατάσταση θα πρέπει να προκύπτουν όλες οι τιμές των φυσικών ποσοτήτων που σχετίζονται με το σύστημα. Από μαθηματικής απόψεως η κβαντική κατάσταση είναι ένα διάνυσμα (ray) του χώρου Hilbert του συστήματος. Όλες οι δυνατές καταστάσεις του συστήματος πρέπει να μπορούν να υπάρχουν μέσα στον χώρο αυτό. Ποίες όμως προϋποθέσεις πρέπει να πληροί ένας διανυσματικός χώρος για να καλείται χώρος Hilbert; Ο προϋποθέσεις είναι οι ακόλουθες:

1. Να είναι διανυσματικός χώρος ορισμένος πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. (Τα διανύσματα τα αναπαριστούμε με τον συμβολισμό του Dirac ως $|y\rangle$ και τον χώρο αυτό καθαυτό H)
2. Ο χώρος πρέπει να είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή για κάθε διατεταγμένο ζεύγος $|y\rangle, |z\rangle \in H$ να

ορίζεται η μιγαδική ποσότητα $\langle y||z\rangle\in\mathbb{C}$ η οποία να πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Θετικότητα υπό την έννοια: $\langle y||y\rangle>0$ για $|y\rangle\neq 0$

β) Γραμμικότητα: $\langle z|(a|y\rangle+b|k\rangle)=a\langle z||y\rangle+b\langle z||k\rangle$ για $a,b\in\mathbb{C}$

γ) Συμμετρία (Scew symmetry): $\langle z||y\rangle=\langle y||z\rangle^*$

3. Να μπορεί να ορισθεί το μέτρο $\|y\|=\sqrt{\langle y||y\rangle}$ και να είναι πεπερασμένο.

Ο χώρος Hilbert μπορεί να έχει πεπερασμένη ή άπειρη διάσταση. Η τρίτη ιδιότητα εξασφαλίζει την σύγκλιση του μέτρου στην περίπτωση που ο χώρος έχει άπειρη διάσταση.

Οι κβαντικές καταστάσεις ακολουθούν το γενικό κανόνα κανονικοποίησης $\|y\|=1$. Στην πραγματικότητα με την κανονικοποίηση αυτή ορίζουμε μια κλάση ισοδυναμίας στον χώρο Hilbert η οποία αποτελείται από διανύσματα τα οποία διαφέρουν κατά τον παράγοντα $e^{i\phi}$ (αυθαιρεσία φάσης). Αυτήν την κλάση ισοδυναμίας καλούμε ray.

Αξίωμα 2:

«Τα παρατηρήσιμα αναπαρίστανται με αυτοσυζυγείς τελεστές.

Οι δυνατές τιμές τους είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή.»

Ως Παρατηρήσιμο (observable) ορίζουμε καταρχήν κάθε ιδιότητα του φυσικού συστήματος η οποία μπορεί να μετρηθεί με τις μεθόδους της φυσικής. Στην κβαντομηχανική τα παρατηρήσιμα αναπαρίστανται με την βοήθεια αυτοσυζυγών τελεστών. Ως τελεστή ορίζουμε μια γραμμική απεικόνιση $T:H\rightarrow H$. Δηλαδή

$$|y\rangle\in H\Rightarrow T|y\rangle=|z\rangle\in H$$

$$|z\rangle,|y\rangle\in H,a,b\in\mathbb{C}\Rightarrow T(a|y\rangle+b|z\rangle)=aT|y\rangle+bT|z\rangle$$

Ο τελεστής T ονομάζεται αυτοσυζυγής εάν ισούται με τον συζυγή του. Δηλαδή

$$T = T^+$$

Ο συζυγής τελεστής ορίζεται με την συνθήκη

$$\langle z | Ty \rangle = \langle T^+ z | y \rangle \quad \forall |y\rangle, |z\rangle \in H$$

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές έχουν πάντοτε πραγματικές ιδιοτιμές και πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων. Το σύνολο των ιδιοτιμών του τελεστή ονομάζεται φάσμα. Ένας αυτοσυζυγής τελεστής μπορεί να έχει διακριτό ή συνεχές φάσμα, πεπερασμένο ή άπειρο. Να σημειωθεί εδώ ότι όταν ο χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης, οι αυτοσυζυγείς τελεστές είναι ερμιτιανοί μια και η προϋπόθεση ο τελεστής να είναι φραγμένος είναι εξασφαλισμένη.

Κάθε ερμιτιανός τελεστής μπορεί έχει την φασματική του αναπαράσταση (*spectral decomposition*).

$$T = \sum_n t_n P_n$$

οπού τα t_n είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή και τα P_n προβολικοί τελεστές του H . Λέμε ότι το P_n είναι ο προβολικός τελεστής που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή t_n . Στην περίπτωση που η ιδιοτιμή t_n είναι μη εκφυλισμένη τότε $P_n = |n\rangle\langle n|$ όπου $T|n\rangle = t_n|n\rangle$.

Για το σύνολο των προβολικών τελεστών που περιέχονται στην φασματική αναπαράσταση του ερμιτιανού τελεστή T ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις πληρότητας:

$$P_n P_m = \delta_{nm} P_m$$

$$P_n^+ = P_n$$

Τα παραπάνω γενικεύονται και στην περίπτωση που ο T έχει συνεχές φάσμα.

Αξίωμα 3:

«Ως αποτέλεσμα της μέτρησης μιας φυσικής ποσότητας η κατάσταση του συστήματος προβάλλεται σε μία από τις ιδιοκαταστάσεις του αυτοσυζυγούς τελεστή A που αντιστοιχεί στο μετρήσιμο»

Η πιθανότητα το μετρήσιμο να λάβει την τιμή a_n είναι ίση με $\Pi(a_n) = \|P_n|y\rangle\|^2 = \langle y|P_n|y\rangle$ όπου $|y\rangle$ η κατάσταση του συστήματος πριν την μέτρηση και $A = \sum_n a_n P_n$. Η νέα κατάσταση του συστήματος είναι η $\frac{P_n|y\rangle}{\sqrt{\langle y|P_n|y\rangle}}$. Υποθέτουμε ότι η αρχική κατάσταση $|y\rangle$ είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα έτσι ώστε $\sum_n \Pi(a_n) = 1$. Στην περίπτωση αυτή η στατιστική ερμηνεία της θεωρίας είναι σαφώς ορισμένη.

Αξίωμα 4:

«Η δυναμική ενός απομονωμένου κβαντικού συστήματος περιγράφεται από τη εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |y(t)\rangle = H |y(t)\rangle$$

όπου H είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος δηλαδή ο αυτοσυζυγής τελεστής που σχετίζεται με την ολική ενέργεια»

Φορμαλιστικά η λύση της εξίσωσης του Schrodinger δίνεται από την έκφραση $|y(t)\rangle = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H dt\right) |y(0)\rangle$ όπου T είναι ο Διατεταγμένος Τελεστής Χρονικής Εξέλιξης (*normal ordering time operator*). Επειδή ο τελεστής H είναι ερμιτιανός ο τελεστής $U(t) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H dt\right)$ είναι μοναδιαίος (*unitary*). Πράγματι εφόσον $U(dt) = 1 - \frac{i}{\hbar} H dt$ ισχύει ότι $UU^\dagger = 1$. Ο τελεστής

U ονομάζεται τελεστής χρονικής εξέλιξης (time evolution operator). Στην γλώσσα των κβαντικών υπολογιστών το U αναπαριστά έναν κβαντικό αλγόριθμο.

Να σημειωθεί εδώ ότι με μοναδιαίο τρόπο εξελίσσονται μόνο τα απομονωμένα κβαντικά συστήματα. Όταν το σύστημα αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του τότε χρησιμοποιούμε τον φορμαλισμό του Πίνακα Πυκνότητας (*Density Matrix*) και μιλάμε για Μίγματα (*Mixtures*) τα οποία όπως θα δούμε εξελίσσονται διαφορετικά. Στην περίπτωση αυτή εισάγουμε την έννοια του Πίνακα Πυκνότητας γιατί η κυματοσυνάρτηση αδυνατεί να περιγράψει το υποσύστημα. Σύμφωνα με τις σύγχρονες αντιλήψεις η σχέση κλασικού-κβαντικού, η απώλεια των κβαντικών ιδιοτήτων ενός συστήματος (Κβαντική Αποσυμφωνία) έγκειται ακριβώς σε αυτήν την αλληλεπίδραση του συστήματος με το περιβάλλον του. Επίσης το πρόβλημα της κβαντικής μέτρησης μπορεί μερικώς να απαντηθεί από την διαδικασία της Κβαντικής Αποσυμφωνίας.

Το Παράδοξο των Einstein-Podolsky-Rosen (EPR paradox). Κβαντομηχανική και μη τοπικότητα. Κρυμμένες μεταβλητές (hidden variables). Το Θεώρημα του Bell.

Η κβαντική θεωρία, κατά τα πρώτα χρόνια, δεν έγινε αποδεκτή από όλους τους ερευνητές. Ακόμα και ο Einstein ο οποίος συνέβαλε στην ανάπτυξη της θεωρίας με την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου διατηρούσε επιφυλάξεις σχετικά με τα θεμέλια της θεωρίας. Η θέση του ήταν ότι η φύση δεν μπορεί περιλαμβάνει εγγενείς τυχαιότητες. Οι εγγενείς τυχαιότητες της κβαντομηχανικής συνδέονται επίσης με μη τοπικές συσχετίσεις κάτι που καθιστά την κβαντομηχανική μη τοπική θεωρία. Και σε αυτό ο Einstein μαζί με άλλους ερευνητές έφερνε αντιρρήσεις. Από την άλλη πλευρά η κβαντική θεωρία, τουλάχιστον ως φαινομενολογία, έδινε αποτελέσματα τα οποία συμβάδιζαν με το πείραμα. έγινε λοιπόν η υπόθεση ότι η τυχαιότητες της κβαντομηχανική είναι μονάχα φαινομενικές και οφείλονται στην αδυναμία μας να παρατηρήσουμε άμεσα ένα σύνολο αθέατων παραγόντων-αιτίων.

Οι παράγοντες αυτοί ονομάστηκαν «κρυμμένες μεταβλητές» (hidden variables). Ανακαλύπτοντας τις κρυμμένες μεταβλητές η αιτιοκρατία θα επέστρεφε και η φυσική θα έμπαινε πάλι σε τάξη. Οι προβληματισμοί αυτοί δημοσιεύθηκαν από τους Einstein, Podolsky και Rosen το 1935 και η συγκεκριμένη δημοσίευση έμεινε γνωστή ως το EPR Paper και περιλαμβάνει το περίφημο Παράδοξο EPR [7,13,14,15,16,22].

Το Παράδοξο EPR συνοψίζεται στο γεγονός ότι δυο κβαντικά συστήματα τα οποία αλληλεπιδρούν αρχικά μπορούν να συνεχίσουν να συσχετίζονται ακόμα και εάν πάψουν να αλληλεπιδρούν με κάποιο κλασικό ή κβαντικό πεδίο. Η συσχέτιση αυτή είναι καθαρά κβαντική και στερείται κλασικού αναλόγου. Μέτρηση μιας φυσικής ιδιότητας του ενός εκ των συστημάτων μπορεί άμεσα να επηρεάσει τις τιμές των μετρήσιμων του δευτέρου συστήματος. Η συσχέτιση αυτή είναι σήμερα γνωστή με τον όρο Entanglement.

Απάντηση στους προβληματισμούς αυτούς δόθηκε από τον John S. Bell [17, 18] ο οποίος εξέφρασε τον ισχυρισμό:

«Δεν μπορεί να υπάρξει καμία κλασική θεωρία κρυμμένων μεταβλητών η οποία να μπορεί να αναπαράγει όλες τις λεπτομέρειες της κβαντομηχανικής»

Η τελευταία πρόταση είναι γνωστή και ως θεώρημα του Bell.

Το θεώρημα του Bell βασίζεται στην ομώνυμη ανισότητα. Στο σημείο αυτό θα αναπαράγουμε την ανισότητα αυτή. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια πηγή παραγωγής ζευγών σωματιδίων με spin $1/2$. Η κατάσταση του ζευγαριού είναι singlet. Για παράδειγμα:

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

με $|0\rangle, |1\rangle$ να συμβολίζουμε τις καταστάσεις spin κάτω και πάνω αντίστοιχα.

Για να μετρήσουμε τις συνιστώσες του σπιν κάθε σωματιδίου κατά συγκεκριμένη διεύθυνση έχουμε στην διάθεση μας μαγνήτες όπως αυτούς που χρησιμοποιούνται στο πείραμα των Stern-Gerlach. Συμβολίζουμε το σπιν του κάθε σωματιδίου ως $\vec{\sigma}_1$ και $\vec{\sigma}_2$ αντίστοιχα. Έστω ότι διευθετούμε τους μαγνήτες με τέτοιο τρόπο ώστε να επιλέγεται η διεύθυνση που ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{a}$. Εάν η μέτρηση της συνιστώσας $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{n}$ δώσει την τιμή +1 τότε από την κβαντομηχανική προκύπτει ότι η τιμή της ποσότητας $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{n}$ είναι -1 και αντίστροφος εάν η πρώτη ποσότητα λάβει την τιμή -1 η δεύτερη λαμβάνει την τιμή +1. Το γεγονός αυτό συμβαίνει λόγω της αρχικής συσχέτισης των δυο σωματιδίων η οποία συνεχίζει να υφίσταται και αφού τα σωματίδια πάψουν να αλληλεπιδρούν. Το γεγονός ότι η μέτρηση του ενός σπίνου επηρεάζει τον δεύτερο είναι αποτέλεσμα της μη τοπικότητας της κβαντικής θεωρίας.

Ας επιχειρήσουμε τώρα να περιγράψουμε με κλασικούς όρους αυτή την συσχέτιση. Ας θεωρήσουμε ότι στο σύστημα υπάρχει μια κρυμμένη μεταβλητή λ . Θεωρούμε ότι το λ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία περιγράφεται από συγκεκριμένη αλλά άγνωστη στον παρατηρητή κατανομή πυκνότητας πιθανότητας. Έστω ότι η κατανομή αυτή είναι η

$p(\lambda)$ με $\int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda) d\lambda = 1$. Κάνουμε την υπόθεση ότι η κβαντομηχανική τυχαιότητα έχει ως αιτία την κλασική τυχαιότητα της κρυμμένης μεταβλητής λ . Τότε η μέση τιμή κάθε μετρήσιμου $T \equiv T(\lambda)$ ισούται με

$$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T(\lambda) p(\lambda) d\lambda$$

Έτσι η αναμενόμενη τιμή του γινομένου των δυο συνιστωσών $\vec{\sigma}_1 \vec{a}$ και $\vec{\sigma}_2 \vec{b}$ ισούται με

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda p(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda)$$

όπου με A συμβολίζουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης της συνιστώσας $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ και με B συμβολίζουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης της συνιστώσας $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ και με βάση τις αρχικές παραδοχές πρέπει

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1 \text{ και } B(\vec{b}, \lambda) = \mp 1$$

Η μέση τιμή πάνω στην κρυμμένη μεταβλητή θα πρέπει να ισούται με την κβαντική μέση τιμή, έτσι ώστε να αναπαράγουμε τα συμπεράσματα της κβαντομηχανικής. Έτσι

$$\langle \vec{\sigma}_1 \vec{a} \vec{\sigma}_2 \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

όμως όπως θα φανεί παρακάτω αυτό δεν είναι δυνατόν.

Επιλέγουμε τις διευθύνσεις των μαγνητών να ταυτίζονται. Έτσι $\vec{a} = \vec{b}$ και

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda)$$

συνεπώς

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -\int d\lambda p(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)$$

Εισάγοντας μια ακόμα διεύθυνση $\vec{c}$ γράφουμε

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= -\int d\lambda P(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda P(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1] \end{aligned}$$

συνεπώς

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int d\lambda P(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)]$$

όμως λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος ο δεύτερος όρος δεξιά μπορεί να γραφεί ως $P(\vec{b}, \vec{c})$. Έτσι καταλήγουμε στην ανισότητα:

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \quad (\text{Ανισότητα Bell})$$

Η σημασία της ανισότητας του Bell είναι μεγάλη για τον λόγο ότι η ορθότητα της μπορεί να εξεταστεί πειραματικά. Εάν με κάποιο πείραμα καταφέρουμε να καταρρίψουμε την ανισότητα του Bell τότε η θεωρία των κρυμμένων μεταβλητών δεν μπορεί να ισχύει. Στην περίπτωση που η κατάσταση του ζεύγους είναι $|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ τότε η κβαντομηχανική πρόβλεψη είναι ίση με $-\cos(\phi_{ab})$ όπου $\phi_{ab} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ η γωνία που σχηματίζουν τα δυο μοναδιαία διανύσματα. Η ανισότητα του Bell παραβιάζεται για μια ευρεία περιοχή γωνιών.

Παραβίαση της ανισότητας του Bell σημαίνει για πολλούς ερευνητές ύπαρξη Entanglement. Ο βαθμός παραβίασης της ανισότητας είναι και ένα πρώιμο μέτρο του Entanglement.

Ανισότητα του Bell και πείραμα.

Όταν με κάποιο πείραμα [19,20,21,23] δοκιμάζουμε την ορθότητα της ανισότητας του Bell εξετάζουμε ταυτόχρονα και την αλήθεια της έννοιας του Entanglement. Στην πράξη τα περισσότερα πειράματα δεν εξετάζουν απευθείας την ορθότητα της αρχικής ανισότητας αλλά των παραγώγων της. Στην παράγραφο αυτή με τον όρο ανισότητα του Bell θα εννοούμε και κάθε τροποποιημένη ανισότητα της αρχικής. Τα πειράματα αυτά περιλαμβάνουν στατιστικό έλεγχο ενός μεγάλου αριθμού σωματιδίων τα οποία αρχικά αλληλεπιδρούν, κατόπιν διαχωρίζονται και οι ιδιότητες τους μετρώνται στην έξοδο της πειραματικής διάταξης. Σε κάποιες περιπτώσεις η απόσταση διαχωρισμού των σωματιδίων είναι πολύ μεγάλη ή η πηγή των σωματιδίων απέχει πολύ από την έξοδο έτσι ώστε να αποκλειστεί κάθε μορφή κλασικής αλληλεπίδρασης. Η απόσταση αυτή σε κάποια πειράματα έχει φτάσει και τα 10 χιλιόμετρα [19]!

Δύο είναι οι κύριες κατηγορίες πειραματικών διατάξεων. Αυτές με ένα και αυτές με δυο κανάλια εξόδου.

Τα πειράματα ελέγχου της ανισότητας του Bell είναι κυρίως πειράματα οπτικής και περιλαμβάνουν πηγή εκπομπής

φωτονίων. Η ιδιότητα η οποία συνήθως μελετάται είναι η πόλωση των φωτονίων.

Το πρώτο πείραμα που θα παρουσιάσουμε είναι γνωστό ως το CHSH Bell test [36]. Στο πείραμα αυτό ελέγχεται η αλήθεια της ανισότητας CHSH. Η ανισότητα αυτή στην συνήθη της μορφή είναι η ακόλουθη:

$$-2 \leq S \leq +2$$

όπου

$$S = E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b')$$

όπου τα a και a' αφορούν διευθετήσεις των μετρητών στην πλευρά A και τα b , b' αφορούν διευθετήσεις των μετρητών στην πλευρά B. Οι όροι $E(a,b), E(a,b'), E(a',b), E(a',b')$ παριστάνουν τις κβαντικές συσχετίσεις, μεταξύ των ζευγών φωτονίων. Με τον όρο κβαντική συσχέτιση ορίζουμε τον στατιστικό μέσο όρο του γινομένου των αποτελεσμάτων στις δυο εξόδους της συσκευής όπου χρησιμοποιούμε την τιμή +1 εάν έχουμε έξοδο στην πλευρά + και -1 εάν έχουμε έξοδο στην πλευρά -.

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Two_channel.png]

[βλ. παράρτημα (C. Thompson)]

Η εν' λόγω ανισότητα είναι πρόσφορη στην πειραματική επαλήθευση γιατί συνδέει κλασικούς στατιστικούς μέσους με ιδιότητες της κβαντικής πληροφορίας.

Τα a , a' , b και b' πρακτικά επιλέγονται στις τιμές $0^\circ, 45^\circ, 22.5^\circ, 67.5^\circ$ (Bell test angles). Για κάθε επιλογή των τιμών των παραμέτρων a , b ο αριθμός των φωτονίων (N_{++} , N_{--} , N_{+-} και N_{-+}) μετράται. Έτσι η ποσότητα $E(a,b)$ εκτιμάται με την βοήθεια της έκφρασης

$$E = (N_{++} + N_{--} - N_{+-} - N_{-+}) / (N_{++} + N_{--} + N_{+-} + N_{-+})$$

Αφού όλα τα $E(a,b), E(a,b'), E(a',b), E(a',b')$ εκτιμηθούν πειραματικά τότε κατασκευάζεται η έκφραση για το S και συγκρίνεται η τιμή της σε σχέση με την οριακή τιμή 2. Το πείραμα CHSH είναι ένα κλασικό παράδειγμα πειράματος που περιλαμβάνει δυο κανάλια εξόδου.

Ένα τυπικό πείραμα με μονό κανάλι (single channel) εξόδου είναι το CH74. Το πείραμα αυτό προτάθηκε από τους Clauser, Horne, Shimony και Holt το 1969.

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Single-channel_Bell_test.png]

[βλ. παράρτημα (C. Thompson)]

Η λογική είναι παρόμοια αυτής του πειράματος CHSH και ο εκτιμητής στην περίπτωση αυτή είναι ο

$$S = (N(a, b) - N(a, b') + N(a', b) + N(a', b') - N(a', \infty) - N(\infty, b)) / N(\infty, \infty)$$

Όπως και στο CHSH έτσι και εδώ κάθε πολωτής παίρνει μια από τις τέσσερις τιμές γωνίας σε διαφορετικά υπο-πειράματα όμως στην περίπτωση αυτή υπάρχουν και υπο-πειράματα όπου ο ένας ή και οι δυο πολωτές απουσιάζουν. Η απουσία πολωτή

παριστάνεται με το σημείο του απείρου (∞) στην τελευταία έκφραση για το S .

Το 1997 ανακοινώθηκε πείραμα από τους W. Tittel, J. Brendel, B. Gisin, T. Herzog, H. Zbinden, N. Gisin [19] οι οποίοι κατάφεραν να διατηρήσουν φωτόνια σε Entangled κατάσταση σε απόσταση 10.9 χιλιομέτρων. Τα Entangled φωτόνια παράχθηκαν με την βοήθεια κρυστάλλου KNbO_3 και διαδόθηκαν στην απόσταση αυτή με την βοήθεια οπτικών ινών έτσι ώστε να αποκλειστεί κάθε άλλου είδους αλληλεπίδραση.

Πέραν των Καθαρών κβαντικών καταστάσεων. Ο Πίνακας Πυκνότητας Πιθανότητας (Density Matrix).

Στην πραγματική ζωή τα κβαντικά συστήματα δεν υπάρχουν απομονωμένα από το περιβάλλον τους. Ως εκ τούτου διαταράσσονται κατά τρόπο μη αντιστρέψιμο λόγω των αλληλεπιδράσεων και έτσι εισέρχονται κλασικές αβεβαιότητες στο σύστημα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η κατάσταση του συστήματος είναι Μίγμα (Mixture). Τα συστήματα αυτά δεν μπορούν να περιγραφούν με την κυματοσυνάρτηση, δεν είναι rays. Έτσι χρειαζόμαστε μια έννοια ευρύτερη της κυματοσυνάρτησης που να μπορεί να περιγράψει τα Μίγματα. Η έννοια αυτή εκφράζεται μαθηματικά με την *Μήτρα Πυκνότητας* πιθανότητας [24]. Η ποσότητα αυτή περιέχει τόσο τις κβαντικές όσο και τις κλασικές συσχετίσεις. Η Μήτρα Πυκνότητας πιθανότητας περιέχει όλες τις δυνατές πληροφορίες (εκτός της φάσεως σε κάποιες περιπτώσεις) που μπορούμε να έχουμε για το σύστημα. Επίσης μπορεί να περιγράψει και τις δυο οριακές καταστάσεις, δηλαδή αυτή που το σύστημα είναι Καθαρή κατάσταση αλλά και αυτή που το σύστημα έχει «κλασικοποιηθεί» εντελώς και έχει απολέσει όλες τις κβαντικές συσχετίσεις.

Εκκινώντας από την οριακή περίπτωση όπου το σύστημα μας περιγράφεται από την Καθαρή κατάσταση $|\Psi\rangle$ μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα πυκνότητας πιθανότητας ως:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Εάν ο χώρος Hilbert του συστήματος είναι πεπερασμένος τότε το ρ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας πεπερασμένης διάστασης ενώ εάν το σύστημα ζει σε χώρο απείρων διαστάσεων τότε το ρ είναι ένας γραμμικός τελεστής επί των διανυσμάτων του χώρου. Σε όλες τις περιπτώσεις θα πρέπει το Τχνος του πίνακα να ορίζεται και να ισούται με την μονάδα.

$$tr(\rho) = 1$$

Στην περίπτωση που η κατάσταση είναι ray τότε ισχύουν επίσης τα εξής:

$$\rho^2 = \rho$$

και

$$tr(\rho^2) = 1$$

Σε κάθε περίπτωση οι μέσες τιμές των μετρήσιμων προκύπτουν από την έκφραση:

$$\langle A \rangle = tr(\rho A)$$

όπου A είναι ο κβαντικός τελεστής που συνδέεται με το αντίστοιχο μετρήσιμο.

Στην περίπτωση που το σύστημα μας εξελίσσεται με τρόπο μοναδιαίο (πράγμα που είναι μια πολύ ειδική εξαίρεση όταν το σύστημα είναι ανοικτό) τότε η εξέλιξη του θα περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση τελεστών:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho]$$

όπου H είναι ο τελεστής Χάμιλτον (ή ο ενεργός τελεστής Χάμιλτον H_{eff}) του συστήματος. Η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη της εξίσωσης του Schrödinger στην περίπτωση που η κατάσταση είναι ray αλλά ισχύει και στην γενικότερη περίπτωση.

Θα προχωρήσουμε στην χρήση του Πίνακα Πυκνότητας πιθανότητας για την περίπτωση που θέλουμε να περιγράψουμε ανοικτό σύστημα. Έστω ότι έχουμε ένα κβαντικό σύστημα το οποίο συνίσταται από δυο σπίνορες. Επειδή το σύστημα αυτό μπορεί να διαχωριστεί σε δύο σαφώς διακριτά υποσυστήματα χαρακτηρίζεται με τον όρο *Διμερές* (*Bipartite*). Ας θεωρήσουμε ότι το συνολικό σύστημα είναι απομονωμένο από το περιβάλλον του και ας επικεντρώσουμε στην μελέτη του ενός από τα υποσυστήματα. Το συνολικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί από κυματοσυνάρτηση και ακολουθεί τους νόμους της κβαντομηχανικής που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Επειδή οι δυο σπίνορες (A και B) περιγράφονται από την από κοινού τους κυματοσυνάρτηση είναι στην γενική περίπτωση συσχετισμένοι. Έστω ότι η από κοινού κυματοσυνάρτηση των A και B δίδεται από την έκφραση:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

ή αλλιώς

$$|\Psi\rangle_{AB} = \alpha|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \beta|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

όπου τα $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ και $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ είναι οι ορθοκανονικές βάσεις για τον σπίνορα A και B αντίστοιχα.

Στην κατάσταση αυτή οι σπίνορες είναι σαφώς συσχετισμένοι γιατί γνωρίζοντας το αποτέλεσμα της μέτρησης της κατάστασης του υποσυστήματος A γνωρίζουμε απόλυτα την κατάσταση στην οποία θα περιέλθει το υποσύστημα B και αντιστρόφως. Μετρώντας την κατάσταση του σπίνορα A τον βρίσκουμε στην κατάσταση $|0\rangle$ με πιθανότητα ίση με $|\alpha|^2$. Στην περίπτωση αυτή το συνολικό σύστημα έχει περιέλθει στην κατάσταση:

$$|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$$

και ο σπίνορας B βρίσκεται πλέον στην κατάσταση $|0\rangle$. Επειδή δε η τελική κατάσταση αποτελεί τανυστικό γινόμενο οι δυο σπίνορες παύουν να συσχετίζονται μετά την μέτρηση του ενός από αυτούς. Αντίστοιχα το πρώτο σύστημα θα βρεθεί στη κατάσταση $|1\rangle$ με πιθανότητα $|\beta|^2$ και το συνολικό σύστημα θα περιέλθει στην κατάσταση:

$$|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$$

Έστω ότι έχουμε πρόσβαση στον πρώτο μόνο σπίνορα ενώ ο δεύτερος είναι κλεισμένος σε ένα αδιαπέραστο κυτίο. Όλη η πληροφορία για το σύστημα προέρχεται από τον πρώτο και μόνο σπίνορα ο οποίος παραμένει συσχετισμένος με τον δεύτερο «φυλακισμένο» σπίνορα μια και περιγράφεται από την από κοινού κυματοσυνάρτηση. Έτσι οι τιμές των Παρατηρήσιμων που σχετίζονται με τον πρώτο σπίνορα εξαρτώνται από την κατάσταση του δευτέρου.

Έστω ότι μελετάμε το παρατηρήσιμο A του πρώτου σπίνορα. Ο τελεστής που αντιστοιχεί στο φυσικό μέγεθος που μελετάμε μπορεί να εκφραστεί ως:

$$A_1 \otimes I_2$$

όπου A_1 είναι ένας αυτοσυζυγής τελεστής που δρα στο πρώτο σπίνορα ενώ το I_2 είναι ο ταυτοτικός τελεστής και δρα στον χώρο που ορίζει ο δεύτερος σπίνορας. Η μέση τιμή του μετρήσιμου A δίδεται από την ποσότητα

$$\begin{aligned}\langle \Psi | A_1 \otimes I_2 | \Psi \rangle &= \\ &= \left[(\alpha^* \langle 00 | + \beta^* \langle 11 |) A_1 \otimes I_2 (\alpha | 00 \rangle + \beta | 11 \rangle) \right] = \\ &= |\alpha|^2 \langle 0 | A_1 | 0 \rangle + |\beta|^2 \langle 1 | A_1 | 1 \rangle\end{aligned}$$

Εάν ορίσουμε τον πίνακα πυκνότητας πιθανότητας του πρώτου συστήματος ως:

$$\rho_1 = |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1|$$

τότε

$$\langle A \rangle = \text{tr}(\rho_1 A_1)$$

Για τον τελεστή ρ_1 ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\text{tr}(\rho_1) = 1$$

$$\rho_1 \text{ θετικά ορισμένος}$$

$$\rho_1 = \rho_1^\dagger \text{ ερμιτιανός}$$

Παρατηρούμε ότι ενώ το συνολικό σύστημα είναι ray το υποσύστημα δεν είναι. Ειδικά στην προηγούμενη περίπτωση ο Πίνακας Πυκνότητας πιθανότητας είναι διαγώνιος και μπορεί να αναπαρασταθεί από τον πίνακα:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

Ο τελεστής ρ_1 λέμε ότι αναπαριστά μια Συλλογή (ensemble) πιθανών κβαντικών καταστάσεων.

Τα παραπάνω γενικεύονται στην περίπτωση οποιουδήποτε διμερούς συστήματος. Έστω ότι το συνολικό σύστημα περιγράφεται στον χώρο Hilbert $H_{1,2} = H_1 \otimes H_2$. Εάν ο χώρος H_1 ορίζεται από την ορθοκανονική βάση $|i_k\rangle$ και ο χώρος H_2 από την ορθοκανονική βάση $|\mu_n\rangle$ τότε μπορούμε να ορίσουμε την βάση του $H_{1,2}$ με τα στοιχεία $\{|i_k\rangle \otimes |\mu_n\rangle\}_{k,n}$. Έτσι κάθε κατάσταση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί (εφόσον το συνολικό σύστημα είναι απομονωμένο) ως:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N c_{k,n} |i_k\rangle \otimes |\mu_n\rangle$$

και ο πίνακας πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

ή

$$\rho = \sum_{k,k',n,n'} c_{k',n}^* c_{k,n} |i_k \mu_n\rangle \langle i_{k'} \mu_{n'}|$$

ορίζοντας ως *Μερικό Τχνος* (*partial trace*) του ρ ως προς τον χώρο H_2 την ποσότητα:

$$\rho_1 = \text{tr}_2(\rho)$$

$$= \sum_{n=1}^N \langle \mu_n | \rho | \mu_n \rangle$$

ισχύει ότι

$$\rho_1 = \sum_{k,k',n} c_{k',n}^* c_{k,n} |i_k\rangle \langle i_{k'}|$$

Με την βοήθεια του ρ_1 μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές των μετρήσιμων ως :

$$\langle A \rangle = \text{tr}(\rho_1 A_1)$$

με A τον ερμιτιανό τελεστή που αντιστοιχεί στο μετρήσιμο. Να σημειωθεί εδώ ότι στην γενική περίπτωση ισχύει:

$$\text{tr}(\rho_1^2) \leq 1$$

με την ισότητα να ισχύει στην περίπτωση που ο τελεστής ρ_1 περιγράφει Καθαρή (pure) κατάσταση και ισχύει ότι $\rho_1^2 = \rho_1$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις λέμε ότι η κατάσταση αποτελεί Μίγμα.

Εικόνα Heisenberg και Αλληλεπίδρασης.

Πριν προχωρήσουμε σε βαθύτερη ανάλυση του τρόπου με τον οποίο περιγράφουμε την δυναμική των ανοιχτών κβαντικών συστημάτων θα παρουσιάσουμε, δυο πολύ χρήσιμες στους υπολογισμούς, μεθόδους περιγραφής της κλειστής δυναμικής οι οποίες είναι συμβατές με την εξίσωση του Schrödinger.

Στην *Εικόνα Heisenberg* [25] η ειδοποιός διαφορά είναι ότι αντί να μεταβάλλονται σε σχέση με τον χρόνο οι κυματοσυναρτήσεις έχουμε μεταβολή των τελεστών του συστήματος. Η εξέλιξη των τελεστών μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 και t δίδεται με την βοήθεια του τελεστή χρονικής εξέλιξης ως

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0) A(t) U(t, t_0)$$

όπου επιτρέπεται ο τελεστής του φυσικού μεγέθους $A(t)$ να εξαρτάται απευθείας από τον χρόνο. Να σημειωθεί εδώ ότι σε κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή οι τελεστές στην Εικόνα Schrödinger και Heisenberg ταυτίζονται, δηλαδή $A_H(t_0) = A(t_0)$. Στην Εικόνα του Heisenberg οι μέσες τιμές των μεγεθών υπολογίζονται με σταθερό τον Πίνακα Πυκνότητας στην τιμή $\rho_H(t_0)$.

Οι Εικόνες Heisenberg και Schrödinger είναι ισοδύναμες και αυτό το αντιλαμβανόμαστε εάν σκεφτούμε ότι οι αναμενόμενες τιμές των φυσικών μεγεθών είναι οι ίδιες και για τις δυο προσεγγίσεις.

Ισχύει ότι

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}[A(t)\rho(t)] = \text{tr}[A_H(t)\rho_H(t_0)]$$

Επίσης

$$\frac{dA_H}{dt} = i[H_H(t), A_H(t)] + \frac{\partial A_H}{\partial t}$$

με

$$H_H(t) = U^\dagger(t, t_0)H(t)U(t, t_0)$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε επακριβώς για τους τελεστές των φυσικών μεγεθών ότι

$$\frac{\partial A_H(t)}{\partial t} = U^\dagger(t, t_0)\frac{\partial A(t)}{\partial t}U(t, t_0)$$

Έτσι εάν

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = 0$$

τότε η ποσότητα που περιγράφεται από τον τελεστή αυτό θα είναι σταθερά της κίνησης.

Μια ειδική περίπτωση η οποία αξίζει να σημειωθεί είναι αυτή όπου ο τελεστής A επιλέγεται να είναι ο τελεστής Χάμιλτον του συστήματος, $A=H$. Για ένα απομονωμένο σύστημα ισχύει ότι

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

και επειδή ο τελεστής αυτός μετατίθεται με τον τελεστή χρονικής εξέλιξης προκύπτει ότι

$$\frac{dH_H}{dt} = 0$$

γεγονός το οποίο επιβεβαιώνει την ισχύ της αρχής διατήρησης της ενέργειας στο κβαντικό επίπεδο.

Στην περίπτωση που ο τελεστής κατά Schrödinger A δεν εξαρτάται εκπεφρασμένα από τον χρόνο τότε ισχύει ότι

$$\frac{dA_H(t)}{dt} = i[H, A_H(t)]$$

Τέλος μπορεί να αποδειχθεί ότι στην προσέγγιση του Heisenberg ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d\langle A(t) \rangle}{dt} &= \left\langle \frac{dA_H(t)}{dt} \right\rangle = \\ &= \text{tr} \left\{ \left(i[H_H(t), A_H(t)] + \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} \right) \rho_H(t_0) \right\} \end{aligned}$$

που είναι η εξίσωση του Ehrenfest.

Θα προχωρήσουμε στην παρουσίαση της *Εικόνας Αλληλεπίδρασης (interaction picture)* της κβαντομηχανικής [25,26]. Η προσέγγιση αυτή είναι γενικότερη γιατί η Εικόνα Schrödinger καθώς και η Εικόνα Heisenberg αποτελούν όρια της. Εκκινάμε γράφοντας την συνολική Hamiltonian του συστήματος σαν άθροισμα δυο όρων.

$$H(t) = H_0 + \hat{H}_I(t)$$

Θεωρούμε ότι ευθέως από τον χρόνο εξαρτάται μόνο ο δεύτερος όρος $\hat{H}_I(t)$ ο οποίος ονομάζεται και όρος αλληλεπίδρασης.

Χωρίς να εισέρθουμε σε λεπτομέρειες οι τελεστές των φυσικών μεγεθών καθώς και ο πίνακας πυκνότητας πιθανότητας στην Εικόνα Αλληλεπίδρασης υπακούουν στις παρακάτω εξισώσεις

$$A_I(t) \equiv U_0^+(t, t_0) A(t) U_0(t, t_0)$$

και

$$\rho_I(t) \equiv U_I(t, t_0) \rho(t_0) U_I^+(t, t_0)$$

Είναι αντιληπτό ότι η εικόνα αυτή είναι πολύ χρήσιμη όταν το σύστημα μας επηρεάζεται από κάποιο εξωτερικό χρονικά εξαρτώμενο πεδίο. Η προσέγγιση αυτή εφαρμόζεται κατά κόρον στην κβαντική οπτική.

Ανοιχτά κβαντικά συστήματα. Η κβαντική μέτρηση ως πρώτο παράδειγμα αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον.

Κατά τα προηγούμενα η κβαντική δυναμική χωρίζεται σε δυο κύριες κατηγορίες. Στην δυναμική των κλειστών και στην δυναμική των ανοιχτών συστημάτων [27]. Όταν το σύστημα είναι κλειστό τότε η δυναμική του υπαγορεύεται από την εξίσωση του Schrödinger. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τον μοναδιαίο τελεστή χρονικής εξέλιξης U έτσι ώστε

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = HU$$

οπότε το σύστημα μας εξελίσσεται ως

$$|\Psi(t)\rangle = U|\Psi(0)\rangle$$

ή στην γλώσσα της Μήτρας Πυκνότητας πιθανότητας

$$\rho(t) = U\rho(0)U^+$$

Η τελευταία έκφραση είναι ισοδύναμη με την διαφορική εξίσωση πινάκων

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho]$$

που είδαμε προηγουμένως.

Σε επίπεδο βασικών αρχών ο πλέον συνηθισμένος τύπος ανοιχτής δυναμικής είναι αυτός που συσχετίζεται με την κβαντική μέτρηση. Θεωρούμε ότι το σύστημα μας συνδέεται με μια μετρητική συσκευή με την οποία αλληλεπιδρά και ως εκ τούτου πάύει να είναι κλειστό σύστημα. Για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε την δυναμική της μέτρησης είναι χρήσιμο να κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στον φορμαλισμό POVM (Positive Operator Value Measure) [27,28,29,30]. Ο φορμαλισμός αυτός είναι ίσως ο γενικότερος όσον αφορά την περιγραφή της κβαντικής μέτρησης. Ο φορμαλισμός αυτός κωδικοποιεί την κβαντική μέτρηση με την βοήθεια μη αρνητικών (non-negative) αυτοσυζυγών τελεστών ορισμένων να δρουν σε έναν χώρο Hilbert. Η ανάγκη που καλείται να καλύψει η θεωρία POVM έγκειται στο γεγονός ότι *Προβολικές Μετρήσεις* (*projective measurements*) σε ένα μεγαλύτερο σύστημα επιδρούν σε ένα υποσύστημα αυτού με τρόπο που δεν μπορεί να περιγραφεί πάντοτε από προβολικούς τελεστές. Η θεωρία POVM βρίσκει ευρεία εφαρμογή στον πεδίο της κβαντικής πληροφορίας (quantum information theory). Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η θεωρία POVM είναι για την προβολική μέτρηση ότι ο Πίνακας Πυκνότητας πιθανότητας για μια Καθαρή κατάσταση.

Στην απλούστερη περίπτωση ένα σύνολο POVM τελεστών είναι ένα σύνολο θετικών και ημιορισμένων (semi-definite) τελεστών το άθροισμα των οποίων ισούται με τον μοναδιαίο τελεστή.

$$\sum_{i=1}^M F_i = 1$$

$$F_i > 0$$

Η τελευταία έκφραση μοιάζει με ανάλυση ενός χώρου Hilbert σε ορθογώνιους υπόχωρους

$$\sum_{i=1}^N E_i = 1$$

με

$$E_i E_j = \delta_{ij} E_i$$

όπου η τελευταία συνθήκη ορίζει και την θεμελιώδη διαφορά μεταξύ POVM και Προβολικής Μέτρησης. Οι τελεστές POVM δεν είναι αναγκαστικά ορθογώνιοι μεταξύ τους και ο ακέραιος M μπορεί να είναι μεγαλύτερος της διάστασης του χώρου Hilbert μέσα στον οποίο περιγράφεται το υποσύστημα.

Όπως και στην θεωρία της Προβολικής μέτρησης έτσι και στην θεωρία POVM η πιθανότητα το σύστημα να εμφανιστεί στον χώρο προβολής του τελεστή F_i ισούται με

$$P_i = \text{tr}(F_i \rho)$$

Όπου ρ ο Πίνακας Πυκνότητας πιθανότητας που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος. Ως αποτέλεσμα του πειράματος εννοούμε μια κβαντική κατάσταση η οποία υπάρχει στον χώρο προβολής κάποιου από τους τελεστές POVM.

Κάθε στοιχείο του συνόλου τελεστών POVM μπορεί να γραφεί ως

$$F_i = M_i^\dagger M_i$$

και οι τελεστές M_i είναι γνωστοί και ως τελεστές του Kraus. Η κατάσταση του συστήματος αμέσως μετά την μέτρηση, εφόσον έχει εμφανιστεί ως αποτέλεσμα το ενδεχόμενο που αντιστοιχεί στον τελεστή F_i , είναι

$$\rho_{\text{After}} = \frac{M_i^\dagger \rho M_i}{\text{tr}(M_i^\dagger \rho M_i)}$$

Το γεγονός ότι η κατάσταση που προκύπτει τελικά καθορίζεται μόνο από έναν από τους τελεστές POVM ονομάζεται και

Επιλεκτική Μέτρηση (selective measurement) σε αντίθεση με την *Μη Επιλεκτική Μέτρηση (non selective measurement)* [31,32] όπου η τελική κατάσταση ορίζεται ως

$$\rho_{After} = \sum_{i=1}^M M_i^+ \rho M_i$$

που οδηγεί σε ένα Μίγμα καταστάσεων πάνω σε όλα τα πιθανά αποτελέσματα της μέτρησης. Η τελευταία έκφραση λέγεται και *Αναπαράσταση Αθροίσματος Τελεστών (Operator Sum Representation)*. Να σημειωθεί εδώ ότι

$$\begin{aligned} tr\left(\sum_{i=1}^M M_i^+ \rho M_i\right) &= \\ &= tr(F_i \rho) = \\ &= \sum_{i=1}^M P_i = 1 \end{aligned}$$

Η Επιλεκτική Μέτρηση θα μπορούσε να εκφράζει την επίδραση της μέτρησης σε ένα και μόνο σύστημα ενώ η Μη Επιλεκτική Μέτρηση επίδραση της μέτρησης σε πολλά όμοια κβαντικά συστήματα. Μια άλλη ερμηνεία της Μη Επιλεκτικής Μέτρησης αφορά την περίπτωση που ξέρουμε ότι ένα και μόνο κβαντικό σύστημα έχει περάσει μέσα από την συσκευή μέτρησης αλλά δεν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης. Η μέτρηση ως κβαντική απεικόνιση (quantum operation) είναι ένας από τους σημαντικούς παράγοντες της Κβαντικής Αποσυμφωνίας. Η διαδικασία της μέτρησης είναι στην γενική περίπτωση μη μοναδιαία όμως υπάρχει περίπτωση να πραγματοποιήσουμε πείραμα όπου το σύστημα να εξελίσσεται με μοναδιαίο τρόπο μέσα σε κάποιον υπόχωρο του συνολικού χώρου Hilbert. Τέτοιοι υπόχωροι ονομάζονται *Σύμφωνοι Υπόχωροι (Decoherence Free Subspaces)*.

Κβαντικές εξισώσεις Master.

Σε αντίθεση με την περίπτωση του κλειστού κβαντικού συστήματος, τα ρεαλιστικά κβαντικά συστήματα βρίσκονται πάντοτε σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Έτσι η δυναμική παύει να είναι μοναδιαία συνεπώς έχουμε εκροή και εισροή προς και από το περιβάλλον όχι μόνο ενέργειας αλλά και πληροφορίας. Το φαινόμενο αυτό είναι ικανό όχι μόνο να μεταβάλλει τις τιμές των μετρήσιμων του συστήματος αλλά και να αλλάξει τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της δυναμικής. Είναι δε κοινή διαπίστωση ότι όσον αφορά την «κλασικοποίηση» των κβαντικών συστημάτων σημαντικό ρόλο παίζει αυτή η ανοιχτή δυναμική. Έχει λοιπόν σημασία να μπορέσουμε με φορμαλιστικό τρόπο να περιγράψουμε την ανοιχτή δυναμική για εν γένει γενικά περιβάλλοντα έτσι ώστε να μπορέσουμε να έχουμε απαντήσεις τόσο σε θεμελιώδη όσο και σε τεχνολογικά ερωτήματα. Όπως είδαμε η περιγραφή των ανοιχτών συστημάτων γίνεται με γενικό τρόπο με την βοήθεια του Πίνακα Πυκνότητας μια και ο ορισμός κυματοσυνάρτησης στα συστήματα αυτά είναι αδύνατος. Οι εξισώσεις οι οποίες μας περιγράφουν την δυναμική του Πίνακα Πυκνότητας ονομάζονται *Κβαντικές Εξισώσεις Master* (quantum master equations) [33,34] και συνήθως προκύπτουν κάνοντας γενικές παραδοχές. Κατά την παραγωγή των εξισώσεων αυτών συνήθως παραδεχόμαστε Μαρκοβιανό περιβάλλον [35] αλλά έχουμε και Κβαντικές Εξισώσεις Master οι οποίες αφορούν μη Μαρκοβιανή εξέλιξη. Μαρκοβιανό λέμε το περιβάλλον όταν αυτό δεν εμφανίζει μνήμη. Έτσι λόγω της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον το σύστημα υποβιβάζει το πληροφοριακό του φορτίο μονότονα. Συχνά παραδεχόμαστε ότι όταν το περιβάλλον έχει πολλούς βαθμούς ελευθερίας τότε αυτό είναι Μαρκοβιανό.

Ο χαρακτηρισμός της δυναμικής ενός κβαντικού συστήματος ως Μαρκοβιανής γίνεται περίπου όπως και στην ανάλογη κλασική περίπτωση. Θα λέγαμε ότι έχει την στατιστική έννοια της κλασικής αναγωγής της εξέλιξης ενός δυναμικού συστήματος σε ημιομάδα. Στην κλασική περίπτωση μπορούμε να περιγράψουμε την δυναμική με την βοήθεια του κλασικού *Διαδότη (Propagator)* ο οποίος υπακούει τη περίφημη εξίσωση των Chapman – Kolmogorov.

$$T(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int dx_2 T(x_3, t_3 | x_2, t_2) T(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

Η ουσία της παραπάνω εξίσωσης είναι ότι περιγράφει διαδικασία η οποία είναι μη αναστρέψιμη (δεν υπάρχει μνήμη). Οι πιθανότητες δηλαδή είναι ανεξάρτητες για αυτό και συνδυάζονται πολλαπλασιαστικά.

[Γραφ. απόδοση εξίσωσης Chapman-Kolmogorov (βλ. παράρτημα)]

Όπως θα δούμε, κατά αντιστοιχία, στην περίπτωση των Κβαντικών Μαρκοβιανών εξισώσεων Master το περιβάλλον δεν έχει μνήμη έτσι ώστε να υπάρχει ανάδραση στο σύστημα. Οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούν τις απαιτήσεις της μη αντιστρεψιμότητας, της παραγωγής Εντροπίας και η δυναμική που περιγράφουν οδηγεί στην ισορροπία. Επίσης οι εξισώσεις αυτές είναι συνήθως γραμμικές ως προς τον Πίνακα Πυκνότητας. Υπάρχουν όμως και Master εξισώσεις (ειδικά στην περίπτωση πολλών σωμάτων) που είναι μη γραμμικές. Μη γραμμικές εξισώσεις Master μπορούν επίσης να κατασκευαστούν εάν ξεκινήσουμε από την μη γραμμική εκδοχή της εξίσωσης του Schrödinger. Όσον αφορά την ποιοτική προέλευση μιας εξίσωσης Master μπορούμε να χωρίσουμε σε δυο κατηγορίες, τις *οπτικές εξισώσεις Master (quantum optical equations)* και τις *Κβαντικές εξισώσεις κίνησης Brown (quantum Brownian motion)*. Η παραγωγή των εξισώσεων γίνεται με ποικίλους τρόπους, ανάλογα με το ποια μέθοδος είναι πιο ευνοϊκή κάθε φορά. Μπορεί δηλαδή να χρησιμοποιηθεί η Εικόνα Schrödinger, η Εικόνα Heisenberg και σε κάποιες περιπτώσεις ο

φορμαλισμός των Ολοκληρωμάτων Διαδρομών (path integrals) αλλά και η Εικόνα Αλληλεπίδρασης.

Σε προηγούμενη παράγραφο έχουμε κάνει μια πρώτη εισαγωγή στην έννοια του Πίνακα Πυκνότητας παρουσιάζοντας την δυναμική του στην περίπτωση ενός κλειστού κβαντικού συστήματος αλλά έχουμε μιλήσει και για την έννοια του Μερικού Ίχνους εισάγοντας κάποια στοιχεία ανοιχτής δυναμικής. Εδώ θα προχωρήσουμε και θα εμβαθύνουμε περισσότερο στην ανοιχτή δυναμική.

Στην γενική περίπτωση ως ανοιχτό λέμε ένα κβαντικό σύστημα S το οποίο είναι σε σύζευξη με ένα άλλο ευρύτερο εν γένει κβαντικό σύστημα B το οποίο καλούμε περιβάλλον. Συνήθως θεωρούμε δε ότι το συνολικό σύστημα $S+B$ είναι Χαμιλτονιανό. Μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος υπεισέρχεται όρος αλληλεπίδρασης και έτσι το κβαντικό μας σύστημα S παύει στην γενική περίπτωση να εξελίσσεται μοναδιαία.

Τόσο το σύστημα S όσο και το περιβάλλον B περιγράφονται μέσα στους αντιστοιχούς χώρους Hilbert. Έτσι το συνολικό σύστημα $S+B$ περιγράφεται στο χώρο Hilbert που προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο των προηγούμενων χώρων. Η συνολική Χαμιλτονιανή είναι η εξής:

$$H(t) = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + \hat{H}_I(t)$$

Όπου το H_S περιγράφει την Χαμιλτονιανή του συστήματος S (εσωτερική ενέργεια), το H_B περιγράφει το περιβάλλον και ο όρος $\hat{H}_I(t)$ είναι ο όρος αλληλεπίδρασης συστήματος περιβάλλοντος. Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε εισάγοντας και άλλους όρους όπως χρονοεξαρτημένες εξωτερικές επιδράσεις, όρους ελέγχου κλπ. Εάν ο όρος περιβάλλοντος H_B περιλαμβάνει άπειρους βαθμούς ελευθερίας τότε συχνά ονομάζουμε το περιβάλλον Δεξαμενή (reservoir). Όπως θα δούμε στην περίπτωση αυτή η Δεξαμενή αναγκάζει το σύστημα να εξελιχθεί με μια μη αντιστρέψιμη διαδικασία. Συνήθως με το όρο Λουτρό (bath) ή Θερμικό Λουτρό (heat bath) περιγράφουμε την Δεξαμενή όταν αυτή βρίσκεται σε θερμική ισορροπία. Πρέπει

όμως να σημειώσουμε ότι οι όροι αυτοί δεν χρησιμοποιούνται πάντοτε αυστηρά.

Είναι δυνατόν να παρουσιάσουμε πάρα πολλά διαφορετικά κβαντικά συστήματα τα οποία έχουν ανοικτή δυναμική. Όμως η περιγραφή και η επίλυση, στην λεπτομέρεια, τέτοιων συστημάτων συνήθως είναι αδύνατη ή πάρα πολύ δύσκολη. Το να λύσουμε ένα τέτοιο σύστημα πλήρως προϋποθέτει την ικανότητα μας να λύσουμε ένα τεράστιο σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων πράγμα πολύ δύσκολο. Άλλωστε η σημασία του περιβάλλοντος έχει και την έννοια του μη ελέγχιμου παράγοντα. Ευτυχώς τόσο λεπτομερής περιγραφή, στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν είναι απαραίτητη έτσι μπορούμε να αρκεστούμε σε κάποια γενικά μοντέλα, σχετικά εύκολα επιλύσιμα, όσον αφορά την περιγραφή του περιβάλλοντος. Στο πνεύμα αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες αναλυτικές και αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης.

Στα παρακάτω αφού μοντελοποιήσουμε το περιβάλλον με γενικό τρόπο θα ασχοληθούμε με τον προσδιορισμό των μετρήσιμων του συστήματος S . Στον συνολικό χώρο Hilbert $S+B$ τα μετρήσιμα του S αναπαρίστανται με τελεστές της μορφής

$$A \otimes I_B$$

με τον τελεστή A να δρα μόνο στον χώρο S . Το δεξί μέρος στο τανυστικό γινόμενο είναι ο μοναδιαίος τελεστής και δρα στο χώρο B . όπως είδαμε και στα προηγούμενα οι μέσες τιμές των παρατηρήσιμων του συστήματος S μπορούν να προσδιοριστούν από την εξίσωση

$$\langle A \rangle = tr_S(A\rho_S)$$

με

$$\rho_S = tr_B(\rho)$$

να είναι η αναγωγή του Πίνακα Πυκνότητας στον χώρο του συστήματος S (έχουμε πάρει το Ίχνος πάνω στους βαθμούς ελευθερίας του περιβάλλοντος). Ο τελεστής αυτός θεωρούμε ότι περιέχει όλη την πληροφορία που μπορούμε να ανακτήσουμε

για το σύστημα S . Να σημειωθεί εδώ ότι γενικά ο ανηγμένος Πίνακας Πυκνότητας περιγράφει μικτή κατάσταση έτσι η κβαντική Εντροπία δεν είναι πλέον μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το πληροφοριακό φορτίο του συστήματος υποβιβάζεται λόγω του θορύβου που επάγει το περιβάλλον στο σύστημα.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι το συνολικό σύστημα $S+B$ περιγράφεται από την εξίσωση Liouville-von Neumann. Ισχύει επίσης ότι

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -itr_B[H(t), \rho(t)]$$

με $\hbar=1$.

Στα επόμενα θα δούμε πως κάνοντας τις κατάλληλες υποθέσεις μπορούμε να απαλείψουμε το περιβάλλον και να πάρουμε εξισώσεις τύπου Master.

Κβαντικές Δυναμικές Ημιομάδες [34,37,38].

Έστω ότι το σύστημα αλληλεπιδρά με το περιβάλλον και ότι η αρχική κατάσταση του συνολικού συστήματος (σύστημα και περιβάλλον) είναι στην μορφή

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_B$$

Μπορούμε φορμαλιστικά να γράψουμε ότι

$$\rho_S(t) = V(t)\rho_S(0) \equiv tr_B\{U(t,0)[\rho_S(0) \otimes \rho_B]U^\dagger(t,0)\}$$

Ο τελεστής $V(t)$ είναι ένας Υπερτελεστής (*Superoperator*) γιατί δρα πάνω στον τελεστή πυκνότητας πιθανότητας και όχι στο χώρο Hilbert των κυματοσυναρτήσεων. Δηλαδή

$$V(t):S(\mathcal{H}_S) \rightarrow S(\mathcal{H}_S)$$

Με $S(\mathcal{H}_S)$ τον χώρο των πινάκων πυκνότητας πιθανότητας που δρουν στον χώρο Hilbert του συστήματος. Η παραπάνω απεικόνιση ονομάζεται δυναμική απεικόνιση (dynamical map).

Για να μελετήσουμε την επίδραση της παραπάνω απεικόνισης στο σύστημα είναι χρήσιμο να πάρουμε την φασματική ανάλυση του τελεστή πυκνότητας πιθανότητας του περιβάλλοντος.

$$\rho_B = \sum_a \lambda_a |\varphi_a\rangle\langle\varphi_a|$$

Όπου τα $|\varphi_a\rangle$ συνθέτουν μια ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert του περιβάλλοντος και $\sum_a \lambda_a = 1$ με όλους του όρους θετικούς.

Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$V(t)\rho_S = \sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}(t)\rho_S W_{\alpha\beta}^+(t)$$

με

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sqrt{\lambda_\beta} \langle\varphi_\alpha|U(t,0)|\varphi_\beta\rangle$$

Επίσης οι παραπάνω τελεστές κανονικοποιούνται ως

$$\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\beta}^+(t)W_{\alpha\beta}(t) = I_S$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει η διατήρηση της πιθανότητας με την έννοια ότι

$$tr_S[V(t)\rho_S] = tr_S\rho_S = 1$$

Έτσι μπορούμε να δούμε ότι η δυναμική απεικόνιση $V(t)$ είναι θετικά ορισμένη, Γραμμικά Κυρτή (convex-linear) και διατηρεί το Έχνος.

Κάτω από αρκετά γενικές προϋποθέσεις, που δεν θα αναλύσουμε εδώ, ικανοποιείται η ιδιότητα των ημιομάδων

$$V(t_1)V(t_2)=V(t_1+t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0$$

Θεωρούμε την $V(0)$ ως την μοναδιαία απεικόνιση.

Μαρκοβιανή Κβαντική Εξίσωση Master, εξίσωση του Lindblad.

Κάτω από αρκετά γενικές συνθήκες μια κβαντική δυναμική ημιομάδα μπορεί να παραχθεί με την βοήθεια ενός γραμμικού τελεστή $\mathcal{L}$ (γεννήτορα) ως εξής:

$$V(t)=e^{t\mathcal{L}}$$

Με την βοήθεια του γεννήτορα η διαφορική εξίσωση τελεστών που περιγράφει την δυναμική του συστήματος παίρνει την απλή μορφή γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξεως

$$\dot{\rho}_s(t)=\mathcal{L}\rho_s(t)$$

Η οποία καλείται Μαρκοβιανή κβαντική εξίσωση Master (Markovian quantum master equation).

Θα κάνουμε μια προσπάθεια κατασκευής της γενικότερης μορφής που μπορεί να πάρει ο Υπερτελεστής $\mathcal{L}$ [27,34]. Για λόγους απλότητας, χωρίς μεγάλη βλάβη της γενικότητας, θα θεωρήσουμε ότι ο χώρος Hilbert του συστήματος έχει πεπερασμένη διάσταση. Έστω ότι $\dim(\mathcal{H}_s)=N$. Στην περίπτωση αυτή ο χώρος των πινάκων πυκνότητας πιθανότητας θα έχει διάσταση ίση με N^2 . Στον χώρο αυτό μπορούμε να ορίσουμε βάση και εσωτερικό γινόμενο. Συμβολίζουμε την βάση, η οποία αποτελείται από τελεστές ως

$$F_i, i=1,2,\dots,N^2$$

με συνθήκη ορθοκανονικότητας την

$$(F_i, F_j) \equiv \text{tr}_S(F_i^+ F_j) = \delta_{ij}$$

Όπου το εσωτερικό γινόμενο έχει οριστεί με την βοήθεια του Τχνους.

Λόγω πληρότητας της βάσης μπορούμε να γράψουμε ότι

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sum_{i=1}^{N^2} F_i(F_i, W_{\alpha\beta}(t))$$

και έτσι να εκφράσουμε την δράση της δυναμικής απεικόνισης ως

$$V(t)\rho_S = \sum_{i,j=1}^{N^2} c_{ij}(t) F_i \rho_S F_j^+$$

με

$$c_{ij}(t) = \sum_{\alpha\beta} (F_i, W_{\alpha\beta}(t))(F_j, W_{\alpha\beta}(t))^*$$

Να σημειωθεί ότι ο πίνακας $c = (c_{ij})$ είναι ερμιτιανός θετικά ορισμένος.

Χωρίς να μπορούμε σε ιδιαίτερες λεπτομέρειες μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} \alpha_{ij} \left(F_i \rho_S F_j^+ - \frac{1}{2} \{F_j^+ F_i, \rho_S\} \right)$$

Όπου

$$\alpha_{ij} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{c_{ij}(\tau)}{\tau} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, N^2 - 1$$

Επειδή ο πίνακας $a = (a_{ij})$ είναι θετικός μπορεί να διαγωνοποιηθεί με την βοήθεια ενός μοναδιαίου μετασχηματισμού u

$$uau^+ = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{N^2-1} \end{bmatrix}$$

και φυσικά τα γ_i είναι όλα μη αρνητικά.

Με βάση αυτό μπορούμε να εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό

$$F_i = \sum_{k=1}^{N^2-1} u_{ki} A_k$$

Και να καταλήξουμε στην απλούστερη μορφή

$$\mathcal{L}\rho_S = -i[H, \rho_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k \left(A_k \rho_S A_k^+ - \frac{1}{2} A_k^+ A_k \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S A_k^+ A_k \right)$$

ή

$$\dot{\rho}_S(t) = -i[H, \rho_S(t)] + \mathcal{D}[\rho_S(t)]$$

Η παραπάνω μορφή είναι η γενικότερη δυνατή στην περιγραφή της κβαντικής δυναμικής ημιομάδας, ή αλλιώς (με αρκετή αυθαιρεσία στην έκφραση) η γενικότερη μορφή θετικά ορισμένης χρονικής εξέλιξης για τον κβαντικό τελεστή πυκνότητας πιθανότητας.

Η τελευταία εξίσωση είναι γνωστή στην βιβλιογραφία και ως η εξίσωση του Lindblad. Το δεξιό μέρος της εξίσωσης μπορεί να διαχωριστεί σε δυο μέρη με διαφορετική ποιοτική ερμηνεία. Το πρώτο κομμάτι (ο μεταθέτης) που εμπεριέχει τον

τελεστή Hamilton του συστήματος περιγράφει το μοναδιαίο μέρος της χρονικής εξέλιξης. Το δεύτερο μέρος (το άθροισμα) περιγράφει το μη αντιστρέψιμο μέρος της δυναμικής λόγω της επίδραση του περιβάλλοντος. Οι τελεστές A_k είναι γνωστοί στην βιβλιογραφία ως οι τελεστές του Lindblad. Να σημειωθεί εδώ ότι οι σταθερές γ_k έχουν διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου και κατά μία έννοια εκφράζουν τους Χρόνους Χαλάρωσης (relaxation time) όσον αφορά τα διαφορετικά κανάλια αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον.

Ο Lindblad έχει αποδείξει ότι η εξίσωση του έχει την γενικότερη μορφή στην περίπτωση που ο κβαντικός τελεστής Hamilton του συστήματος είναι *Φραγμένος* (bounded) και το σύνολο των k είναι αριθμήσιμο. Αυτό όμως δεν ισχύει γενικά σε όλα τα συστήματα. Σε άλλες περιπτώσεις εν γένει καταλήγουμε σε εξισώσεις οι οποίες παρουσιάζουν ομοιότητα με την εξίσωση του Lindblad.

Ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης του Lindblad ήταν γνωστές και πριν αυτή αποδειχθεί στην γενικότερη της μορφή.

Η εξίσωση του Lindblad παραμένει αναλλοίωτη στους ακόλουθους μετασχηματισμούς:

1. Μοναδιαίους μετασχηματισμούς των τελεστών του Lindblad

$$\sqrt{\gamma_i} A_i \rightarrow \sqrt{\gamma'_i} A'_i = \sum_j u_{ij} \sqrt{\gamma_j} A_j$$

με τα u_{ij} να είναι τα στοιχεία μοναδιαίου πίνακα.

2. Μη ομογενείς μετασχηματισμούς της παρακάτω κατηγορίας

$$A_i \rightarrow A'_i = A_i + \alpha_i$$

$$H \rightarrow H' = H + \frac{1}{2i} \sum_j \gamma_j (a_j^* A_j - a_j A_j^+) + b$$

όπου τα a_i μιγαδικά και το b πραγματικός.

Το δεύτερο αναλλοίωτο είναι σημαντικό γιατί μας επιτρέπει πάντοτε να βρίσκουμε τελεστές του Lindblad με Τχνος ίσο με το μηδέν.

Η εξίσωση του Lindblad μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση που οι τελεστές του Lindblad εξαρτώνται από τον χρόνο.

$$\dot{\rho}_s(t) = \mathcal{L}(t) \rho_s(t)$$

Στην περίπτωση αυτή ο Διαδότης είναι

$$V(t, t_0) = T \exp \left[\int_{t_0}^t d\omega \mathcal{L}(\omega) \right], \quad T \rightarrow \text{time ordering operator}$$

Ικανοποιείται η εξίσωση

$$\frac{\partial V(t, t_0)}{\partial t} = \mathcal{L}(t) V(t, t_0)$$

Η ιδιότητα της ημιομάδας παίρνει τώρα την μορφή

$$V(t, t_1) V(t_1, t_0) = V(t, t_0)$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η έκφραση η οποία μας δίνει την εξέλιξη των τελεστών Heisenberg των φυσικών μεγεθών στην περίπτωση που οι τελεστές του Lindblad δεν εξαρτώνται από τον χρόνο.

$$\begin{aligned} \frac{dA_H(t)}{dt} &= \mathcal{L}^+ A_H(t) \\ &= i[H, A_H(t)] + \sum_k \gamma_k \left[A_k^+ A_H(t) A_k - \frac{1}{2} A_H(t) A_k^+ A_k - \frac{1}{2} A_k^+ A_k A_H(t) \right] \end{aligned}$$

Συναρτήσεις συσχέτισης, χαρακτηριστικά της εξέλιξης στον χρόνο και εξίσωση του Lindblad.

Η κβαντική εξίσωση Master περιγράφει πλήρως την χρονική εξέλιξη του Πίνακα Πυκνότητας αλλά και των τελεστών κατά Heisenberg των φυσικών μεγεθών. Με την βοήθεια της εξίσωσης αυτής είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές όλων των φυσικών μεγεθών και των στοιχείων του Πίνακα Πυκνότητας. Όμως σε πολλά προβλήματα δεν αρκεί αυτό για την πλήρη στατιστική περιγραφή του συστήματος που μελετάμε. Συχνά μας ενδιαφέρει να ξέρουμε τις μέσες τιμές των φυσικών μεγεθών έτσι όπως αυτές συσχετίζονται μεταξύ τους σε διαφορετικές χρονικές στιγμές (multi-time correlation functions). Σε κάποιες εφαρμογές της φυσικής οι μαθηματικές αυτές ποσότητες συσχετίζονται ευθέως με φυσικά μετρήσιμες ποσότητες.

Με την βοήθεια του Πίνακα Πυκνότητας μπορούμε να ορίσουμε την συσχέτιση διπλού χρόνου (two-time correlation function) μεταξύ δυο φυσικών μεγεθών ως:

$$\sigma(t, s) \equiv \langle B(t)C(s) \rangle = \text{tr}_S [B(t)C(s)\rho_S(0)]$$

Η κάνοντιας χρήση του διαδότη της εξίσωσης Master

$$\sigma(t, s) = \langle BV(t, s)CV(s, 0) \rangle = \text{tr}_S [BV(t, s)CV(s, 0)\rho_S(0)]$$

Όπου οι τελεστές έχουν την έννοια των τελεστών του Heisenberg. Μπορούμε επίσης να γενικεύσουμε στην περίπτωση των συσχετίσεων πολλαπλού χρόνου (multi-time correlation functions) ως:

$$\begin{aligned}\sigma(t_1, t_2, \dots, t_n; s_1, s_2, \dots, s_m) &\equiv \langle B_1(s_1) B_2(s_2) \dots B_m(s_m) C_n(t_n) \dots C_2(t_2) C_1(t_1) \rangle \\ &= \text{tr}_s [C_n(t_n) \dots C_2(t_2) C_1(t_1) \rho_s(0) B_1(s_1) B_2(s_2) \dots B_m(s_m)]\end{aligned}$$

Όπου οι τελεστές του Heisenberg είναι διατεταγμένοι ως

$$s_m > s_{m-1} > \dots > s_1 \geq 0, \quad t_m > t_{m-1} > \dots > t_1 \geq 0$$

Χωρίς να μπορούμε σε ιδιαίτερες λεπτομέρειες είναι δυνατόν, με κατάλληλες προσεγγίσεις, να καταλήξουμε σε μια έκφραση της μορφής

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \langle B_i(t+\tau) B_l(\tau) \rangle &= \text{tr}_s \left[(\mathcal{L}^+ B_i) V(t+\tau, t) B_l \rho_s(t) \right] \\ &= \sum_j G_{ij} \langle B_j(t+\tau) B_l(t) \rangle\end{aligned}$$

Η παραπάνω γραμμική έκφραση αν και προσεγγιστική πολύ συχνά ανταποκρίνεται σωστά στις ακριβείς εκφράσεις. Η παράσταση αυτή είναι γνωστή και ως το *Κβαντικό Θεώρημα Παρεμβολής* (*quantum regression theorem*) [40].

Μη αντιστρεψιμότητα και κβαντική εξίσωση Master.

Η εξίσωση του Lindblad περιγράφει το γεγονός της ύπαρξης μη αντιστρέψιμων διαδικασιών στην κβαντική φυσική. Η έννοια της μη αντιστρεψιμότητας οφείλεται στην απώλεια πληροφορίας προς το περιβάλλον. Όταν μιλάμε για Μαρκοβιανή διαδικασία τότε εννοούμε ότι δεν μπορεί με κανένα τρόπο το περιβάλλον να διατηρήσει μνήμη όσον αφορά την πληροφορία που έχει απωλέσει το σύστημα.

Στην περίπτωση μας θα κάνουμε χρήση της *Σχετικής Εντροπίας* (*Relative Entropy*) ως μέτρο της απώλειας πληροφορίας. Η κβαντική Σχετική Εντροπία για δυο Πίνακες Πυκνότητας ρ, σ

ορίζεται ως $S(\rho \parallel \sigma) \equiv \text{tr}\{\rho \ln \rho\} - \text{tr}\{\rho \ln \sigma\}$. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται αναλυτικά οι ιδιότητες της εντροπίας αυτής.

Έστω τώρα ότι παρακολουθούμε την μεταβολή στην κβαντική Σχετική Εντροπία μετά από την επίδραση της *Κβαντικής Master Απεικόνισης* (quantum master map). Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} S(V(t)\rho \parallel V(t)\rho_0) &= \\ &= S\left\{\text{tr}\left[U(t,0)\rho \otimes \rho_B U^\dagger(t,0)\right] \parallel \text{tr}\left[U(t,0)\rho_0 \otimes \rho_B U^\dagger(t,0)\right]\right\} \\ &\leq S\left[U(t,0)\rho \otimes \rho_B U^\dagger(t,0) \parallel U(t,0)\rho_0 \otimes \rho_B U^\dagger(t,0)\right] \\ &= S(\rho \otimes \rho_B \parallel \rho_0 \otimes \rho_B) \\ &= S(\rho \parallel \rho_0) \end{aligned}$$

Θα υπάρχει δηλαδή μια υποβάθμιση της πληροφορίας (αύξηση της Σχετικής Εντροπίας) μετά από την διέλευση κάποιου χρονικού διαστήματος. Η υποβάθμιση αυτή σχετίζεται μονότονα με τον χρόνο.

Κάνοντας ξανά χρήση της έκφρασης

$$V(t) = e^{\mathcal{L}t}$$

και ορίζοντας ως

$$\sigma[\rho(t)] \equiv -\frac{d}{dt} S[\rho(t) \parallel \rho_0] \geq 0$$

τον ρυθμό μεταβολής της Σχετικής Εντροπίας, όπου

$$\rho(t) = V(t)\rho(0)$$

μπορούμε να καταλήξουμε σε μια έκφραση η οποία αφορά τον ρυθμό μεταβολής της Εντροπίας. Η έκφραση αυτή αφορά καταστάσεις μη ισορροπίας. Μετά από πράξεις καταλήγουμε λοιπόν στην ακριβή παράσταση

$$\sigma(\rho) = -k_B \text{tr}[\mathcal{L}(\rho) \ln \rho] + k_B \text{tr}[\mathcal{L}(\rho) \ln \rho_0] \geq 0$$

Η σταθερά k_B στην παραπάνω έκφραση είναι αυθαίρετη και σχετίζεται με τον ορισμό της Εντροπίας.

Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί βέβαια ότι σε μια μη αντιστρεπτή κβαντική διαδικασία η Εντροπία μπορεί να καταλήξει σε μια οριακή τιμή η οποία να αντιστοιχεί σε μια στάσιμη λύση της εξίσωσης Master. Τέτοιο παράδειγμα στάσιμης λύσης είναι η κατάσταση του Gibbs:

$$\rho_{thermal} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$$

που σημαίνει ότι $\mathcal{D}(\rho_{th}) = 0$ με $\mathcal{D}$ ο όρος της εξίσωσης Master στον οποίο οφείλεται η μη μοναδιαία χρονική εξέλιξη του συστήματος. Ο τελεστής αυτός ονομάζεται *Σκεδαστής* (dissipator) της εξίσωσης Master.

Αναφορές.

- [1]. A short history of atomic physics in the twentieth century, D Kleppner - Reviews of Modern Physics, 1999, vol.71, issue 2, S78-S84
- [2]. Planck's Law and the light quantum hypothesis, S Bose - Journal of Astrophysics and Astronomy, 1994, vol.15, no. 1, 3-11
- [3]. Black-body theory and the quantum discontinuity, 1894-1912, TS Kuhn, University of Chicago Press, 1987
- [4]. Decoherence, chaos, and the correspondence principle, S Habib, K Shizume, WH Zurek - Physical Review Letters, 1998, vol 80, issue 20, 4321-4365
- [5]. Bohr's correspondence principle: the cases for which it is exact, AJ Makowski, KJ Gorska - Physical Review A, 2002, 66, 062103
- [6]. Understanding quantum mechanics, R Omnès, Princeton University Press, 1999
- [7]. On the problem of hidden variables in quantum mechanics, JS Bell - Reviews of Modern Physics, 1966, vol.38, issue 3, 447-452
- [8]. The principles of quantum mechanics, PAM Dirac, Oxford University Press, 1981
- [9]. Regular and chaotic causal trajectories for the Bohm potential in a restricted space, S Konkel, AJ Makowski - Physics Letters A, 1998, vol.238, issue 2-3, 95-100
- [10]. Quantum chaos in terms of Bohm trajectories, H Wu, DWL Sprung - Physics Letters A, 1999, vol.261, issue 3-4, 150-157
- [11]. Classical Hamiltonian systems and stochastic mechanics: A possible new ..., DPK Ghikas - Physics Letters A, 1989, vol.137, issues 4-5, 183-187

[12]. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics, E Nelson - Physical Review, 1966, vol. 150, issue 4, 1079-1085

[13]. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables, ZY Ou, SF Pereira, HJ Kimble, KC Peng - Physical review letters, 1992, vol.68, issue 25, 3663-3666

[14]. Bell's theorem and the EPR paradox, D Home, F Selleri - La Rivista del Nuovo Cimento (1978-1999), 1991 - Springer, vol.14, no. 9, 1-95

[15]. An experimental test of the EPR paradox, G Faraci, D Gutkowski, S Notarrigo, AR ... - Lettere Al Nuovo Cimento ..., 1974 - Springer, vol.9, no. 15, 607-611

[16]. Two paradoxes in quantum mechanics, HP Krips - Philosophy of Science, 1969, vol. 36, no.2, 145

[17]. Hidden variables and the two theorems of John Bell, ND Mermin - Reviews of Modern Physics, 1993, vol. 65, issue 3, 803-815

[18]. On the einstein-podolsky-rosen paradox, JS Bell... - Physics, 1964, vol. 1, no. 3, 195-200

[19]. Violation of Bell inequalities by photons more than 10 km apart, W Tittel, J Brendel, H Zbinden, N Gisin - Physical Review Letters, 1998, vol. 81, issue 17, 3563-3566

[20]. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers, A Aspect, J Dalibard, G Roger - Physical Review Letters, 1982, vol. 49, issue 25, 1804-1807

[21]. Proposed experiment to test local hidden-variable theories, JF Clauser, MA Horne, A Shimony, RA Holt - Physical Review Letters, 1969, vol. 23, issue 15, 880-884

[22]. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, A Einstein, B Podolsky, N Rosen... - Physical review, 1935, vol. 47, issue 10, 777-780

[23]. Experimental test of local hidden-variable theories, SJ Freedman, JF Clauser - Physical Review Letters, 1972, vol. 28, issue 14, 938-941

[24]. Density matrix theory and applications, K Blum, Springer, 1996

[25]. Quantum Mechanics, C Cohen-Tannoudji, B Diu, F Laloë, S Hemley, Wiley Interscience, 1977

[26]. A Modern Approach to Quantum Mechanics, Townsend, John S. 2nd ed.. Sausalito, CA: University Science Books, 2000

[27] . Quantum theory of open systems, EB Davies, Academic Press , 1976

[28]. States, Effects, and Operations, K.Kraus, Lecture Notes in Physics 190, Springer, 1983.

[29]. Quantum Theory: Concepts and Methods, A. Peres, Kluwer Academic Publishers, 1993

[30]. Quantum Computation and Quantum Information, M. Nielsen and I. Chuang, Cambridge University Press, 2000, ISBN: 0-521-63503-9

[31]. Quantum-mechanical model for continuous position measurements, CM Caves, GJ Milburn - Physical Review A, 1987, vol. 36, issue 12, 5543-5555

[32]. Operations and measurements. II, KE Hellwig, K Kraus - Communications in mathematical physics, 1970, vol.16, no. 2, 142-147

[33]. Handbook of stochastic methods, CW Gardiner, Springer, 1985

[34]. On the generators of quantum dynamical semigroups, G Lindblad, Communications in Mathematical Physics, 1976, vol. 48, no. 2, 119-130

[35]. Markovian master equations, EB Davies - Communications in mathematical Physics, 1974 - Springer, vol. 39, no. 2, 91-110

[36]. Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection, MA Rowe, D Kielpinski, V Meyer, CA Sackett, WM ... - Nature, 2001, 409(6822):791-794

[37]. Quantum groups and quantum semigroups, T Hayashi - Journal of Algebra, 1998, vol. 204, issue 1, 225-254

[38]. Quantum dynamical semigroups and applications, R Alicki, K Lendi -Springer, Lec. Notes Phys. 717, 2007

[39]. Mathematical foundations of quantum mechanics, J Von Neumann, Princeton University Press , 1996

[40]. Formal Theory of Quantum Fluctuations from a Driven State, Melvin Lax, Phys. Rev.,1963, vol. 129, issue 5, 2342-2348

ΕΝΟΤΗΤΑ Β'

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ ENTANGLEMENT

Βασικές αρχές θεωρίας της κλασικής και κβαντικής πληροφορίας.

Το 1948 ο Shannon δημοσίευσε την μελέτη του "A Mathematical Theory of Communication" [1]. Η μελέτη αυτή επικέντρωνε στους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε κανείς να κωδικοποιήσει κάποιες πληροφορίες τις οποίες ως πομπός θα τις έστελνε σε κάποιον δέκτη. Σε αυτή την θεμελιώδη εργασία του, ο Shannon, χρησιμοποίησε κυρίως έννοιες της θεωρίας των πιθανοτήτων. Η θεωρία του Shannon βρήκε μια πρώτη εφαρμογή, στην πραγματική ζωή, στον υπολογισμό από τους μηχανικούς της Χωρητικότητας των Καναλιών της πληροφορίας (channel capacity) με την αναγωγή της πληροφορίας σε bits. Η λέξη "bit" αποτελεί συντόμευση της έκφρασης "binary digit". Το bit μπορεί να υπάρξει σε δυο καταστάσεις οι οποίες αναπαρίστανται, σε αφηρημένο επίπεδο, με τους αριθμούς 0 και 1. Έτσι κάθε πληροφορία μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα σύνολο δυαδικών αριθμών. Το κάθε bit μπορεί να υλοποιηθεί με φυσικό τρόπο σε μια ηλεκτρονική συσκευή με την βοήθεια μιας διόδου, ενός πυκνωτή ή ενός μαγνητικού υλικού. Για παράδειγμα οι δυο καταστάσεις του bit θα μπορούσαν να αντιστοιχούν σε άνοιγμα ή κλείσιμο της διόδου, σε φόρτιση ή όχι του πυκνωτή και σε μαγνήτιση ή όχι του υλικού.

Η πληροφορία υπόκειται κυρίως σε τρεις διαδικασίες: Αποθήκευση, Μεταφορά και Επεξεργασία [2,3]. Η πληροφορία θα πρέπει επίσης να έχει κάποιο περιεχόμενο δηλαδή θα πρέπει τελικά να αποκτά νόημα στην συνείδηση κάποιου αποδέκτη [7]. Άρα θα πρέπει να υπάρχει και κάποια σημαντική (semantics) η οποία να νοηματοδοτεί [8] την πληροφορία. Μεγάλο ρόλο στην θεμελίωση των όρων της θεωρίας της πληροφορίας παίζει η διαδικασία της μετάδοσης. Τα βασικά στοιχεία που εμπλέκονται είναι τα εξής:

1. Το *Μήνυμα* (message): Περιλαμβάνει την πληροφορία αυτή καθαυτή.
2. Ο *Πομπός* (source): Είναι ο αποστολέας του μηνύματος.

3. Ο *Κωδικοποιητής (encoder)*: ο Κωδικοποιητής αναπαριστά το μήνυμα σε μια ακολουθία από bits (ή άλλων συμβόλων) με βάση κάποιον κανόνα.

4. Το Κανάλι διάδοσης (channel): αποτελεί τον αγωγό διάδοσης της πληροφορίας.

5. Ο *Αποκωδικοποιητής (decoder)*: αντιστρέφει την διαδικασία κωδικοποίησης του μηνύματος και αναπαριστά το μήνυμα σε μορφή κατανοητή για τον παραλήπτη.

6. Ο δέκτης (destination): Είναι ο παραλήπτης και νοηματοδότης του μηνύματος.

7. Η πηγή θορύβου [9] (noise source): Αποτελεί το περιβάλλον του συστήματος και είναι παράγοντας ο οποίος ξεφεύγει του ελέγχου μας. Αποτελεί αιτία υποβάθμισης της πληροφορίας. Θεωρούμε ότι επεμβαίνει στην πληροφορία καθώς αυτή διαδίδεται μέσα στο κανάλι μετάδοσης.

Η διαδικασία μετάδοσης παριστάνεται γραφικά στο ακόλουθο σχήμα:

[Ανάλογα σχήματα βλ.παράρτημα(θ.κλασικής πληροφορίας...)]

Ας φανταστούμε ότι η πηγή της πληροφορίας παράγει μια ακολουθία που συνίσταται από τους αριθμούς 0 και 1. Θεωρούμε ότι τα ψηφία 0 και 1 παράγονται από την πηγή ανεξάρτητα και με την ίδια πιθανότητα. Επίσης θεωρούμε ότι η πηγή δεν έχει μνήμη εννοώντας ότι το επόμενο ψηφίο δεν εξαρτάται με κανέναν τρόπο από το προηγούμενο. Τα ψηφία αυτά διαδίδονται διαμέσου του καναλιού. Η πραγματική φύση του καναλιού δεν μας ενδιαφέρει στο σημείο αυτό. Ο θόρυβος διαταράσσει την πληροφορία καθώς αυτή οδεύει διαμέσου του καναλιού αντιστρέφοντας το ψηφίο με πιθανότητα, για

παράδειγμα, ίση με $\frac{1}{4}$. Ας θεωρήσουμε ότι τα ψηφία διαδίδονται μέσα από το κανάλι με ρυθμό ένα ψηφίο στην μονάδα του χρόνου. Η κατάσταση αυτή περιγράφεται στο ακόλουθο σχήμα:

[Ανάλογα σχήματα βλ. παράρτημα (θ. κλασικής πληροφορίας...)]

Εκ πρώτης όψεως ένα σφάλμα της τάξεως του $\frac{1}{4}$ είναι πολύ μεγάλο για μια πραγματική εφαρμογή. Θα εξετάσουμε το πως η επικοινωνία είναι δυνατή ακόμα και στην περίπτωση ενός σχετικά μεγάλου σφάλματος. Κάτι που θα μπορούσε να κάνει κανείς είναι να στείλει το ίδιο ψηφίο για περισσότερες από μια φορές και ο παραλήπτης να κάνει στατιστική στα ψηφία. Να κωδικοποιήσει δηλαδή κανείς το μήνυμα σε λέξεις μεγαλύτερου μήκους. Η δουλειά του Κωδικοποιητή είναι να κάνει ακριβώς αυτό τον μετασχηματισμό και η δουλειά του Αποκωδικοποιητή είναι να κάνει την σωστή εκτίμηση όσον αφορά την ταυτότητα του ψηφίου που εστάλη. Ένα πρώτο ερώτημα έγκειται στην κατάλληλη επιλογή του εκτιμητή. Ο πιο απλός εκτιμητής είναι αυτός που διαλέγει το επικρατέστερο αριθμητικά ψηφίο της λέξης (majority selector).

Για παράδειγμα εάν το κάθε ψηφίο κωδικοποιηθεί με λέξεις τριών bits τότε οι λέξεις

100, 010, 001, 000

θα θεωρηθούν από τον Αποκωδικοποιητή ως 0 ενώ οι λέξεις

110, 011, 101, 111

θα ερμηνευτούν ως 1.

Παρόλα αυτά εάν στο κανάλι επιδρά θόρυβος πάντοτε υπάρχει η πιθανότητα ο Αποκωδικοποιητής να κάνει λάθος επιλογή. Έτσι θα πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος για το συγκεκριμένο μοντέλο και να δούμε ποιοι παράγοντες την περιορίζουν. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα στην περίπτωση λέξεων μήκους τρία κάνουμε χρήση της διακριτής κατανομής του Bernoulli και έχουμε:

$$\binom{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{10}{64} < \frac{1}{4}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η πιθανότητα σφάλματος μειώθηκε δραστικά. Το κόστος για την μείωση του σφάλματος είναι η ταυτόχρονη μείωση του ρυθμού μετάδοσης της πληροφορίας. Δηλαδή για να μεταδώσουμε ένα ψηφίο χρειαζόμαστε πλέον τρεις μονάδες χρόνου ενώ πριν θέλαμε μόνο μια μονάδα χρόνου.

Ας γενικεύσουμε στην περίπτωση που ο Κωδικοποιητής κωδικοποιεί τα σήματα 0 και 1 σε λέξεις αυθαίρετου μήκους. Έστω ότι το μήκος της κάθε λέξης επιλέγεται ίσο με $2L+1$. Τότε ο ενεργός ρυθμός διάδοσης της πληροφορίας είναι ίσος με

$$rate = \frac{1}{2L+1}$$

Για να έχουμε λάθος εκτίμηση του μηνύματος κατά την αποκωδικοποίηση θα πρέπει τουλάχιστον $L+1$ ψηφία να έχουν διαταραχτεί. Έτσι η πιθανότητα για λάθος εκτίμηση ισούται με:

$$P_{error} = \sum_{k=L+1}^{2L+1} \binom{2L+1}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{2L+1-k}$$

Εάν παραδεχτούμε ότι η πιθανότητα σφάλματος του κάθε bit της λέξης λ είναι μικρότερη από $\frac{1}{2}$ τότε ισχύει:

$$(2L+1)\lambda < L+1$$

εφόσον

$$\lambda < \frac{1}{2}$$

Λόγω του τελευταίου ο νόμος των μεγάλων αριθμών (weak law of large numbers) ισχύει με την ασθενή έννοια και

$$\lim_{L \rightarrow \infty} P_{error} = 0$$

έτσι καταλήγουμε στην πρόταση:

«Μπορούμε να μειώσουμε απεριόριστα την πιθανότητα σφάλματος κατά την μετάδοση του μηνύματος αρκεί να μειώσουμε ανάλογα τον ρυθμό μετάδοσης της πληροφορίας»

Η τελευταία πρόταση μας προΐδεάζει για την έννοια της Χωρητικότητας του δίαυλου πληροφορίας. Όπως θα δούμε δεν είναι ανάγκη να μειώσουμε τον ρυθμό μετάδοσης στο μηδέν (άλλωστε κάτι τέτοιο δεν θα είχε κανένα νόημα) απλά αρκεί να μειώσουμε τον ρυθμό μετάδοσης σε μια ποσότητα η οποία θα ορίζει και την Χωρητικότητα του καναλιού.

Όμως για να μπορέσουμε να ορίσουμε την έννοια της Χωρητικότητας χρειαζόμαστε ένα μέτρο του πληροφοριακού φορτίου του μηνύματος. Η κεντρική έννοια όσον αφορά την ποσοτικοποίηση της πληροφορίας είναι η έννοια της Εντροπίας.

Η Εντροπία Shannon.

Η βασικότερη έννοια της κλασικής θεωρίας της πληροφορίας είναι αυτή της Εντροπίας Shannon [3,10]. Η ποσότητα αυτή συνδέεται με το πληροφοριακό φορτίο της μέτρησης της τιμής μια τυχαίας μεταβλητής X . Υπό μία έννοια η Εντροπία μετράει την αβεβαιότητα που έχουμε όσον αφορά την πρόβλεψη της τιμής της X πριν την παρατήρηση. Έτσι στην βιβλιογραφία η Εντροπία αναφέρεται και ως *Μέτρο Αβεβαιότητας* (*uncertainty measure*).

Ας φανταστούμε ένα στατιστικό πείραμα όπου παρατηρούμε τις τιμές της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X . Έστω ότι οι δυνατές τιμές της μεταβλητής είναι οι $x_1, x_2, \dots, x_N$ και ότι αυτές εμφανίζονται με τις αντίστοιχες πιθανότητες $p_1, p_2, \dots, p_N$. Θα προσπαθήσουμε να παράγουμε ένα μέτρο της αβεβαιότητας όσον αφορά την τιμή της εν λόγω τυχαίας μεταβλητής. Εάν $h(p_i)$ είναι το μέτρο της αβεβαιότητας όσον αφορά το ενδεχόμενο x_i τότε θα ορίσουμε την αβεβαιότητα της στατιστικής μεταβλητής X ως τον σταθμισμένο μέσο:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = \sum_{i=1}^N p_i h(p_i)$$

Έστω ότι η κατανομή είναι σταθερή με $p_i = \frac{1}{N}$ τότε για να έχει νόημα το H ως μέτρο της αβεβαιότητας θα πρέπει να είναι μονότονη συνάρτηση με την έννοια:

$$H(N) < H(N')$$

εάν

$$N < N'$$

Επίσης εάν η κατανομή μας αποτελεί την από κοινού κατανομή δυο επίσης ομοιόμορφων κατανομών θα πρέπει να ισχύει:

$$H(NL) = H(N) + H(L)$$

όπου οι δύο κατανομές είναι οι εξής:

$$x_1, x_2, \dots, x_N \text{ με } p_i = \frac{1}{N}$$

και

$$x_1, x_2, \dots, x_L \text{ με } p'_i = \frac{1}{L}$$

Εάν ορίσουμε την συνάρτηση $h(\cdot)$ ως:

$$h(x) = -K \log(x)$$

με το K αυθαίρετη σταθερά, βλέπουμε ότι η H ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες. Έτσι ορίζουμε την Εντροπία Shannon ως:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = -\sum_{i=1}^N p_i \log(p_i)$$

στην πραγματικότητα η επιλογή αυτή είναι και η μοναδική δυνατότητα που έχουμε.

Να σημειωθεί εδώ ότι Εντροπία Shannon είναι καλώς ορισμένη σε κάθε περίπτωση γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x) = 0$$

Η σημασία της Εντροπίας ως πληροφοριακό φορτίο είναι θεμελιώδης όσον αφορά τις εφαρμογές γιατί η τιμή της προσδιορίζει το ελάχιστο μέγεθος πληροφορίας που θα πρέπει να συγκρατήσουμε από ένα μήνυμα έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να αναπαράγουμε την αρχική πληροφορία. Το αποτέλεσμα αυτό συμπεριλαμβάνεται στο θεμελιώδες για την θεωρία της

πληροφορίας Shannon's Noiseless Coding Theorem [5, 6]. Ουσιαστικά η έννοια της Εντροπίας έρχεται να απαντήσει στο βασικό ερώτημα που έχει να κάνει με το πόσους φυσικούς πόρους θα πρέπει να καταναλώσουμε έτσι ώστε να διαχειριστούμε κάποια πληροφορία.

Είναι σημαντικό να γνωρίζει κανείς ότι η συνάρτηση

$$H(p_1, p_2, \dots, p_M) = -C \sum_{i=1}^M p_i \log p_i$$

είναι η μόνη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Η παρακάτω έκφραση είναι μονότονη συνάρτηση

$$H\left(\frac{1}{L}, \frac{1}{L}, \dots, \frac{1}{L}\right) = f(L)$$

2. Ισχύει ότι

$$f(ML) = f(M) + f(L), \quad M, L = 1, 2, \dots$$

3. (Grouping Axiom)

$$\begin{aligned} H(p_1, \dots, p_M) &= \\ &= H(p_1 + \dots + p_k, p_{k+1} + \dots + p_M) + (p_1 + \dots + p_k) H\left(\frac{p_1}{\sum_{i=1}^k p_i}, \dots, \frac{p_k}{\sum_{i=1}^k p_i}\right) \\ &\quad + (p_{k+1} + \dots + p_M) H\left(\frac{p_{k+1}}{\sum_{i=k+1}^M p_i}, \dots, \frac{p_M}{\sum_{i=k+1}^M p_i}\right) \\ &\quad k = 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned}$$

4. Η συνάρτηση

$$H(p, 1-p)$$

είναι συνεχής.

Επίσης ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1.

$$H(p_1, p_2, \dots, p_M) \leq \log M$$

2.

$$H(X_1, X_2, \dots, X_M) \leq \sum_{i=1}^M H(X_i)$$

όπου τα

$$X_1, X_2, \dots, X_M$$

είναι τυχαίες μεταβλητές.

Επίσης χρήσιμη ποσότητα είναι και η Υπό Συνθήκη Εντροπία (*Conditional Entropy*)

$$H(X|Y) \equiv - \sum_{y \in Y} p(y) \sum_{x \in X} p(x|y) \log p(x|y)$$

ή ισοδύναμα

$$H(X|Y) \equiv - \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} p(x, y) \log p(x|y)$$

Πολύ σημαντική ιδιότητα είναι ότι ισχύει ο κανόνας αλυσίδας (*chain rule*)

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

$$H(X|Y) \leq H(X)$$

και επίσης

$$H(X, Y, Z) = H(X, Y) + H(Z | X, Y)$$

$$H(Z | X, Y) \leq H(Z | Y)$$

Θεώρημα:

Εάν τα X, Y, Z είναι τυχαίες μεταβλητές σε πεπερασμένο διάστημα ισχύει ότι

$$H(X, Y, Z) \leq H(X, Y) + H(Y, Z) - H(Y)$$

Θεώρημα:

Εάν X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές τότε

$$H(X | Y) \leq p \log(d-1) + H(p, 1-p)$$

με d να είναι ο Πληθάριθμος (*cardinality*) και θεωρούμε ότι

$$p \equiv \text{prob}(X \neq Y)$$

Σχετική Εντροπία (Relative Entropy) .

Η Σχετική Εντροπία [11, 12, 13, 14, 15, 16] δυο κατανομών πιθανοτήτων ορίζεται ως

$$D(p_1 \| p_2) \equiv \sum_x p_1(x) [\log p_1(x) - \log p_2(x)]$$

ή στο συνεχές ανάλογο

$$D(p_1 \| p_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) \log \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx$$

Η Σχετική Εντροπία είναι πάντοτε θετική ή μηδέν. Μηδέν είναι στην περίπτωση μόνο που οι δυο κατανομές ταυτίζονται. Η Σχετική Εντροπία μας δίνει, κατά μια έννοια, ένα μέτρο της «απόστασης» ανάμεσα στις δυο κατανομές. Όμως δεν αποτελεί με την αυστηρή μαθηματική έννοια μέτρο της απόστασης των δυο κατανομών.

Αμοιβαία Πληροφορία Shannon.

Η Εντροπία του Shannon καθορίζει την πληροφορία που περιέχεται σε μια κατανομή. Η Αμοιβαία Πληροφορία Shannon (*Shannon mutual information*) [3] καθορίζει την ποσότητα πληροφορίας που περιέχεται από κοινού σε δυο κατανομές.

$$I(X \wedge Y) \equiv \sum_{x,y} p(x,y) \log \left[\frac{p(x,y)}{p(x)q(y)} \right]$$

Με $p(x,y)$ την από κοινού κατανομή των δυο τυχαίων μεταβλητών (joint distribution) και p,q τις περιθώριες κατανομές.

Η Αμοιβαία Πληροφορία Shannon είναι συνάρτηση συμμετρική ως προς τις δυο τυχαίες μεταβλητές. Μηδενίζεται δε όταν οι δυο κατανομές είναι ανεξάρτητες. Η ποσότητα αυτή θα μπορούσε να θεωρηθεί και ως Σχετική Εντροπία με την δεύτερη κατανομή να είναι ίση με το γινόμενο των περιθωρίων κατανομών, Έτσι ισχύει ότι

$$I(X \wedge Y) \geq 0$$

Επίσης ισχύουν

$$I(X \wedge Y) \leq H(X)$$

και

$$I(X \wedge Y) \leq H(Y)$$

Εάν σκεφτούμε την τυχαία μεταβλητή X σαν τα δεδομένα στην είσοδο ενός καναλιού πληροφορίας και την τυχαία μεταβλητή Y σαν τα δεδομένα στην έξοδο του καναλιού τότε η Αμοιβαία Πληροφορία Shannon μετράει την ποσότητα της πληροφορίας που διασχίζει το κανάλι.

Σε συνάρτηση με την Υπό Συνθήκη Εντροπία έχουμε ότι

$$I(X \wedge Y) = H(X) - H(X|Y)$$

Το παρακάτω γράφημα παριστάνει διαγραμματικά την σχέση μεταξύ των δυο μέτρων της πληροφορίας.

Γραφική αναπαράσταση των σχέσεων που αναπτύσσονται μεταξύ διαφορετικών μέτρων της πληροφορίας. Διάγραμμα Venn.

[Περισσότερα διαγράμματα Venn στο παράρτημα (θ. κλασικής πληρ., θ. κβαντ. πληρ.)]

Εντροπίες τύπου Renyi.

Η Εντροπία Renyi [17,18,19] τάξης α ορίζεται ως

$$H_a(p_1, p_2, \dots, p_M) \equiv \frac{1}{1-a} \log \sum_{k=1}^M p_k^a$$

με

$$a \neq 1$$

και

$$(p_1, p_2, \dots, p_M)$$

η κατανομή πιθανότητας.

Η κατανομή αυτή στο όριο $\alpha \rightarrow 1$ ταυτίζεται με την Εντροπία του Shannon.

Στην περίπτωση που η κατανομή μας αποτελείται από δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y και εάν αυτές είναι ανεξάρτητες τότε

$$H_a(X, Y) = H_a(X) + H_a(Y)$$

Οι εντροπίες Renyi συσχετίζονται με την L^p -norm του ανύσματος πιθανότητας (probability vector). Για παράδειγμα εάν επιλέξουμε την L^2 θα ισχύει

$$H_2(p) = -2 \log \|p\|_2$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

$$H_0(X) = \log M = \log |X|$$

$$H_\infty(X) = -\log \left(\sup_{i=1 \dots M} \{p_i\} \right)$$

$$H_2 < 2H_\infty$$

$$H_\infty < H_2$$

$$H_1(X) \geq H_2(X)$$

Η Εντροπία Renyi έχει αποτελέσει αφετηρία σε κάποιους ορισμούς μέτρων του κβαντικού Entanglement.

Εντροπία Τάξης α (Entropy of Degree α)

Η Εντροπία αυτή, η οποία συγγενεύει με την Εντροπία κατά Renyi ισοδυναμεί με την Εντροπία Tsallis [20,21], ορίζεται ως

$$H^a(p_1, p_2, \dots, p_M) \equiv \frac{1}{2^{1-a} - 1} \left(\sum_{k=1}^M p_k^a - 1 \right)$$

και είναι συνάρτηση συμμετρική ως προς τις μεταβλητές της.

Στο όριο $a \rightarrow 1$ συμπίπτει και αυτή με την Εντροπία Shannon.

Υπακούει στην αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} H^a(p_1, p_2, \dots, p_M) &= H^a(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_M) \\ &+ (p_1 + p_2)^a H^a\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) \end{aligned}$$

Εάν η κατανομή συνίσταται από τις τυχαίες μεταβλητές X, Y και αυτές είναι ανεξάρτητες τότε ισχύει ότι

$$H^a(X, Y) = H^a(X) + H^a(Y) + (2^{1-a} - 1) H^a(X) H^a(Y)$$

Κλασική κωδικοποίηση (classical source encoding) και Εντροπία Shannon.

Θα προχωρήσουμε να δείξουμε την πρακτική σημασία της Εντροπίας του Shannon αλλά και της Σχετικής Εντροπίας στην περίπτωση που θέλουμε να κωδικοποιήσουμε την πληροφορία έτσι ώστε να την εκπέμψουμε από μια πηγή.

Έστω ότι για την περιγραφή της πληροφορίας χρησιμοποιούμε ένα σύνολο γραμμάτων (alphabet) με d στο πλήθος στοιχείων

$$\{0, 1, 2, \dots, d-1\}$$

Η πηγή θα εκπέμπει λέξεις οι οποίες θα κατασκευάζονται από γράμματα του παραπάνω αλφαβήτου. Το μέσο μήκος λέξης (codeword) θα είναι

$$L(C) \equiv \sum_x p(x) \ell(x)$$

με $p(x)$ την πιθανότητα της λέξεως $C(x)$ και $\ell(x)$ το μήκος αυτής.

Επειδή όσο μεγαλύτερο είναι το μέσο μήκος λέξης που φεύγει από την πηγή τόσο πιο μεγάλο είναι το κόστος θα είναι χρήσιμο να δούμε πόσο μπορούμε να μειώσουμε το μέσο μήκος λέξης χωρίς όμως να χάσουμε το νόημα του μηνύματος. Για να συμβεί αυτό θα ήταν καλό όσο συχνότερα εκπέμπεται μια λέξη τόσο μικρότερο μήκος να έχει. Για παράδειγμα στον κώδικα Morse το γράμμα e , το οποίο είναι το συχνότερα εμφανιζόμενο γράμμα του αγγλικού αλφαβήτου, αναπαρίσταται με μια απλή τελεία.

Έστω ότι

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^M p_i n_i$$

$$\text{με } \begin{pmatrix} p_i = p(x_i) \\ n_i = \ell(x_i) \end{pmatrix}$$

το μέσο μήκος λέξης στην περίπτωση που έχουμε επιλέξει την βέλτιστη κωδικοποίηση. Τότε μπορεί να αποδειχθεί το φράγμα (Noiseless Coding Theorem)

$$\bar{n} \geq \frac{H(x)}{\log d}$$

Μάλιστα κάτω από πολύ γενικές προϋποθέσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει επίσης

$$\bar{n} < \frac{H(x)}{\log d} + 1$$

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι υπολογίζοντας την Εντροπία Shannon μπορούμε να προσδιορίσουμε τον βαθμό συμπίεσης που επιδέχεται το μήνυμα επιλέγοντας την κατάλληλη κωδικοποίηση.

Η εύρεση της κατάλληλης κωδικοποίησης [3,22,23] μπορεί να επιτευχθεί με μια σειρά μεθόδων που έχουν αναπτυχθεί και λειτουργούν κατά περίπτωση. Χωρίς να εισέρθουμε σε περισσότερες λεπτομέρειες αναφέρουμε ότι σε πραγματικά προβλήματα η εύρεση της βέλτιστης κωδικοποίησης δεν είναι πάντα εύκολη.

Κλασικά κανάλια πληροφορίας και Χωρητικότητα Shannon.

Έστω ότι έχουμε ένα κλασικό κανάλι μετάδοσης της πληροφορίας και τα στοιχεία εισόδου προέρχονται από το πεπερασμένο σύνολο $\{X\}$ και τα στοιχεία εξόδου από το πεπερασμένο σύνολο $\{Y\}$. Έστω επίσης ότι το κανάλι χαρακτηρίζεται από τις πιθανότητες

$$T_{yx} \equiv \text{prob}(Y = y | X = x)$$

Εάν η κατανομή στην είσοδο είναι η p τότε στην έξοδο η κατανομή θα είναι

$$q(y) = \sum_x T_{yx} p(x)$$

Η απεικόνιση $T: \{X\} \times \{Y\} \rightarrow [0,1]$ είναι Μαρκοβιανός Πυρήνας (Markov Kernel).

$$\sum_y T_{yx} = 1$$

ή σε επίπεδο πινάκων μπορούμε να γράψουμε ότι

$$q = Tp$$

Το T είναι ο στοχαστικός πίνακας. Για παράδειγμα θα μπορούσε να ισχύει η περίπτωση (Noisy Typewriter)

$$T_{yx} = \begin{cases} 1/2 & y = x \text{ ή } y = x + 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Οπότε στην περίπτωση αυτή ισχύει για τις κατανομές

$$p(x, y) = \frac{p(x)}{2} \text{ παρά } y = x \text{ ή } y = x + 1$$

Η Χωρητικότητα του Shannon [1, 3, 24] ορίζεται ως η μέγιστη Αμοιβαία Πληροφορία Shannon πάνω σε όλες τις δυνατές κατανομές

$$C = \sup_p [I(X \wedge Y)]$$

και έτσι χαρακτηρίζει το κανάλι.

Στην περίπτωση του Noisy Typewriter το C ισούται με

$$-\sum_x \frac{p(x) + p(x-1)}{2} \log \left[\frac{p(x) + p(x-1)}{2} \right] - 1$$

Θεωρώντας ότι το αλφάβητο του Noisy Typewriter αποτελείται από $2n$ χαρακτήρες, το μέγιστο θα επιτυγχάνεται όταν

$$\frac{p(x)+p(x-1)}{2}=\frac{1}{2n}$$

και η τιμή του θα είναι η

$$\log(2n)-1=\log n$$

Η πρακτική σημασία της Χωρητικότητας ενός καναλιού πληροφορίας είναι μεγάλη γιατί ισούται με τον μέγιστο δυνατό ρυθμό μετάδοσης της πληροφορίας διαμέσου του καναλιού.

Κλασικός υπολογιστής, μηχανή του Turing.

Η μηχανή του Turing [25,26,27,28,29] είναι μια ιδεατή συσκευή η οποία μπορεί να χειρίζεται σύμβολα τα οποία βρίσκονται επάνω σε μια ταινία (tape). Η μηχανή του Turing, παρόλο που είναι απλή στην σύλληψη της, έχει την δυνατότητα να πραγματοποιήσει όλες τις λογικές διαδικασίες και όλους τους υπολογισμούς που μπορεί να κάνει ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής [30]. Έτσι κάθε αλγόριθμος είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί στην μηχανή του Turing. Κάποιος πού έχει στοιχειώδη εμπειρία στον κώδικα γλώσσας μηχανής μπορεί να δει στοιχεία ομοιότητας στον τρόπο λειτουργίας των σύγχρονων επεξεργαστών ηλεκτρονικών υπολογιστών με την μηχανή του Turing. Η ιδεατή αυτή λογική μηχανή επινοήθηκε από τον Alan Turing το 1937. Ο ορισμός που έδωσε ο Turing για την μηχανή του ήταν ο ακόλουθος.

..."an infinite memory capacity obtained in the form of an infinite tape marked out into squares on each of which a symbol could be printed. At any moment there is one symbol in the machine; it is called the scanned symbol. The machine can alter the scanned symbol and its behavior is in part determined by that symbol, but the symbols on the tape elsewhere do not affect the behavior of the machine.

However, the tape can be moved back and forth through the machine, this being one of the elementary operations of the machine. Any symbol on the tape may therefore eventually have an innings" (Turing 1948)

Η πρακτική σημασία της έγκειται στο γεγονός ότι επιστήμονες της πληροφορικής μπορούν να διερευνήσουν τα όρια των μηχανών που πραγματοποιούν υπολογισμούς.

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Turing_machine_2a.svg]

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turing_machine_2b.svg]

Γραφική απεικόνιση της μηχανής του Turing

[βλ.παράρτημα]

Η μηχανή του Turing αποτελείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

1. Την ταινία (tape) η οποία χωρίζεται σε κελιά το ένα μετά το άλλο σε σειριακή δηλαδή διάταξη. Το κάθε κελί περιέχει ένα σύμβολο το οποίο προέρχεται από ένα πεπερασμένο αλφάβητο. Το αλφάβητο πάντοτε πρέπει να περιέχει το ειδικό σύμβολο "blank" (πολλές φορές παριστάνεται και με το 0). Η ταινία θεωρούμε ότι μπορεί να έχει όση έκταση θέλουμε κάθε φορά και ως προς τα δύο άκρα της. Στα κελιά που δεν έχει γίνει καμία εγγραφή τοποθετούμε το σύμβολο "blank".
2. Την κεφαλή (Head). Η κεφαλή μπορεί να διαβάσει ή να τοποθετήσει ένα σύμβολο στο τρέχον κελί της ταινίας. Επίσης μπορεί να μετακινήσει την ταινία κατά μια θέση αριστερά ή

δεξιά. Σε κάποια μοντέλα μπορεί να κινείται η κεφαλή και η ταινία να παραμένει στατική.

3. Το πίνακα δράσης (action table). Ο πίνακας αυτός είναι πεπερασμένος και έχει το νόημα που έχει ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή. Τα στοιχεία του ονομάζονται «κανόνες μετάβασης» (transition rules). Τα στοιχεία αυτά συνήθως οργανώνονται ως 4-tuple:

$$\langle \mathbf{State}_0, \mathbf{Symbol}, \mathbf{State}_{\text{next}}, \mathbf{Action} \rangle$$

"if the machine is in state $\mathbf{State}_0$ and the current cell contains $\mathbf{Symbol}$ then move into state $\mathbf{State}_{\text{next}}$ taking $\mathbf{Action}$ "

4. Τον Καταχωρητή θέσης (state register). Ο Καταχωρητής αυτός περιέχει την θέση στην οποία βρισκόμαστε μέσα στο action table.

Η μηχανή του Turing και οι διάφορες παραλλαγές της χρησιμοποιούν συγκεκριμένο σύνολο εντολών (instructions set) και περιγράφονται με συγκεκριμένο φορμαλισμό. Υπάρχει επίσης από την πλευρά των μαθηματικών αξιωματική θεμελίωση της μηχανής του Turing. Όμως στην παράγραφο αυτή δεν θα μπούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες. Αυτό που έχει σημασία είναι η θέση ότι οτιδήποτε μπορεί να υπολογιστεί σε μια μηχανή μπορεί να υπολογιστεί και με την μηχανή του Turing. Το γεγονός αυτό καθιστά την έννοια της υπολογισιμότητας συγκεκριμένη και σαφή.

Στην φιλολογία περί Επιλυσιμότητας ή μη Επιλυσιμότητας συχνά αναφέρεται το ζήτημα το οποίο είναι γνωστό ως Πρόβλημα Τερματισμού ή αλλιώς Πρόβλημα Περάτωσης (Halting Problem). Το πρόβλημα αυτό θεωρείται μη Επιλύσιμο [28] και αφορά την εύρεση μιας μηχανής του Turing η οποία να μπορεί να αποφασίζει εάν μια άλλη μηχανή του Turing θα τερματίσει τον υπολογισμό της, δεδομένων των πληροφοριών στην Είσοδο, ή θα καταλήξει σε έναν Ατέρμονα Βρόχο. Το Πρόβλημα Περάτωσης συνδέεται επίσης με το περίφημο θεώρημα Μη Πληρότητας του Gödel [98].

Η μηχανή του Turing διαχειρίζεται την πληροφορία στην μνήμη (tape) και το σύνολο των εντολών σειριακά. Επίσης στερείται της έννοιας της παραλληλίας.

Τις τελευταίες δυο δεκαετίες με την προσπάθεια υλοποίησης κβαντικών υπολογιστικών συστημάτων έχουν επινοηθεί κβαντικά ανάλογα της μηχανής του Turing [34,35,36]. Τα μοντέλα αυτά έχουν την δυνατότητα να εκμεταλλεύονται υπολογιστικά την κβαντική μη τοπικότητα και παραλληλία.

Το κύτταρο της κβαντικής πληροφορίας. Το κβαντικό bit (qubit)

Το απλούστερο κβαντικό σύστημα περιγράφεται σε ένα μιγαδικό ανυσματικό χώρο δύο διαστάσεων (2-D Hilbert space C^2). Ας θεωρήσουμε ότι ορίζουμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς στον χώρο αυτό και συμβολίζουμε τα διανύσματα βάσης ως $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Τότε κάθε Καθαρή κατάσταση του συστήματος μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

όπου τα α και β είναι μιγαδικοί αριθμοί και πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

έτσι ώστε το $|\psi\rangle$ να είναι σωστά κανονικοποιημένο.

Τέτοια δυσδιάστατα κβαντικά συστήματα είναι γνωστά ως κβαντικά bits ή αλλιώς qubits, σε αναλογία με το bit που είναι η θεμελιώδης μονάδα πληροφορίας στην κλασική θεωρία. Οι καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ είναι γνωστές και με τον όρο υπολογιστική βάση (computational basis states). Η επιλογή της υπολογιστικής βάσης είναι γενικά αυθαίρετη. Στην πραγματικότητα τα διανύσματα της υπολογιστικής βάσης είναι ένας σταθερός αντιπρόσωπος όλης της κλάσης ανυσμάτων που

προκύπτουν εφαρμόζοντας μοναδιαίους μετασχηματισμούς πάνω σε αυτά. Πολλές φορές όταν αναφερόμαστε σε πραγματικά φυσικά συστήματα συνηθίζουμε να επιλέγουμε τα διανύσματα βάσης έτσι ώστε αυτά να αντιστοιχούν σε φυσικώς ενδιαφέροντα ζεύγη καταστάσεων. Για παράδειγμα σε ένα πείραμα πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού ενός πυρήνα με σπιν $1/2$ είναι συνηθής η επιλογή της υπολογιστικής βάσης να ταυτίζεται με τις μαγνητικές ιδιοκαταστάσεις του συστήματος ένεκα της υπάρξεως του ισχυρού εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Είναι χρήσιμο να κάνουμε μια συγκριτική παρουσίαση του κβαντικού bit με το κλασικό bit. Το bit μπορεί να υπάρξει μόνο σε μια από τις διακριτές καταστάσεις 0 και 1 κάθε φορά. Σε αντιδιαστολή, το qubit έχει συνεχή χώρο καταστάσεων και μπορεί να υπάρξει σε οποιαδήποτε κατάσταση μπορεί να περιγραφεί από τους μιγαδικούς αριθμούς α και β . Στην περίπτωση του bit μπορούμε κάθε φορά να είμαστε σίγουροι για το εάν το σύστημα μας βρίσκεται στην κατάσταση 0 ή 1. Αντίθετα για το qubit δεν μπορούμε με βεβαιότητα να πούμε σε ποια από τις δυο καταστάσεις βρίσκεται. Για παράδειγμα εάν έχουμε ένα μόνο qubit δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να κάνουμε μια μέτρηση η οποία θα μας πει εάν το σύστημα μας βρισκόταν πριν την μέτρηση στην κατάσταση $|0\rangle$ ή

στην κατάσταση $\frac{(|0\rangle+|1\rangle)}{\sqrt{2}}$. Ο προσδιορισμός της αρχικής κατάστασης είναι όμως εφικτός στατιστικά εάν έχουμε μεγάλο αριθμό όμοιων αρχικών καταστάσεων.

Η διαφοροποίηση μεταξύ qubits και κλασικών bits γίνεται περισσότερο έκδηλη στην περίπτωση που έχουμε να συγκρίνουμε συστήματα με περισσότερα bits. Δυο κλασικά bits μπορούν να βρεθούν σε τέσσερις διαφορετικές καταστάσεις: 00, 01, 10 και 11. Στην περίπτωση των δυο qubits κάθε γραμμικός συνδυασμός των τεσσάρων διανυσμάτων βάσης $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ και $|11\rangle$ είναι πιθανός. Αυτό σημαίνει ότι τα δυο qubits μπορούν να βρεθούν ακόμα και σε καταστάσεις πλήρους κβαντικής συσχέτισης ή αλλιώς σε καταστάσεις που είναι *Entangled*. Τέτοιες καταστάσεις είναι και οι τέσσερις καταστάσεις Bell:

$$|\Phi_+\rangle = \frac{(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}} \quad |\Phi_-\rangle = \frac{(|00\rangle - |11\rangle)}{\sqrt{2}}$$

$$|\Psi_+\rangle = \frac{(|01\rangle + |10\rangle)}{\sqrt{2}} \quad |\Psi_-\rangle = \frac{(|01\rangle - |10\rangle)}{\sqrt{2}}$$

Επίσης πλήρως Entangled είναι και όλες οι καταστάσεις που προκύπτουν εφαρμόζοντας τοπικούς μοναδιαίους (local unitary) μετασχηματισμούς στις προηγούμενες καταστάσεις.

Τα qubits είναι χρήσιμα στην θεωρητική κατανόηση της έννοιας της πληροφορίας, στην εύρεση πρακτικών μεθόδων αναπαράστασης της και στην επεξεργασία της. Ως εκ τούτου η στοιχειώδης μονάδα κβαντικής πληροφορίας θα πρέπει να μπορεί να μεταβάλει την κατάσταση της και να αναπροσαρμόζεται με βάση συγκεκριμένους μηχανισμούς έτσι ώστε να δύναται να αποθηκεύει και να επεξεργάζεται την πληροφορία. Η μαθηματική αναπαράσταση αυτών των μηχανισμών μεταβολής (μετασχηματισμών) γίνεται με την βοήθεια γραμμικών τελεστών. Οι τέσσερις βασικοί μετασχηματισμοί είναι οι εξής (Pauli operators):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Οι παραπάνω τελεστές έχουν αναπαρασταθεί στην υπολογιστική βάση $|0\rangle$ και $|1\rangle$.

Οι τελεστές του Pauli αποτελούν βάση για τον διανυσματικό χώρο των μετασχηματισμών επί του qubit. Αυτό σημαίνει ότι οποιοσδήποτε μετασχηματισμός που εφαρμόζεται σε ένα qubit μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο ως ο ακόλουθος γραμμικός συνδυασμός:

$$P = a \cdot I + b \cdot X + c \cdot Y + d \cdot Z$$

Η τελευταία αναπαράσταση ονομάζεται και αναπαράσταση του Bloch (Bloch representation).

Η αναπαράσταση του Bloch είναι ιδιαίτερα ελκυστική στους φυσικούς λόγω της γεωμετρικής σημασίας των πινάκων του Pauli που σχετίζονται με αναπαραστάσεις στροφών. Κάνοντας χρήση του τελεστή Πυκνότητας Πιθανότητας (density operator) μπορούμε να γράψουμε την παράσταση:

$$\rho = \frac{I + \vec{\gamma} \cdot \vec{\Omega}}{2}$$

με $\vec{\Omega} = (X, Y, Z)$ και $\vec{\gamma} = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z)$ το διάνυσμα Bloch (Bloch Vector). Το διάνυσμα του Bloch θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη $\|\vec{\gamma}\| \leq 1$.

Η κβαντική κατάσταση μπορεί να αναπαρασταθεί γεωμετρικά εντός της μοναδιαίας σφαίρας με την βοήθεια του διανύσματος Bloch. Χρήσιμη είναι και η έκφραση:

$$\rho = \frac{I}{2} + \frac{1}{2} \|\vec{\gamma}\| \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

Στην τελευταία έκφραση περιέχονται οι γωνίες που προσδιορίζουν την κατεύθυνση του διανύσματος Bloch.

Η σφαίρα του Bloch [βλ.παράρτημα]

Οι μετασχηματισμοί ενός qubit ή περισσότερων ονομάζονται στην γλώσσα της θεωρίας της πληροφορίας *Κβαντικές Πύλες* (*quantum gates*) σε αντιστοιχία με τις *Λογικές Πύλες* (*logic gates*) της κλασικής θεωρίας. Οι Κβαντικές Πύλες είναι γενικά μοναδιαίοι μετασχηματισμοί. Οι μετασχηματισμοί του Pauli είναι ένα παράδειγμα κβαντικών Πυλών. Ο τελεστής X ονομάζεται συχνά *Quantum Not Gate* γιατί εναλλάσσει τα διανύσματα της υπολογιστικής βάσης $X|0\rangle=|1\rangle$ και $X|1\rangle=|0\rangle$. Ο τελεστής Z είναι γνωστός και ως *Εναλλάκτης Φάσης* (*phase flip gate*) επειδή ισχύει ότι $Z|0\rangle=|0\rangle$ και $Z|1\rangle=-|1\rangle$.

Από την άποψη της κβαντικής θεωρίας της πληροφορίας δύο πολύ σημαντικές Πύλες είναι οι εξής:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Hadamard Gate}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \quad \text{Phase Shift Gate}$$

Να σημειωθεί εδώ ότι η σημασία των τελευταίων Πυλών έγκειται στο γεγονός ότι οι Πύλες Z, H, S συνιστούν Παγκόσμιο σύνολο τελεστών (*universal set*) με την έννοια ότι κάθε μοναδιαίος μετασχηματισμός του qubit δηλαδή κάθε κβαντική Πύλη, ενός qubit, μπορεί να παραχθεί από αυτές με απεριόριστη ακρίβεια.

Είναι αρκετοί οι λόγοι για τους οποίους εκλαμβάνουμε το qubit σαν την θεμελιώδη ποσότητα κβαντικής πληροφορίας. Καταρχήν το qubit είναι το απλούστερο κβαντικό. Επίσης οποιοδήποτε κβαντικό σύστημα πεπερασμένης διάστασης μπορεί να περιγραφεί με ένα ισοδύναμο σύστημα αποτελούμενο από πεπερασμένο αριθμό qubits. Βέβαια και άλλα στοιχειώδη συστήματα αποθήκευσης της πληροφορίας έχουν επινοηθεί όπως για παράδειγμα τα *qutrits*, αντίστοιχα με τα κλασικά *trits* (συστήματα τριών καταστάσεων), όμως αυτά μπορούν να

οριστούν και πάλι ως υπόχωρος συστήματος αποτελούμενου από qubits. Για τους λόγους αυτούς το qubit επικράτησε ως η θεμελιώδης μονάδα κβαντικής πληροφορίας.

Η έννοια του qubit έχει υλοποιηθεί πειραματικά [37,38] σε πολλά διαφορετικά φυσικά συστήματα. Ενδεικτικά παραθέτουμε τον πίνακα:

Physical support	Name	Information support	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
Single photon (Fock states)	Polarization encoding	Polarization of light	Horizontal	Vertical
	Photon number	Photon number	Vacuum	Single photon state
	Time-bin encoding	Time of arrival	Early	Late
Coherent state of light	Squeezed light	Quadrature	Amplitude-squeezed state	Phase-squeezed state
Electrons	Electronic spin	Spin	Up	Down
	Electron number	Charge	No electron	One electron
Nucleus	Nuclear spin addressed through NMR	Spin	Up	Down
Optical lattices	Atomic spin	Spin	Up	Down
Josephson junction	Superconducting charge qubit	Charge	Uncharged superconducting island ($Q=0$)	Charged superconducting island ($Q=2e$, one extra Cooper pair)
	Superconducting flux qubit	Current	Clockwise current	Counterclockwise current
	Superconducting phase qubit	Energy	Ground state	First excited state
Singly-charged quantum dot pair	Electron localization	Charge	Electron on left dot	Electron on right dot
Quantum dot	Dot spin	Spin	Down	Up

Σημείωση : Ο πίνακας είναι δανεισμένος από τον ιστότοπο <http://en.wikipedia.org/wiki/Qubit>. Για τον λόγο αυτό δεν έχει γίνει κάποια προσπάθεια τροποποίησης του.

Κβαντικοί υπολογιστές

Η ανάγκη για υπολογισμούς μεγαλύτερης κλίμακας και ταχύτητας αναγκάζει του επιστήμονες της πληροφορικής να ψάξουν φυσικά συστήματα κατάλληλα για ταχύτερη επεξεργασία της πληροφορίας. Όπως είδαμε τα κλασικά υπολογιστικά συστήματα υπόκεινται στην Υπόθεση του Turing (Turing Thesis) και έτσι έχουν πολλές καλές, με Παγκόσμια ισχύ, ιδιότητες όσον αφορά την πραγματοποίηση υπολογισμών. Η πραγματοποίηση των υπολογισμών σε έναν κλασικό επεξεργαστή έγκειται ουσιαστικά στην πραγματοποίηση τοπικών μετασχηματισμών στην μνήμη του υπολογιστή. Τα κλασικά bits αποτελούν σε κάθε περίπτωση ανεξάρτητες μονάδες αποθήκευσης πληροφορίας και μπορούν να βρίσκονται σε δυο διακριτές καταστάσεις. Το γεγονός ότι τα κλασικά bits αδυνατούν να «μοιραστούν» την πληροφορία από κοινού περιορίζει τις δυνατότητες του κλασικού υπολογιστή και θέτει την δέσμευση της σειριακής επεξεργασίας της πληροφορίας. Αντίθετα εάν επιλέξουμε να αποθηκεύουμε την πληροφορία σε μια συστάδα αποτελούμενη από qubits έχουμε την δυνατότητα παράλληλα να απεικονίσουμε πολλές διαφορετικές διευθετήσεις μιας συστάδας κλασικών bits.

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quantum_computer.svg]

Οι καταστάσεις των qubits είναι υπερσύνολο των κλασικών καταστάσεων των bits

[βλ.παράρτημα]

Έτσι για παράδειγμα εάν έχουμε στην διάθεση μας 2 qubits μπορούμε να έχουμε $2 \times 2 = 4$ δυνατές διακριτές διευθετήσεις αλλά και όλες τις υπερθέσεις αυτών των καταστάσεων. Αντίστοιχα εάν έχουμε n qubits μπορούμε να έχουμε υπέρθεση 2^n καταστάσεων. Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς ότι όσον αφορά την αποθήκευση της πληροφορίας τα κβαντικά συστήματα υπερέρχουν κατά πολύ των κλασικών.

Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από 3 qubits. Το σύστημα μπορεί να βρεθεί σε μια υπέρθεση 9 καταστάσεων. Έστω ότι η υπέρθεση αυτή είναι η εξής:

$$a|000\rangle + b|001\rangle + c|010\rangle + d|011\rangle + e|100\rangle + f|101\rangle + g|110\rangle + h|111\rangle$$

βλέπουμε ότι πρέπει να ξέρουμε 9 μιγαδικούς αριθμούς έτσι ώστε να προσδιορίσουμε την κατάσταση του συστήματος. Εάν είχαμε την δυνατότητα η κβαντική μνήμη της συσκευής μας να αποτελείται από μια Καθαρή κατάσταση με 300 qubits θα χρειαζόμασταν $2^{300} \approx 10^{90}$ μιγαδικούς αριθμούς για τον προσδιορισμό της κατάστασης. Ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των ατόμων στο παρατηρήσιμο σύμπαν!

Όσον αφορά την διενέργεια υπολογισμών ο κβαντικός υπολογιστής διαφέρει από τον κλασικό γιατί όλοι οι υπολογισμοί είναι εν γένει αντιστρέψιμοι. Αυτό συμβαίνει γιατί ο κβαντικός υπολογιστής εξελίσσεται στον χρόνο με μοναδιαίο τρόπο. Όμως οι μοναδιαίοι μετασχηματισμοί αντιστοιχούν σε στροφές πλήρως αντιστρέψιμες. Οι μετασχηματισμοί αυτοί μπορούν να αναπαρασταθούν με την βοήθεια των *Κβαντικών Κυκλωμάτων (quantum circuits)*. Το γεγονός όμως ότι το σύστημα εξελίσσεται μοναδιαία δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να περιγράψει μη αντιστρέψιμες διαδικασίες. Οι μη αντιστρέψιμες διαδικασίες μπορούν να υλοποιηθούν εισάγοντας στο σύστημα επιπλέον qubits (*Ancilla*) στα οποία κάνουμε Στατιστική Απαλοιφή σε κάποιο στάδιο το υπολογισμού εισάγοντας έτσι την έννοια της μη

αντιστρεψιμότητας. Ο κλασικός και ο κβαντικός υπολογιστής διαφέρουν επίσης στον τρόπο που ο χρήστης αντλεί την πληροφορία. Στον κλασικό υπολογιστή ο χρήστης διαβάζει την πληροφορία με τρόπο που να μην επηρεάζει το αποτέλεσμα σε αντίθεση με τον κβαντικό υπολογιστή όπου απαιτείται κβαντική μέτρηση η οποία έχει ως αποτέλεσμα την κατάρρευση της τελικής κατάστασης.

Πειραματικές προσπάθειες υλοποίησης κβαντικών υπολογιστών μπορεί να βρει κανείς στις αναφορές [37,38,42].

Αναπαράσταση κβαντικού υπολογισμού με την μέθοδο του κβαντικού κυκλώματος. Τα U_1, U_2, U_3, U_4 είναι μοναδιαίοι μετασχηματισμοί (quantum gates) οι οποίοι επιδρούν σε 1,2,3,1 qubits αντίστοιχα. Η αρχική κατάσταση αποτελείται από 4 qubits. Το βάθος (depth) του κυκλώματος είναι 4. Η κατάσταση ψ_f είναι η τελική κατάσταση. Τα τρίγωνα στο τέλος δηλώνουν την κατάσταση των 4 qubits μετά από την προβολή τους με μέτρηση στην υπολογιστική βάση.

[βλ. παράρτημα (P.Kaye, ...)]

Ένας μη αντιστρέψιμος υπολογισμός μπορεί να πραγματοποιηθεί εάν προσθέσουμε επιπλέον qubits (Ancilla) τα οποία Στατιστικά Απαλείφουμε στο τέλος της διαδικασίας. Η εξέλιξη προκύπτει με την βοήθεια του Υπερτελεστή.
[βλ.παράρτημα (P.Kaye,...)]

Ο κβαντικός υπολογιστής στην πραγματικότητα είναι μια επέκταση του κλασικού υπολογιστή από άποψη λειτουργίας και δυνατοτήτων [43]. Όσον αφορά την λειτουργία του υπερέχει του κλασικού υπολογιστή στο θέμα της παράλληλης επεξεργασίας των δεδομένων. Στην έννοια της κβαντικής παραλληλίας θα αναφερθούμε σε ξεχωριστή παράγραφο.

Στην προσπάθεια υλοποίησης ρεαλιστικού φυσικού κβαντικού υπολογιστή αντιτίθεται το φαινόμενο το οποίο είναι γνωστό με τον όρο Αποσυμφωνία [39]. Ως Αποσυμφωνία εννοούμε την διαδικασία αυτή που οδηγεί στον στατιστικό αποσυντονισμό των κβαντικών συσχετίσεων μιας Συλλογής κβαντικών συστημάτων. Η διαδικασία αυτή οδηγεί σε εξάλειψη των μη διαγωνίων στοιχείων του Πίνακα Πυκνότητας πιθανότητας της Συλλογής με συνέπεια την απαλοιφή των κβαντικών συσχετίσεων και την επιστροφή στην τοπικότητα της κλασικής στατιστικής φυσικής. Είναι, κατά κάποιους, το φαινόμενο της κλασικοποίησης των φυσικών συστημάτων.

Κβαντικές Πύλες και Παγκοσμιότητα (universality) .

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι στην περίπτωση του ενός qubit μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο μοναδιαίων μετασχηματισμών (quantum gates) με την βοήθεια των οποίων μπορούμε να εκφράσουμε κάθε μοναδιαίο μετασχηματισμό του ενός qubit με απεριόριστη ακρίβεια. Γενικά ένας κβαντικός αλγόριθμος εκφράζεται σαν μια ακολουθία μοναδιαίων μετασχηματισμών οι οποίοι επιδρούν πάνω σε μια συστοιχία n -qubits. Παραβλέποντας σε αυτό το στάδιο την συμμετοχή στην διαδικασία της κβαντικής μέτρησης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι όλος ο αλγόριθμος θα μπορούσε να αναπαρασταθεί από έναν μοναδιαίο πίνακα. Σε πρακτικό επίπεδο θα πρέπει να εξετάσουμε εάν είναι δυνατόν να βρεθεί ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχειωδών μετασχηματισμών με την βοήθεια των οποίων να μπορούμε με απεριόριστη ακρίβεια να εκφράσουμε οποιονδήποτε αλγόριθμο πάνω στα n -qubits.

Όταν σχεδιάζουμε ένα κβαντικό κύκλωμα με το οποίο θέλουμε να επιτύχουμε έναν συγκεκριμένο μετασχηματισμό (αλγόριθμο) κάνοντας χρήση συγκεκριμένων Πυλών θα πρέπει να έχουμε ένα μέτρο της ακρίβειας με την οποία έχουμε επιτύχει τον στόχο μας. Έστω ότι προσεγγίζουμε έναν αυθαίρετο μοναδιαίο μετασχηματισμό U με την βοήθεια του μοναδιαίου μετασχηματισμού V . Ορίζουμε ως σφάλμα στην προσέγγιση μας την ποσότητα

$$E(U, V) \equiv \max_{|\psi\rangle} \|(U - V)|\psi\rangle\|$$

Όταν λέμε ότι ο μετασχηματισμός U μπορεί να υπολογιστεί με απεριόριστη ακρίβεια εννοούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, όσο μικρό και εάν είναι αυτό, μπορούμε να βρούμε V τέτοιο ώστε

$$E(U, V) < \varepsilon$$

Μια χρήσιμη στους υπολογισμούς ιδιότητα του παραπάνω μέτρου είναι η εξής:

$$E(U_n U_{n-1} \dots U_1, V_n V_{n-1} \dots V_1) \leq E(U_n, V_n) + E(U_{n-1}, V_{n-1}) + \dots + E(U_1, V_1)$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό της ακρίβειας, ένα πεπερασμένο σύνολο κβαντικών Πυλών θα καλείται Παγκόσμιο [40,41] όταν μπορούμε να προσεγγίσουμε κάθε μοναδιαίο μετασχηματισμό των n -qubits με απεριόριστη ακρίβεια κατασκευάζοντας ένα κβαντικό κύκλωμα το οποίο να περιέχει μόνο αυτές τις θύρες.

Στην κατασκευή Παγκόσμιων συνόλων κβαντικών Πυλών καίριο ρόλο παίζουν οι επονομαζόμενες Πύλες Entangling (Entangling Gates). Μια κβαντική Πύλη η οποία δρα πάνω σε 2 qubits θα ονομάζεται Entangling όταν μετατρέπει μια αρχική κατάσταση $|\psi\rangle|\phi\rangle$ η οποία είναι γινόμενο δυο Καθαρών καταστάσεων των επιμέρους qubits (product state) σε μια κατάσταση η οποία δεν είναι γινόμενο.

Σαν παράδειγμα entangling Πύλης παρουσιάζουμε την θύρα CNOT η οποία είναι το κβαντικό ανάλογο της XOR.

$$CNOT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Το target qubit t αντιστρέφεται (flips) όταν το qubit ελέγχου c έχει την τιμή 1

Αντιστοιχία μεταξύ CNOT και XOR

[βλ. παράρτημα (κ. πύλες)]

[<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cnot-compared-to-xor.svg>]

Με βάση τον παραπάνω ορισμό ισχύει το εξής: Ένα σύνολο κβαντικών Πυλών το οποίο αποτελείται από μια οποιαδήποτε entangling Πύλη μαζί με όλες τις Πύλες 1-qubit είναι Παγκόσμιο σύνολο.

Στο σημείο αυτό θα βρούμε ένα τέτοιο Παγκόσμιο σύνολο τελεστών. Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που ο χώρος μας αποτελείται από 1 qubit τότε οι δυο περιστροφές

$$G = \{R_l(\beta), R_m(\gamma)\}$$

αποτελούν Παγκόσμιο σύνολο Πυλών στην περίπτωση που οι άξονες ℓ, m δεν είναι παράλληλοι στην σφαίρα του Bloch και

οι γωνίες $\beta, \gamma \in [0, 2\pi)$ είναι τέτοιες πού οι ποσότητες $\frac{\beta}{\pi}$ και

$\frac{\gamma}{\pi}$ να είναι άρρητοι αριθμοί [99]. Η Παγκοσμιότητα των Πυλών

αυτών μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητή εάν σκεφτούμε ότι ένας αυθαίρετος Μοναδιαίος μετασχηματισμός ενός qubit μπορεί να ειπωθεί σαν περιστροφή γύρω από έναν συγκεκριμένο άξονα $\vec{n}$ κατά γωνία ϑ . Εάν δε η γωνία αυτή είναι άρρητο

πολλαπλάσιο του 2π τότε το σύνολο $m \cdot \vartheta \bmod 2\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) θα είναι Πυκνό στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Δύο τέτοιες κβαντικές Πύλες είναι η $\pi/8$ *phase gate* που η αναπαράσταση της σε πίνακα είναι η εξής:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

και η Hadamard H

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Έτσι προσθέτοντας και την CNOT το παρακάτω σύνολο είναι Παγκόσμιο

$$\{CNOT, H, T\}$$

Το γεγονός ότι υπάρχουν Παγκόσμια σύνολα Πυλών, αν και είναι ένα πολύ σημαντικό θεωρητικό συμπέρασμα, για να έχει πρακτική εφαρμογή, θα πρέπει να δούμε και το εάν και κατά πόσον μπορούμε να προσεγγίσουμε έναν μοναδιαίο μετασχηματισμό αποτελεσματικά με έναν εύλογο αριθμό πινάκων. Η με άλλα λόγια εάν αυξάνοντας το βάθος του κβαντικού κυκλώματος που προσεγγίζει τον μοναδιαίο μετασχηματισμό έχουμε σύγκλιση με ικανοποιητικό ρυθμό. Θα θέλαμε ο αριθμός των κβαντικών Πυλών που απαιτείται για την προσέγγιση του U να είναι, στην χειρότερη περίπτωση, πολυώνυμο του αντιστρόφου σφάλματος $\frac{1}{\varepsilon}$ και του αριθμού των qubits n . Πρέπει να σημειωθεί ότι ο ρυθμός σύγκλισης εξαρτάται όχι μόνο από το U αλλά και από την επιλογή του συνόλου των Παγκοσμίων κβαντικών Πυλών. Στην περίπτωση μας

που οι Πύλες είναι οι $\{CNOT\} \cup G$ μπορεί να αποδειχθεί ότι ο αριθμός των Πυλών συγκλίνει ως

$$O\left[m \log^c\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)\right]$$

με m των αριθμό των Πυλών που δρουν σε 1 qubit. Όσον αφορά την εύρεση του κβαντικού κυκλώματος που απαιτείται στην προσέγγιση ενός μοναδιαίου μετασχηματισμού υπάρχει εκτεταμένη βιβλιογραφία. Το πρόβλημα όμως, κυρίως όσον αφορά την βέλτιστη επιλογή, πρέπει να μελετηθεί περισσότερο.

Κβαντική υπολογιστική παραλληλία.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα «μαύρο κουτί» το οποίο είναι σχεδιασμένο να υπολογίζει μια συνάρτηση $f(x)$ ενός bit σε ένα bit ($f:\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$). Υπάρχουν τέσσερις δυνατές τέτοιες συναρτήσεις γιατί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών αποτελείται από μόνο δυο διακριτά στοιχεία. Αυτό που μας ενδιαφέρει να καταλάβουμε είναι ποια από τις τέσσερις αυτές συναρτήσεις περιέχεται μέσα στο μαύρο κουτί. Ως μια μονάδα χρόνου ορίζουμε τον χρόνο που χρειάζεται το μαύρο κουτί να δώσει τιμή στην συνάρτηση από την στιγμή που εμείς εισάγουμε τιμή στο όρισμα της. Εάν το σύστημα μας συμπεριφέρεται κλασικά είναι αυτονόητο ότι θα χρειαστούμε δύο μονάδες χρόνου για να καταλήξουμε σε ασφαλές συμπέρασμα (μια μονάδα χρόνου για το $f(0)$ και άλλη μια για το $f(1)$). Στην πραγματικότητα θα προσπαθήσουμε να δούμε εάν η συνάρτηση είναι σταθερή ($f(0)=f(1)$) ή balanced ($f(0) \neq f(1)$). Το πρόβλημα είναι γνωστό ως το Πρόβλημα του Deutsch (*Deutsch's problem*) [44,45].

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το μαύρο κουτί είναι κβαντικό. Θα πρέπει να αναπαραστήσουμε κάθε ενέργεια του μαύρου κουτιού με ένα μοναδιαίο μετασχηματισμό τον οποίο

συμβολίζουμε ως U . Επειδή ενδέχεται η συνάρτηση $f(x)$ να μην είναι αντιστρέψιμη θα πρέπει να κάνουμε χρήση δυο qubits στο σύστημα μας έτσι ώστε να μπορούμε να αναπαραστήσουμε την συνάρτηση με το U . Έστω λοιπόν ότι ισχύει:

$$U|x\rangle|y\rangle = |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$$

Το U αντιστρέφει το δεύτερο qubit εάν $f(x)=1$ και το αφήνει αναλλοίωτο εάν $f(x)=0$.

Επειδή το «μαύρο κουτί» είναι κβαντικό μπορούμε να επιλέξουμε την κατάσταση εισόδου να είναι υπέρθεση των $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Εάν το δεύτερο qubit περιγράφεται αρχικά από την κατάσταση

$$\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

τότε

$$\begin{aligned} U \left[|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right] &= \\ |x\rangle \frac{|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} &= \\ |x\rangle (-1)^{f(x)} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

έτσι έχουμε απομονώσει την συνάρτηση $f(x)$ στον παράγοντα φάσης. Τώρα ας κάνουμε το ίδιο θεωρώντας ότι το πρώτο qubit βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Στην περίπτωση αυτή η επίδραση του «μαύρου κουτιού» είναι η εξής:

$$U \left[\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-1)^{f(0)} |0\rangle + (-1)^{f(1)} |1\rangle \right] \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle)$$

Στο τέλος της διαδικασίας πραγματοποιούμε μέτρηση η οποία προβάλλει το πρώτο qubit στην βάση

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle)$$

Εάν το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι $|+\rangle$ τότε η $f(x)$ είναι balanced αλλιώς είναι σταθερή. Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι ο κβαντικός υπολογιστής μπορεί να επιλύσει το Πρόβλημα του Deutsch με μία κίνηση (σε μία μονάδα χρόνου) σε αντίθεση με τον κλασικό υπολογιστή ο οποίος θα χρειαζόταν δύο μονάδες χρόνου. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι ο κβαντικός υπολογιστής μπορεί να δεχθεί σαν είσοδο επαλληλία καταστάσεων ενώ ο κλασικός υπολογιστής μια από τις δυο δυνατές καταστάσεις κάθε φορά. Έτσι ο κβαντικός υπολογιστής μπορεί να χειριστεί παράλληλα το σύνολο των ορισμάτων και αυτό είναι που ονομάζουμε κβαντική παραλληλία.

Τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν και στην περίπτωση που η συνάρτηση f ορίζεται να δρα πάνω σε N bits. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση έχει 2^N διαφορετικές εκδοχές για το όρισμα της. Για τον πλήρη υπολογισμό του πίνακα τιμών μιας τέτοιας συνάρτησης ένας κλασικός υπολογιστής θα έπρεπε να υπολογίσει την συνάρτηση f για 2^N φορές η αλλιώς θα χρειαζόμασταν 2^N μονάδες χρόνου. Θεωρώντας όμως ότι έχουμε στην διάθεση μας έναν κβαντικό υπολογιστή θα ήταν δυνατόν να σκεφτούμε μια διαδικασία η οποία θα οριζόταν ως εξής:

$$U|x\rangle|0\rangle = |x\rangle|f(x)\rangle$$

και επιλέγοντας την είσοδο του συστήματος στην μορφή

$$\bigotimes_N \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} \sum_{n=0}^{2^N-1} |x_n\rangle$$

θα έχουμε όλα τα δυνατά ορίσματα πάνω σε μια επαλληλία καταστάσεων. Επιδρώντας τον τελεστή U πάνω σε αυτή την κατάσταση το σύστημα οδηγείται στην επαλληλία:

$$\frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} \sum_{n=0}^{2^N-1} |x_n\rangle |f(x_n)\rangle$$

Στην τελευταία έκφραση όλος ο πίνακας τιμών της συνάρτησης f έχει κωδικοποιηθεί πάνω σε ορθογώνιους μεταξύ τους υπόχωρους. Με μια κατάλληλη διαδικασία μετρήσεων είναι πλέον δυνατόν να πάρουμε όλες τις τιμές της συνάρτησης. Επειδή η τελική κατάσταση προϋποθέτει επενέργεια του τελεστή U μόνο μια φορά πάνω στο σύστημα συμπεραίνουμε ότι ένας ιδανικός κβαντικός υπολογιστής δύναται να υπολογίσει τις τιμές συναρτήσεων πολύ μεγάλης διάστασης. Παρατηρώντας την τελευταία κατάσταση βλέπουμε ότι στην ουσία η κβαντική πληροφορία κωδικοποιείται στις μη τοπικές συσχετίσεις μεταξύ των υποσυστημάτων του κβαντικού Καταχωρητή. Δυστυχώς επειδή τα πραγματικά συστήματα δεν λειτουργούν απομονωμένα από το περιβάλλον τους οι μη τοπικές συσχετίσεις καταστρέφονται με την διαδικασία της Αποσυμφωνίας. Έτσι οι κβαντικές καταστάσεις των Κβαντικών Καταχωρητών καταλήγουν σε Μίγματα κάτι που έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη θορύβου στα αποτελέσματα των υπολογισμών.

Ο αλγόριθμος του Shor.

Ο κβαντικός αλγόριθμος του Shor [46,47,48] εφαρμόζεται στο πρόβλημα της παραγοντοποίησης των ακεραίων. Το πρόβλημα το οποίο καλείται να επιλύσει ο αλγόριθμος αυτός είναι το εξής:

Δεδομένου του μη πρώτου ακεραίου N πρέπει να βρούμε έναν άλλον ακέραιο k μεταξύ του 1 και του N ο οποίος να διαιρεί ακριβώς τον N .

Σε έναν κβαντικό υπολογιστή ο αλγόριθμος αυτός χρειάζεται $O[(\log N)^3]$ μονάδες χρόνου για να εφαρμοστεί σε έναν ακέραιο N ενώ ο αντίστοιχος κλασικός αλγόριθμος χρειάζεται $2^{O[(\log N)^{1/3}]}$ μονάδες χρόνου. Ο κβαντικός αλγόριθμος είναι εκθετικά ταχύτερος από τον κλασικό. Ο επιστήμονας των εργαστηρίων Bell Peter Shor επινόησε τον αλγόριθμο που θα παρουσιάσουμε το 1994. Ο αλγόριθμός αυτός δεν αποτελεί απλώς ένα θεωρητικό κατασκεύασμα αλλά υλοποιήθηκε και πειραματικά το έτος 2001 στα εργαστήρια της IBM σε φασματογράφο πυρηνικού μαγνητικού συντονισμού (nuclear magnetic resonance spectrometer). Στο πείραμα αυτό ο αριθμός 15 παραγοντοποιήθηκε στο γινόμενο 3×5 με την βοήθεια κβαντικού Καταχωρητή αποτελούμενου από 7 qubits. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε από τον Dr. Chuang και τους συνεργάτες του Dr. Lieven M. K. Vandersypen, Matthias Steffen, Gregory Breyta, Dr. Costantino S. Yannoni και Dr. Mark H. Sherwood. Χρησιμοποιήθηκε δε μόριο αποτελούμενο κυρίως από άτομα φθορίου και άνθρακα. Για το πείραμα αυτό ο Dr. Chuang διαπίστωσε ότι:

«We have to move far beyond this, but at least we have demonstrated that it is possible».

Ο αλγόριθμος του Shor συνίσταται ουσιαστικά από δυο μέρη: ένα κλασικό και ένα κβαντικό. Το κλασικό μέρος έγκειται στην εύρεση της περιόδου μιας συνάρτησης και το κβαντικό στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης.

Τα βήματα που πρέπει να εκτελέσει ο κβαντικός αλγόριθμος του Shor είναι τα εξής:

1. Προσδιόρισε εάν ο ακέραιος N είναι πρώτος ή περιττός ή δύναμη πρώτου. Εάν κάποιο από τα προηγούμενα ισχύει τότε δεν υπάρχει λόγος να χρησιμοποιήσουμε κβαντικό αλγόριθμο. Αυτό το βήμα μπορεί να γίνει από κλασικό υπολογιστή.

2. Επίλεξε τυχαία έναν ακέραιο q ο οποίος να είναι δύναμη του 2 και $N^2 \leq q \leq 2N^2$. Αυτό το βήμα μπορεί να γίνει από κλασικό υπολογιστή.
3. Διάλεξε τυχαία έναν αριθμό ο οποίος να είναι co-prime με τον N . Δυο αριθμοί είναι co-prime εάν έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη την μονάδα. Αυτό το βήμα μπορεί να γίνει από κλασικό υπολογιστή.
4. κατασκεύασε έναν κβαντικό Καταχωρητή και διαίρεσε τον σε δυο μέρη. Τον καταχωρητή_1 (reg1) και τον καταχωρητή_2 (reg2). Ο καταχωρητής_1 θα πρέπει να έχει επαρκή αριθμό qubits έτσι ώστε να μπορεί να αποθηκεύσει τον αριθμό $q-1$ και ο καταχωρητής_2 θα πρέπει να έχει επαρκή αριθμό qubits έτσι ώστε να μπορεί να αποθηκεύσει τον αριθμό $N-1$.
5. Αρχικοποίησε τον δεύτερο Καταχωρητή να βρίσκεται στην στάθμη $|0\rangle$. Τον πρώτο Καταχωρητή τον αρχικοποιούμε με όλους τους ακεραίους από το 0 έως το $q-1$. Έτσι η αρχική κατάσταση του συνολικού Καταχωρητή θα είναι η
- 6.

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{c=0}^{q-1} |c, 0\rangle$$

7. Εφάρμοσε τον μετασχηματισμό $x^c \bmod N$ σε κάθε ακέραιο του καταχωρητή_1 και κατέγραψε το αποτέλεσμα στον καταχωρητή_2. Λόγω της κβαντικής παραλληλίας αυτό το βήμα μπορεί να πραγματοποιηθεί με μία μόνο ενέργεια. Για να συμβεί αυτό ο κβαντικός υπολογιστής θα υπολογίσει την ποσότητα $x^{|c\rangle} \bmod N$ όπου $|c\rangle$ η υπέρθεση του βήματος 5. Στο σημείο αυτό η κατάσταση του κβαντικού Καταχωρητή θα περιγράφεται από την έκφραση:
- 8.

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{c=0}^{q-1} |c, x^c \bmod N\rangle$$

9. Εκτέλεσε μέτρηση του καταχωρητή_2. Η μέτρηση θα έχει ως αποτέλεσμα την κατάρρευση της κατάστασης του βήματος 5 στην υπέρθεση:

$$\frac{1}{\sqrt{\|A\|}} \sum_{c' \in A} |c', k\rangle$$

όπου το σύνολο A ορίζεται ως το σύνολο των ακεραίων c που ικανοποιούν την έκφραση $x^c \bmod N = k$ όπου k το αποτέλεσμα της μέτρησης. Το μέτρο $\|A\|$ ορίζεται ως το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A .

10. Υπολόγισε τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier για τον καταχωρητή_1. ο μετασχηματισμός αυτός εάν εφαρμοστεί στην κατάσταση $|c\rangle$ ακολουθεί τον κανόνα:

$$|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{a=1}^{q-1} |a\rangle e^{\frac{2\pi i c a}{q}}$$

Αυτό το βήμα πραγματοποιείται στον κβαντικό υπολογιστή με μια ενέργεια λόγω κβαντικής παραλληλίας. Μετά την επενέργεια του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ο Καταχωρητής θα περιγράφεται από την κατάσταση:

$$\frac{1}{\sqrt{\|A\|}} \sum_{c' \in A} \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{c=0}^{q-1} |c, k\rangle e^{2\pi i c' a / q}$$

11. Πραγματοποίησε μέτρηση του καταχωρητή_1, συμβόλισε το αποτέλεσμα της μέτρησης με m . Ο ακέραιος m έχει μεγάλες πιθανότητες να εμφανιστεί με τιμή πολλαπλάσια του $\frac{q}{r}$ όπου r η περίοδος. Αυτό το βήμα πραγματοποιείται από κβαντικό υπολογιστή.

12. Μετέφερε την τιμή m σε έναν κλασικό υπολογιστή και υπολόγισε την τιμή του r δεδομένου του q .
13. Αφού έχεις προσδιορίσει το r προσπάθησε να βρεις έναν παράγοντα του N υπολογίζοντας τις ποσότητες: $\gcd\left(x^{\frac{r}{2}}+1, N\right)$ και $\gcd\left(x^{\frac{r}{2}}-1, N\right)$. Εάν αποτύχεις επέστρεψε στο βήμα 4. Το βήμα αυτό μπορεί να γίνει σε κλασικό υπολογιστή.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο κβαντικός αλγόριθμος του Shor μπορεί να αποτύχει σε διάφορες περιπτώσεις αλλά δεν θα μπούμε σε μεγαλύτερη ανάλυση εδώ. Σημασία έχει ότι ο αλγόριθμος αυτός με την πειραματική του υλοποίηση μας βεβαιώνει ότι οι κβαντικοί υπολογιστές είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν.

Κβαντικές Εντροπίες.

Οι κβαντικές εντροπίες [49,33] είναι μαθηματικές ποσότητες πολύ χρήσιμες στην στατιστική θεώρηση της κβαντομηχανικής και στην κβαντική θεωρία της πληροφορίας. Χρησιμοποιούν, για παράδειγμα, στον ποσοτικό προσδιορισμό της πληροφορίας που αντλούμε κατά την κβαντική μέτρηση ή στο να χαρακτηρίσουμε τον βαθμό μη αντιστρεψιμότητας (απώλεια πληροφορίας) κατά την εξέλιξη ενός ανοικτού κβαντικού συστήματος. Επίσης είναι χρήσιμες ποσότητες στην θεωρία των κβαντικών τηλεπικοινωνιών και της κρυπτογραφίας γιατί με βάση αυτές θα ορίσουμε την Χωρητικότητα του κβαντικού καναλιού πληροφορίας αλλά και θα μετρήσουμε το σφάλμα στην μετάδοση του κβαντικού σήματος.

Εντροπία του von Neumann.

Η Εντροπία του von Neumann βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στην κβαντική θερμοδυναμική. Είναι επίσης πολύ χρήσιμη σαν έννοια γιατί την χρησιμοποιούμε και στον ορισμό άλλων μέτρων της πληροφορίας. Δεδομένης της κβαντικής κατάστασης

ρ η οποία εν γένει αποτελεί στατιστική Συλλογή (statistical ensemble) ορίζουμε την Εντροπία του von Neumann ως το συναρτησιακό:

$$S(\rho) \equiv -\text{tr}(\rho \ln \rho)$$

Στον παραπάνω ορισμό έχουμε θέσει την σταθερά του Boltzmann k_B να ισούται με την μονάδα. Κάνοντας χρήση της φασματικής αναπαράστασης της κβαντικής κατάστασης έχουμε

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|, \quad p_i \geq 0$$

$$\sum_i p_i = 1$$

συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ότι

$$S(\rho) = -\sum_i p_i \ln p_i \quad (= H(p_1, p_2, \dots))$$

$$0 \cdot \ln 0 \equiv 0$$

Από την παραπάνω έκφραση καταλαβαίνουμε υπό ποια έννοια η Εντροπία του von Neumann ισούται με την Εντροπία του Shannon $H(\{p_i\})$. Η Εντροπία του von Neumann είναι ίση με το μηδέν στην περίπτωση που το σύστημα είναι σε Καθαρή κατάσταση. Το νόημα της Εντροπίας του von Neumann είναι ότι μας μετρά την αβεβαιότητα να βρούμε το σύστημα μας σε μια συγκεκριμένη Καθαρή κβαντική κατάσταση (pure quantum state) όταν το σύστημα περιγράφεται ως Μίγμα.

Η Εντροπία του von Neumann έχει τις ακόλουθες ιδιότητες [33, 49, 50, 51].

1. Εν γένει

$$S(\rho) \geq 0$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο στην περίπτωση της Καθαρής κατάστασης.

2. Εάν ο χώρος Hilbert του συστήματος είναι πεπερασμένος

$$\dim \mathcal{H} = D < \infty$$

τότε ισχύει ότι η Εντροπία του von Neumann φράσσεται ως

$$S(\rho) \leq \ln D$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που η κατάσταση του συστήματος είναι πλήρως Μικτή ή

$$\rho = \frac{I}{D}$$

3. Η Εντροπία του von Neumann παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την επίδραση μοναδιαίων μετασχηματισμών

$$S(U\rho U^+) = S(\rho)$$

4. Η Εντροπία von Neumann είναι Κοίλο (concave) συναρτησιακό στον χώρο των Πινάκων Πυκνότητας.

$$S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i), \quad \lambda_i \geq 0$$

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

Το φυσικό νόημα της παραπάνω ιδιότητας είναι ότι η αβεβαιότητα μας για την κατάσταση $\rho = \sum_i \lambda_i \rho_i$ είναι μεγαλύτερη από την μέση αβεβαιότητα των επιμέρους καταστάσεων.

5. Έστω το σύστημα

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$$

και έστω ότι

$$\rho^{(1)} = \text{tr}_2(\rho)$$

$$\rho^{(2)} = \text{tr}_1(\rho)$$

Όπου με ρ συμβολίζουμε τον Πίνακα Πυκνότητας του συνολικού συστήματος. Τότε θα ισχύει ότι

$$S(\rho) \leq S(\rho^{(1)}) + S(\rho^{(2)})$$

Με την ιδιότητα να ισχύει μόνο στην περίπτωση που η συνολική κατάσταση είναι ασυσχέτιστη (uncorrelated), δηλαδή

$$\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$$

Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής είναι όταν κάνουμε Στατιστική Απαλοιφή (tracing) κάποιο υποσύστημα τότε έχουμε υποβάθμιση της πληροφορίας γιατί η αβεβαιότητα αυξάνεται. Επίσης εάν η κατάσταση του συνολικού συστήματος είναι Καθαρή τότε ισχύει ότι

$$S(\rho^{(1)}) = S(\rho^{(2)})$$

Επίσης [51] (strong subadditivity)

$$S(\rho_{ABC}) + S(\rho_B) \leq S(\rho_{AB}) + S(\rho_{BC})$$

Γραμμική Εντροπία (Linear Entropy) .

Η Γραμμική Εντροπία [52,53] είναι ένα πολύ χρήσιμο μέτρο της Καθαρότητας (Purity) μιας κατάστασης λόγω της απλότητας του ορισμού και του υπολογισμού της. Η γραμμική Εντροπία ορίζεται ως

$$S_l \equiv 1 - \text{tr}(\rho^2)$$

Είναι προφανές ότι ισχύει

$$0 \leq S_l(\rho) \leq 1$$

Η ισότητα με το μηδέν ισχύει μόνο στην περίπτωση Καθαρών (pure) καταστάσεων.

Επίσης ισχύει το φράγμα

$$S_l(\rho) \leq 1 - \frac{1}{D}$$

με

$$\dim \mathcal{H} = D$$

Η μέγιστη τιμή ισχύει στην περίπτωση όπου

$$\rho = I/D$$

Κβαντική Σχετική Εντροπία

Για ένα δεδομένο ζευγάρι από Πίνακες Πυκνότητας ρ και σ η κβαντική Σχετική Εντροπία [54, 55, 33] ορίζεται ως:

$$S(\rho_1 \parallel \rho_2) \equiv \text{tr}(\rho_1 \ln \rho_1) - \text{tr}(\rho_1 \ln \rho_2)$$

Αν ορίσουμε το *Πυρήνα* (Kernel) του Πίνακα Πυκνότητας ως τον ανυσματικό χώρο που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα με ιδιοτιμή ίση με μηδέν και την *Εικόνα* (Image) του Πίνακα Πυκνότητας ως τον ανυσματικό χώρο που παράγεται από τα ανύσματα με μη μηδενική ιδιοτιμή τότε η Σχετική Εντροπία παίρνει την τιμή άπειρο αν ο Πυρήνας του σ τέμνει την Εικόνα του ρ .

Ενδιαφέρον από την πλευρά της φυσικής [55] έχει η παρακάτω έκφραση:

$$S(\rho \parallel \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}) = S(\rho^{(1)}) + S(\rho^{(2)}) - S(\rho)$$

Στην τελευταία παράσταση φαίνεται η σημασία της Σχετικής Εντροπίας ως μέτρο της απώλειας πληροφορίας.

Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο να παρουσιάσουμε μερικές βασικές ιδιότητες [55] της Σχετικής Εντροπίας.

1. Ισχύει η ανισότητα του Klein

$$S(\rho \parallel \sigma) \geq 0$$

για κάθε επιλογή ζευγαριού από Πίνακες Πυκνότητας. Η ισότητα ισχύει στην περίπτωση που οι δυο πίνακες ταυτίζονται.

2. Η Σχετική Εντροπία παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την επίδραση μοναδιαίων μετασχηματισμών U

$$S[(U\rho U^+) \parallel (U\sigma U^+)] = S(\rho \parallel \sigma)$$

3. Η Σχετική Εντροπία είναι Κυρτή συνάρτηση σε σχέση με τα ορίσματα της

$$S(\rho \parallel \sigma) \leq \lambda S(\rho_1 \parallel \sigma_1) + (1-\lambda) S(\rho_2 \parallel \sigma_2)$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι

$$\rho = \lambda \rho_1 + (1-\lambda) \rho_2$$

$$\sigma = \lambda \sigma_1 + (1-\lambda) \sigma_2$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

4. Εάν θέσουμε

$$\rho^{(1)} = \text{tr}^{(2)} \rho$$

$$\sigma^{(1)} = \text{tr}^{(2)} \sigma$$

τότε ισχύει ότι

$$S(\rho^{(1)} \parallel \sigma^{(1)}) \leq S(\rho \parallel \sigma)$$

γεγονός το οποίο δείχνει ότι ο Πίνακας Πυκνότητας ο οποίος προκύπτει από το Μερικό Τχνος ενός άλλου Πίνακα Πυκνότητας εμπεριέχει λιγότερη πληροφορία.

Επίσης εάν ο Πίνακας Πυκνότητας ρ παριστάνει Ασυσχέτιστη κατάσταση ισχύει:

$$\underline{S(\rho^{(1)} \parallel \sigma^{(1)}) = S[(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}) \parallel (\sigma^{(1)} \otimes \rho^{(2)})]}$$

Η Ποσότητα του Holevo (Holevo Quantity)

Η Ποσότητα του Holevo (Holevo Quantity) [56] ή κατά άλλους το Φράγμα του Holevo (Holevo Bound) οδηγεί ιστορικά ίσως στο πρώτο σημαντικό θεωρητικό αποτέλεσμα στην επιστήμη της κβαντικής πληροφορίας. Η ποσότητα αυτή θέτει το ανώτατο δυνατό όριο στην πληροφορία που μπορεί να αντλήσει ο δέκτης ενός κβαντικού μηνύματος σε σχέση με το μήνυμα το οποίο εκπέμπεται από την πηγή. Το όριο ισχύει πάντα ακόμα και εάν υπάρχει η δυνατότητα ανταλλαγής κλασικής πληροφορίας μεταξύ πομπού και δέκτη και επίσης ο δέκτης έχει την δυνατότητα να επιλέξει όποια μετρητική διαδικασία βρίσκει ως βέλτιστη.

Έστω ότι το κανάλι πληροφορίας μετασχηματίζει την εισερχόμενη πληροφορία ως

$$\mathcal{E}: B(\mathcal{M}) \rightarrow B(\mathcal{K})$$

όπου το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της απεικόνισης μπορεί να είναι τα αλφάβητα εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Ο μετασχηματισμός όμως θα μπορούσε να είναι ένας οποιοσδήποτε κβαντικός μετασχηματισμός $(\sum V_j \rho V_j^\dagger)$.

Ορίζουμε την Ποσότητα του Holevo ως

$$I[(p_x, \rho_x), \mathcal{E}] \equiv S[\mathcal{E}(\rho)] - \sum_x p_x S[\mathcal{E}(\rho_x)]$$

$$\text{με } \rho = \sum_x p_x \rho_x \quad .$$

Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να γράψουμε με την βοήθεια της έννοιας της Σχετικής Εντροπίας

$$I[(p_x, \rho_x), \mathcal{E}] = \sum_x p_x S[\mathcal{E}(\rho_x) \| \mathcal{E}(\rho)]$$

Από τις ιδιότητες της Σχετικής Εντροπίας ισχύει

$$I[(p_x, \rho_x), \mathcal{E}] \geq I[(p_x, \rho_x), \mathcal{E}' \circ \mathcal{E}]$$

Έτσι με βάση την τελευταία ανισότητα διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια μονότονη υποβάθμιση της πληροφορίας καθώς το σήμα διατρέχει διαδοχικά κβαντικά κανάλια.

Η Ποσότητα του Holevo είναι σημαντική γιατί λαμβάνει υπόψη της όχι μόνο την κβαντική πληροφορία αλλά και την δυνατότητα ανταλλαγής κλασικής πληροφορίας μεταξύ των δυο άκρων του καναλιού. Αν δούμε το θέμα από την άποψη της θεωρίας ελέγχου (control theory) θα μπορούσαμε να πούμε ότι περιλαμβάνει και την δυνατότητα κλασικού ελέγχου του συστήματος. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ποσότητα κλασικής πληροφορίας φράσσεται από την Ποσότητα του Holevo, δηλαδή

$$I(X \wedge Y) \leq I[(p_x, \rho_x), \mathcal{E}]$$

Για να καταλάβουμε την έννοια της τελευταίας ανισότητας θα πρέπει να συνδέσουμε το κβαντικό κανάλι με την έννοια του κλασικού καναλιού γιατί η αριστερή ποσότητα είναι κλασική. Αυτό γίνεται θεωρώντας ότι το κλασικό κανάλι προκύπτει από τον *πίνακα Markov*

$$T_{yx} = \text{Tr}(\rho_x V_y)$$

όπου τα V_y είναι οι τελεστές στην αναπαράσταση Kraus του κβαντικού καναλιού. Τα X, Y είναι τα κλασικά αλφάβητα εισόδου και εξόδου αντίστοιχα. Το τελευταίο συμπέρασμα είναι πολύ σημαντικό γιατί μας δείχνει την υπεροχή της

κβαντικής πληροφορίας έναντι της κλασικής. Η ανισότητα αυτή εκφράζει το θεώρημα το οποίο είναι γνωστό ως Φράγμα του Holevo (Holevo bound) [56,57].

Εντροπία Ανταλλαγής (Entropy of Exchange)

Ένα ανοιχτό κβαντικό σύστημα ανταλλάσει πληροφορία με το περιβάλλον του. Συνεπώς κατά την εξέλιξη του δεν μεταβάλλει μόνο την Εντροπία του αλλά και την Εντροπία του περιβάλλοντος. Να σημειωθεί εδώ ότι το σύστημα μαζί με το περιβάλλον του αποτελούν ευρύτερο σύστημα απομονωμένο με Εντροπία σταθερή. Το πώς έχει αλλάξει η Εντροπία του περιβάλλοντος κατά το πέρας μιας διαδικασίας το εκφράζει η Εντροπία Ανταλλαγής [58].

Έστω ότι το σύστημα μας, λόγω κάποιας διαδικασίας, μετασχηματίζεται ως

$$\mathcal{E}: B(\mathcal{M}) \rightarrow B(\mathcal{K})$$

$$\mathcal{E}(D) = \sum_i V_i D V_i^* \quad V_i: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{K}$$

Αναπαράσταση Kraus

Εάν η αρχική κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από τον πίνακα Πυκνότητας Πιθανότητας ρ τότε η Εντροπία Ανταλλαγής ορίζεται ως η Εντροπία von Neumann του πίνακα Ω με τα ακόλουθα στοιχεία:

$$\omega_{ij} = \text{Tr}(V_i \rho V_j^*) \quad i, j = 1..N$$

Ο πίνακας αυτός είναι θετικά ορισμένος και το Τυχόν του ισούται με την μονάδα.

Ισχύει ο ορισμός της Εντροπίας Ανταλλαγής:

$$S(\rho, \mathcal{E}) \equiv S(\Omega)$$

$$\omega_{ij} = \text{Tr}(V_i \rho V_j) \quad i, j = 1..N$$

Εντροπία Ανταλλαγής

Η αναπαράσταση με τελεστές Kraus ενός μετασχηματισμού δεν είναι μοναδική. Δεδομένης μιας αναπαράστασης μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άλλη ισοδύναμη αυτής με τον μετασχηματισμό

$$V_i = \sum_j c_{ij} W_j$$

αρκεί οι συντελεστές c_{ij} να είναι στοιχεία μοναδιαίου πίνακα. Όμως και οι πίνακες Ω, Ξ με στοιχεία

$$\omega_{ij} = \text{Tr}(V_i \rho V_j) \quad \xi_{ij} = \text{Tr}(W_i \rho W_j) \quad i, j = 1..N$$

συνδέονται με μοναδιαίο μετασχηματισμό. Έτσι έχουν την ίδια Εντροπία von Neumann. Συνεπώς, όπως είναι λογικό, η Εντροπία Ανταλλαγής παραμένει αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς ισοδυναμίας των αναπαράστασεων Kraus.

Για να καταλάβουμε τη Εντροπία Ανταλλαγής σαν την Εντροπία του περιβάλλοντος θα πρέπει να σκεφτούμε τον μετασχηματισμό μας ως

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_e[U(\rho_e \otimes \rho)U^*]$$

δηλαδή να δεχτούμε ότι το *υπερσύστημα* (σύστημα και περιβάλλον) είναι αρχικά ασύζευκτο και εξελίσσεται με μοναδιαίο τρόπο. Έστω επίσης ότι τόσο το σύστημα όσο και το περιβάλλον βρίσκονται αρχικά σε Καθαρές (pure) καταστάσεις. Μετά την διαδικασία το σύστημα μας θα βρίσκεται στην κατάσταση $\mathcal{E}(\rho)$ ενώ το περιβάλλον στην κατάσταση Ω , $\omega_{ij} = \text{Tr}(V_i \rho V_j)$.

Άλλες κβαντικές εντροπίες

Σε κάποιες περιπτώσεις είναι χρήσιμο να κάνουμε χρήση τροποποιημένων μέτρων της κβαντικής πληροφορίας.

Οι ακόλουθες εντροπίες [49, 59] είναι το κβαντικό ανάλογο των εντροπιών κατά Renyi:

$$S^a(\rho) \equiv \frac{1}{2^{(1-a)} - 1} [tr(\rho^a) - 1]$$

$$S_a(\rho) \equiv \frac{1}{1-a} \log[tr(\rho^a)]$$

$$S_a(\rho_1 \parallel \rho_2) \equiv \frac{1}{a(1-a)} tr[(I - \rho_2^a \rho_1^{-a}) \rho_1]$$

Ισχύει

$$S_a(\rho_1 \parallel \rho_2) \geq S_a[\mathcal{E}(\rho_1) \parallel \mathcal{E}(\rho_2)]$$

Υπάρχουν επίσης οι ψευδοεντροπίες. Μια μεγάλη κλάση από ψευδοεντροπίες προκύπτει με την βοήθεια της παράστασης

$$S_f^K(\rho_1 \parallel \rho_2) = \left\langle K \rho_1^{1/2}, f \left[\Delta \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) K \rho_1^{1/2} \right] \right\rangle$$

Όπου το K είναι ένας σταθερός πίνακας το $\Delta(\rho_2/\rho_1)$ είναι το relative modular operator και $f(x)$ μια μονότονη συνάρτηση. Το σύμβολο το μέσου στον ορισμό της κλάσης μπορεί να ειδωθεί ως η πράξη του Ιχνους (trace). Η συγκεκριμένη κλάση ψευδοεντροπιών υπακούει στην ανισότητα

$$S_f^{\mathcal{E}^*(K)}(\rho_1 \parallel \rho_2) \leq S_f^K(\mathcal{E}(\rho_1) \parallel \mathcal{E}(\rho_2))$$

Απόσταση μεταξύ δύο κβαντικών καταστάσεων – Πιστότης (Fidelity).

Το ερώτημα του πόσο απέχουν δυο κβαντικές καταστάσεις δεν έχει γενικά μια μονοσήμαντη απάντηση [61,33]. Στην περίπτωση των Καθαρών καταστάσεων για μεγάλο διάστημα ως απόσταση μεταξύ δυο καταστάσεων θεωρούσαμε την *πιθανότητα μετάβασης* (*transition probability*). Η ποσότητα αυτή, για δύο καταστάσεις $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$ ορίζεται ως η τιμή του $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$. Το μέτρο αυτό ορίζεται με αυθαίρεσία φάσης και η τιμή το κυμαίνεται μεταξύ το 0 και του 1. Όταν η τιμή είναι 1 τότε οι δυο καταστάσεις ταυτίζονται (με αυθαίρεσία φάσης).

Περισσότερο σύγχρονη είναι η ιδέα της Κβαντικής Πιστότητας η οποία μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που οι καταστάσεις είναι Μικτές. Εάν θεωρήσουμε στην γενική περίπτωση ότι οι δυο καταστάσεις παριστάνονται με τους πίνακες Πυκνότητας Πιθανότητας ρ_1, ρ_2 τότε η Πιστότης [60] ορίζεται ως:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}}$$

Η Πιστότης παίρνει τιμές μεταξύ το 0 και του 1.

Ενδιαφέρον έχει και ο ορισμός της Κβαντικής Πιστότητας από τον Uhlmann. Ο Uhlmann ορίζει την Πιστότητα μεταβολικά ως

$$F(\rho_1, \rho_2) = \inf \left\{ \sqrt{\text{Tr}(\rho_1 G) \text{Tr}(\rho_2 G^{-1})} : 0 \leq G \leq \text{Αντιστρωσιμότητα} \right\}$$

Η παραπάνω έκφραση έχει συγκεκριμένη ποιοτική έννοια στην θεωρία των χώρων Hilbert.

Θεωρώντας την περίπτωση όπου οι δυο καταστάσεις είναι Καθαρές βλέπουμε ότι η Πιστότης είναι η τετραγωνική ρίζα της πιθανότητας μετάβασης.

Το κλασικό ανάλογο της Πιστότητας είναι η ποσότητα

$$F(p, q) = \sum_i \sqrt{p_i q_i}$$

και ισχύει στην περίπτωση που αναφερόμαστε στις κλασικές κατανομές $p = (p_1 \dots p_n)$ και $q = (q_1 \dots q_n)$. Η κλασική Πιστότης είναι το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων που έχουν συνιστώσες τις ρίζες των πιθανοτήτων των κατανομών $(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$ και $(\sqrt{q_1}, \dots, \sqrt{q_n})$.

Όταν οι καταστάσεις μετασχηματίζονται με θετικά ορισμένο τρόπο τότε ισχύει η βασική ανισότητα

$$F[\mathcal{E}(\rho_1), \mathcal{E}(\rho_2)] \geq F(\rho_1, \rho_2)$$

Επίσης ισχύουν τα όρια

$$1 - F(\rho_1, \rho_2) \leq \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho_1 - \rho_2| \leq \sqrt{1 - F(\rho_1, \rho_2)}$$

Στην τελευταία ανισότητα ο μεσαίος όρος είναι η *Νόρμα του Τχνους* (*Trace Norm*) η οποία για δύο πίνακες A, B ορίζεται εδώ ως

$$D(A, B) = \frac{1}{2} \|A - B\|_{tr}$$

Εάν τουλάχιστον μια εκ των δύο καταστάσεων είναι Καθαρή ισχύει

$$1 - F(\psi, \rho)^2 \leq D(\psi, \rho)$$

Να σημειωθεί ότι η πιστότης παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την επίδραση μοναδιαίων μετασχηματισμών. Δηλαδή εάν τα σ, ρ αναπαριστούν καταστάσεις τότε

$$F(\rho, \sigma) = F(U\rho U^*, U\sigma U^*)$$

Όταν οι καταστάσεις είναι Καθαρές τότε

$$F(\rho, \sigma) = \text{tr}(\rho\sigma\rho)^{1/2} = \text{tr}(|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|)^{1/2} = |\langle\phi|\psi\rangle|$$

Ενδιαφέρουσα είναι και η περίπτωση που οι δυο καταστάσεις μετατίθενται δηλαδή διαγωνιοποιούνται στην ίδια βάση. Θα υπάρξει ορθοκανονική βάση τέτοια ώστε

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \quad \text{και} \quad \sigma = \sum_i q_i |i\rangle\langle i|$$

έτσι η κβαντική Πιστότης θα συμπίπτει με το κλασικό ανάλογο της και έχουμε

$$F(\rho, \sigma) = \sum_i \sqrt{p_i q_i}$$

Επειδή η Πιστότης παίρνει την τιμή 1 όταν οι δυο καταστάσεις είναι οι ίδιες είναι λογικότερο να ορίσουμε την μετρική με βάση την ποσότητα

$$\tilde{E}(\rho, \sigma) \equiv 1 - F(\rho, \sigma)$$

Κάποιες άλλες φορές γίνεται χρήση του ορισμού του σφάλματος ως προς το ρ και το σ

$$E(\rho, \sigma) \equiv 1 - F(\rho, \sigma)^2$$

Για την συνάρτηση σφάλματος ισχύουν τα ακόλουθα:

$$E(\rho, \sigma) = 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \rho = \sigma$$

$$\text{Συμμετρία.} \quad E(\rho, \sigma) = E(\sigma, \rho)$$

$$E[\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)] \leq E(\rho, \sigma)$$

Η Πιστότης μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε την γενικευμένη γωνία μεταξύ δυο καταστάσεων ως

$$A(\rho, \sigma) \equiv \text{Arc cos } F(\rho, \sigma)$$

Όσον αφορά την γενικευμένη γωνία ισχύουν επίσης τα

$$A(\rho, \sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho = \sigma$$

$$\text{Συμμετρία. } A(\rho, \sigma) = A(\sigma, \rho)$$

$$A[\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)] \leq A(\rho, \sigma)$$

καθώς και η τριγωνική ανισότητα

$$A(\rho, \sigma) \leq A(\rho, g) + A(g, \sigma)$$

Συνεπώς η γενικευμένη γωνία ορίζει μετρική.

Η Πιστότης είναι πολύ χρήσιμη ποσότητα στην θεωρητική μελέτη του κβαντικού χάους γιατί μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε ρυθμούς απόκλισης μεταξύ γειτονικών καταστάσεων κάτι που είναι ανάλογο (με αρκετή αυθαιρεσία) με αυτό που συμβαίνει με την προσέγγιση του κλασικού χάους με βάση την έννοια του εκθέτη Lyapunov.

Χωρητικότητα κβαντικού καναλιού.

Όπως και στην περίπτωση των κλασικών καναλιών πληροφορίας έτσι και στην περίπτωση των κβαντικών καναλιών είναι χρήσιμο να ορίσουμε ένα μέτρο της Χωρητικότητας [62, 63, 64, 65] του καναλιού. Η Χωρητικότητα του κβαντικού καναλιού θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη του μηνύματος που θέλουμε κάθε φορά να μεταδώσουμε. Το μήνυμα συχνά αναφέρεται και σαν *Κβαντικός Κώδικας* (quantum code) και δεν είναι παρά μια πεπερασμένη στατιστική κατανομή p_x από μήτρες Πυκνότητας Πιθανότητας ρ_x .

$$(p_x, \rho_x)$$

κβαντικός κώδικας

Ο Κβαντικός Κώδικας ($\rho = \sum p_x \rho_x$) εισάγεται στην είσοδο του κβαντικού καναλιού και οδηγείται μέσω ενός κβαντικού μετασχηματισμού $\mathcal{E}(\rho) = \sum V_j \rho V_j^\dagger$ στην έξοδο όπου συνήθως ακολουθεί η διαδικασία της κβαντικής μέτρησης έτσι ώστε να μπορέσει ο παραλήπτης του μηνύματος να ανασυνθέσει το αρχικό μήνυμα. Η απόδοση του μηνύματος σε συνδυασμό με τις δυνατότητες του κβαντικού καναλιού μπορεί να μετρηθεί με την Αμοιβαία Πληροφορία Shannon μεταξύ του σήματος εισόδου και εξόδου

$$\chi(p_x, \rho_x; \mathcal{E}) = \sum_x p_x S(\mathcal{E}(\rho_x) \| \mathcal{E}(\rho)) = S(\mathcal{E}(\rho)) - \sum_x p_x S(\mathcal{E}(\rho_x))$$

Θα πρέπει όμως να μετρήσουμε την απόδοση μόνο του καναλιού έτσι παίρνουμε το μέγιστο της τελευταίας παράστασης πάνω σε όλους τους Κβαντικούς Κώδικες. Έτσι έχουμε τον ακόλουθο μεταβολικό ορισμό της Χωρητικότητας ενός Κβαντικού Καναλιού

$$C_{Ho}(\mathcal{E}) \equiv \sup \{ \chi(p_x, \rho_x; \mathcal{E}) : \rho_x \text{ και } p_x \text{ είναι κβαντικός κώδικας} \}$$

Η Χωρητικότητα αυτή ονομάζεται Holevo Capacity γιατί προκύπτει ουσιαστικά από το μέγιστο της Ποσότητας του Holevo πάνω σε όλους τους δυνατούς Κβαντικούς Κώδικες.

Μη τοπική κβαντική συσχέτιση-Entanglement

Το Entanglement [68, 33] είναι ένα είδος συσχέτισης μεταξύ δυο ή περισσότερων φυσικών συστημάτων το οποίο δεν έχει κανένα κλασικό ανάλογο [67]. Λόγω του γεγονότος αυτού δεν είναι καθόλου εύκολο να διατυπωθεί κάποιος σαφής ποιοτικός ορισμός της έννοιας του Entanglement. Στην κλασική φυσική δυο συστήματα μπορούν βέβαια να συσχετίζονται έτσι ώστε μεταβολές του ενός συστήματος να επηρεάζουν το άλλο. Τα δυο αυτά συστήματα λέμε ότι αλληλεπιδρούν και εννοούμε ουσιαστικά ότι μπορούν να ανταλλάξουν ενέργεια μέσω κάποιας γνωστής δύναμης. Ανταλλαγή ενέργειας ή αλληλοεπίδραση με κάποια δύναμη

μεταξύ δυο συστημάτων συνεπάγεται και ανταλλαγή πληροφορίας. Όμως στην κλασική φυσική ισχύει και το αντίστροφο: η ανταλλαγή πληροφορίας προϋποθέτει και ανταλλαγή ενέργειας. Ακριβώς εδώ είναι η ειδοποιός διαφορά μεταξύ του Entanglement και των κλασικών συσχετίσεων. Δυο κβαντικά συστήματα μπορούν να συσχετίζονται χωρίς να αλληλεπιδρούν με κάποια δύναμη και χωρίς να ανταλλάσσουν ενέργεια. Για παράδειγμα δυο ηλεκτρόνια τα οποία αλληλεπιδρούν σε κάποια χρονική στιγμή μπορούν να βρεθούν σε μια κατάσταση Entangled και να συνεχίσουν να είναι Entangled και για το χρονικό διάστημα που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το Entanglement είναι μια ακραία έκφραση της κβαντομηχανικής ως θεωρίας που περιλαμβάνει μη τοπικότητες. Το Entanglement επιβεβαιώνεται και πειραματικά [66,69,70]. Όταν τα μέρη ενός συστήματος είναι Entangled τότε η συνολική κατάσταση του συστήματος περιέχει περισσότερη πληροφορία από ότι το «άθροισμα» της πληροφορίας που περιέχεται στα επιμέρους συστήματα.

"Best possible knowledge of a whole does not include best possible knowledge of its parts."

(Schrödinger)

Ο μαθηματικός φορμαλισμός της κβαντομηχανικής μας δίνει την δυνατότητα να περιγράψουμε Entangled καταστάσεις τόσο σε επίπεδο κυματοσυνάρτησης όσο και σε επίπεδο Μήτρας Πυκνότητας Πιθανότητας.

Για να έχει έννοια το Entanglement σε ένα κβαντικό σύστημα θα πρέπει αυτό να μπορεί να διαιρεθεί σε δυο τουλάχιστον μέρη. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα σύστημα αποτελούμενο από δυο μέρη (Διμερές). Έστω ότι οι συνιστώσες του συστήματος είναι η A και η B . Ο χώρος Hilbert του συνολικού συστήματος $A+B$ θα είναι ο $H_{AB} = H_A \otimes H_B$. Εάν αναφερόμαστε σε Καθαρές καταστάσεις τότε κάθε κατάσταση του συνολικού συστήματος θα μπορεί να γραφεί ως

$$\Psi = \sum_{ij} c_{ij} a_i \otimes b_j$$

με τα $\{a_i\}, \{b_j\}$ ορθοκανονικές βάσεις για τους χώρους H_A, H_B αντίστοιχα.

Αποδεικνύεται ότι κάθε μοναδιαίο άνυσμα του χώρου H_{AB} μπορεί να αναπαρασταθεί ως [71, 33, 4]

$$\Psi = \sum_k \sqrt{p_k} g_k \otimes h_k$$

Παραγοντοποίηση κατά Schmidt

με την κατάλληλη επιλογή των ανυσμάτων βάσης g_k και h_k . Επίσης οι συντελεστές p_k θα πρέπει να προέρχονται από κατανομή πιθανότητας. Ο αριθμός των μη μηδενικών συντελεστών $\sqrt{p_k}$ (*Schmidt coefficients*), στο τελευταίο ανάπτυγμα, ονομάζεται *τάξη κατά Schmidt* (*Schmidt rank*) της κατάστασης Ψ . Για να είναι η κατάσταση Entangled θα πρέπει απαραίτητα τάξη κατά Schmidt να είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Επίσης εάν $\{A_i\}$ και $\{B_i\}$ οι άλγεβρες των τελεστών επί των χώρων H_A, H_B αντίστοιχα, θα μπορούμε να κατασκευάζουμε τους τελεστές του σύνθετου χώρου $H_{AB} = H_A \otimes H_B$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του συνόλου

$$\{A_i \otimes B_j\}$$

Καταστάσεις οι οποίες είναι της μορφής

$$\Psi = \psi_A \otimes \psi_B$$

ονομάζονται Διαχωρίσιμες (separable). Οι καταστάσεις αυτές δεν είναι Entangled. Παρατηρούμε ότι εάν ορίσουμε ως $g_0 = \psi_A$ και $h_0 = \psi_B$ στην έκφραση της παραγοντοποίησης κατά Schmidt προκύπτει ότι η τάξη Schmidt της κατάστασης ισούται με την μονάδα. Διαχωρίσιμες μπορεί να είναι και καταστάσεις οι οποίες δεν είναι απαραίτητα Καθαρές. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να ισχύει για τις μήτρες Πυκνότητας Πιθανότητας

$$\rho = \rho_A \otimes \rho_B$$

Για να καταλάβουμε ότι οι Διαχωρίσιμες καταστάσεις είναι unentangled αρκεί να σκεφτούμε ότι εάν κάνουμε Στατιστική Απαλοιφή (trace off) το ένα από τα δύο υποσυστήματα τότε το άλλο διατηρεί την κατάσταση του αναλλοίωτη. Δηλαδή

$$Tr_A(\rho) = Tr_A(\rho_A \otimes \rho_B) = \rho_B$$

$$Tr_B(\rho) = Tr_B(\rho_A \otimes \rho_B) = \rho_A$$

Εάν το ρ αναπαριστά Καθαρή κατάσταση ($|\Psi\rangle\langle\Psi|$) τότε για να είναι κατάσταση γινομένου (product state) θα πρέπει απαραίτητα και οι τοπικές καταστάσεις των υποσυστημάτων ($Tr_A(\rho)$ και $Tr_B(\rho)$) να είναι επίσης Καθαρές καταστάσεις.

Στην περίπτωση των μικτών καταστάσεων ισχύει η παραγοντοποίηση Schmidt υπό την μορφή

$$\rho_{AB} = \sum_i^L \lambda_i G_i^A \otimes G_i^B$$

$$L = \max\left(\dim(\mathcal{H}_A)^2, \dim(\mathcal{H}_B)^2\right)$$

Δεν είναι πάντοτε απαραίτητο να κάνουμε την παραγοντοποίηση κατά Schmidt έτσι ώστε να διαπιστώσουμε εάν μια κατάσταση είναι Entangled. Για τον σκοπό αυτό έχουν διατυπωθεί διάφορα κριτήρια. Θα παρουσιάσουμε δύο από αυτά: το κριτήριο της Μερικής Αναστροφής και το Majorization.

Μερική Αναστροφή.

Έστω ότι η κατάσταση που θέλουμε να δούμε εάν είναι Entangled είναι η

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j=1}^{N_A} \sum_{\mu,\nu=1}^{N_B} a_{ij}^{\mu\nu} (|i\rangle\langle j|)_A \otimes (|\mu\rangle\langle\nu|)_B$$

$$\{|i\rangle\} \quad i=1,2,\dots,N_A; N_A \leq \dim(\mathcal{H}_A)$$

$$\{|\mu\rangle\} \quad \mu=1,2,\dots,N_B; N_B \leq \dim(\mathcal{H}_B)$$

Ο Μερικά Ανάστροφος (Partial Transpose) [33, 72] του πίνακα ρ_{AB} ως προς το σύστημα A ορίζεται ως

$$\rho_{AB}^{T_A} = \sum_{i,j=1}^{N_A} \sum_{\mu,\nu=1}^{N_B} a_{ij}^{\mu\nu} (|j\rangle\langle i|)_A \otimes (|\mu\rangle\langle\nu|)_B$$

Αν και ο Μερικά Ανάστροφος εξαρτάται από την επιλογή της βάσης στην οποία γίνεται η αναπαράσταση, οι ιδιοτιμές του διατηρούνται πάντα οι ίδιες. Οι καταστάσεις διακρίνονται σε αυτές με θετική και σε αυτές με μη θετική Μερική Αναστροφή (Partial Transposition). Όταν λέμε ότι η κατάσταση έχει θετική Μερική Αναστροφή εννοούμε ότι ο

πίνακας $\rho_{AB}^{T_A}$ είναι θετικά ορισμένος δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές. Όταν το $\rho_{AB}^{T_A}$ έχει έστω μια αρνητική ιδιοτιμή τότε λέμε ότι η κατάσταση έχει μη θετική Μερική Αναστροφή.

Η Μερική Αναστροφή έχει σημασία [72,73,74,75] γιατί ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Εάν η κατάσταση ρ_{AB} είναι Διαχωρίσιμη (Separable)

τότε

$$\rho_{AB}^{T_A} \geq 0 \text{ και } \rho_{AB}^{T_B} = (\rho_{AB}^{T_A})^T \geq 0$$

Το κριτήριο αυτό θέτει μια αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη για να είναι μια κατάσταση Διαχωρίσιμη. Πρακτικά χρησιμοποιούμε την άρνηση του συγκεκριμένου θεωρήματος έτσι ώστε να διαπιστώσουμε εάν μια κατάσταση είναι Entangled. Δηλαδή αν υπολογίσουμε έστω και μια αρνητική ιδιοτιμή του Μερικώς Ανάστροφου τότε ξέρουμε ότι η κατάσταση είναι Entangled. Έτσι όλη η κλάση των καταστάσεων με μη θετικό Μερικό Ανάστροφο είναι Entangled. Για να δούμε όμως τι γίνεται με τις καταστάσεις με θετική Μερική Αναστροφή θα πρέπει να βρούμε ένα άλλο κριτήριο.

Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου οι χώροι Hilbert είναι

$$C^2 \otimes C^2 \text{ ή } C^2 \otimes C^3 \text{ τότε η κατάσταση } \rho_{AB} \text{ είναι Διαχωρίσιμη}$$

$$\text{αν και μόνο αν } \rho_{AB}^{T_A} \geq 0.$$

Το τελευταίο θεώρημα περιγράφει ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε να είναι μια κατάσταση Entangled.

Majorization.

Ένα δεύτερο κριτήριο εντοπισμού των Entangled καταστάσεων είναι το Majorization [76,77]. Το κριτήριο αυτό δεν είναι ισχυρότερο του κριτηρίου που προκύπτει από το Μερικό Ανάστροφο αλλά οδηγεί σε κάποια ενδιαφέροντα «θερμοδυναμικά» συμπεράσματα. Μάλιστα μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν μια Entangled κατάσταση δεν μπορεί να εντοπιστεί από το κριτήριο της Μερικής Αναστροφής τότε δεν μπορεί να εντοπιστεί και από το Majorization.

Θα ξεκινήσουμε να ορίσουμε την έννοια του Majorization στην περίπτωση των κλασικών κατανομών πιθανότητας. Έστω ότι έχουμε τις ακόλουθες δυο κατανομές πιθανοτήτων

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \text{ και } y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$$

με τις τιμές τους διατεταγμένες σε φθίνουσα διάταξη, τότε εάν ισχύουν οι ανισότητες

$$\sum_{i=1}^l x_i \leq \sum_{i=1}^l y_i$$

με

$$l = 1, 2, \dots, d-1$$

τότε θα λέμε ότι η κατανομή x Majorized από την κατανομή y και θα συμβολίζουμε το καθεστώς αυτό ως

$$x \prec y$$

Η ισότητα στον παραπάνω ορισμό ισχύει προφανώς όταν $l = d$.

Ισχύει επίσης η εξής ενδιαφέρουσα ισοδυναμία η οποία χρησιμοποιείται κάποιες φορές και για τον ορισμό του Majorization.

Ισχύει $x \prec y$ εάν και μόνο αν $y = Dx$ με τον πίνακα D να είναι Διπλά Στοχαστικός (*doubly stochastic*). Διπλά Στοχαστικό λέμε έναν πίνακα $D = (D_{ij})$ εάν $D_{ij} \geq 0$ και $\sum_i D_{ij} = \sum_j D_{ij} = 1$.

Εάν μια κατανομή y Majorizes μια κατανομή x ($x \prec y$) τότε ποιοτικά αυτό σημαίνει ότι η κατανομή x περιέχει μεγαλύτερη αταξία από ότι η κατανομή y . Με την έννοια αυτή η κατανομή x είναι περισσότερο «μικτή».

Δεδομένου του ορισμού του Majorization μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα:

Εάν η κατάσταση ρ_{AB} είναι Διαχωρίσιμη τότε

$$\lambda(\rho_{AB}) \prec \lambda(\rho_A) \text{ και } \lambda(\rho_{AB}) \prec \lambda(\rho_B)$$

όπου με $\lambda(\rho_{AB}), \lambda(\rho_A), \lambda(\rho_B)$ συμβολίζουμε τα σύνολα των ιδιοτιμών των αντιστοίχων πινάκων. Τα σύνολα είναι διατεταγμένα σε φθίνουσα διάταξη.

Με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα.

Εάν η κατάσταση ρ_{AB} είναι Διαχωρίσιμη τότε

$$S(\rho_{AB}) \geq S(\rho_A) \text{ και } S(\rho_{AB}) \geq S(\rho_B)$$

όπου με S συμβολίζουμε την Εντροπία von Neumann.

Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντιδιαστολή με το αντίστοιχο κλασικό όπου εάν $x \prec y$ τότε $H(\{x_i\}) \geq H(\{y_i\})$. Εδώ με H παριστάνουμε την Εντροπία του Shannon. Βλέπουμε

λοιπόν ότι σε αντίθεση με την κλασική μηχανική, στην κβαντομηχανική η συνολική (global) κατάσταση μπορεί να περιέχει μεγαλύτερη αταξία από ότι η τοπική (local) κατάσταση.

Μέτρα του Entanglement.

Στην βιβλιογραφία γίνεται προσπάθεια έτσι ώστε να συστηματοποιηθεί ο τρόπος με τον οποίο θα υπολογίζουμε το πόσο Entangled είναι μια κβαντική κατάσταση [33,80]. Ο καθορισμός της έννοιας του «πόσου» του Entanglement που περιέχεται σε μια κατάσταση δεν είναι τετριμμένος, μάλιστα η δυσκολία του να κατασκευάσουμε ένα αποδεκτό μέτρο για το Entanglement μεγαλώνει όταν αναφερόμαστε σε Μικτές καταστάσεις. Υπάρχουν πολλές οπτικές γωνίες υπό τις οποίες μπορεί κανείς να προσεγγίσει το ζήτημα του Entanglement [33,78,79,80] και αυτό κάνει το μονοσήμαντο ορισμό του μέτρου προβληματικό. Στην πραγματικότητα, μέχρι σήμερα, από μια μεγάλη σειρά μέτρων του Entanglement διαλέγουμε κάθε φορά το βολικότερο.

Δύο γενικά αποδεκτά μέτρα του Entanglement, δύσκολα όμως στην εφαρμογή, είναι το *Entanglement Cost* και το *Distillable Entanglement*.

Το Entanglement Cost ορίζεται ασυμπτωτικά και μεταβολικά. Ο υπολογισμός του στην γενική περίπτωση είναι δύσκολος. Η έννοια του Entanglement Cost μιας κβαντικής κατάστασης είναι πόσο γρήγορα και πόσο κοντά μπορεί να φτάσει στην κατάσταση αυτή μια κατάσταση μέγιστου Entanglement με την βοήθεια τοπικών μετασχηματισμών ή κλασικών διεργασιών (LOCC). Εάν με T συμβολίσουμε τον μετασχηματισμό και με $\Phi(d)$ μια πλήρως Entangled κατάσταση διάστασης d τότε το Entanglement Cost ορίζεται ως

$$E_C(\rho) \equiv \inf \left\{ r : \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\inf_T D\left(\rho^{\otimes n}, T(\Phi(2^m))\right) \right] = 0 \right\}$$

Entanglement Cost

Με $D(x, y)$ παριστάνουμε ένα μέτρο της απόστασης μεταξύ δυο κβαντικών καταστάσεων. Συνήθως χρησιμοποιείται η Νόρμα του Τχνους.

Ανάλογο μέτρο είναι το Distillable Entanglement που ορίζεται ως

$$D(\rho) \equiv \sup \left\{ r : \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_T \text{tr} \left| T(\rho^{\otimes n}) - \Phi(2^r) \right| \right] = 0 \right\}$$

Distillable Entanglement

Το Distillable Entanglement ορίζεται αντίστροφα δηλαδή ο μετασχηματισμός επιδρά αυτή την φορά στην κατάσταση ρ .

Η ακριβής ποιοτική περιγραφή του Entanglement Cost και του Distillable Entanglement δεν είναι εύκολη. Ο ορισμός των δυο μέτρων γίνεται ασυμπτωτικά με την έννοια ότι στο όριο μετέχουν όλο και περισσότερα αντίγραφα της κατάστασης ρ και αυτά μετασχηματίζονται σε μια προσπάθεια να «κυνηγήσουν» μια κατάσταση πλήρους Entanglement η οποία υπάρχει μέσα σε ένα χώρο που η διάσταση του συνεχώς αυξάνεται. Εάν από μια διάσταση και μετά το Entanglement ξεφεύγει πλέον της «καταδίωξης» τότε χρησιμοποιούμε την διάσταση αυτή ως μέτρο του Entanglement. Ελπίζω ο αναγνώστης να κατανοεί ότι η τελευταία προσπάθεια ποιοτικής περιγραφής των παραπάνω μέτρων γίνεται με τεράστια αυθαιρεσία στην έκφραση.

Για να μπορέσουμε να έχουμε μια κοινή προοπτική στο θέμα της ποσοτικοποίησης του Entanglement παραδεχόμαστε αξιωματικά κάποιες γενικές αρχές που θα πρέπει να ικανοποιούν όλα τα μέτρα του Entanglement. Η αλήθεια είναι ότι τις αρχές που θα παρουσιάσουμε ακολούθως, κάποια από τα μέτρα του Entanglement, δεν τις πληρούν όλες. Ικανοποιούν όμως τις περισσότερες.

Κάποιες βασικές αρχές [78] που πρέπει να πληροί μια ποσότητα η οποία είναι μέτρο του Entanglement ($E(\rho)$) είναι οι ακόλουθες:

1. Εάν το σύστημα μας αποτελείται από δυο υποσυστήματα δηλαδή είναι Διμερές τότε μια ποσότητα $E(\rho)$ που είναι μέτρο του Entanglement της ρ είναι μια απεικόνιση

$$\rho \rightarrow E(\rho) \in R^+$$

η οποία πρέπει να ορίζεται για κάθε δυνατή κατάσταση ρ του Διμερούς συστήματος. Όταν αναφερόμαστε σε δυο qubits γίνεται συχνά η κανονικοποίηση $E(|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|)=1$ με $|\Psi^-\rangle$ να είναι Απλή Κατάσταση (singled state).

2. Εάν η κατάσταση ρ είναι Διαχωρίσιμη θα πρέπει $E(\rho)=0$.

3. Το $E(\rho)$ ποτέ δεν πρέπει να μεγαλώνει όταν η κατάσταση ρ μετασχηματιστεί τοπικά ή αν σε αυτή δράσει ένας κλασικός μετασχηματισμός (LOCC).

4. Εάν η κατάσταση του συστήματος είναι Καθαρή, δηλαδή $\rho=|\psi\rangle\langle\psi|$, θα πρέπει να ισχύει $E(|\psi\rangle\langle\psi|)=S(\text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|))$ όπου με S συμβολίζουμε την Εντροπία von Neumann.

Ένα μέτρο το οποίο πληροί και τις τρεις πρώτες αρχές ονομάζεται *Μονότονο του Entanglement* (Entanglement Monotone). Ως *Μέτρο του Entanglement* (Entanglement Measure) συνήθως ονομάζουμε κάποια συνάρτηση της κατάστασης ρ του συστήματος η οποία ικανοποιεί και τις τέσσερις παραπάνω αρχές. Κάποιοι συγγραφείς προσθέτουν στα παραπάνω αξιώματα και την αξίωση η συνάρτηση $E(\rho)$ να είναι Κυρτή, δηλαδή να ισχύει $E(\sum p_i E(\rho_i)) \leq \sum p_i E(\rho_i)$. Η ιδιότητα αυτή προστίθεται για να δηλώσει το γεγονός της απώλειας πληροφορίας κάτω από κάποιους μετασχηματισμούς και το νόημα της είναι σχετικό με την Τρίτη συνθήκη.

Entanglement of Formation.

Το Entanglement of Formation E_F [81] μπορεί να αποτελέσει μέτρο του Entanglement για Καθαρές αλλά και Μικτές κβαντικές καταστάσεις.

Το μέτρο αυτό για μια κατάσταση ρ ορίζεται ως

$$E_F(\rho) \equiv \inf \left\{ \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|) \mid \rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right\}$$

Entanglement of Formation

Στον παραπάνω ορισμό το $E(\rho)$ είναι η *Εντροπία του Entanglement* (Entropy of Entanglement) το οποίο ορίζεται μόνο σε Καθαρές καταστάσεις Διμερούς Συστήματος ως $E(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$. Δηλαδή το Entanglement of Formation είναι το μέγιστο μέσο της Εντροπίας του Entanglement πάνω σε όλες τις δυνατές κατασκευές του ρ από Καθαρές καταστάσεις. Ο υπολογισμός του Entropy of Formation κατευθείαν από τον ορισμό, δηλαδή μεταβολικά, είναι πάρα πολύ δύσκολος. Κλειστή λύση του E_F υπάρχει στην περίπτωση των καταστάσεων 2-qubits. Κλειστή λύση έχει βρεθεί και για όλες περιπτώσεις που η κατάσταση του κβαντικού συστήματος υπακούει σε κάποιες ειδικές συμμετρίες [82, 83, 84, 85].

Το Entanglement of Formation δεν είναι μια αθροιστική ποσότητα έτσι εν γένει ισχύει ότι [86]

$$E_F(\rho^{AB} \otimes \sigma^{AB}) \neq E_F(\rho^{AB}) + E_F(\sigma^{AB})$$

Η ασυμπτωτική παραλλαγή του Entanglement of Formation ορίζεται ως

$$E_F^\infty(\rho) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_F(\rho^{\otimes n})}{n}$$

Ασυμπτωτική έκφραση του Entanglement of Formation

Η παραπάνω έκφραση αναφέρεται και ως η κανονικοποιημένη έκδοση του Entanglement of Formation. Ισούται δε με το Entanglement Cost δηλαδή

$$E_F^\infty(\rho) = E_C(\rho)$$

Από μαθηματικής άποψης το Entanglement of Formation είναι το *Κυρτό Επιστεγάσμα* (*convex roof*) της Εντροπίας του Entanglement. Το πρόβλημα της εύρεσης του Κυρτού Επιστεγάσματος μιας συνάρτησης το συναντάμε συχνά στην κβαντική θεωρία της πληροφορίας στην ακόλουθη μορφή.

$$M(\rho) = \inf_{\{p_i, |\psi_i\rangle\} \in \mathcal{D}(\rho)} \left[\sum_i p_i m(|\psi_i\rangle) \right]$$

$$\mathcal{D}(\rho) = \left\{ \{p_i, |\psi_i\rangle\}_{i=1}^s, \text{ s.t. } \tau \otimes \xi \rho \mid \{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^s \subset \mathcal{H}, \right.$$

$$\left. p_i \geq 0, \sum_{i=1}^s p_i = 1, \rho = \sum_{i=1}^s p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right\}$$

Πρόβλημα Κυρτού Επιστεγάσματος της m . Στην περίπτωση μας η m είναι η Εντροπία του Entanglement

Ο υπολογισμός του Κυρτού Επιστεγάσματος, στην γενική περίπτωση, δεν είναι τετριμμένος και έτσι αναπτύσσονται αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού του κατά περίπτωση.

Σχετικές Εντροπίες του Entanglement

Στις κβαντικές εντροπίες είχαμε δει την Σχετική Εντροπία την οποία είχαμε ορίσει ως

$$S(\rho \mid \sigma) \equiv -S(\rho) - \text{tr}(\rho \log \sigma)$$

Σχετική Εντροπία

Από μια οπτική γωνία η Σχετική Εντροπία δείχνει πόσο κοντά ή μακριά (από άποψη πληροφοριακού περιεχομένου) είναι οι δυο καταστάσεις ρ, σ . Έστω ότι επιλέγουμε ένα σύνολο X το οποίο αποτελείται από καταστάσεις που είναι όλες ασυσχέτιστες (disentangled). Τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε το μέτρο [87, 88, 89, 90]

$$E_R^X(\rho|\sigma) \equiv \inf_{\sigma \in X} [S(\rho|\sigma)]$$

Σχετική Εντροπία του Entanglement

Ανάλογα με τον τρόπο που επιλέγουμε το σύνολο των disentangled καταστάσεων δίνουμε και το νόημα του Entanglement και έτσι παίρνουμε και μια άλλη παραλλαγή της Σχετικής Εντροπίας του Entanglement.

Επίσης καλό είναι να γνωρίζουμε ότι

$$E_R^X(\rho^{\otimes n}) \neq nE_R^X(\rho)$$

Μια ιδιαιτερότητα, στην πραγματικότητα παθολογία, είναι ότι η Σχετική Εντροπία του Entanglement δεν είναι συμμετρική ως προς τα ορίσματα της.

Ο Λογάριθμος της Αρνητικότητας (Negativity)

Έστω ότι έχουμε ένα Διμερές σύστημα το οποίο βρίσκεται στην κατάσταση ρ . Ορίζουμε ως Αρνητικότητα (Negativity) [91, 92, 93, 94] την ποσότητα

$$N(\rho) \equiv \|\rho^{T_B}\|$$

Αρνητικότητα

Ο εκθέτης πάνω από τον τελεστή Πυκνότητας Πιθανότητας υποδηλώνει την πράξη της Μερικής Αναστροφής (partial transposition). Σαν Νόρμα στον παραπάνω ορισμό συνήθως διαλέγουμε την Νόρμα του Τχινους

$$\|X\| \equiv \text{tr}(\sqrt{X^+ X})$$

Η Νόρμα του Τχνους

Πρέπει να σημειωθεί ότι κάποιοι συγγραφείς διαλέγουν να ορίσουν την Αρνητικότητα ως

$$\frac{(\|\rho^{T_B}\| - 1)}{2}$$

Εναλλακτικός ορισμός της Αρνητικότητας

Ως μέτρο του Entanglement χρησιμοποιούμε την ποσότητα [91]

$$E_N(\rho) \equiv \log \|\rho^{T_B}\| = \log[N(\rho)]$$

Ο Λογάριθμος της Αρνητικότητας

Ο Λογάριθμος της Αρνητικότητας είναι ένα Μονότονο του Entanglement. Η ποσότητα αυτή δεν μπορεί να αυξηθεί αν στο κβαντικό σύστημα επιδράσουν τοπικοί μετασχηματισμοί ή κάποια κλασική διεργασία.

Το κυριότερο θετικό γνώρισμα της Αρνητικότητας είναι ότι μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Σχετίζεται δε με διάφορα φράγματα που αφορούν την μετάδοση πληροφορίας με κβαντική Τηλεμεταφορά. Επίσης σχετίζεται με άλλα μέτρα του Entanglement. Ένα παράδειγμα είναι το Entanglement Cost του οποίου είναι ένα άνω όριο.

Από το συνδυασμό της Αρνητικότητας με την Σχετική Εντροπία μπορεί να προκύψει ένα άλλο Μονότονο του Entanglement το οποίο είναι το ακόλουθο [88]

$$B(\rho) \equiv \min_{\sigma} [S(\rho|\sigma) + E_N(\sigma)]$$

Φράγμα Rain

Η ποσότητα αυτή είναι γνωστή ως Φράγμα Rain (*Rain's bound*).

Μονότονα του Entanglement βασισμένα σε Νόρμα.

Η οικογένεια αυτή των Μονότονων του Entanglement βασίζεται στο γεγονός ότι ένας ερμιτιανός τελεστής μπορεί να εκφραστεί ως

$$h = a\Omega - b\Delta \quad a, b \geq 0$$

$$\Omega \in X, \Delta \in Y$$

όπου τα X, Y είναι σύνολα αποτελούμενα από ερμιτιανούς πίνακες με Τχνος μονάδα. Επίσης τα σύνολα X, Y πρέπει να είναι Κυρτοί Κώνοι. Δηλαδή σύνολα κλειστά όσον αφορά τους γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων τους όταν τα βαθμωτά που συμμετέχουν είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Τέλος τα σύνολα X, Y θα πρέπει να είναι κλειστά κάτω από την δράση τοπικών μετασχηματισμών και κλασικών διεργασιών (LOCC).

Μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο

$$\|h\|_{X,Y} \equiv \inf_{\Omega \in X, \Delta \in Y} \{a + b \mid h = a\Omega - b\Delta, a, b \geq 0\}$$

Η παραπάνω ποσότητα μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι μια Νόρμα.

Έστω ότι ορίζουμε την ποσότητα

$$R_{X,Y}(h) \equiv \inf_{\Omega \in X, \Delta \in Y} \{b \mid h = a\Omega - b\Delta, a, b \geq 0\}$$

Ισχύει ότι

$$R_{X,Y}(\rho) \equiv \inf \left\{ b \mid b \geq 0, \exists \Delta \in Y, \Omega \in X \text{ τέτοιο ώστε } \frac{\rho + b\Delta}{1+b} = \Omega \right\}$$

$$= \frac{\|h\|_{X,Y} - 1}{2}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις η έκφραση αυτή είναι Κυρτή. Το $R_{X,Y}(\cdot)$ και το $\|h\|_{X,Y}$ είναι LOCC Μονότονο.

Ποσότητες που ανήκουν στην οικογένεια των $R_{X,Y}(\rho)$ καλούνται «Εύρωστα» Μονότονα (*Robustness Monotones*). Αποδεικνύεται δε ότι η Αρνητικότητα ανήκει σε αυτή την κατηγορία γιατί ισούται με $\|\rho\|_{X,Y}$ εάν $X=Y$ το σύνολο όλων των ερμιτιανών πινάκων με Τχνος ίσο με την μονάδα και θετικά ορισμένο όσον αφορά τον Μερικά Ανάστροφο.

Cross norm.

Το Cross Norm σχετίζεται και αυτό, αν και δεν ανήκει απόλυτα, με την κατηγορία αυτών των Μέτρων του Entanglement που βασίζονται σε Νόρμα. Το Greatest Cross Norm [95] ενός τελεστή A ορίζεται ως

$$\|A\|_g \equiv \inf \left[\sum_{i=1}^n \|u_i\|_1 \|v_i\|_1 : A = \sum_i u_i \otimes v_i \right]$$

Greatest Cross norm

με το $\|y\|_1 = \text{tr}(\sqrt{y^+ y})$ να είναι η Νόρμα του Τχνους. Το μέγιστο αναζητείται σε όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα αποτελούμενα από τανυστικά γινόμενα τελεστών (product operators). Το Greatest Cross Norm ενός τελεστή, στην γενική περίπτωση, δύσκολα υπολογίζεται.

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι εάν $\|\rho_{AB}\|_\gamma = 1$ τότε το δυο υποσυστήματα είναι unentagled. Δηλαδή

$$\|\rho_{AB}\|_\gamma = 1 \Rightarrow \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$$

Η ποσότητα

$$E_\gamma(\rho) \equiv \|\rho\|_\gamma - 1$$

είναι ένα Μονότονο του Entanglement. Το $E_\gamma(\rho)$ είναι όπως είπαμε προηγουμένως πολύ δύσκολο να υπολογιστεί μεταβολικά. Όμως λύση σε κλειστή μορφή μπορεί, κάποιες φορές, να βρεθεί στην περίπτωση που η κατάσταση του συστήματος ικανοποιεί ειδικές συμμετρίες και επίσης σε κάποιες περιπτώσεις όπου η κατάσταση του συστήματος είναι Καθαρή. Το Cross Norm σχετίζεται με το Robustness γιατί κάτω από προϋποθέσεις μπορεί να αποτελεί άνω όριο του (όταν τα u_i και v_i είναι ερμιτιανοί και τα X, Y , στο Robustness, το σύνολο των unentangled καταστάσεων) .

To Squashed Entanglement

Το μέτρο αυτό ορίζεται ως [96, 97]

$$E_{sq} \equiv \inf \left[\frac{1}{2} I(\rho_{ABE}) | tr_E(\rho_{ABE}) = \rho_{AB} \right]$$

Squashed Entanglement

και

$$I(\rho_{ABE}) \equiv S(AE) + S(BE) - S(ABE) - S(E)$$

Κβαντική Υπό Συνθήκη Αμοιβαία Πληροφορία

Το Squashed Entanglement είναι Κυρτό Μονότονο του Entanglement. Επίσης μετασχηματίζεται αθροιστικά όταν οι καταστάσεις είναι τανυστικό γινόμενο.

Η σημασία του έγκειται στο γεγονός ότι μας βοηθάει να οριοθετήσουμε άλλα βασικά μέτρα του Entanglement. Πράγματι το Squashed Entanglement είναι ένα κάτω φράγμα για το Entropy of Formation και το Entanglement Cost και ένα άνω φράγμα για το, θεμελιώδους θεωρητικής σημασίας, Distillable Entanglement. Επίσης εάν αναφερόμαστε σε Καθαρές καταστάσεις τότε ισούται με το $S(\rho_A)$.

Αναφορές

- [1]. A mathematical theory of communication, 1948, CE Shannon, W Weaver - Bell Syst. Tech. J
- [2]. Information theory and reliable communication, RG Gallager - 1968, John Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA
- [3]. Elements of information theory, TM Cover, JA Thomas - 2006 - Wiley
- [4]. Quantum information theory, CH Bennett, PW Shor - IEEE Transactions on Information Theory, 1998, vol. 44, no. 6, 2724-2742
- [5]. Recent results in the Shannon theory, A Wyner - IEEE Transactions on Information Theory, 1974, vol. IT20, no. 1, 2-10
- [6]. Coding and information theory, S Roman - 1992, Springer
- [7]. The concept of information, R Capurro, B Hjørland - Annual review of information science ..., 2003, vol. 37, 343-411
- [8]. Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the ..., N Wiener - 1965, MIT Press
- [9]. An introduction to information theory: symbols, signals & noise, JR Pierce - 1980, Dover
- [10]. Entropy and information theory, RM Gray - 1990, <http://ee.stanford.edu/~gray/it.pdf>
- [11]. Information Theory and Statistics. S. Kullback. Dover, New York, 1968.
- [12]. Notions generalisees d'incertitude, d'entropie et d'information du point de vue de la theorie des martingales. A. Perez. In Transactions First Prague Conf. on Information Theory, Stat. Decision Functions, and Random Processes,. Czech. Acad. Sci. Publishing House, 1957, pages 183-208

- [13]. Sur la theorie de l'information dans le cas d'un alphabet abstrait. A. Perez. In Transactions First Prague Conf. on Information Theory, Stat. Decision Functions, Random Processes. Czech. Acad. Sci. Publishing House, 1957, pages 209-244
- [14]. Sur la convergence des incertitudes, entropies et informations_echantillon vers leurs valeurs vraies. A. Perez. In Transactions First Prague Conf. on Information Theory, Stat. Decision Functions, and Random Processes. Czech. Acad. Sci. Publishing House, 1957, pages 245-252
- [15]. Dynamical systems with completely positive or zero entropy. M. S. Pinsker. Soviet Math. Dokl., 1:937-938, 1960
- [16]. A general formulation of the fundamental Shannon theorem in information theory. R. L. Dobrushin. Uspehi Mat. Akad. Nauk. SSSR, 14:3-104, 1959.
- [17]. On measures of information and entropy. A. Rényi (1961). Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability 1960. pp. 547-561.
- [18]. Alpha-divergences for Classification, Indexing and Retrieval. A. O. Hero, O. Michael and J. Gorman (2002), <http://www.eecs.umich.edu/~hero/Preprints/cspl-328.pdf>
- [19]. On the dimension and entropy of probability distributions, A Renyi - Acta Mathematica Hungarica, 1959, vol. 10, no. 1-2, 193-215
- [20]. Tsallis Entropy and Jaynes' Information Theory Formalism, A Plastino, Brazilian Journal of Physics, March, 1999, vol. 29, no. 1, 50-60
- [21]. C. Tsallis, J. Stat. Phys., 1988, 52, 479
- [22]. Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes, Vera Pless (1982), John Wiley & Sons, Inc.
- [23]. Algebraic Coding Theory, Elwyn R. Berlekamp (1984), Aegean Park Press (revised edition)

- [24]. Channel capacity. Saleem Bhatti. Lecture notes for M.Sc. Data Communication Networks and Distributed Systems D51 -- Basic Communications and Networks.
- [25]. Church 1934:90 footnote in Davis 1952
- [26]. Turing 1936-7 in Davis 1952:149
- [27]. Computability and λ -Definability, Turing, The Journal of Symbolic Logic, Dec. 1937, vol. 2, issue 4, 153-163
- [28]. On computable numbers, with an application to the Entscheidungs problem, Turing, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, 1937, vol. 42, 230-265
- [29]. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungs problem. A correction. Turing, Proceedings of the London Mathematical Society, 1937, Ser. 2, Vol. 43, 544-546
- [30]. Computation: finite and infinite machines, ML Minsky - 1967, Prentice-Hall, Inc, ISBN:0-13-165563-9.
- [31]. After the Transistor, the Qubit?, Robert W. Keyes, Computing in Science and Engineering, Jan./Feb. 2005, vol. 7, no. 1, pp. 36-41
- [32]. The Fight For The Best Quantum Bit (Qubit), Henrik Ingerslev Jørgensen, University of Copenhagen, 2008, June 27, <http://www.sciencedaily.com>
- [33]. Quantum computation and quantum information, MA Nielsen, I Chuang, LK Grover - American Journal of Physics, 2002, vol. 70, issue 5, 558-559 and ref[30], pg.53 in thesis
- [34]. Quantum mechanical Hamiltonian models of Turing machines, P Benioff - Journal of Statistical Physics, 1982 - Springer, vol. 29, no. 9, 515-546
- [35]. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, D Deutsch - Proceedings of the Royal Society of London. Series A, ..., 1985, vol. 400, 97-117

[36]. Quantum complexity theory, E Bernstein, U Vazirani - Proceedings of the twenty-fifth annual ..., 1993, 11-20

[37]. Experimental Aspects of Quantum Computing, Henry O. Everitt (Editor), Springer, April 1, 2005, ISBN-10: 0387230459

[38]. Experimental Quantum Computation and Information, F. De Martini and C. Monroe (editors), International School of Physics Enrico Fermi, vol.148, 165-196.

[39]. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, WH Zurek - Reviews of Modern Physics, 2003, vol.75, issue 3, 715-775

[40]. Two-bit gates are universal for quantum computation, DP DiVincenzo - Physical Review A, 1995, vol.51, issue 2, 1015-1022

[41]. Elementary gates for quantum computation, A Barenco, CH Bennett, R Cleve, DP DiVincenzo, N ... - Physical Review A, 1995, vol. 52, issue 5, 3457-3467

[42]. A silicon-based nuclear spin quantum computer, BE Kane - Nature, 1998, vol. 393, 133-137

[43]. On the power of quantum computation, DR Simon - SIAM Journal on Computing, 1997, 26(5), 1474-1483

[44]. Experimental realization of Deutsch's algorithm in a one-way quantum computer, MS Tame, R Prevedel, M Paternostro, P Böhi, MS ... - Physical review letters, 2007, vol. 98, issue 14, 14501

[45]. Simple quantum computer, IL Chuang, Y Yamamoto - Physical Review A, 1995, vol. 52, issue 5, 3489-3496

[46]. Quantum computation and Shor's factoring algorithm, A Ekert, R Jozsa - Reviews of Modern Physics, 1996, vol. 68, issue 3, 733-753

[47]. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring, PW Shor - ANNUAL SYMPOSIUM ON FOUNDATIONS OF ..., 1994, 124-134

- [48]. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer, PW Shor - SIAM Review, 1999, vol. 41, no. 2, 303-332
- [49]. Quantum entropy and its use, M Ohya, D Petz - Springer, 2004, ISBN 3-540-20806-2
- [50]. Inequalities for quantum entropy: A review with conditions for equality, MB Ruskai - Journal of Mathematical Physics, 2002, vol. 43, issue 9, 4358
- [51]. A fundamental property of quantum-mechanical entropy, EH Lieb, MB Ruskai - Physical Review Letters, 1973, vol. 30, issue 10, 434-436
- [52]. Linear entropy as an Entanglement measure in two-fermion systems, F Buscemi, P Bordone, A Bertoni - Physical Review A, 2007, vol. 75, issue 3, 032301
- [53]. Decoherence and linear entropy increase in the quantum baker's map, AN Soklakov, R Schack - Physical Review E, 2002, vol. 66, issue 3, 036212
- [54]. The proper formula for relative entropy and its asymptotics in quantum probability, F Hiai, D Petz - Communications in Mathematical Physics, 1991, vol. 143, no. 1, 99-114
- [55]. The role of relative entropy in quantum information theory, V Vedral - Reviews of Modern Physics, 2002, vol. 74, issue 1, 197-234
- [56]. Bounds for the quantity of information transmitted by a quantum communication ..., AS Holevo - Problemy Peredachi Informatsii, 1973, vol. 9, issue 3, 197-234
- [57]. The capacity of the quantum depolarizing channel, C King - IEEE Transactions on Information Theory, 2003, vol. 49, no. 1, 221-229
- [58]. Entropy exchange and Entanglement in the Jaynes-Cummings model, E Boukobza, DJ Tannor - Physical Review A, 2005, vol. 71, issue 6, 063821

- [59]. Conditional entropies and their relation to Entanglement criteria, KGH Vollbrecht, MM Wolf - Journal of Mathematical Physics, 2002, vol. 43, issue 9, 4299
- [60]. Fidelity for mixed quantum states, R Jozsa - Journal of Modern Optics, 1994, vol. 41, issue 12, 2315-2323
- [61]. Distance measures to compare real and ideal quantum processes, A Gilchrist, NK Langford, MA Nielsen - Physical Review A, 2005, vol. 71, issue 6, 062310
- [62]. The capacity of the quantum channel with general signal states, AS Holevo - IEEE Transactions on Information Theory, 1998, vol. 44, no. 1, 269-273
- [63]. Tema con variazioni: quantum channel capacity, D Kretschmann, RF Werner - New Journal of Physics, 2004, vol. 6, 26
- [64]. Classical information capacity of a quantum channel, P Hausladen, R Jozsa, B Schumacher, M ... - Physical Review A, 1996, vol. 54, issue 3, 1869-1876
- [65]. On capacity of a quantum communications channel, AS Holevo - Problemy Peredachi Informatsii, 1979, vol. 15, issue 4, 3-11
- [66]. Experimental Entanglement of four particles, CA Sackett, D Kielpinski, BE King, C Langer, V Meyer, ... - Nature, 2000, vol. 404, 256-259
- [67]. Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model, R.F. Werner, Phys. Rev. A 40, 4277 (1989).
- [68]. Quantum Entanglement, R Horodecki, P Horodecki, M Horodecki, K ... - Reviews of Modern ..., 2009, vol. 81, issue 2, 865-942
- [69]. Experimental long-lived Entanglement of two macroscopic objects, B Julsgaard, A Kozhekin, ES Polzik - Nature, 2001, vol. 413, 400-403

- [70]. Experimental demonstration of five-photon Entanglement and open-destination ..., Z Zhao, YA Chen, AN Zhang, T Yang, HJ Briegel, JW ... - Nature, 2004, vol. 430, 54-58
- [71]. Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition, A Ekert, PL Knight - American Journal of Physics, 1995, vol. 63, issue 5, 415-423
- [72]. Separability criterion for density matrices, A Peres - Physical Review Letters, 1996, vol. 77, issue 8, 1413-1415
- [73]. Distinguishing separable and entangled states, AC Doherty, PA Parrilo, FM Spedalieri - Physical Review Letters, 2002, vol. 88, issue 18, 187904
- [74]. Separability of mixed states: necessary and sufficient Conditions, M Horodecki, P Horodecki, R Horodecki - Physics Letters A, 1996, vol. 223, issue 1-2, 1-8
- [75]. Inseparability criteria for continuous bipartite quantum states, E Shchukin, W Vogel - Physical review letters, 2005, vol. 95, issue 23, 230502
- [76]. Majorization criterion for distillability of a bipartite quantum state, T Hiroshima - Physical review letters, 2003, vol. 91, issue 5, 057902
- [77]. Majorization and the interconversion of bipartite states, MA Nielsen, G Vidal - Quantum information and computation, 2001, vol. 1, no. 1, 76-93
- [78]. Entanglement measures and purification procedures, V Vedral, MB Plenio - Physical Review A, 1998, vol. 57, issue 3, 1619-1633
- [79]. Quantifying Entanglement, V Vedral, MB Plenio, MA Rippin, PL Knight - Physical Review Letters, 1997, vol. 78, issue 12, 2275-2279

[80]. An introduction to Entanglement measures, MB Plenio, S Virmani - Quantum information & computation, 2007, 7,1, <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0504163>

[81]. ENTANGLEMENT OF FORMATION, WK Wootters - Quantum communication, computing and ..., 2000 - Springer, part I, 69-73, ISBN: 978-0-306-46307-5

[82]. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, WK Wootters - Physical Review Letters, 1998, vol. 80, issue 10, 2245-2248

[83]. Entanglement of formation for symmetric Gaussian states, G Giedke, MM Wolf, O Krüger, RF Werner, JI Cirac - Physical review letters, 2003, vol. 91, issue 10, 107901

[84]. Entanglement of formation for isotropic states, BM Terhal, KGH Vollbrecht - Physical Review Letters, 2000, vol. 85, issue 12, 2625-2628

[85]. Entanglement of a pair of quantum bits, S Hill, WK Wootters - Physical Review Letters, 1997, vol. 78, issue 26, 5022-5025

[86]. On strong superadditivity of the Entanglement of formation, KMR Audenaert, SL Braunstein - Communications in Mathematical ..., 2004 - Springer, vol. 246, no. 3, 443-452

[87]. Information, relative entropy of Entanglement, and irreversibility, L Henderson, V Vedral - Physical Review Letters, 2000, vol. 84, issue 10, 2263-2266

[88]. Asymptotic relative entropy of Entanglement, K Audenaert, J Eisert, E Jane, MB Plenio, S Virmani, ... - Physical Review Letters, 2001, vol. 87, issue 21, 217902

[89]. Bounds on relative entropy of Entanglement for multi-party systems, MB Plenio, V Vedral - Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, vol. 34, no. 35, 6997

[90]. Calculating the relative entropy of Entanglement, S Wu, Y Zhang 1997, <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0004018>

- [91]. Logarithmic negativity: a full Entanglement monotone that is not convex, MB Plenio - Physical review letters, 2005, vol. 95, issue 9, 090503
- [92]. Comparison of the relative entropy of Entanglement and negativity, A Miranowicz, S Ishizaka, B Horst, A Grudka - Physical Review A, 2008, vol. 78, issue 5, 052308
- [93]. Negativity, Entanglement witness and quantum phase transition, X Wang, SJ Gu - Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2007, vol. 40, no. 35, 10759
- [94]. A comparison of the Entanglement measures negativity and concurrence, F Verstraete, K Audenaert, J Dehaene, B De ... - Journal of Physics A: ..., 2001, vol. 34, no. 47, 10327
- [95]. A new class of Entanglement measures, O Rudolph - Journal of Mathematical Physics, 2001, vol. 42, issue 11, 5306
- [96]. "Squashed Entanglement": An additive Entanglement measure, M Christandl, A Winter - Journal of Mathematical Physics, 2004, vol. 45, issue 3, 829
- [97]. Squashed Entanglement for multipartite states and Entanglement measures based ..., D Yang, K Horodecki, M Horodecki, P ... - Arxiv preprint , 2007, <http://arxiv.org/abs/arXiv:0704.2236>
- [98]. Mathematical Logic, Stephen Cole, Kleene - 1967, Dover Publications Inc., ISBN: 0486425339
- [99]. On Universal and Fault-Tolerant Quantum Computing, Boykin P. Oscar, Mor Tal, Pulver Matthew, RoychowdhuryVwani, Vatan Farrokh, 1999, eprint arXiv:quant-ph/9906054

ΕΝΟΤΗΤΑ Γ΄

ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΚΒΑΝΤΙΚΟΥ ΧΑΟΥΣ

Κβαντικό χάος.

Το κβαντικό χάος [1,2,3,4,58,62] είναι ο κλάδος εκείνος της φυσικής που μελετά τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρεται ένα κβαντικό σύστημα του οποίου το κλασικό όριο είναι Χαοτικό [63,64,65,66]. Ένα τέτοιο κβαντικό σύστημα λέμε ότι έχει κλασικό ανάλογο το οποίο εμφανίζει χάος [6,7,8,9]. Σε πρώτη προσέγγιση του ζητήματος αντιλαμβάνεται κανείς ότι δεν υπάρχει κβαντικό χάος με την έννοια της εκθετικής ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες και αυτό συμβαίνει λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης του Schrödinger. Είναι όμως γνωστό ότι το κβαντικό σύστημα μπορεί να αντιλαμβάνεται την παρουσία του χάους, όταν αυτό εμφανίζεται στο κλασικό του ανάλογο.

Η διασαφήνιση του ερωτήματος του πως εκδηλώνεται τελικά το κβαντικό χάος έχει να κάνει με την γενικότερη σχέση του κβαντικού με τον κλασικό κόσμο. Εάν η αρχή της αντιστοιχίας πραγματικά ισχύει και εάν η κλασική μηχανική αποτελεί όριο της κβαντομηχανικής (το κλασικό όριο) τότε θα πρέπει κάπου μέσα στην κβαντομηχανική να ελλοχεύει το χάος [5]. Στην αντίθετη περίπτωση θα σημαίνει ότι η μετάβαση από τον κβαντικό κόσμο στον κλασικό δεν γίνεται με ομαλό τρόπο.

Εφόσον τα κβαντικά συστήματα δεν εμφανίζουν εκθετική ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες ο ορισμός του χάους δεν μπορεί να γίνει με απευθείας μεταφορά εννοιών όπως οι εκθέτες Lyapunov [11,58] στον κβαντική περιοχή. Άλλωστε στην κβαντομηχανική ακόμα και ο ορισμός της τροχιάς ενός σώματος είναι προβληματικός [12]. Τα φυσικά συστήματα δεν αναπαρίστανται με σημεία στον χώρο των φάσεων αλλά με ανύσματα στον χώρο Hilbert. Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης του Schrödinger η δυναμική των συστημάτων δεν εξαρτάται από την εκάστοτε αρχική κυματοσυνάρτηση. Εάν δούμε το πρόβλημα της υπερευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες στο επίπεδο της κυματοσυνάρτησης προκύπτει ότι η απόσταση μεταξύ δυο γειτονικών κβαντικών καταστάσεων αποτελεί σταθερά της κίνησης γιατί η χρονική εξέλιξη είναι μοναδιαία. Στην κβαντομηχανική στοιχεία εκθετικής απόκλισης υπάρχουν με την έννοια των ελαφρά διαταραγμένων συστημάτων. Εάν διαφοροποιήσουμε ελαφρά τον τελεστή Χάμιλτον ενός κβαντικού συστήματος με χαοτικό κλασικό ανάλογο τότε μπορούμε να

δούμε ότι, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, τα δυο γειτονικά συστήματα εμφανίζουν εκθετικές αποκλίσεις ως προς την συμπεριφορά τους. Αντίθετα εάν το κλασικό ανάλογο του συστήματος εμφανίζει κανονικότητα συνήθως οι αποκλίσεις σε μικρές διαταραχές εμφανίζουν συμπεριφορά ύψωσης σε δύναμη. Το γεγονός αυτό συνιστά το κβαντικό φαινόμενο της πεταλούδας.

Το κλασικό χάος ορίζεται με την βοήθεια της έννοιας της τροχιάς. Δυο γειτονικά σημεία στον χώρο των φάσεων αποκλίνουν εκθετικά. Πως όμως θα μπορούσαμε να ορίσουμε την έννοια της τροχιάς ενός κβαντικού σωματιδίου; Στην κλασική φυσική η θέση και η ορμή του σωματιδίου μπορεί να ορίζεται ακριβώς σε κάθε χρονική στιγμή και έτσι λέμε ότι το σωματίδιο είναι απόλυτα εντοπισμένο. Και στην κβαντομηχανική όμως μπορούμε να κατασκευάσουμε καταστάσεις οι οποίες είναι εντοπισμένες σε μια στενή περιοχή του χώρου των φάσεων, στον βαθμό βέβαια που μας επιτρέπει η αρχή της αβαιβεώτητας του Heisenberg. Από την άλλη το θεώρημα του Ehrenfest [10] καταδυκνείει μια πολύ σημαντική ιδιότητα αντιστοιχίας μεταξύ της κβαντικής και της κλασικής δυναμικής. Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι η μέση θέση και η μέση ορμή του κβαντικού σωματιδίου θα υπακούει τον νόμο του Νεύτωνα εφόσον ως δύναμη θεωρήσουμε την μέση δύναμη που ασκείται στο κβαντικό σωματίδιο. Αυτή η μέση δύναμη (ενεργός δύναμη) ορίζεται στο προκείμενο ως $\langle \psi(t) | F(x) | \psi(t) \rangle$ όπου θεωρούμε εξάρτηση μόνο από την θέση. Είναι λογικό ότι μια αρχικά, καλά εντοπισμένη, κβαντική κατάσταση θα παρακολουθήσει, για το χρονικό διάστημα που παραμένει εντοπισμένη, την κλασική τροχιά. Κατά την διάρκεια της πορείας ο μη τοπικός χαρακτήρας της κβαντικής φυσικής θα εξαναγκάσει την κβαντική κατάσταση να «νιώσει» όλο και μεγαλύτερου μέρους του φασικού χώρου και έτσι να απεντοπιστεί. Αν υπολογίζουμε την ενεργό δύναμη γύρω από τα σημεία που ορίζει η κλασική τροχιά, λόγω απεντοπισμού πρέπει να συμμετέχουν όροι μεγαλύτερης τάξης, και έτσι τελικά η κβαντική κατάσταση θα αποκλίνει δραματικά της κλασικής τροχιάς. Ο κρίσιμος χρόνος μετά από τον οποίο μπορούμε να διακρίνουμε την κλασική από την κβαντική δυναμική [4] είναι γνωστός σαν *Χρόνος Διαχωρισμού του Ehrenfest* (*Ehrenfest Break Time*) και σχετίζεται με τον

χρόνο απεντοπισμού. Ο ίδιος ο Ehrenfest, σε μια προσπάθεια να προσεγγίσει το πρόβλημα της σχέσης κλασικού-κβαντικού, είχε οδηγηθεί στην διαπίστωση ότι ο χρόνος αυτός προκύπτει από το χαρακτηριστικό μέγεθος της δράσης του συστήματος, εκπεφρασμένο σε μονάδες σταθεράς του Planck ($\hbar = 10^{-34} J \cdot s$), υψωμένο σε κάποια μικρή δύναμη (power law). Με βάση τον υπολογισμό του Χρόνου Διαχωρισμού του Ehrenfest προκύπτει μια πρώτη σοβαρή ερμηνεία για τον χρόνο διαφοροποίησης της κβαντικής από την κλασική συμπεριφορά (quantum-classical break time) για τα μακροσκοπικά αντικείμενα. Έτσι η αρχή της αντιστοιχίας δείχνει να εξηγείται με βάση αυτή την προσέγγιση. Νεότερες προσεγγίσεις του ερωτήματος έδειξαν ότι η λογική αυτή δεν αποκλείει μακροσκοπικές κβαντικές καταστάσεις, έτσι κάτι άλλο θα πρέπει να συμβαίνει, όμως δεν θα αναφερθούμε σε αυτό στην εισαγωγή. Στην πραγματικότητα λεπτομερείς υπολογισμοί και πειραματικά δεδομένα έχουν αποδείξει ότι ο νόμος ύψωσης σε δύναμη δεν ισχύει πάντα. Σε κβαντικά συστήματα με χαοτικό κβαντικό ανάλογο φαίνεται ότι ο Χρόνος Διαχωρισμού του Ehrenfest δεν σχετίζεται με τις δράσεις του συστήματος ως ύψωση σε δύναμη αλλά ακολουθεί άλλους νόμους. Κατά κύριο λόγο στα χαοτικά συστήματα ο Χρόνος Διαχωρισμού σχετίζεται με την δράση λογαριθμικά [22,23,24]. Ο Χρόνος Διαχωρισμού του Ehrenfest είναι θεμελιώδης όσον αφορά την κατανόηση της σχέσης κβαντικού-κλασικού, έτσι το γεγονός ότι το χάος εκδηλώνεται, έστω και έμμεσα, στον νόμο υπολογισμού του έχει από μόνο του ξεχωριστή σημασία.

Το πέρασμα από την ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες στην ευαισθησία στις διαταραχές του συστήματος καθώς και η σχέση του Χρόνου Διαχωρισμού του Ehrenfest με το χάος είναι ουσιαστικά προσπάθεια μεταφοράς των εννοιών του κλασικού χάους απευθείας στον κβαντικό κόσμο. Δυστυχώς όμως, ακριβής αντιστοιχία μεταξύ εννοιών και φαινομένων δεν υπάρχει ανάμεσα στην κλασική και την κβαντική θεωρία. Γνωρίζουμε πλέον ότι το χάος έχει εκδηλώσεις στα κβαντικά συστήματα με χαοτικό κλασικό όριο. Όμως οι εκδηλώσεις αυτές δεν προκύπτουν ως αντικατοπτρισμός μεταξύ ανάλογων όρων της κλασικής μηχανικής. Για τον λόγο αυτό μιλάμε για εκδηλώσεις του χάους στην κβαντομηχανική και όχι για χάος με την αυστηρή έννοια. Άποψη μας είναι ότι μια συστηματική

προσέγγιση του κβαντικού χάους, ίσως και ένας επαναπροσδιορισμός του, προϋποθέτει την εισαγωγή όρων κβαντικής πληροφορίας στην περιγραφή του φαινομένου. Από την βιβλιογραφία των τελευταίων είκοσι ετών προκύπτει ότι το κβαντικό χάος εκδηλώνεται με τρόπους που δύσκολα κανείς αναμένει. Κάθε ένας από αυτούς τους τρόπους συχνά οδηγεί και σε μια άλλη οπτική για το κβαντικό χάος.

Η έννοια του κβαντικού χάους προσεγγίζεται κυρίως με τους ακόλουθους τρόπους.

1. Με απευθείας εφαρμογή της αρχής της αντιστοιχίας.

Εφαρμόζοντας την αρχή της αντιστοιχίας [14], κατά περίπτωση, μπορούν να βγουν συμπεράσματα όσον αφορά τον τρόπο μετάβασης, ενός κβαντικού συστήματος, στο κλασικό χάος.

2. Με την θεωρία των διαταραχών στο όριο των μεγάλων κβαντικών αριθμών.

Αφορά το κβαντικό φαινόμενο πεταλούδας [29]. Ο τελεστής Χάμιλτον διαταράσσεται ελαφρά, σε κάποιο κβαντικό σύστημα, και εξετάζεται η δυναμική του διαταραγμένου συστήματος σε σχέση με το αδιατάρακτο.

3. Συσχέτιση των στατιστικών ιδιοτήτων των ιδιοενεργειών του κβαντικού τελεστή Χάμιλτον με τις ιδιότητες του κλασικού ανάλογου.

Αφορά την δυνατότητα κατάταξης των κβαντικών συστημάτων σε σχέση με τις στατιστικές ιδιότητες του φάσματος του [15]. Έχει πειραματικές εφαρμογές καθώς το φάσμα μπορεί να μετρηθεί. Φαίνεται ότι υπάρχουν Παγκόσμιες κλάσεις όσον αφορά τις στατιστικές ιδιότητες των ιδιοτιμών του τελεστή Χάμιλτον [26].

Συνήθως τα συμπεράσματα προκύπτουν από τον υπολογισμό της κατανομής των αποστάσεων μεταξύ των ενεργειακών καταστάσεων και από την στατιστική συσχέτιση (correlation) μεταξύ των διαφορετικών ιδιοτιμών της ενέργειας.

4. Με εφαρμογή ημικλασικών μεθόδων [1,16,57].

Ξεκινάμε από το κλασικό σύστημα και προσθέτουμε σε αυτό διαδοχικές κβαντικές διορθώσεις. Η προσέγγιση του κβαντικού χάους γίνεται με την βοήθεια των κλασικών τροχιών.

5. Με εφαρμογή της μηχανικής του Bohm.

Η μηχανική του Bohm [13] είναι μια εναλλακτική θεώρηση της κβαντομηχανικής. Η κυματοσυνάρτηση θεωρείται ενδιάμεσο θεωρητικό κατασκεύασμα χρήσιμο στην κατασκευή τροχιών. Ονομάζεται δε *Πιλοτική* κυματοσυνάρτηση (*Pilot wave function*). Οι τροχιές του Bohm αναπαράγουν τα συμπεράσματα της κβαντομηχανικής. Ωστόσο μας προσφέρουν μια κλασική εικόνα η οποία κάνει περισσότερο απτή την μεταφορά των εννοιών του μακρόκοσμου στην κβαντική θεωρία.

6. Με εφαρμογή εννοιών της θεωρίας της κβαντικής πληροφορίας [17,18,19,20].

Οι εκδηλώσεις του κβαντικού χάους εμφανίζονται στις τιμές μεγεθών όπως η Εντροπία von Neumann, το Entropy of Formation κ.α. Η δυνατότητα μεταγωγής της πληροφορίας διαμέσου ενός κβαντικού συστήματος (quantum channel) αλλάζει όταν, το κλασικό του όριο, εμφανίζει χάος. Αν σκεφτούμε ότι και το κλασικό χάος μπορεί να ιδωθεί από την πληροφοριακή οπτική γωνία βλέπουμε ότι η προσέγγιση του κβαντικού χάους με έννοιες πληροφορίας μπορεί να οδηγήσει σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

7. Με εφαρμογή της στοχαστικής μηχανικής του Nelson.

Η στοχαστική μηχανική του Nelson [21] αποτελεί μια ακόμη εναλλακτική θεώρηση της κβαντομηχανικής. Δεν μας απαλλάσσει από την κυματοσυνάρτηση αλλά μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε τροχιές. Από την οπτική γωνία του Nelson το κβαντικό σωματίδιο εκτελεί κίνηση Brown στον θεσεογραφικό χώρο.

8. Με την θεωρία των Τυχαίων Πινάκων.

Η φασματοσκοπική παρατήρηση συστημάτων αποτελούμενων από πολλά σώματα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, ανάλογα με τις

συμμετρίες που υπάρχουν, οι ιδιοενέργειες ακολουθούν συγκεκριμένες στατιστικές κατανομές [15]. Από την άλλη, οι ίδιες κατανομές μπορούν να αναπαραχθούν με την βοήθεια πινάκων στα μαθηματικά. Οι πίνακες αυτοί, που έχουν πολύ συγκεκριμένες ιδιότητες, ονομάζονται *Τυχαίοι Πίνακες* (*Random Matrices*) [25]. Η θεωρία των Τυχαίων Πινάκων μας βοηθάει πολύ στην συστηματική κατηγοριοποίηση των εκδηλώσεων του κβαντικού χάους. Οι Τυχαίοι Πίνακες εφαρμόστηκαν αρχικά στην έρευνα των πυρηνικών φασμάτων.

9. Με θεωρίες κρυφών μεταβλητών.

Σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές η φύση συμπεριφέρεται κλασικά και έτσι οι μη γραμμικότητες μπορούν να υπάρχουν φυσικά. Η εξίσωση του Schrödinger είναι φαινομενολογική [27] και την χρησιμοποιούμε επειδή μας λείπουν στοιχεία όσον αφορά τους παράγοντες που επιδρούν στον μικρόκοσμο.

10. Μη γραμμικές εξισώσεις του Schrödinger.

Είναι φαινομενολογικά παραγόμενες εξισώσεις [28] που προκύπτουν από τη εξίσωση του Schrödinger με την εισαγωγή μη γραμμικών όρων. Ιστορικά εφαρμόστηκαν στην περιγραφή κλασικών συστημάτων. Παρά ταύτα, κάτω από προϋποθέσεις, μπορούν να περιγράψουν και κβαντικά συστήματα.

11. Αναπαράσταση στον χώρο των φάσεων με συναρτήσεις ψευδο-πιθανότητας [30,31].

Η κατάσταση ενός κβαντικού σωματιδίου μπορεί να αναπαρασταθεί στον χώρο των φάσεων με συναρτήσεις της μορφής $f(q,p)$. Οι συναρτήσεις αυτές μοιάζουν σε πολλά σημεία με κλασικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι. Έτσι έχουμε την δυνατότητα ορισμού κίνησης στον χώρο των φάσεων με ταυτόχρονη μεταφορά εννοιών της κλασικής μηχανικής στον κβαντικό κόσμο. Οι κατανομές Wigner και Husimi είναι δυο παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων.

12. Με παρατήρηση της δυναμικής των ιδιοενεργειών και των ιδιοκαταστάσεων.

Έστω ότι ο τελεστής Hamilton ενός κβαντικού συστήματος εξαρτάται από μια παράμετρο ελέγχου. Μεταβάλλοντας την παράμετρο αυτό μεταβάλλεται τόσο το φάσμα του τελεστή όσο και οι ιδιοκαταστάσεις του. Το χάος εκδηλώνεται στον τρόπο μεταβολής του φάσματος συναρτήσει της παραμέτρου με διάφορους τρόπους *Απωθημένες Διασταυρώσεις* (*Avoided Crossings*), καθολική άπωση καταστάσεων μέσα στο φάσμα κ.α. Η δυναμική των ιδιοενεργειών μπορεί να αναπαρασταθεί με όρους κλασικών δυναμικών συστημάτων [32]. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι αυτό των Pechukas-Yukawa.

Πολλές από τις θεωρητικές προβλέψεις σχετικά με το κβαντικό χάος έχουν επιβεβαιωθεί και πειραματικά. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι έχουν γίνει πειράματα στις περιοχές της φυσικής που αφορούν κοιλότητες μικροκυμάτων (*microwave cavities*), φάσματα πυρήνων, φάσματα ατόμων και μορίων σε μαγνητικό πεδίο, σκέδαση, πυρηνικό μαγνητικό συντονισμό, κβαντικές παγίδες (*quantum traps*), κβαντικές τελείες (*quantum dots*), *laser cooling* κ.α.

Κβαντικά μπιλιάρδα

Στην θεωρία των δυναμικών συστημάτων με τον όρο μπιλιάρδο εννοούμε το σύστημα εκείνο όπου ένα σωματίδιο εναλλάσσεται μεταξύ ελεύθερης κίνησης και ανάκλασης σε ένα ακλόνητο σύνορο. Η ανάκλαση στο σύνορο θεωρείται ελαστική δηλαδή δεν έχουμε απώλεια κινητικής ενέργειας αλλά μόνο αλλαγή της διεύθυνσης της κίνησης. Τα μπιλιάρδα είναι Χαμιλτόνια δυναμικά συστήματα και χαρακτηρίζονται από την γεωμετρία του συνόρου τους. Μπορούν να ορίζονται σε χώρους δυο, τριών η και περισσότερων διαστάσεων. Επίσης υπάρχουν μπιλιάρδα που είναι ανοιχτά δηλαδή επιτρέπουν την διαφυγή του σωματιδίου και μπιλιάρδα που η κίνηση συμβαίνει στην εξωτερική πλευρά του συνόρου. Τα μπιλιάρδα μπορούν να ορίζονται και σε μη Ευκλείδειους χώρους [60]. Εάν ένα μπιλιάρδο ορίζεται σε χώρο Riemann τότε η κίνηση του σωματιδίου μεταξύ δυο κρούσεων ακολουθεί μια γεωδαιτική γραμμή. Η κίνηση του σωματιδίου σε ένα μπιλιάρδο μπορεί να χαρακτηριστεί από την ακολουθία των σημείων κρούσης συνεπώς μπορεί να αναπαρασταθεί με μια απεικόνιση. Τέλος το

μπιλιάρδο αυτό κάθε αυτό χαρακτηρίζεται από την γεωμετρία των συνόρων του.

Εάν προσθέσουμε στο κλασικό μπιλιάρδο ένα επιπλέον δυναμικό τότε οι εξισώσεις της κίνησης του σωματιδίου είναι οι εξής:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

$$\text{και } V(q) = \infty \quad q \notin \Omega$$

με Ω συμβολίζουμε την περιοχή όπου η κίνηση είναι επιτρεπτή.

Στην περίπτωση που η κίνηση γίνεται σε χώρο Riemann ισχύει:

$$H(p, q) = \frac{1}{2m} \sum_{ij} p_i p_j g_{ij}(q) + V(q)$$

με g_{ij} τον μετρικό τανυστή.

Τα μπιλιάρδα είναι σημαντικά στην κατανόηση του χάους γιατί συμπεριλαμβάνουν όλα τα χαρακτηριστικά της κανονικότητας και του χάους. Υπάρχουν μπιλιάρδα που να εμφανίζουν πλήρη κανονικότητα (ορθογώνιο μπιλιάρδο), πλήρες χάος και μικτή συμπεριφορά. Ακόμα και απλά συστήματα όπως το τριγωνικό μπιλιάρδο [34] εμφανίζουν μεγάλη ποικιλία ως προς την δυναμική τους. Επίσης είναι σχετικά εύκολη η διερεύνηση τους γιατί, λόγω της απλότητάς τους, δεν έχουμε τα προβλήματα που προκύπτουν στην ολοκλήρωση των εξισώσεων της κίνησης πολυπλοκότερων συστημάτων. Σχετικά εύκολη είναι και η κατασκευή των διαγραμμάτων του Poincare.

[<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:BunimovichStadium.png>]

Bunimovich stadium [βλ.παράρτημα]

Εκτός από τα κλασικά υπάρχουν και τα κβαντικά μπιλιάρδα [33]. Είναι πάρα πολύ χρήσιμα στην έρευνα του κβαντικού χάους για τους εξής λόγους:

1. Η μαθηματική κατασκευή τους είναι καλά ορισμένη.
2. Είναι γνωστό με λεπτομέρεια το κλασικό τους όριο.
3. Μπορούν να υλοποιηθούν, σε πολλές περιπτώσεις, πειραματικά [36].
4. Εμφανίζουν σχεδόν όλη την συμπτωματολογία του κβαντικού χάους.
5. Μπορούν να χρησιμέψουν στην πειραματική επαλήθευση των αρχών της κβαντομηχανικής.
6. Υπάρχουν ομοειδή κλασικά μοντέλα [35,48] (υπερηχητικές κοιλότητες, μικροκυματικές κοιλότητες, κυματισμοί στην επιφάνεια υγρού κ.α.).

Εικόνα κβαντικού μπιλιάρδου, μεσοσκοπικών διαστάσεων, από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο. Στην μαύρη περιοχή μεταξύ των ηλεκτροδίων υπάρχει αέριο ηλεκτρονίων το οποίο δεν φαίνεται. M. J. Berry, J. A. Katine, R. M. Westervelt, and A. C. Gossard, Phys. Rev. B 50, 17721 (1994).

Η κίνηση ενός σωματιδίου μέσα σε ένα κβαντικό μπιλιάρδο διέπεται από την εξίσωση του Schrödinger σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο S . Δηλαδή

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$\psi_{\text{στο σύνορο } S} = 0$$

Και ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x)e^{i\omega_n t}$$

οδηγούμαστε στην εξίσωση του Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_n^2)\psi_n(x) = 0$$

$$\omega_n = \frac{\hbar}{2m}k_n^2$$

Το πόσο κοντά βρισκόμαστε στο κλασικό όριο εξαρτάται από τον λόγο $\hbar/m$. Το κλασικό όριο προκύπτει όταν $\hbar/m \rightarrow 0$.

Στο σημείο αυτό καλό είναι να παρατηρήσει κανείς την ομοιότητα της εξίσωσης του Schrödinger με την κυματική εξίσωση

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0$$

όπου c είναι η ταχύτητα του κύματος. Προσοχή θέλει το γεγονός ότι στην κυματική εξίσωση έχουμε παράγωγο δευτέρας τάξεως ως προς τον χρόνο. Εφαρμόζοντας ξανά το ανάπτυγμα $\psi_n(x, t) = \psi_n(x) e^{i\omega_n t}$ καταλήγουμε στην έκφραση

$$(\nabla^2 + k_n^2) \psi_n(x) = 0$$

$$\omega_n = ck_n$$

που διαφέρει από την κβαντική περίπτωση στο γεγονός ότι η σχέση διασποράς είναι γραμμική. Η ομοιότητα στις εξισώσεις των στάσιμων λύσεων ανάμεσα στο κβαντικό και στο κυματικό πρόβλημα μας δίνει την δυνατότητα να μελετήσουμε το κβαντικός χάος, στην περίπτωση των μπιλιάρδων, με την βοήθεια κυματικών κλασικών ανάλογων.

Επιφανειακά κύματα νερού σε μπιλιάρδο τύπου στάδιο για δυο διαφορετικές συχνότητες. Από το Quasilinear ridge structures in water surface waves, R. Blumel, I.H Davidson,..., Phys. Rev. A, vol. 45, 2641,1992

Μπιλιάρδα μικροκυμάτων, στατιστική ιδιοτιμών

Το μπιλιάρδο μικροκυμάτων [37] είναι μια διάταξη η οποία αποτελείται από μια κοιλότητα συντονισμού, μια πηγή ηλεκτρομαγνητικής διέγερσης και μια μικρή κεραία. Μέσα στην κοιλότητα διεγείρονται ταλαντώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και με την κεραία μπορούμε να μετρήσουμε την ένταση του πεδίου σε σημεία της επιλογής μας. Το σύστημα διέπεται από τις εξισώσεις του Maxwell

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot D = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

Στην περίπτωση μας οι εξισώσεις του Maxwell εξειδικεύονται στις

$$(\Delta + k^2)E = 0$$

$$(\Delta + k^2)B = 0$$

Το σχήμα της κοιλότητας χαρακτηρίζει το μπιλιάρδο. Πάνω στα τοιχώματα S της κοιλότητας θα πρέπει να ισχύει

$$E_{parallel} = 0, \quad B_{vertical} = 0$$

Κάτω από συγκεκριμένες πειραματικές προϋποθέσεις μπορεί κανείς να δουλέψει σε μια τομή δυο διαστάσεων της κοιλότητας όπου το ηλεκτρικό πεδίο υπακούει στον νόμο

$$(\Delta + k^2)E = 0$$

Έτσι το $E(x,y)$ αντιστοιχεί στην κυματοσυνάρτηση $\psi(x,y)$ με την διαφορά ότι οι ιδιοτιμές της ενέργειας σχετίζονται με το k^2 .

Με την βοήθεια των μπιλιάρδων μικροκυμάτων έγινε πειραματική καταγραφή των ενεργειακών επιπέδων του συστήματος. Μεταβάλλοντας το σχήμα του μπιλιάρδου οι πειραματικοί μπορούν να μετρήσουν φάσματα που προέρχονται από σύστημα με κανονικότητα ή χάος.

Στην έρευνα για το κβαντικό χάος εμφανίζει ενδιαφέρον η κατανομή $p(s)$ των διαφορών μεταξύ διαδοχικών ιδιοενεργειών

$$s_n = E_n - E_{n-1}$$

Ενεργειακό Διάστημα

Η κατανομή αυτή διαφοροποιείται ανάλογα με το αν υπάρχει κανονικότητα ή χάος. Επίσης διαφοροποιείται ανάλογα με τις συμμετρίες που υπάρχουν στο σύστημα. Πριν τον υπολογισμό

της κατανομής των S_n το φάσμα κανονικοποιείται στην μονάδα με την έννοια $\langle S_n \rangle = 1$. Το κανονικοποιημένο φάσμα ονομάζεται *Ξεδιπλωμένο (unfolded spectrum)*.

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο κλασικό μπιλιάρδο είναι ολοκληρώσιμο. Οι ιδιοτιμές της ενέργειας για ένα ορθογώνιο κβαντικό μπιλιάρδο υπολογίζονται θεωρητικά σε κλειστή μορφή. Προκύπτουν δε από την ακόλουθη έκφραση

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b} \right)^2 \right]$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots$$

με a, b τις διαστάσεις των πλευρών του ορθογώνιου παραλληλογράμμου.

Αν σχεδιάσουμε το ομαλοποιημένο φάσμα των διαφορών των διαδοχικών σταθμών για $a/b = \sqrt{\pi/3}$ προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα.

$$a = a/b = \sqrt{\pi/3}$$

Τέτοια φάσματα είναι δυνατόν να επιβεβαιωθούν και πειραματικά όπως προκύπτει από το ακόλουθο σχεδιάγραμμα

Από το άρθρο : F. Hakee, G. Lenz, P. Seba, J. Stain, H-J Stockmann, K. Zyczkowski. Manifestation of wave chaos..., Phys. Rev. A, vol. 44, R6161, (1991)

Η ομαλή καμπύλη, και στα δυο προηγούμενα διαγράμματα, παριστάνει την κατανομή του Poisson

$$P(s) = \exp(-s)$$

Η κατανομή του Poisson είναι χαρακτηριστική στα φάσματα των κβαντικών συστημάτων που το κλασικό τους ανάλογο εμφανίζει κανονικότητα.

Έστω ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε το φάσμα του κβαντικού μπιλιάρδου σχήματος σταδίου. Στην περίπτωση αυτή το φάσμα των ιδιοενεργειών δεν μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή. Μπορεί όμως να προσεγγιστεί αριθμητικά και πειραματικά.

[from D.Stone's page <http://www.eng.yale.edu/stonegroup/>]
Αριστερά: τυπική δομή στάσιμης λύσης κβαντικού σταδίου. Δεξιά: Η κατανομή των ενεργειακών διαστημάτων [βλ.παράρτημα]

Η κατανομή των ενεργειακών Διαστημάτων (level spacing) στην περίπτωση του κβαντικού μπιλιάρδου ακολουθεί την κατανομή του Wigner.

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$$

Η συμπεριφορά αυτή του φάσματος μπορεί να θεωρηθεί τυπική για τα κβαντικά συστήματα με χαοτικό κλασικό ανάλογο.

Πειραματικό αποτέλεσμα όσον αφορά το φάσμα σε μπιλιάρδο με σύνορο ένα τεταρτημόριο του σταδίου. H. J. Stockmann, Quantum chaos in billiards..., Phys. Rev. Let. vol.64, 2215 (1990)

Αντιπαράθεση θεωρητικού και πειραματικού αποτελέσματος για το κβαντικό μπιλιάρδο σχήματος στάδιο. E.J Heller, M.F. Crommie, C.P. Lutz, D.M. Eigler. Nature vol. 369, 464 (1994)

Δυο πράγματα μπορούμε να παρατηρήσουμε σε σχέση με τα προηγούμενα. Το πρώτο είναι ότι στην περίπτωση των μπιλιάρδων μπορούμε να κατασκευάσουμε καλές αριθμητικές μεθόδους προσέγγισης αλλά και επίσης να κάνουμε πειράματα με κλασικά ανάλογα. Και το δεύτερο που αξίζει προσοχής είναι η ποιοτική διαφορά στο φάσμα των αποστάσεων μεταξύ των ιδιοτιμών στην περίπτωση της κανονικότητας και του χάους. Από πειράματα σε άλλα συστήματα αλλά και θεωρητικούς υπολογισμούς φαίνεται ότι οι κατανομές Poisson και Wigner αποτελούν Παγκόσμιο (universal) και χαρακτηριστικό τρόπο συμπεριφοράς όσον αφορά την κανονικότητα και το χάος αντίστοιχα.

Κβαντικές Αμυχές (Quantum Scars)

Ένα από τα πλέον εντυπωσιακά γεγονότα που κάνουν εμφανή μια υποδόσκουσα κλασική συμπεριφορά στην κβαντομηχανική είναι η ύπαρξη των *Κβαντικών Αμυχών* (*Quantum Scars*) [38]. Οι Κβαντικές Αμυχές ιστορικά ορίζονται ως κβαντικές καταστάσεις οι οποίες έχουν την τάση να εντοπίζονται σε ασταθείς κλασικές περιοδικές τροχιές του κλασικού αναλόγου ενός κβαντικού συστήματος. Πλέον η έννοια τους έχει γενικευθεί και σε κάποιες περιπτώσεις ευσταθών περιοδικών τροχιών. Στην περίπτωση των ασταθών περιοδικών τροχιών τις Αμυχές τις συναντάμε συνήθως σε ιδιοκαταστάσεις που αντιστοιχούν σε μεγάλους κβαντικούς αριθμούς. Έτσι

συνήθως το πρόβλημα προσεγγίζεται ημικλασικά [57] με βάση την *Εξίσωση Τχνους του Gutzwiller* [41] (*Gutzwiller Trace Formula*). Στην προσέγγιση αυτή οι Κβαντικές Αμυχές κατασκευάζονται δυναμικά με ανάπτυγμα πάνω στις κλασικές τροχιές γύρω από την περιοδική τροχιά. Κβαντικές Αμυχές μπορούν να παρατηρηθούν και σε κβαντικές απεικονίσεις (quantum maps), όπου μπορούμε να απεικονίσουμε τις περιοδικές τροχιές στροβοσκοπικά ως σημεία ισορροπίας, ξεκινώντας από μια Σύμφωνη κατάσταση η οποία είναι αρχικά εντοπισμένη στο σημείο ισορροπίας. Είναι σημαντικό το γεγονός ότι οι Κβαντικές Αμυχές έχουν εντοπιστεί και πειραματικά [39,42] σε συνέπεια με τους θεωρητικούς υπολογισμούς [40].

Κβαντικές Αμυχές σε κβαντικό μπιλιάρδο στάδιο (Espinoza Ortiz et al. *Journal of Statistical Physics*, vol. 83, Nos. ½, 1996)

Όσον αφορά τις ασταθείς τροχιές παρουσιάζει ενδιαφέρον το φαινόμενο του εντοπισμού σε Κβαντικές Αμυχές (scarring) και με την παρακάτω έννοια. Ένα κλασικό σωματίδιο πάνω σε μια ασταθή τροχιά αναμένεται με μια μικρή διαταραχή να διαφύγει και να σαρώσει όλο τον χώρο των φάσεων. Αντίθετα η Κβαντική Αμυχή αποτελεί στάσιμη λύση του τελεστή χρονικής εξέλιξης και έτσι παραμένει επάνω στην τροχιά.

Αμυχή φωτός στην οπτική (Scared light distribution in a distorted glass fibre cavity, J.U. Nockel and A.D. Stone. Ray and wave chaos in asymmetric resonant cavities. Nature 385, 45, 1997)

Θα σκιαγραφήσουμε την ημικλασική μέθοδο κατασκευής κβαντικών ιδιοκαταστάσεων και Αμυχών. Χωρίς ιδιαίτερη εμβάθυνση θα παρουσιάσουμε μια από τις μεθόδους εύρεσης, στο σύνολο των ιδιοκαταστάσεων, των Κβαντικών Αμυχών.

Η κατασκευή των ιδιοκαταστάσεων βασίζεται στην έννοια της Συνάρτησης Green [1,43]

$$G(q, q'; E) = \langle q | \frac{1}{E - \hat{H}} | q' \rangle = \sum_j \frac{\Psi_j(q) \Psi_j^*(q')}{E - E_j}$$

Συνάρτηση Green

η οποία περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με την δυναμική ενός κβαντικού συστήματος. Τα Ψ_j είναι οι στάσιμες λύσεις με ενέργειες E_j . Στην ημικλασική προσέγγιση κατασκευάζουμε την συνάρτηση Green $G(q, q'; E)$ ως άθροισμα πάνω σε όλες τις τροχιές ενέργειας E οι οποίες έχουν αρχή το σημείο q και τέλος το σημείο q' . Όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό ο υπολογισμός, στην γενική περίπτωση, της συνάρτησης Green δεν είναι απλή υπόθεση.

Η ημικλασική προσέγγιση βασίζεται στην αντικατάσταση του ακριβούς κβαντικού Διαδότη με την ημικλασική του έκδοση.

$$G_{sc}(q, q'; t) = (2\pi i \hbar)^{-d/2} \sum_j \left| \det \left[\frac{\partial^2 S_j(q, q'; t)}{\partial q \partial q'} \right] \right|^2 \exp \left[\frac{i S_j(q, q'; t)}{\hbar} - \frac{i \pi \nu_j}{2} \right]$$

Διαδότης του Van Vleck-Gutzwiller

Στην τελευταία έκφραση το άθροισμα πάνω στο j είναι για όλες τις τροχιές που έχουν αρχή το σημείο q και τέλος το σημείο q' την στιγμή t , d είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας του συστήματος, ο όρος στο άθροισμα με την ορίζουσα παίζει τον ρόλο του τετραγώνου της κλασικής πιθανότητας και η φάση μέσα στο εκθετικό προσδιορίζεται από την κλασική δράση της τροχιάς και τις εστίες (focal points) ν_j . Η δράση της τροχιάς j ορίζεται ως

$$S_j(q, q'; t) = \int_0^t dt' \mathcal{L} = \int_0^t dt' \left[p(t') \dot{q}(t') - H(p(t'), q(t')) \right]$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier

$$\Psi_j(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(i E_j t / \hbar) \Phi(q; t)$$

τότε ισχύει επίσης ότι

$$\Phi(q; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq' G(q, q'; t) \Phi(q'; 0)$$

όπου ουσιαστικά αλλάζουμε αναπαράσταση χωρίς να αλλάζει το φυσικό νόημα.

Έτσι εφαρμόζοντας της ημικλασική συνάρτηση του Green στην τελευταία εξίσωση προκύπτει η ημικλασική δυναμική εξέλιξη του συστήματος στον χρόνο t .

Στην πράξη συνήθως είναι βολικό να αναπτύσσουμε τις καταστάσεις $\Phi(q,t)$ σε μια προκαθορισμένη βάση ως

$$\Phi(q;t) = \sum_k \langle q|k \rangle \langle k|\Phi(t) \rangle$$

Επίσης είναι δυνατόν να προσεγγίσουμε τις ιδιοενέργειες E_j με μετασχηματισμό Fourier της ποσότητας $\langle \Phi(q;0) | \Phi(q;t) \rangle$ και εντοπίζοντας τους συντονισμούς να διαλέξουμε τις «καλύτερες» τιμές για ημικλασικές ιδιοενέργειες. Έχοντας τις ιδιοτιμές της ενέργειας μπορούμε να κατασκευάσουμε και τις ιδιοκαταστάσεις.

Η εύρεση των Κβαντικών Αμυχών γίνεται ξεκινώντας από μια Σύμφωνη κατάσταση πάνω στην κλασική τροχιά την οποία εξελίσσουμε στον χρόνο με την βοήθεια του ημικλασικού Διαδότη. Καθώς η αρχική κατάσταση εξελίσσεται, με την πάροδο του χρόνου, καλύπτει μια περιοχή του θεσεογραφικού χώρου. Οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος οι οποίες είναι πιθανές Κβαντικές Αμυχές είναι αυτές που εμφανίζουν μεγάλη επικάλυψη (overlap) με την προαναφερθείσα περιοχή. Γενικά υπάρχουν διαφορετικές μέθοδοι εντοπισμού των Κβαντικών Αμυχών οι οποίες εφαρμόζονται κατά περίπτωση.

Συστήματα Floquet. Διαταρασόμενος στροφέας (Kicked Top). Στατιστική

Στην έρευνα του κβαντικού χάους ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις συστημάτων τα οποία διαταράσσονται περιοδικά. Τα συστήματα αυτά μπορούν να αντιμετωπιστούν στροβοσκοπικά στο πλαίσιο της μεθοδολογίας του Floquet [44,45].

Μια μεγάλη κλάση τέτοιων συστημάτων είναι αυτά που προκύπτουν από τον τελεστή Χάμιλτον της μορφής

$$H(t) = \begin{cases} H_0 & n\tau < t < (n+1)\tau - \Delta\tau \\ H_0 + \frac{1}{\Delta\tau} V_0 & (n+1)\tau - \Delta\tau < t < (n+1)\tau \end{cases}$$

Ο παραπάνω τελεστής περιγράφει την κατάσταση κατά την οποία το σύστημα διαταράσσεται από παλμούς με περίοδο $\Delta\tau$. Στο συγκεκριμένο μοντέλο η ένταση του παλμού μεγαλώνει αντιστρόφως ανάλογα της διάρκειας του.

Στο όριο $\Delta\tau \rightarrow 0$ το σύστημα θα περιγράφεται από τον ακόλουθο τελεστή

$$H(t) = H_0 + V_0 \sum_n \delta(t - n\tau)$$

Ο τελεστής Floquet περιγράφει την δυναμική ενός περιοδικού συστήματος με βήματα μιας περιόδου. Δηλαδή αν η κατάσταση του συστήματος κατά την n -οστή φορά που επιδρά η διέγερση είναι η Ψ^n τότε θα ισχύει

$$\Psi^{n+1} = F\Psi^n$$

όπου με F συμβολίζουμε τον τελεστή του Floquet.

Στην περίπτωση μας ο τελεστής Floquet θα είναι ο

$$F = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(H_0 + \frac{1}{\Delta\tau}V_0\right)\Delta\tau\right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0(\tau - \Delta\tau)\right)$$

έτσι όταν $\Delta\tau \rightarrow 0$ θα ισχύει ότι

$$F = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}V_0\tau\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\tau\right)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να περιγράψουμε το σύστημα μας σε διακριτό χρόνο με την βοήθεια κβαντικής απεικόνισης (quantum map)

$$\Psi^n = F^n \Psi^0$$

Είναι λογικό να αναζητήσουμε τις στάσιμες λύσεις της απεικόνισης. Αυτές θα προκύψουν από την εξίσωση ιδιοτιμών

$$F\psi_k = \exp(i\varepsilon_k)\psi_k$$

Τα ζεύγη $\{\psi_i, \varepsilon_i\}$ θα είναι οι ψευδοιδιοκαταστάσεις και οι ψευδοιδιοτιμές.

Το φάσμα των αποστάσεων των διαδοχικών ψευδοιδιοτιμών ενός κβαντικού συστήματος αλλάζει ανάλογα με το αν είμαστε σε περιοχή κανονικότητας ή χάους. Ακολουθώντας θα δώσουμε το παράδειγμα του Kicked Top το οποίο είναι ένα σύστημα με μικτή συμπεριφορά ως προς το χάος.

Ένα σύστημα το οποίο είναι γνωστό στην θεωρητική ανάλυση του κβαντικού χάους είναι το Quantum Kicked Top [46,47]. Μια εκδοχή του προκύπτει από τον τελεστή Χάμιλτον

$$H(t) = \frac{\hbar p}{\tau} I_y + \frac{\hbar k}{2I} I_z^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau)$$

Ο πρώτος όρος θα μπορούσε να θεωρηθεί ως η αλληλεπίδραση του spin ενός πυρήνα με ένα σταθερό εξωτερικό μαγνητικό πεδίο κατά την διεύθυνση του άξονα Y όπου ο παράγοντας p/τ είναι η γωνιακή συχνότητα του Larmor. Ο δεύτερος όρος, που είναι πιο περίπλοκος, μπορεί να παραχθεί με την αλληλεπίδραση της τετραπολικής ροπής και ενός μεταβλητού ηλεκτρικού πεδίου. Το I συμβολίζει την ολική στροφορμή και το k/I την ένταση της αλληλεπίδρασης. Η αλληλεπίδραση συμβαίνει με παλμούς.

Ο τελεστής Floquet για το Kicked Top είναι ο

$$F = \exp\left(-i \frac{k}{2I} I_z^2\right) \exp(-ipI_y)$$

στην τελευταία έκφραση έχουμε θεωρήσει ότι $\hbar = 1$.

Το κλασικό όριο προκύπτει καθώς $I \rightarrow \infty$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι στο όριο αυτό προκύπτει η κλασική απεικόνιση

$$X' = \text{Re}(X \cos p + X \sin p + iY) e^{ik(Z \cos p - X \sin p)}$$

$$Y' = \text{Im}(X \cos p + X \sin p + iY) e^{ik(Z \cos p - X \sin p)}$$

$$Z' = -X \sin p + Z \cos p$$

Η συμπεριφορά του κλασικού ορίου μπορεί να εμφανίζει κανονικότητα, χάος ή μικτή συμπεριφορά ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων ελέγχου p, k . Η μεταβολή της δυναμικής αντανακλά στην στατιστική των ιδιοτιμών όπως φαίνεται και στα ακόλουθα διαγράμματα.

$$p = 2, 0.1 \leq k \leq 0.3$$

$$p = 1.7, 10.0 \leq k \leq 10.5$$

$$p = 1.7, 10.0 \leq k \leq 10.5$$

Το κβαντικό χάος έτσι όπως εμφανίζεται στην στατιστική των ενεργειακών διαστημάτων για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του Kicked Top (F. Haake, M. Kus and R.Scharf. Classical and quantum chaos for a kicked top. Z. Phys. B 65, 381,1987)

Στα παραπάνω διαγράμματα έχουμε στην πρώτη περίπτωση κανονικότητα και έτσι τα ενεργειακά Διαστήματα ακολουθούν κατανομή Poisson ενώ στην δεύτερη και τρίτη περίπτωση χάος και έτσι οι κατανομές είναι Wigner. Στο τελευταίο διάγραμμα έχει σπάσει η συμμετρία στην αντιστροφή του χρόνου. Όσον αφορά το θέμα των συμμετριών στο φάσμα των ιδιοενεργειών θα κάνουμε μια εισαγωγή παρακάτω.

Τυχαίοι Πίνακες (Random Matrices)

Η θεωρία των Τυχαίων Πινάκων (Random Matrix Theory) είναι μια μέθοδος φαινομενολογικής μοντελοποίησης πολλών διαφορετικών φυσικών φαινομένων [25,26,49,50]. Η μέθοδος αυτή αρχικά σχεδιάστηκε από τον Wigner σε μια προσπάθεια του να προσεγγίσει το πρόβλημα του φάσματος των ενεργειών αλλά και της δομής των ιδιοκαταστάσεων όσον αφορά συστήματα πολλών σωμάτων. Στην περιοχή αυτή η Θεωρία των Τυχαίων Πινάκων εφαρμόστηκε με επιτυχία στην διερεύνηση των φασμάτων των πυρήνων, πολύπλοκων ατόμων και μορίων. Επίσης πειράματα σκέδασης σε πολύπλοκα συστήματα μοντελοποιήθηκαν επιτυχώς στα πλαίσια της Θεωρίας των Τυχαίων Πινάκων [51].

Πάνω: Κατανομή αποστάσεων διαδοχικών επιπέδων σε πείραμα σκέδασης σε πυρήνες (O. Bohigas, R.U. Haq and A. Pandey, in *Nuclear Data for Science and Technology*, K.H. Bochhoff (ed.), Reidel, Dordrecht (1983), p.809).

Ένας πολύπλοκος βαρύς πυρήνας, θεωρητικά μπορεί να αναπαρασταθεί στην κβαντομηχανική με τον τελεστή Hamilton H . Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής Hamilton δρα σε έναν χώρο Hilbert απείρων διαστάσεων μέσα στον οποίο περιγράφονται οι φυσικές καταστάσεις. Σε ένα πολύπλοκο σύστημα είναι πιθανόν ο τελεστής του Hamilton να είναι άγνωστος ή, ακόμα και αν γνωρίζουμε τις ακριβείς αλληλεπιδράσεις, να είναι πάρα πολύ περίπλοκος. Συχνά ο τελεστής Hamilton ενός σύνθετου συστήματος, όπως ένας βαρύς

πυρήνας, είναι τόσο περίπλοκος που η υπολογιστική αντιμετώπιση του προβλήματος ιδιοτιμών $H\psi_j = E_j\psi_j$ να είναι αδύνατη. Ο Wigner έκανε την παραδοχή ότι είναι δυνατόν να προσομοιώσουμε τον πραγματικό τελεστή Hamilton με έναν τυχαίο πίνακα μεγάλης διάστασης επιλεγμένο από μια συγκεκριμένη κατηγορία Τυχαίων Πινάκων. Η επιλογή γίνεται με τρόπο τέτοιο ώστε τα γενικά χαρακτηριστικά της κατηγορίας που θα επιλέξουμε έρχονται σε συμφωνία με κάποια γενικά γνωρίσματα του φυσικού συστήματος που θέλουμε να περιγράψουμε. Έτσι το ενεργειακά επίπεδα του πραγματικού συστήματος θα μπορούν να προσεγγιστούν από τα επίπεδα του τυχαίου πίνακα.

Η κατάτμηση των Τυχαίων Πινάκων σε κλάσεις φάνηκε ότι ήταν σημαντική από τα πρώτα χρόνια εφαρμογής της θεωρίας σε πραγματικά κβαντικά συστήματα. Ήδη από το 1960 οι Wigner, Dyson, Mehta επινόησαν διακριτές κλάσεις με βάση την συμμετρία αντιστροφής στον χρόνο ενός φυσικού μοντέλου. Έτσι χώρισαν μια μεγάλη κατηγορία Τυχαίων Πινάκων σε τρεις τύπους: αυτούς που δηλώνουν σύστημα με συμμετρία αντιστροφής στον χρόνο και τα στοιχεία τους είναι πραγματικά, αυτούς που υποδηλώνουν σύστημα το οποίο δεν είναι συμμετρικό ως προς την αντιστροφή του χρόνου και τα στοιχεία τους είναι μιγαδικά και τέλος αυτούς που πάλι υπακούουν σε αντιστροφή του χρόνου (με κάποιες επιπλέον δεσμεύσεις) και συνδέονται με αναπαράστάσεις *Τετραδονίων* [52] (*Quaternions*).

Το ενδιαφέρον για την Θεωρία των Τυχαίων Πινάκων αναθερμάνθηκε τα τελευταία χρόνια λόγω της σύνδεσης τους με το κβαντικό χάος. Επίσης η Θεωρία των Τυχαίων Πινάκων επεκτάθηκε και πέραν της φυσικής σε γνωστικά αντικείμενα όπως η συνδυαστική, οι τηλεπικοινωνίες, θεωρία αριθμών κλπ. Θεωρητικά μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η υπόθεση ότι οι τυχαίοι πίνακες εμφανίζουν κάποιες Παγκόσμιες (universal) ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές αφορούν κυρίως την κατανομή των ιδιοτιμών η οποία παρουσιάζει μεγάλες ομοιότητες για τυχαίους πίνακες με διαφορετικές κατανομές των στοιχείων τους. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε κλάσεις Τυχαίων Πινάκων με βάση τις στατιστικές ιδιότητες των ιδιοτιμών τους. Τα θέματα που αφορούν τα Παγκόσμια χαρακτηριστικά των Τυχαίων

Πινάκων αποτελούν ένα σύγχρονο πεδίο έρευνας για τα εφαρμοσμένα μαθηματικά.

Με τον όρο *Συλλογή (Ensemble)* Τυχαίων Πινάκων εννοούμε ένα σύνολο Τυχαίων Πινάκων εφοδιασμένο με μια κατανομή πιθανότητας η οποία μας δείχνει πόσο πιθανό είναι να εμφανιστεί στο δείγμα ένας συγκεκριμένος πίνακας. Έντονο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι Συλλογές των ερμιτιανών πινάκων διάστασης n οι οποίες είναι εφοδιασμένες με πυκνότητα πιθανότητας της μορφής

$$p(H) \propto e^{-\beta \text{Tr}[V(H)]}$$

όπου με V συμβολίζουμε κάποια συνάρτηση στον χώρο των πινάκων αυτών. Για παράδειγμα εάν η συνάρτηση είναι $V(H) = H^2$ τότε $\text{Tr}[V(H)] = \sum_{ij} (H_{ij})^2$.

Εάν εφαρμόσουμε την τελευταία συνάρτηση σε πραγματικού συμμετρικούς πίνακες 2×2 έχουμε

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix}, H_{ij} \in \mathbb{R}$$

και

$$\text{Tr}(H^2) = H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_{12}^2$$

Εφαρμόζοντας το τελευταίο στην σχέση για την κατανομή πιθανότητας της Συλλογής παίρνουμε

$$p(H) \propto e^{-\beta(H_{11}^2 + H_{22}^2 + 2H_{12}^2)}$$

Η τελευταία κατανομή συνίσταται από τρεις ανεξάρτητες κατανομές Gauss. Η διασπορά όσον αφορά τα μη διαγώνια στοιχεία είναι η μισή από ότι για τα διαγώνια.

Όπως αναφέραμε πρωτίτερα υπάρχουν τρεις βασικές Συλλογές Τυχαίων Πινάκων, με ειδική σημασία στην φυσική,

οι οποίες υπακούουν σε διαφορετικές συμμετρίες όσον αφορά τον μετασχηματισμό αντιστροφής του χρόνου. Θα ορίσουμε την μορφή που πρέπει να έχουν τα μέλη της κάθε μιας από αυτές τις Συλλογές. Θα πρέπει να έχει κανείς στο νου του ότι οι πίνακες αυτοί είναι δυνάμει τελεστές Hamilton στην θεωρία του Schrödinger συνεπώς μπορούν να αντιστοιχούν σε ρεαλιστικά φυσικά συστήματα.

(α) Συλλογή πινάκων που αντιστοιχούν σε συστήματα τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα στην αντιστροφή του χρόνου και είναι συμμετρικά σε περιστροφές. Τα συστήματα αυτά μπορούν να αναπαρασταθούν με πραγματικούς συμμετρικούς πίνακες.

$$H_{mn} = H_{nm} = H_{mn}^*$$

Συστήματα με ακέραιο σπιν και σπασμένη περιστροφική συμμετρία μπορούν επίσης να ανήκουν σε αυτή την κλάση.

(β) Συστήματα με σπασμένη την συμμετρία αντιστροφής στον χρόνο. Παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι το ηλεκτρόνιο που κινείται κάτω από την επίδραση σταθερού μαγνητικού πεδίου. Τέτοια συστήματα περιγράφονται από πίνακες ερμιτιανούς. Δηλαδή

$$H_{mn} = [H^+]_{nm}$$

(γ) Συστήματα αναλλοίωτα στην αντιστροφή του χρόνου αλλά με σπασμένη συμμετρία περιστροφής. Οι πίνακες αυτοί μπορούν να γραφούν με όρους Τετραδονίων. Συνήθως χρησιμοποιείται ο ισομορφισμός των Τετραδονίων με τους πίνακες του Pauli. Έτσι οι πίνακες αυτής της κλάσης έχουν την ακόλουθη γενική μορφή:

$$H_{nm}^{(0)} 1_2 - i \sum_{\gamma=1}^3 H_{nm}^{(\gamma)} \sigma_{\gamma}$$

Στην παραπάνω έκφραση με σ_{γ} και $\gamma=1,2,3$ παριστάνουμε τους πίνακες του Pauli. Οι πίνακες $H^{(0)}, H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}$ έχουν όλα τα

στοιχεία τους πραγματικά. Ο πίνακας $H^{(0)}$ είναι συμμετρικός ενώ οι πίνακες $H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}$ είναι αντισυμμετρικοί.

Για να έχουν τα τρία παραπάνω σύνολα πινάκων την έννοια της Συλλογής θα πρέπει να είναι εφοδιασμένα με την πιθανότητα εμφάνισης ενός πίνακα στο δείγμα. Οι Συλλογές αυτές είναι εφοδιασμένες με την Γκαουσιανή κατανομή

$$P_{N\beta}(H) \propto \exp\left(-\frac{\beta N}{\lambda^2} \text{tr} H^2\right)$$

και για το λόγο αυτό ονομάζονται και Γκαουσιανές Συλλογές. Ο παράγοντας N στο εκθετικό είναι η διάσταση των πινάκων και τοποθετείτε στην έκφραση έτσι ώστε το φάσμα να παραμένει φραγμένο καθώς $N \rightarrow \infty$. Ο όρος λ είναι ανεξάρτητος της διάστασης των πινάκων. Οι τρεις Συλλογές χαρακτηρίζονται από τον δείκτη του Dyson β . Έτσι με $\beta=1$ χαρακτηρίζουμε την Συλλογή (α), με $\beta=2$ χαρακτηρίζουμε την Συλλογή (β) και με $\beta=4$ χαρακτηρίζουμε την Συλλογή (γ). Το είδος της συμμετρίας και η χαρακτηριστική κατανομή πιθανότητας παραμένουν αναλλοίωτες σε μετασχηματισμούς ορθογώνιους ($\beta=1$), μοναδιαίους ($\beta=2$) και συμπλεκτικούς ($\beta=3$) όταν αυτοί επιδρούν στους πίνακες των αντίστοιχων Συλλογών. Η κλάση $\beta=1$ καλείται GOE (Gaussian orthogonal ensemble), η κλάση $\beta=2$ είναι η GUE (Gaussian unitary ensemble) και η $\beta=4$ ονομάζεται GSE (Gaussian symplectic ensemble). Οι τρεις Συλλογές είναι μη αναγώγιμες (irreducible) με την έννοια ότι μια ευρύτερη Συλλογή, υπό κάποιες συνθήκες, μπορεί να παραχθεί από αυτές τις τρεις Συλλογές.

Η κατανομή των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων στις τρεις παραπάνω Συλλογές αποτελεί κεντρικής σημασίας ζήτημα στην Θεωρία των Τυχαίων Πινάκων. Για την διερεύνηση του ζητήματος αυτού είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε τις ιδιοτιμές E_k και τα ιδιοδιανύσματα ως νέες ανεξάρτητες μεταβλητές. Με

την βοήθεια της θεωρίας ομάδων, δεδομένων των συμμετριών, τα μέτρα πιθανότητας για τις τρεις Συλλογές μπορούν να παραγοντοποιηθούν σε δύο όρους. Ο ένας όρος εξαρτάται μόνο από τις ιδιοτιμές και ο άλλος μόνο από τα ιδιοδιανύσματα (angles). Τελικά μπορούμε να καταλήξουμε σε έκφραση η οποία εξαρτάται μόνο από τις ιδιοτιμές των πινάκων. Κατόπιν αυτών έχει αποδειχθεί ότι το μέτρο για τις τρεις Συλλογές είναι το

$$P_{N\beta}(E_1, \dots, E_N) \prod_{m>n} |E_m - E_n|^\beta \prod_{i=1}^N dE_i$$

με $\beta = 1, 2, 4$.

Από τον όρο $|E_m - E_n|^\beta$ στην τελευταία έκφραση προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα σχετικά με την άπωση των ενεργειακών επιπέδων. Όσο κοντύτερα είναι δυο ιδιοτιμές τόσο μικρότερος γίνεται ο όρος αυτός. Έτσι βλέπουμε ότι υπάρχει μια τάση για άπωση μεταξύ των ενεργειακών επιπέδων. Στην περίπτωση που αναφερόμαστε στην Συλλογή GOE ο όρος αυτός είναι γραμμικός, στην Συλλογή GUE είναι τετραγωνικός και τέλος στην GSE ο όρος αυτός εξαρτάται από την τέταρτη δύναμη της αποστάσεως των ιδιοτιμών.

Πολύ ενδιαφέρουσα είναι η αναγωγή της τελευταίας έκφρασης στην ακόλουθη.

$$\exp \left[-\beta N \sum_{n=1}^N \left(\frac{E_n}{\lambda} \right)^2 + \frac{\beta}{2} \sum_{m>n} \ln \left(\frac{E_m - E_n}{\lambda} \right)^2 \right] \prod_{i=1}^N dE_i$$

Βλέποντας την έκφραση αυτή από την θερμοδυναμική πλευρά θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ποσότητα μέσα στο εκθετικό είναι η ελεύθερη ενέργεια ενός μονοδιάστατου αερίου αποτελούμενου από N φορτισμένα σωματίδια υπό την επίδραση αρμονικού ταλαντωτή. Οι θέσεις των σωματιδίων αυτών θα είναι οι ιδιοτιμές E_k . Τον ρόλο της θερμοκρασίας παίζει η ποσότητα $1/\beta$. Η αναλογία αυτή μας βοηθά να καταλάβουμε τον μηχανισμό της άπωσης των κοντινών

ενεργειακών επιπέδων στα φάσματα χαοτικών συστημάτων όπως και την ακαμψία του φάσματος στις μεγάλες αποστάσεις. Τα σωματίδια προσπαθούν να είναι όσο το δυνατόν πιο απομακρυσμένα, λόγω ηλεκτροστατικής άπωσης Coulomb, αλλά τα συγκρατεί το αρμονικό δυναμικό.

Η κανονικοποιημένη έκφραση της πιθανότητας σε σχέση με τις ιδιοτιμές είναι η ακόλουθη

$$P_{N\beta}^{(E)}(x_1, \dots, x_N) = C_{N\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^N x_n^2\right) |\Delta_N(X)|^\beta$$

$$\Delta_N(x) = \prod_{n < m} (x_n - x_m)$$

με $x_1, x_2, \dots$ τις ιδιοτιμές και

$$C_{N\beta} = \frac{\beta^{N/2 + \beta N(N-1)/4}}{(2\pi)^{N/2}} \frac{\Gamma^N(1 + \beta/2)}{\prod_{n=1}^N \Gamma(1 + \beta n/2)}$$

Σημασία στην διερεύνηση του φάσματος των Τυχαίων Πινάκων παίζουν και οι στατιστικές συσχετίσεις (correlations) μεταξύ των ιδιοτιμών. Η συσχέτιση τάξης k ορίζεται ως

$$R_k^{(\beta)}(x_1, \dots, x_k) = \frac{N!}{(N-k)!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{k+1} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_N |\Delta_N(x)|^\beta P_N^{(\beta)}(x)$$

Σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατόν η συσχέτιση να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Στην γενική περίπτωση όμως ο υπολογισμός των συσχετίσεων γίνεται αριθμητικά.

Στο κβαντικό χάος το σημείο του μεγαλύτερου ενδιαφέροντος είναι η κατανομή των διαφορών των διαδοχικών ιδιοτιμών του τελεστή Hamilton. Όσον αφορά τις συμμετρίες GOE, GUE και GSE, ο Wigner κάνοντας χρήση 2×2 πινάκων, απέδειξε ότι οι κατανομές των διαφορών προκύπτουν από τον ακόλουθο γενικό τύπο:

$$p_{\beta} = a_{\beta} s^{\beta} \exp(-b_{\beta} s^2)$$

όπου

$$a_{\beta} = 2 \frac{\Gamma^{\beta+1}[(\beta+2)/2]}{\Gamma^{\beta+2}[(\beta+1)/2]} \quad \text{και} \quad b_{\beta} = 2 \frac{\Gamma^2[(\beta+2)/2]}{\Gamma^2[(\beta+1)/2]}$$

με $\beta=1,2,4$. Έτσι έχουμε για τις τρεις περιπτώσεις

GOE	$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$	$b_1 = \frac{\pi}{4}$
GUE	$\alpha_2 = \frac{32}{\pi^2}$	$b_2 = \frac{4}{\pi}$
GSE	$\alpha_4 = \frac{262144}{729\pi^3}$	$b_4 = \frac{64}{9\pi}$

Ακολουθεί το διάγραμμα των τριών κατανομών.

Πάνω: Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην GOE, η διακεκομμένη στην GUE και η γραμμή με τις τελείες στην GSE. [βλ.παράρτημα]

Πολλές φορές θέλουμε να περιγράψουμε Συλλογές Τυχαίων Πινάκων που να μην ικανοποιούν απόλυτα κάποια από τις τρεις συμμετρίες. Άλλες φορές θέλουμε να βρούμε ένα τρόπο να μεταβαίνουμε παραμετρικά από μια Συλλογή σε μια άλλη ομαλά. Αυτό μπορεί να γίνει και υπάρχουν διάφορες παραμετροποιήσεις. Θα δώσουμε το παράδειγμα της μετάβασης από GOE σε GUE. Έστω H^A πραγματικός αντισυμμετρικός Γκαουσιανός πίνακας με την ίδια διακύμανση με τους πίνακες της Συλλογής GOE. Θεωρώντας τον πίνακα που αποτελείται από τα παρακάτω στοιχεία

$$H_{nm} = H_{nm}^{GOE} + i\sqrt{t/N}H_{nm}^A$$

τότε όταν $t=0$ η Συλλογή είναι η GOE ενώ εάν $t=N$, με N την διάσταση των πινάκων, τότε η Συλλογή είναι η GUE.

Όταν μελετάμε ένα ρεαλιστικό κβαντικό σύστημα ο τελεστής Hamilton, εκτός από τις γενικές συμμετρίες, θα εμπεριέχει και τα ιδιαιτέρως χαρακτηριστικά αυτού του συστήματος. Αυτό έχει σαν συνέπεια το φάσμα ενός ρεαλιστικού συστήματος να μην συμπίπτει απόλυτα με κάποιο από τα φάσματα των προαναφερθέντων Συλλογών. Δηλαδή αν και το φάσμα του θα ακολουθεί σε γενικές γραμμές κάποιο από αυτά θα υπάρχουν διακυμάνσεις οι οποίες ενίοτε θα είναι μεγάλες. Έτσι σχεδόν πάντα ακολουθούμε μια διαδικασία κανονικοποίησης του φάσματος. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται στην Θεωρία των Τυχαίων Πινάκων *Ξεδίπλωμα (Unfolding)* [53]. Ορίζουμε ως την συνάρτηση φάσματος ενός συστήματος την έκφραση

$$\rho(E) = \overline{\sum_{\mu} \delta(E - E_{\mu})}$$

Για να μπορέσουμε να ομαλοποιήσουμε το φάσμα αφαιρώντας τα πολύ ιδιαιτέρως χαρακτηριστικά του συστήματος, ένας τρόπος είναι, να ξεκινήσουμε από το ακόλουθο φάσμα

$$\varepsilon_{\mu} = \int_{-\infty}^{E_{\mu}} dE \rho(E)$$

Από κατασκευής οι νέες ιδιοτιμές είναι ποσότητες αδιάστατες και η μέση απόσταση μεταξύ των διαδοχικών ιδιοτιμών ισούται με την μονάδα. Να σημειωθεί ότι ακόμα και μετά από την κανονικοποίηση το φάσμα του συστήματος δεν είναι αντιστοιχεί απόλυτα στη κατανομή Poisson ή Wigner. Στην προσπάθεια υπολογιστικής αντιμετώπισης του προβλήματος γίνονται επιπλέον προσπάθειες ομαλοποίησης του φάσματος συχνά αφαιρώντας ακόμα και κάποιες τιμές οι οποίες θεωρούνται «κακές». Άλλες φορές με την βοήθεια κάποιου φίλτρου μπορούμε να πετύχουμε περαιτέρω ομαλοποίηση του φάσματος. Μια συνήθης επιλογή φίλτρου είναι η συσχέτιση $R_1(E)$. Έτσι μπορούμε να διαχωρίσουμε το φάσμα στο ομαλό κομμάτι και στις διακυμάνσεις [53]

$$n(\varepsilon) = n_{smooth}(\varepsilon) + n_{fl}(\varepsilon)$$

Γενικά η κάθε περίπτωση έχει τις ιδιαιτερότητες της και αντιμετωπίζεται ξεχωριστά.

Όταν έχουμε μετάβαση ενός κβαντικού συστήματος από την κανονικότητα στο χάος έχουμε και αλλαγή της στατιστικής των ιδιοτιμών του τελεστή Hamilton. Στην περιοχή της κανονικότητας τα ενεργειακά Διαστήματα του συστήματος ακολουθούν την κατανομή του Poisson. Έτσι για να μελετήσουμε αριθμητικά την μετάβαση μπορούμε να προσαρμόσουμε στα αριθμητικά δεδομένα κάποια κατανομή η οποία να μπορεί να κινηθεί μεταξύ της Poisson και της Wigner. ένα παράδειγμα είναι η ακόλουθη κατανομή:

$$p_{\beta_{eff}}(s) = A_{\beta_{eff}} s^{\beta_{eff}} \exp \left[-\frac{\pi^2 \beta_{eff}}{16} s^2 - \left(B_{\beta_{eff}} - \frac{\pi \beta_{eff}}{4} \right) s \right]$$

Η παράμετρος της κατανομής αυτής είναι το $\beta_{eff} \in [0,4]$.

Προκειμένου να προσομοιώσουμε ένα φαινόμενο με την βοήθεια των Τυχαίων Πινάκων, είναι πιθανόν να χρειαστούμε ένα μεγάλο αριθμό πινάκων από μια Συλλογή. Έτσι θα πρέπει να έχουμε μια μέθοδο κατασκευής πινάκων [54] μιας κλάσης με τυχαίο αλλά συνεπή τρόπο. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι που μας

επιτρέπουν να λαμβάνουμε τέτοιους πίνακες και οι περισσότερες βασίζονται στα ακόλουθα συμπεράσματα.

(α) GOE: Έστω ότι ο πίνακας A είναι διαστάσεων $n \times n$ και ότι κάθε στοιχείο του κατανέμεται ανεξάρτητα και κανονικά, δηλαδή $(a)_{ij} \sim N(0,1)$. Επίσης, έστω ότι κατασκευάζουμε τον συμμετρικό πίνακα H διάστασης $n \times n$ ως

$$H = \frac{A + A^T}{2}$$

με A^T να είναι ο ανάστροφος του A . Τότε τα διαγώνια στοιχεία του H κατανέμονται ως $(h)_{ii} \sim N(0,1)$ ενώ τα μη διαγώνια ως $(h)_{i \neq j} \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Ο πίνακας H ανήκει στην Συλλογή GOE.

(β) GUE: Έστω ότι ο πίνακας A είναι διαστάσεων $n \times n$ με μιγαδικά στοιχεία και ότι κάθε στοιχείο του κατανέμεται ανεξάρτητα και κανονικά, δηλαδή $(a)_{ij} \sim N^C(0,1)$. Επίσης, έστω ότι κατασκευάζουμε τον ερμιτιανό πίνακα H διάστασης $n \times n$ ως

$$H = \frac{A + A^*}{2}$$

με A^* να είναι ο συζυγής του A . Τότε τα διαγώνια στοιχεία του H κατανέμονται ως $(h)_{ii} \sim N(0,1), (h)_{ii} \in \mathbb{R}$ ενώ τα μη διαγώνια (υπό την συνθήκη της ερμιτιανότητας) ως $(h)_{i \neq j} \sim N_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Δηλαδή εάν αναλύσουμε τα στοιχεία του ερμιτιανού πίνακα H ως $(h)_{lm} = (u)_{lm} + i(v)_{lm}$ ισχύουν

$(u)_{lm}, (v)_{lm} \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad 1 \leq l < m \leq n$ και τα υπόλοιπα στοιχεία

είναι τα συζυγή τους. Ο πίνακας H ανήκει στην Συλλογή GUE.

(γ) GSE: Έστω ότι ο πίνακας Τετραδονίων A είναι διαστάσεων $n \times n$ και τα στοιχεία του κατανέμονται ως $(a)_{ij} \sim N^{\mathcal{O}}(0, 1)$. Επίσης, έστω ότι κατασκευάζουμε τον πίνακα H διάστασης $n \times n$ ως

$$H = \frac{A + A^D}{2}$$

με A^D να είναι ο Δυικός Ανάστροφος (Dual Transpose) του A . Από κατασκευής ισχύει ότι $H = H^D$. Προκύπτει ότι τα διαγώνια στοιχεία του H κατανέμονται ως $(h)_{ij} \sim N(0, 1), (h)_{ii} \in \mathbb{R}$

ενώ τα μη διαγώνια στοιχεία ως $(h)_{i \neq j} \sim N_4\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Δηλαδή εάν

αναλύσουμε τα στοιχεία του ερμιτιανού πίνακα H ως $(h)_{lm} = (u)_{lm} + i(v)_{lm} + j(w)_{lm} + k(z)_{lm}$ ισχύουν

$(u)_{lm}, (v)_{lm}, (w)_{lm}, (z)_{lm} \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad 1 \leq l < m \leq n$ και τα υπόλοιπα

στοιχεία είναι τα συζυγή τους. Ο πίνακας H ανήκει στην Συλλογή GSE.

Στην παράγραφο αυτή κάνουμε μια μικρή εισαγωγή στα Τετραδόνια [52] δίνοντας κάποιους βασικούς ορισμούς. Ως Τετραδόνιο q ορίζουμε την παρακάτω μαθηματική οντότητα

$$a \cdot 1 + b \cdot i_1 + c \cdot i_2 + d \cdot i_3, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

με

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_1 i_2 i_3 = -1$$

Η έννοια της συζυγίας των Τετραδονίων ορίζεται ως

$$\bar{q} = a \cdot 1 - b i_1 - c i_2 - d i_3$$

Και το μέτρο ενός Τετραδονίου είναι το

$$\|q\|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Ενδιαφέρον στην Θεωρία των Τυχαίων Πινάκων παρουσιάζουν και οι πίνακες των Τετραδονίων. Έστω ο πίνακας $Q \rightarrow (q_{ij})$ με τα q_{ij} να είναι Τετραδόνια. Ο πίνακας Τετραδονίων $Q^D \rightarrow (q^D_{ij})$ θα λέγεται Δυικά Συζυγής (dual transpose) του Q εάν $q^D_{kj} = \bar{q}_{jk}$. Εάν $Q = Q^D$ τότε λέμε ότι ο πίνακας Τετραδονίων είναι Αυτοδυικός (self dual).

Τα Τετραδόνια μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες 2×2 . Η μη αναγώγιμη αναπαράσταση γίνεται με την βοήθεια των μητρών του Pauli ως εξής:

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 \rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad i_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Με βάση την αναπαράσταση αυτή ένα Τετραδόνιο $q = a \cdot 1 + b \cdot i_1 + c \cdot i_2 + d \cdot i_3$ θα έχει την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

και

$$\bar{q} \rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}$$

Γενικεύοντας σε αναπαράστασεις μεγαλύτερης διάστασης $2N \times 2N$ έχουμε την γενική μορφή

$$Q = Q_0 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Q_1 \otimes \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + Q_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + Q_3 \otimes \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

με τα Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 να είναι πραγματικοί πίνακες διάστασης $N \times N$. Με βάση την μορφή αυτή ένα αυτοδυικό Τετραδόνιο απεικονίζεται σε έναν ερμιτιανό πίνακα.

Στους υπολογισμούς είναι πολύ σημαντικό ότι οι τυχαίοι πίνακες εμφανίζουν σε μεγάλο βαθμό εργοδικότητα [59]. Έτσι είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε στατιστικές ιδιότητες του φάσματος, όπως η μέση απόσταση μεταξύ δυο επιπέδων, «τρέχοντας» έναν μεγάλο αριθμό Τυχαίων Πινάκων.

Αναπαράσταση στο χώρο των φάσεων

Η κατάσταση ενός κλασικού συστήματος μπορεί να καθοριστεί πλήρως εάν γνωρίζουμε την θέση και την ορμή όλων των σωμάτων που το απαρτίζουν. Ο χώρος με άξονες τις θέσεις και τις ορμές των σωματιδίων ονομάζεται χώρος των φάσεων. Εάν το σύστημα αποτελείται από N σωματίδια τότε ο χώρος των φάσεων θα έχει διάσταση $6N$. Η κατάσταση όλου του συστήματος περιγράφεται πλήρως με ένα σημείο στον χώρο αυτό. Εάν το σύστημα περιγράφεται στατιστικά τότε πρέπει να ορίσουμε μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(p, q)$ στον χώρο αυτό [30,31]. Αυτή είναι η περίπτωση της κλασικής στατιστικής μηχανικής. Θα είχε ενδιαφέρον εάν μπορούσαμε να περιγράψουμε ένα κβαντικό σύστημα με αντίστοιχο τρόπο στον χώρο των φάσεων. Η απάντηση είναι θετική αν αντικαταστήσουμε την έννοια της πυκνότητας πιθανότητας με κάποιες παρεμφερείς έννοιες. Να σημειωθεί ότι οι κβαντικές συναρτήσεις κατανομής στην αναπαράσταση χώρου των φάσεων δεν είναι κατανομές πιθανότητας με την αυστηρή έννοια.

Ένα παράδειγμα κβαντικής συνάρτησης κατανομής στον χώρο των φάσεων είναι η κατανομή του Wigner. Η κατανομή του Wigner σε συνάρτηση με την κυματοσυνάρτηση του συστήματος των n σωματιδίων ορίζεται ως

$$P(q, p) = \left(\frac{1}{2\hbar\pi} \right)^n \int dy \psi(q - y/2) \psi(q + y/2)^* e^{ipy/\hbar}$$

Η κατανομή του Wigner δεν είναι στην πραγματικότητα κατανομή πιθανοτήτων γιατί μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Έτσι στην πραγματικότητα είναι περισσότερο ένα υπολογιστικό εργαλείο παρά μια κατανομή στον χώρο των φάσεων. Επίσης η συνάρτηση του χώρου των φάσεων που αντιστοιχεί στον τυχόντα τελεστή A ορίζεται ως

$$A(q, p) = \int dy e^{ipy/\hbar} \left\langle q - \frac{y}{2} \left| A \right| q + \frac{y}{2} \right\rangle$$

Με την βοήθεια της μεθοδολογίας αυτής μπορούμε να έχουμε μια πιο απτή αναπαράσταση της κατάστασης ενός κβαντικού συστήματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται στην θεωρία του Wigner το καθεστώς της μη μετάθεσης των κβαντικών τελεστών. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με τον von Neumann εάν μια κλασική ποσότητα είναι το άθροισμα δυο άλλων $a + b$ και κβαντικά $a \rightarrow A, b \rightarrow B$ τότε ο αντίστοιχος κβαντικός τελεστής θα είναι ο $A + B$. Επίσης εάν κλασικά ένα μέγεθος προκύπτει ως συνάρτηση ενός άλλου, αντίστοιχα θα ορίζεται και ο κβαντικός τελεστής. Δηλαδή $f(a) \rightarrow f(A)$. Η διαφοροποίηση υπάρχει στην περίπτωση που το κλασικό μέγεθος προκύπτει ως γινόμενο δυο άλλων φυσικών μετρήσιμων. Στην κβαντομηχανική δυο μεγέθη ενδέχεται να μην μπορούν να προσδιοριστούν ταυτόχρονα. Λέμε τότε ότι τα δυο αυτά μεγέθη δεν μετατίθενται και $AB \neq BA$. Στην προσέγγιση του Wigner η μη μεταθετικότητα των κβαντικών τελεστών αντικατοπτρίζεται στην παρακάτω ανάλυση.

Έστω

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{F}$$

τότε

$$\begin{aligned} F(q, p) &= \int dz e^{ipz/\hbar} \langle q - z/2 | \hat{A} \hat{B} | q + z/2 \rangle \\ &= \int dz dq' e^{ipz/\hbar} \langle q - z/2 | \hat{A} | q' \rangle \langle q' | \hat{B} | q + z/2 \rangle \end{aligned}$$

και μπορεί να προκύψει ότι

$$F(q, p) = A(q, p) e^{\hbar\Lambda/2i} B(q, p) = B(q, p) e^{-\hbar\Lambda/2i} A(q, p)$$

με

$$\Lambda = \frac{\bar{\partial}}{\partial p} \frac{\bar{\partial}}{\partial q} - \frac{\bar{\partial}}{\partial q} \frac{\bar{\partial}}{\partial p}$$

Θα δώσουμε το παράδειγμα του κβαντικού απλού αρμονικού ταλαντωτή. Ο τελεστής Χάμιλτον του συστήματος είναι

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2$$

Η βασική κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή είναι η

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi} x_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a_0^2}\right)$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Η κατανομή Wigner για την βασική κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή είναι η

$$P(x, p) = \int d\xi \psi^*(x + \xi/2) \psi(x - \xi/2) e^{ip\xi/\hbar} = 2e^{\left(-\frac{x^2}{2a_0^2} - \frac{p^2}{2q_0^2}\right)}$$

$$q_0 = \frac{\hbar}{2a_0} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$$

Στην παραπάνω περίπτωση η συνάρτηση του Wigner είναι θετική και μπορεί να θεωρηθεί πραγματική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας.

Η συνάρτηση Wigner μπορεί να αναπαραστήσει και Μικτές κβαντικές καταστάσεις με την έννοια

$$P(q, p) = \sum_i w_i P_i(q, p)$$

όπου η μικτή συνάρτηση Wigner $P(q, p)$ εκφράζεται σε ανάπτυγμα των Καθαρών καταστάσεων $P_i(q, p)$. Η αναπαράσταση μικτών καταστάσεων στον χώρο των φάσεων είναι σημαντική στην αναπαράσταση πραγματικών συστημάτων και αποτελεί ένα μεγάλο πεδίο προβληματισμών [61] στην προσπάθεια της περιγραφής της κβαντομηχανικής στον φασικό χώρο.

Η γνώση της κατανομής του Wigner μια δεδομένη στιγμή αρκεί για τον προσδιορισμό της δυναμικής του συστήματος. Εάν P είναι η συνάρτηση Wigner τότε η δυναμική της θα προσδιορίζεται από την ακόλουθη παράσταση

$$\frac{\partial P(q, p)}{\partial t} = -\llbracket P(q, p), H(q, p) \rrbracket$$

Εξίσωση Κίνησης της συνάρτησης Wigner

Στην παραπάνω έκφραση με $H(q, p)$ συμβολίζουμε την κλασική συνάρτηση Χάμιλτον του συστήματος και με $\llbracket f, g \rrbracket = \frac{2}{\hbar} f(q, p) \sin \left[\frac{\hbar}{2} (\bar{\partial}_q \bar{\partial}_p - \bar{\partial}_p \bar{\partial}_q) \right] g(q, p)$ τον μεταθέτη του Moyal.

Η Εξίσωση Κίνησης της συνάρτησης Wigner μπορεί να εκφραστεί ως διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (για απλότητα θεωρούμε μονοδιάστατη κίνηση)

$$\frac{\partial P(q, p)}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial P(q, p)}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} \frac{\partial P(q, p)}{\partial p} + \sum_{k=1, \infty} \frac{(-\hbar^2/4)^k}{(2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1} V}{\partial q^{2k+1}} \frac{\partial^{2k+1} P(q, p)}{\partial p^{2k+1}}$$

Στην προσπάθεια διερεύνησης του κβαντικού χάους συχνά θέλουμε να κατασκευάζουμε κβαντικές καταστάσεις οι οποίες να είναι όσο το δυνατόν πιο συγγενικές με την έννοια του κλασικού υλικού σημείου. Θέλουμε δηλαδή να κατασκευάζουμε εντοπισμένες καταστάσεις τις οποίες να αντιστοιχούμε σε σημεία του χώρου των φάσεων. Τέτοιες καταστάσεις ονομάζονται Σύμφωνες (Coherent). Οι Σύμφωνες καταστάσεις έχουν την ελάχιστη δυνατή αβεβαιότητα $\Delta q \Delta p (\geq \hbar/2)$.

Παράδειγμα Σύμφωνης κατάστασης είναι αυτή που προκύπτει από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi_0(x) = C \exp \left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4b^2} + \frac{i \langle P \rangle x}{\hbar} \right]$$

$$\Delta x = b$$

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2b}$$

με αντίστοιχη συνάρτηση Wigner την

$$W_0(R, P) = A \exp \left[-\frac{(R - \langle x \rangle)^2}{2b^2} - \frac{4b^2 (P - \langle P \rangle)^2}{2\hbar^2} \right]$$

Οι παραπάνω Σύμφωνες καταστάσεις δεν είναι ορθογώνιες η μια προς την άλλη. Συμβολίζοντας με

$$\langle x | q, p \rangle = (2\pi s^2)^{-1/4} \exp \left[-\frac{(x - q)^2}{4s^2} \right] \exp(ipx/\hbar)$$

$$\delta q = s, \quad \delta p = \frac{\hbar}{2s}$$

Ισχύει η σχέση πληρότητας

$$\int |q, p\rangle \langle q, p| dq dp = 2\pi\hbar$$

Να σημειωθεί ότι για κάθε διαφορετική τιμή της παραμέτρου s παίρνουμε και μια διαφορετική οικογένεια καταστάσεων $|q, p\rangle$.

Οι Σύμφωνες καταστάσεις και η πληρότητα τους μας βοηθούν να ορίσουμε μια άλλη κλάση κβαντικών κατανομών στον χώρο των φάσεων. Είναι η κατανομή του Husimi [55] η οποία για μια εν γένει μικτή κατάσταση ρ ορίζεται ως

$$\rho_H(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \langle q, p | \rho | q, p \rangle$$

Στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε Καθαρή κατάσταση ισχύει απλά $\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|$, έτσι η κατανομή του Husimi είναι η

$$\rho_H(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle q, p | \Psi \rangle|^2$$

Η κατανομή του Husimi είναι παντού θετική και ισχύει ότι

$$\int \rho_H(q, p) dq dp = 1$$

Η κατανομή του Husimi μπορεί να θεωρηθεί παράγωγη της κατανομής του Wigner γιατί μπορεί να προκύψει από αυτήν με Γκαουσιανή ομαλοποίηση. Ο πυρήνας της ομαλοποίησης είναι ο ακόλουθος

$$\frac{1}{\pi\hbar} \exp\left[-\frac{(q'-q)^2}{2s^2}\right] \exp\left[-(p'-p)^2(2s^2/\hbar^2)\right]$$

Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε εξίσωση κίνησης για την κατανομή του Husimi αλλά η εξίσωση αυτή είναι πολύ πιο περίπλοκη από την εξίσωση του Schrodinger και έτσι η υπολογιστική της αξία είναι μειωμένη.

Στην προσέγγιση του Husimi για να είμαστε κοντά στην κλασική εικόνα θα πρέπει να διαλέγουμε το $\delta q=s$ μικρό σε σχέση με τις χωρικές ποιοτικές διακυμάνσεις όμως όχι τόσο μικρό που το δp να γίνεται μεγάλο σε σχέση με τις λεπτομέρειες του χώρου των ορμών.

Εκτός από τις κατανομές του Wigner και του Husimi υπάρχουν και άλλες κατανομές οι οποίες προσθέτουν στην κατανόηση της αναπαράστασης των κβαντικών φαινομένων στον κλασικό χώρο των φάσεων. Καμία όμως από αυτές δεν είναι, στην γενική περίπτωση, κατανομή πιθανότητας με την έννοια της κλασικής στατιστικής φυσικής και αυτό ισχύει γιατί κάθε αναπαράσταση της κβαντομηχανικής θα πρέπει να εμπεριέχει και την δυνατότητα της μη τοπικότητας.

Οι ιδιοενέργειες ως δυναμικό σύστημα. Το μοντέλο Pechukas-Yukawa

Σε πολλά πειράματα τα ενεργειακά επίπεδα ενός κβαντικού συστήματος προσδιορίζονται ως συνάρτηση μια εξωτερικής παραμέτρου. Κάποιες φορές η αλλαγή αυτής της παραμέτρου μεταβάλλει δραστικά το φάσμα του συστήματος. Παραδείγματα έχουμε από την αλλαγή των ενεργειακών επιπέδων του ατόμου του υδρογόνου σε μαγνητικό πεδίο ή την μεταβολή της στατιστικής ενός κβαντικού μπιλιάρδου στην μεταβολή της γεωμετρίας των συνόρων του.

Η μεταβολή της τιμής μιας εξωτερικής παραμέτρου μεταφράζεται στην μεταβολή κάποιου παράγοντα του τελεστή Hamilton και αυτό μπορεί να συνδέεται με πληθώρα φαινομένων [56] όπως σπάσιμο συμμετριών, αλλαγή στατιστικής, πέρασμα από την κανονικότητα στο χάος, Απωθημένες Διασταυρώσεις κλπ. Έχει λοιπόν ενδιαφέρον να μελετήσουμε την δυναμική των ιδιοενεργειών συναρτήσει μιας μεταβλητής του τελεστή Hamilton. Είναι έτσι δυνατόν να ορίσουμε ένα αφηρημένο δυναμικό σύστημα που στο χώρο των φάσεων θα αναπαρίστανται οι ιδιοενέργειες ενώ τον ρόλο του χρόνου θα παίζει η δυναμική παράμετρος.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που η δυναμική παράμετρος εμπλέκεται γραμμικά στον τελεστή Hamilton. Έστω δηλαδή ότι

$$H = H_0 + tV$$

όπου με H_0 συμβολίζουμε το αδιατάρακτο σύστημα και με tV την διαταραχή. Ακόμα και εάν το αδιατάρακτο σύστημα χαρακτηρίζεται από κανονικότητα ενδέχεται το συνολικό σύστημα να είναι χαοτικό από μια τιμή της παραμέτρου t και μετά. Τυπικό παράδειγμα είναι το άτομο του υδρογόνου σε ισχυρό μαγνητικό πεδίο που αναφέραμε και προηγουμένως.

Όπως προαναφέραμε η διαταρακτική παράμετρος t θα παίξει τον ρόλο του χρόνου σε ένα δυναμικό σύστημα που αποτελείται από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή Hamilton. Το μοντέλο αυτό είναι ουσιαστικά μια επέκταση της ιδέας των κβαντικών διαταραχών. Έστω ότι συμβολίζουμε τις ιδιοτιμές με x_n και τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις με $|n\rangle$, δηλαδή ισχύει

$$H|n\rangle = x_n|n\rangle$$

Ξέρουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη ορθοκανονικότητας

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$$

Εάν παραγωγίσουμε ως προς το t έχουμε

$$\frac{\partial(\langle n|)}{\partial t}|m\rangle - \langle n|\frac{\partial(|m\rangle)}{\partial t} = 0$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης πληρότητας

$$\sum_k |k\rangle\langle k| = 1$$

Ισχύει για αυθαίρετο μετρήσιμο A ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle n | A | m \rangle &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle n | \right) A | m \rangle + \langle n | \frac{\partial A}{\partial t} | m \rangle + \langle n | A \left(\frac{\partial}{\partial t} | m \rangle \right) \\ &= \sum_k \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \langle n | \right) | k \rangle \langle k | A | m \rangle + \langle n | A | k \rangle \langle k | \left(\frac{\partial}{\partial t} | m \rangle \right) \right] + \langle n | \frac{\partial A}{\partial t} | m \rangle \end{aligned}$$

Εκφράζοντας την παραπάνω σχέση ως προς τα στοιχεία πίνακα του A ισχύει ότι

$$\frac{dA_{nm}}{dt} = i \sum_k (H_{nk} A_{km} - A_{nk} H_{km}) + \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{nm}$$

Και εάν θέλουμε να εκφράσουμε την τελευταία σχέση σε πιο συμπαγή μορφή έχουμε ότι

$$\frac{dA}{dt} = i[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Πρέπει εδώ να υπενθυμίσουμε ότι στην παραπάνω έκφραση το t δεν είναι ο πραγματικός χρόνος αλλά ο συντελεστής της διαταραχής. Παρόλα αυτά η τελευταία εξίσωση είναι η ίδια όπως στην περίπτωση που το t εκφράζει χρόνο.

Με παρόμοιους συλλογισμούς μπορούμε να καταλήξουμε στο δυναμικό σύστημα των Pechukas-Yukawa. Το σύστημα αυτό συνοψίζεται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\dot{x}_n = p_n$$

$$\dot{p}_n = 2 \sum_{k(\neq n)} \frac{|f_{nk}|^2}{(x_n - x_k)^3}$$

$$\dot{f}_{nm} = \sum_{k(\neq n,m)} f_{nk} f_{km} \left[\frac{1}{(x_n - x_k)^2} - \frac{1}{(x_m - x_k)^2} \right]$$

σε συνδυασμό με τις παραστάσεις

$$p_n = V_{nn}$$

$$f_{nm} = (x_n - x_m) V_{nm} \quad \mu\epsilon \quad n \neq m$$

Αναφορές.

- [1]. Martin C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, (1990) Springer-Verlag, New York ISBN=0-387-97173-4.
- [2]. Roderick V. Jensen, *Quantum chaos*, *Nature* 355, 311 - 318 (23 January 1992); doi:10.1038/355311a0.
- [3]. Hans-Jürgen Stöckmann (Author), Martin C. Gutzwiller (Reviewer), *Quantum Chaos: An Introduction*, *American Journal of Physics*, August 2000, Volume 68, Issue 8, pp. 777-778, <http://dx.doi.org/10.1119/1.19544>.
- [4]. *Quantum chaology, not quantum chaos*, Michael Berry, 1989, *Phys. Scr.*, 40, 335-336
- [5]. *Quantum Signatures of Chaos*, Fritz Haake, Edition: 2, Springer, 2001, ISBN 3540677232, 9783540677239.
- [6]. Jules Henri Poincaré (1890) "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Divergence des séries de M. Lindstedt," *Acta Mathematica*, vol. 13, pages 1-270.
- [7]. Florin Diacu and Philip Holmes (1996) *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability*, Princeton University Press.
- [8]. Hadamard, Jacques (1898). "Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques". *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 4: pp. 27-73.
- [9]. George D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, vol. 9 of the *American Mathematical Society Colloquium Publications* (Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1927)
- [10]. P. Ehrenfest: Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik *Zeitschrift für Physik A* Ausgabe 45, Nummern 7-8 / Juli, 1927, Seiten 455-457

- [11]. Kantz, H. und Schreiber, T.: Nonlinear Time Series Analysis. Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN: 0-521-52902-6
- [12]. P. R. Holland, The quantum theory of motion Cambridge University Press, Cambridge, 1993, ISBN: 0-521-48543-6
- [13]. Bohmian Mechanics The Physics and Mathematics of Quantum Theory, Dürr, Detlef, Teufel, Stefan 2009, XII, 393 p. 41 illus., Hardcover, Springer ISBN: 978-3-540-89343-1
- [14]. Bohr, N. (1920), "Über die Serienspektren der Elemente", Zeitschrift für Physik 2 (5): 423-478
- [15]. O. Bohigas, M.-J. Giannoni and C. Schmit, Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws, Phys. Rev. Lett., 52: 1-4 (1984).
- [16]. Martin C. Gutzwiller (1971). "Periodic Orbits and Classical Quantization Conditions". Journal of Mathematical Physics 12: 343.
- [17]. Vlatko Vedral: Introduction to quantum information science. Oxford Univ. Pr., Oxford 2006, ISBN 0-19-921570-7
- [18]. Dirk Bouwmeester: The physics of quantum information - quantum cryptography, quantum teleportation, quantum computation. Springer, Berlin 2001, ISBN 3-540-66778-4
- [19]. Dieter Heiss: Fundamentals of quantum information - quantum computation, communication, decoherence and all that. Springer, Berlin 2002, ISBN 3-540-43367-8
- [20]. Dagmar Bruss, Gerd Leuchs: Lectures on quantum information. Wiley-VCH, Weinheim 2007, ISBN 978-3-527-40527-5
- [21]. E. Nelson, Phys. Rev., vol. 150, 1079 (1966)
- [22]. G.P. Berman and G.M. Zaslavsky, Physica 91A, 450 (1978).

- [23]. F. Haake, M. Kus and R. Scharf, Z. Phys. B 65, 361 (1987).
- [24]. B.V. Chirikov, F.M. Israilev, and D.L. Shepelyansky, Physica D 33, 77 (1988).
- [25]. Edelman, A. and Rao, N.R. (2005). Random matrix theory, Acta Numerica, 1-65.
- [26]. Deift, P. (2006). Universality for mathematical and physical systems, arXiv:math-ph/0603038v2 19 May 2006.
- [27]. Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. (1935) Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, Phys. Rev. 47, 777-780
- [28]. On nonlinear Schrodinger equations, T Kato - Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor, 1987 - Springer
- [29]. Quantum Chaotic Environments, the Butterfly Effect, and Decoherence, ZP Karkuszewski, C Jarzynski, WH Zurek - Physical review letters, 2002, vol. 89, issue 17, 170405
- [30]. Phase space picture of quantum mechanics: group theoretical approach, YS Kim, ME Noz - 1991, ISBN:981-02-0360-8
- [31]. Theory and application of the quantum phase-space distribution functions, HW Lee - Physics Reports, 1995, vol. 259, issue 3, 147-211
- [32]. On the applicability of the energy level dynamics for the Hamiltonian systems in the ..., H Hasegawa, M Robnik - EPL (Europhysics Letters), 1993, vol. 23, no. 3, 171
- [33]. Classical and quantum billiards, integrable, nonintegrable, and pseudo- ..., K Zyczkowski, I Pisyki, U Jagielloński - Acta Physica Polonica B, 1992, vol. 23, no. 3, 245-270
- [34]. Periodic orbits in triangular billiards, T Ruijgrok - Acta Phys. Polon, 1991, vol. 22, no. 11-12, 955-981

- [35]. Signatures of chaos in quantum billiards: Microwave experiments, A Kudrolli, S Sridhar, A Pandey, R Ramaswamy - Physical Review E, 1994, vol. 49, issue 1, R11-R14
- [36]. Experimental studies of chaos and localization in quantum wave functions, A Kudrolli, V Kidambi, S Sridhar - Physical review letters, 1995, vol. 75, issue 5, 822-825
- [37]. Microwave studies of chaotic billiards and disordered systems, HJ Stöckmann, M Barth, U Dörr, U Kuhl, H ... - Physica E: Low- ..., 2001, vol. 9, issue 3, 571-577
- [38]. Quantum scars of classical closed orbits in phase space, MV Berry -Proceedings of the Royal Society of London. Series A, ..., 1989, vol. 423, 219-231
- [39]. Lead-orientation-dependent wave function scarring in open quantum dots, JP Bird, R Akis, DK Ferry, D Vasileska, J Cooper, Y ... - Physical Review Letters, 1999, vol. 82, issue 23, 4691-4694
- [40]. Wave function scarring effects in open stadium shaped quantum dots, R Akis, DK Ferry, JP Bird - Physical Review Letters, 1997, vol. 79, issue 1, 123-126
- [41]. Semiclassical criterion for scars in wave functions of chaotic systems, O Agam, S Fishman - Physical review letters, 1994, vol. 73, issue 6, 806-809
- [42]. Experimental observation of scarred eigenfunctions of chaotic microwave cavities, S Sridhar - Physical review letters, 1991, vol. 67, issue 7, 785-788
- [43]. Green's functions in quantum physics, EN Economou - 1979, Springer, ISBN: 3-540-28838-4
- [44]. Quantum chaos with time-periodic Hamiltonians, G Casati, L Molinari - Prog. Theo. Phys., Suppl, 1989, vol. 98, 287-322
- [45]. Floquet theory for partial differential equations, PA Kuchment - Russian Mathematical Surveys, 1982, vol. 37, no. 4, 1

[46]. Classical and quantum chaos for a kicked top, F Haake, M Kuś, R Scharf - Zeitschrift für Physik B Condensed Matter, 1987, vol. 65, no.3, 381-395

[47]. Classical and quantum structures in the kicked-top model, GM D'Ariano, LR Evangelista, M Saraceno - Physical Review A, 1992, vol. 45, issue 6, 3646-3658

[48]. Vibrating soap films: An analog for quantum chaos on billiards, American Journal of Physics, , E Arcos, G Baez, PA Cuatlayol, MLH Priar, RA ,1998, vol. 66, issue 7, 601-607

[49]. Random matrices in physics, EP Wigner - Siam Review, 1967, vol. 9, no. 1, 1-23

[50]. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices, EP Wigner - The Annals of Mathematics, 1958, vol. 67, no. 2, 325

[51]. Random matrices and their applications, JE Cohen, H Kesten, CM Newman, (Providence) ... - 1986, ISBN-10: 0-8218-5044-X

[52]. Rotations, quaternions, and double groups, SL Altmann, 1986, Clarendon Press

[53]. Chaotic motion and random matrix theories, O Bohigas, MJ Giannoni, Lecture notes in physics-Mathematical and computational ...,Springer, 1984, vol. 209, 1-99

[54]. Random unitary matrices, K Życzkowski, M Kus - Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, vol. 27, no. 12, 4235

[55]. Chaos and Husimi distribution function in quantum mechanics, K Takahashi, N Saitô - Physical review letters, 1985, vol. 55, issue 7, 645-648

[56]. Quantum chaos: a new paradigm of nonlinear dynamics, K Nakamura, K Nakamura - 1993, Cambridge University Press, ISBN: 978-0-521-46746-9

[57]. Quantum eigenvalues from classical periodic orbits, G Tanner, P Scherer, EB Bogomolny, B Eckhardt, D ... - Physical review letters, 1991, vol. 67, issue 18, 2410-2413

[58]. The transition to chaos, LE Reichl - 1992, Springer, ISBN: 0-387-98788-6

[59]. Statistical properties of many-particle spectra. III. Ergodic behavior in random-matrix ensembles, A Pandey, Ann. Phys.(NY), 1979, vol. 119, issue 1, 170-191

[60]. Billiards in Finsler and Minkowski geometries, E Gutkin, S Tabachnikov - Journal of Geometry and Physics, 2002, vol. 40, issue 3-4, 277-301

[61]. Mixed states with positive Wigner functions, T Bröcker, RF Werner - Journal of mathematical physics, 1995, vol. 36, issue 1, 62

[62]. Quantum Chaos: Between Order and Disorder, Giulio Casati, Boris Chirikov - 2006, Cambridge University Press, ISBN-10: 0521031664

[63]. Δυναμικά Συστήματα και Χάος I, Α. Μπούντης - 1995, Εκδ. Παπασωτηρίου

[64]. Δυναμικά Συστήματα και Χάος II, Α. Μπούντης - 1997, Εκδ. Παν. Πατρών

[65]. Ο θαυμαστός κόσμος των FRACTAL. Μια περιήγηση στη νέα επιστήμη του χάους και της πολυπλοκότητας, Α. Μπούντης - 2004, Leader Books

[66]. Σημειώσεις Δυναμικών Συστημάτων, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Δ. Γκίκα, Παν. Πατρών - Τμήμα Φυσικής.

ΕΝΟΤΗΤΑ Δ'

ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ ENTANGLEMENT ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ HAMILTON

International Journal of Quantum
Information Vol. 5, No. 5 (2007)
685–704 © World Scientific
Publishing Company

A CURVATURE DEPENDENT BOUND FOR ENTANGLEMENT CHANGE IN
CLASSICALLY CHAOTIC SYSTEMS

DEMETRIS P. K. GHIKAS and GEORGE STAMATIOU

Department of Physics, University of Patras

Patras 26500, Greece

ghikas@physics.upatras.gr

Received 5 July 2007

Using the Calogero-Moser model and the Nakamura-Lakshmanan equations of motion for eigenvalues and eigenfunctions associated with a multi-partite quantum system, we prove an inequality between the mean bipartite Entanglement rate of change under the variation of a critical parameter and the level-curvature. This provides an upper bound for the rate of production or destruction of Entanglement induced dynamically. We then investigate the dependence of the upper bound on the degree of chaos of the system, which in turn, through the inequality, gives a measure of the stability of the entangled state. Our analytical results are supported by extensive numerical calculations.

Keywords: Entanglement; quantum chaos; Calogero-Moser Model; upper bounds.

PACS Number(s): 03.67.Mn, 05.45.Ac, 05.45.Pq

Σχέση κυριότητας και Entanglement στο Calogero-Moser System.

Κάνοντας χρήση του συστήματος Calogero-Moser και των εξισώσεων μεταβολής των ιδιοτιμών και ιδιοκαταστάσεων των Nakamura-Lakshman για ένα σύνθετο (multipartite) κβαντικό σύστημα καταλήξαμε σε μια ανισότητα η οποία συνδέει τους ρυθμούς μεταβολής του Διμερούς Entanglement (Bipartite Entanglement) με την κυριότητα των ιδιοτιμών συναρτήσει των παραμέτρων του συστήματος. Η ανισότητα αυτή ορίζει ένα μέγιστο όριο όσον αφορά τους ρυθμούς μεταβολής (αύξησης ή μείωσης) του Entanglement που επάγονται από την δυναμική των παραμέτρων. Συσχετίσαμε επίσης τους ρυθμούς μεταβολής του Entanglement με τον βαθμό χαοτικότητας του συστήματος. Έτσι είδαμε ότι τα μέγιστα όρια συσχετίζονται με τα μέτρα του χάους ενός κβαντικού συστήματος. Υπό την έννοια της θεωρίας ελέγχου η ανισότητα μπορεί να λειτουργήσει ως μέτρο της ευστάθειας μιας Entangled Κατάστασης. Τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν με αναλυτικούς υπολογισμούς δοκιμάστηκαν με ένα ικανό αριθμό αριθμητικών πειραμάτων.

Εισαγωγικά:

Το κυριότερο πρακτικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει σήμερα η κβαντική τεχνολογία είναι η δυνατότητα κατασκευής ρεαλιστικών συστημάτων εκμετάλλευσης των κβαντικών ιδιοτήτων της ύλης στο πεδίο της πληροφορικής και των επικοινωνιών. Όμως για να αποθηκεύσουμε, να μεταδώσουμε και να επεξεργαστούμε την κβαντική πληροφορία είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε συστήματα τα οποία υπάρχουν έξω από το «προστατευτικό περίβλημα» των βιβλίων της κβαντομηχανικής ή ακόμα και πέραν της γραμμικότητας [1,2] που διέπει σε επίπεδο αρχών τα συστήματα αυτά. Οι κβαντικές πληροφορικές συσκευές (Quantum Information Devices) είναι πάντοτε ανοιχτά συστήματα και ως εκ τούτου για την περιγραφή τους θα πρέπει να πάμε πέραν της εξίσωσης του Schrödinger. Λόγω της πολυπλοκότητας των συστημάτων αυτών οι επιδράσεις του περιβάλλοντος δεν μπορούν να αγνοηθούν. Το κυρίως πρόβλημα που προκαλεί το εξωτερικό περιβάλλον σε μια κβαντική

συσκευή είναι ότι καταστρέφει και μάλιστα πολύ γρήγορα, από την στιγμή που αρχικοποιούμε την συσκευή, τις κβαντικές συσχετίσεις. Έτσι κατά μια έννοια το σύστημα «κλασικοποιείται» πολύ γρήγορα προτού προλάβει να εκτελέσει τις λειτουργίες για τις οποίες προορίζεται. Συνεπώς μια κβαντική συσκευή θα πρέπει να είναι έτσι κατασκευασμένη ώστε να προστατεύει τον κβαντικό χαρακτήρα της πληροφορίας. Η καθαρά κβαντική πληροφορία που δεν έχει κλασικό ανάλογο συνοψίζεται στην έννοια του Entanglement. Έτσι απαραίτητο χαρακτηριστικό των κβαντικών συσκευών θα πρέπει να είναι η δυνατότητα τους να προστατεύουν το Entanglement. Εφόσον οι κβαντικές συσκευές είναι ανοιχτά συστήματα και συμπεριφέρονται μη γραμμικά είναι λογικό να διερωτηθούμε εάν και κατά πόσον η δημιουργία ή καταστροφή και η ευστάθεια του Entanglement του κβαντικού συστήματος συσχετίζεται με τις ιδιότητες του αντιστοίχου κλασικού. Έως τώρα αρκετές εργασίες έχουν δημοσιευτεί στο πεδίο της σχέσης του Entanglement με το κβαντικό χάος. Ενδεικτικά στην αναφορά [3] εξετάζεται η σχέση του Entanglement με το “side-blind” noise. Στις αναφορές [4,5] υπάρχει ο ισχυρισμός ότι το Entanglement είναι μεγαλύτερο στα ισχυρώς χαοτικά συστήματα και το χάος επάγει χαρακτηριστικές τιμές του Entanglement. Ακόμα και όταν προϋπάρχει Entanglement στο σύστημα τότε αυτό αποκτά χαρακτηριστικό μέγεθος με την παρουσία του Χάους. Στην αναφορά [6] η δημιουργία Entanglement αιτιολογείται περισσότερο ως αποτέλεσμα της ανάμιξης των ιδιοκαταστάσεων και λιγότερο ως αποτέλεσμα της παρουσίας του Χάους. Στην αναφορά [7] υπάρχει ο ισχυρισμός ότι το Entanglement μεγιστοποιείται επειδή το σύστημα εμφανίζει μη αδιαβατικό χάος. Στην αναφορά [8] αναλύεται και διερευνάται η διχογνωμία του κατά πόσον το χάος ευνοεί ή όχι την δημιουργία Entanglement. Στην αναφορά [9] παρουσιάζεται το γεγονός ότι σε ένα σύστημα που αποτελείται από πολλά qubits το Entanglement μπορεί να λειτουργήσει ως ενδεικτικό χάους. Το Διμερές Entanglement αυξάνεται στις χαοτικές περιοχές και το αντίθετο συμβαίνει για το Entanglement Ζεύγους (Pairwise Entanglement). Στην αναφορά [10] το η Καθαρότης (purity) μειώνεται εκθετικά στις χαοτικές περιοχές ενώ μειώνεται αλγεβρικά στις περιοχές κανονικότητας. Τέλος στις αναφορές [12] και [13] αναλύεται ο ρόλος της ολοκληρωσιμότητας και του χάους στην παραγωγή

Entanglement και στην διαδικασία της Αποσυμφωνίας. Καθώς εμφανίζονται διάφορα αντικρουόμενα συμπεράσματα σχετικά με τον ρόλο της κλασικής δυναμικής στην παραγωγή ή την καταστροφή του Entanglement ενός κβαντικού συστήματος είναι απαραίτητη η περαιτέρω διερεύνηση του ερωτήματος. Μια πηγή του προβλήματος σε όλες τις παραπάνω συλλογιστικές είναι ότι προσεγγίζουν το πρόβλημα με μοντέλα των οποίων τα συμπεράσματα εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες και από τα επιλεγμένα συστήματα (initial state depended). Έτσι χρειαζόμαστε μια μέθοδο που θα μας οδηγήσει σε γενικότερα συμπεράσματα. Μια γενική προσέγγιση του κβαντικού χάους και της φαινομενολογίας του είναι αυτή των Τυχαίων Πινάκων. Η εν λόγω θεωρία είναι γνωστή και ως Θεωρία Τυχαίων Πινάκων [11] (Random Matrix Theory). Στα πλαίσια της θεωρίας αυτής υπάρχει η δυνατότητα να αποκομίσουμε γενικά συμπεράσματα υπό την οπτική γωνία της στατιστικής με την μορφή θεωρημάτων, ανισοτήτων κλπ. Τη θεωρία αυτή έχουμε χρησιμοποιήσει για να αποδείξουμε ότι οι ρυθμοί μεταβολής του Entanglement ενός κβαντικού συστήματος σαν συνάρτηση των παραμέτρων χάους φράσσονται από ένα όριο το οποίο είναι συνάρτηση της κύρτωσης των ιδιοεπιπέδων. Πιο συγκεκριμένα το όριο αυτό είναι συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας της Κύρτωσης των ιδιοτιμών (level curvature) σε συνάρτηση με τις παραμέτρους. Η στατιστική κατανομή των κυρτοτήτων έχει αποδειχτεί ότι εμφανίζει Παγκόσμια χαρακτηριστικά και η ακριβής μορφή της εξαρτάται από το εάν το σύστημα είναι χαοτικό ή όχι και από τις συμμετρίες της Χαμιλτονιανής. Με την βοήθεια των Παγκοσμίων συναρτήσεων κατανομής της κύρτωσης των επιπέδων είναι δυνατόν να ορίσουμε κατάλληλες περιοχές τιμών των παραμέτρων, βέλτιστες όσον αφορά την κατασκευή κβαντικών συσκευών διαχείρισης της πληροφορίας. Έχουμε πραγματοποιήσει έναν μεγάλο αριθμό αριθμητικών δοκιμών της ανισότητας χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα. Σε καμία περίπτωση η ανισότητα δεν έδειξε να παραβιάζεται. Επίσης χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα στην μελέτη της ευστάθειας του Entanglement σε κάποιο τυχαίο κβαντικό σύστημα σε σχέση με τον βαθμό χαοτικότητας του συστήματος αυτού. Όπως είδαμε τα μέγιστα όρια στους ρυθμούς μεταβολής του Entanglement εξαρτώνται σαφώς από την εμφάνιση ή όχι χάους στο σύστημα και το ίδιο συμβαίνει και με την ευστάθεια του Entanglement σε μικρές διαταραχές λόγω του

περιβάλλοντος και των ατελειών του συστήματος. Τα αριθμητικά πειράματα που κάναμε, με στόχο την δοκιμή των θεωρητικών αποτελεσμάτων, έγιναν τόσο σε αφηρημένα συστήματα Τυχαίων Πινάκων, σε όλη την περιοχή συμμετριών (Poisson, Goe, Gue, Gse), όσο και σε πιο ρεαλιστικά αλλά καλά μελετημένα συστήματα. Ένα τέτοιο σύστημα είναι η *άλυσος σπινόρων με ατέλειες (spin chain with defects)* [24]. Ο βαθμός του χάους ποσοτικοποιείται με την βοήθεια της *Στατιστικής Παραμέτρου Διαστημάτων (level statistic parameter)* [23]. Έτσι μπορούμε να ξέρουμε το βαθμό χαοτικότητας συναρτήσει των παραμέτρων του συστήματος. Επίσης μπορούμε να εκφράσουμε το όριο στους ρυθμούς μεταβολής του Entanglement ως συνάρτηση των παραμέτρων του συστήματος με την βοήθεια της ανισότητας. Συνδυάζοντας τα δυο τελευταία μπορούμε να έχουμε ενδιαφέροντα συμπεράσματα όσον αφορά την σχέση Entanglement, ευστάθειας και χάους. Συνδυάζοντας κατάλληλα Τυχαίους Πίνακες διαφορετικών συμμετριών μπορούμε να επιτύχουμε όλο το φάσμα τιμών της Στατιστικής Παραμέτρου Διαστημάτων και έτσι να πάρουμε εντελώς γενικά συμπεράσματα. Πιστεύουμε ότι η σημασία της ανισότητας έγκειται στην γενικότητα της και το γεγονός ότι μπορεί να επιβεβαιωθεί η ισχύς της στο πλαίσιο της Θεωρίας Τυχαίων Πινάκων είναι πολύ σημαντικό. Η δομή των Τυχαίων Πινάκων είναι εντελώς γενική και εξαρτάται μόνο από τις συμμετρίες της Χαμιλιτονιανής. Επίσης η στατιστική κατανομή του φάσματος των Τυχαίων Πινάκων εμφανίζει Παγκόσμιο χαρακτήρα συνεπή προς τα πειραματικά δεδομένα.

Μεταβολές του Entanglement και Απωθημένες Διασταυρώσεις.

Έστω ότι έχουμε ένα αυτόνομο κβαντικό σύστημα με Χαμιλιτονιανή

$$H = H_0 + \tau V \quad (1)$$

όπου H_0 είναι το αδιατάρακτο μέρος και V η διαταραχή. Το σύστημα αυτό έχει εν γένει μη ολοκληρώσιμο κλασικό ανάλογο. Η μεταβλητή τ αποτελεί την παράμετρο του συστήματος.

Το πρόβλημα ιδιοτιμών του τελεστή H της παράστασης (1) εκφράζεται ως

$$H(\tau)|n(\tau)\rangle = \varepsilon_n(\tau)|n(\tau)\rangle$$

όπου θα θεωρήσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το φάσμα $\varepsilon_n(\tau)$ είναι διακριτό και μη εκφυλισμένο για κάθε τιμή της παραμέτρου τ . Εάν θεωρήσουμε την παράμετρο τ ως «χρόνο» τότε το δυναμικό σύστημα $(\varepsilon_n(\tau), p_n(\tau))$ περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις [14-17]:

$$\frac{d\varepsilon_n(\tau)}{d\tau} = p_n$$

$$\frac{dp_n(\tau)}{d\tau} = 2 \sum_{m(\neq n)} V_{nm}(\tau) \cdot V_{mn}(\tau) (\varepsilon_n(\tau) - \varepsilon_m(\tau))^{-1}$$

$$\frac{d\varepsilon_n(\tau)}{d\tau} = p_n$$

$$\frac{dp_n(\tau)}{d\tau} = 2 \sum_{m(\neq n)} V_{nm}(\tau) V_{mn}(\tau) (\varepsilon_n(\tau) - \varepsilon_m(\tau))^{-1}$$

$$\frac{d|n(\tau)\rangle}{d\tau} = \sum_{m(\neq n)} |m(\tau)\rangle V_{mn}(\tau) (\varepsilon_n(\tau) - \varepsilon_m(\tau))^{-1}$$

$$\frac{d\langle n(\tau)|}{d\tau} = \sum_{m(\neq n)} \langle m(\tau)| V_{nm}(\tau) (\varepsilon_n(\tau) - \varepsilon_m(\tau))^{-1}$$

όπου

$$p_n(\tau) \equiv V_{nn} = \langle n(\tau)|V|n(\tau)\rangle$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι ένα ολοκληρώσιμο σύστημα εξισώσεων Hamilton το οποίο ονομάζεται Calogero -

Moser σύστημα στις 1+1 διαστάσεις. Το σύστημα αυτό ισοδυναμεί με σύστημα N-σωματιδίων. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι αυτό το σύστημα εξισώσεων μελετήθηκε από τους Nakamura και Lakshmanan [15] και εμφανίζεται συχνά στην βιβλιογραφία που ασχολείται με την μελέτη της ολοκληρωσιμότητας. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ένα πολύ εύχρηστο εργαλείο όσον αφορά την μελέτη των Παγκοσμίων (universal) χαρακτηριστικών της ολοκληρωσιμότητας και του χάους [14]. Η χρησιμότητα τους έγκειται στην γενικότητα των εξισώσεων αυτών. Στις αναφορές [16,17] οι συγγραφείς εφαρμόζουν τις εξισώσεις αυτές στην μελέτη των Απωθημένων Διασταυρώσεων στην περίπτωση κβαντικών συστημάτων με μη ολοκληρώσιμο κλασικό ανάλογο.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα Διμερές κβαντικό σύστημα το οποίο συνίσταται από τα υποσυστήματα A και B. Έστω επίσης ότι η δυναμική του συστήματος ως συνάρτηση της παραμέτρου τ δίδεται από την εξίσωση (1). Έστω ότι η κατάσταση του συστήματος είναι Καθαρή και ότι μπορεί να περιγραφεί από την Μήτρα Πυκνότητας Πιθανότητας:

$$\rho_{AB}^n(\tau) = |n(\tau)\rangle\langle n(\tau)|$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την γραμμική Εντροπία E_L έτσι ώστε να μελετήσουμε το Entanglement μεταξύ των δυο υποσυστημάτων σαν συνάρτηση της παραμέτρου τ . Έτσι έχουμε

$$E_L = 1 - \text{tr} \left[\left(\rho_A^n \right)^2 \right]$$

όπου

$$\rho_A^n = \text{tr}_B \left(\rho_{AB}^n \right)$$

Υπολογίζοντας την ποσότητα

$$dE_L/d\tau$$

έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \text{tr} \left[\left(\rho_A^n(\tau) \right)^2 \right] = 2 \text{tr} \left\{ \text{tr}_B \left(\rho_{AB}^n \right) \text{tr}_B \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\rho_{AB}^n \right) \right] \right\}$$

επίσης

$$\begin{aligned} \left\langle k(\tau) \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \rho_{AB}^n(\tau) \right| l(\tau) \right\rangle &= \langle k(\tau) | \left(\frac{\partial}{\partial \tau} |n(\tau)\rangle \right) \langle n(\tau) | l(\tau) \rangle \\ &\quad + \langle k(\tau) | n(\tau) \rangle \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \langle n(\tau) | \right) | l(\tau) \rangle \\ &= \langle k(\tau) | \left(\frac{\partial}{\partial \tau} |n(\tau)\rangle \right) \delta_{nl} + \delta_{kn} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \langle n(\tau) | \right) | l(\tau) \rangle \end{aligned}$$

κάνοντας χρήση των εξισώσεων των Nakamura και Lakshmanan προκύπτει ότι εάν ορίσουμε

$$\gamma_{kl}^n(\tau) \equiv \delta_{nl}(1 - \delta_{nk}) \frac{V_{kn}}{\epsilon_n - \epsilon_k} + \delta_{kn}(1 - \delta_{nl}) \frac{V_{nl}}{\epsilon_n - \epsilon_l}$$

Ισχύει η έκφραση

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho_{AB}^n(\tau) = \sum_{kl} \gamma_{kl}^n |k(\tau)\rangle \langle l(\tau)|$$

Εισάγοντας την γραμμική Εντροπία στην έκφραση ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E_L^n = -2 \sum_{kl} \gamma_{kl}^n \text{tr}[\text{tr}_B(|n(\tau)\rangle \langle n(\tau)|) \text{tr}_B(|k(\tau)\rangle \langle l(\tau)|)]$$

ή αλλιώς

$$\frac{\partial}{\partial \tau} E_L^n = -2 \sum_{kl} \gamma_{kl}^n A_{kl}^n(\tau) \quad (2)$$

όπου

$$A_{kl}^n(\tau) = \text{tr}[\text{tr}_B(|n(\tau)\rangle\langle n(\tau)|) \text{tr}_B(|k(\tau)\rangle\langle l(\tau)|)]$$

Να σημειωθεί εδώ ότι τα στοιχεία

$$A_{kl}^n(\tau)$$

είναι Φραγμένες ποσότητες. Επίσης τα γ_{kl}^n έχουν πόλους πρώτης τάξεως στις Απωθημένες Διασταυρώσεις (έχουμε θεωρήσει μη εκφυλισμένο φάσμα). Όμως όταν ένα κβαντικό σύστημα έχει χαοτικό κλασικό ανάλογο τότε γενικά εμφανίζει μεγάλη πυκνότητα Απωθημένων Διασταυρώσεων στο φάσμα του. Έτσι σε ένα τέτοιο σύστημα είναι φυσικό να αναμένουμε μεγάλες μεταβολές του Entanglement.

Κυρτότητα και Entanglement.

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του Entanglement για δεδομένη τιμή της παραμέτρου τ είναι ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας της κυρτότητας της στάθμης.

Γράφουμε την εξίσωση (2) ως

$$\frac{\partial E_L^n}{\partial \tau} = -2 \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn} A_{kn}^n + V_{nk} A_{nk}^n}{\epsilon_n - \epsilon_k}$$

από τις εξισώσεις των Nakamura και Lakshmanan ξέρουμε ότι η κυρτότητα της στάθμης n είναι

$$K_n \equiv \frac{\partial^2 \epsilon_n(\tau)}{\partial \tau^2} = 2 \sum_{m \neq n} \frac{|V_{nm}|^2}{\epsilon_n - \epsilon_m}$$

Θα ξεκινήσουμε από την ειδική περίπτωση όπου η δεδομένη τιμή του τ αντιστοιχεί σε Απωθημένη Διασταύρωση. Θεωρούμε ότι μόνο οι γειτονικές στάθμες συμμετέχουν στο

ανάπτυγμα. Έστω ότι μας ενδιαφέρει ο ρυθμός μεταβολής του Entanglement της βασικής στάθμης. Θα έχουμε

$$\frac{\partial E_L^0}{\partial \tau} \approx -2 \frac{V_{10}A_{10}^0 + V_{01}A_{01}^0}{\epsilon_0 - \epsilon_1}$$

και αντίστοιχα για την πρώτη στάθμη

$$\frac{\partial E_L^1}{\partial \tau} \approx -2 \frac{V_{01}A_{01}^1 + V_{10}A_{10}^1}{\epsilon_1 - \epsilon_0}$$

επίσης για τις κυρτότητες έχουμε

$$K_0 = 2 \frac{|V_{01}|^2}{\epsilon_0 - \epsilon_1} < 0$$

και για την πρώτη στάθμη

$$K_1 = 2 \frac{|V_{01}|^2}{\epsilon_1 - \epsilon_0} > 0$$

Δεδομένων των παραδοχών που έχουμε κάνει ισχύει ότι

$$K_0 = -K_1$$

έτσι

$$\frac{\partial E_L^0}{\partial \tau} \approx - \frac{V_{10}A_{10}^0 + V_{01}A_{01}^0}{|V_{01}|^2} K_0$$

απαλείφοντας το δυναμικό προκύπτει ότι

$$\frac{\partial E_L^0}{\partial \tau} \approx \frac{2\sqrt{2} \operatorname{Re}[A_{10}^0 e^{i\phi}]}{\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_0}} \sqrt{|K_0|}$$

Η φάση ϕ έχει σχέση με τα στοιχεία πίνακα κατά την αναπαράσταση του δυναμικού. Υπενθυμίζουμε ότι η τελευταία έκφραση αφορά τιμές της παραμέτρου τ κοντά σε μια Απωθημένη

Διασταύρωση. Για μικρές διαταραχές γύρω από την Απωθημένη Διασταύρωση θα έχουμε

$$\frac{\Delta E_L^1}{\Delta E_L^0} \approx \frac{\operatorname{Re}(A_{01}^1 e^{i\phi})}{\operatorname{Re}(A_{10}^0 e^{i\phi})}$$

Η τελευταία έκφραση παριστάνει την ανταλλαγή του Entanglement μεταξύ των δυο γειτονικών επιπέδων που συμμετέχουν στην Απωθημένη Διασταύρωση.

Γενίκευση για σύστημα αποτελούμενο από N-qubits.

Έστω ότι έχουμε σύστημα αποτελούμενο από N qubits. Ένα μέτρο του Entanglement για το σύστημα αυτό είναι το *Μέσο Διμερές Entanglement* (Mean Bipartite Entanglement) το οποίο ορίζεται από την έκφραση

$$Q^n = 2 - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \operatorname{tr}[\rho_j^2]$$

όπου

$$\rho_j = \operatorname{tr}_{ALL \neq j}(|n\rangle\langle n|)$$

και $|n\rangle$ τυχούσα ιδιοκατάσταση του συνολικού συστήματος.

Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα μπορούμε να καταλήξουμε σε μια έκφραση για τους ρυθμούς μεταβολής του Entanglement της μορφής:

$$\left| \frac{\partial Q^0}{\partial \tau} \right| \leq b \sqrt{|K_0|} \quad (3)$$

Ο δείκτης 0 δηλώνει το γεγονός ότι η έκφραση αφορά την βασική στάθμη του συστήματος.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτήν της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να καταλήξουμε στην έκφραση

$$\frac{\partial Q^0}{\partial \tau} = \frac{8}{N} \sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{\text{Re}[V_{0k} A_{0k}^0]}{\epsilon_k - \epsilon_0} \quad (4)$$

όπου ισχύει

$$-N \leq A_{kl}^0 \leq +N$$

Στο παράρτημα υπάρχει η απόδειξη της σχέσης (4). Αποδεικνύουμε την ανισότητα παίρνοντας το μέγιστο του δεξιού μέρους της έκφρασης (3). Έτσι έχουμε

$$\max \frac{\partial Q^0}{\partial \tau} = 8 \sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{\text{Re}[V_{0k}]}{\epsilon_k - \epsilon_0} \leq 8 \sqrt{\sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{\text{Re}^2 V_{0k}}{\epsilon_k - \epsilon_0}} \sqrt{\sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_0}} \quad (5)$$

$$\leq 8 \sqrt{\sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{|V_{0k}|^2}{\epsilon_k - \epsilon_0}} \sqrt{\sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_0}} = b \sqrt{|K_0|} \quad (6)$$

όπου

$$b = 8 \sqrt{\sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_0}} \quad (7)$$

Κάνοντας αριθμητικές προσομοιώσεις με Τυχαίους Πίνακες είδαμε ότι, αν και η ανισότητα ποτέ δεν παραβιάζεται, η επιλογή του b στην εξίσωση (7) δεν είναι η βέλτιστη. Κάτω από συγκεκριμένες στατιστικές παραδοχές είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε ένα μικρότερο όριο χωρίς όμως και πάλι να πρέπει να εξειδικεύσουμε την δυναμική του συστήματος. Έτσι η σχέση μας δεν χάνει την γενικότητα της. Το νέο όριο συμφωνεί με τους αριθμητικούς υπολογισμούς σε εξαιρετικό

βαθμό. Η παραγωγή του νέου ορίου γίνεται ως εξής: Στην εξίσωση (4) τα A_{kl}^0 αποτελούν άθροισμα πάνω στους N όρους των N qubits.

$$A_{kl}^0 = \sum_{j=1}^N A_{j;kl}^0 \quad (8)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι οι N αυτοί όροι κατανέμονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα στο διάστημα $[-a, +a]$ με μέσο το μηδέν. Με βάση αυτό η τυπική απόκλιση για το A_{kl}^0 ισούται με

$$\sigma(A_{kl}^0) = a\sqrt{N}/\sqrt{3}$$

προκείμενου να περιορίσουμε περισσότερο τα όρια που θέτει η ανισότητα θεωρούμε το στατιστικό όριο

$$-\sigma(A_{kl}^0) \leq A_{kl}^0 \leq \sigma(A_{kl}^0)$$

έτσι παράγουμε την έκφραση

$$b' = \frac{8a}{\sqrt{3N}} \sqrt{\sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_0}}$$

όπου μπορούμε να αντικαταστήσουμε το b με το b' και να έχουμε ένα μικρότερο όριο. Βέβαια το b' προσδιορίζεται με στατιστικούς όρους συνεπώς μπορεί να παραβιαστεί σε ένα πολύ μικρό ποσοστό. Σε πρώτη φάση δοκιμάσαμε την τιμή $a = \frac{1}{N}$ αλλά τελικά καταλήξαμε σε πολύ καλύτερα αποτελέσματα επιλέγοντας την τιμή $a = \frac{1}{2^N}$.

Ρυθμοί μεταβολής του Entanglement και βαθμός χάους.

Η ανισότητα (3) αποτελεί ένα εντελώς γενικό μέτρο του ρυθμού μεταβολής του Διμερούς Entanglement. Μια οπτική γωνία από την οποία μπορούμε να δούμε την ανισότητα αυτή είναι αυτή της ευστάθειας του Entanglement σε διαταραχές. Όταν αλλάζουμε την κρίσιμη παράμετρο όσο μικρότερο είναι το φράγμα που θέτει η (3) τόσο πιο ευσταθή θεωρούμε την Entangled κατάσταση. Για να χαρακτηρίσουμε τον βαθμό χαοτικότητας ενός κβαντικού συστήματος με συνεχή τρόπο χρειαζόμαστε ένα μέτρο του χάους. Στα κβαντικά συστήματα το χάος εμφανίζεται στην στατιστική των ιδιοτιμών της ενέργειας. Ένα διαδεδομένο και εντελώς γενικό μέτρο του χάους στην περίπτωση αυτή είναι η Στατιστική Παράμετρος των Διαστημάτων [23].

$$\gamma = \frac{\int_0^{s_0} [P(s) - P_{WD}]ds}{\int_0^{s_0} [P_P(s) - P_{WD}]ds}$$

όπου έχουμε $s_0 \approx 0.472$ που είναι το σημείο που η κατανομή Poisson

$$P_P(s) = \exp(-s)$$

τέμνει την κατανομή Wigner-Dyson

$$P_{WD}(s) = \pi s/2 \exp(-\pi s^2/4)$$

Στην περίπτωση μας με $P(s)$ συμβολίζουμε την πυκνότητα πιθανότητας της διαφοράς δυο διαδοχικών ενεργειακών επιπέδων (level density distribution). Η κατανομή Poisson χαρακτηρίζει την πλήρη κανονικότητα ενώ η κατανομή Wigner-Dyson χαρακτηρίζει το χάος. Η Στατιστική Παράμετρος των Διαστημάτων είναι μια εκτίμηση της απόστασης από τις δύο αυτές ακραίες καταστάσεις.

Θα κάνουμε χρήση δύο βασικά διαφορετικών μοντέλων έτσι ώστε να διερευνήσουμε τα παραπάνω. Το πρώτο σύστημα είναι εντελώς γενικό και περιγράφεται με τον γραμμικό συνδυασμό δύο τελεστών Χάμιλτον εκ των οποίων ο πρώτος ακολουθεί την στατιστική του Poisson (κανονικότητα) ενώ ο δεύτερος ακολουθεί την στατιστική που υπαγορεύει η συμμετρία GOE [23]. Οι τελεστές αυτοί είναι Τυχαιοί Πίνακες. Ο γραμμικός συνδυασμός των δυο πινάκων εξαρτάται από την γωνιακή παράμετρο θ .

$$H(\theta) = \cos(\theta)H_P + \sin(\theta)H_W$$

Έτσι μπορούμε με συνεχή τρόπο να μεταβάλλουμε τον τελεστή Χάμιλτον υπό την έννοια της περιστροφής. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να επιτύχουμε την ομαλή μετάβαση από την κανονική στην χαοτική συμπεριφορά στο πλαίσιο της Θεωρίας Τυχαιών Πινάκων. Σε πρώτη φάση μελετάμε την σχέση των μεγεθών γ και θ έτσι ώστε να προσδιορίσουμε τις περιοχές κανονικότητας και χάους. Κατόπιν υπολογίζουμε και κατασκευάζουμε τα διαγράμματα που συνδέουν την παράμετρο μέγιστης μεταβολής του Entanglement b με την παράμετρο γ αλλά και με την γωνία θ . Τα διαγράμματα αυτά υποδηλώνουν μια ισχυρή συσχέτιση του b με τον βαθμό χαοτικότητας του συστήματος. Θα το αναλύσουμε αυτό λεπτομερέστερα ακολούθως.

Το δεύτερο σύστημα το οποίο μελετήσαμε είναι μια μονοδιάστατη αλυσίδα αποτελούμενη από αλληλεπιδρώντες Σπίνορες η οποία διαταράσσεται από τυχαίες ατέλειες [24]. Στο μοντέλο αυτό υπάρχει μια κρίσιμη παράμετρος για την μετάβαση από την κανονικότητα στο χάος. Η παράμετρος αυτή είναι η Συμεταβλητότητα d των με κανονικό τρόπο κατανομημένων τυχαίων ατελειών. Σχεδιάζουμε ξανά την εξάρτηση του γ από το d έτσι ώστε να προσδιορίσουμε την συμπεριφορά του συστήματος. Κατόπιν σχεδιάζουμε την εξάρτηση της Παραμέτρου Φράγματος του μέγιστου ρυθμού μεταβολής του Entanglement b σε σχέση με τα γ και d . Παρατηρούμε ότι έχουμε την ίδια μορφή εξάρτησης όπως και στην περίπτωση του πρώτου συστήματος. Θα επανέλθουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια αργότερα.

Μεταβολή του Entanglement για διαφορετικές Συλλογές.

Θα εφαρμόσουμε την ανισότητα έτσι ώστε να μπορέσουμε να καταλήξουμε σε μια έκφραση η οποία θα συσχετίζει με γενικό τρόπο την μεταβολή του Entanglement ενός χαοτικού κβαντικού συστήματος κάτω υπό την επίδραση μικρών διαταραχών με την ομάδα συμμετρίας (GOE, GUE, GSE).

Έστω ότι η παράμετρος της διαταραχής είναι η τ . Προκύπτει ότι η μέγιστη μεταβολή συσχετίζεται με την ισχύ της διαταραχής ως:

$$\Delta Q = \left| \frac{\partial Q^0}{\partial \tau} \right| \Delta \tau = b \sqrt{K_0} \Delta \tau$$

Για να καταφέρουμε να κάνουμε σύγκριση των ρυθμών μεταβολής του Entanglement μεταξύ των διαφορετικών συμμετριών θα χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις που μας δίνουν την στατιστική κατανομή των κυρτοτήτων των ιδιοτιμών για την κάθε συμμετρία ξεχωριστά [18–21]. Από ότι φαίνεται η στατιστική των κυρτοτήτων συμπεριφέρεται Παγκόσμια. Στην αναφορά [18] δίδονται με λεπτομέρεια οι κατανομές αυτές για τις τρεις Συλλογές (ensemble). Στην αναφορά [19] επιβεβαιώνονται τα συμπεράσματα της αναφοράς [18] στην περίπτωση συστήματος που περιλαμβάνει Quantum Kicked Top. Στην αναφορά [20] διερευνάται το Quantum Kicked Rotor και το κβαντικό μπιλιάρδο σε σχήμα σταδίου (quantum stadium billiard), συστήματα τα οποία αποτελούν συνήθη παραδείγματα κβαντικού χάους. Στην περίπτωση αυτή ο Παγκόσμιος χαρακτήρας της στατιστικής των κυρτοτήτων επιβεβαιώνεται στο όριο των μεγάλων κυρτοτήτων ενώ παρουσιάζονται αποκλίσεις από την Παγκοσμιότητα στο όριο των μικρών κυρτοτήτων. Στην αναφορά [21] επιχειρείται μια πιο εξαντλητική μελέτη της στατιστικής της κυρτότητας των ιδιοτιμών σε σχέση με τις διαφορετικές κλάσεις συμμετρίας. Προκύπτει ότι οι ακόλουθες κατανομές συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με τα αριθμητικά δεδομένα.

Στην περίπτωση της κλάσης συμμετρίας GOE ισχύει ότι:

$$P_O = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+k^2)^{3/2}}$$

Στην περίπτωση της κλάσης συμμετρίας GUE ισχύει ότι:

$$P_U = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(1+k^2)^2}$$

και Στην περίπτωση της κλάσης συμμετρίας GSE ισχύει ότι:

$$P_S = \frac{8}{3\pi} \frac{1}{(1+k^2)^3}$$

όπου

$$k = \frac{K}{\gamma_\nu}$$

και

$$\gamma_\nu = \nu A$$

όπου το A είναι συντελεστής κανονικοποίησης ο οποίος σχετίζεται με την πυκνότητα των επιπέδων [21].

Οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν την δυνατότητα γενικής σύγκρισης της ευαισθησίας του Entanglement στις τρεις διαφορετικές κλάσεις.

Έτσι με βάση την σχέση των μέσων τιμών

$$\langle \Delta Q \rangle = b \langle \sqrt{K_0} \rangle \Delta \tau$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \sqrt{|K|} \rangle_{GOE} &\approx \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \sqrt{\gamma_1} = 0.847 \sqrt{\gamma_1} \\ \langle \sqrt{|K|} \rangle_{GUE} &\approx \frac{2}{\pi} B\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right) \sqrt{\gamma_2} = 0.707 \sqrt{\gamma_2} \\ \langle \sqrt{|K|} \rangle_{GSE} &\approx \frac{8}{2\pi} B\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right) \sqrt{\gamma_4} = 0.589 \sqrt{\gamma_4}\end{aligned}$$

όπου με $B(X, Y)$ παριστάνουμε την συνάρτηση Βήτα (Beta function). Τα τελευταία συμπεράσματα προκύπτουν ολοκληρώνοντας τον όρο K πάνω στις αντίστοιχες κατανομές.

Έτσι θεωρώντας ότι έχουμε το ίδιο αδιατάρακτο αρχικό σύστημα ισχύει ότι

$$\frac{\Delta Q_{GOE}}{\Delta Q_{GUE}} \approx 0.84, \quad \frac{\Delta Q_{GOE}}{\Delta Q_{GSE}} \approx 0.7$$

οι τελευταίες σχέσεις αποτελούν μια γενική συγκριτική έκφραση της τάσης που έχουν χαοτικά κβαντικά συστήματα να μεταβάλλουν το Entanglement τους στην επίδραση των διαταραχών και του θορύβου. Το μεγαλύτερο ίσως πρόβλημα της σύγχρονης κβαντικής τεχνολογίας όσον αφορά την υλοποίηση κβαντικών υπολογιστικών μηχανών είναι αστάθεια των Entangled καταστάσεων. Γενικά συμπεράσματα όπως το παραπάνω ίσως να αποτελέσουν ένα χρήσιμο βοήθημα στην υλοποίηση τέτοιων συσκευών. Στο μέλλον θα επανέρθουμε στο σημείο αυτό με λεπτομερέστερους υπολογισμούς.

Αριθμητική μελέτη συγκεκριμένων μοντέλων και συμπεράσματα.

Γενικά σχόλια αναφορικά με τα μοντέλα.

Έχουμε δοκιμάσει την ισχύ της ανισότητας (3) αριθμητικά σε διάφορες κατηγορίες μοντέλων. Όλα τα μοντέλα έχουν την μορφή που δίδεται από την έκφραση (1) για διαφορετικές επιλογές των όρων H_0, V . Στο δεξιό μέρος της

ανισότητας που μελετάμε έχουμε δύο κυρίως όρους. Τον συντελεστή b ο οποίος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το φάσμα του αδιατάρακτου συστήματος και την κυρτότητα K η οποία εξαρτάται από το είδος της διαταραχής δεδομένου του αδιατάρακτου συστήματος.

Στην αριθμητική μας ανάλυση χρησιμοποιήσαμε πέντε διαφορετικά μοντέλα. Τα μοντέλα A, B και C περιλαμβάνουν τρία διαφορετικά συστήματα ως προς το αδιατάρακτο μέρος. Στα αδιατάρακτα μέρη αντιστοιχούν συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου b οι οποίες προκύπτουν από αυθαίρετη επιλογή της αδιατάρακτης Χαμιλτονιανής. Έτσι μπορούμε να ελέγξουμε την ανισότητα μας σε συστήματα αρκετά γενικά τα οποία περιορίζονται από το κατά το δυνατόν λιγότερες και ασθενέστερες συνθήκες.

Στα μοντέλα D και E επικεντρωθήκαμε στο ρόλο και την σημασία της παραμέτρου b . Στην περίπτωση αυτή δεν επιχειρούμε να ελέγξουμε την ισχύ της ανισότητας αλλά προσπαθούμε να αναλύσουμε την εξάρτηση της παραμέτρου b από τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της δυναμικής των συστημάτων. Ενδιαφερόμαστε κυρίως για την μετάβαση από την κανονικότητα στο χάος. Για τον λόγο αυτό ενδιαφέρον θα είχε να δούμε εάν υπάρχει κάποια χαρακτηριστική εξάρτηση της παραμέτρου b από την κλασσική δυναμική του συστήματος μια και το κβαντικό χάος συχνά ορίζεται σε σχέση με το κλασικό ανάλογο του κβαντικού συστήματος το οποίο μελετάμε.

Ελέγχοντας την ανισότητα.

Ελέγξαμε την ισχύ της ανισότητας στην περίπτωση που έχουμε συστήματα με δεδομένο (αλλά αυθαίρετο) το αδιατάρακτο μέρος H και τυχαίο το διαταρακτικό μέρος V . Η διαταραχή επιλέγεται με την μέθοδο των Τυχαίων Πινάκων ακολουθώντας γενικές συνθήκες συμμετρίας. Σε όλες τις περιπτώσεις το φάσμα των πινάκων που αναπαριστούν την διαταραχή είναι Ξεδιπλωμένο συνεπώς κανονικοποιημένο στην μονάδα.

Μοντέλο Α

Σύστημα αποτελούμενο από τρία qubits με διμερείς αλληλεπιδράσεις το οποίο διαταράσσεται συνολικά (globally) με την διαταραχή V . Το αδιατάρακτο μέρος H_0 επιλέγεται να είναι της μορφής:

$$H_0 = \sum_{j=1}^3 a_j \sigma_{zj} + \lambda \sum_{i<j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$$

Όπου τα a_j και λ αποτελούν αυθαίρετες σταθερές. Οι σταθερές αυτές μπορούν να επιλεγθούν τυχαία. Στην τυχαία επιλογή που θα ακολουθήσει η σταθερές της ανισότητας είναι $b = 9.849476$ και $b' = 0.410395$.

Η διαταραχή V είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος αυτοσυζυγής Ξεδιπλωμένος Τυχαίος Πίνακας $2^3 \times 2^3$.

Μοντέλο Β

Το αδιατάρακτο μέρος του συστήματος H_0 είναι αυθαίρετος αυτοσυζυγής πίνακας διάστασης $2^n \times 2^n$ και η διαταραχή V είναι Τυχαίος Πίνακας αντίστοιχης διάστασης $2^n \times 2^n$. Θα παρουσιάσουμε τρεις εκδοχές του αυτού μοντέλου η μια με $n=2$ qubits η δεύτερη με $n=3$ qubits και η τρίτη με $n=6$ qubits. Οι σταθερές της ανισότητας για τις τρεις αυτές επιλογές είναι αντίστοιχα:

$$b = 11.66033, \quad b' = 1.190078$$

$$b = 20.57092, \quad b' = 0.8571215$$

$$b = 38.85935, \quad b' = 0.1431131$$

Μοντέλο C

Το αδιατάρακτο μέρος του συστήματος H_0 είναι αυθαίρετος ερμιτιανός πίνακας διάστασης $2^n \times 2^n$ και η διαταραχή V είναι Τυχαίος Πίνακας αντίστοιχης διάστασης $2^n \times 2^n$. Η διαταραχή επιλέγεται να ακολουθεί τις συμμετρίες GOE και GUE. Θα παρουσιάσουμε την περίπτωση με $n = 2$ qubits.

Σε όλα τα μοντέλα υπολογίζουμε τα δυο μέρη της ανισότητας (3) για την συγκεκριμένη, κάθε φορά, επιλογή του αδιατάρακτου μέρους του συστήματος H_0 και για 3000 διαφορετικές τυχαίες επιλογές της διαταραχής V . Για κάθε ζευγάρι τιμών που προκύπτει τοποθετούμε ένα σημείο στο διάγραμμα $|\partial Q^0/\partial \tau|$ v.s. $\sqrt{|K_0|}$. Πάνω στο ίδιο γράφημα σχεδιάζουμε την καμπύλη $y = b' \sqrt{|K_0|}$. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρούμε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των σημείων βρίσκονται κάτωθεν της καμπύλης αυτής. Ο μικρός αριθμός σημείων που ξεφεύγουν πάνω από την καμπύλη είναι αναμενόμενος μια και η σταθερά b' παράγεται στατιστικά. Για να καταστήσουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας πιο καταφανή σχεδιάζουμε, για κάθε περίπτωση, δεύτερο γράφημα όπου αναπαριστούμε την διαφορά $\delta = |\partial Q^0/\partial \tau|_{\text{numerical}} - b' \sqrt{|K_0|}$. Καλούμε δε την διαφορά αυτή *Saturation Index* όρος που δηλεί το πόσο μακριά το κάθε σημείο βρίσκεται από το σημείο παραβίασης της ανισότητας.

Στα Σχήματα 1-6 σχεδιάζουμε την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής του Διμερούς Entanglement (Bipartite Entanglement Rate) σε σχέση με την απόλυτη τιμή της Κυρτότητας. Τα γραφήματα αυτά μας δείχνουν ότι η ανισότητα επιβεβαιώνεται απόλυτα. Τα διαγράμματα $|\partial Q^0/\partial \tau|$ v.s. $|K_0|$

επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι η ανισότητα δεν παραβιάζεται.

Τα διαγράμματα δ v.s. $|K_0|$ είναι μια ένδειξη του πως το Saturation Index επηρεάζεται από την δυναμική του συστήματος. Είναι αξιοπρόσεκτο το γεγονός ότι στις μεγαλύτερες κυρτότητες η ανισότητα επιβεβαιώνεται περισσότερο.

Σχήμα 1. Μοντέλο A: 3 qubits. Αριθμητική επαλήθευση της ανισότητας (3). Αριστερά: Κατανομή 3000 τυχαίων σημείων. Δεξιά: Εξάρτηση του saturation index από την Κυρτότητα.

Σχήμα 2. Μοντέλο B: 2 qubits. Αριθμητική επαλήθευση της ανισότητας (3). Αριστερά: Κατανομή 3000 τυχαίων σημείων. Δεξιά: Εξάρτηση του saturation index από την Κυρτότητα.

Σχήμα 3. Μοντέλο B: 3 qubits. Αριθμητική επαλήθευση της ανισότητας (3). Αριστερά: Κατανομή 3000 τυχαίων σημείων. Δεξιά: Εξάρτηση του saturation index από την Κυρτότητα.

Σχήμα 4. Μοντέλο B: 6 qubits. Αριθμητική επαλήθευση της ανισότητας (3). Αριστερά: Κατανομή 3000 τυχαίων σημείων. Δεξιά: Εξάρτηση του saturation index από την Κυρτότητα.

Σχήμα 5. Μοντέλο C: 2 qubits. Αριθμητική επαλήθευση της ανισότητας (3). Αριστερά: Κατανομή 3000 τυχαίων σημείων. Δεξιά: Εξάρτηση του saturation index από την Κυρτότητα. Η διαταραχή ανήκει στην Συλλογή GUE

Σχήμα 6. Μοντέλο C: 2 qubits. Αριθμητική επαλήθευση της ανισότητας (3). Αριστερά: Κατανομή 3000 τυχαίων σημείων. Δεξιά: Εξάρτηση του saturation index από την Κυρτότητα. Η διαταραχή ανήκει στην Συλλογή GOE

Εξάρτηση της παραμέτρου b της ανισότητας από την κανονικότητα και το χάος.

Θα κάνουμε χρήση δυο μοντέλων για να μελετήσουμε την επίδραση του χάους στην παράμετρο b η οποία καθορίζει το άνω φράγμα στους ρυθμούς μεταβολής του Διμερούς Entanglement. Στην πραγματικότητα θα συσχετίσουμε τον βαθμό χαοτικότητας με το b . Όπως θα δούμε το b εμφανίζει ισχυρή εξάρτηση από το είδος της δυναμικής του συστήματος. Τα δυο μοντέλα που χρησιμοποιούμε είναι διαφορετικά όσον αφορά την προσέγγισή τους. Το πρώτο μοντέλο αφορά μια εντελώς γενική περιγραφή μετάβασης στο χάος με την βοήθεια της Θεωρίας των Τυχαίων Πινάκων ενώ το δεύτερο μοντέλο είναι μια αλυσίδα αποτελούμενη από αλληλεπιδρώντα qubits στην οποία εισέρχονται ατέλειες. Όπως θα δούμε και στα δύο συστήματα υπάρχει ισχυρή εξάρτηση του b από τον βαθμό του χάους. Ο βαθμός του χάους εκφράζεται ποσοτικά από την Στατιστική Παράμετρο των Διαστημάτων γ . Με την βοήθεια της παραμέτρου αυτής μπορούμε να παρακολουθήσουμε την μετάβαση στο χάος με συνεχή τρόπο.

Ακολουθώς παρουσιάζουμε τα μοντέλα που μελετήσαμε και τα αριθμητικά μας αποτελέσματα.

Μοντέλο D

Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής Χάμιλτον αποτελείται από τον γραμμικό συνδυασμό δυο Τυχαίων Πινάκων. Ο πρώτος πίνακας ακολουθεί την στατιστική Poisson (κανονικότητα) ενώ ο δεύτερος την συμμετρία GOE [23].

$$H(\theta) = \cos(\theta)H_P + \sin(\theta)H_W$$

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε, για το μοντέλο αυτό, προέρχονται από την επιλογή πινάκων διάστασης $2^7 \times 2^7$ η οποία αντιστοιχεί στην περίπτωση συστήματος αποτελούμενου από 7 qubits. Έχουν όμως πραγματοποιηθεί και υπολογισμοί με διαφορετικό αριθμό qubits με αντίστοιχα αποτελέσματα.

Στο μοντέλο αυτό, στις δυο οριακές περιπτώσεις, έχουμε κανονικότητα για $\theta = 0$ και χάος για $\theta = \frac{\pi}{2}$. Καθώς η παράμετρος θ μεταβάλλεται μεταξύ της τιμής 0 και $\frac{\pi}{2}$ με την βοήθεια της Στατιστικής Παραμέτρου των Διαστημάτων γ μπορούμε να παρακολουθήσουμε με ποσοτικό τρόπο την μετάβαση από την κανονικότητα στο πλήρες χάος.

Για κάθε επιλογή της παραμέτρου θ υπολογίζουμε αριθμητικά τα $\langle b \rangle$ και $\langle \gamma \rangle$ πάνω στα στατιστικά αποτελέσματα (realizations) των H_p , H_w . Στον υπολογισμό αυτό δημιουργούμε Ξεδιπλωμένο φάσμα και μεταχειριζόμαστε τα δεδομένα μας με την μεθοδολογία της αναφοράς [24]. Για να υπολογίσουμε την Στατιστική Παράμετρο των Διαστημάτων γ κάνουμε προσαρμογή της κατανομής Weibull στα αριθμητικά δεδομένα.

$$y_{a,c}(x) = acx^{c-1} \exp(-ax^c), \quad x \in [0, +\infty]$$

Η κατανομή αυτή περιέχει σαν ειδική περίπτωση την κατανομή του Brody και μπορεί να περιγράψει τόσο την κατανομή Poisson όσο και την κατανομή Wigner. Επίσης προσαρμόζεται πολύ καλά στα δεδομένα τα οποία προέρχονται από την ενδιάμεση περιοχή η οποία βρίσκεται μεταξύ των δυο ακραίων περιπτώσεων πλήρους κανονικότητας και πλήρους χάους. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το μοντέλο για να δούμε την σχέση της Παραμέτρου Φράγματος b με το βαθμό του χάους. Το μοντέλο μας είναι εντελώς γενικό και έτσι έχουμε την ευκαιρία να μελετήσουμε με γενικό τρόπο την συμπεριφορά του παράγοντα b στα διαφορετικά είδη δυναμικής.

Στα Σχήματα 7,8 και 9 σχεδιάζουμε την εξάρτηση των όρων γ και b σε σχέση με την παράμετρο θ

Σχήμα 7. Μοντέλο D: 7 qubits. Εξάρτηση της Στατιστικής Παραμέτρου των Διαστημάτων γ από την δυναμική μεταβλητή θ . Το σχεδιάγραμμα δείχνει την μετάβαση από την κανονικότητα στο χάος ως συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου.

Σχήμα 8. Μοντέλο D: 7 qubits. Εξάρτηση της Παραμέτρου Φράγματος b από την δυναμική μεταβλητή θ . Το διάγραμμα δείχνει τον τρόπο μεταβολής του φράγματος που ορίζει η ανισότητα (3) σαν συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου.

Σχήμα 9. Μοντέλο D: 7 qubits. Εξάρτηση της Παραμέτρου Φράγματος b από την Στατιστική Παράμετρο των Διαστημάτων γ . Το διάγραμμα δείχνει τον τρόπο μεταβολής του φράγματος που ορίζει η ανισότητα (3) σαν συνάρτηση του μέτρου του χάους.

και του b σε σχέση με το γ . Το πρώτο διάγραμμα δείχνει με ομαλό τρόπο την μετάβαση από την κανονικότητα (μεγάλο γ) στο χάος (μικρό γ) καθώς μεταβάλλουμε την παράμετρο του τελεστή Χάμιλτον θ . Τα άλλα διαγράμματα δείχνουν την εξάρτηση της Παραμέτρου Φράγματος του Entanglement b από το βαθμό της κανονικότητας ή της χαοτικότητας. Έτσι έχουμε μια πλήρη περιγραφή της συμπεριφοράς της Παραμέτρου Φράγματος του Entanglement σε ένα σύστημα εντελώς γενικό, χωρίς δηλαδή να έχουμε υποθέσει κάποιες ειδικές λεπτομέρειες και χαρακτηριστικά ενός συγκεκριμένου φυσικού συστήματος. Παρατηρούμε ότι γενικά το Φράγμα των Ρυθμών Μεταβολής του Entanglement b λαμβάνει μικρότερες τιμές στην περιοχή της κανονικότητας. Το δεδομένο αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι γενικά, δεδομένης της διαταραχής, το Entanglement είναι περισσότερο ευσταθές στην περιοχή της κανονικότητας. Δεδομένου δε ότι η κυρτότητες είναι μεγαλύτερες όταν διανύουμε την χαοτική περιοχή το συμπέρασμα μας αυτό ενισχύεται.

Μοντέλο E

Το ακόλουθο μοντέλο χρησιμοποιείται με σκοπό να μελετηθεί η εξάρτηση της παραμέτρου b αλλά και του Μέσου Διμερούς Entanglement από το είδος της δυναμικής. Έτσι θα έχουμε μια ακόμη ένδειξη για το πόσο αυστηρή είναι ισχύς της ανισότητας και παράλληλα θα εξετάσουμε πόσο Entanglement επάγει η ύπαρξη χαοτικής δυναμικής στο σύστημα.

Κάναμε χρήση ενός μοντέλου το οποίο είναι αρκετά γνωστό από την βιβλιογραφία [24]. Το μοντέλο αυτό περιγράφει μια μονοδιάστατη αλυσίδα αποτελούμενη από qubits εκ των οποίων το καθένα αλληλεπιδρά μόνο με τους πλησιέστερους σε αυτό γείτονες του. Η ισχύς της αλληλεπίδρασης ποσοτικοποιείται από την παράμετρο J . Θεωρούμε ότι ολόκληρο το σύστημα βρίσκεται υπό την επίδραση

ομογενούς εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Το σύστημα διαταράσσεται από τυχαία κατανομή ατελειών σε όλη του την έκταση. Οι διαταραχές αυτές αφορούν την ποιότητα του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Θεωρούμε ότι οι ατέλεια ακολουθούν συγκεκριμένη στατιστική κατανομή όσον αφορά τους τοπικούς διαταρακτικούς όρους h_j .

Πιο συγκεκριμένα οι όροι h_j κατανέμονται με βάση την *Πολυμετάβλητη Κατανομή. Gauss*. Δηλαδή εάν $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots)$ και $\hat{\Sigma}$ ο πίνακας (covariance matrix) με στοιχεία τους όρους

$$\Sigma_{ij} = \text{cov}(h_i, h_j) = \langle (h_i - \langle h_i \rangle)(h_j - \langle h_j \rangle) \rangle$$

τότε η στατιστική κατανομή του διανύσματος $\vec{h}$ είναι

$$\frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{\det(\hat{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{h} - \langle \vec{h} \rangle)' \hat{\Sigma}^{-1}(\vec{h} - \langle \vec{h} \rangle)\right)$$

Στο συγκεκριμένο μοντέλο οι όροι αυτοί κατανέμονται κανονικά με:

$$\langle h_j \rangle = 0, \quad \langle h_i h_j \rangle = d^2 \delta_{ij}$$

$$H = \sum_{j=1}^N (h + h_j) \sigma_{zj} + \frac{J}{4} \sum_{j=1}^{N-1} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$$

Από την αναφορά [24] μας είναι γνωστό το γεγονός ότι το σύστημα συμπεριφέρεται χαοτικά για τιμές της παραμέτρου d στην περιοχή:

$$0.1 \leq d \leq 0.5$$

εάν

$$J = 1$$

Αναλύσαμε αριθμητικά το σύστημα στο διάστημα:

$$0 \leq d \leq 2.5$$

για την περίπτωση αλυσίδας μήκους εννέα qubits.

Για κάθε διαφορετική τιμή του d κατασκευάσαμε δείγμα 1000 διαφορετικών Τυχαίων Πινάκων έτσι ώστε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές $\langle Q \rangle, \langle b \rangle$ και $\langle \gamma \rangle$. Και σε αυτή την περίπτωση προσαρμόζουμε στα αριθμητικά μας δεδομένα την κατανομή του Weibull. Τα αριθμητικά αποτελέσματα αναπαρίστανται στα Σχήματα 10-12. Στα δυο γραφήματα του Σχήματος 10 σχεδιάζουμε τον βαθμό χάους γ και το Entanglement Q σε σχέση με την κρίσιμη παράμετρο d . Στο Σχήμα 11 σχεδιάζουμε την Παράμετρο Φράγματος του Entanglement b σε σχέση με την κρίσιμη παράμετρο d και τον βαθμό του χάους γ και τέλος στο Σχήμα 12 σχεδιάζουμε την εξάρτηση του Entanglement Q από τους παράγοντες γ και b . Τα διαγράμματα του Σχήματος 10 δείχνουν τον τρόπο πού επιδρά η μεταβολή της παραμέτρου d τόσο στην δυναμική του συστήματος όσο και στο Διμερές Entanglement. Τα διαγράμματα του Σχήματος 11 μας δείχνουν την εξάρτηση του συντελεστή b τόσο από την κρίσιμη παράμετρο d όσο και από την δυναμική του συστήματος. Τέλος στο Σχήμα 12 βλέπουμε την εξάρτηση του μέσου Διμερούς Entanglement τόσο από την δυναμική του συστήματος όσο και από τον παράγοντα μέγιστης μεταβολής του Entanglement b .

Παρατηρούμε ότι κοντά στην τιμή $d=0.25$ το γ είναι ελάχιστο ενώ το Q είναι μέγιστο (Σχήμα 10). Αυτό σημαίνει ότι για τις τιμές εκείνες των παραμέτρων που βρισκόμαστε στην χαοτική περιοχή το Entanglement μεγιστοποιείται. Το συμπέρασμα αυτό απαντάται συχνά στην σχετική βιβλιογραφία. Στην ίδια τιμή ($d=0.25$) όπου το χάος αλλά και το Διμερές Entanglement μεγιστοποιούνται βλέπουμε ότι και το b παίρνει μέγιστη τιμή (Σχήμα 11). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το Entanglement είναι περισσότερο «εύθραυστο» στην μέγιστη τιμή του κάτω από την επίδραση εξωτερικών διαταραχών και

θορύβου. Σημειώνουμε εδώ ότι τα κβαντικά συστήματα όταν διανύουν την χαοτική περιοχή τότε εμφανίζουν στατιστικά μεγαλύτερες κυρτότητες στις ιδιοενέργειες τους. Αντίστοιχα συμπεράσματα βγάζουμε και από το Σχήμα 12. δηλαδή περισσότερο Entanglement (αλλά πιο ασταθές) στην περιοχή του χάους.

Ενδιαφέρον θα είχε μελλοντικά μια περισσότερο ενδελεχής διερεύνηση των παραπάνω συμπερασμάτων με χρήση μεγαλύτερων πινάκων και περισσότερων διαφορετικών συστημάτων. Παρόλα αυτά η διερεύνηση μας έγινε με αρκετά γενικό τρόπο και έτσι τα συμπεράσματα μας είναι ενδιαφέροντα όσον αφορά την σχέση του Entanglement με την δυναμική του συστήματος.

Σχήμα 10. Μοντέλο E. 9 qubits. Στα γραφήματα φαίνεται η εξάρτηση της Στατιστικής Παραμέτρου των Διαστημάτων και του μέσου Διμερούς Entanglement από την δυναμική μεταβλητή d .

Σχήμα 11. Μοντέλο E. 9 qubits. Στα γραφήματα φαίνεται η εξάρτηση της Παραμέτρου Φράγματος του Entanglement b από την δυναμική μεταβλητή d και από τον βαθμό χαοτικότητας.

Σχήμα 12. Μοντέλο E. 9 qubits. Στα γραφήματα φαίνεται η εξάρτηση του μέσου Διμερούς Entanglement από τον βαθμό χαοτικότητας και την Παράμετρο Φράγματος του Entanglement b .

Συμπεράσματα:

Έχουμε καταλήξει σε ένα όριο όσον αφορά τους ρυθμούς μεταβολής του Διμερούς Entanglement όταν στο σύστημα επιδρούν διαταραχές. Εκτεταμένοι αριθμητικοί υπολογισμοί

δεν έδειξαν σε καμία περίπτωση παραβίαση του ορίου αυτού και για κανένα από τα εντελώς διαφορετικά συστήματα τα οποία μελετήσαμε. Το όριο αυτό εξαρτάται από δύο όρους, τον παράγοντα b και από την κυρτότητα των ιδιοτιμών του τελεστή Χάμιλτον. Και οι δυο αυτοί παράγοντες αντανακλούν τις γενικές ιδιότητες και την δυναμική του υπό μελέτη συστήματος. Έχουμε λοιπόν ένα εντελώς γενικό μοντέλο εκτίμησης των μεταβολών του Entanglement ενός συστήματος το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση εξωτερικών διαταραχών και θορύβου. Το μοντέλο αυτό κωδικοποιείται πάνω στα δυναμικά χαρακτηριστικά του κβαντικού συστήματος.

Κάναμε χρήση πέντε μοντέλων έτσι ώστε να δοκιμάσουμε αριθμητικά την ανισότητα για να έχουμε και μια «πειραματική» επιβεβαίωση των θεωρητικών συμπερασμάτων μας. Στα τρία πρώτα μοντέλα δοκιμάσαμε την ανισότητα ευθέως υπολογίζοντας και σχεδιάζοντας τα ζευγάρια τιμών

$$|\partial Q^0 / \partial \tau| \text{ vs } |K_0|$$

πάνω σε μεγάλο αριθμό διαφορετικών επιλογών συστημάτων μέσα στις τρεις επιλεγμένες κλάσεις. Σε όλες τις περιπτώσεις η ανισότητα επιβεβαιώθηκε.

Κατόπιν εξετάσαμε την συμπεριφορά του συντελεστή φράγματος b σε σχέση με την δυναμική (κανονικότητα ή χάος) δυο διαφορετικών συστημάτων. Και στα δυο μοντέλα χαρτογραφήσαμε την δυναμική σχεδιάζοντας την Στατιστική Παράμετρο των Διαστημάτων γ σε σχέση με τις κρίσιμες παραμέτρους των συστημάτων. Χρησιμοποιούμε τον δείκτη γ έτσι ώστε να έχουμε ένα συνεχές «μέτρο» του βαθμού κανονικότητας ή χάους. Κατόπιν σχεδιάσαμε τόσο το γ όσο και το b σαν συνάρτηση των κρίσιμων παραμέτρων των συστημάτων. Από τα γραφήματα αυτά προκύπτει σε όλες τις περιπτώσεις ισχυρή εξάρτηση του b από τον βαθμό χαοτικότητας. Εφόσον το b είναι συνάρτηση μόνο του αδιατάρακτου συστήματος αντανακλά την εγγενή συμπεριφορά του σε σχέση με τις εξωτερικές διαταραχές. Την δυνατότητα δηλαδή του συστήματος να διατηρεί ευσταθείς Entangled καταστάσεις η να μεταβάλλει το Entanglement με συγκεκριμένους ρυθμούς.

Τα μοντέλα τα οποία μελετήσαμε είναι αρκετά γενικά και καλύπτουν ένα μεγάλο αριθμό περιπτώσεων από αυτές που παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία. Πιστεύουμε ότι τα συμπεράσματά μας θα είναι χρήσιμα στην μελέτη της επίδρασης του περιβάλλοντος (εν γένει στοχαστικού) ή εσωτερικών ατελειών σε συστήματα που παρουσιάζουν τεχνολογικό ενδιαφέρον.

Εντέλει ίσως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία που προέρχεται από την μελέτη των κυρτοτήτων των ιδιοτιμών ενός κβαντικού συστήματος με τρόπο τέτοιο που να επινοήσουμε βέλτιστες στρατηγικές για την προστασία του συστήματος από την Αποσυμφωνία.

Παράρτημα: Η Παραγωγή της ανισότητας. Η σχέση (4)

Έστω

$$\rho_{tot} = |n(\tau)\rangle\langle n(\tau)|$$

Ξεκινώντας από την έκφραση

$$Q^n = 2 - \frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \text{tr}(\rho_j^2)$$

ισχύει

$$\frac{\partial Q^n}{\partial \tau} = -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \tau} \text{tr}(\rho_j^2)$$

Από την

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \text{tr}[(\rho_j)^2] = 2 \text{tr} \left[\text{tr}_{All \neq j}(\rho_{tot}) \text{tr}_{All \neq j} \left[\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho_{tot}) \right] \right]$$

και την

$$\frac{\partial \rho_{\text{tot}}}{\partial \tau} = \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn} |k\rangle \langle n| + \text{c.c.}}{\epsilon_n - \epsilon_k}$$

Παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \text{tr}[(\rho_j)^2] = 2 \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn} A_{j;kn}^n + V_{nk} A_{j;nk}^n}{\epsilon_n - \epsilon_k}$$

Όπου

$$A_{j;kl}^n = \text{tr}[\text{tr}_{All \neq j}(|n\rangle \langle n|) \text{tr}_{All \neq j}(|k\rangle \langle l|)]$$

Έτσι

$$\frac{\partial Q^n}{\partial \tau} = -\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \frac{V_{kn} A_{kn}^n + \text{c.c.}}{\epsilon_n - \epsilon_k}$$

Με

$$A_{kl}^n = \sum_{j=1}^N A_{j;kl}^n$$

Και

$$-1 \leq A_{j;kl}^n \leq +1$$

Συνεπώς

$$-N \leq A_{kl}^n \leq +N$$

Και τελικά προκύπτει ότι

$$\frac{\partial Q^n}{\partial \tau} = -\frac{8}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\text{Re}(V_{kn} A_{kn}^n)}{\epsilon_n - \epsilon_k}$$

Όπου θέτοντας $n=0$ έχουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial Q^0}{\partial \tau} = \frac{8}{N} \sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{\text{Re}[V_{0k} A_{0k}^0]}{\epsilon_k - \epsilon_0}$$

Αναφορές:

- [1]. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000, ISBN: 0-521-63503-9
- [2]. Ph. Blanchard, D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer and I.-O. Stamatescu (eds.), in Proc. Decoherence, Theoretical, Experimental and Conceptual Problems, Bielefeld, Germany 1998 (Springer-Verlag, Germany, 2000).
- [3]. N. F. Bell, R. F. Sawyer, R. R. Volkas and Y. Y. Y. Wong, Phys. Rev A **65** (2002) 042328.
- [4]. J. N. Bandyopadhyay and A. Lakshminarayan, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 060402.
- [5]. J. N. Bandyopadhyay and A. Lakshminarayan, Phys. Rev. E **69** (2004) 016201.
- [6]. C. Mejia-Monasterio, G. Benenti, G. G. Carlo and G. Casati, Phys. Rev A **71** (2005) 062324.
- [7]. H. Fujisaki, Phys. Rev A **70** (2004) 012313.
- [8]. S. Ghose and B. C. Sanders, Phys. Rev A **70** (2004) 62315.
- [9]. X.Wang, S. Ghose, B. C. Sanders and B. Hu, Entanglement as a signature of quantum chaos, e-print quant-ph/0312047.
- [10]. Ph. Jacquod, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 150403.
- [11]. T. Gorin and T. H. Seligman, Decoherence in chaotic and integrable systems: A random matrix approach, e-prints nlin.CD/0101018, quant-ph/0112030.
- [12]. M. Znidaric and T. Prosen, Phys. Rev A **71** (2005) 32103.

- [13]. C. Pineda and T. H. Seligman, Evolution of pairwise Entanglement in a coupled n-body system, e-print quant-ph/0503177.
- [14]. K. Nakamura, Quantum Chaos (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1993).
- [15]. K. Nakamura and M. Lakshmanan, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1661.
- [16]. T. Takami, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 3371.
- [17]. T. Takami, Phys. Rev. E **52** (1995) 2434.
- [18]. P. Gaspard, S. A. Rice, H. J. Mikeska and K. Nakamura, Phys. Rev. A **42** (1990) 4015.
- [19]. D. Saher, F. Haake and P. Gaspard, Phys. Rev. A **44** (1991) 7841.
- [20]. T. Takami and H. Hasegawa, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 419.
- [21]. J. Zakrzewski and D. Delande, Phys. Rev. E **47** (1993) 1650.
- [22]. Y. Fyodorov and H.-J. Sommers, Z. Phys. B **99** (1995) 123.
- [23]. T. Guhr, A. Muller-Groeling and H. A. Weidenmuller, Phys. Rep. **299** (1998) 189.
- [24]. L. F. Santos, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 4723

ΕΝΟΤΗΤΑ Ε΄

**ENTANGLEMENT,
ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΑΜΥΧΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΙΣ.
Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ QUANTUM KICKED TOP.**

Quantum Entanglement dependence on bifurcations and scars in non-autonomous systems. The case of Quantum Kicked Top

George Stamatiou, Demetris P.K. Ghikas *

Department of Physics University of Patras, Patras 26500, Greece

Received 2 August 2006; received in revised form 10 February 2007; accepted 2 April 2007 Available online 4 April 2007 Communicated by A.P. Fordy

Abstract

Properties related to Entanglement in quantum systems, are known to be associated with distinct properties of the corresponding classical systems, as for example stability, integrability and chaos. This means that the detailed topology, both local and global, of the classical phase space may reveal, or influence, the entangling power of the quantum system. As it has been shown in the literature, the bifurcation points, in autonomous dynamical systems, play a crucial role for the onset of Entanglement. Similarly, the existence of scars among the quantum states seems to be a factor in the dynamics of Entanglement. Here we study these issues for a non-autonomous system, the Quantum Kicked Top, as a collective model of a multi-qubit system. Using the bifurcation diagram of the corresponding classical limit (the Classical Kicked Top), we analyzed the pairwise and the bipartite Entanglement of the qubits and their relation to scars, as a function of the critical parameter of the system. We found that the pairwise Entanglement and pairwise negativity show a strong maximum precisely at the bifurcation points, while the bipartite Entanglement

changes slope at these points. We have also investigated the connection between Entanglement and the fixed points on the branch of the bifurcation diagram between the two first bifurcation points and we found that the Entanglement measures take their extreme values precisely on these points. We conjecture that our results on this behavior of Entanglement is generic for many quantum systems with a nonlinear classical analogue. © 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 03.67.Mn; 05.45.Ac; 05.45.Pq; 05.45.Mt

Keywords: Entanglement; Quantum chaos; Bifurcations; Scars; Kicked-top model

Σχέση και εξάρτηση του κβαντικού Entanglement από την τοπολογία των Κβαντικών Αμυχών και των Διακλαδώσεων στα μη αυτόνομα συστήματα. Η περίπτωση του Quantum Kicked Top.

Γενικά:

Ιδιότητες σχετικές με το Entanglement στα κβαντικά συστήματα είναι γνωστό ότι συσχετίζονται με συγκεκριμένες ιδιότητες του αντίστοιχου κλασικού συστήματος. Τέτοιες ιδιότητες είναι η ευστάθεια, η ολοκληρωσιμότητα και το χάος. Έτσι είναι πολύ πιθανόν οι λεπτομέρειες της τοπολογίας, τόσο οι τοπικές όσο και οι συνολικές, του κλασικού χώρου των φάσεων να έχουν επίδραση στην δυναμική του Entanglement του συστήματος. Όπως έχει καταγραφεί στην βιβλιογραφία, η ύπαρξη *Σημείων Διακλάδωσης* (Bifurcations Points) μπορεί να επηρεάσει το Entanglement στην περίπτωση των αυτόνομων συστημάτων. Παρομοίως η ύπαρξη Κβαντικών Αμυχών (Scars) στον χώρο των ιδιοκαταστάσεων ενός κβαντικού συστήματος δείχνει να αποτελεί έναν σημαντικό παράγοντα όσον αφορά την ιδιότητα του Entanglement. Στο παρόν

διερευνούμε την περίπτωση ενός μη αυτόνομου συστήματος, του Quantum Kicked Top, ιδωμένου ως ενός συλλογικού συστήματος αποτελούμενου από πολλά κβαντικά δυαδικά ψηφία (qubits). Ξεκινώντας την μελέτη μας από το αντίστοιχο κλασικό σύστημα (Classical Kicked Top) σχεδιάζουμε το Διάγραμμα Διακλαδώσεων και αναλύουμε το Διμερές Entanglement και το Entanglement ανά Ζεύγος (pair wise) σε σχέση με τις Διακλαδώσεις αλλά και με τις Αμυχές. Ο χώρος παραμετροποιείται από τις κρίσιμες παραμέτρους του συστήματος έτσι ώστε να ορίζουμε περιοχές κανονικότητας και χάους.

Εισαγωγή:

Κβαντικά συστήματα με κλασικό ανάλογο ενδέχεται να έχουν ιδιότητες οι οποίες έχουν ισχυρή εξάρτηση από την τοπολογική δομή του κλασικού χώρου των φάσεων. Εκτεταμένες μελέτες της σχέσης των τοπολογικών ιδιοτήτων του κλασικού χώρου των φάσεων σε σχέση με τις ιδιότητες του αντίστοιχου κβαντικού συστήματος υπάρχουν στην θεματολογία του κβαντικού χάους [1]. Στην ουσία σχεδόν πάντοτε το κβαντικό χάος σε ένα σύστημα ορίζεται σε συνάρτηση με το αντίστοιχο κλασικό ανάλογο του. Για παράδειγμα γνωρίζουμε πλέον καλά το γεγονός ότι για τις τιμές των παραμέτρων που ένα κλασικό σύστημα είναι χαοτικό το κβαντικό ανάλογο του (εάν αυτό ορίζεται) εμφανίζει χαρακτηριστική κατανομή στις ιδιοενέργειες του. Επίσης μπορούμε να δούμε συγκεκριμένα μορφώματα στις ιδιοκαταστάσεις του [2,3]. Από την άλλη πλευρά μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον έχει εκδηλωθεί όσον αφορά την δυνατότητα ενός καθαρά κβαντικού χαρακτηρισμού του χάους. Δηλαδή υπάρχει το ερώτημα εάν και κατά πόσον μπορούμε να προσδιορίσουμε το χάος με κβαντικούς καθαρά όρους χωρίς να χρειαζόμαστε αναγκαστικά να αναφερθούμε σε κάποιο κλασικό ανάλογο. Θα είχε λοιπόν ενδιαφέρον να βλέπαμε πως εκδηλώνεται το χάος σε κάποια ιδιότητα η οποία να μην έχει καθόλου κλασικό ανάλογο. Μια τέτοια ιδιότητα είναι η ιδιότητα του κβαντικού Entanglement [4]. Έχει δειχθεί σε αρκετές περιπτώσεις ότι το *Entangling Power* του τελεστή χρονικής εξέλιξης εξαρτάται ισχυρά από της ιδιότητες του συστήματος στο κλασικό όριο [5-17]. Αν και

υπάρχουν πολλά αλληλοσυγκρουόμενα συμπεράσματα στην βιβλιογραφία, συνήθως λόγω του γεγονότος ότι μελετώνται πολύ ειδικά συστήματα, είναι κοινό συμπέρασμα ότι το Entanglement μπορεί να υποδείξει ιδιότητες και τιμές παραμέτρων που σχετίζονται με το χάος. Στον παρόν θα θέσουμε το ερώτημα του αν και κατά πόσον η λεπτομερής δομή του κλασικού χώρου των φάσεων επηρεάζει την δυναμική του Entanglement του κβαντικού συστήματος. Στην περίπτωση αυτή είναι φυσικό να διερωτηθεί κανείς εάν το Σημεία Διακλάδωσης μπορεί να σημαίνουν κάτι στην κβαντική περιοχή μελέτης. Έτσι και αλλιώς κάποια από τα πιο κοινά σενάρια εμφάνισης χάους σε ένα κλασικό σύστημα συνδέονται με την δημιουργία ακολουθίας από Σημεία Διακλάδωσης. Η περίπτωση ενός αυτόνομου συστήματος έχει μελετηθεί αρκετά διεξοδικά στην βιβλιογραφία [18–21] και φαίνεται ότι το κβαντικό σύστημα λαμβάνει υπόψη του την κλασική συμπεριφορά. Από την άλλη πλευρά υπάρχει μια γνωστή συσχέτιση μεταξύ των κλασικών περιοδικών τροχιών και κάποιων εντοπισμένων ιδιοκαταστάσεων οι οποίες είναι γνωστές, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, και ως Κβαντικές Αμυχές (quantum scars) [22–27]. Η ύπαρξη των Κβαντικών Αμυχών έχει ισχυρή συσχέτιση με την εμφάνιση χάους και μια εύλογη απορία είναι το πώς το Entanglement συσχετίζεται με την ύπαρξη τέτοιων ιδιοκαταστάσεων. Στην περίπτωση του αυτόνομου συστήματος η συσχέτιση Entanglement και Διακλαδώσεων έχει αποδειχθεί. Στο παρόν θα μελετήσουμε τα παραπάνω στην περίπτωση του Quantum Kicked Top. Το Quantum Kicked Top είναι μη αυτόνομο σύστημα [8,28,29]. Με το μοντέλο αυτό θα περιγράψουμε ένα σύστημα πολλών qubits τα οποία διαταράσσονται από διακριτούς στιγμιαίους παλμούς. Το Quantum Kicked Top αποτελεί αγαπημένο μοντέλο στην μελέτη του κβαντικού χάους. Στο μοντέλο αυτό είναι γνωστός τρόπος συσχετισμού του κλασικού με το κβαντικό χάος, ο ρόλος των περιοδικών τροχιών στην ημικλασική περιγραφή του, πως το Entanglement παράγεται και πως αυτό μπορεί να αποτελέσει την ένδειξη για την ύπαρξη κβαντικού χάους. Στο παρόν θα εξετάσουμε τον ρόλο των Διακλαδώσεων στον ρυθμό παραγωγής Entanglement του Quantum Kicked Top. Υπολογίσαμε ότι το Entanglement Ζεύγους έχει ένα ευδιάκριτο μέγιστο ακριβώς στα σημεία Διακλάδωσης. Κατόπιν εξετάσαμε το εάν και κατά πόσον η ύπαρξη Κβαντικών Αμυχών συσχετίζεται με την ιδιότητα του Entanglement.

Παρατηρήσαμε επίσης ότι το Διμερές Entanglement αλλάζει, σαν συνάρτηση των παραμέτρων του συστήματος, έντονα την κλίση του στις κρίσιμες περιοχές. Στην ανάλυση μας δόθηκε μεγάλο σημασία στην τοπική μορφολογία του κλασικού χώρου των φάσεων και στο πως αυτή επηρεάζει τον Entanglement εντοπισμένων καταστάσεων. Καθώς δε τα τοπικά χαρακτηριστικά του κλασικού συστήματος αλλάζουν μεταβάλλοντας τις παραμέτρους μελετάμε το Entanglement των αντίστοιχων κβαντικών καταστάσεων. Βέβαια η δυνατότητα ανάδειξης μεγάλης χωρικής λεπτομέρειας στο κβαντικό επίπεδο προϋποθέτει πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος συνεπώς ελπίζουμε σε μελλοντική μελέτη μικρότερων μορφωμάτων του κλασικού χώρου των φάσεων από κβαντικής απόψεως.

Στην επόμενη παράγραφο σύντομα θα επαναλάβουμε κάποια στοιχεία σχετικά με το Quantum Kicked Top. Επίσης θα αναφερθούμε στην έννοια των Κβαντικών Αμυχών και στην σημασία τους.

Κατόπιν θα αναπτύξουμε τους υπολογισμούς μας και θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματά μας.

Βασικές Έννοιες

Κλασικό και κβαντικό Kicked Top.

Έστω σύστημα αποτελούμενο από N qubits. Μπορούμε να ορίσουμε του συλλογικούς τελεστές:

$$\hat{J}_a = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\sigma}_{ia}}{2}$$

Όπου $\{\hat{\sigma}_{ia}\}$ είναι οι πίνακες του Pauli. Στην ανάλυση μας θα κάνουμε χρήση της βάσης των συμμετρικών καταστάσεων του Dicke [32]

$$\{|j, m\rangle, m = -j, \dots, j, j = N/2\}$$

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι λόγω της επιλεγμένης συμμετρίας η διάσταση του χώρου είναι ίση με $N+1$ και όχι με 2^N . Έχουμε επιτύχει λοιπόν μια σημαντικότερη μείωση των υπολογιστικών απαιτήσεων. Θα περιγράψουμε την δυναμική του συστήματος των qubits με τον τελεστή Χάμιλτον του Quantum Kicked Top [23]. Το σύστημα αυτό αποτελεί παράδειγμα μη αυτόνομου κβαντικού συστήματος

$$\hat{H}(t) = (\hbar p/\tau) \hat{J}_y + (\hbar k/2j) \hat{J}_z^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau)$$

Ο γραμμικός όρος περιγράφει μετάπτωση γύρω από τον άξονα y με γωνιακή συχνότητα ίση με p/τ . Η τετραγωνική διαταραχή, με διατακτική παράμετρο τον όρο k , περιγράφει περιοδικές στιγμιαίες διαταραχές του συστήματος με περίοδο τ . Η χρονική εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται με την βοήθεια του μοναδιαίου τελεστή Floquet

$$\hat{F} = e^{-i(k/2j)\hat{J}_z^2} e^{-ip\hat{J}_y}$$

όπου έχουμε κανονικοποιήσει έτσι ώστε να ισχύει

$$\hbar = 1, \tau = 1$$

Η εξέλιξη είναι μια περιδίνηση γύρω από τον άξονα y κατά γωνία p ακολουθούμενη από στιγμιαία διαταραχή. Εάν η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η $|y_0\rangle$ τότε μετά από n μονάδες χρόνου το σύστημα θα έχει μεταβεί στην κατάσταση $|y_n\rangle = \hat{F}^n |y_0\rangle$

Η εξίσωση

$$\hat{F}|\Phi_m\rangle = e^{ix_m} |\Phi_m\rangle$$

προσδιορίζει τις ψευδοκαταστάσεις και ψευδοενέργειες του τελεστή Floquet του συστήματος. Οι καταστάσεις αυτές αποτελούν πλήρες σύστημα ικανό για την περιγραφή οποιασδήποτε καταστάσεως του μη αυτόνομου κβαντικού

συστήματος. Πιο συγκεκριμένα για δεδομένη αρχική κατάσταση μπορούμε να περιγράψουμε την χρονική εξέλιξη αναλύοντας την στις καταστάσεις Floquet ως

$$|y_n\rangle = \sum_m e^{inx_m} |\Phi_m\rangle \langle \Phi_m | y_0 \rangle$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι η δυναμική αυτή εξελίσσει τις συμμετρικές καταστάσεις κατά αναλλοίωτο τρόπο.

Η μετάβαση στο Classical Kicked Top μπορεί να γίνει εάν πρώτα περιγραφεί το σύστημα στην Εικόνα Heisenberg. Στην Εικόνα αυτή εξελίσσονται οι τελεστές που περιγράφουν τα φυσικά μεγέθη και όχι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος. Με το σκεπτικό αυτό έχουμε για τους τελεστές της στροφορμής

$$\hat{J}_{in} = \hat{F}^{\dagger n} \hat{J}_0 \hat{F}^n$$

Έτσι

$$\hat{J}'_x = \frac{1}{2} (\hat{J}_x \cos p + \hat{J}_z \sin p + i \hat{J}_z) e^{i \frac{k}{j} (\hat{J}_z \cos p - \hat{J}_x \sin p + \frac{1}{2})} + \text{h.c.}$$

$$\hat{J}'_y = \frac{1}{2i} (\hat{J}_x \cos p + \hat{J}_z \sin p + i \hat{J}_z) e^{i \frac{k}{j} (\hat{J}_z \cos p - \hat{J}_x \sin p + \frac{1}{2})} + \text{h.c.}$$

$$\hat{J}'_z = \hat{J}_z \cos p - \hat{J}_x \sin p$$

Για να ορίσουμε το Classical Kicked Top σε αντιστοιχία με τον κβαντικό παίρνουμε το όριο των πολύ μεγάλων στροφορμών j . Ορίζοντας τους νέους τελεστές

$$\hat{T}_a = \hat{J}_a / j, \quad a \in \{x, y, z\}$$

Οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{T}_a, \hat{T}_b] = \frac{i \epsilon_{abc}}{j} \hat{T}_c$$

Βλέπουμε ότι στο όριο $j \rightarrow \infty$ οι τελεστές αυτοί μετατίθενται. Έτσι μετονομάζοντας τους τελεστές αυτούς ως

$$X = T_x, Y = T_y, Z = T_z$$

στο όριο $j \rightarrow \infty$ έχουμε τις κλασικές εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} X' &= \operatorname{Re}(X \cos p + X \sin p + iY)e^{ik(Z \cos p - X \sin p)}, \\ Y' &= \operatorname{Im}(X \cos p + X \sin p + iY)e^{ik(Z \cos p - X \sin p)}, \\ Z' &= -X \sin p + Z \cos p. \end{aligned}$$

Εάν δε επιλέξουμε την τιμή

$$p = \pi/2$$

τότε η δυναμική του κλασικού συστήματος θα περιγράφεται από τις απλοποιημένες εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned} X' &= Z \cos(kX) + Y \sin(kX), \\ Y' &= -Z \sin(kX) + Y \cos(kX), \\ Z' &= -X \end{aligned}$$

Όπου ισχύει ότι

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

Επειδή υπάρχει εξαρτημένη μεταβλητή έχουμε την δυνατότητα να απλοποιήσουμε το σύστημα κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού

$$X = \sin \theta \cos \phi, Y = \sin \theta \sin \phi, Z = \cos \theta$$

$$\theta = \arccos(Z), \phi = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

και έτσι να καταλήξουμε σε μια απεικόνιση δυο διαστάσεων η οποία θα περιγράφει το Classical Kicked Top. Η κλασική δυναμική αναλύεται αρκετά εκτεταμένα στην βιβλιογραφία [8, 28, 29]. Για μικρές τιμές της παραμέτρου k έχουμε εκτεταμένες νησίδες κανονικότητας οι οποίες καταστρέφονται καθώς το k αυξάνεται. Για ενδιάμεσες τιμές του συντελεστή k έχουμε μικτή συμπεριφορά ενώ για μεγάλες τιμές του k

οδηγούμαστε στο πλήρες χάος. Το σύστημα έχει δυο τετριμμένα σημεία ισορροπίας, το ένα στον βόρειο και το άλλο στο νότιο πόλο κατά την διεύθυνση του άξονα y . Μεταβάλλοντας τις παραμέτρους του συστήματος και επικεντρώνοντας στην περιοχή των σημείων ισορροπίας μπορούμε να δούμε Διακλαδώσεις. Μελετώντας το αντίστοιχο κβαντικό σύστημα στην ίδια περιοχή και με την βοήθεια του κλασικού Διαγράμματος Διακλαδώσεων (*Bifurcation Diagram*) μπορούμε να συσχετίσουμε καθαρά κβαντικές ιδιότητες, όπως το Entanglement, με τις τοπικές δομικές αλλαγές του κλασικού χώρου των φάσεων. Σε μια περισσότερο ολοκληρωμένη ανάλυση θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί η σημασία όλων των ειδών Διακλαδώσεων, και των τρόπων γενέσεώς τους, σε σχέση με την κβαντική δυναμική. Και θα είχε μεγάλη σημασία η μελέτη αυτή γιατί πολλά από τα σημαντικά σενάρια μετάβασης ενός κλασικού συστήματος στο χάος βασίζονται στην εμφάνιση δεδομένων δομών Διακλαδώσεων. Έτσι θα μπορούσαμε να επανακαθορίσουμε τις αιτίες εμφάνισης του κβαντικού χάους. Στο παρόν θα κάνουμε τα πρώτα βήματα της ανάλυσης αυτής.

Κβαντικές Αμυχές (Quantum Scars).

Στην ημικλασική ανάλυση της κβαντομηχανικής οι κλασικές περιοδικές τροχιές έχουν ξεχωριστή σημασία [1]. Έχει αποδειχθεί ότι μέρος της πυκνότητας καταστάσεων μπορεί να γραφεί ως άθροισμα όρων οριζόμενων πάνω στις κλασικές περιοδικές τροχιές. Και η ύπαρξη τέτοιων κλασικών περιοδικών τροχιών επιδρά στο ενεργειακό φάσμα του αντίστοιχου κβαντικού συστήματος. Υπό αυτή την οπτική μια από τις πιο ενδιαφέροντες και αναπάντεχες παρατηρήσεις είναι η ύπαρξη των Κβαντικών Αμυχών (Quantum Scars) [22]. Οι Κβαντικές Αμυχές είναι κβαντικές ιδιοκαταστάσεις οι οποίες εμφανίζουν ισχυρό εντοπισμό επάνω στις κλασικές περιοδικές τροχιές. Οι Κβαντικές Αμυχές δεν εμφανίζονται αναγκαστικά σε κάθε κλασική περιοδική τροχιά, ούτε κάθε κβαντική ιδιοκατάσταση σχετίζεται αναγκαστικά με μια κλασική περιοδική τροχιά. Έχει ενδιαφέρον να δει κανείς την επίδραση των Κβαντικών Αμυχών στην κβαντική συμπεριφορά ενός συστήματος συνολικά. Σε ένα μη αυτόνομο σύστημα, όπως είναι το Quantum Kicked Top, οι Κβαντικές Αμυχές θα πρέπει

να αναζητηθούν στον χώρο των ψευδοιδιοκαταστάσεων δηλαδή στις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή Floquet που περιγράφει την δυναμική του συστήματος. Έχει αποδειχθεί ότι η εμφάνιση Κβαντικών Αμυχών συμβάλει με σημαντικό τρόπο στην δυναμική μιας Σύμφωνης κατάστασης η οποία ξεκινά εντοπισμένη στην περιοχή της αντίστοιχης κλασικής τροχιάς [22-27]. Στο παρόν θα μελετήσουμε την επίδραση των Κβαντικών Αμυχών στο Entanglement. Θα βασίσουμε την ανάλυση μας σε κάποια γνωστά δεδομένα.

Έστω η κατάσταση

$$|\gamma\rangle = |\theta, \phi\rangle$$

με $|\theta, \phi\rangle$ να είναι αυθαίρετη Σύμφωνη κατάσταση spin (spin coherent state) όπως αυτές ορίζονται στο [31].

$$\{|\theta, \phi\rangle = R(\theta, \phi)|j, j\rangle; -\pi \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

με

$$R(\theta, \phi) = \exp\{i\theta[J_x \sin \phi - J_y \cos \phi]\}$$

Στην περίπτωση αυτή, η αρχική κατάσταση εξελίσσεται κατά την n -οστή ενέργεια του τελεστή Floquet στην

$$|\gamma'\rangle = \hat{F}^n |\gamma\rangle$$

Όπου με γ' συμβολίζουμε την *Παράμετρο Σύμφωνης Κατάστασης* (Coherent State Parameter). Η παράμετρος αυτή προκύπτει από την κλασική δυναμική ως

$$\gamma' = \underbrace{T(\dots T(T(\gamma)))}_n$$

με T το αντίστοιχο κλασικό όριο του τελεστή Floquet.

Έτσι για μια κλασική τροχιά περιόδου K θα ισχύει ότι [28]

$$\gamma_0 = \underbrace{T(\cdots T(T(\gamma_0)))}_K$$

Για το Διαδότη M βημάτων (M-step propagator) ορίζουμε

$$f_M = \langle \gamma_0 | \hat{F}^M | \gamma_0 \rangle$$

και αναπτύσσοντας στην βάση των ψευδοιδιοκαταστάσεων έχουμε

$$f_M = \sum_{n=1}^N H_n(\gamma_0) e^{iMx_n}$$

με N την διάσταση του συστήματος και

$$H_n = |\langle \Phi_n | \gamma_0 \rangle|^2$$

η αναπαράσταση Husimi [23] της n -οστής ψευδοιδιοκατάστασης. Η σημασία της παραπάνω ποσότητας έγκειται στο γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier

$$\hat{f}_\omega = \sum_{M=-L}^L e^{-i\omega M} f_M = \sum_{n=1}^N H_n(\gamma_0) \sum_{M=-L}^L e^{iM(\phi_n - \omega)}$$

περιέχει πληροφορίες σχετικά με την εμφάνιση των Κβαντικών Αμυχών. Οι πιθανές Κβαντικές Αμυχές θα πρέπει να αναζητηθούν στις περιοδικές τροχιές

$$\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{M-1})$$

που το προηγούμενο ανάπτυγμα εμφανίζει μέγιστο. Πιο απλά η ψευδοιδιοκατάσταση που αντιστοιχεί στην ψευδοενέργεια εκείνη που το ανάπτυγμα Fourier εμφανίζει μέγιστο είναι Κβαντική Αμυχή εάν πληροί τις προϋποθέσεις του εντοπισμού.

Μέτρα του Entanglement.

Ο κυρίως σκοπός μας είναι να μελετήσουμε το Entanglement Ζεύγους και το Διμερές Entanglement ενός συστήματος το οποίο συνίσταται από N qubits και το οποίο διαταράσσεται εξωτερικά. Επίσης μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τον ρόλο των Σημείων Διακλάδωσης και των Κβαντικών Αμυχών όσον αφορά το Entanglement. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως περιγράφουμε την συλλογική συμπεριφορά των N qubits κάνοντας χρήση των μοντέλων του κλασικού αλλά και του κβαντικού Kicked Top. Εκφράζουμε αριθμητικά το Entanglement Ζεύγους τόσο με την Αρνητικότητα όσο και με το Entanglement of Formation. Όσον αφορά το Διμερές Entanglement το εκφράζουμε αριθμητικά με το μέτρο της Γραμμικής Εντροπίας. Ειδικότερα έστω ότι με το σύμβολο $\hat{\rho}$ εννοούμε τον Πίνακα Πυκνότητας του συνολικού συστήματος και συμβολίζουμε την υπολογιστική βάση ως

$$|i_1 i_2 \cdots i_N\rangle, i_k \in \{0, 1\}$$

Επίσης

$$\hat{\rho}_k = \text{tr}_{ALL \neq k}(\hat{\rho})$$

και

$$\hat{\rho}_{km} = \text{tr}_{ALL \neq k, m}(\hat{\rho})$$

οι ανηγμένοι Πίνακες Πιθανότητας του ενός και των δυο qubits. Κάνουμε χρήση τριών μέτρων του Entanglement. Το πρώτο μέτρο είναι το Διμερές Entanglement το οποίο ορίζεται ως

$$Q \equiv 2 - \frac{2}{N} \sum_i \text{tr}(\hat{\rho}_i^2)$$

Το δεύτερο μέτρο είναι η Αρνητικότητα $N_p = N(\hat{\rho}_{km})$ η οποία θυμίζουμε ότι ορίζεται ως εξής:

Έστω ότι έχουμε στην γενική περίπτωση μια μικτή κβαντική κατάσταση η οποία περιγράφεται από τον Πίνακα Πιθανότητας $\hat{\rho}$. Ορίζουμε ως Αρνητικότητα την ποσότητα

$$N(\hat{\rho}) = \sum_j \max\{0, -\mu_j\}$$

όπου τα $\{\mu_j\}$ είναι οι ιδιοτιμές του Μερικού Ανάστροφου του $\hat{\rho}$.

Το Entanglement of Formation ορίζεται ως

$$E_f = H\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right)$$

Με $H(x)$ την συνάρτηση της Εντροπίας Shannon και C το Concurrence το οποίο ορίζεται ως

$$C = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$$

τα λ_j είναι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα

$$\hat{\rho}_{12}(\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y}) \hat{\rho}_{12}^*(\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y})$$

σε φθίνουσα διάταξη.

Παραπέμπουμε στις αναφορές [35-40] για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα προηγούμενα μέτρα του Entanglement.

Σχήμα 1α. Αναπαράστάσεις του Χώρου των Φάσεων για το Classical Kicked Top. Η αναπαράσταση γίνεται για διαφορετικές τιμές της κρίσιμης

μεταβλητής κ . Αριστερά: $\kappa=1.5$. Δεξιά: $\kappa=2.0$. Και στις δυο περιπτώσεις διακρίνονται εκτεταμένες νησίδες ευστάθειας γύρω από σημεία ισορροπίας.

Σχήμα 1β. Αναπαραστάσεις του Χώρου των Φάσεων για το Classical Kicked Top. Η αναπαράσταση γίνεται για διαφορετικές τιμές της κρίσιμης μεταβλητής κ . Αριστερά: $\kappa=2.5$. Δεξιά: $\kappa=4.5$. Καθώς η κρίσιμη παράμετρος κ αυξάνεται οι νησίδες ευστάθειας συρρικνώνονται και τελικά χάνονται δίνοντας την θέση τους στο χάος.

Αποτελέσματα.

Η κλασική εικόνα.

Σχεδιάζουμε τον χώρο των φάσεων του κλασικού Kicked Top για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου k και τα Διαγράμματα Διακλάδωσης για τις γωνίες θ_0 και ϕ_0 που αντιστοιχούν στον σημείο ισορροπίας που υπάρχει στο «νότιο» πόλο του χώρου των φάσεων.

Στο Σχήμα 1 αναπαράγουμε το πορτρέτο του φασικού χώρου για τέσσερις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σύζευξης k . Το ένα από τα διαγράμματα εμφανίζει την μορφολογία του χώρου των φάσεων την στιγμή που συμβαίνει η Διακλάδωση για την τιμή $k=2$. Αντιπαραθέτουμε τέσσερις εικόνες του χώρου των φάσεων έτσι ώστε να φανεί ο τρόπος με τον οποία η τοπολογία αλλάζει μεταβάλλοντας την παράμετρο k . Καθώς το k μεγαλώνει το κλασικό σύστημα οδηγείται στο πλήρες χάος.

Πριν την έλευση του πλήρους χάους το κλασικό σύστημα συνεχίζει να εμφανίζει μικροσκοπικές απομονωμένες νησίδες κανονικότητας οι οποίες όμως δεν μας ενδιαφέρουν στο παρόν μια και το κβαντικό σύστημα που θέλουμε να μελετήσουμε δεν επηρεάζεται από τόσο μικρών διαστάσεων τοπολογικές διαφορές λόγω της σχέσης αβεβαιότητας. Θα είχε βέβαια ενδιαφέρον να μελετήσουμε εάν τυχόν ποιοτικές διαφοροποιήσεις του χώρου των φάσεων στο επίπεδο αυτό επηρεάζουν την κβαντική συμπεριφορά. Κοντά στο όριο του πλήρους χάους το κλασικό σύστημα συνεχίζει να διατηρεί κάποιες ασταθείς περιοδικές τροχιές οι οποίες πιθανόν να παίζουν ρόλο στο κβαντικό όριο. Στο Σχήμα 2 σχεδιάζουμε τα Διαγράμματα Διακλάδωσης για τις γωνίες θ και ϕ του σημείου ισορροπίας στο «νότιο» πόλο του συστήματος σαν συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου. Το σχεδιάγραμμα αυτό κατασκευάζεται αριθμητικά.

Όπως θα δούμε παρακάτω αυτό το Σημείο Διακλάδωσης επηρεάζει έντονα την ιδιότητα του Entanglement.

Σχήμα 2. Classical Kicked Top. Διαγράμματα Διακλάδωσης του σημείου ισορροπίας το οποίο εδρεύει στον «νότιο» πόλο του συστήματος. Αριστερά: Σαν συνάρτηση της γωνίας θ . Δεξιά: Σαν συνάρτηση της γωνίας ϕ .

Σχήμα 3α. Κβαντική Αμυχή στον «νότιο» πόλο του Quantum Kicked Top. Αντιστοιχεί στην τιμή της κρίσιμης παραμέτρου $k=1.5$ και είναι η ψευδοιδιοκατάσταση με $n=47$ με ψευδοενέργεια $\omega_n=4.2922$.

Σχήμα 3β. Κβαντική Αμυχή στον «νότιο» πόλο του Quantum Kicked Top. Αντιστοιχεί στην τιμή της κρίσιμης παραμέτρου $k=2$ και είναι η ψευδοιδιοκατάσταση με $n=47$ με ψευδοενέργεια $\omega_n=4.05031$.

Σχήμα 3γ. Κβαντική Αμυχή στον «νότιο» πόλο του Quantum Kicked Top. Αντιστοιχεί στην τιμή της κρίσιμης παραμέτρου $k=2.5$ και είναι η ψευδοιδοκατάσταση με $n=51$ με ψευδοενέργεια $\omega_n=4.3933$.

Σχήμα 3δ. Κβαντική Αμυχή στον «νότιο» πόλο του Quantum Kicked Top. Αντιστοιχεί στην τιμή της κρίσιμης παραμέτρου $k=4.5$ και είναι η ψευδοιδοκατάσταση με $n=45$ με ψευδοενέργεια $\omega_n=3.8732$.

Σχήμα 4α. Υπολογισμοί του Entanglement ως συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου k . Η Αρνητικότητα Ζεύγους. Αριστερά: Νότιος πόλος για $N=50$ qubits. Δεξιά: Βόρειος πόλος για $N=110$ qubits.

Σχήμα 4β. Υπολογισμοί του Entanglement ως συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου k . Το Entanglement Ζεύγους. Αριστερά: Νότιος πόλος για $N=50$ qubits. Δεξιά: Βόρειος πόλος για $N=110$ qubits.

Σχήμα 4γ. Υπολογισμοί του Entanglement ως συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου k . Το Διμερές Entanglement. Αριστερά: Νότιος πόλος για $N=50$ qubits. Δεξιά: Βόρειος πόλος για $N=110$ qubits.

Οι Διακλαδώσεις και το Entanglement των Κβαντικών Αμυχών

Στην εισαγωγή αναφέραμε ότι οι Κβαντικές Αμυχές αποτελούν εντοπισμένες κβαντικές καταστάσεις οι οποίες συσχετίζονται με περιοδικές τροχιές του κλασικού χώρου των φάσεων. Στην περίπτωση μας σχεδιάζουμε τις καταστάσεις αυτές με την βοήθεια της αναπαράστασης Husimi. Με το σκεπτικό ότι θέλουμε να συσχετίσουμε το Entanglement των Κβαντικών Αμυχών με τα Σημεία Διακλάδωσης εντοπίζουμε την Κβαντική Αμυχή που αντιστοιχεί στον νότιο πόλο του συστήματος για μια ακολουθία τιμών της κρίσιμης παραμέτρου k . Οι τιμές αυτές σαρώνουν το διάστημα $k=0$ έως $k=6.8$. Αφού εντοπίσουμε τις Κβαντικές Αμυχές υπολογίζουμε για κάθε τιμή του k την τιμή του Entanglement της αντίστοιχης Κβαντικής Αμυχής κάνοντας χρήση των μέτρων Αρνητικότητα Ζεύγους (Pairwise Negativity), Entanglement of Formation ανά Ζεύγος και του Διμερούς Entanglement. Κάναμε υπολογισμούς για διαφορετικές τιμές του j ή αλλιώς για διαφορετικό πλήθος N qubits τα οποία αποτελούν το Quantum Kicked Top που μελετάμε.

Στο Σχήμα. 3 σχεδιάζουμε την μορφή των Κβαντικές Αμυχών καθώς και το αντίστοιχο φάσμα. Η συσχέτιση με τις τοπολογίες που εμφανίζονται στο Σχήμα 1 είναι έκδηλη. Στο

Σχήμα 3 μπορούμε να παρατηρήσουμε το γεγονός ότι όσο βαθύτερα μπαίνουμε στην χαοτική περιοχή τόσο και περισσότερα μέγιστα εμφανίζονται στο φάσμα. Επίσης συνάρτηση Husimi με την οποία αναπαριστούμε την Κβαντική Αμυχή εμφανίζει ένα συνεχώς αυξανόμενο απεντοπισμό. Στο Σχήμα 4 σχεδιάζουμε τρία διαφορετικά μέτρα του Entanglement (Αρνητικότητα Ζεύγους, Entanglement Ζεύγους, Διμερές Entanglement) για $N=50$ και $N=110$ qubits. Πρωτίστως παρατηρούμε ότι σε όλα τα διαγράμματα το κύριο Σημείο Διακλάδωσης (στο σημείο $k=2$) είναι εμφανές. Δευτερευόντως παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποια δραματική ποιοτική διαφοροποίηση καθώς ο αριθμός των qubits αυξάνεται.

Σχήμα 5α: Η χρονική εξέλιξη του Entanglement Σύμφωνα με καταστάσεων αρχικά εντοπισμένων στους πόλους του συστήματος σαν συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου k . Οι τιμές είναι μετά από 500 βήματα. Μέτρο του Entanglement είναι η Αρνητικότητα Ζεύγους. Αριστερά: Κατάσταση $N=30$ qubits η οποία αρχικά εντοπίζεται στο «νότιο» πόλο του συστήματος. Δεξιά: Κατάσταση $N=70$ qubits η οποία αρχικά εντοπίζεται στο «βόρειο» πόλο του συστήματος.

Σχήμα 5β: Η χρονική εξέλιξη του Entanglement Σύμφωνων καταστάσεων αρχικά εντοπισμένων στους πόλους του συστήματος σαν συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου k . Οι τιμές είναι μετά από 500 βήματα. Μέτρο του Entanglement είναι το Διμερές Entanglement. Αριστερά: Κατάσταση $N=30$ qubits η οποία αρχικά εντοπίζεται στο «νότιο» πόλο του συστήματος. Δεξιά: Κατάσταση $N=70$ qubits η οποία αρχικά εντοπίζεται στο «βόρειο» πόλο του συστήματος.

Σε όλες τις περιπτώσεις γύρω από την τιμή $k=2$ έχουμε περιοχές σαφώς διακρίσιμες.

Entanglement και περιοδικές τροχιές.

Στο Σχήμα 5 δίνουμε έμφαση στην δυναμική του συστήματος. Τα διαγράμματα αυτά αφορούν τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται χρονικά οι Σύμφωνες καταστάσεις. Οι καταστάσεις αυτές εντοπίζονται αρχικά στα επίμαχα σημεία. Οι τιμές του Entanglement που περιγράφονται στα διαγράμματα του Σχήματος 5 αφορούν τις καταστάσεις μετά από τη επενέργεια 500 βημάτων (kicks) του Quantum Kicked Top. Η αριθμητική διαδικασία αφορά ένα μεγάλο αριθμό σημείων στην περιοχή που ορίζεται από $k=0$ έως $k=6.8$. Και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι το κλασικό σημείο $k=2$ διακρίνεται ξανά. Δεν υπάρχει ουσιώδης διαφοροποίηση μεταξύ του «νοτίου» και του «βορείου» πόλου του συστήματος. Επίσης δεν υπάρχει ποιοτική διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων εάν διαφοροποιήσουμε τον αριθμό των qubits, εφόσον βέβαια είμαστε κοντά στο κλασικό όριο (πάνω από 10 qubits). Είναι

ενδιαφέρον εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι δύο πόλοι συμπεριφέρονονται κλασικά διαφορετικά [20]. Πιστεύουμε ότι θα μπορούσε να γίνει (με την χρήση μεγαλύτερης υπολογιστικής ισχύος) ανάδειξη πιο λεπτεπίλεπτων δομών της τοπολογίας του κλασικού χώρου των φάσεων με την βοήθεια της κβαντικής ιδιότητας του Entanglement.

Προσδιορισμός των μετατοπισμένων σημείων ισορροπίας με την βοήθεια του Entanglement.

Για να συμπληρώσουμε την εικόνα μας όσον αφορά την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ του κβαντικού Entanglement και της τοπολογίας του κλασικού χώρου των φάσεων θα μελετήσουμε το κβαντικό Entanglement σε σχέση με τα μετατοπισμένα σημεία ισορροπίας του Kicked Top. Μεταβάλλοντας την κρίσιμη παράμετρο κ έχουμε μετατόπιση των σημείων ισορροπίας κατά μήκος των κλάδων του Διαγράμματος Διακλαδώσεων και με τον όρο «μετατοπισμένα» εννοούμε τα σημεία αυτά. Θα αρκεστούμε στην περιοχή που ορίζεται από $\kappa=2$ έως $\kappa=12.73$ η οποία περιλαμβάνει περιοχές μικτές αλλά και περιοχές πλήρους χάους. Πάνω στις διαφορετικές τιμές της κρίσιμης παραμέτρου κ θα υπολογίσουμε το Διμερές Entanglement και την Αρνητικότητα Ζεύγους. Για $\kappa=2.73$, όπου βρισκόμαστε βαθειά στην χαοτική περιοχή, υπάρχει απομονωμένο σημείο ισορροπίας με συντεταγμένες $(\theta, \varphi)=(2.32, 0.38)$. Υπολογίζουμε το Entanglement μεταβάλλοντας την συντεταγμένη θ με την συντεταγμένη φ σταθερή και αντίστροφα. Από το σχεδιάγραμμα συμπεραίνουμε ότι το κβαντικό Entanglement εμφανίζει ισχυρό ελάχιστο ακριβώς πάνω από το σημείο ισορροπίας. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για την τιμή $\kappa=2.2$ με συντεταγμένες για το σημείο ισορροπίας τις $(\theta, \varphi)=(1.9, 1.2)$ και για την τιμή $\kappa=2.4$ με συντεταγμένες για το σημείο ισορροπίας τις $(\theta, \varphi)=(2.1, 1.0)$. παρατηρούμε και πάλι την ύπαρξη ακρότατων όσον αφορά το Διμερές Entanglement και την Αρνητικότητα Ζεύγους στις θέσεις αυτές. Να σημειωθεί εδώ ότι η συμπεριφορά αυτή είναι γενική για όλο το διάστημα $[2, 12.73]$. Τα παραπάνω συμπεράσματα περιγράφονται στην σειρά διαγραμμάτων του Σχήματος. 6.

Σχήμα 6α. Το Entanglement κατά μήκος των κλάδων των σημείων ισορροπίας σαν συνάρτηση της γωνίας ϕ για $\kappa=2.2$. Αριστερά: Διμερές Entanglement. Δεξιά: Αρνητικότητα Ζεύγους.

Σχήμα 6β. Το Entanglement κατά μήκος των κλάδων των σημείων ισορροπίας σαν συνάρτηση της γωνίας ϕ για $\kappa=2.4$. Αριστερά: Διμερές Entanglement. Δεξιά: Αρνητικότητα Ζεύγους.

Σχήμα 6γ. Το Entanglement κατά μήκος των κλάδων των σημείων ισορροπίας σαν συνάρτηση της γωνίας ϕ και θ για $k=12.73$. Μέτρο του Entanglement είναι και στις δυο περιπτώσεις το Διμερές Entanglement.

Επίλογος

Στην παρούσα εργασία επικεντρωθήκαμε στο ερώτημα εάν και κατά πόσον τα τοπικά τοπολογικά χαρακτηριστικά του κλασικού χώρου των φάσεων αντανakλώνται στην καθαρά κβαντική ιδιότητα του Entanglement. Γενικά γνωρίζουμε από προηγούμενες μελέτες ότι κβαντικά φαινόμενα και ιδιότητες όπως η διαδικασία της Κβαντικής Αποσυμφωνίας, η ευστάθεια των Entangled καταστάσεων επηρεάζονται από την δυναμική του αντίστοιχου κλασικού συστήματος. Θα θέλαμε να δούμε εάν χαρακτηριστικές δομές της δυναμικής (σε επίπεδο χώρου των φάσεων) του κλασικού συστήματος επηρεάζουν με συγκεκριμένο τρόπο το αντίστοιχο κβαντικό σύστημα. Να σημειωθεί ότι οι προηγούμενες μελέτες επικεντρώνουν περισσότερο στις καθολικές (global) ιδιότητες της δυναμικής στο κλασικό όριο. Γνωρίζουμε επίσης ότι στην θεωρία του κλασικού χάους συγκεκριμένες δομές στην λεπτομέρεια του χώρου των φάσεων εξελίσσονται σε καθολικές εκδηλώσεις του χάους. Τέτοιες δομές είναι τα Σημεία Διακλάδωσης τα οποία αποτελούν ισχυρό

εννοιολογικό εργαλείο σε πολλές θεωρίες οι οποίες περιγράφουν σενάρια εγκαθίδρυσης του χάους σε κλασικά συστήματα. Στις θεωρίες αυτές η διαδοχική εμφάνιση Σημείων Διακλάδωσης επάγει καθολικές αλλαγές στην τοπολογία του χώρου των φάσεων και οδηγεί στην εμφάνιση πλήρους χάους το σύστημα. Είναι φυσικό λοιπόν τέτοιες καθολικές και δραστικές μεταβολές στην συμπεριφορά του κλασικού συστήματος να επηρεάζουν το αντίστοιχο κβαντικό. Τι γίνεται όμως όταν έχουμε αλλαγή όχι στην ολική εικόνα του χώρου των φάσεων αλλά σε μια μικρή περιοχή του μόνο; Πάνω στο ερώτημα αυτό προσπαθήσαμε να δώσουμε κάποιες απαντήσεις. Οι έννοιες των Κβαντικές Αμυχών και των περιοδικών τροχιών ήταν τα «εργαλεία» που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυση μας. Χρησιμοποιήσαμε τον κλασικό και κβαντικό Kicked Top σαν μοντέλο εργασίας γιατί είναι ένα από τα πλέον χαρακτηριστικά μοντέλα μελέτης του χάους. Το μοντέλο αυτό ουσιαστικά περιλαμβάνει όλα σχεδόν τα φαινόμενα που σχετίζονται με το χάος. Στην ανάλυση μας θεωρούμε το Kicked Top σαν σύστημα το οποίο αποτελείται από N qubits. Όσον αφορά την περιγραφή του Entanglement χρησιμοποιούμε τρία διαφορετικά μέτρα, την Αρνητικότητα Ζεύγους, το Entanglement of Formation κατά Ζεύγη και το Διμερές Entanglement. Το Kicked Top περιγράφεται με την βοήθεια της κρίσιμης παραμέτρου k . Μελετήσαμε το σύστημα αριθμητικά με λεπτομέρεια στην περιοχή τιμών για το k από 0 έως 6.8. Σε αυτή την περιοχή τιμών περιλαμβάνεται ζώνη κανονικότητας, μικτή συμπεριφορά με νησίδες ευστάθειας οι οποίες περιβάλλονται από χάος και συμπεριφορά πλήρους χάους. Είναι γνωστό ότι στην τιμή $k=2$ έχουμε το πρώτο Σημείο Διακλάδωσης στους πόλους του συστήματος. Στην αρχή της ανάλυσης μας κατασκευάζουμε το πορτρέτο το χώρου των φάσεων για κάποιες χαρακτηριστικές τιμές της παραμέτρου k . Κατόπιν για τις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου k εντοπίζουμε την κατάσταση που αντιστοιχεί στην Κβαντική Αμυχή και υπολογίζουμε το Entanglement της. Για κάθε περίπτωση σχεδιάζουμε την συγκεκριμένη Κβαντική Αμυχή και παραθέτουμε το φάσμα εντοπισμού της. Έτσι έχουμε την σχέση της παραμέτρου k με το Entanglement της Κβαντικής Αμυχής. Οι Κβαντικές Αμυχές είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή χρονικής εξέλιξης του συστήματος (καταστάσεις Floquet) και ως εκ τούτου ορίζουν την δυναμική του συστήματος. Δεν

παύουν όμως να είναι στάσιμες καταστάσεις. Για να συμπληρώσουμε την εικόνα μας όσον αφορά την δυναμική του μοντέλου κάνουμε το εξής: θεωρούμε Σύμφωνες καταστάσεις εντοπισμένες αρχικά στα επίμαχα σημεία τις οποίες τις εξελίσσουμε στον χρόνο. Επαναλαμβάνουμε για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου κ και υπολογίζουμε το Entanglement μετά από συγκεκριμένο αριθμό βημάτων. Τα συμπεράσματα μας είναι σε συμφωνία με τα συμπεράσματα τα οποία προκύπτουν από την μελέτη των Κβαντικών Αμυχών. Κατόπιν αυτού εικάζουμε ότι τα συμπεράσματα μας είναι γενικά. Βέβαια είναι νωρίς να θεωρήσουμε ότι όλα τα είδη Σημείων Διακλάδωσης επάγουν τα ίδια αποτελέσματα όσον αφορά την ιδιότητα του Entanglement ή ότι η εμφάνιση και η ευστάθεια των Entangled καταστάσεων σχετίζεται πάντα με τη ύπαρξη Σημείων Διακλάδωσης. Επίσης μελετήσαμε το Entanglement κατά μήκος των κλάδων του βασικού Σημείου Διακλάδωσης ($\kappa=2$) καθώς η παράμετρος κ αυξάνεται. Η περιοχή τιμών που παρακολουθήσαμε είναι από $\kappa=2$ έως $\kappa=12.73$ (πρώτο και δεύτερο Σημείο Διακλάδωσης). Στην περίπτωση αυτή μετρούσαμε το Entanglement στην θέση όπου βρίσκεται κάθε φορά το σημείο ισορροπίας. Έχουμε παραθέσει στα σχεδιαγράμματα τις περιπτώσεις $\kappa=2.2$, 2.4 και 12.73 όμως τα συμπεράσματα είναι παρόμοια και στις υπόλοιπες τιμές του κ στο συγκεκριμένο διάστημα.

Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι στο Kicked Top έχουμε μεγάλη ποικιλία Διακλαδώσεων καθώς και διάφορα είδη σημείων ισορροπίας ειδικά καθώς το κ αυξάνεται. Όμως οι περιοχές αυτές είναι πολύ μικρών διαστάσεων συνεπώς για την αριθμητική μελέτη τους σε κβαντικό επίπεδο το υπολογιστικό κόστος αυξάνεται απαγορευτικά.

Συσχετίζοντας την κβαντική ιδιότητα του Entanglement με την κλασική έννοια του Σημείου Διακλάδωσης συνδέουμε άμεσα την έννοια του Entanglement με την έννοια του χάους. Πολλοί ερευνητές έχουν δημοσιεύσει άρθρα τα οποία περιγράφουν «Σημάδια Χάους του Entanglement» ("Entanglement signatures of quantum chaos"). Το κβαντικό χάος ορίζεται σχεδόν πάντα σε σχέση με το κλασικό. Βασικά σενάρια κλασικού χάους συνδέονται με την ύπαρξη Διακλάδωσης. Με την έρευνα μας επιβεβαιώνουμε από μια άλλη σκοπιά το γεγονός ότι το Entanglement μπορεί πράγματι να αποτελέσει ένα

σημάδι ύπαρξης κβαντικού χάους. Επίσης βλέπουμε ότι το Entanglement είναι ευαίσθητο ως προς τις τοπικές μεταβολές του κλασικού χώρου των φάσεων και έτσι μπορεί να χρησιμεύσει ως μια ένδειξη για τον εντοπισμό τέτοιων μεταβολών.

Το ότι μια καθαρά κβαντική ιδιότητα όπως το Entanglement συνδέεται με όρους της κλασικής φυσικής πιστεύουμε ότι είναι από μόνο του ενδιαφέρον.

Αναφορές.

- [1] M.C. Gutzwill, Chaos in Classical and Quantum Mechanics, Springer, New York, 1990.
- [2] F. Haake, Quantum Signatures of Chaos, Springer, Berlin, 1991.
- [3] L.E. Reichl, The Transition to Chaos, Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations, Springer, New York, 2004.
- [4] M.A. Nielsen, I.L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2000, ISBN: 0-521-63503-9
- [5] K. Furuya, M.C. Nemes, G.Q. Pellegrino, Phys. Rev. Lett. 25 (1998) 5524.
- [6] N.F. Bell, R.F. Sawyer, R.R. Volkas, Y.Y.Y. Wong, Phys. Rev. A 65 (2002) 042328.
- [7] J.N. Bandyopadhyay, A. Lakshminarayan, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 060402.
- [8] J.N. Bandyopadhyay, A. Lakshminarayan, Phys. Rev. E 69 (2004) 016201.
- [9] C. Mejia-Monasterio, G. Benenti, G.G. Carlo, G. Casati, Phys. Rev. A 71 (2005) 062324.
- [10] H. Fujisaki, Phys. Rev. A 70 (2004) 012313.
- [11] S. Ghose, B.C. Sanders, Phys. Rev. A 70 (2004) 062315.
- [12] S. Ghosh, P.M. Alsing, I.E. Deutsch, Phys. Rev. E 64 (2001) 056119.
- [13] X. Wang, S. Ghose, B.C. Sanders, B. Hu, quant-ph/0312047.
- [14] Ph. Jacquod, Phys. Rev. Lett. 92 (2004) 150403.

- [15] M. Znidaric, T. Prosen, Phys. Rev. A 71 (2005) 032103.
- [16] C. Pineda, T.H. Seligman, quant-ph/0503177.
- [17] Y.S. Weinstein, L. Viola, quant-ph/0603071.
- [18] C. Emary, N. Lambert, T. Brandes, Phys. Rev. A 71 (2005) 062302.
- [19] A.P. Hines, G.J. Milburn, R.H. McKentzie, quant-ph/0308165.
- [20] A.P. Hines, C.M. Dawson, R.H. McKenzie, G.J. Milburn, Phys. Rev. A 70 (2004) 022303.
- [21] M.C. Nemes, K. Furuya, G.Q. Pellegrino, A.C. Oliveira, M. Reis, L. Sanz, quant-ph/0507026.
- [22] E.J. Heller, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 1515.
- [23] M. Kus, J. Zakrzewski, K. Zyczkowski, Phys. Rev. A 43 (1991) 4244.
- [24] G.G. de Polavieja, F. Borondo, R.M. Benito, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 1613.
- [25] D.A. Wisniacki, F. Borondo, E. Vergini, R.M. Benito, Phys. Rev. E 62, (2000) R7583.
- [26] D.A. Wisniacki, F. Borondo, E. Vergini, R.M. Benito, nlin.CD/0103031.
- [27] S.-Y. Lee, S.C. Creagh, nlin.CD/0304018.
- [28] F. Haake, M. Kus, R. Scharf, Z. Phys. B: Condens. Matter 65 (1987) 381.
- [29] M. Kus, F. Haake, B. Eckhardt, Z. Phys. B: Condens. Matter 92 (1993), 221.
- [30] A. Lakshminarayan, Phys. Rev. E 64 (2001) 036207.

- [31] F.T. Arrechi, E. Courtens, R. Gilmore, H. Thomas, Phys. Rev. A 36 (1987) 5543.
- [32] R.H. Diche, Phys. Rev. 93 (1954) 99.
- [33] H. Barnum, E. Knill, G. Ortiz, L. Viola, Phys. Rev. A 68 (2003) 032308.
- [34] H. Barnum, E. Knill, G. Ortiz, R. Somma, L. Viola, Phys. Rev. Lett. 92, (2004) 107902.
- [35] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin, W.K. Wothers, Phys. Rev., A 54 (1996) 3824.
- [36] W.K. Wothers, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 2245.
- [37] A. Peres, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1413.
- [38] K. Zyczkowski, P. Horodecki, A. Sampera, M. Lewenstein, Phys. Rev., A 58 (1998) 883.
- [39] G. Vidal, R.F. Werenr, Phys. Rev. A 65 (2002) 032314.
- [40] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Lett. A 223 (1996) 1.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΣΤ'

ΘΕΡΜΙΚΟ ENTANGLEMENT

ΣΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΙΑΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ΤΟΥ ΝΙ (ΙΙ)

Θερμικό Entanglement σε τετραγωνικές μοριακές δομές του Ni (II)

Εισαγωγή

Η σύγχρονη χημεία επιτρέπει την κατασκευή δομών που περιέχουν μαγνητικά μεταλλικά ιόντα με συγκεκριμένη γεωμετρική διευσθέτηση. Τα μαγνητικά μεταλλικά ιόντα τοποθετούνται σε οργανικό υπόβαθρο και το όλο σύστημα έχει μοριακές διαστάσεις. Με τον τρόπο αυτό υπάρχει η δυνατότητα δημιουργίας νανομαγνητικών δομών με συγκεκριμένες ιδιότητες. Αρκετά από αυτά τα συστήματα έχουν κατασκευαστεί και κατόπιν μελετηθεί πειραματικά όσον αφορά τις μαγνητικές τους ιδιότητες. Λόγω της γεωμετρικής τους απλότητας και του μεγάλου βαθμού συμμετρίας που εμφανίζουν οι δομές αυτές είναι δυνατός ο πειραματικός υπολογισμός των μαγνητικών παραμέτρων τους.

Στο πλαίσιο μιας ρεαλιστικής προσέγγισης του προβλήματος της κατασκευής καταστάσεων μεγάλου Entanglement, θα είχε ενδιαφέρον, η θερμοδυναμική μελέτη των πειραματικά υλοποιήσιμων νανομαγνητών.

Η δυνατότητα δημιουργίας Entangled καταστάσεων με θερμικό τρόπο έχει μεγάλη σημασία λόγω του ότι το Entanglement, όταν επιτυγχάνεται δυναμικά, είναι εξαιρετικά εύθραυστο.

Αντικείμενο το παρόντος είναι η θεωρητική μελέτη του συστήματος [1]

σε σχέση με τις συνθήκες δημιουργίας Entangled καταστάσεων μεταξύ των ατόμων **Ni**. Θα μελετηθεί ο βαθμός του Entanglement [4,5] σε σχέση με την θερμοκρασία [2] καθώς και με την ένταση και την διεύθυνση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Το μοριακό σύστημα

Οι δύο μοριακές δομές αναπαρίστανται γεωμετρικά στο παρακάτω σχήμα:

Και οι δύο δομές $[Ni_4L_8^b]$ και $[Ni_4L_8^c]$ περιγράφονται από την Χαμιλτονιανή [1]

$$\hat{H} - J \sum_{i < j} \hat{S}_i \hat{S}_j + D \sum_i \left(\hat{S}_{i,z}^2 - \frac{2}{3} \right) + \mu_B g_{xy} (\hat{S}_x B_x + \hat{S}_y B_y) + \mu_B g_z \hat{S}_z B_z$$

με $S=1$.

Οι αλληλεπιδράσεις δίπολου - δίπολου είναι πολύ μικρής ισχύος και δεν συμπεριλαμβάνονται στην Χαμιλτονιανή. Ο πρώτος όρος στην Χαμιλτονιανή μοντελοποιεί την αλληλεπίδραση τύπου Ising των πλησιέστερων γειτόνων και ο δεύτερος όρος την επίδραση του ligand field λόγω του μοριακού υποστρώματος.

Οι τιμές των παραμέτρων έχουν υπολογιστεί πειραματικά και είναι [1] $J \approx 0.9K$ και $D \approx -2.5K$. Βρισκόμαστε λοιπόν

μακριά από το όριο Ising συνεπώς παίζει σημαντικό ρόλο ο μη γραμμικός όρος $\hat{S}_z^2$

Η προσομοίωση

Θεωρούμε ότι το παραπάνω σύστημα βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον. Συνεπώς η Μήτρα Πυκνότητας πιθανότητας προκύπτει από την έκφραση

$$\hat{\rho}(T, \vec{B}) = \frac{e^{-\frac{\hat{H}(T, \vec{B})}{\kappa_B T}}}{Z} \quad \text{με} \quad Z = \text{tr} \left(e^{-\frac{\hat{H}(T, \vec{B})}{\kappa_B T}} \right)$$

Θα μελετήσουμε αριθμητικά τον βαθμό του Entanglement συναρτήσει της θερμοκρασίας, της έντασης και της διεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου. Ως μέτρο του Entanglement θα χρησιμοποιηθεί η Αρνητικότητα [6]. Η Αρνητικότητα είναι ένα γενικά αποδεκτό μέτρο του Entanglement για Διμερή συστήματα $A \otimes B$ διάστασης $N \times M$. Η Αρνητικότητα του $\hat{\rho}$ ισούται με την απόλυτη τιμή του αθροίσματος των αρνητικών ιδιοτιμών του Μερικώς Ανεστραμμένου πίνακα $\hat{\rho}^{T_B}$ του $\hat{\rho}$.

Θυμίζουμε ότι ο Μερικά Ανάστροφος ορίζεται ως

$$\hat{\rho}^{T_B} = \sum_{ij} \langle i_B | \hat{\rho} | j_B \rangle \otimes | j_B \rangle \langle i_B |$$

Η Αρνητικότητα συνδέεται με τον βαθμό παραβίασης των Ανισοτήτων του Bell από μία κβαντική κατάσταση. Το μέτρο της Αρνητικότητας βρίσκει εφαρμογή τόσο σε Καθαρές όσο και σε Μικτές καταστάσεις και είναι το ενδεδειγμένο μέτρο για την μελέτη πολυδιάστατων Διμερών συστημάτων. Επίσης ο υπολογισμός του είναι απλός σε σχέση με άλλα μέτρα του Entanglement.

Μελετήσαμε το Entanglement μεταξύ του ενός ζευγαριού ατόμων **Ni** με το άλλο, μεταξύ του ενός ατόμου **Ni** με τα άλλα τρία άτομα **Ni** και μεταξύ δύο ατόμων **Ni** (κάνοντας Στατιστική

Απαλοιφή τα άλλα δυο άτομα) για διαφορετικές τιμές της θερμοκρασίας, της έντασης του μαγνητικού πεδίου και για μαγνητικό πεδίο κάθετο ή παράλληλο με τον άξονα Z. Τα αποτελέσματα αναπαρίστανται στα παρακάτω Σχήματα. Σε όλα τα Σχήματα ισχύει $J=0.9K, D=-2.5K$.

Σχήμα 1. Το Entanglement, του ενός ζεύγους ατόμων **Ni** ως προς το δεύτερο ζεύγος ατόμων **Ni**, σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου και της θερμοκρασίας. Το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση κατά τον άξονα X. Μέτρο του Entanglement είναι η Αρνητικότητα

Σχήμα 2. Το Entanglement, του ενός ζεύγους ατόμων **Ni** ως προς το δεύτερο ζεύγος ατόμων **Ni**, σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου και της θερμοκρασίας. Το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση κατά τον άξονα Z. Μέτρο του Entanglement είναι η Αρνητικότητα

Σχήμα 3. Το Entanglement, του ενός ατόμου **Ni** ως προς τα άλλα τρία άτομα **Ni**, σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου και της θερμοκρασίας. Το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση κατά τον άξονα X. Μέτρο του Entanglement είναι η Αρνητικότητα

Σχήμα 4. Το Entanglement, του ενός ατόμου **Ni** ως προς τα άλλα τρία άτομα **Ni**, σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου και της θερμοκρασίας. Το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση κατά τον άξονα Z. Μέτρο του Entanglement είναι η Αρνητικότητα

Σχήμα 5. Το Entanglement, ανά ζεύγος ατόμων **Ni (Ni-Ni)**, σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου και της θερμοκρασίας. Το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση κατά τον άξονα Z. Μέτρο του Entanglement είναι η Αρνητικότητα Ζεύγους.

Σχήμα 6. Το Entanglement, ανά ζεύγος ατόμων **Ni (Ni-Ni)**, σαν συνάρτηση του μαγνητικού πεδίου και της θερμοκρασίας. Το μαγνητικό πεδίο έχει διεύθυνση κατά τον άξονα X. Μέτρο του Entanglement είναι η Αρνητικότητα Ζεύγους.

Συμπεράσματα

Όταν το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο με τον άξονα Z τότε υπάρχει χαρακτηριστική περιοχή στην ένταση του πεδίου όπου το Entanglement μεγιστοποιείται. Στην περίπτωση αυτή η θερμοκρασία μειώνει μονότονα το Entanglement μέχρι μια κρίσιμη θερμοκρασία όπου το Entanglement μηδενίζεται. Στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στον άξονα Z το Entanglement δεν μεταβάλλεται μονότονα με την θερμοκρασία και εμφανίζει τοπικό μέγιστο στην περιοχή 0.5K – 1.0K. Για να υπάρχει αυτό το τοπικό μέγιστο θα πρέπει η ένταση του μαγνητικού πεδίου να βρίσκεται σε συγκεκριμένη περιοχή.

Μεγάλο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε ένα σύστημα το οποίο θα εμφάνιζε το μέγιστο του Entanglement σε μεγαλύτερη θερμοκρασία.

Αναφορές

- [1] Ferromagnetic coupling and magnetic anisotropy in molecular Ni(II) squares, R. Koch, O. Waldman, P. Muller, Ph. Rev. B, vol. 67, issue 9, 094407 (2003)
- [2] Thermal Entanglement in the two-qubit Heisenberg XYZ model, G. Rigolin, Arxiv.org, quant-physics/0311185
- [3] Thermal Entanglement of Bosonic atoms in an optical lattices with nonlinear couplings, L. Zhou, X. X. Yi, S. Song, Y. Q. Qu, Arxiv.org, quant-physics/0310169
- [4]. Quantum information and computation, C. H. Bennett and D. P. DiVincenzo, 2000, Nature 404, 247
- [5]. Quantum computation and quantum information, M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Cambridge University press, Cambridge, 2000, ISBN: 0-521-63503-9
- [6]. Logarithmic negativity: a full Entanglement monotone that is not convex, MB Plenio - Physical review letters, 2005, vol. 95, issue 9, 090503

ΕΝΟΤΗΤΑ Ζ'

ΧΑΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ

ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΔΙΑΜΕΣΟΥ ΚΒΑΝΤΙΚΟΥ ΚΑΝΑΛΙΟΥ.

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΚΑΝΑΛΙΟΥ ΚΑΙ ΧΑΟΣ.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΟΥ ENTANGLEMENT ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ.

Χάος Κανονικότητα και διάδοση κβαντικής πληροφορίας διαμέσου Κβαντικού Καναλιού. Χωρητικότητα του Καναλιού και Χάος. Διατήρηση του Entanglement στον χρόνο.

Εισαγωγή

Η συσχέτιση της χαοτικής [1] συμπεριφοράς με την ικανότητα μετάδοσης ή αποθήκευσης κβαντικής πληροφορίας [2,9,10] είναι το αντικείμενο της εργασίας αυτής. Η παράταση του χρόνου Αποσυμφωνίας [3] και η μετάδοση κβαντικής πληροφορίας δια μέσου ενός κβαντικού καναλιού [4] είναι διαδικασίες οι οποίες μπορούν να προσεγγιστούν με ενιαίο τρόπο. Στην πραγματικότητα η αποθήκευση μιας Entangled κατάστασης σε μια κβαντική μνήμη ισοδυναμεί με μετάδοση της κατάστασης αυτής στον χρόνο. Συνεπώς το φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί με όρους που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή κβαντικών καναλιών.

Τα κβαντικά κανάλια δεν αποτελούν συστήματα τέλειας μετάδοσης [5] της πληροφορίας λόγω της αλληλεπίδρασης τους με το άμεσο αλλά και με το γενικότερο περιβάλλον. Σχεδόν πάντοτε ένα κβαντικό κανάλι βρίσκεται ενθυλακωμένο εντός ενός ευρύτερου κβαντικού συστήματος με το οποίο αλληλεπιδρά άμεσα. Το σύστημα αυτό επάγει θόρυβο στο κβαντικό κανάλι και ως εκ τούτου περιορίζει την ποιότητα μετάδοσης της πληροφορίας και κατά συνέπεια την Χωρητικότητα του κβαντικού καναλιού. Η Χωρητικότητα ενός κβαντικού καναλιού δεν είναι δυστυχώς μια μονοσήμαντα ορισμένη ποσότητα στην θεωρία της κβαντικής πληροφορίας. Εκτός αυτού οι περισσότερες χωρητικότητες ορίζονται μέσω μεταβολικών αρχών και έτσι ο υπολογισμός τους συνήθως δεν μπορεί να γίνει με αναλυτικό τρόπο.

Εμείς στο παρόν θα εστιάσουμε στο άμεσο περιβάλλον του κβαντικού καναλιού γιατί αυτό αποτελεί την πρώτη πηγή σφαλμάτων και Αποσυμφωνίας για το κανάλι πληροφορίας. Μας ενδιαφέρει να συσχετίσουμε την ύπαρξη χαοτικής συμπεριφοράς του άμεσου περιβάλλοντος με την δυνατότητα μετάδοσης Entangled καταστάσεων διαμέσου του καναλιού.

Στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιούμε ένα κανάλι μετάδοσης ενός αλφάβητου του οποίου τα στοιχεία συνίστανται

από Entangled καταστάσεις των δυο qubits. Η πηγή του συστήματος μας θα μεταδίδει κάθε φορά κάποια από τις τέσσερις καταστάσεις Bell με κάποια πιθανότητα. Το κανάλι μας κατασκευάζεται έτσι ώστε όταν παραμένει ασύζευκτο με το άμεσο περιβάλλον να μεταδίδει με απόλυτη πιστότητα οποιαδήποτε από τις τέσσερις καταστάσεις του Bell. Το άμεσο περιβάλλον προσομοιώνεται με ένα Quantum Kicked Rotor [6]. Το άμεσο περιβάλλον εισέρχεται στο σύστημα μας ως μια διαταραχή στο αρχικό σύστημα μέσω μιας σταθεράς σύζευξης.

Η Χαοτικότητα του Quantum Kicked Rotor ελέγχεται μέσω μιας μεταβλητής ολοκληρωσιμότητας.

Η μελέτη μας προχώρησε ως εξής:

Αρχικά μελετάμε το κλασικό Kicked Rotor. Κατασκευάζουμε την απεικόνιση του Poincare και βλέπουμε την μετάβαση στο χάος μεταβάλλοντας την μεταβλητή ολοκληρωσιμότητας. Το κλασικό σύστημα εμφανίζει αναλλοίωτους τόρους KAM στον χώρο των φάσεων όταν βρίσκεται στην περιοχή κανονικότητας. Η μετάβαση στο χάος συμβαίνει προοδευτικά με διαδοχική διάσπαση των τόρων KAM καθώς αυξάνεται η μεταβλητή ολοκληρωσιμότητας. Τέλος υπάρχει μια οριακή τιμή στην οποία διασπάται και ο τελευταίος τόρος KAM. Από εκεί και μετά έχουμε πλήρες Χάος. Ποιοτικά χωρίζουμε σε τρεις περιοχές:

- α) την περιοχή πλήρους κανονικότητας όπου ο φασικός χώρος είναι πλήρης αναλλοίωτων τόρων KAM.
- β) την ενδιάμεση περιοχή όπου δεν έχουν διασπαστεί όλοι οι τόροι και έτσι εμφανίζονται διακριτές περιοχές Κανονικότητας και Χάους μέσα στον χώρο των φάσεων.
- γ) την περιοχή πλήρους Χάους όπου έχει πλέον «αποφλοιωθεί» και ο τελευταίος τόρος KAM και έχουμε πλήρες Χάος.

Στην συνέχεια, αφού έχουμε χαρτογραφήσει το κλασικό σύστημα, προχωράμε στο κβαντικό κανάλι το οποίο έχουμε σε σύζευξη με το κβαντικό ανάλογο του Kicked Rotor. Εφαρμόζουμε την θεωρία του στροβοσκοπικού Υπερτελεστή (Superoperator) υπολογίζουμε τους στροβοσκοπικούς τελεστές του Kraus. Έτσι μπορούμε πλέον να περιγράψουμε πλήρως το κβαντικό κανάλι σαν συνάρτηση του διακριτού χρόνου.

Εστιάζουμε αρχικά σε τέσσερα συσχετιζόμενα μεταξύ τους μεγέθη: στο Entanglement of Formation ως μέτρο του Entanglement και πως αυτό διατηρείται στον χρόνο, η Δυναμική Πιστότης (*Dynamic Fidelity*) ως μέτρο της ποιότητας διάδοσης της πληροφορίας ή αντίστροφα ως μέτρο της πιθανότητας σφάλματος κατά την διέλευση από το κανάλι, η Εντροπία Ανταλλαγής ως μέτρο του θορύβου που επάγει το άμεσο περιβάλλον στο κβαντικό κανάλι και τέλος εστιάζουμε στην Χωρητικότητα του καναλιού. Όλες οι προηγούμενες ποσότητες εξετάζονται σε σχέση με την ύπαρξη ή όχι Χάους και την διαδικασία μετάβασης από την Κανονικότητα στο Χάος.

Οι τρεις ποιοτικά διακριτοί τρόποι συμπεριφοράς του κλασικού Kicked Rotor (κανονικότητα, μικτή συμπεριφορά, πλήρες χάος) αποτυπώνονται με αρκετή ακρίβεια στην συμπεριφορά του κβαντικού καναλιού.

Στον κλασικό Kicked Rotor υπάρχει μια περιοχή όπου εμφανίζονται νησίδες κανονικότητας σε ένα σημείο του χώρου των παραμέτρων περιτριγυρισμένο από χάος. Παρατηρήσαμε ότι και αυτό το σημείο αποτυπώνεται ακριβώς στο κβαντικό σύστημα.

Κάτι άλλο που πρέπει να σημειωθεί είναι το ότι δουλέψαμε σε ένα αρκετά χαμηλών διαστάσεων κβαντικό σύστημα. Το σύστημα μας αποτελείται από δυο qubits αποθήκευσης της πληροφορίας και ένα Kicked Rotor συνολικής στροφορμής $s=15$. Παρόλα αυτά το κλασικό χάος έχει επίδραση στο μικρής διάστασης σύστημα.

Classical Kicked Rotor (CKR)

Ακολούθως παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά του Kicked Rotor καθώς και η μαθηματική μέθοδος περιγραφής του. Κατόπιν παρατίθενται τα δικά μας αριθμητικά αποτελέσματα τα οποία μπορούν να συγκριθούν με παλιότερες μελέτες για επιβεβαίωση. Να σημειωθεί ότι το CKR έχει αναλυθεί σε προηγούμενη ενότητα. Όμως για λόγους διευκόλυνσης του αναγνώστη και για λόγους αυτοτέλειας της παρούσης ενότητας τα χαρακτηριστικά του CKR παρουσιάζονται ξανά εν συντομία.

Θεωρούμε την εξής Χαμιλτονιανή η οποία είναι κοινή τόσο στην κλασική όσο και στην κβαντική φυσική.

$$H = AS_z^2 - \mu BS_x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi j)$$

όπου το $A > 0$ εισάγει μια ανισοτροπία στο $B > 0$ που είναι ένα μαγνητικό πεδίο κατά την διεύθυνση του άξονα των x . Οι επίδραση των τριβών αγνοείται στην συγκεκριμένη προσέγγιση.

Στην κλασική φυσική η στροφορμή είναι ένα διάνυσμα τριών διαστάσεων $\vec{S} = S_x \hat{x} + S_y \hat{y} + S_z \hat{z}$. Η στροφορμή του συστήματος που περιγράφεται από την προηγούμενη Χαμιλτονιανή υπακούει στην παρακάτω εξίσωση κίνησης.

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{S} \times \left(-\frac{\delta H}{\delta \vec{S}} \right) = \vec{S} \times \left[-2AS_z \hat{z} + \mu B \hat{x} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi j) \right]$$

Η τιμή του $\vec{S}^2$ διατηρείται στην εξέλιξη που επιβάλλει η προηγούμενη εξίσωση και για ευκολία μας την κανονικοποιούμε στην μονάδα.

Μπορούμε τώρα να απεικονίσουμε την στροφορμή $\vec{S}$ στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$$\vec{S} = S_x \hat{x} + S_y \hat{y} + S_z \hat{z} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

Μπορούμε να απεικονίσουμε την εξέλιξη του συστήματος αυτού σε διακριτό χρόνο σημειώνοντας τις τιμές των θ, ϕ αμέσως μετά τον κάθε παλμό στο επίπεδο που σχηματίζεται από την ανηγμένη μοναδιαία σφαίρα. Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή γράφεται

$$\begin{aligned} S'_x &= \Gamma_x \\ S'_y &= \Gamma_y \cos(\mu B) + \Gamma_z \sin(\mu B) \\ S'_z &= -\Gamma_y \sin(\mu B) + \Gamma_z \cos(\mu B) \end{aligned}$$

με

$$\Gamma_x = S_x \cos(4\pi AS_z) - S_y \sin(4\pi AS_z)$$

$$\Gamma_x = S_x \sin(4\pi AS_z) + S_y \cos(4\pi AS_z)$$

$$\Gamma_z = S_z$$

Με βάση την απεικόνιση αυτή κατασκευάσαμε τα ακόλουθα γραφήματα με $A=1.0$ και για διαφορετικές τιμές του συντελεστή $\kappa = \mu B$.

Σχήμα 1α. Περιοδικές Τροχιές, εκτεταμένες νησίδες κανονικότητας. Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ . Η κρίσιμη παράμετρος έχει την τιμή $\kappa = \mu B = 0.01$ και ο συντελεστής $A = 1.0$.

Σχήμα 1β. Περιοδικές Τροχιές, εκτεταμένες νησίδες κανονικότητας. Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ . Η κρίσιμη παράμετρος έχει την τιμή $\kappa = \mu B = 0.2$ και ο συντελεστής $A = 1.0$.

Σχήμα 1γ. Νησίδες κανονικότητας περιβαλλόμενες από χάος. Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ . Η κρίσιμη παράμετρος έχει την τιμή $\kappa = \mu B = 0.4$ και ο συντελεστής $A = 1.0$.

Σχήμα 1δ. Μικροσκοπικές νησίδες κανονικότητας περιβαλλόμενες από χάος. Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ . Η κρίσιμη παράμετρος έχει την τιμή $\kappa = \mu B = 0.5$ και ο συντελεστής $A = 1.0$.

Σχήμα 1ε. Οι νησίδες κανονικότητας τείνουν να εξαλειφθούν. Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ . Η κρίσιμη παράμετρος έχει την τιμή $\kappa = \mu B = 0.6$ και ο συντελεστής $A = 1.0$.

Σχήμα 1στ. Πλήρες χάος. Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ . Η κρίσιμη παράμετρος έχει την τιμή $\kappa = \mu B = 0.63$ και ο συντελεστής $A = 1.0$.

Σχήμα 1ζ. Πλήρες χάος. Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ . Η κρίσιμη παράμετρος έχει την τιμή $\kappa = \mu B = 0.8$ και ο συντελεστής $A = 1.0$.

Στα παραπάνω διαγράμματα βλέπουμε την διάσπαση των αναλλοίωτων τόρων KAM κατά την μεταβολή του $\kappa = \mu B$. Από πιο λεπτομερείς υπολογισμούς η διάσπαση των τόρων KAM αρχίζει για $\kappa \approx 0.06$ και το πλήρες Χάος αρχίζει περίπου στο $\kappa \approx 0.65$

Quantum Kicked Rotor (QKR)

Θα ξαναπαρουσιάσουμε εν συντομία τον τρόπο με τον οποίο περιγράφουμε τον κβαντικό Kicked Rotor. (QKR). Ο τελεστής Χάμιλτον του QKR προκύπτει απευθείας από την κλασική Χαμιλιτονιανή εάν αναγάγουμε τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη σε τελεστές. Δηλαδή

$$\hat{H} = A\hat{S}_z^2 - \mu B\hat{S}_x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi j)$$

όπου $\hat{S} = \hat{S}_x \hat{x} + \hat{S}_y \hat{y} + \hat{S}_z \hat{z}$ ο κβαντικός τελεστής της στροφορμής. Εάν η ολική στροφορμή χαρακτηρίζεται από τον κβαντικό αριθμό s τότε το μέτρο της ολικής στροφορμής είναι $|\hat{S}|^2 = s(s+1)\hbar^2$ και η προβολή της στροφορμής κατά τον άξονα z μπορεί να πάρει τις τιμές $\hat{S}_z |m\rangle = \hbar m |m\rangle$ με $m = -s, \dots, +s$. Αναπαριστώντας τους τελεστές της στροφορμής στην βάση των ιδιοδιανυσμάτων του $\hat{S}_z$ δηλαδή στα $\{|m\rangle\}_m$ ισχύει ότι

$$(\hat{S}_z)_{mm'} = \hbar m' \delta_{m,m'}$$

$$(\hat{S}_{\pm})_{mm'} = \hbar \sqrt{(s \mp m')(s \pm m' + 1)} \delta_{m,m' \pm 1}$$

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-)$$

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2i}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-)$$

όπου

$$\hat{S}_{\pm} |m\rangle = \hbar \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} |m \pm 1\rangle$$

Ο τελεστής Χάμιλτον του QKR ανήκει στην γενικότερη κατηγορία τελεστών Χάμιλτον της μορφής

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_o + \hat{V} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi j).$$

Ο τελευταίος τελεστής περιγράφει ένα γενικό κλειστό κβαντικό σύστημα το οποίο υποβάλλεται σε περιοδικούς στιγμιαίους παλμούς οι οποίοι προέρχονται από κάποιο εξωτερικό κλασικό πεδίο. Η συνολική Χαμιλτονιανή είναι περιοδική και έτσι από την θεωρία του Floquet προκύπτει ότι

η χρονική εξέλιξη του συστήματος $i\hbar\dot{\Psi} = \hat{H}(t)\Psi$ μπορεί να περιγραφεί στροβοσκοπικά (δηλαδή μετά από κάθε παλμό του εξωτερικού πεδίου) αλγεβρικά. Πράγματι ορίζοντας

$$U \equiv U(\tau) = T \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau} H(t') dt' \right] \quad (\text{όπου } T \text{ είναι ο τελεστής χρονικής}$$

$$\text{διάταξης}) \text{ τότε προκύπτει ότι } U \equiv U(\tau) = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} V \right) \exp \left(-\frac{2\pi i}{\hbar} \hat{H}_0 \right).$$

Αποδεικνύεται ότι εάν η αρχική κατάσταση του συστήματος είναι η $|\psi_0\rangle$ τότε ακριβώς μετά τον n -οστό παλμό η κατάσταση του θα είναι η $|\psi_n\rangle = \hat{U}^n |\psi_0\rangle$.

Εάν $\hat{U}(\tau)|n(\tau)\rangle = \exp(-i2\pi x_n(\tau))|n(\tau)\rangle$ τότε τα $\{x_n(\tau)\}$ ονομάζονται ψευδοενέργειες και τα $\{|n(\tau)\rangle\}$ ψευδοκαταστάσεις του συστήματος. Οι ψευδοενέργειες και οι ψευδοκαταστάσεις παίζουν πάρα πολύ σημαντικό ρόλο στην περιγραφή του συστήματος. Μάλιστα στις ποσότητες αυτές κωδικοποιείται το κβαντικό χάος. Ο τελεστής $\hat{U}$ ονομάζεται τελεστής Floquet και συνήθως συμβολίζεται ως $\hat{F}$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής Floquet για τον QKR είναι ο $\hat{F} = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mu B \hat{S}_x \right) \exp \left(-i \frac{2\pi}{\hbar} A S_z^2 \right)$

Η συμπεριφορά του QKR έχει μελετηθεί και έχει βρεθεί ότι υπάρχει έντονος συσχετισμός μεταξύ των διακριτών περιοχών Χάους και Κανονικότητας του CKR και του QKR. Το Χάος στον QKR εμφανίζεται στις ψευδοενέργειες με Απωθημένες Διασταυρώσεις και στις ψευδοιδιοκαταστάσεις όπου έχει βρεθεί ότι στην Χαοτική περιοχή πιθανόν να εμφανίζουν μορφοκλασματική διάσταση [7]. Η μετάβαση από την κανονικότητα στο Χάος γίνεται διαμέσου μιας ενδιάμεσης περιοχής όπως και στην αντίστοιχη κλασική περίπτωση. Στην ενδιάμεση περιοχή δεν έχουν καταστραφεί όλες οι κανονικότητες και οι ψευδοιδιοκαταστάσεις διατηρούν μια κανονικότητα στην μορφή τους αν και διαταραγμένες. Η περιοχή αυτή αντιστοιχεί στην περιοχή όπου το αντίστοιχο κλασικό σύστημα δεν έχει απωλέσει όλους τους KAM τόρους. Οι

τιμές των παραμέτρων όπου συμβαίνουν οι παραπάνω μεταβάσεις είναι οι ίδιες τόσο για τον QKR όσο και τον CKR.

Το μοντέλο των υπολογισμών

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω σύστημα πάνω στο οποίο θέλουμε να αποθηκεύσουμε καταστάσεις οι οποίες είναι Entangled και να τις διατηρήσουμε στον χρόνο. Στην ουσία πρόκειται για ένα κβαντικό κανάλι. Στο μοντέλο μας το κανάλι αυτό περιγράφεται από τον ακόλουθο τελεστή Χάμιλτον:

$$\hat{H} = \hat{H}_{reg} + \gamma \hat{H}_c + \hat{H}_e$$

όπου με $\hat{H}_{reg}$ αναπαριστούμε την αδιατάρακτη Χαμιλτονιανή του κβαντικού Καταχωρητή (quantum register) όπου θα αποθηκεύεται η πληροφορία την οποία θα μεταδώσουμε, $\hat{H}_e$ αναπαριστούμε το άμεσο περιβάλλον του κβαντικού Καταχωρητή και κύρια πηγή θορύβου και με $\hat{H}_c$ τον όρο αλληλεπίδρασης μεταξύ του Καταχωρητή και του περιβάλλοντος. Με γ παριστάνουμε την ένταση της σύζευξης.

Έστω ότι η Χωρητικότητα του Καταχωρητή είναι δυο qubits και ότι θέλουμε να αποθηκεύσουμε με ασφάλεια τις τέσσερις, πλήρως Entangled, καταστάσεις του Bell.

Επιλέγουμε $\hat{H}_{reg} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{z1}\hat{\sigma}_{z2} + \frac{3}{2}\hat{\sigma}_{x1}\hat{\sigma}_{x2}$ που είναι μια τυπική ZZ, XX

αλληλεπίδραση. Η συγκεκριμένη επιλογή όταν παραμένει αδιατάρακτη μπορεί να αποθηκεύσει επ' άπειρον οποιαδήποτε από τις τέσσερις καταστάσεις του Bell. Ως περιβάλλον επιλέγουμε το μαγνητισμένο σύστημα (nanomagnet, mesoscopic system, quantum dot etc) το οποίο περιγράφεται από την

$\hat{H}_e = A\hat{S}_{ze}^2 - \mu B\hat{S}_{xe} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2\pi j)$ που είναι ο QKR με τυπική δομή

και αυτός. Θεωρούμε ότι τα δυο μαγνητικά συστήματα αλληλεπιδρούν με τις ολικές στροφορμές τους δηλαδή ισχύει

$\hat{H}_c = \hat{S}_{reg} \hat{S}_e$. Το όλο σύστημα έχει την τυπική δομή δυο συζευγμένων Κβαντικών Τελειών (coupled quantum dots) ή δυο συζευγμένων νανομαγνητών εκ των οποίων ο ένας εκτελεί εξαναγκασμένη κίνηση υπό την επίδραση εξωτερικών μαγνητικών παλμών.

Το εξαναγκασμένο σύστημα επιβαρύνει με θόρυβο τον κβαντικό Καταχωρητή και αποτελεί την μοναδική πηγή υποβάθμισης της πληροφορίας κατά την λειτουργία του κβαντικού Καταχωρητή. Η επιβάρυνση του κβαντικού Καταχωρητή προφανώς εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων του $\hat{H}_e$. Από τις τιμές των παραμέτρων εξαρτάται επίσης η εμφάνιση Χαοτικής συμπεριφοράς ή Κανονικότητας του άμεσου περιβάλλοντος. Θα εξετάσουμε κατά πόσον σχετίζεται η ύπαρξη Χάους με το Entanglement των δυο qubits που συνιστούν τον κβαντικό Καταχωρητή, πως μεταβάλλεται η ποιότητα μετάδοσης της πληροφορίας, η Χωρητικότητα του καναλιού (channel capacity) και ο θόρυβος.

Ο θόρυβος που επάγει το περιβάλλον στον κβαντικό Καταχωρητή είναι στο μοντέλο μας προφανώς έγχρωμος. Αντικείμενο της μελέτης μας θα είναι επίσης η φασματική συμπεριφορά του θορύβου σε σχέση με την ύπαρξη Χάους ή Κανονικότητας και τι συνέπειες έχει αυτό στην συμπεριφορά του καναλιού. Βρισκόμαστε εκτός του Μαρκοβιανού ορίου και πιστεύουμε ότι το περιβάλλον μεταβάλλει την ανάδραση του με τον κβαντικό Καταχωρητή ανάλογα με την ύπαρξη Χάους ή Κανονικότητας. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί μας επιβεβαιώνουν αυτή την υπόθεση. Όπως θα δούμε πράγματι στην περιοχή της Κανονικότητας το σύστημα εμφανίζει μεγάλη μνήμη με αποτέλεσμα το περιβάλλον να επιστρέφει την χαμένη πληροφορία πίσω στον κβαντικό Καταχωρητή και έτσι το κανάλι να βελτιώνει τα ποιοτικά χαρακτηριστικά και να αυξάνει την Χωρητικότητά του.

Το συνολικό σύστημα είναι περιοδικό. Έτσι μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε κατασκευάζοντας τον τελεστή Floquet του. Ο τελεστής Floquet είναι σε αυτή την περίπτωση ο

$$\hat{F} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mu B \hat{S}_{ze}\right) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\hbar} \left(\hat{H}_{reg} + A \hat{S}_{ze}^2 + \gamma \hat{H}_c\right)\right]$$

Για να μελετήσουμε την συμπεριφορά του κβαντικού καναλιού θα πρέπει να υπολογίσουμε τους τελεστές Kraus που περιγράφουν την εξέλιξη του κβαντικού Καταχωρητή στον χρόνο. Η εξέλιξη θα μελετηθεί στροβοσκοπικά σε διακριτό χρόνο δηλαδή μετά από την έλευση κάθε παλμού. Η κατάσταση του συνολικού συστήματος μετά από τον n -οστό παλμό θα είναι $|reg, env; n\rangle = \hat{F}^n |reg, env; 0\rangle$. Οι τελεστές Kraus θα είναι σε αυτή την περίπτωση $E_\mu^{(n)} = \langle \mu_e | \hat{F}^n | 0_e \rangle$ όπου $\{|\mu_e\rangle\}$ μια ορθοκανονική βάση του περιβάλλοντος. Η κατάσταση του κβαντικού Καταχωρητή μετά από τον n -οστό παλμό θα είναι η

$$\hat{\rho}_{reg}^{(n)} = \sum_\mu E_\mu^{(n)} \hat{\rho}_{reg}^{(0)} E_\mu^{(n)+}$$

Στο σύστημα μας επιλέγουμε το άμεσο περιβάλλον να έχει κβαντικό αριθμό στροφορμής $s=12$. Επίσης κανονικοποιούμε το $\hbar$ έτσι ώστε $\hbar^2 S_e^2 = 1$ για να είμαστε σε συνέπεια με τον CKR.

Σχήμα 2α. Οι ψευδοενέργειες του συστήματος σε σχέση με την κρίσιμη μεταβλητή $\kappa = \mu B$. Έχουμε θέσει $\hat{H}_{reg} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{z1}\hat{\sigma}_{z2} + \frac{3}{2}\hat{\sigma}_{x1}\hat{\sigma}_{x2}$ και $A=1.0$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές.

Σχήμα 2β. Οι ψευδοενέργειες του συστήματος σε σχέση με την κρίσιμη παράμετρο $\kappa = \mu B$. Έχουμε θέσει $\hat{H}_{reg} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{z1}\hat{\sigma}_{z2} + \frac{3}{2}\hat{\sigma}_{x1}\hat{\sigma}_{x2}$ και $A=0.3$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές.

Entanglement of Formation

Εξετάζουμε την εξέλιξη του Entanglement των qubits του Καταχωρητή. Το Entanglement το μετράμε με το Entanglement of Formation E_f το οποίο υπολογίζεται, στην περίπτωση των δυο qubits, με βάση τα παρακάτω [8]:

$$E_f(\hat{\rho}) = h\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-C(\hat{\rho})^2}\right)\right]$$

με

$$h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$$

και

$$C(\hat{\rho}) = \max(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4})$$

όπου $\lambda_1 \dots \lambda_4$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $\hat{\rho}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \hat{\rho}^+ (\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y)$ σε φθίνουσα διάταξη.

Ισοδύναμο μέτρο του Entanglement με το Entanglement of Formation, στην περίπτωση των δυο qubits, είναι και το Tangle το οποίο ορίζεται ως: $\tau(\hat{\rho}) = C(\hat{\rho})^2$. Το tangle είναι μονότονη συνάρτηση του E_f .

Σχήμα 3α. Το μέσο E_f πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. $A=1.0$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές.

Σχήμα 3β. Το μέσο E_f πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. $A=0.3$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές.

Δυναμική Πιστότης (Dynamic Fidelity)

Ένα από τα βασικότερα μεγέθη ενός Κβαντικού Καναλιού είναι η Δυναμική Πιστότης (Dynamic Fidelity). Η δυναμική Πιστότης είναι μια ποσότητα η οποία μετράει την πιθανότητα ορθής μετάδοσης της πληροφορίας διαμέσου του καναλιού η αλλιώς μετράει την πιθανότητα σφάλματος στην μετάδοση [9,12]. Η τιμή της Κβαντικής Πιστότητος εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του κβαντικού καναλιού και από την αρχική κβαντική κατάσταση την οποία θέλουμε να μεταδώσουμε μέσα από το κανάλι.

Εάν $\hat{\rho} \xrightarrow{\text{channel } \varepsilon} \hat{\rho}'$ τότε η Δυναμική Πιστότης ορίζεται ως $F(\hat{\rho}, \varepsilon) = F(\hat{\rho}, \hat{\rho}')$ όπου $F(.,.)$ είναι η Πιστότης η οποία ορίζεται ως $F(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) \equiv \text{tr} \sqrt{\sqrt{\hat{\rho}} \hat{\sigma} \sqrt{\hat{\rho}}}$. Στην περίπτωση που το σύνολο των τελεστών Kraus είναι πλήρες σύνολο τότε αποδεικνύεται ο πολύ χρήσιμος υπολογιστικά τύπος

$F(\hat{\rho}, \varepsilon) = \sum_j \left| \text{tr}(\hat{\rho} \hat{E}_j) \right|^2$. Το σφάλμα στην μετάδοση ορίζεται ως

$E(\hat{\rho}, \varepsilon) = 1 - F(\hat{\rho}, \varepsilon)$ και είναι προφανώς και αυτό συνάρτηση όχι μόνο των χαρακτηριστικών του καναλιού αλλά και της αρχικής κατάστασης.

Στα παρακάτω διαγράμματα έχουμε επιλέξει σαν αρχική κατάσταση μια από τις τέσσερις καταστάσεις του Bell. Για οποιαδήποτε Bell κατάσταση το διάγραμμα που προκύπτει είναι το ίδιο.

Σχήμα 4α. Η μέση Δυναμική Πιστότης πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. $A=1.0$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές.

Σχήμα 4β. Η μέση Δυναμική Πιστότης πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. $A=0.3$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές.

Εντροπία Ανταλλαγής (Noise) I

Σε ένα Θορυβώδες Κανάλι (Noisy Channel), όπως είναι το δικό μας, η πιθανότητα σφάλματος κατά την μετάδοση της πληροφορίας αλλά και γενικότερα η δυναμική της πληροφορίας εξαρτάται από την ποσότητα θορύβου κατά την μετάδοση. Ο θόρυβος κατά την μετάδοση υπολογίζεται «θερμοδυναμικά» ενθυλακώνοντας το Θορυβώδες Κανάλι σε Λουτρό το οποίο εξελίσσεται με μοναδιαίο τρόπο. Χωρίς να εισέλθουμε σε λεπτομέρειες δίδουμε το τελικό αποτέλεσμα: Το μέτρο του θορύβου είναι Εντροπία Ανταλλαγής [4,9,11] $S(\hat{\rho}, \varepsilon)$ η οποία εκφράζει την μεταβολή της Εντροπίας του περιβάλλοντος. Χρήσιμος υπολογιστικά είναι ο τύπος $S(\hat{\rho}, \varepsilon) = S(\hat{W}) = -\text{tr}(W \ln_2 W)$ όπου για κανάλι με πλήρες σύνολο τελεστών Kraus ισχύει ότι $W_{ij} = \text{tr}(E_i \hat{\rho} E_j^\dagger)$.

Να σημειωθεί ότι ο θόρυβος συσχετίζεται με την πιθανότητα σφάλματος και μάλιστα ορίζει πάνω φράγμα στην ποιότητα της μετάδοσης μέσω του κβαντικού ανάλογου της κλασικής ανισότητας του Fano. Η κβαντική ανισότητα του Fano είναι η $S(\hat{\rho}, \varepsilon) \leq h(F(\hat{\rho}, \varepsilon)) + (1 - F(\hat{\rho}, \varepsilon)) \log_2(N^2 - 1)$. Οι ανισοτικές σχέσεις και τα φράγματα της Δυναμικής Πιστότητας και της Εντροπίας Ανταλλαγής έχουν τεράστια σημασία γιατί και οι δυο αυτές ποσότητες σχετίζονται με την έννοια της Διόρθωσης Σφάλματος (error correcting) και τον ορισμό της Χωρητικότητας Καναλιού (channel capacity). Οι μέθοδοι Διόρθωσης Σφάλματος παρουσιάζουν μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον σε θεωρητικό και τεχνολογικό επίπεδο.

Σχήμα 5α. Η μέση Εντροπία Ανταλλαγής πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. $A=1.0$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές.

Σχήμα 5β. Η μέση Εντροπία Ανταλλαγής πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $K = \mu B$. $A=0.3$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές.

Εντροπία Ανταλλαγής (Noise) II

Το πρώτο διάγραμμα σε κάθε ζευγάρι είναι η Εντροπία Ανταλλαγής (κατακόρυφος άξονας) με τον αριθμό του παλμού (οριζόντιος άξονας). Το δεύτερο διάγραμμα σε κάθε ζευγάρι είναι το Δυναμικό Φάσμα (Power Spectrum) της Εντροπίας Ανταλλαγής. Η Εντροπία Ανταλλαγής είναι ένα μέτρο της έντασης του θορύβου.

Σχήμα 6α. Εμφανής περιοδικότητα στην περιοχή κανονικότητας. Αριστερά: Η Εντροπία Ανταλλαγής ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Δεξιά: Το Δυναμικό Φάσμα του αριστερού γραφήματος συγκεντρώνεται σε στενή περιοχή συχνοτήτων. $A=1$, $\gamma=0.2$, $\kappa=0.05$

Σχήμα 6β. Εμφανής περιοδικότητα στην περιοχή κανονικότητας. Αριστερά: Η Εντροπία Ανταλλαγής ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Δεξιά: Το Δυναμικό Φάσμα συγκεντρώνεται σε στενή περιοχή συχνοτήτων. $A=1$, $\gamma=0.2$, $\kappa=0.1$

Σχήμα 6γ. Εμφανής περιοδικότητα στην περιοχή κανονικότητας. Αριστερά: Η Εντροπία Ανταλλαγής ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Δεξιά: Το Δυναμικό Φάσμα συγκεντρώνεται σε στενή περιοχή συχνοτήτων. $A=1$, $\gamma=0.2$, $\kappa=0.3$

Σχήμα 6δ. Καθώς πλησιάζουμε στην χαοτική περιοχή η περιοδικότητα αρχίζει να καταστρέφεται. Αριστερά: Η Εντροπία Ανταλλαγής ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Δεξιά: Το Δυναμικό Φάσμα αρχίζει να εμφανίζει διασπορά γύρω από την κεντρική συχνότητα. $A=1$, $\gamma=0.2$, $\kappa=0.5$

Σχήμα 6ε. Η περιοδικότητα έχει σαφώς πάψει να υφίσταται. Αριστερά: Η Εντροπία Ανταλλαγής ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Η εντροπία ανταλλαγής τείνει σε μια οριακή τιμή. Δεξιά: Το Δυναμικό Φάσμα εμφανίζει διασπορά. Συνεχίζει όμως να υπάρχει επικρατούσα συχνότητα.

$A=1, \gamma=0.2, \kappa=0.6$

Σχήμα 6στ. Χαοτική συμπεριφορά. Η περιοδικότητα έχει σαφώς πάψει να υφίσταται. Αριστερά: Η Εντροπία Ανταλλαγής ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Η εντροπία ανταλλαγής τείνει σε μια οριακή τιμή. Δεξιά: Το Δυναμικό Φάσμα εμφανίζει διασπορά. $A=1, \gamma=0.2, \kappa=0.7$

Σχήμα 6ζ. Χαοτική συμπεριφορά. Η περιοδικότητα έχει σαφώς πάψει να υφίσταται. Αριστερά: Η Εντροπία Ανταλλαγής ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Η εντροπία ανταλλαγής τείνει σε μια οριακή τιμή. Δεξιά: Το Δυναμικό Φάσμα εμφανίζει μεγάλη διασπορά. $A=1$, $\gamma=0.2$, $\kappa=1.0$

Σχήμα 6η. Πλήρες χάος. Ο θόρυβος επικρατεί πολύ γρήγορα. Αριστερά: Η Εντροπία Ανταλλαγής ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Η εντροπία ανταλλαγής τείνει σε μια οριακή τιμή. Δεξιά: Το Δυναμικό Φάσμα εμφανίζει διασπορά σε όλες τις συχνότητες. $A=1$, $\gamma=0.2$, $\kappa=1.5$

Παρατηρούμε ότι στην περιοχή Κανονικότητας η Εντροπία Ανταλλαγής παρουσιάζει έντονη περιοδικότητα. Αυτό ερμηνεύεται ως επιστροφή της πληροφορίας από το μη Μαρκοβιανό περιβάλλον πίσω στο κβαντικό κανάλι. Αντίθετα όσο προχωράμε προς την περιοχή πλήρους Χάους έχουμε προοδευτικό «άπλωμα» του Δυναμικού Φάσματος και ο θόρυβος

πλησιάζει να είναι λευκός με υπόβαθρο θορύβου ίσο περίπου με 1.5.

Χωρητικότητα Καναλιού

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την Χωρητικότητα [5,9] του κβαντικού καναλιού σε σχέση με την ύπαρξη χαοτικής συμπεριφοράς στο περιβάλλον.

Η κλασική θεωρία της Πληροφορίας ορίζει με μονοσήμαντο τρόπο την Χωρητικότητα ενός κλασικού καναλιού. Γνωρίζοντας την Χωρητικότητα του καναλιού γνωρίζουμε και το άνω φράγμα στην ταχύτητα μετάδοσης της πληροφορίας διαμέσου του κλασικού καναλιού. Στην κλασική θεωρία η Χωρητικότητα ορίζεται με την βοήθεια της Εντροπίας Shannon και της Αμοιβαίας Πληροφορίας μεταξύ του σήματος που εκπέμπει η πηγή του μηνύματος και του σήματος που φτάνει στον δέκτη αφού έχει περάσει από το Θορυβώδες Κλασικό Κανάλι.

Εάν η κλασική πηγή εκπέμπει τα γράμματα $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ τότε η κλασική Χωρητικότητα του καναλιού ορίζεται ως:

$$C = \max_{\{p_j\}} I(X:N(X))$$

όπου X είναι η κατανομή πιθανότητας στην είσοδο του καναλιού και $N(X)$ η κατανομή πιθανότητας στην έξοδο του καναλιού. Η δράση του καναλιού παριστάνεται ως $X \xrightarrow{\text{channel}} N(X)$. Η Αμοιβαία Πληροφορία ορίζεται ως

$$I(X:Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

με $H(\{p_j\}) = -\sum_j p_j \log_2 p_j$ την Εντροπία Shannon.

Δυστυχώς στην Κβαντική Θεωρία της Πληροφορίας τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Η κβαντική Χωρητικότητα δεν ορίζεται μονοσήμαντα και εξαρτάται τόσο από την οπτική

γωνία και την εννοιολογική εικόνα που έχουμε για το κβαντικό κανάλι όσο και από το πρωτόκολλο επικοινωνίας το οποίο χρησιμοποιούμε.

Στην κβαντική επικοινωνία το αλφάβητο αποτελείται από ένα διακριτό σύνολο καταστάσεων $\{\hat{\rho}_j\}$ (στην περίπτωση μας είναι όλες Καθαρές γιατί είναι οι τέσσερις bell states) οι οποίες εκπέμπονται από την πηγή με κάποιες προκαθορισμένες πιθανότητες $\{p_j\}$. Ως κατάσταση εισόδου μπορεί να θεωρηθεί η $\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_j$ και ως έξοδος η κατάσταση $\rho' = N(\hat{\rho})$ όπου το $N(\cdot)$ είναι στην περίπτωση αυτή η Κβαντική Απεικόνιση (quantum map) η οποία χαρακτηρίζει το κβαντικό κανάλι.

Μια συνήθης επιλογή όσον αφορά την εκτίμηση της Χωρητικότητας ενός κβαντικού καναλιού είναι αυτή των Hovel, Schumacher, Westmoreland:

$$C = \max_{\{p_j, |v_j\rangle\}} \left\{ S \left[N \left(\sum_j p_j |v_j\rangle \langle v_j| \right) \right] - \sum_j p_j S \left[N(|v_j\rangle \langle v_j|) \right] \right\}$$

όπου $S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho})$ η Εντροπία von Neumann.

Ακολουθώντας παραθέτουμε σχεδιαγράμματα τα οποία αφορούν την μεταβολή της Χωρητικότητας του κβαντικού καναλιού σε σχέση με τις περιοχές Χάους και Κανονικότητας.

Σχήμα 7α. Πάνω: Η μέση Χωρητικότητα πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. $A=1.0$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές. Η καμπύλη είναι σχεδόν σιγμοειδής. Κάτω: Μεγέθυνση της περιοχής $0 \leq \kappa \leq 0.1$

Σχήμα 7β. Η μέση Χωρητικότητα πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. $A=0.3$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές. Η καμπύλη είναι σχεδόν σιγμοειδής

Σχήμα 7γ. Πάνω: Η μέση Χωρητικότητα, πάνω σε 50 παλμούς σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. Η καμπύλη είναι σχεδόν σιγμοειδής. Κάτω: Οι ψευδοενέργειες σε συνάρτηση με το $\kappa = \mu B$. $A=100.0$, $\gamma=0.2$. Διακρίνονται οι τρεις περιοχές

Περιοχή κανονικότητας γύρω από το $\kappa=3.2$, $A=1.0, \gamma=0.2$

Ο κλασικός Kicked Rotor εμφανίζει μια περιοχή κανονικότητας γύρω από το σημείο $\kappa=3.2$ για $A=1.0$. Η περιοχή αυτή περιβάλλεται από Χάος. Φυσικό είναι να εξετάσουμε την συμπεριφορά του κβαντικού καναλιού γύρω από αυτή την περιοχή. Καταρχήν παραθέτουμε τις τομές Poincare του CKR για $A=1.0$ και $\kappa=3.0$ (Σχήμα 8α), 3.1 (Σχήμα 8β), 3.2 (Σχήμα 8γ), 3.3 (Σχήμα 8δ), 3.4 (Σχήμα 8ε). Έμφαση δίνεται στο Σχήμα 8γ όπου φαίνεται καθαρά η επάνοδος της κανονικότητας σε μεγάλη έκταση του θεσεογραφικού χώρου.

Σχήμα 8α. Εκτεταμένο χάος για $A=1$, $\kappa=3.0$ Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ .

Σχήμα 8β. Επανεμφάνιση περιοδικών τροχιών για $A=1$, $\kappa=3.1$ Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ .

Σχήμα 8γ. Εκτεταμένες νησίδες ευστάθειας για $A=1$, $\kappa=3.2$ Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές τις γωνίας θ .

Σχήμα 8δ. Επάνοδος του χάους για $A=1$, $\kappa=3.3$ Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές της γωνίας θ .

Σχήμα 8ε. Πλήρες χάος για $A=1$, $\kappa=3.4$ Στον κατακόρυφο άξονα σημειώνονται οι τιμές της γωνίας ϕ και στον οριζόντιο άξονα οι τιμές τις γωνίας θ .

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε την δυναμική του φάσματος των ψευδοενεργειών του κβαντικού καναλιού σε σχέση με το παράγοντα $\kappa = \mu B$ για το διάστημα $0.0 \leq \mu B \leq 4.0$. Το φάσμα είναι γεμάτο Απωθημένες Διασταυρώσεις. Στο σημείο $\kappa \approx 3.2$ (Σχήμα 9) υπάρχει μια περιοχή διαφοροποίησης (η δυσδιάκριτη «στήλη» πάνω από το 3.2)

Σχήμα 9. Η δυναμική του φάσματος των ψευδοενεργειών του κβαντικού καναλιού σε σχέση με το παράγοντα $\kappa = \mu B$. Περιορισμός των Απωθημένων Διασταυρώσεων στην περιοχή του $\kappa \approx 3.2$. $A=1.0$

Τέλος υπολογίζουμε το μέσο Entanglement of Formation, την μέση Χωρητικότητα του Καναλιού, τη μέση Δυναμική Πιστότητα και την μέση Εντροπία Ανταλλαγής σαν συνάρτηση του $\kappa = \mu B$

Τα παρακάτω σχεδιαγράμματα είναι για $A=1.0$, $\gamma=0.2$, μέσοι όροι πάνω σε 50 παλμούς.

Σχήμα 10α. Βελτίωση των χαρακτηριστικών του Κβαντικού Καναλιού στην περιοχή $\kappa \approx 3.2$. Αριστερά: Το μέσο Entanglement of Formation πάνω σε 50 παλμούς ως συνάρτηση της κρίσιμης μεταβλητής κ . Δεξιά: Η μέση Χωρητικότητα του Καναλιού πάνω σε 50 παλμούς. $A=1.0$ $\gamma=0.2$

Σχήμα 10β. Βελτίωση των χαρακτηριστικών του Κβαντικού Καναλιού στην περιοχή $\kappa \approx 3.2$. Αριστερά: Η μέση Εντροπία Ανταλλαγής πάνω σε 50 παλμούς ως συνάρτηση της κρίσιμης μεταβλητής κ . Δεξιά: Η μέση Δυναμική Πιστότης πάνω σε 50 παλμούς. $A=1.0$ $\gamma=0.2$

Στα προηγούμενα διαγράμματα είναι απολύτως ξεκάθαρη η συνεισφορά των KAM αναλλοίωτων τόρων στην βελτίωση των χαρακτηριστικών του καναλιού και στην άρση της Αποσυμφωνίας. Παρατηρώντας τα τοπικά ακρότατα στα προηγούμενα Σχήματα βλέπουμε η Χωρητικότητα του Καναλιού, το Entanglement of Formation και η Δυναμική Πιστότης εμφανίζουν τοπικό μέγιστο κοντά στην τιμή της μεταβλητής

$\kappa=3.2$. Επίσης η Εντροπία Ανταλλαγής παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο κοντά στο ίδιο σημείο. Στα παραπάνω είδαμε ότι στην περιοχή γύρω από το σημείο $\kappa=3.2$ στο κλασικό σύστημα εμφανίζονται εκ νέου εκτεταμένες νησίδες κανονικότητας άρα και τόροι KAM. Γύρω από το ίδιο σημείο το κβαντικό σύστημα εμφανίζει αραίωση των Απωθημένων Διασταυρώσεων.

Συμπεράσματα

Η Χωρητικότητα, ο θόρυβος, η εξέλιξη του Entanglement και η Δυναμική Πιστότης ενός Κβαντικού Καναλιού δείχνει να επηρεάζεται έντονα από την ύπαρξη γειτονικού χαοτικού συστήματος. Πιο συγκεκριμένα στις περιοχές κανονικότητας το Κβαντικό Κανάλι εμφανίζει καλή ποιότητα μετάδοσης της κβαντικής πληροφορίας και υψηλή Χωρητικότητα. Στην ενδιάμεση περιοχή της μετάβασης από την κανονικότητα στο χάος τα χαρακτηριστικά του κβαντικού καναλιού εμφανίζουν την εντονότερη μεταβολή και όσο προχωράμε βαθύτερα στην περιοχή αυτή τόσο αυξάνεται ο θόρυβος και μειώνεται η Χωρητικότητα του καναλιού. Η ενδιάμεση περιοχή χαρακτηρίζεται από την προοδευτική διάσπαση των αναλλοίωτων KAM τόρων. Τέλος στην καθαρά χαοτική περιοχή τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του κβαντικού καναλιού εμφανίζουν τις κατώτερες τιμές τους.

Ο CKR παρουσιάζει στο σημείο $\kappa=\mu B=3.2$ επανεμφάνιση μεγάλου αριθμού KAM τόρων. Το σημείο $\kappa=\mu B=3.2$ περιβάλλεται από μεγάλη έκταση Χάους. Στο σημείο αυτό τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του κβαντικού καναλιού εμφανίζουν απότομα μεγάλη βελτίωση.

Αναφορές

- [1]. Martin C. Gutzwiller, Chaos in Classical and Quantum Mechanics, (1990) Springer-Verlag, New York ISBN=0-387-97173-4.
- [2]. Elements of information theory, TM Cover, JA Thomas - 2006 - Wiley
- [3]. Decoherence, chaos, and the second law, WH Zurek, JP Paz - Physical Review Letters, 1994
- [4]. Sending Entanglement through noisy quantum channels, B Schumacher - Physical Review A, 1996
- [5]. Capacity of the noisy quantum channel, S Lloyd - Physical Review A, 1997
- [6]. G.Casati, B.V.Chirikov, J.Ford and F.M.Izrailev, Lect.NotesPhys.93, 334, 1979. F. M. Izrailev, Phys.Rep. 196, 299, 1990
- [7]. Quantum chaos: a new paradigm of nonlinear dynamics, K Nakamura, K Nakamura - 1993
- [8]. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, WK Wootters - Physical Review Letters, 1998
- [9]. Quantum Computation and Quantum Information, MA Nielsen, IL Chuang, Cambridge University Press, 2000, ISBN: 0-521-63503-9
- [10]. Lecture notes for Physics 229: Quantum information and computation, J Preskill - California Institute of Technology, 1998
- [11]. Entropy exchange and Entanglement in the Jaynes-Cummings model, E Boukobza, DJ Tannor - Physical Review A, 2005
- [12]. Dynamics of Loschmidt echoes and fidelity decay, T Gorin, T Prosen, TH Seligman, M Žnidarič - Physics Reports, 2006

ΕΝΟΤΗΤΑ Η΄

**ΈΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΑΠΟΣΥΜΦΩΝΙΑΣ ΜΕ
ΕΝΔΙΑΜΕΣΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (HOST SYSTEM) ΣΕ ΛΟΥΤΡΟ
ΜΠΟΖΟΝΙΩΝ. Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ ΤΟΥ
ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟΝ ΡΥΘΜΟ
ΑΠΟΣΥΜΦΩΝΙΑΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΝΗΜΗΣ.**

Έλεγχος της Αποσυμφωνίας με Ενδιάμεσο σύστημα (Host System) σε Λουτρό Μποζονίων. Η επίδραση του Χάους του ενδιάμεσου συστήματος στον ρυθμό Αποσυμφωνίας της κβαντικής μνήμης.

Περίληψη – Σύνδεση με τα προηγούμενα

Σε προηγούμενη ανάλυση μελετήσαμε την εξέλιξη του Entanglement σε ένα σύστημα αποτελούμενου από δυο qubits το οποίο αλληλεπιδρούσε με το περιβάλλον το οποίο είχε προσομοιωθεί με την βοήθεια του Quantum Kicked Rotor [3,4]. Είχαμε θεωρήσει ότι το σύστημα των δυο qubits αποτελούσε ένα μοντέλο κβαντικής μνήμης στην οποία μπορούσαμε να αποθηκεύσουμε καταστάσεις μέγιστου Entanglement. Η μνήμη ήταν σε σύζευξη με το άμεσο περιβάλλον το οποίο αποτελούσε την κύρια πηγή Αποσυμφωνίας. Στους αριθμητικούς υπολογισμούς μας παρατηρήσαμε ότι η ασυμπτωτικές τιμές του Entanglement και της Χωρητικότητας μεγιστοποιούνται για τις τιμές των παραμέτρων που κάνουν τον QKR να εμφανίζει εκτεταμένες νησίδες κανονικότητας στο κλασσικό του ανάλογο. Ακόμα και σε απομονωμένες περιοχές κανονικότητας οι οποίες περιβάλλονται από χάος το Entanglement και η Χωρητικότητα παίρνουν μέγιστες τιμές. Επίσης για συγκεκριμένη τιμή $\gamma=0.525$ (λεπτομέρειες στο παράρτημα), της σταθεράς σύζευξης της κβαντικής μνήμης με τον QKR επάνω από την απομονωμένη περιοχή κανονικότητας $k=3.15$ το Entanglement λάμβανε την τιμή 1 γεγονός που θα μπορούσε να εκληφθεί ως *Στοχαστικός Συντονισμός (Stochastic Resonance)* [1]. Στην προσομοίωση μας θεωρήσαμε ότι το QKR βρισκόταν στο κάτω όριο της ημικλασικής περιοχής θέτοντας $S=15$. Τέτοιας τάξης μεγέθους σπιν απαντώνται στα μαγνητικά μέταλλα των νανομαγνητικών κρυστάλλων.

Στο παρόν υιοθετούμε την ιδέα του ιεραρχικά δομημένου περιβάλλοντος [10]. Θεωρούμε ότι η κβαντική μνήμη περιβάλλεται από έναν QKR ο οποίος αποτελεί το Ενδιάμεσο (host) με το οποίο η κβαντική μνήμη επικοινωνεί με το ευρύτερο Μαρκοβιανό περιβάλλον. Το Μαρκοβιανό περιβάλλον στην περίπτωση μας είναι το *Θερμικό Λουτρό Μποζονίων (boson*

heat bath) το οποίο προσομοιώνεται από μια απειρία ασύζευκτων αρμονικών ταλαντωτών [2,5]. Η απώλεια της ενέργειας και της πληροφορίας προς την *Θερμική Δεξαμενή* γίνεται κατά μη αντιστρεπτό τρόπο. Το QKR επιλέγεται έτσι ώστε να βρίσκεται στην καθαρά κβαντική περιοχή $S=1$, σπιν το οποίο είναι πολύ κοινό στις εφαρμογές της κβαντικής τεχνολογίας. Όπως θα δούμε ακόμη και σε αυτήν την περιοχή το κβαντικό χάος κάνει έντονη την παρουσία του και η κλασικοποίηση του συστήματος προέρχεται από την παρουσία του Θερμικού Λουτρού και όχι από την μεγάλη διάσταση του QKT. Το γεγονός αυτό είναι κατά την γνώμη μας πολύ ενδιαφέρον. Θεωρούμε ότι μπορούμε να ελέγξουμε εξωτερικά τις παραμέτρους του QKR και έτσι η προσέγγιση μας παίρνει την διάσταση του *engineering*. Η *Θερμική Δεξαμενή* παραμετροποιείται με την θερμοκρασία και το φάσμα του. Οι υπολογισμοί μας έγιναν για διαφορετικού τύπου φάσμα (*Ωμικό*, *Υποωμικό* και *Υπέρωμικό*) και διαφορετικές θερμοκρασίες. Βρέθηκε ότι στις χαμηλές θερμοκρασίες ο ρυθμός της Αποσυμφωνίας επηρεάζεται έντονα από την ύπαρξη χάους ή κανονικότητας του ενδιάμεσου συστήματος. Ρυθμίζοντας τις παραμέτρους του Ενδιάμεσου συστήματος έτσι ώστε να βρισκόμαστε σε κάποια από τις περιοχές κανονικότητας (έστω και εάν είναι μια απομονωμένη περιοχή) μπορούμε να επιβραδύνουμε κατά πολύ τον ρυθμό Αποσυμφωνίας της κβαντικής μνήμης.

Το μοντέλο

Το σύστημα που χρησιμοποιούμε στο παρόν είναι παρόμοιο με αυτό της προηγούμενης ενότητας. Ο κβαντικός Καταχωρητής περιγράφεται από τον τελεστή Χάμιλτον

$$\hat{H}_{reg} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{z1}\hat{\sigma}_{z2} + \frac{3}{2}\hat{\sigma}_{x1}\hat{\sigma}_{x2}.$$

Ο τελεστής αυτός περιγράφει μια τυπική ZZ, XX αλληλεπίδραση με του συντελεστές επιλεγμένους έτσι ώστε οι ιδιοκαταστάσεις του $\hat{H}_{reg}$ να είναι οι τέσσερις καταστάσεις

του Bell. Το Ενδιάμεσο Σύστημα προσομοιώνεται με το QKR ο οποίος περιγράφεται από τον τελεστή Χάμιλτον

$$\hat{H}_h = A\hat{S}_{zh}^2 - \mu B\hat{S}_{xh} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi j).$$

Θεωρούμε ότι οι παράμετροι του QKR είναι πλήρως ελέγξιμοι έτσι ώστε η προσέγγιση μας να πάρει την διάσταση του engineering. Το συνολικό σπιν του QKR επιλέγεται μικρό και ίσο με $S=1$ τιμή που είναι τυπική σε εφαρμογές της κβαντικής τεχνολογίας. Να σημειωθεί ότι βρισκόμαστε μακριά από την ημικλασική περιοχή. Το κλασικό ανάλογο του συγκεκριμένου QKR έχει μελετηθεί στα προηγούμενα. Η αλληλεπίδραση του κβαντικού Καταχωρητή γίνεται δια μέσου

του όρου $\hat{H}_\gamma = \hat{S}_{reg} \hat{S}_h$. Η αλληλεπίδραση αυτή είναι επίσης μια τυπική αλληλεπίδραση μεταξύ μαγνητικών μορίων. Το εξωτερικό Μαρκοβιανό περιβάλλον προσομοιώνεται με το μοντέλο του Θερμικού Λουτρού Μποζονίων. Θεωρούμε ότι η Θερμική Δεξαμενή αλληλεπιδρά άμεσα μόνο με το Ενδιάμεσο Σύστημα μια και έχουμε υιοθετήσει το ιεραρχικό μοντέλο για το περιβάλλον. Ο τελεστής Χάμιλτον ο οποίος περιγράφει την ενέργεια του Θερμικού Λουτρού Μποζονίων είναι ο

$$\hat{H}_R = \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} \left(b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha} + \frac{1}{2} \right)$$

και η αλληλεπίδραση με το σύστημα γίνεται μέσο του όρου [2, 5]

$$\hat{H}_{int} = \lambda \sqrt{\hbar} \sum_a \gamma_a (b_a^{\dagger} + b_a) \hat{X} + O(\hat{X}^2)$$

όπου $\hat{X}$ είναι κάποιος τελεστής του Ενδιάμεσου Συστήματος. Έτσι ο συνολικός τελεστής Χάμιλτον είναι ο

$$\hat{H} = \hat{H}_{reg} + \gamma \hat{H}_{\gamma} + \hat{H}_h + \hat{H}_{int} + \hat{H}_R.$$

Στο όριο του μεγάλου αριθμού μποζονίων το σύστημα περιγράφεται από την παρακάτω γενικευμένη εξίσωση του Lindblad:

$$\dot{\hat{\rho}}_{SH} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{SH}, \hat{\rho}_{SH}] - \frac{\pi\lambda^2}{\hbar} \left([\hat{X}, \hat{R}\hat{\rho}_{SH}] + [\hat{X}, \hat{R}\hat{\rho}_{SH}]^+ \right)$$

όπου

$$\hat{H}_{SH} = \hat{H}_{reg} + \gamma \hat{H}_\gamma + \hat{H}_h \quad \text{και} \quad \langle l | \hat{R} | m \rangle = \frac{1}{\hbar} X_{lm} \frac{I(\omega_{lm}) - I(-\omega_{lm})}{\exp(\beta \hbar \omega_{lm}) - 1}$$

$$\text{με} \quad \hbar \omega_{lm} = E_l - E_m \quad \text{όπου} \quad \hat{H}_o |m\rangle = E_m |m\rangle$$

$$\text{με} \quad \hat{H}_o = \hat{H}_{reg} + \gamma \hat{H}_\gamma + A \hat{S}_{zh}^2 \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{\kappa_b T}.$$

Η φασματική πυκνότητα δίνεται από την

$$I(\omega) = I_o \omega^a \theta(\omega) \quad \text{με} \quad \theta(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \geq 0 \\ 0, \omega < 0 \end{cases} \quad \text{να είναι η κλιμακωτή συνάρτηση.}$$

Εάν $a < 1$ το Λουτρό είναι Υποωμικό (subohmic), εάν $a = 1$ είναι Ωμικό (Ohmic) και εάν $a > 1$ το Λουτρό είναι Υπέρωμικό (Superohmic).

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί $\dot{\hat{\rho}}_{SH} = \hat{L} \tilde{\rho}_{SH}$ όπου $\hat{L}$ είναι ο Υπερτελεστής διάστασης N^2 με $N = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ η διάσταση του SH. Φορμαλιστικά η λύση μπορεί να γραφεί ως

$$\tilde{\rho}(t) = \hat{T} \exp \left(\int_0^t \hat{L} dt \right) \tilde{\rho}(0)$$

όπου $\hat{T}$ είναι ο τελεστής χρονικής διάταξης. Έστω ότι ο Υπερτελεστής είναι της μορφής $\hat{L} = \hat{L}_o + \hat{V} \delta(t - 2\pi j)$ τότε θα

μπορούσαμε να περιγράψουμε την χρονική εξέλιξη στροβοσκοπικά ως $\tilde{\rho}_{n+1} = \hat{F} \tilde{\rho}_n$ όπου $\hat{F} = e^{\hat{V}} e^{2\pi \hat{L}_o}$ ο τελεστής Floquet. Στην περίπτωση μας ο Υπερτελεστής έχει την μορφή αυτή. Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$\hat{V} \leftrightarrow \frac{i}{\hbar} \mu B [\hat{S}_{xh}, \bullet]$$

και

$$\hat{L}_o \leftrightarrow -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_o, \bullet] - \frac{\pi \lambda^2}{\hbar} \left([\hat{X}, \hat{R} \bullet] + [\hat{X}, \hat{R} \bullet]^+ \right)$$

Οι υπολογισμοί

Θεωρούμε ότι $A=1.0$ και ότι ο κβαντικός Καταχωρητής περιέχει αρχικά την κατάσταση Bell $|y\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$. Θεωρούμε επίσης ότι ο βαθμός της σύζευξης με το λουτρό μποζονίων είναι $\lambda=0.01$. Εξετάζουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται το Entanglement των δυο qubits του κβαντικού Καταχωρητή καθώς μεταβάλλουμε το $\kappa = \mu B$ και την θερμοκρασία T . Στους υπολογισμούς θέτουμε $k_b = 1.0$

Θεωρούμε ότι $\hat{X} = \hat{S}_{Zhost}$ και ότι το λουτρό μποζονίων είναι Ωμικό.

Οι τρεις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις παριστάνουν την εξέλιξη του Entanglement of Formation [6,7,9] σαν συνάρτηση του αριθμού των παλμών n για τρεις διαφορετικές τιμές του κ

Σχήμα 1. Το Entanglement (Entanglement of Formation) ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Παρατηρούμε απότομη μείωση του Entanglement. $\kappa = \mu B = 2.5$, $T = 1.0$, $\hat{X} = S_{ZHost}$, $A = 1.0$, $\lambda = 0.01$, Ohmic Bath.

Σχήμα 2. Το Entanglement (Entanglement of Formation) ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Επιβράδυνση της καταστροφής του Entanglement. $\kappa = \mu B = 3.15$, $T = 1.0$, $\hat{X} = S_{ZHost}$, $A = 1.0$, $\lambda = 0.01$, Ohmic Bath.

Σχήμα 3. Το Entanglement (Entanglement of Formation) ως συνάρτηση του αριθμού των βημάτων. Παρατηρούμε απότομη μείωση του Entanglement. $\kappa = \mu B = 3.85$, $T = 1.0$, $\hat{X} = S_{ZHost}$, $A = 1.0$, $\lambda = 0.01$, Ohmic Bath.

Θεωρώντας ότι το Entanglement of Formation μεταβάλλεται κατά μέσο όρο στον χρόνο ως $E_F(n) = E_F(0) \exp\left(-\frac{n}{\tau_{dec}}\right)$ όπου τ_{dec} ο χρόνος Αποσυμφωνίας και κάνοντας προσαρμογή της προηγούμενης εξίσωσης στις καμπύλες $E_F(n)$ για διαφορετικές τιμές του κ και του T προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα. Στην προσαρμογή η μόνη μεταβλητή είναι το τ_{dec} γιατί $E(0) = 1$

Σχήμα 4. Ο χρόνος Αποσυμφωνίας σαν συνάρτηση της κρίσιμης μεταβλητής κ για διαφορετικές θερμοκρασίες T . Όσο μεγαλώνει η θερμοκρασία τόσο μικραίνει ο χρόνος Αποσυμφωνίας. Στην περιοχή $\kappa \approx 3.2$ υπάρχει εντυπωσιακή αύξηση των χρόνων Αποσυμφωνίας. Το Λουτρό είναι Ωμικό. $\hat{X} = S_{ZHost}$, $A=1.0$, $\lambda=0.01$, $\gamma=0.525$

Το επόμενο διάγραμμα αντιστοιχεί στην περίπτωση του Υπερωμικού Λουτρού με $\alpha=2.0$

Σχήμα 5. Ο χρόνος Αποσυμφωνίας σαν συνάρτηση της κρίσιμης μεταβλητής κ για διαφορετικές θερμοκρασίες T . Όσο μεγαλώνει η θερμοκρασία τόσο μικραίνει ο χρόνος Αποσυμφωνίας. Στην περιοχή $\kappa \approx 3.2$ υπάρχει εντυπωσιακή αύξηση των χρόνων Αποσυμφωνίας. Το Λουτρό είναι Υπερωμικό.

$$\hat{X} = S_{ZHost}, \quad A = 1.0, \quad \lambda = 0.01$$

Παρατηρούμε μεγαλύτερους χρόνους Αποσυμφωνίας από ότι στο Ωμικό Λουτρό.

Συμπεράσματα

Ακόμη και στην καθαρά κβαντική περιοχή ($S=1$) όταν το QKR βρίσκεται υπό την επίδραση περιβάλλοντος μποζονίων εμφανίζει διαφοροποίηση της συμπεριφοράς του ανάλογα με το εάν βρίσκεται σε περιοχή κανονικότητας ή χάους. Θεωρώντας ότι το QKR αποτελεί το Ενδιάμεσο Σύστημα το οποίο παρεμβάλλεται μεταξύ της κβαντικής μνήμης και του περιβάλλοντος παρατηρούμε ότι ρυθμίζοντας τις παραμέτρους έτσι ώστε το ενδιάμεσο να βρίσκεται στην περιοχή κανονικότητας μπορούμε να επιβραδύνουμε τον ρυθμό Αποσυμφωνίας της κβαντικής μνήμης.

Παρατηρούμε έντονη βελτίωση των χαρακτηριστικών του κβαντικού καναλιού ακριβώς πάνω από το σημείο $\kappa=3.2$ όπου εμφανίζεται μια απομονωμένη περιοχή κανονικότητας στον κλασικό Kicked Rotor. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η Δυναμική Πιστότης λαμβάνει την τιμή 1 σαν μέγιστη τιμή πάνω από την περιοχή ενώ το $\gamma \neq 0$. Τσως να είναι ένα είδος δυναμικής αποσύζευξης το καναλιού από το περιβάλλον του.

Επίσης εάν θεωρήσουμε ως μέτρο του θορύβου τον βαθμό της σύζευξης με το περιβάλλον (γ) τότε από τα διαγράμματα της πρώτης παραγράφου θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το μέγιστο του σημείου $\gamma = \gamma_{sr} \approx 0.525$ ως Στοχαστικό Συντονισμό [1].

Παράρτημα .

1. Εξετάζουμε την μεταβολή του μέσου Entropy of Formation σε σχέση με την ένταση της σύζευξης γ . Οι υπολογισμοί γίνονται για σταθερό $\kappa=3.15$ το οποίο αντιστοιχεί στην απομονωμένη περιοχή κανονικότητας. Οι υπολογισμοί γίνονται δυο φορές την πρώτη για 100 βήματα (kicks) και την δεύτερη για 300 βήματα για να δειχθεί ότι πολύ γρήγορα οι μέσες τιμές συγκλίνουν στις αντίστοιχες ασυμπτωτικές τιμές τους. Τα αποτελέσματα παραθέτονται στα παρακάτω δυο διαγράμματα. Οι υπολογισμοί γίνονται χωρίς την παρουσία θερμικού περιβάλλοντος.

Σχήμα 6. Το μέσο Entanglement πάνω σε εκατό βήματα ως συνάρτηση της σύζευξης γ . Μέτρο του Entanglement είναι το Entanglement of Formation.
 $\kappa=3.15$

Σχήμα 7. Το μέσο Entanglement πάνω σε τριακόσια βήματα ως συνάρτηση της σύζευξης γ . Μέτρο του Entanglement είναι το Entanglement of Formation.
 $\kappa=3.15$

Παρατηρούμε τα εξής: το Entanglement of Formation στο σημείο $\gamma=0$ παίρνει την τιμή 1.0 κάτι που είναι λογικό μια και το σύστημα έχει μηδενική σύζευξη με το περιβάλλον για την τιμή $\gamma=0$. Κατόπιν ενώ η σύζευξη μεγαλώνει παρατηρούμε μια φυσιολογική μείωση του Entanglement of Formation λόγω του ότι η επίδραση του περιβάλλοντος γίνεται ισχυρότερη. Τέλος γύρω από το σημείο $\gamma=\gamma_{sr} \approx 0.525$ παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ένα εκτεταμένο μέγιστο το οποίο θα μπορούσε ίσως να ερμηνευτεί ως Στοχαστικός Συντονισμός.

2. Μελετάμε τώρα την συμπεριφορά του κβαντικού καναλιού όταν η ένταση της σύζευξης με το περιβάλλον έχει την τιμή $\gamma=\gamma_{sr} \approx 0.525$ σε σχέση με την μεταβλητή κ . Έτσι ώστε να δούμε τι συμβαίνει καθώς εναλλάσσεται η κανονικότητα και το χάος. Τα αποτελέσματα παραθέτονται στα ακόλουθα σχεδιαγράμματα. Για το Quantum Kicked Rotor επιλέγεται $S=15$. Οι υπολογισμοί γίνονται χωρίς την παρουσία θερμικού περιβάλλοντος.

Σχήμα 8. Η μέση Χωρητικότητα πάνω σε εκατό βήματα ως συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου κ . Υπάρχει έντονο μέγιστο κοντά στο $\kappa=3.2$. Ισχύει $\gamma=0.525$

Σχήμα 9. Ο μέσος θόρυβος πάνω σε εκατό βήματα ως συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου κ . Ο θόρυβος υπολογίζεται με την Εντροπία Ανταλλαγής. Υπάρχει έντονο ελάχιστο κοντά στο $\kappa = 3.2$. Ισχύει $\gamma = 0.525$

Σχήμα 9. Η μέση Δυναμική Πιστότης πάνω σε εκατό βήματα ως συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου κ . Υπάρχει έντονο μέγιστο κοντά στο $\kappa = 3.2$. Ισχύει $\gamma = 0.525$

Σχήμα 10. Το μέσο Entanglement πάνω σε εκατό βήματα ως συνάρτηση της κρίσιμης παραμέτρου κ . Υπάρχει έντονο μέγιστο κοντά στο $\kappa=3.2$. Ισχύει $\gamma=0.525$

Αναφορές.

- [1]. Stochastic resonance, L Gammaitoni, P Hänggi, P Jung, F Marchesoni - Reviews of Modern Physics, 1998, vol. 70, issue 1, 223-287
- [2]. Energy transport in the integrable system in contact with various types of phonon ..., K Saito, S Takesue, S Miyashita - Physical Review E, 2000, vol. 61, issue 3, 2397-2409
- [3]. G.Casati, B.V.Chirikov, J.Ford and F.M.Izrailev, Lect.NotesPhys.93, 334, 1979. F. M. Izrailev, Phys.Rep. 196, 299, 1990
- [4]. Martin C. Gutzwiller, Chaos in Classical and Quantum Mechanics, (1990) Springer-Verlag, New York ISBN: 0-387-97173-4.
- [5]. Effects of the environment on nonadiabatic magnetization process in uniaxial ..., K Saito, S Miyashita, H De Raedt - Physical Review B, 1999, vol. 60, issue 21, 14553-14556
- [6]. Entanglement of Formation, WK Wootters - Quantum Communication, Computing, and Measurement 2-Springer, 2000, ISBN: 978-0-306-46307-5, 69-73
- [7]. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits, WK Wootters - Physical Review Letters, 1998
- [8]. Capacity of the noisy quantum channel, S Lloyd - Physical Review A, 1997, vol. 55, issue 3, 1613-1622
- [9]. Quantum Computation and Quantum Information, MA Nielsen, IL Chuang, Cambridge University Press, 2000, ISBN: 0-521-63503-9
- [10]. Method for modeling decoherence on a quantum-information processor, G Teklemariam, EM Fortunato, CC Lopez, J Emerson, ... - Physical Review A, 2003, vol. 67, issue 6, 062316

Σύνοψη Συμπερασμάτων.

Στην διατριβή αυτή έγινε μια προσπάθεια παραγωγής νέων συμπερασμάτων όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο συσχετίζονται οι κλασικές ιδιότητες με τα κβαντικά χαρακτηριστικά ενός Κβαντικού συστήματος με καλά ορισμένο Κλασικό ανάλογο. Οι ιδιότητες οι οποίες μελετήθηκαν συσχετίζονται με έννοιες που περιλαμβάνονται στο πεδίο της Κβαντικής Θεωρίας της Πληροφορίας με κεντρική ιδέα την έννοια του Entanglement. Ο λόγος για τον οποίον επιλέχθηκε η έννοια του Entanglement ως κεντρική είναι το γεγονός ότι το Entanglement είναι ιδιότητα η οποία υπάρχει μόνο στα Κβαντικά συστήματα. Έτσι μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι μια καθαρά Κβαντική ιδιότητα μπορεί να επηρεάζεται από την Κλασική δυναμική. Σημασία έχει επίσης ότι τα συστήματα τα οποία μελετήσαμε διερευνήθηκαν στην καθαρά Κβαντική περιοχή, και όχι στην ημικλασική, και παρόλα αυτά τα χαρακτηριστικά της δυναμικής του αντίστοιχου Κλασικού συστήματος συνέχισαν να επηρεάζουν τις ιδιότητες Κβαντικής Πληροφορίας του συστήματος.

Στο πλαίσιο της έρευνας αυτής και μετά από εκτεταμένη αριθμητική και αναλυτική διερεύνηση Κβαντικών Συστημάτων (Κβαντικός Βηματικός Στρόβος, Κβαντικός Βηματικός Στροφέας, Συστήματα Τυχαίων Πινάκων, entanglement μεταξύ ατόμων Ni σε συγκεκριμένη μοριακή δομή, Άλυσος Σπινόρων, Κβαντικός Δίαυλος κ.α.) καθώς και των κλασικών αναλόγων τους καταλήξαμε σε κάποια πρώτα γενικά συμπεράσματα σχετικά με την δυναμική του Entanglement αλλά και άλλων Πληροφοριακών μέτρων. Να σημειωθεί ότι τα παραπάνω συστήματα διερευνήθηκαν ως απομονωμένα από το περιβάλλον, σε αλληλεπίδραση με Μαρκοβιανό Περιβάλλον αλλά και με Περιβάλλον με Μνήμη. Επίσης μελετήθηκε η επίδραση θερμικού περιβάλλοντος σε τέτοια συστήματα. Τέλος έγινε χρήση της έννοιας του Ιεραρχικά Δομημένου Περιβάλλοντος με την εισαγωγή της πρωτότυπης ιδέας του Ενδιάμεσου Συστήματος (Host System).

Κατόπιν όλων αυτών καταλήξαμε σε κάποια γενικά συμπεράσματα τα οποία είναι κοινά σε όλα τα συστήματα τα οποία μελετήσαμε. Τα συμπεράσματα αυτά είναι τα ακόλουθα:

1. Οι ποσότητες οι οποίες συνδέονται με την Κβαντική Πληροφορία η οποία περιέχεται σε ένα Κβαντικό σύστημα παρουσιάζουν χαρακτηριστικές μεταβολές όταν η συνολική (global) δυναμική του αντίστοιχου Κλασικού συστήματος αλλάζει (Κανονικότητα - Χάος).

2. Εν γένει η ύπαρξη Καθολικού (global) Χάους ευνοεί την δημιουργία Entanglement σε ένα απομονωμένο Ενεργειακά και Πληροφορικά Κβαντικό Σύστημα.

3. Το Entanglement ενός Κβαντικού Συστήματος με Χαοτικό Κλασικό ανάλογο εμφανίζει μεγαλύτερη ευαισθησία στις μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος από ότι ένα Κβαντικό σύστημα με Κλασικό ανάλογο στην περιοχή της Κανονικότητας.

4. Η ευαισθησία του Entanglement, όσον αφορά τα Κβαντικά συστήματα με Χαοτικό Κλασικό ανάλογο, εξαρτάται από την συμμετρία που υπακούει η Κβαντική δυναμική του Συστήματος. Η ευαισθησία του Entanglement στα συστήματα αυτά εμφανίζει την τάση να ακολουθεί τον γενικό κανόνα Ευαισθησία(GSE) > Ευαισθησία(GUE) > Ευαισθησία(GOE) όπου GOE, GUE, GSE οι τρεις Παγκόσμιες (Universal) συμμετρίες της δυναμικής των Κβαντικών Συστημάτων με Χαοτικό Κλασικό ανάλογο.

5. Ο ρυθμός μεταβολής του Entanglement της βασικής στάθμης, ενός διαταρασσόμενου συστήματος, ως προς την παράμετρο της διαταραχής φράσσεται με συγκεκριμένο τρόπο που εξαρτάται από την κυρτότητα των ιδιοτιμών της ενέργειας.

6. Η δυναμική του Entanglement ενός Κβαντικού Συστήματος εξαρτάται έντονα από τις λεπτομέρειες του Χώρου των Φάσεων του αντίστοιχου Κλασικού Συστήματος. Το Entanglement μεταβάλλεται έντονα και χαρακτηριστικά στα Κλασικά σημεία Διακλάδωσης.

7. Οι Κβαντικές Αμυχές εμφανίζουν χαρακτηριστικές μεταβολές γύρω από τις τιμές των παραμέτρων που οδηγούν μια Κλασική Διακλάδωση στον Χώρο των Φάσεων. Κβαντικές Αμυχές που εδρεύουν σε απομονωμένα Σημεία Ισορροπίας εμφανίζουν εν γένει μεγάλο Entanglement.

8. Η ύπαρξη θερμικού περιβάλλοντος μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να ευνοεί την δημιουργία Entanglement (υπολογισμοί σε συγκεκριμένη μοριακή δομή του Ni).

9. Η ύπαρξη Χάους σε Κβαντικά Συστήματα τα οποία είναι σε σύζευξη με το Περιβάλλον ευνοεί την δημιουργία Entanglement μεταξύ του Συστήματος και του Περιβάλλοντος. Αυτό σε συνδυασμό με την ευαισθησία των Entangled καταστάσεων έχει ως συνέπεια την ταχεία Αποσυμφωνία της Κβαντικής Κατάστασης του Συστήματος και την καταστροφή του Entanglement. Το συμπέρασμα αυτό ισχύει τόσο για Μαρκοβιανό Περιβάλλον όσο και για Περιβάλλον με Μνήμη.

10. Είναι δυνατός ο Έλεγχος του Entanglement ενός Ανοιχτού Κβαντικού Συστήματος με την εισαγωγή ενός Ενδιάμεσου Συστήματος (Host System) στα πλαίσια του μοντέλου του Ιεραρχικά Δομημένου Περιβάλλοντος. Το Ενδιάμεσο Σύστημα μπορεί για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων του να επιβραδύνει το φαινόμενο της Κβαντικής Αποσυμφωνίας του Συστήματος. Το γεγονός αυτό μπορεί να βρει πρακτική εφαρμογή στο πεδίο της Κβαντικής Τεχνολογίας.

11. Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούν να γενικευτούν και για άλλα Πληροφορικά Μεγέθη, εκτός του Entanglement, όπως η Χωρητικότητα ενός Κβαντικού Δίαυλου, οι διάφορες Κβαντικές Εντροπίες, η Πιστότης και η Δυναμική Πιστότης κ.α. Στα πλαίσια της διατριβής αυτής έχουν πραγματοποιηθεί εκτεταμένοι υπολογισμοί όσον αφορά τις ποσότητες αυτές με ανάλογα συμπεράσματα.

Το θεματικό πεδίο της Κβαντικής Πληροφορίας εμφανίζει μεγάλη ανάπτυξη κατά την τελευταία δεκαετία όπως προκύπτει από τον αριθμό των συγγραμμάτων, των επιστημονικών δημοσιεύσεων αλλά και των πειραμάτων που πραγματοποιούνται. Πολλά ανοικτά ερωτήματα σχετίζονται με τα θέματα που διαπραγματευτήκαμε στην διατριβή αυτή γεγονός το οποίο μας

ενθαρρύνει να προχωρήσουμε σε μια μελλοντική βαθύτερη αλλά και ευρύτερη διερεύνηση των θεμάτων αυτών. Μελλοντικά σκοπεύουμε να μελετήσουμε πιο αναλυτικά την πιθανότητα Ελέγχου του Entanglement σε ρεαλιστικά συστήματα με την βοήθεια του Ενδιάμεσου Συστήματος. Επίσης μας ενδιαφέρει η εκμετάλλευση του φαινομένου του Στοχαστικού Συντονισμού στην βελτίωση των Πληροφορικών χαρακτηριστικών ενός Κβαντικού Συστήματος. Ένας άλλος στόχος είναι ο έλεγχος των συμπερασμάτων μας, επεκτείνοντας τους υπολογισμούς μας, σε νέα συστήματα. Τέλος η διερεύνηση θεωρητικών και γενικής εφαρμογής θεμάτων, όπως η σχέση της Κβαντικής Δυναμικής του Entanglement με το φαινόμενο της Χαοτικής Διάχυσης στα Κλασικά Συστήματα είναι στο πεδίο των ενδιαφερόντων μας.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μια συνεχώς διευρυνόμενη προσπάθεια προσέγγισης των εννοιών και των προβλημάτων της σύγχρονης Φυσικής με την βοήθεια των ιδεών της Θεωρίας της Πληροφορίας. Η Θεωρία της Πληροφορίας, η οποία εμφάνισε έντονη ανάπτυξη από τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο και μετά, έφτασε στο αποκορύφωμα της με την μεγάλη τεχνολογική επανάσταση των τηλεπικοινωνιών και των ηλεκτρονικών υπολογιστών κατά τις τελευταίες δυο δεκαετίες. Από την άλλη πλευρά η διαρκώς διευρυνόμενη συμβολή της Θεωρίας της Πληροφορίας στην Φυσική φαίνεται ότι οδηγεί σε έναν νέο κλάδο της Επιστήμης ο οποίος θα μπορούσε να φέρει το όνομα «Φυσική της Πληροφορίας». Λόγω της ανάπτυξης αυτής το πεδίο της «Φυσικής της Πληροφορίας» αποτελεί μεγάλη πηγή επιστημονικών ερωτημάτων τα οποία πιστεύουμε ότι είναι ελκυστικά για τον σύγχρονο Ερευνητή.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ – ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ, ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ, ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΙΚΟΝΕΣ

Όπως αναφέρεται και στον πρόλογο η διατριβή αυτή οργανώνεται σε ενότητες. Οι πρώτες ενότητες (Α'–Γ') περιλαμβάνουν συνοπτικά τις βασικές έννοιες της κβαντομηχανικής με έμφαση στην ανοικτή δυναμική, της κβαντικής θεωρίας της πληροφορίας και του κβαντικού χάους έτσι όπως οι ιδέες αυτές εκφράζονται στην σχετική βιβλιογραφία και είναι γενικά γνωστές και αποδεκτές από την παγκόσμια επιστημονική κοινότητα. Οι τελευταίες ενότητες (Δ'–Η') περιλαμβάνουν πρωτότυπα ερευνητικά αποτελέσματα προϊόν της διδακτορικής μου διατριβής. Ένα μέρος αυτών είναι δημοσιευμένο. Έτσι η βιβλιογραφία παρουσιάζεται στο τέλος κάθε ενότητας.

Παρόλα αυτά, για την καλύτερη τεκμηρίωση του κειμένου, προς διευκόλυνση του αναγνώστη αλλά και σε ένδειξη σεβασμού στους πνευματικούς δημιουργούς προστίθεται το παρόν θεματικό βιβλιογραφικό παράρτημα παραπομπών, αναφορών, διαγράμμάτων και εικόνων. Κάποιες από τις αναφορές που υπάρχουν στο τέλος των ενοτήτων εμφανίζονται ξανά εδώ.

Βασική Κβαντομηχανική

- Quantum theory, D.Bohm, Prentice-Hall, 1951
- The principles of quantum mechanics, PAM Dirac, Oxford University Press, 1981
- Mathematical foundations of quantum mechanics, J Von Neumann, Princeton University Press, 1996
- Quantum Mechanics Non-Relativistic Theory, L. D. Landau, L. M. Lifshitz, Butterworth-Heinemann, 1981
- Understanding quantum mechanics, R Omnès, Princeton University Press, 1999
- Quantum Mechanics, C Cohen-Tannoudji, B Diu, F Laloë, S Hemley, Wiley Interscience, 1977
- Quantum Mechanics, Albert Messiah, North-Holland, 1961
- Quantum Mechanics, L. I. Schiff, Mcgraw-Hill College, 1968
- A Modern Approach to Quantum Mechanics, Townsend, John S. 2nd ed.. Sausalito, CA: University Science Books, 2000
- Quantum Theory: Concepts and Methods, A. Peres, Kluwer Academic Publishers, 1993
- Quantum Mechanics, Franz Mandl, Wiley, 1992
- Κβαντομηχανική I, II, III Στέφανος Τραχανάς, Παν. Εκδόσεις Κρήτης
- Σχετικιστική κβαντομηχανική, , Στέφανος Τραχανάς, Παν. Εκδόσεις Κρήτης
- Ακριβώς επιλύσιμα κβαντομηχανικά δυναμικά, Σ.Τραχανάς, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009
- Εισαγωγή στην κβαντομηχανική, Γ. Ανδριτσόπουλος, Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- Εισαγωγή στην κβαντομηχανική, Ταμβάκης.Κ., Εκδ. Leader Books
- Quantum Mechanics in Phase Space: An Overview with Selected Papers, Cosmas K. Zachos (Editor), David B. Fairlie (Editor), Thomas L. Curtright (Editor), World Scientific, 2005
- Phase space representation of quantum dynamics, Anatoli Polkovnikov, <http://arxiv.org/abs/0905.3384v2>, 2010
- Ιστοσελίδες:
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Introduction_to_quantum_mechanics
 - <http://www.quantiki.org/>
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_mechanics

-Phase space QM

http://en.wikipedia.org/wiki/Wigner_quasi-probability_distribution

http://en.wikipedia.org/wiki/Husimi_Q_representation

Ανοικτή δυναμική κβαντικών συστημάτων, Εξισώσεις Master και Lindblad, Κβαντική Μέτρηση.

-Irreversible Quantum Dynamics (Lecture Notes in Physics), Fabio Benatti (Editor), Roberto Floreanini (Editor), Springer, 2003

-Quantum Dynamical Semigroups and Applications, Alicki R., Lendi K. Berlin: Springer Verlag, 1987.

- The Theory of Open Quantum Systems, Breuer, Heinz-Peter F. Petruccione, Oxford University Press 2007

-Density matrix theory and applications, K Blum, Springer, 1996

-States, Effects, and Operations, K.Kraus, Lecture Notes in Physics 190, Springer, 1983.

-Open Quantum Systems I-III, Stéphane Attal, Alain Joye, Claude-Alain Pillet, Lecture Notes in Mathematics, Springer

-Quantum Computation and Quantum Information, M. Nielsen and I. Chuang, Cambridge University Press, 2000

-Quantum Theory and Its Stochastic Limit., Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.V., New York: Springer Verlag, 2002.

-Quantum Mechanics of Non-Hamiltonian and Dissipative Systems, Tarasov V.E., Amsterdam, Boston, London, New York: Elsevier Science, 2008.

-Quantum Dissipative Systems, Weiss U. Singapore, World Scientific, 1993

-Quantum state diffusion, I. Persival, Cambridge University Press, 1999

-Quantum Noise, C. W. Gardiner, Springer, 2004

-Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, C.Gardiner, Springer-Verlag, 1983

Ιστοσελίδες:

-http://en.wikipedia.org/wiki/Lindblad_equation

-http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_operation

-http://en.wikipedia.org/wiki/Open_quantum_system

-http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_dissipation

Ανισότητες του Bell, EPR, Θεωρίες Κρυφών Μεταβλητών, Ερμηνείες της Κβαντομηχανικής.

-J.S. Bell, Physics 1, 195-200, 1964

- Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem, Aspect, 1981: A. Aspect et al., Phys. Rev. Lett. 47, 460, 1981

-Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, Einstein A., Podolsky B., Rosen, N., Physical Review 47 (10): 777-780, 1935

-The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory, David Bohm, Basil J. Hiley, publisher: Routledge, 1993

-Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics, Edward Nelson, Physical Review 150: 1079-1085, 1966

-Mathematical and Physical Aspects of Stochastic Mechanics, Ph. Blanchard, Ph. Combe, W. Zheng, Lecture notes in physics, Springer, 1987

-Entanglement, Information, and the Interpretation of Quantum Mechanics, Jaeger, Gregg, Springer, 2009

-Bell's inequalities and density matrices. Revealing hidden nonlocality, Sandu Popescu, <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9502005>, 1995

-Correlations, Bell Inequality Violation & Quantum Entanglement, Yeong-Cherng Liang, <http://arxiv.org/abs/0810.5400>, 2008

-Research on Hidden Variable Theories: a review of recent progresses, Marco Genovese, <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0701071>, 2007

Ιστοσελίδες:

-http://en.wikipedia.org/wiki/Bell_test_experiments

-http://en.wikipedia.org/wiki/Hidden_variable_theory

-http://en.wikipedia.org/wiki/User:Caroline_Thompson/Bell's_theorem

-http://en.wikipedia.org/wiki/Interpretations_of_quantum_mechanics

-http://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality

-http://en.wikipedia.org/wiki/De_Broglie-Bohm_theory

Θεωρία κλασικής πληροφορίας, Κυβερνητική, Μηχανή του Turing, Κλασικοί Υπολογιστές.

-Elements of information theory, TM Cover, JA Thomas, Wiley, 2006

-Information Science, David G. Luenberger, Princeton University Press, 2006

-An Introduction to Information Theory, Fazlollah M. Reza, Dover Books

-Information Theory, Robert B. Ash, Dover books on mathematics

-The Mathematical Theory of Communication, Claude E Shannon, Warren Weaver, ISBN-10: 0252725484, 1971

-Cybernetics, Second Edition: or the Control and Communication in the Animal and the Machine, Norbert Wiener, The MIT Press, 1965

-An Introduction to Information Theory: Symbols, Signals and Noise, John R. Pierce, Dover Publications, 1980

-Mathematical Foundations of Information Theory, A. Ya. Khinchin, Dover, 1957

-Entropy and Information Theory, Robert M. Gray, 1990

-Information Theory and Statistics, Solomon Kullback, Dover, 1997

-The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing, Martin Davis, Publisher: W. W. Norton & Company, 2000

-The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey, editor: Rolf Herken, Springer, 1995

-Θεωρία πληροφορίας και κωδικοποίησης, Β. Ζορκάδης, Ε.Α.Π., 2002

Ιστοσελίδες:

-http://en.wikipedia.org/wiki/Theory_of_computation

-http://en.wikipedia.org/wiki/Information_theory

-http://en.wikipedia.org/wiki/Turing_machine

-http://en.wikipedia.org/wiki/Logic_gate

Θεωρία Κβαντικής Πληροφορίας και Κβαντικοί Υπολογιστές.

-Quantum Computation and Quantum Information, M.Nielsen and I. Chuang, Cambridge University Press, 2000

-Einstein, Bohr and the Quantum Dilemma: From Quantum Theory to Quantum Information, Andrew Whitaker, Cambridge University, 2006

-Quantum information and computation, Lecture notes for Physics 229, J.Preskill, California Institute of Technology, 1998

-Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments, G. Alber et al., Springer, 2001.

-Introduction to Quantum Computation and Information, H.K. Lo, T. Spiller, S.Popescu, World Scientific, 1998

-Quantum information theory, M. A. Nielsen, PhD Dissertation, The University of New Mexico, 1998

-Lectures on Quantum Information, Dagmar Bruß and Gerd Leuchs(editors), Wiley-VCH Verlag, 2007

-Principles of Quantum Computation and Information, Vol.1: Basic Concepts, Giuliano Benenti, Giulio Casati, Giuliano Strini, World Scientific Pub Co Inc, 2004

- Principles of Quantum Computation And Information: Basic Tools And Special Topics, Giuliano Benenti, Giulio Casati, Giuliano Strini, World Scientific Publishing Company, 2007
- Elementary gates for quantum computation, A. Barenco, C. H. Bennett , R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. Smolin, H. Weinfurter, <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9503016>, 1995
- Quantum Information Theory and Quantum Statistics, Dénes Petz, Springer, Berlin Heidelberg, 2008
- Quantum Computing, Andrew Steane, <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9708022>, 1997
- Entanglement Measures and Purification Procedures, V. Vedral, M.B. Plenio, <http://xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/9707035>, 1997
- Quantum Computer Science, N. D. Mermin, Cambridge, 2007
- An Introduction to Quantum Computing, Phillip Kaye, Raymond Laflamme, Michele Mosca, oxford university press, 2007
- Κβαντικοί υπολογιστές, Ι. Καραφυλίδης, εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2005
- Ιστοσελίδες:
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_information
 - M. A. Nielsen's Phd: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0011036>
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_computer
 - <http://en.wikipedia.org/wiki/Qubit>
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_gate
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_teleportation
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_channel
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_error_correction
 - J.Preskill's page, <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/>
 - J.Preskill's lecture notes, problems and solutions
 - <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/#lecture>
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_entanglement

Θεωρία του Χάους, Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

- Differential Equations and Dynamical Systems, Lawrence Perko, Springer, 2001
- Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics, George M. Zaslavsky, Oxford University Press, USA, 2008
- Chaos in Classical and Quantum Mechanics, Martin C. Gutzwiller, Springer-Verlag, New York, 1990
- Classical and Quantum Chaos, Predrag Cvitanovic, Roberto Artuso, Freddy Christiansen, Per Dahlqvist, Ronnie Mainieri, Hans Henrik Rugh, Gregor Tanner, G'abor Vattay, Niall Whelan, Andreas Wirzba, version 7.0.1, www.nbi.dk/ChaosBook/, 2000
- Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, John Guckenheimer, Philip Holmes, SPRINGER-VERLAG NEW YORK INC, 2002
- Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Anatole Katok, Boris Hasselblatt, Cambridge University Press, 1996
- Δυναμικά Συστήματα και Χάος I, Α. Μπούνης - 1995, Εκδ. Παπασωτηρίου
- Δυναμικά Συστήματα και Χάος II, Α. Μπούνης - 1997, Εκδ. Παν. Πατρών
- Ο θαυμαστός κόσμος των FRACTAL. Μια περιήγηση στη νέα επιστήμη του χάους και της πολυπλοκότητας, Α. Μπούνης - 2004, Leader Books
- Σημειώσεις Δυναμικών Συστημάτων, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Δ. Γκίκα, Παν. Πατρών, Τμήμα Φυσικής
- Ιστοσελίδες:
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory
 - <http://chaosbook.org/>
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_system
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Bifurcation_theory

Κβαντικό Χάος, Κβαντικά Μπιλιάρδα, Θεωρία Τυχαίων Πινάκων (RMT)

- Chaos in Classical and Quantum Mechanics, Martin C. Gutzwiller, Springer-Verlag, New York, 1990
 - Quantum Signatures of Chaos, Fritz Haake, Edition: 2, Springer, 2001
 - Quantum versus Chaos: Questions Emerging from Mesoscopic Cosmos, K. Nakamura, Springer, 1997
 - Quantum Chaos and Mesoscopic Systems: Mathematical Methods in the Quantum Signatures of Chaos, N.E. Hurt, Springer, 1997
 - Quantum Chaos: An Introduction, Stöckmann Hans-Jürgen, Cambridge University Press, 1999
 - Dissipative Quantum Chaos and Decoherence, Daniel Braun, Springer, 2001
 - Quantum chaos: a new paradigm of nonlinear dynamics, K.Nakamura, Cambridge University Press, 1993
 - Quantum Chaos: Between Order and Disorder, Giulio Casati, Boris Chirikov, Cambridge University Press, 2006
 - The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations, Linda E Reichl, Springer, 2004
 - Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts, Thomas Guhr, Axel Muller-Groeling, Hans A. Weidenmuller, <http://lanl.arxiv.org/abs/cond-mat/9707301v1>, 1997
 - Introduction to random matrices. Geometric and quantum aspects of integrable systems, Tracy C. and Widom H., 103-130, Lecture Notes in Phys., 424, Springer, Berlin, 1993
 - An Introduction to Random Matrices, Greg W. Anderson, Alice Guionnet, Ofer Zeitouni, Cambridge University Press, 2009
 - Applications of Random Matrices in Physics, Édouard Brezin, Vladimir Kazakov, Didina Serban, Paul Wiegmann, Anton Zabrodin, Springer, 2006
 - Quantum Dynamics with Trajectories: Introduction to Quantum Hydrodynamics, Springer, Robert E. Wyatt (Author), Corey J. Trahan (Contributor), 2005
- Ιστοσελίδες:
- http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_chaos
 - M.Gutzwiller, <http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=quantum-chaos-subatomic-worlds>
 - http://www.scholarpedia.org/article/Category:Quantum_Chaos
 - <http://chaosbook.org/>
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_billiards
 - http://en.wikipedia.org/wiki/Random_matrix
 - http://www.scholarpedia.org/article/Random_matrix_theory

Εικόνες, Γραφήματα, Σχεδιαγράμματα

- Ελκυστής του Lorenz
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lorenz_attractor_yb.svg
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:TwoLorenzOrbits.jpg>
- Λογιστική Απεικόνιση, Διάγραμμα Διακλαδώσεων
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:LogisticMap_BifurcationDiagram.png
- Δοκιμές ανισοτήτων και θεωρημάτων του Bell (Bell test):
by C.Thompson:
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Two_channel.png
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Single-channel_Bell_test.png
- human detectors:
<http://arxivblog.com/wp-content/uploads/2008/03/human-entanglement.jpg>
- photon analyzer:
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bell-test-photon-analyser.png>

-Κβαντικό Δυφίο (Qubit):

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bloch_sphere.svg

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blochsphere.svg>

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quantum_computer.svg

-Μηχανή του Turing:

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Turing_machine_2a.svg

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turing_machine_2b.svg

-Κβαντικό Μπιλιάρδο (Bunimovich Stadium)

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:BunimovichStadium.png>

-Κβαντικό Μπιλιάρδο (Sinai Billiard)

<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:SinaiBilliard.png>

-Χαρακτηριστική Κυματοσυνάρτηση Μπιλιάρδου (Image from Douglas Stone's website)

<http://www.aimath.org/news/que/typicalstadium.gif>

-Χαοτική Κυματοσυνάρτηση (Image from Arnd Baecker's website)

http://www.aimath.org/news/que/stadium_scarring.jpeg

Exploring Quantum, Classical and Semiclassical Chaos in the Stadium

Billiard, Chris King <http://www.dhushara.com/DarkHeart/QStad/QStad.htm>

-Κβαντικό Χαοτικό Φάσμα

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Qdfels.jpg>

-Κβαντικές Πύλες

Cnot, <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cnot-compared-to-xor.svg>

Cnot, <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cnotf.PNG>

-Συμβολικά διαγράμματα Κβαντικών Πυλών και Κβαντικών Κυκλωμάτων τα οποία αναπαρίστανται ακολουθώντας τις διεθνείς συνήθειες όσον αφορά τους συμβολισμούς μπορούν να αναζητηθούν στα: [Quantum Computation and Quantum Information, M.Nielsen and I. Chuang, Cambridge University Press, 2000], [An Introduction to Quantum Computing, Phillip Kaye, Raymond Laflamme, Michele Mosca, oxford university press, 2007],[Quantum information and computation, Lecture notes for Physics 229, J.Preskill, California Institute of Technology, 1998]

-Λογικές Πύλες

And, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:AND_ANSI.svg

Or, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:OR_ANSI.svg

Not, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NOT_ANSI.svg

Nand, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NAND_ANSI.svg

Nor, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NOR_ANSI.svg

Xor, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:XOR_ANSI.svg

-Κβαντικός Εναγκαλισμός (Entanglement)

Art by Jim Flora

<http://www.jimflora.com/fineartprints/entangled-couple.html>

Sculpture by Ruth Bloch

<https://picasaweb.google.com/106118540018705150389>

Entangled light By Lisa Zyga (physorg.com)

<http://cdn.physorg.com/newman/gfx/news/hires/2009/BECentangledlight.jpg>

Art by Brose Partington

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Entangled_front.JPG

Draws by Nick Harvey

<http://art-by-nick-harvey.blogspot.com/>

<http://quantumartandpoetry.blogspot.com/>

Artwork by Pamela Ott, "Entanglement", acrylic, 1999

<http://www.hottr6.com/ott/images/Entanglement.jpg>