ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΑΙ ΣΚΕΔΑΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΑ ΜΕΣΑ

Διδακτορική Διατριβή

υποβληθείσα στο
Τμήμα Χημικών Μηχανικών
του
Πανεπιστημίου Πατρών
Υπό

Αικατερίνη Στ. Καραδήμα

Για την Απόκτηση του Τίτλου της
Διδάκτορα του Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, Φεβρουάριος 2010

ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΑΙ ΣΚΕΔΑΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΑ ΜΕΣΑ

Υπό

Αικατερίνη Στ. Καραδήμα

Εργαστήριο Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τομέας Μηχανικής Διεργασιών & Περιβάλλοντος
Τμήμα Χημικών Μηχανικών
Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, Φεβρουάριος 2010

**ΔΙΑΔΟΣΗ ΚΑΙ ΣΚΕΔΑΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ
ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΑ ΜΕΣΑ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβληθείσα στο Τμήμα Χημικών Μηχανικών

του

Πανεπιστημίου Πατρών

Υπό

ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ Στ. ΚΑΡΑΔΗΜΑ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Γ. ΔΑΣΙΟΣ

Καθηγητής, Τμ. Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Πατρών (Πρόεδρος της εξεταστικής επιτροπής)

Β. ΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ

Καθηγητής, Τμ. Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών
Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Στ. ΠΑΥΛΟΥ

Καθηγητής, Τμ. Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Πατρών

Χρ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ

Καθηγητής, Τμ. Μαθηματικών, Εθνικό & Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κ. ΚΥΡΙΑΚΗ

Καθηγήτρια, Σχ. Εφαρμοσμένων Μαθηματικών &
Φυσικών Επιστημών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Δ. ΠΟΛΥΖΟΣ

Καθηγητής, Τμ. Μηχανολόγων & Αεροναυπηγών
Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ι. ΣΤΡΑΤΗΣ

Καθηγητής, Τμ. Μαθηματικών, Εθνικό & Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

σε όσους πιστεύουν σε εμένα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Από την πρώτη μέρα συμμετοχής μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Χημικών Μηχανικών έως σήμερα, που ολοκληρώνεται αυτή η προσπάθεια, έχει μεσολαβήσει αρκετά μεγαλύτερο διάστημα από αυτό που υπολόγιζα ή έστω φανταζόμουν αρχικά. Οι λόγοι ποικίλης φύσεως και σίγουρα δεν έχει νόημα να αναφερθούν εδώ. “Ζωή, άλλωστε, είναι αυτό που συμβαίνει, ενώ εμείς κάνουμε σχέδια για κάτι άλλο.” Πιστεύω ωστόσο πως κάθε γεγονός ή εμπειρία έχει να μας προσφέρει κάτι, να συμπληρώσει τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο ή να επιβάλλει αναθεωρήσεις της φιλοσοφίας που έχουμε αναπτύξει έως εκείνη τη στιγμή. Έτσι, παρόλο που πολλές φορές αυτό δε γίνεται αντιληπτό, όλα όσα μας συμβαίνουν έχουν μια εσωτερική συνέχεια και αυτή αποτελεί το συνδεδετικό κρίκο της όλης πορείας μας.

Επίσης, σε ένα τέτοιο διάστημα, θέλοντας και μη, έχουμε συναντήσει και ζυμωθεί με αρκετούς ανθρώπους. Κάποιοι από αυτούς μένουν, πολλοί έρχονται απλά και μόνο για να φύγουν, ενώ άλλων ο ρόλος που διαδραματίζουν στη ζωή μας εναλλάσσεται από ενεργός σε δεύτερος και το αντίστροφο. Όλοι, όμως,

συνεισφέρουν, συνειδητά ή μη, στη δική μας εξέλιξη και πολλές φορές λειτουργούν καθοριστικά στην πορεία που επιλέγουμε. Για το λόγο αυτό, παρακάτω θα προσπαθήσω να αναφέρω και να ευχαριστήσω αυτούς, που με επηρέασαν, λίγο ή πολύ, κατά τη διάρκεια αυτών των ετών, επισημαίνοντας πως αν κάποιος παραληφθεί αυτό δε θα έχει συμβεί εκ προθέσεως.

Η επιρροή του επιβλέποντα καθηγητή μου, κου Γεώργιου Δάσιου, ήταν εκ των πραγμάτων σημαντική και κάποιες φορές καθοριστική. Τον γνώρισα λίγους μήνες πριν τις τότε Πανελλαδικές Εξετάσεις και ο τρόπος που προσέγγιζε ακόμη και τα πιο καθημερινά πράγματα με συνεπήρε εξ αρχής. Ως καθηγητής κατά τα προπτυχιακά έτη και ως δάσκαλος ακολούθως, κατά τα μεταπτυχιακά έτη, μου έδειξε το δρόμο και με μύησε σε έναν τρόπο σκέψης που με κάνει να νιώθω περήφανη. Τον ευχαριστώ θερμά για την ευκαιρία που μου έδωσε να γνωρίσω τον κόσμο της μαθηματικής φυσικής. Οι συζητήσεις μαζί του, επιστημονικού ή μη περιεχομένου, ήταν πάντα απολαυστικές, με αποκορύφωμα τις διαλέξεις της Δευτέρας, οι οποίες είτε πρόσθεταν ένα ακόμη λιθαράκι στις γνώσεις μου είτε έδιναν μια διαφορετική και συνήθως πιο φρέσκια ματιά σε όσα είχα ήδη κατακτήσει. Εύχομαι τα χρόνια που θα ακολουθήσουν να λειτουργήσουν ως επιστέγασμα της έως τώρα συνεργασίας μας και να συμβάλλουν περαιτέρω στη διεύρυνση των επιστημονικών οριζόντων μου.

Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Σταύρο Παύλου, που ως μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου αλλά και ως καθηγητής κατά τις προπτυχιακές και μεταπτυχιακές σπουδές μου, συνέβαλε στην επέκταση του τρόπου αντίληψης μου, καθώς επίσης για τις σημαντικές παρατηρήσεις του.

Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Βασίλειο Κωστόπουλο, μέλος της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου, για τις υποδείξεις του και τη συνεργασία κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής αυτής.

Ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής μου, τον καθηγητή κ. Δημοσθένη Πολύζο, τον καθηγητή κ. Χριστόδουλο Αθανασιάδη, την

καθηγήτρια κα Κούλη Κυριάκη και τον καθηγητή κ. Ιωάννη Στρατή για τις εποικοδομητικές συνδιαλέξεις μαζί τους, καθώς είχα την τύχη να τους συναντώ και σε σημαντικά επιστημονικά συνέδρια.

Ευχαριστώ, επίσης, το Ερευνητικό Ινστιτούτο Χημικής Μηχανικής και Υψηλών Διεργασιών για τη οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε ως μεταπτυχιακή υπότροφό του.

Ευχαριστώ τους συνεργάτες, συναδέλφους μου και φίλους στο Εργαστήριο Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Παναγιώτη Βαφέα, Σοφία Γιαπαλάκη, Γρηγόρη Καμβύσα, Φωτεινή Καρυώτου, Σοφία Παπαδοπούλου και Δήμητρα Χατζηλοϊζή για τη συμπαράστασή, την υποστήριξή και τις πολύτιμες συμβουλές τους, αλλά κυρίως για τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο έκαναν πιο ευχάριστες τις ώρες στο εργαστήριο.

Ευχαριστώ θερμά τη φίλη Ελένη Μαρίνη για τη δακτυλογράφηση του μεγαλύτερου μέρους του κειμένου, την κατανόηση και την υπομονή που έδειξε διαβάζοντας τα χειρόγρατά μου και τη συμπαράσταση στις δύσκολες στιγμές λίγο πριν την ολοκλήρωση της διατριβής αυτής.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον αδερφό μου Δημήτρη. Η συμβολή του στην τελική μορφή αυτού του κειμένου ήταν καθοριστική, οι συμβουλές του καταλυτικής σημασίας, η συμπαράστασή του όλα αυτά τα χρόνια αμέριστη, η υπομονή και η κατανόησή του απεριόριστη.

Ευχαριστώ, τέλος, τους γονείς μου, Σταύρο και Ελένη, για όλα όσα έχω καταφέρει έως αυτή τη στιγμή, κυρίως όμως για τον ελεύθερο τρόπο σκέψης μου και τις αξίες στις οποίες πιστεύω και με καθοδηγούν έως τώρα καθώς και την αδερφή μου, Μαρία, για την παιδική και καθαρή ματιά που ξέρει να προσθέτει σε κάθε στιγμή.

Ευχαριστώ όσους μου δίνουν δύναμη, με στηρίζουν και με εμπνέουν!!

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η θεωρία σκέδασης καλύπτει ένα μεγάλο φάσμα επιστημονικών και τεχνολογικών εφαρμογών, όπως μη καταστρεπτικός έλεγχος, ραντάρ, σόναρ, γεωφυσική έρευνα, απομακρυσμένη καταγραφή, ιατρική απεικόνιση, υποθαλάσσια ακουστική, σεισμολογία, αναγνώριση βιολογικών προτύπων και ειδικές τεχνικές που εφαρμόζονται στη διαγνωστική ιατρική. Στις περισσότερες από τις παραπάνω περιπτώσεις η υπόθεση πως το υλικό είναι ισότροπο δεν αρκεί και προκειμένου τα αποτελέσματα να προσεγγίζουν ικανοποιητικά την πραγματικότητα, θα πρέπει να γίνει η παραδοχή πως ο χώρος είναι ανισότροπος, πως οι ιδιότητές του εξαρτώνται δηλαδή από τη διεύθυνση. Παρόλο που η ιδιότητα της ανισοτροπίας ήταν ήδη γνωστή από την εποχή του Green (μέσα 19^{ου} αιώνα), λόγω της αυξημένης μαθηματικής πολυπλοκότητας που παρουσιάζει, μόνο τα τελευταία χρόνια εμφανίζεται σημαντικός αριθμός δημοσιεύσεων που ασχολούνται με την ανισότροπη σκέδαση, οι οποίες στην πλειοψηφία τους αναφέρονται μόνο σε ανισότροπο σκεδαστή.

Η παρούσα διατριβή ερευνά το πρόβλημα ανισότροπης σκέδασης βαθμωτών πεδίων για τη γενική περίπτωση, όπου όχι μόνο ο σκεδαστής αλλά και ο χώρος σκέδασης είναι ανισότροποι χώροι και μάλιστα έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Όπως προκύπτει, τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου μέσου μεταφέρονται πλήρως από έναν τροποποιημένο τελεστή κλίσης, ο οποίος εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση ανισοτροπίας και μας επιτρέπει να βρούμε τη θεμελιώδη λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz. Δεδομένης της θεμελιώδους λύσης, τοποθετείται το βασικό πρόβλημα σκέδασης σε ανισότροπα μέσα όπως και οι συνθήκες διαπερατότητας καθώς και οι συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μορφή και οι ιδιότητες των προσπίπτοντων πεδίων και παράγονται τα συναρτησιακά ενέργειας για αυτό το πρόβλημα σκέδασης. Αναπτύσσονται οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για το σκεδαζόμενο, το ολικό και το εσωτερικό πεδίο, ενώ παράλληλα προκύπτει η τροποποιημένη συνθήκη ακτινοβολίας και με αυτό τον τρόπο ολοκληρώνεται η βασική θεωρία. Με ασυμπτωτική ανάλυση προκύπτει το ανισότροπο πλάτος σκέδασης και έπειτα ορίζονται οι ενεργειακές διατομές που αντιστοιχούν στην περίπτωση που εξετάζεται. Ακολούθως αποδεικνύονται τα θεωρήματα αμοιβαιότητας, το γενικευμένο και το οπτικό θεώρημα σκέδασης για τα ανισότροπα μέσα. Ως εφαρμογή παρουσιάζεται το πρόβλημα σκέδασης χαμηλών συχνοτήτων για έναν ανισότροπο διαπερατό σκεδαστή. Τέλος, όλο το πρόβλημα ανισότροπης σκέδασης ανάγεται στο αντίστοιχο του ισότροπου χώρου, προς επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων.

ABSTRACT

Scattering theory covers a large spectrum of scientific and technological applications such as non destructive control, radars, sonar, geophysical exploration, remote sensing, medical imaging, under-water acoustics, seismology, biological pattern recognition and special techniques in medical diagnostics. In most of the above cases the assumption that the material is isotropic is inadequate. Therefore, in order to conform to reality, we have to accept that the space is anisotropic, i.e., its properties depend on the direction. Although the anisotropic property was already known, since Green's era, only a few publications have appeared, due to the mathematical complexity related with the anisotropic property. It was during the last years that more references considered the anisotropic scattering, while most of them regarded only anisotropic scatterers.

The thesis examines the problem of scalar field anisotropic scattering for the general case, where not only the scatterer but also the propagation space are anisotropic and they do not have the same characteristics.

It comes out that the characteristics of an anisotropic medium are being fully carried by a modified gradient operator which appears in any case of anisotropy and allows the calculation of the fundamental solution for the modified Helmholtz' equation. Once the fundamental solution is known, the basic problem of anisotropic scattering is postulated as well as the transmission and the boundary conditions. Incident fields' forms and characteristics are being presented and the energy functional for this scattering problem is being produced. The integral representations for the scattered, total and internal field are also developed, while at the same time arises the modified radiation condition. Asymptotic analysis produces the anisotropic scattering amplitude and afterwards follows the definition of the energy functionals that correspond to our case. The reciprocity theorems, the general scattering, as well as the optical theorem for anisotropic medium are also proved. As an example, the theory developed in this thesis is applied to the low frequency problem for an anisotropic scatterer. Finally, the results are verified by reducing the whole problem of anisotropic scattering to its equivalent of isotropic space.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	1
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	4
ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ.....	5
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	13
1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΧΩΡΟΥ	19
1.1. Συνήθεις ιδιότητες μέσων κυματικής διάδοσης	19
1.2. Ανισότροπος τελεστής κλίσης	22
1.3. Κανονική μορφή δυαδικού ανισότροπου χώρου.....	28
2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΕΣΟ.....	33
2.1. Η εξίσωση Helmholtz σε ανισότροπο μέσο	35

2.2. Θεμελιώδης λύση τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz.....	37
2.2.1. Επαλήθευση της θεμελιώδους λύσης	41
3. ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΒΑΣΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΕΣΟ	49
3.1. Συνθήκες διαπερατότητας	51
3.2. Συνοριακές συνθήκες.....	53
3.3. Συνθήκη ακτινοβολίας	56
3.4. Προσπίπτοντα πεδία.....	57
3.4.1. Το «επίπεδο» κύμα στον ανισότροπο χώρο	57
3.4.2. Η σημειακή πηγή στον ανισότροπο χώρο	63
3.5. Τοποθέτηση βασικών προβλημάτων ανισότροπης σκέδασης	65
3.6. Συναρτησιακά ενέργειας	68
4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	71
4.1. Τροποποιημένη ταυτότητα Green.....	72
4.2. Εξωτερικές αναπαραστάσεις και συνθήκη ακτινοβολίας.....	73
4.3. Εσωτερική αναπαράσταση	79
4.4. Απομακρυσμένο πεδίο και πλάτος σκέδασης.....	82
4.5. Ενεργειακές διατομές	87
5. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ	97
5.1. Θεωρήματα αμοιβαιότητας.....	97
5.1.1. Θεώρημα αμοιβαιότητας για σημειακές πηγές.....	97
5.1.2. Θεώρημα αμοιβαιότητας για επίπεδα κύματα.....	103

5.2. Γενικευμένο θεώρημα σκέδασης	106
5.3. Οπτικό θεώρημα.....	112
6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	115
6.1. Χαμηλές συχνότητες	115
6.2. Αναγωγή στο ισότροπο μέσο	129
7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ.....	133
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	137
Συνοπτική περιγραφή δυαδικών	137
Συμμετρικά και θετικά ορισμένα δυαδικά	143
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	145

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1. Ιδιότητα ομοιογένειας χώρου.	20
Σχήμα 2. Ιδιότητα ισοτροπίας χώρου.	21
Σχήμα 3. Σύθεση των δύο ιδιοτήτων.	22
Σχήμα 4. Σφαίρα που περιβάλλει το σκεδαστή.	73
Σχήμα 5. Σφαίρα που περιέχεται στον σκεδαστή.	79
Σχήμα 6. Σημειακές πηγές στον εξωτερικό χώρο του σκεδαστή.	98
Σχήμα 7. Επίπεδα κύματα στον εξωτερικό χώρο του σκεδαστή.....	103

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$\cdot$	χρονική μερική παράγωγος
$*$	συζυγής
∇	κλίση – grad ισότροπου χώρου
∇_S	κλίση – grad σε χώρο που χαρακτηρίζεται από δυαδικό $\tilde{S}$
∇_V	κλίση μετασχηματισμένη κατά $\tilde{V}$
∇_A	ανισότροπος τελεστής Laplace
$\nabla_{\mathbf{R}}$	κλίση ως προς $\mathbf{R}$
$\nabla_{\mathbf{r}'}$	κλίση ως προς $\mathbf{r}'$

$\frac{\partial}{\partial x}$	μερική παράγωγος ως προς τη μεταβλητή που δηλώνει ο παρονομαστής του τελεστή
$\frac{\partial}{\partial t}$	μερική παράγωγος ως προς τον χρόνο
$\frac{\partial}{\partial n_A}$	τροποποιημένη διευθυνόμενη παράγωγος κάθετου $\hat{\mathbf{n}}$ προς τα έξω επιφάνειας S
∂_r	τελεστής ισότροπου χώρου μερικής παραγωγίσης ως προς r
∂_{r_A}	τελεστής ανισότροπου χώρου μερικής παραγωγίσης ως προς r
∂_r^A	τελεστής ανισότροπου χώρου μερικής παραγωγίσης ως προς r που ενσωματώνει και τον παράγοντα $a(\hat{\mathbf{r}})$
$\partial\Omega$	επιφάνεια του Ω
a	ακτίνα σφαίρας
$\hat{\mathbf{a}}$	τυχαία διεύθυνση
$a(\mathbf{k})$	μέτρο του διανύσματος $\mathbf{k}$ στον ανισότροπο χώρο
$a(\hat{\mathbf{k}})$	μέτρο του διανύσματος $\hat{\mathbf{k}}$ στον ανισότροπο χώρο
$a(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}$	μέτρο του διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$ στον ανισότροπο χώρο ή διαμέριση του μοναδιαίου διανύσματος
$a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	μέτρο του διανύσματος $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ στον ανισότροπο χώρο
$\mathbf{A}$	τυχαίος πίνακας μετασχηματισμού
A	φραγμένο υποσύνολο του V^+ που περιέχει όλες τις σημειακές πηγές
$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}_+$	δυναμικό εξωτερικού ανισότροπου χώρου

$\tilde{\mathbf{A}}_-$	δυναμικό ανισότροπου σκεδαστή
$\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$	αντίστροφο δυναμικό του $\tilde{\mathbf{A}}$
$B(\mathbf{0}, R)$	σφαίρα με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R
c	φασική ταχύτητα
$\mathbf{c}$	τυχαίο διάνυσμα
$\det \tilde{\mathbf{A}}$	ορίζουσα $\tilde{\mathbf{A}}$
$\tilde{\mathbf{D}}$	τυχαίο δυναμικό ή διαγωνοποιημένη μορφή δυναμικού $\tilde{\mathbf{S}}$
$\tilde{\mathbf{D}}^T$	ανάστροφο δυναμικό του $\tilde{\mathbf{D}}$
$\tilde{\mathbf{D}}^{(2)}$	δυναμικό αναλλοίωτο δυναμικού $\tilde{\mathbf{D}}$
e_{12}, e_{23}, e_{31}	κύριες εκκεντρότητες ελλειψοειδών κυματικών μετώπων σημειακής πηγής
E	τυχαία εξίσωση φυσικού προβλήματος
E'	νέα μορφή εξίσωσης E μετά από εφαρμογή παράλληλης μετατόπισης ή μετασχηματισμού
E_A	ελλειψοειδές που ορίζει το $\tilde{\mathbf{A}}$
E_V	ελλειψοειδές που ορίζει το $\tilde{\mathbf{V}}$
f	συνάρτηση μετασχηματισμού
$f_n^\pm(\mathbf{r})$	γνωστό μέρος του $u_n^\pm(\mathbf{r})$

$g(\hat{\mathbf{r}})$	πλάτος σκέδασης ισότροπου χώρου
$g_A(\mathbf{r})$	ανισότροπο πλάτος σκέδασης
$g_A(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}_a)$	ανισότροπο πλάτος σκέδασης για επίπεδο κύμα με διεύθυνση διάδοσης $\hat{\mathbf{k}}_a$
G_A	θεμελιώδης λύση ανισότροπης (τροποποιημένης) εξίσωσης Helmholtz στο V^+
G_A	θεμελιώδης λύση ανισότροπης (τροποποιημένης) εξίσωσης Helmholtz στο V^-
$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$	σημειακή πηγή ανισότροπου χώρου στη θέση $\mathbf{r}_0$
$h(ka(\hat{\mathbf{r}})r)$	ακτινική τροποποιημένη θεμελιώδης λύση σημειακής πηγής τοποθετημένης στην αρχή
$h(kr)$	ακτινική θεμελιώδης λύση σημειακής πηγής στην αρχή ισότροπου χώρου
$\mathbf{I}$	μοναδιαίος πίνακας
$\tilde{\mathbf{I}}$	μοναδιαίο δυαδικό
$\mathbf{I}(\mathbf{r}, t)$	διανυσματική συνάρτηση ροής ισχύος
$\mathbf{I}^i$	ακουστική πυκνότητα επίπεδου κύματος
$\text{Im}\{ \}$	φανταστικό μέρος
J	jacobian μετασχηματισμού
k	κυματικός αριθμός / σταθερά διάδοσης
$\hat{\mathbf{k}}_a$	διεύθυνση διάδοσης του επίπεδου κύματος του ανισότροπου χώρου

k_A	κυματικό διάνυσμα στον ανισότροπο χώρο
$\hat{\mathbf{k}}_A$	μοναδιαίο κυματικό διάνυσμα στον ανισότροπο χώρο
$\phi_i, i=1,2,3$	σφαιρικές συντεταγμένες
$\tilde{\mathbf{P}}$	μετασχηματισμός ομοιότητας που διαγωνοποιεί δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ ή δυαδικό ανισότροπου χώρου
$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$	διάνυσμα θέσης
$\mathbf{r}'$	διάνυσμα σημείου παρατήρησης
$\mathbf{r}_A$	διάνυσμα θέσης στον ανισότροπο χώρο
$\mathbf{r}_S = (x_{s_1}, x_{s_2}, x_{s_3})$	διάνυσμα θέσης μετασχηματισμένο κατά $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$
$\mathbf{r}_V$	διάνυσμα θέσης μετασχηματισμένο κατά $\tilde{\mathbf{V}}^{-1}$
$\text{Re}\{ \}$	πραγματικό μέρος
$\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_3$	κύριες κανονικοποιημένες διευθύνσεις υλικού που χαρακτηρίζεται από δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$
$s_i = \mathbf{s}_i , i=1,2,3$	μέτρο κύριων διευθύνσεων υλικού που χαρακτηρίζεται από δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$
$\tilde{\mathbf{S}}$	δυαδικό του $\mathbf{R}^3$ ή συμμετρικό δυαδικό
S^2	επιφάνεια μοναδιαίας σφαίρας
$S = \partial V^-$	σύνορο επιφάνειας σκεδαστή
$S_{ij}, i=1,2,3, j=1,2,3$	στοιχεία του πίνακα του δυαδικού $\tilde{\mathbf{S}}$

S_ε	σφαίρα ακτίνας ε
S_R	επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R
S_C	κυματικά μέτωπα σημειακής πηγής
$u(\mathbf{r})$	χωρική εξάρτηση πεδίου υπερπίεσης ακουστικού κύματος / σκεδασμένο πεδίο
$u^+(\mathbf{r})$	ολικό εξωτερικό πεδίο
$u^i(\mathbf{r})$	επίπεδο κύμα στον ανισότροπο χώρο
$\{u_n^\pm(\mathbf{r})\}$	ακολουθία προσέγγισης χαμηλών συχνοτήτων του $u^\pm(\mathbf{r})$
$\dot{U}(\mathbf{r}, t)$	πεδίο υπερπίεσης ακουστικού κύματος
ν	παράμετρος Robin
$\mathbf{v}(\mathbf{r})$	χωρική εξάρτηση ταχύτητα διάδοσης ακουστικού κύματος
$\mathbf{v}_A(\mathbf{r})$	χωρική εξάρτηση διανύσματος ταχύτητας ανισότροπου χώρου
$\tilde{V}$	τετραγωνική ρίζα του $\tilde{\mathbf{A}}$
$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$	ταχύτητα διάδοσης ακουστικού κύματος
V^-	σκεδαστής
$\tilde{\mathbf{V}}^{-1}$	αντίστροφο δυαδικό του $\tilde{\mathbf{V}}$
$V^+ = (V^- \cup S)^c$	εξωτερικός χώρος

$\mathbf{V}_A(\mathbf{r}, t)$	διάνυσμα ταχύτητας στον ανισότροπο χώρο
$v_i, i = 1, 2, 3$	ιδιοτιμές $\tilde{\mathbf{V}}$
W_A	συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας
x	ημίτονο γωνίας ύψους
$\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$	μοναδιαία διανύσματα καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (ισότροπου τρισδιάστατου χώρου)
$x_i, i = 1, 2, 3$	συντεταγμένες διανύσματος $\mathbf{r}$ στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων
$\hat{\mathbf{x}}_i, i = 1, 2, 3$	ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\tilde{\mathbf{A}} / \tilde{\mathbf{V}}$
$\hat{\mathbf{x}}_{S_1}, \hat{\mathbf{x}}_{S_2}, \hat{\mathbf{x}}_{S_3}$	μοναδιαία διανύσματα μετασχηματισμένου κατά $\tilde{\mathbf{S}}$ συστήματος συντεταγμένων
Z	ακουστική εμπέδηση
β	αδιάστατη σταθερά
γ	μέση συμπίεστικότητα
$\gamma_i, i = 1, 2, 3$	ημιάξονες ελλειψοειδών κυματικών μετώπων σημειακής πηγής
δ	ιξώδες συμπίεσης
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$	συναρτησιακό Dirac στη θέση $\mathbf{r}_0$
ε	ακτίνα σφαίρας
η	σχετικός δείκτης διάθλασης

$\lambda_i, i = 1, 2, 3$	ιδιοτιμές $\tilde{\mathbf{A}}$
ρ	μέση πυκνότητα μάζας
$\sigma(\hat{\mathbf{r}})$	διαφορική ενεργειακή διατομή σκέδασης
σ_a	ενεργειακή διατομή απορρόφησης
σ_a^D	ενεργειακή διατομή για μαλακό σκεδαστή
σ_a^P	ενεργειακή διατομή για σκληρό σκεδαστή
σ_a^R	ενεργειακή διατομή για ανθεκτικό σκεδαστή
σ_a^{BC}	ενεργειακή διατομή για διαπερατό σκεδαστή
σ_ε	ενεργειακή διατομή εξαφάνισης
σ_S	ολική ενεργειακή διατομή σκέδασης
φ	αζιμουθιακή γωνία
ω	γωνιακή/κυκλική συχνότητα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα κυματικής που συναντά κανείς, αφορούν κάποια από τις μεγάλες περιοχές της ακουστικής, του ηλεκτρομαγνητισμού και της ελαστικότητας και διακρίνονται σε προβλήματα διάδοσης, προβλήματα ακτινοβολίας και προβλήματα σκέδασης.

Η πρώτη κατηγορία ασχολείται με τη μελέτη του είδους και της μορφής των κυμάτων που διαδίδονται σε ένα μέσο (χώρο διάδοσης) και πως αυτά μπορούν να καθοριστούν από τις ιδιότητες του χώρου διάδοσης. Στην περίπτωση αυτή η πηγή των κυμάτων δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης, σε αντιδιαστολή με τη δεύτερη κατηγορία προβλημάτων, όπου εκεί μελετάται η συμπεριφορά και η μορφή των κυμάτων που παράγονται από μια συγκεκριμένη πηγή. Τα προβλήματα σκέδασης είναι πιο σύνθετα καθώς το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται όταν μέσα στο χώρο διάδοσης ενός γνωστού κυματικού πεδίου (προσπίπτον κύμα) υπάρχει ένα «εμπόδιο» (χωρική ασυνέχεια ή μεταβολή στις φυσικές παραμέτρους του χώρου), ο σκεδαστής, η ύπαρξη του οποίου οδηγεί στη δημιουργία ενός ακόμη πεδίου, του σκεδασμένου πεδίου και στην εκτροπή μέρους της ενέργειας του αρχικού κύματος.

Ως αποτέλεσμα, το σκεδασμένο πεδίο μεταφέρει τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή, σε αντίθεση με το προσπίπτον πεδίο που μεταφέρει μόνο τα χαρακτηριστικά της πηγής από την οποία προέρχεται.

Ένα πρόβλημα σκέδασης χαρακτηρίζεται ως ευθύ πρόβλημα σκέδασης όταν είναι γνωστή η επιφάνεια και τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή και αναζητείται το σκεδασμένο πεδίο και ως αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης όταν γνωρίζουμε τη μορφή του σκεδασμένου πεδίου και ζητάμε να προσδιορίσουμε το γεωμετρικό σχήμα και τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, ενώ και στους δύο τύπους προβλημάτων το προσπίπτον πεδίο είναι γνωστό.

Από το 1870, όπου για πρώτη φορά εμφανίστηκε η θεωρία σκέδασης σε μια θεμελιώδη δημοσίευση του Rayleigh, το συντριπτικά μεγαλύτερο μέρος της σχετικής βιβλιογραφίας αναφέρεται σε υλικά των οποίων οι ιδιότητες είναι ανεξάρτητες του προσανατολισμού, δηλαδή σε ισότροπα υλικά. Τα τελευταία μόνο χρόνια εμφανίζονται αναφορές και σε υλικά των οποίων οι ιδιότητες δεν παραμένουν αναλλοίωτες υπό τη δράση μετασχηματισμών στροφής, δηλαδή σε ανισότροπα υλικά.

Παρόλα αυτά η ιδιότητα της ανισοτροπίας ήταν γνωστή αρκετά χρόνια πριν και μάλιστα αναφέρθηκε για πρώτη φορά το 1839 από τον Green [20], στην εργασία του για τη διάδοση επίπεδων κυμάτων σε κρυστάλλους. Η έννοια του ανισότροπου μέσου γίνεται όμως περισσότερο γνωστή μόλις το 1904, μέσα από τις διαλέξεις του Kelvin [22], [23], ο οποίος μάλιστα ονόμαζε τότε τα ανισότροπα υλικά ως αιολότροπα και την ιδιότητα της ανισοτροπίας ως αιολοτροπία, βασιζόμενος στην ελληνική λέξη αίολος, ως κάτι που ποικίλλει ως προς το σχήμα, το χρώμα και την κίνηση. Στις διαλέξεις αυτές ο Kelvin εμβαθύνει και τεκμηριώνει τη θεωρία του Green που αφορούσε τους 21-συντελεστές ενός στερεού, ενώ το 1957 ο Synge [36] παρουσιάζει εκ νέου τα αποτελέσματα αυτά χρησιμοποιώντας τελεστές. Δηλαδή, παρόλο που οι ιδιότητες του ανισότροπου χώρου ήταν γνωστές από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, οι επιδράσεις της ανισοτροπίας σε γνωστά υλικά θεωρήθηκαν αμελητέες και μόνο μετά το 2^ο Παγκόσμιο Πόλεμο δόθηκε σε αυτή περισσότερη

σημασία, κάτι που σχετίζεται άμεσα με το ότι εκείνη την περίοδο αναπτύχθηκαν συγκεκριμένες τεχνικές και επεκτάθηκαν επιστημονικές θεωρίες, στις οποίες η ιδιότητα της ανισοτροπίας έπαιζε πλέον σημαντικό ρόλο.

Η βιβλιογραφία που ακολούθησε τα επόμενα χρόνια αλλά έως και σήμερα αφορά κατά το μεγαλύτερο μέρος την κυματική διάδοση σε ανισότροπα μέσα ([5]-[7], [9], [10], [16], [21], [30]-[34] και [37]) ενώ οι δημοσιεύσεις που σχετίζονται με σκέδαση σε ανισότροπα μέσα ([8] και [11]) τις περισσότερες φορές περιορίζουν την ιδιότητα της ανισοτροπίας στον σκεδαστή. Αυτό ίσως οφείλεται στο γεγονός πως η μεθοδολογία και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση των ισότροπων υλικών δεν έχουν ακόμη αναπτυχθεί στον ίδιο βαθμό και για τα ανισότροπα υλικά, καθώς, παρόλο που η ανισοτροπία ως ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές ερευνητικές περιοχές (π.χ. μη καταστρεπτικός έλεγχος και ιατρική απεικόνιση), είναι όμως παράλληλα ιδιαίτερα απαιτητική από μαθηματική σκοπιά. Το κενό αυτό καλύπτουν κατά ένα μέρος εργασίες των τελευταίων ετών ([14], [15], [24], [26]-[28] και [35]), στις οποίες είτε μελετώνται τα αποτελέσματα την ανισοτροπίας στον τελεστή κλίσης και επεκτείνονται βασικά θεωρήματα (θεώρημα αποσύνθεσης Helmholtz) ([14], [15] και [26]) ή τεχνικές [27] σκέδασης, είτε παρουσιάζονται αναλυτικά εργαλεία (π.χ. θεμελιώδεις λύσεις) [24], [28], [35] για τον ανισότροπο χώρο.

Ωστόσο, παραμένει ενδιαφέρον να εξετάσει κανείς τι συμβαίνει όταν και ο εξωτερικός χώρος (μέσο διάδοσης) είναι ανισότροπος και μάλιστα στη γενικότερη περίπτωση, όπου τα ανισότροπα χαρακτηριστικά του εξωτερικού χώρου δε συμπίπτουν με αυτά του ανισότροπου σκεδαστή [12].

Η παρούσα διατριβή αποτελεί μια προσπάθεια να γίνει κατανοητό τι συμβαίνει όταν όχι μόνο ο σκεδαστής αλλά επίσης και το μέσο διάδοσης (εξωτερικός χώρος) είναι ανισότροπο και μάλιστα όταν τα χαρακτηριστικά των δύο ανισότροπων μέσων δε συμπίπτουν. Επίσης ασχολείται με βαθμωτά πεδία, καθώς αυτά αποτελούν εν γένει το πρώτο βήμα στην κατανόηση και διερεύνηση μη οικείων ιδιοτήτων. Η θεώρηση βαθμωτού πεδίου δεν περιορίζει την αξία της εξαγόμενης θεωρίας καθώς

πολλά προβλήματα που αφορούν σε διανυσματικά πεδία καταλήγουν σε προβλήματα βαθμωτών πεδίων ([10] και [11]). Έτσι γίνεται αρχικά παρουσίαση των ιδιοτήτων του ανισότροπου χώρου προκειμένου να οριοθετηθεί η περιοχή με την οποία ασχολείται η διατριβή αυτή και να γίνουν κατανοητές οι ιδιαιτερότητές του. Η γενική θεωρία βαθμωτής ανισότροπης σκέδασης βασίζεται ουσιαστικά στην εισαγωγή του τροποποιημένου τελεστή κλίσης, ο οποίος ενσωματώνει την συμπεριφορά του μέσου ως προς τις διευθύνσεις του χώρου και επιτρέπει την εύρεση της θεμελιώδους λύσης για την ανισότροπη εξίσωση Helmholtz ([28] και [35]). Η επαλήθευση πως η θεμελιώδης λύση ικανοποιεί πράγματι την τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz, μας επιτρέπει να μελετήσουμε περαιτέρω τις ιδιότητές της. Επιπρόσθετα προκύπτει πως ο χειρισμός των ιδιομορφιών γίνεται με αντίστοιχο τρόπο, με αυτόν που χρησιμοποιείται σε προβλήματα ισότροπου χώρου. Στη συνέχεια ερμηνεύονται οι βασικές εξισώσεις της ακουστικής για ένα ανισότροπο υλικό και με επεξεργασία αυτών καταλήγουμε στη μορφή που λαμβάνει η εξίσωση Helmholtz σε τέτοια υλικά.

Στο κυρίως μέρος γίνεται η μαθηματική τοποθέτηση του γενικού προβλήματος σκέδασης βαθμωτών πεδίων σε ανισότροπα μέσα, όπου ο σκεδαστής και ο εξωτερικός χώρος χαρακτηρίζονται από δύο διαφορετικά δυαδικά, έχουν δηλαδή διαφορετικά χαρακτηριστικά ανισοτροπίας. Παρουσιάζεται και διευκρινίζεται επίσης πως προκύπτει η μορφή που παίρνουν πλέον οι συνθήκες διαπερατότητας, όπως και οι συνοριακές συνθήκες για μαλακό, σκληρό και ανθεκτικό σκεδαστή. Τα προσπίπτοντα πεδία στην περίπτωση των ανισότροπων μέσων παρουσιάζονται στη συνέχεια. Το επίπεδο κύμα, με τη μορφή που το γνωρίζουμε, δεν μπορεί να παραμένει επίπεδο σε έναν ανισότροπο χώρο. Για τον λόγο αυτό βρίσκουμε τη μορφή που πρέπει να έχει ένα κύμα, έτσι ώστε οι επιφάνειες σταθερής φάσης του να είναι επίπεδα. Επιπρόσθετα, οι σημειακές πηγές διαδίδονται στο χώρο όχι ως σφαίρες αλλά ως όμοια ελλειψοειδή, ελλειψοειδή δηλαδή που διατηρούν τις κύριες εκκεντρότητες, παρατήρηση η οποία βρίσκεται σε αντιστοιχία με τον ανισότροπο χαρακτήρα του μέσου διάδοσης.

Χρησιμοποιώντας τα προαναφερθέντα τοποθετούνται, προς χάριν πληρότητας, τα τέσσερα βασικά προβλήματα σκέδασης, δηλαδή τα προβλήματα Dirichlet, Neumann και Robin αλλά και το πρόβλημα διαπερατότητας. Ο νόμος διατήρησης της ενέργειας παρουσιάζεται ακολούθως και αναλύονται τα συναρτησιακά ενέργειας που αντιστοιχούν στο πρόβλημα του ανισότροπου χώρου, τα οποία απορρέουν από το νόμο διατήρησης της ενέργειας. Από την μορφή των συναρτησιακών ενέργειας προκύπτει πως διαφοροποίηση εμφανίζεται μόνο στη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας και μάλιστα στον όρο της κινητικής ενέργειας, καθώς είναι ο μόνος που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του μέσου.

Στο επόμενο κεφάλαιο παράγονται οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για το σκεδασμένο, το ολικό εξωτερικό όπως και για το εσωτερικό πεδίο, κάνοντας χρήση της τροποποιημένης έκδοσης του 2^{ου} ολοκληρωτικού θεωρήματος Green, η οποία παρουσιάζεται εδώ και απαιτείται προκειμένου να ενσωματωθούν τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου χώρου.

Από την παραγωγή των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων προκύπτει επιπλέον πως για τέτοια μέσα ακόμη και ο χειρισμός των ιδιομορφιών εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου μέσου. Ακριβέστερα, η απομόνωση μιας ιδιομορφίας γίνεται πλέον με τη χρήση ενός ελλειψοειδούς, του οποίου τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά εξαρτώνται από το μέσο αυτό και το οποίο μικραίνει, ενώ είναι τοποθετημένο στο κέντρο. Δηλαδή, η σφαίρα του ισότροπου χώρου αντικαθίσταται από ένα ελλειψοειδές στον ανισότροπο χώρο.

Ακόμη, μέσα από την ολοκληρωτική αναπαράσταση του σκεδασμένου πεδίου προκύπτει η τροποποιημένη συνθήκη ακτινοβολίας που πρέπει να ικανοποιείται στο άπειρο. Η συνθήκη αυτή, όπως είναι αναμενόμενο, εξαρτάται επίσης από τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου χώρου, ενώ με αυτή συμπληρώνεται πλέον το πρόβλημα της ανισότροπης σκέδασης που αρχικά διατυπώθηκε.

Με χειρισμούς ασυμπτωτικής ανάλυσης υπολογίζεται η μορφή του απομακρυσμένου πεδίου για ανισότροπο μέσο όπως και η ολοκληρωτική

αναπαράσταση του ανισότροπου πλάτους σκέδασης, το οποίο εξαρτάται πλέον όχι μόνο από τη θέση παρατήρησης αλλά και από τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου μέσου, όπως αυτά επιβάλλονται από το δυαδικό που περιγράφει το χώρο. Στη συνέχεια, κάνοντας χρήση όλων των παραπάνω αποτελεσμάτων παράγονται η διαφορική διατομή σκέδασης, η ολική ενεργειακή διατομή, η συνολική απορρόφηση και η ενεργειακή διατομή εξαφάνισης, ενώ μελετώνται οι μεταξύ τους συνδέσεις.

Προκειμένου να ολοκληρωθεί η βασική θεωρία ανισότροπης σκέδασης βαθμωτών πεδίων διατυπώνονται και αποδεικνύονται τα βασικά θεωρήματα σκέδασης. Όπως προκύπτει το θεώρημα αμοιβαιότητας ισχύει τόσο για σημειακές πηγές όσο και για επίπεδα κύματα που διαδίδονται σε ανισότροπο μέσο, ενώ παράγεται η μορφή του γενικευμένου θεωρήματος σκέδασης σε ένα τέτοιο μέσο και διερευνώνται οι μορφές που αυτό παίρνει για τους τέσσερις βασικούς τύπους σκεδαστών. Από το τελευταίο θεώρημα οδηγούμαστε στο οπτικό θεώρημα για ανισότροπα μέσα και βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει το ανισότροπο πλάτος σκέδασης στην διεύθυνση πρόσπτωσης ενός επιπέδου κύματος με την ολική σκεδαζόμενη ενέργεια για μαλακούς, σκληρούς και διαπερατούς, χωρίς απώλειες ενέργειας, σκεδαστές.

Τέλος, ως εφαρμογή των αποτελεσμάτων που έως τώρα περιγράφηκαν αναπτύσσεται το πρόβλημα χαμηλών συχνοτήτων για έναν ανισότροπο διαπερατό σκεδαστή που βρίσκεται σε ισότροπο χώρο διάδοσης και παρουσιάζονται τα προς λύση προβλήματα συνοριακών τιμών για την εύρεση των πρώτων όρων της προσέγγισης της λύσης.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με την αναγωγή όλων των νέων αποτελεσμάτων στα αντίστοιχα και ήδη γνωστά αποτελέσματα του ισότροπου χώρου ως ειδική περίπτωση, όπου το δυαδικό που ενσωματώνει τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου χώρου αντικαθίσταται από το ταυτοτικό δυαδικό, που περιγράφει ένα ισότροπο μέσο.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟΥ ΧΩΡΟΥ

1.1. Συνήθεις ιδιότητες μέσων κυματικής διάδοσης

Τα περισσότερα προβλήματα διάδοσης κυματικών πεδίων προϋποθέτουν πως το μέσο διάδοσης του κύματος είναι γραμμικό, ομογενές και ισότροπο:

Κατ' αρχήν γραμμικό, διότι οι ίδιες οι εξισώσεις που περιγράφουν τα φυσικά προβλήματα είναι γραμμικές (χρησιμοποιούνται δηλαδή γραμμικοί τελεστές).

Η προϋπόθεση της ομοιογένειας εξασφαλίζει πως οι φυσικές ιδιότητες του μέσου είναι ίδιες σε κάθε σημείο (φυσική ερμηνεία). Από μαθηματική άποψη αυτό σημαίνει πως οι εξισώσεις που περιγράφουν τα φυσικά προβλήματα είναι αναλλοίωτες σε παράλληλη μετατόπιση, δηλαδή, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1, αν ένα διάνυσμα $\mathbf{r}$ μετατοπιστεί κατά $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{c}, \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

και η εξίσωση E γράφεται E' μετά τη μετατόπιση:

$$E \rightarrow E', \quad (1.2)$$

τότε θα είναι:

$$E \equiv E'. \quad (1.3)$$

Σχήμα 1. Ιδιότητα ομοιογένειας χώρου.

Τέλος, με την απαίτηση του ισότροπου μέσου εξασφαλίζεται πως οι φυσικές ιδιότητες του μέσου είναι ανεξάρτητες της διεύθυνσης κίνησής του (φυσική ερμηνεία), δηλαδή δεν αλλάζουν κατά διεύθυνση. Από μαθηματική σκοπιά απαιτούμε ουσιαστικά από τις εξισώσεις του προβλήματος να παραμείνουν αναλλοίωτες σε κάθε μετασχηματισμό στροφής, δηλαδή, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2, αν ένα διάνυσμα $\mathbf{r}$ μετασχηματισθεί από τον πίνακα $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r} \quad (1.4)$$

και η εξίσωση E γράφεται E' μετά το μετασχηματισμό:

$$E \rightarrow E', \quad (1.5)$$

τότε θα ισχύει:

$$E \equiv E' . \quad (1.6)$$

Σχήμα 2. Ιδιότητα ισοτροπίας χώρου.

Συνεπώς, ένα μέσο που κατέχει και τις δύο τελευταίες ιδιότητες, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3, διατηρεί τις εξισώσεις αναλλοίωτες στην ομάδα των μεταφορών (ιδιότητα της ομοιογένειας) και στην ομάδα των στροφών (ιδιότητα της ισοτροπίας).

Στο σημείο αυτό, σημειώνεται πως η ιδιότητα της ισοτροπίας είναι πιο απαιτητική από αυτή της ομοιογένειας, γιατί απαιτείται να μη μεταβάλλονται οι εξισώσεις κατά διεύθυνση. Στην περίπτωση δηλαδή της ομοιογένειας, αναφερόμαστε σε διαφορετικά σημεία του χώρου (ακόμα και στην ίδια διάσταση) που διατηρούν τις ίδιες ιδιότητες, ενώ στην περίπτωση της ισοτροπίας, αναφερόμαστε μεν στο ίδιο σημείο αλλά για όλες δε τις διευθύνσεις με τις οποίες μπορούμε να το προσεγγίσουμε και οι οποίες διατηρούν τις ιδιότητες του χώρου.

Για το λόγο αυτό η ιδιότητα της ομοιογένειας μπορεί να υφίσταται και σε ένα μονοδιάστατο χώρο, σε αντίθεση με αυτήν της ισοτροπίας, που απαιτεί χώρο τουλάχιστον δύο διαστάσεων.

Πρακτικά, μια φυσική παράμετρος που χαρακτηρίζει το προς επίλυση πρόβλημα και έχει και τις δύο αυτές ιδιότητες είναι ανεξάρτητη της θέσης (λόγω της ιδιότητας της

ομοιογένειας) και πολλαπλάσιο του μοναδιαίου δυαδικού –και όχι ένα πλήρες δυαδικό (βλ. Παράρτημα)– (λόγω της ιδιότητας της ισοτροπίας).

Σχήμα 3. Σύνθεση των δύο ιδιοτήτων.

Τα παραπάνω θα γίνουν καλύτερα κατανοητά στη συνέχεια, μελετώντας τον ανισότροπο χώρο και τις ιδιότητές του.

1.2. Ανισότροπος τελεστής κλίσης

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά του ισότροπου χώρου και τι αλλάζει όταν ο χώρος χάσει αυτή την ιδιότητα; Και κατ' επέκταση, πώς αντανακλάται αυτό στο πιο κοινό μαθηματικό εργαλείο, στην κλίση; Τα ερωτήματα αυτά θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε παρακάτω.

Το χαρακτηριστικό του ισότροπου τρισδιάστατου χώρου είναι πως οι τρεις κύριες διευθύνσεις έχουν την ίδια βαρύτητα (δεν υπάρχει «προτίμηση» σε κάποια διεύθυνση). Ως εκ τούτου, η κλίση γράφεται:

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (1.7)$$

όπου παρατηρούμε πως και οι τρεις άξονες έχουν την ίδια βαρύτητα, 1.

Αν αλλάξουμε σημείο αναφοράς, η κλίση εξακολουθεί να έχει αυτούς του τρεις όρους, γιατί οι άξονες παραμένουν αναλλοίωτοι (ένα σύστημα με αυτές τις ιδιότητες είναι το γνωστό μας καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων).

Εάν σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τρεις βαρύτητες¹ έχουν διαφορετικές τιμές (εμφανίζονται δηλαδή προτιμητέες διευθύνσεις), όπως στον ανισότροπο χώρο, τότε, αλλάζοντας σημείο αναφοράς οι όροι γίνονται πλέον 9 (αν είναι ίσες, θα είναι και σε οποιοδήποτε σημείο αναφοράς). Δηλαδή, μια στροφή εισάγει τη μεταβολή των διευθύνσεων σε νέες διευθύνσεις με άλλη βαρύτητα. Αυτό γίνεται αντιληπτό με ανάλυση των αρχικών αξόνων στους νέους, όπου ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι πλήρης, διότι περιέχει 9 στοιχεία, όπως θα αποδειχτεί παρακάτω.

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{r}$ με συντεταγμένες:

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) = (\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_1 + (\hat{\mathbf{x}}_2 \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_2 + (\hat{\mathbf{x}}_3 \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (1.8)$$

στο σύστημα συντεταγμένων $[\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3]$ και το νέο σύστημα συντεταγμένων $[\hat{\mathbf{x}}_{S_1}, \hat{\mathbf{x}}_{S_2}, \hat{\mathbf{x}}_{S_3}]$ που προκύπτει μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού (βάθμωση και στροφή) $\tilde{\mathbf{S}}$ στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων (βλ. Παράρτημα). Τότε θα είναι:

$$\mathbf{r}_s = (x_{S_1}, x_{S_2}, x_{S_3}) \quad (1.9)$$

το μετασχηματισμένο $\mathbf{r}$ στο νέο σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή:

$$\mathbf{r}_s = (\hat{x}_{S_1} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_{S_1} + (\hat{x}_{S_2} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_{S_2} + (\hat{x}_{S_3} \cdot \mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_{S_3}. \quad (1.10)$$

Το αρχικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται ως προς το νέο:

¹ Στο σημείο αυτό σημειώνουμε πως οι βαρύτητες είναι χαρακτηριστικά του χώρου (του πεδίου ορισμού) και σε καμία περίπτωση δεν αφορούν το ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης σε διάφορες διευθύνσεις, κάτι που το δίνει η ίδια η συνάρτηση (πεδίο τιμών).

$$\hat{\mathbf{x}}_i = s_{i1}\hat{\mathbf{x}}_{s_1} + s_{i2}\hat{\mathbf{x}}_{s_2} + s_{i3}\hat{\mathbf{x}}_{s_3}, \quad (1.11)$$

με $s_{ij} = \hat{\mathbf{x}}_{s_j} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \mathbf{r} \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \cdot \mathbf{r} \\ \hat{\mathbf{x}}_3 \cdot \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_{11}\hat{\mathbf{x}}_{s_1} + s_{12}\hat{\mathbf{x}}_{s_2} + s_{13}\hat{\mathbf{x}}_{s_3}) \cdot \mathbf{r} \\ (s_{21}\hat{\mathbf{x}}_{s_1} + s_{22}\hat{\mathbf{x}}_{s_2} + s_{23}\hat{\mathbf{x}}_{s_3}) \cdot \mathbf{r} \\ (s_{31}\hat{\mathbf{x}}_{s_1} + s_{32}\hat{\mathbf{x}}_{s_2} + s_{33}\hat{\mathbf{x}}_{s_3}) \cdot \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_{11}\hat{\mathbf{x}}_{s_1} \cdot \hat{\mathbf{r}} + s_{12}\hat{\mathbf{x}}_{s_2} \cdot \hat{\mathbf{r}} + s_{13}\hat{\mathbf{x}}_{s_3} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ s_{21}\hat{\mathbf{x}}_{s_1} \cdot \hat{\mathbf{r}} + s_{22}\hat{\mathbf{x}}_{s_2} \cdot \hat{\mathbf{r}} + s_{23}\hat{\mathbf{x}}_{s_3} \cdot \hat{\mathbf{r}} \\ s_{31}\hat{\mathbf{x}}_{s_1} \cdot \hat{\mathbf{r}} + s_{32}\hat{\mathbf{x}}_{s_2} \cdot \hat{\mathbf{r}} + s_{33}\hat{\mathbf{x}}_{s_3} \cdot \hat{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}x_{s_1} + s_{12}x_{s_2} + s_{13}x_{s_3} \\ s_{21}x_{s_1} + s_{22}x_{s_2} + s_{23}x_{s_3} \\ s_{31}x_{s_1} + s_{32}x_{s_2} + s_{33}x_{s_3} \end{bmatrix} \quad (1.12) \\ &= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ x_{s_2} \\ x_{s_3} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{r}_s \end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{S}}$ είναι ο πίνακας που εκφράζει το μετασχηματισμό, δηλαδή ο πίνακας αλλαγής βάσης, καθώς περιέχει την ανάλυση των αρχικών αξόνων στους νέους. Ο πίνακας αυτός περιέχει εν γένει στροφή και βάρθρωση, διότι είναι πλήρης (περιέχει δηλαδή εννέα στοιχεία) και εκφράζει τη μεταβολή στις νέες κατευθύνσεις (που έχουν πλέον άλλη βαρύτητα), όπου προκειμένου να εξασφαλίσουμε την πληρότητα του δυαδικού, απαιτούμε παρακάτω αυτό να είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο (βλ. Παράρτημα).

Στην περίπτωση του ισότροπου χώρου η κλίση (grad), ∇ , μεταφέρει τα χαρακτηριστικά του χώρου αυτού, καθώς η παραγωγή έχει το ίδιο «βάρος» σε κάθε διεύθυνση, δηλαδή οι συντελεστές των μερικών παραγώγων $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ είναι ίσοι μεταξύ τους και μάλιστα ίσοι με 1 για το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (ο τελεστής παραμένει αναλλοίωτος στις στροφές και δεν οδηγεί σε βάρθρωση).

Όμως, όπως κανείς περιμένει, η τελευταία ιδιότητα δεν ισχύει και στην περίπτωση του ανισότροπου χώρου, καθώς τώρα η κάθε διεύθυνση έχει τα δικά της χαρακτηριστικά. Αναλυτικότερα έχουμε:

Η μερική παράγωγος ως προς κάθε ένα από τους νέους άξονες γράφεται ως προς τις μερικές παραγώγους ως προς τους αρχικούς άξονες:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_{s_i}} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{s_i}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{s_i}} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x_{s_i}} \\ &= s_{1i} \frac{\partial}{\partial x_1} + s_{2i} \frac{\partial}{\partial x_2} + s_{3i} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{1.13}$$

όπως προκύπτει από τη σχέση (1.12), ή διαφορετικά:

$$\frac{\partial}{\partial x_{s_i}} = (s_{1i}, s_{2i}, s_{3i}) \cdot \nabla, \quad i = 1, 2, 3\tag{1.14}$$

και τελικά το grad στον ανισότροπο χώρο γράφεται:

$$\nabla_s = \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_1}}, \frac{\partial}{\partial x_{s_2}}, \frac{\partial}{\partial x_{s_3}} \right) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \cdot \nabla.\tag{1.15}$$

Στο σημείο αυτό απαιτούμε να είναι:

$$\begin{aligned}s_{21} &= s_{12} \\ s_{31} &= s_{13} \\ s_{23} &= s_{32},\end{aligned}\tag{1.16}$$

οπότε τότε έχουμε:

$$\nabla_s = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \cdot \nabla = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \nabla,\tag{1.17}$$

δηλαδή θα είναι:

$$\nabla_s = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \nabla \quad (1.18)$$

αν και μόνο αν το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ είναι συμμετρικό, ισχύουν δηλαδή οι ισότητες της (1.16).

Ακόμη, απαιτώντας το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ να είναι εκτός από συμμετρικό και θετικά ορισμένο (δηλαδή να αντιστρέφεται πάντα) (βλ. Παράρτημα), τότε ισχύουν ακόμη οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathbf{r}_s = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \cdot \mathbf{r} \quad (1.19)$$

και

$$\nabla_s = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \nabla, \quad (1.20)$$

ή

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{r}_s \quad (1.21)$$

και

$$\nabla = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \cdot \nabla_s. \quad (1.22)$$

Δηλαδή, αν το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ μετασχηματίζει το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$, τότε η κλίση μετασχηματίζεται από το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ και το αντίστροφο.

Η γεωμετρία που επιβάλλει ο μετασχηματισμός (1.19) αναλύεται στο κεφάλαιο 2.2.1, ενώ ένας άλλος τρόπος για να δούμε πώς διαφοροποιούνται τα χαρακτηριστικά των δύο χώρων και πώς επιβάλλονται τα ανά διεύθυνση χαρακτηριστικά με το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ προκύπτει αναλύοντας το ∇_s ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\nabla_s &= \begin{pmatrix} s_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + s_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} + s_{13} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ s_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} + s_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} + s_{23} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ s_{31} \frac{\partial}{\partial x_1} + s_{32} \frac{\partial}{\partial x_2} + s_{33} \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \nabla \\ \mathbf{s}_2 \cdot \nabla \\ \mathbf{s}_3 \cdot \nabla \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\mathbf{s}_1| \hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \nabla \\ |\mathbf{s}_2| \hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \nabla \\ |\mathbf{s}_3| \hat{\mathbf{s}}_3 \cdot \nabla \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |\mathbf{s}_1| \frac{\partial}{\partial s_1} \\ |\mathbf{s}_2| \frac{\partial}{\partial s_2} \\ |\mathbf{s}_3| \frac{\partial}{\partial s_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \\ s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \\ s_3 \frac{\partial}{\partial s_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |s_1| & 0 & 0 \\ 0 & |s_2| & 0 \\ 0 & 0 & |s_3| \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \frac{\partial}{\partial s_2} \\ \frac{\partial}{\partial s_3} \end{bmatrix} \\
&= |\mathbf{s}_1| \frac{\partial}{\partial s_1} \hat{\mathbf{s}}_1 + |\mathbf{s}_2| \frac{\partial}{\partial s_2} \hat{\mathbf{s}}_2 + |\mathbf{s}_3| \frac{\partial}{\partial s_3} \hat{\mathbf{s}}_3.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Παρατηρούμε, δηλαδή, πως στην τροποποιημένη κλίση οι μερικές παραγωγίσεις εμφανίζονται με διαφορετική βαρύτητα, καθώς οι συνιστώσες του ∇_s που εκφράζουν τις μεταβολές στους νέους άξονες, εμφανίζονται με διαφορετικές βαρύτητες και είναι εν γένει άνισες μεταξύ τους, σε αντίθεση με την κλίση του ισότροπου χώρου όπου είναι:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{\mathbf{x}}_3, \tag{1.24}$$

δηλαδή, οι μερικές παραγωγίσεις εμφανίζονται με την ίδια βαρύτητα (και μάλιστα ίση με 1).

Οι κύριες διευθύνσεις του ισότροπου χώρου είναι οι $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$, ενώ αντίστοιχα για τον ανισότροπο χώρο έχουμε $\hat{\mathbf{s}}_1, \hat{\mathbf{s}}_2, \hat{\mathbf{s}}_3$ όπως αυτά έχουν παραπάνω οριστεί.

1.3. Κανονική μορφή δυαδικού ανισότροπου χώρου

Όπως φαίνεται έως τώρα το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ εκφρασμένο στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι πλήρες (περιέχει εννέα στοιχεία). Ωστόσο, αυτό μπορεί, ως γνωστόν, με μια στροφή να διαγωνοποιηθεί στο ορθογώνιο σύστημα που εισάγουν τα ιδιοδιανύσματά του.

Ειδικότερα, εάν το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο, τότε ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του δυαδικού $\tilde{\mathbf{S}}$ ορίζει το μετασχηματισμό ομοιότητας που διαγωνοποιεί το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$.

Αν λοιπόν το δυαδικό $\tilde{\mathbf{D}}$ είναι η διαγωνοποιημένη μορφή του δυαδικού $\tilde{\mathbf{S}}$ (με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο της ιδιοτιμές του δυαδικού $\tilde{\mathbf{S}}$ και όλα τα υπόλοιπα ίσα με το μηδέν) και το δυαδικό $\tilde{\mathbf{P}}$ είναι ο μετασχηματισμός ομοιότητας που διαγωνοποιεί το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ (με στήλες τα ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του δυαδικού $\tilde{\mathbf{S}}$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του όπως αυτές εμφανίζονται στο δυαδικό $\tilde{\mathbf{D}}$ και έτσι ώστε το σύστημα συντεταγμένων που ορίζουν να είναι δεξιόστροφο), τότε θα ισχύει:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{P}} \quad (1.25)$$

ή

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \quad (1.26)$$

και καθώς τα ιδιοδιανύσματα αποτελούν ορθοκανονική βάση (δηλαδή $\det \tilde{\mathbf{P}} = 1$):

$$\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \tilde{\mathbf{P}}^T, \quad (1.27)$$

οι παραπάνω σχέσεις γίνονται τώρα:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{P}} \quad (1.28)$$

και

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T \quad (1.29)$$

και κατά συνέπεια οι σχέσεις (1.19) και (1.20) γράφονται ως ακολούθως:

$$\mathbf{r}_s = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \cdot \mathbf{r} = \left(\tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T \right)^{-1} \cdot \mathbf{r} = \left(\tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T \right) \cdot \mathbf{r} \quad (1.30)$$

και

$$\nabla_s = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \nabla = \left(\tilde{\mathbf{P}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T \right) \cdot \nabla. \quad (1.31)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις φαίνεται, όπως ήταν άλλωστε αναμενόμενο, πως ο μετασχηματισμός ομοιότητας που μετασχηματίζει (μέσω του δυαδικού $\tilde{\mathbf{S}}$) το $\mathbf{r}$ στο $\mathbf{r}_s$ είναι ο ίδιος με αυτόν που μετασχηματίζει το ∇ στο ∇_s και εκφράζεται με το δυαδικό $\tilde{\mathbf{P}}^T$, $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ και $\tilde{\mathbf{D}}$ είναι τα αντίστοιχα διαγώνια δυαδικά που εκφράζουν την ανισότροπη μορφή του χώρου, καθώς η κάθε διεύθυνση έχει τη δική της βαρύτητα.

Εάν οι τελευταίες σχέσεις γραφτούν με την ακόλουθη μορφή:

$$\tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{r}_s = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \left(\tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{r} \right) \quad (1.32)$$

και

$$\tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \nabla_s = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \left(\tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \nabla \right), \quad (1.33)$$

τότε παρατηρούμε πως το διάνυσμα $\mathbf{r}_s$ εκφρασμένο στο χαρακτηριστικό σύστημα των ιδιοδιανυσμάτων συνδέεται με το διάνυσμα $\mathbf{r}$, εκφρασμένο επίσης στο ίδιο σύστημα.

Η σχέση (1.32) είναι ισοδύναμη με την (1.19), όπου εκεί τα διανύσματα $\mathbf{r}_s$ και $\mathbf{r}$, είναι εκφρασμένα σε τυχαίο σύστημα, με αποτέλεσμα μια συνιστώσα του $\mathbf{r}_s$ να είναι γραμμικός συνδυασμός και των τριών συνιστωσών του $\mathbf{r}$, σε αντίθεση με την (1.32), όπου τώρα έχουμε πετύχει αποσύνδεση του συστήματος, αφού μέσω του χαρακτηριστικού συστήματος η κάθε συνιστώσα του διανύσματος $\mathbf{r}_s$ συνδέεται μόνο με την αντίστοιχη του διανύσματος $\mathbf{r}$ και εφαρμόζεται πλέον μόνο η απαραίτητη βάρθρωση (αφού η κατάλληλη στροφή που θα προσαρμόσει τα διανύσματα στο σύστημα των ιδιοδιανυσμάτων έχει ήδη εφαρμοστεί). Ουσιαστικά δηλαδή, οι σχέσεις (1.32) και (1.33) είναι οι τύποι αλλαγής βάσης, όπου τα νέα διανύσματα βάσης $\mathbf{e}'_i$ συνδέονται με τα αρχικά $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}'_i = \tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.34)$$

Τα παραπάνω ισχύουν και για τις κλίσεις ∇_s και ∇ .

Συνοψίζοντας, η δράση του δυαδικού $\tilde{\mathbf{S}}$ στην κλίση ∇ οδηγεί στην αντικατάσταση των τριών ορθογώνιων διευθύνσεων παραγωγίσης $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$, οι οποίες έχουν επίσης το ίδιο βάρος, από τις τρεις ορθογώνιες διευθύνσεις παραγωγίσης $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$, οι οποίες δεν έχουν το ίδιο βάρος (καθώς οι ιδιοτιμές δεν είναι ίσες μεταξύ τους, (βλ Παράρτημα)).

Ορίζοντας ως τονούμενο το νέο σύστημα που προκύπτει μετά τη δράση του δυαδικού $\tilde{\mathbf{P}}^T$ (π.χ. το σύστημα ιδιοδιανυσμάτων) στο αρχικό σύστημα τότε οι σχέσεις (1.32) και (1.33) γράφονται ως ακολούθως:

$$\mathbf{r}'_s = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \mathbf{r}' \quad (1.35)$$

και

$$\nabla'_s = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \nabla', \quad (1.36)$$

όπου

$$\mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{r}, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{r}'_s = \tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{r}_s, \quad (1.38)$$

$$\nabla' = \tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \nabla, \quad (1.39)$$

$$\nabla'_s = \tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \nabla_s. \quad (1.40)$$

Οι σχέσεις (1.35) και (1.36) είναι οι ίδιες με τις (1.19) και (1.20) αντίστοιχα, με μόνη διαφορά πως στις σχέσεις (1.35) και (1.36) τα δυαδικά $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ και $\tilde{\mathbf{D}}$ είναι διαγώνια και ως εκ τούτου αυτά αντικατοπτρίζουν τις ιδιομορφίες του ανισότροπου χώρου (όπως αυτές που επιβάλλονται από το δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$) σε κανονική μορφή. Δηλαδή το $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ μετασχηματίζει έτσι τους άξονες, ώστε κάθε συνιστώσα του $\tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{r}_s$ να περιέχει μόνο μια συνιστώσα από το $\tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \mathbf{r}$, σε αντίθεση με το $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$ που μετασχηματίζει το $\mathbf{r}$ απευθείας (αντίστοιχα ισχύουν για το $\tilde{\mathbf{D}}$, τα ∇_s και ∇ και $\tilde{\mathbf{S}}$). Έτσι προκύπτουν οι κύριες διευθύνσεις του ανισότροπου χώρου, όπως αυτές παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 1.2, ενώ τα $\tilde{\mathbf{D}}$ και $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ λειτουργούν ως «ταυτοτικά» για τον ανισότροπο χώρο.

2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΕΣΟ

Θεωρούμε ένα αστρόβιλο, ομογενές, ανισότροπο και συμπιεστό μέσο, όπου διαδίδεται ένα ακουστικό κύμα. Το διαδιδόμενο κύμα περιγράφεται από τη μεταβολή του πεδίου πίεσης στο χώρο αυτό, δηλαδή από το ανισότροπο πεδίο υπερπίεσης (ο όρος ανισότροπο χρησιμοποιείται καταχρηστικά, καθώς ουσιαστικά αναφέρεται στο πεδίο υπερπίεσης στην περίπτωση της διάδοσής του σε ανισότροπο μέσο, την οποία και εξετάζουμε εδώ), που είναι μια βαθμωτή συνάρτηση της θέσης $\mathbf{r}$ και του χρόνου t , $U(\mathbf{r}, t)$ και μετράται σε μονάδες δύναμης ανά μονάδες επιφάνειας.

Το διαδιδόμενο ακουστικό κύμα χαρακτηρίζεται επίσης από την ταχύτητα διάδοσης $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, η οποία είναι διανυσματική συνάρτηση επίσης της θέσης $\mathbf{r}$ και του χρόνου t . Οι βασικές εξισώσεις που συνδέουν το πεδίο υπερπίεσης με το πεδίο ταχυτήτων στην περίπτωση της γραμμικής διάδοσης έχουν ως ακολούθως:

$$\dot{U}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

και

$$\nabla U(\mathbf{r}, t) = \delta \nabla \nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \rho \tilde{\mathbf{P}} \cdot \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

όπου $\dot{}$ η πρώτη χρονική παράγωγος.

Η εξίσωση (2.1) εκφράζει ουσιαστικά το συνδυασμό της εξίσωσης συνέχειας και της καταστατικής εξίσωσης του μέσου και περιγράφει πως ο χρονικός ρυθμός μεταβολής του πεδίου υπερπίεσης είναι ανάλογος του χωρικού ρυθμού μεταβολής του πεδίου ταχύτητας, δηλαδή της έντασης ή της παραγωγικότητας των πηγών του πεδίου ταχύτητας (εξίσωση συνέχειας).

Ο συντελεστής αναλογίας $\frac{1}{\gamma}$ είναι το μέτρο συμπιεστότητας του υλικού, ενώ το γ ορίζεται ως η μέση συμπιεστότητα, μετράται σε μονάδες επιφάνειας ανά μονάδα δύναμης και εκφράζει τη σχετική μείωση του όγκου του μέσου ανά μονάδα επιφανειακής πίεσης, ενώ αφού αυτό περιέχεται στην (2.1) ως παράμετρος υλικού, τότε αυτή είναι και καταστατική εξίσωση.

Η εξίσωση (2.2) είναι το αστρόβιλο κομμάτι της γραμμικοποιημένης μορφής της εξίσωσης Navier – Stokes και εκφράζει πως το ποσό της αδράνειας που εμφανίζει το υλικό μέσο είναι ανάλογο του χωρικού ρυθμού μεταβολής του πεδίου υπερπίεσης και του χωρικού ρυθμού μεταβολής της παραγωγικότητας του πεδίου ταχύτητας (2^{ος} νόμος του Νεύτωνα).

Η μη αρνητική σταθερά αναλογίας δ ονομάζεται ιξώδες συμπίεσης και περιγράφει το ρυθμό αλλαγής της μάζας ανά μονάδα μήκους, δηλαδή την αντίσταση που παρουσιάζει το υλικό, λόγω των εσωτερικών τριβών του και συνδέεται με την απώλεια ενέργειας κατά τη διάδοση του κύματος (τη μετατροπή της μηχανικής ενέργειας σε θερμότητα), ενώ μετράται σε μονάδες πίεσης (μονάδα δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) επί μονάδα χρόνου. Αν το ιξώδες είναι μηδενικό, δηλαδή

$\delta = 0$, τότε το υλικό μέσο είναι ανιζώδες, ενώ αν $\delta > 0$, τότε έχουμε υλικό μέσο που παρουσιάζει απώλειες ενέργειας.

Ακόμη, $\rho\tilde{\mathbf{P}}$ είναι η πυκνότητα μάζας, όπου ρ είναι η μέση πυκνότητα και $\tilde{\mathbf{P}}$ είναι το δυαδικό (σταθερό, αλλά διάφορο του μοναδιαίου, συμμετρικό και θετικά ορισμένο, χωρίς βλάβη της γενικότητας) που εκφράζει την ανισοτροπία του χώρου. Σημειώνεται πως αν ρ ή $\gamma = 0$, τότε δεν έχουμε καν κύμα, ενώ για $\gamma = 0$ το κύμα δε διαδίδεται.

2.1. Η εξίσωση Helmholtz σε ανισότροπο μέσο

Υποθέτουμε πως στα πεδία (υπερπίεσης και ταχύτητας) η χρονική εξάρτηση είναι αρμονική, δηλαδή πως εισάγεται με γωνιακή ή κυκλική συχνότητα ω :

$$U(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.4)$$

όπου u και $\mathbf{v}$ είναι μιγαδικές συναρτήσεις του $\mathbf{r}$ και ω , αλλά ανεξάρτητες του t .

Κάνοντας χρήση των (2.3) και (2.4), οι (2.1) και (2.2) γράφονται:

$$i\omega\gamma u = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.5)$$

$$\nabla u = \delta \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + i\omega\rho\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v} \quad (2.6)$$

Αντικαθιστώντας την (2.5) στην (2.6) έχουμε:

$$(1 - i\omega\gamma\delta)\nabla u = i\omega\rho\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{v}, \quad (2.7)$$

ή αφού το $\tilde{\mathbf{P}}$ είναι θετικά ορισμένο και συμμετρικό:

$$(1 - i\omega\gamma\delta)\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \cdot \nabla u = -\omega^2\gamma\rho u \quad (2.8)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{-1} : \nabla \nabla u + \frac{\omega^2 \gamma \rho}{1 - i \omega \gamma \delta} u = 0. \quad (2.9)$$

Θέτοντας ως:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \quad (2.10)$$

και

$$k^2 = \frac{\omega^2 \gamma \rho}{1 - i \omega \gamma \delta}, \quad (2.11)$$

η (2.9) γράφεται:

$$(\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla + k^2) u = 0. \quad (2.12)$$

Η εξίσωση (2.12) αποτελεί την τροποποιημένη μορφή της εξίσωσης Helmholtz για τα ανισότροπα μέσα, ενώ η σχέση (2.11) ονομάζεται εξίσωση διασποράς ή χαρακτηριστική εξίσωση και είναι η αλγεβρική μορφή έκφρασης των αρχικών εξισώσεων.

Η παράμετρος k ονομάζεται κυματικός αριθμός ή σταθερά διάδοσης και καθορίζει την πυκνότητα του μήκους κύματος στο χώρο, ενώ η κυκλική συχνότητα ω καθορίζει την πυκνότητα των περιόδων του κύματος στο χρόνο. (Η ερμηνεία του κυματικού αριθμού k γίνεται σαφής με τη βοήθεια των επίπεδων κυμάτων, βλ. κεφάλαιο 3.4).

Η (2.12) γράφεται επίσης:

$$(\Delta_A + k^2) u = 0 \quad (2.13)$$

όπου η:

$$\Delta_A = \tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla \quad (2.14)$$

ορίζει τον ανισότροπο τελεστή Laplace.

2.2. Θεμελιώδης λύση τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz

Αναζητάμε τη θεμελιώδη λύση $G_A(\mathbf{r})$ που επιλύει την εξίσωση:

$$(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla + k^2)G_A(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}), \quad (2.15)$$

όπου το δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}$ είναι θετικά ορισμένο και συμμετρικό (βλ. κεφάλαιο 2.1). Ως συνέπεια αυτών των ιδιοτήτων του $\tilde{\mathbf{A}}$, αυτό διαγωνοποιείται (βλ. Παράρτημα), οπότε υπάρχει ένα επίσης θετικά ορισμένο, συμμετρικό αλλά και διαγώνιο δυαδικό $\tilde{\mathbf{V}}$, τέτοιο ώστε [28]:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}^2. \quad (2.16)$$

Δηλαδή, το $\tilde{\mathbf{V}}$ έχει ως στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του $\tilde{\mathbf{A}}$ (βλ. Παράρτημα).

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 1.2, ορίζουμε ως:

$$\mathbf{r}_V = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{r}, \quad (2.17)$$

ή

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{r}_V, \quad (2.18)$$

οπότε τότε είναι και

$$\nabla_V = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \quad (2.19)$$

και

$$\mathbf{k}_V = V^{-1} \cdot \mathbf{k} \quad (2.20)$$

και η (2.16) μετασχηματίζει την (2.15) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) : (\nabla \nabla G_A(\mathbf{r}) + \mathbf{k}_V \mathbf{k}_V) &= \\ &= \left[(\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) + (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{k}_V) \cdot (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{k}_V) \right] G_A(\mathbf{r}) \\ &= -\delta(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Λόγω όμως της (2.19) έχουμε πως:

$$(\nabla_V \nabla_V + k^2) G_A(\mathbf{r}_V) = -\frac{1}{\det \tilde{\mathbf{V}}} \delta(\mathbf{r}_V), \quad (2.22)$$

καθώς είναι [28], [13]:

$$\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_V) = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{r}_V \quad (2.23)$$

και τότε ισχύει πως:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{J} \delta(\mathbf{r}_V), \quad (2.24)$$

με:

$$J = \left| \frac{\partial f(\mathbf{r}_V)}{\partial \mathbf{r}_V} \right| = \det \tilde{\mathbf{V}} = \sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}. \quad (2.25)$$

Οπότε η $G_A(\mathbf{r}_V)$ παίρνει τη μορφή [28]:

$$G_A(\mathbf{r}_V) = \frac{1}{4\pi \det \tilde{\mathbf{V}}} \frac{\exp\{ikr_V\}}{r_V} \quad (2.26)$$

με

$$r_V = \sqrt{\mathbf{r}_V \cdot \mathbf{r}_V} = \sqrt{(\tilde{\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{r})} = \sqrt{(\tilde{\mathbf{V}} : \tilde{\mathbf{V}})^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r}} = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r}}, \quad (2.27)$$

το οποίο περιέχει όχι μόνο τα χαρακτηριστικά της απόστασης αλλά και τα χαρακτηριστικά του χώρου όπως αυτά επιβάλλονται από το δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}$ (μέσω του $\tilde{\mathbf{V}}$).

Επίσης παρατηρούμε πως το $\mathbf{r}_v$ ορίζει μια απόσταση που εξαρτάται από τη διεύθυνση για το $\mathbf{r}$, ενώ για το $\mathbf{r}_v$ ορίζει μια απόσταση ανεξάρτητη της διεύθυνσης. Δηλαδή, ο μετασχηματισμός που επιβάλλει το $\mathbf{V}^{-1}$ είναι τέτοιος ώστε ο νέος τρόπος μέτρησης της απόστασης να είναι ανεξάρτητος της διεύθυνσης. Με άλλα λόγια το $\mathbf{V}^{-1}$ παρέχει τους κατάλληλους μετασχηματισμούς σε κάθε διεύθυνση έτσι ώστε ο μετασχηματισμένος χώρος να συμπεριφέρεται ως ισότροπος. Έτσι, για την ευκλείδεια μεταβλητή $\mathbf{r}$ ο χώρος είναι ανισότροπος, ενώ για τη μετασχηματισμένη μεταβλητή $\mathbf{r}_v$ ο χώρος είναι ισότροπος, καθώς η ανισοτροπία του χώρου «κωδικοποιείται» (ή «απορροφάται») από το μετασχηματισμό που περιγράφει το $\mathbf{V}^{-1}$.

Έτσι ορίζουμε ως:

$$a(\mathbf{r}) = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \quad (2.28)$$

να είναι το μέτρο στον ανισότροπο χώρο, όπως φαίνεται και από την (2.27). Ο παράγοντας αυτός είναι σημαντικός, όπως θα προκύψει και στην πορεία, και ως εκ τούτου θα εμφανίζεται συχνά στα αποτελέσματα που ακολουθούν.

Συνεπώς, λόγω της (2.16) έχουμε πως (βλ. Παράρτημα):

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \det^2 \tilde{\mathbf{V}}, \quad (2.29)$$

οπότε η G_A γράφεται τελικά:

$$G_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \frac{\exp\left\{ik\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}}\right\}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}}} \quad (2.30)$$

ή

$$G_A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \frac{\exp\{ika(\mathbf{r})\}}{a(\mathbf{r})}. \quad (2.31)$$

Άρα, τελικά προκύπτει πως η θεμελιώδης λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz:

$$(\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla + k^2) G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.32)$$

είναι η:

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \frac{\exp\left\{ik\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}\right\}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}} \quad (2.33)$$

ή

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \frac{\exp\{ika(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\}}{a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (2.34)$$

με:

$$a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (2.35)$$

να δηλώνει τη συνάρτηση απόστασης του ανισότροπου χώρου, που όπως ήταν αναμενόμενο, εξαρτάται από τη διεύθυνση και τα χαρακτηριστικά του μέσου.

Παρατηρούμε, τέλος, πως παρόλο που η απόσταση $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ του ισότροπου χώρου αντικαθίσταται από την απόσταση $a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ που εξαρτάται από τη διεύθυνση η αμοιβαιότητα:

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_A(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (2.36)$$

ισχύει και εδώ. Δηλαδή, η «αιτία» και το «αποτέλεσμα» εξακολουθούν να είναι συμμετρικά ακόμη και στον ανισότροπο χώρο.

2.2.1. Επαλήθευση της θεμελιώδους λύσης

Θέλουμε να δείξουμε πως η (2.30) όντως επαληθεύει την (2.15).

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση όπου $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}\nabla G_A(\mathbf{r}) &= \left[ik - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}}} \right] G_A(\mathbf{r}) \nabla \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{ik}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}}} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \right] G_A(\mathbf{r}) \nabla (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}) \\ &= \left[\frac{ik}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}}} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \right] G_A(\mathbf{r}) (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r})\end{aligned}\quad (2.37)$$

και από την (2.37) πως:

$$\begin{aligned}\nabla \nabla G_A(\mathbf{r}) &= \\ &= \left[-\frac{ik}{2(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^{3/2}} + \frac{1}{(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^2} \right] \left[\nabla (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}) \right] G_A(\mathbf{r}) (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad + \left[\frac{ik}{(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^{1/2}} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \right] \left[\nabla_A G(\mathbf{r}) \right] (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad + \left[\frac{ik}{(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^{1/2}} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \right] G_A(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\end{aligned}\quad (2.38)$$

ή

$$\begin{aligned}\nabla \nabla G_A(\mathbf{r}) &= \left[\frac{3}{(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^2} - \frac{3ik}{(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^{3/2}} - \frac{k^2}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \right] G_A(\mathbf{r}) (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r}) (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r}) \\ &\quad + \left[\frac{ik}{(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^{1/2}} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \right] G_A(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\end{aligned}\quad (2.39)$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla G(\mathbf{r}) &= \\ &= \left[\frac{3}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} - \frac{3ik}{(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^{1/2}} - k^2 + \frac{3ik}{(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r})^{1/2}} - \frac{3}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r}} \right] G(\mathbf{r}) \quad (2.40) \\ &= -k^2 G(\mathbf{r})\end{aligned}$$

και η (2.15) ικανοποιείται για κάθε $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

Σημειώνεται πως στους παραπάνω υπολογισμούς έχουν χρησιμοποιηθεί οι ταυτότητες (βλ. Παράρτημα):

$$\tilde{\mathbf{A}} : (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r})(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}\mathbf{r} \quad (2.41)$$

και

$$\tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{A}}^{-1} = 3. \quad (2.42)$$

Για να αποδείξουμε πως η (2.15) ικανοποιείται και για $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς (2.17) και (2.18), οι οποίοι μετασχηματίζουν τη σφαίρα σε ένα ελλειψοειδές και το ελλειψοειδές σε μια σφαίρα αντίστοιχα.

Πριν προχωρήσουμε όμως σε αυτό θα αναλυθεί περαιτέρω η δράση των μετασχηματισμών (2.17) και (2.18) μέσω της γεωμετρίας που επιβάλλουν, συμπληρώνοντας έτσι τις ιδιότητες του ανισότροπου χώρου που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 1.2.

Το δυαδικό $\tilde{\mathbf{V}}^{-1}$ γράφεται (βλ. Παράρτημα):

$$\tilde{\mathbf{V}}^{-1} = \frac{1}{\nu_1} \hat{\mathbf{x}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{1}{\nu_2} \hat{\mathbf{x}}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{1}{\nu_3} \hat{\mathbf{x}}_3 \hat{\mathbf{x}}_3, \quad (2.43)$$

όπου τα $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ είναι οι κύριες διευθύνσεις του ελλειψοειδούς (και τα ιδιοδιανύσματα του $\tilde{V}$) και v_i οι ιδιότητες του $\tilde{V}$ με:

$$v_i > 0, \quad i=1,2,3, \quad (2.44)$$

καθώς το $\tilde{V}$ (άρα και το $\tilde{V}^{-1}$) είναι θετικά ορισμένο (βλ. Παράρτημα).

Έτσι το δυαδικό $\tilde{V}$ ορίζει το ελλειψοειδές:

$$E_V : v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + v_3 x_3^2 = 1, \quad (2.45)$$

ενώ το $\tilde{A}$ ορίζει το ελλειψοειδές:

$$E_A : v_1^2 x_1^2 + v_2^2 x_2^2 + v_3^2 x_3^2 = 1, \quad (2.46)$$

με:

$$v_i^2 = \lambda_i, \quad i=1,2,3, \quad (2.47)$$

ενώ για τις ιδιοτιμές του $\tilde{A}$ ισχύει πως:

$$\lambda_i > 0, \quad i=1,2,3. \quad (2.48)$$

Στην πραγματικότητα ο μετασχηματισμός (2.17) ερμηνεύεται ως εξής:

Εάν ένα διάνυσμα $\mathbf{r}$ «ζει» στη σφαίρα:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{a^2} = 1, \quad (2.49)$$

τότε οι συντεταγμένες του $\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ συνδέονται όπως περιγράφεται στην (2.49). Εάν το δυαδικό $\tilde{V}^{-1}$ δράσει στο $\mathbf{r}$ (όπως εκφράζεται στην (2.17)) τότε οι συντεταγμένες x_i αντικαθίστανται από τις x_{V_i} με:

$$x_{V_i} = \frac{x_i}{v_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

και τώρα η (2.49) γράφεται:

$$\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 x_{V_1}^2 + \left(\frac{v_2}{a}\right)^2 x_{V_2}^2 + \left(\frac{v_3}{a}\right)^2 x_{V_3}^2 = 1, \quad (2.51)$$

έτσι ώστε το διάνυσμα $\mathbf{r}_V = (x_{V_1}, x_{V_2}, x_{V_3})$ να «ζει» σε ένα ελλειψοειδές. Συνεπώς η (2.17) μετασχηματίζει μια σφαίρα σε ένα ελλειψοειδές και προφανώς η (2.18) μετασχηματίζει ένα ελλειψοειδές σε μια σφαίρα, καθώς το $\mathbf{r}_V$ ικανοποιεί την (2.51) και εφαρμόζοντας το $\tilde{\mathbf{V}}$ στο $\mathbf{r}_V$, όπως ορίζει η (2.18), τότε:

$$x_i = v_i x_{V_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.52)$$

η οποία αν εφαρμοστεί στην (2.51) δίνει την (2.49).

Με βάση τα παραπάνω, προκειμένου να απομονώσουμε την ιδιομορφία στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ επιλέγουμε να απομονώσουμε το εσωτερικό του ελλειψοειδούς που ορίζει το $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$:

$$\frac{x_1^2}{v_1^2} + \frac{x_2^2}{v_2^2} + \frac{x_3^2}{v_3^2} = 1, \quad (2.53)$$

με $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, καθώς αυτό λόγω του μετασχηματισμού (2.50) δίνει τη σφαίρα:

$$x_{V_1}^2 + x_{V_2}^2 + x_{V_3}^2 = 1. \quad (2.54)$$

Δηλαδή, η βάρθρωση του ελλειψοειδούς του Ευκλείδειου ισότροπου χώρου μας οδηγεί σε εξάλειψη μιας σφαίρας από το μετασχηματισμό $\tilde{\mathbf{V}}^{-1}$, γεγονός που μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τεχνική που εφαρμόζουμε σε αντίστοιχα προβλήματα του ισότροπου χώρου. Ωστόσο, στη συνέχεια η ικανοποίηση της (2.15) στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ θα αποδειχθεί με απευθείας υπολογισμούς.

Έτσι, από εδώ και στο εξής θεωρούμε μια σφαίρα S_ε τοποθετημένη στη θέση $\mathbf{0}$ με ακτίνα $\varepsilon > 0$. Από το θεώρημα Gauss η ολοκλήρωση της (2.15) πάνω στη σφαίρα S_ε δίνει [38]:

$$\int_{S_\varepsilon} \hat{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla G_A(\mathbf{r}) ds_\varepsilon(\mathbf{r}) + \int_{|\mathbf{r}| \leq \varepsilon} k^2 G_A(\mathbf{r}) dv_\varepsilon(\mathbf{r}) = -1. \quad (2.55)$$

Από την (2.37) έχουμε πως:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla G_A(\mathbf{r}) = \left[\frac{ik}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}}} - \frac{1}{r \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}} \right] G_A(\mathbf{r}) \quad (2.56)$$

και αφού πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας S_ε είναι $|\mathbf{r}| = r = \varepsilon$, η (2.55) στο όριο για $\varepsilon \rightarrow 0$ θα δίνει:

$$\int_{S^2} (\mathbf{A}^{-1} : \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}})^{-3/2} ds(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi \sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}. \quad (2.57)$$

Οπότε απομένει να αποδείξουμε την (2.57).

Απόδειξη της (2.57):

Στο κύριο σύστημα συντεταγμένων του ελλειψοειδούς (2.53) που ορίζει το $\tilde{\mathbf{A}}$ έχουμε πως:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} = \frac{o_1^2}{v_1^2} + \frac{o_2^2}{v_2^2} + \frac{o_3^2}{v_3^2}, \quad (2.58)$$

όπου:

$$\hat{\mathbf{r}} = (o_1, o_2, o_3) \quad (2.59)$$

και από (2.43) και (2.16) είναι ακόμη:

$$\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}} = v_1 v_2 v_3 \quad (2.60)$$

και τώρα η (2.57) γράφεται:

$$\int_{S^2} \left[\frac{o_1^2}{v_1^2} + \frac{o_2^2}{v_2^2} + \frac{o_3^2}{v_3^2} \right]^{-\frac{3}{2}} ds(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi v_1 v_2 v_3. \quad (2.61)$$

Εισάγουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες [38]:

$$\left. \begin{aligned} o_1 &= \sqrt{1-x^2} \cos \varphi \\ o_2 &= \sqrt{1-x^2} \sin \varphi \\ o_3 &= x \end{aligned} \right\}, x \in [-1, +1], \varphi \in [0, 2\pi), \quad (2.62)$$

οπότε:

$$ds(\hat{\mathbf{r}}) = -dx d\varphi \quad (2.63)$$

και ξαναγράφουμε την (2.61) ως:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^+ \left[\left(\frac{\cos^2 \varphi}{v_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{v_2^2} \right) + \left(\frac{1}{v_3^2} - \frac{\cos^2 \varphi}{v_1^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{v_2^2} \right) x^2 \right]^{-\frac{3}{2}} dx d\varphi = 4\pi v_1 v_2 v_3. \quad (2.64)$$

Επειδή $\forall \varphi \in [0, 2\pi)$ ισχύει:

$$\frac{\cos^2 \varphi}{v_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{v_2^2} > 0 \quad (2.65)$$

και ακόμη

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v_3^2} - \frac{\cos^2 \varphi}{v_1^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{v_2^2} = \\ &= \frac{\cos^2 \varphi}{v_3^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{v_3^2} - \frac{\cos^2 \varphi}{v_1^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{v_2^2} \\ &= \left(\frac{1}{v_3^2} - \frac{1}{v_1^2} \right) \cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{v_3^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) \sin^2 \varphi > 0, \end{aligned} \quad (2.66)$$

όπου οι ημιάξονες του ελλειψοειδούς έχουν επιλεγθεί έτσι ώστε (3.64):

$$v_1 > v_2 > v_3. \quad (2.67)$$

Η x -ολοκλήρωση της (2.64) αντιστοιχεί στον τύπο ολοκλήρωσης:

$$\int (A^2 + B^2 x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{A^2 \sqrt{A^2 + B^2 x^2}}, \quad (2.68)$$

από όπου προκύπτει πως:

$$\int_{-1}^{+1} (A^2 + B^2 x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{A^2 \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (2.69)$$

με

$$A^2 = \frac{\cos^2 \varphi}{v_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{v_2^2} \quad (2.70)$$

και

$$B^2 = \frac{1}{v_3^2} - A^2. \quad (2.71)$$

Συνεπώς, η x -ολοκλήρωση της (2.64) δίνει:

$$v_1 v_2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{v_2^2 + (v_1^2 - v_2^2) \sin^2 \varphi} = 2\pi \quad (2.72)$$

ή

$$2v_1 v_2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{v_2^2 + (v_1^2 - v_2^2) \sin^2 \varphi} = \pi. \quad (2.73)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\int \frac{d\varphi}{v_2^2 + (v_1^2 - v_2^2) \sin^2 \varphi} = \frac{1}{v_1 v_2} \tan^{-1} \left[\frac{v_1}{v_2} \tan \varphi \right], \quad (2.74)$$

ο οποίος ισχύει για:

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_2^2} > -1 \quad (2.75)$$

το ολοκλήρωμα της (2.73) δίνει:

$$2 \tan^{-1} \left[\frac{v_1}{v_2} \tan \varphi \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan^{-1} \left[\frac{v_1}{v_2} \tan \varphi \right] = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1} x = \pi, \quad (2.76)$$

το οποίο αποδεικνύει την (2.57).

Σημειώνουμε, τέλος, πως ο όρος $a^{-3/2}(\hat{\mathbf{r}})$ που είδαμε στη (2.57) εμφανίζεται σε κάθε ολοκλήρωμα επί της μοναδιαίας σφαίρας, όπως θα φανεί στη συνέχεια (βλ. (4.30), (4.77), (5.47), και (5.56)).

3. ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΒΑΣΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ ΣΕ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟ ΜΕΣΟ

Έχοντας περιγράψει τα βασικά πεδία και τις εξισώσεις που αυτά ικανοποιούν και περιγράφουν τη διάδοση κύματος σε ομογενή και ανισότροπο χώρο, θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου κύμα διαδίδεται σε ανισότροπο μέσο στο οποίο παρεμβάλλεται άλλο ανισότροπο μέσο.

Αναλυτικότερα, θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^3$, στον οποίο περιέχεται το ανοιχτό, φραγμένο και συνεκτικό υποσύνολό του V^- ($V^- \subset \mathbb{R}^3$), με συνοριακή επιφάνεια του V^- την $S = \partial V^-$, η οποία θεωρείται $C^{(1)}$ ομαλή επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Ο χώρος V^- αποτελεί το σκεδαστή και θα χαρακτηρίζεται από τις φυσικές παραμέτρους ρ^- , γ^- , δ^- και k^- . Θεωρούμε ακόμη τον εξωτερικό χώρο του V^- , δηλαδή τον ανοικτό και μη φραγμένο χώρο $V^+ = (V^- \cup S)^c = \mathbb{R}^3 - V^- - \partial V^-$ με τις φυσικές παραμέτρους ρ^+ , γ^+ , δ^+ και k^+ .

Υποθέτουμε πως ο χώρος V^+ είναι ανισότροπος και χαρακτηρίζεται από ένα πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο σταθερό δυαδικό $\tilde{A}$ ($\tilde{A} \equiv \tilde{A}_+$, κρατάμε το $\tilde{A}$ χωρίς δείκτη για το χώρο V^+ χάριν συντομίας) και αντίστοιχα πως ο χώρος V^- είναι επίσης ανισότροπος και χαρακτηρίζεται από ένα άλλο πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο, σταθερό δυαδικό $\tilde{A}_-$, ($\tilde{A} \neq \tilde{A}_-$).

Έστω πως ένα βαθμωτό προσπίπτον πεδίο u^i διαδίδεται στον εξωτερικό χώρο V^+ . Τότε η διάδοση αυτού διαταράσσεται από την ύπαρξη του χώρου V^- και για το λόγο αυτό παράγεται στον V^+ το σκεδασμένο πεδίο u , ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ του προσπίπτοντος πεδίου u^i και του κλειστού χώρου-εμπόδιο V^- . Επίσης, στον κλειστό χώρο V^- , παράγεται το εσωτερικό πεδίο u^- , εξαιτίας της διέγερσης u^i που προκαλεί δονήσεις στο εσωτερικό του εμποδίου.

Σημειώνεται πως από το σημείο αυτό και ακολούθως θεωρούμε ως καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αυτό το οποίο συμπίπτει με το σύστημα που ορίζουν τα ιδιοδιανύσματα του δυαδικού $\tilde{A}$ που περιγράφει τον εξωτερικό ανοικτό χώρο. Επειδή, εν γένει οι ιδιοτιμές του δυαδικού $\tilde{A}_-$ που περιγράφει τον εσωτερικό κλειστό χώρο είναι διαφορετικές από αυτές του $\tilde{A}$, συνεπάγεται πως σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων το δυαδικό $\tilde{A}$ δέχεται διαγώνια μορφή, ενώ το $\tilde{A}_-$ όχι.

Επίσης από εδώ και στο εξής με το δείκτη $+$ ή $_+$ (ή χωρίς δείκτη όπως π.χ. το δυαδικό $\tilde{A}$ και ο κυματικός αριθμός k) σημειώνονται όλες οι παράμετροι, τα πεδία και τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στον εξωτερικό χώρο V^+ , ενώ με το δείκτη $-$ ή $_-$ θα σημειώνονται οι παράμετροι, τα πεδία και τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στον εσωτερικό χώρο V^- και τέλος υποθέτουμε πως ο εξωτερικός χώρος V^+ δεν παρουσιάζει απώλειες ενέργειας, δηλαδή πως: $\delta^+ = 0$.

Εισάγοντας στα πεδία αρμονική χρονική εξάρτηση $\exp\{-i\omega t\}$ με γωνιακή ταχύτητα ω , η οποία θα είναι ίδια και στους δύο χώρους V^+ και V^- , αφού θεωρούμε πως οι

σταθερές δεν εξαρτώνται από το χρόνο, τα χωρικά μέρη του ολικού εξωτερικού πεδίου u^+ και του εσωτερικού πεδίου u^- , θα πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες τροποποιημένες εξισώσεις Helmholtz:

$$\left(\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla + k^2\right) u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in V^+ \quad (3.1)$$

και

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}_- : \nabla \nabla + k^{-2}\right) u^-(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in V^-, \quad (3.2)$$

όπου το ολικό εσωτερικό πεδίο είναι το άθροισμα του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου πεδίου:

$$u^+(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + u^i(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Εισάγουμε επίσης το σχετικό δείκτη διάθλασης η ως το λόγο των κυματικών αριθμών στον εσωτερικό και εξωτερικό χώρο:

$$\eta = \frac{k^-}{k}, \quad (3.4)$$

οπότε η εξίσωση(3.2) γράφεται τώρα:

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}_- : \nabla \nabla + \eta^2 k^2\right) u^-(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in V^-. \quad (3.5)$$

3.1. Συνθήκες διαπερατότητας

Σε ένα ευθύ πρόβλημα σκέδασης αναζητάμε πώς ένας σκεδαστής V^- διαταράσσει τη διάδοση ενός γνωστού προσπίπτοντος πεδίου (του οποίου η φύση στην περίπτωση των ανισότροπων μέσων περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.4). Αναζητάμε, δηλαδή, τη μορφή του ολικού εξωτερικού πεδίου υπερπίεσης u^+ που συναντάται στον V^+ και του εσωτερικού πεδίου υπερπίεσης u^- που συναντάται στον V^- , στην περίπτωση που ο σκεδαστής είναι ένα άλλο ανισότροπο μέσο και η διαταραχή

μεταδίδεται και σε αυτόν, δηλαδή στην περίπτωση που ο σκεδαστής είναι διαπερατός. Σημειώνουμε ξανά πως έχουμε υποθέσει ότι η συνοριακή επιφάνεια S είναι συνήθης, δηλαδή πως είναι ομαλή, προκειμένου να εξασφαλίζεται η ύπαρξη μιας κλασικής λύσης του προβλήματος. Οι συνθήκες που τα πεδία u^+ και u^- σχετίζονται πάνω στο σύνορο του σκεδαστή S ονομάζονται συνθήκες διαπερατότητας και έχουν ως εξής:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_A} u^+(\mathbf{r}) = \beta \frac{\partial}{\partial n_A} u^-(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S, \quad (3.7)$$

όπου το $\frac{\partial}{\partial n_A}$ δηλώνει την τροποποιημένη προς τα έξω διαφόριση στην επιφάνεια S :

$$\frac{\partial}{\partial n_A} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla, \quad (3.8)$$

ενώ $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S και β είναι η αδιάστατη σταθερά:

$$\beta = \frac{\rho^+}{\rho^-} \frac{1 - i\omega\delta^- \gamma^-}{1 - i\omega\delta^+ \gamma^+}, \quad (3.9)$$

όπου $\rho^\pm$, $\delta^\pm$ και $\gamma^\pm$ είναι η μέση πυκνότητα μάζας, το ιξώδες συμπίεσης και το μέτρο συμπιεστικότητας αντίστοιχα, για τον εξωτερικό (+) και τον εσωτερικό (−) χώρο.

Η (3.9) δίνει τη σταθερά β στη γενική περίπτωση, ενώ για $\delta^+ = 0$ που έχουμε υποθέσει γράφεται:

$$\beta = \frac{\rho^+}{\rho^-} (1 - i\omega\delta^- \gamma^-). \quad (3.10)$$

Η συνθήκη (3.6) επιβάλλει τη συνέχεια του πεδίου υπερπίεσης πάνω στην επιφάνεια S , ενώ η συνθήκη (3.7) δηλώνει τη συνέχεια της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας, καθώς από τις εξισώσεις (2.7) και (2.10) στη γενική περίπτωση ($\delta^+ \neq 0$) έχουμε:

$$\mathbf{v}^\pm(\mathbf{r}) = \frac{1 - i\omega\gamma^\pm\delta^\pm}{i\omega\rho^\pm} \tilde{\mathbf{A}}_\pm \cdot \nabla u^\pm(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

και η (3.7) τώρα γράφεται:

$$\frac{i\omega\rho^+}{1 - i\omega\gamma^+\delta^+} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}^+(\mathbf{r}) = \beta \frac{i\omega\rho^-}{1 - i\omega\gamma^-\delta^-} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}^-(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

ή

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}^+(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}^-(\mathbf{r}). \quad (3.13)$$

Δηλαδή η συνθήκη (3.6) δεν περιέχει χαρακτηριστικά του ανισότροπου χώρου, καθώς αφορά βαθμωτά πεδία, σε αντίθεση με την (3.7), όπου εμφανίζεται το δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}$, διότι τα πεδία σε αυτή είναι διανυσματικά (κλίση των πεδίων υπερπίεσης). Για $\delta^+ = 0$ η (3.13) ισχύει επίσης.

3.2. Συνοριακές συνθήκες

Όταν ο σκεδαστής είναι αδιαπέρατος, δηλαδή κανένα πεδίο δεν υφίσταται μέσα στον χώρο V^- , τότε χρησιμοποιούμε εκφράσεις που μοντελοποιούν περιπτώσεις όπου η διαταραχή του προσπίπτοντος κύματος δε γίνεται αισθητή στον V^- , δηλαδή, μια ποικιλία συνοριακών συνθηκών πάνω στην επιφάνεια. Ακολουθώς αναφέρονται τρεις διαφορετικές συνοριακές συνθήκες:

Συνοριακή Συνθήκη Dirichlet:

$$u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (3.14)$$

Σύμφωνα με τη συνοριακή αυτή, η συνολική υπερπίεση πάνω στην επιφάνεια S είναι μηδέν και περιγράφεται η περίπτωση του μαλακού σκεδαστή. Η επιφάνεια του σκεδαστή δεν προβάλλει δηλαδή καμία αντίσταση στην πίεση και αντιδρά σε αυτή αλλάζοντας σχήμα, ώστε τελικά η πίεση που ασκείται σε αυτή να είναι μηδενική (όπως π.χ. μια φουσαλίδα).

Παρατηρούμε ακόμη πως η ανισοτροπία του μέσου δεν επηρεάζει τη μορφή της συνοριακής συνθήκης, κάτι που είναι αναμενόμενο καθώς σε αυτήν δεν περιέχεται ο τελεστής κλίσης.

Συνοριακή Συνθήκη Neumann:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u^+(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial n_A} u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in S. \quad (3.15)$$

Η παραπάνω συνοριακή αναφέρει πως η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας είναι μηδενική πάνω στην επιφάνεια S (βλ. κεφάλαιο 3.2), δηλαδή πως το πεδίο υπερπίεσης δεν μπορεί να μετακινήσει κανένα μόριο της επιφάνειας και περιγράφει τον σκληρό σκεδαστή. Η επιφάνεια αυτού του σκεδαστή προβάλλει τέτοια αντίσταση στην πίεση που δεν επιτρέπει τοπικές μετατοπίσεις (π.χ. πέτρα).

Είναι εμφανής η παρουσία του ανισότροπου μέσου, καθώς εδώ εμπλέκεται η κλίση.

Συνοριακή Συνθήκη Robin:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n_A} + \frac{i\omega\rho^+}{Z^+} \right) u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in S, \quad (3.16)$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial n_A} u^+(\mathbf{r}) + ikv u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in S, \quad (3.17)$$

όπου:

$$\nu = \frac{1}{Z^+} \sqrt{\frac{\rho^+}{\gamma^+}} \quad (3.18)$$

είναι αδιάστατος αριθμός και ονομάζεται παράμετρος Robin. Z^+ είναι η ακουστική εμπέδηση, η οποία αποτελεί ένα μέτρο της αντίστασης της επιφάνειας και μετράται σε μονάδες πίεσης ανά μονάδες ταχύτητας. Ο όρος $\frac{1}{Z^+}$ ονομάζεται ακουστική «ενδοτικότητα» και φανερώνει την ταχύτητα που λαμβάνουν τα μόρια λόγω της πίεσης που δέχονται ανά μονάδα πίεσης.

Η (3.16) γράφεται επίσης:

$$Z^+ \frac{\partial}{\partial n_A} u^+(\mathbf{r}) = -u^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S, \quad (3.19)$$

δηλαδή η μείωση της πίεσης σε κάθε σημείο της επιφάνειας S είναι ανάλογη της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας με συντελεστή αναλογίας Z^+ και αυτή η συνοριακή συνθήκη περιγράφει την περίπτωση του ανθεκτικού σκεδαστή.

Η επιφάνεια του ανθεκτικού σκεδαστή είναι τέτοια ώστε να επέρχεται μια ισορροπία μεταξύ της πίεσης και της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας, δηλαδή η επιφανειακή τάση που προκαλείται από την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας αντισταθμίζει την υπερπίεση που ασκείται στην επιφάνεια S . Ακόμη, από τη στιγμή που στη συνοριακή συνθήκη περιέχεται το ∇ , εμφανίζεται επίσης και το δυαδικό του ανισότροπου μέσου.

Η συμπεριφορά του ανθεκτικού σκεδαστή είναι μια ενδιαμέση συμπεριφορά μεταξύ αυτών του μαλακού και του σκληρού σκεδαστή. Για $Z^+ \rightarrow 0$ ο όρος της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας είναι αμελητέος για να προκαλέσει πίεση στην επιφάνεια και η (3.19) δίνει την (3.14), δηλαδή το μαλακό σκεδαστή, ενώ για $Z^+ \rightarrow \infty$ ο όρος της υπερπίεσης θεωρείται αμελητέος για να παράγει κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας και η (3.19) δίνει την (3.15), δηλαδή την περίπτωση του σκληρού σκεδαστή.

3.3. Συνθήκη ακτινοβολίας

Στα προβλήματα σκέδασης πάντα υπάρχει ο εξωτερικός χώρος με «σύνορο» του το άπειρο. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε μια συνθήκη γι' αυτό το «σύνορο», η οποία είναι σε ασυμπτωματική μορφή, καθώς $r \rightarrow \infty$, όπου r είναι το μέτρο του διανύσματος θέσης $\mathbf{r}$, $r = |\mathbf{r}|$. Η συνθήκη ακτινοβολίας που χρησιμοποιούμε εδώ έχει ως εξής:

$$\partial_r^A u(\mathbf{r}) - iku(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

όπου ο τελεστής:

$$\partial_r^A = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}} : \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla \quad (3.21)$$

περιγράφει την επίδραση του ανισότροπου μέσου στον τελεστή $\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}$ και u είναι το σκεδαζόμενο πεδίο υπερπίεσης.

Η συνθήκη αυτή επιβάλλεται έτσι ώστε το πρόβλημα σκέδασης για τον εξωτερικό χώρο να είναι ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Η δεδομένη μορφή προκύπτει μέσα από την απόδειξη της εξωτερικής ολοκληρωτικής αναπαράστασης της λύσης (βλ. κεφάλαιο 4.2), όπου αναλύεται και η επίδραση της ανισοτροπίας στη μορφή που αυτή λαμβάνει στον ανισότροπο χώρο.

Όπως και στον ισότροπο χώρο έτσι και στον ανισότροπο απαιτείται το σκεδαζόμενο πεδίο υπερπίεσης να έχει μια συγκεκριμένη γεωμετρική απόσβεση και με τη βοήθεια της συνθήκης ακτινοβολίας επιβάλλεται αυτός ο χαρακτήρας του απομακρυνόμενου, σκεδαζόμενου κύματος.

3.4. Προσπίπτοντα πεδία

Σε ένα πρόβλημα σκέδασης προσπίπτον πεδίο είναι το πεδίο που θα μπορούσε να υπάρχει στον $\mathbb{R}^3$ εάν δεν υπήρχε ο σκεδαστής, ενώ σκεδασμένο πεδίο είναι το πεδίο που εμφανίζεται στον $\mathbb{R}^3$ μόλις εισαχθεί ο σκεδαστής.

Ως προσπίπτοντα πεδία θεωρούμε πεδία που είναι επίπεδα κύματα, σημειακές πηγές ή υπερθέσεις αυτών, ενώ αυτά ικανοποιούν την τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz στο χώρο όπου δεν υπάρχουν πηγές:

$$\left(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla + k^2\right) u^i(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus A, \quad (3.22)$$

όπου A είναι το φραγμένο υποσύνολο του V^+ που περιέχει όλες τις σημειακές πηγές.

3.4.1. Το «επίπεδο» κύμα στον ανισότροπο χώρο

Άμεση συνέπεια της ανισότροπης συμπεριφοράς του μέσου αποτελεί το γεγονός πως ένα επίπεδο προσπίπτον κύμα δεν θα παραμένει πλέον επίπεδο ή, διαφορετικά, για να παραμείνει επίπεδο θα πρέπει να αλλάζει κατάλληλα τη διεύθυνση διάδοσης του, όπως η περίπτωση που εξετάζουμε εδώ.

Αναλυτικότερα, ένα κύμα που διαδίδεται σε ένα ανισότροπο μέσο θα είναι επίπεδο αν έχει τη μορφή:

$$u^i(\mathbf{r}) = \exp \left\{ ik \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{k}} \mathbf{r}}{a(\hat{\mathbf{k}})} \right\}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.23)$$

Η (3.23) γράφεται ακόμη:

$$u^i(\mathbf{r}) = \exp \left\{ ik \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r}}{a(\hat{\mathbf{k}})} \right\}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.24)$$

ή

$$u^i(\mathbf{r}) = \exp \left\{ i \frac{k \hat{\mathbf{k}}}{a(\hat{\mathbf{k}})} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r} \right\}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.25)$$

ή

$$u^i(\mathbf{r}) = \exp \left\{ i \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \frac{k \hat{\mathbf{k}}}{a(\hat{\mathbf{k}})} \mathbf{r} \right\}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.26)$$

ή

$$u^i(\mathbf{r}) = \exp \left\{ i k \hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r} \right\}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.27)$$

ή

$$u^i(\mathbf{r}) = \exp \left\{ i k \hat{\mathbf{k}}_A \cdot \mathbf{r}_A \right\}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.28)$$

όπου:

$$\mathbf{r}_A = \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r} \quad (3.29)$$

είναι το διάνυσμα θέσης στον ανισότροπο χώρο, $\mathbf{k}_A$ είναι το κυματικό διάνυσμα με:

$$\mathbf{k}_A = \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{k}, \quad (3.30)$$

σύμφωνα με το μετασχηματισμό που ορίσθηκε στο κεφάλαιο 1.2 και με αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα:

$$\hat{\mathbf{k}}_A = \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2}}{a(\mathbf{k})} = \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2}}{a(\hat{\mathbf{k}})}, \quad (3.31)$$

ενώ $a(\mathbf{k})$ είναι το ανισότροπο μέτρο του $\mathbf{k}$ ή το μέτρο του $\mathbf{k}_A$ (βλ. (3.36)) και ο παράγοντας $a(\hat{\mathbf{k}})$ ορίζεται από την (3.35). Από τις σχέσεις (3.24) έως και (3.28)

φαίνεται πως μπορούν να ενσωματωθούν τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου χώρου στα διανύσματα του χαρακτηριστικού (δηλαδή του μετασχηματισμένου) συστήματος του ανισότροπου χώρου (βλ. κεφάλαιο 1.2) και έτσι καταλήγουμε πως η μορφή (3.28) του επίπεδου κύματος είναι ίδια με αυτή του ισότροπου χώρου [13].

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε πως ισχύει ότι:

$$\hat{\mathbf{k}}_A = \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (3.32)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{k}})$ είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς που ορίζει το δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}^{-1/2}$ στη θέση $\hat{\mathbf{k}}$, όπως ορίζεται με τη βοήθεια της απεικόνισης Gauss. Επίσης, επειδή από τη (2.16) έχουμε πως: $\tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} = \tilde{\mathbf{V}}^{-1}$, φαίνεται και από εδώ (όπως και στη μέθοδο αντιμετώπισης των ιδιομορφιών, βλ. κεφάλαιο 2.2.1) πως τα απαραίτητα χαρακτηριστικά του ανισότροπου χώρου μεταφέρονται από το δυαδικό $\tilde{\mathbf{V}}^{-1}$.

Το επίπεδο αυτό κύμα είναι λύση της εξίσωσης:

$$(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla + k^2) u^i(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.33)$$

ή της εξίσωσης:

$$\left[\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla + \frac{k_A^2}{a^2(\hat{\mathbf{k}})} \right] u^i(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.34)$$

όπου ο παράγοντας $a(\hat{\mathbf{k}})$ δίνεται από την:

$$a(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}} = \frac{k_A}{k} \quad (3.35)$$

δηλώνει έναν ανισοτροπικό παράγοντα που φανερώνει την κατευθυντική διαμέριση του μοναδιαίου διανύσματος που επιβάλλει το μέσο διάδοσης (την προτίμηση του μέσου ως προς την διεύθυνση), ενώ ισχύει ακόμη πως:

$$a(\mathbf{k}) = k_A = ka(\hat{\mathbf{k}}). \quad (3.36)$$

Τον παράγοντα αυτό θα τον συναντήσουμε και αργότερα (βλ. κεφάλαιο 4.2 και 4.4).

Γίνεται ακόμη φανερό πως τελικά η τετραγωνική ρίζα του αντίστροφου δυαδικού που περιγράφει τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου μέσου είναι αυτή που είναι αρκετή για να ενσωματώσει τις ιδιότητες του χώρου (βλ. επίσης κεφάλαιο 2.2.1).

Αν γράψουμε το επίπεδο κύμα u^i στη μορφή που να περιέχει και την αρμονική χρονική εξάρτηση, έχουμε:

$$u^i(\mathbf{r}, t) = \exp\{ik\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r} - i\omega t\}. \quad (3.37)$$

Από εδώ και στο εξής επιβάλλουμε να είναι $\omega \in \mathbb{R}$, οπότε θα είναι $k \in I$, με $\text{Im} k \geq 0$, έτσι ώστε το κύμα να υπακούει στους φυσικούς περιορισμούς, δηλαδή να χάνει ενέργεια, καθώς ταξιδεύει σε ένα μέσο που παρουσιάζει απώλειες ενέργειας.

Τα φασικά μέτωπα του u^i θα είναι τα επίπεδα σταθερής φάσης αν:

$$k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r} - \omega t = 0 \quad (3.38)$$

και η διεύθυνση διάδοσης $\hat{\mathbf{k}}_a$ του κύματος u^i είναι:

$$\hat{\mathbf{k}}_a = \frac{\nabla(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r})}{\left|\nabla(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r})\right|}. \quad (3.39)$$

Αλλά ισχύει πως:

$$\nabla(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r}) = k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2}, \quad (3.40)$$

ή λόγω της (3.25) πως:

$$\nabla(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}}{a(\hat{\mathbf{k}})} \quad (3.41)$$

Οπότε, τελικά προκύπτει πως:

$$\left| \nabla(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r}) \right| = \frac{a(\mathbf{k}_A)}{a(\hat{\mathbf{k}})} \quad (3.42)$$

με

$$a(\mathbf{k}_A) = k_A a(\hat{\mathbf{k}}_A) = a(\mathbf{k}) a(\hat{\mathbf{k}}_A) = k a(\hat{\mathbf{k}}) a(\hat{\mathbf{k}}_A) = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{k}_A \mathbf{k}_A} \quad (3.43)$$

και τώρα η διεύθυνση διάδοσης $\hat{\mathbf{k}}_a$ του επίπεδου κύματος γράφεται:

$$\hat{\mathbf{k}}_a = \frac{a(\mathbf{k})}{a(\mathbf{k}_A)} \hat{\mathbf{k}}_A \cdot \hat{\mathbf{A}}^{-1/2} = \frac{\mathbf{k}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2}}{a(\mathbf{k}_A)} = \frac{\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2}}{a(\hat{\mathbf{k}}_A)} \quad (3.44)$$

Από την εξίσωση της ισοφασικής επιφάνειας (3.38) έχουμε πως:

$$\frac{d(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r})}{dt} = \omega, \quad (3.45)$$

ή πως

$$\nabla(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \omega, \quad (3.46)$$

όπου $\dot{\mathbf{r}}$ είναι η διανυσματική ταχύτητα.

Συνεπώς, η φασική ταχύτητα c είναι:

$$c = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\nabla(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r})}{\left| \nabla(k\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{r}) \right|}, \quad (3.47)$$

ή λόγω των (3.42) και (3.46):

$$c = \frac{a(\hat{\mathbf{k}})}{a(\mathbf{k}_A)} \omega, \quad (3.48)$$

ή

$$\omega = cka(\hat{\mathbf{k}}_A), \quad (3.49)$$

ή

$$\omega^2 = c^2 k^2 (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{k}}_A \hat{\mathbf{k}}_A), \quad (3.50)$$

ή

$$\omega^2 = c^2 \frac{k^2}{k_A^2} (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{k}_A \mathbf{k}_A) = c^2 \frac{a^2(\mathbf{k}_A)}{a^2(\hat{\mathbf{k}})}. \quad (3.51)$$

Η τελευταία σχέση είναι η σχέση διασποράς για την περίπτωση του ανισότροπου μέσου και είναι αυτή που συνδέει το κυματικό διάνυσμα $\mathbf{k}_A$ με τη γωνιακή συχνότητα ω , ενώ η έκφραση (3.49) (ή (3.50)) βρίσκεται σε αντιστοιχία με την αντίστοιχη έκφραση του ισότροπου χώρου [13], όπου εδώ εμφανίζεται και ο παράγοντας διαμέρισης του $\hat{\mathbf{k}}_A$.

Τα επίπεδα κύματα ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz (2.12) (ή την (3.22) σε ολόκληρο τον πραγματικό χώρο), όμως δεν ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας (3.20), σε αντίθεση με τις σημειακές πηγές, που ακολουθούν, οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας, αλλά είναι λύσεις της τροποποιημένης Helmholtz (3.22) ή (2.12) στο σύνολο του $\mathbb{R}^3$ που δεν περιέχει αυτές.

3.4.2. Η σημειακή πηγή στον ανισότροπο χώρο

Το πεδίο που δημιουργείται από μια σημειακή πηγή στη θέση $\mathbf{r}_0$ έχει την μορφή [28]:

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \frac{\exp\left\{ik\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}\right\}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}} \quad (3.52)$$

και περιγράφει τη θεμελιώδη λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz:

$$(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla + k^2)G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \quad (3.53)$$

όπου δ είναι το συναρτησιακό του Dirac στη θέση $\mathbf{r}_0$.

Η (3.52) γράφεται επίσης:

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\left\{ik\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}\right\}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}:(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}}, \quad (3.54)$$

όπου $\tilde{\mathbf{A}}^{(2)}$ (βλ. Παράρτημα) είναι το δυαδικό αναλλοίωτο του $\tilde{\mathbf{A}}$ [28], ή ακόμη:

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp\{ika(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\}}{\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}} a(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}, \quad (3.55)$$

όπου:

$$a(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} \quad (3.56)$$

το ανισότροπο μέτρο του $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$.

Αφού έχουμε θεωρήσει πως το δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}$ είναι πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο, τότε αυτό θα διαγωνοποιείται στο ορθογώνιο σύστημα των ιδιοδιανυσμάτων του (βλ. Παράρτημα), δηλαδή:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \hat{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_i^T, \quad (3.57)$$

όπου τα $\hat{\mathbf{x}}_i$, $i=1,2,3$ αποτελούν το ορθογώνιο σύστημα ιδιοδιανυσμάτων του $\tilde{\mathbf{A}}$, ενώ για τις ιδιοτιμές λ_i ισχύει η (2.48).

Τα κυματικά μέτωπα S_c που παράγονται από μια σημειακή πηγή που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ ορίζονται ως:

$$S_c = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid |G_A(\mathbf{r})| = c \right\}. \quad (3.58)$$

Από την (3.54) προκύπτει πως θα πρέπει:

$$4\pi c \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{(2)} : \mathbf{r} \mathbf{r}} = 1, \quad (3.59)$$

ή χρησιμοποιώντας την (3.57) (βλ. Παράρτημα):

$$16\pi^2 c^2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{\lambda_i} = 1, \quad (3.60)$$

όπου:

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad (3.61)$$

Η (3.60) δείχνει λοιπόν πως τα κυματικά μέτωπα S_c διαδίδονται στο χώρο με τη μορφή ελλειψοειδών με ημιάξονες:

$$\gamma_i = \frac{1}{4\pi c} \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}, \quad i=1,2,3 \quad (3.62)$$

και μάλιστα διαδίδονται σαν όμοια ελλειψοειδή, καθώς διατηρούν τις κύριες εκκεντρότητες, συμπεριφορά η οποία βρίσκεται σε συμφωνία με τον ανισότροπο χαρακτήρα του μέσου διάδοσης.

Εάν υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, πως:

$$0 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < +\infty, \quad (3.63)$$

τότε οι κύριες εκκεντρότητες θα δίνονται από τις:

$$e_{12} = \sqrt{\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1}}, \quad (3.64)$$

$$e_{13} = \sqrt{\frac{\gamma_1^2 - \gamma_3^2}{\gamma_1^2}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1}}, \quad (3.65)$$

$$e_{23} = \sqrt{\frac{\gamma_2^2 - \gamma_3^2}{\gamma_2^2}} = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2}}. \quad (3.66)$$

Από τις (3.64) - (3.66) παρατηρούμε πως οι κύριες εκκεντρότητες εξαρτώνται μόνο από τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, δηλαδή μόνο από τα χαρακτηριστικά του χώρου διάδοσης.

3.5. Τοποθέτηση βασικών προβλημάτων ανισότροπης σκέδασης

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα που έχουν παρουσιαστεί στα προηγούμενα υποκεφάλαια θα ορίσουμε ακολούθως τα κλασικά προβλήματα που συναντάμε στην ακουστική σκέδαση, χωρίς να αναλυθεί ξανά η φυσική σημασία των παραμέτρων.

Θεωρούμε ένα προσπίπτον πεδίο u^i με εξωτερικό κυματικό αριθμό k και ένα σκεδαστή V^- με σύνορο S . Αναζητάμε το ολικό εξωτερικό και το σκεδασμένο πεδίο, u^+ και u αντίστοιχα, τα οποία συνδέονται με την:

$$u^+(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + u^i(\mathbf{r}), \text{ στον } V^+, \quad (3.67)$$

ενώ το σκεδασμένο πεδίο ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στον ανισότροπο χώρο V^+ :

$$(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla + k^2)u(\mathbf{r}) = 0, \text{ στον } V^+, \quad (3.68)$$

καθώς επίσης και τη συνθήκη ακτινοβολίας

$$\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) - iku(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.69)$$

Επιπρόσθετα, όταν το πεδίο είναι μηδενικό στο εσωτερικό του σκεδαστή V^- θα πρέπει να ικανοποιείται και μια από τις παρακάτω συνθήκες:

Πρόβλημα Dirichlet:

$$u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S. \quad (3.70)$$

Πρόβλημα Neumann:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u^+(\mathbf{r}) = \frac{\partial u^+(\mathbf{r})}{\partial n_A} = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3.71)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια S διάνυσμα.

Πρόβλημα Robin:

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{r})}{\partial n_A} + ik\nu u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in S, \quad (3.72)$$

όπου ν η παράμετρος Robin (3.18).

Πρόβλημα Διαπερατότητας:

Εκτός από το ολικό εξωτερικό πεδίο u^+ αναζητάμε επίσης το εσωτερικό πεδίο u^- στον σκεδαστή V^- , το οποίο σε αυτό το πρόβλημα δεν είναι μηδενικό και ικανοποιεί την ανισότροπη εξίσωση Helmholtz:

$$(\tilde{\mathbf{A}}_- : \nabla \nabla + k^2 \eta^2) u^-(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in V^-, \quad (3.73)$$

όπου $\tilde{\mathbf{A}}_-$ ένα πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο δυαδικό, διαφορετικό εν γένει από το $\mathbf{A}$, που περιγράφει τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου σκεδαστή, ενώ η είναι ο σχετικός δείκτης διάθλασης.

Τα πεδία u^+ και u^- θα πρέπει τώρα να ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S \quad (3.74)$$

και

$$\frac{\partial u^+(\mathbf{r})}{\partial n_A} = \beta \frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n_A}, \mathbf{r} \in S, \quad (3.75)$$

όπου:

$$\beta = \frac{\rho^+}{\rho^-} \frac{1 - i\omega \delta^+ \gamma^-}{1 - i\omega \delta^+ \gamma^+} \quad (3.76)$$

και ρ^- , δ^- , γ^- η μέση πυκνότητα μάζας, το ιζώδες συμπίεσης και το μέτρο συμπίεστότητας του σκεδαστή V^- και τα αντίστοιχα σύμβολα με δείκτη $^+$ για τον εξωτερικό χώρο V^+ .

3.6. Συναρτησιακά ενέργειας

Προκειμένου να παραγάγουμε εκφράσεις στο χωρό-χρόνο για τη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας και το διάνυσμα ροής ισχύος στην περίπτωση του ανισότροπου μέσου, χρησιμοποιούμε τις βασικές σχέσεις (2.1) και (2.2) τις οποίες με τη βοήθεια και της (2.10) γράφουμε ως:

$$\gamma \dot{U} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.77)$$

$$\nabla U = \delta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \rho \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{V}}. \quad (3.78)$$

Υποθέτουμε πως τα μεγέθη U και V είναι μιγαδικά, παρ'όλο που οι φυσικές παράμετροι ανακτώνται χρησιμοποιώντας τα πραγματικά τους μέρη.

Πολλαπλασιάζουμε την (3.77) με τη συζυγή της U , U^* και προκύπτει:

$$\gamma U^* \dot{U} + \nabla \cdot (U^* \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla U^*. \quad (3.79)$$

Ακολουθώντας, αντικαθιστώντας τη συζυγή της (3.78) στην (3.79) έχουμε:

$$\rho \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{V}}^* + \gamma U^* \dot{U} + \nabla \cdot (U^* \mathbf{V}) = \delta \mathbf{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}^*) \quad (3.80)$$

και προσθέτοντας στην τελευταία σχέση τη συζυγή της, οδηγούμαστε στην:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} |\mathbf{V}_A|^2 + \frac{\gamma}{2} |U|^2 \right) + \nabla \cdot \text{Re} \{ U \mathbf{V}^* \} = \delta \text{Re} \{ \mathbf{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}^*) \}, \quad (3.81)$$

όπου:

$$|\mathbf{V}_A|^2 = (\tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{V}) \cdot (\tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \cdot \mathbf{V}^*) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{V} \mathbf{V}^*. \quad (3.82)$$

Αναγνωρίζοντας τους όρους $\frac{\rho}{2} |\mathbf{V}_A|^2$ ως κινητική ενέργεια και $\frac{\gamma}{2} |U|^2$ ως ενέργεια δυναμικού, ορίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας ως:

$$\mathcal{W}_A(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}_A(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{\gamma}{2} |U(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (3.83)$$

και τη διανυσματική συνάρτηση ροής ισχύος ως:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ U(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t) \}, \quad (3.84)$$

όπου η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας μετράται σε μονάδες ενέργειας ανά μονάδα όγκου και η διανυσματική συνάρτηση ροής ισχύος σε μονάδες ισχύος ανά μονάδες επιφάνειας.

Από τα παραπάνω προκύπτει η αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}_A(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}, t) = \delta \text{Re} \{ \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t)) \} \quad (3.85)$$

σύμφωνα με την οποία η χρονική μεταβολή της πυκνότητας ενέργειας και η ροή πυκνότητας ενέργειας που συμβαίνει σε έναν όγκο, καθώς διαδίδεται το πεδίο U , ισούται με το ρυθμό που χάνεται η ενέργεια, εξαιτίας του ιξώδους συμπίεστότητας και περιγράφεται από τον όρο $\delta \text{Re} \{ \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}^*(\mathbf{r}, t)) \}$.

Θεωρώντας στη συνέχεια και εδώ κυματικά πεδία που μεταβάλλονται αρμονικά στο χρόνο, τότε η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας και η διανυσματική συνάρτηση ροής ισχύος γράφονται αντίστοιχα

$$W_A(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{2} |\mathbf{v}_A(\mathbf{r})|^2 + \frac{\gamma}{2} |u(\mathbf{r})|^2 \quad (3.86)$$

και

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \text{Re} \{ u(\mathbf{r}) \mathbf{v}^*(\mathbf{r}) \}, \quad (3.87)$$

όπου τα $\mathbf{v}_A(\mathbf{r})$, $u(\mathbf{r})$ και $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ είναι οι χωρικές εξαρτήσεις των $\mathbf{V}_A(\mathbf{r}, t)$, $U(\mathbf{r}, t)$ και $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ αντίστοιχα.

Από τις παραπάνω σχέσεις παρατηρούμε πως στην περίπτωση του ανισότροπου μέσου μόνο η συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας διαφέρει από την αντίστοιχη του ισότροπου μέσου, και πιο ειδικά, μόνο η κινητική ενέργεια εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του μέσου, τα οποία εισάγονται μέσω του μέτρου της ταχύτητας και του ανισότροπου δυαδικού $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$.

Χρησιμοποιώντας την (3.11), η έκφραση του διανύσματος ροής ισχύος μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\rho} \operatorname{Re} \left\{ i(1+i\omega\gamma\delta) u \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u^* \right\}, \quad (3.88)$$

ή ως:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\rho} \operatorname{Im} \left\{ (1-i\omega\gamma\delta) u^* \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u \right\}. \quad (3.89)$$

Από τα παραπάνω υπολογίζουμε πως η ροή ενέργειας σε μια διεύθυνση $\hat{\mathbf{a}}$ είναι $\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{I}$, ή

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\rho} \operatorname{Im} \left\{ (1-i\omega\gamma\delta) u^* \frac{\partial u}{\partial n_A} \right\}, \quad (3.90)$$

αν $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα μιας επιφάνειας $\partial\Omega$, οπότε, τότε, κατά συνέπεια η ροή ενέργειας διαμέσου αυτής της επιφάνειας είναι:

$$\int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{I} \, ds = \frac{1}{\omega\rho} \operatorname{Im} \left\{ \int_{\partial\Omega} (1-i\omega\gamma\delta) u^* \frac{\partial u}{\partial n_A} \, ds \right\}. \quad (3.91)$$

Τοποθετώντας δηλαδή μια υποθετική σφαίρα που περιβάλλει το σκεδαστή μπορούμε να υπολογίσουμε πόση ενέργεια θα βγαίνει προς τα έξω.

Θέτοντας $\delta = 0$ στην (3.91) προκύπτει η αντίστοιχη έκφραση για την περίπτωση του μέσου που δεν παρουσιάζει απώλειες ενέργειας.

4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Προκειμένου να μελετήσουμε προβλήματα σκέδασης, όπως αυτά που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3.6 χρειαζόμαστε εκφράσεις που θα περιέχουν τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος. Για το λόγο αυτό στη συνέχεια θα βρούμε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του σκεδασμένου, του ολικού καθώς και του εσωτερικού πεδίου, u , u^+ και u^- αντίστοιχα, του προβλήματος που τοποθετήθηκε στο Κεφάλαιο 3.

Στις εκφράσεις αυτές αναπαριστώνται οι τιμές της λύσης και της θεμελιώδους λύσης καθώς και οι τιμές των κάθετων παραγώγων τους επάνω στο σύνορο του θεμελιώδους πεδίου. Επειδή για την περίπτωση της σκέδασης σε ανισότροπα μέσα που εξετάζουμε, ο βασικός τελεστής είναι ο ανισότροπος τελεστής Laplace $\nabla_A = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla \nabla = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla$ (2.14) και η μορφή της κάθετης παραγώγου είναι αυτή που έχει δοθεί στην (3.8), δηλαδή $\frac{\partial}{\partial n_A} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla$, χρειάζεται να βρεθεί η μορφή που

παίρνει η δεύτερη ταυτότητα Green, προκειμένου να εξάγουμε τις επιθυμητές αναπαραστάσεις.

4.1. Τροποποιημένη ταυτότητα Green

Πρόταση:

Για κάθε $u, v \in C^{(2)}(\Omega)$ ισχύει η παρακάτω ταυτότητα:

$$\int_{\Omega} \left[u \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v) - v \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u) \right] dv = \int_{\partial\Omega} \left[u \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v) - v \cdot (\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u) \right] ds, \quad (4.1)$$

όπου $\tilde{\mathbf{A}}$ ένα συμμετρικό και σταθερό δυαδικό.

Απόδειξη:

Ισχύει πως:

$$\nabla \cdot \left[v (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u) \right] = v \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u) + \nabla v \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u \quad (4.2)$$

και πως:

$$\nabla \cdot \left[u (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v) \right] = u \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v) + \nabla u \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v, \quad (4.3)$$

οπότε το ολοκλήρωμα $\int_{\Omega} \left[u \cdot \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v) - v \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u) \right] dv$ λόγω των (4.2) και (4.3)

καθώς επίσης και της συμμετρίας του δυαδικού $\tilde{\mathbf{A}}$ θα γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[v \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u) - u \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v) \right] dv &= \int_{\Omega} \left[v \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u - u \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v \right] dv \\ &= \int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[v \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u - u \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v \right] ds = \int_{\partial\Omega} \left[v (\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u) - u (\hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla v) \right] ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.2. Εξωτερικές αναπαραστάσεις και συνθήκη ακτινοβολίας

Έστω ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων είναι στο V^- και έστω $\mathbf{r}$ η θέση στην οποία ζητάμε τη λύση και $\mathbf{r}'$ η θέση ολοκλήρωσης.

Θεωρούμε μια σφαίρα S_R ακτίνας R , τοποθετημένη στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, τόσο μεγάλη ώστε να περιλαμβάνει στο εσωτερικό της το σκεδαστή V^- αλλά και το σημείο παρατήρησης $\mathbf{r} \in V^+$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.

Σχήμα 4. Σφαίρα που περιβάλλει το σκεδαστή.

Στην ταυτότητα (4.1) θεωρούμε ως u το σκεδασμένο πεδίο $u(\mathbf{r})$ το οποίο είναι λύση της εξίσωσης:

$$(\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla + k^2)u(\mathbf{r}) = 0, \text{ στον } V^+ \quad (4.5)$$

και ως v τη θεμελιώδη λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz:

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi \det \mathbf{A}} \frac{\exp\left\{ik\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}\right\}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}, \quad (4.6)$$

η οποία επιλύει την εξίσωση:

$$\left(\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla + k^2\right) G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \text{ στον } V^+ \quad (4.7)$$

καθώς και $\Omega = V_R^+$, οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} & -\int_S \left[u(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}')) \right] ds(\mathbf{r}') \\ & + \int_{S_R} \left[u(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}')) \right] ds(\mathbf{r}') \\ & = \int_{V_R^+} \left[u(\mathbf{r}') (\tilde{\mathbf{A}} : \nabla_{\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}'} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\tilde{\mathbf{A}} : \nabla_{\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}')) \right] dv(\mathbf{r}') \quad (4.8) \\ & = \int_{V_R^+} \left[u(\mathbf{r}') (-k^2 G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (-k^2 u(\mathbf{r}')) \right] dv(\mathbf{r}') \\ & = -u(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

όπου το διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}'$ στην επιφάνεια S έχει θεωρηθεί προς την εξωτερική κατεύθυνση. Στη σχέση (4.8) περιέχεται το ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια S_R το οποίο μηδενίζεται καθώς $R \rightarrow \infty$, ως απόρροια της συνθήκης ακτινοβολίας.

Στην πραγματικότητα από την απαίτηση να μηδενίζεται αυτό το ολοκλήρωμα στο όριο θα προκύψει η κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας για την περίπτωση του ανισότροπου μέσου, που ολοκληρώνει την τοποθέτηση του προβλήματος σκέδασης (βλ. κεφάλαιο 3.3).

Έτσι ακολούθως δουλεύουμε στο ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια S_R και υπολογίζουμε την κλίση της θεμελιώδους λύσης. Αναλυτικά έχουμε:

Θέτουμε προσωρινά για ευκολία γραφής

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (4.9)$$

και τότε θα είναι:

$$\nabla_{\mathbf{r}'} = -\nabla_{\mathbf{R}}. \quad (4.10)$$

Επίσης είναι:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{R}} \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}} &= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}} \nabla_{\mathbf{R}} (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}) = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}} \nabla_{\mathbf{R}} [\mathbf{R} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{R})] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}} (\nabla_{\mathbf{R}} \mathbf{R}) \cdot (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{R}) + \nabla_{\mathbf{R}} (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}} 2\tilde{\mathbf{I}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

καθώς το δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}^{-1}$ είναι συμμετρικό. Οπότε θα είναι:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{R}} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla_{\mathbf{R}} \frac{\exp\left\{ik\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}\right\}}{4\pi \det \tilde{\mathbf{A}} \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}} \\ &= \left(ik - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}}\right) \frac{\exp\left\{ik\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}\right\}}{4\pi \sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}} \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}} \nabla_{\mathbf{R}} \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

η οποία λόγω της (4.11) γράφεται τώρα:

$$\nabla_{\mathbf{R}} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(ik - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}}\right) \frac{\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{R}\mathbf{R}}} G_A(\mathbf{R}) \quad (4.13)$$

και τελικά λόγω και της (4.10) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= - \left[\frac{ik}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \right] \\ &\quad \hat{\mathbf{r}}' \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}') \frac{\exp\left\{ik\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \right\}}{4\pi \sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}} \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Συνεπώς το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην S_R γράφεται:

$$\begin{aligned}
& \int_{S_R} \left[u(\mathbf{r}') \left(\hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left(\hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}') \right) \right) \right] ds(\mathbf{r}') \\
&= \frac{1}{4\pi \sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_{S_R} \left[\left(\frac{u(\mathbf{r}')}{a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} - iku(\mathbf{r}') \right) \hat{\mathbf{r}}' \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}') - a(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}') \right] \\
& \quad \frac{\exp\{ika(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\}}{a^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} ds(\mathbf{r}'), \tag{4.15}
\end{aligned}$$

όπου το $a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ είναι η ανισοτροπική συνάρτηση απόστασης, όπως αυτή έχει ήδη ορισθεί από την (2.35).

Έπειτα χρειαζόμαστε τις ασυμπτωτικές αναλύσεις των $a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, $\frac{1}{a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$, $\frac{1}{a^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ όπως επίσης και του $\exp\{ika(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\}$ καθώς $R=|\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$. Ειδικότερα έχουμε:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= R \left[\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \left(\frac{\mathbf{r}}{R} - \hat{\mathbf{r}}' \right) \left(\frac{\mathbf{r}}{R} - \hat{\mathbf{r}}' \right) \right]^{1/2} \\
&= R \left[\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}' - \frac{1}{R} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r}) + \frac{1}{R^2} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r} \right]^{1/2} \\
&= \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} R \left[1 - \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r})}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} \frac{1}{R} + \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r}}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} \frac{1}{R^2} \right]^{1/2} \\
&= \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} R \left[1 - \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r})}{2\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} \frac{1}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right] \\
&= \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} R - \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r})}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}} + O\left(\frac{1}{R}\right) \\
&= \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} R - \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}} + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \rightarrow \infty, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} &= \frac{1}{R} \left[\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \left(\frac{\mathbf{r}}{R} - \hat{\mathbf{r}}' \right) \left(\frac{\mathbf{r}}{R} - \hat{\mathbf{r}}' \right) \right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{R} \left[\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}' - \frac{1}{R} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r}) + \frac{1}{R^2} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r} \right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{R \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}} \left[1 - \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r})}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} \frac{1}{R} + \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r}}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} \frac{1}{R^2} \right]^{-1/2} \quad (4.17) \\
&= \frac{1}{R \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}} \left[1 + \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r})}{2 \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}} \frac{1}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{R \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} &= \frac{1}{R^2} \left[\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \left(\frac{\mathbf{r}}{R} - \hat{\mathbf{r}}' \right) \left(\frac{\mathbf{r}}{R} - \hat{\mathbf{r}}' \right) \right]^{-1} \\
&= \frac{1}{R^2} \left[\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}' - \frac{1}{R} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r}) + \frac{1}{R^2} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r} \right]^{-1} \quad (4.18) \\
&= \frac{1}{R^2 \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}} \left[1 - \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}' + \hat{\mathbf{r}}' \mathbf{r})}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} \frac{1}{R} + \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r}}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} \frac{1}{R^2} \right]^{-1} \\
&= \frac{1}{R^2 (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}')} + O\left(\frac{1}{R^3}\right), \quad R \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Τελικά το ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια S_R της (4.8) λόγω των (2.35), (4.16), (4.17) και (4.18) παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_R} \left[u(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}')) \right] ds(\mathbf{r}') = \\
&= \frac{1}{4\pi \det \tilde{\mathbf{A}}} \int_{S^2} \left[ikRu(\mathbf{r}') - \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} R (\hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}')) + O(1) \right] \\
&\quad \left[\frac{\exp\left\{ikR\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}\right\}}{R^2 (\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}')} + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \right] R^2 ds(\hat{\mathbf{r}}') \quad (4.19) \\
&= -\frac{1}{4\pi \det \tilde{\mathbf{A}}} \\
&\quad \int_{S^2} \left[\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} \hat{\mathbf{r}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}') - iku(\mathbf{r}') \right] \frac{\text{Rexp}\left\{ikR\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'}\right\}}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}' \hat{\mathbf{r}}'} ds(\hat{\mathbf{r}}').
\end{aligned}$$

Συνεπώς για να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα πάνω στην επιφάνεια S_R καθώς $R \rightarrow \infty$ θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας για ανισότροπα μέσα:

$$\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla} u(\mathbf{r}) - iku(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow \infty, \quad (4.20)$$

η οποία θα πρέπει να ισχύει ομοιόμορφα ως προς όλες τις κατευθύνσεις.

Συγκρίνοντας τη συνθήκη ακτινοβολίας που μόλις βρήκαμε για τα ανισότροπα μέσα με αυτή που ισχύει για τα ισότροπα [13], παρατηρούμε πως η επίδραση της ανισοτροπίας είναι φανερή μέσω της εισαγωγής του τελεστή:

$$\partial_r^A = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla} = a(\hat{\mathbf{r}}) \partial_{r_A} \quad (4.21)$$

αντί του τελεστή ∂_r που έχουμε στην περίπτωση της ισοτροπίας, όπου το $a(\hat{\mathbf{r}})$ ορίζεται από την (3.35) και:

$$\partial_{r_A} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla \quad (4.22)$$

κατ' αντιστοιχία με την (3.8). Δηλαδή η παρουσία των χαρακτηριστικών του μέσου γίνεται φανερή τόσο μέσα από την διευθυνόμενη παράγωγο όσο και μέσα από την κατευθυντική διαμέριση του μοναδιαίου διανύσματος, $a(\hat{\mathbf{r}})$.

Έτσι, στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος σκέδασης με την προσθήκη της συνθήκης ακτινοβολίας (4.20).

Τέλος, μετά την παραδοχή της συνθήκης (4.20) το σκεδασμένο πεδίο θα ικανοποιεί πλέον, λόγω της (4.8), την παρακάτω ολοκληρωτική αναπαράσταση στο V^+ :

$$u(\mathbf{r}) = \int_S \left[u(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u(\mathbf{r}')) \right] ds(\mathbf{r}'). \quad (4.23)$$

Προσθέτοντας τώρα στην παραπάνω σχέση το προσπίπτον πεδίο, προκύπτει η ολοκληρωτική αναπαράσταση για το ολικό πεδίο u^+ στο V^+ :

$$u^+(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + \int_S \left[u^+(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}')) \right] ds(\mathbf{r}'), \quad (4.24)$$

όπου η $G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ δίνεται από την (4.6).

4.3. Εσωτερική αναπαράσταση

Θεωρούμε μικρή σφαίρα S_ε ακτίνας ε , τοποθετημένη στο σημείο παρατήρησης $\mathbf{r}$, η οποία είναι αρκετά μικρή ώστε να περιέχεται στο εσωτερικό του σκεδαστή V^- , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.

Σχήμα 5. Σφαίρα που περιέχεται στον σκεδαστή.

Εφαρμόζουμε την ταυτότητα (4.4) για το εσωτερικό πεδίο (με $u = u^-(\mathbf{r})$) το οποίο είναι λύση της εξίσωσης:

$$(\tilde{\mathbf{A}}_- : \nabla \nabla + k^2 \eta^2) u^-(\mathbf{r}) = 0, \text{ στον } V^- \quad (4.25)$$

και τη θεμελιώδη λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz με ($v = G_A(\mathbf{r})$):

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi \sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \frac{\exp \left\{ ik\eta \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \right\}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}, \quad (4.26)$$

η οποία επιλύει την εξίσωση:

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}_- : \nabla \nabla + k^2 \eta^2\right) G_{A_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \text{ στον } V^-, \quad (4.27)$$

οπότε στον όγκο $\Omega = V^-$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{V^-} \left[u^-(\mathbf{r}') \tilde{\mathbf{A}}_- : \nabla_{\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}'} G_{A_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_{A_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tilde{\mathbf{A}}_- : \nabla_{\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \right] dv(\mathbf{r}') = \\ & = \int_S \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \left[u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G_{A_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_{A_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') \\ & + \int_{S_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \left[u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G_{A_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_{A_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Κάνοντας και εδώ χρήση της (4.9) και της (4.10) και με την βοήθεια της (4.13) (μετά από τις κατάλληλες τροποποιήσεις) το ολοκλήρωμα επάνω στην επιφάνεια S_ε γράφεται:

$$\begin{aligned} & \int_{S_\varepsilon} \hat{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \left[-u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{R}} G_{A_-}(\mathbf{R}) - G_{A_-}(\mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot u^-(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{R}) = \\ & = \int_{S^2} \left[\frac{-u^-(\mathbf{r}')}{\varepsilon \tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}} + \frac{iku^-(\mathbf{r}')}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}}} + \hat{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot u^-(\mathbf{r}') \right] G_{A_-}(\varepsilon \hat{\mathbf{R}}) \varepsilon^2 ds(\hat{\mathbf{R}}) \\ & = \int_{S^2} \left[-\frac{u^-(\mathbf{r}')}{\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}} + \frac{ik\varepsilon u^-(\mathbf{r}')}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}}} + \varepsilon \hat{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot u^-(\mathbf{r}') \right] \\ & \quad \frac{\exp\left\{ik\varepsilon \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}}\right\}}{4\pi \sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}_-} \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}}} ds(\hat{\mathbf{R}}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην S_ε δίνει:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \hat{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \left[-u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{R}} G_{A_-}(\mathbf{R}) - G_{A_-}(\mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot u^-(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{R}) \\ & = \frac{u^-(\mathbf{r}')}{4\pi \sqrt{\det \mathbf{A}}} \int_{S^2} \left(\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}} \right)^{-3/2} ds(\hat{\mathbf{R}}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Όμως όπως αποδεικνύεται στο κεφάλαιο 2.2 ισχύει από την (2.57) πως:

$$\int_{S^2} (\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})^{-3/2} ds(\hat{\mathbf{R}}) = 4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}_-} \quad (4.31)$$

και η (4.30) δίνει τελικά:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S\varepsilon} \hat{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \left[-u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{R}} G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{R}) - G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot u^-(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{R}) \\ = \frac{u^-(\mathbf{r})}{4\pi\sqrt{\det \mathbf{A}}} \int_{S^2} (\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}})^{-3/2} ds(\hat{\mathbf{R}}) = u^-(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ορίου της (4.32) καθώς επίσης και τις (4.25) και (4.27), η (4.29) μας δίνει την ακόλουθη ολοκληρωτική αναπαράσταση για το εσωτερικό πεδίο:

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) = \int_S \left[G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}')) \right. \\ \left. - u^-(\mathbf{r}') (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \right] ds(\mathbf{r}'), \mathbf{r} \in V^- \end{aligned} \quad (4.33)$$

όπου η $G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ δίνεται από την (4.26).

Οι σχέσεις (4.24) και (4.33) αποτελούν τις πιο γενικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για το ολικό και το εξωτερικό πεδίο αντίστοιχα, γιατί είναι πιο εύκολο να εφαρμοστούν σε αυτές οι συνοριακές συνθήκες που συνήθως τις έχουμε για το ολικό πεδίο u^+ . Έτσι όταν εισάγουμε τις συνοριακές συνθήκες (3.70)-(3.72) στην έκφραση (4.24) προκύπτουν οι ακόλουθες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για τις λύσεις των τεσσάρων βασικών προβλημάτων που ισχύουν $\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$:

Πρόβλημα Dirichlet:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) - \int_S G_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u^+(\mathbf{r}')}{\partial n'_A} ds(\mathbf{r}'). \quad (4.34)$$

Πρόβλημα Neumann:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + \int_S u^+(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'_A} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'). \quad (4.35)$$

Πρόβλημα Robin:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + \int_S u^+(\mathbf{r}') \left[\frac{\partial}{\partial n'_A} + ikv \right] G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'). \quad (4.36)$$

Πρόβλημα Διαπερατότητας:

Για το πρόβλημα διαπερατότητας χρειαζόμαστε την ολοκληρωτική αναπαράσταση τόσο του ολικού πεδίου όσο και του εσωτερικού πεδίου, δηλαδή τις (4.24) και (4.33) οι οποίες περιέχουν τις συνοριακές τιμές των u^+ και u^- όπως και των τροποποιημένων κάθετων παραγώγων τους αν και λόγω της ισχύος των συνθηκών διαπερατότητας (3.74) και (3.75) πλέον παραμένουν άγνωστες μόνο δύο ποσότητες πάνω στην επιφάνεια. Έτσι, η (4.24) μπορεί να γραφτεί:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + \int_S \left[u^-(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'_A} G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \beta G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'_A} u^-(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'). \quad (4.37)$$

4.4. Απομακρυσμένο πεδίο και πλάτος σκέδασης

Από τις εκφράσεις (4.24) και (4.33) είναι σαφές πως η γνώση των τιμών των πεδίων και των τροποποιημένων κάθετων παραγώγων τους στο σύνορο του σκεδαστή καθιστά γνωστό τα πεδία σε οποιοδήποτε σημείο του $\mathbb{R}^3$. Δηλαδή οι τιμές του πεδίου και της τροποποιημένης κάθετης παραγώγου του πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή S μεταφέρουν όλες τις πληροφορίες που αφορούν το ίδιο το πεδίο, ενώ υπενθυμίζουμε πως το πρόβλημα της αντίστροφης σκέδασης είναι η ανάκτηση αυτών των πληροφοριών από τη γνώση των τιμών του πεδίου.

Προς την κατεύθυνση αυτή θα εφαρμοστεί στη συνέχεια ασυμπτωτική ανάλυση στην έκφραση του σκεδασμένου πεδίου, έτσι ώστε να προκύψει η συνάρτηση που μεταφέρει όλη την πληροφορία στο απομακρυσμένο πεδίο.

Οι κύριες συνεισφορές προκύπτουν από τις G_A και $\frac{\partial}{\partial n_A} G_A$, όμως λόγω των (4.13), (4.9) και (2.35), η (4.24) γράφεται επίσης:

$$u(\mathbf{r}) = \int_S \left[u^+(\mathbf{r}') \mathbf{n}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\frac{1}{a^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} - \frac{ik}{a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \right) - \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}') \right] G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'). \quad (4.38)$$

Επειδή όμως είναι:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = r^2 \left(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} \right) \left[1 - \frac{1}{r} \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}' + \mathbf{r}'\hat{\mathbf{r}})}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}} + \frac{1}{r^2} \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \mathbf{r}'\mathbf{r}'}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}} \right], \quad (4.39)$$

με τη βοήθεια της (4.16) θα έχουμε πως:

$$a(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = r \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}} \left[1 - \frac{1}{r} \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'}{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right], \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.40)$$

η οποία περιγράφει ουσιαστικά πως από το άπειρο το (τροποποιημένο) μέτρο του $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ φαίνεται να είναι όσο το (τροποποιημένο) μέτρο του $\mathbf{r}$ μείον την (τροποποιημένη) προβολή του $\mathbf{r}'$ στο $\mathbf{r}$.

Ισχύει ακόμη:

$$\exp\{ika(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} = \exp\left\{-ik \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}}\right\} \exp\{ikr\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}\}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.41)$$

Από την (4.17) έχουμε επίσης πως:

$$a^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (4.42)$$

και χρησιμοποιώντας τις (4.6), (4.41) και (4.42) προκύπτει η συμπεριφορά της G_A στο απομακρυσμένο πεδίο:

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \frac{\exp\{ikr\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}\}}{r\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} \exp\left\{-ik\frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}}\right\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (4.43)$$

Ο πρώτος όρος $\frac{\exp\{ikr\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}\}}{r\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}}$ της σχέσης αυτής περιγράφει την ακτινική εξάρτηση, ενώ ο δεύτερος όρος που περιέχει και το $\exp\left\{-ik\frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}}\right\}$ περιγράφει τη γωνιακή εξάρτηση, καθώς ο πρώτος όρος εξαρτάται μόνο από το μέτρο (ή και την κατευθυντική διαμέριση του μοναδιαίου διανύσματος στον ανισότροπο χώρο) και όχι από τον προσανατολισμό, ενώ ο δεύτερος αποτελεί διόρθωση στην φάση, επειδή δεν περιέχει καμία εξάρτηση από το $\mathbf{r}$, παρά μόνο από τον προσανατολισμό $\hat{\mathbf{r}}$.

Από την (4.18) έχουμε επίσης το ανάπτυγμα:

$$a^{-2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2(\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (4.44)$$

και λαμβάνοντας υπόψη τις (4.42), (4.43) και (4.44), η (4.38) γράφεται:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\ & \int_s \left\{ \mathbf{n}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') u^+(\mathbf{r}') \left[\left(\frac{1}{r^2(\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}})} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{ik}{r\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} \right) O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \right. \\ & \left. - \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}') \right\} \left[\frac{\exp\{ikr\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}\}}{r\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} \exp\left\{-ik\frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1}:\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}}\right\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.45)$$

ή

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_s \left\{ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r}'}{r} \right) u^+(\mathbf{r}') \right. \\
& \left[-\frac{ik}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} \frac{\exp\{ikr\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}'\}}{r\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} \exp\left\{-\frac{ik\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}}\right\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \\
& - \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}') \} \\
& \left[\frac{\exp\{ikr\sqrt{\mathbf{A}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}\}}{r\sqrt{\mathbf{A}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} \exp\left\{-ik \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}}\right\} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] ds(\mathbf{r}')
\end{aligned} \quad (4.46)$$

οπότε τελικά προκύπτει πως:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) = & -\frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \frac{\exp\{ikr\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}\}}{r\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} \\
& \int_s \left[\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} u^+(\mathbf{r}') \frac{ik}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}} + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}') \right] \exp\left\{-\frac{ik(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}')}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}}}\right\} ds(\mathbf{r}') \\
& + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty.
\end{aligned} \quad (4.47)$$

Συνεπώς, το σκεδασμένο πεδίο μακριά από το σκεδαστή θα έχει την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$u(\mathbf{r}) = g_A(\hat{\mathbf{r}}) h(ka(\hat{\mathbf{r}})r) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (4.48)$$

όπου $g_A(\hat{\mathbf{r}})$ το ανισότροπο πλάτος σκέδασης και ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}
g_A(\hat{\mathbf{r}}) = & -\frac{ik}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_s \hat{\mathbf{n}}' \cdot \left[\hat{\mathbf{r}} u^+(\mathbf{r}') \frac{ik}{a(\hat{\mathbf{r}})} + \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}') \right] \exp\left\{-\frac{ik(\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}')}{a(\hat{\mathbf{r}})}\right\} ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned} \quad (4.49)$$

με:

$$h(ka(\hat{\mathbf{r}})r) = \frac{\exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{ika(\hat{\mathbf{r}})r}, \quad (4.50)$$

να δηλώνει την τροποποιημένη ακτινική θεμελιώδη λύση για σημειακή πηγή τοποθετημένη στην αρχή, ενώ το $a(\hat{\mathbf{r}})$ δίνεται από την (3.35).

Η συνάρτηση g_A είναι πολύ σημαντική συνάρτηση, καθώς μεταφέρει όλη την πληροφορία για τα χαρακτηριστικά του σκεδαστή και εξαρτάται μόνο από τη διεύθυνση και το προσπίπτον πεδίο, μέσω του k , αλλά και από το δυαδικό που μεταφέρει τα χαρακτηριστικά του μέσου, όπως ήταν αναμενόμενο. Ακόμη, έχει τις διαστάσεις του σκεδασμένου πεδίου, δηλαδή μονάδες δύναμης ανά μονάδες επιφάνειας (ή μονάδες ενέργειας ανά μονάδες όγκου) και εξαρτάται μόνο από τη διεύθυνση πρόσπτωσης και τη διεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{r}}$. Ουσιαστικά περιγράφει την απόκριση του σκεδαστή στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ εξαιτίας της διέγερσης που προκαλείται από το προσπίπτον κύμα (αν αυτό είναι επίπεδο τότε εξαιτίας της διέγερσης που προκαλεί το επίπεδο κύμα, βλ. κεφάλαιο 5.1.2).

Παρατηρούμε, επίσης, πως το g_A εξαρτάται από τη θέση παρατήρησης μόνο μέσω του $\hat{\mathbf{r}}$, δηλαδή από τον προσανατολισμό της θέσης $\hat{\mathbf{r}}$ και όχι μέσω της απόστασης από το σκεδαστή. Συνεπώς, το κύμα φαίνεται από μακριά σαν ελλειψοειδές με πλάτος g_A , δηλαδή το κύμα «ταξιδεύει» σαν ελλειψοειδές και γειτονικά σημεία πάνω στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς αυτού πάλλονται με το δικό τους πλάτος.

Δηλαδή, μακριά από το σκεδαστή το κύμα φαίνεται να προέρχεται από σημειακή πηγή $h(ka(\hat{\mathbf{r}})r)$ με πλάτος $g_A(\hat{\mathbf{r}})$, το οποίο ενσωματώνει τη γεωμετρία του σκεδαστή μέσω του επιφανειακού ολοκληρώματος και του κάθετου διανύσματος αλλά και τη φυσική του σκεδαστή μέσω του k και των τιμών του ολικού πεδίου και της κάθετης παραγώγου της πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή (οι οποίες τιμές σχετίζονται με το είδος του σκεδαστή – σκληρός, μαλακός, διαπερατός κ.λπ. -).

Ακόμη, η σημαντικότητα του πλάτους σκέδασης έγκειται στο ότι περιέχει όλα τα γωνιακά χαρακτηριστικά του σκεδασμένου απομακρυσμένου πεδίου και δεν μεταβάλλεται με το $\mathbf{r}$. Με άλλα λόγια, εάν το $\mathbf{r}$ είναι αρκετά μεγάλο, τότε όλα τα χαρακτηριστικά της αλληλεπίδρασης του εμποδίου με το προσπίπτον πεδίο περιέχονται στην g_A , ενώ η συνάρτηση που περιγράφει την ακτινική εξάρτηση $h(ka(\hat{\mathbf{r}})r)$ είναι ίδια για όλους τους σκεδαστές. Δηλαδή, αλλαγή σκεδαστή είτε στη γεωμετρία (π.χ. S), είτε στη φυσική (π.χ. συνοριακές συνθήκες), θα γίνει αισθητή μόνο από την g_A . Αντίστροφα, το αν η παρατήρηση γίνεται στο απομακρυσμένο πεδίο ή όχι καθορίζεται από τη συγκεκριμένη μορφή του σκεδασμένου πεδίου ως γινόμενο της συνάρτησης g_A που εξαρτάται από το σκεδαστή και τα γωνιακά χαρακτηριστικά και της καθορισμένης ακτινικής συνάρτησης h .

Τέλος, επισημαίνουμε πως τα χαρακτηριστικά του ανισότροπου μέσου περιέχονται και στις δύο συναρτήσεις g_A και h και επηρεάζουν την κάθετη παράγωγο και το μέτρο.

4.5. Ενεργειακές διατομές

Ένα κύμα χαρακτηρίζεται από το πλάτος, τη φάση και τον κυματικό του αριθμό. Δεδομένου ότι ο κυματικός αριθμός του σκεδασμένου κύματος είναι ίδιος με τον κυματικό αριθμό του προσπίπτοντος, όλη η νέα πληροφορία μεταφέρεται από το πλάτος και τη φάση του σκεδασμένου πεδίου. Επειδή όμως το πλάτος ενός κυματικού πεδίου σχετίζεται με την ενέργεια που αυτό μεταφέρει (η οποία είναι εύκολο να μετρηθεί, ενώ αντίθετα η φάση όχι), η καινούρια πληροφορία μεταφέρεται κατά συνέπεια κυρίως από το πλάτος.

Ένα επίπεδο προσπίπτον πεδίο έχει την ίδια ενέργεια σε κάθε ισοφασική επιφάνεια και επειδή η ενέργεια αυτή είναι πολύ μεγάλη, γι' αυτό αναφερόμαστε συνήθως σε πυκνότητα ενέργειας και κατ' επέκταση για ροή ενέργειας, όρος στον οποίο παίζει ρόλο και η διεύθυνση.

Αν ο σκεδαστής είναι διαπερατός και το κύμα διαδίδεται επίσης στο V^- ($\delta^- > 0$), τότε μέρος της ενέργειας απορροφάται εκεί και η θερμοκρασία του σκεδαστή αυξάνεται. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση που το κύμα δε διαπερνά τον σκεδαστή, δηλαδή, $\delta^+ = 0$ και ζητάμε την κατανομή της ενέργειας που σκεδάζεται όταν γνωρίζουμε την πυκνότητα της ενέργειας του προσπίπτοντος.

Θεωρούμε λοιπόν στη συνέχεια την ακουστική ροή ισχύος του σκεδασμένου πεδίου που οφείλεται σε ένα επίπεδο προσπίπτον κύμα (3.27) στην περιοχή ακτινοβολίας (ή περιοχή απομακρυσμένου πεδίου) και τότε η ροή ισχύος στη διεύθυνση $\mathbf{r}$ θα δίνεται (λόγω της (3.89)) από την:

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\rho^+} \text{Im} \left\{ u^*(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) \right\}. \quad (4.51)$$

Επίσης λόγω της (3.27) θα ισχύει επίσης:

$$\nabla u^i = ik \hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} \exp \left\{ ik \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} : \hat{\mathbf{k}}_A \mathbf{r} \right\}, \quad (4.52)$$

ή με την βοήθεια της (3.31):

$$\nabla u^i = ik \frac{\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}}{a(\hat{\mathbf{k}})} \exp \left\{ ik \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2} : \hat{\mathbf{k}}_A \mathbf{r} \right\}. \quad (4.53)$$

Άρα η ακουστική πυκνότητα του επίπεδου κύματος είναι:

$$\mathbf{I}^i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\rho^+} \text{Im} \left\{ ik \frac{\hat{\mathbf{k}}}{a(\hat{\mathbf{k}})} \right\}, \quad (4.54)$$

ή

$$\mathbf{I}^i(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k}}{\omega\rho^+ a(\hat{\mathbf{k}})}, \quad (4.55)$$

ενώ η ακουστική πυκνότητα κατά τη διεύθυνση διάδοσης (3.44) είναι ίση με:

$$\hat{\mathbf{k}}_a \cdot \mathbf{I}^i(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_A \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1/2}}{a(\hat{\mathbf{k}}_A)} \cdot \mathbf{I}^i(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_A}{\omega \rho^+ a(\hat{\mathbf{k}}_A) a(\hat{\mathbf{k}})}, \quad (4.56)$$

ή

$$\hat{\mathbf{k}}_a \cdot \mathbf{I}^i(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k}}{\omega \rho^+ a(\hat{\mathbf{k}}_A)}, \quad (4.57)$$

όπου τα $a(\hat{\mathbf{k}})$ και $a(\hat{\mathbf{k}}_A)$ δίνονται από τις (3.35) (ή (3.36)) και (3.43) αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως η ποσότητα αυτή είναι σταθερή, κάτι που ήταν αναμενόμενο καθώς αναφερόμαστε σε επίπεδο που είναι ανεξάρτητο της θέσης. Επιπλέον, η ποσότητα $\hat{\mathbf{k}}_a \cdot \mathbf{I}^i$ δεν εξαρτάται από τη θέση στο επίπεδο, καθώς η προβολή της πυκνότητας ενέργειας στη διεύθυνση διάδοσης είναι πεπερασμένη πυκνότητα ενέργειας.

Το σκεδασμένο κύμα στην περιοχή ακτινοβολίας όπου διαδίδεται κατά την ακτινική διεύθυνση θα έχει την ακτινική ένταση (θεωρώντας προς τα έξω τη ροή του σκεδασμένου πεδίου):

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega \rho^+} \hat{\mathbf{r}} \cdot \text{Im} \left\{ u^*(\mathbf{r}) \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) \right\}, \quad (4.58)$$

ή

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega \rho^+} \text{Im} \left\{ u^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n_A} u(\mathbf{r}) \right\}. \quad (4.59)$$

Επειδή όμως $r \rightarrow \infty$, ισχύει η τροποποιημένη συνθήκη ακτινοβολίας (4.20), από την οποία έχουμε πως:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{a(\hat{\mathbf{r}})}{ik} \partial_{n_A} u(\mathbf{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.60)$$

ή

$$\partial_{n_A} u(\mathbf{r}) = \frac{ik}{a(\hat{\mathbf{r}})} u(\mathbf{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.61)$$

Οπότε είναι:

$$u^*(\mathbf{r}) \partial_{n_A} u(\mathbf{r}) = \frac{ik}{a(\hat{\mathbf{r}})} u^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{ik}{a(\hat{\mathbf{r}})} |u(\mathbf{r})|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (4.62)$$

και κατά συνέπεια η (4.59) γράφεται:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{k}{\omega \rho^+ a(\hat{\mathbf{r}})} |u(\mathbf{r})|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (4.63)$$

Ακόμη χρησιμοποιώντας τη συμπεριφορά του σκεδασμένου πεδίου, όπως αυτή περιγράφεται στην (4.61), έχουμε:

$$\partial_{n_A} u(\mathbf{r}) = \frac{ikh(ka(\hat{\mathbf{r}})r)}{a(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (4.64)$$

ή λόγω της (4.50):

$$\partial_{n_A} u(\mathbf{r}) = \frac{\exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{a^2(\hat{\mathbf{r}})r} g_A(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (4.65)$$

Οπότε από τις (4.48), (4.50) και (4.65) προκύπτει πως:

$$\begin{aligned} u^*(\mathbf{r}) \partial_{n_A} u(\mathbf{r}) &= \\ &= \left[\frac{\exp\{-ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{-ika(\hat{\mathbf{r}})r} g_A^*(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \left[\frac{\exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{a^2(\hat{\mathbf{r}})r} g_A(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \\ &= \frac{i}{a^3(\hat{\mathbf{r}})kr^2} g_A(\hat{\mathbf{r}}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \end{aligned} \quad (4.66)$$

και η ακτινική ένταση (4.59) γράφεται τώρα λόγω της (4.66):

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega \rho^+ a^3(\hat{\mathbf{r}})kr^2} g_A(\hat{\mathbf{r}}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (4.67)$$

ή

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega \rho^+ a^3 (\hat{\mathbf{r}}) k r^2} |g_A(\hat{\mathbf{r}})|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.68)$$

Παρατηρούμε πως στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ η ροή ισχύος του σκεδαζόμενου πεδίου είναι ανάλογη του $\frac{1}{r^2}$, καθώς το πλάτος σκέδασης εξαρτάται μόνο από τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ και όχι από την απόσταση r . Έτσι η ροή ισχύος στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ μειώνεται με την απόσταση r , που σημαίνει πως το πεδίο έχει γεωμετρική απόσβεση. Αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα είναι πως, επειδή η ενέργεια είναι σταθερή, διότι δεν έχουμε απώλειες ενέργειας ($\delta^+ = 0$), καθώς αυτή κατανέμεται σε όλο και μεγαλύτερη επιφάνεια, η πυκνότητα ενέργειας μειώνεται σε αυτή τη διεύθυνση (προς το άπειρο).

Ακόμη, ο λόγος της ενέργειας που φεύγει στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ προς την ενέργεια που προσπίπτει στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{k}}_a$ είναι λόγω των (4.56) και (4.68):

$$\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{k}}_a \cdot \mathbf{I}^i(\mathbf{r})} = \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{a^3(\hat{\mathbf{r}}) k^2 r^2} |g_A(\hat{\mathbf{r}})|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (4.69)$$

ή λόγω των (4.56) και (4.63):

$$\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{k}}_a \cdot \mathbf{I}^i(\mathbf{r})} = \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{a(\hat{\mathbf{r}})} |u(\mathbf{r})|^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (4.70)$$

και μας δίνει την πυκνότητα ροής του προσπίπτοντος πεδίου.

Προκειμένου να «απομονώσουμε» τη συνεισφορά των γωνιακών χαρακτηριστικών από τη συνεισφορά της απόστασης και των σφαλμάτων, θεωρούμε μια μεγάλη φανταστική σφαίρα S_r ακτίνας r , η οποία περικλείει την πηγή. Τότε η ροή ενέργειας από όλη την επιφάνεια αυτή είναι:

$$4\pi r^2 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{\omega \rho k a^3(\hat{\mathbf{r}})} |g_A(\hat{\mathbf{r}})|^2 + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty \quad (4.71)$$

και στο όριο για $r \rightarrow \infty$ ορίζουμε τη διαφορική ενεργειακή διατομή σκέδασης $\sigma(\hat{\mathbf{r}})$ ως:

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r})}{\hat{\mathbf{k}}_a \cdot \mathbf{I}^i(\mathbf{r})}, \quad (4.72)$$

ή λόγω της (4.69) ως:

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k^2 a^3(\hat{\mathbf{r}})} |g_A(\hat{\mathbf{r}})|^2 \quad (4.73)$$

και λόγω της (4.70) ως:

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{a(\hat{\mathbf{r}})} |u(\mathbf{r})|^2. \quad (4.74)$$

Η διαφορική διατομή σκέδασης μετράτε σε μονάδες επιφάνειας, εξαρτάται από τη διεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{r}}$ και τη διεύθυνση πρόσπτωσης $\hat{\mathbf{k}}_a$ (μέσω της σχέσης που συνδέει το $\hat{\mathbf{k}}_a$ με το $\hat{\mathbf{k}}_A$, (3.44)) και φανερώνει σε πόσο εμβαδό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας αντιστοιχεί η σκεδαζόμενη ενέργεια. Η τιμή της $\sigma(\hat{\mathbf{r}})$ είναι ο λόγος της ροής ισχύος που σκεδάστηκε στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ ως προς τη ροή ισχύος στη διεύθυνση πρόσπτωσης $\hat{\mathbf{k}}_a$, ενώ η σχέση (4.73) ισχύει ανεξαρτήτως της σφαίρας S_r για κάθε διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$.

Η ολική ενεργειακή διατομή σκέδασης ορίζεται ως ο μέσος όρος όλων των διαφορικών ενεργειακών διατομών σκέδασης σε κάθε διεύθυνση και είναι:

$$\sigma_s = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} \sigma(\hat{\mathbf{r}}) ds(\mathbf{r}), \quad (4.75)$$

ή

$$\sigma_s = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \sigma(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}), \quad (4.76)$$

όπου S^2 είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας και λόγω της (4.73) γράφεται:

$$\sigma_s = \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k^2} \int_{S^2} \frac{|g_A(\hat{\mathbf{r}})|^2}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (4.77)$$

και μας δίνει τη μέση τετραγωνική μορφή του πλάτους σκέδασης, ενώ λόγω της (4.74) γράφεται:

$$\sigma_s = a(\hat{\mathbf{k}}_A) \int_{S^2} \frac{|u(\mathbf{r})|^2}{a(\hat{\mathbf{r}})} ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (4.78)$$

Όπως φαίνεται στην (4.77), (αλλά και αργότερα στο γενικευμένο θεώρημα σκέδασης (5.48), ή στο οπτικό θεώρημα (5.57)), ο όρος $a^3(\hat{\mathbf{r}})$ εμφανίζεται στα επιφανειακά ολοκληρώματα επί μιας μοναδιαίας σφαίρας, όταν στο ολοκλήρωμα συμπεριλαμβάνεται το πλάτος σκέδασης $g(\hat{\mathbf{r}})$ το οποίο και λειτουργεί σαν συντελεστής βαρύτητας (ή «αντιστάθμιση») της επίδρασης της γεωμετρίας που επιβάλλει ο ανισότροπος χώρος. Αν $\partial B(\mathbf{0}, \infty)$ είναι η επιφάνεια της σφαίρας με άπειρη ακτίνα και κέντρο την αρχή των αξόνων, τότε η (4.78) γράφεται με τη βοήθεια των (4.63) και (4.58):

$$\sigma_s = \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \operatorname{Im} \left\{ \int_{\partial B(\mathbf{0}, \infty)} u^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \right\}. \quad (4.79)$$

Όμως η τροποποιημένη ταυτότητα του Green (4.1) δίνει για τα u και u^* :

$$\begin{aligned} \int_{V^+ \cap \partial B(\mathbf{0}, \infty)} (u^* \Delta_A u - u \Delta_A u^*) dv &= \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{0}, \infty)} (u^* \partial_{n_A} u - u \partial_{n_A} u^*) ds - \int_S (u^* \partial_{n_A} u - u \partial_{n_A} u^*) ds \end{aligned} \quad (4.80)$$

Επειδή όμως η u (και κατά συνέπεια και η u^*) είναι λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz (4.5) το αριστερό μέλος της (4.80) είναι ίσο με μηδέν και η (4.80) δίνει τελικά την ισότητα:

$$\int_{\partial B(\mathbf{0},\infty)} (u^* \partial_{n_A} u - u \partial_{n_A} u^*) ds = \int_S (u^* \partial_{n_A} u - u \partial_{n_A} u^*) ds, \quad (4.81)$$

οπότε λόγω της (4.79) η ολική ενεργειακή διατομή γράφεται επίσης:

$$\sigma_s = \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \text{Im} \left\{ \int_S [u^*(\mathbf{r}) \partial_{n_A} u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \partial_{n_A} u^*(\mathbf{r})] ds(\mathbf{r}) \right\}. \quad (4.82)$$

Η σχέση (4.82) μας δίνει την ολική ενεργειακή διατομή σκέδασης συναρτήσει ενός επιφανειακού ολοκληρώματος του σκεδασμένου πεδίου και της τροποποιημένης κάθετης παραγώγου του.

Επειδή όμως ισχύει λόγω της (4.51) πως:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega \rho^+} \text{Im} \left\{ u^* \frac{\partial}{\partial n_A} u \right\}, \quad (4.83)$$

θα είναι επίσης:

$$\sigma_s = \omega \rho^+ \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{I}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\mathbf{r}) \quad (4.84)$$

και αν θεωρήσουμε το $\omega \rho^+ \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \int_S (-\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{I}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r})$, τότε η συνολική απορρόφηση

θα είναι $-\frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \text{Im} \left\{ \int_S u \partial_{n_A} u^+ ds \right\}$ ή

$$\sigma_a = -\frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \text{Im} \left\{ \int_S u^+ \frac{\partial u^+}{\partial n_A} ds \right\} = \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \text{Im} \left\{ \int_S u^+(\mathbf{r}) \frac{\partial u^{+*}(\mathbf{r})}{\partial n_A} ds(\mathbf{r}) \right\}. \quad (4.85)$$

Η παραπάνω ισότητα περιγράφει την ενεργειακή διατομή απορρόφησης, όπου το $-$ φανερώνει πως η ροή ισχύος είναι προς τα μέσα, ενώ ορίζει την ολική ενέργεια που απορροφάται από το σκεδαστή, όταν αυτός είναι διαπερατός και παρουσιάζει απώλειες ενέργειας.

Αν ο σκεδαστής είναι μαλακός ή σκληρός, τότε είναι λόγω της (3.14) ή (3.15) αντίστοιχα, θα είναι:

$$\sigma_a^{D,N} = 0. \quad (4.86)$$

Αν ο σκεδαστής είναι ανθεκτικός, τότε θα ισχύει σύμφωνα με την συνοριακή συνθήκη (3.16):

$$\begin{aligned} \sigma_a^R &= -\frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \operatorname{Im} \left\{ \int_S u^{+*}(\mathbf{r}) \left[-i \frac{\omega \rho^+}{Z^+} u^+(\mathbf{r}) \right] ds(\mathbf{r}) \right\} \\ &= \frac{\omega \rho^+}{Z^+} \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \int_S |u^+(\mathbf{r})|^2 ds(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.87)$$

δηλαδή η επιφάνεια του σκεδαστή θα απορροφά ενέργεια.

Αν ο σκεδαστής είναι διαπερατός, τότε χρησιμοποιώντας τις συνθήκες διαπερατότητας (3.8) και (3.9), την τροποποιημένη ταυτότητα του Green (4.1), καθώς επίσης την τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz (4.25) που ικανοποιεί το εσωτερικό πεδίο έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}^{TC} &= \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \text{Im} \left\{ \int_S u^+ \frac{\partial u^{+*}}{\partial n_A} ds \right\} \\
&= \frac{1}{2i} \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \int_S \left(u^+ \frac{\partial u^{+*}}{\partial n_A} - u^{+*} \frac{\partial u^+}{\partial n_A} \right) ds \\
&= \frac{1}{2i} \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \int_S \left[\left(u^- \beta \frac{\partial u^-}{\partial n_A} \right)^* - u^{-*} \left(\beta \frac{\partial u^-}{\partial n_A} \right) \right] ds \\
&= \frac{1}{2i} \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \int_{V^-} \nabla \cdot \left[u^- (\beta \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \nabla u^-)^* - u^{-*} (\beta \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \nabla u^-) \right] dv \\
&= \frac{1}{2i} \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \int_{V^-} \left\{ (\beta^* - \beta) |\nabla_{A-} u^-|^2 + k^2 \left[\beta n^2 - (\beta n^2)^* |u^-|^2 \right] \right\} dv \\
&= a(\hat{\mathbf{k}}_A) \delta^- \frac{\gamma^-}{\rho^-} \sqrt{\frac{\rho^+}{\gamma^+}} \int_{V^-} |\nabla_{A-} u^-|^2 dv,
\end{aligned} \tag{4.88}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει μετά από χρήση των (3.9), (3.4) και (2.10) για $\delta^+ = 0$, ενώ:

$$|\nabla_{A-} u^-|^2 = \tilde{\mathbf{A}}_- : (\nabla u^-) (\nabla u^{-*}). \tag{4.89}$$

Τέλος, η ενεργειακή διατομή εξαφάνισης που περιγράφει την ολική ενέργεια που η διαδικασία της σκέδασης λαμβάνει από το προσπίπτον πεδίο, είτε μέσω απορρόφησης σ_a είτε μέσω ακτινοβολίας σ_s , ορίζεται ως:

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a = \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k} \text{Im} \left\{ \int_S \left[u^*(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n_A} + u^+(\mathbf{r}) \frac{\partial u^{+*}(\mathbf{r})}{\partial n_A} \right] ds(\mathbf{r}) \right\}. \tag{4.90}$$

Σημειώνεται, τέλος, πως όλες οι ενεργειακές διατομές έχουν κανονικοποιηθεί ως προς το προσπίπτον κύμα και έχουν μονάδες επιφάνειας.

5. ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΚΕΔΑΣΗΣ

5.1. Θεωρήματα αμοιβαιότητας

Στη θεωρία της σκέδασης αμοιβαιότητα σημαίνει πως το αίτιο (διέγερση) και το αποτέλεσμα (παρατήρηση) μπορούν να εναλλαχθούν, όπου ως αίτιο εννοείται το προσπίπτον στο σκεδαστή πεδίο και ως αποτέλεσμα η μέτρηση που παίρνουμε στη θέση $\mathbf{r}$ μετά την πρόσπτωση. Με άλλα λόγια, όταν ισχύει η ιδιότητα της αμοιβαιότητας μπορεί να γίνει εναλλαγή των διευθύνσεων πρόσπτωσης και παρατήρησης ακόμα και αν ο σκεδαστής δεν είναι συμμετρικός.

5.1.1. Θεώρημα αμοιβαιότητας για σημειακές πηγές

Θεωρούμε στη θέση $\mathbf{r}_1$ του V^+ σημειακή πηγή, η οποία παράγει πεδίο u_1 , το οποίο συναντά το σκεδαστή και στη θέση $\mathbf{r}_2$ μετράμε το ολικό πεδίο u_1^+ . Επίσης, θεωρούμε στη θέση $\mathbf{r}_2$ του V^+ σημειακή πηγή, η οποία παράγει πεδίο u_2 , το οποίο

συναντά το σκεδαστή και στη θέση $\mathbf{r}_1$ μετράμε το ολικό πεδίο u_2^+ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6. Θα αποδείξουμε πως:

$$u_2^+(\mathbf{r}_1) = u_1^+(\mathbf{r}_2) \quad (5.1)$$

Σχήμα 6. Σημειακές πηγές στον εξωτερικό χώρο του σκεδαστή.

Απόδειξη:

Έστω το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_S [u_1^+(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^+(\mathbf{r}') - u_2^+(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^+(\mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}'). \quad (5.2)$$

Για να ισχύει η (5.1) αρκεί να δείξουμε πως για όλους τους τύπους σκεδαστών, όπως αυτοί περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3.2 (δηλαδή για όλες τις περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών), ισχύει πως $I = 0$.

(i) **Μαλακός Σκεδαστής (Σ.Σ. Dirichlet: $u^+ = 0, S$)**

Το ολοκλήρωμα της (5.2) είναι μηδενικό, γιατί πάνω στην επιφάνεια S ισχύει $u_1^+ = u_2^+ = 0$, δηλαδή:

$$I = \int_S [0 - 0] ds(\mathbf{r}') = 0. \quad (5.3)$$

(ii) **Σκληρός Σκεδαστής (Σ.Σ. Neumann: $\partial_{n_A} u^+ = 0, S$)**

Όμοια με την περίπτωση του μαλακού σκεδαστή, το ολοκλήρωμα της (5.2) είναι μηδενικό, γιατί πάνω στην επιφάνεια S έχουμε πως $\partial_{n_A} u_1^+ = \partial_{n_A} u_2^+ = 0$, δηλαδή

$$I = \int_S [0 - 0] ds(\mathbf{r}') = 0. \quad (5.4)$$

(iii) **Ανθεκτικός Σκεδαστής (Σ.Σ. Robin: $\partial_{n_A} u^+ + ik\nu u^+ = 0, S$)**

Από τη συνοριακή συνθήκη έχουμε πως:

$$\partial_{n_A} u_i^+ = -ik\nu u_i^+, \quad i = 1, 2, S, \quad (5.5)$$

οπότε η (5.2) γράφεται:

$$I = \int_S \left[u_1^+ (-ik\nabla u_2^+) - u_2^+ (-ik\nabla u_1^+) \right] ds = ik\nu \int_S (u_1^+ u_2^+ - u_2^+ u_1^+) ds = 0. \quad (5.6)$$

(iv) **Διαπερατός Σκεδαστής (Σ. Διαπερατότητας: $u^+ = u^-, \partial_{n_A} u^+ = \beta \partial_{n_A} u^-$)**

Λόγω των συνθηκών διαπερατότητας πάνω στην επιφάνεια S θα ισχύει:

$$\left. \begin{aligned} u_i^+ &= u_i^- \\ \partial_{n_A} u_i^+ &= \beta \partial_{n_A} u_i^- \end{aligned} \right\} i = 1, 2, S \quad (5.7)$$

και τώρα, το ολοκλήρωμα της (5.2) παίρνει τη μορφή:

$$I = \int_S \left[u_1^- \beta \partial_{n_A} u_2^- - u_2^- \beta \partial_{n_A} u_1^- \right] ds = \beta \int_S (u_1^- \partial_{n_A} u_2^- - u_2^- \partial_{n_A} u_1^-) ds. \quad (5.8)$$

Όμως το εσωτερικό πεδίο u_i^- είναι λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz (4.25) στο V^- και επειδή εκεί δεν έχει πηγές, καθώς αυτές βρίσκονται στο V^+ , θα ικανοποιεί παντού στο εσωτερικό του σκεδαστή την:

$$\left(\Delta_{A_-} + k^2 \eta^2\right) u_i^- = 0, \quad i = 1, 2, \quad V^-, \quad (5.9)$$

σε αντίθεση με το u_i^+ που θα αποτελεί θεμελιώδης λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz (4.5) στο V^+ , καθώς εκεί περιέχονται επίσης οι πηγές.

Συνεπώς, εφαρμόζοντας την τροποποιημένη δεύτερη ταυτότητα του Green (4.1) και με τη βοήθεια της (5.9) έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \beta \int_{V^-} \left(u_1^- \Delta_{A_-} u_2^- - u_2^- \Delta_{A_-} u_1^- \right) dv = \beta \int_{V^-} \left[u_1^- \left(-k^2 \eta^2 u_2^- \right) - u_2^- \left(-k^2 \eta^2 u_1^- \right) \right] dv \\ &= -k^2 \eta^2 \beta \int_{V^-} \left[u_1^- u_2^- - u_2^- u_1^- \right] dv = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Άρα έως τώρα έχουμε δείξει πως για κάθε τύπο σκεδαστή ισχύει:

$$I = \int_S \left[u_1^+ \partial_{n_A} u_2^+ - u_2^+ \partial_{n_A} u_1^+ \right] ds = 0, \quad (5.11)$$

δηλαδή, πως ισχύει η (5.1) ή πως επίσης ισχύει:

$$I = \int_S \left[\left(u_1^i + u_1 \right) \partial_{n_A} \left(u_2^i + u_2 \right) - \left(u_2^i + u_2 \right) \partial_{n_A} \left(u_1^i + u_1 \right) \right] ds = 0, \quad (5.12)$$

ή αναλυτικότερα:

$$\begin{aligned} &\int_S \left(u_1^i \partial_{n_A} u_2^i - u_2^i \partial_{n_A} u_1^i \right) ds + \int_S \left(u_1^i \partial_{n_A} u_2 - u_2^i \partial_{n_A} u_1 \right) ds \\ &+ \int_S \left(u_1 \partial_{n_A} u_2^i - u_2 \partial_{n_A} u_1^i \right) ds + \int_S \left(u_1 \partial_{n_A} u_2 - u_2 \partial_{n_A} u_1 \right) ds = \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Όμως το πρώτο ολοκλήρωμα με τη βοήθεια της τροποποιημένης ταυτότητας Green (4.1) και της (5.9) γράφεται:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_S \left(u_1^i \partial_{n_A} u_2^i - u_2^i \partial_{n_A} u_1^i \right) ds = \int_{V^-} \left(u_1^i \Delta_{A_-} u_2^i - u_2^i \Delta_{A_-} u_1^i \right) dv \\ &= \int_{V^-} \left[u_1^i \left(-k^2 \eta^2 u_2^i \right) - u_2^i \left(-k^2 \eta^2 u_1^i \right) \right] dv = -k^2 \eta^2 \int_{V^-} \left(u_1^i u_2^i - u_2^i u_1^i \right) dv = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Τα σκεδασμένα πεδία u_1 και u_2 μεταφέρουν τις πηγές τους στην επιφάνεια του σκεδαστή S . Έτσι, θεωρούμε σφαίρα S_r που περιβάλλει το σκεδαστή. Από τη συνθήκη ακτινοβολίας (3.20) για $r \rightarrow \infty$ έχουμε πως:

$$\partial_{n_A} u_1^i = \frac{ik}{a(\hat{\mathbf{r}})} u_1^i + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (5.15)$$

και τώρα το I_4 γίνεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \int_S (u_1 \partial_{n_A} u_2 - u_2 \partial_{n_A} u_1) ds &= \\ &= \int_S \left(u_1 \frac{ik}{a(\hat{\mathbf{r}})} u_2 - u_2 \frac{ik}{a(\hat{\mathbf{r}})} u_1 \right) ds + \int_S \left(u_1 O\left(\frac{1}{r^2}\right) - u_2 O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) ds \quad (5.16) \\ &= \int_S (u_1 - u_2) O\left(\frac{1}{r^2}\right) ds. \end{aligned}$$

Όμως όταν η ακτίνα της περιβάλλουσας σφαίρας S_r τείνει στο άπειρο ισχύει επίσης η σχέση του απομακρυσμένου πεδίου (4.48), δηλαδή πως:

$$u_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \frac{\exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{ika(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad i=1,2, \quad (5.17)$$

οπότε όταν $r = R \rightarrow \infty$ θα είναι:

$$I_4 = \int_{S_R} O\left(\frac{1}{R^3}\right) ds(\mathbf{r}') = \int_{S^2} O\left(\frac{1}{R^3}\right) R^2 d\Omega(\hat{\mathbf{r}}') = \int_{S^2} O\left(\frac{1}{R}\right) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}') \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (5.18)$$

Άρα από την (5.13) λόγω των (5.14) και (5.18) έχουμε πως:

$$I_2 + I_3 = \int_S (u_1^i \partial_{n_A} u_2 - u_2^i \partial_{n_A} u_1) ds + \int_S (u_1 \partial_{n_A} u_2^i - u_2 \partial_{n_A} u_1^i) ds = 0. \quad (5.19)$$

Αλλά στις θέσεις $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ έχουμε θεωρήσει σημειακές πηγές, (βλ. κεφάλαιο 3.4.2), οπότε ισχύει:

$$u_m^i = G_A(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') = \frac{\exp\{ika(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}')\}}{4\pi\sqrt{\det \mathbf{A}} a(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}')} , \quad m = 1, 2 , \quad (5.20)$$

Όπου:

$$a(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}') = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}')(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}')} \quad (5.21)$$

και η (5.19) με χρήση της (5.20) δίνει:

$$\begin{aligned} & \int_S [G_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2(\mathbf{r}') - G_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1(\mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}') \\ & + \int_S [u_1(\mathbf{r}') \partial_{n_A} G_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') - u_2(\mathbf{r}') \partial_{n_A} G_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}') = \\ & = - \int_S [u_2(\mathbf{r}') \partial_{n_A} G_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') - G_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2(\mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}') \\ & + \int_S [u_1(\mathbf{r}') \partial_{n_A} G_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') - G_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1(\mathbf{r}')] ds(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (5.22)$$

ή

$$\begin{aligned} & \int_S (u_1 \partial_{n_A} G_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') - G_A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1) ds(\mathbf{r}') = \\ & = \int_S (u_2 \partial_{n_A} G_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') - G_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2) ds(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την (5.23), η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης u_1 είναι ίση με την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης u_2 και επειδή τα $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ ανήκουν στον εξωτερικό χώρο V^+ του σκεδαστή, έχουμε:

$$u_1(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) = u_2(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2), \quad (5.24)$$

δηλαδή, το πεδίο που οφείλεται στην πηγή $\mathbf{r}_1$ και μετριέται στη θέση $\mathbf{r}_2$ είναι ίσο με το πεδίο που οφείλεται στην πηγή $\mathbf{r}_2$ και μετριέται στη θέση $\mathbf{r}_1$, έκφραση που περιγράφει πως το θεώρημα αμοιβαιότητας ισχύει και για τα σκεδασμένα πεδία:

$$u(\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_1) = u(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2). \quad (5.25)$$

5.1.2. Θεώρημα αμοιβαιότητας για επίπεδα κύματα

Το πλάτος σκέδασης στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ που οφείλεται σε επίπεδο προσπίπτον κύμα στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{k}}_a$ ισούται με το πλάτος σκέδασης στη διεύθυνση $-\hat{\mathbf{k}}_a$ που οφείλεται σε επίπεδο προσπίπτον κύμα στη διεύθυνση $-\hat{\mathbf{r}}$, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7, δηλαδή:

$$g_A(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}_a) = g_A(-\hat{\mathbf{k}}_a, -\hat{\mathbf{r}}). \quad (5.26)$$

Σχήμα 7. Επίπεδα κύματα στον εξωτερικό χώρο του σκεδαστή.

Απόδειξη:

Έστω επίπεδο κύμα u_1^i που προσπίπτει στο σκεδαστή S στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{k}}_{a,1}$ και ένα άλλο επίπεδο κύμα u_2^i στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{k}}_{a,2}$, με:

$$u_1^i(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) = \exp \left\{ ik\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \frac{\hat{\mathbf{k}}_1}{a(\hat{\mathbf{k}}_1)} \mathbf{r} \right\}, \quad (5.27)$$

και

$$u_2^i(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) = \exp \left\{ ik\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \frac{\hat{\mathbf{k}}_2}{a(\hat{\mathbf{k}}_2)} \mathbf{r} \right\}. \quad (5.28)$$

Τότε το σκεδασμένο πεδίο που προκύπτει από την $u_j^i (j=1,2)$ πρόσπτωση έχει πλάτος σκέδασης (από την (4.49)):

$$g_A(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}_{a,j}) = -\frac{ik}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_S \left(\exp\{-ik\hat{\mathbf{k}}_{a,j}\mathbf{r}'\} \partial_{n_A} u_j^+(\mathbf{r}') - u_j^+ \partial_{n_A} \exp\{-ik\hat{\mathbf{k}}_{a,j}\mathbf{r}'\} \right) ds(\mathbf{r}') \quad (5.29)$$

και τώρα η σχέση (5.19) γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_S \left(u_1^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^i(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') \\ - \int_S \left(u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1(\mathbf{r}') - u_1(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') = 0, \end{aligned} \quad (5.30)$$

ή

$$\begin{aligned} \int_S \left(u_1^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^i(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') = \\ = \int_S \left(u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1(\mathbf{r}') - u_1(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Αντικαθιστώντας $u_j = u_j^+ - u_j^i$, $j=1,2$, η (5.31) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_S \left[u_1^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} (u_2^+(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}')) - (u_2^+(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}')) \partial_{n_A} u_1^i(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') = \\ = \int_S \left[u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} (u_1^+(\mathbf{r}') - u_1^i(\mathbf{r}')) - (u_1^+(\mathbf{r}') - u_1^i(\mathbf{r}')) \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (5.32)$$

ή

$$\begin{aligned} \int_S \left(u_1^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^+(\mathbf{r}') - u_2^+(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^i(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') \\ + \int_S \left(u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^i(\mathbf{r}') - u_1^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') = \\ = \int_S \left(u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^+(\mathbf{r}') - u_1^+(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') \\ + \int_S \left(u_1^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^i(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Η τελευταία με τη βοήθεια των (5.27), (5.28) και (5.29), καθώς επίσης και της τροποποιημένης 2^{ης} ταυτότητας Green (4.1) μας δίνει:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}}{ik} g_A(-\hat{\mathbf{k}}_{a,1}, \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \\
 & \quad + \int_{V^-} (u_2^i(\mathbf{r}') \Delta_A u_1^i(\mathbf{r}') - u_1^i(\mathbf{r}') \Delta_A u_2^i(\mathbf{r}')) dv(\mathbf{r}') = \\
 & = \frac{-4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}}{ik} g_A(-\hat{\mathbf{k}}_{a,2}, \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \\
 & \quad + \int_{V^-} (u_1^i(\mathbf{r}') \Delta_A u_2^i(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \Delta_A u_1^i(\mathbf{r}')) dv(\mathbf{r}').
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Επειδή όμως ισχύει επίσης πως $(\Delta_A + k^2)u_j^i(\mathbf{r}') = 0$, $j = 1, 2$, η (5.34) γίνεται:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}}{ik} g_A(-\hat{\mathbf{k}}_{a,1}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \\
 & \quad + \int_{V^-} [u_2^i(\mathbf{r}')(-k^2 u_1^i(\mathbf{r}')) - u_1^i(\mathbf{r}')(-k^2 u_2^i(\mathbf{r}'))] dv(\mathbf{r}') = \\
 & = \frac{-4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}}{ik} g_A(-\hat{\mathbf{k}}_{a,2}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \\
 & \quad + \int_{V^-} [u_1^i(\mathbf{r}')(-k^2 u_2^i(\mathbf{r}')) - u_2^i(\mathbf{r}')(-k^2 u_1^i(\mathbf{r}'))] dv(\mathbf{r}')
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

και τελικά προκύπτει:

$$g_A(-\hat{\mathbf{k}}_{a,2}, \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) = g_A(-\hat{\mathbf{k}}_{a,1}, \hat{\mathbf{k}}_{a,2}). \tag{5.36}$$

Η (5.36) περιγράφει πως το πλάτος σκέδασης του σκεδασμένου πεδίου που οφείλεται στη διέγερση που προκαλεί η πρόσπτωση $\hat{\mathbf{k}}_{a,1}$ και μετράται στη διεύθυνση $-\hat{\mathbf{k}}_{a,2}$ είναι ίσο με το πλάτος σκέδασης του σκεδασμένου πεδίου που οφείλεται στη διέγερση που προκαλεί η πρόσπτωση $\hat{\mathbf{k}}_{a,2}$ και μετράται στη διεύθυνση $-\hat{\mathbf{k}}_{a,1}$.

Τέλος, θέτοντας $\hat{\mathbf{k}}_{a,2} = -\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{k}}_{a,1} = \hat{\mathbf{k}}_a$ προκύπτει η (5.26).

Σημειώνουμε εδώ, πως και στην περίπτωση του ανισότροπου μέσου διάδοσης, για τα επίπεδα κύματα το θεώρημα αμοιβαιότητας ισχύει μόνο στα πλάτη σκέδασης και όχι για το ολικό ή το σκεδασμένο πεδίο, για τα οποία ισχύει για τις σημειακές πηγές.

5.2. Γενικευμένο θεώρημα σκέδασης

Θεωρούμε στο χώρο V^+ τα επίπεδα κύματα διέγερσης στις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{k}}_{a,1}$ και $\hat{\mathbf{k}}_{a,2}$ και τα αντίστοιχα ολικά πεδία που αυτά προκαλούν στον V^+ , u_1^+ και u_2^+ αντίστοιχα, ή $u_1^+(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1})$ και $u_2^+(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2})$. Τότε, καθώς ισχύει πως $u_j^+ = u_j + u_j^i$, $j = 1, 2$, θα είναι:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_S \left[u^{+*}(\mathbf{r}'; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \partial_{n_A} u^+(\mathbf{r}'; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - u^+(\mathbf{r}'; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \partial_{n_A} u^{+*}(\mathbf{r}'; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] ds(\mathbf{r}') \\
 &= \int_S \left[(u_1^*(\mathbf{r}') + u_2^*(\mathbf{r}')) (\partial_{n_A} u_2(\mathbf{r}') + \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}')) \right] ds(\mathbf{r}') \\
 &\quad - \int_S \left[(u_2(\mathbf{r}') + u_2^i(\mathbf{r}')) (\partial_{n_A} u_1^*(\mathbf{r}') + \partial_{n_A} u_1^i(\mathbf{r}')) \right] ds(\mathbf{r}') \\
 &= \int_S (u_1^*(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2(\mathbf{r}') - u_2(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^*(\mathbf{r}')) ds(\mathbf{r}') \\
 &\quad + \int_S (u_1^*(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^*(\mathbf{r}')) ds(\mathbf{r}') \\
 &\quad + \int_S (u_1^{i*}(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2(\mathbf{r}') - u_2(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^{i*}(\mathbf{r}')) ds(\mathbf{r}') \\
 &\quad + \int_S (u_1^{i*}(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^{i*}(\mathbf{r}')) ds(\mathbf{r}') \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Επειδή όμως $u_j^i = \exp \left\{ ik \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{k}}_j \mathbf{r}}{a(\hat{\mathbf{k}}_j)} \right\}$, $j = 1, 2$ και $(\Delta_A + k^2) u_j^i(\mathbf{r}) = 0$, $j = 1, 2$ το I_4

με τη βοήθεια της 2^{ης} τροποποιημένης ταυτότητας Green (4.1) γράφεται:

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_S \left(u_1^{i*}(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^{i*}(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') \\
&= \int_V \left(u_1^{i*}(\mathbf{r}') \Delta_A u_2^i(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \Delta_A u_1^{i*}(\mathbf{r}') \right) dv(\mathbf{r}') \\
&= \int_V \left[u_1^{i*}(\mathbf{r}') (-k^2 u_2^i(\mathbf{r}')) - u_2^i(\mathbf{r}') (-k^2 u_1^{i*}(\mathbf{r}')) \right] dv(\mathbf{r}') = 0.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Ακόμα είναι:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_S \left(u_1^{i*}(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2(\mathbf{r}') - u_2(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^{i*}(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') \\
&= \frac{-4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}}{ik} g_A(\hat{\mathbf{k}}_{a,1}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}),
\end{aligned} \tag{5.39}$$

όπως επίσης:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_S \left(u_1^*(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_2^i(\mathbf{r}') - u_2^i(\mathbf{r}') \partial_{n_A} u_1^*(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') \\
&= \int_S \left[u_1^*(\mathbf{r}') \partial_{n_A} \exp \left\{ - \left(-ik \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{k}}_2 \mathbf{r}'}{a(\hat{\mathbf{k}}_2)} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \exp \left\{ - \left(-ik \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{k}}_2 \mathbf{r}'}{a(\hat{\mathbf{k}}_2)} \right) \right\} \partial_{n_A} u_1^*(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') \\
&= - \int_S \left[\exp \left\{ -ik \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{k}}_2 \mathbf{r}'}{a(\hat{\mathbf{k}}_2)} \right\} \partial_{n_A} u_1(\mathbf{r}') - u_1(\mathbf{r}') \partial_{n_A} \exp \left\{ -ik \frac{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : \hat{\mathbf{k}}_2 \mathbf{r}'}{a(\hat{\mathbf{k}}_2)} \right\} \right] ds(\mathbf{r}') \\
&= - \frac{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}}{ik} g_A^*(\hat{\mathbf{k}}_{a,2}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}).
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Τέλος, όσο αφορά το I_1 παρατηρούμε πως τα σκεδασμένα πεδία u_1^* και u_2 έχουν πηγές στην επιφάνεια S του σκεδαστή. Έτσι θεωρούμε μια σφαίρα ακτίνας R που περιβάλλει το σκεδαστή και αν $R \rightarrow \infty$, τότε τα u_1^* και u_2 στο V^+ θα είναι ομαλά, οπότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
u_j(\mathbf{r}) &= g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,j}) h(ka(\hat{\mathbf{r}})r) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \frac{\exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{ika(\hat{\mathbf{r}})r} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,j}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right),
\end{aligned} \tag{5.41}$$

όπως και η τροποποιημένη συνθήκη ακτινοβολίας (3.20):

$$\partial_{n_A} u_j(\mathbf{r}) = \frac{ik}{a(\hat{\mathbf{r}})} u_j(\mathbf{r}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{5.42}$$

ενώ ο συνδυασμός των (5.41) και (5.42) δίνει πως:

$$\partial_{n_A} u_j(\mathbf{r}) = \frac{\exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{a^2(\hat{\mathbf{r}})r} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,j}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{5.43}$$

οπότε:

$$\begin{aligned}
u_1^* \partial_{n_A} u_2 &= \left[\frac{\exp\{-ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{-ika(\hat{\mathbf{r}})r} g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \\
&\quad \left[\frac{\exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{a^2(\hat{\mathbf{r}})r} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \\
&= \frac{\exp\{-ika(\hat{\mathbf{r}})r\} \exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{-ika^3(\hat{\mathbf{r}})r^2} g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\
&= -\frac{1}{ika^3(\hat{\mathbf{r}})r^2} g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right).
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Ομοιότροπα αποδεικνύουμε πως:

$$\begin{aligned}
u_2 \partial_{n_A} u_1^* &= \left[\frac{\exp\{ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{ika(\hat{\mathbf{r}})r} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \\
&\quad \left[\frac{\exp\{-ika(\hat{\mathbf{r}})r\}}{a^2(\hat{\mathbf{r}})r} g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{ika^3(\hat{\mathbf{r}})r^2} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) + O\left(\frac{1}{r^3}\right).
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Αλλά $\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{r}}$ και $ds(\mathbf{r}) = R^2 d\Omega(\hat{\mathbf{r}})$, οπότε το I_1 γράφεται τελικά:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S^2} \left[-\frac{2}{ika^3 R^3} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \right] R^2 d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= -\frac{2}{ik} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) d\Omega + \int_{S^2} O\left(\frac{1}{R}\right) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (5.46)$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται για $R \rightarrow \infty$ (βλ. (5.18)) και η (5.37) δίνει τελικά λόγω των (5.38), (5.39), (5.40) και (5.46):

$$\begin{aligned} \int_S \left[u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \partial_{n_A} u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \partial_{n_A} u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] ds(\mathbf{r}) &= \\ &= -\frac{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}}{ik} g_A^*(\hat{\mathbf{k}}_{a,2}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) - \frac{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}}{ik} g_A(\hat{\mathbf{k}}_{a,1}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \\ &\quad + \frac{2}{ik} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (5.47)$$

ή διαφορετικά:

$$\begin{aligned} &-g_A(\hat{\mathbf{k}}_{a,1}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - g_A^*(\hat{\mathbf{k}}_{a,2}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \\ &\quad + \frac{ik}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_S \left[u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \partial_{n_A} u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \partial_{n_A} u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] ds(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.48)$$

όπου η σχέση (5.48) αποτελεί το γενικευμένο θεώρημα σκέδασης σε ανισότροπο χώρο και όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφάλαιο 4.5, περιέχει στο επιφανειακό ολοκλήρωμα επί της μοναδιαίας σφαίρας τον παράγοντα $a^3(\hat{\mathbf{r}})$.

Διερεύνηση της (5.48):

(i) Για Μαλακό Σκεδαστή (Σ.Σ. Dirichlet: $u_j^+(\mathbf{r}) = 0$, $j = 1, 2$, $\mathbf{r} \in S$)

Η σχέση (5.48) γίνεται:

$$\begin{aligned} -g_A(\hat{\mathbf{k}}_{a,1};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - g_A^*(\hat{\mathbf{k}}_{a,2};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (5.49)$$

καθώς το ολοκλήρωμα στην επιφάνεια S είναι μηδενικό.

(ii) Για Σκληρό Σκεδαστή (Σ.Σ. Neumann: $\partial_{n_A} u_j^+(\mathbf{r}) = 0$, $j = 1, 2$, $\mathbf{r} \in S$)

Όμοια με την περίπτωση του μαλακού σκεδαστή, η σχέση (5.48) γίνεται:

$$\begin{aligned} -g_A(\hat{\mathbf{k}}_{a,1};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - g_A^*(\hat{\mathbf{k}}_{a,2};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (5.50)$$

(iii) Για Ανθεκτικό Σκεδαστή (Σ.Σ. Robin: $\partial_{n_A} u_j^+(\mathbf{r}) = -ik\nu u_j^+(\mathbf{r})$, $j = 1, 2$, $\mathbf{r} \in S$)

Σε αυτήν την περίπτωση η (5.48) γράφεται:

$$\begin{aligned} -g_A(\hat{\mathbf{k}}_{a,1};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - g_A^*(\hat{\mathbf{k}}_{a,2};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \\ &+ \frac{ik}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\ &\int_{S^2} \left\{ u^{+*}(\mathbf{r};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \left[-ik\nu u^+(\mathbf{r};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \right] - u^+(\mathbf{r};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \left[ik\nu u^{+*}(\mathbf{r};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] \right\} d\Omega(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (5.51)$$

ή

$$\begin{aligned} -g_A(\hat{\mathbf{k}}_{a,1};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - g_A^*(\hat{\mathbf{k}}_{a,2};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} g_A(\hat{\mathbf{r}};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) g_A^*(\hat{\mathbf{r}};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \\ &+ \frac{k^2\nu^2}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} u^{+*}(\mathbf{r};\hat{\mathbf{k}}_{a,1}) u^+(\mathbf{r};\hat{\mathbf{k}}_{a,2}) d\Omega(\hat{\mathbf{r}}), \end{aligned} \quad (5.52)$$

οπότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην S δεν είναι μηδενικό.

(iv) Για Διαπεραστό Σκεδαστή (Σ.Σ. Διαπερατότητας: $u_j^+(\mathbf{r})=u_j^-(\mathbf{r})$,

$$\partial_{n_A} u_j^+(\mathbf{r}) = \beta \partial_{n_A} u_j^-(\mathbf{r}), \quad j=1,2, \quad \mathbf{r} \in S$$

Όταν $\beta = \beta^*$, ($\beta \in \mathbb{R}$), ο σκεδαστής δεν προκαλεί απώλειες ενέργειας (περίπτωση $\delta^- = 0$) και το γενικευμένο θεώρημα σκέδασης δίνεται από την (5.49) όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια. Όταν όμως $\beta \neq \beta^*$, η ποσότητα $\beta - \beta^*$ αποτελεί μέτρο της απορρόφησης ενέργειας από το σκεδαστή.

Το δεύτερο επιφανειακό ολοκλήρωμα του θεωρήματος (5.48) γίνεται για $\beta = \beta^*$:

$$\begin{aligned} \int_S \left[u^{+*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \partial_{n_A} u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \partial_{n_A} u^{+*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] ds(\mathbf{r}) &= \\ &= \int_S \left[u^{-*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \beta \partial_{n_A} u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \beta^* \partial_{n_A} u^{-*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] ds \quad (5.53) \\ &= \beta \int_S \left[u^{-*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \partial_{n_A} u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \partial_{n_A} u^{-*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] ds. \end{aligned}$$

Η (5.53), χρησιμοποιώντας το 2^ο τροποποιημένο θεώρημα Green (4.1) και το γεγονός πως τα $u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1})$ και $u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2})$ ικανοποιούν την τροποποιημένη συνθήκη Helmholtz: $(\Delta_{A_-} + k^2 \eta^2) u_j^- = 0$, $j=1,2$, V^- , γίνεται:

$$\begin{aligned} \beta \int_{V^-} \left[u^{-*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \Delta_{A_-} u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) - u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \Delta_{A_-} u^{-*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] dv &= \\ &= \beta \int_{V^-} \left\{ u^{-*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \left[-k^2 \eta^2 u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \right] - u^-(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,2}) \left[-k^2 \eta^2 u^{-*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_{a,1}) \right] \right\} dv \quad (5.54) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για μαλακό, σκληρό και διαπερατό, χωρίς απώλειες ενέργειας ($\delta^- = 0$), σκεδαστή, το γενικευμένο θεώρημα σκέδασης σε ανισότροπο χώρο δίνεται από την (5.49), η οποία εκφράζει ουσιαστικά τη μέση τιμή των πλατών σκέδασης ως προς τις διευθύνσεις.

5.3. Οπτικό θεώρημα

Εάν στη σχέση (5.48) θέσουμε $\hat{\mathbf{k}}_{a,1} = \hat{\mathbf{k}}_{a,2} = \hat{\mathbf{k}}_a$ τότε αυτή γράφεται:

$$\begin{aligned}
 -2 \operatorname{Re} \left\{ g_A(\hat{\mathbf{k}}_a, \hat{\mathbf{k}}_a) \right\} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} \left| g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_a) \right|^2 d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \\
 &+ \frac{ik}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_S \left[u^{+*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_a) \partial_{n_A} u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_a) - u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_a) \partial_{n_A} u^{+*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_a) \right] ds(\mathbf{r}) \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} \left| g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_a) \right|^2 d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \\
 &+ \frac{k}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \operatorname{Im} \left\{ \int_S u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_a) \partial_{n_A} u^{+*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_a) ds(\mathbf{r}) \right\}, \quad (5.55)
 \end{aligned}$$

από την οποία προκύπτει η γενική μορφή του οπτικού θεωρήματος για ανισότροπα μέσα:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left\{ g_A(\hat{\mathbf{k}}_a; \hat{\mathbf{k}}_a) \right\} &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} \left| g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_a) \right|^2 d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \\
 &- \frac{k}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \operatorname{Im} \left\{ \int_S u^+(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_a) \partial_{n_A} u^{+*}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{k}}_a) ds(\mathbf{r}) \right\}. \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

Για μαλακό, σκληρό και διαπερατό, χωρίς απώλειες ενέργειας, σκεδαστή, η (5.56) γράφεται:

$$\operatorname{Re} \left\{ g_A(\hat{\mathbf{k}}_a; \hat{\mathbf{k}}_a) \right\} = -\frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{S^2} \frac{1}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} \left| g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_a) \right|^2 d\Omega(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.57)$$

και μας δίνει το οπτικό θεώρημα για σκέδαση σε ανισότροπα μέσα, ενώ περιλαμβάνει και την κατευθυντική διαμέριση του μοναδιαίου διανύσματος, όπως έχει ήδη περιγραφεί στο κεφάλαιο 4.5. Αλλά η ολική ενεργειακή διατομή σκέδασης όπως αυτή ορίστηκε στην (4.77) δίνει τώρα λόγω της (5.57):

$$\sigma_s = \frac{a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k^2} \int_{S^2} \frac{\left| g_A(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{k}}_a) \right|^2}{a^3(\hat{\mathbf{r}})} ds(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}} a(\hat{\mathbf{k}}_A)}{k^2} \operatorname{Re} \left\{ g_A(\hat{\mathbf{k}}_a; \hat{\mathbf{k}}_a) \right\}, \quad (5.58)$$

ή από τις (4.90) και (4.85) και καθώς $\sigma_a = 0$ για τους σκεδαστές που εξετάζουμε θα ισχύει ακόμη:

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a = -\frac{4\pi\sqrt{\det \tilde{A}a}(\hat{\mathbf{k}}_a)}{k^2} \operatorname{Re} \left\{ g_A(\hat{\mathbf{k}}_a; \hat{\mathbf{k}}_a) \right\}. \quad (5.59)$$

Συνεπώς, για μαλακό, σκληρό ή διαπερατό, χωρίς απώλειες ενέργειας, σκεδαστή η ολική ενέργεια που ο σκεδαστής απομακρύνει από το προσπίπτον πεδίο, δηλαδή η ενέργεια σκέδασης και η ενέργεια απορρόφησης είναι ανάλογη του πλάτους σκέδασης στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{k}}_a$.

Η σχέση μεταξύ του πλάτους σκέδασης στη διεύθυνση πρόσπτωσης $\hat{\mathbf{k}}_a$ και της ολικής σκεδαζόμενης ενέργειας μπορεί να ερμηνευτεί ως παράδειγμα συμβολής του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου κύματος, τα οποία αλληλεπιδρούν και λειτουργούν ως μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας.

Ως συνέπεια του οπτικού θεωρήματος, η ισχύς που σκεδάζεται στη διεύθυνση πρόσπτωσης δεν μπορεί ποτέ να είναι μηδενική, καθώς αν ήταν, τότε λόγω του οπτικού θεωρήματος και λόγω του ότι $\sigma_a \geq 0$, προκύπτει πως $\sigma_a = 0$ και κατά συνέπεια $g(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{k}}_a) = 0$, $\hat{\mathbf{r}} \in S^2$, το οποίο οδηγεί λόγω του θεωρήματος απομακρυσμένου πεδίου του Atkinson πως το u είναι ταυτοτικά μηδέν και ως εκ τούτου δεν λαμβάνει χώρα καμία σκέδαση.

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

6.1. Χαμηλές συχνότητες

Το πρόβλημα της σκέδασης επίπεδου κύματος σε ένα αντικείμενο του οποίου η χαρακτηριστική διάσταση είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κύματος έχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς πολλές εφαρμογές της θεωρίας σκέδασης, όπως μη καταστροφικός έλεγχος, ιατρική απεικόνιση και υποβρύχια ακουστική, βασίζονται σε αυτή τη μέθοδο.

Ωστόσο, ένα μεγάλο μέρος από τις εργασίες που σχετίζονται με τη μέθοδο χαμηλών συχνοτήτων αφορά ισότροπους σκεδαστές. Παρακάτω αναπτύσσεται η μέθοδος των χαμηλών συχνοτήτων για έναν ανισότροπο διαπερατό σκεδαστή και οι προσεγγίσεις χαμηλών συχνοτήτων ανάγονται σε μια ακολουθία προβλημάτων συνοριακών τιμών εξισώσεων Laplace και τροποποιημένης Laplace.

Παρόλο που κάποιες εξισώσεις έχουν ήδη παρουσιασθεί σε προηγούμενα κεφάλαια, εδώ θα αναφερθούν εκ νέου προκειμένου το πρόβλημα που εξετάζεται να είναι πλήρως διατυπωμένο.

Θεωρούμε έναν ανισότροπο σκεδαστή που χαρακτηρίζεται από έναν πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}$. Ο σκεδαστής αυτός, του οποίου η επιφάνεια S θεωρείται $C^{(1)}$ λεία, διαταράσσει τη διάδοση ενός προσπίπτοντος επίπεδου κύματος που ταξιδεύει στον εξωτερικό ισότροπο χώρο. Η αλληλεπίδραση ανάμεσα στο εμπόδιο και το προσπίπτον πεδίο παράγει το σκεδασμένο πεδίο u , το οποίο ζει στον εξωτερικό ανοικτό χώρο V^+ , καθώς επίσης το εσωτερικό πεδίο u^- , το οποίο διαδίδεται στο σκεδαστή V^- .

Το παραπάνω πρόβλημα, αφού υποθέσουμε αρμονική εξάρτηση από το χρόνο $\exp\{-i\omega t\}$ για τα πεδία, περιγράφεται για το ολικό εξωτερικό πεδίο u^+ :

$$u^+(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + u^i(\mathbf{r}) \quad (6.1)$$

και για το εξωτερικό πεδίο u^- από τις παρακάτω εξισώσεις Helmholtz αντίστοιχα:

$$(\Delta + k^2)u^+(\mathbf{r}) = 0, \text{ στον } V^+ \quad (6.2)$$

και

$$(\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla + k^2 \eta^2)u^-(\mathbf{r}) = 0, \text{ στον } V^-, \quad (6.3)$$

όπου k είναι η σταθερά Helmholtz και η ο σχετικός δείκτης διάθλασης. Επιπλέον το ολικό και το εσωτερικό πεδίο ικανοποιούν τις συνθήκες διαπερατότητας:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}) \quad (6.4)$$

$$\beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u^-(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S, \quad (6.5)$$

όπου β είναι η αδιάστατη σταθερά:

$$\beta = \frac{\rho^+}{\rho^-} \frac{1 - i\omega\delta^- \gamma^-}{1 - i\omega\delta^+ \gamma^+}, \quad (6.6)$$

με $\rho^\pm$, $\delta^\pm$ και $\gamma^\pm$ να είναι η μέση πυκνότητα μάζας, το ιξώδες συμπίεσης και το μέτρο συμπιεστότητας αντίστοιχα για το εξωτερικό και το εσωτερικό μέσο και $\hat{\mathbf{n}}$ η προς τα έξω κάθετος στην επιφάνεια του σκεδαστή.

Το ολικό πεδίο δέχεται την ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + \frac{ik}{4\pi} \int_S \left[u^+(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V^+, \quad (6.7)$$

όπου $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ είναι η θεμελιώδης λύση για τον εξωτερικό χώρο:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = h(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|), \quad (6.8)$$

η οποία επιλύει την εξίσωση:

$$(\Delta + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{4\pi}{ik} \delta(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|), \quad \text{στον } V^+. \quad (6.9)$$

Το εσωτερικό πεδίο ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$u^-(\mathbf{r}) = \int_S \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}}_- \cdot \left[G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') - u^-(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V^-, \quad (6.10)$$

όπου:

$$G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi \sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}_-}} \frac{\exp \left\{ ik \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \right\}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{A}}_-^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}} \quad (6.11)$$

είναι η θεμελιώδης λύση για τον εσωτερικό χώρο, η οποία επιλύει την εξίσωση:

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}_- : \nabla \nabla + k^2\right) G_{\mathbf{A}_-}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \text{ στον } V^-. \quad (6.12)$$

Εφαρμόζοντας τεχνικές ασυμπτωτικής ανάλυσης προκύπτει η μορφή του απομακρυσμένου πεδίου:

$$u(\mathbf{r}) = g(\hat{\mathbf{r}})h(kr) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (6.13)$$

όπου το πλάτος σκέδασης $g(\hat{\mathbf{r}})$ δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$g(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{ik}{4\pi} \int_S \left[ik(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}})u^+(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}') \right] \exp\{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'\} ds(\mathbf{r}') \quad (6.14)$$

και $h(kr)$ δηλώνει τη μηδενικής τάξης σφαιρική συνάρτηση Hankel 1^{ου} είδους:

$$h(kr) = h_0^{(1)}(kr) = \frac{\exp\{ikr\}}{ikr}. \quad (6.15)$$

Επιπλέον οι ενεργειακές διατομές σκέδασης μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση:

$$\sigma_s = \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left\{ \int_S u^*(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} ds(\mathbf{r}) \right\} = \frac{1}{k^2} \int_{S^2} |g(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}), \quad (6.16)$$

όπου S^2 είναι η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$.

Θεωρούμε πως ο σκεδαστής έχει χαρακτηριστική διάσταση πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος πεδίου και χρησιμοποιούμε την αναλυτικότητα του ολικού πεδίου για $k=0$ προκειμένου να το αναπτύξουμε σε δυνάμεις του κυματικού αριθμού. Η υπόθεση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να έχουμε τα ακόλουθα αναπτύγματα χαμηλών συχνοτήτων για το ολικό και το εσωτερικό πεδίο:

$$u^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} u_n^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^+, \quad (6.17)$$

$$u^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} u_n^-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^-, \quad (6.18)$$

όπου τα u^+ και u^- , τα οποία εξαρτώνται από το k , αντικαθίστανται από τις ακολουθίες $\{u_n^+\}$ και $\{u_n^-\}$ των προσεγγίσεων χαμηλών συχνοτήτων αντίστοιχα, οι οποίες είναι ανεξάρτητες από το k .

Αντικαθιστώντας την (6.17) στην εξίσωση (6.2), καθώς επίσης την (6.18) στην εξίσωση (6.3) και εξισώνοντας τις ίσες δυνάμεις του k προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\Delta u_n^+(\mathbf{r}) = n(n-1)u_{n-2}^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^+, \quad (6.19)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla u_n^-(\mathbf{r}) = n(n-1)\eta^2 u_{n-2}^-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^-, \quad (6.20)$$

οι οποίες ισχύουν για κάθε $n = 0, 1, \dots$. Δουλεύοντας ομοιότροπα, θέτουμε τις (6.17) και (6.18) στις (6.4) και (6.5) αντίστοιχα, οπότε προκύπτουν οι συνθήκες διαπερατότητας:

$$\left. \begin{aligned} u_n^+(\mathbf{r}) &= u_n^-(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla u_n^+(\mathbf{r}) &= \beta \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u_n^-(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \mathbf{r} \in S, \quad (6.21)$$

που πρέπει να ικανοποιούν οι προσεγγίσεις χαμηλών συχνοτήτων u_0^+ , u_1^+ , ..., u_0^- , u_1^- , Χρησιμοποιούμε, επίσης, ανάπτυγμα χαμηλών συχνοτήτων και για το προσπίπτον πεδίο:

$$u^i(\mathbf{r}) = e^{ik\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})^n \quad (6.22)$$

καθώς επίσης και τη θεμελιώδη λύση

$$ikG(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-1}, \quad (6.23)$$

τα οποία μαζί με το ανάπτυγμα (6.17) στην ολοκληρωτική αναπαράσταση (6.7) δίνουν:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} u_n^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})^n + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \times \int_S \left[u_{n-m}^+(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{m-1} - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{m-1} \frac{\partial}{\partial n'} u_{n-m}^+(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'), \quad (6.24)$$

όπου η έκφραση αυτή προκύπτει κάνοντας χρήση του γινομένου Cauchy για τον πολλαπλασιασμό των σειρών.

Εξισώνοντας τις όμοιες δυνάμεις του ik προκύπτει:

$$u_n^+(\mathbf{r}) = f_n^+(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[u_n^+(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} u_n^+(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'), \quad (6.25)$$

όπου:

$$f_0^+(\mathbf{r}) = u_0^i(\mathbf{r}) = 1 \quad (6.26)$$

και

$$f_n^+(\mathbf{r}) = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})^n + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} \int_S \left[u_{n-m}^+(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{m-1} - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{m-1} \frac{\partial}{\partial n'} u_{n-m}^+(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'), \quad (6.27)$$

για κάθε $\mathbf{r} \in V^+$ και $n \geq 1$.

Θεωρώντας ακόμη ανάπτυγμα χαμηλών συχνοτήτων για το εκθετικό:

$$\exp[ikna(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \eta^n}{n!} a^n(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (6.28)$$

όπου $a(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ δίνεται από την:

$$a(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sqrt{\tilde{\mathbf{A}}^{-1} : (\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \quad (6.29)$$

προκύπτει το ανάπτυγμα χαμηλών συχνοτήτων για τη θεμελιώδη λύση (6.11):

$$G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \eta^n a^{n-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (6.30)$$

Θέτοντας στη συνέχεια τα αναπτύγματα (6.18) και (6.30) των u^- και $G_A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ αντίστοιχα στην εσωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση (6.10) έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} u_n^-(\mathbf{r}) &= \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \eta^m \int_S \left[a^{m-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_{n-m}^-(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - u_{n-m}^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a^{m-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Ανακατατάσσοντας στην (6.31) τους όρους και εξισώνοντας τις ίσες δυνάμεις του ik προκύπτει πως:

$$\begin{aligned} u_n^-(\mathbf{r}) &= f_n^-(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_S \left[a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_n^-(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - u_n^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (6.32)$$

όπου:

$$f_0^-(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.33)$$

και

$$\begin{aligned} f_n^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} \eta^m \int_S \left[a^{m-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_{n-m}^-(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - u_{n-m}^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a^{m-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'), \quad n \in N^*, \end{aligned} \quad (6.34)$$

για κάθε $\mathbf{r} \in V^-$ και $n \geq 1$.

Παρατηρούμε επίσης πως όχι μόνο $f_0^- = 0$, αλλά και $f_1^- = 0$, καθώς

$$\begin{aligned} f_1^-(\mathbf{r}) &= \frac{\eta}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_s \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_0^-(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\ &= \frac{\eta}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_{V^-} \tilde{\mathbf{A}} : \nabla_{\mathbf{r}'} \nabla_{\mathbf{r}'} u_0^-(\mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') = 0, \end{aligned} \quad (6.35)$$

όπου στην (6.35) έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα απόκλισης, ενώ έχουμε λάβει υπόψη πως η u_0^- είναι συνάρτηση δυναμικού στο V^- (δηλαδή λύση της (6.20)).

Αναλυτικότερα, οι τέσσερις πρώτοι όροι για το u_n^+ δίνονται από τις:

$$u_0^+(\mathbf{r}) = 1 + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[u_0^+(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}'), \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} u_1^+(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[u_1^+(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} u_2^+(\mathbf{r}) &= (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r})^2 + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[u_0^+(\mathbf{r}') \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\partial n'} - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}') \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_s \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[u_2^+(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial u_2^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned}
u_3^+(\mathbf{r}) = & \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}\right)^3 + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[u_0^+(\mathbf{r}') \frac{\partial |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{\partial n'} - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}') \\
& + \frac{3}{4\pi} \int_s \left[u_1^+(\mathbf{r}') \frac{\partial |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{\partial n'} - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}') \\
& - \frac{3}{4\pi} \int_s \frac{\partial u_2^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[u_3^+(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial u_3^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}')
\end{aligned} \tag{6.39}$$

και για το u_n^- από τις:

$$\begin{aligned}
u_0^-(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_s \left[a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_0^-(\mathbf{r}') - u_0^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{6.40}$$

$$\begin{aligned}
u_1^-(\mathbf{r}) = & \frac{\eta}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_s \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_0^-(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\
& + \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_s \left[a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_1^-(\mathbf{r}') - u_1^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{6.41}$$

$$\begin{aligned}
u_2^-(\mathbf{r}) = & \frac{\eta^2}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_s \left[a(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_0^-(\mathbf{r}') - u_0^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') \\
& + \frac{\eta}{2\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_s \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_1^-(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\
& + \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_s \left[a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_2^-(\mathbf{r}') - u_2^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned}
u_3^-(\mathbf{r}) = & \frac{\eta^3}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_S \left[a^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_0^-(\mathbf{r}') - u_0^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a^2(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') \\
& + \frac{3\eta^2}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_S \left[a(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_1^-(\mathbf{r}') - u_1^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') \quad (6.43) \\
& + \frac{3\eta}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \int_S \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_2^-(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\
& + \frac{1}{4\pi\sqrt{\det \tilde{\mathbf{A}}}} \\
& \int_S \left[a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u_3^-(\mathbf{r}') - u_3^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} a^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}').
\end{aligned}$$

Στο άπειρο, η συμπεριφορά του u_n^+ καθορίζεται από τη συμπεριφορά του προσπίπτοντος επίπεδου κύματος, καθώς το σκεδασμένο πεδίο στην περιοχή αυτή τείνει στο μηδέν και οπότε το προσπίπτον πεδίο είναι το μοναδικό ανιχνεύσιμο πεδίο εκεί.

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του $u_n^+(\mathbf{r})$ καθώς το r τείνει στο άπειρο προκύπτει από το ανάπτυγμα του $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{m-1}$ σε πτωτικούς όρους δυνάμεων του r , ξεκινώντας από τον υψηλότερο, τον r^{m-1} . Ακόμη, λαμβάνουμε υπόψη μόνο τους όρους έως το $\frac{1}{r}$, αλλά όχι συμπεριλαμβάνοντας αυτό, καθώς οι $\left(\frac{1}{r}\right)^n$, $n \geq 1$ όροι προέρχονται από το σκεδασμένο πεδίο και ως εκ τούτου μηδενίζονται στο άπειρο.

Η συμπεριφορά των τεσσάρων πρώτων όρων (6.36)-(6.39) στο άπειρο έχει ως εξής:

$$u_0^+(\mathbf{r}) \rightarrow 1, \quad (6.44)$$

$$u_1^+(\mathbf{r}) \rightarrow r \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}'), \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned}
u_2^+(\mathbf{r}) \rightarrow r^2 (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \frac{r}{4\pi} \int_s \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') \\
- \frac{1}{4\pi} \int_s \left[\hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} u_0^+(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}') - \frac{1}{2\pi} \int_s \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned}
u_3^+(\mathbf{r}) \rightarrow r^3 (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{r}})^3 - \frac{r^2}{4\pi} \int_s \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') \\
- \frac{r}{2\pi} \int_s \left[\hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} u_0^+(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}') \\
- \frac{3r}{4\pi} \int_s \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[2r' u_0^+(\mathbf{r}') - r'^2 \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}') \\
- \frac{3}{4\pi} \int_s \left[\hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} u_1^+(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}') - \frac{3}{4\pi} \int_s \frac{\partial u_2^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Συνεπώς, προκειμένου να βρούμε τον πρώτο όρο θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα:

$$\left. \begin{aligned}
\Delta u_0^+(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \in V^+ \\
\tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla u_0^-(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \in V^- \\
u_0^-(\mathbf{r}) &= u_0^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S \\
\beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u_0^-(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u_0^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S \\
u_0^+(\mathbf{r}) &\rightarrow 1, & r \rightarrow \infty,
\end{aligned} \right\} \tag{6.48}$$

από το οποίο προκύπτει πως

$$\begin{aligned}
u_0^+(\mathbf{r}) &= 1, \quad \mathbf{r} \in V^+, \\
u_0^-(\mathbf{r}) &= 1, \quad \mathbf{r} \in V^-.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Επιπλέον, για να βρούμε το δεύτερο όρο αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta u_1^+(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \in V^+ \\
 \tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla u_1^-(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \in V^- \\
 u_1^-(\mathbf{r}) &= u_1^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S \\
 \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u_1^-(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u_1^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S \\
 u_1^+(\mathbf{r}) &\rightarrow r \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}}, & r \rightarrow \infty,
 \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

Παρόμοια, η εύρεση του τρίτου όρου προκύπτει από τη λύση του:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta u_2^+(\mathbf{r}) &= 2, & \mathbf{r} \in V^+ \\
 \tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla u_2^-(\mathbf{r}) &= 2\eta^2, & \mathbf{r} \in V^- \\
 u_2^-(\mathbf{r}) &= u_2^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S \\
 \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u_2^-(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u_2^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S \\
 u_2^+(\mathbf{r}) &\rightarrow r^2 \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right)^2 - \frac{1}{4\pi} \int_S \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} ds(\mathbf{r}') \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}'), & r \rightarrow \infty
 \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

και του τέταρτου όρου από το:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta u_3^+(\mathbf{r}) &= 6u_1^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V^+ \\
 \tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla u_3^-(\mathbf{r}) &= 6\eta^2 u_1^-(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V^- \\
 u_3^-(\mathbf{r}) &= u_3^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S \\
 \beta \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u_3^-(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u_3^+(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in S \\
 u_3^+(\mathbf{r}) &\rightarrow r^3 \left(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \right)^3 \\
 &\quad - \frac{r}{2\pi} \int_S \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} ds(\mathbf{r}') - \frac{3r}{4\pi} \int_S \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_S 2r' ds(\mathbf{r}') \\
 &\quad - \frac{3}{4\pi} \int_S \left[\hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} u_1^+(\mathbf{r}') - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}' \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds(\mathbf{r}') \\
 &\quad - \frac{3}{4\pi} \int_S \frac{\partial u_2^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}'), & r \rightarrow \infty,
 \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

ενώ όροι υψηλότερης τάξης μπορούν να προκύψουν από την επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Το ανάπτυγμα χαμηλών συχνοτήτων για το απομακρυσμένο πεδίο προκύπτει αντικαθιστώντας την (6.17) και την έκφραση [13]:

$$\exp\{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} (-\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^n \quad (6.53)$$

στην εξίσωση (6.14) και χρησιμοποιώντας το γινόμενο Cauchy για το γινόμενο σειρών προκύπτει [13]:

$$g(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^{n+1}}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-1)^{m+1} \int_S \left[ik(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) u_{n-m}^+(\mathbf{r}') + \frac{\partial u_{n-m}^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^m ds(\mathbf{r}'), \quad (6.54)$$

η οποία γράφεται επίσης [13]:

$$g(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{ik}{4\pi} \int_S \frac{\partial u_0^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^{n+2}}{(n+1)!} \int_S \frac{\partial u_{n+1}^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^{n+2}}{n!} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} (-1)^m \int_S \left[\frac{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^{m+1}}{m+1} \frac{\partial u_{n-m}^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} - (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^m u_{n-m}^+(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'). \quad (6.55)$$

Το πλάτος σκέδασης όπως εκφράζεται στην (6.55) μπορεί να πάρει ακόμη τη μορφή [13]

$$g(\hat{\mathbf{r}}) = ikA_1 + k^2 A_2 + ik^3 A_3 + O(k^4), \quad (6.56)$$

όπου:

$$A_1 = 0 \quad (6.57)$$

$$A_2 = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \int_S \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} ds(\mathbf{r}'), \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & \frac{1}{8\pi} \int_S \frac{\partial u_2^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} - (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) u_1^+(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_S (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Αλλά από τη συνθήκη διαπερατότητας (6.8), σε συνδυασμό με το θεώρημα απόκλισης και την εξίσωση (6.20) προκύπτει πως:

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{\partial u_n^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds(\mathbf{r}') &= \beta \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \nabla u_n^-(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \\
&= \beta \int_{V^-} \tilde{\mathbf{A}} : \nabla \nabla u_n^-(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}') = \beta n(n-1) \eta^2 \int_{V^-} u_{n-2}^-(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Και τώρα οι (6.58) και (6.59) γράφονται:

$$A_2 = \frac{1}{4\pi} \int_S \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} ds(\mathbf{r}') \tag{6.61}$$

και

$$\begin{aligned}
A_3 = & \frac{1}{4\pi} \beta \eta^2 V^- - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial u_1^+(\mathbf{r}')}{\partial n'} - (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) u_1^+(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') \\
& - \frac{1}{4\pi} \int_S (\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}').
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Από τη γενική έκφραση για τη διαφορική ενεργειακή διατομή σκέδασης [13]:

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4\pi}{k^2} |g(\hat{\mathbf{r}})|^2, \tag{6.63}$$

προκύπτει πως για ένα επίπεδο κύμα που προσπίπτει στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{k}}$ είναι [13]:

$$\sigma(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi \left(k^2 A_2^2 + 2ik^3 A_2 A_3 \right) + O(k^4) \tag{6.64}$$

και η ενεργειακή διατομή σκέδασης που ορίζεται ως [13]:

$$\sigma_s = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \sigma(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (6.65)$$

δίνεται από την [13]:

$$\sigma_s = k^2 \int_{S^2} A_2^2 ds(\hat{\mathbf{r}}) + 2ik^3 \int_{S^2} A_2 A_3 ds(\hat{\mathbf{r}}) + O(k^4). \quad (6.66)$$

6.2. Αναγωγή στο ισότροπο μέσο

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να αναφέρουμε πως κάθε αποτέλεσμα που παρουσιάστηκε στη διατριβή αυτή και περιέχει το δυαδικό $\tilde{\mathbf{A}}$ (ή $\tilde{\mathbf{A}}_-$) (μεταφέρει δηλαδή τα χαρακτηριστικά του αντίστοιχου υλικού) μπορεί εύκολα να αναχθεί στην αντίστοιχη, ήδη γνωστή [13] σχέση της περίπτωσης του ισότροπου χώρου με αντικατάσταση του δυαδικού $\tilde{\mathbf{A}}$ (ή $\tilde{\mathbf{A}}_-$) από το μοναδιαίο δυαδικό $\tilde{\mathbf{I}}$, που περιγράφει τα χαρακτηριστικά του ισότροπου χώρου. Παρακάτω αναφέρονται οι πιο χαρακτηριστικές σχέσεις.

Η αναγωγή του ανισότροπου τελεστή κλίσης δίνει τον τελεστή κλίσης όπως τον γνωρίζουμε έως τώρα:

$$\nabla_I = \tilde{\mathbf{I}} \cdot \nabla = \nabla, \quad (6.67)$$

ενώ η τροποποιημένη εξίσωση Helmholtz ανάγεται στην:

$$(\tilde{\mathbf{I}} : \nabla \nabla + k^2) u(\mathbf{r}) = (\nabla \cdot \nabla + k^2) u(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.68)$$

και η θεμελιώδης λύση της στην:

$$G_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp\{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.69)$$

όπου το τροποποιημένο μέτρο $a(\mathbf{r})$ (ή $a(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$) ανάγεται στην Ευκλείδεια απόσταση:

$$a_I(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sqrt{\tilde{\mathbf{I}} : (\mathbf{r}-\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|. \quad (6.70)$$

Ακόμη είναι:

$$a_I(\hat{\mathbf{r}}) = 1 \quad (6.71)$$

και το ολοκλήρωμα της (2.57) δίνει πλέον την επιφάνεια μιας σφαίρας.

Επίσης, το επίπεδο κύμα ανάγεται στο:

$$u^i(\mathbf{r}) = \exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\}. \quad (6.72)$$

Σε ότι αφορά τη συνάρτηση πυκνότητας ενέργειας, η αναγωγή δίνει τη γνωστή συνάρτηση:

$$W_I(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{\gamma}{2} |U(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (6.73)$$

ή μετά την εισαγωγή της αρμονικής εξάρτησης του χρόνου στην:

$$\mathcal{W}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho}{2} |\mathbf{v}(\mathbf{r})|^2 + \frac{\gamma}{2} |u(\mathbf{r})|^2, \quad (6.74)$$

ενώ η ροή ισχύος γίνεται:

$$\mathbf{I}_I(\mathbf{r}) = \frac{1}{\omega\rho} \text{Im} \left\{ (1 - i\omega\gamma\delta) u^* \nabla u \right\}. \quad (6.75)$$

Επιπλέον, η τροποποιημένη ταυτότητα Green δίνει τη γνωστή 2^η ταυτότητα Green και η ολοκληρωτική αναπαράσταση του ολικού πεδίου u^+ ανάγεται στη γνωστή μορφή:

$$u^+(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + \int_S \left[u^+(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}') \quad (6.76)$$

και παρόμοια για το εσωτερικό πεδίο u^- :

$$u^-(\mathbf{r}) = \int_S \left[G_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') - u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} G_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'). \quad (6.77)$$

Το πλάτος σκέδασης δίνεται πλέον από την έκφραση:

$$g_I(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{ik}{4\pi} \int_S \left[ik(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) u^+(\mathbf{r}') + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} u^+(\mathbf{r}') \right] \exp\{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'\} ds(\mathbf{r}') \quad (6.78)$$

και η τροποποιημένη ακτινική θεμελιώδης λύση ανάγεται στη μηδενικής τάξης σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους με όρισμα kr .

Ακόμη, οι διάφοροι τύποι των ενεργειακών διατομών ανάγονται στις παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma_I(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi \frac{|g_I(\hat{\mathbf{r}})|^2}{k^2}, \quad (6.79)$$

$$\sigma_s = \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left\{ \int_S u^*(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \right\} \quad (6.80)$$

και

$$\sigma_a = \frac{1}{k} \operatorname{Im} \left\{ \int_S u^+(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla u^{+*}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \right\} \quad (6.81)$$

για τη διαφορική, την ολική ενεργειακή διατομή σκέδασης και την ενεργειακή διατομή απορρόφησης, αντίστοιχα.

Τέλος, σε ότι αφορά τα βασικά θεωρήματα σκέδασης, αυτά ανάγονται πολύ εύκολα στα αντίστοιχα της σκέδασης σε ισότροπο χώρο, κάτι που ισχύει και για την εφαρμογή των χαμηλών συχνοτήτων.

7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ

Αντικείμενο της παρούσας διατριβής ήταν η ανάπτυξη της βασικής θεωρίας σκέδασης ακουστικών πεδίων (βαθμωτών πεδίων) για ανισότροπους χώρους. Για το λόγο αυτό μελετήθηκαν αρχικά οι ιδιότητες ενός ανισότροπου χώρου, προκειμένου να γίνει κατανοητή η φύση ενός τέτοιου μέσου όπως και οι αλλαγές που η παραδοχή της ύπαρξής του επιφέρει σε κοινά μαθηματικά εργαλεία, τα οποία στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία της θεωρίας.

Στη συνέχεια μελετήθηκε η μορφή των βασικών εξισώσεων ακουστικής σε ανισότροπο χώρο που πρέπει να ικανοποιεί ένα πεδίο και με επεξεργασία αυτών οδηγηθήκαμε στη γνωστή μορφή της εξίσωσης Helmholtz για ανισότροπα μέσα διάδοσης. Η θεμελιώδης λύση της τροποποιημένης εξίσωσης Helmholtz μελετήθηκε εκ νέου, ενώ επαληθεύτηκε και εδώ πως όντως αποτελεί θεμελιώδη λύση, έτσι ώστε να γίνουν κατανοητές οι διαφορές της από την αντίστοιχη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz για ισότροπους χώρους.

Ακόμη, τοποθετήθηκαν τα τέσσερα βασικά προβλήματα σκέδασης και για τον ανισότροπο χώρο, δηλαδή το πρόβλημα διαπερατότητας, όπως και τα τρία συνήθη προβλήματα συνοριακών τιμών, Dirichlet, Neumann και Robin. Η μελέτη των προσπίπτοντων πεδίων, ακολούθως, έδωσε τη δυνατότητα να καταστεί ο ανισότροπος χώρος περισσότερο οικείος. Αυτό έγινε δυνατό αφενός με την παρουσίαση και την εξέταση της μορφής που πρέπει να έχει ένα πεδίο που διαδίδεται σε ανισότροπο χώρο προκειμένου να έχει ως φασικά μέτωπα επίπεδα σταθερής φάσης αλλά αφετέρου και με τη γεωμετρική ερμηνεία των κυματικών μετώπων που παράγονται από μια σημειακή πηγή. Ο ορισμός των συναρτησιακών ενέργειας στην περίπτωση των ανισότροπων μέσων ολοκληρώνει την τοποθέτηση του ευθέως προβλήματος σκέδασης βαθμωτών πεδίων σε πλήρως ανισότροπο υλικό.

Επίσης, παράχθηκαν οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις που πρέπει να ικανοποιούν το σκεδασμένο και το ολικό πεδίο και διατυπώθηκε η τροποποιημένη συνθήκη ακτινοβολίας που ισχύει για ανισότροπα μέσα. Έπειτα μελετήθηκε η συμπεριφορά στο άπειρο του σκεδασμένου πεδίου και από την οποία προέκυψε και αναλύθηκε το ανισότροπο πλάτος σκέδασης. Ορίσθηκαν, επιπλέον, η διαφορική ενεργειακή διατομή σκέδασης όπως επίσης και η ολική ενεργειακή διατομή σκέδασης, η συνολική απορρόφηση και η ενεργειακή διατομή εξαφάνισης για ανισότροπα μέσα και συσχετίσθηκαν με προαναφερθέντα αποτελέσματα προκειμένου να μελετηθούν οι αλληλοσυνδέσεις τους.

Επιπρόσθετα, παρουσιάσθηκαν και αποδείχθηκαν τα βασικά θεωρήματα σκέδασης για ανισότροπα μέσα, δηλαδή το θεώρημα αμοιβαιότητας για σημειακές πηγές και επίπεδα κύματα, το γενικευμένο θεώρημα σκέδασης και το οπτικό θεώρημα.

Τέλος, ως εφαρμογή των αποτελεσμάτων τοποθετήθηκε το πρόβλημα χαμηλών συχνοτήτων για ανισότροπο διαπερατό σκεδαστή που βρίσκεται σε ισότροπο μέσο και παρουσιάστηκε η ακολουθία προβλημάτων των οποίων η λύση οδηγεί στην εύρεση των όρων προσέγγισης των πεδίων. Η αναγωγή των αποτελεσμάτων για διάδοση και σκέδαση βαθμωτών πεδίων σε ανισότροπα μέσα, που

παρουσιάστηκαν στη διατριβή, στα αντίστοιχα για ισότροπα μέσα επιβεβαιώνει την ορθότητα αυτών, ενώ ταυτόχρονα τονίζει τις βασικές διαφορές των δύο μέσων και αναδεικνύει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του ανισότροπου χώρου.

Τα παραπάνω αποτελούν μέρος μιας προσπάθειας που αφορά την ανάπτυξη της γνωστής θεωρίας των ισότροπων μέσων για ανισότροπα μέσα και την παραγωγή αποτελεσμάτων σε συμπαγή μορφή, προκειμένου αφενός να γίνει περισσότερο κατανοητή η φύση και ο χαρακτήρας των ανισότροπων υλικών αλλά και αφετέρου να υπάρχουν τα απαραίτητα «εργαλεία» για να μπορέσει κάποιος να προχωρήσει στην επίλυση σχετικών προβλημάτων.

Επειδή, όπως έγινε σαφές από τη μελέτη του ανισότροπου χώρου, αυτός συνδέεται άμεσα με την ελλειψοειδή γεωμετρία, ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανάπτυξη των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν σε μορφή που θα ενσωματώνει τα χαρακτηριστικά αυτής της γεωμετρίας.

Η επίλυση επίσης προβλημάτων ανισότροπης σκέδασης, τα οποία προσεγγίζονται καλύτερα με τη χρήση ελλειψοειδούς γεωμετρίας, αποτελεί ένα ακόμη μελλοντικό βήμα όπως και η επίλυση προβλημάτων με σκεδαστές δεδομένης γεωμετρίας και φυσικών χαρακτηριστικών.

Ωστόσο, λόγω της αυξημένης δυσκολίας που παρουσιάζει ο ανισότροπος χώρος ακόμη και η απευθείας ανάπτυξη της θεμελιώδους λύσης της τροποποιημένης εξίσωσης Hemholtz σε ιδιοαναπτύγματα γνωστών συστημάτων συντεταγμένων ή η εύρεση άλλων μεθοδολογιών υπολογισμού τέτοιων ιδιοαναπτυγμάτων αποτελεί πρόκληση.

Όταν η θεωρία ολοκληρωθεί πλήρως για τα βαθμωτά πεδία, η επέκτασή της σε διανυσματικά και τανυστικά πεδία είναι τα επόμενα, σε βάθος χρόνου, βήματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Συνοπτική περιγραφή δυαδικών

Τα δυαδικά είναι γραμμικές συναρτήσεις διανυσμάτων και στον πραγματικό χώρο γίνονται κατανοητά μέσω της δράσης τους στα διανύσματα, η οποία οδηγεί σε στροφή ή/και βάθμωση του μέτρου του διανύσματος. Εδώ θα ασχοληθούμε με δυαδικά του $\mathbb{R}^3$ και θα αναφερθούν κάποια βασικά χαρακτηριστικά τους.

Το δυαδικό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ σημειώνεται χωρίς κανένα σύμβολο πολλαπλασιασμού, ως $\mathbf{ab}$ και το αποτέλεσμα ονομάζεται δυάδα και ορίζεται ως:

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \quad (7.1)$$

για κάθε διάνυσμα $\mathbf{c}$.

Με αντίστοιχο τρόπο, ορίζουμε την πολυάδα με διαδοχικά διανύσματα να πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους με το δυαδικό γινόμενο και ορίζονται ως $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \dots \mathbf{a}_n$, όπου για $n=1$ προκύπτει διάνυσμα, για $n=2$ δυάδα, για $n=3$ τριάδα, ... και για $n=n$ νιάδα.

Ως δυαδικό ορίζουμε το άθροισμα διατεταγμένων δυάδων και σύμφωνα με την ιδιότητα του Gibbs κάθε δυαδικό του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα τριών δυάδων, π.χ.:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{D}} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i = \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3 \\ &= \mathbf{a} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i + \mathbf{b} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{b}' \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i + \mathbf{c} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{b}_i,\end{aligned}\tag{7.2}$$

όπου $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ είναι μια βάση διανυσμάτων και $[\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}']$ είναι η αντίστοιχη της αμοιβαία.

Ένα δυαδικό λειτουργεί ως γραμμική απεικόνιση ενός διανύσματος, σε ένα άλλο: $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{a}$ και αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση εκφράζεται με τη βοήθεια ενός δυαδικού.

Βάση του ορισμού (7.1) προκύπτει πως:

$$\tilde{\mathbf{D}} : \mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{a},\tag{7.3}$$

για κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Το ανάστροφο ενός δυαδικού, $\tilde{\mathbf{D}}^T$, ορίζεται ως:

$$\tilde{\mathbf{D}}^T = \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i\tag{7.4}$$

και ισχύει πως:

$$\tilde{\mathbf{D}}^T \cdot \mathbf{a} = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{a}, \quad (7.5)$$

για κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$.

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{I}$ αντιστοιχεί στην ταυτοτική απεικόνιση:

$$\tilde{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (7.6)$$

που ισχύει για κάθε διάνυσμα $\mathbf{a}$ και γράφεται ως:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{a}\mathbf{a}' + \mathbf{b}\mathbf{b}' + \mathbf{c}\mathbf{c}', \quad (7.7)$$

ενώ σε μια ορθοκανονική βάση $[\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3]$ παίρνει τη μορφή:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{u}}_1\hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2\hat{\mathbf{u}}_2 + \hat{\mathbf{u}}_3\hat{\mathbf{u}}_3. \quad (7.8)$$

Για κάθε δυαδικό $\tilde{\mathbf{D}}$ ισχύει πως:

$$\tilde{\mathbf{I}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 D_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j', \quad (7.9)$$

όπου $[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3']$ η αμοιβαία βάση της βάσης: $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$.

Κάθε δυαδικό της μορφής (7.2) διαθέτει ένα αντίστροφο δυαδικό $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$, το οποίο γράφεται:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i' \mathbf{a}_i', \quad (7.10)$$

όπου $[\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2', \mathbf{b}_3']$ η αμοιβαία βάση της βάσης $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ και ισχύει:

$$\tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{-1} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{I}}. \quad (7.11)$$

Ένα δυαδικό ονομάζεται πλήρες, όταν τα σέτ διανυσμάτων $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ και $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ αποτελούνται από διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα μεταξύ τους και τότε αντιστρέφεται πάντα ($\det \tilde{\mathbf{D}} \neq 0$).

Αν δύο από τα τρία διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε το δυαδικό λέγεται επίπεδο και γράφεται ως άθροισμα δύο δυάδων και δεν αντιστρέφεται ($\det \tilde{\mathbf{D}} = 0$).

Αν μόνο ένα από τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε το δυαδικό λέγεται γραμμικό και γράφεται ως μια δυάδα και δεν αντιστρέφεται ($\tilde{\mathbf{D}}^\times \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$).

Ορίζουμε:

- το εσωτερικό γινόμενο δύο δυαδικών ως:

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{c}_j) \mathbf{a}_i \mathbf{d}_j. \quad (7.12)$$

- το διπλό εσωτερικό γινόμενο δύο δυαδικών ως:

$$\tilde{\mathbf{A}} : \tilde{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c}_j) (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{d}_j). \quad (7.13)$$

- το εξωτερικό γινόμενο δύο δυαδικών ως:

$$\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}} = \left(\sum_{i=1}^3 \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{b}_i \times \mathbf{c}_j) \mathbf{a}_i \mathbf{d}_j. \quad (7.14)$$

- το διπλό εξωτερικό γινόμενο δύο δυαδικών ως:

$$\tilde{\mathbf{A}}^\times \tilde{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_i \times \mathbf{c}_j) (\mathbf{b}_i \times \mathbf{d}_j). \quad (7.15)$$

- το μικτό γινόμενο δύο δυαδικών ως:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\times} \tilde{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c}_j) (\mathbf{b}_i \times \mathbf{d}_j). \quad (7.16)$$

Τα 6 αναλλοίωτα (παραμένουν σταθερά σε κάθε σύστημα συντεταγμένων) κάθε δυαδικού, όπως ορίσθηκε στην (7.2), είναι τα [28]:

- 1 δυαδικό

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) + (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1)(\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}_{\times}^{\times} \tilde{\mathbf{D}}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

- 2 διανυσματικά

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3, \\ \varphi_2 &= (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \times (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) + (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) \times (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1). \end{aligned} \quad (7.18)$$

- 3 βαθμωτά

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3 \\ &= \text{tr} \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}} : \tilde{\mathbf{I}}, \\ \varphi_2 &= (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) + (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1) \cdot (\mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1) \\ &= \text{tr} \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{D}}_{\times}^{\times} \tilde{\mathbf{D}} : \tilde{\mathbf{I}}, \\ \varphi_3 &= (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) \\ &= \det \tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{6} \tilde{\mathbf{D}}_{\times}^{\times} \tilde{\mathbf{D}} : \tilde{\mathbf{D}}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Τα αναλλοίωτα του μοναδιαίου δυαδικού $\tilde{\mathbf{I}}$ είναι τα εξής:

$$\tilde{\mathbf{I}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{I}}, \quad (7.20)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad (7.21)$$

$$\varphi_2 = 0, \quad (7.22)$$

$$\varphi_3 = 3 = \text{tr} \tilde{\mathbf{I}}, \quad (7.23)$$

$$\varphi_2 = 3 = \text{tr} \tilde{\mathbf{I}}^{(2)}, \quad (7.24)$$

$$\varphi_3 = 1 = \det \tilde{\mathbf{I}}. \quad (7.25)$$

Επίσης ισχύει [28]:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}^{(2)T}}{\det \tilde{\mathbf{D}}} \quad (7.26)$$

και πως

$$\tilde{\mathbf{D}} : \tilde{\mathbf{D}}^{-1} = 3 \quad (7.27)$$

όπως και

$$\tilde{\mathbf{D}}^3 - (\text{tr} \tilde{\mathbf{D}}) \tilde{\mathbf{D}}^{(2)} + (\text{spm} \tilde{\mathbf{D}}) \tilde{\mathbf{D}} - (\det \tilde{\mathbf{D}}) \tilde{\mathbf{I}} = 0, \quad (7.28)$$

όπου η τελευταία είναι η γνωστή εξίσωση Cayley-Hamilton, από την οποία προκύπτει η εξίσωση ιδιοτιμών του δυαδικού:

$$-\det(\tilde{\mathbf{D}} - \lambda \tilde{\mathbf{I}}) = \lambda^3 - \lambda^2 (\text{tr} \tilde{\mathbf{D}}) + \gamma (\text{spm} \tilde{\mathbf{D}}) - (\det \tilde{\mathbf{D}}) = 0. \quad (7.29)$$

Κάθε δυαδικό καθορίζεται επίσης από έναν πίνακα και μια βάση και στη διαγωνοποιημένη του μορφή γράφεται ως εξής:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i \quad (7.30)$$

και τότε ισχύουν:

$$\text{tr} \tilde{\mathbf{D}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (7.31)$$

$$\text{spm} \tilde{\mathbf{D}} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \quad (7.32)$$

$$\det \tilde{\mathbf{D}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0, \quad (7.33)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (7.34)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^n = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^n \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i, \quad (7.35)$$

όπου λ_i , $i=1,2,3$ οι ιδιοτιμές του και $\hat{\mathbf{u}}_i$ τα αντίστοιχα ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματά του.

Επίσης ισχύει πως:

$$\det(\tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}) = (\det \tilde{\mathbf{D}})(\det \tilde{\mathbf{B}}). \quad (7.36)$$

Συμμετρικά και θετικά ορισμένα δυαδικά

Τα δυαδικά $\tilde{\mathbf{S}}$ για τα οποία ισχύει πως:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{S}}^T \quad (7.37)$$

ονομάζονται συμμετρικά.

Ένα δυαδικό $\tilde{\mathbf{S}}$ ονομάζεται θετικά ορισμένο αν ισχύει:

$$\tilde{\mathbf{S}} : \mathbf{r} \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{r} > 0, \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0}. \quad (7.38)$$

Στη συνέχεια αναφέρονται επιγραμματικά κάποια λήμματα που ισχύουν για συμμετρικά και θετικά ορισμένα δυαδικά.

Λήμμα 1: Αν ένα δυαδικό είναι πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο και λ είναι μια ιδιοτιμή του, τότε αυτή είναι πραγματική.

Λήμμα 2: Αν ένα δυαδικό είναι πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο και λ_1 , λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) είναι δύο ιδιοτιμές του με $\mathbf{u}_1$ και $\mathbf{u}_2$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε αυτά είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Λήμμα 3: Αν ένα δυαδικό είναι πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο και λ είναι μια ιδιοτιμή του, τότε αυτή είναι θετική.

Λήμμα 4: Αν ένα δυαδικό είναι θετικά ορισμένο, τότε αυτό αντιστρέφεται πάντα και το αντίστροφό του είναι επίσης θετικά ορισμένο.

Τα αναλλοίωτα ενός συμμετρικού και θετικά ορισμένου δυαδικού $\tilde{\mathbf{S}}$ είναι:

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(2)} = \lambda_2 \lambda_3 \hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 + \lambda_3 \lambda_1 \hat{\mathbf{u}}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 + \lambda_1 \lambda_2 \hat{\mathbf{u}}_3 \hat{\mathbf{u}}_3, \quad (7.39)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}, \quad (7.40)$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{0}, \quad (7.41)$$

$$s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr} \tilde{\mathbf{S}} > 0, \quad (7.42)$$

$$s_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = \text{tr} \tilde{\mathbf{S}}^{(2)} > 0, \quad (7.43)$$

$$s_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det \tilde{\mathbf{S}} > 0. \quad (7.44)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Achenbach J.D., "Wave Propagation In Elastic Solids", (1973), North Holland Pub. Co., Amsterdam.
- [2] Bedford A. and Drumheller D.S., "Introduction to elastic wave propagation", (1994), John Wiley & Sons.
- [3] Brand L., "Vector Analysis", (1955), John Wiley & Sons, New York.
- [4] Brand L., "Vector and Tensor Analysis", (1947), John Wiley & Sons, New York.
- [5] Buchwald V.T., "Elastic waves in anisotropic media", *Proceedings of the Royal Society of London A*, **253**, 563-580 (1959).
- [6] Cakoni F. and Haddar H., "The Linear Sampling Method for Anisotropic Media: Part II Preprint 2001/26", (2001), *MSRI Berkeley*, California.

- [7] Cakoni F., Colton D. and Haddar H., "The Linear Sampling Method for Anisotropic Media", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **146**, 285-299 (2002).
- [8] Chapman C.H. and Coates R.T., "Generalized Born scattering in anisotropic media", *Wave Motion*, **19**, 309-341 (1994).
- [9] Charalambopoulos A., "On the interior transmission problem in non-dissipative, inhomogeneous, anisotropic elasticity", *Journal of Elasticity*, **67**, 149-170 (2002).
- [10] Colton D. and Erbe C., "Spectral theory of the magnetic far field operator in an anisotropic medium", *Nonlinear Problems in Applied Mathematics*, 96-103 (1995), SIAM Publications, Philadelphia.
- [11] Colton D., Kress R. and Monk P., "Inverse scattering from an orthotropic medium", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **81**, 269-298 (1997).
- [12] Dassios G. and Karadima K.S., "Time Harmonic Acoustic Scattering in Anisotropic Media", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **28**, 1383-1401 (2005).
- [13] Dassios G. and Kleinman R., "Low Frequency Scattering", (2000), Oxford University Press, Oxford.
- [14] Dassios G. and Lindell I.V., "Uniqueness and reconstruction for the anisotropic Helmholtz decomposition", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **35**, 5139-5146 (2002).
- [15] Dassios G., Lindell I.V., "On The Helmholtz Decomposition For Polyadics", *Quarterly Of Applied Mathematics*, **59**, 787-796 (2001).

- [16] Duff G.F., "The Cauchy problem for elastic waves in an anisotropic medium", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Section. A*, **252**, 249-273 (1960).
- [17] Flügge S., "Handbuch Der Physik", Band XI/1, Akustik I, (1961), Springer Verlag, Berlin-Göttingen Heidelberg.
- [18] Flügge S., "Handbuch Der Physik", Band XI/2, Akustik II, (1962), Springer Verlag, Berlin-Göttingen Heidelberg.
- [19] Gibbs J.W., Wilson E.B., "Vector Analysis", (1901), Yale University Press, New Haven.
- [20] Green G., "On the propagation of light in crystallized media", *Transactions of Cambridge Philosophical Society*, **7**, 121-140 (1839).
- [21] Hähner P., "On the uniqueness of the shape of a penetrable, anisotropic obstacle", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **116**, 167-180 (2000).
- [22] Kelvin L., "Lecture XI", *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light*, 122-134 (1904), Cambridge University Press Warehouse.
- [23] Kelvin L., "Lecture XII", *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light*, 135-162 (1904), Cambridge University Press Warehouse.
- [24] Kuznetsov S.V., "Fundamental and singular solutions of Lamé' equations for media with arbitrary elastic anisotropy", *Quarterly of Applied Mathematics*, **63**, 455-467 (2005).
- [25] Lighthill J., "Waves in fluids", (1978), Cambridge University Press, Cambridge.

- [26] Lindell I.V. and Dassios G., "Generalized Helmholtz decomposition and static electromagnetic", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **14**, 1415-1428 (2000).
- [27] Lindell I.V. and Dassios G., "The Helmholtz Theorem And Scalar Potential Expansion", *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, **15**, 1281-1295, (2001).
- [28] Lindell I.V., "Methods for Electromagnetic Field Analysis", 2nd ed. (1995), Oxford University Press, Oxford.
- [29] Love A.E.H., "A Treatise On The Mathematical Theory Of Elasticity", (1927), Cambridge University Press, New York.
- [30] Musgrave M.J.P., "Elastic waves in anisotropic media", *Progress in Solid Mechanics II*, (1961), Sneddon and Hill (eds.), North-Holland, New York.
- [31] Nayfeh A.H., "Wave Propagation in Layered Anisotropic Media", (1995), Elsevier, Amsterdam.
- [32] Piller N.B. and Martin O.J.F., "Extension of the generalized multipole technique to anisotropic medias", *Optics Communications*, **150**, 9-14, (1998).
- [33] Psencik I. and Teles T.D., "Point source radiation in inhomogeneous anisotropic structures", *Pure and Applied Geophysics*, **148**, 591-623 (1996).
- [34] Schleicher J., Tygel M., Ursin B. and Bleistein N., "The Kirchhoff-Helmholtz integral for anisotropic elastic media", *Wave Motion*, **34**, 353-364, (2001).
- [35] Stevenson R.C., "Green's function for the Helmholtz equation of a scalar wave in an anisotropic halfspace", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **50**, 199-215, (1990).

- [36] Synge J.L., "Elastic waves in anisotropic media", *Journal of Mathematics and Physics*, **35**, 323-335 (1957).
- [37] Thomson C.J., "Modelling surface waves in anisotropic structures I", *Theory, Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **103**, 195-206, (1997).
- [38] Δάσιος Γ. και Κυριάκη Κ., " Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις", Αθήνα (1994).

Κατερίνα Στ. Καραδήμα

Προσωπικά Στοιχεία	Ημερομηνία Γέννησης Υπηκοότητα Οικογενειακή Κατάσταση Τόπος Γέννησης	16 Μαρτίου 1977 Ελληνική Άγαμη Πάτρα
Τίτλος	Διπλωματούχος Χημικός Μηχανικός, Διδάκτορας Πανεπιστημίου Πατρών & Υπεύθυνη Παραγωγής – Ζυθοποιός: Ζύθος Πάτρας, CONSTANTIS AE	
Διεύθυνση Κατοικίας	Πιτίτσας 23, 26504 Ρίο Αχαΐας Τηλ.: 2610 995 975 Τηλ.: 6944 69 15 90 email: kkaradima@gmail.com	
Επαγγελματική Εμπειρία	[01.07.2005-τώρα] Υπεύθυνη παραγωγής-ζυθοποιός: Ζύθος Πάτρας & Διαχείριση λιανικών πωλήσεων, CONSTANTIS AE	
Σπουδές	[1991-1994] Απολυτήριο 3 ^{ου} Γενικού Λυκείου Πατρών (19 6/10) [1994-1999] Δίπλωμα Χημικού Μηχανικού, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών (8 23/100) [1999-2002] Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών (10/10) [2002-2010] Διδάκτορας Πανεπιστημίου Πατρών (10/10)	
Ξένες Γλώσσες	[Αγγλικά] Άριστη γνώση (Certificate of Proficiency in English, University of Michigan) [Ιταλικά] Πολύ καλή γνώση (Diploma di Lingua Italiana, Istituto Italiano di Cultura di Atene) [Γερμανικά] Πολύ καλή γνώση (Kleines Deutsches Sprachdiplom, Goethe-Institut & Ludwig-Maximilians-Universität zu München)	

Διπλωματική Εργασία	Εκπόνηση Διπλωματικής Εργασίας (Ακαδημαϊκό Έτος 1998-1999) με θέμα: “Εντοπισμός Ηλεκτρικού Διπόλου σε Προβλήματα Νευροφυσιολογίας” , υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Γεωργίου Δάσιου.
Διδακτορική Διατριβή	Εκπόνηση Διδακτορικής Διατριβής (Ακαδημαϊκό Έτος 2002 – 2010) με θέμα: “Διάδοση και Σκέδαση Κυματικών Πεδίων σε Ανισότροπα Μέσα” , υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Γεωργίου Δάσιου.
Συμμετοχές σε Συνέδρια	<p>[1] 1^ο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής (Πάτρα, 29-31.05.1997)</p> <p>[2] 2^ο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής (Θεσσαλονίκη, 27-29.05.1999)</p> <p>[3] 4^ο Διεθνές Συμπόσιο στη Θεωρία Σκέδασης και τη Βιοιατρική Μηχανική Μοντελοποίησης και Εφαρμογές (Πέρδικα Θεσπρωτίας, 08-10.10.1999)</p> <p>[4] 6^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μηχανικής (Θεσσαλονίκη, 19-21.07.2001)</p> <p>[5] 14^ο Θερινό Σχολείο / Συνέδριο “Μη γραμμική δυναμική: Χάος και Πολυπλοκότητα” (Πάτρα, 23.07-03.08.2001)</p> <p>[6] 5^ο Διεθνές Συμπόσιο Μαθηματικών Μεθόδων στη Θεωρία Σκέδασης και τη Βιοιατρική Τεχνολογία (Κέρκυρα, 18-19.10.2001)</p>
Ανακοινώσεις σε Συνέδρια	<p>[1] “Βαθμωτή σκέδαση από ανισότροπα υλικά”, 4^ο Πανελλήνιο Επιστημονικό Συνέδριο Χημικής Μηχανικής, (2003)</p> <p>[2] “A first attempt towards a theory of anisotropic scattering” (με Γ. Δάσιο), Διεθνές Συνέδριο στις Πρόσφατες Προόδους στα Σύνητα Υλικά (προς τιμή του Σ.Α. Παϊπέτη), (2003)</p> <p>[3] “Scattering in anisotropic media” (με Γ. Δάσιο), 6^ο Διεθνές Συμπόσιο Μαθηματικών Μεθόδων στη Θεωρία Σκέδασης και τη Βιοιατρική Μηχανική, (2003)</p> <p>[4] “Το Πρόβλημα Dirichlet στην Ανισότροπη Σκέδαση” (με Γ. Δάσιο), 10^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, (2004)</p> <p>[5] “On the Energy Functionals in Anisotropic Scattering” (με Γ. Δάσιο), 7^ο Διεθνές Συμπόσιο Μαθηματικών Μεθόδων στη Θεωρία Σκέδασης και τη Βιοιατρική Μηχανική, (2005)</p>
Δημοσιεύσεις σε Διεθνή Περιοδικά	[1] “Time harmonic acoustic scattering in anisotropic media” (με Γ. Δάσιο), <i>Mathematical Methods in the Applied Sciences</i> , v. 28, i. 12, p. 1383-1401, (2005)

Συγγραφική Εμπειρία	[1] Επιστημονικός συνεργάτης Εναλλακτικού Διδακτικού Υλικού για τη Θεματική Ενότητα “Γενικά Μαθηματικά II” του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών “Σπουδές στις Φυσικές Επιστήμες” της Σχολής Θετικών Επιστημών & Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (έκδοση 2005)
Διδακτική Εμπειρία	[1999-2002] Επικουρικό έργο στα προπτυχιακά μαθήματα του Τμήματος Χημικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Πατρών: Μαθηματικά I-II (χειμερινό και εαρινό εξάμηνο ακ. έτους 1999-2000) Μαθηματικά III-IV (χειμερινό και εαρινό εξάμηνο ακ. έτους 2000-2001) Μαθηματικά III (χειμερινό εξάμηνο ακ. έτους 2001-2002) (Απειροστικός Λογισμός, Γραμμική Άλγεβρα, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Πιθανότητες, Στατιστική)
Ερευνητική Εμπειρία	[2000-2004] Μεταπτυχιακή Υποτροφία στο πλαίσιο του ερευνητικού έργου “ Αντίστροφα Προβλήματα Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας και Συγκριτική Μελέτη Αναπαραστάσεων για Ροές Stokes ” του Ερευνητικού Ινστιτούτου Χημικής Μηχανικής και Χημικών Διεργασιών Υψηλής Θερμοκρασίας με κωδικό ΕΙΧΗ-14 [2002-2004] “ Σκέδαση και Μέθοδοι Ειδώλου για Ανισότροπα Ελαστικά Υλικά ”, (Διμερής συνεργασία ανάμεσα στο Ελληνικό -IKY- και Γερμανικό -DAAD- Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών), Πρόγραμμα IKYDA 2002, Συνεργασία με το Πανεπιστήμιο του Kassel, Γερμανία [2004-2006] “ Σκέδαση σε Ανισότροπα Υλικά ”, Πρόγραμμα “Αρχιμήδης-Ενίσχυση Ερευνητικών Ομάδων στο ΑΤΕΙ Πατρών”
Διακρίσεις	[1994] Υποτροφία Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ), 1 ^η επιτυχούσα κατά τις πανελλήνιες εισαγωγικές εξετάσεις [1994-1999] 4 ^η – 5 ^η σειρά στην βαθμολογική κατάταξη κάθε προπτυχιακού ακαδημαϊκού έτους [1999-2000] Υποτροφία Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ), 1 ^η σειρά στη βαθμολογική σειρά του μεταπτυχιακού ακαδημαϊκού έτους [2000-2001] Υποτροφία Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ), 1 ^η σειρά στη βαθμολογική σειρά του μεταπτυχιακού ακαδημαϊκού έτους [1999-2004] Υπότροφος Ιδρύματος Έρευνας & Τεχνολογίας / Ερευνητικού Ινστιτούτου Χημικής Μηχανικής και Χημικών Διεργασιών Υψηλής Θερμοκρασίας (ΙΤΕ/ΕΙΧΗΜΥΘ)
Συμμετοχές σε Σεμινάρια	[1] Διεθνές Πρότυπο ISO 22000 (Νέο Πρότυπο Πιστοποίησης για τα Συστήματα Διαχείρισης της Ασφάλειας Τροφίμων) Ανάλυση Απαιτήσεων και Καθοδήγηση Εφαρμογής, ΕΕΚΧΜ, (Καλλιθέα, 25-26.02.2008)

Γνώσεις Η/Υ

- Προγράμματα Γενικού Σκοπού και Εφαρμογές MS Office (Microsoft Word, Outlook, Excel, PowerPoint, Access)
- Προγράμματα Ειδικού Σκοπού (Microcal Origin, Mathematica)
- Γνώσεις Προγραμματισμού (Fortran)
- Πρόγραμμα Διαχείρισης Λιανικών Πωλήσεων για Χώρους Εστίασης (STAR POS, STAR Manager, STAR Accounting)

Μέλος

Οργανισμών

- Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας (ΤΕΕ)
- Πανελλήνιος Σύλλογος Χημικών Μηχανικών (ΠΣΧΜ)