ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ YANG-BAXTER, ΔΟΜΗ POISSON ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΟΔΩΡΟΣ Ε. ΚΟΥΛΟΥΚΑΣ

ΠΑΤΡΑ 2010

Στους γονείς μου, στην αδελφή μου

Ευχαριστίες

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Είναι το αποτέλεσμα της μακρόχρονης, επίπονης αλλά και ευχάριστης ενασχόλησής μου με τα μαθηματικά. Είναι ευνόητο ότι κάθε προσπάθεια θα ήταν άκαρπη χωρίς τη βοήθεια και την υποστήριξη αρκετών ανθρώπων τους οποίους θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα.

Όλη η έρευνα για τη συγγραφή της διατριβής έγινε υπό την επίβλεψη του κ. Βασίλη Παπαγεωργίου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Τον ευχαριστώ για την καθοδήγηση που μου πρόσφερε όλα αυτά τα χρόνια η οποία υπήρξε καθοριστική για την πορεία μου, καθώς και για την εποικοδομητική συνεργασία μας. Ευχαριστώ τον κ. Σπύρο Πνευματικό, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, για τη συνολική βοήθειά του και ιδιαίτερα για την γεωμετρική προσέγγιση στην μελέτη των δυναμικών συστημάτων που με δίδαξε. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, για το ενδιαφέρον του και τις πολύτιμες παρατηρήσεις του στα θέματα της παρούσας εργασίας.

Η ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας θα ήταν αδύνατη χωρίς τη θερμή συμπαράσταση πολλών καλών φίλων και συναδέλφων. Ευχαριστώ ιδιαίτερα την Ελένη Χριστοδουλίδη, Διδάκτορα του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, για την στήριξη και υπομονή της μαζί μου όλα αυτά τα χρόνια. Ευχαριστώ τους συνοδοιπόρους υποψήφιους διδάκτορες του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, Σταύρο Αναστασίου, Δημήτρη Νομικό, Γρηγόρη Προτσώνη, Άκη Ματζάρη, Νίκο Καλλίνικο, Γιώργο Κανελλόπουλο, Γιώργο Παπαμίχο και Σωτήρη Κων/νου-Ρίζο, για τις πολύωρες μαθηματικές, και όχι μόνο, αναζητήσεις μας και κυρίως γιατί κατάφεραν να μετατρέψουν αυτή τη προσπάθεια σε μια ευχάριστη και αξέχαστη εμπειρία. Επίσης, ευχαριστώ τους παιδικούς μου φίλους από τα Βριλήσσια για την ψυχολογική υποστήριξη που μου προσφέρουν πάντα, όσο μακριά κι αν βρίσκονται.

Ευχαριστώ το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών για την οικονομική ενίσχυση που μου παρείχε, η οποία με βοήθησε να προσηλωθώ στην εργασία μου.

Τέλος, τις μεγαλύτερες ευχαριστίες τις οφείλω στην οικογένειά μου, στους γονείς μου Βαγγέλη, Μάρω και στην αδελφή μου Καλυψώ. Για όλα όσα έχουν κάνει για μένα, τους αφιερώνω τη διατριβή μου.

Θεόδωρος Κουλούκας
Πάτρα, Οκτώβιος 2010

Περιεχόμενα

Πρόλογος	1
1 Εισαγωγή στην γεωμετρία Poisson	5
1.1 Πολλαπλότητες Poisson και διανυσματικά πεδία Hamilton	6
1.2 Πρώτα ολοκληρώματα και συναρτήσεις Casimir	9
1.3 Τανυστικό πεδίο Poisson	10
1.4 Συμπλεκτικές πολλαπλότητες	12
1.5 Τοπική μορφή πολλαπλοτήτων Poisson	13
1.6 Συμπλεκτική εμφύλλωση	14
1.7 Δομή Lie-Poisson	16
1.8 Πλήρης Ολοκληρωσιμότητα	18
2 Ομάδες Poisson-Lie, αμφι-άλγεβρες Lie και η κλασική εξίσωση Yang-Baxter	21
2.1 Ομάδες Poisson-Lie	22
2.2 Αμφι-άλγεβρες Lie και η κλασική εξίσωση Yang-Baxter	24
2.2.1 Αμφι-άλγεβρες Lie	24
2.2.2 Ο διπλός χώρος μιας αμφι-άλγεβρας Lie	25
2.2.3 Η κλασική εξίσωση Yang-Baxter	25
2.2.4 Η αμφι-άλγεβρα Lie μιας ομάδας Poisson-Lie	29
2.3 Κατασκευή ομάδων Poisson-Lie	31
2.4 Τανυστικός συμβολισμός της αγκύλης Sklyanin	33
2.5 Η αγκύλη Sklyanin στον δακτύλιο των πολυωνυμικών πινάκων	34
2.5.1 Η κανονική αγκύλη Sklyanin	35

3	Συνολοθεωρητικό ανάλογο της κβαντικής εξίσωσης Yang-Baxter	37
3.1	Απεικονίσεις Yang-Baxter	38
3.2	Αλγεβρικές κατασκευές απεικονίσεων YB	40
3.2.1	Απεικονίσεις YB σε ομάδες Poisson-Lie	40
3.2.2	Απεικονίσεις Yang-Baxter σε ομάδες	42
3.2.3	Οιονει-ομάδες, τριαδικά συστήματα και η δυναμική εξίσωση Yang-Baxter	43
3.3	Εξισώσεις 3-διάστατης συμβατότητας	45
3.3.1	Από εξισώσεις 3-δ συμβατότητας σε απεικονίσεις YB	47
3.4	Ταξινόμηση ABS	51
4	Poisson και συμπλεκτικές απεικονίσεις YB με διωνυμικούς πίνακες Lax	53
4.1	Πίνακες Lax απεικονίσεων Yang-Baxter	54
4.2	Αναπαραγοντοποίηση διωνυμικών πινάκων	56
4.3	Δομή Poisson στον $\mathcal{L}^2$	58
4.4	Απεικονίσεις Poisson Yang-Baxter	61
4.5	Συμπλεκτικές απεικονίσεις Yang-Baxter	64
4.5.1	Αναγωγή στα συμπλεκτικά φύλλα	64
4.5.2	Διωνυμικοί πίνακες Lax με σταθερό μεγιστοβάθμιο όρο	68
4.6	Ταξινόμηση	72
4.7	Εκφυλισμένες απεικονίσεις Yang-Baxter	75
4.7.1	Γενικευμένη απεικόνιση Adler-Yamilov	76
4.7.2	Γενικευμένη απεικόνιση KdV	77
4.8	Απεικονίσεις YB μεγαλύτερης διάστασης	79
4.8.1	Τετράρητες απεικονίσεις YB επί του $\mathbb{K}^4 \times \mathbb{K}^4$ με 3×3 πίνακες Lax .	81
5	Ολοκληρώσιμα πλέγματα	91
5.1	Ζεύγη Lax και ολοκληρώσιμες απεικονίσεις	91
5.2	Ολοκληρώσιμες απεικονίσεις από απεικονίσεις Yang-Baxter	96
6	Πεπλεγμένες δομές Yang-Baxter	99
6.1	Πεπλεγμένες εξισώσεις YB και τριάδες Lax	99
6.2	Διωνυμικά ζεύγη και διωνυμικές τριάδες Lax	102
6.3	Λύσεις της πεπλεγμένης εξίσωσης Yang-Baxter και ολοκληρωσιμότητα . . .	104

6.3.1	Απεικονίσεις YB στα $\Sigma_{A_1}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_1}(\beta, 1)$ και $\Sigma_{A_2}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_2}(\beta, 1)$	105
6.3.2	Ρητές απεικονίσεις στα $\Sigma_{A_1}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_2}(\beta, 1)$ και $\Sigma_{A_2}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_1}(\beta, 1)$	106
6.3.3	Ολοκληρώσιμες πεπλεγμένες απεικονίσεις YB	107
7	Επίλογος – Συμπεράσματα	111
	Παράρτημα	115
	Βιβλιογραφία	119

Πρόλογος

Εξέχουσα θέση στην θεωρία των δυναμικών συστημάτων κατέχουν τα ολοκληρώσιμα συστήματα. Αν και δεν υπάρχει σαφής καθολικός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας για όλα τα είδη των δυναμικών συστημάτων, κάπως ελεύθερα, χαρακτηρίζουμε ως ολοκληρώσιμο το σύστημα που έχει “αρκετές” διατηρήσιμες ποσότητες (πρώτα ολοκληρώματα). Ιδιότητες όπως η οργανωμένη κίνηση, η συμμετρία, η ύπαρξη αναλλοίωτων κανονικών εμφυλλώσεων, η ύπαρξη ζεύγους Lax και φυσικά η ύπαρξη πρώτων ολοκληρωμάτων, χαρακτηρίζουν συνήθως ένα ολοκληρώσιμο σύστημα. Παρόλο που η κλασική μηχανική θεμελιώθηκε από την μελέτη ολοκληρώσιμων συστημάτων όπως η κίνηση των πλανητών του ηλιακού συστήματος, οι απλοί αρμονικοί ταλαντωτές, τα εκκρεμή κλπ, μέχρι πρότινος μόνο ένας μικρός αριθμός τέτοιων συστημάτων ήταν γνωστός. Αυτό οφείλεται εν μέρει στην δυσκολία της φύσης του προβλήματος αφού δεν υπάρχει, γενικά, μια ικανή και αναγκαία συνθήκη που να εξασφαλίζει την ολοκληρωσιμότητα ενός συστήματος. Ένας δεύτερος λόγος είναι η λανθασμένη επικρατούσα αντίληψη ότι τα ολοκληρώσιμα συστήματα είναι επιλύσιμα, μη ρεαλιστικά, παρουσιάζουν προβλέψιμη συμπεριφορά και λιγοστό ενδιαφέρον από μαθηματικής άποψης. Τα τελευταία χρόνια νέες πρωτοποριακές εργασίες στα μαθηματικά και στη φυσική ανατρέπουν αυτές τις αντιλήψεις και αναθερμαίνουν το ενδιαφέρον για τα ολοκληρώσιμα συστήματα. Πολλά νέα ολοκληρώσιμα συστήματα (κλασικά, κβαντικά, συνεχή, διακριτά, πεπερασμένης και άπειρης διάστασης) έχουν ανακαλυφθεί με πολλές εφαρμογές και αξιοσημείωτες ιδιότητες όπως συμμετρίες, σολιτονικές λύσεις, κινητές ιδιομορφίες, δι-Χαμιλτώνιο φορμαλισμό, ολοκληρώσιμο χάος κλπ. Τα ολοκληρώσιμα συστήματα θεωρούνται πλέον ένας νέος προσοδοφόρος κλάδος της μαθηματικής φυσικής που συνδυάζει γεωμετρικές, αλγεβρικές και αναλυτικές τεχνικές για τη μελέτη τους.

Μία θεμελιώδης εξίσωση στην θεωρία των ολοκληρώσιμων συστημάτων είναι η κβαντική εξίσωση Yang-Baxter. Αρχικά εμφανίστηκε στις ανεξάρτητες εργασίες των C.N. Yang [59] και R.J. Baxter [9], στο πεδίο της στατιστικής μηχανικής. Στη συνέχεια αποδείχτηκε βασική εξίσωση για πολλές περιοχές των μαθηματικών και της φυσικής όπως στα κλασικά και κβαντι-

κά ολοκληρώσιμα συστήματα, στις κβαντικές ομάδες, στη θεωρία κόμβων και στα ηλεκτρικά δίκτυα. Πρόκειται για την εξίσωση

$$R^{23} \circ R^{13} \circ R^{12} = R^{12} \circ R^{13} \circ R^{23},$$

όπου $R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, V ένας διανυσματικός χώρος και R^{ij} η δράση του R στον i και j παράγοντα του τριπλού τανυστικού γινομένου $V \otimes V \otimes V$. Αντικαθιστώντας τον διανυσματικό χώρο V με οποιοδήποτε σύνολο $\mathcal{X}$ και το τανυστικό γινόμενο με το καρτεσιανό, προκύπτει η συνολοθεωρητική κβαντική εξίσωση Yang-Baxter της οποίας οι λύσεις καλούνται απεικονίσεις Yang-Baxter. Παρόλο που πολλές λύσεις της κβαντικής εξίσωσης Yang-Baxter έχουν βρεθεί, η εύρεση όλων των λύσεων ακόμα και σε “απλά” σύνολα όπως στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, παραμένει ένα άλυτο πρόβλημα.

Η σύνδεση μεταξύ απεικονίσεων Yang-Baxter και διακριτών ολοκληρώσιμων συστημάτων έχει κινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών. Εξισώσεις και απεικονίσεις σε τετράπλευρα πλέγματα θεωρούνται ως διακριτά ανάλογα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτές τις προσεγγίσεις η συνολοθεωρητική εξίσωση Yang-Baxter εκφράζει μια συνθήκη συμβατότητας που, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, ισοδυναμεί με μια αναπαράσταση Lax των διακριτών συστημάτων. Από την άλλη, σε κάθε απεικόνιση Yang-Baxter που επιδέχεται αναπαράσταση Lax, αντιστοιχεί μια οικογένεια αντιμεταθετικών απεικονίσεων μεταφοράς (transfer maps) που διατηρούν αναλλοίωτο το φάσμα του μονόδρομου πίνακά τους. Αν υποθέσουμε ότι ο χώρος φάσεων είναι μια $2n$ -διάστατη συμπλεκτική πολλαπλότητα, για να συμπεράνουμε την ολοκληρωσιμότητα (κατά Liouville-Arnold) πρέπει οι απεικονίσεις να είναι συμπλεκτικές και να προκύπτουν n γραμμικώς ανεξάρτητα ολοκληρώματα από το φάσμα του μονόδρομου πίνακα που να είναι σε ενέλιξη μεταξύ τους.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η κατασκευή και η μελέτη απεικονίσεων Yang-Baxter και των ολοκληρώσιμων συστημάτων που επάγονται από αυτές. Πολλές κατασκευές απεικονίσεων Yang-Baxter παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία προερχόμενες από διαφορετικά πεδία των μαθηματικών. Για παράδειγμα υπάρχουν πολλές αλγεβρικές κατασκευές προερχόμενες από θεωρία αναπαραστάσεων ομάδων και αλγεβρών Lie, κβαντικών ομάδων, θεωρία κόμβων, πλεξούδων και θεωρία κατηγοριών. Επίσης, μπορούν να εντοπιστούν κατασκευές που προέρχονται από ειδικές συναρτήσεις, από συμμετρίες εξισώσεων διαφορών, θεωρία σολιτονίων και φυσικά από κλασικά και κβαντικά ολοκληρώσιμα συστήματα. Η δική μας προσέγγιση στο θέμα απορρέει από τη γεωμετρία Poisson και ειδικότερα από τις ομάδες Poisson-Lie. Πρωτοποριακή προς αυτήν την κατεύθυνση υπήρξε η εργασία των A. Weinstein και P. Xu [57],

στην οποία λύσεις της κβαντικής εξίσωσης Yang-Baxter κατασκευάζονται από παραγοντοποιήσιμες ομάδες Poisson-Lie. Το θέμα της ολοκληρωσιμότητας το προσεγγίζουμε με αφετηρία την εργασία του Veselov [53], όπου εισάγονται οι έννοιες των απεικονίσεων μεταφοράς, του μονόδρομου πίνακα και του πίνακα Lax.

Γενικά οι κατασκευές απεικονίσεων Yang-Baxter που προτείνουμε προέρχονται από την αναπαραγοντοποίηση ισχυρών ζευγών Lax, εξαρτώμενων από μια φασματική παράμετρο, που προκύπτουν από την συμπλεκτική εμφύλλωση διωνυμικών πινάκων εφοδιασμένων με μια κατάλληλη δομή Poisson. Οι αντίστοιχες ολοκληρώσιμες απεικονίσεις προέρχονται από περιοδικά προβλήματα αρχικών τιμών σε τετράπλευρα πλέγματα. Η μελέτη μας γενικεύεται σε πεπλεγμένα συστήματα απεικονίσεων Yang-Baxter.

Αναλυτικότερα, ξεκινάμε στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζοντας τις απαραίτητες έννοιες της θεωρίας των πολλαπλοτήτων Poisson και των συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων. Στο δεύτερο κεφάλαιο ειδικεύουμε την μελέτη μας στις ομάδες Poisson-Lie, δηλαδή ομάδες Lie εφοδιασμένες με μια δομή Poisson, τέτοια ώστε ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων τους να είναι απεικόνιση Poisson. Τέτοιες δομές καλούνται γενικότερα πολλαπλασιαστικές. Παρουσιάζεται η κατασκευή αμφι-αλγεβρών Lie και ομάδων Poisson-Lie από λύσεις της κλασικής εξίσωσης Yang-Baxter. Η αγκύλες Poisson που προέρχονται από λύσεις της κλασικής εξίσωσης Yang-Baxter καλούνται αγκύλες Sklyanin. Κλείνουμε το κεφάλαιο παρουσιάζοντας την κανονική αγκύλη Sklyanin στον χώρο των πολυωνυμικών πινάκων.

Το Κεφάλαιο 3 αφορά στην κβαντική εξίσωση Yang-Baxter. Αφού δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς, παραθέτουμε τις σημαντικότερες κατασκευές απεικονίσεων Yang-Baxter που υπάρχουν στην βιβλιογραφία και σχετίζονται με τη δική μας προσέγγιση στο θέμα. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στις εξισώσεις τρισδιάστατης συμβατότητας, καθώς αποδεικνύουμε ότι αυτές σχετίζονται με την θεωρητική κατασκευή λύσεων της εξίσωσης Yang-Baxter από τριαδικά συστήματα [42].

Στο τέταρτο κεφάλαιο ορίζονται οι πίνακες Lax (ασθενείς και ισχυροί) των απεικονίσεων Yang-Baxter. Παρουσιάζεται η κατασκευή τετράρητων απεικονίσεων Yang-Baxter από αναπαραγοντοποίηση 2×2 πολυωνυμικών πινάκων πρώτου βαθμού. Οι απεικονίσεις αυτές είναι Poisson ως προς την κανονική αγκύλη Sklyanin. Για κάθε συνάρτηση Casimir εξάγουμε μια παραμετρική απεικόνιση Yang-Baxter από αναγωγή στην αντίστοιχη ισοσταθμική επιφάνεια. Θεωρώντας το πλήρες σύνολο των συναρτήσεων Casimir προκύπτουν συμπλεκτικές απεικονίσεις Yang-Baxter ως προς την ανηγμένη αγκύλη Sklyanin στα αντίστοιχα συμπλεκτικά φύλλα. Οι πίνακες Lax των συμπλεκτικών απεικονίσεων είναι, εκ κατασκευής, πολυωνυμικοί

πίνακες πρώτου βαθμού και ταξινομούνται με βάση των μεγιστοβάθμιο όρο. Εκφυλισμένες απεικονίσεις Yang-Baxter προκύπτουν από όρια των τετράρητων που σχετίζονται με γνωστές διακριτές ολοκληρώσιμες εξισώσεις. Οι κατασκευές αυτού του κεφαλαίου γενικεύονται σε μεγαλύτερες διαστάσεις.

Το Κεφάλαιο 5 πραγματεύεται την ολοκληρωσιμότητα. Η ανάλυσή μας περιορίζεται σε περιοδικά προβλήματα αρχικών τιμών σε τετράπλευρα πλέγματα. Εισάγονται οι έννοιες των απεικονίσεων μεταφοράς και του μονόδρομου πίνακα σε “κλιμακωτά” προβλήματα αρχικών τιμών και αποδεικνύεται ότι το φάσμα του μονόδρομου πίνακα διατηρείται αναλλοίωτο από τις απεικονίσεις μεταφοράς. Ολοκληρώσιμες απεικονίσεις μεταφοράς παράγονται κατά αυτόν τον τρόπο από τις συμπλεκτικές απεικονίσεις Yang-Baxter που κατασκευάσαμε.

Το περιεχόμενο του τέταρτου και του πέμπτου κεφαλαίου γενικεύεται στο Κεφάλαιο 6 σε συστήματα πεπλεγμένων απεικονίσεων Yang-Baxter. Πρόκειται για τρεις παραμετρικές απεικονίσεις $S_{\alpha,\beta}$, $R_{\alpha,\beta}$, $T_{\alpha,\beta} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ που ικανοποιούν την πεπλεγμένη εξίσωση Yang-Baxter:

$$T_{\beta,\gamma}^{23} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ S_{\alpha,\beta}^{12} = S_{\alpha,\beta}^{12} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ T_{\beta,\gamma}^{23}.$$

Τέτοιες απεικονίσεις προκύπτουν από αναπαραγοντοποίηση διατεταγμένων τριάδων πινάκων Lax (L^1, L^2, L^3) , που ικανοποιούν μια συνθήκη συμβατότητας. Στην περίπτωση που $L^1 = L^2 = L^3$ οι απεικονίσεις αυτές είναι Yang-Baxter. Ανάλογα προβλήματα αρχικών τιμών σε πλέγματα αποδεικνύουν την ολοκληρωσιμότητά τους. Το περιεχόμενο των κεφαλαίων 4,5 και 6 παρουσιάστηκε στις εργασίες [25, 26, 27].

Κλείνουμε με το Κεφάλαιο 7, παραθέτοντας συμπεράσματα και προεκτάσεις του θέματος για μελλοντική μελέτη.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στην γεωμετρία Poisson

Το 1809 ο Siméon Denis Poisson στην πρωτοποριακή εργασία του *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique* παρουσίασε την πολύ γνωστή στην μαθηματική φυσική ομώνυμη αγκύλη, που με σύγχρονη ορολογία γράφεται στη μορφή

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

όπου f, g συναρτήσεις των θέσεων q_i και των ορμών p_i , για $i = 1, \dots, n$, ενός μηχανικού συστήματος n βαθμών ελευθερίας. Με τη βοήθεια αυτής της αγκύλης εδραιώθηκε από πολλούς μαθηματικούς του 19 αιώνα (Poisson, Hamilton, Legendre, Jacobi, Lie κ.α.) ένας νέος τρόπος αντιμετώπισης των μηχανικών συστημάτων καθώς και η σύνδεσή του με την Λαγκρανζιανή μηχανική, η λεγόμενη Χαμιλτώνια μηχανική.

Η αγκύλη του Poisson και η Χαμιλτώνια μηχανική αποτέλεσαν το κίνητρο της ανάπτυξης της σύγχρονης γεωμετρίας Poisson, στα τέλη του 20ου αιώνα, με αφετηρία έναν πιο αφηρημένο και γενικό ορισμό της αγκύλης Poisson σε n -διάστατες διαφορίσιμες πολλαπλότητες. Η εξέλιξη αυτή οφείλεται σε πολλούς σύγχρονους μαθηματικούς. Ενδεικτικά μόνο αναφέρουμε τους Lichnerowicz, Weinstein, Arnold, Marsden, Kostant, Kirillov, Sklyanin, αν και όπως αναφέρει ο Weinstein τα θεμέλια αυτής της θεωρίας μπορούν να ανιχνευτούν σε πρωταρχικό στάδιο στη δουλειά του Lie! Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι νέες εφαρμογές όπως για παράδειγμα στη χβαντομηχανική, στα δυναμικά συστήματα, στις συνήθειες και μερικές διαφορικές εξισώσεις, στο χάος, στις χβαντικές ομάδες, στη θεωρία ελέγχου, στη θεωρία μη γραμμικών ολοκληρώσιμων εξισώσεων και σε πολλούς ακόμα κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής καθιστούν τη γεωμετρία Poisson και τη μηχανική Hamilton ενεργό αντικείμενο έρευνας με αξιοθαύμαστα αποτελέσματα.

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο αναφέρουμε βασικά στοιχεία της γεωμετρίας Poisson που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια, χωρίς να εμβαθύνουμε πολύ σε θεωρητικές έννοιες που θα ξέφευγαν από τους στόχους της παρούσας εργασίας. Παρόλο που η παρουσίαση των θεμελιωδών εννοιών είναι αρκετά συνοπτική, αρκετές αποδείξεις παρουσιάζονται όπου κρίνεται αναγκαίο για την καλύτερη κατανόηση της θεωρίας, ενώ όσες παραλείπονται μπορούν να βρεθούν στην εκτενή βιβλιογραφία που υπάρχει επί του θέματος. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα βιβλία και τις εργασίες [1, 6, 15, 28, 31, 50, 56].

1.1 Πολλαπλότητες Poisson και διανυσματικά πεδία Hamilton

Θεωρούμε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M και συμβολίζουμε με $C^\infty(M)$ τον χώρο των λείων συναρτήσεων επί της M .

Ορισμός 1.1. *Αγκύλη Poisson (Poisson bracket) επί της M καλείται κάθε διγραμμική αντισυμμετρική απεικόνιση $\{ \cdot, \cdot \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες :*

$$(i) \quad \{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0 \quad (\text{ταυτότητα Jacobi})$$

$$(ii) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g \quad (\text{κανόνας του Leibniz})$$

για κάθε $f, g, h \in C^\infty(M)$.

Κάθε διαφορίσιμη πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με μια αγκύλη Poisson καλείται *πολλαπλότητα Poisson* και συμβολίζεται $(M, \{ \cdot, \cdot \})$. Είναι φανερό από τον ορισμό ότι ο διανυσματικός χώρος $C^\infty(M)$ είναι άλγεβρα Lie με αγκύλη Lie $\{ \cdot, \cdot \}$. Παρακάτω δίνουμε δύο κλασικά παραδείγματα πολλαπλοτήτων Poisson.

Παράδειγμα 1.1. *Κάθε πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με την τετριμμένη αγκύλη, $\{f, g\} = 0$ για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$, είναι πολλαπλότητα Poisson.*

Παράδειγμα 1.2. *Στον Ευκλείδιο χώρο $M = \mathbb{R}^{2n}$, με συντεταγμένες $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$, ορίζουμε την αγκύλη:*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$. Αυτή η καμπύλη ικανοποιεί τις συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού και καλείται *κανονική αγκύλη Poisson*.

Ο κανόνας του Leibniz δηλώνει ότι για κάθε λεία συνάρτηση $H \in C^\infty(M)$, η απεικόνιση $f \mapsto \{f, H\}$ αποτελεί μία διαφορίση επί των λείων συναρτήσεων $C^\infty(M)$. Γνωρίζοντας ότι κάθε διαφορίση ορίζει μοναδικά ένα διανυσματικό πεδίο στην πολλαπλότητα M , οδηγούμαστε στον ορισμό του Χαμιλτώνιου διανυσματικού πεδίου.

Ορισμός 1.2. Για κάθε $H \in C^\infty(M)$, το διανυσματικό πεδίο X_H επί της M που ικανοποιεί την εξίσωση $X_H[f] = \{f, H\}$ για κάθε λεία συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, ονομάζεται Χαμιλτώνιο διανυσματικό πεδίο (*Hamiltonian vector field*) που παράγεται από τη συνάρτηση H . Η συνάρτηση H καλείται Χαμιλτώνια συνάρτηση και οι εξισώσεις που παράγουν την ροή του διανυσματικού πεδίου X_H , εξισώσεις του Χάμιλτον.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια τοπική μορφή του Χαμιλτώνιου διανυσματικού πεδίου.

Πρόταση 1.3. Θεωρούμε μια πολλαπλότητα Poisson $(M, \{, \})$ διάστασης n , με τοπικές συντεταγμένες $x = (x_1, \dots, x_n)$, και μία λεία συνάρτηση $H \in C^\infty(M)$. Τότε

$$X_H(x) = \sum_{i,j=1}^n \{x_i, x_j\}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ και} \quad (1.1)$$

$$\{f_1, f_2\}(x) = X_{f_2}[f_1](x) = \sum_{i,j=1}^n \{x_i, x_j\}(x) \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j}. \quad (1.2)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι το Χαμιλτώνιο διανυσματικό πεδίο που ορίζεται από την H έχει τη γενική μορφή

$$X_H(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Από τον ορισμό έχουμε ότι $X_H[x_i] = \{x_i, H\}$, $i = 1, \dots, n$, άρα $a_i(x) = \{x_i, H\}(x)$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$X_H = \sum_{i=1}^n \{x_i, H\} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ και } X_H[f] = \sum_{i=1}^n \{x_i, H\} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.3)$$

για κάθε $f \in C^\infty(M)$. Συνεπώς

$$X_{x_i}[H] = \sum_{j=1}^n \{x_j, x_i\} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \{H, x_i\} = -\{x_i, H\}.$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν το $\{x_i, H\}$ με $\sum_{j=1}^n \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j}$ στις 1.3 εξάγουμε τις 1.1 και 1.2.

□

Στο Παράδειγμα 1.1 $X_H = 0$, ενώ στο παράδειγμα 1.2 όπου έχουμε την κανονική δομή Poisson το αντίστοιχο Χαμιλτώνιο διανυσματικό πεδίο είναι

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

το οποίο ορίζει τις κανονικές εξισώσεις Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{για } i = 1, \dots, n.$$

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα των Χαμιλτώνιων διανυσματικών, απόρροια της ταυτότητας Jacobi πεδίων δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.4. Για κάθε $H \in C^\infty(M)$ η απεικόνιση $H \mapsto X_H$ είναι αντιομομορφισμός αλγεβρών Lie:

$$X_{\{H_1, H_2\}} = -[X_{H_1}, X_{H_2}] = [X_{H_2}, X_{H_1}]$$

Απόδειξη. Έστω $f \in C^\infty(M)$ τότε από τον ορισμό της αγκύλης Lie δύο διανυσματικών πεδίων έχουμε

$$\begin{aligned} [X_{H_2}, X_{H_1}][f] &= X_{H_2}(X_{H_1}[f]) - X_{H_1}(X_{H_2}[f]) \\ &= X_{H_2}(\{f, H_1\}) - X_{H_1}(\{f, H_2\}) \\ &= \{\{f, H_1\}, H_2\} - \{\{f, H_2\}, H_1\} \end{aligned}$$

και από την ταυτότητα Jacobi τελικά

$$[X_{H_2}, X_{H_1}][f] = \{f, \{H_1, H_2\}\} = X_{\{H_1, H_2\}}[f]$$

□

Μία κλάση ιδιαίτερα σημαντικών απεικονίσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων Poisson είναι αυτές που διατηρούν την αγκύλη Poisson.

Ορισμός 1.3. Έστω $(M, \{ , \}_M)$, $(N, \{ , \}_N)$ πολλαπλότητες Poisson. Η απεικόνιση $\varphi: M \rightarrow N$ καλείται απεικόνιση Poisson ή κανονική απεικόνιση αν

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_M = \{f, g\}_N \circ \varphi,$$

για κάθε $f, g \in C^\infty(N)$.

Πρόταση 1.5. Η ροή κάθε Χαμιλτώνιου διανυσματικού πεδίου $\varphi_t : M \rightarrow M$ είναι απεικόνιση *Poisson*.

Απόδειξη. Έστω $x \in M$, $f, g \in C^\infty(M)$. Τότε $X_H[f](x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\varphi_t(x))$ και

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\{f, g\} \circ \varphi_t) &= X_H[\{f, g\}] = \{\{f, g\}, H\} = \{g, \{H, f\}\} + \{\{g, H\}, f\} \\ &= \{X_H[f], g\} + \{f, X_H(g)\} \\ &= \left\{ \frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t), g \right\} + \left\{ f, \frac{d}{dt}(g \circ \varphi_t) \right\} \\ &= \frac{d}{dt}(\{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\}), \quad \varphi_0(x) = x. \end{aligned}$$

Συνεπώς $\{f, g\} \circ \varphi_t = \{f \circ \varphi_t, g \circ \varphi_t\}$. □

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με τον ορισμό των υποπολλαπλοτήτων *Poisson*.

Ορισμός 1.4. Μια υποπολλαπλότητα N μιας πολλαπλότητας *Poisson* $(M, \{ , \}_M)$ καλείται υποπολλαπλότητα *Poisson* αν υπάρχει αγκύλη *Poisson* $\{ , \}_N$ επί της N τέτοια ώστε η απεικόνιση ϵ γκλυσμού $i : N \rightarrow M$ να είναι απεικόνιση *Poisson*.

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι η $(N, \{ , \}_N)$ είναι υποπολλαπλότητα *Poisson* της $(M, \{ , \}_M)$ αν η N είναι υποπολλαπλότητα της M και για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$, $\{f, g\}_M|_N = \{f|_N, g|_N\}_N$, όπου με $|_N$ συμβολίσαμε τον περιορισμό των αντίστοιχων συναρτήσεων στην N .

Πρόταση 1.6. Μια υποπολλαπλότητα N μιας πολλαπλότητας *Poisson* $(M, \{ , \}_M)$ είναι *Poisson*, αν και μόνο αν υπάρχει ένα Χαμιλτώνιο πεδίο $X_H = \{ \cdot, H \}_M$ επί της M τέτοιο ώστε $X_H(x) \in T_x N$ για κάθε $x \in N$.

1.2 Πρώτα ολοκληρώματα και συναρτήσεις Casimir

Έστω $(M, \{ , \})$ μια πολλαπλότητα *Poisson*. Θα λέμε ότι δύο συναρτήσεις $f, g \in C^\infty(M)$ βρίσκονται σε *ενέλιξη* μεταξύ τους αν $\{f, g\} = 0$. Άμεσα από την ταυτότητα Jacobi αποδεικνύεται η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 1.7. (*Poisson*) Αν $\{f, h\} = 0$ και $\{g, h\} = 0$, τότε $\{\{f, g\}, h\} = 0$.

Οι συναρτήσεις που είναι σε *ενέλιξη* με την Χαμιλτώνια συνάρτηση H ενός Χαμιλτώνιου διανυσματικού πεδίου X_H καλούνται *πρώτα ολοκληρώματα*. Από την Πρόταση 1.7 συμπεραίνουμε ότι η αγκύλη *Poisson* δύο πρώτων ολοκληρωμάτων είναι πρώτο ολοκλήρωμα. Αυτό το

συμπέρασμα, γνωστό και ως Θεώρημα Poisson, είναι κεντρικό αποτέλεσμα της πρωτότυπης εργασίας του Poisson (για την κανονική αγκύλη).

Τα πρώτα ολοκληρώματα αποτελούν σταθερές κίνησης των Χαμιλτώνιων συστημάτων. Αν φ είναι η ροή του X_H , και f ένα πρώτο ολοκλήρωμα τότε

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} f(\varphi_t(x_0)) = X_H[f](x_0) = 0,$$

επομένως $f(\varphi_t(x_0)) = c \equiv f(x_0)$. Η επιφάνεια $\{x \in M / f(x) = c\}$ καλείται *ισοσταθμική επιφάνεια (level set)* του πρώτου ολοκληρώματος f . Συνεπώς οι ολοκληρωτικές καμπύλες κάθε Χαμιλτώνιου διανυσματικού πεδίου μιας πολλαπλότητας Poisson περιέχονται στις ισοσταθμικές επιφάνειες των πρώτων ολοκληρωμάτων του.

Ορισμός 1.5. *Συνάρτηση Casimir καλείται κάθε συνάρτηση της οποίας η αγκύλη Poisson με κάθε άλλη συνάρτηση είναι μηδενική.*

Δηλαδή οι συναρτήσεις Casimir αποτελούν ολοκληρώματα κίνησης κάθε Χαμιλτώνιου πεδίου επί της M . Προφανώς κάθε σταθερή συνάρτηση είναι συνάρτηση Casimir. Το Χαμιλτόνιο πεδίο μια συνάρτησης Casimir είναι ταυτοτικά μηδέν.

1.3 Τανυστικό πεδίο Poisson

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\{x_1, \dots, x_n\}$ μίας n -διάστατης πολλαπλότητας Poisson $(M, \{ , \})$, η αγκύλη Poisson δύο συναρτήσεων $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ παίρνει την μορφή

$$\{f_1, f_2\}(x) = \sum_{i,j=1}^n \{x_i, x_j\}(x) \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_j}.$$

Θέτοντας $J_{ij}(x) = \{x_i, x_j\}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, μπορούμε να γράψουμε

$$\{f_1, f_2\}(x) = \sum_{i,j=1}^n J_{ij}(x) \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_j} = \left(\sum_{i,j=1}^n J_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (d_x f_1, d_x f_2).$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in M$, υπάρχει ένας 2-τανυστής

$$\pi_x = \sum_{i,j=1}^n J_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_x M \otimes T_x M, \quad (1.4)$$

που καλείται *τανυστής Poisson* (*Poisson bivector*) τέτοιος ώστε

$$\{f_1, f_2\}(x) = \pi_x(df_1, df_2). \quad (1.5)$$

Εφόσον η αγκύλη $\{, \}$ είναι αντισυμμετρική, ο π είναι επίσης αντισυμμετρικός, δηλαδή $J_{ij} = -J_{ji}$. Επίσης με απευθείας υπολογισμό μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ταυτότητα Jacobi είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\sum_{l=1}^n (J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l}) = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Αντίστροφα κάθε τανυστής $\pi \in \otimes^2 TM$ της μορφής (1.4) ορίζει μια αγκύλη Poisson στην πολλαπλότητα M μέσω της $\{f_1, f_2\} = \pi(df_1, df_2)$, αν και μόνο αν είναι αντισυμμετρικός και ικανοποιεί την (1.6). Η πολλαπλότητα Poisson με τανυστικό πεδίο Poisson π συμβολίζεται με (M, π) .

Ο αντισυμμετρικός πίνακας

$$J(x) = [J_{ij}(x)] = [\{x_i, x_j\}], \quad i, j = 1, \dots, n$$

καλείται *πίνακας δομής Poisson* και η τάξη του (rank), *τάξη της δομής Poisson*. Η αγκύλη Poisson δύο συναρτήσεων μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια του πίνακα J ως

$$\{f, g\} = (\nabla f)^T J \nabla g \quad (1.7)$$

και το Χαμιλτώνιο διανυσματικό πεδίο δίνεται ως

$$X_H = (J \nabla H) \partial_x \text{ με } \partial_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}). \quad (1.8)$$

Παρατήρηση. Ο αντισυμμετρικός τανυστής 1.4 στο $\otimes^2 TM$ μπορεί να γραφεί ως

$$\pi = \sum_{i < j} J_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \in \wedge^2 TM.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε και τους δύο συμβολισμούς ανάλογα με την περίπτωση.

Έχοντας ορίσει το τανυστικό πεδίο Poisson μπορούμε να εκφράσουμε το Χαμιλτώνιο διανυσματικό πεδίο μιας λείας συνάρτησης H ως

$$X_H = \pi^\#(dH), \quad (1.9)$$

όπου $\pi^\#$ συμβολίζει την απεικόνιση ινωδών, $\pi^\# : T^*M \rightarrow TM$

$$\langle \xi_x, \pi_x^\#(\eta_x) \rangle = \pi_x(\xi_x, \eta_x), \quad \forall \xi_x, \eta_x \in T_x^*P,$$

όπου με $\langle, \rangle$ έχουμε συμβολίσει την φυσική δράση των στοιχείων του δυϊκού χώρου T_x^*M στα στοιχεία του $T_x M$.

1.4 Συμπλεκτικές πολλαπλότητες

Οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες αποτελούν την σημαντικότερη κλάση πολλαπλοτήτων Poisson. Το γεγονός αυτό θα φανεί στην επόμενη ενότητα όπου θα παρουσιαστούν δύο από τα σημαντικότερα θεωρήματα της γεωμετρίας Poisson. Οι συμπλεκτικές πολλαπλότητες μπορούν να θεωρηθούν ως μη-εκφυλισμένες πολλαπλότητες Poisson.

Έστω M μία πολλαπλότητα Poisson με τανυστή Poisson π . Αν για κάθε $x \in M$ η απεικόνιση $\pi_x^\# : T_x^*P \rightarrow T_xP$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον ισομορφισμό

$$\omega_x^\# = (\pi_x^\#)^{-1} : T_xM \rightarrow T_x^*M$$

και να ορίσουμε μία διαφορική 2-μορφή ω στην πολλαπλότητα M τέτοια ώστε να ικανοποιεί την σχέση

$$\omega_x(X, Y) = \langle \omega_x^\#(X), Y \rangle = \pi_x(\omega_x^\#(X), \omega_x^\#(Y)), \quad \forall X, Y \in T_xP \quad (1.10)$$

(η αντισυμμετρικότητα της ω προκύπτει από την αντισυμμετρικότητα του τανυστή π). Σε αυτή τη περίπτωση η 2-μορφή ω καλείται *συμπλεκτική μορφή* επί της M και η (M, ω) *συμπλεκτική πολλαπλότητα*. Από την ταυτότητα Jacobi (1.6) που πρέπει να ικανοποιεί ο τανυστής π μπορούμε αποδείξουμε ότι η ω είναι κλειστή ($d\omega = 0$).

Για να εκφράζει η απεικόνιση $\pi_x^\# : T_x^*P \rightarrow T_xP$ ισομορφισμό διανυσματικών χώρων αρκεί η τάξη της αντίστοιχης δομής Poisson να είναι μέγιστη δηλαδή $\det J(x) \neq 0$ για κάθε $x \in M$. Από την αντισυμμετρικότητα του πίνακα $J(x)$ συμπεραίνουμε ότι κάθε συμπλεκτική πολλαπλότητα είναι απαραίτητα άρτιας διάστασης.

Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε τις συμπλεκτικές πολλαπλότητες ανεξάρτητα από τις πολλαπλότητες Poisson, ως πολλαπλότητες εφοδιασμένες με μια μη εκφυλισμένη κλειστή διαφορική διαφορική 2-μορφή ω , και στη συνέχεια να αποδείξουμε ότι κάθε συμπλεκτική πολλαπλότητα είναι πολλαπλότητα Poisson με αγκύλη

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g). \quad (1.11)$$

Κατ' επέκταση μπορούμε να ορίσουμε το Χαμιλτώνιο διανυσματικό πεδίο μιας λείας συνάρτησης H , μέσω του ισομορφισμού $\omega^\# = TM \rightarrow T^*M$ που ορίζεται από την (1.10), ως το διανυσματικό πεδίο X_H που ικανοποιεί την εξίσωση

$$i_{X_H}\omega := \omega^\#(X_H) = -dH. \quad (1.12)$$

Αντίστροφα ένα διανυσματικό πεδίο X επί της πολλαπλότητας M είναι Χαμιλτώνιο αν υπάρχει μία συνάρτηση $H \in C^\infty(M)$ έτσι ώστε $i_X \omega = -dH$, δηλαδή αν η 1-μορφή $i_X \omega$ είναι ακριβής.

Όπως γνωρίζουμε σε κάθε διαφορική 2-μορφή ω επί μιας πολλαπλότητας M αντιστοιχεί ένας αντισυμμετρικός πίνακας $\Omega(x)$ τέτοιος ώστε $\omega_x(X, Y) = X^T \Omega(x) Y$ για κάθε $X, Y \in T_x M$. Αν J είναι ο πίνακας δομής Poisson της αγκύλης 1.11, από τις 1.7, 1.8 έχουμε

$$(X_f)^T \Omega X_g = \{f, g\} \quad \text{ή} \quad (J \nabla f)^T \Omega (J \nabla g) = (\nabla f)^T J (\nabla g),$$

άρα $J^T \Omega J = J$. Επειδή η ω είναι συμπλεκτική, είναι μη εκφυλισμένη δηλαδή $\det J(x) \neq 0$, οπότε

$$\Omega = (J^T)^{-1} = (-J)^{-1}. \quad (1.13)$$

Καλούμε τον πίνακα (1.13) *πίνακα της συμπλεκτικής μορφής ω* .

Κατ' αναλογία με τις απεικονίσεις Poisson ορίζουμε τις συμπλεκτικές απεικονίσεις.

Ορισμός 1.6. Έστω (M, ω_1) , (N, ω_2) δύο συμπλεκτικές πολλαπλότητες. Η απεικόνιση $\phi : M \rightarrow N$ καλείται *συμπλεκτική απεικόνιση* αν $\phi^*(\omega_2) = \omega_1$.

Θυμίζουμε ότι η απεικόνιση επιστροφής (pullback) της ϕ όταν δράση στην ω_2 είναι

$$\phi^*(\omega_2)_x(u, v) = \omega_{2\phi(x)}(d_x \phi(u), d_x \phi(v)),$$

για κάθε $x \in M$ και $u, v \in T_x M$.

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει την τοπική μορφή κάθε συμπλεκτικής πολλαπλότητας.

Θεώρημα 1.8. (Darboux) Έστω (M, ω) μια $2n$ -διάστατη συμπλεκτική πολλαπλότητα. Για κάθε $x \in M$ υπάρχει γειτονιά U του x με τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, έτσι ώστε

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

1.5 Τοπική μορφή πολλαπλοτήτων Poisson

Το αντίστοιχο θεώρημα Darboux για πολλαπλότητες Poisson που περιγράφει την τοπική μορφή της δομής Poisson είναι το θεώρημα διάσπασης του Weinstein.

Θεώρημα 1.9. (Θεώρημα διάσπασης Weinstein) Έστω $(M, \{, \})$ μια n -διάστατη πολλαπλότητα Poisson και $x_0 \in M$. Τότε υπάρχει γειτονιά U του x_0 με τοπικό σύστημα συντεταγμένων

$(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m, x_1, \dots, x_k)$, με $2m + k = n$, έτσι ώστε για κάθε $f, g \in C^\infty(M)$

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) + \sum_{i,j}^k \phi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad (1.14)$$

όπου ϕ_{ij} συναρτήσεις που εξαρτώνται μόνο από το $x = (x_1, \dots, x_k)$ και μηδενίζονται στο x_0 .

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στο πρωτότυπο άρθρο του Weinstein [56]. Αν η $(M, \{, \})$ είναι συμπλεκτική πολλαπλότητα, τότε αναγόμεστε στο θεώρημα Darboux της προηγούμενης ενότητας. Ο τανυστής Poisson, στο σημείο $x \in U$, της αγκύλης 1.14 είναι

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} \right) + \sum_{i < j} \phi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \in \wedge^2 TM$$

με $\phi_{ij}(x_0) = 0$. Η τάξη της δομής Poisson στο σημείο x είναι $2m$.

1.6 Συμπλεκτική εμφύλλωση

Μία από τις σημαντικότερες ολικές ιδιότητες των πολλαπλοτήτων Poisson είναι ότι διαμερίζονται σε συμπλεκτικές υποπολλαπλότητες. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *συμπλεκτική εμφύλλωση* (*symplectic foliation*) και παρουσιάζεται με τις παρακάτω προτάσεις.

Έστω M μία πολλαπλότητα Poisson με τανυστικό πεδίο Poisson $\pi \in \wedge^2 TM$. Ορίζουμε επί της M την σχέση $\sim$ ως εξής: $x \sim y$, $x, y \in M$, αν και μόνο αν υπάρχει κατα τμήματα συνεχής καμπύλη στην M τέτοια ώστε κάθε μέρος της να αποτελεί μέρος μιας ολοκληρωτικής καμπύλης ενός Χαμιλτωνίου διανυσματικού πεδίου.

Πρόταση 1.10. *Η σχέση $\sim$ επί της M είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η ανακλαστική και η μεταβατική ιδιότητα είναι προφανής. Η συμμετρική ιδιότητα γίνεται φανερή αντιστρέφοντας τον χρόνο $t \rightarrow -t$. $\square$

Οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\sim$ καλούνται *συμπλεκτικά φύλλα* (*symplectic leaves*) της πολλαπλότητας Poisson M . Τα συμπλεκτικά φύλλα είναι εμβυθισμένες υποπολλαπλότητες Poisson. Κάθε πολλαπλότητα Poisson λοιπόν διαμερίζεται στα συμπλεκτικά της φύλλα. Όπως θα δείξουμε, η ανηγμένη αγκύλη Poisson σε αυτά ορίζει μια συμπλεκτική μορφή.

Πρόταση 1.11. *Τα συμπλεκτικά φύλλα κάθε πολλαπλότητας Poisson είναι συμπλεκτικές πολλαπλότητες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την n -διάστατη πολλαπλότητα Poisson M με δι-διανυσμα Poisson π . Θεωρούμε επίσης ένα συμπλεκτικό φύλλο L της M και την απεικόνιση εγκλεισμού $i : L \rightarrow M$. Από την πρόταση (1.6) συμπεραίνουμε ότι το L είναι υποπολλαπλότητα Poisson της M . Έστω π_L η ανηγμένη δομή Poisson στην L και $x_0 \in L$ με $\text{rank}(\pi(i(x_0))) = 2m \leq n$. Από την Πρόταση 1.5 συμπεραίνουμε ότι η τάξη της δομής Poisson διατηρείται σταθερή στα συμπλεκτικά φύλλα. Άρα $\text{rank}(\pi_L(x)) = \text{rank}(\pi(i(x))) = 2m$ για κάθε $x \in L$. Επίσης $\dim(L) = \dim(T_x L) = \dim(im(\pi_x^\#)) = \text{rank}(\pi_L(x)) = 2m$. Συνεπώς ορίζεται επί της L η συμπλεκτική μορφή

$$\omega_x(X, Y) = \langle (\pi_{L_x}^\#)^{-1}(X), Y \rangle, \quad \text{για κάθε } X, Y \in T_x L.$$

□

Από τον ορισμό των συμπλεκτικών φύλλων είναι φανερό ότι η ροή ϕ_t ενός Χαμιλτώνιου διανυσματικού πεδίου παραμένει εγκλωβισμένη στα συμπλεκτικά φύλλα. Δηλαδή αν το σημείο x ανήκει σε ένα συμπλεκτικό φύλλο L , τότε $\phi_t(x) \in L$ για κάθε t . Επίσης επειδή οι συναρτήσεις Casimir παραμένουν σταθερές κατά μήκος των ροών των Χαμιλτώνιων διανυσματικών πεδίων συμπεραίνουμε ότι θα παραμένουν σταθερές στα συμπλεκτικά φύλλα. Αυτό αποδεικνύει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1.12. Τα συμπλεκτικά φύλλα κάθε πολλαπλότητας Poisson περιέχονται στις ισοσταθμικές επιφάνειες των συναρτήσεων Casimir.

Συχνά, αλλά όχι πάντα, τα συμπλεκτικά φύλλα ταυτίζονται με τις ισοσταθμικές επιφάνειες των συναρτήσεων Casimir. Μια ικανή συνθήκη δίνεται στην παρακάτω πρόταση

Πρόταση 1.13. Έστω (M, π) μια πολλαπλότητα Poisson και $f_1, \dots, f_k$ συναρτήσεις Casimir. Θεωρούμε επίσης τις ισοσταθμικές επιφάνειες

$$S_i = \{x \in M \mid f_i(x) = c_i\}$$

και την τομή τους $S = S_1 \cap \dots \cap S_k$. Αν το S είναι λεία υποπολλαπλότητα της M με $\dim S = \text{rank}(\pi(x))$ για κάθε $x \in S$, τότε οι συνεκτικές συνιστώσες της S είναι συμπλεκτικά φύλλα.

1.7 Δομή Lie-Poisson

Ο δυϊκός χώρος $\mathfrak{g}^*$ κάθε n -διάστατης άλγεβρας Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ μπορεί να εφοδιαστεί με την αγκύλη Lie-Poisson :

$$\{f, g\}_{L-P}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g] \rangle, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*), \quad (1.15)$$

όπου με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζουμε την δράση των στοιχείων του δυϊκού χώρου $\mathfrak{g}^*$ στα στοιχεία της $\mathfrak{g}$. Θα δείξουμε ότι αυτή η αγκύλη είναι αγκύλη Poisson. Θεωρούμε ένα στοιχείο $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{g}^*$ και δύο συναρτήσεις $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Αν μια βάση της $\mathfrak{g}$ είναι η $\{v_1, \dots, v_n\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle x, [d_x f, d_x g] \rangle &= \langle x, [\frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n, \frac{\partial g}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n} v_n] \rangle \\ &= \langle x, \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} [v_i, v_j] \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

όπου c_{ij}^k είναι οι σταθερές δομής της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$, δηλαδή

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k v_k, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Θεωρώντας τον αντισυμμετρικό τανυστή

$$\pi_x = \sum_{i,j=1}^n J_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{με } J_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k \quad (1.16)$$

για $i, j = 1, \dots, n$, μπορούμε τελικά να γράψουμε

$$\{f, g\}_{L-P}(x) = \sum_{i,j,k=1}^n c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \pi_x(d_x f, d_x g).$$

Επειδή οι σταθερές c_{ij}^k είναι οι σταθερές δομής της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$, ο τανυστής π_x ικανοποιεί την (1.6) άρα είναι τανυστής Poisson. Συνοψίζοντας, αποδείξαμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.14. Ο δυϊκός χώρος κάθε άλγεβρας Lie εφοδιασμένος με την αγκύλη Lie-Poisson 1.15 είναι πολλαπλότητα Poisson με αντίστοιχο τανυστή Poisson τον 1.16.

Παράδειγμα 1.15. Θεωρούμε την άλγεβρα Lie $\mathfrak{so}(3)$ της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $SO(3)$, με βάση $B = \{A_1, A_2, A_3\}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και μεταθετικές σχέσεις

$$[A_1, A_2] = -A_3, \quad [A_1, A_3] = A_2, \quad [A_2, A_3] = -A_1.$$

Οι μη μηδενικές σταθερές δομής της $\mathfrak{so}(3)$ είναι

$$c_{12}^3 = c_{23}^1 = -1 = -c_{21}^3 = -c_{32}^1, \quad c_{13}^2 = 1 = -c_{31}^2. \quad (1.17)$$

Θεωρούμε ένα $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathfrak{so}^*(3)$ εκφρασμένο στη βάση B^* της $\mathfrak{so}^*(3)$. Από την 1.16

$$J_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^3 c_{ij}^k \omega_k, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές δομής από την 1.17 έχουμε

$$J(\omega) = [J_{ij}(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathfrak{so}^*(3).$$

Για κάθε $H \in C^\infty(\mathfrak{so}^*(3))$ το αντίστοιχο Χαμιλτώνιο διανυσματικό πεδίο είναι

$$X_H = (J\nabla H) \cdot \partial_\omega, \quad \text{δηλαδή}$$

$$X_H = \left(\omega_2 \frac{\partial H}{\partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial H}{\partial \omega_2}\right) \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \left(\omega_3 \frac{\partial H}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial H}{\partial \omega_3}\right) \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \left(\omega_1 \frac{\partial H}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial H}{\partial \omega_1}\right) \frac{\partial}{\partial \omega_3}$$

και οι αντίστοιχες εξισώσεις Χάμιλτον

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} &= -\omega_3 \frac{\partial H}{\partial \omega_2} + \omega_2 \frac{\partial H}{\partial \omega_3} \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \omega_3 \frac{\partial H}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial H}{\partial \omega_3} \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= -\omega_2 \frac{\partial H}{\partial \omega_1} + \omega_1 \frac{\partial H}{\partial \omega_2} \end{aligned}$$

Για παράδειγμα αν θέσουμε $H(\omega) = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$, με I_1, I_2, I_3 σταθερές. Τότε οι εξισώσεις Χάμιλτον γίνονται

$$\frac{d\omega_1}{dt} = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1, \quad \frac{d\omega_3}{dt} = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2,$$

οι οποίες είναι οι εξισώσεις του Euler για την κίνηση ενός ελεύθερου στερεού σώματος.

Η συνάρτηση $f(\omega) = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ είναι συνάρτηση Casimir στην $\mathfrak{so}^*(3)$. Επίσης η τάξη του πίνακα δομής Poisson J είναι παντού δύο εκτός από το σημείο $\omega = 0$ που αποτελεί απομονωμένο συμπλεκτικό φύλλο με την μηδενική συμπλεκτική δομή. Τα υπόλοιπα συμπλεκτικά φύλλα είναι οι ισοσταθμικές επιφάνειες

$$S_c = \{\omega \in \mathfrak{so}^*(3) / f(\omega) = c, c \in \mathbb{R}\},$$

δηλαδή σφαίρες με κέντρο το μηδέν.

1.8 Πλήρης Ολοκληρωσιμότητα

Κλείνουμε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο παρουσιάζοντας τα πλήρως ολοκληρώσιμα συστήματα. Συγκεκριμένα αναφερόμαστε στην ολοκληρωσιμότητα κατά *Liouville-Arnold* η οποία εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.16. Θεωρούμε μια $2n$ -διάστατη συμπλεκτική πολλαπλότητα $(M, \{, \})$. Έστω n συναρτησιακά ανεξάρτητες συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$, οι οποίες είναι σε ενέλιξη μεταξύ τους, δηλαδή $\{f_i, f_j\} = 0, i, j = 1, \dots, n$ και

$$S = \{x \in M / f_i(x) = \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$$

η ισοσταθμική επιφάνεια των f_i . Τότε

1) η ισοσταθμική επιφάνεια S διατηρείται αναλλοίωτη από τη ροή των Χαμιλτώνιων διανυσματικών πεδίων $X_{f_i}, i = 1, \dots, n$.

2) κάθε συνεκτική συνιστώσα T της S είναι διαφορόμορφη με $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, για κάποιο $k \in \{0, \dots, n\}$. Αν επιπλέον η T είναι συμπαγής, τότε $k = n$ και η T είναι διαφορόμορφη με τον n -διάστατο τόρο $\mathbb{T}^n$.

3) Αν η T είναι συμπαγής, τότε σε μια περιοχή της υπάρχουν συντεταγμένες $(I_1, \dots, I_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ με $I_i \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^n$ (δράσεις), όπου $\mathcal{I}$ n -διάστατη ανοιχτή σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$, και $\theta_i \in \mathbb{T}^n$ (γωνίες), $i = 1, \dots, n$, έτσι ώστε

- (i) οι δράσεις να εξαρτώνται μόνο από τις συναρτήσεις f_i , $I_i = I_i(f_1, \dots, f_n), i = 1, \dots, n$,
- (ii) οι αγκύλες Poisson των συναρτήσεων συντεταγμένων να είναι κανονικές,

$$\{I_i, I_j\} = \{\theta_i, \theta_j\} = 0, \quad \{I_i, \theta_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

(iii) οι εξισώσεις Χάμιλτον για κάποια Χαμιλτώνια $H = H(f_1, \dots, f_n)$ γίνονται

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{\theta}_i = \omega_i(I_1, \dots, I_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Στη σύγχρονη εκδοχή του το θεώρημα εμφανίστηκε στην πρώτη έκδοση του [6]. Τα Χαμιλτώνια συστήματα που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος, δηλαδή επιδέχονται n -συναρτησιακά ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα σε ενέλιξη μεταξύ τους, καλούνται *πλήρως ολοκληρώσιμα* (κατά Liouville-Arnold).

Η διακριτή εκδοχή της ολοκληρωσιμότητας κατά Liouville-Arnold μελετήθηκε αρχικά στην εργασία [51] σε Λαγκρανζιανά συστήματα διακριτού χρόνου. Η ολοκληρωσιμότητα απεικονίσεων (*mappings*) σε συμπλεκτικές πολλαπλότητες ορίζεται κατά ανάλογο τρόπο με τα συνεχή συστήματα.

Ορισμός 1.7. *Μια συμπλεκτική απεικόνιση $\Phi : M \rightarrow M$, στην $2n$ -διάστατη συμπλεκτική πολλαπλότητα $(M, \{ \cdot, \cdot \})$, καλείται πλήρως ολοκληρώσιμη (κατά Liouville-Arnold) αν επιδέχεται n συναρτησιακά ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα σε ενέλιξη μεταξύ τους, δηλαδή αν υπάρχουν n συναρτησιακά ανεξάρτητες συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n$ επί της M τέτοιες ώστε*

$$f_i \circ \Phi = f_i, \quad \text{και} \quad \{f_i, f_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Από το θεώρημα 1.16, συμπεραίνουμε ότι κάθε συμπαγής ισοσταθμική επιφάνεια των ολοκληρωμάτων, $S = \{x \in M \mid f_i(x) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n\}$, είναι μη συνεκτική ένωση n -διάστατων τόρων. Έτσι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το σημείο $x_m = \Phi^m(x)$ ανήκει σε έναν n -διάστατο τόρο. Η βασική διαφορά με τα συνεχή ολοκληρώσιμα συστήματα έγκειται στο γεγονός ότι η ροή των συνεχών εγκλωβίζεται σε έναν μόνο τόρο (μία συνεκτική συνιστώσα του S), ιδιότητα που δεν εξασφαλίζεται για την συλλογή των σημείων $x_m = \Phi^m(x)$ μιας ολοκληρώσιμης απεικόνισης.

Η ύπαρξη περισσότερων ολοκληρωμάτων μπορεί να μειώσει περαιτέρω τη διάσταση των τόρων. Αν σε μια $2n$ -διάστατη συμπλεκτική πολλαπλότητα υπάρχουν $n+k$ συναρτησιακά ανεξάρτητες συναρτήσεις εκ των οποίων οι n είναι σε ενέλιξη μεταξύ τους, τότε κάθε συμπαγής συνεκτική ισοσταθμική επιφάνεια $S = \{x \in M \mid f_i(x) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n+k\}$ είναι διαφορόμοφη με τον τόρο $\mathbb{T}^{n-k}$. Τα αντίστοιχα δυναμικά συστήματα καλούνται *υπερολοκληρώσιμα* (superintegrable).

Κεφάλαιο 2

Ομάδες Poisson-Lie, αμφι-άλγεβρες Lie και η κλασική εξίσωση Yang-Baxter

Μια σημαντική κλάση πολλαπλοτήτων Poisson είναι οι ομάδες Poisson-Lie. Πρόκειται για ομάδες Lie εφοδιασμένες με μία αγκύλη Poisson τέτοια ώστε ο πολλαπλασιασμός των στοιχείων της ομάδας να είναι απεικόνιση Poisson. Γενικότερα τέτοιες δομές (όχι απαραίτητα σε ομάδες Lie) ονομάζονται πολλαπλασιαστικές δομές Poisson (multiplicative Poisson structures).

Τα απειροστά ανάλογα των ομάδων Poisson-Lie είναι οι αμφι-άλγεβρες Lie (Lie bialgebras), δηλαδή άλγεβρες Lie των οποίων ο δυϊκός τους χώρος έχει και αυτός δομή άλγεβρας Lie. Η κατασκευή αμφι-άλγεβρών Lie και των αντίστοιχων ομάδων Poisson-Lie ανάγεται στην εύρεση λύσεων της κλασικής εξίσωσης Yang-Baxter.

Όλες αυτές οι δομές που θα περιγράψουμε αναλυτικά σε αυτό το κεφάλαιο διαδραματίζουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη θεωρία των ολοκληρώσιμων συστημάτων (κλασικών και κβαντικών), καθώς επιτρέπουν την κατασκευή ζευγών Lax και κατ' επέκταση πρώτων ολοκληρωμάτων. Επίσης, παρουσιάζουν ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον, καθώς αποτελούν μία εισαγωγή στη θεωρία κβαντικών ομάδων και των Lie-algebroids, Lie-groupoids και Poisson groupoids. Για μια πληρέστερη μελέτη της θεωρίας των ομάδων Poisson-Lie και των αμφι-άλγεβρών Lie παραπέμπουμε στις εργασίες [7, 8, 12, 13, 23, 24, 38, 40, 41, 29, 44, 46, 49, 58].

2.1 Ομάδες Poisson-Lie

Ξεκινάμε ορίζοντας την αγκύλη Poisson του καρτεσιανού γινομένου δύο πολλαπλοτήτων Poisson.

Πρόταση 2.1. Έστω $(M, \{ , \}_M)$, $(N, \{ , \}_N)$ δύο πολλαπλότητες Poisson. Το καρτεσιανό γινόμενο $M \times N$ είναι πολλαπλότητα Poisson με αγκύλη Poisson

$$\{f_1, f_2\}_{M \times N}(x, y) = \{f_1(\cdot, y), f_2(\cdot, y)\}_M(x) + \{f_1(x, \cdot), f_2(x, \cdot)\}_N(y), \quad (2.1)$$

για κάθε $f_1, f_2 \in C^\infty(M \times N)$.

Η διγραμμικότητα, η αντισυμμετρικότητα, ο κανόνας του Leibniz και η ταυτότητα Jacobi της αγκύλης (2.1) αποδεικνύονται από τις αντίστοιχες ιδιότητες των αγκύλων Poisson $\{ , \}_M$ και $\{ , \}_N$.

Τώρα είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό των ομάδων Poisson-Lie.

Ορισμός 2.1. Μια ομάδα Lie G εφοδιασμένη με μία αγκύλη Poisson $\{ , \}_G$ καλείται ομάδα Poisson-Lie, αν η πολλαπλασιαστική απεικόνιση $m : G \times G \rightarrow G$ είναι απεικόνιση Poisson. Εδώ θεωρούμε το $G \times G$ εφοδιασμένο με την αγκύλη Poisson του καρτεσιανού γινομένου $\{ , \}_{G \times G}$ που ορίζεται από την (2.1).

Σε αυτό το σημείο κάνουμε μια μικρή παρένθεση για να εισάγουμε τον απαραίτητο συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια του κεφαλαίου. Θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους V_1, V_2 και μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$. Συμβολίζουμε με φ^* την δυϊκή γραμμική απεικόνιση $\varphi^* : V_2^* \rightarrow V_1^*$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\langle \varphi^*(\xi), x \rangle = \langle \xi, \varphi(x) \rangle,$$

για κάθε $\xi \in V_2^*, x \in V_1$. Εδώ όπως προηγουμένως με $\langle , \rangle$ συμβολίζουμε την δράση των στοιχείων των δυϊκών χώρων V_1^*, V_2^* στα στοιχεία των V_1, V_2 αντίστοιχα. Αν επιπλέον θεωρήσουμε τον ταυτιστή $t \in \otimes^n V_1$, τότε συμβολίζουμε με $\varphi_* : \otimes^n V_1 \rightarrow \otimes^n V_2$ την γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την

$$\varphi_* t(\xi^1, \dots, \xi^n) = t(\varphi^*(\xi^1), \dots, \varphi^*(\xi^n)),$$

με $\xi^1, \dots, \xi^n \in V_2^*$. Επίσης αν $\phi : M \rightarrow N$, όπου M, N πολλαπλότητες, τότε συμβολίζουμε

$$\phi_{x,*} := (d_x \phi)_* : \otimes^n T_x M \rightarrow \otimes^n T_{\phi(x)} N$$

(push-forward). Τέλος συμβολίζουμε με $L_g, R_g : G \rightarrow G$ τις απεικονίσεις αριστερής και δεξιάς μεταφοράς αντίστοιχα, μιας ομάδας Lie G , κατά το στοιχείο $g \in G$. Δηλαδή

$$L_g(h) = gh, \quad R_g(h) = hg, \quad h \in G.$$

Με αυτόν τον συμβολισμό διατυπώνουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.2. *Μια ομάδα Lie με τανυστή Poisson $\pi \in \wedge^2 TG$ είναι ομάδα Poisson-Lie αν και μόνο αν ο τανυστής π ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\pi_{g_1 g_2} = L_{g_1, *} \pi_{g_2} + R_{g_2, *} \pi_{g_1},$$

για κάθε $g_1, g_2 \in G$.

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 1.3 και την Πρόταση 2.1, η πολλαπλασιαστική απεικόνιση $m : G \times G \rightarrow G$ είναι απεικόνιση Poisson αν και μόνο αν

$$\{f_1, f_2\}_G(g_1 \cdot g_2) = \{f_1 \circ L_{g_1}, f_2 \circ L_{g_1}\}_G(g_2) + \{f_1 \circ R_{g_2}, f_2 \circ R_{g_2}\}_G(g_1), \quad (2.2)$$

για κάθε $g_1, g_2 \in G, f_1, f_2 \in C^\infty(G)$. Αν π είναι ο τανυστής Poisson που αντιστοιχεί στην αγκύλη $\{, \}_G$ τότε μπορούμε να γράψουμε την (2.2) ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \pi_{g_1 g_2}(d_{g_1 g_2} f_1, d_{g_1 g_2} f_2) &= \pi_{g_2}(d_{g_2}(f_1 \circ L_{g_1}), d_{g_2}(f_2 \circ L_{g_1})) \\ &+ \pi_{g_1}(d_{g_1}(f_1 \circ R_{g_2}), d_{g_1}(f_2 \circ R_{g_2})). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} &\pi_{g_2}(d_{g_2}(f_1 \circ L_{g_1}), d_{g_2}(f_2 \circ L_{g_1})) + \pi_{g_1}(d_{g_1}(f_1 \circ R_{g_2}), d_{g_1}(f_2 \circ R_{g_2})) \\ &= \pi_{g_2}(d_{g_1 g_2} f_1 d_{g_2} L_{g_1}, d_{g_1 g_2} f_2 d_{g_2} L_{g_1}) + \pi_{g_1}(d_{g_1 g_2} f_1 d_{g_1} R_{g_2}, d_{g_1 g_2} f_2 d_{g_1} R_{g_2}) \\ &= \pi_{g_2}((d_{g_2} L_{g_1})^*(d_{g_1 g_2} f_1), (d_{g_2} L_{g_1})^*(d_{g_1 g_2} f_2)) \\ &+ \pi_{g_1}((d_{g_1} R_{g_2})^*(d_{g_1 g_2} f_1), (d_{g_1} R_{g_2})^*(d_{g_1 g_2} f_2)) \\ &= (d_{g_2} L_{g_1})_* \pi_{g_2}(d_{g_1 g_2} f_1, d_{g_1 g_2} f_2) + (d_{g_1} R_{g_2})_* \pi_{g_1}(d_{g_1 g_2} f_1, d_{g_1 g_2} f_2). \end{aligned}$$

Συνεπώς, από την (2.3) έχουμε

$$\pi_{g_1 g_2} = (d_{g_2} L_{g_1})_* \pi_{g_2} + (d_{g_1} R_{g_2})_* \pi_{g_1}$$

$$\text{ή } \pi_{g_1 g_2} = L_{g_1, *} \pi_{g_2} + R_{g_2, *} \pi_{g_1}.$$

□

Ένα άμεσο πόρισμα της τελευταίας πρότασης είναι ότι ο τανυστής Poisson στο ταυτοτικό στοιχείο κάθε ομάδας Poisson-Lie μηδενίζεται. Συνεπώς η δομή Poisson μιας n -διάστατης ($n \neq 0$) ομάδας Poisson-Lie δεν είναι ποτέ συμπλεκτική.

Προφανώς, κάθε ομάδα Lie εφοδιασμένη με την τετριμμένη αγκύλη Poisson είναι ομάδα Poisson-Lie. Άλλο παράδειγμα ομάδας Poisson-Lie είναι ο δυϊκός χώρος $\mathfrak{g}^*$ μιας άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$, εφοδιασμένος με την δομή Lie-Poisson που περιγράψαμε στην ενότητα 1.7 (ο $\mathfrak{g}^*$ είναι ομάδα Lie, ως διανυσματικός χώρος, με πράξη την πρόσθεση). Σε επόμενη ενότητα θα δείξουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε δομές Poisson-Lie σε μια ομάδα Lie.

2.2 Αμφι-άλγεβρες Lie και η κλασική εξίσωση Yang-Baxter

Οι αμφι-άλγεβρες Lie κατέχουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη θεωρία των ολοκληρώσιμων συστημάτων. Πρόκειται για άλγεβρες Lie των οποίων ο δυϊκός τους χώρος έχει και αυτός δομή άλγεβρας Lie. Η κλασική εξίσωση Yang-Baxter δίνει μια ικανή συνθήκη για την κατασκευή τέτοιων δομών.

2.2.1 Αμφι-άλγεβρες Lie

Έστω $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα Lie και $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ μια γραμμική απεικόνιση. Όπως προηγουμένως συμβολίζουμε με δ^* την δυϊκή απεικόνιση $\delta^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Αν

$$\begin{aligned} i) \quad & \delta^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \text{ ορίζει μια αγκύλη Lie στον } \mathfrak{g}^* \text{ και} \\ ii) \quad & ad_x^{(2)}(\delta(x)) - ad_y^{(2)}(\delta(y)) - \delta([x, y]) = 0, \text{ για κάθε } x, y \in \mathfrak{g}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

τότε καλούμε το ζεύγος $(\mathfrak{g}, \delta)$ αμφι-άλγεβρα Lie (Lie bialgebra). Στη σχέση 2.4 με $ad_x^{(2)}$ εννοούμε τη δράση της $\mathfrak{g}$ στον $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$

$$ad_x^{(2)}(y_1 \otimes y_2) = ad_x y_1 \otimes y_2 + y_1 \otimes ad_x y_2 = [x, y_1] \otimes y_2 + y_1 \otimes [x, y_2].$$

Έστω $(\mathfrak{g}, \delta)$ μία αμφι-άλγεβρα Lie και $\gamma : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ η αγκύλη Lie στην $\mathfrak{g}$, τότε $(\mathfrak{g}^*, \gamma^*)$ είναι επίσης αμφι-άλγεβρα Lie και καλείται η δυϊκή αμφι-άλγεβρα της $(\mathfrak{g}, \delta)$. Συνεπώς κάθε αμφι-άλγεβρα Lie έχει δυϊκή αμφι-άλγεβρα της οποίας η δυϊκή είναι ακριβώς η αρχική αμφι-άλγεβρα Lie.

Επιπλέον, αν η $(\mathfrak{g}, \delta)$ είναι αμφι-άλγεβρα Lie, τότε επειδή η $\mathfrak{g}^*$ είναι άλγεβρα Lie, η δυϊκή της $(\mathfrak{g}^*)^* \equiv \mathfrak{g}$ μπορεί να εφοδιαστεί με την γραμμική δομή Lie-Poisson (1.15) που ορίσαμε στην ενότητα 1.7, η οποία σε αυτήν την περίπτωση καλείται *γραμμική αγκύλη Sklyanin*.

2.2.2 Ο διπλός χώρος μιας αμφι-άλγεβρας Lie

Έστω $(\mathfrak{g}, \delta)$ μία αμφι-άλγεβρα Lie με δυϊκή αμφι-άλγεβρα $(\mathfrak{g}^*, \gamma^*)$. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\partial = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, εφοδιασμένο με το φυσικό εσωτερικό γινόμενο

$$(x + \xi, y + \eta) = \langle \xi, y \rangle + \langle \eta, x \rangle, x, y \in \mathfrak{g}, \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*. \quad (2.5)$$

Μπορούμε να ορίσουμε μία αγκύλη Lie $[\cdot, \cdot]_\partial$ στον ∂ , τέτοια ώστε η $\mathfrak{g}$ και η $\mathfrak{g}^*$ να είναι υποάλγεβρες Lie της ∂ .

Πρόταση 2.3. *Ο διανυσματικός χώρος ∂ εφοδιασμένος με την αγκύλη*

$$[x, y]_\partial = [x, y], [\xi, \eta]_\partial = [\xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, [x, \xi]_\partial = -ad_\xi^* x + ad_x^* \xi, \quad (2.6)$$

για $x, y \in \mathfrak{g}, \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$, είναι άλγεβρα Lie με υποάλγεβρες Lie τις $\mathfrak{g}$ και $\mathfrak{g}^*$. Το εσωτερικό γινόμενο 2.5 της ∂ είναι *ad-αναλλοίωτο*.

Η ταυτότητα Jacobi της αγκύλης στον ∂ αποδεικνύεται από τη σχέση 2.4 ενώ οι υπόλοιπες ιδιότητες της πρότασης απευθείας από την αγκύλη 2.6. Θυμίζουμε ότι ένα εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)$ σε μια άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$, μιας ομάδας Lie G , καλείται *Ad-αναλλοίωτο* αν $(Ad_g x, Ad_g y) = (x, y)$ για κάθε $g \in G, x, y \in \mathfrak{g}$ και *ad-αναλλοίωτο* αν $(ad_y x, z) = -(x, ad_y z), x, y, z \in \mathfrak{g}$.

2.2.3 Η κλασική εξίσωση Yang-Baxter

Έστω $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα Lie και r ένα στοιχείο του τανυστικού γινομένου $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$. Ορίζουμε την αγκύλη *Schouten* $[r, r] \in \wedge^3 \mathfrak{g}$ του r με τον εαυτό του από τον τύπο:

$$\begin{aligned} [r, r](\xi, \eta, \zeta) &= 2(\langle \xi, [r\eta, r\zeta] \rangle + \langle \zeta, [r\xi, r\eta] \rangle + \langle \eta, [r\zeta, r\xi] \rangle) \\ &:= 2 \odot \langle \xi, [r\eta, r\zeta] \rangle, \end{aligned}$$

για κάθε $\xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}^*$, όπου r είναι η γραμμική απεικόνιση $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\langle \eta, r\xi \rangle = r(\xi, \eta).$$

Ορισμός 2.2. Θα λέμε ότι ο τανυστής $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ ικανοποιεί την κλασική εξίσωση Yang-Baxter (YB) αν $[r, r] = 0$.

Η κλασική εξίσωση YB μπορεί επίσης να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τον λεγόμενο τανυστικό συμβολισμό. Θεωρούμε την n -διάστατη άλγεβρα $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$. Για κάθε $r = \sum_i u_i \otimes v_i \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ ορίζουμε τα στοιχεία του $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} [r_{12}, r_{13}] &= \left[\sum_i u_i \otimes v_i \otimes I, \sum_j u_j \otimes I \otimes v_j \right] = \sum_{i,j} [u_i, u_j] \otimes v_i \otimes v_j, \\ [r_{12}, r_{23}] &= \left[\sum_i u_i \otimes v_i \otimes I, \sum_j I \otimes u_j \otimes v_j \right] = \sum_{i,j} u_i \otimes [v_i, u_j] \otimes v_j, \\ [r_{13}, r_{23}] &= \left[\sum_i u_i \otimes I \otimes v_i, \sum_j I \otimes u_j \otimes v_j \right] = \sum_{i,j} u_i \otimes u_j \otimes [v_i, v_j]. \end{aligned}$$

Με αυτόν τον συμβολισμό η κλασική εξίσωση YB, $[r, r] = 0$, γράφεται

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0. \quad (2.7)$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζονται αμφι-άλγεβρες Lie από λύσεις της κλασικής εξίσωσης YB.

Πρόταση 2.4. Αν ο $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ ικανοποιεί την κλασική εξίσωση YB, τότε η $(\mathfrak{g}, \delta)$, όπου $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ με

$$\delta(x) = ad_x^{(2)} r, \quad x \in \mathfrak{g}, \quad (2.8)$$

είναι αμφι-άλγεβρα Lie. Σε αυτήν την περίπτωση ο r καλείται τριγωνικός r -πίνακας *triangular r -matrix*.

Παράδειγμα 2.5. Θεωρούμε την άλγεβρα Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ με βάση

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Οι αγκύλες Lie των στοιχείων της βάσης είναι

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Θεωρούμε επίσης τον δυϊκό χώρο της $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$, με βάση $\{H^*, X^*, Y^*\}$, καθώς και το στοιχείο $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$:

$$r = X \wedge H = X \otimes H - H \otimes X.$$

Εστω $\xi = \xi_1 H^* + \xi_2 X^* + \xi_3 Y^* \in \mathfrak{g}^*$. Η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $\mathbf{r} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ είναι

$$\mathbf{r}(\xi) = \xi_2 H - \xi_1 X.$$

Θα υπολογίσουμε την αγκύλη Schouten $[r, r] \in \wedge^3 \mathfrak{g}$. Για

$$\xi = \xi_1 H^* + \xi_2 X^* + \xi_3 Y^*, \quad \eta = \eta_1 H^* + \eta_2 X^* + \eta_3 Y^*, \quad \zeta = \zeta_1 H^* + \zeta_2 X^* + \zeta_3 Y^* \in \mathfrak{g}^*$$

έχουμε

$$\begin{aligned} [r, r](\xi, \eta, \zeta) &= 2(\langle \xi, [\mathbf{r}\eta, \mathbf{r}\zeta] \rangle + \langle \zeta, [\mathbf{r}\xi, \mathbf{r}\eta] \rangle + \langle \eta, [\mathbf{r}\zeta, \mathbf{r}\xi] \rangle) \\ &= 2 \odot \langle \xi, [\eta_2 H - \eta_1 X, \zeta_2 H - \zeta_1 X] \rangle \\ &= 2 \odot \langle \xi, 2(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1) X \rangle \\ &= 4[\xi_2(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1) + \zeta_2(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) + \eta_2(\zeta_1 \xi_2 - \zeta_2 \xi_1)] = 0, \end{aligned}$$

Άρα ο τανυστής r ικανοποιεί την κλασική εξίσωση YB.

Από την Πρόταση 2.4 η $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ ορίζει δομή αμφι-άλγεβρας Lie στην $\mathfrak{g}$. Για $x = a_1 H + a_2 X + a_3 Y \in \mathfrak{g}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta(x) &= ad_x^{(2)} r = ad_x^{(2)}(X \otimes H - H \otimes X) \\ &= ad_x X \otimes H + X \otimes ad_x H - (ad_x H \otimes X + H \otimes ad_x X) \\ &= 2[a_1(X \otimes H - H \otimes X) + a_3(X \otimes Y - Y \otimes X)] \\ &= 2a_1 X \wedge H + 2a_3 X \wedge Y. \end{aligned}$$

Γενικότερα, για οποιονδήποτε τανυστή $r = a + s \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, με a το αντισυμμετρικό και s το συμμετρικό μέρος του r , μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ να ορίζει αμφι-άλγεβρα Lie στην $\mathfrak{g}$ μέσω της (2.8) είναι

$$ad_x^{(2)} s = 0 \text{ και } ad_x^{(3)}[a, a] = 0. \quad (2.10)$$

Σε αυτήν την περίπτωση ο r ορίζει την ίδια αμφι-άλγεβρα Lie με τον αντισυμμετρικό a και καλείται *ημι-τριγωνικός* (*quasi-triangular*) r -πίνακας. Αν επιπλέον ο s είναι αντιστρέψιμος, τότε ο r καλείται *παραγοντοποιήσιμος* *factorizable*. (Προφανώς αν $ad_x^{(2)} s = 0$ και ο a ικανοποιεί την κλασική εξίσωση YB, τότε ο r είναι ημι-τριγωνικός).

Παράδειγμα 2.6. Θεωρούμε την άλγεβρα Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, με την βάση (2.9), και τον τανυστή

$$r = \frac{1}{8}(H \otimes H + 4X \otimes Y) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}.$$

Το συμμετρικό μέρος του $r = a + s$ είναι

$$s = \frac{1}{8}H \otimes H + \frac{1}{4}(X \otimes Y + Y \otimes X),$$

και το αντισυμμετρικό μέρος του

$$a = \frac{1}{4}(X \otimes Y - Y \otimes X).$$

Για $x = a_1H + a_2X + a_3Y \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned} ad_x X &= [x, X] = 2a_1X - a_3H, \\ ad_x Y &= [x, Y] = -2a_1Y + a_2H, \\ ad_x H &= [x, H] = -2a_2X + 2a_3Y \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} ad_x^{(2)} s &= \frac{1}{8}(ad_x H \otimes H + H \otimes ad_x H) \\ &+ \frac{1}{4}(ad_x X \otimes Y + X \otimes ad_x Y + ad_x Y \otimes X + Y \otimes ad_x X) = 0. \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε την αγκύλη Schouten $[a, a]$. Έστω $\xi = \xi_1H^* + \xi_2X^* + \xi_3Y^* \in \mathfrak{g}^*$. Η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση $\mathbf{a} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ είναι

$$\mathbf{a}(\xi) = \frac{1}{4}(-\xi_3X + \xi_2Y).$$

Για

$$\xi = \xi_1H^* + \xi_2X^* + \xi_3Y^*, \quad \eta = \eta_1H^* + \eta_2X^* + \eta_3Y^*, \quad \zeta = \zeta_1H^* + \zeta_2X^* + \zeta_3Y^* \in \mathfrak{g}^*$$

έχουμε

$$\begin{aligned} [a, a](\xi, \eta, \zeta) &= 2 \odot \langle \xi, [\mathbf{a}\eta, \mathbf{a}\zeta] \rangle \\ &= \frac{1}{8}[\xi_1(\eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2) + \zeta_1(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) + \eta_1(\zeta_2\xi_3 - \zeta_3\xi_2)]. \end{aligned}$$

Δηλαδή ο a δεν ικανοποιεί την κλασική εξίσωση YB. Ωστόσο πρέπει να ελέγξουμε αν $ad_x^{(3)}[a, a] = 0$. Έστω

$$[a, a] = \lambda H \wedge X \wedge Y, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
 ad_x^{(3)}[a, a] &= \lambda(ad_x^{(3)}H \wedge X \wedge Y) \\
 &= \lambda(ad_x H \wedge X \wedge Y + H \wedge ad_x X \wedge Y + H \wedge X \wedge ad_x Y) \\
 &= \lambda[(-2a_2X + 2a_3Y) \wedge X \wedge Y + H \wedge (2a_1X - a_3H) \wedge Y + \\
 &\quad + H \wedge X \wedge (-2a_1Y + a_2H)] \\
 &= \lambda[2a_1H \wedge X \wedge Y - 2a_1H \wedge X \wedge Y] = 0.
 \end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε μία αμφι-άλγεβρα Lie στην $\mathfrak{g}$, $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, με

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= ad_x^{(2)}a = \frac{1}{4}ad_x^{(2)}(X \otimes Y - Y \otimes X) \\
 &= \frac{1}{4}[ad_x X \otimes Y + X \otimes ad_x Y - ad_x Y \otimes X - Y \otimes ad_x X] \\
 &= \frac{1}{4}[a_3(Y \otimes H - H \otimes Y) + a_2(X \otimes H - H \otimes X)],
 \end{aligned}$$

για κάθε $x = a_1H + a_2X + a_3Y \in \mathfrak{g}$. Η αγκύλη Lie στην $\mathfrak{g}^*$ ορίζεται από την σχέση

$$[\xi, \eta]_* = \delta^*(\xi \otimes \eta), \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Για $x = a_1H + a_2X + a_3Y \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 \langle [H^*, X^*], x \rangle &= \langle \delta^*(H^* \otimes X^*), x \rangle = \langle H^* \otimes X^*, \delta(x) \rangle \\
 &= \langle H^* \otimes X^*, \frac{1}{4}[a_3(Y \otimes H - H \otimes Y) + a_2(X \otimes H - H \otimes X)] \rangle \\
 &= -\frac{1}{4}a_2 = \left\langle -\frac{1}{4}X^*, x \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Δηλαδή $[H^*, X^*] = -\frac{1}{4}X^*$. Παρόμοια, εξάγουμε την αγκύλη Lie των άλλων στοιχείων της βάσης της $\mathfrak{g}^*$

$$[H^*, Y^*] = -\frac{1}{4}Y^* \text{ και } [X^*, Y] = 0.$$

2.2.4 Η αμφι-άλγεβρα Lie μιας ομάδας Poisson-Lie

Στην παρούσα ενότητα θα δείξουμε ότι σε κάθε άλγεβρα Lie μιας ομάδας Poisson-Lie, αντιστοιχεί μια φυσική δομή αμφι-άλγεβρας Lie.

Έστω $(G, \{, \})$ μια ομάδα Poisson-Lie με τανυστή Poisson π . Συμβολίζουμε με π^R την απεικόνιση $\pi^R : G \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ που ορίζεται από την σχέση

$$\pi^R(g) = R_{g^{-1},*}\pi(g), \quad \text{για κάθε } g \in G, \quad (2.11)$$

όπου, όπως προηγουμένως, R_g είναι η απεικόνιση δεξιάς μεταφοράς της G , $R_g(h) = hg$, $h \in G$. Ορίζουμε επίσης την γραμμική απεικόνιση $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ από την σχέση

$$\delta(x) = d_e \pi^R = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi^R(e^{tx}) \quad (2.12)$$

για κάθε $x \in \mathfrak{g}$.

Πρόταση 2.7. Έστω $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^*$. Επιλέγουμε δύο συναρτήσεις $f_1, f_2 \in C^\infty(G)$ έτσι ώστε $d_e f_1 = \xi_1$ και $d_e f_2 = \xi_2$. Τότε

$$\delta^*(\xi_1, \xi_2) = d_e \{f_1, f_2\}. \quad (2.13)$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathfrak{g}$. Τότε

$$\begin{aligned} \langle x, d_e \{f_1, f_2\} \rangle &= \frac{d}{dt} [\{f_1, f_2\}(e^{tx})]_{t=0} = \frac{d}{dt} [\pi_{e^{tx}}(d_{e^{tx}} f_1, d_{e^{tx}} f_2)]_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} [R_{e^{tx},*} \pi^R(e^{tx})(d_{e^{tx}} f_1, d_{e^{tx}} f_2)]_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} [\pi^R(e^{tx})((d_e R_{e^{tx}})^* d_{e^{tx}} f_1, (d_e R_{e^{tx}})^* d_{e^{tx}} f_2)]_{t=0} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi^R(e^{tx}) \right) (d_e f_1, d_e f_2) \\ &= \delta(x)(d_e f_1, d_e f_2) = \langle x, \delta^*(\xi_1, \xi_2) \rangle. \end{aligned}$$

□

Επίσης μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η αγκύλη $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}^*}$ που ορίζεται ως

$$[\xi_1, \xi_2]_{\mathfrak{g}^*} = \delta^*(\xi_1, \xi_2), \quad \text{για κάθε } \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}^*$$

είναι μία αγκύλη Lie επί της $\mathfrak{g}^*$ και ότι η $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ που ορίσαμε από την 2.12, ικανοποιεί την εξίσωση 2.4.

Δείξαμε λοιπόν ότι αν G είναι μία ομάδα Poisson-Lie με τανυστή Poisson π , τότε η $(\mathfrak{g}, \delta)$ είναι μία αμφι-άλγεβρα Lie, που καλείται *εφαπτόμενη αμφι-άλγεβρα Lie* της G . Αντιστρόφως αναφέρουμε την παρακάτω πρόταση, η απόδειξη της οποίας οφείλεται στον Drinfel'd [13].

Πρόταση 2.8. (*Drinfel'd*) Αν η ομάδα Lie G είναι συνεκτική και απλά συνεκτική, τότε κάθε δομή αμφι-άλγεβρας Lie δ επί της $\mathfrak{g}$ ορίζει μοναδικό τανυστή Poisson π επί της G , τέτοιο ώστε η (G, π) να είναι ομάδα Poisson-Lie με εφαπτόμενη αμφι-άλγεβρα Lie την $(\mathfrak{g}, \delta)$.

Σύμφωνα με την τελευταία πρόταση μπορούμε να ορίσουμε την *δυϊκή* (αντιστ. τον διπλό χώρο) μιας ομάδας Poisson-Lie ως την μοναδική ομάδα Poisson-Lie με εφαπτόμενη αμφι-άλγεβρα Lie την *δυϊκή* (αντιστ. τον διπλό χώρο) μιας αμφι-άλγεβρας Lie.

2.3 Κατασκευή ομάδων Poisson-Lie

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, κάθε λύση r της κλασικής εξίσωσης Yang-Baxter ορίζει μία δομή αμφι-άλγεβρας Lie σε μια άλγεβρα Lie. Στην παρούσα ενότητα κατασκευάζουμε δομές Poisson-Lie, από τέτοιες λύσεις, στην αντίστοιχη ομάδα Lie.

Θεωρούμε μία ομάδα Lie G με μία άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$. Έστω $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ ένας τριγωνικός r -πίνακας. Ο τανυστής $\pi \in TG \wedge TG$ με

$$\pi = r^L - r^R, \quad (2.14)$$

όπου $r^L(g) = L_{g,*}r$, $r^R(g) = R_{g,*}r$, για κάθε $g \in G$, είναι ένας τανυστής Poisson, δηλαδή $[\pi, \pi](df_1, df_2, df_3) = 2 \odot \{f_1, \{f_2, f_3\}\} = 0$, $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(G)$.

Πρόταση 2.9. *Η ομάδα Lie G εφοδιασμένη με τον τανυστή Poisson π που ορίζεται από την σχέση (2.14) είναι ομάδα Poisson-Lie.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\pi_{g_1 g_2} = L_{g_1,*}\pi_{g_2} + R_{g_2,*}\pi_{g_1},$$

για κάθε $g_1, g_2 \in G$.

$$\begin{aligned} \pi_{g_1 g_2} &= r^L(g_1 g_2) - r^R(g_1 g_2) = L_{g_1 g_2,*}r - R_{g_1 g_2,*}r \\ &= L_{g_1,*} \circ L_{g_2,*}r - R_{g_2,*} \circ R_{g_1,*}r + R_{g_2,*} \circ L_{g_1,*}r - L_{g_1,*} \circ R_{g_2,*}r \\ &= L_{g_1,*}(L_{g_2,*}r - R_{g_2,*}r) + R_{g_2,*}(L_{g_1,*}r - R_{g_1,*}r) \\ &= L_{g_1,*}\pi_{g_2} + R_{g_2,*}\pi_{g_1}. \end{aligned}$$

□

Η αγκύλη Poisson που αντιστοιχεί στον τανυστή (2.14) καλείται *τετραγωνική αγκύλη Sklyanin* ή απλά αγκύλη Sklyanin, και δεν πρέπει να συγχέεται με την γραμμική αγκύλη Sklyanin που ορίσαμε στην ενότητα 2.2.1 σε μια αμφι-άλγεβρα Lie.

Όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.2.4 αν r είναι ένας τριγωνικός r -πίνακας, τότε η $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ $\delta(x) = ad_x^{(2)}r$, ορίζει μία δομή αμφι-άλγεβρας Lie επί της $\mathfrak{g}$. Έτσι αν η G είναι συνεκτική και απλά συνεκτική, από την πρόταση 2.8 συμπεραίνουμε ότι η μοναδική δομή Poisson-Lie π επί της G , η οποία έχει εφαπτόμενη αμφι-άλγεβρα Lie το ζεύγος $(\mathfrak{g}, \delta)$, είναι η (2.14).

Παρατήρηση. Αν $r = a + s \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ είναι ένας ημιτριγωνικός r -πίνακας, τότε ο αντίστοιχος ταυιστής Poisson της τελευταίας πρότασης είναι ο $\pi = a^L - a^R$.

Παράδειγμα 2.10. Θεωρούμε την ομάδα Lie $G = SL(2, \mathbb{C})$ και τον ημι-τριγωνικό r -πίνακα του Παραδείγματος 2.6 της ενότητας 2.2.3, δηλ.

$$r = \frac{1}{8}(H \otimes H + 4X \otimes Y),$$

με αντισυμμετρικό μέρος $a = \frac{1}{4}(X \otimes Y - Y \otimes X)$. Ο αντίστοιχος ταυιστής Poisson είναι

$$\begin{aligned} \pi_g &= a^L(g) - a^R(g) = L_{g,*}a - R_{g,*}a = L_g \otimes L_g(a) - R_g \otimes R_g(a) \\ &= \frac{1}{4}[L_g \otimes L_g(X \otimes Y - Y \otimes X) - R_g \otimes R_g(X \otimes Y - Y \otimes X)] \\ &= \frac{1}{4}[(gX \otimes gY - gY \otimes gX) - (Xg \otimes Yg - Yg \otimes Xg)] \\ &= \frac{1}{4}(gX \wedge gY - Xg \wedge Yg) \end{aligned}$$

για κάθε $g \in G$.

Εστω $g = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \in G$, με $g_1g_4 - g_2g_3 = 1$. Θεωρούμε την G ως υποομάδα Lie της $GL(2, \mathbb{C})$ με συντεταγμένες $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$, καθώς και την βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ του $TgGL(2, \mathbb{C})$, όπου

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \pi_g &= \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ 0 & g_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} g_2 & 0 \\ g_4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_3 & g_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4}[(g_1e_2 + g_3e_4) \wedge (g_2e_1 + g_4e_3) - (g_3e_1 + g_4e_2) \wedge (g_1e_3 + g_2e_4)] \\ &= \frac{1}{4}(g_1g_2e_2 \wedge e_1 + g_1g_4e_2 \wedge e_3 + g_3g_2e_4 \wedge e_1 + g_3g_4e_4 \wedge e_3 \\ &\quad - g_3g_1e_1 \wedge e_3 - g_3g_2e_1 \wedge e_4 - g_4g_1e_2 \wedge e_3 - g_4g_2e_2 \wedge e_4) \\ &= \frac{1}{4}(g_1g_2e_2 \wedge e_1 + 2g_3g_2e_4 \wedge e_1 + g_3g_4e_4 \wedge e_3 - g_3g_1e_1 \wedge e_3 - g_4g_2e_2 \wedge e_4). \end{aligned}$$

Συνεπώς προκύπτουν οι αγκύλες Poisson των συναρτήσεων συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} \{g_1, g_2\} &= -\frac{1}{4}g_1g_2, \quad \{g_1, g_3\} = -\frac{1}{4}g_1g_3, \quad \{g_1, g_4\} = -\frac{1}{2}g_2g_3, \\ \{g_2, g_3\} &= 0, \quad \{g_2, g_4\} = -\frac{1}{4}g_2g_4, \quad \{g_3, g_4\} = -\frac{1}{4}g_3g_4. \end{aligned}$$

Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η συνάρτηση $\det g = g_1g_4 - g_2g_3$ είναι συνάρτηση Casimir της $(G, \{ , \})$.

2.4 Τανυστικός συμβολισμός της αγκύλης Sklyanin

Στην συνέχεια δίνουμε έναν πιο εύχρηστο συμβολισμό για την τετραγωνική και γραμμική αγκύλη Sklyanin. Έστω G μία ομάδα $n \times n$ πινάκων, με άλγεβρα $\text{Lie } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n)$, και $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ ένας τριγωνικός ή ημι-τριγωνικός r -πίνακας. Όπως είναι γνωστό ο r εκφράζεται από έναν $n^2 \times n^2$ πίνακα. Για κάθε $L = [a_{ij}] \in G$

$$r^L(L) = (L \otimes L)r \text{ και } r^R(L) = r(L \otimes L).$$

Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε την αγκύλη Sklyanin 2.14 από τον τύπο

$$\{L, L\} = (L \otimes L)r - r(L \otimes L) = [L \otimes L, r], \quad (2.15)$$

όπου

$$\{L, L\} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

και A_{ij} συμβολίζει το $n \times n$ block

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \{a_{ij}, a_{11}\} & \dots & \{a_{ij}, a_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{a_{ij}, a_{n1}\} & \dots & \{a_{ij}, a_{nn}\} \end{pmatrix}.$$

Αντίστοιχα στην αμφι-άλγεβρα $(\mathfrak{g}, \delta)$ με $\delta(x) = ad_x^{(2)}r$, όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.2.3 ορίζεται η γραμμική αγκύλη Sklyanin, μέσω της 1.15, στην $\mathfrak{g} \equiv (\mathfrak{g}^*)^*$ από την σχέση

$$\{x_i, x_j\}_{\mathfrak{g}} = \langle x, [x_i, x_j]_{\mathfrak{g}^*} \rangle = \langle x, (ad_x^{(2)})^*r(x_i, x_j) \rangle,$$

όπου $x \in \mathfrak{g}$ και $x_i, x_j \in \mathfrak{g}^*$, για $i = 1, \dots, n$, οι συναρτήσεις συντεταγμένων. Για $L = [a_{ij}] \in \mathfrak{g}$ η γραμμική αγκύλη Sklyanin εκφράζεται ως

$$\{L, L\} = [L \otimes I + I \otimes L, r]. \quad (2.16)$$

2.5 Η αγκύλη Sklyanin στον δακτύλιο των πολυωνυμικών πινάκων

Στην βιβλιογραφία υπάρχουν πολλές γενικεύσεις της αγκύλης Sklyanin 2.14, 2.15 σε απειροδιάστατους χώρους. Για παράδειγμα, σε ομάδες βρόχων (*loop groups*, απεικονίσεις από τον μοναδιαίο κύκλο S^1 σε μια ομάδα Lie G) [23, 38], σε σειρές Laurent $\mathbb{C} \rightarrow G$ καθώς και γενικότερα σε προσεταιριστικές άλγεβρες [7, 47]. Η βασική ιδιότητα της αγκύλης Sklyanin σε αυτούς τους χώρους είναι η πολλαπλασιαστική, δηλαδή η απεικόνιση πολλαπλασιασμού είναι απεικόνιση Poisson. Αντίστοιχα σε γραμμικούς απειροδιάστατους χώρους γενικεύεται η γραμμική αγκύλη Sklyanin. Εμείς θα περιοριστούμε στην επέκταση της αγκύλης Sklyanin στον δακτύλιο των πολυωνυμικών πινάκων. Ξεκινάμε δίνοντας τον ορισμό της κλασικής εξίσωσης YB με φασματικές παραμέτρους.

Θεωρούμε μία ανοιχτή περιοχή U του μιγαδικού επιπέδου και μία μερόμορφη συνάρτηση $r : U \times U \rightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $r(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_i u_i(\zeta_1, \zeta_2) \otimes v_i(\zeta_1, \zeta_2)$, όπου $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα Lie. Σε αντιστοιχία με την 2.7, θα λέμε ότι ο r ικανοποιεί την κλασική εξίσωση YB με φασματικές παραμέτρους αν

$$[r_{12}(\zeta_1, \zeta_2), r_{13}(\zeta_1, \zeta_3)] + [r_{12}(\zeta_1, \zeta_2), r_{23}(\zeta_2, \zeta_3)] + [r_{13}(\zeta_1, \zeta_3), r_{23}(\zeta_2, \zeta_3)] = 0, \quad (2.17)$$

όπου

$$\begin{aligned} [r_{12}(\zeta_1, \zeta_2), r_{13}(\zeta_1, \zeta_3)] &= \sum_{i,j} [u_i(\zeta_1, \zeta_2), u_j(\zeta_1, \zeta_3)] \otimes v_i(\zeta_1, \zeta_2) \otimes v_j(\zeta_1, \zeta_3), \\ [r_{12}(\zeta_1, \zeta_2), r_{23}(\zeta_2, \zeta_3)] &= \sum_{i,j} u_i(\zeta_1, \zeta_2) \otimes [v_i(\zeta_1, \zeta_2), u_j(\zeta_2, \zeta_3)] \otimes v_j(\zeta_2, \zeta_3), \\ [r_{13}(\zeta_1, \zeta_3), r_{23}(\zeta_2, \zeta_3)] &= \sum_{i,j} u_i(\zeta_1, \zeta_3) \otimes u_j(\zeta_2, \zeta_3) \otimes [v_i(\zeta_1, \zeta_3), v_j(\zeta_2, \zeta_3)]. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathcal{L}$ των $n \times n$ πολυωνυμικών πινάκων και μια μερόμορφη συνάρτηση $r : U \times U \rightarrow \mathfrak{gl}(n) \otimes \mathfrak{gl}(n)$ που ικανοποιεί την κλασική εξίσωση YB με φασματικές παραμέτρους 2.17. Σε αντιστοιχία με τις αγκύλες 2.16, 2.15 στις άλγεβρες και ομάδες Lie πεπερασμένης διάστασης, ορίζονται δύο αγκύλες Poisson επί του $\mathcal{L}$:

i) η γραμμική αγκύλη Sklyanin $\{L(\zeta) \otimes L(\eta)\} = [L(\zeta) \otimes I + I \otimes L(\eta), r(\zeta, \eta)],$

ii) η (τετραγωνική) αγκύλη Sklyanin

$$\{L(\zeta) \otimes L(\eta)\} = [L(\zeta) \otimes L(\eta), r(\zeta, \eta)], \quad (2.18)$$

$L(\zeta) \in \mathcal{L}$. Η τετραγωνική αγκύλη Sklyanin 2.18 είναι αυτή που παρουσιάστηκε αρχικά από τον Sklyanin στο άρθρο [44]. Συχνά στην βιβλιογραφία παραλείπεται ο όρος τετραγωνική και αναφέρεται απλά ως αγκύλη Sklyanin, ενώ άλλοι αναφέρουν ως αγκύλη Sklyanin την κανονική αγκύλη Sklyanin που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα. Η αγκύλη 2.18 ικανοποιεί την πολλαπλασιαστική ιδιότητα που προαναφέραμε. Δηλαδή η απεικόνιση πολλαπλασιασμού $m : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ είναι απεικόνιση Poisson.

2.5.1 Η κανονική αγκύλη Sklyanin

Η κανονική αγκύλη Sklyanin προέρχεται από την πιο απλή, μη τετριμμένη, λύση της κλασικής εξίσωσης YB με φασματικές παραμέτρους.

Πρόταση 2.11. *Ο $r(\zeta, \eta) = \frac{r}{\zeta - \eta}$, όπου r ο μεταθετικός πίνακας $r(x \otimes y) = (y \otimes x)$, είναι λύση της κλασικής εξίσωσης YB με φασματικές παραμέτρους.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
& (r_{12}(\zeta_1, \zeta_2)r_{13}(\zeta_1, \zeta_3) - r_{13}(\zeta_1, \zeta_3)r_{12}(\zeta_1, \zeta_2))(x \otimes y \otimes z) \\
& + (r_{12}(\zeta_1, \zeta_2)r_{23}(\zeta_2, \zeta_3) - r_{23}(\zeta_2, \zeta_3)r_{12}(\zeta_1, \zeta_2))(x \otimes y \otimes z) \\
& + (r_{13}(\zeta_1, \zeta_3)r_{23}(\zeta_2, \zeta_3) - r_{23}(\zeta_2, \zeta_3)r_{13}(\zeta_1, \zeta_3))(x \otimes y \otimes z) \\
& = \frac{1}{(\zeta_1 - \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_3)} [(\zeta_2 - \zeta_3)(y \otimes z \otimes x) - (\zeta_2 - \zeta_3)(z \otimes x \otimes y) \\
& + (\zeta_1 - \zeta_3)(z \otimes x \otimes y) - (\zeta_1 - \zeta_3)(y \otimes z \otimes x) \\
& + (\zeta_1 - \zeta_2)(y \otimes z \otimes x) - (\zeta_1 - \zeta_2)(z \otimes x \otimes y)] = 0
\end{aligned}$$

□

Η αγκύλη Sklyanin που αντιστοιχεί στη λύση $r(\zeta, \eta)$,

$$\{L(\zeta) \otimes L(\eta)\} = [L(\zeta) \otimes L(\eta), \frac{r}{\zeta - \eta}], \quad (2.19)$$

καλείται *κανονική αγκύλη Sklyanin (standard Sklyanin bracket)*. Αντίστοιχα ορίζεται και η γραμμική κανονική αγκύλη Sklyanin. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο $r \in gl(n) \otimes gl(n)$ δεν ικανοποιεί την κλασική εξίσωση YB χωρίς φασματικές παραμέτρους, δηλαδή

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] \neq 0.$$

Δεν υπάρχει γενική μέθοδος εύρεσης λύσεων της κλασικής εξίσωσης YB. Σε ορισμένες περιπτώσεις, θέτοντας δηλαδή κάποιους περιορισμούς, οι λύσεις ταξινομούνται [12]. Επιπλέον δεν είναι πάντα εύκολο να εξακριβωθεί αν μια συγκεκριμένη δομή *Poisson* προέρχεται από έναν r -πίνακα, δηλαδή μια λύση της κλασικής εξίσωσης YB. Γενικότερα η εύρεση δομών *Poisson* σε διάφορους χώρους καθώς και η συμβατότητα μεταξύ τους αποτελεί ένα ανοιχτό πεδίο έρευνας [49].

Η κανονική αγκύλη Sklyanin διαδραματίζει ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στη θεωρία των ολοκληρώσιμων συστημάτων (συνεχών και διακριτών) τα οποία επιδέχονται αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας με ζεύγη πινάκων Lax εξαρτώμενα από φασματικές παραμέτρους. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [38, 41, 47, 46, 49]. Η αγκύλη αυτή θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα στην παρούσα εργασία καθώς από αυτήν ανάγεται η συμπλεκτική δομή στο χώρο φάσεων των ολοκληρώσιμων απεικονίσεων που θα μελετήσουμε.

Κεφάλαιο 3

Συνολοθεωρητικό ανάλογο της κβαντικής εξίσωσης Yang-Baxter

Η κβαντική εξίσωση Yang-Baxter ([9, 59]) είναι θεμελιώδης στην μαθηματική φυσική και κυρίως στη θεωρία των ολοκληρώσιμων συστημάτων. Πρόκειται για την εξίσωση που περιλαμβάνει έναν γραμμικό τελεστή $R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, όπου V είναι ένας διανυσματικός χώρος, και έχει την μορφή

$$R^{23} \circ R^{13} \circ R^{12} = R^{12} \circ R^{13} \circ R^{23}, \quad (3.1)$$

όπου με R^{ij} συμβολίζεται η δράση του R στον i και j παράγοντα του τριπλού τανυστικού γινομένου $V \otimes V \otimes V$. Λύσεις της κβαντικής εξίσωσης YB οδηγούν στην κατασκευή κβαντικών ομάδων κατά τρόπο ανάλογο με την κατασκευή ομάδων Poisson-Lie από τις λύσεις της κλασικής εξίσωσης YB. Επιπλέον, η κβαντική εξίσωση YB βρίσκεται στα θεμέλια πολλών διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών και της φυσικής, όπως στη θεωρία κόμβων και ομάδων πλεξούδων (braid groups), στη θεωρία της κβαντικής αντίστροφης σκέδασης, στη στατιστική μηχανική (όπου και πρωτοεμφανίστηκε) καθώς και στα κλασικά και κβαντικά ολοκληρώσιμα συστήματα όπως προαναφέραμε.

Το 1990 ο Drinfel'd [14] πρότεινε την μελέτη συνολοθεωρητικών λύσεων της κβαντικής εξίσωσης YB, δηλαδή λύσεων της (3.1) στην περίπτωση που ο διανυσματικός χώρος V αντικαθίσταται από ένα αυθαίρετο σύνολο $\mathcal{X}$ και το τανυστικό γινόμενο $V \otimes V$ από το καρτεσιανό $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Το πρόβλημα αυτό προσέλκυσε την προσοχή πολλών μαθηματικών με θαυμαστά αποτελέσματα. Πολλές λύσεις κατασκευάστηκαν σε διάφορα σύνολα, τις γενικότερες από

τις οποίες θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Παρ' όλη την γενικότητα αυτών των κατασκευών, η εξαγωγή συγκεκριμένων μη τετριμμένων παραδειγμάτων παραμένει δύσκολη.

3.1 Απεικονίσεις Yang-Baxter

Ο Veselov στο άρθρο [53] πρότεινε τον όρο *απεικονίσεις Yang-Baxter* (*Yang-Baxter maps*) για τις συνολο-θεωρητικές λύσεις της κβαντικής εξίσωσης YB, όρο που θα χρησιμοποιούμε στη συνέχεια της παρούσας εργασίας. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ένα σύνολο $\mathcal{X}$ και μια απεικόνιση $R : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$,

$$R : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Ορίζουμε επίσης τις απεικονίσεις $R_{ij} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ για $i, j = 1, 2, 3$ ($i \neq j$),

$$\begin{aligned} R^{12}(x, y, z) &= (u(x, y), v(x, y), z), & R^{21}(x, y, z) &= (v(y, x), u(y, x), z), \\ R^{13}(x, y, z) &= (u(x, z), y, v(x, z)), & R^{31}(x, y, z) &= (v(z, x), y, u(z, x)), \\ R^{23}(x, y, z) &= (x, u(y, z), v(y, z)), & R^{32}(x, y, z) &= (x, v(z, y), u(z, y)), \end{aligned}$$

για $x, y, z \in \mathcal{X}$. Η απεικόνιση R καλείται απεικόνιση YB αν ικανοποιεί την κβαντική εξίσωση Yang-Baxter: $R^{23} \circ R^{13} \circ R^{12} = R^{12} \circ R^{13} \circ R^{23}$. Αν επιπλέον

$$R^{21} \circ R^{12} = Id,$$

η R καλείται *αναστρέψιμη* (*reversible*) απεικόνιση YB.

Μία απεικόνιση Yang-Baxter R καλείται *τετράρητη* *quadrirational* ([4]) αν οι απεικονίσεις

$$u(\cdot, y) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad v(x, \cdot) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

είναι ένα προς ένα και επί ρητές απεικονίσεις. Δύο τετριμμένα παραδείγματα τετράρητων απεικονίσεων YB είναι η ταυτοτική απεικόνιση $R(x, y) = (x, y)$ και η ενελικτική απεικόνιση $R(x, y) = (y, x)$.

Στη θεωρία των ολοκληρώσιμων συστημάτων συχνότερα εμφανίζονται οι παραμετρικές απεικονίσεις YB ([54, 53]). *Παραμετρική απεικόνιση Yang-Baxter* καλούμε την απεικόνιση YB

$$R : ((x, \alpha), (y, \beta)) \mapsto ((u, \alpha), (v, \beta)) := (u(x, \alpha, y, \beta), v(x, \alpha, y, \beta)), \quad (3.2)$$

όπου $x, y \in \mathcal{X}$ και οι παράμετροι $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^n$, με $\mathbb{K}$ το σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Συνήθως κρατάμε τις παραμέτρους ξεχωριστά και συμβολίζουμε το $R(x, \alpha, y, \beta)$ με $R_{\alpha, \beta}(x, y)$. Με αυτόν τον συμβολισμό οι παραμετρικές απεικονίσεις YB είναι οι λύσεις της παραμετρικής εξίσωσης YB:

$$R_{\beta, \gamma}^{23} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ R_{\alpha, \beta}^{12} = R_{\alpha, \beta}^{12} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ R_{\beta, \gamma}^{23}, \quad (3.3)$$

Μια παραμετρική απεικόνιση $R_{\alpha, \beta} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $R_{\alpha, \beta}(x, y) = (u, v)$, μπορεί να αναπαρασταθεί στις πλευρές ενός τετράπλευρου όπως στο σχήμα 3.1.

Σχήμα 3.1: Απεικόνιση Yang-Baxter στις πλευρές ενός τετράπλευρου

Με την βοήθεια αυτής της αναπαράστασης μπορούμε να αναπαραστήσουμε την εξίσωση YB 3.3 στις έδρες ενός κύβου όπως στο σχήμα 3.2. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned} R_{\alpha, \beta}^{12}(x, y, z) &= (x', y', z), \\ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ R_{\alpha, \beta}^{12}(x, y, z) &= (x'', y', z'), \\ R_{\beta, \gamma}^{23} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ R_{\alpha, \beta}^{12}(x, y, z) &= (x'', y'', z''), \end{aligned}$$

στην κάτω, πίσω και αριστερή έδρα αντίστοιχα ενός κύβου όπως στην εικόνα (i) του σχήματος 3.2. Αντίστοιχα θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\begin{aligned} R_{\beta, \gamma}^{23}(x, y, z) &= (x, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ R_{\beta, \gamma}^{23}(x, y, z) &= (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\tilde{z}}), \\ R_{\alpha, \beta}^{12} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ R_{\beta, \gamma}^{23}(x, y, z) &= (\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{\tilde{z}}}). \end{aligned}$$

Αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν στην δεξιά, μπροστά και πάνω έδρα του κύβου όπως φαίνεται στην εικόνα (ii) του σχήματος 3.2.

Σχήμα 3.2: Κυβική αναπαράσταση της εξίσωσης Yang-Baxter

Όλες οι τιμές x , x' , x'' , $\tilde{x}$ και $\tilde{\tilde{x}}$ στις παράλληλες με τον άξονα x ακμές έχουν παράμετρο α ενώ οι τιμές στις παράλληλες με τους άξονες y, z έχουν παράμετρο β και γ αντίστοιχα. Η εξίσωση 3.3 υποδηλώνει ότι αν η απεικόνιση $R_{\alpha,\beta}$ είναι Yang-Baxter, τότε οποιαδήποτε “διαδρομή” από τις (i) και (ii) πάνω στον κύβο επιλέξουμε για να υπολογίσουμε τις τελικές τιμές (x'', y'', z'') και $(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{z}})$ στις αντίστοιχες ακμές, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο. Δηλαδή

$$(x'', y'', z'') = (\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{z}}).$$

3.2 Αλγεβρικές κατασκευές απεικονίσεων YB

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε συνοπτικά κάποιες γνωστές κατασκευές απεικονίσεων Yang-Baxter σε διάφορους χώρους. Η επιλογή των κατασκευών που παρουσιάζουμε έγινε με βάση την γενικότητά τους καθώς και με τη συνάφεια τους με τη δική μας προσέγγιση στο θέμα.

3.2.1 Απεικονίσεις YB σε ομάδες Poisson-Lie

Η σημαντικότερη κατασκευή απεικονίσεων YB σε πεπερασμένες ομάδες Poisson-Lie παρουσιάστηκε από τους Weinstein και Xu στο άρθρο [57].

Ξεκινάμε με την επόμενη πρόταση που δηλώνει ότι οι ομομορφισμοί ομάδων Poisson-Lie ανάγονται σε ομομορφισμούς των αντίστοιχων δι-αλγεβρών Lie και αντίστροφα.

Πρόταση 3.1. Θεωρούμε τις απλά συνεκτικές ομάδες *Poisson-Lie* G_1, G_2 με εφαπτόμενες δι-άλγεβρες *Lie* $\mathfrak{g}_1$ και $\mathfrak{g}_2$ αντίστοιχα. Αν $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$ είναι ομομορφισμός τότε η $\phi = d_e\Phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών *Lie*. Αντίστροφα αν $f : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ ομομορφισμός αλγεβρών *Lie*, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $F : G_1 \rightarrow G_2$, με $d_e F = f$.

Έστω $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα *Lie* και $r = \sum_i u_i \otimes v_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ μια λύση της κλασικής εξίσωσης Yang-Baxter. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$r_+ := \mathbf{r} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g},$$

όπως την ορίσαμε στην ενότητα 2.2.3, δηλαδή τέτοια ώστε

$$\langle \eta, \mathbf{r}\xi \rangle = r(\xi, \eta), \quad \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{g}^*,$$

καθώς και την δυϊκή της $-r_- := r_+^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^*)^* \equiv \mathfrak{g}$.¹

Η $\mathfrak{g}^*$ είναι ομάδα *Lie* με αγκύλη δ^* που ορίζεται από την 2.8 και οι $r_+, -r_-$ ομομορφισμοί αλγεβρών *Lie*. Αν G είναι η ομάδα *Poisson-Lie* της $\mathfrak{g}$ και G^* η δυϊκή της (ενότητα 2.2.4), τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1 οι ομομορφισμοί r_+ και $-r_-$ ανάγονται στους ομομορφισμούς

$$R_+ : G \rightarrow G^*, \quad R_- : G \rightarrow G^* \quad (3.4)$$

των αντίστοιχων ομάδων *Poisson-Lie*.

Ορισμός 3.1. Η ομάδα *Lie* G καλείται παραγοντοποιήσιμη (*factorizable*) αν η απεικόνιση $J : G^* \rightarrow G$, με

$$J(x) = R_+(x)(R_-(x))^{-1} \quad (3.5)$$

είναι ολικός διαφορομορφισμός.

Αν η G είναι παραγοντοποιήσιμη τότε κάθε στοιχείο της $g \in G$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$g = g_+ g_-^{-1}, \quad \text{όπου } g_+ = R_+(J^{-1}(g)) \text{ και } g_- = R_-(J^{-1}(g)).$$

Θεώρημα 3.2. (*Weinstein, Xu*) Η απεικόνιση $R : G \times G \rightarrow G \times G$

$$R(g, h) = (h_- g h_-^{-1}, (h_- g h_-^{-1})_+^{-1} h (h_- g h_-^{-1})_+) \quad (3.6)$$

είναι διαφορομορφισμός *Poisson* όταν η G είναι εφοδιασμένη με την δομή *Poisson* της G^* (χρησιμοποιώντας τον J (3.5) για να ταυτοποιήσουμε την G με την G^*), και ικανοποιεί την κβαντική εξίσωση Yang-Baxter.

¹ Η r_- μπορεί να οριστεί ως η γραμμική απεικόνιση $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ που προέρχεται από τον ταυισμό $r' = \sum_i v_i \otimes u_i$. Ο $-r'$ ορίζει την ίδια δομή δι-άλγεβρας στην $\mathfrak{g}$ με τον r .

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η απαίτηση η ομάδα Poisson-Lie G να είναι παραγοντοποιήσιμη είναι πολύ περιοριστική και αποτρέπει την εύκολη εξαγωγή παραδειγμάτων από το θεώρημα 3.2. Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στο άρθρο [19] όπου διαφαίνεται και η πολυπλοκότητά του.

3.2.2 Απεικονίσεις Yang-Baxter σε ομάδες

Οι Lu, Yan, Zhu στο άρθρο [30] γενίκευσαν την προηγούμενη κατασκευή στην περίπτωση που η G είναι οποιαδήποτε ομάδα. Η εργασία τους στηρίζεται παρακάτω πολύ γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.3. (Lu, Yan, Zhu) Έστω G μια ομάδα και ξ , η αριστερές και δεξιές δράσεις της G στον εαυτό της που συμβολίζονται με $\xi(u, v) = \xi^{(u)} v$ και $\eta(u, v) = u^{\eta(v)}$ αντίστοιχα. Αν οι δύο δράσεις ικανοποιούν τη συνθήκη συμβατότητας $uv = (\xi^{(u)}v)(u^{\eta(v)})$ τότε η απεικόνιση

$$R(u, v) = (u^{\eta(v)}, \xi^{(u)} v)$$

είναι απεικόνιση Yang-Baxter.

Η απόδειξη του θεωρήματος που παρουσιάζεται στο [30] χρησιμοποιεί μόνο την συνθήκη συμβατότητας $uv = (\xi^{(u)}v)(u^{\eta(v)})$ και τις ιδιότητες των δράσεων

$$\xi(u, \xi(v, w)) = \xi(uv, w), \quad \eta(\eta(u, v), w) = \eta(u, vw).$$

Ένα ζευγάρι υποομάδων G_+ , G_- της G καλείται μοναδική παραγοντοποίηση της G , αν για κάθε $g \in G$ υπάρχουν μοναδικά $g_+ \in G_+$ και $g_- \in G_-$ τέτοια ώστε $g = g_+g_-$. Συμβολίζουμε $G = G_+G_-$. Η μοναδική παραγοντοποίηση επιτρέπει τον ορισμό αριστερών και δεξιών δράσεων στη G , τέτοιων ώστε με εφαρμογή του θεωρήματος 3.3 να προκύπτει η απεικόνιση 3.6 ([30]).

Αν και αυτή η κατασκευή είναι πιο γενική από των Weinstein, Xu που παρουσιάσαμε προηγουμένως, η εξαγωγή συγκεκριμένων παραδειγμάτων παραμένει δύσκολη καθώς δεν υπάρχει γενικός τρόπος παραγοντοποίησης μιας ομάδας. Τα περισσότερα παραδείγματα που εξάγονται από αυτήν αφορούν πεπερασμένες ομάδες.

3.2.3 Οιονει-ομάδες, τριαδικά συστήματα και η δυναμική εξίσωση Yang-Baxter

Στις εργασίες [42, 43] ο Shibukawa μελέτησε τη δυναμική εξίσωση YB από την σκοπιά της θεωρίας κατηγοριών. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματά του που παρουσιάζουμε σε αυτήν την ενότητα, είναι η κατασκευή δυναμικών απεικονίσεων YB από τριαδικά συστήματα σε οιονει-ομάδες (quasigroups).

Οι δυναμικές απεικονίσεις YB αποτελούν μια γενίκευση των απεικονίσεων YB. Πιο συγκεκριμένα έστω H, X δύο μη κενά σύνολα και ϕ μία απεικόνιση από το $H \times X$ στο H . Μία απεικόνιση

$$R(\lambda) : X \times X \rightarrow X \times X, \quad \lambda \in H,$$

καλείται *δυναμική απεικόνιση Yang-Baxter (dynamical YB map)*, ως προς τα H, X και την ϕ , αν για κάθε $\lambda \in H$ η $R(\lambda)$ ικανοποιεί την *δυναμική εξίσωση Yang-Baxter*:

$$R_{23}(\lambda)R_{13}(\phi(\lambda, X^{(2)}))R_{12}(\lambda) = R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))R_{13}(\lambda)R_{23}(\phi(\lambda, X^{(1)})). \quad (3.7)$$

Οι απεικονίσεις $R_{12}(\lambda)$, $R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))$ και λοιπές, ορίζονται στο τριπλό καρτεσιανό γινόμενο $X \times X \times X$, ως εξής:

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda)(u, v, w) &= (R(\lambda)(u, v), w), \\ R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))(u, v, w) &= (R(\phi(\lambda, w))(u, v), w), \end{aligned}$$

για $u, v, w \in X$, και αντίστοιχα οι υπόλοιπες R_{13}, R_{23} .

Η παράμετρος λ καλείται *δυναμική παράμετρος* της απεικόνισης $R(\lambda)$ και δεν πρέπει να συγχέεται με τις παραμέτρους α, β των παραμετρικών απεικονίσεων YB που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Αν η $R(\lambda)$ είναι ανεξάρτητη από την δυναμική παράμετρο λ , τότε είναι απεικόνιση YB.

Ορισμός 3.2. Ένα μη κενό σύνολο L μαζί με μια διμελή πράξη $\cdot : L \times L \rightarrow L$ καλείται *αριστερή οιονει-ομάδα (left quasigroup)* και συμβολίζεται $(L, \cdot)$, αν για κάθε $u, w \in L$ υπάρχει μοναδικό $v \in L$ τέτοιο $u \cdot v = w$ (αντίστοιχα ορίζονται και οι δεξιές οιονει-ομάδες).

Από τον ορισμό γίνεται φανερό ότι σε κάθε αριστερή οιονει-ομάδα ορίζεται άλλη μία πράξη $\setminus : L \times L \rightarrow L$ που καλείται *αριστερή διαίρεση*, με $u \setminus w = v$ αν και μόνο αν $u \cdot v = w$.

Μία αριστερή οιονει-ομάδα $(L, \cdot)$ με την ιδιότητα για κάθε $v, w \in L$ να υπάρχει μοναδικό $u \in L$ τέτοιο $u \cdot v = w$ καλείται οιονει-ομάδα. Δηλαδή μια οιονει-ομάδα είναι μια αριστερή και

δεξιά οιονει-ομάδα. Αν επιπλέον υπάρχει $e \in L$ τέτοιο ώστε $u \cdot e = e \cdot u = u$, για κάθε $u \in G$ τότε καλείται βρόχος (*loop*) (συνήθως παραλείπουμε το σύμβολο $\cdot$ και συμβολίζουμε το $u \cdot v$ απλά με uv).

Οι οιονει-ομάδες και οι βρόχοι γενικεύουν την έννοια της ομάδας. Η βασικότερη διαφορά του βρόχου με την ομάδα είναι ότι η διμελής πράξη $(\cdot)$ δεν είναι προσεταιριστική. Φυσικά κάθε ομάδα είναι βρόχος. Για μια πληρέστερη περιγραφή των ιδιοτήτων των οιονει-ομάδων και των βρόχων παραπέμπουμε στο άρθρο [42].

Ορισμός 3.3. Ένα μη κενό σύνολο M εφοδιασμένο με μια τριμελή πράξη $m : M \times M \times M \rightarrow M$ καλείται τριαδικό σύστημα και συμβολίζεται (M, m) .

Έστω $(L, \cdot)$ μια αριστερή οιονει-ομάδα και (M, m) ένα τριαδικό σύστημα. Θεωρούμε μία $1 - 1$ και επί απεικόνιση $\pi : L \rightarrow M$, καθώς και την $R_\lambda : L \times L \rightarrow L \times L$ με

$$R_\lambda(x, y) = (\eta_\lambda(y)(x), \xi_\lambda(x)(y)), \quad (3.8)$$

όπου

$$\begin{aligned} \xi_\lambda(x)(y) &= \lambda \setminus \pi^{-1}(m(\pi(\lambda), \pi(\lambda x), \pi((\lambda x)y))), \\ \eta_\lambda(x)(y) &= (\lambda \xi_\lambda(y)(x)) \setminus ((\lambda y)x), \quad \lambda, x, y \in L \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.4. (*Shibukawa*) Η απεικόνιση R_λ (3.8) είναι δυναμική απεικόνιση YB ως προς τα L, L και την $\phi : L \times L \rightarrow L$ με $\phi(\lambda, x) = \lambda x$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} m(a, m(a, b, c), m(m(a, b, c), c, d)) &= m(a, b, m(b, c, d)) \text{ και} \\ m(m(a, b, m(b, c, d)), m(b, c, d), d) &= m(m(a, b, c), c, d) \end{aligned} \quad (3.9)$$

για κάθε $a, b, c, d \in M$.

Η κατασκευή αυτή γενικεύει την εργασία [30] που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, καθώς και κάποιες κατασκευές απεικονίσεων YB από ολοκληρώσιμες εξισώσεις σε τετράπλευρα που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

Κλείνοντας αυτήν την ενότητα πρέπει να αναφέρουμε την εργασία [16] όπου παρουσιάζονται οι αλγεβρικές ιδιότητες των απεικονίσεων YB, καθώς και τις εργασίες [54, 53] όπου μελετήθηκε η δυναμική τέτοιων απεικονίσεων και στις οποίες θα αναφερθούμε αναλυτικότερα σε άλλο κεφάλαιο.

3.3 Εξισώσεις 3-διάστατης συμβατότητας

Θεωρούμε εξισώσεις της μορφής

$$Q(f, f_1, f_2, f_{12}; \alpha, \beta) = 0, \quad (3.10)$$

όπου τα f, f_1, f_2, f_{12} ανήκουν σε ένα σύνολο $\mathcal{X}$ και οι παράμετροι $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μπορούμε να θεωρήσουμε τις τιμές f, f_1, f_2, f_{12} τοποθετημένες στις γωνίες ενός τετραπλεύρου και τις παραμέτρους α, β στις πλευρές του όπως στο σχήμα 3.3.

Σχήμα 3.3: Εξίσωση στις γωνίες τετραπλεύρου

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση 3.10 μπορεί να λυθεί ως προς κάθε ένα από τα f, f_1, f_2, f_{12} . Συνεπώς από τις τιμές σε οποιεσδήποτε τρεις γωνίες στο τετράπλευρο του σχήματος 3.3 μπορούμε να εξάγουμε την τιμή στην τέταρτη γωνία. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών στις γωνίες ενός κύβου τοποθετώντας τις αρχικές τιμές f, f_1, f_2, f_3 στις τέσσερις γωνίες του κύβου (μαύρα σημεία) όπως στο σχήμα 3.4.

Σχήμα 3.4: 3-διάστατη συνθήκη συμβατότητας

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.10 διαδοχικά στις έδρες του κύβου μπορούμε να εξάγουμε την τιμή f_{123} με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Αν εξάγουμε και τις τρεις φορές την ίδια τιμή

συναρτήσει των αρχικών συνθηκών τότε λέμε ότι η εξίσωση 3.10 ικανοποιεί την *τριδιαστάτη συνθήκη συμβατότητας 3-dimensional consistency property*.

Στο άρθρο [3] οι Adler, Bobenko και Suris ταξινόμησαν τις εξισώσεις που ικανοποιούν την 3-δ συνθήκη συμβατότητας καθώς και άλλες τρεις ιδιότητες στην περίπτωση $\mathcal{X} = \mathbb{C}$. Πιο συγκεκριμένα θεώρησαν εξισώσεις της μορφής 3.10 με $f, f_1, f_2, f_{12}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1) Η συνάρτηση $Q(f, f_1, f_2, f_{12}; \alpha, \beta)$ να είναι πολώνυμο βαθμού ένα ως προς κάθε παράγοντα f, f_1, f_2, f_{12} (αφινικά γραμμική). Δηλαδή

$$Q(f, f_1, f_2, f_{12}; \alpha, \beta) = a_1 f f_1 f_2 f_{12} + a_2 f f_1 f_2 + a_3 f f_1 f_{12} + \dots + a_{16}.$$

2) Η συνάρτηση $Q(f, f_1, f_2, f_{12}; \alpha, \beta) = 0$ να ικανοποιεί την συμμετρική ιδιότητα

$$Q(f, f_1, f_2, f_{12}; \alpha, \beta) = \varepsilon Q(f, f_2, f_1, f_{12}; \alpha, \beta) = \sigma Q(f_1, f, f_{12}, f_2; \alpha, \beta)$$

με $\varepsilon, \sigma = \pm 1$.

3) Η τελική τιμή f_{123} να είναι ανεξάρτητη από την αρχική f (με οποιονδήποτε τρόπο κι αν την εξάγουμε από τον κύβο). Αυτή η ιδιότητα καλείται *ιδιότητα τετραέδρου (tetrahedron property)*.

Αποδείχτηκε ότι όλες οι εξισώσεις της μορφής $Q(f, f_1, f_2, f_{12}; \alpha, \beta) = 0$ που ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες και την 3-δ συνθήκη συμβατότητας ανάγονται, με μετασχηματισμό Möbius των ανεξάρτητων μεταβλητών και σημειακούς μετασχηματισμούς των παραμέτρων, σε εφτά διαφορετικές περιπτώσεις (δύο λίστες εξισώσεων Q, H με τέσσερις και τρεις εξισώσεις αντίστοιχα [3]).

Στην περίπτωση $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ οι εξισώσεις που ικανοποιούν την 3-δ συνθήκη συμβατότητας επιδέχονται αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας ([10]), από την οποία εξάγονται αρκετά ολοκληρώματα κίνησης που αποδεικνύουν την ολοκληρωσιμότητα (κατά Arnold-Liouville) των αντίστοιχων διακριτών συστημάτων. Αυτός είναι ο λόγος που πολλοί μαθηματικοί θεωρούν την συνθήκη 3-δ συμβατότητας ισοδύναμη της ολοκληρωσιμότητας. Πρέπει όμως να επισημάνουμε ότι μια τέτοια διαδικασία γενικότερα σε περισσότερες διαστάσεις δεν υπάρχει.

3.3.1 Από εξισώσεις 3-δ συμβατότητας σε απεικονίσεις YB

Είναι φανερό από την ανάλυση που έγινε ότι η εξίσωση Yang-Baxter μπορεί να χαρακτηριστεί ως 3-διάστατη συνθήκη συμβατότητας στην περίπτωση που τα πεδία είναι εφαρμοσμένα στις πλευρές ενός τετραπλεύρου αντί στις γωνίες. Είναι λοιπόν εύλογο το ερώτημα αν μπορούν να εξαχθούν απεικονίσεις YB από τέτοιες εξισώσεις.

Ένα κλασικό παράδειγμα εξίσωσης που ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας είναι η διακριτή KdV εξίσωση [32]

$$(f_{12} - f)(f_1 - f_2) - \alpha + \beta = 0 \quad (3.11)$$

Θέτοντας τις διαφορές των τιμών στις γωνίες του τετραπλεύρου ως τις τιμές στις πλευρές, δηλαδή

$$x = f_1 - f, \quad y = f_{12} - f_1, \quad u = f_{12} - f_2, \quad v = f_2 - f,$$

έχουμε

$$x + y = u + v \quad \text{και} \quad (x + y)(x - v) = \alpha - \beta.$$

Λύνοντας ως προς u, v τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε

$$u = y + \frac{\alpha - \beta}{x + y}, \quad v = x - \frac{\alpha - \beta}{x + y}. \quad (3.12)$$

Αν αντί για τις διαφορές, θεωρήσουμε τα γινόμενα:

$$x' = f_1 f, \quad y' = f_{12} f_1, \quad u' = f_{12} f_2, \quad v' = f_2 f,$$

τότε έχουμε

$$y' + v' - x' - u' = \alpha - \beta, \quad x' u' = y' v'$$

και λύνοντας ως προς u', v'

$$u' = y'(1 + \frac{\alpha - \beta}{x' - y'}), \quad v' = x'(1 + \frac{\alpha - \beta}{x' - y'}). \quad (3.13)$$

Η 3-δ συνθήκη συμβατότητας της 3.11 ισοδυναμεί με την εξίσωση YB των απεικονίσεων $R_{\alpha, \beta}(x, y) = (u, v)$ και $R'_{\alpha, \beta}(x', y') = (u', v')$ (3.12, 3.13 αντίστοιχα). Η απεικόνιση 3.12 πρωτοεμφανίστηκε στο άρθρο [2] και καλείται απεικόνιση Adler.

Είδαμε λοιπόν ότι από την διακριτή εξίσωση KdV εξάγονται δύο απεικονίσεις YB. Φυσικά αυτό δεν σημαίνει ότι οποιαδήποτε εξίσωση 3-δ συμβατότητας, θεωρώντας τις αντίστοιχες διαφορές ή τα γινόμενα στις πλευρές του τετραπλεύρου, ανάγεται σε απεικόνιση YB. Στις

εργασίες [35, 36] παρουσιάζεται η κατασκευή απεικονίσεων YB από την ανάλυση των συμμετριών τέτοιων εξισώσεων.

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως η κατασκευή απεικονίσεων YB από 3-δ συμβατές εξισώσεις ανάγεται σε μια ειδική περίπτωση της κατασκευής Shibukawa που παρουσιάσαμε στην ενότητα 3.2.3. Πρώτα θα δώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της 3-δ συνθήκης συμβατότητας ξεκινώντας από ένα διαφορετικό πρόβλημα αρχικών τιμών πάνω στον κύβο.

Θεωρούμε την παραμετρική εξίσωση $Q(a, b, c, w; \alpha, \beta) = 0$ και υποθέτουμε ότι λύνεται ως προς w με

$$w = m_{\alpha, \beta}(a, b, c). \quad (3.14)$$

Σχήμα 3.5: 3-διάστατη συνθήκη συμβατότητας Shibukawa

Θεωρούμε τις αρχικές τιμές a, b, c, d τοποθετημένες στις γωνίες του κύβου όπως στο σχήμα 3.5. Οι τιμές w_1 και w_2 καθορίζονται μοναδικά από τις αρχικές συνθήκες και την 3.14:

$$w_1 = m_{\alpha, \beta}(a, b, c), \quad w_2 = m_{\beta, \gamma}(b, c, d).$$

Οι τιμές όμως w_3 και w_4 μπορούν να εξαχθούν από τον κύβο με δύο διαφορετικούς τρόπους. Συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} w_3 &= m_{\beta, \gamma}(a, w_1, m_{\alpha, \gamma}(w_1, c, d)) \quad \text{ή} \quad w_3 = m_{\alpha, \gamma}(a, b, w_2), \\ w_4 &= m_{\alpha, \beta}(m_{\alpha, \gamma}(a, b, w_2), w_2, d) \quad \text{ή} \quad w_4 = m_{\alpha, \gamma}(w_1, c, d). \end{aligned}$$

Θα λέμε ότι η αρχική εξίσωση $Q(a, b, c, w; \alpha, \beta)$ ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας

ως προς την $w = m_{\alpha,\beta}(x, y, z)$, αν οι τελικές τιμές σε κάθε ζευγάρι συμπίπτουν, δηλαδή αν

$$\begin{aligned} m_{\beta,\gamma}(a, m_{\alpha,\beta}(a, b, c), m_{\alpha,\gamma}(m_{\alpha,\beta}(a, b, c), c, d)) &= m_{\alpha,\gamma}(a, b, m_{\beta,\gamma}(b, c, d)), \\ m_{\alpha,\beta}(m_{\alpha,\gamma}(a, b, m_{\beta,\gamma}(b, c, d)), m_{\beta,\gamma}(b, c, d), d) &= m_{\alpha,\gamma}(m_{\alpha,\beta}(a, b, c), c, d). \end{aligned}$$

Οι τελευταίες εξισώσεις είναι ακριβώς η συνθήκη του θεωρήματος 3.4 με παραμέτρους.

Αν αρχικά θεωρήσουμε την μη παραμετρική εξίσωση $Q(a, b, c, w) = 0$ με $w = m(a, b, c)$ τότε καταλήγουμε ακριβώς στις εξισώσεις 3.9. Άρα από κάθε εξίσωση που ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας μπορούμε να εξάγουμε την αντίστοιχη δυναμική απεικόνιση YB 3.8. Επαναδιατυπώνουμε λοιπόν το θεώρημα 3.4.

Πρόταση 3.5. Θεωρούμε μια αριστερή οιονει-ομάδα $(L, \cdot)$, ένα σύνολο $\mathcal{X}$ και μία $1 - 1$ και επί απεικόνιση $\pi : L \rightarrow \mathcal{X}$. Έστω επίσης $Q(a, b, c, w) = 0$ μία εξίσωση που λύνεται ως προς w με $w = m(a, b, c) \in \mathcal{X}$, για κάθε $a, b, c \in \mathcal{X}$. Η απεικόνιση $R_\lambda : L \times L \rightarrow L \times L$ (3.8) είναι δυναμική απεικόνιση YB ως προς τα L, L και την $\phi : L \times L \rightarrow L$ με $\phi(\lambda, x) = \lambda x$, αν και μόνο αν η $Q(a, b, c, w) = 0$ ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας ως προς την $w = m(a, b, c)$.

Αντίστοιχα από την παραμετρική εξίσωση $Q(a, b, c, w; \alpha, \beta) = 0$ που ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας εξάγουμε την παραμετρική δυναμική εξίσωση YB $R_\lambda(\alpha, \beta)$.

Στην συνέχεια δίνουμε ένα χρήσιμο πόρισμα της τελευταίας πρότασης που επιτρέπει την κατασκευή (μη δυναμικών) απεικονίσεων YB σε ομάδες από 3-δ συμβατές εξισώσεις.

Πόρισμα 3.6. Έστω G μία ομάδα και $Q(a, b, c, w) = 0$ μία εξίσωση που ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας ως προς την $w = m(a, b, c)$, με $m(a, b, c) \in G$ για κάθε $a, b, c \in G$. Τότε η απεικόνιση $R : G \times G \rightarrow G \times G$ με

$$R(x, y) = ((m(e, x, xy))^{-1}xy, m(e, x, xy)), \quad (3.15)$$

όπου e το ταυτοτικό στοιχείο της G , είναι απεικόνιση Yang-Baxter.

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.5 για $\pi = Id : G \rightarrow G$ και για $\lambda = e$ εξάγουμε το συμπέρασμα (στην περίπτωση που μία οιονει-ομάδα G είναι ομάδα τότε $g_1 \setminus g_2 = g_1^{-1}g_2$, για κάθε $g_1, g_2 \in G$). $\square$

Αντίστοιχα σε διανυσματικούς χώρους, θεωρώντας τους ομάδες με πράξη την πρόσθεση, καταλήγουμε στο εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.7. Έστω V διανυσματικός χώρος και $Q(a, b, c, w) = 0$, $a, b, c, w \in V$, μία εξίσωση που ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας ως προς την $w = m(a, b, c)$. Η απεικόνιση $R : V \times V \rightarrow V \times V$ με

$$R(x, y) = ((x + y - m(0, x, x + y)), m(0, x, x + y)), \quad (3.16)$$

είναι απεικόνιση YB.

Αν η εξίσωση Q είναι παραμετρική, η απεικόνιση R είναι παραμετρική απεικόνιση YB.

Παράδειγμα 3.8. Η διακριτή εξίσωση KdV

$$(c - a)(b - w) = \alpha - \beta, \quad a, b, c, w, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας ως προς

$$w = m_{\alpha, \beta}(a, b, c) = b - \frac{\alpha - \beta}{c - a}$$

και δίνει την παραμετρική απεικόνιση YB:

$$\begin{aligned} R_{\alpha, \beta}(x, y) &= ((x + y - m_{\alpha, \beta}(0, x, x + y)), m_{\alpha, \beta}(0, x, x + y)) \\ &= (y + \frac{\alpha - \beta}{x + y}, x - \frac{\alpha - \beta}{x + y}) \end{aligned}$$

(απεικόνιση Adler).

Παράδειγμα 3.9. Η εξίσωση

$$\alpha(a - w)(b - c) - \beta(a - b)(w - c) = 0, \quad a, b, c, w, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

(εξίσωση Q_1 της λίστας Q των Adler, Bobenko, Suris [3]) ικανοποιεί την 3-δ συνθήκη συμβατότητας ως προς

$$w = m_{\alpha, \beta}(a, b, c) = \frac{\alpha a(b - c) + \beta c(a - b)}{\alpha(b - c) + \beta(a - b)}.$$

Η αντίστοιχη παραμετρική απεικόνιση YB από την 3.16 είναι η

$$R_{\alpha, \beta}(x, y) = (\frac{\alpha y(x + y)}{\beta x + \alpha y}, \frac{\beta x(x + y)}{\beta x + \alpha y}).$$

3.4 Ταξινόμηση ABS

Ένα από τα σημαντικότερα επιτεύγματα της θεωρίας απεικονίσεων YB αποτελεί η ταξινόμηση των τετράρητων απεικονίσεων από τους Adler, Bobenko, Suris (ABS) στην περίπτωση που το σύνολο $\mathcal{X}$ είναι η προβολική ευθεία $\mathbb{CP}^1$. Θυμίζουμε ότι μια απεικόνιση $R : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ καλείται τετράρητη αν οι απεικονίσεις

$$u(\cdot, y) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad v(x, \cdot) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

είναι ένα προς ένα και επί ρητές απεικονίσεις. Στην εργασία [4] οι ABS απέδειξαν ότι κάθε τετράρητη παραμετρική απεικόνιση από το $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ στο $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ με παραμέτρους $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ισοδυναμεί, ως προς μετασχηματισμούς Möbius, με μία από τις παρακάτω απεικονίσεις

$$\begin{aligned} (F_I) \quad & u = \alpha y P, \quad v = \beta x P, \quad P = \frac{(1 - \beta)x + \beta - \alpha + (\alpha - 1)y}{\beta(1 - \alpha)x + (\alpha - \beta)xy + \alpha(\beta - 1)y} \\ (F_{II}) \quad & u = \frac{y}{\alpha} P, \quad v = \frac{x}{\beta} P, \quad P = \frac{\alpha x - \beta y + \beta - \alpha}{x - y} \\ (F_{III}) \quad & u = \frac{y}{\alpha} P, \quad v = \frac{x}{\beta} P, \quad P = \frac{\alpha x - \beta y}{x - y} \\ (F_{IV}) \quad & u = y P, \quad v = x P, \quad P = 1 + \frac{\beta - \alpha}{x - y} \\ (F_V) \quad & u = y + P, \quad v = x + P, \quad P = \frac{\alpha - \beta}{x - y}. \end{aligned}$$

Οι πέντε απεικονίσεις της παραπάνω λίστας είναι απεικονίσεις YB και αντιστοιχούν σε πέντε περιπτώσεις τομών δύο κωνικών τομών ([4]). Ωστόσο πρέπει να παρατηρήσουμε ότι γενικά ένας μετασχηματισμός Möbius δεν διατηρεί την εξίσωση UB, δηλαδή ο μετασχηματισμός μιας απεικόνισης YB δεν είναι απαραίτητα απεικόνιση YB. Μια πληρέστερη ταξινόμηση παρουσιάζεται στο άρθρο [37] και στηρίζεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.10. Έστω $R_{\alpha, \beta} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ μια παραμετρική απεικόνιση YB, με $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και $\varphi_\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ μια 1-1 και επί απεικόνιση, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}^n$. Τότε η απεικόνιση

$$\tilde{R}_{\alpha, \beta} = (\varphi_\alpha^{-1} \times \varphi_\beta^{-1}) R_{\alpha, \beta} (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta)$$

είναι παραμετρική απεικόνιση YB.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{\beta,\gamma}^{23} \tilde{R}_{\alpha,\gamma}^{13} \tilde{R}_{\alpha,\beta}^{12} &= (Id \times \varphi_\beta^{-1} \times \varphi_\gamma^{-1}) R_{\beta,\gamma}^{23} (Id \times \varphi_\beta \times \varphi_\gamma) \\
 &\quad (\varphi_\alpha^{-1} \times Id \times \varphi_\gamma^{-1}) R_{\alpha,\gamma}^{13} (\varphi_\alpha \times Id \times \varphi_\gamma) \\
 &\quad (\varphi_\alpha^{-1} \times \varphi_\beta^{-1} \times Id) R_{\alpha,\beta}^{23} (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta \times Id) \\
 &= (\varphi_\alpha^{-1} \times \varphi_\beta^{-1} \times \varphi_\gamma^{-1}) R_{\beta,\gamma}^{23} R_{\alpha,\gamma}^{13} R_{\alpha,\beta}^{12} (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta \times \varphi_\gamma).
 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα

$$\tilde{R}_{\alpha,\beta}^{12} \tilde{R}_{\alpha,\gamma}^{13} \tilde{R}_{\beta,\gamma}^{23} = (\varphi_\alpha^{-1} \times \varphi_\beta^{-1} \times \varphi_\gamma^{-1}) R_{\alpha,\beta}^{12} R_{\alpha,\gamma}^{13} R_{\beta,\gamma}^{23} (\varphi_\alpha \times \varphi_\beta \times \varphi_\gamma)$$

και επειδή $R_{\beta,\gamma}^{23} R_{\alpha,\gamma}^{13} R_{\alpha,\beta}^{12} = R_{\alpha,\beta}^{12} R_{\alpha,\gamma}^{13} R_{\beta,\gamma}^{23}$, τελικά έχουμε

$$\tilde{R}_{\beta,\gamma}^{23} \tilde{R}_{\alpha,\gamma}^{13} \tilde{R}_{\alpha,\beta}^{12} = \tilde{R}_{\alpha,\beta}^{12} \tilde{R}_{\alpha,\gamma}^{13} \tilde{R}_{\beta,\gamma}^{23}$$

□

Οι απεικονίσεις Yang-Baxter $R_{\alpha,\beta}$, $\tilde{R}_{\alpha,\beta}$ της πρότασης 3.10 καλούνται *ισοδύναμες*. Το επόμενο θεώρημα ([37]) δίνει την ταξινόμηση τετράρητων αναστρέψιμων απεικονίσεων YB ως προς την ισοδυναμία.

Θεώρημα 3.11. Κάθε αναστρέψιμη τετράρητη απεικόνιση YB $R_{\alpha,\beta} : (x, y) \mapsto (u, v)$, με $x, y \in \mathbb{CP}^1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, είναι ισοδύναμη με αναπαραμέτρηση με μία από τις πέντε απεικονίσεις $F_I, \dots, F_V$ των ABS ή με μία από τις παρακάτω

$$\begin{aligned}
 (H_I) \quad u &= yQ^{-1}, \quad v = xQ, \quad Q = \frac{(1-\beta)xy + (\beta-\alpha)y + \beta(\alpha-1)}{(1-\alpha)xy + (\alpha-\beta)x + \alpha(\beta-1)} \\
 (H_{II}) \quad u &= yQ^{-1}, \quad v = xQ, \quad Q = \frac{\alpha + (\beta-\alpha)y + \beta xy}{\beta + (\alpha-\beta)x - \alpha xy} \\
 (H_{III}) \quad u &= \frac{y}{\alpha}Q, \quad v = \frac{x}{\beta}Q, \quad Q = \frac{\alpha x + \beta y}{x + y} \\
 (H_{IV}) \quad u &= yQ^{-1}, \quad v = xQ, \quad Q = \frac{\alpha xy + 1}{\beta xy + 1} \\
 (H_V) \quad u &= y - Q, \quad v = x - Q, \quad Q = \frac{\alpha - \beta}{x + y}.
 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4

Poisson και συμπλεκτικές απεικονίσεις YB με διωνυμικούς πίνακες Lax

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε αρκετές κατασκευές απεικονίσεων YB. Στον πυρήνα των αλγεβρικών κατασκευών της ενότητας 3.2 βρίσκεται η έννοια της μοναδικής παραγοντοποίησης. Θα την ξανασυναντήσουμε εδώ ως αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας ή αναπαράσταση Lax μιας απεικόνισης YB. Ουσιαστικά πρόκειται για αναπαραγοντοποίηση ενός γινομένου δύο παραμετρικών πινάκων συναρτήσεων. Με αυτόν τον τρόπο (υπό κάποιες προϋποθέσεις) η κατασκευή απεικονίσεων YB ανάγεται στην κατασκευή πινάκων Lax.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε την κατασκευή πολυδιάστατων παραμετρικών απεικονίσεων YB με πίνακες Lax τα συμπλεκτικά φύλλα πολυωνυμικών πινάκων πρώτου βαθμού, εφοδιασμένων με την αγκύλη Sklyanin. Αυτές οι απεικονίσεις είναι τετράρητες και συμπλεκτικές ως προς την αντίστοιχη ανηγμένη συμπλεκτική μορφή. Επιπλέον, ταξινομούνται ως προς την ισοδυναμία απεικονίσεων YB, με βάση τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολυωνυμικού πίνακα. Από όρια των παραπάνω απεικονίσεων εξάγονται περεταίρω εκφυλισμένες (μη τετράρητες) απεικονίσεις YB. Τα ερευνητικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου αποτελούν το περιεχόμενο των εργασιών [25, 26].

4.1 Πίνακες Lax απεικονίσεων Yang-Baxter

Θεωρούμε την παραμετρική απεικόνιση Yang-Baxter

$$R_{\alpha,\beta} : (x, y) \mapsto (u, v), \quad (4.1)$$

όπου τα x, y ανήκουν σε ένα σύνολο $\mathcal{X}$, $u \equiv u_{\alpha,\beta}(x, y)$, $v \equiv v_{\alpha,\beta}(x, y) \in \mathcal{X}$ και οι παράμετροι $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$).

Σύμφωνα με το [48] ένας πίνακας Lax για την απεικόνιση YB 4.1 είναι ένας πίνακας $L(x, \alpha, \zeta)$ που εξαρτάται από το σημείο x , την παράμετρο α και την “φασματική παράμετρο” ζ (συνήθως τον συμβολίζουμε απλά με $L(x; \alpha)$), τέτοιος ώστε

$$L(u; \alpha)L(v; \beta) = L(y; \beta)L(x; \alpha), \quad (4.2)$$

για κάθε $\zeta \in \mathbb{K}$.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο ορισμός αυτός δεν προϋποθέτει ότι η εξίσωση 5.2 λύνεται μοναδικά ως προς u και v . Αυτή η παρατήρηση μας οδήγησε στον ορισμό του ισχυρού πίνακα Lax. Δηλαδή αν η εξίσωση 5.2 είναι ισοδύναμη με $(u, v) = R_{\alpha,\beta}(x, y)$ τότε θα καλούμε τον $L(x; \alpha)$ ισχυρό πίνακα Lax της απεικόνισης YB 4.1.

Παράδειγμα 4.1. Η απεικόνιση Adler που είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο

$$R_{\alpha,\beta}(x, y) = \left(y + \frac{\alpha - \beta}{x + y}, x - \frac{\alpha - \beta}{x + y} \right),$$

προκύπτει από την μοναδική λύση ως προς u, v της εξίσωσης 5.2 με

$$L(x; \alpha) = \begin{pmatrix} x & x^2 - \alpha - \zeta \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

Άρα ο πίνακας $L(x; \alpha)$ είναι ισχυρός πίνακας Lax για την $R_{\alpha,\beta}$.

Στην εργασία [39] κατασκευάστηκε η συγκεκριμένη αναπαράσταση Lax της απεικόνισης Adler από Χαμιλτώνια αναγωγή της ομάδας βρόχου $LGL(2, \mathbb{R})$ εφοδιασμένη με την αγκύλη Sklyanin.

Γενικά οι λύσεις της εξίσωσης 5.2 δεν ορίζουν απαραίτητα απεικονίσεις YB. Η επόμενη πρόταση μας δίνει μια ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει αυτό.

Πρόταση 4.2. Έστω $u = u_{\alpha,\beta}(x, y)$, $v = v_{\alpha,\beta}(x, y)$ και $A(x; \alpha)$ ένας πίνακας που εξαρτάται από το σημείο $x \in \mathcal{X}$, την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{K}^n$ και την φασματική παράμετρο ζ , τέτοιος ώστε $A(u; \alpha)A(v; \beta) = A(y; \beta)A(x; \alpha)$. Αν η εξίσωση

$$A(\hat{x}; \alpha)A(\hat{y}; \beta)A(\hat{z}; \gamma) = A(x; \alpha)A(y; \beta)A(z; \gamma) \quad (4.3)$$

ισοδυναμεί με $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$ και $\hat{z} = z$, τότε η απεικόνιση $R_{\alpha,\beta}(x, y) = (u, v)$ είναι παραμετρική απεικόνιση YB με πίνακα Lax $A(x; \alpha)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $R_{\alpha,\beta} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, με $R_{\alpha,\beta}(x, y) = (u, v)$, και τον πίνακα $A(x; \alpha)$ με

$$A(u; \alpha)A(v; \beta) = A(y; \beta)A(x; \alpha).$$

Συμβολίζουμε με $x', x'', y', y'', z', z'', \tilde{x}, \dots, \tilde{z}$ τις τιμές στις αντίστοιχες ακμές του κύβου του σχήματος 3.2 που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R_{\alpha,\beta}^{12}(x, y, z) &= (x', y', z), \\ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ R_{\alpha,\beta}^{12}(x, y, z) &= (x'', y', z'), \\ R_{\beta,\gamma}^{23} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ R_{\alpha,\beta}^{12}(x, y, z) &= (x'', y'', z''), \\ R_{\beta,\gamma}^{23}(x, y, z) &= (x, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ R_{\beta,\gamma}^{23}(x, y, z) &= (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ R_{\alpha,\beta}^{12} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ R_{\beta,\gamma}^{23}(x, y, z) &= (\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{z}}), \end{aligned}$$

για κάθε $x, y, z \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Από την κάτω, πίσω και αριστερή έδρα του κύβου (σχήμα 3.2 (i)) έχουμε $A(y; \beta)A(x; \alpha) = A(x'; \alpha)A(y'; \beta)$ άρα

$$\begin{aligned} A(z; \gamma)A(y; \beta)A(x; \alpha) &= (A(z; \gamma)A(x'; \alpha))A(y'; \beta) \\ &= A(x''; \alpha)(A(z'; \gamma)A(y'; \beta)) = A(x''; \alpha)A(y''; \beta)A(z''; \gamma). \end{aligned}$$

Ανάλογα, από την δεξιά, μπροστά και πάνω έδρα του κύβου (σχήμα 3.2 (ii)) παίρνουμε $A(z; \gamma)A(y; \beta)A(x; \alpha) = A(\tilde{\tilde{x}}; \alpha)A(\tilde{\tilde{y}}; \beta)A(\tilde{\tilde{z}}; \gamma)$. Συνεπώς

$$A(x''; \alpha)A(y''; \beta)A(z''; \gamma) = A(\tilde{\tilde{x}}; \alpha)A(\tilde{\tilde{y}}; \beta)A(\tilde{\tilde{z}}; \gamma)$$

που ισοδυναμεί (από τις υποθέσεις της πρότασης) με $x'' = \tilde{\tilde{x}}$, $y'' = \tilde{\tilde{y}}$, $z'' = \tilde{\tilde{z}}$, δηλαδή

$$R_{\beta,\gamma}^{23} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ R_{\alpha,\beta}^{12} = R_{\alpha,\beta}^{12} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ R_{\beta,\gamma}^{23}.$$

□

4.2 Αναπαραγοντοποίηση διωνυμικών πινάκων

Είναι φυσικό η μελέτη φασματικών πινάκων Lax να ξεκινήσει με την μελέτη πολυωνυμικών πινάκων, ως προς την φασματική παράμετρο, και ειδικότερα με 2×2 πολυωνυμικών πινάκων πρώτου βαθμού. Αρχίζουμε δίνοντας τους απαραίτητους ορισμούς και συμβολισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε σε όλο το κεφάλαιο.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{L}^2$ των 2×2 πολυωνυμικών πινάκων της μορφής $L(\zeta) = X - \zeta A$, $\zeta, x_{ij}, a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), όπου x_{ij}, a_{ij} , για $i, j = 1, 2$, συμβολίζουν τα ij στοιχεία των πινάκων X και A αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με p_X^A το πολυώνυμο

$$p_X^A(\zeta) := \det(X - \zeta A) = f_2(X; A)\zeta^2 - f_1(X; A)\zeta + f_0(X; A), \quad (4.4)$$

όπου

$$\begin{aligned} f_0(X; A) &= \det X, \\ f_1(X; A) &= a_{22}x_{11} - a_{21}x_{12} - a_{12}x_{21} + a_{11}x_{22}, \\ f_2(X; A) &= \det A, \end{aligned}$$

και το καλούμε *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του $L(\zeta)$. Τέλος για κάθε ζευγάρι πινάκων A, B , θεωρούμε τις συναρτήσεις πινάκων $\Pi_{A,B}^1, \Pi_{A,B}^2$, με

$$\Pi_{A,B}^1(X, Y) = f_2(X; A)(YA + BX) - f_1(X; A)AB, \quad (4.5)$$

$$\Pi_{A,B}^2(X, Y) = f_2(X; A)YX - f_0(X; A)AB. \quad (4.6)$$

Με στόχο να κατασκευάσουμε πίνακες Lax στον χώρο $\mathcal{L}^2$, αναζητούμε γενικές λύσεις της εξίσωσης

$$(U - \zeta A)(V - \zeta B) = (Y - \zeta B)(X - \zeta A)$$

ως προς U, V . Για παράδειγμα, όταν $A = B$ η τελευταία εξίσωση επιδέχεται την τετριμμένη λύση $U = Y$ και $V = X$. Μια πιο ενδιαφέρουσα λύση δίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.3. (αναπαραγοντοποίηση) Έστω A, B αντιστρέψιμοι 2×2 πίνακες που αντιμετατίθενται μεταξύ τους ($AB = BA$) και $X, Y, U, V \in \text{Mat}(2 \times 2)$ με $\det \Pi_{A,B}^1(X, Y) \neq 0$. Τότε

$$(U - \zeta A)(V - \zeta B) = (Y - \zeta B)(X - \zeta A), \quad (4.7)$$

και $p_U^A(\zeta) = p_X^A(\zeta)$ (ισοδύναμα $p_V^B(\zeta) = p_Y^B(\zeta)$), αν και μόνο αν

$$U = \Pi_{A,B}^2(X, Y)(\Pi_{A,B}^1(X, Y))^{-1}A, \quad (4.8)$$

$$V = A^{-1}(YA + BX - UB). \quad (4.9)$$

Απόδειξη. Η εξίσωση (4.7) ισοδυναμεί με το σύστημα :

$$UV = YX, \quad UB + AV = YA + BX \quad (4.10)$$

πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την δεύτερη εξίσωση με UA^{-1} και αντικαθιστώντας από την πρώτη, παίρνουμε

$$(UA^{-1})^2 AB = UA^{-1}(YA + BX) - YX. \quad (4.11)$$

Η εξίσωση $p_U^A(\zeta) = p_X^A(\zeta)$ ισοδυναμεί με $f_i(U; A) = f_i(X; A)$, $i = 0, 1, 2$, άρα από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε

$$f_2(X; A)(UA^{-1})^2 - f_1(X; A)UA^{-1} + f_0(X; A)I = 0. \quad (4.12)$$

Λύνοντας τις 4.11 και 4.12 ως προς U παίρνουμε

$$U = (f_2(X; A)YX - f_0(X; A)AB)(f_2(X; A)(YA + BX) - f_1(X; A)AB)^{-1}A$$

και από την δεύτερη εξίσωση του 4.10, $V = A^{-1}(YA + BX - UB)$.

Από την άλλη, ας υποθέσουμε ότι οι U, V δίνονται από τις 4.8 και 4.9 αντίστοιχα. Εκτελώντας κάποιους υπολογισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} \Pi_{A,B}^2(X, Y) &= \Pi_{A,B}^2(X, Y) + \Pi_{A,B}^1(X, Y)A^{-1}X - \Pi_{A,B}^1(X, Y)A^{-1}X = \\ &= \Pi_{A,B}^1(X, Y)A^{-1}X - BA(f_2(X; A)(A^{-1}X)^2 - f_1(X; A)A^{-1}X + f_0(X; A)I) \\ &= \Pi_{A,B}^1(X, Y)A^{-1}X - BA p_X^A(A^{-1}X) \end{aligned}$$

Το θεώρημα Cayley-Hamilton δηλώνει ότι $p_X^A(A^{-1}X) = 0$. Άρα

$$\Pi_{A,B}^2(X, Y) = \Pi_{A,B}^1(X, Y)A^{-1}X \quad (4.13)$$

και από την 4.8 έχουμε

$$UA^{-1} = \Pi_{A,B}^1(X, Y)A^{-1}X(\Pi_{A,B}^1(X, Y))^{-1} \quad (4.14)$$

συνεπώς $f_i(U; A) = f_i(X; A)$ ή $p_U^A(\zeta) = p_X^A(\zeta)$ και $p_V^B(\zeta) = p_Y^B(\zeta)$. Επίσης από την 4.9 συμπεραίνουμε ότι $UB + AV = YA + BX$, και από την 4.8 παίρνουμε

$$UA^{-1}(f_2(X; A)(UB + AV) - f_1(X; A)AB) = f_2(X; A)YX - f_0(X; A)AB$$

$$(f_2(X; A)(UA^{-1})^2 - f_1(X; A)UA^{-1} + f_0(X; A)I)AB = f_2(X; A)(YX - UV).$$

Επειδή $f_i(X; A) = f_i(U; A)$ εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα Cayley-Hamilton συμπεραίνουμε ότι $UV = YX$. $\square$

Η συνθήκη $p_U^A(\zeta) = p_X^A(\zeta)$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $\det(UB - YA) \neq 0$ όπως φαίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.4. Έστω A, B αντιστρέψιμοι 2×2 πίνακες που αντιμετατίθενται μεταξύ τους και $X, Y, U, V \in \text{Mat}(2 \times 2)$ με $\det \Pi_{A,B}^1(X, Y) \neq 0$ και $\det(UB - YA) \neq 0$ (ισοδύναμα $\det(AV - BX) \neq 0$). Τότε η εξίσωση 4.7 είναι ισοδύναμη με τις 4.8 και 4.9.

Απόδειξη. Γράφοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος 4.10 ως $UA^{-1}AV = YX$ και αντικαθιστώντας το AV από την δεύτερη παίρνουμε

$$UA^{-1}(YA - UB) = (YA - UB)A^{-1}X.$$

Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι $(UB - YA)B^{-1}V = YB^{-1}(UB - YA)$. Άρα αν $\det(UB - YA) \neq 0$ (ισοδύναμα $\det(AV - BX) \neq 0$, επειδή $UB - YA = AV - BX$), οι πίνακες UA^{-1} , $B^{-1}V$ είναι όμοιοι με τους $A^{-1}X$ και YB^{-1} αντίστοιχα, συνεπώς $p_U^A(\zeta) = p_X^A(\zeta)$, $p_V^B(\zeta) = p_Y^B(\zeta)$. Το συμπέρασμα προκύπτει από την πρόταση 4.3. $\square$

Παρατήρηση. Από την σχέση 4.13 συμπεραίνουμε ότι η συνθήκη των προτάσεων 4.3, 4.4, $\det \Pi_{A,B}^1(X, Y) \neq 0$, είναι ισοδύναμη με την $\det \Pi_{A,B}^2(X, Y) \neq 0$. Επίσης η λύση U της εξίσωσης 4.7 μπορεί να εκφραστεί από την 4.14 και η V από μία ανάλογη σχέση.

4.3 Δομή Poisson στον $\mathcal{L}^2$

Όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.5, ο χώρος των πολυωνυμικών πινάκων εφοδιασμένος με την κανονική (τετραγωνική) αγκύλη Sklyanin ¹

$$\{L(\zeta) \circledast L(\eta)\} = \left[\frac{r}{\zeta - \eta}, L(\zeta) \otimes L(\eta) \right] \quad (4.15)$$

είναι πολλαπλότητα Poisson. Περιοριζόμαστε στην υποπολλαπλότητα $\mathcal{L}^2$. Ο μεταθετικός πίνακας $r : x \otimes y \mapsto y \otimes x$ σε αυτήν την περίπτωση (και γενικότερα στην περίπτωση των 2×2 πινάκων) είναι

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹Εδώ θεωρήσαμε την αντίθετη αγκύλη της 2.19 για να συμφωνούμε με την βιβλιογραφία. Προφανώς και αυτή ορίζει δομή Poisson με τις ίδιες ιδιότητες.

Για $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, και $L(\zeta) = X - \zeta A \in \mathcal{L}^2$, από την 4.15 εξάγουμε τις αγκύλες Poisson

$$\begin{aligned} \{x_1 - \zeta a_1, x_2 - \eta a_2\} &= x_1 a_2 - x_2 a_1, \quad \{x_1 - \zeta a_1, x_3 - \eta a_3\} = x_3 a_1 - x_1 a_3, \\ \{x_1 - \zeta a_1, x_4 - \eta a_4\} &= x_3 a_2 - x_2 a_3, \quad \{x_2 - \zeta a_2, x_3 - \eta a_3\} = x_4 a_1 - x_1 a_4, \\ \{x_2 - \zeta a_2, x_4 - \eta a_4\} &= x_4 a_2 - x_2 a_4, \quad \{x_3 - \zeta a_3, x_4 - \eta a_4\} = x_3 a_4 - x_4 a_3 \end{aligned}$$

και $\{x_i - \zeta a_i, x_i - \eta a_i\} = 0$ για $i = 1, \dots, 4$.

Πρόταση 4.5. Ο $\mathcal{L}^2$ εφοδιασμένος με την κανονική αγκύλη *Sklyanin* έχει έξι γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις *Casimir*. Οι τέσσερις είναι οι συντεταγμένες a_i για $i = 1, \dots, 4$ και οι άλλες δύο οι συντελεστές

$$f_0(X; A) = \det X, \quad f_1(X; A) = a_4 x_1 - a_3 x_2 - a_2 x_3 + a_1 x_4$$

του χαρακτηριστικού πολυωνύμου 4.4, $p_X^A(\zeta) = \det(X - \zeta A)$.

Απόδειξη. Από την πρώτη αγκύλη Poisson έχουμε

$$\{x_1, x_2\} - \eta \{x_1, a_2\} - \zeta \{a_1, x_2\} + \zeta \eta \{a_1, a_2\} = x_1 a_2 - x_2 a_1, \quad \zeta, \eta \in \mathbb{K}.$$

Άρα $\{x_1, a_2\} = 0$, $\{x_2, a_1\} = 0$, $\{a_1, a_2\} = 0$ και $\{x_1, x_2\} = x_1 a_2 - x_2 a_1$. Παρόμοια από τις άλλες αγκύλες μπορούμε τελικά να δείξουμε ότι

$$\{x_i, a_j\} = \{a_i, a_j\} = 0 \text{ για κάθε } i, j = 1, \dots, 4.$$

Επίσης εύκολα υπολογίζουμε ότι $\{f_0(X; A), x_i\} = \{f_1(X; A), x_i\} = 0$. Άρα οι a_i , $i = 1, \dots, 4$, $f_0(X; A)$, $f_1(X; A)$ είναι συναρτήσεις Casimir. $\square$

Προφανώς και ο συντελεστής $f_2(X; A) = \det A$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου 4.4 είναι συνάρτηση Casimir.

Για κάθε σταθερό πίνακα A συμβολίζουμε με i_A την εμβύθιση στον $\mathcal{L}^2$, $i_A : X \mapsto X - \zeta A$ και με $\mathcal{L}_A^2$ την ισοσταθμική επιφάνεια

$$\mathcal{L}_A^2 = \{X - \zeta A \mid X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})\}.$$

Ο πίνακας δομής Poisson της κανονικής αγκύλης Sklyanin στην υποπολλαπλότητα $\mathcal{L}_A^2$ είναι

$$J_A(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_1a_2 - x_2a_1 & x_3a_1 - x_1a_3 & x_3a_2 - x_2a_3 \\ * & 0 & x_4a_1 - x_1a_4 & x_4a_2 - x_2a_4 \\ * & * & 0 & x_3a_4 - x_4a_3 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

όπου $J_A(X)_{ij} = \{x_i, x_j\}$, για $i, j = 1, \dots, 4$.

Παρατηρούμε ότι η τετραγωνική αγκύλη Poisson στην πολλαπλότητα $\mathcal{L}$ γίνεται γραμμική σε κάθε ισοσταθμική επιφάνεια $\mathcal{L}_A^2$. Αυτή η παρατήρηση μας κάνει να αναρωτηθούμε αν η Poisson δομή στην $\mathcal{L}_A^2$ αντιστοιχεί σε μια αγκύλη Lie-Poisson στον δυϊκό χώρο κάποιας άλγεβρας Lie. Η απάντηση είναι καταφατική και δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.6. Ο τετραδιάστατος διανυσματικός χώρος $\mathfrak{g}$ με βάση $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, εφοδιασμένος με την διγραμμική αντισυμμετρική αγκύλη

$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ με

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= a_2e_1 - a_1e_2, & [e_1, e_3] &= -a_3e_1 + a_1e_3, & [e_1, e_4] &= -a_3e_2 + a_2e_3, \\ [e_2, e_3] &= a_1e_4 - a_4e_1, & [e_2, e_4] &= -a_4e_2 + a_2e_4, & [e_3, e_4] &= a_4e_3 - a_3e_4, \end{aligned}$$

είναι άλγεβρα Lie για κάθε $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{K}$. Η αντίστοιχη αγκύλη Lie-Poisson στον δυϊκό χώρο $\mathfrak{g}^*$

$$\{f, g\}_{L-P}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g] \rangle, \quad x \in \mathfrak{g}^*, \quad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$$

συμπίπτει με την Poisson δομή 4.16 στην πολλαπλότητα $\mathcal{L}_A^2$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τις σταθερές $c_{ij}^k, i, j, k = 1, \dots, 4$ από τη σχέση

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^4 c_{ij}^k e_k, \quad i, j = 1, \dots, 4,$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} c_{12}^1 &= -c_{21}^1 = a_2, & c_{12}^2 &= -c_{21}^2 = -a_1, & c_{13}^1 &= -c_{31}^1 = -a_3, \\ c_{13}^3 &= -c_{31}^3 = a_1, & c_{14}^2 &= -c_{41}^2 = -a_3, & c_{14}^3 &= -c_{41}^3 = a_2, \\ c_{23}^1 &= -c_{32}^1 = -a_4, & c_{23}^4 &= -c_{32}^4 = a_1, & c_{24}^2 &= -c_{42}^2 = -a_4, \\ c_{24}^4 &= -c_{42}^4 = a_2, & c_{34}^3 &= -c_{43}^3 = a_4, & c_{34}^4 &= -c_{43}^4 = -a_3 \end{aligned}$$

και οι υπόλοιπες σταθερές είναι μηδενικές. Για κάθε $i, j, m, k \in 1, 2, 3, 4$

$$\sum_{l=1}^4 (c_{il}^m c_{jk}^l + c_{jl}^m c_{ki}^l + c_{kl}^m c_{ij}^l) = 0$$

άρα ικανοποιείται η ταυτότητα Jacobi, συνεπώς η αγκύλη που ορίζει η πρόταση είναι αγκύλη Lie. Όπως δείξαμε στην ενότητα 1.7 ο πίνακας δομής Poisson της αγκύλης Lie-Poisson 1.15 είναι ο $J(x) = [J_{ij}(x)]$ με

$$J_{ij}(x) = \sum_{k=1}^4 c_{ij}^k x_k, \quad x \in \mathfrak{g}^*.$$

Αντικαθιστώντας τις σταθερές δομής c_{ij}^k αναγόμεστε στον πίνακα 4.16. $\square$

Η αγκύλη Sklyanin μπορεί να επεκταθεί με φυσικό τρόπο στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2$. Για κάθε $(X - \zeta A, Y - \zeta B) \in \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2$, συμβολίζοντας με $a_i, b_i, x_i, y_i, i = 1, \dots, 4$ τα στοιχεία των πινάκων A, B, X, Y όπως προηγουμένως, οι αγκύλες Poisson των συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= J_A(X)_{ij}, \quad \{y_i, y_j\} = J_B(Y)_{ij} \quad \text{και} \\ \{x_i, y_j\} &= \{x_i, a_j\} = \{x_i, b_j\} = \{y_i, a_j\} = \{y_i, b_j\} = \{a_i, b_j\} = 0, \end{aligned}$$

για $i, j = 1, \dots, 4$. Ανάλογα ορίζεται η ανηγμένη Poisson δομή δύο στην ισοσταθμική επιφάνεια $\mathcal{L}_A^2 \times \mathcal{L}_B^2$ για δύο σταθερούς πίνακες A και B από τις αγκύλες

$$\{x_i, x_j\} = J_A(X)_{ij}, \quad \{y_i, y_j\} = J_B(Y)_{ij}, \quad \{x_i, y_j\} = 0, \quad (4.17)$$

για κάθε $(X - \zeta A, Y - \zeta B) \in \mathcal{L}_A^2 \times \mathcal{L}_B^2$.

4.4 Απεικονίσεις Poisson Yang-Baxter

Η μοναδική αναπαραγοντοποίηση στον χώρο $\mathcal{L}^2$ οδηγεί στην κατασκευή πολυδιάστατων παραμετρικών απεικονίσεων YB οι οποίες διατηρούν την δομή Sklyanin που περιγράψαμε. Ξεκινάμε με το παρακάτω λήμμα τριπλής αναπαραγοντοποίησης που θα μας επιτρέψει να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα κατασκευής αυτής της ενότητας.

Λήμμα 4.7. Έστω $A_i, i = 1, 2, 3$ τρεις αντιστρέψιμοι πίνακες που αντιμετατίθενται μεταξύ τους ($A_i A_j = A_j A_i$). Τότε

$$(X'_1 - \zeta A_1)(X'_2 - \zeta A_2)(X'_3 - \zeta A_3) = (X_1 - \zeta A_1)(X_2 - \zeta A_2)(X_3 - \zeta A_3) \quad (4.18)$$

και $p_{X'_i}^{A_i}(\zeta) = p_{X_i}^{A_i}(\zeta)$ για κάθε $X'_i, X_i \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K}), i = 1, 2, 3$ και $\zeta \in \mathbb{K}$, αν και μόνο αν $X'_1 = X_1, X'_2 = X_2$ και $X'_3 = X_3$.

Η απόδειξη του λήμματος παρατίθεται στο παράρτημα.

Θεωρούμε μία συνάρτηση $K : \mathbb{I} \rightarrow GL_2(\mathbb{K})$, όπου $\mathbb{I}$ ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{K}^4$, τέτοια ώστε

$$K(\alpha)K(\beta) = K(\beta)K(\alpha) \quad (4.19)$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ καθώς και τις απεικονίσεις $U_K, V_K : \mathbb{X}_K \rightarrow \mathbb{X}_K$, όπου

$$\mathbb{X}_K = \{(X, Y) \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K}) \times \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K}) \mid \det \Pi_{K(\alpha), K(\beta)}^1(X, Y) \neq 0\},$$

με

$$U_K(X, Y) = \Pi_{K(\alpha), K(\beta)}^2(X, Y)(\Pi_{K(\alpha), K(\beta)}^1(X, Y))^{-1}K(\alpha), \quad (4.20)$$

$$V_K(X, Y) = K(\alpha)^{-1}(YK(\alpha) + K(\beta)X - U_K(X, Y)K(\beta)). \quad (4.21)$$

Θεώρημα 4.8. Για κάθε συνάρτηση $K : \mathbb{I} \rightarrow GL_2(\mathbb{K})$, που ικανοποιεί την 4.19, η απεικόνιση $\mathcal{R}_{\alpha, \beta} : \mathbb{X}_K \rightarrow \mathbb{X}_K$,

$$\mathcal{R}_{\alpha, \beta}(X, Y) = (U_K(X, Y), V_K(X, Y)), \quad (4.22)$$

είναι παραμετρική απεικόνιση Yang-Baxter με πίνακα Lax $L(X; \alpha) = i_{K(\alpha)}(X)$. Επιπλέον για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ η $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$ είναι απεικόνιση Poisson ως προς την αγκύλη

$$\{x_i, x_j\} = J_{K(\alpha)}(X)_{ij}, \quad \{y_i, y_j\} = J_{K(\beta)}(Y)_{ij}, \quad \{x_i, y_j\} = 0. \quad (4.23)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη της ιδιότητας Yang-Baxter της απεικόνισης $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$ στηρίζεται στο Λήμμα 4.7 και είναι παρόμοια με εκείνη της πρότασης 4.2 (δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας την πρόταση).

Αρχικά για $U = U_K(X, Y)$ και $V = V_K(X, Y)$, από την πρόταση 4.3 έχουμε ότι

$$(U - \zeta K(\alpha))(V - \zeta K(\beta)) = (Y - \zeta K(\beta))(X - \zeta K(\alpha)) \quad (4.24)$$

$$\text{και } p_U^{K(\alpha)}(\zeta) = p_X^{K(\alpha)}(\zeta), \quad p_V^{K(\beta)}(\zeta) = p_Y^{K(\beta)}(\zeta).$$

Θεωρώντας τις αντίστοιχες τιμές $X', X'', Y', Y'', Z', Z'', \tilde{X}, \dots, \tilde{Z}$ στις αντίστοιχες ακμές του κύβου του σχήματος 3.2 από τις σχέσεις

$$\mathcal{R}_{\alpha, \beta}^{12}(X, Y, Z) = (X', Y', Z), \quad \mathcal{R}_{\alpha, \gamma}^{13} \circ \mathcal{R}_{\alpha, \beta}^{12}(X, Y, Z) = (X'', Y', Z'),$$

$$\mathcal{R}_{\beta, \gamma}^{23} \circ \mathcal{R}_{\alpha, \gamma}^{13} \circ \mathcal{R}_{\alpha, \beta}^{12}(X, Y, Z) = (X'', Y'', Z''),$$

$$\mathcal{R}_{\beta, \gamma}^{23}(X, Y, Z) = (X, \tilde{Y}, \tilde{Z}), \quad \mathcal{R}_{\alpha, \gamma}^{13} \circ \mathcal{R}_{\beta, \gamma}^{23}(X, Y, Z) = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}),$$

$$\mathcal{R}_{\alpha, \beta}^{12} \circ \mathcal{R}_{\alpha, \gamma}^{13} \circ \mathcal{R}_{\beta, \gamma}^{23}(X, Y, Z) = (\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}),$$

τελικά παίρνουμε (βλ. απόδειξη πρότασης 4.2)

$$(X'' - \zeta K(\alpha))(Y'' - \zeta K(\beta))(Z'' - \zeta K(\gamma)) = (\tilde{X} - \zeta K(\beta))(\tilde{Y} - \zeta K(\beta))(\tilde{Z} - \zeta K(\gamma))$$

και

$$\begin{aligned} p_{\tilde{X}}^{K(\alpha)} &= p_{\tilde{X}}^{K(\alpha)} = p_{X''}^{K(\alpha)}(\zeta) = p_{X'}^{K(\alpha)}(\zeta) = p_X^{K(\alpha)}(\zeta), \\ p_{\tilde{Y}}^{K(\beta)} &= p_{\tilde{Y}}^{K(\beta)} = p_{Y''}^{K(\beta)}(\zeta) = p_{Y'}^{K(\beta)}(\zeta) = p_Y^{K(\beta)}(\zeta), \\ p_{\tilde{Z}}^{K(\gamma)} &= p_{\tilde{Z}}^{K(\gamma)} = p_{Z''}^{K(\gamma)}(\zeta) = p_{Z'}^{K(\gamma)}(\zeta) = p_Z^{K(\gamma)}(\zeta). \end{aligned}$$

Άρα από το λήμμα 4.7 $X'' = \tilde{X}$, $Y'' = \tilde{Y}$ και $Z'' = \tilde{Z}$, δηλαδή

$$\mathcal{R}_{\beta,\gamma}^{23} \circ \mathcal{R}_{\alpha,\gamma}^{13} \circ \mathcal{R}_{\alpha,\beta}^{12}(X, Y, Z) = \mathcal{R}_{\alpha,\beta}^{12} \circ \mathcal{R}_{\alpha,\gamma}^{13} \circ \mathcal{R}_{\beta,\gamma}^{23}(X, Y, Z).$$

Επίσης από την σχέση 4.24 συμπεραίνουμε ότι ο $L(X; \alpha) = i_{K(\alpha)}(X)$ είναι πίνακας Lax για την απεικόνιση YB $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$.

Τέλος υπολογίζοντας τις αγκύλες Poisson των στοιχείων των πινάκων

$$U = U_K(X, Y) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \text{ και } V = V_K(X, Y) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix},$$

παίρνουμε

$$\{u_i, u_j\} = J_{K(\alpha)}(U)_{ij}, \{v_i, v_j\} = J_{K(\beta)}(V)_{ij}, \{u_i, v_j\} = 0,$$

για $i = 1, \dots, 4$, που σημαίνει ότι η $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ είναι απεικόνιση Poisson. $\square$

Καλούμε την παραμετρική απεικόνιση $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}$ γενική απεικόνιση YB ως προς τη συνάρτηση K . Πρέπει να σημειώσουμε ότι ο πίνακας Lax αυτής της απεικόνισης δεν είναι εν γένει ισχυρός. Για παράδειγμα για $K(\alpha) = K(\beta) = A$, όπου A οποιοσδήποτε σταθερός αντιστρέψιμος πίνακας, η εξίσωση 4.24 εκτός από την λύση του θεωρήματος επιδέχεται και την τετριμμένη λύση $U = Y$, $V = X$.

Εξ' ορισμού η απεικόνιση

$$\mathcal{R} : (X - \zeta K(\alpha), Y - \zeta K(\beta)) \mapsto (U_K(X, Y) - \zeta K(\alpha), V_K(X, Y) - \zeta K(\beta))$$

ικανοποιεί την χβαντική εξίσωση YB. Θεωρώντας την εμβύθιση

$$i_A \times i_B : (X, Y) \mapsto (i_A(X), i_B(Y)) \equiv (X - \zeta A, Y - \zeta B),$$

την μεταθετική απεικόνιση $r : (X, Y) \mapsto (Y, X)$ και την πολλαπλασιαστική απεικόνιση $m : (X, Y) \mapsto XY$, από το θεώρημα 4.8 συμπεραίνουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{X}_K & \xrightarrow{\mathcal{R}_{\alpha, \beta}} & \mathbb{X}_K \\
 \downarrow i_{k(\alpha)} \times i_{k(\beta)} & & \downarrow i_{k(\alpha)} \times i_{k(\beta)} \\
 \mathcal{L}_{k(\alpha)}^2 \times \mathcal{L}_{k(\beta)}^2 & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \mathcal{L}_{k(\alpha)}^2 \times \mathcal{L}_{k(\beta)}^2 \\
 \downarrow r & & \downarrow m \\
 \mathcal{L}_{k(\beta)}^2 \times \mathcal{L}_{k(\alpha)}^2 & \xrightarrow{m} & \mathcal{L}^2(2)
 \end{array}$$

Όπου με $\mathcal{L}^2(2)$ συμβολίσαμε τον χώρο των 2×2 πολωνυμικών πινάκων δευτέρου βαθμού. Λόγω της πολλαπλασιαστικής ιδιότητας της αγκύλης Sklyanin όλες οι απεικονίσεις στο διάγραμμα είναι απεικονίσεις Poisson.

Τέλος σημειώνουμε ότι θεωρώντας τις προβολές των πινάκων στα αντίστοιχα στοιχεία τους, η απεικόνιση $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$ μπορεί να θεωρηθεί ως παραμετρική απεικόνιση YB στο ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{K}^4 \times \mathbb{K}^4$ που ορίζεται από τον περιορισμό $\det \Pi_{K(\alpha), K(\beta)}^1(X, Y) \neq 0$.

4.5 Συμπλεκτικές απεικονίσεις Yang-Baxter

Οι γενικές απεικονίσεις YB που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα διατηρούν αναλλοίωτες τις συναρτήσεις Casimir. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την αναγωγή τους σε συμπλεκτικές απεικονίσεις YB στα αντίστοιχα συμπλεκτικά φύλλα του $\mathcal{L}^2$. Οι ανηγμένες συμπλεκτικές απεικονίσεις είναι τετράρητες και επιδέχονται ισχυρή αναπαράσταση Lax.

4.5.1 Αναγωγή στα συμπλεκτικά φύλλα

Όπως είδαμε στην ενότητα 4.3 ο πίνακας A ενός γενόσημου στοιχείου

$$X - \zeta A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \zeta \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^2,$$

ανήκει στο κέντρο της αντίστοιχης Poisson άλγεβρας. Στην τετραδιάστατη υποπολλαπλότητα Poisson $\mathcal{L}_A^2$ υπάρχουν δύο συναρτήσεις Casimir,

$$f_0(X; A) = \det X \text{ και } f_1(X; A) = a_4x_1 - a_3x_2 - a_2x_3 + a_1x_4.$$

Περιοριζόμαστε στην ισοσταθμική επιφάνεια των συναρτήσεων Casimir λύνοντας το σύστημα $f_0(X; A) = \alpha_0$, $f_1(X; A) = \alpha_1$ ως προς δύο στοιχεία του x_i, x_j του X . Δηλαδή θεωρούμε ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις h_A, g_A ορισμένες σε ένα ανοιχτό υποσύνολο D του $\mathbb{K}^4$, τέτοιες ώστε

$$x_i = h_A(x_k, x_l, \alpha_0, \alpha_1) \text{ και } x_j = g_A(x_k, x_l, \alpha_0, \alpha_1), \quad k, l \neq i, j. \quad (4.25)$$

Συμβολίζουμε με $pr_{k,l}$ την προβολή ενός πίνακα στα αντίστοιχα k, l στοιχεία του (θεωρώντας την διάταξη των στοιχείων $1, \dots, 4$ κάθε πίνακα όπως παραπάνω) και την απεικόνιση

$$Pr = pr_{k,l} \times pr_{k,l} : (X, Y) \mapsto (pr_{k,l}(X), pr_{k,l}(Y)).$$

Αντικαθιστώντας τα x_i, x_j στον πίνακα X ορίζουμε τον παραμετρικό πίνακα $L_A(x_k, x_l; \alpha_0, \alpha_1)$. Χάριν απλότητας θέτουμε $x_k \mapsto x_1, x_l \mapsto x_2$ καταλήγοντας στον πίνακα $L_A(x_1, x_2; \alpha_0, \alpha_1)$ που ικανοποιεί τις

$$f_0(L_A(x_1, x_2; \alpha_0, \alpha_1); A) = \alpha_0 \text{ και } f_1(L_A(x_1, x_2; \alpha_0, \alpha_1); A) = \alpha_1.$$

Τα δισδιάστατα συμπλεκτικά φύλλα του $\mathcal{L}_A^2$ περιέχονται στις ισοσταθμικές επιφάνειες των συναρτήσεων Casimir, δηλαδή είναι της μορφής

$$\Sigma_A(\bar{\alpha}) = \{L_A(x_1, x_2; \alpha_0, \alpha_1) - \zeta A \mid x_1, x_2 \in I \subset \mathbb{K}\}.$$

Θεώρημα 4.9. (Αναγωγή) Για κάθε συνάρτηση $K : \mathbb{I} \rightarrow GL_2(\mathbb{K})$ που ικανοποιεί την 4.19, η απεικόνιση

$$R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Pr \circ \mathcal{R}_{\alpha, \beta}(L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1), L_{K(\beta)}(\mathbf{y}; \beta_0, \beta_1)), \quad (4.26)$$

με $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2$ είναι τετράρητη συμπλεκτική απεικόνιση Yang-Baxter με διανυσματικές παραμέτρους $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha_0, \alpha_1), \bar{\beta} = (\beta, \beta_0, \beta_1) \in \mathbb{I} \times \mathbb{K}^2$ και ισχυρό πίνακα Lax :

$$L(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = i_{K_\alpha}(L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1)). \quad (4.27)$$

Απόδειξη. Θέτοντας $X = L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1)$, $Y = L_{K(\beta)}(\mathbf{y}; \beta_0, \beta_1)$ και

$$(U, V) = \mathcal{R}_{\alpha, \beta}(X, Y) = (U_K(X, Y), V_K(X, Y)),$$

από το θεώρημα 4.8 και την πρόταση 4.3 έχουμε

$$f_i(U; K(\alpha)) = \alpha_i \text{ και } f_i(V; K(\beta)) = \beta_i, \text{ για } i = 0, 1.$$

Άρα για $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = pr_{k,l}(U)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = pr_{k,l}(V)$, έχουμε

$$U = L_{K(\alpha)}(\mathbf{u}; \alpha_0, \alpha_1), \quad V = L_{K(\alpha)}(\mathbf{v}; \alpha_0, \alpha_1) \text{ με} \\ p_U^{K(\alpha)}(\zeta) = p_X^{K(\alpha)}(\zeta) \text{ και } p_V^{K(\beta)}(\zeta) = p_Y^{K(\beta)}(\zeta).$$

Επίσης από την πρόταση 4.3 συμπεραίνουμε ότι η U , V είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $i_{K(\alpha)}(U)i_{K(\beta)}(V) = i_{K(\beta)}(Y)i_{K(\alpha)}(X)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$, δηλαδή της

$$(L_{K(\alpha)}(\mathbf{u}; \alpha_0, \alpha_1) - \zeta K(\alpha))(L_{K(\alpha)}(\mathbf{v}; \beta_0, \beta_1) - \zeta K(\beta)) = \\ (L_{K(\beta)}(\mathbf{y}; \beta_0, \beta_1) - \zeta K(\beta))(L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1) - \zeta K(\alpha)). \quad (4.28)$$

Τώρα αν θέσουμε

$$X'_1 = L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}'; \alpha_0, \alpha_1), \quad X'_2 = L_{K(\beta)}(\mathbf{y}'; \beta_0, \beta_1), \quad X'_3 = L_{K(\gamma)}(\mathbf{z}'; \gamma_0, \gamma_1) \\ X_1 = L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1), \quad X_2 = L_{K(\beta)}(\mathbf{y}; \beta_0, \beta_1), \quad X_3 = L_{K(\gamma)}(\mathbf{z}; \gamma_0, \gamma_1)$$

έχουμε

$$f_i(X'_1; K(\alpha)) = f_i(X_1; K(\alpha)) = \alpha_i, \quad f_i(X'_2; K(\beta)) = f_i(X_2; K(\beta)) = \beta_i$$

και $f_i(X'_3; K(\gamma)) = f_i(X_3; K(\gamma)) = \gamma_i$ για $i = 0, 1$.

Το Λήμμα 4.7 δηλώνει ότι η εξίσωση

$$(X'_1 - \zeta K(\alpha))(X'_2 - \zeta K(\beta))(X'_3 - \zeta K(\gamma)) = (X_1 - \zeta K(\alpha))(X_2 - \zeta K(\beta))(X_3 - \zeta K(\gamma))$$

ισοδυναμεί με $X'_i = X_i$, για $i = 1, 2, 3$, δηλαδή $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$ και $\mathbf{z}' = \mathbf{z}$. Συνοψίζοντας αποδείξαμε ότι για

$$L(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1) - \zeta K(\alpha)$$

η εξίσωση $L(u_1, u_2; \bar{\alpha})L(v_1, v_2; \bar{\beta}) = L(y_1, y_2; \bar{\beta})L(x_1, x_2; \bar{\alpha})$ έχει μοναδική λύση την

$$((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = Pr \circ \mathcal{R}_{\alpha, \beta}(L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1), L_{K(\beta)}(\mathbf{y}; \beta_0, \beta_1))$$

και ότι η εξίσωση

$$L(x'_1, x'_2; \bar{\alpha})L(y'_1, y'_2; \bar{\beta})L(z'_1, z'_2; \bar{\gamma}) = L(x_1, x_2; \bar{\alpha})L(y_1, y_2; \bar{\beta})L(z_1, z_2; \bar{\gamma})$$

είναι ισοδύναμη με $x'_i = x_i$, $y'_i = y_i$, $z'_i = z_i$, για $i = 1, 2$. Έτσι από την πρόταση 4.2 συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση

$$R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto ((u_1, u_2), (v_1, v_2))$$

είναι απεικόνιση YB με ισχυρό πίνακα Lax τον $L(x_1, x_2; \bar{\alpha})$.

Επιπλέον η 4.28 για $X = L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1)$, $Y = L_{K(\beta)}(\mathbf{y}; \beta_0, \beta_1)$, $U = L_{K(\alpha)}(\mathbf{u}; \alpha_0, \alpha_1)$ και $V = L_{K(\alpha)}(\mathbf{v}; \alpha_0, \alpha_1)$, λύνεται απευθείας ως προς V, X δίνοντας

$$\begin{aligned} K(\beta)^{-1}V &= (UK(\beta) - YK(\alpha))^{-1}YK(\beta)^{-1}(UK(\beta) - YK(\alpha)), \\ K(\alpha)^{-1}X &= (YK(\alpha) - UK(\beta))^{-1}UK(\alpha)^{-1}(YK(\alpha) - UK(\beta)). \end{aligned}$$

Συνεπώς η $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ είναι τετράρητη απεικόνιση.

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{I}$, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{K}$ θεωρούμε τα συμπλεκτικά φύλλα της μορφής

$$\Sigma_{K(\alpha)}(\bar{\alpha}) = \{L_{K(\alpha)}(x_1, x_2; \alpha_0, \alpha_1) - \zeta K(\alpha) \mid x_1, x_2 \in I \subset \mathbb{K}\}$$

Η επαγόμενη συμπλεκτική μορφή στην πολλαπλότητα $\Sigma_{K(\alpha)}(\bar{\alpha})$ ορίζεται από τον περιορισμό της αγκύλης Sklyanin σε αυτήν. Συγκεκριμένα για $x_1 = x_k$, $x_2 = x_l$, $k, l \in 1, \dots, 4$, $\{x_k, x_l\} = J_{K(\alpha)}(L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1))_{kl}$, όπου J ο πίνακας δομής 4.16. Επειδή η απεικόνιση $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$ είναι Poisson η απεικόνιση $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ είναι συμπλεκτική. $\square$

Παρατήρηση 1. Η απεικόνιση $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ είναι ρητή σε κάθε παράγοντα και φυσικά δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ αλλά σε ένα ανοιχτό και πυκνό υποσύνολό του που εξαρτάται από την συνάρτηση K και τις παραμέτρους. Στην γενική περίπτωση που αναφέρεται και το θεώρημα θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D^2 \mid \det \Pi_{K(\alpha), K(\beta)}^1(L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1), L_{K(\beta)}(\mathbf{y}; \beta_0, \beta_1)) \neq 0, \\ \det J_{K(\alpha)}(L_{K(\alpha)}(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1)) \neq 0 \text{ και } \det J_{K(\beta)}(L_{K(\beta)}(\mathbf{y}; \beta_0, \beta_1)) \neq 0\}, \end{aligned}$$

όπου με D συμβολίσαμε το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων h_A, g_A (4.25). Στις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν θα δούμε ότι αυτοί οι περιορισμοί είναι πολύ μικροί και αφορούν κυρίως μεμονωμένα σημεία του $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$.

Ως άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.26 έχουμε το παρακάτω πόρισμα

Πόρισμα 4.10. *Η εξίσωση*

$$L(u_1, u_2; \bar{\alpha})L(v_1, v_2; \bar{\beta}) = L(y_1, y_2; \bar{\beta})L(x_1, x_2; \bar{\alpha}), \quad (4.29)$$

όπου $L(x_1, x_2; \bar{\alpha})$ ο πίνακας 4.27 έχει μοναδική λύση την

$$((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

Ο αριθμός των παραμέτρων που υπεισέρχονται στην απεικόνιση YB του θεωρήματος 4.9 μπορεί να ελαττωθεί ταυτοποιώντας δύο από αυτές. Συγκεκριμένα αν θέσουμε $\alpha_0 = \beta_0 = k$ τότε η απεικόνιση 4.26 ανάγεται στην συμπλεκτική παραμετρική απεικόνιση YB

$$R_{\alpha', \beta'} = R_{(\alpha, k, \alpha_1), (\beta, k, \beta_1)},$$

με παραμέτρους $\alpha' = (\alpha, \alpha_1)$, $\beta' = (\beta, \beta_1) \in \mathbb{I} \times \mathbb{K}$ και ισχυρό πίνακα Lax

$$L(x_1, x_2; \alpha, \alpha_1) := L(x_1, x_2; \alpha, k, \alpha_1).$$

Τώρα η k δεν είναι δυναμική παράμετρος όπως οι α , α_1 αλλά απλά μια ελεύθερη παράμετρος. Αν θέσουμε και $\alpha = \beta$ αναγόμεντες στην R_{α, β_1} . Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε αν ταυτοποιήσουμε οποιοδήποτε άλλα ζευγάρια παραμέτρων. Αν ταυτοποιήσουμε όλες τις παραμέτρους, δηλαδή αν θέσουμε $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$, τότε εξάγουμε την τετριμμένη λύση $(u_1, u_2) = (y_1, y_2)$ και $(v_1, v_2) = (x_1, x_2)$. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει επειδή η $U = Y$, $V = X$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης 4.7 με $f_0(U; A) = f_0(Y; A)$ και $f_1(U; A) = f_1(Y; A)$ για $A = B$.

4.5.2 Διωνυμικοί πίνακες Lax με σταθερό μεγιστοβάθμιο όρο

Είδαμε ότι για την κατασκευή των παραμετρικών απεικονίσεων YB που παρουσιάσαμε απαιτείται η επιλογή μιας συνάρτησης $K : \mathbb{I} \rightarrow GL_2(\mathbb{K})$, όπου $\mathbb{I}$ ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{K}^4$, τέτοια ώστε $K(\alpha)K(\beta) = K(\beta)K(\alpha)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$. Μια προφανής επιλογή είναι να θεωρήσουμε $K(\alpha) = A$ για κάποιον σταθερό αντιστρέψιμο πίνακα A . Αυτή η σχετικά απλή περίπτωση δίνει πολλά ενδιαφέροντα παραδείγματα απεικονίσεων YB ανάλογα με την επιλογή του πίνακα A . Η γενική απεικόνιση YB του θεωρήματος 4.8 είναι προφανώς μη παραμετρική και οι παράμετροι υπεισέρχονται μόνο από τις συναρτήσεις Casimir f_0 και f_1 . Ξεκινάμε παρουσιάζοντας την κατασκευή μιας τετράρητης παραμετρικής απεικονίσης YB στην περίπτωση που ο σταθερός πίνακας A είναι ο μοναδιαίος πίνακας I .

Παράδειγμα 4.11. Θεωρούμε το γενόσημο στοιχείο $X - \zeta I \in \mathcal{L}_I^2$, όπου $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ και I ο μοναδιαίος πίνακας. Οι αγκύλες Poisson των συντεταγμένων στην πολλαπλότητα $\mathcal{L}_{K\alpha}^2$ είναι

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= -x_2, \quad \{x_1, x_3\} = x_3, \quad \{x_2, x_3\} = x_4 - x_1, \\ \{x_2, x_4\} &= -x_2, \quad \{x_3, x_4\} = x_3, \quad \{x_1, x_4\} = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $X - \zeta I$ είναι

$$\begin{aligned} p_X^I(\zeta) &= f_2(X; I)\zeta^2 - f_1(X; I)\zeta + f_0(X; I), \quad \mu\epsilon \\ f_0(X; I) &= \det X, \quad f_1(X; I) = x_1 + x_4, \quad f_2(X; I) = 1. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.8, για $K(\alpha) = I$ εξάγουμε την γενική (μη παραμετρική) απεικόνιση Yang-Baxter :

$$\mathcal{R}_I(X, Y) = (U_I(X, Y), V_I(X, Y)), \quad (4.31)$$

όπου

$$\begin{aligned} U_I(X, Y) &= (YX - (x_1x_4 - x_2x_3)I)(Y + X - (x_1 + x_4)I)^{-1}, \\ V_I(X, Y) &= Y + X - U_I(X, Y). \end{aligned}$$

Η απεικόνιση $\mathcal{R}$ είναι απεικόνιση Poisson ως προς την επεκτεταμένη αγκύλη 4.30 στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{L}_I^2 \times \mathcal{L}_I^2$.

Στη συνέχεια περιοριζόμαστε στις ισοσταθμικές επιφάνειες των Casimir συναρτήσεων. Θέτουμε $f_0(X; \alpha) = \alpha$, $f_1(X; \alpha) = 1$ και λύνουμε ως προς x_3, x_4 για $x_2 \neq 0$. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στον X εξάγουμε τον πίνακα

$$L_I(x_1, x_2; \alpha) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{x_1(1-x_1)}{x_2} - \frac{\alpha}{x_2} & 1 - x_1 \end{pmatrix}$$

Από το θεώρημα 4.9 προκύπτει η παραμετρική απεικόνιση Yang-Baxter

$$R_{\alpha, \beta} : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto ((u_1, u_2), (v_1, v_2)), \quad (4.32)$$

με

$$\begin{aligned} ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) &= Pr \circ \mathcal{R}_I(L_I(x_1, x_2; \alpha), L_I(y_1, y_2; \beta)) = \\ &= (pr_{1,2} \circ U_I(L_I(x_1, x_2; \alpha), L_I(y_1, y_2; \beta)), pr_{1,2} \circ V_I(L_I(x_1, x_2; \alpha), L_I(y_1, y_2; \beta))), \end{aligned}$$

όπου $pr_{1,2}$ η προβολή ενός πίνακα στα στοιχεία της πρώτης γραμμής του. Συγκεκριμένα μετά από υπολογισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} u_1 &= y_1 + \frac{x_2 y_2}{N} (\alpha - \beta) (x_1 + y_1 - 1), \\ u_2 &= \frac{y_2}{N} (\alpha (x_2 + y_2)^2 + (x_2 (y_1 - 1) - x_1 y_2) (x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_2)), \\ v_1 &= x_1 - \frac{x_2 y_2}{N} (\alpha - \beta) (x_1 + y_1 - 1), \\ v_2 &= \frac{x_2}{N} (\beta (x_2 + y_2)^2 + (x_2 (y_1 - 1) - x_1 y_2) (x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_2)), \end{aligned}$$

$$N = \alpha y_2^2 + \beta x_2^2 + (\alpha + \beta - 1) y_2 x_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) (x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_2 - x_2).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 4.9 η απεικόνιση YB $R_{\alpha, \beta}$ είναι τετράρητη με ισχυρό πίνακα Lax τον

$$L(x_1, x_2; \alpha) = L_I(x_1, x_2; \alpha) - \zeta I = \begin{pmatrix} x_1 - \zeta & x_2 \\ \frac{x_1(1-x_1)}{x_2} - \frac{\alpha}{x_2} & 1 - x_1 - \zeta \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Η αγκύλη Poisson στο $\mathcal{L}_I^2 \times \mathcal{L}_I^2$ ανάγεται στην υποπολλαπλότητα

$$\Sigma_I(\alpha) \times \Sigma_I(\beta) = \{(L(x_1, x_2; \alpha), L(y_1, y_2; \beta)) \mid x_2, y_2 \neq 0\}$$

στην συμπλεκτική μορφή ω που ορίζεται από τις αγκύλες από τις αγκύλες

$$\{x_1, x_2\} = -x_2, \quad \{y_1, y_2\} = -y_2, \quad \{x_i, y_j\} = 0. \quad (4.34)$$

Δηλαδή

$$\omega = -\frac{1}{x_2} dx_1 \wedge dx_2 - \frac{1}{y_2} dy_1 \wedge dy_2.$$

Η απεικόνιση (4.32) $R_{\alpha, \beta}$ είναι συμπλεκτική απεικόνιση ως προς την ω .

Γενικά οι τετράρητες απεικονίσεις YB που προκύπτουν από την περίπτωση $K(\alpha) = A$, όπου A ένας σταθερός αντιστρέψιμος πίνακας, ταξινομούνται από τις κανονικές μορφές Jordan του μεγιστοβάθμιου όρου του πίνακα Lax.

Θεωρούμε την μη παραμετρική Poisson απεικόνιση YB του θεωρήματος 4.8 $\mathcal{R}_A : \mathbb{X}_A \rightarrow \mathbb{X}_A$, για $K(\alpha) = A = \text{Const.}$ και την αντίστοιχη τετράρητη παραμετρική απεικόνιση YB 4.26,

$$R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Pr \circ \mathcal{R}_A(L_A(\mathbf{x}; \bar{\alpha}), L_A(\mathbf{y}; \bar{\beta})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

με $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$, $\bar{\beta} = (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{K}^2$ και ισχυρό πίνακα Lax

$$L(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = i_A(L_A(\mathbf{x}; \bar{\alpha})) = L_A(\mathbf{x}; \bar{\alpha}) - \zeta A$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση 4.29 παραμένει αναλλοίωτη κάτω από αλλαγή βάσης, δηλαδή

$$P^{-1}L(u_1, u_2; \bar{\alpha})PP^{-1}L(v_1, v_2; \bar{\beta})P = P^{-1}L(y_1, y_2; \bar{\beta})PP^{-1}L(x_1, x_2; \bar{\alpha})P$$

Το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις Casimir εφόσον είναι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, άρα

$$\begin{aligned} f_0(L_A(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1); A) &= f_0(P^{-1}L_A(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1)P; P^{-1}AP) = \alpha_0, \\ f_1(L_A(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1); A) &= f_1(P^{-1}L_A(\mathbf{x}; \alpha_0, \alpha_1)P; P^{-1}AP) = \alpha_1. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να περιορίσουμε την μελέτη μας στις περιπτώσεις των κανονικών μορφών Jordan του σταθερού πίνακα A :

$$i) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad ii) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad iii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι $P^{-1}AP = A'$, όπου A' είναι μία τις μορφές Jordan και

$$R'_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Pr' \circ \mathcal{R}_{A'}(L_{A'}(\mathbf{x}; \bar{\alpha}), L_{A'}(\mathbf{y}; \bar{\beta})),$$

η συμπλεκτική απεικόνιση YB που αντιστοιχεί στον A' με ισχυρό πίνακα Lax

$$L'(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = i_{A'}(L'_{A'}(\mathbf{x}; \bar{\alpha})).$$

Τότε $L(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = PL'(x_1, x_2; \bar{\alpha})P^{-1}$ και

$$R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Pr \circ (P[\mathcal{R}_{A'}(P^{-1}L'_A(\mathbf{x}; \bar{\alpha})P, P^{-1}L'_A(\mathbf{y}; \bar{\beta})P)]P^{-1}),$$

όπου ο πρώτος και ο τελευταίος πολλαπλασιασμός με P και P^{-1} αντίστοιχα γίνεται σε κάθε παράγοντα του καρτεσιανού γινομένου $\Sigma_A(\bar{\alpha}) \times \Sigma_A(\bar{\beta})$.

Αν ενδιαφερόμαστε για πραγματικούς πίνακες Lax πρέπει επίσης να συμπεριλάβουμε την περίπτωση

$$iv) \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \text{για } \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια αυτή είναι μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης ταξινόμησης που περιλαμβάνεται όλες τις τετράρητες απεικονίσεις YB που παρουσιάσαμε.

4.6 Ταξινόμηση

Σε αυτήν την ενότητα ταξινομούμε όλες τις τετράρητες απεικονίσεις YB με διωνυμικούς πίνακες Lax της κατασκευής μας. Ξεκινάμε με κάποιες παρατηρήσεις για την αντιμεταθετικότητα των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων.

Ας υποθέσουμε ότι δύο αντιστρέψιμοι πίνακες A, B αντιμετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή $AB = BA$. Μετά από κάποιους απλούς υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι, εκτός από την προφανή περίπτωση ζευγών διαγωνίων πινάκων, πρέπει

$$(A, B) \in \bigcup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2} \mathcal{K}_{\mu\nu} \times \mathcal{K}_{\mu\nu} \quad \text{ή} \quad (A^T, B^T) \in \bigcup_{(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2} \mathcal{K}_{\mu\nu} \times \mathcal{K}_{\mu\nu},$$

όπου

$$\mathcal{K}_{mn} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ mc_2 & c_1 - nc_2 \end{pmatrix} / c_1, c_2 \in \mathbb{K}, c_1^2 - mc_2^2 - nc_1c_2 \neq 0 \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2$, το σύνολο $\mathcal{K}_{mn}$ αποτελεί υποομάδα της $GL_2(\mathbb{C})$. Οι πίνακες που ανήκουν στο $\mathcal{K}_{mn}$ έχουν ιδιοδιανύσματα που εξαρτώνται μόνο από τα m και n . Πιο συγκεκριμένα για $m \neq 0$ τα ιδιοδιανύσματα είναι τα

$$\xi_1 = \left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 4m}}{2m}, 1 \right), \quad \xi_2 = \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4m}}{2m}, 1 \right),$$

ενώ για $m = 0$ και $n \neq 0$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\xi_1 = (1, 0)$ και $\xi_2 = (-\frac{1}{n}, 1)$. Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις οι πίνακες $A, B \in \mathcal{K}_{mn}$ είναι συγχρόνως διαγωνοποιήσιμοι, δηλαδή διαγωνοποιούνται από τον ίδιο πίνακα μετάβασης. Στην τελευταία περίπτωση για $m = n = 0$ προκύπτει μια διπλή ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\xi = (1, 0)$, αλλά γενικά οι πίνακες $A, B \in \mathcal{K}_{00}$ δεν μετασχηματίζονται στην μορφή Jordan με τον ίδιο πίνακα μετάβασης. Από αυτήν την ανάλυση συμπεραίνουμε ότι ως προς αλλαγή βάσης υπάρχουν μόνο δύο οικογένειες (μη ξένες μεταξύ τους) αντιμεταθετικών ζευγαριών πινάκων:

$$i) A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad ii) A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Θυμίζουμε ότι η κατασκευή απεικονίσεων YB που παρουσιάσαμε απαιτεί την ύπαρξη μιας συνάρτησης $K : \mathbb{I} \rightarrow GL_2(\mathbb{K})$, όπου $\mathbb{I}$ ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{K}^4$, τέτοια ώστε

$$K(\alpha)K(\beta) = K(\beta)K(\alpha) \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{I}.$$

Επειδή η εξίσωση 4.29 παραμένει αναλλοίωτη υπό αλλαγή βάσης καθώς και οι συναρτήσεις Casimir (ακριβώς όπως δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα), μπορούμε να περιορίσουμε την συνάρτηση K στις παραπάνω δύο περιπτώσεις (i) και (ii). Για κάθε μία περίπτωση θα κατασκευάσουμε μία απεικόνιση YB

$$i) K_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Έστω $X - \zeta K_1(\alpha) \in \mathcal{L}^2$. Θέτουμε $f_0(X; K_1(\alpha)) = \alpha_3$, $f_1(X; K_1(\alpha)) = \alpha_4$ και λύνουμε ως προς x_3, x_4 . Αντικαθιστώντας στον πίνακα X έχουμε

$$L_{K_1(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{x_1(\alpha_4 - \alpha_2 x_1) - \alpha_1 \alpha_3}{\alpha_1 x_2} & \frac{\alpha_4 - \alpha_2 x_1}{\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

με $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{K}^4$. Από το θεώρημα 4.9 προκύπτει η τετράρητη παραμετρική απεικόνιση YB

$$R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}^1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = Pr \circ \mathcal{R}_{(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)}^1(L_{K_1(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}), L_{K_1(\beta)}(y_1, y_2; \bar{\beta})) \quad (4.36)$$

με ισχυρό πίνακα Lax

$$L_1(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = L_{K_1(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}) - \zeta K_1(\alpha). \quad (4.37)$$

Η $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}^1$ είναι συμπλεκτική απεικόνιση ως προς την συμπλεκτική μορφή που ορίζεται από τις αγκύλες

$$\{x_1, x_2\} = -\alpha_1 x_2, \{y_1, y_2\} = -\beta_1 y_2, \{x_i, y_j\} = 0 \text{ για } i = 1, 2.$$

$$ii) K_2(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ με } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2.$$

Θέτουμε πάλι $f_0(X; K_2(\alpha)) = \alpha_3$, και $f_1(X; K_2(\alpha)) = \alpha_4$. Λύνοντας ως προς x_3, x_4 παίρνουμε

$$L_{K_2(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{\alpha_4 x_1 - \alpha_1(x_1^2 + \alpha_3)}{\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1} & \frac{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_4 x_2 + \alpha_1 x_1 x_2}{\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2} \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

με $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{K}^4$ και την αντίστοιχη απεικόνιση YB

$$R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}^2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = Pr \circ \mathcal{R}_{(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)}^2(L_{K_2(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}), L_{K_2(\beta)}(y_1, y_2; \bar{\beta})) \quad (4.39)$$

με ισχυρό πίνακα Lax

$$L_2(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = L_{K_1(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}) - \zeta K_2(\alpha). \quad (4.40)$$

Η ανηγμένη συμπλεκτική μορφή σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται από τις αγκύλες

$$\{x_1, x_2\} = \alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2, \quad \{y_1, y_2\} = \beta_2 y_1 - \beta_1 y_2, \quad \{x_i, y_j\} = 0 \text{ για } i = 1, 2.$$

Και στις δύο περιπτώσεις συμβολίσαμε με $\mathcal{R}_{(\alpha_1, \alpha_2)}^i$ την γενική απεικόνιση YB ως προς τις συναρτήσεις K_i για $i = 1, 2$, και με Pr την $Pr = pr_{1,2} \times pr_{1,2}$, όπου $pr_{1,2}$ η προβολή ενός πίνακα στα στοιχεία της πρώτης γραμμής του.

Το τελευταίο βήμα προς την ταξινόμηση είναι να δείξουμε ότι η επιλογή των μεταβλητών ως προς τις οποίες λύνουμε τις συναρτήσεις Casimir για την κατασκευή των πινάκων Lax δεν έχει σημαίνουσα σημασία ως προς την ισοδυναμία απεικονίσεων YB. Για αυτόν τον λόγο ας υποθέσουμε ότι λύνοντας με διαφορετικό τρόπο τις εξισώσεις $f_0(X; K(\alpha)) = \alpha_0$, $f_1(X; K(\alpha)) = \alpha_1$ αναγόμεστε στους δύο πίνακες $L_{K(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha})$, $M_{K(\alpha)}(x'_1, x'_2; \bar{\alpha})$, με $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha_0, \alpha_1)$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} f_0(L_{K(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}); K(\alpha)) &= \alpha_0, \quad f_1(L_{K(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}); K(\alpha)) = \alpha_1 \\ f_0(M_{K(\alpha)}(x'_1, x'_2; \bar{\alpha}); K(\alpha)) &= \alpha_0, \quad f_1(M_{K(\alpha)}(x'_1, x'_2; \bar{\alpha}); K(\alpha)) = \alpha_1. \end{aligned}$$

Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει διαφορομορφισμός (στο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{K}^2$ που ορίζεται από τους περιορισμούς που θέτουμε για την κατασκευή των L και M) $\phi_{\bar{\alpha}} : (x_1, x_2) \mapsto (x'_1, x'_2)$, έτσι ώστε

$$M_{K(\alpha)}(\phi(x_1, x_2); \bar{\alpha}) = L_{K(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha}).$$

Αν συμβολίσουμε με $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$, $R'_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ τις παραμετρικές απεικονίσεις YB με ισχυρούς πίνακες Lax

$$L(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = i_{K_\alpha}(L_{K(\alpha)}(x_1, x_2; \bar{\alpha})), \quad M(x'_1, x'_2; \bar{\alpha}) = i_{K_\alpha}(M_{K(\alpha)}(x'_1, x'_2; \bar{\alpha}))$$

αντίστοιχα, τότε

$$(\phi_{\bar{\alpha}} \times \phi_{\bar{\beta}}) \circ R'_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} = R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \circ (\phi_{\bar{\alpha}} \times \phi_{\bar{\beta}}),$$

δηλαδή σύμφωνα με την πρόταση 3.10 οι δύο απεικονίσεις YB $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ και $R'_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ είναι ισοδύναμες.

Τα συμπεράσματα της παραπάνω ανάλυσης συνοψίζονται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.12. Όλες οι τετράητες απεικονίσεις YB $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ του θεωρήματος 4.9 είναι ισοδύναμες (με την έννοια της πρότασης 3.10) με μία από τις 4.36 και 4.39.

Βέβαια όπως τονίσαμε και προηγουμένως τετράρητες απεικονίσεις με λιγότερες παραμέτρους μπορούν να κατασκευαστούν θέτοντας $\alpha_i = \beta_i = k$ για κάποια $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Έτσι για παράδειγμα η απεικόνιση YB του παραδείγματος 4.11 προκύπτει από την απεικόνιση 4.36 για $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = \alpha_4 = \beta_4 = 1$ και $\alpha_3 = \alpha$, $\beta_3 = \beta$.

Παρατήρηση. Αν ενδιαφερόμαστε αποκλειστικά για πραγματικούς πίνακες Lax πρέπει να συμπεριλάβουμε και την περίπτωση

$$iii) K(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \text{ για } \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

4.7 Εκφυλισμένες απεικονίσεις Yang-Baxter

Εκφυλισμένες απεικονίσεις YB, δηλαδή μη τετράρητες, προκύπτουν όταν ο πίνακας A του πολυωνύμου $X - \zeta A \in \mathcal{L}^2$ είναι μη αντιστρέψιμος. Σε αυτήν την ενότητα δείχνουμε πως μπορούμε να παράγουμε εκφυλισμένες απεικονίσεις YB από όρια των τετράρητων απεικονίσεων που παρουσιάσαμε.

Θεωρούμε μια συνάρτηση $K : \mathbb{I} \rightarrow GL_2(\mathbb{K})$ εξαρτώμενη από μια παράμετρο ε , τέτοια ώστε

$$K(\alpha, \varepsilon)K(\beta, \varepsilon) = K(\beta, \varepsilon)K(\alpha, \varepsilon) \text{ και } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det K(\alpha, \varepsilon) = 0$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ (όπως είδαμε στην ταξινόμηση ο υπόχωρος $\mathbb{I}$ του $\mathbb{K}^4$ μπορεί να ταυτιστεί με τον $\mathbb{K}^2$). Στη συνέχεια κατασκευάζουμε την τετράρητη απεικόνιση YB $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon)$ του θεωρήματος 4.9, Με ισχυρό πίνακα Lax $L_\varepsilon(x_1, x_2; \bar{\alpha})$. Έστω ότι υπάρχει το όριο του $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon)$ για $\varepsilon \rightarrow 0$ με

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon) = \tilde{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}},$$

τότε η $\tilde{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ είναι απεικόνιση YB στο $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ με πίνακα Lax

$$\tilde{L}(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(x_1, x_2; \bar{\alpha}).$$

Η επαγόμενη συμπλεκτική μορφή ορίζεται από το όριο της αντίστοιχης αγκύλης Sklyanin στο $\mathcal{L}_{K(\alpha, \varepsilon)}^2 \times \mathcal{L}_{K(\beta, \varepsilon)}^2$.

Ο πίνακας Lax $\tilde{L}(x_1, x_2; \bar{\alpha})$ της $\tilde{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ δεν είναι απαραίτητα ισχυρός καθώς για την μοναδική λύση της 4.29 ως προς u_i, v_i απαιτήσαμε $\det K(\alpha) \neq 0$. Για τον ίδιο λόγο η $\tilde{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ δεν είναι απαραίτητα τετράρητη. Στη συνέχεια δίνουμε δύο πολύ ενδιαφέρουσες εφαρμογές αυτής της κατασκευής που καταλήγουν σε εκφυλισμένες απεικονίσεις YB.

4.7.1 Γενικευμένη απεικόνιση Adler-Yamilov

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K : \mathbb{K}^2 \rightarrow GL_2(\mathbb{K})$ με $K(\alpha_1, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Οι συναρτήσεις Casimir στην υποπολλαπλότητα $\mathcal{L}_{K(\alpha_1)}^2$ είναι :

$$f_0(X; K(\alpha_1, \varepsilon)) = x_1 x_4 - x_2 x_3, \quad f_1(X; K(\alpha_1, \varepsilon)) = \varepsilon x_1 + \alpha_1 x_4.$$

Αν θέσουμε $f_0(X; K(\alpha_1, \varepsilon)) = \alpha_2$, $f_1(X; K(\alpha_1, \varepsilon)) = \alpha_3$ και λύσουμε ως προς x_1 , x_4 έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2\varepsilon}(\alpha_3 - (\alpha_3^2 - 4\alpha_1\varepsilon(\alpha_2 + x_2x_3))^{1/2}), \\ x_4 &= \frac{1}{2\alpha_1}(\alpha_3 + (\alpha_3^2 - 4\alpha_1\varepsilon(\alpha_2 + x_2x_3))^{1/2}). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον $X - \zeta K(\alpha_1, \varepsilon)$ και θέτοντας $x_2 \mapsto x_1$, $x_3 \mapsto x_2$ προκύπτει ο ισχυρός πίνακας Lax

$$L_\varepsilon(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_3 - (\alpha_3^2 - 4\alpha_1\varepsilon(\alpha_2 + x_1x_2))^{1/2}}{2\varepsilon} - \alpha_1\zeta & x_1 \\ x_2 & \frac{\alpha_3 + (\alpha_3^2 - 4\alpha_1\varepsilon(\alpha_2 + x_1x_2))^{1/2}}{2\alpha_1} - \varepsilon\zeta \end{pmatrix}$$

με $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, που αντιστοιχεί στην τετράρητη απεικόνιση YB του θεωρήματος 4.26,

$$R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}^\varepsilon((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((u_1, u_2), (v_1, v_2)). \quad (4.41)$$

Εδώ u_1 , u_2 , v_1 , v_2 είναι οι αντίστοιχες προβολές pr_2 , pr_3 των πινάκων

$$\begin{aligned} U &= (\alpha_1\varepsilon YX - \alpha_2 K_{\alpha_1} K_{\beta_1})((\alpha_1\varepsilon(YK_{\alpha_1} + K_{\beta_1}X) - \alpha_3 K_{\alpha_1} K_{\beta_1})^{-1} K_{\alpha_1} \\ V &= K_{\alpha_1}^{-1}(YK_{\alpha_1} + K_{\beta_1}X - UK_{\beta_1}), \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $K_{\alpha_1} = K(\alpha_1, \varepsilon)$, $K_{\beta_1} = K(\beta_1, \varepsilon)$ και

$$\begin{aligned} X &= L_{K_{\alpha_1}}^\varepsilon(x_1, x_2; \bar{\alpha}) \equiv L_\varepsilon(x_1, x_2; \bar{\alpha}) + \zeta K(\alpha_1, \varepsilon), \\ Y &= L_{K_{\beta_1}}^\varepsilon(y_1, y_2; \bar{\beta}) \equiv L_\varepsilon(y_1, y_2; \bar{\beta}) + \zeta K(\beta_1, \varepsilon). \end{aligned}$$

Η απεικόνιση 4.41 για $\varepsilon \rightarrow 0$ ανάγεται στην εκφυλισμένη απεικόνιση YB

$$\bar{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}^\varepsilon((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((\bar{u}_1, \bar{u}_2), (\bar{v}_1, \bar{v}_2)), \quad (4.42)$$

όπου

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{\beta_1}{\alpha_1\beta_3}(\alpha_3 y_1 - \frac{\alpha_1\beta_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)x_1}{\alpha_3\beta_3 + \alpha_1\beta_1x_1y_2}), & \bar{u}_2 &= \frac{\alpha_1}{\beta_1} y_2 \\ \bar{v}_1 &= \frac{\beta_1}{\alpha_1} x_1, & \bar{v}_2 &= \frac{\alpha_1}{\beta_1\alpha_3}(\beta_3 x_2 - \frac{\alpha_1\beta_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)y_2}{\alpha_3\beta_3 + \alpha_1\beta_1x_1y_2}). \end{aligned}$$

Αυτή η απεικόνιση είναι συμπλεκτική ως προς την συμπλεκτική δομή που ορίζεται από το όριο για $\varepsilon \rightarrow 0$, των $J_{K_{\alpha_1}}(L_{K_{\alpha_1}}^\varepsilon(x_1, x_2; \bar{\alpha}))$, $J_{K_{\beta_1}}(L_{K_{\beta_1}}^\varepsilon(y_1, y_2; \bar{\beta}))$:

$$\{x_1, x_2\} = \alpha_3, \{y_1, y_2\} = \beta_3, \{x_i, y_j\} = 0, \quad (4.43)$$

δηλαδή $\omega = \frac{1}{\alpha_3} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{1}{\beta_3} dy_1 \wedge dy_2$ και επιδέχεται τον ισχυρό πίνακα Lax

$$\bar{L}(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_3}(\alpha_2 + x_1 x_2) - \alpha_1 \zeta & x_1 \\ x_2 & \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

Αν θέσουμε $\alpha_3 = \beta_3 = 1$ στην $\bar{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$, προκύπτει η τετραπαραμετρική απεικόνιση YB $R'_{(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)}$ με ισχυρό πίνακα Lax τον πίνακα $\bar{L}(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2, 1)$. Η ανηγμένη συμπλεκτική μορφή σε αυτήν την περίπτωση είναι η κανονική. Επιπλέον θέτοντας $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_3 = \beta_3 = 1$, $\alpha_2 = \alpha$ και $\beta_2 = \beta$, η $\bar{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ ανάγεται στην συμπλεκτική (ως προς την κανονική συμπλεκτική μορφή) απεικόνιση YB

$$R_{\alpha, \beta} : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto ((u_1, u_2), (v_1, v_2)), \quad (4.44)$$

όπου

$$u_1 = y_1 - \frac{(a-b)x_1}{1+x_1 y_2}, \quad u_2 = y_2, \quad v_1 = x_1, \quad v_2 = x_2 + \frac{(a-b)y_2}{1+x_1 y_2},$$

με ισχυρό πίνακα Lax

$$L(x_1, x_2; \alpha) = \bar{L}(x_1, x_2; 1, \alpha, 1) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + \alpha - \zeta & x_1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η απεικόνιση 4.44 σχετίζεται με μη γραμμικά συστήματα *Schrödinger* [5, 36] και την καλούμε απεικόνιση *Adler-Yamilov*. Ανάλογα την απεικόνιση 4.42 θα την καλούμε *γενικευμένη απεικόνιση Adler-Yamilov*.

4.7.2 Γενικευμένη απεικόνιση KdV

Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $K(\alpha, \varepsilon) = B(\varepsilon) = B(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Σε αυτήν την περίπτωση οι συναρτήσεις Casimir στο $\mathcal{L}_B^2(\varepsilon)$ είναι

$$f_0(X; B(\varepsilon)) = x_1 x_4 - x_2 x_3, \quad f_1(X; B(\varepsilon)) = \varepsilon(x_1 + x_4) - x_3.$$

Θέτουμε $f_0(X; B(\varepsilon)) = \alpha$, $f_1(X; B(\varepsilon)) = 1$ και λύνουμε ως προς x_2 , x_3 :

$$x_3 = \varepsilon(x_1 + x_4) - 1, \quad x_2 = \frac{x_1 x_4 - \alpha}{\varepsilon(x_1 + x_4) - 1}.$$

Αντικαθιστώντας στο $X - \zeta B(\varepsilon)$ και θέτοντας $x_4 \mapsto x_2$ προκύπτει ο ισχυρός πίνακας Lax

$$L_\varepsilon(x_1, x_2; \alpha) = \begin{pmatrix} x_1 + \varepsilon\zeta & \frac{x_1 x_2 - \alpha}{\varepsilon(x_1 + x_2) - 1} + \zeta \\ \varepsilon(x_1 + x_2) - 1 & x_2 + \varepsilon\zeta \end{pmatrix},$$

της αντίστοιχης τετράρρητης απεικόνιση YB 4.26,

$$R_{\alpha, \beta}^\varepsilon((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((u_1, u_2), (v_1, v_2)).$$

Η αγκύλη Sklyanin στο $\Sigma_{B(\varepsilon)}(\alpha) \times \Sigma_{B(\varepsilon)}(\beta)$ είναι

$$\{x_1, x_4\} = -1 + \varepsilon(x_1 + x_4), \quad \{y_1, y_4\} = -1 + \varepsilon(y_1 + y_4), \quad \{x_i, y_j\} = 0. \quad (4.45)$$

Το όριο για $\varepsilon \rightarrow 0$ μας δίνει την παραμετρική απεικόνιση YB

$$\bar{R}_{\alpha\beta}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{\alpha, \beta}^\varepsilon((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((\bar{u}_1, \bar{u}_2), (\bar{v}_1, \bar{v}_2)),$$

όπου

$$\bar{u}_1 = y_1 + \frac{\alpha - \beta}{x_1 + y_2}, \quad \bar{u}_2 = y_2, \quad \bar{v}_1 = x_1, \quad \bar{v}_2 = x_2 - \frac{\alpha - \beta}{x_1 + y_2} \quad (4.46)$$

Αυτή η απεικόνιση είναι συμπλεκτική ως προς την συμπλεκτική μορφή που επάγεται από το όριο της (4.45), δηλαδή της

$$\omega = -dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2$$

και έχει πίνακα Lax

$$\bar{L}(x_1, x_2; \alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(x_1, x_2; \alpha) = \begin{pmatrix} x_1 & \alpha - x_1 x_2 - \zeta \\ -1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας Lax δεν είναι ισχυρός.

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως μπορεί να αναχθεί η απεικόνιση 4.46 στην διακριτή εξίσωση KdV. Αρχικά εκτελούμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών: $x_2 \mapsto -x_2$, $y_2 \mapsto -y_2$, $\bar{u}_2 \mapsto -\bar{u}_2$, $\bar{v}_2 \mapsto -\bar{v}_2$, άρα

$$\bar{u}_1 = y_1 + \frac{\alpha - \beta}{x_1 - y_2}, \quad \bar{u}_2 = y_2, \quad \bar{v}_1 = x_1, \quad \bar{v}_2 = x_2 + \frac{\alpha - \beta}{x_1 - y_2}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για $y_1 = x_2$, έχουμε $\bar{u}_1 = \bar{v}_2$. Θέτοντας $y_1 = x_2 = f$, $\bar{u}_1 = \bar{v}_2 = f_{12}$, $\bar{v}_1 = x_1 = f_1$, $y_2 = \bar{u}_2 = f_2$ η πρώτη και η τελευταία εξίσωση ανάγονται στην διακριτή εξίσωση KdV

$$(f_{12} - f)(f_1 - f_2) = \alpha - \beta.$$

Για αυτόν τον λόγο καλούμε την απεικόνιση 4.46 *γενικευμένη απεικόνιση KdV*.

4.8 Απεικονίσεις YB μεγαλύτερης διάστασης

Προκειμένου να παράγουμε απεικονίσεις YB μεγαλύτερης διάστασης θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{L}^n$ των $n \times n$ πολυωνυμικών πινάκων της μορφής $X - \zeta A$ εφοδιασμένο με την αντίστοιχη αγκύλη Sklyanin 4.15. Υπάρχουν $n(n+1)$ συναρτήσεις Casimir στο $\mathcal{L}^n$, τα n^2 στοιχεία του πίνακα A και οι n συναρτήσεις f_i , $i = 0, \dots, n-1$ που ορίζονται ως οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p_X^A(\zeta) = \det(X - \zeta A)$,

$$p_X^A(\zeta) = (-1)^n f_n(X; A) \zeta^n + (-1)^{n-1} f_{n-1}(X; A) \zeta^{n-1} + \dots - f_1(X; A) \zeta + f_0(X; A)$$

όπου $f_n(X; A) = \det A$ και $f_0(X; A) = \det X$.

Ανάλογα με την 2×2 περίπτωση θεωρούμε μια συνάρτηση $K : \mathbb{I} \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$, όπου $\mathbb{I}$ ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$, τέτοια ώστε $K(\alpha)K(\beta) = K(\beta)K(\alpha)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$. Συμβολίζουμε με K_α την τιμή $K(\alpha)$ και με $f_i(X; \alpha)$ την $f_i(X; K(\alpha))$, $i = 0, \dots, n$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{I}$.

Πρόταση 4.13. Έστω U και V δύο $n \times n$ πίνακες που ικανοποιούν τις επόμενες δύο συνθήκες

$$i) \quad \det(UK_\beta - YK_\alpha) \neq 0 \text{ (ισοδύναμα } \det(K_\alpha V - K_\beta X) \neq 0) \text{ ή} \\ f_i(U; \alpha) = f_i(X; \alpha) \quad (\text{ισοδύναμα } f_i(V; \beta) = f_i(Y; \beta)),$$

$$ii) \quad (U - \zeta K_\alpha)(V - \zeta K_\beta) = (Y - \zeta K_\beta)(X - \zeta K_\alpha),$$

για $X, Y \in \{Mat(n \times n) / \det \sum_{i=1}^n (-1)^i f_i(X; \alpha) M_{i-1} \neq 0\}$. Τότε

$$U = (-f_0(X; \alpha)I - \sum_{i=1}^n (-1)^i f_i(X; \alpha) N_{i-1}) \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i f_i(X; \alpha) M_{i-1} \right)^{-1} K_\alpha \\ V = K_\alpha^{-1} (YK_\alpha + K_\beta X - U(X, Y)K_\beta), \quad (4.47)$$

όπου M_i, N_i δίνονται από τις αναγωγικές σχέσεις:

$$M_0 = I, \quad N_0 = 0, \quad M_1 = (YK_\alpha + K_\beta X)K_\beta^{-1}K_\alpha^{-1}, \quad N_1 = -YXK_\beta^{-1}K_\alpha^{-1}, \\ M_i = M_1 M_{i-1} + N_{i-1}, \quad N_i = N_1 M_{i-1}, \quad \text{for } i = 2, \dots, n.$$

Απόδειξη. Από την συνθήκη (i) συμπεραίνουμε (όπως και στην 2×2 περίπτωση) ότι οι πίνακες UK_α^{-1} , $K_\beta^{-1}V$ είναι όμοιοι με τους XK_α^{-1} και $K_\beta^{-1}Y$ αντίστοιχα άρα $f_i(U; \alpha) = f_i(X; \alpha)$ και $f_i(V; \beta) = f_i(Y; \beta)$. Το θεώρημα Cayley-Hamilton δηλώνει ότι $p_U^\alpha(UK_\alpha^{-1}) = 0$. Άρα

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i f_i(X; \alpha) (UK_\alpha^{-1})^i = -f_0(X; \alpha)I, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.48)$$

Επιπλέον η συνθήκη (ii) ισοδυναμεί με το σύστημα

$$UV = YX, \quad UK_\beta + K_\alpha V = YK_\alpha + K_\beta X \quad (4.49)$$

και από αυτό προκύπτει

$$(UK_\alpha^{-1})^2 = UK_\alpha^{-1}(YK_\alpha + K_\beta X)K_\beta^{-1}K_\alpha^{-1} - YXK_\beta^{-1}K_\alpha^{-1}. \quad (4.50)$$

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας θέτουμε

$$\tilde{U} = UK_\alpha^{-1}, \quad M_1 = (YK_\alpha + K_\beta X)K_\beta^{-1}K_\alpha^{-1}, \quad N_1 = -YXK_\beta^{-1}K_\alpha^{-1}.$$

Έτσι η εξίσωση 4.50 γράφεται $\tilde{U}^2 = \tilde{U}M_1 + N_1$. Αν θέσουμε $M_0 = I, N_0 = 0$ και ορίσουμε τους M_i, N_i από τις αναγωγικές σχέσεις:

$$M_i = M_1 M_{i-1} + N_{i-1}, \quad N_i = N_1 M_{i-1} \quad \text{για } i = 1, \dots, n, \quad (4.51)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις του $\tilde{U}^k$ ως $\tilde{U}^k = \tilde{U}M_{k-1} + N_{k-1}$ για $k = 1, \dots, n$. Άρα η 4.48 γράφεται:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i f_i(X; \alpha) (\tilde{U}M_{i-1} + N_{i-1}) = -f_0(X; \alpha)I.$$

Τελικά έχουμε

$$\tilde{U} = \left(-f_0(X; \alpha)I - \sum_{i=1}^n (-1)^i f_i(X; \alpha) N_{i-1} \right) \left(\sum_{i=1}^n (-1)^i f_i(X; \alpha) M_{i-1} \right)^{-1},$$

$$U = \tilde{U}K_\alpha \text{ και από το σύστημα 4.49 } V = K_\alpha^{-1}(YK_\alpha + K_\beta X - U(X, Y)K_\beta).$$

□

Παρατήρηση. Από την απόδειξη γίνεται φανερό ότι η πρόταση ισχύει και στην γενικότερη περίπτωση που επάγεται αντικαθιστώντας τους $K(\alpha)$, $K(\beta)$ από ένα ζεύγος πινάκων A, B που αντιμετατίθενται μεταξύ τους.

Επειδή $f_i(U; \alpha) = f_i(X; \alpha)$, για κάθε $i = 0, \dots, n-1$, η απεικόνιση που ορίζεται από την πρόταση 4.13

$$\mathcal{R}_{\alpha, \beta}(X, Y) = (U, V)$$

μπορεί να αναχθεί σε κάθε ισοσταθμική επιφάνεια των συναρτήσεων Casimir:

$$f_i(X; \alpha) = \alpha_i, \quad f_i(X; \beta) = \beta_i, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

σε μια απεικόνιση $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} : \mathbb{K}^{n(n-1)} \times \mathbb{K}^{n(n-1)} \rightarrow \mathbb{K}^{n(n-1)} \times \mathbb{K}^{n(n-1)}$, με παραμέτρους $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$, $\bar{\beta} = (\beta, \beta_0, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{I} \times \mathbb{K}^n$.

Είναι φανερό ότι η πρόταση δεν μας εξασφαλίζει ότι η λύση που παρουσιάζεται ικανοποιεί την κβαντική εξίσωση YB. Σε χαμηλές διαστάσεις για συγκεκριμένες επιλογές της συνάρτησης K αυτό επιβεβαιώνεται με απευθείας υπολογισμό. Εικάζουμε ότι αυτό είναι αληθές για κάθε διάσταση. Για να αποδειχτεί πρέπει να αναπαραγοντοποιήσουμε το τριπλό γινόμενο όπως στη περίπτωση 2×2 αλλά οι υπολογισμοί γίνονται τώρα εξαιρετικά πολύπλοκοι.

4.8.1 Τετράρρητες απεικονίσεις YB επί του $\mathbb{K}^4 \times \mathbb{K}^4$ με 3×3 πίνακες Lax

Στην πολλαπλότητα $\mathcal{L}^3$ η απεικόνιση της 4.13, $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}(X, Y) = (U, V)$, ανάγεται στις ισοσταθμικές επιφάνειες των συναρτήσεων Casimir σε μια απεικόνιση στο $\mathbb{K}^6 \times \mathbb{K}^6$. Περαιτέρω αναγωγή στα τετραδιάστατα συμπλεκτικά φύλλα του $\mathcal{L}^3$ μπορεί να μας προμηθεύσει με απεικονίσεις YB επί του $\mathbb{K}^4 \times \mathbb{K}^4$. Παρουσιάζουμε αυτήν τη διαδικασία στα επόμενα παραδείγματα για $K_\alpha = K_\beta = I$.

Έστω $L(\zeta) = A - \zeta I$, με $A = [a_{ij}]$, ένα γενόσημο στοιχείο του $\mathcal{L}_I^3$. Σε αυτήν την περίπτωση η αγκύλη Sklyanin είναι

$$\{L(\zeta) \otimes L(\eta)\} = \left[\frac{r}{\zeta - \eta}, L(\zeta) \otimes L(\eta) \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & 0 & a_{33} - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{11} - a_{22} & -a_{23} & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & -a_{21} & 0 & -a_{23} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & 0 & -a_{21} & a_{33} - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{11} - a_{33} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{21} & -a_{31} & -a_{32} & a_{22} - a_{33} & 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 & a_{32} & -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Στη γενόσημη περίπτωση η τάξη του πίνακα 4.52 είναι έξι. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε 4-διάστατες συμπλεκτικές υποπολλαπλότητες της $\mathcal{L}_I^3$. Για αυτόν το λόγο αναζητάμε τις περιπτώσεις που η τάξη του πίνακα ανάγεται σε τέσσερα.

Συμβολίζουμε με $m((i_1, \dots, i_6), (j_1, \dots, j_6))$, με $i_k, j_k \in \{1, \dots, 9\}$ για $k = 1, \dots, 6$. την 6×6 υποορίζουσα του πίνακα 4.52 που αποτελείται από τις $i_1, \dots, i_6$ γραμμές και $j_1, \dots, j_6$ στήλες. Χρησιμοποιώντας αυτόν το συμβολισμό αποδεικνύουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.14. Το σύστημα $m((i_1, \dots, i_6), (j_1, \dots, j_6)) = 0$ για κάθε $i_k, j_k \in \{1, \dots, 9\}$ με $k = 1, \dots, 6$ ² και για $a_{13}, a_{23} \neq 0$ έχει μοναδική λύση ως προς a_{11}, a_{31}, a_{32} την

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}} + a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}, \quad a_{31} = \frac{a_{21}(a_{12}a_{23} + a_{13}(a_{33} - a_{22}))}{a_{13}a_{23}}, \\ a_{32} &= \frac{a_{12}(a_{12}a_{23} + a_{13}(a_{33} - a_{22}))}{a_{13}^2}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στον $A - \zeta I$ η τάξη της δομής Poisson 4.52 ανάγεται σε τέσσερα. Επιπλέον αν θέσουμε $f_0(A; I) = \alpha_0$, $f_1(A; I) = \alpha_1$ και $f_2(A; I) = \alpha_2$, τότε το σημείο $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ ανήκει στην επιφάνεια:

$$4\alpha_0\alpha_2^3 - \alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1^3 - 18\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 27\alpha_0^2 = 0 \quad (4.54)$$

Απόδειξη. Αν επιλέξουμε τις υποορίζουσες

$$\begin{aligned} m_1 &= m((1, 2, 3, 4, 5, 6), (3, 4, 6, 7, 8, 9)), \\ m_2 &= m((1, 2, 3, 4, 6, 7), (3, 4, 5, 6, 8, 9)), \\ m_3 &= m((1, 2, 3, 5, 6, 9), (1, 2, 3, 5, 6, 9)), \end{aligned}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} m_1 &= -(a_{21}a_{13}^2 - a_{11}a_{23}a_{13} + a_{22}a_{23}a_{13} - a_{12}a_{23}^2)^2, \\ m_2 &= -(a_{23}a_{12}^2 - a_{13}a_{22}a_{12} + a_{13}a_{33}a_{12} - a_{13}^2a_{32})^2, \\ m_3 &= -(a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32})^2. \end{aligned}$$

Το σύστημα $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ είναι γραμμικό ως προς a_{11}, a_{31}, a_{32} και για $a_{13}, a_{23} \neq 0$ επιδέχεται την μοναδική λύση 4.53. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές η τάξη του 4.52 γίνεται

²αρκεί να θεωρήσουμε $i_1 < \dots < i_6, j_1 < \dots < j_6$, με $i_k, j_k \in \{1, \dots, 9\}$ για $k = 1, \dots, 6$

Σχήμα 4.1: Η επιφάνεια $4\alpha_0\alpha_2^3 - \alpha_1^2\alpha_2^2 + 4\alpha_1^3 - 18\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 27\alpha_0^2 = 0$ στον $\mathbb{R}^3$

τέσσερα και οι συναρτήσεις Casimir

$$\begin{aligned} f_0(A; I) &= \frac{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})^2 (a_{21}a_{13}^2 + a_{23}a_{33}a_{13} + a_{12}a_{23}^2)}{a_{13}^3 a_{23}} \\ f_1(A; I) &= \frac{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) (2a_{21}a_{13}^2 + a_{23}(a_{22} + 2a_{33})a_{13} + a_{12}a_{23}^2)}{a_{13}^2 a_{23}} \\ f_2(A; I) &= \frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}} + 2a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} + a_{33}. \end{aligned}$$

οι οποίες ικανοποιούν την 4.54. □

Είναι αξιοσημείωτο ότι δύο καμπύλες της επιφάνειας 4.54 παράγουν απεικονίσεις YB που σχετίζονται με γνωστές ολοκληρώσιμες εξισώσεις.

Οικογένεια συμπλεκτικών απεικόνιση YB στο $\mathbb{K}^4 \times \mathbb{K}^4$

Θεωρούμε τον $L(\zeta) = A - \zeta I \in \mathcal{L}_I^3$, όπου a_{11} , a_{31} , a_{32} οι τιμές 4.53. Προκειμένου να περιοριστούμε στην ισοσταθμική επιφάνεια των συναρτήσεων Casimir θέτουμε $f_2(A; I) = \alpha_2$, $f_1(A; I) = \alpha_1$ ($f_0(A; I)$ θα είναι επίσης σταθερή αφού η 4.54 πρέπει να ικανοποιείται). Λύνοντας ως προς a_{22} και a_{33} παίρνουμε

$$\begin{aligned} a_{22} &= \frac{\alpha_2}{3} + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \pm \frac{1}{3}\sqrt{\alpha_2^2 - 3\alpha_1}, \\ a_{33} &= \frac{\alpha_2}{3} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \mp \frac{2}{3}\sqrt{\alpha_2^2 - 3\alpha_1}. \end{aligned}$$

Χάριν απλότητας αλλάζουμε τις παραμέτρους θέτοντας

$$c_1 = \frac{\alpha_2}{3} \quad \text{και} \quad c_2 = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\alpha_2^2 - 3\alpha_1},$$

άρα $a_{22} = c_1 + c_2 + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}$, $a_{33} = c_1 - 2c_2 - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}$. Αντικαθιστώντας στον $A - \zeta I$, προκύπτει η διπαραμετρική οικογένεια πινάκων

$$L(A; \mathbf{c}) = L_I(A; \mathbf{c}) - \zeta I,$$

όπου $L_I(A; \mathbf{c}) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}} + c_1 + c_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} + c_1 + c_2 & a_{23} \\ -\frac{a_{13}a_{21}^2}{a_{23}^2} - \frac{3c_2a_{21}}{a_{23}} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{13}} & -\frac{a_{23}a_{12}^2}{a_{13}^2} - \frac{3c_2a_{12}}{a_{13}} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{23}} & c_1 - 2c_2 - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \end{pmatrix}$$

και $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$. Η ανηγμένη συμπλεκτική μορφή ορίζεται από τις αγκύλες Poisson

$$\{a_{12}, a_{21}\} = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}}, \quad \{a_{12}, a_{23}\} = -a_{13}, \quad \{a_{13}, a_{21}\} = a_{23}$$

και $\{a_{12}, a_{13}\} = \{a_{13}, a_{23}\} = \{a_{21}, a_{23}\} = 0$, δηλαδή

$$\omega = \frac{1}{a_{23}} da_{13} \wedge da_{21} - \frac{1}{a_{13}} da_{12} \wedge da_{23} + \left(\frac{a_{12}}{a_{13}^2} - \frac{a_{21}}{a_{23}^2} \right) da_{13} \wedge da_{23}. \quad (4.55)$$

Αν εκτελέσουμε τον μετασχηματισμό

$$a_{13} = X_1, \quad a_{23} = X_2, \quad a_{21} = -x_1 X_2, \quad a_{12} = -x_2 X_1 \quad (4.56)$$

τότε ο πίνακας $L_I(A; c)$ μετασχηματίζεται στον πίνακα

$$L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - x_1 X_1 & -X_1 x_2 & X_1 \\ -x_1 X_2 & c_1 + c_2 - x_2 X_2 & X_2 \\ -x_1(x_1 X_1 + x_2 X_2 - 3c_2) & -x_2(x_1 X_1 + x_2 X_2 - 3c_2) & c_1 - 2c_2 + x_1 X_1 + x_2 X_2 \end{pmatrix}$$

με $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$.

Πρόταση 4.15. $H \Sigma_I(c_1, c_2) = \{L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) - \zeta I \mid \mathbf{x}, \mathbf{X} \in \mathbb{K}^2\}$ είναι διπαραμετρική συμπλεκτική υποπολλαπλότητα της $\mathcal{L}_I^3$. Η ανηγμένη αγκύλη Sklyanin ορίζει στην $\Sigma_I(c_1, c_2)$ την κανονική συμπλεκτική μορφή

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dX_1 + dx_2 \wedge dX_2.$$

Απόδειξη. Από τις αγκύλες Poisson

$$\begin{aligned}\{a_{12}, a_{21}\} &= \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} - \frac{a_{13}a_{21}}{a_{23}}, \quad \{a_{12}, a_{23}\} = -a_{13}, \quad \{a_{13}, a_{21}\} = a_{23}, \\ \{a_{12}, a_{13}\} &= \{a_{13}, a_{23}\} = \{a_{21}, a_{23}\} = 0\end{aligned}$$

και τον μετασχηματισμό 4.56 οι αγκύλες των συντεταγμένων στην υποπολλαπλότητα $\Sigma_I(c_1, c_2) = \{L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) - \zeta I \mid \mathbf{x}, \mathbf{X} \in \mathbb{K}^2\}$ είναι

$$\{x_1, X_1\} = 1, \quad \{x_2, X_2\} = 1, \quad \{x_i, x_j\} = \{X_i, X_j\} = \{x_i, X_j\} = 0 \text{ για } i \neq j,$$

οι οποίες ορίζουν την κανονική συμπλεκτική μορφή

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dX_1 + dx_2 \wedge dX_2.$$

Μπορεί να επαληθευτεί ότι η απεικόνιση επιστροφής της ω_0 από την συνάρτηση

$$f(a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}) = \left(-\frac{a_{21}}{a_{23}}, -\frac{a_{12}}{a_{13}}, a_{13}, a_{23}\right) = (x_1, x_2, X_1, X_2)$$

είναι η συμπλεκτική μορφή ω (4.55). □

Από τις σχέσεις 4.47 για $K_\alpha = K_\beta = I$,

$$X = L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \alpha_1, \alpha_2) \text{ και } Y = L_I(\mathbf{y}, \mathbf{Y}; \beta_1, \beta_2),$$

προκύπτει:

$$\begin{aligned}U &= (YX(3\alpha_1 I - Y - X) - (\alpha_1 - 2\alpha_2)(a_1 + a_2)^2 I)((3\alpha_1 I - Y - X) \cdot \\ &\quad (Y + X) + YX - 3(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)I)^{-1} \text{ και} \\ V &= Y + X - U.\end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με U_{ij}, V_{ij} τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων U και V έχουμε την παρακάτω πρόταση

Πρόταση 4.16. Η απεικόνιση $R_{((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))} :$

$$((x_1, x_2, X_1, X_2), (y_1, y_2, Y_1, Y_2)) \mapsto ((u_1, u_2, U_1, U_2), (v_1, v_2, V_1, V_2))$$

όπου

$$\begin{aligned}U_1 &= U_{13}, \quad U_2 = U_{23}, \quad u_1 = -\frac{U_{21}}{U_{23}}, \quad u_2 = -\frac{U_{12}}{U_{13}}, \\ V_1 &= V_{13}, \quad V_2 = V_{23}, \quad v_1 = -\frac{V_{21}}{V_{23}}, \quad v_2 = -\frac{V_{12}}{V_{13}}\end{aligned}$$

είναι συμπλεκτική παραμετρική απεικόνιση YB, ως προς την κανονική συμπλεκτική μορφή $dx_1 \wedge dX_1 + dx_2 \wedge dX_2 + dy_1 \wedge dY_1 + dy_2 \wedge dY_2$, με ισχυρό πίνακα Lax

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) = L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) - \zeta I. \quad (4.57)$$

Απόδειξη. Με απευθείας υπολογισμό επαληθεύουμε ότι η απεικόνιση ικανοποιεί την χβαντική εξίσωση YB. Επιπλέον από την πρόταση 4.13 συμπεραίνουμε ότι τα u_i , U_i , v_i , V_i , $i = 1, 2$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} & L(u_1, u_2, U_1, U_2; \alpha_1, \alpha_2) L(v_1, v_2, V_1, V_2; \beta_1, \beta_2) \\ &= L(y_1, y_2, Y_1, Y_2; \beta_1, \beta_2) L(x_1, x_2, X_1, X_2; \alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

□

Η αναλυτική έκφραση της απεικόνισης $R_{((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))}$ της πρότασης 4.16 είναι

$$\begin{aligned} (u_1, u_2) &= (y_1, y_2) - \frac{\alpha_1 - \beta_1 - 2(\alpha_2 - \beta_2)}{D} (x_1 - y_1, x_2 - y_2), \\ (v_1, v_2) &= (x_1, x_2) + \frac{\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2}{D} (x_1 - y_1, x_2 - y_2), \end{aligned}$$

με $D = 2\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 + y_1 X_1 + y_2 X_2 - x_1 X_1 - x_2 X_2$, και

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{(x_1 - v_1)X_1 + (y_1 - v_1)Y_1}{u_1 - v_1}, \quad U_2 = \frac{(x_2 - v_2)X_2 + (y_2 - v_2)Y_2}{u_2 - v_2}, \\ V_1 &= \frac{(x_1 - u_1)X_1 + (y_1 - u_1)Y_1}{v_1 - u_1}, \quad V_2 = \frac{(x_2 - u_2)X_2 + (y_2 - u_2)Y_2}{v_2 - u_2}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε πώς η απεικόνιση YB της τελευταίας πρότασης ανάγεται στις απεικονίσεις Boussinesq και Goncharenko–Veselov.

Η Boussinesq YB απεικόνιση ($\alpha_0 = c^3$, $\alpha_1 = 3c^2$, $\alpha_2 = 3c$)

Θέτοντας $c_2 = 0$, $c_1 = c$ στον 4.57 προκύπτει ο πίνακας Lax

$$L^B(\mathbf{x}, \mathbf{X}; c) = \begin{pmatrix} c - \zeta - x_1 X_1 & -X_1 x_2 & X_1 \\ -x_1 X_2 & c - \zeta - x_2 X_2 & X_2 \\ -x_1(x_1 X_1 + x_2 X_2) & -x_2(x_1 X_1 + x_2 X_2) & c - \zeta + x_1 X_1 + x_2 X_2 \end{pmatrix}$$

με $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$. Σε αυτήν την περίπτωση για

$$X = L_I^B(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \alpha) \equiv L^B(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \alpha) + \zeta I, \quad Y = L_I^B(\mathbf{y}, \mathbf{Y}; \beta) \equiv L^B(\mathbf{y}, \mathbf{Y}; \beta) + \zeta I$$

οι συναρτήσεις Casimir δίνουν

$$f_0(X; I) = \alpha^3, \quad f_1(X; I) = 3\alpha^2, \quad f_2(X; I) = 3\alpha, \quad f_3(X; I) = 1.$$

Η καμπύλη $(\alpha^3, 3\alpha^2, 3\alpha)$ απεικονίζεται στο σχήμα 4.1 με μαύρο χρώμα.

Η αντίστοιχη απεικόνιση $R_{\alpha, \beta}^B$ με ισχυρό πίνακα Lax $L^B(\mathbf{x}, \mathbf{X}; c)$ επάγεται από την απεικόνιση $R_{((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))}$ της πρότασης 4.16, δηλαδή $R_{\alpha, \beta}^B = R_{((\alpha, 0), (\beta, 0))}$. Συνεπώς

$$R_{\alpha, \beta}^B((\mathbf{x}, \mathbf{X}), (\mathbf{y}, \mathbf{Y})) = \left(\left(-\frac{U_{21}}{U_{23}}, -\frac{U_{12}}{U_{13}}, U_{13}, U_{23} \right), \left(-\frac{V_{21}}{V_{23}}, -\frac{V_{12}}{V_{13}}, V_{13}, V_{23} \right) \right),$$

με U_{ij}, V_{ij} τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων

$$U = (3\alpha YX - YX(Y + X) - \alpha^3 I)(3\alpha(Y + X) - (Y + X)^2 + YX - 3\alpha^2 I)^{-1}$$

και $V = Y + X - U$.

Η απεικόνιση Goncharenko–Veselov ($\alpha_0 = -c^3, \alpha_1 = -c^2, \alpha_2 = c$)

Με παρόμοιο τρόπο θέτοντας $c_1 = \frac{c}{3}$ και $c_2 = \frac{2c}{3}$ προκύπτει η απεικόνιση Yang-Baxter

$$R_{\alpha, \beta}^{GV}((\mathbf{x}, \mathbf{X}), (\mathbf{y}, \mathbf{Y})) = R_{((\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}), (\frac{\beta}{3}, \frac{2\beta}{3}))}((\mathbf{x}, \mathbf{X}), (\mathbf{y}, \mathbf{Y}))$$

(εδώ $U = (\alpha YX - YX(Y + X) + \alpha^3 I)(\alpha(Y + X) - (Y + X)^2 + YX + \alpha^2 I)^{-1}$) με ισχυρό πίνακα Lax

$$L^{GV}(\mathbf{x}, \mathbf{X}; c)$$

$$= \begin{pmatrix} c - \zeta - x_1 X_1 & -X_1 x_2 & X_1 \\ -x_1 X_2 & c - \zeta - x_2 X_2 & X_2 \\ -x_1(x_1 X_1 + x_2 X_2 - 2c) & -x_2(x_1 X_1 + x_2 X_2 - 2c) & x_1 X_1 + x_2 X_2 - c - \zeta \end{pmatrix}$$

Η καμπύλη $(-c^3, -c^2, c)$ απεικονίζεται με τη διακεκομμένη καμπύλη στο σχήμα 4.1.

Οι απεικονίσεις $R_{\alpha, \beta}^B$ και $R_{\alpha, \beta}^{GV}$ είναι συμπλεκτικές ως προς την κανονική συμπλεκτική μορφή στο $\mathbb{K}^4 \times \mathbb{K}^4$

$$dx_1 \wedge dX_1 + dx_2 \wedge dX_2 + dy_1 \wedge dY_1 + dy_2 \wedge dY_2.$$

Στην εργασία [20], οι Goncharenko και Veselov παρουσίασαν μια απεικόνιση YB που προκύπτει από την αλληλεπίδραση δύο σολιτονικών λύσεων της εξίσωσης KdV σε μορφή πινάκων

και ισχυρίστηκαν ότι επιδέχεται πίνακα Lax της μορφής:

$$A(\xi, \eta; \lambda) = I + \frac{2\lambda}{\zeta - \lambda} \frac{\xi \otimes \eta}{(\xi, \eta)}, \quad (4.58)$$

για τα n -διάστατα διανύσματα ξ και η . Εδώ λ είναι η παράμετρος YB. Ουσιαστικά τα ξ και η ανήκουν στο $\mathbb{CP}^{n-1}$, αφού οι $\xi \mapsto \mu\xi$ και $\eta \mapsto \nu\eta$ διατηρούν αναλλοίωτη την 4.58. Αν και η απεικόνιση στην περίπτωση $n = 2$ είναι αρκετά τετριμμένη, είναι αρκετά ενδιαφέρουσα για μεγαλύτερες διαστάσεις.

Αρχικά παρατηρούμε ότι πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα 4.58 με $\zeta - \lambda$ και αλλάζοντας το ζ με $-\zeta$ εξάγουμε τον ισοδύναμο πίνακα Lax

$$B(\xi, \eta; \lambda) = \lambda(2 \frac{\xi \otimes \eta}{(\xi, \eta)} - I) - \zeta I$$

για την ίδια απεικόνιση YB.

Έστω $n = 3$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ και $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Θεωρώντας το αφινικό μέρος του $\mathbb{CP}^2$ έχουμε $\xi = (\xi_1, \xi_2, 1)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, 1)$ και εκτελώντας τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό $(\eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2,) \mapsto (x_1, x_2, X_1, X_2)$:

$$x_1 = -\eta_1, \quad x_2 = -\eta_2, \quad X_1 = \frac{2\alpha\xi_1}{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + 1}, \quad X_2 = \frac{2\alpha\xi_2}{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + 1},$$

ο πίνακας $B(\xi, \eta; \lambda)$ μετασχηματίζεται στον πίνακα Lax $L^{GV}(\mathbf{x}, \mathbf{X}; -\lambda)$.

Παρατηρήσεις Εν γένει μία απεικόνιση YB δεν επιδέχεται μοναδική αναπαράσταση Lax. Για παράδειγμα, εύκολα επαληθεύεται ότι η πολυωνυμική εξίσωση

$$(U - \zeta A)(V - \zeta B) = (Y - \zeta B)(X - \zeta A)$$

είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$M(U; A)M(V; B) = M(Y; B)M(X; A),$$

όπου $M(X; A)$ ο πίνακας “μπλοκ”:

$$M(X; A) = \begin{pmatrix} X & A & 0 \\ 0 & X & A \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς οι πίνακες Lax που θεωρήσαμε μπορούν να αναχθούν σε μια τέτοια ανάλογη μορφή ανεξάρτητη από φασματικές παραμέτρους. Έτσι, ο 3×3 φασματικός πίνακας Lax

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) = L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) - \zeta I.$$

της απεικόνισης YB της πρότασης 4.16, είναι ισοδύναμος με τον 9×9 πίνακα Lax

$$M(L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}); I) = \begin{pmatrix} L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) & I & 0 \\ 0 & L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) & I \\ 0 & 0 & L_I(\mathbf{x}, \mathbf{X}; \mathbf{c}) \end{pmatrix}.$$

Κεφάλαιο 5

Ολοκληρώσιμα πλέγματα

Η σύνδεση μεταξύ συνολοθεωρητικών λύσεων της κβαντικής εξίσωσης Yang-Baxter και ολοκληρώσιμων απεικονίσεων έχει μελετηθεί τα τελευταία χρόνια από πολλούς ερευνητές. Πρώτος ο Veselov στις εργασίες [53, 54] απέδειξε ότι για κάθε τέτοια λύση, η οποία επιδέχεται αναπαράσταση Lax, υπάρχει μια οικογένεια απεικονίσεων (transfer maps) οι οποίες διατηρούν αναλλοίωτο το φάσμα του αντίστοιχου μονόδρομου πίνακα.

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τη γενικότερη περίπτωση απεικονίσεων (όχι κατ' ανάγκη Yang-Baxter) που επιδέχονται ζεύγη πινάκων Lax L, M . Με τη θεώρηση περιοδικών προβλημάτων αρχικών τιμών σε διδιάστατα πλέγματα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε τέτοια απεικόνιση μια οικογένεια ολοκληρώσιμων απεικονίσεων. Θα επικεντρώσουμε την μελέτη μας στο λεγόμενο “κλιμακωτό” πρόβλημα αρχικών τιμών και θα αποδείξουμε το ανάλογο συμπέρασμα με εκείνο του Veselov για αυτήν την περίπτωση. Κατ' αυτόν τον τρόπο, για $L = M$, μπορούμε να μελετήσουμε την ολοκληρωσιμότητα των απεικονίσεων YB που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

5.1 Ζεύγη Lax και ολοκληρώσιμες απεικονίσεις

Θεωρούμε την απεικόνιση S

$$S : ((x, \alpha), (y, \beta)) \mapsto ((u, \alpha), (v, \beta)) = (u(x, \alpha, y, \beta), v(x, \alpha, y, \beta)) \quad (5.1)$$

όπου τα x, y ανήκουν σε ένα σύνολο $\mathcal{X}$ και οι παράμετροι $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^n$. Όπως και στις απεικονίσεις YB συμβολίζουμε την τιμή $S((x, \alpha), (y, \beta))$ με $S_{\alpha, \beta}(x, y)$ και θεωρούμε την αντίστοιχη παραμετρική απεικόνιση $S_{\alpha, \beta} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

Ανάλογα αναπαριστούμε την $S_{\alpha,\beta}(x, y)$ στις πλευρές ενός στοιχειώδους τετράπλευρου όπως στο σχήμα 5.1.

Σχήμα 5.1: Αναπαράσταση της $S_{\alpha,\beta}$ σε τετράπλευρο

Ορισμός 5.1. Το διατεταγμένο ζεύγος πινάκων $(L(x, \alpha, \zeta), M(x, \alpha, \zeta))$ που εξαρτάται από το σημείο $x \in \mathcal{X}$, την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{K}^n$ και την “φασματική” παράμετρο ζ καλείται ζεύγος Lax για την παραμετρική απεικόνιση $S_{\alpha,\beta}$, αν

$$L(u, \alpha, \zeta)M(v, \beta, \zeta) = M(y, \beta, \zeta)L(x, \alpha, \zeta). \quad (5.2)$$

Επιπλέον, αν η εξίσωση (5.2) είναι ισοδύναμη με $(u, v) = S_{\alpha,\beta}(x, y)$ τότε καλούμε το ζεύγος $(L(x, \alpha, \zeta), M(x, \alpha, \zeta))$ ισχυρό ζεύγος Lax.

Συνήθως παραλείπουμε την φασματική παράμετρο και συμβολίζουμε το ζεύγος Lax $(L(x, \alpha, \zeta), M(x, \alpha, \zeta))$ με $(L(x; \alpha), M(x; \alpha))$.

Παρατήρηση. Είναι εποικοδομητικό να σκεφτόμαστε το ζεύγος Lax ως συναρτήσεις $L, M : \mathcal{X} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \text{Mat}(n \times n)$. Υπό αυτήν την έννοια αν οι συναρτήσεις L, M ταυτίζονται και η απεικόνιση $S_{\alpha,\beta}$ είναι Yang-Baxter, ο πίνακας $L(x; \alpha) = M(x; \alpha)$ είναι ο πίνακας Lax της $S_{\alpha,\beta}$ που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Έχοντας υπ’ όψιν την τεταπλευρική αναπαράσταση μιας απεικόνισης του σχήματος 5.1, μπορούμε να θεωρήσουμε προβλήματα αρχικών τιμών σε πλέγματα τετραπλεύρων έτσι ώστε να μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά οι αντίστοιχες τιμές σε κάθε στοιχειώδες τετράπλευρο του πλέγματος. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να τεθεί ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα αρχικών τιμών σε ένα πλέγμα. Τρεις από αυτούς παρουσιάζονται στο σχήμα 5.2.

Εμείς θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στο κανονικό περιοδικό κλιμακωτό πρόβλημα αρχικών τιμών, ανάλογο με αυτό που εμφανίζεται στην εργασία [34] για ολοκληρώσιμες εξισώσεις διαφορών σε πλέγματα.

Σχήμα 5.2: Προβλήματα αρχικών τιμών σε δισδιάστατο πλέγμα

Έστω $S_{\alpha,\beta}$ μια απεικόνιση με ζεύγος Lax $(L(x;\alpha), M(x;\alpha))$. Θέτουμε αρχικές τιμές $x_1, \dots, x_n$ και $y_1, \dots, y_n$ στις πλευρές μιας “κλίμακας” όπως στο σχήμα 5.3, με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$$x_{n+1} = x_1, \quad y_{n+1} = y_1.$$

Η παράμετρος α_i προσαρτάται στην πλευρά με την τιμή x_i και η β_i στην πλευρά με την τιμή y_i , για $i = 1, \dots, n$. Με διαδοχικές εφαρμογές της απεικόνισης S_{α_i, β_i} στις πλευρές με τις αρχικές τιμές υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές στο επόμενο επίπεδο του πλέγματος σύμφωνα με το σχήμα 5.3. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία υπολογίζονται οι επόμενες τιμές κ.ο.κ. Συμβολίζουμε με (x'_i, y'_i) τις τιμές $S_{\alpha_i, \beta_i}(x_i, y_i)$ για $i = 1, \dots, n$. Οι k -τονούμενες μεταβλητές $x_i^{(k)}$ και $y_i^{(k)}$ συμβολίζουν τις τιμές που προέρχονται από την σχέση

$$(x_i^{(k)}, y_j^{(k)}) = S_{\alpha_i, \beta_j}(x_i^{(k-1)}, y_j^{(k-1)})$$

με $j \equiv i + k - 1 \pmod{n}$.

Για κάθε n -περιοδικό κλιμακωτό πρόβλημα αρχικών τιμών ορίζουμε την απεικόνιση μεταφοράς,

$$T_n : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (x'_1, \dots, x'_n, y'_2, \dots, y'_n, y'_1) \quad (5.3)$$

και την απεικόνιση της k -μεταφοράς,

$$T_n^k : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \underbrace{y_{d+1}^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}}_{n-d}, \underbrace{y_1^{(k)}, \dots, y_d^{(k)}}_d), \quad (5.4)$$

με $d \equiv k \pmod{n}$ και $T_n^1 = T_n$. Παρατηρούμε ότι

$$T_n^n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}).$$

Σχήμα 5.3: Απεικονίσεις μεταφοράς στο πλέγμα

Ορίζουμε επίσης τον μονόδρομο πίνακα

$$M_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{\widehat{n}} M(y_i; \beta_i) L(x_i; \alpha_i), \quad (5.5)$$

όπου το $\widehat{n}$ συμβολίζει ότι οι παράγοντες $M(y_i; \beta) L(x_i; \alpha)$ στο γινόμενο τοποθετούνται από δεξιά προς αριστερά.

Για παράδειγμα, στο 1-περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών στο πλέγμα η απεικόνιση μεταφοράς είναι $T_1(x, y) = (x', y') = S_{\alpha, \beta}(x, y)$, με μονόδρομο πίνακα $M_1(x, y) = M(y; \beta) L(x; \alpha)$, ενώ για το 2-περιοδικό πρόβλημα,

$$T_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x'_1, x'_2, y'_2, y'_1),$$

όπου $(x'_i, y'_i) = S_{\alpha_i, \beta_i}(x_i, y_i)$, για $i = 1, 2$. Ο πίνακας μονοδρομίας σε αυτήν την περίπτωση είναι $M_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = M(y_2; \beta_2) L(x_2; \alpha_2) M(y_1; \beta_1) L(x_1; \alpha_1)$.

Από την επόμενη πρόταση προκύπτουν τα πρώτα ολοκληρώματα των απεικονίσεων μεταφοράς.

Πρόταση 5.1. *Η απεικόνιση μεταφοράς διατηρεί αναλλοίωτο το φάσμα του μονόδρομου πίνακα.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της απεικόνισης μεταφοράς και του μονόδρομου πίνακα έχουμε,

$$M_n(T_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)) M(y'_1; \beta_1) = M(y'_1; \beta_1) \prod_{i=1}^{\widehat{n}} L(x'_i; \alpha_i) M(y'_i; \beta_i).$$

Επειδή το $(L(x; \alpha), M(x; \alpha))$ είναι ζεύγος Lax για την $(x'_i, y'_i) = S_{\alpha_i, \beta_i}(x_i, y_i)$ πρέπει

$$L(x'_i; \alpha_i) M(y'_i; \beta_i) = M(y_i; \beta_i) L(x_i; \alpha_i)$$

άρα

$$\begin{aligned} M_n(T_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n))M(y'_1; \beta_1) &= M(y'_1; \beta_1) \prod_{i=1}^n M(y_i; \beta_i) L(x_i; \alpha_i) \\ &= M(y'_1; \beta_1) M_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

$$\text{ή } M_n(T_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)) = M(y'_1; \beta_1) M_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) M^{-1}(y'_1; \beta_1). \quad \square$$

Αντίστοιχα, η πρόταση 5.1 ισχύει για κάθε απεικόνιση k -μεταφοράς. Γίνεται λοιπόν αντιληπτό ότι από το φάσμα του μονόδρομου πίνακα προκύπτουν πρώτα ολοκληρώματα της απεικόνισης μεταφοράς. Αν κατ' αυτόν τον τρόπο εξάγουμε n γραμμικώς ανεξάρτητα ολοκληρώματα, η απεικόνιση αυτή είναι ολοκληρώσιμη υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει μια συμπλεκτική μορφή ω στον χώρο φάσεων έτσι ώστε:

- i) η απεικόνιση μεταφοράς να είναι συμπλεκτική και
- ii) τα ολοκληρώματα να είναι σε ενέλιξη ως προς την ω . Στην περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων Lax, που θα μας απασχολήσουν στην συνέχεια, η κατάλληλη συμπλεκτική μορφή προέρχεται από την αγκύλη Sklyanin.

Παράδειγμα 5.2. Η απεικόνιση $S_{\alpha, \beta}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((u_1, u_2), (v_1, v_2))$ με

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(\beta - y_1)y_1x_2^2 - (\alpha + \beta(x_1 - 1) - 2x_1y_1 + y_1)y_2x_2 - (\alpha + (x_1 - 1)x_1)y_2^2}{x_2(x_2(\beta - y_1) + (\beta + x_1 - 1)y_2)}, \\ u_2 &= \frac{y_2(\alpha(x_2 + y_2)^2 + (x_2(y_1 - 1) - x_1y_2)(x_2y_1 - x_1y_2 + y_2))}{x_2(x_2(\beta - y_1) + (\beta + x_1 - 1)y_2)}, \\ v_1 &= \frac{\beta x_2(x_1x_2 + (2x_1 + y_1 - 1)y_2) + (x_2 + y_2)(y_2x_1^2 - (x_2y_1 + y_2)x_1 + \alpha y_2)}{x_2(x_2(\beta - y_1) + (\beta + x_1 - 1)y_2)}, \\ v_2 &= x_2 + y_2, \end{aligned}$$

προκύπτει από αναπαράγοντοποίηση του ισχυρού ζεύγους Lax

$$L(x_1, x_2; \alpha) = \begin{pmatrix} x_1 - \zeta & x_2 \\ -\frac{\alpha + (x_1 - 1)x_1}{x_2} & 1 - x_1 - \zeta \end{pmatrix}, \quad M(y_1, y_2; \beta) = \begin{pmatrix} y_1 - \zeta & y_2 \\ \frac{y_1 - \beta}{y_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Η απεικόνιση μεταφοράς για το 1-περιοδικό κλιμακωτό πρόβλημα αρχικών τιμών είναι

$$T_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mu \in \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2)$$

(εδώ έχουμε τοποθετήσει στις δύο αρχικές πλευρές του στοιχειώδους τετραπλεύρου του πλέγματος τις τιμές $(x_1, x_2) = \mathbf{x}$ και $(y_1, y_2) = \mathbf{y}$ αντίστοιχα). Ο μονόδρομος πίνακας είναι

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M(y_1, y_2; \beta) L(x_1, x_2; \alpha),$$

και το ίχνος του μας δίνει τα δύο ανεξάρτητα ολοκληρώματα

$$H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_1 x_1 - x_1 - \frac{(\alpha + (x_1 - 1)x_1)y_2}{x_2} + \frac{x_2(y_1 - \beta)}{y_2}, \quad H_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 + y_1,$$

τα οποία είναι σε ενέλιξη ως προς την αγκύλη

$$\{x_1, x_2\} = -x_2, \quad \{y_1, y_2\} = -y_2, \quad \{x_i, y_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Η απεικόνιση $S_{\alpha, \beta}$ δεν ικανοποιεί την κβαντική εξίσωση YB. Ικανοποιεί όμως μία ανάλογη τριδιάστατη συνθήκη συμβατότητας την οποία θα μελετήσουμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Στο παράρτημα παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα απεικονίσεων που προκύπτει από περιοδικά κλιμακωτά προβλήματα αρχικών τιμών περιόδου δύο και τρία.

5.2 Ολοκληρώσιμες απεικονίσεις από απεικονίσεις Yang-Baxter

Είναι φανερό ότι η διαδικασία που περιγράψαμε μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που η απεικόνιση $S_{\alpha, \beta}$ είναι YB. Σε αυτήν την περίπτωση οι πίνακες του ζεύγους Lax ταυτίζονται. Ο πίνακας $L(x; \alpha) = M(x; \alpha)$ είναι ο πίνακας Lax της απεικόνισης YB. Έτσι, θεωρώντας τις απεικονίσεις μεταφοράς n -περιοδικών κλιμακωτών προβλημάτων αρχικών τιμών καθώς και τους αντίστοιχους μονόδρομους πίνακες, εξάγουμε ολοκληρώσιμες απεικονίσεις από τις απεικονίσεις YB. Επιπλέον, η ολοκληρωσιμότητα της ίδιας απεικόνισης YB μπορεί να μελετηθεί θεωρώντας το 1-περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών έτσι ώστε η απεικόνιση μεταφοράς να ταυτίζεται με αυτήν. Για τις απεικονίσεις YB του προηγούμενου κεφαλαίου, θεωρούμε ως χώρο φάσεων τις συμπλεκτικές πολλαπλότητες $\Sigma_{k(\alpha)}(\bar{\alpha}) \times \Sigma_{k(\beta)}(\bar{\beta})$ εφοδιασμένες με την ανηγμένη αγκύλη Sklyanin. Ως παράδειγμα θα μελετήσουμε την ολοκληρωσιμότητα της γενικευμένης απεικόνισης Adler-Yamilov.

Ολοκληρώματα για την γενικευμένη απεικόνιση Adler-Yamilov

Θυμίζουμε ότι η γενικευμένη απεικόνιση Adler-Yamilov είναι η

$$\bar{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((\bar{u}_1, \bar{u}_2), (\bar{v}_1, \bar{v}_2)),$$

με παραμέτρους $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ και

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{\beta_1}{\alpha_1 \beta_3} (\alpha_3 y_1 - \frac{\alpha_1 \beta_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) x_1}{\alpha_3 \beta_3 + \alpha_1 \beta_1 x_1 y_2}), & \bar{u}_2 &= \frac{\alpha_1}{\beta_1} y_2 \\ \bar{v}_1 &= \frac{\beta_1}{\alpha_1} x_1, & \bar{v}_2 &= \frac{\alpha_1}{\beta_1 \alpha_3} (\beta_3 x_2 - \frac{\alpha_1 \beta_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) y_2}{\alpha_3 \beta_3 + \alpha_1 \beta_1 x_1 y_2}). \end{aligned}$$

Ο ισχυρός πίνακας Lax της $\bar{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ είναι ο

$$\bar{L}(x_1, x_2; \bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + x_1 x_2) - \alpha_1 \zeta & x_1 \\ x_2 & \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

Θεωρώντας το 1-περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών η απεικόνιση μεταφοράς ταυτίζεται με την $\bar{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ και ο μονόδρομος πίνακας είναι

$$M_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = \bar{L}(y_1, y_2; \bar{\beta}) \bar{L}(x_1, x_2; \bar{\alpha}).$$

Το ίχνος του μονόδρομου πίνακα μας δίνει τα δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} J_1(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + x_1 x_2) + \frac{\alpha_1 \beta_1}{\beta_3} (\beta_2 + y_1 y_2), \\ J_2(x_1, x_2, y_1, y_2) &= x_2 y_1 + x_1 y_2 + \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_3 \beta_3} (\alpha_2 + x_1 x_2) (\beta_2 + y_1 y_2). \end{aligned}$$

τα οποία είναι σε ενέλιξη ως προς ανηγμένη αγκύλη Sklyanin

$$\{x_1, x_2\} = \alpha_3, \{y_1, y_2\} = \beta_3, \{x_i, y_j\} = 0 \quad (\alpha_3 \neq 0).$$

Επιπλέον, όπως τονίσαμε και στην ενότητα 4.7.1, η $\bar{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ είναι συμπλεκτική ως προς την

$$\omega = \frac{1}{\alpha_3} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{1}{\beta_3} dy_1 \wedge dy_2.$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η $\bar{R}_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ είναι ολοκληρώσιμη απεικόνιση.

Παρατηρήσεις Πρέπει να αναφέρουμε ότι η παραπάνω διαδικασία εξαγωγής ολοκληρωμάτων δεν είναι πάντα καρποφόρα. Για παράδειγμα υπάρχουν περιπτώσεις που το ίχνος του

μονόδρομου πίνακα δεν μας δίνει αρκετά ολοκληρώματα κίνησης ώστε να συμπεράνουμε την ολοκληρωσιμότητα. Μια λύση σε αυτές τις περιπτώσεις είναι να εξετάσουμε τις δυνάμεις του μονόδρομου πίνακα. Επίσης συχνά η απεικόνιση YB τυχαίνει να είναι ενελικτική, δηλαδή $R \circ R = Id$ (για παράδειγμα η απεικόνιση Adler 3.12, βλ. παράρτημα). Σε αυτές τις περιπτώσεις η δυναμική της απεικόνισης είναι τετριμμένη αλλά μη τετριμμένες ολοκληρώσιμες απεικονίσεις μπορεί να προκύψουν θεωρώντας πρόβληματα αρχικών τιμών μεγαλύτερης περιόδου.

Κεφάλαιο 6

Πεπλεγμένες δομές Yang-Baxter

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε συστήματα απεικονίσεων που ικανοποιούν 3-διάστατες συνθήκες συμβατότητας και αποτελούν συνολοθεωρητικά ανάλογα πεπλεγμένων κβαντικών εξισώσεων YB. Ο τελευταίος όρος εισήχθη στο άρθρο [11] για συστήματα κβαντικών εξισώσεων YB. Τέτοιες πεπλεγμένες δομές της κβαντικής εξίσωσης YB εμφανίζονται ήδη στις εργασίες [18, 33, 55] και η μελέτη τους συνεχίστηκε στις [21, 22].

Η δική μας προσέγγιση αφορά στη σύνδεση πεπλεγμένων απεικονίσεων YB με προβλήματα αναπαραγοντοποίησης τριάδων πινάκων. Με αυτόν τον τρόπο ορίζονται διατεταγμένες τριάδες πινάκων Lax L^1, L^2, L^3 για αυτές τις απεικονίσεις. Στην περίπτωση που $L^1 = L^2 = L^3$, η 3-διάστατη συνθήκη συμβατότητας των απεικονίσεων ανάγεται στην κβαντική εξίσωση YB.

Παρουσιάζουμε την κατασκευή τριάδων Lax και των αντίστοιχων πεπλεγμένων απεικονίσεων από τα συμπλεκτικά φύλλα πολυωνυμικών πινάκων πρώτου βαθμού επεκτείνοντας τις κατασκευές του κεφαλαίου 4. Τέλος μελετάμε την ολοκληρωσιμότητα τους θεωρώντας ανάλογα περιοδικά προβλήματα αρχικών τιμών σε πλέγματα.

6.1 Πεπλεγμένες εξισώσεις YB και τριάδες Lax

Θεωρούμε ένα σύνολο $\mathcal{X}$ και τρεις παραμετρικές απεικονίσεις $S_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}, T_{\alpha,\beta} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Η εξίσωση

$$T_{\beta,\gamma}^{23} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ S_{\alpha,\beta}^{12} = S_{\alpha,\beta}^{12} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ T_{\beta,\gamma}^{23}, \quad (6.1)$$

καλείται *πεπλεγμένη κβαντική εξίσωση YB* (entwining quantum YB equation) ή απλά *πεπλεγμένη εξίσωση YB*. Ανάλογα με την κβαντική εξίσωση YB με S^{ij} (αντίστοιχα T^{ij} και R^{ij})

για $i, j = 1, 2, 3$, συμβολίζουμε την απεικόνιση που δρα ως S (αντίστοιχα T και R) στον i και j παράγοντα του τριπλού καρτεσιανού γινομένου $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ και ταυτοτικά στους υπόλοιπους.

Ορισμός 6.1. Τριάδα Lax των απεικονίσεων $(S_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}, T_{\alpha,\beta})$ καλείται η διατεταγμένη τριάδα πινάκων

$$(L^1(x; \alpha), L^2(x; \alpha), L^3(x; \alpha)),$$

αν τα ζεύγη $(L^1(x; \alpha), L^2(x; \alpha))$, $(L^1(x; \alpha), L^3(x; \alpha))$ και $(L^2(x; \alpha), L^3(x; \alpha))$ αποτελούν ζεύγη Lax των απεικονίσεων $S_{\alpha,\beta}$, $R_{\alpha,\beta}$ και $T_{\alpha,\beta}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, αν τα ζεύγη Lax είναι ισχυρά, η τριάδα Lax καλείται ισχυρή τριάδα Lax.

Αν υποθέσουμε ότι

$$S_{\alpha,\beta} : (x, y) \mapsto (u^{12}, v^{12}),$$

$$R_{\alpha,\beta} : (x, y) \mapsto (u^{13}, v^{13}),$$

$$T_{\alpha,\beta} : (x, y) \mapsto (u^{23}, v^{23}),$$

τότε σύμφωνα με τον ορισμό της τριάδας Lax $(L^1(x; \alpha), L^2(x; \alpha), L^3(x; \alpha))$,

$$L^i(u^{ij}; \alpha) L^j(v^{ij}; \beta) = L^j(y; \beta) (L^i(x; \alpha),$$

για $i, j \in \{1, 2, 3\}$ με $i < j$.

Πρόταση 6.1. Θεωρούμε τις απεικονίσεις $(S_{\alpha,\beta}, R_{\alpha,\beta}, T_{\alpha,\beta})$ στο $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ με τριάδα Lax $(L_1(x; \alpha), L_2(x; \alpha), L_3(x; \alpha))$. Αν η εξίσωση

$$L^1(\hat{x}; \alpha) L^2(\hat{y}; \beta) L^3(\hat{z}; \gamma) = L^1(x; \alpha) L^2(y; \beta) L^3(z; \gamma) \quad (6.2)$$

ισοδυναμεί με $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$ και $\hat{z} = z$, τότε οι $S_{\alpha,\beta}$, $R_{\alpha,\beta}$, $T_{\alpha,\beta}$ ικανοποιούν την πεπλεγμένη εξίσωση YB 6.1.

Απόδειξη. Έστω

$$S_{\alpha,\beta}^{12}(x, y, z) = (x', y', z),$$

$$R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ S_{\alpha,\beta}^{12}(x, y, z) = (x'', y', z'),$$

$$T_{\beta,\gamma}^{23} \circ R_{\alpha,\gamma}^{13} \circ S_{\alpha,\beta}^{12}(x, y, z) = (x'', y'', z'').$$

Παρόμοια με την κβαντική εξίσωση YB, μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτές τις απεικονίσεις στην κάτω, πίσω και αριστερή έδρα ενός κύβου όπως στο (i) του σχήματος 6.1. Οι παράμετροι α, β, γ αντιστοιχούν στις παράλληλες πλευρές με τους x, y, z άξονες αντίστοιχα.

Από τα αντίστοιχα ζεύγη Lax έχουμε

$$\begin{aligned} L^3(z; \gamma) L^2(y; \beta) L^1(x; \alpha) &= L^3(z; \gamma) L^1(x'; \alpha) L^2(y'; \beta) \\ &= L_1(x''; \alpha) L_3(z'; \gamma) L_2(y'; \beta) = L^1(x''; \alpha) L^2(y''; \beta) L^3(z''; \gamma). \end{aligned}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} T_{\beta, \gamma}^{23}(x, y, z) &= (x, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ T_{\beta, \gamma}^{23}(x, y, z) &= (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \\ S_{\alpha, \beta}^{12} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ T_{\beta, \gamma}^{23}(x, y, z) &= (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{aligned}$$

Αυτές οι απεικονίσεις αναπαρίστανται στην δεξιά, μπροστά και πάνω έδρα του κύβου όπως στο (ii) του σχήματος 6.1. Παρόμοια από τα ζεύγη Lax παίρνουμε

$$L^3(z; \gamma) L^2(y; \beta) L^1(x; \alpha) = L^1(\tilde{x}; \alpha) L^2(\tilde{y}; \beta) L^3(\tilde{z}; \gamma).$$

Άρα τελικά

$$L^1(x''; \alpha) L^2(y''; \beta) L^3(z''; \gamma) = L^1(\tilde{x}; \alpha) L^2(\tilde{y}; \beta) L^3(\tilde{z}; \gamma),$$

που ισοδυναμεί, από την υπόθεση της πρότασης, με $x'' = \tilde{x}$, $y'' = \tilde{y}$, $z'' = \tilde{z}$, δηλαδή $T_{\beta, \gamma}^{23} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ S_{\alpha, \beta}^{12} = S_{\alpha, \beta}^{12} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ T_{\beta, \gamma}^{23}$. $\square$

Σχήμα 6.1: Κυβική αναπαράσταση της πεπλεγμένης εξίσωσης YB

Πόρισμα 6.2. Αν η $(L^1(x; \alpha), L^2(x; \alpha), L^3(x; \alpha))$ είναι ισχυρή τριάδα Lax που ικανοποιεί την πρόταση 6.1 και $L^1(x; \alpha) = L^2(x; \alpha) = L^3(x; \alpha)$, τότε η $S_{\alpha, \beta} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ είναι παραμετρική απεικόνιση Yang-Baxter.

Απόδειξη. Αφού τα ζεύγη Lax $(L^1(x; \alpha), L^2(x; \alpha))$, $(L^1(x; \alpha), L^3(x; \alpha))$ και $(L^2(x; \alpha), L^3(x; \alpha))$ των $S_{\alpha, \beta}$, $R_{\alpha, \beta}$ και $T_{\alpha, \beta}$ αντίστοιχα είναι ισχυρά, τότε για $L^1 = L^2 = L^3$ έχουμε $S_{\alpha, \beta} = R_{\alpha, \beta} = T_{\alpha, \beta}$. Συνεπώς η εξίσωση 6.1 γίνεται η κβαντική εξίσωση YB

$$S_{\beta, \gamma}^{23} \circ S_{\alpha, \gamma}^{13} \circ S_{\alpha, \beta}^{12} = S_{\alpha, \beta}^{12} \circ S_{\alpha, \gamma}^{13} \circ S_{\beta, \gamma}^{23}.$$

□

Ο πίνακας $L^1(x; \alpha) = L^2(x; \alpha) = L^3(x; \alpha)$ του πορίσματος είναι ο αντίστοιχος ισχυρός πίνακας Lax της απεικόνισης Yang-Baxter $S_{\alpha, \beta}$.

6.2 Διωνυμικά ζεύγη και διωνυμικές τριάδες Lax

Θεωρούμε τον χώρο των 2×2 πολυωνυμικών πινάκων πρώτου βαθμού $\mathcal{L}^2$, εφοδιασμένο με την κανονική αγκύλη Sklyanin, 4.15:

$$\{L(\zeta) \circledast L(\eta)\} = [\frac{r}{\zeta - \eta}, L(\zeta) \otimes L(\eta)].$$

Έστω A_1, A_2, A_3 τρεις αντιστρέψιμοι πίνακες που αντιμετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή $A_i A_j = A_j A_i$ για $i, j = 1, 2, 3$. Όπως προηγουμένως (κεφάλαιο 4) για κάθε A_i , $i = 1, 2, 3$, συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{A_i}^2$ την υποπολλαπλότητα $\{X - \zeta A_i / X \in Mat(2 \times 2)\}$. Περιοριζόμαστε στην ισοσταθμική επιφάνεια των συναρτήσεων Casimir f_0 και f_1 , θέτοντας $f_0(X; A_i) = \alpha_0$, $f_1(X; A_i) = \alpha_1$, και λύνοντας ως προς δύο στοιχεία του X . Συμβολίζουμε τα δύο εναπομείναντα στοιχεία του X με x_1 και x_2 . Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται ο πίνακας $L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha})$ με

$$f_0(L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}); A_i) = \alpha_0, \quad f_1(L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}); A_i) = \alpha_1, \quad \bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$$

και τα διδιάστατα συμπλεκτικά φύλλα της $\mathcal{L}_{A_i}^2$

$$\Sigma_{A_i}(\bar{\alpha}) = \{L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}) - \zeta A_i / x_1, x_2 \in I \subset \mathbb{K}\}$$

για $i = 1, 2, 3$, εφοδιασμένα με την ανηγμένη αγκύλη Sklyanin.

Θεώρημα 6.3. Οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} & (L_{A_i}^i(u_1^{ij}, u_2^{ij}; \bar{\alpha}) - \zeta A_i)(L_{A_j}^j(v_1^{ij}, v_2^{ij}; \bar{\beta}) - \zeta A_j) \\ &= (L_{A_j}^j(y_1, y_2; \bar{\beta}) - \zeta A_j)(L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}) - \zeta A_i), \end{aligned} \quad (6.3)$$

για $i, j = 1, 2, 3$, έχουν μοναδική λύση ως προς $u_1^{ij}, u_2^{ij}, v_1^{ij}$ και v_2^{ij} . Οι παραμετρικές απεικονίσεις $(S_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}, R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}, T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}})$, με

$$\begin{aligned} S_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto ((u_1^{12}, u_2^{12}), (v_1^{12}, v_2^{12})), \\ R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto ((u_1^{13}, u_2^{13}), (v_1^{13}, v_2^{13})), \\ T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &\mapsto ((u_1^{23}, u_2^{23}), (v_1^{23}, v_2^{23})) \end{aligned}$$

είναι συμπλεκτικές και επιδέχονται την ισχυρή τριάδα Lax

$$(L^1(x_1, x_2, \bar{\alpha}), L^2(x_1, x_2, \bar{\alpha}), L^3(x_1, x_2, \bar{\alpha})),$$

όπου $L^i(x_1, x_2, \bar{\alpha}) = L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}) - \zeta A_i$, για $i = 1, 2, 3$. Επιπλέον ικανοποιούν την πεπλεγμένη εξίσωση Yang-Baxter

$$T_{\beta, \gamma}^{23} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ S_{\alpha, \beta}^{12} = S_{\alpha, \beta}^{12} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ T_{\beta, \gamma}^{23}.$$

Απόδειξη. Από την κατασκευή των $L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha})$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_0(L_{A_i}^i(u_1^{ij}, u_2^{ij}; \bar{\alpha}; A_i)) &= f_0(L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}); A_i), \\ f_1(L_{A_i}^i(u_1^{ij}, u_2^{ij}; \bar{\alpha}; A_i)) &= f_1(L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}); A_i), \\ f_0(L_{A_j}^j(v_1^{ij}, v_2^{ij}; \bar{\beta}; A_j)) &= f_0(L_{A_j}^j(y_1, y_2; \bar{\beta}); A_j), \\ f_1(L_{A_j}^j(v_1^{ij}, v_2^{ij}; \bar{\beta}; A_j)) &= f_1(L_{A_j}^j(y_1, y_2; \bar{\beta}); A_j), \end{aligned}$$

για $i, j = 1, 2, 3$. Συνεπώς η ύπαρξη και η μοναδικότητα των λύσεων των εξισώσεων 6.3 έπεται από την πρόταση 4.3. Οι λύσεις $u_1^{ij}, u_2^{ij}, v_1^{ij}, v_2^{ij}$ προσδιορίζονται από τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων

$$U_{i,j}(L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}), L_{A_j}^j(y_1, y_2; \bar{\beta})), \quad V_{i,j}(L_{A_i}^i(x_1, x_2; \bar{\alpha}), L_{A_j}^j(y_1, y_2; \bar{\beta})),$$

όπου

$$U_{i,j}(X, Y) = \Pi_{A_i, A_j}^2(X, Y)(\Pi_{A_i, A_j}^1(X, Y))^{-1}A_i, \quad (6.4)$$

$$V_{i,j}(X, Y) = A_i^{-1}(YA_i + A_jX - U_{i,j}(X, Y)A_j). \quad (6.5)$$

Επειδή οι απεικονίσεις $(X, Y) \mapsto (U_{i,j}(X, Y), V_{i,j}(X, Y))$ είναι Poisson οι ανηγμένη απεικόνιση $S_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} : \Sigma_{A_1}(\bar{\alpha}) \times \Sigma_{A_2}(\bar{\beta}) \rightarrow \Sigma_{A_1}(\bar{\alpha}) \times \Sigma_{A_2}(\bar{\beta})$ είναι συμπλεκτική (αντίστοιχα οι απεικονίσεις $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ και $T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$).

Επιπλέον από το λήμμα 4.7 έπεται ότι η εξίσωση

$$\begin{aligned} & (L_{A_1}^1(x'_1, x'_2; \bar{\alpha}) - \zeta A_1)(L_{A_2}^2(y'_1, y'_2; \bar{\beta}) - \zeta A_2)(L_{A_3}^3(z'_1, z'_2; \bar{\gamma}) - \zeta A_3) \\ &= (L_{A_1}^1(x_1, x_2; \bar{\alpha}) - \zeta A_1)(L_{A_2}^2(y_1, y_2; \bar{\beta}) - \zeta A_2)(L_{A_3}^3(z_1, z_2; \bar{\gamma}) - \zeta A_3) \end{aligned}$$

ισοδυναμεί με $x'_i = x_i$, $y'_i = y_i$, $z'_i = z_i$, για $i = 1, 2$. Συνεπώς, από την πρόταση 6.1 συμπεραίνουμε ότι οι απεικονίσεις $S_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$, $R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$, $T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ ικανοποιούν την πεπλεγμένη εξίσωση YB 6.1. $\square$

Όπως είδαμε στην ενότητα 4.7, υπάρχουν περιπτώσεις όπου εκφυλισμένες απεικονίσεις YB προκύπτουν από όρια τετράρητων απεικονίσεων. Μια ανάλογη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί στις λύσεις της πεπλεγμένης εξίσωσης YB. Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε αντιστρέψιμους πίνακες $A_i = A_i(\varepsilon)$ που εξαρτώνται από μια παράμετρο ε και αντιμετωπίζονται μεταξύ τους, έτσι ώστε $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \det A_i(\varepsilon) = 0$ για κάποια $i \in \{1, 2, 3\}$, και να κατασκευάσουμε τις αντίστοιχες απεικονίσεις $(S_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon), R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon), T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon))$ του θεωρήματος 6.3. Μια νέα λύση της πεπλεγμένης εξίσωσης YB προκύπτει από το όριο (αν υπάρχει) των $(S_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon), R_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon), T_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(\varepsilon))$ για $\varepsilon \rightarrow 0$.

6.3 Λύσεις της πεπλεγμένης εξίσωσης Yang-Baxter και ολοκληρωσιμότητα

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δύο λύσεις της πεπλεγμένης εξίσωσης YB που προκύπτουν από ένα ζευγάρι αντιμεταθετικών πινάκων και τις ολοκληρώσιμες απεικονίσεις που επάγονται από αυτές.

Έστω $X - \zeta A_i \in \mathcal{L}_{A_i}^2$, για $i = 1, 2$, όπου

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \neq 0.$$

Αρχικά θα κατασκευάσουμε τις συμπλεκτικές ρητές απεικονίσεις στα συμπλεκτικά φύλλα των $\mathcal{L}_{A_1}^2 \times \mathcal{L}_{A_1}^2$, $\mathcal{L}_{A_2}^2 \times \mathcal{L}_{A_2}^2$, $\mathcal{L}_{A_1}^2 \times \mathcal{L}_{A_2}^2$ και $\mathcal{L}_{A_2}^2 \times \mathcal{L}_{A_1}^2$ με τα αντίστοιχα ζεύγη Lax. Στη συνέχεια θεωρώντας τις περιπτώσεις $A_3 = A_1$ και $A_3 = A_2$ εξάγουμε δύο λύσεις της πεπλεγμένης εξίσωσης YB. Όλες οι απεικονίσεις που κατασκευάζουμε είναι ολοκληρώσιμες.

6.3.1 Απεικονίσεις YB στα $\Sigma_{A_1}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_1}(\beta, 1)$ και $\Sigma_{A_2}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_2}(\beta, 1)$

Οι συναρτήσεις Casimir στις υποπολλαπλότητες $\mathcal{L}_{A_1}^2$ και $\mathcal{L}_{A_1}^2$ είναι

$$\begin{aligned} f_0(X; A_1) &= x_1x_4 - x_2x_3, \quad f_1(X; A_1) = x_1 + x_4, \\ f_0(X; A_2) &= x_1x_4 - x_2x_3, \quad f_1(X; A_2) = \varepsilon x_1 + x_4. \end{aligned}$$

Θέτουμε $f_0(X; A_1) = \alpha$, $f_1(X; A_1) = 1$. Λύνοντας ως προς x_3 , x_4 και αντικαθιστώντας στον X προκύπτει ο πίνακας

$$L_{A_1}^1(x_1, x_2; \alpha) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -\frac{\alpha + (x_1 - 1)x_1}{x_2} & 1 - x_1 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

και η απεικόνιση YB του παραδείγματος 4.11

$$R_{\alpha, \beta}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((u'_1, u'_2), (v'_1, v'_2)), \quad (6.7)$$

με

$$\begin{aligned} u'_1 &= y_1 + \frac{x_2 y_2}{N} (\alpha - \beta)(x_1 + y_1 - 1), \\ u'_2 &= \frac{y_2}{N} (\alpha(x_2 + y_2)^2 + (x_2(y_1 - 1) - x_1 y_2)(x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_2)), \\ v'_1 &= x_1 - \frac{x_2 y_2}{N} (\alpha - \beta)(x_1 + y_1 - 1), \\ v'_2 &= \frac{x_2}{N} (\beta(x_2 + y_2)^2 + (x_2(y_1 - 1) - x_1 y_2)(x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_2)), \end{aligned}$$

$$N = \alpha y_2^2 + \beta x_2^2 + (\alpha + \beta - 1)y_2 x_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2)(x_2 y_1 - x_1 y_2 + y_2 - x_2).$$

και πίνακα Lax

$$L^1(x_1, x_2; \alpha) = L_{A_1}^1(x_1, x_2; \alpha) - \zeta A_1. \quad (6.8)$$

Ανάλογα, για $f_0(X; A_2) = \alpha$, $f_1(X; A_2) = 1$, λύνοντας ως προς x_1 , x_4 και εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητών $x_2 \mapsto x_1$ και $x_3 \mapsto x_2$, προκύπτει ο πίνακας

$$M_{A_2}^2(x_1, x_2; \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1 - (1 - 4\varepsilon(\alpha + x_1 x_2))^{1/2}}{2\varepsilon} & x_1 \\ x_2 & \frac{1}{2}(1 - 4\varepsilon(\alpha + x_1 x_2))^{1/2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

και ο πίνακας Lax

$$M_\varepsilon^2(x_1, x_2; \alpha) = M_{A_2}^2(x_1, x_2; \alpha) - \zeta A_2$$

της τετράρητης απεικόνισης YB

$$R_{\alpha,\beta}^\varepsilon((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)), \quad (6.10)$$

όπου $\mathbf{u}_1 = \mathbf{U}_{12}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{U}_{21}$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_{21}$ είναι τα αντίστοιχα στοιχεία των πινάκων

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U_{2,2}(M_{A_2}^2(x_1, x_2; \alpha), M_{A_2}^2(y_1, y_2; \beta)), \\ \mathbf{V} &= V_{2,2}(M_{A_2}^2(x_1, x_2; \alpha), M_{A_2}^2(y_1, y_2; \beta)), \end{aligned}$$

6.4, 6.5. Από το όριο της (6.10) για $\varepsilon \rightarrow 0$, εξάγουμε την απεικόνιση Adler-Yamilov ¹

$$\bar{R}_{\alpha,\beta}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{\alpha,\beta}^\varepsilon((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = ((\bar{u}_1, \bar{u}_2), (\bar{v}_1, \bar{v}_2)) \quad (6.11)$$

με

$$\bar{u}_1 = y_1 - \frac{(\alpha - \beta)x_1}{1 + x_1y_2}, \quad \bar{u}_2 = y_2, \quad \bar{v}_1 = x_1, \quad \bar{v}_2 = x_2 + \frac{(\alpha - \beta)y_2}{1 + x_1y_2},$$

και ισχυρό πίνακα Lax

$$L^2(x_1, x_2; \alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon^2(x_1, x_2; \alpha) = \begin{pmatrix} x_1x_2 + \alpha - \zeta & x_1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

6.3.2 Ρητές απεικονίσεις στα $\Sigma_{A_1}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_2}(\beta, 1)$ και $\Sigma_{A_2}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_1}(\beta, 1)$

Η εξίσωση

$$L^1(u_1, u_2; \alpha)L^2(v_1, v_2; \beta) = L^2(y_1, y_2; \beta)L^1(x_1, x_2; \alpha)$$

όπου L^1 , L^2 οι πίνακες (6.8) και (6.12) αντίστοιχα, επιδέχεται την μοναδική λύση

$$\begin{aligned} u_1 &= y_2y_1 - \frac{x_1y_1}{x_2} + \frac{(\alpha + \beta(x_2y_2 - x_1))(x_2 + y_1)}{x_2(x_2y_2 - x_1 - \beta + 1)}, \\ u_2 &= -\frac{\alpha(x_2 + y_1)^2 + (\beta x_2 + y_1y_2x_2 - x_1y_1 + y_1)(x_2(\beta + y_1y_2 - 1) - x_1y_1)}{x_2(x_2y_2 - x_1 - \beta + 1)}, \\ v_1 &= x_2 + y_1, \\ v_2 &= \frac{x_1}{x_2} - \frac{\alpha + \beta(x_2y_2 - x_1)}{x_2(x_2y_2 - x_1 - \beta + 1)}. \end{aligned}$$

¹Όπως δείξαμε στο εδάφιο 4.7.1 αυτή η απεικόνιση μπορεί να προκύψει για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων της γενικευμένης απεικόνισης Adler-Yamilov.

Αυτή η λύση προκύπτει από το όριο για $\varepsilon \rightarrow 0$ των στοιχείων U_{11} , U_{12} , V_{12} και V_{21} των πινάκων

$$\begin{aligned} U &:= U(L_{A_1}^1(x_1, x_2; \alpha), M_{A_2}^2(y_1, y_2; \beta)), \\ V &:= V(L_{A_1}^1(x_1, x_2; \alpha), M_{A_2}^2(y_1, y_2; \beta)), \end{aligned}$$

που ορίζονται από τις 6.4 και 6.5 με $L_{A_1}^1$, $M_{A_2}^2$ 6.6 και 6.9 αντίστοιχα. Συνεπώς η απεικόνιση

$$S_{\alpha, \beta} : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \quad (6.13)$$

επιδέχεται το ισχυρό ζεύγος Lax $(L^1(x_1, x_2; \alpha), L^2(x_1, x_2; \alpha))$.

Επιπλέον η εξίσωση

$$L^2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2; \alpha) L^1(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2; \beta) = L^1(y_1, y_2; \beta) L^2(x_1, x_2; \alpha)$$

ισοδυναμεί με

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{(\alpha x_1 - y_1 x_1 - y_2) y_2}{\beta x_1 + (y_1 - 1) y_1 x_1 + (\alpha + y_1 - 1) y_2}, \\ \tilde{u}_2 &= x_2 - \frac{\beta + (y_1 - 1) y_1}{y_2}, \\ \tilde{v}_1 &= \frac{\beta(\alpha x_1 - y_2) + (y_1 x_1 - x_1 + y_2)(\alpha y_1 + x_2 y_2) + x_1 x_2 (x_1 (y_1^2 - y_1 + \beta) + y_1 y_2)}{\beta x_1 + (y_1 - 1) y_1 x_1 + (\alpha + y_1 - 1) y_2}, \\ \tilde{v}_2 &= x_1 - \frac{(\alpha x_1 - y_1 x_1 - y_2) y_2}{\beta x_1 + (y_1 - 1) y_1 x_1 + (\alpha + y_1 - 1) y_2}. \end{aligned}$$

Άρα το ζεύγος $(L^2(x_1, x_2; \alpha), L^1(x_1, x_2; \alpha))$ είναι ισχυρό ζεύγος Lax της απεικόνισης

$$T_{\alpha, \beta} : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto ((\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)). \quad (6.14)$$

6.3.3 Ολοκληρώσιμες πεπλεγμένες απεικονίσεις YB

Θεωρούμε δύο περιπτώσεις. Αρχικά επιλέγουμε έναν τρίτο πίνακα $A_3 = A_1$ και τον αντίστοιχο πίνακα Lax $L^3(x_1, x_2; \alpha) = L^1(x_1, x_2; \alpha)$. Από το θεώρημα 6.3 συμπεραίνουμε ότι οι απεικονίσεις $(S_{\alpha, \beta}, R_{\alpha, \beta}, T_{\alpha, \beta})$ (6.13, 6.7 και 6.14 αντίστοιχα) επιδέχονται την ισχυρή τριάδα Lax

$$(L^1(x_1, x_2; \alpha), L^2(x_1, x_2; \alpha), L^1(x_1, x_2; \alpha))$$

και ικανοποιούν την πεπλεγμένη εξίσωση YB

$$T_{\beta, \gamma}^{23} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ S_{\alpha, \beta}^{12} = S_{\alpha, \beta}^{12} \circ R_{\alpha, \gamma}^{13} \circ T_{\beta, \gamma}^{23}.$$

Στη συνέχεια επιλέγοντας $A_3 = A_2$, $L^3(x_1, x_2; \alpha) = L^2(x_1, x_2; \alpha)$ προκύπτει η ισχυρή τριάδα Lax $(L^1(x_1, x_2; \alpha), L^2(x_1, x_2; \alpha), L^3(x_1, x_2; \alpha))$ των απεικονίσεων $(S_{\alpha, \beta}, S_{\alpha, \beta}, \bar{R}_{\alpha, \beta})$ (6.13 , 6.11), που ικανοποιούν την πεπλεγμένη εξίσωση YB

$$\bar{R}_{\beta, \gamma}^{23} \circ S_{\alpha, \gamma}^{13} \circ S_{\alpha, \beta}^{12} = S_{\alpha, \beta}^{12} \circ S_{\alpha, \gamma}^{13} \circ \bar{R}_{\beta, \gamma}^{23}.$$

Η απεικόνιση $S_{\alpha, \beta}$ (6.13) είναι συμπλεκτική ως προς την ανηγμένη αγκύλη Sklyanin στην υποπολλαπλότητα $\Sigma_{A_1}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_2}(\beta, 1)$:

$$\{x_1, x_2\} = -x_2, \quad \{y_1, y_2\} = 1, \quad \{x_i, y_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (x_2 \neq 0). \quad (6.15)$$

Ο μονόδρομος πίνακας του 1-περιοδικού κλιμακωτού προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L^2(y_1, y_2; \beta) L^1(x_1, x_2; \alpha).$$

Από το ίχνος του μονόδρομου πίνακα προκύπτουν τα γραμμικώς ανεξάρτητα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} J_1^s(x_1, x_2, y_1, y_2) &= x_2 y_2 + x_1(y_1 y_2 + \beta - 1) - \frac{y_1}{x_2}(x_1^2 - x_1 + \alpha), \\ J_2^s(x_1, x_2, y_1, y_2) &= x_1 + y_1 y_2, \end{aligned}$$

τα οποία είναι σε ενέλιξη ως προς την αγκύλη Poisson 6.15.

Ανάλογα μπορούμε να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $R_{\alpha, \beta}$, $\bar{R}_{\alpha, \beta}$ και $T_{\alpha, \beta}$ είναι ολοκληρώσιμες. Η ανηγμένη αγκύλη Sklyanin δίνεται από τις παρακάτω αγκύλες των συντεταγμένων στα αντίστοιχα συμπλεκτικά φύλλα

$$\Sigma_{A_1}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_1}(\beta, 1) : \{x_1, x_2\} = -x_2, \quad \{y_1, y_2\} = -y_2, \quad \{x_i, y_j\} = 0, \quad (6.16)$$

$$\Sigma_{A_2}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_2}(\beta, 1) : \{x_1, x_2\} = 1, \quad \{y_1, y_2\} = 1, \quad \{x_i, y_j\} = 0, \quad (6.17)$$

$$\Sigma_{A_2}(\alpha, 1) \times \Sigma_{A_1}(\beta, 1) : \{x_1, x_2\} = 1, \quad \{y_1, y_2\} = -y_2, \quad \{x_i, y_j\} = 0, \quad (6.18)$$

Η απεικόνιση YB $R_{\alpha, \beta}$ είναι ενελικτική, δηλαδή $R_{\alpha, \beta} \circ R_{\alpha, \beta} = Id$. Από το ίχνος των μονόδρομων πινάκων

$$\bar{M}_1 = L^2(y_1, y_2; \beta) L^2(x_1, x_2; \alpha), \quad \tilde{M}_1 = L^1(y_1, y_2; \beta) L^2(x_1, x_2; \alpha)$$

προκύπτουν τα ολοκληρώματα των απεικονίσεων $\bar{R}_{\alpha, \beta}$ και $T_{\alpha, \beta}$. Συγκεκριμένα εξάγουμε τα ολοκληρώματα

$$J_1^{\bar{R}} = \alpha y_1 y_2 + b x_1 x_2 + (x_2 y_1 + 1)(x_1 y_2 + 1), \quad J_2^{\bar{R}} = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

της απεικόνισης $\bar{R}_{\alpha,\beta}$ τα οποία είναι σε ενέλιξη ως προς την αγκύλη Poisson 6.17, και τα ολοκληρώματα της $T_{\alpha,\beta}$

$$J_1^T = x_2 y_2 + y_1(x_1 x_2 + \alpha - 1) - \frac{x_1}{y_2}(y_1^2 - y_1 + \beta), \quad J_2^T = y_1 + x_1 x_2,$$

που είναι σε ενέλιξη ως προς την αγκύλη 6.18. Επομένως συμπεραίνουμε ότι όλες οι απεικονίσεις που κατασκευάστηκαν, $S_{\alpha,\beta}$, $R_{\alpha,\beta}$, $T_{\alpha,\beta}$ και $\bar{R}_{\alpha,\beta}$, είναι ολοκληρώσιμες.

Κεφάλαιο 7

Επίλογος – Συμπεράσματα

Ο ρόλος των απεικονίσεων Yang-Baxter είναι ιδιαίτερα σημαντικός και πολύπλευρος στην μαθηματική φυσική και ειδικότερα στην θεωρία των ολοκληρώσιμων συστημάτων. Ο ρόλος αυτός δεν περιορίζεται φυσικά στο αντικείμενο της παρούσας διατριβής ελπίζουμε όμως ότι αναδείχτηκε ως ένα βαθμό στα συγκεκριμένα θέματα που παρουσιάστηκαν.

Η δική μας προσέγγιση αφορά στη συσχέτιση της θεωρίας των δομών Poisson, των παραμετρικών απεικονίσεων Yang-Baxter με “φασματικούς” πίνακες Lax και των διακριτών ολοκληρώσιμων συστημάτων.

Συγκεκριμένα, ξεκινήσαμε παρουσιάζοντας βασικές έννοιες της γεωμετρίας Poisson, απαραίτητες για τη συνέχεια, καθώς και τις σημαντικότερες κατασκευές συνολο-θεωρητικών λύσεων της εξίσωσης Yang-Baxter που σχετίζονται με τη δική μας προσέγγιση στο θέμα. Στο κύριο μέρος της εργασίας παρουσιάστηκε η κατασκευή παραμετρικών απεικονίσεων Yang-Baxter από αναπαραγοντοποίηση ζευγών Lax. Οι πίνακες Lax προκύπτουν από τα συμπλεκτικά φύλλα του χώρου των πολυωνυμικών πινάκων που είναι εφοδιασμένος με την κανονική αγκύλη Sklyanin. Οι απεικονίσεις αυτές είναι τετράρητες, συμπλεκτικές και ταξινομούνται στην περίπτωση των 2×2 πινάκων Lax. Από όρια των τετράρητων απεικονίσεων προκύπτουν εκφυλισμένες απεικονίσεις Yang-Baxter που συνδέονται με γνωστά ολοκληρώσιμα συστήματα. Όλες οι κατασκευές γενικεύθηκαν σε συστήματα πεπλεγμένων απεικονίσεων Yang-Baxter. Η σύνδεση με την ολοκληρωσιμότητα επιτεύχθηκε θεωρώντας περιοδικά προβλήματα αρχικών τιμών σε τετράπλευρα πλέγματα. Από κάθε απεικόνιση που επιδέχεται ισχυρό ζεύγος Lax προκύπτει μια οικογένεια απεικονίσεων μεταφοράς που διατηρεί αναλλοίωτο το φάσμα του μονόδρομου πίνακά τους. Το φάσμα του μονόδρομου πίνακα μας προμηθεύει με πρώτα ολοκληρώματα. Κατ’ αυτόν τον τρόπο μελετήθηκε η ολοκληρωσιμότητα των συμπλε-

κτικών απεικονίσεων Yang-Baxter που κατασκευάσαμε με αποτέλεσμα την εξαγωγή αρκετών παραδειγμάτων πολυδιάστατων ολοκληρώσιμων απεικονίσεων.

Όπως είναι φυσικό, η παρούσα εργασία δημιουργεί αρκετά νέα ερωτήματα και προοπτικές για μελλοντική μελέτη. Αναφέρουμε επιγραμματικά μερικά από αυτά και τα σχολιάζουμε στη συνέχεια.

1. Ταξινόμηση διωνυμικών πινάκων Lax $n \times n$ και των αντίστοιχων απεικονίσεων Yang-Baxter,
2. αναπαραγοντοποίηση πολυωνυμικών πινάκων μεγαλύτερης τάξης και συμπλεκτική εμφύλλωσή τους,
3. νέες δομές Poisson σε πίνακες από νέες λύσεις της κλασικής εξίσωσης Yang-Baxter και νέες αναπαραστάσεις Lax,
4. δυναμική μελέτη των διακριτών συστημάτων που παρουσιάστηκαν,
5. συνεχή όρια και μελέτη των αντίστοιχων διαφορικών και μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν.

Η ταξινόμηση $n \times n$ διωνυμικών πινάκων Lax με σταθερό μέγιστοβάθμιο όρο πραγματοποιείται όπως και στην περίπτωση των 2×2 πινάκων από τις αντίστοιχες κανονικές μορφές Jordan. Έτσι μπορούν να ταξινομηθούν και οι τετράρητες απεικονίσεις YB που προκύπτουν από αυτούς. Στη γενική περίπτωση το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο, καθώς χρειάζεται επιπλέον ο προσδιορισμός ζευγών αντιμεταθετικών πινάκων ίδιας μορφής. Επιπλέον παραμένει το πρόβλημα ταξινόμησης των εκφυλισμένων απεικονίσεων YB.

Με σκοπό να κατασκευάσουμε απεικονίσεις YB στο $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ για $n > 2$, μπορούμε αντί να θεωρήσουμε τους μεγαλύτερους διωνυμικούς πίνακες της ενότητας 4.8, να θεωρήσουμε πολυωνυμικούς πίνακες 2×2 μεγαλύτερης τάξης ως προς την φασματική παράμετρο. Οι συναρτήσεις Casimir της κανονικής δομής Sklyanin είναι και πάλι τα στοιχεία του μέγιστοβάθμιου πίνακα και οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Στη γενική περίπτωση, προτάσεις αναπαραγοντοποίησης γινομένων τέτοιων πινάκων απαιτούνται για την κατασκευή των ζητούμενων απεικονίσεων.

Αρκετές λύσεις της κλασικής εξίσωσης YB υπάρχουν στη βιβλιογραφία οι οποίες ορίζουν ανάλογες δομές Poisson. Η συμπλεκτική εμφύλλωσή τους εικάζουμε ότι μπορεί να δημιουργήσει νέες αναπαραστάσεις Lax απεικονίσεων YB. Για παράδειγμα, από τριγωνομετρικές και

ελλειπτικές λύσεις της κλασικής εξίσωσης YB με φασματικές παραμέτρους θα μπορούσαν να προκύψουν τριγωνομετρικοί και ελλειπτικοί πίνακες Lax αντίστοιχα. Επίσης, διαφορετικού είδους αναπαραστάσεις Lax χωρίς φασματικές παραμέτρους μπορούν να κατασκευαστούν. Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάσαμε στις παρατηρήσεις στο τέλος του κεφαλαίου 4. Η συσχέτιση παρόμοιων δομών με τις αλγεβρικές κατασκευές απεικονίσεων YB που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.2 χρήζει περαιτέρω διερεύνησης.

Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον πιστεύουμε θα παρουσίαζε μια πλήρη μελέτη της δυναμικής των διακριτών ολοκληρώσιμων συστημάτων που κατασκευάστηκαν σε αυτήν την εργασία καθώς και των συνεχών αναλόγων τους.

Παράρτημα

Απόδειξη λήμματος 4.7

Λήμμα 4.7 Έστω A_i , $i = 1, 2, 3$ τρεις αντιστρέψιμοι πίνακες που αντιμετατίθενται μεταξύ τους ($A_i A_j = A_j A_i$). Τότε

$$(X'_1 - \zeta A_1)(X'_2 - \zeta A_2)(X'_3 - \zeta A_3) = (X_1 - \zeta A_1)(X_2 - \zeta A_2)(X_3 - \zeta A_3) \quad (7.1)$$

και $p_{X'_i}^{A_i}(\zeta) = p_{X_i}^{A_i}(\zeta)$ για κάθε $X'_i, X_i \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{K})$, $i = 1, 2, 3$ και $\zeta \in \mathbb{K}$, αν και μόνο αν $X'_1 = X_1$, $X'_2 = X_2$ και $X'_3 = X_3$.

Απόδειξη. Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς μας θέτουμε

$$\begin{aligned} X_1 X_2 X_3 &= K, \quad X_1 X_2 A_3 + X_1 A_2 X_3 + A_1 X_2 X_3 = L, \\ X_1 A_2 A_3 + A_1 X_2 A_3 + A_1 A_2 X_3 &= M \end{aligned}$$

και $f_2(X_1; A_1) = \alpha_2$, $f_1(X_1; A_1) = \alpha_1$, $f_0(X_1; A_0) = \alpha_0$. Αντικαθιστώντας στην 7.1 εξάγουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} X'_1 X'_2 X'_3 &= K, \\ X'_1 X'_2 A_3 + X'_1 A_2 X'_3 + A_1 X'_2 X'_3 &= L, \\ X'_1 A_2 A_3 + A_1 X'_2 A_3 + A_1 A_2 X'_3 &= M \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει

$$(X'_1 A_1^{-1})^3 A_1 A_2 A_3 - (X'_1 A_1^{-1})^2 M + X'_1 A_1^{-1} L = K. \quad (7.2)$$

Επίσης επειδή $p_{X'_1}^{A_1}(\zeta) = p_{X_1}^{A_1}(\zeta)$, έχουμε

$$f_2(X'_1; A_1) = \alpha_2, \quad f_1(X'_1; A_1) = \alpha_1, \quad f_0(X'_1; A_0) = \alpha_0.$$

Το θεώρημα Cayley-Hamilton δηλώνει ότι $p_{X'_1}^{A_1}(X'_1 A_1^{-1}) = 0$, άρα

$$p_{X'_1}^{A_1}(X'_1 A_1^{-1}) = \alpha_2(X'_1 A_1^{-1})^2 - \alpha_1(X'_1 A_1^{-1}) + \alpha_0 I = 0.$$

Υπολογίζοντας τις δυνάμεις $(X'_1 A_1^{-1})^3, (X'_1 A_1^{-1})^2$ ως προς $X'_1 A_1^{-1}$ από την τελευταία εξίσωση, η εξίσωση 7.2 γίνεται

$$X'_1 A_1^{-1}[\alpha_2^2 L - \alpha_2 \alpha_1 M + (\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_0) A_1 A_2 A_3] = \alpha_2^2 K - \alpha_2 \alpha_0 M + \alpha_1 \alpha_0 A_1 A_2 A_3$$

ή

$$\begin{aligned} & X'_1 A_1^{-1}[\alpha_2^2 L - \alpha_2 \alpha_1 M + (\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_0) A_1 A_2 A_3] \\ &= X_1 A_1^{-1}[\alpha_2^2 L - \alpha_2 \alpha_1 M + (\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_0) A_1 A_2 A_3] + Q, \end{aligned} \quad (7.3)$$

όπου

$$\begin{aligned} Q &= \alpha_2^2 K - \alpha_2 \alpha_0 M + \alpha_1 \alpha_0 A_1 A_2 A_3 \\ &\quad - X_1 A_1^{-1}[\alpha_2^2 L - \alpha_2 \alpha_1 M + (\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_0) A_1 A_2 A_3]. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας ξανά τα K, L, M με $X_1 X_2 X_3, X_1 X_2 A_3 + X_1 A_2 X_3 + A_1 X_2 X_3, X_1 A_2 A_3 + A_1 X_2 A_3 + A_1 A_2 X_3$ αντίστοιχα, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το Q ως εξής

$$\begin{aligned} Q &= (\alpha_2(X_1 A_1^{-1})^2 - \alpha_1 X_1 A_1^{-1} + \alpha_0 I)(\alpha_1 A_1 A_2 A_3 - \alpha_2(A_1 X_2 A_3 + A_1 A_2 X_3)) \\ &= p_{X'_1}^{A_1}(X_1 A_1^{-1})(\alpha_1 A_1 A_2 A_3 - \alpha_2(A_1 X_2 A_3 + A_1 A_2 X_3)) \end{aligned}$$

και επειδή $p_{X'_1}^{A_1}(X_1 A_1^{-1}) = 0$, έχουμε ότι $Q = 0$. Συνεπώς από την 7.3, για X_1, X_2, X_3 τέτοια ώστε $\det[\alpha_2^2 L - \alpha_2 \alpha_1 M + (\alpha_1^2 - \alpha_2 \alpha_0) A_1 A_2 A_3] \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι $X'_1 = X_1$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $X'_3 = X_3$, που σημαίνει ότι και $X'_2 = X_2$. $\square$

2,3-περιοδικά προβλήματα αρχικών τιμών (απεικόνιση Adler)

Η απεικόνιση Adler

$$R_{\alpha,\beta}(x, y) = (y + \frac{\alpha - \beta}{x + y}, x - \frac{\alpha - \beta}{x + y})$$

είναι ενελικτική, δηλαδή $R_{\alpha,\beta} \circ R_{\alpha,\beta} = Id$. Συνεπώς η δυναμική της απεικόνισης μεταφοράς του 1-περιοδικού κλιμακωτού προβλήματος αρχικών τιμών στο πλέγμα είναι τετριμμένη.

Σχήμα 7.1: Προβολή των τροχιών των απεικονίσεων T_2 και T_3 στον $\mathbb{R}^3$

Θεωρούμε το 2-περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών. Η απεικόνιση μεταφοράς σε αυτήν την περίπτωση είναι

$$T_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = (y_1 + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{x_1 + y_1}, y_2 + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{x_2 + y_2}, x_2 - \frac{\alpha_2 - \beta_2}{x_2 + y_2}, x_1 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{x_1 + y_1}). \quad (7.4)$$

Ο μονόδρομος πίνακας είναι ο πίνακας

$$M_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = L(y_2; \beta_2)L(x_2; \alpha_2)L(y_1; \beta_1)L(x_1; \alpha_1),$$

όπου $L(x; \alpha)$ ο ισχυρός πίνακας Lax της $R_{\alpha, \beta}$,

$$L(x; \alpha) = \begin{pmatrix} x & x^2 - \alpha - \zeta \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

Από το ίχνος του μονόδρομου πίνακα $M_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ προκύπτουν τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} J_1 &= -\alpha_2(x_1 + y_1)(x_1 + y_2) + \beta_1(\beta_2 - (x_1 + y_2)(x_2 + y_2)) + \\ &\quad (x_2 + y_1)((x_2 + y_2)((x_1 + y_1)(x_1 + y_2) - \alpha_1) - \beta_2(x_1 + y_1)) \\ J_2 &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2)^2. \end{aligned}$$

Ανάλογα, θεωρώντας το 3-περιοδικό πρόβλημα αρχικών τιμών εξάγεται η απεικόνιση μεταφοράς

$$\begin{aligned} &T_3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \\ &= (y_1 + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{x_1 + y_1}, y_2 + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{x_2 + y_2}, y_3 + \frac{\alpha_3 - \beta_3}{x_3 + y_3}, x_2 - \frac{\alpha_2 - \beta_2}{x_2 + y_2}, x_3 - \frac{\alpha_3 - \beta_3}{x_3 + y_3}, x_1 - \frac{\alpha_1 - \beta_1}{x_1 + y_1}). \end{aligned}$$

Από το ίχνος του αντίστοιχου μονόδρομου πίνακα

$$M_3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = L(y_3; \beta_3)L(x_3; \alpha_3)L(y_2; \beta_2)L(x_2; \alpha_2)L(y_1; \beta_1)L(x_1; \alpha_1),$$

προκύπτουν τρία συναρτησιακά ανεξάρτητα πρώτα ολοκληρώματα.

Βιβλιογραφία

- [1] Abraham, R., J. E. Marsden [1978] *Foundations of Mechanics*. Second Edition, Addison-Wesley.
- [2] Adler V.E. [1993] *Recutting of polygons*. Funct. Anal. Appl. 27, No2, 79–80.
- [3] Adler V.E., Bobenko A.I., Suris Yu.B. [2003] *Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach*. Comm. Math. Phys. 233, 513–543.
- [4] Adler V.E., Bobenko A.I., Suris Yu.B. [2004] *Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings*. Comm. Anal. Geom. 12, 967–1007.
- [5] Adler V.E., Yamilov R.I. [1994] *Explicit auto-transformations of integrable chains*. J. Phys. A:Math. Gen. 27, 477–492
- [6] Arnold, V.I. [1978] *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Math. 60, Springer-Verlag.
- [7] Balinsky A.A. [2000] *Racks and orbits of dressing transformations*. Comment.Math.Univ.Carolinae 41, 437–444.
- [8] Balinsky, A., Burman Yu. [1996] *Quadratic Poisson Brackets and the Drinfeld Theory for Associative Algebras*. Lett. Math. Phys. 38, no. 1, 63–75.
- [9] Baxter R.J. [1972] *Partition function of the eight-vertex lattice model*. Ann. Physics 70, 193–228.
- [10] Bobenko A.I., Suris Yu. B. [2002] *Integrable systems on quad-graphs*. Int. Math. Res. Notices, No 11, 573–611.

- [11] Brzeziński T., Nichita F. [2005] *Yang–Baxter systems and entwining structures*. Comm. Algebra 33, 1083–1093.
- [12] Chari, V. and Pressley, A. [1994] *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press.
- [13] Drinfel’d, V.G. [1983] *Hamiltonian Lie Groups, Lie bialgebras and geometric meaning of the classical Yang–Baxter equation*. Sov. Math. Dok.27, no1.
- [14] Drinfel’d, V.G. [1992] *On some unsolved problems in quantum group theory*. In “Quantum groups”. (Leningrad, 1990), Lecture Notes in Math. 1510, 1–8
- [15] Dufour, J.-P., Zung, N.T. [2000] *Poisson Structures and Their Normal Forms*. Progress in Mathematics 242, Birkhäuser.
- [16] Etingof P., Schedler T., Soloviev A. [1999] *Set-theoretical solutions to the quantum Yang–Baxter equation*. Duke Math. J. 100, 169–209.
- [17] Etingof P. [2003] *Geometric crystals and set-theoretical solutions to the quantum Yang–Baxter equation*, Comm. Algebra, 31 no. 4, 1961–1973.
- [18] Freidel L., Maillet J.-M. [1991] *Quadratic algebras and integrable systems*. Phys.Lett. B, 262:278–284.
- [19] Gavarini F., Halbout G. [2003] *Braiding structures on formal Poisson groups and classical solutions of the QYBE*. J. Geom. Phys. 46, 255–282.
- [20] Goncharenko V. M., Veselov A. P. [2004] *Yang–Baxter maps and matrix solitons*. NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 132. New trends in integrability and partial solvability, 191–197.
- [21] Hlavatý L. [1997] *Yang–Baxter systems, solutions and applications*. arXiv:q-alg/9711027v1.
- [22] Hlavatý L., Snobl L. [1999] *Solution of the Yang–Baxter System for Quantum Doubles*. Int. J. Mod. Phys. A 14 (1999) 3029–3058.
- [23] Hurtubise J.C., Markman E. [2002] *Surfaces and the Sklyanin Bracket*. Commun. Math. Phys. 230, 485–502.

- [24] Kosmann-Schwarzbach Y., Grammaticos B., Tamizhmani K.M. [2004] *Lie bialgebras, Poisson Lie groups and dressing transformations. Integrability of Nonlinear Systems* Lect. Notes Phys. 638, Springer.
- [25] Kouloukas Th. E., Papageorgiou V. G. [2009] *Yang-Baxter maps with first-degree-polynomial 2×2 Lax matrices*. J. Phys. A: Math. Theor. 42, 404012.
- [26] Kouloukas Th. E., Papageorgiou V. G. *Poisson Yang-Baxter maps with binomial Lax matrices*. (Preprint submitted for publication)
- [27] Kouloukas Th. E., Papageorgiou V. G. [2010] *Entwining Yang-Baxter maps and integrable lattices*. (Preprint submitted for publication), arXiv:1006.2145v1.
- [28] Lichnerowicz, A. [1977] *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*. J. Diff. Geom. 12, 253-300.
- [29] Lu J.H. [1990] *Multiplicative and Affine Poisson Structures on Lie Groups*. Ph.D. thesis, Univ. of California, Berkeley.
- [30] Lu J.H. , Yan M., Zhu Y.Ch. [2000] *On the set-theoretical Yang-Baxter equation*. Duke Math. J. 104, Number 1, 1–18.
- [31] Marsden, J. E., T. S. Ratiu [1999] *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Second Edition, Springer-Verlag.
- [32] Nijhoff F., and Capel H. [1995] *The discrete Korteweg-de Vries equation*. Acta Appl. Math. 39, 1-3, 133–158.
- [33] Nijhoff F. W., Capel H. W., Papageorgiou, V. G. [1992] *Integrable quantum mappings*. Phys. Lett. A, 46 No 4, 2155–2158.
- [34] Papageorgiou V. G., Nijhoff F. W., Capel H. W. [1990] *Integrable mappings and nonlinear integrable lattice equations*. Phys. Lett. A, 147, 106–114
- [35] Papageorgiou V., Tongas A. [2007] *Yang-Baxter maps and multi-field integrable lattice equations*. J. Phys. A: Math. Theor. 40 12677-12690.
- [36] Papageorgiou V., Tongas A., Veselov A.P. [2006] *Yang-Baxter maps and symmetries of integrable equations on quad-graphs*. J. Math. Phys. 47, 083502, 1-14.

- [37] Papageorgiou V., Tongas A., Suris Yu., Veselov A.P. [2009] *On quadrirational Yang-Baxter maps*. arXiv:0911.2895.
- [38] Reiman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. [1979, 1981] *Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and lax equations I, II*. Invent. Math. 54, no. 1, 81–100, ibid. 63, no. 3, 423–432.
- [39] Reshetikhin N., Veselov A.P. [2005] *Poisson Lie groups and Hamiltonian theory of the Yang-Baxter maps*. math.QA/0512328.
- [40] Semenov-Tian-Shansky, M. A. [1983] *What is a classical r-matrix ?* Funct. Anal. Appl. 17 (4), 259–272.
- [41] Semenov-Tian-Shansky M.A. [1985] *Dressing transformations and Poisson Lie group actions*. Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto University 21, 1237–1260.
- [42] Shibukawa Y. [2005] *Dynamical Yang-Baxter Maps*. Int. Math. Res. Notices, No. 36.
- [43] Shibukawa Y. [2007] *Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43, No 4, 1157–1182 .
- [44] Sklyanin, E.K. [1982] *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*. Funct. Anal. Appl. 16, no. 4, 27–34.
- [45] Sklyanin E.K. [1988] *Classical limits of $SU(2)$ -invariant solutions of the Yang-Baxter equation*. J. Soviet Math. 40, No 1, 93–107.
- [46] Sklyanin, E. [1999] *Bäcklund transformations and Baxter's Q-operator, Integrable systems: from classical to quantum*. CRM Proc. Lecture Notes, 26, 227–250
- [47] Suris, Y.B. [1994] *The problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*. Progress in Mathematics 219, Birkhäuser.
- [48] Suris Yu. B., Veselov A.P. [2003] *Lax pairs for Yang-Baxter maps*. J. Nonlin. Math. Phys. 10, suppl. 2, 223–230.
- [49] Tsiganov A.V. [2007] *A family of the Poisson brackets compatible with the Sklyanin bracket*. J. Phys. A: Math. Theor. 40 4803–4816

-
- [50] Vaisman, I. [1994] *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Progress in Mathematics 118, Birkhäuser.
- [51] Veselov, A. P. [1991] *Integrable maps*. Russ. Math. Surveys 46 1-51.
- [52] Veselov A. P. [1991] *Integrable Lagrangian relations and factorization of matrix polynomials*, Funkts. Anal. Pril. 1991 V. 25 no. 2 38-49 (Russian), Translation in Funct. Anal. Appl. 1991 V. 25 no. 2 112–122.
- [53] Veselov A.P. [2003] *Yang-Baxter maps and integrable dynamics*. Phys. Lett. A, 314, 214–221.
- [54] Veselov, A.P. [2007] *Yang-Baxter maps: dynamical point of view, Combinatorial Aspects of Integrable Systems*. (Kyoto) MSJ Mem. vol 17 pp 145–167.
- [55] Vladimirov A.A. [1993] *A method for obtaining quantum doubles from the Yang-Baxter R-matrices*. Mod. Phys. Lett. A, 8, 1315–1321.
- [56] Weinstein, I. [1983] *The local structure of Poisson manifolds*. J. Diff. Geom. 18, 523-557.
- [57] Weinstein A. , Xu P. [1992] *Classical solutions to the Quantum Yang-Baxter equation*. Commun. Math. Phys. 148, 309–343
- [58] Weinstein A., Lu J.H. [1990] *Poisson Lie Groups, dressing transformations, and Bruhat decompositions*. J. Diff. Geom. 31, 501–526.
- [59] Yang C.N. [1967] *Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction*. Phys. Rev. Lett. 19, 1312–1315