ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΝΙΚΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: ΘΕΟΔΟΤΛΑ Ν. ΓΡΑΨΑ

[ΜΑΙΟΣ 2011]

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΚΑΙ ΟΛΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΝΙΚΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ
ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ
ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: ΘΕΟΔΟΤΛΑ Ν. ΓΡΑΨΑ

[ΜΑΙΟΣ 2011]

Πριν παραθέσω τα αποτελέσματα της ερευνητικής μου δραστηριότητας στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών ως υποψήφιος Διδάκτορας, θα ήθελα να αναφερθώ σε κάποιους ανθρώπους που καθόρισαν, με τον τρόπο τους, την ερευνητική μου συμπεριφορά, αλλά και τον τρόπο που, πλέον, βλέπω τη ζωή μου.

Το γεγονός ότι όλες οι ερευνητικές προσδοκίες μου έγιναν επιστημονικές εργασίες και, τελικά, η παρούσα διδακτορική διατριβή οφείλεται κατά κύριο λόγο στην επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα Θεοδούλα Γράψα, Επίκουρο Καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Το ισχυρό ένστικτό της, καθώς και η ουσιαστική και βαθιά γνώση του γνωστικού αντικειμένου της, καθοδήγησαν με επιτυχία την ερευνητική μου αναζήτηση όλα αυτά τα χρόνια. Περισσότερο όμως όλων, παρ' όλες τις δύσκολες στιγμές, ήταν εκεί, παρούσα όταν η υπομονή μου λιγόστευε και το τέλος του ταξιδιού που επέλεξα να κάνω φαίνονταν μακρύ και ατελείωτο. Για όλα αυτά που κέρδισα σαν άνθρωπος - πρωτίστως - και σαν ερευνητής την ευχαριστώ θερμά.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, ιδιαιτέρως, τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής μου Επιτροπής Καθηγητές κ.κ. Κοσμά Ιορδανίδη και Χαράλαμπο Μπότσαρη για την καθοριστική συμβολή τους στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γιώργο Ανδρουλάκη, που με την υπομονή του και την εμπειρία του έκανε την επιστημονική μας συνεργασία να καρποφορήσει, υποδεικνύοντάς μου, παράλληλα, δρόμους που, μέχρι πρότεινος, θεωρούσα κλειστούς και άγνωστους.

Θα ήταν παράλειψή μου εάν δεν ευχαριστούσα τις υποψήφιες διδάκτορες Έρι Μαλιχουτσάκη και Χριστίνα Νικολακάκου για τη φιλία τους και την άψογη συνεργασία μας, το διδάκτορα κ. Δημήτρη Σωτηρόπουλο για την προσφορά του στην αρχή της ερευνητικής μου σταδιοδρομίας και ιδιαιτέρως τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Τέλη Κλαμαργιά για την αγάπη με την οποία προσέγγιζε όλες αυτές τις σκέψεις και τις ιδέες που μοιραστήκαμε όλα αυτά τα χρόνια.

Θα ήθελα να εκφράσω την εκτίμηση και την αγάπη μου στους γονείς μου Ανδρέα και Γεωργία, καθώς και στα αδέρφια μου Σωτήρη και Κατερίνα, που με την αγάπη τους και τη σοφία τους με στηρίζουν, με όποιο τρόπο και μέσο διαθέτουν κάθε φορά.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Ελένη, τη συνοδοιπόρο μου σε τούτη τη ζωή, που πολύ απλά δέχτηκε και αγκάλιασε την όλη μου προσπάθεια σαν να ήταν μόνο δική της.

*«Αναζήτηση είναι εκείνο το ταξίδι που
αρχίζει όταν αγγίζει, κανείς,
τον προορισμό του...»*

Ιωάννης Α. Νίκας

Πάτρα, Μάιος 2011

Στους γονείς μου
Ανδρέα και Γεωργία

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή πραγματεύεται το θέμα της αποδοτικής και με βεβαιότητα εύρεσης όλων των ριζών της παραμετρικής εξίσωσης

$$f(x; [p]) = 0, \quad (1)$$

μιας συνεχώς διαφορίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $[p] \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα που περιγράφει όλες τις παραμέτρους της εξίσωσης (1) και τυποποιούνται με τη μορφή διαστημάτων. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιήθηκαν εργαλεία της Διαστηματικής Ανάλυσης.

Το κίνητρο για την ερευνητική ενασχόλησή μου με το παραπάνω πρόβλημα προέκυψε μέσα από την πρώτη εργασία και αφορούσε ένα κλασσικό πρόβλημα αριθμητικής ανάλυσης: την αριθμητική επίλυση συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων μέσω διαστηματικής ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, στην εργασία [53] με τίτλο «Improving the efficiency of a polynomial system solver via a reordering technique» προτάθηκε μια ευρετική τεχνική αναδιάταξης του αρχικού πολυωνυμικού συστήματος που φαίνεται να βελτιώνει σημαντικά, κάθε φορά, τον χρησιμοποιούμενο επιλυτή. Η ανάπτυξη, καθώς και τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας αποτυπώνονται στο Κεφάλαιο 2 της παρούσας διατριβής.

Η εργασία [53] βασίστηκε σε μια τεχνική αναφορά των Herbot και Ratz, [19], και αφορούσε στην επίλυση συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, οι Herbot και Ratz εφάρμοσαν μια ανά συνιστώσα προσέγγιση για τη συνολική επίλυση του συστήματος, στο πλαίσιο των μεθόδων της Διαστηματικής Ανάλυσης. Ένα σημαντικό ζήτημα που προέκυψε στη μέθοδό τους ήταν η ανάγκη για επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων με διαστηματικές παραμέτρους, δηλαδή διαστηματικές εξισώσεις. Αυτή, η εγγενής δυσκολία, καθώς, επίσης, και η έλλειψη μεθοδολογίας που να αντιμετωπίζει αποδοτικά τέτοιες εξισώσεις αποτέλεσε σοβαρό ερευνητικό κίνητρο.

Έτσι, στο επόμενο Κεφάλαιο 3, προτείνεται μια μεθοδολογία για την αποδοτική και αξιόπιστη επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων με διαστηματικές παραμέτρους, δηλαδή την αποδοτική και αξιόπιστη επίλυση διαστηματικών εξισώσεων. Πρώτα, δίνεται μια νέα διατύπωση της Διαστηματικής Αριθμητικής και αποδεικνύεται η ισοδυναμία της με τον κλασσικό ορισμό. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται η νέα διατύπωση της Διαστηματικής Αριθμητικής ως θεωρητικό εργαλείο για την ανάπτυξη μιας επέκτασης της διαστηματικής μεθόδου Newton που δύναται να επιλύσει όχι μόνο κλασσικές μη-παραμετρικές μη-γραμμικές εξισώσεις, αλλά και παραμετρικές (διαστηματικές) μη-γραμμικές εξισώσεις. Τα πρώτα αποτελέσματα της νέας διαστηματικής μεθόδου Newton δημοσιεύθηκαν στην εργασία [40] με τίτλο «Extending interval Newton method for nonlinear parameterized equations», ενώ τα τελικά αριθμητικά και θεωρητικά αποτελέσματα της εργασίας δημοσιεύθηκαν στην εργασία [38] με τίτλο «Bounding the zeros of an interval equation».

Στο Κεφάλαιο 4 προτείνεται μια νέα προσέγγιση για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος της Ολικής Βελτιστοποίησης με περιορισμούς διαστήματα, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3. Το πρόβλημα της ολικής βελτιστοποίησης, ανάγεται σε πρόβλημα επίλυσης διαστηματικών εξισώσεων, και γίνεται εφικτή η επίλυσή του με τη βοήθεια των θεωρητικών αποτελεσμάτων και της αντίστοιχης μεθοδολογίας του Κεφαλαίου 3. Τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου παρουσιάστηκαν στην εργασία [39] με τίτλο «Global optimization using interval equations».

Στο τελευταίο Κεφάλαιο της παρούσας διατριβής, δίνεται μια νέα αλγοριθμική προσέγγιση για το πρόβλημα της επίλυσης διαστηματικών πολυωνυμικών εξισώσεων. Η νέα αυτή προσέγγιση, βασίζεται και γενικεύει την εργασία των Hansen και Walster, [18], οι οποίοι πρότειναν μια μέθοδο για την επίλυση διαστηματικών πολυωνυμικών εξισώσεων 2ου βαθμού. Τα αποτελέσματα αυτής της προσέγγισης δημοσιεύθηκαν στην εργασία [37], με τίτλο «On solving efficiently interval polynomial equations of degree n ».

Κάποιες βασικές και απαραίτητες έννοιες σχετικά με την Διαστηματική Ανάλυση παρατίθενται στο Κεφάλαιο 1.

Synopsis

In this dissertation the problem of finding reliably and with certainty all the zeros a parameterized equation

$$f(x; [p]) = 0, \quad (2)$$

of a continuously differentiable function $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is considered, where $[p] \in \mathbb{R}^n$ is an interval vector describing all the parameters of Equation (2), which are formed with interval numbers. For this kind of problem, methods of Interval Analysis are used.

The incentive to this scientific research was emerged from the first publication and concerns a classic numerical analysis problem: the numerical solution of polynomial systems of equations using interval analysis. In particular, in the work [53], which is entitled "Improving the efficiency of a polynomial system solver via a reordering technique", a heuristic reordering technique of the initial polynomial systems of equations is proposed. This approach seems to improve significantly the used solver. The proposed technique, as well as the results of this publication are presented in Chapter 2 of this dissertation.

The work [53] was based on a technical report of Herbort and Ratz, [19]. Herbort and Ratz tried to solve systems of non-linear equations by applying a component-wise approach on the initial system, in the context of interval methods. A crucial matter were arisen, the necessity of solving non-linear interval equations. This difficulty, as well as, the lack of methods dedicated to interval equations constituted the necessary motivation for turning my research interests to this kind of equations.

In the next Chapter 3, a methodology is proposed for solving reliably and efficiently parameterized (interval) equations. Firstly, a new formulation of interval arithmetic is given and the equivalence with the classic one is proved. Then, an extension of interval Newton method is proposed and developed, based on the new formulation of interval arithmetic. The new method is able to solve not only classic non-linear equations but, non-linear parameterized (interval) equation too. The first scientific results were published in [40], which is entitled "Extending interval Newton method for nonlinear parameterized equations", while the final numerical and theoretical results were published in [38], which is entitled "Bounding the zeros of an interval equation".

In Chapter 4 a new approach on solving the Box-Constrained Global Optimization problem is proposed, based on the results of Chapter 3. In details, the Box-Constrained Global Optimization problem is reduced to a problem of solving interval equations. The solution of this reduction is attainable through the methodology developed in Chapter 3. The scientific results of this approach were announced in [39], which is entitled "Global optimization using interval equations".

In the last Chapter of this dissertation a new algorithmic approach is given for the problem of solving reliably and with certainty an interval polynomial equation of degree n . This approach consists in a generalization of the work of Hansen and Walster, [18]. Hansen and Walster proposed a method for solving only quadratic interval polynomial equations. The scientific results of this approach were published in [37], which is entitled "On solving efficiently interval polynomial equations of degree n ".

Some basic and necessary notions about Interval Analysis are stated in Chapter 1.

Περιεχόμενα

1	Αριθμητική Διαστημάτων	1
1	Πραγματική Διαστηματική Αριθμητική	1
2	Επεκτεταμένη Διαστηματική Αριθμητική	6
3	Διαστηματικά διανύσματα και πίνακες	7
2	Βελτιώνοντας την αποδοτικότητα ενός επιλυτή πολυωνυμικών συστημάτων μέσω μιας τεχνικής αναδιάταξης	11
1	Εισαγωγή	11
1.1	Διαστηματική μέθοδος Newton	11
1.2	Επίλυση διαστηματικού γραμμικού συστήματος	12
1.3	Το κίνητρο: Η ανά συνιστώσα προσέγγιση των Herbort και Ratz	14
2	Τεχνική αναδιάταξης ως βήμα προεπεξεργασίας	14
3	Πειραματικά αποτελέσματα	19
4	Συμπεράσματα	22
3	Αριθμητική επίλυση παραμετρικών εξισώσεων	23
1	Περί παραμετρικών εξισώσεων	23
2	Διαστηματική αριθμητική κλειστής θήκης	26
3	Η κλασσική διαστηματική μέθοδος Newton	27
4	Διαστηματική μέθοδος Newton κλειστής θήκης	31
5	Εσωτερικό τμήμα μιας διαστηματικής ρίζας	32
6	Η διατύπωση της μεθόδου	39
7	Μη-διαστηματικές εξισώσεις	41
8	Παθολογική περίπτωση	41
9	Θεωρητικά αποτελέσματα	43
10	Ο αλγόριθμος	44
11	Αριθμητικά αποτελέσματα	46
11.1	Στιγμιότυπα από εφαρμογές της μεθόδου	46
11.2	Περισσότερα παραδείγματα	57
12	Συμπεράσματα	67
4	Ολική Βελτιστοποίηση μέσω Παραμετρικών Εξισώσεων	69
1	Εισαγωγή	69
2	Εξισώσεις και Ολικής βελτιστοποίηση	75
2.1	Διαστηματικές εξισώσεις στο πρόβλημα της Ολικής Βελτιστοποίησης	75
2.2	Συνεχής βελτίωση του άνω φράγματος του ολικού ελαχίστου	77
2.3	Σύνοψη	81
3	Ο αλγόριθμος	81
4	Αριθμητικά Αποτελέσματα	83
4.1	Ένα απλό παράδειγμα	84
4.2	Αριθμητικά πειράματα	87
5	Συμπεράσματα	89

5	Περί της αποδοτικής επίλυσης n-οστού βαθμού παραμετρικών πολωνυμικών εξισώσεων στο R	91
1	Παραμετρικά Πολυώνυμα	91
2	Ιδιότητες διαστηματικών πολωνύμων	94
3	Ο αλγόριθμος	103
4	Αριθμητικά αποτελέσματα	106
5	Το πρόβλημα της «εξάρτησης»	118
6	Συμπεράσματα	118

Κεφάλαιο 1ο

Αριθμητική Διαστημάτων

Η διαστηματική αριθμητική αποτελεί το βασικό εργαλείο των αριθμητικών υπολογισμών με επαλήθευση. Σ' αυτό το κεφάλαιο συνοψίζονται οι βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διατριβή. Για μια πιο εκτενή αναφορά προτείνεται κάποια ξένη και ελληνική βιβλιογραφία [1, Alefeld & Herzberger], [11, Hammer και άλλοι], [18, Hansen], [32, 33, Moore], [35, Neumaier], [42, Ratschek & Rokne], [57, Γράψα] και [58, Σωτηρόπουλος].

1 Πραγματική Διαστηματική Αριθμητική

Διαστηματικοί αριθμοί

Ένα πραγματικό διάστημα αριθμών, ή απλά ένα **διάστημα**, είναι ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

$$[x] = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\} \quad (1.1)$$

όπου $\underline{x}$ και $\bar{x}$ υποδηλώνει το κάτω και άνω άκρο του διαστήματος $[x]$, αντιστοίχως. Ένα πραγματικό διάστημα περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς μεταξύ των δύο άκρων. Μερικές φορές, τα κάτω και άνω φράγματα καλούνται το infimum και το supremum, αντίστοιχα, του διαστήματος $[x]$. Το σύνολο όλων των πραγματικών διαστημάτων συμβολίζεται με $\mathbb{IR}$.

Ένα διάστημα θα καλείται **εκφυλισμένο** ή, απλά, σημείο όταν το κάτω άκρο του ταυτίζεται με το άνω άκρο του,

$$\underline{x} = \bar{x}.$$

Σε αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή

$$\underline{x} < \bar{x},$$

τότε το διάστημα $[x]$ θα καλείται **μη εκφυλισμένο**. Στην περίπτωση των εκφυλισμένων διαστημάτων μπορούμε να γράψουμε απλά x αντί για $[x]$. Αυτό σημαίνει πως η μορφή ενός εκφυλισμένου διαστήματος αποτελεί έναν άλλο τρόπο γραφής των πραγματικών αριθμών.

Έννοιες συνόλων

Τα διαστήματα είναι σύνολα. Συνεπώς, οι όροι ισότητα ($=$), μέλος ($\in$), υποσύνολο ($\subseteq$), γνήσιο υποσύνολο ($\subset$), υπερσύνολο ($\supseteq$), γνήσιο υπερσύνολο ($\supset$) και τομή ($\cap$) ορίζονται υπό την έννοια που ορίζονται και στη θεωρία συνόλων.

Ένα διάστημα $[x]$ θα λέμε ότι περιέχεται στο εσωτερικό ενός άλλου διαστήματος $[y]$ όταν

$$\underline{y} < \underline{x} \text{ και } \bar{y} > \bar{x}.$$

Σ' αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούμε τον τελεστή $\overset{\circ}{\subset}$, ο οποίος ορίζεται ως εξής

$$[x] \overset{\circ}{\subset} [y] \Leftrightarrow \underline{y} < \underline{x} \wedge \bar{y} > \bar{x}.$$

Αυτή η σχέση των δύο διαστημάτων ονομάζεται σχέση εσωτερικού εγκλεισμού (inner inclusion relation).

Η κλειστή θήκη $\sqcup$ δύο διαστημάτων $[x]$ και $[y]$ ορίζεται ως το διάστημα που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς των δύο διαστημάτων, καθώς και όλους τους πραγματικούς αριθμούς ανάμεσά τους, δηλαδή

$$[x] \sqcup [y] = [\min\{\underline{x}, \underline{y}\}, \max\{\overline{x}, \overline{y}\}].$$

Ως διάμετρος d ή πλάτος w ενός διαστήματος $[x]$ ορίζεται η απόσταση μεταξύ των άκρων του:

$$d([x]) = \overline{x} - \underline{x} = w([x]).$$

Ως ακτίνα r ενός διαστήματος $[x]$ ορίζεται η απόσταση του μέσου του διαστήματος από τα άκρα του:

$$r([x]) = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{2}.$$

Ως μέσο m ενός διαστήματος $[x]$ ορίζεται το σημείο εκείνο που ισαπέχει από τα άκρα του διαστήματος:

$$m([x]) = \frac{\overline{x} + \underline{x}}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να γράψουμε τη σχέση του «περιέχεται» του σημείου x ως προς το διάστημα $[x]$ ως ακολούθως

$$x \in [x] \Leftrightarrow |x - m([x])| \leq r([x]),$$

χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για την ακτίνα και το μέσο ενός διαστήματος. Υπό αυτή την έννοια, αν θεωρήσουμε το μέσο ενός διαστήματος ως προσέγγιση ενός άγνωστου αριθμού $x \in [x]$, τότε η ακτίνα του διαστήματος $[x]$ αποτελεί ένα άνω φράγμα του απόλυτου σφάλματος του μέσου $m([x])$.

Η μέγιστη απόλυτη τιμή ενός διαστήματος $[x]$ ορίζεται ως εκείνο το μέλος του διαστήματος $[x]$ με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή:

$$|[x]| = \max\{|x| \mid x \in [x]\},$$

και η ελάχιστη απόλυτη τιμή ενός διαστήματος $[x]$ ορίζεται ως εκείνο το μέλος του διαστήματος $[x]$ με την μικρότερη απόλυτη τιμή:

$$\langle [x] \rangle = \min\{|x| \mid x \in [x]\}.$$

Έτσι, η μικρότερη απόλυτη τιμή $\langle [x] \rangle = 0$ εάν $0 \in [x]$. Σημειώνεται, ότι η μικρότερη απόλυτη τιμή $\langle [x] \rangle$ και η μεγαλύτερη απόλυτη τιμή $|[x]|$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Ωστόσο, η απόλυτη τιμή ενός διαστήματος $[x]$, που συμβολίζεται με $abs([x])$, αποτελεί μια στοιχειώδης διαστηματική συνάρτηση και αναλύεται στην επόμενη ενότητα.

Έστω ότι το διάστημα $[x]$ αποτελεί έναν εγκλεισμό ενός πραγματικού αριθμού x , του οποίου η ακριβής τιμή είναι άγνωστη. Για να πάρουμε ένα μέτρο της ποιότητας του εγκλεισμού του $[x]$, ορίζεται η σχετική διάμετρος ενός διαστήματος $[x]$ από την ακόλουθη σχέση:

$$d_{rel} = \begin{cases} \frac{d([x])}{\langle [x] \rangle} & \text{εάν } 0 \neq [x] \\ d([x]) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η σχετική διάμετρος αποτελεί ένα άνω φράγμα του σχετικού σφάλματος του άγνωστου σημείου x ως προς ένα αυθαίρετο στοιχείο του διαστήματος $[x]$.

Η απόσταση $q([x], [y])$ μεταξύ δύο διαστημάτων $[x]$ και $[y]$ ορίζεται ως τη μεγαλύτερη απόσταση των αντίστοιχων άκρων των δύο διαστημάτων, δηλαδή

$$q([x], [y]) = \max \{ |\underline{x} - \underline{y}|, |\bar{x} - \bar{y}| \}.$$

Η απόσταση είναι ένα μη αρνητικός αριθμός και μηδενίζεται όταν και μόνο όταν τα δύο διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους $[x] = [y]$. Η απόσταση δεν εξαρτάται από τη σειρά των ορισμάτων της κι επιπλέον ισχύει και η τριγωνική ανισότητα. Συνεπώς, η απόσταση q είναι μετρική και το σύνολο των πραγματικών διαστημάτων που παρέχεται από τη μετρική q είναι ένας μετρικός χώρος. Επιπλέον, ο $(\mathbb{IR}, q)$ είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος ([58, Σωτηρόπουλος]).

Εφ' όσον ο $(\mathbb{IR}, q)$ είναι ένας μετρικός χώρος, η έννοια της σύγκλισης και της συνέχειας μπορεί να εισαχθεί με τον συνήθη τρόπο.

Θεώρημα 1.1. Μια ακολουθία $[x]^{(k)}$ διαστημάτων συγκλίνει σε ένα διάστημα $[x]$ εάν και μόνο εάν η ακολουθία των άκρων της συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος $[x]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στα βιβλία [33] και [58]. □

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} [x]^{(k)} = [x] &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} q([x]^{(k)}, [x]) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{x} \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)} = \bar{x} \right) \end{aligned}$$

Διαστηματική αριθμητική

Οι στοιχειώδεις πράξεις $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ της πραγματικής αριθμητικής μπορούν να επεκταθούν από πραγματικούς τελεστές σε διαστηματικούς σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό:

$$[a] \circ [b] = \{a \circ b \mid \forall a \in [a], \forall b \in [b]\}, \quad (1.2)$$

όπου $[a], [b] \in \mathbb{IR}$. Είναι ξεκάθαρο πως για την περίπτωση της διαίρεσης ο ορισμός περιορίζεται σε διαστήματα όπου το $0 \notin [b]$. Επιπλέον, το δεξί τμήμα της σχέσης (1.2) θα είναι ένα διάστημα, εφ' όσον οι αντίστοιχες πραγματικές πράξεις είναι συνεχείς. Έτσι, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της μονοτονίας των στοιχειωδών πράξεων, μπορούμε να πάρουμε τους ακόλουθους ισοδύναμους τέσσερις κανόνες ([42]),

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}] \\ [a] - [b] &= [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}] \\ [a] \cdot [b] &= [\min \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \}, \max \{ \underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b} \}] \\ \frac{[a]}{[b]} &= \left[\min \left\{ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right\}, \max \left\{ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\bar{b}}, \frac{\bar{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right\} \right], \quad 0 \notin [b] \end{aligned} \quad (1.3)$$

Θεώρημα 1.2. Οι στοιχειώδεις πράξεις $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ είναι ισότονα εγκλεισμένες (inclusion isotonic).

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στην εργασία [43]. □

Είναι πολύ σημαντικό οι στοιχειώδεις πράξεις να είναι ισότονα εγκλεισμένες. Αυτό σημαίνει ότι, εάν το διάστημα $[x]$ περιέχεται σε ένα άλλο διάστημα $[x]'$, και το διάστημα $[y]$ περιέχεται, επίσης, σε ένα άλλο διάστημα $[y]'$, τότε ο συνδυασμός των διαστημάτων $[x]$ και $[y]$ περιέχεται στο διάστημα που υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας τα μεγαλύτερα $[x]'$ και $[y]'$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$[x] \subseteq [x]', \quad [y] \subseteq [y]' \Rightarrow [x] \circ [y] \subseteq [x]' \circ [y]',$$

με $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό (1.3), μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πώς οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ικανοποιούν τον αντιμεταθετικό και προσεταιριστικό κανόνα

$$\begin{aligned} [x] \circ [y] &= [y] \circ [x] \\ [x] \circ ([y] \circ [z]) &= ([x] \circ [y]) \circ [z] \end{aligned}$$

Τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι τα εκφυλισμένα διαστήματα $[0] = 0$ και $[1] = 1$, αντιστοίχως. Έτσι, μπορούμε να πάρουμε

$$-[x] = 0 - [x] = [-\underline{x}, -\overline{x}]$$

Γενικά, δεν υπάρχουν τα αντίθετα στοιχεία για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Από την άλλη πλευρά, όμως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &= [0] \subseteq [x] - [x], \\ \text{και } 1 &= [1] \subseteq [x]/[x], \end{aligned}$$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το διάστημα $[x]$ είναι ένα εκφυλισμένο διάστημα.

Άλλη μια σπουδαία ιδιότητα που, γενικά, δεν ισχύει στην διαστηματική αριθμητική είναι ο επιμεριστικός κανόνας. Ωστόσο, υπάρχει μια πιο αδύνατη μορφή του επιμεριστικού κανόνα, που ονομάζεται υποεπιμεριστικός κανόνας, που εφαρμόζεται στο σύνολο των διαστηματικών αριθμών και διατυπώνεται ως ακολούθως

$$[x] \cdot ([y] + [z]) \subseteq [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z].$$

Η ισότητα ισχύει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα, η ισότητα ισχύει εάν και τα δύο διαστήματα έχουν το ίδιο πρόσημο ($[41]$, $[54]$).

Διαστηματικές συναρτήσεις

Έστω $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική στοιχειώδης συνάρτηση, συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα στο πεδίο ορισμού της. Επεκτείνουμε την φ σε ορίσματα διαστημάτων τέτοια ώστε $[x] \in D$, ως ακολούθως

$$\varphi([x]) = \{\varphi(x) \mid x \in [x]\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η $\varphi([x])$ υποδηλώνει το πεδίο τιμών της πραγματικής συνάρτησης φ στο διάστημα $[x]$. Εφ' όσον η συνάρτηση φ έχει υποτεθεί συνεχής, τότε το πεδίο τιμών της $\varphi([x])$ είναι ένα διάστημα. Εξ ορισμού, μια στοιχειώδης διαστηματική συνάρτηση είναι ισότονα εγκλεισμένη, δηλαδή

$$[x] \subseteq [y] \Rightarrow \varphi([x]) \subseteq \varphi([y]).$$

Είναι δυνατόν να εκφράσουμε το διαστηματικό αποτέλεσμα των περισσότερων στοιχειωδών συναρτήσεων σε σχέση με τα άκρα των ορισμάτων τους. Έτσι, για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της μονοτονίας των αντίστοιχων πραγματικών συναρτήσεων, περιορίζοντας το διάστημα $[x]$ στο πεδίο ορισμού της φ , μπορούμε να πάρουμε

$$\begin{aligned} \text{abs}([x]) &= [\langle [x] \rangle, |[x]|] \\ \varphi([x]) &= [\varphi(\underline{x}), \varphi(\overline{x})] \quad \varphi \in \{\arctan, \operatorname{arcsinh}, \ln, \sinh\} \\ \varphi([x]) &= [\varphi(\overline{x}), \varphi(\underline{x})] \quad \varphi \in \{\operatorname{arccot}, \operatorname{arccoth}\} \\ [x]^2 &= [\langle [x] \rangle^2, |[x]|^2] \\ \sqrt{[x]} &= [\sqrt{\underline{x}}, \sqrt{\overline{x}}] \\ e^{[x]} &= [e^{\underline{x}}, e^{\overline{x}}]. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι

$$[-1, 2]^2 = [0, 4] \neq [-1, 2] \cdot [-1, 2] = [-2, 4].$$

Όταν το $0 \in [x]$ έχουμε ότι

$$[x]^2 \subseteq [x] \cdot [x].$$

Έτσι, είναι προτιμότερο να υψώνουμε στο τετράγωνο ένα διάστημα, αντί να κάνουμε τον αντίστοιχο πολλαπλασιασμό, γιατί έτσι παίρνουμε στενότερα αποτελέσματα.

Η συνάρτηση της δύναμης $[x]^n$ με πραγματικό εκθέτη $n \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα για $x > 0$ και n άρτιο ή για όλα τα x με το n περιττό, και φθίνουσα οπουδήποτε αλλού. Έτσι, παίρνουμε

$$[x]^n = \begin{cases} [\underline{x}^n, \overline{x}^n], & \text{αν } 0 < \underline{x} \text{ ή το } n \text{ είναι περιττό,} \\ [0, |[x]|^n], & \text{αν } 0 \in [x] \text{ και το } n \text{ είναι άρτιο,} \\ [\overline{x}^n, \underline{x}^n], & \text{αν } 0 > \overline{x} \text{ και το } n \text{ είναι άρτιο.} \end{cases}$$

Για αρνητικούς εκθέτες με $0 \notin [x]$, ένας σύντομος υπολογισμός μας δίνει

$$[x]^n = \frac{1}{[x]^n}.$$

Για μηδενικό εκθέτη θέτουμε $[x]^0 = 1$.

Ίσως, το θεμελιώδες πρόβλημα της διαστηματικής αριθμητικής είναι ο υπολογισμός ενός εγκλεισμού με μόνο μια, μικρής ποσότητας, υπερεκτίμηση του πεδίου τιμών μιας συνάρτησης $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που να ορίζεται από μια αριθμητική έκφραση $f(x)$ που να περιλαμβάνει αριθμητικούς τελεστές και στοιχειώδεις συναρτήσεις ([1], [31], [32], [42]). Είναι εύκολο να πάρουμε έναν εγκλεισμό της $f([x])$, απλά αντικαθιστώντας το x με το διάστημα $[x]$ στην έκφραση της f και στη συνέχεια, να την αποτιμήσουμε χρησιμοποιώντας τη διαστηματική αριθμητική. Με την προϋπόθεση ότι όλοι οι διαστηματικοί τελεστές είναι καλώς ορισμένοι, αυτού του είδους ο υπολογισμός ονομάζεται διαστηματικός υπολογισμός μιας διαστηματικής επέκτασης της f και, συνήθως, συμβολίζεται με ένα κεφαλαίο γράμμα F . Εξ ορισμού έχουμε

$$f([x]) \subseteq F([x]),$$

όπου η ισότητα διατηρείται μόνο σε σπάνιες περιπτώσεις. Δυστυχώς, συνήθως μια διαστηματική επέκταση υπερεκτιμά το πεδίο τιμών και είναι αρκετά δύσκολο να πάρουμε καλούς εγκλεισμούς.

Μια διαστηματική επέκταση είναι ισότονα εγκλεισμένη, εφ' όσον οι στοιχειώδεις τελεστές και συναρτήσεις είναι ισότονα εγκλεισμένες. Μια πραγματική συνάρτηση μπορεί να έχει πολλές διαστηματικές επεκτάσεις, εφ' όσον μπορεί να οριστεί ισοδύναμα από πολλές αριθμητικές εκφράσεις. Μαθηματικά ισοδύναμα εκφράσεις δε συνεπάγεται, απαραίτητα, και ισοδύναμες διαστηματικές επεκτάσεις.

Σε γενικές γραμμές, είναι δύσκολο να βρει κανείς την καλύτερη δυνατή διαστηματική επέκταση. Ωστόσο, είναι εμπειρικό γεγονός ότι όσο λιγότερες φορές εμφανίζεται μια μεταβλητή σε μια έκφραση, τόσο καλύτερο είναι το αποτέλεσμα του αντίστοιχου διαστηματικού υπολογισμού. Εάν η μεταβλητή εμφανίζεται μόνο μια φορά στην αριθμητική έκφραση και δεν υπάρχει άλλη διαστηματική παράμετρος, τότε, όπως έδειξε ο Moore στην [32], οι φυσικές διαστηματικές επεκτάσεις παράγουν αυστηρούς εγκλεισμούς.

Για να μειώσει κανείς την προκυπτόμενη υπερεκτίμηση έχουν προταθεί διάφορες τεχνικές και προσεγγίσεις. Η πιο συνηθισμένη είναι οι κεντροθετημένες μορφές, οι οποίες χρησιμοποιούνται για να πάρουμε καλύτερους εγκλεισμούς για επαρκώς μικρό διάστημα $[x]$ ([1], [35], [42]). Μια κεντροθετημένη μορφή παράγεται από το θεώρημα μέσης τιμής. Έστω, λοιπόν, f μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της D . Τότε,

$$f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c)$$

με μια σταθερά $c \in D$ και ξ να βρίσκεται ανάμεσα στο x και στο c . Έστω $c, x \in [x]$, και $\xi \in [x]$. Άρα

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(\xi)(x - c) \in f(c) + f'([x])(x - c) \\ &\subseteq f(c) + f'([x])([x] - c) = F([x]). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Εδώ η $F([x])$ καλείται μια τυπική μορφή της f στο $[x]$ με κέντρο το c . Εφ' όσον η (1.4) δεν εξαρτάται από το $x \in [x]$, η κεντρική μορφή είναι ένας εγκλεισμός του πεδίου τιμών της f στο $[x]$. Εάν θέσουμε όπου $c = m([x])$ τότε έχουμε τη μορφή της μέσης τιμής της f . Μια κεντροθετημένη μορφή δεν είναι ισότονα εγκλεισμένη εκτός κι αν χρησιμοποιηθεί το μέσο του διαστήματος ως κέντρο. Μια κεντροθετημένη μορφή δεν εξαρτάται από την έκφραση της f , αλλά εξαρτάται από τον διαστηματικό υπολογισμό της f' . Έτσι, διαφορετικές εκφράσεις της f' μας δίνουν διαφορετικές τιμές της κεντροθετημένης μορφής.

2 Επεκτεταμένη Διαστηματική Αριθμητική

Στην προηγούμενη ενότητα, επεκτάθηκαν οι στοιχειώδεις τελεστές των πραγματικών αριθμών σε τελεστέους πραγματικά διαστήματα. Για τους κανόνες αυτούς εξαιρέθηκε η διαίρεση με διαστήματα που περιέχουν το μηδέν. Σ' αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε τον τρόπο για να αφαιρέσουμε αυτό τον περιορισμό, ορίζοντας μια ειδική μορφή της διαστηματικής αριθμητικής, την επεκτεταμένη διαστηματική αριθμητική.

Η επέκταση του συστήματος των πραγματικών αριθμών γίνεται με την προσάρτηση δύο ιδεατών σημείων το θετικό και το αρνητικό άπειρο

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Το επόμενο βήμα είναι να επιτρέψουμε στα άκρα ενός πραγματικού διαστήματος να μπορούν να πάρουν αυτές τις ιδεατές τιμές. Έτσι, το σύνολο των επεκτεταμένων πραγματικών διαστημάτων ορίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{[-\infty, r], r \in \mathbb{R}\} \cup \{[l, +\infty], l \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, +\infty]\}.$$

Το σύνολο των πραγματικών διαστημάτων $\mathbb{IR}$ συμπληρώνεται με τα διαστήματα των οποίων το πάνω ή/και το κάτω άκρο τείνουν στο άπειρο. Για παράδειγμα, το διάστημα $[-\infty, l]$ αποτελεί μια άλλη διατύπωση του συνόλου

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq l\},$$

ενώ το διάστημα $[-\infty, +\infty]$ υπονοεί όλον τον άξονα των πραγματικών αριθμών ([42]).

Το αποτέλεσμα της επεκτεταμένης διαστηματικής διαίρεσης μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα ή δύο επεκτεταμένα διαστήματα. Έτσι, για τα πεπερασμένα διαστήματα $[x], [y] \in \mathbb{IR}$ με $0 \in [y]$, η επεκτεταμένη διαίρεση ορίζεται ως ακολούθως:

$$[x]/[y] = \begin{cases} [-\infty, +\infty] & \text{εάν } \underline{x} < 0 < \bar{x} \\ & \text{ή } [x] = 0 \text{ ή } [y] = 0 \\ [\bar{x}/y, +\infty] & \text{εάν } \bar{x} \leq 0 \text{ και } \underline{y} < \bar{y} = 0 \\ [\infty, \bar{x}/\bar{y}] \cup [\bar{x}/\underline{y}, +\infty] & \text{εάν } \bar{x} \leq 0 \text{ και } \underline{y} < 0 < \bar{y} \\ [\infty, \bar{x}/\bar{y}] & \text{εάν } \bar{x} \leq 0 \text{ και } 0 = \underline{y} < \bar{y} \\ [-\infty, \underline{x}/y] & \text{εάν } 0 \leq \underline{x} \text{ και } \underline{y} < \bar{y} = 0 \\ [\infty, \underline{x}/\underline{y}] \cup [\underline{x}/\bar{y}, +\infty] & \text{εάν } 0 \leq \underline{x} \text{ και } \underline{y} < 0 < \bar{y} \\ [\underline{x}/\bar{y}, +\infty] & \text{εάν } 0 \leq \underline{x} \text{ και } 0 = \underline{y} < \bar{y}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Στην πρώτη περίπτωση του ορισμού (1.5) δεν μπορούμε να αποφασίσουμε πότε η διαίρεση x/y με $x \in [x]$ και $y \in [y]$ τείνει στο θετικό ή το αρνητικό άπειρο. Γι' αυτό το λόγο επιστρέφεται ολόκληρος ο πραγματικός άξονας $[-\infty, +\infty]$ σαν αποτέλεσμα.

Στους διαστηματικούς αλγόριθμους, συνήθως, μια επεκτεταμένη διαστηματική διαίρεση συνδυάζεται με την τομή της με ένα πεπερασμένο διάστημα. Το αποτέλεσμα αυτής της τομής θα είναι είτε το κενό σύνολο, είτε ένα πεπερασμένο διάστημα, είτε δύο πεπερασμένα διαστήματα. Υπό αυτή την έννοια, η επεκτεταμένη διαστηματική αριθμητική είναι ένα εργαλείο που δημιουργεί και διαχειρίζεται προσωρινά άπειρα διαστήματα.

Εκτός από την πράξη της επεκτεταμένης διαίρεσης χρειάζεται επιπλέον να οριστεί και η επεκτεταμένη αφαίρεση μεταξύ αριθμού και διαστήματος μέσα από το σύνολο $\mathbb{IR}^*$. Έτσι, εάν θεωρήσουμε ότι $x \in \mathbb{R}$ (το σημείο x μπορεί να θεωρηθεί και ως εκφυλισμένο διάστημα) και $[y] \in \mathbb{IR}^*$ ένα διάστημα που έχει τουλάχιστον ένα άκρο που τείνει στο άπειρο (θετικό ή αρνητικό) μπορούμε να ορίσουμε την επεκτεταμένη διαστηματική αφαίρεση ως ακολούθως

$$x - [y] = \begin{cases} [-\infty, +\infty] & \text{εάν } [y] = [-\infty, +\infty] \\ [-\infty, x - \underline{y}] & \text{εάν } [y] = [\underline{y}, +\infty] \\ [x - \bar{y}, +\infty] & \text{εάν } [y] = [-\infty, \bar{y}]. \end{cases}$$

3 Διαστηματικά διανύσματα και πίνακες

Ένα διαστηματικό διάνυσμα $[x]$, διάστασης n , ορίζεται να είναι ένα διάνυσμα διάστασης n του οποίου οι συνιστώσες είναι πραγματικά διαστήματα,

$$[x] = ([x]_i)_{i=1,2,\dots,n} = ([x]_1, [x]_2, \dots, [x]_n)^T,$$

με $[x]_i \in \mathbb{IR}$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, n$. Ο χώρος των n -διάστατων διαστηματικών διανυσμάτων θα συμβολίζεται με $\mathbb{IR}^n$ και θα γράφουμε ότι $[x] \in \mathbb{IR}^n$.

Κατά τον ίδιο τρόπο, ένας διαστηματικός πίνακας $[a]$, διάστασης $m \times n$, ορίζεται να είναι ένας πίνακας διάστασης $m \times n$, του οποίου τα στοιχεία είναι πραγματικά διαστήματα,

$$[a] = ([a]_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}} = \begin{pmatrix} [a]_{11} & [a]_{12} & \cdots & [a]_{1n} \\ [a]_{21} & [a]_{22} & \cdots & [a]_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [a]_{n1} & [a]_{n2} & \cdots & [a]_{nn} \end{pmatrix},$$

με $[a]_{ij} \in \mathbb{IR}$ για όλα τα $i, j = 1, 2, \dots, n$. Ο χώρος των διαστηματικών πινάκων διάστασης $m \times n$ θα συμβολίζεται με $\mathbb{IR}^{m \times n}$ και θα γράφουμε ότι $[a] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$.

Ένα διαστηματικό διάνυσμα μπορεί να ερμηνευθεί ως το σύνολο των σημείων ενός n -διάστατου χώρου, που φράσσεται από ένα παραλληλεπίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων. Γι' αυτό το λόγο, πολλές φορές, γίνεται αναφορά σε ένα n -διάστατο διαστηματικό διάνυσμα με τη λέξη «κουτί».

Οι σχέσεις της ισότητας ($=$), του εσωτερικού εγκλεισμού ($\overset{\circ}{\subset}$) και του περιέχεσθαι ($\subseteq$) ορίζονται ανά συνιστώσα. Έτσι, αν $[x], [y] \in \mathbb{IR}^n$, τότε έχουμε

$$[x] = [y] \Rightarrow [x]_i = [y]_i \quad \forall i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$[x] \overset{\circ}{\subset} [y] \Rightarrow [x]_i \overset{\circ}{\subset} [y]_i \quad \forall i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$[x] \subseteq [y] \Rightarrow [x]_i \subseteq [y]_i \quad \forall i, i = 1, 2, \dots, n$$

Αν τώρα $[a], [b] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$, τότε έχουμε

$$[a] = [b] \Rightarrow [a]_{ij} = [b]_{ij} \quad \forall i, j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$[a] \overset{\circ}{\subset} [b] \Rightarrow [a]_{ij} \overset{\circ}{\subset} [b]_{ij} \quad \forall i, j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$[a] \subseteq [b] \Rightarrow [a]_{ij} \subseteq [b]_{ij} \quad \forall i, j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

Παρόμοια, το μέσο σημείο και η διάμετρος ή πλάτος ενός διαστηματικού διανύσματος ορίζονται επίσης ανά συνιστώσα:

$$m([x]) = (m([x]_1), m([x]_2), \dots, m([x]_n))$$

$$w([x]) = d([x]) = (d([x]_1), d([x]_2), \dots, d([x]_n))$$

Όμοια και για τους διαστηματικούς πίνακες

$$m([a]) = \begin{pmatrix} m([a]_{11}) & m([a]_{12}) & \cdots & m([a]_{1n}) \\ m([a]_{21}) & m([a]_{22}) & \cdots & m([a]_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m([a]_{n1}) & m([a]_{n2}) & \cdots & m([a]_{nn}) \end{pmatrix},$$

$$w([a]) = d([a]) = \begin{pmatrix} d([a]_{11}) & d([a]_{12}) & \cdots & d([a]_{1n}) \\ d([a]_{21}) & d([a]_{22}) & \cdots & d([a]_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d([a]_{n1}) & d([a]_{n2}) & \cdots & d([a]_{nn}) \end{pmatrix},$$

Η μέγιστη νόρμα επεκτείνεται σε διαστηματικά διανύσματα και πίνακες ως ακολούθως

$$\|[x]\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |[x]_i|$$

για $[x] \in \mathbb{IR}^n$ και

$$\|[a]\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |[a]_{ij}|$$

για $[a] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$.

Κεφάλαιο 2ο

Βελτιώνοντας την αποδοτικότητα ενός επιλυτή πολυωνυμικών συστημάτων μέσω μιας τεχνικής αναδιάταξης

1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε το πρόβλημα της εύρεσης όλων των λύσεων του ακόλουθου συστήματος μη-γραμμικών πολυωνυμικών εξισώσεων $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

με $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ και $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^\top$, που περιέχονται σε μια κλειστή και φραγμένη περιοχή (κουτί) $[x] \subseteq \mathbb{IR}^n$. Η φραγμένη περιοχή (κουτί) $[x]$, στην παρούσα εργασία, τυποποιείται με ένα διαστηματικό διάνυσμα $[x] = ([x]_1, [x]_2, \dots, [x]_n)^\top$.

1.1 Διαστηματική μέθοδος Newton

Μια επιτυχημένη προσέγγιση του προβλήματος (2.1) είναι η γενικευμένη διχοτόμηση σε συνδυασμό με την διαστηματική μέθοδο Newton, όπως αυτή περιγράφηκε στις εργασίες [17], [24] και [27]. Οι διαστηματικές μέθοδοι Newton χρησιμοποιούνται, γενικά, για την παραγωγή ακριβών φραγμάτων στις λύσεις του προβλήματος (2.1), καθώς και της γενικότερης μορφής του, που αφορά στην εύρεση όλων των λύσεων ενός συστήματος μη-γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

μέσα σε μια κλειστή περιοχή (κουτί) $[x] \subseteq \mathbb{IR}^n$, όπου $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)^\top$.

Αυτές οι μέθοδοι παράγονται από την εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής υπό την προϋπόθεση ότι ο Ιακωβιανός πίνακας $J(x)$, είναι μη ιδιάζων για κάθε $x \in [x]$. Έτσι, για τη γενική περίπτωση (2.2), προκύπτει ότι

$$x^* \in c - (J([x]))^{-1} \cdot g(c) =: N([x]),$$

όπου x^* μια λύση του συστήματος, N ο πολυδιάστατος τελεστής της διαστηματικής μεθόδου Newton, J ο διαστηματικός Ιακωβιανός πίνακας και $c \in [x]$ ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος αναζήτησης $[x]$. Έτσι, κάθε λύση της $g(x) = 0$ στο διάστημα $[x]$ θα βρίσκεται επίσης μέσα στο διάστημα $N([x])$ και συνεπώς και στο διάστημα $N([x]) \cap [x]$. Ωστόσο, όπως προείπαμε, η μέθοδος σ' αυτή της τη μορφή είναι εφαρμόσιμη μόνο όταν ο διαστηματικός Ιακωβιανός πίνακας είναι κανονικός, δηλαδή, μόνο όταν για κάθε $x \in [x]$ ο πραγματικός Ιακωβιανός πίνακας $J(x)$ είναι κανονικός.

Γι' αυτό το λόγο οδηγούμαστε σε μια άλλη μορφή της διαστηματικής μεθόδου Newton όπου «χαλαρώνει» την απαίτηση να είναι μη ιδιάζων ο διαστηματικός Ιακωβιανός πίνακας. Αυτή η μορφή μας λέει πώς αρκεί να επιλύσουμε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων ως προς x^* για να βρούμε εγκλεισμούς των λύσεων x^* της $g(x) = 0$,

$$g(c) = J([x]) \cdot (c - x^*).$$

Η παραπάνω διατύπωση της διαστηματικής μεθόδου Newton μπορεί να αποδώσει καλύτερα εάν την προ-επεξεργαστούμε, αν, δηλαδή, την πολλαπλασιάσουμε με έναν πραγματικό πίνακα $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ για να πάρουμε το ακόλουθο σύστημα

$$R \cdot g(c) = R \cdot J([x]) \cdot (c - x^*).$$

Συνήθως, ως πίνακας προ-επεξεργασίας επιλέγεται ο αντίστροφος πίνακας των μέσων του διαστηματικού Ιακωβιανού πίνακα, δηλαδή ο

$$R = (J(m([x])))^{-1}. \quad (2.3)$$

1.2 Επίλυση διαστηματικού γραμμικού συστήματος

Για την επίλυση του προκύπτοντος διαστηματικού συστήματος γραμμικών εξισώσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατάλληλες διαστηματικές μέθοδοι όπως είναι, για παράδειγμα, οι διαστηματικές εκδόσεις των μεθόδων Απαλοιφή Gauss και Gauss-Seidel, όπως αυτές διατυπώνονται στην μονογραφία του Neumaier [35]. Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί μια παραλλαγή της διαστηματικής μεθόδου Gauss-Seidel, όπως αυτή περιγράφηκε στο βιβλίο [27].

Αν θεωρήσουμε ότι $b = R \cdot f(c)$ και $[a] = R \cdot J([x])$ τότε το αντίστοιχο διαστηματικό γραμμικό σύστημα (2.3), του συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων (2.1), μπορεί να γραφεί ως

$$b = [a] \cdot (c - x^*). \quad (2.4)$$

Το σύνολο λύσεων S αυτού του συστήματος θα περιγράφεται από το παρακάτω σύνολο

$$S = \{x \in [x] \mid a \cdot (c - x^*) = b\},$$

για $a \in [a]$.

Η διαστηματική μέθοδος Gauss-Seidel βασίζεται στο γεγονός ότι το διαστηματικό γραμμικό σύστημα (2.4) μπορεί να γραφεί σε συνιστώσες ως ακολούθως

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} \cdot (c_j - x_j) = bi, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι διάφορα του μηδενός, δηλαδή $a_{ii} \neq 0$, για κάθε i , μπορούμε να λύσουμε την i -οστή εξίσωση ως προς την i -οστή μεταβλητή, δηλαδή την f_i συνιστώσα ως προς τη x_i μεταβλητή. Έτσι, προκύπτει ότι

$$x_i = c_i - \left(b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \cdot (x_j - c_j) \right) / a_{ii}$$

$$\in c_i - \left(b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [a]_{ij} \cdot ([x]_j - c_j) \right) / [a]_{ii} = [z]_i,$$

για $i = 1, 2, \dots, n$. Ο προκυπτόμενος διαστηματικός εγκλεισμός $[z]$ του x^* μας δίνει κι έναν εγκλεισμό του συνόλου λύσεων της (2.4)

$$S \subseteq [z] \cap [x].$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την παραπάνω διαδικασία, βελτιώνοντας τους εγκλεισμούς $[z]$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κατά τη διάρκεια του i -οστού βήματος είναι διαθέσιμες οι βελτιωμένες συνιστώσες του $[z]$, $[z]_1, [z]_2, \dots, [z]_{i-1}$. Συνεπώς, εάν υπολογίσουμε

$$\left. \begin{aligned} [y] &= [x] \\ [y]_i &= \left(c_i - \left(b_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [a]_{ij} \cdot ([y]_j - c_j) \right) / [a]_{ii} \right) \cap [y]_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

για $i = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow N_{GS}([x]) = [y], \quad (2.5)$$

έχουμε ότι

$$S \subseteq N_{GS}([x]) \subseteq [z] \cap [x], \quad (2.6)$$

όπου N_{GS} υποδηλώνει τον τελεστή της διαστηματικής μεθόδου Newton Gauss-Seidel. Η επαναληπτική διαδικασία της διαστηματικής μεθόδου Newton Gauss-Seidel αρχίζει με ένα διαστηματικό διάνυσμα $[x]^{(0)}$, που υποδηλώνει το διάστημα αναζήτησης των λύσεων του διαστηματικού γραμμικού συστήματος, κι επαναλαμβάνει σύμφωνα με τον παρακάτω επαναληπτικό τύπο

$$[x]^{(k+1)} = N_{GS}([x]^{(k)}),$$

όπου $k = 0, 1, 2, \dots$, το πλήθος των επαναλήψεων.

Η τομή των διαστημάτων που πραγματοποιείται στην (2.6) αποτρέπει τη μέθοδο από το να αποκλίνει. Εάν προκύψει κενό διάστημα από την τομή τους, θέτουμε $N_{GS}([x]^{(k)}) = [y]^{(k)} = \emptyset$ και συμπεραίνουμε ότι το διανυσματικό διάστημα $[x]^{(k)}$ δεν περιέχει λύση του γραμμικού συστήματος.

Η διαστηματική μέθοδος Newton Gauss-Seidel μπορεί να επεκταθεί και να βελτιωθεί περισσότερο εάν γίνει χρήση της επεκτεταμένης διαστηματικής αριθμητικής. Ποιο συγκεκριμένα, αν για κάποιο i το $0 \in [a]_{ii}$, τότε, σε συνδυασμό με την επεκτεταμένη διαστηματική αριθμητική, ο τελεστής της διαστηματικής μεθόδου Newton Gauss-Seidel παράγει ένα διάκενο μεταξύ των άκρων των συνιστωσών $[y]_i$ του διαστηματικού διανύσματος $[y]$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε νέα συνιστώσα $[y]_i$ θα είναι είτε ένα νέο διαστηματικό διάνυσμα, είτε δύο διαστηματικά διανύσματα, ξένα μεταξύ τους, με ένα διάκενο στην μέση τους (ένα εσωτερικό διαστηματικό διάνυσμα που δεν περιέχει λύση του συστήματος). Το αποτέλεσμα της εφαρμογής του τελεστή N_{GS} στο διάστημα $[x]^{(k)}$ θα δώσει ένα ή περισσότερα υποψήφια διαστηματικά διανύσματα που ενδεχομένως να περιέχουν λύση του διαστηματικού γραμμικού συστήματος. Συνεπώς, ο τελεστής N_{GS} θα πρέπει να εφαρμοστεί σε όλα αυτά τα προκυπτόμενα διαστήματα. Με αυτό το τρόπο γίνεται εφικτή η εύρεση όλων των λύσεων του διαστηματικού γραμμικού συστήματος (2.4).

Με το ακόλουθο θεώρημα, συνοψίζονται οι πιο σπουδαίες ιδιότητες της διαστηματικής μεθόδου Newton Gauss-Seidel.

Θεώρημα 2.1 ([27]). Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και έστω $[x] \in \mathbb{IR}^n$ ένα διαστηματικό διάνυσμα με $[x] \subseteq D$. Ο τελεστής N_{GS} , όπως αυτός ορίστηκε από την (2.5) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Κάθε λύση $x^* \in [x]$ της $f(x) = 0$ ικανοποιεί τη σχέση $x^* \in N_{GS}([x])$.
2. Εάν $N_{GS}([x]) = \emptyset$ τότε δεν υπάρχει λύση της $f(x) = 0$ στο διάστημα $[x]$.
3. Εάν $N_{GS}([x]) \overset{\circ}{\subset} [x]$ τότε υπάρχει μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο διάστημα $[x]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη περιέχεται στις εργασίες [13], [16] και [35]. □

1.3 Το κίνητρο: Η ανά συνιστώσα προσέγγιση των Herbert και Ratz

Οι Herbert και Ratz στην εργασία [19] πρότειναν μια ανά συνιστώσα διαστηματική προσέγγιση της μεθόδου Newton για την εύρεση εγκλεισμών όλων των λύσεων ενός, γενικά, συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων.

Πιο συγκεκριμένα, η πρότασή τους αφορά την απομόνωση μιας συνιστώσας-εξίσωσης του αρχικού συστήματος με σκοπό την επίλυσή της ως προς μία μεταβλητή. Έτσι, θεωρώντας ως σταθερές τις υπόλοιπες $n - 1$ μεταβλητές είναι εφικτή η δημιουργία μιας προσωρινά μονοδιάστατης, παραμετρικής εξίσωσης,

$$g(x; [c]) = 0,$$

όπου $[c] = ([c]_1, [c]_2, \dots, [c]_{n-1})$ οι συνιστώσες του κουτιού $[x]$ που έχουν σταθεροποιηθεί. Κάθε μία από τις n συνιστώσες $[x]_j$ του κουτιού αναζήτησης, μπορεί να επιλυθεί από διαφορετική συνάρτηση f_i , ανάλογα με το ποια την περιέχει.

Σκοπός της προσέγγισής τους ήταν η συνεχής περικοπή των διαστημάτων $[x]_j$, επιλύοντας παραμετρικές εξισώσεις, έως ότου δημιουργηθούν τελικά εκφυλισμένα διαστήματα που θα περιέχουν τη ζητούμενη λύση.

Ένα από τα προβλήματα που προέκυψαν από αυτή τη διαδικασία ήταν άφ' ενός η επιλογή της μεταβλητής, ως προς την οποία θα επιλυθεί η κάθε εξίσωση, αφ' ετέρου δε η επιλογή της κατάλληλης εξίσωσης που την περιέχει. Μια τέτοια επιλογή μεταβλητής και συνιστώσας εξίσωσης, επηρεάζει δραματικά την απόδοση της μεθόδου τους. Επιπλέον, οι τρόποι για να επιλέξει κάποιος ένα ζευγάρι (f_i, x_j) φτάνουν τους n^2 . Αν, τώρα, ληφθεί υπ' όψιν και η προτεραιότητα, δηλαδή ποιο από τα ζευγάρια να επιλεγεί πρώτο, τότε οι τρόποι επιλογής φτάνουν τους $(n!)^2$.

Σ' αυτό το κεφάλαιο, ορμώμενοι από τις παραπάνω διαπιστώσεις και παρατηρήσεις, αναπτύσσουμε μια ευρετική μεθοδολογία αναδιάταξης του αρχικού πολυωνυμικού συστήματος, που στοχεύει στον καθορισμό των ζευγαριών (f_i, x_j) , με αρχικό σκοπό την βελτιστοποίηση της μεθόδου που πρότειναν οι Herbert και Ratz. Ο μηχανισμός επιλογής αυτών των ζευγαριών αξιοποιεί τις ιδιότητες των πολυωνυμικών εξισώσεων καθώς και κάποιες από τις ιδιότητες των διαστηματικών αριθμών.

2 Τεχνική αναδιάταξης ως βήμα προεπεξεργασίας

Για να μπορέσουμε να διατυπώσουμε την ιδέα της αναδιάταξης, θα πρέπει πρώτα να δώσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες σχετικά με τις πολυωνυμικές εξισώσεις.

Οι πολυωνυμικές εξισώσεις $f_1, f_2, \dots, f_n$ μπορούν να γραφούν ως άθροισμα κάποιων όρων. Έτσι,

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{MON}_1 + \text{MON}_2 + \dots + \text{MON}_k,$$

όπου το k δηλώνει το πλήθος των προσθετέων του πολυώνυμου f_i και $i = 1, 2, \dots, n$. Ο κάθε προσθετέος του πολυώνυμου είναι ένα γινόμενο μιας αριθμητικής σταθεράς και των αντίστοιχων μεταβλητών του, υψωμένες σε κάποια δύναμη. Ο γενικός αυτός όρος, που καλείται μονώνυμο,

έχει την ακόλουθη μορφή

$$\text{MON} = ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n},$$

όπου a είναι η αριθμητική σταθερά και $m_1, m_2, \dots, m_n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Ο βαθμός ενός μονωνύμου ορίζεται ως το άθροισμα των εκθετών κάθε μεταβλητής, δηλαδή

$$\deg(\text{MON}) = m_1 + \cdots + m_n.$$

Ορισμός 2.1 ([34]). Έστω $f_i = \sum_{l=1}^k \text{MON}_l$ μία πολωνυμική εξίσωση και $\deg(\text{MON}_l)$ ο βαθμός του l -οστού μονωνύμου. Τότε, ως βαθμό της πολωνυμικής εξίσωσης f_i ορίζεται ο μέγιστος βαθμός όλων των μονωνύμων του πολωνύμου

$$d_i = \deg(f_i) = \max_l \deg(\text{MON}_l)$$

Όπως προαναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, σκοπός μας είναι η ανάπτυξη κατάλληλης μεθοδολογίας και κανόνων ώστε να μπορούμε να αντιστοιχίσουμε συνιστώσες και αντίστοιχες μεταβλητές με σκοπό την αποδοτικότερη εφαρμογή της μεθόδου των Herbert & Ratz. Επιπλέον, όπως τέθηκε και στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, το ζητούμενο, δεν είναι μόνο η δημιουργία των ζευγαριών (f_i, x_j) , αλλά και η ανάπτυξη μιας στρατηγικής προτεραιότητας μεταξύ αυτών. Η βασική δομή αυτών των κανόνων περιγράφεται από τις ακόλουθες αρχές:

Αναδιάταξη του Ιακωβιανού πίνακα

Για την επίλυση του αντίστοιχου διαστηματικού γραμμικού συστήματος, όπως αυτό περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα, θα πρέπει, εν γένει, ο πίνακας των συντελεστών του αγνώστου να έχει τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου διάφορα του μηδενός. Πρακτικά αυτό μεταφράζεται ότι θα πρέπει να υπάρχει η μεταβλητή ως προς την οποία λύνω την κάθε εξίσωση. Για την αποφυγή τέτοιων μη-διαχειρίσιμων καταστάσεων τροποποιούμε κατάλληλα τον Ιακωβιανό πίνακα του συστήματος πολωνυμικών εξισώσεων (2.1), που αποτελεί και τον πίνακα των συντελεστών του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος.

Σύνολα (f_i, x_j)

Η τροποποίηση του Ιακωβιανού πίνακα του αντίστοιχου συστήματος πολωνυμικών εξισώσεων (2.1) σημαίνει ουσιαστικά την επίλυση της κάθε συνιστώσας f_i ως προς την x_j μεταβλητή, χωρίς να είναι απαραίτητα το $i = j$. Έτσι, λοιπόν, δημιουργούνται σύνολα με τους αντίστοιχους εφικτούς συνδυασμούς (f_i, x_j) .

Κανόνες επιλογής και προτεραιότητας

Για τη δημιουργία των ζευγαριών θα πρέπει να επιλέξουμε αντίστοιχη συνιστώσα και αντίστοιχη μεταβλητή. Η συνολική διαδικασία ακολουθεί τους παρακάτω κανόνες:

- Επιλέγονται πρώτα εκείνα των ζευγάρια στα οποία η μεταβλητή ή η συνάρτηση εμφανίζονται λιγότερες φορές. Είναι γνωστό ([33], [35]) ότι όσες λιγότερες φορές εμφανίζεται μια μεταβλητή σε μια παράσταση τόσο μειώνεται το πρόβλημα της εξάρτησης των μεταβλητών, δηλαδή, η συνολική υπερεκτίμηση του αποτελέσματος των διαστηματικών πράξεων. Συνεπώς, η επίλυση μιας συνιστώσας εξίσωσης ως προς μια μεταβλητή που εμφανίζεται λιγότερες φορές θα μας δώσει καλύτερα φράγματα από μία που εμφανίζεται πολλές φορές.
- Προτεραιότητα δίνεται στην επιλογή κατάλληλης μεταβλητής και στη συνέχεια κατάλληλης συνάρτησης. Για την επιλογή της συνάρτησης ορίζεται ως κριτήριο ο βαθμός της κάθε μιας.

- Το εκτιμώμενο πεδίο τιμών των συναρτήσεων συνυπολογίζεται στην επιλογή κατάλληλης συνάρτησης, με την έννοια πώς όσο μικρότερο πλάτος έχει τόσο μικρότερη είναι η υπερεκτίμηση σε σχέση με το πραγματικό πεδίο τιμών της κάθε συνιστώσας.
- Όταν δεν είναι εφικτή η επιλογή, τότε επιλέγεται η αμέσως επόμενη διαθέσιμη συνάρτηση ή μεταβλητή, όπως αυτή δίνεται από την αρχική μορφή του συστήματος (τυχαία επιλογή).

Για να υλοποιηθούν οι παραπάνω αρχές ας ορίσουμε πρώτα απ' όλα κάποια σύνολα που θα αποτελέσουν βασικό εργαλείο για την παραγωγή της τεχνικής αναδιάταξης. Έστω, λοιπόν,

$$\mathcal{S}_x = \{x_1, \dots, x_n\} \quad (2.7)$$

το σύνολο όλων των μεταβλητών x_j , με $j = 1, \dots, n$, και

$$\mathcal{S}_f = \{f_1, \dots, f_n\} \quad (2.8)$$

το σύνολο όλων των εξισώσεων f_i , με $i = 1, \dots, n$ που συμμετέχουν στη διατύπωση του αρχικού συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων (2.1).

Στη συνέχεια δημιουργούμε υποσύνολα του (2.7) που περιγράφουν τη δομή κάθε συνιστώσας του αρχικού συστήματος ως προς τις μεταβλητές που την απαρτίζουν, καθώς και υποσύνολα του (2.8) που περιγράφουν το πλήθος των συνιστωσών στις οποίες συμμετέχει κάθε μεταβλητή του συστήματος.

Πιο συγκεκριμένα, αντιστοιχούμε κάθε μεταβλητή $x_j \in \mathcal{S}_x$ σε ένα υποσύνολο του συνόλου (2.8), τέτοιο ώστε

$$\mathcal{S}_{f_i}^{x_j} = \left\{ f_i \mid \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0 \text{ εν δυνάμει} \right\} \subseteq \mathcal{S}_f.$$

Κάθε υποσύνολο $\mathcal{S}_{f_i}^{x_j}$ μας δίνει πληροφορίες σχετικά με το ποιες συναρτήσεις f_i περιέχουν την μεταβλητή x_j .

Παρόμοια, αντιστοιχούμε κάθε συνάρτηση $f_i \in \mathcal{S}_f$ σε ένα υποσύνολο του συνόλου (2.7), τέτοιο ώστε

$$\mathcal{S}_{x_j}^{f_i} = \left\{ x_j \mid \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \neq 0 \text{ εν δυνάμει} \right\} \subseteq \mathcal{S}_x.$$

Κάθε υποσύνολο $\mathcal{S}_{x_j}^{f_i}$ μας δίνει πληροφορίες σχετικά με το ποιες μεταβλητές x_j απαρτίζουν την κάθε συνιστώσα συνάρτηση f_i του αρχικού πολυωνυμικού συστήματος (2.1).

Ο ακόλουθος Αλγόριθμος 2.1, που ονομάζεται PDA (Pair Determination Algorithm - Αλγόριθμος καθορισμού ζευγαριών), οριοθετεί τις προαναφερόμενες αρχές μέσω των συνόλων $\mathcal{S}_x$, $\mathcal{S}_f$, $\mathcal{S}_{f_i}^{x_j}$ και $\mathcal{S}_{x_j}^{f_i}$ και υλοποιεί αυτούς τους μηχανισμούς.

Στο πρώτο βήμα του αλγορίθμου δημιουργούνται τα $2n$ υποσύνολα των $\mathcal{S}_x$ και $\mathcal{S}_f$ και αρχικοποιείται το τελικό σύνολο $\mathcal{T}$, το οποίο, μετά το τέλος της διαδικασίας θα περιέχει τα επιθυμητά ζευγάρια (f_i, x_j) .

Η βασική διαδικασία (Βήμα 3 έως Βήμα 8) ξεκινά επιλέγοντας είτε μια εξίσωση f_i είτε μια μεταβλητή x_j . Συγκεκριμένα, στο Βήμα 3 ορίζονται οι κανόνες προτεραιότητας με την έννοια ότι προχωράμε στον επόμενο κανόνα εάν ο τρέχων κανόνας δεν καθορίζει μοναδικά μια εξίσωση ή μια μεταβλητή. Τα Βήματα 4 και 5 καθορίζουν το εναπομείναν μέρος του ζευγαριού, δηλαδή τη συνάρτηση f_i ή την μεταβλητή x_j , αντίστοιχα, ενώ στο Βήμα 6 το ζευγάρι αποθηκεύεται στο $\mathcal{T}$. Το Βήμα 7 διαγράφει τα επιλεγόμενα σύνολα που αντιστοιχούν στις επιλεγόμενες μεταβλητές και συναρτήσεις, ενώ το Βήμα 8 αφαιρεί την επιλεγόμενη συνάρτηση και μεταβλητή από τα εναπομείναντα υποσύνολα στα οποία περιέχονται.

Αλγόριθμος 2.1 PDA: Αλγόριθμος Καθορισμού Ζευγαριών (f_i, x_j) **Είσοδος:** Τα σύνολα $\mathcal{S}_x$ και $\mathcal{S}_f$.**Έξοδος:** Το σύνολο των ζευγαριών $\mathcal{T}$.**Βήμα 1ο** [Αρχικοποίηση].Δημιούργησε τα υποσύνολα $\mathcal{S}_{x_j}^{f_i}$ και $\mathcal{S}_{f_i}^{x_j}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.Αρχικοποίησε το $\mathcal{T} = \{\}$.**Βήμα 2ο.**Εφ' όσον $\mathcal{S}_{x_j}^{f_i} \neq \{\}$ και $\mathcal{S}_{f_i}^{x_j} \neq \{\}$ εκτέλεσε τα ακόλουθα βήματα.**Βήμα 3ο.**Καθόρισε ένα σύνολο $\mathcal{C}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}_x$ ή $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}_f$ σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες

- (α) Δημιούργησε ένα σύνολο που θα περιέχει όλα εκείνα τα σύνολα $\mathcal{S}_{f_i}^{x_j}$ και $\mathcal{S}_{x_j}^{f_i}$ με τον ελάχιστο δυνατό πληθάριθμο και ονόμασέ το $\mathcal{C}'$,

$$\mathcal{C}' = \left\{ \mathcal{S}_{f_i}^{x_j}, \mathcal{S}_{x_j}^{f_i} \mid \min_{i,j} \left\{ \text{card}(\mathcal{S}_{f_i}^{x_j}), \text{card}(\mathcal{S}_{x_j}^{f_i}) \right\} \right\}$$

- (β) Εάν το $\mathcal{C}'$ έχει πληθάριθμο 1, τότε όρισε ως σύνολο $\mathcal{C}$ το μοναδικό μέλος του $\mathcal{C}'$.

- (γ) Εάν το $\mathcal{C}'$ έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο του 1, τότε

- i. Εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα μέλος του $\mathcal{C}'$ τέτοιο ώστε $\mathcal{C}'_i \subseteq \mathcal{S}_f$, όπως αυτά ορίστηκαν στο βήμα (α), τότε ως $\mathcal{C}$ επιλέγεται εκείνο το πρώτο σύνολο του οποίου η αντίστοιχη μεταβλητή x_j έχει την μέγιστη δύναμη σε όλο το σύστημα.
- ii. Εάν κάθε υποσύνολο $\mathcal{C}'_i \subseteq \mathcal{S}_x$ τότε ως $\mathcal{C}$ επιλέγεται εκείνο το σύνολο του οποίου η αντίστοιχη εξίσωση f_i :
 - A. έχει το μέγιστο βαθμό d_i .
 - B. έχει το ελάχιστο πλάτος της εκτίμησης του πεδίου τιμών στο αρχικό διάστημα αναζήτησης.

Βήμα 4ο.Εάν το επιλεγόμενο σύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}_f$ τότε επέλεξε την εξίσωση f_i :

- (α) με τον μέγιστο βαθμό d_i .

- (β) με το ελάχιστο πλάτος στην εκτίμηση του πεδίου τιμών στο αρχικό διάστημα αναζήτησης.

Βήμα 5ο.Εάν επιλεγόμενο σύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}_x$ τότε επέλεξε την μεταβλητή x_j με την μέγιστη δύναμη σε ολόκληρο το σύστημα.**Βήμα 6ο.**Τοποθέτησε το ζευγάρι (f_i, x_j) στο σύνολο $\mathcal{T}$.**Βήμα 7ο.**Διέγραψε τα σύνολα $\mathcal{S}_{f_i}^{x_j}$, $\mathcal{S}_{x_j}^{f_i}$.**Βήμα 8ο.**Διέγραψε την εξίσωση f_i από τα σύνολα $\mathcal{S}_{f_i}^{x_k}$, όπου $k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ και την μεταβλητή x_j από τα σύνολα $\mathcal{S}_{x_j}^{f_l}$, όπου $l \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$

Σε πολλές περιπτώσεις, μια εξίσωση f_i δεν μπορεί να καθορισθεί μοναδικά, έτσι, επιβάλλαμε στον αλγόριθμο ακόμη ένα ευρετικό κριτήριο το οποίο χρησιμοποιεί το εκτιμώμενο πεδίο τιμών

μιας συνάρτησης. Χρησιμοποιώντας αυτό το κριτήριο ο καθορισμός της f_i είναι πιο αποτελεσματικός εφ' όσον όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος μιας διαστηματικής έκφρασης τόσο μεγαλώνει η πιθανότητα να είναι μεγάλη η υπερεκτίμηση αυτής της έκφρασης.

Στη συνέχεια, ο Αλγόριθμος 2.2, που ονομάζεται ODA (Order Determination Algorithm - Αλγόριθμος Καθορισμού Σειράς) θα αναδιατάξει τα δημιουργούμενα ζευγάρια που έδωσε ο Αλγόριθμος 2.1 χρησιμοποιώντας δύο κριτήρια:

- τη μέγιστη δύναμη της x_j μεταβλητής στην f_i εξίσωση,
- την f_i με το μικρότερο πλάτος.

Η αναδιάταξη μπορεί να περιγραφεί κατάλληλα από δυο πίνακες μετάθεσης P_1 για τις συναρτήσεις και P_2 για τις μεταβλητές, οι οποίοι αποτελούν την έξοδο του Αλγορίθμου 2.2.

Αλγόριθμος 2.2 ODA: Αλγόριθμος Καθορισμού Σειράς των (f_i, x_j)

Είσοδος: Το σύνολο των ζευγαριών $\mathcal{T}$.

Έξοδος: Οι πίνακες μετάθεσης P_1 P_2 .

Βήμα 1ο.

Αρχικοποίησε τους πίνακες μετάθεσης με τον μοναδιαίο πίνακα,

$$P_1 = I, \quad P_2 = I$$

Βήμα 2ο.

Εφ' όσον το σύνολο $\mathcal{T} \neq \{\}$ εκτέλεσε τα ακόλουθα βήματα.

Βήμα 3ο.

Επέλεξε ένα ζευγάρι (f_i, x_j) σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες προτεραιότητας:

- Το ζευγάρι με την μέγιστη δύναμη της μεταβλητής x_j στη συνάρτηση f_i .
- Το ζευγάρι με το μικρότερο πλάτος του πεδίου τιμών της συνάρτησης f_i .

Βήμα 4ο.

Μετέθεσε τις γραμμές και τις στήλες των P_1 και P_2 , αντιστοίχως, όπως υποδεικνύεται από την επιλογή του ζευγαριού (f_i, x_j) .

Βήμα 5ο.

Διέγραψε το ζευγάρι (f_i, x_j) από το σύνολο $\mathcal{T}$

Σημείωση 2.2. Ένα ισοδύναμο πολυωνυμικό σύστημα εξισώσεων μπορεί άμεσα να παρθεί από την εφαρμογή των πινάκων μετάθεσης P_1 και P_2 στα διανύσματα των εξισώσεων και μεταβλητών, αντίστοιχα.

Οι αλγόριθμοι 2.1 και 2.2 αποτελούν ένα νέο βήμα προ-επεξεργασίας για την βελτίωση της απόδοσης της μεθόδου των Herbert & Ratz. Ωστόσο, η δημιουργία και η διατύπωση της τεχνικής αναδιάταξης βασίστηκε στο προς επίλυση πολυωνυμικό σύστημα κι όχι στην μεθοδολογική προσέγγιση των Herbert & Ratz. Έτσι, γίνεται φανερό πως η τεχνική αναδιάταξης μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε επιλυτή συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων. Η μόνη απαίτηση για μη διαστηματικές μεθόδους είναι η διαθεσιμότητα μιας βιβλιοθήκης με διαστηματική αριθμητική ([23], [27], [28]).

Σ' αυτό το κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε στην εφαρμογή του προτεινόμενου βήματος στην διαστηματική μέθοδο Newton και συγκεκριμένα σε μια παραλλαγή της προσέγγισης του Hansen, όπως αυτή περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Η παραπάνω περιγραφόμενη τεχνική αναδιάταξης μπορεί να εφαρμοστεί είτε στο αρχικό διάστημα, όπως υποδείχθηκε στην Σημείωση 2.2, είτε στο αντίστοιχο διαστηματικό γραμμικό σύστημα (2.3). Έτσι, το προκυπτόμενο διαστηματικό γραμμικό σύστημα παίρνει την μορφή

$$b' = [a]' \cdot y', \quad (2.9)$$

όπου $b' = P_1 \cdot b = P_1 \cdot R \cdot f(c)$, $[a]' = P_1 \cdot [a] \cdot P_2 = P_1 \cdot R \cdot J([x]) \cdot P_2$, $y' = P_2^T (c - x^*)$ και P_1, P_2 οι πίνακες μετάθεσης οι οποίοι περιγράφουν τις αναδιατάξεις, όπως αυτές προέκυψαν από τον Αλγόριθμο 2.2. Όμοια με την Εξίσωση (2.9), ο νέος πίνακας προεπεξεργασίας R θα δίνεται από τη σχέση

$$R' = (m(P_1 \cdot J([x]) \cdot P_2))^{-1}. \quad (2.10)$$

Στα πειραματικά αποτελέσματα που δίνονται στην επόμενη ενότητα, η τεχνική αναδιάταξης εφαρμόζεται μία φορά απ' ευθείας στο αρχικό σύστημα πολωνυμικών εξισώσεων.

3 Πειραματικά αποτελέσματα

Σ' αυτή τη παράγραφο αναφέρουμε ένα δείγμα από κάποιους πειραματικούς ελέγχους σχετικά με την προτεινόμενη τεχνική αναδιάταξης, όπως αυτή αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Οι υπολογισμοί εκτελέστηκαν σ' έναν προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή Pentium-III (866 MHz, 512Mbyte RAM). Η υλοποίηση του βήματος προ-επεξεργασίας (Αλγόριθμοι 2.1 και 2.2) υλοποιήθηκαν και εκτελέστηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού C-XSC ([27]).

Το βήμα προεπεξεργασίας εφαρμόστηκε σε συνδυασμό με το άρθρωμα nlss από την [27], το οποίο υλοποιεί τον πολυ-διάστατο αλγόριθμο του Hansen. Για κάθε δοκιμαστικό πρόβλημα αναφέρουμε το αρχικό και το αναδιατεταγμένο σύστημα. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται σε πίνακες όπου χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες συντμήσεις:

Μέθοδος	Η χρησιμοποιούμενη μέθοδος επίλυσης. Η nlss υποδηλώνει τον αλγόριθμο του Hansen όπως αυτός υλοποιήθηκε στην [27], ενώ η nlss (+) ενσωματώνει το βήμα προεπεξεργασίας.
Χρόνος	Ο συνολικός CPU χρόνος
Εγκλεισμοί	Το πλήθος των ευρισκόμενων εγκλεισμών των λύσεων.
Συναρτήσεις	Το πλήθος των υπολογισμών κάθε συνιστώσας της συνάρτησης.
Ιακωβιανοί	Το πλήθος των υπολογισμών που απαιτούνται για κάθε στοιχείο του Ιακωβιανού.
Gauss-Seidel	Το πλήθος των καλεσμάτων της διαστηματικού Gauss-Seidel βήματος.
Διχοτομήσεις	Το πλήθος των απαιτούμενων διχοτομήσεων από τον αλγόριθμο.

Παράδειγμα 2.1. Η σχεδόν γραμμική συνάρτηση του Brown είναι ένα σύστημα που μπορεί να θεωρηθεί για αυθαίρετη διάσταση. Για $n = 3$, έχουμε

$$\begin{array}{ccc} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 & & 2x_3 + x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4 = 0 & \xrightarrow{P_1, P_2} & x_3 + 2x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ x_1 x_2 x_3 - 1 = 0 & & x_3 x_1 x_2 - 1 = 0 \end{array}$$

Το άρθρωμα nlss (+) φαίνεται πώς επιταχύνει τον αλγόριθμο του Hansen, σε σχέση με τον συνολικό CPU χρόνο. Επιπλέον, παρατηρείται μια σημαντική μείωση των συναρτησιακών και Ιακωβιανών υπολογισμών, καθώς και μείωση στη χρήση των ακριβών βημάτων της Gauss-Seidel.

Αρχικό κουτί: $[-10, 10]^3$, Ακρίβεια: $\varepsilon = 10^{-6}$

Μέθοδος	nlss	nlss (+)	Βελτίωση %
Χρόνος	0.61	0.44	27.88
Εγκλεισμοί	7	3	-
Συναρτήσεις	1899	1368	27.96
Ιακωβιανοί	3861	2736	29.14
Gauss-Seidel	197	149	24.37
Διχοτομήσεις	209	150	28.23

Παράδειγμα 2.2. Η ιδιάζουσα συνάρτηση του Powell:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 + 10x_2 = 0 & (x_4 - 2x_1)^2 = 0 \\
 \sqrt{5}(x_3 - x_4) = 0 & \xrightarrow{P_1, P_2} \sqrt{10}(x_2 - x_3)^2 = 0 \\
 (x_2 - 2x_3)^2 = 0 & \sqrt{5}(x_1 - x_3) = 0 \\
 \sqrt{10}(x_1 - x_4)^2 = 0 & x_1 + 10x_4 = 0
 \end{array}$$

Το παραπάνω σύστημα έχει ιδιάζων Ιακωβιανό πίνακα και έχει μοναδική λύση στο $x^* = (0, 0, 0, 0)^T$.

Αρχικό κουτί: $[-1, 1]^4$, Ακρίβεια: $\varepsilon = 10^{-6}$

Μέθοδος	nlss	nlss (+)	Βελτίωση %
Χρόνος	4.34	2.97	31.57
Εγκλεισμοί	13	7	-
Συναρτήσεις	15104	10052	33.45
Ιακωβιανοί	48064	32256	32.89
Gauss-Seidel	759	490	35.44
Διχοτομήσεις	1495	1004	32.84

Βασιζόμενοι στα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε την καλή απόδοση του ενισχυμένου αρθρώματος nlss (+) σε αραιά συστήματα. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι το πλήθος των λύσεων που βρέθηκαν από το άρθρωμα nlss είναι σχεδόν διπλάσιο σε σχέση με το nlss (+). Μπορούμε, επίσης να παρατηρήσουμε μια ισχυρή επιρροή της επιλογής του αρχικού κουτιού. Αυτό, βέβαια, δεν είναι τόσο εκπληκτικό, διότι στην πρώτη περίπτωση το αρχικό κουτί διχοτομείται στο 0 σε κάθε συνιστώσα, κι έτσι, η λύση περιλαμβάνεται και στα δύο υποκουτιά. Ωστόσο, σε αντίθεση με το άρθρωμα nlss, το nlss (+) φαίνεται πώς μένει εντυπωσιακά ανεπηρέαστο από την επιλογή του αρχικού κουτιού, όπως αυτό δείχνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Αρχικό κουτί: $[-0.5, 1]^4$, ακρίβεια: $\varepsilon = 10^{-6}$

Μέθοδος	nlss	nlss (+)	Βελτίωση %
Χρόνος	962.68	1.31	99.86
Εγκλεισμοί	1	1	-
Συναρτήσεις	3349468	4668	99.86
Ιακωβιανοί	11133952	15008	99.87
Gauss-Seidel	141494	228	99.84
Διχοτομήσεις	347935	468	99.87

Παράδειγμα 2.3. Το ακόλουθο σύστημα αποτελεί ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα του συνόλου των παραδειγμάτων που δόθηκε από τους Moore και Jones στην [19].

$$\begin{array}{ll}
 x_1 - 0.25428722 - 0.18324757x_4x_3x_9 = 0 & x_1 - 0.19807914 - 0.15585316x_8x_4x_7 = 0 \\
 x_2 - 0.37842197 - 0.16275449x_1x_10x_6 = 0 & x_2 - 0.37842197 - 0.16275449x_4x_10x_7 = 0 \\
 x_3 - 0.27162577 - 0.16955071x_1x_2x_10 = 0 & x_3 - 0.27162577 - 0.16955071x_4x_2x_10 = 0 \\
 x_4 - 0.19807914 - 0.15585316x_7x_1x_6 = 0 & x_9 - 0.07056438 - 0.17081208x_4x_8x_7 = 0 \\
 x_5 - 0.44166728 - 0.19950920x_7x_6x_3 = 0 & \xRightarrow{P_1, P_2} x_4 - 0.25428722 - 0.18324757x_1x_3x_5 = 0 \\
 x_6 - 0.14654113 - 0.18922793x_8x_5x_10 = 0 & x_7 - 0.14654113 - 0.18922793x_9x_6x_10 = 0 \\
 x_7 - 0.42937161 - 0.21180486x_2x_5x_8 = 0 & x_5 - 0.34504906 - 0.19612740x_10x_7x_9 = 0 \\
 x_8 - 0.07056438 - 0.17081208x_1x_7x_6 = 0 & x_6 - 0.44166728 - 0.19950920x_8x_7x_3 = 0 \\
 x_9 - 0.34504906 - 0.19612740x_10x_6x_8 = 0 & x_8 - 0.42937161 - 0.21180486x_2x_6x_9 = 0 \\
 x_10 - 0.42651102 - 0.21466544x_4x_8x_1 = 0 & x_10 - 0.42651102 - 0.21466544x_1x_9x_4 = 0
 \end{array}$$

Μια ανάλογη μείωση επιτυγχάνεται στο παραπάνω 10×10 πολυωνυμικό σύστημα, χρησιμοποιώντας ως αρχικό κουτί αναζήτησης το $[0, 2]^{10}$.

Αρχικό κουτί: $[0, 2]^{10}$, Ακρίβεια: $\varepsilon = 10^{-6}$			
Μέθοδος	nlss	nlss (+)	Βελτίωση %
Χρόνος	0.99	0.77	22.22
Εγκλεισμοί	1	1	-
Συναρτήσεις	1450	1240	14.48
Ιακωβιανοί	12500	10900	12.8
Gauss-Seidel	19	14	26.32
Διχοτομήσεις	61	53	13.11

Παράδειγμα 2.4. Ένα μη ιδιάζων πρόβλημα ([10]).

$$\begin{array}{ll}
 x_3^3 - x_3x_1x_2 = 0 & x_1^3 - x_1x_2x_3 = 0 \\
 x_1^2 - x_3x_2 = 0 & \xRightarrow{P_1, P_2} x_2^2 - x_1x_3 = 0 \\
 10x_3x_2 + x_1 - x_3 - 0.1 = 0 & 10x_1x_3 + x_2 - x_1 - 0.1 = 0
 \end{array}$$

Το πιο εντυπωσιακό παράδειγμα που καταδεικνύει την αποτελεσματικότητα του αρθρώματος nlss (+) είναι το παραπάνω μη-ιδιάζων πρόβλημα. Για κάθε μέγεθος αξιολόγησης της μεθόδου έχουμε βελτίωση πάνω από 70%.

Αρχικό κουτί: $[-10, 10]^3$, Ακρίβεια: $\varepsilon = 10^{-6}$			
Μέθοδος	nlss	nlss (+)	Βελτίωση %
Χρόνος	155.39	41.47	73.31
Εγκλεισμοί	2	2	-
Συναρτήσεις	437058	113799	73.96
Ιακωβιανοί	913356	225765	75.28
Gauss-Seidel	44200	12846	70.92
Διχοτομήσεις	50739	12540	75.29

4 Συμπεράσματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο θεωρήσαμε το πρόβλημα της αποδοτικής αναδιάταξης ενός συστήματος πολυωνυμικών εξισώσεων με σκοπό την βελτίωση της απόδοσης ενός επιλυτή. Η τεχνική της αναδιάταξης, που προτάθηκε, εφαρμόζεται ως προεπεξεργασία στο αρχικό σύστημα πολυωνυμικών εξισώσεων με σκοπό την δημιουργία μιας καλύτερης διατύπωσής του και, κατ' επέκταση, της καλύτερης επίλυσής του από δεδομένη μεθοδολογία.

Η προτεινόμενη τεχνική δεν συνιστά σε καμία περίπτωση νέα μεθοδολογία. Παρ' όλα αυτά, φαίνεται πως δρα καταλυτικά στην απόδοση των χρησιμοποιούμενων διαστηματικών μεθόδων. Πολλές φορές, η απόδοση της μεθόδου στο αναδιατεταγμένο σύστημα, γίνεται χειρότερη. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως για κάθε ένα πολυωνυμικό σύστημα υπάρχει μια βέλτιστη αναδιάταξη, ως προς την απόδοσή της αντίστοιχης μεθόδου που την επιλύει. Το τελευταίο συμπέρασμα όμως γεννά κάποια ερωτήματα που χρήζουν μελέτης και περαιτέρω έρευνας:

- Υπάρχει βέλτιστη αναδιάταξη ενός πολυωνυμικού συστήματος ανεξάρτητα από τον επιλυτή που θα χρησιμοποιηθεί;
- Υπάρχει αντίστοιχη βέλτιστη αναδιάταξη για συστήματα μη πολυωνυμικών εξισώσεων;

Κεφάλαιο 3ο

Αριθμητική επίλυση παραμετρικών εξισώσεων

Η εργασία των Herbort και Ratz, [19], όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αφορούσε στην επίλυση ενός συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων μέσω μιας ανά-συνιστώσα τεχνικής. Σε κάποιο στάδιο του αλγορίθμου τους προκύπτουν εξισώσεις με διαστηματικές παραμέτρους, οι οποίες πρέπει να επιλυθούν. Η αδυναμία αποδοτικής επίλυσης τέτοιου είδους εξισώσεων επηρέασε αρνητικά τη συνολική απόδοση της προτεινόμενης μεθοδολογίας τους. Αυτή η αδυναμία, αποτέλεσε ουσιαστικό κίνητρο για τη μελέτη και την ανάπτυξη κατάλληλης μεθόδου για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων.

1 Περί παραμετρικών εξισώσεων

Σ' αυτό το κεφάλαιο θ' ασχοληθούμε με το πρόβλημα της αξιόπιστης και με βεβαιότητα εύρεσης όλων των ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = 0, \quad (3.1)$$

μιας συνεχώς διαφορίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ υποδηλώνει το σύνολο των πραγματικών αριθμών, σ' ένα κλειστό διάστημα $[x]_0$.

Σε πολλά πεδία της επιστήμης (όπως στην επιστήμη των χημικών μηχανικών: [3], των γραφικών σε υπολογιστές: [5], της ρομποτικής: [60], της θεωρίας ελέγχου: [62], κ.α.) ο καθορισμός όλων των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής της (3.1) παραμένει ένα κρίσιμο καθώς κι επίκαιρο ζήτημα. Μία από τις πολλές προσεγγίσεις στην επίλυση της (3.1) είναι η υιοθέτηση διαστηματικών μεθόδων.

Οι μέθοδοι της Ανάλυσης Διαστημάτων, ως γνωστόν, επιτυγχάνουν την εύρωστη και αποδοτική επίλυση του παραπάνω προβλήματος, δίνοντας με εγγύηση αυστηρά φράγματα για όλες τις ρίζες της μέσα σ' ένα καθορισμένο πεδίο αναζήτησης. Ωστόσο, τις περισσότερες φορές οι πειραματικές μετρήσεις δεν είναι ακριβείς και γεννιέται η ανάγκη να εκφραστούν αυτές οι μετρήσεις από ποσότητες που περιέχουν τις πραγματικές τους τιμές. Στην πράξη, είναι ευκολότερο να εκτιμήσουμε τέτοιες ποσότητες από το να τις υπολογίσουμε.

Μία κατηγορία τέτοιων, κατάλληλων «ποσοτήτων», που μπορούν να «εγκλωβίσουν» εύκολα τις ακριβείς πειραματικές μετρήσεις είναι οι διαστηματικοί αριθμοί. Έτσι, γίνεται εφικτός ο εγκλεισμός και το φράξιμο αυτών των ανακριβών μετρήσεων χρησιμοποιώντας διαστηματικούς αριθμούς.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τον ορισμό του υπό μελέτης προβλήματος (3.1), αντικαθιστώντας τους συντελεστές της με διαστήματα. Με αυτό τον τρόπο γενικεύουμε τον ορισμό σε εκείνες τις περιπτώσεις όπου οι συντελεστές της συνάρτησης εμπεριέχουν, εν γένει, κάποια ασάφεια:

Ορισμός 3.1. *Βρες αξιόπιστα και με βεβαιότητα όλες τις ρίζες της παραμετρικής εξίσωσης*

$$f(x; p) = 0,$$

για κάθε $p \in [p]$, όπου $[p] \in \mathbb{IR}^n$ είναι ένα διαστηματικό διάνυσμα διάστασης n , που περιγράφει το πλήθος n των παραμέτρων του προβλήματος και $\mathbb{IR}$ το σύνολο των κλειστών πραγματικών διαστημάτων, σ' ένα κλειστό διάστημα $[x]_0$.

Είναι προφανές, πως στην περίπτωση όπου οι παράμετροι των εξισώσεων περιγράφονται με ακρίβεια από πραγματικούς αριθμούς τότε το διαστηματικό διάνυσμα γίνεται εκφυλισμένο, δηλαδή ένα διάνυσμα διαστημάτων μηδενικού πλάτους. Σ' αυτή την περίπτωση ταυτίζεται το διαστηματικό διάνυσμα με ένα διάνυσμα πραγματικών αριθμών.

Τώρα, αν θεωρήσουμε την φυσική διαστηματική επέκταση της συνάρτησης $f(x; p)$ αναφορικά με το διάνυσμα παραμέτρων p , καταλήγουμε στην συνάρτηση $f(x; [p])$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της **παραμετρικής εξίσωσης** όπου οι παράμετροι μεταβάλλονται συνεχώς.

Ορισμός 3.2. Έστω $f : \mathbb{R} \times \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, $[x]_0$ το διάστημα αναζήτησης και πεδίο ορισμού της f και $[p]$ ένα διαστηματικό διάνυσμα που περιέχει όλες τις παραμέτρους της f . Η εξίσωση της μορφής

$$f(x; [p]) = 0 \quad (3.2)$$

θα καλείται **παραμετρική εξίσωση** με παραμέτρους που μεταβάλλονται συνεχώς, υπό την ερμηνεία του ορισμού 3.1.

Σημείωση 3.3. Από αυτό το σημείο και σε ότι ακολουθεί θα αναφερόμαστε στις εξισώσεις με συνεχείς παραμέτρους με τη φράση διαστηματικές εξισώσεις, μιας και οι παράμετροί της τυποποιούνται με τη μορφή διαστημάτων.

Πρόταση 3.4. Έστω x^* η ρίζα της παραμετρικής εξίσωσης $f(x; p) = 0$, για κάποιο $p \in [p]$ και $f(x; [p])$ η αντίστοιχη διαστηματική εξίσωση της f . Τότε για μια ρίζα x^* της $f(x; p) = 0$ θα ισχύει

$$0 \in f(x^*; [p]). \quad (3.3)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα μέσα από τις ιδιότητες της συνάρτησης εγκλεισμού της f :

$$0 = f(x^*; p) \in f(x^*; [p]).$$

□

Ορισμός 3.5. Αν κάποιο σημείο x^* είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x; p) = 0$, για κάποιο $p \in [p]$, αν, δηλαδή,

$$0 \in f(x^*; [p]).$$

τότε αυτό το σημείο θα ονομάζεται σημειακή ρίζα της αντίστοιχης διαστηματικής εξίσωσης $f(x; [p]) = 0$.

Το σύνολο των «λύσεων» μιας διαστηματικής εξίσωσης θα είναι, λοιπόν, η ένωση όλων των σημειακών ριζών της για όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου p . Ποια θα είναι, όμως, η μορφή αυτών των ενώσεων;

Οι παράμετροι της Εξίσωσης (3.2) μεταβάλλονται συνεχώς (κλειστό και συμπαγές διάστημα) μέσα από την παράμετρο p . Συνεπώς, και οι σημειακές ρίζες της $f(x; [p]) = 0$ θα μεταβάλλονται συνεχώς. Λαμβάνοντας υπ' όψιν αυτή την παρατήρηση διατυπώνεται ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 3.6. Το μέγιστο, μη επεκτάσιμο, συνεχές σημειακών ριζών της διαστηματικής εξίσωσης $f(x; [p]) = 0$, εντός ενός πεδίου αναζήτησης $[x]_0$ θα καλείται διαστηματική ρίζα της $f(x; [p]) = 0$. Εάν μια διαστηματική ρίζα περιέχει μόνο μία σημειακή ρίζα, τότε αυτή θα καλείται εκφυλισμένη διαστηματική ρίζα.

Η μορφή, λοιπόν, της κάθε διαστηματικής ρίζας της διαστηματικής εξίσωσης (3.2) θα έχει μία από τις ακόλουθες μορφές:

- ✓ Το κενό διάστημα: η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα,
- ✓ Ένα εκφυλισμένο διάστημα: εξίσωση με σημειακή ρίζα (π.χ. μια πολλαπλή ρίζα),
- ✓ Ένα μη εκφυλισμένο διάστημα.

Είναι ξεκάθαρο, πως στην περίπτωση που η «λύση» είναι μη εκφυλισμένο διάστημα, το πλήθος των σημειακών ριζών που περιέχονται στο διάστημα αυτό θα είναι μη πεπερασμένου πλήθους.

Η μέχρι τώρα προσέγγιση στο πρόβλημα της επίλυσης της διαστηματικής εξίσωσης (3.2) έγκειται στην εύρεση εγκλεισμών για κάθε μία σημειακή ρίζα της (3.2), που σημαίνει θεωρητικά την εύρεση μη πεπερασμένου πλήθους εγκλεισμών για κάθε μία από αυτές. Με δεδομένο πώς η αναζήτηση γίνεται μέσα σ' ένα κλειστό διάστημα $[x]$, το πρόβλημα της επίλυσης της (3.2) έγκειται, πλέον, στην εύρεση πεπερασμένου πλήθους εγκλεισμών των διαστηματικών ριζών, που θα περιέχουν όλες τις αντίστοιχες σημειακές ρίζες.

Σημείωση 3.7. Από εδώ και στο εξής, για χάρη ευκολίας και χωρίς να υπάρξει παρανόηση ή παρερμηνεία, μια διαστηματική εξίσωση, δηλαδή, μια εξίσωση με διαστηματικές παραμέτρους, θα σημειώνεται ως $f(x) = 0$ αντί για $f(x; [p]) = 0$.

Η πρώτη απόπειρα επίλυσης της εξίσωσης (3.2) έγινε την περίοδο της γέννησης της διαστηματικής ανάλυσης, στο βιβλίο του Ramon Moore «Interval Analysis» ([33, σελ. 60–61]), όπου δίνεται ένα απλό παράδειγμα διαστηματικής εξίσωσης και αντιμετωπίζεται ως κοινή εξίσωση, εφαρμόζοντας σ' αυτή ένα πρώιμο σχήμα της διαστηματικής μεθόδου Newton για τον εγκλεισμό των ριζών της.

Το 1992, ο Hansen ([16, σελ. 73–74]) πρότεινε, για το ίδιο πρόβλημα, την ενσωμάτωση ενός ευρετικού κριτηρίου τερματισμού, στην διαστηματική μέθοδο Newton. Με αυτό τον τρόπο αντιμετώπισε (χωρίς μεγάλη επιτυχία) τις διαστηματικές εξισώσεις αποδεχόμενος ως λύση τους, εκείνα τα υποδιαστήματα του διαστήματος αναζήτησης που ικανοποιούσαν το προτεινόμενο κριτήριο τερματισμού.

Το 2004, οι Hansen και Walster ([13, σελ. 193–194]), πρότειναν μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της επίλυσης μιας διαστηματικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα, πρότειναν την ταυτόχρονη εφαρμογή της μεθόδου Newton σε τρία διαφορετικά σημεία: στο αριστερό άκρο, στο δεξί άκρο και στο μέσο σημείο του διαστήματος αναζήτησης, όταν δεν ήταν εφικτή η εφαρμογή της μεθόδου μόνο στο μέσο σημείο. Ο νέος εγκλεισμός προέκυπτε, κάθε φορά, από την τομή των τριών προκύπτωμενων διαστημάτων με το τρέχων διάστημα αναζήτησης. Αυτή η απόπειρα, έχει καλύτερη συμπεριφορά από αυτή του Hansen στο [16], αλλά ξανά δεν επιτυγχάνει να απομονώσει όλες τις διαστηματικές ρίζες μιας διαστηματικής εξίσωσης, ειδικά όταν εφαρμόζεται σε εξισώσεις που έχουν περισσότερες της μιας διαστηματικές ρίζες.

Το 2006, οι Νίκας, Σωτηρόπουλος και Γράψα, στην εργασία [40], πρότειναν μία μέθοδο η οποία βασίζεται στην επίλυση των συνοριακών εξισώσεων μιας διαστηματικής εξίσωσης, φράσσοντας με αυτό το τρόπο τα άκρα μιας διαστηματικής ρίζας.

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μια μέθοδος που βασίζεται στην κλασσική διαστηματική μέθοδο Newton για την επίλυση διαστηματικών εξισώσεων. Η βασική ιδέα συνίσταται στην απομόνωση των άκρων των διαστηματικών ριζών, εξαιρώντας από τη διαδικασία αναζήτησης εσωτερικά τμήματά της. Σαν άμεσο αποτέλεσμα έρχεται η συρρίκνωση του διαστήματος αναζήτησης και τελικά, η μέθοδος, δίνει ακριβή φράγματα για κάθε μία διαστηματική ρίζα.

Για να δώσουμε και να αποδείξουμε την προτεινόμενη ιδέα παραθέτουμε και αποδεικνύουμε μια ισοδύναμη διατύπωση της διαστηματικής αριθμητικής, που κάνει χρήση του τελεστή της διαστηματικής κλειστής θήκης. Στη συνέχεια δίνονται ορισμένα θεωρητικά αποτελέσματα καθώς

και ένας αλγόριθμος για την προτεινόμενη μεθοδολογία, ο οποίος εφαρμόζεται σε μια σειρά δοκιμαστικών διαστηματικών εξισώσεων.

2 Διαστηματική αριθμητική κλειστής θήκης

Στο Κεφάλαιο 1 περιγράφηκε, μέσω του ορισμού (1.2), πως μπορούν οι στοιχειώδεις πράξεις $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ της πραγματικής αριθμητικής να επεκταθούν σε διαστηματικούς τελεστές. Στη συνέχεια δόθηκε το ισοδύναμο αυτού του ορισμού με τη μορφή των τεσσάρων κανόνων της σχέσης (1.3) και αποδείχθηκε ο ισότονος εγκλεισμός τους.

Σ' αυτή την ενότητα θα εισάγουμε μια νέα, ισοδύναμη, διατύπωση της διαστηματικής αριθμητικής καθώς και μια απόδειξη σχετικά με την ισότονη εγκλειστότητά της.

Έστω, λοιπόν, $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ οι στοιχειώδεις αριθμητικοί τελεστές. Ακολουθώντας τα βήματα της αρχικής επέκτασης των στοιχειωδών τελεστών σε διαστηματικούς αριθμούς, μπορούμε να τους επεκτείνουμε σε τελεστές, έτσι ώστε ο ένας να είναι πραγματικός αριθμός και ο άλλος διάστημα, ως ακολούθως:

$$a \circ [b] = \{a \circ b \mid \forall b \in [b]\} = \{a \circ b \mid \forall b \in [b]\},$$

όπου $[b]$, $a \circ [b] \in \mathbb{IR}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση ως ορισμό μπορούμε να ξαναγράψουμε την επέκταση των στοιχειωδών τελεστών, όπως περιγράφηκε από την (1.2), με την παρακάτω μορφή,

$$[a] \circ [b] = \{a \circ [b] \mid \forall a \in [a]\}$$

όπου $[a] \in \mathbb{IR}$.

Όπως γνωρίζουμε, το αποτέλεσμα μιας πράξης $\circ$ μεταξύ δύο διαστημάτων $[a] \circ [b]$ είναι ένα διάστημα, όπου τα άκρα του είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή, αντίστοιχα, όλων των συνδυασμών των πράξεων μεταξύ των άκρων των δύο διαστημάτων. Συνεπώς, τα άκρα του νέου διαστήματος $[a] \circ [b]$ θα περιέχονται είτε στο $\underline{a} \circ [\underline{b}, \bar{b}]$, είτε στο $\bar{a} \circ [\underline{b}, \bar{b}]$. Άρα, το διάστημα $[a] \circ [b]$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$[a] \circ [b] = \{a \circ [b] \mid \forall a \in [a]\} = \{\underline{a} \circ [b]\} \sqcup \{\bar{a} \circ [b]\}, \quad (3.4)$$

το οποίο συνιστά ένα διαφορετικό ορισμό της διαστηματικής αριθμητικής, κάνοντας χρήση του τελεστή διαστημάτων για την κλειστή θήκη. Για τις ανάγκες αυτής της εργασίας θα αναφερόμαστε στην νέα έκφραση της διαστηματικής αριθμητικής ως **Διαστηματική Αριθμητική Κλειστής Θήκης**. Έτσι τώρα, μπορούμε εύκολα να μετατρέψουμε τον ορισμό (3.4) στην υλοποιήσιμη μορφή του ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} [a] + [b] &= \{\underline{a} + [b]\} \sqcup \{\bar{a} + [b]\}, \\ [a] - [b] &= \{\underline{a} - [b]\} \sqcup \{\bar{a} - [b]\}, \\ [a] \cdot [b] &= \{\underline{a} \cdot [b]\} \sqcup \{\bar{a} \cdot [b]\}, \\ \frac{[a]}{[b]} &= \left\{ \frac{\underline{a}}{[b]} \right\} \sqcup \left\{ \frac{\bar{a}}{[b]} \right\}, \quad 0 \notin [b]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Λήμμα 3.1. Η διαστηματική αριθμητική που ορίστηκε στην (1.3) και η διαστηματική αριθμητική που ορίστηκε στην (3.5) είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι κάθε κανόνας της σχέσης (3.5) είναι ισοδύναμος με τον αντίστοιχο κανόνα της σχέσης (1.3).

Για την πρόσθεση και την αφαίρεση έχουμε:

$$\{\underline{a} + [b]\} \sqcup \{\overline{a} + [b]\} = [\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} + \overline{b}] \sqcup [\overline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}] = [a] + [b],$$

$$\{\underline{a} - [b]\} \sqcup \{\overline{a} - [b]\} = [\underline{a} - \overline{b}, \underline{a} - \underline{b}] \sqcup [\overline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}] = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}] = [a] - [b].$$

Όμοια, παίρνουμε για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση:

$$\begin{aligned} \{\underline{a} \cdot [b]\} \sqcup \{\overline{a} \cdot [b]\} &= \\ &= [\min\{\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}\}, \max\{\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}\}] \sqcup [\min\{\overline{ab}, \overline{a}\overline{b}\}, \max\{\overline{ab}, \overline{a}\overline{b}\}] = \\ &= [\min\{\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}, \overline{ab}, \overline{a}\overline{b}\}, \max\{\underline{ab}, \underline{a}\overline{b}, \overline{ab}, \overline{a}\overline{b}\}] = [a] \cdot [b], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\underline{a}}{[b]} \right\} \sqcup \left\{ \frac{\overline{a}}{[b]} \right\} &= \\ &= \left[\min\left\{ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\overline{b}} \right\}, \max\left\{ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\overline{b}} \right\} \right] \sqcup \left[\min\left\{ \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \right\}, \max\left\{ \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \right\} \right] = \\ &= \left[\min\left\{ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \right\}, \max\left\{ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\underline{a}}{\overline{b}}, \frac{\overline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}} \right\} \right] = \frac{[a]}{[b]}. \end{aligned}$$

Το λήμμα αποδείχθηκε. □

Πρόταση 3.2. Οι στοιχειώδεις τελεστές $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ όπως ορίστηκαν στην (3.5) είναι ισότονα εγκλεισμένοι.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 3.1, εφ' όσον οι δύο εκφράσεις της διαστηματικής αριθμητικής είναι ισοδύναμες. □

3 Η κλασσική διαστηματική μέθοδος Newton

Η παραγωγή της κλασσικής διαστηματικής μεθόδου Newton απορρέει από την εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε συνδυασμό με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Διαστηματικής Ανάλυσης ([33]), όπου προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$x^* \in m - \frac{F(m)}{F'([x])} =: N([x]),$$

όπου $x^* \in [x]$ η ρίζα της $f(x) = 0$, $m \in [x]$, F και F' οι διαστηματικές επεκτάσεις της f και f' , αντιστοίχως, και ο $N([x])$ υποδηλώνει τον τελεστή της διαστηματικής μεθόδου Newton που εφαρμόζεται πάνω στο διάστημα $[x]$. Το αντίστοιχο επαναληπτικό σχήμα της (3) δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} m_k &= m([x]_k), \\ N([x]_k) &= m_k - \frac{F(m_k)}{F'([x]_k)}, \\ [x]_{k+1} &= [x]_k \cap N([x]_k), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$k \in \mathbb{N}$. Πολλά θεωρητικά αποτελέσματα σχετικά με την διαστηματική μέθοδο Newton έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία (δείτε κυρίως [1], [12], [16], [33], [35]), και αφορούν ζητήματα

ύπαρξης και μοναδικότητας των ριζών της $f(x) = 0$ καθώς και το μέγεθος της ακρίβειας των προκυπτόμενων εγκλεισμών αυτών των ριζών.

Ο Hansen στην [12] χρησιμοποίησε την επεκτεταμένη διαστηματική αριθμητική για να ορίσει μια επέκταση της διαστηματικής μεθόδου Newton για να χειριστεί, εν γένει, την περίπτωση όπου $0 \in F'([x])$.

Η κύρια αδυναμία της μεθόδου προκύπτει όταν το μέσο του διαστήματος αναζήτησης $[x]$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και ταυτόχρονα το $0 \in F'([x])$. Η μόνη, μέχρι τώρα, αποδοτική αντιμετώπιση αυτής της αδυναμίας συνίσταται στην υιοθέτηση ευρετικών διαδικασιών, όπως είναι, για παράδειγμα, η υιοθέτηση ενός σχήματος διχοτόμησης ([33]).

Εάν, τώρα, εφαρμόσουμε τη διαστηματική μέθοδο Newton σε μια διαστηματική εξίσωση $f(x) = 0$ θα πάρουμε εγκλεισμούς πολύ μεγαλύτερους από αυτούς που θα επιθυμούσαμε. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια απλή τετραγωνική εξίσωση,

$$f(x) \equiv x^2 - [-1, 1] = 0, \quad (3.7)$$

και θέλουμε να απομονώσουμε όλες τις διαστηματικές ρίζες της στο διάστημα αναζήτησης $[-3, 3]$, αποδεχόμενοι ως λύσεις εκείνα τα διαστήματα τα οποία έχουν πλάτος μικρότερο από ένα αριθμό $\varepsilon = 10^{-3}$ (κριτήριο τερματισμού: $w([x]) \leq \varepsilon$). Μελετώντας το Σχήμα 3.1 μπορούμε να δούμε πώς

Σχήμα 3.1: Η διαστηματική εξίσωση $x^2 - [-1, 1]$ στο διάστημα $[-3, 3]$.

η διαστηματική εξίσωση (3.7) έχει μία μοναδική διαστηματική ρίζα ($[x]^* = [-1, 1]$) στο διάστημα αναζήτησης $[-3, 3]$. Αν εφαρμόσουμε μια φορά το επαναληπτικό σχήμα (3.6), παίρνουμε:

$$N([x]) = m([x]) - \frac{F(m([x]))}{F'([x])} = 0 - \frac{0}{[-26, 26]} = [-\infty, +\infty].$$

Όπως μπορούμε να δούμε, ο αλγόριθμος χρειάζεται μόνο μία επανάληψη για να αποκαλύψει την αδυναμία του όχι μόνο να βρει τη λύση, αλλά και να μικρύνει το διάστημα αναζήτησης.

Εάν υιοθετήσουμε το κριτήριο τερματισμού του Hansen

$$R([x]) = \frac{w([f'([x])])}{w([f(x)])} \leq B = 1024$$

(δες [16]) ο αλγόριθμος θα επιστρέψει το αρχικό διάστημα $[-3, 3]$ ως έναν εγκλεισμό της διαστηματικής ρίζας, ο οποίος θα είναι πολύ πιο πλατύς σε σχέση με την πραγματική διαστηματική ρίζα ($[x]^* = [-1, 1]$).

Η επιλογή ενός σχήματος διχοτόμησης ([32, σελ. 77–81]), για την αποφυγή του παραπάνω δυσάρεστου αποτελέσματος, θα έχει ως αποτέλεσμα να επιστρέψει ο αλγόριθμος 3072 εγκλεισμούς! Επί πλέον, σύμφωνα με την θεωρία, κάθε διάστημα λύση θα περιέχει τουλάχιστον μία σημειακή ρίζα της (3.7). Παρ' όλα αυτά, η ένωση όλων αυτών των διαστημάτων θα δώσει ένα διάστημα το οποίο θα εγκλείει με την ζητούμενη ακρίβεια τη διαστηματική ρίζα $[-1, 1]$. Από θεωρητικής πλευράς, η ένωση αυτών των εγκλεισμών δεν αποτελεί με βεβαιότητα μια διαστηματική ρίζα, αλλά ένα διάστημα που περιέχει τουλάχιστον 3072 σημειακές ρίζες της (3.7). Το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου ανέρχεται στους 9254 συναρτησιακούς υπολογισμούς, στους 3091 υπολογισμούς παραγώγου και στις 3071 διχοτομήσεις.

Πρόταση 3.1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, $[x]$ το πεδίο ορισμού της, δηλαδή το διάστημα αναζήτησης, με $w([x]) > 0$, και $[x]^* = [x]$ η διαστηματική ρίζα της διαστηματικής εξίσωσης $f(x) = 0$. Η απομόνωση της διαστηματικής ρίζας $[x]^*$ σε εγκλεισμούς πλάτους ε , χρησιμοποιώντας ένα σχήμα διχοτόμησης στο μέσο του εκάστοτε διαστήματος, απαιτεί $2^k - 1$ διχοτομήσεις, όπου το k ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$k = \left\lceil \frac{\log(w([x]) - \log \varepsilon)}{\log 2} + 1 \right\rceil.$$

Απόδειξη. Έστω ότι το διάστημα $[e]$ αποτελεί έναν εγκλεισμό, τουλάχιστον μίας σημειακής ρίζας της διαστηματικής εξίσωσης $f(x) = 0$. Για να είναι αυτός ο εγκλεισμός λύση θα πρέπει το πλάτος του να είναι μικρότερος από τη δεδομένη ακρίβεια ε :

$$w([e]) \leq \varepsilon. \quad (3.8)$$

Συνεπώς, εφ' όσον το αρχικό διάστημα αναζήτησης ταυτίζεται με τη διαστηματική ρίζα, όλο το διάστημα αναζήτησης αποτελείται από σημειακές ρίζες της $f(x) = 0$ και το ελάχιστο πλήθος των διαστημάτων που θα προκύψουν ισούται με n ,

$$n = \frac{w([x]^*)}{w([e])} = \frac{w([x])}{w([e])}. \quad (3.9)$$

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9) μπορούμε να βρούμε ένα κάτω φράγμα n για το πλήθος των διαστημάτων που θα αποτελούν εγκλεισμούς ριζών της αντίστοιχης διαστηματικής εξίσωσης:

$$n = \frac{w([x])}{w([e])} \Leftrightarrow w([e]) = \frac{w([x])}{n} \stackrel{(3.8)}{\leq} \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{w([x])}{\varepsilon}. \quad (3.10)$$

Ως γνωστόν, η διαστηματική μέθοδος διχοτόμησης, μέσα από τη στρατηγική Διακλάδωσης-και-Φραξίματος, δημιουργεί ένα δυαδικό δέντρο αναζήτησης, όπου κάθε κόμβος του αντιστοιχεί σε ένα διάστημα. Η ένωση όλων των διαστημάτων, που αντιστοιχούν σε κόμβους ύψους h του δέντρου, θα σχηματίζουν το αρχικό διάστημα αναζήτησης. Όταν ένα διάστημα πρέπει να διχοτομηθεί, τότε στον κόμβο που αντιστοιχεί το τρέχων διάστημα δημιουργούνται τα δύο παιδιά του. Στο κάθε παιδί αντιστοιχίζεται ένα από τα προκύπτοντα διαστήματα. Η δημιουργία νέων

κόμβων θα σταματήσει όταν τα παραγόμενα παιδιά του αντιστοιχούν σε διαστήματα πλάτους μικρότερου από ε . Επειδή, επιπλέον, όλο το διάστημα αναζήτησης είναι διαστηματική ρίζα, τότε όλοι οι τελικοί εγκλεισμοί θα αντιστοιχούν σε κόμβους ίδιου ύψους, που θα είναι και τα φύλλα του δημιουργούμενου δέντρου.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το ύψος του τελικού δέντρου είναι k , τότε το πλήθος των φύλλων του δέντρου θα είναι 2^k . Οπότε, από την εξίσωση (3.10) μπορούμε να συσχετίσουμε το πλήθος των φύλλων του δέντρου ύψους k και του πλάτους του διαστήματος $[x]^*$ (ή $[x]$):

$$\begin{aligned} 2^k \geq n \geq \frac{w([x])}{\varepsilon} &\Leftrightarrow 2^k \geq n \geq \frac{w([x])}{\varepsilon} \Leftrightarrow \\ k &\geq \frac{\log(w[x]) - \log \varepsilon}{\log 2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Άρα το πλήθος των διχοτομήσεων που θα πρέπει να πραγματοποιήσουμε είναι τόσες όσοι είναι και οι κόμβοι του δέντρου για ύψος $k - 1$:

$$\begin{aligned} bs = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k-1} &= \frac{2^k - 1}{2 - 1} \cdot 1 \Leftrightarrow \\ bs &= 2^k - 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

όπου bs υποδηλώνει το πλήθος των απαιτούμενων διχοτομήσεων. □

Οι Hansen και Walster ([13, σελ. 193–194]), στην δεύτερη έκδοση του βιβλίου τους «Global optimization using interval analysis» υιοθέτησαν ένα σχήμα τριπλής εφαρμογής της διαστηματικής μεθόδου Newton στα άκρα και στο μέσο του διαστήματος αναζήτησης, όταν το τρέχον σημείο ανάπτυξης της μεθόδου - το μέσο του διαστήματος - είναι σημειακή ρίζα και το μηδέν ανήκει στον εγκλεισμό της παραγώγου. Η προσέγγισή τους, ωστόσο, δεν βρίσκει πάντα, όλες τις διαστηματικές ρίζες μιας διαστηματικής εξίσωσης, αλλά πολλές φορές, αუსτηρά φράγματα του εγκλεισμού της κλειστής θήκης συνόλου διαστηματικών της ριζών. Στην περίπτωση, όμως που η διαστηματική εξίσωση έχει μοναδική διαστηματική ρίζα τότε η μέθοδος δουλεύει ορθά. Η προτεινόμενη μεθοδός μοιάζει να είναι ένα είδος διαστηματικής επέκτασης της μεθόδου Krawczyk [29, 59].

Όσον αφορά τη συμπεριφορά της διαστηματικής μεθόδου Newton, ενδιαφέροντα και σημαντικά συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν:

- Δεν είναι εφικτή η αξιόπιστη και με βεβαιότητα εύρεση μιας διαστηματικής ρίζας.
- Δεν είναι δυνατή η εξασφάλιση της συνέχειας της ευρισκόμενης διαστηματικής ρίζας.
- Δεν υπάρχουν επαρκή και αποδοτικά κριτήρια τερματισμού αποκλειστικά για διαστηματικές ρίζες.
- Οι υπάρχουσες ευρετικές τεχνικές είναι άλλοτε αναποτελεσματικές και άλλοτε απαγορευτικά ακριβές (αναφορικά με το συναρτησιακό κόστος).

Οι δικές μας πειραματικές μελέτες έδειξαν ότι για την επίλυση διαστηματικών εξισώσεων τα πράγματα χειροτερεύουν όταν πρέπει να απομονώσουμε περισσότερες της μιας διαστηματικές ρίζες ή/και όταν έχουμε διαστηματικές ρίζες μεγάλου πλάτους. Παρόμοια συμπεριφορά, επιδεικνύεται και στην περίπτωση όπου η περιοχή της διαστηματικής ρίζας είναι σχεδόν επίπεδη.

Η βασική ιδέα της διαστηματικής μεθόδου Newton για την επίλυση μη διαστηματικών εξισώσεων (και γενικότερα η βασική φιλοσοφία των διαστηματικών μεθόδων) έγκειται στην μείωση του αρχικού διαστήματος αναζήτησης σε διαστήματα σχεδόν εκφυλισμένα. Αυτό συνεπάγει την

μείωση της υπερεκτίμησης του πεδίου τιμών και τελικώς καταλήγουμε σε ακριβή φράγματα για κάθε σημειακή ρίζα.

Όμως, εν γένει, στις διαστηματικές εξισώσεις οι αντίστοιχες διαστηματικές ρίζες είναι διαστήματα με μη-μηδενικό πλάτος. Κατά συνέπεια, η μείωση του πλάτους του διαστήματος αναζήτησης μπορεί να γίνει μέχρι τα άκρα της διαστηματικής ρίζας. Αυτό σημαίνει πως θα κουβαλάμε διαρκώς ένα σημαντικό ποσό υπερεκτίμησης στους υπολογισμούς μας, που δεν θα μηδενίζεται, πρακτικά, ποτέ. Κατά συνέπεια, η χρησιμοποίηση της διαστηματικής μεθόδου Newton για την επίλυση διαστηματικών εξισώσεων θα επιστρέφει πάντα μη ακριβή φράγματα για τις αντίστοιχες διαστηματικές ρίζες.

Πρόταση 3.2. Έστω f μια συνεχώς διαφορίσιμη διαστηματική συνάρτηση, όπως αυτή δόθηκε στον Ορισμό 3.2, $[x]$ το διάστημα αναζήτησης και $[x]^* \subset [x]$ η διαστηματική ρίζα της διαστηματικής εξίσωσης $f(x) = 0$. Αν $N([x]) \subset [x]$ και $w([x]^*) > 0$ τότε

$$|w(N([x])) - w([x]^*)| = \mathcal{O}(w([x])).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει εύκολα ως ακολούθως:

$$|w(N([x])) - w([x]^*)| \leq w(N([x])) + w([x]^*) < 2w([x]).$$

□

Το παραπάνω αποτέλεσμα ενδυναμώνει τους ισχυρισμούς μας ότι δεν θα πρέπει να προσδοκούμε ακριβή φράγματα για την $[x]^*$, εφ' όσον το διάστημα αναζήτησης θα έχει πάντα μη μηδενικό πλάτος $w([x]) > 0$.

4 Διαστηματική μέθοδος Newton κλειστής θήκης

Θεωρούμε τη διαστηματική εξίσωση $f(x) = 0$, όπως αυτή ορίστηκε από την (3.2) και θέλουμε να βρούμε όλες τις ρίζες της σε δοθέν διάστημα αναζήτησης $[x]$. Από τον ορισμό της συνάρτησης f κάθε σημειακός υπολογισμός θα επιστρέφει διάστημα λόγω των διαστηματικών παραμέτρων. Έτσι, αν γράψουμε

$$f(m) = [\underline{f}_m, \overline{f}_m] \text{ και } f'([x]) = [\underline{d}, \overline{d}],$$

όπου m ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος αναζήτησης, η κλασσική διαστηματική μέθοδος Newton θα γίνει

$$N([x]) := m - \frac{[\underline{f}_m, \overline{f}_m]}{[\underline{d}, \overline{d}]} \quad (3.13)$$

Η σταθερά m ορίζεται συνήθως να είναι το μέσο του διαστήματος αναζήτησης $[x]$. Εάν χρησιμοποιήσουμε την προτεινόμενη διαστηματική αριθμητική κλειστής θήκης (3.5), η σχέση (3.13) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$N([x]) := m - \left(\frac{\underline{f}_m}{[\underline{d}, \overline{d}]} \sqcup \frac{\overline{f}_m}{[\underline{d}, \overline{d}]} \right) = \left(m - \frac{\underline{f}_m}{[\underline{d}, \overline{d}]} \right) \sqcup \left(m - \frac{\overline{f}_m}{[\underline{d}, \overline{d}]} \right) \quad (3.14)$$

Έτσι, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το επαναληπτικό σχήμα της διαστηματικής μεθόδου Newton (3.6) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} m_k &= m([x]_k), \\ H([x]_k) &= N_L([x]_k) \sqcup N_U([x]_k), \\ [x]_{k+1} &= [x]_k \cap H([x]_k), \end{aligned} \quad (3.15)$$

όπου N_L και N_U υποδηλώνουν το αριστερό και δεξί τελεστέο στη σχέση (3.14) και H υποδηλώνει τον προτεινόμενο τελεστή (από τη λέξη «Hull» (κλειστή θήκη) - την κλειστή θήκη των διαστημάτων που προκύπτουν από τα διαστήματα N_L και N_U).

5 Εσωτερικό τμήμα μιας διαστηματικής ρίζας

Παρατηρώντας τη σχέση (3.14), της προηγούμενης ενότητας, μπορεί εύκολα κάποιος να συμπεράνει πώς η νέα διατύπωση της διαστηματικής μεθόδου Newton είναι η εφαρμογή της κλασσικής μεθόδου στις συνοριακές συναρτήσεις (N_L για την κάτω και N_U για την άνω συνοριακή συνάρτηση) της διαστηματικής συνάρτησης με σκοπό τον εγκλεισμό των συνόρων-άκρων των διαστηματικών ριζών. Η κλειστή θήκη αυτών των εγκλεισμών θα δώσει ένα διάστημα που θα περιέχει όλη τη διαστηματική ρίζα. Σύμφωνα, όμως, με την Πρόταση 3.2 δεν είναι εφικτή η παραγωγή ικανοποιητικών φραγμάτων για μια διαστηματική ρίζα, εφ' όσον αυτή διατηρεί το πλάτος της αμετάβλητο και είναι ξεκάθαρο πώς η νέα διατύπωση συμπεριφέρεται όπως και η κλασσική.

Για να ξεπεραστεί το αναδυόμενο πρόβλημα θα πρέπει να μικρύνει με κάποιο τρόπο το διάστημα αναζήτησης, χωρίς όμως να χαθεί, έστω και μία, σημειακή ρίζα της f , αλλά και να μπορέσουμε να πάρουμε διακριτά, όλες τις διαστηματικές ρίζες της εξίσωσης.

Για το λόγο αυτό προτείνεται μια τεχνική μείωσης του διαστήματος αναζήτησης εξάγοντας από αυτό υποδιαστήματα $[r]$, του διαστήματος αναζήτησης, τα οποία θα ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\forall r \in [r], \quad 0 \in f(r),$$

που σημαίνει πώς όλα τα σημεία του κλειστού διαστήματος $[r]$ θα πρέπει να είναι σημειακές ρίζες της αντίστοιχης διαστηματικής εξίσωσης $f(x) = 0$.

Οι ακόλουθες προτάσεις αποδεικνύουν την ύπαρξη ενός τέτοιου υποδιαστήματος, λαμβάνοντας υπ' όψιν τη διατύπωση (3.15) της διαστηματικής μεθόδου Newton και χρησιμοποιώντας τον τελεστή της διαστηματικής κλειστής θήκης.

Πρόταση 3.1. Έστω f μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 3.2, $[x]$ το διάστημα αναζήτησης και $[x]^* \subseteq [x]$ μια διαστηματική ρίζα της $f(x) = 0$. Εάν $0 \in f(m([x]))$ τότε το διάστημα $[r]$, που ορίζεται από τη σχέση

$$[r] = [\min \{\overline{N}_L, \overline{N}_U\}, \max \{\underline{N}_L, \underline{N}_U\}] \quad (3.16)$$

θα υπάρχει πάντα και θα περιέχεται μέσα στη διαστηματική ρίζα $[x]^*$.

Απόδειξη. Η απόδειξη χωρίζεται σε δύο μέρη: Στο μέρος Α, που αφορά στην ύπαρξη και του ορθού ορισμού του διαστήματος $[r]$ και στο μέρος Β, που αφορά στη σχέση της διαστηματικής ρίζας $[x]^*$ και του διαστήματος $[r]$ ($[r] \subseteq [x]$).

Μέρος Α: Ύπαρξη. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη του διαστήματος $[r]$ εξετάζοντας τις περιπτώσεις όπου η διαστηματική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα και την περίπτωση όπου το διάστημα εγκλεισμού της παραγώγου περιέχει το μηδέν. Το γεγονός ότι το μηδέν ανήκει στον εγκλεισμό της παραγώγου δε σημαίνει αυτόματα πώς η διαστηματική συνάρτηση είναι μη-μονότονη λόγω της υπερεκτίμησης του διαστήματος εγκλεισμού της παραγώγου στο τρέχον διάστημα. Παρ' όλα αυτά όταν το μηδέν περιέχεται τότε η συνάρτηση θα θεωρείται και θα αντιμετωπίζεται ως μη-μονότονη.

ο Περίπτωση γνησίως αύξουσας διαστηματικής συνάρτησης $\underline{d} > 0$ (Σχήμα 3.2).

Σχήμα 3.2: Πρόταση 3.1 - Παράδειγμα αύξουσας διαστηματικής συνάρτησης.

Εφ' όσον το $0 \in F(m)$, τότε οι εγκλεισμοί των άκρων της διαστηματικής ρίζας θα γράφονται ως ακολούθως

$$N_L([x]) = m - \frac{f_m}{[\underline{d}, \bar{d}]} = \left[m - \frac{f_m}{\bar{d}}, m - \frac{f_m}{\underline{d}} \right] \quad (3.17)$$

και

$$N_U([x]) = m - \frac{\overline{f_m}}{[\underline{d}, \bar{d}]} = \left[m - \frac{\overline{f_m}}{\underline{d}}, m - \frac{\overline{f_m}}{\bar{d}} \right], \quad (3.18)$$

όπου $m = m([x])$, $\underline{f_m} = \underline{f}(m([x]))$, $\overline{f_m} = \overline{f}(m([x]))$, $\underline{d} = \underline{f}'([x])$ και $\bar{d} = \overline{f}'([x])$. Αποτιμάμε τα άκρα του διαστήματος $[r]$ όπως αυτά ορίστηκαν στην Εξίσωση (3.16):

$$\underline{r} = \min \{ \overline{N}_L([x]), \overline{N}_U([x]) \} = \overline{N}_U([x])$$

και

$$\overline{r} = \max \{ \underline{N}_L([x]), \underline{N}_U([x]) \} = \underline{N}_L([x]).$$

Όμως, από τις σχέσεις (3.17) και (3.18) έχουμε

$$\overline{N}_U([x]) = m - \frac{\overline{f_m}}{\underline{d}} < m - \frac{f_m}{\bar{d}} = \underline{N}_L([x]),$$

που σημαίνει ότι,

$$\underline{r} = \underline{N}_U([x]) \leq \overline{N}_U([x]) < \underline{N}_L([x]) \leq \overline{N}_L([x]) = \overline{r} \Leftrightarrow N_U([x]) \cap N_L([x]) = [r],$$

η οποία αποδεικνύει ότι το διάστημα $[r]$ ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (3.16) και υπάρχει πάντα στην περίπτωση που $\underline{d} > 0$.

- Περίπτωση γνησίως φθίνουσας διαστηματικής συνάρτησης $\bar{d} < 0$ (Σχήμα 3.3).

Σχήμα 3.3: Πρόταση 3.1 - Παράδειγμα φθίνουσας διαστηματικής συνάρτησης.

Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη του διαστήματος $[r]$ για $\bar{d} < 0$:

$$\underline{r} = \underline{N}_L([x]) \leq \overline{N}_L([x]) < \underline{N}_U([x]) \leq \overline{N}_U([x]) = \overline{r} \Leftrightarrow \\ N_L \cap N_U = [/],$$

- Περίπτωση μη μονότονης διαστηματικής συνάρτησης $0 \in [\underline{d}, \bar{d}]$ (Σχήματα 3.4 και 3.5).

Όταν το $0 \in [\underline{d}, \bar{d}]$ τότε είτε η συνοριακή συνάρτηση f_L είτε η συνοριακή συνάρτηση f_U θα εγκλείουν και τα δύο άκρα της διαστηματικής ρίζας $[x]^*$. Αυτό σημαίνει ότι οι εγκλεισμοί των άκρων της διαστηματικής ρίζας θα προέρχονται είτε μόνο από την f_L είτε μόνο από την f_U . Έτσι, ο τελεστής της διαστηματικής μεθόδου Newton θα επιστρέψει την ένωση δύο διαστημάτων όπου ο κάθε ένας τελεστής της ένωσης θα φράσσει ένα από τα άκρα της διαστηματικής ρίζας. Συνεπώς η διαστηματική μέθοδος Newton θα επιστρέψει είτε τον εγκλεισμό

$$N_L([x]) = N_{L_1}([x]) \cup N_{L_2}([x]) \quad (3.19)$$

για την περίπτωση που οι εγκλεισμοί θα δίνονται από την f_L , είτε τον εγκλεισμό

$$N_U([x]) = N_{U_1}([x]) \cup N_{U_2}([x]), \quad (3.20)$$

για την περίπτωση που οι εγκλεισμοί θα δίνονται από την f_U . Η ύπαρξη του διαστήματος $[r]$ προκύπτει άμεσα από τις επόμενες σχέσεις, που είναι θεμελιώδεις ιδιότητες της διαστηματικής μεθόδου Newton:

$$N_{L_1}([x]) \cap N_{L_2}([x]) = [/] \quad (3.21)$$

για την περίπτωση της f_L ή

$$N_{U_1}([x]) \cap N_{U_2}([x]) = [/], \quad (3.22)$$

Σχήμα 3.4: Πρόταση 3.1 - Παράδειγμα κυρτής, μη μονότονης διαστηματικής συνάρτησης.

Σχήμα 3.5: Πρόταση 3.1 - Παράδειγμα κοίλης, μη μονότονης διαστηματικής συνάρτησης.

για την περίπτωση της f_U .

Μέρος Β: Ο Εγκλεισμός. Οι παραπάνω γραμμές όρισαν και απέδειξαν την ύπαρξη του διαστήματος $[r]$ έτσι όπως αυτό δόθηκε από την Εξίσωση (3.16). Στη συνέχεια θα δείξουμε, πώς εφ' όσον αυτό το διάστημα υπάρχει θα περιέχεται μέσα στη διαστηματική ρίζα. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης θα διακρίνουμε πάλι τις ίδιες τρεις περιπτώσεις, όπως κάναμε στο πρώτο μέρος

της απόδειξης.

- Περίπτωση γνησίως αύξουσας διαστηματικής συνάρτησης $\underline{d} > 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x}^* \in N_U \\ \overline{x}^* \in N_L \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x}^* \leq \overline{N}_U = \underline{r} < \overline{r} = \underline{N}_L \leq \overline{x}^* \Rightarrow [r] \subseteq [x]^*$$

- Περίπτωση γνησίως φθίνουσας διαστηματικής συνάρτησης $\overline{d} < 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x}^* \in N_L \\ \overline{x}^* \in N_U \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x}^* \leq \overline{N}_L = \underline{r} < \overline{r} = \underline{N}_U \leq \overline{x}^* \Rightarrow [r] \subseteq [x]^*$$

- Περίπτωση μη μονότονης διαστηματικής συνάρτησης $0 \in [\underline{d}, \overline{d}]$:

Η απόδειξη για αυτή τη περίπτωση προκύπτει εύκολα από τις σχέσεις (3.19), (3.20), (3.21) και (3.22).

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x}^* \in N_{L_1} \\ \overline{x}^* \in N_{L_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x}^* \leq \overline{N}_{L_1} = \underline{r} < \overline{r} = \underline{N}_{L_2} \leq \overline{x}^* \Rightarrow [r] \subseteq [x]^*,$$

ή

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x}^* \in N_{U_1} \\ \overline{x}^* \in N_{U_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x}^* \leq \overline{N}_{U_1} = \underline{r} < \overline{r} = \underline{N}_{U_2} \leq \overline{x}^* \Rightarrow [r] \subseteq [x]^*.$$

□

Όταν το $0 \in f(m)$, πράγμα που σημαίνει πως το μέσο του διαστήματος αναζήτησης είναι σημειακή ρίζα της αντίστοιχης διαστηματικής εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε η μέθοδος έχει εντοπίσει ένα εσωτερικό σημείο μιας διαστηματικής ρίζας. Η εφαρμογή της διαστηματικής μεθόδου Newton Κλειστής θήκης μας επιστρέφει εγκλεισμούς των άκρων της διαστηματικής ρίζας καθώς και εσωτερικά τμήματα (υποδιαστήματα) της διαστηματικής ρίζας.

Τι συμβαίνει, όμως, στην περίπτωση που το $0 \notin F(m)$; Η διαστηματική μέθοδος Newton κλειστής θήκης συμπεριφέρεται όπως και η κλασσική; Δηλαδή, απλά απορρίπτει κομμάτια του διαστήματος αναζήτησης που δεν περιέχουν με σιγουριά κάποια σημειακή ρίζα της $f(x) = 0$; Πώς, μειώνεται το διάστημα αναζήτησης, έτσι ώστε να είναι εφικτή η ακριβής επίλυση της διαστηματικής εξίσωσης $f(x) = 0$;

Η αφαίρεση τμημάτων του διαστήματος αναζήτησης όταν αυτά με σιγουριά δεν περιέχουν κάποια λύση είναι χαρακτηριστικό των διαστηματικών μεθόδων, επομένως και η διαστηματική μέθοδος Newton κλειστής θήκης θα αφαιρεί υποσύνολα του διαστήματος αναζήτησης όταν αυτά δεν θα περιέχουν ρίζες της εξίσωσης.

Όσον αφορά στα υπόλοιπα ερωτήματα, η απάντηση βρίσκεται στην ακόλουθη πρόταση. Αποδεικνύεται, λοιπόν, πως κάτω από προϋποθέσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα υποδιάστημα $[r]$ της διαστηματικής ρίζας, όντας έτσι εφικτή η μείωση του διαστήματος αναζήτησης και, κατά συνέπεια, εφικτός ο ακριβής εγκλεισμός της διαστηματικής ρίζας.

Πρόταση 3.2. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 3.1. Εάν $0 \notin f(m([x]))$ και $0 \notin F'([x])$, και εάν το διάστημα $[r]$, όπως αυτό ορίστηκε στην (3.16), υπάρχει τότε περιέχεται στην διαστηματική ρίζα $[x]^*$.

Απόδειξη. Όπως και στην Πρόταση 3.1, έτσι κι εδώ θα μελετήσουμε πρωτίστως την ύπαρξη του διαστήματος $[r]$ και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι, όταν αυτό υπάρχει τότε θα περιέχεται μέσα στη διαστηματική ρίζα της αντίστοιχης διαστηματικής εξίσωσης.

Μέρος Α: Μελέτη ύπαρξης. Για την μελέτη της ύπαρξης του διαστήματος $[r]$ ξεχωρίζουμε τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις, ανάλογα με το είδος της μονοτονίας και τη θέση του σημείου ανάπτυξης της μεθόδου σε σχέση με τη διαστηματική ρίζα:

ο Περίπτωση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης με σημείο ανάπτυξης της μεθόδου αριστερά της διαστηματικής ρίζας: $\bar{d} < 0$ και $\underline{f}_m > 0$ (Σχήματα 3.6 και 3.7):

Σχήμα 3.6: Πρόταση 3.2 - Παράδειγμα που δεν προκύπτει από τη μέθοδο υποσύνολο της διαστηματικής ρίζας

Εφ' όσον $0 \notin f(m)$, τότε θα έχουμε για τους εγκλεισμούς των άκρων της διαστηματικής ρίζας:

$$N_L([x]) = \left[m - \frac{\underline{f}_m}{\underline{d}}, m - \frac{\underline{f}_m}{\underline{d}} \right],$$

για το αριστερό άκρο της διαστηματικής ρίζας και

$$N_U([x]) = \left[m - \frac{\overline{f}_m}{\underline{d}}, m - \frac{\overline{f}_m}{\underline{d}} \right].$$

για το δεξί άκρο της, αντίστοιχα. Για το αριστερό άκρο του διαστήματος $[r]$ έχουμε

$$\underline{r} = \min \{ \overline{N}_L, \overline{N}_U \} = \min \left\{ m - \frac{\underline{f}_m}{\underline{d}}, m - \frac{\overline{f}_m}{\underline{d}} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{r} = m - \frac{\underline{f}_m}{\underline{d}} = \overline{N}_L.$$

Σχήμα 3.7: Πρόταση 3.2 - Παράδειγμα όπου η μέθοδος επιστρέφει ένα υποσύνολο $[r]$ της διαστηματικής ρίζας.

Όμοια, για το δεξί άκρο του διαστήματος $[r]$ θα έχουμε

$$\bar{r} = \max \{ \underline{N}_L, \underline{N}_U \} = \max \left\{ m - \frac{\underline{f}_m}{\underline{d}}, m - \frac{\overline{f}_m}{\underline{d}} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{r} = m - \frac{\overline{f}_m}{\underline{d}} = \underline{N}_U.}$$

Γνωρίζουμε πώς ένα διάστημα για να υπάρχει θα πρέπει το κάτω του άκρο του να είναι μικρότερο ή ίσο από το άνω άκρο του. Συνεπώς, θα πρέπει

$$\bar{r} - \underline{r} \geq 0.$$

Συνεπώς, εξετάζουμε τη διαφορά των άκρων που υπολογίστηκαν παραπάνω και θα πρέπει $\underline{N}_U - \overline{N}_L \geq 0$. Έτσι,

$$\underline{N}_U - \overline{N}_L = m - \frac{\overline{f}_m}{\underline{d}} - \left(m - \frac{\underline{f}_m}{\underline{d}} \right) = \frac{\underline{f}_m}{\underline{d}} - \frac{\overline{f}_m}{\underline{d}}. \quad (3.23)$$

Από την τελική ισότητα της Εξίσωσης (3.23) είναι φανερό πώς δεν μπορούμε με σιγουριά να μιλήσουμε για το πρόσημο της ποσότητας $\underline{N}_U - \overline{N}_L$ και συνεπώς το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται πάντα.

Με όμοιο τρόπο, αποδεικνύεται το ίδιο αποτέλεσμα για τις υπόλοιπες τρεις περιπτώσεις:

ο Περίπτωση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης με σημείο ανάπτυξης της μεθόδου δεξιά της διαστηματικής ρίζας: $\underline{d} < 0$ και $\overline{f}_m < 0$:

$$\bar{r} - \underline{r} = \min \{ \overline{N}_L, \overline{N}_U \} - \max \{ \underline{N}_L, \underline{N}_U \} = \frac{\overline{f}_m}{\underline{d}} - \frac{\underline{f}_m}{\underline{d}}$$

ο Περίπτωση γνησίως αύξουσας συνάρτησης με σημείο ανάπτυξης της μεθόδου αριστερά της διαστηματικής ρίζας: $\underline{d} > 0$ και $\overline{f_m} < 0$:

$$\bar{r} - \underline{r} = \min \{ \overline{N}_L, \overline{N}_U \} - \max \{ \underline{N}_L, \underline{N}_U \} = \frac{\overline{f_m}}{\underline{d}} - \frac{\underline{f_m}}{\underline{d}}.$$

ο Περίπτωση γνησίως αύξουσας συνάρτησης με σημείο ανάπτυξης της μεθόδου δεξιά της διαστηματικής ρίζας: $\underline{d} > 0$ και $\underline{f_m} > 0$:

$$\bar{r} - \underline{r} = \min \{ \overline{N}_L, \overline{N}_U \} - \max \{ \underline{N}_L, \underline{N}_U \} = \frac{\overline{f_m}}{\underline{d}} - \frac{\underline{f_m}}{\underline{d}}.$$

Και για τις τρεις περιπτώσεις το σχηματιζόμενο διάστημα $[r]$ δεν υπάρχει πάντοτε.

Στην περίπτωση, όμως, που το διάστημα $[r]$ υπάρχει, δηλαδή ισχύει

$$\min \{ \overline{N}_L, \overline{N}_U \} - \max \{ \underline{N}_L, \underline{N}_U \} < 0,$$

τότε, όμοια με την Πρόταση 3.1 προκύπτει ότι

$$N_L \cap N_U = [/].$$

Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι τα διαστήματα N_L και N_U θα εγκλείουν τα άκρα της διαστηματικής ρίζας. Έτσι, το παραγόμενο διάστημα $[r]$, που θα είναι ενδιάμεσο διάστημα των N_L και N_U , θα περιέχεται στη διαστηματική ρίζα $[x]^*$. $\square$

Για την περίπτωση της μη μονότονης συνάρτησης, για την περίπτωση, δηλαδή, όπου το $0 \notin f(m)$ και $0 \in F'([x])$, η συμπεριφορά της μεθόδου είναι ίδια με αυτή της κλασσικής διαστηματικής μεθόδου Newton: το διάκενο που σχηματίζεται από την εφαρμογή της μεθόδου στην πάνω συνοριακή συνάρτηση (Σχήμα 3.8) ή στην κάτω συνοριακή συνάρτηση (Σχήμα 3.9) της διαστηματικής συνάρτησης εξαιρείται από την περαιτέρω διαδικασία.

6 Η διατύπωση της μεθόδου

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας, μπορούμε να αξιοποιήσουμε την ύπαρξη ενός εσωτερικού τμήματος, ενός υποδιαστήματος, δηλαδή, μιας διαστηματικής ρίζας για να μειώσουμε το διάστημα αναζήτησης και να καταλήξουμε τελικά σε ακριβή φράγματα για τις ζητούμενες διαστηματικές ρίζες. Έτσι, μπορούμε να συνοψίσουμε την παραπάνω παρατήρηση και τις παραπάνω προτάσεις στο ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα της διαστηματικής μεθόδου Newton για διαστηματικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} m_k &= m([x]_k), \\ H([x]_k) &= N_L([x]_k) \sqcup N_U([x]_k) = N_L([x]_k) \cup [r] \cup N_U([x]_k), \\ [x]_{k+1} &= [x]_k \cap (N_L([x]_k) \cup N_U([x]_k)), \end{aligned} \tag{3.24}$$

όπου N_L, N_U υποδηλώνουν τον αριστερό και το δεξί τελεστέο στη σχέση (3.14), τους εγκλεισμούς των άκρων μιας διαστηματικής ρίζας, $[r]$ ένα διάστημα, όπως αυτό ορίζεται από τη σχέση (3.16) και το $k = 0, 1, 2, \dots$

Η εφαρμογή του ανωτέρω επαναληπτικού σχήματος θα επιστρέφει γενικά τρία διαστήματα:

- ο το διάστημα N_L ,

Σχήμα 3.8: Παράδειγμα μη μονότονης συνάρτησης (κυρτή συνάρτηση) όπου το $0 \notin F(m)$ και $0 \in F'([x])$.

Σχήμα 3.9: Παράδειγμα μη μονότονης συνάρτησης (κοίλη συνάρτηση) όπου το $0 \notin F(m)$ και $0 \in F'([x])$.

- το διάστημα N_U , και
- το διάστημα $[r]$.

Τα διαστήματα N_L και N_U στοχεύουν στον εγκλεισμό του αριστερού και του δεξιού άκρου της αντίστοιχης διαστηματικής ρίζας. Το διάστημα $[r]$ θα χρησιμοποιηθεί όπως εκείνα τα διαστήματα που δεν περιέχουν με σιγουριά σημειακές ρίζες της εξίσωσης, θα εξαιρεθεί, δηλαδή, από τη

διαδικασία αναζήτησης. Έτσι, τα διαστήματα που εξασφαλισμένα περιέχονται σε μια διαστηματική ρίζα ή που εξασφαλισμένα δεν περιέχουν καμία σημειακή ρίζα της εξίσωσης εξαιρούνται από τη διαδικασία αναζήτησης.

Σημείωση 3.1. Η διαδικασία εξαίρεσης που χρησιμοποιείται σ' αυτή τη δουλειά απαντάται στη βιβλιογραφία ως «βήμα περικοπής» (*pruning step*) και ορίζεται ως ο μηχανισμός εξαίρεσης από τη διαδικασία αναζήτησης τμημάτων του διαστήματος αναζήτησης, που με σιγουριά, δεν περιέχουν λύσεις του προβλήματος. Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε αυτή τη διαδικασία σε διαστήματα που εξασφαλισμένα αποτελούν κομμάτι της λύσης του προβλήματος. Ειδικότερα, περικόπτουμε διαστήματα που περιέχονται με βεβαιότητα μέσα σε μια διαστηματική ρίζα.

Παρ' όλο που, εν πρώτοις, ο τρόπος διαχείρισης των διαστημάτων που δεν περιέχουν καμία σημειακή ρίζα και τα διαστήματα που είναι υποσύνολα μιας διαστηματικής ρίζας είναι όμοιοι (εξαιρούνται και οι δύο κατηγορίες διαστημάτων από τη διαδικασία αναζήτησης), εν τούτοις, σε δεύτερο στάδιο επεξεργασίας, αξιοποιούνται διαφορετικά. Τα διαστήματα που δεν περιέχουν σημειακές ρίζες της εξίσωσης, απλά, διαγράφονται από τη λίστα εργασίας. Αντίθετα, τα υποσύνολα των διαστηματικών ριζών αποθηκεύονται, εκ νέου, σε μια λίστα ριζών, όπου η ένωση τους με τους εγκλεισμούς των άκρων των διαστηματικών ριζών, που είναι αποθηκευμένα σε μια λίστα εγκλεισμών, θα μας δώσει τους τελικούς εγκλεισμούς των διαστηματικών ριζών.

7 Μη-διαστηματικές εξισώσεις

Οι διαστηματικές εξισώσεις αποτελούν γενίκευση των μη-διαστηματικών εξισώσεων, όπου οι αριθμητικοί παράμετροι των εξισώσεων έχουν αντικατασταθεί με διαστήματα. Σε αυτή τη φιλοσοφία κινήθηκε και η παρούσα ανάλυση και επέκτεινε την κλασική διαστηματική μέθοδο Newton.

Ποια είναι, όμως, η συμπεριφορά της διαστηματικής μεθόδου Newton κλειστής θήκης σε μη-διαστηματικές εξισώσεις; Αποδεικνύεται, εύκολα, από την ακόλουθη πρόταση πως για την περίπτωση των μη-διαστηματικών εξισώσεων, δηλαδή, για εξισώσεις με παραμέτρους πραγματικούς αριθμούς (εξισώσεις με απλές ή πολλαπλές σημειακές ρίζες πεπερασμένου πλήθους), η προτεινόμενη μέθοδος ταυτίζεται με την κλασική διαστηματική μέθοδο Newton.

Πρόταση 3.1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και $[x]$ το αρχικό διάστημα αναζήτησης. Για τη συνάρτηση f το προτεινόμενο επαναληπτικό σχήμα (3.24) και το επαναληπτικό σχήμα της κλασικής διαστηματικής μεθόδου Newton (3.6) είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη. Η συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί ως εκφυλισμένη διαστηματική συνάρτηση. Συνεπώς, $f(m) = [\underline{f}_m, \overline{f}_m]$, με $\underline{f}_m = \overline{f}_m$. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} H([x]) &= N_L([x]) \sqcup N_U([x]) = \left(m - \frac{\underline{f}_m}{[\underline{d}, \overline{d}]} \right) \sqcup \left(m - \frac{\overline{f}_m}{[\underline{d}, \overline{d}]} \right) = \\ &= \left(m - \frac{f(m)}{[\underline{d}, \overline{d}]} \right) \sqcup \left(m - \frac{f(m)}{[\underline{d}, \overline{d}]} \right) = m - \frac{f(m)}{[\underline{d}, \overline{d}]} = N([x]). \end{aligned}$$

□

8 Παθολογική περίπτωση

Το μηδέν στον παρονομαστή συνιστά ένα σημαντικό στάδιο στους διαστηματικούς υπολογισμούς και χρειάζεται ιδιαίτερη μεταχείριση. Στην προτεινόμενη δουλειά συναντάται μια αντίστοιχη

Σχήμα 3.10: Παράδειγμα παθολογικής περίπτωσης με $\underline{f}_m = 0$.

παθολογική κατάσταση και χρήζει, επίσης, ιδιαίτερης μεταχείρισης. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση της μη μονότονης διαστηματικής συνάρτησης όπου το μέσο του διαστήματος αναζήτησης είναι είτε ρίζα της κάτω συνοριακής συνάρτησης f_L της f (Σχήμα 3.10) είτε ρίζα της άνω συνοριακής συνάρτησης f_U της f (Σχήμα 3.11), η προτεινόμενη μέθοδος επιστρέφει τον πραγματικό

Σχήμα 3.11: Παράδειγμα παθολογικής περίπτωσης με $\overline{f}_m = 0$.

άξονα. Πιο συγκεκριμένα, όταν το $0 \in F'([x])$ και $\underline{f}_m = 0$ ή $\bar{f}_m = 0$ τότε δεν έχουμε καμία βελτίωση στο διάστημα αναζήτησης. Γι' αυτές τις περιπτώσεις υιοθετείται μια ευρετική τεχνική. Ειδικότερα, υιοθετούμε ένα σχήμα διχοτόμησης για να κάνουμε μια τεχνητή βελτίωση του διαστήματος αναζήτησης, στοχεύοντας στη μελλοντική αποφυγή των συνθηκών που προκαλούν αυτή τη παθολογική περίπτωση.

9 Θεωρητικά αποτελέσματα

Σ' αυτή την ενότητα διατυπώνονται και αποδεικνύονται κάποιες σημαντικές ιδιότητες της διαστηματικής μεθόδου Newton κλειστής θήκης. Η βασική θεωρητική διερεύνηση των μεθόδων έχει βασιστεί στη θεωρητική ανάλυση της κλασσικής διαστηματικής μεθόδου Newton.

Πρώτα απ' όλα αποδεικνύεται η ύπαρξη μιας διαστηματικής ρίζας σ' ένα διάστημα που παράγεται από τον αντίστοιχο τελεστή της διαστηματικής μεθόδου Newton κλειστής θήκης μέσα από το θεώρημα που ακολουθεί. Το ακόλουθο λήμμα είναι απαραίτητο για την ολοκλήρωση του θεωρήματος που ακολουθεί.

Λήμμα 3.1. Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a, b \in [x] \in \mathbb{IR}$. Αν $a \leq b$ τότε $[a, b] \subseteq [\underline{x}, \bar{x}]$.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ένα σημείο $y \in [a, b]$ τέτοιο ώστε να μην ανήκει στο διάστημα $[x]$, $y \notin [x]$. Αν $y < \underline{x}$ τότε θα έχουμε ότι

$$y \geq a \geq \underline{x}$$

το οποίο είναι άτοπο. Όμοια, αν $y > \bar{x}$ έχουμε ότι

$$\bar{x} > b > y$$

το οποίο είναι, επίσης, άτοπο. Συνεπώς, η υπόθεση $y \notin [x]$ δεν ισχύει και το λήμμα αποδείχθηκε. $\square$

Θεώρημα 3.2. Έστω f μια συνεχώς διαφορίσιμη διαστηματική συνάρτηση, όπως αυτή ορίστηκε στον Ορισμό 3.2 και $[x] \in \mathbb{IR}$ το διάστημα αναζήτησης. Επί πλέον, έστω f_L και f_U οι συνοριακές συναρτήσεις της f , και N_L, N_U οι αντίστοιχοι διαστηματικοί τελεστές της διαστηματικής μεθόδου Newton εφαρμοζόμενοι στις συνοριακές συναρτήσεις f_L, f_U , αντιστοίχως, όπως αυτοί ορίστηκαν στις σχέσεις (3.14) και (3.15). Εάν μια διαστηματική ρίζα $[x]^* \subset [x]$ μιας διαστηματικής εξίσωσης $f(x) = 0$ υπάρχει, τότε είναι επίσης ένα υποσύνολο του διαστήματος $H([x])$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια διαστηματική ρίζα $[y]^*$, με $[y]^* \not\subset H([x])$. Τότε, $\underline{y}^* \in N_L$ ή N_U και επίσης $\bar{y}^* \in N_L$ ή N_U . Αυτό σημαίνει ότι $\underline{y}^*, \bar{y}^* \in N_L \sqcup N_U$ και από το Λήμμα 3.1 $[\underline{y}^*, \bar{y}^*] \subseteq N_L \sqcup N_U = H([x])$, το οποίο δεν ισχύει κι έτσι το Θεώρημα αποδείχθηκε. $\square$

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι η μέθοδος μπορεί να αποδείξει με αυτόματο τρόπο τη μη ύπαρξη μιας διαστηματικής ρίζας.

Θεώρημα 3.3. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.2. Εάν $[x] \cap H([x]) = [/]$, τότε δεν υπάρχουν διαστηματικές ρίζες της $f(x) = 0$ στο $[x]$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πως υπάρχει μια διαστηματική ρίζα $[x]^* \subset [x]$. Από το Θεώρημα 3.2 έχουμε ότι $[x]^* \subseteq H([x])$ και συνεπώς $[x] \cap H([x]) \neq [/]$, το οποίο είναι αναληθές και το θεώρημα αποδείχθηκε. $\square$

Πρόταση 3.4. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.2. Τα άκρα της διαστηματικής ρίζας $[x]^* \subset [x]$ μπορούν να φραχτούν με αυθαίρετη ακρίβεια.

Απόδειξη. Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης προκύπτει εύκολα εάν θεωρήσουμε ότι οι τελεστές N_L και N_U εφαρμόζονται στις μη-διαστηματικές εξισώσεις f_L και f_U , αντιστοίχως, για την απομόνωση των άκρων της διαστηματικής ρίζας. Ο Hansen στην [16] απέδειξε ότι μια σημειακή ρίζα μιας μη διαστηματικής εξίσωσης μπορεί να φραχτεί με αυθαίρετη ακρίβεια. Συνεπώς, και τα δύο άκρα μπορούν να φραχτούν με αυθαίρετη ακρίβεια. $\square$

Επιπροσθέτως, όπως απεδείχθη στην [33], ο ρυθμός σύγκλισης για την περίπτωση των μονότονων συνωριακών συναρτήσεων είναι τετραγωνικός.

Πόρισμα 3.5. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.2. Μια διαστηματική ρίζα $[x]^* \subset [x]$ μπορεί να φραχτεί με αυθαίρετη ακρίβεια.

Απόδειξη. Εφ' όσον μπορούμε να φράξουμε με αυθαίρετη ακρίβεια τα άκρα μιας διαστηματικής ρίζας, τότε μπορούμε να φράξουμε με αυθαίρετη ακρίβεια και την διαστηματική ρίζα. $\square$

Θεώρημα 3.6. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.2. Επί πλέον υποθέτουμε ότι $w([x]^*) > 0$. Αν $H([x]) \overset{\circ}{\subset} [x]$ και $0 \in F([x])$, τότε υπάρχει μια μοναδική διαστηματική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα $[x]$.

Απόδειξη. Ο Hansen στην [16] απέδειξε την ύπαρξη μιας διαστηματικής ρίζας για διαστηματικές εξισώσεις. Εδώ υποθέτουμε την ύπαρξη μιας δεύτερης διαστηματικής ρίζας στο ίδιο διάστημα αναζήτησης. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι μια μη μονότονη συνάρτηση, δηλαδή $0 \in F'([x])$. Η εφαρμογή του προτεινόμενου επαναληπτικού σχήματος θα επιστρέψει την ένωση διαστημάτων $[-\infty, c] \cup [d, +\infty]$, όπου $c, d \in \mathbb{R}$. Αυτό είναι αναληθές εφ' όσον έχουμε $H([x]) \overset{\circ}{\subset} [x]$ και συνεπώς η αρχική υπόθεση $0 \in F'([x])$ δεν ισχύει. Συνεπώς, έχουμε μια μονότονη συνάρτηση και μια μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $[x]$. $\square$

10 Ο αλγόριθμος

Παρουσιάζουμε μια αλγοριθμική διατύπωση της μεθόδου που περιγράφηκε στις προηγούμενες ενότητες. Ο ακόλουθος αλγόριθμος 3.3, ονομάζεται HIN (Hull Interval Newton - Διαστηματική Μέθοδος Newton Κλειστής Θήκης) παίρνει σαν είσοδο τη φυσική διαστηματική επέκταση της διαστηματικής συνάρτησης f , το διάστημα αναζήτησης $[x]_0$, την ακρίβεια ε και επιστρέφει μια τελική λίστα $\mathcal{L}$ που περιέχει τις ευρισκόμενες διαστηματικές ρίζες. Στις ακόλουθες γραμμές δίνεται μια σύντομη περιγραφή του αλγορίθμου.

Πρώτα, στο Βήμα 2 αρχικοποιείται η τελική λίστα $\mathcal{L}$ να είναι η κενή λίστα, και η λίστα εργασίας $\mathcal{S}$ με το αρχικό διάστημα αναζήτησης $[x]_0$. Το κύριο επαναληπτικό σχήμα της μεθόδου εκτελείται στα Βήματα 3 έως 32, καθ' όσον η λίστα εργασίας $\mathcal{S}$ παραμένει μη κενή. Συγκεκριμένα, στο Βήμα 4 το πρώτο διάστημα της λίστας εργασίας ανακτάται, διαγράφεται από αυτή και ονομάζεται $[x]$. Όσον αφορά στη λίστα εργασίας υιοθετείται και υλοποιείται ένα σχήμα LIFO (στοίβα).

Εφ' όσον αποτιμάται ο εγκλεισμός του πεδίου τιμών της f στο διάστημα $[x]$ μπορούμε να εξετάσουμε τότε το $0 \in F([x])$ ή όχι (Βήμα 5). Στην περίπτωση που το $0 \notin F([x])$, η μη ύπαρξη μιας διαστηματικής ρίζας στο $[x]$ αποδεικνύεται και το τρέχον διάστημα αναζήτησης απορρίπτεται προχωρώντας στο επόμενο υποψήφιο διάστημα.

Σε αντίθετη περίπτωση, εφαρμόζεται ένα κριτήριο τερματισμού στο διάστημα αναζήτησης (Βήματα 6, 7), και εάν ικανοποιείται εισάγουμε το διάστημα στην τελική λίστα. Εάν δεν ικανοποιείται προχωράμε με την αποτίμηση της f στο μέσο του $[x]$ και την αποτίμηση του διαστήματος H (Βήματα 9, 10), ενώ στο Βήμα 11 κατασκευάζουμε το διάστημα $[r]$, εφ' όσον αυτό ορίζεται (Ορισμός (3.16)).

Για τις περιπτώσεις που δεν είναι εφικτή η δημιουργία ενός εσωτερικού υποδιαστήματος $[r]$ της διαστηματικής ρίζας ορίζεται σ' αυτό το κενό διάστημα. Όταν, επιπλέον, δεν επιτυγχάνεται μείωση του διαστήματος αναζήτησης, είτε λόγω μη ύπαρξης του διαστήματος $[r]$, είτε λόγω παθολογικών περιπτώσεων (δες προηγούμενη ενότητα 8) υιοθετείται ένα σχήμα διαστηματικής διχοτόμησης. Αυτές οι εξαιρέσεις μετατρέπονται σε αλγοριθμική μορφή στα Βήματα 12-20.

Στα επόμενα Βήματα 21, 22 και 23-27, σχηματίζονται τα καινούρια διαστήματα $[x]_1$, $[x]_2$ και $[r]$, ενώ στα Βήματα 28 και 29 τα διαστήματα $[x]_1$, $[x]_2$ εισάγονται στη λίστα εργασίας $\mathcal{S}$ και το διάστημα $[r]$ εισάγεται στην τελική λίστα $\mathcal{L}$, αντιστοίχως. Τέλος, ο αλγόριθμος επιστρέφει την

Αλγόριθμος 3.3 Διαστηματική Μέθοδος Newton Κλειστής Θήκης

```

1: Συνάρτηση HIN( $F, [x]_0, \varepsilon, \mathcal{L}$ )
2:    $\mathcal{L} = \{\}$  ·  $\mathcal{S} = \{[x]_0\}$  ·
3:   όσο ( $\mathcal{S} \neq \{\}$ ) κάνε
4:      $[x] := \text{Pop}(\mathcal{S})$  ·  $\mathcal{S} := \mathcal{S} - \{[x]\}$ 
5:     αν ( $0 \in F([x])$ ) τότε
6:       αν ( $w([x]) \leq \varepsilon$ ) τότε
7:          $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[x]\}$ 
8:       αλλιώς
9:          $F_m := F(m([x]))$ 
10:         $H := (N_L([x]) \sqcup N_U([x])) \cap [x]$ 
11:         $[r] = [\min\{\overline{N}_L, \overline{N}_U\}, \max\{\underline{N}_L, \underline{N}_U\}]$ 
12:        αν ( $0 \in F'([x])$ ) τότε
13:          αν ( $\underline{F}_m = 0 \vee \overline{F}_m = 0 \vee H \supseteq [x]$ ) τότε
14:            ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΕ( $[x], [x]_1, [x]_2$ )
15:             $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1, [x]_2\}$ 
16:            Επέλεξε το επόμενο διάστημα από τη λίστα  $\mathcal{S}$ .
17:          αλλιώς αν ( $0 \notin F_m$ ) τότε
18:             $[r] = [/]$ 
19:          τέλος
20:        τέλος
21:         $[x]_1 := N_L \cap [x]$ 
22:         $[x]_2 := N_U \cap [x]$ 
23:        αν το  $[r]$  ορίζεται τότε
24:           $[r] := [r] \cap [x]$ 
25:        αλλιώς
26:           $[r] := [/]$ 
27:        τέλος
28:         $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1, [x]_2\}$ 
29:         $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[r]\}$ 
30:      τέλος
31:    τέλος
32:  τέλος
33:  επέστρεψε  $\mathcal{L}$ 
34: τέλος

```

τελική λίστα $\mathcal{L}$ που περιέχει όλες τις ρίζες (διαστηματικές και σημειακές) της $f(x) = 0$.

11 Αριθμητικά αποτελέσματα

11.1 Στιγμιότυπα από εφαρμογές της μεθόδου

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζονται κάποια στιγμιότυπα εφαρμογής του αλγορίθμου της διαστηματικής μεθόδου Newton κλειστής θήκης σε μια σειρά από χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Μη διαστηματική εξίσωση με δύο απλές ρίζες

Θεωρούμε τη μη διαστηματική συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 2]$ και αναζητούμε όλες τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $f(x) = 0$, στο πεδίο ορισμού της με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$. Ακολουθώντας, δίνονται τα βήματα του αλγορίθμου, ανά επανάληψη:

- Αρχικοποίηση:

Βήμα 2: $\mathcal{L} = \{\}, \mathcal{S} = \{[-2, 2]\}$

- Επανάληψη#1

Βήμα 4: $[x] = [-2, 2]$

Το $F([-2, 2]) = [-3, 1] \ni 0$ και $w([-2, 2]) = 4 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([-2, 2])) = -3$

Το $N_L = [-\infty, -0.75] \cup [0.75, +\infty] = N_U$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [x] = [-2, -0.75] \cup [0.75, 2]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται

Αυτό σημαίνει πως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιο υποσύνολο της διαστηματικής ρίζας στο τρέχον διάστημα αναζήτησης

Το $F'([-2, 2]) = [-4, 4] \ni 0$, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = N_L \cap [x] = [-2, -0.75] \cup [0.75, 2]$

Βήμα 22: $[x]_2 = N_U \cap [x] = [-2, -0.75] \cup [0.75, 2]$

Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται, άρα

Βήμα 26: $[r] = [/]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1 \cup [x]_2\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

- Επανάληψη#2

Βήμα 4: $[x] = [0.75, 2]$

Το $F([0.75, 2]) = [-2.4375, 1] \ni 0$ και $w([0.75, 2]) = 1.25 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([0.75, 2])) = -1.109375$

Το $N_L = [1.652343, 2.114584] = N_U$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [x] = [1.652343, 2]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται

Το $F'([0.75, 2]) = [1.5, 4] \not\ni 0$, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = N_L \cap [x] = [1.652343, 2]$

Βήμα 22: $[x]_2 = N_U \cap [x] = [1.652343, 2]$

Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται, άρα

Βήμα 26: $[r] = []$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1 \cup [x]_2\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

• Επανάληψη#3

Βήμα 4: $[x] = [1.652343, 2]$

Το $F([1.652343, 2]) = [-0.269761, 1] \ni 0$ και

$w([1.652343, 2]) = 0.347657 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([1.652343, 2])) = 0.334904$

Το $N_L = [1.724829, 1.742446] = N_U$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [x] = [1.724829, 1.742446]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται

Το $F'([1.652343, 2]) = [3.304687, 4] \not\ni 0$, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = N_L \cap [x] = [1.724829, 1.742446]$

Βήμα 22: $[x]_2 = N_U \cap [x] = [1.724829, 1.742446]$

Το $[r]$ δεν ορίζεται, άρα

Βήμα 26: $[r] = []$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1 \cup [x]_2\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

Μετά από 9 επαναλήψεις η μέθοδος επιστρέφει δύο εγκλεισμούς των ριζών της εξίσωσης κάνοντας 16 συναρτησιακούς υπολογισμούς και 7 υπολογισμούς παραγώγων, όσες ακριβώς χρειάζεται

και η κλασική διαστηματική μέθοδος Newton.

Σημείωση 3.1. Μέσα από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται η όμοια συμπεριφορά της διαστηματικής μεθόδου Newton κλειστής θήκης με την αντίστοιχη κλασική, όπως ακριβώς αναμένονταν, σύμφωνα με την Πρόταση (3.1).

Μη διαστηματική εξίσωση με μία πολλαπλή ρίζα

Θεωρούμε τη μη διαστηματική συνάρτηση $f(x) = x^2$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 2]$ και αναζητούμε όλες τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $f(x) = 0$, στο πεδίο ορισμού της με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$. Ακολουθώντας, δίνονται τα βήματα του αλγορίθμου, ανά επανάληψη:

- Αρχικοποίηση:

Βήμα 2: $\mathcal{L} = \{\}, \mathcal{S} = \{[-2, 2]\}$

- Επανάληψη#1

Βήμα 4: $[x] = [-2, 2]$

Το $F([-2, 2]) = [0, 4] \ni 0$ και $w([-2, 2]) = 4 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([-2, 2])) = 0$

Το $N_L = [-\infty, +\infty] = N_U$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [x] = [-2, 2]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται

Αυτό σημαίνει πώς δεν μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιο υποσύνολο της διαστηματικής ρίζας στο τρέχον διάστημα αναζήτησης.

Το $F'([-2, 2]) = [-4, 4] \ni 0$ και $0 \in F_m$, άρα

Βήμα 14: Εφαρμογή διχοτόμησης: $[x]_1 = [-2, 0]$ και $[x]_2 = [0, 2]$

Βήμα 15: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1, [x]_2\}$

Βήμα 16: Σταμάτα την τρέχουσα επανάληψη και άρχισε μια νέα.

- Επανάληψη#2

Βήμα 4: $[x] = [0, 2]$

Το $F([0, 2]) = [0, 4] \ni 0$ και $w([0, 2]) = 2 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([0, 2])) = 1$

Το $N_L = [-\infty, 0.75] = N_U$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [x] = [0, 0.75]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται

Το $F'([0, 2]) = [0, 4] \ni 0$,

αλλά δεν προκύπτει κάποια παθολογική κατάσταση, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = N_L \cap [x] = [0, 0.75]$

Βήμα 22: $[x]_2 = N_U \cap [x] = [0, 0.75]$

Το $[r]$ δεν ορίζεται, άρα

Βήμα 26: $[r] = [/]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1 \cup [x]_2\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

- Επανάληψη#3

Βήμα 4: $[x] = [0, 0.75]$

Το $F([0, 0.75]) = [0, 0.5625] \ni 0$ και $w([0, 0.75]) = 0.75 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([0, 0.75])) = 0.140625$

Το $N_L = [-\infty, 0.28125] = N_U$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [x] = [0, 0.28125]$

- Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται
 Το $F'([0, 0.75]) = [0, 1.5] \ni 0$
 αλλά δεν προκύπτει κάποια παθολογική κατάσταση, άρα
- Βήμα 21: $[x]_1 = N_L \cap [x] = [0, 0.28125]$
- Βήμα 22: $[x]_2 = N_U \cap [x] = [0, 0.28125]$
 Το $[r]$ δεν ορίζεται, άρα
- Βήμα 26: $[r] = [/]$
- Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1 \cup [x]_2\}$
- Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

Μετά από 19 επαναλήψεις η μέθοδος επιστρέφει έναν εγκλεισμό, ο οποίος περιέχει τη μοναδική ρίζα της εξίσωσης, πραγματοποιώντας 36 συναρτησιακούς υπολογισμούς, 17 υπολογισμούς παραγώγων και 1 διχοτόμησης, όσο κόστος χρειάζεται, ακριβώς, και η κλασική διαστηματική μέθοδος Newton.

Σημείωση 3.2. Η διαστηματική μέθοδος Newton Κλειστής θήκης συμπεριφέρεται όμοια με την κλασική για εξισώσεις με πολλαπλές ρίζες

Διαστηματική εξίσωση με μία σημειακή πολλαπλή ρίζα

Θεωρούμε τη διαστηματική συνάρτηση $f(x) = x^2 - [-1, 0]$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 2]$ και αναζητούμε όλες τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $f(x) = 0$, στο πεδίο ορισμού της με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$. Ακολουθώντας, δίνονται τα βήματα του αλγορίθμου, ανά επανάληψη:

- Αρχικοποίηση:

Βήμα 2: $\mathcal{L} = \{\}, \mathcal{S} = \{[-2, 2]\}$

- Επανάληψη#1

Βήμα 4: $[x] = [-2, 2]$

Το $F([-2, 2]) = [0, 5] \ni 0$ και $w([-2, 2]) = 4 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([-2, 2])) = [0, 1]$

Το $N_L = [-\infty, +\infty]$ και $N_U = [-\infty, -0.25] \cup [0.25, \infty]$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [x] = [-2, 2]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται

Αυτό σημαίνει πώς δεν μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιο υποσύνολο της διαστημα-

τικής ρίζας στο τρέχον διάστημα αναζήτησης.

Το $F'([-2, 2]) = [-4, 4] \ni 0$ και $0 \in F_m$, άρα

Βήμα 14: Εφαρμογή διχοτόμησης: $[x]_1 = [-2, 0]$ και $[x]_2 = [0, 2]$

Βήμα 15: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1, [x]_2\}$

Βήμα 16: Σταμάτα την τρέχουσα επανάληψη και άρχισε μια νέα.

- Επανάληψη#2

Βήμα 4: $[x] = [-2, 0]$

Το $F([-2, 0]) = [0, 5] \ni 0$ και $w([-2, 0]) = 2 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([-2, 0])) = [1, 2]$

Το $N_L = [-0.75, +\infty]$ και $N_U = [-0.5, +\infty]$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [-2, 0] = [-0.75, 0]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται

Το $F'([-2, 0]) = [-4, 0] \ni 0$,

αλλά δεν προκύπτει κάποια παθογένεια, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = [-0.75, 0]$

Βήμα 22: $[x]_2 = [-0.5, 0]$

Βήμα 26: $[r] = [/]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1 \cup [x]_2\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

- Επανάληψη#3

Βήμα 4: $[x] = [-0.75, 0]$

Το $F([-0.75, 0]) = [0, 1.5625] \ni 0$ και $w([-0.75, 0]) = 0.75 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([-0.75, 0])) = [0.140625, 1.140625]$

Το $N_L = [-0.28125, +\infty]$ και $N_U = [0.385416, +\infty]$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [-0.75, 0] = [-0.28125, 0]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται

Το $F'([-0.75, 0]) = [-1.5, 0] \ni 0$,

αλλά δεν προκύπτει κάποια παθογένεια, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = [-0.28125, 0]$

Βήμα 22: $[x]_2 = [/]$

Το $[r]$ δεν ορίζεται, άρα

Βήμα 26: $[r] = [1]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

Μετά από 19 επαναλήψεις η μέθοδος επιστρέφει έναν εγκλεισμό, ο οποίος περιέχει τη μοναδική ρίζα της εξίσωσης, πραγματοποιώντας 36 συναρτησιακούς υπολογισμούς, 17 υπολογισμούς παραγώγων και 1 διχοτόμησης, όσο κόστος χρειάζεται, ακριβώς, και η κλασική διαστηματική μέθοδος Newton.

Σημείωση 3.3. Αν και έχουμε να λύσουμε μία διαστηματική εξίσωση, εν τούτοις η μέθοδος αναζητά μια σημειακή ρίζα. Γι' αυτό το λόγο οι δύο μέθοδοι παρουσιάζουν ίδια συμπεριφορά.

Διαστηματική εξίσωση με μία απλή διαστηματική ρίζα

Θεωρούμε τη διαστηματική συνάρτηση $f(x) = x^2 - [2, 3]$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, 2]$ και αναζητούμε όλες τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $f(x) = 0$, στο πεδίο ορισμού της με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$. Ακολουθώντας, δίνονται τα βήματα του αλγορίθμου, ανά επανάληψη:

- Αρχικοποίηση:

Βήμα 2: $\mathcal{L} = \{\}, \mathcal{S} = \{[1, 2]\}$

- Επανάληψη#1

Βήμα 4: $[x] = [1, 2]$

Το $F([1, 2]) = [-2, 2] \ni 0$ και $w([1, 2]) = 1 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([1, 2])) = [-0.75, 0.25] \ni 0$

Το $N_L = [1.6875, 1.875]$ και $N_U = [1.375, 1.4375]$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [1, 2] = [1.375, 1.875]$

Βήμα 11: $[r] = [1.4375, 1.6875]$

Το $F'([1, 2]) = [2, 4] \not\ni 0$ και $0 \in F_m$, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = [1.6875, 1.875]$

Βήμα 22: $[x]_2 = [1.375, 1.4375]$

Βήμα 26: $[r] = [1.4375, 1.6875]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1, [x]_2\}$

Βήμα 29: $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[r]\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

- Επανάληψη#2

Βήμα 4: $[x] = [1.6875, 1.875]$

Το $F([1.6875, 1.875]) = [-0.152344, 1.515625] \ni 0$ και

$w([1.6875, 1.875]) = 0.1875 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([1.6875, 1.875])) = [0.172851, 1.172852]$

Το $N_L = [1.730034, 1.735157]$ και $N_U = [1.433738, 1.468490]$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [1.6875, 1.875] = [1.6875, 1.735157]$

Βήμα 11: $[r] = [1.468489, 1.730035]$

Το $F'([1.6875, 1.875]) = [3.375, 3.75] \not\ni 0$, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = [1.730034, 1.735157]$

Βήμα 22: $[x]_2 = []$

Βήμα 26: $[r] = [1.6875, 1.730035]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1\}$

Βήμα 29: $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[r]\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

- Επανάληψη#3

Βήμα 4: $[x] = [1.730034, 1.735157]$

Το $F([1.730034, 1.735157]) = [-0.006980, 1.010768] \ni 0$ και
 $w([1.730034, 1.735157]) = 0.005122 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([1.730034, 1.735157])) = [0.001887, 1.001888] \not\ni 0$

Το $N_L = [1.732050, 1.732052]$ και $N_U = [1.443038, 1.443894]$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [1.730034, 1.735157] = [1.732050, 1.732052]$

Βήμα 11: $[r] = [1.443893, 1.732051]$

Το $F'([1.730034, 1.735157]) = [3.460069, 3.470313] \not\ni 0$ άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = [1.732050, 1.732052]$

Βήμα 22: $[x]_2 = [/]$

Βήμα 26: $[r] \cap [x] = [1.730034, 1.732051]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1\}$

Βήμα 29: $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[r]\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

• Επανάληψη#4

Βήμα 4: $[x] = [1.732050, 1.732052]$

Το $F([1.732050, 1.732052]) = [-0.000003, 1.000004] \ni 0$ και $w([1.732050, 1.732052]) =$

$$1.609813e - 006 \leq \varepsilon, \text{ άρα}$$

Βήμα 7: Βρέθηκε μια διαστηματική ρίζα: $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[x]\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

Μετά από 6 επαναλήψεις η μέθοδος επιστρέφει, τελικά, έναν εγκλεισμό, ο οποίος περιέχει τη μοναδική διαστηματική ρίζα της εξίσωσης, πραγματοποιώντας 10 διαστηματικούς συναρτησιακούς υπολογισμούς, 4 διαστηματικούς υπολογισμούς παραγώγων και 0 διχοτομήσεις.

Σημείωση 3.4. Για την επίλυση του ίδιου προβλήματος η κλασική διαστηματική μέθοδος Newton χρειάζεται 1670 διαστηματικούς συναρτησιακούς υπολογισμούς, 579 διαστηματικούς υπολογισμούς παραγώγων και 511 διχοτομήσεις.

Διαστηματική εξίσωση με μία πολλαπλή διαστηματική ρίζα

Θεωρούμε τη διαστηματική συνάρτηση $f(x) = x^2 - [-0.5, 0.5]$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$ και αναζητούμε όλες τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $f(x) = 0$, στο πεδίο ορισμού της με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$. Ακολουθως, δίνονται τα βήματα του αλγορίθμου, ανά επανάληψη:

- Αρχικοποίηση:

Βήμα 2: $\mathcal{L} = \{\}, \mathcal{S} = \{[-3, 3]\}$

- Επανάληψη#1

Βήμα 4: $[x] = [-3, 3]$

Το $F([-3, 3]) = [-0.5, 9.5] \ni 0$ και $w([-3, 3]) = 6 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([-3, 3])) = [-0.5, 0.5] \ni 0$

Το $N_L = [-\infty, -0.083333] \cup [0.083333, +\infty] = N_U$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [-3, 3] = [-3, -0.08334] \cup [0.08333, 3]$

Βήμα 11: $[r] = [-0.083334, 0.083334]$

Το $F'([-3, 3]) = [-6, 6] \ni 0$ και $0 \in F_m$, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = [-3, -0.083333]$

Βήμα 22: $[x]_2 = [0.083333, 3]$

Βήμα 26: $[r] = [-0.083334, 0.083334]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1, [x]_2\}$

Βήμα 29: $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[r]\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

- Επανάληψη#2

Βήμα 4: $[x] = [0.083333, 3]$

Το $F([0.083333, 3]) = [-0.493056, 9.5] \ni 0$ και $w([0.083333, 3]) = 2.91667 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([0.083333, 3])) = [1.876736, 2.876737]$

Το $N_L = [-9.718750, 1.228878]$ και $N_U = [-15.718750, 1.062211]$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [0.083333, 3] = [0.083333, 1.228878]$

Βήμα 11: Το διάστημα $[r]$ δεν ορίζεται.

Το $F'([0.083333, 3]) = [0.1667, 6] \not\ni 0$, άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = N_L \cap [x] = [0.083333, 1.228878]$

Βήμα 22: $[x]_2 = N_U \cap [x] = [0.083333, 1.062211]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1 \cup [x]_2\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

- Επανάληψη#3

Βήμα 4: $[x] = [0.083333, 1.228878]$

Το $F([0.083333, 1.228878]) = [-0.493056, 2.010140] \ni 0$ και $w([0.083333, 1.228878]) = 1.145544 > \varepsilon$, άρα

Βήμα 9: $F(m([0.083333, 1.228878])) = [-0.069526, 0.930475] \ni 0$

Το $N_L = [0.684393, 1.073261]$ και $N_U = [-4.926740, 0.277519]$, άρα

Βήμα 10: $H = (N_L \sqcup N_U) \cap [x] = [0.083333, 1.073261]$

Βήμα 11: $[r] = [0.277518, 0.684394]$

Το $F'([0.083333, 1.228878]) = [0.1667, 2.457755] \not\ni 0$ άρα

Βήμα 21: $[x]_1 = N_L \cap [x] = [0.684393, 1.073261]$

Βήμα 22: $[x]_2 = N_U \cap [x] = [0.083333, 0.277519]$

Βήμα 26: $[r] \cap [x] = [0.277518, 0.684394]$

Βήμα 28: $\mathcal{S} := \mathcal{S} \uplus \{[x]_1 \cup [x]_2\}$

Βήμα 29: $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[r]\}$

Βήμα 32: Συνέχισε με την επόμενη επανάληψη.

Μετά από 15 επαναλήψεις η μέθοδος επιστρέφει έναν εγκλεισμό, ο οποίος περιέχει τη μοναδική διαστηματική ρίζα της εξίσωσης, πραγματοποιώντας 28 διαστηματικούς συναρτησιακούς υπολογισμούς, 13 διαστηματικούς υπολογισμούς παραγώγων και 0 διχοτομήσεις.

Σημείωση 3.5. Για την επίλυση του ίδιου προβλήματος η κλασσική διαστηματική μέθοδος Newton επιστρέφει 2304 εγκλεισμούς και χρειάζεται 6946 διαστηματικούς συναρτησιακούς υπολογισμούς, 2321 διαστηματικούς υπολογισμούς παραγώγων και 2303 διχοτομήσεις.

11.2 Περισσότερα παραδείγματα

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές δοκιμαστικές συναρτήσεις όσον αφορά στο πρόβλημα της επίλυσης μιας μη διαστηματικής εξίσωσης, αλλά ένα πολύ μικρό δείγμα δοκιμαστικών διαστηματικών εξισώσεων, κι αυτό, είτε σε μορφή παραδειγμάτων, είτε μέσα από εφαρμογές. Γι' αυτό το λόγο, παραθέτουμε ένα σύνολο από διαστηματικές εξισώσεις για να καλύψουμε τις πιο σπουδαίες περιπτώσεις της προτεινόμενης μεθόδου, καθώς και εξισώσεις που προέκυψαν από πραγματικές εφαρμογές. Στον ακόλουθο Πίνακα 3.1 παρουσιάζουμε ένα σύνολο από δεκαπέντε διαστηματικές συναρτήσεις.

Πίνακας 3.1: Δοκιμαστικές Συναρτήσεις

No	$f(x)$
1.	$x^3 + [p]_2 x^2 + [p]_1 x + [p]_0,$ $[p]_0 = [1, 1.8907]$ $[p]_1 = [2.8749, 4.2501]$ $[p]_2 = [1.2499, 2.2501]$
2.	$x^2 - [p],$ $[p] = [-2, 2]$
3.	$\sin([p]^2 + 2x^2)e^{-[p]^2 - x^2},$ $[p] = [-0.5, 0.5]$
4.	$x^6 - p_5 x^5 + p_4 x^4 + [p]_3 x^3 - p_2 x^2 + [p]_1 x + [p]_0,$ $[p]_0 = 16.1024$ $[p]_1 = [15.8448, 16.52]$ $p_2 = 7.872$ $[p]_3 = [-4.0388, -3.875]$ $p_4 = 1.0256$ $p_5 = 2$
5.	$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^7 \frac{[p]_i^2}{4000} + \frac{x^2}{4000} - \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^7 \cos\left(\frac{[p]_i}{\sqrt{i}}\right) + \frac{x}{2} \right),$ $[p]_{i=1, \dots, 7} = [1, 2]$
6.	$x^4 + [p]_1^3 [p]_2 x^3 + [p]_1^2 [p]_2^2 [p]_3 x^2 + [p]_1 [p]_2^3 [p]_3^2 x + [p]_3,$ $[p]_1 = [1.15, 1.65]$ $[p]_2 = [1.3, 1.7]$ $[p]_3 = [0.6, 1.0]$
7.	$\sum_{i=1}^8 \{Y_i (1 + 10Z_{i+1})\} + Y_9 (1 + 10 \cdot \sin^2(\pi x)) + Z_1 + \left(\frac{x-1}{4}\right)^2 - c,$ $Y_i = ([p]_i - 1)^2$ $Z_i = \sin^2(\pi [p]_i)$ $[p]_{i=1, \dots, 9} = [0.9, 1.1]$ $c = 0.5341615278415$
8.	$\sum_{j=1}^5 \{j \sin((j+1)[p] + j)\} \cdot \sum_{i=1}^5 \{i \cdot \sin((i+1)x + i)\} - 10,$ $[p] = [-0.1, 0.2]$
9.	$[(x + 10 \cdot [p]_0)^2 - 5 \cdot (x - [p]_1)^2 - (x - 2 \cdot [p]_2)^4] \cdot e^{-x^4} + 4,$ $[p]_0 = [-1, 0]$ $[p]_1 = [0, 0.5]$ $[p]_2 = [-0.25, 0.25]$
10.	$\sum_{j=1}^5 j [\sin((j+1)x + j) + x j \sin((j+1)[p] + j)],$ $[p] = [-0.1, 0.2]$
11.	$100 \cdot ([p] - x^2)^2 + (x - 1)^2,$ $[p] = [-5, 5]$
12.	$\left(\frac{5}{\pi}x - \frac{5 \cdot 1}{4\pi^2}x^2 + [p] - 6\right)^2 + 10\left(1 - \frac{1}{8\pi}\right) \cos x,$ $[p] = [-2, 0]$
13.	$\cos \cdot e^{-[p]_0 x} - [p]_1 \cdot \sin^3(x) - [p]_2 \cdot x^2,$ $[p]_0 = [2.9, 3.1]$ $[p]_1 = [0.9, 1.1]$ $[p]_2 = [1, 1.2]$
14.	$(3 \cdot x - [p]_0) \cdot \sin([p]_1 \cdot x) + 1.7,$ $[p]_0 = [1.3, 1.5]$ $[p]_1 = [17.9, 18.1]$
15.	$e^{-x} \cdot \sin([p] \cdot \pi \cdot x),$ $[p] = [1.9, 2.1]$

Οι συναρτήσεις 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11 και 12 είναι τροποποιήσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης που βρέθηκαν στην [21], οι συναρτήσεις 1, 4 και 6 είναι τροποποιήσεις προβλημάτων διαστημικών πολωνύμων που βρέθηκαν στην [62], οι συναρτήσεις 13, 14 και 15 είναι τροποποιήσεις προβλημάτων βελτιστοποίησης που βρέθηκαν στην [6], ενώ η συνάρτηση 2 είναι μια απλή τετραγωνική συνάρτηση.

Στον Πίνακα 3.2 δείχνουμε την απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου, όπου ΔA υποδεικνύει το διάστημα αναζήτησης, ΕΠ το πλήθος των επαναλήψεων, F το πλήθος των διαστημικών συναρτησιακών υπολογισμών, F' το πλήθος των διαστημικών υπολογισμών παραγώγου, Δ το συνολικό πλήθος των απαιτούμενων διχοτομήσεων, και ΕΡ το πλήθος των ευρισκόμενων ριζών, χρησιμοποιώντας ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-14}$. Στη στήλη Ρίζες δίνονται οι ευρισκόμενες διαστημικές ρίζες. Μετά από κάθε αριθμητικό αποτέλεσμα παρατίθεται και η αντίστοιχη γραφική παράσταση της διαστημικής εξίσωσης.

Η αριθμητική απόδοση της μεθόδου μετρήθηκε σε ένα φορητό υπολογιστή (Laptop) με Intel Dual Core@2GHz επεξεργαστή, 2GB RAM, λειτουργικό σύστημα Ms Windows Vista, χρησιμοποιώντας Matlab και το πακέτο Intlab ([46]). Οι γραφικές παραστάσεις σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση φτιαγμένη αποκλειστικά για το σχεδιασμό διαστημικών εξισώσεων, γραμμένη σε Matlab¹.

Πίνακας 3.2: Αριθμητικά Αποτελέσματα, $\varepsilon = 10^{-14}$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
1.	$[-3,2]$	45	88	43	0	1	$[r] = [-1.173264124091346, -0.249991803609978]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

¹<http://www.math.upatras.gr/~nikas/soft/>

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
2.	[-2,3]	15	28	13	0	1	$[r] = [-1.414213562373095, 1.414213562373095]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
3.	[-2.5,2.5]	317	606	289	1	9	$[r]_1 = [-2.500000000000000, -2.481569121983017]$ $[r]_2 = [-2.170803763674813, -2.141819082085289]$ $[r]_3 = [-1.772453850905517, -1.736834089252561]$ $[r]_4 = [-1.253314137315509, -1.202412710675869]$ $[r]_5 = [-0.000000000000008, 0.000000000000008]$ $[r]_6 = [1.202412710675869, 1.253314137315509]$ $[r]_7 = [1.736834089252561, 1.772453850905517]$ $[r]_8 = [2.141819082085289, 2.170803763674812]$ $[r]_9 = [2.481569121983017, 2.500000000000000]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
4.	$[-1.5, 2.5]$	55	103	48	0	1	$[r] = [-1.094076044826967, -0.908642763062733]$

5.	$[-20, 20]$	151	268	117	0	7	$[r]_1 = [-20, -16.395305380213230]$ $[r]_2 = [-15.253283748005453, -9.610838776749120]$ $[r]_3 = [-9.201957555406935, -3.181124303417352]$ $[r]_4 = [-3.111967834374116, 3.111967834374116]$ $[r]_5 = [3.181124303417352, 9.201957555406935]$ $[r]_6 = [9.610838776749120, 15.253283748005453]$ $[r]_7 = [16.395305380213230, 20]$
----	-------------	-----	-----	-----	---	---	---

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
6.	$[-10,5]$	69	134	65	0	1	$[r] = [-7.599154609171094, -0.074548001830275]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
7.	$[-3,4]$	216	416	200	0	4	$[r]_1 = [-2.672990110994471, 0.056902762968949]$ $[r]_2 = [0.065000000092365, 0.735991988918098]$ $[r]_3 = [1.264008011081902, 1.93499999907636]$ $[r]_4 = [1.943097237031067, 4.000000000000000]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ριζες
8.	$[-2.5, 2.5]$	231	423	192	0	7	$[r]_1 = [-2.467152980553360, -2.087460254410815]$ $[r]_2 = [-1.958922899620498, -1.519342768690696]$ $[r]_3 = [-1.436949439757614, -0.802257350337060]$ $[r]_4 = [-0.729786967029618, -0.225747585941954]$ $[r]_5 = [-0.120747964752167, 0.313580544722099]$ $[r]_6 = [0.871714388244534, 1.280704105726763]$ $[r]_7 = [1.858301514255557, 2.244666313984733]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ριζες
9.	$[-2, 2]$	325	594	269	0	2	$[r]_1 = [-1.251045232674226, -0.111978757770101]$ $[r]_2 = [0.484522198663111, 1.195334431624846]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
10.	[-2.5,2.5]	145	279	134	0	6	$[r]_1 = [-2.5, -1.920875742833900]$ $[r]_2 = [-1.527234382559722, -1.258339862758130]$ $[r]_3 = [-0.912042992031484, -0.755713118472338]$ $[r]_4 = [-0.156163369857502, -0.120811879307023]$ $[r]_5 = [0.321729033785959, 0.951474079195070]$ $[r]_6 = [1.150136547412020, 2.5]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
11.	[-5,5]	101	151	50	0	1	$[r] = [0.999999999999996, 1.000000000000005]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
12.	[1,11]	62	118	56	0	2	$[r]_1 = [2.528141250340096, 4.488909517022945]$ $[r]_2 = [8.122294734375085, 9.909824008961696]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
13.	[-1.5,1.5]	2552	4918	2366	0	7	$[r]_1 = [-1.439369787852496, -0.924732546896094]$ $[r]_2 = [-0.906267019019824, -0.842875660149020]$ $[r]_3 = [-0.841977281161927, -0.779997671594023]$ $[r]_4 = [-0.701898399849037, -0.651685871508633]$ $[r]_5 = [-0.551523954512166, -0.508985948068639]$ $[r]_6 = [-0.151484335500336, -0.141240713954024]$ $[r]_7 = [0.739583973734210, 0.809474442411504]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
14.	[0,2,7]	917	1749	832	0	34	$[r]_1 = [1.256903970745656, 1.274414185080383]$ $[r]_2 = [1.348123354371479, 1.367658795826361]$ $[r]_3 = [1.590394091904158, 1.609517892198233]$ $[r]_4 = [1.708728223815520, 1.729808612963111]$ $[r]_5 = [1.930697925491611, 1.952969672138277]$ $[r]_6 = [2.062317043340839, 2.086550397261361]$ $[r]_7 = [2.273685207647065, 2.299500453372420]$ $[r]_8 = [2.413349302558367, 2.441127133465606]$ $[r]_9 = [2.618025994144847, 2.647537434018305]$ $[r]_{10} = [2.763115860197906, 2.794588361712139]$ $[r]_{11} = [2.963148459519144, 2.996428045422366]$ $[r]_{12} = [3.112154396490917, 3.147392788727605]$ $[r]_{13} = [3.308764131811830, 3.345850313764116]$ $[r]_{14} = [3.460733195137320, 3.499775903573873]$ $[r]_{15} = [3.654711268714235, 3.695626487804683]$ $[r]_{16} = [3.809002215224751, 3.851871892430647]$ $[r]_{17} = [4.000892012250569, 4.045650255854566]$ $[r]_{18} = [4.157052213568814, 4.203763113641625]$ $[r]_{19} = [4.347243631913591, 4.395854075170563]$ $[r]_{20} = [4.504941475507129, 4.555503030404958]$ $[r]_{21} = [4.693724040109137, 4.746192952969884]$ $[r]_{22} = [4.852709204366480, 4.907127910549886]$ $[r]_{23} = [5.040303936993155, 5.096635750405214]$ $[r]_{24} = [5.200382767415118, 5.258663248601899]$ $[r]_{25} = [5.386962292053229, 5.447160226466961]$ $[r]_{26} = [5.547981863049271, 5.610127501329457]$ $[r]_{27} = [5.733683616689103, 5.797750069178293]$ $[r]_{28} = [5.895521038469930, 5.961534365768483]$ $[r]_{29} = [6.080456250259775, 6.148393041952650]$ $[r]_{30} = [6.243011274244513, 6.312894224180647]$ $[r]_{31} = [6.427271245576146, 6.499079784888704]$ $[r]_{32} = [6.590461016605078, 6.664215091670542]$ $[r]_{33} = [6.774121622574030, 6.849803015888743]$ $[r]_{34} = [6.937876870140026, 7.000000000000000]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
15.	[0.2, 7]	513	944	431	0	10	$[r]_1 = [0.476190476190476, 0.526315789473688]$ $[r]_2 = [0.952380952380952, 1.052631578947376]$ $[r]_3 = [1.428571428571428, 1.578947368421054]$ $[r]_4 = [1.904761904761903, 2.105263157894739]$ $[r]_5 = [2.380952380952379, 2.631578947368423]$ $[r]_6 = [2.857142857142855, 3.157894736842107]$ $[r]_7 = [3.333333333333330, 3.684210526315792]$ $[r]_8 = [3.809523809523808, 4.210526315789475]$ $[r]_9 = [4.285714285714284, 4.736842105263163]$ $[r]_{10} = [4.761904761904759, 7.000000000000000]$

12 Συμπεράσματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο, θέσαμε την αδυναμία των υπάρχοντων μεθοδολογιών και αλγορίθμων για την επίλυση του προβλήματος της αξιόπιστης και με βεβαιότητα εύρεσης όλων των ριζών μιας εξίσωσης με συνεχείς παραμέτρους. Η τυποποίηση αυτών των παραμέτρων έγινε με χρήση διαστηματικών αριθμών, γι' αυτό και αυτού του είδους οι παραμετρικές εξισώσεις αναφέρονταν ως διαστηματικές εξισώσεις.

Η προτεινόμενη μεθοδολογία είναι, ουσιαστικά βασισμένη στην κλασσική διαστηματική μέθοδο Newton για μη διαστηματικές εξισώσεις. Ωστόσο, επιτυγχάνει να παράγει αποδοτικές λύσεις στο πρόβλημα της επίλυσης διαστηματικών εξισώσεων.

Το πιο σημαντικό αποτέλεσμα αυτής εργασίας εστιάζεται στην ύπαρξη και τη χρησιμοποίηση ενός υποδιαστήματος $[r]$, το οποίο αποτελεί εγγυημένα εσωτερικό κομμάτι της αναζητούμενης διαστηματικής ρίζας. Αυτή η προσέγγιση, αφ' ενός μας δίνει το απαραίτητο εργαλείο για την επίλυση διαστηματικών εξισώσεων, αφ' ετέρου μας οδηγεί στην υιοθέτηση μιας διαφορετικής προσέγγισης στη χρήση των διαστηματικών μεθόδων. Συγκεκριμένα, αντί να απορρίψουμε διαστήματα που δεν περιέχουν με σιγουριά ρίζες της $f(x) = 0$, αναζητούμε για διαστήματα που αποτελούν με βεβαιότητα λύση της εξίσωσης (τμήματα μιας διαστηματικής ρίζας).

Κεφάλαιο 4ο

Ολική Βελτιστοποίηση μέσω Παραμετρικών Εξισώσεων

Οι εργασίες των Shary ([49]) και Γράψα ([9]), έδειξαν πως το πρόβλημα της Ολικής Βελτιστοποίησης μιας αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να προσεγγιστεί μέσω της επίλυσης παραμετρικών εξισώσεων. Η χρησιμοποίηση των εργαλείων του προηγούμενου κεφαλαίου για την ανάπτυξη τεχνικών προς την κατεύθυνση που όρισαν οι Shary και Γράψα αποτέλεσε κίνητρο για την ανάπτυξη της μεθόδου που ακολουθεί.

1 Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό, πραγματεύεται το θέμα της αξιόπιστης και βεβαίας επίλυσης του προβλήματος της εύρεσης φραγμάτων του ολικού ελαχίστου f^* και όλων των ολικών ελαχιστοποιητών x^* μιας συνεχώς διαφορίσιμης μονοδιάστατης συνάρτησης $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\min_{x \in [x]} f(x), \quad (4.1)$$

σε δοθέν κλειστό διάστημα $[x] \subset D$ των πραγματικών αριθμών, χρησιμοποιώντας εργαλεία και μεθόδους της διαστηματικής ανάλυσης.

Ο βασική φιλοσοφία αυτών των μεθόδων ακολουθούν τη στρατηγική αναζήτησης της Διακλάδωσης-και-Φραξίματος σε συνδυασμό με τα εργαλεία εγκλεισμού της διαστηματικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται μια διαδικασία διχοτόμησης του διαστήματος αναζήτησης σε μικρότερα διαστήματα, ξανά και ξανά έως ότου κάποιο τμήμα του αρχικού διαστήματος απορριφθεί (διάστημα που δεν περιέχει με βεβαιότητα το ολικό ελάχιστο), ή γίνει αποδεκτό ως λύση του προβλήματος (διάστημα που ικανοποιεί κάποιο κριτήριο τερματισμού). Η αρχική θεμελίωση των διαστηματικών μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος (4.1) έγινε από τους Hansen [14, 15], Ichida/Fujii [22] και Skelboe [50].

Μια γενική αλγοριθμική προσέγγιση για την επίλυση του (4.1), δόθηκε στην εργασία [6], και περιγράφεται από τον ακόλουθο Αλγόριθμο 4.4.

Η συνολική απόδοση του παραπάνω γενικευμένου αλγορίθμου εξαρτάται από τις διαθέσιμη πληροφορία σχετικά με την αντικειμενική συνάρτηση. Γι' αυτό το λόγο αναπτύχθηκαν κριτήρια και μηχανισμοί επιτάχυνσης που αξιοποιούν τις διαθέσιμες ιδιότητες της αντικειμενικής συνάρτησης για να βελτιώσουν την αποδοτικότητά του. Τα κριτήρια και οι μηχανισμοί αυτοί περιγράφονται ως ακολούθως:

Κριτήρια Τερματισμού. Ένα διάστημα $[x]$ γίνεται αποδεκτό ως μια λύση του προβλήματος (4.1) όταν ικανοποιούνται τα παρακάτω κριτήρια

$$wid([x]) \leq \varepsilon_x \quad (4.2)$$

και

$$wid(f([x])) \leq \varepsilon_f, \quad (4.3)$$

όπου $\varepsilon_x, \varepsilon_f$ είναι, συνήθως, πολύ μικροί αριθμοί και υποδηλώνουν την επιθυμητή ακρίβεια του πλάτους του διαστήματος λύσης και του εκτιμώμενου πεδίου τιμών της συνάρτησης στο διάστημα της λύσης, αντιστοίχως.

Η χρήση και μόνο του κριτηρίου (4.2) από έναν αλγόριθμο είναι αρκετή για να αποφανθεί εάν ένα υποψήφιο διάστημα είναι λύση ή όχι. Ωστόσο, στην πράξη, συνδυάζεται με το κριτήριο (4.3)

Αλγόριθμος 4.4 Γενικευμένη αλγοριθμική προσέγγιση για το Πρόβλημα της Ολικής Βελτιστοποίησης με Διαστηματικές Μεθόδους.

```

1: Συνάρτηση IGO( $[x]_0, f, \mathcal{L}$ )
2:   αρχικοποίησε  $\mathcal{WL} := \{[x]_0\}$ ,  $\mathcal{L} := \{\}$ 
3:   όσο ( $\mathcal{WL} \neq \{\}$ ) κάνε
4:     Επέλεξε  $[x]$  από την λίστα εργασίας  $\mathcal{WL}$ 
5:     αν ( $[x]$  δεν απορρίπτεται) τότε
6:       Διχοτόμησε το  $[x]$  σε  $[x]_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ 
7:       αν κάποιο  $[x]_i$  ικανοποιεί κάποιο κριτήριο τερματισμού τότε
8:         Αποθήκευσε το  $[x]_i$  στην  $\mathcal{L}$ 
9:       αλλιώς
10:        Αποθήκευσε το  $[x]_i$  στην  $\mathcal{WL}$ 
11:     τέλος
12:   τέλος
13:   τέλος
14:   επέστρεψε  $\mathcal{L}$ 
15: τέλος

```

και δίνει τη δυνατότητα στον αλγόριθμο που τα χρησιμοποιεί, να παράγει είτε λύσεις με αυστηρά φράγματα όταν απαιτείται να ικανοποιούνται και τα δύο ή λύσεις κάτω από ιδιάζουσες συνθήκες όταν απαιτείται η ικανοποίηση ενός από τα δύο κριτήρια. Τα σφάλματα στρογγυλοποίησης μπορεί κάποιες φορές να εμποδίσουν την περαιτέρω βελτίωση του πεδίου τιμών. Επιπλέον, στην περίπτωση όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι σχεδόν επίπεδη στην περιοχή του ελαχίστου, αν και πολλές φορές το ολικό ελάχιστο έχει βρεθεί, το διάστημα αναζήτησης παραμένει μεγάλο. Γι' αυτούς τους δύο λόγους ο δεύτερος τρόπος χρήσης των κριτηρίων τερματισμού συνίσταται ως πιο αποδοτικός.

Κανόνες Διχοτόμησης. Για την υλοποίηση της στρατηγική της Διακλάδωσης-και-Φραξίματος πρέπει να υιοθετηθεί ένας κανόνας διχοτόμησης των διαστημάτων. Στην περίπτωση των μονοδιάστατων προβλημάτων η διχοτόμησης ενός υποψηφίου διαστήματος $[x]$ γίνεται, συνήθως, στο μέσο του και προκύπτουν δύο νέα διαστήματα:

$$[x]_1 = [\underline{x}, m([x])] \quad \text{και} \quad [x]_2 = [m([x]), \overline{x}],$$

τα οποία αντικαθιστούν το αρχικό.

Κριτήριο Επιλογής. Κατά τη διάρκεια εφαρμογής της στρατηγικής αναζήτησης Διακλάδωσης-και-Φραξίματος προκύπτουν υποψήφια διαστήματα τα οποία πρέπει όλα να επεξεργαστούν και να ελεγχθούν από τον εκάστοτε αλγόριθμο. Για το λόγο αυτό, αποθηκεύονται σε μία λίστα εργασίας και, στην περίπτωση όπου δεν είναι διαθέσιμη η παράλληλη επεξεργασία, επιλέγεται ένα από αυτά για έλεγχο.

Ο τρόπος επιλογής ενός υποψηφίου διαστήματος από μία λίστα εργασίας επηρεάζει σημαντικά την εξέλιξη και την απόδοση του αλγορίθμου. Βιβλιογραφικά έχουν υιοθετηθεί από τις διαστηματικές μεθόδους οι ακόλουθες τρεις στρατηγικές επιλογής των υποψηφίων διαστημάτων:

- *Η στρατηγική Το-Παλαιότερο-Πρώτο (old-first strategy).* Επιλέγεται εκείνο το υποψήφιο διάστημα όπου έχει παραμείνει περισσότερο στη λίστα εργασίας. Η υλοποίηση μιας τέτοιας στρατηγικής γίνεται με τη χρήση μιας Ουράς (Queue).

- Η στρατηγική *Το-Καλύτερο-Πρώτο* (*best-first strategy*). Επιλέγεται το «καλύτερο» υποψήφιο διάστημα. Η υλοποίηση μιας τέτοιας στρατηγικής γίνεται με μια διατεταγμένη λίστα.
- Η στρατηγική *Το-Βαθύτερο-Πρώτο* (*depth-first strategy*). Επιλέγεται ένα από τα πιο πρόσφατα δημιουργούμενο υποψήφιο διαστήματα. Η υλοποίηση μιας τέτοιας στρατηγικής γίνεται με τη χρήση μιας Στοιβάς (*Stack*).

Στη μεθοδολογία που θα περιγραφεί στις επόμενες ενότητες εφαρμόζεται η στρατηγική ο καλύτερος-πρώτος. Ως «καλύτερο» υποψήφιο διάστημα $[x]$ θεωρείται εκείνο το διάστημα το οποίο έχει το μικρότερο, σε αριθμητική τιμή, κάτω φράγμα της εκτίμησης του πεδίου τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης σ' αυτό το διάστημα $[x]$ (Σχήμα 4.1). Δηλαδή το κάτω άκρο της διαστηματικής τιμής της συνάρτησης στο υποψήφιο διάστημα ($\underline{f}([x])$).

Σχήμα 4.1: Εφαρμογή του κριτηρίου επιλογής στο σύνολο των υποψηφίων διαστημάτων: Το κόκκινο διάστημα θεωρείται το «καλύτερο» υποψήφιο διάστημα και είναι αυτό που θα εξεταστεί με προτεραιότητα από τον αλγόριθμο.

Κριτήριο Αποκοπής (Cut-Off test). Καθώς εξελίσσεται η στρατηγική της Διακλάδωσης-και-Φραξίματος προκύπτουν νέα υποψήφια διαστήματα μικρότερου πλάτους και κατά συνέπεια με καλύτερη εκτίμηση (μικρότερη υπερεκτίμηση) του πεδίου τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε υποψήφιο διάστημα αντιστοίχως. Έτσι, ένα υποψήφιο διάστημα $[x]$ εξαιρείται από την διαδικασία αναζήτησης λύσης εάν το κάτω φράγμα της εκτίμησης του πεδίου τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης $\underline{f}([x])$ είναι μεγαλύτερο από μια δεδομένη, υπαρκτή τιμή της συνάρτησης $\tilde{f}$ (Σχήμα 4.2)

$$\underline{f}([x]) > \tilde{f}, \quad (4.4)$$

διότι, όπως γνωρίζουμε

$$\min_{x \in [x]} f(x) \geq \underline{f}([x]). \quad (4.5)$$

Η επιλογή ενός υπαρκτού σημείου της f γίνεται με τυχαίο τρόπο, επιλέγοντας να υπολογίσουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σ' ένα εσωτερικό σημείο του τρέχοντος διαστήματος

Σχήμα 4.2: Εφαρμογή του κριτηρίου αποκοπής στο σύνολο των υποψηφίων διαστημάτων: Τα διαστήματα με χρώμα ανοικτό γκρι απορρίπτονται (είναι πάνω από μια υπαρκτή τιμή της συνάρτησης - κόκκινη γραμμή), ενώ τα υπόλοιπα αποτελούν το σύνολο των υποψηφίων διαστημάτων προς έλεγχο από τον αλγόριθμο.

αναζήτησης $[x]$

$$\tilde{f} = f(c),$$

όπου $c \in [x]$. Ο πραγματικός υπολογισμός της τιμής μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα και συμπεράσματα ([30]). Για το λόγο αυτό η εκτίμηση της τιμής της f σ' ένα υπαρκτό σημείο της γίνεται χρησιμοποιώντας διαστηματική αριθμητική:

$$\tilde{f} = \overline{f}([\underline{c}, \overline{c}]) \geq f_{rg}(c).$$

Συνήθως, ως εσωτερικό σημείο c επιλέγεται το μέσο του διαστήματος $[x]$.

Κριτήριο Μονοτονίας: Μία αυστηρώς μονότονη συνάρτηση, ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[x]$ θα παίρνει ελάχιστη τιμή είτε στο αριστερό άκρο του (γνησίως αύξουσα συνάρτηση)

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [x] \Rightarrow \min_{x \in [x]} f(x) = \underline{x},$$

είτε στο δεξί άκρο του διαστήματος αναζήτησης (γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in [x] \Rightarrow \min_{x \in [x]} f(x) = \overline{x}.$$

Συνεπώς, μία αυστηρώς μονότονη συνάρτηση, ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα $[x]$, δεν μπορεί να έχει ολικό ελάχιστο εσωτερικά του πεδίου ορισμού της, δηλαδή, εσωτερικά του διαστήματος αναζήτησης

$$x^* \notin (\underline{x}, \overline{x}),$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3. Ανάλογα με το είδος της μονοτονίας της αντικειμενικής συνάρτησης, αποθηκεύεται στη λίστα εργασίας το αντίστοιχο άκρο του διαστήματος αναζήτησης, με τη μορφή ενός εκφυλισμένου διαστήματος. Το πλεονέκτημα αυτού του μηχανισμού είναι διττό:

Σχήμα 4.3: Εφαρμογή του κριτηρίου μονοτονίας στο σύνολο των υποψηφίων διαστημάτων: Τα διαστήματα με χρώμα ανοικτό γκρι απορρίπτονται ενώ τα υπόλοιπα αποτελούν το σύνολο των υποψηφίων διαστημάτων προς έλεγχο από τον αλγόριθμο.

- Το κατώτερο άκρο μια μονότονης αντικειμενικής συνάρτησης αποτελεί μια πολύ καλή επιλογή για την εύρεση ενός καλύτερου άνω φράγματος του ολικού ελαχίστου. Μιλώντας με τους όρους του κριτηρίου Αποκοπής, όπως αυτό περιγράφηκε παραπάνω, το άκρο του διαστήματος αναζήτησης είναι μια πολύ καλή επιλογή για την εύρεση μιας καλύτερης υπαρκτής τιμής $\bar{f}$ της αντικειμενικής συνάρτησης με αποτέλεσμα την αποδοτικότερη εφαρμογή του κριτηρίου στο σύνολο των υποψηφίων διαστημάτων.
- Λόγω της εκφυλισμένης του μορφής (διάστημα μηδενικού πλάτους που σημαίνει μηδενική υπερεκτίμηση για εκφυλισμένες συναρτήσεις), εάν το διάστημα αυτό δεν αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση του ολικού ελαχίστου, στην τρέχουσα επανάληψη, τότε αυτό θα απορριφθεί άμεσα στην πρώτη εφαρμογή του κριτηρίου αποκοπής.

Το κριτήριο της διαστηματικής μεθόδου Newton [Εφαρμογή στην συνάρτηση της παραγωγού της αντικειμενικής συνάρτησης]: Ένας απλός τρόπος για να επιλυθεί το πρόβλημα (4.1) είναι να καθοριστούν πρώτα, όλα τα στάσιμα σημεία της αντικειμενικής συνάρτησης στο διάστημα αναζήτησης $[x]$, δηλαδή να επιλυθεί η ακόλουθη εξίσωση:

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in [x]. \quad (4.6)$$

Στη συνέχεια, ο μικρότερος συναρτησιακός υπολογισμός στα ευρισκόμενα στάσιμα σημεία θα αποτελεί και τη λύση του προβλήματος (4.1).

Το κριτήριο της διαστηματικής μεθόδου Newton βασίζεται, ουσιαστικά στην παραπάνω παρατήρηση με την έννοια ότι παράγει τμήματα του τρέχοντος διαστήματος αναζήτησης $[x]$, τα οποία περιέχουν με βεβαιότητα όλα τα στάσιμα σημεία της συνάρτησης στο διάστημα αναζήτησης. Η σπουδαιότητα του κριτηρίου της διαστηματικής μεθόδου Newton διαφαίνεται στη διαφορά του από τα υπόλοιπα κριτήρια. Πιο συγκεκριμένα, ενώ τα υπόλοιπα κριτήρια απορρίπτουν ή απλά αποδέχονται ένα διάστημα αναζήτησης ως υποψήφιο διάστημα, το κριτήριο της διαστηματικής

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται μια νέα μεθοδολογία για το πρόβλημα της εύρεσης του ολικού ελαχίστου βασιζόμενοι στην άμεση επίλυση της εξίσωσης (4.7). Πιο συγκεκριμένα, ο τελεστής της διαστηματικής μεθόδου Newton κλειστής θήκης (Κεφάλαιο 3) επιλέγεται για την επίλυση της Εξίσωσης (4.7) για τη βελτίωση των φραγμάτων των ελαχιστοποιητών και του ολικού ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης. Η νέα μέθοδος συμπεριφέρεται όχι μόνο σαν ένας μηχανισμός επιτάχυνσης αλλά και ως ανεξάρτητη και αυτόνομη μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος (4.1).

2 Εξισώσεις και Ολικής Βελτιστοποίηση

Σ' αυτή την παράγραφο, βασιζόμενοι στις ιδέες των Shary ([49]) και Grapsa ([9]), επανεξετάζεται ο μηχανισμός επιτάχυνσης που προτάθηκε από τους Taramo και Frommer στην [55] για να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε τη νέα μέθοδο.

2.1 Διαστηματικές εξισώσεις στο πρόβλημα της Ολικής Βελτιστοποίησης

Έστω f^* το ολικό ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης f στο διάστημα $[x]$. Οι ρίζες της ακόλουθης εξίσωσης

$$g(x) = f(x) - f^* = 0.$$

αποτελούν το σύνολο όλων των ολικών ελαχιστοποιητών x^* της f . Εάν, τώρα θεωρήσουμε ως $\tilde{f}$ και $\underline{f}$ τα καλύτερα γνωστά άνω και κάτω, αντίστοιχα, φράγματα του f^* , τότε έχουμε

$$f(x) - f^* \in f(x) - [f^*] = G(x),$$

όπου, $[f^*] = [\underline{f}, \tilde{f}]$ και συνεπώς τη δημιουργία μιας διαστηματικής εξίσωσης

$$G(x) = 0 \tag{4.8}$$

Η επίλυση της (4.8) μπορεί να μας δώσει εγκλεισμούς όλων των ριζών της $g(x) = 0$, δηλαδή, εγκλεισμούς όλων των ολικών ελαχιστοποιητών της f , που βρίσκονται στο διάστημα $[x]$. Οι εγκλεισμοί αυτοί θα είναι, εν γένει, πλατιά διαστήματα που θα περιέχουν, όμως, όλα τα σημεία των ολικών ελαχιστοποιητών.

Οι Shary και Grapsa πρότειναν τον έλεγχο της (4.8), είτε ως προς την επιλυσιμότητά της, είτε μέσω της εύρεσης μιας ρίζας (της πρώτης) σε δοθέν διάστημα. Οι Taramo και Frommer πρότειναν την χρήση ενός βήματος της διαστηματικής μεθόδου Newton για την αφαίρεση τμημάτων του διαστήματος αναζήτησης, τα οποία βρίσκονταν εξωτερικά των λύσεών της. Ενώ και στις τρεις περιπτώσεις ορίστηκε η διαστηματική εξίσωση (4.8), εν τούτοις, σε καμία από αυτές δεν χρησιμοποιήθηκαν οι λύσεις της ως μέσο προς την εύρεση του ολικού ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3, που αφορά στην επίλυση παραμετρικών/διαστηματικών εξισώσεων μέσω της διαστηματικής μεθόδου Newton κλειστής θήκης, μπορούμε να οριοθετήσουμε μια νέα προσέγγιση στην επίλυση του προβλήματος (4.1). Οι παρακάτω γραμμές αποτελούν έναν οδηγό - μια αρχική αλγοριθμική δομή - για το πώς θα μπορούσαν να συνδυαστούν οι τρέχουσες τεχνικές με τις λύσεις της εξίσωσης (4.8) για την επίλυση του προβλήματος (4.1):

1. Σχηματίζεται μια διαστηματική εξίσωση $G(x) = 0$ (Σχήμα 4.6) χρησιμοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση $f(x)$ (Σχήμα 4.5) και τα τρέχοντα φράγματα $\underline{f}$ και $\tilde{f}$ του ολικού ελαχίστου:

$$G(x) = f(x) - [f^*] = 0, \tag{4.9}$$

όπου $[f^*] = [\underline{f}, \tilde{f}]$ ορίζεται να είναι το διάστημα εγκλεισμού του ολικού ελαχίστου.

Σχήμα 4.5: Η αντικειμενική συνάρτηση.

Σχήμα 4.6: Η διαστηματική εξίσωση (4.8).

2. Εφαρμόζεται ο τελεστής της διαστηματικής μεθόδου Newton κλειστής θήκης (HIN) στην εξίσωση $G(x) = 0$ για να πάρουμε εγκλεισμούς όλων των ολικών ελαχιστοποιητών x^* σε δοθέν κλειστό διάστημα $[x]$.
3. Βελτιώνονται τα φράγματα του ολικού ελαχίστου f^* έως ότου (σχεδόν) ταυτιστούν.

Σχήμα 4.7: Η επίλυση της $G(x) = 0$ θα δώσει εγκλεισμούς όλων των ολικών ελαχιστοποιητών.

4. Το σύνολο όλων των ολικών ελαχιστοποιητών θα είναι όλες οι ρίζες της διαστηματικής εξίσωσης (4.9), όταν τα φράγματα του ολικού ελαχίστου $\underline{f}$ και $\tilde{f}$ τείνουν στο f^* .

Στα τελευταία δύο βήματα διαφαίνεται η σπουδαιότητα της βελτίωσης των φραγμάτων του ολικού ελαχίστου, εφ' όσον αυτά αποτελούν το δομικό λίθο της δημιουργίας της διαστηματικής συνάρτησης $G(x)$. Δηλαδή, βελτιώνονται τα φράγματα του f^* για να γίνουν πιο ακριβή τα φράγματα των εγκλεισμών όλων των ελαχιστοποιητών.

Όσον αφορά στο κάτω φράγμα, παραδοσιακά, η βελτίωσή του εξασφαλίζεται μέσω της υιοθέτησης της στρατηγικής Διακλάδωσης-και-Φραξίματος, δηλαδή της χρήσης μιας διαδικασίας διχοτόμησης του διαστήματος αναζήτησης για να μπορέσουμε να μειώσουμε την υπερεκτίμηση του πεδίου τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς μικραίνει το πλάτος τους ([33]).

Για τη βελτίωση του άνω φράγματος η συνήθης διαδικασία είναι η επιλογή ενός τυχαίου σημείου του διαστήματος αναζήτησης και αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σ' αυτό είναι καλύτερη (μικρότερη) από την τρέχουσα υπαρκτή τιμή της τότε έχουμε βελτίωση και ανανεώνουμε την τρέχουσα υπαρκτή τιμή της f με την νέα. Προφανώς, η τυχειότητα της επιλογής του σημείου, δεν μπορεί να μας εξασφαλίζει, κάθε φορά, καλύτερη τιμή, λεπτότερη διαστηματική συνάρτηση και κατ' επέκταση καλύτερους εγκλεισμούς των ολικών ελαχιστοποιητών.

2.2 Συνεχής βελτίωση του άνω φράγματος του ολικού ελαχίστου

Χρησιμοποιώντας τα θεωρητικά αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3, είναι εφικτή η παραγωγή περιοχών, όπου όλα τα σημεία τους να βελτιώνουν με σιγουριά το άνω φράγμα του ολικού ελαχίστου. Πρώτα, όμως, αποδεικνύουμε κάποια χρήσιμα θεωρητικά εργαλεία που θα μας οδηγήσουν στη θεμελίωση του παραπάνω ισχυρισμού.

Πρόταση 4.1. Έστω $G = f - [f^*] : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη διαστηματική συνάρτηση με $[f^*] = [\underline{f}, \tilde{f}]$ και έστω $[x]$ το διάστημα αναζήτησης. Υπάρχουν ακριβείς συνοριακές συναρτήσεις $g_L(x)$ και $g_U(x)$ τέτοιες ώστε

$$g_L(x) \leq G(x) \leq g_U(x)$$

για κάθε $x \in [x]$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση της πρότασης για την $G(x)$ και τον ορισμό των διαστηματικών αριθμών προκύπτει ότι

$$g_L(x) = f(x) - \tilde{f} \leq f(x) - [\underline{f}, \tilde{f}] = G(x) \leq f(x) - \underline{f} = g_U(x).$$

□

Λήμμα 4.2. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 4.1. Επιπλέον, έστω $c_i, i = 1, 2, 3, \dots$ όλες οι σημειακές ρίζες των συνοριακών εξισώσεων $g_L(x) = 0$ και $g_U(x) = 0$, διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά. Εάν υπάρχει μια μη εκφυλισμένη διαστηματική ρίζα $[x]^*$ της $G(x) = 0$, τότε αυτή μπορεί να γραφεί ως διάστημα με άκρα διαδοχικές σημειακές ρίζες των $g_L(x)$ και $g_U(x)$

$$[x]^* = [c_i, c_{i+1}].$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του λήμματος θα δείξουμε πρώτα ότι όλες οι διαστηματικές ρίζες έχουν ως άκρα σημειακές ρίζες των συνοριακών εξισώσεων της $G(x)$ και στη συνέχεια ότι τα άκρα μιας διαστηματικής ρίζας είναι διαδοχικές σημειακές ρίζες των συνοριακών εξισώσεων της $G(x)$.

Έστω c_i μία σημειακή ρίζα μιας συνοριακής εξίσωσης και έστω $[a_j, b_j]$ μια διαστηματική ρίζα της $G(x) = 0$, τέτοια ώστε

$$0 \in G(s) \quad \forall s \in [a_j, b_j].$$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι υπάρχει ένα j τέτοιο ώστε

$$a_j \neq c_i \quad \forall i,$$

δηλαδή, καμία σημειακή ρίζα c_i δεν είναι αριστερό άκρο της διαστηματικής ρίζας $[a_j, b_j]$. Συνεπώς,

$$g_L(a_j) \neq 0 \quad \text{και} \quad g_U(a_j) \neq 0.$$

Όμως, το $0 \in G(a_j)$ κι εφ' όσον $a_j \neq c_i$ έχουμε

$$g_L(a_j) < 0 < g_U(a_j).$$

Τότε θα υπάρχει ένας πολύ μικρός θετικός αριθμός $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$g_L(s') < 0 \quad \text{και} \quad g_U(s') > 0$$

για κάθε $s' \in [a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$ και άρα για κάθε $s' \in [a_j - \varepsilon, a_j]$. Συνεπώς, το διάστημα

$$[a_j - \varepsilon, b_j] = [a_j - \varepsilon, a_j] \cup [a_j, b_j]$$

πρέπει να είναι μια διαστηματική ρίζα της $G(x) = 0$. Άτοπο, διότι το διάστημα $[a_j, b_j]$ είναι μια διαστηματική ρίζα και από τον ορισμό της διαστηματικής ρίζας (Κεφάλαιο 3, Ορισμός 3.6), μια διαστηματική ρίζα πρέπει να είναι το μέγιστο, μη-επεκτάσιμο συνεχές σημειακών ριζών. Όμως, το διάστημα $[a_j, b_j]$ είναι υποσύνολο του $[a_j - \varepsilon, b_j]$

$$[a_j - \varepsilon, b_j] \supset [a_j, b_j].$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και το δεξί άκρο μιας διαστηματικής ρίζας είναι σημειακή-ρίζα των συνοριακών εξισώσεων της $G(x) = 0$.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι οι ρίζες των συνοριακών εξισώσεων είναι άκρα αντίστοιχων διαστηματικών ριζών. Για να αποδείξουμε, επιπλέον, ότι ο σχηματισμός των διαστηματικών ριζών γίνεται από διαδοχικές ρίζες των συνοριακών εξισώσεων θεωρούμε δύο μη διαδοχικές σημειακές ρίζες $c_i < c_j$ και τη διαστηματική ρίζα $[x]^* = [c_i, c_j]$, έτσι ώστε

$$0 \in G(s) \Rightarrow g_L(s) \leq 0 \leq g_U(s), \quad \forall s \in [x]^* = [c_i, c_j]. \quad (4.10)$$

Θεωρούμε ότι ανάμεσα στις σημειακές ρίζες c_i και c_j παρεμβάλλεται τουλάχιστον μία ακόμη σημειακή ρίζα.

Έστω, λοιπόν, ότι παρεμβάλλεται τουλάχιστον μία απλή σημειακή ρίζα, η c_k (περίπτωση αυστηρώς μονότονης συνοριακής συνάρτησης στην περιοχή της ρίζας) τέτοια ώστε

$$c_i < c_k < c_j.$$

Θα υπάρχει σημείο s' στη γειτονιά του c_k τέτοιο ώστε $0 \notin G(s')$. Άτοπο, διότι το $[x]^*$ είναι μια διαστηματική ρίζα της $G(x) = 0$ και για όλα τα εσωτερικά της σημεία ισχύει η (4.10).

Για την περίπτωση που παρεμβάλλεται τουλάχιστον μία σημειακή ρίζα c_k πολλαπλότητας μεγαλύτερης του 1 και η ρίζα αυτή είναι σημείο καμπής (περίπτωση μονότονης συνοριακής συνάρτησης στην περιοχή της ρίζας), τέτοια ώστε

$$c_i < c_k < c_j,$$

η επαγωγή προκύπτει με τον ίδιο τρόπο.

Έστω, τώρα, ότι όλες οι ενδιάμεσες σημειακές ρίζες είναι ακρότατα, δηλαδή, ρίζες πολλαπλότητας μεγαλύτερης του 1, τέτοιες ώστε

$$c_i < c_{k+1} < \dots < c_{k+n} < c_j,$$

όπου n το πλήθος των ενδιάμεσων σημειακών ριζών. Για κάθε μία από αυτές θα ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$G(c_{k+m}) \leq 0 \quad \text{ή} \quad G(c_{k+m}) \geq 0,$$

για κάθε $m = 1, \dots, n$, που σημαίνει ότι είτε όλες θα είναι τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα. Εάν υπήρχε τουλάχιστον ένα τοπικό μέγιστο ή ένα τοπικό ελάχιστο, αντιστοίχως, τότε η υπό μελέτη περίπτωση θα άνηκε στις προηγούμενες δύο (αυστηρά ή μη μονότονη συνοριακή συνάρτηση στην περιοχή της ρίζας).

Έτσι, ολόκληρο το διάστημα $[c_i, c_j]$ μπορεί να γραφεί σαν την ένωση διαστηματικών ριζών με άκρα διαδοχικές σημειακές ρίζες

$$[c_i, c_j] = [c_i, c_{k+1}] \cup [c_{k+1}, c_{k+2}] \cup \dots \cup [c_{k+n}, c_j].$$

Η πρόταση αποδείχθηκε. □

Σημείωση 4.3. Για να κατασκευάσουμε τις διαστηματικές εξισώσεις πρώτα βρίσκουμε τις σημειακές ρίζες των συνοριακών εξισώσεων και στη συνέχεια τις δημιουργούμε. Συνεπώς, κάθε διαστηματική ρίζα που βρίσκεται θα είναι της μορφής

$$[x]^* = [c_i, c_{i+1}].$$

όπου c_i οι διαδοχικές και διατεταγμένες σημειακές ρίζες.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει το κατάλληλο θεωρητικό εργαλείο για την εγγυημένη βελτίωση του άνω φράγματος του ολικού ελαχίστου και αποδεικνύεται κάνοντας χρήση του προηγούμενου λήμματος.

Θεώρημα 4.4. Έστω $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική μονοδιάστατη συνάρτηση, συνεχώς διαφορίσιμη, $[x]$ το διάστημα αναζήτησης και $[x]^* = [\underline{x}^*, \bar{x}^*] \subseteq [x]$ μια διαστηματική ρίζα της εξίσωσης $G(x) = f(x) - [f, \tilde{f}] = 0$, όπου $\underline{f}$ είναι το κάτω άκρο του εγκλεισμού $f([x])$ και $\tilde{f}$ μια υπαρκτή τιμή της f και ένα κάτω φράγμα του ολικού ελαχίστου. Για κάθε $s \in (\underline{x}^*, \bar{x}^*)$ έχουμε ότι $f(s) < \tilde{f}$.

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε συναρτησιακός υπολογισμός μέσα από το διάστημα $(\underline{x}^*, \bar{x}^*)$ δεν μπορεί να δώσει μεγαλύτερη τιμή από την τρέχουσα υπαρκτή τιμή $\tilde{f}$ και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι είναι πάντα καλύτερη.

Υποθέτουμε την ύπαρξη ενός σημείου $\hat{s} \in (\underline{x}^*, \bar{x}^*)$ τέτοιου ώστε

$$f(\hat{s}) > \tilde{f} \Rightarrow f(\hat{s}) - \tilde{f} > 0. \quad (4.11)$$

Το $\hat{s}$ είναι μια σημειακή ρίζα της $G(x) = 0$ και συνεπώς

$$0 \in G(\hat{s}) \Rightarrow 0 \in f(\hat{s}) - [\underline{f}, \tilde{f}] \Rightarrow 0 \in [f(\hat{s}) - \tilde{f}, f(\hat{s}) - \underline{f}]. \quad (4.12)$$

Η τελευταία πρόταση δεν είναι αληθής, διότι, λόγω της υπόθεσης (4.11),

$$[f(\hat{s}) - \tilde{f}, f(\hat{s}) - \underline{f}] > 0.$$

Άρα,

$$f(\hat{s}) \leq \tilde{f} \text{ για κάθε } \hat{s} \in (\underline{x}^*, \bar{x}^*). \quad (4.13)$$

Απομένει να δείξουμε ότι η ισότητα στη σχέση (4.13) δεν υφίσταται. Αν θεωρήσουμε την ύπαρξη ενός σημείου $s' \in (\underline{x}^*, \bar{x}^*)$, τέτοιου ώστε $f(s') = \tilde{f}$, παίρνουμε από την (4.13) ότι

$$G(s') = [0, \tilde{f} - \underline{f}],$$

που σημαίνει ότι το s' είναι μια σημειακή ρίζα μιας εκ των συνοριακών εξισώσεων της $G(x) = 0$. Από το Λήμμα 4.2 και τη Σημείωση 4.3 καταλήγουμε σε άτοπο, διότι κάθε σημειακή ρίζα είναι άκρο μιας διαστηματικής ρίζας κι όχι εσωτερικό της. Το θεώρημα αποδείχθηκε. $\square$

Το παραπάνω θεώρημα μας λέει πώς για να επιτύχουμε βελτίωση του άνω φράγματος του ολικού ελαχίστου αρκεί να βρούμε μία διαστηματική ρίζα της εξίσωσης $G(x) = 0$ και στη συνέχεια να πάρουμε ένα εσωτερικό της σημείο για να υπολογίσουμε μια νέα τιμή της συνάρτησης και κατ' επέκταση ένα νέο, «καλύτερο» άνω φράγμα του ολικού ελαχίστου.

Η εύρεση μιας διαστηματικής ρίζας μιας διαστηματικής εξίσωσης είναι μια εφικτή πράξη (Κεφάλαιο 3), αλλά με ένα υπολογιστικό κόστος που, προς το παρόν, δεν μπορεί ν' αποφευχθεί. Από την άλλη πλευρά όμως, μπορούμε με πολύ μικρό υπολογιστικό κόπο, να πάρουμε με σιγουριά εσωτερικά τμήματα μιας διαστηματικής ρίζας (δες Κεφάλαιο 3, Προτάσεις 3.1, 3.2 και Σχέση (3.24)), εφαρμόζοντας το επαναληπτικό σχήμα HIN (3.24) στην εξίσωση $G(x) = 0$. Τέτοιου είδους διαστήματα μπορούν να εξαχθούν, σχεδόν, αμέσως, ακόμα και στην πρώτη επανάληψη της εφαρμογής του τελεστή HIN. Έτσι, όπως αποδεικνύεται από την ακόλουθη Πρόταση, αντί να επιλύσουμε πλήρως τη διαστηματική εξίσωση $G(x) = 0$ μπορούμε να αξιοποιήσουμε οποιοδήποτε εσωτερικό κομμάτι της διαστηματικής της ρίζας, για να βελτιώσουμε το άνω φράγμα του ολικού ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης.

Πρόταση 4.5. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.4. Εάν υπάρχει ένα διάστημα $[r]$ τέτοιο ώστε $[r] \subseteq [x]^*$ τότε για κάθε $s \in (r, \bar{r})$ έχουμε ότι $f(s) < \tilde{f}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.4. □

Η τελευταία πρόταση αποτελεί το βασικό κριτήριο της νέας μεθοδολογίας για την βελτίωση του άνω φράγματος του ολικού ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης.

Πόρισμα 4.6. Το άνω φράγμα $\tilde{f}$ του f^* βελτιώνεται αυστηρά σε κάθε επανάληψη, εάν αποτιμηθεί σ' ένα εσωτερικό τμήμα οποιασδήποτε διαστηματικής ρίζας της τρέχουσας διαστηματικής εξίσωσης $G(x) = f(x) - [f^*] = 0$.

2.3 Σύνοψη

Η ταυτόχρονη βελτίωση των φραγμάτων του ολικού ελαχίστου επιτυγχάνεται αφ' ενός μεν, με την υιοθέτηση μιας διαδικασίας διχοτόμησης του διαστήματος αναζήτησης, για την βελτίωση του κάτω φράγματος του ολικού ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης, αφ' ετέρου δε, με την εφαρμογή ενός κριτηρίου, που βελτιώνει το άνω φράγμα του ολικού ελαχίστου επιλύοντας διαστηματικές εξισώσεις για την εύρεση αποδοτικών περιοχών.

Επισημαίνεται, επίσης, ότι η νέα μέθοδος πραγματεύεται με διαφορετικές διαστηματικές εξισώσεις σε κάθε επανάληψη, διότι τα φράγματα, που δημιουργούν τη διαστηματική εξίσωση $G(x) = 0$ αλλάζουν διαρκώς. Επιπλέον, είναι φανερό, ότι όσο συνεχίζεται η διαδικασία βελτίωσης των φραγμάτων του ολικού ελαχίστου, η διαστηματική συνάρτηση $G(x)$ τείνει να γίνει εκφυλισμένη, οπότε οι λύσεις της θα είναι, τελικά, οι εγκλεισμοί όλων των ολικών ελαχιστοποιητών.

3 Ο αλγόριθμος

Σ' αυτή την παράγραφο δίνεται μια αλγοριθμική υλοποίηση (αλγόριθμος 4.6) των παραπάνω θεωρητικών αποτελεσμάτων και ιδεών για την επίλυση του προβλήματος (4.1). Ο βασικός αλγόριθμος της νέας μεθόδου, που ονομάζεται GOHIN (Global Optimization using Hull Interval Newton),

Αλγόριθμος 4.6 Αλγόριθμος για το πρόβλημα της Ολικής Βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο HIN

```

1: Συνάρτηση GOHIN( $f, [x]_0, \varepsilon, \varepsilon_*, \mathcal{L}$ )
2:    $\mathcal{WL} := \{[x]_0, f([x]_0)\}, \mathcal{L} := \{\}$  ·  $\tilde{f} = \overline{f(\underline{x}_0)}$ 
3:   όσο ( $\mathcal{WL} \neq \{\}$ ) κάνε
4:     Επέλεξε  $[x], f([x])$  από την  $\mathcal{WL}$ 
5:     Δημιούργησε τη  $G(x) = f(x) - [f^*]$ 
6:     HIN( $G, [x], \varepsilon, \varepsilon_*, [f^*], \mathcal{WL}, \mathcal{L}, [r]$ )
7:     BISECT( $[r], [r]_1, [r]_2$ )
8:      $\mathcal{WL} := \mathcal{WL} \uplus \{[r]_1, f([r]_1)\}$ 
9:      $\mathcal{WL} := \mathcal{WL} \uplus \{[r]_2, f([r]_2)\}$ 
10:    αν  $\mathcal{L} = \{\}$  τότε
11:       $\tilde{f} = f(m([r]))$ 
12:      CUT_OFF( $\mathcal{WL}, \tilde{f}$ )
13:    αλλιώς
14:      BREAK
15:    τέλος
16:  τέλος
17:  επέστρεψε  $\mathcal{L}$ 
18: τέλος

```

δέχεται σαν είσοδο την αντικειμενική συνάρτηση f , το διάστημα αναζήτησης $[x]_0$, τις σταθερές ακρίβειας ε και ε_* και μετά την ολοκλήρωσή του επιστρέφει τη λίστα $\mathcal{L}$ που περιέχει τους ολικούς ελαχιστοποιητές της f . Στο βήμα 2 αρχικοποιείται η λίστα εργασίας $\mathcal{WL}$ με το αρχικό διάστημα αναζήτησης, η τελική λίστα $\mathcal{L}$ με το κενό σύνολο και το άνω φράγμα $\tilde{f}$ του ολικού ελαχίστου f^* με το άνω φράγμα της εκτίμησης του πεδίου τιμών της f στο κάτω άκρο του διαστήματος αναζήτησης $\underline{x}_0$. Η αρχικοποίηση του $\tilde{f}$ θα μπορούσε να γίνει σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος αναζήτησης.

Το κύριο κομμάτι του αλγορίθμου περιγράφεται από τα βήματα 3-16, εφ' όσον η λίστα εργασίας παραμένει μη κενή. Στο Βήμα 4 επιλέγεται ένα διάστημα $[x]$ από τη λίστα εργασίας. Η διαδικασία επιλογής έχει υλοποιηθεί ακολουθώντας τη στρατηγική του καλύτερος-πρώτος, δηλαδή, επιλέγεται το διάστημα με τη μικρότερη αριθμητική τιμή του κάτω άκρου της εκτίμησης του πεδίου τιμών της f , υπολογιζόμενο στο διάστημα αυτό. Έτσι, κάθε υποψήφιο διάστημα $[x]$ αποθηκεύεται στην λίστα εργασίας μαζί με την διαστηματική τιμή της f στο $[x]$. Για να επιτύχουμε την ταξινόμηση στη λίστα εργασίας, εφοδιάζουμε τη δομή της λίστας με μια διαδικασία ταξινόμησης.

Στη συνέχεια, σχηματίζεται η αντίστοιχη διαστηματική εξίσωση $G(x) = 0$, χρησιμοποιώντας και τα δύο φράγματα του ολικού ελαχίστου f^* και εφαρμόζεται σ' αυτήν ο τελεστής HIN. Η συνάρτηση HIN δέχεται ως είσοδο τη διαστηματική συνάρτηση G , το τρέχων διάστημα αναζήτησης $[x]$, τις σταθερές ακρίβειας ε και ε_* , τη λίστα εργασίας $\mathcal{WL}$, την τελική λίστα $\mathcal{L}$ και επιστρέφει ένα εσωτερικό τμήμα $[r]$ της διαστηματικής ρίζας $[x]^*$, την ανανεωμένη λίστα εργασίας και την τελική λίστα. Ο αλγόριθμος αποθηκεύει όλα τα νέα υποψήφια διαστήματα που προκύπτουν στην λίστα εργασίας εκτός από το διάστημα $[r]$, το οποίο επεξεργάζεται από το επόμενο Βήμα 7 του αλγορίθμου GOHIN. Συγκεκριμένα, το διάστημα $[r]$ διχοτομείται στο μέσο του και τα προκύπτόμενα διαστήματα αποθηκεύονται στην λίστα εργασίας $\mathcal{WL}$. Εάν η τελική λίστα $\mathcal{L}$ είναι κενή (Βήμα 10) τότε, λόγω του Θεωρήματος 4.4 και του Πορίσματος 4.6, ανανεώνεται η τιμή του $\tilde{f}$ και εφαρμόζεται ο μηχανισμός επιτάχυνσης αποκοπής στην λίστα εργασίας. Εάν η τελική λίστα δεν είναι κενή, τότε όλα τα ολικά ελάχιστα έχουν βρεθεί και ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Ο αλγόριθμος της μεθόδου HIN, που δόθηκε στο Κεφάλαιο 3, τροποποιείται για να ενσωματωθεί στον Αλγόριθμο 4.6 και δίνεται ακολούθως από τον Αλγόριθμο 4.7. Οι αλλαγές που έγιναν στο αλγόριθμο σε σχέση με τον αρχικό Αλγόριθμο 3.3 είναι οι ακόλουθες:

Βήμα 1: *Οι μεταβλητές εισόδου.* Ως είσοδο, επιπλέον, περνάνε και τα δύο φράγματα του ολικού ελαχίστου με τη μορφή διαστήματος $[f^*]$, η ακρίβεια ε_* για τον έλεγχο του διαστήματος $[f^*]$ και η λίστα εργασίας $\mathcal{WL}$.

Βήμα 5: *Κριτήρια τερματισμού.* Τα κριτήρια τερματισμού ενεργοποιούνται μόνο όταν τα φράγματα του ολικού ελαχίστου γίνουν ικανοποιητικά ακριβή:

$$w([f^*]) \leq \varepsilon_*.$$

Οι λύσεις της $G(x) = 0$ θα δώσουν εγκλεισμούς των ολικών ελαχιστοποιητών με ακρίβεια ε είτε στο πλάτος του υποψήφιου διαστήματος $[x]$ είτε στο πλάτος του εκτιμώμενου πεδίου τιμών της f στο διάστημα $[x]$. Ο αλγόριθμος (4.6) θα χρησιμοποιήσει τα τμήματα των διαστηματικών ριζών που βρέθηκαν για να ανανεώσει το άνω φράγμα $\tilde{f}$ του ολικού ελαχίστου, γι' αυτό και τερματίζεται στο Βήμα 8 και ο έλεγχος επιστρέφει στον αλγόριθμο 4.6.

Βήμα 13: *Κριτήριο Μονοτονίας.* Προστέθηκε το κριτήριο της μονοτονίας στον αλγόριθμο mHIN για να απορριφθούν τυχόν διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι μονότονη.

Αλγόριθμος 4.7 Τροποποιημένη Διαστηματική Μέθοδος Newton Κλειστής Θήκης

```

1: Συνάρτηση ΜΗΝ( $F, [x]_0, \varepsilon, \varepsilon_*, [f^*], \mathcal{WL}, \mathcal{L}, [r]$ )
2:   όσο  $\mathcal{WL} \neq \{\}$  κάνε
3:     Επέλεξε  $[x], f([x])$  από την  $\mathcal{WL}$ 
4:     αν  $(0 \in f([x]))$  τότε
5:       αν  $(w([x]) \leq \varepsilon \vee w(f([x]) \leq \varepsilon) \wedge w([f^*]) \leq \varepsilon_*)$  τότε
6:          $\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{[x]\}$ 
7:          $[r] = [x]$ 
8:         BREAK
9:       αλλιώς
10:         $f_m := f(m([x]))$ 
11:         $H := (N_L([x]) \sqcup N_U([x])) \cap [x]$ 
12:         $[r] = [\min\{\bar{N}_L, \bar{N}_U\}, \max\{\underline{N}_L, \underline{N}_U\}]$ 
13:         $\text{MONOTONICITY\_TEST}(\mathcal{WL}, f'([x]))$ 
14:        αν  $(0 \in f'([x]))$  τότε
15:          αν  $(\underline{f}_m = 0 \vee \bar{d}_m = 0 \vee H \supseteq [x])$  τότε
16:             $\text{BISECT}([x], [x]_1, [x]_2)$ 
17:             $\mathcal{WL} := \mathcal{WL} \uplus \{[x]_1, f([x]_1)\}$ 
18:             $\mathcal{WL} := \mathcal{WL} \uplus \{[x]_2, f([x]_2)\}$ 
19:            Τερμάτισε τη τρέχουσα επανάληψη και άρχισε μια νέα
20:          αλλιώς αν  $(0 \notin f_m)$  τότε
21:             $[r] = []$ 
22:          τέλος
23:        τέλος
24:         $[x]_1 := N_L \cap [x], [x]_2 := N_U \cap [x]$ 
25:         $\mathcal{WL} := \mathcal{WL} \uplus \{[x]_1, f([x]_1)\}$ 
26:         $\mathcal{WL} := \mathcal{WL} \uplus \{[x]_2, f([x]_2)\}$ 
27:        αν το  $[r]$  είναι ορισμένο τότε
28:           $[r] := [r] \cap [x]$ 
29:          BREAK
30:        τέλος
31:      τέλος
32:    τέλος
33:  τέλος
34: επέστρεψε  $\mathcal{L}, \mathcal{WL}, [r]$ 
35: τέλος

```

Βήματα 8,29: Το υπολογιζόμενο διάστημα $[r]$ υποδεικνύει ότι βρέθηκε μια καλή περιοχή για να γίνει ασφαλής ανανέωση του άνω φράγματος $\tilde{f}$ του ολικού ελαχίστου κι έτσι η αλγοριθμική διαδικασία τερματίζεται. Μια ευρισκόμενη διαστηματική ρίζα θεωρείται, επίσης, μια καλή περιοχή και γι' αυτό το λόγο, μόλις βρεθεί μια διαστηματική ρίζα ο αλγόριθμος τερματίζεται.

Βήμα 34: Οι μεταβλητές εξόδου. Ο αλγόριθμος επιστρέφει, εκτός της τελικής λίστας $\mathcal{L}$, την ανανεωμένη λίστα εργασίας, καθώς και το εσωτερικό διάστημα μιας διαστηματικής ρίζας $[r]$.

4 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Τα θεωρητικά αποτελέσματα της νέας μεθοδολογίας επαληθεύονται μέσα από την εφαρμογή της σε μια σειρά από δοκιμαστικές συναρτήσεις, όπως παρατίθεται στις επόμενες παραγρά-

φους. Στην πρώτη παράγραφο, δίνεται η απόδοση της μεθόδου, καθώς και η επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων της μέσα από ένα απλό παράδειγμα, ενώ στη δεύτερη παράγραφο παρουσιάζεται η συνολική απόδοση της μεθόδου μέσα από μια σειρά 40 δοκιμαστικών συναρτήσεων.

4.1 Ένα απλό παράδειγμα

Θεωρούμε το πρόβλημα της εύρεσης ακριβών φραγμάτων του ολικού ελαχίστου f^* και όλων των ολικών ελαχιστοποιητών x^* της ακόλουθης αντικειμενικής συνάρτησης (Σχήμα 4.8):

$$f(x) = \sqrt{x} \sin^2(x), \quad (4.14)$$

στο διάστημα $[x]_0 = [1, 4.5]$, με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-8}$. Η τιμή της συνάρτησης f στο διάστημα

Σχήμα 4.8: Η αντικειμενική συνάρτηση του παραδείγματος.

$[x]_0$ είναι $[0, 2.121320344]$ και το άνω φράγμα $\tilde{f}$ του ολικού ελαχίστου ορίζεται να είναι ίσο με $f(\underline{x}_0) = 0.708073418$. Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε με τον αλγόριθμο κατασκευάζεται η αντίστοιχη διαστηματική εξίσωση:

$$G(x) = f(x) - [f^*] = f(x) - [0, 0.708073418].$$

Στο Σχήμα 4.9 φαίνεται η γραφική αναπαράσταση της $G(x)$. Η έντονη μαύρη γραμμή δείχνει την αντικειμενική συνάρτηση f και η κόκκινη γραμμή το άνω φράγμα του ολικού ελαχίστου $\tilde{f}$. Σειρά έχει, τώρα, η επίλυση της $G(x) = 0$ έως ότου να βρεθεί ένα εσωτερικό κομμάτι $[r]$ μιας διαστηματικής ρίζας ή να απορριφθεί το διάστημα αναζήτησης που δεν θα περιέχει το ολικό ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης. Έτσι, εφαρμόζεται ο αλγόριθμος mHIN στο αρχικό διάστημα αναζήτησης και επιστρέφει τρία υποψήφια διαστήματα (δες Σχήμα 4.10):

- $[x]_1 = [1, 2.698021907]$,
- $[x]_2 = [2.806935828, 4.5]$, και
- $[r] = [2.698021907, 2.806935828]$.

Σχήμα 4.9: Η σχηματιζόμενη διαστηματική συνάρτηση.

Σχήμα 4.10: Η πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου.

Από το θεώρημα (4.5), εφ' όσον το μέσο του διαστήματος $[r]$ ανήκει στο $[r]$, το άνω φράγμα του ολικού ελαχίστου $\tilde{f}$ ανανεώνεται από την τιμή $f(\text{mid}([r])) = 0.238772748$. Το υποψήφιο διάστημα $[r]$ διχοτομείται και αποθηκεύεται για περαιτέρω διερεύνηση.

Στη συνέχεια σχηματίζεται μια νέα διαστηματική εξίσωση, διότι τα φράγματα του ολικού ελαχίστου f^* βελτιώθηκαν. Αποτέλεσμα αυτής της βελτίωσης είναι μια λεπτότερη διαστηματική συνάρτηση, όπως αυτή φαίνεται στο Σχήμα 4.11. Όμοια αποτελέσματα εμφανίζονται και στην τρίτη επανάληψη. Στο Σχήμα 4.12 η συνάρτηση $G(x)$ «σχεδόν» συμπίπτει με την αντικειμενική συνάρτηση $f(x)$, όπως φαίνεται πιο καθαρά στο Σχήμα 4.13.

Σχήμα 4.11: Η δεύτερη επανάληψη του αλγορίθμου.

Σχήμα 4.12: Η τρίτη επανάληψη του αλγορίθμου.

Τελικά, η μέθοδος κατέληξε στο μοναδικό ολικό ελάχιστο και στον αντίστοιχο ολικό ελαχιστοποιητή

$$[x^*] = [3.141559309, 3.141603917] \quad \text{και} \quad [f^*] = [0, 1.9706764960625 \cdot 10^{-9}]$$

σε 10 επαναλήψεις (10 καλέσματα της μεθόδου HIN που ισοδυναμούν σε 20 επαναλήψεις του αλγορίθμου HIN), κάνοντας 71 διαστηματικούς συναρτησιακούς υπολογισμούς και 15 διαστηματικούς υπολογισμούς παραγώγου, χρησιμοποιώντας 8 διχοτομήσεις και χρησιμοποιώντας λίστα με μέγιστο μήκος 5 θέσεων. Η εξέλιξη του άνω φράγματος $\tilde{f}$ του f^* παρατίθεται στον Πίνακα 4.1. Διακρίνονται εύκολα τα θεωρητικά αποτελέσματα του Θεωρήματος 4.4 και της Πρότασης

4.5.

Σχήμα 4.13: Η τρίτη επανάληψη του αλγορίθμου - Εστίαση στο διάστημα $[2.8, 3.4]$.Πίνακας 4.1: Η αυστηρή βελτίωση του άνω φράγματος του $\tilde{f}$ για το παράδειγμα (4.14)

Επανάληψη	Τρέχων διάστημα $[x]$	$\tilde{f}$
1.	$[1, 4.5]$	0.70807341827357
2.	$[2.80693582841571, 4.5]$	0.23877274759908
3.	$[2.80693582841571, 3.20125292465569]$	0.00747514915880
4.	$[3.11673991327114, 3.20125292465569]$	0.00156493496338
5.	$[3.11673991327114, 3.15648537127219]$	0.00061115908223
6.	$[3.13711006549111, 3.15648537127219]$	0.00004687893415
7.	$[3.13711006549111, 3.14193093605271]$	0.00000021840272
8.	$[3.14149801347930, 3.14193093605271]$	0.00000002057002
9.	$[3.14149801347930, 3.14160331749382]$	0.00000000022486
10.	$[3.14160331749381, 3.14160391675885]$	0.00000000021605

4.2 Αριθμητικά πειράματα

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της μεθόδου παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2 σε σχέση με τα αριθμητικά αποτελέσματα κάποιων πολύ γνωστών διαστηματικών μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος (4.1). Αυτές οι μέθοδοι είναι Παραδοσιακή Μέθοδος (ΠΜ), η μέθοδος Kite (ΚΜ), όπως προτάθηκε στην εργασία [61] και η μέθοδος των Casado et al. (CM), όπως αυτή προτάθηκε στην εργασία [6]. Στον πίνακα των αποτελεσμάτων η στήλη No υποδηλώνει τον αύξοντα αριθμό των αντικειμενικών συναρτήσεων, όπως αυτές δόθηκαν στην [6]. Η δεύτερη στήλη περιέχει το διάστημα αναζήτησης για κάθε ένα πρόβλημα και η επόμενη δείχνει το συνολικό συναρτησιακό κόστος της κάθε μιας. Οι υπόλοιπες δύο στήλες δείχνουν το πλήθος των απαιτούμενων διχοτομήσεων καθώς και το μέγιστο απαιτούμενο μήκος λίστας. Η αποδοχή των υποψηφίων διαστημάτων

Πίνακας 4.2: Η αριθμητική απόδοση της μεθόδου GQHIN.

No	Διάστημα Αναζήτησης	Συναρτησιακοί Υπολογισμοί				Πλήθος Διχοτομήσεων				Μέγιστο Μήκος Λίστας			
		ΠΜ	ΚΜ	CM	GH	ΠΜ	ΚΜ	CM	GH	ΠΜ	ΚΜ	CM	GH
1.	[0,20]	98	73	144	107	18	13	8	8	3	3	3	7
2.	[0.2,7]	116	81	80	93	21	14	4	7	4	5	4	6
3.	[-10,10]	109	93	91	119	19	15	11	10	2	2	3	7
4.	[0.2,7]	110	105	122	177	20	19	10	15	3	2	3	7
5.	[-10,10]	138	143	148	146	26	27	9	9	1	2	3	6
6.	[0.2,7]	104	99	128	143	19	18	15	11	2	2	3	6
7.	[0.2,7]	88	87	107	146	16	16	7	13	1	1	3	7
8.	[0.2,7]	114	98	120	161	21	18	9	12	1	1	3	8
9.	[0.2,7]	114	129	148	149	21	24	12	9	2	2	5	7
10.	[0.2,7]	109	134	148	147	20	25	12	13	2	2	4	7
11.	[0.2,7]	93	98	123	162	17	18	11	13	1	2	3	6
12.	[0.2,7]	97	98	126	175	18	18	10	14	2	2	3	8
13.	[2.7,7.5]	109	103	132	155	20	19	14	11	3	2	4	8
14.	[0.2,7]	135	146	173	149	26	28	12	9	2	3	4	10
15.	[0.2,7]	161	140	146	178	29	25	9	13	5	6	6	9
16.	[0.2,7]	163	157	169	274	29	28	11	17	8	8	8	17
17.	[-10,10]	126	168	199	254	24	32	14	22	2	3	4	10
18.	[0.2,7]	168	121	130	135	32	22	6	8	3	3	3	9
19.	[-5,5]	221	141	130	47	41	25	1	1	2	2	2	7
20.	[-10,10]	181	70	114	12	35	13	1	1	2	1	2	2
21.	[-20,20]	197	105	110	31	37	19	1	1	2	2	2	5
22.	[0.2,7]	148	193	208	198	27	35	15	11	3	4	6	9
23.	[-10,10]	166	237	254	262	30	43	20	17	3	4	5	11
24.	[0.2,7]	161	206	262	218	30	37	15	12	4	4	6	10
25.	[0.2,7]	169	194	278	318	32	37	17	20	3	4	6	18
26.	[0.2,7]	251	181	194	185	48	34	7	7	4	4	4	9
27.	[0.2,7]	211	265	334	308	40	51	17	17	4	4	7	15
28.	[0,20]	250	170	182	186	48	32	11	9	3	3	4	8
29.	[0.2,7]	212	257	306	305	40	46	16	19	5	5	6	11
30.	[0.2,7]	346	241	266	263	67	46	14	8	4	4	5	8
31.	[0,10]	146	176	173	84	26	32	13	6	4	5	8	7
32.	[0.02,1]	675	460	536	462	131	88	10	12	8	8	9	8
33.	[-10,10]	471	440	516	509	86	80	22	15	15	16	17	21
34.	[0.2,7]	266	384	436	526	47	65	21	27	5	6	9	16
35.	[0,10]	358	398	460	118	62	67	12	4	7	6	12	9
36.	[0.2,7]	641	736	948	1110	106	122	19	35	11	9	16	46
37.	[-1,7]	351	452	541	523	62	78	27	23	9	8	14	14
38.	[-4,4]	715	719	862	891	139	121	36	28	24	10	18	27
39.	[-10,20]	1628	1785	2398	2519	272	298	67	114	26	20	42	112
40.	[0,3]	1276	1343	1839	1919	212	223	54	69	25	19	42	84

ως ολικών ελαχιστοποιητών έγινε χρησιμοποιώντας ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-8}$, ενώ μια διαστηματική συνάρτηση γινόταν δεκτή ως αρκετά λεπτή χρησιμοποιώντας ακρίβεια $\varepsilon_* = 10^{-4}$.

Η αριθμητική απόδοση της μεθόδου μας μετρήθηκε σε ένα φορητό υπολογιστή με επεξεργαστή Intel Dual Core@2GHz, 2GB RAM και Λειτουργικό Σύστημα Ms Windows Vista, χρησιμοποιώντας το πακέτο Intlab για επαληθευμένους υπολογισμούς [46]. Οι γραφικές παραστάσεις έγιναν

χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση για διαστηματικές εξισώσεις, γραμμένη σε Matlab².

5 Συμπεράσματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο θεωρήσαμε το πρόβλημα της εύρεσης με βεβαιότητα του ολικού ελαχίστου και όλων των ολικών ελαχιστοποιητών μιας μονοδιάστατης, συνεχώς διαφορίσιμης συνάρτησης σε δοθέν κλειστό διάστημα αναζήτησης. Η βασική ιδέα ήταν η αναγωγή του αρχικού προβλήματος σε πρόβλημα εύρεσης των ριζών μιας διαστηματικής εξίσωσης. Εκμεταλευόμενοι τις ιδιότητες του τελεστή Διαστηματικής Newton Κλειστής Θήκης, καταφέραμε να δημιουργήσουμε μια μέθοδο που λειτουργεί ως:

- *Μηχανισμός εξωτερικής περικοπής* όταν εφαρμοστεί σε ένα εξωτερικό σημείο των εγκλεισμών των ολικών ελαχιστοποιητών, βελτιώνοντας με αυτό τον τρόπο το κάτω φράγμα του ολικού ελαχίστου ,
- *Μηχανισμός μείωσης του $\tilde{f}$* για την βέβαιη μείωση του άνω φράγματος του ολικού ελαχίστου όταν αυτό εφαρμοστεί σε ένα εσωτερικό σημείο των εγκλεισμών των ολικών ελαχιστοποιητών.

Ο συνδυασμός του τελεστή Διαστηματικής Newton Κλειστής Θήκης με μια στρατηγική Διακλάδωση-και-Περίφραξης δίνει την παρούσα μεθοδολογία.

Παρά τα ενθαρρυντικά, σε γενικές γραμμές, αριθμητικά αποτελέσματα, η νέα μεθοδολογία μας δίνει κάποιες προοπτικές και κατευθύνσεις που πρέπει να διερευνηθούν. Έτσι, η ιδέα του κεφαλαίου αυτού μπορεί να:

- χρησιμοποιηθεί ως μηχανισμός επιτάχυνσης σε οποιαδήποτε διαστηματική μέθοδο.
- επεκταθεί σε πολυδιάστατα προβλήματα.
- ενσωματωθεί με κάποιες γρήγορες σημειακές μεθόδους.

Η προτεινόμενη μεθοδολογία ανήκει στα εργαλεία της διαστηματικής ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 3 τροποποιείται και χρησιμοποιείται κατάλληλα, έτσι ώστε να αναπτυχθεί μια νέα κλάση μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος (4.1). Η νέα προσέγγιση ανάγει την παραδοσιακή προσέγγιση Διακλάδωσης και Περικοπής στο πρόβλημα της επίλυσης παραμετρικών εξισώσεων. η οποία εξασφαλίζει τη βελτίωση των φραγμάτων σε κάθε επανάληψη. Για την θεμελίωση της νέας μεθόδου διατυπώνονται και αποδεικνύονται κάποια θεωρητικά αποτελέσματα, καθώς και παρουσιάζεται μια σειρά από αριθμητικά αποτελέσματα.

²<http://www.math.upatras.gr/~nikas/soft/>

Κεφάλαιο 5ο

Περί της αποδοτικής επίλυσης n -οστού βαθμού παραμετρικών πολυωνυμικών εξισώσεων στο $\mathbb{R}$

1 Περί παραμετρικών πολυωνύμων βαθμού n

Σ' αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε το πρόβλημα της αξιόπιστης και με βεβαιότητα εύρεσης όλων των ριζών της ακόλουθης παραμετρικής πολυωνυμικής εξίσωσης n -οστού βαθμού

$$p_n(x; a) = 0 \quad (5.1)$$

σ' ένα κλειστό διάστημα $[x_0, \overline{x_0}] \subset \mathbb{R}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι ένα διάνυσμα πραγματικών αριθμών που περιγράφει τους συντελεστές-παραμέτρους του πολυωνύμου.

Ως πολυώνυμο $p_n(x; a)$, n -οστού βαθμού, ορίζεται το άθροισμα των $n + 1$ μονωνύμων $m_i(x; a_i)$, όπου

$$m_i(x, a_i) = a_i x^i,$$

με $a_i \in \mathbb{R}$.

Τι συμβαίνει, όμως όταν οι παράμετροι-συντελεστές ενός πολυωνύμου δεν παραμένουν σταθεροί; Σ' αυτή την περίπτωση η επίλυση της αντίστοιχης παραμετρικής πολυωνυμικής εξίσωσης ανάγεται στην επίλυση τόσων πολυωνυμικών εξισώσεων, όσο είναι και το πλήθος των αντίστοιχων παραμέτρων της.

Αν επεκτείνουμε την προηγούμενη περίπτωση σε παραμέτρους όπου μεταβάλλονται συνεχώς σ' ένα κλειστό διάστημα τότε προκύπτει ένα παραμετρικό πολυώνυμο, δηλαδή μια οικογένεια πολυωνυμικών εξισώσεων. Πώς μπορούμε να τυποποιήσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα; Πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε την επίλυση μιας τέτοιας οικογένειας πολυωνυμικών εξισώσεων, εφ' όσον, με την προσέγγιση της προηγούμενης παραγράφου, ένα τέτοιου είδους πρόβλημα απαιτεί την επίλυση μη πεπερασμένου πλήθους πολυωνυμικών εξισώσεων;

Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα, που αφορά την τυποποίηση του προβλήματος, δίνεται μέσω της χρήσης διαστημάτων ως παραμέτρους-συντελεστές της αντίστοιχης οικογένειας πολυωνυμικών εξισώσεων. Έτσι, αν θεωρήσουμε την διαστηματική φυσική επέκταση κάθε μονωνύμου ενός πολυωνύμου, ως προς τις παραμέτρους a_i , τότε θα προκύψει η ακόλουθη μορφή του πολυωνύμου:

$$p_n(x; [a]) = \sum_{i=0}^n [m]_i(x; [a]) = \sum_{i=0}^n [a]_i x^i. \quad (5.2)$$

Συνεπώς, το υπό μελέτη πρόβλημα θα μπορούσε να διατυπωθεί με την βοήθεια των παραμέτρων, που μεταβάλλονται συνεχώς:

Ορισμός 5.1. Βρες αξιόπιστα και με βεβαιότητα όλες τις ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης n -οστού βαθμού,

$$p_n(x; a) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0, \quad (5.3)$$

για κάθε $a_i \in [a]_i$, όπου $[a] \in \mathbb{IR}^n$ είναι ένα διαστηματικό διάνυσμα διάστασης $n + 1$, που περιγράφει τις $n + 1$ παραμέτρους-συντελεστές μιας πολυωνυμικής εξίσωσης n -οστού βαθμού.

Η προηγούμενος ορισμός αποτελεί και την απάντηση στο παραπάνω δεύτερο ερώτημα σχετικά με την επίλυση μιας οικογένειας πολωνύμων, η οποία ανάγεται στην επίλυση ενός πολωνύμου με παραμέτρους διαστήματα να περιγράφουν τις παραμέτρους του.

Ορισμός 5.2. Ένα πολωνύμιο $p_n(x; [a])$, που περιγράφεται από την Εξίσωση (5.2), θα καλείται παραμετρικό πολωνύμιο βαθμού n με παραμέτρους που μεταβάλλονται συνεχώς και η αντίστοιχη εξίσωση παραμετρική πολωνυμική εξίσωση βαθμού n . Βαθμός αυτού του πολωνύμου θα καλείται η μέγιστη δύναμη όλων των αντίστοιχων μονωνύμων του.

Το πρόβλημα της αποδοτικής επίλυσης πολωνυμικών εξισώσεων με συντελεστές-παραμέτρους συνεχώς μεταβαλλόμενους αριθμούς εμφανίζεται σε πολλές επιστημονικές περιοχές, όπως για παράδειγμα, στα δυναμικά συστήματα [44], στην βελτιστοποίηση [47], στην αυτόματη θεωρία ελέγχου [51] και στην θεωρία ελέγχου (ρομποτική) [60].

Σημείωση 5.3. Από αυτό το σημείο και σε ότι ακολουθεί θα αναφερόμαστε στις πολωνυμικές εξισώσεις με παραμέτρους που μεταβάλλονται συνεχώς με τη φράση διαστηματικές πολωνυμικές εξισώσεις, μιας και οι παράμετροί της τυποποιούνται με τη μορφή διαστημάτων.

Πρόταση 5.4. Έστω x^* η ρίζα της πολωνυμικής εξίσωσης n βαθμού $p_n(x; a) = 0$, για κάποιο $a \in [a]$ και $p_n(x; [a])$ η αντίστοιχη διαστηματική πολωνυμική επέκτασή της. Τότε για τη ρίζα x^* θα ισχύει

$$0 \in p_n(x^*; [a]). \quad (5.4)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα μέσα από τις ιδιότητες της συνάρτησης εγκλεισμού της p_n :

$$0 = p_n(x^*; a) \in p_n(x^*; [a]).$$

□

Ορισμός 5.5. Αν κάποιο σημείο x^* είναι ρίζα της πολωνυμικής εξίσωσης $p_n(x; a) = 0$, για κάποιο $a \in [a]$, αν, δηλαδή,

$$0 \in p_n(x^*; [a]).$$

τότε αυτό το σημείο θα ονομάζεται σημειακή ρίζα της αντίστοιχης διαστηματικής πολωνυμικής εξίσωσης $p_n(x; [a]) = 0$.

Η μορφή των λύσεων (Σχήμα 5.1) των αντίστοιχων διαστηματικών πολωνυμικών εξισώσεων θα περιγράφεται από τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.6. Το μέγιστο, μη επεκτάσιμο, συνεχές σημειακών ριζών της διαστηματικής πολωνυμικής εξίσωσης n -οστού βαθμού $p_n(x; [a]) = 0$, εντός ενός πεδίου αναζήτησης $[x]_0$ θα καλείται διαστηματική ρίζα της $p_n(x; [a]) = 0$. Εάν μια διαστηματική ρίζα περιέχει μόνο μία σημειακή ρίζα, τότε αυτή θα καλείται εκφυλισμένη διαστηματική ρίζα.

Η μορφή της κάθε διαστηματικής ρίζας της διαστηματικής πολωνυμικής εξίσωσης (5.3) θα έχει μία από τις ακόλουθες μορφές:

- ✓ Το κενό διάστημα: η εξίσωση δεν έχει καμία πραγματική ρίζα,
- ✓ Ένα εκφυλισμένο πραγματικό διάστημα: εξίσωση με σημειακή πραγματική ρίζα (π.χ. μια πολλαπλή πραγματική ρίζα),
- ✓ Ένα κλειστό μη εκφυλισμένο διάστημα πραγματικών αριθμών.

Σχήμα 5.1: Παράδειγμα διαστηματικού πολυωνύμου με τις αντίστοιχες διαστηματικές του ρίζες

Είναι ξεκάθαρο, πως στην περίπτωση που η «λύση» είναι μη εκφυλισμένο διάστημα, το πλήθος των σημειακών ριζών που περιέχονται στο διάστημα αυτό θα είναι μη πεπερασμένου πλήθους.

Σύμφωνα με τις εργασίες [7] και [48], ανάλογα με το πότε ο διαστηματικός συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου $[a]_n$ περιέχει ή όχι το μηδέν, τότε όλες οι πραγματικές σημειακές ρίζες της Εξίσωσης (5.3) θα περιέχονται είτε σε κλειστά διαστήματα είτε ημίκλειστα διαστήματα $((-\infty, \bar{c}]$ ή $[\underline{d}, +\infty)$, με $c, d \in \mathbb{R}$). Αν, όμως, περιορίσουμε το διάστημα αναζήτησης σε μια κλειστή περιοχή (κλειστό διάστημα), τότε κάθε μη εκφυλισμένη λύση του προβλήματος θα έχει τη μορφή ενός κλειστού διαστήματος.

Σημείωση 5.7. Από εδώ και στο εξής, για χάρη ευκολίας και χωρίς να υπάρξει παρανόηση ή παρερμηνεία μια πολυωνυμική εξίσωση n -οστού βαθμού με διαστηματικές παραμέτρους θα σημειώνεται ως $P_n(x) = 0$ αντί για $p_n(x; [a]) = 0$.

Η πρώτη ενδιαφέρουσα προσέγγιση στο χειρισμό διαστηματικών πολυωνύμων προτάθηκε από τον Kharitonov το 1978 ([25, 26]) και αφορούσε το πεδίο της θεωρίας ελέγχου. Απέδειξε ότι η ευστάθεια ενός διαστηματικού πολυωνύμου εξαρτάται από την ευστάθεια τεσσάρων μη-διαστηματικών πολυωνύμων τα οποία ανήκουν στο αντίστοιχο διαστηματικό πολυώνυμο.

Λίγο αργότερα, οι Terui και Sasaki στην εργασία [56] μελέτησαν την περίπτωση πολυωνύμων με μεγάλα σφάλματα στους συντελεστές τους και τα οποία διατυπώνονταν με τη μορφή διαστημάτων. Συγκεκριμένα, πρότειναν, σε γενικές γραμμές, την επίλυση τεσσάρων πραγματικών πολυωνυμικών εξισώσεων, που φράσσουν το αντίστοιχο διαστηματικό πολυώνυμο, για να μπορέσουν να επιλύσουν το προκύπτον διαστηματικό πολυώνυμο. Τα συνοριακά πολυώνυμα που χρησιμοποίησαν οι Terui και Sasaki είναι διαφορετικά από εκείνα που χρησιμοποίησε ο Kharitonov.

Το 2002, οι Hansen και Walster στην εργασία [18] πρότειναν μια τεχνική βασιζόμενη στην εύρεση των άκρων όλων των διαστηματικών ριζών ενός διαστηματικού πολυωνύμου, επιλύοντας τα τέσσερα συνοριακά πολυώνυμα που πρότειναν οι Terui και Sasaki, και κατασκευάζοντας τις αντίστοιχες διαστηματικές ρίζες χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία των πολυωνύμων καθώς και ευρισκόμενα άκρα. Η δουλειά τους επικεντρώθηκε κυρίως στην τετραγωνική περίπτωση.

Στη συνέχεια οι A. Neumaier στην [36] και I. Alolyan στην [2] πρότειναν κάποιες συμπληρώσεις

και αποδοτικές εναλλακτικές στην τετραγωνική περίπτωση, που μελετήθηκε από τους Hansen και Walster στην [18].

Το 2007, οι Sekigawa και Shirayanagi στην εργασία [48], κινούμενοι στο ίδιο πλαίσιο αντιμετώπισης του προβλήματος με τις προηγούμενες εργασίες, πρότειναν μια μέθοδο επίλυσης πεπερασμένου πλήθους πραγματικών πολυωνυμικών εξισώσεων για να βρουν τις ρίζες μιας διαστηματικής πολυωνυμικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα, όρισαν ένα διαστηματικό πολυώνυμο ως το άθροισμα του γινομένου monic πολυωνύμων με διαστήματα. Με βάση αυτό τον ορισμό, όρισαν επί πλέον, συνοριακά πολυώνυμα σε περιοχές που φράσσονται από τις ρίζες των monic πολυωνύμων. Αυτή η προσέγγιση φαίνεται να μειώνει τη συνολική υπερεκτίμηση που προκαλείται από τους διαστηματικούς συντελεστές και παρέχει αυστηρότερα φράγματα στις τελικές διαστηματικές ρίζες. Ωστόσο, σύμφωνα με τις γνώσεις μας, ο μετασχηματισμός ενός διαστηματικού πολυωνύμου σε πολυώνυμο monic, παραμένει ένα κρίσιμο και ανοιχτό ζήτημα.

Πρόσφατα, ο Fan και άλλοι στην [7] πρότειναν ένα σχήμα διαστηματικής διχοτόμησης χρησιμοποιώντας τα συνοριακά πολυώνυμα που πρότειναν οι Hansen και Walster για να αναπτύξουν ένα κριτήριο αποδοχής διαστημάτων τα οποία αποτελούν τμήμα μιας διαστηματικής ρίζας. Το βασικό μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι η μέθοδός τους δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην απομόνωση των άκρων μιας διαστηματικής ρίζας. Ο εγκλεισμός αυτών των σημείων γίνεται αποκλειστικά με διαστηματική διχοτόμηση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω εργασίες αποτελούν δύο διαφορετικές και παράλληλες σειρές ερευνητικής δραστηριότητας όσον αφορά την επίλυση διαστηματικών πολυωνυμικών εξισώσεων. Η πρώτη αποτελείται κυρίως από τις εργασίες [2, 7, 8, 20, 18, 36], ενώ η δεύτερη, κυρίως, από τις εργασίες [4, 25, 26, 48, 56].

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποιες συμπληρωματικές, αλλά ουσιαστικές τροποποιήσεις στην ιδέα της εργασίας [18] για την επίλυση τετραγωνικών διαστηματικών πολυωνυμικών εξισώσεων, με σκοπό την επέκτασή της στην επίλυση διαστηματικών πολυωνύμων βαθμού n . Συγκεκριμένα, απομονώνονται οι ρίζες των συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας κατάλληλο επιλυτή, όπως είναι η διαστηματική μέθοδος Newton (μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε εύρωστος αλγόριθμος σχεδιασμένος για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων με πραγματικούς συντελεστές). Οι ευρισκόμενες σημειακές ρίζες μαζί με μια τετριμμένη ιδιότητα των διαστημάτων (κλειστότητα και συμπαγότητα) και κάποιους κανόνες σχετικά με την ύπαρξη των διαστηματικών ριζών συνδυάζονται για την κατασκευή των διαστηματικών ριζών οποιουδήποτε διαστηματικού πολυωνύμου.

2 Ιδιότητες διαστηματικών πολυωνύμων

Σ' αυτή την ενότητα θα διατυπώσουμε κάποια ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με τα παραμετρικά πολυώνυμα, που λόγω της τυποποίησης τους με διαστήματα θα καλούνται διαστηματικά πολυώνυμα. Κάποια από αυτά έχουν ήδη αποδειχθεί και η απόδειξή τους παραλείπεται.

Το πρώτο θεωρητικό αποτέλεσμα είναι ένα θεώρημα, που πρωτοδιατυπώθηκε στην εργασία [56], και αφορά τα συνοριακά πολυώνυμα ενός διαστηματικού πολυωνύμου. Στην παρούσα παράγραφο ξαναδιατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα χρησιμοποιώντας εργαλεία της διαστηματικής ανάλυσης.

Θεώρημα 5.1. Έστω $P_n(x) = \sum_{i=1}^n [a]_i x^i$ ένα διαστηματικό πολυώνυμο n -οστού βαθμού. Το διαστηματικό πολυώνυμο $P_n(x)$ φράσσεται ακριβώς από τέσσερα πολυώνυμα με πραγματικούς

συντελεστές, όπως αυτά ορίζονται ακολούθως:

$$\begin{aligned} P_+(x) &= \left[\sum_{i=0}^n \underline{a}_i x^i, \sum_{i=0}^n \bar{a}_i x^i \right], \\ P_-(x) &= \left[\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underline{a}_{2i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \bar{a}_{2i+1} x^{2i+1}, \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \bar{a}_{2i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \underline{a}_{2i+1} x^{2i+1} \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

για $x \geq 0$ και $x < 0$, αντιστοίχως.

Σχήμα 5.2: Ακριβή συννοριακά πολυώνυμα ενός διαστηματικού πολυωνύμου

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το βασικό ορισμό (1.1) για τους διαστηματικούς αριθμούς, μπορούμε να καταλήξουμε στις ακόλουθες ανισότητες που αφορούν τα διαστηματικά πολυώνυμα. Έτσι,

$$\sum_{i=0}^n \underline{a}_i x^i \leq \sum_{i=0}^n [a]_i x^i \leq \sum_{i=0}^n \bar{a}_i x^i,$$

για κάθε $x \geq 0$ και $i \in \mathbb{N}$. Αν συμβολίσουμε το αριστερό τμήμα της ανισότητας ως $\underline{P}_+(x)$ και το αντίστοιχο δεξί τμήμα ως $\bar{P}_+(x)$, καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\underline{P}_+(x) \leq P_n(x) \leq \bar{P}_+(x), \quad \forall x \geq 0.$$

Για την περίπτωση που το $x < 0$, μπορούμε να διαχωρίσουμε τη μελέτη μας σε διαστηματικά πολυώνυμα με άρτιους εκθέτες και διαστηματικά πολυώνυμα με περιττούς εκθέτες. Έτσι, για την περίπτωση των άρτιων εκθετών (ισχύει ότι $x^{2i} \geq 0$ για κάθε $x < 0$) έχουμε

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underline{a}_{2i} x^{2i} \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} [a]_{2i} x^{2i} \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \bar{a}_{2i} x^{2i} \quad (5.6)$$

και για την περίπτωση των περιττών εκθετών (ισχύει $x^{2i+1} \leq 0$ για κάθε $x < 0$) παίρνουμε

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \bar{a}_{2i+1} x^{2i+1} \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} [a]_{2i+1} x^{2i+1} \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \underline{a}_{2i+1} x^{2i+1}. \quad (5.7)$$

Για να σχηματίσουμε το διαστηματικό πολυώνυμο θα πρέπει να προσθέσουμε τις παραπάνω σχέσεις (5.6) και (5.7). Συνεπώς,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underline{a}_{2i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \bar{a}_{2i+1} x^{2i+1} \leq \sum_{i=0}^n [a]_i x^i \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \bar{a}_{2i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \underline{a}_{2i+1} x^{2i+1}.$$

για κάθε $x < 0$ και $i \in \mathbb{N}$. Αν συμβολίσουμε το αριστερό τμήμα της ανισότητας ως $\underline{P}_-(x)$ και το δεξί τμήμα ως $\bar{P}_-(x)$, καταλήγουμε στην

$$\underline{P}_-(x) \leq P_n(x) \leq \bar{P}_-(x), \quad \forall x < 0.$$

□

Τα παραπάνω συνοριακά πολυώνυμα ορίστηκαν για πρώτη φορά στην εργασία [56] και χρησιμοποιήθηκαν στην διαστηματική τους μορφή στην εργασία [18].

Η επόμενη πρόταση δηλώνει ότι τα συνοριακά πολυώνυμα, όπως αυτά ορίστηκαν από την (5.5) έχουν συγκεκριμένο πλήθος πραγματικών ριζών.

Λήμμα 5.2 (Fan και άλλοι [7]). Έστω $P_n(x) = \sum_{i=1}^n [a]_i x^i$ ένα διαστηματικό πολυώνυμο n -οστού βαθμού και έστω $\underline{P}_+(x)$, $\bar{P}_+(x)$, $\underline{P}_-(x)$ και $\bar{P}_-(x)$ τα αντίστοιχα συνοριακά του πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Οι αντίστοιχες συνοριακές πολυωνυμικές εξισώσεις των $\underline{P}_+(x)$, $\bar{P}_+(x)$, $\underline{P}_-(x)$ και $\bar{P}_-(x)$ θα έχουν συνολικά το πολύ $2n$ σημειακές ρίζες (μετρώντας και την πολλαπλότητα κάθε ρίζας).

Από το παραπάνω λήμμα οι Fan και άλλοι κατέληξαν στο ακόλουθο θεώρημα το οποίο αποτελεί την επέκταση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της άλγεβρας για διαστηματικά πολυώνυμα.

Θεώρημα 5.3 (Fan και άλλοι [7]). Έστω $P_n(x) = \sum_{i=1}^n [a]_i x^i$ ένα διαστηματικό πολυώνυμο n -οστού βαθμού και $0 \notin [a]_n$. Η διαστηματική πολυωνυμική εξίσωση $P_n(x) = 0$ έχει το πολύ n πραγματικές διαστηματικές ρίζες.

Αν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του διαστηματικού πολυωνύμου $P_n(x)$ περιέχει το μηδέν, τότε η επίλυση της $P_n(x) = 0$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών δίνει ως πρώτο σύνολο σημειακών ριζών ένα αριστερά ημίκλειστο διάστημα $(-\infty, a]$ και ως τελευταίο ένα δεξιά ημίκλειστο διάστημα $[b, +\infty)$.

Πρόταση 5.4. Έστω $P_n(x) = \sum_{i=1}^n [a]_i x^i$ ένα διαστηματικό πολυώνυμο n -οστού βαθμού και έστω r_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ όλες οι πεπερασμένου πλήθους ρίζες των αντίστοιχων συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων και σημειακές ρίζες του αντίστοιχου διαστηματικού πολυωνύμου σε αύξουσα σειρά. Αν υπάρχει μία μη-εκφυλισμένη, κλειστή διαστηματική ρίζα $[r]^*$ του $P_n(x) = 0$ τότε αυτή μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή

$$[r]^* = [r_i, r_{i+1}].$$

Σχήμα 5.3: Οι σημειακές ρίζες των συνοριακών πολυωνύμων που σχηματίζουν τις διαστηματικές ρίζες

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι μια διαστηματική ρίζα έχει ως άκρα της, αποκλειστικά, σημειακές ρίζες, που έχουν προκύψει από την επίλυση όλων των συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων, της αντίστοιχης διαστηματικής πολυωνυμικής εξίσωσης. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι μόνο διαδοχικές σημειακές ρίζες μπορούν να σχηματίσουν διαστηματικές ρίζες.

Μέρος Α. Έστω r_i μία ρίζα μιας συνοριακής πολυωνυμικής εξίσωσης και έστω $[a_j, b_j]$ μια διαστηματική ρίζα της $P_n(x) = 0$ τέτοιας ώστε

$$0 \in P_n(s) \text{ για κάθε } s \in [a_j, b_j].$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα j τέτοιο ώστε $a_j \neq r_i$ για κάθε i . Δηλαδή, ότι υπάρχει αριστερό άκρο μιας διαστηματικής ρίζας που δεν είναι σημειακή ρίζα του αντίστοιχου διαστηματικού πολυωνύμου. Τότε, εφ' όσον $a_j \neq r_i$ και το a_j είναι σημειακή ρίζα της $P_n(x) = 0$, δηλαδή $0 \in P(a_j)$, θα έχουμε ότι

$$\underline{P}(a_j) < 0 < \overline{P}(a_j),$$

όπου $\underline{P}$ υποδηλώνει το συνοριακό πολυώνυμο $\underline{P}_-$ ή το $\underline{P}_+$ και $\overline{P}$ το συνοριακό πολυώνυμο $\overline{P}_-$ ή $\overline{P}_+$, αντιστοίχως. Θα υπάρχει ένας θετικός αριθμός $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε

$$\underline{P}(s') < 0 \text{ και } \overline{P}(s') > 0$$

για κάθε $s' \in [a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$. Συνεπώς, το διάστημα

$$[a_j - \varepsilon, b_j] = [a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon] \cup [a_j, b_j]$$

αποτελεί μια διαστηματική ρίζα της $P(x) = 0$. Άτοπο, εφ' όσον, από τον ορισμό της διαστηματικής ρίζας, η διαστηματική ρίζα $[a_j, b_j]$ είναι το μέγιστο, μη-επεκτάσιμο συνεχές σημειακών ριζών και το διάστημα $[a_j - \varepsilon, b_j] \supset [a_j, b_j]$. Άρα, κάθε διαστηματική ρίζα θα έχει ως αριστερό της άκρο, αποκλειστικά, σημειακές ρίζες.

Εάν θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το $b_j \neq r_i$, με όμοιο τρόπο, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Συνεπώς, αποδείξαμε κάθε διαστηματική ρίζα θα σχηματίζεται, αποκλειστικά, από τις ρίζες των συνοριακών πολωνύμων.

Μέρος Β. Για να αποδείξουμε ότι ο σχηματισμός των διαστηματικών ριζών γίνεται από διαδοχικές ρίζες των συνοριακών πολωνυμικών εξισώσεων θα θεωρήσουμε τρεις διαδοχικές σημειακές ρίζες

$$r_{i-1} < r_i < r_{i+1}$$

και τη διαστηματική ρίζα $[r']^* = [r_{i-1}, r_{i+1}]$, τέτοια ώστε

$$0 \in P(s) \Rightarrow \underline{P}(s) \leq 0 \leq \overline{P}(s), \quad \forall s \in [r']^*.$$

- Αν η r_i είναι μια απλή ρίζα (περίπτωση αυστηρώς μονότονου συνοριακού πολωνύμου) τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο s' κοντά στο r_i όπου $0 \notin P(s')$. Άτοπο, διότι το διάστημα $[r']$ είναι μια διαστηματική ρίζα της $P_n(x) = 0$ και όλα τα εσωτερικά της σημεία πρέπει να είναι σημειακές της ρίζες.
- Αν το r_i είναι σημείο καμπής (περίπτωση μονότονου συνοριακού πολωνύμου) το άτοπο προκύπτει με τον ίδιο τρόπο.
- Αν το r_i είναι ακρότατο του $P(x)$, τότε θα πρέπει ισχύει

$$\overline{P}(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad \underline{P}(x) \leq 0$$

για κάθε $x \in [r']^*$. Έτσι, ολόκληρο το διάστημα $[r_{i-1}, r_{i+1}]$ μπορεί να γραφεί ως την ένωση δύο διαστηματικών ριζών με διαδοχικές σημειακές ρίζες ως άκρα τους

$$[r_{i-1}, r_{i+1}] = [r_{i-1}, r_i] \cup [r_i, r_{i+1}].$$

Η συνέχεια των διαστηματικών ριζών εξασφαλίζεται από τον Ορισμό (5.6). Η πρόταση αποδείχθηκε. $\square$

Σημείωση 5.5. Η επίλυση της $P_n(x) = 0$ σε ένα κλειστό διάστημα $[x]_0$, μπορεί να δώσει ως πρώτη σημειακή της ρίζα τα σημεία $\underline{x}_0$ ή/και $\overline{x}_0$ τα οποία αποτελούν σημειακές ρίζες της $P_n(x) = 0$ και όχι απαραίτητα ρίζα κάποιου συνοριακού πολωνύμου. Σ' αυτή την περίπτωση, οι αντίστοιχες ακραίες διαστηματικές ρίζες θα έχουν την μορφή

$$[\underline{x}_0, r_1] \quad \text{ή/και} \quad [r_k, \overline{x}_0],$$

αντιστοίχως, όπου k υποδηλώνει το πλήθος των ευρισκόμενων ριζών των συνοριακών πολωνυμικών εξισώσεων στο διάστημα $[x]_0$.

Η επόμενη πρόταση είναι ένα άμεσο συμπέρασμα του Λήμματος 5.2, του Θεωρήματος 5.3 και της Πρότασης 5.4.

Πόρισμα 5.6. Κάθε διαστηματική ρίζα μιας διαστηματικής πολωνυμικής εξίσωσης φράσσεται ακριβώς από διαδοχικές ρίζες των αντίστοιχων συνοριακών πολωνυμικών εξισώσεων.

Πρόταση 5.7. Έστω ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 5.4. Εφ' όσον οι συντελεστές του $P_n(x)$ μεταβάλλονται συνεχώς τότε και οι αντίστοιχες διαστηματικές ρίζες της $P_n(x) = 0$, είτε σε μορφή κλειστού διαστήματος, είτε σε μορφή ημίκλειστου διαστήματος, θα μεταβάλλονται, επίσης, συνεχώς.

Απόδειξη. Η απόδειξη για την περίπτωση όπου το $0 \notin [a]_n$ προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό (5.6). Για την περίπτωση που το $0 \in [a]_n$ θα μελετήσουμε δύο είδη συνόλων από ρίζες: τα κλειστά διαστήματα και τα ημίκλειστα διαστήματα.

Για την πρώτη περίπτωση η συνέχεια προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό (5.6) και την Πρόταση 5.4.

Για τη δεύτερη περίπτωση είναι γνωστό ([7][48]) ότι τα ημίκλειστα διαστήματα $(-\infty, r_1]$ και $[r_k, +\infty)$ είναι το πιο αριστερό και πιο δεξιό, αντίστοιχα, σύνολα που περιέχουν σημειακές ρίζες της $P_n(x) = 0$, όπου r_1 και r_k είναι η πρώτη και η τελευταία ρίζα των αντίστοιχων συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων.

Πρώτα θεωρούμε το ημίκλειστο διάστημα $(-\infty, r_1]$. Εφ' όσον το διάστημα $(-\infty, r_1]$ είναι ένα σύνολο που περιέχει σημειακές ρίζες της $P_n(x)$, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $c \in (-\infty, r_1)$ τέτοιο ώστε $0 \in P(c)$ και γι' αυτό το λόγο το

$$\underline{P}(c) \leq 0 \leq \overline{P}(c),$$

όπου $\underline{P}$ υποδηλώνει το συνοριακό πολυώνυμο $\underline{P}_-$ ή $\underline{P}_+$ και $\overline{P}$ το συνοριακό πολυώνυμο $\overline{P}_-$ ή $\overline{P}_+$, αντιστοίχως. Θεωρώντας, επί πλέον, την υπόθεση ότι η r_1 είναι η πρώτη ρίζα όλων των συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\underline{P}(c) \neq 0 \text{ και } \overline{P}(c) \neq 0$$

για κάθε $c \in (-\infty, r_1)$. Έτσι,

$$\underline{P}(c) < 0 \text{ και } \overline{P}(c) > 0$$

και, συνεπώς, $0 \in P(c)$ για κάθε $c \in (-\infty, r_1)$.

Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα για την περίπτωση που το σύνολο των σημειακών ριζών είναι το $[r_k, +\infty)$ και μ' αυτό τον τρόπο ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Το ακόλουθο θεώρημα αποτελεί το βασικό εργαλείο ύπαρξης διαστηματικών ριζών μιας διαστηματικής πολυωνυμικής εξίσωσης.

Θεώρημα 5.8. Έστω $P_n(x) = \sum_{i=1}^n [a]_i x^i$ ένα διαστηματικό πολυώνυμο n -οστού βαθμού, $\underline{P}_+(x)$, $\overline{P}_+(x)$, $\underline{P}_-(x)$ και $\overline{P}_-(x)$ τα αντίστοιχα συνοριακά πολυώνυμα, όπως αυτά ορίστηκαν στην (5.5), και έστω $[x]$ ένα διάστημα, στο οποίο ορίζεται η $P_n(x)$.

1. Αν $0 \notin P_n([x])$ τότε δεν υπάρχει πραγματική ρίζα της $P_n(x) = 0$ στο διάστημα.
2. Αν $\underline{P}_+([x]) > 0$ ή $\overline{P}_+([x]_0) < 0$ τότε δεν υπάρχει ρίζα της $P_n(x) = 0$ στο διάστημα $[x]$.
3. Αν $\underline{P}_-([x]) > 0$ ή $\overline{P}_-([x]_0) < 0$ τότε δεν υπάρχει ρίζα της $P_n(x) = 0$ στο διάστημα $[x]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Διαστηματικής Ανάλυσης και τον ορισμό των συνοριακών πολυωνύμων (5.5). $\square$

Πόρισμα 5.9. Αν όλες οι συνοριακές πολυωνυμικές εξισώσεις δεν έχουν ρίζες σε δοθέν πεδίο ορισμού, τότε είτε έχουμε μια διαστηματική πολυωνυμική εξίσωση με που δεν έχει καμία διαστηματική ρίζα, ή που όλο το πεδίο ορισμού της αποτελεί την μοναδική διαστηματική της ρίζα (Σχήματα 5.4 και 5.5).

Πρόταση 5.10. Έστω r_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ οι ρίζες των συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων μιας διαστηματικής πολυωνυμικής εξίσωσης $P_n(x) = 0$ σε αύξουσα σειρά και $[x]_0$ το πεδίο ορισμού

Σχήμα 5.4: Μια διαστηματική πολυωνυμική εξίσωση χωρίς ρίζες

Σχήμα 5.5: Μια διαστηματική πολυωνυμική εξίσωση με μία διαστηματική ρίζα, που ταυτίζεται με το διάστημα αναζήτησης

της $P_n(x) = 0$. Αν το διάστημα $[r_i, r_{i+1}]$ είναι μια διαστηματική ρίζα και το σημείο r_{i+1} είναι μια απλή σημειακή ρίζα της $P_n(x) = 0$ τότε το ανοιχτό διάστημα (r_{i+1}, r_{i+2}) δεν περιέχει καμία

σημειακή ρίζα της $P_n(x) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $r_i \geq 0$. Εφ' όσον το διάστημα $[r_i, r_{i+1}]$ είναι μια διαστηματική ρίζα της $P_n(x) = 0$, τότε από τον Ορισμό των συνοριακών πολυωνύμων (5.5) έχουμε ότι για κάθε $s \in (r_i, r_{i+1})$

$$\underline{P}_+(s)\overline{P}_+(s) < 0 \Rightarrow \underline{P}_+(s) < 0 \text{ και } \overline{P}_+(s) > 0.$$

- Αν το r_{i+1} είναι μια ρίζα της $\overline{P}_+(x) = 0$ τότε το r_{i+2} , η επόμενη διαδοχική ρίζα των συνοριακών πολυωνύμων, θα πρέπει να είναι, επίσης, ρίζα της $\overline{P}_+(x) = 0$. Έτσι, $\overline{P}_+(t) < 0$ και συνεπώς $0 \notin P_n(t)$ για κάθε $t \in (r_{i+1}, r_{i+2})$.
- Όμοια, αν r_{i+1} είναι μια ρίζα της $\underline{P}_+(x)$ συμπεραίνουμε ότι $\underline{P}_+(t) > 0$ και συνεπώς $0 \notin P_n(t)$ για κάθε $t \in (r_{i+1}, r_{i+2})$.

Ακολουθώντας την ίδια λογική, αποδεικνύεται το ίδιο αποτέλεσμα και για την περίπτωση που το $r_{i+1} < 0$. Έτσι, για κάθε $s \in (r_i, r_{i+1})$

$$\underline{P}_-(s)\overline{P}_-(s) < 0 \Rightarrow \underline{P}_-(s) < 0 \text{ και } \overline{P}_-(s) > 0.$$

- Αν το r_{i+1} είναι μια ρίζα της $\overline{P}_-(x) = 0$ τότε το r_{i+2} , η επόμενη διαδοχική ρίζα των συνοριακών πολυωνύμων, θα πρέπει να είναι, επίσης, ρίζα είτε της $\overline{P}_-(x) = 0$, αν το $r_{i+2} < 0$, είτε της $\overline{P}_+(x) = 0$, αν το $r_{i+2} \geq 0$. Έτσι, $\overline{P}(t) < 0$ και συνεπώς $0 \notin P_n(t)$ για κάθε $t \in (r_{i+1}, r_{i+2})$, όπου $\underline{P}$ υποδηλώνετε είτε η $\underline{P}_-$, είτε η $\underline{P}_+$, ανάλογα με τη θέση του σημείου t σε σχέση με το 0.
- Όμοια, αν r_{i+1} είναι μια ρίζα της $\underline{P}_-(x)$ συμπεραίνουμε ότι $\underline{P}(t) > 0$ και συνεπώς $0 \notin P_n(t)$ για κάθε $t \in (r_{i+1}, r_{i+2})$.

Για την περίπτωση που το $0 \in [r_i, r_{i+1}]$, η απόδειξη είναι όμοια με αυτή της περίπτωσης που το $r_i > 0$. □

Σημείωση 5.11 (Fan και άλλοι [7]). Αν $[a, a]$ είναι μια διαστηματική ρίζα της $P_n(x) = 0$, τότε το άθροισμα των πολλαπλοτήτων των συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων στο $x = a$ είναι τουλάχιστον 2.

Η επόμενη πρόταση είναι ένα άμεσο συμπέρασμα της Πρότασης 5.10 και της Σημείωσης 5.11 και δίνει έναν κανόνα σχετικά με τις πολλαπλές σημειακές ρίζες μια πολυωνυμικής διαστηματικής εξίσωσης.

Πόρισμα 5.12. Αν (r_{i-1}, r_i) και (r_i, r_{i+1}) είναι διαστήματα που δεν περιέχουν σημειακές ρίζες της $P_n(x) = 0$ τότε το r_i είναι μια σημειακή ρίζα της $P_n(x) = 0$ με πολλαπλότητα τουλάχιστον 2.

Η ακόλουθη πρόταση αποτελεί το βασικό κριτήριο αποδοχής/απόρριψης διαστηματικών ριζών μιας διαστηματικής πολυωνυμικής εξίσωσης.

Πρόταση 5.13. Έστω $P_n(x) = \sum_{i=1}^n [a]_i x^i$ ένα διαστηματικό πολυώνυμο n -οστού βαθμού, r_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ οι σημειακές ρίζες των συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων σε αύξουσα σειρά και έστω $s \in \mathbb{R}$ ένα σημείο τέτοιο ώστε $s \in (r_i, r_{i+1})$. Αν το $0 \in P_n(s)$ τότε το διάστημα $[r_i, r_{i+1}]$ είναι μια διαστηματική ρίζα της $P_n(x) = 0$, διαφορετικά το ανοιχτό διάστημα (r_i, r_{i+1}) δεν περιέχει καμία ρίζα της $P_n(x) = 0$.

Σχήμα 5.6: Παράδειγμα πάνω στην Πρόταση 5.10

Σχήμα 5.7: Παράδειγμα πάνω στο Πόρισμα 5.12

Απόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $[r_i, r_{i+1}]$ κι ένα εσωτερικό του σημείο $s \in (r_i, r_{i+1})$ τέτοιο ώστε $0 \in P_n(s)$. Υποθέτουμε ότι το διάστημα $[r_i, r_{i+1}]$ δεν είναι διαστηματική ρίζα της αντίστοιχης διαστηματικής πολυωνυμικής εξίσωσης $P_n(x) = 0$, δηλαδή, ότι το ανοικτό διάστημα (r_i, r_{i+1}) δεν

Σχήμα 5.8: Το προτεινόμενο κριτήριο θα αποδεχτεί το διάστημα $[r_i, r_{i+1}]$ ως διαστηματική ρίζα.

περιέχει σημειακές ρίζες της $P_n(x) = 0$. Έτσι, για κάθε $s' \in (r_i, r_{i+1})$, $0 \notin P_n(s')$. Άτοπο, διότι υπάρχει από την υπόθεση ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[r_i, r_{i+1}]$ που είναι σημειακή ρίζα της $P_n(x) = 0$ και συνεπώς το διάστημα $[r_i, r_{i+1}]$ είναι μια διαστηματική ρίζα της $P_n(x) = 0$.

Θα ακολουθήσουμε την ίδια λογική και στο δεύτερο μέρος της απόδειξης. Έστω $s \in (r_i, r_{i+1})$ ένα σημείο τέτοιο ώστε $0 \notin P_n(s)$. Υποθέτουμε ότι $[r_i, r_{i+1}]$ είναι μια διαστηματική ρίζα της $P_n(x) = 0$. Έτσι, για κάθε $s \in (r_i, r_{i+1})$, $0 \in P_n(s)$. Άτοπο και το διάστημα (r_i, r_{i+1}) δεν περιέχει καμία σημειακή ρίζα της $P_n(x) = 0$. $\square$

3 Ο αλγόριθμος

Σ' αυτή την παράγραφο δίνεται μια υλοποίηση των παραπάνω θεωρητικών αποτελεσμάτων και ιδιοτήτων για τις διαστηματικές πολυωνυμικές εξισώσεις. Ειδικότερα, η συνολική ιδέα συνοψίζεται από τον ακόλουθο αλγόριθμο, που ονομάζεται IPS (Interval Polynomial Solver - Διαστηματικός Επιλυτής Πολυωνύμων). Ο αλγόριθμος παίρνει σαν είσοδο τη διαστηματική φυσική επέκταση του διαστηματικού πολυωνύμου P , το διάστημα αναζήτησης $[x]_0$, την ακρίβεια ε και επιστρέφει μια τελική λίστα $\mathcal{IL}$ που περιέχει όλες τις ευρισκόμενες διαστηματικές ρίζες της $P(x) = 0$. Στις επόμενες γραμμές δίνουμε μια σύντομη περιγραφή του αλγορίθμου.

Στην αρχή, στο Βήμα 2, αρχικοποιείται η τελική λίστα $\mathcal{IL}$ και η ενδιάμεση λίστα $\mathcal{L}$, έτσι ώστε να είναι οι κενές λίστες, και η λίστα εργασίας $\mathcal{S}$ με το αρχικό διάστημα αναζήτησης $[x]_0$.

Στο Βήμα 3 σχηματίζονται τα συνοριακά πολυώνυμα, όπως αυτά ορίστηκαν στην (5.5). Τα συνοριακά πολυώνυμα μπορούν να δοθούν απ' ευθείας σαν είσοδο στον αλγόριθμο, παραλείποντας το Βήμα 3.

Στο Βήμα 5 επιλέγεται μια αριθμητική διαδικασία για την επίλυση όλων των συνοριακών πολυωνύμων στο διάστημα αναζήτησης $[x]_0$. Αυτή η διαδικασία πρέπει να πάρει ως είσοδο τα

Σχήμα 5.9: Το προτεινόμενο κριτήριο θα απορρίψει το διάστημα (r_i, r_{i+1}) .

Αλγόριθμος 5.8 Διαστηματικός Επιλυτής Πολυωνύμων

1:	Συνάρτηση $\text{IPS}(P(x), [x]_0, \varepsilon, \mathcal{IL})$	
2:	$\mathcal{IL} = \{\}; \mathcal{L} = \{\}; \mathcal{S} = \{[x]_0\}$	{Αρχικοποίηση}
3:	$\text{ΣΧΗΜΑΤΙΣΕ_ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ}(P(x), P_+(x), P_-(x))$	{Σχημάτισε τα συνοριακά πολυώνυμα}
4:		
5:	$\text{ΕΠΙΛΥΣΕ}(P_+(x), P_-(x), \varepsilon, \mathcal{S}, \mathcal{L})$	{Βρες τις ρίζες των συνοριακών πολυωνύμων στο $[x]_0$ }
6:		
7:	$\mathcal{L} := \mathcal{L} \uplus \{\underline{x}_0, \overline{x}_0\}$	{Θεώρησε τα άκρα του διαστήματος αναζήτησης ως σημειακές ρίζες}
8:	$\text{ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΕ}(\mathcal{L})$	{Ταξινόμησε κατά αύξουσα σειρά τις ευρισκόμενες σημειακές ρίζες}
9:	$\text{ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΕ_ΡΙΖΕΣ}(P(x), \mathcal{L}, \mathcal{IL})$	{Χρησιμοποίησε την προτεινόμενη μεθοδολογία για να απομονώσεις τις διαστηματικές ρίζες}
10:		
11:	επέστρεψε $\mathcal{IL}$	
12:	τέλος	

συνοριακά πολυώνυμα P_+ και P_- , την ακρίβεια ε , τη λίστα εργασίας $\mathcal{S}$, που περιέχει το σύνολο των υποψηφίων διαστηματικών ριζών, και επιστρέφει την ενδιάμεση λίστα $\mathcal{L}$, που περιέχει όλες τις σημειακές ρίζες των συνοριακών πολυωνύμων.

Για να κατασκευάσουμε εκείνες τις διαστηματικές ρίζες που έχουν ως άκρα ένα από τα άκρα ή και τα δύο άκρα του διαστήματος αναζήτησης θεωρούμε τα άκρα του αρχικού διαστήματος αναζήτησης ως σημειακές ρίζες. Έτσι, στο Βήμα 7 τα άκρα του αρχικού διαστήματος αναζήτησης εισάγονται στην ενδιάμεση λίστα $\mathcal{L}$.

Στο επόμενο βήμα εφαρμόζεται μια διαδικασία ταξινόμηση στην λίστα $\mathcal{L}$ για τη ταξινόμηση των ευρισκόμενων ριζών κατά αύξουσα σειρά. Τέλος, στο Βήμα 9 χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος CIZ (Construction of Interval Zeros - Κατασκευή Διαστηματικών Ριζών) για την κατασκευή των διαστηματικών ριζών. Η τελευταία διαδικασία περιγράφεται λεπτομερώς από τον Αλγόριθμο 5.9.

Αλγόριθμος 5.9 Κατασκευή Διαστηματικών Ριζών

1:	Συνάρτηση CIZ($P(x)$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{IL}$)	
2:	$next = false$, $multiple = false$	{Αρχικοποίησε τις $next$ και $multiple$ με 'false'}
3:	$a := Head(\mathcal{L})$; $\mathcal{L} := \mathcal{L} - \{Head(\mathcal{L})\}$	{Ανάθεσε το a στην $\mathcal{L}$ και διέγραψε το}
4:	αν $0 \in P(a.val)$ τότε	$\{0 \in P(a)$: Αποδέξου το $[a, a]$ ως διαστηματική ρίζα}
5:	$\mathcal{IL} := \mathcal{IL} \uplus \{[a.val, a.val]\}$	{Τοποθέτησε το $[a, a]$ στην τελική λίστα}
6:	τέλος	
7:	όσο $(\mathcal{L} \neq \{\})$ κάνε	{Επανάλαβε όσο η λίστα εργασίας δεν είναι κενή}
8:	$b := Head(\mathcal{L})$; $\mathcal{L} := \mathcal{L} - \{Head(\mathcal{L})\}$	{Ανάθεσε το b στην $\mathcal{L}$ και διέγραψε το}
9:	αν $(next = true)$ τότε	{Απέρριψε το διάστημα εφ' όσον δεν είναι ρίζα}
10:	$next = false$; $multiple = true$	
11:	αλλιώς	{το $[a, b]$ είναι μια υποψήφια διαστηματική ρίζα}
12:	$m = mid([a.val, b.val])$	{Επέλεξε ένα εσωτερικό σημείο της υποψήφιας ρίζας}
13:	αν $0 \in P(m)$ τότε	$\{0 \in P(m)$: Αποδέξου το $[a, b]$ ως διαστηματική ρίζα}
14:	$\mathcal{IL} := \mathcal{IL} \uplus \{[a.val, b.val]\}$	{Τοποθέτησε το $[a, b]$ στην τελική λίστα}
15:	αν $b.mult = 1$ τότε	{το b είναι μια απλή ρίζα}
16:	$next = true$	{Το επόμενο διάστημα δεν είναι διαστηματική ρίζα}
17:	τέλος	
18:	$multiple = false$	{η $multiple$ ορίζεται ως false}
19:	αλλιώς	$\{0 \notin P(m)\}$
20:	αν $(multiple = true)$ τότε	{Βρέθηκε μία πολλαπλή ρίζα}
21:	$\mathcal{IL} := \mathcal{IL} \uplus \{[a.val, a.val]\}$	{Τοποθέτησε το $[a, a]$ στην τελική λίστα}
22:	αλλιώς	
23:	$multiple = true$	{η $multiple$ ορίζεται ως false}
24:	τέλος	
25:	τέλος	
26:	τέλος	
27:	$a = b$	{Όρισε το a να είναι το αριστερό άκρο της επόμενης υποψήφιας ρίζας}
28:	τέλος	
29:	αν $0 \in P(a.val)$ τότε	$\{0 \in P(a)$: Αποδέξου το $[a, a]$ ως διαστηματική ρίζα}
30:	$\mathcal{IL} := \mathcal{IL} \uplus \{[a.val, a.val]\}$	{Τοποθέτησε $[a, a]$ στην τελική λίστα}
31:	τέλος	
32:	επέστρεψε $\mathcal{IL}$	{Επέστρεψε τις διαστηματικές ρίζες}
33:	τέλος	

Συγκεκριμένα, στο Βήμα 2 αρχικοποιούνται οι δείκτες $next$ και $multiple$. Σύμφωνα με τη Πρόταση 5.7 όταν βρεθεί μία διαστηματική ρίζα ο δείκτης $next$ γίνεται «false», δείχνοντας ότι το επόμενο διάστημα, σε συνδυασμό με την πολλαπλότητα της ρίζας, πρέπει να απορριφθεί. Με όμοιο τρόπο, σύμφωνα, πάλι, με το Πόρισμα (5.9), ο δείκτης $multiple$ γίνεται «true» όταν υπάρχει υποψήφια σημειακή ρίζα με πολλαπλότητα.

Στο Βήμα 3 η κεφαλή της λίστας $\mathcal{L}$ ανατίθεται στο a και στη συνέχεια διαγράφεται το περιεχόμενό της. Το a υποδηλώνει το αριστερό άκρο της υποψήφιας διαστηματικής ρίζας. Στα Βήματα 4-6 εξετάζεται το αριστερό άκρο του διαστήματος αναζήτησης για σημειακές ρίζες της $P(x) = 0$. Αν βρεθεί τότε προσθέτουμε το υποψήφιο διάστημα στην τελική $\mathcal{IL}$. Ο ίδιος έλεγχος πραγματοποιείται και για το δεξί άκρο του διαστήματος αναζήτησης στα Βήματα 29-31 του αλγορίθμου.

Το κύριο τμήμα του αλγορίθμου εκτελείται στα Βήματα 7-28, όσο η ενδιάμεση λίστα $\mathcal{L}$ δεν είναι κενή. Στο Βήμα 8 ανατίθεται η κεφαλή της λίστας $\mathcal{L}$ στο b και στη συνέχεια διαγράφεται. Το b

υποδηλώνει το δεξί άκρο μιας υποψήφιας διαστηματικής ρίζας.

Στα Βήματα 9 και 10 το υποψήφιο διάστημα απορρίπτεται λόγω της Πρότασης (5.7). Διαφορετικά (Βήματα 12-18), σύμφωνα με την Πρόταση (5.10), εάν $0 \in P(m)$, όπου m το μέσο της υποψήφιας διαστηματικής ρίζας $[a, b]$, το αντίστοιχο διάστημα εισάγεται στη τελική λίστα. Εφ' όσον η πρόταση αναφέρεται σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της υποψήφιας διαστηματικής ρίζας, επιλέγεται και χρησιμοποιείται το μέσο του διαστήματος. Αν η πολλαπλότητα της σημειακής ρίζας b είναι 1 τότε το επόμενο υποψήφιο διάστημα θα πρέπει να απορριφθεί (ο δείκτης `next` ορίζεται ως «true»). Στο τέλος, ορίζουμε τον δείκτη `multiple` ως «false». Διαφορετικά ($0 \notin P(m)$), ο δείκτης πολλαπλότητας ενεργοποιείται. Συνεπώς, στα Βήματα 20 και 21 αν ο δείκτης `multiple` γίνεται «true» το εκφυλισμένο διάστημα $[a, a]$ εισάγεται στην τελική λίστα ως μια εκφυλισμένη, πολλαπλή διαστηματική ρίζα. Σε αντίθετη περίπτωση, που το υποψήφιο διάστημα πρέπει να απορριφθεί, ο δείκτης `multiple` γίνεται «true».

Τέλος, στο Βήμα 27 ορίζουμε το a να είναι το αριστερό άκρο της επόμενης υποψήφιας διαστηματικής ρίζας, ενώ στο Βήμα 32 ο αλγόριθμος επιστρέφει την τελική λίστα που περιέχει τις ευρισκόμενες διαστηματικές ρίζες.

Στο Βήμα 5 του Αλγορίθμου 5.8 δημιουργείται η ανάγκη να επιλύσουμε τις συνοριακές πολυωνυμικές εξισώσεις, για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στα επόμενα βήματα. Γι' αυτό το λόγο, πρέπει να επιλεγεί ένας κατάλληλος αλγόριθμος. Συνεπώς, κάποιος μπορεί να διαλέξει οποιοδήποτε αποδοτικό αλγόριθμο αποκλειστικά σχεδιασμένο για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων (π.χ. δεξ [45]) ή να χρησιμοποιήσει κάποιο περιβάλλον αριθμητικού υπολογισμού (π.χ. Matlab, Maple, Mathematica κτλ). Τέλος, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων, όπως είναι η διαστηματική μέθοδος Newton ή η μέθοδος διαστηματικής διχοτόμησης. Στην παρούσα εργασία, επιλέξαμε την διαστηματική μέθοδο Newton. Ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου δόθηκε στο Κεφάλαιο 3, από τη σχέση (5.6). Κάποιες σπουδαίες ιδιότητες της διαστηματικής μεθόδου Newton περιγράφονται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και έστω $[x] \in \mathbb{IR}$ ένα διάστημα. Τότε, ο τελεστής $N([x])$:

$$N([x]_{k+1}) := m_k - \frac{F(m_k)}{F'([x]_k)}$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Κάθε ρίζα $x^* \in [x]$ οφ $f(x) = 0$ ικανοποιεί την $x^* \in N([x])$.
2. Αν $N([x]) \cap [x] = \emptyset$, τότε δεν υπάρχει ρίζα της $f(x)$ στο $[x]$.
3. Αν $N([x]) \overset{\circ}{\subset} [x]$, τότε υπάρχει μοναδική (απλή) ρίζα της $f(x)$ στο $[x]$ και συνεπώς στο $N([x])$.

Σημειώνουμε ότι το N υποδηλώνει τον τελεστή της μεθόδου, το $m \in [x]$, και οι F, F' είναι διαστηματικές επεκτάσεις των f και f' αντιστοίχως ([1], [18], [27], [33]). Το κριτήριο τερματισμού που χρησιμοποιήθηκε στη μέθοδο είναι το $w([x]) \leq \varepsilon$.

Σημείωση 5.2. Η μοναδικότητα των ευρισκόμενων ριζών εξασφαλίζεται από την τρίτη ιδιότητα της διαστηματικής μεθόδου Newton.

4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος εφαρμόστηκε σε ένα σύνολο διαστηματικών πολυωνύμων, που βρέθηκαν και στις εργασίες [18], [21], [62], [7], καθώς και σε πολυώνυμα που κατασκευάστηκαν

αποκλειστικά για την αξιολόγηση της περιγραφόμενης μεθοδολογίας από τους συγγραφείς της παρούσας εργασίας. Ο ακόλουθος Πίνακας 5.1 περιγράφει αυτά τα πολυώνυμα.

Πίνακας 5.1: Δοκιμαστικά Διαστηματικά Πολυώνυμα

No	$f(x)$
1.	$P_1(x) = x^2 - a_0,$ $a_0 = [-5, 5]$
2.	$P_2(x) = x^2 + a_0,$ $a_0 = [-1, 0]$
3.	$P_3(x) = a_2 x^2,$ $a_2 = [1, 2]$
4.	$P_4(x) = a_2 x^2 + 1,$ $a_2 = [-1, 1]$ $a_0 = [1, 1]$
5.	$P_5(x) = x^2 + a_1 x + a_0,$ $a_1 = [-2, 2]$ $a_0 = [2, 3]$
6.	$P_6(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$ $a_2 = [1, 2]$ $a_1 = [-4, 2]$ $a_0 = [-3, 1]$
7.	$P_7(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$ $a_2 = [-0.2, 0.1]$ $a_1 = [0.5, 2]$ $a_0 = [0, 0.4]$
8.	$P_8(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$ $a_2 = [1.2499, 2.2501]$ $a_1 = [2.8749, 4.2501]$ $a_0 = [1, 1.8907]$
9.	$P_9(x) = a_3 x^3 - a_2 x^2 + a_1 x,$ $a_3 = [0.4, 1]$ $a_2 = [0.5, 1]$ $a_1 = [0, 0.25]$
10.	$P_{10}(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$ $a_3 = [0, 1]$ $a_2 = [-0.5, 0.5]$ $a_1 = [-3.5, -1.5]$ $a_0 = [1, 3]$
11.	$P_{11}(x) = x^4 + p_1^3 p_2 x^3 + p_1^2 p_2^2 p_3 x^2 + p_1 p_2^3 p_3^2 x + p_3,$ $p_1 = [1.15, 1.65]$ $p_2 = [1.3, 1.7]$ $p_3 = [0.6, 1.0]$
12.	$P_{12}(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2,$ $a_3 = [-2, 1]$ $a_2 = [0.1, 0.2]$
13.	$P_{13}(x)(x) = a_4 x^4 - a_3 x^3 + a_1 x + a_0,$ $a_4 = [1, 2]$ $a_3 = [1, 2]$ $a_1 = [-2, 3]$ $a_0 = [-3, 4]$
14.	$P_{13}(x) = x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$ $a_4 = [-12, -11.999]$ $a_3 = [54.999, 55]$ $a_2 = [-120, -119.999]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

No	$f(x)$
	$a_1 = [123.999, 124.001]$ $a_0 = [-48.001, -47.999]$
15.	$P_{15}(x) = x^6 + (-p - 5)x^4 + (5p + 4)x^2 - 4p,$ $p = [2, 3]$
16.	$P_{16}(x) = x^6 - 2x^5 + 1.0256x^4 + a_3x^3 - 7.8720x^2 + a_1x + 16.1024,$ $a_3 = [-4.0388, -3.875]$ $a_1 = [15.8448, 16.5]$
17.	$P_{17}(x) = x^6 - 2x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$ $a_4 = p_1^2 + p_2^4 - 2p_1 + 2$ $a_3 = -4p_1^2 + 8p_1 + 2p_2^4 - 8$ $a_2 = 8p_1^2 + p_1^2p_2^4 - 16p_1 - 2p_1p_2^4 + 6p_2^4$ $a_1 = -16p_1^2 + 32 * p_1 + 8 * p_2^4$ $a_0 = 16p_1^2 - 32p_1 + 4p_1^2p_2^4 - 8p_1p_2^4 + 8p_2^4 + 32$ $p_1 = [1, 1.07]$ $p_2 = [0.4, 0.45]$
18.	$P_{18}(x) = x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_2x^2 - a_0,$ $a_5 = [0, 1]$ $a_4 = [-4.1, -3.55]$ $a_2 = [3.575, 5.2]$ $a_0 = [-2.1, -1.025]$

Η επίλυση των συννοριακών πολυωνύμων έγινε χρησιμοποιώντας τη διαστηματική μέθοδο Newton, όπως αυτή περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα. Ωστόσο, καθώς ο βαθμός του πολυωνύμου μεγαλώνει είναι προτιμότερο να επιλέξουμε μια μέθοδο σχεδιασμένη για την αποδοτική επίλυση πραγματικών πολυωνυμικών εξισώσεων (δες [45]) αντί για μια γενικής χρήσεως μέθοδος όπως είναι η διαστηματική μέθοδος Newton. Στον ακόλουθο Πίνακα 5.2 παρουσιάζεται η απόδοση της προτεινόμενης μεθοδολογίας μέσα από την εφαρμογή της στα παραπάνω δοκιμαστικά διαστηματικά πολυώνυμα.

Η πρώτη στήλη, με ετικέτα A/A, δείχνει το νούμερο του πολυωνύμου, ενώ η δεύτερη, με ετικέτα ΔΑ δείχνει το διάστημα αναζήτησης. Οι υπόλοιπες στήλες, οι ΕΠ, F , F' και Δ, μετρώνε κυρίως την απόδοση του επιλυτή (διαστηματική μέθοδος Newton). Συγκεκριμένα, η στήλη ΕΠ δείχνει το πλήθος των επαναλήψεων, F το πλήθος των συναρτησιακών υπολογισμών, F' το πλήθος των υπολογισμών παραγώγου και Δ το απαιτούμενο πλήθος διχοτομήσεων. Τέλος, η στήλη ER μας δίνει το πλήθος των ευρισκόμενων ριζών.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα αυτής της δουλειάς πάρθηκαν χρησιμοποιώντας το πακέτο Intlab ([46]) και οι γραφικές παραστάσεις σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας μιας συνάρτηση γραμμένη σε Matlab, σχεδιασμένη για διαστηματικές συναρτήσεις³.

³<http://www.math.upatras.gr/~nikas/soft/>

Πίνακας 5.2: Αριθμητικά Αποτελέσματα, $\varepsilon = 10^{-14}$, Επιλυτής: διαστηματική μέθοδος Newton

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
1.	$[-2, 2]$	4	4	4	0	1	$[r] = [-2, 2]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
2.	$[-2, 2]$	90	186	90	2	1	$[r] = [-1, 1]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
3.	$[0, 1]$	68	142	68	2	1	$[r] = [0, 0]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
4.	$[-2, 2]$	24	50	24	2	2	$[r]_1 = [-2, -1]$ $[r]_2 = [1, 2]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
5.	$[-1, 2]$	7	9	7	0	0	—

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
6.	$[-6, 6]$	20	39	20	1	1	$[r] = [-3, 4.645751311064592]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
7.	$[-8, 8]$	38	79	38	0	3	$[r]_1 = [-8, -4]$ $[r]_2 = [-1, 0]$ $[r]_3 = [2.5, 8]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
8.	$[-3, 2]$	25	44	25	0	1	$[r] = [-1.173264124091340, -0.249991803609978]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
9.	$[-1, 2]$	118	205	118	0	1	$[r] = [-1, 0]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
10.	$[-3, 2]$	17	31	17	0	2	$[r]_1 = [-3, -1.280776406404415]$ $[r]_2 = [0.274917217635375, 2]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
11.	$[-10, 5]$	43	72	43	0	1	$[r] = [-7.599154609171095, -0.074548001830275]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
12.	$[-0.15, 0.1]$	220	375	220	0	3	$[r]_1 = [-0.15, -0.112701665379258]$ $[r]_2 = [-0.000000000000008, 0.000000000000008]$ $[r]_3 = [0.051316701949486, 0.1]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
13.	$[0, 3]$	20	32	20	0	1	$[r] = [0, 2.508087996097692]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
14.	$[-1, 5]$	2481	4838	2481	701	4	$[r]_1 = [0.999335360674854, 1.000501045096834]$ $[r]_2 = [1.929915324210068, 2.079537678328769]$ $[r]_3 = [2.984348747114806, 3.046544473961492]$ $[r]_4 = [3.976136108842308, 4.005697205249724]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
15.	$[-2.8, 2.8]$	122	200	122	0	2	$[r]_1 = [-2.449489742783179, -0.714034776958180]$ $[r]_2 = [0.714034776958180, 2.449489742783180]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
16.	$[-1.5, 2.5]$	103	167	103	0	1	$[r] = [-1.091685540661691, -0.911060322671831]$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα...

...συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
17.	$[-2, 3]$	77	131	77	0	2	$[r]_1 = [-1.382870239543449, -0.615860621830860]$ $[r]_2 = [1.490067343664254, 2.462617344027069]$

A/A	ΔA	ΕΠ	F	F'	Δ	ΕΡ	Ρίζες
18.	$[-2.5, 2]$	98	162	98	0	2	$[r]_1 = [-2.452903834333482, -0.4808777068114]$ $[r]_2 = [0.474161957735771, 1.784500212201013]$

5 Το πρόβλημα της «εξάρτησης»

Η επίλυση μιας διαστηματικής πολυωνυμικής εξίσωσης $P_n(x) = 0$, n -οστού βαθμού, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που πρότειναν οι Hansen και Walster στην εργασία [18], σε συνδυασμό με την προτεινόμενη μεθοδολογία και υλοποίηση, αποτελεί μια αποδοτική προσέγγιση για την εύρεση όλων των ριζών της $P(x) = 0$ σε δοθέν κλειστό διάστημα. Ωστόσο, το πρόβλημα της εξάρτησης, που προκαλείται κυρίως από τους διαστηματικούς συντελεστές του $P(x)$, κάνει, πολλές φορές, τις ευρισκόμενες διαστηματικές ρίζες πιο πλατιές από όσο είναι πραγματικά. Για παράδειγμα, η παρακάτω πολυωνυμική εξίσωση

$$P_6(x) = (x^2 - [2, 3])(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0, \quad (5.8)$$

έχει εμφανώς ως διαστηματικές ρίζες τις $\pm[\sqrt{(2)}, \sqrt{(3)}]$, ± 2 , ± 1 . Όμως, εάν αναπτύξουμε το πολυώνυμο θα πάρουμε το αντίστοιχο ισοδύναμο του

$$P_6(x) = x^6 - [7, 8]x^4 + [14, 19]x^2 - [8, 12], \quad (5.9)$$

όπου η εφαρμογή της προτεινόμενης μεθοδολογίας δίνει τους ακόλουθους εγκλεισμούς

$$[-2.44949, -0.71403] \text{ και } [0.71403, 2.44949].$$

που περιέχουν όλες τις διαστηματικές ρίζες της $P_6(x) = 0$. Αν μετασχηματίσουμε το αρχικό διαστηματικό πολυώνυμο στην ακόλουθη μορφή

$$P_6(x) = (-x^4 + 5x^2 - 4)[2, 3] + x^6 - 5x^4 + 4x^2,$$

μπορούμε να πάρουμε το πραγματικό σύνολο των διαστηματικών ριζών χρησιμοποιώντας κατάλληλο επιλυτή. Ωστόσο, όσο μας επιτρέπει η τωρινή μας γνώση, ένας τέτοιος ή γενικότερα ένας βέλτιστος μετασχηματισμός ενός διαστηματικού πολυωνύμου σε μια τέτοια κατάλληλη μορφή παραμένει ένα ανοιχτό θέμα.

6 Συμπεράσματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο θεωρήσαμε το πρόβλημα της αποδοτικής επίλυσης ενός διαστηματικού πολυωνύμου βαθμού n σε ένα κλειστό πραγματικό διάστημα. Προτείναμε μια νέα τεχνική που βασίζεται στην εύρεση όλων των σημειακών ριζών των συνοριακών πολυωνυμικών εξισώσεων, για την κατασκευή των αντίστοιχων διαστηματικών ριζών. Συγκεκριμένα, αποδείξαμε ότι αυτές οι σημειακές ρίζες φράσσουν ακριβώς όλες τις διαστηματικές ρίζες και αναπτύξαμε κριτήρια για την αποδοχή ή όχι διαστημάτων, που έχουν άκρα διαδοχικές σημειακές ρίζες, ως διαστηματικών ριζών.

Το βασικό πλεονέκτημα της προτεινόμενης μεθοδολογίας συνίσταται στην χρησιμοποίηση οποιασδήποτε αποδοτικής μεθόδου για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού n με πραγματικούς συντελεστές.

Δημοσιεύσεις - Αναφορές

Δημοσιεύσεις

- [1]. I.A. Nikas, G.S. Androulakis, and T.N. Grapsa. A hybrid branch-and-bound algorithm for bound constrained optimization. In G. Akrivis, E. Gallopoulos, A. Hadjidimos, I.S. Kotsireas, D. Noutsos, and M.N. Vrahatis, editors, *Conference in Numerical Analysis Numan2010 - Recent Approaches To Numerical Analysis: Theory, Methods And Applications*, pages 202–207, Chania, Greece, September 2010.
- [2]. I.A. Nikas and T.N. Grapsa. Bounding the zeros of an interval equation. *Appl. Math. Comput.*, 213(2):466–478, July 2009.
- [3]. I.A. Nikas, T.N. Grapsa, and G.S. Androulakis. Global optimization via interval equations. In *Proceedings of 23rd Conference on Operational Research (Euro XXIII 2009)*, page 249, Bonn, July 2009.
- [4]. C.D. Nikolakakou, T.N. Grapsa, I.A. Nikas, and G.S. Androulakis. Lexicographic approach on unconstrained optimization. In *Proceedings of 23rd Conference on Operational Research (Euro XXIII 2009)*, Bonn, July 2009.
- [5]. E.N. Malihoutsaki, I.A. Nikas, and T.N. Grapsa. Improved newton's method without direct function evaluations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 227(1):206–212, 2009.
- [6]. I.A. Nikas and T.N. Grapsa. On solving efficiently interval polynomial equations of degree n . In G. Akrivis, E. Gallopoulos, A. Hadjidimos, I.S. Kotsireas, D. Noutsos, and M.N. Vrahatis, editors, *Conference in Numerical Analysis Numan2008 - Recent Approaches To Numerical Analysis: Theory, Methods And Applications (Honoring Richard S. Varga on his 80th birthday)*, pages 144–147, Kalamata, Greece, September 2008.
- [7]. E.N. Malihoutsaki, I.A. Nikas, and T.N. Grapsa. Improved newton's method without direct function evaluations. In E. Gallopoulos, A. Hadjidimos, I.S. Kotsireas, D. Noutsos, and M.N. Vrahatis, editors, *NumAn 2007, Conference in Numerical Analysis*, pages 85–88, Kalamata, September 3-7 2007.
- [8]. I.A. Nikas, D.G. Sotiropoulos, and T.N. Grapsa. Extending interval newton method for nonlinear parameterized equations. In T.E. Simos, G. Psihoyios, and Ch. Tsitouras, editors, *ICNAAM - International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Hersonisos, Crete, 15-19 September 2006. Wiley-VCH, ISBN 3-527-40743-X. pp. 512–515.
- [9]. D.G. Sotiropoulos, I.A. Nikas, and T.N. Grapsa. Improving the efficiency of a polynomial system solver via a reordering technique. In Prof. Demos T. Tsahalis, editor, *4th GRACM Congress on Computational Mechanics*, volume III, pages 970–977, Patra, Greece, June, 27–29 2002.

Αναφορές

- [1]. R. Lin, H. Jiang, and L. Cheng. Solving nonsmooth interval equations with slopes. In *11th international Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms For Scientific Computing*

(SYNASC), pages 142–149, Washington, DC, 2009. IEEE Computer Society.

Στην εργασία [2]

- [2]. J. Biazar and B. Ghanbari. A modification on newton's method for solving systems of nonlinear equations. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 58:897–901, 2009.

Στην εργασία [5]

- [3]. Frédéric Goualard and Christophe Jermann. A reinforcement learning approach to interval constraint propagation. *Constraints*, 13(1-2):206–226, 2008.

Στην εργασία [9]

- [4]. Frédéric Goualard and Christophe Jermann. La propagation d'intervalles vue comme un problème de bandit-manhot non stationnaire. In *Actes des deuxièmes Journées Francophones de Programmation par Contraintes*, pages 183–190, Nîmes, Jun 2006. Nîmes. École des Mines d'Alès.

Στην εργασία [9]

- [5]. Frédéric Goualard and Christophe Jermann. On the selection of a transversal to solve nonlinear systems with interval arithmetic. In Vassil N. Alexandrov et als., editor, *Procs. of the International Conference on Computational Science 2006*, volume 3991 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 332–339. Springer-Verlag, 2006.

Στην εργασία [9]

- [6]. Frédéric Goualard. On considering an interval constraint solving algorithm as a free-steering nonlinear gauss-seidel procedure. In *Procs. of the 20th Annual ACM Symposium on Applied Computing (Reliable Computation and Applications track)*, volume 2, pages 1434–1438, Address, March 2005. The Association for Computing Machinery, Inc.

Στην εργασία [9]

Βιβλιογραφία

- [1] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction To Interval Computations*. Computer Science And Applied Mathematics Series. Academic Press, New York, 1983. Translated by Jon Rokne.
- [2] I. Alolyan. Real roots of quadratic interval polynomials. *Int. Journal of Math. Analysis*, 1(21):1041–1050, 2007.
- [3] G.V. Balaji and J.D. Seader. Application of interval Newton’s method to chemical engineering problems. *Reliab. Comput.*, 1(3):215–223, 1995.
- [4] A.C. Bartlett, C.V. Hollot, and H. Lin. Root locations of an entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. *Signals and Systems*, 1:61–71, 1988.
- [5] O. Carpani, L. Hvidegaard, M. Mortensen, and T. Schneider. Robust and efficient ray intersection of implicit surfaces. *Reliab. Comput.*, 6:9–21, 2000.
- [6] L.G. Casado, J.A. Martínez, I. García, and Ya.D. Sergeyev. New interval analysis support functions using gradient information in a global minimization algorithm. *J. Glob. Optim.*, 25:345–362, 2003.
- [7] X. Fan, J. Deng, and F. Chen. Zeros of univariate interval polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 216:563–573, 2008.
- [8] J.A. Ferreira, F. Patrício, and F. Oliveira. A priori estimates for the zeros of interval polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 136(1):271–281, November 2001.
- [9] T.N. Grapsa. Minimal root finder in interval global optimization. In T.E. Simos, G. Psihoyios, and Ch. Tsitouras, editors, *ICNAAM - International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Hersonisos, Crete, 15-19 September 2006. Wiley-VCH, ISBN 3-527-40743-X.
- [10] T.N. Grapsa and M.N. Vrahatis. A dimension-reducing method for solving systems of nonlinear equations in $\mathbb{R}^n$. *Intern. J. Computer Math.*, 32:205–216, 1990.
- [11] R. Hammer, M. Hocks, U. Kulisch, and D. Ratz. *C++ Toolbox for Verified Computing I*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [12] E. Hansen. A globally convergent interval method for computing and bounding real roots. *BIT*, 18:415–424, 1978.
- [13] E. Hansen and G.W. Walster. *Global Optimization Using Interval Analysis: Revised And Expanded*. Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2nd edition, 2004.
- [14] E.R. Hansen. Global optimization using interval analysis – the one-dimensional case. *J. Optim. Theory Appl.*, 29:331–344, 1979.
- [15] E.R. Hansen. Global optimization using interval analysis – the multi-dimensional case. *Numer. Math.*, 34:247–270, 1980.
- [16] E.R. Hansen. *Global Optimization Using Interval Analysis*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics/165. Marcel Dekker, New York, 1992.
- [17] E.R. Hansen and S. Sengupta. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis. *BIT*, 21:203–211, 1981.

- [18] E.R. Hansen and G.W. Walster. Sharp bounds on interval polynomial roots. *Reliab. Comput.*, 8(2):115–122, April 2002.
- [19] S. Herbort and D. Ratz. Improving the efficiency of a nonlinear-system-solver using a componentwise newton method. Technical report, Universität Karlsruhe, 1997.
- [20] D. Hertz, C.S. Adjiman, and C.A. Floudas. Two results on bounding the roots of interval polynomials. *Comput. Chem. Eng.*, 23(9):1333–1339, November 1999.
- [21] S. Ibraev. *A New Parallel Method for Verified Global Optimization*. PhD thesis, Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal, 2001.
- [22] K. Ichida and Y. Fujii. An interval arithmetic method for global optimization. *Computing*, 23:85–97, 1979.
- [23] R.B. Kearfott, M. Dawande, K.-S. Du, and C.-Y. Hu. Algorithm 737: INTLIB: a portable FORTRAN 77 interval standard function library. *ACM Trans. Math. Software*, 20:447–459, 1994.
- [24] R.B. Kearfott and M. Novoa III. ALGORITHM 681: INTBIS, a portable interval newton/bisection package. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 16(2):152–157, June 1990.
- [25] V.L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial'nye Uraveniya*, 14:2086–2088, 1978. In Russian.
- [26] V.L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations*, 14:1483–1485, 1979. In English.
- [27] R. Klatte, U. Kulisch, C. Lawo, M. Rauch, and A. Wiethoff. *C-XSC - A C++ Class Library for Extended Scientific Computing*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.
- [28] O. Knüppel. PROFIL/BIAS - a fast interval library. *Computing*, 53:277–287, 1994.
- [29] R. Krawczyk. Fehlerabschätzung reeller eigenwerte und eigenvektoren von matrizen (error estimates for real eigenvalues and eigenvectors of matrices). *Computing*, 4(4):281–293, October 1969.
- [30] E. Loh and G.W. Walster. Rump's example revisited. *Reliable Computing*, 8:245–248, 2002.
- [31] G. Mayer. Grundbegriffe der intervallrechnung. In S. Georg, R. Hammer, and D. Ratz, editors, *Wissenschaftliches Rechnen mit Ergebnisverifikation - Eine Einführung*, pages 101–118, 1989.
- [32] R. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [33] R.E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [34] A. Morgan. *Solving Polynomial Systems Using Continuation for Engineering and Scientific Problems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [35] A. Neumaier. *Interval methods for systems of equations*. Encyclopedia of mathematics and its applications/37. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [36] A. Neumaier. Constraint propagation for univariate quadratic constraints. <http://www.mat.univie.ac.at/~neum>, 2005.
- [37] I.A. Nikas and T.N. Grapsa. On solving efficiently interval polynomial equations of degree n. In G. Akrivis, E. Gallopoulos, A. Hadjidimos, I.S. Kotsireas, D. Noutsos, and M.N. Vrahatis, editors, *Conference in Numerical Analysis Numan2008 - Recent Approaches To Numerical Analysis: Theory, Methods And Applications (Honoring Richard S. Varga on his 80th birthday)*, pages 144–147, Kalamata, Greece, September 2008.

- [38] I.A. Nikas and T.N. Grapsa. Bounding the zeros of an interval equation. *Appl. Math. Comput.*, 213(2):466–478, July 2009.
- [39] I.A. Nikas, T.N. Grapsa, and G.S. Androulakis. Global optimization via interval equations. In *Proceedings of 23rd Conference on Operational Research (Euro XXIII 2009)*, page 249, Bonn, July 2009.
- [40] I.A. Nikas, D.G. Sotiropoulos, and T.N. Grapsa. Extending interval newton method for nonlinear parameterized equations. In T.E. Simos, G. Psihoyios, and Ch. Tsitouras, editors, *ICNAAM - International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Hersonisos, Crete, 15-19 September 2006. Wiley-VCH, ISBN 3-527-40743-X. pp. 512–515.
- [41] H. Ratschek. Die subdistributivität in der intervallarithmetik. *ZAMM*, 51:189–192, 1971.
- [42] H. Ratschek and J. Rokne. *Computer Methods for the Range of Functions*. Mathematics and Its Applications. Ellis Horwood, Chichester, West Sussex, England, 1984.
- [43] D. Ratz. Inclusion isotone extended interval arithmetic. Technical report, Universität Karlsruhe, 1996.
- [44] H.H. Rosenbrock. *State-Space and Multivariable Theory*. Thomas Nelson & Sons Ltd, London, 1970.
- [45] F. Rouillier and P. Zimmermann. Efficient isolation of polynomial's real roots. *J. Comput. Appl. Math.*, 162(1):33–50, 2004.
- [46] S.M. Rump. INTLAB - INTerval LABoratory. In T. Csendes, editor, *Developments in Reliable Computing*, pages 77–104. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/>.
- [47] H. Schichl and A. Neumaier. Interval analysis on directed acyclic graphs for global optimization. *J. Global Optim.*, 33(4):541–562, 2005.
- [48] H. Sekigawa and K. Shirayanagi. On the location of zeros of an interval polynomial. In D. Wang and L. Zhi, editors, *Symbolic-Numeric Computation*, Trends in Mathematics, pages 167–184. Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland, 2007.
- [49] S.P. Shary. A surprising approach in interval global optimization. *Reliab. Comput.*, 7(6):497–505, 2001.
- [50] S. Skelboe. Computation of rational interval functions. *BIT*, 4:87–95, 1974.
- [51] C. Sohn. On damping ratio of polynomials with perturbed coefficients. *IEEE T. Automat. Contr.*, 37(2):277–279, 1992.
- [52] D.G. Sotiropoulos and T.N. Grapsa. Optimal centers in branch-and-prune algorithms for univariate global optimization. *Appl. Math. Comput.*, 169:247–277, 2005.
- [53] D.G. Sotiropoulos, I.A. Nikas, and T.N. Grapsa. Improving the efficiency of a polynomial system solver via a reordering technique. In Prof. Demos T. Tsahalis, editor, *4th GRACM Congress on Computational Mechanics*, volume III, pages 970–977, Patra, Greece, June, 27–29 2002.
- [54] O. Spaniol. Die distributivität in der intervallarithmetik. *Computing*, 5:6–16, 1970.
- [55] H. Tapamo and A. Frommer. Two acceleration mechanisms in verified global optimization. *J. Comput. Appl. Math.*, 199:390–396, 2007.
- [56] A. Terui and T. Sasaki. "Approximate zero-points" of real univariate polynomial with large error terms. *IPSJ Journal*, 41(4):974–989, 2000.
- [57] Θ. Ν. Γράψα. *Εισαγωγή στην Ανάλυση Διαστημάτων - Interval Analysis*. Β. Γκιούρδας Εκδοτική, 2007.

- [58] Δ.Γ. Σωτηρόπουλος. *Διαστηματική Ανάλυση και Ολική Βελτιστοποίηση*. PhD thesis, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2005.
- [59] Ι.Α. Νίκας. Δημιουργία υπολογιστικού πακέτου για την επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων, για την εύρεση της ελάχιστης ρίζας μη γραμμικών εξισώσεων και για την επίλυση συστημάτων μη-γραμμικών εξισώσεων, χρησιμοποιώντας μεθόδους ανάλυσης διαστημάτων. Master's thesis, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2004. Επιβλέπων: Θ.Ν. Γράψα.
- [60] The Coprin Project. Minimal and maximal real roots of parametric polynomials using interval analysis. In C. Bliek, C. Jermann, and A. Neumaier, editors, *Global Optimization and Constraint Satisfaction, First International Workshop Global Constraint Optimization and Constraint Satisfaction, COCOS 2002, Valbonne-Sophia Antipolis, France, October 2-4, 2002, Revised Selected Papers*, volume 2861 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 71–86. Springer, 2003.
- [61] T. Vinkó, J.-L. Lagouanelle, and T. Csendes. A new inclusion function for optimization: kite – the one dimensional case. *J. GloJ. Global Optim.*, 30:435–456, 2004.
- [62] D.D. Šiljak and D.M. Stipanović. Robust d -stability via positivity. *Automatica*, 35:1477–1484, 1999.