ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2015-2016

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΡΟΦΗΣΗΣ ΣΕ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΛΕΓΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Π. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΑΚΗΣ, Α.Μ. 473

Πάτρα, Μάρτιος 2016

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Χ. Παρασκευά Αναπληρωτής Καθηγητής, τμήμα Χημικών Μηχανικών, Παν. Πατρών (Επιβλέπων)

Β. Μπουργανός Διευθυντής Ερευνών ΙΤΕ/ΙΕΧΜΗ

Β. Λουκόπουλος Επίκουρος Καθηγητής, τμήμα Φυσικής, Παν. Πατρών

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο Ινστιτούτο Επιστημών Χημικής Μηχανικής (ΙΤΕ/ΙΕΧΜΗ), το οποίο ευχαριστώ για την οικονομική ενίσχυση και τον εξοπλισμό που μου παρείχε.

Ιδιαιτέρες ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στον Διευθυντή Ερευνών του ΙΤΕ/ΙΕΧΜΗ, Β. Μπουργανό για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, την ενθάρρυνσή και το συμβουλευτικό του έργο.

Επίσης στους καθηγητές μου: Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών, Χ. Παρασκευά και Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών, Β. Λουκόπουλο για τη συνεισφορά τους στο έργο μου και την προθυμία τους να συμμετέχουν στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Ερευνητή Ε. Σκούρα, για την καθημερινή, δημιουργική συνεργασία και το, καθοριστικής σημασίας, συμβουλευτικό του έργο. Επίσης τον Ερευνητή Α. Καλαράκη για την ευγενική παραχώρηση του κώδικα, που αφορά στις προσομοιώσεις με την μέθοδο lattice-Boltzmann, και την ευχάριστη συνεργασία μας.

Τέλος, ευχαριστώ όλα τα μέλη του εργαστηρίου (LSPM) για το ήρεμο και συνεργατικό κλίμα που δημιουργούσαν, καθώς και τον Ερευνητή Γ. Μπουραντά που με μύησε στον κόσμο των απλεγματικών μεθόδων.

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία μελετώνται η δυνατότητα εφαρμογής, η ακρίβεια και η ταχύτητα σύγκλισης της καινοτόμου απλεγματικής μεθόδου Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) ως λύτη σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας και μάζας, καθώς και σε προβλήματα ροής. Τα παραπάνω φαινόμενα επιλύονται σε πεπλεγμένες γεωμετρίες πορωδών μέσων στις δύο και στις τρεις διαστάσεις που προσομοιάζουν τόσο ανόργανες, όσο και βιολογικές δομές. Σε όλες τις περιπτώσεις οι συνοριακές συνθήκες είναι σταθερές με τον χρόνο. Η μεταφορά μάζας και θερμότητας προκαλείται από μια βαθμίδα της αντίστοιχης ιδιότητας. Στα προβλήματα ροής, η οδηγούσα δύναμη είναι εξωτερικά επιβαλλόμενη, και το αντιπροσωπευτικό πεδίο περιοδικό, και συνακολούθως και η ροή. Προτείνεται μια υβριδική μέθοδος, με βάση την MLPG προσέγγιση, όπου λαμβάνεται μεγαλύτερης τάξης παρεμβολή σε περιοχές της γεωμετρίας όπου υπάρχουν μεγάλες κλίσεις, είτε των ιδιοτήτων των μέσων, είτε των άγνωστων συναρτήσεων. Επιπλέον, προτείνεται ένας εναλλακτικός τρόπος ολοκλήρωσης, ο οποίος σχετίζεται με το σχήμα των τοπικών ολοκληρωμάτων, καθώς και ένας διαφορετικός τρόπος για την παρεμβολή, ο οποίος επιτρέπει ευκολότερη πύκνωση του πλέγματος. Τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι αυξάνουν σημαντικά την ακρίβεια των λύσεων, με ταυτόχρονη μείωση του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου. Τέλος, προτείνεται ένα μοντέλο για τα προβλήματα συναγωγής, όπου χρησιμοποιείται η μέθοδος Lattice-Boltzmann για το πρόβλημα ροής, και η MLPG μέθοδος για το πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας ή μάζας. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν από τυπικές θεωρήσεις με μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) με διακριτοποίηση αντίστοιχης ακρίβειας. Η σύγκριση γίνεται τόσο ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων, όσο και ως προς την ταχύτητα της σύγκλισης.

Περιεχόμενα

Περίληψη....5

Κεφάλαιο 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ....7

1.1 Αντικείμενο και σκοπός της εργασίας 7

1.2 Πλεγματικές και απλεγματικές μέθοδοι 9

Κεφάλαιο 2: Η ΜΕΘΟΔΟΣ MESHLESS LOCAL PETROV-GALERKIN (MLPG)....13

2.1 Εισαγωγικά 13

2.2 Περιγραφή της μεθόδου 14

2.3 Απλεγματικές προσεγγίσεις για τη συνάρτηση δοκιμής 16

2.4 Προσέγγιση με MLS 18

2.5 Επιλογή της σταθμισμένης συνάρτησης 21

2.6 Διαφορετικές εκφράσεις της MLPG προσέγγισης 23

Κεφάλαιο 3: ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ....25

3.1 Φαινόμενα Μεταφοράς 25

3.2 Οι αδιαστατοποιήσεις και τα προβλήματα 27

3.3 Η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων 29

3.4 Η μέθοδος lattice-Boltzmann 32

3.5 Πεπερασμένες διαφορές και Πεπερασμένα στοιχεία 35

3.6 Τυπικά μεγέθη των συντελεστών μεταφοράς και των αδιάστατων αριθμών 36

Κεφάλαιο 4: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΓΩΓΗΣ....38

4.1 Η επιλογή της MLPG μεθόδου, προβλήματα σταθερής κατάστασης 38

4.2 Υβριδική MLPG 41

4.3 Εναλλακτικός τρόπος ολοκλήρωσης 45

4.4 Εισαγωγή μη γραμμικού όρου, χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα 46

4.5 Επέκταση στις 3 διαστάσεις 56

Κεφάλαιο 5: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ....60

5.1 Απομόνωση του προβλήματος ροής 60

5.2 Το πλήρες πρόβλημα 63

5.3 Εφαρμογή της LB-MLPG σε προβλήματα συναγωγής. 65

Συμπεράσματα....69

Μελλοντική εργασία....70

Βιβλιογραφία:....71

Κεφάλαιο 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Αντικείμενο και σκοπός της εργασίας

Εκτός ειδικών περιπτώσεων, οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα κατά κύριο λόγο σύνθετο αλλά και ένα απλό φυσικό σύστημα, δεν επιλύονται με το συμβατικό αναλυτικό τρόπο. Σήμερα μεγάλα φυσικά περιβάλλοντα, από το γήινο καιρικό σύστημα έως τα αστρικά σμήνη, καθώς επίσης και τα μικροσκοπικά συστήματα όπως το DNA, οι κρυσταλλικές δομές και οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μορίων στα νέα φάρμακα ερευνώνται με ποικίλες υπολογιστικές τεχνικές. Εκεί ακριβώς γίνεται απαραίτητη η δημιουργία υπολογιστικών μοντέλων, τα οποία δίνουν γρήγορες και ακριβείς λύσεις.

Παράλληλα, η μελέτη των φαινομένων μεταφοράς παρέχει λύσεις για πολλά σημαντικά προβλήματα, που αφορούν την μηχανική ως επιστήμη αλλά και σε τεχνολογικές εφαρμογές. Πολλά από αυτά τα προβλήματα περιλαμβάνουν μεταφορά ενέργειας μεταξύ υλικών λόγω διαφοράς θερμοκρασίας, αλλά και μεταφορά μάζας λόγω διαφοράς συγκέντρωσης [1,2]. Ειδικότερα, η μοντελοποίηση της κατανομής της θερμοκρασίας και της μεταφοράς μάζας μέσα σε βιολογικούς ιστούς έχει άμεσο ενδιαφέρον για διάφορες ιατρικές και θεραπευτικές εφαρμογές [3].

Η πολυπλοκότητα της περιγραφής των φαινομένων μεταφοράς αυξάνεται κατά πολύ, όταν το προς μελέτη σύστημα είναι ένα πορώδες μέσο. Ως πορώδες μέσο χαρακτηρίζεται ένα υλικό το οποίο περιέχει πόρους (κενά). Το σκελετικό τμήμα του υλικού αποκαλείται «μήτρα» ή «πλαίσιο». Οι πόροι συνήθως είναι γεμάτοι με ένα ρευστό (υγρό ή αέριο). Το σκελετικό υλικό είναι συνήθως ένα στερεό, και συνηθίζεται να καλείται στερεός όγκος του μέσου. Παρόλα αυτά και άλλες δομές, όπως αφροί, έχουν αναλυθεί χρησιμοποιώντας την έννοια του πορώδους μέσου.

Ένα πορώδες μέσο χαρακτηρίζεται από το πορώδες του, που ορίζεται ως ο λόγος του όγκου των πόρων προς τον ολικό όγκο του μέσου. Άλλες ιδιότητες του μέσου (π.χ., διαπερατότητα, θερμική αγωγιμότητα, διαχυτότητα κ.α.) μπορούν να προέλθουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες των συστατικών του (στερεός όγκος και ρευστό), το πορώδες και την δομή των πόρων, αλλά μια τέτοια περιγραφή είναι συνήθως περίπλοκη. Πρακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα πορώδη υλικά στα οποία ένα ποσοστό των πόρων είναι αλληλοσυνδεδεμένοι κατά τρόπον ώστε να επηρεάζεται σημαντικά η ροή και μεταφορά μάζας ρευστών διαμέσου του υλικού. Πολλές φυσικές ουσίες, όπως πέτρες και χώμα (π.χ., υδροφόροι ορίζοντες, δεξαμενές πετρελαίου), ζεόλιθοι, βιολογικοί ιστοί (π.χ. οστά, ξύλο), και υλικά όπως το τσιμέντο και τα κεραμικά μπορούν να θεωρηθούν ως πορώδη μέσα. Πολλές από τις σημαντικές ιδιότητές τους μπορούν να εξαχθούν μόνο με την εξέτασή τους ως τέτοια.

Επίσης, η έννοια των πορωδών μέσων χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς της εφαρμοσμένης επιστήμης και της τεχνολογίας, όπως αυτόν της διύλισης (διύλιση πετρελαίου, αφαλάτωση, επεξεργασία λυμάτων), της μηχανικής (ακουστική, γεωμηχανική, βιο-αποκατάσταση), των γεωεπιστημών (υδρογεωλογία, γεωλογία πετρελαίου, γεωφυσική), αλλά και της βιολογίας, της βιοφυσικής και της επιστήμης των υλικών.

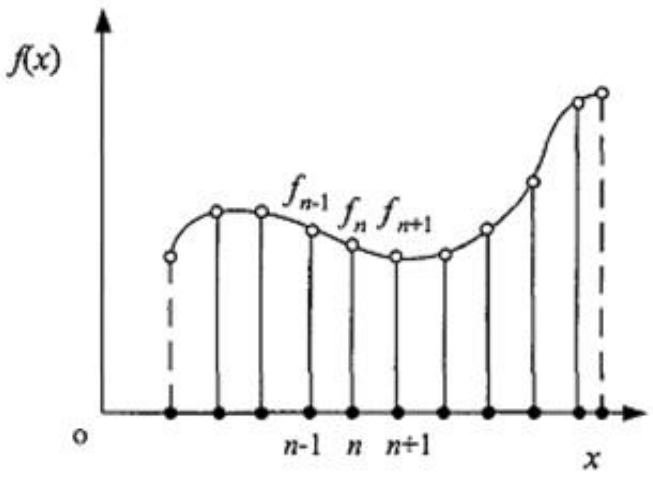
Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν προβλήματα αγωγής, διάχυσης και συναγωγής, που λαμβάνουν χώρα μέσα σε πορώδη μέσα. Στα προβλήματα αγωγής μελετήθηκαν καταστάσεις μόνιμες, αλλά και χρονομεταβαλλόμενες, όπως επίσης και περιπτώσεις όπου η θερμική αγωγιμότητα των μέσων μεταβάλλεται με την θερμοκρασία. Οι αριθμητικές λύσεις των προβλημάτων αυτών επιτυγχάνονται με τη χρήση της απλεγματικής μεθόδου Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), καθώς έχει δειχθεί ότι είναι πιο αποτελεσματική από συμβατικές τεχνικές [4,5,6]. Η προσέγγιση των μεταβλητών πραγματοποιείται με συναρτήσεις βάσης, οι οποίες προκύπτουν από τη μέθοδο παρεμβολής Moving Least Squares (MLS) [7]. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται εκτενής παρουσίαση των μεθόδων αυτών. Η ακρίβεια και η αποτελεσματικότητα της μεθόδου διερευνάται με μεταβολή: i) της διακριτοποίησης του χώρου, ii) της τάξης της συνάρτησης βάσης, iii) του σχήματος του χώρου ολοκλήρωσης γύρω από κάθε κόμβο, iv) του εύρους του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων των μέσων και v) του εύρους του λόγου των θερμοχωρητικοτήτων των μέσων. Τα αποτελέσματα που αφορούν τα προβλήματα αγωγής παρουσιάζονται στο $4^{ο}$ κεφάλαιο και αυτά της συναγωγής στο $5^{ο}$.

Καθώς, πέρα από την ακρίβεια των λύσεων, διερευνάται και ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται, στα προβλήματα συναγωγής χρησιμοποιείται η μέθοδος Lattice-Boltzmann (LB), καθώς αποδεικνύεται ότι παρέχει ταχύτερα τον υπολογισμό του πεδίου ροής [8,9]. Έτσι η LB μέθοδος τετραγωνικού πλέγματος, 9 ταχυτήτων (D_2Q_9), προτύπου BGK μονής χαλάρωσης λύνει το πρόβλημα της ροής, και η μέθοδος MLPG το πρόβλημα μεταφοράς μάζας και θερμότητας. Η ροή θεωρείται ασυμπίεστη και γίνεται διερεύνηση των αποτελεσμάτων σε ένα μεγάλο εύρος αριθμών Reynolds, Prandlt, και των λόγων των θερμικών αγωγιμοτήτων των μέσων.

Όλα τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν από μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM), και συγκεκριμένα με το εμπορικό πακέτο Comsol, με διακριτοποίηση αντίστοιχης ακρίβειας. Η σύγκριση γίνεται τόσο ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων, όσο και ως προς την ταχύτητα της σύγκλισης. Συνοπτικά, μπορούμε να πούμε ότι στόχος αυτής της εργασίας είναι η ανάπτυξη τεχνικών, με άξονα μεθόδους απλεγματικής διαμόρφωσης, με σκοπό την ταχύτερη και ακριβέστερη λύση προβλημάτων που συνδέονται με τα φαινόμενα μεταφοράς, σε πολύπλοκες δομές, όπως αυτές των πορωδών μέσων.

1.2 Πλεγματικές και απλεγματικές μέθοδοι

Κατά τη λύση οποιουδήποτε φυσικού προβλήματος με αριθμητικές μεθόδους απαιτείται κατ' αρχήν η κατάστρωσή του σε κατάλληλα τοποθετημένο μαθηματικό πρόβλημα, με πιο συνήθη μορφή τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες συσχετίζουν τις μεταβλητές, που οι τιμές τους είναι φραγμένες σε μια δεδομένη, κλειστή γεωμετρική περιοχή. Στη συνέχεια μετατρέπεται το μαθηματικό πρόβλημα σε πρόβλημα επεξεργάσιμο από τον υπολογιστή.



Εικόνα 1.1: Δακριτοποίηση του χώρου και αριθμητική διακριτοποίηση, σε μονοδιάστατη περίπτωση

Αυτό γίνεται με τη διακριτοποίηση του χώρου του προβλήματος, δηλαδή με τη διαίρεσή του σε διακριτά στοιχεία. Η διακριτοποίηση του χώρου ποικίλλει, αλλά συνήθως εφαρμόζεται ένα πλέγμα που σχηματίζεται από κόμβους πάνω στους οποίους υπολογίζονται οι τιμές των ζητούμενων μεγεθών. Μετά τη διακριτοποίηση του χώρου ακολουθεί η αριθμητική διακριτοποίηση, έτσι ώστε τα ολοκληρώματα και οι παράγωγοι να μετατραπούν σε διακριτές μορφές, σχηματίζοντας ένα πεπερασμένο σύνολο εξισώσεων που λύνονται με αριθμητική ανάλυση (Εικόνα 1.1). Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται αναπτύσσοντας "κατάλληλες'' μεθόδους. Μία μέθοδος χαρακτηρίζεται "κατάλληλη" όταν παρέχει με ακρίβεια και βεβαιότητα το προσδοκώμενο αποτέλεσμα με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος. Οι μέθοδοι που προκύπτουν διατυπώνονται με μια πεπερασμένη ακολουθία καλώς ορισμένων αριθμητικών πράξεων, δηλαδή με έναν αλγόριθμο, ώστε να υλοποιηθούν μέσω προγραμμάτων στον υπολογιστή.

Δυστυχώς, δεν έχει επιτευχθεί η υπολογιστική μέθοδος που να επιλύει όλες τις κατηγορίες προβλημάτων. Ορισμένες μέθοδοι μόνο επιλύουν ένα πρόβλημα και καθεμιά έχει τα πλεονεκτήματά της, αλλά και τα μειονεκτήματά της. Έτσι δίδεται μεγάλη σημασία στον λεπτομερή προσχεδιασμό που απαιτείται για ένα συγκεκριμένο υπολογισμό.

Πολλές συμβατικές αριθμητικές τεχνικές, όπως αυτή των πεπερασμένων διαφορών (FD), των πεπερασμένων όγκων (FVM) και των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) [10,11], [11-15], έχουν εφαρμοστεί συστηματικά, σε μεγάλο εύρος προβλημάτων. Παρά την αξιοσημείωτη επιτυχία τους, οι συνήθεις αυτές αριθμητικές μέθοδοι έχουν ακόμη κάποιες εγγενείς αδυναμίες που μειώνουν την αποτελεσματικότητα τους και περιορίζουν τις εφαρμογές τους σε πρακτικά προβλήματα, ιδίως στις τρεις διαστάσεις. Οι βασικές πηγές των προβλημάτων σχετίζονται με τη χρήση χαμηλών πολυωνυμικών προσεγγίσεων, καθώς και την απαίτηση να δημιουργηθεί ένα καλά οργανωμένο και συνδεόμενο πλέγμα στον κυρίως τομέα του προβλήματος και τα σύνορά του. Η δημιουργία του πλέγματος αυτού μπορεί να είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Λόγω αυτής της δυσκολίας των συμβατικών αριθμητικών τεχνικών, νέες αριθμητικές μέθοδοι, που κοινώς αποκαλούνται απλεγματικές, έχουν εμφανιστεί πρόσφατα [4-7]. Οι μέθοδοι αυτές υπερνικούν πολλά από τα προβλήματα που σχετίζονται με την δημιουργία του πλέγματος, με την εξάλειψή του κατά την διαδικασία εύρεσης της λύσης. Αυτό τις καθιστά πιο ευέλικτες σε δύσκολες γεωμετρίες καθώς το πλέγμα μπορεί εύκολα να πυκνωθεί στις δύσκολες περιοχές των δομών που μελετώνται.

Το χωρικό πεδίο εφαρμογής των διαφορικών εξισώσεων συχνά διακριτοποιείται στη μορφή πλέγματος. Ο αυστηρός ορισμός του πλέγματος αναφέρεται στο χωρίο που περικλείεται μεταξύ των γραμμών ενός δικτύου, που δημιουργείται όταν ενωθούν οι κόμβοι του χωρικού πεδίου με έναν προκαθορισμένο τρόπο. Ειδικότερα, στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών το πλέγμα καλείται δίκτυο κόμβων (grid), στους πεπερασμένους όγκους σύνολο κελιών (cell) και στα πεπερασμένα στοιχεία το πλέγμα αποτελείται από σύνολο στοιχείων (element). Η ορολογία που χρησιμοποιείται είναι διαφορετική για κάθε μέθοδο, μιας και τα δίκτυα, τα κελιά και τα στοιχεία κάθε φορά περικλείουν διαφορετικό φυσικό νόημα. Όλα, όμως, ανεξαιρέτως αναφέρονται ως πλέγμα, σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό. Το πιο σημαντικό στοιχείο που θα πρέπει να τονιστεί είναι ότι στις συμβατικές αριθμητικές μεθόδους το πλέγμα σε κάθε περίπτωση πρέπει να προκαθορίζεται παρέχοντας πληροφορίες για την αλληλεξάρτηση των κόμβων του πλέγματος. Τελικά, χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλα προκαθορισμένο πλέγμα και εφαρμόζοντας αυστηρά συγκεκριμένες μαθηματικές μεθόδους, το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων προσεγγίζεται από ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Το προκύπτων σύστημα, γραμμικό ή μη-γραμμικό, επιλύεται με συμβατικές ή και πιο εξελιγμένες τεχνικές επίλυσης αλγεβρικών συστημάτων, παρέχοντας μια αριθμητική προσεγγιστική λύση για το σύστημα.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει εξελιχθεί και εφαρμόζεται με θεαματικά αποτελέσματα για στατικές και δυναμικές, γραμμικές ή μη-γραμμικές, αναλύσεις τάσεων σε στερεά και σε κατασκευές, καθώς επίσης και στη ροή των ρευστών[10,16]. Τα περισσότερα προβλήματα που παρουσιάζονται στα πεδία της στατικής και των κατασκευών επιλύονται με τη

χρήση ενός μεγάλου αριθμού εμπορικών υπολογιστικών πακέτων, που κάνουν χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Παρόλα αυτά, κάποια όρια των μεθόδων αυτών έχουν γίνει εμφανή.

Η δημιουργία υπολογιστικού πλέγματος είναι αναγκαία. Για τις συμβατικές τεχνικές το κομμάτι αυτό της προσομοίωσης είναι από τα πιο χρονοβόρα τμήματα της όλης διαδικασίας, παρόλο που η υπολογιστική ισχύς των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει αυξηθεί δραστικά. Εντέλει, είναι αναγκαίο η όλη διαδικασία δημιουργίας του πλέγματος να είναι πλήρως αυτοματοποιημένη χωρίς την ανθρώπινη παρέμβαση, ιδιαίτερα για προβλήματα περίπλοκα που λαμβάνουν χώρα σε τρισδιάστατα χωρικά πεδία.

Τα τελευταία χρόνια πλήθος απλεγματικών μεθόδων έχουν προταθεί και αναπτυχθεί για τη μελέτη προβλημάτων στον τομέα της στατικής και της ρευστομηχανικής. Εδώ γεννάται το ερώτημα πώς θα μπορούσε να χαρακτηριστεί μια μέθοδος απλεγματική. Το προκαθορισμένο πλέγμα πρέπει να μην είναι απαραίτητο, τουλάχιστον κατά τη διαδικασία εύρεσης της τιμής της άγνωστης συνάρτησης. Το ιδανικό θα ήταν το πλέγμα να μην είναι απαραίτητο καθ' όλη τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος μιας δεδομένης αυθαίρετης γεωμετρίας, αλλά μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί ιδανική απλεγματική μέθοδος.

Οι υπάρχουσες απλεγματικές μέθοδοι έχουν κοινά χαρακτηριστικά γνωρίσματα, αλλά διαφέρουν στον τρόπο προσέγγισης της άγνωστης συνάρτησης και στη μέθοδο εφαρμογής τους. Οι μέθοδοι της απλεγματικής διαμόρφωσης δημιουργούν ένα αλγεβρικό σύστημα για όλο το χωρικό πεδίο χωρίς την ύπαρξη ενός πλέγματος και χωρίς ουσιαστικά να λαμβάνουν γνώση για την αλληλεξάρτηση των κόμβων του χωρικού πεδίου. Γίνεται φανερό ότι αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούν ένα σύνολο από σημεία-κόμβους, τυχαία ή με δομημένο τρόπο κατανεμημένα στα όρια και στο εσωτερικό του χωρικού πεδίου. Οι κόμβοι αυτοί περιγράφουν το χωρικό πεδίο και δεν χρησιμοποιούνται για να το διακριτοποιήσουν.

Οι μέθοδοι αυτές έχουν μια αυξανόμενη δυναμική όσον αφορά την αντιμετώπιση και την επίλυση των πολύπλοκων φυσικών και μηχανικών προβλημάτων και εφαρμογών που προαναφέρθηκαν. Έτσι, με την απουσία πλέγματος και διασύνδεσης των κόμβων, η διαδικασία προσαρμογής των αριθμητικών λύσεων μπορεί να εφαρμοστεί με μεγαλύτερη ευκολία. Δεν είναι, λοιπόν, αναγκαίο να προαναφερθεί ο τρόπος σύνδεσης των κόμβων, δίνοντας τη δυνατότητα μεγαλύτερης ευκολίας στην εισαγωγή ή στην εξάλειψη κόμβων οπουδήποτε, στο εσωτερικό ή στα όρια του χωρικού πεδίου, και οποιαδήποτε χρονική στιγμή αυτό επιλεγεί.

Η εμφάνιση των απλεγματικών μεθόδων χρονολογείται με τη μέθοδο Υδροδυναμικής Ομαλών Σωματιδίων (SPH), που χρησιμοποιήθηκε για μοντελοποίηση αστροφυσικών φαινομένων από τους Gingold και Monaghan το 1977. Παρόλα αυτά, η έρευνα στις απλεγματικές μεθόδους έχει γίνει δραστική μετά τη δημοσίευση της μεθόδου Διάχυσης Στοιχείων (Diffuse Element Method) από τους Nayroles, Touzot και Villon το έτος 1992. Μέχρι

σήμερα έχουν προταθεί πολλές τέτοιες μέθοδοι, οι οποίες μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Στις μεθόδους που βασίζονται στις ισχυρές μορφές (strong-forms), όπου λύνεται αυτή καθαυτή η διαφορική εξίσωση, και στις μεθόδους που βασίζονται στην ασθενή μορφή (weak-forms) [17]. Η διαδικασία για να πάρει το πρόβλημα την ασθενή μορφή ξεκινά με τον πολλαπλασιασμό των διαφορικών εξισώσεων με μια αυθαίρετη συνάρτηση βάρους (test function). Στη συνέχεια γίνεται μια ολοκλήρωση των εξισώσεων και εφαρμόζεται το θεώρημα Green-Gauss ώστε να μειωθεί η τάξη της διαφορικής εξίσωσης.

Η μέθοδος lattice-Boltzmann (LB) αποτελεί μια εναλλακτική και αρκετά υποσχόμενη αριθμητική μέθοδο προσομοίωσης της ροής ρευστών. Η μέθοδος εφαρμόζει τα συμπεράσματα της κινητικής θεωρίας και της θερμοδυναμικής σε ένα μεσοσκοπικό επίπεδο, διακριτού χώρου, χρόνου, μάζας και με διακριτές ταχύτητες. Η εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος είναι η εξίσωση Boltzmann, στην μορφή που λαμβάνει στο διακριτό αυτό χώρο. Η διακριτοποίηση του χώρου επιτυγχάνεται με την εισαγωγή δικτύου, το οποίο είναι ικανό να αναπαραστήσει τις ιδιότητες του. Η αθροιστική συμπεριφορά των «σωματιδίων» του διακριτού χώρου αναπαριστούν εν τέλει την μακροσκοπική συμπεριφορά της ροής αναπαράγοντας τις διαφορικές εξισώσεις συνέχειας και ορμής. Η ευελιξία της μεθόδου LB στην αντιμετώπιση περίπλοκων και συχνά χρονομεταβαλλόμενων συνοριακών συνθηκών το καθιστούν ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο στην προσομοίωση ροής [8,9][19-23].

Κεφάλαιο 2: Η ΜΕΘΟΔΟΣ MESHLESS LOCAL PETROV-GALERKIN (MLPG)

2.1 Εισαγωγικά

Οι απλεγματικές μέθοδοι που βασίζονται στις ασθενείς μορφές μπορούν να χωρισθούν σε δύο κατηγορίες. Σε αυτές που χρησιμοποιούν ολικές ασθενείς μορφές (global weak forms), όπου οι διαφορικές εξισώσεις ολοκληρώνονται σε ολόκληρο το χωρίο του προβλήματος, και σε αυτές που χρησιμοποιούν τοπικές ασθενείς μορφές (local weak forms), όπου οι διαφορικές εξισώσεις ολοκληρώνονται σε δευτερογενείς τομείς, για κάθε κόμβο ξεχωριστά.

Πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί με βάση τις ολικές ασθενείς μορφές. Οι συναρτήσεις βάρους (test) και δοκιμής (trial), εκφράζουν το βάρος της ολοκλήρωσης και την προσέγγιση της άγνωστης συνάρτησης, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις αυτές βασίζονται στους κόμβους και αντικαθίστανται με μεθόδους απλεγματικών παρεμβολών. Οπότε εξακολουθούν να απαιτούν ορισμένους κόμβους ή ένα υπόστρωμα κελιών για την εκτέλεση των ολοκληρωμάτων σε ολόκληρο το χώρο. Οι απαιτήσεις αυτές περιορίζουν τις συγκεκριμένες μεθόδους στο να γίνουν πράγματι απλεγματικές.

Αντίθετα, η MLPG προσέγγιση βασίζεται στην έκφραση των μερικών διαφορικών εξισώσεων στις τοπικές ασθενείς μορφές, δηλαδή στην έκφρασή τους πάνω σε δευτερογενείς τομείς[4,5],[24-27]. Χρησιμοποιεί απλεγματικές παρεμβολές για τις συναρτήσεις δοκιμής (trial) και βάρους (test), και υπολογίζει τα ολοκληρώματα των ασθενών μορφών εντός των τοπικών δευτερευόντων τομέων. Έτσι η MLPG προσέγγιση γίνεται σε ένα γενικό πλαίσιο, με σκοπό την ανάπτυξη μιας πραγματικά απλεγματικής μεθόδου, ή πιο σωστά, μιας μεθόδου που βρίσκεται ένα βήμα πιο κοντά στην ιδανική απλεγματική, για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων, ειδικά για εκείνα με σοβαρή στρέβλωση, ασυνέχειες και κινούμενο όριο. Λόγω της έλλειψης της σύνδεσης των κόμβων η μέθοδος MLPG είναι υποψήφια για υπολογιστικούς αλγορίθμους υψηλής απόδοσης. Αξιόλογες επιτυχίες της μεθόδου έχουν αναφερθεί στην επίλυση προβλημάτων μεταφοράς-διάχυσης[4,5,6], σε προβλήματα μηχανικής, καθώς και στην επίλυση της εξίσωσης Navier-Stokes[24-27].

Στη συμβατική μέθοδο Galerkin οι συναρτήσεις δοκιμής (trial) και βάρους (test) επιλέγονται από τον ίδιο συναρτησιακό χώρο. Αντίθετα στη μέθοδο MLPG οι αντίστοιχες συναρτήσεις μπορούν να είναι αρκετά διαφορετικές. Συγκεκριμένα, η συνάρτηση βάρους (test) μπορεί να είναι οποιαδήποτε "βολική" συνάρτηση που ορίζεται στον τομέα υποστήριξης Ω_{te}. Επίσης τα μεγέθη καθώς και τα σχήματα των δύο τομέων υποστήριξης (Ω_{te} Ω_{tr}) μπορούν

κάλλιστα να είναι διαφορετικά. Τα παραπάνω καθιστούν την μέθοδο πολύ βολική, αφού της δίνουν τη δυνατότητα να συμπεριλάβει άλλες απλεγματικές μεθόδους σαν ειδικές περιπτώσεις.

Παρόλο που η προσέγγιση των τοπικών ασθενών μορφών θα δώσει παρόμοια περιγραφή με αυτή που προκύπτει από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις από την προσέγγιση Galerkin των ολικών ασθενών μορφών, η τοπική ασθενής μορφή θα οδηγήσει με φυσικό τρόπο στην κατασκευή του συνολικού πίνακα, όχι μέσω της ένταξής του σε ένα συνεχόμενο πλέγμα και την συνένωση των μητρών που προκύπτουν από τον κάθε κόμβο, αλλά μέσω της ολοκλήρωσης σε κάθε δευτερεύοντα τομέα ξεχωριστά.

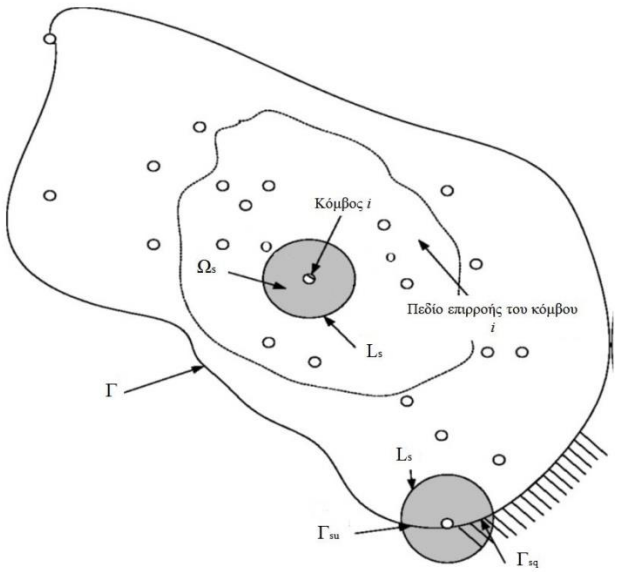
2.2 Περιγραφή της μεθόδου

Ας θεωρήσουμε τη γραμμική εξίσωση Poisson σε ένα χωρίο Ω που περικλείεται από το σύνορο Γ, η οποία εκφράζεται:

$$\nabla^2 u(x) = p(x) \tag{2.1}$$

όπου p είναι μια δεδομένη συνάρτηση κατανομής. Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \ \text{στο} \ \Gamma_u \\ \frac{\partial u}{\partial n} &\equiv q = \bar{q} \ \text{στο} \ \Gamma_q \end{aligned} \tag{2.2}$$



Εικόνα 2.1: Σχηματικά η μέθοδος MLPG

Με $\Gamma = \Gamma_u \bigcup \Gamma_q$ Τα $\bar{u}$ και $\bar{q}$ εκφράζουν το προκαθορισμένο δυναμικό και τη ροή αυτού στα αντίστοιχα όρια. Το $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο και με κατεύθυνση προς τα έξω, του συνόρου Γ. Η έκφραση του προβλήματος, στην τοπική μη συμμετρική ασθενή μορφή, Local Unsymmetric Weak Formulation (LUSWF1) είναι η εξής:

$$\int_{\Omega_s} (\nabla^2 u - p) v d\Omega = 0 \tag{2.3}$$

όπου u είναι η συνάρτηση δοκιμής (trial) και v η συνάρτηση βάρους (test). Ο χαρακτηρισμός «μη συμμετρική» που αναφέρθηκε παραπάνω, υποδηλώνει ότι η συνάρτηση δοκιμής στην παραπάνω σχέση απαιτείται να έχει πρώτης τάξης συνέχεια ενώ η συνάρτηση βάρους θα μπορούσε να έχει και ασυνέχειες. Χρησιμοποιώντας την σχέση: $(\nabla^2 u)v = u_{,ii}v = (u_{,i}v)_{,i} - u_{,i}v_{,i}$ και το θεώρημα της απόκλισης (Gauss) παίρνουμε μία συμμετρική μορφή, Local Symmetric Weak Formulation (LSWF):

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega_s} u_{,i} n_i v d\Gamma - \int_{\Omega_s} (u_{,i} v_{,i} + pv) d\Omega \\ &-a\int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) d\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου a μία παράμετρος που εισάγεται με σκοπό να επιβληθεί η ουσιαστική (Dirichlet) συνοριακή συνθήκη. Η παραπάνω μορφή δηλώνεται ως συμμετρική καθώς και οι δύο συναρτήσεις απαιτείται να είναι συνεχείς. Επιβάλλοντας τη φυσική (Neumann) συνοριακή συνθήκη και παρατηρώντας ότι $u_{,i} n_i = \frac{\partial u}{\partial n} = q$, η παραπάνω εξίσωση, παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_s} u_{,i} v_{,i} d\Omega - \int_{L_s} qv d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} qv d\Gamma + a\int_{\Gamma_u} u d\Gamma \\ &= -\int_{\Omega_s} pv d\Omega + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q} v d\Gamma + a\int_{\Gamma_u} \bar{u} d\Gamma \end{aligned} \tag{2.5}$$

όπου Γ_{sq} και Γ_{su} είναι μέρη του συνόρου ολοκλήρωσης $\partial\Omega_s$ στα οποία έχουμε φυσική (Neumann) και ουσιαστική (Dirichlet) συνοριακή συνθήκη αντίστοιχα. Γενικά, εάν $\partial\Omega_s = \Gamma_s \bigcup L_s$ με Γ_s να είναι μέρος του συνόρου του δευτερογενή τομέα, που βρίσκεται στο γενικό σύνορο και L_s σύνορο του δευτερογενή τομέα που δεν σχετίζεται με το γενικό όριο, τότε $\Gamma_s = \partial\Omega_s \bigcap \Gamma$. Για ένα δευτερογενή τομέα που τοποθετείται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό του

χώρου του προβλήματος ισχύει $L_s = \partial\Omega_s$ και τα ολοκληρώματα Γ_{sq} και Γ_{su} δεν υπάρχουν. Τα παραπάνω φαίνονται στην Εικόνα 2.1.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί ότι για ένα τρισδιάστατο πρόβλημα, ο τομέας Ω_s μπορεί να είναι οποιοδήποτε απλό σχήμα εξυπηρετεί για την ολοκλήρωση, όπως μια σφαίρα, ένα ελλειψοειδές ή ένας κύβος. Αντίστοιχα, σε δισδιάστατο πρόβλημα ο τομέας αυτός συνηθίζεται να είναι ένας κύκλος, χωρίς να αποκλείεται η χρήση μιας έλλειψης, ενός τετραγώνου ή οποιουδήποτε βολικού σχήματος.

Αποσκοπώντας στην απλοποίηση της εξίσωσης (2.5), μπορεί να επιλεγεί συνάρτηση βάρους (test) τέτοια ώστε το ολοκλήρωμά της στο σύνορο L_s να μηδενίζεται, ή τέτοια ώστε η παράγωγός της στον τομέα Ω_s να μηδενίζεται.

Ξαναγυρνώντας στην εξίσωση (2.3) και χρησιμοποιώντας τη σχέση $(\nabla^2 u)v = u_{,ii}v = (u_{,i}v)_{,i} - u_{,i}v_{,i}$ καθώς και το θεώρημα της απόκλισης (Gauss) δύο φορές παίρνουμε μία μη συμμετρική ασθενή μορφή (LUSWF2) του προβλήματος:

$$\int_{\partial\Omega_s} u_{,i}n_i v d\Gamma - \int_{\partial\Omega_s} uv_{,i}n_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} uv_{,ii} d\Omega - \int_{\Omega_s} pv d\Omega = 0 \qquad (2.6)$$

Αυτή είναι μη συμμετρική μορφή καθώς η συνάρτηση u πρέπει απλά να είναι συνεχής ενώ η v απαιτείται να έχει πρώτης τάξης συνέχεια. Επιβάλλοντας τη φυσική (Neumann) και την ουσιαστική (Dirichlet) συνοριακή συνθήκη και χρησιμοποιώντας τη σχέση $u_{,i}n_i = \frac{\partial u}{\partial n} = q$, όπως παραπάνω, η εξίσωση παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} &\int_{L_s} qv d\Gamma + \int_{L_s} uv_{,i}n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} qv d\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} uv_{,i}n_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} uv_{,ii} d\Omega \\ &= \int_{\Omega_s} pv d\Omega - \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q}v d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \bar{u}v_{,i}n_i d\Gamma \end{aligned} \qquad (2.7)$$

2.3 Απλεγματικές προσεγγίσεις για τη συνάρτηση δοκιμής

Πολλές μέθοδοι έχουν προταθεί και χρησιμοποιηθεί ώστε να προσεγγιστεί η συνάρτηση δοκιμής (trial) πάνω σε μια αυθαίρετη περιοχή, χρησιμοποιώντας μόνο τις τιμές της σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων στον τομέα, χωρίς ωστόσο να χρησιμοποιείται ένα πλέγμα. Σε γενικές γραμμές, σε μια απλεγματική μέθοδο, η οποία εξακολουθεί να διατηρεί τον τοπικό χαρακτήρα της αριθμητικής εφαρμογής, χρησιμοποιεί μια τοπική παρεμβολή ή προσέγγιση για την εύρεση των τιμών της συνάρτησης δοκιμής της άγνωστης μεταβλητής σε κάποιους τυχαία

κατανεμημένους κόμβους. Η δημιουργία των συναρτήσεων αυτών, οι οποίες καλούνται συναρτήσεις βάσης (shape functions) είναι το κεντρικό και, ίσως το σημαντικότερο κομμάτι στις μεθόδους απλεγματικής διαμόρφωσης. Κομβικό σημείο είναι ο τρόπος δημιουργίας αυτών των συναρτήσεων, που επιτυγχάνεται με τη χρήση σημείων, τυχαία ή και δομημένα, κατανεμημένων στο σύνορο και στο εσωτερικό του χωρικού πεδίου. Με το τρόπο αυτό δεν είναι αναγκαία η ύπαρξη ενός πλέγματος που να δηλώνει τον τρόπο σύνδεσης των κόμβων μεταξύ τους. Είναι λοιπόν φανερό, ότι η ανάπτυξη πιο εξελιγμένων μεθόδων αναφορικά με τη δημιουργία συναρτήσεων βάσης είναι, στις μέρες μας, ένα από τα πιο ενεργά πεδία έρευνας στο τομέα αυτό. Τα τελευταία χρόνια ένας σημαντικός αριθμός τεχνικών κατασκευής συναρτήσεων βάσεων έχουν προταθεί. Ακολουθεί μία κατηγοριοποίηση των υπαρχουσών μεθόδων που έχει προταθεί[28]:

1. Μέθοδος αναπαράστασης με πεπερασμένα ολοκληρώματα, που περιλαμβάνει:
- i. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)
- ii. Reproducing kernel particle method (RKPM)
- iii. General kernel reproduction method (GKR)

2. Μέθοδος αναπαράστασης με πεπερασμένες σειρές, που περιλαμβάνει:

α. Moving Least squares (MLS):
- i. MLS approximation
- ii. Modified MLS approximation

β. Point interpolation methods (PIM):
- i. Polynomial PIM
- ii. Radial PIM ή Radial basis function(RBF)

γ. Partition of unity (PU) methods:
- i. Partition of unity finite element (PUFE)
- ii. hp-clouds

δ. Finite elements methods:
- i. Element-based interpolation

3. Μέθοδος αναπαράστασης με πεπερασμένες διαφορές, που περιλαμβάνει:
- i. Finite difference methods (FDM) (regular grids)
- ii. Generalized finite difference methods (GFDM) (irregular grids)
- iii. Finite point method (FPM) (irregular grids)

Οι μέθοδοι αναπαράστασης με πεπερασμένα ολοκληρώματα είναι σχετικά πρόσφατες. Παρόλα αυτά, κατέχουν μια δεσπόζουσα θέση ανάμεσα στις υπόλοιπες μεθόδους μη-πλεγματικής διαμόρφωσης, κυρίως εξαιτίας της ανάπτυξης της μεθόδου Υδροδυναμικής

ομαλών σωματιδίων (SPH). Η αναπαράσταση της άγνωστης συνάρτησης επιτυγχάνεται με τη χρήση πληροφορίας προερχόμενης τοπικά (περιοχή επιρροής) μέσω ολοκληρωτικών μορφών. Οι μέθοδοι αναπαράστασης με πεπερασμένα σειρές έχουν μια μακρά ιστορία ανάπτυξης και εξέλιξης. Η χρήση και η εφαρμογή τους στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι ευρέως διαδεδομένη με εντυπωσιακά αποτελέσματα. Αυτός ήταν και ο ισχυρότερος λόγος που χρησιμοποιούνται και στις μεθόδους μη πλεγματικής διαμόρφωσης.

Οι μέθοδοι αναπαράστασης με πεπερασμένα διαφορές χρησιμοποιούνται, επίσης, επί μακρόν. Η σύγκλιση της μεθόδου εξασφαλίζεται μέσω της θεωρίας αναπτύξεως συναρτήσεων με σειρές McLaurin ή γενικότερα Taylor. Χρησιμοποιούνται κυρίως, για την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων που εκφράζονται στην ισχυρή τους μορφή, παρέχοντας έτσι την ισχυρή και όχι την ασθενή λύση. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η αναπαράσταση με πεπερασμένες σειρές, και συγκεκριμένα η προσέγγιση των MLS, η οποία παρουσιάζεται παρακάτω.

2.4 Προσέγγιση με MLS

Η μέθοδος των κυλιόμενων ελαχίστων τετραγώνων (MLS) δημιουργήθηκε και αναπτύχθηκε κατά την διαδικασία ερευνών για νέες τεχνικές προσέγγισης δεδομένων και κατασκευής επιφανειών.

Θεωρούμε μια πεπλεγμένη συνάρτηση $u(x)$, η οποία ορίζεται στο χωρίο Ω. Η προσέγγιση της συνάρτησης σε ένα τυχαίο σημείο $\boldsymbol{x}$ συμβολίζεται ως $u^h(x)$. Σε αυτή τη μέθοδο το πρώτο στάδιο είναι να γραφεί η υπό μελέτη συνάρτηση με τη μορφή του αθροίσματος:

$$u^h(x) = \sum_j^m p_j(x) a_j(x) \equiv \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \tag{2.8}$$

όπου m είναι ο αριθμός των μονωνύμων και $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ είναι το διάνυσμα των συντελεστών, το οποίο δίδεται ως:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \{a_0(x) \quad a_1(x) \quad ... \quad a_m(x)\} \tag{2.9}$$

Στην εξίσωση (2.8) το διάνυσμα $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ ορίζεται ως το διάνυσμα των συναρτήσεων βάσεως και, πολύ συχνά, απαρτίζεται από τα μονώνυμα ελάχιστης τάξης, τα οποία εξασφαλίζουν την πληρότητα της μεθόδου. Εδώ θα αναφερθούμε στη χρήση πολυωνυμικών βάσεων. Στη μονοδιάστατη περίπτωση, μια πολυωνυμική βάση τάξεως *m* δίνεται ως:

$$\boldsymbol{p^T}(\boldsymbol{x}) = \{ p_0(x) \quad p_1(x) \quad ... \quad p_m(x) \} \equiv \{ 1 \quad x \quad ... \quad x^m \} \tag{2.10}$$

και στη δισδιάστατη περίπτωση:

$$\boldsymbol{p^T}(\boldsymbol{x}) = p^T(x,y) \equiv \{ 1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2 \quad ... \quad x^m \quad y^m \} \tag{2.11}$$

Με παρόμοιο τρόπο γίνεται και η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις. Το διάνυσμα $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ των συντελεστών στη σχέση (2.8) καθορίζεται χρησιμοποιώντας τις τιμές της συνάρτησης σε ένα σύνολο κόμβων που περιλαμβάνονται στο πεδίο επιρροής (support domain) του σημείου $\boldsymbol{x}$.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι οι συντελεστές του διανύσματος $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. Οι συντελεστές αυτοί μπορούν να προσδιοριστούν ελαχιστοποιώντας τη σταθμισμένη Ευκλείδεια νόρμα ($\boldsymbol{L_2}$):

$$J = \sum_{i=1}^{n} W(x - x_i)[\, p^T(x_i) a(x) - u_i \,]^2 \tag{2.12}$$

όπου n είναι ο αριθμός των κόμβων στο πεδίο επιρροής του σημείου $\boldsymbol{x}$, για τους οποίους η σταθμισμένη συνάρτηση έχει τιμή διάφορη του μηδενός ($W(x - x_i) \neq 0$), u_i είναι η τιμή της άγνωστης συνάρτησης στο σημείο $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_i}$. Η εξίσωση (2.12) είναι μια συνάρτηση, που παρουσιάζει την σταθμισμένη διαφορά μεταξύ των προσεγγιστικών τιμών και των τιμών της άγνωστης συνάρτησης στους κόμβους του χωρικού πεδίου.

Η ελαχιστοποίηση της ποσότητας J ως προς τους συντελεστές του διανύσματος $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ απαιτεί:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \tag{2.13}$$

οδηγώντας στο ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\sum_{i=1}^{n} W(x - x_i)\, p(x_i) p^T(x_i) a(x_i) = \sum_{i=1}^{n} W(x - x_i)\, p(x_i) u_i \tag{2.14}$$

το οποίο γράφεται σε πιο συμπυκνωμένη μορφή:

$$\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{a}(x) = \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{U}_s \tag{2.15}$$

όπου $\boldsymbol{U}_s$ είναι το διάνυσμα που περιγράφει τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης στους κόμβους του πεδίου συνοχής του σημείου $\boldsymbol{x}$, και $\boldsymbol{A}(x)$ ο πίνακας ροπής (moment matrix) που ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{i=1}^{n} W(x - x_i)\, p(x_i) p^T(x_i) \tag{2.16}$$

Πιο συγκεκριμένα, για ένα δισδιάστατο πρόβλημα και για μια γραμμική βάση $(m = 3, p^T(x, y) = \{1 \;\; x \;\; y\})$ ο πίνακας $\boldsymbol{A}(x)$ είναι ένας συμμετρικός 3×3 πίνακας που αναλυτικά γράφεται ως εξής:

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} W_i(x) & \sum_{i=1}^{n} x_i W_i(x) & \sum_{i=1}^{n} y_i W_i(x) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i W_i(x) & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 W_i(x) & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i W_i(x) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i W_i(x) & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i W_i(x) & \sum_{i=1}^{n} y_i^2 W_i(x) \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Ο πίνακας $\boldsymbol{B}(x)$ στην εξίσωση (2.15) ορίζεται:

$$\boldsymbol{B}(x) = [W_1(x)p(x_1) \quad W_2(x)p(x_2) \quad \ldots \quad W_n(x)p(x_n)] \tag{2.18}$$

του οποίου το μέγεθος είναι $3\times n$ και γράφεται αναλυτικά:

$$\boldsymbol{B}(x) = \begin{bmatrix} W_1(x) & W_2(x) & \ldots & W_n(x) \\ x_1 W_1(x) & x_2 W_2(x) & \ldots & x_n W_n(x) \\ y_1 W_1(x) & y_2 W_2(x) & \ldots & y_n W_n(x) \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Επιλύοντας τη σχέση (2.15) ως προς $\boldsymbol{a}(x)$, έχουμε:

$$\boldsymbol{a}(x) = \boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{U}_s \tag{2.20}$$

Ξαναγράφοντας την εξίσωση (2.8), παίρνουμε:

$$u^h(x) = \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{s}} \equiv \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{s}} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x)u_i \tag{2.21}$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση βάσης των Κυλιόμενων Ελάχιστων Τετραγώνων του χώρου του προβλήματος. Αναφορικά με τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}u^h(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x)u_i = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_i(x)\right\}u_i \qquad x_j = x, y, z \tag{2.22}$$

η παράγωγος των συναρτήσεων βάσεως υπολογίζεται ως:

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x))}{\partial x_j} = \frac{\partial\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}}{\partial x_j}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}\frac{\partial\boldsymbol{A}^{-1}}{\partial x_j}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_j} \tag{2.23}$$

Όπου $\frac{\partial\boldsymbol{A}^{-1}}{\partial x_j} = \boldsymbol{A}^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x_j}\boldsymbol{A}^{-1}$. Με την ίδια μεθοδολογία μπορεί να υπολογιστεί και η δεύτερη παράγωγος.

2.5 Επιλογή της σταθμισμένης συνάρτησης

Η εξίσωση (2.21) δείχνει ότι η συνέχεια των συναρτήσεων βάσεως Φ στη μέθοδο των Κυλιόμενων Ελάχιστων Τετραγώνων, εξαρτάται από τη συνέχεια των συναρτήσεων $\boldsymbol{p}$ καθώς και από την ομαλότητα των πινάκων $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$. Η ομαλότητα αυτή είναι αλληλένδετη με την ομαλότητα της σταθμισμένης συνάρτησης. Επομένως, η σταθμισμένη συνάρτηση παίζει έναν από τους πιο σημαντικούς ρόλους στην απόδοση της MLS προσέγγισης. Μέχρι σήμερα, η σταθμισμένη συνάρτηση $W(x-x_i)$ επιλέγεται έτσι ώστε να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- $W(x-x_i) > 0$ εντός του πεδίου στήριξης
- $W(x-x_i) = 0$ εκτός του πεδίου στήριξης
- Η συνάρτηση $W(x-x_i)$ φθίνει μονότονα από το σημείο ενδιαφέροντος x
- Η συνάρτηση $W(x-x_i)$ είναι επαρκώς ομαλή, ειδικά στο σύνορο του Ω_{tr}.

Η τελευταία συνθήκη εξασφαλίζει μια ομαλή αποδοχή και απόρριψη κόμβων, όταν υπάρχει κινούμενο πεδίο στήριξης. Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται η συμβατότητα της σταθμισμένης συνάρτησης σε ολόκληρο το χωρικό πεδίο.

Σε περίπτωση που οι προαναφερθείσες συνθήκες πληρούνται και δεν μπορεί να βρεθεί εγγενώς ή με φυσικό τρόπο το ποια ακριβώς πρέπει να είναι η σταθμισμένη συνάρτηση, οπότε η επιλογή γίνεται κατά κάποιον τρόπο αυθαίρετα. Πρακτικά, η εκθετική συνάρτηση καθώς και οι spline συναρτήσεις χρησιμοποιούνται κατά κόρον. Ανάμεσα σε αυτές οι πιο δημοφιλείς σταθμισμένες συναρτήσεις είναι:

● Η κυβική spline συνάρτηση ($W1$), η οποία έχει την παρακάτω μορφή

$$W1 = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r_i^2 + 4r_i^3 & r_i \le 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r_i + 4r_i^2 - \frac{4}{3}r_i^3 & 0.5 < r_i \le 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \tag{2.24}$$

και έχει δεύτερης τάξης συνέχεια.

● Η τεταρτοβάθμια spline συνάρτηση ($W2$) δίνεται από

$$W2 = \begin{cases} 1 - 6r_i^2 + 8r_i^3 - 3r_i^4 & r_i \le 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \tag{2.25}$$

και έχει τρίτης τάξης συνέχεια.

● Η εκθετική συνάρτηση ($W3$) εκφράζεται ως:

$$W3 = \begin{cases} e^{-\left(\frac{r_i}{a}\right)^2} & r_i \le 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \tag{2.26}$$

όπου a είναι μια σταθερά που καθορίζει το σχήμα της συνάρτησης και $r_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w}$. Το $|x - x_i|$ εκφράζει την απόσταση του εκάστοτε σημείου x_i από το σημείο δειγματοληψίας x. Τέλος r_w είναι το μέγεθος του πεδίου στήριξης της σταθμισμένης συνάρτησης.

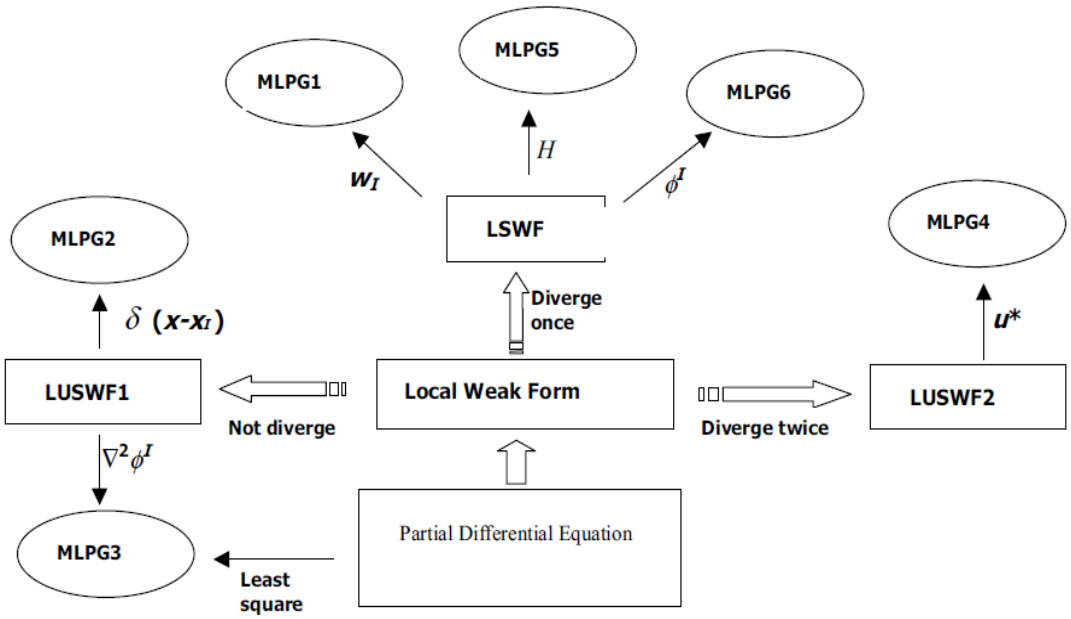
2.6 Διαφορετικές εκφράσεις της MLPG προσέγγισης

Όπως έχει προαναφερθεί, στη συμβατική μέθοδο Galerkin οι συναρτήσεις βάρους και δοκιμής επιλέγονται από τον ίδιο συναρτησιακό χώρο. Στη μέθοδο MLPG, οι αντίστοιχες συναρτήσεις μπορεί να είναι διαφορετικές: η συνάρτηση δοκιμής μπορεί να αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε από τις προσεγγίσεις που αναφερθήκαν παραπάνω, ενώ η συνάρτηση βάρους μπορεί να είναι εντελώς διαφορετική. Επιπλέον, το μέγεθος καθώς και το σχήμα των τομέων επί των οποίων η τιμή της συνάρτησης βάρους και δοκιμής είναι μη μηδενική μπορεί να είναι διαφορετικά. Επιλέγοντας διαφορετικές συναρτήσεις βάσης για τις δύο συναρτήσεις οδηγούμαστε σε διαφορετική προσεγγιστική μέθοδο. Χρησιμοποιώντας την MLS προσέγγιση για την συνάρτηση δοκιμής και βασιζόμενοι στην έννοια της MLPG μεθόδου, η συνάρτηση βάρους σε κάθε τοπικό χωρίο Ω_s μπορεί να επιλεγεί με διάφορους τρόπους [4,5]. Οι δημιουργοί της μεθόδου, προτείνουν έξι διαφορετικές συναρτήσεις βάρους που οδηγούν σε έξι διαφορετικές εκφράσεις της μεθόδου[27].

Η πρώτη, συμβολίζεται ως MLPG1, και η συνάρτηση βάρους της ολοκλήρωσης είναι η σταθμισμένη συνάρτηση της MLS προσέγγισης. Στην MLPG2, η συνάρτηση βάρους είναι η συνάρτηση "δέλτα" του Dirac. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν απαιτείται καμία αριθμητική ολοκλήρωση και ουσιαστικά λύνεται η ισχυρή μορφή. Το μειονέκτημα είναι ότι είναι απαραίτητος ο υπολογισμός δεύτερων παραγώγων, μια συνήθως δαπανηρή διαδικασία. Ως MLPG3 χαρακτηρίζεται η μέθοδος, όπου η συνάρτηση βάρους είναι η διακριτοποιημένη συνάρτηση σφάλματος της εξίσωσης (2.12). Στη μέθοδο αυτή, τα ολοκληρώματα είναι περισσότερο πολύπλοκα. Ως εκ τούτου, είναι δύσκολο να εκτελεστούν οι απαραίτητες διαδικασίες για τη δημιουργία του συνολικού, προς επίλυση πίνακα. Στην MLPG4 χρησιμοποιείται μια τροποποιημένη θεμελιώδης λύση της διαφορικής εξίσωσης. Το θετικό αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν απαιτείται ο υπολογισμός των παραγώγων, παρά μόνον στα σύνορα. Στην MLPG5 το ρόλο της συνάρτησης βάρους παίρνει η συνάρτηση βήματος, που ορίζεται στον χώρο Ω_s. Σε αυτή την περίπτωση αποφεύγονται τα ολοκληρώματα στον τομέα Ω_s. Στον συνολικό πίνακα περιλαμβάνεται μόνο ολοκλήρωμα στο σύνορο του τομέα υποστήριξης, το οποίο καθιστά τη μέθοδο αυτή πιο αποτελεσματική, με τη λύση να είναι πιο σταθερή, γρήγορη και ακριβής. Τέλος στην MLPG6 η συνάρτηση βάρους ταυτίζεται με την συνάρτηση βάσης (μέθοδος Galerkin). Πάλι η προς ολοκλήρωση ποσότητα είναι περίπλοκη, και συνεπώς υπολογιστικά δύσκολη. Τα παραπάνω φαίνονται στην Εικόνα 2.2

Έχει ερευνηθεί και δημοσιευθεί [4,26] ότι πιο ελπιδοφόρα από τις παραπάνω εκφράσεις, είναι η MLPG5, λόγο της απλότητας των υπολογισμών, αλλά και της σταθερότητας των λύσεων που παρέχει. Εφόσον χρησιμοποιείται μια γνωστή συνάρτηση βάρους για την τοπική ασθενή μορφή, κάθε ένα σημείο (και εδώ ένας τομέας Ω_s) θα αποφέρει μόνο μία αλγεβρική εξίσωση.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση δοκιμής u εντός του χαρακτηριστικού δευτερεύοντος τομέα Ω_s, παρεμβάλλεται χωρίς τις ιδιότητες της "δέλτα" συνάρτησης του Dirac και προσδιορίζεται από τις πλασματικές τιμές των κόμβων $\hat{u}^I$, των σημείων που υπάγονται στο πεδίο στήριξης. Ο αριθμός των εξισώσεων που θα προκύψουν πρέπει να ταυτίζεται με τον αριθμό των κόμβων στον χώρο του προβλήματος. Συνεπώς χρειαζόμαστε τόσους τοπικούς τομείς Ω_s όσους και ο αριθμός των κόμβων, προκειμένου να έχουμε ίσο αριθμό αγνώστων και εξισώσεων. Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιείται η μέθοδος MLPG5 (από εδώ και πέρα MLPG).



Εικόνα 2.2: Οι διαφορετικές εκφράσεις της MLPG μεθόδου

Κεφάλαιο 3: ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

3.1 Φαινόμενα Μεταφοράς

Το βασικό εργαλείο για την ανάλυση, την κατανόηση και τον έλεγχο της συμπεριφοράς συστημάτων που είναι εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας είναι τα φαινόμενα μεταφοράς.

Στις φυσικοχημικές διεργασίες τα προς μελέτη συστήματα αποτελούνται κυρίως από ρευστά, καθώς αυτά είναι πιο εύκολο να διακινηθούν, να αναμιχθούν και να αντιδράσουν, αφού είναι εύκολα παραμορφώσιμα. Η πληροφορία που χρειάζεται για να περιγραφούν τα συστήματα αυτά αφορά την κατανομή της μάζας, της ενέργειας και της ταχύτητας (ή της ορμής) των ρευστών στο χώρο και τον χρόνο. Έτσι, τα φαινόμενα μεταφοράς αφορούν τις αντίστοιχες ιδιότητες της ύλης, δηλαδή την μάζα (συγκέντρωση συστατικών), την ενέργεια και την ορμή.

Η μελέτη των αλλαγών, δηλαδή της χωρικής κατανομής και της χρονικής εξέλιξης για τις τρεις αυτές ιδιότητες βασίζεται στις αντίστοιχες αρχές διατήρησης: την αρχή διατήρησης της μάζας, η οποία ουσιαστικά λέει ότι η μάζα δεν καταστρέφεται ούτε δημιουργείται εκ του μηδενός, την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η οποία ουσιαστικά είναι ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος για συστήματα εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας, και την αρχή διατήρησης της ορμής η οποία ουσιαστικά είναι οι νόμοι κίνησης του Νεύτωνα, εφαρμοσμένοι σε κινούμενα ρευστά. Αξιοσημείωτο είναι ότι και οι τρεις αρχές δεν αποδεικνύονται, αλλά είναι αξιώματα τα οποία δεχόμαστε με βάση τη διαίσθηση καθώς και την επαλήθευση των συνεπειών τους με πειραματικές παρατηρήσεις.

Παρακάτω θα γίνει μια σύντομη παρουσίαση των εξισώσεων που εκφράζουν τις παραπάνω αρχές[1,2][29-31]. Αν θεωρήσουμε ένα ρευστό πυκνότητας ρ και ταχύτητας $\vec{u}$, η μαθηματική έκφραση της αρχής διατήρησης της μάζας είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \qquad (3.1)$$

Η σχέση αυτή καλείται εξίσωση συνέχειας. Για ένα ασυμπίεστο και ομογενές ρευστό η πυκνότητα είναι σταθερή τόσο ως προς το χρόνο όσο και ως προς τις χωρικές συντεταγμένες, επομένως:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \qquad (3.2)$$

Ακολουθεί, ο δεύτερος νόμος του Newton, που λέει ότι η μεταβολή της ορμής ενός στοιχείου ρευστού ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό. Οι δυνάμεις αυτές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δυνάμεις πίεσης (εσωτερικές), δυνάμεις εξωτερικές, όπως η βαρύτητα, και σε δυνάμεις ιξώδους (τριβών). Η τελική έκφραση της εξίσωσης της μεταβολής της ορμής, είναι η εξίσωση Navier-Stokes και εκφράζεται:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right)=-\nabla P+\mu\nabla^2\vec{u}+\vec{f} \tag{3.3}$$

όπου P η πίεση, μ το δυναμικό ιξώδες, και $\vec{f}$ η δύναμη που ασκείται στο ρευστό. Εν συνεχεία παρουσιάζεται η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας. Ο νόμος του Fourier για την μετάδοση θερμότητας σχετίζει την ροή της θερμότητας $(\vec{q})$ και την κλίση της θερμοκρασίας, με την σχέση $\vec{q}=-k\nabla T$, όπου k η θερμική αγωγιμότητα του μέσου. Θεωρώντας ότι δεν υπάρχει παραγωγή ενέργειας στο χώρο του προβλήματος η εξίσωση γράφεται:

$$\rho c_p\left(\frac{dT}{dt}+(\vec{u}\cdot\nabla)T\right)=\nabla\cdot(k\nabla T) \tag{3.4}$$

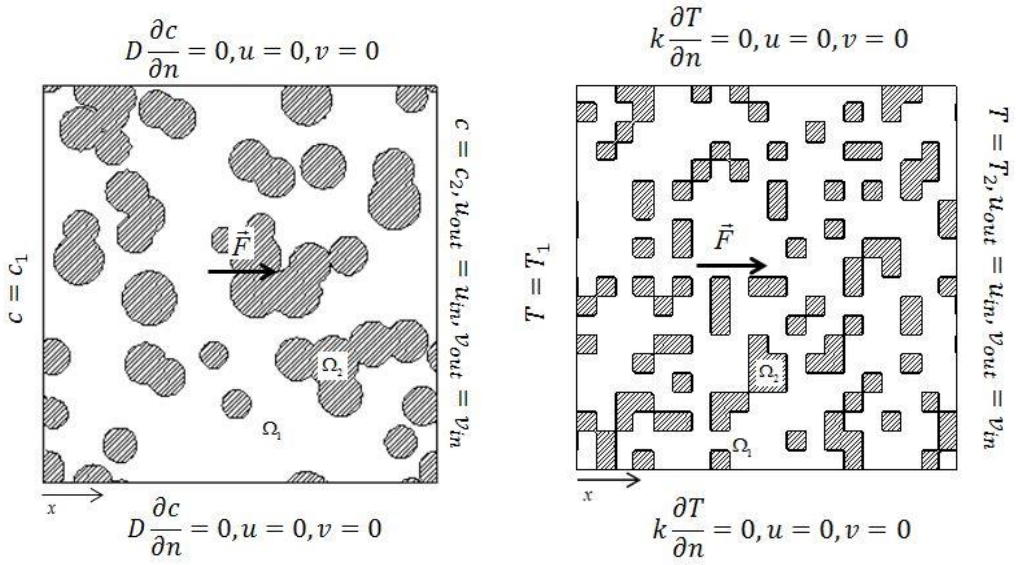
όπου c_p η γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση. Τέλος, θεωρούμε ότι σε ένα ρευστό (B) περιλαμβάνεται ένα συστατικό (A), του οποίου η συγκέντρωση c_A δεν επηρεάζει την πυκνότητα του ρευστού, λόγο της χαμηλής τιμής της. Ο νόμος του Fick συνδέει την γραμμομοριακή ροή λόγο διάχυσης $\vec{J}_A$ με την κλίση της συγκέντρωσης και διατυπώνεται για δυαδικά μίγματα $\vec{J}_A=-D_{AB}\nabla c_A$, όπου D_{AB} η σταθερά διάχυσης του συστατικού (A) στο μέσο (B). Θεωρώντας ότι το συστατικό αυτό δεν παράγεται ούτε καταστρέφετε στο χώρο του προβλήματος έχουμε:

$$\frac{dc_A}{dt}+(\vec{u}\cdot\nabla)c_A=\nabla\cdot(D_{AB}\nabla c_A) \tag{3.5}$$

Έχοντας κάνει μια επαρκή αναφορά στις εξισώσεις που περιγράφουν την μεταφορά μάζας και ενέργειας, εν συνεχεία θα τις εκφράσουμε στη μορφή των μεθόδων που θα χρησιμοποιηθούν.

3.2 Οι αδιαστατοποιήσεις και τα προβλήματα

Οι εξισώσεις που αναπτύχθηκαν παραπάνω θα επιλυθούν σε πεπλεγμένες, αλλά και απλές γεωμετρίες πορωδών μέσων. Δύο παραδείγματα μέσων τα οποία θα μελετηθούν σε αυτήν την εργασία φαίνονται στην Εικόνα 3.1. Σε αυτήν παρουσιάζονται επίσης οι συνοριακές συνθήκες των προβλημάτων που θα επιλυθούν. Η κινητήριος δύναμη για τα προβλήματα ροής είναι εξωτερικά επιβαλλόμενη και δρα κατά την x-διεύθυνση. Το πεδίο ροής επιβάλλεται να είναι περιοδικό, όπως και όλες οι δομές που θα μελετηθούν. Μηδενική ταχύτητα επιβάλλεται στα άλλα δύο τοιχώματα, καθώς και στη διεπιφάνεια μεταξύ των πόρων και του στέρεου όγκου του πορώδους μέσου. Όσον αφορά την μετάδοση θερμότητας, προκαλείται από μια διαφορά θερμοκρασίας που επιβάλλεται στα δύο απέναντι τοιχώματα. Το πάνω και κάτω σύνορο του μέσου θεωρείται θερμικά μονωμένο. Τέλος, η μεταφορά μάζας προκαλείται από μια βαθμίδα συγκέντρωσης, στην x-διεύθυνση, και επιβάλλεται μηδενική ροή του συστατικού στα υπόλοιπα τοιχώματα.



Εικόνα 3.1 Δύο από τις πορώδης δομές που θα μελετηθούν και οι συνοριακές συνθήκες των προβλημάτων.

Όσον αφορά τις φυσικές ιδιότητες των υλικών έχουμε:

$$\tilde{k}=\begin{Bmatrix}\tilde{k}_1+\tilde{b}_1\tilde{T}, x\in\Omega_1\\ \tilde{k}_2+\tilde{b}_2\tilde{T}, x\in\Omega_2\end{Bmatrix},\ \tilde{\rho}\tilde{c}_p=\begin{Bmatrix}\tilde{\rho}_1\tilde{c}_{p1}, x\in\Omega_1\\ \tilde{\rho}_2\tilde{c}_{p2}, x\in\Omega_2\end{Bmatrix},\ \tilde{D}=\begin{Bmatrix}\tilde{D}_1, x\in\Omega_1\\ \tilde{D}_2, x\in\Omega_2\end{Bmatrix},\ \tilde{\mu}=\tilde{\mu}_1, x\in\Omega_1 \qquad (3.6)$$

Η περισπωμένη (˜) θα χρησιμοποιείται στις διαστατές ποσότητες. Σε κάποια από τα παρακάτω προβλήματα η θερμική αγωγιμότητα, $\tilde{k}$, εξαρτάται από την θερμοκρασία. Σε αυτήν την εργασία θεωρείται με πρώτης τάξης προσέγγιση, ωστόσο μπορεί να γενικευθεί σε πιο

σύνθετες περιγραφές. Οι αδιαστατοποιημένες ποσότητες προσδιορίζονται με βάση τη γεωμετρία του χωρίου και τις συνοριακές συνθήκες:

$$x = \frac{\tilde{x}}{\tilde{L}},\ y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}},\ T = \frac{\tilde{T} - \tilde{T}_2}{\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2} \tag{3.7}$$

Όπως επίσης και τις φυσικές ιδιότητες του υλικού στους πόρους:

$$\begin{gathered} u_x = \frac{\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_x \tilde{L}}{\tilde{\mu}_1}, u_y = \frac{\tilde{\rho}_1 \tilde{u}_y \tilde{L}}{\tilde{\mu}_1}, P = \frac{\tilde{L}^2 \tilde{\rho}_1 \tilde{P}}{\tilde{\mu}_1^{\,2}}, F = \frac{\tilde{L}^3 \tilde{\rho}_1 \tilde{F}}{\tilde{\mu}_1^{\,2}}, t = \frac{\tilde{t}\tilde{k}_1}{\tilde{\rho}_1 \tilde{c}_1 \tilde{L}^2}, \\ k = \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}_1} = \begin{Bmatrix} 1 + b_1 T, x \in \Omega_1 \\ k_r + b_2 T, x \in \Omega_2 \end{Bmatrix}, \rho c_p = \frac{\tilde{\rho}\tilde{c}_p}{\tilde{\rho}_1 \tilde{c}_{p1}} = \begin{Bmatrix} 1, x \in \Omega_1 \\ \rho c_{p,r}, x \in \Omega_2 \end{Bmatrix} \end{gathered} \tag{3.8}$$

όπου

$$k_{\mathrm{r}} = \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1}, b_1 = \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{k}_1}, b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{k}_1}, b_{\mathrm{r}} = \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{b}_1}, \rho c_{\mathrm{pr}} = \frac{\tilde{\rho}\tilde{c}_{p2}}{\tilde{\rho}\tilde{c}_{p1}} \tag{3.9}$$

Στα προβλήματα μεταφοράς μάζας αλλάζει η αδιαστατοποίηση του χρόνου:

$$c = \frac{\tilde{c} - \tilde{c}_2}{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2}, t = \frac{\tilde{t}\tilde{D}_1}{\tilde{L}^2}, D = \frac{\tilde{D}}{\tilde{D}_1} = \begin{Bmatrix} 1, x \in \Omega_1 \\ D_r, x \in \Omega_2 \end{Bmatrix}, \tag{3.10}$$

Γράφοντας την αδιάστατη μορφή των εξισώσεων έχουμε:

$$\begin{gathered} \nabla \cdot U = 0 \\ (U \cdot \nabla)U = -\nabla P + \nabla^2 U + F \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{Pr}(U \cdot \nabla)T = \nabla \cdot (k \nabla T) \\ \frac{\partial c}{\partial t} + Sc(U \cdot \nabla)c = \nabla \cdot (D \nabla c) \end{gathered} \tag{3.11}$$

Όπου $U = (u_x, u_y)$, η ταχύτητα του ρευστού**.** $\mathrm{Pr} = \frac{\tilde{c}_{p1}\tilde{\mu}_1}{k_1}$, ο αδιάστατος αριθμός Prandlt, συγκρίνει διαδικασίες μοριακής διάχυσης της ορμής (ιξώδες) και θερμικής διάχυσης και αποτελεί ιδιότητα του ρευστού. Αντίστοιχα στην μεταφορά μάζας ο αριθμός που εμφανίζεται είναι ο αριθμός Schmidt $Sc = \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\rho}_1 \tilde{D}_1}$. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί η ομοιότητα των

εξισώσεων διάχυσης μάζας και διάχυσης θερμότητας. Η ανάλυση που θα ακολουθήσει αφορά την εξίσωση διάχυσης θερμότητας. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν εύκολα να γενικευθούν στα αντίστοιχα προβλήματα μεταφοράς μάζας.

Μια ευρεία κατηγορία από λύτες χρησιμοποιούν την εξίσωση Poisson για τον υπολογισμό της πίεσης. Το κοινό χαρακτηριστικό αυτών των μεθόδων είναι ότι οι διακριτοποιημένες εξισώσεις της συνέχειας και της ορμής συνδυάζονται ώστε να παράξουν μια διακριτή εξίσωση Poisson για την πίεση. Αυτές οι μέθοδοι απαιτούν τη χρήση εναλλασσόμενου πλέγματος (staggered mesh) για την αποφυγή παρασιτικών ταλαντώσεων στην πίεση. Οι ταλαντώσεις αυτές εμφανίζονται λόγω της διαφορικής εξίσωσης της ορμής, που είναι πρώτης τάξης ως προς την πίεση και δευτέρας για την ταχύτητα. Έτσι, στο ένα πλέγμα λαμβάνονται οι συνιστώσες της ταχύτητας και στο άλλο επιλύεται η πίεση.

Η χρήση, όμως, του εναλλασσόμενου πλέγματος αυξάνει, κατά πολύ, τις απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ. Μια εναλλακτική λύση είναι η έκφραση των εξισώσεων στη μορφή ταχύτητας-στροβιλότητας. Έτσι οι διαφορικές εξισώσεις είναι δεύτερης τάξης για όλες τις μεταβλητές. Παίρνοντας τον στροβιλισμό της εξίσωσης της ορμής και συνδυάζοντας την εξίσωση της συνέχειας με τον ορισμό της στροβιλότητας, $\omega = \nabla \times U$, έχουμε το σύνολο των εξισώσεων που θα επιλυθούν:

$$\nabla^2 u_x = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{3.12}$$

$$\nabla^2 u_y = \frac{\partial \omega}{\partial x} \tag{3.13}$$

$$(U\nabla)\omega - \nabla^2 \omega = 0 \tag{3.14}$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{Pr}(U\nabla)T = \nabla(k\nabla T) \tag{3.15}$$

3.3 Η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων

Η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων (3.12)-(3.15) στο χωρίο Ω_x γύρω από τον κόμβο *x*, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση βήματος (Heaviside step function) ως συνάρτηση βάρους, είναι:

$$\int_{\partial\Omega_x} \nabla u_x \hat{\mathbf{n}} d(\partial\Omega_x) = -\int_{\Omega_x} \frac{\partial \omega}{\partial y} d\Omega_x \tag{3.16}$$

$$\int_{\partial\Omega_x} \nabla u_{y\hat{\mathbf{n}}} d\left(\partial\Omega_x\right) = \int_{\Omega_x} \frac{\partial \omega}{\partial x} d\Omega_x \tag{3.17}$$

$$\int_{\partial\Omega_x} U\omega\hat{\mathbf{n}} d\left(\partial\Omega_x\right) - \int_{\partial\Omega_x} \nabla\omega_{\hat{\mathbf{n}}} d\left(\partial\Omega_x\right) = 0 \tag{3.18}$$

Με τις εξισώσεις σε αυτήν την μορφή, μηδενίζεται ο όρος της εξωτερικής δύναμης. Το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται με την επιβολή μιας παροχής ($\int_S U\hat{\mathbf{n}} dS = Q$) σαν συνοριακή συνθήκη εισόδου, η οποία θα οδηγεί σε αριθμό Reynolds ($\mathrm{Re} = \frac{\tilde{\rho}_1 < \tilde{u}_x > \tilde{L}}{\tilde{\mu}_1}$) , ίδιον με αυτόν που προκύπτει από την επιβολή της δύναμης. Με βάση αυτό γίνονται οι συγκρίσεις που ακολουθούν.

Μια επαναληπτική μέθοδος χρησιμοποιείται για την λύση των παραπάνω εξισώσεων. Η μέθοδος αυτή έχει ήδη πολλές επιτυχίες σε προβλήματα ροής [32-34]. Η στροβιλότητα στα σύνορα υπολογίζεται από τον ορισμό της $\omega = \nabla \times U$. Η διαδικασία ξεκινά με μια αρχική εκτίμηση του πεδίου ταχυτήτων, U , η οποία πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας $\nabla \cdot U = 0$, και υπολογίζεται η στροβιλότητα από τον ορισμό της. Εν συνεχεία, επιλύονται οι εξισώσεις (3.16)-(3.17), θεωρώντας γνωστή τη στροβιλότητα για τον υπολογισμό των ταχυτήτων U^* . Αυτό το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει, εν γένει δεν ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας $\nabla \cdot U^* \neq 0$. Προς τούτο, θα πρέπει η ταχύτητα U^* να διορθώνεται κατά έναν παράγοντα $\delta U^{\kappa+1}$, έτσι ώστε $U^{\kappa+1} = U^* + \delta U^{\kappa+1}$. Με την απαίτηση να ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$$\nabla \cdot U^* = -\nabla \cdot \delta U^{\kappa+1} \tag{3.19}$$

σε αυτό το σημείο εισάγεται ένα βαθμωτό δυναμικό διόρθωσης $\varphi^{\kappa+1}$, και ένα διανυσματικό δυναμικό διόρθωσης $\psi^{\kappa+1}$, τα οποία ορίζονται από την σχέση:

$$\delta U^{\kappa+1} = \nabla\varphi^{\kappa+1} + \nabla \times \psi^{\kappa+1} \tag{3.20}$$

Όπως κάθε διάνυσμα, έτσι και η διόρθωση της ταχύτητας μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο όρων, ένα αστρόβιλο ($\nabla\varphi^{\kappa+1}$) και ένα σωληνοειδές ($\nabla \times \psi^{\kappa+1}$), οπότε:

$$\nabla \cdot \delta U^{\kappa+1} = \nabla \cdot (\nabla\varphi^{\kappa+1} + \nabla \times \psi^{\kappa+1}) = \nabla^2\varphi^{\kappa+1} + \nabla \cdot \nabla \times \psi^{\kappa+1} = \nabla^2\varphi^{\kappa+1} \tag{3.21}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στην εξίσωση για αυτό το δυναμικό:

$$\nabla^2 \varphi^{\kappa+1} = \nabla \cdot U^* \tag{3.22}$$

Καθώς ο όρος της διόρθωσης της ταχύτητας εισάγεται μόνον για την πλήρωση της εξίσωσης της συνέχειας, και ο σωληνοειδής όρος δεν έχει καμία επιρροή σε αυτό, μπορεί χωρίς βλάβη της μεθοδολογίας να αγνοηθεί, οπότε $\delta U^{\kappa+1} = \nabla \varphi^{\kappa+1}$. Όταν η εξίσωση για το δυναμικό έχει λυθεί, και το πεδίο ταχυτήτων είναι ενημερωμένο, ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας. Από τις νέες αυτές τιμές της ταχύτητας $U^{\kappa+1}$, υπολογίζεται η στροβιλότητα από την εξίσωση (3.18). Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται, έως ότου η μέγιστη διαφορά των ταχυτήτων είναι μεγαλύτερη από κάποια συγκεκριμένη τιμή (10^{-5}). Αναφορικά με τις συνοριακές συνθήκες για το δυναμικό αυτό, καθώς η τιμή των ταχυτήτων στα σύνορα προκαθορίζεται, μία ικανοποιητική συνθήκη είναι η $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, όπου $\vec{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, στο αντίστοιχο σύνορο.

Η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης του δυναμικού στο χωρίο Ω_x γύρω από τον κόμβο *x* δίδεται από τη σχέση:

$$\int_{\partial\Omega_x} \nabla \varphi^{\kappa+1}_{\hat{\mathbf{n}}} d\left(\partial\Omega_x\right) = \int_{\Omega_x} \nabla U^* d\Omega_x \tag{3.23}$$

Μετά την λύση του ροϊκού προβλήματος, οι ταχύτητες χρησιμοποιούνται για την εύρεση της θερμοκρασιακής κατανομής. Ορίζοντας μια συνάρτηση Φ τύπου βήματος, που ορίζεται στην περιοχή του στερεού όγκου (μονάδα εκεί, μηδέν αλλού),($\Phi = \begin{Bmatrix} 0, x \in \Omega_1 \\ 1, x \in \Omega_2 \end{Bmatrix}$) μπορούμε να εκφράσουμε τις αδιάστατες ιδιότητες του μέσου και της ροής:

$$\begin{gathered} k = (k_r - 1)\Phi + 1 + b_1\left[\tilde{T}_2 + (\tilde{T}_1 - \tilde{T}_2)T\right]\left[(b_r - 1)\Phi + 1\right] \\ \rho c_p = (\rho c_{p,r} - 1)\Phi + 1 \\ U = U(1 - \Phi) \end{gathered} \tag{3.24}$$

Η χρονική παράγωγος διακριτοποιείται με την μέθοδο Crank-Nicholson [35]. Η αξιοπιστία της μεθόδου μπορεί να αυξηθεί σημαντικά εάν οι μη γραμμικοί όροι που προκύπτουν περιγραφούν με μία ημι-άμεση μορφή (στο χρονικό βήμα *m*) ως ακολούθως:

$$\tilde{T}^{(m)}\tilde{\nabla}\tilde{T}^{(m)} = \tilde{T}^{(m)}\tilde{\nabla}\tilde{T}^{(m-1)} + \tilde{T}^{(m-1)}\tilde{\nabla}\tilde{T}^{(m)} - \tilde{T}^{(m-1)}\tilde{\nabla}\tilde{T}^{(m-1)} \tag{3.25}$$

Εφαρμόζοντας όλα τα παραπάνω στην εξίσωση (3.15) παίρνουμε την τελική επαναληπτική μορφή, χρονικού βήματος Δt. Κρατώντας τους όρους που αναφέρονται στο *m*

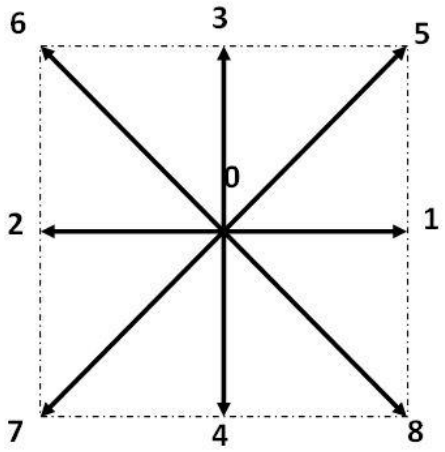
χρονικό βήμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, ενώ σταθερές και μεταβλητές προηγούμενου βήματος στο άλλο, έχουμε το προς επίλυση σύστημα:

$$
\begin{aligned}
&2\left(\rho c_{p,r}-1\right)\int_{\Omega_x}\Phi\,T^{(m)}d\Omega_x+2\int_{\Omega_x}T^{(m)}d\Omega_x+\Delta t\,Pr\int_{\partial\Omega_x}U(1-\Phi)\Gamma^{(m)}\hat{\mathbf{n}}d\left(\partial\Omega_x\right)\\
&-\Delta t\left[k_r-1+b_1\tilde{T}_2\left(b_r-1\right)\right]\int_{\partial\Omega_x}\Phi\,\nabla T^{(m)}_{\hat{\mathbf{n}}}d\left(\partial\Omega_x\right)-\Delta t\left(1+b_1\tilde{T}_2\right)\int_{\partial\Omega_x}\nabla T^{(m)}_{\hat{\mathbf{n}}}d\left(\partial\Omega_x\right)\\
&-\Delta t\,b_1\left(\tilde{T}_1-\tilde{T}_2\right)\left(b_r-1\right)\left[\int_{\partial\Omega_x}\Phi\,T^{(m-1)}\nabla T^{(m)}_{\hat{\mathbf{n}}}d\left(\partial\Omega_x\right)+\int_{\partial\Omega_x}\Phi\,T^{(m)}\nabla T^{(m-1)}_{\hat{\mathbf{n}}}d\left(\partial\Omega_x\right)\right]\\
&-\Delta t\,b_1\left(\tilde{T}_1-\tilde{T}_2\right)\left[\int_{\partial\Omega_x}T^{(m-1)}\nabla T^{(m)}_{\hat{\mathbf{n}}}d\left(\partial\Omega_x\right)+\int_{\partial\Omega_x}T^{(m)}\nabla T^{(m-1)}_{\hat{\mathbf{n}}}d\left(\partial\Omega_x\right)\right]=\\
&2\left(\rho c_{p,r}-1\right)\int_{\Omega_x}\Phi\,T^{(m-1)}d\Omega_x+2\int_{\Omega_x}T^{(m-1)}d\Omega_x-\Delta t\,Pr\int_{\partial\Omega_x}U(1-\Phi)\Gamma^{(m-1)}\hat{\mathbf{n}}d\left(\partial\Omega_x\right)\\
&+\Delta t\left[k_r-1+b_1\tilde{T}_2\left(b_r-1\right)\right]\int_{\partial\Omega_x}\Phi\,\nabla T^{(m-1)}_{\hat{\mathbf{n}}}d\left(\partial\Omega_x\right)+\Delta t\left(1+b_1\tilde{T}_2\right)\int_{\partial\Omega_x}\nabla T^{(m-1)}_{\hat{\mathbf{n}}}d\left(\partial\Omega_x\right)
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Αυτό το γραμμικοποιημένο σύστημα της μορφής $\mathbf{A}(\boldsymbol{T}^{(m-1)})\ \boldsymbol{T}^{(m)} = \mathbf{B}(\boldsymbol{T}^{(m-1)})$ χρησιμοποιείται για την εύρεση της κατανομής της θερμοκρασίας στον χρόνο. Όσον αφορά την χρονική εξέλιξη χρησιμοποιήθηκε ένας αλγόριθμος, που προσαρμόζει το χρονικό βήμα σε κάθε επανάληψη, έτσι ώστε το σφάλμα να φράσσεται σε κάποια προκαθορισμένα όρια. Συγκεκριμένα, το αρχικό χρονικό βήμα τίθεται ίσο με 10^{-6} s, και ελέγχεται η L_2 (Ευκλείδεια) νόρμα της διαφοράς των θερμοκρασιών μεταξύ δύο επαναλήψεων. Εάν αυτό είναι μεγαλύτερο από μία συγκεκριμένη μέγιστη τιμή (5), το βήμα μειώνεται στο μισό, ενώ ο υπολογισμός για τον συγκεκριμένο χρόνο επαναλαμβάνεται. Αντίθετα, εάν αυτό είναι μικρότερο από μια ελάχιστη τιμή (1), το χρονικό βήμα για την επόμενη επανάληψη διπλασιάζεται.

3.4 Η μέθοδος lattice-Boltzmann

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται προσομοιώσεις που οι λύσεις επιτυγχάνονται με το πρότυπο δικτύου-Boltzmann (LB) δύο διαστάσεων και 9 ταχυτήτων (D_2Q_9). Η θεμελιώδης κυψελίδα φαίνεται στην ακόλουθη Εικόνα 3.2 και τα διανύσματα των ταχυτήτων δίνονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:



Εικόνα 3.2 Η θεμελιώδης κυψελίδα του μοντέλου

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_0 &= (0,0) \\ \boldsymbol{e}_i &= \left(cos\frac{i-1}{2}\pi, sin\frac{i-1}{2}\pi \right) \quad ; \quad i = 1,...,4 \\ \boldsymbol{e}_i &= \left(cos\frac{i-5}{2}\pi + \frac{\pi}{4}, sin\frac{i-5}{2}\pi + \frac{\pi}{4} \right) \quad ; \quad i = 5,...,8 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Η ροή στο πρότυπο περιγράφεται μέσω της διακριτής εξίσωσης Boltzmann μέσω της σταθεράς χαλάρωσης, τ_o, στην διακριτή εξίσωση, υπό την προσέγγιση BGK [8]:

$$f_{0,i}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}_i, t+1) = f_{0,i}(\boldsymbol{x}, t) - \frac{f_{0,i} - f_{0,i}^{eq}}{\tau_0} \quad ; \quad i = 0,...,8 \tag{3.28}$$

όπου $f_{0,i}$ είναι η συνάρτηση κατανομής ενός σωματιδίου κατά την διεύθυνση i και με διακριτή ταχύτητα, e_i, στην χωρική θέση $\boldsymbol{x}$ και την χρονική στιγμή t, ενώ f_i^{eq} είναι η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας, η οποία δίνεται από το ακόλουθο ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned} f_{0,i}^{eq} &= w_i \rho_0 \left(1 + \frac{1}{c_s^2}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{v}) + \frac{1}{2c_s^4}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{v})^2 - \frac{1}{2c_s^2}\upsilon^2 \right) \\ w_0 &= \frac{4}{9} \quad ; \quad w_i = \frac{1}{9}, i = 1,..,4 \quad ; \quad w_i = \frac{1}{36}, i = 5,..,8 \end{aligned} \tag{3.29}$$

όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα του ρευστού. Οι μακροσκοπικές παράμετροι της ροής, όπως πυκνότητα και ταχύτητα, εκφράζονται με τα ακόλουθα αθροίσματα:

$$\rho_0(\boldsymbol{x},t)=\sum_i f_{0,i}(\boldsymbol{x},t)=\sum_i f_{0,i}^{eq}(\boldsymbol{x},t)$$
$$\rho_0\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\sum_i f_{0,i}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_i=\sum_i f_{0,i}^{eq}(x,t)\boldsymbol{e}_i \tag{3.30}$$

Τα ισοζύγια μάζας και ορμής αναπαράγονται με βάση τις εξισώσεις (3.28)-(3.30) μέσω των αναπτυγμάτων Chapman- Enskog [19], και δίνονται:

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho_0\boldsymbol{v}\right)=0$$
$$\frac{\partial\left(\rho_0\boldsymbol{v}\right)}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho_0\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}\right)=-\nabla P+\rho_0\mu\nabla^2\boldsymbol{v}+O\left(\upsilon^3\right) \tag{3.31}$$

Το κινηματικό ιξώδες για το πρότυπο D_2Q_9 είναι:

$$\nu_0=\frac{2\tau_0-1}{6} \tag{3.32}$$

Για την μελέτη της συναγωγής εισάγεται στο μοντέλο και συνάρτηση κατανομής, $f_{1,i}$, για την περιγραφή της θερμοκρασίας. Η μεταβολή της θερμοκρασίας περιγράφεται με την ακόλουθη διακριτή εξίσωση δικτύου-Boltzmann

$$f_{1,i}(\underline{x}+\underline{e}_i,t+1)=f_{1,i}(\underline{x},t)-\frac{f_{1,i}-f_{1,i}^{eq}}{\tau_1}\quad;\quad i=0,...,8 \tag{3.33}$$

όπου $f_{1,i}$ είναι η συνάρτηση κατανομής ενός σωματιδίου κατά την διεύθυνση i και με διακριτή ταχύτητα, e_i, στην χωρική θέση $\boldsymbol{x}$ και την χρονική στιγμή t, και τ_1 είναι η σταθερά χαλάρωσης του θερμικού προβλήματος διάχυσης και σχετίζεται με την θερμική αγωγιμότητα (κ) για το πρότυπο των 9 ταχυτήτων (D_2Q_9) σύμφωνα με την σχέση:

$$a\equiv\frac{\kappa}{\rho_0 C}=c_s^2(\tau_1-\frac{1}{2}) \tag{3.34}$$

όπου α θερμική διαχυτότητα στο θερμικό πρόβλημα, και $c_s^2=1/3$ η ταχύτητα του ήχου.

Η θερμοκρασία στο πρότυπο δίνεται από το ακόλουθο άθροισμα:

$$T(\boldsymbol{x},t)=\sum_i f_{1,i}(\boldsymbol{x},t)=\sum_i f_{1,i}^{eq}(\boldsymbol{x},t) \tag{3.35}$$

Όπου η συνάρτηση κατανομής ισορροπίας ($f_{1,i}^{eq}$) εξαρτάται από το ανάπτυγμα της ($f_{0,i}^{eq}$) (εξίσωση (3.29)).

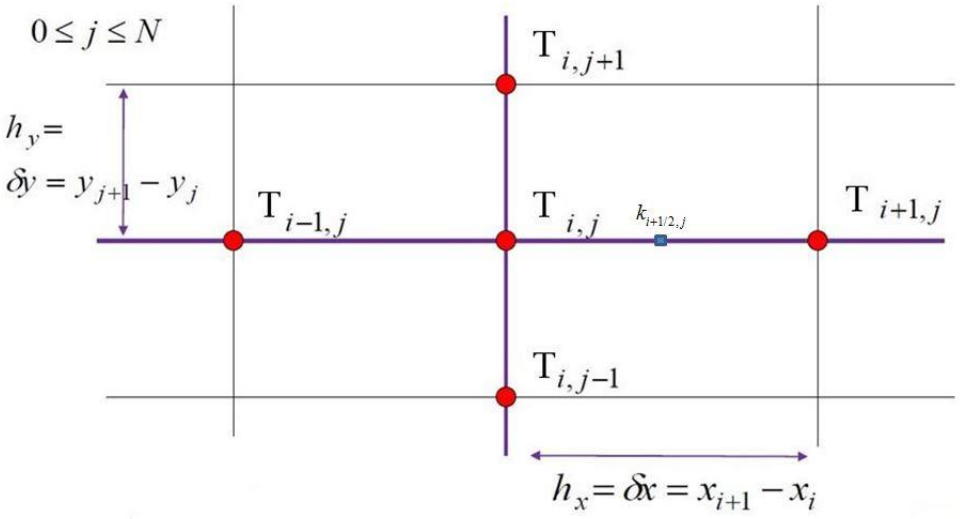
$$f_{1,i}^{eq} = (T / \rho_0)\, f_{0,i}^{eq} \tag{3.36}$$

3.5 Πεπερασμένες διαφορές και Πεπερασμένα στοιχεία

Σε όλα τα προβλήματα που θα παρουσιαστούν παρακάτω γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται με την MLPG και την LB μέθοδο, με αυτά που προκύπτουν από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM).

Τα FEM βασίζονται στην ολική ασθενή μορφή, δηλαδή στην ολοκλήρωση των εξισώσεων σε ολόκληρο το χωρίο επίλυσης. Χρησιμοποιούν πολυωνυμικές προσεγγίσεις για την συνάρτηση δοκιμής, και την προσέγγιση Galerkin για την ολοκλήρωση. Ο χώρος διακριτοποιείται με μη δομημένο (τριγωνικό) πλέγμα στοιχείων στις δύο περιοχές του μέσου, και οριακά στρώματα στα όρια των διεπιφανειών. Η λύση των προβλημάτων με την μέθοδο των FEM επιτυγχάνεται με το εμπορικό πακέτο Comsol.

Στα προβλήματα αγωγής σταθερής κατάστασης μελετάται η απόδοση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών (FD). Σε αυτήν την μέθοδο προσεγγίζονται οι παράγωγοι των συναρτήσεων. Η διακριτοποίηση του χώρου παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.3.



Εικόνα 3.3 Η διακριτοποίηση του χώρου στις πεπερασμένες διαφορές

Η εξίσωση αγωγής, σταθερής κατάστασης είναι η $\nabla(k\nabla T)=0$, αναπτύσσοντας τους όρους έχουμε:

$$\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}+k(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 T}{\partial^2 y})=0 \tag{3.37}$$

Η διακριτή μορφή της παραπάνω εξίσωσης σε κάθε πλεγματικό σημείο, με κεντρικές διαφορές, για $1^{ης}$ τάξης προσέγγιση είναι:

$$\begin{aligned}&\frac{k_{i+1,j}-k_{i-1,j}}{2\delta x}\frac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2\delta x}+\frac{k_{i,j+1}-k_{i,j+1}}{2\delta y}\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j+1}}{2\delta y}+\\&k_{i,j}(\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}-T_{i-1,j}}{4\delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}-2T_{i,j}-T_{i,j-1}}{4\delta y^2})=0\end{aligned} \tag{3.38}$$

Στο παρόν, χρησιμοποιείται μια τροποποιημένη μορφή των παραπάνω, καθώς έχει μελετηθεί και δημοσιευθεί ότι παρέχει πιο σταθερή λύση με πλέγματα μικρότερης ανάλυσης σε αυτά τα προβλήματα [11]. Έτσι η αγωγιμότητα του μέσου προβάλλεται σε κόμβους "φαντάσματα" που τοποθετούνται ανάμεσα στα πλεγματικά σημεία (Εικόνα 3.3). Ακολουθεί η τελική μορφή της εξίσωσης που επιλύεται:

$$\left(\frac{k_{i+1/2,j}\dfrac{T_{i,j}-T_{i+1,j}}{\delta x}-k_{i-1/2,j}\dfrac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{\delta x}}{\delta x}\right)+\left(\frac{k_{i,j+1/2}\dfrac{T_{i,j}-T_{i,j+1}}{\delta y}-k_{i,j-1/2}\dfrac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{\delta y}}{\delta y}\right)=0 \tag{3.39}$$

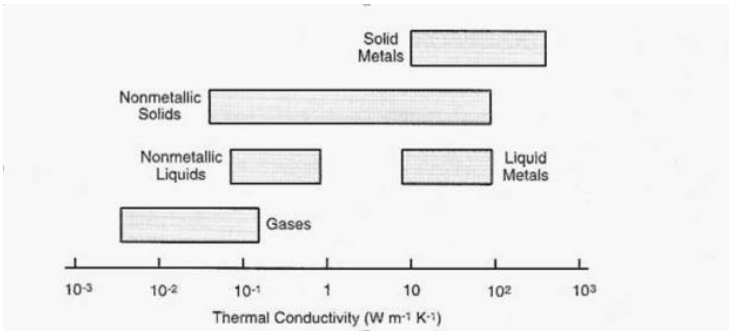
στην περίπτωση όπου $\delta x=\delta y$, η παραπάνω έκφραση απλοποιείται:

$$\begin{aligned}&(k_{i+1/2,j}+k_{i-1/2,j}+k_{i,j+1/2}+k_{i,j-1/2})T_{i,j}-k_{i+1/2,j}T_{i+1,j}\\&-k_{i-1/2,j}T_{i-1,j}-k_{i,j+1/2}T_{i,j+1}-k_{i,j-1/2}T_{i,j-1}=0\end{aligned} \tag{3.40}$$

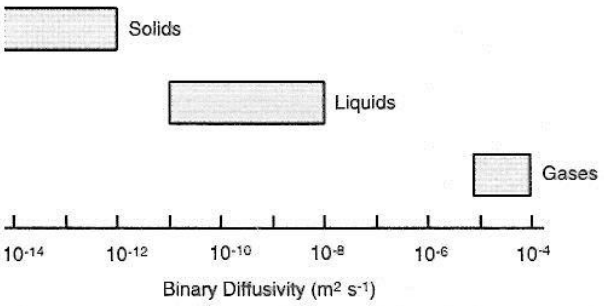
3.6 Τυπικά μεγέθη των συντελεστών μεταφοράς και των αδιάστατων αριθμών

Στις Εικόνα 3.4 Εικόνα 3.5 παρουσιάζονται οι περιοχές όπου κυμαίνονται οι συντελεστές της θερμικής αγωγιμότητας και της διαχυτότητας για διάφορες φάσεις και είδη υλικών. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα αέρια έχουν σχετικά μικρή θερμική αγωγιμότητα, ενώ οι διαχυτότητες τους είναι αρκετά μεγαλύτερες από ότι στα υγρά. Βλέπουμε επίσης ότι οι

διαχυτότητες στα στερεά είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές για τα αέρια και τα υγρά.



Εικόνα 3.4 Περιοχές όπου κυμαίνεται η θερμική αγωγιμότητα διάφορων υλικών



Εικόνα 3.5 Περιοχές όπου κυμαίνεται η διαχυτότητα συστατικών σε αέρια, υγρά και στερεά.

Στους Πίνακας 3.1 Πίνακας 3.2, παρουσιάζονται οι περιοχές τιμών για τους αδιάστατους αριθμούς που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις. Οι προσομοιώσεις που θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος των τιμών που βλέπουμε στους πίνακες και τις εικόνες, πράγμα που επιβεβαιώνει ότι η παρούσα εργασία μπορεί να βρει εφαρμογή σε ένα μεγάλο πλήθος τεχνολογικών και ερευνητικών τομέων.

Πίνακας 3.1 Τιμές που κυμαίνεται ο αριθμός Prandlt για διάφορα υλικά

Υλικά	**Pr**
Υγρά μέταλλα	0.004-0.03
Αέρια	0.7-1
Οργανικά ρευστά	5-50
Λάδια	50-100,000

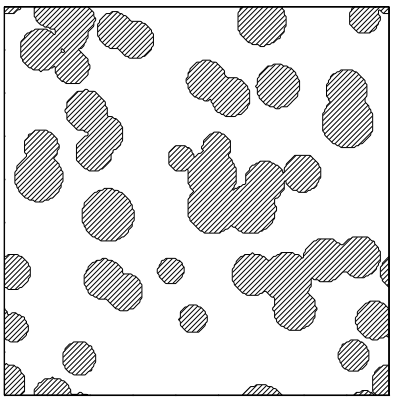
Πίνακας 3.2 Τιμές που κυμαίνεται ο αριθμός Schmidt για αέρια και υγρά

Φάσεις	**Sc**
Αέρια	0.1-10
Υγρή	100-1,000

Κεφάλαιο 4: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΓΩΓΗΣ

4.1 Η επιλογή της MLPG μεθόδου, προβλήματα σταθερής κατάστασης

Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν αρχικά, αφορούν προβλήματα αγωγής στις δύο διαστάσεις, σε ένα χωρίο αποτελούμενο με δύο διαφορετικά υλικά, με διαφορετικές θερμικές αγωγιμότητες, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.1. Παρουσιάζονται αποτελέσματα που προκύπτουν από όλες τις αριθμητικές μεθόδους που αναλύθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αναλυτικά, συγκρίνονται ως προς την ταχύτητα και την ακρίβεια της λύσης οι μέθοδοι: i) MLPG, ii) FD (πεπερασμένες διαφορές), iii) FEM (πεπερασμένα στοιχεία), iv) LB (lattice Boltzmann). Επίσης, στα αποτελέσματα αυτά βλέπουμε την επίδραση διαφόρων σημαντικών παραμέτρων του προβλήματος στην ακρίβεια και την αποτελεσματικότητα των αριθμητικών λύσεων. Οι παράμετροι αυτοί περιλαμβάνουν: i) την διακριτοποίηση του χωρίου, ii) την τάξη της συνάρτησης βάσης, iii) το εύρος των αγωγιμοτήτων.



Εικόνα 4.1 Τετραγωνική κοιλότητα αποτελούμενη από δύο μέσα. Γραμμοσκιασμένη περιοχή: εσωτερική περιοχή με αγωγιμότητα k_2. Λευκή περιοχή: εξωτερική περιοχή με αγωγιμότητα k_1

Όπως έχει αναλυθεί στη παραπάνω κεφάλαια, η απλεγματική προσέγγιση δεν απαιτεί κάποιο πλέγμα, παρά μόνον ένα σύνολο κατανεμημένων κόμβων στο χωρικό πεδίο λύσης. Έτσι, στην περίπτωση που η γεωμετρία του προβλήματος είναι πεπλεγμένη, η MLPG μέθοδος έχει ένα πλεονέκτημα έναντι των συμβατικών μεθόδων Πεπερασμένων Διαφορών και Πεπερασμένων στοιχείων, αλλά και περισσότερο εξελιγμένων μεθόδων, όπως η LB.

Η εξίσωση που επιλύεται στο παρόν, αποτελεί μια απλοποιημένη μορφή της εξίσωσης (3.26), καθώς οι όροι που αναφέρονται στην χρονική εξέλιξη, στην συναγωγή, αλλά και στην εξάρτηση της αγωγιμότητας από την θερμοκρασία είναι μηδέν. Έτσι η σταθμισμένη ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης που επιλύεται αρχικά είναι

$$(k_r - 1)\int_{\partial\Omega_x} \Phi \nabla T_{\mathbf{n}} d(\partial\Omega_x) + \int_{\partial\Omega_x} \nabla T_{\mathbf{n}} d(\partial\Omega_x) = 0 \qquad (4.1)$$

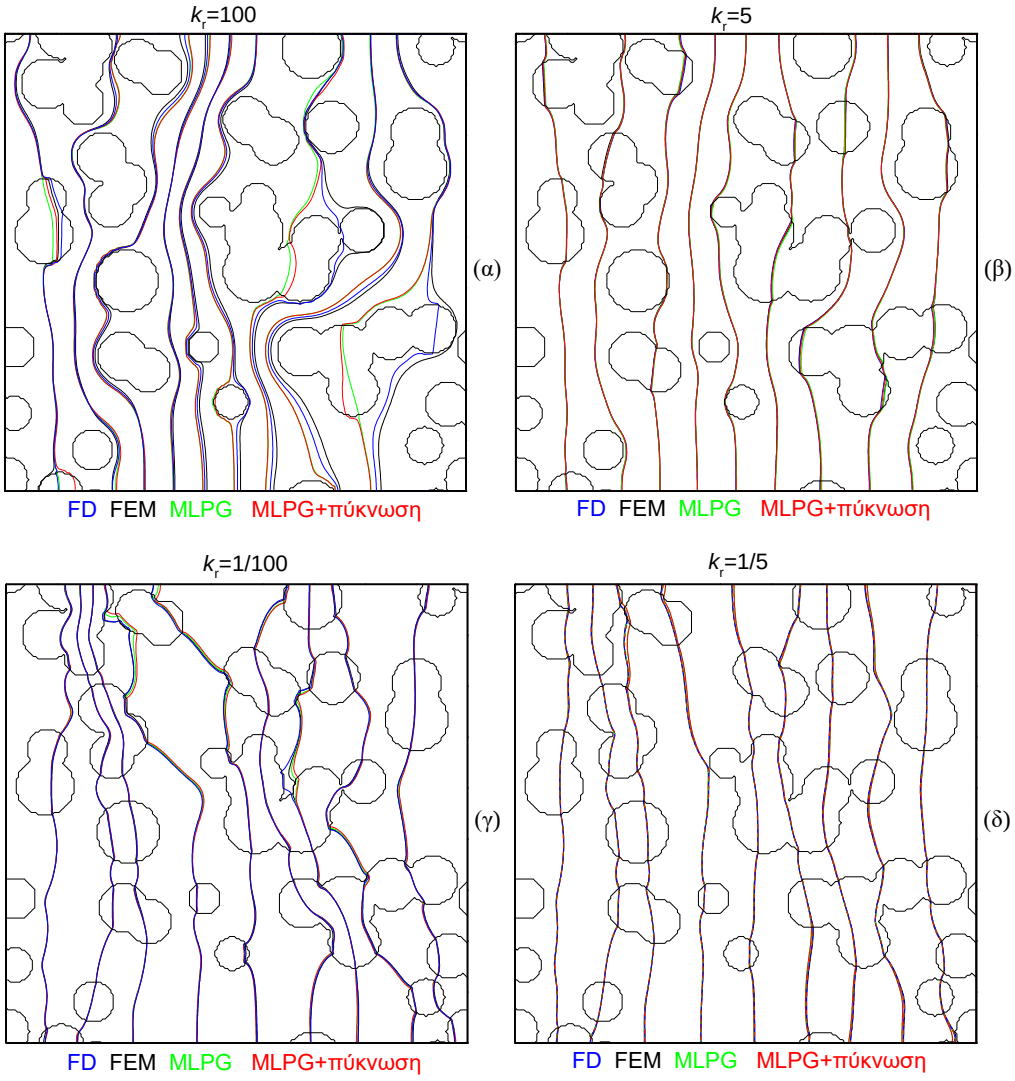
Η αριθμητική ολοκλήρωση της παραπάνω εξίσωσης πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας βιβλιογραφικές τιμές για το μέγεθος και το σχήμα του τομέα ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα επιλέγονται κυκλικοί τομείς γύρω από κάθε κόμβο, με ακτίνα που αντιστοιχεί στο 60% της απόστασης των κόμβων (*d*), και χρησιμοποιώντας αριθμητική ολοκλήρωση κατά Gauss 3 σημείων και με την μέθοδο της διαμέρισης. Περισσότερες πληροφορίες για την αριθμητική ολοκλήρωση βρίσκονται στα [4,5],[26,27].

Στην MLPG μέθοδο η συνάρτηση βάσης δεν ικανοποιεί την συνάρτηση δ του Kronecker, συνεπώς το πώς θα εφαρμοστούν οι ουσιαστικές (essential) συνοριακές συνθήκες επηρεάζει την τελική λύση. Στο παρόν χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος μετασχηματισμού για τις ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες [26]. Σταθερές θερμοκρασίες (T_1 και T_2) εφαρμόζονται στο "αριστερό" και στο "δεξί" σύνορο της τετραγωνικής κοιλότητας (Εικόνα 4.1), αδιαβατικές συνθήκες στα άλλα δύο.

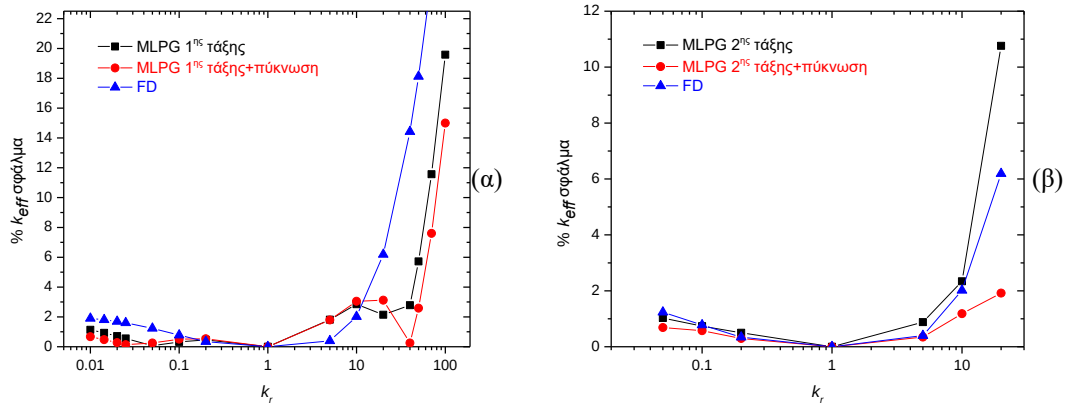
Η τοπική πύκνωση στην MLPG μέθοδο είναι εύκολα εφαρμόσιμη λόγω του απλεγματικής φύσης της μεθόδου, το οποίο συνήθως οδηγεί σε αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων, ειδικά σε περιπτώσεις όπου η γεωμετρία του προβλήματος είναι περίπλοκη με απότομες κλίσεις ή ασυνέχειες. Οι ασυνέχειες αυτές στην θερμική αγωγιμότητα των δύο υποπεριοχών ομαλοποιούνται με γραμμική παρεμβολή σύμφωνα με την MLS προσέγγιση, στις περιπτώσεις όπου εφαρμόζεται τοπική πύκνωση του πλέγματος.

Όσον αφορά την διακριτοποίηση που χρησιμοποιήθηκε από τις μεθόδους, στην MLPG παρουσιάζονται αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης σε πλέγμα 200 κόμβων ανά διάσταση, και σε ένα πλέγμα με τοπική πύκνωση, διπλάσιας ανάλυσης κοντά στις διεπιφάνειες (47 χιλιάδες κόμβοι). Η μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (FD) και lattice-Boltzmann (LB) εφαρμόστηκαν σε ένα πλέγμα 200 κόμβων ανά διάσταση, ενώ η μέθοδος των Πεπερασμένων στοιχείων (FEM) χρησιμοποίησε 42 χιλιάδες στοιχεία.

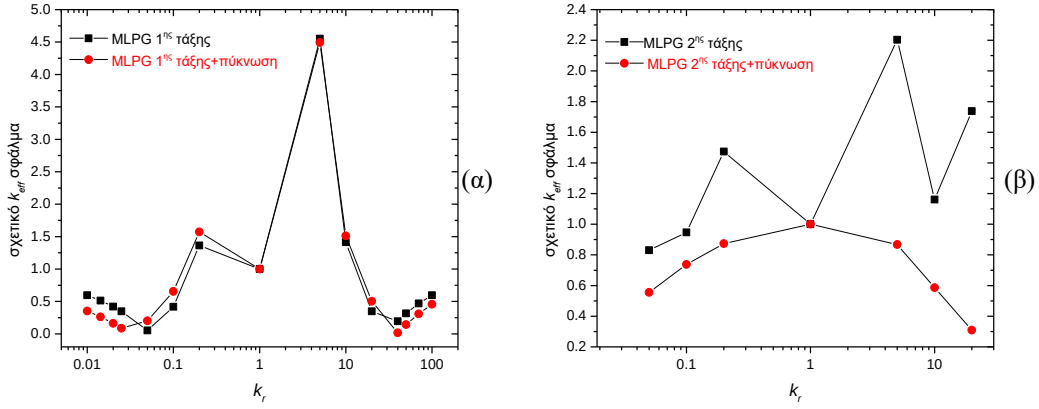
Στην Εικόνα 4.2 φαίνεται η κατανομή των αδιάστατων θερμοκρασιών, όπως αυτές προκύπτουν από τις μεθόδους, για τέσσερις διαφορετικούς λόγους των θερμικών αγωγιμοτήτων των μέσων. Ο λόγος των θερμικών αγωγιμοτήτων (k_r) ορίζεται ως ο λόγος της αγωγιμότητας της εσωτερικής περιοχής προς αυτήν της εξωτερικής. Τα σφάλματα των μεθόδων υπολογίζονται στην αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα, όπως αυτή προκύπτει από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. k_{eff} σφάλμα ≡ $|k_{\text{eff}} - k_{\text{eff}}(\text{FEM})| / k_{\text{eff}}(\text{FEM})$ (Εικόνα 4.3). Στην Εικόνα 4.4 φαίνεται το σχετικό σφάλμα των MLPG μεθόδων στην τιμή της αποτελεσματικής θερμικής αγωγιμότητας, κανονικοποιημένο με το σφάλμα των FD μεθόδων. Δηλαδή, σχετικό k_{eff} σφάλμα =[k_{eff} σφάλμα /k_{eff} σφάλμα (FD)].



Εικόνα 4.2 Η κατανομή των αδιάστατων θερμοκρασιών χρησιμοποιώντας τις μεθόδους MLPG, FD και FEM σε μια τετραγωνική κοιλότητα με μεταβαλλόμενη αγωγιμότητα. Η κάθε μέθοδος έχει διαφορετικό χρώμα στις ισοθερμοκρασιακές γραμμές (α,β) η αγωγιμότητα της εσωτερικής περιοχής είναι μεγαλύτερη από αυτήν της εξωτερικής, (γ,δ) η αγωγιμότητα της εσωτερικής περιοχής είναι μικρότερη από αυτήν της εξωτερικής.



Εικόνα 4.3 Τα σφάλματα στην τιμή της αποτελεσματικής θερμικής αγωγιμότητας (k_{eff}) συναρτήσει του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων του μέσου, για την μέθοδο των FD και των MLPG μεθόδων με, και χωρίς, πύκνωση για $1^{ης}$ (α) και $2^{ης}$ (β) τάξης συνάρτηση βάσης. Τα σφάλματα προκύπτουν από την σύγριση της τιμής της k_{eff} των μεθόδων, με αυτή των FEM

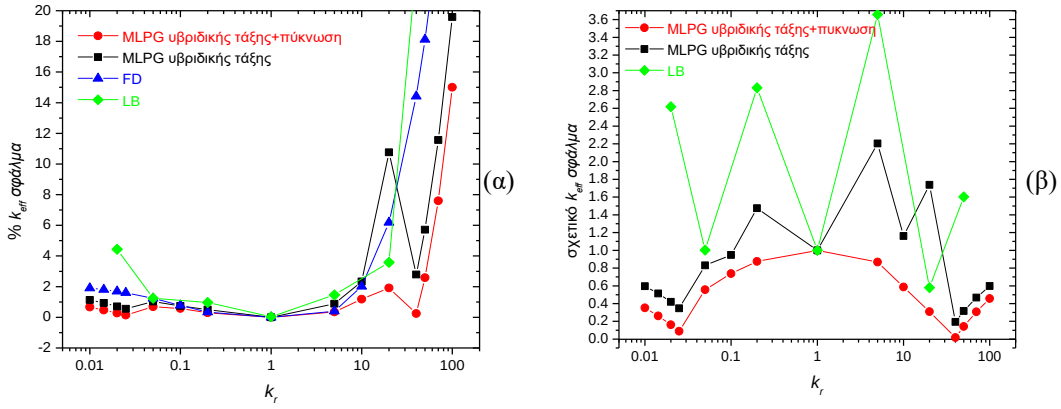


Εικόνα 4.4 Το σχετικό σφάλμα των MLPG μεθόδων στην τιμή της k_{eff}, αφού κανονικοποιηθεί με το σφάλμα των FD για $1^{ης}$ (α) και $2^{ης}$ (β) τάξης συνάρτηση βάσης.

4.2 Υβριδική MLPG

Η μέθοδος MLPG έχει ισχυρή εξάρτηση από τις συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται κατά την προσέγγιση, και η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, σε σύγκριση με την ακρίβεια της μεθόδου των FD, ποικίλλουν. Για τιμές του λόγου των αγωγιμοτήτων (k_r) μακριά από την μονάδα (k_r<~1/20 ή k_r>~20), η χρήση μίας $1^{ης}$ τάξης συνάρτηση ως βάση (γραμμική) παρέχει αποτελέσματα μεγαλύτερης σταθερότητας και ακρίβειας σε σχέση με αυτά που προκύπτουν από τις FD (Εικόνα 4.4(α)). Παρόλα αυτά, όσο ο λόγος των αγωγιμοτήτων πλησίαζε στην μονάδα (1/20 <~ k_r <~ 20) οι λύσεις έχαναν σε ακρίβεια, ακόμα και αυτές που χρησιμοποιούσαν πύκνωση του πλέγματος κοντά στις διεπιφάνειες. Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται να εναλλάσσεται στην περίπτωση όπου γίνεται χρήση συνάρτησης βάσης $2^{ης}$ τάξης. Η

τοπική πύκνωση στις περιοχές που υπάρχει ασυνέχεια της αγωγιμότητας βελτιώνει την ακρίβεια της λύσης, σε σύγκριση με την λύση των FD (Εικόνα 4.4(β)), ωστόσο η $2^{ης}$ τάξης προσέγγιση τείνει σταδιακά να αποσταθεροποιεί τη λύση για υψηλούς λόγους αγωγιμοτήτων. Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι κατάλληλος συνδυασμός $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης της MLPG προσέγγισης προσφέρει τη βέλτιστη περιγραφή της αποτελεσματικής αγωγιμότητας σε όλο το φάσμα των μέχρι τώρα προσομοιώσεων (Εικόνα 4.5). Την μέθοδο αυτή την ονομάζουμε υβριδική MLPG [36].

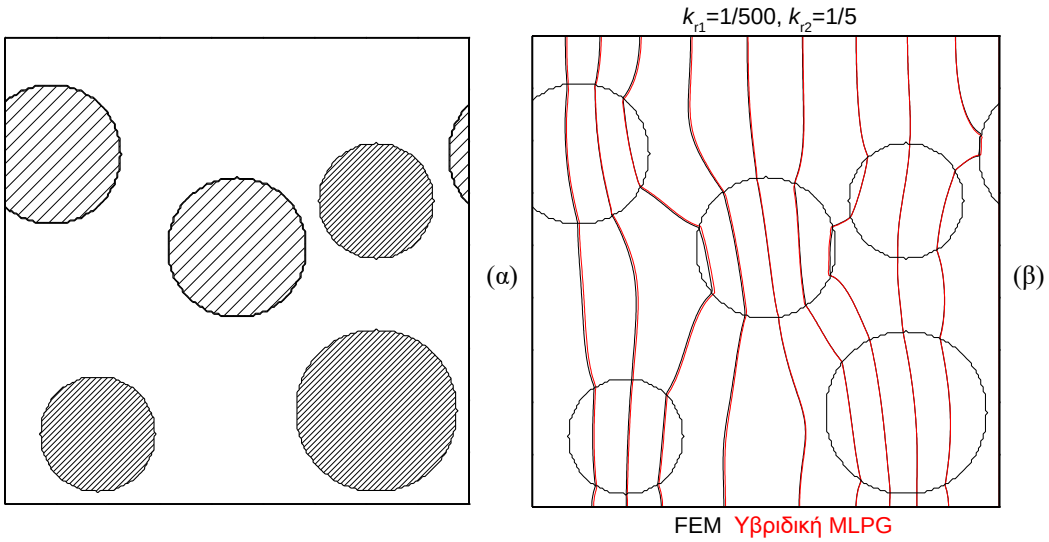


Εικόνα 4.5 (α) Τα σφάλματα στην τιμή της αποτελεσματικής θερμικής αγωγιμότητας (k_{eff}) συναρτήσει του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων του μέσου, για την μέθοδο των FD, LB και της υβριδικής MLPG με, και χωρίς, πύκνωση (β) Το σχετικό σφάλμα των LB και της υβριδικής MLPG μεθόδου στην τιμή της k_{eff}, αφού κανονικοποιηθεί με το σφάλμα των FD.

Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την λύση του προβλήματος από τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν απεικονίζεται στον Πίνακας 4.1. Ο χρόνος προετοιμασίας για τις MLPG μεθόδους αφορά τον απαιτούμενο χρόνο για τον υπολογισμό των συναρτήσεων βάσης, αλλά και για τον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων της εξίσωσης (4.1). Ο αντίστοιχος χρόνος για τις Πεπερασμένες Διαφορές αφορά τον υπολογισμό των απαραίτητων παραγώγων και για την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων τον χρόνο κατασκευής του πλέγματος. Η μέθοδος LB δεν χρειάζεται υπολογιστικό χρόνο για την προετοιμασία των δεδομένων, αλλά ο χρόνος επίλυσης είναι πολύ μεγάλος. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι, για δεδομένη δομή, οι συναρτήσεις σχήματος, αλλά και τα ολοκληρώματα, χρειάζεται να υπολογιστούν μόνο μια φορά, από εκεί και πέρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μετέπειτα υπολογισμούς των λύσεων για όλες τις τιμές των παραμέτρων. Επίσης, όπως γίνεται σαφές, στον πίνακα, κατά την τοπική πύκνωση, δεν χρειάζεται να γίνουν όλοι οι υπολογισμοί από την αρχή, αλλά επέκταση αυτών που προϋπάρχουν. Οπότε δίνοντας περισσότερο βάρος στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων και στον χρόνο λύσης αυτών, φαίνεται ότι η MLPG μέθοδος είναι πολλά υποσχόμενη και αξίζει περαιτέρω διερεύνησης.

Πίνακας 4.1 Ο μέσος υπολογιστικός χρόνος για την προετοιμασία των δεδομένων, και την λύση των προβλημάτων, για όλες τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται

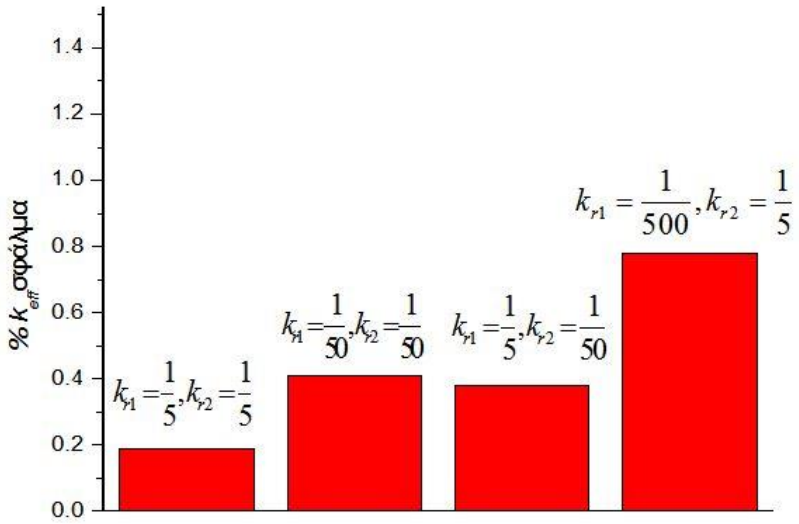
Μέθοδοι	**Χρόνος προετοιμασίας** (s)	**Χρόνος λύσης** (s)
MLPG 1^{ης} τάξης, 200 κόμβοι ανά διάσταση (40401 κόμβοι)	152	0.5
MLPG 2^{ης} τάξης,200 κόμβοι ανά διάσταση (40401 κόμβοι)	210	1.2
MLPG 1^{ης} τάξης+πύκνωση (47000 κόμβοι)	152+50	1.1
MLPG 2^{ης} τάξης+πύκνωση (47000 κόμβοι)	210+63	1.6
FD,200 κόμβοι ανά διάσταση	7	0.4
FEM (41796 στοιχεία)	33	8
LB, 200 κόμβοι ανά διάσταση	-	400



Εικόνα 4.6 (α) Τετραγωνική κοιλότητα αποτελούμενη από τρία διαφορετικά υλικά και δύο λόγους θερμικών αγωγιμοτήτων, αραιή γραμμοσκίαση $k_{r1,}$ πυκνή γραμμοσκίαση k_{r2} (β) Η κατανομή των θερμοκρασιών, για τις καταγεγραμμένες τιμές των παραμέτρων, όπως προκύπτουν από την υβριδική MLPG μέθοδο και την μέθοδο των FEM.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ένας κατάλληλος συνδυασμός της τάξης της προσέγγισης μπορεί να προσφέρει ακριβή αποτελέσματα στην αποτελεσματική θερμική αγωγιμότητα. Η υβριδική αυτή μέθοδος λαμβάνει υπόψη την κατάλληλη τάξη που θα χρησιμοποιήσει, ανάλογα με την περιοχή που βρίσκεται ο εκάστοτε κόμβος αλλά και τον εκάστοτε λόγο των αγωγιμοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, στις περιοχές μακριά από την διεπιφάνεια λαμβάνεται πάντα 1^{ης} τάξης προσέγγιση, ενώ στις υπόλοιπες διαλέγει την τάξη της προσέγγισης

ανάλογα με τον λόγο των αγωγιμοτήτων. Σε περίπτωση που ο λόγος αυτός είναι κοντά στη μονάδα ($1/20 <\sim k_r <\sim 20$) λαμβάνεται $2^{ης}$ τάξης προσέγγιση, σε αντίθετη περίπτωση $1^{ης}$. Στην Εικόνα 4.6(α) φαίνεται μια άλλη δομή, η ιδιαιτερότητα αυτής είναι ότι περιέχει τρία διαφορετικά υλικά, δηλαδή δύο διαφορετικούς λόγους αγωγιμοτήτων, όπως φαίνονται με τη διαφορετική γραμμοσκίαση (k_{r1} και k_{r2}). Η φυσική του προβλήματος, καθώς και οι συνοριακές συνθήκες συμπίπτουν με αυτές του προβλήματος της παραπάνω ενότητας. Στην Εικόνα 4.6(β) παρουσιάζεται η θερμοκρασιακή κατανομή, όπως αυτή προκύπτει από την υβριδική MLPG μέθοδο και την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, για k_{r1}=1/500 και k_{r2}=1/5. Στην Εικόνα 4.7 γίνεται σύγκριση της αποτελεσματικής θερμικής αγωγιμότητας, όπως αυτή προκύπτει από τις δύο μεθόδους, για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Η επιτυχία της μεθόδου είναι εμφανής, καθώς τα σφάλματα αυτά παραμένουν μικρά σε ολόκληρο το εύρος των παραμέτρων.

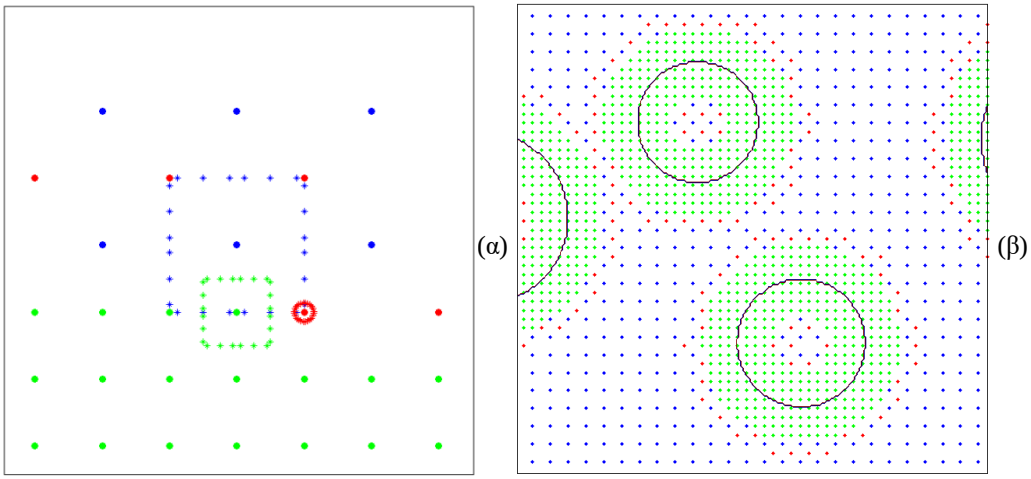


Εικόνα 4.7 Τα σφάλματα στην τιμή της αποτελεσματικής θερμικής αγωγιμότητας (k_{eff}) , για τιμές του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων που αναφέρονται, για την υβριδική MLPG μέθοδο.

Παρά την επιτυχία της μεθόδου, κάποια μειονεκτήματα σε αυτήν είναι αναπόφευκτα, και αφορούν τόσο τον σχετικά μεγαλύτερο χρόνο που απαιτείται για την προεργασία της κάθε γεωμετρίας, όσο και τα όρια που προκύπτουν, όσον αφορά τους λόγους των αγωγιμοτήτων στις περίπλοκες γεωμετρίες. Για την λύση αυτών των προβλημάτων έγιναν προσπάθειες που αφορούσαν το μέγεθος του τομέα στήριξης του κάθε σημείου, το μέγεθος του τομέα ολοκλήρωσης, τον αριθμό των σημείων, και την μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης, καθώς και την σταθμισμένη συνάρτηση που σχετίζεται με την κατασκευή των συναρτήσεων βάσης. Από τα παραπάνω μόνο το μέγεθος του τομέα ολοκλήρωσης φάνηκε να επηρεάζει σημαντικά τις λύσεις.

4.3 Εναλλακτικός τρόπος ολοκλήρωσης

Κρίσιμης σημασίας για την MLPG μέθοδο είναι η επιλογή του χωρίου, στο οποίο θα τελεσθεί η τοπική ολοκλήρωση. Στις περισσότερες εφαρμογές της μεθόδου [4,5], [24-29], ως τέτοια χωρία χρησιμοποιούνται κυκλικοί τομείς, με ακτίνα ένα κλάσμα της μέσης τοπικής απόστασης των κόμβων (συνήθως 60%) γύρω από κάθε κόμβο. Με αυτή την προσέγγιση, αν και έχει επιτυχίες, είτε δεν καλύπτεται όλο το προς επίλυση χωρίο, είτε οδηγεί σε σημαντικές αλληλεπικαλύψεις των τοπικών ολοκληρωμάτων. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα σταθερότητας της μεθόδου, τα οποία συσσωρεύονται σε χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα. Από εδώ και πέρα, στην εργασία αυτή, χρησιμοποιούνται ορθογώνιες περιοχές γύρω από κάθε κόμβο για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων, για πρώτη φορά στην MLPG μέθοδο[6]. Αυτές οι ορθογώνιες περιοχές, που τελούνται οι ολοκληρώσεις, επιλέγονται έτσι ώστε να μην υπάρχουν αλληλεπικαλύψεις και ταυτόχρονα να καλύπτεται όλο το χωρίο του προβλήματος, Εικόνα 4.8(α). Αυτό οδηγεί σε σημαντική αύξηση της σταθερότητας και αντοχής της μεθόδου, ειδικά σε περιπτώσεις υψηλών λόγων k_r. Κατά την πύκνωση του πλέγματος, στις περιοχές κοντά στις διεπιφάνειες Εικόνα 4.8 (β), δεν μπορεί να αποφευχθεί η αλληλοεπικάλυψη στην περιοχή όπου προσθέτονται οι νέοι κόμβοι χωρίς την σημαντική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου. Συνεπώς, ολοκλήρωση σε ορθογώνιους τομείς χρησιμοποιείται σε όλους τους κόμβους, εκτός των περιοχών που βρίσκονται στα όρια της πύκνωσης, όπου τα ολοκληρώματα υπολογίζονται σε κυκλικούς τομείς, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.8 (α). Αυτό περιορίζεται σε μια μικρή περιοχή, έτσι η ολική σταθερότητα της μεθόδου παραμένει σε υψηλά επίπεδα.



Εικόνα 4.8 (α) Τα σημεία Gauss (αστέρια) των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων γύρω από κάθε κόμβο (β) Η πύκνωση που εφαρμόζεται. Μπλε κόμβοι: κυρίαρχη ανάλυση (100 κόμβοι ανά διάσταση) με ολοκλήρωση σε τετραγωνικό τομέα. Πράσινοι κόμβοι: πυκνωμένη περιοχή (200 κόμβοι ανά διάσταση) με ολοκλήρωση σε τετραγωνικό τομέα. Κόκκινοι κόμβοι: Κόμβοι που προσθέτονται στα όρια της πύκνωσης με ολοκλήρωση σε κυκλικούς τομείς.

Το μέγεθος των ορθογώνιων τομέων ολοκλήρωσης τίθεται ίσο με την τοπική απόσταση των κόμβων (d), ώστε να καλύπτεται όλο το χωρίο χωρίς αλληλοεπικαλύψεις, ενώ η ακτίνα των κυκλικών περιοχών ορίζεται συνήθως στα 0.6 d. Για την ολοκλήρωση σε όλους τους δευτερογενείς τομείς χρησιμοποιείται η μέθοδος Gauss. Η τιμή της ακτίνας, των προς ολοκλήρωση τομέων, στα όρια της πύκνωσης του πλέγματος, λαμβάνεται ίση με $0.1d$. Αν και είναι αρκετά μικρότερη από την συνηθισμένη τιμή, είναι αποτελεσματική για να ελαχιστοποιηθούν τα φαινόμενα της αλληλοεπικάλυψης.. Οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες (Dirichlet) επιβάλλονται ρητά με πρώτης τάξης MLS παρεμβολή. Δύο μέσα, τετραγωνικού σχήματος, αλλά διαφορετικής μορφολογίας, μελετώνται στο παρόν. Το πρώτο είναι το ίδιο με αυτό που μελετήθηκε προηγουμένως (Εικόνα 4.1) και το δεύτερο φαίνεται στην Εικόνα 4.10.

4.4 Εισαγωγή μη γραμμικού όρου, χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα

Σε αυτή την υποενότητα θα παρουσιαστούν προσομοιώσεις χρονικά μεταβαλλόμενων προβλημάτων, καθώς και προβλημάτων όπου η θερμική αγωγιμότητα των μέσων εξαρτάται από την θερμοκρασία. Η πλήρης, μη γραμμική, χρονικά μεταβαλλόμενη εξίσωση που επιλύεται παρουσιάστηκε παραπάνω (εξίσωση(3.26)). Λόγω της εξάρτησης της αγωγιμότητας από την θερμοκρασία, στην εξίσωση εμφανίζονται οι διαστατές θερμοκρασίες που επιβάλλονται ως συνοριακές συνθήκες στα δύο απέναντι τοιχώματα της τετραγωνικής κοιλότητας. Η θερμοκρασία του ψυχρού τοιχώματος (δεξιά στις Εικόνα 4.1 Εικόνα 4.10) τίθεται η θερμοκρασία περιβάλλοντος (293K), και η θερμοκρασία του θερμού θέτεται 100 βαθμούς παραπάνω (393K). Οι θερμοκρασίες αυτές επιλέχθηκαν ώστε να έχει πρακτική επιρροή στην αγωγιμότητα των μέσων ο εξαρτημένος από την θερμοκρασία όρος. Ως αρχική συνθήκη για όλα τα προβλήματα χρησιμοποιείται η θερμοκρασία του ψυχρού τοιχώματος.

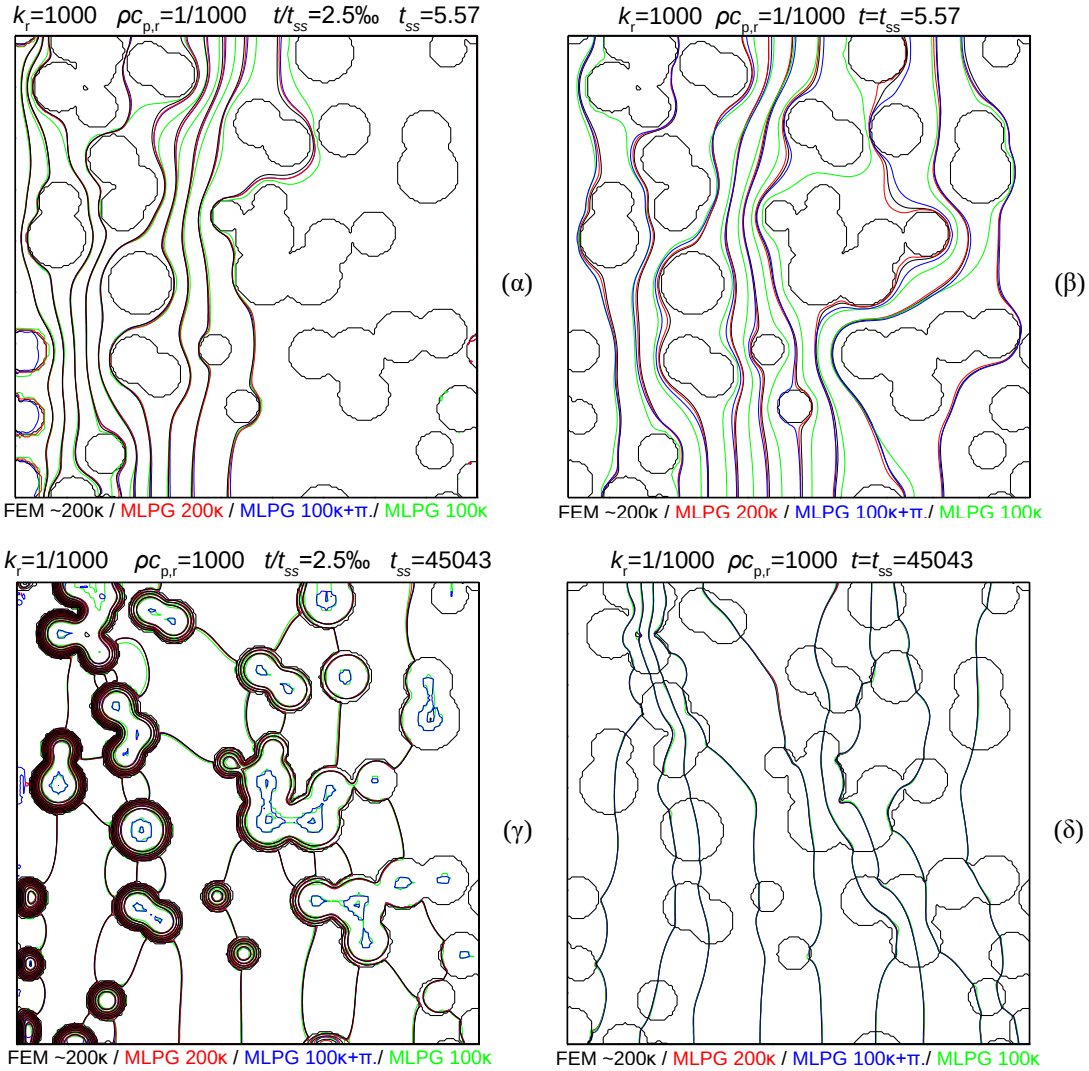
Σαν αναφορά για τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων των MLPG μεθόδων, χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Στην Εικόνα 4.9(α,γ) φαίνεται η κατανομή των αδιάστατων θερμοκρασιών που αφορούν την $1^{η}$ γεωμετρία σε πρώιμα χρονικά βήματα, για δύο ακραίους λόγους των σχετικών αγωγιμοτήτων του μέσου. Η σταθερή κατάσταση των αντίστοιχων προβλημάτων παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.9(β,δ). Ως σταθερή κατάσταση λαμβάνεται η θερμοκρασιακή κατανομή την χρονική στιγμή όπου η Ευκλείδεια νόρμα (L_2) της θερμοκρασίας δεν αλλάζει περισσότερο από 1%. Ως σημείο αναφοράς χρησιμοποιούνται, όπως παραπάνω, οι κατανομές που λαμβάνονται από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με διακριτοποίηση αντίστοιχη της μέγιστης της μεθόδου MLPG, δηλαδή περίπου 41 χιλιάδες στοιχεία. Στην Εικόνα 4.10

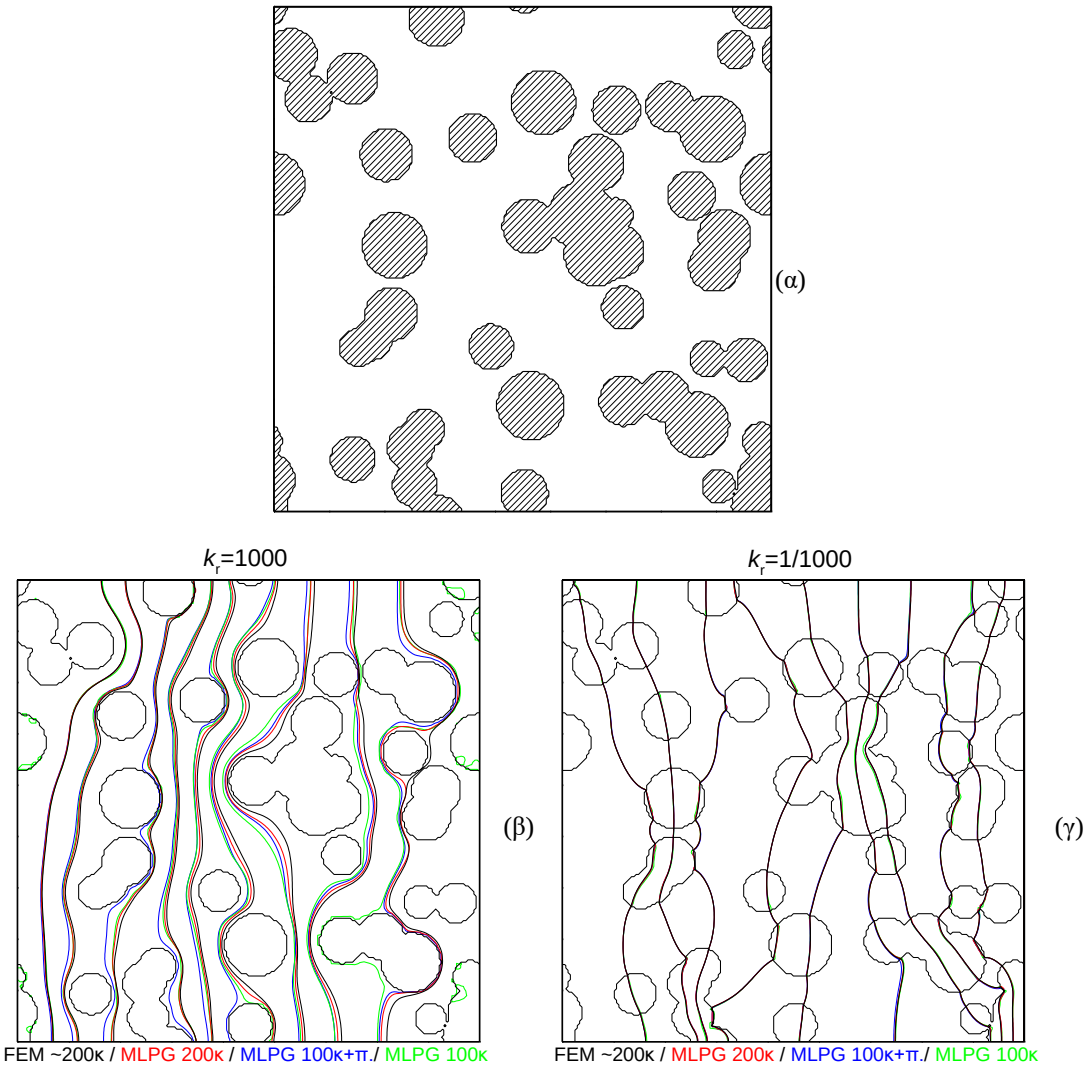
παρουσιάζονται οι σταθερές καταστάσεις που προκύπτουν από το ίδιο φυσικό πρόβλημα που εφαρμόζεται σε μια εναλλακτική δομή.

Τα παρόντα προβλήματα επιλύονται σε τρία επίπεδα διακριτοποίησης. Ένα με 200 κόμβους κατά μήκος κάθε διάστασης, ένα με 100, και άλλο ένα που είναι η βελτιστοποίηση του προηγούμενου, με διπλάσια ανάλυση κατά μήκος των διεπιφανειών. Η διακριτοποίηση των 40 χιλιάδων κόμβων (200 κόμβοι ανά διάσταση) έχει βρεθεί επαρκής για τη σύγκλιση της μεθόδου με ακρίβεια της τάξης του 10^{-6}, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.11(β,δ) και στην Εικόνα 4.12 όπου το σφάλματα στις L_2 νόρμες, διαιρούμενο με τον αριθμό των κόμβων της MLPG μεθόδου, είναι σε αυτή την τάξη μεγέθους, ενώ τα σφάλματα των 100 κόμβων είναι μια (Εικόνα 4.12(α)) ή δύο (Εικόνα 4.12(β)) τάξεις υψηλότερα. Οι θερμοκρασιακές κατανομές των σταθερών καταστάσεων που λαμβάνεται με κάθε μέθοδο, συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν με τη μέθοδο των FEM (L_2 νόρμα), με τοπικά πυκνωμένο πλέγμα και σύγκλιση της τάξης του 10^{-6}. Η Ευκλείδεια νόρμα των διαφορών στη θερμοκρασία και το σφάλμα στην αποτελεσματική αγωγιμότητα, (k_{eff} σφάλμα ≡ $| k_{eff} - k_{eff}$ (FEM) $| / K_{eff}$ (FEM)), για 1ης και 2ης τάξης μεθόδους MLPG με τοπική πύκνωση, χρησιμοποιώντας ορθογώνιους αλλά και κυκλικούς τομείς ολοκλήρωσης, φαίνονται στην Εικόνα 4.11(α,β), ως συναρτήσεις του λόγου αγωγιμοτήτων, k_r, η οποία είναι ανεξάρτητη της θερμοκρασίας ($b_r = 0$). Αντίστοιχα, στην Εικόνα 4.11(γ,δ) παρουσιάζονται τα ίδια σφάλματα, που αφορούν την δεύτερη δομή, σε τρία επίπεδα διακριτοποίησης, ολοκληρώνοντας σε τετραγωνικούς τομείς. Στην Εικόνα 4.12 παρουσιάζονται τα σφάλματα, στη σταθερή κατάσταση, ως συναρτήσεις του εξαρτημένου από τη θερμοκρασία λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων b_r (εξίσωση(3.9)), για ένα ευρύ φάσμα των ανεξάρτητων λόγων των θερμικών αγωγιμοτήτων.

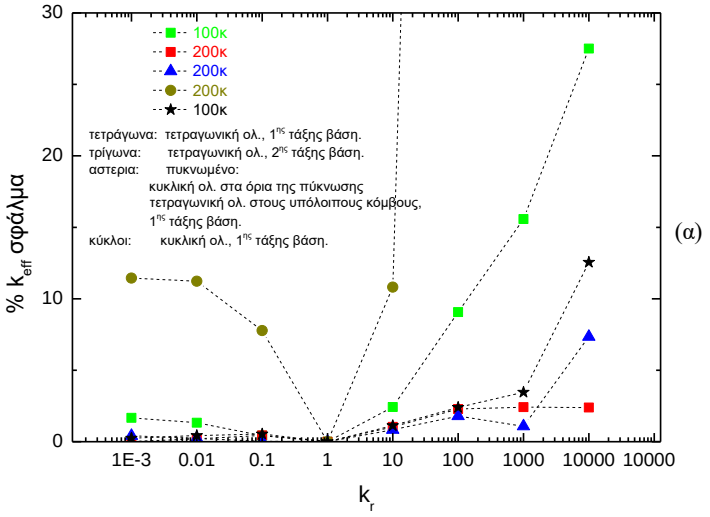
Η τοπική πύκνωση βελτιστοποιεί σαφώς τη λύση και προσφέρει καλύτερη περιγραφή της αποτελεσματικής αγωγιμότητας και της θερμοκρασίας (Εικόνα 4.11, Εικόνα 4.12). Η χρήση της 2ης τάξης παρεμβολής αυξάνει τον υπολογιστικό χρόνο, χωρίς ουσιαστική βελτίωση στα εκτιμώμενα σφάλματα για τα παρόντα προβλήματα (Εικόνα 4.11(α,β)).

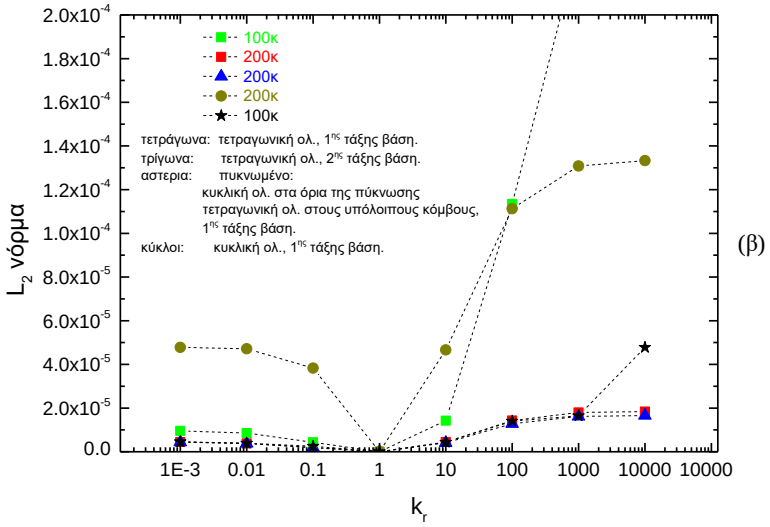


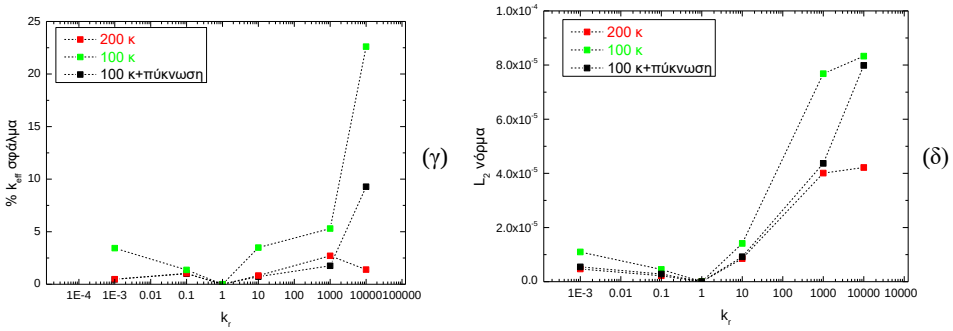
Εικόνα 4.9 Η κατανομή της θερμοκρασίας, όπως προκύπτει από τις μεθόδους MLPG και FEM σε μια τετραγωνική κοιλότητα με μεταβαλλόμενη αγωγιμότητα (α,γ) σε πρώιμα στάδια, και (β,δ) στην μόνιμη κατάσταση. Η αγωγιμότητα του εξωτερικού μέσου είναι 1000 φορές (α,β) μικρότερη η (γ,δ) μεγαλύτερη από το εσωτερικό μέσο. Μαύρες γραμμές: FEM με ανάλυση ~200x200. Κόκκινες: MLPG, 200x200. Πράσινες: MLPG, 100x100. Μπλε: MLPG, 100x100 τοπικά πυκνωμένο.



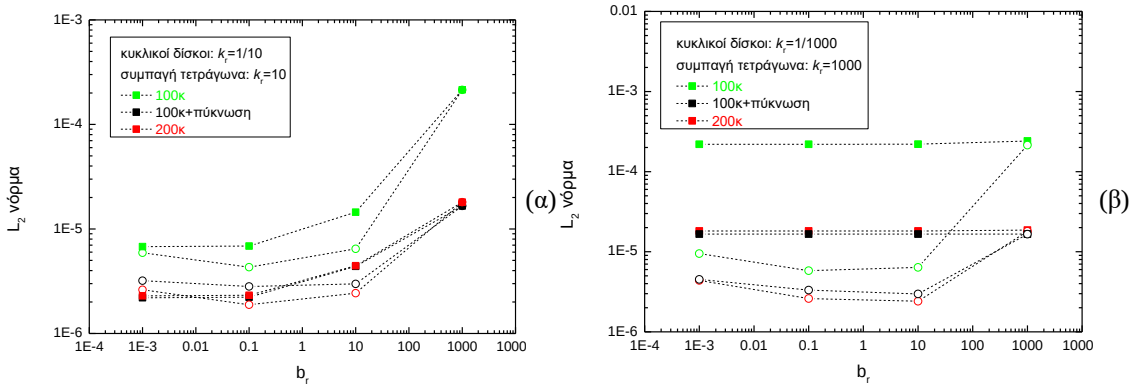
Εικόνα 4.10 Η $2^{η}$ τετραγωνική κοιλότητα αποτελούμενη από δύο μέσα. Γραμμοσκιασμένη περιοχή: εσωτερική περιοχή αγωγιμότητα k_2. Λευκή περιοχή: εξωτερική περιοχή με αγωγιμότητα k_1 . (β,γ) Η κατανομή της θερμοκρασίας, όπως προκύπτει από τις μεθόδους MLPG και FEM στην μόνιμη κατάσταση. Η αγωγιμότητα του εξωτερικού μέσου είναι 1000 φορές (β) μεγαλύτερη ή (γ) μικρότερη από το εσωτερικό μέσο. Μαύρες γραμμές: FEM με ανάλυση ~200x200. Κόκκινες: MLPG, 200x200. Πράσινες: MLPG, 100x100. Μπλε: MLPG, 100x100 τοπικά πυκνωμένο.





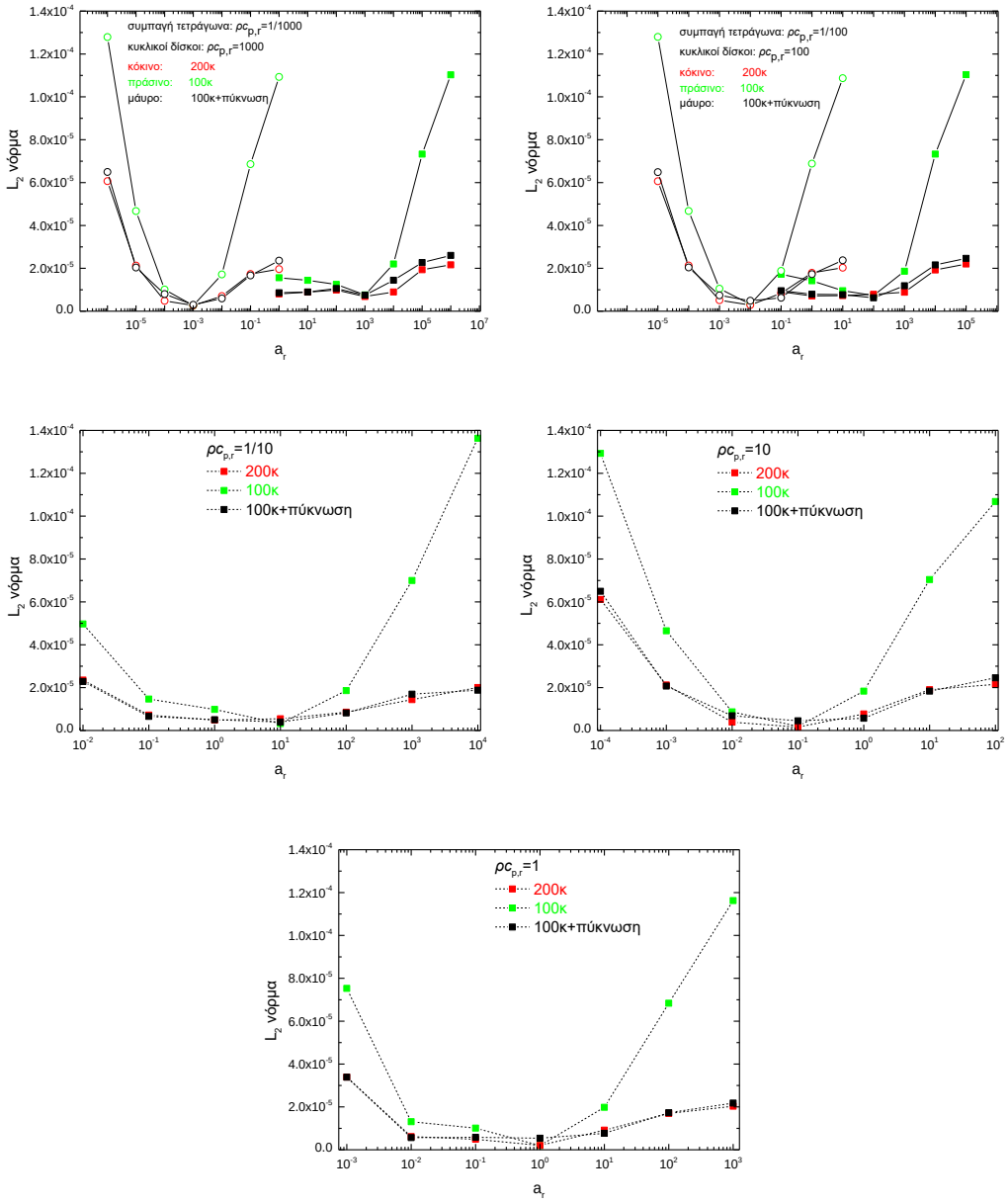


Εικόνα 4.11 Τα σφάλματα στην τιμή (α,γ) της k_{eff} και (β,δ) της L_2 νόρμας των MLPG μεθόδων στην σταθερή κατάσταση, συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των FEM, για (α,β) την πρώτη και (γ,δ) τη δεύτερη δομή, και (α,β) για $1^{ης}$ και $2^{ης}$ τάξης βάση, με ολοκλήρωση σε τετραγωνικούς και κυκλικούς τομείς, ως συνάρτηση του λόγου των αγωγιμοτήτων.

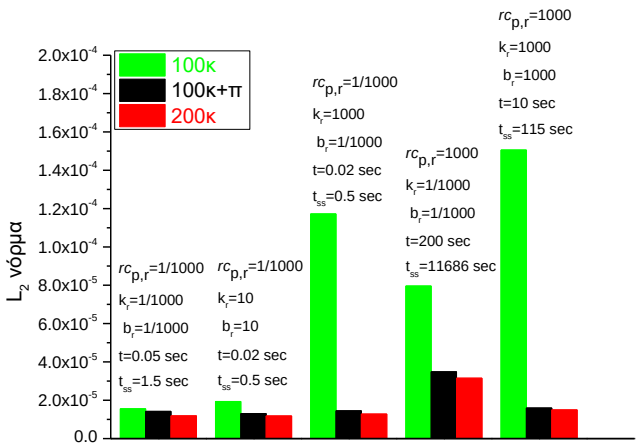


Εικόνα 4.12 Η L_2 νόρμα των διαφορών στη θερμοκρασία των MLPG μεθόδων στην σταθερή κατάσταση, συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των FEM, για (α) μικρούς και (β) μεγάλους λόγους της αγωγιμότητας, σαν συνάρτηση του εξαρτημένου από την θερμοκρασία λόγο b_r, όπως ορίζεται από την εξίσωση (3.9).

Στις επόμενες εικόνες φαίνεται η επιρροή της πύκνωσης στην τιμή της L_2 νόρμας, για ένα ευρύ φάσμα των παραμέτρων στα πρώιμα στάδια των προσομοιώσεων της χρονομεταβαλλόμενης αγωγής. Συγκεκριμένα, στην Εικόνα 4.13 παρουσιάζονται τα σφάλματα προβλημάτων όπου η αγωγιμότητα των μέσων δεν εξαρτάται από την θερμοκρασία ($b_r = 0$), ως συνάρτηση του λόγου της θερμικής διαχυτοτήτας των μέσων. Στην Εικόνα 4.14 εξετάζεται η ακρίβεια των προσομοιώσεων για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Οι παράμετροι αυτοί περιλαμβάνουν τον ανεξάρτητο από τη θερμοκρασία όρο της θερμικής αγωγιμότητας (k_r), τον εξαρτώμενο (b_r), και την ογκομετρική θερμοχωρητικότητα ($\rho c_{p,r}$). Ακόμα μια φορά, η τοπική πύκνωση βελτιώνει τις λύσεις, παρέχοντας αποτελέσματα σχεδόν ίδια με αυτά του διπλάσιου πλέγματος, σε όλο το φάσμα των παραμέτρων που εξετάσθηκαν.



Εικόνα 4.13 Τα σφάλματα,(L_2 νόρμα) των διαφορών των MLPG μεθόδων, σε σύγκριση με τα FEM σαν συνάρτηση του λόγου των θερμικών δαιχυτοτήτων, για διάφορους λόγους της θερμοχωρητικότητας, στα πρώιμα στάδια της χρονικής εξέλιξης.



Εικόνα 4.14 Η επίδραση της πύκνωσης στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων (L_2 νόρμα) για διάφορες τιμές των παραμέτρων, στα πρώιμα στάδια της χρονικής εξέλιξης της διαδικασίας.

Το υπολογιστικό κόστος των μεθόδων παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες. Στον Πίνακας 4.2 φαίνονται οι εκτιμώμενοι χρόνοι που απαιτούνται για την προετοιμασία της κάθε δομής, στην αντίστοιχη ακρίβεια. Οι υπολογισμοί αυτοί αφορούν τον χρόνο υπολογισμού των συναρτήσεων βάσης και των ολοκληρωμάτων για την MLPG μέθοδο, και το σχηματισμό του πλέγματος για τα FEM. Στην MLPG μέθοδο υπάρχει διαχωρισμός για τα προβλήματα σταθερής κατάστασης και για τα χρονομεταβαλλόμενα. Για τα τελευταία απαιτείται υπολογισμός επιφανειακών ολοκληρωμάτων, εκτός των επικαμπύλιων όπου χρησιμοποιούνται μόνον στα προβλήματα σταθερής κατάστασης, δεδομένο το οποίο αυξάνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος, όπως είναι αναμενόμενο. Σε σύγκριση με τα FEM, ανάλυσης περίπου ίση με 200 κόμβους ανά διάσταση, ο χρόνος προετοιμασίας της MLPG προσέγγισης είναι περίπου κατά το 1/3 μικρότερος για $1^{ης}$ τάξης βάση και πλέγμα των 100 κόμβων ανά διάσταση, αλλά αποδεικνύεται πιο αργό για το πλέγμα των 200 κόμβων. Χρειάζεται περίπου τα 3/2 του χρόνου για $1^{ης}$ τάξης συνάρτηση βάσης, και τετραπλάσιο για $2^{ης}$ τάξης. Παρόλα αυτά, για αποτελέσματα ίδιας ακρίβειας, δηλαδή για πυκνωμένο πλέγμα, ο χρόνος προετοιμασίας είναι συγκρίσιμος και κατά λίγο μικρότερος.

Στον Πίνακας 4.3 παρουσιάζονται οι μέσοι χρόνοι κατά την διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος, για τα προβλήματα σταθερής κατάστασης αλλά και για τα πρώιμα στάδια των χρονομεταβαλλόμενων, καθώς επίσης για τις περιπτώσεις όπου η θερμική αγωγιμότητα έχει εξάρτηση από την θερμοκρασία. Οι χρόνοι αναπαριστούν την μέση τιμή για τους υπολογισμούς σε όλο το εύρος των παραμέτρων k_r (1/1000 έως 10000), και b_r (1/1000 έως 10000). Τα μη γραμμικά προβλήματα αποδεικνύεται ότι χρειάζονται 4 επαναλήψεις για να συγκλίνουν. Κατά το στάδιο της επίλυσης είναι εμφανής η ανωτερότητα των MLPG μεθόδων σε όλες τις αναλύσεις και τις συναρτήσεις βάσης. Η MLPG μέθοδος με πυκνωμένο πλέγμα, που αναπτύχθηκε και παρουσιάζεται στο παρόν, προσθέτει λίγο υπολογιστικό χρόνο, αλλά ξεπερνά τη μέθοδο των FEM σε υπολογιστική απόδοση.

Πίνακας 4.2 Οι χρόνοι που απαιτούνται για την προετοιμασία της κάθε δομής, δηλ οι υπολογισμοί των συναρτήσεων βάσης και των ολοκληρωμάτων για τα προβλήματα σταθερής κατάστασης, και τα χρονομεταβαλλόμενα, για την MLPG μέθοδο, και για την δημιουργία του πλέγματος για την μέθοδο των FEM.

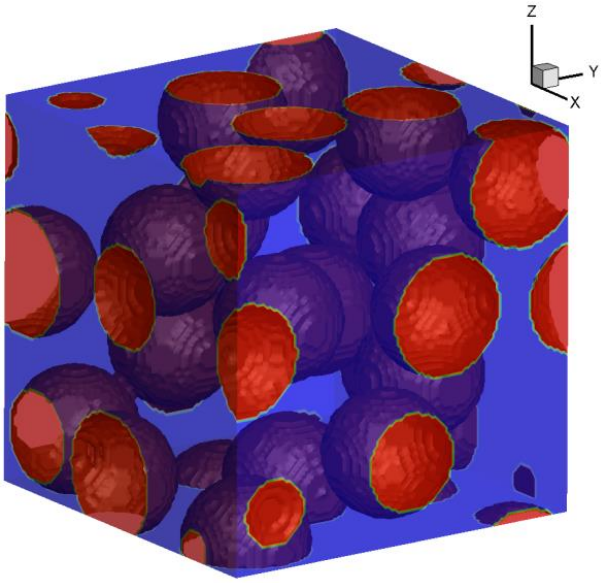
Μέθοδοι	**Χρόνος προετοιμασίας Σταθερή κατάσταση (επικαμπύλια ολοκληρώματα) (s)**	**Χρόνος προετοιμασίας Χρονικά μεταβαλλόμενη κατάσταση (επικαμπύλια+επιφανειακά ολοκληρώματα) (s)**
MLPG 1^{ης} τάξης, 100 κόμβοι ανά διάσταση (10101 κόμβοι)	13	13+32
MLPG τοπικά πυκνωμένο στη διπλάσια ανάλυση 1^{ης} τάξης, 100 κόμβοι ανά διάσταση (23727 κόμβοι)	28	28+59
MLPG 1^{ης} τάξης, 200 κόμβοι ανά διάσταση (40401 κόμβοι)	48	48+93
MLPG 2^{ης} τάξης, 200 κόμβοι ανά διάσταση (40401 κόμβοι)	130	130+305
FEM, ~200κόμβοι ανά διάσταση (41769 στοιχεία)	33	33+0

Πίνακας 4.3 Οι μέσοι χρόνοι επίλυσης των προβλημάτων σταθερής κατάστασης (άνω μέρος) και των πρώιμων σταδίων, των χρονικά μεταβαλλόμενων (κάτω μέρος) από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται, για σταθερή (μεσαία στήλη) και μεταβαλλόμενη με την θερμοκρασία αγωγιμότητα (δεξιά στήλη)

Μέθοδοι	**Χρόνος επίλυσης Σταθερή κατάσταση (s)**	**Χρόνος επίλυσης Σταθερή κατάσταση k=k(T) (s)**
MLPG 1^{ης} τάξης, 100 κόμβοι ανά διάσταση (10101 κόμβοι)	0.12	0.59
MLPG τοπικά πυκνωμένο στη διπλάσια ανάλυση 1^{ης} τάξης, 100 κόμβοι ανά διάσταση (23727 κόμβοι)	0.3	1.8
MLPG 1^{ης} τάξης, 200 κόμβοι ανά διάσταση (40401 κόμβοι)	0.56	3.4
FEM, ~200κόμβοι ανά διάσταση (41769 στοιχεία)	6	13
	Χρόνος επίλυσης Χρονικά μεταβαλλόμενη κατάσταση (1/25 της σταθερής κατάστασης) (s)	**Χρόνος επίλυσης Χρονικά μεταβαλλόμενη κατάσταση k=k(T) (1/25 της σταθερής κατάστασης) (s)**
MLPG 1^{ης} τάξης, 100 κόμβοι ανά διάσταση (10101 κόμβοι)	7 (72 επαναλήψεις)	15 (55 επαναλήψεις)
MLPG τοπικά πυκνωμένο στη διπλάσια ανάλυση 1^{ης} τάξης, 100 κόμβοι ανά διάσταση (23727 κόμβοι)	20 (73 επαναλήψεις)	48 (56 επαναλήψεις)
MLPG 1^{ης} τάξης, 200 κόμβοι ανά διάσταση (40401 κόμβοι)	33 (73 επαναλήψεις)	75 (55 επαναλήψεις)
FEM, ~200κόμβοι ανά διάσταση (41769 στοιχεία)	81 (80 επαναλήψεις)	486 (58 επαναλήψεις)

4.5 Επέκταση στις 3 διαστάσεις

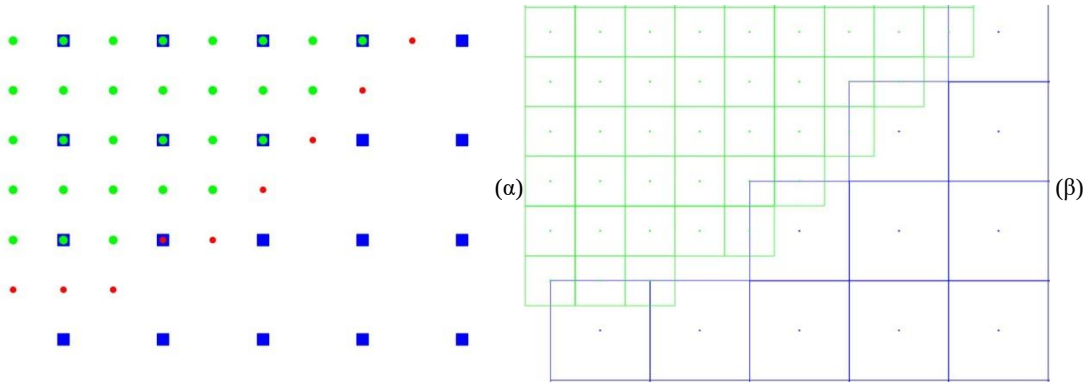
Μετά την επιτυχία της μεθόδου στις δύο διαστάσεις, σειρά είχε η προσπάθεια επέκτασής της σε πιο ρεαλιστικά προβλήματα, που αφορούν τρεις διαστάσεις. Στην Εικόνα 4.15 παρουσιάζεται η δομή που μελετήθηκε. Πρόκειται για ένα κυβικό χωρίο, το οποίο γεμίζεται με μη επικαλυπτόμενες σφαίρες, ακτίνας ίσης με το 16% της ακμής του κύβου. Εφαρμόζεται μια διαφορά θερμοκρασίας κατά την z διεύθυνση ενώ τα υπόλοιπα όρια του πεδίου θεωρούνται θερμικά μονωμένα, ομοίως με τα προβλήματα των δύο διαστάσεων. Εδώ πραγματευόμαστε προβλήματα σταθερής κατάστασης, με την αγωγιμότητα των μέσων να μην εξαρτάται από την θερμοκρασία, δηλαδή παρουσιάζονται οι λύσεις της εξίσωσης (4.1) για μεγάλο εύρος του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων των μέσων.



Εικόνα 4.15 Η δομή που μελετήθηκε

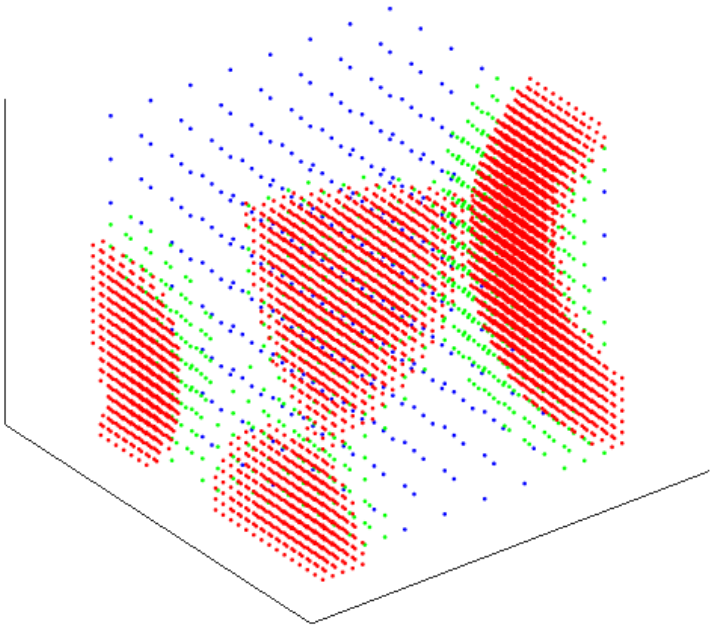
Κατά την διαδικασία προσομοίωσης του παραπάνω, παρουσιάστηκε μια δυσκολία, που αφορούσε τον υπολογισμό των συναρτήσεων βάσης, στις περιοχές του μέσου όπου το πλέγμα υφίσταται πύκνωση. Συγκεκριμένα, αποδείχθηκε υπολογιστικά δύσκολο και χρονοβόρο να καθοριστούν οι κόμβοι που τοποθετούνται στα όρια της πύκνωσης, όπως παρουσιάζεται στην υποενότητα 4.3. Για την παράκαμψη αυτής της δυσκολίας, χρησιμοποιήθηκε ένας εναλλακτικός τρόπος παρεμβολής για αυτές τις περιοχές. Η επεξήγηση αυτού θα γίνει με την βοήθεια της Εικόνα 4.16(α). Τα σημεία του πλέγματος χαμηλής ανάλυσης εμφανίζονται ως μπλε τετράγωνα, τα υπόλοιπα ανήκουν στην υψηλότερη ανάλυση. Τα σημεία του πλέγματος που ανήκουν και στα δύο επίπεδα διακριτοποίησης φαίνονται ως σημεία εντός τετραγώνων. Οι κόμβοι που ανήκουν στην χαμηλή ανάλυση δεν “αντιλαμβάνονται” την πύκνωση του πλέγματος κατά την

ολοκλήρωση, οπότε για τον υπολογισμό της συνάρτησης βάσης σε αυτά, χρησιμοποιούνται μόνον το μέρος των κόμβων της υψηλότερης ανάλυσης που ανήκουν και στα δύο πλέγματα. Επίσης ένας λεπτός φλοιός από τους κόμβους (κόκκινα σημεία), που ανήκουν στην υψηλότερη ανάλυση, δεν επηρεάζονται από ολόκληρο το πλέγμα, παρά μόνον τους ίδιους κόμβους με την παραπάνω περίπτωση, και τον εαυτό τους. Οι υπόλοιποι επηρεάζονται και επηρεάζουν ολόκληρο το πλέγμα.



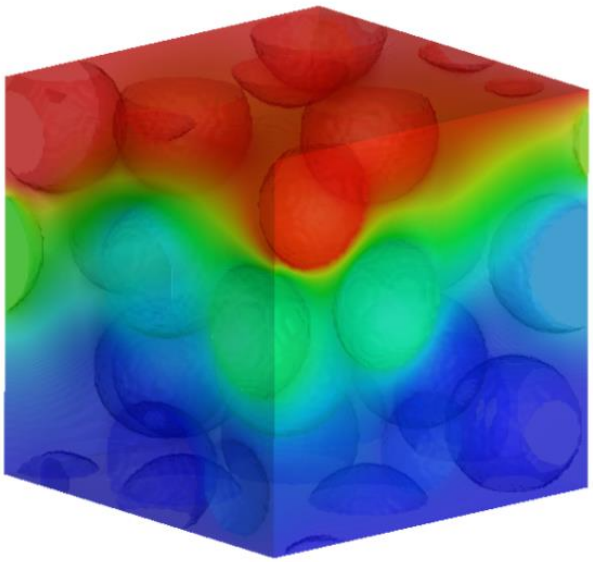
Εικόνα 4.16 (α) Το σχήμα της παρεμβολής, (β) τα χωρία ολοκλήρωσης γύρω από κάθε κόμβο

Στην Εικόνα 4.16(β) φαίνονται τα χωρία ολοκλήρωσης γύρω από κάθε κόμβο, που αποτελούνται από τετράγωνα πλευράς ίσης με την πλεγματική απόσταση του κάθε κόμβου, καθώς ξανά, ο στόχος είναι με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος να μειωθούν τα φαινόμενα αλληλεπικαλύψεις των τομέων ολοκλήρωσης, και ταυτόχρονα να καλύπτεται το μεγαλύτερο μέρος από το χωρίο του προβλήματος. Επεκτείνοντας τα παραπάνω στις τρεις διαστάσεις, χρησιμοποιήθηκε ένα πλέγμα αποτελούμενο από τρία επίπεδα διακριτοποίησης. Ένα μικρής ανάλυσης (25x25x25) για τις περιοχές που βρίσκονται μακριά από την διεπιφάνεια, ένα δεύτερο ανάλυσης (100x100x100) στις περιοχές κοντά στη διεπιφάνεια, και ένα τρίτο ενδιάμεσης ανάλυσης (50x50x50) σε μία μικρή περιοχή ανάμεσα στις άλλες δύο (σύνολο 380,000 κόμβοι). Σε κάθε ένα από αυτά τα επίπεδα διακριτοποίησης η παρεμβολή γίνεται με τον τρόπο που παρουσιάστηκε παραπάνω. Δείγμα του πλέγματος φαίνεται στην Εικόνα 4.17. Η ολοκλήρωση γίνεται σε κυβικούς τομείς γύρω από κάθε κόμβο, με ακμή ίση της πλεγματικής απόστασης του κάθε κόμβου. Επίσης χρησιμοποιήθηκε $1^{ης}$ τάξης προσέγγιση για την κατασκευή των συναρτήσεων βάσης. Όσον αφορά τη μέθοδο των FEM, χρησιμοποιείται η ολική ασθενής μορφή, σύμφωνα με την προσέγγιση Galerkin, με ένα πλέγμα, αποτελούμενο από τετραεδρικά στοιχεία στις δύο περιοχές του μέσου, και οριακά στρώματα στα όρια των διεπιφανειών.



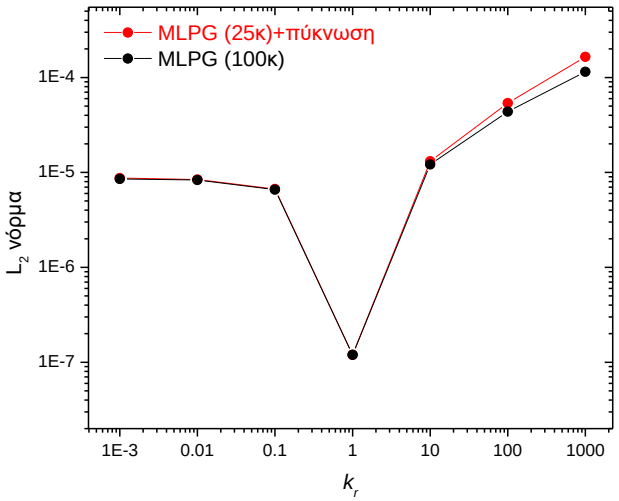
Εικόνα 4.17 Δείγμα του πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε Μπλε κόμβοι: ανάλυση (25x25x25), Πράσινοι κόμβοι: ενδιάμεση ανάλυση (50x50x50) , Κόκκινοι κόμβοι: μέγιστη ανάλυση (100x100x100)

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι για την σύγκλιση της μεθόδου των FEM, απαιτείται ένα πλέγμα αποτελούμενο από περίπου 1 εκατομμύριο στοιχεία. Σε αντίθεση με την MLPG μέθοδο που το πλέγμα που αναλύθηκε παραπάνω, φάνηκε επαρκές. Αυτό σημαίνει ότι με αυτή τη μέθοδο μπορούν να μειωθούν κατά πολύ οι απαιτήσεις σε υπολογιστική ισχύ. Παρόλα αυτά, για την λύση του παρόντος προβλήματος, τα FEM αποδεικνύονται ταχύτερα. Αυτό συμβαίνει για δύο λόγους. Αρχικά ο χρόνος υπολογισμού των συναρτήσεων βάσης και των ολοκληρωμάτων είναι μεγάλος, και επίσης ο χρόνος επίλυσης του τελικού πίνακα είναι μεγαλύτερος. Και τα δύο αυτά προβλήματα μπορούν να ξεπεραστούν. Κατά πρώτον με την δημιουργία μιας βάσης δεδομένων που θα έχει αποθηκευμένες τις τιμές των συναρτήσεων βάσης και των ολοκληρωμάτων, για τους κόμβους που το πεδίο επιρροής τους ανήκει σε πλέγμα συγκεκριμένης ανάλυσης. Με αυτό θα μειωθεί δραστικά ο χρόνος προετοιμασίας, αφού νέοι υπολογισμοί θα χρειάζεται να τελούνται μόνο στα όρια της πύκνωσης. Κατά δεύτερον, η χρήση μιας πιο εξελιγμένης μεθόδου για την επίλυση του πίνακα θα μειώσει τον αντίστοιχο χρόνο.



Εικόνα 4.18 Η κατανομή της θερμοκρασίας, όπως προκύπτει από την MLPG μέθοδο για την περίπτωση όπου k_r=1000

Στην Εικόνα 4.18 βλέπουμε την κατανομή της θερμοκρασίας στο μέσο, για μια ακραία τιμή της παραμέτρου. Η θερμική αγωγιμότητα των σφαιρών είναι 1000 φορές μεγαλύτερη από αυτήν της εξωτερικής περιοχής (k_r=1000). Στην Εικόνα 4.19 παρουσιάζονται οι διαφορές στην θερμοκρασία (L_2 νόρμα), όπως αυτές προκύπτουν από την MLPG μέθοδο και την μέθοδο των FEM, ως συνάρτηση του λόγου της θερμικής αγωγιμότητας του μέσου. Εκεί φαίνεται η επιτυχία του προτεινόμενου σχήματος για την παρεμβολή, καθώς τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις προσομοιώσεις με το πυκνωμένο πλέγμα συμπίπτουν με αυτά που χρησιμοποιούν το πλέγμα μέγιστης ανάλυσης σε ολόκληρο το πεδίο. Παρατηρούμε ότι οι διαφορές παραμένουν μικρές σε όλο το εύρος των τιμών της παραμέτρου.

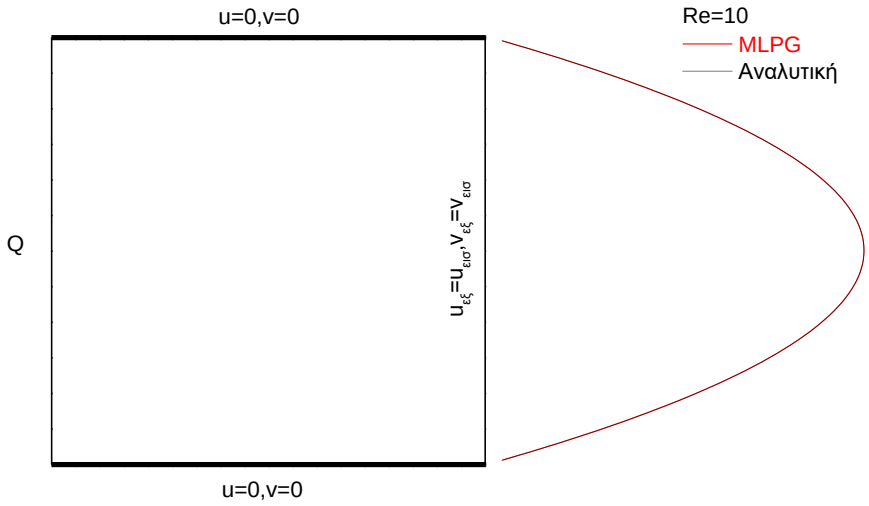


Εικόνα 4.19 Η L_2 νόρμα των διαφορών των θερμοκρασιών από τις MLPG μέθοδους και την μέθοδο των FEM

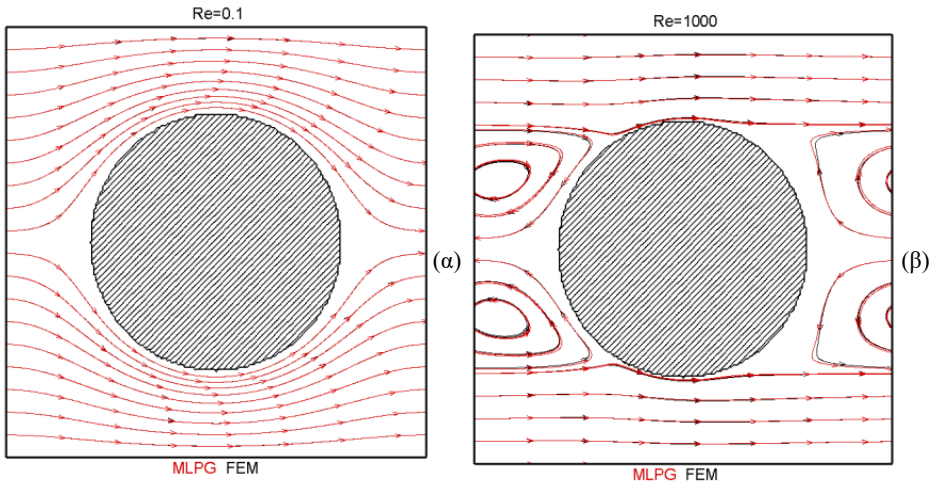
Κεφάλαιο 5: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΓΩΓΗΣ

5.1 Απομόνωση του προβλήματος ροής

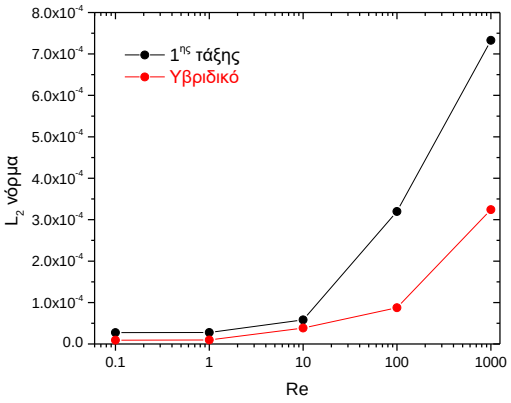
Μετά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων που σχετίζονται με προβλήματα αγωγής, περνάμε στο δεύτερο μέρος αυτής της εργασίας, που αφορά την λύση προβλημάτων ροής και συναγωγής θερμότητας. Μια εξωτερικά επιβαλλόμενη δύναμη θέτει σε κίνηση το ρευστό που βρίσκεται στους πόρους του πορώδους μέσου, ενώ παράλληλα μια διαφορά θερμοκρασίας προκαλεί μεταφορά ενέργειας κατά την ίδια διεύθυνση. Παρατηρώντας το σύνολο των εξισώσεων (3.11), παρατηρούμε ότι προηγείται ο υπολογισμός του πεδίου ροής, ώστε οι ταχύτητες που προκύπτουν να χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό της θερμοκρασιακής κατανομής. Καθώς από την λύση μιας, γραμμικής ή μη, εξίσωσης περνάμε στην προσπάθεια προσέγγισης ενός συνόλου συζευγμένων εξισώσεων, εύλογο είναι να δοκιμαστεί η μέθοδος σε ένα απλό πρόβλημα με αναλυτική λύση. Εδώ εξετάζεται μια πλήρως ανεπτυγμένη ροή μεταξύ παράλληλων πλακών. Η ροή έχει παραβολική μορφή και είναι γνωστή ως ροή Poiseuille. Αριθμητικά, το πρόβλημα λύνεται με την MLPG μέθοδο, χρησιμοποιώντας πρώτης τάξης προσέγγιση σε ένα πλέγμα 100 κόμβων ανά διάσταση, ολοκληρώνοντας σε τετραγωνικούς τομείς γύρω από κάθε κόμβο. Λύνοντας το σύνολο των εξισώσεων (3.16)-(3.18) και (3.23), με τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στο Κεφ.3, παίρνουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας. Στην Εικόνα 5.1 φαίνεται η x-συνιστώσα της ταχύτητας, όπως αυτή προκύπτει από την αναλυτική λύση και την MLPG μέθοδο. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καμία παρατηρήσιμη διαφοροποίηση στο προφίλ της ταχύτητας, οπότε περνάμε με μεγαλύτερη σιγουριά σε πιο σύνθετα προβλήματα όπως την ροή γύρο από κύλινδρο. Στην Εικόνα 5.2 παρουσιάζεται η δομή που μελετάται και οι ρευματικές γραμμές που προκύπτουν από την MLPG μέθοδο και την μέθοδο των FEM. Στην πρώτη περίπτωση (Εικόνα 5.2(α)) ο προκύπτων αριθμός Reynolds είναι πολύ μικρός (Re=0.1), ενώ στην δεύτερη (Εικόνα 5.2(β)) πολύ μεγάλος (Re=1000). Στην Εικόνα 5.3 φαίνεται η μέση Ευκλείδεια νόρμα των διαφορών στο μέτρο της ταχύτητας, όπως αυτή προκύπτει από τις MLPG μεθόδους και την μέθοδο των FEM, σε ένα μεγάλο εύρος τιμών του αριθμού Reynolds. Εδώ εφαρμόζεται άμεσα η υβριδική MLPG μέθοδος που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς λαμβάνεται δεύτερης τάξης προσέγγιση σε μια μικρή περιοχή γύρω από τα τοιχώματα του μέσου. Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι τα σφάλματα μειώνονται, ειδικά στις περιπτώσεις μεγάλου αριθμού Reynolds, γεγονός που αποδεικνύει ξανά την ευελιξία που δίνει η υβριδική προσέγγιση και την εφαρμοσιμότητά της.



Εικόνα 5.1 Η γεωμετρία και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (αριστερά) και το προφίλ της x-συνιστώσας της ταχύτητας για αριθμό Reynolds ίσο με 10, με την μέθοδο MLPG και την αναλυτική λύση (δεξιά).

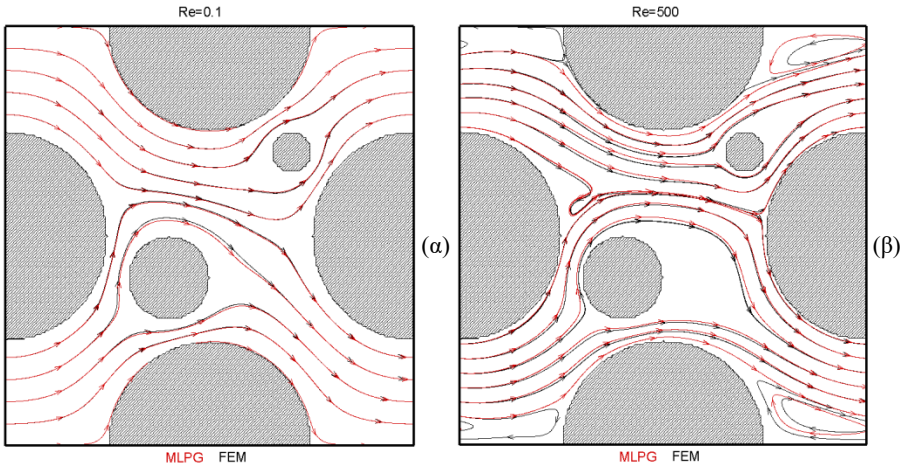


Εικόνα 5.2 Η γεωμετρία του προβλήματος και οι ρευματικές γραμμές, με την υβριδική MLPG μέθοδο και τα FEM, για δύο αριθμούς Reynolds

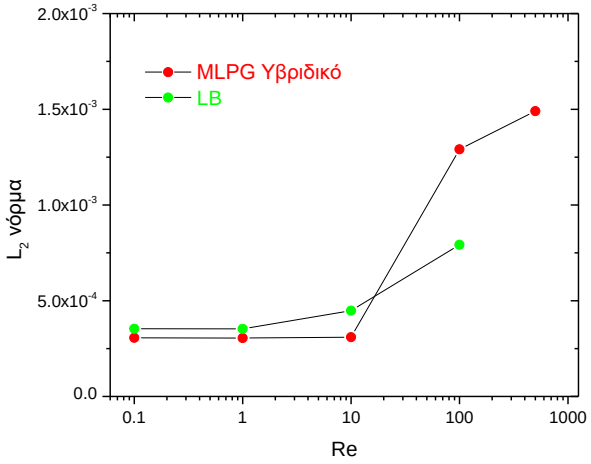


Εικόνα 5.3 Η μέση L_2 νόρμα των διαφορών στο μέτρο της ταχύτητας από τις MLPG μεθόδους και την μέθοδο των FEM σαν συνάρτηση του αριθμού Reynolds.

Συνεχίζοντας την ανάλυση που αφορά μόνο το πρόβλημα ροής, περνάμε στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που αφορούν μια πιο πεπλεγμένη δομή, όπως αυτή παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.4. Εκεί βλέπουμε τις ρευματικές γραμμές που προκύπτουν από την υβριδική MLPG μέθοδο και την μέθοδο των FEM, στο ίδιο φυσικό πρόβλημα. Στην Εικόνα 5.5 παρουσιάζονται οι διαφοροποιήσεις στο μέτρο της ταχύτητας, κατά τρόπο όμοιο με τα παραπάνω. Εδώ επαναφέρεται η μέθοδος Lattice-Boltzmann (LB), όπου φαίνεται η σταθερότητα και η εφαρμοσιμότητά της στις προσομοιώσεις που αφορούν την ροή.



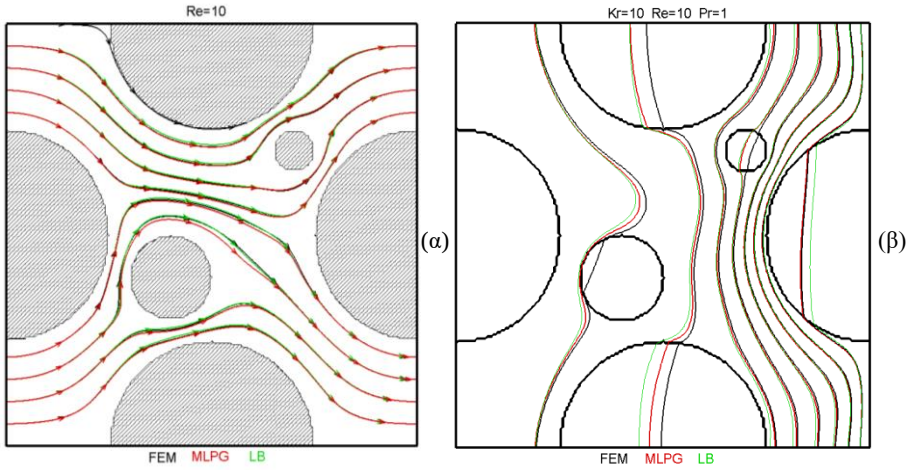
Εικόνα 5.4 Η γεωμετρία του προβλήματος και οι ρευματικές γραμμές, με την υβριδική MLPG μέθοδο και τα FEM για δύο αριθμούς Reynolds.



Εικόνα 5.5 Η μέση L_2 νόρμα των διαφορών στο μέτρο της ταχύτητας, για την MLPG και LB μέθοδο, σε σύγκριση με την μέθοδο των FEM, ώς συνάρτηση του αριθμού Reynolds.

5.2 Το πλήρες πρόβλημα

Το επόμενο βήμα ήταν η προσομοίωση του συνολικού προβλήματος που παρουσιάστηκε στο 3ο κεφάλαιο. Στις Εικόνες 5.4 παρουσιάζονται οι ρευματικές γραμμές και οι ισόθερμες, σε ένα παράδειγμα που αφορά την παραπάνω γεωμετρία, από το σύνολο των μεθόδων MLPG, LB και FEM. Ο αριθμός Reynolds προκύπτει ίσος με 10. Η αγωγιμότητα του στερεού όγκου του πορώδους μέσου τίθεται 10 φορές μεγαλύτερη από αυτή των πόρων, και ο αριθμός Prandlt, που αναφέρεται στο υλικό που ρέει στους πόρους, τίθεται ίσος με την μονάδα. Παρατηρούμε ότι οι λύσεις των μεθόδων διαφοροποιούνται ελάχιστα, πράγμα που τις καθιστά κατάλληλες, όσον αφορά την ακρίβεια για τέτοιου είδους προβλήματα. Στον Πίνακας 5.1 παρουσιάζεται ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται από την εκάστοτε μέθοδο, κατ' αντιστοιχία με τους πίνακες του προηγούμενου κεφαλαίου. Ο χρόνος προετοιμασίας για την MLPG μέθοδο αφορά τον υπολογισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων συν τον υπολογισμό των επιφανειακών. Ο χρόνος λύσης του προβλήματος χωρίζεται με βάση το μέρος του προβλήματος που προσεγγίζεται. Ο πρώτος όρος αφορά το πρόβλημα ροής, και ο δεύτερος το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας. Είναι φανερό, όπως έχει δειχθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ότι η MLPG μέθοδος είναι προτιμητέα στο πρόβλημα μεταφοράς θερμότητας. Η πρόσθετη πληροφορία που παίρνουμε από αυτόν τον πίνακα αφορά την ανωτερότητα της LB μεθόδου στο κομμάτι του προβλήματος που σχετίζεται με τον υπολογισμό του πεδίου ροής. Εδώ γεννάται η ιδέα, ότι ο συνδυασμός των μεθόδων MLPG και LB μπορεί να προσφέρει μια ακριβής και γρήγορη περιγραφή αυτών των προβλημάτων. Η επιτυχία της μεθόδου αυτής είναι φανερή, καθώς ο απαιτούμενος χρόνος προετοιμασίας είναι περίπου ίδιος με αυτών των FEM, αλλά ο συνολικός χρόνος λύσης είναι κατά τρεις φορές μικρότερος.



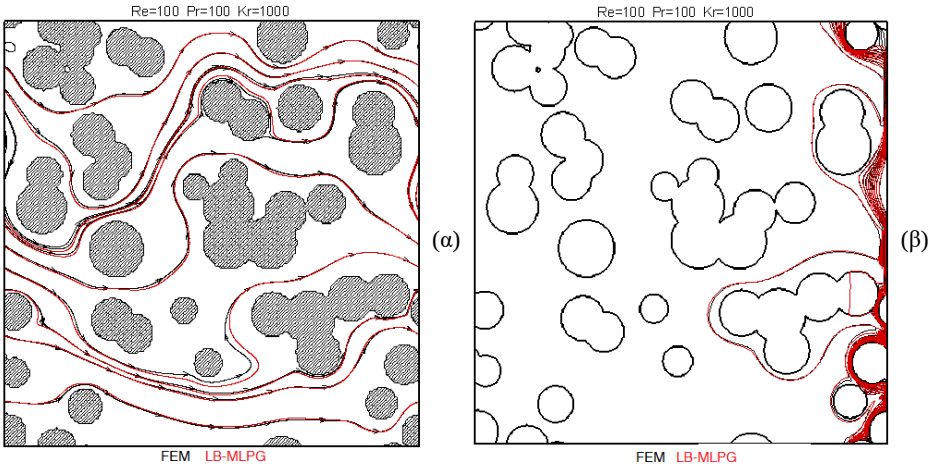
Εικόνα 5.6 (α) Οι ρευματικές γραμμές και (β) η κατανομή της θερμοκρασίας για ένα πρόβλημα συναγωγής θερμότητας(Re=10,Pr=1,k_r=10) από τις μεθόδους MLPG, FEM και LB

Πίνακας 5.1 Ο υπολογιστικός χρόνος για την προετοιμασία των δεδομένων, και την λύση των προβλημάτων, για τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται

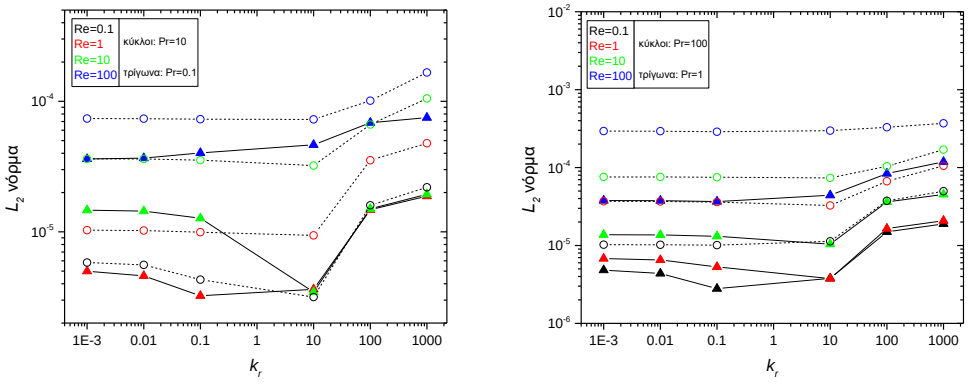
Μέθοδοι	**Χρόνος προετοιμασίας (s)**	**Χρόνος λύσης (Ροή + μεταφορά θερμότητας) (s)**
LB, 200κ. ανά διάσταση (40401 κ.)	--	19+ 400
MLPG 1^{ης} τάξης, 200κ. ανά διάσταση (40401 κ.)	48+93	950+0.7
FEM, ~200κ. ανά διάσταση (41479 στοιχεία)	29	68
LB-MLPG (LB, 200 κ.+MLPG 100κ.+πύκνωση)	28	20

5.3 Εφαρμογή της LB-MLPG σε προβλήματα συναγωγής.

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον συνδυασμό των MLPG και LB μεθόδων, θα παρουσιάσουμε προσομοιώσεις συναγωγής θερμότητας, σε όλες τις πεπλεγμένες δομές που παρουσιάστηκαν προηγούμενος (Εικόνα 3.1, Εικόνα 4.10), για ένα μεγάλο εύρος τιμών του αριθμού Reynolds, Prandlt και του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων του μέσου. Στην Εικόνα 5.7 παρουσιάζονται οι ρευματικές και ισοθερμοκρασιακές γραμμές που εξάγονται από αυτόν τον συνδυασμό των μεθόδων (LB-MLPG) και με τα FEM. Στην Εικόνα 5.8 φαίνονται οι διαφορές στην κατανομή της θερμοκρασίας, όπως αυτή αποτυπώνεται στην μέση L_2 νόρμα από τις δύο μεθόδους. Παρατηρούμε ότι η λύση παραμένει σταθερή σε όλο το εύρος των τιμών των παραμέτρων που ερευνήθηκαν.

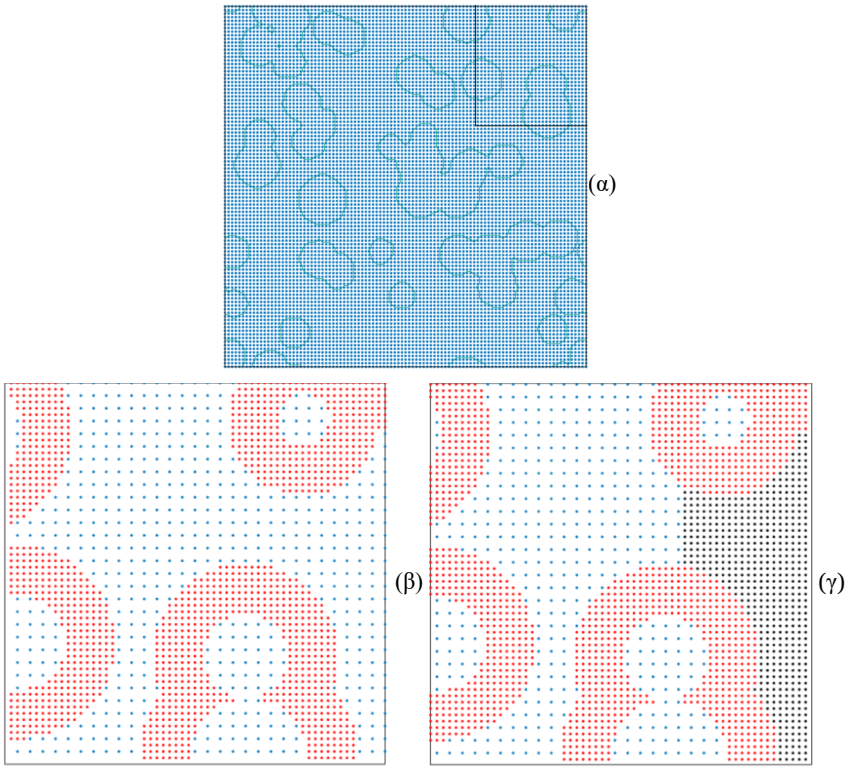


Εικόνα 5.7 (α) Οι ρευματικές γραμμές και (β) η κατανομή της θερμοκρασίας για ένα πρόβλημα συναγωγής θερμότητας(Re=100,Pr=100,k_r=1000) από τις μεθόδους LB–MLPG και FEM.



Εικόνα 5.8 Η μέση L_2 νόρμα των διαφορών στη θερμοκρασιακή κατανομή από την LB–MLPG και την μέθοδο των FEM σαν συνάρτηση του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων των μέσων για διάφορες περιπτώσεις αριθμού Reynolds και Prandlt

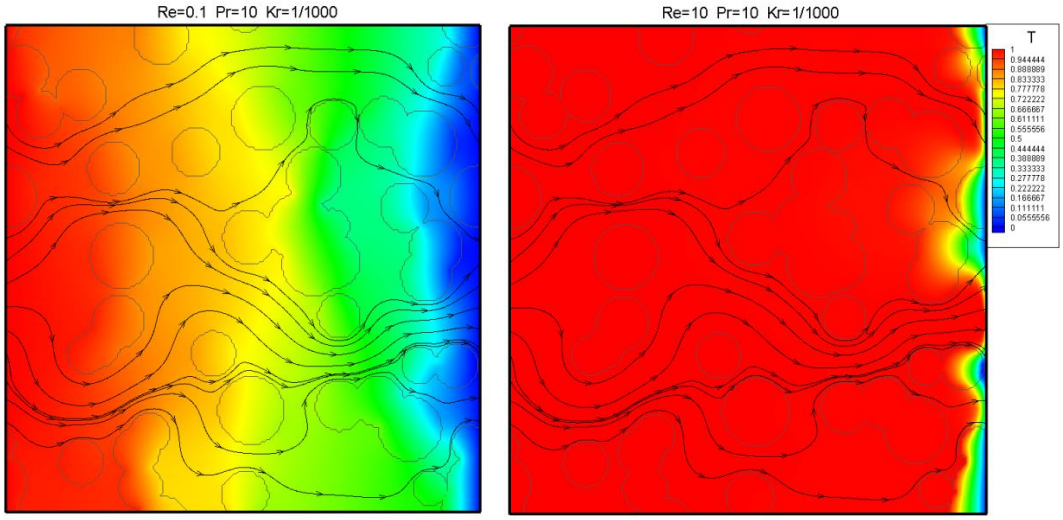
Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την λύση των προβλημάτων με την LB-MLPG μέθοδο έχει ως εξής. Αρχικά καθορίζεται η οδηγούσα δύναμη της ροής, ο αριθμός Prandl και ο λόγος των θερμικών αγωγιμοτήτων. Η μέθοδος LB καθορίζει το πεδίο της ροής. Για αυτά τα προβλήματα ένα πλέγμα 200 κόμβων ανά διάσταση φάνηκε να είναι αρκετό. Ταυτόχρονα δομούνται οι συναρτήσεις βάσης και υπολογίζονται τα απαραίτητα επικαμπύλια ολοκληρώματα για την μέθοδο MLPG σε ένα πλέγμα 100 κόμβων ανά διάσταση, Εικόνα 5.9(α). Στην συνέχεια, εάν ο λόγος των θερμικών αγωγιμοτήτων βρίσκεται μακριά από την μονάδα, το πλέγμα αυτό πυκνώνεται στις περιοχές κοντά στη διεπιφάνεια, με ένα πλέγμα διπλάσιας ανάλυσης και λύνεται το πρόβλημα μεταφοράς Εικόνα 5.9(β). Σε περίπτωση που ο αριθμός Reynolds ή ο Prandlt είναι μεγάλος, το μεγαλύτερο μέρος του χωρίου επίλυσης έχει σχεδόν την θερμοκρασία του αριστερού συνόρου, οπότε η μεταβολή της περιορίζεται σε μια μικρή απόσταση πριν το δεξί όριο. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε αστάθεια των λύσεων. Προς αποφυγήν τούτου, μετά την λύση του θερμικού προβλήματος ελέγχεται η παράγωγος της θερμοκρασίας στη διεύθυνση της μεταφοράς σε κάθε κόμβο. Εάν η μεταβολή της υπερβαίνει το 20% της συνολικής διαφοράς, που ορίζουν οι συνοριακές συνθήκες, πυκνώνεται ξανά το πλέγμα σε εκείνες τις περιοχές και επαναλαμβάνεται η λύση του προβλήματος, Εικόνα 5.9(γ).



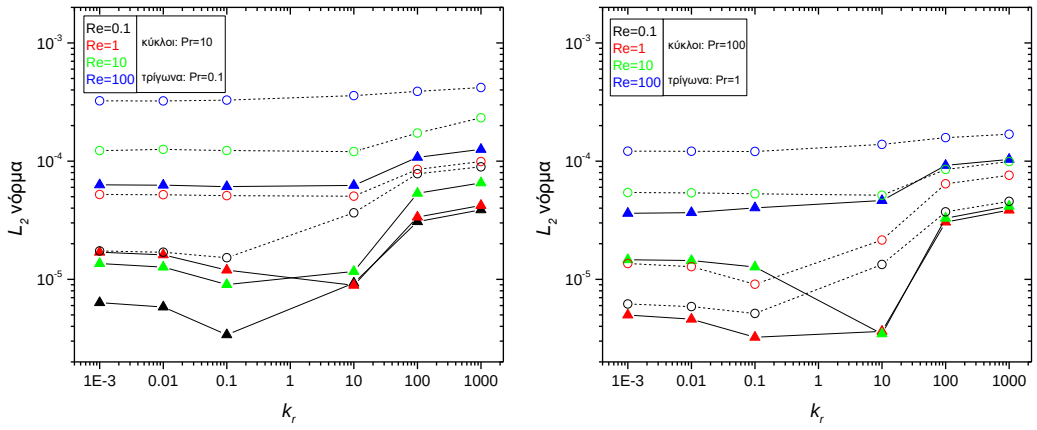
Εικόνα 5.9 (α) Το αρχικό πλέγμα που χρησιμοποιείται για την λύση του θερμικού προβλήματος(100κ.) (β) Η πρώτη πύκνωση που ακολουθεί την γεωμετρία και (γ) η δεύτερη πύκνωση καθορίζεται από την λύση.

Στις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 5.10) φαίνεται η επίδραση του αριθμού Reynolds στην θερμοκρασιακή κατανομή σε μια εναλλακτική δομή. Εκεί παρουσιάζονται επίσης οι ρευματικές

γραμμές των προβλημάτων. Και στις δύο περιπτώσεις η θερμική αγωγιμότητα του στέρεου όγκου είναι 1000 φορές μικρότερη από αυτή των πόρων. Επίσης ο αριθμός Prandlt τίθεται ίσος με 10. Ακολουθεί (Εικόνα 5.11) η σύγκριση των αποτελεσμάτων. Βλέπουμε ότι οι διαφορές παραμένουν στα ίδια επίπεδα με παραπάνω.



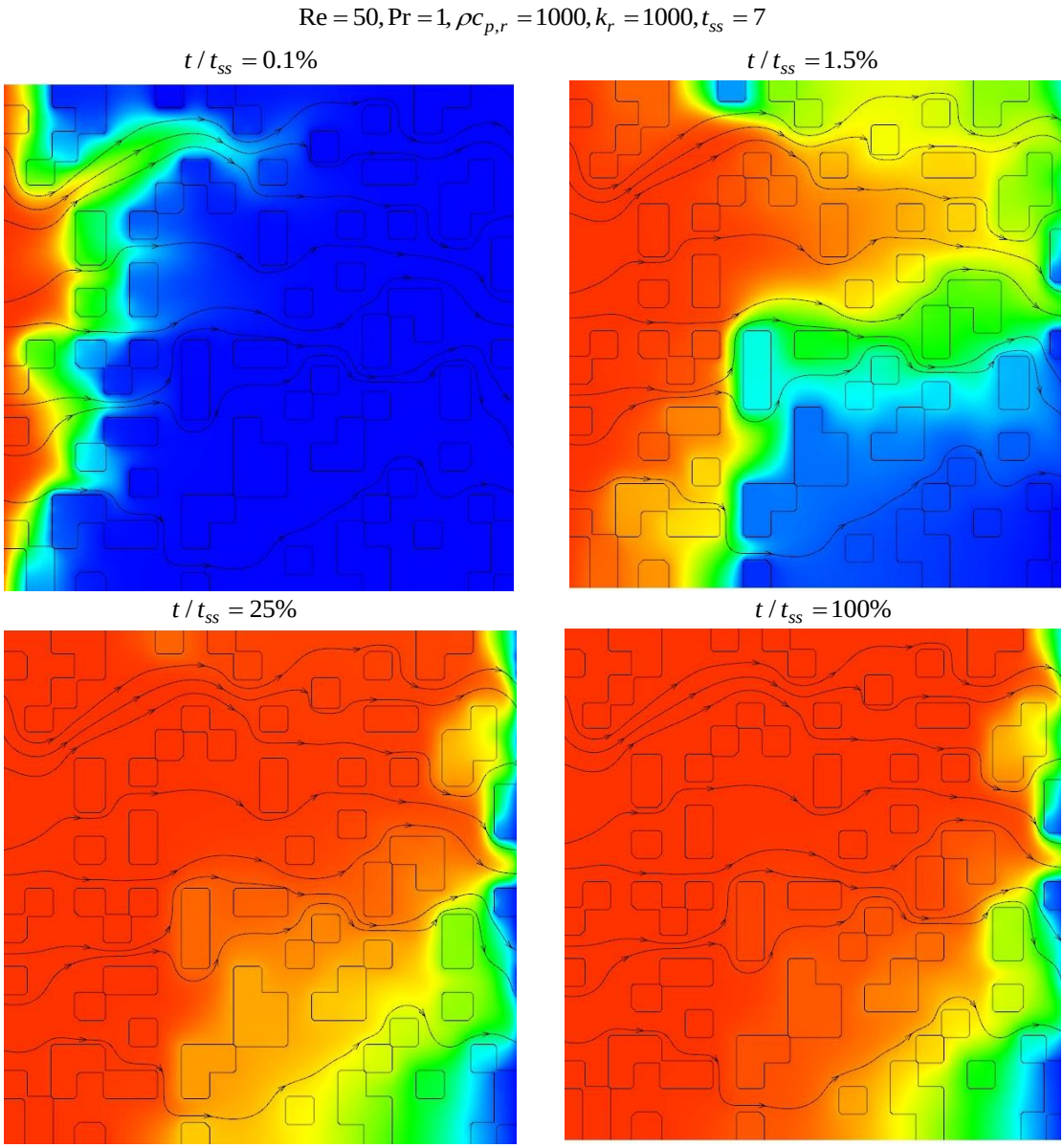
Εικόνα 5.10 Η επίδραση του αριθμού Reynolds στην κατανομή της θερμοκρασίας, για μία περίπτωση με Prandlt=10 και k_r=1/1000. Αριστερά Re=0.1, δεξιά Re=10.



Εικόνα 5.11 Η μέση L_2 νόρμα των διαφορών στη θερμοκρασιακή κατανομή από την LB–MLPG και την μέθοδο των FEM σαν συνάρτηση του λόγου των θερμικών αγωγιμοτήτων των μέσων για διάφορες περιπτώσεις αριθμού Reynolds και Prandlt.

Τελειώνοντας αυτή την εργασία, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα (Εικόνα 5.12) ενός χρονικά μεταβαλλόμενου προβλήματος συναγωγής, σε ένα πορώδες μέσο διαφορετικής

μορφολογίας. Η ροή στο μέσο προϋπάρχει, και ο αριθμός Reynolds για αυτήν ισούται με 50. Την χρονική στιγμή *t=0* επιβάλλεται μια διαφορά θερμοκρασίας στα δύο απέναντι σύνορα του χωρίου. Η αρχική θερμοκρασία ταυτίζεται με αυτήν που επιβάλλεται στο δεξί σύνορο. Η θερμική αγωγιμότητα, καθώς και η θερμοχωρητικότητα του στερεού όγκου, είναι 1000 φορές μεγαλύτερη από αυτή των πόρων, και ο αριθμός Prandlt τίθεται μονάδα. Στις επόμενες εικόνες φαίνεται η χρονική εξέλιξη της κατανομής της θερμοκρασίας σε πρώιμα (άνω μέρος) αλλά και σε όψιμα στάδια, όπως επίσης και η σταθερή κατάσταση που προκύπτει (κάτω μέρος).



Εικόνα 5.12 Η κατανομή της θερμοκρασίας σε διάφορες χρονικές στιγμές σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πρόβλημα συναγωγής.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία επιβεβαιώνεται η ικανότητα εφαρμογής της MLPG μεθόδου σε προβλήματα μεταφοράς ενέργειας, μάζας και ορμής σε περίπλοκες γεωμετρίες πορωδών μέσων. Η δυσκολία προσομοίωσης των φαινομένων αυτών στα πορώδη μέσα έγκειται στην δυσκολία περιγραφής της γεωμετρίας, αλλά και στις ασυνέχειες των ιδιοτήτων των μέσων, όπως η θερμική αγωγιμότητα, η διαχυτότητα, η πυκνότητα και η θερμοχωρητικότητα. Οι ασυνέχειες αυτές εμφανίζονται στην διεπιφάνεια του ρευστού με το στερεό. Η ικανότητα των απλεγματικών μεθόδων για τοπική πύκνωση του πλέγματος, σε αυτές τις δύσκολες περιοχές των γεωμετριών, με ελάχιστη πρόσθετη υπολογιστική επιβάρυνση και ανθρώπινη παρέμβαση, είναι ένα από τα βασικά πλεονεκτήματά τους στην επίλυση αυτών των προβλημάτων. Οι προσομοιώσεις με τοπική πύκνωση φάνηκε να ξεπερνούν σε ακρίβεια αυτές που χρησιμοποιούν πλέγμα σταθερής ανάλυσης σχεδόν μια τάξη μεγέθους.

Επιπλέον, εισήχθησαν νέοι τομείς ολοκλήρωσης, ορθογώνιου τύπου, για την MLPG μέθοδο. Στις μέχρι τώρα εφαρμογές των ασθενών μορφών στις απλεγματικές μεθόδους συνηθιζόταν τα τοπικά ολοκληρώματα να τελούνται σε κυκλικούς τομείς, οι οποίοι είτε δεν κάλυπταν πλήρως το πεδίο του προβλήματος ή η εφαρμογή τους παρήγαγε συστηματικές αλληλεπικαλύψεις γεγονός που έχει σημαντική επίδραση στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Αντίθετα, οι ορθογώνιοι τομείς οδηγούν σε μηδενικές αλληλεπικαλύψεις και τα αποτελέσματα έδειξαν αξιοσημείωτη βελτίωση στη σταθερότητα της μεθόδου.

Αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε ένας εναλλακτικός τρόπος για την παρεμβολή, όπου δεν αντιλαμβάνονται όλοι οι κόμβοι την πύκνωση του πλέγματος. Αυτό καθιστά ακόμα πιο εύκολη και αυτοματοποιημένη την πύκνωση του πλέγματος σε πολλαπλάσιες αναλύσεις, με ακόμα μικρότερο υπολογιστικό κόστος. Επίσης η υβριδικής τάξης παρεμβολή, όπου σε επιλεγμένες περιοχές του μέσου λαμβάνεται υψηλότερης τάξης προσέγγιση, φαίνεται να προσφέρει σταθερότερα αποτελέσματα, ειδικότερα σε προβλήματα ροής.

Συγκρίνοντας τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτείται, η μέθοδος MLPG υστερεί στους χρόνους προετοιμασίας των δεδομένων, σε σύγκριση με την μέθοδο των FEM. Ωστόσο, στα προβλήματα μεταφοράς ενέργειας το πλεονέκτημά της MLPG προσέγγισης, κατά τη διάρκεια της λύσης, ήταν εμφανές για κάθε συνδυασμό της τάξης της συνάρτησης βάσης και την ανάλυση του πλέγματος. Αντίθετα στα προβλήματα ροής η MLPG μέθοδος φάνηκε να υστερεί αρκετά στον καθορισμό του ροϊκού πεδίου, σε αντιδιαστολή με την LB μέθοδο που ήταν ασύγκριτα ταχύτερη. Έτσι προτείνεται ένα μοντέλο για τα προβλήματα συναγωγής, όπου μέσω της LB μεθόδου καθορίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας, και με την MLPG η θερμοκρασιακή κατανομή.

Μελλοντική εργασία

Παρά την εμφανή επιτυχία της μεθόδου, διατηρεί κάποιες αδυναμίες που μπορούν να ξεπεραστούν, και αξίζει περαιτέρω έρευνα. Αρχικά, πρέπει να βρεθεί τρόπος να μειωθεί ο απαιτούμενος χρόνος προετοιμασίας για κάθε γεωμετρία. Μία λύση για αυτό, είναι να δημιουργηθεί μία βάση δεδομένων που θα περιέχει τις τιμές των συναρτήσεων βάσης και των ολοκληρωμάτων, σε διάφορες αναλύσεις. Έτσι θα χρειάζονται νέοι υπολογισμοί μόνο σε λίγες περιοχές της γεωμετρίας. Αυτομάτως, θα είναι εύκολη η διαχείριση πιο σύνθετων χρονομεταβαλλόμενων προβλημάτων, όπου ο μελετώμενος χώρος και τα σύνορά του αλλάζουν με τον χρόνο.

Μία ακόμα αδυναμία της μεθόδου είναι ο πολύ μεγάλος χρόνος λύσης για τα προβλήματα ροής. Ειδικότερα πρέπει να αναπτυχθούν αλγόριθμοι που θα μελετούν με ταχύτητα την ασυμπίεστη και την συμπιεστή ροή, Νευτώνειων και μη-Νευτώνειων ρευστών, στρωτής αλλά και τυρβώδους ροής σε ακανόνιστες γεωμετρίες. Επίσης, πρέπει να μελετηθεί ποιος από τους υπάρχοντες λύτες για τους πίνακες που προκύπτουν από προβλήματα τριών διαστάσεων, είναι αποτελεσματικός για την MLPG μέθοδο, και σε περίπτωση που δεν υπάρχει κάποιος κατάλληλος, να δημιουργηθεί. Περαιτέρω, το μοντέλο LB-MLPG είναι πολλά υποσχόμενο, και αξίζει η επέκτασή του στις τρεις διαστάσεις, και σε προβλήματα μεταφοράς ενέργειας σε πιο σύνθετες ροές, όπως οι πολυφασικές.

Ακόμα, ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη με την MLPG μέθοδο πιο σύνθετων προβλημάτων μεταφοράς μάζας. Το υπάρχον μοντέλο μπορεί να επεκταθεί σε μίγματα, με παραπάνω από δύο συστατικά, όπως επίσης και σε περιπτώσεις όπου ένα ή περισσότερα των συστατικών αντιδρούν σε καταλυτικές επιφάνειες ή στον χώρο.

Τελειώνοντας, εύλογο είναι να δοκιμαστούν οι προτεινόμενοι ορθογώνιοι τομείς ολοκλήρωσης στις διαφορετικές εκφράσεις της μεθόδου, που προκύπτουν με αλλαγή των συναρτήσεων βάρους για την ολοκλήρωση και των συναρτήσεων δοκιμής.

Βιβλιογραφία:

[1] A. Bejan, Heat Transfer, John Wiley & Sons, NY, 1993.

[2] Mahjoob S., Vafai K., Int. J. Heat Mass Transf. **52**:1608 (2009).

[3] S. Mahjoob, K. Vafai, Analytical characterization of heat transport through biological media incorporating hyperthermia treatment, Int. J. Heat Mass Transf., 52 (2009) 1608-1618.

[4] Satya N. Atluri & Shengping Shen, The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods, CMES, vol.3, no.1, pp.11-51, 2002

[5] S.N. Atluri, Z.D. Han, A.M. Rajendran, A new implementation of the meshless finite volume method, through the MLPG "Mixed" approach, CMES-Comp. Model. Eng. Sci., 6 (2004) 491-513.

[6] N. Karagiannakis, G.C. Bourantas, A.N. Kalarakis, E.D. Skouras, V.N. Burganos, Transient Thermal Conduction with Variable Conductivity using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method, Appl. Math. Comp., 272(2016)676-686

[7] G.C. Bourantas, E.D. Skouras, G.C. Nikiforidis, Adaptive support domain implementation on the moving least squares approximation for mfree methods applied on elliptic and parabolic pde problems using strong-form description, CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences, 43 (2009) 1-25.

[8] Qian YH, D'Humieres D, Lallemand P. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation, Europhysics Letters 1992; **17**: 479-484.

[9] A.N. Kalarakis, G.C. Bourantas, E.D. Skouras, V.C. Loukopoulos, V.N. Burganos, Lattice-Boltzmann and meshless point collocation solvers for fluid flow and conjugate heat transfer, Int. J. Numer. Methods Fluids, 70 (2012) 1428-1442.

[10] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, Comput. Mech., 10 (1992) 307-318.

[11] A.J. Petsi, V.N. Burganos, Interphase layer effects on transport in mixed matrix membranes, Journal of Membrane Science,421-422(2012)247-257

[12] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, Element-Free Galerkin Methods, Int. J. Numer. Methods Eng., 37 (1994) 229-256.

[13] D. Organ, M. Fleming, T. Terry, T. Belytschko, Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency, Comput. Mech., 18 (1996) 225-235.

[14] T. Zhu, S.N. Atluri, A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method, Comput. Mech., 21 (1998) 211-222.

[15] W.K. Liu, Y. Chen, C.T. Chang, T. Belytschko, Advances in multiple scale kernel particle methods, Comput. Mech., 18 (1996) 73-111.

[16] M. Kawahara, N. Yoshimura, and K. Nakagawa, Analysis of Steady Incompressible Viscous Flow, in J. T. Oden, et al., Finite Element Methods in Flow Problems, UAH Press(1974)107,120.

[17] V.P Ngyen, T.Rabczuk,S. Bordas,M.Dulfot, Messhless methods: A review and computer implementation aspects, Math. and Comp. in Simul.73(2008)763,813

[18] D`Humieres D.Generalized lattice-Boltzmann equations, AIAA Rarefied Gas Dynamics: Theory and Simulations. Progress in Astronautics and Aeronautics 1992; **59**:450-548.

[19] Chapman S, Cowling TG., Mathematical Theory of non-uniform Gases. Cambridge University Press: Cambridge, 1939.

[20] A. N. Kalarakis, G. C. Bourantas, E. D. Skouras, V.C. Loukopoulos, and V. N. Burganos "Lattice-Boltzmann and Meshless Point Collocation Solvers for Fluid Flow and Conjugate Heat Transfer", Int. J. Numer. Meth. Fl., doi:10.1002/fld.2755 (2012); doi:10.1007/s11242-012-0010-4

[21] Michalis VK, Kalarakis AN, Skouras ED, Burganos VN. Mesoscopic modeling of flow and dispersion phenomena in fractured solids, Computers and Mathematics with Applications 2008; **55**: 1525–1540.

[22] Michalis VK, Kalarakis AN, Skouras ED, Burganos VN. Mixing within fracture intersections during colloidal suspension flow. Water Resources. Research 2009; **45**: W08429.

[23] Dawson SP, Chen , S, Doolen GD. (Lattice Boltzmann computations for reaction-diffusion equations. Journal of Chemical Physics 1993; **98**: 1514-1523.

[24]O. Aydin, A. Unal, T. Ayhan: A NUMERICAL STUDY ON BUOYANCY-DRIVEN FLOW IN AN INCLINED SQUARE ENCLOSURE HEATED AND COOLED ON ADJACENT WALLS, Numerical Heat Transfer, 36 (1999),585-599

[25]Y. L. Wu, G. R. Liu & Y. T. Gu: Application of Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach to Simulation of Incompressible Flow, Numerical Heat Transfer, 48 (2005), 459-475

[26]Z. Han and S. N. Atluri, A TRULY-MESHLESS GALERKIN METHOD, THROUGH THE MLPG "MIXED" APPROACH, Journal of Marine Science and Technology, 19(2011) 444-452

[27]S. N. Atluri, H. G. Kim, and J. Y. Cho, A Critical Assessment of the Truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) and Local Boundary Integral Equation (LBIE) Methods, Comput. Mech.,24(1999)348–372.

[28] G. R. Liu & Y. T. Gu An introduction to meshfree methods and their programming. Springer,(2005).

[29]Απόστολος Κ. Γούλας, Μηχανική ρευστών, Εκδ. Γιαχούδη

[30]William F. Hughes, John A. Brighton, Δυναμική ρευστών, Εκδ. ΤΖΙΟΛΑ.

[31]William M.Deen, Analysis of transport phenomena, Oxford University Press.

[32]P.K Papadopoulos, An auxiliary potential velocity method for incompressible viscous flow, Comp.& Fluids, 51(2011)60-67

[33] G.C. Bourantas, A.J. Petsi, E.D. Skouras, V.N. Burganos, Meshless point collocation for the numerical solution of Navier-Stokes flow equations inside an evaporating sessile droplet, Eng. Anal. Bound. Elem., 36 (2012) 240-247.

[34] G.C. Bourantas, E.D. Skouras, V.C. Loukopoulos, G.C. Nikiforidis, An accurate, stable and efficient domain-type meshless method for the solution of MHD flow problems, J. Comput. Phys., 228 (2009) 8135-8160.

[35] Fadugba S. E.,Edogbanya O. H ,Zelibe S. C, Crank Nicolson Method for Solving Parabolic Partial Differential Equations, IJA2M,3(2013)8-23

[36] N. Karagiannakis, G.C. Bourantas, A.N. Kalarakis, E.D. Skouras, V.N. Burganos, Efficiency of the Meshless Local Petrov-Galerkin Method with Moving Least Squares Approximation for Thermal Conduction Applications, in: T. Simos (Ed.) ICNAAM 2013, Rhodos, Greece, 2013.

[37] X.H. Wu, W.Q. Tao, Meshless method based on the local weak-forms for steady-state heat conduction problems, Int. J. Heat Mass Transf., 51 (2008) 3103-3112.