

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**



Μεταμαθηματικές Θεωρήσεις στην Γεωμετρία

από τους Hilbert και Tarski

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**του μεταπτυχιακού φοιτητή
ΖΟΥΠΑ ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ Α.Μ. 513**

**Επιβλέπων: ΠΑΝΑΓΗΣ ΚΑΡΑΖΕΡΗΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Πάτρα, Φεβρουάριος 2015

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Κεφάλαιο 1°	
Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας.....	1
1.1 Ο Ευκλείδης και τα “ Στοιχεία του”	2
1.2 Η δομή των “Στοιχείων ” του Ευκλείδη	3
1.3 David Hilbert (1862 – 1943)	4
1.4 Αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά Hilbert	6
Κεφάλαιο 2°	9
Η μέθοδος των Μεταμαθηματικών.....	
2.1 Τυπικά συστήματα αξιωμάτων	10
2.2 Περατοκρατία: το πρόγραμμα του Hilbert	14
2.3 Η περιγραφή του προγράμματος	16
2.4 Η μη πληρότητα του προγράμματος του Hilbert	18
Κεφάλαιο 3°	20
Οι πέντε ομάδες των αξιωμάτων του Hilbert	
3.1 Παρουσίαση του συστήματος	20
3.2 Σχόλια για τα αξιώματα της συνέχειας του Hilbert μέσω άρθρων των S. Awodey και E. Reck	25
Κεφάλαιο 4°	
Η διόρθωση των “κενών” στο σύστημα του Ευκλείδη μέσα από την αξιωματική θεμελίωση του Hilbert	28
Κεφάλαιο 5°	41
Η απουσία των αντιφάσεων (συνέπεια) στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert.....	
Κεφάλαιο 6°	46
Η ανεξαρτησία των προτάσεων στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert.....	
6.1 Ιστορική αναδρομή στις προσπάθειες απόδειξης του 5 ^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη.	46
6.2 Η ανεξαρτησία των αξιωμάτων του Hilbert	48
Κεφάλαιο 7°	57
Οι μεταγενέστερες εξελίξεις	
7.1 Το σύστημα της Γεωμετρίας του Tarski	57
7.2 Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του συστήματος του Tarski	58
7.3 Η ανεξαρτησία των αξιωμάτων του συστήματος του Tarski	59
7.4 Συγκρίνοντας α αξιωματικά συστήματα των Hilbert – Tarski.	62
7.5 Η πληρότητα της θεωρίας Tarski	62
7.6 Ιστορικές παρατηρήσεις που αφορούν την ανάπτυξη της Γεωμετρίας στη βάση του αξιωματικού συστήματος του Tarski.	64
Κεφάλαιο 8°	67
Γεωμετρία και αξιωματικοποίηση σε μια διδακτική προοπτική	
8.1 Η ταύτιση σχημάτων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και η αντίστοιχη “congruence” του Hilbert.	69
8.2 Η αντίστοιχη Ελληνική εμπειρία.	70

8.3 Διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο μέσα από τις προσωπικές εμπειρίες των τελευταίων δέκα ετών στο Ελληνικό Σχολείο.	7 4
8.4 Διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Λύκειο μέσα από τις προσωπικές εμπειρίες των τελευταίων δέκα ετών στο Ελληνικό Σχολείο.	7 5
Παράρτημα (I)	8 3
Το αξιωματικό σύστημα του Tarski.	
Παράρτημα (II).....	9 3
Το παράδοξο: “Κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές”	
Παράρτημα (III).....	9 4
Το αξιωματικό σύστημα του Pogorelov.	
Παράρτημα (III).....	9 6
Η Επιπεδομετρία του Ευκλείδη.	
Βιβλιογραφία.....	1 0 0

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον Παναγή Καραζέρη, Επίκουρο καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, που ανέλαβε την επίβλεψη της παρούσας εργασίας και διέθεσε απλόχερα τις συμβουλές του και τις γνώσεις του (αλλά και αμέτρητες ώρες) για την συγγραφή της.

Η συνεργασία μου μαζί του, ήταν άψογη και ιδιαίτερος παραγωγική.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ και τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής, τον Ευτύχη Παπαδοπετράκη Λέκτορα του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών καθώς και τον Πύλο Τζερμιά Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών για το ιδιαίτερο ενδιαφέρον τους και την βοήθειά τους για την εκπόνηση της εργασίας μου.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω την σύζυγό μου Ζαφειρία Λεπίδα για την απλόχερη ηθική και συναισθηματική συμπαράστασή της, όλους αυτούς τους μήνες που διήρκεσε αυτή η συγγραφή.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τις δύο κόρες μου, Δανάη - Ευφροσύνη και Λυδία - Θεοδώρα, για την κατανόηση και υπομονή που επέδειξαν καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας μου και για την ενθάρρυνση που απλόχερα μου χάριζαν με τα χαμόγελα και τις αγκαλιές τους. Γι' αυτό και όλη αυτή την προσπάθεια, τους την αφιερώνω.

Λέξεις- προτάσεις κλειδιά:

Αξιωματική μέθοδος. Φορμαλισμός. Μεταμαθηματικά. Περαιοκρατία.

Αξιωματική θεμελίωση στοιχείων Ευκλείδη.

Αξιωματική θεμελίωση των στοιχείων Ευκλείδη από τον D.HILBERT.

Συνέπεια- Ανεξαρτησία- Πληρότητα των στοιχείων Ευκλείδη από τον D.HILBERT.

Αξιωματική θεμελίωση των στοιχείων Ευκλείδη από τον A.TARSKI.

Συνέπεια- Ανεξαρτησία- Πληρότητα των στοιχείων Ευκλείδη από τον A.TARSKI.

Key- words:

Euclid's Elements.

Hilbert's Axioms- Finitism - Hilbert's Program- Modern Maths.

Formalism- Foundations of Geometry by D.HILBERT.

Compatibility- Independence – Completeness of Hilbert's Axioms.

Tarski's Axioms.

Compatibility- Independence – Completeness of Tarski's Axioms.

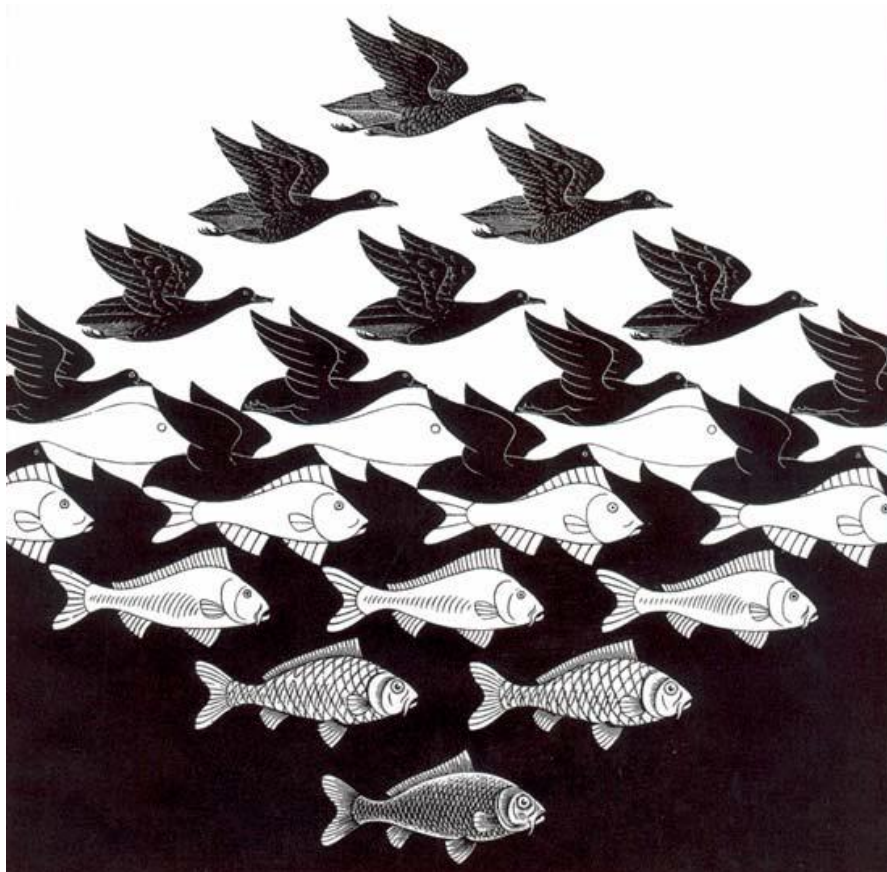
Περίληψη

Το θέμα στην ουσία αφορά την Αξιωματική θεμελίωση του **Ευκλείδη** (καθ'ύλη αξιωματική) που *έχει ως αντικείμενο την μελέτη* της γεωμετρίας του φυσικού χώρου, και επομένως διατηρεί τον εμπειρικό της χαρακτήρα.

Επομένως ο φυσικός αυτός χώρος εφοδιάζει τον μελετητή και με μια ισχυρή γεωμετρική διαίσθηση.

Από την άλλη μεριά η αφηρημένη αξιωματική του **Hilbert**, και η σχετική θεμελίωση της Γεωμετρίας, καταφέρνει να εξοβελίσει την γεωμετρική διαίσθηση.

Από κει και πέρα η αλγεβροποίηση των μαθηματικών, εξοβελίζει και αυτή την γεωμετρική άποψη.



M. C. Escher, Sky and water I.

Κεφάλαιο 1

Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας¹

Οι πρωτόλειες γεωμετρικές έννοιες του *Ανθρώπου* πρέπει να είναι πολύ παλαιές και να προέκυψαν υποσυνείδητα από απλές παρατηρήσεις που έκανε, σαν αποτέλεσμα της ικανότητάς του να αναγνωρίζει τη φυσική μορφή και να συγκρίνει σχήματα και μεγέθη.

Η γέννηση των πρώτων *εννοιών* της Γεωμετρίας ήταν μια διαδικασία που κράτησε για αιώνες. Στη διαμόρφωση των εννοιών αυτών, αποφασιστικής σημασίας πρέπει να ήταν η προσπάθεια απεικόνισης των Γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων με ζωγραφικές παραστάσεις, που λειτουργούσαν σαν *μοντέλα των πραγματικών αντικειμένων*, μια διαδικασία που δεν μπορεί να χρονολογηθεί ιστορικά.

Οι Γεωμετρικές γνώσεις των λαών της αρχαίας Αιγύπτου και της Μεσοποταμίας συνίσταται στον υπολογισμό επιφανειών και όγκων ακολουθώντας μια *αλγοριθμική διαδικασία*, έναν κανόνα, ο οποίος εφαρμόζεται για συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές. Τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται είναι εμπειρικής προέλευσης και η λύση που τους δίνεται δεν συνιστά *λογική απόδειξη*, εκτός μεμονωμένων περιπτώσεων όπου αναπτύσσονται μέθοδοι Γεωμετρικών μετασχηματισμών οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως ένα είδος αποδεικτικής διαδικασίας.

Μετά από πολλούς αιώνες χωρίς σημαντική πρόοδο, μια καινούργια περίοδος εγκαινιάζεται στην αρχαία Ελλάδα, όπου η Γεωμετρία μετασχηματίζεται σε *αφηρημένη αποδεικτική επιστήμη*. Εμφανίζεται η έννοια της λογικής απόδειξης που λειτουργεί σαν μέθοδος επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας γεωμετρικής πρότασης, αλλά και ως στοιχείο που συστηματοποιεί τις γεωμετρικές γνώσεις.

Η Γεωμετρία ήταν ο πρώτος κλάδος της ανθρώπινης γνώσης που διαμορφώθηκε σαν *επιστήμη* και επί αιώνες ο μόνος. Από την εποχή του Αρχιμήδη και του Ήρωνα μέχρι και σήμερα τα πεδία εφαρμογής της Γεωμετρίας συνεχώς διευρύνονται.

Οι αρχαίοι Έλληνες προσπάθησαν να θεμελιώσουν με την βοήθεια της Γεωμετρίας τις γνώσεις που υπήρχαν σαν λέξεις σε όλες τις γνωστές γλώσσες. Όλοι ξέρουν τι είναι κύκλος και τι τετράγωνο.

Είναι όμως γνώσεις σκόρπιες, ασύνδετες μεταξύ τους. Η γεωμετρία όμως τις θεμελιώνει, τις οργανώνει σε ένα σύστημα. Ας πάρουμε το τετράγωνο, το οποίο όσο και απλό να φαίνεται είναι *σύνθετη έννοια*. Έχει ίσες πλευρές ανά δύο παράλληλες, ίσες γωνίες, όλες ορθές. Πρέπει, επομένως να ξεκαθαρίσουμε, τι σημαίνει ισότητα και ανισότητα πλευρών ή γωνιών, τι είναι η παραλληλία και τι καθετότητα. Μόνο μετά από αυτά μπορούμε να μιλήσουμε για τετράγωνο, αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό του.

1. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Γενικού Λυκείου .
Εκδόσεις ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ 2013

1.1 Ο Ευκλείδης και τα «Στοιχεία του»¹

Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν ότι τα μαθηματικά πρέπει να είναι ανεξάρτητα από τις γνώσεις που αποκτώνται εμπειρικά. Δέχθηκαν λοιπόν και τις συνέπειες αυτής τους της πεποίθησης και έτσι οικοδόμησαν την Γεωμετρία.

Έδωσαν την ονομασία «Στοιχεία» σε ένα σύστημα προτάσεων μαθηματικών βασισμένο σε αξιώματα. Ο Ιπποκράτης ο Χίος – σύμφωνα με τον Πρόκλο- είχε παρουσιάσει μια συλλογή Στοιχείων, 100 χρόνια περίπου πριν τον Ευκλείδη.

Μετά από τον Ιπποκράτη, και άλλα τέτοια συστήματα παρουσιάστηκαν από διάφορους Έλληνες μαθηματικούς. Τα πιο παλαιά Στοιχεία που διασώθηκαν, είναι τα Στοιχεία του Ευκλείδη, ίσως λόγω της μεγάλης χρησιμότητάς τους.

Πού και πότε γεννήθηκε ο Ευκλείδης δεν είναι ακριβώς γνωστό, μπορεί στη Σικελία ή στην Τύρο της Συρίας από Έλληνες γονείς και σε κάποιο χρόνο όχι σε μεγάλη απόσταση από το 330 π.χ.

Γράφει σχετικά ο Πρόκλος:

«...γένονεν δε ούτος ο ανήρ επί του πρώτου Πτολεμαίου, νεώτερος μιν ουν έστι των περί Πλάτωνα, πρεσβύτερος δε Ερατοσθένους και Αρχιμήδους ...»

Ζούσε στην Αλεξάνδρεια και δίδασκε Μαθηματικά στην εκεί ονομαστή σχολή με το όνομα «Μουσείο της Αλεξάνδρειας».

Κατά τον Πάππο τον Αλεξανδρέα στο σύγγραμμά του «Μαθηματική Σύνταξη» περιγράφεται ο Ευκλείδης ως άνθρωπος ήπιου χαρακτήρα, καταδεκτικός και ευμενής προς όλους τους ευφυείς σπουδαστές των Μαθηματικών.



Εικόνα 1: Ο Ευκλείδης (Πηγή: Davis, Η Φύση και η δύναμη των μαθηματικών)

1. Από το βιβλίο "Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών"

Lucas N.H. Bunt – Phillips S. Jones – Jack D. Bedient

Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού ΑΘΗΝΑ

Όμως το πρωτότυπο έργο του χάθηκε και έτσι στις αμέτρητες αντιγραφές του έργου του έγιναν και αρκετές αλλαγές. Έχουν βεβαιωθεί πάνω από 1000 εκδόσεις των Στοιχείων και μαζί με την Βίβλο είναι από τα πλατιά διαδεδομένα βιβλία στο δυτικό κόσμο.

1.2 «Η δομή των στοιχείων του Ευκλείδη»[1].

Η μαθηματική γνώση, σύμφωνα με τον Πλάτωνα, αποκτιέται μόνο με συλλογισμούς.

Δεν υπάρχουν επομένως ιδιότητες που μπορούμε να τις μάθουμε από το *σχήμα* και πρέπει να τις αποδεικνύουμε με ακρίβεια. Το *σχήμα* [24] σύμφωνα με τον Ευκλείδη εμφανίζεται σε ένα από τα στάδια κατά την διαδικασία της απόδειξης μιας πρότασης και συγκεκριμένα στην *έκθεση*, δηλαδή το πέρασμα από την επαλήθευση στην συστηματική απόδειξη. Εκεί παρουσιάζονται τα σύμβολα των μεταβλητών με τα οποία σημαίνονται τα μαθηματικά αντικείμενα που εμφανίζονται στην εκφώνηση.

Ας δούμε τώρα τις απόψεις του Αριστοτέλη για την επιστήμη[25].

Ένα σύνολο γνώσεων αποτελεί επιστήμη μόνο αν:

1. Τα αντικείμενα της επιστήμης έχουν εξασφαλισμένη ύπαρξη, είτε από αξιώματα είτε από τις αποδείξεις.
2. Ορισμένα γεγονότα μεταξύ των αντικειμένων αυτών συμβαίνουν *εκ' φύσεως*. Δηλαδή κάποιες αποφάνσεις γίνονται αποδεκτές ως αληθείς, χωρίς απόδειξη, από όλους όσοι επιθυμούν να ασχοληθούν ή ασχολούνται με την επιστήμη αυτή. Δεν είναι καθόλου τυχαίο ότι οι αποφάνσεις αυτές εισάγονται από τον Ευκλείδη με προστακτικές παρακειμένου.
3. Οποιαδήποτε άλλη απόφανση (δηλ. θεώρημα) εντάσσεται μέσα στο πλαίσιο της επιστήμης μόνο αν είναι λογική συνέπεια των προηγούμενων αποφάνσεων. Ή, κατά μια πιο Αριστοτελική διατύπωση, επιστημονικός είναι μόνο ο συλλογισμός ο οποίος στηρίζεται σε *αληθείς προκείμενες*, αληθείς δε οι αποφάνσεις που είναι παραγωγές επιστημονικών συλλογισμών.

Τα μαθηματικά της εποχής του Αριστοτέλη, ως σύνολο γνώσεων και δραστηριοτήτων που υπερβαίνει τον απλό εμπειρισμό, ήταν ήδη αξιωματικοποιημένη εμπειρική επιστήμη και είναι βέβαιο ότι ο Αριστοτέλης βάσισε σ' αυτά, πρώτα και κύρια τις μεταθεωρητικές του επεξεργασίες. Δυστυχώς από την επαναστατική αυτή περίοδο που αρχίζει με το Θαλή (624-548 π.Χ.) και τελειώνει με τον Ευκλείδη ελάχιστα αποσπάσματα έργων έχουν διασωθεί. Έτσι το έργο που καθόρισε και σφράγισε την εποχή αυτή αλλά και την μετέπειτα εξέλιξη της γεωμετρίας για πολλούς αιώνες, διαμορφώνοντας το ιδεώδες της αξιωματικής αποδεικτικής επιστήμης ήταν τα *Στοιχεία του Ευκλείδη* (περίπου 3^{ος} αι. π.Χ.). Τα στοιχεία αποτελούν ταυτόχρονα και σύνοψη της μακραίωνης Ελληνικής γεωμετρικής παράδοσης, αφού το μεγαλύτερο μέρος τους αντανακλά την μαθηματική έρευνα από τον 4^ο αι. π.Χ. και σε μερικές περιπτώσεις και προγενέστερα.

Τα Στοιχεία αποτελούνται από 13 βιβλία.

Τα πρώτα έξι βιβλία αφιερώνονται στην Επιπεδομετρία.

Ειδικά το πέμπτο βιβλίο αποτελεί την θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου που αναφέρεται στα μεγέθη γενικά και όχι μόνο στα γεωμετρικά μεγέθη. Η ύλη των βιβλίων αυτών αντιστοιχεί περίπου σε αυτήν που διδάσκεται, για το ίδιο θέμα στα σχολεία.

Στα επόμενα τρία βιβλία αναπτύσσεται η αριθμοθεωρία.

Στο δέκατο, μελετώνται οι ασύμμετροι αριθμοί.

Τα τρία τελευταία πραγματεύονται τη στερεομετρία.

Το έργο του χαρακτηρίζεται από τη συστηματικότητα της διαδοχής των ορισμών, αξιωμάτων, αιτημάτων και αποδείξιμων προτάσεων και γενικότερα τη συστηματικότητα οικοδόμησης μιας αποδεικτικά δομημένης επιστήμης.

Αυτό μας δείχνει την κριτική σκέψη του Ευκλείδη, την ευρύτητα της αντίληψής του και την αξιοσημείωτη συνθετική του ικανότητα.

Το 1^ο βιβλίο του με το οποίο θα ασχοληθούμε, περιλαμβάνει την αξιωματική θεμελίωση της επίπεδης γεωμετρίας και φθάνει ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος (πρόταση 48).

- ❖ Στην αρχή εισάγονται οι 23 όροι (ορισμοί). Μέσα σε αυτούς είναι και οι όροι σημείο, γραμμή, ευθεία γραμμή, επιφάνεια, επίπεδο. Οι έννοιες αυτές δεν ορίζονται με σαφήνεια.
- ❖ Στη συνέχεια διατυπώνονται τα πέντε αιτήματα, δηλαδή βασικές αλήθειες για την επιστήμη της Γεωμετρίας. Από αυτά τα τρία πρώτα είναι της ύπαρξης κάποιων θεμελιωδών εννοιών και τα επόμενα δύο δηλώνουν ορισμένες ειδικές ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων.
- ❖ Ακολουθεί η διατύπωση των κοινών εννοιών (9 αξιώματα), δηλαδή γενικών ιδιοτήτων που χρησιμεύουν στις αποδείξεις, με τα οποία επιβεβαιώνεται η ωριμότητα της αξιωματικής μεθόδου των αρχαίων Ελλήνων. Πρόκειται για τις κοινές για όλες τις επιστήμες ιδιότητες σχέσεων (Αριστοτέλης), που δεν είναι γεωμετρικού χαρακτήρα, εκτός από την ένατη.
- ❖ Το βιβλίο περιέχει 48 προτάσεις που πραγματεύονται ισότητες τριγώνων, παραλληλία ευθειών καθώς και εμβαδά. Το βιβλίο τελειώνει με την απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος και του αντιστρόφου του.

1.3 David Hilbert (1862 – 1943)

Τονίστηκε ήδη ότι οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι και μαθηματικοί είναι εκείνοι που πρώτοι συνέλαβαν την ιδέα και διατύπωσαν την άποψη, πως μια πρόταση είναι ένα πλήρες και σαφές γνωστικό απόκτημα όταν και μόνο όταν *αυτή είναι προϊόν αποδείξεως*, όταν δηλαδή απορρέει σαν συμπέρασμα μιας συγκεκριμένης λογικής διαδικασίας η οποία θεμελιώνεται πάνω σε κάποιες γενικές και βασικές αρχές. Έτσι ανακαλύφθηκε η λεγόμενη **Αξιοματική Μέθοδος**, με βάση την οποία δημιουργήθηκε η *πρώτη λογική θεωρία*, η *πρώτη Επιστημονική Θεωρία*, η περίφημη **Ευκλείδεια Γεωμετρία**.

Το γεγονός ότι πάνω σε ένα μικρό πλήθος *θεμελιωδών προτάσεων*, εδράζεται ένα πολύ μεγάλο και συνεχώς εμπλουτιζόμενο πλήθος *προτάσεων –ιδιοτήτων* είχε σαν συνέπεια, οι στοχαστές όλων των εποχών να θεωρούν ότι η αλήθεια και η αμοιβαία αλληλουχία όλων των γεωμετρικών θεωρημάτων είναι εγγυημένη, με τον όρο ότι η αλήθεια των αξιωμάτων είναι γενικά και αναντίρρητα αποδεκτή.

Επειδή λοιπόν η εγκυρότητα και η πληρότητα των Ευκλείδειων Αξιωμάτων δεν τέθηκαν σε αμφισβήτηση για **2000 χρόνια περίπου**, η αξιοματική συγκρότηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας θεωρήθηκε από αναρίθμητες γενιές εξαιρετων στοχαστών, ως μοναδικό και αναντικατάστατο *μοντέλο επιστημονικής γνώσης*. Μια κριτική μελέτη όμως των «Στοιχείων» σε μεταγενέστερες εποχές, απεκάλυψε ότι ορισμένες προτάσεις βασίζονται σε γεωμετρικές ιδιότητες τις οποίες ο Ευκλείδης θεώρησε *αυτονόητες*, (με την έννοια ότι αυτές απορρέουν από το σχήμα το οποίο είναι *γλωσσικά και γνωστικά λειτουργικό*) χωρίς όμως αυτές να μπορούν να δικαιολογηθούν ούτε από τους ορισμούς και τα αξιώματα, ούτε και να προκύπτουν από άλλες γνωστές προτάσεις. Επίσης κριτική υπήρξε και στους ορισμούς που χρησιμοποίησε στην αξιοματική μέθοδό του. Ας πάρουμε τον *ορισμό του σημείου*. Τι είναι σημείο; Κάτι που δεν έχει μέρη ή μέγεθος. Αυτό μοιάζει με ορισμό του «τίποτα». Στην πραγματικότητα θέλουμε το σημείο σαν κάτι πολύ μικρό, πολύ συγκεκριμένο στίγμα, και αν μας πιάσουν τι εννοούμε με το πολύ μικρό, πολύ συγκεκριμένο στίγμα θα πούμε: λοιπόν εννοούμε *σημείο*.

Δεν μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ρητά όλους τους όρους, το έναν μέσω των άλλων, αυτό δεν μπορεί να συμβεί χωρίς να αποφύγουμε την κυκλικότητα, και πάντα θα υπάρχουν κάποιοι πρωταρχικοί όροι που θα ορίζονται σιωπηρά, με την έννοια ότι είναι αυτά τα πράγματα που πληρούν τα αξιώματα, τα αξιώματα σε τελευταία ανάλυση είναι υποθέσεις για τους πρωταρχικούς όρους. Χιλιετίες χρειάστηκαν για να απαντηθεί το ερώτημα :*πως ορίζεται το σημείο*; Ο Hilbert απάντησε: απλά αδιαφορούμε τι σημαίνει, όρισε δε ότι «για κάθε ζεύγος σημείων υπάρχει μια ευθεία γραμμή που τα περιέχει» (δες παρακάτω το αξιοματικό του σύστημα). Η πρόταση δεν απαιτεί από εμάς να ξέρουμε τι είναι το σημείο, αλλά όταν έχουμε δύο από αυτά, υπάρχει ένα άλλο πράγμα που λέγεται ευθεία, που τα περιέχει. Το σημείο δηλώνεται με αμοιβαίες σχέσεις οι οποίες εκφράζονται με λέξεις όπως «κείται» «μεταξύ» κλπ.

Έτσι λοιπόν από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα και στο πρώτο μισό του 20^{ου} αιώνα άρχισε να διευρύνεται συνεχώς η αξιοποίηση της Αξιοματικής μεθόδου, αφού έγινε αντιληπτό ότι τα αξιώματα και οι ορισμοί του Ευκλείδη δεν επαρκούσαν για τη λογική απόδειξη όλων των θεωρημάτων των «Στοιχείων». Αντίθετα δημιουργούσαν παράδοξα, όπως για παράδειγμα η «απόδειξη» του ότι “*όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή*”.

(Δες το παράδοξο στο παράρτημα II).

Εκεί θα φανεί η σπουδαιότητα του «μεταξύ» σαν έννοια στη γεωμετρία, έννοια που δεν υπάρχει στον Ευκλείδη. Ο Pasch ήταν ανάμεσα στους πρώτους που θεώρησε τα «αξιώματα διάταξης» και ο Hilbert τα ενσωμάτωσε στα δικά του «θεμέλια της Γεωμετρίας».

Έτσι κρίθηκε αναγκαίο παλαιότεροι και νεότεροι κλάδοι των μαθηματικών να εφοδιαστούν με ένα επαρκές (κατά τα φαινόμενα) σύνολο αξιωμάτων. Έτσι εδραιώθηκε μια καθολική αντίληψη, ότι είναι εφικτό κάθε τομέας της μαθηματικής σκέψης να εφοδιάζεται με ένα κατάλληλο κατά περίπτωση σύστημα αξιωμάτων, για την λογική στήριξη και την μεθοδική ανάπτυξη όλων των άλλων προτάσεων του θεωρούμενου μαθηματικού πεδίου.



Εικόνα 2: David Hilbert (1862 – 1943)

Καθοριστικό ρόλο για αυτή την γενική επικράτηση της *αξιοματικής μεθόδου* έπαιξε το μνημειώδες βιβλίο «Grundlagen der Geometrie » (Θεμέλια της Γεωμετρίας) του David Hilbert το οποίο εκδόθηκε το 1889.

Ο David Hilbert γεννήθηκε στο *Königsberg* της Πρωσίας (το σημερινό ρωσικό Καλίνινγκράντ) το 1862 και πέθανε το 1943 στο *Göttingen* μια πόλη στο κέντρο περίπου της Γερμανίας.

Πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του ως καθηγητής στο πανεπιστήμιο του *Göttingen*, το σημαντικότερο κέντρο μαθηματικών σπουδών στο κόσμο τα χρόνια εκείνα. Οι εργασίες του καλύπτουν μεγάλο φάσμα των μαθηματικών. Εκτός από τις θεμελιώδεις έρευνές του στη γεωμετρία, διεξήγαγε έρευνες (επίσης θεμελιακού χαρακτήρα) στη θεωρία των Αναλλοίωτων, των Αριθμών, στο Λογισμό Μεταβολών, τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, στην Αλγεβρική Τοπολογία, άλγεβρες Hilbert, χώρος Hilbert και αλλού.

1.4 Αξιοματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά Hilbert.

Ο Hilbert θεώρησε τον Ευκλείδειο 3-διάστατο χώρο αποτελούμενο από

- ❖ Τρία είδη θεμελιωδών στοιχείων : Σημεία, Ευθείες, Επίπεδα
- ❖ Δέχθηκε ότι οι σχέσεις μεταξύ αυτών είναι απόρροιας πέντε θεμελιωδών εννοιών: «ανήκειν», «κείσθαι μεταξύ», «ισότητα», «παραλληλία», «συνέχειας».

Για κάθε μία από αυτές όρισε αξιώματα, έτσι δημιούργησε τις ακόλουθες πέντε ομάδες αξιωμάτων :

- I. Τα αξιώματα θέσης (ανήκειν) (οκτώ)
- II. Τα αξιώματα διάταξης (κείσθαι μεταξύ) (πέντε)
- III. Τα μετρικά αξιώματα (ισότητα) (πέντε)
- IV. Το αξίωμα της παραλληλίας (παραλληλία) (ένα)
- V. Τα αξιώματα συνέχειας (συνέχεια) (δύο)

Με το έργο του σήμανε το τέλος στον ουσιαστικό ρόλο της διαίσθησης στην γεωμετρία. Παρόλο που η χωρική διαίσθηση ή παρατήρηση παραμένει η πηγή των αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα γραπτά του ο ρόλος της διαίσθησης και της παρατήρησης είναι αποκλειστικά περιορισμένος στο να δοθούν κίνητρα και να είναι ευρετικός. Εφόσον τα αξιώματα έχουν διατυπωθεί, η διαίσθηση και η παρατήρηση εξαφανίζονται.

Δεν είναι μέρος των Μαθηματικών.

Ένα αποτέλεσμα αυτού του προσανατολισμού είναι πως οποιεσδήποτε οντότητες μπορούν να παίζουν το ρόλο των μη -ορίσιμων αρχικών εννοιών, των σημείων, των ευθειών, των επιπέδων και ούτω καθ' εξής στο βαθμό που πληρούν τα αξιώματα.

Ο Otto Blumenthal αναφέρει ότι, σε μια συζήτηση σε ένα Βερολινέζικο σιδηροδρομικό σταθμό το 1891, ο Hilbert είπε ότι σε μια κατάλληλη αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας θα μπορούσε κανείς να θεωρεί «αντί των σημείων, ευθειών γραμμών και επιπέδων, τραπέζια, καρέκλες και ποτήρια μύρας» (Hilbert 1935: 388-429).

Ο Hilbert συνοψίζει την ιδέα του ως εξής : «σκεφτόμαστε τα σημεία τις ευθείες γραμμές και τα επίπεδα σαν να έχουν κάποιες αμοιβαίες σχέσεις τις οποίες υποδηλώνουμε μέσω λέξεων όπως «κείμαι», «μεταξύ», «πaráλληλος», «ισοδύναμος-ισότιμος», «συνεχής» κλπ. Η ολοκληρωμένη και ακριβής περιγραφή αυτών των σχέσεων απορρέει ως συνέπεια των αξιωμάτων της γεωμετρίας .

Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert είναι λοιπόν διατυπωμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην αναφέρεται κατ' ανάγκην στον κόσμο της συνήθους εμπειρίας, προς την οποία ήταν

περισσότερο προσανατολισμένο το σύστημα του Ευκλείδη. Έτσι τα σημεία μπορούν να αναφέρονται στα σημεία της εμπειρίας, όπως μας τα διδάσκει η Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά και στα στοιχεία ενός συνόλου, τα οποία αυθαιρέτως καλούμε έτσι.

Το ίδιο και για τις ευθείες, ενώ η σύμπτωση ενός σημείου και μιας ευθείας (δηλαδή το να κείται ένα σημείο επί μιας ευθείας ή όχι) περιγράφεται από μίαν αφηρημένη μαθηματική σχέση (υποσύνολο ενός κατάλληλου καρτεσιανού γινομένου).

Την άποψη αυτή για τη θεμελίωση της γεωμετρίας κατά τρόπο γενικό και αφηρημένο, δηλαδή χωρίς άμεση αναφορά στην εμπειρία, υποστηρίζει και ο Henri Poincare (1854-1912) λέγοντας ότι :

... Οι εκφράσεις «κείται επί, διέρχεται από», κλπ., δεν προορίζονται να ανακαλέσουν εικόνες, είναι απλώς συνώνυμα της λέξης προσδιορίζω. Οι λέξεις «σημείο, ευθεία και επίπεδο» αυτές καθ' εαυτές δεν πρέπει να προκαλούν στο πνεύμα καμία αισθητή παράσταση. Θα μπορούσαν αδιαφόρως να αποδίδουν αντικείμενα οποιασδήποτε φύσης, αρκεί να μπορούμε να εγκαθιδρύουμε μεταξύ αυτών των αντικειμένων μίαν αντιστοιχία, τέτοια ώστε σε κάθε σύστημα δύο αντικειμένων, που καλούνται σημεία, να αντιστοιχεί ένα από τα αντικείμενα που καλούνται ευθείες, και ένα μόνον.

... Τοιουτοτρόπως, ο Κορ Hilbert, για να το πούμε έτσι, προσπάθησε να θέσει τα αξιώματα σε μία τέτοια μορφή, που να μπορούν να εφαρμοστούν από οποιονδήποτε που δεν θα αντιλαμβανόταν το νόημά τους, γιατί δεν θα είχε δει ποτέ ούτε σημεία, ούτε ευθεία, ούτε επίπεδο.

... Θα μπορούμε έτσι να κατασκευάσουμε όλη τη γεωμετρία, δεν θα έλεγα ακριβώς χωρίς να καταλαβαίνουμε τίποτε, αφού θα συλλάβουμε τη λογική αλληλουχία των προτάσεων, αλλά το λιγότερο χωρίς να βλέπουμε τίποτε σ' αυτήν. Θα μπορούσαμε να εμπιστευθούμε τα αξιώματα σε μία λογική μηχανή, για παράδειγμα στο λογικό πιάνο του Stanley Jevons, και θα βλέπαμε να βγαίνει απ' αυτό όλη η γεωμετρία.

Για να μην υπάρχει παρανόηση, ο Hilbert αναφέρει επίσης ότι τα αξιώματα εκφράζουν « κάποια σχετικά και θεμελιώδη γεγονότα της διαίσθησής μας », αλλά στην ανάπτυξη του βιβλίου του που ακολουθεί, αυτό που απομένει από το διαισθητικό περιεχόμενο είναι η χρήση των λέξεων όπως σημείο, γραμμή κλπ (και τα διαγράμματα που συνοδεύουν κάποια από τα θεωρήματα).

Τέλος ο μαθητής και συνεργάτης του Hilbert, Paul Bernays (1967 :497) συνοψίζει τους στόχους του Hilbert (1899): [2]

Ένα κύριο γνώρισμα της αξιωματικοποίησης της γεωμετρίας του Hilbert είναι ότι η αξιωματική μέθοδος παρουσιάζεται και εφαρμόζεται με το πνεύμα της αφηρημένης σύλληψης των μαθηματικών που άνθισε στο τέλος του 19^{ου} αιώνα και που γενικά έχει υιοθετηθεί στα σύγχρονα μαθηματικά. Αυτό έγκειται στην αφαίρεση από την διαισθητική έννοια των όρων...και στην κατανόηση των ισχυρισμών (θεωρήματα) της αξιωματικοποιημένης θεωρίας, με μια υποθετική έννοια, δηλαδή σαν να ισχύουν σε κάθε ερμηνεία...για την οποία τα αξιώματα ικανοποιούνται.

Έτσι, ένα αξιωματικό σύστημα θεωρείται όχι ως ένα σύστημα προτάσεων για ένα υποκείμενο γνωστικό αντικείμενο, αλλά ως ένα σύστημα συνθηκών για κάτι που μπορεί να ονομαστεί σχεσιακή δομή....Σε αυτή την αντίληψη της αξιωματικής η λογική συλλογιστική με βάση τα αξιώματα δεν χρησιμοποιείται μόνο ως ένας τρόπος για να βοηθηθεί η διαίσθηση στη μελέτη των χωρικών σχημάτων. Μάλλον οι λογικές εξαρτήσεις θεωρούνται προς χάριν τους και μόνο, και emphaticά τονίζεται ότι στην επιχειρηματολογία θα πρέπει να βασιζόμαστε μόνο στις ιδιότητες ενός σχήματος που είτε σαφώς έχουν υποτεθεί, είτε απορρέουν λογικά από τις υποθέσεις και τα αξιώματα.

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος των Μεταμαθηματικών

Η λογική παρέχει έναν τρόπο για την αποσαφήνιση και την τυποποίηση της διαδικασίας της ανθρώπινης σκέψης. Μας επιτρέπει να συλλογίζομαστε για την ορθότητα των προγραμμάτων, να αναπαριστούμε προβλήματα αλλά και να τα επιλύουμε. Η ανάγκη για μια τέτοια αναπαράσταση της ανθρώπινης σκέψης προήλθε από το γεγονός ότι η φυσική γλώσσα, αν και ιδανική, είναι επίσης και βερμπαλιστική, ασαφής, πολυσήμαντη, περιέχει συμφραζόμενα κ.τ.λ.

Ο κλάδος αυτός των Μαθηματικών γεννήθηκε από την ανάγκη να «αποκατασταθεί» το κύρος των Μαθηματικών μετά τις αντινομίες οι οποίες εντοπίστηκαν στη θεωρία των συνόλων. Χρειαζόταν ένα εργαλείο ισχυρότερο της κοινής γλώσσας για να ελέγχεται αποτελεσματικότερα η ορθότητα των αποδείξεων και η συνέπεια ανάμεσα στους διάφορους ορισμούς. Η λύση ήταν ο *Φορμαλισμός*. Την αναστάτωση της μαθηματικής κοινότητας λόγω της αποκάλυψης της αντινομίας του B. Russell η οποία «γκρέμιζε» την εδραιωμένη πεποίθηση για το αλάνθαστο των Μαθηματικών, διαδέχτηκε η ευφορία για την αποκατάσταση του κύρους και της «παντοδυναμίας» της επιστήμης αυτής.

Μια από τις μεγαλύτερες φιλοσοφικές σχολές στον κλάδο των Μαθηματικών που προσπάθησε να αποκαταστήσει το κύρος των Μαθηματικών είναι η σχολή του *Φορμαλισμού* η οποία είναι στενά συνδεδεμένη με το όνομα του David Hilbert.

Οι οπαδοί της σχολής αυτής υποστηρίζουν ότι η ουσία των μαθηματικών είναι ο χειρισμός χαρακτήρων, τα μαθηματικά δεν αναφέρονται ή δεν χρειάζονται να αναφέρονται, σε τίποτα ή τίποτα περισσότερο από τυπογραφικούς χαρακτήρες και κανόνες χειρισμού αυτών [2]

Ο φορμαλισμός των παιγνίων παρουσιάζει την μαθηματική πρακτική σαν ένα παιχνίδι που παίζεται με γλωσσικούς χαρακτήρες, όπου το οποιοδήποτε ψηφίο δεν αντιπροσωπεύει τίποτα το έγκυρο.

Μια παραλλαγή αυτού είναι ο *Απαγωγισμός*. Ο Απαγωγισμός επιμένει να θεωρούνται τα αξιώματα των διαφόρων μαθηματικών θεωριών σαν να ήταν αυθαιρέτως συμφωνημένα. Η ιδέα είναι, ότι η πρακτική των μαθηματικών αποτελείται από τον προσδιορισμό των λογικών συνεπειών, των κατά τα άλλα μη ερμηνευμένων αξιωμάτων. Η ιδέα που υπάρχει πίσω από τον απαγωγισμό είναι να αγνοείται η ερμηνεία και να γίνεται επικέντρωση στις λογικές συνέπειες.

Για τον απαγωγιστή, μαθηματική γνώση, είναι η γνώση του τι απορρέει από τι. Είναι δηλαδή η λογική γνώση.

Η μαθηματική κοινότητα δείχνει αυξημένο ενδιαφέρον για την αυστηρότητα στην αξιωματικοποίηση διαφόρων κλάδων των μαθηματικών και τελικά για την κατανόηση της απαγωγής ανεξαρτήτως περιεχομένου. Η δουλειά του Hilbert στη γεωμετρία, στο τέλος του 19^{ου} αιώνα, σήμανε το τέλος στον ουσιαστικό ρόλο της διαίσθησης στη γεωμετρία.

Σύμφωνα με τον Hilbert: «κατά την μελέτη των θεμελίων μιας επιστήμης πρέπει να διαμορφώνουμε ένα αξιωματικό σύστημα, το οποίο παρέχει ορισμούς των αρχικών στοιχείων της γεωμετρίας, έτσι ώστε οι ίδιες οι προτάσεις να χρησιμοποιούνται ως αξιώματα και ορισμοί»

Ο Hilbert προέκτεινε την απαγωγιστική προσέγγιση σε όλα τα Μαθηματικά με το δεύτερο από τα διάσημα Μαθηματικά προβλήματα του.

Από τότε οι τυπικές γλώσσες και τα παραγωγικά συμπερασματικά συστήματα διατυπώθηκαν με επαρκή διαύγεια και αυστηρότητα, έτσι ώστε να μελετώνται ως μαθηματικά αντικείμενα καθαυτά.

Τέτοιες προσπάθειες έγιναν γνωστές ως μεταμαθηματικά.

Ο Hilbert χρησιμοποιώντας τεχνικές από την αναλυτική γεωμετρία κατασκεύασε αρχικά, ένα μοντέλο όλων των αξιωμάτων με χρήση των πραγματικών αριθμών, δείχνοντας έτσι ότι τα αξιώματα είναι επαληθεύσιμα. Στην συνέχεια έδωσε μια σειρά από μοντέλα, στα οποία ένα από τα αξιώματα είναι ψευδές, αλλά όλα τα υπόλοιπα ισχύουν, δείχνοντας έτσι ότι κάθε αξίωμα είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα. Ο στόχος των μεταμαθηματικών είναι να ρίξει φως στις γενικές ιδιότητες που διέπουν τις τυπικές γλώσσες και αξιωματικοποιήσεις.

Ο Hilbert δίνει έμμεσους ορισμούς των αρχικών όρων, οι οποίοι είναι ταυτόχρονα χαρακτηρισμοί αρκετών οντοτήτων με βάση τις υπάρχουσες μεταξύ τους σχέσεις. Θεωρεί ότι είναι αδύνατον, η σημασία των εννοιών των αρχικών όρων, να είναι γνωστή εκ των προτέρων. Επίσης, ισχυρίστηκε ότι αν μια συλλογή αξιωμάτων είναι συνεπής, τότε τα αξιώματα είναι αληθή και τα πράγματα για τα οποία μιλούν υπάρχουν. Έτσι τα συνεπή αξιώματα είναι αρκετά για να συντάξουν ένα νόμιμο κλάδο των μαθηματικών.

2.1 Τυπικά συστήματα αξιωμάτων.

Μετά την ανακάλυψη των μη – Ευκλείδειων Γεωμετριών, υπήρξε έντονη η ανάγκη κωδικοποίησης των Μαθηματικών σε μια τυπική γλώσσα. Οι ερευνητές άρχισαν να αναζητούν συστήματα αξιωμάτων, τα οποία δεν θα στηρίζονται πλέον σε «διαισθητικά» προφανή δεδομένα. Έτσι, προέκυψε σταδιακά η δημιουργία των τυπικών αξιωμάτων.

Δίνουμε ένα παράδειγμα (Ευκλείδης Β' 91 τεύχος σελ 9-10) με το οποίο κάθε ένας μαθητής ή εκπαιδευτικός θα μπορούσε να κατανοήσει καλύτερα το γεγονός πως η διδασκαλία της Γεωμετρίας ξεκινά από μηδενική βάση.

Μπορούμε να παράγουμε θεωρήματα που αφορούν έννοιες που δεν είναι προσιτές στην διαίθησή μας.

Στο παράδειγμα αυτό :

- ❖ Οι Απροσδιόριστοι όροι είναι :
παιδί, μήλο, τρώει

❖ Τα Αξιώματα είναι :

Αξ. P1 : Υπάρχει τουλάχιστον ένα παιδί.

Αξ. P2 : Για κάθε δυο διαφορετικά μήλα υπάρχει ένα και μόνο παιδί το οποίο τρώει και τα δύο.

Αξ. P3 : Κάθε παιδί τρώει τουλάχιστον δύο μήλα.

Αξ. P4 : Για κάθε παιδί υπάρχει τουλάχιστον ένα μήλο που δεν τρώγεται από το παιδί.

❖ Θα αποδείξουμε τα Θεωρήματα :

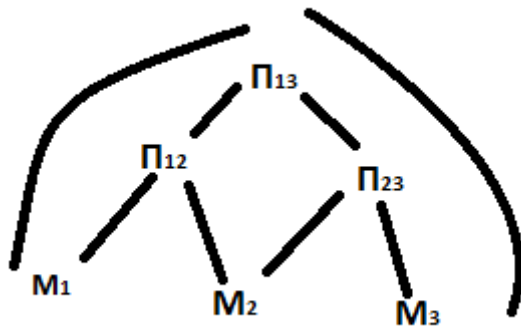
Θ1: Υπάρχουν τουλάχιστον τρία μήλα.

Θ2: Αν υπάρχουν ακριβώς τρία μήλα, τότε υπάρχουν ακριβώς τρία παιδιά.

Απόδειξη Θ1 : Από το αξίωμα P1 υπάρχει τουλάχιστον ένα παιδί, από το P3 υπάρχουν τουλάχιστον 2 μήλα τα οποία αυτό τρώει, ενώ το P4 λέει ότι υπάρχει ένα άλλο μήλο το οποίο αυτό το παιδί δεν το τρώει.

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον 3 μήλα.

Απόδειξη Θ2 : Ας είναι M_1 , M_2 , M_3 τα τρία μήλα και έστω Π_{12} το παιδί που τρώει τα μήλα M_1 , M_2 (σχήμα 1). Το αξίωμα P4 απαγορεύει στο παιδί Π_{12} να φάει το μήλο M_3 , το οποίο αυτό μήλο το τρώει ένα άλλο παιδί, έστω Π_{23} (τρώει και το M_2).



Σχήμα 1: Αναπαράσταση του Θεωρήματος Θ2

Η κατάσταση φαίνεται να μπορεί να περιγραφεί ως εξής :

Αν υπήρχε τέταρτο παιδί, αυτό θα έπρεπε να τρώει τουλάχιστον δύο μήλα (από το P3) που σημαίνει ότι θα είχαμε δυο παιδιά να τρώνε αυτά τα δύο μήλα, πράγμα που απαγορεύει το P2.

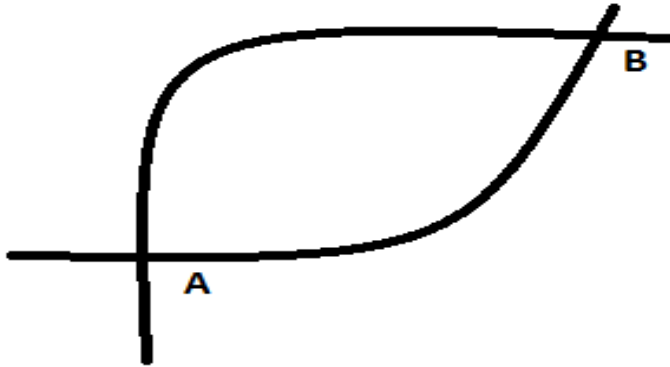
Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουμε αντίστοιχα τις παρακάτω πρωταρχικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο οι οποίες λόγω παράδοσης είναι προσιτές στην διαίσθησή μας και οι οποίες υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές

- I. Από δυο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία
- II. Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- III. Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δυο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

(Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Λυκείου (σελ.9) έκδοση 2013)

Μπορούμε να θέσουμε τα παρακάτω ερωτήματα :

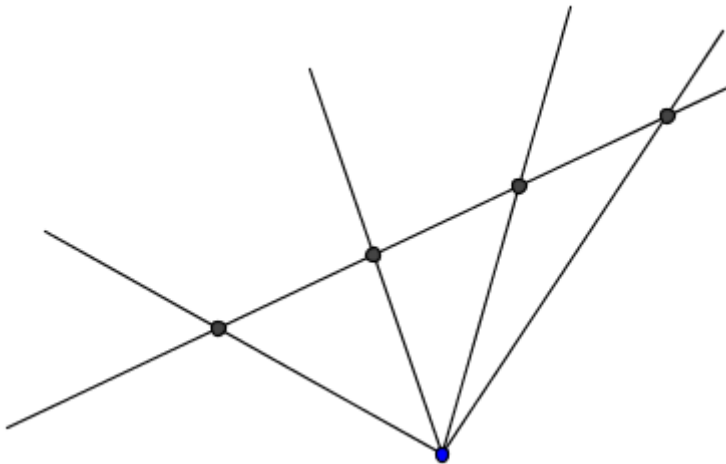
1. Μπορεί μια ευθεία να περιέχει όλα τα σημεία ενός επιπέδου ;
Όχι λόγω του αξιώματος (II)
2. Γιατί οι ευθείες δεν μπορούν να είναι όπως οι γραμμές του σχήματος 2 ;



Σχήμα 2

Όχι λόγω του αξιώματος (I)

3. Είναι αλήθεια ότι υπάρχουν άπειρες ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο ;
Ναι αφού τα παραπάνω αξιώματά μας επιτρέπουν να έχουμε την εξής κατάσταση (σχήμα 3):



Σχήμα 3

Ερώτημα: Πως ξέρουμε ότι υπάρχουν σημεία;

Φαίνεται αναγκαίο ένα αξίωμα :

«υπάρχουν τρία σημεία που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία». Το διατύπωσε ο **Pogorelov** στα αξιώματα σύμπτωσης, που ανέπτυξε το 1981 στο αξιωματικό του σύστημα, (δες το παράρτημα III)

Προκειμένου να διευκρινιστεί η διαφορά ανάμεσα στα υλικά αξιώματα των αρχαίων Ελλήνων και στα κατοπινά τυπικά αξιώματα είναι σκόπιμο να εισαχθεί η έννοια της προτασιακής συνάρτησης [13]

Ο **Bertrand Russell** (1872 –1970) ήταν Βρετανός φιλόσοφος και μαθηματικός, ο οποίος έγινε ευρύτατα γνωστός από τις μελέτες του σχετικά με τη μαθηματική λογική και την αναλυτική φιλοσοφία. Πίστευε πως η γνώση για τον κόσμο προέρχεται από την εμπειρία και ήταν ο πρώτος που διαπίστωσε τη σπουδαιότητα της προτασιακής συνάρτησης

Η προτασιακή συνάρτηση έχει τον τύπο μιας πρότασης όμως δεν είναι πραγματικά πρόταση αφού δεν μπορεί να χαρακτηριστεί, αληθής ή ψευδής.

Επίσης ενδέχεται να εμπεριέχει έναν οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών, οι οποίες μπορούν να σημειωθούν είτε με γράμματα είτε με λέξεις. Με αφετηρία, λοιπόν, την ιδέα της προτασιακής συνάρτησης, θα λέγαμε πως κάθε λογική πραγματεία αποτελείται από:

- **ορισμένους απροσδιόριστους όρους (πρωταρχικούς όρους)**
- **πιθανώς κάποιους προσδιορισμένους όρους (οι οποίοι θα βασίζονται στους απροσδιόριστους όρους)**
- **ορισμένες διατυπώσεις (οι οποίες αφορούν τους πρωταρχικούς όρους και καλούνται αξιώματα)**
- **άλλες διατυπώσεις, που καλούνται θεωρήματα, οι οποίες συνάγονται λογικά από τα αξιώματα.**

Για κάθε θεώρημα υπάρχει μια δήλωση η οποία επιβεβαιώνει τη λογική βάση του συμπεράσματος. Εκφράσεις του τύπου «αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος» εμφανίζονται μετά την απόδειξη του θεωρήματος. Τα αξιώματα ουσιαστικά παρέχουν την απαραίτητη γνώση για τους απροσδιόριστους όρους.

Η λογική πραγματεία, όταν συμβαδίζει με τις προαναφερθείσες υποδείξεις, ονομάζεται κλάδος των *καθαρών μαθηματικών* από κάποιους μελετητές. Η ερμηνεία του κλάδου αυτού εξαρτάται από τη μετατροπή των αξιωμάτων σε αληθείς προτάσεις, εφόσον αντικατασταθούν οι μεταβλητές από άλλους όρους. Από αυτή τη μετατροπή απορρέει ένα αποτέλεσμα το οποίο ονομάζεται *μοντέλο* του προαναφερθέντος κλάδου. Αυτό το μοντέλο συνίσταται στο λεγόμενο κλάδο των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στα καθαρά και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά είναι ότι τα μεν είναι αφηρημένα, τα δε όχι.

Στο πλαίσιο των κλάδων των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών υπάρχει ο διαχωρισμός ανάμεσα στα *τυπικά και υλικά αξιώματα* αντίστοιχα.

Τα τυπικά αξιώματα προηγούνται των πρωταρχικών όρων ενώ τα υλικά είναι τα αντικείμενα που ερμηνεύουν τους πρωταρχικούς όρους και προηγούνται των αξιωμάτων.

Στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει και ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζουν οι Αρχαίοι Έλληνες τη Γεωμετρία με την οποία ερμηνεύουν τη δομή του φυσικού χώρου. Η σύγχρονη Γεωμετρία όμως είναι απαλλαγμένη από οποιοδήποτε φυσικό πλαίσιο.

Κάθε σύνολο αξιωμάτων στηρίζεται σε κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες. Στο συγκεκριμένο σημείο είναι σκόπιμο να αναφερθούν οι ιδιότητες της *συνέπειας, της ανεξαρτησίας, της ισοδυναμίας και της πληρότητας.*

Ένα αξιωματικό σύστημα καλείται **ασυνεπές** όταν οδηγεί σε κάποια αντίφαση, σε μία δηλαδή πρόταση η οποία είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής.

Συνήθως όμως επιλέγεται ένα αξίωμα του οποίου η αλήθεια θεωρείται, κατά τετριμμένο τρόπο, εξασφαλισμένη. Η πιο αποτελεσματική μέθοδος που καθιερώνει τη συνέπεια ενός συστήματος είναι αυτή των *μοντέλων*.

Ένα αξίωμα σε ένα αξιωματικό σύστημα λέγεται **εξαρτημένο**, αν μπορεί να αποδειχθεί βάσει των άλλων αξιωμάτων. Κατά συνέπεια ένα τέτοιο αξίωμα περιττεύει. Το αξίωμα, λοιπόν, είναι **ανεξάρτητο** αν δεν μπορεί να αποδειχθεί βάσει των άλλων αξιωμάτων.

Η μελέτη του *Αξιώματος της Παραλληλίας* του Ευκλείδη αποτελεί τη πιο διάσημη μελέτη ανεξαρτησίας ενός αξιώματος.

Δύο αξιωματικά συστήματα που περιλαμβάνουν τους ίδιους απροσδιόριστους όρους λέγονται *ισοδύναμα*, αν σε καθένα από αυτά μπορούν να συναχθούν τα ίδια θεωρήματα. Συνεπώς, δυο *ισοδύναμα* αξιώματα μπορούν να θεωρηθούν ως υποκατάστατα αξιώματα υπό την έννοια ότι το ένα μπορεί να υποκαταστήσει το άλλο, δίχως να επέλθει αλλαγή στο περιεχόμενο του αξιωματικού συστήματος.

Τέλος, ένα αξιωματικό σύστημα λέγεται *πλήρες* όταν μπορούμε να αποφανθούμε για την ισχύ ή όχι κάθε πρότασης, η οποία μπορεί να διατυπωθεί με τους όρους και τα αξιώματα του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε στο σύστημα κάποιο επιπλέον *ανεξάρτητο* και *συνεπές* αξίωμα.

2.2 Περατοκρατία (finitism): το πρόγραμμα του Hilbert

Στις απαρχές του 20^{ου} αιώνα, παρ' όλες τις δυναμικές και καρποφόρες εξελίξεις στον χώρο της ανάλυσης, υπήρχε ένα αίσθημα κρίσης στα θεμέλια των μαθηματικών. Η ύπαρξη αντινομιών, οδήγησε σε επιθέσεις στη νομιμότητα μερικών μαθηματικών μεθόδων, οδηγώντας κάποιους μαθηματικούς, στο να θέσουν αυστηρούς περιορισμούς στις μαθηματικές μεθόδους, περιορισμοί που θα ακρωτηρίαζαν την πραγματική και μιγαδική ανάλυση.

Η απάντηση του Hilbert σε αυτές τις εξελίξεις ενσωματώνει απόψεις του απαγωγισμού και του φορμαλισμού των όρων και των παιγνίων που θεωρεί τη μαθηματική δραστηριότητα ως ένα παιχνίδι τυπικού χειρισμού των όρων . Ο στόχος του προγράμματος του, ήταν να θεμελιώσει την εγκυρότητα των μαθηματικών μεθόδων. *Η ιδέα πίσω από το πρόγραμμα είναι να τυποποιηθεί αυστηρά κάθε κλάδος των μαθηματικών, στη βάση της λογικής και στη συνέχεια να μελετηθούν οι ιδιότητες του τυπικού συστήματος που αναφέρεται στον κλάδο αυτόν.*

Το πρόγραμμα του Hilbert ήταν μια νέα πρόταση για την θεμελίωση των κλασσικών Μαθηματικών. Προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα της κρίσης στα θεμέλια των μαθηματικών που δημιουργήθηκε από την ανακάλυψη των παραδόξων και των ασυνεπειών που περιείχαν.

Το πρόγραμμά του απαιτεί την διαμόρφωση όλων των μαθηματικών θεωριών με αξιωματική μορφή, μαζί με μια απόδειξη για την συνέπεια της, την ανεξαρτησία της και την πληρότητά της.

Ο John Von Neumann (1931) έδωσε μια περιεκτική περίληψη του προγράμματος του Hilbert, που συνοψίζεται σε τέσσερα στάδια:

(1) Να απαριθμηθούν όλα τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά και στην λογική ...

- (2) Να χαρακτηρισθούν με σαφήνεια όλοι οι συνδυασμοί αυτών των συμβόλων που αναπαριστούν προτάσεις που έχουν καταχωρηθεί ως «σημαντικές» στα κλασικά Μαθηματικά...
- (3) Να μας παρέχει μια κατασκευαστική διαδικασία που μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε επιτυχώς όλους τους τύπους που αντιστοιχούν στις «αποδείξιμες» προτάσεις των κλασικών Μαθηματικών. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται, συνεπώς «απόδειξη» ...
- (4) Να δείξει (με ένα πεπερασμένο τρόπο) ότι οι τύποι που αντιστοιχούν στις προτάσεις των κλασικών Μαθηματικών, από εκείνες που μπορούν να ελεγχθούν με πεπερασμένες αριθμητικές μεθόδους, μπορούν να αποδειχθούν με την διεργασία που περιγράφηκε στο προηγούμενο στάδιο (3) αν και μόνον αν ο έλεγχος της αντίστοιχης πρότασης τη δείχνει να είναι αληθής.

Τα τρία πρώτα στάδια του προγράμματος ζητούν την τυποποίηση διαφόρων κλάδων των Μαθηματικών. Θα δούμε ότι το τέταρτο στάδιο αποδείχθηκε να είναι προβληματικό.

Θα ξεκινήσουμε στην αρχή με την έννοια του περατοκρατικού στο πρόγραμμα του Hilbert. Κατά τον Hilbert υπάρχει ένα προνομιούχο μέρος των μαθηματικών, που περιέχεται στην στοιχειώδη θεωρία των αριθμών, το οποίο στηρίζεται μόνο σε μια «καθαρά διαισθητική βάση συγκεκριμένων συμβόλων».

Εκτιμώντας ότι η δυνατότητα των πράξεων των αφηρημένων εννοιών είναι «ανεπαρκής και αβέβαιη», υπάρχει ένας κόσμος λογικών αντικειμένων τα οποία λειτουργούν αισθητικά ως άμεση εμπειρία.

Η μεθοδολογική έννοια του περατοκρατικού συνίσταται σε ένα περιορισμό της μαθηματικής σκέψης σε αυτά τα αντικείμενα και σε εκείνες τις διαδικασίες και μεθόδους συλλογισμού για τέτοια αντικείμενα που δεν απαιτούν την εισαγωγή των αφηρημένων εννοιών και δεν προσφεύγουν σε άπειρες ολότητες, αλλά ορίζονται με άμεσο συνδυαστικό πεπερασμένο τρόπο. Είναι στην ουσία το κομμάτι των μαθηματικών που κανείς δεν αμφισβητεί και όλοι θεωρούν ότι αποτελεί βάση της Μαθηματικής σκέψης.

Ο Hilbert θεωρεί ότι θα πρέπει να απομονώσουμε το παραπάνω μέρος των μαθηματικών ενώ το «προβληματικό» τους μέρος, που θα το ονομάσουμε *απειροκρατικό* και αναφέρεται σε άπειρες ολότητες ή μεθόδους, *προσπαθούμε να το περιγράψουμε και να το αποδώσουμε σαν ένα μεγάλο τυπικό σύστημα.*

Τα αντικείμενα του περατοκρατικού μέρους ήταν για τον Hilbert τα «σύμβολα». Οι διαισθητικές πράξεις με σύμβολα αποτελούν τη βάση για τα μεταμαθηματικά του Hilbert, τα οποία λειτουργούν με ακολουθίες συμβόλων (τύποι, αποδείξεις). Τους τύπους και τις αποδείξεις μπορούμε να τους χειριστούμε συντακτικά, ενώ οι ιδιότητες και οι σχέσεις των τύπων και των αποδείξεων βασίζονται σε μια ανεξάρτητη από την λογική διαισθητική ικανότητα, η οποία εγγύεται τη βεβαιότητα της γνώσης των τύπων και των αποδείξεων που προσεγγίζονται από τέτοιες συμβολικές διαδικασίες.

Γενικότερα ο Hilbert και οι συνεργάτες του υποστήριζαν ότι το αντικείμενο της περατοκρατικής θεωρίας των αριθμών είναι ουσιώδες για όλη την ανθρώπινη σκέψη.

Σύμφωνα με τα λόγια του ίδιου του Hilbert Για το άπειρο (1926): [16] «Προϋπόθεση για να χρησιμοποιήσουμε λογικές συναγωγές και να εκτελέσουμε λογικές πράξεις είναι να έχει δοθεί κάτι σαν παράσταση: δηλαδή, συγκεκριμένα έξω-λογικά αντικείμενα δοσμένα στην εποπτεία ως άμεσες εμπειρίες πριν από κάθε σκέψη. Για να είναι ασφαλής η λογική συναγωγή, πρέπει τα αντικείμενα αυτά να μπορούν να εποπτευθούν από κάθε τους πλευρά, και το γεγονός ότι παρουσιάζονται, ότι διαφέρουν μεταξύ τους, ότι το ένα ακολουθεί το άλλο, ή ότι είναι συνδυασμένα μεταξύ τους, πρέπει να δίνεται άμεσα στην εποπτεία μαζί με τα αντικείμενα, ως κάτι που δεν επιδέχεται αναγωγή σε κάτι άλλο ή δεν χρειάζεται αναγωγή. Αυτή είναι η βασική φιλοσοφική θέση που θεωρώ αναγκαία όχι μόνο για τα μαθηματικά αλλά, γενικότερα, για κάθε επιστημονική σκέψη, κατανόηση και επικοινωνία».

2.3 Η περιγραφή του προγράμματος [2].

A) Το πρόγραμμα ξεκινάει με τον πυρήνα του, ο οποίος ονομάζεται «Πεπερασμένη Αριθμητική». Η πεπερασμένη αριθμητική δεν νοείται σαν ένα ανούσιο παιχνίδι ή όπως η απαγωγή συνεπειών από ανούσια αξιώματα, αντίθετα οι ισχυρισμοί της είναι σημαντικοί και έχουν περιεχόμενο.

Οι τύποι της πεπερασμένης αριθμητικής περιλαμβάνουν εξισώσεις όπως $2+3=5$ όπως και απλούς συνδυασμούς αυτών, όπως $7+5=12$ ή $7+7 \neq 10$.

Οι δηλώσεις αυτές αναφέρονται σε συγκεκριμένους φυσικούς αριθμούς και υπάρχει ένας αλγόριθμος που υπολογίζει αν οι ιδιότητες και οι σχέσεις ισχύουν.

Θεωρεί ότι υπάρχουν δύο ειδών ποσοδείκτες, οι φραγμένοι οριοθετημένοι στους φυσικούς μικρότερους κάποιου συγκεκριμένου και οι μη φραγμένοι που εκτείνονται σε όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Ονομάζει, κάθε πρόταση που περιέχει ένα φραγμένο ποσοδείκτη, **πεπερασμένη**, ενώ αυτή που περιέχει ένα μη φραγμένο ποσοδείκτη την ονομάζει **μη πεπερασμένη**. Θεωρεί ότι οι προτάσεις που περιέχουν φραγμένους ποσοδείκτες είναι αλγοριθμικά **αποκρίσιμες** με την έννοια ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει αν είναι αληθείς. Οι προτάσεις με μη φραγμένους ποσοδείκτες δεν έχουν αυτή την ιδιότητα.

Εισάγει γράμματα για την αναπαράσταση της γενικότητας όπως $a+100=100+a$ οι οποίες είναι νόμιμα πεπερασμένες προτάσεις και θεωρεί ότι προτάσεις που περιέχουν γράμματα γενικότητας δεν έχουν πεπερασμένες αρνήσεις.

Έτσι η άρνηση της παραπάνω πρότασης θα έλεγε ότι *υπάρχει* ένας αριθμός p τέτοιος ώστε το $p+100$ να μην είναι ίδιο με $100+p$. Έτσι, η άρνηση μιας δήλωσης της γενικότητας περιέχει έναν μη φραγμένο ποσοδείκτη, και έτσι δεν είναι πεπερασμένος.

B) Το επόμενο αντικείμενο αφορά το περιεχόμενο της πεπερασμένης αριθμητικής.

Προφανώς το περιεχόμενο της είναι οι φυσικοί αριθμοί.

Ο Hilbert υποστήριξε ότι η πεπερασμένη αριθμητική είναι κατά μια έννοια μια προσυνθήκη σε όλη την ανθρώπινη σκέψη.

Προτείνει να τους αναγνωρίζουμε με τα αριθμητικά σύμβολα $|$, $||$, $|||$,... όπου κάθε αριθμητικό σύμβολο είναι διαισθητικά αναγνωρίσιμο από το γεγονός ότι περιέχει μόνο πλήθος από « $|$ ». Με την εισαγωγή των συμβόλων φαίνεται η συγγένεια του με τον φορμαλισμό των όρων.

Η λέξη όμως *σύμβολα* είναι παραπλανητική (όπως και στον φορμαλισμό ως παίγνιο) γιατί ο Hilbert ενδιαφέρεται για τους χαρακτήρες τους ίδιους και θέλει να μελετηθούν και να κατανοηθούν ως αφηρημένοι τύποι παρά ως φυσικά δείγματα.

Η πεπερασμένη αριθμητική δεν μπορεί να είναι απόλυτα αψεγάδιαστη αλλά δεν υπάρχει πιο προτιμώμενη ή πιο επιστημονικά ασφαλής άποψη από την πεπερασμένη αριθμητική. Η πεπερασμένη αριθμητική είναι μόνο ένα μικρό κομμάτι από το ψηφιδωτό των Μαθηματικών.

Η πρώτη κατάκτηση πέρα από την πεπερασμένη αριθμητική είναι οι προτάσεις για τους φυσικούς αριθμούς που περιέχουν μη φραγμένους ποσοδείκτες και στη συνέχεια η πραγματική ανάλυση, η μιγαδική ανάλυση, η συναρτησιακή ανάλυση, η γεωμετρία, η συνολοθεωρία και ούτω καθεξής.

Όλα αυτά ο Hilbert τα ονομάζει ιδεατά μαθηματικά, τα οποία μας επιτρέπουν να τα οργανώσουμε και να τα μεταχειριστούμε πιο αποτελεσματικά με την πεπερασμένη αριθμητική. Τα ιδεατά μαθηματικά πρέπει να χρησιμοποιούνται περίπου όπως στον φορμαλισμό των παιγνίων, η σύνταξη και οι συμπερασματολογικοί κανόνες για κάθε κλάδο τους πρέπει να τυποποιηθούν κατηγορηματικά και ο κλάδος πρέπει να μελετηθεί σαν ένα παιχνίδι χαρακτήρων.

Η μόνη αυστηρή προϋπόθεση σε έναν τυποποιημένο κλάδο των ιδεατών μαθηματικών είναι ότι δεν μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την πεπερασμένη αριθμητική, για να παράγει έναν τύπο που αντιστοιχεί σε μια ψευδή πεπερασμένη πρόταση.

Απαραίτητη προϋπόθεση στα ιδεατά μαθηματικά είναι η συνέπεια.

Ο Hilbert υποστήριξε ότι «αν τα αυθαίρετα δοσμένα αξιώματα δεν αντιτίθενται μεταξύ τους με όλες τις συνέπειες τους, τότε είναι αληθή και τα πράγματα που ορίζονται από αυτά υπάρχουν». Αυτό είναι το κριτήριο της αλήθειας και της ύπαρξης.

Για το πρόγραμμά του, η αναγνώριση των φυσικών αριθμών με τύπους χαρακτήρων επιτρέπει στην πεπερασμένη αριθμητική να εφαρμοστεί στα *μεταμαθηματικά*. Τα τυπικά συστήματα υπάγονται τώρα στα όρια της πεπερασμένης αριθμητικής.

Μια *τυποποιημένη απόδειξη*, όπως ένα αριθμητικό σύμβολο, είναι ένα συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο, αφού μπορούμε να το περιγράψουμε πλήρως.

Γ) Το τελευταίο στάδιο του προγράμματος του Hilbert

Στο τελευταίο στάδιο ο Hilbert προσπαθεί να εξασφαλίσει πεπερασμένες αποδείξεις συνέπειας των πλήρως τυποποιημένων μαθηματικών θεωριών. Δηλαδή για να χρησιμοποιήσουμε μια θεωρία ιδεωδών μαθηματικών πρέπει να την τυποποιήσουμε και μετά να δείξουμε μέσω της πεπερασμένης αριθμητικής ότι η θεωρία είναι συνεπής. Έτσι έχουμε την βεβαιότητα ότι χρησιμοποιώντας αυτή την θεωρία δεν θα μας οδηγήσει σε αντίφαση ούτε θα παράγει κάποια ψευδή πεπερασμένη πρόταση. Αυτό είναι «τα πάντα» που μπορούμε να ζητήσουμε από μια ιδεατή μαθηματική θεωρία.

2.4 Η μη πληρότητα του Προγράμματος Hilbert

Θα ξεκινήσουμε με το να γνωρίσουμε τον **Kurt Gödel (1906-1978)**. Γεννήθηκε στο Μπρνο της Αυστρο-Ουγγρικής Αυτοκρατορίας, σπούδασε Μαθηματικά στη Βιέννη, όπου και απέκτησε μεγάλο ενδιαφέρον για τη *Λογική και τη Θεμελίωση των Μαθηματικών*.

Στη διδακτορική του διατριβή έκανε ένα σημαντικό βήμα προς την εκπλήρωση του προγράμματος του Hilbert αποδεικνύοντας το Θεώρημα της πληρότητας που ορίζει ότι: «*όλες οι αληθείς (σε όλες τις δυνατές ερμηνείες) προτάσεις στην λογική πρώτης τάξης – δηλαδή του απλού κατηγορηματικού λογισμού – (first-order predicate logic) μπορούν να αποδειχθούν (τυπικά) από ένα μικρό σύνολο αξιωμάτων*»

Στον κατηγορηματικό λογισμό, στη *λογική πρώτης τάξης* οι βασικές προτάσεις ή κατηγορήματα είναι σύνθετα αντικείμενα της μορφής $\Pi(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ όπου το Π είναι σύμβολο της γλώσσας και τα $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ σταθερές ή μεταβλητές. Αντίθετα στη *λογική δεύτερης τάξης (second-order predicate logic)* μπορούμε να χρησιμοποιούμε ως *τιμές των μεταβλητών της και σύνολα*, δηλαδή επιτρέπονται διατυπώσεις του τύπου «υπάρχει ένα σύνολο A ». Το αν μια πρόταση στη λογική είτε πρώτης είτε δεύτερης τάξης, είναι αληθής ή ψευδής εξαρτάται και από το *μοντέλο* βάση του οποίου η πρόταση ερμηνεύεται. Το 1931 όμως ο Kurt Gödel κατάφερε να αποδείξει ότι η πληρότητα δεν ισχύει για μια λογική αρκετά ισχυρή να στηρίξει τα θεμέλια της αριθμητικής ή άλλων αντίστοιχων μαθηματικών θεωριών με τουλάχιστον τον ίδιο βαθμό πολυπλοκότητας.

Τα δύο θεωρήματα που καταγράφουν αυτή τη διαπίστωση ονομάζονται Θεωρήματα της μη πληρότητας. Σύμφωνα με το πρώτο από τα δύο θεωρήματα: «*σε οποιοδήποτε σύστημα επαρκές να ορίσει τις ιδιότητες των ακέραιων αριθμών και τις αριθμητικές πράξεις, θα υπάρχουν πάντα προτάσεις, για τις οποίες δε μπορούν να αποδειχθούν είτε αυτές είτε οι αρνήσεις τους μέσα στο σύστημα.*»

Το δεύτερο από τα δύο θεωρήματα ορίζει ότι: «*αν ένα σύστημα τέτοιου τύπου είναι πλήρες, δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στο σύστημα η συνέπεια του*», δηλαδή συνέπεια και πληρότητα δεν μπορούν να αποδειχθούν ταυτόχρονα σε ένα σύστημα επαρκές για να ορίσει τις ιδιότητες των ακέραιων αριθμών και τις αριθμητικές πράξεις.

Το πρώτο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel κατά πολλούς ήταν ένα ισχυρό χτύπημα στο πρόγραμμα του Hilbert, γιατί διαλύει την ελπίδα για την εύρεση ενός μόνο τυπικού συστήματος που να περικλείει όλα τα κλασικά μαθηματικά ή έστω όλη την αριθμητική.

Ωστόσο το πιο σημαντικό πρόβλημα στο πρόγραμμα του Hilbert οφείλεται στο δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας του Gödel.

Η θριαμβευτική ιαχή του Hilbert «στα Μαθηματικά δεν υπάρχει *ignorabimus*» καθώς και το «πρέπει να μάθουμε και θα μάθουμε», το τελευταίο ειπωμένο λίγες ημέρες πριν από την ανακοίνωση από τον Gödel του *δεύτερου θεωρήματος μη πληρότητας*, εκφράζουν την πιο αισιόδοξη και μεγαλεπήβολη παραλλαγή της θεμελιακής αναζήτησης.

Από την στιγμή εκείνη το πρόγραμμα του Hilbert κατέρρευσε, ενώ τα «μεταμαθηματικά» έχασαν μαζί με το όνομα τους, κάθε θεμελιοκρατική βλέψη και μετεξελίχθηκαν σε ένα ακόμα κλάδο των ίδιων των μαθηματικών. Αν και όπως είπαμε, το πλήγμα ήταν ισχυρό, το Πρόγραμμά του συνέχισε να ασκεί σημαντική επιρροή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών και στη θεωρία της απόδειξης.

Κεφάλαιο 3

Οι πέντε ομάδες των αξιωμάτων του Hilbert.¹

3.1 Παρουσίαση του συστήματος

Αν εξετάσουμε τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδαχθήκαμε στο Λύκειο πολύ προσεκτικά και χρησιμοποιήσουμε την διαίσθησή μας θα διαπιστώσουμε ότι πράγματι υπάρχουν αναφορές - εκφράσεις που μπορούμε να τις δεχτούμε χωρίς απόδειξη. Είναι πολύ χρήσιμο να κατασκευάσουμε σχήματα για να σιγουρευτούμε ότι αντιλαμβανόμαστε τι επιτρέπει κάθε αξίωμα, να λέμε για τα αντικείμενα της Γεωμετρίας. Αναφέροντας εδώ τα αξιώματα που έθεσε ο Hilbert για να εκφράσει με σαφήνεια τις σχέσεις μεταξύ των πρωταρχικών όρων που θεώρησε δηλαδή των σημείων, ευθειών και επιπέδων, *θα παραλείψουμε γενικά τα σχήματα.*

Με τον τρόπο αυτό θα δείξουμε ότι οι προτάσεις ακολουθούν λογικά μέσα από το σύστημα χωρίς να αναφερόμαστε σε κανένα σχήμα που θα μπορούσε να σχεδιασθεί. Θα προσέξουμε μόνο να χρησιμοποιήσουμε τους πρωταρχικούς μας όρους και σχέσεις για να δημιουργήσουμε το αξιωματικό σύστημα.

Θα υπενθυμίσουμε εδώ τα θεμελιώδη στοιχεία, τις σχέσεις και τα αξιώματα του αξιωματικού συστήματος του Hilbert.

Θεμελιώδη στοιχεία: Σημεία, Ευθείες, Επίπεδα

Σχέσεις: «ανήκειν», «κείσθαι μεταξύ», «ισότητα», «παραλληλίας», «συνέχειας».

Αξιώματα: θέσης (ανήκειν) (οκτώ)

διάταξης (κείσθαι μεταξύ) (τέσσερα)

μετρικά (ισότητα) (πέντε)

παραλληλίας (παραλληλία) (ένα)

συνέχειας (συνέχεια) (δύο)

Ο Hilbert ορίζει τον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο ως ένα σύνολο τυχαίων στοιχείων τα οποία διαιρούνται σε τρία διακεκριμένα συστήματα αντικειμένων «Σημεία, Ευθείες, Επίπεδα». Δεν όρισε αυτές τις έννοιες αλλά προσδιόρισε τις σχέσεις μεταξύ τους μέσα από το σύστημα αξιωμάτων που εισήγαγε.

Στη συνέχεια ακολουθούν τα αξιώματά του για την επίπεδη γεωμετρία, τα οποία προσδιορίζουν τις ανωτέρω σχέσεις και τα οποία διέκρινε σε πέντε ομάδες. Αναφέρονται σε ένα σύνολο σημείων, σε ένα σύνολο ευθειών και στο επίπεδο που θεωρείται το σύνολο των σημείων.

1. Από το βιβλίο του David Hilbert (Θεμέλια της Γεωμετρίας) «**Grundlagen der Geometrie**» Μετάφραση –Πρόλογος –Εισαγωγή από την 7^η γερμανική έκδοση (Leipzig 1930) Στρατής Παπαδόπουλος ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΡΟΧΑΛΙΑ 1995

Η ομάδα αξιωμάτων I:(αξιώματα συνδέσεως ή σύμπτωσης)

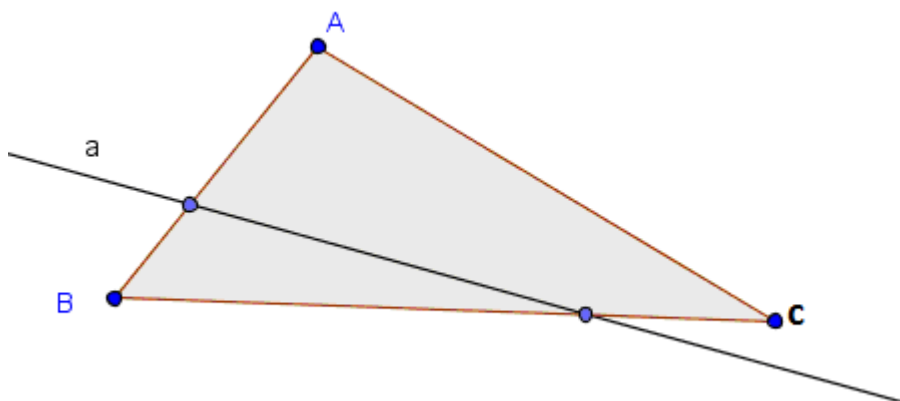
- I1. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A, B υπάρχει πάντοτε μια ευθεία a , η οποία τα περιέχει.
- I2. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A, B δεν υπάρχουν περισσότερες από μια ευθείες που να τα περιέχει.
- I3. Επί μιας ευθείας υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία.
- I4. Προς τρία οποιαδήποτε σημεία A, B, C , που δεν βρίσκονται πάνω σε μία και την ίδια ευθεία, υπάρχει ένα επίπεδο α το οποίο περιέχει τα τρία σημεία A, B, C .
- I5. Προς τρία οποιαδήποτε σημεία A, B, C , τα οποία δεν ανήκουν (συγχρόνως) πάνω σε μία και την ίδια ευθεία, δεν υπάρχει παρά ένα και μόνον ένα επίπεδο που τα περιέχει.
- I6. Αν δύο σημεία A, B μιας ευθείας a βρίσκονται σε ένα επίπεδο α τότε κάθε σημείο της a βρίσκεται στο επίπεδο α .
- I7. Αν δύο επίπεδα α, β έχουν ένα κοινό σημείο A , τότε αυτά έχουν τουλάχιστον ένα ακόμα κοινό σημείο B .
- I8. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται σε ένα επίπεδο.

Η ομάδα αξιωμάτων II : (αξιώματα διατάξεως ή του μεταξύ)

Η σχέση του **μεταξύ** είναι **προταρχική** δηλαδή ο **Hilbert** δεν κάνει καμία προσπάθεια να την ορίσει άμεσα. Η ομάδα αυτή αναφέρεται στην έννοια του μεταξύ για συνευθειακά σημεία και στην έννοια του μεταξύ για επίπεδο.

- II1. Αν ένα σημείο B κείται μεταξύ δύο σημείων A και C , (συμβολικά $A-B-C$) τότε τα A, B, C είναι τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας και το B κείται επίσης μεταξύ των C και A , (συμβολικά $C-B-A$).
- II2. Ως προς δύο σημεία A και C υπάρχει πάντοτε ένα σημείο B της ευθείας AC , τέτοιο ώστε το C να κείται μεταξύ των A και B , (συμβολικά $A-C-B$).
- II3. Σε ότι αφορά τρία οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία μιας ευθείας, ένα και μόνο ένα από αυτά κείται μεταξύ των δύο άλλων.
- II4. Οποιαδήποτε τέσσερα διαφορετικά σημεία A, B, C, D μιας ευθείας, μπορούν πάντα να διαταχθούν έτσι ώστε το B να κείται μεταξύ του A και του C και επίσης μεταξύ των A και D , και επιπροσθέτως, έτσι ώστε το C να κείται μεταξύ του A και D και επίσης μεταξύ του B και D .
- II5. Ας είναι A, B, C τρία σημεία μη κείμενα σε ευθεία γραμμή και a μια ευθεία στο επίπεδο ABC , η οποία δεν συναντά κανένα από τα σημεία A, B, C . Αν κατ' ακολουθίαν η ευθεία a διέρχεται από ένα σημείο του τμήματος AB , τότε αυτή θα διέρχεται επίσης οπωσδήποτε από ένα σημείο του τμήματος AC ή από ένα σημείο του τμήματος BC (σχήμα 4).

Το αξίωμα αυτό οδηγεί στην έννοια του ημιεπιπέδου και είναι γνωστό ως Αξίωμα του Pasch.



Σχήμα 4

Η ομάδα αξιωμάτων ΙΙΙ : (αξιώματα ισότητας ή συμφωνίας)

Με τα αξιώματα αυτά εξετάζουμε την *ισότητα* δύο σχημάτων και κατοχυρώνουμε τη *μεταφορά* ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών.

Υπάρχει μια **σχέση ισοδυναμίας** που είναι **πρωταρχική** ανάμεσα στα ευθύγραμμα τμήματα και με την σχέση αυτή τα ευθύγραμμα τμήματα τα λέμε *σύμφωνα ή ίσα*.

ΠΙ1. Αν A, B είναι δύο σημεία μιας ευθείας a και ακόμα A' ένα σημείο πάνω στην ίδια ή σε μια άλλη ευθεία a' , τότε σε μια καθορισμένη μεριά της a' ως προς το A' μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα και ένα μόνο σημείο B' , τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να είναι ίσο (σύμφωνο) με το $A'B'$. Συμβολικά γράφουμε $AB \equiv A'B'$.

Με το αξίωμα δίνεται η δυνατότητα συνταύτισης των ευθυγράμμων τμημάτων και μάλιστα όπως αποδεικνύεται μονοσήμαντα.

ΠΙ2. Αν ένα ευθύγραμμο τμήμα $A'B'$ και ένα τμήμα $A''B''$ είναι ίσα προς το αυτό τμήμα AB , τότε και το $A'B'$ είναι ίσο προς το τμήμα $A''B''$.

ΠΙ3. Έστω AB και BC δύο ευθύγραμμο τμήματα, πάνω σε μια ευθεία a , χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία, και ακόμα $A'B'$ και $B'C'$ δύο τμήματα πάνω στην ίδια ή σε άλλη ευθεία a' , χωρίς επίσης κοινά εσωτερικά σημεία αν είναι $AB \equiv A'B'$ και $BC \equiv B'C'$, τότε θα είναι επίσης και $AC \equiv A'C'$.

ΠΙ4. Θεωρούμε δεδομένα: γωνία $\angle (h, k)$ (κορυφής O) σε ένα επίπεδο α και μια ευθεία a' σε ένα επίπεδο α' (όχι κατανάγκην διαφορετικό από το α)' ακόμα μια καθορισμένη μεριά του α' ως προς την a' .

Αν κατ'ακολουθίαν h' είναι μια ημιευθεία της a' , με αρχή σημείο O' , τότε υπάρχει στο επίπεδο α' μια και μόνο μια ημιευθεία k' , ώστε η γωνία $\angle (h, k)$ να είναι ίση προς την γωνία $\angle (h', k')$ και συγχρόνως όλα τα εσωτερικά σημεία της $\angle (h', k')$ να κείνται στη δεδομένη μορφή του α' (ως προς την a')

Συμβολικά γράφουμε $\angle (h,k) \equiv \angle (h',k')$.

Ισχύει επίσης: $\angle (h,k) \equiv \angle (h,k)$ δηλαδή κάθε γωνία είναι ίση προς τον εαυτό της.

Υπάρχει μια **σχέση ισοδυναμίας** που είναι **πρωταρχική** ανάμεσα στις γωνίες και με την σχέση αυτή τις γωνίες τις λέμε *σύμφωνες ή ίσες*.

Με το αξίωμα αυτό εξασφαλίζεται το μονοσήμαντο της μεταφοράς των γωνιών.

ΠΙ5. Αν σε δύο τρίγωνα ABC και A'B'C' ισχύουν οι ισότητες :

$AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ τότε θα εκπληρώνεται επίσης και η ισότητα $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

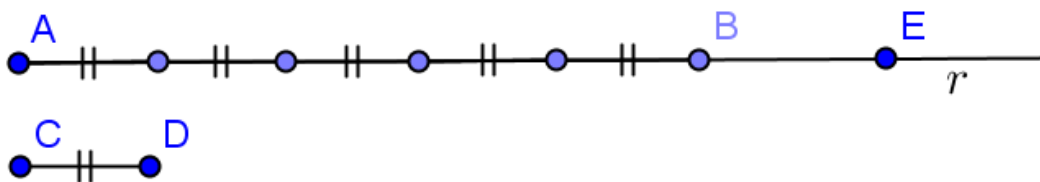
Η ομάδα αξιωμάτων IV:(αξίωμα παραλληλίας)

Έστω **a** τυχόν επίπεδο, **a** μια τυχούσα ευθεία στο **a** και A ένα σημείο του **a**, που δεν κείται πάνω στην **a**. Χαράσσουμε στο **a** από το σημείο A μια ευθεία **c** που τέμνει την **a** και συνακόλουθα, πάλι από το A (πάνω στο **a**), μια ευθεία **b**, τέτοια ώστε οι εντός και εναλλάξ γωνίες που σχηματίζει η ευθεία **c** με τις ευθείες **a** και **b** να είναι ίσες. Τότε συνάγεται ότι οι ευθείες **a** και **b** δεν έχουν μεταξύ τους κανένα κοινό σημείο.

Η ομάδα αξιωμάτων V:(αξιώματα συνέχειας)

V1. (Αξίωμα της μέτρησης ή αξίωμα Ευδόξου – Αρχιμήδη)

Αν CD είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, A ένα οποιοδήποτε σημείο και *r* μια οποιαδήποτε ημιευθεία με αρχή το A τότε για κάθε σημείο B διαφορετικό από το A πάνω στην ημιευθεία *r* υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός *n* τέτοιος ώστε όταν το CD τοποθετηθεί *n* φορές στην *r* αρχίζοντας από το A, υπάρχει ένα σημείο E τέτοιο ώστε $n \cdot CD = AE$ και είτε το B είναι το E είτε το B είναι ανάμεσα στο A και το E (σχήμα 5).



Σχήμα 5

Το διαισθητικό περιεχόμενο του Αξιώματος του Αρχιμήδη είναι ότι αν επιλέξουμε τυχαία ένα ευθύγραμμο τμήμα CD σαν μονάδα μέτρησης του μήκους, τότε κάθε άλλο ευθύγραμμο τμήμα έχει πεπερασμένο μήκος σε σχέση με την μονάδα μέτρησης (το μήκος του AB σε σχέση με το CD σαν μονάδα μέτρησης μήκους είναι το πολύ *n* μονάδες μέτρησης).

Επίσης θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB σαν μονάδα μέτρησης του μήκους. Το αξίωμα μας λέει ότι κανένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα δεν μπορεί να γίνει

απειροελάχιστα μικρό σε σχέση με αυτή τη μονάδα μέτρησης (το μήκος του CD σε σχέση με το AB σαν μονάδα μέτρησης μήκους είναι τουλάχιστον $\frac{1}{n}$ μονάδες μέτρησης).

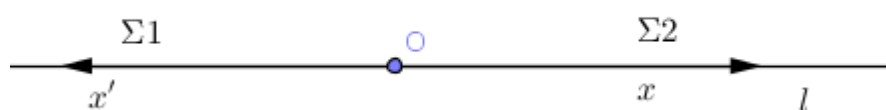
V2. (Αξίωμα της γραμμικής πληρότητας)

Τα σημεία μιας ευθείας **a** συγκροτούν ένα τέτοιο σύστημα, το οποίο με τις σχέσεις της διάταξης και της ισότητας, δεν μπορεί να επεκταθεί (δηλαδή να του επισυνάψουμε και άλλα σημεία) εις τρόπον ώστε να παραμένουν αληθείς οι σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των στοιχείων του καθώς και οι βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα I-III και V1.

Ο Hilbert χαρακτηρίζει το τελευταίο αξίωμα ως *τελικό δομικό λίθο* στο αξιωματικό του σύστημα.

Αξίωμα συνέχειας του Dedekind:

Υποθέτουμε (σχήμα 6) ότι το σύνολο (l) όλων των σημείων μιας ευθείας l είναι η ένωση δυο ξένων υποσυνόλων Σ_1 , Σ_2 , έτσι ώστε κανένα σημείο του ενός υποσυνόλου να μην βρίσκεται μεταξύ δυο σημείων του άλλου υποσυνόλου. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σημείο O στην ευθεία l τέτοιο ώστε ένα από τα υποσύνολα να ταυτίζεται με την ημιευθεία Ox και το άλλο υποσύνολο να ταυτίζεται με την ημιευθεία Ox' , χωρίς το σημείο O .



Σχήμα 6

Το ζεύγος των υποσυνόλων Σ_1, Σ_2 με τις παραπάνω ιδιότητες που αναφέρονται στο *Αξίωμα συνέχειας του Dedekind* ονομάζεται *τομή Dedekind* της ευθείας l .

Θα αποδείξουμε ότι το αξίωμα του Αρχιμήδη είναι συνέπεια του αξιώματος του Dedekind.

Απόδειξη:

Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα CD και ένα σημείο A στην ευθεία l , και μια ημιευθεία r της l που ξεκινά από το A. Με την ορολογία του Αξιώματος του Dedekind, έστω Σ_1 σύνολο, το οποίο περιέχει την αντίθετη ημιευθεία, το σημείο A και όλα τα σημεία B στην ημιευθεία r που ξεπερνιούνται τοποθετώντας τμήματα ίσα με πολλαπλάσια του CD στην r αρχίζοντας από το A. Θέλουμε να δείξουμε ότι το Σ_1 είναι ολόκληρη η ευθεία l , επομένως ότι περιλαμβάνει και ολόκληρη την ημιευθεία r . Έτσι θα έχουμε ότι κάθε σημείο της ημιευθείας ξεπερνιέται από ένα πεπερασμένο πλήθος φορών εφαρμογής του τμήματος CD. Έστω Σ_2 το συμπληρωματικό υποσύνολο του Σ_1 στην r . Θέλουμε να αποδείξουμε, ισοδύναμα με τον αρχικό μας στόχο, ότι το Σ_2 είναι κενό, έτσι υποθέτουμε το αντίθετο.

Υπάρχει λοιπόν ένα σημείο στο σύνολο Σ_2 . Το Σ_2 δε μπορεί να είναι μονοσύνολο, αφού τότε θα είχαμε σημεία του Σ_1 εκατέρωθεν του σημείου αυτού, πράγμα που αντίκειται στον ορισμό της τομής. Θεωρούμε δυο σημεία P, Q στο Σ_2 και έστω $(A - P - Q)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $PQ \subset \Sigma_2$.

Έστω ότι το B είναι μεταξύ των P, Q . Ας υποθέσουμε ότι το B μπορεί να ξεπεραστεί μέσω κατάλληλων n και E από τον τρόπο ορισμού του $\Sigma 1$.

Τότε και το σημείο P μπορεί να ξεπεραστεί εξ αιτίας των ίδιων n και E , πράγμα άτοπο αφού $P \in \Sigma 2$. Επομένως $PQ \subset \Sigma 2$. Ομοίως μπορούμε να δείξουμε αν τα σημεία P, Q είναι του $\Sigma 1$, ότι $PQ \subset \Sigma 1$. Έτσι έχουμε μια τομή *Dedekind*.

Έστω O το μοναδικό σημείο στην r που παρέχεται από το αξίωμα *Dedekind*.

- ❖ Αν $O \in \Sigma 1$, τότε για κάποιο n το O μπορεί να ξεπεραστεί τοποθετώντας n τμήματα CD στην r ξεκινώντας από το A . Τοποθετώντας ένα ακόμα τμήμα CD , μπορούμε να ξεπεράσουμε ένα σημείο στο $\Sigma 2$, αλλά από τον ορισμό του $\Sigma 2$ αυτό είναι αδύνατο.
- ❖ Αν $O \in \Sigma 2$, τοποθετώντας ένα τμήμα CD στην ημιευθεία αντιθέτως από το $\Sigma 2$ ξεκινώντας από το A , βρίσκουμε ένα σημείο P της r , έτσι ώστε $P \in \Sigma 1$. Τότε για κάποιο n , το P μπορεί να ξεπεραστεί τοποθετώντας n τμήματα CD στην r ξεκινώντας από το A . Τοποθετώντας ένα ακόμα CD , μπορούμε να ξεπεράσουμε το σημείο O - πράγμα που σημαίνει- ότι το O είναι στο $\Sigma 1$. Αυτό είναι αδύνατον αφού $O \in \Sigma 2$.

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις, καταλήγουμε σε αντίφαση και απορρίπτουμε την υπόθεση ότι το $\Sigma 2$ δεν είναι κενό. Άρα το $\Sigma 2$ είναι κενό.

3.2 Σχόλια για τα αξιώματα της συνέχειας του Hilbert από τους S. Awoodey και E. Reck [17]

Για να αντιληφθούμε περαιτέρω τι εννοούσε ο Hilbert με την πληρότητα στα «Θεμέλιά» του, χρειαζόμαστε μια πιο προσεκτική ματιά στα αξιώματά του και τους ρόλους που έπαιζαν στην εργασία του. Ο ίδιος ο Hilbert αργότερα πρόσθεσε μερικές εξηγήσεις για τον ρόλο των δύο αξιωμάτων της συνέχειας και την σχέση μεταξύ τους.

Το αξίωμα της γραμμικής πληρότητας δεν είναι συνέπεια του Αρχιμήδειου αξιώματος. Στη πραγματικότητα προκειμένου να δείξουμε με την βοήθεια των αξιωμάτων I-IV ότι αυτή η γεωμετρία είναι ταυτόσημη με τη συνήθη Καρτεσιανή γεωμετρία, από μόνο του το αξίωμα του Αρχιμήδη δεν είναι επαρκές. Από την άλλη επικαλούμενοι το γραμμικό αξίωμα της συνέχειας είναι πιθανό να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ορίου που αντιστοιχεί στην τομή Dedekind, όπως επίσης και στο θεώρημα Bolzano- Weierstrass που αφορά την ύπαρξη των σημείων συσσώρευσης.

Αν σε μια γεωμετρία μόνο η εγκυρότητα του Αρχιμήδειου αξιώματος είναι παραδεκτή, τότε είναι δυνατό να επεκτείνουμε το σύνολο των σημείων, γραμμών και επιπέδων με την βοήθεια των άρρητων αριθμών, έτσι ώστε στη γεωμετρία που προκύπτει, σε κάθε ευθεία ένα σημείο αντιστοιχεί χωρίς εξαίρεση, σε ένα σύνολο τριών πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωσή της. Με κατάλληλους χειρισμούς είναι δυνατόν να συμπεράνουμε την ίδια στιγμή ότι τα αξιώματα I-IV ικανοποιούνται στην επέκταση αυτής της γεωμετρίας (με την προσθήκη των άρρητων αριθμών), η οποία δεν θα είναι τίποτα άλλο από τη συνήθη Καρτεσιανή γεωμετρία στην οποία το αξίωμα V2 της γραμμικής πληρότητας ισχύει.

Σε άρθρο του λίγο αργότερα από τα «Θεμέλια» δηλώνει ξανά για τη γεωμετρία:

Στη γεωμετρία κάποιος ξεκινά υποθέτοντας την ύπαρξη όλων των στοιχείων[...]και έπειτα [...]βρίσκει την σχέση μεταξύ αυτών των στοιχείων με την βοήθεια βέβαιων αξιωμάτων[...]. Ο αναγκαίος στόχος που προκύπτει μετά είναι η απόδειξη της συνέπειας και της πληρότητας αυτών των αξιωμάτων, δηλαδή να αποδειχθεί ότι οι εφαρμογές των αξιωμάτων αυτών δεν οδηγούν σε αντιφάσεις και ακόμα περισσότερο ότι το σύστημα των αξιωμάτων είναι επαρκές για να αποδείξει όλες τις γεωμετρικές προτάσεις[...].

Όλα αυτά οδηγούν στην υπόθεση ότι με την έννοια πληρότητα εννοούσε αυτό που ονομάζουμε *λογική πληρότητα*: την ανεπίσημη αποδειξιμότητα όλων των αληθειών της γεωμετρίας που προκύπτουν από τα αξιώματά του. Φαίνεται δίκαιο να αναφέρουμε ότι ο Hilbert, δεν ήταν ξεκάθαρος με το τι εννοούσε με την έννοια πληρότητα την εποχή που έγραφε τα «Θεμέλιά» του. Άλλα αποσπάσματα κειμένων του δείχνουν την *κατηγορικότητα* (categoricity), άλλα την *σχετική πληρότητα*, και άλλα την *λογική πληρότητα*.

Μια θεωρία *T* ονομάζεται *κατηγορική* αν για όλα τα μοντέλα *M*, *N* της *T*, υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ της *M* και *N*.

Έστω *S* ένα σύνολο προτάσεων σε μια γλώσσα *L* και ας είναι *T* μια θεωρία στην *L*. Η θεωρία *T* ονομάζεται *σχετικά πλήρης* (ως προς το *S*) εάν κάθε πρόταση *φ* του συνόλου *S* αποδεικνύεται από την *T*.

Μια θεωρία *T* ονομάζεται *λογικά πλήρης* (σε σχέση με μια δοθείσα σημασιολογία) εάν για όλες τις προτάσεις *φ*, εάν η *φ* είναι σημασιολογική συνέπεια των προτάσεων της θεωρίας *T* (δηλαδή αληθεύει σε όλα τα μοντέλα της θεωρίας *T*), τότε η *φ* αποδεικνύεται από την *T*.

Στην Αγγλική μετάφραση των Θεμελίων του το 1902, η αρχική έκδοση του αξιώματος της πληρότητας είναι:

Αξίωμα πληρότητας: Δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε νέα στοιχεία σε ένα σύστημα σημείων, ευθειών και επιπέδων με τέτοιο τρόπο ώστε το σύστημα έτσι γενικευμένο, να δημιουργήσει μια νέα γεωμετρία στην οποία θα ισχύουν και οι πέντε ομάδες αξιωμάτων του. Με άλλα λόγια, τα στοιχεία της γεωμετρίας σχηματίζουν ένα σύστημα το οποίο είναι σε αδυναμία να επεκταθεί, με την προϋπόθεση ότι θεωρούμε ότι και οι πέντε ομάδες αξιωμάτων του ισχύουν.

Το αξίωμα της πληρότητας λοιπόν, αρχικά είχε διατυπωθεί σαν μια συνθήκη μεγιστικότητας για όλο το χώρο. Αργότερα ο Hilbert το επαναδιατύπωσε σαν μια συνθήκη μεγιστικότητας για τις ευθείες στο χώρο. Διευκρινίζεται ότι το αξίωμα της πληρότητας του Hilbert δηλώνει ότι όλος ο χώρος ή κάθε ευθεία στο χώρο δε μπορεί να επεκταθεί περισσότερο- προσθέτοντας επιπλέον σημεία- ενώ ισχύουν όλα τα άλλα αξιώματα.

Αξίζει να είμαστε πολύ ακριβείς και κατηγορηματικοί εδώ ώστε να αποφύγουμε μια συνηθισμένη παρερμηνεία: το αξίωμα της πληρότητας, ούτε αναφέρει τίποτα για την σημασιολογική, παραγωγική ή λογική πληρότητα του συστήματος των αξιωμάτων, ούτε αναφέρει τίποτα για την κατηγορικότητα, για παράδειγμα με το να αναζητά άμεσα το αξιωματικό σύστημα να είναι κατηγορικό. Είναι αλήθεια ότι *το αξίωμα της γραμμικής πληρότητας*, μαζί με τα άλλα αξιώματα έχει σαν συνέπεια την *κατηγορικότητα* όλου του αξιωματικού συστήματος και αυτή η *κατηγορικότητα* έχει σαν συνέπεια την σημασιολογική πληρότητα του αξιωματικού συστήματος.

Ακόμα, αυτό που το *αξίωμα της γραμμικής πληρότητας* αναφέρει από μόνο του, είναι σημεία στο γεωμετρικό χώρο, όχι τύπους στην αντίστοιχη γλώσσα. *Με άλλα λόγια υποστηρίζει την πληρότητα (μεγιστοποίηση) όλου του γεωμετρικού χώρου, και όχι την πληρότητα του αξιωματικού συστήματος.* Αυτή η άποψη προκύπτει καθαρά αν επαναδιατυπώσουμε τα αξιώματα του Hilbert με τυπικούς λογικούς όρους. Το *αξίωμα της γραμμικής πληρότητας* δείχνει από μόνο του να εμπλέκει την ποσόδειξη πάνω στα μοντέλα των αξιωμάτων και όχι πάνω στις προτάσεις.

Ας δούμε τρεις σχετικές παρατηρήσεις για τα «Θεμέλια».

Πρώτη παρατήρηση: όπως τα αξιώματα του Peano για τους φυσικούς αριθμούς, έτσι και τα αξιώματα του Hilbert για την γεωμετρία μπορούν να διατυπωθούν φυσικά και απευθείας σε ανώτερης τάξης λογική. Επιπλέον, εκτός από την γραμμική πληρότητα, που είναι βασικά ανώτερης τάξης, τα αξιώματα προϋποθέτουν μόνο λογική πρώτης τάξης.

Αλλά ο Hilbert, όπως και ο Dedekind πριν από αυτόν, απλά εργάζεται με ένα ανεπίσημο υπόβαθρο της θεωρίας των συναρτήσεων και των συνόλων.

Δεύτερη παρατήρηση: εκείνη την εποχή, ο Hilbert, όπως και ο Dedekind δεν έχουν ακριβώς διαθέσιμη την έννοια της τυπικής παραγωγικής λογικής για να μπορέσουν να κατανοήσουν την έννοια της παραγωγικής πληρότητας σε αντίθεση με την κατηγορική, σχετική πληρότητα, ή λογική πληρότητα.

Τρίτη παρατήρηση: ο Hilbert είναι λιγότερο σαφής από τον Dedekind για την σχέση μεταξύ κατηγορικότητας και σημασιολογικής πληρότητας, και για τις σχετικές έννοιες της σημασιολογικής συνέπειας. Πάνω από όλα, φαίνεται να μην έχει επίγνωση ακόμα ότι η συνηθισμένη έννοια μαθηματικής απόδειξης, μπορεί να αναλυθεί γόνιμα είτε με όρους τυπικούς – συντακτικούς, από τη μια πλευρά, ή σημασιολογικούς, από την άλλη, ή ότι μπορεί να υπάρχει μια σημαντική διαφορά μεταξύ των δυο τελευταίων αυτών όρων (εφόσον είμαστε σε ένα αξιωματικό σύστημα που δεν εμπίπτει στην πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική).

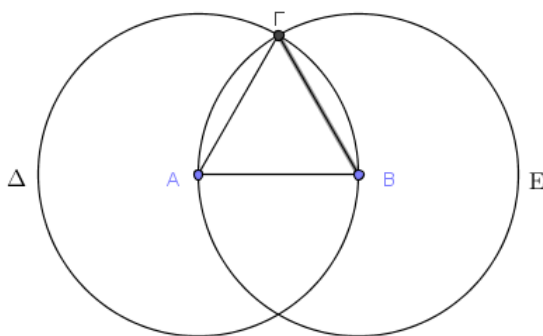
Κεφάλαιο 4

Η διόρθωση των «κενών» στο σύστημα του Ευκλείδη μέσα από την αξιοματική θεμελίωση του Hilbert¹.

Θα δούμε ενδεικτικά τις διορθώσεις, στις παραλήψεις του συστήματος του Ευκλείδη, σε μια σειρά προτάσεων. Για τους ορισμούς, τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες του αξιωματικού συστήματος του Ευκλείδη που θα αναφέρουμε παρακάτω δεξ (Παράρτημα ΙΙΙ).

Στην πρώτη πρόταση του Ευκλείδη υπάρχει η κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.[4]



Σχήμα 7

Κατασκευή

- 1.Έστω το δοθέν ευθύγραμμο τμήμα AB.
- 2.Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (A, AB) και (B, BA) με $\rho = AB$.
- 3.Έστω Γ το σημείο τομής των δύο κύκλων.
- 4.Φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΓ (σχήμα 7)

Τότε το τρίγωνο ABΓ, το οποίο έχει κατασκευαστεί πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα AB, είναι ισόπλευρο.

Απόδειξη:

$ΑΓ = ΑΒ$, $ΒΓ = ΑΒ$ (ορισμός XV) και άρα έχω $ΑΓ = ΒΓ$ (αξίωμα Ι)

Επομένως το ABΓ είναι ισόπλευρο.

1.Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών

Lucas N.H.Bunt – Phillips S. Jones – Jack D. Bedient

Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού ΑΘΗΝΑ

Ας δούμε όμως αυτά τα τρία απλά βήματα από τη σκοπιά της Αξιοματικής Θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Βήμα 1^ο. Ο Ευκλείδης έχει ορίσει το σημείο στους ορισμούς (όροι) "Σημείον ἐστίν ου μέρος ουδέν", δηλαδή σημείο είναι αυτό που δεν έχει διάσταση (αδιάστατο). Ο ορισμός βέβαια είναι αυτοαναφορικός ή περιγραφικός, αλλά ας το παρακάμψουμε.

Σήμερα εμείς λέμε στους μαθητές ότι το σημείο δεν ορίζεται γιατί είναι πρωταρχική έννοια, δηλαδή δεν ορίζεται με άλλες απλούστερες. Αυτό το τόσο απλό χρειάστηκε περίπου 2600 χρόνια για να το συμφωνήσουμε τελεσίδικα. Μας έπεισε για αυτό το σπουδαίο έργο του μεγάλου γερμανού μαθηματικού David Hilbert.

Αρα τα σημεία κατά Ευκλείδη έχουν οριστεί αξιωματικά, οπότε το πρώτο βήμα είναι εντάξει.

Βήμα 2^ο. Η κατασκευή ενός κύκλου μπορεί να πραγματοποιηθεί γιατί ο Ευκλείδης στο 3ο Αξίωμα (αίτημα) λέει ότι «Δοθέντος σημείου Α και τμήματος ρ δύναται να γραφεί κύκλος με κέντρο Α και ακτίνα ρ». Βεβαίως προηγουμένως στους ορισμούς έχει ορίσει τον κύκλο και την ακτίνα. Στη συνέχεια οι δύο κύκλοι τέμνονται στο σημείο Γ, αυτό είναι ή θεωρείται από τον Ευκλείδη προφανές.

Άρα και το δεύτερο βήμα φαίνεται να είναι εντάξει. Όμως εδώ ακριβώς υπάρχει το πρόβλημα.

Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται, δηλαδή ότι έχουν κοινό σημείο.

Αυτό δεν τεκμαίρεται από πουθενά, από αυτά που μέχρι στιγμής έχει αναφέρει ο Ευκλείδης. Εδώ εισχωρεί δυναμικά η διαίσθηση-εμπειρία και αυτό δεν είναι καθόλου καλό πράγμα για ένα Αξιοματικό Σύστημα, στην πραγματικότητα αυτό απαγορεύεται.

Διαίσθηση - εμπειρία και αξιωματικό σύστημα είναι έννοιες ασυμβίβαστες.

Βήμα 3^ο. Το τρίτο βήμα είναι καθόλα εντάξει αφού ο Ευκλείδης στους ορισμούς έχει ορίσει το ισόπλευρο τρίγωνο και την ισότητα τμημάτων.

Ο Ευκλείδης που προσπάθησε να απαλλαγεί σε όλο το έργο του από τη διαίσθηση-εμπειρία δεν τα κατάφερε παντού.

Η τομή των δύο κύκλων, δηλαδή η ύπαρξη κοινού τους σημείου είναι ένα πολύ λεπτό θέμα. Απαιτείται η συνέχεια των γραμμών των δύο κύκλων, δηλαδή ότι δεν είναι διακοπτόμενες (δεν έχουν τρύπες).

Στα μαθηματικά αυτή η έννοια καλείται πληρότητα.

Η απάντηση στο πρόβλημα (της τομής των δύο κύκλων) είναι το λεγόμενο Αξίωμα της Πληρότητας.

Όμως, το αξίωμα αυτό στην ουσία υπάρχει στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων που αποδίδεται στον Εύδοξο τον Κνίδειο (407-350 π.Χ.), διευθυντή της Ακαδημίας του Πλάτωνα στην Αθήνα.

Οπότε στα Στοιχεία του Ευκλείδη υπάρχει αυτό το *πρωθύστερο σχήμα*. Δηλαδή χρησιμοποιείται στην 1^η πρόταση του 1^{ου} βιβλίου ένα αξίωμα που υπάρχει στο 5^ο βιβλίο. Το κενό λοιπόν της πρώτης πρότασης του Ευκλείδη καλύπτεται από την χρήση του **αξιώματος συνέχειας του Dedekind** που αναφέρθηκε παραπάνω. Πριν από τον Dedekind, οι περισσότεροι μαθηματικοί είχαν βασίσει την αντίληψη της συνέχειας μιας γραμμής στο γεγονός ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων υπάρχει ένα άλλο σημείο (Αξίωμα Π1).

Ο Ευκλείδης στην απόδειξη του δεν συμπεριέλαβε αξιώματα ή απόδειξη για την *Αρχή της συνέχειας της τομής δύο κύκλων*, (Circular Continuity Principle), απλώς συμπεράνε ότι ισχύει.

Η αρχή αυτή αναφέρει:

«Αν σε ένα επίπεδο ένας κύκλος C έχει ένα σημείο X στο εσωτερικό και ένα σημείο Y στο εξωτερικό ενός άλλου κύκλου C' , τότε οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία».

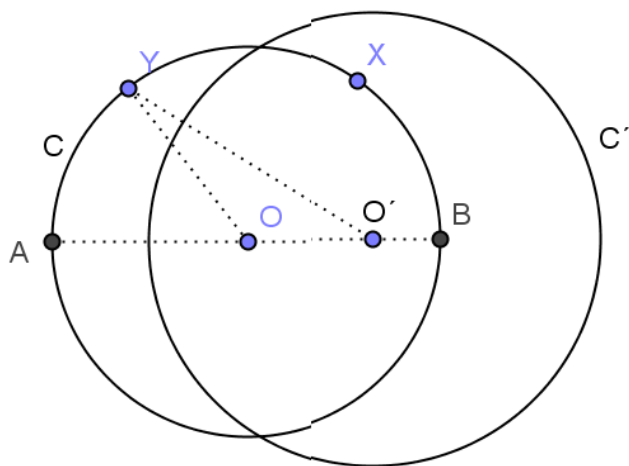
Ο Heath στο βιβλίο του «*Euclid's Thirteen Books of the Elements*» (1956) επαλήθευσε την αρχή της συνέχειας με την χρήση του αξιώματος του Dedekind και την απόδειξη του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα: Εάν O και O' είναι τα κέντρα δύο κύκλων C, C' , και R, R' οι ακτίνες τους αντίστοιχα, η ευθεία OO' τέμνει τον κύκλο C σε δυο σημεία A, B ένα από τα οποία βρίσκεται στο εσωτερικό του C' και το άλλο εξωτερικά αυτού.

Ο Heath διακρίνει τρεις περιπτώσεις για την απόδειξη του λήμματος σε σχέση με την θέση του σημείου A ως προς την διάκεντρο OO' :

$A-O-O'$, $O-A-O'$ και $O-O'-A$.

Ο στόχος του είναι να αποδείξει και στις τρεις περιπτώσεις ότι ένα από τα δύο σημεία το A ή το B είναι στο εσωτερικό του κύκλου C' και το άλλο δεν είναι.

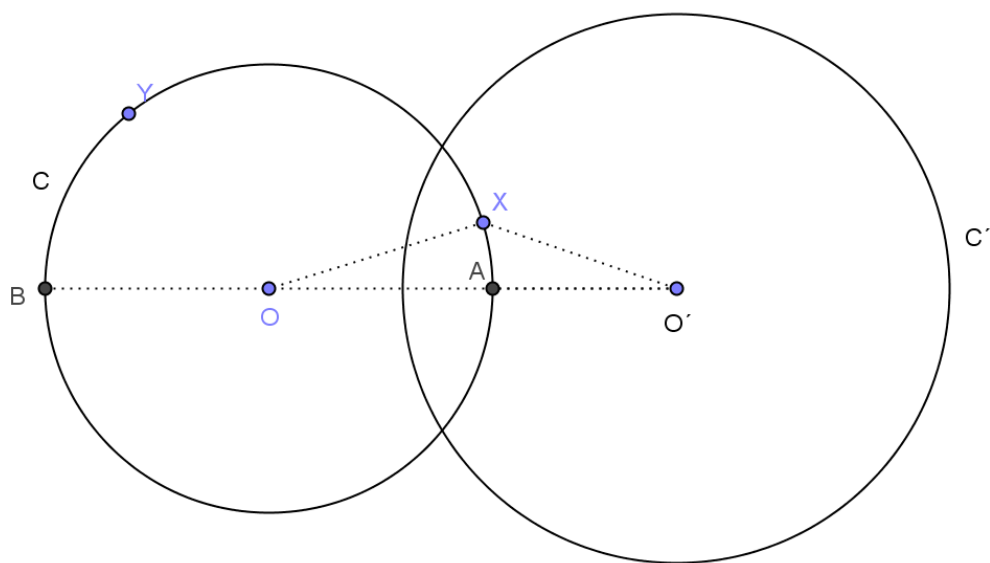


Σχήμα 8 (α' περίπτωση)

1) Έστω ότι το A βρίσκεται στην προέκταση της $O'O$ (σχήμα 8).

Τότε $AO' = AO + OO' = R + OO'$ (1)

Αλλά στο τρίγωνο $OO'Y$, έχουμε $O'Y < OY + OO'$, και αφού $O'Y > R'$, $OY = R$ και $R' < R + OO'$ έχουμε από την (1) ότι $AO' > R'$, άρα το A βρίσκεται εκτός του κύκλου C' .

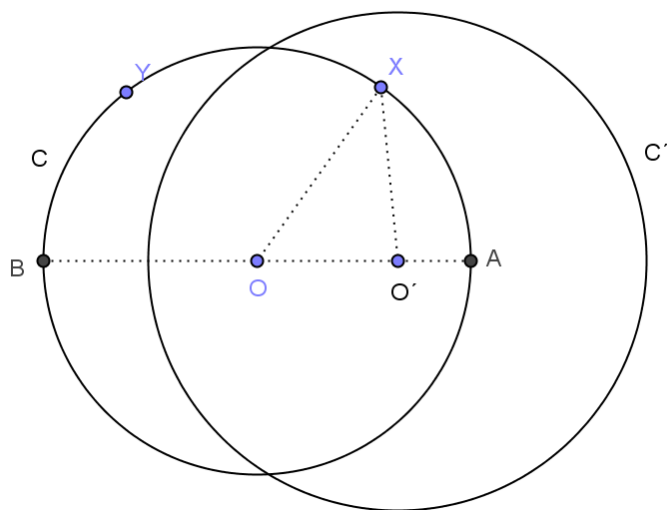


Σχήμα 9 (β' περίπτωση)

II) Ας υποθέσουμε ότι το A κείται στην OO' (σχήμα 9).

Τότε $OO' = OA + AO' = R + AO'$ (2)

Από το τρίγωνο $OO'X$ έχουμε $OO' < OX + O'X$ και αφού $OX = R$ και $O'X < R'$ προκύπτει ότι $OO' < R + R'$ και λόγω της (2) $AO' < R'$, έτσι το A βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C' .



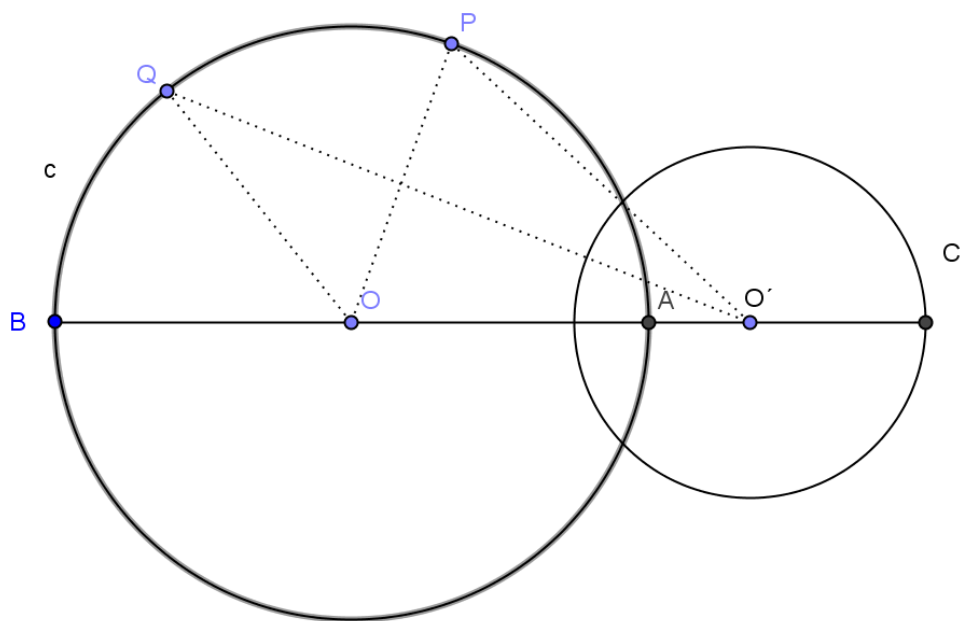
Σχήμα 10 (γ' περίπτωση)

III) Ας υποθέσουμε ότι το A κείται στην προέκταση της OO' (σχήμα 10).

Τότε $R = OA = OO' + O'A$ (3)

Από το τρίγωνο $OO'X$ έχουμε $OX < OO' + O'X$ και αφού $OX=R$ έχουμε $R < OO' + O'X$ και λόγω της (3) $OO' + OA < OO' + O'X$ ή $O'A < O'X$, έτσι το A βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου C' .

Με την απόδειξη του παραπάνω λήμματος, ο Heath είχε σαν στόχο να δείξει ότι σε κάθε μια από τις περιπτώσεις I, II, και III ότι ένα από τα δύο σημεία A ή B είναι στο εσωτερικό του C' και το άλλο δεν είναι. Αφού απέδειξε αυτό προχωρά στην απόδειξη της Circular Continuity Principle.



Σχήμα 11

Απόδειξη:

Ο κύκλος C χωρίζεται από τα σημεία A και B σε δύο ημικύκλια. Θεωρούμε ένα από τα δυο ημικύκλια, έστω αυτό που περιγράφεται από την κίνηση του A προς το B . Θεωρούμε δυο διαφορετικά σημεία P, Q πάνω στο ημικύκλιο αυτό, και έστω το P προηγείται του Q (σχήμα 11). Συγκρίνοντας τα τρίγωνα $OO'P$ και $OO'Q$ παρατηρούμε ότι έχουν κοινή πλευρά την OO' , $OP=OQ$ και η γωνία $\angle POO'$ είναι μικρότερη από την γωνία $\angle QOO'$. Άρα $O'P < O'Q$.

Τώρα θεωρώντας το ημικύκλιο $APQB$ χωρισμένο σε δυο μέρη, έτσι ώστε, τα σημεία του πρώτου μέρους να είναι στο εσωτερικό του κύκλου C' , και τα σημεία του δεύτερου μέρους να είναι στην περιφέρεια του κύκλου C' ή στο εξωτερικό αυτού, έχουμε τις απαραίτητες συνθήκες για την εφαρμογή του θεωρήματος του Dedekind, έτσι υπάρχει ένα σημείο M στον κύκλο C που χωρίζει σε δυο μέρη το ημικύκλιο $APQB$.

Για να αποδείξουμε ότι $O'M=R'$ δηλαδή ότι το M βρίσκεται στην περιφέρεια του C' , υποθέτουμε ότι $O'M < R'$ τοποθετώντας το σημείο M στο εσωτερικό του κύκλου C' .

Θεωρούμε ως $\sigma = R' - O'M$, και ένα σημείο M' που έπεται του M , πάνω στο ημικύκλιο, τέτοιο ώστε η χορδή $M'M < \sigma$. Τότε στο τρίγωνο $O'MM'$ έχουμε $O'M' < O'M + MM' < O'M + \sigma$ και έτσι $O'M' < R'$. Οπότε το M' , ένα σημείο του τόξου MB βρίσκεται στο εσωτερικό του C' .

Όμως αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ότι το τόξο MB ήταν το «δεύτερο μέρος» στο αξίωμα του Dedekind, όπου κατασκευάστηκε το σημείο M να είναι το σημείο τομής του κύκλου C' και του τόξου APQB, χωρίζοντας το τόξο σε δυο μέρη.

Καθώς προχωρούμε κατά μήκος του τόξου AB από το A στο B, κάθε σημείο του τόξου MB θα είναι εκτός του κύκλου C'.

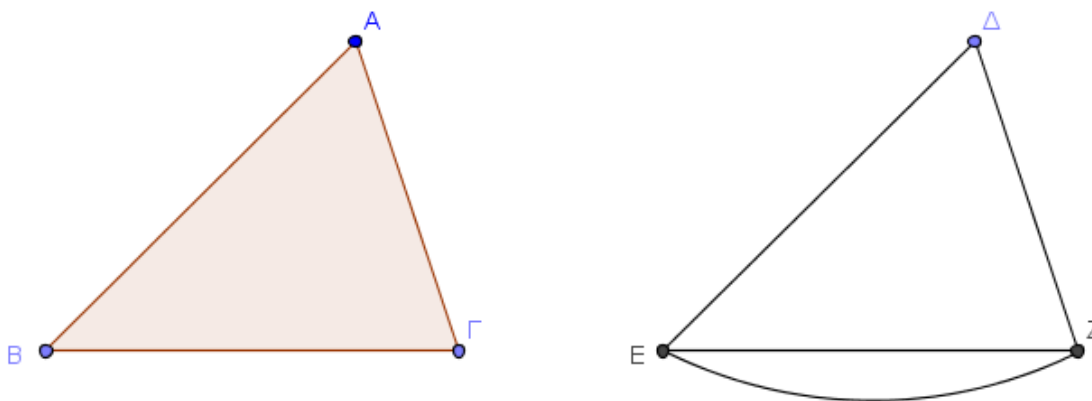
Ομοίως αποδεικνύεται ότι το O'M δεν είναι μεγαλύτερο του R'. Άρα O'M=R'.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της ύπαρξης του ενός από τα σημεία τομής μεταξύ των κύκλων C και C'.

Ο Heath επανέλαβε την ίδια διαδικασία για το άλλο ημικύκλιο του κύκλου C, και έτσι αποδείχθηκε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία.

Στην **τέταρτη πρόταση** του Ευκλείδη υπάρχει το 1^ο θεώρημα ισότητας των τριγώνων.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἐκατέραν ἐκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξῃ, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἐκατέρα ἐκατέρᾳ, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.[4]



Σχήμα 12

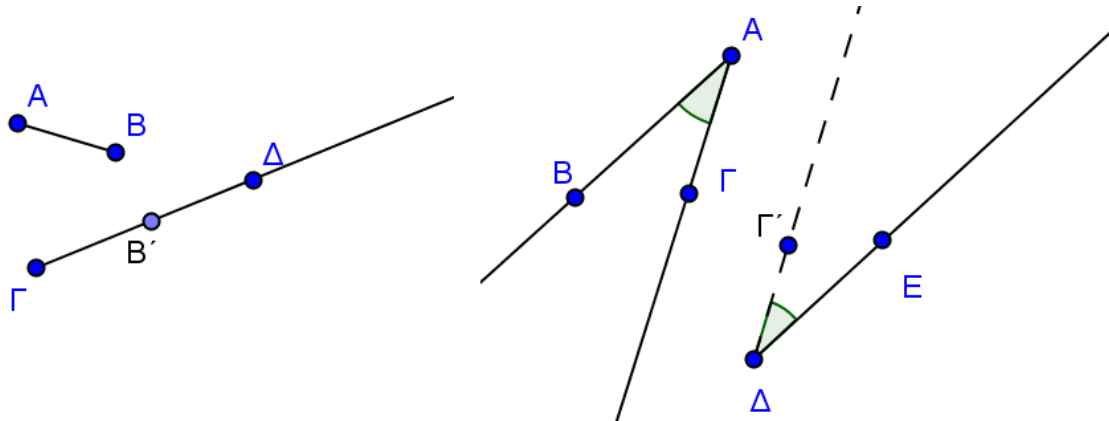
Ας δούμε την απόδειξη που δίνει ο Ευκλείδης στην αρχαία Ελληνική γλώσσα [11]

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ABΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον AB ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν AB τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς AB ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ABΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ABΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ (σχήμα 12).

Για να αποδείξει ο Ευκλείδης όπως παρατηρούμε την πρόταση αυτή *κινεί το ένα τρίγωνο και το φέρνει σε μια άλλη θέση*. Πού βασίζεται για να εκτελέσει μια τέτοια κίνηση; Αυτή η δυνατότητα δεν πηγάζει από τις κοινές έννοιες ούτε από τα αιτήματα ούτε από τις προηγούμενες προτάσεις για τον λόγο ότι η έννοια «κίνηση» δεν αναφέρεται σ' αυτές. Την έννοια της κίνησης την έχουμε αποκτήσει από την εμπειρία μας, κατά την επαφή μας με τον αισθητό κόσμο.

Ο **Hilbert** μέσα από τα αξιώματα συμφωνίας διορθώνει τις παραλείψεις που προαναφέραμε. Ας το δούμε αναλυτικά:



Σχήμα 13

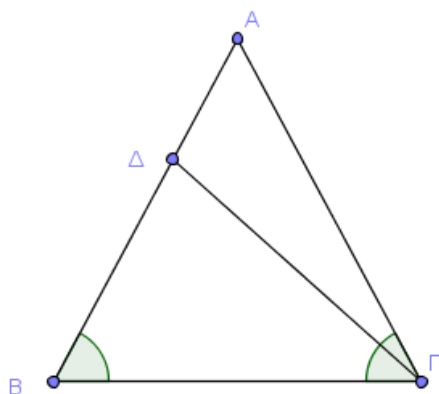
Σύμφωνα με το αξίωμα *III1 της ισότητας ή συμφωνίας* αν μας δοθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και μια ημιευθεία ΓΔ, *δεχόμαστε* ότι το ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να “μεταφερθεί” επί της ημιευθείας έτσι, ώστε το A να συμπίσει με το Γ και το B να συμπίσει με ακριβώς ένα σημείο B' της ημιευθείας. Τότε θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓB' *ίσα* $AB = \Gamma B'$. Με αυτόν τον τρόπο και εάν επιλέξουμε όλες τις δυνατές ημιευθείες του επιπέδου, παίρνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι ίσα με το αρχικό. Με την διαδικασία αυτή (σχήμα 13) το E θα συμπίσει με το B και το Z θα συμπίσει με το Γ.

Αντίστοιχα, σύμφωνα με το αξίωμα *III4 της ισότητας ή συμφωνίας* αν μας δοθεί μία γωνία $\angle B\Gamma A$, μια ημιευθεία ΔΕ και επιλέξουμε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία ΔΕ *δεχόμαστε* ότι η γωνία μπορεί να “μεταφερθεί” έτσι, ώστε η ημιευθεία AB να συμπίσει με την ΔΕ και η ΑΓ να συμπίσει με ακριβώς μία ημιευθεία ΔΓ', όπου το Γ' βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που επιλέξαμε. Τότε θεωρούμε τις γωνίες $\angle B\Gamma A$ και $\angle E\Gamma' A$ *ίσες* $\angle B\Gamma A = \angle E\Gamma' A$.

Με την διαδικασία αυτή (σχήμα 13) θα συμπίσουν και οι γωνίες $\angle B\Gamma A$ και $\angle E\Delta Z$. Συμπεραίνουμε λοιπόν την ισότητα των δύο τριγώνων.

Στην **έκτη πρόταση** του Ευκλείδη υπάρχει το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο εάν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, και οι απέναντι από τις ίσες γωνίες πλευρές θα είναι ίσες μεταξύ τους.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς σας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται [4]



Σχήμα 14

Στην απόδειξή του ο Ευκλείδης υποθέτει (σχήμα 14) ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB , AC είναι άνισα και άρα θα ισχύει είτε $AB > AC$ είτε $AB < AC$, χωρίς όμως να έχει αναφέρει προηγουμένως ότι για οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να ισχύει ακριβώς μια από τις παραπάνω σχέσεις.

Ακόμα οδηγείται σε άτοπο μέσω της 8^{ης} κοινής έννοιας :

«Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἔστιν» καθώς αναφέρει ότι το μικρότερο τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ίσο με το μεγαλύτερο.

Θα αναφέρουμε εδώ την απόδειξη του Hilbert, ο οποίος μέσα από τα αξιώματα διατάξεως ή του «μεταξύ» διαμορφώνει την απόδειξη με τις αυστηρές απαιτήσεις της αξιωματικής θεμελίωσής του. Ἐστω τρίγωνο ABC με $\hat{A}B\hat{C} = \hat{A}C\hat{B}$, θα δείξουμε ότι $AB = AC$. Υποθέτουμε ότι τα AB , AC δεν είναι εφαρμόσιμα, τότε σύμφωνα με τον ορισμό της διάταξης ευθυγράμμων τμημάτων του Hilbert:

«Δοθέντων δυο ευθυγράμμων τμημάτων AB , CD , μια και μόνο μια από τις επόμενες τρεις σχέσεις ισχύει: $AB < CD$, $AB = CD$, $AB > CD$ » θα ισχύει είτε $AB > AC$ είτε $AB < AC$. Ἐστω ότι $AB > AC$, επομένως υπάρχει σημείο D το οποίο ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα AB τέτοιο ώστε $DB = AC$ (σχήμα 14)

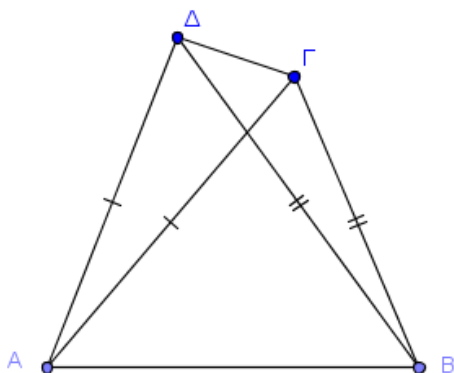
και σύμφωνα με το αξίωμα II, δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα AD . Για τα τρίγωνα ABC και ADC ισχύει $BC = DC$ από το (αξίωμα I₁), $DB = AC$ από την επιλογή του D και $\hat{A}B\hat{C} = \hat{A}C\hat{B}$, άρα από το (αξίωμα III₅), θα ισχύει ότι $\hat{A}D\hat{B} = \hat{A}D\hat{C}$. Επιπλέον από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\hat{A}B\hat{C} = \hat{A}C\hat{B}$ επομένως θα ισχύει ότι $\hat{A}D\hat{B} = \hat{A}D\hat{C}$.

Άτοπο γιατί από το αξίωμα III₄ υπάρχει μοναδική ημιευθεία στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η DB σε σχέση με το A , ώστε να ισχύει $\hat{A}D\hat{B} = \hat{A}D\hat{C}$.

Επομένως οι ημιευθείες DA , DB είναι οι ίδιες ημιευθείες και $A=D$, άρα $AB=AC$, δηλαδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές.

Στην έβδομη πρόταση του Ευκλείδη υπάρχει το θεώρημα σύμφωνα με το οποίο: αν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ βρίσκονται από την ίδια μεριά του AB και είναι $A\Gamma \equiv A\Delta$ και $B\Gamma \equiv B\Delta$ τότε το Γ συμπίπτει με το Δ .

Επὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρω ἑκατέρω οὐ συσταθήσονται ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις [4]



Σχήμα 15

Ας δούμε την απόδειξη που δίνει :

Θα αναφερθούμε αρχικά στην Πρόταση 5, η οποία αναφέρει «*Στα ισοσκελή τρίγωνα οι παρά τη βάση γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, και αν προεκταθούν οι ίσες πλευρές οι γωνίες που σχηματίζονται κάτω από τη βάση (οι εξωτερικές) είναι ίσες*»

Ας δεχθούμε ότι το Γ δεν συμπίπτει με το Δ (σχήμα 15). Φέρνουμε το $\Gamma\Delta$ (Αξίωμα I).

Τότε $\hat{A}\Gamma\Delta = \hat{A}\Delta\Gamma$ (Πρόταση 5) και $\hat{A}\Delta\Gamma \sphericalangle \hat{B}\Delta\Gamma$ (Αξίωμα VIII)

άρα $\hat{A}\Gamma\Delta \sphericalangle \hat{B}\Delta\Gamma$.

Επίσης $\hat{A}\Gamma\Delta \sphericalangle \hat{B}\Delta\Gamma$ και $\hat{B}\Gamma\Delta > \hat{A}\Gamma\Delta$ (Αξίωμα VIII)

άρα $\hat{B}\Gamma\Delta > \hat{B}\Delta\Gamma$. Σύμφωνα όμως με την (Πρόταση 5) έχουμε επίσης $\hat{B}\Gamma\Delta = \hat{B}\Delta\Gamma$.

Κατέληξε λοιπόν σε άτοπο χρησιμοποιώντας την 8^η κοινή έννοια:

«Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον ἐστίν».

Άρα το Γ συμπίπτει με το Δ .

Για να αποδείξει ο Ευκλείδης όπως παρατηρούμε την πρόταση αυτή θεωρεί την περίπτωση που το σημείο Δ βρίσκεται εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, θα μπορούσε όμως να βρίσκεται και στο εσωτερικό του ή το Γ να βρίσκεται ανάμεσα στα A , Δ ή στην προέκταση της $A\Delta$ προς το Δ .

Όταν υπάρχουν διάφορες δυνατότητες ο Ευκλείδης δίνει την απόδειξη για την μία περίπτωση μόνο και κατά κανόνα για την πιο δύσκολη.

Ο Ευκλείδης επίσης χρησιμοποιεί δύο ιδιότητες των ανισοτήτων :

Αν $\alpha = \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$ και

Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$

Ο Ευκλείδης όμως δεν έχει θέσει αξιώματα από τα οποία να δικαιολογείται η χρήση αυτών των ιδιοτήτων. Σήμερα αυτά τα αξιώματα τα λέμε *αξιώματα της μεταβατικότητας*.

Ο Hilbert μέσα από τα *αξιώματα διατάξεως* ή του μεταξύ τελειοποιεί την απόδειξη της πρότασης αυτής ενώ σημαντική βοήθεια προσφέρει και το *Αξίωμα του Pasch*.

Στην **όγδοη πρόταση** του Ευκλείδη υπάρχει το 3^ο θεώρημα ισότητας των τριγώνων.

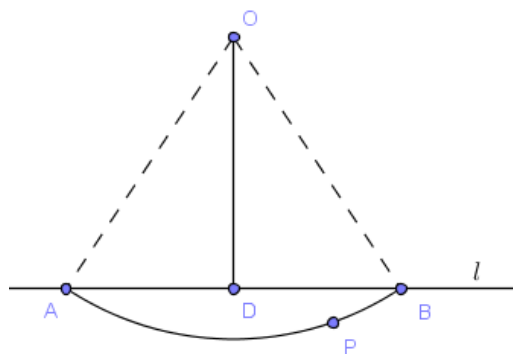
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην [4]

Η πρόταση έχει αποδειχθεί με την *επίθεση του ενός τριγώνου πάνω στο άλλο* ώστε να συμπίσουν δύο ζευγάρια αντίστοιχων κορυφών (επομένως και οι βάσεις των τριγώνων) και οι τρίτες κορυφές να βρίσκονται από την ίδια μεριά της κοινής βάσης. Τότε σύμφωνα με την πρόταση 7 θα συμπίσουν και οι τρεις κορυφές, συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα. Ο Hilbert μέσα από τα *αξιώματα της «συμφωνίας»* και του «μεταξύ» διορθώνει τις παραλήψεις που είναι παρόμοιες με αυτές της πρότασης 4.

Η **δωδέκατη πρόταση** του Ευκλείδη είναι :

Δίνεται μια ευθεία και ένα σημείο έξω από αυτή. Να αχθεί από το σημείο αυτό ευθεία κάθετη στη δοσμένη.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν [4]



Σχήμα 16

Κατασκευή :

Ας είναι l η δοσμένη ευθεία και O το δοσμένο σημείο.

1.Επιλέγουμε ένα σημείο P τέτοιο ώστε τα σημεία O, P να βρίσκονται από διαφορετικές μεριές ως προς την l (σχήμα 16).

2. Σχεδιάζουμε τον κύκλο (O, OP) (αίτημα III). Αυτός τέμνει την l στα σημεία A και B .

3. Κατασκευάζουμε το μέσο D του AB , σύμφωνα με την Πρόταση 10:

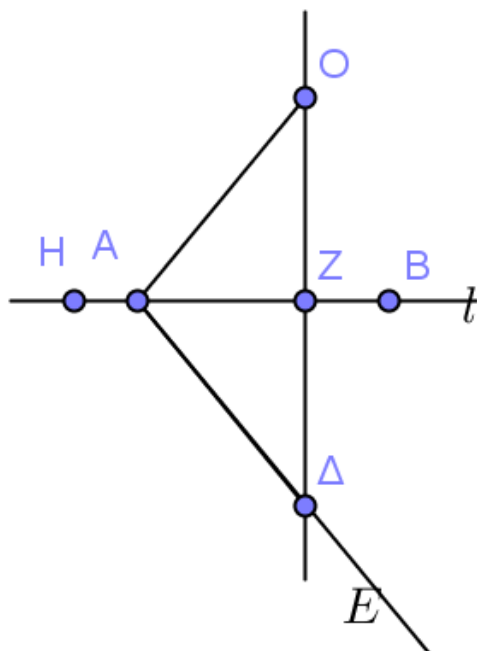
«Να διχοτομηθεί δοθέν ευθύγραμμο τμήμα»

4. Φέρνουμε το OD .

Απόδειξη :

Τα τρίγωνα OAD και OBD είναι ίσα. (Πρόταση 8). Επομένως η γωνία ODB είναι ορθή. Η πρόταση όπως ειπώθηκε απαιτεί την υπόθεση ότι ένας κύκλος τέμνει μια ευθεία σε δύο ή σε κανένα σημεία και για το λόγο αυτό συμπληρώνεται μέσα από τα αξιώματα «συνέχειας» και «μεταξύ» από τον Hilbert ενώ η έννοια «διαφορετικές μεριές ως προς την l » τελειοποιείται από το Αξίωμα του Pasch.

Θα κάνουμε εναλλακτικά την απόδειξη της δωδέκατης πρότασης, που βασίζεται αποκλειστικά στο Αξιωματικό σύστημα του Hilbert.



Σχήμα 17

Ας είναι l η δοσμένη ευθεία και O το δοσμένο σημείο που δεν ανήκει σ' αυτήν (σχήμα 17). Από το αξίωμα I2 υπάρχουν σημεία A, B τα οποία ανήκουν στην ευθεία l . Σύμφωνα με το αξίωμα II2 υπάρχει σημείο H τέτοιο ώστε $(H-A-B)$.

Για κάθε δύο σημεία A, O υπάρχει το ευθύγραμμο τμήμα OA (αξίωμα I1).

Αν ισχύει $\hat{O\hat{A}H} = \hat{O\hat{A}B}$ τότε κάθε μια από τις γωνίες $\hat{O\hat{A}H}, \hat{O\hat{A}B}$ είναι εφαρμόσιμη με μια ορθή και άρα προκύπτει το ζητούμενο. Έστω ότι δεν ισχύει $\hat{O\hat{A}H} = \hat{O\hat{A}B}$ τότε από το αξίωμα III4 υπάρχει ημιευθεία AE ώστε να ισχύει $\hat{O\hat{A}B} = \hat{E\hat{A}H}$, με το E να ανήκει στο αντίθετο ημιεπίπεδο που ορίζει η l σε σχέση με το O .

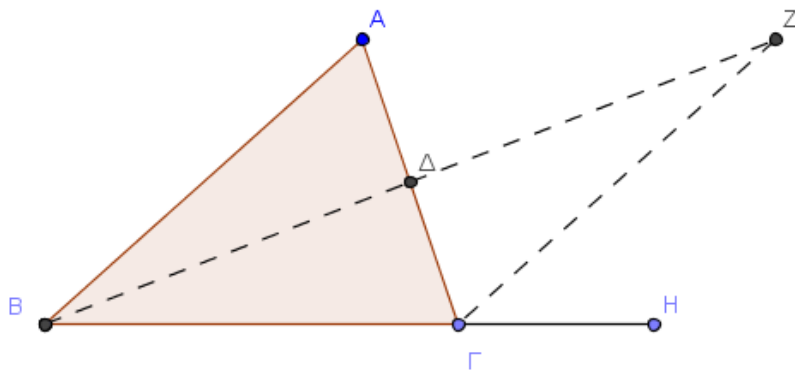
Από το αξίωμα III1 υπάρχει σημείο Δ στην ημιευθεία AE με $OA = \Delta A$ και έτσι δημιουργούμε το ευθύγραμμο τμήμα $O\Delta$ (αξίωμα I1).

Όμως τα O, Δ ανήκουν στα αντίθετα ημιεπίπεδα που ορίζει η l και άρα το $O\Delta$ τέμνει την l στο Z . Τα τρίγωνα AOZ και ΔZ έχουν $\hat{O\hat{A}Z} = \hat{\Delta\hat{A}Z}$ λόγω κατασκευής, $OA = O\Delta$ λόγω κατασκευής και $AZ = AZ$ (αξίωμα III1). Επομένως από το αξίωμα III5 θα ισχύει $\hat{O\hat{Z}A} = \hat{\Delta\hat{Z}A}$ και άρα κάθε μια από τις γωνίες $\hat{O\hat{Z}A}, \hat{\Delta\hat{Z}A}$ είναι εφαρμόσιμες με μια ορθή.

Η **δέκατη έκτη πρόταση** του Ευκλείδη είναι :

Οποιαδήποτε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μια εσωτερική γωνία, που δεν πρόσκειται σ' αυτήν.

Παντός τριγώνου μιὰς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν [4]



Σχήμα 18

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι $\hat{A\hat{G}H} > \hat{A}$. Ας είναι Δ το μέσο του AG . Προεκτείνουμε το $B\Delta$ κατά ίσο τμήμα ΔZ και φέρνουμε την ΓZ (σχήμα 18). Θα έχουμε:

$$A\Delta = \Delta\Gamma$$

$$B\Delta = \Delta Z$$

$$\hat{A\hat{\Delta}B} = \hat{\Gamma\hat{\Delta}Z} \text{ (πρόταση 15 : Οι αντικόρυφες γωνίες είναι ίσες)}$$

Άρα τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα (πρόταση 4).

Άρα έχουμε $\hat{A\hat{\Gamma}Z} = \hat{A}$ και επειδή από το αξίωμα VIII, $\hat{A\hat{G}H} > \hat{A\hat{\Gamma}Z}$

θα είναι $\hat{A}\hat{G}H > \hat{A}$.

Ο Ευκλείδης δέχθηκε σιωπηρά ότι το σημείο Z βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}\hat{G}H$, καθώς θεωρεί μέσω της κοινής έννοιας (8) «Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν», ότι η γωνία $\hat{A}\hat{G}H$ είναι μεγαλύτερη από την γωνία $\hat{A}\hat{G}Z$.

Ο Hilbert μέσα από τα αξιώματα σύνδεσης και διάταξης ή του «μεταξύ» διορθώνει τις παραλείψεις που προαναφέραμε. Ας το δούμε αναλυτικά:

Χρησιμοποιούμε το αξίωμα διάταξης Π4 (διαχωρισμού επιπέδου) και συμπεραίνουμε ότι το ΓZ ανήκει στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}\hat{G}H$, αφού για τα μη κείμενα σε ευθεία γραμμή σημεία A, Γ, H η ευθεία BZ τέμνει το τμήμα $A\Gamma$ στο Δ , τότε αυτή θα διέρχεται και από ένα σημείο του τμήματος AB ή του $B\Gamma$, άρα το Z βρίσκεται στο αντικείμενο ημιεπίπεδο ως προς την $A\Gamma$ σε σχέση με το B .

Συνεπώς από τον ορισμό της διάταξης γωνιών θα έχουμε $\hat{A}\hat{G}H > \hat{A}\hat{G}Z$ αφού η ημιευθεία ΓZ βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{A}\hat{G}H$. Άρα από την πρόταση του Hilbert ότι «η σχέση $<$ δίνει μια σχέση διάταξης στις γωνίες με την ακόλουθη έννοια: αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha < \gamma$ » η γωνία $\hat{A}\hat{G}H$ θα είναι μεγαλύτερη και από την $\hat{A}$, δεδομένου ότι $\hat{A}\hat{G}Z = \hat{A}$.

Κεφάλαιο 5

Η απουσία των αντιφάσεων (συνέπεια) στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert [5]

Ένα σύνολο αξιωμάτων λέγεται συνεπές αν από αυτό δεν προκύπτουν αντιφατικά συμπεράσματα. Αυτή είναι μία απολύτως αναγκαία ιδιότητα ενός συνόλου αξιωμάτων. Ένα αξιωματικό σύστημα χωρίς αυτή την ιδιότητα δεν περιγράφει κάποια κλάση αντικειμένων άρα δεν χρήζει προσοχής.

Η πιο ενδεδειγμένη μέθοδος για την εξέταση της συνέπειας μιας αξιωματικής θεμελίωσης είναι η μέθοδος των μοντέλων. Ένα μοντέλο προκύπτει αν δώσουμε κάποια ερμηνεία στις αρχικές έννοιες του συστήματος, οι οποίες μετατρέπουν τα αξιώματα σε αληθείς προτάσεις για κάποιες οντότητες.

Υπάρχουν δύο τύποι μοντέλων, τα πραγματικά και τα ιδεατά. Ένα μοντέλο λέγεται πραγματικό όταν οι αρχικές έννοιες εκλαμβάνονται ως αντικείμενα και σχέσεις του πραγματικού κόσμου. Ένα μοντέλο λέγεται ιδεατό, αν οι ερμηνείες που δίνουμε στις αρχικές έννοιες είναι αντικείμενα κάποιου άλλου αξιωματικού συστήματος.

Θα αποδείξουμε ότι τα αξιώματα των πέντε ομάδων του Hilbert που παρουσιάσαμε στο τρίτο κεφάλαιο, δεν εμφανίζουν αντιφάσεις μεταξύ τους δηλαδή *ότι δεν είναι δυνατό, με λογικά συμπεράσματα από αυτά τα ίδια να παραχθεί μια συνέπεια (κατάσταση) που να αντιφάσκει προς κάποιο από τα διατυπωμένα αξιώματα.*

Θα κατασκευάσουμε από το μοντέλο των πραγματικών αριθμών ένα σύστημα από «πράγματα» (στοιχεία), στο οποίο να εκπληρώνονται όλα τα αξιώματα και των πέντε ομάδων, δηλαδή *η συνέπεια του συστήματος Hilbert θα γίνει μέσω αναγωγής του στο σύστημα των πραγματικών αριθμών.*

Θεωρούμε καταρχήν το σύνολο Ω όλων εκείνων των αλγεβρικών αριθμών που προκύπτουν όταν, ξεκινώντας από τον αριθμό «1», εφαρμόζουμε πεπερασμένο πλήθος φορών τις πράξεις –πρόσθεση-αφαίρεση-πολλαπλασιασμό-διαίρεση και την πέμπτη πράξη : $|\sqrt{1+\omega^2}|$, όπου ω δηλώνει κάθε φορά έναν αριθμό που έχει ήδη παραχθεί δυνάμει των αναφερόμενων πράξεων.

Θεωρούμε τώρα ένα (διατεταγμένο) ζεύγος αριθμών (x, y) του συνόλου Ω ως **ένα σημείο** και κάθε κλάση τριάδων (pu, pv, pw) όπου p τυχαίος μη μηδενικός αριθμός του Ω και u, p, w οποιοιδήποτε ορισμένοι εκάστοτε αριθμοί του Ω με $|u| + |v| \neq 0$ ως **μια ευθεία**.

Την παραπάνω κλάση θα συμβολίζουμε συνοπτικά $(u:v:w)$ και θα μπορούμε να λέμε ότι η πραγματοποίηση της εξίσωσης :

$$u x + v y + w = 0$$

εκφράζει πως το σημείο (x, y) κείται επί της ευθείας $(u:v:w)$.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι τα αξιώματα I₁₋₃ καθώς και IV (αξίωμα παραλληλίας) επαληθεύονται.

Οι αριθμοί του Ω είναι πραγματικοί και εφόσον οι ίδιοι είναι διατεταγμένοι κατά τάξη μεγέθους, τότε μπορούμε να πετύχουμε τέτοιους καθορισμούς για τα σημεία και τις ευθείες μας, ώστε να ισχύουν επίσης και όλα τα αξιώματα II της διάταξης.

Πραγματικά αν (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , ... είναι σημεία πάνω σε μια ευθεία, μπορεί η διατακτική σειρά τους πάνω σε αυτή να είναι έτσι διευθετημένη, ώστε οι αριθμοί x_1 , x_2 , x_3 , ... είτε οι y_1 , y_2 , y_3 , ... κατά αυτή τη σειρά, να ελαττώνονται σταθερά ή να αυξάνονται. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι τα αξιώματα Π_{1-3} επαληθεύονται.

Για την συνέπεια του Αξιώματος του Pasch (Π_5) καθορίζουμε ότι όλα τα σημεία (x, y) για τα οποία η παράσταση $u \cdot x + v \cdot y + w$ γίνεται μικρότερη ή μεγαλύτερη του μηδενός, πρέπει να κείνται στο ένα – αντίστοιχα, στο άλλο – μέρος επιπέδου ως προς την ευθεία $(u:v:w)$. Ο καθορισμός αυτός είναι σε συμφωνία με αυτόν που καθορίζει την σειρά των σημείων πάνω σε μια ευθεία.

Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε παρακάτω ότι τα αξιώματα ισότητας καθώς και το Αρχιμήδειο αξίωμα επαληθεύονται.

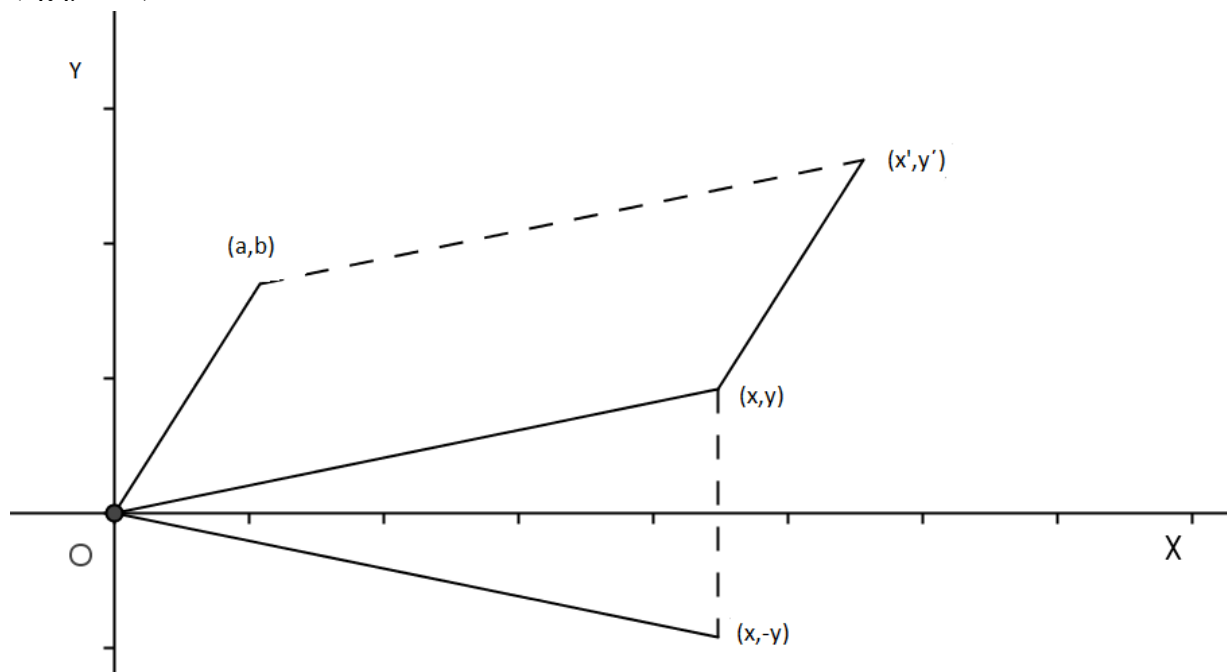
Η συνεφαρμογή ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών θα γίνει με τις γνωστές μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Ένας μετασχηματισμός της μορφής :

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

παρέχει την παράλληλη μετατόπιση (μεταφορά) ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών (σχήμα 19).



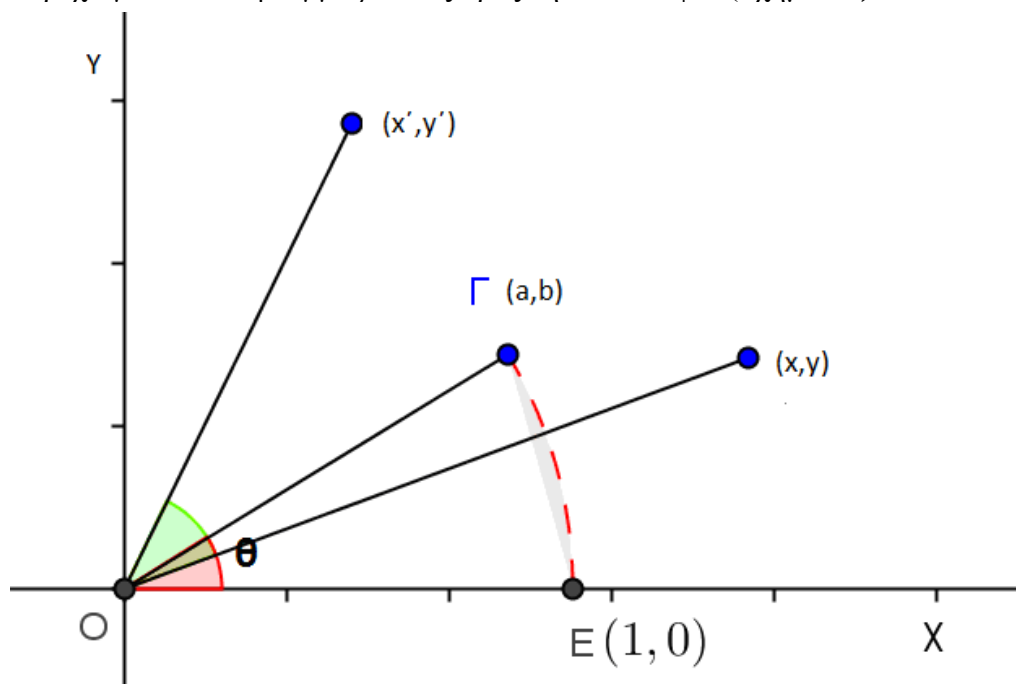
Σχήμα 19

Ένας μετασχηματισμός της μορφής :

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

παρέχει μια αξονική συμμετρία, ως προς την ευθεία $\psi=0$ (σχήμα 19).



Σχήμα 20

Στον Γεωμετρικό Μετασχηματισμό στροφή με κέντρο O και στροφή κατά γωνία θ έχουμε τους παρακάτω τύπους :

$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta$$

$$y' = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

Έτσι αν $O(0,0)$, $E(1,0)$ και $\Gamma(a,b)$ ένα τυχόν σημείο (σχήμα 20), τότε προκύπτει με στροφή κατά γωνία $\angle EOG$ και με σταθερό κέντρο στροφής το O , από τυχόν σημείο (x, y) το σημείο (x', y') , σύμφωνα με τους τύπους έχουμε :

$$\begin{cases} x' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot x - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot y \\ y' = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot y \end{cases}$$

Επειδή ο αριθμός $\sqrt{a^2 + b^2} = b \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}$ ανήκει επίσης στο σύνολο Ω συμπεραίνουμε

ότι ισχύουν σύμφωνα με τους καθορισμούς μας και τα αξιώματα ισότητας III_1-4 , εξάλλου είναι προφανές ότι εκπληρώνεται το σχετικό με την ισότητα τριγώνων III_5 καθώς και το Αρχιμήδειο αξίωμα V_1 . Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι τα αξιώματα III_1-5 , V_1 πληρούνται.

Το αξίωμα όμως **V2** της γραμμικής πληρότητας δεν πληρούται.

Αν όμως επιλέξουμε αντί του συνόλου Ω το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, τότε θα καταλήξουμε στη συνήθη Καρτεσιανή Γεωμετρία του επιπέδου, όπου όπως θα αποδείξουμε επαληθεύεται και το αξίωμα V2 της γραμμικής πληρότητας.

Στην Καρτεσιανή Γεωμετρία συνάγεται με βάση τους ορισμούς της διάταξης και της ισότητας τμημάτων ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να χωριστεί σε ένα προκαθορισμένο πλήθος n τμημάτων και αν ένα τμήμα AB είναι μικρότερο ενός τμήματος AG , τότε και το νιοστό μέρος του AB θα είναι μικρότερο του νιοστού μέρους του AG .

Υποθέτουμε τώρα, ότι δίνεται μια ευθεία (ε) επί της οποίας αντίθετα προς το αξίωμα πληρότητας, μπορούν να επισυναφθούν σημεία κατά την προκείμενη Γεωμετρία, χωρίς να διαταραχθεί πάνω στην (ε) η ισχύς των αξιωμάτων I-2, II, III, V1.

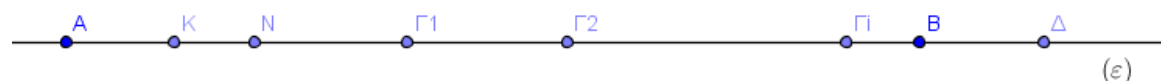
Ας σημειώσουμε με N ένα από τα επισυναπτόμενα σημεία. Αυτό το N χωρίζει την (ε) σε δύο ημιευθείες, καθεμιά από τις οποίες περιλαμβάνει, σύμφωνα με το Αρχιμήδειο Αξίωμα, τέτοια σημεία επίσης τα οποία υπήρχαν πριν την επέκταση και τα οποία θα επισημάνουμε ως παλαιά σημεία.

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το N διαμερίζει τα παλαιά σημεία της (ε) σε δύο ημιευθείες. Θεωρούμε ότι η (ε) παριστάνεται σε παραμετρική μορφή από τις εξισώσεις:

$$x = m t + n$$

$$y = p t + q$$

όπου η παράμετρος t παίρνει ήδη από την επέκταση μέσω του N , όλες τις πραγματικές τιμές. Έτσι η διά του N παραγόμενη διαμέριση επάγει μια τομή Dedekind αυτών των τιμών.



Σχήμα 21

Για μια τέτοια τομή ισχύει ως γνωστόν ότι : ή η 1^η από τις από αυτήν οριζόμενες κλάσεις έχει ένα τελευταίο στοιχείο ή η 2^η κλάση έχει ένα πρώτο στοιχείο. Έστω A το σε αυτό το στοιχείο αντιστοιχιζόμενο επί της (ε) σημείο. Άρα μεταξύ των A και N δεν κείται κανένα παλαιό σημείο (σχήμα 21).

Υπάρχει αντίθετα επί της (ε) ένα παλαιό σημείο B , τέτοιο ώστε το N να κείται μεταξύ των A και B .

Κατά το Αρχιμήδειο Αξίωμα υπάρχει επιπλέον ένα πλήθος n διαφορετικών σημείων: $N, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_i, \Delta$ τέτοιων ώστε τα n ευθύγραμμα τμήματα

$AN, N\Gamma_1, \Gamma_1\Gamma_2, \dots, \Gamma_i\Delta$ να είναι ίσα μεταξύ τους και το B να κείται μεταξύ του A και Δ .

Χωρίζουμε τώρα το AB σε n ίσα μέρη. Όλα τα σημεία του διαμερισμού είναι παλαιά. Έστω K εκείνο από τα εν λόγω σημεία που βρίσκεται εγγύτερα στο A . Από την ιδιότητα της Καρτεσιανής Γεωμετρίας που αναφέραμε πιο πάνω, προκύπτει ότι το AK είναι

μικρότερο του AN αφού το AB είναι μικρότερο του AD , άρα το παλαιό σημείο K κείται μεταξύ του A και N .

Άρα η παραδοχή ότι μπορούμε να επισυνάψουμε πάνω στην (ε) ένα σημείο N , οδήγησε σε μια αντίφαση.

Άρα στην επίπεδη Καρτεσιανή Γεωμετρία ισχύουν όλα τα γραμμικά και επιπεδικά αξιώματα I – V.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι όλα τα αξιώματα του Hilbert είναι ελεύθερα αντιφάσεων, άρα το αξιωματικό του σύστημα είναι συνεπές (σε σχέση με το σύστημα των πραγματικών αριθμών).

Κεφάλαιο 6

Η ανεξαρτησία των προτάσεων στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert.

Ο Hilbert μας επισημαίνει ότι *δεν πρέπει καμία πρόταση που συμπεριλαμβάνεται μέσα σε ένα σύνολο αξιωμάτων να μπορεί να αποδειχθεί μέσω των άλλων αξιωμάτων του συστήματος*. Αν αποδείξει κανείς ότι ένα αξίωμα εξαρτάται από τις λοιπές προτάσεις του συστήματος τότε πρέπει να παραιτηθεί από το αξίωμα. Ένα αξίωμα λέγεται *ανεξάρτητο*, αν δεν αποτελεί λογική συνέπεια των άλλων αξιωμάτων του συνόλου και ένα σύστημα αξιωμάτων λέγεται *ανεξάρτητο* όταν κάθε αξίωμά του είναι ανεξάρτητο.

Για να δείξουμε ότι ένα αξίωμα είναι *εξαρτημένο*, προσπαθούμε να το συνάγουμε χρησιμοποιώντας μόνο τα άλλα αξιώματα.

Για να δείξουμε όμως την *ανεξαρτησία* ενός αξιώματος καταφεύγουμε στην κατασκευή μοντέλων. Αν σε κάποιο μοντέλο τα άλλα αξιώματα αληθεύουν, ενώ το υπό εξέταση αξίωμα όχι, τότε αυτό είναι ανεξάρτητο.

Εφόσον όλα τα άλλα αξιώματα αληθεύουν στο συγκεκριμένο μοντέλο, οποιαδήποτε πρόταση συνάγεται από τα αξιώματα αυτά πρέπει να αληθεύει στο συγκεκριμένο μοντέλο. Αν λοιπόν το εν λόγω αξίωμα μπορούσε να συναχθεί από τα άλλα αξιώματα θα έπρεπε να αληθεύει στο συγκεκριμένο μοντέλο. Αφού δεν αληθεύει, αυτό σημαίνει ότι δεν συνάγεται από τα άλλα αξιώματα και επομένως είναι ανεξάρτητο από αυτά.

Η πλέον σημαντική απόδειξη ανεξαρτησίας, στην ιστορία των μαθηματικών προβλημάτων θεμελίωσης είναι η απόδειξη ότι το αίτημα των παραλλήλων είναι ανεξάρτητο από τα αξιώματα της λεγόμενης απόλυτης Γεωμετρίας.

6.1 Ιστορική αναδρομή στις προσπάθειες απόδειξης του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη

Ας δούμε το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη :

Και εάν δυο ευθείες τεμνόμενες από μια άλλη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δυο ορθές, εάν προεκταθούν επ' άπειρον να τέμνονται προς τα μέρη των γωνιών που έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές.

Βασικός στόχος των ερευνητών από την εποχή του Ευκλείδη μέχρι τον 19^ο αιώνα ήταν η απόδειξη του αιτήματος αυτού μέσα από τα υπόλοιπα αιτήματα και αξιώματα. Οι προσπάθειες τους απέβησαν άκαρπες αφού κατέφευγαν στον ίδιο λανθασμένο συλλογισμό: να αντικαθιστούν το αίτημα με υποθέσεις - αιτήματα τα οποία είναι λογικά ισοδύναμα με αυτό.

Πρώτος ο Νεοπλατωνικός φιλόσοφος **Πρόκλος** (410- 485 μ.Χ.), ο οποίος ήταν ο τελευταίος Σχολάρχης της Ακαδημίας του Πλάτωνα, παρατήρησε ότι το 5^ο αίτημα του Ευκλείδη και η 17^η πρόταση του είναι αντίστροφες.

Η 17^η πρόταση αναφέρει ότι: «σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών».

Θεώρησε λοιπόν ότι δεν είναι δυνατόν από δύο αντίστροφες προτάσεις η μία να έχει απόδειξη ενώ η άλλη να μην είναι δυνατόν να αποδειχθεί ούτε ως αληθής ούτε ως ψευδής. Συνεπώς η απόδειξη του 5^{ου} αιτήματος υπάρχει και οφείλει να βρεθεί. Όμως στην απόδειξη υπάρχει η λανθασμένη ιδέα της αντικατάστασης του αιτήματος με την ισοδύναμη υπόθεση.

Έπειτα ο **Gerolamo Saccheri** (1667- 1733) με την αποδεικτική μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο και συσχετίζοντας το 5^ο αίτημα με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου προσπάθησε να πραγματοποιήσει την απόδειξη.

Μέσα από σειρά συλλογισμών κατάληξε στις εξής τρεις υποθέσεις:

1. Αν υπάρχει τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του είναι μικρότερο των δύο ορθών, αυτό ισχύει για κάθε τρίγωνο.
2. Αν υπάρχει τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο των δύο ορθών, αυτό ισχύει για κάθε τρίγωνο.
3. Αν υπάρχει τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών, αυτό ισχύει για κάθε τρίγωνο.

Σκοπός του ήταν να αποκλείσει τις υποθέσεις 1 και 3 και να καταλήξει στην 2 η οποία είναι ισοδύναμη με το 5^ο αίτημα.

Στην πορεία του αυτή κατέληξε σε συμπεράσματα που δεν είχαν λογικές αντιφάσεις, όμως η βαθειά πίστη του ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η μοναδική Γεωμετρία του φυσικού χώρου, δεν του επέτρεψε να είναι ο πρώτος που θα ανακάλυπτε τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Ο **Legendre** (1752- 1833) εργαζόμενος όπως και ο **Saccheri** απέδειξε ότι:

1^ο θεώρημα: «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι είτε μικρότερο, είτε ίσο με δύο ορθές γωνίες». καθώς και το:

2^ο θεώρημα: «Αν το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο ή ίσο με δύο ορθές γωνίες σε ένα μόνο τρίγωνο, είναι αντίστοιχα μικρότερο ή ίσο με δύο ορθές σε οποιοδήποτε άλλο τρίγωνο».

Το 1823 πίστευε ότι είχε βρει την απόδειξη βασιζόμενος στη υπόθεση ότι :

«από εσωτερικό σημείο μιας γωνίας μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να τέμνει και τις δυο πλευρές της».

Αυτή η υπόθεση όμως δεν ισχύει στην υπερβολική γεωμετρία και άρα επανέλαβε και αυτός το ίδιο λάθος.

Το 1830 ο **Lobatchevsky** (1793 – 1856) παρουσίασε ένα εναλλακτικό αξιωματικό σύστημα στο οποίο το 5^ο αίτημα αναιρείται και έτσι δημιουργήθηκε το πρώτο ολοκληρωμένο έργο μη – Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Στο έργο αυτό άφησε το αίτημα παραλληλίας και έκανε την παραδοχή :

Από σημείο, το οποίο δεν κείται πάνω σε δοσμένη ευθεία, περνάνε ευθείες στο επίπεδο, παράλληλες προς τη δοσμένη περισσότερες από μία.

Μετά από μια τέτοια επιλογή αιτήματος τα αιτήματα δεν θεωρούνται πια φανερές αλήθειες, αλλά παραδοχές πάνω στις οποίες βασίζεται μια μαθηματική δομή.

Αν και τα συμπεράσματα ήταν αντίθετα με την διαίσθηση η έλλειψη λογικής αντίφασης οδήγησε στο συμπέρασμα ότι το Ευκλείδειο αίτημα δεν μπορεί να αποδειχθεί.

Η εμφάνιση λοιπόν των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών που ήταν συνέπεια της άρνησης του 5^{ου} αιτήματος του Ευκλείδη, ήταν η μεγαλύτερη επανάσταση στην ιστορία των μαθηματικών από την εποχή των Αρχαίων Ελλήνων.

6.2 Η ανεξαρτησία των αξιωμάτων του Hilbert.

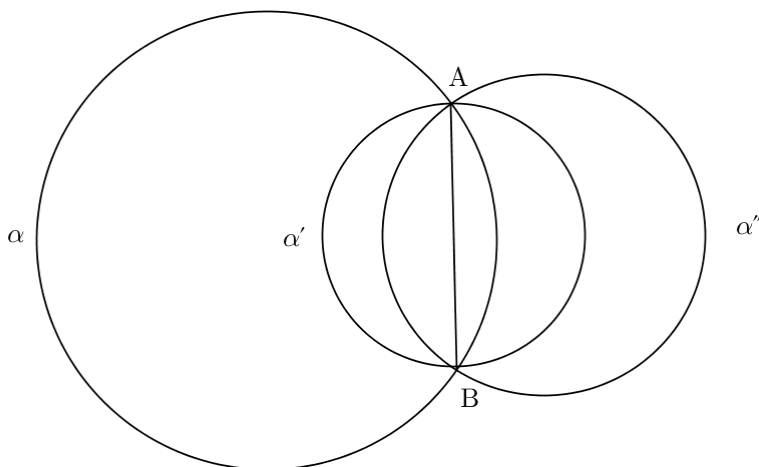
Επιστρέφοντας στην ανεξαρτησία των αξιωμάτων του Hilbert, θα αποδείξουμε ότι κανένα συστατικό μέρος των ομάδων αξιωμάτων που αναφέραμε στο 3^ο κεφάλαιο, δεν θα μπορούσε να παραχθεί μέσω λογικών συμπερασμών, από τις κάθε φορά προδιατυπωμένες ομάδες αξιωμάτων.

Σε ότι αφορά ξεχωριστά τα αξιώματα των ομάδων I, II και III είναι εύκολο να προκύψει η απόδειξη ότι τα αξιώματα μιας και της ίδιας κάθε φορά ομάδας είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα. [21]

Υπάρχει η αμοιβαία ανεξαρτησία, δηλαδή κάθε αξίωμα μιας ομάδας δεν είναι συνέπεια των υπόλοιπων αξιωμάτων της ίδιας ομάδας.

Θα αποδείξουμε ενδεικτικά, ότι το αξίωμα I2 είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της ομάδας I.

Κατασκευάζουμε λοιπόν μια γεωμετρία, παίρνοντας σαν σημεία τα συνήθη σημεία του Ευκλείδειου επιπέδου και σαν ευθείες κύκλους που ορίζονται από δύο σημεία με τον ακόλουθο τρόπο: έστω ότι ο κύκλος, (ο οποίος στην δική μας γεωμετρία είναι ευθεία), ορίζεται από τα δύο σημεία που βρίσκονται στα άκρα της διαμέτρου του (σχήμα 22). Τότε το αξίωμα I2 δεν ισχύει γιατί δυο σημεία της ευθείας θα ορίζουν μια διαφορετική ευθεία από αυτήν στην οποία ανήκουν.

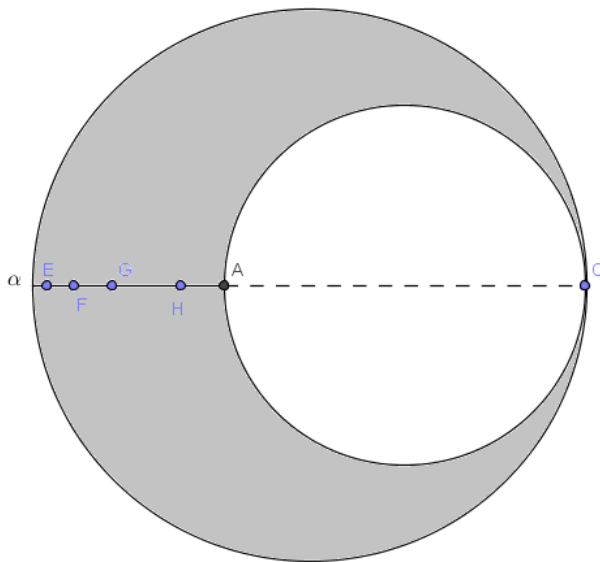


Σχήμα 22

Στο παραπάνω σχήμα τα σημεία A και B της ευθείας α , ορίζουν μια άλλη ευθεία α' . Όμως το αξίωμα I1, ισχύει αφού σε κάθε περίπτωση δυο σημεία ορίζουν μια και μόνο μια ευθεία στο σύστημά μας. Η αλήθεια των αξιωμάτων I6,7,8 αποδεικνύεται από την στιγμή που κάθε κύκλος έχει άπειρα σημεία που ανήκουν σε αυτόν. Έτσι προκύπτει η ανεξαρτησία του I2 σε αυτό το σύστημα της γεωμετρίας που κατασκευάσαμε.

Θα αποδείξουμε επίσης ενδεικτικά, ότι το αξίωμα II2 είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της ομάδας II.

Θεωρούμε τις γραμμές σε αυτή τη γεωμετρία ως γραμμές του τμήματος του επιπέδου μεταξύ δυο εφαπτόμενων εσωτερικά κύκλων, και ένα σημείο κάθε τέτοιας γραμμής α είναι το σημείο επαφής. Τότε το αξίωμα II2 δεν ισχύει καθώς αν πάρουμε το σημείο επαφής σαν C και σαν δεύτερο σημείο το σημείο A όπου η γραμμή τέμνει τον εσωτερικό κύκλο, τότε ούτε κανένα σημείο B δεν κείται μεταξύ του A και του C, στο σύστημα αυτό, ούτε μπορεί κανένα άλλο σημείο D να κείται πίσω από το C σε σχέση με το A, καθώς τα μόνα σημεία του συστήματος μας είναι αυτά που βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο τμήμα του σχήματος μας.



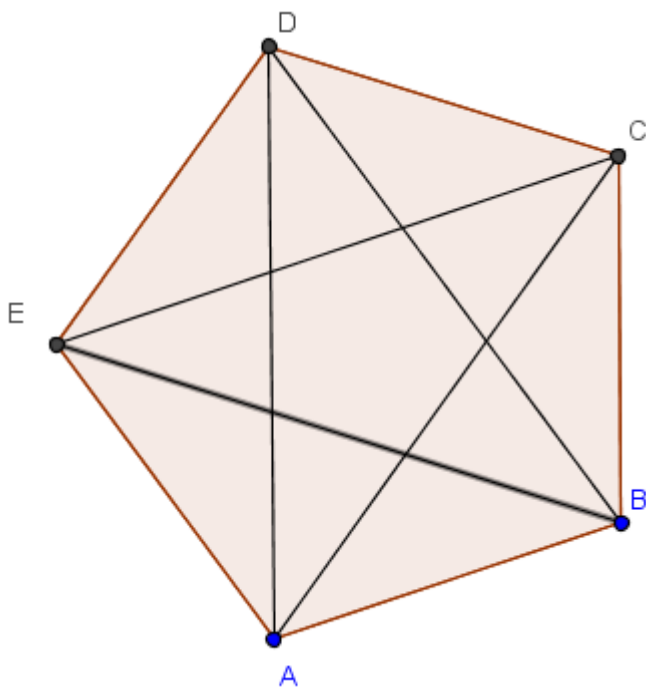
Σχήμα 23

Έτσι το II2 δεν επαληθεύεται αν κάνουμε αυτή την επιλογή των A και C. Αν πάρουμε τρία σημεία E,F,G της γραμμής α (σχήμα 23), έτσι ώστε το F να είναι μεταξύ του E και του G τότε είναι επίσης ανάμεσα στο G και το E, και έτσι ισχύει το αξίωμα II1. Επίσης ένα μόνο από τα τρία σημεία το F είναι μεταξύ των άλλων δύο και έτσι ισχύει το αξίωμα II3. Το αξίωμα II4 επίσης επαληθεύεται αφού οποιαδήποτε τέσσερα σημεία E,F,G,H της γραμμής α μπορούν να τοποθετηθούν κατά τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε το F να βρίσκεται ανάμεσα στο E και G και ανάμεσα στο E και H και επίσης το G θα κείται μεταξύ E και H και F και H.

Το αξίωμα παραλληλίας (IV) είναι ανεξάρτητο από τα άλλα αξιώματα.

Τα αξιώματα της σύνδεσης ή σύμπτωσης αναφέρονται στα σημεία, στις ευθείες και στις τομές τους. Χωρίς να αναφέρουμε τι είναι τα σημεία και οι ευθείες, αναζητούμε αυτές οι πρωταρχικές έννοιες να υπακούουν σε συγκεκριμένα αξιώματα. Ένα σύνολο αυτών των στοιχείων που ονομάζονται σημεία, μαζί με ένα σύνολο από υποσύνολα σημείων που ονομάζονται ευθείες, επαληθεύοντας τα αξιώματα I, θα αναφέρεται ως *γεωμετρία της σύμπτωσης* (incidence geometry). Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι στο μοντέλο μιας τέτοιας γεωμετρίας δεν επαληθεύεται το αξίωμα των παραλλήλων.

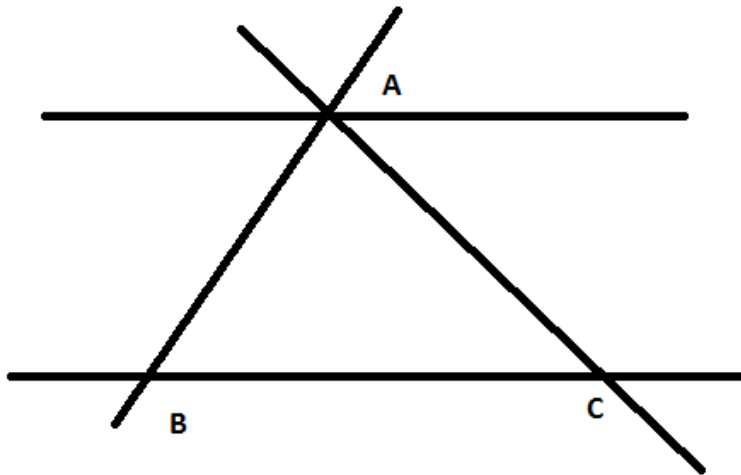
Θεωρούμε ένα σύνολο που αποτελείται από πέντε σημεία A,B,C,D,E, και ας είναι οι ευθείες όλα τα υποσύνολα που αποτελούνται από δύο σημεία. Είναι εύκολο να δούμε ότι σε αυτή τη γεωμετρία *επαληθεύονται τα αξιώματα I-3*. Όμως δεν ικανοποιείται το αξίωμα IV, γιατί για παράδειγμα, η AB και η AC είναι δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και είναι παράλληλες στην ευθεία DE.



Σχήμα 24

Να θυμηθούμε ότι η λέξη *παράλληλες* απλά σημαίνει ότι δύο ευθείες δεν έχουν κοινά σημεία. Άρα το αξίωμα IV είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα.

Για ένα μοντέλο που *επαληθεύει τα αξιώματα I₁, I₂, IV, και όχι το I₃*, παίρνουμε ένα σύνολο από τρία σημεία A,B,C και για ευθείες θεωρούμε τα υποσύνολα {A,B}, {A,C}, {B,C}, και {A}. Η ύπαρξη της ευθείας που διέρχεται από το μοναδικό σημείο {A} αντιστοιχεί στο αξίωμα I₃. Όμως το αξίωμα IV επαληθεύεται, διότι η ενός σημείου ευθεία είναι τότε η μοναδική ευθεία από το A που είναι παράλληλη στην ευθεία {B,C}.



Σχήμα 25

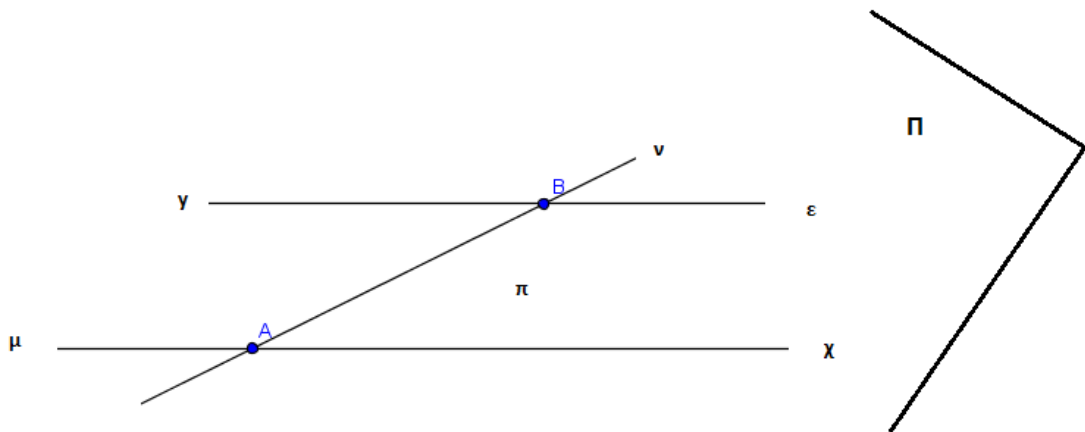
Το αξίωμα παραλληλίας μπορεί να αποδοθεί ως εξής:

Σε ένα επίπεδο α μπορεί να χαραχθεί από κάθε σημείο A , που βρίσκεται εκτός της ευθείας a , μια και μόνο μια ευθεία που δεν τέμνει την ευθεία a . Αυτή η ευθεία γραμμή ονομάζεται παράλληλη της a από το σημείο A .

Το αξίωμα των παραλλήλων μας διαβεβαιώνει: α) ότι πάντα θα υπάρχει μια τέτοια ευθεία και β) ότι μια τέτοια ευθεία θα είναι μοναδική.

Η πρώτη δήλωση του αξιώματος των παραλλήλων μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Έστω (μ) η ευθεία και B σημείο εκτός αυτής, Π το επίπεδο που ορίζουν το σημείο και η ευθεία, A τυχαίο σημείο της ευθείας (μ) και $A\chi$ η μια από τις ημιευθείες που το A ορίζει στην (μ) .



Σχήμα 26

Έστω (ν) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A και B και (π) το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την (ν) και το επίπεδο Π και στο οποίο ανήκει η A χ . Σύμφωνα με το μετρικό αξίωμα III₄, επί του επιπέδου Π υπάρχει μοναδική ημιευθεία By, που ανήκει στο αντικείμενο ημιεπίπεδο του (π) τέτοια ώστε $\angle ABy = \angle BA\chi$.

Αν τώρα (ϵ) είναι η ευθεία στην οποία ανήκει η ημιευθεία By και η οποία βρίσκεται στο επίπεδο Π τότε σύμφωνα με την πρόταση της εξωτερικής γωνίας (μια εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη της κάθε μίας από τις δύο μη προσκείμενες σε αυτήν γωνίες του τριγώνου), η ευθεία αυτή δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την ευθεία (μ). Άρα οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες.

Για να αποδείξουμε ότι η δεύτερη δήλωση του αξιώματος των παραλλήλων είναι ανεξάρτητη από τα άλλα αξιώματα επιλέγουμε τα σημεία, τις ευθείες και τα επίπεδα της συνήθους Καρτεσιανής Γεωμετρίας που κατασκευάσαμε στο 5^ο κεφάλαιο, στο βαθμό που αυτά αναπτύσσονται στο εσωτερικό μια σφαίρας, αυτά και μόνον ιδιαιτέρως ως στοιχεία μιας Γεωμετρίας του χώρου, και εξασφαλίζουμε τις ισότητες αυτής της Γεωμετρίας μέσω τέτοιων γραμμικών μετασχηματισμών της συνήθους Γεωμετρίας, που μετατρέπουν την σταθερή σφαίρα στον εαυτό της.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι τα σημεία σ' αυτήν την Μη – Ευκλείδεια Γεωμετρία περιέχονται σε μια σφαίρα και έτσι άπειρες ευθείες μπορούν να διέλθουν από ένα σημείο, που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με την δοθείσα ευθεία, χωρίς να την τέμνουν. Τότε ισχύουν όλα τα αξιώματα εκτός από το αξίωμα IV και δεδομένου ότι η δυνατότητα ύπαρξης της συνηθισμένης Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί στο 5^ο κεφάλαιο έπεται κατ' ακολουθία και η δυνατότητα ύπαρξης και της Μη – Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Η ανεξαρτησία των αξιωμάτων ισότητας (III)[5]

Σαν αρχή θα αποδείξουμε ότι:

το αξίωμα III₅ δεν μπορεί να παραχθεί μέσω λογικών συμπερασμών, από τα λοιπά αξιώματα I, II, III₁₋₄, IV και V

Επιλέγουμε τα σημεία, τις ευθείες και τα επίπεδα της συνήθους Καρτεσιανής Γεωμετρίας, επίσης ως στοιχεία της νέας Γεωμετρίας του χώρου και ορίζουμε την προσαρμογή των γωνιών όπως στην συνηθισμένη Γεωμετρία που κατασκευάσαμε στο 5^ο κεφάλαιο.

Αντίθετα, ορίζουμε την προσαρμογή των ευθυγράμμων τμημάτων με έναν διαφορετικό τρόπο.

Αν A₁ και A₂ δύο σημεία στη συνηθισμένη Γεωμετρία με συντεταγμένες τους αριθμούς x_1, y_1, z_1 και x_2, y_2, z_2 τότε χαρακτηρίζουμε την θετική τιμή:

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

ως μήκος του ευθυγράμμου τμήματος A₁A₂. Άρα δύο ευθύγραμμα τμήματα A₁A₂ και A'₁A'₂ μπορούν να ονομάζονται ίσα μεταξύ τους, όταν έχουν σύμφωνα με την μόλις καθορισμένη σημασία, ίσα μήκη.

Είναι φανερό ότι στην *Γεωμετρία του χώρου* που κατασκευάστηκε με τον παραπάνω τρόπο, ισχύουν τα αξιώματα *I, II, III₁₋₂, III₄, IV και V*.

Για να δείξουμε ότι το **αξίωμα III₃** επίσης ισχύει, επιλέγουμε τυχούσα ευθεία *a* και πάνω σ' αυτήν τρία σημεία *A₁, A₂, A₃*, έτσι ώστε το *A₂* να κείται μεταξύ των *A₁* και *A₃*. Τα διάφορα σημεία *x, y, z* της *a* θα δίνονται από τις εξισώσεις: $x = nt + n'$, $y = mt + m'$, $z = vt + v'$ όπου *t* είναι μια παράμετρος και *n, n', m, m', v, v'* καθορισμένες σταθερές.

Αν *t₁, t₂ (<t₁), t₃ (<t₂)* είναι οι τιμές της παραμέτρου *t* που αντιστοιχίζονται στα σημεία *A₁, A₂, A₃*, τότε για τα μήκη των τριών τμημάτων *A₁A₂, A₂A₃* και *A₁A₃* έχουμε τις εκφράσεις :

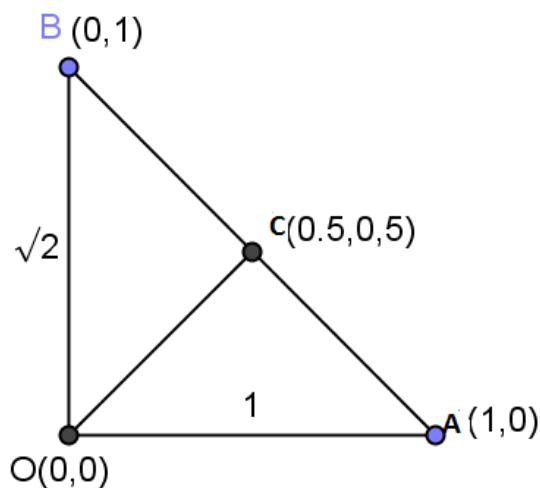
$$(t_1 - t_2) \cdot \left| \sqrt{(n+m)^2 + m^2 + v^2} \right|$$

$$(t_2 - t_3) \cdot \left| \sqrt{(n+m)^2 + m^2 + v^2} \right|$$

$$(t_1 - t_3) \cdot \left| \sqrt{(n+m)^2 + m^2 + v^2} \right|$$

Κατά συνέπεια το άθροισμα των μηκών των τμημάτων *A₁A₂* και *A₂A₃* είναι ίσο με το μήκος του τμήματος *A₁A₃*. Αλλά αυτό το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη του αξιώματος *III₃*.

Το αξίωμα **III₅** ή μάλλον το 1^ο θεώρημα ισότητας τριγώνων, *δεν ισχύει* πάντα στην Γεωμετρία αυτή. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, στο επίπεδο δηλαδή όταν *z=0*, τα τέσσερα σημεία *O(0,0), A(1,0), B(0,1), C(1/2, 1/2)*.



Σχήμα 27

Στα τρίγωνα *OAC* και *OBC* (σχήμα 27), οι γωνίες στο σημείο *C* και επίσης οι αντικείμενες πλευρές *CA* και *CB* είναι αντίστοιχα ίσες, έτσι η πλευρά *OC* είναι κοινή των δύο τριγώνων και οι πλευρές *AC* και *BC* έχουν το ίδιο μήκος $\frac{1}{2}$. Όμως οι τρίτες τους πλευρές *OA* και *OB* έχουν αντίστοιχα μήκη 1 και $\sqrt{2}$, και έτσι δεν είναι ίσα.

Η ανεξαρτησία των αξιωμάτων συνέχειας (V).

Για να πετύχει ο Hilbert την ανεξαρτησία του Αρχιμήδειου Αξιώματος VI χρειάζεται ένα αριθμητικό σύστημα (τα στοιχεία του οποίου θα χρησιμεύσουν ως συντεταγμένες για τα σημεία του μοντέλου του), το οποίο σε σύγχρονη ορολογία, αποτελεί ένα παράδειγμα μη Αρχιμήδειου διατεταγμένου σώματος.

Σήμερα γνωρίζουμε ότι τέτοια παραδείγματα δίνονται από τα αποτελέσματα της Μαθηματικής Λογικής και ειδικότερα από το Θεώρημα του Συμπαγούς.

Ο Hilbert προχωρά στη θεώρηση ενός τέτοιου αριθμητικού συστήματος μέσω των αλγεβρικών συναρτήσεων.

Για αρχή θα δώσουμε τον ορισμό της *αλγεβρικής συνάρτησης*:

Έστω η εξίσωση $P_0(x) + P_1(x) \cdot y + \dots + P_N(x) \cdot y^N = 0$ (1)

όπου $P_0(x), P_1(x), \dots, P_N(x)$ πολυώνυμα με $N \geq 1, P_N(x) \neq 0$ μηδενικού πολυωνύμου.

Έστω $y=g(x)$ συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων, η οποία επαληθεύει την (1).

Τότε η $y=g(x)$ ονομάζεται αλγεβρική συνάρτηση.

Οι αλγεβρικές συναρτήσεις προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις με συνδυασμό των τεσσάρων αλγεβρικών πράξεων και τη εξαγωγή ριζών οποιασδήποτε τάξης.

Θεωρούμε λοιπόν το σύνολο $\Omega(t)$ όλων εκείνων των αλγεβρικών συναρτήσεων του t που προκύπτουν από το t μέσω των τεσσάρων (ρητών) πράξεων (πρόσθεσης –αφαίρεσης – πολλαπλασιασμού –διαίρεσης) και την πέμπτη πράξη: $\sqrt{1+\omega^2}$, όπου ω δηλώνει μια

οποιαδήποτε συνάρτηση που έχει ήδη παραχθεί δυνάμει των παραπάνω πέντε πράξεων.

Το σύνολο των στοιχείων του $\Omega(t)$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Και οι πέντε αναφερόμενες πράξεις είναι όλες μονοσήμαντα εκτελεστές στο σύνολο $\mathbb{R}$ και συνεπώς το σύνολο $\Omega(t)$ περιέχει μόνο συναρτήσεις πραγματικές μονοσήμαντα ορισμένες.

Έστω c μια οποιαδήποτε συνάρτηση του $\Omega(t)$. Επειδή η c είναι μια αλγεβρική συνάρτηση του t έπεται ότι, σε κάθε περίπτωση, μπορεί να μηδενίζεται μόνο για πεπερασμένο πλήθος τιμών του t και αποβαίνει συνεπώς αυτή, για αρκετά μεγάλες θετικές τιμές του t , πάντοτε θετική ή πάντοτε αρνητική.

Πριν συνεχίσουμε θα κάνουμε μια εισαγωγή στα διατεταγμένα σώματα. Οι **πραγματικοί αριθμοί** αποτελούν στο σύνολό τους ένα σύστημα στοιχείων με τις παρακάτω ιδιότητες:

Προτάσεις της σύνδεσης (σύνθεσης) (I-6)

1. $a + b = c$ (για κάθε ζευγάρι a, b στοιχείων του σώματος, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο c του σώματος που ονομάζεται άθροισμα)
2. $a + x = b$ (αντίστοιχα) $y + a = b$, όπου x, y μοναδικοί αριθμοί (ύπαρξη διαφοράς)
3. $a + 0 = a$ και $0 + a = a$
4. $a \cdot b = c$ (για κάθε ζευγάρι a, b στοιχείων του σώματος, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο c του σώματος που ονομάζεται γινόμενο)

5. $a \cdot x = b$ (αντίστοιχα) $y \cdot a = b$, όπου x, y μοναδικοί αριθμοί (ύπαρξη πηλίκου)
6. $a \cdot 1 = a$ και $1 \cdot a = a$

Κανόνες λογισμού (7-12)

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$
8. $a + b = b + a$
9. $a (b \cdot c) = (a \cdot b) c$
10. $a (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
11. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
12. $a \cdot b = b \cdot a$

Προτάσεις της διάταξης (13-16)

13. Για δύο τυχόντες διαφορετικούς αριθμούς ισχύει πάντα $a > b$ ή $b < a$
14. Αν είναι $a > b$ και $b > c$ τότε είναι επίσης $a > c$
15. Αν είναι $a > b$ τότε ισχύει πάντοτε και $a + c > b + c$
16. Αν είναι $a > b$ και $c > 0$, τότε είναι επίσης και $a \cdot c > b \cdot c$

Προτάσεις της συνέχειας (17-18)

17. (**Αρχιμήδεια πρόταση**). Αν δύο τυχόντες αριθμοί a και b τέτοιοι ώστε $a > 0$ και $b > 0$, τότε είναι πάντα δυνατόν να καθορίζεται ένα άθροισμα τόσων προσθετέων ίσων προς τον a , ώστε αυτό να είναι αριθμός μεγαλύτερος από τον b , συμβολικά: $a + a + a + \dots + a > b$

18. (**Πρόταση της πληρότητας**). Δεν είναι δυνατόν στο (υπάρχον) σύστημα των αριθμών να επισυνάψουμε ένα άλλο σύστημα από στοιχεία, που να λογίζονται επίσης ως αριθμοί, έτσι ώστε και στο δια της συναρμογής παραγόμενο σύστημα, με διατήρηση των σχέσεων μεταξύ αριθμών, να πληρούνται όλες οι προτάσεις 1-17.

Συντομότερα: Οι αριθμοί αποτελούν ένα σύστημα στοιχείων, το οποίο με την διατήρηση όλων των σχέσεων και όλων των προτάσεων που αναπτύχθηκαν δεν επιδέχεται καμιά παραπέρα επέκταση.

Ένα σύστημα από στοιχεία, το οποίο κατέχει τις ιδιότητες 1-16 είναι το σύστημα θετικών στοιχείων ενός διατεταγμένου σώματος.

Ένα διατεταγμένο σώμα ονομάζεται Αρχιμήδειο ή μη- Αρχιμήδειο, όταν σε αυτό αληθεύει ή όχι, αντίστοιχα, η Αρχιμήδεια ιδιότητα (17).

Θεωρούμε τώρα τις συναρτήσεις του συνόλου $\Omega(t)$, όπως ορίστηκε παραπάνω.

- ❖ Αν a, b είναι δύο τυχόντες αριθμοί αυτού του διατεταγμένου σώματος μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τον a μεγαλύτερο ή μικρότερο του b ($a > b$ ή $b < a$) καθόσον η διαφορά $c = a - b$ σαν συνάρτηση του t , γίνεται πάντα θετική ή αρνητική αντίστοιχα, για επαρκώς μεγάλες θετικές τιμές του t .

Με αυτόν τον καθορισμό είναι δυνατή για τους αριθμούς του διατεταγμένου σώματός μας, μια κατά το μέγεθός τους διάταξη, η οποία είναι ανάλογη προς εκείνη των πραγματικών αριθμών.

- ❖ Ισχύουν επίσης οι προτάσεις σύμφωνα με τις οποίες, οι γνήσιες ανισότητες παραμένουν αναλλοίωτες όταν προσθέσουμε και στα δύο μέλη τους τον ίδιο αριθμό ή όταν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο θετικό αριθμό.
- ❖ Αν με v σημειώσουμε έναν τυχόντα θετικό ακέραιο, τότε για τους αριθμούς v και t του $\Omega(t)$ ισχύει ασφαλώς η ανισότητα $v < t$, αφού η διαφορά $v - t$, ως συνάρτηση του t θεωρούμενη, αποβαίνει προφανώς πάντα αρνητική για επαρκώς μεγάλες θετικές τιμές του t . Αυτό το γεγονός το εκφράζουμε με τον ακόλουθο τρόπο : Οι δύο αριθμοί 1 και t του πεδίου $\Omega(t)$ που και οι δύο είναι μεγαλύτεροι του μηδενός έχουν την ιδιότητα: «ένα οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του πρώτου μένει πάντοτε μικρότερο από το δεύτερο»

Από τα στοιχεία του $\Omega(t)$ περνάμε σε μια Γεωμετρία αντίστοιχη με αυτή του 5^{00} κεφαλαίου με βάση το σύνολο Ω των αλγεβρικών αριθμών.

Θεωρούμε τώρα μία (διατεταγμένη) τριάδα (x, y, z) στοιχείων του συνόλου $\Omega(t)$ ως ένα σημείο και κάθε κλάση τετράδων (pu, pv, pw, pr) , όπου p τυχαίος μη μηδενικός αριθμός του $\Omega(t)$ και u, p, w, r οποιοιδήποτε ορισμένοι εκάστοτε αριθμοί του $\Omega(t)$ με $|u| + |v| + |w| \neq 0$ ως ένα επίπεδο.

Την παραπάνω κλάση θα συμβολίζουμε συνοπτικά $(u: v: w: r)$ και θα μπορούμε να λέμε ότι η πραγματοποίηση της εξίσωσης:

$$u \cdot x + v \cdot y + w \cdot z + r = 0$$

εκφράζει πως το σημείο (x, y, z) κείται επί του επιπέδου $(u: v: w: r)$.

Ως ευθεία θα ορίσουμε το σύνολο όλων των σημείων των κειμένων σε δύο συγχρόνως επίπεδα με διαφορετικό σύστημα $u: v: w$.

Στη συνέχεια θα υιοθετήσουμε τους καθορισμούς του 5^{00} κεφαλαίου για την διάταξη των στοιχείων και την προσαρμογή τμημάτων και γωνιών.

Τότε παράγεται μια Μη-Αρχιμήδεια Γεωμετρία στην οποία εκπληρώνονται όλα τα αξιώματα (όπως δείχνουν οι προαναφερθείσες ιδιότητες του διατεταγμένου σώματος) με την εξαίρεση των αξιωμάτων συνέχειας.

Πραγματικά, μπορούμε να προσαρμόσουμε το τμήμα r πάνω στο τμήμα t αλληλοδιαδόχως όσες φορές θέλουμε, χωρίς να υπερβούμε το τελικό σημείο του τμήματος t . Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το αίτημα του Αρχιμήδειου αξιώματος.

Για να αποδείξουμε την ανεξαρτησία του Αξιώματος πληρότητας $V2$ από τα αξιώματα I-IV και $V1$ εργαζόμαστε στην Γεωμετρία που κατασκευάσαμε στο 5^0 κεφάλαιο αφού σε αυτήν εκπληρώνεται το Αρχιμήδειο αξίωμα.

Όπως είδαμε παραπάνω για να εισάγει ο Hilbert την έννοια του αριθμού στη γεωμετρία, ορίζει ένα λογισμό τμημάτων και μετά χρησιμοποιεί την αξιωματική μέθοδο για να δείξει

ποιες αλγεβρικές ιδιότητες αυτού του λογισμού προκύπτουν από την εγκυρότητα των γεωμετρικών προτάσεων.

Η ιδέα [22], είναι να δημιουργήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο εσωτερικό της γεωμετρίας, δείχνοντας ότι μερικά θεμελιώδη θεωρήματα υπονοούν βασικές ιδιότητες των αριθμών, που χρησιμοποιούνται σαν συντεταγμένες.

Με τον τρόπο αυτό το σύστημα των πραγματικών αριθμών δεν επιβάλλεται εξωτερικά, όπως στην αναλυτική γεωμετρία αλλά προκύπτει από γεωμετρικά επιχειρήματα. Χάρη στα αξιώματα I-IV και V1 ο Hilbert αποδεικνύει, ότι το οριζόμενο έτσι σύστημα συντεταγμένων δημιουργεί ένα Αρχιμήδειο σώμα. Όμως από τη στιγμή που αυτό το Αρχιμήδειο σώμα μπορεί να είναι αριθμήσιμο, είναι φανερό για τον Hilbert ότι η γεωμετρία που επαληθεύει όλα τα αξιώματα I-IV και V1 δεν μπορεί άμεσα να ταυτισθεί με την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό έχει μεγάλη αξία, γιατί κάνει χρήση όλων των πραγματικών αριθμών. Η μέγιστη προτεραιότητα του Hilbert είναι να ορίσει αξιωματικά την αντιστοιχία των σημείων μιας ευθείας και των πραγματικών αριθμών. Η λύση αυτού του προβλήματος είναι το μαθηματικό περιεχόμενο του αξιώματος της πληρότητας.

Αν μια γεωμετρία είναι τέτοια στην οποία μόνο η εγκυρότητα του Αρχιμήδειου αξιώματος προκύπτει, τότε είναι δυνατόν να επεκτείνουμε το σύνολο των σημείων, των γραμμών και επιπέδων με την χρήση των «άρρητων αριθμών», έτσι ώστε στη γεωμετρία που προκύπτει, σε κάθε γραμμή ένα σημείο αντιστοιχεί, χωρίς εξαίρεση, σε κάθε σύνολο τριών πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την εξίσωση. Με κατάλληλους προσδιορισμούς είναι δυνατόν να συμπεράνουμε την ίδια στιγμή ότι όλα τα αξιώματα I-V ισχύουν σε αυτήν την επεκτεταμένη γεωμετρία.

Έτσι η επεκτεταμένη γεωμετρία (με την προσθήκη των άρρητων αριθμών), δεν είναι τίποτε άλλο από την συνήθη καρτεσιανή γεωμετρία του χώρου, στην οποία το αξίωμα της πληρότητας V2 επίσης ισχύει [23, pp 35-36]

Τώρα είναι δυνατόν να αντιληφθούμε πως το αξίωμα της πληρότητας, χρησιμοποιείται για να καλύψει το κενό ανάμεσα στην γεωμετρία του χώρου του Hilbert και στην αναλυτική γεωμετρία. Ο τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι η προσθήκη των άρρητων αριθμών στο σύστημα των συντεταγμένων που παρουσιάστηκε από τον Hilbert στα Θεμέλιά του.

Στην ουσία, η αξιωματικοποίηση των πραγματικών αριθμών είναι ταυτόχρονη με την εισαγωγή του αξιώματος της πληρότητας για την γεωμετρία.[17].

Κεφάλαιο 7

Οι μεταγενέστερες εξελίξεις

7.1 Το σύστημα της Γεωμετρίας του Tarski¹

Μια διαφορετική ματιά στα αξιωματικά συστήματα.

Στο παράρτημα I υπάρχει το σύνολο των αξιωμάτων του Tarski.

Το 1926-27 στις διαλέξεις του στο Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας ο Alfred Tarski έδωσε μια αξιωματική ανάπτυξη της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας η οποία δεν βασίζεται σε ένα σύνολο θεωρητικών εννοιών αλλά αναπτύσσεται μέσα στα πλαίσια της λογικής πρώτης τάξης.

Το σύστημα του Tarski αξίζει την προσοχή μας λόγω της εξαιρετικής κομψότητάς του και της απλότητάς του, ειδικά στην τελική του μορφή που επιτεύχθηκε περίπου το 1965.

Σε αντίθεση με τα άλλα συστήματα της Γεωμετρίας, (για παράδειγμα το σύστημα του Hilbert) στο οποίο τα σημεία, οι ευθείες, τα επίπεδα είναι πρωταρχικές έννοιες, στο σύστημα του Tarski υπάρχει ένα μόνο είδος πρωταρχικής έννοιας: τα σημεία τα οποία συμβολίζονται με τις πρώτης τάξης μεταβλητές $a, b, c, \dots$

Υπάρχουν δύο πρωταρχικές γεωμετρικές (μη λογικές) έννοιες:

- Η τριαδική σχέση **B** του «μεταξύ» (“betweenness”)
- Η τετραδική σχέση $\equiv$ των ίσων αποστάσεων (“equidistance”) ή της αντιστοιχίας των ευθυγράμμων τμημάτων.

Θα γράφουμε **B(abc)** για να δηλώσουμε την σχέση του «μεταξύ» που διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι το σημείο b βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία a και c .

Θα γράφουμε **$ab \equiv cd$** για να δηλώσουμε την σχέση των «ίσων αποστάσεων» μεταξύ των σημείων a, b, c, d που διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία a και b συνταιριάζεται (είναι ίσο, ταυτίζεται) με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία c και d .

Τα λογικά σύμβολα της γλώσσας περιέχουν την ισότητα, την σύζευξη, την διάζευξη, την άρνηση και τις δυαδικές σχέσεις και δηλώνονται ως εξής :

$\rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, \neg$, έχουμε και τους ποσοδείκτες $\exists, \forall$, τον υπαρξιακό και τον καθολικό, ενώ ισχύουν και οι συνήθεις συμβάσεις που αφορούν την παράλειψη παρενθέσεων και την προτεραιότητα των λογικών τελεστών.

1. To Bulletin of Symbolic Logic. Τόμος 5, Τεύχος 2, Ιούνιος 1999. TARSKI'S SYSTEM OF GEOMETRY

7.2 Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του συστήματος του Tarski

Στο αξιωματικό σύστημα γεωμετρίας του Tarski παρατηρείται μια σαφής διαφορά μεταξύ της πλήρους και της στοιχειώδους γεωμετρίας. Ως στοιχειώδη γεωμετρία (EG) θεωρούμε αυτή που αναπτύσσεται μέσα στα πλαίσια της λογική πρώτης βαθμίδας –δηλαδή του απλού κατηγορηματικού λογισμού. Από την άλλη μεριά ως πλήρη Γεωμετρία (FG) θεωρούμε ένα πλαίσιο συστήματος λογικής ανώτερης τάξης.

Το σύστημα του Tarski βασίζεται στην απλότητα των αξιωμάτων του σε αντίθεση με τα υπόλοιπα αξιωματικά συστήματα της γεωμετρίας όπου μερικά αξιώματα δεν διατυπώνονται κατευθείαν με όρους πρωταρχικών εννοιών αλλά περιέχουν και άλλες έννοιες οριζόμενες εκ των προτέρων. Ένα μέτρο της απλότητας θα μπορούσε να είναι το συνολικό μήκος του αξιωματικού συστήματος δηλαδή το άθροισμα των μηκών των συγκεκριμένων αξιωμάτων του. Όταν αποφασίζουμε το μήκος ενός αξιώματος μετράμε τις εμφανίσεις των μεταβλητών και των λογικών και μη-λογικών μεταβλητών του αξιώματος. Η απλότητα ενός αξιωματικού συστήματος μπορεί να αποδειχθεί σίγουρα χρήσιμη στη μεταμαθηματική μελέτη της θεωρίας που βασίζεται πάνω σε αυτό το αξιωματικό σύστημα, ειδικότερα σε εκείνες τις περιπτώσεις όπου κάποιος προσπαθεί να δείξει ότι ορισμένες μαθηματικές δομές είναι μοντέλα αυτής της θεωρίας.

Φαίνεται ότι δυο παράγοντες συνέβαλαν στην συνοπτικότητα του αξιωματικού συστήματος του Tarski. Ο πρώτος παράγοντας ήταν η επιλογή της σχέσης του «μεταξύ» και της σχέσης των «ίσων αποστάσεων» ως μοναδικές αρχικές έννοιες. Και οι δύο έχουν μια σαφή και απλή γεωμετρική έννοια. Η 1^η αντιπροσωπεύει το συσχετισμό και η 2^η την μετρική πτυχή της Γεωμετρίας. Επιπλέον οι δύο έννοιες έχουν από κοινού μια μεγάλη εκφραστική δύναμη με την έννοια ότι μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε με ένα φυσικό και συνοπτικό τρόπο τους περισσότερους από τους βασικούς νόμους και ορισμούς που εμπλέκονται στην ανάπτυξη της γεωμετρίας. Για να περιγράψουμε τον δεύτερο παράγοντα, θα παρατηρήσουμε ότι οι νόμοι της στοιχειώδους γεωμετρίας παραδοσιακά διατυπώνονται με τέτοιο τρόπο που περιέχουν και τις εκφυλισμένες περιπτώσεις (π.χ $aa \equiv bb$). Η παράλειψη των περιπτώσεων αυτών στο σύστημα του Tarski όχι μόνο απλοποιεί τη δομή των νόμων αλλά συχνά δυναμώνει την παραγωγική τους δύναμη. Έτσι μας επιτρέπεται να εξάγουμε από αυτούς μερικούς ακόμα στοιχειώδεις νόμους, οι οποίοι διαφορετικά θα θεωρούνταν ξεχωριστά αξιώματα.

Τα σύνολα (EG) και (FG) είναι πλήρη, δηλαδή κάθε πρώτης τάξης πρόταση ή η άρνησή της παράγεται από αυτά τα σύνολα. Τα αξιωματικά συστήματα (EG) και (FG) εκτός του ότι είναι πλήρη στον τομέα των πρώτης τάξης προτάσεων, αποδεικνύονται ότι είναι κατηγορηματικά.

Ως συνέπεια αυτού είναι και σημασιολογικά πλήρη δηλαδή κάθε πρόταση που διατυπώνεται στην γλώσσα του ενός συστήματος είτε αληθεύει σε όλα τα μοντέλα είτε δεν αληθεύει σε όλα τα μοντέλα του συστήματος.

7.3 Παρατηρήσεις σχετικά με την ανεξαρτησία των αξιωμάτων του συστήματος του Tarski.

Υπενθυμίζουμε ότι μια πρόταση σε ένα σύνολο προτάσεων Σ λέγεται *ανεξάρτητη* αν δεν έπεται λογικά από τις υπόλοιπες προτάσεις στο σύνολο Σ . Το σύνολο ονομάζεται *ανεξάρτητο* αν κάθε πρόταση στο Σ είναι ανεξάρτητη.

Για να αποδείξουμε την ανεξαρτησία καθενός από τα αξιώματα που αναφέρονται παραπάνω χρησιμοποιούμε τον γνωστό τρόπο, δηλαδή κατασκευάζοντας ένα μοντέλο στο οποίο όλα τα άλλα αξιώματα του συστήματος ισχύουν και ένα συγκεκριμένο δεν ισχύει.

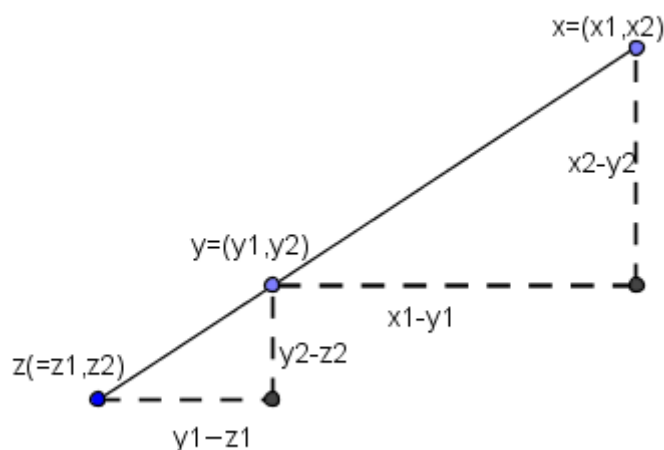
Παρατηρήσεις σχετικά με την ανεξαρτησία των πρωταρχικών εννοιών του συστήματος του Tarski.

Επειδή το γεωμετρικό του σύστημα έχει μόλις δυο πρωταρχικές έννοιες τις B και $\equiv$ έχουμε μόνο δυο προβλήματα ανεξαρτησίας.

➤ **Θα αποδείξουμε ότι η έννοια $\equiv$ δεν μπορεί να καθοριστεί με τους όρους του B .**

Θα παρουσιάσουμε δυο δομές $(S_1, B_1, \equiv_1)$ και $(S_2, B_2, \equiv_2)$ που είναι και οι δυο μοντέλα του δεδομένου συστήματος, όπου S_1 και B_1 , αντίστοιχα συμπίπτουν με S_2 και B_2 , ενώ $\equiv_1$ και $\equiv_2$ δεν συμπίπτουν, δηλαδή υπάρχουν x, y, z, u , έτσι ώστε ένας από τους τύπους $xy \equiv_1 zu$ και $xy \equiv_2 zu$ ισχύει ενώ ο άλλος δεν ισχύει.

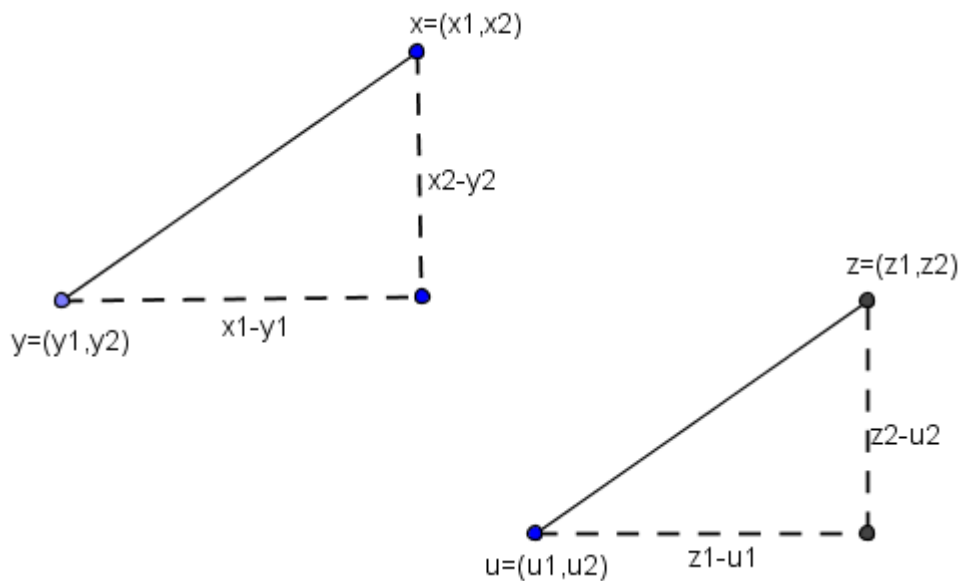
Για να δώσουμε δυο τέτοια μοντέλα θεωρούμε το σύνολο S όλων των διατεταγμένων ζευγών των πραγματικών αριθμών έτσι ώστε κάθε $x \in S$ έχει τον τύπο $x = (x_1, x_2)$, όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Καθορίζουμε τις σχέσεις B_1 και $\equiv_1$ μεταξύ των στοιχείων του S ως εξής:



Σχήμα 28: Ο ορισμός του «μεταξύ» στο Καρτεσιανό Επίπεδο.

$$B_1(xyz) \leftrightarrow [(x_1 - y_1) \cdot (y_2 - z_2) = (x_2 - y_2) \cdot (y_1 - z_1)] \wedge$$

$$\diamond [0 \leq (x_1 - y_1) \cdot (y_1 - z_1)] \wedge [0 \leq (x_2 - y_2) \cdot (y_2 - z_2)]$$



Σχήμα 29: Ο ορισμός του «ισοδυναμίας» στο Καρτεσιανό Επίπεδο.

$$\diamond \quad xy \equiv_1 zu \leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = (z_1 - u_1)^2 + (z_2 - u_2)^2$$

Είναι γνωστό ότι η δομή $(S, B1, \equiv_1)$ είναι ένα μοντέλο της πλήρους Γεωμετρίας. Στην πραγματικότητα είναι ο συνήθης 2-διάστατος Καρτεσιανός χώρος.

Θεωρούμε την αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία f του S που ορίζεται από τον τύπο $f(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2)$. Αν $B2, \equiv_2$ είναι οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του S τα οποία είναι οι εικόνες μέσω της f των σχέσεων $B1, \equiv_1$ αντίστοιχα τότε προφανώς οι δομές $(S, B1, \equiv_1)$ και $(S, B2, \equiv_2)$ είναι ισομορφικές μέσω της f και έτσι και η δομή $(S, B2, \equiv_2)$ είναι επίσης ένα μοντέλο της πλήρους Γεωμετρίας.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι πράγματι συμπίπτουν τα $B1$ και $B2$.

Όμως δεν συμπίπτουν τα $\equiv_1$ και $\equiv_2$. Για παράδειγμα:

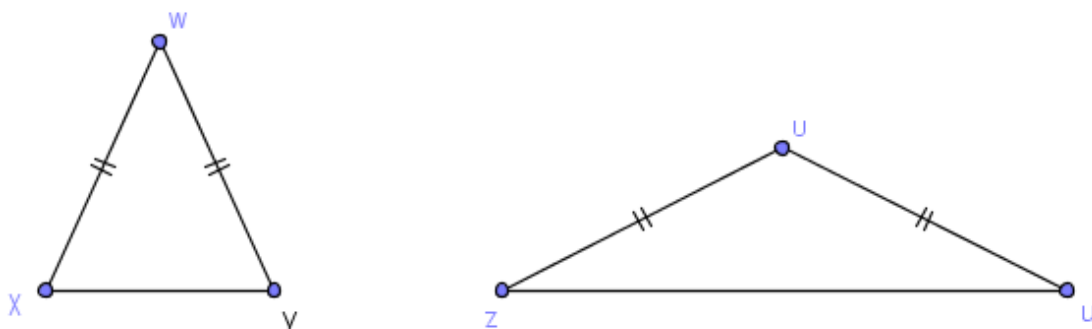
$(0,0) (0,1) \equiv_1 (0,0) (1,0)$ ισχύει για $i=1$ και δεν ισχύει για $i=2$.

➤ **Θα αποδείξουμε ότι η έννοια B μπορεί να καθοριστεί με τους όρους του $\equiv$.**

Ορίζουμε την βοηθητική τετραδική σχέση μεταξύ σημείων (που τα σκεφτόμαστε ανά δυο ως άκρα ευθυγράμμων τμημάτων)

$$xy \leq zu \leftrightarrow \forall v(zv \equiv uv \rightarrow \exists w(xw \equiv yw \wedge yw \equiv uv)) \quad (1)$$

Στην 2-διάστατη γεωμετρία ο ορισμός αυτός δηλώνει ότι: για κάθε σημείο v στην κάθετη διχοτόμο του τμήματος zu , υπάρχει ένα σημείο w στην κάθετη διχοτόμο του τμήματος xy του οποίου η απόσταση από το y είναι ίδια με την απόσταση από το v στο u .

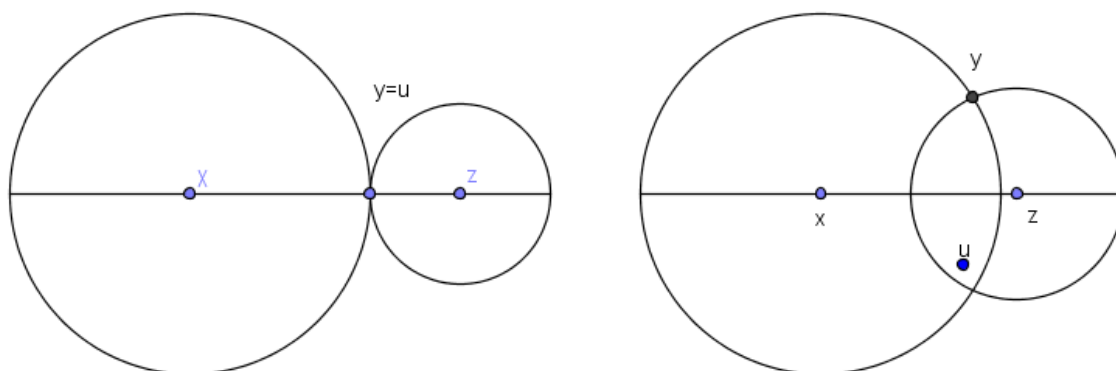


Σχήμα 30 : Ο ορισμός του $\leq$ που αφορά τις ίσες αποστάσεις.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι η παρακάτω πρόταση η οποία είναι σαφώς ένας πιθανός ορισμός του B μέσω του $\equiv$ προέρχεται από την στοιχειώδη Γεωμετρία με την βοήθεια του (1) :

$$B(xyz) \leftrightarrow \forall u (ux \leq xy \wedge uz \leq yz \rightarrow u = y) \quad (2)$$

Στην 2-διάστατη γεωμετρία ο ορισμός αυτός δηλώνει ότι: ο μόνος τρόπος ένα σημείο u να βρίσκεται σε ένα κύκλο με κέντρο x και ακτίνα xy και επίσης σε ένα κύκλο με κέντρο z και ακτίνα zy είναι μόνο αν $y=u$.



Σχήμα 31: Ο ορισμός του «μεταξύ» που αφορά το $\leq$

Σαν συνέπεια του καθορισμού του B μέσω του $\equiv$ μπορούμε να ορίσουμε το $\equiv$ σαν την μόνη αρχική έννοια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να κατασκευάσουμε ένα αξιωματικό σύστημα για αυτή τη Γεωμετρία που να εμπλέκει αποκλειστικά το $\equiv$.

Ένα τέτοιο αξιωματικό σύστημα μπορεί να επιτευχθεί στο αξιωματικό σύστημα του Tarski εξαλείφοντας από αυτό την σχέση B με την βοήθεια των (1) και (2).

Συμπέρασμα:

Ένα τέτοιο αξιωματικό σύστημα θα ήταν μάλλον σύνθετο και αφύσικο από την άποψη του μαθηματικού περιεχομένου των αξιωμάτων του.

Φαίνεται αμφίβολο, ένα αξιωματικό σύστημα που χρησιμοποιεί σαν πρωταρχική έννοια μόνο το $\equiv$, να μπορέσει να ανταγωνιστεί την Ευκλείδεια Γεωμετρία τόσο από άποψη απλότητας όσο και από άποψη σαφήνειας του μαθηματικού της περιεχομένου.

7.4 Η πληρότητα της θεωρίας του Tarski.

Όπως αναφέρεται στο [3] (σελ. 175) ο Tarski το 1926-1927 στην διάλεξή του στο Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας, έδωσε μια αξιωματική ανάπτυξη της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας, από την πλευρά της Ευκλείδειας επιπεδομετρίας, η οποία δεν βασίστηκε σε συνολοθεωρητικές έννοιες αλλά αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της λογικής πρώτης τάξης.

Απέδειξε το 1930 ότι η θεωρία της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είχε επινοήσει, επιδέχεται απαλοισμό ποσοδεικτών.

Από το θεώρημα αυτό φαίνεται να έπονται ως πορίσματα η πληρότητα, η συνέπεια και η αποκρισσιμότητα της θεωρίας του.

Όπως είδαμε και παραπάνω ο Tarski προτείνει μια αξιωματικοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, σε μια γλώσσα με τρεις σχέσεις ερμηνευμένες ως εξής:

- ❖ Η διμελής σχέση = για την ταύτιση δυο σημείων
- ❖ Η τριαδική σχέση **B** του «μεταξύ» (“betweenness”)
- ❖ Η τετραδική σχέση $\equiv$ των ίσων αποστάσεων (“equidistance”) ή της αντιστοιχίας των ευθυγράμμων τμημάτων

Στη γλώσσα αυτή δεν υπάρχουν σταθερές και συναρτησιακά σύμβολα, άρα οι μόνοι όροι είναι οι μεταβλητές. Στη συνέχεια επιδεικνύει μια μέθοδο μετατροπής ενός τύπου της γλώσσας αυτής σε ένα τύπο της γλώσσας της στοιχειώδους άλγεβρας. Με τον τρόπο αυτό δημιουργεί μια αποφαντική μέθοδο για την Ευκλείδεια επιπεδομετρία. Γεγονός που αποδεικνύει την αποκρισσιμότητα και κατά συνέπεια την πληρότητα της θεωρίας.

Επίσης ισχυρίζεται ότι η αποφαντική μέθοδος για την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών μπορεί να επεκταθεί και σε άλλα αλγεβρικά συστήματα που βασίζονται στους πραγματικούς αριθμούς, όπως για παράδειγμα η στοιχειώδης άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών, οπότε με τον ίδιο τρόπο η αποφαντική μέθοδος για την Ευκλείδεια επιπεδομετρία μπορεί να επεκταθεί στην Ευκλείδεια Γεωμετρία των n διαστάσεων.

7.5 Συγκρίνοντας τα αξιωματικά συστήματα των Hilbert –Tarski¹.

Η θεωρία του Hilbert ήταν αυτό που σήμερα ονομάζουμε «δεύτερης τάξης», γιατί τα σύνολα χρησιμοποιήθηκαν ελεύθερα στα αξιώματά του. Τα ευθύγραμμα τμήματα, για παράδειγμα, ορίστηκαν ως σύνολα από δύο σημεία, έτσι όρισε $AB = BA$, από την στιγμή που στο σύνολο $\{A, B\}$ δεν παίζει ρόλο η σειρά των στοιχείων του. Φυσικά, αυτή είναι μια ασήμαντη αποχώρηση από τη γλώσσα «πρώτης τάξης».

1.A CONSTRUCTIVE VERSION OF TARSKI’S GEOMETRY, MICHAEL BEESON
arXiv: 1407.4399v [math.LO] 13 Jul 2014

Όμως τα δύο τελευταία αξιώματά του, το αρχιμήδειο και της συνέχειας, δεν εκφράζονται με την «πρώτης τάξης» γεωμετρική θεωρία. Από την άλλη, ευθείες και επίπεδα, θεωρούνται όχι σαν σύνολα σημείων, αλλά (όπως σήμερα ονομάζονται) ως «πρώτης τάξης αντικείμενα».

Το 1899 η έννοια γλώσσα «πρώτης τάξης», δεν είχε αναπτυχθεί ακόμα και η θεωρία συνόλων ήταν ακόμα αρκετά νέα. Η αντιστοιχία-ταύτιση αντιμετωπίστηκε από τον Hilbert, σαν μια δυαδική σχέση συνόλων από δύο στοιχεία, όχι σαν μια τετραδική σχέση σημείων.

Ο Hilbert όρισε τα ευθύγραμμα τμήματα σαν ζεύγη σημείων (τα άκρα), αν και οι ευθείες είναι πρωταρχικά αντικείμενα. Από την άλλη, μια ημιευθεία είναι το σύνολο όλων των σημείων που βρίσκονται πάνω της, και οι γωνίες είναι σύνολα που αποτελούνται από δύο ημιευθείες.

Έτσι μια γωνία είναι ένα σύνολο από σύνολα σημείων. Έτσι τεχνικά η θεωρία του Hilbert, η οποία συχνά περιγράφεται ως «δεύτερης τάξης», είναι τουλάχιστον «τρίτης τάξης».

Αργότερα, τον 20^ο αιώνα, όταν η έννοια της θεωρίας της «πρώτης τάξης» ήταν ευρέως κατανοητή, ο Tarski διατύπωσε την θεωρία του για την στοιχειώδη γεωμετρία, στην οποία το *αξίωμα της συνέχειας του Hilbert αντικαταστάθηκε με το αξίωμα σχήμα* (δες παράρτημα Ι). Το σύνολο των μεταβλητών του αξιώματος της συνέχειας αντικαταστάθηκε από τύπους «πρώτης τάξης». Ο Tarski απέδειξε ότι η θεωρία του είναι πλήρης: δηλαδή κάθε πρόταση «πρώτης τάξης» μπορεί να αποδειχθεί αυτή ή η άρνηση της από τα αξιώματά του. Ο Tarski προέβη και σε άλλες απλουστεύσεις, κατάλαβε ότι οι ευθείες, οι γωνίες, οι κύκλοι, τα ευθύγραμμα τμήματα και οι ημιευθείες, θα μπορούσαν να θεωρούνται ως βοηθητικά αντικείμενα, επιτρέποντας απλά την κατασκευή νέων σημείων από κάποια δεδομένα σημεία.

Ο Tarski αντικατέστησε το 4^ο και το 5^ο αξιώματα της συμφωνίας ή ταύτισης (μεταφορά γωνίας και το κριτήριο ισότητας τριγώνων πλευρά- γωνία- πλευρά) του Hilbert με ένα κομψό αξίωμα, γνωστό ως αξίωμα των πέντε ευθυγράμμων τμημάτων. Το αξίωμα αυτό είναι μια συγκεκαλυμμένη παραλλαγή του αξιώματος πλευρά- γωνία- πλευρά για την ισότητα τριγώνων.

Στα πρώιμα αξιωματικά του συστήματα ο Tarski συμπεριέλαβε επίσης αξιώματα για το «μεταξύ» και την «συμφωνία ή ταύτιση» τα οποία αποδείχθηκαν περιττά. Το κατόρθωμα των Szmielew και C Gupta ήταν η ανάπτυξη ενός ελάχιστου αριθμού αξιωμάτων για την έννοια του «μεταξύ» και της «συμφωνίας».

Τα διαισθητικά αξιώματα του Hilbert για την έννοια του «μεταξύ» εξαφανίστηκαν, αφήνοντας μόνο το αξίωμα $\neg B(a,b,a)$ και το αξίωμα του Pach και αξιώματα που εγγράφονται ότι η «συμφωνία» είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

Τα αξιώματα του «μεταξύ» και της «συγγραμμικότητας».

Ο Hilbert χρησιμοποίησε την *αυστηρή* σχέση του «μεταξύ» γράφοντας $B(a,b,c)$ όπως αναφέραμε παραπάνω. Η σημασία του είναι ότι τα τρία σημεία είναι συγγραμμικά και διακριτά και ότι το b είναι το μεσαίο από τα τρία. Ο Tarski δεν χρησιμοποίησε τόσο *αυστηρή* σχέση για την έννοια του "μεταξύ" και συμβολικά έγραψε $T(a,b,c)$ από το αρχικό T του ονόματος του.

Ας δούμε τον ορισμό του:

$$T(a,b,c) := \neg (a \neq b \wedge b \neq c \wedge \neg B(a,b,c))$$

Από την άλλη κατεύθυνση η σχέση $B(a,b,c)$ μπορεί να ορισθεί ως:

$$T(a,b,c) \wedge a \neq b \wedge a \neq c$$

Γιατί συνέβη αυτό; *Πιθανώς για να απλοποιήσει τα αξιώματά του και να μειώσει τον αριθμό τους.* Χρησιμοποιώντας T αντί για B κάλυψε διάφορες εκφυλισμένες περιπτώσεις, όπως όταν τα διαγράμματα καταπίπτουν σε γραμμές κλπ.

Για την συγγραμμικότητα έδωσε το παρακάτω ορισμό:

$$Col(a,b,p) : \neg (\neg T(p,a,b) \wedge \neg T(a,p,b) \wedge \neg T(a,b,p))$$

ή ισοδύναμα με όρους του B ,

$$\neg (\neg B(p,a,b) \wedge \neg B(a,b,p) \wedge \neg B(a,p,b) \wedge a \neq p \wedge p \neq b \wedge a \neq b)$$

Παρατηρούμε ότι η συγγραμμικότητα δεν ορίζεται με την βοήθεια της διάζευξης.

Το αξίωμα του Pasch.

Το 5^ο αξίωμα του Hilbert για την έννοια του «μεταξύ», συχνά ονομάζεται αξίωμα του Pasch, γιατί μελετήθηκε από τον Pasch το 1882.

Ο Tarski θεώρησε δύο διακριτές εκδοχές του αξιώματος του Pasch γνωστές ως εσωτερική και εξωτερική (δες παράρτημα I). Η εξωτερική μορφή του αξιώματος του Pasch ήταν ένα αξίωμα σε όλες τις εκδοχές της θεωρίας του Tarski μέχρι το 1965, όταν αποδείχθηκε από την εσωτερική μορφή του αξιώματος στην διατριβή του Gupta. Μετά από αυτό, ο Szmielew επέλεξε να αποδεχθεί την εσωτερική μορφή του αξιώματος Pasch ως αξίωμα αντί αυτού της εξωτερικής μορφής, αν και ο Tarski διαφώνησε με αυτό.

Δεν είναι ξεκάθαρο γιατί έκανε την διάκριση αυτή. Ένας λόγος μπορεί να είναι ότι διακριτές εκδοχές είναι έγκυρες ακόμα και στον τρισδιάστατο χώρο, σε αντίθεση με το αξίωμα του Pasch όπου εκεί δεν ισχύει. Επίσης η απλούστερη λογική εσωτερική μορφή του αξιώματος είναι σημαντική στην κατασκευαστική γεωμετρία, αλλά για Tarski μπορεί απλά να ήταν ένα θέμα "κομπότητας".

Οι έννοιες «ίδια πλευρά» και «αντίθετη πλευρά μιας ευθείας γραμμής».

Οι έννοιες αυτές χρειάζονται παρακάτω και είναι πολύ ενδιαφέρουσες στην σύγκριση των γεωμετριών του Hilbert και του Tarski.

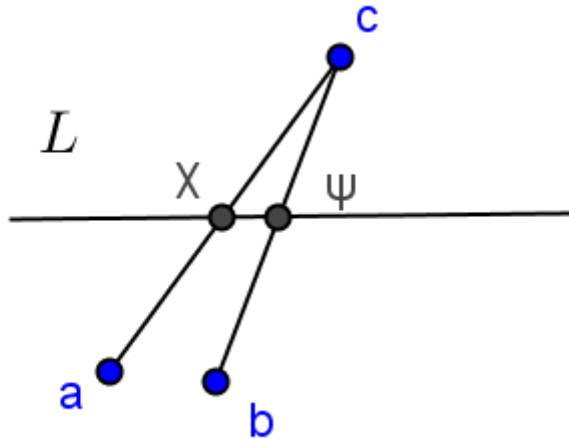
Ένα από τα αξιώματα του Hilbert ήταν το *αξίωμα διαχωρισμού του επιπέδου*, σύμφωνα με το οποίο μια ευθεία γραμμή χωρίζει ένα επίπεδο σε (ακριβώς) δύο περιοχές. Έστω δύο σημεία a και b που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία L , θα βρίσκονται στις *αντίθετες πλευρές* της L εάν $a \neq b$ και υπάρχει ένα σημείο της L μεταξύ του a και του b , τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα ab να τέμνει την L .

$$OS(a,b,L) := \exists x(on(x,L) \wedge B(a,x,b))$$

Ο ορισμός του να βρίσκονται στην *ίδια πλευρά* της L τα σημεία a και b , ήταν ότι το ευθύγραμμο τμήμα ab δεν τέμνει την L .

$$SS(a,b,L) := \forall x \neg (B(a,x,b) \wedge on(x,L))$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του Tarski έχουμε ότι τα σημεία a και b , βρίσκονται στην *ίδια πλευρά* της L (σχήμα 29), αν φαίνονται από ένα σημείο c από την άλλη πλευρά της L .



Σχήμα 32

Το σημαντικό του ορισμού αυτού είναι ότι ισχύει σε περισσότερες των δύο διαστάσεων.

Το αξίωμα των παραλλήλων σύμφωνα με τον Hilbert και τον Tarski:

Όπως είναι γνωστό υπάρχουν πολλές ισοδύναμες προτάσεις για το αξίωμα των παραλλήλων στην κλασική γεωμετρία.

Το αξίωμα των παραλλήλων του Hilbert αναφέρει ότι: «δεν υπάρχουν περισσότερες από μια παράλληλες σε μια ευθεία από ένα σημείο εκτός της ευθείας αυτής». Το αντίστοιχο αξίωμα του Tarski, είναι μια πιο περίπλοκη πρόταση. Υπάρχουν τρεις διαφορετικές εκδοχές από τον Tarski για το αξίωμα αυτό (δες παράρτημα I). Στο γράμμα που έγραψε ο Tarski στον Schwabhauser το 1978 αναφέρει τις τρεις διαφορετικές εκδοχές, αλλά δεν κάνει καμιά αναφορά στην ισοδυναμία αυτών. Η 3^η εκδοχή δεν είναι ισοδύναμη με το αξίωμα των παραλλήλων, αλλά με τον ασθενέστερο ισχυρισμό ότι: « το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δυο ορθές».

7.6 Ιστορικές παρατηρήσεις που αφορούν την ανάπτυξη της Γεωμετρίας στη βάση του αξιωματικού συστήματος του Tarski.

Στις αρχές της δεκαετίας του 1960 οι Tarski και Szmielew αποφάσισαν να ενώσουν τις δυνάμεις τους για να ετοιμάσουν μια ολοκληρωμένη πραγματεία πάνω στα θεμέλια της Γεωμετρίας.

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα έργα αυτού του είδους, το θέμα της εργασίας τους ήταν η μελέτη των διαφόρων συστημάτων της γεωμετρίας, *όπως η παραβολική (Ευκλείδεια), η ελλειπτική και η υπερβολική*, που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της σύγχρονης μαθηματικής λογικής και διερευνήθηκαν μέσω σύγχρονων μεταμαθηματικών μεθόδων.

Ωστόσο η πραγματική ανάπτυξη της γεωμετρίας σε αυτή τη βάση διαφέρει σημαντικά από εκείνες που παρουσίασε ο Tarski στα μαθήματα του στην τάξη. Αν και η παρουσίαση αυτή ακολούθησε κατ'ουσίαν τις κλασικές γραμμές του έργου του Hilbert, η πραγματεία ενσωματώνει μια σειρά από πρωτότυπες ιδέες του Szmielew οι οποίες έχουν σαν αποτέλεσμα μια νέα, συνοπτική και κομψή παρουσίαση. Η πραγματεία αυτή χρησίμευσε σαν βάση για τα μαθήματα πάνω στα θεμέλια της γεωμετρίας, που δόθηκαν αργότερα από τον Szmielew στο Πανεπιστήμιο της Βαρσοβίας. Χρησιμοποιήθηκε επίσης από τον Schwabhauser στις διαλέξεις του στην Γερμανία.

Για διάφορους λόγους η πραγματεία δεν επιδιώχθηκε να ολοκληρωθεί και ο πρόωρος όμως θάνατός του Szmielew το 1967 οδήγησε την εργασία του στο τελικό κλείσιμο της. Εντελώς ανεξάρτητα από τον Szmielew και τον Tarski, ο Schwab Hauser άρχισε να εργάζεται πάνω στην πραγματεία αυτή, και αρκετά χρόνια αργότερα εξέδωσε το 1977 με την σύμφωνη γνώμη του Tarski το πρώτο μέρος της, ως κοινό έργο, στο οποίο εμπλέκονται και οι τρεις συγγραφείς,

Κεφάλαιο 8

Γεωμετρία και αξιωματικοποίηση σε μια διδακτική προοπτική.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε πως τα «νέα» μαθηματικά επηρέασαν τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών τόσο στις χώρες του εξωτερικού όσο και στην Ελλάδα. Επίσης θα αναφέρω τις προσωπικές μου εμπειρίες από την διδασκαλία μου σε γυμνάσια και λύκεια της περιοχής μας.

Από τις γραπτές αναφορές δυο σημαντικών ανδρών που απέχουν αιώνες μεταξύ τους, θα φανεί η κεντρική θέση που κατέχει η Γεωμετρία στα Μαθηματικά και ο μοναδικός ρόλος που έχει παίξει στην εξέλιξη των εννοιών των μαθηματικών συστημάτων και της Μαθηματικής αλήθειας.

Ο Galileo έγραψε: *«το σύμπαν είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών και τα χαρακτηριστικά του είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα χωρίς τα οποία είναι ανθρωπίνως αδύνατο να καταλάβουμε το παραμικρό από αυτό και χωρίς αυτά ο καθένας περιπλανιέται σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο»* (IL Saggiatore ,1623)

Τριακόσια χρόνια αργότερα, ο Hilbert έγραψε: *«Η έννοια είναι σημαντική στα Μαθηματικά και η Γεωμετρία είναι μια σημαντική πηγή εκείνης της έννοιας»*(Η λογική θεμελίωση των Μαθηματικών, 1923)

Ο 19^{ος} αιώνας υπήρξε ο χρυσός αιώνας των μαθηματικών.

Μια από τις σημαντικότερες ποιοτικά ιδέες και έννοιες που αναπτύχθηκαν τον αιώνα αυτό και έμελλε να παίξει καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση των μαθηματικών της εποχής μας είναι: *η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία* [8,σελ. 35]

Τα αξιώματα της μέχρι τότε γνωστής Γεωμετρίας έγιναν για τους Μαθηματικούς απλές υποθέσεις, για την διαισθητική αλήθεια των οποίων δεν χρειάζονταν πλέον να νοιάζονται.

Η παραδοσιακή πίστη στην απόλυτη αλήθεια των μαθηματικών άρχισε να κλονίζεται και το εκκρεμές έγερνε στο άλλο άκρο καθώς ένα πλήθος γεωμετριών αναπτύχθηκε. Με τις εργασίες των Felix Klein και Hilbert διαπιστώθηκε ότι πολλά μαθηματικά συστήματα μπορούν να περιγραφούν μόνο από τα αξιώματά τους, χωρίς να χρειάζεται παραπέρα περιγραφή του συστήματος και τα οποιαδήποτε άλλα γεγονότα μπορούν να εξαχθούν από αυτά (φορμαλισμός).

Συγκεκριμένα ο Hilbert όπως αναφέραμε και πιο πάνω, χρησιμοποίησε την μέθοδο της πλήρους τυποποίησης, κατά την οποία οι προτάσεις του αξιωματικού συστήματος θα χρησιμοποιούνταν σαν αλυσίδα από σύμβολα άνευ περιεχομένου και ο χειρισμός τους θα ακολουθούσε μόνο τους τυπικούς κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων. Μόνο η παράδοση, υποστήριζε, μας εμποδίζει να χρησιμοποιήσουμε άλλες λέξεις για τα γεωμετρικά αντικείμενα όπως σημείο και ευθεία.

Η χρήση εικόνων ή σχημάτων ή ακόμα της διαίσθησης ή της διανοητικής φαντασίας είναι εξωμαθηματικές λειτουργίες.

Ο φορμαλιστής λοιπόν θεωρεί ότι όλα αυτά δεν πρέπει να παρουσιάζονται σε ένα μαθηματικό βιβλίο (ενδεχομένως ούτε και μέσα στην τάξη).

Βέβαια το εντυπωσιακότερο δείγμα φορμαλισμού στη διδασκαλία των μαθηματικών, ήταν το έργο της ομάδας με το συλλογικό όνομα Nicolas Bourbaki που είχε θέσει βασικό σκοπό της την επαναδιατύπωση, κωδικοποίηση και ενοποίηση της μαθηματικής γνώσης με την βοήθεια μιας τυποποιημένης μαθηματικής γλώσσας.

Πολλοί πανεπιστημιακοί ενσωμάτωσαν το Μπουρμπακικό στυλ στις παραδόσεις και τα συγγράμματα τους, προξενώντας σοκ στους μαθητές τους αφού ήταν σε πλήρη αντίθεση με το πνεύμα των σχολικών μαθηματικών. Στο πνεύμα αυτό κινήθηκε η μεταρρύθμιση στη μέση εκπαίδευση που άρχισε την δεκαετία του 1960 ονομάστηκε κίνηση των μοντέρνων μαθηματικών.

Ουσιαστικά αυτό που ενδιέφερε τους πανεπιστημιακούς ήταν η εύρεση και προετοιμασία μαθηματικών ταλέντων που θα ασχολούνταν με την έρευνα στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά αγνοώντας εντελώς τους λιγότερο προικισμένους ή αδύνατους μαθητές.

Αξίζει να αναφέρουμε εδώ ότι το καθοριστικό ερέθισμα κατά γενική ομολογία για να εκδηλωθεί αυτή η μεταρρύθμιση στο δυτικό κόσμο και αργότερα σε παγκόσμιο επίπεδο, ήταν η εκτόξευση από τους Σοβιετικούς του δορυφόρου Sputnik 1, (Νοέμβριος 1957). Οι Αμερικανοί που πίστευαν ότι έχουν μέχρι την στιγμή εκείνη το προβάδισμα στο τεχνολογικό τομέα, άρχισαν να ξοδεύουν εκατομμύρια δολάρια για την βελτίωση της εκπαίδευσής τους και ειδικότερα στο σχεδιασμό νέων μαθηματικών προγραμμάτων. [8,σελ. 56]

Τα μαθηματικά βιβλία πλέον είχαν περιεχόμενο με βάση τη θεωρία των συνόλων και έδιναν το μεγαλύτερο βάρος στη δομή παρά στην επίλυση προβλημάτων. Ειδικά στην Γεωμετρία είχαμε: την παραγνώριση του φυσικού χώρου ως πηγή των γεωμετρικών ιδεών. Για παράδειγμα στην κλασική γεωμετρία θεωρούμε: «δύο σχήματα σαν ίσα όταν κατάλληλα τοποθετούμενα ταυτίζονται».

Στα μοντέρνα βιβλία τα σχήματα εμφανίζονται συχνά σαν σημειosύνολα.

Όμως δυο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Άρα δύο διαφορετικά σχήματα δεν μπορεί να είναι ίσα. Στη θέση της ισότητας εμφανίζεται η έννοια της «ισοδυναμίας». Η ισότητα όμως είναι άμεσα αντιληπτή ενώ η ισοδυναμία απαιτεί λογική διεργασία.

Άλλωστε όπως ανέφερε και ο (Rene Thom) [18]:

«τα μαθηματικά είναι και γνωστικά εφόδια για τη ζωή και προφανώς δεν θα κάνει πράξεις, στην ενεργό ζωή του, ο σημερινός μαθητής με την θεωρία ομάδων !»

Χαρακτήρισε δε ολέθρια την αντικατάσταση της γεωμετρίας από την άλγεβρα και σημείωσε: *«στην άλγεβρα τα ζητήματα είναι είτε τετριμμένα είτε απλησίαστα για τους μαθητές, ενώ τα γεωμετρικά προβλήματα παρουσιάζουν μια πλατιά σειρά προκλήσεων»*

8.1 Η ταύτιση σχημάτων του Ευκλείδη και η αντίστοιχη “congruence” του Hilbert [10].

Αξίζει να αναφερθεί και ο απόηχος του Hilbert στη σχολική Γεωμετρία, την περίοδο της μεταρρύθμισης των σύγχρονων Μαθηματικών, τις δεκαετίες 1960 και 1970. Τότε συντελέστηκαν οι μεγαλύτερες και ποιοτικά βαθύτερες αλλαγές στα σχολικά μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στις περισσότερες χώρες του κόσμου.

Θα αναφέρουμε για παράδειγμα τον ορισμό της λέξης «*congruence*» –αντιστοιχία – ταύτιση - στα σχολικά μαθηματικά. Ο Ευκλείδης είχε μια γενική αντίληψη της «congruence» μέσω της οποίας θεωρούσε ότι τα γεωμετρικά σχήματα μπορούν να μετακινηθούν χωρίς να αλλάζει το σχήμα τους ή το μέγεθος τους.

Στο 7^ο αξίωμα του ισχυρίζεται ότι: «και αυτά που εφαρμόζουν το ένα πάνω στο άλλο, είναι ίσα μεταξύ τους». Χρησιμοποίησε το αξίωμα για να δικαιώσει την ιδέα ότι ίσα σχήματα μπορούν να συμπίπτουν. Το αξίωμα χρησιμοποιήθηκε πολύ γρήγορα για να συμπεράνει την ταύτιση των τριγώνων με το κριτήριο Π-Γ-Π. Από την στιγμή που η κίνηση αυτή σκόπευε να τοποθετήσει το ένα σχήμα πάνω στο άλλο, αυτή η αποδεικτική μέθοδος ονομάστηκε “superposition” δηλ. υπέρθεση.

Ο Hilbert θεώρησε την «congruence» σαν ένα ακαθόριστο όρο και κατασκεύασε θεωρήματα που αφορούσαν την «congruence» των ευθυγράμμων τμημάτων, άλλα θεωρήματα που αφορούσαν την «congruence» των γωνιών και ακόμα άλλα θεωρήματα που αφορούσαν την «congruence» των τριγώνων. Έτσι, αν και χρησιμοποιούμε την απλή φράση “is congruent to” και το απλό σύμβολο $\equiv$, ο Hilbert ουσιαστικά είχε τρία διαφορετικά είδη ταύτισης.

Όχι πολύ αργότερα από την εργασία του Hilbert, ο A. Einstein

έδωσε στους Γεωμέτρους λόγο για την έρευνα της υπέρθεσης, καθώς απέδειξε ότι «τα μήκη των κινούμενων αντικειμένων γίνονται αντιληπτά διαφορετικά (are perceived differently) από ένα ακίνητο παρατηρητή καθώς και ότι δεν υπάρχουν στιγμιαίες μετακινήσεις από την στιγμή που τα αντικείμενα δεν μπορούν να μετακινηθούν ταχύτερα από την ταχύτητα του φωτός».

Στα τέλη του 1950, ο χαρακτηρισμός του Ευκλείδη για την ταύτιση σαν υπέρθεση εμφανίζεται σε όλα τα γεωμετρικά βιβλία και χρησιμοποιείται στην απόδειξη των κριτηρίων ισότητας τριγώνων.

Όπως ο Hilbert, αυτοί που έγραψαν τα αναμορφωμένα κείμενα στα τέλη του 1950 διάλεξαν να διακρίνουν την «congruence» των ευθυγράμμων τμημάτων, την «congruence» των γωνιών και την «congruence» των τριγώνων. Το γεωμετρικό κείμενο του σχολείου “School Mathematics Study Group” (MSG), από τα μεγαλύτερα και το πιο διάσημα σχέδια των «νέων Μαθηματικών», ξέφυγαν από την παράδοση χρησιμοποιώντας ένα συνδυασμό από ιδέες του Hilbert και του G. D. Birkhoff, για να ορίσει την «congruence» με όρους των πραγματικών αριθμών.

Έτσι προέκυψαν οι (MSG) ορισμοί :

- Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι «congruent» αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μήκος.
- Δύο γωνίες είναι «congruent» αν και μόνο αν έχουν το ίδιο μέτρο.
- Δύο τρίγωνα είναι «congruent» και μόνο αν και μόνο αν υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών του τέτοια ώστε οι τρεις αντίστοιχες πλευρές να είναι «congruent» και οι τρεις αντίστοιχες γωνίες να είναι «congruent». Μερικά βιβλία για να αποφύγουν τους τρεις ορισμούς υιοθέτησαν τον παρακάτω ορισμό:

«Δύο τρίγωνα είναι «congruent» και μόνο αν και μόνο αν υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των κορυφών του τέτοια ώστε οι τρεις αντίστοιχες πλευρές να έχουν το ίδιο μήκος και οι τρεις αντίστοιχες γωνίες να έχουν το ίδιο μέτρο». Στα τέλη του 1960 αυτοί οι δυο ορισμοί της ταύτισης των τριγώνων έγιναν κοινή έννοια στα γεωμετρικά κείμενα στις Η. Π. Α.

8.2 Η αντίστοιχη Ελληνική εμπειρία.

Γενικότερα θα λέγαμε ότι και στη χώρα μας, σε ότι αφορά την μαθηματική εκπαίδευση (προγράμματα, βιβλία, οδηγίες), έγινε ότι και στις άλλες χώρες με μια υστέρηση φάσης, αλλά βασικά έχουμε παρόμοιους προβληματισμούς.

Από τα πιο παραδοσιακά μαθηματικά, την Πρακτική Αριθμητική, την Άλγεβρα, την Γεωμετρία, την Τριγωνομετρία, περάσαμε στα μέσα της δεκαετίας του 1960 στα «νέα ή μοντέρνα» μαθηματικά με την Θεωρία Συνόλων, τον Προτασιακό Λογισμό κλπ.

Στην Ελλάδα για προφανείς ιστορικούς και πολιτιστικούς λόγους συνεχίζεται ειδικά στη γεωμετρία μια παράδοση που προσεγγίζει την παρακάτω λύση:

Εξακολουθούμε να επιχειρούμε τη διδασκαλία ενός αξιωματικού ή ψευδό-αξιωματικού μαθήματος σχολικής Γεωμετρίας, το οποίο στηρίζεται είτε σε τροποποίηση των Στοιχείων του Ευκλείδη για παράδειγμα αξιωματική θεμελίωση τύπου Pogorelon [20] που χρησιμοποιήθηκε το 1988 για τη συγγραφή των διδακτικών εγχειριδίων Γεωμετρίας, είτε π.χ. στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

Είχε λοιπόν ενταχθεί επίσημα, το αξιωματικό σύστημα του Hilbert ως βάση της σχολικής Γεωμετρίας του Λυκείου και αυτό προκάλεσε έντονες αντιδράσεις από τους μαθηματικούς της εκπαίδευσης.

Η αλήθεια είναι ότι οι ιθύνοντες εισήγαγαν τις συγκεκριμένες ιδέες μ' ένα καθαρά *δογματικό τρόπο*.

Δεν υπήρξε καμία διδακτική ή επιστημολογική ανάλυση και προετοιμασία και καμία επιμορφωτική προσπάθεια των εκπαιδευτικών και δεν ήταν διαθέσιμες σχετικές δημοσιεύσεις στην Ελληνική βιβλιογραφία που να φωτίζουν το γνωστικό και διδακτικό παρασκήνιο αυτής της προσέγγισης στη σχολική μας Γεωμετρία.

Από τότε υπάρχει μια νεφελώδης κατάσταση στην υποδομή της σχολικής μας Γεωμετρίας, με μια πολύ θολή και υπονοούμενη αντίληψη περί της, δήθεν, Ευκλείδειας υπόστασης της.

Το χειρότερο είναι ότι ούτε τότε, ούτε τώρα, υπάρχει κάποιο στοιχειώδες επίπεδο κατανόησης του επιστημολογικού και διδακτικού υπόβαθρου των σύγχρονων προσανατολισμών της σχολικής Γεωμετρίας και των σύγχρονων Μαθηματικών γενικότερα.

Σύμφωνα με το άρθρο των Τάσου Πατρώνη και Γιάννη Θωμαΐδη [7], η γεωμετρία διδάσκεται με μια μοναδική και σχολαστικά αφαιρετική μορφή και μέσω ενός μοναδικού επίσημου σχολικού βιβλίου σε όλους τους Έλληνες μαθητές (16-17 ετών) στις δυο πρώτες τάξεις του Λυκείου. Υπάρχει μια μακρά παράδοση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στην Ελλάδα από την αρχή του 19^{ου} αιώνα με τα στοιχεία του Legendre σαν βασικό μοντέλο της «κλασικά συνθετικής» έκθεσης.

Όμως η παρούσα μορφή της σχολικής γεωμετρίας είναι συνέπεια μερικών κρίσιμων επιλογών που έγιναν κατά την μεταρρύθμιση της δεκαετίας του 1960 στην Ελλάδα. Σύμφωνα με τον Τουμάση (1990) κατά την διάρκεια αυτής της περιόδου το μάθημα της θεωρητικής γεωμετρίας όχι μόνο αντιστάθηκε αλλά και ενδυναμώθηκε σε περιεχόμενο με έννοιες που προστέθηκαν από τα «μοντέρνα» μαθηματικά.

Ως αποτέλεσμα είχαμε την μετάβαση από την «κλασικά συνθετική» έκθεση του Legendre, στο μοντέρνο αξιωματικό σύστημα γεωμετρίας του Hilbert, με συνέπεια *η σχολική γεωμετρία να γίνει ένα δύσκολο και παραδόξως μη ελκυστικό μάθημα για τους μαθητές.*

Η κατάσταση άλλαξε στα τέλη της δεκαετίας του 1970 με την απλοποίηση του περιεχομένου της και την περικοπή της διδασκαλίας της από τρία σε δύο έτη. Τότε επίσης υπήρξε μια επιστροφή στην «κλασικά συνθετική» έκθεση του Legendre, εισάγοντας λιγότερα αξιώματα σε σχέση με το αξιωματικό σύστημα γεωμετρίας του Hilbert και δικαιολογώντας τα αξιώματα μέσω της εμπειρίας ή της διαίσθησης.

Έτσι δημιουργήθηκε για το σχολείο ένα υβριδικό αξιωματικό σύστημα γεωμετρίας. Αλλά στα τέλη της δεκαετίας του 1980 υπήρξε μια *νέα αλλαγή* που προσπάθησε να καθορίσει τις προηγούμενες ασυνέπειες.

Ήταν η αποδοχή του αξιωματικού συστήματος του Pogorelov το οποίο «αριθμητικοποιεί» τη σχολική γεωμετρία *εισάγοντας* το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων και το μέτρο των γωνιών σαν δοσμένες συναρτήσεις με μεταβλητές μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η I.C.M.I. (1986 σελ. 60) πρότεινε το 1990 μια *εναλλακτική παραλλαγή του Ευκλείδη* βασισμένη στο αξιωματικό σύστημα του Pogorelov (δες παράρτημα ΙΙΙ) ως μια πρωταρχική αλλαγή στην διδασκαλία της γεωμετρίας.

Έτσι είχαν την ελπίδα ότι η προηγούμενη εμπειρία των μαθητών στην μέτρηση μηκών και γωνιών θα αντανakλόταν και στα αξιώματα.

Είναι βέβαια σημαντικό να γνωρίζουμε αν αυτή η προσδοκία εκπληρώθηκε ή αν μπορεί να εκπληρωθεί στη διδασκαλία της γεωμετρίας.

Τίθενται όμως και τα παρακάτω ερωτήματα :

1. Ποια είναι η αίσθηση και η σημασία της «αριθμητικοποίησης» της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ;

2. Συγκρίνοντας τα δυο είδη διδασκαλίας τι καινούργιο έχει να προσφέρει η «αριθμητικοποίηση» της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ;

Τα ερωτήματα αυτά δύσκολα ερευνώνται και απαντώνται.

Πιστεύουμε λοιπόν τελικά ότι το πρόβλημα διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αναχθεί στην αναζήτηση της «ιδανικής» αξιωματικής θεμελίωσης και του «ιδανικού» διδακτικού βιβλίου, έτσι ώστε να μετατοπίζεται από ζήτημα μάθησης σε ζήτημα πολιτικής της διδασκαλίας του μαθήματος της Γεωμετρίας.

Θα αναφέρουμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα από εκδόσεις βιβλίων στο μέσον της δεκαετίας του 1970, όπου είναι φανερό η προσπάθεια εισαγωγής των «νέων» μαθηματικών

Παράδειγμα από την Άλγεβρα:

Στο βιβλίο «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ – ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ – ΤΕΥΧΟΣ Α' - Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ – Δ. Α. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ – Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ» έκδοση 1978.

Εκεί υπάρχει το κεφάλαιο των Άλγεβρικών Δομών στο οποίο αναφέρεται:

Στις προηγούμενες τάξεις ορίσαμε διάφορα σύνολα, διάφορες πράξεις σε αυτά τα σύνολα, οι οποίες μάλιστα στα σύνολα αυτά είχαν και κοινές ιδιότητες. Γεννιέται το ερώτημα αν μπορούμε να ταξινομήσουμε αυτά τα διάφορα σύνολα με βάση τις ιδιότητες των πράξεων, με τις οποίες είναι εφοδιασμένα και αν μια τέτοια ταξινόμηση θα ήταν χρήσιμη.

Για την αντιμετώπιση αυτού του θέματος η γνωστή αξιωματική μέθοδος εφαρμόζεται με επιτυχία και μάλιστα με πολλά οφέλη:

ενιαία γλώσσα, επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, εφαρμογές σε άλλες επιστήμες κλπ. Εδώ μπορούμε δούμε μια τυπική αξιωματική βάση (δηλαδή προτάσεις που δεχόμαστε χωρίς απόδειξη), στον ορισμό της ομάδας.

Ορισμός: Ονομάζουμε ομάδα μη κενό σύνολο G εφοδιασμένο με μία πράξη $*$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

Α. Η πράξη $*$ είναι «εσωτερική», δηλαδή το αποτέλεσμα της σε δύο τυχόντα στοιχεία του συνόλου G είναι στοιχείο του συνόλου G . (το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πράξη).

Β. Η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική δηλαδή $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ για όλα τα στοιχεία $\alpha, \beta, \gamma \in G$.

Γ. Υπάρχει ένα στοιχείο e του G (ουδέτερο στοιχείο) τέτοιο ώστε $e * \alpha = \alpha * e = \alpha$ για κάθε στοιχείο α του G .

Δ. Για κάθε $\alpha \in G$ υπάρχει ένα στοιχείο α^{-1} που ανήκει στο G (αντίστροφο στοιχείο του α) με την ιδιότητα $\alpha^{-1} * \alpha = \alpha * \alpha^{-1} = e$.

Τι διαφέρει από τη γνωστή μας αξιωματική βάση του Ευκλείδη;

Εδώ οι ορισμοί δεν υπάρχουν, η πράξη δεν υπάρχει, έχουμε απλά στοιχεία ενός συνόλου και τα αξιώματα είναι ιδιότητες της πράξης. Είναι αυτό που λέμε μαθηματική ελευθερία, όπου τα «μαθηματικά ασχολούνται με αυθαίρετα σύμβολα, άνευ νοήματος, δεν είναι τώρα σημεία ή ευθείες όπως στην αξιωματική βάση του Ευκλείδη, οι μαθηματικοί κατασκευάζουν τους κανόνες χειρισμού τους (αφηρημένα αξιώματα) και η ερμηνεία ακολουθεί μάλλον παρά προηγείται των μαθηματικών χειρισμών». Η ομάδα μπορεί να περιγράψει τους ακέραιους αριθμούς, αλλά και τους τετραγωνικούς πίνακες, τις μεταθέσεις των στοιχείων ενός συνόλου, τους μιγαδικούς εκτός από το μηδέν και άλλα διάφορα. Αυτά είναι τα μοντέλα της.

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία υπάρχουν αρκετά αξιωματικά συστήματα, ελάχιστα όμως θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπου εκτός από την αυστηρότητα μας ενδιαφέρει, κυρίως κατά πόσο το αξιωματικό σύστημα είναι συμβατό με τις βασικές παιδαγωγικές αρχές, που θεωρητικά τουλάχιστον, πρέπει να διέπουν την εικόνα των σχολικών βιβλίων. Για παράδειγμα το πλέον γνωστό και ίσως το πλέον συγγενικό με το πνεύμα των στοιχείων του Ευκλείδη, το αξιωματικό σύστημα του Hilbert ποτέ δεν λειτούργησε θετικά, όποτε έγινε προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί στα βιβλία της Γεωμετρίας του Λυκείου. Φθάσαμε λοιπόν σε καταστάσεις, όπου λόγω της μη ευκαμψίας και λειτουργικότητας του αξιωματικού συστήματος του Hilbert, οι συγγραφείς αναγκάστηκαν να εισάγουν «νέα αξιώματα», όπως π.χ. «κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα μόνο μέσο», αφού δεν μπορούσαν, βάσει των αξιωμάτων που είχαν εισαγάγει, να αποδείξουν την πρόταση αυτή. Για παράδειγμα στη σελίδα 11 του Σχολικού βιβλίου «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Γενικού Λυκείου, έκδοση 2013» διαβάζουμε: «Δεχόμαστε ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο».

Παράδειγμα από την Γεωμετρία :

Στο βιβλίο «ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, Α' ΛΥΚΕΙΟΥ, Δ. ΠΑΠΑΜΗΧΑΗΛ – Α. ΣΚΙΑΔΑ » έκδοση 1976 αναφέρεται :

Η Θεωρητική Γεωμετρία θεμελιώθηκε για πρώτη φορά σε καθαρή επιστήμη από τον Έλληνα μαθηματικό Ευκλείδη (~ 300 π.Χ.).

Σήμερα η Ευκλείδειος Γεωμετρία θεμελιώνεται με ένα σύστημα αξιωμάτων που πρότεινε ο Hilbert. Από τα αξιώματα αυτά εδώ θα αναφέρουμε εκείνα που είναι απαραίτητα για ένα σχολικό εγχειρίδιο (σελ. 8).

Στην σελίδα του συγκεκριμένου βιβλίου (σελ 9) αναφέρονται βασικές προτάσεις για την ευθεία. Αναφέρει ότι: «ορισμένα υποσύνολα του γεωμετρικού χώρου τα ονομάζουμε ευθείες και ότι μια ευθεία είναι γνήσιο υποσύνολο του γεωμετρικού χώρου».

Το επίπεδο λοιπόν θεωρείται σαν σύνολο σημείων.

Διατυπώνει τα αξιώματα :

Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει σε δοσμένη ευθεία (I)

Δύο σημεία ανήκουν σε μια και μόνο σε μια ευθεία (II)

Σε κάθε ευθεία ανήκουν δυο τουλάχιστον σημεία (III)

Αν σε μια ευθεία σημειώσουμε δυο σημεία A και B υπάρχει :

1. ένα τουλάχιστον σημείο της Δ μεταξύ των A και B.
2. ένα τουλάχιστον σημείο της E τέτοιο ώστε το B να είναι μεταξύ των A και E.
3. ένα τουλάχιστον σημείο της Z τέτοιο ώστε το A να είναι μεταξύ των Z και B.(IV) (Αξίωμα διάταξης)

Παρατηρούμε ότι η σχέση του «μεταξύ» είναι πρωταρχική δηλαδή ο Hilbert δεν κάνει καμία προσπάθεια να την ορίσει άμεσα.

8.3 Διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο μέσα από τις προσωπικές εμπειρίες των τελευταίων δέκα ετών στο Ελληνικό Σχολείο.

Ας δούμε στην αρχή τις οδηγίες του *Παιδαγωγικού Ινστιτούτου του Υπουργείου Παιδείας* [6] προς τους εκπαιδευτικούς, για την διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας.

Γενικά προτείνεται «η διδακτέα ύλη να δίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιδιώκεται πρώτα από όλα η ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας και της δημιουργικότητας του μαθητή».

Επίσης αναφέρει ότι βασικό έργο της Γεωμετρίας είναι *η αφαιρετική –συνθετική σκέψη, τόσο για τον ακριβή προσδιορισμό των εννοιών, όσο και για τη χρήση της λογικής στην αποδεικτική διαδικασία.*

Οφείλει δηλαδή να οδηγήσει τους μαθητές στον επιστημονικό τρόπο σκέψης, τον ορθό λόγο, εφαρμοσμένο σε ένα προνομιακό αντικείμενο κοινό σε όλους, *την αίσθηση και οργάνωση του χώρου.*

Ειδικότερα στο Γυμνάσιο επιδιώκεται:

- (1) Η εμπέδωση και συμπλήρωση της ύλης που διδάχθηκε στο Δημοτικό
- (2) Ο εμπλουτισμός των εμπειριών τους με εφαρμογές της καθημερινής ζωής, ώστε να αποκτήσουν θετική στάση στα Μαθηματικά
- (3) Η εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία και η συνειδητοποίηση ότι αυτή αποτελεί και άμεσο τρόπο για την επαλήθευση γενικών νόμων.

Όμως στο Γυμνάσιο δεν υπάρχουν ξεχωριστά εγχειρίδια για τη Γεωμετρία αλλά τα θέματα της γεωμετρίας συμπεριλαμβάνονται σε βιβλία με γενικό τίτλο Μαθηματικά Γυμνασίου. Αυτό έχει αποτέλεσμα να θεωρούν οι μαθητές την γεωμετρία σαν υποδεέστερο μάθημα σε σχέση με την άλγεβρα.

Στο Γυμνάσιο κυριαρχεί η εποπτεία σε μεγάλο βαθμό και υποβιβάζεται η συλλογιστική διαδικασία για τις αποδείξεις. Ξεκινάμε από τις ειδικές περιπτώσεις που είναι γνωστές από την εμπειρία των μαθητών και καταλήγουμε στο γενικό συμπέρασμα (επαγωγική απόδειξη). βέβαια και κάποιες αποδείξεις διάσπαρτες στις διάφορες ενότητες και δημιουργείται η εντύπωση της συνύπαρξής τους μεταξύ άλλων γνώσεων που παρέχει το σχολικό βιβλίο. Για τις αποδείξεις τους χρησιμοποιούν κανόνα, μοιρογνωμόνιο και χρησιμοποιούν εκφράσεις όπως: « μέτρησα και είναι ίσα,

θα δοκιμάσω και θα δω, μου φαίνεται ότι ..., με το χαρτί διαφάνειας, βλέπω ότι ». Η διαίσθηση παίζει λοιπόν πρωτεύοντα ρόλο αφού υποστηρίζεται ότι το νοητικό τους επίπεδο δεν είναι έτοιμο για επιχειρήματα και συλλογισμούς.

Θέλω όμως να παρατηρήσω ότι όταν οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την απόδειξη για «το άθροισμα των γωνιών τυχαίου τριγώνου», όπου ακολουθούνται διαδοχικά λογικά βήματα, εντυπωσιάζονται βαθιά και νοιώθουν μεγάλη ικανοποίηση που κατάλαβαν επιτέλους κάτι το οποίο χρησιμοποιούσαν συχνά χωρίς να γνωρίζουν γιατί ισχύει.

Στην απόδειξη του Π. Θ. στην Β΄ Γυμνασίου θα μπορούσαμε να τους κεντρίσουμε τον προβληματισμό και την φαντασία, αν αντί για τετράγωνα στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου φτιάξουμε οποιαδήποτε όμοια πολύγωνα.

Κατά την γνώμη μου και άλλες τέτοιες αποδείξεις θα βοηθούσαν στην αλλαγή της στάσης τους απέναντι στη γεωμετρία.

8.4 Διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Λύκειο μέσα από τις προσωπικές εμπειρίες των τελευταίων δέκα ετών στο Ελληνικό Σχολείο.

Οι αντίστοιχες οδηγίες του Π.Ι. για το Λύκειο είναι:

- (1) Να διερευνηθούν σε θεωρητικότερο επίπεδο οι γνώσεις
- (2) Να εξοικειωθούν στην μαθηματική απόδειξη
- (3) Να χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σαν μέθοδο σκέψης και πράξης στην καθημερινή ζωή
- (4) Να έλθουν σε επαφή με τις εφαρμογές των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες.

Στο Λύκειο πρέπει να κυριαρχεί η *αξιοματική θεμελίωση* σύμφωνα με τις οδηγίες του *παιδαγωγικού ινστιτούτου*.

Υπάρχει ξεχωριστό βιβλίο Γεωμετρίας που καλύπτει τις τάξεις Α΄ και Β΄ Λυκείου, έχει 350 σελίδες και συνήθως απογοητεύονται οι μαθητές με τον τεράστιο όγκο του!

Καθώς όμως έχουν συνηθίσει στο Γυμνάσιο την *επαγωγική απόδειξη* δυσκολεύονται να μεταβούν στους αυστηρούς συλλογισμούς και την ακριβή μαθηματική διατύπωσή τους (*παραγωγική απόδειξη*) δηλαδή αλυσίδα δηλώσεων που συνδέονται λογικά.

Οι μαθητές που αντιμετωπίζουν αυτή τη μετάβαση, θεωρούν πολύπλοκες και δυσνόητες αυτές τις αποδεικτικές διαδικασίες και απορούν λέγοντας :«γιατί να αποδείξω κάτι το

οποίο είναι ήδη γνωστό» ενώ ο εκπαιδευτικός είναι αναγκασμένος να συνεχίσει την αυστηρή τυποποίηση προσπαθώντας να ισορροπήσει μεταξύ δυο διαφορετικών διδακτικών προσεγγίσεων. Υπάρχει λοιπόν μια άρρηκτη σχέση μεταξύ των *πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για τον τρόπο διδακτικής παρέμβασης στην Γεωμετρία και των διδακτικών πρακτικών που χρησιμοποιούν* προκειμένου να διατηρήσουν αυτή την ισορροπία.

Για το λόγο αυτό:

Όταν οι εκπαιδευτικοί καταλάβουν την αδυναμία των μαθητών να κατανοήσουν τις αυστηρές μαθηματικές μεθόδους, συνήθως χρησιμοποιούν τον πειραματισμό και την δοκιμή για να αποδείξουν κάποιο γεωμετρικό θεώρημα και σημαντικό εργαλείο για τον πειραματισμό αυτό, προσφέρουν τα δυναμικά περιβάλλοντα της Γεωμετρίας, όπως το Geogebra και το Gabri.

Αντίστοιχα όταν οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι σκοπός της διδασκαλίας είναι να αποδειχθεί και να φανερωθεί η δομή και η λογική διάρθρωση της μαθηματικής επιστήμης (δηλαδή ακολουθήσουν τις ιδέες του φορμαλισμού) προσφεύγουν στις αυστηρές αποδεικτικές μεθόδους προκειμένου να αναπτύξουν την κριτική σκέψη των μαθητών.

Θα λέγαμε όμως ότι μεγάλη μερίδα εκπαιδευτικών ακολουθεί την δεύτερη προσέγγιση αφού και περισσότερη ευκολία υπάρχει στην διδασκαλία με τον φορμαλιστικό τρόπο αλλά και λόγω του ότι προσδίδει και μεγάλο κύρος στους ίδιους τους εκπαιδευτικούς.

Η καθημερινή όμως σχολική εμπειρία έχει δείξει ότι μέσα στην τάξη σπάνια υπάρχει χρόνος για να οδηγηθεί κάθε μαθητής σε ανακάλυψη της γεωμετρικής γνώσης μέσω του πειραματισμού και της διαίσθησης καθώς το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών πιέζει για την κάλυψη της ύλης.

Οι καθηγητές θα ήθελαν να κάνουν λιγότερη ύλη με ενότητες όπου θα αναπτύξουν συγχρόνως την λογική και την διαίσθηση.

Έτσι ο εκπαιδευτικός αναγκάζεται με μια συγκεκριμένη ακολουθία λογικών βημάτων συλλογισμού (δεδομένα – ζητούμενα – τυπική μαθηματική γλώσσα – συμβολισμός) να προσφέρει την Γεωμετρική γνώση.

Για το λόγο αυτό τα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και οι αποδείξεις τους απομνημονεύονται άκριτα και δεν αμφισβητούνται αφού πηγή γνώσης είναι το σχολικό βιβλίο και ο καθηγητής.

Η παρουσίαση λοιπόν γίνεται με αυστηρά φορμαλιστικό τρόπο, αφήνοντας ελάχιστα περιθώρια στους μαθητές για διαίσθηση και πειραματισμό. Οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν από πού προέρχονται και σε τι χρησιμεύουν τα θεωρήματα και έτσι αρνούνται κάθε αποδεικτική διαδικασία και αδιαφορούν για την κατάκτηση της γνώσης.

Έξαλλου είναι επίσης σημαντικό να επισημάνουμε ότι και *οι εισαγωγικές εξετάσεις για τα πανεπιστήμια επηρεάζουν σημαντικά και την διδακτέα ύλη* (αφού η γεωμετρία δεν συμπεριλαμβάνεται στα εξεταστέα μαθήματα) αλλά και τον τρόπο διδασκαλίας των καθηγητών και τις αντίστοιχες γνωστικές προσεγγίσεις των μαθητών.

Είναι χαρακτηριστικό και ότι οι άριστοι μαθητές της Γ΄ Λυκείου δεν γνωρίζουν πλέον Γεωμετρία, ενώ έχουν χάσει και την πρωτοτυπία στην σκέψη τους. Μπορούν να λύσουν τις πιο δύσκολες ασκήσεις στο ρυθμό μεταβολής με τον οποίο γεμίζει μια σφαίρα ή ένας κώνος με υγρό, αλλά μόνο αν τους δίνεται ο τύπος του όγκου της σφαίρας ή του κώνου.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα από την εμπειρία μας στην σχολική τάξη αποτελούν οι αποδείξεις στα θέματα των γεωμετρικών τόπων ή των γεωμετρικών κατασκευών, όταν παίρνουμε κάποια χαρακτηριστικά σημεία έτσι ώστε μέσα από την διαίσθησή μας να υποπτευθούμε ποιος μπορεί να είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

Αλλά και το πώς ανοίγουμε τον δρόμο μέσω της διαίσθησης στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, όταν προτάσσουμε συνήθως την γεωμετρική απεικόνιση των Θεωρημάτων Bolzano, Rolle, Θ.Μ.Τ προκειμένου να αντιληφθούν τον τρόπο διατύπωσης και ερμηνείας των θεωρημάτων αυτών.

Τελικά είναι ανάγκη ο συλλογισμός του κάθε μαθητή σε ένα γεωμετρικό θέμα, να στηριχθεί αρχικά σε μία σκέψη που την θεωρεί διαισθητικά σαν την πιο σωστή και έπειτα να την αναπτύξει και να την ελέγξει με διαδοχικές λογικές σκέψεις.

Εκείνο λοιπόν που κυρίως λείπει από τους μαθητές *δεν είναι ούτε η κωδικοποίηση ούτε η αυστηρή θεμελίωση των εννοιών, αλλά η απόκτηση της κοινής λογικής και, περισσότερο, η αξιοποίησή της στα Μαθηματικά*. Ο μαθητής που δεν μπορεί να κάνει συλλογισμούς της κοινής λογικής, δεν μπορεί ούτε να καταλάβει τους κανόνες του προτασιακού λογισμού ούτε να τους εφαρμόσει.

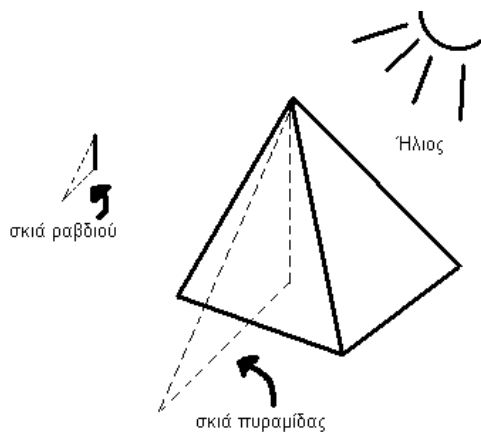
Αντίθετα, εκείνοι που μπορούν να σκεφτούν απλά και λογικά, εκείνοι που έχουν ήδη μάθει επιτυχημένα να κάνουν συλλογισμούς στις ασκήσεις των Μαθηματικών θα βρουν τον κωδικοποιημένο λογισμό ευχάριστο παιχνίδι, θα σιγουρέψουν μέσα από τους κανόνες του τον τρόπο που ήδη ήξεραν να σκέφτονται και, ένα μέρος απ' αυτούς, ίσως βοηθηθούν σε κάποιες πολύ δύσκολες θεωρητικές αποδείξεις για να ελέγξουν την ακρίβεια της μεθόδου που με το συνηθισμένο του τρόπο έχει ήδη σχεδιάσει.

Πιστεύω λοιπόν ότι μια μεικτή μορφή διδασκαλίας όπου ακολουθείται μια μετριοπαθής στάση ως προς την τυπικότητα των αποδεικτικών μεθόδων και ενθαρρύνεται συγχρόνως η κριτική σκέψη και η διαίσθηση των μαθητών, θα προσέφερε την καλύτερη υπηρεσία στους μαθητές προκειμένου να κατακτήσουν την γνώση στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Τότε ο μαθητής θα καταλάβει τον αληθινό ρόλο που πρέπει να έχει μια Γεωμετρική απόδειξη δηλαδή να επικυρώσει και να νομιμοποιήσει τις κατακτήσεις της διαίσθησης.

Άλλωστε υπάρχουν πολλοί μύθοι και αφηγήσεις στην ιστορία των ανακαλύψεων των μαθηματικών μέσα στους αιώνες, με τους οποίους μπορούμε να δείξουμε στους μαθητές την αξία της διαίσθησης και να εξάψουμε την φαντασία τους.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μέτρηση του ύψους της μεγάλης πυραμίδας του Χέοπος από τον Θαλή τον Μιλήσιο (624 – 547 π.Χ.) με την βοήθεια του μήκους της σκιάς της.



Εικόνα 3

Φαίνεται λοιπόν ότι η θεωρία των ομοίων σχημάτων ήταν γνωστή από τα μέσα του 7^{ου} αιώνα π.Χ. Δεν γνωρίζουμε ακριβώς τις τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Θαλής σε αυτό το επίτευγμά του. Ο Πλούταρχος μας διηγείται τα εξής: «Αφού έστησε το ραβδί του ο Θαλής στο τέλος της σκιάς της πυραμίδας από τα δυο όμοια τρίγωνα που προκύπτουν από την επαφή της ακτίνας του ήλιου, απέδειξε ότι ο λόγος που είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου ήταν ίδιος με το λόγο που είχε το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου».

(Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου σελ. 224 έκδοση 2011)

Τελικά παρατηρούμε το όλο πλαίσιο στο Ελληνικό σχολείο είναι εντελώς αντιφατικό και ως προς τους σκοπούς αλλά και ως προς τα αποτελέσματα, αφού φαντάζει αδύνατο να συνδυαστούν οι οδηγίες του Π.Ι., τα πρότυπα διδασκαλίας που έχουν σχηματίσει στο μυαλό τους οι εκπαιδευτικοί και η προϋπάρχουσα μαθηματική εκπαιδευτική πραγματικότητα.

Θα αναφέρω και μια μικρή ιστορία που δείχνει την άποψη που τελικά τείνω να υποστηρίξω, σχετικά με την διδασκαλία των «μοντέρνων μαθηματικών».

Κάποτε όλα τα ζώα, τα πουλιά, τα έντομα και τα ερπετά του δάσους έκαναν ένα μεγάλο γλέντι συμφιλίωσης. Όταν τ' αηδόνια κι οι κορυδαλλοί άρχισαν το τραγούδι, σηκώθηκαν πολλά ζώα να χορέψουν. Όμως πολύ σύντομα ένα - ένα ζώο καθόταν κάτω αφήνοντας μόνη της στο κέντρο της πίστας τη σαρανταποδαρούσα η οποία χόρευε με έναν τρόπο εκπληκτικό. Τα σαράντα πόδια της έδιναν στο χορό της απίστευτη ποικιλία κινήσεων και στο μακρύ κορμί της κινήσεις γεμάτες χάρη.

Όταν τελείωσε ο χορός, όλοι τη χειροκρότησαν με ενθουσιασμό. Όμως ο λαγός καθόταν σκεπτικός, μέχρι που αποφάσισε να πάει να τη ρωτήσει: «Μα πες μου, πώς το έκανες; Σκεφτόσουν, ας πούμε, να, τώρα θα σηκώσω τα πόδια 1-3-5 ενώ θα λυγίσω τα 5 έως 11 και τα άλλα θα χτυπούν τη γη; Είμαι πολύ περίεργος πώς ακριβώς το έκανες». Η σαρανταποδαρούσα δεν το είχε ποτέ μέχρι τότε σκεφτεί. Χόρευε αυθόρμητα και φυσικά. Όμως η ερώτηση του λαγού της έγινε έμμονη ιδέα. Άρχισε λοιπόν να σκέφτεται κι η ίδια πώς χόρευε, και δεν ξαναχόρεψε πια...!

(Σ. Μαρίνης, Μαθηματικός – Ερευνητής, 19-4-2006).

Με την απελευθέρωση της Γεωμετρίας από τα δεσμά της παράδοσης ένα πλήθος νέων Γεωμετριών αναπτύχθηκε.

Η εμφάνιση των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών, πηγή των οποίων υπήρξε η έρευνα περί του αξιώματος των παραλλήλων ευθειών ήταν η μεγαλύτερη επανάσταση στην ιστορία των μαθηματικών από την εποχή των Αρχαίων Ελλήνων. Όπως αναφέραμε και παραπάνω χρειάστηκε να περάσουν πολλά χρόνια έως ότου να παρουσιαστεί επίσημα μια νέα γεωμετρία, τα αξιώματα της οποίας απέχουν κατά πολύ από αυτά της Ευκλείδειας.

Τον 20ο αιώνα μονάχα άρχισε να κερδίζει έδαφος σαν θεωρία και να χρησιμοποιείται και για τη μελέτη της φυσικής πραγματικότητας (διάστημα). Ο Hilbert δούλεψε πάνω στην αυστηρότητα των μαθηματικών της φυσικής. Άρχισε λοιπόν να κατανοεί την φυσική και το πώς οι φυσικοί χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά, και ανέπτυξε μια συνεκτική μαθηματική θεωρία για αυτά που βρήκε, ειδικότερα για το χώρο των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ο Hilbert ανέφερε ότι «*η φυσική είναι πολύ σκληρή για τους φυσικούς*», υπονοώντας ότι τα απαραίτητα ανώτερα μαθηματικά για την φυσική ήταν πέρα από εκείνους.

Η αξιωματική θεμελίωση λοιπόν της σύγχρονης Φυσικής ήταν ένα από τα επιστημονικά του ενδιαφέροντα και ένας από τους ερευνητικούς του προσανατολισμούς. Στην κατεύθυνση αυτή ασχολήθηκε, συστηματικά, για τη θεμελίωση της Μηχανικής, της Θερμοδυναμικής, της Κινητικής Θεωρίας των Αερίων, της Ηλεκτροδυναμικής, του Ηλεκτρομαγνητισμού, της Θεωρίας της Σχετικότητας κ.ά.

Γύρω στο 1900 ο γερμανός μαθηματικός Herman Minkowski ανέπτυξε εντελώς θεωρητικά την Χωροχρονική Γεωμετρία, τη γεωμετρία που υλοποιεί η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein.

Όταν ο Einstein το 1915 ανακοίνωσε τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, που είναι μια φυσική θεωρία, ρώτησε τον Hilbert, αν γνωρίζει κάποια γεωμετρία που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις της θεωρίας του.

Ο Hilbert του απάντησε ότι υπάρχει η Χωροχρονική Γεωμετρία του Minkowski που ικανοποιεί πλήρως την θεωρία του. Μπορούμε εδώ να αναφέρουμε ορισμένα στοιχεία

για την Χωροχρονική Γεωμετρία¹ η οποία ονομάζεται και *Γεωμετρία του Σύμπαντος*.

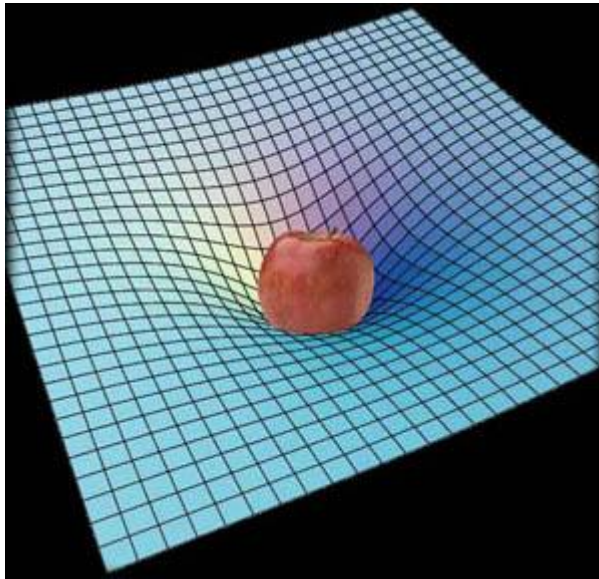
Στα Πλατωνικά μαθηματικά, η έννοια του χώρου οσωνδήποτε διαστάσεων είναι ιδεατή και δεν έχει καμιά σχέση με την υλική Συμπαντική πραγματικότητα. Ομοίως και τα γεωμετρικά σχήματα που μορφοποιούνται μέσα τους είναι ιδεατά και δεν έχουν καμιά σχέση με την υλική πραγματικότητα. Τα πάντα στα πλατωνικά μαθηματικά είναι αριθμοί χωρίς φυσικές μονάδες. Όπως αναφέρει και ο Πυθαγόρας τα πάντα μέσα στο Σύμπαν είναι καθαροί αριθμοί. Στο *κόσμο της Φυσικής*, βασική είναι η έννοια της *Ύλης* με κύριες ιδιότητές της την μάζα, το βάρος και την πυκνότητα.

1. Μάνος Δανέζης, Επίκουρος καθηγητής Αστροφυσικής,
Τμήμα Φυσικής ΕΚΠΑ (Ευκλείδης Β' 91 τεύχος σελ 3-8)

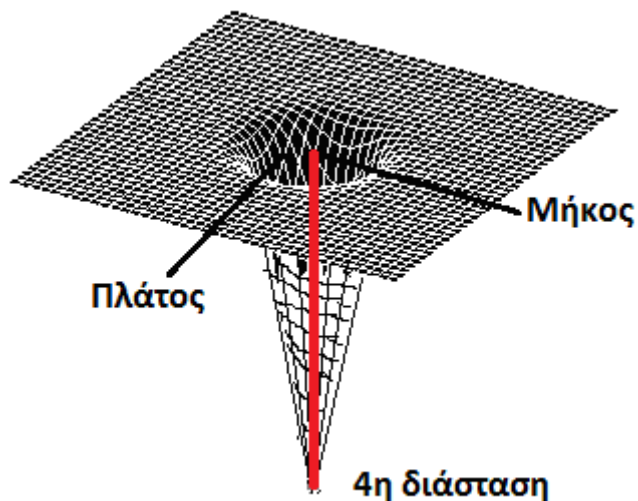
Η σύνδεση αυτών των δύο κόσμων έγινε με την θεωρία της σχετικότητας.

Η μεγαλοφυΐα του Einstein συνέλαβε την ιδέα ότι:

το κύριο συστατικό της κλασικής Φυσικής, η ύλη, δεν είναι παρά καμπύλωση του κύριου συστατικού του κόσμου των μαθηματικών, του τρισδιάστατου χώρου μεταξύ μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης τιμής. Η ύλη είναι καμπυλωμένος χώρος τριών διαστάσεων προς την 4η διάσταση (τον χρόνο) μεταξύ μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης τιμής.



Εικόνα 4: Η καμπύλωση του Χώρου.



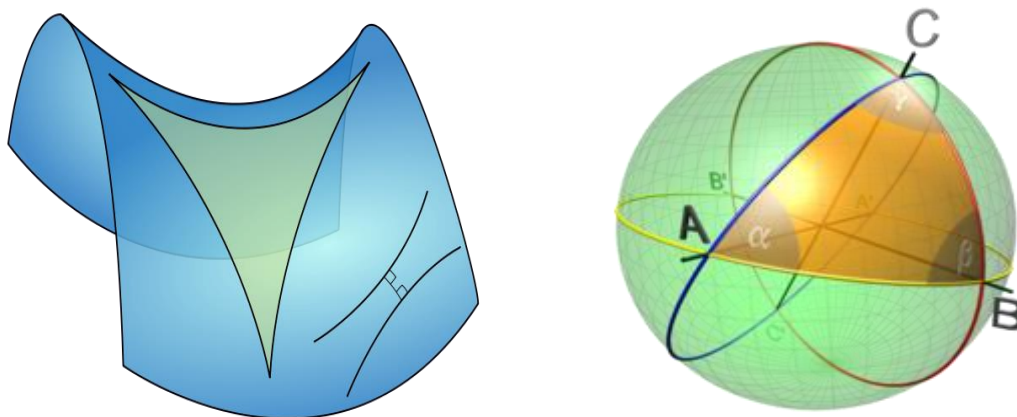
Εικόνα 5: Η μορφή της ύλης.

Τα πάντα μέσα στο Σύμπαν, οι Γαλαξίες, τα αστέρια, οι πλανήτες, όλα τα ουράνια σώματα αλλά και το μεταξύ τους μεσοαστρικό και μεσογαλαξιακό υλικό αποτελούν περιοχές μεταβλητής πυκνότητας. Δηλαδή ολόκληρο το Σύμπαν αποτελεί ένα χώρο καθαρών Πλατωνικών αριθμών χωρίς μονάδα μέτρησης.

Μορφές και σχήματα περισσοτέρων των τριών διαστάσεων ακόμα και αν περιγράφονται από την Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι δυνατόν να γίνουν αντιληπτά από τις ανθρώπινες αισθήσεις.

Αυτό που αντιλαμβανόμαστε σαν πραγματικότητα είναι η προβολή (ισομορφισμός ή απεικόνιση) όσων υπάρχουν στο πραγματικό τετραδιάστατο μη Ευκλείδειο και αθέατο σύμπαν πάνω σε ένα ψεύτικο τρισδιάστατο και Ευκλείδειο χώρο που φτιάχνουν πλαστά οι αισθήσεις μας (Ψευδοευκλείδειο χώρο Minkowski)

Με τον τρόπο αυτό η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, από μια θεωρία βαρύτητας μετατρέπεται σε μια Νέα Γεωμετρία, που μπορεί από μόνη της να περιγράψει το Σύμπαν, και προσπαθεί, όπως και η Φυσική, να ερμηνεύσει τα φαινόμενα του Σύμπαντος.



Εικόνα 6: Υπερβολική Γεωμετρία και Σφαιρική ή Ελλειπτική Γεωμετρία

Αποκλίσεις από την Ευκλείδεια Γεωμετρία.

- Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου δεν ισούται με 180°
- Η περίμετρος του κύκλου δεν ισούται με $2\pi R$, R η ακτίνα του κύκλου
- Δεν ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα
- Από σημείο εκτός ευθείας καμία παράλληλη ευθεία δεν διέρχεται (Σφαιρική ή Ελλειπτική Γεωμετρία)
- Από σημείο εκτός ευθείας άπειρες παράλληλες ευθείες διέρχονται (Υπερβολική Γεωμετρία)

Θα λέγαμε λοιπόν ότι από τις Γεωμετρίες που γνωρίσαμε παραπάνω, ο όρος «Σωστή Γεωμετρία» θα πήγαινε σε αυτή που με μεγαλύτερη προσέγγιση περιγράφει την «αρχιτεκτονική του υλικού χώρου», ως εκείνες βέβαια τις εσχατιές όπου η ανθρώπινη επινοητικότητα έχει διεισδύσει.

Μια τέτοια όμως απόφαση ανήκει κατά κύριο λόγο στη Φυσική.

Η Φυσική διατυπώνει πολλές απόψεις, άλλες από αυτές συνηγορούν υπέρ της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και άλλες υπέρ των άλλων Γεωμετριών.

Η Τέχνη και η Τεχνική ακόμα και σήμερα δικαιώνουν μόνο την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Και αν ακόμα δεχθούμε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν είναι ο δομικός κώδικας όλου του υπαρκτού υλικού και ενεργειακού σύμπαντος, είναι οπωσδήποτε μια τόσο καλή προσέγγισή του, ώστε όλες οι τεχνικές εφαρμογές (από την κατασκευή των σπιτιών μας έως την χάραξη της τροχιάς των δορυφόρων) να εδράζονται στους νόμους της.

Έτσι η Ευκλείδεια Γεωμετρία διατηρεί ακέραια και αλώβητη την αξία της

γιατί όχι μόνο αποτελεί πρώτιστο και αξεπέραστο μοντέλο συγκρότησης μιας επιστημονικής θεωρίας, όχι μόνο αποτελεί υπόδειγμα – βάθρο και ενίοτε πλαίσιο ανάπτυξης πολλών άλλων Επιστημών, αλλά και γιατί, και σήμερα όπως πάντα, τα επιτεύγματα της τεχνολογικής μας ανάπτυξης, θεμελιωμένα πάνω στους νόμους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δεν παρουσιάζουν καμιά ορατή απόκλιση από τον αναμενόμενο βαθμό αξιοπιστίας και τελειότητας.

Παράρτημα I: Τα αξιώματα του γεωμετρικού συστήματος του Tarski [3]

Αξίωμα 1^ο

Αντανakλαστικότητα των ίσων αποστάσεων

$$ab \equiv ba$$

Αξίωμα 2^ο

Μεταβατικότητα των ίσων αποστάσεων

$$ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \rightarrow rs \equiv pq$$

Αξίωμα 3^ο

Το ταυτοτικό αξίωμα των ίσων αποστάσεων

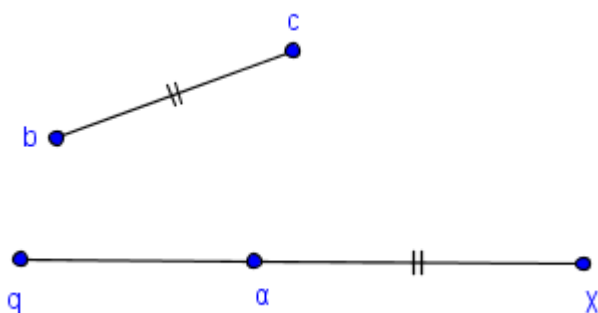
$$ab \equiv cc \rightarrow a=b$$

Αξίωμα 4^ο

Το κατασκευαστικό αξίωμα των ευθυγράμμων τμημάτων

$$\exists \chi (B(qa\chi) \wedge a\chi \equiv bc)$$

Το διαισθητικό περιεχόμενο αυτού του αξιώματος (σχήμα 33) είναι ότι αν δίνεται οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα bc μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσης απόστασης με αυτό, ξεκινώντας από τυχαίο σημείο a σε οποιαδήποτε διεύθυνση που περιέχει το a . Η διεύθυνση ορίζεται από το a και ένα δεύτερο σημείο το q .

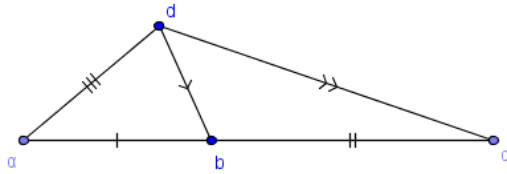


Σχήμα 33

Αξίωμα 5^ο

Το αξίωμα των πέντε ευθυγράμμων τμημάτων

$$[a \neq b \wedge B(abc) \wedge B(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd'] \rightarrow cd \equiv c'd'$$



Σχήμα 34

Αυτό το αξίωμα είναι παρόμοιου χαρακτήρα με τα γνωστά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που επιτρέπουν να συμπεράνει κανείς, από την ταύτιση ορισμένων αντίστοιχων πλευρών και γωνιών δύο τριγώνων, την ταύτιση και των υπόλοιπων αντίστοιχων πλευρών και γωνιών.

Αξίωμα 6^ο

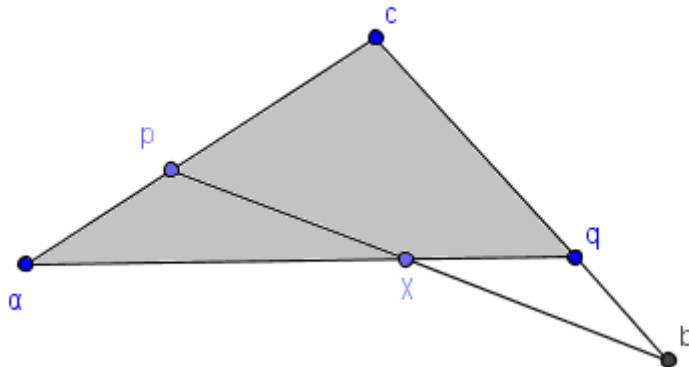
Το ταυτοτικό αξίωμα του «μεταξύ»

$$B(aba) \rightarrow a = b$$

Αξίωμα 7^ο

Εσωτερική μορφή του αξιώματος Pasch

$$B(apc) \wedge B(bqc) \rightarrow \exists x[B(pxb) \wedge B(qxa)]$$



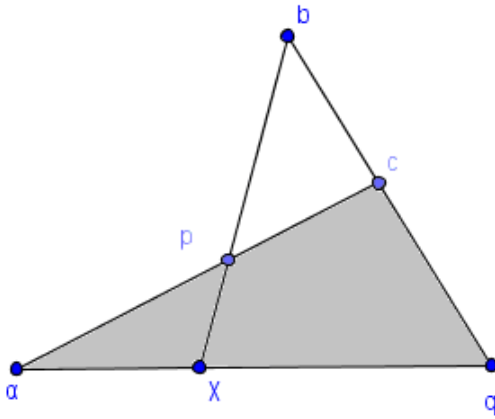
Σχήμα 35

Το αξίωμα του Pasch αναφέρει ότι αν μια ευθεία τέμνει ένα τρίγωνο σε μια από τις πλευρές του και δεν διέρχεται από καμία κορυφή του τότε θα τέμνει μια από τις άλλες πλευρές του. Ονομάζεται έτσι γιατί το τμήμα pb τέμνει το τμήμα aq σε σημείο x το οποίο είναι στο εσωτερικό του, δηλ τέμνει εσωτερικά την πλευρά του τριγώνου.

Αξίωμα 71^ο

Εξωτερική μορφή του αξιώματος Pasch

$$B(apc) \wedge B(qcb) \rightarrow \exists x[B(axq) \wedge B(bqx)]$$

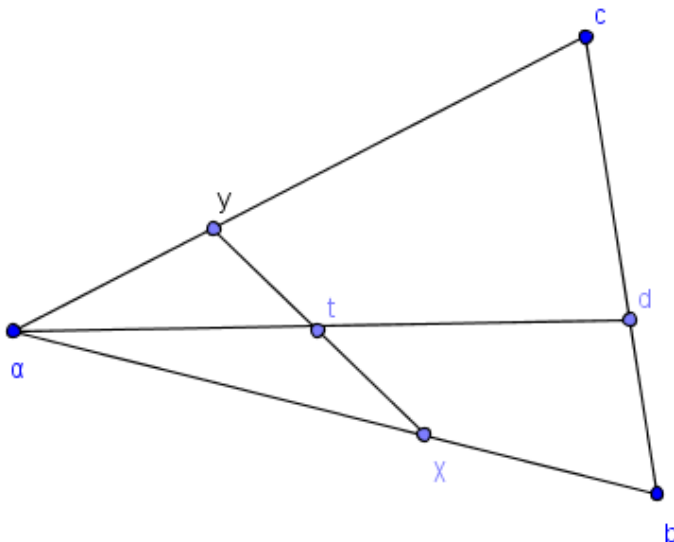


Σχήμα 36

Αξίωμα 7₂^ο

Ασθενής μορφή του αξιώματος Pasch

$$B(atd) \wedge B(bdc) \rightarrow \exists x \exists y [B(axb) \wedge B(ayc) \wedge B(ytx)]$$



Σχήμα 37

Αξίωμα 8^ο

Κατώτερο αξίωμα 1-διάστασης

$$\exists a \exists b (a \neq b)$$

Αξίωμα 8₁^ο

Κατώτερο αξίωμα 2-διάστασης

$$\exists a \exists b \exists c [\neg B(abc) \wedge \neg B(bca) \wedge \neg B(cab)]$$

Το αξίωμα δηλώνει την ύπαρξη τριών **μη** συγγραμμικών σημείων.

Αξίωμα 9^ο

Ανώτερο αξίωμα 0-διάστασης

$$a=b$$

Αξίωμα 9₁^ο

Ανώτερο αξίωμα 1-διάστασης

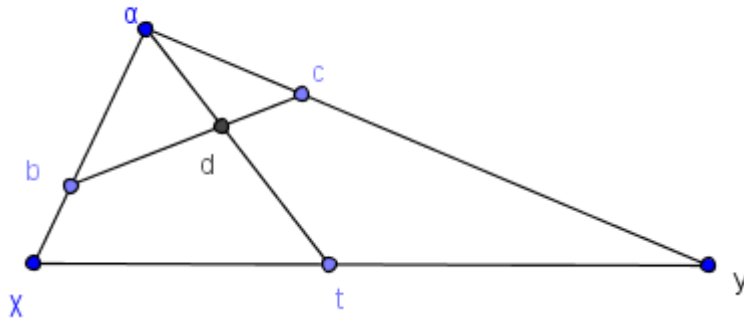
$$B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab)$$

Το αξίωμα δηλώνει την ύπαρξη τριών συγγραμμικών σημείων

Αξίωμα 10^ο

Πρώτη μορφή του Ευκλείδειου Αξιώματος

$$B(adt) \wedge B(bdc) \wedge a \neq d \rightarrow \exists x \exists y [B(abx) \wedge B(acy) \wedge B(xty)]$$



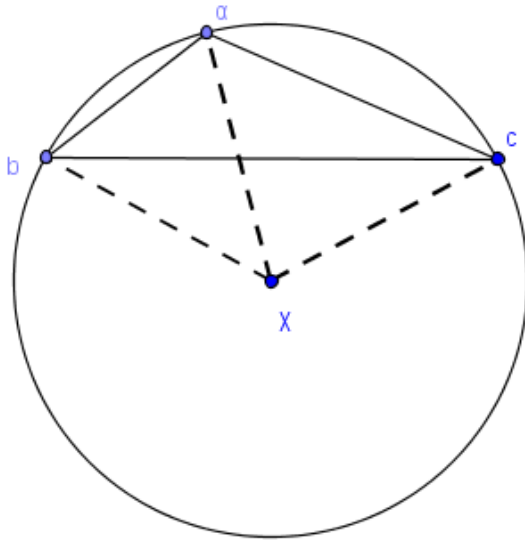
Σχήμα 38

Το αξίωμα υποστηρίζει ότι δια μέσω τυχαίου σημείου t στο εσωτερικό μιας γωνίας $\angle bac$ υπάρχει μια ευθεία - εδώ η xy - που τέμνει και τις δύο πλευρές της γωνίας –εδώ στα σημεία x και y .

Αξίωμα 10₁^ο

Δεύτερη μορφή του Ευκλείδειου Αξιώματος

$$B(abc) \vee B(bca) \vee B(cab) \vee \exists x [ax \equiv bx \wedge ax \equiv cx]$$



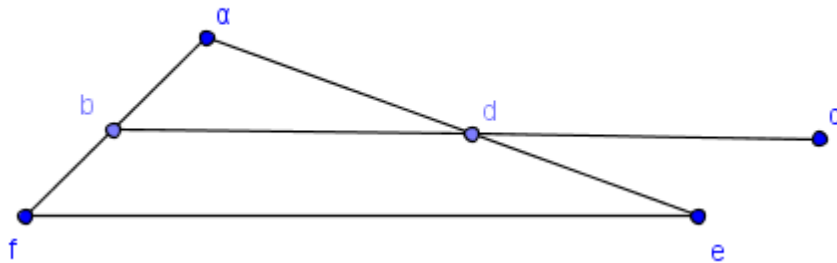
Σχήμα 39

Με άλλα λόγια κάθε τρίγωνο μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο.

Αξίωμα 102^ο

Τρίτη μορφή του Ευκλείδειου Αξιώματος

$$[B(abf) \wedge ab \equiv bf \wedge B(ade) \wedge ad \equiv de \wedge B(bdc) \wedge bd \equiv dc] \rightarrow bc \equiv fe$$



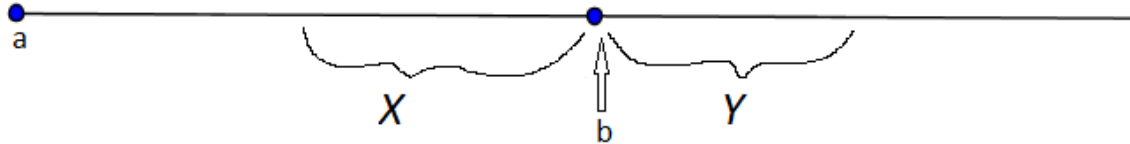
Σχήμα 40

Το αξίωμα ισχυρίζεται ότι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι το μισό του μήκους της τρίτης πλευράς. Αυτό είναι ισοδύναμο με τον ισχυρισμό ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές.

Αξίωμα 11^ο

Αξίωμα της συνέχειας

$$\exists a \forall x \forall y [x \in X \wedge y \in Y \rightarrow B(axy)] \rightarrow \exists b \forall x \forall y [x \in X \wedge y \in Y \rightarrow B(xby)]$$



Σχήμα 41

Το αξίωμα υποστηρίζει ότι: για κάθε δύο σύνολα X και Y έτσι ώστε τα στοιχεία του X να προηγούνται των στοιχείων του Y σε σχέση με κάποιο σημείο a (έτσι ώστε, $B(axy)$ για κάθε x που ανήκει στο X και y ανήκει στο Y) χωρίζονται από κάποιο σημείο b .

$$\exists a \forall x \forall y (x \in X \wedge y \in Y \rightarrow B(axy))$$

$$\exists a \forall x \forall y (y \in Y \rightarrow (x \in X \rightarrow B(axy)))$$

$$\exists a \forall x \forall y \in Y (x \in X \rightarrow B(axy))$$

$$\exists a \forall x \in X \forall y \in Y B(axy)$$

Αξίζει εδώ να αναφέρουμε το θεώρημα του Tarski για την απαλοιφή των ποσοδεικτών στη στοιχειώδη άλγεβρα, και την εργασία του Hilbert ακολουθώντας τις ιδέες του Descartes για τον ορισμό της αριθμητικής μέσα στη γεωμετρία.

Ένα πραγματικά-κλειστό σώμα είναι ένα διατεταγμένο σώμα F στο οποίο κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει ρίζα, και κάθε θετικός αριθμός έχει τετραγωνική ρίζα.

Ο Tarski απέδειξε τα παρακάτω θεμελιώδη γεγονότα:

Κάθε τύπος της γλώσσας του Tarski αποδεικνύεται ισοδύναμος με ένα ελεύθερο ποσοδεικτών τύπο.

Κάθε μοντέλο των αξιωμάτων του Tarski έχει τη δομή F^2 , όπου F είναι ένα πραγματικά-κλειστό σώμα και οι έννοιες του "μεταξύ" και της "ισοδυναμίας" ερμηνεύονται όπως θα αναμέναμε.

Από τότε που οι Descartes και Hilbert μας έδειξαν πώς να δίνουμε γεωμετρικούς ορισμούς για την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό, και την τετραγωνική ρίζα, υπάρχουν τύποι στη γλώσσα του Tarski που ορίζουν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης σημείων σε μια σταθερή ευθεία L , με τυχαία επιλεγμένους αριθμούς 0 και 1 στην L , και παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες των αριθμών στα δεξιά του 0 .

Από την στιγμή που η ύπαρξη των τετραγωνικών ριζών προκύπτει από την συνέχεια ευθύγραμμου τμήματος- κύκλου το πλήρες Αξιωματικό Σχήμα της συνέχειας είναι ισοδύναμο με το σχήμα που δηλώνει ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει ρίζες:

$$\exists x(a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = 0)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου μπορεί να θεωρηθεί 1. Εδώ ο αλγεβρικός συμβολισμός είναι μια συντόμευση των γεωμετρικών τύπων στη γλώσσα του Tarski.

Ο παραπάνω τύπος αντιπροσωπεύει ένα γεωμετρικό τύπο για κάθε σταθερό περιττό n, έτσι αντιπροσωπεύει ακόμα ένα άπειρο αριθμό αξιωμάτων.

Το βασικό σημείο είναι ότι το αξίωμα σχήμα είναι καθαρά υπαρξιακό, έτσι μπορούμε να το απαλλάξουμε από τους ποσοδείκτες εισάγοντας ένα μόνο

νέο συναρτησιακό σύμβολο $f(a_0, \dots, a_{n-1})$ για μια ρίζα του πολυωνύμου.

Αξίωμα 11^ο

Αξίωμα (Σχήμα) της συνέχειας

$$\exists a \forall x \forall y [\alpha \wedge \beta \rightarrow B(axy)] \rightarrow \exists b \forall x \forall y [\alpha \wedge \beta \rightarrow B(xyb)]$$

Αξίωμα 12^ο

Αντανακλαστικότητα του «μεταξύ»

$$B(abb)$$

Αξίωμα 13^ο

$$a = b \rightarrow B(aba)$$

Αξίωμα 14^ο

Συμμετρικό αξίωμα του «μεταξύ»

$$B(abc) \rightarrow B(cba)$$

Αξίωμα 15^ο

Εσωτερικής μεταβατικότητας αξίωμα του «μεταξύ»

$$B(abd) \wedge B(bcd) \rightarrow B(abc)$$



Σχήμα 39

Αξίωμα 16^οΕξωτερικής μεταβατικότητας αξίωμα του «μεταξύ»

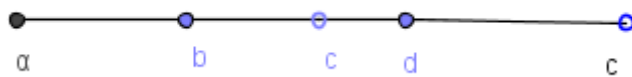
$$B(abd) \wedge B(bcd) \wedge b \neq c \rightarrow B(abd)$$

Αξίωμα 17^οΕσωτερικό αξίωμα σύνδεσης του «μεταξύ»

$$B(abd) \wedge B(acd) \rightarrow [B(abc) \vee B(acb)]$$

**Σχήμα 42****Αξίωμα 18^ο**Εξωτερικό αξίωμα σύνδεσης του «μεταξύ»

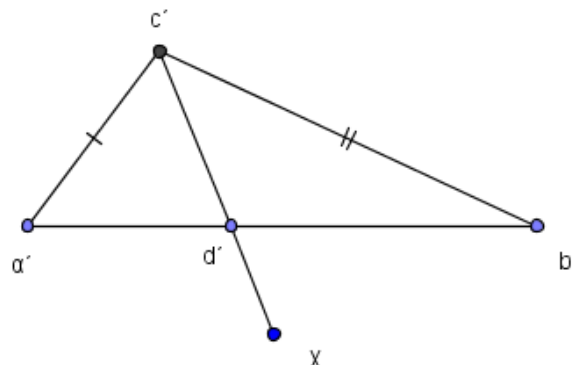
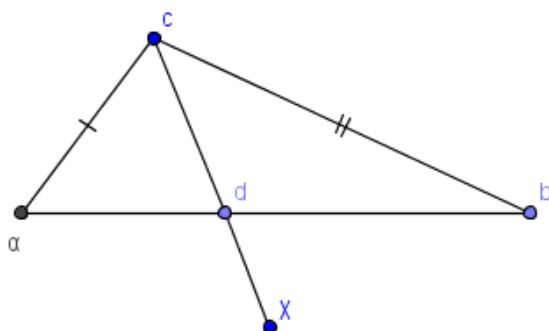
$$B(abc) \wedge B(abd) \wedge a \neq b \rightarrow [B(acd) \vee B(abc)]$$

**Σχήμα 43****Αξίωμα 19^ο**

$$a = b \rightarrow ac \equiv bc$$

Αξίωμα 20^οΜοναδικότητα της κατασκευής τριγώνου

$$[ac \equiv ac' \wedge bc \equiv bc' \wedge B(adb) \wedge B(ad'b) \wedge B(cdx) \wedge B(c'd'x) \wedge d \neq x \wedge d' \neq x] \rightarrow c \neq c'$$

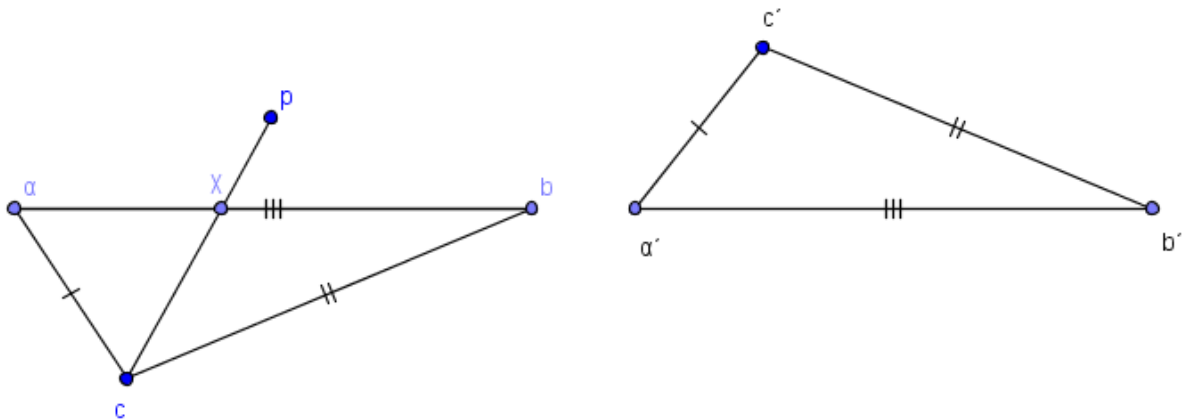
**Σχήμα 44**

Το αξίωμα υποστηρίζει ότι το πολύ ένα τρίγωνο μπορεί να κατασκευαστεί σε ένα δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα χρησιμοποιώντας την δοσμένη πλευρά και έχοντας προκαθορισμένα μήκη για τις άλλες δύο πλευρές.

Αξίωμα 21 °

Αξίωμα ύπαρξης για την κατασκευή τριγώνου

$$ab \equiv a'b' \rightarrow \exists c \exists x (ac \equiv a'c' \wedge bc \equiv b'c' \wedge B(cxp) \wedge [B(abx) \vee B(bxa) \vee B(xab)])$$



Σχήμα 45

Το αξίωμα υποστηρίζει ότι για κάθε τρίγωνο $a'b'c'$ και για κάθε τμήμα ab ισοδύναμο με το τμήμα $a'b'$, υπάρχει ένα σημείο c σε μια καθορισμένη πλευρά ως προς την ab , τέτοια ώστε τα τρίγωνα abc και $a'b'c'$ να είναι σύμφωνα.

Αξίωμα 22 °

Αξίωμα πυκνότητας του «μεταξύ»

$$x \neq z \rightarrow \exists y [x \neq y \wedge z \neq y \wedge B(xyz)]$$



Σχήμα 46

Αξίωμα 23 °

$$[B(xyz) \wedge B(x'y'z') \wedge xy \equiv x'y' \wedge yz \equiv y'z'] \rightarrow xz \equiv x'z'$$



Σχήμα 47

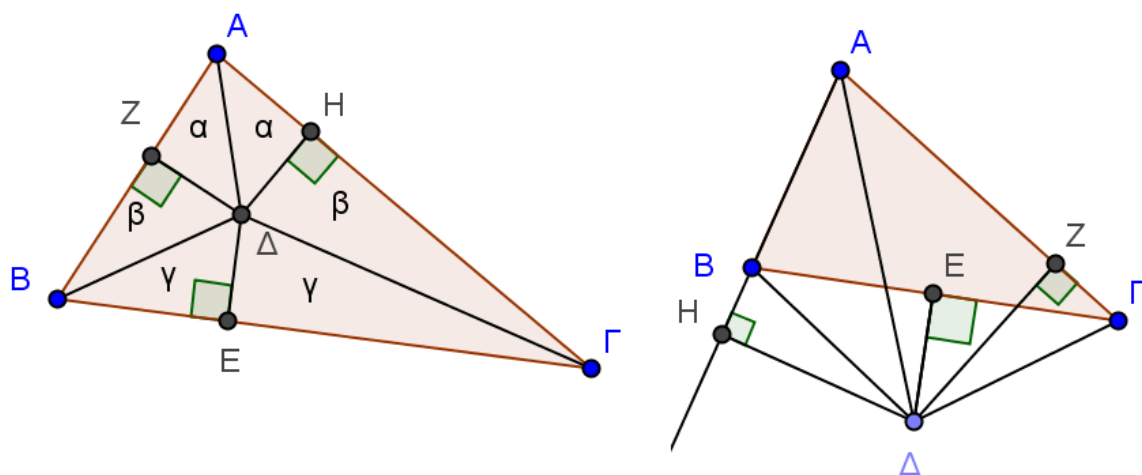
Αξίωμα 24^ο

$$[B(xyz) \wedge B(x'y'z') \wedge xz \equiv x'z' \wedge yz \equiv y'z'] \rightarrow xy \equiv x'y'$$

Παράρτημα II:

Η «απόδειξη» ότι όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έστω η διχοτόμος της A και η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν αυτές συμπίπτουν τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Έστω ότι τέμνονται στο Δ και φέρουμε τις κάθετες ΔE και ΔH στις πλευρές AB και $A\Gamma$. Τότε τα τρίγωνα που συμβολίζονται με α είναι ίσα (μια πλευρά και δύο γωνίες), άρα $\Delta Z = \Delta H$. Ομοίως τα τρίγωνα που συμβολίζονται με γ είναι ίσα άρα $\Delta B = \Delta \Gamma$. Από αυτό προκύπτει ότι και τα τρίγωνα β είναι ίσα άρα $BZ + ZA = \Gamma H + \Gamma A$ δηλαδή το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Σχήμα 48

Φυσικά αν προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε με ακρίβεια τα σημεία και τις γραμμές στο σχήμα θα ανακαλύψουμε ότι το πραγματικό σχήμα δεν είναι αυτό που σχεδιάσαμε. Το σημείο Δ βρίσκεται έξω από το τρίγωνο AB . Όμως αν κάνουμε την απόδειξη σε αυτή τη βάση υποθέτοντας ότι τα σημεία Z και H βρίσκονται έξω από το τρίγωνο πάλι συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Αυτό είναι επίσης ένα λάθος σχήμα. Το σωστό σχήμα δίνεται με το Δ έξω από το τρίγωνο αλλά ακριβώς ένα από τα σημεία H και Z να βρίσκεται ανάμεσα στις κορυφές του τριγώνου, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Ακόμα έχουμε $AH = AZ$ και $\Delta H = \Delta Z$ και $\Delta B = \Delta \Gamma$ ακόμα προκύπτει ότι $BH = Z\Gamma$ αλλά τώρα βλέπουμε δεν προκύπτει ότι $AB = A\Gamma$, διότι ενώ το Z είναι ανάμεσα στα A και Γ , το H δεν είναι ανάμεσα στα A και B .

Παράρτημα ΙΙΙ:

Τα αξιώματα του γεωμετρικού συστήματος του Pogorelov¹

Ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του 70 ο Pogorelov άρχισε να επεξεργάζεται διάφορα αξιωματικά συστήματα, τα οποία είχε δημοσιεύσει κατά καιρούς. Είναι χαρακτηριστικό ότι το 1973 κυκλοφόρησε από Ολλανδικό εκδοτικό οίκο του Pogorelov: Foundations of Geometry, στο οποίο αναπτύσσονται η Ευκλείδεια Γεωμετρία με ένα αξιωματικό σύστημα το οποίο έδινε μεγάλη βαρύτητα στα αξιώματα "κίνησης". Με βάση το αξιωματικό αυτό σύστημα γράφτηκαν τα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας του Λυκείου από τον Σ.Γ. Κανέλλο.

Αργότερα, στις αρχές της δεκαετίας του 1980, ο Pogorelov ανέπτυξε ένα νέο και απλούστερο αξιωματικό σύστημα στο οποίο θα αναφερθούμε και το οποίο παρουσίασε στο 19^ο ICM (Βαρσοβία 1981).

Με το σύστημα αυτό, στα μέσα της δεκαετίας του 80 γράφτηκαν τα σχολικά εγχειρίδια της Γεωμετρίας, τα οποία και σήμερα διδάσκονται στη Ρωσία, Ρουμανία και σε μια σειρά από άλλες χώρες. Το αξιωματικό αυτό σύστημα (με ορισμένες τροποποιήσεις) χρησιμοποιήθηκε και στη χώρα μας το 1988 για τη συγγραφή των διδακτικών εγχειριδίων της Γεωμετρίας.

Το αξιωματικό σύστημα του Pogorelov έχει επτά αρχικές έννοιες, τις εξής :

Σημείο, ευθεία, επίπεδο, ανήκει, μεταξύ, μέτρο μήκους, μέτρο γωνίας.

Το σύστημα Pogorelov περιέχει εννέα αξιώματα χωρισμένα σε έξι ομάδες :

1^η ομάδα (αξιώματα σύμπτωσης)

Τα δύο αξιώματα της πρώτης ομάδας αναφέρονται σε σημεία και ευθείες.

Αξίωμα 1^ο

Από δύο σημεία περνά μία και μόνο ευθεία.

Αξίωμα 2^ο

Κάθε ευθεία περιέχει δύο τουλάχιστον σημεία και υπάρχουν τρία σημεία που δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Σύμφωνα με το 1^ο αξίωμα, αν δύο ευθείες περνούν από δύο σημεία Α, Β θα θεωρούμε ότι ταυτίζονται, δηλαδή συμπίπτουν σε μια ευθεία.

1.11^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, *Η φιλοσοφία των αξιωματικών συστημάτων. Τα αξιωματικά συστήματα* Η. Weyl, Ν. Kolmogorov, Α. V .Pogorelov, Δ. Κοντογιάννης – Ε. Ντζιαχρήστος

2^η ομάδα (αξιώματα διάταξης)

Τα αξιώματα της ομάδας αυτής αναφέρονται στην αρχική έννοια «μεταξύ» και με τη βοήθειά τους ορίζουμε νέες έννοιες όπως **ευθύγραμμο τμήμα, ημιευθεία, ημιεπίπεδο**.

Αξίωμα 3^ο

Από τρία συνευθειακά σημεία, ένα και μόνο ένα βρίσκεται μεταξύ άλλων.

Αξίωμα 4^ο

Η ευθεία χωρίζει το σύνολο των σημείων του επιπέδου που δεν ανήκουν σε αυτή, σε δύο ημιεπίπεδα έτσι ώστε, κάθε τμήμα με άκρα σημεία του ίδιου ημιεπιπέδου δεν τέμνει την ευθεία, ενώ κάθε τμήμα με άκρα σημεία διαφορετικών ημιεπιπέδων τέμνει την ευθεία.

3^η ομάδα (αξιώματα μέτρου)

Αξίωμα 5^ο

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει ορισμένο μέτρο μήκους που είναι ένας μη αρνητικός αριθμός. Το μέτρο μήκους ευθυγράμμου τμήματος είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των μηκών των τμημάτων στα οποία διαιρεί το τμήμα ένα σημείο του.

Αξίωμα 6^ο

Κάθε γωνία έχει ορισμένο μέτρο ένα θετικό αριθμό. Η πεπλατυσμένη γωνία έχει μέτρο 180°. Το μέτρο μιας γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αθροίσματος των γωνιών στις οποίες διαιρεί τη γωνία κάθε ημιευθεία που βρίσκεται ανάμεσα στις πλευρές της.

4^η ομάδα (αξίωμα ύπαρξης τμήματος με ορισμένο μήκος)

Αξίωμα 7^ο

Αν $a > 0$, τότε υπάρχει τμήμα AB, με $(AB) = a$

5^η ομάδα (αξίωμα ισότητας τριγώνων)

Αξίωμα 8^ο

Αν τα τρίγωνα ABΓ και Α'Β'Γ' έχουν $AB = A'B'$, $ΑΓ = Α'Γ'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ είναι ίσα.

6^η ομάδα (αξίωμα των παραλλήλων)

Αξίωμα 9^ο

Από σημείο Α που δεν ανήκει σε ευθεία ε, μπορούμε να φέρουμε μια το πολύ ευθεία παράλληλη στην ευθεία ε.

Παράρτημα ΙΙΙ:

Η Επιπεδομετρία του Ευκλείδη

Από τα στοιχεία το Α΄

Όροι(ορισμοί)

1. Σημεῖον ἐστίν, οὗ μέρος οὐθέν.
2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
3. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
4. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
5. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
6. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.
8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσεις.
9. Ὄταν δὲ αἱ περιέχουσιν τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.
10. Ὄταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.
11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.
12. Ὄξεα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.
13. Ὅρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας.
14. Σχήμα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινων ὄρων περιεχόμενον.
15. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἢ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἐνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσιν εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
16. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.
17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.
18. Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

19. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολὺπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.
20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.
21. Ἐτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθήν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.
22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἐτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστίν οὔτε ὀρθογώνιον: τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλεῖσθω.
23. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Κοινές έννοιες

- 1.«Τά τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα».
Ὅσα εἶναι πρὸς τρίτον τὶ ἴσα εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλα ἴσα
- 2.«Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα».
Ἀν εἰς ἴσα προστεθοῦν ἴσα, ὅλα εξακολουθοῦν νὰ εἶναι ἴσα 3.
«Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα».
Ἐάν ἀπὸ ἴσα ἀφαιρεθοῦν ἴσα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἀπομένουν εἶναι ἴσα.
- 4.«Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα».
Ἐάν εἰς ἄνισα προστεθοῦν ἴσα, ὅλα εξακολουθοῦν νὰ εἶναι Ἄνισα.
- 5.«Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν».
Τὰ διπλάσια ἐν σχέσει με τὸ αὐτό εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.
- 6.«Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν».
Τὰ ἡμίση τοῦ αὐτοῦ εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλα ἴσα.
- 7.«Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν».
Καὶ ὅσα ἐφαρμόσουν τὸ ἐν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο εἶναι ἴσα πρὸς ἀλλήλα.
- 8.«Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν».
Τὰ ὅλον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μέρους.
- 9.«Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν».
Δύο εὐθεῖαι δὲν δύνανται νὰ περικλείσουν ἐν οἰονδήποτε Διάστημα.

Αιτήματα

- 1.«Ἡτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγοιγεῖν».
- 2.«Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν».
- 3.«Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι».
- 4.«Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι».
5. «Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονος ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες».

Βιβλιογραφία

- [1] Lucas N.H.Bunt – Phillips S. Jones – Jack D. Bedient, *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών*, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού Αθήνα.
- [2] Stewart Shapiro, *Σκέψεις για τα Μαθηματικά : Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Μετάφραση : Κ. Δρόσος – Λ. Σπανός, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών 2005.
- [3] S. Givant, Tarski's system of Geometry, *Bulletin of Symbolic Logic*, 5 (2), 1999.
- [4] Ευτύχης Παπαδοπετράκης, *Σημειώσεις Ιστορίας των Μαθηματικών* έκδοση Τμήμα Εκτυπώσεων Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 2012
- [5] David Hilbert, *Θεμέλια της Γεωμετρίας (Grundlagen der Geometrie)*, Μετάφραση –Πρόλογος –Εισαγωγή από την 7^η γερμανική έκδοση (Leipzig 1930), Στρατής Παπαδόπουλος, Εκδόσεις Τροχαλία 1995
- [6] Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, *Οδηγίες για τη διδασκτέα ύλη και την διδασκαλία των Μαθηματικών*, ΟΕΔΒ Αθήνα 2000
- [7] Τάσος Πατρώνης - Γιάννης Θωμαΐδης , On the Arithmetization of School Geometry in Setting of Modern Axiomatics, *Περιοδικό Science & Education*, Volume 6, Issue 3, May 1997, pp 273-290
- [8] Μπάμπης Τουμάσης, *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Gutenberg , Αθήνα 1994
- [9] Απόστολος Δοξιάδης, *Logicomix*, Εκδόσεις Ίκαρος, Αθήνα 2008
- [10] Usiskin – Peressini- Marchisotto – Stanley, *Mathematics for high School Teachers(an advanced perspective*, Pearson Education , Inc. New Jersey, Εκδόσεις Prentice Hall, USA 2003

- [11] Euclid's elements of Geometry The Greek text of J.L Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick
- [12] Δ. Κοντογιάννης – Ε. Ντζιαχρήστος, *Η φιλοσοφία των αξιωματικών Συστημάτων, Τα αξιωματικά συστήματα* H. Weyl, N. Kolmogorov, V. Pogorelov, 11^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας
- [13] Howard Eves, *Foundations and fundamental concepts of mathematics*, Third edition. Dover Publications, INC Mineola, New York
- [14] *Ενκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Γενικού Λυκείου* . Εκδόσεις ΙΤΥΕ – Διόφαντος 2013
- [15] Michael Beeson, *A constructive version of Tarski's Geometry*, arXiv: 1407.4399v [math.LO] 13 Jul 2014
- [16] Π. Χριστοδουλίδης, *Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των μαθηματικών*, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικός, Αθήνα 1993.
- [17] Steve Awodey and Erich H. Reck, *Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic* Pages 8-13. History and Philosophy of Logic, 23(2002), 1-30.
- [18] Thom Rene, *Modern Mathematics: Does it Exist?*, Cambridge University Press (1973)
- [19] Thomas L. Heath, *The thirteen books of Euclid's elements*, Dover Publications, INC, New York.
- [20] Pogorelov: *Geometry*, Mir Moscow, 1987
- [21] A. Timothy Bell, *The mutual independence of Hilbert's Axioms within the various groups*, University of Illinois, 1902
- [22] Giorgio Venturi, Hilbert completeness and geometry, Riviste UNIMI, 2011

[23] Hilbert, The Foundations of Geometry, The open Court Publishing Company, La Salle. Translated from 2nd German edition, 1950).

[24] Ευτύχης Παπαδοπετράκης, *Η ποσόδειξη στον Ελληνικό Μαθηματικό Λόγο*, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1991

[25] Ευτύχης Παπαδοπετράκης, *Πως γεννιέται μια επιστήμη*, Περιοδικό «Ουτοπία», Τεύχος 23