



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ
ΣΕ ΗΡΕΜΟ Ή ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ**

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΡΙΣΤΕΙΔΗ Α. ΜΠΛΟΥΤΣΟΥ

Διπλ. Πολιτικού Μηχανικού Παν. Πατρών

ΠΑΤΡΑ 2012

«Προσομοίωση Αλληλεπίδρασης Ανωστικών Φλεβών σε Ήρεμο ή Κινούμενο Αποδέκτη»

Copyright © Αριστείδης Α. Μπλούτσος

Εργαστήριο Τεχνολογίας του Περιβάλλοντος

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

Πολυτεχνική Σχολή

Πανεπιστήμιο Πατρών

Ελλάς, 2012

«Η έγκριση της διδακτορικής διατριβής από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα. (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202)».

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Τεχνολογίας του Περιβάλλοντος, του Τομέα Τεχνολογίας του Περιβάλλοντος και Συγκοινωνιών, του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών, υπό την επίβλεψη του κ. Γιαννόπουλου Παναγιώτη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος.

Θέμα της εργασίας είναι η προσομοίωση του φαινομένου της αλληλεπίδρασης τυρβωδών ανωστικών φλεβών σε ήρεμο ή κινούμενο αποδέκτη. Η ανάπτυξη αυτού του μαθηματικού μοντέλου στηρίχθηκε στις θεμελιώδεις εξισώσεις συνέχειας, ορμής και διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη, λαμβάνοντας υπόψη το φαινόμενο της αποκόλλησης μαζών από τη μοναχική ανωστική φλέβα, τα επίπεδα συμμετρίας και τη δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ ανωστικών φλεβών.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Γιαννόπουλο Παναγιώτη για τη συνεργασία του και την αμέριστη βοήθεια, στην κατανόηση του φυσικού φαινομένου και τη γενικότερη καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της Διατριβής.

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στα υπόλοιπα μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής κ. Δημητρακόπουλο Αλέξανδρο, Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών και μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, κα. Νάνου-Γιάνναρου Αικατερίνη, Λέκτορα της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, κ. Παπανικολάου Παναγιώτη, Επίκουρο Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, κ. Στάμου Αναστάσιο, Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, κ. Τσαμόπουλο Ιωάννη, Καθηγητή του Τμήματος Χημικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών και κ. Χορς Γεώργιο, Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών και μέλος της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους ώστε να βελτιωθεί η παρούσα Διατριβή.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλονται στον κ. Χριστοδούλου Γεώργιο, Καθηγητή της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου για την κριτική ανάγνωση και τις εύστοχες παρατηρήσεις του στο περιεχόμενο της παρούσας Διατριβής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω και την οικογένειά μου για τη συμπαράστασή της σε ολόκληρη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι ροές φλεβών άνωσης παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον στην περιβαλλοντική υδραυλική και στη μηχανική των ρευστών, επειδή εμφανίζονται σε αρκετά φαινόμενα που σχετίζονται με τη διάθεση υγρών αποβλήτων ή θερμικών απορρίψεων σε υδάτινους αποδέκτες καθώς επίσης και την εκπομπή αερίων ενώσεων από καμινάδες στην ατμόσφαιρα.

Στην παρούσα Διδακτορική Διατριβή μελετήθηκε η ροή κεκλιμένης δισδιάστατης ή κυκλικής ανωστικής φλέβας εντός ακίνητου ή κινούμενου αποδέκτη και η αλληλεπίδραση μεταξύ ανωστικών φλεβών.

Στα υπάρχοντα μαθηματικά μοντέλα, ο υπολογισμός του πεδίου ροής και διάχυσης μιας κεκλιμένης ανωστικής φλέβας πραγματοποιείται επιλύοντας το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της συνεχείας, της ορμής και της διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη, για τη μέση ροή, σε ένα καρτεσιανό ή κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Με αυτό τον τρόπο όμως, παραλείπονται όροι από τις εξισώσεις που προσδίδουν μεγαλύτερη ακρίβεια. Ακόμη, το φαινόμενο της αποκόλλησης μαζών από την ανωστική φλέβα έχει μεν παρατηρηθεί σε πειραματικές εργασίες διαφόρων ερευνητών αλλά δεν έχει προσδιοριστεί ποσοτικά. Μία ακόμη αδυναμία που χαρακτηρίζει τα υπάρχοντα μαθηματικά μοντέλα, είναι ότι θεωρούν τον αποδέκτη απεριόριστων διαστάσεων με συνέπεια τα αποτελέσματά τους να μην ακολουθούν τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα, τα οποία φέρουν την επιρροή των ορίων, αφού πρακτικά δεν γίνεται να πραγματοποιηθούν σε αποδέκτες απεριόριστων διαστάσεων.

Η παρούσα Διατριβή επιχειρεί να συμβάλλει στη βελτίωση των παραπάνω αδυναμιών, προτείνοντας τη μαθηματική περιγραφή της ελεύθερης κεκλιμένης τυρβώδους ανωστικής φλέβας σε ένα καμπυλόγραμμο ορθογώνιο ή κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, ώστε να επιτευχθεί καλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό των μέσων χαρακτηριστικών της ροής. Επίσης, αναπτύσσεται ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο προσομοιώνει τη διαφυγή των μαζών που αποκολλώνται από το σώμα της ανωστικής φλέβας, και όπως φαίνεται, τα δύο αυτά στοιχεία επηρεάζουν τόσο την τροχιά της φλέβας όσο και την αραίωση. Στο σημείο αυτό, η παρούσα Διατριβή χρησιμοποιεί τη μέθοδο της συμμετρικής εικονικής πηγής για την απόκτηση λύσης του προβλήματος σε ημίχωρο. Θεωρείται, λοιπόν, κατοπτρικά ως προς το όριο όμοια εικονική πηγή με την πραγματική,

ανωστική φλέβα, η οποία αλληλεπιδρά δυναμικά με την ανωστική φλέβα της πραγματικής πηγής.

Τέλος, τα ανωτέρω συνδυάζονται στην ανάπτυξη ενός μοντέλου, το οποίο υπολογίζει τα χαρακτηριστικά του πεδίου μέσης ροής και διάχυσης από την αλληλεπίδραση N κατακορύφων ανωστικών φλεβών σε διάταξη τύπου ροζέτας εντός ήρεμου αποδέκτη. Το μοντέλο αυτό παρέχει ακρίβεια $2^{\text{ης}}$ τάξης.

Η παρούσα διατριβή αναπτύσσεται σε έξι κεφάλαια. Στο πρώτο Κεφάλαιο, πραγματοποιείται μια εισαγωγή στο αντικείμενο της Διατριβής. Αναφέρονται τα πεδία στα οποία συναντώνται φαινόμενα ροών από ανωστικές φλέβες και η πρακτική σημασία τους. Επίσης, αναφέρονται οι στόχοι οι οποίοι επιδιώκονται μέσω της Διατριβής.

Το δεύτερο Κεφάλαιο, περιέχει βιβλιογραφική ανασκόπηση, στην οποία αναφέρονται τα κυριότερα μαθηματικά μοντέλα για τις περιπτώσεις των ελευθέρων και των πολλαπλών κυκλικών ή δισδιάστατων ανωστικών φλεβών. Επίσης, παρουσιάζονται οι σημαντικότερες διαθέσιμες ερευνητικές εργασίες διεξαχθέντων συναφών πειραμάτων, των οποίων οι μετρήσεις χρησιμοποιούνται στον έλεγχο των αποτελεσμάτων, τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή των μαθηματικών μοντέλων που αναπτύσσονται στην παρούσα Διατριβή.

Στο τρίτο Κεφάλαιο, αναπτύσσονται τα υποστηρικτικά μοντέλα, τα οποία ενσωματώνονται στο γενικότερο μαθηματικό μοντέλο υπολογισμού των κεκλιμένων ανωστικών φλεβών και στο μοντέλο της αλληλεπίδρασής τους. Αρχικώς, κατασκευάζεται το σύστημα το καμπυλογράμμων ορθογωνίων και κυλινδρικών συντεταγμένων και διατυπώνονται οι εξισώσεις της συνεχείας, της ορμής και της διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη για τη μέση ροή στο αντίστοιχο σύστημα. Στην συνέχεια, περιγράφεται η ανάπτυξη του μοντέλου για τον πυρήνα της Ζώνης Εγκατάστασης της Ροής, το οποίο υπολογίζει τις πραγματικές εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων ξεκινώντας από την έξοδο του ακροφυσίου έως το πέρας του πυρήνα. Τέλος, αναπτύσσεται το μαθηματικό μοντέλο, το οποίο περιγράφει τη διαφυγή των μαζών που αποκολλώνται από το πεδίο ροής μιας κεκλιμένης δισδιάστατης ή κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο, παρουσιάζεται ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό μοντέλο για μια κεκλιμένη δισδιάστατη ή κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα σε ήρεμο ή κινούμενο αποδέκτη, το οποίο ενσωματώνει τα επί μέρους μοντέλα του τρίτου Κεφαλαίου. Το

μοντέλο, συγκρίνεται με τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα της διεθνούς βιβλιογραφίας και ταυτοχρόνως ρυθμίζεται η προσομοίωση της διαφυγής των μαζών που αποκολλώνται.

Στο πέμπτο Κεφάλαιο εξετάζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ τυρβωδών ανωστικών φλεβών. Στο πρώτο μέρος του Κεφαλαίου προτείνεται ένα μοντέλο 2^{ης} τάξης, το οποίο υπολογίζει τα χαρακτηριστικά του μέσου πεδίου ροής και διάχυσης από την αλληλεπίδραση N κατακορύφων κυκλικών ανωστικών φλεβών από διαχύτη τύπου ροζέτας. Στο δεύτερο μέρος, μελετάται η δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ ανωστικών φλεβών. Αναπτύσσεται το σύστημα των εξισώσεων, το οποίο ενσωματώνει τη δυναμική αλληλεπίδραση, και αντιμετωπίζεται η ύπαρξη στερεών ορίων στο πεδίο ροής ανωστικής φλέβας μέσω της αλληλεπίδρασης των ανωστικών φλεβών από την πραγματική και τη συμμετρική εικονική της πηγή.

Στο έκτο Κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα, τα οποία προκύπτουν από την εφαρμογή των διαφόρων μαθηματικών μοντέλων της Διατριβής, τα οποία εν συντομία, είναι τα εξής:

- Αναπτύσσεται ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο υπολογίζει με πολύ μεγάλη ακρίβεια την κεκλιμένη δισδιάστατη ή κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα, για αρχικές γωνίες κλίσης $-75^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$.
- Η προσομοίωση της διαφυγής των μαζών, που αποκολλώνται από την ανωστική φλέβα, προσεγγίζει ακριβέστερα την τροχιά των κεκλιμένων φλεβών, όπως αυτή προσδιορίζεται από τις πειραματικές μετρήσεις.
- Λόγω έλλειψης πειραματικών δεδομένων για την περίπτωση της κεκλιμένης δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας, ο συντελεστής A , που χαρακτηρίζει τις αποκολλήσεις, λαμβάνεται ίσος με 0,06, για την περίπτωση όπου $\theta_0 = 0^\circ$.
- Για την κεκλιμένη κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα, προτείνεται $A = 0,34$ για $-75^\circ \leq \theta_0 \leq -15^\circ$ και $A = 0,00$ για $-15^\circ < \theta_0 \leq 90^\circ$, δηλώνοντας ότι οι διαφυγές σε αυτές τις γωνίες είναι αμελητέες.
- Προβλέπεται με χαρακτηριστική ακρίβεια το εξωτερικό όριο των κεκλιμένων κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών και με ικανοποιητική ακρίβεια η τροχιά, συγκριτικά με τα διαθέσιμα αποτελέσματα των αντιστοίχων πειραμάτων. Η σύγκριση του εσωτερικού ορίου εξαιτίας της ύπαρξης των διαφυγών είναι δυσδιάκριτη και πιθανόν να εμπεριέχει σφάλματα.
- Ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών της ροής, από την αλληλεπίδραση N κατακορύφων κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών από διαχύτη τύπου ροζέτας

εντός ήρεμου αποδέκτη, δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα συγκρινόμενα με τα υπάρχοντα πειραματικά και θεωρητικά δεδομένα

- Η αλληλεπίδραση N ομοίων ή διαφορετικών δισδιάστατων ή κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας τη θεωρία του δυναμικού πεδίου.
- Η αντιμετώπιση των εξωτερικών ορίων, χρησιμοποιώντας τη δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ ανωστικών φλεβών δίνει ενθαρρυντικά αποτελέσματα.

Τέλος, στα Παραρτήματα περιγράφεται αναλυτικώς η μαθηματική ανάπτυξη του κάθε μοντέλου και δίνονται σε μορφή διαγραμμάτων τα θεωρητικά αποτελέσματα με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για τα διάφορα χαρακτηριστικά των κεκλιμένων κυκλικών ανωστικών φλεβών.

ABSTRACT

In this Doctoral Thesis a mathematical model that predicts the mean flow and mixing parameters of inclined plane and round turbulent jets in a stationary or moving uniform fluid environment is developed. Also, the interaction of multiple buoyant jets is mathematically examined.

The existing mathematical models predict the mean flow and mixing properties of an inclined plane and round turbulent buoyant jets in a uniform stationery or moving environment solving the system of partial differential equations of continuity momentum and tracer conservation of mass written in cartesian or cylindrical coordinates. By this way, the terms that give a better precision are omitted. Also, the escaping masses from the main buoyant jet flow that are experimentally observed are not quantified. Furthermore, these models assume that the receiver is infinite so the predicted properties do not coincide to experimental data. These experimental data are affected by the boundaries as the experiments cannot be conducted in boundless environment.

The present Thesis, attempts to improve the aforementioned weaknesses. In this Thesis, a mathematical description of an inclined turbulent plane or round buoyant jet is proposed, where the partial differential equations for continuity, momentum and tracer conservation are written in orthogonal and cylindrical curvilinear coordinates in order to achieve better accuracy of the mean flow and mixing parameters. The escaping masses from the main buoyant jet flow are simulated, and the model can be successfully applied to initial discharge inclinations θ_0 from 90° to -75° with respect to the horizontal plane. This is based on the idea that masses may escape from the buoyant jet zones where considerable intermittency occurs and entrainment shows large variations having a very weak, zero or negative mean value and at the same time some buoyant chunks lose their inertia due to reversal motions imposed by the large eddies. Thus, the only governing force on these masses is buoyancy. This complementary approach introduces a concentration coefficient, called A , which is calibrated using experimental evidence. This phenomenon is sharper in motionless environment. The present model has incorporated the second-order approach and, regarding the jet-core region, a jet-core model based on the advanced integral model for the production of more correct transverse profiles of the mean axial velocities and mean concentrations than the common Gaussian or top-hat profiles. The partial differential equations for momentum and tracer conservation are written in orthogonal and cylindrical

curvilinear coordinates for inclined plane and round buoyant jets, respectively, and they are integrated under the closure assumptions of (a) quasi-linear spreading of the mean flow and mixing fields, and (b) known transverse profile distributions. The integral forms are solved by employing the Runge–Kutta algorithm. This model is applied to predict the mean flow properties (trajectory characteristics, mean axial velocities and mean concentrations) for inclined plane and round buoyant jets. The results predicted are compared with experimental data available in the literature, and the accuracy obtained is more than satisfactory. The best values of $\mathcal{A}$ were found to be in the range from 0.30 to 0.42, indicating a mean value $\pm$ standard deviation of $\mathcal{A} = 0.344 \pm 0.053$ for $-75^\circ \leq \theta_0 \leq -15^\circ$. Thus $\mathcal{A} = 0.34$ is adopted as the suitable value for all cases of round buoyant jets with $-75^\circ \leq \theta_0 \leq -15^\circ$, while for the rest range $-15^\circ < \theta_0 \leq 90^\circ$ the pertinent value is $\mathcal{A} = 0$. For the inclined plane buoyant jets, the available experimental data are rather restricted to only trajectories and concentrations of horizontal discharges, which allow the determination of a suitable value $\mathcal{A} = 0.08$.

The Entrainment Restriction Approach is employed in interacting round buoyant jets discharged vertically upwards from a rosette type diffuser into a calm environment. Incorporating the second order approach, the prediction of the mean-flow properties achieves better accuracy.

The present Thesis solves the interaction of N identical or not inclined turbulent plane or round buoyant jets using the potential theory. The occurrence of boundaries is handled via the method of symmetric virtual origin. A mirror image to the boundary, which is identical to the real buoyant jet, is assumed that dynamically interacts with the buoyant jet issued from the real source.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΘΕΣΗΣ ΥΓΡΩΝ ΑΠΟΒΛΗΤΩΝ	2
1.2 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΔΙΑΧΥΤΗΡΩΝ.....	4
1.3 ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΙΚΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑ.....	6
1.4 ΣΚΟΠΟΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ.....	7
2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ.....	10
2.1 ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΩΣΤΙΚΗ ΦΛΕΒΑ.....	12
2.2 ΚΥΚΛΙΚΗ ΑΝΩΣΤΙΚΗ ΦΛΕΒΑ.....	14
2.3 ΟΡΙΣΜΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ	18
2.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ.....	23
2.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ.....	25
2.6 ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ.....	26
3. ΥΠΟΣΤΗΡΙΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.....	30
3.1 ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ.....	30
3.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ ΤΗ ΖΩΝΗ ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ (ΖΦΕ).....	36
3.2.1 Δισδιάστατη Ανωστική Φλέβα.....	38
3.2.1.1 Εγκάρσια Κατανομή Ταχυτήτων.....	39
3.2.1.2 Εγκάρσια Κατανομή Συγκεντρώσεων.....	42
3.2.2 Τρισδιάστατη Ανωστική Φλέβα.....	47
3.2.2.1 Εγκάρσια Κατανομή Ταχυτήτων.....	48
3.2.2.2 Εγκάρσια Κατανομή Συγκεντρώσεων.....	50
3.3 ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗΣ ΜΑΖΩΝ.....	55
4. ΚΕΚΛΙΜΕΝΕΣ ΑΝΩΣΤΙΚΕΣ ΦΛΕΒΕΣ.....	66

4.1 ΠΕΔΙΟ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΑΝΩΣΤΙΚΗΣ ΦΛΕΒΑΣ ΣΕ ΗΡΕΜΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ.....	66
4.1.1 Κεκλιμένη Δισδιάστατη Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα.....	67
4.1.1.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος	67
4.1.1.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους.....	72
4.1.2 Κεκλιμένη Κυκλική Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα.....	76
4.1.2.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος	76
4.1.2.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους.....	80
4.1.3 Αποτελέσματα.....	83
4.1.3.1 Κεκλιμένη Δισδιάστατη Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα.....	84
4.1.3.2 Κεκλιμένη Κυκλική Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα.....	87
4.1.4 Εφαρμογή και Αξιολόγηση Προτεινόμενου Μοντέλου.....	110
4.2 ΠΕΔΙΟ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΑΝΩΣΤΙΚΗΣ ΦΛΕΒΑΣ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ	115
4.2.1 Κεκλιμένη Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα.....	115
4.2.1.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος	115
4.2.2 Κεκλιμένη Δισδιάστατη Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα.....	118
4.2.2.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος	118
4.2.2.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους.....	122
4.2.3 Κεκλιμένη Κυκλική Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα.....	124
4.2.3.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος	124
4.2.3.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους.....	128
4.2.4 Αποτελέσματα.....	130
5. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ.....	136
5.1 ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΦΛΕΒΩΝ ΣΕ ΔΙΑΧΥΤΗ ΤΥΠΟΥ ΡΟΖΕΤΑΣ.....	136
5.1.1 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους.....	141
5.1.1.1 Οριακές Περιπτώσεις.....	146

5.1.2	Αποτελέσματα.....	148
5.1.2.1	Διαμήκεις Κατανομές Αδιαστατοποιημένων Αξονικών Ταχυτήτων και Συγκεντρώσεων.....	148
5.1.2.2	Λόγος Αραίωσης.....	150
5.1.2.3	Λόγος Εισροής Κινητικής Ενέργειας.....	153
5.1.2.4	Τοπικός Αριθμός Richardson.....	155
5.2	ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ.....	162
5.2.1	Αλληλεπίδραση Μεταξύ Κεκλιμένων Δισδιάστατων Τυρβωδών Ανωστικών Φλεβών	166
5.2.1.1	Διαμόρφωση του Προβλήματος	166
5.2.1.2	Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους	171
5.2.2	Αλληλεπίδραση Μεταξύ Κεκλιμένων Κυκλικών Τυρβωδών Ανωστικών Φλεβών	173
5.2.2.1	Διαμόρφωση του Προβλήματος	173
5.2.2.2	Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους	177
5.2.3	Αποτελέσματα.....	179
5.2.3.1	Δισδιάστατες Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες.....	180
5.2.3.2	Κυκλικές Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες	181
5.2.3.3	Αντιμετώπιση Εξωτερικών Ορίων.....	182
5.2.3.4	Κινούμενος Αποδέκτης.....	185
6.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	186
6.1	ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	186
6.2	ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.....	190
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	192

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1	Σχηματικό διάγραμμα διάθεσης επεξεργασμένων λυμάτων στη θάλασσα (από Lai 2010).....	4
Σχήμα 1.2	Σχηματική απεικόνιση διατάξεων πολλαπλών διαχυτών με: (α) κατακόρυφα ακροφύσια, (β) εναλλασσόμενα ακροφύσια, (γ) ακροφύσια τύπου –T και (δ) ροζέτες.....	5
Σχήμα 1.3	Φωτογραφίες (α) - (γ) πολλαπλός διαχυτής σε σειρά: Campbell River Outfall (City of Campbell River), Lulu Island Outfall (Vancouver) και Gold Coast, QLD (Australia), αντίστοιχα, (δ) διαχυτής τύπου ροζέτας [Πηγή: (α) και (γ) http://www.dayton-knight.com , (β) http://www.rpctechnologies.com και (δ) http://www.bwsc.org].....	6
Σχήμα 1.4	Πεδίο ροής και διάχυσης καπναερίων από πύργους ψύξης και καμινάδες (α) Ατμοηλεκτρικό Εργοστάσιο ΔΕΗ - Άγιος Δημήτριος Πτολεμαΐδας [Πηγή: http://www.motionteam.gr] (β) Ατμοηλεκτρικό Εργοστάσιο ΔΕΗ - Καρδιά Κοζάνης [Πηγή: http://www.neoiellispontou.blogspot.gr201009blog-post_21.html].....	8
Σχήμα 1.5	Σχηματιζόμενη ανωστική φλέβα από έκρηξη ηφαιστείου. [Πηγή: Φωτογραφία (α) http://www.en.wikipedia.org/wiki/File:DenglerSW-Stromboli-20040928-1230x800.jpg Φωτογραφία (β) http://www.minecraftbuildingideas.com/201205volcano.html].....	9
Σχήμα 2.1	Σχηματικό διάγραμμα κεκλιμένης τυρβώδους ανωστικής φλέβας, δισδιάστατης με πλάτος σχισμής d_0 ή κυκλικής με διάμετρο ακροφυσίου d_0	11
Σχήμα 3.1	Πεδίο ροής και διάχυσης σε τοπικό σύστημα καμπυλογράμμων συντεταγμένων $O_l(x_1, x_2, x_3)$	30
Σχήμα 3.2	Προσδιορισμός σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του σημείου $M(x_1, x_2, x_3)$ στο χώρο.....	31
Σχήμα 3.3	Προσδιορισμός της στοιχειώδους μετακίνησης $d\vec{s} = d\vec{a}$	33
Σχήμα 3.4	Προσδιορισμός των μετρικών συντελεστών h_i σε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων $O_l(x_1, x_2, x_3) \equiv O_l(\eta, \psi, \xi)$, με $x_1 = \eta = 0$, για την περίπτωση δισδιάστατης ανωστικής φλέβας.....	34
Σχήμα 3.5	Προσδιορισμός των μετρικών συντελεστών h_i σε καμπυλόγραμμο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων $O_l(x_1, x_2, x_3) \equiv O_l(\varphi, r, \xi)$, για την περίπτωση κυκλικής ανωστικής φλέβας.....	35
Σχήμα 3.6	Σχηματικό διάγραμμα πεδίου ροής και διάχυσης τυρβώδους ανωστικής φλέβας.....	36

Σχήμα 3.7	Σχηματικό διάγραμμα για το μοντέλο πυρήνα δισδιάστατης ανωστικής φλέβας.....	38
Σχήμα 3.8	Εξέλιξη κατά μήκος της αξονικής απόστασης ξ/d_0 της Σύνθετης και της Gauss Κατανομής για το πεδίο (α) ταχυτήτων και (β) συγκεντρώσεων στην περίπτωση της Δισδιάστατης Φλέβας Χωρίς Άνωση.....	45
Σχήμα 3.9	Εξέλιξη κατά μήκος της αξονικής απόστασης ξ/d_0 της Σύνθετης και της Gauss Κατανομής για το πεδίο (α) ταχυτήτων και (β) συγκεντρώσεων στην περίπτωση της Δισδιάστατης Φλέβας Πλήρους Άνωσης.....	46
Σχήμα 3.10	Σχηματικό διάγραμμα για το μοντέλο πυρήνα κυκλικής ανωστικής φλέβας.....	47
Σχήμα 3.11	Εξέλιξη κατά μήκος της αξονικής απόστασης ξ/d_0 της Σύνθετης και της Gauss Κατανομής για το πεδίο (α) ταχυτήτων και (β) συγκεντρώσεων στην περίπτωση της Κυκλική Φλέβας Χωρίς Άνωση στο επίπεδο $y/d_0 = 0$	53
Σχήμα 3.12	Εξέλιξη κατά μήκος της αξονικής απόστασης ξ/d_0 της Σύνθετης και της Gauss Κατανομής για το πεδίο (α) ταχυτήτων και (β) συγκεντρώσεων στην περίπτωση της Κυκλική Φλέβας Πλήρους Άνωσης στο επίπεδο $y/d_0 = 0$	54
Σχήμα 3.13	Μηχανισμός τύρβης για την επεξήγηση του φαινομένου της αποκόλλησης μαζών από μια κεκλιμένη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη.....	56
Σχήμα 3.14	Μεταβολή της αδιαστατοποιημένης εγκάρσιας ταχύτητας συμπαράσυρσης στο όριο του πεδίου της τυρβώδους ανωστικής φλέβας συναρτήσει της αδιάστατης αξονικής απόστασης Ξ για διάφορες τιμές αρχικής γωνίας εκτόξευσης θ_0 δισδιάστατης ανωστικής φλέβας, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η διαφυγή των αποκολλημένων μαζών.....	57
Σχήμα 3.15	Μεταβολή της αδιαστατοποιημένης εγκάρσιας ταχύτητας συμπαράσυρσης στο όριο του πεδίου της τυρβώδους ανωστικής φλέβας συναρτήσει της αδιάστατης αξονικής απόστασης Ξ για διάφορες τιμές αρχικής γωνίας εκτόξευσης θ_0 κυκλικής ανωστικής φλέβας, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η διαφυγή των αποκολλημένων μαζών.....	58
Σχήμα 3.16	Διανυθείσα απόσταση αποκολλημένης μάζας.....	62
Σχήμα 3.17	Σχηματικό διάγραμμα των ορίων της εγκάρσιας επιφάνειας τυρβώδους ανωστικής φλέβας.....	63

Σχήμα 4.1	Σχηματικό διάγραμμα πεδίου ροής και διάχυσης δισδιάστατης/κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας σε ακίνητο αποδέκτη.....	66
Σχήμα 4.2	Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κεκλιμένη δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα.....	73
Σχήμα 4.3	Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κεκλιμένη κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα.....	81
Σχήμα 4.4	Πρόβλεψη τροχιάς για οριζόντια δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη με $A = 0$ και 0,08 σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.....	85
Σχήμα 4.5	Πρόβλεψη αξονικών αραιώσεων για οριζόντια δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη με $A = 0$ και 0,08 σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.....	86
Σχήμα 4.6	Πρόβλεψη τροχιάς για οριζόντια κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη με $A = 0$ και 0,06 σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα	88
Σχήμα 4.7	Πρόβλεψη αξονικών αραιώσεων για οριζόντια κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη με $A = 0$ και 0,06 σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.....	89
Σχήμα 4.8	Πρόβλεψη τροχιάς για κεκλιμένες κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός ακίνητου αποδέκτη με $0^\circ \leq \theta_0 \leq 80^\circ$ και $A = 0$ σε σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα του Kikkert (2006).....	90
Σχήμα 4.9	Πρόβλεψη αξονικών αραιώσεων για κεκλιμένες κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός ακίνητου αποδέκτη με $\theta_0 = 0^\circ$ και 80° και $A = 0$ σε σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα του Kikkert (2006).....	91
Σχήμα 4.10	Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης για κεκλιμένη τυρβώδη ανωστική φλέβα σε ήρεμο αποδέκτη χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο μοντέλο με $A = 0,34$ σε σύγκριση με τη μέση εικόνα από το πείραμα (LIF) του Kikkert (2006). Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν την πρόβλεψη του μοντέλου που προτείνεται από τον Kikkert. Οι αρχικές συνθήκες του πειράματος είναι $\theta_0 = -45^\circ$, $F_0 = 48,66$, $Re_0 = 2945$ και $d_0 = 2,45\text{mm}$	95
Σχήμα 4.11	Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης από τυρβώδη ανωστική φλέβα με $\theta_0 = -15^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη.....	97
Σχήμα 4.12	Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης από τυρβώδη ανωστική φλέβα με $\theta_0 = -30^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη.....	98
Σχήμα 4.13	Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης από τυρβώδη ανωστική φλέβα με $\theta_0 = -45^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη.....	99

Σχήμα 4.14	Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης από τυρβώδη ανωστική φλέβα με $\theta_0 = -60^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη.....	100
Σχήμα 4.15	Μεταβολή αδιάστατων αξονικών ταχυτήτων κεκλιμένης δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0	110
Σχήμα 4.16	Μεταβολή αδιάστατων αξονικών συγκεντρώσεων κεκλιμένης δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0	111
Σχήμα 4.17	Μεταβολή αδιάστατων αξονικών ταχυτήτων κεκλιμένης κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0	111
Σχήμα 4.18	Μεταβολή αδιάστατων αξονικών συγκεντρώσεων κεκλιμένης κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0	112
Σχήμα 4.19	Μεταβολή αξονικών ταχυτήτων κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη με $\theta_0 = -30^\circ$ συγκρινόμενη με πειραματικά δεδομένα.....	113
Σχήμα 4.20	Μεταβολή αξονικών ταχυτήτων κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη με $\theta_0 = -45^\circ$ συγκρινόμενη με πειραματικά δεδομένα.....	114
Σχήμα 4.21	Μεταβολή αξονικών ταχυτήτων κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη με $\theta_0 = -60^\circ$ συγκρινόμενη με πειραματικά δεδομένα.....	114
Σχήμα 4.22	Σχηματικό διάγραμμα πεδίου ροής και διάχυσης δισδιάστατης/κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη.....	116
Σχήμα 4.23	Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε δισδιάστατη κεκλιμένη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός κινούμενου αποδέκτη.....	123
Σχήμα 4.24	Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κυκλική κεκλιμένη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός κινούμενου αποδέκτη.....	128
Σχήμα 4.25	Προσομοίωση τροχιάς οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.....	132
Σχήμα 4.26	Προσομοίωση μεταβολής αξονικής ταχύτητας W_d οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη.....	133

Σχήμα 4.27	Προσομοίωση αραίωσης S_m^* οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα για την περίπτωση ακίνητου αποδέκτη.....	133
Σχήμα 4.28	Προσομοίωση τροχιάς οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα. Παρουσιάζεται, επίσης, το αποτέλεσμα της προσομοίωσης της τροχιάς σε ακίνητο αποδέκτη.....	134
Σχήμα 4.29	Προσομοίωση μεταβολής αξονικής ταχύτητας W_d οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη.....	135
Σχήμα 4.30	Προσομοίωση αραίωσης S_m^* οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.....	135
Σχήμα 5.1	Σχηματικό διάγραμμα διαχύτη τύπου ροζέτας με $N = 6$ κατακόρυφες κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες που αλληλεπιδρούν – όψη.....	137
Σχήμα 5.2	Σχηματικό διάγραμμα διαχύτη τύπου ροζέτας με $N = 6$ κατακόρυφες κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες που αλληλεπιδρούν – κάτωψη...	138
Σχήμα 5.3	Κατανομή του λόγου των μέσων αξονικών ταχυτήτων κατά μήκος τυρβώδους ανωστικής φλέβας, η οποία ανήκει σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.....	149
Σχήμα 5.4	Κατανομή του λόγου των μέσων αξονικών συγκεντρώσεων κατά μήκος τυρβώδους ανωστικής φλέβας, η οποία ανήκει σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.....	150
Σχήμα 5.5	Κατανομή του λόγου r_{cN}/r_c κατά μήκος τυρβώδους ανωστικής φλέβας, η οποία ανήκει σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.....	151
Σχήμα 5.6	Κατανομή της αδιαστατοποιημένης εισροής κινητικής ενέργειας κατά μήκος τυρβώδους ανωστικής φλέβας η οποία ανήκει σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.....	155
Σχήμα 5.7	Μεταβολή του αριθμού Richardson R_N συναρτήσει της αξονικής απόστασης z/L_m , σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.....	158
Σχήμα 5.8	Μεταβολή του αριθμού Richardson R_N συναρτήσει της αξονικής απόστασης z/t , σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.....	160
Σχήμα 5.9	Αριθμητικά σφάλματα από τον υπολογισμό του αριθμού Richardson χρησιμοποιώντας το «νέο» ορισμό για άπειρο αριθμό κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών αντί της ισοδύναμης δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας.....	162

Σχήμα 5.10	Διάγραμμα προσομοίωσης της υπό μελέτης τυρβώδους ανωστικής φλέβας ως ένα πεπερασμένο πλήθος σημειακών καταβοθρών (sink), όπου η κάθε μια βρίσκεται στο κέντρο ενός όγκου ελέγχου πάχους δz	163
Σχήμα 5.11	Σχηματικό διάγραμμα δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο κεκλιμένων τυρβωδών ανωστικών φλεβών.....	164
Σχήμα 5.12	Σχηματικό διάγραμμα αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο κεκλιμένων δισδιάστατων/κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών.....	167
Σχήμα 5.13	Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κεκλιμένη δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα.....	171
Σχήμα 5.14	Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κεκλιμένη κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα.....	178
Σχήμα 5.15	Τροχιά ζεύγους κατακορύφων δισδιάστατων τυρβωδών ανωστικών φλεβών για αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_0 = 10$. Οι πηγές σχισμής βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο σε αποστάσεις $t/d_0 = \pm 1, \pm 3$ και ± 5 ως προς τον κατακόρυφο άξονα z	181
Σχήμα 5.16	Τροχιά ζεύγους κατακορύφων κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών για αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_0 = 10$. Οι κυκλικές πηγές βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο σε αποστάσεις $t/d_0 = \pm 1, \pm 3$ και ± 5 ως προς τον κατακόρυφο άξονα z	182
Σχήμα 5.17	Εξωτερικά όρια: (α) κατακόρυφο όριο, (β) οριζόντιο όριο.....	183
Σχήμα 5.18	Τροχιά οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας υπό την επίδραση οριζοντίου εξωτερικού ορίου – Σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα.....	184
Σχήμα 5.19	Τροχιά οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας υπό την επίδραση κατακόρυφου εξωτερικού ορίου – Σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα.....	185

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 2.1	Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.....	21
Πίνακας 4.1	Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για δισδιάστατες τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.....	75
Πίνακας 4.2	Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.....	83
Πίνακας 4.3	Τιμές του συντελεστή λ , οι οποίες ελαχιστοποιούν την ποσότητα S_{dif} για διάφορες γωνίες αρχικής εκτόξευσης. Η μέση τιμή $\pm$ τυπική απόκλιση του λ είναι $0,344 \pm 0,053$ για $\theta_0 \leq 15^\circ$	94
Πίνακας 4.4	Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Μέγιστο Τερματικό Ύψος, Z_f	103
Πίνακας 4.5	Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Τερματικό Ύψος Άξονα, Z_c	105
Πίνακας 4.6	Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Οριζόντιο Μήκος Y_c στο, Z_c	106
Πίνακας 4.7	Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για την Οριζόντια Απόσταση Y_r	107
Πίνακας 4.8	Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για την Αξονική Αραίωση (S_m^*) και Ολοκληρωμένη Αραίωση (S_i^*) στο Τερματικό Ύψος.....	108
Πίνακας 4.9	Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για την Αξονική Αραίωση (S_{mr}^*) και Ολοκληρωμένη Αραίωση (S_{ir}^*) στη Οριζόντια Απόσταση Y_r	109
Πίνακας 4.10	Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για δισδιάστατες τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός κινουμένου αποδέκτη.	124
Πίνακας 4.11	Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός κινουμένου αποδέκτη.	130
Πίνακας 5.1	Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές σε ομάδα από N κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.....	142
Πίνακας 5.2	Οριακές τιμές για τους λόγους ταχυτήτων (L_{wN}) και συγκεντρώσεων (L_{cN}).....	148

Πίνακας 5.3	Οριακές τιμές του λόγου r_{cN} για μία κατακόρυφη τυρβώδη ανωστική φλέβα, για N τυρβώδεις ανωστικές φλέβες από διαχύτη ροζέτας με κατακόρυφα ακροφύσια και κατακόρυφη δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα.....	152
-------------	---	-----

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Λατινικά σύμβολα

α	συντελεστής συμπαράσυρσης σύμφωνα με την υπόθεση των Morton <i>et al.</i> (1956)
A	εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας
b_c	ονομαστικό πλάτος της φλέβας για το πεδίο των συγκεντρώσεων
b_w	ονομαστικό πλάτος της φλέβας για το πεδίο των ταχυτήτων
$b_{0,5}$	ονομαστικό ημι-πλάτος της φλέβας για το πεδίο των ταχυτήτων
b_c^*	$= b_c/l_m$, αδιαστατοποιημένο πλάτος διεύρυνσης για το πεδίο των συγκεντρώσεων
b_w^*	$= b_w/l_m$, αδιαστατοποιημένο πλάτος διεύρυνσης για το πεδίο των ταχυτήτων
b_p	$= K_w z_B$, πλάτος διεύρυνσης του πλουμίου για το πεδίο των ταχυτήτων το οποίο δημιουργείται από τις μάζες που διαφεύγουν
B_c	συνολικό πλάτος της φλέβας (δισδιάστατης ή κυκλικής) για το πεδίο των συγκεντρώσεων
B_w	συνολικό πλάτος της φλέβας (δισδιάστατης ή κυκλικής) για το πεδίο των ταχυτήτων
c	$= (\rho_a - \rho) / (\rho_a - \rho_0)$, μέση συγκέντρωση στη θέση του πεδίου ροής (x, y, z) ή (η, ψ, ξ) ή (ϕ, r, ξ)
c_B	$= \Delta c_m$, η μέση συγκέντρωση των μαζών που διαφεύγουν από τη θέση (ξ, B_w)
C	$= (c_m / c_0) F_0^{2(1+i)/(3+i)}$, αδιαστατοποιημένες αξονικές συγκεντρώσεις,
d	διάμετρος ροζέτας
d_0	πλάτος σχισμής ή διάμετρος ακροφυσίου εκροής ανωστικής φλέβας
E	παράμετρος κινητικής ενεργείας
$\text{erf}(n)$	$= \left(2 / \sqrt{\pi} \right) \int_0^n \exp(-t^2) dt$, συνάρτηση σφάλματος της μεταβλητής n
G_w	$= \exp(-r^2 / b_w^2)$, εγκάρσια κατανομή ομοιότητας για την ταχύτητα w
G_c	$= \exp(-r^2 / b_c^2)$, εγκάρσια κατανομή ομοιότητας για τη συγκέντρωση c
f	αδιάστατη εξαρτημένη μεταβλητή ή εναπομείναντες όροι της κινητικής ενεργείας της μέσης ροής
f_w	$= w/w_m$, γενική εγκάρσια κατανομή ομοιότητας για την ταχύτητα w
f_c	$= c/c_m$, γενική εγκάρσια κατανομή ομοιότητας για τη συγκέντρωση c
F_0	$= w_0 / \sqrt{ g'_0 d_0}$, αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude

$F_N()$	συνάρτηση ολοκληρώματος για ομάδα με N ανωστικές φλέβες που αλληλεπιδρούν
$F_1()$	συνάρτηση ολοκληρώματος για μοναχική ανωστική φλέβα
g	επιτάχυνση της βαρύτητας ($9,81 \text{ m s}^{-1}$)
g'	$= g\Delta\rho/\rho_0$, φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας (αρχική τιμή $g'_0\Delta\rho/\rho_0$)
h	$= 1+\psi d\theta/d\xi$, μετρικός συντελεστής του άξονα ξ για τα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων (O, n, ψ, ξ) και (O, φ, r, ξ)
$\bar{h}$	$= 1-\psi d\theta/d\xi$, συζυγής μετρικός συντελεστής του άξονα ξ για τα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων
i	$= 0$ για την δισδιάστατη ανωστική φλέβα και 1 για την κυκλική ανωστική φλέβα
$iter$	αριθμός επαναλήψεων έως επίτευξης σύγκλισης, όταν λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο της δυναμικής αλληλεπίδρασης
I_i	$= \int_0^n f_w dn$, ολοκλήρωμα της συνάρτησης εγκάρσιας κατανομής f_w
$I_{\varphi i}$	$= \int_A f_{\varphi} dA / \int_A G_{\varphi} dA$, συντελεστής σχήματος της συνάρτησης εγκάρσιας κατανομής ομοιότητας f_{φ} , όπου ο δείκτης φ αντιστοιχεί στις ποσότητες μ , m , ζ ή β , $I_{\varphi i} = 1$ όταν $f_{\varphi} \equiv G_{\varphi}$
I, I_j, I_{ij}	συντελεστές σχήματος ολοκληρωμάτων, όπου $i=2, 3$ και $j=1, 2, 3, 4, 5$
K_w	συντελεστής διεύρυνσης του πεδίου των ταχυτήτων
K_c	συντελεστής διεύρυνσης του πεδίου των συγκεντρώσεων
K_j	παράμετρος διεύρυνσης με $j=1, 2, 3, 4, 5$
K_{ξ}	εμπειρικός συντελεστής της εξίσωσης (4.47)
l_m	$= d_0 F_0^{4/(3+i)}$, χαρακτηριστική κλίμακα μήκους
L_m	$= (\pi/4)^{(i/4)} l_m$, χαρακτηριστική κλίμακα μήκους
L_{wN}	$= w_{mN}/w_m$, λόγος της μέσης αξονικής ταχύτητας της μιας από την ομάδα των N ανωστικών φλεβών προς την μέση αξονική ταχύτητα της μοναχικής ανωστικής φλέβας
L_{cN}	$= c_{mN}/c_m$, λόγος της μέσης αξονικής συγκέντρωσης της μιας από την ομάδα των N ανωστικών φλεβών προς την μέση αξονική συγκέντρωση της μοναχικής ανωστικής φλέβας
m	$= \lambda_M \int_A w^2 dA$, εισροή ορμής
M_1	παράμετρος πυρήνα για τη μοναχική ανωστική φλέβα
n	$= \psi/b_w$ ή r/b_w , αδιάστατη εγκάρσια απόσταση από τον άξονα της ανωστικής φλέβας

n_c	= B_c/b_c , αδιάστατη συνολική διεύρυνση του πεδίου των συγκεντρώσεων ανωστικής φλέβας
n_w	= B_w/b_w , αδιάστατη συνολική διεύρυνση του πεδίου των ταχυτήτων ανωστικής φλέβας
N	πλήθος ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν
p	= 0,144, σταθερά
p_d	δυναμική πίεση
p_1, p_2	κατακόρυφα επίπεδα συμμετρίας, τα οποία ορίζουν την περιορισμένη ανωστική φλέβα
q_e	όγκος περιβάλλοντος ρευστού που συμπαρασύρεται εντός της ανωστικής φλέβας
q_r	= $u_r c_r$, φορτίο των μαζών που διαφεύγουν ανά μονάδα επιφάνειας στη διεύθυνση r (q_B , είναι η τιμή στο όριο της ανωστικής φλέβας)
q_ψ	= $u_\psi c_\psi$, φορτίο των μαζών που διαφεύγουν ανά μονάδα επιφάνειας στη διεύθυνση ψ (q_B , είναι η τιμή στο όριο της ανωστικής φλέβας)
r_0	εξωτερική ακτίνα κανονικού οριζοντίου πολυγώνου
r_c	λόγος αραίωσης
R_a	τοπική ακτίνα της καμπυλότητας του άξονα ξ
Re_0	= $w_0 d_0 / \nu$, αρχική τιμή του αριθμού Reynolds στην έξοδο της ανωστικής φλέβας
r	απόσταση μεταξύ δύο σημείων του χώρου
R	τοπικός αριθμός Richardson
R_0	= $(\pi / 4)^{i/2} F_0^{-2}$, αρχική τιμή του αριθμού Richardson
S_{dif}	άθροισμα των μέσων τετραγώνων των διαφορών των υπολογισμένων από τις πειραματικές τιμές
s_i	= $(\xi / w_m)(dw_m / d\xi)$, λογαριθμική κλίση της μείωσης της w_m
S	πλήθος κόμβων
S_0	= $\partial(hq_\psi) / \partial\psi$, όρος πηγής των διαφυγόντων μαζών από το πεδίο ροής κυκλικής ανωστικής φλέβας
S_1	= $\partial(rhq_r) / \partial r$, όρος πηγής των διαφυγόντων μαζών από το πεδίο ροής δισδιάστατης ανωστικής φλέβας
S_i^*	= $S_m^* / (\sqrt{\pi} \lambda K_w \Xi)$, ολοκληρωμένη αραίωση
S_m^*	= $(c_0 / c_m) / F_0^{-2(1+i)/(3+i)}$, αδιάστατη αξονική αραίωση
t	η μισή απόσταση μεταξύ διαδοχικών φλεβών [T]

T	$= (t / d_0) F_0^{-1}$ αριθμός εγγύτητας μεταξύ διαδοχικών φλεβών
u	εγκάρσια συνιστώσα της τοπικής μέσης ταχύτητας στη διεύθυνση r ή ψ
u_a	ταχύτητα ρεύματος κινούμενου αποδέκτη, η ταχύτητα εξαιτίας της δυναμικής ροής, σε περιπτώσεις αλληλεπίδρασης [L/T]
u_B	$= u_e/h$, εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας στη θέση B_w
u_r	$= w_B \cos \theta \cos \varphi$, η συνιστώσα της ταχύτητας των διαφυγόντων μαζών στη διεύθυνση r
u_ψ	$= w_B \cos \theta$, η συνιστώσα της ταχύτητας των διαφυγόντων μαζών στη διεύθυνση ψ
u_{bw}	ταχύτητα συμπαράσυρσης σε εγκάρσια απόσταση ίση με b_w από τον άξονα της ανωστικής φλέβας
u_{Bw}	ταχύτητα συμπαράσυρσης σε εγκάρσια απόσταση ίση με B_w από τον άξονα της ανωστικής φλέβας
u_e	εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης κατακόρυφης φλέβας, στη διεύθυνση ψ ή r .
$u'c'$	τοπική εισροή εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των u και c
U_a^*	ανηγμένη ταχύτητα ρεύματος. Για τις δισδιάστατες ανωστικές φλέβες είναι $U_a^* = \frac{u_a}{w_{d0}} F_0$, ενώ για τις κυκλικές $U_a^* = \frac{u_a}{w_{d0}} F_0^{2/3}$.
U_{Bi}	εγκάρσια ταχύτητα (δείκτης $i=0$ ή $i=1$)
v	εγκάρσια συνιστώσα της τοπικής μέσης ταχύτητας στη διεύθυνση φ , στο σύστημα συντεταγμένων (O, φ, r, ξ)
v_n	εγκάρσια συνιστώσα της μέσης ταχύτητας στη διεύθυνση n , στο σύστημα συντεταγμένων (O, φ, r, ξ)
v_ψ	εγκάρσια συνιστώσα της μέσης ταχύτητας στη διεύθυνση ψ , στο σύστημα συντεταγμένων (O, φ, r, ξ)
V_e^*	$= (u_e / w_0) F_0^{2(1+i)/(3+i)}$, αδιάστατη ταχύτητα συμπαράσυρσης
w	αξονική συνιστώσα της τοπικής μέσης ταχύτητας
w'^2	τοπική εισροή εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων της w
$w'c'$	τοπική εισροή εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w και c
w_B	μέση κατακόρυφη ταχύτητα των μαζών που διαφεύγουν
W	$= (w_m / w_0) F_0^{2(1+i)/(3+i)}$, αδιάστατη ταχύτητα w_m
x, y, z	άξονες Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (O, x, y, z) , z είναι ο κατακόρυφος άξονας
Y	$= y/l_m$, αδιαστατοποιημένη δυναμική απόσταση y

Y	$= \left[(1 + \lambda^2) / 2\lambda \right]^{(1+i)/2}$, παράμετρος διεύρυνσης
z_B	κατακόρυφη διανυθείσα διαδρομή των διαφευγουσών μαζών, από το σημείο αποκόλλησης έως το όριο της φλέβας από το οποίο εξέρχονται από το σώμα αυτής
z_e	μήκος πυρήνα
Z	$= z/l_m$, αδιαστατοποιημένη δυναμική απόσταση z

Ελληνικά σύμβολα

α_N	επίκεντρη γωνία κανονικού πολυγώνου με N πλευρές
β	$= \lambda_B g'_0 \int_A c w dA$, εισροή άνωσης
$\delta\mu_i$	$= d\mu_i / d\zeta$ ένταση πηγής κάθε κόμβου
$\Delta\rho$	$= \rho_a - \rho$, μέση πυκνομετρική διαφορά μεταξύ του περιβάλλοντος αποδέκτη και ενός σημείου εντός του πεδίου ροής ($\Delta\rho_0 = \rho_a - \rho_0$, πυκνομετρική διαφορά στην έξοδο της φλέβας)
ε	$= \int_A (1/2) w^3 dA$, εισροή κινητικής ενεργείας για τη μέση ροή
ε_f	εισροή κινητικής ενεργείας για τη μέση ροή εξαιτίας των όρων f
ζ	$= g'_0 \int_A c dA$, εισροή ελλείμματος βάρους
η	οριζόντιος άξονας του καμπυλογράμμου συστήματος συντεταγμένων (O, η, ψ, ζ), ο άξονας η είναι κάθετος στο επίπεδο yz και παράλληλος στον άξονα x
θ	τοπική γωνία κλίσης του άξονα της ανωστικής φλέβας, με θ_0 η αρχική γωνία εκτόξευσης της ανωστικής φλέβας ή πολική γωνία του πολικού συστήματος συντεταγμένων
θ_{0j}	θέση του επιπέδου συμμετρίας p_1 ως προς τον άξονα της ανωστικής φλέβας από την πηγή O_1
λ	$= K_c/K_w$, ο λόγος της διεύρυνσης του πεδίου των συγκεντρώσεων προς το αντίστοιχο των ταχυτήτων
λ_B	συντελεστής, ο οποίος λαμβάνει υπόψη τη συνεισφορά της τύρβης στην εισροή της άνωσης
λ_M	συντελεστής, ο οποίος λαμβάνει υπόψη τη συνεισφορά της τύρβης στην εισροή της ορμής
A	συντελεστής, που εκφράζει τη συγκέντρωση των διαφευγουσών μαζών προς την αξονική τιμή της συγκέντρωσης της ανωστικής φλέβας

μ	$= \int_A w dA$, εισροή όγκου
ν	κινηματικό ιξώδες του ρευστού της φλέβας στην έξοδο του ακροφυσίου
ξ	άξονας της ανωστικής φλέβας (επί του επιπέδου επίπεδο yz)
Ξ	$= \xi/l_m$, αδιαστατοποιημένη δυναμική απόσταση κατά μήκος του άξονα της ανωστικής φλέβας
Ξ_0	εμπειρική παράμετρος στην εξίσωση (4.47)
ρ	τοπική μέση τιμή της πυκνότητας του ρευστού (ρ_0 , η πυκνότητα του ρευστού στην έξοδο του ακροφυσίου και ρ_a η πυκνότητα του αποδέκτη)
$\tau_{r\xi}$	μέση τυρβώδης διατμητική τάση επί του καθέτου επιπέδου ως προς r , παράλληλη στον ξ
$\tau_{\eta\xi}$	μέση τυρβώδης διατμητική τάση επί του καθέτου επιπέδου ως προς η , παράλληλη στον ξ
$\tau_{\psi\xi}$	μέση τυρβώδης διατμητική τάση επί του καθέτου επιπέδου ως προς ψ , παράλληλη στον ξ
φ	γωνία του καμπυλογράμμου κυλινδρικού συστήματος (O, φ, r, ξ), με αφετηρία τον άξονα η
ϕ	γωνία ταχύτητας δυναμικής ροής ως προς το οριζόντιο επίπεδο
Φ	δυναμικό εξαιτίας όλων των πηγών
ψ	άξονας του ορθογωνίου καμπυλογράμμου συστήματος συντεταγμένων (O, η, ψ, ξ), ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο yz
ω_{0j}	κάτω όριο του ολοκληρώματος I_{3j} με $j=1, 2, 3, 4, 5$

Δείκτες

0	τιμή στην έξοδο του ακροφυσίου $O(0, 0, 0)$
∞	ομάδα από άπειρο αριθμό ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν
α	τιμή στο περιβάλλον
B	τιμή στο όριο της ανωστικής φλέβας
c	δηλώνει παράμετρο του πεδίου των συγκεντρώσεων ή τιμή στον άξονα της ανωστικής φλέβας
d	υπερέχουσα τιμή
e	δηλώνει παράμετρο του εξωτερικού ορίου ή τον πυρήνα της ανωστικής φλέβας
f	τιμή στο μέγιστο ύψος αναρρίχησης (τερματικό ύψος)
i	δηλώνει τιμή για δισδιάστατη ανωστική φλέβα ($i = 0$) ή κυκλική ανωστική φλέβα ($i=1$), ή ένα ολοκληρωμένο μέγεθος
j	δηλώνει τιμή σε συμπεριφορά φλέβας μηδενικής άνωσης

m	τιμή στον άξονα της ανωστικής φλέβας
N	ομάδα από N ανωστικές φλέβες που αλληλεπιδρούν
p	δηλώνει τιμή σε συμπεριφορά φλέβας πλήρους άνωσης
r	δηλώνει τιμή στη διεύθυνση του άξονα r , ή τιμή σε ακτίνα r ή τιμή στο σημείο επιστροφής της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας στο οριζόντιο επίπεδο (τροχιά ή εξωτερικό όριο)
w	δηλώνει παράμετρο του πεδίου των ταχυτήτων
n	δηλώνει τιμή στη διεύθυνση του άξονα η
φ	δηλώνει τιμή στη διεύθυνση του άξονα φ
ψ	δηλώνει τιμή στη διεύθυνση του άξονα ψ
'	τιμή διακύμανσης
*	αδιαστατοποιημένη ποσότητα
-	μέση τιμή

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Ελλάδα έχει γεωγραφική έκταση στεριάς 131.957km² και θαλάσσια έκταση 1.140km² (<http://www.europa.eu>). Η ελληνική ακτογραμμή έχει μήκος 13,676km (<http://www.setimes.com>). Ο πληθυσμός της προσεγγίζει τα 11,2 εκατομμύρια (απογραφή 2011, <http://www.europa.eu>), το 70% του οποίου κατοικεί στην παράκτια ζώνη. Έτσι, ένα πλήθος ανθρωπίνων δραστηριοτήτων και διαφόρων χρήσεων γης συγκεντρώνεται σε αυτή. Υπάρχουν παράλιες δραστηριότητες όπως είναι οι κατοικίες, οι τουριστικές εγκαταστάσεις, οι βιομηχανίες και εκείνες οι οποίες λαμβάνουν χώρα στην παράκτια ζώνη, όπως είναι η κολύμβηση, η αλιεία, οι ιχθυοκαλλιέργειες κτλ. Για την ανάπτυξη και την προστασία όλων των προηγούμενων και ιδιαιτέρως των τελευταίων εξ αυτών από τη ρύπανση που προέρχεται από τις διάφορες ανθρώπινες δραστηριότητες, τόσο της ίδιας της παράκτιας ζώνης, όσο και της ενδοχώρας, χρειάζεται να γίνει η καταγραφή των πηγών ρύπανσης. Οι κύριες πηγές ρύπανσης περιλαμβάνουν τις εκβολές ποταμών, που φέρουν ρυπαντικά φορτία, τη διάθεση των μερικώς ή ολικώς επεξεργασμένων υγρών αποβλήτων καθώς και μη σημειακές πηγές ρύπανσης εντός του υδάτινου όγκου.

Η Εθνική Στρατηγική για την προστασία και διαχείριση του θαλασσίου περιβάλλοντος (ΦΕΚ Α/144/2011) εναρμονίζοντας το εθνικό δίκαιο με τις διατάξεις της Ευρωπαϊκής Οδηγίας 2008/56/ΕΚ θέτει περιβαλλοντικούς στόχους μέσω των αξιολογήσεων που υιοθετεί, με σκοπό την «περιβαλλοντική υγεία» των υδάτινων όγκων. Αυτοί οι στόχοι οριοθετούνται κάθε φορά εξαρτώμενοι από την «ευαισθησία» της χρήσης του αποδέκτη. Όταν τα κριτήρια πληρούνται, τότε η ποιότητα του νερού για τους σκοπούς για τους οποίους προορίζεται είναι εξασφαλισμένη.

Επίσης, η στρατηγική για το θαλάσσιο περιβάλλον αποτελεί μια βάση της αποτίμησης της σχέσης κόστους – οφέλους για διαφορετικές επιλογές διαχείρισης. Η υπέρ-προστασία ή η υπό-προστασία του περιβάλλοντος αποτελούν ανεπιθύμητες καταστάσεις. Η βέλτιστη επιλογή είναι η εξασφάλιση επαρκούς προστασίας με το χαμηλότερο δυνατό κόστος. Για παράδειγμα, ένα ολοκληρωμένο σύστημα επεξεργασίας λυμάτων συνδυάζει, αφενός μεν, την κατάλληλη επεξεργασία εντός της εγκατάστασης και, αφετέρου, τη διάθεσή τους στη θάλασσα από ένα καλά σχεδιασμένο διαχύτη.

Οι περιβαλλοντικοί δείκτες για την αξιολόγηση του υδατικού περιβάλλοντος περιλαμβάνουν φυσικές, χημικές και βιολογικές παραμέτρους. Τυπικές παράμετροι είναι το διαλυμένο οξυγόνο (Δ.Ο.), η αμμωνία, τα αιωρούμενα σωματίδια (Α.Σ.), η αλατότητα,

η θερμοκρασία και τα θρεπτικά (άζωτο και φωσφόρος). Επιπλέον αυτών, κατά τα τελευταία χρόνια, μετρώνται η συγκέντρωση του βακτηριδίου *E.coli* και η χλωροφύλλη που αποτελούν βιολογικές παραμέτρους.

Η ποιότητα του υδάτινου αποδέκτη εξαρτάται κυρίως από τις ανθρωπογενείς δραστηριότητες. Για να διασφαλιστεί αυτή η ποιότητα, οι υπηρεσίες περιβάλλοντος, ανά τον κόσμο, απαιτούν τη σύνταξη μελετών περιβαλλοντικών επιπτώσεων για τα σχεδιαζόμενα έργα. Τέτοια έργα είναι οι εγκαταστάσεις επεξεργασίας λυμάτων, οι εγκαταστάσεις αφαλάτωσης, οι υποθαλάσσιοι αγωγοί εκβολής λυμάτων κ.α. Πιθανές περιβαλλοντικές επιπτώσεις προκύπτουν από την κατασκευή και λειτουργία αυτών των μονάδων, οι οποίες θα πρέπει εγκαίρως να προσδιοριστούν και καταλλήλως να αντιμετωπιστούν. Επιπροσθέτως, χρειάζεται να γίνει ο προσδιορισμός των ευαίσθητων περιοχών του αποδέκτη και για τις περιοχές αυτές να εξασφαλίζονται οι περιβαλλοντικοί στόχοι, που έχουν θεσπιστεί. Χρειάζεται επομένως κατανόηση της αποδόμησης και της μεταφοράς των ρύπων εντός του αποδέκτη, για τις επικρατούσες συνθήκες. Αυτό επιτυγχάνεται με εξειδικευμένη έρευνα και τις κατάλληλες μαθηματικές προσομοιώσεις της διάχυσης των ρύπων.

1.1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΘΕΣΗΣ ΥΓΡΩΝ ΑΠΟΒΛΗΤΩΝ

Η σύσταση των ανεπεξέργαστων λυμάτων διαφέρει από χώρα σε χώρα. Γενικά, τυπικές τιμές παραμέτρων για υγρά απόβλητα αστικών περιοχών είναι 150 – 200mg/L για το Βιοχημικά Απαιτούμενο Οξυγόνο πέντε ημερών (Biochemical Oxygen Demand, BOD₅), 200 – 220mg/L για τα αιωρούμενα σωματίδια (Suspended Solids, SS), 10 – 20mg/L για την αμμωνία (NH₃) και για τη συγκέντρωση βακτηρίου *E.coli* 10⁶ – 10⁷cfu/100mL, για μέση τυπική παροχή 460 L/capita·d (Metcalf & Eddy, 2003).

Τα ανεπεξέργαστα λύματα υποβάλλονται σε επεξεργασία προτού διατεθούν στον υδάτινο αποδέκτη, ώστε να απομακρυνθεί ένα μεγάλο ποσοστό των SS, BOD₅ και *E.coli*. Στο στάδιο της προεπεξεργασίας, απομακρύνονται τα χονδρόκοκκα φερτά υλικά, ώστε να αποφευχθούν τυχαίες βλάβες στον εξοπλισμό της μονάδας στα επόμενα στάδια. Το επόμενο στάδιο, είναι εκείνο της βασικής επεξεργασίας, όπου μέσω της διαδικασίας της καθίζησης απομακρύνεται μέρος των SS και BOD₅. Σε αυτό το στάδιο μια μέση απόδοση της αφαίρεσης προσεγγίζει το 60% για τα SS, το 30% για BOD₅ και το 50% για το *E.coli*. Με πρόσθετη χημική επεξεργασία σε αυτό το στάδιο (Chemical Enhanced Primary

Treatment, CEPT) επιτυγχάνεται βελτίωση του βαθμού αφαίρεσης σε τιμές που αγγίζουν το 80%, 70% και 80%, για τα SS, BOD₅ και *E.coli.*, αντίστοιχα. Το δευτεροβάθμιο στάδιο επεξεργασίας περιλαμβάνει τη βιολογική επεξεργασία των λυμάτων επιτυγχάνοντας περαιτέρω αφαίρεση των αιρούμενων σωματιδίων και του βιοχημικά απαιτούμενου οξυγόνου. Στο τέλος της συνολικής διαδικασίας έχει επιτευχθεί βαθμός αφαίρεσης ίσος με 90% για SS και BOD₅, 95% για *E.coli.* (Metcalf & Eddy, 2003) και έχει αφαιρεθεί το 85% της αμμωνίας (Water Research Center, 1990). Είναι προφανές ότι γνωρίζοντας τους στόχους – όρια που προβλέπουν οι Οδηγίες προσδιορίζεται η αποτελεσματικότητα της αφαίρεσης των ρυπογόνων συστατικών των αποβλήτων.

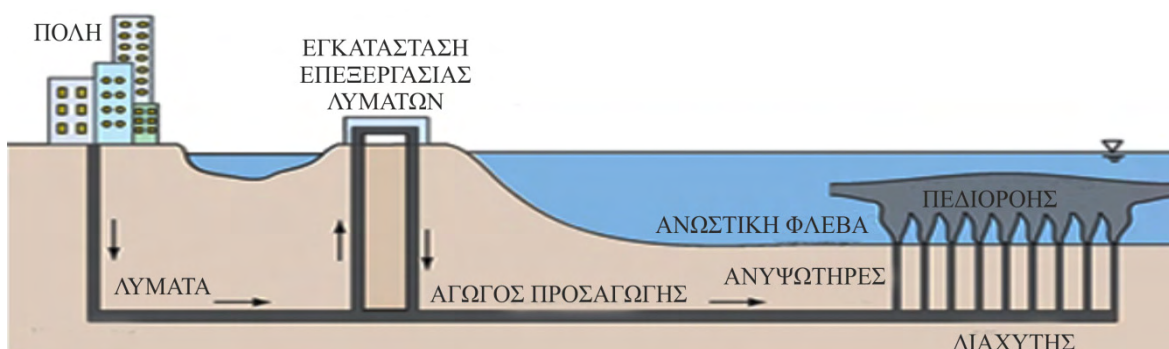
Τα σύγχρονα συστήματα διάθεσης αποβλήτων αποτελούνται αφενός από το χερσαίο τμήμα και αφετέρου από το υποθαλάσσιο τμήμα επεξεργασίας εντός του υδάτινου αποδέκτη. Τα συστήματα αυτά κάνουν χρήση των φυσικών μηχανισμών αραιώσης και διασποράς των αποβλήτων εντός του αποδέκτη. Έτσι, γνωρίζοντας τις απαιτήσεις των προδιαγραφών για την υπό μελέτη περιοχή, μπορεί να σχεδιαστεί η κατάλληλη χερσαία μονάδα επεξεργασίας λυμάτων και ο αντίστοιχος διαχύτης, ώστε να επιτυγχάνονται οι επιβαλλόμενοι περιβαλλοντικοί στόχοι με το μικρότερο οικονομικό κόστος.

Ύστερα από την κατάλληλη επεξεργασία στην εγκατάσταση επεξεργασίας λυμάτων, τα υγρά απόβλητα εκβάλλονται από τα ακροφύσια του διαχύτη με τη μορφή τυρβωδών ανωστικών φλεβών. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η τυπική πυκνότητα των επεξεργασμένων λυμάτων είναι 1000kg/m³ και η πυκνότητα του αποδέκτη είναι 1025kg/m³, εξασφαλίζεται η απαραίτητη διαφορά πυκνότητας, ώστε να κινηθεί το εκρέον ρευστό προς την επιφάνεια λόγω της άνωσης. Το νερό του περιβάλλοντος αποδέκτη, το οποίο θεωρείται «καθαρό», συμπαρασύρεται εντός της ανωστικής φλέβας, που σχηματίζουν τα εκρέοντα υγρά απόβλητα, εξαιτίας της διαφοράς ταχύτητας μεταξύ του αποδέκτη και της φλέβας και με τον τρόπο αυτόν, επιτυγχάνεται η μείξη. Η ανωστική φλέβα συνεχώς διευρύνεται εξαιτίας της συμπαράσυρσης του περιβάλλοντος ρευστού και αραιώνεται. Εξαιτίας της άνωσης, η φλέβα ή ανέρχεται προς την επιφάνεια του αποδέκτη ή παγιδεύεται μέσα σε αυτόν, εάν ο αποδέκτης είναι πυκνομετρικά στρωματοποιημένος. Η ύπαρξη ρεύματος αυξάνει την αραιώση. Έτσι, η φλέβα αναπτύσσεται αρχικά στο εγγύς πεδίο (near-field) επιτυγχάνοντας αρχική αραιώση, S_1 , της τάξης 20 έως 200. Στο απομακρυσμένο πεδίο (far-field) η αραιώση των λυμάτων λόγω απομείωσης, S_2 , είναι της τάξης του 5 έως 10, δηλαδή αρκετά μικρότερη της προηγούμενης, S_1 . Η επακόλουθη αραιώση, S_3 , λόγω της διασποράς των αποβλήτων από τα ρεύματα είναι της τάξης του 10 και υπολογίζεται στις περιοχές όπου

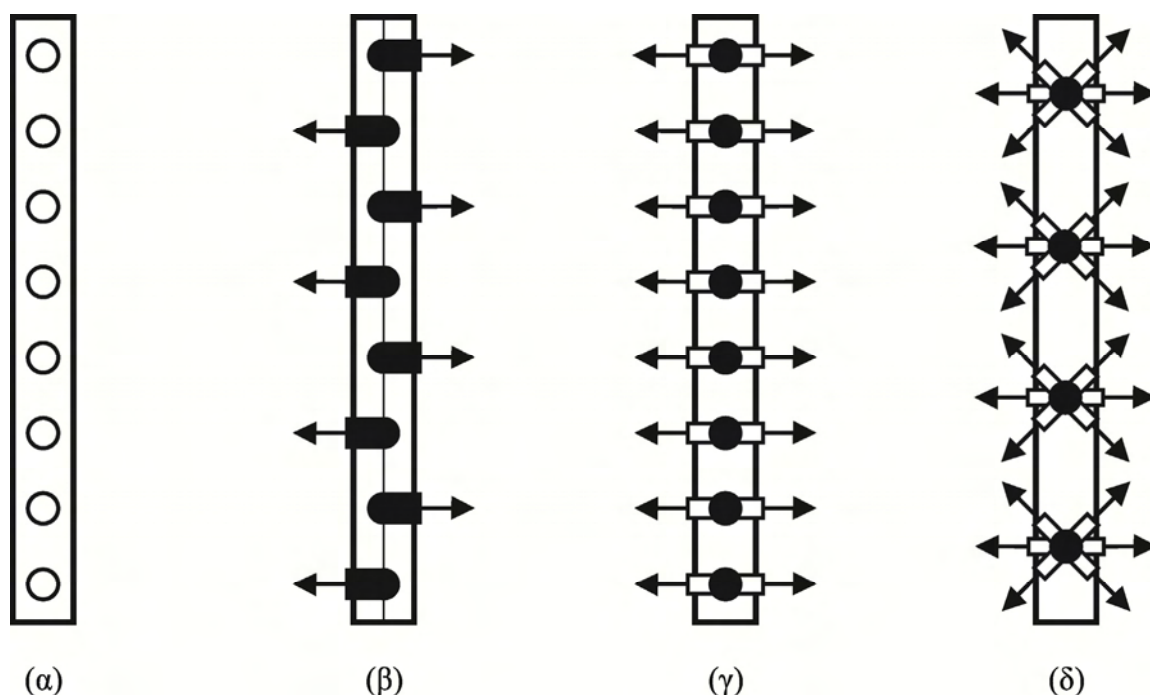
λαμβάνουν χώρα συγκεκριμένες χρήσεις. Η τελική αραιώση, S , που επιτυγχάνεται μέσω των φυσικών διεργασιών εντός του υδατίνου αποδέκτη για τις ρυπαίνουσες ουσίες των αποβλήτων είναι το γινόμενο των επί μέρους αραιώσεων ($S=S_1 \times S_2 \times S_3$) και μπορεί να είναι της τάξης του 10^4 αν ο διαχύτης είναι σωστά σχεδιασμένος. Η σχηματική απεικόνιση της τυπικής πορείας των λυμάτων που παράγονται από μια πόλη έως την τελική τους διάθεση στη θάλασσα φαίνεται στο Σχήμα 1.1.

1.2 ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΔΙΑΧΥΤΗΡΩΝ

Οι αγωγοί διάθεσης υγρών αποβλήτων σχεδιάζονται, συνήθως, έτσι ώστε να φέρουν πολλαπλά στόμια εξόδου (πολλαπλός διαχύτης). Έχει αποδειχθεί ότι η εκβολή των λυμάτων από πολλαπλό διαχύτη μπορεί να επιτύχει υψηλότερες αραιώσεις συγκρινόμενη με την αντίστοιχη εκβολή από ένα ισοδύναμο ακροφύσιο (Fischer *et al.* 1979, Lee & Chu 2003, Bloutsos & Yannopoulos 2009). Υπάρχουν πολλοί τύποι πολλαπλών διαχυτών, ανάλογα με τη διάταξη που έχουν τα ακροφύσια εξόδου, οι οποίοι χρησιμοποιούνται σύμφωνα με τις συνθήκες και τις απαιτήσεις του χώρου κατασκευής. Η πιο απλή περίπτωση παρουσιάζεται Σχήμα 1.2α, όπου ο πολλαπλός διαχύτης αποτελείται από μια σειρά από κατακόρυφα ακροφύσια. Εναλλακτική διάταξη είναι όταν τα ακροφύσια εξόδου είναι οριζόντια και προσανατολισμένα προς μία κατεύθυνση και εναλλασσόμενη φορά (Σχήμα 1.2β), ενώ άλλοι διαχύτες, εναλλασσόμενοι διαχύτες, έχουν τα ακροφύσιά τους (τύπου –T) προσανατολισμένα σε αντίθετες διευθύνσεις (Σχήμα 1.2γ). Μία σύγχρονη διάταξη είναι εκείνη που παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.2δ, όπου ο πολλαπλός διαχύτης αποτελείται από σειρά ροζετών. Η κάθε ροζέτα δύναται να φέρει πεπερασμένο αριθμό ακροφυσίων, το καθένα από τα οποία έχει συγκεκριμένη κλίση ως προς το οριζόντιο επί-



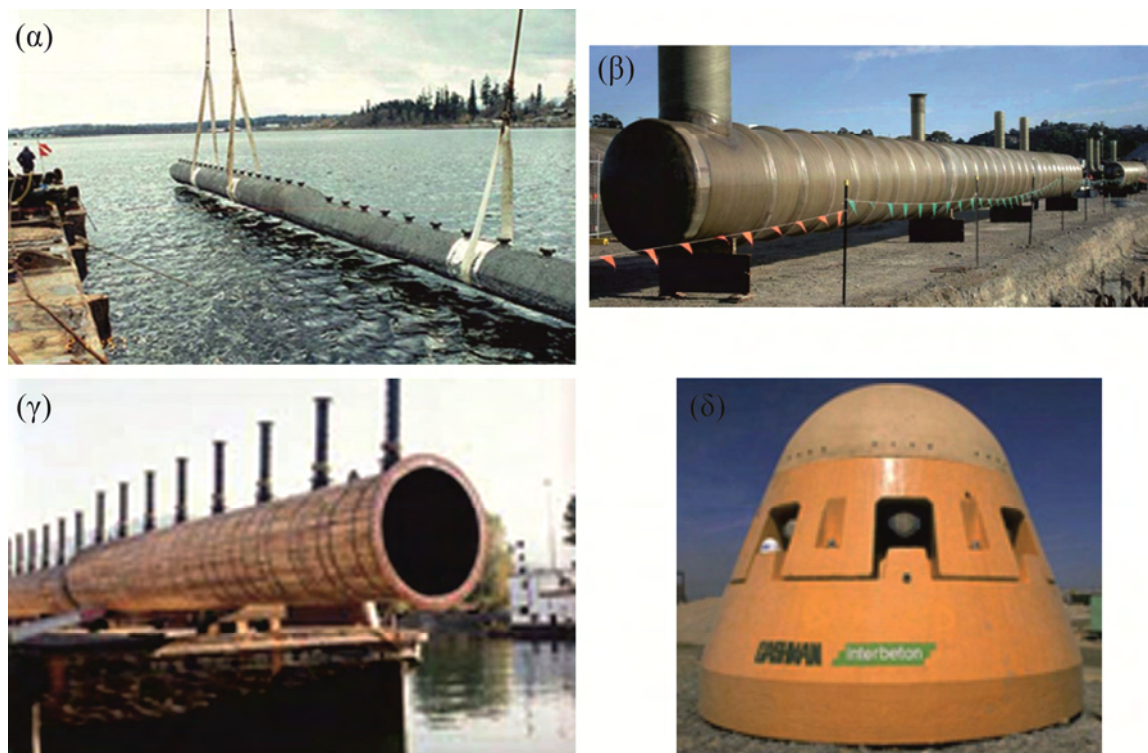
Σχήμα 1.1 Σχηματικό διάγραμμα διάθεσης επεξεργασμένων λυμάτων στη θάλασσα (από Lai 2010)



Σχήμα 1.2 Σχηματική απεικόνιση διατάξεων πολλαπλών διαχυτών με: (α) κατακόρυφα ακροφύσια, (β) εναλλασσόμενα ακροφύσια, (γ) ακροφύσια τύπου –T και (δ) ροζέτες

πεδο. Εκτενής αναφορά τέτοιων διατάξεων γίνεται στην εργασία του Jirka (2006). Παραδείγματα κατασκευασμένων πολλαπλών διαχυτών σε σειρά παρουσιάζονται στις φωτογραφίες (α) - (γ) του Σχήματος 1.3.

Η σύγχρονη τάση στη διάθεση λυμάτων των μεγαλουπόλεων είναι η κατασκευή συστημάτων διάθεσης με διαχύτες τύπου ροζέτας (φωτογραφία (δ) στο Σχήμα 1.3). Πρόκειται για διαχύτες με ακροφύσια τοποθετημένα στις κορυφές οριζοντίου κανονικού πολυγώνου. Συνήθως σ' αυτές τις περιπτώσεις, ο αγωγός προσαγωγής είναι μια υποθαλάσσια σήραγγα, στο τελευταίο τμήμα της οποίας τοποθετείται μια σειρά από ισαπέχουσες ροζέτες. Με αυτή τη διάταξη, τα πειραματικά στοιχεία των Isaacson *et al.* (1983) δείχνουν ότι ο αριθμός των ροζετών ανά μονάδα μήκους του διαχύτη δύναται να ελαχιστοποιηθεί, με αποτέλεσμα να ελαττώνεται το κατασκευαστικό κόστος και ταυτοχρόνως να επιτυγχάνονται αρκετά μεγάλες αραιώσεις, ώστε να ικανοποιούνται οι προβλεπόμενες περιβαλλοντικές απαιτήσεις. Η συγκεκριμένη διάταξη έχει υιοθετηθεί παγκοσμίως, όπως στην κατασκευή του αγωγού εκβολής λυμάτων της Βοστώνης, του Σαν Φραντσίσκο, του Σύνδνεϋ, του Χονγκ Κόνγκ και σε πλήθος αγωγών στη Ν. Κορέα.



Σχήμα 1.3 Φωτογραφίες (α) - (γ) πολλαπλός διαχύτης σε σειρά: Campbell River Outfall (City of Campbell River), Lulu Island Outfall (Vancouver) και Gold Coast, QLD (Australia), αντίστοιχα, (δ) διαχύτης τύπου ροζέτας [Πηγή: (α) και (γ) <http://www.dayton-knight.com>, (β) <http://www.rpctechnologies.com> και (δ) <http://www.bwsc.org>]

1.3 ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΙΚΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑ

Η διάθεση αερίων ρύπων και καπνού στην ατμόσφαιρα από βιομηχανικές εγκαταστάσεις και σταθμούς παραγωγής ενέργειας, καθώς και η απόρριψη αερίων θερμικών αποβλήτων, πραγματοποιείται με καμινάδες και πύργους ψύξης. Οι επιπτώσεις λειτουργίας αυτών των μονάδων περιλαμβάνουν την εναπόθεση στο έδαφος αιωρούμενων ή διαλυμένων ρυπογόνων σωματιδίων, την αύξηση της υγρασίας στη στάθμη του εδάφους, τη σκίαση και την ομίχλη ή τη θόλωση, που προκαλείται εξαιτίας του εκρέοντος πλουμίου, που προέρχεται από αυτές τις πηγές. Επειδή αυτές οι επιπτώσεις σχετίζονται με τη διάχυση και τη διασπορά της ανωστικής φλέβας, που προέρχεται από τις καμινάδες, η ικανότητα πρόβλεψης του πεδίου ροής αποτελεί σημαντική παράμετρο στη σύνταξη της μελέτης περιβαλλοντικών επιπτώσεων των βιομηχανικών μονάδων.

Η εκπομπή καπναερίων μπορεί να μην προέρχεται μόνο από μεμονωμένες καμινάδες εργοστασίων. Στις βιομηχανικές και ηλεκτροπαραγωγικές περιοχές εκπομπή καπναερίων και άλλων ρύπων στην ατμόσφαιρα πραγματοποιείται από συστοιχίες καμινάδων ενώ, από

συστοιχίες πύργων ψύξης, εκπέμπεται μείγμα θερμού αέρα και υδρατμών (Briggs 1973, Schatzmann 1979). Με παρόμοια γεωμετρία μπορεί να σχεδιαστεί η διάθεση των αερίων ρύπων, όταν επιθυμείται η αποφυγή παγίδευσης στα χαμηλά ατμοσφαιρικά στρώματα.

Στις φωτογραφίες του Σχήματος 1.4 φαίνεται το πεδίο ροής που σχηματίζεται από τα καπνάερια που εκπέμπονται από συστοιχίες καμινάδων και πύργων ψύξης σε μονάδες παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος της ΔΕΗ. Η λήψη της πρώτης φωτογραφίας έχει γίνει απουσία ισχυρού ρεύματος και φαίνεται το πεδίο ροής που σχηματίζεται λόγω της αλληλεπίδρασης των εκπεμπόμενων πλουμίων σε ήρεμο ατμοσφαιρικό αποδέκτη. Αντίθετα, η παρουσία ισχυρού ανέμου, δημιουργεί ένα πεδίο ροής και διάχυσης όπως εκείνο το οποίο απεικονίζεται στη φωτογραφία (β) του Σχήματος 1.4.

Ένα ακόμη παράδειγμα ατμοσφαιρικής διασποράς με τη μορφή ανωστικής φλέβας είναι το πεδίο ροής και διάχυσης που σχηματίζεται από τον καπνό που προέρχεται από την έκρηξη ενός ηφαιστείου (Σχήμα 1.5).

1.4 ΣΚΟΠΟΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Ένα γενικό μαθηματικό μοντέλο το οποίο να προσομοιώνει όσο το δυνατόν καλύτερα το πραγματικό πεδίο που προκαλείται από μια ανωστική φλέβα είναι αναγκαίο τόσο στο σχεδιασμό των συστημάτων διάθεσης υγρών αποβλήτων και καπναερίων όσο και για τον έλεγχο των πειραματικών αποτελεσμάτων, λαμβάνοντας υπόψη τις επιδράσεις των εξωτερικών ορίων του αποδέκτη.

Παρά την ύπαρξη αρκετών μαθηματικών μοντέλων για την προσομοίωση της τυρβώδους ανωστικής φλέβας, απουσιάζει κάποιο μοντέλο το οποίο να ενσωματώνει όλα τα φαινόμενα, τα οποία παρατηρούνται στα πειράματα και επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά της μέσης ροής και διάχυσης της φλέβας. Αυτό έχει ως συνέπεια η πρόβλεψη των χαρακτηριστικών του αναπτυσσόμενου πεδίου ροής να μην είναι επαρκής.

Η παρούσα Διατριβή έχει σκοπό: (α) την ακριβέστερη μαθηματική περιγραφή του φαινομένου της ροής ανωστικών φλεβών σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, ώστε να μην παραλείπονται όροι από τις εξισώσεις RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes), (β) την προσομοίωση του φαινομένου της αποκόλλησης των μαζών από το κύριο σώμα της ανωστικής φλέβας, όταν εκρέει αρχικά υπό κλίση, (γ) την ανάπτυξη ενός μοντέλου $2^{ης}$ τάξης που να περιγράφει την αλληλεπίδραση ομάδας N κατακορύφων φλεβών από διαχύτη τύπου ροζέτας σε ήρεμο περιβάλλον, και (δ) την ενσω-



Σχήμα 1.4 Πεδίο ροής και διάχυσης καπναερίων από πύργους ψύξης και καμινάδες
 (α) Ατμοηλεκτρικό Εργοστάσιο ΔΕΗ - Άγιος Δημήτριος Πτολεμαΐδας
 [Πηγή: <http://www.motionteam.gr>]
 (β) Ατμοηλεκτρικό Εργοστάσιο ΔΕΗ - Καρδιά Κοζάνης
 [Πηγή: http://www.neoiellispontou.blogspot.gr201009blog-post_21.html]



Σχήμα 1.5 Σχηματιζόμενη ανωστική φλέβα από έκρηξη ηφαιστείου. [Πηγή:
 Φωτογραφία (α) <http://www.en.wikipedia.org/wiki/File:DenglerSW-Stromboli-20040928-1230x800.jpg>
 Φωτογραφία (β) <http://www.minecraftbuildingideas.com201205volcano.html>]

μάτωση στο σύστημα των διαφορεικών εξισώσεων του φαινομένου της δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των φλεβών ώστε μέσω αυτής να αντιμετωπιστεί, αφενός, η αμοιβαία έλξη των φλεβών και, αφετέρου, η επιρροή των ορίων στη μαθηματική διαμόρφωση του πεδίου ροής εντός του αποδέκτη.

2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Οι τυρβώδεις φλέβες ανήκουν στην κατηγορία των τυρβωδών ροών οι οποίες παράγονται από πηγές ορμής και άνωσης. Πρόκειται για φλέβες ρευστού οι οποίες εκτοξεύονται από ένα ακροφύσιο, οποιασδήποτε γεωμετρίας, εντός ομοειδούς ή όχι ρευστού και ανήκουν στην ευρύτερη οικογένεια των ελευθέρων διατμητικών ροών (free shear flows).

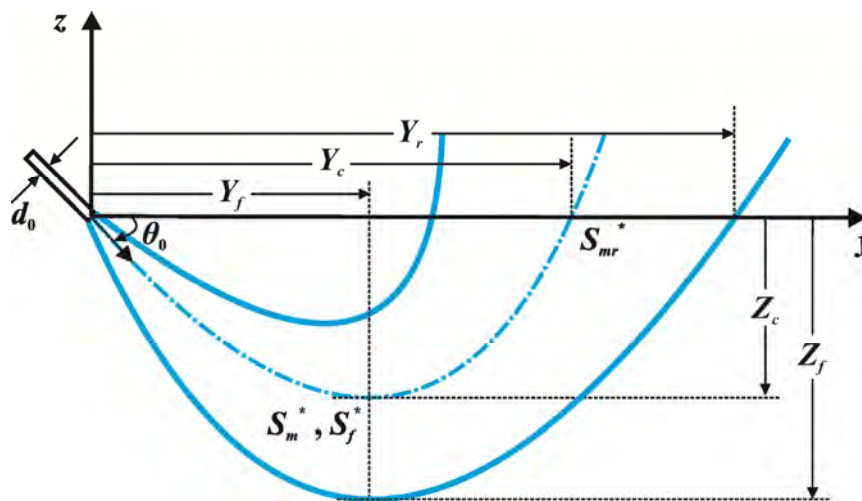
Οι βασικοί τύποι φλεβών που συναντώνται είναι οι εξής:

- Απλή φλέβα ή φλέβα χωρίς άνωση (jet), όταν το εκρέον ρευστό και ο αποδέκτης έχουν την ίδια πυκνότητα.
- Πλούμιο ή φλέβα πλήρους άνωσης (plume), όταν το εκρέον ρευστό έχει μηδενική αρχική ορμή αλλά έχει αρχική άνωση εξαιτίας της πυκνομετρικής διαφοράς μεταξύ αυτού και του αποδέκτη.
- Ανωστική φλέβα (buoyant jet), όταν το εκρέον ρευστό έχει αρχική ορμή και πυκνομετρική διαφορά με το ρευστό του αποδέκτη.

Οι παραπάνω φλέβες μπορεί να είναι δισδιάστατες ή τρισδιάστατες ανάλογα με το είδος του ακροφυσίου από το οποίο εκβάλλουν (σχισμή ή κυκλική οπή). Οι φλέβες μπορεί να εκβάλλουν υπό οποιαδήποτε γωνία ως προς το οριζόντιο επίπεδο και ανάλογα με τη φορά της δύναμης της άνωσης αποκαλούνται φλέβες θετικής άνωσης (ομόρροπη της κίνησης) ή αρνητικής άνωσης (αντίρροπη της κίνησης). Ο αποδέκτης μπορεί να είναι ομογενής ή στρωματοποιημένος (η πυκνότητά του μεταβάλλεται συναρτήσει του βάθους) και ήρεμος ή κινούμενος. Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζονται τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πεδίου της ανωστικής φλέβας.

Οι φλέβες παρατηρήθηκαν και άρχισαν να μελετώνται πριν από πολλά χρόνια στο φυσικό περιβάλλον. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν τα καπναέρια από τις καμινάδες και τα ηφαίστεια. Ο Jirka (2004) παρουσιάζει μια ενδελεχή αναφορά στην ερευνητική ιστορία των φλεβών.

Στις πρώτες δεκαετίες του 20^{ου} αιώνα ο Prandtl εφαρμόζει τη θεωρία του οριακού στρώματος σε μια ροή φλέβας. Από τις πρώτες μετρήσεις σε φλέβες μηδενικής άνωσης (απλές φλέβες) που πραγματοποιήθηκαν, εμφανίζονται εκείνες του Zimn (1921) προερχόμενες από κυκλικό ακροφύσιο (κυκλικές) και του Förthmann (1934) σε φλέβες προερχόμενες από ακροφύσιο σχισμής (δισδιάστατες). Σε αυτά τα πειραματικά στοιχεία βασίστηκαν αργότερα οι Görtler (1942), Reichardt (1942) και Tolmien (1926) ώστε να υ-



Σχήμα 2.1 Σχηματικό διάγραμμα κεκλιμένης τυρβώδους ανωστικής φλέβας, δισδιάστατης με πλάτος σχισμής d_0 ή κυκλικής με διάμετρο ακροφυσίου d_0 .

ποστηρίζουν την ύπαρξη ομοιότητας. Πρώτος ο Reichardt (1943) υιοθέτησε την κατανομή τύπου Gauss ως την καταλληλότερη κατανομή που προσεγγίζει τις εγκάρσιες ταχύτητες και συγκεντρώσεις σε μια φλέβα.

Οι Morton *et al.* (1956) εισήγαγαν την ιδέα της συμπαράσυρσης. Σύμφωνα με αυτή, το ρευστό εκτός της φλέβας παρασύρεται στο εσωτερικό της τυρβώδους φλέβας. Η θεωρία αυτή λαμβάνεται υπόψη σε πολλά μαθηματικά μοντέλα έως σήμερα. Οι Jordison (1963) και Keffer & Baines (1963) υπήρξαν από τους πρώτους ερευνητές που πραγματοποίησαν πειράματα σε απλές φλέβες εντός κινουμένου αποδέκτη. Οι Turner (1960) και Richards (1963) έδειξαν την παρουσία ενός ζεύγους στροβίλων το οποίο επηρεάζει τα χαρακτηριστικά της φλέβας, όταν αυτή βρίσκεται εντός κινουμένου αποδέκτη.

Σε αντιστοιχία με τους Shao & Law (2009), εάν η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ορμής της ανωστικής φλέβας είναι μηδενική ή η ανωστική φλέβα εκρέει αρχικά μόνο με οριζόντια ορμή και η πυκνότητα του ρευστού του αποδέκτη είναι μεγαλύτερη από εκείνη του εκρέοντος ρευστού ($\rho_a > \rho_0$) τότε $g'_0 > 0$ και τότε το φαινόμενο εξελίσσεται υπό θετική δύναμη άνωσης, ενώ εάν $\rho_a < \rho_0$ τότε $g'_0 < 0$ και στο φαινόμενο επικρατεί αρνητική δύναμη άνωσης, επηρεάζοντας αντίστοιχα τα πεδία ροής και διάχυσης. Στην περίπτωση που η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ορμής της ανωστικής φλέβας είναι μη μηδενική και η ανωστική δύναμη είναι ομόρροπη της αρχικής κίνησης τότε η άνωση θεωρείται θετική. Αντίθετα, αν η δύναμη της άνωσης είναι αντίρροπη της αρχικής κίνησης τότε η ροή επιβραδύνεται και η άνωση θεωρείται αρνητική.

2.1 ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΩΣΤΙΚΗ ΦΛΕΒΑ

Η μελέτη της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας έχει εστιαστεί στην περίπτωση της κατακόρυφης εκροής σε ακίνητο αποδέκτη. Πρωτοποριακή θεωρείται η εργασία του Tolmien (1926) που αναφέρεται σε ομογενείς απλές φλέβες όπως επίσης και η λεπτομερής πειραματική εργασία των Albertson *et al.* (1950). Οι δισδιάστατες φλέβες πλήρους άνωσης (πλούμια) μελετώνται πειραματικά από τους Rouse *et al.* (1952). Οι πειραματικές μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε διαχύτη σχισμής, εντός περιορισμένου χώρου, αγνοώντας την επίδραση των πλευρικών τοιχωμάτων. Αργότερα χρησιμοποιώντας την τεχνική της Laser – Doppler ανεμομετρίας, οι Kotsovinos (1975, 1976, 1978), Kotsovinos & List (1977) και Ramaprian & Chandrasekhara (1983, 1985, 1987) παρουσίασαν βελτιωμένα πειραματικά δεδομένα για την τυρβώδη διάχυση και τα χαρακτηριστικά της συμπαράσυρσης. Οι Fischer *et al.* (1979), Chen & Rodi (1982) και Jirka (2006) παρουσιάζουν συγκεντρωμένα τα σημαντικότερα αποτελέσματα πειραματικών και θεωρητικών εργασιών σε αυτού του είδους της ροής.

Οι Abdel-Rahman *et al.* (1994) και Oosthuizen & Lemieux (1987) πραγματοποίησαν πειράματα σε κεκλιμένες δισδιάστατες απλές φλέβες σημειώνοντας τη μη συμμετρική εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας και συγκέντρωσης ως προς τον άξονα της φλέβας (απόκλιση από τη κατανομή Gauss). Η μη συμμετρική κατανομή υποδηλώνει την ύπαρξη μαζών που αποκολλώνται και εν συνεχεία διαφεύγουν από την εσωτερική πλευρά της φλέβας.

Ο Cederwall (1971) πραγματοποίησε μετρήσεις σε οριζόντια δισδιάστατη ανωστική φλέβα εντός ήρεμου και κινούμενου αποδέκτη. Μετρώντας τις συγκεντρώσεις του ιχνηθέτη (στην περίπτωση του ήταν αλατόνερο) προσδιόρισε τον άξονα της φλέβας και τις αξονικές αραιώσεις. Επίσης, διατύπωσε την ιδέα της ισοδύναμης φλέβας σχισμής. Σύμφωνα με την ιδέα αυτή η πραγματική εκροή από έναν πολλαπλό διαχύτη αντιστοιχεί σε μία δυναμικά ισοδύναμη φλέβα σχισμής η οποία διατηρεί τις αρχικές εισροές όγκου, ορμής και άνωσης ανά μέτρο μήκους. Στη βάση της ποιοτικής παρατήρησης των πειραμάτων σε μη στρωματοποιημένο κινούμενο αποδέκτη ο Cederwall περιέγραψε διάφορες περιοχές της ροής που χαρακτηρίζουν το πεδίο διάχυσης σε ένα περιορισμένο, ως προς το βάθος, περιβάλλον. Σε αυτές τις περιπτώσεις παρατηρούνται φαινόμενα εγκλωβισμού ή προσκόλλησης στον πυθμένα, της ανωστικής φλέβας τα οποία οφείλονται

στον περιορισμένο βαθμό ελευθερίας, που χαρακτηρίζει την αυστηρά δισδιάστατη γεωμετρία του διαχύτη και την περιορισμένη συμπαράσυρση του περιβάλλοντος ρευστού.

Οι Jirka & Harleman (1973) πραγματοποίησαν πειράματα σε ήρεμο και κινούμενο περιβάλλον ρευστό για τη δισδιάστατη περίπτωση. Τα αποτελέσματά τους περιλαμβάνουν μετρήσεις αξονικών αραιώσεων.

Ο Roberts (1979) πραγματοποίησε πειράματα με διαχύτη σχισμής εντός κινούμενου μη στρωματοποιημένου αποδέκτη. Μελέτησε τρεις διαφορετικές διατάξεις όπου ο διαχύτης ήταν κάθετος, υπό γωνία 45° και παράλληλος στο ρεύμα. Ορίζοντας ο Roberts, στην εργασία αυτή, την αδιαστατοποιημένη ταχύτητα ρεύματος U_a^* από τη σχέση:

$$U_a^* = \frac{u_a}{\beta_0^{1/3}} \quad (2.1)$$

η οποία αντιστοιχεί σε ένα τύπο Froude ρεύματος/φλέβας, παρατήρησε ότι για τιμές $U_a^* > 0,2$ υπήρξε προσκόλληση της φλέβας στο τοίχωμα του πυθμένα.

Οι Wood *et al.* (1993) πραγματοποίησαν πειράματα εντός μη στρωματοποιημένου κινούμενου αποδέκτη σε πολλαπλό διαχύτη όπου τα ακροφύσιά του είχαν ομόρροπη κατεύθυνση με το ρεύμα. Σε μια παρόμοια πειραματική διάταξη οι Méndez-Díaz & Jirka (1996), εξετάζουν την επιρροή της εγγύτητας του πυθμένα στο αναπτυσσόμενο πεδίο ροής. Συμπέραναν, ότι η τροχιά της φλέβας επηρεάζεται από τη γεωμετρία του διαχύτη και την εγγύτητα του ορίου του πυθμένα με τα δύο αυτά χαρακτηριστικά μεγέθη να ρυθμίζουν τη συγκράτηση του πεδίου ροής κοντά στο πυθμένα ή την ελεύθερη εξέλιξή του.

Οι Cuthbertson *et al.* (2008) πραγματοποίησαν πειράματα σε δισδιάστατες ανωστικές φλέβες οι οποίες εκρέουν σε ήρεμο αποδέκτη με οριζόντια αρχική ταχύτητα. Ο κύριος σκοπός των πειραμάτων τους είναι η μελέτη της κατάπτωσης μικροσωματιδίων διαμέτρου 500-850μm όταν αυτά περιέχονται στο εκρέον ρευστό. Συγκρίνουν τις τροχιές των πεδίων ροής για διαφορετικές περιπτώσεις διαστάσεων αυτών των σωματιδίων με την περίπτωση της «καθαρής» φλέβας.

Οι Shahramani & Ditmars (1976) πραγματοποίησαν πειραματικές μετρήσεις σε κεκλιμένες δισδιάστατες φλέβες αρνητικής άνωσης. Στην περίπτωση που ο αποδέκτης ήταν ακίνητος, οι αρχικές γωνίες εκτόξευσης ήταν $\theta_0 = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ και 90° ως προς το οριζόντιο επίπεδο και στην περίπτωση που ο αποδέκτης ήταν κινούμενος οι αρχικές γωνίες εκτόξευσης ήταν $\theta_0 = 45^\circ$ και 90° . Τα πειράματα έγιναν με εύρος αρχικού αριθμού Froude

10 έως 50 και για λόγο ταχύτητας ρεύματος/εξόδου 15 και 25. Μετρήθηκαν οι τροχιές, το μέγιστο ύψος αναρρίχησης της φλέβας, το σημείο επιστροφής της στο αρχικό επίπεδο εξόδου καθώς επίσης και οι αραιώσεις σε αυτές τις θέσεις. Επειδή όμως η εκροή βρίσκεται κοντά στο πυθμένα της δεξαμενής, παρατηρήθηκε η επιρροή του σταθερού ορίου του πυθμένα με αποτέλεσμα οι φλέβες να παραμένουν προσκολλημένες σε αυτό.

Οι Fan & Brooks (1969) αντιμετωπίζουν θεωρητικά τις κεκλιμένες ανωστικές φλέβες σε ακίνητο και ομογενή ή στρωματοποιημένο αποδέκτη. Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωματική μέθοδο υπολογίζουν τις τροχιές και τις αραιώσεις για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης.

Οι Yannopoulos & Noutsopoulos (1990) χρησιμοποιώντας την ολοκληρωματική μέθοδο και υιοθετώντας τη θεωρία της γραμμικής διεύρυνσης της ανωστικής φλέβας προτείνουν αναλυτικές λύσεις για την ταχύτητα και τη συγκέντρωση συναρτήσει της αξονικής απόστασης για την περίπτωση της κατακόρυφης δισδιάστατης φλέβας σε στάσιμο αποδέκτη. Ο Yannopoulos (2006) βελτιώνει το συγκεκριμένο μοντέλο ενσωματώνοντας όρους 2^{ης} τάξης. Ο Angelidis (2002), ακολουθώντας παρόμοια μεθοδολογία αναπτύσσει ένα μοντέλο όπου το πεδίο ροής αναπτύσσεται εξαιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ του εκρέοντος και περιβάλλοντος ρευστού.

2.2 ΚΥΚΛΙΚΗ ΑΝΩΣΤΙΚΗ ΦΛΕΒΑ

Οι κυκλικές ανωστικές φλέβες έχουν μελετηθεί εκτενώς τόσο θεωρητικά όσο και πειραματικά. Οι περισσότερες μελέτες αναφέρονται σε φλέβες με θετική άνωση. Οι κατακόρυφες κυκλικές ανωστικές φλέβες σε ήρεμο και ομοιόμορφης πυκνότητας αποδέκτη έχουν εξεταστεί πειραματικά από τους Abraham (1963), George *et al.* (1977), Capp (1983), Papanicolaou & List (1987, 1988), Noutsopoulos & Yannopoulos (1987), Dahm & Dimotakis (1990), Panchapakesan & Lumley (1993a, b), Hussein *et al.* (1994), Shabbir & George (1994), Weisgraber & Liepmann (1998), Webster *et al.* (2001), Wang & Law (2002), Tian & Roberts (2003).

Για την περίπτωση της οριζόντιας κυκλικής φλέβας οι Lee & Chu (2003) συγκέντρωσαν τα διαθέσιμα πειραματικά αποτελέσματα. Οι Cederwall (1968), Hansen & Schroder (1968) και Anwar (1972) μέτρησαν τις τροχιές και τις αραιώσεις σε οριζόντιες φλέβες εντός ήρεμου αποδέκτη. Οι τροχιές μετρήθηκαν επίσης από τους Syrbín & Lyakhovsky (1936), Fan (1967), Davidson & Pun (2000). Ο Kikkert (2006)

πραγματοποίησε πειράματα σε κεκλιμένες κυκλικές φλέβες θετικής άνωσης με αρχικές γωνίες εκτόξευσης $\theta_0 = 0^\circ - 80^\circ$, μετρώντας τις τροχιές και τις αξονικές αραιώσεις. Αραιώσεις σε οριζόντιες κυκλικές φλέβες μετρήθηκαν και από τον Liseth (1970).

Για τις περιπτώσεις κεκλιμένων ανωστικών φλεβών, οι περισσότερες αναφορές γίνονται σε κεκλιμένες φλέβες αρνητικής άνωσης. Επειδή οι κεκλιμένες ανωστικές φλέβες αρνητικής άνωσης αντιστοιχούν σε ανωστικές φλέβες εκτοξευόμενες υπό αρνητική αρχική γωνία, κρίνεται σκόπιμο να γίνει εκτενής αναφορά σε αυτές τις εργασίες καθώς τα αποτελέσματα τους χρησιμοποιούνται στην παρούσα Διατριβή για τη σύγκριση με το προτεινόμενο μοντέλο (Κεφάλαιο 4). Σημαντικά στοιχεία σε αυτές τις περιπτώσεις, εκτός από το προσδιορισμό της τροχιάς και την αραιώσης, είναι ο προσδιορισμός του μεγίστου σημείου αναρρίχησης της τροχιάς και του εξωτερικού ορίου, η οριζόντια απόσταση της φλέβας όπου ο άξονάς της ή το όριό της συναντά το οριζόντιο επίπεδο εκροής, καθώς επίσης και οι τιμές των αραιώσεων σε αυτές τις θέσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1.

Από τις πρώτες εργασίες είναι εκείνη των Zeitoun *et al.* (1970) οι οποίοι εκτέλεσαν πειράματα σε κεκλιμένες φλέβες αρνητικής άνωσης υπό αρχική γωνία εξόδου $\theta_0 = 30^\circ$, 45° και 60° , προσδιορίζοντας τις τροχιές και τις αντίστοιχες αραιώσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο LA (Laser Attenuation), η οποία βασίζεται στη σχέση μεταξύ της αύξησης της συγκέντρωσης της χρωματικής ουσίας στο ρευστό και της μείωσης της έντασης του φωτός που περνά μέσα από το χρωματισμένο ρευστό, λαμβάνοντας δείγματα συγκεντρώσεων στη θέση μεγίστου ύψους της τροχιάς.

Οι Roberts & Toms (1987) πραγματοποίησαν πειράματα σε φλέβες αρνητικής άνωσης με $\theta_0 = 60^\circ$ σε ακίνητο αποδέκτη και σε αποδέκτη με εγκάρσιο ρεύμα. Χρησιμοποιώντας την οπτική μέθοδο και λαμβάνοντας δείγματα συγκεντρώσεων ιχνηθέτη (φθορίζουσα ροδαμίνη B) μέτρησαν το τερματικό ύψος ανόδου (εξωτερικό όριο) Z_f και τις αραιώσεις S_f στη θέση του τερματικού ύψους και στη θέση Y_r (Σχήμα 2.1).

Οι Lane-Serff *et al.* (1993) πραγματοποίησαν πειράματα σε φλέβες αρνητικής άνωσης με $\theta_0 = 15^\circ$, 30° , 45° , 60° και 75° . Με σκοπό να ελέγξουν το αριθμητικό τους μοντέλο πραγματοποίησαν τα εν λόγω πειράματα υπολογίζοντας το μέγιστο ύψος ανόδου της φλέβας Z_f , χρησιμοποιώντας τις ληφθείσες φωτογραφίες του πειράματος.

Ο Lindberg (1994) πραγματοποίησε πειράματα σε φλέβες αρνητικής άνωσης που εκρέουν υπό γωνία $\theta_0 = 30^\circ$, 45° , 60° και 90° εντός στάσιμου ή κινούμενου αποδέκτη. Με οπτικές μεθόδους (φωτογραφίες) μέτρησε οπτικά την κατακόρυφη και οριζόντια θέση του τερματικού ύψους της φλέβας.

Οι Roberts *et al.* (1997) πραγματοποίησαν αντίστοιχα πειράματα με τους Roberts & Toms (1987) σε ήρεμη δεξαμενή νερού με αρχική γωνία εκτόξευσης $\theta_0 = 60^\circ$ μετρώντας την τροχιά και την αραιώση S_{mr}^* στη θέση πρόσπτωσης της φλέβας στο επίπεδο αρχικής εκτόξευσης χρησιμοποιώντας την πιο σύγχρονη τεχνική LIF. Μετά την απάντηση των συγγραφέων Roberts *et al.* (1997) στη συζήτηση επί του άρθρου, των Doneker & Jirka (1999) διευκρινίστηκε ότι οι κατακόρυφες μετρήσεις περιλαμβάνουν το ύψος του ακροφυσίου. Αυτή είναι η εξήγηση των διαφορών με άλλες πειραματικές εργασίες.

Οι Bloomfield & Kerr (2002) χρησιμοποιώντας τις φωτογραφίες των πειραμάτων σε φλέβες αρνητικής άνωσης με αρχική γωνία εκτόξευσης $\theta_0 = 30^\circ$ έως 90° προσδιόρισαν το μέγιστο σημείο ανόδου της φλέβας.

Οι Ferrari & Querzoli (2004, 2010) χρησιμοποιώντας την τεχνική LIF μέτρησαν τις τροχιές σε φλέβες αρνητικής άνωσης εντός ήρεμου αποδέκτη για γωνίες $\theta_0 = 45^\circ - 90^\circ$ με βήμα 5° .

Οι Cipollina *et al.* (2004, 2005) μελέτησαν τις περιπτώσεις φλεβών αρνητικής άνωσης με $\theta_0 = 30^\circ, 45^\circ$ και 60° . Προσδιόρισαν την οριζόντια και κατακόρυφη θέση του μεγίστου της τροχιάς και του άνω ορίου της φλέβας.

Οι Nemlioglu & Roberts (2006) χρησιμοποιώντας την τεχνική LIF πραγματοποίησαν πειράματα σε φλέβες αρνητικής άνωσης με $\theta_0 = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ και 90° . Μέτρησαν τη θέση του μεγίστου της τροχιάς και την αραιώση σε εκείνη τη θέση.

Οι Kikkert *et al.* (2007) μέτρησαν τις αραιώσεις και τις τροχιές σε φλέβες αρνητικής άνωσης για γωνίες $\theta_0 = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 47^\circ, 60^\circ$ και 75° χρησιμοποιώντας τις τεχνικές LA και LIF. Επίσης, μέτρησαν τις θέσεις του μεγίστου ύψους αναρρίχησης της φλέβας για την τροχιά και το εξωτερικό όριο καθώς και την οριζόντια θέση στην οποία συμβαίνουν. Ακόμη, μετρήθηκε η οριζόντια απόσταση Y_r , και οι αραιώσεις σε αυτή τη θέση. Συγκεκριμένα, οι συγγραφείς αναφέρονται στις ολοκληρωμένες τιμές των αραιώσεων στο πλάτος της φλέβας. Επίσης, ανέπτυξαν ένα ολοκληρωματικό μοντέλο για την πρόβλεψη της τροχιάς και των εξωτερικών ορίων.

Οι Papakonstantis *et al.* (2007, 2011a, b) πραγματοποίησαν τα πειράματά τους σε φλέβες αρνητικής άνωσης για γωνίες $\theta_0 = 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ και 90° . Προσδιόρισαν τα όρια των ανωστικών φλεβών για αυτές τις περιπτώσεις, το μέγιστο ύψος ανόδου της φλέβας, τη θέση που συμβαίνει αυτό καθώς επίσης και την αραιώση στη θέση του μεγίστου ύψους και στη θέση πρόσπτωσης στο οριζόντιο επίπεδο.

Οι Marti *et al.* (2010) πραγματοποίησαν μετρήσεις στο πραγματικό πεδίο ροής που προκύπτει από τη διάθεση των αλμολοίπων από τη μονάδα αφαλάτωσης στο Perth στη Δυτική Αυστραλία. Η γωνία εκροής της φλέβας αρνητικής άνωσης είναι $\theta_0 = 60^\circ$. Μετρήθηκαν το τερματικό ύψος ανόδου, η οριζόντια απόσταση επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο εξόδου Y_r και η αραίωση σε αυτή τη θέση.

Οι Shao & Law (2010) χρησιμοποιώντας τις τεχνικές PIV/LIF μελέτησαν τις περιπτώσεις φλεβών αρνητικής άνωσης, που εκρέουν υπό γωνία $\theta_0 = 30^\circ$ και 45° . Με την ίδια τεχνική ο Lai (2010) και οι Lai & Lee (2012) πραγματοποίησαν μετρήσεις σε φλέβες αρνητικής άνωσης που εκβάλλουν από έξι διαφορετικές γωνίες ($\theta_0 = 15^\circ, 30^\circ, 38^\circ, 45^\circ, 52^\circ$ και 60°). Παρουσιάζουν τις μετρήσεις για το μέγιστο ύψος αναρρίχησης της τροχιάς και του εξωτερικού ορίου, την οριζόντια θέση του μεγίστου της τροχιάς και την οριζόντια απόσταση επιστροφής της φλέβας στο επίπεδο εκροής. Επίσης, πραγματοποιήθηκε η μέτρηση της αραίωσης στη θέση του μεγίστου της τροχιάς και στη θέση επιστροφής της φλέβας. Στην ίδια εργασία παρουσιάζονται οι τροχιές για τις περιπτώσεις $\theta_0 = 15^\circ, 30^\circ$ και 45° καθώς επίσης και η αξονική μεταβολή της μέσης ταχύτητας συναρτήσει της αξονικής απόστασης για την περίπτωση της φλέβας με αρχική γωνία εξόδου $\theta_0 = 60^\circ$.

Η πλέον πρόσφατη εργασία σε αυτή την ενότητα είναι από τον Oliver (2012) που πραγματοποίησε μετρήσεις για τις περιπτώσεις $\theta_0 = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ και 75° .

Οι πρώτες απλές προσεγγίσεις στη μαθηματική περιγραφή της εκροής κατακόρυφης ανωστικής φλέβας σε εγκάρσιο ομογενές ρεύμα αποδέκτη ομοιόμορφης πυκνότητας πραγματοποιήθηκαν από τους Pristley (1956) και Scorer (1959).

Από τις πρώτες εργασίες που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία, που χρησιμοποιούν την ολοκληρωματική μέθοδο στην περίπτωση της εκροής κατακόρυφης ανωστικής φλέβας σε εγκάρσιο ομογενές ρεύμα, είναι εκείνες των Fan (1967), Abraham (1971) και Wright (1977) που παρουσιάζουν θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα.

Τα περισσότερα διαδεδομένα αριθμητικά μοντέλα σε αυτή την περιοχή είναι το CORJET (Jirka 1999, 2008), το JETLAG (Lee & Cheung 1990) και SD3D (Davidson & Pun 2000).

Οι Davidson & Pun (1998) και Kim *et al.* (2002) παρουσιάζουν ένα υβριδικό μοντέλο το οποίο είναι συνδυασμός ολοκληρωματικού μοντέλου και διαστατικής ανάλυσης ώστε να προβλέπονται οι τροχιές και οι αραιώσεις σε διάφορες περιπτώσεις.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση εκροής οριζόντιας ανωστικής φλέβας σε κινούμενο, στη διεύθυνση της εκροής, αποδέκτη. Ο Ayoub (1971) μέτρησε πειραματικά την τροχιά οριζόντιας ανωστικής φλέβας σε ομόρροπα κινούμενο αποδέκτη.

Οι Davidson *et al.* (2001) ανέπτυξαν ένα ολοκληρωματικό μοντέλο και πραγματοποίησαν μετρήσεις τροχιών και εγκάρσιας ταχύτητας συμπαράσυρσης για μια οριζόντια ανωστική φλέβα που εκρέει σε ομόρροπα κινούμενο περιβάλλον μικρής ταχύτητας. Χρησιμοποιώντας την τεχνική μετρήσεων LIF, οι Chu *et al.* (1999) και Davidson & Wang (2002) πραγματοποίησαν μετρήσεις για την περίπτωση οριζόντιας φλέβας μηδενικής άνωσης εκρέουσας σε κινούμενο αποδέκτη.

2.3 ΟΡΙΣΜΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ

Κοντά στην έξοδο, η ροή της φλέβας ελέγχεται από τις αρχικές συνθήκες που περιλαμβάνουν τη γεωμετρία της φλέβας (είδος και κλίση ακροφυσίου εξόδου), ταχύτητα εκροής, την αρχική πυκνομετρική διαφορά μεταξύ εκρεόμενου ρευστού και αποδέκτη κτλ. Γενικοί και χρήσιμοι ορισμοί των κυριότερων παραμέτρων της φλέβας δίνονται στη συνέχεια (Fisher *et al.* 1979, Yannopoulos 2006):

- i. Ειδική εισροή όγκου μ είναι η μάζα του ρευστού, διαιρεμένη με την πυκνότητα ρ , η οποία μάζα διέρχεται από μία εγκάρσια τομή της φλέβας στη μονάδα του χρόνου, ήτοι:

$$\mu = \frac{1}{\rho} \int_A \rho w dA \quad (2.2)$$

Για δισδιάστατη ανωστική φλέβα μ [L^2/T] και για τρισδιάστατη μ [L^3/T].

- ii. Ειδική εισροή ορμής m είναι η ποσότητα της ορμής του ρευστού, διαιρεμένη με την πυκνότητα ρ , στη διεύθυνση κίνησης της φλέβας η οποία διέρχεται από μία εγκάρσια τομή της φλέβας στη μονάδα του χρόνου, ήτοι:

$$m = \frac{1}{\rho} \int_A \rho (w^2 + w'^2) dA = \lambda_M \int_A w^2 dA \quad (2.3)$$

Για δισδιάστατη ανωστική φλέβα m [L^3/T^2] και για τρισδιάστατη m [L^4/T^2].

- iii. Ειδική εισροή άνωσης β είναι η ποσότητα της άνωσης του ρευστού, διαιρεμένη με την πυκνότητα ρ , που διέρχεται από μία εγκάρσια τομή της φλέβας στη μονάδα του χρόνου, ήτοι:

$$\beta = \frac{1}{\rho} g'_0 \int_A \rho (cw + c'w') dA = \lambda_B g'_0 \int_A cw dA \quad (2.4)$$

Για δισδιάστατη ανωστική φλέβα β [L^3/T^3] και για τρισδιάστατη β [L^4/T^3].

- iv. Ειδική εισροή ελλείμματος βάρους ζ , διαιρεμένη με την πυκνότητα ρ , είναι η ποσότητα:

$$\zeta = \frac{1}{\rho} g'_0 \int_A \rho c dA \quad (2.5)$$

Για δισδιάστατη ανωστική φλέβα ζ [L^2/T^2] και για τρισδιάστατη β [L^3/T^2].

- v. Ειδική εισροή κινητικής ενέργειας για τη μέση ροή ε , είναι η ποσότητα της κινητικής ενέργειας, διαιρεμένη με την πυκνότητα ρ , που διέρχεται από μία εγκάρσια τομή της φλέβας στη μονάδα του χρόνου, ήτοι:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \int_A \rho w \left(\frac{w^2 + u^2}{2} \right) dA = \lambda_E \int_A \frac{1}{2} w^3 dA \quad (2.6)$$

Για δισδιάστατη ανωστική φλέβα ε [L^4/T^3] και για τρισδιάστατη ε [L^5/T^3].

- vi. Ειδική εισροή των όρων f (Yannopoulos 2006), ομοίως, ορίζεται η ποσότητα:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{\rho} \int_A \rho f dA \quad (2.7)$$

όπου

w είναι η μέση (χρονικά) τιμή της ταχύτητας της φλέβας στη διεύθυνση της κίνησης

w' είναι η διακύμανση (rms) λόγω τύρβης της ταχύτητας της φλέβας στη διεύθυνση της κίνησης

$c = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a - \rho_0}$ είναι η μέση (χρονικά) συγκέντρωση του ιχνηθέτη

c'	είναι η διακύμανση λόγω της τύρβης της συγκέντρωσης του ιχνηθέτη
$g'_0 = g \frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_0}$	είναι η αρχική φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας
ρ_α	είναι η πυκνότητα του ρευστού του αποδέκτη
ρ_0	είναι η πυκνότητα του ρευστού στην έξοδο του ακροφυσίου
ρ	είναι η πυκνότητα του ρευστού της φλέβας σε τυχαία θέση
A	είναι το εμβαδό της εγκάρσιας διατομής της φλέβας
f	είναι οι όροι της εξίσωσης διατήρησης της κινητικής ενέργειας της μέσης ροής, εκτός των όρων μέσης κινητικής και δυναμικής ενέργειας

Οι συντελεστές λ_M , λ_B και λ_E εισάγουν τη συνεισφορά των τυρβωδών εισροών στις εισροές ορμής, άνωσης και κινητικής ενέργειας, αντίστοιχα (Yannopoulos 2006). Συγκεκριμένα, οι συντελεστές λ_M και λ_E είναι περίπου σταθεροί με τιμές $\lambda_M \approx 1,1$ και $\lambda_E \approx 1$ τόσο για τις δισδιάστατες όσο και για τις κυκλικές φλέβες. Ο συντελεστής λ_B , μεταβάλλεται σημαντικά. Στη βιβλιογραφία, για τη μεταβολή του λ_B προτείνονται δύο εξισώσεις:

$$\lambda_B = \lambda_{Bj} - (\lambda_{Bj} - \lambda_{Bp}) \frac{R}{R_p} \quad (2.8)$$

από τους Wang & Law (2002). Οι Yannopoulos & Bloutsos (2012) δίνουν την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{1}{\lambda_B} = \frac{1}{\lambda_{Bj}} - \left(\frac{1}{\lambda_{Bj}} - \frac{1}{\lambda_{Bp}} \right) \exp(-0.35\Xi) \quad (2.9)$$

όπου R είναι ο τοπικός αριθμός Richardson, R_p η οριακή τιμή του στην περιοχή του πλουμίου και Ξ η αδιάστατη δυναμική απόσταση στον άξονα της φλέβας. Με βάση τους Ramaprian & Chandrasekhara (1985, 1989) και τους Wang & Law (2002) προκύπτουν οι τιμές των παραμέτρων $\lambda_{Bj} = 1,04$ και $1,076$, για δισδιάστατες και κυκλικές φλέβες δίχως άνωση και, $\lambda_{Bp} = 1,18$ και $1,15$ και $R_p = 0,3521$ και $0,4011$ για δισδιάστατες και κυκλικές φλέβες πλήρους άνωσης, αντίστοιχα (Yannopoulos 2006). Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται συνοπτικά οι εξισώσεις των ειδικών εισροών και οι αρχικές τους τιμές.

Η σπουδαιότερη παράμετρος, η οποία περιγράφει τη συμπεριφορά κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, η οποία εκβάλλει σε ήρεμο ή ακίνητο ομογενή αποδέκτη, είναι ο αρχι-

Πίνακας 2.1 Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.

Ειδική Εισροή	Περιγραφή	Αρχική τιμή
Όγκου	$\mu = \int_A w dA$	$\mu_0 = A_0 w_0$
Ορμής	$m = \int_A (w^2 + w'^2) dA = \lambda_M \int_A w^2 dA$	$m_0 = A_0 w_0^2$
Ανωσης	$\beta = g'_0 \int_A (cw + c'w') dA = \lambda_B g'_0 \int_A cw dA$	$\beta_0 = g'_0 \mu_0$
Ελλείμματος Βάρους	$\zeta = g'_0 \int_A c dA$	$\zeta_0 = g'_0 A_0$
Κινητικής Ενέργειας μέσης ροής	$\varepsilon = \lambda_E \int_A \frac{1}{2} w^3 dA$	$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} A_0 w_0^3$
Όρων f	$\varepsilon_f = \int_A f dA$	$\varepsilon_{f0} = 0$

κός πυκνομετρικός αριθμός Froude, ήτοι:

$$F_0 = \frac{w_0}{\sqrt{|g'_0| d_0}} \quad (2.10)$$

όπου d_0 είναι το πλάτος της σχισμής ή η διάμετρος του ακροφυσίου εξόδου. Επίσης, ορίζεται ο τοπικός αριθμός Richardson:

$$\text{Για δισδιάστατη ανωστική φλέβα} \quad R = \frac{\mu^3 \beta}{m^3} \quad (2.11)$$

$$\text{Για κυκλική ανωστική φλέβα} \quad R = \frac{\mu^2 \beta}{m^{5/2}} \quad (2.12)$$

Μερικές φορές αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία, ως αριθμός Richardson, η τετραγωνική ρίζα των παραπάνω εκφράσεων. Οι αρχικοί αριθμοί Froude και Richardson παρέχουν ένα μέτρο των δυνάμεων αδρανείας (αρχικής ορμής) ως προς τις ανωστικές δυνάμεις β_0 .

Οι Fischer *et al.* (1979) και Yannopoulos (2006) ορίζουν τη χαρακτηριστική κλίμακα μήκους με τον ακόλουθο τρόπο:

Για δισδιάστατη ανωστική φλέβα $L_m = m_0 \beta_0^{-2/3} = d_0 F_0^{4/3}$ (2.13)

Για κυκλική ανωστική φλέβα $L_m = m_0^{3/4} \beta_0^{-1/2} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4} d_0 F_0$ (2.14)

Συνεπώς, η αδιάστατη δυναμική αξονική απόσταση ορίζεται ως εξής (Yannopoulos 2006):

Για δισδιάστατη ανωστική φλέβα $\Xi = \frac{\xi}{L_m} = \frac{\xi}{d_0} F_0^{-4/3}$ (2.15)

Για κυκλική ανωστική φλέβα $\Xi = \frac{\xi}{L_m} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/4} = \frac{\xi}{d_0} F_0^{-1}$ (2.16)

Πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η συμπεριφορά της ροής ως φλέβα μηδενικής άνωσης συμβαίνει όταν $\Xi < 0,5$, ενώ η συμπεριφορά φλέβας πλήρους άνωσης επιτυγχάνεται για $\Xi > 5$. Η περιοχή της δυναμικής ροής του πυρήνα της ανωστικής φλέβας αρχίζει αμέσως μετά την έξοδο από το ακροφύσιο και περιλαμβάνει τη Ζώνη Εγκατάστασης της Ροής (ZFE) όπου η τύρβη δεν έχει αναπτυχθεί πλήρως και τη μεταβατική ζώνη, η οποία εκτείνεται έως τη Ζώνη Εγκαταστημένης Ροής (ZEF) όπου η τύρβη έχει αναπτυχθεί πλήρως σε ολόκληρη την έκταση της εγκάρσιας διατομής της φλέβας. Σε περιπτώσεις φλεβών μηδενικής άνωσης, η ZFE εκτείνεται σε αξονική απόσταση περίπου $7d_0$ από την έξοδο της φλέβας. Στις περιπτώσεις των πλουμίων η απόσταση αυτή είναι μικρότερη. Οι πειραματικές μετρήσεις δείχνουν ότι οι εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων του ιχνηθέτη κατά μήκος της ZFE αρχικά έχουν ομοιόμορφη κατανομή (top-hat) κοντά στην έξοδο της φλέβας μη έχοντας χαρακτηριστικά αυτοομοιότητας και σταδιακά εξελίσσονται, με τη μορφή τύπου Gauss, στο τέλος αυτής της περιοχής, πριν τη ZEF, αποκτώντας αυτοομοιότητα (Rouse *et al.* 1950, 1952). Η μαθηματική περιγραφή της συμπεριφοράς της ροής της ανωστικής φλέβας εντός του πυρήνα, επιτυγχάνεται με ποικίλους τρόπους. Η απλούστερη μέθοδος είναι η θεώρηση εικονικής πηγής ώστε να αποφευχθούν οι δυσκολίες της προσομοίωσης (Kotsovinos 1976, Uddin & Pollard 2007). Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν απλά μοντέλα που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία, όπως εκείνα τα οποία προτείνονται από τους Albertson *et al.* (1950), Abraham (1963), Noutsopoulos &

Yannopoulos (1987), Lee & Chu (2003) και Yannopoulos (2006). Οι Yannopoulos & Bloutsos (2012) χρησιμοποιούν το μαθηματικό μοντέλο AIM (Advanced Integral Model, Yannopoulos 2010) προσομοιώνοντας την έξοδο της φλέβας ως ένα σύνολο απείρων σημειακών φλεβών οι οποίες αλληλεπιδρούν μεταξύ τους επιτυγχάνοντας την πραγματική κατανομή των μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων.

Οι τρόποι με τους οποίους επιλύονται τα προβλήματα των ανωστικών φλεβών είναι αρκετοί. Οι πρώτες προσπάθειες για τη μαθηματική επίλυση του προβλήματος της απλής φλέβας αποτελούντο από τον προσδιορισμό συγκεκριμένων απλών σχέσεων για τις τυρβώδεις ποσότητες μεταφοράς όγκου, ορμής, ενέργειας και ιχνηθέτη. Χαρακτηριστική αναφορά σε αυτή τη μέθοδο γίνεται από τον Schlichting (1968). Η μέθοδος αυτή είναι περιορισμένα εφαρμόσιμη καθώς δεν χρησιμοποιείται σε σύνθετες περιπτώσεις όπου ο αποδέκτης είναι κινούμενος ή πυκνομετρικά στρωματοποιημένος. Μία άλλη προσέγγιση, για τον υπολογισμό των μέσων χαρακτηριστικών της ροής ανωστικών φλεβών πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη διαστατική ανάλυση. Και αυτή η μέθοδος εφαρμόζεται αυστηρά σε περιπτώσεις απλών προβλημάτων, στα οποία η ροή δεν περιγράφεται από πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές. Σήμερα, δύο είναι οι γενικές προσεγγίσεις για τη μαθηματική αντιμετώπιση των προβλημάτων της ροής των ανωστικών φλεβών. Η αριθμητική προσομοίωση (Computational Fluid Dynamics, 'CFD') και η αναλυτική προσέγγιση του φαινομένου. Η αντιμετώπιση βασίζεται στην επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους της συνεχείας, της ορμής και της διάχυσης-μεταφοράς του ιχνηθέτη. Η επίλυση (CFD) πραγματοποιείται αριθμητικά ή ολοκληρώνοντας το σύστημα των εξισώσεων (στη μορφή που προκύπτει μετά την αντικατάσταση των στιγμιαίων μεγεθών κατά Reynolds) επί της εγκάρσιας διατομής της φλέβας (ήτοι κάθετα στη τροχιά αυτής) θεωρώντας ότι οι ποσότητες των τυρβωδών μεγεθών μηδενίζονται στα όρια της διατομής. Αυτή η μέθοδος αποκαλείται «ολοκληρωματική μέθοδος» και περιγράφεται αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

2.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Η ανάπτυξη των ολοκληρωματικών μοντέλων βασίζεται στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους της συνέχειας της ορμής και της διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη. Οι εξισώσεις διατυπώνονται χρησιμοποιώντας τον κανόνα της μεσοποίησης του Reynolds. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, οι στιγμιαίες τιμές των συνιστωσών της

ταχύτητας $U(u,v,w)$, της πίεσης p και της συγκέντρωσης c του ιχνηθέτη, διαχωρίζονται στις μέσες τιμές τους και στις αντίστοιχες, λόγω τύρβης, διακυμάνσεις ως προς τις μέσες τιμές. Έτσι, οι στιγμιαίες τιμές των συνιστωσών της ταχύτητας, της πίεσης και της συγκέντρωσης δίνονται από τις αντίστοιχες εξισώσεις:

$$u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w', p = \bar{p} + p', c = \bar{c} + c' \quad (2.17)$$

όπου οι μέσες τιμές ορίζονται ως εξής:

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} u dt, \bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} v dt, \bar{w} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} w dt, \bar{p} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} p dt, \bar{c} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} c dt \quad (2.18)$$

ο δε χρόνος ολοκλήρωσης Δt είναι μεγάλος συγκρινόμενος με τη χρονική κλίμακα των διακυμάνσεων της τύρβης, αλλά μικρός συγκρινόμενος με τη χρονική κλίμακα της μέσης ροής, όταν η εξεταζόμενη ροή είναι μη μόνιμη. Εφεξής, προς χάριν απλότητας, στις μέσες τιμές των μεγεθών παραλείπεται η παύλα υπεράνω αυτών. Για την εξαγωγή των εξισώσεων γίνεται η υπόθεση του Reynolds σχετικά με την ανάλυση των στιγμιαίων μεγεθών.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν (γνωστές ως Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS) ολοκληρώνονται σε μια εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας εφαρμόζοντας την υπόθεση της αυτομοιότητας και τις πραγματικές οριακές συνθήκες. Έτσι, προκύπτει ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, το οποίο δύναται να επιλυθεί αναλυτικά ή αριθμητικά. Ανάλογα με τη γεωμετρία της ροής και τις συνθήκες του περιβάλλοντος αποδέκτη υπάρχουν πολλές παραλλαγές στη διατύπωση του συστήματος των εξισώσεων. Γενικά, οι εξισώσεις είναι διατυπωμένες σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων, το οποίο είναι προσανατολισμένο εφαπτομενικά στον άξονα της φλέβας. Στο εγκάρσιο προς τον άξονα της φλέβας επίπεδο, η ροή θεωρείται συμμετρική.

Η τελική ολοκλήρωση του συστήματος επιτυγχάνεται με μία από τις δύο ακόλουθες προσεγγίσεις (το αποκαλούμενο «κλείσιμο του συστήματος των εξισώσεων»):

(α) Την υπόθεση της συμπαράσυρσης (entrainment hypothesis), όπως διατυπώθηκε από τους Morton *et al.* (1956) ορίζοντας ότι η ταχύτητα συμπαράσυρσης από το περιβάλλον ρευστό είναι ανάλογη της μέσης τιμής της ταχύτητας σε κάθε θέση, κάνοντας τις κατάλληλες παραδοχές για το συντελεστή συμπαράσυρσης (Morton 1959, List &

Imberger 1973, Turner 1986, Lee & Cheung 1990, Davidson *et al.* 2002, Cipollina *et al.* 2004, Jirka 2004). Μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι ο συντελεστής συμπαράσυρσης μεταβάλλεται. Είναι διαφορετικός σε κάθε περιοχή της ροής εξαρτώμενος από τη συμπεριφορά της ανωστικής φλέβας. Οι Kaminski *et al.* (2005) προτείνουν για το συντελεστή συμπαράσυρσης μια καθολική σχέση για ολόκληρη την περιοχή της ροής της ανωστικής φλέβας, ξεπερνώντας το παραπάνω μειονέκτημα.

(β) Την υπόθεση της διεύρυνσης του πεδίου ροής της φλέβας (spreading concept) όπως προτάθηκε από τον Abraham (1963), θεωρώντας ότι ο ρυθμός διεύρυνσης της φλέβας είναι σταθερός ($db_w/dz = K_w$) με τιμές που προκύπτουν από μετρήσεις (Jirka *et al.* 1973, Wang & Law 2002, Yannopoulos 2006).

Τα ολοκληρωματικά μοντέλα διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, ανάλογα με την ακρίβεια την οποία επιτυγχάνουν. Η πλειονότητά τους λαμβάνει υπόψη μόνο τις μέσες εισροές όγκου και ορμής στο σύστημα των εξισώσεων. Αυτά τα μοντέλα χαρακτηρίζονται ως «ολοκληρωματικά μοντέλα 1^{ης} τάξης». Τα μοντέλα, τα οποία παρουσιάζουν βελτιωμένη ακρίβεια, λαμβάνουν υπόψη τους τη συνεισφορά της τύρβης στις εισροές όγκου και ορμής και αποκαλούνται «ολοκληρωματικά μοντέλα 2^{ης} τάξης». Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν τα μοντέλα των Wood *et al.* (1993) και Davidson *et al.* (2002), τα οποία όμως λαμβάνουν τη συμμετοχή της τύρβης ως ένα σταθερό ποσοστό των μέσων εισροών. Καθαρά αντιπροσωπευτικά μοντέλα αυτής της κατηγορίας είναι εκείνα, τα οποία προτείνονται από τους Wang & Law (2002), Yannopoulos (2006) και Yannopoulos & Bloutsos (2012), τα οποία λαμβάνουν υπόψη την μεταβαλλόμενη συνεισφορά των τυρβωδών εισροών όγκου και ορμής καθώς επίσης και τη μεταβολή του λόγου των ονομαστικών πλατών συγκεντρώσεων – ταχυτήτων, λ , σε ολόκληρη την περιοχή της συμπεριφοράς της φλέβας, από φλέβας μηδενικής άνωσης έως πλουμίου.

2.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Αρκετές είναι οι παραδοχές που συνηθίζεται να λαμβάνονται υπόψη στη γενική μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων των ανωστικών ροών. Αρχικά θεωρείται ότι η ροή είναι μόνιμη και συμμετρική ως προς τον κύριο άξονα της ροής. Επίσης πραγματοποιείται η υπόθεση ότι η ροή εξαρχής είναι πλήρως τυρβώδης, ώστε οι όροι της μοριακής διάχυσης να είναι αρκετά μικρότεροι συγκριτικά με τους όρους της τυρβώδους διάχυσης, ώστε να μπορούν να παραλειφθούν.

Η ροή λαμβάνεται ασυμπίεστη. Επίσης, γίνεται η προσέγγιση τύπου Boussinesq, σύμφωνα με την οποία η μεταβολή της πυκνότητας του ρευστού της φλέβας ρ είναι σημαντική στον όρο βαρύτητας (άνωσης) ενώ μπορεί να αμεληθεί στους όρους αδράνειας. Η κατανομή της πίεσης στο πεδίο ροής θεωρείται υδροστατική. Λαμβάνεται υπόψη η προσέγγιση τύπου οριακού στρώματος Prandtl, επομένως οι μεταβολές των μεγεθών (gradients) στην κύρια διεύθυνση είναι μικρότερες συγκριτικά με εκείνες στην εγκάρσια διεύθυνση. Επίσης, η ροή θεωρείται παραβολικού τύπου και χωρίς περιδίνηση.

2.6 ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ

Η μέγιστη περιβαλλοντική προστασία των υδάτινων όγκων απαιτεί την κατασκευή αγωγών διάχυσης αποβλήτων με μεγάλο αριθμό ακροφυσίων. Τα ακροφύσια είναι τοποθετημένα είτε στο διαχύτη είτε σε ανυψωτήρες από τους οποίους εκβάλλουν κατακόρυφα, οριζόντια ή υπό γωνία ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Δύο συνήθεις διατάξεις είναι ο πολλαπλός διαχύτης και ο διαχύτης τύπου ροζέτας. Στον πολλαπλό διαχύτη, τα ακροφύσια είναι τοποθετημένα κατά μήκος του αγωγού εκβολής σε διάφορες διατάξεις. Στο διαχύτη τύπου ροζέτας, η διάταξη αποτελείται συνήθως από δύο έως οκτώ ακροφύσια, τα οποία βρίσκονται στις κορυφές οριζοντίου κανονικού πολυγώνου. Οι εκπομπές καπναερίων στην ατμόσφαιρα από ομάδες δύο ή περισσότερων πύργων ψύξης ή καμινάδων τοποθετημένων στις κορυφές κανονικού πολυγώνου, σχηματίζουν παρόμοιες ανωστικές ροές. Οι προσομοιώσεις αυτών των ροών από μαθηματικά μοντέλα είναι χρήσιμες στο σχεδιασμό και στη μελέτη περιβαλλοντικών επιπτώσεων τέτοιων συστημάτων διάθεσης.

Εξαιτίας της αλληλεπίδρασης μεταξύ των ανωστικών φλεβών, το σχηματιζόμενο πεδίο ροής και διάχυσης είναι συνήθως πολύπλοκο και δύσκολο να επιλυθεί. Οι αναφορές στην εξέταση κατασκευασμένων διαχυτών υγρών αποβλήτων, είτε τύπου ροζέτας είτε σχήματος - T με δύο οριζόντια ακροφύσια ανά ανυψωτήρα, είναι λίγες στη διεθνή βιβλιογραφία (Washburn *et al.* 1992, Proni *et al.* 1994, Petrenko *et al.* 1998, Carvalho *et al.* 2002, Obropta & Hires 2007 και Marti *et al.* 2012). Πειραματικές μετρήσεις έχουν πραγματοποιηθεί από τους Isaacson *et al.* (1983) οι οποίοι μελέτησαν το πειραματικό ομοίωμα του υποθαλάσσιου διαχύτη της πόλης του Σαν Φραντσίσκο για τις περιπτώσεις ύπαρξης ή μη θαλασσίου ρεύματος και στρωματοποίησης ή μη του υδάτινου αποδέκτη (Wong & Wright 1988). Οι Roberts *et al.* (1989a, b, c) πραγματοποίησαν πειράματα σε

πολλαπλό γραμμικό διαχύτη ο οποίος έφερε διαχυτήρες σχήματος – T εντός στρωματοποιημένου αποδέκτη. Οι Roberts & Snyder (1993a, b) μελέτησαν το πειραματικό ομοίωμα του υποθαλάσσιου διαχύτη της πόλης της Βοστώνης διερευνώντας τον ιδανικό αριθμό ανυψωτήρων σε ένα υποθαλάσσιο αγωγό και τον ιδανικό αριθμό ακροφυσίων σε κάθε ανυψωτήρα του διαχύτη. Οι Tian *et al.* (2004a, b) πραγματοποίησαν πειράματα σε διαχυτήρες σχήματος –T εντός κινούμενο αποδέκτη με ή χωρίς στρωματοποίηση χρησιμοποιώντας τη τεχνική LIF. Οι Yannopoulos & Noutsopoulos (2006a, b) πραγματοποίησαν πειράματα σε γραμμικό πολλαπλό διαχύτη, ενώ οι Lai *et al.* (2011) μελέτησαν πειραματικά την αλληλεπίδραση ανωστικών φλεβών από διαχύτη τύπου ροζέτας εντός κινούμενου αποδέκτη.

Αρκετά είναι τα μαθηματικά μοντέλα τα οποία έχουν αναπτυχθεί ώστε να προσομοιώνουν τη συμπεριφορά των ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Οι Frick *et al.* (2001) ανέπτυξαν το Λαγκρανζιανό (Lagrangian) μοντέλο UM3 που περιέχεται στο πρόγραμμα Visual Plumes, το οποίο θεωρεί ότι η αλληλεπίδραση των ανωστικών φλεβών από γραμμικό πολλαπλό διαχύτη ισοδυναμεί με δισδιάστατη ανωστική φλέβα. Ο Roberts (1999) βασιζόμενος σε πειραματικά δεδομένα από αλληλεπίδραση φλεβών σε πολλαπλό διαχύτη ο οποίος φέρει ακροφύσια μορφής – T (Roberts *et al.* 1989a, b, c) ανέπτυξε το διαστατικό μοντέλο RSB το οποίο υπολογίζει την αραιώση, το ύψος ανόδου και το πάχος του πεδίου στο τέλος του εγγύς πεδίου. Οι Jirka & Akar (1991) ανέπτυξαν το μαθηματικό μοντέλο CORMIX2 το οποίο αντιμετωπίζει τον γραμμικό πολλαπλό διαχύτη όπως και το UM3. Τα προαναφερθέντα μοντέλα αδυνατούν να προσεγγίσουν με ικανοποιητική ακρίβεια την αλληλεπίδραση μεταξύ ανωστικών φλεβών που προέρχονται από διαχύτες με μικρό αριθμό ακροφυσίων. Αντίθετα, το μοντέλο JETLAG (Lee & Cheung 1990) το οποίο είναι ενσωματωμένο στο μαθηματικό μοντέλο VisJet (Cheung *et al.* 2000 και Lee *et al.* 2000), έχει αναπτυχθεί ώστε να προσομοιώνει διαχύτες τύπου ροζέτας σε κινούμενο υγρό περιβάλλον στηριζόμενο όμως στην εμπειρική προσέγγιση ότι το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης εισάγεται στο πεδίο των συγκεντρώσεων ως η μέση τιμή των επί μέρους συγκεντρώσεων των ανωστικών φλεβών αναλογισμένη στην τελική εγκάρσια επιφάνεια των αλληλεπιδρώντων φλεβών. Επίσης, οι Moawad *et al.* (2001) βασιζόμενοι σε πειραματικά δεδομένα χρησιμοποίησαν εμπειρικές μεθόδους ώστε να περιγράψουν το φαινόμενο της μείξης πολλών φλεβών.

Η ολοκληρωματική μέθοδος χρησιμοποιείται στην προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ πολλαπλών ανωστικών φλεβών. Οι Briggs (1975), Yannopoulos

(1996), Papps & Wood (1997) και Davidson *et al.* (2002) την χρησιμοποιούν σε περιπτώσεις είτε ακίνητου είτε κινούμενου αποδέκτη. Οι Yannopoulos & Noutsopoulos (2006b) ανέπτυξαν τη μεθοδολογία υπέρθεσης για σειρά κυκλικών ανωστικών φλεβών για τις περιπτώσεις φλεβών μηδενικής άνωσης και πλήρους άνωσης. Οι Bloutsos & Yannopoulos (2009) ανέπτυξαν ένα ολοκληρωματικό μοντέλο το οποίο προβλέπει τα πεδία ταχυτήτων και συγκεντρώσεων από διαχύτη τύπου ροζέτας, ο οποίος φέρει N κατακόρυφα ακροφύσια εντός ακίνητου αποδέκτη, στηριζόμενοι στη μεθοδολογία του περιορισμού της συμπαράσυρσης (Entrainment Restriction Approach, Yannopoulos & Noutsopoulos 2006a).

Χαρακτηριστικό φαινόμενο, το οποίο παρατηρείται κατά την αλληλεπίδραση μεταξύ ανωστικών φλεβών είναι η δυναμική αλληλεπίδραση εξαιτίας των δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους και της υπέρθεσης των επί μέρους κατανομών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων. Αυτή παρατηρείται όταν η συμπαράσυρση του περιβάλλοντος ρευστού είναι περιορισμένη, όπως συμβαίνει σε ένα περιορισμένο χώρο, εξαιτίας της ύπαρξης σταθερού ορίου ή της ύπαρξης πολλών φλεβών, οι οποίες βρίσκονται αρκετά κοντά. Ένδειξη αυτής της δυναμικής αλληλεπίδρασης είναι η αλλαγή της τροχιάς της κάθε φλέβας του συνόλου των αλληλεπιδρουνσών φλεβών συγκρινόμενη με την τροχιά της αντίστοιχης ελεύθερης φλέβας. Άλλες αλλαγές εξαιτίας αυτού του φαινομένου είναι η συστολή του πεδίου του συνόλου των ανωστικών φλεβών ή ακόμη και η ελάττωση της αραίωσης εξαιτίας της αύξησης του βαθμού της αλληλεπίδρασης. Πρώτος ο Liseth (1970) παρατήρησε αυτή τη δυναμική αλληλεπίδραση. Αργότερα οι Baines & Keffer (1974) εκτελώντας πειράματα σε μια ομάδα φλεβών αέρα μηδενικής άνωσης μέτρησαν την εγκάρσια κατανομή των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων του πεδίου ροής που σχηματίζεται. Παρατήρησαν ότι το εύρος της ομάδας των φλεβών ελαττωνόταν όταν συγκρινόταν με την ελεύθερη φλέβα και αυτό οφείλεται στην σύγκλιση μεταξύ των φλεβών. Η ελάττωση της συμπαράσυρσης αποδόθηκε στην αλληλεπίδραση των φλεβών και η «εκτροπή» του άξονα στο τροποποιημένο πεδίο πίεσης. Επίσης, οι Manohar *et al.* (2004) μελετώντας μια ομάδα φλεβών αέρα, παρατήρησαν ότι οι εξωτερικές φλέβες της ομάδας συγκλίνουν προς το εσωτερικό, προς την κεντρική φλέβα.

Η αμοιβαία έλξη μεταξύ δύο ανωστικών φλεβών παρατηρείται και στα πειράματα για τη μελέτη του εξαερισμού σε κτίρια από τους Kaye & Linden (2004) και Hart & Dalziel (2006) που πραγματοποιήθηκαν σε ζεύγος ομοίων ή μη φλεβών αέρα.

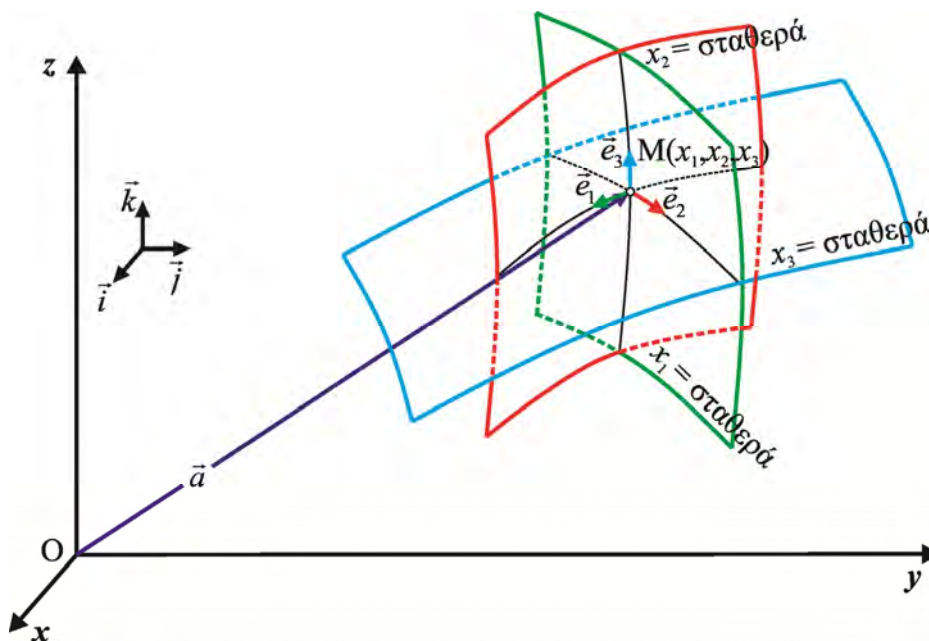
Το φαινόμενο της δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των ανωστικών φλεβών μιας ομάδας είναι εμφανές στις περιπτώσεις όπου αυτές εκβάλλουν από διαχύτη τύπου ροζέτας. Αρχικά, οι Roberts & Snyder (1993a, b) παρατήρησαν ότι η αραίωση που επιτυγχάνεται από μια ροζέτα με 12 ακροφύσια είναι μικρότερη εκείνης που φέρει 8. Για τη μείωση αυτή οι ερευνητές δεν ήταν βέβαιοι αν οφείλεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των φλεβών ή στην αμοιβαία έλξη μεταξύ των εξαιτίας του πεδίου της πίεσης ή και στα δύο. Οι Seo *et al.* (2004) παρατήρησαν τη δυναμική αλληλεπίδραση, σε πειράματα που πραγματοποίησαν σε ροζέτα με τέσσερα ακροφύσια εντός ήρεμου αποδέκτη και μέτρησαν τη ροή της συμπαράσυρσης εντός του συνολικού πεδίου ροής, χρησιμοποιώντας την τεχνική PIV. Ο Kwon (2005) ανέπτυξε ένα ολοκληρωματικό μοντέλο στο οποίο ενσωμάτωσε τις μετρήσεις συμπαράσυρσης των Seo *et al.* (2004) ώστε να προβλέπει την εκτροπή της τροχιάς εξαιτίας της δυναμικής αλληλεπίδρασης. Πρόσφατα, οι Lai *et al.* (2011) μελέτησαν πειραματικά την περίπτωση διαχύτη τύπου ροζέτας εντός κινούμενου αποδέκτη χρησιμοποιώντας την τεχνική LIF.

Κάθε σημείο του χώρου $M(x, y, z)$ σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, μπορεί να θεωρηθεί ως το σημείο τομής των τριών επιπέδων $x = \text{σταθερά}$, $y = \text{σταθερά}$ και $z = \text{σταθερά}$. Θεωρώντας τρεις ανεξάρτητες, μονοσήμαντες και με συνεχείς τις πρώτες παραγώγους συναρτήσεις $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ και $f_3(x, y, z)$ των ανεξαρτήτων χωρικών μεταβλητών x, y, z του καρτεσιανού συστήματος $O(x, y, z)$. Θέτοντας αυτές τις συναρτήσεις ίσες με τις σταθερές x_1, x_2 και x_3 , αντίστοιχα, ορίζονται τρεις επιφάνειες. Το σημείο τομής των τριών επιφανειών $x_1 = \text{σταθερά}$, $x_2 = \text{σταθερά}$ και $x_3 = \text{σταθερά}$ ορίζει το σημείο $M(x_1, x_2, x_3)$ στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Με άλλα λόγια, ο κάθε άξονας x_i ($i = 1, 2, 3$) καθορίζεται στο σύστημα $O(x, y, z)$ ως η τομή των επιφανειών που ορίζονται από τις σχέσεις $x_j(x, y, z) = c_j$ και $x_k(x, y, z) = c_k$ όπου c_j, c_k είναι σταθερές και $i \neq j \neq k$. Με κάθε οικογένεια επιφανειών $x_j = \text{σταθερά}$, οι οποίες τέμνουν τον άξονα x_i , μπορεί να οριστεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{e}_i$ κάθετο στην επιφάνεια $x_i = \text{σταθερά}$ και προσανατολισμένο στη διεύθυνση του x_i (Σχήμα 3.2).

Η διανυσματική ακτίνα του σημείου M , δίνεται από την εξίσωση:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (3.1)$$

Η στοιχειώδης μετακίνηση $d\vec{s}$ του σημείου $M(\vec{a})$ στο $M(\vec{a} + d\vec{a})$ περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:



Σχήμα 3.2 Προσδιορισμός σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του σημείου $M(x_1, x_2, x_3)$ στο χώρο.

$$d\vec{s} = d\vec{a} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3} dx_3 \quad (3.2)$$

Η εξίσωση (3.2) μπορεί να γραφτεί στη ακόλουθη μορφή:

$$d\vec{s} = d\vec{a} = h_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 \vec{e}_1 + h_2(x_1, x_2, x_3) dx_2 \vec{e}_2 + h_3(x_1, x_2, x_3) dx_3 \vec{e}_3 \quad (3.3)$$

όπου $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων. Οι συναρτήσεις h_1, h_2 και h_3 ονομάζονται μετρικοί συντελεστές. Η φυσική ερμηνεία αυτών των συντελεστών καθίσταται κατανοητή προσδιορίζοντας τις στοιχειώδεις αποστάσεις κατά μήκος των αντιστοίχων κατευθύνσεων που δίνονται από τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων στο σημείο $M(\vec{a})$ λαμβάνοντας υπόψη τις στοιχειώδεις μετακινήσεις του σημείου $M(x_1, x_2, x_3)$ κατά dx_1, dx_2, dx_3 . Οι ποσότητες $h_1 dx_1, h_2 dx_2$ και $h_3 dx_3$ εκφράζουν τα μήκη των προβολών της στοιχειώδους μετακίνησης $d\vec{s} = d\vec{a}$ κατά τη διεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ και $\vec{e}_3$, αντίστοιχα. Συνεπώς, η μεταβολή της καμπυλόγραμμης συντεταγμένης dx_i δύναται να μετασχηματιστεί στην αντίστοιχη μετατόπιση στο χώρο πολλαπλασιαζόμενη με την αντίστοιχο μετρικό συντελεστή h_i (Σχήμα 3.3). Είναι προφανές ότι για το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι $x_1 = x, x_2 = y$ και $x_3 = z$ και επομένως $h_i = 1$.

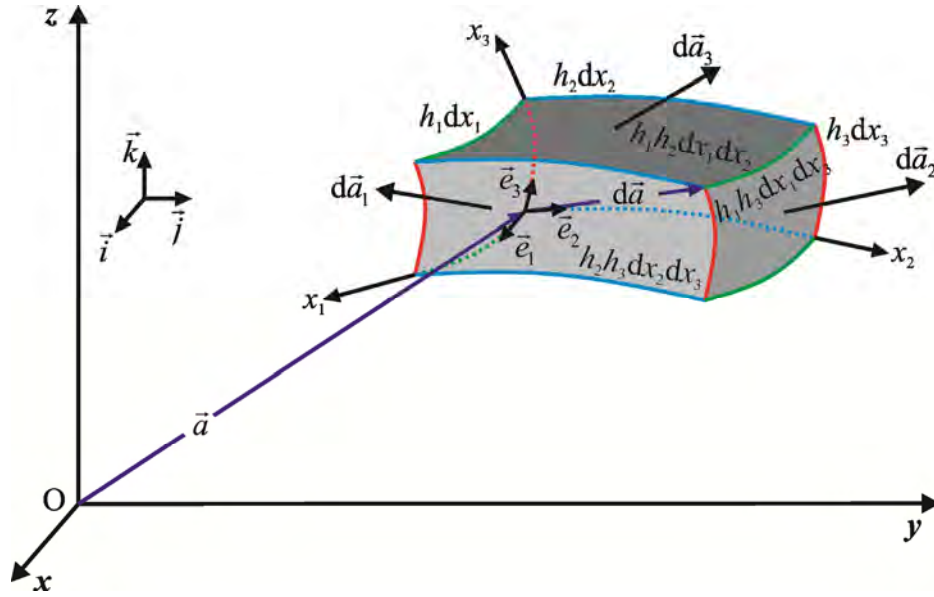
Τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών x_1, x_2, x_3 στο σημείο M δίνονται, αντίστοιχα, από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\vec{q}_1 = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} \quad \vec{q}_2 = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} \quad \vec{q}_3 = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3} \quad (3.4)$$

Συμβολίζοντας ως s_1, s_2 και s_3 τα μήκη κατά μήκος των καμπυλών x_1, x_2 και x_3 , αντίστοιχα, τα διανύσματα $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ και $\vec{q}_3$ γράφονται:

$$\vec{q}_1 = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial s_1} \frac{ds_1}{dx_1} = \vec{e}_1 h_1 \quad (3.5)$$

$$\vec{q}_2 = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial s_2} \frac{ds_2}{dx_2} = \vec{e}_2 h_2 \quad (3.6)$$



Σχήμα 3.3 Προσδιορισμός της στοιχειώδους μετακίνησης $d\vec{s} = d\vec{a}$.

$$\vec{q}_3 = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial s_3} \frac{ds_3}{dx_3} = \vec{e}_3 h_3 \quad (3.7)$$

όπου $\vec{e}_i = \partial \vec{a} / \partial s_i$, είναι τα αντίστοιχα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα στους άξονες x_i . Τα $h_i = ds_i / dx_i$ είναι τα στοιχεία της μετρικής που αντιστοιχούν στους άξονες x_i και δίνονται από τις εξισώσεις:

$$h_1^2 = \left| \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 \quad (3.8)$$

$$h_2^2 = \left| \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 \quad (3.9)$$

$$h_3^2 = \left| \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3} \right)^2 \quad (3.10)$$

Επομένως, τα μοναδιαία διαστήματα δίνονται από τις ακόλουθες μαθηματικές σχέσεις:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_1} \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_2} \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{a}}{\partial x_3} \quad (3.11)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι διαφορικοί τελεστές της κλίσης και της απόκλισης σε ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων έχουν την ακόλουθη μορφή:

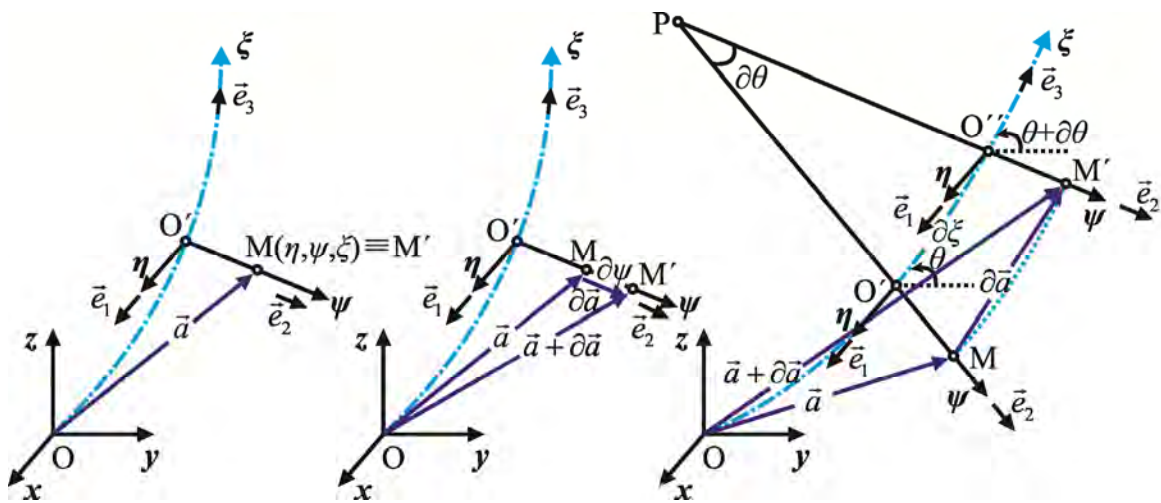
$$\text{grad}f = \nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (3.12)$$

$$\text{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 F_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 F_3) \right] \quad (3.13)$$

Για τη μελέτη των πεδίων ροής και μείξης της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, χρησιμοποιείται το τοπικό σύστημα καμπυλογράμμων ορθογωνίων συντεταγμένων $O_l(x_1, x_2, x_3) \equiv O_l(\eta, \psi, \zeta)$, με $x_1 = \eta = 0$. Για τον υπολογισμό των μετρικών συντελεστών χρειάζεται να υπολογιστεί η στοιχειώδης μετατόπιση του σημείου M στο M' κατά μήκος της αντίστοιχης διεύθυνσης (Σχήμα 3.4). Σε αυτή την περίπτωση, οι μετρικοί συντελεστές λαμβάνουν τις εξής τιμές:

$$\partial \vec{a} = 0 \partial \eta \vec{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial \vec{a}}{\partial \eta} = 0 \vec{e}_1 \Rightarrow h_1 = 0 \quad (3.14)$$

$$\partial \vec{a} = 1 \partial \psi \vec{e}_2 \Rightarrow \frac{\partial \vec{a}}{\partial \psi} = 1 \vec{e}_2 \Rightarrow h_2 = 1 \quad (3.15)$$



Σχήμα 3.4 Προσδιορισμός των μετρικών συντελεστών h_i σε ορθογώνιο καμπυλόγραμμα σύστημα συντεταγμένων $O_l(x_1, x_2, x_3) \equiv O_l(\eta, \psi, \zeta)$, με $x_1 = \eta = 0$, για την περίπτωση δισδιάστατης ανωστικής φλέβας.

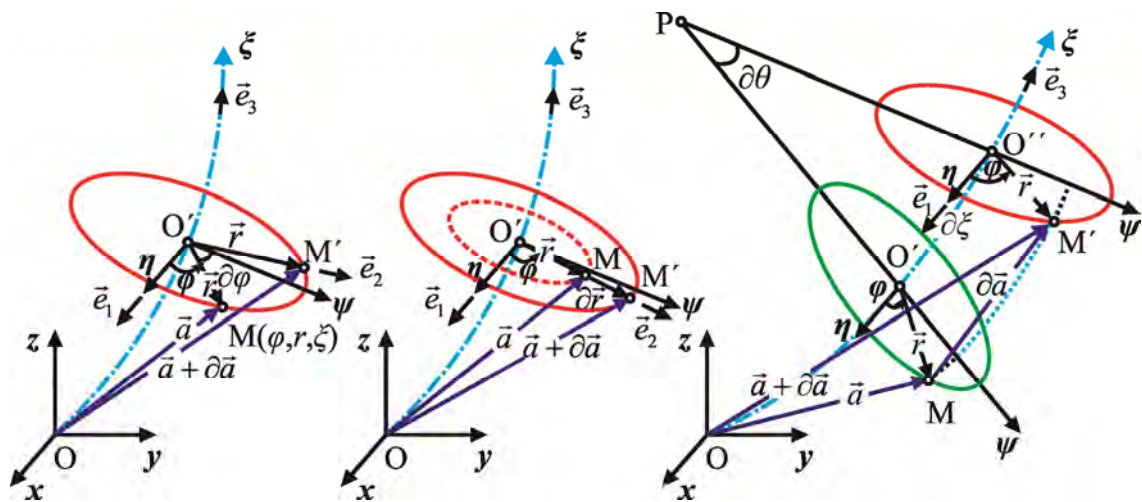
$$\partial \vec{a} = (\partial \xi + \psi \partial \theta) \vec{e}_3 \Rightarrow \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi} = \left(1 + \psi \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) \vec{e}_3 \Rightarrow h_3 = 1 + \psi \frac{d\theta}{d\xi} \quad (3.16)$$

Για τη μαθηματική περιγραφή της κυκλικής κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, χρησιμοποιείται το τοπικό σύστημα καμπυλογράμμων κυλινδρικών συντεταγμένων $O_l(x_1, x_2, x_3) \equiv O_l(\varphi, r, \xi)$. Για τον υπολογισμό των μετρικών συντελεστών χρειάζεται να υπολογιστεί η στοιχειώδης μετατόπιση του σημείου M στο M' κατά μήκος της αντίστοιχης διεύθυνσης (Σχήμα 3.5). Σε αυτή την περίπτωση, οι μετρικοί συντελεστές λαμβάνουν τις εξής τιμές:

$$\partial \vec{a} = r \partial \varphi \vec{e}_1 \Rightarrow \frac{\partial \vec{a}}{\partial \varphi} = r \vec{e}_1 \Rightarrow h_1 = r \quad (3.17)$$

$$\partial \vec{a} = 1 \partial r \vec{e}_2 \Rightarrow \frac{\partial \vec{a}}{\partial r} = 1 \vec{e}_2 \Rightarrow h_2 = 1 \quad (3.18)$$

$$\partial \vec{a} = (\partial \xi + r \sin \varphi \partial \theta) \vec{e}_3 \Rightarrow \frac{\partial \vec{a}}{\partial \xi} = \left(1 + r \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) \vec{e}_3 \Rightarrow h_3 = 1 + r \sin \varphi \frac{d\theta}{d\xi} \quad (3.19)$$

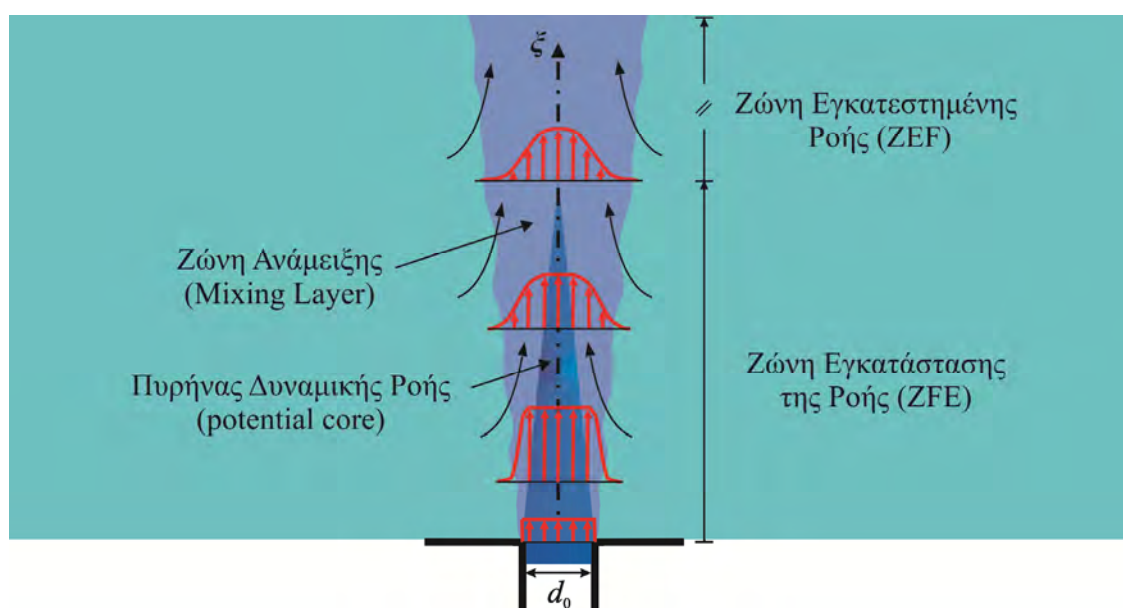


Σχήμα 3.5 Προσδιορισμός των μετρικών συντελεστών h_i σε καμπυλόγραμμο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων $O_l(x_1, x_2, x_3) \equiv O_l(\varphi, r, \xi)$, για την περίπτωση κυκλικής ανωστικής φλέβας.

3.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΥΡΗΝΑ ΓΙΑ ΤΗ ΖΩΝΗ ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ (ZFE)

Στο Σχήμα 3.6 παρουσιάζεται το πεδίο της μέσης ροής, το οποίο σχηματίζεται από μία ανωστική φλέβα στο επίπεδο xy . Στην πηγή, η αρχική ταχύτητα και συγκέντρωση του ρευστού είναι w_0 και c_0 , αντίστοιχα. Η τυρβώδης φλέβα παράγεται από την εκροή του ρευστού από το ακροφύσιο εξόδου. Η ανάπτυξη του πεδίου ροής περιλαμβάνει δύο στάδια: το αρχικό που εξελίσσεται στη Ζώνη Εγκατάστασης της Ροής (Zone of Flow Establishment, ZFE) και το εγκατεστημένο πεδίο ροής που συναντάται στη Ζώνη Εγκατεστημένης ροής (Zone of Established Flow, ZEF). Η ταχύτητα και η συγκέντρωση εντός του πυρήνα δυναμικής ροής της ZFE είναι σταθερές. Εξωτερικώς του πυρήνα ευρίσκεται το στρώμα ανάμειξης. Η ανταλλαγή ορμής μεταξύ του πυρήνα της ροής και του περιβάλλοντος ρευστού κατά μήκος του στρώματος ανάμειξης, δίνει τις κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων εντός του πεδίου ροής.

Στα περισσότερα από τα υπάρχοντα ολοκληρωματικά μοντέλα η ύπαρξη του πυρήνα δυναμικής ροής αγνοείται προσδιορίζοντας μία φανταστική πηγή σε απόσταση από την πραγματική πηγή όσο το μήκος του πυρήνα ήτοι $\xi_e \approx 6.2d_0$ (Lee & Chu 2003), όπου d_0 η διάμετρος του ακροφυσίου. Σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, ειδικότερα στις περιπτώσεις ανωστικών φλεβών, η αρχική μείξη περιμετρικά του πυρήνα είναι σημαντική και η διαδικασία δεν μπορεί να περιγραφεί σωστά χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο σημειακής πηγής. Η παράλειψή του, δεν επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα. Η θεώρησή του ό-



Σχήμα 3.6 Σχηματικό διάγραμμα πεδίου ροής και διάχυσης τυρβώδους ανωστικής φλέβας.

μως έχει ως αποτέλεσμα την καλύτερη πρόβλεψη των χαρακτηριστικών του πεδίου ροής κοντά στην αρχική φάση αμέσως μετά την έξοδο.

Η αριθμητική προσομοίωση του πυρήνα αντιμετωπίζεται με ποικίλες διαφορετικές προσεγγίσεις. Οι Albertson *et al.* (1950) πρότειναν ένα μοντέλο αποκλειστικά για φλέβες δίχως άνωση το οποίο γενικεύτηκε και για φλέβες με άνωση από τον Abraham (1963). Ο πυρήνας θεωρείται ότι έχει ακτίνα r_1 η οποία αυξάνεται γραμμικά συναρτήσει της αξονικής απόστασης ζ . Εντός του πυρήνα και σε ολόκληρη τη διαμήκη έκτασή του δεν έχει διεισδύσει η τυρβώδης διάχυση της ορμής, με αποτέλεσμα η κατανομή της μέσης τιμής της ταχύτητας να απαρτίζεται από ένα τμήμα όπου αυτή παραμένει σταθερή, έχοντας κατανομή “top-hat”. Εκτός του πυρήνα, η κατανομή της ταχύτητας προσεγγίζεται από μια καμπανοειδούς μορφής ουρά (bell-shaped tail), προσεγγίζοντας τη μείωση της ταχύτητας λόγω της συμπαράσυρσης του περιβάλλοντος ρευστού εντός του σώματος της φλέβας. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και η εγκάρσια κατανομή της συγκέντρωσης. Εντός του πυρήνα τόσο η ταχύτητα όσο και η συγκέντρωση λαμβάνεται σταθερή και ίση με την αρχική ($w = w_0$, $c = c_0$) σε ολόκληρη τη διαμήκη έκταση του πυρήνα. Οι Lee (1974), Lee *et al.* (1980) και Noutsopoulos & Yannopoulos (1987) προτείνουν ένα μοντέλο για την δυναμική ροή του πυρήνα της ZEF, βασιζόμενοι στη λογική των Albertson και Abraham, θεωρώντας όμως ότι η εγκάρσια ταχύτητα εντός του πυρήνα μεταβάλλεται συναρτήσει της αξονικής απόστασης ζ . Ο Yannopoulos (2006) βελτιώνει το συγκεκριμένο μοντέλο συμπεριλαμβάνοντας σε αυτό όρους $2^{\text{ης}}$ τάξης. Οι Lee *et al.* (2003) προτείνουν για την περιοχή του πυρήνα ένα μοντέλο όπου η εγκάρσια ταχύτητα της φλέβας είναι σταθερή εντός του πυρήνα και εκτός αυτού έως το πέρας της φλέβας. Στο στρώμα ανάμειξης η διαμήκης ταχύτητα των κυρίων στροβίλων λαμβάνεται σταθερή και ίση με το μισό εκείνης εντός του πυρήνα.

Το προτεινόμενο, στην παρούσα Διατριβή, μοντέλο για τη δυναμική ροή του πυρήνα εντός της Ζώνης Εγκατάστασης της Ροής προσεγγίζει την πραγματική εγκάρσια κατανομή των μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων με τις εξής κατανομές. Στην έξοδο του ακροφυσίου οι κατανομές αυτές είναι ομοιόμορφες κατά μήκος της διατομής της φλέβας (“top-hat” κατανομή). Καθώς απομακρύνεται η φλέβα από την πηγή, αρχίζει η συμπαράσυρση του περιβάλλοντος ρευστού και η τυρβώδης διάχυση της ορμής. Έτσι, η “top-hat” κατανομή περιορίζεται στο κέντρο της διατομής και ταυτόχρονα αντικαθίσταται στην υπόλοιπη διατομή από κατανομή τύπου Gauss. Σε απόσταση ζ_e από το ακροφύσιο εξόδου, οι κατανομές των μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων έχουν λάβει σε ολόκληρη

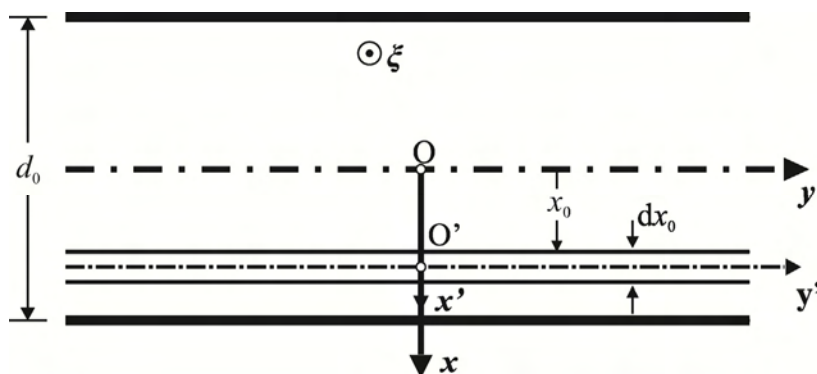
την εγκάρσια διατομή της φλέβας τη μορφή της κατανομής τύπου Gauss. Η μαθηματική περιγραφή της εξέλιξης της εγκάρσιας κατανομής των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων από “top-hat” σε Gauss πραγματοποιείται θεωρώντας ότι το ακροφύσιο εξόδου αποτελείται από άπειρες σημειακές πηγές οι οποίες εκρέουν φλέβες άνωσης που αλληλεπιδρούν έχοντας, η κάθε μία από αυτές, κατανομές μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων τύπου Gauss. Η αντιμετώπιση της δισδιάστατης και της κυκλικής φλέβας είναι η ίδια.

3.2.1 Δισδιάστατη Ανωστική Φλέβα

Στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας, η πηγή εξόδου θεωρείται ότι έχει άπειρο μήκος και πλάτος d_0 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7. Θεωρείται δηλαδή, ότι αυτή η άπειρη λωρίδα αποτελείται από άπειρες στοιχειώδεις γραμμικές πηγές απείρου μήκους και πλάτους dx_0 . Έστω ότι μια τέτοια στοιχειώδης λωρίδα βρίσκεται σε απόσταση x_0 από το κέντρο της πηγής. Για κάθε ανωστική φλέβα η οποία εκρέει από μια τέτοια στοιχειώδη λωρίδα η εγκάρσια κατανομή των μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων ακολουθεί την κατανομή Gauss, ήτοι:

$$\frac{w}{w_m} = \exp\left(-\frac{x'^2}{b_w^2}\right) \quad (3.20)$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{x'^2}{b_c^2}\right) \quad (3.21)$$



Σχήμα 3.7 Σχηματικό διάγραμμα για το μοντέλο πυρήνα δισδιάστατης ανωστικής φλέβας.

3.2.1.1 Εγκάρσια Κατανομή Ταχυτήτων

Φλέβα δίχως άνωση (jet)

Στην περίπτωση της φλέβας δίχως άνωση (jet) ισχύει η διατήρηση της αρχικής ορμής. Συνεπώς για τη φλέβα που εκρέει από τη στοιχειώδη λωρίδα dx_0 θα ισχύει, ότι η ορμή σε μια τυχαία θέση (Δm) θα είναι ίση προς την αρχική (Δm_0):

$$\Delta m = \Delta m_0 \quad (3.22)$$

Αθροίζοντας την ορμή από το σύνολο των στοιχειωδών λωρίδων θα ισχύει:

$$\sum \Delta m = \sum \Delta m_0 = m_0 \quad (3.23)$$

όπου m είναι η συνολική ποσότητα της εισροής ορμής της φλέβας σε απόσταση ζ από την έξοδο και $m_0 = d_0 w_0^2$ η συνολική αρχική ορμή της φλέβας. Όμως, σε τυχαία θέση η ποσότητα της ορμής είναι:

$$m = \sum \Delta m = \lambda_M \sqrt{\frac{\pi}{2}} b_w w_m^2 \quad (3.24)$$

και στην αρχική θέση για τη φλέβα που εκρέει από τη στοιχειώδη λωρίδα dx_0 θα ισχύει:

$$\Delta m_0 = \Delta x_0 w_0^2 \quad (3.25)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.24) και (3.25) στην (3.23) και ολοκληρώνοντας μέχρι τα όρια της σχισμής, προκύπτει η εξίσωση της εγκάρσιας κατανομής των μέσων ταχυτήτων στη διατομή της φλέβας:

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_M}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{\sqrt{2}b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{\sqrt{2}b_w} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

Για $x = 0$ και $y = 0$, η εξίσωση (3.26) δίνει την τιμή της μέσης αξονικής ταχύτητας ($w = w_m$):

$$\frac{w_m}{w_0} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_M}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{\sqrt{2b_w}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3.26) και (3.27) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας για κάθε απόσταση ξ :

$$\frac{w}{w_m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{\sqrt{2b_w}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{\sqrt{2b_w}} \right)}{\operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{\sqrt{2b_w}} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

Φλέβα πλήρους άνωσης (plume)

Στην περίπτωση της φλέβας πλήρους άνωσης (plume) ισχύει η διατήρηση της κλίσης της κινητικής ενέργειας (Yannopoulos & Noutsopoulos 2006b):

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = \beta_0 - \varepsilon_f \quad (3.29)$$

Επομένως και για τη φλέβα που εκρέει από τη στοιχειώδη λωρίδα dx_0 θα ισχύει ότι η κλίση της κινητικής ενέργειας ($\Delta\varepsilon$) παραμένει σταθερή:

$$\frac{d(\Delta\varepsilon)}{d\xi} = \Delta\beta_0 - \Delta\varepsilon_f \quad (3.30)$$

Οι Yannopoulos & Noutsopoulos (2006b), θεωρούν ότι ισχύει:

$$\varepsilon_f = \sum \Delta\varepsilon_f \quad (3.31)$$

$$\varepsilon = \sum \Delta\varepsilon \quad (3.32)$$

Όπως αναφέρεται στους Yannopoulos & Noutsopoulos (2007), Bloutsos & Yannopoulos (2009) και στο Κεφάλαιο 5.1 ισχύει:

$$\frac{d\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{d\Xi} \cong \frac{d\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon_0}\right)}{d\Xi} \quad (3.33)$$

για κάθε αξονική απόσταση ξ/d_0 . Για την κινητική ενέργεια της φλέβας που εκρέει από τη στοιχειώδη λωρίδα dx_0 θα ισχύει:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_0 \quad (3.34)$$

Αθροίζοντας την ενέργεια από το σύνολο των στοιχειωδών λωρίδων θα ισχύει:

$$\sum \Delta\varepsilon = \sum \Delta\varepsilon_0 = \varepsilon_0 \quad (3.35)$$

όπου ε είναι η ποσότητα της ειδικής κινητικής ενέργειας της φλέβας σε απόσταση ξ από την έξοδο και ε_0 η αρχική κινητική ενέργεια της φλέβας. Όμως, σε τυχαία θέση η ποσότητα της ενέργειας είναι:

$$\varepsilon = \Delta\varepsilon = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} b_w w_m^3 \quad (3.36)$$

και στην αρχική θέση για τη φλέβα που εκρέει από τη στοιχειώδη λωρίδα dx_0 θα ισχύει:

$$\Delta\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \Delta x_0 w_0^3 \quad (3.37)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.36) και (3.37) στην (3.35) και ολοκληρώνοντας μέχρι τα όρια της σχισμής, προκύπτει η εξίσωση της εγκάρσιας κατανομής των μέσων ταχυτήτων στη διατομή της φλέβας:

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2x}{b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2x}{b_w} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.38)$$

Για $x = 0$ και $y = 0$, η εξίσωση (3.38) δίνει την τιμή της μέσης αξονικής ταχύτητας ($w = w_m$):

$$\frac{w}{w_0} = \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0}{b_w} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.39)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3.38) και (3.39) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας για κάθε απόσταση ζ :

$$\frac{w}{w_m} = \left[\frac{\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2x}{b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2x}{b_w} \right)}{2 \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0}{b_w} \right)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.40)$$

3.2.1.2 Εγκάρσια Κατανομή Συγκεντρώσεων

Για κάθε φλέβα είτε είναι πλήρους άνωσης είτε όχι, η εισροή της άνωσης διατηρείται. Συνεπώς για την ανωστική φλέβα η οποία εκρέει από στοιχειώδη λωρίδα dx_0 θα ισχύει ότι η ορμή σε μια τυχαία θέση ($\Delta\beta$) θα είναι ίση προς την αρχική ($\Delta\beta_0$):

$$\Delta\beta = \Delta\beta_0 \quad (3.41)$$

Αθροίζοντας την άνωση στο σύνολο των στοιχειωδών λωρίδων θα ισχύει:

$$\sum \Delta\beta = \sum \Delta\beta_0 = \beta_0 \quad (3.42)$$

όπου β είναι η ποσότητα της εισροής άνωσης της φλέβας σε απόσταση ζ από την έξοδο και $\beta_0 = g'_0 d_0 w_0 c_0$ η αρχική εισροή άνωσης της φλέβας. Σε τυχαία θέση η ποσότητα αυτή είναι:

$$\frac{\beta}{g'_0} = \sum \Delta \left(\frac{\beta}{g'_0} \right) = \lambda_B \sqrt{\pi} \frac{b_w b_c}{\sqrt{b_w^2 + b_c^2}} w_m c_m \quad (3.43)$$

και στην αρχική θέση για την ανωστική φλέβα που εκρέει από τη στοιχειώδη λωρίδα:

$$\Delta \frac{\beta_0}{g_0} = \Delta x_0 w_0 c_0 \quad (3.44)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.43) και (3.44) στην (3.42) και ολοκληρώνοντας μέχρι τα όρια της σχισμής, προκύπτει η εξίσωση της εγκάρσιας κατανομής του γινομένου των μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων στη διατομή της φλέβας:

$$\frac{w}{w_0} \frac{c}{c_0} = \frac{1}{2\lambda_B} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{2K_4 \xi} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{2K_4 \xi} \right) \right] \quad (3.45)$$

Για $x = 0$ και $y = 0$, η εξίσωση (3.45) δίνει την τιμή του γινομένου των μέσων αξονικών ταχυτήτων-συγκεντρώσεων ($wc = w_m c_m$):

$$\frac{w}{w_0} \frac{c}{c_0} = \frac{1}{\lambda_B} \operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{2K_4 \xi} \right) \quad (3.46)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3.38) και (3.39) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή του γινομένου ταχύτητας-συγκέντρωσης για κάθε απόσταση ξ :

$$\frac{w}{w_m} \frac{c}{c_m} = \frac{\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{2K_4 \xi} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{2K_4 \xi} \right)}{2 \operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{2K_4 \xi} \right)} \quad (3.47)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις (3.45) - (3.47), είναι:

$$K_4 = \frac{b_w b_c}{\sqrt{b_w^2 + b_c^2}} \quad (3.48)$$

Συνεπώς, από τις εξισώσεις (3.28) και (3.47) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή των μέσων τιμών των συγκεντρώσεων για την περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας δίχως άνωση:

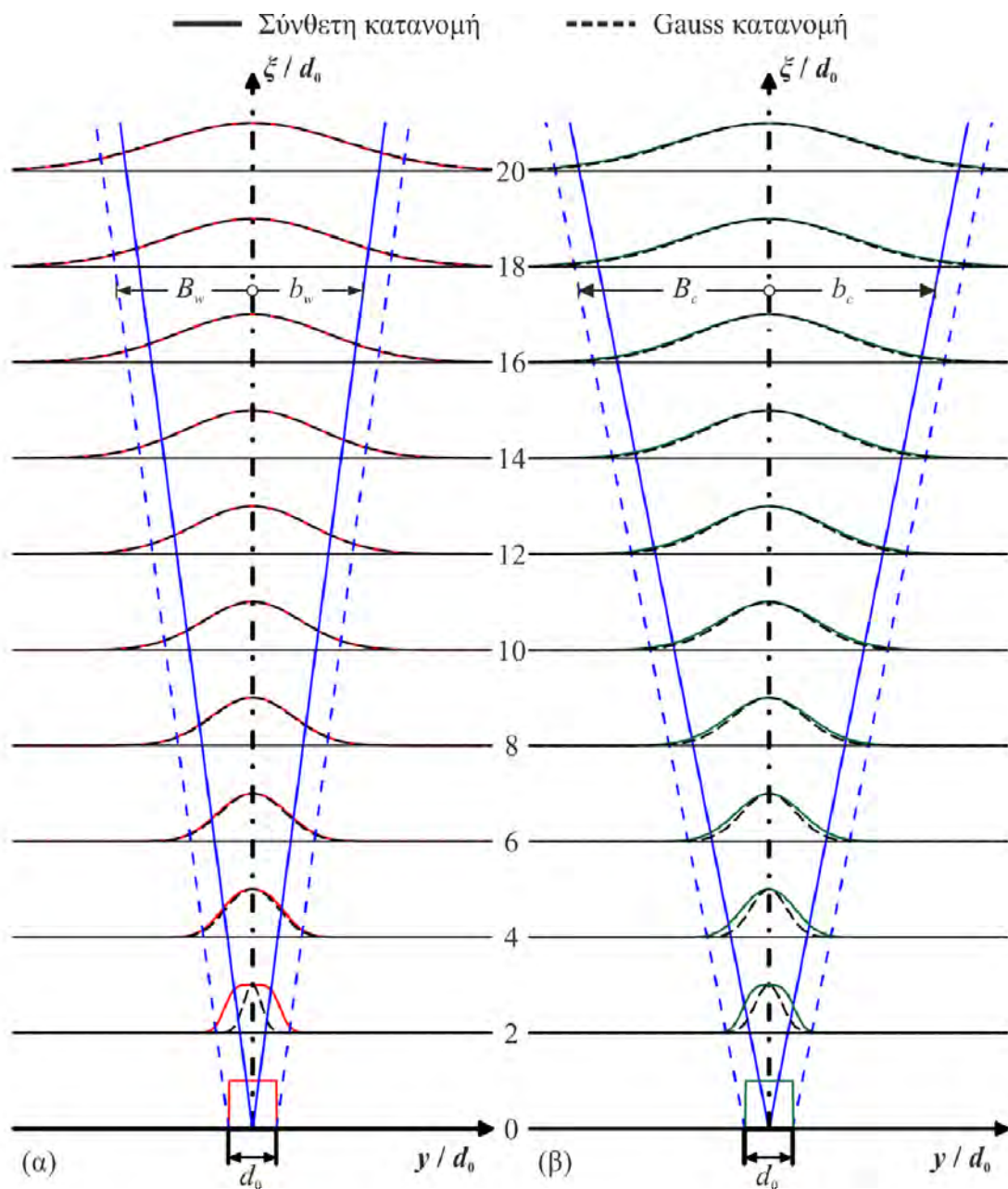
$$\frac{c}{c_m} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{d_0 - 2x}{2K_4\xi}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d_0 + 2x}{2K_4\xi}\right)}{2\operatorname{erf}\left(\frac{d_0}{2K_4\xi}\right)} \left[\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{d_0 - 2x}{\sqrt{2}b_w}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d_0 + 2x}{\sqrt{2}b_w}\right)}{2\operatorname{erf}\left(\frac{d_0}{\sqrt{2}b_w}\right)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

Επίσης, από τις εξισώσεις (3.40) και (3.47) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή των μέσων τιμών των συγκεντρώσεων για την περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας πλήρους άνωσης:

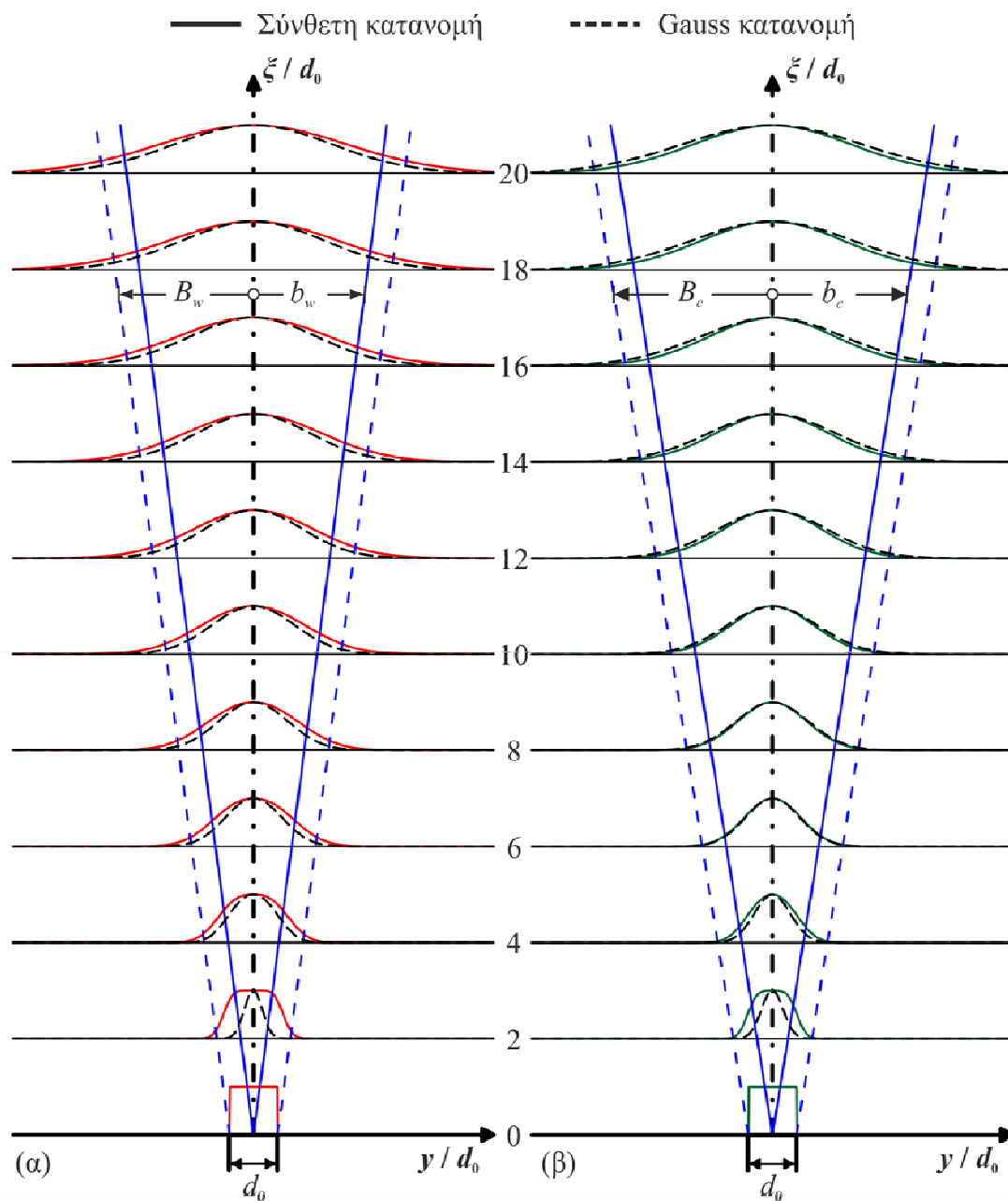
$$\frac{c}{c_m} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{d_0 - 2x}{2K_4\xi}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d_0 + 2x}{2K_4\xi}\right)}{2\operatorname{erf}\left(\frac{d_0}{2K_4\xi}\right)} \left[\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2x}{b_w}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2x}{b_w}\right)}{2\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0}{b_w}\right)} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (3.50)$$

Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η εγκάρσια κατανομή (α) της ταχύτητας και (β) της συγκέντρωσης για την περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας χωρίς άνωση, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των σύνθετων κατανομών (3.28) και (3.49), Σχήμα 3.8, και τις εξισώσεις των σύνθετων κατανομών (3.40) και (3.50), για την περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας πλήρους άνωσης, Σχήμα 3.9, για διάφορες τιμές του λόγου ξ/d_0 . Στα ίδια διαγράμματα παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες εγκάρσιες κατανομές όταν θεωρηθεί ότι ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss.

Παρατηρείται στα διαγράμματα και των δύο Σχημάτων (3.8 και 3.9) η εξέλιξη της σύνθετης εγκάρσιας κατανομής (ταχυτήτων και συγκεντρώσεων) από την έξοδο της πηγής σχισμής μέχρι την απόσταση $20d_0$, συγκρινόμενη με την αντίστοιχη κατανομή Gauss. Η πραγματική κατανομή στην έξοδο της φλέβας είναι ομοιόμορφη (top-hat) και καθώς αυξάνεται η απόσταση από την έξοδο και εντός της ZFE εξελίσσεται σταδιακά αποκτώντας τη μορφή τύπου Gauss. Επίσης, παρουσιάζονται, στα ίδια σχήματα, τα όρια b_w ή b_c και B_w ή B_c .



Σχήμα 3.8 Εξέλιξη κατά μήκος της αξονικής απόστασης ξ/d_0 της Σύνθετης και της Gauss Κατανομής για το πεδίο (α) ταχυτήτων και (β) συγκεντρώσεων στην περίπτωση της Δισδιάστατης Φλέβας Χωρίς Άνωση.



Σχήμα 3.9 Εξέλιξη κατά μήκος της αξονικής απόστασης ξ/d_0 της Σύνθετης και της Gauss Κατανομής για το πεδίο (α) ταχυτήτων και (β) συγκεντρώσεων στην περίπτωση της Δισδιάστατης Φλέβας Πλήρους Άνωσης.

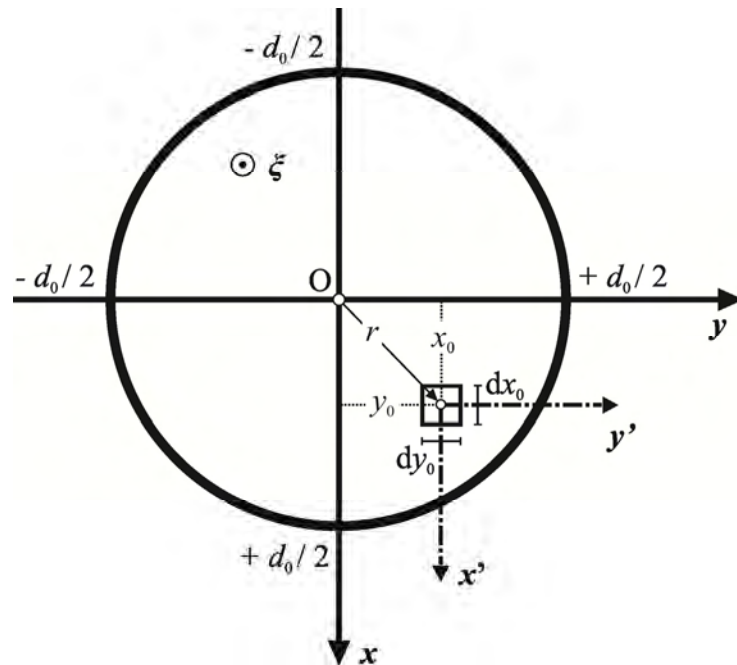
3.2.2 Τρισδιάστατη Ανωστική Φλέβα

Στην περίπτωση της τρισδιάστατης (κυκλικής) ανωστικής φλέβας η πηγή εξόδου έχει διάμετρο d_0 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.10. Θεωρείται ότι η συγκεκριμένη πηγή αποτελείται από άπειρο αριθμό στοιχειωδών σημειακών πηγών διαστάσεων $dx_0 \times dy_0$.

Έστω ότι μια τέτοια στοιχειώδης πηγή βρίσκεται σε απόσταση x_0 και y_0 , στις διευθύνσεις x - και y - αντίστοιχα, από το κέντρο της πηγής. Για κάθε τέτοια στοιχειώδη πηγή η εγκάρσια κατανομή των μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων είναι τύπου Gauss:

$$\frac{w}{w_m} = \exp \left[- \left(\frac{x'^2 + y'^2}{b_w^2} \right) \right] \quad (3.51)$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp \left[- \left(\frac{x'^2 + y'^2}{b_c^2} \right) \right] \quad (3.52)$$



Σχήμα 3.10 Σχηματικό διάγραμμα για το μοντέλο πυρήνα κυκλικής ανωστικής φλέβας.

3.2.2.1 Εγκάρσια Κατανομή Ταχυτήτων

Φλέβα δίχως άνωση (jet)

Στην περίπτωση της φλέβας δίχως άνωση (jet) ισχύει η διατήρηση της αρχικής ορμής. Συνεπώς, για τη φλέβα που εκρέει από τη σημειακή πηγή διαστάσεων $dx_0 \times dy_0$ θα ισχύουν οι εξισώσεις (3.22) και (3.23). Σε τυχαία θέση η ποσότητα της ορμής είναι:

$$m = \sum \Delta m = \lambda_M \frac{\pi}{2} b_w^2 w_m^2 \quad (3.53)$$

και στην αρχική θέση, η ορμή της φλέβας που εκρέει από τη στοιχειώδη σημειακή πηγή:

$$\Delta m_0 = (\Delta x_0 \times \Delta y_0) w_0^2 \quad (3.54)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.53) και (3.54) στην (3.23) και ολοκληρώνοντας μέχρι τα όρια της κυκλικής πηγής, προκύπτει η εξίσωση της εγκάρσιας κατανομής των μέσων ταχυτήτων στη διατομή της φλέβας:

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_M}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{\sqrt{2}b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{\sqrt{2}b_w} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2y}{\sqrt{2}b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2y}{\sqrt{2}b_w} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.55)$$

Για $x = 0$ και $y = 0$, η εξίσωση (3.55) δίνει την τιμή της μέσης αξονικής ταχύτητας ($w = w_m$):

$$\frac{w_m}{w_0} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_M}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{\sqrt{2}b_w} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.56)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3.55) και (3.56) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας για κάθε απόσταση ξ :

$$\frac{w}{w_m} = \frac{\left[\operatorname{erf}\left(\frac{d_0 - 2x}{\sqrt{2}b_w}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d_0 + 2x}{\sqrt{2}b_w}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{d_0 - 2y}{\sqrt{2}b_w}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d_0 + 2y}{\sqrt{2}b_w}\right) \right]^{\frac{1}{2}}}{2 \operatorname{erf}\left(\frac{d_0}{\sqrt{2}b_w}\right)} \quad (3.57)$$

Φλέβα πλήρους άνωσης (plume)

Στην περίπτωση της φλέβας πλήρους άνωσης (plume) ισχύει ότι η κλίση της κινητικής ενέργειας ($d\varepsilon/d\xi$) παραμένει σταθερή. Συνεπώς, όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας, θα ισχύουν εξισώσεις (3.29) έως και (3.33). Σε τυχαία θέση η ποσότητα της ενέργειας είναι:

$$\varepsilon = \sum \Delta\varepsilon = \frac{\pi}{6} b_w^2 w_m^3 \quad (3.58)$$

και στην αρχική θέση, για τη φλέβα που εκρέει από τη σημειακή πηγή θα ισχύει:

$$\Delta\varepsilon_0 = \frac{1}{2} (\Delta x_0 \times \Delta y_0) w_0^3 \quad (3.59)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.58) και (3.59) στην (3.35) και ολοκληρώνοντας μέχρι τα όρια της κυκλικής πηγής, προκύπτει η εξίσωση της εγκάρσιας κατανομής των μέσων ταχυτήτων στη διατομή της φλέβας:

$$\frac{w}{w_0} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2x}{b_w}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2x}{b_w}\right) \right]^{\frac{1}{3}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2y}{b_w}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2y}{b_w}\right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.60)$$

Για $x = 0$ και $y = 0$, η εξίσωση (3.60) δίνει την τιμή της μέσης αξονικής ταχύτητας ($w = w_m$):

$$\frac{w}{w_0} = \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0}{b_w}\right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (3.61)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3.60) και (3.61) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας για κάθε απόσταση ξ :

$$\frac{w}{w_m} = \left\{ \frac{\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2x}{b_w}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2x}{b_w}\right) \right] \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2y}{b_w}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2y}{b_w}\right) \right]}{\left[2\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0}{b_w}\right) \right]^2} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (3.62)$$

3.2.2.2 Εγκάρσια Κατανομή Συγκεντρώσεων

Για κάθε κυκλική φλέβα, είτε είναι πλήρους άνωσης ή όχι, η εισροή άνωσης διατηρείται. Συνεπώς για την ανωστική φλέβα η οποία εκρέει από τη σημειακή, διαστάσεων $dx_0 \times dy_0$, θα ισχύουν οι εξισώσεις (3.41) και (3.42). Σε τυχαία θέση η ποσότητα της άνωσης είναι:

$$\frac{\beta}{g'_0} = \sum \Delta \left(\frac{\beta}{g'_0} \right) = \lambda_B \pi \frac{b_w^2 b_c^2}{b_w^2 + b_c^2} w_m c_m \quad (3.63)$$

και στην αρχική θέση:

$$\Delta \frac{\beta_0}{g'_0} = (\Delta x_0 \times \Delta y_0) w_0 c_0 \quad (3.64)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.63) και (3.64) στην (3.42) και ολοκληρώνοντας μέχρι τα όρια της κυκλικής πηγής, προκύπτει η εξίσωση της εγκάρσιας κατανομής του γινομένου των μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων στη διατομή της φλέβας:

$$\frac{w}{w_0} \frac{c}{c_0} = \frac{1}{4\lambda_B} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{d_0 - 2x}{2K_4\xi}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d_0 + 2x}{2K_4\xi}\right) \right] \left[\operatorname{erf}\left(\frac{d_0 - 2y}{2K_4\xi}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{d_0 + 2y}{2K_4\xi}\right) \right] \quad (3.65)$$

Για $x = 0$ και $y = 0$, η εξίσωση (3.65) δίνει την τιμή του γινομένου μέσων αξονικών ταχυτήτων-συγκεντρώσεων ($wc = w_m c_m$):

$$\frac{w}{w_0} \frac{c}{c_0} = \frac{1}{\lambda_B} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{2K_4 \xi} \right) \right]^2 \quad (3.66)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3.65) και (3.66) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή του γινομένου ταχύτητας-συγκέντρωσης για κάθε ξ :

$$\frac{w}{w_m} \frac{c}{c_m} = \frac{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{2K_4 \xi} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{2K_4 \xi} \right) \right] \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2y}{2K_4 \xi} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2y}{2K_4 \xi} \right) \right]}{\left[2 \operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{2K_4 \xi} \right) \right]^2} \quad (3.67)$$

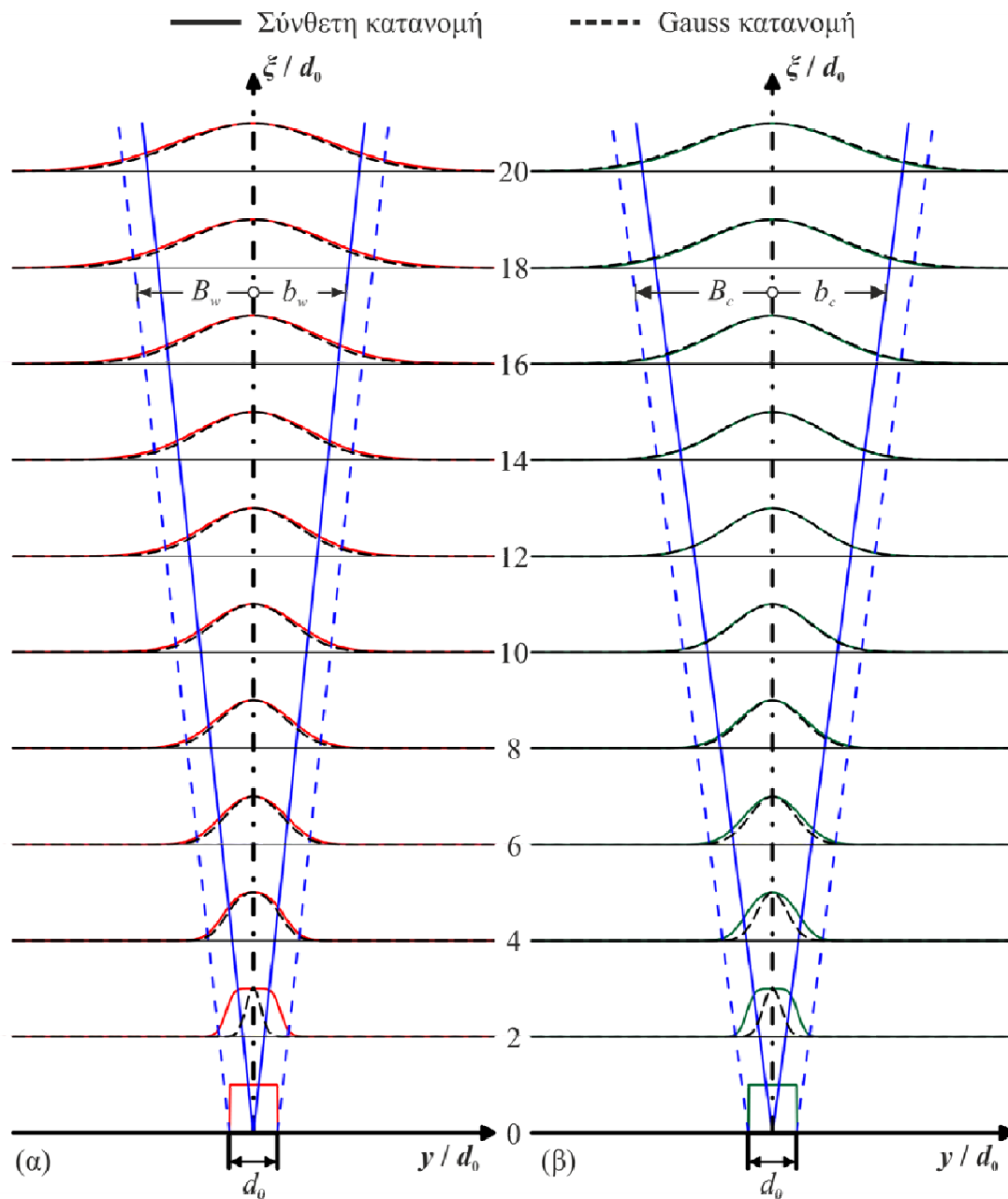
Συνεπώς, από τις εξισώσεις (3.57) και (3.67) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή των μέσων τιμών συγκεντρώσεων για την περίπτωση της κυκλικής φλέβας δίχως άνωση:

$$\frac{c}{c_m} = \frac{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{2K_4 \xi} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{2K_4 \xi} \right) \right] \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2y}{2K_4 \xi} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2y}{2K_4 \xi} \right) \right] \operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{\sqrt{2} b_w} \right)}{2 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{\sqrt{2} b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{\sqrt{2} b_w} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2y}{\sqrt{2} b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2y}{\sqrt{2} b_w} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{2K_4 \xi} \right) \right]^2} \quad (3.68)$$

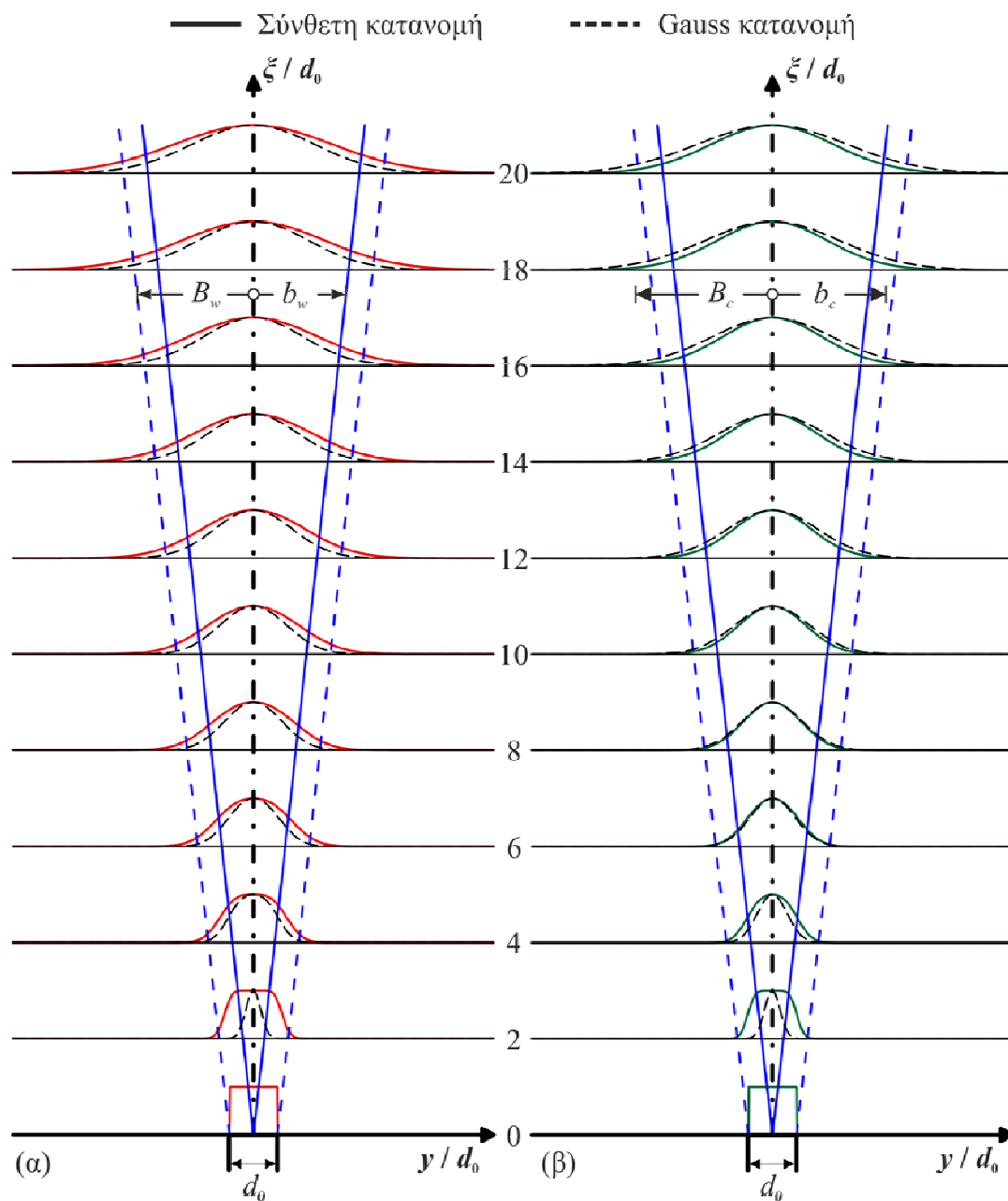
Συνεπώς, από τις εξισώσεις (3.62) και (3.67) προκύπτει η εγκάρσια κατανομή των μέσων τιμών συγκεντρώσεων για την περίπτωση της κυκλικής φλέβας πλήρους άνωσης:

$$\frac{c}{c_m} = \frac{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2x}{2K_4 \xi} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2x}{2K_4 \xi} \right) \right] \left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0 - 2y}{2K_4 \xi} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{d_0 + 2y}{2K_4 \xi} \right) \right]}{\left\{ 4 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2x}{b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2x}{b_w} \right) \right] \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 - 2y}{b_w} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0 + 2y}{b_w} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{3}} \times \frac{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d_0}{b_w} \right) \right]^{\frac{2}{3}}}{\left[\operatorname{erf} \left(\frac{d_0}{2K_4 \xi} \right) \right]^2}} \quad (3.69)$$

Όπως στην παράγραφο 3.2.1.2 έτσι κι εδώ, στα διαγράμματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται η εγκάρσια κατανομή (α) της ταχύτητας και (β) της συγκέντρωσης για την περίπτωση της κυκλικής φλέβας χωρίς άνωση χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις των σύνθετων κατανομών (3.57) και (3.68), Σχήμα 3.11, και τις εξισώσεις (3.62) και (3.69), για την περίπτωση της κυκλικής φλέβας πλήρους άνωσης, Σχήμα 3.12, για διάφορες τιμές του λόγου ξ/d_0 . Στα ίδια διαγράμματα παρουσιάζονται και οι αντίστοιχες εγκάρσιες κατανομές, όταν θεωρηθεί ότι ακολουθούν την Gauss κατανομή. Παρατηρείται στα διαγράμματα των Σχημάτων 3.11 και 3.12 η εξέλιξη της σύνθετης εγκάρσιας κατανομής (ταχυτήτων και συγκεντρώσεων) από την έξοδο της κυκλικής πηγής μέχρι απόστασης $20d_0$ (στο επίπεδο $y/d_0 = 0$) συγκρινόμενη με την αντίστοιχη κατανομή Gauss. Η πραγματική κατανομή στην έξοδο της φλέβας είναι ομοιόμορφη (top-hat) και καθώς απομακρύνεται από την έξοδο και εντός της ZFE εξελίσσεται σταδιακά αποκτώντας τη μορφή τύπου Gauss. Επίσης, παρουσιάζονται τα όρια b_w ή b_c και B_w ή B_c . Παρατηρώντας τα Σχήματα 3.11 και 3.12 για τις δισδιάστατες φλέβες φαίνεται ότι η εξέλιξη της εγκάρσιας σύνθετης κατανομής σε κατανομή Gauss, γίνεται ταχύτερα στην περίπτωση της φλέβας χωρίς άνωση σε σχέση με τη φλέβα πλήρους άνωσης. Διαπιστώνεται ότι το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση που οι φλέβες εκρέουν από κυκλικό ακροφύσιο (Σχήματα 3.11 και 3.12).



Σχήμα 3.11 Εξέλιξη κατά μήκος της αξονικής απόστασης ξ/d_0 της Σύνθετης και της Gauss Κατανομής για το πεδίο (α) ταχυτήτων και (β) συγκεντρώσεων στην περίπτωση της Κυκλική Φλέβας Χωρίς Άνωση στο επίπεδο $y/d_0 = 0$.

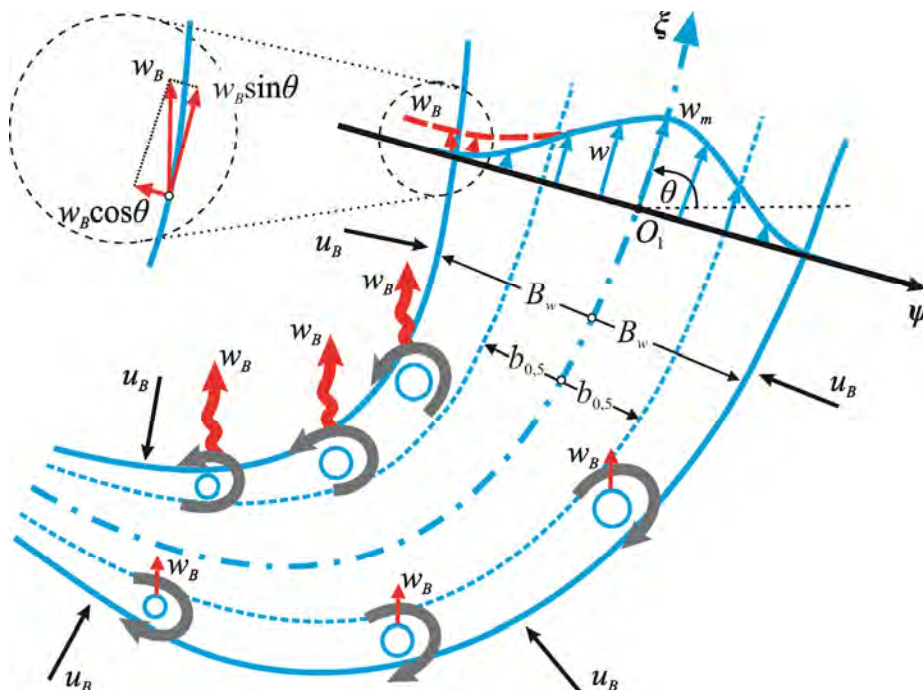


Σχήμα 3.12 Εξέλιξη κατά μήκος της αξονικής απόστασης ξ/d_0 της Σύνθετης και της Gauss Κατανομής για το πεδίο (α) ταχυτήτων και (β) συγκεντρώσεων στην περίπτωση της Κυκλική Φλέβας Πλήρους Άνωσης στο επίπεδο $y/d_0 = 0$.

3.3 ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗΣ ΜΑΖΩΝ

Πειραματικά αποτελέσματα σε τυρβώδεις φλέβες αρνητικής άνωσης, οι οποίες εκρέουν υπό θετική γωνία κλίσης θ_0 εντός ακίνητου αποδέκτη, φανερώνουν ότι συμπαγή κομμάτια αποκολλώνται από την κύρια τροχιά της και πέφτουν προς τα κάτω. Ένδειξη αυτού του φαινομένου αποτελεί η ασυμμετρία, ως προς τον άξονα της φλέβας, που παρατηρείται στη μέτρηση της εγκάρσιας κατανομής των συγκεντρώσεων του ιχνηθέτη, όπως καταγράφεται στις αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις των Lane-Serff *et al.* (1993), Shao & Law (2010) και Lai & Lee (2012). Στις πειραματικές μετρήσεις σε οριζόντια κεκλιμένη ανωστική φλέβα αέρα των εγκαρσίων κατανομών θερμοκρασιών από τους Oosthuizen & Lemieux (1987) παρατηρείται παρόμοια ασυμμετρία. Η κατανομή τύπου Gauss ακολουθείται στην εξωτερική πλευρά της φλέβας αλλά δε συμβαίνει το ίδιο στην εσωτερική. Το φαινόμενο αυτό έχει παρατηρηθεί σε φωτογραφίες και έχει αναφερθεί τα τελευταία χρόνια από τους Lane-Serff *et al.* (1993), Cippolina *et al.* (2005), Kikkert *et al.* (2007) Papakonstantis *et al.* (2009) και Lai & Lee (2012). Οι Lane-Serff *et al.* (1993) αποδίδουν αυτή την ασυμμετρία στα αντίθετα αποτελέσματα που έχει η δύναμη της άνωσης στις δύο πλευρές της ανωστικής φλέβας. Στην εξωτερική πλευρά (κοίλη περιοχή), η δύναμη της άνωσης δημιουργεί μια ευσταθή στρωματοποίηση, η οποία τείνει να εμποδίσει την συμπαράσυρση περιβάλλοντος ρευστού. Στην εσωτερική παρειά της φλέβας, η δύναμη της άνωσης παράγει ένα μεταδοτικό ασταθές μηχανισμό με αποτέλεσμα να πραγματοποιείται μείξη μεταξύ της ανωστικής φλέβας και του περιβάλλοντος ρευστού. Οι Ferrari & Querzoli (2010) δικαιολογούν αυτό το φαινόμενο βασιζόμενοι στο μηχανισμό της τύρβης όπως παρουσιάζεται σχηματικά στο Σχήμα 3.13.

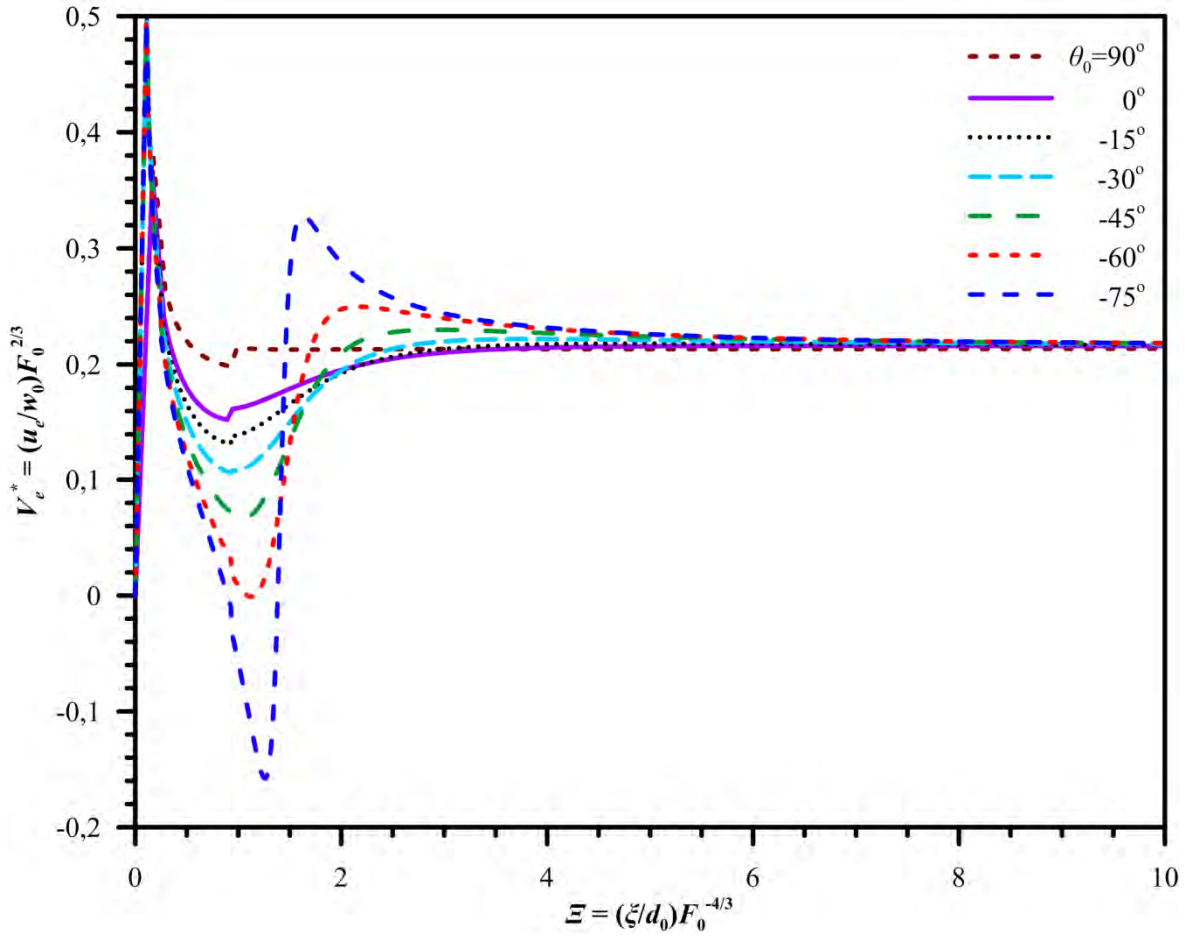
Η αποκόλληση των μαζών από το κύριο σώμα της ανωστικής φλέβας είναι αποτέλεσμα της διαλείπουσας λειτουργίας, που συμβαίνει σε μια ζώνη που βρίσκεται περιμετρικά της φλέβας. Σε μια εγκάρσια διατομή της φλέβας, η περιοχή που εκτείνεται από τη θέση που βρίσκεται το 50% του ονομαστικού πλάτους της φλέβας $b_{0,5}$ έως το πραγματικό όριο της B_w χαρακτηρίζεται από διαλείψεις του πεδίου των ταχυτήτων. Αυτό σημαίνει ότι για ένα εύλογο χρονικό διάστημα, το οποίο προσεγγίζει το 50% του συνολικού χρόνου, η στιγμιαία ταχύτητα μηδενίζεται, με αποτέλεσμα η διαδικασία της μείξης να είναι ημιτελής και έτσι να προκαλείται μια τοπική ασταθής στρωματοποίηση. Αυτό το συμβάν αποδίδεται σε μεγάλους στροβίλους, οι οποίοι αναγκάζουν κάποιες μάζες της ανωστικής φλέβας να στροβιλίζονται σταματώντας στις περιοχές που η συμπαράσυρ-



Σχήμα 3.13 Μηχανισμός τύρβης για την εξήγηση του φαινομένου της αποκόλλησης μαζών από μια κεκλιμένη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη.

ση περιβάλλοντος ρευστού είναι ασθενής, μηδενική ή ακόμη και αρνητική σε ορισμένες περιπτώσεις. Επίσης, οι Plourde *et al.* (2008) αποδεικνύουν, χρησιμοποιώντας την τεχνική της απευθείας αριθμητικής προσομοίωσης (Direct Numerical Simulation, DNS) για μια ραγδαίως διευρυνόμενη φλέβα πλήρους άνωσης, ότι η συμπαράσυρση περιβάλλοντος ρευστού εντός της φλέβας υποβάλλεται σε μεγάλες χρονικές και χωρικές διακυμάνσεις. Εντόπισαν και εξήγησαν την ανάπτυξη ενός περίπλοκου παλμικού μηχανισμού, ο οποίος είναι πιθανό να είναι παρών και στην περίπτωση της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Ο μηχανισμός αυτός ενεργοποιεί την απευθείας σύνδεση των μεγάλης κλίμακας στροβίλων και της στιγμιαίας ταχύτητας συμπαράσυρσης.

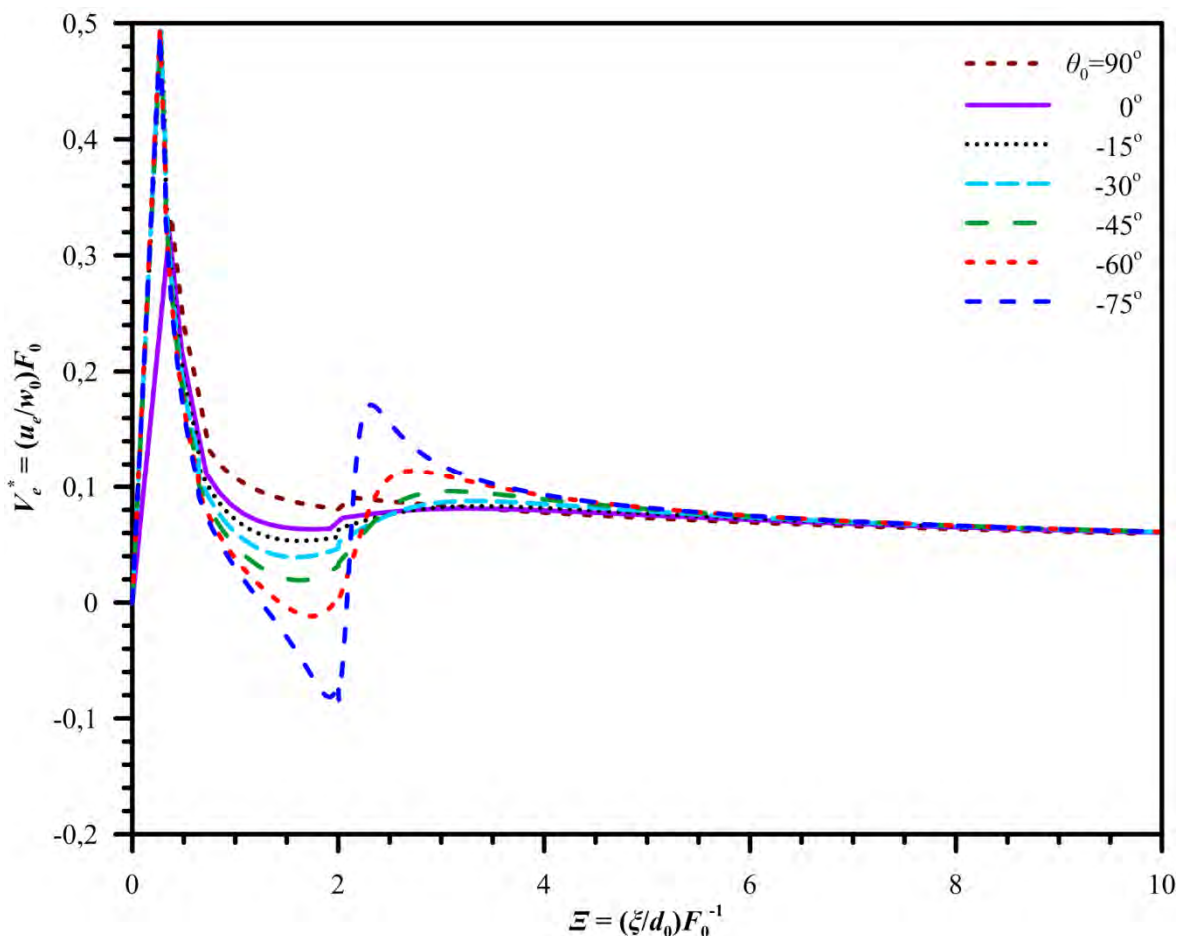
Στα διαγράμματα των Σχημάτων 3.14 και 3.15 παρουσιάζεται η μεταβολή της εγκάρσιας ταχύτητας συμπαράσυρσης υπολογισμένη στο πραγματικό όριο B_w του πεδίου των ταχυτήτων για διαφορετικές αρχικές γωνίες εκτόξευσης συναρτήσει της αδιαστατοποιημένης αξονικής απόστασης Ξ . Το διάγραμμα του Σχήματος 3.14 αναφέρεται σε δισδιάστατες ανωστικές φλέβες, ενώ το διάγραμμα του Σχήματος 3.15 σε κυκλικές. Οι συγκεκριμένοι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν χωρίς να ληφθεί υπόψη η αποκόλληση των μαζών από το σώμα της φλέβας ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται παρακάτω και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.70) για την περίπτωση της δισδιάστατης



Σχήμα 3.14 Μεταβολή της αδιαστατοποιημένης εγκάρσιας ταχύτητας συμπαράσυρσης στο όριο του πεδίου της τυρβώδους ανωστικής φλέβας συναρτήσει της αδιάστατης αξονικής απόστασης Ξ για διάφορες τιμές αρχικής γωνίας εκτόξευσης θ_0 δισδιάστατης ανωστικής φλέβας, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η διαφυγή των αποκολλημένων μαζών.

και την εξίσωση (3.71) για την περίπτωση της κυκλικής κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Σημειώνεται ότι για $\xi = 0$ οι αρχικές συνθήκες για τους υπολογισμούς είναι $w = w_0$, $u_e = 0$ και $c = c_0 = 1$.

Η πραγματική εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης u_B υπολογίζεται ως $u_B = u_e/h$, όπου u_e είναι η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης, υπολογισμένη σε απόσταση b_w από τον άξονα της φλέβας και h είναι ο μετρικός συντελεστής του συστήματος συντεταγμένων τάξης $O(1)$. Έτσι, η συμπεριφορά της ταχύτητας u_B είναι αντίστοιχη της ταχύτητας u_e , η οποία αντιστοιχεί στην εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης στο όριο της κατακόρυφης ανωστικής φλέβας, όπως προτείνεται από τον Yannopoulos (2006) και υπολογίζεται από τις γνωστές κατανομές ταχυτήτων στις περιοχές ZFE και ZEF. Στα διαγράμματα των Σχημάτων 3.14 και 3.15 παρουσιάζεται η αδιαστατοποιημένη εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης οριζόμενη ως $V_e^* = (u_e / w_0) F_0^{-2/3}$, για τις δισδιάστατες ανωστικές φλέ-



Σχήμα 3.15 Μεταβολή της αδιαστατοποιημένης εγκάρσιας ταχύτητας συμπαράσυρσης στο όριο του πεδίου της τυρβώδους ανωστικής φλέβας συναρτήσει της αδιάστατης αξονικής απόστασης Ξ για διάφορες τιμές αρχικής γωνίας εκτόξευσης θ_0 κυκλικής ανωστικής φλέβας, χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η διαφυγή των αποκολλημένων μαζών.

βες και $V_e^* = (u_e / w_0) F_0^{-1}$ για τις κυκλικές.

Και για τα δύο είδη των φλεβών, είναι φανερό ότι η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης, αρχικώς αυξάνει ταχύτατα στο επιταχυνόμενο τμήμα της ροής και έπειτα μειώνεται, οδεύοντας σε μια ελάχιστη τιμή, μετά την περιοχή του πυρήνα. Η ελάχιστη τιμή εξαρτάται από την αρχική γωνία εκτόξευσης (θ_0) και ακολούθως αυξάνεται, αποκτώντας μια σταθερή τιμή που αντιστοιχεί σε φλέβες πλήρους άνωσης. Αυτό το φαινόμενο είναι περισσότερο έντονο στις δισδιάστατες φλέβες με αρνητική αρχική γωνία εκτόξευσης και γίνεται αρκετά εμφανές ακόμα και στην περίπτωση της οριζόντιας εκτοξευόμενης φλέβας ($\theta_0 = 0^\circ$). Στην περίπτωση των κυκλικών φλεβών το αντίστοιχο φαινόμενο περιορίζεται μόνο στις αρνητικές γωνίες και συγκεκριμένα όταν $\theta_0 \leq -15^\circ$. Στα διαγράμματα των Σχημάτων 3.14 και 3.15 φαίνεται ότι η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης προσεγγίζει την τιμή μηδέν, όταν η αρχική γωνία εκτόξευσης είναι $\theta_0 \approx -60^\circ$ για τις δισδιάστατες και

τις κυκλικές ανωστικές φλέβες, και αποκτά αρνητικές τιμές για γωνίες $\theta_0 < -60^\circ$. Επίσης, παρατηρείται ότι η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης στις κυκλικές φλέβες είναι ασθενέστερη της αντίστοιχης στη δισδιάστατη περίπτωση. Επιπροσθέτως, για ένα συγκεκριμένο εύρος της αξονικής απόστασης Ξ , είναι εμφανής η παρουσία αρνητικής συμπαράσυρσης.

Το γεγονός της αρνητικής συμπαράσυρσης μπορεί να εξηγηθεί μαθηματικά. Η μέση αξονική ταχύτητα w_m της ανωστικής φλέβας είναι συνάρτηση της γωνίας θ και αξονικής απόστασης ξ . Η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης hu της ανωστικής φλέβας είναι συνάρτηση της γωνίας θ , της απόστασης r αν πρόκειται για κυκλική ή ψ αν πρόκειται για δισδιάστατη φλέβα και της αξονικής απόστασης ξ . Η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης u_e είναι ίση με την ταχύτητα $-hu$ στη θέση $r = B_w$ αν πρόκειται για κυκλική φλέβα και της απόστασης $\mp hu$ στη θέση $\psi = \pm B_w$ αν πρόκειται για δισδιάστατη φλέβα. Επομένως, η ταχύτητα συμπαράσυρσης, και στις δύο περιπτώσεις ανωστικών φλεβών, εξαρτάται από τη γωνία θ και την αξονική απόσταση ξ . Άρα, η εξίσωση της εγκάρσιας συμπαράσυρσης (Yannopoulos 2006 και Yannopoulos & Bloutsos 2012) για $n = n_w = \sqrt{2}$, όπου $n = \psi/b_w$ για την περίπτωση της δισδιάστατης και $n = r/b_w$ για την περίπτωση της κυκλικής κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$2D: \quad u_e = K_w \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n_w) - n_w \exp(-n_w^2) \right] w_m + K_w \xi \frac{dw_m}{d\xi} \quad (3.70)$$

$$3D: \quad u_e = K_w \left\{ \left[1 - \exp(-n_w^2) \right] n_w^{-1} - n_w \exp(-n_w^2) \right\} w_m + K_w \xi \frac{dw_m}{d\xi} \quad (3.71)$$

Ο όρος $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n_w) - n_w \exp(-n_w^2)$ της εξίσωσης (3.70) και ο όρος

$\left[1 - \exp(-n_w^2) \right] n_w^{-1} - n_w \exp(-n_w^2)$ της εξίσωσης (3.71) είναι σταθεροί. Γίνεται εμφανές, και

στις δύο περιπτώσεις ανωστικών φλεβών, ότι η ταχύτητα u_e αποτελείται από δύο όρους, έναν γραμμικό και ένα μη γραμμικό όρο ως προς τη μέση ταχύτητα w_m . Για θετικές τιμές της ταχύτητας w_m , ο μη γραμμικός όρος μπορεί να είναι αρνητικός ή θετικός, ανάλογα με το είδος ροής, αν δηλαδή η κίνηση είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη. Επομένως, η εγκάρσια ταχύτητα u_e δύναται να μεταβάλλει το πρόσημό της υπό ορισμένες συνθήκες,

όταν η επιβραδυνόμενη κίνηση αλλάζει και τείνει να γίνει επιταχυνόμενη. Συνεπώς, για τις κεκλιμένες ανωστικές φλέβες, που η πραγματική ταχύτητα συμπαράσυρσης είναι $u_B = u_e/h$, η ταχύτητα u_B συμπεριφέρεται ακριβώς όπως και η u_e αλλάζοντας πρόσημο στο ίδιο σημείο. Το γεγονός αυτό παρατηρείται ξεκάθαρα στην περίπτωση όπου $\theta_0 = -75^\circ$.

Γενικώς, η περιοχή, στην οποία παρουσιάζεται ασθενής συμπαράσυρση ρευστού από το εξωτερικό περιβάλλον, συναντάται στην κοίλη όψη της ανωστικής φλέβας η οποία εκτοξεύεται υπό αρνητική γωνία. Έτσι, κατά τη διάρκεια των περιόδων των διαλείψεων οι οποίες συμβαίνουν σε αυτή την περιοχή, οι μάζες του υγρού εκείνης της περιοχής δεν δέχονται καμία άλλη δύναμη εκτός της άνωσης, η οποία επιβάλλει μια κατακόρυφη προς τα πάνω κίνηση. Κατά τη διάρκεια αυτού του φαινομένου μετακινούνται μάζες εκτός του πεδίου της ανωστικής φλέβας, όταν η κλίση του κοίλου ορίου είναι μικρότερη από 90° . Ταυτόχρονα, η κίνηση αυτών των μαζών, στο κυρτό όριο της φλέβας, προκαλεί ελάττωση της πίεσης και αύξηση της συμπαράσυρσης. Έτσι, η κάθετη στον άξονα της ανωστικής φλέβας, συνιστώσα της ταχύτητας των αποκολλημένων μαζών μεταβάλλει τις ταχύτητες συμπαράσυρσης στα δύο όρια της ανωστικής φλέβας με αποτέλεσμα στο μεν κοίλο όριο, η ταχύτητα συμπαράσυρσης να αυξάνεται ενώ στο κυρτό να μειώνεται.

Η αποκόλληση των μαζών από το κύριο σώμα της ανωστικής φλέβας προκαλεί ένα δευτερογενές πεδίο. Αυτό το πεδίο επιδρά στο κύριο πεδίο ροής. Η κατακόρυφη ταχύτητα των μαζών που αποκολλώνται, υπερτίθεται της εγκάρσιας κατανομής των ταχυτήτων στην περιοχή του κοίλου ορίου της φλέβας (Σχήμα 3.13). Έτσι, η εγκάρσια κατανομή των ταχυτήτων αλλάζει, χάνοντας τη συμμετρία της ως προς τον άξονα της φλέβας. Προστίθεται μία «ουρά» στην κοίλη περιοχή και μετατοπίζεται το μέγιστο προς την πλευρά του κυρτού ορίου, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Το δευτερογενές πεδίο που σχηματίζεται, προκαλεί αλλαγή στην εγκάρσια κατανομή των συγκεντρώσεων του ιχνηθέτη, αντίστοιχη της εγκάρσιας κατανομής των ταχυτήτων. Η αλλαγή των κατανομών των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων θεωρείται αμελητέα μεν στον υπολογισμό των εισροών, αλλά είναι σημαντική στον υπολογισμό της ταχύτητας συμπαράσυρσης, συνεισφέροντας σημαντικά στον ακριβέστερο υπολογισμό της τροχιάς και της αξονικής αραίωσης στις κεκλιμένες ανωστικές φλέβες. Εδώ, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι μάζες που αποκολλώνται στην περιοχή του κυρτού ορίου της φλέβας απορροφώνται αμέσως από την κύρια ροή της φλέβας, πριν προλάβουν να αποκτήσουν επαρκή κατακόρυφη ταχύτητα. Έτσι, δεν επηρεάζουν την κατανομή των εγκάρσιων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων σε εκείνη την περιοχή, η οποία διατηρεί τη μορφή τύπου Gauss.

Η ταχύτητα w_B των αποκολλώμενων μαζών είναι κατακόρυφη και έχει διεύθυνση προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.13. Για τον υπολογισμό της γίνεται η θεώρηση ότι οι αποκολλώμενες μάζες σχηματίζουν κατακόρυφες ροές αντίστοιχες των διακοπτόμενων πλουμίων. Αυτά τα πλούμια θεωρούνται δισδιάστατα όταν προέρχονται από κεκλιμένη ανωστική φλέβα σχισμής και τρισδιάστατα όταν προέρχονται από κεκλιμένη κυκλική ανωστική φλέβα. Η έναρξη της κίνησης των πλουμίων γίνεται από την ηρεμία, κινούμενα ανοδικά μόνο εξαιτίας της επίδρασης της δύναμης της άνωσης. Για αυτού του είδους τα πλούμια, στη θέση του κοίλου ορίου της ανωστικής φλέβας, ο τοπικός αριθμός Richardson δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση (Yannopoulos 2006):

$$R_p = p \frac{\beta_B z_B}{\varepsilon_{Bp}} \quad (3.72)$$

όπου $p = 0,144$. Ο οριακός αριθμός Richardson, R_p , για μεν τα δισδιάστατα πλούμια λαμβάνει την τιμή 0,2907 για δε τα κυκλικά, την τιμή 0,3521. Η κατακόρυφη απόσταση z_B υπολογίζεται από το σημείο που ένα τεμάχιο μάζας της φλέβας αποκολλάται (από το κύριο σώμα αυτής) αρχίζοντας την ανοδική του πορεία έως ότου φτάσει στο κοίλο όριο της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας (Σχήμα 3.16) και περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

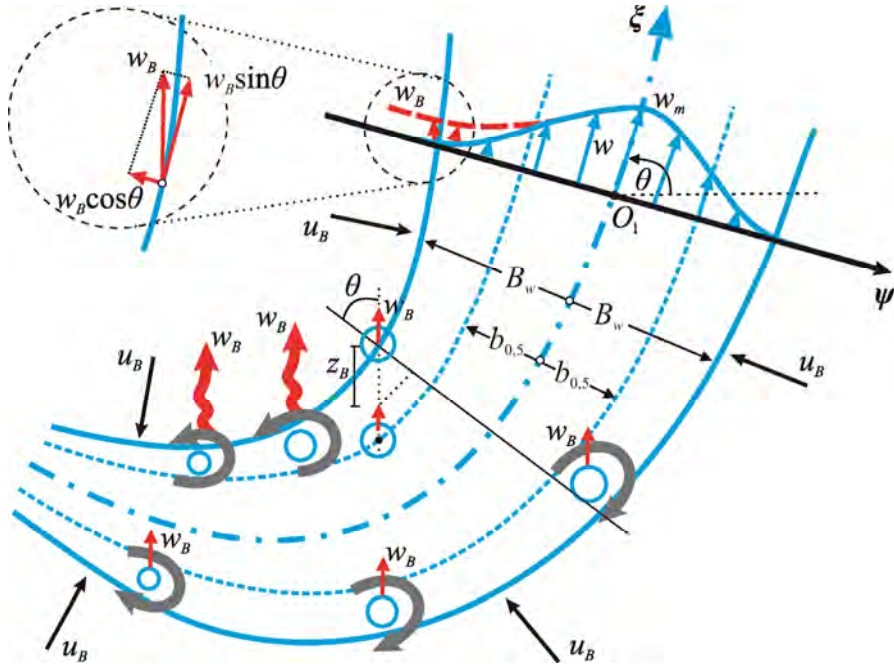
$$z_B = \frac{B_w - b_{0,5}}{\cos \theta} = (n_w - \sqrt{\ln 2}) \frac{b_w}{\cos \theta} \quad (3.73)$$

όπου

$$b_{0,5} = \sqrt{\ln 2} b_w \quad (3.74)$$

$$n_w = \frac{B_w}{b_w} \quad (3.75)$$

Η προβολή αυτής της απόστασης στην αντίστοιχη εγκάρσια διατομή της φλέβας θα πρέπει να συμπίπτει με το πλάτος ($B_w - b_{0,5}$) όπου συμβαίνουν οι διαλείψεις εξαιτίας της τύρβης. Η τιμή του n_w στην παρούσα Διατριβή προέρχεται από τα πειραματικά αποτελέσματα. Οι Lee & Chu (2003) όπως και ο Jirka (2004) βασίζόμενοι στις πειραματικές μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν από τον Chu (1996) για την αξονική τα-



Σχήμα 3.16 Διανυθείσα απόσταση αποκολλημένης μάζας.

χύτητα και συγκέντρωση καθώς επίσης και τις διαλείψεις κατέληξαν ότι το πλάτος της ανωστικής φλέβας, το οποίο ορίζει τη ζώνη όπου υπάρχει μεταφορά της τύρβης, είναι:

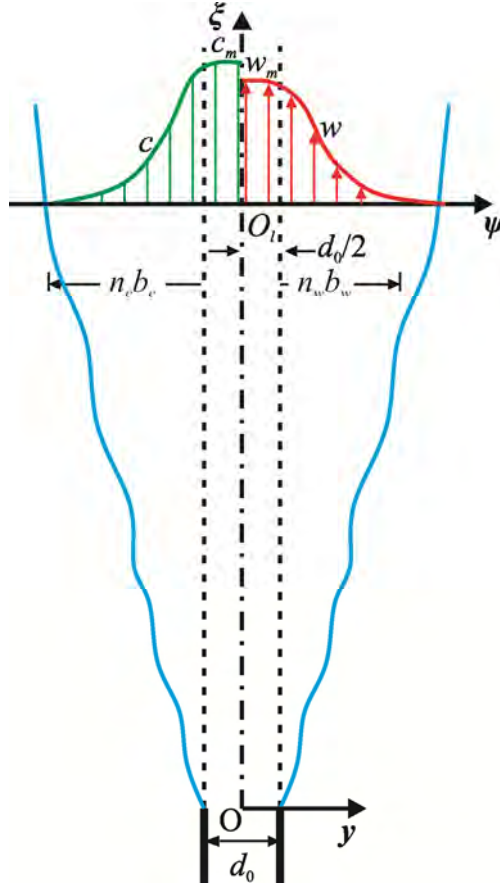
$$B_w = \sqrt{2} b_w \quad (3.76)$$

Από τη σχέση (3.76) συνεπάγεται ότι $n_w = \sqrt{2}$. Αυτό το πλάτος αποτελεί και το όριο ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των εισροών. Επειδή στην πραγματικότητα οι ανωστικές φλέβες προέρχονται από πηγές με πεπερασμένες διαστάσεις, το πλάτος της δισδιάστατης ή της κυκλικής φλέβας θα πρέπει να λαμβάνεται αυξημένο κατά $d_0/2$. Έτσι, το εξωτερικό όριο για το πεδίο των ταχυτήτων (Σχήμα 3.17) προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$B_w = \frac{d_0}{2} + n_w b_w \quad (3.77)$$

και για το πεδίο των συγκεντρώσεων του ιχνηθέτη (Σχήμα 3.17) από τη σχέση:

$$B_c = \frac{d_0}{2} + n_c b_c \quad (3.78)$$



Σχήμα 3.17 Σχηματικό διάγραμμα των ορίων της εγκάρσιας επιφάνειας τυρβώδους ανωστικής φλέβας.

Η επιρροή του όρου $d_0/2$ στον υπολογισμό των ορίων B_w και B_c είναι σημαντική για μικρές αποστάσεις της αξονικής απόστασης ξ , ενώ η επιρροή αυτή γίνεται πρακτικά ασήμαντη για μεγάλες τιμές της καθώς ο όρος $d_0/2$ είναι αρκετά μικρότερος συγκριτικά με τους όρους $n_w b_w$ και $n_c b_c$. Ο λόγος $n_c = B_c/b_c$ λαμβάνει την ίδια τιμή για δισδιάστατες και κυκλικές φλέβες. Από τις πειραματικές μετρήσεις σε εγκάρσιες κατανομές συγκεντρώσεων από τους Ramaprian & Chandrasekhara (1983) και Shao & Law (2010) προκύπτει η τιμή του λόγου $n_c \approx 1,9$.

Οι εισροές β_B και ε_{Bp} των κατακόρυφων πλουμίων υπολογίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις που περιγράφονται από τον Yannopoulos (2006). Για την κατακόρυφη δισδιάστατη ανωστική φλέβα είναι:

$$\beta_B = \lambda_{Bp} \frac{g'_0}{Y_p} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda_p b_p w_B c_B \quad (3.79)$$

$$\varepsilon_{Bp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{3}} b_p w_B^3 \quad (3.80)$$

$$Y_p = \left(\frac{1 + \lambda_p^2}{2\lambda_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.81)$$

όπου $K_w = 0,132$, $\lambda_{Bp} = 1,18$, $\lambda_p = 1,21$ και $Y_p = 1,009$.

Για την κατακόρυφη κυκλική ανωστική φλέβα είναι:

$$\beta_B = \lambda_{Bp} \frac{g'_0}{Y_p} \frac{\pi}{2} \lambda_p b_p^2 w_B c_B \quad (3.82)$$

$$\varepsilon_{Bp} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} b_p^2 w_B^3 \quad (3.83)$$

$$Y_p = \frac{1 + \lambda_p^2}{2\lambda_p} \quad (3.84)$$

όπου $K_w = 0,110$, $\lambda_{Bp} = 1,15$, $\lambda_p = 1,04$ και $Y_p = 1,001$.

Και για τα δύο είδη φλεβών ισχύει $b_p = K_w z_B$. Η συγκέντρωση c_B της αποκολλώμενης μάζας από το κοίλο όριο της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας συνδέεται με την αξονική συγκέντρωση c_m , σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$c_B = A c_m \quad (3.85)$$

όπου ο συντελεστής A προσδιορίζεται από τα πειραματικά δεδομένα. Οι τιμές τις οποίες λαμβάνει ο συντελεστής αυτός παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4.

Ο υπολογισμός της ταχύτητας των αποκολλώμενων μαζών από το κοίλο όριο της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας υπολογίζεται για μεν την περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.73), (3.79) και (3.80) στην εξίσωση (3.72) οπότε προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$w_B^2 = \frac{2pg'_0\lambda_{Bp}}{R_p Y_p} \left(\frac{3\lambda_p}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{n_w - \sqrt{\ln 2}}{\cos \theta} \Lambda K_w \xi \quad (3.86)$$

Για δε την περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας, αντικαθίστανται οι εξισώσεις (3.73), (3.82) και (3.83) στην εξίσωση (3.72) οπότε προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

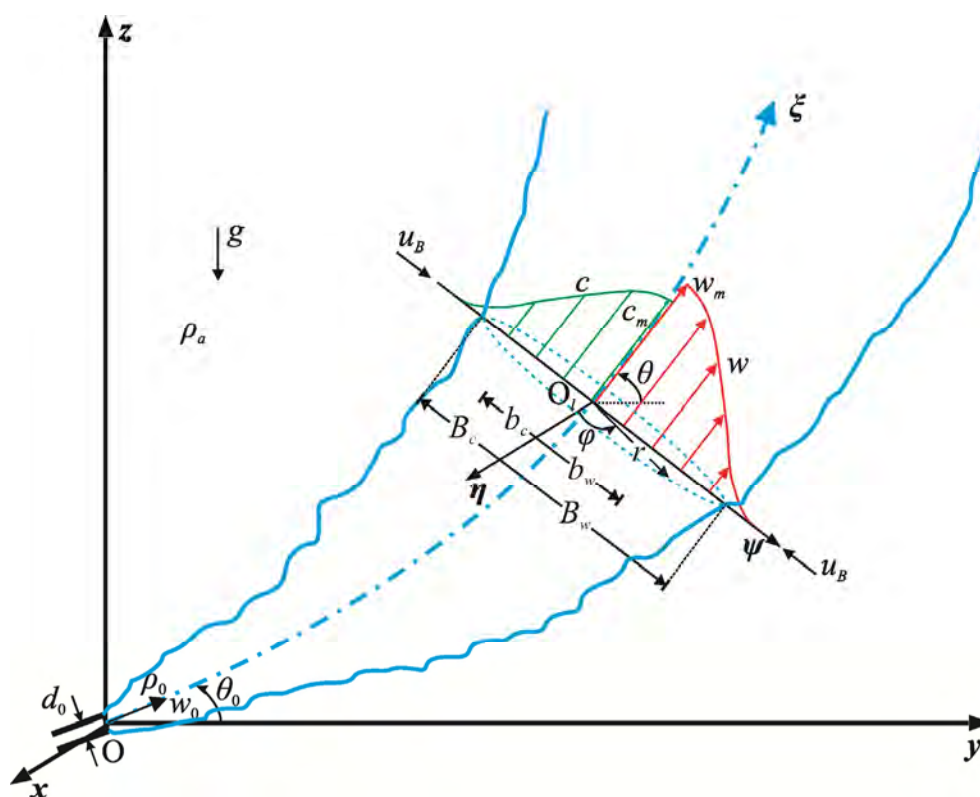
$$w_B^2 = \frac{3pg'_0\lambda_{Bp}\lambda_p}{R_p Y_p} \frac{n_w - \sqrt{\ln 2}}{\cos \theta} \Lambda K_w \xi \quad (3.87)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι η απόσταση z_B όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.16 και υπολογίζεται από την εξίσωση (3.73) είναι συνάρτηση της αξονικής απόστασης ξ και της γωνίας θ . Επίσης, η συγκέντρωση c_B συνδέεται γραμμικά με την αξονική συγκέντρωση c_m , χάριν απλότητας. Στην πραγματικότητα, όμως, οι μάζες που αποκολλώνται και εν συνεχεία αποδράττουν από το κοίλο όριο αντιστοιχούν σε μία θέση ξ η οποία προέρχεται από μια προηγούμενη θέση, όπου η αξονική συγκέντρωση είναι διαφορετική της c_m . Επομένως, η τοπική γραμμική σχέση που συνδέει τις συγκεντρώσεις c_B και c_m αποτελεί μια προσέγγιση και η τοπική μη γραμμικότητα επηρεάζει τη σταθερότητα της τιμής του συντελεστή Λ .

4. ΚΕΚΛΙΜΕΝΕΣ ΑΝΩΣΤΙΚΕΣ ΦΛΕΒΕΣ

4.1 ΠΕΔΙΟ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΑΝΩΣΤΙΚΗΣ ΦΛΕΒΑΣ ΣΕ ΗΡΕΜΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ

Θεωρείται μία κεκλιμένη δισδιάστατη τυρβώδης ανωστική φλέβα αρχικής πυκνότητας ρ_0 , η οποία εκρέει από σχισμή πλάτους d_0 στην περίπτωση δισδιάστατης ανωστικής φλέβας ή από κυκλικό ακροφύσιο διαμέτρου d_0 στην περίπτωση κυκλικής ανωστικής φλέβας εντός ακίνητου ρευστού αποδέκτη μεγάλων διαστάσεων και ομοιόμορφης πυκνότητας ρ_a . Στην έξοδο, το ρευστό της φλέβας έχει αρχική ταχύτητα w_0 και πυκνότητα ρ_0 , λίγο μικρότερη από την πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού ($\rho_a \geq \rho_0$). Το σχηματιζόμενο πεδίο ροής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1, περιγράφεται μαθηματικά χρησιμοποιώντας ένα σύστημα ορθογωνίων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων $O_l(\eta, \psi, \xi)$ στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας ή ένα καμπυλόγραμμο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων $O_l(\varphi, r, \xi)$ όταν πρόκειται για κυκλική ανωστική φλέβα, εντεταγμένο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x, y, z)$. Ο άξονας z εί-



Σχήμα 4.1 Σχηματικό διάγραμμα πεδίου ροής και διάχυσης δισδιάστατης/κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας σε ακίνητο αποδέκτη.

ναι κατακόρυφος, ο άξονας η είναι οριζόντιος και παράλληλος προς τον άξονα x (κάθετος στο επίπεδο του χάρτου) και ο άξονας ξ ακολουθεί την τροχιά της ανωστικής φλέβας. Τα συστήματα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφα.

Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζεται η μορφή των πεδίων ροής και μείξης που σχηματίζονται, τα συστήματα συντεταγμένων και μερικά από τα βασικά μεγέθη της μέσης ροής. Η φλέβα διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά υπό την επίδραση των δυνάμεων της ορμής και της άνωσης. Σε μια τυχαία εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας παρουσιάζονται οι εγκάρσιες κατανομές των μέσων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων καθώς και η γωνία θ , που σχηματίζει ο άξονας της φλέβας με το οριζόντιο επίπεδο. Επίσης, φαίνονται τα ονομαστικά πλάτη b_w και b_c καθώς επίσης και τα πραγματικά όρια B_w και B_c , ο ορισμός των οποίων γίνεται στις επόμενες παραγράφους.

4.1.1 Κεκλιμένη Δισδιάστατη Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα

4.1.1.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος

Τα αναπτυσσόμενα πεδία ροής και μείξης σε κάθε εγκάρσια διατομή της δισδιάστατης φλέβας θεωρείται ότι παραμένουν αρκούντως συμμετρικά ως προς τον άξονά της. Ως άξονας της φλέβας ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου παρουσιάζεται το μέγιστο των τιμών των μέσων ταχυτήτων ή των συγκεντρώσεων. Οι εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων προσεγγίζονται αρκετά καλά με κατανομές τύπου Gauss.

Το πεδίο ροής και μείξης που αναπτύσσεται, περιγράφεται μαθηματικά από τις εξισώσεις της συνεχείας, της διατήρησης της ορμής και της διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη. Η διατύπωσή τους γίνεται βάσει της παραδοχής Reynolds, κατά την οποία κάθε βασική μεταβλητή X του προβλήματος δύναται να αναλυθεί σε άθροισμα της μέσης της τιμής $\bar{X}$ και της διακύμανσής της X' . Προς χάριν απλότητας εφεξής η παύλα στα μεγέθη της μέσης ροής παραλείπεται (§2.4). Οι εξισώσεις διατυπώνονται στο τοπικό σύστημα των ορθογωνίων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων $O(\eta, \psi, \xi)$, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3. Για την εξαγωγή των εξισώσεων γίνονται οι συνήθεις παραδοχές και προσεγγίσεις όπως συμβαίνει σε αυτού του είδους της ροές (Yannopoulos 2006, Bloutsos & Yannopoulos 2009). Συνοπτικά, αναφέρεται ότι λαμβάνονται υπόψη οι συνήθεις βασικές παραδοχές-προσεγγίσεις, όπως Boussinesq για μικρές αρχικές διαφορές

πυκνοτήτων, τύπου οριακού στρώματος του Prandtl, αμελητέας μοριακής διάχυσης συγκριτικά με την τυρβώδη, παραβολικού τύπου ροής κατά την κύρια διεύθυνση και ανυπαρξίας περιδίνησης. Επίσης, στο σύστημα των εξισώσεων ενσωματώνεται η συνεισφορά της τύρβης (όροι 2^{ης} τάξης) στις εισροές ορμής και άνωσης (Yannopoulos 2006, 2010 και Yannopoulos & Bloutsos 2012).

Λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία της ροής ως προς το επίπεδο yz του ορθογωνίου καμπυλόγραμμου συστήματος $O(\eta, \psi, \xi)$, οι παραπάνω εξισώσεις διατυπώνονται ακολούθως υπό τη μορφή διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \quad (4.1)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} = g'_0 h c \sin \theta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial \psi} \quad (4.2)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} - \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} = -g'_0 h c \cos \theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(hp_d)}{\partial \psi} \quad (4.3)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (wc + w'c') + \frac{\partial(huc)}{\partial \psi} = -\frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} + S_0 \quad (4.4)$$

όπου:

w, u	οι μέσες τιμές των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και ψ , αντίστοιχα
w', u'	οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και ψ , αντίστοιχα
θ	η τοπική γωνία κλίσης του άξονα ξ

$$c = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a - \rho_0} \quad \text{η μέση τιμή της συγκέντρωσης}$$

$$\rho \quad \text{η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση}$$

$$w'^2, w'c', u'c' \quad \text{οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των } w, u \text{ και } c, \text{ αντίστοιχα}$$

$$\tau_{\psi\zeta} \quad \text{η μέση τυρβώδης διατμητική τάση}$$

$$p_d \quad \text{η δυναμική πίεση}$$

$$h = 1 + \psi \frac{d\theta}{d\xi} \quad \text{ο μετρικός συντελεστής του συστήματος καμπυλόγραμμων συντεταγμένων}$$

$$S_0 = \frac{\partial(hq_\psi)}{\partial\psi} \quad \text{ο όρος πηγής των αποκολλώμενων μαζών που αποδράττουν}$$

$$q_\psi \quad \text{το φορτίο των αποκολλώμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη } \psi \text{ διεύθυνση}$$

Σημειώνεται ότι ο όρος $\psi \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\psi}{Ra}$ είναι της τάξης $O(0,1)$, όπου Ra η ακτίνα καμπυλότητας του άξονα ξ .

Οι εξισώσεις (4.1) έως (4.4) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Διά } \psi = 0 \quad w = w_m, u = 0, c = c_m, \tau_{\psi\zeta} = u'c' = q_\psi = 0, p_d = p_{dm} \quad (4.5)$$

$$\text{Διά } \psi = \pm B_w \quad w = c = \tau_{\psi\zeta} = u'c' = 0, u = U_{B0}, p_d = p_{de}, q_\psi = q_B \quad (4.6)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$U_{B0} = \mp u_B - w_B \cos \theta \quad (4.7)$$

$$q_B = 0 \quad \text{στο } \psi = +B_w \quad (4.8)$$

$$q_B = w_B c_B \cos \theta \quad \text{στο } \psi = -B_w \quad (4.9)$$

όπου

w_B	η κατακόρυφη ταχύτητα των αποκολλώμενων μαζών
c_B	η συγκέντρωση των αποκολλώμενων μαζών
u_B	η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης στο πραγματικό όριο, B_w , της διατομής της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας

Πειραματικές μετρήσεις (Oosthuizen & Lemieux 1987, Lane-Serff *et al.* 1993, Shao & Law 2010 και Lai & Lee 2012) δείχνουν ότι η εγκάρσια κατανομή των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων σε μια κεκλιμένη ανωστική φλέβα δεν διατηρείται πλήρως συμμετρική ως προς το επίπεδο $\eta\zeta$. Στην εξωτερική πλευρά της φλέβας (κυρτό όριο της φλέβας) η πραγματική κατανομή των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων συμπίπτει με την κατανομή Gauss, ενώ η απόκλιση από την κατανομή Gauss των μεγεθών αυτών εμφανίζεται στην εσωτερική πλευρά (κοίλο όριο της φλέβας). Αυτή η διαφοροποίηση οφείλεται στη διαφυγή των αποκολλώμενων μαζών από το κύριο σώμα της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Η αλλαγή των κατανομών των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων θεωρείται αμελητέα στον υπολογισμό των εισροών, αλλά είναι σημαντική στον υπολογισμό της ταχύτητας συμπαράσυρσης συνεισφέροντας σημαντικά στον ακριβέστερο υπολογισμό της τροχιάς και της αξονικής αραίωσης στις κεκλιμένες ανωστικές φλέβες. Επομένως, γίνεται η παραδοχή ότι η κύρια ροή παραμένει συμμετρική ως προς τον άξονα της φλέβας στο επίπεδο $\eta\zeta$. Στη ZEF επικρατεί αυτοομοιότητα με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w}{w_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_w^2}\right) \quad (4.10)$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_c^2}\right) \quad (4.11)$$

όπου

w_m	η μέση ταχύτητα στον άξονα της φλέβας κατά τη διεύθυνση ζ
c_m	η μέση συγκέντρωση στον άξονα της φλέβας
$b_w = K_w \xi$	το ονομαστικό πλάτος της φλέβας όπου η μέση ταχύτητά της γίνεται e^{-1} της τιμής στον άξονα w_m

$b_c = K_c \xi$ το ονομαστικό πλάτος της φλέβας όπου η μέση συγκέντρωσή της γίνεται e^{-1} της τιμής στον άξονα c_m

K_w, K_c οι συντελεστές διεύρυνσης της ανωστικής φλέβας για το πεδίο των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, αντίστοιχα

Ο μεν συντελεστής διεύρυνσης K_w στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας λαμβάνεται ίσος με 0,132 (Yannopoulos 2006), ο δε συντελεστής διεύρυνσης K_c δίνεται από την εξίσωση:

$$K_c = \lambda K_w \quad (4.12)$$

Ο συντελεστής λ περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση (Yannopoulos & Bloutsos 2012):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_p} - \left(\frac{1}{\lambda_p} - \frac{1}{\lambda_j} \right) \exp(-0.35 \Xi) \quad (4.13)$$

με $\lambda_j = 1,50$, $\lambda_p = 1,21$ και την ανεξάρτητη αδιάστατη μεταβλητή Ξ να υπολογίζεται ως $\Xi = \frac{\xi}{d_0} F_0^{-4/3}$. Η εξίσωση (4.13) υπολογίζει απευθείας το συντελεστή λ , με αποδεκτή

ακρίβεια συγκριτικά με την αντίστοιχη εξίσωση, που προτείνεται από τους Wang & Law (2002), η οποία απαιτεί διαδοχικές επαναλήψεις μέχρι να επιτευχθεί η σύγκλιση στη σωστή τιμή. Συγκεκριμένα, η εξίσωση των Wang & Law (2002) χρησιμοποιεί τον τοπικό αριθμό Richardson, γεγονός το οποίο απαιτεί έναν πρώτο υπολογισμό του συντελεστή λ με απλή ακρίβεια και στη συνέχεια απαιτούνται διαδοχικές επαναλήψεις έως ότου επιτευχθεί σύγκλιση στη σωστή τιμή η οποία με 2^{15} τάξης ακρίβεια.

Στη ZFE εφαρμόζεται το μοντέλο πυρήνα, όπως αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2. Το μοντέλο πυρήνα στη ZFE θεωρεί τη φλέβα ως φλέβα δίχως άνωση (jet) χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις, που διαμορφώνουν τα πεδία των εγκαρσίων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων.

Για κάθε κατανομή ομοιότητας της μορφής $f_w = w/w_m$ για τη μέση αξονική ταχύτητα w , η εξίσωση της συνεχείας (4.1) μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς ψ , παρέχοντας την εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας συμπαρασύρσης hu/w_m (Yannopoulos 2006):

$$\frac{hu}{w_m} = -K_w \left[(1 + s_0) I_0 - n f_w \right] \quad (4.14)$$

όπου

$$I_0 = \int_0^n f_w dn = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n) \quad (4.15)$$

$$n = \frac{\psi}{b_w} \quad (4.16)$$

$$f_w = \exp(-n^2) \quad (4.17)$$

και s_0 είναι η λογαριθμική κλίση της αξονικής ταχύτητας w_m :

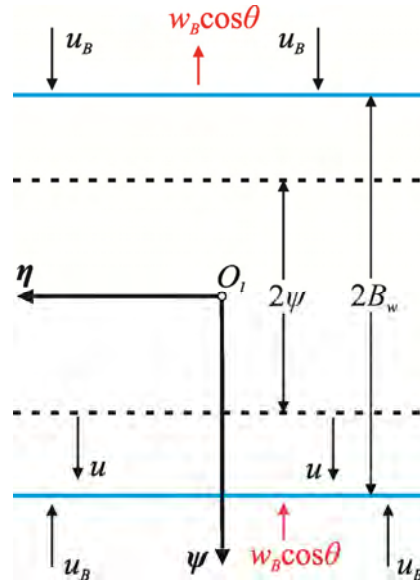
$$s_0 = \frac{\xi}{w_m} \frac{dw_m}{d\xi} \quad (4.18)$$

Σημειώνεται ότι η εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας συμπαράσυρσης, όπως περιγράφεται από την εξίσωση (4.14), είναι αντισυμμετρική, ενώ η κατανομή f_w είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ξ της φλέβας.

4.1.1.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (4.1) έως (4.4) πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια διατομή της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (4.5) έως και (4.9), το μοντέλο διαφυγής των αποκολλώμενων μαζών και το αντίστοιχο μοντέλο πυρήνα.

Η προσέγγιση της συμμετρίας του πεδίου ροής και διάχυσης ως προς τον άξονα ξ , προκαλεί μια αντισυμμετρική κατανομή ταχύτητας συμπαράσυρσης $\mp u_e = -(\psi)_e$, όπως υπολογίζεται από την εξίσωση (4.14), για στο $\psi = \pm B_w$. Το μοναδικό μη συμμετρικό πεδίο που υφίσταται, είναι το πεδίο ροής και διάχυσης, που προκαλείται εξαιτίας της διαφυγής



Σχήμα 4.2 Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κεκλιμένη δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα.

των αποκολλώμενων μαζών. Η ποσότητα $(hu)_{\psi=B_w}$ περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$(hu)_{\psi=B_w} = \left(1 \pm B_w \frac{d\theta}{d\xi} \right) u_{B_w} \quad (4.19)$$

όπου u_{B_w} είναι η συνιστώσα της ταχύτητας διαφυγής των αποκολλώμενων μαζών στη διεύθυνση ψ στο πραγματικό όριο B_w . Η ταχύτητα u_{B_w} έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική πλευρά του κοίλου ορίου και προς το εσωτερικό του κυρτού ορίου της ανωστικής φλέβας. Επισημαίνεται, ότι το ρευστό, το οποίο εισέρχεται εντός της ανωστικής φλέβας εξαιτίας της συμπαράσυρσης, θεωρείται καθαρό και μόνο η ταχύτητα w_B προκαλεί απώλεια μάζας. Η επίδραση της δυναμικής πίεσης p_d στην εισροή της ορμής m περιλαμβάνεται στο συντελεστή λ_M , ο οποίος λαμβάνει τιμή ίση με 1,10 (Yannopoulos 2006). Έτσι, οι εξισώσεις με μερικές παραγώγους, (4.1) έως (4.4) ολοκληρώνονται στην πραγματική εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας, λαμβάνοντας υπόψη τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, τη θεώρηση της διεύρυνσης της φλέβας και εφαρμόζοντας το μοντέλο διαφυγής των αποκολλώμενων μαζών και πυρήνα, οδηγούν στο ακόλουθο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{d\mu}{d\xi} - 2B_w w_B \cos\theta \frac{d\theta}{d\xi} = 2aw_m \quad (4.20)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\frac{dm}{d\xi} = \zeta \sin\theta \quad (4.21)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\zeta + 4u_e w_B}{m + 2B_w (u_e^2 - w_B^2 \cos^2\theta)} \cos\theta \quad (4.22)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\beta}{g'_0} \right) = - \left(1 - B_w \frac{d\theta}{d\xi} \right) A c_m w_B \cos\theta \quad (4.23)$$

όπου $a = u_{bw}/w_m$ είναι ο συντελεστής συμπαράσυρσης, όπως ορίζεται στην «υπόθεση συμπαράσυρσης» η οποία έχει διατυπωθεί από τους Morton et al. (1956), ορισμένος σε απόσταση $\psi = b_w$ από τον άξονα της τροχιάς της φλέβας. Οι εκφράσεις για τις τοπικές εισροές όγκου μ , ορμής m , ελλείμματος βάρους ζ και άνωσης β , καθώς επίσης οι αρχικές τους τιμές μ_0 , m_0 , ζ_0 και β_0 , αντίστοιχα, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1. Στην έξοδο του ακροφυσίου, η αρχική τιμή της συγκέντρωσης είναι $c_0 = 1$ και το εμβαδό της επιφάνειας εξόδου είναι $A_0 = d_0$. Οι συντελεστές σχήματος $I_{\mu 0}$, $I_{m 0}$, $I_{\beta 0}$, και $I_{\zeta 0}$ εισάγουν την επιρροή της περιοχής του πυρήνα και ορίζονται ως οι λόγοι των εισροών οι οποίες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις σύνθετες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων προς τις αντίστοιχες εισροές οι οποίες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις κατανομές τύπου Gauss. Η ποσότητα Y υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση (Yannopoulos 2006):

$$Y = \left(\frac{1 + \lambda}{2\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

Πίνακας 4.1 Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για δισδιάστατες τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.

Ειδική Εισροή	Περιγραφή	Αρχική τιμή
Όγκου	$\mu = \sqrt{\pi} b_w w_m I_{\mu 0}$	$\mu_0 = A_0 w_0$
Ορμής	$m = \lambda_M \sqrt{\frac{\pi}{2}} b_w w_m^2 I_{m0}$	$m_0 = A_0 w_0^2$
Άνωσης	$\beta = \lambda_B Y^{-1} g'_0 \sqrt{\frac{\pi \lambda}{2}} b_w w_m c_m I_{\beta 0}$	$\beta_0 = g'_0 \mu_0 c_0$
Ελλείμματος Βάρους	$\zeta = g'_0 \sqrt{\pi} b_c c_m I_{\zeta 0}$	$\zeta_0 = A_0 g'_0 c_0$

Ο λόγος λ υπολογίζεται από την εξίσωση (4.13) και ο συντελεστής λ_B , υπολογίζεται απευθείας από την ακόλουθη εξίσωση (Yannopoulos & Bloutsos 2012):

$$\frac{1}{\lambda_B} = \frac{1}{\lambda_{Bp}} - \left(\frac{1}{\lambda_{Bp}} - \frac{1}{\lambda_{Bj}} \right) \exp(-0.35\Xi) \quad (4.25)$$

όπου $\lambda_{Bj} = 1,04$ και $\lambda_{Bp} = 1,18$ (Yannopoulos 2006). Σημειώνεται, ότι η αντίστοιχη εξίσωση που προτείνεται από τους Wang & Law (2002), όπως και στην περίπτωση του συντελεστή λ , δεν υπολογίζει απευθείας το λ_B . Η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης u_e υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.14) στη θέση του πραγματικού ορίου της ανωστικής φλέβας $B_w = d_0/2 + n_w b_w$, υποθέτοντας ότι το πεδίο ταχύτητας είναι γνωστό, υπολογισμένο από το προηγούμενο βήμα και $n_w = \sqrt{2}$.

Το μοντέλο πυρήνα, όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.2 χρησιμοποιεί τη σύνθετη κατανομή των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων ώστε να προσομοιώσει την περιοχή του πυρήνα και τη μεταβατική ζώνη μέχρι την περιοχή ZEF. Αυτή η περιοχή εκτείνεται από $\xi/d_0 = 0$ έως $\xi/d_0 = 20$, καθώς μετά από αυτή την απόσταση οι πραγματικές κατανομές έχουν αποκτήσει τη μορφή κατανομής Gauss. Όπως επισημαίνεται από τους Yannopoulos & Noutsopoulos (2008), η περιοχή του πυρήνα επηρεάζει ελάχιστα τις ολοκληρωμένες εισροές στη ZEF. Έτσι, χάριν απλότητας, η εφαρμογή του μοντέλου πυρήνα προσομοιώνει τις σημειακές πηγές ως φλέβες δίχως άνωση χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις. Το σφάλμα που υπεισέρχεται από αυτή την προσέγγιση είναι μικρότερο του 1%.

Η επίλυση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (4.21) έως (4.23) πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας το αριθμητικό σχήμα Runge-Kutta 4^{ης} τάξης. Υπολογίζονται οι εισροές μ , m και β , όπως έχουν οριστεί νωρίτερα, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνεχείας (4.20) υπολογίζεται ο συντελεστής συμπαράσυρσης α .

4.1.2 Κεκλιμένη Κυκλική Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα

4.1.2.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος

Η κυκλική ανωστική φλέβα, όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά λόγω της ταυτόχρονης επίδρασης των δυνάμεων ορμής και άνωσης. Τα αναπτυσσόμενα πεδία ροής και μείξης σε κάθε εγκάρσια διατομή της φλέβας θεωρείται ότι παραμένουν αρκούντως συμμετρικά ως προς τον άξονά της και προσεγγίζονται αρκετά καλά με κατανομές Gauss. Ως άξονας της φλέβας, και στην περίπτωση αυτή, ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, όπου παρουσιάζονται τα μέγιστα των τιμών των μέσων ταχυτήτων ή συγκεντρώσεων (Σχήμα 4.1).

Το πεδίο ροής και μείξης στην περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας, που αναπτύσσεται, περιγράφεται μαθηματικά από τις εξισώσεις της συνεχείας, της διατήρησης της ορμής και της διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη. Οι εξισώσεις διατυπώνονται βάσει της παραδοχής Reynolds σε ένα τοπικό σύστημα των ορθογωνίων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων $O_l(\varphi, r, \xi)$, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3. Για τη διατύπωση των εξισώσεων που περιγράφουν μαθηματικά το πρόβλημα, γίνονται οι συνήθεις παραδοχές και προσεγγίσεις όπως πραγματοποιήθηκε και στην περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας (Yannopoulos 2006 και Bloutsos & Yannopoulos 2009). Επίσης, στο σύστημα των εξισώσεων ενσωματώνεται η συνεισφορά της τύρβης (όροι 2^{ης} τάξης) στις εισροές ορμής και άνωσης (Yannopoulos 2006,2010 και Yannopoulos & Bloutsos 2012).

Λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία της ροής ως προς το επίπεδο yz του καμπυλογράμμου συστήματος των κυλινδρικών συντεταγμένων $O_l(\varphi, r, \xi)$, οι παραπάνω εξισώσεις διατυπώνονται ως ακολούθως υπό τη μορφή διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial(rw)}{\partial\xi} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \quad (4.26)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} + r \sin\varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = g'_0 rhc \sin\theta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh\tau_{r\xi})}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[r \sin\varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial(r \sin\varphi hu^2)}{\partial r} - r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = -g'_0 rhc \cos\theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(r \sin\varphi hp_d)}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη

$$\frac{\partial}{\partial\xi} [r(wc + w'c')] + \frac{\partial(rhuc)}{\partial r} = -\frac{\partial(rhu'c')}{\partial r} + S_1 \quad (4.29)$$

Όπου w και w' οι μέσες τιμές της ταχύτητας και οι διακυμάνσεις της κατά τη διεύθυνση του άξονα ξ , u και u' τα αντίστοιχα μεγέθη κατά τη διεύθυνση του άξονα r , θ είναι η τοπική γωνία κλίσης του άξονα ξ , c η μέση τιμή της συγκέντρωσης, ρ η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση, w'^2 , $w'c'$, $u'c'$ οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u και c , αντίστοιχα, $\tau_{r\xi}$ είναι η μέση τυρβώδης διατμητική τάση και p_d η δυναμική πίεση. Ο μετρικός συντελεστής του καμπυλογράμμου συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων ορίζεται από τη σχέση $h = 1 + r \sin\varphi \frac{d\theta}{d\xi}$. Ο όρος πηγής των

αποκολλώμενων μαζών που αποδράττουν, περιγράφεται από την εξίσωση $S_1 = \frac{\partial(rhq_r)}{\partial r}$, με q_r το φορτίο των αποκολλώμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη διεύθυνση r . Σημειώνεται ότι ο όρος $\psi \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\psi}{Ra}$ είναι της τάξης $O(0,1)$, όπου Ra η ακτίνα καμπυλότητας του άξονα ξ .

Οι εξισώσεις (4.26) έως (4.29) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Διά } r = 0: \quad w = w_m, u = 0, c = c_m, \tau_{r\xi} = u'c' = q_r = 0, p_d = p_{dm} \quad (4.30)$$

$$\text{Διά } r = B_w \quad w = c = \tau_{r\xi} = u'c' = 0, u = U_{B1}, p_d = p_{de}, q_r = q_B \quad (4.31)$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$U_{B1} = -u_B - w_B \cos\theta \sin\varphi \quad (4.32)$$

$$q_B = 0 \text{ στο } r = +B_w \text{ για } 0 \leq \varphi \leq \pi \quad (4.33)$$

$$q_B = w_B c_B \cos\theta \text{ στο } r = -B_w \text{ για } \pi < \varphi < 2\pi \quad (4.34)$$

Όπου w_B και c_B είναι η κατακόρυφη ταχύτητα και η συγκέντρωση των αποκολλώμενων μαζών, αντίστοιχα και u_B η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης στο πραγματικό όριο, B_w , της διατομής της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας.

Στη ZEF επικρατεί αυτοομοιότητα, όπως και στη δισδιάστατη φλέβα, με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w}{w_m} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_w^2}\right) \quad (4.35)$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_c^2}\right) \quad (4.36)$$

όπου w_m και c_m είναι η μέση ταχύτητα και η συγκέντρωση, αντίστοιχα, στον άξονα της φλέβας κατά τη διεύθυνση ξ , $b_w = K_w \xi$ και $b_c = K_c \xi$ είναι τα ονομαστικά πλάτη της ταχύτητας και της συγκέντρωσης της φλέβας, αντίστοιχα, όπου η μέση ταχύτητά της και συγκέντρωσή της, γίνεται ίση με το e^{-1} της αντιστοίχου τιμής στον άξονα w_m και c_m . Ο συντελεστής διεύρυνσης του πεδίου των ταχυτήτων K_w , λαμβάνεται ίσος με 0,110 στην περίπτωση της κυκλικής φλέβας (Yannopoulos 2006), ενώ ο συντελεστής διεύρυνσης του πεδίου των συγκεντρώσεων K_c , υπολογίζεται από τη σχέση $K_c = \lambda K_w$, όπου ο συντελεστής λ περιγράφεται από την εξίσωση (4.13) με $\lambda_j = 1,23$ και $\lambda_p = 1,04$ (Yannopoulos 2006), ο οποίος, όπως έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 4.1.1.1, υπολογίζει απευθείας με αποδεκτή ακρίβεια το λόγο λ , συγκριτικά με την αντίστοιχη εξίσωση που προτείνεται από τους Wang & Law (2002). Η ανεξάρτητη αδιάστατη μεταβλητή Ξ ορίζεται από τη σχέση

$$\Xi = \frac{\xi}{d_0} F_0^{-1}.$$

Η κατανομή τύπου Gauss είναι η συνηθέστερη κατανομή, η οποία προσομοιώνει με ακρίβεια τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων. Η κατανομή τύπου Gauss συμπίπτει απόλυτα με τα πειραματικά δεδομένα και υποστηρίζεται και αναλυτικά στην περίπτωση των κατακορύφων φλεβών (Korovkin & Andrievskii 2000). Όπως και στις δισδιάστατες φλέβες, στην εξωτερική πλευρά της φλέβας (κυρτό όριο της φλέβας) η πραγματική κατανομή των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων συμπίπτει με την κατανομή Gauss, ενώ η απόκλιση εμφανίζεται στην εσωτερική πλευρά της φλέβας (κοίλο όριο). Αυτή η διαφοροποίηση οφείλεται στη διαφυγή των αποκολλώμενων μαζών από το κύριο σώμα της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Η αλλαγή των κατανομών των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων θεωρείται αμελητέα για τον υπολογισμό των εισροών, αλλά σημαντική για τον υπολογισμό της ταχύτητας συμπαράσυρσης, συνεισφέροντας σημαντικά στον ακριβέστερο υπολογισμό της τροχιάς και της αξονικής αραιώσης στις κεκλιμένες ανωστικές φλέβες. Επομένως, γίνεται και εδώ η παραδοχή ότι η κύρια ροή παραμένει συμμετρική ως προς τον άξονα της φλέβας στο επίπεδο $\eta\xi$.

Στη ZFE εφαρμόζεται το μοντέλο πυρήνα, όπως αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 2. Το μοντέλο πυρήνα στη ZFE θεωρεί τη φλέβα ως φλέβα δίχως άνωση (jet), χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις που διαμορφώνουν τα πεδία των εγκαρσίων ταχυτήτων και συγκεντρώσεων.

Για κάθε κατανομή ομοιότητας της μορφής $f_w = w/w_m$ για τη μέση αξονική ταχύτητα w , η εξίσωση της συνεχείας (4.26) μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς r , παρέχοντας την εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας συμπαράσυρσης hu/w_m :

$$\frac{hu}{w_m} = -K_w \left[(1 + s_1) I_1 - n f_w \right] \quad (4.37)$$

όπου για την περίπτωση της κυκλικής κεκλιμένης ανωστικής φλέβας ισχύουν:

$$I_1 = \int_0^n f_w dn = \frac{1}{2} \left[1 - \exp(-n^2) \right] \quad (4.38)$$

$$n = \frac{r}{b_w} \quad (4.39)$$

$$f_w = \exp(-n^2) \quad (4.40)$$

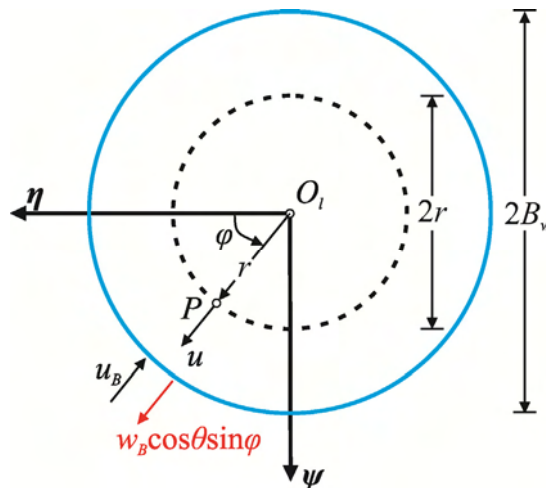
και s_1 είναι η λογαριθμική κλίση της αξονικής ταχύτητας w_m :

$$s_1 = \frac{\xi}{w_m} \frac{dw_m}{d\xi} \quad (4.41)$$

Η εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας συμπαράσυρσης της κυκλικής ανωστικής φλέβας, που περιγράφεται από την εξίσωση (4.37), όπως και η αντίστοιχη κατανομή για την περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας, που περιγράφεται από την εξίσωση (4.14), είναι αντισυμμετρική, ενώ η κατανομή f_w είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ξ της φλέβας.

4.1.2.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (4.26) έως (4.29) πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια διατομή της κυκλικής κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (4.30) έως και (4.34), το μοντέλο διαφυγής των αποκολλώμενων μαζών και το αντίστοιχο μοντέλο πυρήνα.



Σχήμα 4.3 Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κεκλιμένη κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα.

Η προσέγγιση της συμμετρίας του πεδίου ροής και διάχυσης ως προς τον άξονα ξ , προκαλεί μια αντισυμμετρική κατανομή ταχύτητας συμπαράσυρσης. Το μοναδικό μη συμμετρικό πεδίο που υφίσταται, είναι το πεδίο ροής και διάχυσης, που προκαλείται εξαιτίας της διαφυγής των αποκολλώμενων μαζών. Η ποσότητα hu στη θέση $r = B_w$ περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση:

$$(hu)_{r=B_w} = \left(1 + B_w \sin \varphi \frac{d\theta}{d\xi} \right) u_{B_w} \quad (4.42)$$

όπου u_{B_w} είναι η συνιστώσα της ταχύτητας διαφυγής των αποκολλώμενων μαζών στη διεύθυνση r στο πραγματικό όριο B_w . Η ταχύτητα u_{B_w} έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική πλευρά του κοίλου ορίου και προς το εσωτερικό του κυρτού ορίου της ανωστικής φλέβας. Επισημαίνεται, ότι το ρευστό, το οποίο εισέρχεται εντός της ανωστικής φλέβας εξαιτίας της συμπαράσυρσης, θεωρείται καθαρό και μόνο η ταχύτητα w_B προκαλεί απώλεια μάζας. Η επίδραση της δυναμικής πίεσης p_d στην εισροή της ορμής m περιλαμβάνεται στο συντελεστή λ_M , ο οποίος, και στην περίπτωση της κυκλικής φλέβας, είναι ίσος με 1,10 (Yannopoulos 2006). Έτσι, οι εξισώσεις με μερικές παραγώγους, (4.26) έως (4.29) ολοκληρώνονται στην πραγματική εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας λαμβάνοντας υπόψη τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, τη θεώρηση της διεύρυνσης της φλέβας και εφαρμόζοντας το μοντέλο διαφυγής των

αποκολλώμενων μαζών και πυρήνα οδηγούν στο ακόλουθο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{d\mu}{d\xi} - \pi B_w^2 w_B \cos \theta \frac{d\theta}{d\xi} = 2\pi b_w a w_m \quad (4.43)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ζ

$$\frac{dm}{d\xi} = \zeta \sin \theta \quad (4.44)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\zeta + 2\pi B_w u_e w_B}{m + \pi B_w^2 \left(u_e^2 - \frac{3}{4} w_B^2 \cos^2 \theta \right)} \cos \theta \quad (4.45)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\beta}{g'_0} \right) = -2B_w \left(1 - \frac{\pi}{4} B_w \frac{d\theta}{d\xi} \right) \mathcal{A} c_m w_B \cos \theta \quad (4.46)$$

όπου $a = u_{bw}/w_m$ είναι ο συντελεστής συμπαράσυρσης, όπως ορίζεται στην «υπόθεση συμπαράσυρσης», η οποία έχει διατυπωθεί από τους Morton et al. (1956), ορισμένος σε απόσταση $r = b_w$ από τον άξονα της τροχιάς της φλέβας. Οι εκφράσεις για τις τοπικές εισροές όγκου μ , ορμής m , ελλείμματος βάρους ζ και άνωσης β , καθώς επίσης οι αρχικές τους τιμές μ_0 , m_0 , ζ_0 και β_0 αντίστοιχα, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2. Ο συντελεστής $\mathcal{A}$ δίνεται από την εξίσωση (3.80).

Στην έξοδο του ακροφυσίου, η αρχική τιμή της συγκέντρωσης είναι $c_0 = 1$ και το εμβαδό της επιφανείας εξόδου είναι $A_0 = \pi/4 d_0^2$. Οι συντελεστές σχήματος $I_{\mu 1}$, I_{m1} , $I_{\beta 1}$, και $I_{\zeta 1}$ εισάγουν την επιρροή της περιοχής του πυρήνα και ορίζονται σε αντιστοιχία με την περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας ως οι λόγοι των εισροών οι οποίες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις σύνθετες κατανομές των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων προς τις

Πίνακας 4.2 Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.

Ειδική Εισροή	Περιγραφή	Αρχική τιμή
Όγκου	$\mu = \pi b_w^2 w_m I_{\mu 1}$	$\mu_0 = A_0 w_0$
Ορμής	$m = \lambda_M \frac{\pi}{2} b_w^2 w_m^2 I_{m 1}$	$m_0 = A_0 w_0^2$
Άνωσης	$\beta = \lambda_B Y^{-1} g'_0 \frac{\pi \lambda}{2} b_w^2 w_m c_m I_{\beta 1}$	$\beta_0 = g'_0 \mu_0 c_0$
Ελλείμματος Βάρους	$\zeta = g'_0 \pi b_c^2 c_m I_{\zeta 1}$	$\zeta_0 = A_0 g'_0 c_0$

αντίστοιχες εισροές οι οποίες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις κατανομές τύπου Gauss. Η ποσότητα Y υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την (4.24). Ο λόγος λ υπολογίζεται από την εξίσωση (4.13) με τους συντελεστές που αντιστοιχούν στις κυκλικές φλέβες και αναφέρθηκαν νωρίτερα και ο συντελεστής λ_B , υπολογίζεται απευθείας από την εξίσωση (4.25) όπου $\lambda_{Bj} = 1,076$ και $\lambda_{Bp} = 1,15$ (Yannopoulos 2006). Η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης u_e υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.14) στη θέση του πραγματικού ορίου της ανωστικής φλέβας $B_w = d_0/2 + n_w b_w$, υποθέτοντας ότι το πεδίο ταχύτητας είναι γνωστό, υπολογισμένο από το προηγούμενο βήμα και $n_w = 2^{1/2}$.

Το μοντέλο πυρήνα, όπως περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3.2, παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά και στην περίπτωση των κυκλικών ανωστικών φλεβών. Έτσι, προς χάριν απλότητας, η εφαρμογή του μοντέλου πυρήνα προσομοιώνει τις σημειακές πηγές ως φλέβες δίχως άνωση (jets) χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εξισώσεις. Η επίλυση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (4.44) έως (4.46) πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας, και στην περίπτωση αυτή, το αριθμητικό σχήμα Runge-Kutta 4^{ης} τάξης. Υπολογίζονται οι εισροές μ , m και β , όπως έχουν οριστεί νωρίτερα, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνεχείας (4.43) υπολογίζεται ο συντελεστής συμπαράσυρσης α .

4.1.3 Αποτελέσματα

Η επίλυση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων προβλέπει τα χαρακτηριστικά του πεδίου μέσης ροής και διάχυσης για τις κεκλιμένες δισδιάστατες ή κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες. Η επίλυση καλύπτει τις περιπτώσεις για αρχικές γωνίες εκτόξευσης στην περιοχή $-75^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$. Στην επίλυση, λαμβάνεται υπόψη η

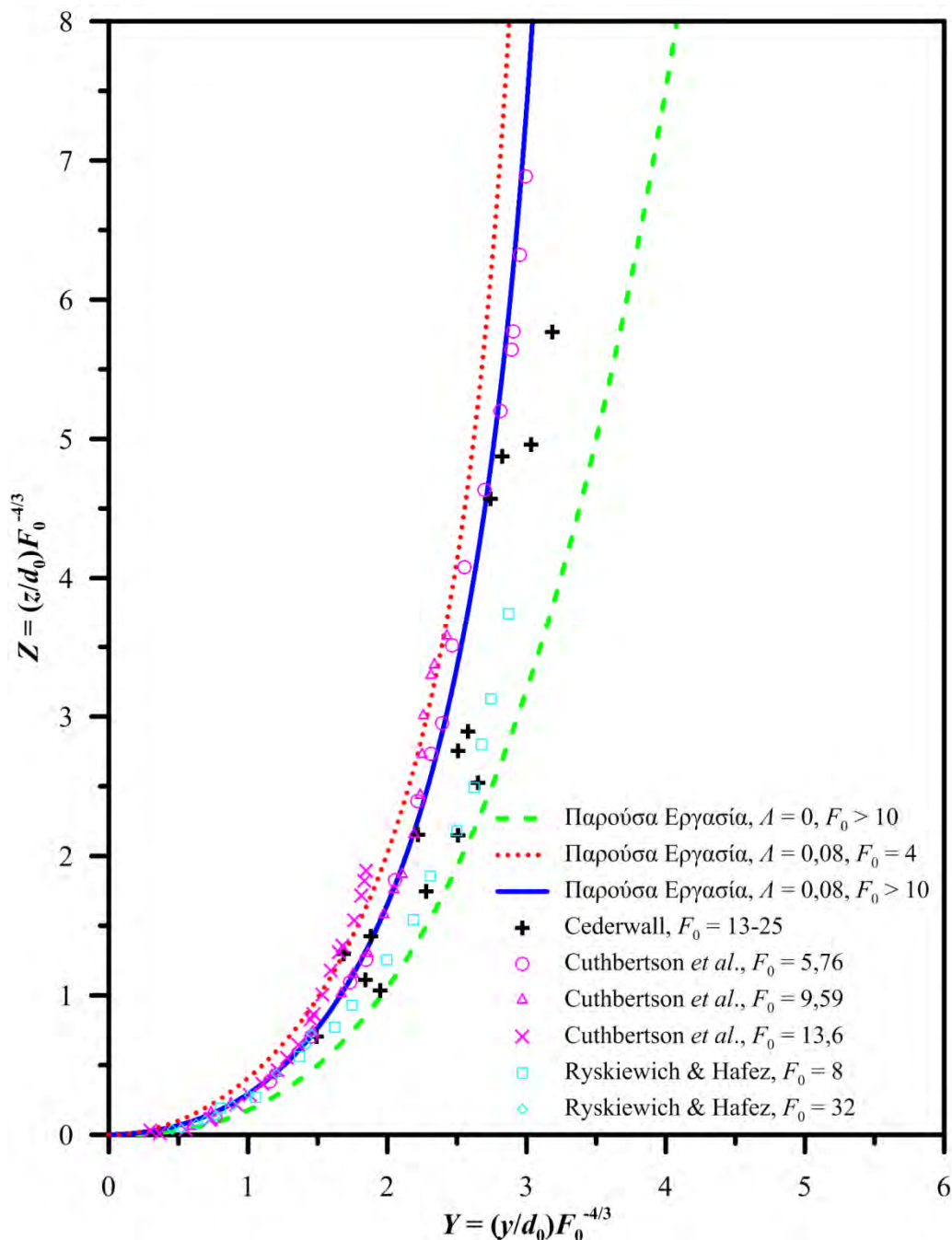
διαφυγή των αποκολλώμενων μαζών, όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3. Έμφαση δίνεται στην πρόβλεψη της τροχιάς και της αραιώσης σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν διαθέσιμα πειραματικά στοιχεία από τη διεθνή βιβλιογραφία προς σύγκριση.

4.1.3.1 Κεκλιμένη Δισδιάστατη Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα

Τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα σε κεκλιμένες δισδιάστατες τυρβώδεις ανωστικές φλέβες είναι ελάχιστα. Οι Jirka & Harleman (1973), μελέτησαν το πεδίο ροής που προκύπτει από την εκροή σειράς ανωστικών φλεβών από ένα γραμμικό υποβρύχιο διαχύτη πολλαπλών κυκλικών ακροφυσίων, εντός ακίνητου ομογενούς αποδέκτη. Μετρήθηκαν οι αξονικές αραιώσεις για αρχικές τιμές πυκνομετρικού αριθμού Froude 15 έως 25. Ο Cederwall (1971) μελέτησε την περίπτωση της οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας η οποία εκρέει από σχισμή. Μετρήθηκαν τροχιές και αξονικές αραιώσεις για αρχικούς αριθμούς Froude στην περιοχή 13 έως 25. Πρόσφατα, οι Cuthbertson *et al.* (2008) μέτρησαν τις τροχιές στην περίπτωση κατάπτωσης σωματιδίων από οριζόντια δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα για αρχικούς πυκνομετρικούς αριθμούς Froude $F_0 = 5,76, 9,59$ και $13,6$. Στο Σχήμα 4.4, παρουσιάζονται οι προβλέψεις της τροχιάς του μοντέλου που προτείνεται για την περίπτωση της οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας. Σημειώνεται ότι το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει τον κεντροβαρικό άξονα, δηλαδή αφού γίνει ο υπολογισμός των ορίων της φλέβας, η τροχιά της προκύπτει ως το μέσο της απόστασης των άκρων της. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα πειραματικά δεδομένα των Cederwall (1971), Ryskiewich & Hafetz (1975) και Cuthbertson *et al.* (2008) σε αδιάστατες συντεταγμένες Y και Z , ορισμένες ως εξής $Y = (y / d_0) F_0^{-4/3}$ και $Z = (z / d_0) F_0^{-4/3}$, αντίστοιχα.

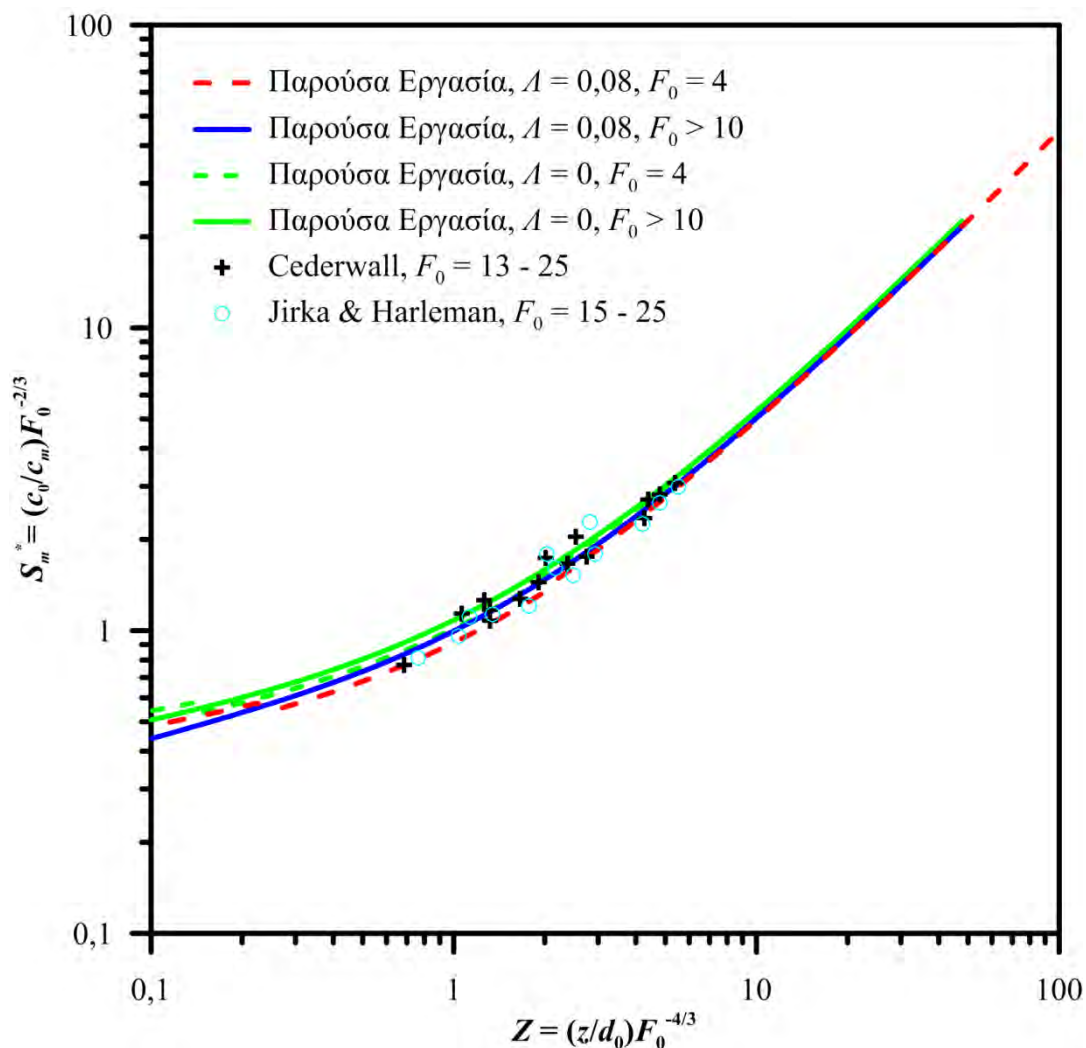
Στο Σχήμα 4.5, παρουσιάζονται οι προβλέψεις για την αξονική αραιώση του μοντέλου που προτείνεται για την περίπτωση της οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα πειραματικά δεδομένα των Cederwall (1971) και Jirka & Harleman (1973) σε αδιάστατες συντεταγμένες Z και S_m^* . Η αδιάστατη αξονική αραιώση ορίζεται ως $S_m^* = (c_0 / c_m) F_0^{-2/3}$.

Η ταύτιση των προβλέψεων και των πειραματικών δεδομένων για τις τροχιές και τις αραιώσεις είναι εξαιρετική για την τιμή του συντελεστή $A = 0,08$, όπως φαίνεται στα Σχήματα 4.4 και 4.5. Όταν ο συντελεστής είναι $A = 0$, δηλαδή δεν λαμβάνεται υπόψη η αποκόλληση των μαζών από την ανωστική φλέβα, παρατηρείται ότι η πρόβλεψη της τρο-



Σχήμα 4.4 Πρόβλεψη τροχιάς για οριζόντια δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη με $\Lambda = 0$ και $0,08$ σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

χιάς υποεκτιμάται (Σχήμα 4.4) αλλά δεν επηρεάζεται η πρόβλεψη της αξονικής αραιώσης καθώς όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5, οι τιμές των αξονικών αραιώσεων που υπολογίζονται για $\Lambda = 0$ ή $0,08$ σχεδόν συμπίπτουν. Οι αξονικές αραιώσεις στην πραγματικότητα δεν επηρεάζονται σημαντικά από τη διαφυγή των αποκολλώμενων μαζών ($\Lambda = 0$), αφού αυτές πρακτικά δεν ελαττώνουν την εισροή όγκου που επηρεάζει τον υπολογισμό τους. Αντίθε-



Σχήμα 4.5 Πρόβλεψη αξονικών αραιώσεων για οριζόντια δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη με $A=0$ και $0,08$ σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

τα, οι μεταβολές της ορμής στην εγκάρσια διεύθυνση εξαιτίας της διαφυγής των αποκολλώμενων μαζών της ανωστικής φλέβας προκαλούν μια αθροιστική μετακίνηση του άξονα της τροχιάς της φλέβας η οποία είναι αισθητή. Επίσης, από το διάγραμμα του Σχήματος 4.4 φαίνεται η ευαισθησία του μοντέλου των δραπετευουσών μαζών στις μεταβολές του συντελεστή A λαμβάνοντας ως δείκτη τη μεταβολή της τροχιάς της ανωστικής φλέβας, επειδή η μεταβολή στην τροχιά της οριζόντιας δισδιάστατης ανωστικής φλέβας δείχνει ότι επηρεάζεται σημαντικά από τη διαφυγή των μαζών, που αποκολλώνται.

Δυστυχώς, η έλλειψη επαρκών πειραματικών δεδομένων για την περίπτωση της κεκλιμένης δισδιάστατης ανωστικής φλέβας με γωνίες διαφορετικής από τη μηδενική, δεν

επιτρέπουν τον προσδιορισμό του συντελεστή A σε εκτενέστερη περιοχή των αρχικών γωνιών θ_0 .

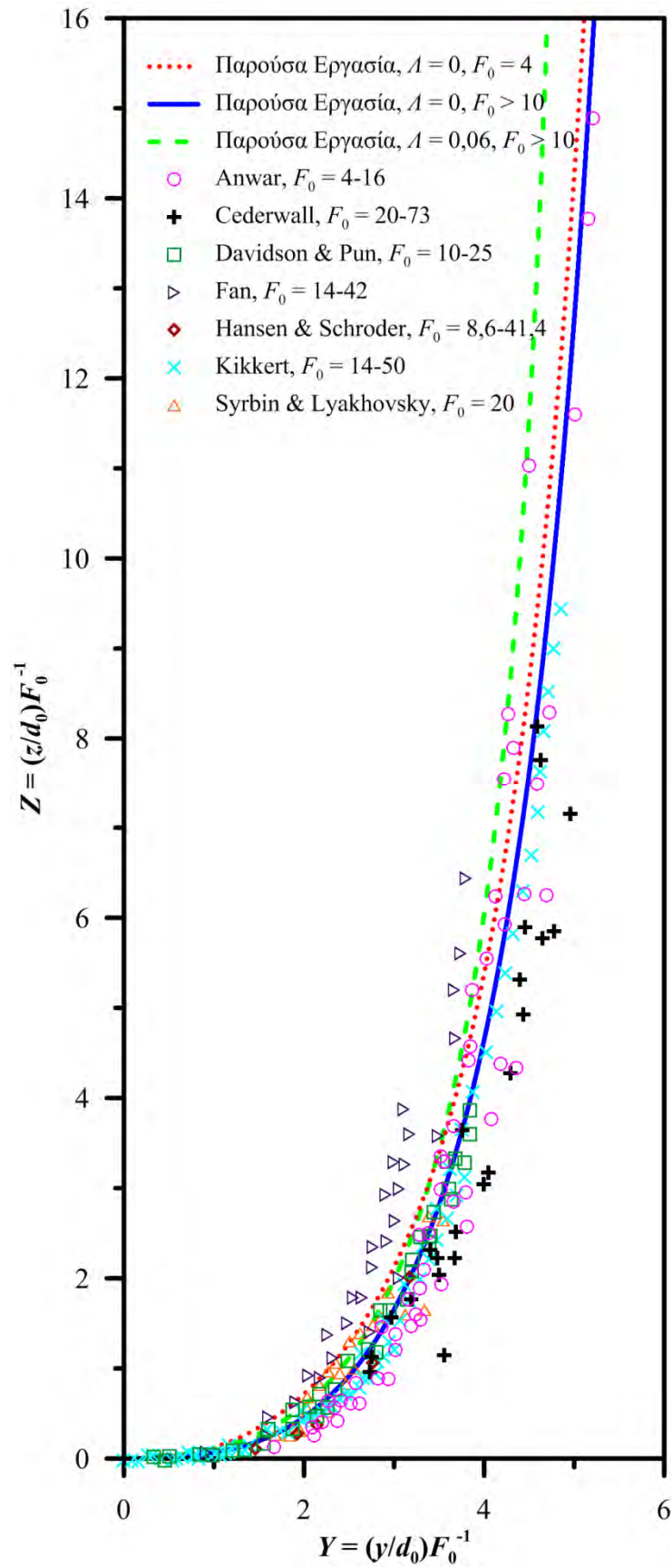
4.1.3.2 Κεκλιμένη Κυκλική Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα

Στην περίπτωση της κεκλιμένης κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας σε ακίνητο αποδέκτη υπάρχουν αρκετά διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα στη διεθνή βιβλιογραφία. Τα πειραματικά δεδομένα καλύπτουν τις περιπτώσεις οριζόντιας και κεκλιμένης υπό θετική αρχική γωνία εκτόξευσης ανωστικής φλέβας καθώς επίσης και τις φλέβες αρνητικής άνωσης υπό διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης. Αρκετά από τα δεδομένα αυτά προέρχονται από πειραματικές μετρήσεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν την τελευταία δεκαετία χρησιμοποιώντας σύγχρονες τεχνικές και εξοπλισμούς.

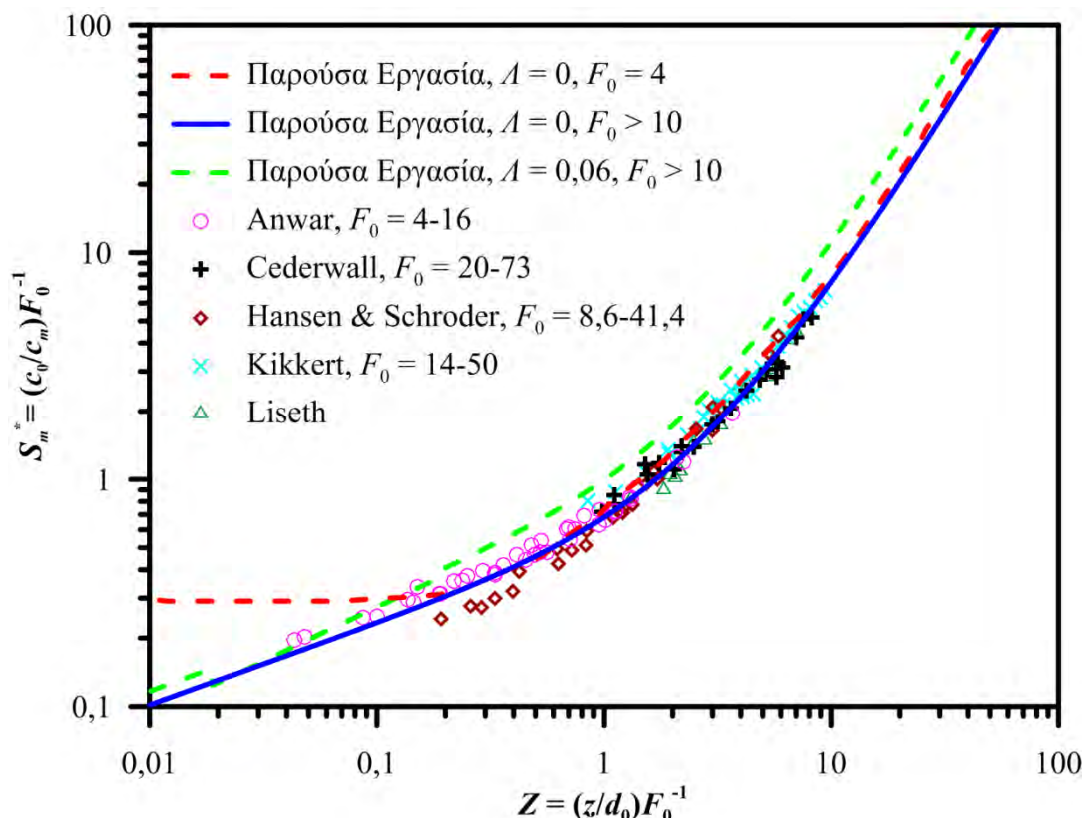
Η Διδακτορική Διατριβή του Kikkert (2006), η οποία πραγματεύεται πειραματικά και θεωρητικά τις περιπτώσεις κεκλιμένων κυκλικών ανωστικών φλεβών με τροχίες σε δύο ή τρεις διαστάσεις, περιλαμβάνει πειραματικά αποτελέσματα για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις τα οποία πραγματοποιήθηκαν με σύγχρονες τεχνικές laser (PIV/PLIF). Στο βιβλίο τους οι Lee & Chu (2003) παρουσιάζουν συγκεντρωμένα τα διαθέσιμα πειραματικά στοιχεία για οριζόντιες κυκλικές ανωστικές φλέβες. Τα σημαντικότερα είναι οι μετρήσεις τροχιών και αξονικών αραιώσεων από τους Cederwall (1968) και Anwar (1971). Από την ίδια πηγή προέρχονται και τα πειραματικά δεδομένα τροχιάς των Syrbin & Lyakhovsky (1936). Οι Davidson & Pun (2000), οι οποίοι προτείνουν την αρχή της στροφορμής για τον προσδιορισμό της τροχιάς της ανωστικής φλέβας σε ήρεμο ή κινούμενο αποδέκτη, παρουσιάζουν πειραματικά αποτελέσματα από διάφορους ερευνητές.

Στο Σχήμα 4.6 παρουσιάζεται η πρόβλεψη της τροχιάς για την οριζόντια κυκλική ανωστική φλέβα, όπως προκύπτει από την επίλυση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (4.43) έως (4.46), λαμβάνοντας υπόψη τις αντίστοιχες παραδοχές και ενσωματώνοντας το μοντέλο διαφυγής των μαζών που αποκολλώνται από την ανωστική φλέβα. Παρουσιάζονται οι τροχίες για $A = 0$ και $A = 0,06$. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα πειραματικά δεδομένα των Anwar (1971), Cederwall (1971), Davidson (1989), Fan (1967), Hansen & Schroder (1968) και Kikkert (2006) σε αδιάστατες συντεταγμένες Y και Z , ορισμένες ως $Y = (y / d_0) F_0^{-1}$ και $Z = (z / d_0) F_0^{-1}$, αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζεται η πρόβλεψη της αξονικής αραιώσης για την οριζόντια κυκλική ανωστική φλέβα. Παρουσιάζονται οι αραιώσεις για $A = 0$, για τις περιπτώσεις



Σχήμα 4.6 Πρόβλεψη τροχιάς για οριζόντια κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη με $\lambda = 0$ και 0,06 σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα

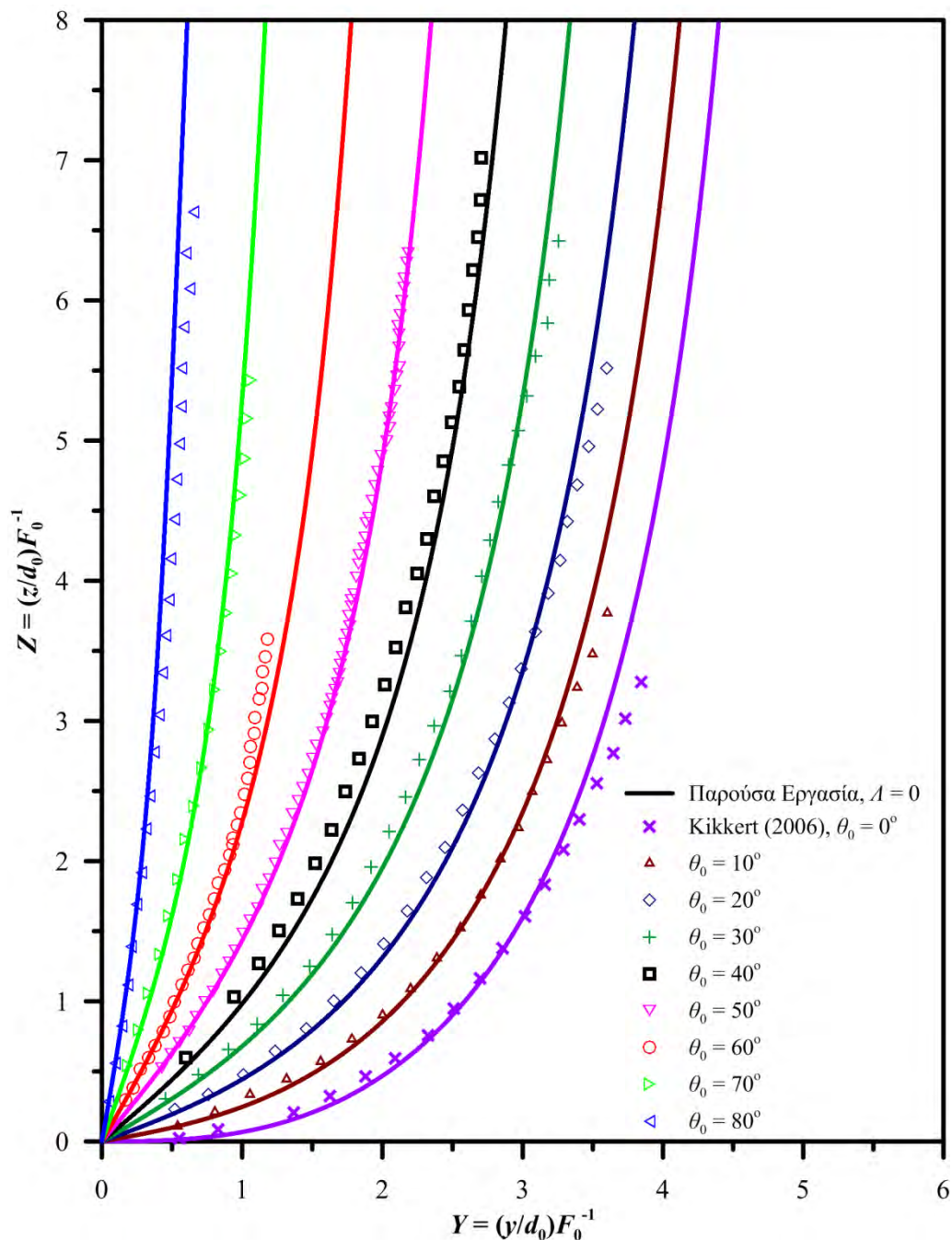


Σχήμα 4.7 Πρόβλεψη αξονικών αραιώσεων για οριζόντια κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός ακίνητου αποδέκτη με $\Lambda = 0$ και $0,06$ σε σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

αρχικών πυκνομετρικών αριθμών $F_0 = 4$ και $F_0 > 10$. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα πειραματικά δεδομένα των Anwar (1971), Cederwall (1971), Hansen & Schroder (1968), Kikkert (2006) και Liseth (1970) σε αδιάστατες συντεταγμένες Z και S_m^* , ορισμένες ως $Z = (z / d_0) F_0^{-1}$ και $S_m^* = (c_0 / c_m) F_0^{-1}$, αντίστοιχα.

Στα Σχήματα 4.6 και 4.7 φαίνεται ότι το προτεινόμενο μοντέλο επιτυγχάνει εξαιρετική συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα. Όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας, η ευαισθησία του προτεινόμενου μοντέλου στη μεταβολή του συντελεστή Λ είναι αισθητή κατά την πρόβλεψη της τροχιάς και φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Η επιρροή της μεταβολής του συντελεστή Λ στην πρόβλεψη των αξονικών αραιώσεων (Σχήμα 4.7) είναι αρκετά σημαντική με την πρόβλεψη για $\Lambda = 0$ να είναι εγγύτερα στα πειραματικά δεδομένα.

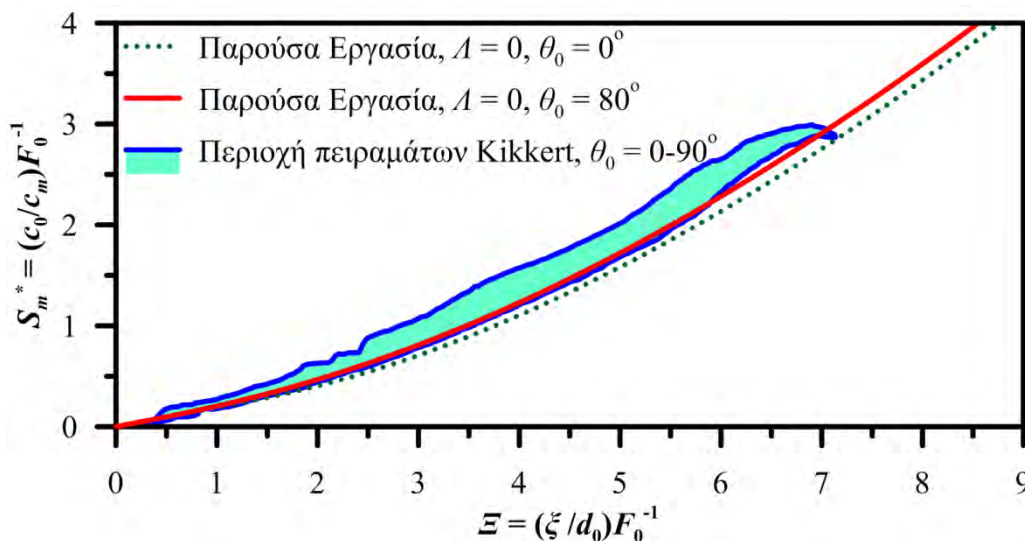
Στο Σχήμα 4.8 παρουσιάζεται η πρόβλεψη της τροχιάς, χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο μοντέλο με $\Lambda = 0$ για αρχικές θετικές γωνίες εκτόξευσης $\theta_0 = 0^\circ - 80^\circ$. Οι συγκρίσεις πραγματοποιούνται με τα αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα του Kikkert



Σχήμα 4.8 Πρόβλεψη τροχιάς για κεκλιμένες κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός ακίνητου αποδέκτη με $0^\circ \leq \theta_0 \leq 80^\circ$ και $\lambda = 0$ σε σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα του Kikkert (2006).

(2006). Η τροχιά που μετράται από τον Kikkert υπολογίζεται στη θέση όπου μεγιστοποιείται η εγκάρσια τιμή της συγκέντρωσης.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.9 παρουσιάζεται η αξονική αραίωση S_m^* συναρτήσει της κατακόρυφης απόστασης Z , για αρχική γωνία εκτόξευσης $\theta_0 = 0^\circ$ και $\theta_0 = 80^\circ$. Με χρώμα φαίνεται η περιοχή που λαμβάνουν θέση οι αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις α-



Σχήμα 4.9 Πρόβλεψη αξονικών αραιώσεων για κεκλιμένες κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός ακίνητου αποδέκτη με $\theta_0 = 0^\circ$ και 80° και $\Lambda = 0$ σε σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα του Kikkert (2006).

ξονικών αραιώσεων του Kikkert (2006), για αρχικές γωνίες εκτόξευσης $\theta_0 = 0^\circ - 80^\circ$.

Παρατηρείται, σε αντίθεση με την οριζόντια δισδιάστατη ανωστική φλέβα, ότι στην περίπτωση της οριζόντιας κυκλικής ανωστικής φλέβας η διαφυγή αποκολλόμενων μαζών είναι ασήμαντη. Αυτό γίνεται περισσότερο εμφανές στο Σχήμα 4.6 όπου η περιοχή των πειραματικών σημείων ευρίσκεται ελαφρώς υψηλότερα από τους αντίστοιχους υπολογισμούς. Η διαφορά αυτή εξηγείται είτε εξαιτίας της ύπαρξης κάποιων αποκολλόμενων μαζών που αποδράττουν είτε και στην ύπαρξη πιθανών πειραματικών σφαλμάτων.

Πραγματοποιώντας τη συνολική αποτίμηση των αποτελεσμάτων, που παρουσιάζονται στα διαγράμματα των Σχημάτων 4.6 έως 4.9, παρατηρείται ότι η καλύτερη συμφωνία για τις περιπτώσεις των τροχιών και των αξονικών αραιώσεων για τις κεκλιμένες κυκλικές φλέβες θετικής άνωσης με αρχικές γωνίες εκτόξευσης $0^\circ \leq \theta_0 \leq 80^\circ$, επιτυγχάνεται όταν $\Lambda = 0$.

Επισημαίνεται ότι ένα απλούστερο ολοκληρωματικό μοντέλο, το οποίο προτάθηκε από τους Wood *et al.* (1993), υπολογίζει παρόμοια αποτελέσματα για την περίπτωση των οριζοντίων κυκλικών ανωστικών φλεβών.

Πρόσφατα οι Shao & Law (2010) μελέτησαν πειραματικά την επίδραση της μείξης και των επιρροών των τοιχωμάτων στις τροχιές και σε άλλες παραμέτρους αρνητικών κυκλικών ανωστικών φλεβών χρησιμοποιώντας σύγχρονες τεχνικές και εξοπλισμό laser PIV/PLIF. Η εκροή των βαρύτερων φλεβών πραγματοποιείται υπό αρχική γωνία $\theta_0 = 30^\circ$

και 45° με αρχικούς πυκνομετρικούς αριθμούς Froude στην περιοχή 7 έως 32. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αυτά τα πειράματα αντιστοιχούν σε κεκλιμένες φλέβες ελαφρύτερες από το ρευστό του αποδέκτη με γωνίες εκτόξευσης $\theta_0 = -30^\circ$ και -45° . Πλέον των υπολοίπων μεγεθών, οι Shao & Law (2010) μέτρησαν τη μεταβολή του πλάτους διεύρυνσης των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων (κάτω ή εσωτερικό και άνω ή εξωτερικό όριο) κατά μήκος της τροχιάς των κεκλιμένων ανωστικών φλεβών. Τα πειραματικά αποτελέσματα για $\theta_0 = 30^\circ$ και 45° , αν και επηρεάζονται από την εγγύτητα του τοιχώματος δείχνουν ότι το εξωτερικό όριο των συγκεντρώσεων είναι σχεδόν γραμμικό, ενώ το εσωτερικό όριο προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την ακόλουθη εξίσωση:

$$b_c^* = b_{cm}^* \exp \left[- \left(\frac{\Xi - \Xi_0}{K_\xi} \right)^2 \right] \quad (4.47)$$

Όπου b_c^* είναι το αδιάστατο πλάτος διεύρυνσης της συγκέντρωσης, το οποίο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του, $b_{cm}^* \approx 0,68 - 0,72$ στη θέση $\Xi_0 \approx 2,10 - 2,35$ με $K_\xi \approx 0,9 - 1,1$. Το αδιάστατο πλάτος b_c^* περιγράφεται από τη σχέση:

$$b_c^* = \frac{b_c}{d_0} F_0^{-1} \quad (4.48)$$

Τα παραπάνω πειραματικά δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν για τον προσδιορισμό της περιοχής της ανωστικής φλέβας από την οποία αποδράττουν οι μάζες που αποκολλώνται. Αυτή η περιοχή περιορίζεται σε μια έκταση για $0,6 \leq \Xi \leq 3,4$ καθώς για μεγαλύτερες τιμές Ξ το πλάτος διεύρυνσης είναι μη γραμμικό.

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του συντελεστή $A = c_B/c_m$ και υποθέτοντας ότι η εγκάρσια κατανομή της συγκέντρωσης είναι τύπου Gauss, ο συντελεστής A μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση:

$$A = \exp \left[- \left(\frac{n_c b_w^*}{b_c^*} \right)^2 \right] \quad (4.49)$$

όπου $n_c \approx 1,9$, η εγκάρσια απόσταση από τον άξονα της φλέβας έως το σημείο που η κατανομή Gauss της συγκέντρωσης μηδενίζεται και b_w^* είναι το αδιάστατο πλάτος διεύρυνσης της ταχύτητας, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$b_w^* = \frac{b_w}{d_0} F_0^{-1} \quad (4.50)$$

Λαμβάνοντας τον μέσον όρο της εξίσωσης (4.49) χρησιμοποιώντας και την εξίσωση (4.47) στην περιοχή $0,6 \leq \Xi \leq 3,4$, προκύπτει ότι ο συντελεστής A κυμαίνεται από την τιμή 0,30 έως 0,40, περίπου.

Ένας δεύτερος τρόπος προσδιορισμού της κατάλληλης τιμής του συντελεστή A για κάθε περίπτωση αρχικής γωνίας εκτόξευσης θ_0 είναι η ελαχιστοποίηση του μεγέθους S_{dif} . Το μέγεθος S_{dif} αποτελεί το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών των υπολογισμένων μεγεθών από τα αντίστοιχα μετρημένα πειραματικά. Για τον υπολογισμό του μεγέθους S_{dif} χρησιμοποιήθηκαν το μέγιστο ύψος ανόδου του άξονα της φλέβας Z_f , η οριζόντια απόστασή του από το ακροφύσιο εξόδου Y_f , η αξονική αραίωση στη μέγιστη θέση της τροχιάς της φλέβας S_m^* ή S_f^* , η αξονική και ολοκληρωμένη αραίωση στη θέση που η τροχιά συναντά το οριζόντιο επίπεδο στη στάθμη του ακροφυσίου S_r^* και S_{ri}^* και η οριζόντια απόσταση αυτής της θέσης Y_r (Σχήμα 4.10). Οι πειραματικές τιμές αυτών των μεγεθών είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία και οι μέσες τιμές τους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3. Στον ίδιο πίνακα παρουσιάζονται και οι τιμές του συντελεστή A που ελαχιστοποιούν το μέγεθος S_{dif} .

Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.3 και τις παρατηρήσεις για τη μεταβολή της συμπαράσυρσης και του συντελεστή A συναρτήσει της αρχικής γωνίας θ_0 επιλέγεται η τιμή του συντελεστή A , η οποία για την περίπτωση κεκλιμένων κυκλικών τυρβωδών φλεβών με αρχική γωνία εκτόξευσης $-75^\circ \leq \theta_0 \leq -15^\circ$ είναι ίση με 0,34. Για την περίπτωση κεκλιμένων κυκλικών τυρβωδών φλεβών με αρχική γωνία εκτόξευσης $-15^\circ \leq \theta_0 \leq -90^\circ$ η κατάλληλη τιμή του συντελεστή είναι $A = 0$. Για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών του κυρτού ορίου του πεδίου διάχυσης, λαμβάνεται $n_c = B_c/b_c \approx 1,9$, σύμφωνα με τις μετρήσεις των εγκαρσίων κατανομών των συγκεντρώσεων από τους Shao & Law (2010), όπου B_c είναι η εγκάρσια απόσταση από τον άξονα της φλέβας, όπου η κατανομή Gauss της συγκέντρωσης μηδενίζεται. Το κοίλο όριο της ανωστικής φλέβας δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί πειραματικά στην περιοχή

Πίνακας 4.3 Τιμές του συντελεστή A , οι οποίες ελαχιστοποιούν την ποσότητα S_{dif} για διάφορες γωνίες αρχικής εκτόξευσης. Η μέση τιμή $\pm$ τυπική απόκλιση του A είναι $0,344 \pm 0,053$ για $\theta_0 \leq 15^\circ$.

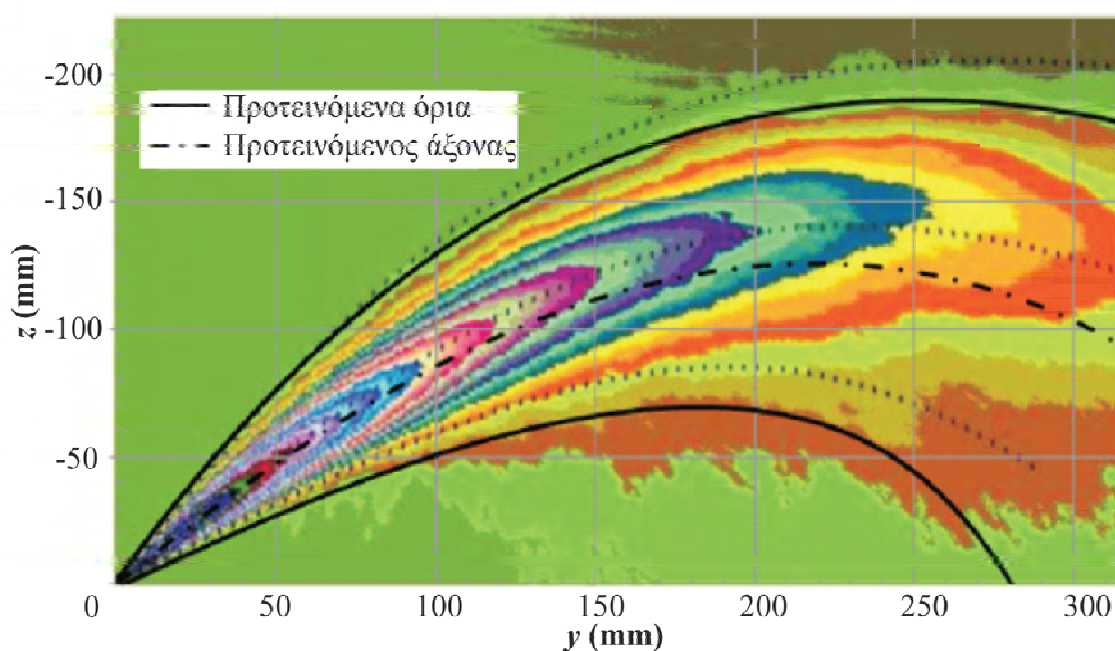
θ_0	-10°	-15°	-30°	-45°	-60°	-75°	Αύξων αριθμός βιβλιογραφίας
Z_f	0,47	0,57	1,12	1,58	2,15	2,46	1-7, 9-12
Y_f				1,98	1,77	1,10	3,7
$S_m^* S_f^*$			0,55	0,47	0,47	0,51	8, 10-12
S_r^*			1,51	1,50	1,68	1,67	5, 8, 10
S_{ri}^*		1,22	1,51	1,72	1,81		3
Y_r				3,84	3,58	2,47	7
A	0,00	0,30	0,38	0,31	0,31	0,42	
1.	Bloomfield & Kerr (2002)			10.	Roberts & Toms (1987)		
2.	Cipolina <i>et al.</i> (2005)			11.	Shao & Law (2010)		
3.	Kikkert <i>et al.</i> (2007)			12.	Zeitoun <i>et al.</i> (1970)		
4.	Lane-Serff <i>et al.</i> (1993)			13.	Lai & Lee (2012)		
5.	Nemlioglou & Roberts (2006)			14.	Oliver (2012)		
6.	Lindberg (1994)			15.	Otranto (2004)		
7.	Papakonstantis <i>et al.</i> (2011a)			16.	Bosanquet <i>et al.</i> (1961)		
8.	Papakonstantis <i>et al.</i> (2011b)			17.	Ferrari & Querzoli (2010)		
9.	Roberts <i>et al.</i> (1997)			18.	Marti <i>et al.</i> (2010)		

όπου υπάρχει η διαφυγή των μαζών που αποκολλώνται, επειδή μεταβάλλουν το πεδίο διάχυσης και καθιστούν ασαφές το κοίλο όριο του κυρίου πεδίου ροής. Συνεπώς, σε αντίθεση με το εξωτερικό (κυρτό) όριο, το γεγονός αυτό καθιστά αμφίβολες τις συγκρίσεις.

Ο Kikkert (2006) πραγματοποίησε μετρήσεις για τον προσδιορισμό του άξονα και των ορίων κεκλιμένων φλεβών αρνητικής άνωσης για αρχικές γωνίες εκτόξευσης που κυμαίνονται από 0° έως 75° (αντιστοιχούν εδώ σε φλέβες με αρχικές γωνίες εκτόξευσης 0° έως -75°), χρησιμοποιώντας τεχνικές laser LA (Laser Attenuation) και LIF (Laser-Induced Fluorescence). Η θέση του άξονα της φλέβας ορίζεται στη θέση που μεγιστοποιείται η εγκάρσια κατανομή των συγκεντρώσεων. Παρατηρήθηκε ότι, παρόλο που οι δύο τεχνικές έδωσαν παρόμοια αποτελέσματα για τον άξονα της φλέβας, η τεχνική LA υποεκτιμά τις τιμές των συγκεντρώσεων σε απόσταση μεγαλύτερη της ακτίνας του ονομαστικού πλάτους b_c , με προέκταση την υποεκτίμηση των ορίων του πεδίου διάχυσης. Με την τεχνική LIF, μετρήθηκαν οι εγκάρσιες κατανομές των συγκεντρώσεων, οι οποίες συμπίπτουν αρκετά

καλά με τις αντίστοιχες κατανομές Gauss, όσον αναφορά το κυρτό (εξωτερικό) όριο της φλέβας. Για το λόγο αυτό, τα πειραματικά δεδομένα του Kikkert από την τεχνική LA υποεκτιμούν τη συνολική διεύρυνση του πεδίου των συγκεντρώσεων (πεδίο διάχυσης) και επομένως τα αντίστοιχα όρια σε ένα ποσοστό 17-25%.

Το Σχήμα 4.10 αποδεικνύει την ικανοποιητική συμπεριφορά του προτεινόμενου μοντέλου, όσον αφορά τον υπολογισμό των ορίων της ανωστικής φλέβας. Στο συγκεκριμένο σχήμα φαίνεται η φωτογραφία του πειράματος με την τεχνική LIF από τον Kikkert (2006) για φλέβα αρνητικής άνωσης με αρχικά χαρακτηριστικά $\theta_0 = -45^\circ$, $F_0 = 48,66$, $Re_0 = 2945$ και $d_0 = 2,45\text{mm}$. Είναι εμφανές ότι στην παρούσα Διατριβή το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει με εξαιρετική ακρίβεια τα όρια του πεδίου διάχυσης, πολύ καλύτερα από το αντίστοιχο μοντέλο που προτείνεται από τον Kikkert. Ωστόσο, ο υπολογισμός του άξονα δεν είναι εξίσου ακριβής. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει τον κεντροβαρικό άξονα της ανωστικής φλέβας υποθέτοντας ότι οι εγκάρσιες κατανομές των αξονικών ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα της φλέβας, γεγονός το οποίο δεν



Σχήμα 4.10 Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης για κεκλιμένη τυρβώδη ανωστική φλέβα σε ήρεμο αποδέκτη χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο μοντέλο με $A = 0,34$ σε σύγκριση με τη μέση εικόνα από το πείραμα (LIF) του Kikkert (2006). Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν την πρόβλεψη του μοντέλου που προτείνεται από τον Kikkert. Οι αρχικές συνθήκες του πειράματος είναι $\theta_0 = -45^\circ$, $F_0 = 48,66$, $Re_0 = 2945$ και $d_0 = 2,45\text{mm}$.

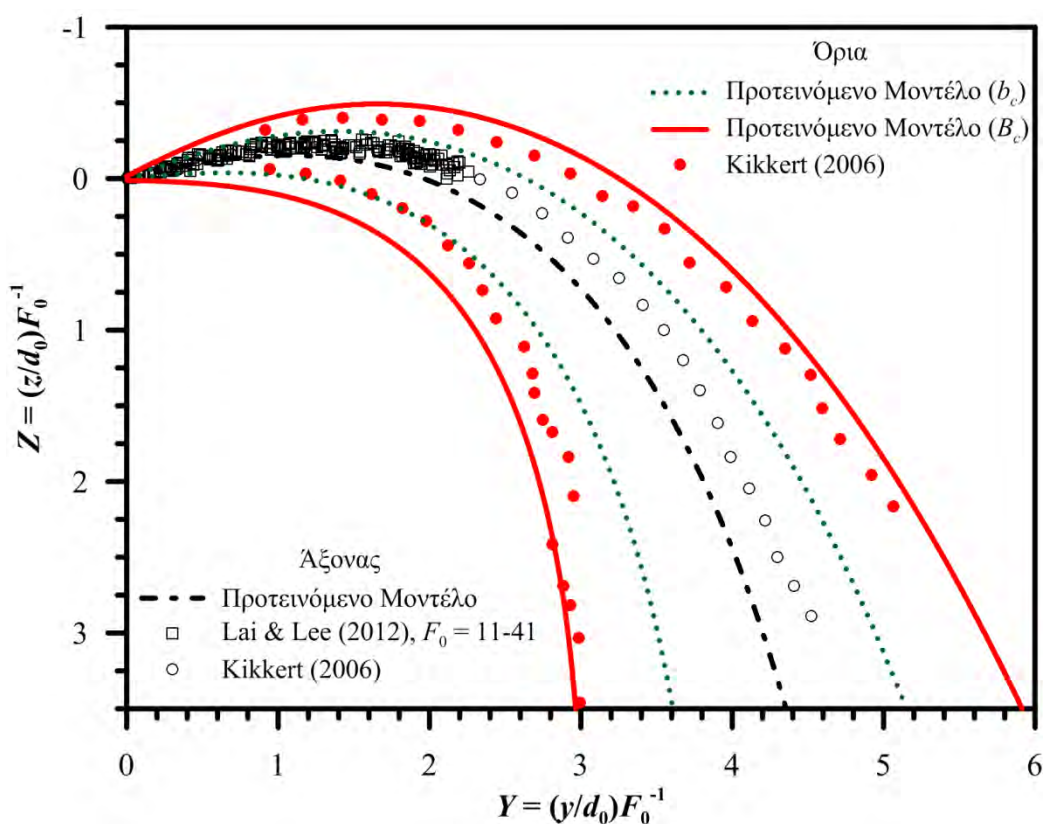
ισχύει απολύτα. Το συγκεκριμένο πρόβλημα εμφανίζεται στις περιπτώσεις φλεβών με αρνητική άνωση και συγκεκριμένα στις περιοχές όπου τα πεδία ροής και διάχυσης παραμορφώνονται εξαιτίας της δευτερεύουσας ροής, λόγω της διαφυγής μαζών.

Προκειμένου να αξιολογηθεί η συμπεριφορά του προτεινόμενου, στη Διατριβή αυτή, μαθηματικού μοντέλου, συγκρίνεται το εξωτερικό (άνω) και εσωτερικό (κάτω) όριο της ανωστικής φλέβας, όπως μετρήθηκαν πειραματικά (Kikkert 2006) με τα αντίστοιχα όρια τα οποία υπολογίζονται τόσο από το προτεινόμενο μοντέλο όσο και από το αντίστοιχο μοντέλο, που έχει προταθεί από τον Kikkert (2006). Η σύγκριση και αξιολόγηση αυτή γίνεται με την βοήθεια της δοκιμής X^2 . Σύμφωνα με τη δοκιμή αυτή, η τιμή του X^2 , όπως αυτή υπολογίστηκε λαμβάνοντας υπόψη το εξωτερικό όριο της ανωστικής φλέβας του μοντέλου, που προτείνεται, με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα του Kikkert είναι $X^2 = 17,03$ ενώ η αντίστοιχη τιμή μεταξύ του μοντέλου του Kikkert και των αποτελεσμάτων του πειράματός του είναι $X^2 = 115,71$ με 72 βαθμούς ελευθερίας ενώ η οριακή τιμή του X^2 για 72 βαθμούς ελευθερίας και για στάθμη εμπιστοσύνης 0,10 είναι 57,1. Για το εσωτερικό όριο της ανωστικής φλέβας οι αντίστοιχες τιμές υπολογίστηκαν ίσες με 34,25 και 338,40 για 53 βαθμούς ελευθερίας με οριακή τιμή 40,34 για στάθμη εμπιστοσύνης ομοίως 0,10. Από τα αναφερόμενα ανωτέρω, προκύπτει ότι τα εξωτερικά όρια της ανωστικής φλέβας όπως προβλέπονται από το προτεινόμενο στη Διατριβή αυτή μοντέλο συγκρινόμενα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του μοντέλου του Kikkert, δείχνουν πολύ καλύτερη συμπεριφορά με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.

Το προτεινόμενο μοντέλο, το οποίο ενσωματώνει τη διαφυγή μαζών, υπολογίζει με εξαιρετική ακρίβεια και τα όρια του πεδίου διάχυσης. Επί πλέον, του Σχήματος 4.10, στα Σχήματα 4.11 έως 4.14 παρουσιάζονται για τέσσερις διαφορετικές αρχικές γωνίες εκτόξευσης, $\theta_0 = -15^\circ, -30^\circ, -45^\circ$ και -60° , οι τροχιές και τα όρια του πεδίου διάχυσης μαζί με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Τα τελευταία είναι διαθέσιμα στη διεθνή βιβλιογραφία και προέρχονται από πειράματα τα οποία έχουν εκτελεστεί με σύγχρονες τεχνικές μεθόδους από διαφορετικούς ερευνητές. Στα σχήματα αυτά, τα όρια του πεδίου διάχυσης παρουσιάζονται με τη μορφή του ονομαστικού πλάτους b_c και με τη μορφή των πραγματικών ορίων B_c . Η ακρίβεια μεταξύ των υπολογισμένων τιμών και των πειραματικών δεδομένων είναι αρκετά ικανοποιητική. Η ακρίβεια στον υπολογισμό των κοίλων (εσωτερικών) ορίων της φλέβας μειώνεται στην περιοχή όπου η κεκλιμένη ανωστική φλέβα επανέρχεται στο αρχικό επίπεδο εκτόξευσης, επειδή ο ακριβής πειραματικός προσδιορισμός της συγκέντρωσης παρεμποδίζεται από την ύπαρξη των

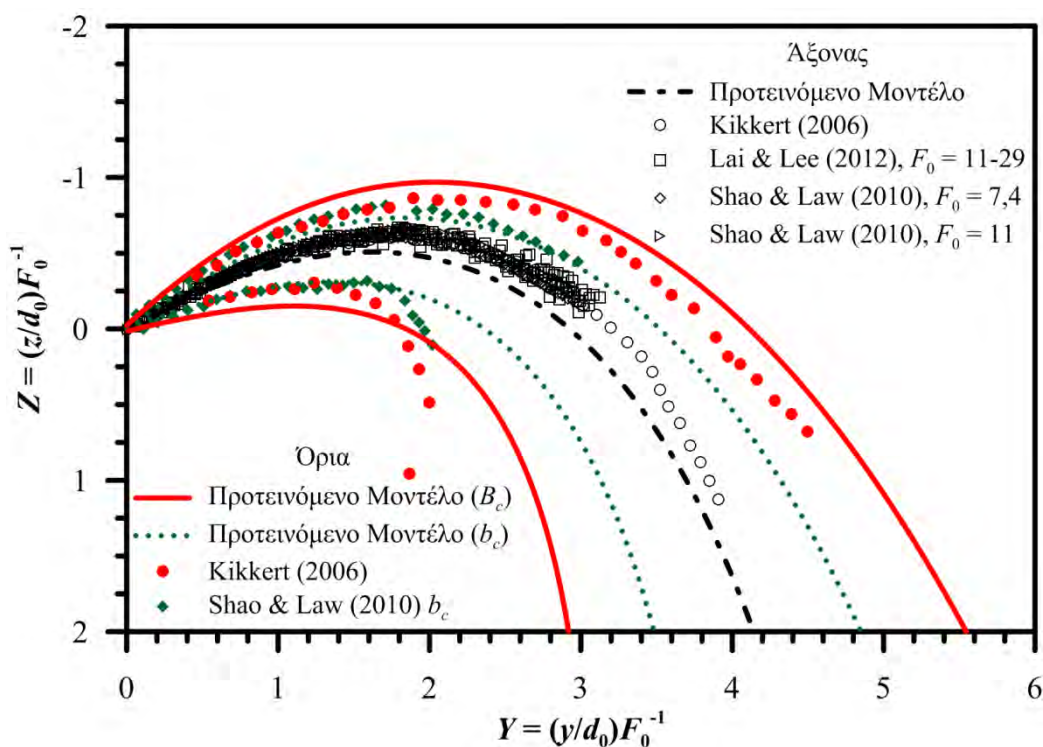
δραπετευουσών μαζών και για τις περιπτώσεις με $\theta_0 < -45^\circ$. Στο σημείο αυτό η σύγκριση καθίσταται αδύναμη και αμφίβολη.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.11 παρουσιάζεται η τροχιά και τα όρια του πεδίου διάχυσης που δημιουργείται από κυκλική ανωστική φλέβα, η οποία εκτοξεύεται υπό $\theta_0 = -15^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη. Οι υπολογισμοί έγιναν με $A = 0,34$. Ο άξονας, που συγκρίνεται με τα πειραματικά δεδομένα των Kikkert (2006) και Lai & Lee (2012), υπολογίζεται με εξαιρετική ακρίβεια έως το ελάχιστο ύψος του (μέγιστο ύψος τροχιάς, αφού τα πειραματικά δεδομένα αναφέρονται σε φλέβες αρνητικής άνωσης) και στη συνέχεια υποεκτιμάται. Τα όρια του πεδίου διάχυσης που παρουσιάζονται έχουν υπολογιστεί υπό τη μορφή του ονομαστικού πλάτους των συγκεντρώσεων b_c και του πραγματικού πλάτους B_c (θέση στην οποία η εγκάρσια κατανομή των συγκεντρώσεων μηδενίζεται). Η σύγκριση πραγματοποιείται με τα πραγματικά όρια όπως παρουσιάζονται από τον Kikkert (2006). Το υπολογισμένο όριο ακολουθεί τα πειραματικά δεδομένα στην εξωτερική πλευρά της φλέβας (κυρτό όριο), ενώ στην εσωτερική πλευρά της φλέβας η πρόβλεψη του πραγματικού ορίου είναι ικανοποιητική.



Σχήμα 4.11 Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης από τυρβώδη ανωστική φλέβα με $\theta_0 = -15^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη.

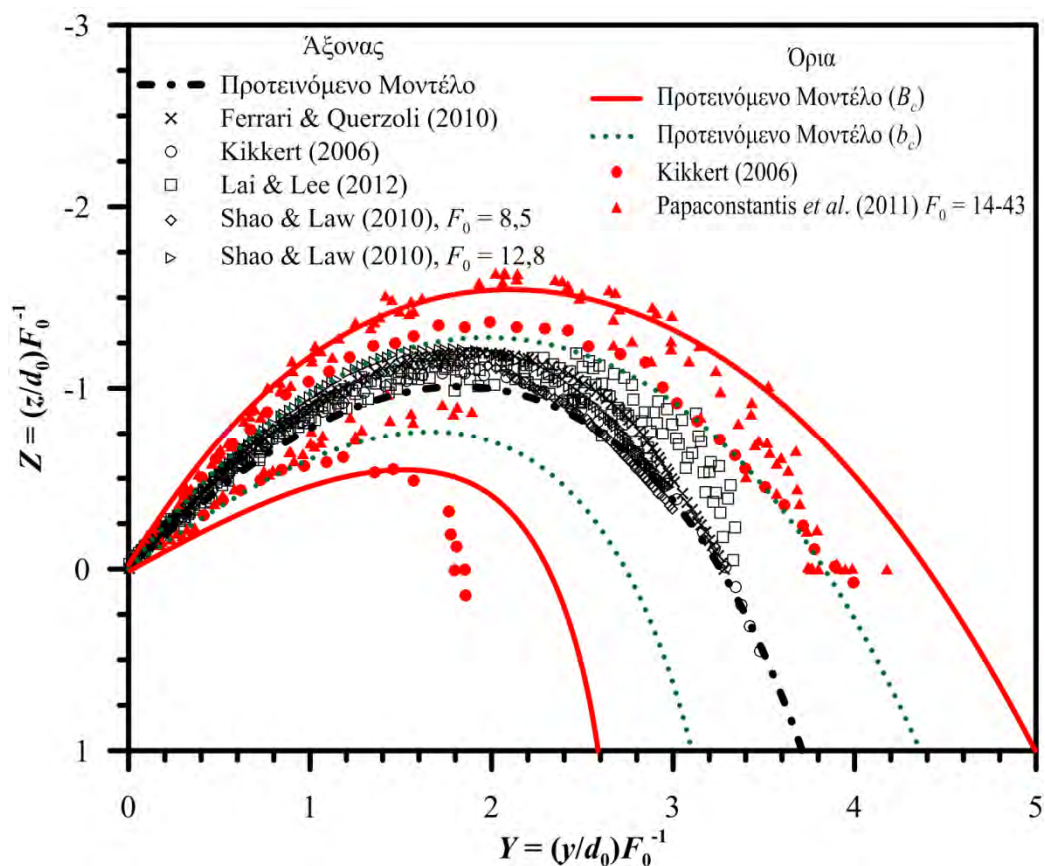
Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.12 παρουσιάζεται η τροχιά και τα όρια του πεδίου διάχυσης που δημιουργείται από κυκλική ανωστική φλέβα, η οποία εκτοξεύεται υπό $\theta_0 = -30^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη. Οι υπολογισμοί έγιναν με $A = 0,34$. Η τροχιά του άξονα που υπολογίζεται συγκρίνεται με τα πειραματικά δεδομένα των Kikkert (2006), Shao & Law (2010) και Lai & Lee (2012). Ο υπολογισμένος άξονας ακολουθεί τα πειραματικά σημεία παρουσιάζοντας μια σχετική ακρίβεια (υπερεκτίμηση). Τα όρια του πεδίου διάχυσης, που προκύπτουν από την εφαρμογή του μοντέλου, υπολογίζονται υπό τη μορφή του ονομαστικού πλάτους των συγκεντρώσεων b_c και του πραγματικού πλάτους B_c . Η αξιολόγηση των μεν ορίων του ονομαστικού πλάτους, που προκύπτει από την εφαρμογή του μοντέλου, γίνεται με την σύγκρισή των με τα πραγματικά όρια, που προκύπτουν από τις μετρήσεις του Kikkert (2006)· τα δε όρια του πραγματικού πλάτους αξιολογούνται, με την σύγκρισή των με τις αντίστοιχες μετρήσεις των Shao & Law (2010). Το εξωτερικό όριο, το πραγματικό και εκείνο που ορίζεται από το ονομαστικό πλάτος, προβλέπονται αρκετά ικανοποιητικά και μάλιστα στην περίπτωση του ονομαστικού πλάτους b_c υπάρχει πλήρης ταύτιση με τα πειραματικά σημεία. Στην εσωτερική πλευρά της φλέβας αρχίζει να υπάρχει μια ασάφεια ως προς τα πειραματικά σημεία εξαιτίας της ύπαρξης των διαφευγουσών μαζών. Παρόλα αυτά το όριο του ονομαστικού πλάτους ταυτίζεται πλήρως



Σχήμα 4.12 Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης από τυρβώδη ανωστική φλέβα με $\theta_0 = -30^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη.

με τα πειραματικά δεδομένα έως τη θέση όπου μεγιστοποιείται η αποκόλληση των μαζών.

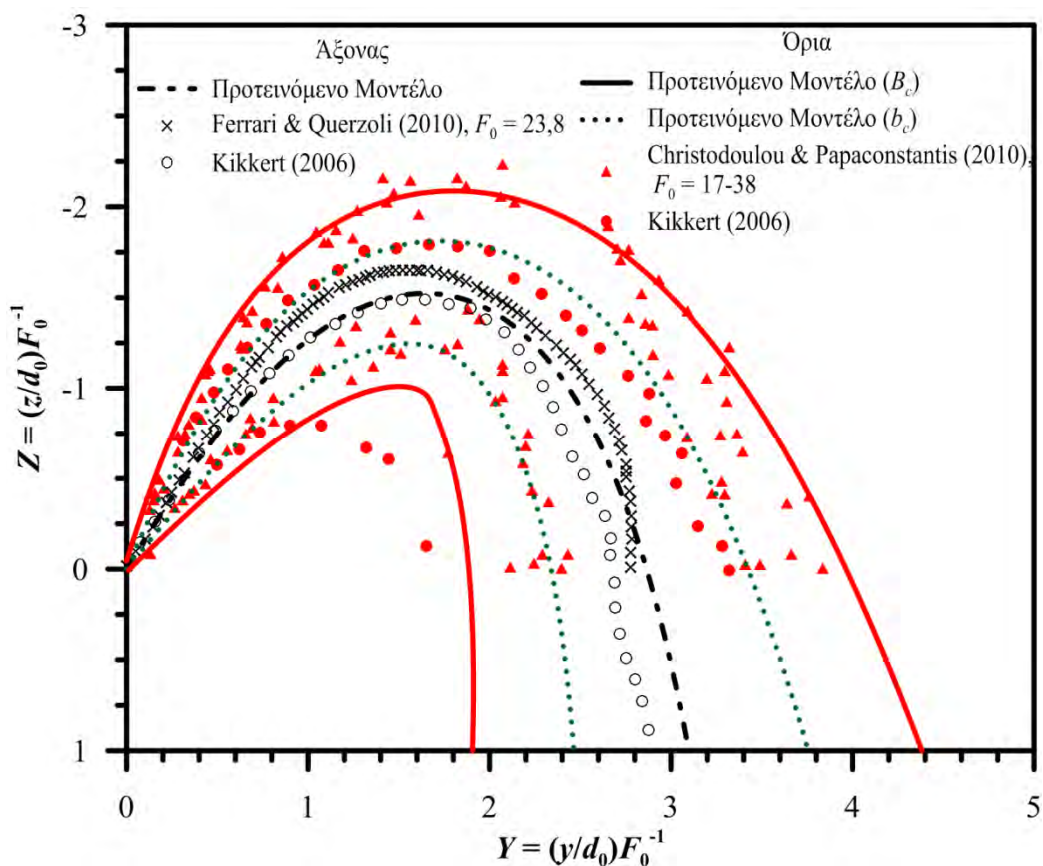
Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.13 παρουσιάζεται η τροχιά και τα όρια του πεδίου διάχυσης που δημιουργείται από κυκλική ανωστική φλέβα, η οποία εκτοξεύεται υπό $\theta_0 = -45^\circ$ σε ήρεμο αποδέκτη. Οι υπολογισμοί και σε αυτή την περίπτωση έγιναν με $A = 0,34$. Ο άξονας της ανωστικής φλέβας που υπολογίζεται, συγκρίνεται με τα πειραματικά δεδομένα των Kikkert (2006), Ferrari & Querzoli (2010), Shao & Law (2010) και Lai & Lee (2012). Ο υπολογισμός του άξονα γίνεται με ικανοποιητική ακρίβεια ειδικά συγκρινόμενος με τα πειραματικά σημεία του Kikkert (2006). Τα όρια του πεδίου διάχυσης που παρουσιάζονται έχουν υπολογιστεί υπό τη μορφή του ονομαστικού πλάτους των συγκεντρώσεων b_c και του πραγματικού πλάτους B_c . Η σύγκριση πραγματοποιείται με τα πραγματικά όρια, όπως παρουσιάζονται από τον Kikkert (2006) και τους Papakonstantis *et al.* (2011). Το υπολογισμένο εξωτερικό όριο συμπίπτει απόλυτα με τα πειραματικά σημεία έως το μέγιστο σημείο καθόδου της φλέβας (για τα πειραματικά δεδομένα, πρόκειται για το μέγιστο σημείο αναρρίχησης καθώς αυτά αναφέρονται σε φλέ-



Σχήμα 4.13 Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης από τυρβώδη ανωστική φλέβα με $\theta_0 = -45^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη.

βες αρνητικής άνωσης) ενώ στη συνέχεια υπερεκτιμάται συγκριτικά με αυτά. Στην εσωτερική πλευρά της φλέβας, η πρόβλεψη του πραγματικού ορίου δεν είναι ακριβής. Η παρατηρούμενη διαφορά μεταξύ των θεωρητικών από τις πειραματικές τιμές είναι πιθανόν να οφείλεται είτε σε μειωμένη πειραματική ακρίβεια, εξαιτίας των μικρών διαφορών της συγκέντρωσης μεταξύ του ορίου της φλέβας και του περιβάλλοντος, είτε σε δευτερεύοντα φαινόμενα, εξαιτίας της αλληλεπίδρασης του κυρίου και του δευτερογενούς πεδίου ροής διάχυσης, λόγω των διαφυγών.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.14 παρουσιάζεται η τροχιά και τα όρια του πεδίου διάχυσης που δημιουργείται από κυκλική ανωστική φλέβα εκτοξευόμενη υπό γωνία $\theta_0 = -60^\circ$ σε ήρεμο αποδέκτη. Οι υπολογισμοί και σε αυτή την περίπτωση έγιναν με $A = 0,34$. Ο άξονας που υπολογίζεται, συγκρίνεται με τα πειραματικά δεδομένα των Kikkert (2006), και Ferrari & Querzoli (2010). Ο υπολογισμός του άξονα συμπίπτει ικανοποιητικά με τα πειραματικά σημεία. Τα όρια του πεδίου διάχυσης που παρουσιάζονται, έχουν υπολογιστεί υπό τη μορφή του ονομαστικού πλάτους των συγκε-



Σχήμα 4.14 Πρόβλεψη της τροχιάς και των ορίων του πεδίου διάχυσης από τυρβώδη ανωστική φλέβα με $\theta_0 = -60^\circ$ εντός ήρεμου αποδέκτη.

ντρώσεων b_c και του πραγματικού πλάτους B_c . Η σύγκριση πραγματοποιείται με τα πραγματικά όρια, όπως παρουσιάζονται από τον Kikkert (2006) και τους Christodoulou & Parakonstantis (2010). Όπως και στην περίπτωση της φλέβας με $\theta_0 = -45^\circ$, το υπολογισμένο εξωτερικό όριο συμπίπτει απόλυτα με τα πειραματικά σημεία έως στο μέγιστο σημείο καθόδου της φλέβας (για τα πειραματικά δεδομένα, πρόκειται για το μέγιστο σημείο αναρρίχησης καθώς αυτά αναφέρονται σε φλέβες αρνητικής άνωσης), ενώ στη συνέχεια υπερεκτιμάται συγκριτικά με αυτά. Στην εσωτερική πλευρά, η πρόβλεψη του πραγματικού ορίου δεν είναι ακριβής. Τα αίτια της ανακρίβειας είναι τα ίδια με εκείνα στην προηγούμενη περίπτωση. Χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο μοντέλο (υιοθετώντας τις διαφυγές των αποκολλώμενων μαζών) υπολογίστηκαν οι αδιάστατες αξονικές αραιώσεις S_m^* και οι ολοκληρωμένες αραιώσεις S_i^* , στις θέσεις (Σχήμα 2.1) του μεγίστου της τροχιάς και στο μέγιστο ύψος αναρρίχησης για κυκλικές ανωστικές φλέβες με αρχικές γωνίες εκτόξευσης $\theta_0 = -15^\circ, -30^\circ, -45^\circ, -60^\circ$ και -75° και αρχικούς πυκνομετρικούς αριθμούς Froude που κυμαίνονται στην περιοχή $10 \leq F_0 \leq 90$. Σημειώνεται ότι η ολοκληρωμένη αραιώση, η οποία προτείνεται από τον Kikkert (2006), χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία μέσω της ακόλουθης εξίσωσης:

$$S_i^* = S_m^* \left(\sqrt{\pi} \lambda K_w \Xi \right)^{-1} \quad (4.51)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη διασπορά των πειραματικών σημείων στις περιοχές υπολογισμού των αραιώσεων, συμπεραίνεται ότι το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει την αραιώση της αξονικής φλέβας στη μέγιστη θέση της τροχιάς και στο μέγιστο ύψος αναρρίχησης (τερματικό ύψος) με ικανοποιητική ακρίβεια.

Στους Πίνακες 4.4 και 4.5 παρουσιάζονται για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης οι ελάχιστες και μέγιστες τιμές για το μέγιστο τερματικό ύψος Z_f και το τερματικό ύψος του άξονα Z_c , αντίστοιχα, όπως υπολογίζονται από το προτεινόμενο μοντέλο της παρούσας Διατριβής για αρχικούς αριθμούς Froude 10 έως 90. Αυτές οι τιμές συγκρίνονται με τις αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις, που είναι διαθέσιμες στη διεθνή βιβλιογραφία.

Στους Πίνακες 4.6 και 4.7 παρουσιάζονται οι ελάχιστες και μέγιστες τιμές για τις οριζόντιες αποστάσεις Y_c και Y_r , αντίστοιχα, όπως υπολογίζονται από το προτεινόμενο μοντέλο της παρούσας Διατριβής για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης και αρχικούς

αριθμούς Froude 10 έως 90. Αυτές οι τιμές συγκρίνονται με τις αντίστοιχες πειραματικές μετρήσεις, που είναι διαθέσιμες στη διεθνή βιβλιογραφία.

Στον Πίνακα 4.8 παρουσιάζονται οι τιμές των αδιάστατων αξονικών αραιώσεων S_m^* και ολοκληρωμένων αραιώσεων S_i^* , κεκλιμένων κυκλικών ανωστικών φλεβών υπολογισμένες στις θέσεις όπου η τροχιά και το εξωτερικό όριο (κυρτό), αντίστοιχα, επανέρχονται στο οριζόντιο επίπεδο εκροής (Σχήμα 2.1).

Στον Πίνακα 4.9 παρουσιάζονται οι τιμές των αδιάστατων αξονικών αραιώσεων S_{mr}^* και ολοκληρωμένων αραιώσεων S_{ir}^* , κεκλιμένων κυκλικών ανωστικών φλεβών υπολογισμένες στις θέσεις όπου η τροχιά και το εξωτερικό όριο (κυρτό), αντίστοιχα, επανέρχονται στο οριζόντιο επίπεδο εκροής (Σχήμα 2.1).

Πίνακας 4.4 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Μέγιστο Τερματικό Ύψος, Z_f .

Γωνία Εκτόξευσης θ_0	-10°	-15°	-30°	-38°	-45°	-52°	-60°	-70°	-75°
Μέγιστο Τερματικό Ύψος Z_f	$Z_f / (F_0 d_0)$								
Παρούσα Εργασία	0,44-0,46	0,47-0,53	0,95-0,99	1,12-1,18	1,36-1,41	1,54-1,61	2,08-2,12	2,37	2,44-2,54
Bloomfield & Kerr (2002)			0,85		1,25		1,63	1,82	1,87
Cipollina <i>et al.</i> (2005)			1,08		1,61		2,32		
Kikkert <i>et al.</i> (2007) (LIF/LA)	0,47(LIF)	0,60/0,57	1,21/1,07	1,51(LIF)	1,78/1,71		2,45/2,28		2,57(LA)
Lane-Serff <i>et al.</i> (1993) ^{*1}		0,57±0,08	1,10±0,11		1,77±0,20		2,33±0,34		2,82±0,53
Lindberg (1994)			1,28		1,57		2,15		
Lai & Lee (2012)		0,44	0,95	1,20	1,58	1,69	2,08		
Nemlioglu & Roberts (2006)		0,68	1,40		2,00		2,60/3,10		3,00
Oliver (2012)		0,63	1,15		1,65		2,21	2,44	2,53
Otranto (2004, από Oliver 2012)			1,01		1,54		2,07		
Papakonstantis <i>et al.</i> (2011b)					1,59		2,15		2,57
Roberts & Toms (1987) ^{*2}							1,99-3,04		
Roberts <i>et al.</i> (1999) ^{*3}							1,84		
Shao & Law (2010)					1,47				
Zeitoun <i>et al.</i> (1970, από Lai & Lee 2012)			1,15		1,43		2,04		
CorJet (από Jirka 2008)	0,41	0,53	0,98	1,25	1,49	1,74	1,96	2,14	2,22

Πίνακας 4.4 (συνέχεια) Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Μέγιστο Τερματικό Ύψος, Z_f .

Γωνία Εκτόξευσης θ_0	-10°	-15°	-30°	-38°	-45°	-52°	-60°	-70°	-75°
Μέγιστο Τερματικό Ύψος Z_f	$Z_f / (F_0 d_0)$								
Kikkert <i>et al.</i> (2007) Μοντέλο	0,36	0,51	1,03	1,32	1,62	1,89	2,21	2,59	2,76
VisJet (από Lai 2010)		0,44	0,86	1,10	1,33	1,55	1,78		

*1 Τα μήκη μετρώνται από τη φανταστική πηγή και όχι από την έξοδο του ακροφυσίου

*2 Στην αντίστοιχη εργασία ενώ παρουσιάζονται τα πειραματικά αποτελέσματα στο συγκεκριμένο διάστημα, οι συγγραφείς προτείνουν την τιμή $Z_f / (F_0 d_0) = 2,08$ όταν $F_0 > 20$

*3 Στην αντίστοιχη εργασία το κατακόρυφο μήκος Z_f μετράται από τον πυθμένα και όχι από την έξοδο του ακροφυσίου, η οποία βρίσκεται 35mm πάνω από τον πυθμένα της δεξαμενής. Η πειραματική τιμή που μετρήθηκε ήταν $Z_f / (F_0 d_0) = 2,20$. Οι Doneker & Jirka (1999), επισημαίνουν ότι αυτή η τιμή χρήζει αναθεώρησης, αφού πρέπει να αφαιρεθεί η απόσταση των 35mm. Υπολογίζοντας για κάθε πείραμα (14 στον αριθμό, από τον Πίνακα 2 της συγκεκριμένης εργασίας) το μέγεθος 35mm / $(F_0 d_0)$ για κάθε τιμή F_0 , στη συνέχεια υπολογίζεται ο μέσος όρος ίσος με 0,36, ο οποίος εν συνεχεία αφαιρείται από την τιμή 2,20 και τελικά προκύπτει η τιμή 1,84. Οι Doneker & Jirka (1999) υπολογίζουν την ποσότητα 35mm / $(F_0 d_0) = 0,40$ για μια τυπική τιμή αριθμού $F_0 = 20$, οπότε προτείνουν τελικά την τιμή $Z_f / (F_0 d_0) = 1,80$

Πίνακας 4.5 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Τερματικό Ύψος Άξονα, Z_c .

Γωνία Εκτόξευσης θ_0	-10°	-15°	-30°	-38°	-45°	-52°	-60°	-70°	-75°
Τερματικό Ύψος Άξονα Z_c	$Z_c / (F_0 d_0)$								
Παρούσα Εργασία	0,10-0,11	0,12-0,18	0,44-0,54	0,67-0,77	0,88-0,98	1,11-1,19	1,36-1,42	1,66-1,68	1,79-1,80
Bosanquet <i>et al.</i> (1961, από Oliver 2012)					1,67				
Cipollina <i>et al.</i> (2005)			0,79		1,17		1,77		
Ferrari & Querzoli (2010)					1,20-1,52		1,65-2,25	1,91-2,60	1,81-2,67
Kikkert <i>et al.</i> (2007) (LIF/LA)		0,21/0,21	0,68/0,54		1,07 (LA)		1,71/1,46		1,90 (LA)
Lai & Lee (2012)		0,21	0,65	0,87	1,19	1,34	1,64		
Oliver (2012)		0,24	0,66		1,09		1,61	1,84	1,89
Papaconstantis <i>et al.</i> (2011b)					1,17		1,68		1,93
Shao & Law (2010)			0,66		1,14				
CorJet (από Jirka 2008)	0,12	0,21	0,58	0,81	1,00	1,20	1,40	1,60	1,67
Kikkert <i>et al.</i> (2007) Μοντέλο	0,12	0,23	0,63	0,90	1,13	1,39	1,68	2,05	2,22
VisJet (από Lai 2010)	0,14	0,21	0,56	0,77	1,00	1,20	1,42		

Πίνακας 4.6 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Οριζόντιο Μήκος Y_c στο Z_c .

Γωνία Εκτόξευσης θ_0	-10°	-15°	-30°	-38°	-45°	-52°	-60°	-70°	-75°
Οριζόντιο Μήκος στο Z_c , Y_c	$Y_c / (F_0 d_0)$								
Παρούσα Εργασία	0,92-0,97	0,90-0,98	1,45-1,51	1,59-1,60	1,59-1,64	1,53-1,62	1,38-1,49	1,07-1,19	0,86-0,98
Bosanquet <i>et al.</i> (1961)					2,68				
Cipollina <i>et al.</i> (2005)			1,95		1,80		1,42		
Kikkert <i>et al.</i> (2007) (LIF/LA)	1,27(LIF)	1,49/1,24	1,85/1,76		1,85 (LA)		1,79/1,60		
Lai & Lee (2012)		1,22	1,95	1,95	2,09	1,87	1,78		
Lindberg (1994)			2,39		1,86		1,82		
Oliver (2012)		1,37	1,75		1,75		1,53	1,13	0,97
Papakonstantis <i>et al.</i> (2011α)					2,03±0,13		1,83±0,08		1,15±0,05
Shao & Law (2010)			1,54		1,69				
CorJet (από Jirka 2008)	0,97	1,20	1,49	1,53	1,52	1,44	1,26	0,95	0,74
Kikkert <i>et al.</i> (2007) Μοντέλο	1,05	1,28	1,71	1,83	1,89	1,88	1,80	1,56	1,35
VisJet (από Lai 2010)	0,89	1,19	1,52	1,58	1,58	1,52	1,34		

Πίνακας 4.7 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για την Οριζόντια Απόσταση Y_r .

Γωνία Εκτόξευσης θ_0	-10°	-15°	-30°	-38°	-45°	-52°	-60°	-70°	-75°
Οριζόντια Απόσταση Y_r	$Y_r / (F_0 d_0)$								
Παρούσα Εργασία	1,64-1,70	1,67-1,96	2,56-2,63	2,76-2,77	2,77-2,82	2,65-2,75	2,38-2,51	1,82-1,97	1,43-1,58
Cipollina <i>et al.</i> (2005)			3,03		2,82		2,25		
Ferrari & Querzoli (2010)					2,91-4,90		2,53-4,22	2,03-3,51	1,52-2,56
Kikkert <i>et al.</i> (2007) (LIF/LA)	2,23 (LIF)	2,58/2,21	3,45/3,13		3,27 (LA)		2,84 (LA)		
Lai & Lee (2012)		2,41	3,18	3,19	3,34	2,87	2,84		
Nemlioglu & Roberts (2006)		2,40	3,30		3,20		3,40/3,10		1,90
Oliver (2012)		2,39	3,08		3,13		2,76	2,00	1,67
Papakonstantis <i>et al.</i> (2011a)					3,78±0,16		3,57±0,10		2,42±0,18
Papakonstantis <i>et al.</i> (2011b)					3,16		2,75		1,80
Roberts <i>et al.</i> (1997)							2,40		
Shao & Law (2010)			3,00		3,33				
CorJet (από Jirka 2008)	1,47	1,90	2,53	2,64	2,62	2,50	2,23	1,64	1,27
Kikkert <i>et al.</i> (2007) Μοντέλο	1,84	2,29	2,96	3,05	3,04	2,96	2,73	2,23	1,88
VisJet (από Lai 2010)		2,15	2,65	2,77	2,78	2,64	2,40		

Πίνακας 4.8 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για την Αξονική Αραίωση (S_m^*) και Ολοκληρωμένη Αραίωση (S_i^*) στο Τερματικό Ύψος.

Γωνία Εκτόξευσης θ_0	-10°	-15°	-30°	-38°	-45°	-52°	-60°	-70°	-75°
Αξονική Αραίωση στο τερματικό ύψος, S_m^*									
Παρούσα Εργασία, στο Z_c		0,26-0,28	0,45-0,47		0,53-0,58		0,49-0,57		0,32-0,38
Παρούσα Εργασία, στο $Z_{\max}$		0,43-0,45	0,57-0,60		0,60-0,66		0,52-0,60		0,32-0,38
Lai & Lee (2012) ^{*1}		0,27	0,40	0,45	0,45	0,47	0,44		
Oliver (2012) ^{*2}		0,25	0,34		0,39		0,42		0,39
Papakonstantis <i>et al.</i> (2011b) ^{*2}					0,52±0,05		0,56±0,05		0,51±0,02
Roberts & Toms (1987)							0,46		
Shao & Law (2010) ^{*1}			0,62-0,66		0,46				
Zeitoun <i>et al.</i> (1970) ^{*1}			0,36		0,42		0,56		
VisJet		0,24	0,31	0,32	0,32	0,31	0,29		0,23
Ολοκληρωμένη Αραίωση, S_i^*									
Παρούσα Εργασία, στο Z_c		1,08-1,16	1,16-1,27		1,14-1,29		0,98-1,14		0,65-0,78
Παρούσα Εργασία, στο $Z_{\max}$		1,20-1,29	1,25-1,38		1,18-1,35		1,00-1,17		0,65-0,78
Kikkert (2006) (LA)		1,04±0,02	1,07±0,04		1,00±0,02		1,07±0,03		

^{*1} Οι τιμές είναι μετρημένες στο $Z_{\max}$

^{*2} Οι τιμές είναι μετρημένες στο Z_c

Πίνακας 4.9 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για την Αξονική Αραίωση (S_{mr}^*) και Ολοκληρωμένη Αραίωση (S_{ir}^*) στη Οριζόντια Απόσταση Y_r .

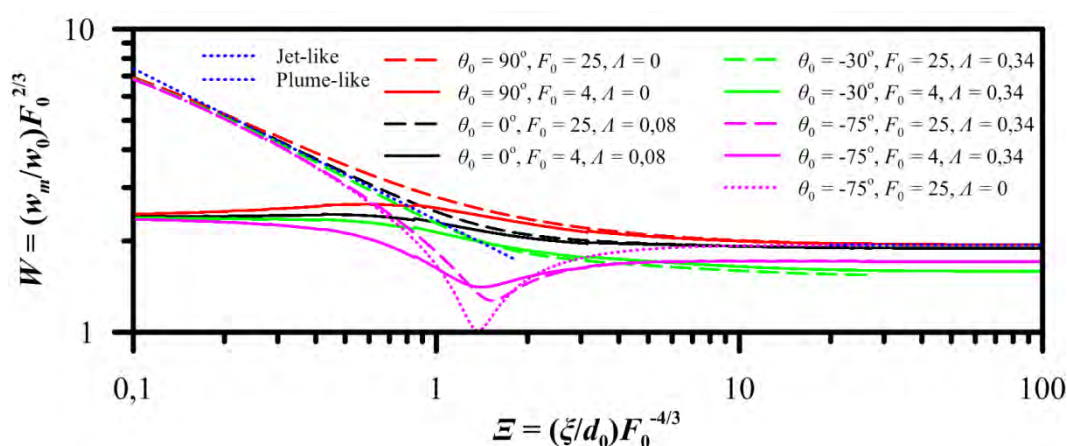
Γωνία Εκτόξευσης θ_0	-10°	-15°	-30°	-38°	-45°	-52°	-60°	-70°	-75°
Αξονική Αραίωση στο Y_r, S_{mr}^*									
Παρούσα Εργασία, στο Y_r	1,09-1,15	1,65-1,75			2,05-2,22		2,16-2,37		1,72-1,84
Παρούσα Εργασία, στο Y_{er}	1,11-1,18	1,65-1,78			2,06-2,29		2,16-2,46		1,73-1,90
Lee & Lai (2012)	0,43	0,82	0,99		1,09	1,10	1,07		
Marti et al. (2010)							1,71		
Nemlioglu & Roberts (2006)	1,40	1,90			1,70		1,70		1,80
Oliver (2012)	0,48	0,84			1,22		1,55		1,53
Papakonstantis <i>et al.</i> (2011b)					1,55±0,14		1,68±0,10		1,67±0,15
Roberts & Toms (1987)							1,02		
Roberts <i>et al.</i> (1997)							1,60±0,12		
Shao & Law (2010)		1,18-1,45			1,26				
Zeitoun et al. (1970)							1,12		
VisJet (από Lai 2010)	0,41	0,64	0,73		0,77	0,81	0,83		
Ολοκληρωμένη Αραίωση, S_{ir}^*									
Παρούσα Εργασία, στο Y_r	1,70-1,82	2,00-2,18			2,20-2,44		2,21-2,47		1,84-1,99
Παρούσα Εργασία, στο Y_{er}	1,70-1,85	2,01-2,23			2,20-2,48		2,21-2,51		1,85-2,03
Kikkert (2006) (LA)	1,22±0,03	1,51±0,04			1,72±0,10		1,82±0,07		

4.1.4 Εφαρμογή και Αξιολόγηση Προτεινόμενου Μοντέλου

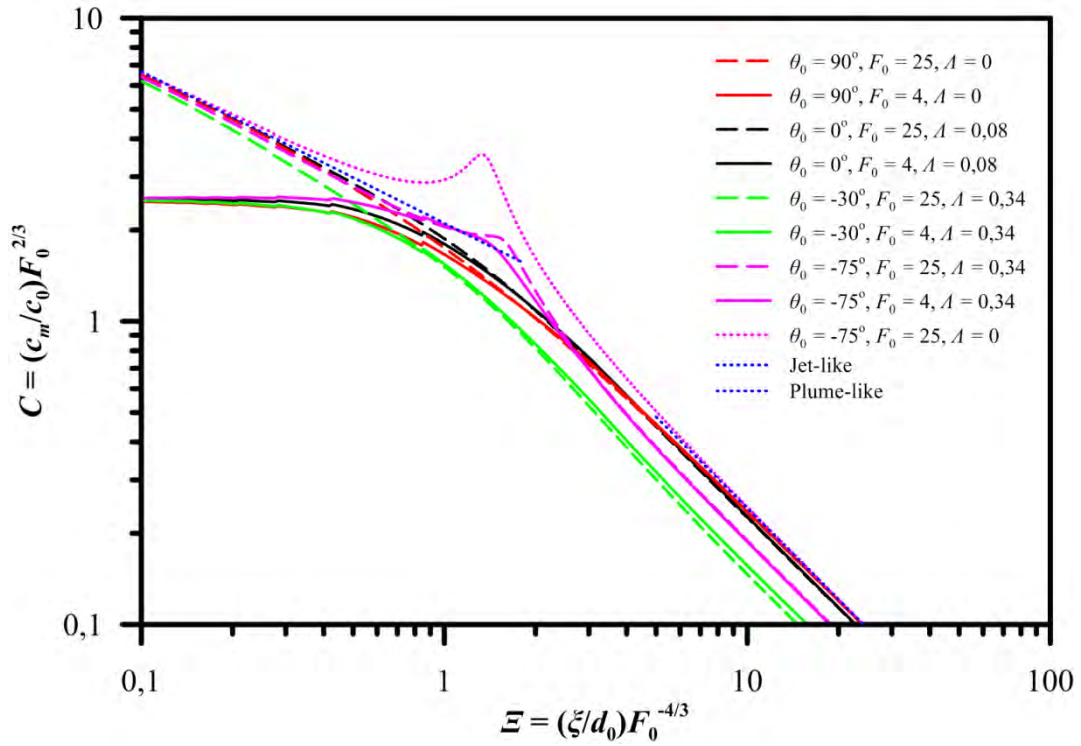
Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μοντέλο έχει επαρκώς ελεγχθεί στα προηγούμενα κεφάλαια, χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων για δισδιάστατες και κυκλικές κεκλιμένες ανωστικές φλέβες.

Στα Σχήματα 4.15 και 4.16 παρουσιάζεται η μεταβολή των αδιάστατων αξονικών ταχυτήτων $W = (w_m / w_0) F_0^{2/3}$ και συγκεντρώσεων $C = (c_m / c_0) F_0^{2/3}$, αντίστοιχα, συναρτήσει της αδιάστατης αξονικής απόστασης $\Xi = (\xi / d_0) F_0^{-4/3}$ για την περίπτωση της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν με $F_0 = 4$ και 25, για τις περιπτώσεις κατακόρυφης ($\theta_0 = 90^\circ$) με $A = 0$, οριζόντιας ($\theta_0 = 0^\circ$) με $A = 0,08$ και αρνητικών αρχικών γωνιών ($\theta_0 = -30^\circ$ και -75°) με $A = 0,34$. Υπάρχει ένας πρόσθετος υπολογισμός για την περίπτωση $\theta_0 = -75^\circ$ με $A = 0$.

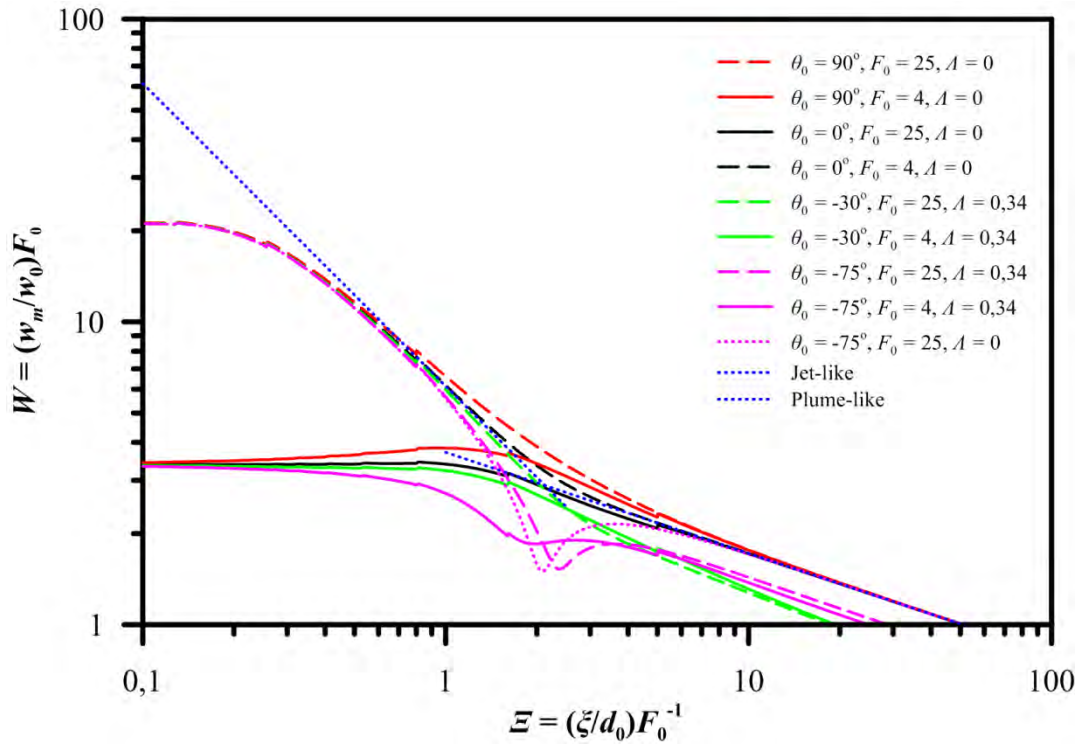
Στα Σχήματα 4.17 και 4.18 παρουσιάζεται η μεταβολή των αδιάστατων αξονικών ταχυτήτων $W = (w_m / w_0) F_0$ και συγκεντρώσεων $C = (c_m / c_0) F_0$, αντίστοιχα, συναρτήσει της αδιάστατης αξονικής απόστασης $\Xi = (\xi / d_0) F_0^{-1}$ για την περίπτωση της κυκλικής κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν με $F_0 = 4$ και 25, για τις περιπτώσεις κατακόρυφης ($\theta_0 = 90^\circ$) με $A = 0$, οριζόντιας (0°) με $A = 0$ και αρνητικών αρχικών γωνιών (-30° και -75°) με $A = 0,34$. Υπάρχει ένας πρόσθετος υπολογισμός για την περίπτωση $\theta_0 = -75^\circ$ με $A = 0$.



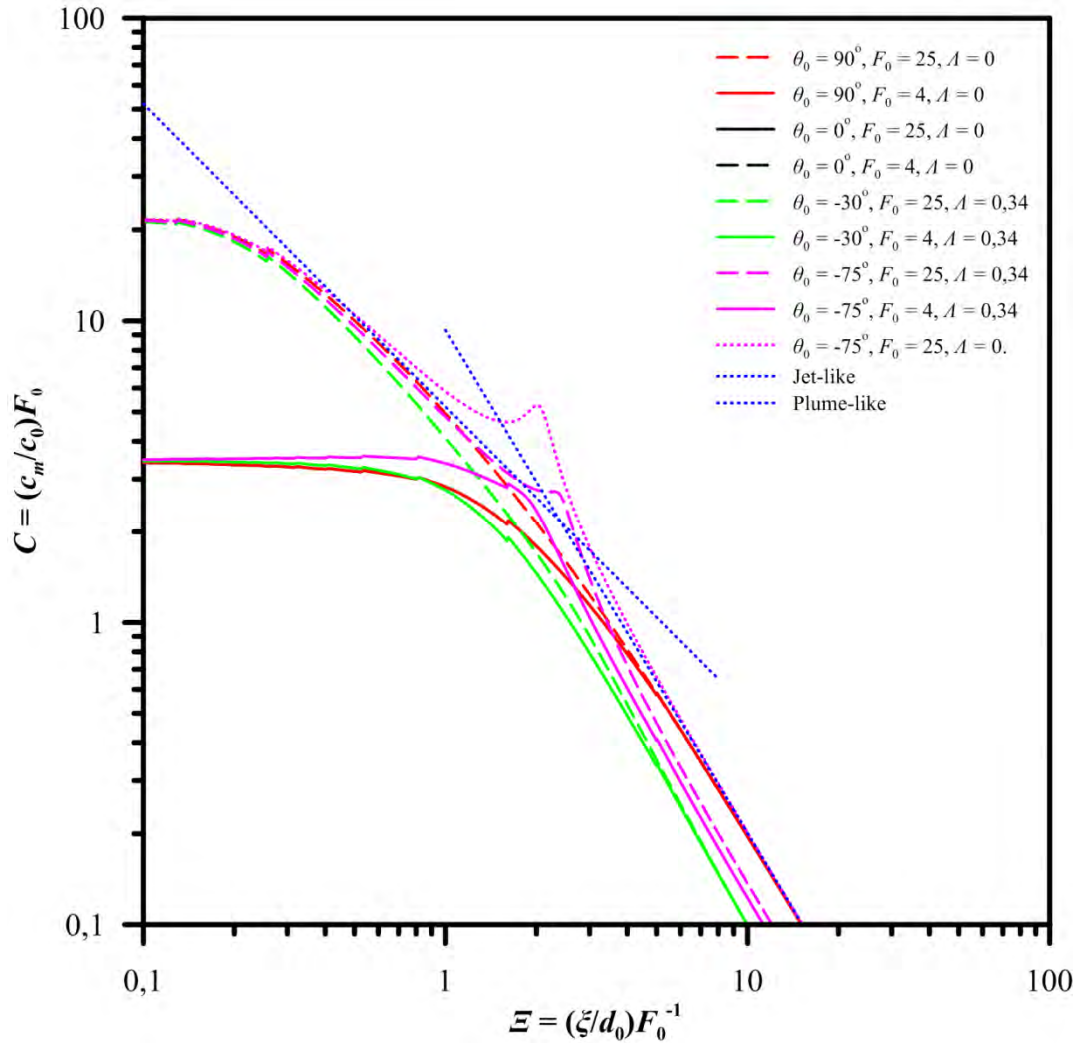
Σχήμα 4.15 Μεταβολή αδιάστατων αξονικών ταχυτήτων κεκλιμένης δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0 .



Σχήμα 4.16 Μεταβολή αδιάστατων αξονικών συγκεντρώσεων κεκλιμένης δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0 .



Σχήμα 4.17 Μεταβολή αδιάστατων αξονικών ταχυτήτων κεκλιμένης κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0 .



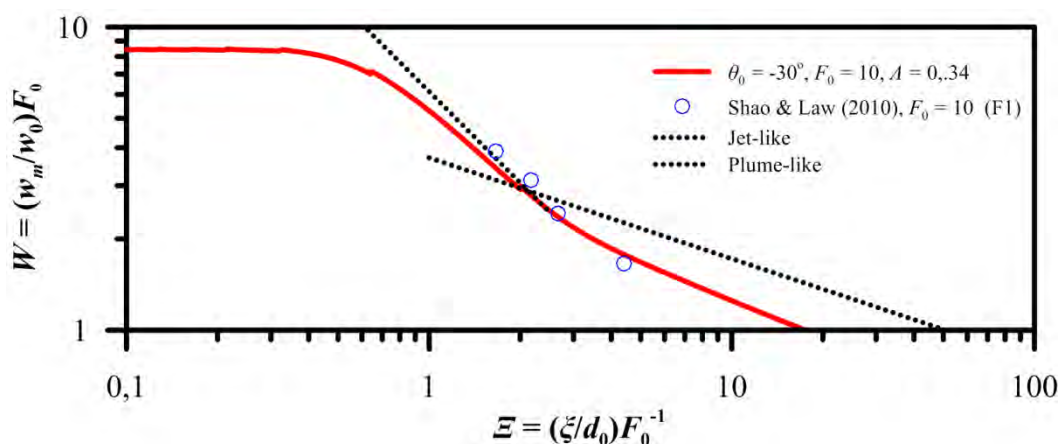
Σχήμα 4.18 Μεταβολή αδιάστατων αξονικών συγκεντρώσεων κεκλιμένης κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη για διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0 .

Στα παραπάνω διαγράμματα παρουσιάζεται κάθε φορά και η ασυμπτωτική συμπεριφορά του κάθε μεγέθους για τις περιπτώσεις φλέβας πλήρους και μηδενικής άνωσης. Επισημαίνεται, ότι η παρουσίαση της πρόβλεψης του προτεινόμενου μοντέλου για γωνία $\theta_0 = -75^\circ$ με $A = 0$ πραγματοποιείται ώστε να παρουσιαστεί το σφάλμα των υπολογισμών αν αγνοηθεί η ύπαρξη της διαφυγής των μαζών στις περιπτώσεις αρνητικών γωνιών.

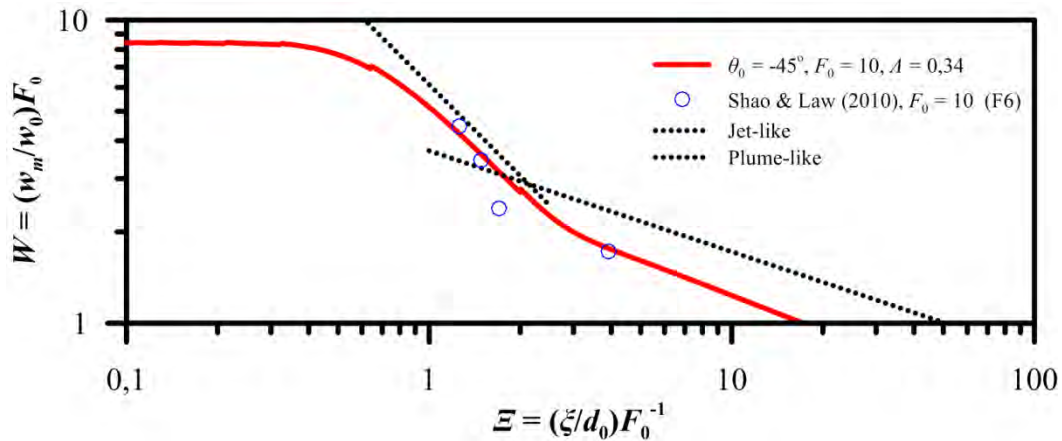
Για την περίπτωση των κατακόρυφων ανωστικών φλεβών, επίπεδων και κυκλικών, επισημαίνεται από τον Yannopoulos (2006) ότι οι οριακές συμπεριφορές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων διαφοροποιούνται από τα πειραματικά δεδομένα σε ένα ποσοστό λιγότερο του 9%. Για συνήθεις τιμές του αριθμού F_0 , οι μεγαλύτερες διαφορές σε σχέση με την αρχική γωνία εκροής, εμφανίζονται στην ενδιάμεση περιοχή

άνωσης $0,5 \leq \Xi \leq 5$. Στην περίπτωση της οριζόντιας εκροής, οι διαφορές συγκριτικά με την αντίστοιχη κατακόρυφη περίπτωση είναι μικρές. Για τη δισδιάστατη φλέβα, οι διαφορές υπολογίζονται στο 12,4% και -9,2% για τις ταχύτητες και τις συγκεντρώσεις, αντίστοιχα. Για τις κυκλικές φλέβες, οι διαφορές ανέρχονται στο 13,4% για τις ταχύτητες και -13,7% για τις συγκεντρώσεις. Στις κεκλιμένες ανωστικές φλέβες εμφανίζονται αυξημένες διαφορές από τις αντίστοιχες κατακόρυφες περιπτώσεις. Έτσι, για τις δισδιάστατες φλέβες οι διαφορές στις ταχύτητες ανέρχεται στο 52% περίπου, και στο -79% για τις συγκεντρώσεις. Οι αντίστοιχες τιμές για τις κυκλικές φλέβες είναι 71% και -17%, αντίστοιχα.

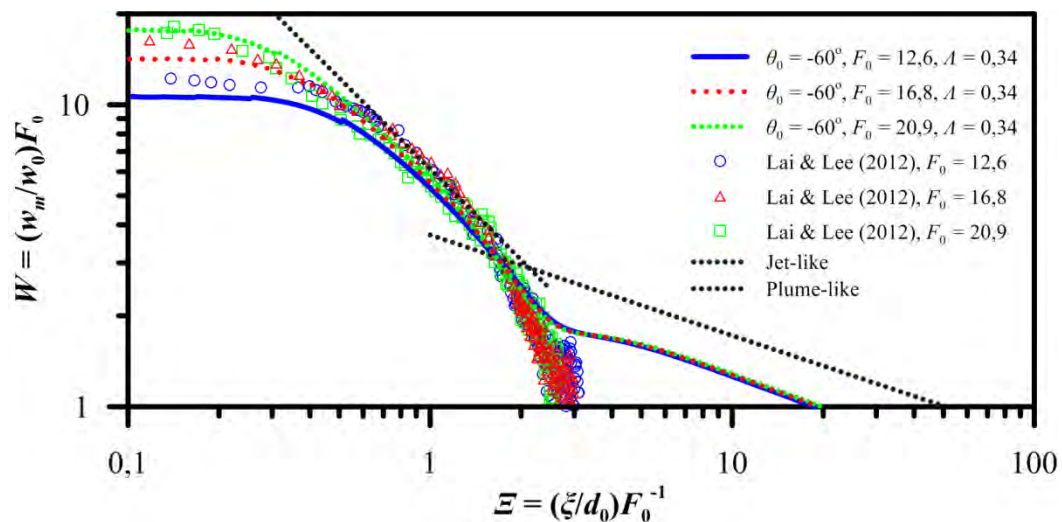
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στην περιοχή όπου οι ανωστικές φλέβες αποκτούν συμπεριφορά φλεβών πλήρους άνωσης ($5 \leq \Xi \leq 50$). Οι κεκλιμένες ανωστικές φλέβες παρουσιάζουν μειωμένες τιμές κατά 20,4% και 32,3% για τις αξονικές ταχύτητες και μειωμένες κατά 38,9% και 55,5% για τις αξονικές αραιώσεις, για τις δισδιάστατες και κυκλικές φλέβες, αντίστοιχα, συγκριτικά με τις αντίστοιχες περιπτώσεις που δεν λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο της διαφυγής των μαζών που αποκολλώνται. Στο προτεινόμενο μοντέλο που λαμβάνει υπόψη το φαινόμενο της διαφυγής των αποκολλώμενων μαζών προσεγγίζει ικανοποιητικά τις πειραματικές μετρήσεις, όπως φαίνεται και στα αποτελέσματα των διαγραμμάτων των Σχημάτων 4.19 έως 4.21. Σε αυτά τα σχήματα παρουσιάζονται οι μεταβολές των αξονικών ταχυτήτων για τις περιπτώσεις κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών με αρχικές γωνίες εκτόξευσης $\theta_0 = -30^\circ$, -45° και -60° . Οι προβλέψεις συγκρίνονται με αντίστοιχα πειραματικά αποτελέσματα. Για τις περιπτώσεις με $\theta_0 = -30^\circ$ και -45° (Σχήματα 4.19 και 4.20), οι συγκρίσεις γίνονται με τα



Σχήμα 4.19 Μεταβολή αξονικών ταχυτήτων κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη με $\theta_0 = -30^\circ$ συγκρινόμενη με πειραματικά δεδομένα.



Σχήμα 4.20 Μεταβολή αξονικών ταχυτήτων κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη με $\theta_0 = -45^\circ$ συγκρινόμενη με πειραματικά δεδομένα.



Σχήμα 4.21 Μεταβολή αξονικών ταχυτήτων κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός ήρεμου αποδέκτη με $\theta_0 = -60^\circ$ συγκρινόμενη με πειραματικά δεδομένα.

πειραματικά δεδομένα των Shao & Law (2010) και συγκεκριμένα με εκείνα μόνο (περιπτώσεις F1 και F6), στα οποία ελαχιστοποιείται η επίδραση των τοιχωμάτων, όπως αναφέρεται και από τους ίδιους τους ερευνητές. Στο Σχήμα 4.20, η περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας με $\theta_0 = -60^\circ$ συγκρίνεται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των πειραματικών μετρήσεων των Lai & Lee (2012). Είναι εμφανές ότι το μοντέλο ακολουθεί τα πειραματικά δεδομένα σε κάθε περίπτωση θ_0 . Στο Σχήμα 4.21, η αναντιστοιχία μοντέλου και πειραματικών δεδομένων για $\Xi > 2$, οφείλεται στην επιρροή του πυθμένα, που μεταβάλλει την πραγματική εικόνα των αξονικών ταχυτήτων σε εκείνη την περιοχή.

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε δεν μπορεί να προβλέψει τα χαρακτηριστικά του πεδίου ροής και διάχυσης για ανωστικές φλέβες με αρχική γωνία εκτόξευσης $\theta_0 < -75^\circ$. Σε αυτή την περίπτωση η ανωστική φλέβα αποτελείται από δύο κλάδους. Ο κλάδος που κατέρχεται έχει μεγάλη αδράνεια και είναι περισσότερο άκαμπτος συγκριτικά με τον ανερχόμενο κλάδο που κυριαρχείται από τις δυνάμεις της άνωσης. Εξαιτίας της συμπαράσυρσης στον αναδύομενο κλάδο, ο άξονάς του πλησιάζει τον κατερχόμενο κλάδο, και συντελείται αλληλο-ανταλλαγή μαζών, φαινόμενο το οποίο δεν λαμβάνεται υπόψη στο παρόν μοντέλο.

4.2 ΠΕΔΙΟ ΚΕΚΛΙΜΕΝΗΣ ΤΥΡΒΩΔΟΥΣ ΑΝΩΣΤΙΚΗΣ ΦΛΕΒΑΣ ΣΕ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ

4.2.1 Κεκλιμένη Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα

Θεωρείται μία κεκλιμένη δισδιάστατη τυρβώδης ανωστική φλέβα αρχικής πυκνότητας ρ_0 , η οποία εκρέει από σχισμή πλάτους d_0 στην περίπτωση δισδιάστατης ανωστικής φλέβας ή από κυκλικό ακροφύσιο διαμέτρου d_0 στην περίπτωση κυκλικής ανωστικής φλέβας εντός ρευστού αποδέκτη μεγάλων διαστάσεων με οριζόντια ομοιόμορφη ταχύτητα u_a και ομοιόμορφη πυκνότητα ρ_a . Στην έξοδο, το ρευστό της φλέβας έχει αρχική ταχύτητα w_{d0} και πυκνότητα ρ_0 , λίγο μικρότερη από την πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού ($\rho_a \geq \rho_0$). Το σχηματιζόμενο πεδίο ροής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.22, περιγράφεται μαθηματικά χρησιμοποιώντας ένα σύστημα ορθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων $O(\eta, \psi, \xi)$ στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας ή ένα καμπυλόγραμμο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων $O(\varphi, r, \xi)$ όταν πρόκειται για κυκλική ανωστική φλέβα, εντεταγμένο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x, y, z)$, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη. Ο άξονας z είναι κατακόρυφος, ο άξονας η είναι οριζόντιος και παράλληλος προς τον άξονα x (κάθετος στο επίπεδο του χαρτιού) και ο άξονας ξ ακολουθεί την τροχιά της ανωστικής φλέβας. Τα συστήματα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφα.

Στο Σχήμα 4.22 παρουσιάζεται η μορφή των πεδίων ροής και μείξης που σχηματίζονται, τα συστήματα συντεταγμένων και μερικά από τα βασικά μεγέθη της μέσης ροής. Οι εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων προσεγγίζονται αρκετά καλά με κατανομές τύπου Gauss. Η υπερέχουσα (excess) ταχύτητα w_d , που είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ξ' , ακολουθεί την κατανομή Gauss και σχηματίζει γωνία θ

$$w_{d\xi} = w_d \cos(\theta - \omega) \quad (4.53)$$

όπου w_d είναι η εγκάρσια κατανομή τύπου Gauss της μέσης υπερέχουσας ταχύτητας στον άξονα ζ' της φλέβας. Η σχέση με την οποία συνδέεται η γωνία θ με τη γωνία ω προκύπτει γεωμετρικά από το Σχήμα 4.22 και περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\theta = \omega + \arcsin\left(\frac{u_a}{w_{md}} \sin \omega\right) \quad (4.54)$$

Έχοντας κάνει τη παραδοχή ότι η εγκάρσια κατανομή των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων διατηρεί τη μορφή τύπου Gauss, το ονομαστικό πλάτος της φλέβας για το πεδίο των ταχυτήτων b_w και των συγκεντρώσεων b_c προσδιορίζεται από εκείνο το σημείο της κατανομής Gauss, στο οποίο η τιμή της ταχύτητας και της συγκέντρωσης, αντίστοιχα, καθίσταται ίση με το $1/e$ της μέγιστης τιμής (της τιμής στον άξονα).

Ο ρυθμός εξάπλωσης της ανωστικής φλέβας διαφέρει στην περίπτωση που ο αποδέκτης είναι κινούμενος από εκείνη, όταν παραμένει ακίνητος. Στη βιβλιογραφία (Wood 1993, Lee & Seo 2000, Davidson & Wang 2002 και Kim *et. al.* 2002) προτείνεται μια ημι-εμπειρική εξίσωση, που περιγράφει το ρυθμό εξάπλωσης των δισδιάστατων και κυκλικών ανωστικών φλεβών.

Μέσω της διαστατικής ανάλυσης προκύπτει ότι το πρόβλημα περιγράφεται από τέσσερις αδιάστατες μεταβλητές. Αυτές οι μεταβλητές είναι ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude F_0 , η ανηγμένη αξονική απόσταση Ξ ή διαφορετικά οι αδιάστατες τεταγμένες X και τετμημένες Z , που προσδιορίζουν τον άξονα της φλέβας, η γωνία ω του επιπέδου της φλέβας ως προς το οριζόντιο επίπεδο και η ανηγμένη ταχύτητα ρεύματος U_a^* που ορίζεται ως εξής:

$$\text{Δισδιάστατες Ανωστικές Φλέβες} \quad U_a^* = \frac{u_a}{\beta_0^{1/3}} \quad (4.55)$$

$$\text{Κυκλικές Ανωστικές Φλέβες} \quad U_a^* = \frac{u_a}{w_{d0}} F_0 \quad (4.56)$$

και αντιστοιχεί σε ένα τύπο Froude ρεύματος/φλέβας.

4.2.2 Κεκλιμένη Δισδιάστατη Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα

4.2.2.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος

Η φλέβα, όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά υπό την ταυτόχρονη επίδραση των δυνάμεων ορμής και άνωσης. Τα αναπτυσσόμενα πεδία ροής και μείζης σε κάθε εγκάρσια διατομή της φλέβας θεωρείται ότι παραμένουν αρκούντως συμμετρικά ως προς τον άξονά της σε κάθε εγκάρσια διατομή της φλέβας και προσεγγίζονται αρκετά καλά με κατανομές τύπου Gauss.

Οι εξισώσεις της συνεχείας, της διατήρησης της ορμής και της μάζας του ιχνηθέτη, όπως και στην περίπτωση του ήρεμου αποδέκτη, διατυπώνονται βάσει της παραδοχής Reynolds σε ένα τοπικό σύστημα των ορθογωνίων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων $O(\eta, \psi, \xi)$, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3 και εφαρμόστηκε στην αντίστοιχη περίπτωση του στάσιμου αποδέκτη. Το καμπυλόγραμμο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων είναι εντεταγμένο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x, y, z)$. Για την περίπτωση των επίπεδων ανωστικών φλεβών, η ανηγμένη ταχύτητα ρεύματος U_a^* , περιγράφεται από την εξίσωση (4.55), η οποία απλοποιείται στην ακόλουθη σχέση:

$$U_a^* = \frac{u_a}{w_{d0}} F_0^{2/3} \quad (4.57)$$

Για την εξαγωγή των εξισώσεων γίνονται οι συνήθεις παραδοχές και προσεγγίσεις όπως πραγματοποιήθηκε και στην περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας (Yannopoulos 2006 και Bloutsos & Yannopoulos 2009). Επίσης, στο σύστημα των εξισώσεων ενσωματώνεται η συνεισφορά της τύρβης (όροι $2^{\text{ης}}$ τάξης) στις εισροές ορμής και άνωσης (Yannopoulos 2006, 2010 και Yannopoulos & Bloutsos 2012). Λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία της ροής, οι παραπάνω εξισώσεις διατυπώνονται ακολούθως υπό τη μορφή διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \quad (4.58)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = g'_0 h c \sin \omega + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial \psi} \quad (4.59)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} - \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = -g'_0 h c \cos \omega - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(hp_d)}{\partial \psi} \quad (4.60)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη

$$\frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} + \frac{\partial(huc)}{\partial \psi} = -\frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} + S_0 \quad (4.61)$$

όπου w η συνιστώσα της μέσης ταχύτητας στον άξονα ξ και w' η διακύμανσή της, u και u' τα αντίστοιχα μεγέθη στον άξονα ψ , για την τυχαία θέση (η, ψ, ξ) , ω είναι η τοπική κλίση του άξονα ξ ως προς την οριζοντία, c η μέση τιμή της συγκέντρωσης, ρ είναι η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση, w'^2 , $w'c'$, $u'c'$ είναι οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u και c , αντίστοιχα, $\tau_{\psi\xi}$ είναι η μέση τυρβώδης διατμητική τάση και p_d η δυναμική πίεση. Ο μετρικός συντελεστής του ορθογωνίου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων ορίζεται από τη σχέση $h = 1 + \psi \frac{d\omega}{d\xi}$. Ο

όρος πηγής των αποκολλώμενων μαζών που αποδράττουν περιγράφεται από την εξίσωση

$$S_0 = \frac{\partial(hq_\psi)}{\partial \psi}, \text{ με } q_\psi \text{ το φορτίο των αποκολλώμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη } \psi$$

διεύθυνση. Στη μελέτη της ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη δεν λαμβάνονται υπόψη οι αποκολλώμενες μάζες, συνεπώς ο όρος πηγής S_0 μηδενίζεται.

Οι εξισώσεις (4.58) έως (4.61) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \Delta \text{ια } \psi = 0: \quad w &= w_{md} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega, \quad u = 0, \quad c = c_m, \quad \tau_{r\xi} = u'c, \quad p_d = p_{dm}, \\ h &= 1 \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ια } \psi = -B_w \quad w &= u_a \cos \omega, \quad u = u_{-Bw} + u_a \sin \omega, \quad c = \tau_{\psi\xi} = u'c' = 0, \quad p_d = p_{de}, \\ h &= h_{-Bw} = 1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ια } \psi = +B_w \quad w &= u_a \cos \omega, \quad u = u_{+Bw} + u_a \sin \omega, \quad c = \tau_{\psi\xi} = u'c' = 0, \quad p_d = p_{de}, \\ h &= h_{+Bw} = 1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Στην περίπτωση του κινουμένου αποδέκτη γίνεται η παραδοχή ότι στη ZEF οι εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w_{d\xi}}{w_{md}} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_w^2}\right) \quad (4.65)$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_c^2}\right) \quad (4.66)$$

όπου w_{md} είναι η μέση υπερέχουσα ταχύτητα στον άξονα ξ' της φλέβας και c_m είναι η μέση συγκέντρωση στον άξονα της φλέβας κατά τη διεύθυνση ξ . Τα μεγέθη b_w και $b_c = \lambda b_w$ είναι τα ονομαστικά πλάτη των ταχυτήτων $w_a \cos(\theta - \omega)$ και των συγκεντρώσεων της φλέβας, αντίστοιχα, όπου η μέση ταχύτητά της και συγκέντρωσή της, γίνονται e^{-1} των αντιστοίχων τιμών $w_{md} \cos(\theta - \omega)$ και c_m του άξονα, αντίστοιχα. Πρακτικά το όριο της τυρβώδους φλέβας εκτείνεται μέχρι τη θέση B_w . Ο συντελεστής λ περιγράφεται από την εξίσωση (4.13) με $\lambda_j = 1,50$ και $\lambda_p = 1,21$.

Ο ρυθμός εξάπλωσης της ανωστικής φλέβας προσδιορίζεται από την παρακάτω τροποποιημένη συνήθη ημιεμπειρική εξίσωση (Wood 1993, Lee & Seo 2000, Davidson & Wang 2002 και Kim *et al.* 2002).

$$\frac{db_w}{d\xi} = \frac{K_s}{1 + C_{jk} \frac{u_a \cos \omega}{w_{md}}} \quad (4.67)$$

όπου C_{jk} είναι εμπειρική σταθερά, η οποία λαμβάνεται ίση με 1 (Patel 1971 και Gaskin & Wood (2000)). Η σταθερά K_s είναι η τιμή του συντελεστή διεύρυνσης της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας σε ακίνητο αποδέκτη (Davidson & Wang 2002) και λαμβάνεται ίση με 0,132, όπως και στην περίπτωση του ήρεμου αποδέκτη.

Η συμπαράσυρση του περιβάλλοντος ρευστού στη τυρβώδη περιοχή του εσωτερικού της ανωστικής φλέβας έχει τρεις συνιστώσες. Η πρώτη προέρχεται από την κατανομή τύπου Gauss, η δεύτερη εξαιτίας της παρουσίας του ρεύματος και η τρίτη εξαιτίας του ζεύγους στροβίλων (vortex pair) που δημιουργείται λόγω του ρεύματος. Στην παρούσα εργασία θεωρείται ότι το ρεύμα είναι ασθενές, έτσι η συμπαράσυρση εξαιτίας του ζεύγους των στροβίλων μπορεί να αγνοηθεί. Καθώς η εξίσωση της ομοιότητας είναι γνωστή, της μορφής $f_w = w_d/w_{md}$ για τη μέση αξονική ταχύτητα w_d , η εξίσωση της συνεχείας (4.58) μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς ψ , παρέχοντας την εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας συμπαράσυρσης hu/w_{md} , (Yannopoulos 2006):

$$\begin{aligned} \frac{hu}{w_{md}} = & -\frac{b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left\{ \left[s_b + s_0 - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] I_0 - n_w s_b f_w \right\} - \\ & - n_w b_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (4.68)$$

όπου $n = \psi/b_w$, $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n)$ και $f_w = \exp(-n^2)$. Η λογαριθμική κλίση s_0 της μεταβολής της αξονικής ταχύτητας w_{md} δίνεται από την εξίσωση:

$$s_0 = \frac{\xi}{w_{md}} \frac{dw_{md}}{d\xi} \quad (4.69)$$

και s_b είναι η λογαριθμική κλίση της μεταβολής του ονομαστικού πλάτους b_w :

$$s_b = \frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi} \quad (4.70)$$

4.2.2.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (4.58) έως (4.61) πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια διατομή της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.23, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (4.62) έως (4.64).

Επισημαίνεται, ότι το ρευστό, το οποίο εισέρχεται εντός της ανωστικής φλέβας εξαιτίας της συμπαράσυρσης θεωρείται καθαρό. Η επίδραση της δυναμικής πίεσης p_d στην εισροή της ορμής m περιλαμβάνεται στο συντελεστή λ_M , ο οποίος λαμβάνεται και σε αυτή την περίπτωση ίσος με 1,10. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση της διατήρησης ορμής στη διεύθυνση ψ , εξίσωση (4.60), η δυναμική πίεση του τελευταίου όρου του δευτέρου μέλους υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bernoulli:

$$p_d = \frac{\rho_0}{2} \left\{ (u + u_a \sin \omega)^2 + [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega]^2 \right\} \quad (4.71)$$

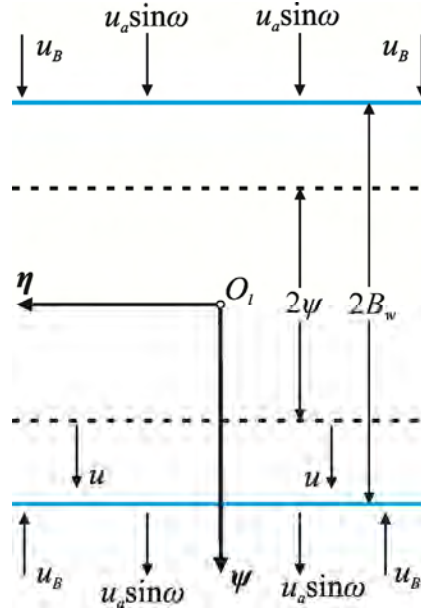
Έτσι, οι εξισώσεις με μερικές παραγώγους, (4.58) έως (4.61) ολοκληρώνονται στην πραγματική εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας και λαμβάνοντας υπόψη τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων και τη θεωρία της διεύρυνσης της φλέβας οδηγούν σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2u_e \quad (4.72)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\frac{d\tilde{m}}{d\xi} = \zeta \sin \omega + 2 \left[u_e - \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} + (\tilde{\mu} \tan \omega + B_w u_a \sin \omega) \frac{d\omega}{d\xi} \right] u_a \cos \omega \quad (4.73)$$



Σχήμα 4.23 Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε δισδιάστατη κεκλιμένη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός κινούμενου αποδέκτη.

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \omega - \left(6u_e + \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos \omega \right) u_a \sin \omega}{\tilde{m} + 2 \left(\tilde{\mu} + B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_e \right) u_a \cos \omega + B_w [3u_e^2 + 4u_a^2 \cos^2 \omega - 3u_a^2]} \quad (4.74)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos \omega \right) = S_0 \quad (4.75)$$

Οι εκφράσεις για τις τοπικές εισροές $\tilde{\mu}$, $\tilde{m}$, ζ και $\tilde{\beta}$, καθώς επίσης και οι αρχικές τους τιμές $\tilde{\mu}_0$, $\tilde{m}_0$, ζ_0 και $\tilde{\beta}_0$, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.10. Στην έξοδο του ακροφυσίου, η αρχική τιμή της συγκέντρωσης είναι $c_0 = 1$ και το εμβαδό της επιφάνειας εξόδου είναι $A_0 = d_0$ (επιφάνεια ανά μέτρο μήκους). Ο λόγος λ υπολογίζεται από την εξίσωση (4.13) με τους συντελεστές που αντιστοιχούν στις δισδιάστατες φλέβες που αναφέρθηκαν νωρίτερα και ο συντελεστής λ_B , υπολογίζεται από την εξίσωση (4.25) όπου $\lambda_{Bj} = 1,04$ και $\lambda_{Bp} = 1,18$ (Yannopoulos 2006). Η ταχύτητα συμπαράσυρσης $u_e = hu$ υπολογίζεται από την εξίσωση

Πίνακας 4.10 Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για δισδιάστατες τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός κινουμένου αποδέκτη.

Ειδική Εισροή	Περιγραφή	Αρχική τιμή
Όγκου	$\tilde{\mu} = \pi b_w^2 w_{md} \cos(\theta - \omega)$	$\tilde{\mu}_0 = A_0 w_{d\xi 0}$
Ορμής	$\tilde{m} = \lambda_M \frac{\pi}{2} b_w^2 w_{md}^2 \cos^2(\theta - \omega)$	$\tilde{m}_0 = A_0 w_{d\xi 0}^2$
Άνωσης	$\tilde{\beta} = \lambda_B Y^{-1} g'_0 \frac{\pi \lambda}{2} b_w^2 w_{md} c_m \cos(\theta - \omega)$	$\tilde{\beta}_0 = g'_0 \tilde{\mu}_0 c_0$
Ελλείμματος βάρους	$\zeta = g'_0 \pi b_c^2 c_m$	$\zeta_0 = A_0 g'_0 c_0$

(4.68) στη θέση του πραγματικού ορίου της ανωστικής φλέβας $B_w = d_0/2 + n_w b_w$, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα είναι γνωστή, υπολογισμένη από το προηγούμενο βήμα και $n_w = 2^{1/2}$. Η εγκάρσια διεύρυνση της ανωστικής φλέβας δίνεται από την εξίσωση (4.67).

4.2.3 Κεκλιμένη Κυκλική Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα

4.2.3.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος

Η φλέβα, όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, διαγράφει καμπυλόγραμμη τροχιά υπό την ταυτόχρονη επίδραση των δυνάμεων ορμής και άνωσης. Τα αναπτυσσόμενα πεδία ροής και μείξης σε κάθε εγκάρσια διατομή της φλέβας θεωρείται ότι παραμένουν αρκούντως συμμετρικά ως προς τον άξονά της και προσεγγίζονται αρκετά καλά με κατανομές τύπου Gauss.

Οι εξισώσεις της συνεχείας, της διατήρησης της ορμής και της μάζας του ιχνηθέτη, όπως και στην περίπτωση του ήρεμου αποδέκτη, διατυπώνονται βάσει της παραδοχής Reynolds σε ένα τοπικό σύστημα καμπυλογράμμων κυλινδρικών συντεταγμένων $O(\varphi, r, \xi)$, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3. Για την εξαγωγή των εξισώσεων γίνονται οι συνήθεις παραδοχές και προσεγγίσεις όπως πραγματοποιήθηκαν και στην περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας (Yannopoulos 2006 και Bloutsos & Yannopoulos 2009). Επίσης, στο σύστημα των εξισώσεων ενσωματώνεται η συνεισφορά της τύρβης (όροι $2^{ης}$ τάξης) στις εισροές ορμής και άνωσης (Yannopoulos

2006, 2010 και Yannopoulos & Bloutsos 2012). Για την περίπτωση των κυκλικών ανωστικών φλεβών, η ανηγμένη ταχύτητα ρεύματος U_a^* περιγράφεται από την εξίσωση (4.56).

Λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία της ροής ως προς το επίπεδο yz του καμπυλογράμμου συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων $O_l(\phi, r, \xi)$, οι εξισώσεις αυτές διατυπώνονται ακολούθως υπό τη μορφή διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial(rw)}{\partial\xi} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \quad (4.76)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} + r \sin\phi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = \\ = g'_0 rhc \sin\omega + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh\tau_{r\xi})}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi} \left[r \sin\phi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial(r \sin\phi hu^2)}{\partial r} - r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = \\ = -g'_0 rhc \cos\omega - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(r \sin\phi hp_d)}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη

$$\frac{\partial}{\partial\xi} [r(wc + w'c')] + \frac{\partial(rhuc)}{\partial r} = -\frac{\partial(rhu'c')}{\partial\psi} + S_1 \quad (4.79)$$

όπου w η συνιστώσα της μέσης ταχύτητας στον άξονα ξ και w' η διακύμανσή της, u και u' τα αντίστοιχα μεγέθη στον άξονα r , ω είναι η τοπική κλίση του άξονα ξ , c η μέση τιμή της συγκέντρωσης, ρ είναι η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση, w'^2 , $w'c'$, $u'c'$ οι τοπικές

εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u και c , αντίστοιχα, $\tau_{r\xi}$ είναι η μέση τυρβώδης διατμητική τάση και p_d η δυναμική πίεση. Ο μετρικός συντελεστής του καμπυλογράμμου συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων ορίζεται από τη σχέση $h=1+r\sin\varphi\frac{d\omega}{d\xi}$. Ο όρος πηγής των αποκολλώμενων μαζών περιγράφεται από την

εξίσωση $S_1 = \frac{\partial(rhq_r)}{\partial r}$, με q_r το φορτίο των αποκολλώμενων μαζών ανά μονάδα

επιφανείας στη διεύθυνση r . Στη μελέτη της ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη δεν λαμβάνονται υπόψη οι αποκολλώμενες μάζες, συνεπώς ο όρος πηγής S_1 μηδενίζεται.

Οι εξισώσεις (4.76) έως (4.79) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Δια } r = 0: w = w_{md} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega, u = 0, c = c_m, \tau_{r\xi} = u'c, p_d = p_{dm}, h = 1 \quad (4.80)$$

$$\text{Δια } r = B_w \quad w = u_a \cos \omega, u = u_{Bw} + u_a \sin \omega, c = \tau_{r\xi} = u'c' = 0, p_d = p_{de},$$

$$h = h_{Bw} = 1 - B_w \sin \varphi \frac{d\omega}{d\xi} \quad (4.81)$$

Στην περίπτωση του κινουμένου αποδέκτη γίνεται η παραδοχή ότι στη ZEF οι εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w_{d\xi}}{w_{md}} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_w^2}\right) \quad (4.82)$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_c^2}\right) \quad (4.83)$$

Όπου w_{md} είναι η μέση υπερέχουσα ταχύτητα στον άξονα ξ' της φλέβας και c_m είναι η μέση συγκέντρωση στον άξονα της φλέβας κατά τη διεύθυνση ξ , b_w και $b_c = \lambda b_w$ είναι τα ονομαστικά πλάτη των ταχυτήτων $w_d \cos(\theta - \omega)$ και των συγκεντρώσεων της φλέβας, αντίστοιχα, στα σημεία όπου η μέση ταχύτητα και συγκέντρωση, γίνεται ίση με το e^{-1} της τιμής στον άξονα $w_{md} \cos(\theta - \omega)$ και c_m , αντίστοιχα. Πρακτικά το όριο της τυρβώδους

φλέβας εκτείνεται μέχρι τη θέση B_w . Ο συντελεστής λ περιγράφεται από την εξίσωση (4.13) με $\lambda_j = 1,23$ και $\lambda_p = 1,04$ (Yannopoulos 2006).

Ο ρυθμός εξάπλωσης της κυκλικής ανωστικής φλέβας προσδιορίζεται από την ημιεμπειρική εξίσωση (4.67), όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας. Οι Wood *et al.* (1993) και Knudsen (1988) προτείνουν για την εμπειρική σταθερά C_{jk} την τιμή 1, ενώ οι Chu *et al.* (1999) και Wright (1994) προτείνουν την τιμή 2. Η σταθερά K_s είναι η τιμή του συντελεστή διεύρυνσης της κυκλικής ανωστικής φλέβας σε ακίνητο αποδέκτη (Davidson & Wang 2002). Στην παρούσα εργασία ελήφθησαν $C_{jk} = 2$ και $K_s = 0,110$ (Yannopoulos 2006).

Όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη, για την κατανομή ομοιότητας της μορφής $f_w = w_d/w_{md}$ για τη μέση αξονική ταχύτητα w_d , η εξίσωση της συνεχείας (4.76) μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς r , παρέχοντας την εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας συμπαράσυρσης hu/w_{md} , (Yannopoulos 2006):

$$\begin{aligned} \frac{hu}{w_{md}} = & -\frac{b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left\{ \left[2s_b + s_1 - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] I_1 - n_w s_b f_w \right\} - \\ & -\frac{n_w}{2} b_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (4.84)$$

όπου $n = r/b_w$, $I_1 = [1 - \exp(-n^2)]/2$ και $f_w = \exp(-n^2)$. Η λογαριθμική κλίση s_1 της αξονικής ταχύτητας w_{md} δίνεται από την εξίσωση:

$$s_1 = \frac{\xi}{w_{md}} \frac{dw_{md}}{d\xi} \quad (4.85)$$

και s_b είναι η λογαριθμική κλίση του ονομαστικού πλάτους b_w όπως δίνεται από τη σχέση (4.70).

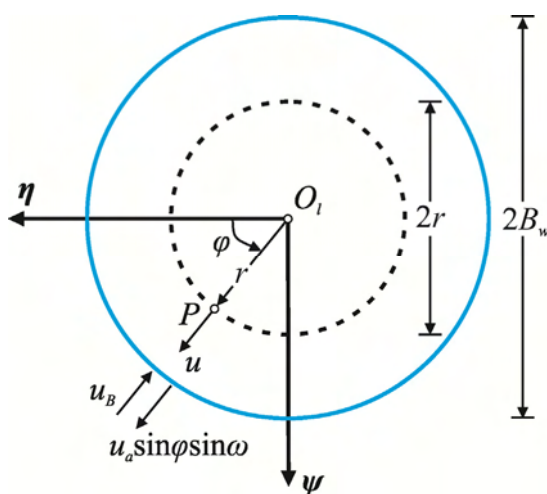
4.2.3.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (4.76) έως (4.79) πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια διατομή της κυκλικής κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.24, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (4.80) και (4.81).

Επισημαίνεται, ότι το ρευστό, το οποίο εισέρχεται εντός της ανωστικής φλέβας εξαιτίας της συμπαράσυρσης, θεωρείται καθαρό. Η επίδραση της δυναμικής πίεσης p_d στην εισροή της ορμής m περιλαμβάνεται στο συντελεστή λ_M , ο οποίος λαμβάνεται και σε αυτή την περίπτωση ίσος με 1,10. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση της διατήρησης ορμής στη διεύθυνση r , εξίσωση (4.78), η δυναμική πίεση του τελευταίου όρου του δευτέρου μέλους υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bernoulli:

$$p_d = \frac{\rho_0}{2} \left\{ (u + u_a \sin \omega)^2 + [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega]^2 \right\} \quad (4.86)$$

Έτσι, οι εξισώσεις με μερικές παραγώγους (4.76) έως (4.79) ολοκληρώνονται στην πραγματική εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας και λαμβάνοντας υπόψη τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων και τη θεώρηση της διεύρυνσης της φλέβας οδηγούν στο ακόλουθο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:



Σχήμα 4.24 Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κυκλική κεκλιμένη τυρβώδη ανωστική φλέβα εντός κινούμενου αποδέκτη.

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2\pi B_w u_e \quad (4.87)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\frac{d\tilde{m}}{d\xi} = \zeta \sin \omega + 2 \left[\pi B_w u_e - \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} + \left(\tilde{\mu} \tan \omega + \frac{\pi}{2} B_w^2 u_a \sin \omega \right) \frac{d\omega}{d\xi} \right] u_a \cos \omega \quad (4.88)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τη διεύθυνση ψ

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \omega - \pi B_w \left(3u_e + \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos \omega \right) u_a \sin \omega}{\tilde{m} + \left(2\tilde{\mu} + \pi B_w^2 \frac{dB_w}{d\xi} u_e \right) u_a \cos \omega + \frac{\pi}{2} B_w^2 \left[3u_e^2 + u_a^2 \cos^2 \omega - \frac{9}{4} u_a^2 \sin^2 \omega \right]} \quad (4.89)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos \omega \right) = S_1 \quad (4.90)$$

Οι εκφράσεις για τις τοπικές εισροές όγκου $\tilde{\mu}$, ορμής $\tilde{m}$, ελλείμματος βάρους ζ και άνωσης $\tilde{\beta}$, καθώς επίσης και οι αρχικές τους τιμές $\tilde{\mu}_0$, $\tilde{m}_0$, ζ_0 και $\tilde{\beta}_0$, αντίστοιχα, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.11. Στην έξοδο του ακροφυσίου, η αρχική τιμή της συγκέντρωσης είναι $c_0 = 1$ και το εμβαδό της επιφάνειας εξόδου είναι $A_0 = \pi/4 d_0^2$. Ο συντελεστής λ υπολογίζεται από την εξίσωση (4.13) και ο συντελεστής λ_B υπολογίζεται απευθείας από την εξίσωση (4.25), με τους συντελεστές που αντιστοιχούν στις κυκλικές φλέβες και αναφέρθηκαν νωρίτερα. Η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης $u_e = hu$ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.84) στη θέση του πραγματικού ορίου της ανωστικής φλέβας $B_w = d_0/2 + n_w b_w$, υποθέτοντας ότι το πεδίο ταχύτητας είναι γνωστό, υπολογισμένο από το προηγούμενο βήμα και $n_w = \sqrt{2}$. Η εγκάρσια διεύρυνση της ανωστικής φλέβας περιγράφεται από την εξίσωση (4.67).

Πίνακας 4.11 Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές για κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός κινούμενου αποδέκτη.

Ειδική Εισροή	Περιγραφή	Αρχική τιμή
Όγκου	$\tilde{\mu} = \pi b_w^2 w_{md} \cos(\theta - \omega)$	$\tilde{\mu}_0 = A_0 w_{d\xi 0}$
Ορμής	$\tilde{m} = \lambda_M \frac{\pi}{2} b_w^2 w_{md}^2 \cos^2(\theta - \omega)$	$\tilde{m}_0 = A_0 w_{d\xi 0}^2$
Ανωσης	$\tilde{\beta} = \lambda_B Y^{-1} g'_0 \frac{\pi \lambda}{2} b_w^2 w_{md} c_m \cos(\theta - \omega)$	$\tilde{\beta}_0 = g'_0 \tilde{\mu}_0 c_0$
Ελλείμματος Βάρους	$\zeta = g'_0 \pi b_c^2 c_m$	$\zeta_0 = A_0 g'_0 c_0$

4.2.4 Αποτελέσματα

Η επίλυση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων έγινε για τις οριζόντιες ($\theta_0 = 0^\circ$) δισδιάστατες ή κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες εντός κινούμενου αποδέκτη και προβλέπει τα χαρακτηριστικά του πεδίου μέσης ροής και διάχυσης.

Αρχικά παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την οριζόντια δισδιάστατη ανωστική φλέβα σε κινούμενο αποδέκτη. Η υπολογισμένη τροχιά εκφράζεται σε αδιάστατες συντεταγμένες $Y = (y / d_0) F_0^{-4/3}$ και $Z = (z / d_0) F_0^{-4/3}$. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα πειραματικά δεδομένα των Méndez-Díaz & Jirka (1996). Οι συγκεκριμένες πειραματικές μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε δεξαμενή νερού. Η πειραματική διάταξη αποτελείτο από πολλαπλό διαχύτη με 24 οριζόντια κυκλικά ακροφύσια εσωτερικής διαμέτρου 4,72 mm. Τα ακροφύσια ήταν τοποθετημένα σε σειρά και προσέγγιζαν τη συμπεριφορά δισδιάστατης εκροής. Η επίτευξη του ρεύματος επιτυγχάνετο με την οριζόντια κίνηση του διαχύτη εντός της δεξαμενής. Η εκροή του υγρού, διάλυμα αλατόνευρου, γίνονταν οριζόντια ($\theta_0 = 0^\circ$) εντός του υδάτινου αποδέκτη (δεξαμενή). Οι αρχικές συνθήκες των πειραμάτων αναφέρονται εκτενώς στη σχετική εργασία.

Τα δεδομένα των συγκεκριμένων πειραμάτων αναφέρονται σε εκροή από κυκλικά ακροφύσια του διαχύτη. Επομένως, είναι αναγκαίο να μετατραπεί πολλαπλός διαχύτης σε έναν ισοδύναμο διαχύτη σχισμής. Λαμβάνοντας υπόψη τον ισοδύναμο του πραγματικού

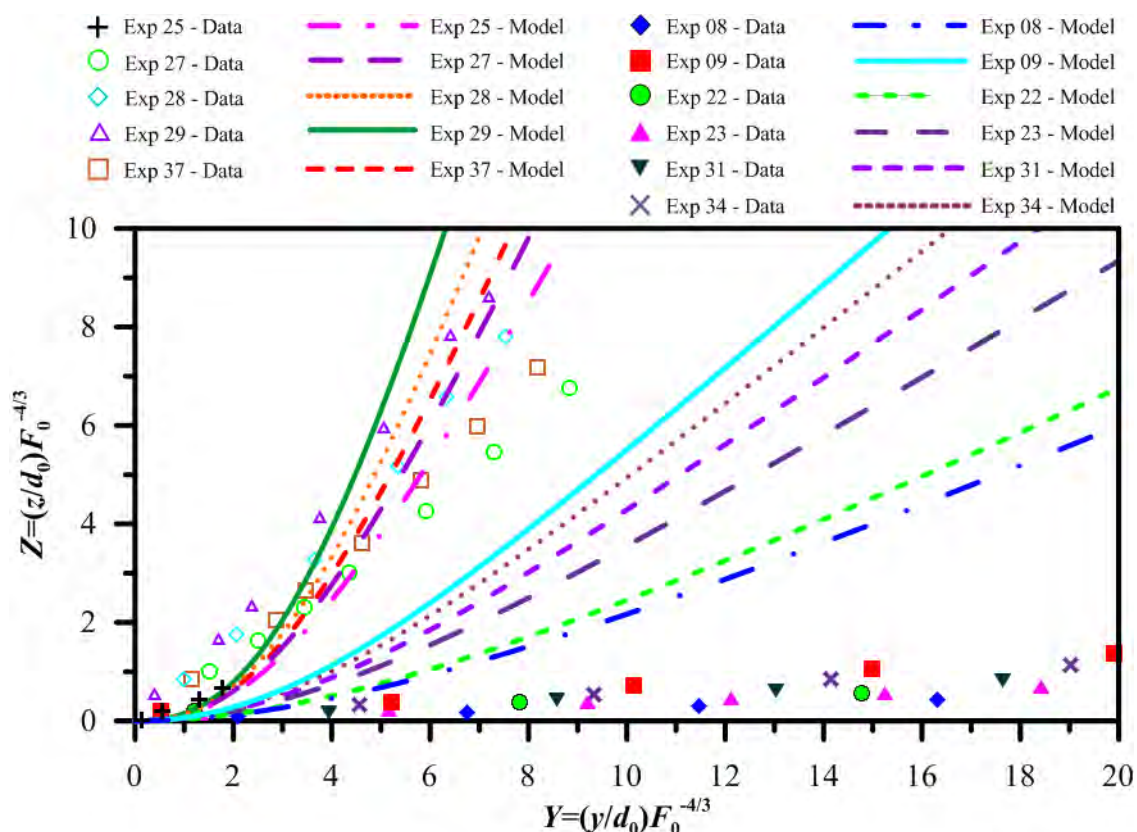
διαχύτη του πειράματος, ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude F_0 της δισδιάστατης φλέβας προκύπτει:

$$F_0 = 2F_{0r} \sqrt{\frac{l}{\pi d}} \quad (4.91)$$

Όπου l (mm) είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ακροφυσίων του πραγματικού διαχύτη, d (mm) η εσωτερική διάμετρος του ακροφυσίου και F_{0r} ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude κάθε κυκλικής ανωστικής φλέβας που εκρέει από το διαχύτη.

Οι Méndez-Díaz & Jirka (1996) διακρίνουν τη συμπεριφορά της ροής σε δύο καταστάσεις, ανάλογα με το μέγεθος του U_a^* . Η δισδιάστατη ανωστική φλέβα θεωρείται ότι είναι α) «ασθενώς» αποκλίνουσα (deflected) όταν $U_a^* \leq 0,60$ και β) «ισχυρώς» αποκλίνουσα όταν $U_a^* > 0,60$.

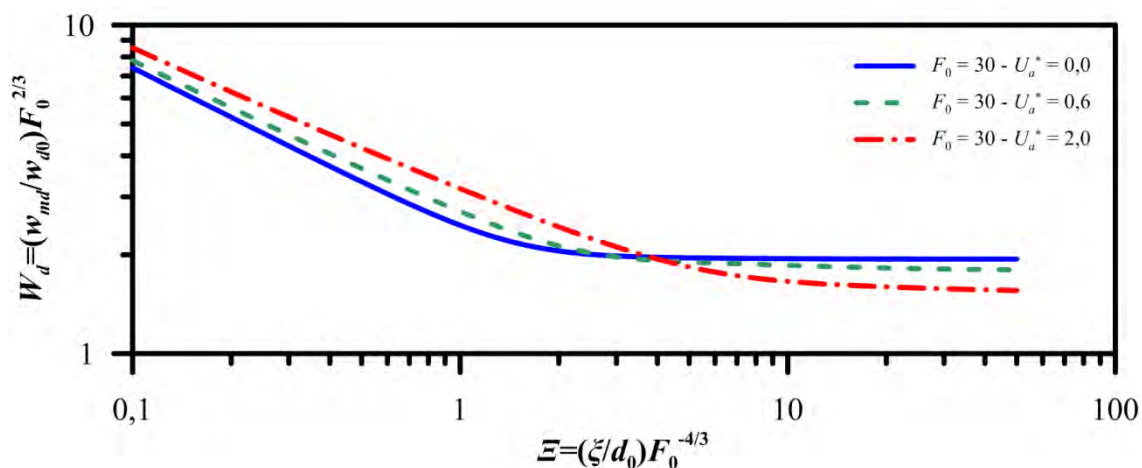
Οι υπολογισμένες τροχιές, χρησιμοποιώντας το μοντέλο που περιγράφηκε παραπάνω, συγκρίνονται με τα πειράματα των Méndez-Díaz & Jirka (1996). Από τη σειρά των πειραμάτων που αφορούν τις «ασθενώς» αποκλίνουσες ανωστικές φλέβες, τα υπ' αριθμόν Exp25, 27, 28, 29 και 37 πειράματα περιέχουν συστηματικό σφάλμα στις τιμές των τεταγμένων, υποδεικνύοντας ότι η πηγή της φλέβας ήταν υψηλότερα από την πραγματική θέση του ακροφυσίου. Το λάθος αυτό ελαχιστοποιήθηκε ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία: Για κάθε περίπτωση i , προσαρμόστηκε στην τροχιά της ανωστικής φλέβας μία πολυωνμική συνάρτηση $z(x)$ 2^{ου} βαθμού. Στη συνέχεια το πολυώνυμο αυτό προεκτάθηκε μέχρι το σημείο $x = x_0 = 0$, όπου ο σταθερός όρος του πολυωνύμου προσέγγιζε τη θέση της πηγής της φλέβας $(0, z_{0j})$. Ύστερα, κάθε σημείο της τροχιάς (x_j, z_j) διορθώθηκε σε $(x_j, z_j - z_{0j})$. Οι διορθωμένες αδιάστατες συντεταγμένες για τις «ασθενώς» αποκλίνουσες ανωστικές φλέβες παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.25. Παρατηρείται ότι η μέση κατακόρυφη αλλαγή θέσης όλων των z_i είναι 37 mm επάνω από το πραγματικό ακροφύσιο. Η προαναφερθείσα διόρθωση φαίνεται ότι δεν είναι απαραίτητη για τις «ισχυρώς» αποκλίνουσες ανωστικές φλέβες (πειράματα υπ' αριθμόν Exp8, 9, 22, 23, 31 και 34). Το παρόν μοντέλο υπολογίζει ικανοποιητικά τις τροχιές των «ασθενών» αποκλινουσών φλεβών. Αντιθέτως, δεν ακολουθεί τα πειραματικά αποτελέσματα που αναφέρονται στις «ισχυρώς» αποκλίνουσες ανωστικές φλέβες. Η δυσαρμονία αυτή, πιθανόν να οφείλεται στην επίδραση του τοιχώματος (φαινόμενο Coanda), το οποίο απαντάται σε αυτή τη σειρά των πειραμάτων.



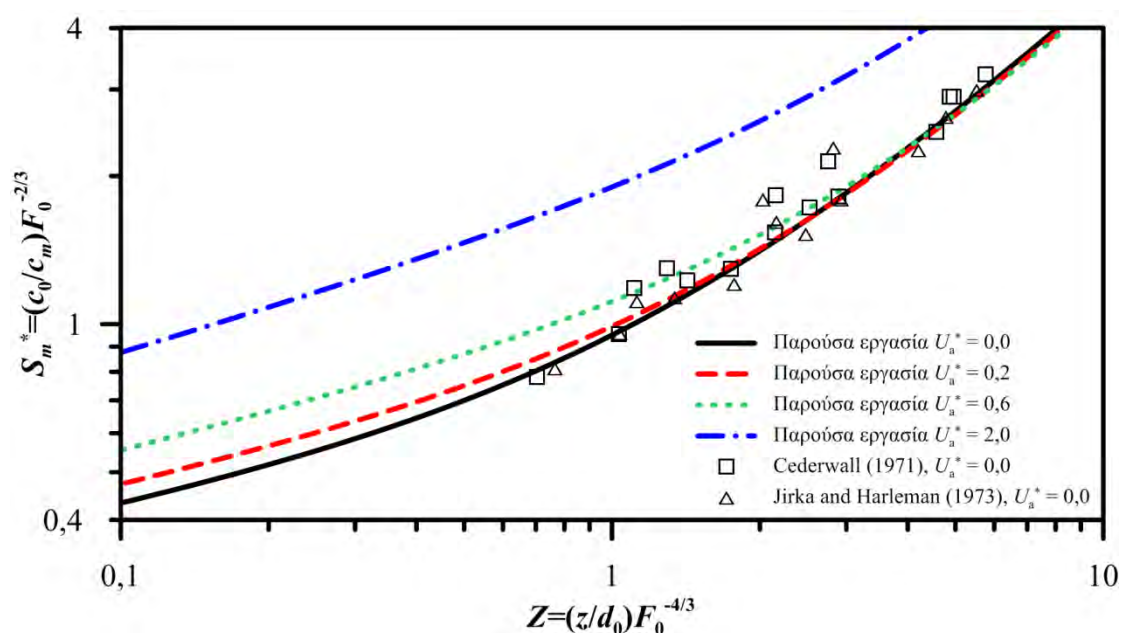
Σχήμα 4.25 Προσομοίωση τροχιάς οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.26 παρουσιάζονται οι αξονικές ταχύτητες της υπερέχουσας ταχύτητας $W_d = (w_{md} / w_{d0}) F_0^{2/3}$ συναρτήσει της αξονικής απόστασης $\Xi = (\xi / d_0) F_0^{-4/3}$. Παρουσιάζονται οι περιπτώσεις για ακίνητο αποδέκτη ($U_a^* = 0,0$) και για δύο τιμές της μεταβλητής $U_a^* = 0,6$ και $2,0$ για την περίπτωση $F_0 = 30$.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.27 παρουσιάζονται οι ανηγμένες αξονικές αραιώσεις $S_m^* = (c_m / c_0) F_0^{-2/3}$ συναρτήσει των αντιστοίχων τεταγμένων $Z = (z / d_0) F_0^{-4/3}$. Παρουσιάζονται οι περιπτώσεις για ακίνητο αποδέκτη ($U_a^* = 0,0$) και για τρεις τιμές της μεταβλητής $U_a^* = 0,2, 0,6$ και $2,0$. Οι προβλέψεις συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές των πειραματικών δεδομένων των Cederwall (1971) και Jirka & Harleman (1973) για ακίνητο αποδέκτη. Τα συγκεκριμένα πειραματικά δεδομένα δύναται να χρησιμοποιηθούν για συγκρίσεις, όσο αφορά αποκλειστικά τις «ασθενώς» αποκλίνουσες ανωστικές φλέβες ($U_a^* \leq 0,60$), καθώς τα ασθενή ρεύματα δεν επηρεάζουν πρακτικά τις αραιώσεις.

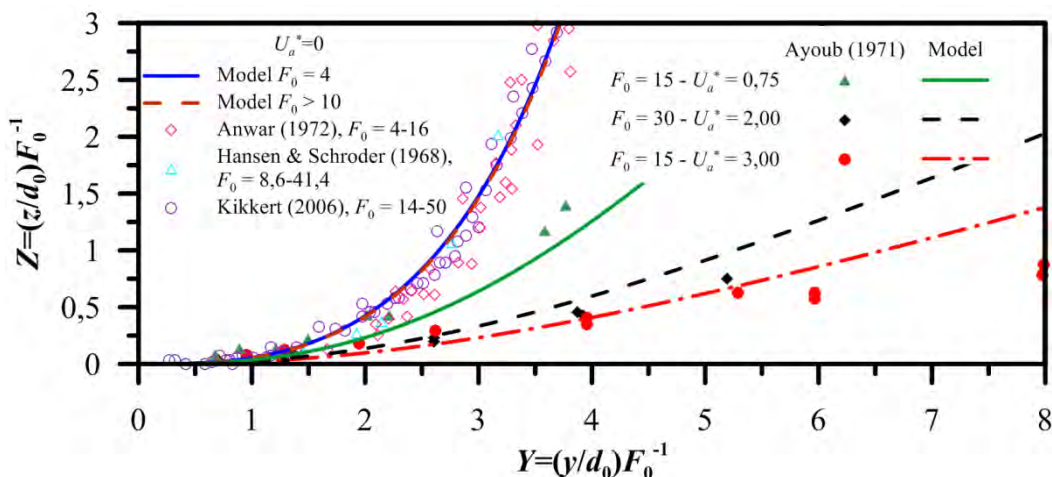


Σχήμα 4.26 Προσομοίωση μεταβολής αξονικής ταχύτητας W_d οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη.



Σχήμα 4.27 Προσομοίωση αραίωσης S_m^* οριζόντιας δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα για την περίπτωση ακίνητου αποδέκτη.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.28 παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές επιλύσεις του προβλήματος της οριζόντιας κυκλικής ανωστικής φλέβας σε αδιάστατους άξονες $Y = (y/d_0) F_0^{-1}$ και $Z = (z/d_0) F_0^{-1}$. Παρατηρείται ότι το μοντέλο που προτείνεται προβλέπει αρκετά ικανοποιητικά τις τροχιές, συγκρινόμενο με τα αντίστοιχα πειραματικά σημεία του Ayoub (1971). Στο διάγραμμα του ίδιου σχήματος παρατίθεται και η περίπτωση του ήρεμου αποδέκτη ($U_a^* = 0$), με τα αποτελέσματα που προέκυψαν στο αντί-



Σχήμα 4.28 Προσομοίωση τροχιάς οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα. Παρουσιάζεται, επίσης, το αποτέλεσμα της προσομοίωσης της τροχιάς σε ακίνητο αποδέκτη.

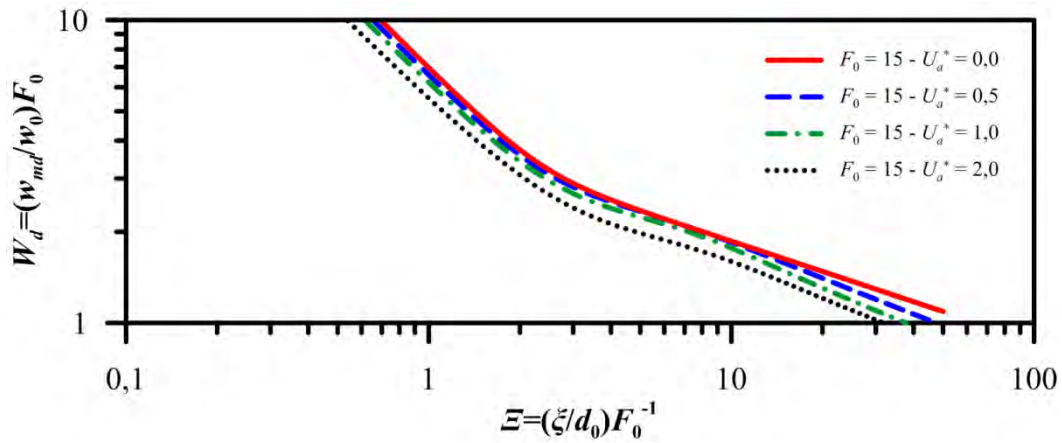
στοιχο κεφάλαιο.

Τα αποτελέσματα της μεταβολής της ανηγμένης αξονικής ταχύτητας $W_d = (w_{md} / w_{d0}) F_0$ συναρτήσει της αξονικής απόστασης $\Xi = (\xi / d_0) F_0^{-1}$ δίνονται στο διάγραμμα του Σχήματος 4.29. Παρουσιάζονται οι περιπτώσεις για ακίνητο αποδέκτη και για τρεις τιμές της μεταβλητής $U_a^* = 0,5, 1,0$ και $2,0$.

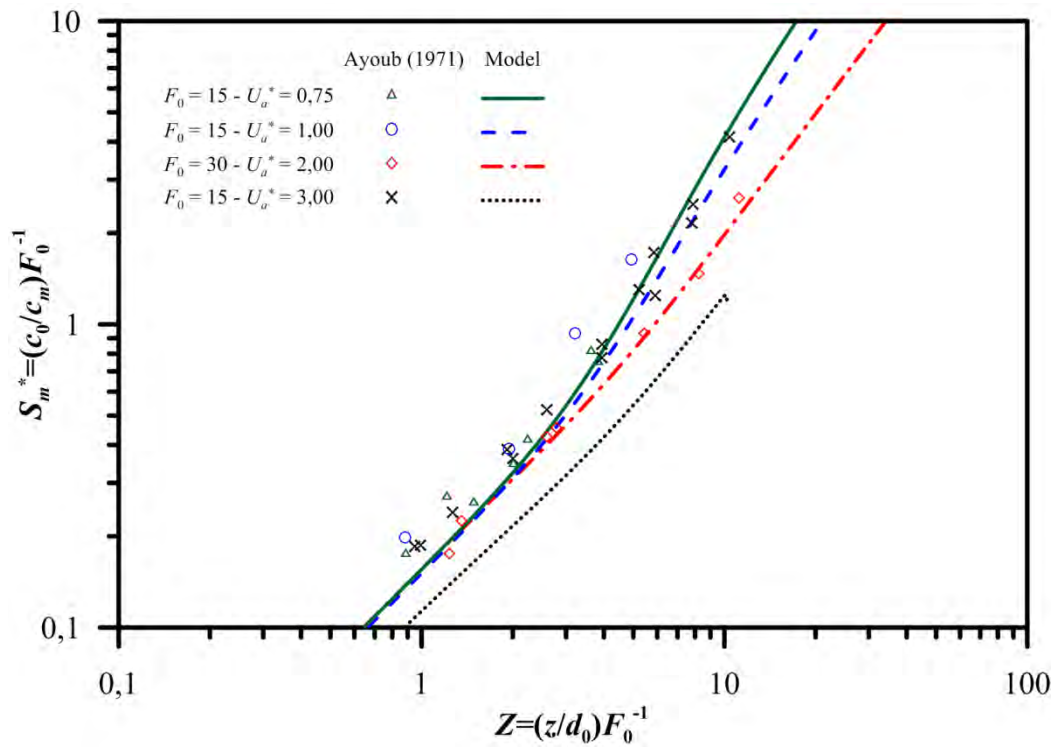
Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.30 παρουσιάζονται οι ανηγμένες αξονικές αραιώσεις $S_m^* = (c_m / c_0) F_0$ συναρτήσει των αντιστοίχων τεταγμένων. Οι προβλέψεις συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές των πειραματικών δεδομένων που αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία (Ayoub 1971).

Η σύμπτωση μεταξύ των προβλέψεων του μοντέλου και των πειραματικών δεδομένων είναι πολύ καλή εκτός της περίπτωσης $F_0 = 15$ και $U_a^* = 3,0$ όπου παρατηρείται εμφανής απόκλιση μεταξύ των σημείων και της αντίστοιχης καμπύλης. Αυτό είναι προφανές ότι οφείλεται είτε σε πειραματικό σφάλμα είτε σε σφάλμα παρουσίασης των αποτελεσμάτων, καθώς εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί αυτό αν εξεταστούν τα συγκεκριμένα πειραματικά σημεία σε σχέση με εκείνα των υπολοίπων περιπτώσεων.

Στην παρούσα Διδακτορική Διατριβή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση που η αρχική γωνία εκτόξευσης της ανωστικής φλέβας, δισδιάστατη και κυκλική, εντός κινούμενου αποδέκτη είναι $\theta_0 = 0^\circ$. Δεν παρουσιάζονται αποτελέσματα για διαφορετική αρχική γωνία εκτόξευσης, διότι σε εκείνη την περίπτωση παρουσιάζεται το



Σχήμα 4.29 Προσομοίωση μεταβολής αξονικής ταχύτητας W_d οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη.



Σχήμα 4.30 Προσομοίωση αραίωσης S_m^* οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας εντός κινούμενου αποδέκτη και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα.

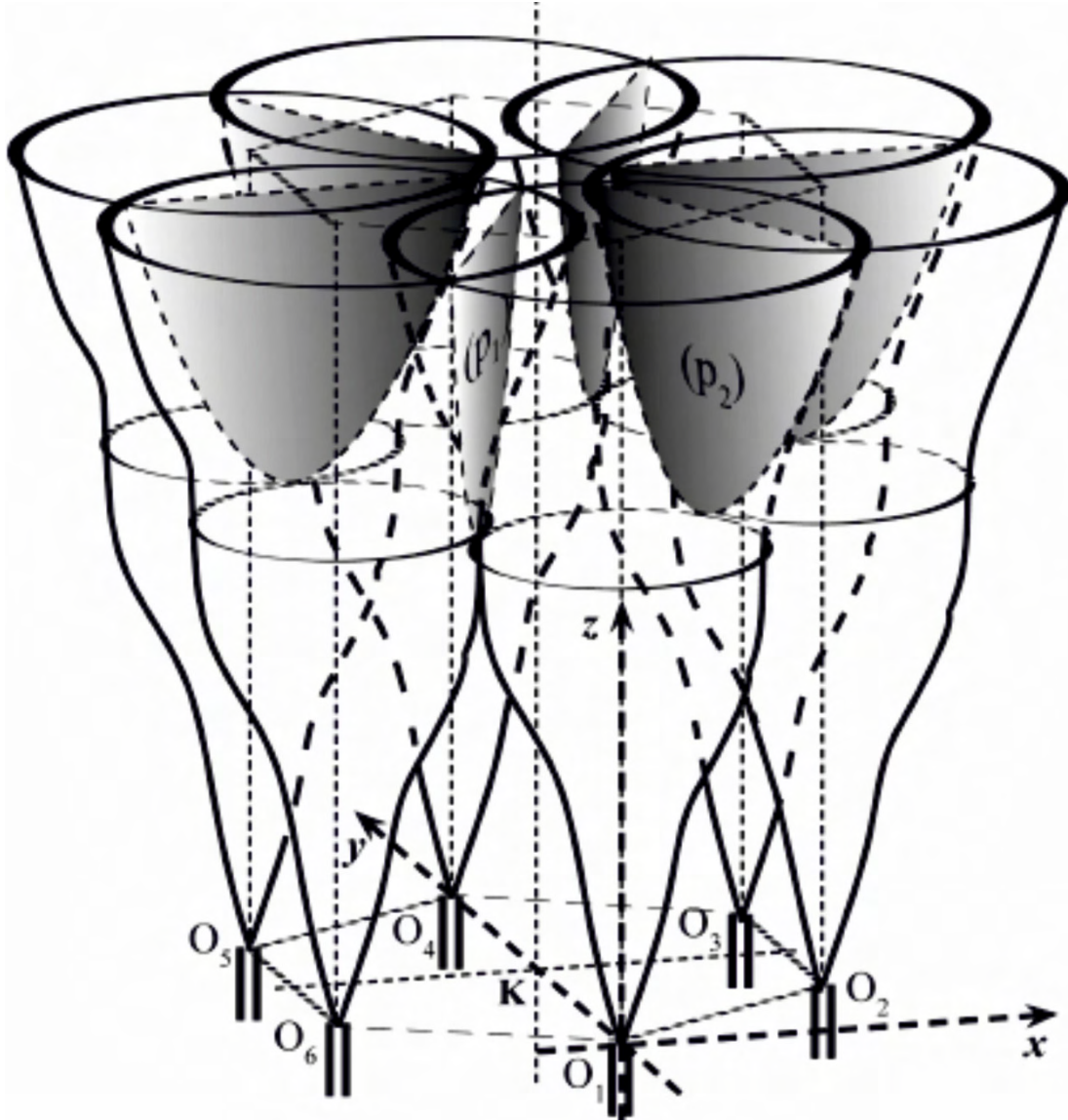
φαινόμενο του ζεύγους στροβίλων (vortex pairing) στην εγκάρσια κατανομή των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, το οποίο δεν λαμβάνεται υπόψη στο προτεινόμενο μοντέλο προσομοίωσης.

5. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ

Τα προηγούμενα χρόνια έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες ώστε να προσομοιωθεί το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης μεταξύ φλεβών. Η αντιμετώπιση των πρακτικών προβλημάτων, όπως η κατασκευή αγωγών εκβολής λυμάτων εγένετο με πειραματική μελέτη υδραυλικών ομοιωμάτων (Roberts *et al.* 1989a, b και Roberts & Snyder 1993a, b). Αρκετές είναι, επίσης, οι θεωρητικές προσεγγίσεις (Bloutsos & Yannopoulos 2005, Yannopoulos 2010 και Lai *et al.* 2011) σε αυτό τον τομέα, αλλά ακόμη δεν υπάρχει ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό μοντέλο, το οποίο να μπορεί να υπολογίζει την αραίωση που επιτυγχάνεται για οποιοδήποτε γεωμετρία διαχύτη και συνθήκες του περιβάλλοντος αποδέκτη, γεγονός που προσπαθεί σε ένα βαθμό να καλύψει η Διατριβή αυτή.

5.1 ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΦΛΕΒΩΝ ΣΕ ΔΙΑΧΥΤΗ ΤΥΠΟΥ ΡΟΖΕΤΑΣ

Στην παρούσα Διατριβή εξετάζεται με περισσότερη λεπτομέρεια η αλληλεπίδραση N τυρβωδών ανωστικών φλεβών που εκρέουν από κατακόρυφα κυκλικά ακροφύσια, τα οποία ευρίσκονται στις κορυφές οριζοντίου κανονικού πολυγώνου με εξωτερική ακτίνα r_0 . Η ροή από διάταξη μιας ομάδας έξι ($N = 6$) φλεβών που αλληλεπιδρούν φαίνεται στα Σχήματα 5.1 και 5.2. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ακροφυσίων είναι $2t$. Καθένα από τα ακροφύσια έχει διάμετρο d_0 και παροχετεύει ρευστό πυκνότητας ρ_0 , κινηματικού ιξώδους ν_0 με αρχική ταχύτητα εξόδου w_0 . Η εκροή γίνεται εντός ακίνητου αποδέκτη ομοιόμορφης πυκνότητας ρ_a ($\rho_a \geq \rho_0$). Το σημείο O_1 αποτελεί κοινή αρχή για το Καρτεσιανό (x, y, z) και το κυλινδρικό (r, θ, z) σύστημα συντεταγμένων με κοινό κατακόρυφο άξονα z . Οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους της συνεχείας, της ορμής, της διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη και της κινητικής ενέργειας για τη μέση ροή διατυπώνονται σε αντιστοιχία με τους Bloutsos & Yannopoulos (2005), χρησιμοποιώντας τις συνήθεις παραδοχές και προσεγγίσεις (Noutsopoulos & Yannopoulos 1987), περιλαμβάνοντας τους όρους 2^{ns} τάξης για τη συνεισφορά της τύρβης στις εισροές ορμής και άνωσης (Yannopoulos 2006). Συνεπώς, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που περιγράφει το φαινόμενο είναι το εξής:



Σχήμα 5.1 Σχηματικό διάγραμμα διαχύτη τύπου ροζέτας με $N = 6$ κατακόρυφες κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες που αλληλεπιδρούν – όψη.

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα z

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(uw)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial x} = g'_0 c + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \right) \quad (5.2)$$

w, u, v	οι προβολές της μέσης τιμής της ταχύτητας στους άξονες z, y και x , αντίστοιχα
w', u', v'	οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων στις διευθύνσεις z, y και x , αντίστοιχα
θ	η τοπική κλίση του άξονα ξ ως προς το οριζόντιο επίπεδο
$c = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a - \rho_0}$	η μέση τιμή της συγκέντρωσης στη θέση (x, y, z)
ρ	η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση
$w'^2, w'c', u'c', v'c'$	οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w, u, v και c , αντίστοιχα
τ_{zy}, τ_{zx}	οι μέσες τυρβώδεις διατμητικές τάσεις
p_d	η δυναμική πίεση
$\omega = \frac{w^2 + u^2 + v^2}{2}$	η κινητική ενέργεια για τις μέσες ταχύτητες
f	οι εναπομείναντες όροι της κινητικής ενέργειας της μέσης ροής.

Λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη της συμμετρίας των πεδίων ροής και διάχυσης ως προς τα κατακόρυφα επίπεδα p_1 και p_2 , όπου η συμπαράσυρση του περιβάλλοντος ρευστού είναι μηδενική, γίνεται αποδεκτή η παραδοχή ότι η ανωστική φλέβα, η οποία εκρέει από το ακροφύσιο O_1 , περιορίζεται μεταξύ των επιπέδων p_1 και p_2 (γραμμοσκιασμένη επιφάνεια A). Η συνθήκη αυτή είναι ικανή ώστε να εφαρμοστεί, στην περίπτωση ροζέτας, η θεωρία του περιορισμού της συμπαράσυρσης (Noutsopoulos & Yannopoulos 2006), όπως εφαρμόστηκε και από τους Bloutsos & Yannopoulos (2005). Το φαινόμενο της ένωσης των φλεβών εισάγεται στο μαθηματικό μοντέλο μέσω της περιορισμένης επιφάνειας A , στην οποία έχει υποτεθεί συμμετρία, και στον επακόλουθο περιορισμό της συμπαράσυρσης του περιβάλλοντος ρευστού εξαιτίας της συμμετρίας των επιπέδων p_1 και p_2 . Έτσι, οι οριακές συνθήκες που συνοδεύουν το σύστημα των εξισώσεων (5.1) έως (5.4) είναι οι εξής:

$$\text{Δια } r = 0: \quad w = w_{mN}, u = v = 0, c = c_{mN}, \tau_{zy} = \tau_{zx} = u'c' = v'c' = 0 \quad (5.5)$$

$$\text{Δια } r = \pm b_w \quad w = c = 0, \tau_{zy} = \tau_{zx} = u'c' = v'c' = 0, u = u_e, v = v_e \quad (5.6)$$

Στα επίπεδα συμμετρίας p_1 και p_2 ισχύει:

$$u = v = 0, \tau_{zy} = \tau_{zx} = u'c' = v'c' = 0 \quad (5.7)$$

Για την επίτευξη της ολοκλήρωσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (5.1) έως (5.4), γίνεται η παραδοχή ότι η εγκάρσια κατανομή των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων διατηρεί τα χαρακτηριστικά της αυτοομοιότητας και περιγράφεται από κατανομή τύπου Gauss, από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w}{w_{mN}} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_w^2}\right) \quad (5.8)$$

$$\frac{c}{c_{mN}} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_c^2}\right) \quad (5.9)$$

όπου w_{mN} και c_{mN} είναι η μέση ταχύτητα και συγκέντρωση των N φλεβών, αντίστοιχα, στον άξονα της φλέβας κατά τη διεύθυνση z , $b_w = K_w z$ και $b_c = K_c z$ είναι τα αντίστοιχα ονομαστικά πλάτη των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων της φλέβας, τα οποία γίνονται ίσα με το e^{-1} των αντιστοιχών τιμών w_{mN} και c_{mN} του άξονα. Ο συντελεστής διεύρυνσης του πεδίου των ταχυτήτων K_w , λαμβάνεται ίσος με 0,110, όπως και στην περίπτωση της μοναχικής κυκλικής φλέβας (Yannopoulos 2006) και $K_c = \lambda K_w$ είναι ο συντελεστής διεύρυνσης του πεδίου των συγκεντρώσεων. Ο συντελεστής λ περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\lambda = \lambda_j - (\lambda_j - \lambda_p) \left(\frac{R_N}{R_p} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (5.10)$$

με $\lambda_j = 1,23$, $\lambda_p = 1,04$, $R_p = 0,3521$ (Yannopoulos 2006) και R_N είναι ο τοπικός αριθμός Richardson για τη μία φλέβα από ομάδα των N φλεβών. Στο συγκεκριμένο μοντέλο, ο άξονας της εξεταζόμενης περιορισμένης φλέβας συμπίπτει με τον άξονα της μοναχικής ανωστικής φλέβας. Αυτή η παραδοχή υποεκτιμά τις εισροές στην περιοχή αμέσως μετά την αλληλεπίδραση των φλεβών, αλλά η υποεκτίμηση γίνεται αμελητέα σε μεγάλη αξονική απόσταση.

5.1.1 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (5.1) έως (5.4), ολοκληρώνεται πάνω στην εγκάρσια γραμμοσκιασμένη επιφάνεια A (Σχήμα 5.2), χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες, (5.5) έως (5.7), και τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, εξισώσεις (5.8) και (5.9), ακολουθώντας τη διαδικασία των Bloutsos & Yannopoulos (2005) για την περίπτωση του μοντέλου απλής ακριβείας. Η ολοκλήρωση δίνει το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων που ακολουθεί:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{d\mu_N}{dz} = q_{eN} \quad (5.11)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής

$$\frac{dm_N}{dz} = \zeta_N \quad (5.12)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\beta_N}{g'_0} \right) = 0 \Leftrightarrow \beta_N = \beta_0 \quad (5.13)$$

Εξίσωση κινητικής ενέργειας

$$\frac{d\varepsilon_N}{dz} = \beta_0 - \varepsilon_{fN} \quad (5.14)$$

όπου q_{eN} είναι ο όγκος του περιβάλλοντος ρευστού ανά μέτρο μήκους που συμπαρασύρεται από τη φλέβα. Οι εκφράσεις για τις τοπικές εισροές όγκου μ_N , ορμής m_N , ελλείμματος βάρους ζ_N , άνωσης β_N και κινητικής ενέργειας ε_N καθώς επίσης οι αρχικές τους τιμές μ_0 , m_0 , ζ_0 , β_0 και ε_0 αντίστοιχα, παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1. Στην έξοδο του ακροφυσίου, η αρχική τιμή της συγκέντρωσης είναι $c_0 = 1$ και το εμβαδό της επιφάνειας εξόδου είναι $A_0 = \pi/4 d_0^2$. Επιπροσθέτως, η ποσότητα ε_{fN} είναι το ολοκλήρωμα

Πίνακας 5.1 Ειδικές εισροές και οι αρχικές τους τιμές σε ομάδα από N κυκλικές τυρβώδεις ανωστικές φλέβες.

Ειδική Εισροή	Περιγραφή	Αρχική τιμή
Όγκου	$\mu_N = \frac{\pi}{2} K_1^2 z^2 w_{mN} I_1$	$\mu_0 = A_0 w_0$
Ορμής	$m_N = \frac{\pi}{2} \lambda_M K_2^2 z^2 w_{mN}^2 I_2$	$m_0 = A_0 w_0^2$
Ελλείμματος βάρους	$\zeta_N = \frac{\pi}{2} g'_0 K_3^2 z^2 c_{mN} I_3$	$\zeta_0 = A_0 g'_0 c_0$
Άνωσης	$\beta_N = \frac{\pi}{2} g'_0 \lambda_B K_4^2 z^2 w_m c_m I_4$	$\beta_0 = g'_0 \mu_0 c_0$
Κινητικής ενέργειας	$\varepsilon_N = \frac{\pi}{4} K_5^2 z^2 w_{mN}^3 I_5$	$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} A_0 w_0^3$

του όρου f στην επιφάνεια A και $\varepsilon_{fN} = 0$. Ο συντελεστής λ_M εισάγει τη συνεισφορά της τύρβης στην εισροή της ορμής και λαμβάνεται ίσος με την τιμή 1,10. Ο συντελεστής λ_B εισάγει τη συνεισφορά της τύρβης στην εισροή της άνωσης και περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση (Wang & Law 2002):

$$\lambda_B = \lambda_{Bj} - (\lambda_{Bj} - \lambda_{Bp}) \left(\frac{R_N}{R_p} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (5.15)$$

με $\lambda_{Bj} = 1,076$, $\lambda_{Bp} = 1,15$ και $R_p = 0,3521$ (Yannopoulos 2006). Οι συντελεστές K_j , με $j = 1, 2, 3, 4, 5$, δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_w \\ K_2 &= \frac{K_w}{\sqrt{2}} \\ K_3 &= K_c = \lambda K_w \\ K_4 &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} K_w \\ K_5 &= \frac{K_w}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Οι σταθερές σχήματος των ολοκληρωμάτων I_j με $j = 1, 2, 3, 4, 5$ δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$I_j = I_{2j} + I_{3j} \quad (5.17)$$

όπου:

$$I_{2j} = 2\operatorname{erf}\left[\frac{t}{K_j z}\right] \quad (5.18)$$

$$I_{3j} = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_{0j}}^{\infty} \theta_{0j} \exp(-\omega^2) d\omega^2 \quad (5.19)$$

$$\theta_{0j} = \arccos\left[\frac{t}{K_j z} \sin\left(\frac{a_N}{2}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{t}{K_j z}\right)^2} \cos\left(\frac{a_N}{2}\right)\right] \quad (5.20)$$

$$\omega_{0j} = \frac{t}{K_j z \sin\left(\frac{a_N}{2}\right)} \quad (5.21)$$

$$a_N = \frac{2\pi}{N} \quad (5.22)$$

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \exp(-\omega^2) d\omega \quad (5.23)$$

Για την ολοκλήρωση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων θεωρείται ότι τα πεδία των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων, είτε αλληλεπιδρούν είτε όχι, διευρύνονται γραμμικά ως προς την αξονική απόσταση z .

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5.13) ως προς την αξονική απόσταση z , λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις για τις τοπικές και τις αρχικές τιμές των ειδικών εισροών, όπως περιγράφονται στον Πίνακα 5.1, και επιλύοντας ως προς c_{mN} , προκύπτει:

$$c_{mN} = \frac{1}{2\lambda_B K_4^2 I_{wc}} \left(\frac{z}{d_0} \right)^{-2} \left(\frac{w_{mN}}{w_0} \right)^{-1} \quad (5.24)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (5.24), στον όρο του ελλείμματος βάρους ζ_N της εξίσωσης (5.12), η τελευταία ολοκληρώνεται ως προς την αξονική απόσταση z , από την ελάχιστη τιμή z_e έως $z > z_e$, όπου z_e είναι το μήκος του πυρήνα ή διαφορετικά η απόσταση από την έξοδο του ακροφυσίου όπου η ροή θεωρείται πλήρως ανεπτυγμένη. Στη συνέχεια, διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον όρο $m_0^{3/2} = (\pi d_0^2 w_0^2 / 4)^{3/2}$, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\left(\frac{m_N}{m_0} \right)^{3/2} = \left(\frac{m_e}{m_0} \right)^{3/2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{t}{d_0 F_0} \right)^2 \int_{\frac{z_e}{t}}^{\frac{z}{t}} \frac{\sqrt{\lambda_M}}{\lambda_B} K_w (1 + \lambda^2) Id \omega^2 \quad (5.25)$$

όπου

$$I = \sqrt{\frac{I_2}{2}} \frac{I_3}{I_4} \quad (5.26)$$

Το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (5.25) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\int_{\frac{z_e}{t}}^{\frac{z}{t}} \frac{\sqrt{\lambda_M}}{\lambda_B} K_w (1 + \lambda^2) Id \omega^2 = F_N \left[\left(\frac{z}{t} \right)^2 \right] - F_N \left[\left(\frac{z_e}{t} \right)^2 \right] \quad (5.27)$$

όπου

$$F_N \left[\left(\frac{z}{t} \right)^2 \right] = \int \frac{\sqrt{\lambda_M}}{\lambda_B} K_w (1 + \lambda^2) Id \left(\frac{z}{t} \right)^2 \quad (5.28)$$

Ο δείκτης N , δηλώνει το πλήθος των φλεβών που αλληλεπιδρούν. Η ποσότητα F_N υπολογίζεται αριθμητικά. Το αδιάστατο μήκος t/d_0 είναι επαρκές ώστε η αλληλεπίδραση

μεταξύ των φλεβών να μην συμβαίνει εντός του πυρήνα δυναμικής ροής των φλεβών και η συμπαράσυρση να μην περιορίζεται σε αυτή την περιοχή.

Πριν την έναρξη της αλληλεπίδρασης, η κάθε μία ανωστική φλέβα από την ομάδα των N φλεβών, συμπεριφέρεται ως ελεύθερη. Λαμβάνεται επομένως ότι $I_j = 2$ για $j = 1, 2, 3, 4, 5$, οπότε $I = 1$ και $F_N \left[\left(z/t \right)^2 \right] = F_1 \left[\left(z/t \right)^2 \right]$. Αντίστοιχα, με τη μοναχική φλέβα (Yannopoulos 2006), πραγματοποιείται η ακόλουθη αντικατάσταση:

$$M_1 = \left(\frac{m_e}{m_0} \right)^{3/2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \left(\frac{t}{d_0 F_0} \right)^2 F_N \left[\left(\frac{z_e}{t} \right)^2 \right] \quad (5.29)$$

όπου

$$M_1 = 1 + 3F_0^{-2}, \quad F_0 > F_p \quad (5.30)$$

$$M_1 = 1,48, \quad F_0 \leq F_p \approx 2,50$$

Στη συνέχεια, από την εξίσωση (5.25), προκύπτει η ημι-αναλυτική εξίσωση της κατανομής της αδιάστατης ταχύτητας w_{mN}/w_0 , ως προς την αδιάστατη αξονική απόσταση z/d_0 :

$$\frac{w_{mN}}{w_0} = \frac{\lambda_M^{-\frac{1}{2}}}{K_w I_2^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{z}{d_0} \right)^{-1} \left\{ M_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} T^2 F_N \left[\left(\frac{z}{t} \right)^2 \right] \right\} \quad (5.31)$$

όπου T είναι ο αριθμός εγγύτητας της ομάδας των φλεβών που αλληλεπιδρούν, όπως προτείνεται από τους Yannopoulos & Noutsopoulos (2006) και ορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$T = \frac{t}{d_0} F_0^{-1} \quad (5.32)$$

Ο αριθμός εγγύτητας T , εισάγει το συνδυασμό των αποτελεσμάτων της αλληλεπίδρασης εξαιτίας της απόστασης μεταξύ των φλεβών και της άνωσης σε αντίθεση με την

ανεξάρτητη μεταβλητή z/L_m , που περιγράφει μόνο τα αποτελέσματα της μεταβολής της άνωσης στην κατεύθυνση του άξονα της φλέβας. Για τιμές $T > 0,12$, η άνωση θεωρείται ως η κύρια αιτία της αλληλεπίδρασης μεταξύ των φλεβών, ενώ για $T < 0,012$, επικρατεί η δύναμη της αδράνειας.

Για την καλύτερη ποσοτική περιγραφή της αλληλεπίδρασης μεταξύ των φλεβών και την εποπτικότερη παρουσίαση των αποτελεσμάτων, οι εξισώσεις (5.31) και (5.24), που αναφέρονται στις αξονικές κατανομές των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων, διαιρούνται με τις αντίστοιχες εξισώσεις για τις ταχύτητες και τις συγκεντρώσεις, που αναφέρονται στη μοναχική κυκλική κατακόρυφη ανωστική φλέβα (Yannopoulos 2006). Έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$Lw_N = \frac{w_{mN}}{w_m} = \left(\frac{2}{I_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{M_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} T^2 F_N \left[\left(\frac{z}{t} \right)^2 \right]}{M_1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} T^2 F_1 \left[\left(\frac{z}{t} \right)^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (5.33)$$

$$Lc_N = \frac{c_{mN}}{c_m} = \frac{2}{I_4} Lw_N^{-1} \quad (5.34)$$

όπου Lw_N , Lc_N οι λόγοι των αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων και w_m , c_m οι αντίστοιχες τιμές των αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων για τη μοναχική κυκλική ανωστική φλέβα.

5.1.1.1 Οριακές Περιπτώσεις

Η οριακή συμπεριφορά των διαφόρων μεγεθών της μέσης ροής της αλληλεπίδρασης, που σχετίζονται με τους λόγους των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων Lw_N και Lc_N , αντίστοιχα, περιγράφονται στο Παράρτημα ΣΤ. Για την περίπτωση των φλεβών χωρίς άνωση ($F_0 \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$), αυτοί οι λόγοι γράφονται ως εξής:

$$Lw_N = \left(\frac{2}{I_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.35)$$

$$L_{C_N} = \frac{\sqrt{2I_4}}{I_4} \quad (5.36)$$

Παρατηρείται ότι οι λόγοι αυτοί εξαρτώνται μόνον από την αδιάστατη αξονική απόσταση z/t και το πλήθος των φλεβών N , όπως ανεμένετο για τις φλέβες μηδενικής άνωσης. Για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού εγγύτητας T όταν $z/t \rightarrow 0$, ή ισοδύναμα για μεγάλες τιμές του λόγου t/d_0 ($T \rightarrow \infty$), και οι δύο λόγοι, όπως διατυπώνονται από τις εξισώσεις (5.33) και (5.34), τείνουν στη μονάδα, ανεξάρτητα των τιμών z/t και F_0 . Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των φλεβών και η κάθε μία από αυτές συμπεριφέρεται ως μοναχική φλέβα. Σε μεγάλη αξονική απόσταση ($z/t \rightarrow \infty$), τα μεγέθη L_{wN} και L_{cN} αποκτούν πεπερασμένες τιμές όταν το πλήθος των φλεβών N είναι πεπερασμένο, ενώ απειρίζονται όταν $N \rightarrow \infty$. Οι οριακές τιμές των λόγων των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων, L_{wN} και L_{cN} , αντίστοιχα, παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 5.2. Για πεπερασμένες τιμές, του αριθμού εγγύτητας των φλεβών T και για άπειρο πλήθος φλεβών ($N \rightarrow \infty$), ο διαχύτης τύπου ροζέτας προσεγγίζει την περίπτωση του γραμμικού διαχύτη. Συνεπώς, όταν $N \rightarrow \infty$, οι ασυμπτωτικές εκφράσεις των εξισώσεων που περιγράφουν τα μεγέθη L_{wN} και L_{cN} , για τις περιπτώσεις συμπεριφοράς μηδενικής άνωσης και πλήρους άνωσης, είναι αντίστοιχες των εξισώσεων που δίνονται από τους Yannopoulos & Noutsopoulos (2006), όταν λαμβάνεται υπόψη η ακρίβεια $2^{\text{ης}}$ τάξης, ήτοι:

Συμπεριφορά φλέβας μηδενικής άνωσης

$$\lim_{z \rightarrow \infty} L_{wN} = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{\frac{1}{4}} K_w^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,263 \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.37)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} L_{cN} = \lambda \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{K_w}{1+\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,288 \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.38)$$

Συμπεριφορά φλέβας πλήρους άνωσης

$$\lim_{z \rightarrow \infty} L_{wN} = \left(\frac{K_w}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{1+\lambda^2}}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{3}} = 0,399 \left(\frac{z}{t}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.39)$$

Πίνακας 5.2 Οριακές τιμές για τους λόγους ταχυτήτων (L_{wN}) και συγκεντρώσεων (L_{CN}).

Ποσότητα	$z/t \rightarrow 0$		$z/t \rightarrow \infty$	
	$N > 0$		N	
	$T \geq 0$	$T = 0$	$T > 0$	$T \geq 0$
L_{wN}	1	$N^{1/2}$	$N^{1/3}$	∞
L_{CN}	1	$N^{1/2}$	$N^{2/3}$	∞

$$\lim_{z \rightarrow \infty} L_{CN} = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{3\pi K_w^2}{\sqrt{2}(1+\lambda^2)} \right]^{\frac{1}{3}} \left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,176 \left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (5.40)$$

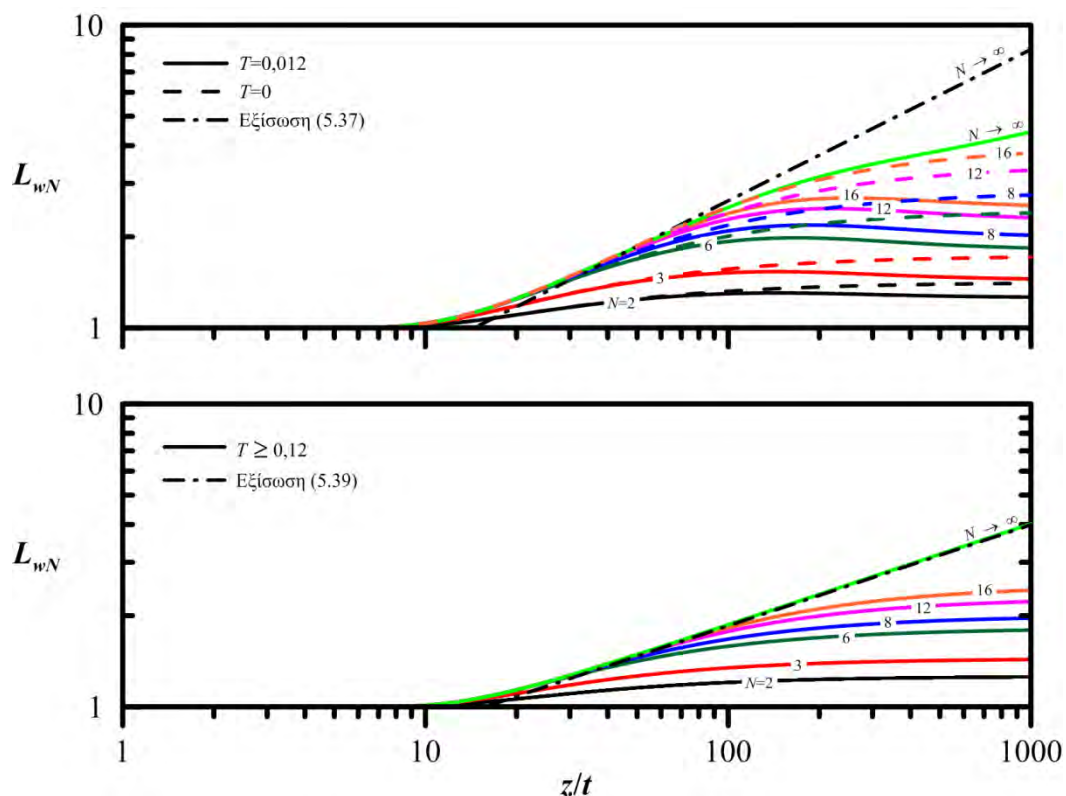
όπου $K_w = 0,110$, $\lambda = 1,23$ για φλέβες μηδενικής άνωσης και $\lambda = 1,04$ για φλέβες πλήρους άνωσης.

5.1.2 Αποτελέσματα

5.1.2.1 Διαμήκεις Κατανομές Αδιαστατοποιημένων Αξονικών Ταχυτήτων και Συγκεντρώσεων

Οι διαμήκεις κατανομές των αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, αδιαστατοποιημένες ως προς τις αντίστοιχες τιμές για τη μοναχική κατακόρυφη τυρβώδη ανωστική φλέβα εκφράζονται με τη μορφή των λόγων L_{wN} και L_{CN} και υπολογίζονται από τις εξισώσεις (5.33) και (5.34), αντίστοιχα. Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.3 παρουσιάζονται οι κατανομές του λόγου L_{wN} συναρτήσει της αδιαστατοποιημένης αξονικής απόστασης z/t και του αριθμού εγγύτητας T . Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.4 παρουσιάζονται οι κατανομές του λόγου L_{CN} συναρτήσει της αδιαστατοποιημένης αξονικής απόστασης z/t και του αριθμού εγγύτητας T .

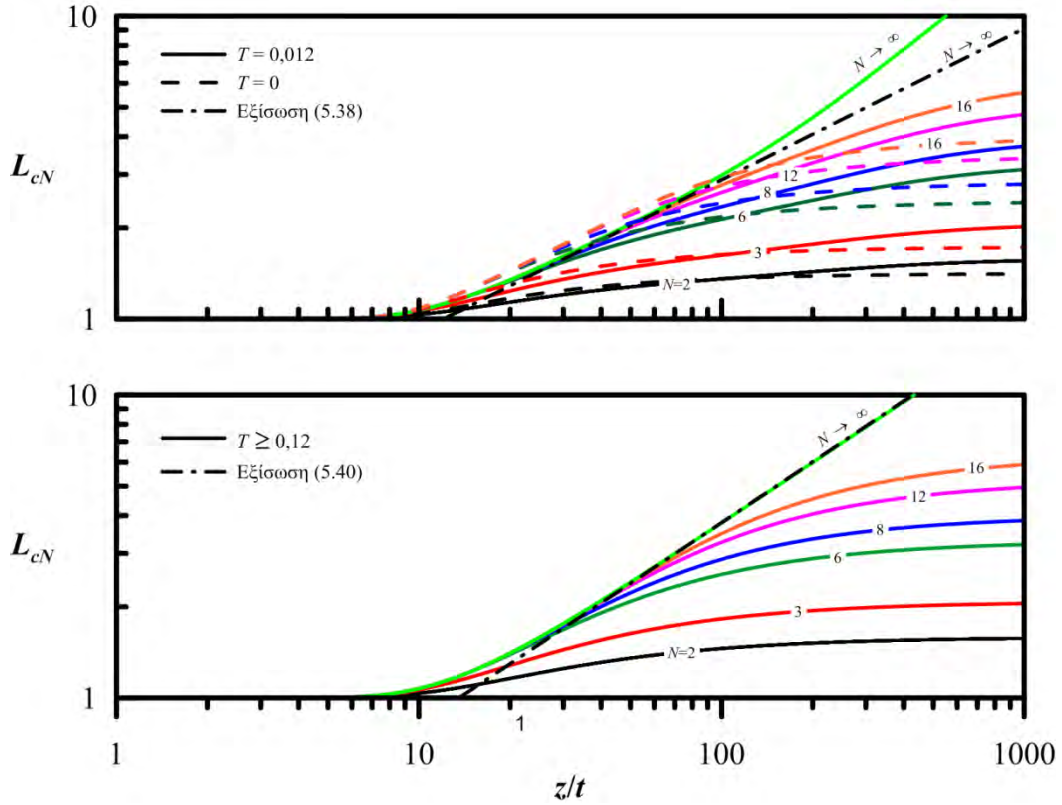
Οι γραμμικοί διαχύτες με $N = 2$ ή $N \rightarrow \infty$ κατακόρυφες ανωστικές φλέβες, οι οποίες απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2t$, αποτελούν το κάτω και άνω όριο των περιπτώσεων που εξετάστηκαν. Τα αποτελέσματα, που προέκυψαν από την εφαρμογή του μοντέλου της Διατριβής για $N = 2$ ή $N \rightarrow \infty$ ταυτίζονται με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για γραμμικούς διαχύτες, όπως δίνονται από τους Noutsopoulos & Yannopoulos (2006a, b), τα οποία στηρίζονται στη θεωρία του περιορισμού της συμπαράσυρσης και στη θεωρία της υπέρθεσης, με τις οποίες συμφωνούν τα πειραματικά δεδομένα.



Σχήμα 5.3 Κατανομή του λόγου των μέσων αξονικών ταχυτήτων κατά μήκος τυρβώδους ανωστικής φλέβας, η οποία ανήκει σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.

Τα αποτελέσματα της παρούσας ανάλυσης συμφωνούν με εκείνα του μοντέλου της υπέρθεσης, όταν εφαρμόζεται σε γραμμικούς διαχύτες. Είναι εμφανής, και στην περίπτωση του διαχύτη τύπου ροζέτας, η ύπαρξη πέντε περιοχών αλληλεπίδρασης μεταξύ των ανωστικών φλεβών, που προέρχονται από τη ροζέτα και είναι οι εξής: (α) Ζώνη αρχικής τρισδιάστατης συμπεριφοράς, πριν την αλληλεπίδραση, (β) η κάτω μεταβατική ζώνη εξαιτίας της αλληλεπίδρασης όπου η τρισδιάστατη συμπεριφορά εξελίσσεται σε δισδιάστατη, (γ) Ζώνη δισδιάστατης συμπεριφοράς, όπου το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης ολοκληρώνεται και τα πεδία ροής και διάχυσης μοιάζουν με τα αντίστοιχα ενός διαχύτη σχισμής, (δ) η άνω μεταβατική ζώνη, όπου τα πεδία ροής και διάχυσης τείνουν σε εκείνα του διαχύτη απείρων ακροφυσίων καθώς αρχίζουν να αποκτούν πάλι τρισδιάστατο χαρακτήρα και (ε) η τελική ζώνη, όπου ο τρισδιάστατος χαρακτήρας της ροής έχει αποκατασταθεί, πάλι.

Δυστυχώς, η απουσία πειραματικών δεδομένων σε διαχύτες αυτής της μορφής, με περισσότερα από δύο κατακόρυφα ακροφύσια καθιστούν αδύνατη τη σύγκριση με τα προαναφερθέντα αποτελέσματα.



Σχήμα 5.4 Κατανομή του λόγου των μέσων αξονικών συγκεντρώσεων κατά μήκος τυρβώδους ανωστικής φλέβας, η οποία ανήκει σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.

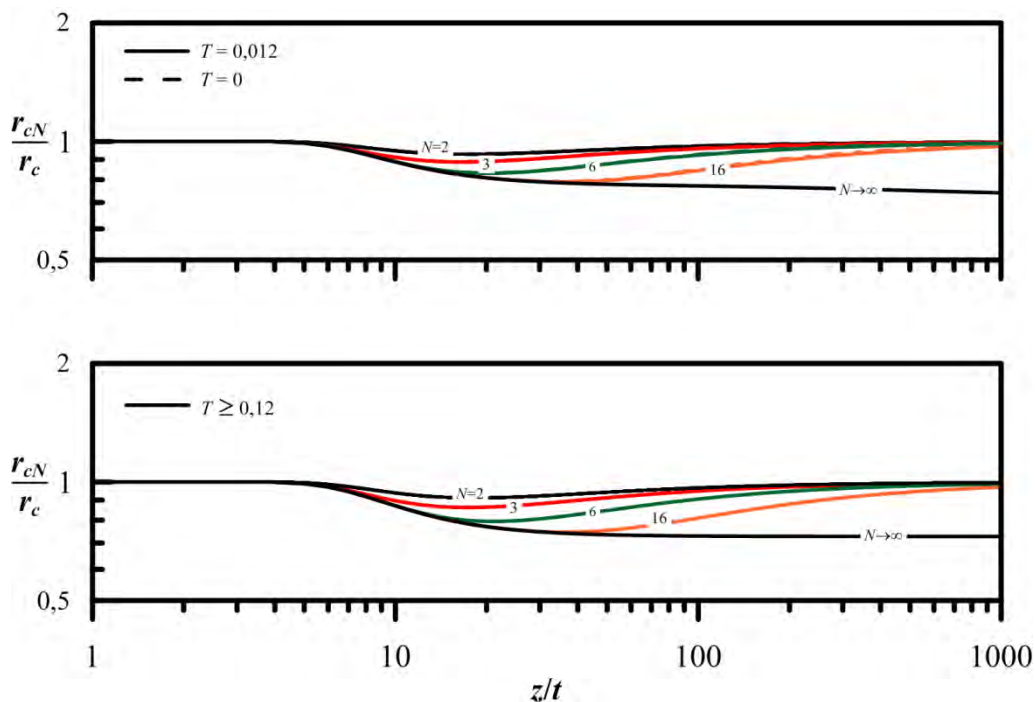
5.1.2.2 Λόγος Αραίωσης

Ο λόγος αραίωσης για μια ομάδα N τυρβωδών ανωστικών φλεβών ορίζεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$r_{cN} = \frac{\mu_N}{\mu_0} \frac{c_{mN}}{c_0} = r_c \frac{\mu_N}{\mu} L_{cN} \quad (5.41)$$

Όπου r_c είναι ο αντίστοιχος λόγος αραίωσης για τη μοναχική ανωστική φλέβα, η οποία έχει εισροή όγκου μ και $c_0 = 1$. Η εξίσωση (5.41) για $N = 1$ δίνει $r_c \equiv r_{c1}$, $\mu \equiv \mu_1$ και $c_m \equiv c_{m1}$. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του Πίνακα 5.1 και την εξίσωση (5.34), η εξίσωση (5.41) λαμβάνει την απλούστερη μορφή, που περιγράφεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$r_{cN} = r_c \frac{I_1}{I_4} \quad (5.42)$$



Σχήμα 5.5 Κατανομή του λόγου r_{cN}/r_c κατά μήκος τυρβώδους ανωστικής φλέβας, η οποία ανήκει σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.

όπου I_1 και I_4 είναι οι συντελεστές σχήματος του ολοκληρώματος της εξίσωσης (5.17). Η μεταβολή του λόγου r_{cN}/r_c , ο οποίος είναι ο λόγος r_{cN} αδιαστατοποιημένος με τον αντίστοιχο λόγο r_c της μοναχικής φλέβας, παρουσιάζεται στα διαγράμματα του Σχήματος 5.5 συναρτήσει των μεγεθών z/t , T και N . Η συμπεριφορά της εξίσωσης (5.42) εξετάστηκε στις οριακές περιπτώσεις για πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος N ανωστικών φλεβών, για μικρές ή μεγάλες τιμές του z/t και για φλέβες μηδενικής ή πλήρους άνωσης (Παράρτημα ΣΤ). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 5.3.

Είναι εμφανές ότι ο λόγος αραίωσης για ένα διαχύτη τύπου ροζέτας με κατακόρυφα ακροφύσια, συμπεριφέρεται όπως ο αντίστοιχος λόγος αραίωσης που αναφέρεται στην περίπτωση της μοναχικής κατακόρυφης κυκλικής ανωστικής φλέβας. Αυτή η συμπεριφορά μεταβάλλεται όταν $N \rightarrow \infty$, αντιστοιχώντας σε έναν διαχύτη ροζέτας με άπειρη ακτίνα, ακολουθώντας τη συμπεριφορά του λόγου αραίωσης που αναφέρεται στην κατακόρυφη δισδιάστατη ανωστική φλέβα. Όμως, για μεγάλο αλλά πεπερασμένο αριθμό N ακροφυσίων, από την έναρξη της διαδικασίας της αλληλεπίδρασης μέχρι την ολοκλήρωσή της, η συμπεριφορά του λόγου ξεκινά από εκείνη της κυκλικής ανωστικής φλέβας και τελικά προσεγγίζει εκείνη της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας. Μετά το πέρας της αλληλεπίδρασης, η συμπεριφορά του λόγου επανέρχεται σταδιακά σε εκείνη της μοναχικής ανωστικής φλέβας. Φυσική εξήγηση της παραπάνω συμπεριφοράς μπορεί να γί-

Πίνακας 5.3 Οριακές τιμές του λόγου r_{cN} για μία κατακόρυφη τυρβώδη ανωστική φλέβα, για N τυρβώδεις ανωστικές φλέβες από διαχύτη ροζέτας με κατακόρυφα ακροφύσια και κατακόρυφη δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα.

Ανωστικές φλέβες	Φλέβα Μηδενικής Άνωσης		Φλέβα Πλήρους Άνωσης	
	$z \rightarrow 0$	$z \rightarrow \infty$	$z \rightarrow 0$	$z \rightarrow \infty$
Κυκλική				
Μοναχική ή Πολλαπλή ($N \geq 1$)	1,54	1,54	1,67	1,67
$N \rightarrow \infty$	1,54	1,19	1,67	1,20
Δισδιάστατη	1,16	1,16	1,10	1,10

νει αν ληφθούν υπόψη οι πεπερασμένες διαστάσεις της πηγής. Η πηγή (ροζέτα) αν παρατηρηθεί από μεγάλη απόσταση μοιάζει με μοναχική κυκλική (σημειακή) πηγή. Αντίθετα, σε μικρές και μέσες αποστάσεις, η πηγή μοιάζει με μια γραμμική πηγή απείρων φλεβών ($N \rightarrow \infty$).

Για ένα διαχύτη, ο οποίος φέρει πλήθος ροζετών (Roberts & Snyder 1993b), έχουν μετρηθεί οι μέσες αραιώσεις και έχουν υπολογιστεί οι λόγοι αραιώσης για τρεις τιμές παροχής, όπου ο ακίνητος αποδέκτης θεωρείται στρωματοποιημένος λόγω θέρους. Οι Roberts & Snyder (1993b) υπολόγισαν ότι $1,08 \leq r_{cN} \leq 1,25$ με μέση τιμή 1,15. Από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας (Σχήμα 5.5), προκύπτει ότι $r_{cN} \approx 1,25$ για διαχύτη τύπου ροζέτας με $N = 8$ έως 12 κατακόρυφα ακροφύσια, για $28,4 \leq z/t \leq 42,0$ και $0,086 \leq T \leq 0,37$, χωρίς στρωματοποίηση. Φαίνεται ότι ο λόγος αραιώσης μειώνεται κατά 75% περίπου σε σχέση με τον αντίστοιχο της κυκλικής ανωστικής φλέβας. Επίσης, το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης παρατηρείται νωρίτερα ($z/t \approx 5,5$), όταν εξετάζεται ο λόγος αραιώσης, σε σχέση με την αντίστοιχη θέση όταν μελετώνται οι λόγοι Lw_N και Lc_N ($z/t \approx 7,5$). Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι ο λόγος αραιώσης, ο οποίος αναπαριστά τη συνεισφορά της συμπαράσυρσης του περιβάλλοντος ρευστού, είναι περισσότερο ευαίσθητος συγκριτικά με τα αξονικά μεγέθη.

5.1.2.3 Λόγος Εισροής Κινητικής Ενέργειας

Η εισροή κινητικής ενέργειας για τη μέση ροή μιας ομάδας από N κατακόρυφες τυρβώδεις ανωστικές φλέβες, οι οποίες εκβάλλουν από διαχύτη τύπου ροζέτας, ορίζεται στον Πίνακα 5.1. Ο λόγος των εισροών κινητικής ενέργειας $\varepsilon_N/\varepsilon$ δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon} = \frac{I_5}{2} L_{wN}^3 \quad (5.43)$$

Όπου ε είναι η εισροή της κινητικής ενέργειας για τη μοναχική ανωστική φλέβα. Ο λόγος της εισροής της κινητικής ενέργειας ε προς την αρχική της τιμή ε_0 , δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3} K_w^2 \left(\frac{z}{d_0} \right)^2 \left(\frac{w_m}{w_0} \right)^3 \quad (5.44)$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα 2^{ης} τάξης του Yannopoulos (2006) και τις οριακές τιμές των συντελεστών σχήματος των ολοκληρωμάτων (Παράρτημα ΣΤ), για πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος N φλεβών μηδενικής ή πλήρους άνωσης σε μικρές ή μεγάλες αποστάσεις z/t , η οριακή συμπεριφορά των εξισώσεων (5.43) και (5.44) είναι η ακόλουθη:

Για $z \rightarrow 0$ για φλέβες μηδενικής και πλήρους άνωσης

$$N \geq 1 \quad \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon} \rightarrow E_{Nj} = 1,00 \quad (5.45)$$

Για $z \rightarrow \infty$

Φλέβες μηδενικής άνωσης

$$N = 1 \quad \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_0} \rightarrow E_j \left(\frac{z}{t} \right)^{-1} \quad (5.46)$$

$$\text{Όπου: } E_j = \frac{\sqrt{2}}{3K_w \lambda_{M}^{3/2}} = 3,71 \quad (5.47)$$

$$N \geq 2 \quad \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon} \rightarrow E_{Nj} = N^{\frac{1}{2}} \quad (5.48)$$

$$N \rightarrow \infty \quad \frac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon} \rightarrow E_{\infty j} \left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.49)$$

$$\text{όπου: } E_{\infty j} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3K_w}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,322 \quad (5.50)$$

Φλέβες πλήρους άνωσης

$$N = 1 \quad \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 2E_p F_p^{-2} \left(\frac{z}{d_0} \right) \quad \text{ή} \quad \varepsilon_p = E_p \beta_0 z \quad (5.51)$$

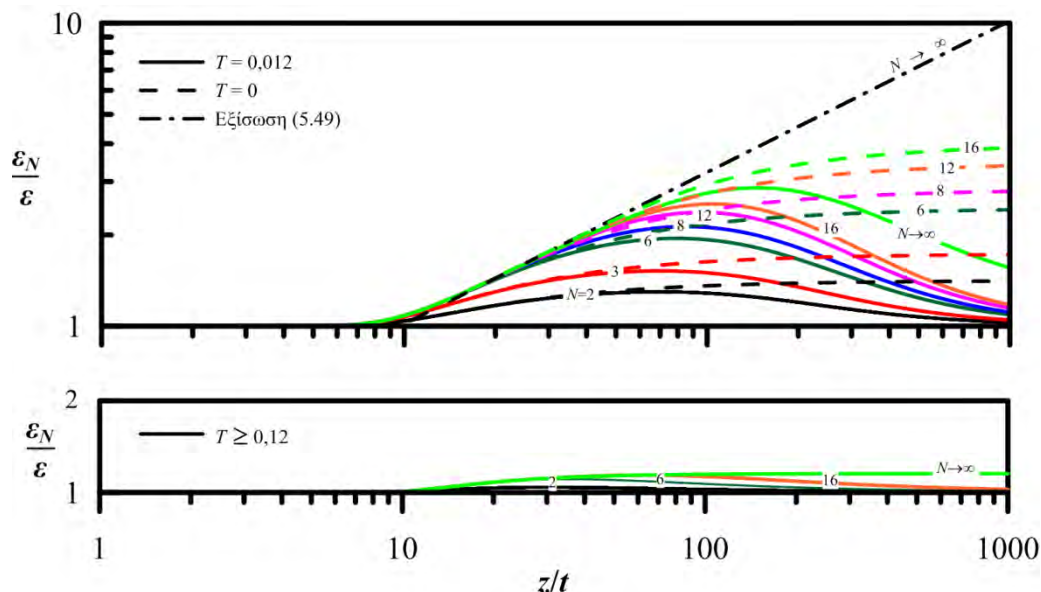
$$\text{όπου: } E_p = \frac{1 + \lambda_p^2}{4\lambda_M \lambda_{Bp}} = 0,411 \quad (5.52)$$

$$N \geq 2 \quad \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon} \rightarrow E_{Np} = 1,00 \quad (5.53)$$

$$N \rightarrow \infty \quad \frac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon} \rightarrow E_{\infty p} \quad (5.54)$$

$$\text{όπου: } E_{\infty p} = \frac{2}{3} \left(\frac{6}{1 + \lambda_p^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,13 \quad (5.55)$$

Οι Albertson *et al.* (1950) αναφέρουν παρόμοια συμπεριφορά για την κυκλική ή την δισδιάστατη φλέβα μηδενικής άνωσης. Αναφέρουν τις τιμές $E_j = 4,1$ και $E_{sj} = 0,284$, αντί των 3,71 και 0,322, που υπολογίστηκαν παραπάνω. Οι Rouse *et al.* (1952) μέτρησαν μεγαλύτερες τιμές για τις κυκλικές και επίπεδες φλέβες πλήρους άνωσης, σημειώνοντας ότι $d\varepsilon_p/dz = 0,57\beta_0$ και $d\varepsilon_{sp}/dz = 0,53\beta_0$, με το δείκτη s να δηλώνει την περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας. Η μεταβολή του λόγου $\varepsilon_N/\varepsilon$ συναρτήσει της αξονικής απόστασης z/t , του αριθμού εγγύτητας T και του πλήθους των ανωστικών φλεβών N , πα-



Σχήμα 5.6 Κατανομή της αδιαστατοποιημένης εισροής κινητικής ενέργειας κατά μήκος τυρβώδους ανωστικής φλέβας η οποία ανήκει σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.

ρουσιάζεται στα διαγράμματα του Σχήματος 5.6. Ο λόγος $\varepsilon_N/\varepsilon$ αποκτά τη μέγιστη τιμή στην περιοχή $20 < z/t < \infty$, εξαρτώμενος από τα μεγέθη N και T . Στην περίπτωση όπου $T \geq 0,12$, ο λόγος αυτός αποκτά τιμές μικρότερες ή ίσες της μέγιστης τιμής 1,24. Ο λόγος $\varepsilon_N/\varepsilon$ τείνει στην οριακή τιμή 1,13 για $z/t \rightarrow \infty$ και $N \rightarrow \infty$.

5.1.2.4 Τοπικός Αριθμός Richardson

Ο αριθμός Richardson, προς τιμή του ερευνητή Lewis Fry Richardson (1881-1953), αποτελεί χρήσιμη αδιάστατη παράμετρο, η οποία χρησιμοποιείται συχνά στη Μηχανική των Ρευστών. Γενικά, ο αριθμός Richardson είναι ο αντίστροφος του τετραγώνου του αριθμού Froude. Σε φαινόμενα ανωστικών ροών, τα οποία συναντώνται στην περιβαλλοντική ρευστομηχανική και την ατμοσφαιρική ρύπανση, ο πυκνομετρικός αριθμός Richardson εκφράζει το λόγο των ανωστικών προς τις αδρανειακές δυνάμεις, οριζόμενος από την ακόλουθη εξίσωση:

$$R = \frac{g'h}{w^2} \quad (5.56)$$

όπου g' είναι φαινόμενη επιτάχυνση της βαρύτητας, h είναι το ύψος του ρευστού και w είναι η μέση ταχύτητα κίνησης του εν λόγω ρευστού. Είναι εμφανές ότι η εξίσωση (5.56),

οδηγεί στην ισοδύναμη εξίσωση, που εκφράζει τον αριθμό Richardson ως το πηλίκο της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια της ροής. Υπάρχουν πολλές ακόμα διατυπώσεις για τον αριθμό Richardson, ανάλογα με το πεδίο της επιστήμης στο οποίο χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα, συνήθης χρήση του αριθμού Richardson σε φαινόμενα όπου εξελίσσονται λόγω της δύναμης της άνωσης, τα οποία εμφανίζονται στην ωκεανογραφία και μετεωρολογία, είναι η αποτίμηση της συγκριτικής σημασίας της μηχανικής και δυναμικής επιρροής στο ρευστό και ο προσδιορισμός της επίδρασης στη δυναμική ευστάθεια (Stull 1988, Schnelle & Day 2000 και Stewart 2006). Αντίστοιχα, σε περιπτώσεις διατμητικών και τυρβωδών ροών, ο αριθμός Richardson χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του λόγου της ανωστικής ανάλωσης της τύρβης ως προς τη διατμητική δημιουργία της τύρβης. Αυτή η έκφραση του αριθμού Richardson σε περιβάλλοντα με στρωματοποίηση εμπεριέχει τη γνωστή συχνότητα Brunt–Väisälä (Turner 1973). Το πεδίο ροής κοντά στην έξοδο, όπως και ο μηχανισμός μείξης μιας ανωστικής φλέβας (θετικής ή αρνητικής άνωσης), όπως είναι η θεμελιώδης δομή της ροής και η μετάβαση στην τύρβη, ακόμη και όταν μια τέτοια φλέβα προσκρούει σε μια αναμειγνύμενη διεπιφάνεια, αρχικά καθοδηγούνται από μια έκφραση του αριθμού Richardson (Subbarao & Cantwell 1992 και Friedman & Katz 1999, 2000). Για τιμές του αριθμού Richardson μικρότερες του 1, το ύψος της αρνητικής ανωστικής φλέβας ταλαντεύεται (Friedman 2006). Η μετάβαση από τη στρωτή στη τυρβώδη ροή μιας ανωστικής φλέβας εξαρτάται από την τιμή του αριθμού Richardson (Pasumarthi & Agrawal 2005). Η ροή στο βάθος (back flow) εντός ρευστού με στρωματοποίηση (backlayering) συναντάται, όταν ρευστό με άνωση εκλύεται συνεχώς σε ροή εντός ανοιχτού αγωγού (ή ρεύματος) και οι δυνάμεις της άνωσης εξακολουθούν να επικρατούν των αδρανειακών δυνάμεων στην περιοχή της πρόσκρουσης. Το φαινόμενο αυτό, στη γενική του μορφή, σχετίζεται με την κρίσιμη ταχύτητα του ρεύματος, εξισώνοντας τον αριθμό Richardson της συνολικής ροής με την τιμή 1 (Vauquelin 2005). Η συμπαράσυρση περιβάλλοντος ρευστού και η αυτο-ομοιότητα, καθώς επίσης και άλλες ποσότητες των ροών ανωστικών φλεβών, δύναται να εκφραστούν συναρτήσει του τοπικού αριθμού Richardson (Wang & Law 2002, Kaminski *et al.* 2005, Carazzo *et al.* 2006 και Yannopoulos 2006).

Χρησιμοποιώντας τις ειδικές εισροές, όπως αναφέρονται στον Πίνακα 2.1, διατυπώνεται μια γενική εξίσωση για τον τοπικό αριθμό Richardson R για την περίπτωση της μοναχικής κυκλικής και της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας (Yannopoulos 2006):

$$R = \frac{\mu^{\frac{3+i}{1+i}} \beta^{\frac{3+2i}{1+i}}}{m^{\frac{3+2i}{1+i}}} \quad (5.57)$$

όπου $i = 0$ για την δισδιάστατη ανωστική φλέβα και $i = 1$ για την περίπτωση της κυκλικής.

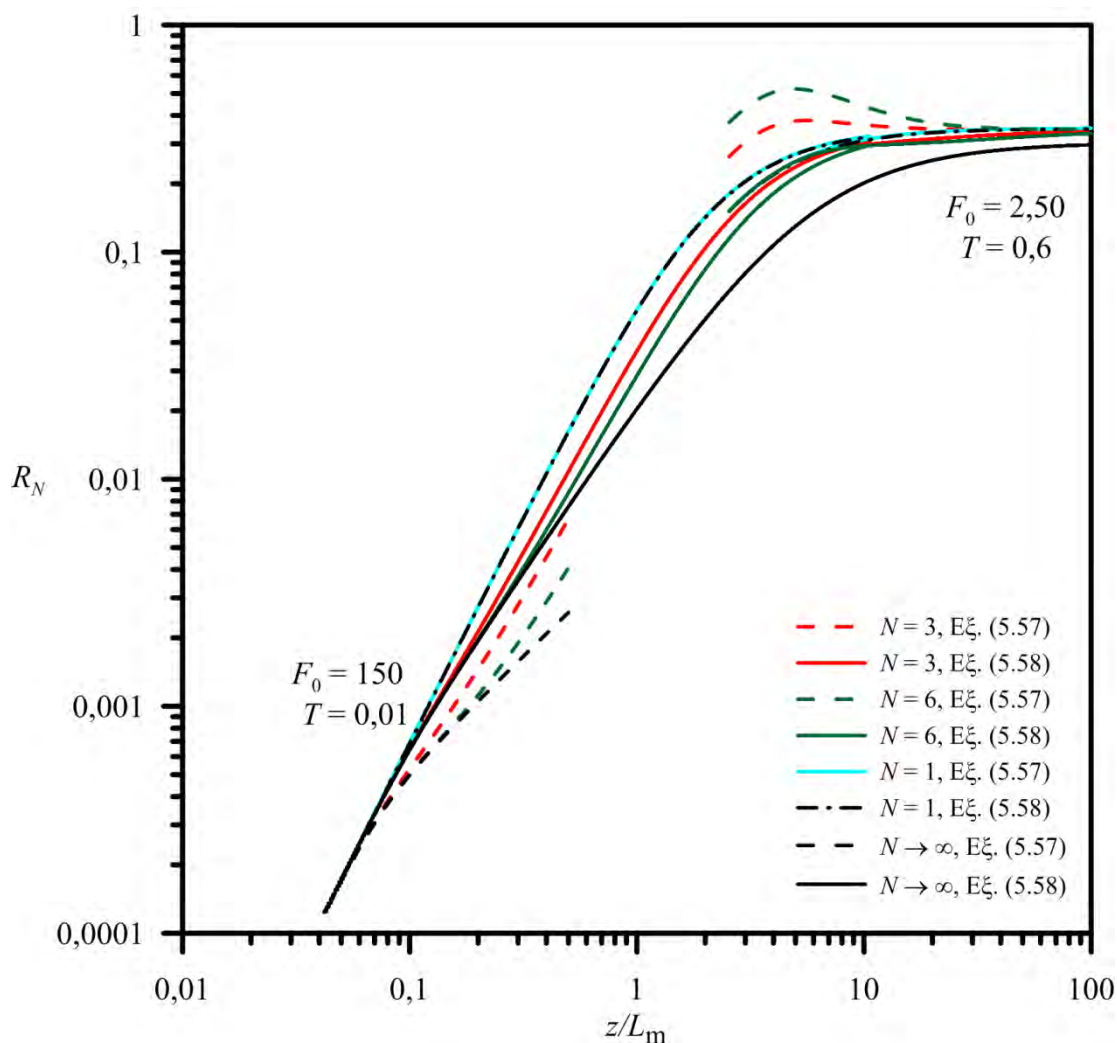
Η χρησιμοποίηση της θεωρίας του περιορισμού της συμπαράσυρσης (Yannopoulos & Noutsopoulos 2006a) σε συνδυασμό με το μοντέλο 2^{ης} τάξης (Yannopoulos 2006) υποθέτουν ότι ο τοπικός αριθμός Richardson είναι γνωστός, καθώς οι συντελεστές λ και λ_B (που εισάγουν τη συνεισφορά της τύρβης στις εισροές ορμής και άνωσης, δηλαδή την ακρίβεια δευτέρας τάξης) προσδιορίζονται συναρτήσει του R . Το μοντέλο 1^{ης} τάξης, όπως περιγράφεται από τους (Noutsopoulos & Yannopoulos 1987), χρησιμοποιείται αρχικά ώστε να υπολογιστεί μια πρώτη προσεγγιστική τιμή του αριθμού R , αγνοώντας τη συνεισφορά της τύρβης, αφού $\lambda = \lambda_B = 1$, και με επαναληπτική διαδικασία να υπολογιστεί στη συνέχεια (όχι περισσότερες από τρεις επαναλήψεις) η ακριβής τιμή του αριθμού R . Ο κλασικός ορισμός του αριθμού Richardson, όπως περιγράφεται από την εξίσωση (5.57), είναι πολύπλοκος στην χρησιμοποίησή του όταν πρόκειται για τη μελέτη της αλληλεπίδρασης N ανωστικών φλεβών, και μπορεί να αντικατασταθεί από έναν απλούστερο, όπως αυτός προτείνεται για τη μοναχική κατακόρυφη κυκλική ανωστική φλέβα από τον Yannopoulos (2006), όπου ορίζεται μόνο από τις τοπικές εισροές της άνωσης και της κινητικής ενέργειας, σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση:

$$R_N = p \frac{\beta_N z}{\varepsilon_N} \quad (5.58)$$

όπου $p = 0,144 \pm 0,0008$ και σύμφωνα με τους ορισμούς των εισροών που έχουν αναφερθεί νωρίτερα, $\beta_N = \beta_0$, με το δείκτη N να δηλώνει ότι η συγκεκριμένη ποσότητα αναφέρεται σε μία ομάδα N ανωστικών φλεβών, οι οποίες αλληλεπιδρούν. Ο «νέος» ορισμός του αριθμού Richardson, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.58), είναι γενικός διότι είναι ανεξάρτητος από το δισδιάστατο ή τρισδιάστατο χαρακτήρα της ανωστικής φλέβας, σε αντίθεση με τον κλασικό ορισμό, που δίνεται από την εξίσωση (5.57). Επίσης, η έκφραση του αριθμού Richardson από την εξίσωση (5.58) παριστά το λόγο της κινητικής ενέργειας (εξαιτίας της ανωστικής δύναμης) προς την κινητική ενέργεια της μέσης ροής, όπως συμβαίνει και στην εξίσωση (5.57). Αντίθετα προς την εξίσωση (5.57), η εξίσωση (5.58) έχει το πλεονέκτημα ότι ο αριθμητής και ο παρανομαστής του κλάσματος, είναι

γραμμικές σχέσεις των εισροών άνωσης και κινητικής ενέργειας. Έτσι, μελετώντας την αλληλεπίδραση των ανωστικών φλεβών, ο αριθμός Richardson υπολογιζόμενος από την εξίσωση (5.58), είναι ανεξάρτητος από την εξέταση της μιας εκ του συνόλου των N ανωστικών φλεβών ή του συνολικού αριθμού των ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν.

Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.7, παρουσιάζεται η μεταβολή του αριθμού Richardson R_N , συναρτήσει της αδιάστατης αξονικής απόστασης z/L_m , όπου σε ένα διαχύτη τύπου ροζέτας με $N = 3, 6$ και $N \rightarrow \infty$ κατακόρυφα ακροφύσια. Η μεταβολή του R_N στο Σχήμα 5.7, υπολογίστηκε για δύο περιπτώσεις αρχικών πυκνομετρικών αριθμών Froude, μία μικρή, $F_0 = 2,5$ και μία μεγάλη, $F_0 = 150$, σε αντιστοιχία της συμπεριφοράς μοναχικής κυκλικής κατακόρυφης φλέβας πλήρους και μηδενικής άνωσης, αντίστοιχα. Η μεταβολή του R_N συγκρίνεται με την αντίστοιχη μεταβολή της μοναχικής ανωστικής φλέ-

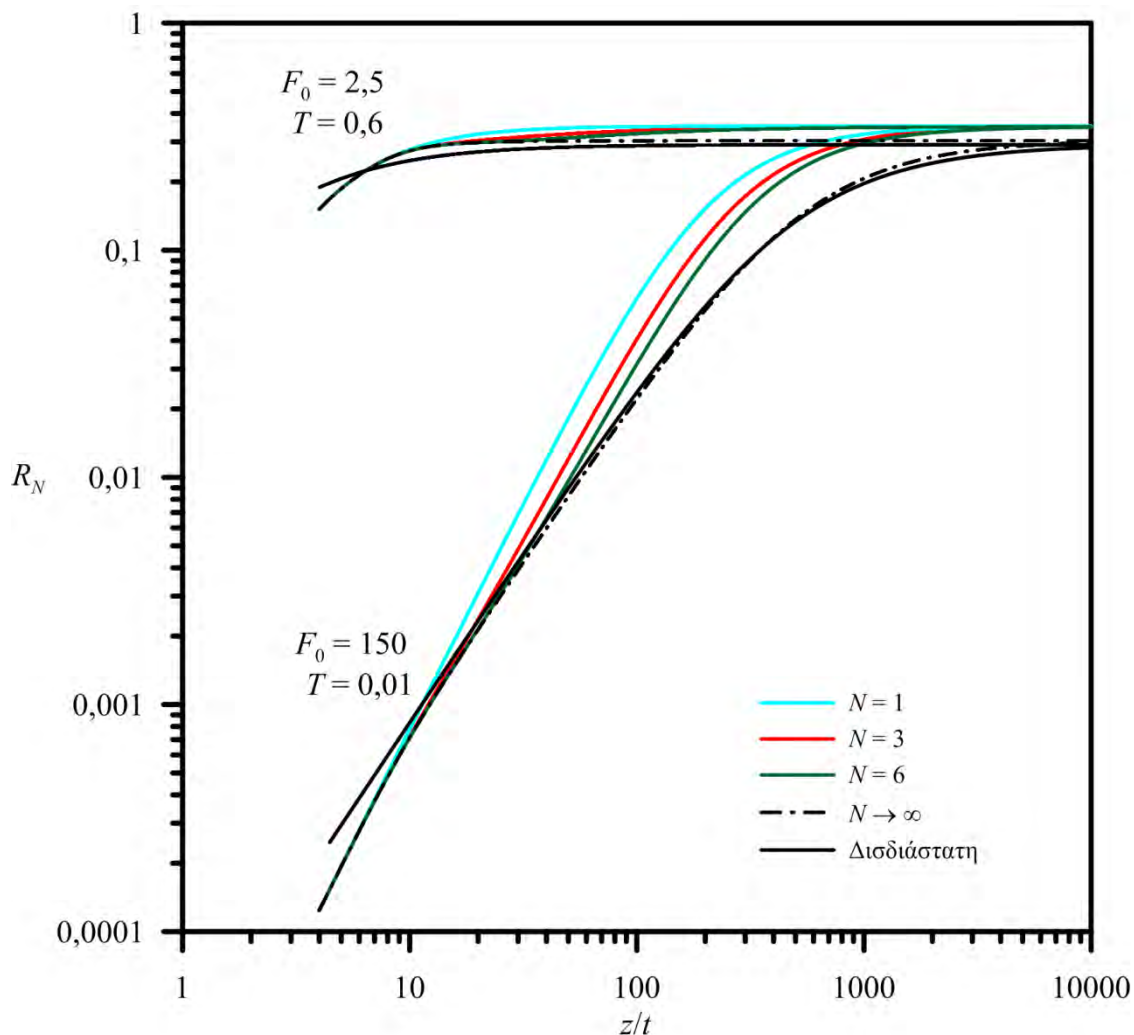


Σχήμα 5.7 Μεταβολή του αριθμού Richardson R_N συναρτήσει της αξονικής απόστασης z/L_m , σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.

βας και της ροζέτας με N αριθμό φλεβών, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (5.57) και (5.58). Στην περίπτωση της μοναχικής ανωστικής φλέβας, τα αποτελέσματα προερχόμενα είτε από την εξίσωση (5.57) είτε την εξίσωση (5.58), ταυτίζονται. Για το διαχύτη τύπου ροζέτας με $N = 3, 6$ και $N \rightarrow \infty$ κατακόρυφα ακροφύσια, η οριακή συμπεριφορά του R_N , η οποία επιτυγχάνεται για μικρές και μεγάλες τιμές του z , χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.58), παρουσιάζει πλήρη συμφωνία με τα αποτελέσματα, τα οποία προέρχονται με χρήση της κλασσικής εξίσωσης, που περιγράφει τον αριθμό Richardson, εξίσωση (5.57), η οποία ισχύει για την μοναχική ανωστική φλέβα. Στην ενδιάμεση περιοχή, $0,1 \leq z/L_m \leq 10$, τα αποτελέσματα του αριθμού Richardson παρουσιάζουν διαφορές, ανάλογα με το ποιός ορισμός έχει χρησιμοποιηθεί. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η ομαλή μεταβολή του αριθμού Richardson, ορισμένου από την εξίσωση (5.58), ακόμη και στην ενδιάμεση περιοχή, δηλώνοντας ότι είναι ανεξάρτητη του φαινομένου της αλληλεπίδρασης και του αριθμού των κυκλικών ανωστικών φλεβών, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η μορφή του αδιάστατου δυναμικού μεγέθους L_m , μεταβάλλεται ανάλογα, αν πρόκειται για μοναχική κυκλική ανωστική φλέβα ή δισδιάστατη ανωστική φλέβα (Yanopoulos 2006). Επομένως, η χρήση του μεγέθους L_m δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή του φαινομένου της αλληλεπίδρασης. Η αξονική απόσταση αδιαστατοποιείται με την απόσταση t (όπου $2t$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ακροφυσίων). Η εξίσωση, που συνδέει την αδιάστατη αξονική απόσταση z/t , τον αριθμό εγγύτητας των φλεβών T και την αδιάστατη αξονική απόσταση z/L_m , είναι η ακόλουθη:

$$\frac{z}{t} = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{4}} T^{-1} \frac{z}{L_m} \quad (5.59)$$

Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.7, δίνεται έμφαση στην παρατήρηση της συμπεριφοράς του R_N των ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν, στα όρια όπου η συμπεριφορά τους προσεγγίζει εκείνη της μοναχικής φλέβας. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, η χρήση της αδιάστατης αξονικής απόστασης z/L_m είναι κατάλληλη. Αντίθετα, στο διάγραμμα του Σχήματος 5.8 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μεταβολής του αριθμού Richardson χρησιμοποιώντας μόνο το «νέο» ορισμό με την εξίσωση (5.58). Σε αυτό το διάγραμμα παρατηρείται η συμπεριφορά του αριθμού Richardson σε ολόκληρη την περιοχή της μεταβολής της άνωσης σε συνδυασμό με το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης. Για το λόγο αυτό, στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι κατάλληλη η χρή-



Σχήμα 5.8 Μεταβολή του αριθμού Richardson R_N συναρτήσει της αξονικής απόστασης z/t , σε διαχύτη ροζέτας με N κατακόρυφα ακροφύσια.

ση της αδιάστατης αξονικής απόστασης z/t .

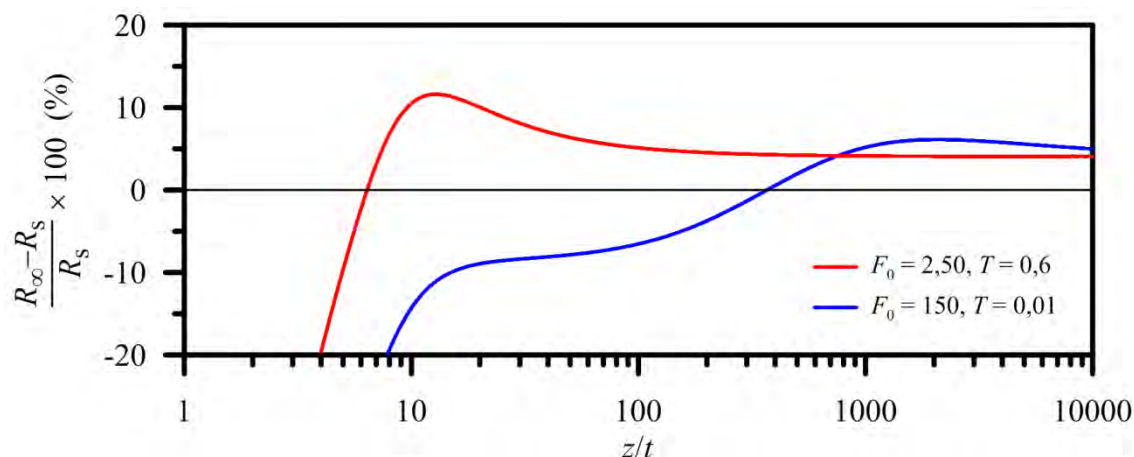
Στο διάγραμμα του Σχήματος 5.8, παρουσιάζεται μια σταδιακή μετακίνηση των καμπυλών, όπου η κάθε μία παριστάνει τη μεταβολή του R_N συναρτήσει της απόστασης z/t και αντιστοιχεί στο πλήθος των φλεβών που αλληλεπιδρούν. Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των φλεβών που αλληλεπιδρούν, οι καμπύλες μετακινούνται από την καμπύλη που αντιστοιχεί στη μοναχική φλέβα έως εκείνη που αντιστοιχεί στην ισοδύναμη δισδιάστατη φλέβα (ισοδύναμη προς την περίπτωση με $N \rightarrow \infty$). Φαίνεται ότι ο αριθμός Richardson κυμαίνεται από μία μέγιστη τιμή, που αντιστοιχεί στην περίπτωση της μοναχικής κυκλικής φλέβας έως μια ελάχιστη, η οποία προκύπτει στην περίπτωση όπου ο αριθμός των φλεβών που αλληλεπιδρούν είναι μεγάλος, ειδικά όταν η συμπεριφορά της αλληλεπίδρασης προσεγγίζει τη συμπεριφορά φλέβας μηδενικής άνωσης ($T = 0,01$). Η μέγιστη διαφορά είναι περίπου 65% σε σχέση με την τιμή που έχει ο αριθμός Richardson

για τη μοναχική φλέβα, η οποία λαμβάνεται ως αναφορά, και συμβαίνει σε απόσταση $z/t = 146$. Αυτές οι διαφορές μειώνονται στις μικρότερες αξονικές αποστάσεις ή και σε μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου εγγύτητας T των φλεβών που αλληλεπιδρούν. Σε αποστάσεις $z/t < 10$, οι διαφορές αυτές εξαφανίζονται καθώς η αλληλεπίδραση μεταξύ των φλεβών δεν έχει αρχίσει σε εκείνη την περιοχή. Όταν η συμπεριφορά της αλληλεπίδρασης προσεγγίζει τη συμπεριφορά φλέβας πλήρους άνωσης ($T = 0,6$), η μέγιστη διαφορά είναι περίπου 14% σε σχέση με την τιμή αναφοράς της μοναχικής κυκλικής ανωστικής φλέβας, η οποία συμβαίνει σε απόσταση $z/t = 10^4$ από την πηγή. Σημειώνεται ότι η δισδιάστατη ανωστική φλέβα θεωρείται ισοδύναμη προς την ομάδα με άπειρο αριθμό φλεβών που αλληλεπιδρούν ($N \rightarrow \infty$), όταν το πλάτος της σχισμής είναι ίσο με $B = \pi d_0^2 / (8t)$, ώστε να επιτυγχάνονται οι ίδιες τιμές αρχικών εισροών. Αυτή η ισοδυναμία είναι πλήρως εφαρμόσιμη μετά την ολοκλήρωση του φαινομένου της αλληλεπίδρασης της ομάδας των N φλεβών, για αποστάσεις $z/t > 20$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τιμές του αριθμού Richardson, που υπολογίζονται για μεγάλο αριθμό φλεβών που αλληλεπιδρούν, είναι σε εξαιρετική συμφωνία με τις αντίστοιχες τιμές, που υπολογίζονται για την περίπτωση της ισοδύναμης δισδιάστατης ανωστικής φλέβας. Οι διαφορές παρατηρούνται είτε για $T = 0,01$ είτε $T = 0,6$, και παρουσιάζονται στο διάγραμμα του Σχήματος 5.9 συναρτήσει της αξονικής απόστασης z/t . Για την περιοχή, μετά την ολοκλήρωση της αλληλεπίδρασης ($z/t > 20$), τα σφάλματα $100(R_\infty - R_s) / R_s$ (%) διατηρούνται μικρότερα από 10%, όπου R_∞ και R_s είναι οι τιμές του αριθμού Richardson όπως υπολογίζονται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.58) για $N \rightarrow \infty$ κυκλικές ανωστικές φλέβες, που αλληλεπιδρούν και για την ισοδύναμη δισδιάστατη ανωστική φλέβα, αντίστοιχα.

Αδιαστατοποιώντας τον τοπικό αριθμό Richardson (R_N) που υπολογίζεται για τις N ανωστικές φλέβες, που εκρέουν από ένα διαχύτη τύπου ροζέτας ως προς τον αντίστοιχο αριθμό Richardson, που υπολογίζεται στη μοναχική ανωστική φλέβα, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{R_N}{R} = \left(\frac{\varepsilon_N}{\varepsilon} \right)^{-1} \quad (5.60)$$

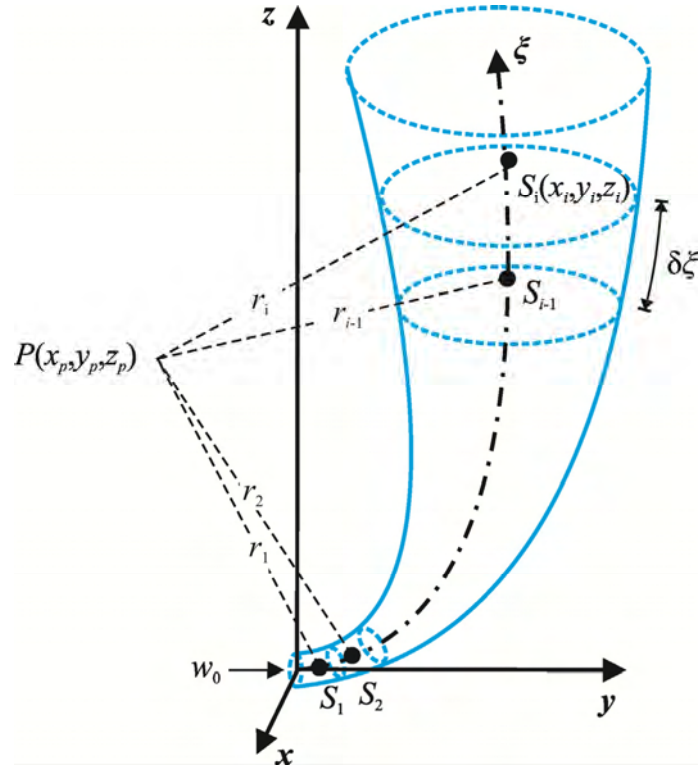


Σχήμα 5.9 Αριθμητικά σφάλματα από τον υπολογισμό του αριθμού Richardson χρησιμοποιώντας το «νέο» ορισμό για άπειρο αριθμό κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών αντί της ισοδύναμης δισδιάστατης τυρβώδους ανωστικής φλέβας.

Συνεπώς, η μεταβολή του λόγου του αριθμού Richardson R_N/R υπολογίζεται από την αντίστροφη μεταβολή της αντίστοιχης ποσότητας του λόγου της κινητικής ενέργειας $\varepsilon_N/\varepsilon$, όπως έχει παρουσιαστεί στο διάγραμμα του Σχήματος 5.6. Για την ομάδα των N φλεβών πλήρους άνωσης που αλληλεπιδρούν, ο λόγος R_N/R παραμένει σταθερός και ίσος περίπου με την τιμή 1.

5.2 ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ

Σύμφωνα με τη θεωρία της δυναμικής αλληλεπίδρασης, η αλληλεπίδραση κάθε φλέβας από μια ομάδα αλληλεπιδρουσών τυρβωδών ανωστικών φλεβών αντιμετωπίζεται ως εάν ήταν μια μοναχική τυρβώδης ανωστική φλέβα υπό την επίδραση ρεύματος από το περιβάλλον ρευστό. Έτσι, ο υπολογισμός της τροχιάς της κάθε φλέβας από την ομάδα των ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν, γίνεται για κάθε μια φλέβα σαν να ήταν ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες (Lai 2010). Ο Lai, πραγματοποιεί την παραδοχή ότι η υπό μελέτη φλέβα αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος σημειακών καταβοθρών (sink), όπου η κάθε μια βρίσκεται στο κέντρο ενός όγκου ελέγχου πάχους δz . Ο στόχος είναι να υπολογιστεί η μεταβολή των χαρακτηριστικών της κάθε φλέβας εξαιτίας του δυναμικού πεδίου ροής που δημιουργείται από το σύνολο των φλεβών που αλληλεπιδρούν (Σχήμα 5.10).



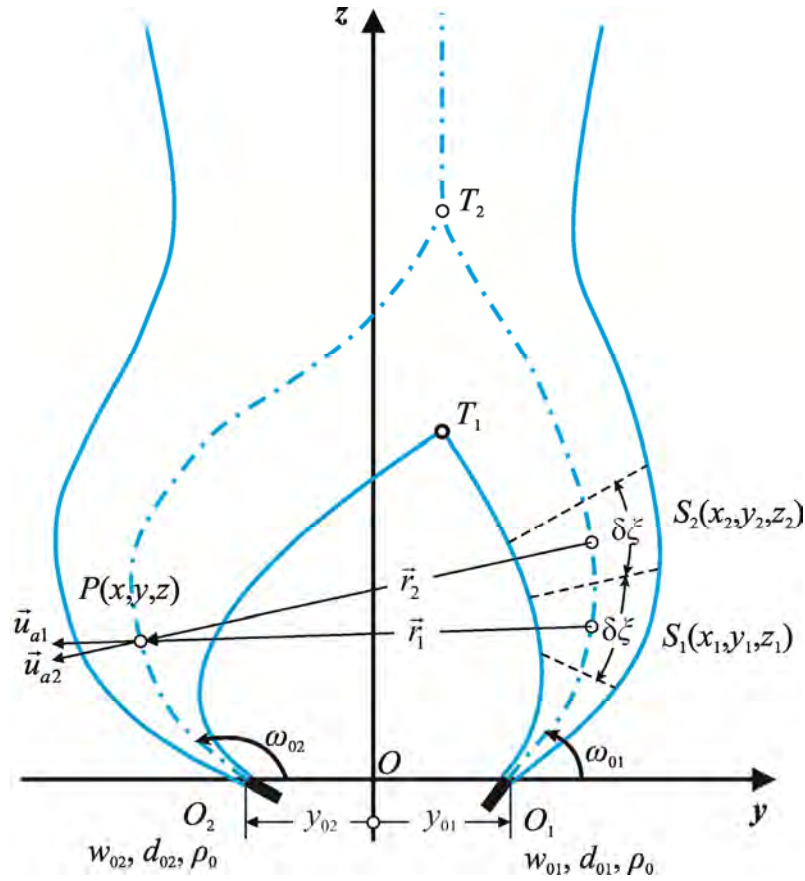
Σχήμα 5.10 Διάγραμμα προσομοίωσης της υπό μελέτης τυρβώδους ανωστικής φλέβας ως ένα πεπερασμένο πλήθος σημειακών καταβοθρών (sink), όπου η κάθε μια βρίσκεται στο κέντρο ενός όγκου ελέγχου πάχους $\delta\xi$.

Θεωρείται ένα στοιχειώδες τμήμα μιας ανωστικής φλέβας το οποίο έχει χαρακτηριστικά καταβόθρας έντασης $\delta\mu_i = -\frac{d\mu}{d\xi}$ στην τυχαία θέση (x_i, y_i, z_i) . Σύμφωνα με τον Batchelor (2000), η ροή εκτός του πεδίου ροής της φλέβας έχει χαρακτηριστικά δυναμικού πεδίου και το δυναμικό αυτού του στοιχείου είναι:

$$\phi_i = \frac{\mu_i}{4\pi(r-r_i)}\delta\xi \quad (5.61)$$

όπου $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$ η απόσταση μεταξύ ενός τυχαίου σημείου $P(x, y, z)$ και του κέντρου του στοιχείου i της φλέβας.

Επιλύοντας την ελεύθερη ανωστική φλέβα, η ένταση μ_i και η θέση καθενός στοιχείου της είναι γνωστά. Η ακτινική ταχύτητα που προκαλείται σε ένα τυχαίο σημείο $P(x, y, z)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.11, εξαιτίας του δυναμικού του στοιχείου i δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:



Σχήμα 5.11 Σχηματικό διάγραμμα δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο κεκλιμένων τυρβωδών ανωστικών φλεβών.

$$u_r = -\frac{\partial \phi_i}{\partial r} = \frac{\mu_i}{4\pi (r - r_i)^2} \delta \xi \quad (5.62)$$

Οι συνιστώσες της ακτινικής ταχύτητας u_r στις τρεις διευθύνσεις x , y και z υπολογίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$u_{xi} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\mu_i}{4\pi} \frac{x - x_i}{r_i^3} \delta \xi = \frac{\mu_i}{4\pi} \frac{x - x_i}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \delta \xi \quad (5.63)$$

$$u_{yi} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\mu_i}{4\pi} \frac{y - y_i}{r_i^3} \delta \xi = \frac{\mu_i}{4\pi} \frac{y - y_i}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \delta \xi \quad (5.64)$$

$$u_{zi} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\mu_i}{4\pi} \frac{z - z_i}{r_i^3} \delta \xi = \frac{\mu_i}{4\pi} \frac{z - z_i}{\left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \delta \xi \quad (5.65)$$

Υποθέτοντας ότι η ανωστική φλέβα αποτελείται από S πηγές, τότε στο σημείο $P(x, y, z)$ η συνολική ταχύτητα εξαιτίας του δυναμικού πεδίου προκύπτει από την άθροιση των επιμέρους ταχυτήτων κάθε στοιχείου, ήτοι:

$$u_x = \sum_{i=1}^N u_{xi} \quad u_y = \sum_{i=1}^N u_{yi} \quad u_z = \sum_{i=1}^N u_{zi} \quad (5.66)$$

Η εξίσωση (5.66) μπορεί να γραφεί διανυσματικά ως εξής:

$$\vec{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{4\pi} \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (5.67)$$

Η ταχύτητα $\vec{u}$ προκαλείται σε κάποια θέση (x, y, z) από το πεδίο μιας ανωστικής φλέβας. Στην περίπτωση που το συγκεκριμένο πεδίο επηρεάζεται από περισσότερες ανωστικές φλέβες, όμοιες ή διαφορετικές μεταξύ τους, η συνολική ταχύτητα προκύπτει από το άθροισμα των ταχυτήτων, που προκαλεί η κάθε μία από αυτές:

$$\vec{u}(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^S \frac{\mu_{ij}}{4\pi} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (5.68)$$

όπου N είναι το πλήθος των φλεβών που αλληλεπιδρούν.

Η διαδικασία του υπολογισμού της αλληλεπίδρασης είναι η ακόλουθη: Αρχικά, επιλύεται η καθεμία ανωστική φλέβα από το σύνολο των N φλεβών ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Έπειτα, καθώς οι τροχιές είναι γνωστές, η κάθε μία φλέβα χωρίζεται σε S στοιχειώδεις όγκους, που το κέντρο του καθενός ευρίσκεται πάνω στην τροχιά της εκάστοτε φλέβας. Αυτοί οι κόμβοι παριστούν τις πηγές. Στο επόμενο βήμα, στη θέση του κάθε κόμβου της κάθε πηγής υπολογίζεται η ταχύτητα του δυναμικού πεδίου που οφείλεται στις υπόλοιπες $(N-1)$ φλέβες. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε μία από τις N φλέβες. Στη συνέχεια, το σύστημα των εξισώσεων επιλύεται για κάθε μία από τις N φλέβες, λαμβάνοντας υπόψη τις πρόσθετες ταχύτητες του δυναμικού πεδίου, και

υπολογίζονται οι νέες τροχιές. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να επέλθει η σύγκλιση (δηλαδή να μην παρατηρείται αλλαγή στις υπολογιζόμενες τροχιές), για την οποία συνήθως δεν απαιτούνται περισσότερες από πέντε επαναλήψεις. Πρέπει να σημειωθεί, ότι ο υπολογισμός των ταχυτήτων εξαιτίας του δυναμικού πεδίου γίνεται μέχρι εκείνους τους κόμβους, όπου δεν έχει επέλθει τομή των αξόνων των φλεβών (σημείο T_2 στο Σχήμα 5.11).

5.2.1 Αλληλεπίδραση Μεταξύ Κεκλιμένων Δισδιάστατων Τυρβωδών Ανωστικών Φλεβών

5.2.1.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος

Στο Σχήμα 5.12 φαίνεται το πεδίο ροής το οποίο δημιουργείται από ένα ζεύγος δύο δισδιάστατων τυρβωδών ανωστικών φλεβών από τις θέσεις O_1 και O_2 . Το εκρέον υγρό έχει αρχική πυκνότητα ρ_0 και ο αποδέκτης είναι απείρων διαστάσεων περιέχων ρευστό ομοιόμορφης πυκνότητας ρ_a και μπορεί να είναι ήρεμος ή κινούμενος. Στην έξοδο, η πυκνότητα ρ_0 του εκρέοντος ρευστού είναι λίγο μικρότερη από την πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού ($\rho_a \geq \rho_0$). Στην περίπτωση ύπαρξης ρεύματος, αυτό λαμβάνεται ότι έχει φορά παράλληλη προς τον άξονα x . Οι εκρέουσες ανωστικές φλέβες μπορεί να έχουν διαφορετικά αρχικά χαρακτηριστικά. Έτσι, η φλέβα O_1 εκρέει από σχισμή πλάτους d_{01} , σε απόσταση y_{01} από τον άξονα z , με αρχική γωνία κλίσης ω_{01} και αρχική ταχύτητα w_{01} . Αντίστοιχα, η φλέβα O_2 εκρέει από σχισμή πλάτους d_{02} , σε απόσταση y_{02} από τον άξονα z με αρχική γωνία κλίσης ω_{02} και αρχική ταχύτητα w_{02} . Το σχηματιζόμενο πεδίο ροής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.12, περιγράφεται μαθηματικά χρησιμοποιώντας ένα σύστημα ορθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων $O_1(\eta, \psi, \xi)$, εντεταγμένο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x, y, z)$. Ο άξονας z είναι κατακόρυφος, ο άξονας η είναι οριζόντιος και παράλληλος προς τον άξονα x (κάθετος στο επίπεδο του χαρτιού) και ο άξονας ξ ακολουθεί την τροχιά της ανωστικής φλέβας. Τα συστήματα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφα.

Στο Σχήμα 5.12 παρουσιάζεται η μορφή των πεδίων ροής και μείξης που σχηματίζονται, τα συστήματα συντεταγμένων και μερικά από τα βασικά μεγέθη της μέσης ροής. Οι εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων προσεγγίζονται αρκετά καλά με κατανομές τύπου Gauss. Η υπερέχουσα (excess) ταχύτητα w_d , που είναι

$$\theta = \omega + \arcsin \left[\frac{u_a \sin(\omega - \phi)}{w_{md}} \right] \quad (5.70)$$

Οι αρχικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους είναι οι ίδιες που χρησιμοποιήθηκαν και στα προηγούμενα κεφάλαια για τις περιπτώσεις δισδιάστατων ανωστικών φλεβών. Έτσι, το φαινόμενο που εξετάζεται, περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \quad (5.71)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = g'_0 h c \sin \omega + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial \psi} \quad (5.72)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} - \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = -g'_0 h c \cos \omega - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(hp_d)}{\partial \psi} \quad (5.73)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη

$$\frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} + \frac{\partial(huc)}{\partial \psi} = -\frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} + S_0 \quad (5.74)$$

όπου w η συνιστώσα της μέσης ταχύτητας στον άξονα ξ και w' η διακύμανσή της, u και u' τα αντίστοιχα μεγέθη στον άξονα ψ , για την τυχαία θέση (η, ψ, ξ) , ω είναι η τοπική κλίση του άξονα ξ ως προς την οριζοντία, c η μέση τιμή της συγκέντρωσης, ρ είναι η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση, w'^2 , $w'c'$, $u'c'$ είναι οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u και c , αντίστοιχα, $\tau_{\psi\xi}$ είναι η μέση τυρβώδης διατμητική τάση και p_d η δυναμική πίεση. Ο μετρικός συντελεστής του ορθογωνίου

καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων ορίζεται από τη σχέση $h=1+\psi \frac{d\omega}{d\xi}$. Ο

όρος πηγής των αποκολλώμενων μαζών που αποδράττουν περιγράφεται από την εξίσωση

$$S_0 = \frac{\partial(hq_\psi)}{\partial\psi}, \text{ με } q_\psi \text{ το φορτίο των αποκολλώμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη } \psi$$

διεύθυνση. Στην εξέταση της αλληλεπίδρασης λαμβάνεται υπόψη η αποκόλληση των μαζών, συνεπώς S_0 υφίσταται. Οι εξισώσεις (5.71) έως (5.74) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \text{Δια } \psi = 0: \quad w &= w_{md} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi), \quad u = 0, \quad c = c_m, \quad \tau_{\psi\zeta} = u'c', \quad p_d = p_{dm}, \\ h &= 1 \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} \text{Δια } \psi = -B_w \quad w &= u_a \cos \omega, \quad u = u_{-Bw} + u_a \sin \omega - w_B \cos \omega, \quad c = \tau_{\psi\zeta} = u'c' = 0, \\ p_d &= p_{de}, \quad h = h_{-Bw} = 1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \text{Δια } \psi = +B_w \quad w &= u_a \cos \omega, \quad u = -u_{+Bw} + u_a \sin \omega + w_B \cos \omega, \quad c = \tau_{\psi\zeta} = u'c' = 0, \\ p_d &= p_{de}, \quad h = h_{+Bw} = 1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Στη ZFE πραγματοποιείται χρήση του μοντέλου πυρήνα, όπως αυτό αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3, για τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων. Στη ZEF γίνεται η παραδοχή της διατήρησης της αυτοομοιότητας, όπως και στην περίπτωση του ακινήτου αποδέκτη, με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w_{d\xi}}{w_{md}} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_w^2}\right) \quad (5.78)$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_c^2}\right) \quad (5.79)$$

όπου w_{md} είναι η μέση υπερέχουσα ταχύτητα στον άξονα ξ' της φλέβας και c_m είναι η μέση συγκέντρωση στον άξονα της φλέβας κατά τη διεύθυνση ξ . Τα μεγέθη b_w και $b_c = \lambda b_w$ είναι τα ονομαστικά πλάτη των ταχυτήτων $w_d \cos(\theta - \omega)$ και των συγκεντρώσεων της φλέβας αντίστοιχα, όπου η μέση ταχύτητά της και συγκέντρωσή της, γίνονται e^{-1} των αντιστοίχων τιμών $w_{md} \cos(\theta - \omega)$ και c_m του άξονα, αντίστοιχα. Πρακτικά το όριο της τυρβώδους φλέβας εκτείνεται μέχρι τη θέση B_w . Ο συντελεστής λ περιγράφεται από την εξίσωση (4.13) με $\lambda_j = 1,50$ και $\lambda_p = 1,21$.

Ο ρυθμός εξάπλωσης της ανωστικής φλέβας προσδιορίζεται από την παρακάτω τροποποιημένη, λαμβάνοντας υπόψη το Σχήμα 5.12, συνήθη ημιεμπειρική εξίσωση (Wood 1993, Lee & Seo 2000, Davidson & Wang 2002 και Kim *et al.* 2002).

$$\frac{db_w}{d\xi} = \frac{K_s}{1 + C_{jk} \frac{u_a \cos(\omega - \phi)}{w_{md}}} \quad (5.80)$$

όπου C_{jk} είναι εμπειρική σταθερά, η οποία λαμβάνεται ίση με 1, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη. Η σταθερά K_s είναι η τιμή του συντελεστή διεύρυνσης της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας σε ακίνητο αποδέκτη (Davidson & Wang 2002) και λαμβάνεται ίση με 0,132, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη.

Καθώς η εξίσωση της ομοιότητας είναι γνωστή, της μορφής $f_w = w_d/w_{md}$ για τη μέση αξονική ταχύτητα w_d , η εξίσωση της συνεχείας (5.71) μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς ψ , παρέχοντας την εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας συμπαράσυρσης hu/w_{md} , (Yannopoulos 2006):

$$u_e = -\frac{b_w}{\xi} w_{md} \cos(\theta - \omega) \left\{ \left[s_0 + s_b - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n) - n s_b \exp(-n^2) \right\} - \frac{d}{d\xi} [n b_w u_a \cos(\omega - \phi)] \quad (5.81)$$

όπου $n = \psi/b_w$. Η λογαριθμική κλίση s_0 της μεταβολής της αξονικής ταχύτητας w_{md} δίνεται

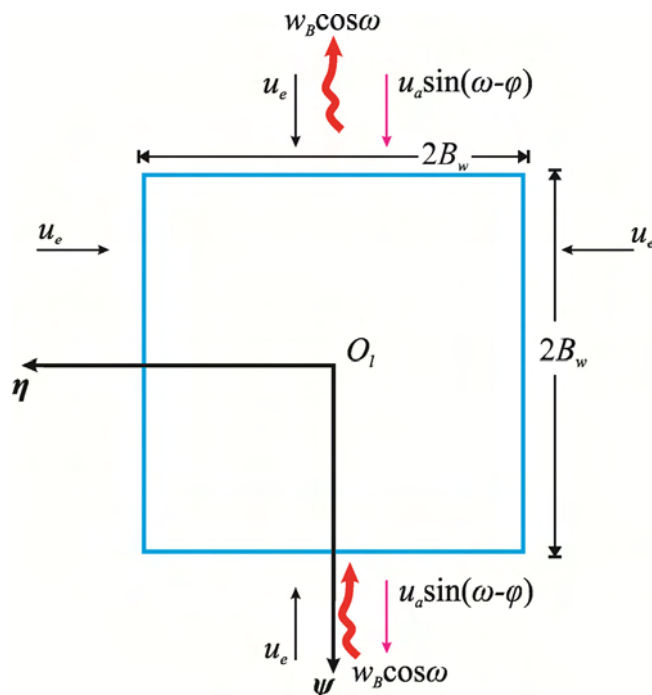
από την εξίσωση $s_0 = \frac{\xi}{w_{md}} \frac{dw_{md}}{d\xi}$ και η λογαριθμική κλίση s_b της μεταβολής του

ονομαστικού πλάτους b_w από την εξίσωση $s_b = \frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}$.

5.2.1.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (5.71) έως (5.74) πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια διατομή της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.13, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (5.75) έως (5.77). Επισημαίνεται, ότι το ρευστό, το οποίο εισέρχεται εντός της ανωστικής φλέβας εξαιτίας της συμπαράσυρσης θεωρείται καθαρό. Η επίδραση της δυναμικής πίεσης p_d στην εισροή της ορμής $\tilde{m}$ περιλαμβάνεται στο συντελεστή λ_M , ο οποίος λαμβάνεται και σε αυτή την περίπτωση ίσος με 1,10. Στην ολοκλήρωση των εξισώσεων διατήρησης της ορμής, εξισώσεις (5.72) και (5.73), η δυναμική πίεση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bernoulli:

$$p_d = -\frac{\rho_0}{2} [u^2 + w^2] \quad (5.82)$$



Σχήμα 5.13 Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κεκλιμένη δισδιάστατη τυρβώδη ανωστική φλέβα.

Έτσι, οι εξισώσεις με μερικές παραγώγους, (5.71) έως (5.74) ολοκληρώνονται στην πραγματική εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας και λαμβάνοντας υπόψη τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, τη θεωρία της διεύρυνσης της φλέβας, την

αποκόλληση των μαζών και την ύπαρξη της δυναμικής αλληλεπίδρασης από γειτονική ανωστική φλέβα, οδηγούν σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2 \left\{ u_e + B_w \left\{ [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \frac{d\omega}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)] \right\} \right\} \quad (5.83)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{d\xi} = & \zeta \sin \omega + 2u_a \cos(\omega - \phi) \left\{ u_e + B_w \frac{d\omega}{d\xi} [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \right\} - \\ & - \frac{d}{d\xi} [2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi)] - 2B_w \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 + \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \theta + 2 \left\{ \left[2u_e + \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) \right] [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] + \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{2\rho_0} \right\}}{\tilde{m} + 2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi) + 2B_w \left\{ u_e^2 - w_B^2 \cos^2 \omega + u_a^2 \cos[2(\omega - \phi)] + 2w_B \cos \omega u_a \sin(\omega - \phi) + \frac{dB_w}{d\xi} u_e u_a \cos(\omega - \phi) - \frac{[p_d]_{+B_w} + [p_d]_{-B_w}}{2\rho_0} \right\}} \quad (5.85)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos(\omega - \phi) \right] = - \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) \mathcal{A} c_m w_B \cos \omega \quad (5.86)$$

Οι εκφράσεις για τις τοπικές εισροές $\tilde{\mu}$, $\tilde{m}$, ζ και $\tilde{\beta}$, καθώς επίσης και οι αρχικές τους τιμές $\tilde{\mu}_0$, $\tilde{m}_0$, ζ_0 και $\tilde{\beta}_0$, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.10. Στην έξοδο του ακροφυσίου, η αρχική τιμή της συγκέντρωσης είναι $c_0 = 1$ και το εμβαδό της επιφάνειας εξόδου είναι

$A_0 = d_0$ (επιφάνεια ανά μέτρο μήκους). Ο λόγος λ υπολογίζεται από την εξίσωση (4.13), με τους συντελεστές που αντιστοιχούν στις δισδιάστατες φλέβες ($\lambda_j = 1,50$ και $\lambda_p = 1,21$) που αναφέρθηκαν νωρίτερα και ο συντελεστής λ_B , υπολογίζεται από την εξίσωση (4.66) όπου $\lambda_{Bj} = 1,04$ και $\lambda_{Bp} = 1,18$ (Yannopoulos 2006). Η ταχύτητα συμπαράσυρσης $u_e = hu$ υπολογίζεται από την εξίσωση (5.81) στη θέση του πραγματικού ορίου της ανωστικής φλέβας $B_w = d_0/2 + n_w b_w$, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα είναι γνωστή, υπολογισμένη από το προηγούμενο βήμα και $n_w = 2^{1/2}$. Η εγκάρσια διεύρυνση της ανωστικής φλέβας δίνεται από την εξίσωση (5.80).

5.2.2 Αλληλεπίδραση Μεταξύ Κεκλιμένων Κυκλικών Τυρβωδών Ανωστικών Φλεβών

5.2.2.1 Διαμόρφωση του Προβλήματος

Οι γενικές αρχικές συνθήκες του φαινομένου της αλληλεπίδρασης μεταξύ κυκλικών κεκλιμένων ανωστικών φλεβών είναι ανάλογες της περίπτωσης των δισδιάστατων φλεβών. Επειδή στη μαθηματική ανάπτυξη των εξισώσεων γίνεται η παραδοχή ότι η εγκάρσια διατομή της κυκλικής φλέβας είναι σχήματος τετραγώνου, από το οποίο διέρχεται ίση παροχή όπως και στην περίπτωση όπου η διατομή θεωρείται κυκλική, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση το σχηματιζόμενο πεδίο ροής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.12, περιγράφεται μαθηματικά χρησιμοποιώντας ένα σύστημα ορθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων $O_l(\eta, \psi, \xi)$, εντεταγμένο σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x, y, z)$. Ο άξονας z είναι κατακόρυφος, ο άξονας η είναι οριζόντιος και παράλληλος προς τον άξονα x (κάθετος στο επίπεδο του χάρτου) και ο άξονας ξ ακολουθεί την τροχιά της ανωστικής φλέβας. Τα συστήματα συντεταγμένων παραμένουν δεξιόστροφα.

Στην περίπτωση της κυκλικής φλέβας, όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης, η υπερέχουσα ταχύτητα που εισέρχεται στο σύστημα των εξισώσεων είναι η γεωμετρική προβολή της υπερέχουσας ταχύτητας w_d στον άξονα ξ . Η ταχύτητα του πεδίου ροής της ανωστικής φλέβας που δημιουργείται περιγράφεται από την εξίσωση (5.69) και η σχέση με την οποία συνδέεται η γωνία θ με τη γωνία ω , όπως και στη δισδιάστατη περίπτωση, δίνεται από την εξίσωση (5.70).

Οι αρχικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους είναι οι ίδιες που χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας, με τη διαφορά

ότι σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνονται υπόψη και οι όροι που αντιστοιχούν στη διάσταση η , ήτοι:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} = 0 \quad (5.87)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hvw)}{\partial \eta} + \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{dw}{d\xi} = g'_0 h c \sin \omega + \\ + \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial \psi} + \frac{\partial(h\tau_{\eta\xi})}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (5.88)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} + \frac{\partial(huv)}{\partial \eta} - \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = -g'_0 h c \cos \omega - \\ - \frac{1}{\rho_0} h \frac{\partial p_d}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau_{\eta\psi}}{\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (5.89)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη

$$\frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} + \frac{\partial(huc)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hvc)}{\partial \eta} = - \left[\frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} + \frac{\partial(hv'c')}{\partial \eta} + S_1 \right] \quad (5.90)$$

όπου w η συνιστώσα της μέσης ταχύτητας στον άξονα ξ και w' η διακύμανσή της, u και u' τα αντίστοιχα μεγέθη στον άξονα ψ και v και v' τα αντίστοιχα μεγέθη στον άξονα η , για την τυχαία θέση (η, ψ, ξ) , ω είναι η τοπική κλίση του άξονα ξ ως προς την οριζοντία, c η μέση τιμή της συγκέντρωσης, ρ είναι η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση, w'^2 , $w'c'$, $u'c'$ και $v'c'$ είναι οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u , v και c , αντίστοιχα, $\tau_{\psi\xi}$, $\tau_{\eta\psi}$ και $\tau_{\eta\xi}$ είναι οι μέσες τυρβώδεις διατμητικές τάσεις και p_d η δυναμική πίεση. Ο μετρικός συντελεστής του ορθογωνίου καμπυλόγραμμου συστήματος

συντεταγμένων ορίζεται από τη σχέση $h=1+\psi \frac{d\omega}{d\xi}$. Ο όρος πηγής των αποκολλώμενων

μαζών που αποδράττουν περιγράφεται από την εξίσωση $S_1 = \frac{\partial(hq_\psi)}{\partial\psi}$, με q_ψ το φορτίο των αποκολλώμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη ψ διεύθυνση. Στην εξέταση της αλληλεπίδρασης λαμβάνεται υπόψη η αποκόλληση των μαζών, συνεπώς S_1 υφίσταται. Οι εξισώσεις (5.87) έως (5.90) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \Delta\psi = 0: \quad w &= w_{md} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \varphi), \quad u = 0, \quad c = c_m, \quad \tau_{r\xi} = u'c, \quad p_d = p_{dm}, \\ h &= 1 \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi = -B_w \quad w &= u_a \cos \omega, \quad u = u_{-Bw} + u_a \sin \omega - w_B \cos \omega, \quad c = \tau_{\psi\xi} = u'c' = 0, \quad p_d = p_{de}, \\ h &= h_{-Bw} = 1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \Delta\psi = +B_w \quad w &= u_a \cos \omega, \quad u = -u_{+Bw} + u_a \sin \omega + w_B \cos \omega, \quad c = \tau_{\psi\xi} = u'c' = 0, \quad p_d = p_{de}, \\ h &= h_{+Bw} = 1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} \Delta\eta = -B_w \quad w &= u_a \cos \omega, \quad u = u_{-Bw}, \quad c = \tau_{\psi\xi} = u'c' = 0, \quad p_d = p_{de}, \\ h &= h_{-Bw} = 1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \Delta\eta = +B_w \quad w &= u_a \cos \omega, \quad u = -u_{+Bw}, \quad c = \tau_{\psi\xi} = u'c' = 0, \quad p_d = p_{de}, \\ h &= h_{+Bw} = 1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned} \quad (5.95)$$

Στην περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας, όπως και στην περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας, γίνεται χρήση του μοντέλου πυρήνα για την ZFE και οι εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w_{d\xi}}{w_{md}} = \exp\left(-\frac{\psi^2 + \eta^2}{b_w^2}\right) \quad (5.96)$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2 + \eta^2}{b_c^2}\right) \quad (5.97)$$

όπου w_{md} είναι η μέση υπερέχουσα ταχύτητα στον άξονα ξ' της φλέβας και c_m είναι η μέση συγκέντρωση στον άξονα της φλέβας κατά τη διεύθυνση ξ . Τα μεγέθη b_w και $b_c = \lambda b_w$ είναι τα ονομαστικά πλάτη των ταχυτήτων $w_d \cos(\theta - \omega)$ και των συγκεντρώσεων της φλέβας αντίστοιχα, όπου η μέση ταχύτητά της και συγκέντρωσή της, γίνονται e^{-1} των αντιστοίχων τιμών $w_{md} \cos(\theta - \omega)$ και c_m του άξονα. Πρακτικά το όριο της τυρβώδους φλέβας εκτείνεται μέχρι τη θέση B_w . Ο συντελεστής λ περιγράφεται από την εξίσωση (4.13) με $\lambda_j = 1,23$ και $\lambda_p = 1,04$. Ο ρυθμός εξάπλωσης της ανωστικής φλέβας προσδιορίζεται από την εξίσωση (5.80), όπου C_{jk} είναι εμπειρική σταθερά, η οποία λαμβάνεται ίση με 2, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη. Η σταθερά K_s είναι η τιμή του συντελεστή διεύρυνσης της κυκλικής ανωστικής φλέβας σε ακίνητο αποδέκτη και λαμβάνεται ίση με 0,110, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη.

Καθώς η εξίσωση της ομοιότητας είναι γνωστή, της μορφής $f_w = w_d/w_{md}$ για τη μέση αξονική ταχύτητα w_d , η εξίσωση της συνεχείας (5.87) μπορεί να ολοκληρωθεί ως προς ψ , παρέχοντας την εγκάρσια κατανομή της ταχύτητας συμπαράσυρσης hu/w_{md} , (Yannopoulos 2006):

$$u_e = -\frac{b_w}{\xi} w_{md} \cos(\theta - \omega) \left\{ \left[s_1 + 2s_b - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] \frac{1 - \exp(-n^2)}{2n} - ns_b \exp(-n^2) \right\} - \frac{d}{d\xi} [nb_w u_a \cos(\omega - \phi)] \quad (5.98)$$

όπου $n = \psi/b_w$. Η λογαριθμική κλίση s_1 της μεταβολής της αξονικής ταχύτητας w_{md} δίνεται από την εξίσωση $s_1 = \frac{\xi}{w_{md}} \frac{dw_{md}}{d\xi}$ και είναι η λογαριθμική κλίση s_b της μεταβολής του

ονομαστικού πλάτους b_w από την εξίσωση $s_b = \frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}$.

5.2.2.2 Ολοκλήρωση Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (5.87) έως (5.90) πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια διατομή της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.14, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (5.91) έως (5.95). Επισημαίνεται, ότι το ρευστό, το οποίο εισέρχεται εντός της ανωστικής φλέβας εξαιτίας της συμπαράσυρσης θεωρείται καθαρό. Η επίδραση της δυναμικής πίεσης p_d στην εισροή της ορμής $\tilde{m}$ περιλαμβάνεται στο συντελεστή λ_M , ο οποίος λαμβάνεται και σε αυτή την περίπτωση ίσος με 1,10.

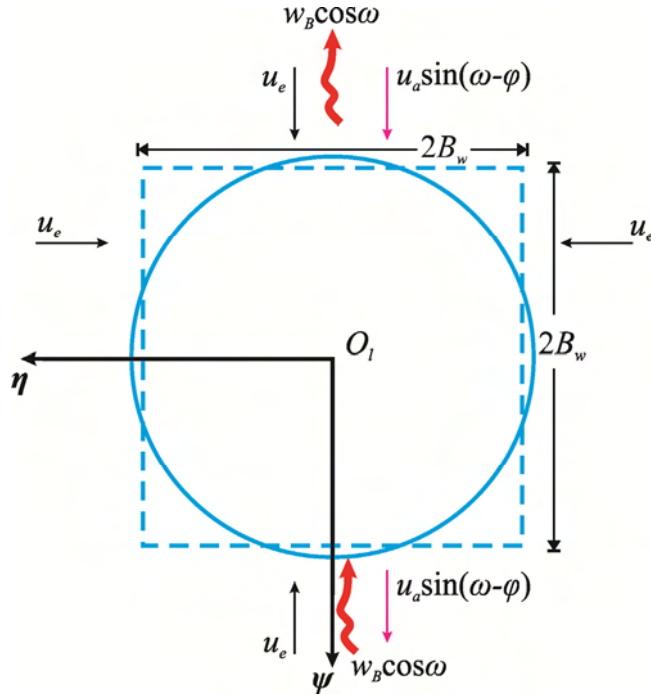
Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (5.71) έως (5.74) πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια διατομή της δισδιάστατης κεκλιμένης ανωστικής φλέβας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.13, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (5.75) έως (5.77). Επισημαίνεται, ότι το ρευστό, το οποίο εισέρχεται εντός της ανωστικής φλέβας εξαιτίας της συμπαράσυρσης θεωρείται καθαρό. Η επίδραση της δυναμικής πίεσης p_d στην εισροή της ορμής $\tilde{m}$ περιλαμβάνεται στο συντελεστή λ_M , ο οποίος λαμβάνεται και σε αυτή την περίπτωση ίσος με 1,10. Στην ολοκλήρωση των εξισώσεων διατήρησης της ορμής, εξισώσεις (5.88) και (5.89), η δυναμική πίεση υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bernoulli:

$$p_d = -\frac{\rho_0}{2} \{u^2 + v^2 + w^2\} \quad (5.99)$$

Έτσι, οι εξισώσεις με μερικές παραγώγους, (5.87) έως (5.90) ολοκληρώνονται στην πραγματική εγκάρσια διατομή της ανωστικής φλέβας και, λαμβάνοντας υπόψη τις εγκάρσιες κατανομές των ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, τη θεωρία της διεύρυνσης της φλέβας, την αποκόλληση των μαζών και την ύπαρξη της δυναμικής αλληλεπίδρασης από γειτονική ανωστική φλέβα, οδηγούν σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2(2B_w) \left\{ 2u_e + B_w \left\{ \left[w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi) \right] \frac{d\omega}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} \left[u_a \cos(\omega - \phi) \right] \right\} \right\} \quad (5.100)$$



Σχήμα 5.14 Εγκάρσια διατομή ολοκλήρωσης σε κεκλιμένη κυκλική τυρβώδη ανωστική φλέβα.

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ξ

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{d\xi} = & \zeta \sin \omega + 4B u_a \cos(\omega - \phi) \left\{ 2u_e + B_w \frac{d\omega}{d\xi} [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \right\} - \\ & - \frac{d}{d\xi} [2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi)] - (2B_w)^2 \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 + \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής κατά τον άξονα ψ

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\xi} = & \frac{\zeta \cos \theta + 4B_w \left\{ \left[2u_e + \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) \right] [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] + \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{2\rho_0} \right\}}{\tilde{m} + 2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi) + (2B_w)^2 \left\{ u_e^2 - w_B^2 \cos^2 \omega + u_a^2 \cos[2(\omega - \phi)] + 2w_B \cos \omega u_a \sin(\omega - \phi) + \frac{dB_w}{d\xi} u_e u_a \cos(\omega - \phi) - \frac{[p_d]_{+B_w} + [p_d]_{-B_w}}{2\rho_0} \right\}} \end{aligned} \quad (5.102)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos(\omega - \phi) \right] = -2B_w \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) \Lambda c_m w_B \cos \omega \quad (5.103)$$

Οι εκφράσεις για τις τοπικές εισροές $\tilde{\mu}$, $\tilde{m}$, ζ και $\tilde{\beta}$, καθώς επίσης και οι αρχικές τους τιμές $\tilde{\mu}_0$, $\tilde{m}_0$, ζ_0 και $\tilde{\beta}_0$, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.11. Στην έξοδο του ακροφυσίου, η αρχική τιμή της συγκέντρωσης είναι $c_0 = 1$ και το εμβαδό της επιφάνειας εξόδου είναι $A_0 = d_0^2$. Ο λόγος λ υπολογίζεται από την εξίσωση (4.13), με τους συντελεστές που αντιστοιχούν στις κυκλικές ανωστικές φλέβες ($\lambda_j = 1,23$ και $\lambda_p = 1,04$) που αναφέρθηκαν νωρίτερα και ο συντελεστής λ_B , υπολογίζεται από την εξίσωση (4.66) όπου $\lambda_{Bj} = 1,076$ και $\lambda_{Bp} = 1,15$ (Yannopoulos 2006). Η ταχύτητα συμπαράσυρσης $u_e = hu$ υπολογίζεται από την εξίσωση (5.98) στη θέση του πραγματικού ορίου της ανωστικής φλέβας $B_w = d_0/2 + n_w b_w$, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα είναι γνωστή, υπολογισμένη από το προηγούμενο βήμα και $n_w = 2^{1/2}$. Η εγκάρσια διεύρυνση της ανωστικής φλέβας δίνεται από την εξίσωση (5.80), όπου C_{jk} είναι εμπειρική σταθερά, η οποία λαμβάνεται ίση με 2, όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη. Η σταθερά K_s είναι η τιμή του συντελεστή διεύρυνσης της κυκλικής ανωστικής φλέβας σε ακίνητο αποδέκτη και λαμβάνεται ίση με 0,110, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη.

5.2.3 Αποτελέσματα

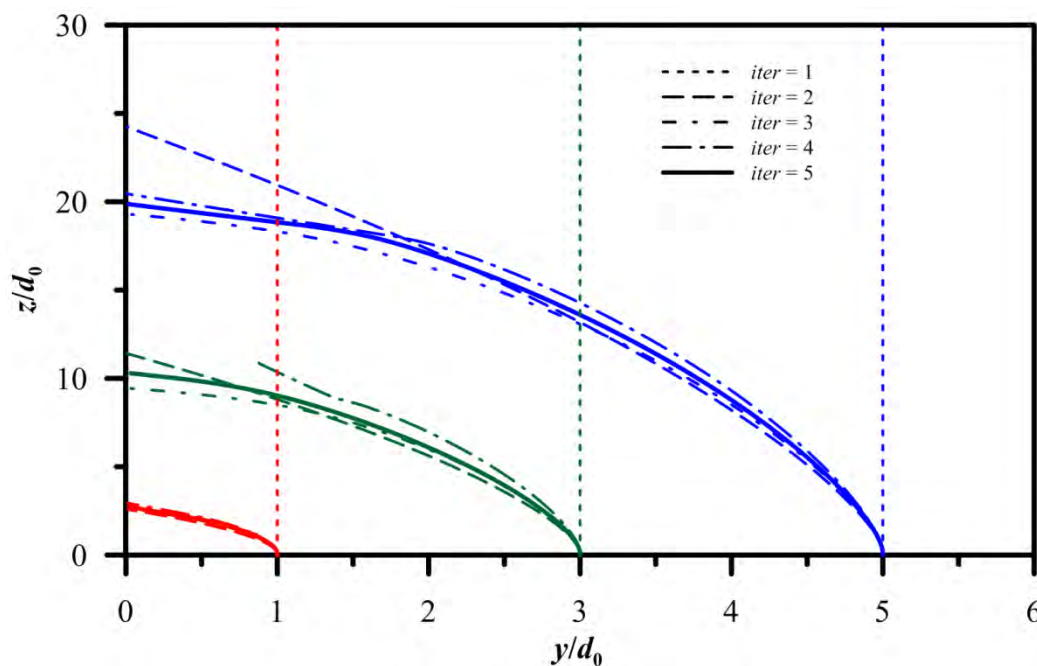
Η αριθμητική επίλυση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων των εξισώσεων, είτε των εξισώσεων (5.83) έως (5.86) που αντιστοιχούν στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας, είτε των εξισώσεων (5.100) έως (5.103) που αντιστοιχούν στην περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας, πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge – Kutta 4^{ης} τάξης. Το κλείσιμο του συστήματος των εξισώσεων γίνεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση που περιγράφει τη διεύρυνση της ανωστικής φλέβας, χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους προς την κάθε περίπτωση συντελεστές.

Για τη διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης του φαινομένου, αναπτύχθηκε ένα πρόγραμμα σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90. Η διαδικασία της επίλυσης είναι η

ακόλουθη: Αρχικά ορίζεται το είδος και το πλήθος N των ανωστικών φλεβών, δισδιάστατων ή κυκλικών που αλληλεπιδρούν. Στη συνέχεια ορίζονται οι αρχικές συνθήκες κάθε φλέβας, ήτοι η γεωμετρική τους θέση, η γωνία εξόδου καθώς και ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude. Στο τέλος, ορίζεται αν ο αποδέκτης είναι ακίνητος ή όχι. Στην περίπτωση ύπαρξης ρεύματος, ορίζεται το μέτρο της ταχύτητας του ρεύματος και η γωνία που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο. Σε κάθε περίπτωση, τα ακροφύσια των ανωστικών φλεβών και το ρεύμα, υπάρχουν στο επίπεδο yz . Εν συνεχεία, στην πρώτη επίλυση ($iter = 1$), επιλύεται το πεδίο ροής και διάχυσης κάθε μιας φλέβας ξεχωριστά, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Στη συνέχεια, αφού είναι γνωστές οι τροχιές των φλεβών, δημιουργείται μια σειρά από S στοιχειώδεις όγκους ο καθένας από τους οποίους έχει το κέντρο του επάνω στον άξονα της τροχιάς της κάθε φλέβας. Ο κάθε κόμβος παριστά μια σημειακή πηγή καταβόθρας, η οποία δημιουργεί ένα δυναμικό. Στο 2^ο κύκλο, η κάθε φλέβα, επιλύεται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες και επιπρόσθετα λαμβάνεται υπόψη η εξωτερική ταχύτητα λόγω της δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των φλεβών. Στο τέλος αυτού του κύκλου, προκύπτει το νέο πεδίο ροής της κάθε φλέβας. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου δεν παρατηρείται αλλαγή στο παραγόμενο πεδίο ροής. Από τις αναλύσεις πρόέκυψε ότι πέντε επαναλήψεις ($iter = 5$), είναι αρκετές ώστε να επιτευχθεί η σύγκλιση, και υπολογισμός της τελικής τροχιάς κάθε φλέβας. Σημειώνεται, ότι οι σημειακές πηγές που λαμβάνουν μέρος στον υπολογισμό του δυναμικού πεδίου είναι εκείνες, οι οποίες βρίσκονται πριν το σημείο τομής των αξόνων των τροχιών (σημείο T_2 του Σχήματος 5.12) και δεν λαμβάνεται υπόψη η επιρροή της ανωστικής φλέβας στον εαυτόν της.

5.2.3.1 Δισδιάστατες Τυρβώδεις Ανωστικές Φλέβες

Στο Σχήμα 5.15 παρουσιάζεται η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο κατακορύφων δισδιάστατων τυρβωδών ανωστικών φλεβών εντός ήρεμου αποδέκτη, για διάφορες τιμές της μεταξύ τους απόστασης ($2t$). Οι ανωστικές φλέβες υπ' αριθμό 1 και 2, έχουν τα ίδια αρχικά χαρακτηριστικά. Συνεπώς, $\omega_{01} = \omega_{02} = 90^\circ$, $d_{01} = d_{02}$ και $F_{01} = F_{02}$. Στο Σχήμα 5.15 παρουσιάζεται η υπολογιζόμενη τροχιά της κάθε φλέβας μετά από κάθε επανάληψη ($iter$). Η υπολογισμένη τροχιά εκφράζεται σε αδιάστατες συντεταγμένες y/d_0 και z/d_0 . Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν για αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_0 = 10$, και οι πηγές σχισμής βρίσκονται στο επίπεδο $z = 0$, απέχοντας μεταξύ τους αποστάσεις $t/d_0 = \pm 1$,

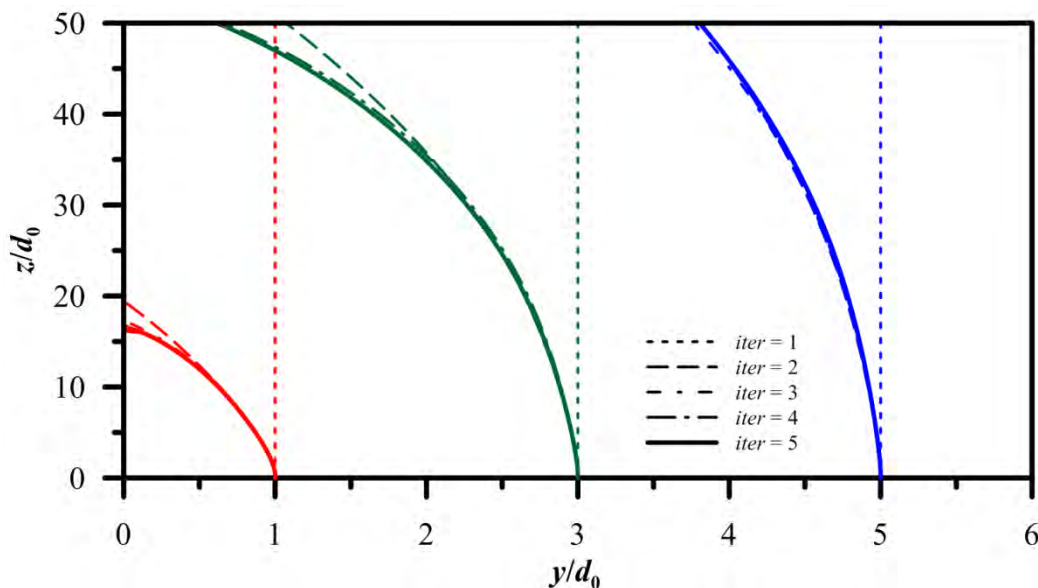


Σχήμα 5.15 Τροχιά ζεύγους κατακορύφων δισδιάστατων τυρβωδών ανωστικών φλεβών για αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_0 = 10$. Οι πηγές σχισμής βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο σε αποστάσεις $t/d_0 = \pm 1, \pm 3$ και ± 5 ως προς τον κατακόρυφο άξονα z .

± 3 και ± 5 ως προς τον άξονα z . Φαίνεται ότι ο τελικός άξονας (συνεχής γραμμή στο διάγραμμα του Σχήματος 5.15), επιτυγχάνεται από την ολοκλήρωση του 4^{ου} κύκλου. Επίσης, παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των πηγών των ανωστικών φλεβών, ελαττώνεται η επιρροή της αλληλεπίδρασης και η επίτευξη του τελικού άξονα της τροχιάς γίνεται νωρίτερα.

5.2.3.2 Κυκλική Τυρβώδης Ανωστική Φλέβα

Στο Σχήμα 5.16 παρουσιάζεται η αλληλεπίδραση δύο κατακορύφων κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών εντός ήρεμου αποδέκτη, για διάφορες τιμές της μεταξύ τους απόστασης. Οι ανωστικές φλέβες υπ' αριθμό 1 και 2, έχουν ίδια αρχικά χαρακτηριστικά. Συνεπώς, $\omega_{01} = \omega_{02} = 90^\circ$, $d_{01} = d_{02}$ και $F_{01} = F_{02}$. Σε αυτή την περίπτωση, επειδή ο συντελεστής A λαμβάνεται ίσος με τη τιμή 0, ουσιαστικά το φαινόμενο των αποκολλήσεων δεν λαμβάνεται υπόψη. Στο Σχήμα 5.16 παρουσιάζεται η υπολογιζόμενη τροχιά της κάθε φλέβας μετά από κάθε επανάληψη (*iter*). Η υπολογισμένη τροχιά εκφράζεται σε αδιάστατες συντεταγμένες y/d_0 και z/d_0 . Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν για αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_0 = 10$, και οι κυκλικές πη-



Σχήμα 5.16 Τροχιά ζεύγους κατακορύφων κυκλικών τυρβωδών ανωστικών φλεβών για αρχικό πυκνομετρικό αριθμό Froude $F_0 = 10$. Οι κυκλικές πηγές βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο σε αποστάσεις $t/d_0 = \pm 1, \pm 3$ και ± 5 ως προς τον κατακόρυφο άξονα z .

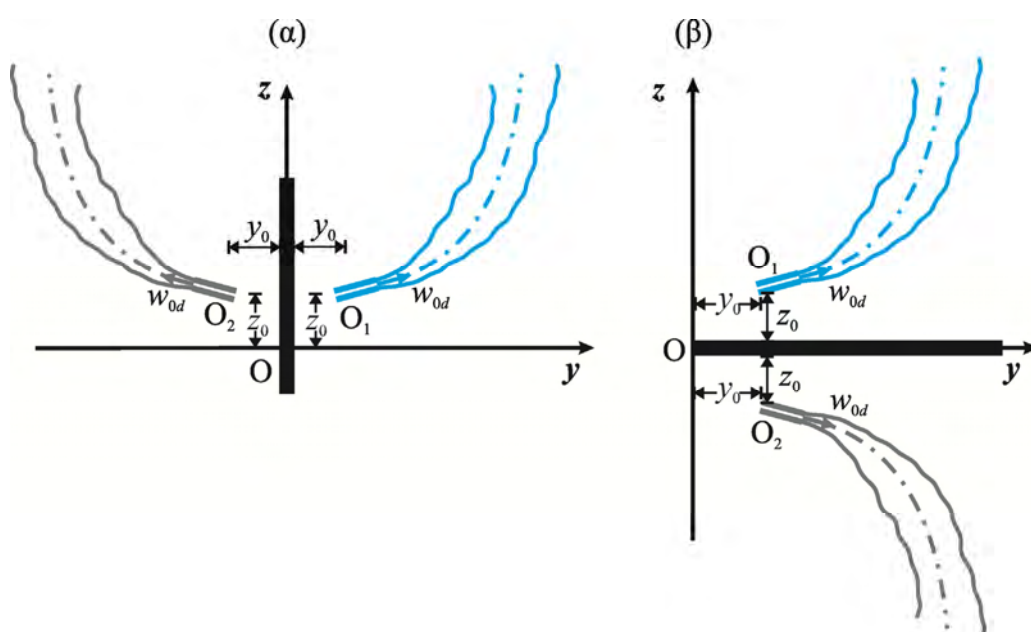
γές βρίσκονται στο επίπεδο $z = 0$, απέχοντας μεταξύ τους αποστάσεις $t/d_0 = \pm 1, \pm 3$ και ± 5 ως προς τον άξονα z . Φαίνεται ότι ο τελικός άξονας (συνεχής γραμμή στο διάγραμμα του Σχήματος 5.16), έχει επιτευχθεί ήδη από την ολοκλήρωση του 2^{ου} κύκλου, νωρίτερα συγκριτικά με τις δισδιάστατες φλέβες. Όπως και στο ζεύγος των δισδιάστατων φλεβών, παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των πηγών των ανωστικών φλεβών, τόσο ελαττώνεται η επιρροή της αλληλεπίδρασης και η επίτευξη του τελικού άξονα της τροχιάς γίνεται νωρίτερα. Παρόλη όμως την μεγάλη απόσταση, η έλξη μεταξύ του ζεύγους των ανωστικών φλεβών είναι εμφανής.

5.2.3.3 Αντιμετώπιση Ορίων

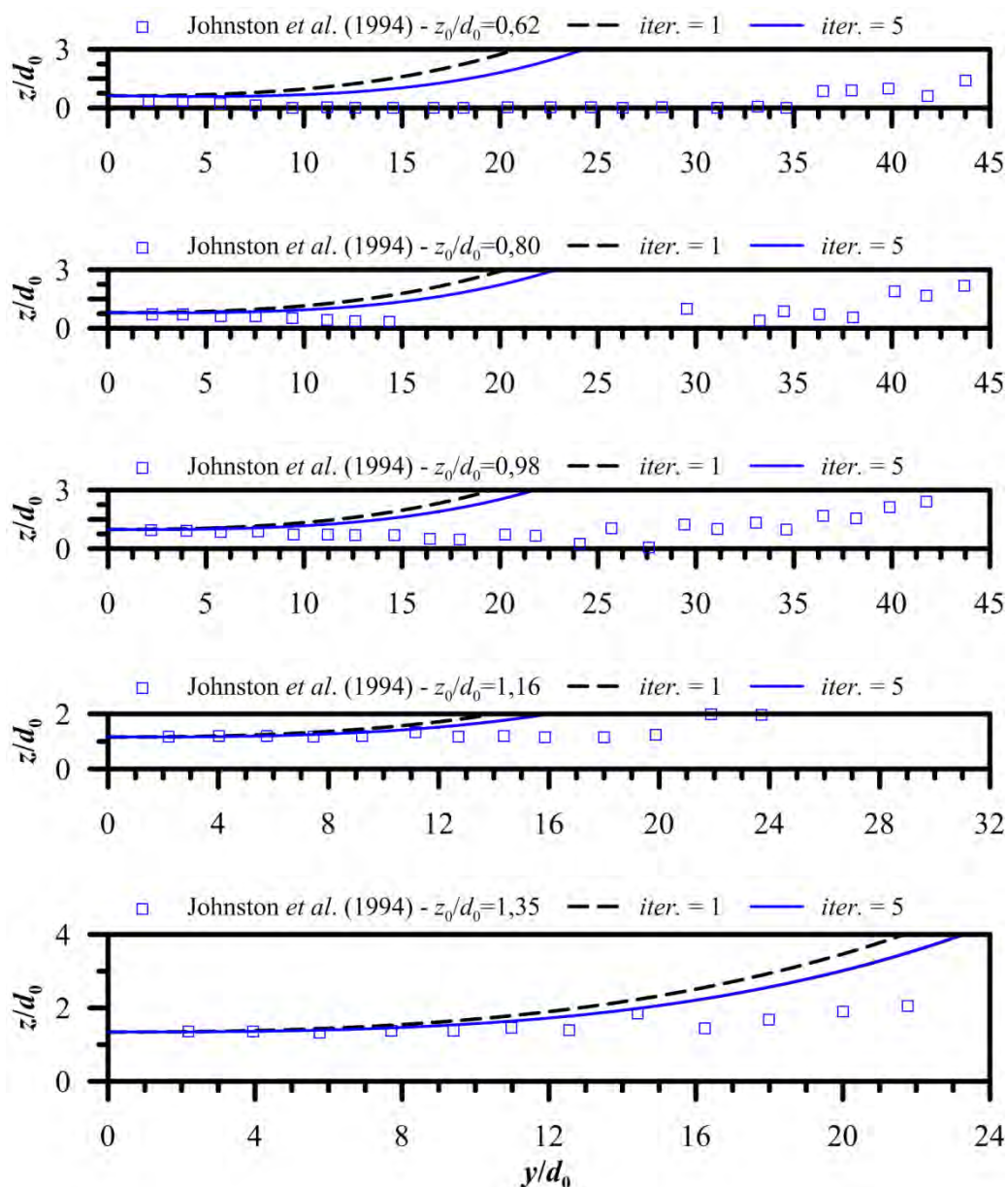
Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των φλεβών, μπορεί να αντιμετωπιστεί η παρουσία ορίων ή διεπιφανειών, όπως είναι τα τοιχώματα στις δεξαμενές πειραμάτων, ο πυθμένας ή η επιφάνεια του αποδέκτη. Έχει παρατηρηθεί ότι πολλά μαθηματικά μοντέλα αποτυγχάνουν να προβλέψουν σωστά το πεδίο ροής μιας ανωστικής φλέβας (δισδιάστατης ή τρισδιάστατης) ύστερα από τη σύγκρισή τους με πειραματικά δεδομένα. Ο λόγος είναι ότι στα συγκεκριμένα πειράματα υπάρχει έντονη η επιρροή των ορίων με συνέπεια την έλξη της φλέβας προς αυτά (φαινόμενο Coanda), τα οποία και δεν λαμβάνονται υπόψη από τα μαθηματικά μοντέλα.

Στην παρούσα Διατριβή, προτείνεται η αντιμετώπιση της ύπαρξης των ορίων να πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των φλεβών.

Όταν μια ανωστική φλέβα εκρέει εντός ενός αποδέκτη, η ύπαρξη του ορίου προσομοιώνεται μέσω του είδωλου της πηγής. Δημιουργείται το είδωλο της πραγματικής πηγής ως προς το υπάρχον όριο, από το οποίο εκρέει μια εικονική ανωστική φλέβα η οποία έχει τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά. Έτσι, παράγεται ένα ζεύγος ανωστικών φλεβών από μία πραγματική πηγή και το είδωλό της, που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η τελική τροχιά της πραγματικής ανωστικής φλέβας, υπολογίζεται σαν να αλληλεπιδρούσε με μια δεύτερη, εικονική όμως, ανωστική φλέβα. Οι δύο αυτές περιπτώσεις φαίνονται σχηματικά στο Σχήμα 5.17. Στο 5.17α, παρουσιάζεται η περίπτωση κατακόρυφου εξωτερικού ορίου και στο 5.17β η περίπτωση οριζοντίου εξωτερικού ορίου. Η προτεινόμενη μεθοδολογία συγκρίνεται με τα πειραματικά δεδομένα των Johnston *et al.* (1994). Τα πειράματά τους πραγματοποιήθηκαν σε θερμές κυκλικές ανωστικές φλέβες ύδατος, οι οποίες εκρέουν οριζόντια εντός ήρεμου αποδέκτη. Η διάμετρος των ακροφυσίων είναι $d_0 = 27,55 \text{ mm}$ και ο αρχικός πυκνομετρικός αριθμός Froude είναι $F_0 = 17$. Μετρήθηκαν οι τροχιές των φλεβών για έξι διαφορετικές κατακόρυφες θέσεις (z_0) του ακροφυσίου εκροής. Τα πειράματα δείχνουν ότι η επιρροή του ορίου είναι έντονη. Για τις περιπτώσεις όπου $z_0/d_0 = 0,62, 0,80, 0,98, 1,16$ και $1,35$ (Σχήμα 5.18), όσο μειώνεται ο λόγος z_0/d_0 , δηλαδή όσο εγγύτερα προς το πυθμένα γίνεται η εκροή, τόσο η φλέβα έλκεται



Σχήμα 5.17 Εξωτερικά όρια: (α) κατακόρυφο όριο, (β) οριζόντιο όριο



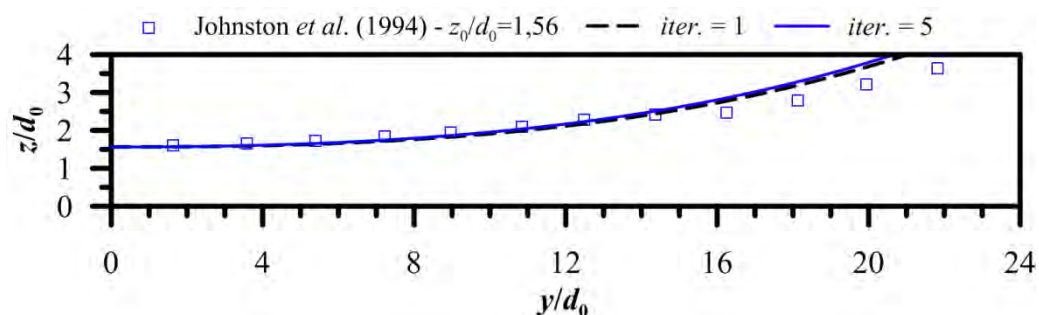
Σχήμα 5.18 Τροχιά οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας υπό την επίδραση οριζοντίου εξωτερικού ορίου – Σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα.

προς τον πυθμένα, όπου στην περίπτωση $z_0/d_0 = 0.62$, η φλέβα δείχνει ότι αμέσως μετά την εκροή της ακουμπάει στο οριζόντιο εξωτερικό όριο. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης χρησιμοποιώντας το προτεινόμενο μαθηματικό μοντέλο, όπου λαμβάνεται υπόψη η παρουσία του πυθμένα (οριζόντιο όριο), δείχνουν ότι η τροχιά της ανωστικής φλέβας (η οποία προκύπτει με το τέλος της πέμπτου κύκλου) προσεγγίζει ικανοποιητικά τα πειραματικά σημεία. Φαίνεται, ότι η τροχιά της φλέβας, όπως υπολογίζεται, χωρίς να ληφθεί υπόψη το εξωτερικό όριο ($iter. = 1$), δεν ακολουθεί τα πειραματικά σημεία. Η τροχιά, όμως, που προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη το οριζόντιο όριο, (μετά τον πέμπτο

κύκλο επαναλήψεων), δείχνει ότι έλκεται από αυτό (φαινόμενο Coanda) ακολουθώντας τα πειραματικά σημεία. Η ακρίβεια ελαττώνεται, σε μεγάλες αποστάσεις y/d όπου η φλέβα έχει ακουμπήσει τον πυθμένα, γεγονός το οποίο δεν μπορεί να προβλεφθεί από τους υπολογισμούς. Η περίπτωση της εκροής της φλέβας σε απόσταση $z_0 = 1,56d_0$ φάνηκε ότι επηρεάζεται περισσότερο από την ύπαρξη του κατακόρυφου τοιχώματος της δεξαμενής παρά από την παρουσία του πυθμένα. Στο Σχήμα 5.19 παρουσιάζεται η τροχιά της κυκλικής ανωστικής φλέβας η οποία συγκρίνεται με τα αντίστοιχα πειραματικά σημεία της εργασίας των Johnston *et al.* (1994).

5.2.3.4 Κινούμενος Αποδέκτης

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την αλληλεπίδραση των δισδιάστατων και κυκλικών φλεβών ισχύουν και στην περίπτωση του κινούμενου αποδέκτη. Η ύπαρξη ρεύματος στον αποδέκτη στο επίπεδο yz , το οποίο σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο, εισάγεται ως μια αρχική σταθερή ταχύτητα στις εξισώσεις ταχυτήτων της δυναμικής ροής, εξίσωση (5.66).



Σχήμα 5.19 Τροχιά οριζόντιας κυκλικής τυρβώδους ανωστικής φλέβας υπό την επίδραση κατακόρυφου εξωτερικού ορίου – Σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1 ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα Διδακτορική Διατριβή μελετήθηκε η αλληλεπίδραση μεταξύ ανωστικών φλεβών, λαμβάνοντας υπόψη στοιχεία τα οποία είχαν παρατηρηθεί σε πειραματικές εργασίες, αλλά δεν ελαμβάνοντο υπόψη στα υπάρχοντα μαθηματικά μοντέλα.

Στην προσπάθεια για καλύτερη μελέτη του φαινομένου, αναπτύχθηκε ένα νέο μαθηματικό μοντέλο, το οποίο προσομοιώνει τις διαφυγές των μαζών από το πεδίο ροής μιας κεκλιμένης επίπεδης ή ανωστικής φλέβας σε ήρεμο αποδέκτη. Το μοντέλο αυτό στη συνέχεια, ενσωματώθηκε σε ένα ολοκληρωματικό μοντέλο, το οποίο υπολογίζει τα χαρακτηριστικά του πεδίου της μέσης ροής μιας ανωστικής φλέβας. Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του μοντέλου αυτού ελέγχθηκαν με τα διαθέσιμα πειραματικά στοιχεία της διεθνούς βιβλιογραφίας. Το μοντέλο αυτό, λαμβάνει υπόψη τη συνεισφορά της τύρβης, επιτυγχάνοντας ακρίβεια 2^{ης} τάξης, χρησιμοποιώντας διαφοροποιημένες εμπειρικές εξισώσεις για τον άμεσο υπολογισμό των παραμέτρων λ και λ_B , εξαρτώμενες μόνο από την αδιάστατη ανεξάρτητη μεταβλητή της αξονικής απόστασης. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους της συνεχείας, της ορμής και διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη, που περιγράφουν το φαινόμενο, είναι διατυπωμένες σε ένα σύστημα καμπυλογράμμων ορθογωνίων ή κυλινδρικών συντεταγμένων, αν πρόκειται για επίπεδη ή κυκλική ανωστική φλέβα, αντίστοιχα. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων πραγματοποιείται σε μια εγκάρσια διατομή της φλέβας, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων έχουν τη μορφή της κατανομής Gauss. Για το κλείσιμο του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων λαμβάνεται υπόψη η γραμμική διεύρυνση της φλέβας, για την περίπτωση του ήρεμου αποδέκτη και η μη γραμμική διεύρυνση αυτής, αν πρόκειται για κινούμενο αποδέκτη. Για την προσομοίωση του πυρήνα της δυναμικής ροής στη Ζώνη Εγκατάστασης της Ροής της ανωστικής φλέβας, χρησιμοποιήθηκαν οι πραγματικές εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων, όπως προκύπτουν από τη θεωρία αλληλεπίδρασης ανωστικών φλεβών που πηγάζουν από πεπερασμένο αριθμό πηγών.

Για την προσομοίωση των διαφευγουσών μαζών δημιουργήθηκε ένα νέο μοντέλο το οποίο βασίζεται στην ιδέα ότι οι μάζες που αποκολλώνται και εν τέλει δραπετεύουν,

προέρχονται από περιοχές της φλέβας στις οποίες εμφανίζονται σημαντικές διαλείψεις και η συμπαράσυρση του περιβάλλοντος ρευστού, εμφανίζει σημαντικές διακυμάνσεις. Η συμπαράσυρση αποκτά ασθενή, μηδενική ή ακόμη και αρνητική μέση τιμή με αποτέλεσμα μάζες της φλέβας να χάνουν την αδράνειά τους εξαιτίας των αντιστροφών κινήσεων που δημιουργούνται από την ύπαρξη των στροβίλων και να διαφεύγουν κινούμενες μόνο από την επίδραση της δύναμης της άνωσης. Αυτό το μοντέλο υπολογίζει την κατακόρυφη ταχύτητα διαφυγής των μαζών, λαμβάνοντας υπόψη το γενικό ορισμό του τοπικού αριθμού Richardson για φλέβες πλήρους άνωσης, η οποία λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό της τροχιάς και της εισροής της άνωσης. Η εισροή της άνωσης ελαττώνεται στη διεύθυνση της κίνησης της φλέβας εξαιτίας της απώλειας των μαζών. Επίσης, γίνεται η παραδοχή ότι η συγκέντρωση του ιχνηθέτη, στις μάζες οι οποίες διαφεύγουν από τις περιοχές των ορίων της ανωστικής φλέβας, είναι ίση προς ένα ποσοστό A της τιμής της συγκέντρωσης στον άξονά της. Χρησιμοποιώντας πειραματικά δεδομένα συγκεντρώσεων από τη βιβλιογραφία για φλέβες με αρνητική άνωση, με αρχικές γωνίες κλίσης 30° και 45° , υπολογίστηκε ότι ο συντελεστής A κυμαίνεται περίπου στις τιμές από 0,30 έως 0,40. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων των διαφορών των υπολογισμένων τιμών από τις τιμές των πειραματικών μετρήσεων, λαμβάνοντας υπόψη το μέγιστο τερματικό ύψος, την οριζόντια απόσταση και την αξονική αραίωση στο μέγιστο τερματικό ύψος, τη θέση επιστροφής της φλέβας στο οριζόντιο επίπεδο για το εξωτερικό όριο και την ολοκληρωμένη αραίωση σε εκείνη τη θέση, πρόέκυψε ότι ο συντελεστής A κυμαίνεται στην περιοχή, από 0,30 έως 0,42 και είναι $A = 0,344 \pm 0,053$ για γωνίες $-75^\circ \leq \theta_0 \leq -15^\circ$. Συνεπώς, προτείνεται η τιμή $A = 0,34$, για κυκλικές ανωστικές φλέβες με αρχική γωνία κλίσης στην περιοχή $-75^\circ \leq \theta_0 \leq -15^\circ$ σε ήρεμο αποδέκτη. Για γωνίες, $-15^\circ < \theta_0 \leq 90^\circ$, προτείνεται ο συντελεστής $A = 0$. Για τις κεκλιμένες δισδιάστατες ανωστικές φλέβες, εξαιτίας της έλλειψης επαρκών πειραματικών μετρήσεων, η αντίστοιχη τιμή του συντελεστή A υπολογίστηκε μόνο από τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα για την οριζόντια περίπτωση, τα οποία προσδιόρισαν το συντελεστή στην τιμή $A = 0,08$.

Στην περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας, λαμβάνοντας υπόψη τη διαφυγή των μαζών, οι υπολογισμένες αξονικές ταχύτητες είναι κατά 20,4% μικρότερες των αντιστοίχων τιμών, όταν δεν λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο των αποκολλήσεων, ενώ η αντίστοιχη τιμή για την περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας είναι κατά 32,3% μικρότερες.

Όσον αφορά τις μέσες αξονικές συγκεντρώσεις για μεν την περίπτωση της δισδιάστατης φλέβας, όταν λαμβάνεται υπόψη η διαφυγή των μαζών, οι υπολογισμένες τιμές είναι κατά 38,9% μικρότερες από αυτές που προκύπτουν όταν δεν λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο των αποκολλήσεων, ενώ στην περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας, για την αντίστοιχη περίπτωση, είναι μικρότερες κατά 55,5%.

Η χρήση του προτεινόμενου μαθηματικού μοντέλου για τον υπολογισμό των μέσων χαρακτηριστικών της ροής για την κεκλιμένη δισδιάστατη ή την κυκλική ανωστική φλέβα, δίνει εξαιρετικά αποτελέσματα. Στο γεγονός αυτό συνηγορεί η σύγκρισή του με τα διαθέσιμα πειραματικά στοιχεία. Ειδικότερα, υπολογισμός του εξωτερικού ορίου της κεκλιμένης κυκλικής ανωστικής φλέβας εμφανίζει εξαιρετική συμφωνία με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Επίσης, ο υπολογισμός της τροχιάς, για την ίδια περίπτωση, είναι αρκετά ικανοποιητικός, αν και ο υπολογισμός της βάσει των πειραματικών μετρήσεων περιέχει ασάφειες ως προς τον προσδιορισμό της. Επίσης, οι τιμές των αξονικών αραιώσεων που υπολογίζονται σε συγκεκριμένες θέσεις ενδιαφέροντος, είναι σε συμφωνία με τις αντίστοιχες τιμές που αναφέρονται σε πειραματικές μετρήσεις της βιβλιογραφίας.

Η χρήση του προτεινόμενου μοντέλου στην περίπτωση του κινουμένου αποδέκτη, με ασθενές ρεύμα, παρέχει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στην περίπτωση της κυκλικής οριζόντιας φλέβας τα αποτελέσματα συμφωνούν με τα πειραματικά αποτελέσματα για τις τροχιές και τις αξονικές αραιώσεις. Στην περίπτωση της οριζόντιας επίπεδης ανωστικής φλέβας, τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου για τις τροχιές ακολουθούν τις πειραματικές μετρήσεις για την περίπτωση του ασθενούς ρεύματος, αλλά δεν συμφωνούν στην περίπτωση του ισχυρού ρεύματος. Αυτή η ασυμφωνία, αποδίδεται στην επιρροή του σταθερού ορίου, η οποία δεν προβλέπεται από το μαθηματικό μοντέλο. Η ύπαρξη του στερεού ορίου συμβάλλει στην ανάπτυξη φαινομένου τύπου Coanda και έχει ως αποτέλεσμα να διαφοροποιεί την ελεύθερη ανάπτυξη του πεδίου ροής της ανωστικής φλέβας.

Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκαν επίσης, τα χαρακτηριστικά του πεδίου της μέσης ροής που προκύπτει από την αλληλεπίδραση N κατακορύφων ανωστικών φλεβών από ένα διαχύτη τύπου ροζέτας, επιτυγχάνοντας 2^{15} τάξης ακρίβεια, επειδή λαμβάνεται και η συνεισφορά της τύρβης. Υπολογίζονται οι μέσες αξονικές ταχύτητες και συγκεντρώσεις, ο λόγος αραιώσης, η εισροή κινητικής ενέργειας για τη μέση ροή και ο τοπικός αριθμός Richardson κατά μήκος του άξονα της μιας εκ των N φλεβών και παρουσιάζονται αδιαστατοποιημένες με τις αντίστοιχες τιμές της μοναχικής ανωστικής φλέβας. Το

ολοκληρωματικό μοντέλο αναπτύχθηκε λαμβάνοντας υπόψη τους όρους των εξισώσεων, οι οποίοι περιγράφουν τη συνεισφορά της τύρβης και το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης μέσω της θεωρίας του περιορισμού της συμπαράσυρσης μεταξύ των φλεβών. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους της συνεχείας, της ορμής και της διατήρησης της μάζας του ιχνηθέτη πραγματοποιείται στην περιορισμένη επιφάνεια της μιας εκ των N φλεβών, η οποία ορίζεται από τα επίπεδα συμμετρίας μεταξύ δύο διαδοχικών φλεβών. Οι διαμήκεις κατανομές των αξονικών ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων, για τις περιπτώσεις όπου $N = 2$ και $N \rightarrow \infty$, συγκρίνονται με τις αντίστοιχες περιπτώσεις της βιβλιογραφίας και διαπιστώνεται η πολύ καλή συμφωνία τους. Η έναρξη του φαινομένου της αλληλεπίδρασης, χρησιμοποιώντας ως δείκτη το λόγο της ταχύτητας, της συγκέντρωσης ή της κινητικής ενέργειας, υπολογίζεται ότι συμβαίνει σε απόσταση $z/t \approx 7,5$, ενώ, όταν χρησιμοποιείται ως δείκτης ο λόγος αραίωσης, η απόσταση μειώνεται στην τιμή $z/t \approx 5,5$, δείχνοντας τη συνεισφορά της συμπαράσυρσης του περιβάλλοντος ρευστού. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει ότι ο λόγος αραίωσης είναι περισσότερο ευαίσθητος στην αλληλεπίδραση από όσο άλλες παράμετροι.

Οι ασυμπτωτικές τιμές του λόγου των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων για την ομάδα των N κατακορύφων φλεβών μηδενικής ή πλήρους άνωσης που αλληλεπιδρούν εξαρτώνται μόνο από το πλήθος των φλεβών της ομάδας. Στην περίπτωση των φλεβών μηδενικής άνωσης, ο λόγος των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων είναι ίσος με $N^{1/2}$ και για τις δύο περιπτώσεις. Στην περίπτωση των φλεβών πλήρους άνωσης, ο λόγος των ταχυτήτων και των συγκεντρώσεων είναι ίσος με $N^{1/3}$ και $N^{2/3}$, αντίστοιχα. Εξαιρετική ποιοτική και καλή ποσοτική συμφωνία παρατηρείται στη σύγκριση των αποτελεσμάτων για την ασυμπτωτική συμπεριφορά στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης απείρων φλεβών μηδενικής ή πλήρους άνωσης με τα αντίστοιχα πειραματικά και αριθμητικά δεδομένα της βιβλιογραφίας για την επίπεδη φλέβα μηδενικής ή πλήρους άνωσης.

Η συμπεριφορά του λόγου αραίωσης για την αλληλεπίδραση N κατακορύφων ανωστικών φλεβών από διαχύτη τύπου ροζέτας συμφωνεί αρκετά καλά με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. Ειδικά στην περιοχή της αλληλεπίδρασης, προσεγγίζει την αντίστοιχη τιμή που προκύπτει στην επίπεδη ανωστική φλέβα.

Ο λόγος της εισροής κινητικής ενέργειας, τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή $N^{1/2}$ για N φλέβες μηδενικής άνωσης και στην τιμή 1, για φλέβες πλήρους άνωσης και πεπερασμένο πλήθος ($N \geq 2$). Όταν $N \rightarrow \infty$, ο λόγος ακολουθεί το νόμο τετραγωνικής ρίζας για την περίπτωση ροής που έχει συμπεριφορά φλέβας χωρίς άνωση, ενώ αποκτά την τιμή 1,13,

στην περίπτωση ροής που έχει συμπεριφορά φλέβας πλήρους άνωσης. Ο λόγος του τοπικού αριθμού Richardson είναι ανάλογος του αντιστρόφου του λόγου των εισροών κινητικής ενέργειας.

Στα πλαίσια της παρούσας Διατριβής εξετάστηκε η έλξη μεταξύ των ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν. Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις ζεύγους δισδιάστατων και κυκλικών ανωστικών φλεβών, για διάφορες τιμές της μεταξύ τους απόστασης. Υπολογίζοντας την τροχιά του άξονα της ανωστικής φλέβας, είναι φανερό ότι η παρουσία και δεύτερης ανωστικής φλέβας επηρεάζει τις τροχιές και των δύο φλεβών, με αποτέλεσμα οι ανωστικές φλέβες να έλκονται μεταξύ τους. Αυτή η έλξη, εμφανίζεται να είναι εντονότερη στο ζεύγος των δισδιάστατων ανωστικών φλεβών σε σχέση με την περίπτωση των κυκλικών φλεβών. Επίσης, όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ τους, το φαινόμενο της έλξης ελαττώνεται αλλά εξακολουθεί να υφίσταται.

Τέλος, η ύπαρξη στερεών ορίων ή διεπιφανειών, όπως τα τοιχώματα στις δεξαμενές εκτέλεσης πειραμάτων, ο πυθμένας ή η επιφάνεια του αποδέκτη αντιμετωπίζονται με επιτυχία από την παρούσα Διατριβή. Μαθηματικά, η ύπαρξη του ορίου λαμβάνεται υπόψη εισάγοντας το είδωλο της αρχικής ως προς το όριο, η οποία αλληλεπιδρά με την αρχική φλέβα. Έτσι, η έλξη της ανωστικής φλέβας συνεπεία του ορίου (φαινόμενο Coanda), προσομοιώνεται με την αλληλεπίδραση του ζεύγους των φλεβών και υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το μαθηματικό μοντέλο της δυναμικής ροής. Η σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα, δείχνει ότι η παρατηρούμενη έλξη προβλέπεται ικανοποιητικά, με την προϋπόθεση ότι ο άξονας της ανωστικής φλέβας δεν έχει ακόμη τμήσει το όριο.

6.2 ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Στην παρούσα Διατριβή προσεγγίστηκε θεωρητικά η διαφυγή των μαζών που αποκολλώνται από κεκλιμένη επίπεδη ή κυκλική ανωστική φλέβα. Η ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου βασίστηκε στα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα. Ωστόσο, περαιτέρω πειραματική έρευνα απαιτείται στην περίπτωση της επίπεδης ανωστικής φλέβας, όπου η απουσία πειραματικών μετρήσεων δε βοηθά στη βελτίωση του μαθηματικού μοντέλου που αναπτύχθηκε, το οποίο, σε αυτή την περίπτωση, στηρίχτηκε μόνο σε πειραματικά δεδομένα της οριζόντιας επίπεδης ανωστικής φλέβας. Έτσι, η μελλοντική πειραματική διερεύνηση κεκλιμένων επίπεδων ανωστικών φλεβών για

διάφορες αρχικές γωνίες εκτόξευσης θ_0 μπορεί να δώσει σαφέστερη εικόνα του φαινομένου της αποκόλλησης και βελτίωση του συντελεστή A , σε αυτές τις περιπτώσεις.

Η χρήση της σύγχρονης πειραματικής μεθόδου 3DPIV (3D Particle Image Velocimetry), είτε στη δισδιάστατη είτε στην κυκλική κεκλιμένη ανωστική φλέβα, είναι απαραίτητη ώστε να αποκτηθεί περισσότερη γνώση για αυτό το σύνθετο πεδίο ροής που δημιουργείται στις περιοχές αποκόλλησης μαζών που διαφεύγουν, ώστε να βελτιωθεί περαιτέρω το προτεινόμενο μοντέλο.

Επομένως, η συνδυασμένη χρησιμοποίηση μοντέλου παραγωγής πραγματικών εγκαρσίων κατανομών αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων για τη μέση ροή και μοντέλου δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των θεωρούμενων φλεβών διαφαίνεται εφικτή και ελπιδοφόρα για πληρέστερη αντιμετώπιση του προβλήματος αλληλεπίδρασης ομάδας φλεβών.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Abdel-Rahman, A.A., G.J.Hitchman, A.B. Strong, and P.R. Slawson (1994), “Turbulence measurements from a plane air jet with buoyancy induced curvature”, *Experiments in Fluids*, Vol. 16, pp. 336-352.
- Abraham, G. (1963), “*Jet diffusion in stagnant ambient fluid*”, Publication 29, Series 1, Group 14, Section 14.42, Delft Hydraulics Laboratory.
- Abraham, G. (1971), “*The flow of round buoyant jets issuing vertically into ambient fluid flowing in a horizontal direction*”, Delft Hydraulics Laboratory, Delft, Netherlands, Report No. 81
- Albertson, M.L., Y. B. Dai, R.A. Jensen and H. Rouse (1950), “Diffusion of Submerged Jets”, *Transactions of ASCE*, Vol. 115, pp. 639-664
- Angelidis, P.B. (2002), “A Numerical Model for the Mixing of an Inclined Submerged Heated Plane Water Jet in Calm Fluid”, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 45, pp. 2567-2575.
- Anwar, H. O. (1969) “Behaviour of buoyant jet in calm fluid”, *Journal of Hydraulic Division*, Vol. 95, pp. 1289–1303.
- Anwar, H. O. (1972), “Measurements on horizontal buoyant jets in calm ambient fluid”, *La Houille Blanche*, Vol.27, pp. 311–320.
- Ayoub, G. M. (1971), “*Dispersion of buoyant jets in a flowing ambient fluid*”, IPhD Thesis, Department of Civil Engineering, Imperial College of Science & Technology, University of London, London.
- Baines, W.D. and K.F. Keffer (1974), “Entrainment by a multiple source turbulent jet” *Adv. Geophys.*, Vol. 18B, pp. 289-298.
- Batchelor, G. K. 2000 *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- Bloomfield, L. J. and R. C. Kerr (2002), “Inclined turbulent fountains”, *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 451, pp. 283–294
- Bloutsos A.A. and P.C. Yannopoulos (2005), “Three Round Turbulent Buoyant Jets Discharged Vertically from a Rosette”, *IASME TRANSACTIONS*, Issue 3, Vol. 2, May 2005.
- Bloutsos A.A. and P.C. Yannopoulos (2007). “Application of a General Form of the Local Richardson Number to Interacting Round Buoyant Jets”, *Proceedings of the 32nd IAHR Congress: Harmonizing the Demands of Art and Nature in Hydraulics; Fluid Mechanics and Hydraulics Theme* (eds. Di Silvio, G., and Lanzoni, S), Venice, Italy, July 1-6 2007.
- Bloutsos, A.A and P.C. Yannopoulos (2009), “Round turbulent buoyant jets discharged vertically upwards forming a regular polygon”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 47, No. 2, pp. 263–274.
- Bosanquet, C. H., G. Horn and M. W. Thring (1961), “The effect of density differences on the path of jets”, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A.*, 263(1314), 340–352.

- Briggs, G.A. (1973), “Diffusion estimation for small emissions. *Air Resources Atmospheric Turbulence and Diffusion Laboratory*”, Environmental Research Laboratory, NOAA, 1973 Annual Rep. ATDL-79, 59pp
- Briggs, G.A. (1975), “Plume rise predictions. In: *Lectures on air pollution and environmental impact analyses*”, 59–111, D.A. Haugen, ed. American Meteorological Society, Boston MA.
- Capp, S. P. (1983), “*Experimental Investigation of the Buoyant Axisymmetric Jet*”, University of Buffalo, State University of New York, Buffalo.
- Carazzo, G., E. Kaminski, and S. Tait (2006), “The route to self-similarity in turbulent jets and plumes”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 547, pp. 137–148.
- Carvalho, J.L., P.J. Roberts and J. Roldão (2002), “Field observations of Ipanema beach outfall”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, No. 2, pp. 151–160.
- Cederwall, K. (1968), “*Hydraulics of marine wastewater disposal*”, Tech. Rep. 42. Hydraulics Div., Chalmers Institute of Technology.
- Cederwall, K. (1971), “*Buoyant slot jets into stagnant or flowing environments*”, Tech. Rep. KH-R-25, W.M. Keck Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Cheung, S.K.B., D.Y.L. Leung, W. Wang, J.H.W. Lee and V. Cheung (2000), “VISJET A computer ocean outfall modeling system”, *IEEE CNF Conf. Proc., Computer Graphics International*, 75–80. Geneva, Switzerland. DOI 10.1109/CGI.2000.852322
- Chu, P.C.K., J. H. W. Lee, and V.H. Chu (1999), “Spreading of turbulent round jet in coflow”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 125, No. 2, pp. 193–204.
- Cipolina, A., A. Bonfiglio, G. Micale and A. Brucato (2004), “Dense jet modelling applied to the design of dense effluent diffusers”, *Desalination*, Vol. 167, pp. 459–468.
- Cipolina, A., A. Brucato, F. Grisafi, and S. Nicosia (2005), “Bench-scale investigation of inclined dense jets”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 131, No. 11, pp. 1017–1022.
- Cuthbertson, A. J. S., D. D. Apsley, P. A. Davies, G. Lipari and P. K. Stansby (2008), “Deposition from particle-laden, plane, turbulent, buoyant jets”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 134, No. 8, pp. 1110–1122.
- Dahm, W. J. A. and P. E. Dimotakis (1990), “Mixing at large Schmidt number in the self-similar far field of turbulent jets”, *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 217, pp. 299–330.
- Davidson, M. J. and K. L. Pun (1998), “Hybrid Model for Prediction of initial dilutions from outfall discharges”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 12, pp. 1188–1197.
- Davidson, M. J. and K. L. Pun (2000), “Locating discharge trajectories in still and moving ambient fluids”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 126, No. 7, pp 513–524.
- Davidson, M.J. and H.J. Wang (2002), “Strongly Advected jets in coflow”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, No. 8, pp 742–752
- Davidson, M.J., S. Gaskin and I.R. Wood (2002), “A study of a buoyant axisymmetric jet in a small co-flow”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 40, No. 4, pp. 477–489.

- Doneker, R. L. and G. H. Jirka (1999), Discussion of “Mixing in Inclined Dense Jets”. *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 125, No. 8, pp. 317–318.
- Fan, L. N. (1967), “*Turbulent Buoyant jets into stratified or flowing ambient fluids*” Tech. Rep. KH-R-15. W.M. Keck Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Fan, L. N. and N. H. Brooks (1969), “*Numerical Solutions Of Turbulent Buoyant Jet Problems*”, Tech. Rep. KH-R-18. W.M. Keck Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Ferrari, S., and G. Querzoli (2004), “Sea discharge of brine from desalination plants: a laboratory model of negatively buoyant jets”, In: *Proceedings of 3rd International Conference on Marine Waste Water Disposal and Marine Environment*.
- Ferrari, S., and G. Querzoli (2010), “Mixing and re-entrainment in a negatively buoyant jet”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 48, No. 5, pp. 632–640.
- Fischer, H.B., E.J. List, R.C.Y. Koh, J. Imberger and N.H. Brooks (1979), “*Mixing in inland and coastal waters*”, Academic.
- Förthmann, E. (1934), “Über turbulente Strahlausbreitung”, *Ing.-Arch*, Vol. 5, pp. 42-54.
- Fox, D.C. (1970), “Forced plume in a stratified fluid”, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 75, Issue 33, pp.6818– 6835
- Frick, W.E., P.J.W. Roberts, L.R. Davis, J. Keyes, D.J. Baumgartner and K.P. George (2001), “*Dilution Models for Effluent Discharges: Visual Plumes*”, 4th edn., US Environmental Protection Agency, Environmental Research Division, NERL, Standards and Applied Science Division, Office of Science and Technology, Athens GA.
- Friedman, P.D. (2006), “Oscillation in height of a negatively buoyant jet”, *Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering*, Vol. 128, pp. 880-882.
- Friedman, P.D., and J. Katz (2000), “Rise height for negatively buoyant fountains and depth of penetration for negatively buoyant jets impinging an interface”, *Transactions of the ASME: Journal of Fluids Engineering*, Vol. 122, pp. 779-782.
- Friedman, P.D., and J.Katz (1999), “The flow and mixing mechanisms caused by the impingement of an immiscible interface with a vertical jet”, *Physics of Fluids* Vol.11, Issue 9, pp. 2598-2606.
- Gaskin, S. and I.R. Wood (2001), “The axisymmetric and plane jet in coflow”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 39, No. 5, pp. 451–458.
- George, W. K., R. L. Alpert and F. Tamanini (1977), “Turbulence measurements in an axisymmetric plume”, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 20, pp. 1145-1154.
- Görtler, H. (1942), “Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz aus Grund eines neuen Näherungsansatzes”, *ZAMM*, Vol. 22, pp. 244-254
- Hansen, J. and H.Schroder (1968), “Horizontal Jet Dilution Studies by Use of Radioactive Isotopes”, *Acta Polytechnica Scandinavica*, Vol. 49. Danish Academy of Technical Sciences.

- Hart, A. and S. Dalziel, (2006). "Interacting Thermals", *Proc. 6th Int. Conf. on Stratified Flows*, Perth, Australia, Dec. 2006.
- Hussein, H. J., S. P. Capp and W. K. George (1994), "Velocity measurements in a high-Reynolds number, momentum-conserving, axisymmetric turbulent jet", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 258, pp. 31-75.
- Isaacson, M.S., R.C.Y. Koh and N.H. Brooks, (1983), "Plume dilution for diffusers with multiport risers", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 109, No. 2, pp. 199–220.
- Jirka, G. H., R. L. Doneker and S. W. Hinton (1996) "*Users manual for CORMIX: A hydrodynamic mixing zone model and decision support system for pollutant discharges into surface waters*". Tech. Rep. DeFrees Hydraulics Lab., Cornell University, Ithaca, New York.
- Jirka, G.H. (2004), "Integral Model for Turbulent Buoyant Jets in Unbounded Stratified Flows Part 1: Single Round Jet", *Environmental Fluid Mechanics*, Vol. 4, pp. 1-56.
- Jirka, G.H. (2006), "Integral model for turbulent buoyant jets in unbounded stratified flows Part II: Plane jet dynamics resulting from multiport diffuser jets", *Environmental Fluid Mechanics*, Vol. 6, pp. 43–100.
- Jirka, G.H. (2008), "Improved discharge configurations for brine effluents from desalination plants", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 134, No. 1, pp 116-120.
- Jirka, G.H. and D. R. F. Harleman (1973), "*The mechanics of submerged multiport diffusers for buoyant discharges in shallow water*", Tech. Rep. 169. R. Parson Lab. for Water Resources and Hydrodynamics, MIT.
- Jirka, G.H. and P.J. Akar (1991), "Hydrodynamic classification of submerged multiport diffuser discharges", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 117, No. 9, pp. 1113–1128.
- Johnston, A. J., C.R. Phillips and R. E. Volker (1994), "Modelling horizontal round buoyant jets in shallow water", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 120, No. 1, pp. 41–592.
- Jordinson, R. (1956), "*Flow in a jet directed normal to a wind*", Technical Report R & M, 3074.
- Kaminski, E., S. Tait and G. Carazzo (2005), "Turbulent entrainment in jets with arbitrary buoyancy", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 526, pp. 361–376.
- Kaye, N.B. and P.F. Linden (2004), "Coalescing axisymmetric turbulent plumes", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 502, pp.41-63.
- Keffer, J.F. and W.D. Baines (1963), "The round turbulent jet in a cross-wind", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 15, pp. 481-196.
- Kikkert, G. A. (2006), "*Buoyant jets with two and three dimensional trajectories*", PhD thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.
- Kikkert, G. A., M. J. Davidson and R. I. Nokes (2007), "Inclined negatively buoyant discharges", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 133, No. 5, pp. 545–554.

- Kim, Y.D., W.I. Seo, S.W. Kang and B.C. Oh (2002), "Jet integral-particle tracking hybrid model for single buoyant jets", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 128, No. 8, pp. 753–760
- Kotsovinos, N. E. (1975), "A Study of the Entrainment and Turbulence in a Plane Buoyant Jet", Report No. KH-R-32, W. M. Keck Lab. of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, California
- Kotsovinos, N. E. (1976), "A note on the spreading rate and virtual origin of a plane turbulent jet", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 77, pp. 305-311.
- Kotsovinos, N. E. (1977), "Plane Turbulent Buoyant Jets, Part II: Turbulence Structure", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 81, pp. 45-62.
- Kotsovinos, N. E. (1978), "Waste Water Disposal from Two-dimensional Diffuser", *Journal of Hydraulic Division*, HY4, pp. 559-561.
- Kotsovinos, N. E. and E. J. List (1977), "Plane Turbulent Buoyant Jets, Part I: Integral Properties", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 81, pp. 25-44.
- Kreyszig, E. (1998) 'Advanced engineering mathematics', Willey.
- Kwon, S.J. (2005), "Behavior of Buoyant Discharges from a Rosette-type Diffuser", Ph.D. Thesis, Seoul National University, Korea.
- Lai, A.C.H., D. Yu and J.H.W. Lee, (2011) "Mixing of a rosette jet group in a crossflow" *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 137, No. 8, pp. 787-803.
- Lai, A.C.H., D., (2010) "Mixing of a rosette buoyant jet group" Ph.D. Dept of Civil engineering, The University of Hong Kong, 301p.
- Lai, C.C.K. and J. H.W. Lee (2012), "Mixing of inclined dense jets in stationary ambient", *Journal of Hydro-environment Research*, Vol. 6, pp. 9-28.
- Lai, C.C.K., (2009), "Mixing of inclined dense jets", M. Phil. Thesis. Dept of Civil engineering, The University of Hong Kong, 132p
- Lane-Serff, G. F., P. F. Linden and M.Hillel (1993), "Forced, angled plumes", *Journal of Hazardous Materials*, Vol. 33, pp. 75–99.
- Lee, J. H. W. (1980), "Stability and Mixing of a round Buoyant Discharge in Shallow Water". Second International Symposium on Stratified Flows, Vol. 2, Trodheim, pp.881-897
- Lee, J. H. W. and G.H. Jirka (1981), "Vertical round buoyant jet in shallow water", *Journal of Hydraulic Division*, Vol. 107, pp. 1651-1675.
- Lee, J. H. W. and II Won Seo (2000), "Numerical simulation of advected thermal using Gaussian-Vortex model", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 10, pp. 1098-1106.
- Lee, J. H. W. and V. Cheung (1990), "Generalized Lagrangian model for buoyant jets in current", *Journal of Environmental Engineering*, Vol. 116, No. 6, pp. 1085-1106
- Lee, J. H. W. and V.H. Chu (2003), "Turbulent Jets and Plumes: A Lagrangian Approach", Kluwer Academic.
- Lee, J. H., G. H. Jirka and D.R.F. Harleman (1974), "Stability and Mixing of a Vertical Round Buoyant Jet in Shallow Water", MIT. Report No. 185, Ralph M. Parsons Lab.

- Lee, J.H.W., V. Cheung, W. Wang and S.K.B. Cheung (2000), “*Langrangian modeling and visualization of Rosette outfall plumes*”. *Proc. Hydroinformatics* (8 pages in CD-ROM). University of Iowa, Iowa.
- Lindberg, W. R. (1994), “Experiments on negatively buoyant jets, with and without cross-flow. *Pages 131–145 of: Recent Research Advances in the Fluid Mechanics of Turbulent Jets and Plumes*”. Kluwer Academic Publishers.
- Liseth, P. (1970), “*Mixing of merging buoyant jets from a manifold in stagnant receiving water of uniform density*”, Tech. Rep. HEL 23-1. Hydraulic Engineering Lab., University of California
- Liseth, P. (1970). “*Mixing of merging buoyant jets from a manifold in stagnant receiving water of uniform density*”, PhD Thesis, University of California, Berkeley, California.
- List, E. J. and J. Imberger (1973), “Turbulent entrainment in buoyant jets and plumes”, *Journal of Hydraulic Division*, Vol. 99, pp. 1461–1474.
- M. Uddin and A. Pollard (2007), “Self-similarity of Co-Flowing Jets: The virtual origin”, *Physics of Fluids*, Vol. 19.
- Manohar, C.H.I, T. Sundararajan, V. Ramjee, and S.S. Kumar (2004), “A numerical and experimental investigation of the interactions between a non-uniform planar array of incompressible free jets”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 44, pp. 431-446.
- Marti, C. L., J. P. Antenucci, D.Luketina, P. Okely and J. Imberger (2010), “Near field dilution characteristics of a negatively buoyant hypersaline jet generated by a desalination plant”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 137, pp. 57–65.
- Méndez-Díaz, María M. and G. H. Jirka (1996), “Buoyant plumes from multiport diffuser discharge in deep coflowing water”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 122, No. 8, pp. 428-435.
- Metcalf and Eddy (2003), “*Wastewater Engineering – Treatment and Reuse*”, McGraw-Hill, New York
- Moawad, A.K., N. Rajaratnam and S.J. Stanley (2001), “Mixing with multiple circular turbulent jets”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 39, Issue 2, pp. 163–168.
- Morton, B. R., G. I Taylor and J. S. Turner (1956), “*Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources*”, *Proceedings of the Royal Society of London(A 234)*, 1-23.
- Nemlioglu, S. and P. J. W.Roberts (2006), “*Experiments on dense jets using 3D laser-induced fluorescence*” In *Proceedings, 4th International Conference on Marine Waste Water Disposal and Marine Environment, and 2nd International Exhibition of Materials, Equipment and Services for Coastal WWTP, Outfalls and Sealines, Antalya, Turkey*, p. 10.
- Noutsopoulos, G. and P.C. Yannopoulos (1987), “The round vertical turbulent buoyant jet”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 25, Issue 4, pp. 481-502
- Obropta, C.C. and R.I. Hires (2007), “Simulations of dye releases off the coast of New Jersey: Development and validation of an ocean outfall mixing model”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 133, No. 2, pp. 73–185.

- Oliver, C.J. (2012), “*Near field mixing of negatively buoyant jets*”, PhD. Thesis. Department of Civil and Natural Resources Engineering, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand 235p.
- Oosthuizen, P. H. and G. P. Lemieux (1987), “An experimental study of an inclined buoyant plane turbulent air jet”, *Chemical Engineering Communications*, Vol. 50, Issue 1, pp. 113 – 133.
- Otranto, F. (2004), “*Laboratory modelling of sea-brine discharges*”, Undergraduate Report. The University of Western Australia.
- Panchapakesan, N. R. and J. L. Lumley (1993), “Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 1: Air jet”. *Fluid Mechanics*, Vol. 246, pp. 197–223.
- Panchapakesan, N. R. and J. L. Lumley (1993), “Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Part 2: Helium jet”, *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 246, pp. 225-247.
- Papakonstantis, I. G., G. C. Christodoulou and P. N. Papanicolaou (2011a), “Inclined negatively buoyant jets Part 1: geometrical characteristics”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 49, No. 1, pp. 3–12.
- Papakonstantis, I. G., G. C. Christodoulou and P. N. Papanicolaou (2011b), “Inclined negatively buoyant jets Part 2: concentration measurements”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 49, No. 1, pp. 13–22.
- Papakonstantis, I., M. Kampourelli, and G. Christodoulou (2007), “Height of rise of inclined and vertical negatively buoyant jets”, Proceedings of the 32nd IAHR Congress: *Harmonizing the Demands of Art and Nature in Hydraulics; Fluid Mechanics and Hydraulics Theme* (eds. Di Silvio, G., and Lanzoni, S), Venice, Italy, July 1-6 2007.
- Papanicolaou, P. N., and E. J. List (1987), “Statistical and spectral properties of tracer concentration in round buoyant jets”, *International Journal of Heat Mass Transfer*, Vol. 30, pp. 2059–2071.
- Papanicolaou, P. N., and E. J. List (1988), “Investigations of round vertical turbulent buoyant jets”, *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 195, pp. 341-391.
- Papps, D.A., I.R. Wood (1997), “The effect of an intermittent flapping motion on the properties of merging plumes”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 35, No. 4, pp. 455–472.
- Pasquill, F., and Smith, 1983 *Atmospheric Diffusion* John Wiley and sons 440 pp
- Pasumarthi, K.S., and A.K. Agrawal (2005), “Buoyancy effects on flow transition in low-density inertial gas jets”, *Experiments in Fluids*, Vol. 38, pp. 541-544.
- Patel, R. P. (1971), “Turbulent jets and wall jets in uniform streaming flow”, *Aeronautical Quarterly*, Vol. 22, pp. 311-326.
- Petrenko, A.A., B.H. Jones and T.D. Dickey (1998), “Shape and initial dilution of Sand Island, Hawaii sewage plume”, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, No. 6, pp. 565–571.

- Plourde, F., M. V. Pham, S. D. Kim, and S. Balachandar (2008), "Direct numerical simulations of a rapidly expanding thermal plume: structure and entrainment interaction", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 604, pp. 99–123.
- Priestley, C.H.B. (1956), "A working theory of the bent-over plume of hot gas", *Quarterly J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 82, pp.165-176
- Proni, J.R., H. Huang and W.P. Dammann (1994), "Initial dilution of Southeast Florida Ocean Outfalls", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 120, No. 12, pp. 1409–1425.
- Ramaprian, B. R. and M. S. Chandrasekhara (1983), "Study of vertical plane turbulent jets and plumes", Tech. Rep. IIHR 257. Iowa Institute of Hydraulic Research, the University of Iowa, Iowa.
- Ramaprian, B. R. and M. S. Chandrasekhara (1985), "LDA measurements in plane turbulent jets", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 107, pp. 264–271.
- Ramaprian, B. R. and M. S. Chandrasekhara (1989), "Measurements in vertical plane turbulent plumes", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 111, pp. 69-77.
- Reichardt, H. (1941), "On a new theory of free turbulence", *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 21, pp. 257–264, English translation in *J. R. Aeronaut. Soc.* (1943) Vol. 47, pp. 167–176.
- Reichardt, H. (1942), "Gesetzmäßigkeiten der freien Turbulenzen", *VDI-Forschungsheft* Vol. 414.
- Reichardt, H. (1943). "On new theory of free turbulence", *Royal Aeronautical Society - Journal*, Vol. 47, Issue 390, pp.167-176.
- Richards, R. S. (1963), "Experiment on the motion of isolated cylindrical thermals through unstratified surroundings", *International Journal of Air & Water Pollution*, Vol. 7, pp. 17-34.
- Roberts, P. G. W. and G. Toms (1987), "Inclined dense jets in flowing current", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 113, No. 3, pp. 323–341.
- Roberts, P. G. W., A. Ferrier and G. Daviero (1997), "Mixing in inclined dense jets", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, No. 8, pp. 693–699.
- Roberts, P.J.W (1979), "Line Plume and Ocean Outfall Dispersion", *Journal of Hydraulic Division*, Vol. 105 (HY4), pp. 313-331
- Roberts, P.J.W. (1999), "Modeling the Mamala Bay Plumes", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 125, No. 6, pp. 564–573.
- Roberts, P.J.W. and W.H. Snyder (1993b), "Hydraulic model study for Boston Outfall I: Riser configuration", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 119, No. 9, pp. 970–987.
- Roberts, P.J.W. and W.H. Snyder (1993b), "Hydraulic model study for Boston Outfall II: Environmental performance", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 119, No. 9, pp. 988–1002.
- Roberts, P.J.W., W.H. Snyder and D.J. Baumgartner (1989a), "Ocean Outfalls I: Submerged wastefield formation", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 1, pp. 1–25.

- Roberts, P.J.W., W.H. Snyder and D.J. Baumgartner (1989b), "Ocean Outfalls II: Spatial evolution of submerged wastefield", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 1, 26–48.
- Roberts, P.J.W., W.H. Snyder and D.J. Baumgartner (1989c), "Ocean outfalls III: Effect of diffuser design on submerged wastefield", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 115, No. 1, pp. 49–70.
- Rouse, H., C. S. Yih and H. W. Humphreys (1952), "Gravitational Convection from a Boundary Source", *Tellus*, Vol. 4, pp. 201-210.
- Ryskiewich, B.S. and L.Hafetz (1975), "An experimental study of the free surface effect on a buoyant jet" General Dynamics Report No. U440-74-103
- Schatzmann, M. (1979), "An integral model of plume rise", *Atmospheric Environment*, Vol. 13, pp. 721-731.
- Schlichting, H. (1968), "*Boundary Layer Theory*", Mc Graw-Hill
- Schnelle, K. B. and P. R. Dey (2000), "*Atmospheric dispersion modeling compliance guide*" McGraw-Hill, New York.
- Schnelle, K.B., and P.R. Dey (2000), "*Atmospheric Dispersion Modeling Compliance Guide*", McGraw-Hill, New York.
- Scorer, R. S. (1959), "The behavior of chimney plumes" *International Journal of Air pollution*, Vol. 1, pp. 198-220.
- Seo, I.W., S.J. Kwon and H.K Yeo (2004), "Merging characteristics of buoyant discharges from rosette-type diffusers in shallow water", *Journal of Civil Engineering, KSCE*, Vol.8, Issue 6, pp. 679-688.
- Shabbir, A. and W. K. George (1994), "Experiments on a round turbulent buoyant plume", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 275, pp. 1–32.
- Shahramani, D.M. and J.D. Ditmars (1976), "Negatively Buoyant Slot Jets", Proceedings of the International Conference on Costal Engineering, No15, Chapter 170
- Shao, D. and A. W. K. Law (2009), "Turbulent mass and momentum transport of a circular offset dense jet", *Journal of Turbulence*, Vol. 10m pp. 1–24.
- Shao, D. and A. W. K. Law (2010), "Mixing and boundary interactions of 30° and 45° inclined dense jets", *Environmental Fluid Mechanics*, Vol. 10, pp. 521–553.
- Stewart, R.H. (2006), "*Introduction to Physical Oceanography*", Texas A&M University, <http://oceanworld.tamu.edu/resources/ocng-textbook/>.
- Stull, R.B. (1988), "*An Introduction to Boundary Layer Meteorology*", Springer.
- Subbarao, E.R. and B.J. Cantwell (1992), "Investigation of a co-flowing buoyant jet: experiments on the effect of Reynolds number and Richardson number", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 245, pp. 69-90.
- Syrbin, A.N. and D.N. Lyakhovsky (1936), "Aerodynamics of an elementary flame", *Soobshch, Tsenter, Nauchn-Issled, Kotloturoinnyinst.*
- Tian, X. and P. J. W. Roberts (2003), "A 3D LIF system for turbulent buoyant jet flows", *Experiments on Fluids*, Vol. 35, pp. 636–647.

- Tian, X., P.J.W. Roberts and G.J. Daviero (2004a), "Marine wastewater discharges from multiport diffusers I: Unstratified stationary water", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 130, No. 12, pp. 1137–1146.
- Tian, X., P.J.W. Roberts and G.J. Daviero (2004b), "Marine wastewater discharges from multiport diffusers II: Ustratified flowing water", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 130, No. 12, pp. 1147–1155.
- Tian, X., P.J.W. Roberts and G.J. Daviero (2006), "Marine Wastewater Discharges from Multiport Diffusers. IV: Stratified Flowing Water", *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol. 132, No. 4, pp. 411–419.
- Tollmien, W. (1926), "Berechnung Turbulenter Ausbreitungsvorgange", *ZAMM*, 6, pp. 468–478.
- Turner, J. S. (1960), "Comparison between buoyant vortex rings and vortex pairs", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 7, Part 3, pp. 419–432.
- Turner, J. S. (1986) "Turbulent entrainment: the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 173, pp. 431–471.
- Turner, J.S. (1973), "*Buoyancy Effects in Fluids*", Cambridge University Press.
- Vauquelin, O. (2005), "Parametrical study of the back flow occurrence in case of a buoyant release into a rectangular channel", *Experimental Thermal and Fluid Science* Vol. 29, pp. 725–731.
- Wang, H., and A. W. K. Law (2002), "Second-order integral model for a round buoyant jet", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 459, pp. 397–428.
- Washburn, L., B.H.J ones, A. Bratkovich, T.D. Dickey and M.-S. Chen (1992), "Mixing, dispersion, and resuspension in vicinity of ocean wastewater plume", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 118, No. 1, pp. 38–58.
- Water Research Center (1990) "*Design guide for marine treatment schemes*, Water Research Center", United Kingdom
- Webster, D.R., P. J. W. Roberts and L. Ra'ad (2001), "Simultaneous DPTV/PLIF measurements of a turbulent jet", *Experiments on Fluids*, Vol. 30, pp. 65–72.
- Webster, D.R., P.J.W. Roberts and L. Raad (2001), "Simultaneous DPTV/PLIF Measurements of a Turbulent Jet", *Experiments on Fluids*, Vol. 30, pp. 65–725
- Weisgraber, T. H. and D.Liepmann (1998), "Turbulent structure during transition to self-similarity in a round jet", *Experiments on Fluids*, Vol. 24, pp. 210–224.
- Wong, D.R. and S.J. Wright (1988), "Submerged turbulent buoyant jets in stagnant linearly stratified fluids". *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 26, No. 2, pp. 199–223.
- Wood, I.R., R.G. Bell and D.L. Wilkinson (1993), "*Ocean disposal of wastewater*", World Scientific, Singapore.
- Wright, S. J. (1977), "*Effects of ambient crossflows and density stratification on the characteristic behavior of round turbulent buoyant jets*", *Tech. Rep. KH-R-36*, W.M. Keck Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Yannopoulos, P. C. (2010), "Advanced integral model for groups of interacting round turbulent buoyant jets", *Environmental Fluid Mechanics*, Vol. 10, pp. 415–450.

- Yannopoulos, P. C. and A.A. Bloutsos (2012), “Escaping mass approach for inclined plane and round buoyant jets”, *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 695, pp. 81–111.
- Yannopoulos, P.C. (1996), “Superposition model for multiple plumes and jets predicting end effects”, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 101, No. D10, pp.15153–15176.
- Yannopoulos, P.C. (2006), “An Improved Integral Model for plane and round turbulent buoyant jets”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 547, pp. 267-296.
- Yannopoulos, P.C. and G.C. Noutsopoulos (1990), “The plane vertical turbulent buoyant jet”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 28, No. 5, pp. 565-580.
- Yannopoulos, P.C. and G.C. Noutsopoulos (2006a), “Interaction of vertical round turbulent buoyant jets I: Entrainment restriction approach” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 44, No. 2, pp. 218–232.
- Yannopoulos, P.C. and G.C. Noutsopoulos (2006b), “Interaction of vertical round turbulent buoyant jets II: Superposition method”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 44, No. 2, pp. 233–248.
- Zeitoun, M. A., W. F. McIlhenny and R. O. Reid (1970), “*Conceptual Designs of Outfall Systems for Desalting Plants*” Washington, D.C., 1139, U.S. Dept of the Interior.
- Zimm, W. (1921), “Flow phenomena in free air currents Ueber die Stromungsvorgange”, *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* Vol. 234, pp. 36.

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Α – ΚΕΚΛΙΜΕΝΗ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΑΝΩ- ΣΤΙΚΗ ΦΛΕΒΑ

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους διατυπωμένο σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων $O_l(\eta, \psi, \xi)$ είναι το εξής:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \quad (A.1)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής ξ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = g'_0 h c \sin \omega + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial \psi} \quad (A.2)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής ψ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} - \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = -g'_0 h c \cos \omega - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(hp_d)}{\partial \psi} \quad (A.3)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη:

$$\frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} + \frac{\partial(huc)}{\partial \psi} = -\frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} + S_0 \quad (A.4)$$

όπου:

w, u	οι μέσες τιμές των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και ψ , αντίστοιχα
w', u'	οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και ψ , αντίστοιχα
θ	η τοπική κλίση του άξονα ξ
$c = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a - \rho_0}$	η μέση τιμή της συγκέντρωσης
ρ	η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση

$w'^2, w'c', u'c'$ οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w, u και c , αντίστοιχα

$\tau_{\psi\zeta}$ η μέση τυρβώδης διατμητική τάση

p_d η δυναμική πίεση

$h = 1 + \psi \frac{d\theta}{d\xi}$ ο μετρικός συντελεστής του συστήματος καμπυλόγραμμων συντεταγμένων

$S_0 = \frac{\partial(hq_\psi)}{\partial\psi}$ ο όρος πηγής των αποκολλούμενων μαζών που διαφεύγουν

q_ψ το φορτίο των αποκολλούμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη ψ διεύθυνση

Οι εξισώσεις (A.1) έως (A.4) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Στο } \psi = 0: \quad w = w_m, u = 0, c = c_m, \tau_{\psi\zeta} = u'c' = q_\psi = 0, p_d = p_{dm} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Στο } \psi = \pm B_w \quad w = c = \tau_{\psi\zeta} = u'c' = 0, u = U_{B0}, p_d = p_{de}, q_\psi = q_B \quad (\text{A.6})$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$U_{B0} = \mp u_B - w_B \cos \theta \quad (\text{A.7})$$

$$q_B = 0 \text{ στο } \psi = +B_w \quad (\text{A.8})$$

$$q_B = w_B c_B \cos \theta \text{ στο } \psi = -B_w \quad (\text{A.9})$$

όπου

w_B η κατακόρυφη ταχύτητα των αποκολλούμενων μαζών

c_B η συγκέντρωση των αποκολλούμενων μαζών

u_B η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης στο πραγματικό όριο, B_w , της διατομής της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται στην εγκάρσια επιφάνεια της φλέβας (Σχήμα 4.2).

Στη ZEF επικρατεί αυτοομοιότητα, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη. Στην περίπτωση του κινούμενου αποδέκτη γίνεται η παραδοχή ότι η

αυτοομοιότητα διατηρείται και εντός της ZFE, με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w}{w_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_w^2}\right) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_c^2}\right) \quad (\text{A.11})$$

Η εξίσωση (A.1) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος } (\alpha) \int_A \frac{\partial w}{\partial \xi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} w d\psi = \frac{d}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} w d\psi - \frac{d(+B_w)}{d\xi} (w)_{+B_w} + \frac{d(-B_w)}{d\xi} (w)_{-B_w} = \frac{d\mu}{d\xi}$$

$$\text{Όρος } (\beta) \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} d\psi = (hu)_{+B_w} - (hu)_{-B_w} =$$

$$h_{+B_w}(-u_{+B_w} - w_B \cos \theta) - h_{-B_w}(u_{-B_w} - w_B \cos \theta) =$$

$$= -2u_e + w_B \cos \theta \left(-1 + B_w \frac{d\theta}{d\xi} + 1 - B_w \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -2u_e - 2B_w w_B \cos \theta \frac{d\theta}{d\xi}$$

$$\text{Συνολικά: } \frac{d\mu}{d\xi} - 2u_e - 2B_w w_B \cos \theta \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \Rightarrow \frac{d\mu}{d\xi} - 2B_w w_B \cos \theta \frac{d\theta}{d\xi} = 2u_e$$

Η εξίσωση (A.2) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος } (\alpha) \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) d\psi =$$

$$= \frac{d}{d\xi} \left[\int_{-B_w}^{+B_w} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) d\psi \right] - \frac{dB_w}{d\xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{+B_w} + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{-B_w} =$$

$$= \frac{dm}{d\xi}$$

$$\text{Όρος (β): } \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(huw)}{\partial\psi} d\psi = (huw)_{+B_w} - (huw)_{-B_w} = 0$$

$$\text{Όρος (γ): } \int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} d\psi = 0$$

$$\text{Όρος (δ): } \int_{-B_w}^{+B_w} g'_0 h c \sin\omega d\psi = \zeta \sin\omega$$

$$\text{Όρος (ε): } \int_A \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh\tau_{r\xi})}{\partial r} dA = 0$$

$$\text{Συνολικά, } \boxed{\frac{dm}{d\xi} = \zeta \sin\theta}$$

Η εξίσωση (Α.3) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος (α): } \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) d\psi = 0$$

$$\text{Όρος (β): } \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(hu^2)}{\partial\psi} d\psi = (hu^2)_{+B_w} - (hu^2)_{-B_w} =$$

$$\begin{aligned} & h_{+B_w} \left(-u_{+B_w} - w_B \cos\theta \right)^2 - h_{-B_w} \left(u_{-B_w} - w_B \cos\theta \right)^2 = \\ & = \left(1 + B_w \frac{d\theta}{d\xi} \right) \left(u_{+B_w}^2 + w_B^2 \cos^2\theta + 2u_{+B_w} w_B \cos\theta \right) - \\ & - \left(1 - B_w \frac{d\theta}{d\xi} \right) \left(u_{-B_w}^2 + w_B^2 \cos^2\theta - 2u_{-B_w} w_B \cos\theta \right) = \\ & = -2B_w u_e^2 \frac{d\theta}{d\xi} - 2B_w w_B^2 \cos^2\theta \frac{d\theta}{d\xi} + 4u_e w_B \cos\theta \end{aligned}$$

$$\text{Όρος (γ): } \int_{-B_w}^{+B_w} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} d\psi = m \frac{d\theta}{d\xi}$$

$$\text{Όρος (δ): } \int_{-B_w}^{+B_w} g'_0 h c \cos\omega d\psi = \zeta \cos\theta$$

$$\text{Όρος (ε): } \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h p_d)}{\partial \psi} d\psi = (h p_d)_{+B_w} - (h p_d)_{-B_w} = 0$$

$$\text{Συνολικά, } -2B_w u_e^2 \frac{d\theta}{d\xi} - 2B_w w_B^2 \cos^2 \theta \frac{d\theta}{d\xi} + 4u_e w_B \cos \theta - m \frac{d\theta}{d\xi} = -\zeta \cos \theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \theta + 4u_e w_B \cos \theta}{m + 2B_w u_e^2 + 2B_w w_B^2 \cos^2 \theta} \Rightarrow}$$

Η εξίσωση (A.4) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος (α): } \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(w c + w' c')}{\partial \xi} d\psi =$$

$$\begin{aligned} \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(w c + w' c')}{\partial \xi} d\psi &= \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} (w c + w' c') d\psi \right\} - \frac{dB_w}{d\xi} (w c + w' c')_{+B_w} - \frac{dB_w}{d\xi} (w c + w' c')_{-B_w} = \\ &= \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\beta}{g'_0} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Όρος (β): } \int_{-B_w}^{+B_w} \left[\frac{\partial(h u c)}{\partial \psi} + \frac{\partial(h u' c')}{\partial \psi} \right] d\psi = 0$$

$$\text{Όρος (γ): } \int_{-B_w}^{+B_w} -\frac{\partial(h u c)}{\partial \psi} d\psi = (h u c)_{-B_w} = B_w \frac{d\theta}{d\xi} \Lambda c_m w_B \cos \theta$$

$$\text{Συνολικά, } \boxed{\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\beta}{g'_0} \right) = B_w \frac{d\theta}{d\xi} \Lambda c_m w_B \cos \theta}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας συμπαράσυρσης: Ολοκληρώνεται η εξίσωση συνεχείας στο επίπεδο της φλέβας:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(h u)}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \int_0^{\psi} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\psi + \int_0^{\psi} \frac{\partial(h u)}{\partial \psi} d\psi = 0 \Rightarrow \int_0^{\psi} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\psi + (h u)_{\psi} - (h u)_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \int_0^{\psi} w_m \exp \left[-\left(\frac{\psi}{b_w} \right)^2 \right] d\psi \right\} + h u = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} b_w w_m \operatorname{erf} \left(\frac{\psi}{b_w} \right) \right] + h u = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[K_w w_m \operatorname{erf}(n) + b_w \frac{dw_m}{d\xi} \operatorname{erf}(n) + b_w w_m \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2) \frac{dn}{d\xi} \cos(\theta - \omega) \right] + hu = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-hu = w_m K_w \left[(1 + s_0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n) - n \exp(-n^2) \right]}$$

$$\text{Όπου } s_0 = \frac{\xi}{w_m} \frac{dw_m}{d\xi}$$

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Β – ΚΕΚΛΙΜΕΝΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΤΥΡΩΔΗΣ ΑΝΩΣΤΙΚΗ ΦΛΕΒΑ

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στον Batchelor (2000), η διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους της διατήρησης της ορμής (για τα στιγμιαία χρονικά μεγέθη) στις διευθύνσεις φ , r και ξ σε ένα καμπυλόγραμμο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (O, φ, r, ξ) λαμβάνοντας υπόψη την προσέγγιση Boussinesq και αγνοώντας τους όρους του μοριακού ιξώδους, έχει ως εξής:

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής φ

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(rhvu)}{\partial r} \frac{\partial(rvw)}{\partial \xi} + hvu - r\cos\varphi w^2 \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = -g'_0 rhc\cos\varphi\cos\theta - \frac{\partial(hp_d)}{\rho_0 \partial \varphi} + r\cos\varphi \frac{p_d}{\rho_0} \frac{d\theta}{d\xi} \end{aligned} \quad (B.1)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής r

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(rhu^2)}{\partial r} \frac{\partial(ruw)}{\partial \xi} + hu^2 - r\sin\varphi w^2 \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = -g'_0 rhc\sin\varphi\cos\theta - \frac{\partial(rhp_d)}{\rho_0 \partial r} + h \frac{p_d}{\rho_0} + r\sin\varphi \frac{p_d}{\rho_0} \frac{d\theta}{d\xi} \end{aligned} \quad (B.2)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής ξ

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial(hvw)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} + \frac{\partial(rw^2)}{\partial \xi} + r\cos\varphi vw \frac{d\theta}{d\xi} + r\sin\varphi uw \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = g'_0 rhc\sin\theta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rp_d)}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (B.3)$$

Ορίζονται οι συνιστώσες της ορμής m_η , m_ψ , m_φ και m_r στις διευθύνσεις η , ψ , φ και r , αντίστοιχα. Συνεπώς, προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$m_\eta = -m_\varphi \sin\varphi + m_r \cos\varphi \quad (B.4)$$

$$m_\psi = m_\varphi \cos \varphi + m_r \sin \varphi \quad (\text{B.5})$$

Επομένως, σύμφωνα με την εξίσωση (B.4), η εξίσωση διατήρησης της ορμής στη διεύθυνση η προκύπτει προσθέτοντας κατά μέλη την εξίσωση (B.1) πολλαπλασιασμένη με τον όρο $-\sin \varphi$ και την εξίσωση (B.2) πολλαπλασιασμένη με τον όρο $\cos \varphi$. Ακολουθώντας την περιγραφείσα διαδικασία η εξίσωση της διατήρησης της ορμής στη διεύθυνση η είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\partial(hv_\eta)}{\partial t} + \frac{\partial(hv_\eta v)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(rhv_\eta u)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_\eta w)}{\partial \xi} = \frac{\partial(hp_d \sin \varphi)}{\rho_0 \partial \varphi} - \frac{\partial(rhp_d \cos \varphi)}{\rho_0 \partial r} \quad (\text{B.6})$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (B.5), η εξίσωση διατήρησης της ορμής στη διεύθυνση ψ προκύπτει προσθέτοντας κατά μέλη την εξίσωση (B.1) πολλαπλασιασμένη με τον όρο $\cos \varphi$ και την εξίσωση (B.2) πολλαπλασιασμένη με τον όρο $\sin \varphi$. Ακολουθώντας την περιγραφείσα διαδικασία η εξίσωση της διατήρησης της ορμής στη διεύθυνση ψ είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv_\psi)}{\partial t} + \frac{\partial(hv_\psi v)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(rhv_\psi u)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_\psi w)}{\partial \xi} - rw^2 \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = -g'_0 rhccos \theta - \frac{\partial(hp_d \cos \varphi)}{\rho_0 \partial \varphi} - \frac{\partial(rhp_d \sin \varphi)}{\rho_0 \partial r} + r \frac{p_d}{\rho_0} \frac{d\theta}{d\xi} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Οι ταχύτητες στις διευθύνσεις η και ψ περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$v_\eta = -v \sin \varphi + u \cos \varphi \quad (\text{B.8})$$

$$v_\psi = v \cos \varphi + u \sin \varphi \quad (\text{B.9})$$

Για μια ροή συμμετρική ως προς τον άξονα ξ , όπου ισχύει $v = 0$ και $\partial f / \partial \varphi = 0$ (όπου η μεταβλητή f αντιπροσωπεύει τον οποιοδήποτε όρο της ροής), $v_\eta = u \cos \varphi$ και $v_\psi = u \sin \varphi$, οι εξισώσεις (B.3), (B.6) και (B.7) απλοποιούνται στις ακόλουθες:

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής ξ :

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} + \frac{\partial(rw^2)}{\partial \xi} + r \sin \varphi u w \frac{d\theta}{d\xi} = g'_0 r h c \sin \theta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rp_d)}{\partial \xi} \quad (B.10)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής η

$$\frac{\partial(hu \cos \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(rhu^2 \cos \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(rw u \cos \varphi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh p_d \cos \varphi)}{\partial r} \quad (B.11)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής ψ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(hu \sin \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(rhu^2 \sin \varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(rw u \sin \varphi)}{\partial \xi} - r w^2 \frac{d\theta}{d\xi} = \\ & = -g'_0 r h c \cos \theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh p_d \sin \varphi)}{\partial r} + r \frac{p_d}{\rho_0} \frac{d\theta}{d\xi} \end{aligned} \quad (B.12)$$

Για συνθήκες μόνιμης ροής ($\partial f / \partial t = 0$), ο πρώτος όρος κάθε μιας από τις εξισώσεις (B.10) έως (B.12) μηδενίζεται. Εφαρμόζοντας τον κανόνα μεσοποίησης του Reynolds σε κάθε μέγεθος f ($f = \bar{f} + f'$) και λαμβάνοντας το χρονικό μέσο όρο, οι εξισώσεις (B.10) έως (B.12) γράφονται ως εξής:

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής ξ :

$$\frac{\partial(rh \bar{u} \bar{w})}{\partial r} + \frac{\partial(r \bar{w}^2)}{\partial \xi} + r \sin \varphi \bar{u} \bar{w} \frac{d\theta}{d\xi} = g'_0 r h \bar{c} \sin \theta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(r \bar{p}_d)}{\partial \xi} \quad (B.13)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής η

$$\frac{\partial(rh \bar{u}^2)}{\partial r} + \frac{\partial(r \bar{w} \bar{u})}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh \bar{p}_d)}{\partial r} \quad (B.14)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r\overline{h}\overline{u}^2\sin\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial(r\overline{w}\overline{u}\sin\varphi)}{\partial \xi} - r\overline{w}^2 \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = -g'_0 r \overline{h} \overline{c} \cos\theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(r\overline{h}\overline{p}_d\sin\varphi)}{\partial r} + r \frac{\overline{p}_d}{\rho_0} \frac{d\theta}{d\xi} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Όπου

$$\overline{uw} = \overline{u}\overline{w} - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \quad (\text{B.16})$$

$$\overline{w^2} = \overline{w}^2 + \overline{w'^2} \quad (\text{B.17})$$

$$\overline{u^2} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2} \quad (\text{B.18})$$

$$\tau_{r\xi} = -\overline{u'w'} \text{ η τυρβώδης διατμητική τάση στο επίπεδο } r\xi \quad (\text{B.19})$$

Εφεξής, προς χάριν ευκολίας, οι παύλες υπεράνω των μεταβλητών που υποδηλώνουν μέσα χρονικά μεγέθη παραλείπεται.

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους διατυπωμένο σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων $O_l(\varphi, r, \xi)$ είναι το εξής:

Εξίσωση Συνεχείας

$$\frac{\partial(rw)}{\partial \xi} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \quad (\text{B.20})$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής ξ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} + r \sin\varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = g'_0 r \overline{h} \overline{c} \sin\theta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh\tau_{r\xi})}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial (r \sin \varphi h u^2)}{\partial r} - r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = -g'_0 r h c \cos \theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (r \sin \varphi h p_d)}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Εξίσωση Διατήρησης Μάζας Ιχνηθέτη

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[r (wc + w'c') \right] + \frac{\partial (rhuc)}{\partial r} = - \frac{\partial (rhu'c')}{\partial r} + S_1 \quad (\text{B.23})$$

Όπου w οι μέσες τιμές των ταχυτήτων και w' οι διακυμάνσεις των κατά τη διεύθυνση ξ και u, u' τα αντίστοιχα μεγέθη των ταχυτήτων κατά τη διεύθυνση r , θ είναι η τοπική κλίση του άξονα ξ , c η μέση τιμή της συγκέντρωσης και ρ η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση. $w'^2, w'c', u'c'$ είναι οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w, u και c , αντίστοιχα, $\tau_{r\xi}$ είναι η μέση τυρβώδης διατμητική τάση και p_d η δυναμική πίεση. Ο μετρικός συντελεστής του καμπυλογράμμου συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων ορίζεται από τη σχέση $h = 1 + r \sin \varphi \frac{d\theta}{d\xi}$. Ο όρος πηγής των αποκολλούμενων μαζών που

ιαφεύγουν, περιγράφεται από την εξίσωση $S_1 = \frac{\partial (rhq_r)}{\partial r}$, με q_r το φορτίο των αποκολλούμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη διεύθυνση r .

Οι εξισώσεις (B.20) έως (B.23) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Στο } r = 0: \quad w = w_m, u = 0, c = c_m, \tau_{r\xi} = u'c' = q_r = 0, p_d = p_{dm} \quad (\text{B.24})$$

$$\text{Στο } r = B_w \quad w = c = \tau_{r\xi} = u'c' = 0, u = U_{B1}, p_d = p_{de}, q_r = q_B \quad (\text{B.25})$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$U_{B1} = -u_B - w_B \cos \theta \sin \varphi \quad (\text{B.26})$$

$$q_B = 0 \text{ στο } r = +B_w \text{ για } 0 \leq \varphi \leq \pi \quad (\text{B.27})$$

$$q_B = w_B c_B \cos \theta \text{ στο } r = -B_w \text{ για } \pi < \varphi < 2\pi \quad (\text{B.28})$$

Όπου w_B και c_B είναι η κατακόρυφη ταχύτητα και η συγκέντρωση των αποκολλούμενων μαζών, αντίστοιχα και u_B η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης στο πραγματικό όριο, B_w , της διατομής της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας.

Στη ZEF επικρατεί αυτοομοιότητα, όπως και στη δισδιάστατη φλέβα, με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w}{w_m} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_w^2}\right) \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_c^2}\right) \quad (\text{B.30})$$

Στην παρούσα διαδικασία η επιρροή της δυναμικής πίεσης p_d περιλαμβάνεται στο συντελεστή συνεισφοράς της τύρβης λ_M

Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται στην εγκάρσια επιφάνεια της φλέβας (Σχήμα 4.3). Η εξίσωση (B.20) ολοκληρώνεται κατά όρους στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned} \text{Όρος (α): } \int_A \frac{\partial(rw)}{\partial \xi} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{B_w} \frac{\partial(rw)}{\partial \xi} dr d\varphi = \frac{d}{d\xi} \int_A rwdA - \frac{d(2\pi)}{d\xi} \int_0^{B_w} (rw)_{2\pi} dr + \\ &+ \frac{d(0)}{d\xi} \int_0^{B_w} (rw)_0 dr - \frac{dB_w}{d\xi} \int_0^{B_w} (rw)_{B_w} d\varphi + \frac{d(0)}{d\xi} \int_0^{2\pi} (rw)_0 d\varphi = \frac{d}{d\xi} \int_A rwdA = \frac{d\mu}{d\xi} \\ \text{Όρος (β): } \int_A \frac{\partial(rhu)}{\partial r} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{B_w} \frac{\partial(rhu)}{\partial r} dr d\varphi = \oint_C (rhu)_{B_w} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} B_w h_{B_w} (-u_{B_w} - w_B \cos \theta \sin \varphi) d\varphi = \pi B_w \left(-2u_e - B_w w_B \cos \theta \frac{d\theta}{d\xi} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Συνολικά: } \frac{d\mu}{d\xi} + \pi B_w \left(-2u_e + B_w w_B \cos \theta \frac{d\theta}{d\xi} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\mu}{d\xi} - \pi B_w^2 w_B \cos \theta \frac{d\theta}{d\xi} = 2\pi B_w u_e}$$

Η εξίσωση (B.21) ολοκληρώνεται κατά όρους στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned} \text{Όρος (α): } \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \right] dA &= \frac{d}{d\xi} \int_A r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) dA - \\ &- \frac{d(2\pi)}{d\xi} \int_0^{B_w} r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{2\pi} dr + \frac{d(0)}{d\xi} \int_0^{B_w} r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{2\pi} dr - \\ &- \frac{dB_w}{d\xi} \int_0^{2\pi} r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{B_w} d\varphi + \frac{d(0)}{d\xi} \int_0^{2\pi} r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{B_w} d\varphi = \frac{dm}{d\xi} \end{aligned}$$

$$\text{Όρος (β): } \int_A \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{B_w} \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} dr d\varphi = \oint_C (rhuw)_{B_w} d\varphi = 0$$

$$\text{Όρος (γ): } \int_A r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} dA = 0$$

$$\text{Όρος (δ): } \int_A g'_0 r h c \sin \theta dA = \zeta \sin \theta$$

$$\text{Όρος (ε): } \int_A \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh\tau_{r\xi})}{\partial r} dA = 0$$

$$\text{Συνολικά, } \boxed{\frac{dm}{d\xi} = \zeta \sin \theta}$$

Η εξίσωση (B.22) ολοκληρώνεται κατά όρους στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος (α): } \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \right] dA \simeq 0$$

$$\text{Όρος (β): } \int_A \frac{\partial(r \sin \varphi h u^2)}{\partial r} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^B \frac{\partial(r \sin \varphi h u^2)}{\partial r} dr d\varphi = \oint_C (r \sin \varphi h u^2)_B d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} B_w \sin \varphi h_B (-u_B - w_B \cos \theta \sin \varphi)_{B_w}^2 d\varphi = \\
&= B_w \int_0^{2\pi} \frac{u_e^2}{\underbrace{h_B \tilde{h}_B}_{\cong 1}} \left(1 - B_w \sin \varphi \frac{d\theta}{d\xi} \right) \sin \varphi d\varphi + B_w \int_0^{2\pi} \left(1 + B_w \sin \varphi \frac{d\theta}{d\xi} \right) (w_B \cos \theta)^2 \sin^3 \varphi d\varphi + \\
&+ 2B_w \int_0^{2\pi} u_e w_B \cos \theta \sin^2 \varphi d\varphi = -\pi B_w^2 u_e^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{3}{4} \pi B_w^2 (w_B \cos \theta)^2 \frac{d\theta}{d\xi} + 2\pi B u_e w_B \cos \theta
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος } (\gamma): \int_A r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} dA = \oint_C r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} dA = m \frac{d\theta}{d\xi}$$

$$\text{Όρος } (\delta): \int_A g'_0 r h c \cos \theta dA = \zeta \cos \theta$$

$$\text{Όρος } (\epsilon): \int_A \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial (r \sin \varphi h p_d)}{\partial r} dA = \oint_C \left(r \sin \varphi h \frac{p_d}{\rho_0} \right)_B d\varphi \cong 0$$

$$\text{Συνολικά, } -\pi B_w^2 u_e^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{3}{4} \pi B_w^2 (w_B \cos \theta)^2 \frac{d\theta}{d\xi} + 2\pi B u_e w_B \cos \theta - m \frac{d\theta}{d\xi} = -\zeta \cos \theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\zeta + 2\pi B_w u_e w_B}{m + \pi B_w^2 \left(u_e^2 - \frac{3}{4} w_B^2 \cos^2 \theta \right)} \cos \theta}$$

Η εξίσωση (B.23) ολοκληρώνεται κατά όρους στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος } (\alpha): \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} [r (w c + w' c')] dA = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\beta}{g'_0} \right)$$

$$\text{Όρος } (\beta): \int_A \left[\frac{\partial (r h u c)}{\partial r} + \frac{\partial (r h u' c')}{\partial r} \right] dA = \oint_C (r h u c + r h u' c')_{B_w} d\varphi = 0$$

$$\text{Όρος } (\gamma): \int_A S_1 dA = -2B_w \left(1 - \frac{\pi}{4} B_w \frac{d\theta}{d\xi} \right) \mathcal{A} c_m w_B \cos \theta$$

$$\text{Συνολικά, } \boxed{\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\beta}{g'_0} \right) = 2B_w \left(1 - \frac{\pi}{4} B_w \frac{d\theta}{d\xi} \right) \mathcal{A} c_m w_B \cos \theta}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας συμπαράσυρσης: Ολοκληρώνεται η εξίσωση συνεχείας στο επίπεδο της φλέβας:

$$\frac{\partial(rw)}{\partial\xi} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\partial(rw)}{\partial\xi} dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\partial(rhu)}{\partial r} dr d\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^r r w dr d\varphi - \underbrace{\frac{dr}{d\xi}}_{=0} \int_0^r (rw)_r d\varphi + \int_0^{2\pi} (rhu) d\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \left\{ r w_m \exp \left[- \left(\frac{r}{b_w} \right)^2 \right] \right\} dr d\varphi + 2\pi r h u = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\xi} \left\{ \pi b_w^2 w_m \left[1 - \exp(-n^2) \right] \right\} + 2r(hu) = 0 \Rightarrow$$

$$2b_w K_w w_m \left[1 - \exp(-n^2) \right] + b_w^2 \frac{dw_m}{d\xi} \left[1 - \exp(-n^2) \right] - \frac{2}{b_w} K_w w_m n^2 \exp(-n^2) + r(hu) = 0 \Rightarrow$$

$$-hu = w_m K_w \left\{ \left(2 + \underbrace{\frac{\xi}{w_m} \frac{dw_m}{d\xi}}_{s_1} \right) \frac{\left[1 - \exp(-n^2) \right]}{2n} - n \exp(-n^2) \right\}$$

$$-hu = w_m K_w \left\{ (2 + s_1) \frac{\left[1 - \exp(-n^2) \right]}{2n} - n \exp(-n^2) \right\}$$

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Γ – ΚΕΚΛΙΜΕΝΗ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΑΝΩ- ΣΤΙΚΗ ΦΛΕΒΑ ΣΕ ΡΕΥΜΑ

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους διατυπωμένο σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων $O_l(\eta, \psi, \xi)$ είναι το εξής:

Εξίσωση Συνεχειας:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \quad (C.1)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής - ξ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = g'_0 h c \sin \omega + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial \psi} \quad (C.2)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής - ψ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} - \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = -g'_0 h c \cos \omega - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(hp_d)}{\partial \psi} \quad (C.3)$$

Εξίσωση Διατήρησης Μάζας Ιχνηθέτη:

$$\frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} + \frac{\partial(huc)}{\partial \psi} = -\frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} + S_0 \quad (C.4)$$

όπου w , u και w' , u' είναι οι μέσες τιμές και οι διακυμάνσεις συνιστώσες της ταχύτητας στη θέση (η, ψ, ξ) , των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και ψ , αντίστοιχα, ω είναι η τοπική κλίση του άξονα ξ ως προς την οριζοντία, c η μέση τιμή της συγκέντρωσης, ρ είναι η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση, w'^2 , $w'c'$, $u'c'$ είναι οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u και c , αντίστοιχα, $\tau_{\psi\xi}$ είναι η μέση τυρβώδης διατμητική τάση και p_d η δυναμική πίεση. Ο μετρικός συντελεστής του ορθογωνίου καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων ορίζεται από τη σχέση $h = 1 + \psi \frac{d\omega}{d\xi}$. Ο

όρος πηγής των αποκολλούμενων μαζών που διαφεύγουν περιγράφεται από την εξίσωση

$S_0 = \frac{\partial(hq_\psi)}{\partial\psi}$, με q_ψ το φορτίο των αποκολλούμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη ψ

διεύθυνση. Στη μελέτη της ανωστικής φλέβας σε κινούμενο αποδέκτη δεν λαμβάνονται υπόψη οι αποκολλούμενες μάζες, συνεπώς ο όρος πηγής S_0 μηδενίζεται.

Οι εξισώσεις (C.1) έως (C.4) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Στο } \psi = 0: \quad w = w_{md} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega, \quad u = 0, \quad c = c_m, \quad \tau_\zeta = u'c, \quad p_d = p_{dm}, \quad h = 1 \quad (\text{C.5})$$

$$\text{Στο } \psi = -B_w \quad w = u_a \cos \omega, \quad u = u_{-Bw} + u_a \sin \omega, \quad c = \tau_{\psi\zeta} = u'c' = 0, \quad p_d = p_{de},$$

$$h = h_{-Bw} = 1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \quad (\text{C.6})$$

$$\text{Στο } \psi = +B_w \quad w = u_a \cos \omega, \quad u = u_{+Bw} + u_a \sin \omega, \quad c = \tau_{\psi\zeta} = u'c' = 0, \quad p_d = p_{de},$$

$$h = h_{+Bw} = 1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \quad (\text{C.7})$$

Στη ZEF επικρατεί αυτοομοιότητα, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη. Στην περίπτωση του κινούμενου αποδέκτη γίνεται η παραδοχή ότι η αυτοομοιότητα διατηρείται και εντός της ZFE, με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w_{d\xi}}{w_{md}} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_w^2}\right) \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_c^2}\right) \quad (\text{C.9})$$

Στην παρούσα διαδικασία η επιρροή της δυναμικής πίεσης p_d χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bernoulli:

$$p_d = \frac{\rho_0}{2} \left\{ (u + u_a \sin \omega)^2 + [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega]^2 \right\} \quad (C.10)$$

Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται στην εγκάρσια επιφάνεια της φλέβας (Σχήμα 4.23). Η εξίσωση (C.1) ολοκληρώνεται κατά όρους στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned} \text{Όρος } (\alpha) \int_A \frac{\partial w}{\partial \xi} dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} w d\psi = \\ &= \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega] d\psi \right\} - \frac{d(+B_w)}{d\xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega]_{+B} + \\ &+ \frac{d(-B_w)}{d\xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega]_{-B_w} = \\ &= \frac{d}{d\xi} \left[\int_{-B_w}^{+B_w} w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) d\psi \right] + \frac{d}{d\xi} \left[\int_{-B_w}^{+B_w} u_a \cos \omega d\psi \right] - \frac{dB_w}{d\xi} (0 + u_a \cos \omega) - \\ &- \frac{dB_w}{d\xi} (0 + u_a \cos \omega) = \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} + 2 \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos \omega - 2B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} - 2 \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos \omega = \\ &= \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} - 2B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned}$$

Όρος (β)

$$\begin{aligned} \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} d\psi &= (hu)_{+B_w} - (hu)_{-B_w} = \\ (hu)_{+B_w} - (hu)_{-B_w} &= h_{+B_w} (-u_{+B_w} + u_a \sin \omega) - h_{-B_w} (+u_{-B_w} + u_a \sin \omega) = \\ &= -2u_e + u_a \sin \omega \left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} - 1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) = -2u_e + 2B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \end{aligned}$$

$$\text{Συνολικά: } \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} - 2B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} - 2u_e + 2B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2u_e}$$

Η εξίσωση (C.2) ολοκληρώνεται κατά όρους στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος } (\alpha) \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) d\psi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\xi} \left[\int_{-B_w}^{+B_w} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) d\psi \right] - \frac{dB_w}{d\xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{+B_w} + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{-B_w} = \\
&= \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} d\psi \right\} - \\
&- \frac{dB_w}{d\xi} \left(\left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{+B} - \\
&- \frac{dB_w}{d\xi} \left(\left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{-B} = \\
&= \frac{d\tilde{m}}{d\xi} + 2 \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} u_a \cos \omega - 2\tilde{\mu} u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} - 2B_w u_a^2 \sin(2\omega) \frac{d\omega}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Όρος (β)} \quad & \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(huw)}{\partial\psi} d\psi = (huw)_{+B_w} - (huw)_{-B_w} = \\
&= h_{+B_w} (-u_{+B_w} + u_a \sin \omega) u_a \cos \omega - h_{-B_w} (+u_{-B_w} + u_a \sin \omega) u_a \cos \omega = \\
&= -2 \left(u_e - B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \right) u_a \cos \omega
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος (γ)} \quad \int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} d\psi = 0$$

$$\text{Όρος (δ)} \quad \int_{-B_w}^{+B_w} g'_0 h c \sin \omega d\psi = \zeta \sin \omega$$

$$\text{Όρος (ε)} \quad \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial\psi} d\psi = 0$$

Συνολικά,

$$\begin{aligned}
&\frac{d\tilde{m}}{d\xi} + 2 \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} u_a \cos \omega - 2\tilde{\mu} u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} - 2B_w u_a^2 \sin(2\omega) \frac{d\omega}{d\xi} - 2 \left(u_e - B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \right) u_a \cos \omega = \\
&= \zeta \sin \omega \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{m}}{d\xi} = \zeta \sin \omega + 2u_a \cos \omega \left(u_e - \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} + \tilde{\mu} \tan \omega \frac{d\omega}{d\xi} + B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \right)}$$

Η εξίσωση (C.3) ολοκληρώνεται κατά όρους στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned}
\text{Όρος } (\alpha) \int_{-B}^{+B} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) d\psi &= \\
= \frac{d}{d\xi} \left[\int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) d\psi \right] - \frac{dB_w}{d\xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right)_{+B_w} + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right)_{-B_w} &= \\
= 0 - \frac{dB_w}{d\xi} \left[\frac{h_{+B_w} (-u_{+B_w} + u_a \sin \omega)}{h_{+B_w}} + \frac{h_{-B_w} (u_{-B_w} + u_a \sin \omega)}{h_{-B_w}} \right] u_a \cos \omega &= \\
= -\frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos \omega \left(\frac{-u_e}{h_{+B_w}} + \frac{-u_e}{h_{-B_w}} + 2u_a \sin \omega \right) = -\frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos \omega \left(2u_a \sin \omega + B_w u_e \frac{d\omega}{d\xi} \right) &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Όρος } (\beta) \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} d\psi &= (hu^2)_{+B_w} - (hu^2)_{-B_w} = \\
-2B_w u_e^2 \frac{d\omega}{d\xi} + 2B_w u_a^2 \sin^2 \omega \frac{d\omega}{d\xi} - 4u_e u_a \sin \omega &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Όρος } (\gamma) \int_{-B_w}^{+B_w} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} d\psi &= \\
= \int_{-B_w}^{+B_w} \left\{ \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right\} \frac{d\omega}{d\xi} d\psi &= \\
= \frac{d\omega}{d\xi} \left(\tilde{m} + 2B_w u_a^2 \cos^2 \omega + 2\tilde{\mu} u_a \cos \omega \right) &
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος } (\delta) \int_{-B_w}^{+B_w} g'_0 h c c \cos \omega d\psi = \zeta \cos \omega$$

$$\begin{aligned}
\text{Όρος } (\epsilon) \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(hp_d)}{\partial \psi} d\psi &= (hp_d)_{+B_w} - (hp_d)_{-B_w} = \\
= \frac{1}{2} \left\{ h_{+B_w} \left[\left(-u_{+B_w} + u_a \sin \omega \right)^2 + \left(u_a \cos \omega \right)^2 \right] - h_{-B_w} \left[\left(u_{-B_w} + u_a \sin \omega \right)^2 + \left(u_a \cos \omega \right)^2 \right] \right\} &= \\
= -B_w u_e^2 \frac{d\omega}{d\xi} + B_w u_a^2 \frac{d\omega}{d\xi} - 2u_e u_a \sin \omega &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Συνολικά, } & -\frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos \omega \left(2u_a \sin \omega + B_w u_e \frac{d\omega}{d\xi} \right) - 2B_w u_e^2 \frac{d\omega}{d\xi} + 2B_w u_a^2 \sin^2 \omega \frac{d\omega}{d\xi} - \\ & - 4u_e u_a \sin \omega - \frac{d\omega}{d\xi} \left(\tilde{m} + 2B_w u_a^2 \cos^2 \omega + 2\tilde{\mu} u_a \cos \omega \right) = -\zeta \cos \omega + B_w u_e^2 \frac{d\omega}{d\xi} - \\ & - B_w u_a^2 \frac{d\omega}{d\xi} + 2u_e u_a \sin \omega \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \omega - 6u_e u_a \sin \omega - \frac{dB_w}{d\xi} u_a^2 \sin(2\omega)}{\tilde{m} + 2u_a \cos \omega \left(\tilde{\mu} + B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_e \right) + B_w (4u_a^2 \cos^2 \omega + 3u_e^2 - 3u_a^2)}$$

Η εξίσωση (C.4) ολοκληρώνεται κατά όρους στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned} \text{Όρος (α)} \quad & \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} d\psi = \\ & \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} d\psi = \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} (wc + w'c') d\psi \right\} - \frac{dB_w}{d\xi} (wc + w'c')_{+B_w} - \frac{dB_w}{d\xi} (wc + w'c')_{-B_w} = \\ & = \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} [cw_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + cu_a \cos \omega + w'c'] d\psi \right\} = \\ & = \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} [cw_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + w'c'] d\psi + u_a \cos \omega \int_{-B_w}^{+B_w} c d\psi \right\} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos \omega \right) \end{aligned}$$

$$\text{Όρος (β)} \quad \int_{-B_w}^{+B_w} \left[\frac{\partial(huc)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} \right] d\psi = 0$$

$$\text{Συνολικά, } \boxed{\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos \omega \right) = 0}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας συμπαράσυρσης: Ολοκληρώνεται η εξίσωση συνεχείας στο επίπεδο της φλέβας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega] + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \\ \int_0^\psi \frac{\partial}{\partial \xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega] d\psi + \int_0^\psi \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} d\psi = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int_0^\psi \frac{\partial}{\partial \xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)] d\psi + \int_0^\psi \frac{\partial}{\partial \xi} (u_a \cos \omega) d\psi + (hu)_\psi - (hu)_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^\psi [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)] d\psi - \frac{d\psi}{d\xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)]_\psi + \frac{d(0)}{d\xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)]_0 -$$

$$- \int_0^\psi u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} d\psi + hu = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\xi} \int_0^\psi [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)] d\psi - \psi u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + hu = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \int_0^\psi w_{md} \exp \left[- \left(\frac{\psi}{b_w} \right)^2 \right] \cos(\theta - \omega) d\psi \right\} - \psi u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + hu = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} b_w w_{md} \operatorname{erf} \left(\frac{\psi}{b_w} \right) \cos(\theta - \omega) \right] - \psi u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + hu = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{db_w}{d\xi} w_{md} \operatorname{erf}(n) \cos(\theta - \omega) + b_w \frac{dw_{md}}{d\xi} \operatorname{erf}(n) \cos(\theta - \omega) + \right.$$

$$\left. + b_w w_{md} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2) \frac{dn}{d\xi} \cos(\theta - \omega) - b_w w_{md} \operatorname{erf}(n) \sin(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] -$$

$$- \frac{\psi}{b_w} b_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + hu = 0 \Rightarrow$$

$$-hu = \frac{w_{md} b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \underbrace{\frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}}_{s_b} \operatorname{erf}(n) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underbrace{\frac{\xi}{w_{md}} \frac{dw_{md}}{d\xi}}_{s_0} \operatorname{erf}(n) - n \underbrace{\frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}}_{s_b} \exp(-n^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \operatorname{erf}(n) \sin(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] - nb_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \Rightarrow$$

$$-hu = \frac{w_m b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n) \left[s_b + s_0 - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] - ns_b \exp(-n^2) \right\} -$$

$$- nb_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi}$$

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Δ – ΚΕΚΛΙΜΕΝΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΑΝΩΣΤΙΚΗ ΦΛΕΒΑ ΣΕ ΡΕΥΜΑ

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους διατυπωμένο σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων $O_l(\varphi, r, \xi)$ είναι το εξής:

Εξίσωση Συνεχειας:

$$\frac{\partial(rw)}{\partial \xi} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \quad (D.1)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής -ξ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} + r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = g'_0 rhc \sin \theta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh\tau_{r\xi})}{\partial r} \end{aligned} \quad (D.2)$$

Εξίσωση Διατήρησης Ορμής -ψ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \right] + \frac{\partial(r \sin \varphi hu^2)}{\partial r} - r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\theta}{d\xi} = \\ = -g'_0 rhc \cos \theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(r \sin \varphi hp_d)}{\partial r} \end{aligned} \quad (D.3)$$

Εξίσωση Διατήρησης Μάζας Ιχνηθέτη:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[r(wc + w'c') \right] + \frac{\partial(rhuc)}{\partial r} = - \frac{\partial(rhu'c')}{\partial \psi} \quad (D.4)$$

όπου w και u οι μέσες τιμές των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και r , αντίστοιχα, w' και u' οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και r , αντίστοιχα, ω είναι η τοπική κλίση του άξονα ξ , c η μέση τιμή της συγκέντρωσης, ρ η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση, w'^2 , $w'c'$, $u'c'$ οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u

και c , αντίστοιχα, $\tau_{r\xi}$ είναι η μέση τυρβώδης διατμητική τάση και p_d η δυναμική πίεση. Ο μετρικός συντελεστής του καμπυλογράμμου συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων ορίζεται από τη σχέση $h = 1 + r \sin \varphi \frac{d\omega}{d\xi}$. Στη μελέτη της ανωστικής φλέβας σε κινούμενο

αποδέκτη δε λαμβάνονται υπόψη οι μάζες οι οποίες αποκολλώνται.

Οι εξισώσεις (D.1) έως (D.4) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Στο } r = 0: w = w_{md} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega, u = 0, c = c_m, \tau_{r\xi} = u'c, p_d = p_{dm}, h = 1 \quad (\text{D.5})$$

$$\text{Στο } r = B_w \quad w = u_a \cos \omega, u = u_{Bw} + u_a \sin \omega, c = \tau_{r\xi} = u'c' = 0, p_d = p_{de},$$

$$h = h_{Bw} = 1 - B_w \sin \varphi \frac{d\omega}{d\xi} \quad (\text{D.6})$$

Στη ZEF επικρατεί αυτοομοιότητα, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη. Στην περίπτωση του κινούμενου αποδέκτη γίνεται η παραδοχή ότι η αυτοομοιότητα διατηρείται και εντός της ZFE, με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w_d}{w_{md}} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_w^2}\right) \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{r^2}{b_c^2}\right) \quad (\text{D.8})$$

Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται στην εγκάρσια επιφάνεια της φλέβας (Σχήμα 4.24).

Η εξίσωση (D.1) ολοκληρώνεται κατά όρους:

$$\begin{aligned} \text{Όρος } (\alpha) \int_A \frac{\partial(rw)}{\partial \xi} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{B_w} \frac{\partial(rw)}{\partial \xi} dr d\varphi = \\ &= \frac{d}{d\xi} \int_A r w dA - \frac{d(2\pi)}{d\xi} \int_0^{B_w} (rw)_{2\pi} dr + \frac{d(0)}{d\xi} \int_0^{B_w} (rw)_0 dr - \frac{dB_w}{d\xi} \int_0^{B_w} (rw)_{B_w} d\varphi + \frac{d(0)}{d\xi} \int_0^{2\pi} (rw)_0 d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{d\xi} \int_A r \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right] dA - \frac{dB_w}{d\xi} \int_0^{2\pi} r \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]_{B_w} d\varphi =$$

$$= \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} - \pi B_w^2 u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi}$$

$$\text{Όρος (β)} \int_A \frac{\partial(rhu)}{\partial r} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{B_w} \frac{\partial(rhu)}{\partial r} dr d\varphi = \oint_C (rhu)_{B_w} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} B_w h_{B_w} \left(-u_{B_w} + u_a \sin \omega \sin \varphi \right) d\varphi = \pi B_w \left(-2u_e + B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \right)$$

$$\text{Συνολικά: } \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} - \pi B_w^2 u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + \pi B_w \left(-2u_e + B_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2u_e}$$

Η εξίσωση (D.2) ολοκληρώνεται κατά όρους:

$$\text{Όρος (α)} \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \right] dA =$$

$$= \frac{d}{d\xi} \int_A r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) dA - \frac{d(2\pi)}{d\xi} \int_0^{B_w} r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{2\pi} dr +$$

$$+ \frac{d(0)}{d\xi} \int_0^{B_w} r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{2\pi} dr - \frac{dB_w}{d\xi} \int_0^{2\pi} r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{B_w} d\varphi +$$

$$+ \frac{d(0)}{d\xi} \int_0^{2\pi} r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{B_w} d\varphi =$$

$$= \frac{d}{d\xi} \int_A r \left\{ \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right\} dA - \frac{dB_w}{d\xi} \int_0^{2\pi} B_w (0 + u_a \cos \omega)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{d}{d\xi} \int_A r \left\{ \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right\} dA + \frac{d}{d\xi} \int_A r (u_a \cos \omega)^2 dA +$$

$$+ \frac{d}{d\xi} \int_A 2rw_{d\xi} u_a \cos(\theta - \omega) \cos \omega dA - 2\pi B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_a^2 \cos^2 \omega =$$

$$= \frac{d\tilde{m}}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (ru_a^2 \cos^2 \omega) + \frac{d}{d\xi} ([2\tilde{\mu} u_a \cos \omega]) - 2\pi B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_a^2 \cos^2 \omega =$$

$$= \frac{d\tilde{m}}{d\xi} - 2\tilde{\mu} u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + 2 \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} u_a \cos \omega - 2\pi B_w^2 u_a^2 \sin \omega \cos \omega \frac{d\omega}{d\xi}$$

$$\text{Όρος (β)} \int_A \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{B_w} \frac{\partial(rhuw)}{\partial r} dr d\varphi = \oint_C (rhuw)_{B_w} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} B_w h_{B_w} (-u_B + u_a \sin \omega \sin \varphi) \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]_{B_w} d\varphi =$$

$$= -2\pi B_w u_e u_a \cos \omega + \pi B_w^2 u_a^2 \sin \omega \cos \omega \frac{d\omega}{d\xi}$$

$$\text{Όρος (γ)} \int_A r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} dA = 0$$

$$\text{Όρος (δ)} \int_A g'_0 rhc \sin \omega dA = \zeta \sin \omega$$

$$\text{Όρος (ε)} \int_A \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(rh\tau_{r\xi})}{\partial r} dA = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Συνολικά,} \quad & \frac{d\tilde{m}}{d\xi} - 2\tilde{\mu} u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + 2 \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} u_a \cos \omega - 2\pi B_w^2 u_a^2 \sin \omega \cos \omega \frac{d\omega}{d\xi} - 2\pi B_w u_e u_a \cos \omega + \\ & + \pi B_w^2 u_a^2 \sin \omega \cos \omega \frac{d\omega}{d\xi} = \zeta \sin \omega \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{m}}{d\xi} = \zeta \sin \omega + 2 \left\{ \pi B_w u_e - \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} + \left[\tilde{\mu} \tan \omega + \frac{\pi}{2} B^2 u_a \sin \omega \right] \frac{d\omega}{d\xi} \right\} u_a \cos \omega}$$

Η εξίσωση (D.3) ολοκληρώνεται κατά όρους:

$$\text{Όρος (α)} \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) \right] dA =$$

$$= \frac{d}{d\xi} \underbrace{\int_A r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right) dA}_{=0} - \frac{dB_w}{d\xi} \int_0^{2\pi} r \sin \varphi \left(uw - \frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right)_{B_w} d\varphi =$$

$$= -\frac{dB_w}{d\xi} \int_0^{2\pi} B_w \sin \varphi \left\{ [-u_B + u_a \sin \omega \sin \varphi] \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]_{B_w} + \left(\frac{\tau_{r\xi}}{\rho_0} \right)_{B_w} \right\} d\varphi =$$

$$= -\pi B_w^2 \frac{dB_w}{d\xi} u_e u_a \cos \omega \frac{d\omega}{d\xi} - \pi B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_a^2 \cos \omega \sin \omega$$

$$\begin{aligned}
 \text{Όπος } (\beta) \int_A \frac{\partial(r \sin \phi h u^2)}{\partial r} dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^B \frac{\partial(r \sin \phi h u^2)}{\partial r} dr d\phi = \oint_C (r \sin \phi h u^2)_{B_w} d\phi = \\
 &= \int_0^{2\pi} B_w \sin \phi h_B (-u_B + u_a \sin \omega \sin \phi)_{B_w}^2 d\phi = \\
 &= B_w \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{u_e^2}{h_B \tilde{h}_B}}_{\cong 1} \left(1 - B_w \sin \phi \frac{d\omega}{d\xi} \right) \sin \phi d\phi + B_w \int_0^{2\pi} \left(1 + B_w \sin \phi \frac{d\omega}{d\xi} \right) (u_a \sin \omega)^2 \sin^3 \phi d\phi - \\
 &- 2B_w \int_0^{2\pi} u_e u_a \sin \omega \sin^2 \phi d\phi = \\
 &= -\pi B_w^2 u_e^2 \frac{d\omega}{d\xi} + \frac{3}{4} \pi B_w^2 (u_a \sin \omega)^2 \frac{d\omega}{d\xi} - 2\pi B_w u_e u_a \sin \omega
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Όπος } (\gamma) \int_A r \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} dA &= \\
 &= \int_A r \left\{ \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right\} \frac{d\omega}{d\xi} dA = \\
 &= \frac{d\omega}{d\xi} \int_A r \left\{ \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right\} dA + \frac{d\omega}{d\xi} \int_A r (u_a \cos \omega)^2 dA + \\
 &+ \frac{d\omega}{d\xi} \int_A 2r w_{d\xi} u_a \cos(\theta - \omega) \cos \omega dA = \left(\tilde{m} + \pi B_w^2 u_a^2 \cos^2 \omega + 2\tilde{\mu} u_a \cos \omega \right) \frac{d\omega}{d\xi}
 \end{aligned}$$

$$\text{Όπος } (\delta) \int_A g'_0 r h c c \cos \omega dA = \zeta \cos \omega$$

$$\begin{aligned}
 \text{Όπος } (\epsilon) \int_A \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(r \sin \phi h p_d)}{\partial r} dA &= \oint_C \left(r \sin \phi h \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{B_w} d\phi = \int_0^{2\pi} B_w \sin \phi h_B \left(\frac{p_d}{\rho_0} \right)_{B_w} d\phi = \\
 &= \int_0^{2\pi} B_w \sin \phi \left(1 + B_w \sin \phi \frac{d\theta}{d\xi} \right) \frac{1}{2} \left\{ (-u_{B_w} + u_a \sin \omega)^2 + \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega \right]_{B_w}^2 \right\} d\phi = \\
 &= -\frac{1}{2} \pi B_w^2 u_e^2 \frac{d\omega}{d\xi} - \pi B_w u_e u_a \sin \omega + \frac{3}{8} \pi B_w^2 (u_a \sin \omega)^2 + \frac{1}{2} \pi B_w^2 (u_a \cos \omega)^2 \frac{d\omega}{d\xi}
 \end{aligned}$$

Συνολικά,

$$\begin{aligned}
 & -\pi B_w^2 \frac{dB_w}{d\xi} u_e u_a \cos \omega \frac{d\omega}{d\xi} - \pi B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_a^2 \cos \omega \sin \omega - \pi B_w^2 u_e^2 \frac{d\omega}{d\xi} + \frac{3}{4} \pi B_w^2 (u_a \sin \omega)^2 \frac{d\omega}{d\xi} - \\
 & -2\pi B_w u_e u_a \sin \omega - \left(\tilde{m} + \pi B_w^2 u_a^2 \cos^2 \omega + 2\tilde{\mu} u_a \cos \omega \right) \frac{d\omega}{d\xi} = -\zeta \cos \omega + \frac{1}{2} \pi B_w^2 u_e^2 \frac{d\omega}{d\xi} + \\
 & + \pi B_w u_e u_a \sin \omega - \frac{3}{8} \pi B_w^2 (u_a \sin \omega)^2 - \frac{1}{2} \pi B_w^2 (u_a \cos \omega)^2 \frac{d\omega}{d\xi} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \omega - \pi B_w \left(3u_e + \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos \omega \right) u_a \sin \omega}{\tilde{m} + \left(2\tilde{\mu} + \pi B_w^2 \frac{dB_w}{d\xi} u_e \right) u_a \cos \omega + \frac{1}{2} \pi B_w^2 \left[3u_e^2 + u_a^2 \cos^2 \omega - \frac{9}{4} (u_a \sin \omega)^2 \right]}}$$

Η εξίσωση (D.4) ολοκληρώνεται κατά όρους:

$$\begin{aligned}
 \text{Όρος (α): } \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} [r(wc + w'c')] dA &= \frac{d}{d\xi} \int_A r(wc + w'c') dA = \\
 &= \frac{d}{d\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^B r [cw_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + w'c'] dr d\varphi + \frac{d}{d\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^B r cu_a \cos \omega dr d\varphi = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos \omega \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Όρος (β): } \int_A \left[\frac{\partial(rhuc)}{\partial r} + \frac{\partial(rhu'c')}{\partial \psi} \right] dA = 0$$

$$\text{Συνολικά: } \boxed{\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos \omega \right) = 0}$$

Υπολογισμός της ταχύτητας συμπαράσυρσης: Ολοκληρώνεται η εξίσωση συνεχείας στο επίπεδο της φλέβας:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(rw)}{\partial \xi} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ r [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos \omega] \right\} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \\
 \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\partial}{\partial \xi} [rw_{d\xi} \cos(\theta - \omega)] dr d\varphi &+ \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\partial}{\partial \xi} (ru_a \cos \omega) dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\partial(rhu)}{\partial r} dr d\varphi = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^r [rw_{d\xi} \cos(\theta - \omega)] dr d\varphi - \underbrace{\frac{dr}{d\xi}}_{=0} \int_0^r [rw_{d\xi} \cos(\theta - \omega)]_r d\varphi + \frac{d}{d\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^r ru_a \cos \omega dr d\varphi -$$

$$- \underbrace{\frac{dr}{d\xi}}_{=0} \int_0^{2\pi} (ru_a \cos \omega)_r d\varphi + \int_0^{2\pi} (rhu) d\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \left\{ rw_{md} \exp \left[- \left(\frac{r}{b_w} \right)^2 \right] \cos(\theta - \omega) \right\} dr d\varphi + \frac{d}{d\xi} (\pi r^2 u_a \cos \omega) + 2\pi rhu = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \pi b_w^2 w_{md} [1 - \exp(-n^2)] \cos(\theta - \omega) \right\} + 2r \underbrace{\frac{dr}{d\xi}}_{=0} u_a \cos \omega - r^2 u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + 2r(hu) = 0 \Rightarrow$$

$$2b_w \frac{db_w}{d\xi} w_{md} [1 - \exp(-n^2)] \cos(\theta - \omega) + b_w^2 \frac{dw_m}{d\xi} [1 - \exp(-n^2)] \cos(\theta - \omega) -$$

$$- \frac{2}{b_w} \frac{db_w}{d\xi} w_{md} n^2 \exp(-n^2) \cos(\theta - \omega) - b_w^2 w_{md} [1 - \exp(-n^2)] \sin(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} -$$

$$- r^2 u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} + r(hu) = 0 \Rightarrow$$

$$-hu = \frac{1}{r} \frac{1 - \exp(-n^2)}{2} \frac{b_w^2 w_{md}}{\xi} \cos(\theta - \omega) \left[2 \underbrace{\frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}}_{s_b} + \underbrace{\frac{\xi}{w_{md}} \frac{dw_m}{d\xi}}_{s_0} - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] -$$

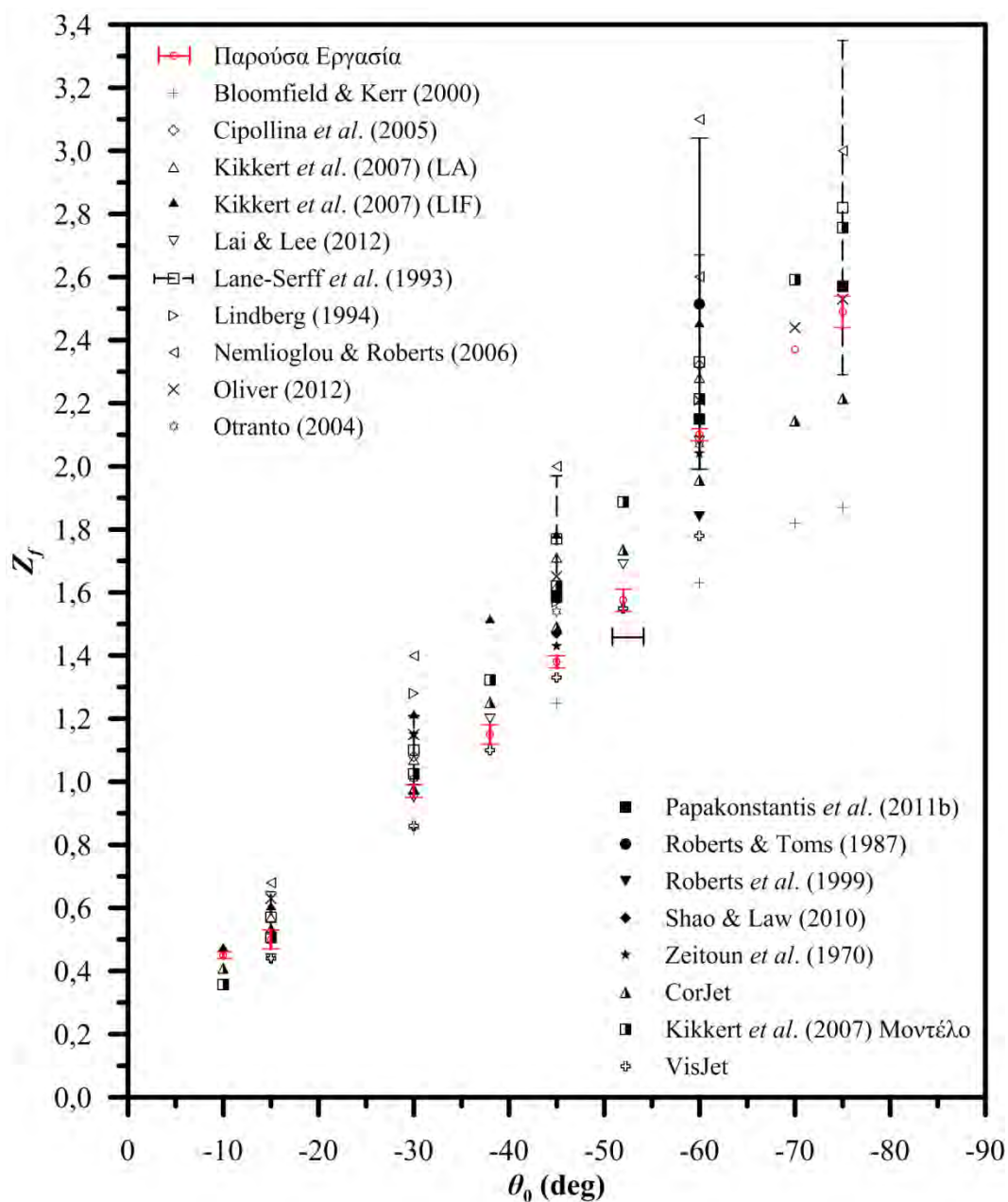
$$- \frac{1}{r} \frac{b_w^2 w_{md}}{\xi} \underbrace{\frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}}_{s_b} n^2 \exp(-n^2) \cos(\theta - \omega) - \frac{1}{2} \frac{r}{b_w} b_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi} \Rightarrow$$

$$-hu = \frac{b_w w_{md}}{\xi} \cos(\theta - \omega) \left\{ \frac{1 - \exp(-n^2)}{2} \left[2s_b + s_0 - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] - ns_b \exp(-n^2) \right\} -$$

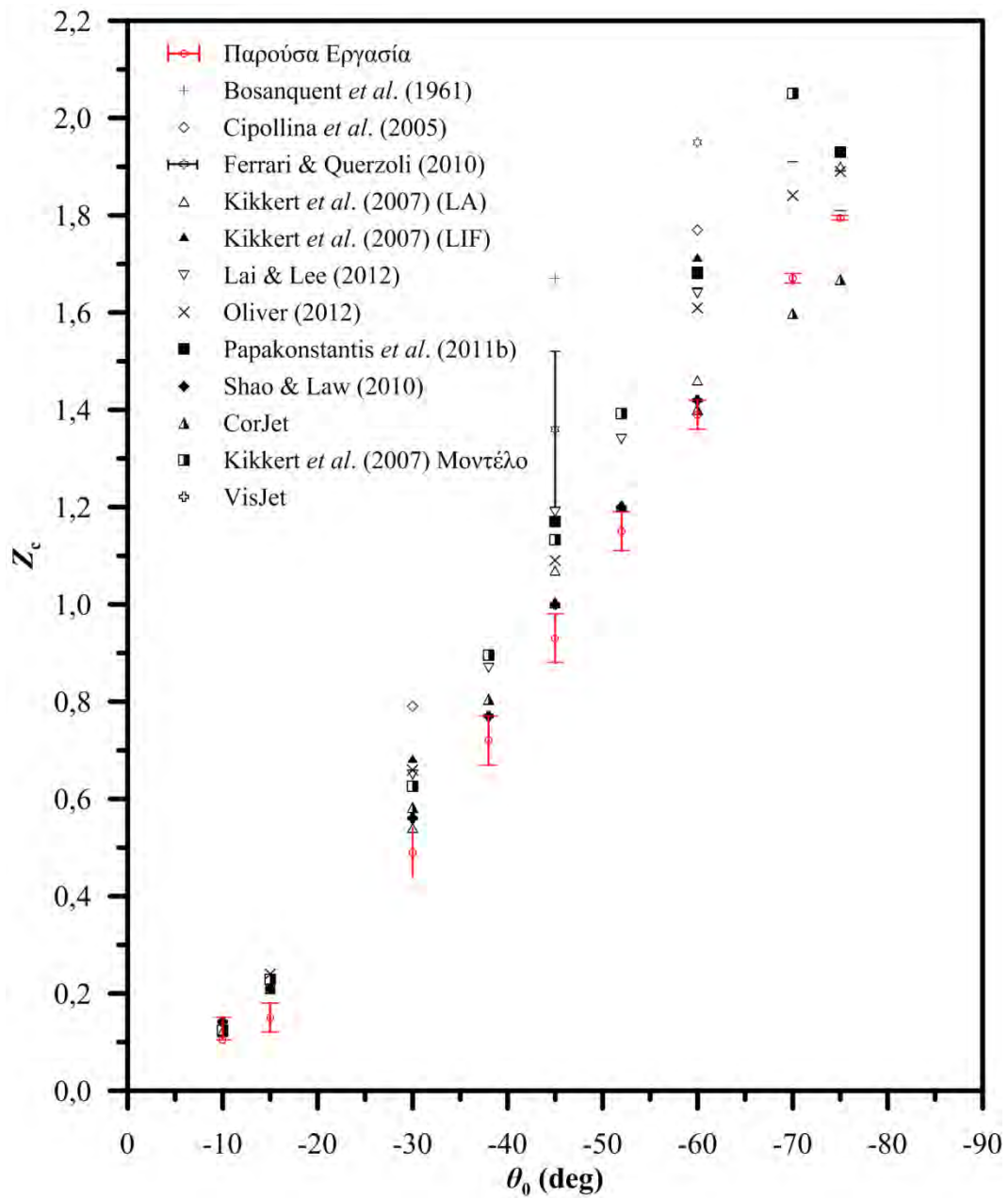
$$- \frac{1}{2} nb_w u_a \sin \omega \frac{d\omega}{d\xi}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε - ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ 4.4 ΕΩΣ 4.9

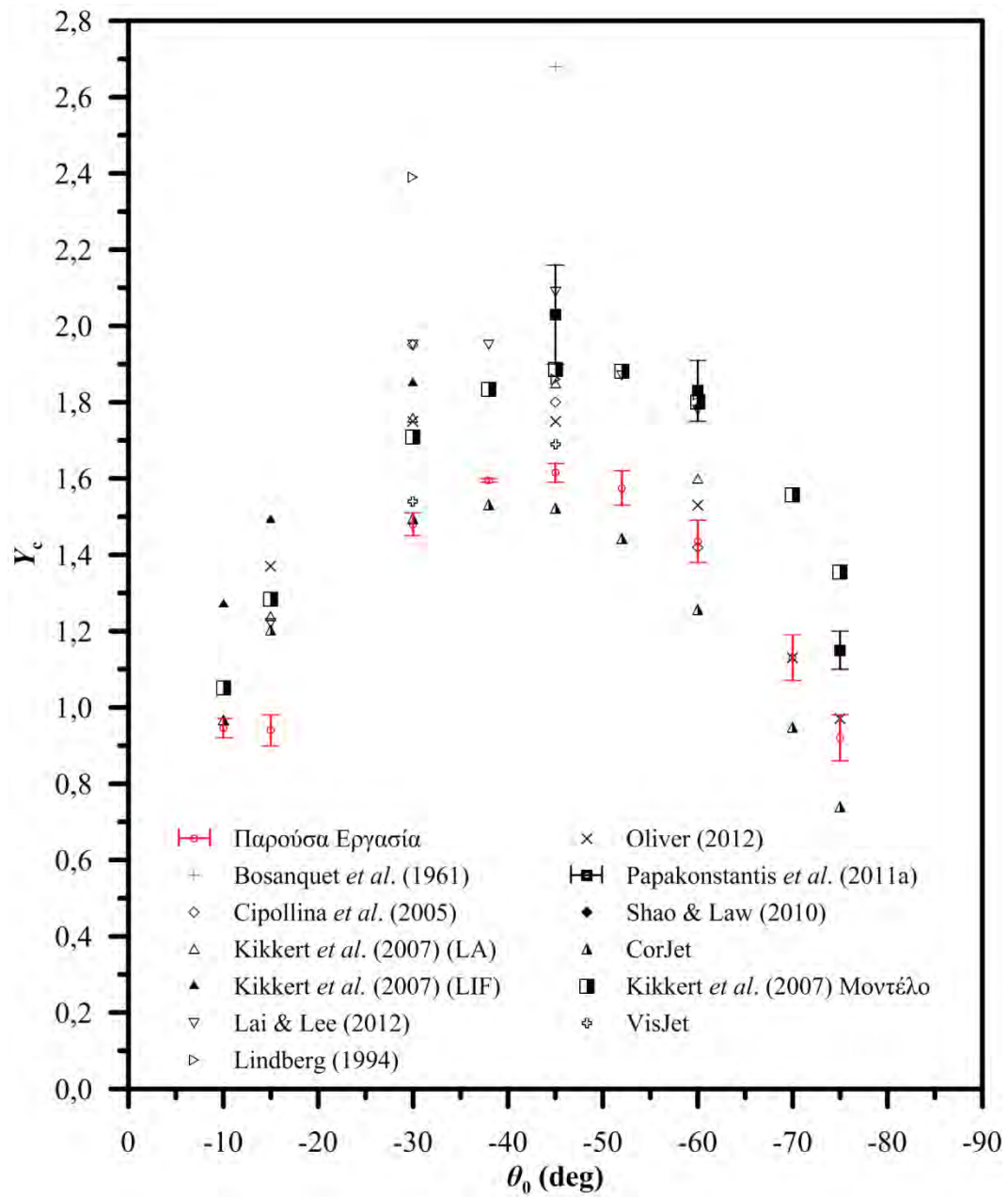
Στο Παράρτημα Ε, παρουσιάζονται υπό μορφή διαγραμμάτων τα στοιχεία των Πινάκων 4.4 έως 4.9.



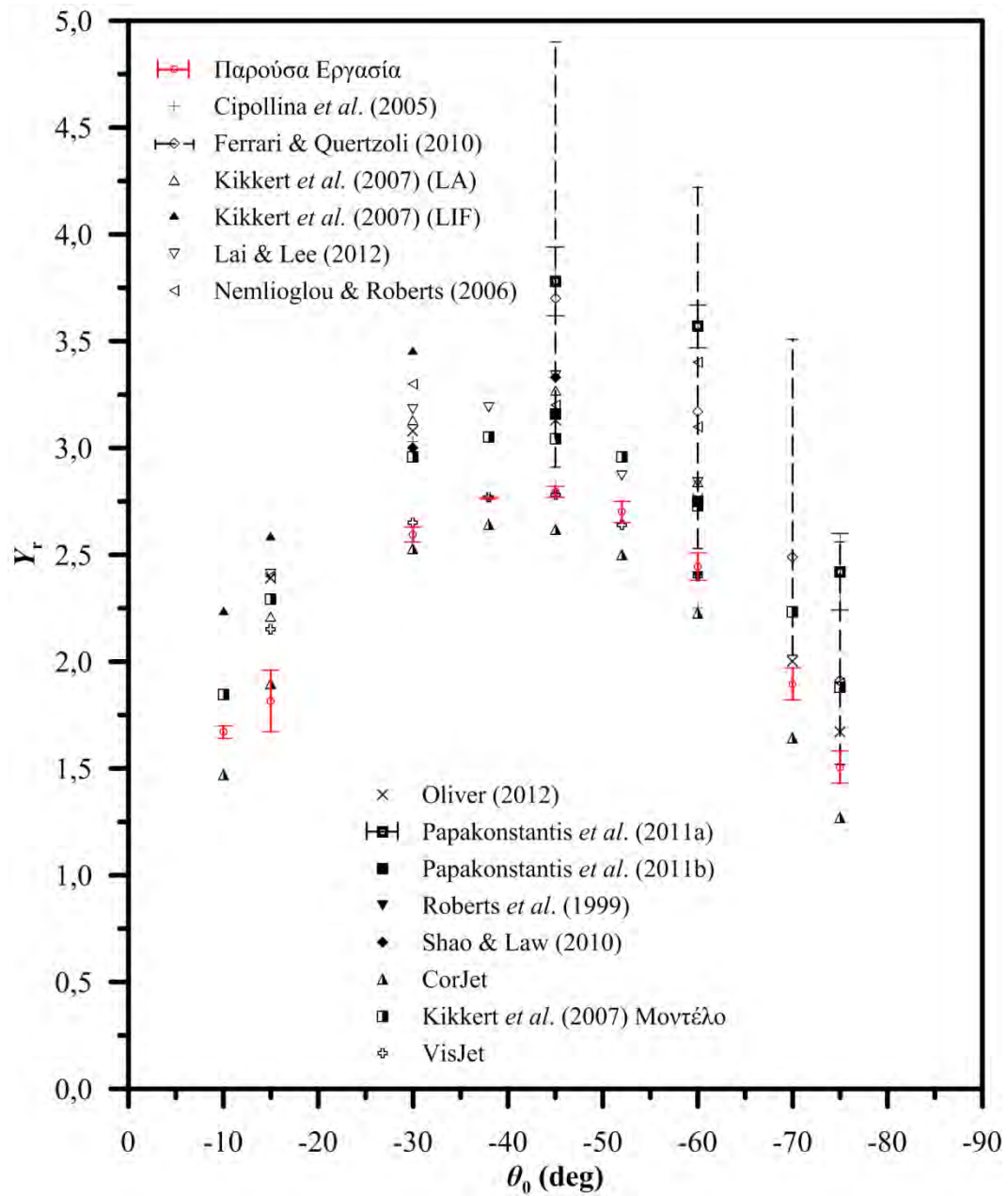
Σχήμα Ε.1 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Μέγιστο Τερματικό Ύψος, Z_f .



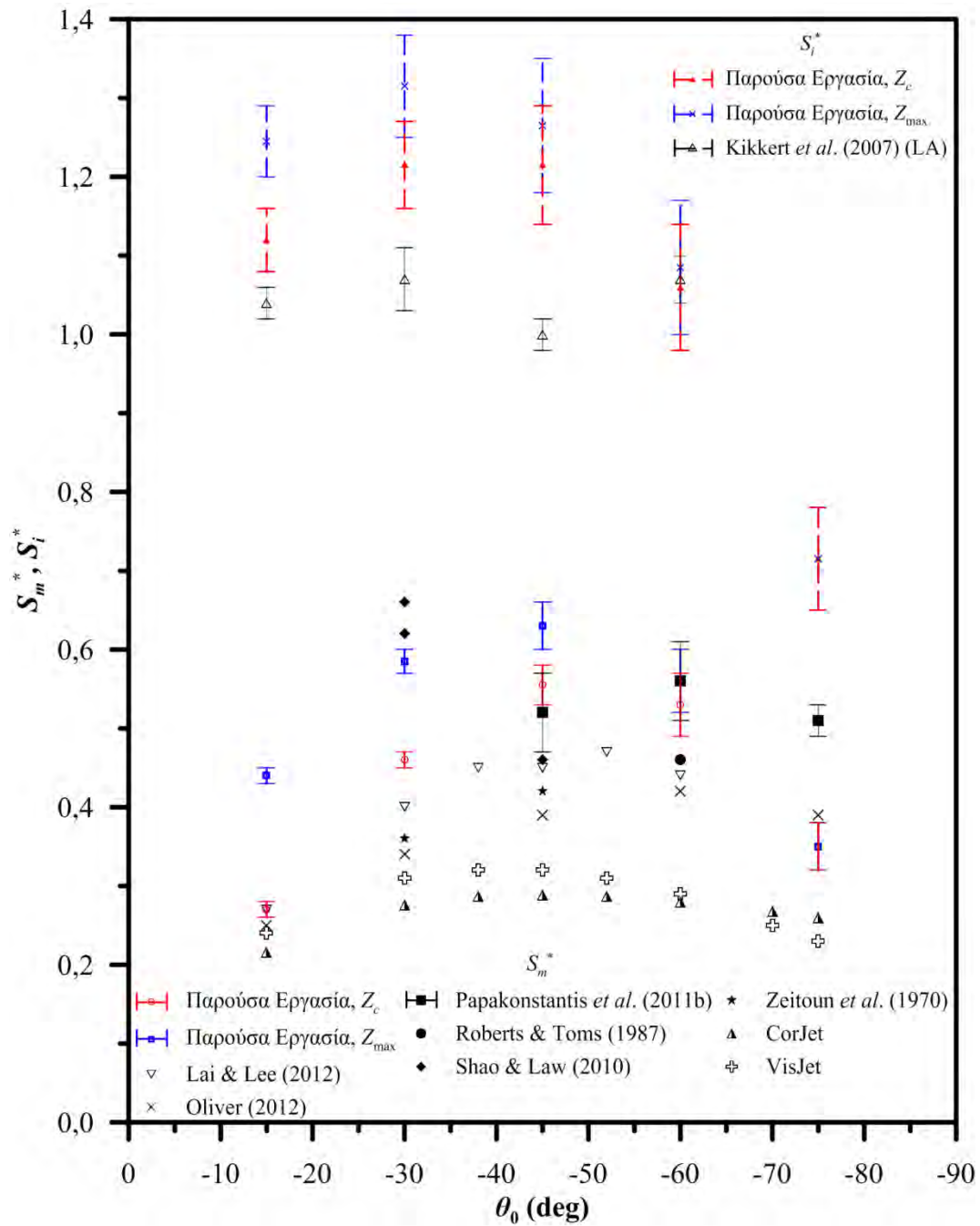
Σχήμα Ε.2 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Τερματικό Ύψος Άξονα, Z_c .



Σχήμα Ε.3 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για το Οριζόντιο Μήκος Y_c στο, Z_c .



Σχήμα Ε.4 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για την Οριζόντια Απόσταση Y_r .



Σχήμα Ε.5 Σύγκριση παρούσας εργασίας με πειραματικά δεδομένα για την Αξονική Αραίωση (S_m^*) και Ολοκληρωμένη Αραίωση (S_i^*) στο Τερματικό Ύψος.

ΠΑΡΑΤΗΜΑ ΣΤ- ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΩΝ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ ΑΠΟ ΔΙΑΧΥΤΗ ΤΥΠΟΥ ΡΟΖΕΤΑΣ

Οι οριακές τιμές των συντελεστών σχήματος των ολοκληρωμάτων I_{2j} , I_{3j} , I_j ($j=1, 2, 3, 4, 5$) και I είναι οι ακόλουθες:

Για $N \geq 2$ και $z/t \rightarrow 0$:

$$I_{2j} \rightarrow 2,$$

$$I_{3j} \rightarrow 0, \text{ καθώς } \omega_{0j} \rightarrow \infty \text{ και}$$

$$I_j \rightarrow 2$$

$$I \rightarrow 1$$

Για πεπερασμένο αριθμό φλεβών, $N \geq 2$ και $z/t \rightarrow \infty$:

$$I_{2j} \rightarrow 0,$$

$$I_{3j} \rightarrow 2/N, \text{ καθώς } \omega_{0j} \rightarrow 0 \text{ και } \theta_{0j} \rightarrow \pi/N, \text{ και}$$

$$I_j \rightarrow 2/N$$

$$I \rightarrow N^{1/2}$$

Για $N \geq \infty$ και $z/t \rightarrow \infty$:

$$I_{2j}(z/t) \rightarrow \frac{4}{\sqrt{\pi} K_j},$$

$$I_{3j} \rightarrow 0, \text{ καθώς } \omega_{0j} \rightarrow \infty \text{ και}$$

$$I_j(z/t) \rightarrow \frac{4}{\sqrt{\pi} K_j}$$

$$I(z/t)^{1/2} \rightarrow \frac{K_4}{K_3} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi} K_j} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{F_N \left[\left(\frac{z}{t} \right)^2 \right]}{F_1 \left[\left(\frac{z}{t} \right)^2 \right]} \rightarrow \frac{\int 2 \left[I \left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{1}{2}} d \left(\frac{z}{t} \right)}{\left[I \left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left(\frac{z}{t} \right)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{4}{3}$$

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Z - ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΚΕΚΛΙΜΕΝΩΝ ΔΙΣΔΙ- ΑΣΤΑΤΩΝ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ

Σύμφωνα με τη θεωρία της δυναμικής αλληλεπίδρασης, η αλληλεπίδραση κάθε φλέβας από μια ομάδα αλληλεπιδρουνσών ανωστικών φλεβών αντιμετωπίζεται ως εάν ήταν μια μοναχική τυρβώδης ανωστικής φλέβα υπό την επίδραση ρεύματος από το περιβάλλον ρευστό. Έτσι, ο υπολογισμός της τροχιάς της κάθε φλέβας από την ομάδα των ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν, γίνεται για κάθε μια φλέβα σαν να ήταν ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες (Lai 2010). Για την περίπτωση της δισδιάστατης ανωστικής φλέβας, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους διατυπωμένο σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων $O_l(\eta, \psi, \xi)$ είναι το εξής:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \quad (G.1)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής ξ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{dw}{d\xi} = g'_0 h c \sin \omega + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial \psi} \quad (G.2)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής ψ

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} - \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{dw}{d\xi} = -g'_0 h c \cos \omega - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(hp_d)}{\partial \psi} \quad (G.3)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη:

$$\frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} + \frac{\partial(huc)}{\partial \psi} = -\frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} + S_0 \quad (G.4)$$

όπου:

w, u οι μέσες τιμές των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και ψ , αντίστοιχα

w', u'	οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ και ψ , αντίστοιχα
u_a	η μέση τιμή της ταχύτητας λόγω της δυναμικής επιδράσης από το σύολο των αλληλεπιδρουσών φλεβών στην υπό εξέταση ανωστική φλέβα
ω	η τοπική κλίση του άξονα ξ
θ	η τοπική κλίση του άξονα ξ'
ϕ	η τοπική κλίση του της ταχύτητας u_a
$c = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a - \rho_0}$	η μέση τιμή της συγκέντρωσης
ρ	η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση
$w'^2, w'c', u'c'$	οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w , u και c , αντίστοιχα
$\tau_{\psi\xi}$	η μέση τυρβώδης διατμητική τάση
p_d	η δυναμική πίεση
$h = 1 + \psi \frac{d\theta}{d\xi}$	ο μετρικός συντελεστής του συστήματος καμπυλογράμμων συντεταγμένων
$S_0 = \frac{\partial(hq_\psi)}{\partial\psi}$	ο όρος πηγής των αποκολλούμενων μαζών που διαφεύγουν
q_ψ	το φορτίο των αποκολλούμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη ψ διεύθυνση

Οι εξισώσεις (G.1) έως (G.4) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Στο } \psi = 0: \quad w = w_{md} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi), \quad u = 0, \quad c = c_m, \quad \tau_{\psi\xi} = u'c' = q_\psi = 0, \quad p_d = p_{dm} \quad (\text{G.5})$$

$$\text{Στο } \psi = \pm B_w \quad w = c = \tau_{\psi\xi} = u'c' = 0, \quad u = U_{B0}, \quad p_d = p_{de}, \quad q_\psi = q_B \quad (\text{G.6})$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$w_{d\xi} = w_d \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi) \quad (\text{G.7})$$

$$U_{B0} = \mp u_B - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi) \quad (\text{G.8})$$

$$q_B = 0 \text{ στο } \psi = +B_w \quad (\text{G.9})$$

$$q_B = w_B c_B \cos \theta \text{ στο } \psi = -B_w \quad (\text{G.10})$$

όπου

w_B η κατακόρυφη ταχύτητα των αποκολλούμενων μαζών

c_B η συγκέντρωση των αποκολλούμενων μαζών

u_B η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης στο πραγματικό όριο, B_w , της διατομής της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται στην εγκάρσια επιφάνεια A της δισδιάστατης φλέβας (Σχήμα 5.13).

Στη ZEF επικρατεί αυτοομοιότητα, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη. Στην περίπτωση του κινούμενου αποδέκτη γίνεται η παραδοχή ότι η αυτοομοιότητα διατηρείται και εντός της ZFE, με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w_{d\xi}}{w_{md}} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_w^2}\right) \quad (\text{G.11})$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2}{b_c^2}\right) \quad (\text{G.12})$$

Η εξίσωση (G.1) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned} \text{Όρος } (\alpha) \int_A \frac{\partial w}{\partial \xi} dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\psi = \frac{d}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} w d\psi - \frac{d(+B_w)}{d\xi} (w)_{+B_w} + \frac{d(-B_w)}{d\xi} (w)_{-B_w} = \\ &= \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi) \right] d\psi \right\} - \frac{dB_w}{d\xi} \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)}_{=0} + u_a \cos(\omega - \phi) \right]_{+B_w} - \\ &= - \frac{dB_w}{d\xi} \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)}_{=0} + u_a \cos(\omega - \phi) \right]_{-B_w} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\xi} \left\{ \underbrace{\int_{-B_w}^{+B_w} w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) d\psi}_{\tilde{\mu}} \right\} + \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} u_a \cos(\omega - \phi) d\psi \right\} - 2 \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) = \\
&= \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} + 2B_w \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος } (\beta) \int_A \frac{\partial(hu)}{\partial\psi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(hu)}{\partial\psi} d\psi = -\oint_C hu d\psi =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) [-u_{+B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)](-1) - \\
&- \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) [+u_{-B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)](+1) = \\
&= -2 \left\{ u_e + B_w \frac{d\omega}{d\xi} [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{Συνολικά: } \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2 \left\{ u_e + B_w \left\{ [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \frac{d\omega}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)] \right\} \right\}$$

Η εξίσωση (G.2) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned}
\text{Όρος } (\alpha) \int_A \frac{\partial}{\partial\xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) d\psi = \\
&= \frac{d}{d\xi} \left[\int_{-B_w}^{+B_w} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) d\psi \right] - \frac{dB_w}{d\xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{+B_w} + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right)_{-B_w} = \\
&= \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi)]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} d\psi \right\} - 2 \frac{dB_w}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 - \\
&- \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} = \\
&= \frac{d}{d\xi} \left\{ \underbrace{\int_{-B_w}^{+B_w} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} d\psi}_{\tilde{m}} + 2u_a \cos(\omega - \phi) \underbrace{\int_{-B_w}^{+B_w} w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) d\psi}_{\tilde{\mu}} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 d\psi \right\} - 2 \frac{dB_w}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 - \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} = \\
& = \frac{d\tilde{m}}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} [2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi)] + 2B_w \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 - \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Όρος (β): } \int_A \frac{\partial(huw)}{\partial\psi} dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(huw)}{\partial\psi} d\psi = -\oint_C huw d\psi = \\
&= - \left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) [-u_{+B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)] \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi)}_{=0} \right]_{+B_w}^{(-1)} \\
&- \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) [+u_{-B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)] \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi)}_{=0} \right]_{-B_w}^{(+1)} = \\
&= -2u_a \cos(\omega - \phi) \left\{ u_e + B_w \frac{d\omega}{d\xi} [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος (γ): } \int_A \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} d\psi = 0$$

$$\text{Όρος (δ): } \int_A g'_0 h c \sin \omega dA = \int_{-B_w}^{+B_w} g'_0 h c \sin \omega d\psi = \zeta \sin \omega$$

$$\text{Όρος (ε): } \int_A \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial\psi} dA = 0$$

$$\text{Συνολικά, } \boxed{
\begin{aligned}
& \frac{d\tilde{m}}{d\xi} = \zeta \sin \omega + 2u_a \cos(\omega - \phi) \left\{ u_e + B_w \frac{d\omega}{d\xi} [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \right\} - \\
& - \frac{d}{d\xi} [2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi)] - 2B_w \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 + \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0}
\end{aligned}
}$$

Η εξίσωση (G.3) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A:

$$\text{Όρος (α): } \int_A \frac{\partial}{\partial\xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) d\psi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\xi} \left[\underbrace{\int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) d\psi}_{=0} \right] - \frac{d(+B_w)}{d\xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right)_{+B_w} + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right)_{-B_w} = \\
&= -\frac{dB_w}{d\xi} \left[-u_{+B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi) \right] \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi)}_{=0} \right]_{+B_w} - \\
&- \frac{dB_w}{d\xi} \left[+u_{-B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi) \right] \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi)}_{=0} \right]_{-B_w} = \\
&= -\frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) \left[\frac{-\left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) u_{+B_w} + \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) u_{+B_w}}{1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi}} - 2w_B \cos \omega + 2u_a \sin(\omega - \phi) \right] = \\
&= -\frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) \left[\frac{-\left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) u_e + \left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) u_e}{\underbrace{1 - \left(B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right)^2}_{\approx 1}} - 2w_B \cos \omega + 2u_a \sin(\omega - \phi) \right] = \\
&= -2B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_e u_a \cos(\omega - \phi) \frac{d\omega}{d\xi} + 2 \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)]
\end{aligned}$$

$$\text{Ορος } (\beta): \int_A \frac{\partial(hu^2)}{\partial\psi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(hu^2)}{\partial\psi} d\psi = -\oint_C hu^2 d\psi =$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) \left[-u_{+B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi) \right]^2 (-1) \\
&- \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) \left[+u_{-B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi) \right]^2 (+1) = \\
&= -2B_w \left\{ u_e^2 - [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)]^2 \right\} \frac{d\omega}{d\xi} + 4u_e [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)]
\end{aligned}$$

$$\text{Ορος } (\gamma): \int_A (w^2 + w'^2) \frac{d\omega}{d\xi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} (w^2 + w'^2) \frac{d\omega}{d\xi} d\psi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d\omega}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi) \right]^2 + w'^2 d\psi = \\
&= \left\{ \tilde{m} + 2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi) + 2B_w \left[u_a \cos(\omega - \phi) \right]^2 \right\} \frac{d\omega}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος } (\delta): \int_A g'_0 h c \cos \omega dA = \int_{-B_w}^{+B_w} g'_0 h c \cos \omega d\psi = \zeta \cos \omega$$

$$\begin{aligned}
\text{Όρος } (\epsilon): \int_A \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h p_d)}{\partial \psi} dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(h p_d)}{\partial \psi} d\psi = -\frac{1}{\rho_0} \oint_C h p_d d\psi = \\
&= \int_A \frac{1}{\rho_0} h \frac{\partial(p_d)}{\partial \psi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{1}{\rho_0} h \frac{\partial(p_d)}{\partial \psi} d\psi = -\frac{1}{\rho_0} \oint_C h p_d d\psi = \\
&= -\frac{1}{\rho_0} \left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) [p_d]_{+B_w} (-1) - \frac{1}{\rho_0} \left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) [p_d]_{-B_w} (+1) = \\
&= \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} + B_w \frac{[p_d]_{+B_w} + [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \frac{d\omega}{d\xi}
\end{aligned}$$

Συνολικά,

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \theta + 2 \left\{ \left[2u_e + \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) \right] [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] + \frac{1}{2} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \right\}}{\tilde{m} + 2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi) + 2B_w \left\{ u_e^2 - w_B^2 \cos^2 \omega + u_a^2 \cos[2(\omega - \phi)] + 2w_B \cos \omega u_a \sin(\omega - \phi) + \frac{dB_w}{d\xi} u_e u_a \cos(\omega - \phi) - \frac{1}{2} \frac{[p_d]_{+B_w} + [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \right\}}$$

Η εξίσωση (G.4) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος } (\alpha): \int_A \frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} d\psi =$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} (wc + w'c') d\psi \right\} - \frac{d(+B_w)}{d\xi} (wc + w'c')_{+B_w} + \frac{d(-B_w)}{d\xi} (wc + w'c')_{-B_w} = \\
&= \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} c w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + c u_a \cos(\omega - \phi) + w'c' d\psi \right\} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos(\omega - \phi) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος } (\beta): \int_{-B_w}^{+B_w} \left[\frac{\partial(huc)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hu'c')}{\partial \psi} \right] d\psi = 0$$

Όρος (γ): $\int_A S dA = \int_{-B_w}^{+B_w} S d\psi = - \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) \mathcal{A} c_m w_B \cos \omega$

Συνολικά, $\boxed{\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos(\omega - \phi) \right) = - \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) \mathcal{A} c_m w_B \cos \omega}$

Υπολογισμός της ταχύτητας συμπαράσυρσης:

Ολοκληρώνεται η εξίσωση συνεχείας στο επίπεδο της φλέβας:

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi)] + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^\psi \frac{\partial}{\partial \xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi)] d\psi + \int_0^\psi \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} d\psi = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^\psi \frac{\partial}{\partial \xi} [w_e \cos(\theta - \omega)] d\psi + \int_0^\psi \frac{\partial}{\partial \xi} [u_a \cos(\omega - \phi)] d\psi + (hu)_\psi - (hu)_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^\psi [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)] d\psi - \frac{d\psi}{d\xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)]_\psi + \frac{d(0)}{d\xi} [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)]_0 + \frac{d}{d\xi} \left[\int_0^\psi u_a \cos(\omega - \phi) d\psi \right] + hu = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \int_0^\psi w_{md} \exp \left[- \left(\frac{\psi}{b_w} \right)^2 \right] \cos(\theta - \omega) d\psi \right\} + \frac{d}{d\xi} [\psi u_a \cos(\omega - \phi)] + hu = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} b_w w_{md} \operatorname{erf} \left(\frac{\psi}{b_w} \right) \cos(\theta - \omega) \right] + \psi \frac{du_a}{d\xi} \cos(\omega - \phi) - \psi u_a \sin(\omega - \phi) \frac{d(\omega - \phi)}{d\xi} + hu = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} -hu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{db_w}{d\xi} w_{md} \operatorname{erf}(n) \cos(\theta - \omega) + b_w \frac{dw_{md}}{d\xi} \operatorname{erf}(n) \cos(\theta - \omega) + b_w w_{md} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2) \frac{dn}{d\xi} \cos(\theta - \omega) - b_w w_{md} \operatorname{erf}(n) \sin(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] + \\ + \psi \frac{du_a}{d\xi} \cos(\omega - \phi) - \psi u_a \sin(\omega - \phi) \frac{d(\omega - \phi)}{d\xi} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$-hu = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{db_w}{d\xi} w_{md} \operatorname{erf}(n) \cos(\theta - \omega) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} b_w \frac{dw_{md}}{d\xi} \operatorname{erf}(n) \cos(\theta - \omega) - b_w w_{md} \exp(-n^2) \frac{n}{b_w} \frac{db_w}{d\xi} \cos(\theta - \omega) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} b_w w_{md} \operatorname{erf}(n) \sin(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} +$$

$$+ b_w \frac{\psi}{b_w} \frac{du_a}{d\xi} \cos(\omega - \phi) - b_w \frac{\psi}{b_w} u_a \sin(\omega - \phi) \frac{d(\omega - \phi)}{d\xi} \Rightarrow$$

$$-hu = \frac{w_{md} b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \underbrace{\frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}}_{s_b} \operatorname{erf}(n) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \underbrace{\frac{\xi}{w_{md}} \frac{dw_{md}}{d\xi}}_{s_0} \operatorname{erf}(n) - n \underbrace{\frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}}_{s_b} \exp(-n^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \operatorname{erf}(n) \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] +$$

$$+ nb_w \frac{du_a}{d\xi} \cos(\omega - \phi) - nb_w u_a \sin(\omega - \phi) \frac{d(\omega - \phi)}{d\xi} \Rightarrow$$

$$-hu = \frac{w_{md} b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} s_b \operatorname{erf}(n) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} s_0 \operatorname{erf}(n) - ns_b \exp(-n^2) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \operatorname{erf}(n) \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] +$$

$$+ nb_w \left[\frac{du_a}{d\xi} \cos(\omega - \phi) - u_a \sin(\omega - \phi) \frac{d(\omega - \phi)}{d\xi} \right] \Rightarrow$$

$$-hu = \frac{w_{md} b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n) \left[s_b + s_0 - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] - ns_b \exp(-n^2) \right\} + nb_w \left[\frac{du_a}{d\xi} \cos(\omega - \phi) - u_a \sin(\omega - \phi) \frac{d(\omega - \phi)}{d\xi} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{-hu = \frac{w_{md} b_w \cos(\theta - \omega)}{\xi} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(n) \left[s_b + s_0 - \xi \tan(\theta - \omega) \frac{d(\theta - \omega)}{d\xi} \right] - ns_b \exp(-n^2) \right\} + nb_w \cos(\omega - \phi) \left[\frac{du_a}{d\xi} - u_a \tan(\omega - \phi) \frac{d(\omega - \phi)}{d\xi} \right]}$$

$$\acute{o}\pi o y \ s_0 = \frac{\xi}{w_{md}} \frac{dw_{md}}{d\xi} \text{ και } s_0 = \frac{\xi}{b_w} \frac{db_w}{d\xi}$$

ΠΑΡΑΤΗΜΑ Η- ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΚΕΚΛΙΜΕΝΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΤΥΡΒΩΔΩΝ ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ

Σύμφωνα με τη θεωρία της δυναμικής αλληλεπίδρασης, η αλληλεπίδραση κάθε φλέβας από μια ομάδα αλληλεπιδρουνσών ανωστικών φλεβών αντιμετωπίζεται ως εάν ήταν μια μοναχική τυρβώδης ανωστικής φλέβα υπό την επίδραση ρεύματος από το περιβάλλον ρευστό. Έτσι, ο υπολογισμός της τροχιάς της κάθε φλέβας από την ομάδα των ανωστικών φλεβών που αλληλεπιδρούν, γίνεται για κάθε μια φλέβα σαν να ήταν ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες (Lai 2010). Για την περίπτωση της κυκλικής ανωστικής φλέβας, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους διατυπωμένο σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων $O(\eta, \psi, \xi)$ είναι το εξής:

Εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} = 0 \quad (H.1)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής ξ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hvw)}{\partial \eta} + \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{dw}{d\xi} = g'_0 h c \sin \omega + \\ + \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial \psi} + \frac{\partial(h\tau_{\eta\xi})}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (H.2)$$

Εξίσωση διατήρησης ορμής ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) + \frac{\partial(hu^2)}{\partial \psi} + \frac{\partial(huv)}{\partial \eta} - \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} = -g'_0 h c \cos \omega - \\ - \frac{1}{\rho_0} h \frac{\partial p_d}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tau_{\eta\psi}}{\rho_0} \right) \end{aligned} \quad (H.3)$$

Εξίσωση διατήρησης μάζας ιχνηθέτη:

$$\frac{\partial(wc + w'c')}{\partial\xi} + \frac{\partial(huc)}{\partial\psi} + \frac{\partial(hvc)}{\partial\eta} = - \left[\frac{\partial(hu'c')}{\partial\psi} + \frac{\partial(hv'c')}{\partial\eta} + S_1 \right] \quad (H.4)$$

όπου:

w, u, v	οι μέσες τιμές των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ, ψ και η , αντίστοιχα
w', u', v'	οι διακυμάνσεις των ταχυτήτων στις διευθύνσεις ξ, ψ και η , αντίστοιχα
u_a	η μέση τιμή της ταχύτητας λόγω της δυναμικής επιδράσης από το σύολο των αλληλεπιδρουσών φλεβών στην υπό εξέταση ανωστική φλέβα
ω	η τοπική κλίση του άξονα ξ
θ	η τοπική κλίση του άξονα ξ'
ϕ	η τοπική κλίση του της ταχύτητας u_a
$c = \frac{\rho_a - \rho}{\rho_a - \rho_0}$	η μέση τιμή της συγκέντρωσης
ρ	η μέση τιμή της πυκνότητας σε μια θέση
$w'^2, w'c', u'c', v'c'$	οι τοπικές εισροές εξαιτίας των τυρβωδών διακυμάνσεων των w, u και c , αντίστοιχα
$\tau_{\psi\xi}, \tau_{n\xi}, \tau_{n\psi}$	μέσες τυρβώδεις διατμητικές τάσεις
p_d	η δυναμική πίεση
$h = 1 + \psi \frac{d\theta}{d\xi}$	ο μετρικός συντελεστής του συστήματος καμπυλογράμμων συντεταγμένων
$S_1 = \frac{\partial(hq_\psi)}{\partial\psi}$	ο όρος πηγής των αποκολλούμενων μαζών που διαφεύγουν
q_ψ	το φορτίο των αποκολλούμενων μαζών ανά μονάδα επιφανείας στη ψ διεύθυνση

Οι εξισώσεις (H.1) έως (H.4) πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$\text{Στο } \psi=0: \quad w = w_{md} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi), \quad u=0, \quad c=c_m, \quad \tau_{\psi\xi}=u'c'=q_\psi=0, \quad p_d=p_{dm} \quad (H.5)$$

$$\text{Στο } \psi = \pm B_w \quad w=c= \tau_{\psi\xi} = u'c'=0, u=U_{B0}, p_d=p_{de}, q_{\psi}=q_B \quad (\text{H.6})$$

$$\text{Στο } \eta = \pm B_w \quad w=c= \tau_{\psi\xi} = u'c'=0, u=u_{Bw}, p_d=p_{de}, q_{\psi}=q_B \quad (\text{H.7})$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$w_{d\xi} = w_d \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi) \quad (\text{H.8})$$

$$U_{B0} = \mp u_B - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi) \quad (\text{H.9})$$

$$q_B = 0 \text{ στο } \psi = +B_w \quad (\text{H.10})$$

$$q_B = 0 \text{ στο } \eta = \pm B_w \quad (\text{H.11})$$

$$q_B = w_B c_B \cos \theta \text{ στο } \psi = -B_w \quad (\text{H.12})$$

όπου

w_B η κατακόρυφη ταχύτητα των αποκολλούμενων μαζών

c_B η συγκέντρωση των αποκολλούμενων μαζών

u_B η εγκάρσια ταχύτητα συμπαράσυρσης στο πραγματικό όριο, B_w , της διατομής της κεκλιμένης ανωστικής φλέβας. Οι εξισώσεις ολοκληρώνονται στην εγκάρσια επιφάνεια της κυκλικής φλέβας η οποία στην προκειμένη περίπτωση θεωρείται τετράγωνο πλευράς $2 B_w$ (Σχήμα 5.14).

Στη ZEF επικρατεί αυτοομοιότητα, όπως και στην περίπτωση του ακίνητου αποδέκτη. Στην περίπτωση του κινούμενου αποδέκτη γίνεται η παραδοχή ότι η αυτοομοιότητα διατηρείται και εντός της ZFE, με τις εγκάρσιες κατανομές των μέσων αξονικών ταχυτήτων και συγκεντρώσεων να ακολουθούν την κατανομή τύπου Gauss και περιγράφονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{w_{d\xi}}{w_{md}} = \exp\left(-\frac{\psi^2 + \eta^2}{b_w^2}\right) \quad (\text{H.13})$$

$$\frac{c}{c_m} = \exp\left(-\frac{\psi^2 + \eta^2}{b_c^2}\right) \quad (\text{H.14})$$

Η εξίσωση (H.1) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned} \text{Όρος } (\alpha) \int_A \frac{\partial w}{\partial \xi} dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\psi d\eta = \\ &= \frac{d}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} w d\psi d\eta - \frac{d(+B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} (w)_{+B_w} d\eta + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} (w)_{-B_w} d\eta - \frac{d(+B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} (w)_{+B_w} d\psi + \\ &+ \frac{d(-B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} (w)_{-B_w} d\psi = \\ &= \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_A \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi) \right] dA \right\} - \\ &- 4 \frac{dB_w}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)}_{=0} + u_a \cos(\omega - \phi) \right]_{\pm B_w} d\psi = \\ &= \frac{d}{d\xi} \underbrace{\int_A w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) d\psi}_{\tilde{\mu}} + \frac{d}{d\xi} \int_A u_a \cos(\omega - \phi) d\psi - 8B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) = \\ &= \frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} + 4B_w^2 \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Όρος } (\beta) \int_A \left[\frac{\partial(hu)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} \right] dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(hu)}{\partial \psi} + \frac{\partial(hv)}{\partial \eta} d\psi d\eta = -\oint_C (hud\eta + hvd\psi) = \\ &= -\left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) [-u_{+B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)] (-2B_w) + \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) u_{+B_w} (-2B_w) - \\ &- \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) [+u_{-B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)] (+2B_w) + \left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) (-u_{-B_w}) (+2B_w) = \\ &= -4B \left\{ 2u_e + B_w^2 \frac{d\omega}{d\xi} [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \right\} \end{aligned}$$

Συνολικά:

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mu}}{d\xi} = 2(2B_w) \left\{ 2u_e + B_w \left\{ [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \frac{d\omega}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)] \right\} \right\}}}$$

Η εξίσωση (H.2) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned}
 \text{Όρος } (\alpha) \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} \left(w^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} \right) d\psi d\eta = \\
 &= \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_A \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi) \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} dA \right\} - \\
 &- 4 \frac{dB_w}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)}_{=0} + u_a \cos(\omega - \phi) + \frac{p_d}{\rho_0} \right]_{\pm B_w} d\psi = \\
 &= \frac{d}{d\xi} \left\{ \underbrace{\int_A \left[w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) \right]^2 + w'^2 + \frac{p_d}{\rho_0} dA}_{\tilde{m}} + 2u_a \cos(\omega - \phi) \underbrace{\int_A w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) dA}_{\tilde{\mu}} \right\} - \\
 &- 4 \frac{dB_w}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \left[u_a \cos(\omega - \phi) \right]^2 d\psi - \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} = \\
 &= \frac{d\tilde{m}}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} [2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi)] + 4B_w^2 \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 - \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0}
 \end{aligned}$$

Όρος (β) :

$$\begin{aligned}
 \int_A \left[\frac{\partial(huw)}{\partial \psi} + \frac{\partial(huv)}{\partial \eta} \right] dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} \left[-\frac{\partial(-huw)}{\partial \psi} + \frac{\partial(huv)}{\partial \eta} \right] d\psi d\eta = \oint_C [-huw d\psi + huv d\eta] = \\
 &= - \left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) \left[-u_{+B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi) \right] \left[0 + u_a \cos(\omega - \phi) \right]_{+B_w} (-2B_w) + \\
 &+ \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) u_{+B_w} \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)}_{=0} + u_a \cos(\omega - \phi) \right]_{+B_w} (-2B_w) - \\
 &- \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) \left[+u_{-B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi) \right] \left[0 + u_a \cos(\omega - \phi) \right]_{-B_w} (+2B_w) + \\
 &+ \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) (-u_{-B_w}) \left[\underbrace{w_{d\xi} \cos(\theta - \omega)}_{=0} + u_a \cos(\omega - \phi) \right]_{-B_w} (+2B_w) = \\
 &= -4B u_a \cos(\omega - \phi) \left\{ 2u_e + B_w \frac{d\omega}{d\xi} [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{Όρος } (\gamma): \int_A \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) \frac{d\omega}{d\xi} d\psi d\eta = 0$$

$$\text{Όρος } (\delta): \int_A g'_0 h c \sin \omega dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} g'_0 h c \sin \omega d\psi d\eta = \zeta \sin \omega$$

$$\text{Όρος } (\epsilon): \int_A \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial(h\tau_{\psi\xi})}{\partial\psi} + \frac{\partial(h\tau_{n\xi})}{\partial n} \right] dA = 0$$

Συνολικά,

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{m}}{d\xi} &= \zeta \sin \omega + 4B u_a \cos(\omega - \phi) \left\{ 2u_e + B_w \frac{d\omega}{d\xi} [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \right\} - \\ &- \frac{d}{d\xi} [2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi)] - (2B_w)^2 \frac{d}{d\xi} [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 + \frac{dB_w}{d\xi} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \end{aligned}$$

Η εξίσωση (H.3) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\begin{aligned} \text{Όρος } (\alpha): \int_A \frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) d\psi d\eta = \\ &= \frac{d}{d\xi} \left[\underbrace{\int_A \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right) dA}_{=0} \right] - \frac{d(+B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right)_{+B_w} d\psi + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right)_{-B_w} d\psi - \\ &- \frac{d(+B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right)_{+B_w} d\eta + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} \left(uw - \frac{\tau_{\psi\xi}}{\rho_0} \right)_{-B_w} d\eta = \\ &= 0 - 0 + 0 - \frac{dB_w}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} [-u_{+B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)] u_a \cos(\omega - \phi) d\eta - \\ &- \frac{dB_w}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} [+u_{-B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)] u_a \cos(\omega - \phi) d\eta = \\ &= -(2B_w)^2 \frac{dB_w}{d\xi} u_e u_a \cos(\omega - \phi) \frac{d\omega}{d\xi} + 4B_w \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] \end{aligned}$$

$$\text{Όρος } (\beta): \int_A \left[\frac{\partial(hu^2)}{\partial\psi} + \frac{\partial(huv)}{\partial\eta} \right] dA = \oint_C (-hu^2 d\eta + huv d\psi) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(1 + B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) \left[-u_{+B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)\right]^2 (-2B_w) \\
&- \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi}\right) \left[+u_{-B_w} - w_B \cos \omega + u_a \sin(\omega - \phi)\right]^2 (+2B_w) = \\
&= -(2B_w)^2 \left\{u_e^2 - [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)]^2\right\} \frac{d\omega}{d\xi} + 8B_w u_e [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Όρος (}\gamma\text{): } \int_A (w^2 + w'^2) \frac{d\omega}{d\xi} dA &= \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} (w^2 + w'^2) \frac{d\omega}{d\xi} d\psi d\eta = \\
&= \frac{d\omega}{d\xi} \int_A \left\{ [w_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + u_a \cos(\omega - \phi)]^2 + w'^2 \right\} dA = \\
&= \left\{ \tilde{m} + 2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi) + (2B_w)^2 [u_a \cos(\omega - \phi)]^2 \right\} \frac{d\omega}{d\xi}
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος (}\delta\text{): } \int_A g'_0 h c \cos \omega dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} g'_0 h c \cos \omega d\psi d\eta = \zeta \cos \omega$$

$$\text{Όρος (}\epsilon\text{): } \int_A \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{n\psi}}{\partial \eta} dA = 0$$

Όρος (στ):

$$\int_A \frac{1}{\rho_0} h \frac{\partial p_d}{\partial \psi} dA = -\frac{1}{\rho_0} \oint_C h p_d d\psi = 2B_w \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} + 2B_w^2 \frac{[p_d]_{+B_w} + [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \frac{d\omega}{d\xi}$$

Συνολικά,

$$\boxed{\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\zeta \cos \theta + 4B_w \left\{ \left[2u_e + \frac{dB_w}{d\xi} u_a \cos(\omega - \phi) \right] [w_B \cos \omega - u_a \sin(\omega - \phi)] + \frac{1}{2} \frac{[p_d]_{+B_w} - [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \right\}}{\tilde{m} + 2\tilde{\mu} u_a \cos(\omega - \phi) + (2B_w)^2 \left\{ u_e^2 - w_B^2 \cos^2 \omega + u_a^2 \cos[2(\omega - \phi)] + 2w_B \cos \omega u_a \sin(\omega - \phi) + \frac{dB_w}{d\xi} u_e u_a \cos(\omega - \phi) - \frac{1}{2} \frac{[p_d]_{+B_w} + [p_d]_{-B_w}}{\rho_0} \right\}}}}$$

Η εξίσωση (Η.4) ολοκληρώνεται κατά όρους, στην εγκάρσια επιφάνεια A :

$$\text{Όρος (}\alpha\text{): } \int_A \frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} \frac{\partial(wc + w'c')}{\partial \xi} d\psi d\eta =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\xi} \int_A (wc + w'c') dA - \frac{d(+B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} (wc + w'c')_{+B_w} d\psi + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} (wc + w'c')_{-B_w} d\psi - \\
& - \frac{d(+B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} (wc + w'c')_{+B_w} d\eta + \frac{d(-B_w)}{d\xi} \int_{-B_w}^{+B_w} (wc + w'c')_{-B_w} d\eta = \\
& = \frac{d}{d\xi} \left\{ \int_{-B_w}^{+B_w} cw_{d\xi} \cos(\theta - \omega) + cu_a \cos(\omega - \phi) + w'c' d\psi \right\} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos(\omega - \phi) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Όρος } (\beta): \int_A \left[\frac{\partial(huc)}{\partial\psi} + \frac{\partial(hu'c')}{\partial\psi} \right] d\psi d\eta = 0$$

$$\text{Όρος } (\gamma): \int_A \left[\frac{\partial(hvc)}{\partial\eta} + \frac{\partial(hvc')}{\partial\eta} \right] d\psi d\eta = 0$$

$$\text{Όρος } (\delta): \int_A S dA = \int_{-B_w}^{+B_w} \int_{-B_w}^{+B_w} S d\psi d\eta = -2B_w \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) \mathcal{A} c_m w_B \cos \omega$$

$$\text{Συνολικά, } \boxed{\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{g'_0} + \frac{\zeta}{g'_0} u_a \cos(\omega - \phi) \right) = -2B_w \left(1 - B_w \frac{d\omega}{d\xi} \right) \mathcal{A} c_m w_B \cos \omega}$$