ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τοπολογίες σε Σύνολα Συναρτήσεων

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Πετρόπουλος Ι. Βασίλειος

Επιβλέπων: Γεωργίου Ν. Δημήτριος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, 2017

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τοπολογίες σε Σύνολα Συναρτήσεων

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Πετρόπουλος Ι. Βασίλειος

Επιβλέπων: Γεωργίου Ν. Δημήτριος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 10η Ιανουαρίου 2017

Γεωργίου Δημήτριος	Ηλιάδης Σταύρος	Παπαδόπουλος Βασίλειος
Καθηγητής	Ομ. Καθηγητής	Καθηγητής
Πανεπιστημίου Πατρών	Πανεπιστημίου Πατρών	Δημ. Πανεπιστημίου Θράκης

Πάτρα, 2017

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών

Βασίλειος Ι. Πετρόπουλος

Πρόλογος

Η διδακτορική μου διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών με Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή αποτελούμενη από τον κ. Δημήτριο Γεωργίου, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, ως επιβλέποντα, και μέλη αυτής τους κ.κ. Σταύρο Ηλιάδη, Ομότιμο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, και Βασίλειο Παπαδόπουλο, Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πολυτεχνείου Θράκης.

Αποφασιστικό ρόλο για την εκπόνηση και συγγραφή της διδακτορικής μου διατριβής έπαιξε η άριστη και συνεχής συνεργασία που είχα με τους κ.κ. Δημήτριο Γεωργίου, Σταύρο Ηλιάδη και Αθανάσιο Μεγαρίτη. Η συνεργασία αυτή ξεκίνησε από το πρώτο έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών, με σειρά σεμιναρίων σε ειδικά θέματα Γενικής Τοπολογίας.

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Δημήτριο Γεωργίου για την παρότρυνσή του, την καθοδήγησή του και για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις του καθόλη τη διάρκεια της επιστημονικής μας συνεργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τους κ.κ. Σταύρο Ηλιάδη και Αθανάσιο Μεγαρίτη για την επιστημονική συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια, για τις παρατηρήσεις τους και για τη συμπαράστασή τους.

Τέλος, ευχαριστώ τη γυναίκα μου Μαρία και τις κόρες μου Ανδριανή και Ιωάννα για την υπομονή και την συμπαράστασή τους.

Πετρόπουλος Βασίλειος

Πάτρα, 2017

Βασικοί συμβολισμοί

$\emptyset$	:	Το κενό σύνολο
$A \cap B$	:	Η τομή των συνόλων A και B
$A \cup B$	:	Η ένωση των συνόλων A και B
$A \times B$	:	Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B
ω	:	Ο διατακτικός αριθμός του συνόλου των φυσικών αριθμών
ω_1	:	Ο πρώτος μη αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός
$\mathcal{O}(X)$	:	Το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X
$\mathcal{K}(X)$	:	Το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X
$\mathcal{Z}(X)$	:	Το σύνολο των zero-sets του τοπολογικού χώρου X
$\mathbf{B}(X)$	:	Το σύνολο των Borel υποσυνόλων του τοπολογικού χώρου X
$C(Y, Z)$	:	Το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων του τοπολογικού χώρου Y στον τοπολογικό χώρο Z
$\mathcal{M}(Y, Z)$	:	Το σύνολο των μετρήσιμων απεικονίσεων του τοπολογικού χώρου Y στον τοπολογικό χώρο Z
$\mathcal{B}(Y, Z)$	:	Το σύνολο των Baire απεικονίσεων του τοπολογικού χώρου Y στον τοπολογικό χώρο Z
$\mathbf{B}^{\alpha}(Y, Z)$	:	Το σύνολο των Borel απεικονίσεων κλάσης α του τοπολογικού χώρου Y στον τοπολογικό χώρο Z
$\sigma(\tau_X)$	:	Η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοικτά υποσύνολα του τοπολογικού χώρου X
$\sigma(\mathcal{Z}(X))$	:	Η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα zero-sets του τοπολογικού χώρου X
$\mathbf{G}^{Z}_{\alpha}(Y)$	:	Το σύνολο που αποτελείται από τις αντίστροφες εικόνες ανοικτών υποσυνόλων του Y μέσω μιας Borel απεικόνισης τύπου α του τοπολογικού χώρου Y στον τοπολογικό χώρο Z.
$\mathbf{\Pi}^0_{\alpha}(X)$	:	Πολλαπλασιαστική κλάση α της οικογένειας $\mathbf{B}(X)$
$\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha}(X)$	:	Προσθετική κλάση α της οικογένειας $\mathbf{B}(X)$

Περίληψη

Έστω Y, Z τοπολογικοί χώροι, $C(Y,Z)$ το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων του χώρου Y στο χώρο Z, $\mathcal{M}(Y,Z)$ το σύνολο των μετρήσιμων απεικονίσεων του χώρου Y στο χώρο Z, $\sigma_Z(\tau_Y)$ το σύνολο που αποτελείται από τα υποσύνολα $f^{-1}(B)$ του Y, όπου $f \in \mathcal{M}(Y,Z)$ και B μετρήσιμο υποσύνολο του Z, και $\mathcal{B}(Y,Z)$ το σύνολο των Baire απεικονίσεων του χώρου Y στο χώρο Z.

Επί του συνόλου $C(Y,Z)$ ορίζουμε τοπολογίες τις οποίες καλούμε $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open. Μελετάμε τις τοπολογίες αυτές και δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες έτσι, ώστε να είναι διαχωριστικές και συνδετικά συνεχείς.

Επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ ορίζουμε και μελετάμε τις έννοιες των μετρήσιμων και χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών, όπου $\mathcal{A}$ είναι μία οικογένεια τοπολογικών χώρων. Επισημαίνουμε ότι επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$, γενικά, δεν υπάρχει η μεγαλύτερη χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία. Το γεγονός αυτό αποτελεί ένα διαφορετικό αποτέλεσμα από την κλασσική θεωρία των χώρων συναρτήσεων. Επίσης, παρουσιάζουμε και μελετάμε σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών επί των συνόλων $\mathcal{M}(Y,Z)$ και $\sigma_Z(\tau_Y)$, όσον αφορά τις έννοιες των μετρήσιμων και χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών. Ανάλογα αποτελέσματα παρουσιάζουμε για τοπολογίες επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$.

Τέλος, θεωρούμε τα σύνολα $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$, όπου $\alpha < \omega_1$, των Borel απεικονίσεων τύπου α του χώρου Y στο χώρο Z και $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$ που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα $f^{-1}(U)$, όπου $f \in \mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ και U ανοικτό υποσύνολο του χώρου Z. Επί των συνόλων $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ και $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$ ορίζουμε νέες τοπολογίες και ερευνούμε σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών αυτών.

Λέξεις-Κλειδιά: Borel σύνολα, Baire σύνολα, Μετρήσιμοι χώροι, Μετρήσιμες απεικονίσεις, Χώροι συναρτήσεων, Διαχωριστική τοπολογία, Συνδετικά συνεχής τοπολογία, Borel απεικονίσεις κλάσης α.

Abstract

Let Y, Z be two topological spaces, $C(Y,Z)$ the set of all continuous maps from Y to Z, $\mathcal{M}(Y,Z)$ the set of all measurable maps from Y to Z, $\sigma_Z(\tau_Y)$ the set consisting of the subsets $f^{-1}(B)$ of Y, where $f \in \mathcal{M}(Y,Z)$ and B is a measurable subset of Z, and $\mathcal{B}(Y,Z)$ the set of all Baire measurable maps from Y to Z.

We define topologies on the set $C(Y,Z)$, which are called $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open. We study these topologies and we give the necessary and sufficient conditions in order to characterize those topologies as splitting or admissible.

On the set $\mathcal{M}(Y,Z)$, we introduce and study the notions of measurable and coordinately measurable $\mathcal{A}$-splitting and $\mathcal{A}$-admissible topologies, where $\mathcal{A}$ is a family of topological spaces. We point out that, generally, the greatest coordinately measurable $\mathcal{A}$-splitting topology, on the set $\mathcal{M}(Y,Z)$ does not exist. This fact gives a different result from the classical theory of function topological spaces. Moreover, we present and research relations between the topologies on the set $\mathcal{M}(Y,Z)$ and the topologies on the set $\sigma_Z(\tau_Y)$, concerning the notions of measurable and coordinately measurable $\mathcal{A}$-splitting and $\mathcal{A}$-admissible topologies. We present these notions for the set $\mathcal{B}(Y,Z)$, as well.

Finally, let $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$, $\alpha < \omega_1$, be the set of all Borel maps of class α from Y into Z and let $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$ be the set which consists of all subsets $f^{-1}(U)$, where $f \in \mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ and U is an open subset of Z. We introduce new topologies on the sets $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ and $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$ and we investigate relations between them.

Key-Words: Borel sets, Baire sets, Measurable spaces, Measurable maps, Function spaces, Splitting topology, Jointly continuous topology, Borel maps of class α.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή

Η έννοια της αντιστοίχισης γίνεται αντιληπτή από τον ανθρώπινο νου στις καθημερινές δραστηριότητες αρχικά ως τον όρο - προϋπόθεση για την διεξαγωγή ή μη κάποιας εργασίας. Κάτι τέτοιο δεν απαιτεί καν την ύπαρξη κώδικα επικοινωνίας - γλώσσας, πόσο μάλλον αριθμητικού συστήματος. Η ανάγκη καταγραφής μιας εκτεταμένης αντιστοίχισης προκύπτει με την αύξηση των δραστηριοτήτων ή τη συμμετοχή περισσοτέρων ανθρώπων σε μια δραστηριότητα, οπότε και απαιτείται η χρήση ενός συστήματος καταγραφής των προϋποθέσεων, εύληπτου από όλους τους συμμετέχοντες.

Το 1950 ο Βέλγος Jean de Heinzelin de Braucourt, εξερευνώντας την περιοχή που τότε ονομαζόταν Βελγικό Κονγκό, ανακάλυψε το *κόκκαλο του Ishango*. Το κόκκαλο του Ishango είναι φτιαγμένο από την περόνη μάλλον μπαμπουίνου και είναι χαραγμένο κατά μήκος. Οι χαρακιές είναι ομαδοποιημένες σε τρεις στήλες. Το εργαλείο αυτό χρονολογείται περί το 20.000 π.Χ. και χρησιμοποιήθηκε για διάφορες μετρήσεις. Το κόκκαλο του Ishango θεωρείται, μέχρι σήμερα, το πιο παλιό μαθηματικό εργαλείο (βλέπε [55]).

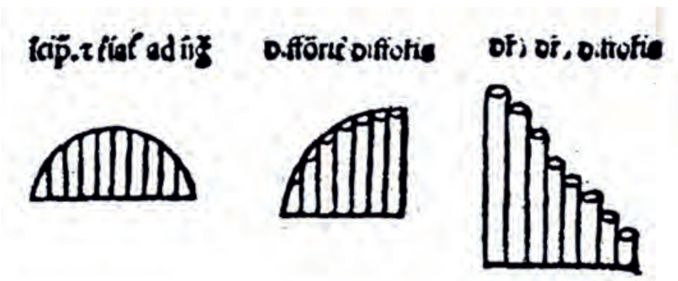
Το κόκκαλο του Ishango[1]-Royal Belgian Institute of Natural Sciences

[1]Πηγή: http://www.neatorama.com/2008/01/25/the-wonderful-world-of-early-computing

Οι Βαβυλώνιοι μαθηματικοί το 2000 π.Χ. χρησιμοποιούσαν για υπολογισμούς πίνακες αντιστρόφων, τετραγώνων, τετραγωνικών ριζών, κύβων, κυβικών ριζών κ.ά.

Οι Βαβυλώνιοι αστρονόμοι κρατούσαν, επίσης, σε πίνακες τους υπολογισμούς τους για τον ήλιο, τη σελήνη και τους πλανήτες. Οι πρώτοι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τους νόμους της ακουστικής και ανέπτυξαν έναν πίνακα χορδών. Προσπάθησαν να ερμηνεύσουν τους απλούς νόμους της μουσικής μελετώντας την αλληλεξάρτηση του μήκους και της έντασης κάθε νότας. Κατά την Αλεξανδρινή εποχή οι αστρονόμοι ανέπτυξαν την τριγωνομετρία των χορδών και δημιούργησαν πίνακες χορδών ισοδύναμους με τους σημερινούς πίνακες ημιτόνου. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτέλεσαν οι πίνακες χορδών του Πτολεμαίου, που εξέφραζαν τα μήκη των χορδών του κύκλου με τις γωνίες που βαίνουν στα ορισμένα από τις χορδές τόξα.

Αξίζει να σημειωθεί πως ο Γάλλος Nicole Oresme (1323–1382), (βλέπε [8]) μετέφρασε στα Γαλλικά διάφορα έργα του Αριστοτέλη και ασχολήθηκε με την μέτρηση αυτών που ο Αριστοτέλης ονόμασε *μορφές - φόρμες*. Στην προσπάθειά του να απλοποιήσει αυτή τη μέτρηση κατασκεύασε μια γεωμετρική αναπαράστασή της. Έφτιαξε αυτό που σήμερα θα αποκαλούσαμε γράφημα ταχύτητας - χρόνου. Μέτρησε τις διάφορες ταχύτητες που είχε ένα κινούμενο, με σταθερή επιτάχυνση, αντικείμενο στις διάφορες χρονικές στιγμές. Σε μια οριζόντια ευθεία σημείωσε αυτές τις χρονικές στιγμές και σε κάθε μία από αυτές ύψωσε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το ύψος του οποίου αντιπροσώπευε την ταχύτητα του αντικειμένου τη δεδομένη χρονική στιγμή.



Τα διαγράμματα του Oresme[1]

[1]Πηγή: http://www.anychart.com

Ήταν καθαρά θέμα χρόνου η γέννηση ενός νέου μαθηματικού αντικειμένου. Μέσα από την μελέτη του Απειροστικού Λογισμού γεννήθηκε η έννοια της συνάρτησης, ως ξεχωριστό μαθηματικό αντικείμενο. Ο Descartes (1596-1650) αναπαρέστησε γεωμετρικά μία εξίσωση δύο μεταβλητών με μία καμπύλη του επιπέδου. Με αυτόν τον τρόπο, έδειξε την εξάρτηση των δύο μεταβλητών. (Σημειώνεται, ότι η ιδέα της παραγώγου προήλθε από την εύρεση της εφαπτομένης μιας τέτοιας καμπύλης σε ένα της σημείο.)

Ο Newton (1642-1727) ήταν από τους πρώτους μαθηματικούς που έδειξε τον τρόπο με τον οποίο εμπλέκονται οι συναρτήσεις στον υπολογισμό των άπειρων σειρών. Χρησιμοποίησε τους όρους *fluent* για τις ανεξάρτητες μεταβλητές, *relata quantitas* για τις εξαρτημένες μεταβλητές και *genita* για ποσότητες που προκύπτουν από άλλες μέσω των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων.

Τον όρο *function* τον εισήγαγε πρώτος ο Leibniz (1646-1716). Εμφανίσθηκε για πρώτη φορά σε μια εργασία του το 1673 και προέρχεται από τη Λατινική λέξη *functio* που σημαίνει *ενέργεια - παράσταση*. Επίσης, εισήγαγε τους όρους *constant - σταθερά, variable - μεταβλητή* και *parameter - παράμετρος*. Τελικά, ο όρος function χρησιμοποιήθηκε στην αλληλογραφία (1694-1698) που είχαν οι Leibniz και Jean Bernoulli (1667-1748), για να περιγράψει ποσότητες που ήταν εξαρτημένες από μία μεταβλητή.

Ο Jean Bernoulli, το 1718, έδωσε τον δικό του ορισμό: *συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι μία ποσότητα που παράγεται από σταθερές και από την ίδια τη μεταβλητή*. Αργότερα, ο Eüler (1707-1793), μαθητής του Bernoulli, χρησιμοποίησε τον όρο *αναλυτική έκφραση* αντί του όρου *ποσότητα*.

Ο ορισμός του Eüler αναφέρεται μόνο στις αναλυτικές συναρτήσεις και υπό αυτή την έννοια δημιουργούσε περιορισμούς ως προς τις κλάσεις των συναρτήσεων που μπορούσαν να θεωρηθούν. Η διατύπωση αυτή οδηγούσε σε αντιφάσεις, εφόσον υπήρχαν συναρτήσεις που εκφράζονταν με διαφορετικούς αναλυτικούς τύπους. Μέχρι το τέλος του 18ου αιώνα δεν άλλαξε τίποτα. Η φύση και η έννοια της συνάρτησης άλλαξε ριζικά το 19ο αιώνα.

Οι συζητήσεις των d' Alembert (1717-1783) με τους Eüler και Daniel Bernoulli (1700-1782) γύρω από το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής βοήθησαν στην εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης. Σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη αυτή έπαιξε και ο Fourier (1768-1830), ο οποίος μελετούσε το πρόβλημα της θερμότητας ενός υλικού σώματος, θεωρώντας τη θερμότητα ως συνάρτηση δύο μεταβλητών, του χρόνου και του χώρου. Ο Fourier υπέθεσε ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με τριγωνομετρική σειρά σε ένα κατάλληλο διάστημα. Βέβαια, ο ισχυρισμός αυτός δεν αποδείχθηκε ποτέ από τον Joseph Fourier. Με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκε ο Dirichlet (1805-1859), ο οποίος διατύπωσε τις ακριβείς συνθήκες κάτω από τις οποίες μία συνάρτηση αναπαρίσταται σε σειρά Fourier. Για να το πραγματοποιήσει αυτό χρειάστηκε να διαχωρίσει τον ορισμό της συνάρτησης από την αναλυτική της έκφραση. Έτσι, το 1837 έδωσε τον ορισμό της συνάρτησης ως μία αυθαίρετη αντιστοίχιση δύο αριθμητικών συνόλων έτσι, ώστε η ανεξάρτητη μεταβλητή να αντιστοιχίζεται σε μία και μόνο μία τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής.

Με την εμφάνιση της θεωρίας συνόλων από τον Cantor (1845-1918) συνεχίστηκε η εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης. Η συνάρτηση πλέον έγινε μία αυθαίρετη αντιστοίχιση μεταξύ δύο αυθαίρετων συνόλων έτσι, ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω μοναδική συνθήκη. Τον 20ο αιώνα οι μαθηματικοί πέρασαν από την έννοια της αντιστοίχισης στην έννοια της σχέσης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στη διαμόρφωση της έννοιας του ορίου και της συνέχειας μιας συνάρτησης σημαντικό ρόλο έπαιξαν οι μαθηματικοί A. Cauchy (1789-1857) και K. Weierstrass (1815-1897), οι οποίοι έδωσαν τους ορισμούς των εννοιών αυτών με την μορφή που έχουν σήμερα. Ο πρώτος χρησιμοποίησε ανισότητες για τον ορισμό του ορίου και της συνέχειας και ο δεύτερος εξέφρασε τις ανισότητες αυτές με τα γνωστά ϵ και δ.

Αρκετοί κλάδοι των Μαθηματικών χρησιμοποιούν, έμμεσα ή άμεσα, την έννοια της συνάρτησης. Για παράδειγμα, η Μαθηματική Ανάλυση ασχολείται με συναρτήσεις μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών καθώς και με τις παραγώγους αυτών. Ο κλάδος των Διαφορικών και Ολοκληρωτικών Εξισώσεων έχει ως στόχο την επίλυση εξισώσεων των οποίων οι άγνωστες ποσότητες είναι συναρτήσεις. Η Συναρτησιακή Ανάλυση ασχολείται με χώρους οι οποίοι έχουν ως στοιχεία συναρτήσεις. Η Αριθμητική Ανάλυση προσπαθεί να ελέγξει τα σφάλματα που προκύπτουν από τις αριθμητικές αποτιμήσεις συναρτήσεων κ.ο.κ. Υπάρχουν και κλάδοι των Μαθηματικών που χρησιμοποιούν γενικεύσεις της έννοιας της συνάρτησης, όπως για παράδειγμα η Άλγεβρα που χρησιμοποιεί τελεστές ή η Λογική που χρησιμοποιεί σχέσεις αναδρομής.

Ωστόσο, ένα από τα ερωτήματα που τίθενται για ένα σύνολο συναρτήσεων είναι αυτό της σύγκλισης των στοιχείων του. Τέτοιου είδους προβλήματα εμφανίζονται στις Διαφορικές Εξισώσεις, στη Θεωρία Πιθανοτήτων και σε άλλους κλάδους των

Μαθηματικών. Η αντιμετώπιση του προβλήματος μπορεί να γίνει από τη σκοπιά της Γενικής Τοπολογίας ορίζοντας μία τοπολογία επ' αυτού του συνόλου. Ένα τέτοιο σύνολο, για παράδειγμα, είναι το $C(Y, Z)$, το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από τον τοπολογικό χώρο Y στον τοπολογικό χώρο Z. Επί του συνόλου $C(Y, Z)$ έχουν ορισθεί αρκετές τοπολογίες, η Fine τοπολογία, η Krikorian τοπολογία, η open-cover τοπολογία, η Graph τοπολογία, η Proximal graph τοπολογία κ.ά. Αν t είμαι μία τοπολογία επί του $C(Y, Z)$, τότε τον αντίστοιχο τοπολογικό χώρο τον συμβολίζουμε με $C_t(Y, Z)$. Βέβαια, έχουν ορισθεί και τοπολογίες σε γενικότερα σύνολα συναρτήσεων, όπως είναι η product τοπολογία, η box τοπολογία, η uniform τοπολογία κ.ά.

Δύο από αυτές είναι και οι τοπολογίες compact - open και Isbell επί του $C(Y, Z)$. Η πρώτη εξ αυτών ορίσθηκε το 1945 από τον R.H.Fox (1913-1973) και η δεύτερη παρουσιάσθηκε το 1975 από τον J.R.Isbell (1930 - 2005). Για την Isbell τοπολογία χρησιμοποιήθηκε η Scott τοπολογία, η οποία παρουσιάσθηκε το 1972 από τον D.Scott.

Ralph Hartzler Fox[1]

[1]Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Ralph_Fox

Ο Αμερικανός μαθηματικός Ralph Hartzler Fox, ως καθηγητής του Princeton University επέβλεψε 21 διδακτορικές διατριβές και έπαιξε σημαντικό ρόλο στον εκμοντερνισμό της Θεωρίας των Κόμβων. Θεωρούσε την compact-open τοπολογία των χώρων συναρτήσεων ως την καταλληλότερη για την Ομοτοπική Θεωρία.

Ο John Rolfe Isbell, επίσης Αμερικανός μαθηματικός, για πολλά χρόνια διετέλεσε καθηγητής του Buffalo University (Suny). Ο Isbell έλαβε το διδακτορικό του στο

Princeton University, το 1954, υπό την επίβλεψη του Albert W. Tucker. Δημοσίευσε 140 εργασίες με το όνομά του και αρκετές χρησιμοποιώντας ψευδώνυμα. Υπήρξε από τους πρωτεργάτες της θεωρίας των Uniform Χώρων.

Πολλές, λοιπόν, τοπολογίες έχουν ορισθεί επί του $C(Y, Z)$ και πολλές μπορούν να ορισθούν, αλλά αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η ταξινόμησή τους. Η συνηθέστερη ταξινόμηση των τοπολογιών επί του $C(Y, Z)$ γίνεται σύμφωνα με το αν:

(1) η σύγκλιση στον τοπολογικό χώρο $C_t(Y, Z)$ συνεπάγεται τη συνεχή σύγκλιση,

(2) η συνεχής σύγκλιση συνεπάγεται τη σύγκλιση στον τοπολογικό χώρο $C_t(Y, Z)$.

Μία διαφορετική προσέγγιση της ίδιας ταξινόμησης έχει ως εξής (βλέπε [3]): έστω οι τοπολογικοί χώροι X, Y και Z. Για τη συνάρτηση $g : X \times Y \to Z$ ορίζουμε τη συνάρτηση $g^* : X \to C_t(Y, Z)$ για την οποία ισχύει $g^*(x)(y) = g(x, y)$, για κάθε $y \in Y$. Τότε μία τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ μπορεί να είναι τέτοια, ώστε για κάθε χώρο X να ισχύει:

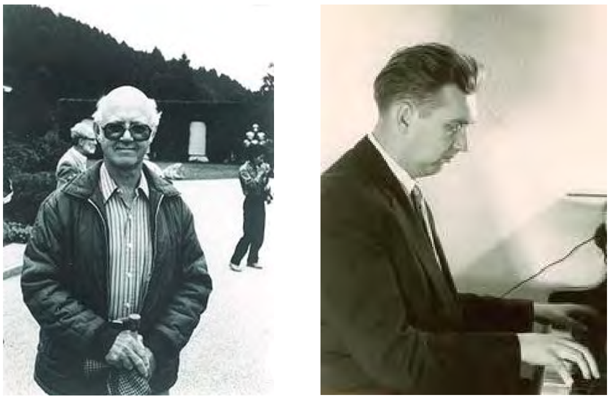
(3) εάν η g είναι συνεχής, τότε η g^* είναι συνεχής,

(4) εάν η g^* είναι συνεχής, τότε η g είναι συνεχής.

Οι τοπολογίες της περίπτωσης (3) ορίσθηκαν από τον R. Arens το 1946 και ονομάσθηκαν admissible (συνδετικά συνεχείς). Οι τοπολογίες της περίπτωσης (4) ορίσθηκαν το 1951, από τους R.Arens και J.Dugundji και ονομάστηκαν proper ή splitting (διαχωριστικές).

Ο Richard Friederich Arens (1919-2000) γεννήθηκε στη Γερμανία και μετανάστευσε σε νεαρή ηλικία στις Η.Π.Α. Ο Arens ολοκλήρωσε τη διδακτορική του διατριβή στο Harvard University. Εργάστηκε για πάνω από 40 έτη ως καθηγητής στο UCLA και διετέλεσε (1965-1979) μέλος του editorial board του επιστημονικού περιοδικού Pacific Journal of Mathematics. Υπάρχουν τρεις τοπολογικοί χώροι που φέρουν το όνομά του (βλ. [75]).

Ο James Dugundji (1919-1985) ήταν Αμερικανός μαθηματικός, του οποίου οι γονείς ήταν μετανάστες. Επιβλέπων της διδακτορικής του διατριβής ήταν ο Witold Hurewics. Ο Dugundji εργάστηκε ως καθηγητής στο University of South California και διετέλεσε για πολλά έτη μέλος του editorial board του επιστημονικού περιοδικού Pacific Journal of Mathematics. Είναι συγγραφέας του εγχειριδίου Topology (Allyn and Bacon, 1966).



Εικόνα 4: Richard Friederich Arens[1] & James Dugundji[2]

[1]Πηγή: https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Friederich_Arens

[2]Πηγή: https://openlibrary.org/works/OL5556022W/Fixed_point_theory

Ένα άλλο αξιωσημείωτο σύνολο συναρτήσεων, το οποίο αποτέλεσε πεδίο έρευνας αυτής της διατριβής, είναι το $\mathcal{M}(Y, Z)$, το σύνολο των μετρήσιμων (ή Borel) απεικονίσεων του τοπολογικού χώρου Y στον τοπολογικό χώρο Z. Οι Borel (μετρήσιμοι) χώροι εισήχθησαν από τον G. W. Mackey (1916-2006). Ο Mackey ήταν Αμερικανός μαθηματικός ο οποίος απέκτησε το διδακτορικό του το 1938 στο Harvard University με επιβλέποντα τον Marsall H. Stone. Εργάστηκε ως καθηγητής στο Harvard University μέχρι την συνταξιοδότησή του το 1985.

Εικόνα 5: G. W. Mackey[1]

[1]Πηγή: http://abel.harvard.edu/history/mackey/index.html

Οι Robert J. Aumann και B.V. Rao (βλέπε [5] και [76]) προσπάθησαν να γενικεύσουν τα αποτελέσματα των R. Arens και J. Dugundji (βλέπε [3]). Ο R. J. Aumann στην εργασία [5] παρατήρησε ότι κάποια αποτελέσματα της εργασίας [3] δεν αληθεύουν σε Borel χώρους. Είναι αδύνατον να κατασκευάσεις μια Borel δομή επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$ τέτοια, ώστε η απεικόνιση εκτίμησης:

$$e : \mathcal{M}(Y, Z) \times Y \to Z,$$

με τιμή $e(f, y) = f(y)$ για κάθε $y \in Y$ και για κάθε $f \in \mathcal{M}(Y, Z)$ να είναι Borel. Για το λόγο αυτό, οι συγγραφείς των [5] και [76] μελέτησαν υποσύνολα $\mathbf{F}$ του $\mathcal{M}(Y, Z)$ τέτοια, ώστε ο περιορισμός της απεικόνισης εκτίμησης e στο $\mathbf{F} \times Y$ να είναι Borel συνάρτηση.

Στην εργασία [30] μελετήθηκε το παραπάνω πρόβλημα και γενικεύθηκαν κάποια αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην [3], σε Borel χώρους. Πιο συγκεκριμένα, μελετήθηκαν και παρουσιάστηκαν αποτελέσματα για τις κλάσεις των Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών δομών, όπου $\mathcal{A}$ αυθαίρετη αλλά σταθερή οικογένεια Borel χώρων. Αποδείχθηκε ότι υπάρχει το πολύ μία Borel δομή που είναι ταυτόχρονα Borel διαχωριστική και Borel συνδετικά συνεχής. Επίσης, σημειώνεται ότι αν αυτή η δομή υπάρχει, τότε συμπίπτει με τη μεγαλύτερη Borel διαχωριστική δομή, η οποία υπάρχει πάντα. Τέλος, ορίσθηκαν και μελετήθηκαν σχέσεις μεταξύ των Borel δομών επί των συνόλων $\mathcal{M}(Y, Z)$ και $\mathcal{B}_Z(Y)$, όπου $\mathcal{B}_Z(Y)$ είναι το σύνολο που αποτελείται από τα υποσύνολα $f^{-1}(B)$ του Y με $f \in \mathcal{M}(Y, Z)$ και B στοιχείο της Borel δομής του Z.

Η διατριβή αυτή αποτελείται από δύο μέρη. Το Μέρος Α αποτελείται από τα Κεφάλαια 1 και 2. Τα κεφάλαια αυτά περιέχουν τις κυριότερες προαπαιτούμενες γνώσεις που χρησιμοποιούνται στο Μέρος Β, το οποίο αποτελεί και το ερευνητικό μέρος της διατριβής αυτής. Το Μέρος Β αποτελείται από τα Κεφάλαια 3, 4, 5 και 6 των οποίων τα αποτελέσματα είναι πρωτότυπα (βλέπε [32], [33] και [34]).

Ειδικότερα, στο Κεφάλαιο 1 δίνουμε βασικές έννοιες της Γενικής Τοπολογίας, στοιχεία για τις συνεχείς απεικονίσεις και παρουσιάζουμε τις έννοιες της σ-άλγεβρας, των μετρήσιμων συνόλων και των zero-sets.

Το Κεφάλαιο 2 αναφέρεται στους Χώρους Συναρτήσεων. Δίνουμε βασικούς ορισμούς, προτάσεις και περιγράφουμε τις κλάσεις των διαχωριστικών και συνδετικά συνεχών τοπολογιών. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζουμε τις τοπολογίες Isbell, quasi-Isbell και strong-Isbell.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε έναν τρόπο κατασκευής μιας οικογένειας τοπολογιών, επί του συνόλου $C(Y,Z)$ των συνεχών συναρτήσεων του χώρου Y στο χώρο Z. Τις τοπολογίες αυτές καλούμε $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open. Επίσης, μελετάμε αυτές τις τοπολογίες και τις χαρακτηρίζουμε, όσον αφορά τις έννοιες των $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών, όπου $\mathcal{A}$ είναι οικογένεια τοπολογικών χώρων.

Στο Κεφάλαιο 4 εισάγουμε και παρουσιάζουμε τις έννοιες των μετρήσιμων και χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ των μετρήσιμων συναρτήσεων από το χώρο Y στο χώρο Z, όπου $\mathcal{A}$ είναι μία τυχαία αλλά σταθερή οικογένεια τοπολογικών χώρων. Επισημαίνουμε ότι στο σύνολο $\mathcal{M}(Y,Z)$ δεν υπάρχει η μεγαλύτερη χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία. Το γεγονός αυτό αποτελεί μία διαφοροποίηση από την κλασσική θεωρία των χώρων συναρτήσεων. Επίσης, ορίζουμε και μελετάμε σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ και του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$, όπου $\sigma_Z(\tau_Y)$ το σύνολο που αποτελείται από τα υποσύνολα $f^{-1}(B)$ του Y με $f \in \mathcal{M}(Y,Z)$ και B μετρήσιμο υποσύνολο του Z.

Στο Κεφάλαιο 5 εισάγουμε και παρουσιάζουμε τις έννοιες των Baire μετρήσιμων και χωριστά Baire μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ των Baire μετρήσιμων συναρτήσεων από το χώρο Y στο χώρο Z, όπου $\mathcal{A}$ είναι μία τυχαία αλλά σταθερή οικογένεια που αποτελείται από πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους. Παρατηρούμε ότι στο σύνολο $\mathcal{B}(Y,Z)$ δεν υπάρχει η μεγαλύτερη χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$ διαχωριστική τοπολογία. Στη συνέχεια, μελετάμε σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών επί των συνόλων $\mathcal{B}(Y,Z)$ και $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$, όπου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ το σύνολο που αποτελείται από τα υποσύνολα $f^{-1}(B)$ του Y με $f \in \mathcal{B}(Y,Z)$ και $B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))$.

Στο Κεφάλαιο 6 εισάγουμε και μελετάμε τοπολογίες επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ των Borel απεικονίσεων κλάσης α του χώρου Y στο χώρο Z, όπου α ένας διατακτικός αριθμός μικρότερος του πρώτου μη αριθμήσιμου διατακτικού αριθμού ω_1. Θεωρούμε μία τυχαία αλλά σταθερή κλάση $\mathcal{A}$ με στοιχεία G_δ-χώρους και ορίζουμε τις έννοιες των χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστικών τοπολογιών κλάσης α και χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών κλάσης α. Επισημαίνουμε ότι στο σύνολο $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ δεν υπάρχει η μεγαλύτερη χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία. Επίσης, μελετάμε σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ και επί του συνόλου $\mathbf{G}^{Z}_{\alpha}(Y)$, όπου $\mathbf{G}^{Z}_{\alpha}(Y)$ το σύνολο που αποτελείται από τα υποσύνολα $f^{-1}(U)$ του χώρου Y με $f \in \mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Στην τελευταία παράγραφο παρουσιάζουμε ερωτήσεις που προέκυψαν στην μελέτη μας και τα οποία θα μας απασχολήσουν ερευνητικά στο μέλλον.

Τέλος, ακολουθεί η βιβλιογραφία της διατριβής η οποία έπαιξε σημαντικό ρόλο όχι μόνο στη συγγραφή αλλά και στην άντληση των θεμάτων που αποτέλεσαν και το κύριο μέρος αυτής της διατριβής. Μετά τη βιβλιογραφία ακολουθεί ευρετήριο όρων με σκοπό τη γρηγορότερη αναζήτηση εννοιών.

ΜΕΡΟΣ Α

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες της τοπολογίας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικές έννοιες της τοπολογίας που είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη αυτής της διατριβής. Ειδικότερα, παρουσιάζονται έννοιες από τα αξιώματα διαχωρισιμότητας, από τις συνεχείς συναρτήσεις και από τους συμπαγείς χώρους.

1.1 Βασικές έννοιες

Σημείωση. Με τ_X συμβολίζουμε την τοπολογία του τοπολογικού χώρου X.

1.1.1 Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα υποσύνολο β της τ_X καλείται *βάση της τοπολογίας* τ_X ή *βάση του χώρου* X εάν κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι ένωση στοιχείων του β.

1.1.2 Πρόταση. Ένα υποσύνολο β της τ_X είναι βάση του χώρου X εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U του x υπάρχει στοιχείο V του β τέτοιο ώστε $x \in V \subseteq U$.

1.1.3 Πόρισμα. Έστω β βάση ενός τοπολογικού χώρου X. Τότε ισχύουν τα εξής:

(1) Η ένωση όλων των στοιχείων του συνόλου β είναι το σύνολο X.

(2) Εάν $U, V \in \beta$ και $x \in U \cap V$, τότε υπάρχει στοιχείο $W \in \beta$ με $x \in W \subseteq U \cap V$.

1.1.4 Πρόταση. Έστω β σύνολο υποσυνόλων του X με τις ιδιότητες (1) και (2) του

Πορίσματος 1.1.3. Τότε, υπάρχει μοναδική τοπολογία τ επί του X για την οποία το σύνολο β είναι βάση.

1.1.5 Ορισμός. Έστω γ υποσύνολο της τοπολογίας τ_X ενός χώρου X. Το σύνολο γ καλείται *υποβάση* της τοπολογίας τ_X ή του χώρου X εάν το σύνολο το αποτελούμενο από τις πεπερασμένες τομές στοιχείων του γ είναι βάση της τοπολογίας τ_X.

1.1.6 Πρόταση. Έστω X σύνολο και γ σύνολο υποσυνόλων του X με την ιδιότητα: η ένωση όλων των στοιχείων του γ είναι το σύνολο X. Τότε, υπάρχει μοναδική τοπολογία τ επί του X για την οποία το σύνολο γ είναι υποβάση.

1.1.7 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *T_0-χώρος* εάν για κάθε δύο σημεία x και y του X, διάφορα μεταξύ τους, υπάρχει ανοικτό σύνολο U του X που περιέχει το ένα από τα παραπάνω σημεία και δεν περιέχει το άλλο.

1.1.8 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *T_1-χώρος* εάν για κάθε δύο σημεία x και y του X, διάφορα μεταξύ τους, υπάρχει ανοικτό σύνολο U του X που περιέχει το σημείο x, δηλαδή το πρώτο, και δεν περιέχει το δεύτερο σημείο y.

1.1.9 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *T_2-χώρος* ή *χώρος Hausdorff* εάν κάθε δύο σημεία x και y του X, διάφορα μεταξύ τους, έχουν ανοικτές ξένες μεταξύ τους περιοχές U και V, δηλαδή $U \cap V = \emptyset$. Στην περίπτωση αυτή η τοπολογία του χώρου X καλείται *τοπολογία Hausdorff*.

1.1.10 Παρατήρηση. Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα ότι κάθε Hausdorff χώρος είναι και T_1-χώρος και κάθε T_1-χώρος είναι και T_0-χώρος. Γενικά το αντίστροφο δεν ισχύει.

1.1.11 Πρόταση. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι T_1-χώρος εάν και μόνον εάν για κάθε σημείο $x \in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

1.1.12 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *T_3-χώρος* εάν για κάθε σημείο x του X και για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X που δεν περιέχει το x, υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V του X τέτοια ώστε $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$.

1.1.13 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *κανονικός* (*regular*) χώρος εάν αυτός είναι ταυτοχρόνως T_1-χώρος και T_3-χώρος.

1.1.14 Πρόταση. Έστω X T_1-χώρος. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Ο χώρος X είναι κανονικός.

(2) Για κάθε σημείο $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή V του x υπάρχει μία ανοικτή περιοχή U του x τέτοια ώστε $Cl(U) \subseteq V$.

1.1.15 Παρατήρηση. Κάθε κανονικός χώρος είναι χώρος Hausdorff.

1.1.16 Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος και A, B δύο ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα αυτού. Λέγεται ότι τα σύνολα A και B *διαχωρίζονται με συνάρτηση* εάν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to I = [0, 1]$ του χώρου τέτοια ώστε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in A$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in B$.

1.1.17 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται $T_{3\frac{1}{2}}$-*χώρος* εάν για κάθε σημείο $x \in X$ και για κάθε κλειστό υποσύνολο F του X που δεν περιέχει το x, τα σύνολα $\{x\}$ και F διαχωρίζονται με συνάρτηση, δηλαδή υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to I = [0, 1]$ του X τέτοια ώστε $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in F$.

1.1.18 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος καλείται *πλήρως κανονικός* ή *χώρος Tychonoff* εάν ο χώρος αυτός είναι ένας T_1-χώρος και $T_{3\frac{1}{2}}$-χώρος.

1.1.19 Πρόταση. Κάθε χώρος Tychonoff είναι κανονικός χώρος.

1.1.20 Πρόταση. Ένας T_1-χώρος X είναι χώρος Tychonoff εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή V του x που ανήκει σε μία δοθείσα υποβάση γ του X, υπάρχει συνεχής συνάρτηση f του X τέτοια ώστε $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$, για κάθε $y \in X \setminus V$.

1.1.21 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται T_4-*χώρος* εάν για κάθε ζεύγος A και B, ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V τέτοια ώστε $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$.

1.1.22 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *φυσικός* (*normal*) χώρος εάν είναι T_1-χώρος και T_4-χώρος.

1.1.23 Πρόταση (Λήμμα Urysohn). Έστω X φυσικός χώρος και A, B ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση f του X τέτοια ώστε $f(x) = 0$, για κάθε $x \in A$ και $f(x) = 1$, για κάθε $x \in B$.

1.1.24 Πρόταση. Κάθε φυσικός χώρος είναι χώρος Tychonoff.

1.1.25 Πρόταση. Έστω X τοπολογικός χώρος. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Ο χώρος X είναι T_4-χώρος.

(2) Για κάθε F κλειστό υποσύνολο του X και για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του X τέτοιο, ώστε $F \subseteq U$, υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $F \subseteq V \subseteq Cl(V) \subseteq U$.

1.1.26 Πρόταση. Έστω X τοπολογικός χώρος και A υπόχωρος του X. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Αν ο X είναι T_i-χώρος με $i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$, τότε και ο υπόχωρος A είναι T_i-χώρος με $i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

(2) Αν ο X είναι φυσικός χώρος, τότε και κάθε κλειστός υπόχωρος του X είναι φυσικός.

1.1.27 Ορισμός. Έστω n φυσικός, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ σύνολα και

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων αυτών. Η απεικόνιση $\pi_i : X \to X_i$ με $\pi_i(x) \in X_i$ καλείται *i-προβολή* ή *προβολή i-τάξης* για $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.1.28 Ορισμός. Έστω n φυσικός και $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \ldots, (X_n, \tau_n)$ τοπολογικοί χώροι. Η οικογένεια

$$\beta = \{G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n : G_1 \in \tau_1, G_2 \in \tau_2 \ldots, G_n \in \tau_n\}$$

είναι βάση για μια (μοναδική) τοπολογία τ του γινομένου $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Η τοπολογία τ καλείται *καρτεσιανή τοπολογία* ή *τοπολογία γινόμενο* του X και η οικογένεια β καλείται *κανονική βάση* της τοπολογίας γινόμενο του X.

1.1.29 Πρόταση. Έστω n φυσικός, $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \ldots, (X_n, \tau_n)$ τοπολογικοί χώροι και τ η τοπολογία γινόμενο του $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Τότε

(1) Η οικογένεια

$$\{G_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n : G_1 \in \tau_1\} \bigcup \ldots \bigcup \{X_1 \times X_2 \times \ldots \times G_n : G_n \in \tau_n\}$$

$$= \{\pi_i^{-1}(G) : i = 1, 2, \ldots, n, G \in \tau_i\}$$

είναι μία υποβάση της τοπολογίας τ.

(2) Η τ είναι η μικρότερη τοπολογία επί του χώρου X, για την οποία καθε i-προβολή, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι συνεχής απεικόνιση.

1.1.30 Ορισμός. Ένα σύνολο ψ υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X καλείται *κάλυψη* του X εάν η ένωση όλων των στοιχείων του ψ είναι το X. Μία κάλυψη ψ καλείται *ανοικτή* (αντίστοιχα, *κλειστή*) εάν όλα τα στοιχεία της είναι ανοικτά (αντίστοιχα, κλειστά) υποσύνολα του X.

1.1.31 Ορισμός. Μία κάλυψη π ενός τοπολογικού χώρου X καλείται *υποκάλυψη* της καλύψεως ψ του X εάν κάθε στοιχείο της π είναι στοιχείο της ψ, δηλαδή $\pi \subseteq \psi$.

1.1.32 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *συμπαγής* εάν κάθε ανοικτή κάλυψη του X περιέχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

1.1.33 Ορισμός. Έστω π οικογένεια υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X. Λέγεται ότι η οικογένεια αυτή έχει την *ιδιότητα της πεπερασμένης τομής* εάν η τομή οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της π είναι μη κενή.

1.1.34 Πρόταση. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής έχει μη κενή τομή.

1.1.35 Πρόταση. Κάθε κλειστός υπόχωρος ενός συμπαγούς χώρου είναι συμπαγής.

1.1.36 Πρόταση. Έστω $F_1, ..., F_n$ κλειστά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X. Ο υπόχωρος $F = F_1 \cup ... \cup F_n$ είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν κάθε υπόχωρος F_i, $i = 1, ..., n$, είναι συμπαγής.

1.1.37 Πρόταση. Κάθε συμπαγής υπόχωρος ενός Hausdorff χώρου X είναι κλειστό υποσύνολο του X.

1.1.38 Πρόταση. Κάθε συμπαγής Hausdorff χώρος είναι φυσικός.

1.1.39 Ορισμός. Ένας χώρος X καλείται τοπικά συμπαγής όταν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x η κλειστή θήκη της οποίας, δηλαδή το σύνολο $Cl(U)$, είναι συμπαγές.

1.1.40 Ορισμός. Έστω X χώρος και $B \subseteq X$. Το B καλείται *περατωμένο (bounded)* εάν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα για το B.

1.1.41 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *τοπικά περατωμένος* εάν κάθε σημείο $x \in X$, έχει ανοικτή περιοχή η οποία είναι περατωμένο υποσύνολο του X.

1.1.42 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *καρδιακά συμπαγής (core-compact)* εάν για κάθε ανοικτή περιοχή U ενός τυχαίου σημείου $x \in X$, υπάρχει ανοικτή περιοχή $V \subseteq U$ του x τέτοια, ώστε ο υπόχωρος V να είναι περατωμένος στο χώρο U.

1.1.43 Πρόταση. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι καρδιακά συμπαγής εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U του x, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x τέτοια, ώστε

(1) $V \subseteq U$

(2) Για κάθε οικογένεια $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau_X$ τέτοια, ώστε $U \subseteq \bigcup\{U_i : i \in I\}$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο J του I τέτοιο, ώστε $V \subseteq \bigcup\{U_i : i \in J\}$.

1.2 Συνεχείς συναρτήσεις

1.2.1 Ορισμός. Έστω (X, τ_X) και (Y, τ_Y) δύο τοπολογικοί χώροι. Κάθε απεικόνιση $f : X \to Y$ του συνόλου X στο σύνολο Y καλείται *απεικόνιση* του χώρου (X, τ_X) στο χώρο (Y, τ_Y). Η απεικόνιση f του χώρου (X, τ_X) στο χώρο (Y, τ_Y) συμβολίζεται επίσης και ως

$$f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y).$$

1.2.2 Ορισμός. Έστω $f : X \to Y$ απεικόνιση ενός χώρου X σ' ένα χώρο Y. Η απεικόνιση f καλείται *συνεχής* σ' ένα σημείο x του X εάν για κάθε ανοικτή περιοχή U του σημείου $f(x)$ στο χώρο Y, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του σημείου x στο χώρο X τέτοια ώστε $f(V) \subseteq U$.

1.2.3 Ορισμός. Μία απεικόνιση f ενός χώρου X σ' ένα χώρο Y καλείται *συνεχής* όταν αυτή είναι συνεχής σε κάθε σημείο x του χώρου X.

1.2.4 Πρόταση. Η απεικόνιση f του χώρου X στο χώρο Y είναι συνεχής εάν και μόνον εάν για κάθε ανοικτό σύνολο V του χώρου Y, το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στο χώρο X.

1.2.5 Πρόταση. Η απεικόνιση f του χώρου X στο χώρο Y είναι συνεχής εάν και μόνον εάν για κάθε κλειστό σύνολο F του χώρου Y, το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο χώρο X.

1.2.6 Πρόταση. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Η απεικόνιση f είναι συνεχής.

(2) Υπάρχει υποβάση γ του χώρου Y τέτοια, ώστε για κάθε $V \in \gamma$ το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στο X.

(3) Υπάρχει βάση β του χώρου Y τέτοια, ώστε για κάθε $V \in \beta$ το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό στο χώρο X.

1.2.7 Πρόταση. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Η απεικόνιση f είναι συνεχής.

(2) Για κάθε υποσύνολο A του X ισχύει:

$$f(Cl(A)) \subseteq Cl(f(A)).$$

(3) Για κάθε υποσύνολο B του Y ισχύει:

$$Cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(Cl(B)).$$

1.2.8 Πρόταση. Έστω $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ συνεχείς απεικονίσεις. Τότε η απεικονίση $h = g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής απεικόνιση.

1.2.9 Ορισμός. Μία ένα - προς - ένα απεικόνιση f ενός τοπολογικού χώρου X επί ενός τοπολογικού χώρου Y καλείται *ομοιομορφισμός* εάν η f και η αντίστροφή της, f^{-1}, είναι συνεχείς απεικονίσεις. Στην περίπτωση αυτή οι χώροι X και Y καλούνται *ομοιόμορφοι* και συμβολικά γράφουμε $X \sim Y$.

1.2.10 Πρόταση. Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η εικόνα $f(X)$ είναι συμπαγής υπόχωρος του Y.

1.2.11 Πρόταση. Έστω f ένα-προς-ένα και συνεχής απεικόνιση ενός συμπαγούς χώρου X επί ενός Hausdorff χώρου Y. Τότε η απεικόνιση f είναι ομοιομορφισμός.

1.2.12 Ορισμός. Κάθε απεικόνιση ενός τοπολογικού χώρου X στο χώρο $\mathbb{R}$ καλείται *συνάρτηση*.

1.3 σ-άλγεβρα - Μετρήσιμα σύνολα - Zero-sets

1.3.1 Ορισμός. Έστω X σύνολο. *Άλγεβρα* επί του συνόλου X καλείται μία οικογένεια υποσυνόλων του X που περιέχει το $\emptyset$ και είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις πεπερασμένες ενώσεις. Αν, επιπλέον, μία άλγεβρα είναι κλειστή και στις αριθμήσιμες ενώσεις τότε καλείται *σ-άλγεβρα* .

1.3.2 Ορισμός. Έστω X σύνολο και $\mathcal{S}$ μία σ-άλγεβρα επί του X. Το ζεύγος $(X, \mathcal{S})$ καλείται *μετρήσιμος* (ή *Borel*) *χώρος*. Τα στοιχεία της οικογένειας $\mathcal{S}$ καλούνται *μετρήσιμα* (ή *Borel*) *σύνολα*.

1.3.3 Ορισμός. Έστω X σύνολο και $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{E}$, καλείται *σ-άλγεβρα παραγόμενη από την οικογένεια* $\mathcal{E}$ και συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{E})$. Η $\mathcal{E}$ καλείται *σύνολο γεννητόρων* για την $\sigma(\mathcal{E})$.

1.3.4 Πρόταση. Έστω $(Y, \mathcal{S}_1)$ και $(Z, \mathcal{S}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι και $\mathcal{E}$ η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του $Y \times Z$ που περιέχει τα σύνολα της μορφής $A \times B$, όπου $A \in \mathcal{S}_1$ και $B \in \mathcal{S}_2$. Το ζεύγος $(Y \times Z, \sigma(\mathcal{E}))$ είναι *μετρήσιμος χώρος*.

1.3.5 Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του χώρου X συμβολίζεται με $\sigma(\tau_X)$ και τα στοιχεία της καλούνται *μετρήσιμα* (ή *Borel*) *σύνολα* του τοπολογικού χώρου X.

1.3.6 Παρατήρηση. Η $\sigma(\tau_X)$ είναι η μικρότερη οικογένεια υποσυνόλων του X που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του X και είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις.

1.3.7 Ορισμός. Έστω X ένας πλήρως κανονικός Hausdorff χώρος. Ένα υποσύνολο A του X καλείται *zero-set* στον X, αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ (όπου $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία) τέτοια, ώστε $A = f^{-1}(\{0\})$. Το σύνολο των zero-sets του X συμβολίζεται με $\mathcal{Z}(X)$.

1.3.8 Ορισμός. Έστω X ένας πλήρως κανονικός Hausdorff χώρος. Ένα υποσύνολο A του X καλείται *cozero-set* του X, αν το συμπληρωματικό του, $X \setminus A$, είναι zero-set του X.

1.3.9 Πρόταση. Έστω X ένας πλήρως κανονικός Hausdorff χώρος. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Κάθε zero-set του X είναι κλειστό στο X.

(2) Η ένωση και η τομή πεπερασμένου πλήθους zero-sets του X είναι zero-sets του X.

(3) Η τομή αριθμήσιμου πλήθους zero-sets του X είναι zero-set του X.

1.3.10 Πρόταση. Έστω X ένας πλήρως κανονικός Hausdorff χώρος. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Κάθε cozero-set του X είναι ανοικτό στο X.

(2) Η ένωση και η τομή πεπερασμένου πλήθους cozero-sets του X είναι cozero-sets του X.

(3) Η ένωση αριθμήσιμου πλήθους cozero-sets του X είναι cozero-set του X.

1.3.11 Ορισμός. Έστω X ένας πλήρως κανονικός Hausdorff χώρος. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα zero-sets του X καλείται *Baire* και συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{Z}(X))$.

Τα στοιχεία του $\sigma(\mathcal{Z}(X))$ καλούνται *Baire σύνολα* και το ζεύγος $(X, \sigma(\mathcal{Z}(X)))$ καλείται *Baire-χώρος* του X.

1.3.12 Παρατηρήσεις. (1) Το $\sigma(\mathcal{Z}(X))$ περιέχει όλα τα zero και cozero-sets του X.

(2) Το ζεύγος $(X, \sigma(\mathcal{Z}(X)))$ είναι μετρήσιμος χώρος.

(3) Αν ο χώρος X είναι μετρικοποιήσιμος, τότε $\sigma(\mathcal{Z}(X)) = \sigma(\tau_X)$.

Κεφάλαιο 2

Χώροι συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε δυο αξιοσημείωτες τοπολογίες επί του συνόλου $C(Y,Z)$ των συνεχών απεικονίσεων από έναν τοπολογικό χώρο Y σ' έναν τοπολογικό χώρο Z. Συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε τη συμπαγή-ανοικτή τοπολογία και τη σημειακή-ανοικτή τοπολογία. Επίσης, περιγράφουμε την ταξινόμηση των τοπολογιών του $C(Y,Z)$ σε διαχωριστικές και συνδετικά συνεχείς. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζουμε τη Scott τοπολογία, επί του συνόλου $\mathcal{O}(X)$, των ανοικτών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X. Με τη βοήθεια της Scott τοπολογίας και με παραλλαγές της, ορίζονται η Isbell, η quasi-Isbell και η strong-Isbell τοπολογία επί του συνόλου $C(Y,Z)$.

2.1 Η συμπαγής - ανοικτή τοπολογία

Σε ό,τι ακολουθεί Y και Z είναι δύο τυχαίοι τοπολογικοί χώροι.

2.1.1 Συμβολισμοί. Έστω X τοπολογικός χώρος. Με $\mathcal{O}(X)$ και $\mathcal{K}(X)$ συμβολίζουμε, αντίστοιχα, το σύνολο των ανοικτών και το σύνολο των συμπαγών υποσυνόλων του X. Με $C(Y,Z)$ συμβολίζουμε το σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από το χώρο Y στο χώρο Z. Αν t είναι τοπολογία επί του συνόλου $C(Y,Z)$, τότε τον αντίστοιχο τοπολογικό χώρο τον συμβολίζουμε με $C_t(Y,Z)$.
Έστω K υποσύνολο του Y και U υποσύνολο του Z. Θέτουμε

$$(K,U) = \{f \in C(Y,Z) : f(K) \subseteq U\}$$

Εάν $K = \{x\}$, τότε γράφουμε (x, U) αντί για $(\{x\}, U)$.

2.1.2 Ορισμός. Η τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ που έχει υποβάση τα σύνολα (K, U), όπου $K \in \mathcal{K}(Y)$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$, καλείται *συμπαγής - ανοικτή* τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ και συμβολίζεται με t_{co}.

2.1.3 Πρόταση. Έστω $K, K_i \in \mathcal{K}(Y)$ και $U, U_i \in \mathcal{O}(Z)$, $i = 1, 2, ..., n$. Τότε, ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

(1) $\cap\{(K_i, U) : i = 1, ..., n\} = (\cup\{K_i : i = 1, ..., n\}, U)$.

(2) $\cap\{(K, U_i) : i = 1, ..., n\} = (K, \cap\{U_i : i = 1, ..., n\})$.

(3) $\cap\{(K_i, U_i) : i = 1, ..., n\} \subseteq (\cup\{K_i : i = 1, ..., n\}, \cup\{U_i : i = 1, ..., n\})$

(4) Στο χώρο $C_{t_{co}}(Y, Z)$ έχουμε $Cl(K, U) \subseteq (K, Cl(U))$, όπου

$$(K, Cl(U)) = \{f \in C(Y, Z) : f(K) \subseteq Cl(U)\}.$$

2.1.4 Πρόταση. Για κάθε $z \in Z$ θεωρούμε τη σταθερή απεικόνιση $c_z : Y \to Z$ με $c_z(y) = z$, για κάθε $y \in Y$. Η απεικόνιση

$$g : Z \to C_{t_{co}}(Y, Z)$$

με $g(z) = c_z$ για κάθε $z \in Z$, είναι ομοιομορφισμός του Z επί υποχώρου του $C_{t_{co}}(Y, Z)$.

2.1.5 Πρόταση. Ο χώρος $C_{t_{co}}(Y, Z)$ είναι Hausdorff εάν και μόνον εάν ο Z είναι Hausdorff.

2.1.6 Πρόταση. Ο χώρος $C_{t_{co}}(Y, Z)$ είναι T_1-χώρος εάν και μόνον εάν ο Z είναι T_1-χώρος.

2.1.7 Πρόταση. Ο χώρος $C_{t_{co}}(Y, Z)$ είναι κανονικός εάν και μόνον εάν ο Z είναι κανονικός.

2.1.8 Πρόταση. Ο χώρος $C_{t_{co}}(Y, Z)$ είναι Tychonoff εάν και μόνον εάν ο Z είναι Tychonoff.

2.1.9 Παρατήρηση. Αν ο Z είναι φυσικός χώρος τότε, γενικά ο χώρος $C_{t_{co}}(Y, Z)$ δεν είναι φυσικός. Για παράδειγμα ο χώρος $Z = [0, 1]$ με τη συνήθη τοπολογία είναι φυσικός, αλλά ο $C_{t_{co}}(\mathbb{Q}, [0,1])$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών με την επαγόμενη τοπολογία των πραγματικών αριθμών, δεν είναι φυσικός χώρος. (βλέπε [3])

2.2 Η σημειακή - ανοικτή τοπολογία

2.2.1 Ορισμός. Η τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα (y, U), όπου $y \in Y$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$, καλείται *σημειακή - ανοικτή* τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ και συμβολίζεται με t_p.

2.2.2 Πρόταση. Για τις τοπολογίες t_p και t_{co} επί του $C(Y, Z)$ έχουμε $t_p \subseteq t_{co}$.

2.2.3 Πρόταση. Ο χώρος $C_{t_p}(Y, Z)$ είναι ομοιόμορφος υποχώρου του χώρου γινόμενο

$$\prod\{Z_y : y \in Y\},$$

όπου $Z_y = Z$ για κάθε $y \in Y$.

2.2.4 Πρόταση. Αν ο χώρος Z είναι Hausdorff ή κανονικός ή Tychonoff, τότε και ο χώρος $C_{t_p}(Y, Z)$ είναι Hausdorff ή κανονικός ή Tychonoff, αντίστοιχα.

2.2.5 Πρόταση. Έστω X τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Τότε, η απεικόνιση $F : C_{t_p}(Y, Z) \to C_{t_p}(X, Z)$ με

$$F(g) = g \circ f,$$

για κάθε $g \in C(Y, Z)$, είναι συνεχής.

2.2.6 Πρόταση. Για κάθε $y \in Y$ η απεικόνιση $\omega_y : C_{t_p}(Y, Z) \to Z$ με

$$\omega_y(f) = f(y),$$

για κάθε $f \in C(Y, Z)$, είναι συνεχής.

2.2.7 Πρόταση. Έστω Z Hausdorff χώρος και K συμπαγές υποσύνολο του χώρου $C_{t_p}(Y, Z)$. Τότε το K είναι κλειστό και για κάθε $y \in Y$ το σύνολο $\{f(y) : f \in K\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Z.

2.3 Συνδετικά συνεχείς και διαχωριστικές τοπολογίες

Σε ό,τι ακολουθεί με $\mathcal{A}$ συμβολίζουμε μία τυχαία οικογένεια τοπολογικών χώρων.

2.3.1 Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος και

$$F : X \times Y \to Z$$

συνεχής απεικόνιση. Για κάθε $x \in X$ με

$$F_x : Y \to Z$$

συμβολίζουμε τη συνεχή απεικόνιση για την οποία $F_x(y) = F(x, y)$, για κάθε $y \in Y$. Επίσης, για κάθε $y \in Y$ με

$$F^y : X \to Z$$

συμβολίζουμε τη συνεχή απεικόνιση για την οποία $F^y(x) = F(x, y)$, για κάθε $x \in X$. Με

$$\hat{F} : X \to C(Y, Z)$$

συμβολίζουμε την απεικόνιση για την οποία $\hat{F}(x) = F_x$, για κάθε $x \in X$.
Έστω $G : X \to C(Y, Z)$ απεικόνιση. Με

$$\tilde{G} : X \times Y \to Z$$

συμβολίζουμε την απεικόνιση για την οποία

$$\tilde{G}(x, y) = G(x)(y),$$

για κάθε $(x, y) \in X \times Y$.

2.3.2 Ορισμός. Μια τοπολογία t επί του $C(Y, Z)$ καλείται $\mathcal{A}$-*διαχωριστική* (ή $\mathcal{A}$-proper ή $\mathcal{A}$-splitting) εάν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$, η συνέχεια της απεικόνισης

$$F : X \times Y \to Z$$

συνεπάγεται τη συνέχεια της απεικόνισης

$$\hat{F} : X \to C_t(Y, Z).$$

2.3.3 Ορισμός. Μια τοπολογία t επί του $C(Y,Z)$ καλείται $\mathcal{A}$-*συνδετικά συνεχής* (ή $\mathcal{A}$-jointly continuous ή $\mathcal{A}$-admissible) εάν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$, η συνέχεια της απεικόνισης

$$G : X \to C_t(Y,Z)$$

συνεπάγεται τη συνέχεια της απεικόνισης

$$\tilde{G} : X \times Y \to Z.$$

2.3.4 Παρατήρηση. Αν η κλάση $\mathcal{A}$ των τοπολογικών χώρων συμπίπτει με την κλάση όλων των χώρων, τότε αντί για τον όρο $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία (αντίστοιχα, $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία) χρησιμοποιούμε τον όρο διαχωριστική τοπολογία (αντίστοιχα, συνδετικά συνεχής τοπολογία). Επίσης, αν $\mathcal{A} = \{X\}$, τότε αντί για τον όρο $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία (αντίστοιχα, $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία) χρησιμοποιούμε τον όρο X-διαχωριστική τοπολογία (αντίστοιχα, X-συνδετικά συνεχής τοπολογία).

2.3.5 Ορισμός. Η απεικόνιση

$$e : C(Y,Z) \times Y \to Z$$

με τύπο

$$e(f,y) = f(y),$$

για κάθε $(f,y) \in C(Y,Z) \times Y$, καλείται *απεικόνιση εκτίμησης*.

2.3.6 Πρόταση. Μια τοπολογία t επί του $C(Y,Z)$ είναι συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν η απεικόνιση εκτίμησης

$$e : C_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι συνεχής.

2.3.7 Πρόταση. Για τις τοπολογίες επί του συνόλου $C(Y,Z)$ ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Μια τοπολογία μεγαλύτερη από μια συνδετικά συνεχή τοπολογία είναι επίσης συνδετικά συνεχής.

(2) Μια τοπολογία μικρότερη από μια διαχωριστική τοπολογία είναι επίσης διαχωριστική.

(3) Κάθε συνδετικά συνεχής τοπολογία είναι μεγαλύτερη ή ίση από οποιαδήποτε διαχωριστική τοπολογία.

(4) Υπάρχει μέγιστη διαχωριστική τοπολογία, δηλαδή υπάρχει διαχωριστική τοπολογία που είναι μεγαλύτερη από κάθε διαχωριστική τοπολογία και συνεπώς είναι μοναδική.

(5) Η ελάχιστη συνδετικά συνεχής τοπολογία δεν υπάρχει πάντα.

(6) Η τομή όλων των συνδετικά συνεχών τοπολογιών συμπίπτει με την μεγαλύτερη διαχωριστική τοπολογία. (βλέπε [20])

2.3.8 Παρατήρηση. Η τετριμμένη τοπολογία επί του $C(Y,Z)$ είναι η μικρότερη διαχωριστική τοπολογία και η διακριτική τοπολογία επί του $C(Y,Z)$ είναι η μεγαλύτερη συνδετικά συνεχής τοπολογία.

2.3.9 Πρόταση. Έστω $\{t_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ οικογένεια διαχωριστικών τοπολογιών. Τότε η τοπολογία $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda$ είναι διαχωριστική.

2.3.10 Πρόταση. Η συμπαγής - ανοικτή τοπολογία t_{co} επί του $C(Y,Z)$ είναι διαχωριστική.

2.3.11 Πόρισμα. Η σημειακή - ανοικτή τοπολογία t_p επί του $C(Y,Z)$ είναι διαχωριστική.

2.3.12 Παρατήρηση. Οι Arens και Dugundji (βλέπε [3]) απέδειξαν ότι η τοπολογία t_{co} επί του $C(Y,Z)$ δεν συμπίπτει γενικά με την μέγιστη διαχωριστική τοπολογία του $C(Y,Z)$.

2.3.13 Πρόταση. Εάν ο χώρος Y είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος, τότε η συμπαγής - ανοικτή τοπολογία t_{co} επί του $C(Y,Z)$ είναι συνδετικά συνεχής.

2.3.14 Παρατήρηση. Αν ο τοπολογικός χώρος Y δεν είναι τοπικά συμπαγής, τότε η συμπαγής - ανοικτή τοπολογία t_{co} επί του $C(Y,Z)$, γενικά, δεν είναι συνδετικά συνεχής.

2.3.15 Πόρισμα. Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

(1) Επί του συνόλου $C(Y, Z)$ υπάρχει το πολύ μία τοπολογία που είναι συγχρόνως συνδετικά συνεχής και διαχωριστική. Μια τέτοια τοπολογία είναι απαραίτητα η μέγιστη διαχωριστική και η μικρότερη συνδετικά συνεχής.

(2) Αν ο χώρος Y είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff, τότε η παραπάνω τοπολογία υπάρχει και είναι η συμπαγής - ανοικτή τοπολογία t_{co}.

2.4 Τοπολογίες τύπου Isbell

2.4.1 Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος και έστω $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{O}(X)$. Το $\mathbb{H}$ καλείται *Scott ανοικτό* αν έχει τις παρακάτω δύο ιδιότητες:

(1) Αν $U \in \mathbb{H}$, $V \in \mathcal{O}(X)$ και $U \subseteq V$, τότε $V \in \mathbb{H}$.

(2) Αν $\{U_i : i \in I\}$ είναι μία οικογένεια ανοικτών συνόλων του X, με $\bigcup\{U_i : i \in I\} \in \mathbb{H}$, τότε υπάρχουν $i_1, \ldots, i_n \in I$ τέτοια, ώστε $U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$.

Την παραπάνω οικογένεια $\mathbb{H}$ υποσυνόλων του $\mathcal{O}(X)$ τη συμβολίζουμε με τ_{Sc}. Το συμπληρωματικό σύνολο ενός Scott ανοικτού καλείται *Scott κλειστό.*

2.4.2 Πρόταση. Έστω X τοπολογικός χώρος. Η οικογένεια τ_{Sc} ορίζει τοπολογία επί του συνόλου τ_X.

2.4.3 Ορισμός. Η τοπολογία τ_{Sc} επί του τ_X, που αναφέρεται στην Πρόταση 2.4.2 καλείται *Scott τοπολογία.*

2.4.4 Ορισμός. Η τοπολογία επί του συνόλου $C(Y, Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής:

$$(\mathbb{H}, U) = \{f \in C(Y, Z) : f^{-1}(U) \in \mathbb{H}\},$$

όπου $U \in \tau_Z$ και $\mathbb{H}$ Scott ανοικτό του τ_Y, καλείται *Isbell* τοπολογία και συμβολίζεται με t_{Is}.

2.4.5 Πρόταση. Για τις τοπολογίες t_p, t_{co} και t_{Is} ισχύει $t_p \subseteq t_{co} \subseteq t_{Is}$.

2.4.6 Πρόταση. Η Isbell τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ είναι διαχωριστική.

2.4.7 Πρόταση. Εάν ο χώρος Z είναι T_i-χώρος, $i = 0, 1, 2$, τότε ο χώρος $C_{t_{Is}}(Y, Z)$ είναι T_i-χώρος.

2.4.8 Πρόταση. Εάν ο χώρος Z είναι Tychonoff, τότε ο χώρος $C_{t_{Is}}(Y, Z)$ είναι Tychonoff.

2.4.9 Πρόταση. Εάν ο χώρος Y είναι καρδιακά συμπαγής, τότε η t_{Is} επί του συνόλου $C(Y, Z)$ είναι συνδετικά συνεχής.

2.4.10 Ορισμός. Μία οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq C(Y, Z)$ καλείται *εξίσου συνεχής (evenly continuous)* σε ένα σημείο $y \in Y$ (βλέπε [49]) εάν για κάθε $z \in Z$ και για κάθε ανοικτή περιοχή P του z στον Z υπάρχουν ανοικτές περιοχές W και R, των y και z, αντίστοιχα τέτοιες ώστε, $f(W) \subseteq P$, όπου $f \in \mathcal{F}$ και $f(y) \in R$. Η οικογένεια $\mathcal{F}$ καλείται *εξίσου συνεχής* εάν είναι εξίσου συνεχής σε κάθε σημείο του χώρου Y.

2.4.11 Πρόταση. (βλέπε [66]) Έστω Y τοπολογικός χώρος, Z κανονικός τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F} \subseteq C(Y, Z)$. Τότε το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου $C_{t_{Is}}(Y, Z)$ αν ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό.

(2) Το $Cl(\{g(y) : g \in \mathcal{F}\})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Z, για κάθε $y \in Y$.

(3) Το $\mathcal{F}$ είναι εξίσου συνεχές.

2.4.12 Ορισμός. Λέγεται ότι μία οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του $C(Y, Z)$ *ικανοποιεί τη συνθήκη* G_2 (βλέπε [19] και [38]) εάν για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του Z και για κάθε $G \subseteq \mathcal{F}$ τέτοιο, ώστε $G = Cl(G) \cap \mathcal{F}$ το σύνολο $\bigcap\{g^{-1}(U) : g \in G\}$ είναι ανοικτό στο Y.

2.4.13 Πρόταση. (βλέπε [31]) Έστω Y τοπολογικός χώρος, Z κανονικός τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F} \subseteq C(Y, Z)$. Τότε το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου $C_{t_{Is}}(Y, Z)$ αν ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό.

(2) Το $Cl(\{g(y) : g \in \mathcal{F}\})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Z, για κάθε $y \in Y$.

(3) Η οικογένεια $\mathcal{F}$ ικανοποιεί τη συνθήκη G_2 του Ορισμού 2.4.12.

2.4.14 Ορισμός. Έστω Y τοπολογικός χώρος. Η *ισχυρή Scott* τοπολογία επί του $\mathcal{O}(Y)$ είναι η οικογένεια όλων των $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ για τα οποία ισχύουν:

(1) Αν $U \in \mathbb{H}$, $V \in \mathcal{O}(Y)$ και $U \in V$ τότε, $V \subseteq \mathbb{H}$.

(2) Για κάθε οικογένεια $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ με $\bigcup\{U_i : i \in I\} = Y$ υπάρχουν $i_1, \ldots, i_k \in I$ τέτοια, ώστε $U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k} \in \mathbb{H}$.

Η ισχυρή Scott τοπολογία συμβολίζεται με t_{sSc}.

2.4.15 Ορισμός. Έστω Y τοπολογικός χώρος. Η *quasi Scott* τοπολογία επί του $\mathcal{O}(Y)$ είναι η οικογένεια όλων των $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ για τα οποία ισχύουν:

(1) Αν $U \in \mathbb{H}$, $V \in \mathcal{O}(Y)$ και $U \in V$ τότε, $V \subseteq \mathbb{H}$.

(2) Για κάθε οικογένεια $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{O}(Y)$ όπου το σύνολο $\bigcup\{U_i : i \in I\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y και $\bigcup\{U_i : i \in I\} \in \mathbb{H}$ υπάρχουν $i_1, \ldots, i_k \in I$ τέτοια, ώστε $U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k} \in \mathbb{H}$.

Η quasi Scott τοπολογία συμβολίζεται με t_{qSc}.

2.4.16 Ορισμός. Έστω Y, Z τοπολογικοί χώροι και t_{sSc} η ισχυρή Scott τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}(Y)$. Η *ισχυρή Isbell*, t_{sIs}, τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ είναι αυτή που έχει ως υποβάση τα υποσύνολα της μορφής:

$$(\mathbb{H}, U) = \{f \in C(Y, Z) : f^{-1}(U) \in \mathbb{H}\},$$

όπου $\mathbb{H} \in t_{sSc}$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

2.4.17 Ορισμός. Έστω Y, Z τοπολογικοί χώροι και t_{qSc} η quasi Scott τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}(Y)$. Η *quasi-Isbell*, t_{qIs}, τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ είναι αυτή που έχει ως υποβάση όλα τα υποσύνολα της μορφής:

$$(\mathbb{H}, U) = \{f \in C(Y, Z) : f^{-1}(U) \in \mathbb{H}\},$$

όπου $\mathbb{H} \in t_{qSc}$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

2.4.18 Πρόταση. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) $t_{co} \subseteq t_{Is} \subseteq t_{qIs} \subseteq t_{sIs}$

(2) Αν ο χώρος Y είναι T_i-χώρος, $i = 0, 1, 2$, τότε οι χώροι $C_{t_{qIs}}(Y, Z)$ και $C_{t_{sIs}}(Y, Z)$ είναι T_i-χώροι.

2.4.19 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *irreducible* αν κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολό του είναι πυκνό.

2.4.20 Πρόταση. Αν ο χώρος Y είναι irreducible, τότε οι τοπολογίες quasi Isbell και ισχυρή Isbell επί του $C(Y, Z)$ συμπίπτουν.

2.4.21 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ η κλάση όλων των irreducible τοπολογικών χώρων. Τότε η quasi-Isbell τοπολογία t_{qIs} είναι $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

2.4.22 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *Alexandroff χώρος* αν η τομή κάθε οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του είναι ανοικτό σύνολο.

2.4.23 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των Alexandroff χώρων. Τότε η τοπολογία t_{qIs} είναι $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

2.4.24 Πρόταση. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Αν Y είναι τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος, τότε η τοπολογία t_{qIs} επί του $C(Y, Z)$ είναι συνδετικά συνεχής.

(2) Αν Y είναι καρδιακά συμπαγής χώρος, τότε η τοπολογία t_{qIs} επί του $C(Y, Z)$ είναι συνδετικά συνεχής.

2.4.25 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *ψευδο-καρδιακά συμπαγής (quasi-core compact)* αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U του x, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $V \subseteq U$.

(2) Για κάθε οικογένεια $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{O}(X)$ τέτοια ώστε $U \subseteq \bigcup\{U_i : i \in I\}$, όπου $\bigcup\{U_i : i \in I\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο J του I τέτοιο ώστε $V \subseteq \bigcup\{U_i : i \in J\}$. (Συμβολικά γράφουμε $V \ll_q U$)

2.4.26 Πρόταση. Έστω Y τοπολογικός χώρος και $U, V, W, U_i, V_i \in \mathcal{O}(Y)$, όπου $i = 1, ..., n$. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν $U \subseteq V \ll_q W$, τότε $U \ll_q W$.

(2) Εάν $U \ll_q V \subseteq W$, τότε $U \ll_q W$.

(3) Εάν $U_i \ll_q V_i$, για κάθε $i = 1, ..., n$, τότε

$$\bigcup\{U_i : i = 1, ..., n\} \ll_q \bigcup\{V_i : i = 1, ..., n\}.$$

2.4.27 Πρόταση. Έστω Y ψευδο-καρδιακά συμπαγής χώρος και $V \in \mathcal{O}(Y)$. Τότε το σύνολο

$$\mathbb{H}_V = \{U \in \mathcal{O}(Y) : V \ll_q U\}$$

είναι ανοικτό υποσύνολο της t_{qSc} τοπολογίας.

2.4.28 Πρόταση. Έστω Y ψευδο-καρδιακά συμπαγής χώρος. Τότε η τοπολογία t_{qIs} επί του $C(Y, Z)$, είναι συνδετικά συνεχής.

2.4.29 Σημείωση. Με $\mathbf{S}$ συμβολίζεται ο χώρος Sierpiński, δηλαδή

$$\mathbf{S} = (\{0,1\}, \tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}) .$$

Αν Y είναι ένας άλλος τοπολογικός χώρος, τότε $C(Y, \mathbf{S}) = \{\mathcal{X}_U : U \in \mathcal{O}(Y)\}$, όπου $\mathcal{X}_U : Y \to \mathbf{S}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του U, δηλαδή

$$\mathcal{X}_U(y) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } y \in U \\ 0 & , \text{αν } y \in Y \setminus U \end{cases}$$

2.4.30 Πρόταση. Η απεικόνιση

$$h : C_{t_{qIs}}(Y, \mathbf{S}) \to (\mathcal{O}(Y), t_{qSc}),$$

με τιμή

$$h(f) = f^{-1}(\{1\}),$$

για κάθε $f \in C_{t_{qIs}}(Y, \mathbf{S})$, είναι ομοιομορφισμός.

2.4.31 Πρόταση. Οι χώροι $C_{t_{Is}}(Y, \mathbf{S})$ και $C_{t_{sIs}}(Y, \mathbf{S})$ είναι ομοιόμορφοι με τους χώρους $(\mathcal{O}(Y), t_{Sc})$ και $(\mathcal{O}(Y), t_{sSc})$, αντίστοιχα.

2.4.32 Πρόταση. Έστω Y τοπικά περατωμένος χώρος. Εάν ο Y δεν είναι καρδιακά συμπαγής, τότε $t_{qIs} \neq t_{sIs}$ στον $C(Y, \mathbf{S})$.

2.4.33 Πρόταση. Για κάθε τοπολογικό χώρο Y οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(1) Ο Y είναι ψευδο-καρδιακά συμπαγής.

(2) Για κάθε χώρο Z, η απεικόνιση εκτίμησης $e : C_{t_{qIs}}(Y, \mathbf{S}) \times Y \to Z$, είναι συνεχής.

(3) Η απεικόνιση εκτίμησης $e : C_{t_{qIs}}(Y, \mathbf{S}) \times Y \to \mathbf{S}$ είναι συνεχής.

(4) Το $\{(U, y) \in \mathcal{O}(Y) \times Y : y \in U\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $(\mathcal{O}(Y), t_{qSc}) \times Y$.

(5) Για κάθε ανοικτή περιοχή U του $y \in Y$, υπάρχει ανοικτό $\mathbb{H} \in t_{qSc}$ τέτοιο, ώστε $U \in \mathbb{H}$ και το σύνολο $\cap\{W : W \in \mathbb{H}\}$ να είναι περιοχή του y.

2.4.34 Πρόταση. Εάν ο χώρος Y είναι ψευδο-καρδιακά συμπαγής, τότε η απεικόνιση

$$T : C_{t_{co}}(X, Y) \times C_{t_{qIs}}(Y, Z) \to C_{t_{co}}(X, Z)$$

με τιμή

$$T(f, g) = g \circ f, \text{ για κάθε } (f, g) \in C_{t_{co}}(X, Y) \times C_{t_{qIs}}(Y, Z),$$

είναι συνεχής για κάθε χώρο X και Z.

2.4.35 Πρόταση. Εάν ο χώρος Y είναι ψευδο-καρδιακά συμπαγής, τότε η απεικόνιση

$$T : C_{t_{Is}}(X, Y) \times C_{t_{qIs}}(Y, Z) \to C_{t_{Is}}(X, Z)$$

με τιμή

$$T(f, g) = g \circ f, \text{ για κάθε } (f, g) \in C_{t_{Is}}(X, Y) \times C_{t_{qIs}}(Y, Z),$$

είναι συνεχής για κάθε χώρο X και Z.

ΜΕΡΟΣ Β

Κεφάλαιο 3

Family-open τοπολογίες επί του $C(Y, Z)$

Στο κεφάλαιο αυτό κατασκευάζουμε και μελετάμε τοπολογίες επί του συνόλου $C(Y, Z)$, τις οποίες ονομάζουμε $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογίες. Τέτοιες τοπολογίες είναι η *συμπαγής - ανοικτή* τοπολογία, η *Isbell* και η *ισχυρή Isbell* τοπολογία. Επίσης, δίνουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες οι τοπολογίες αυτές είναι διαχωριστικές ή συνδετικά συνεχείς.

3.1 $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογίες επί του $C(Y, Z)$

Σημείωση: Σε ό,τι ακολουθεί το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X θα συμβολίζεται με $\mathcal{P}(X)$.

Έστω Y, Z τοπολογικοί χώροι και $\mathcal{O}(Y)$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του Y. Οι $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογίες επί του συνόλου $C(Y, Z)$ ορίζονται στα επόμενα βήματα:

Βήμα 1. Έστω $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{O}(Y))$. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του χώρου Y, θέτουμε

$$O^1(U) = \{\varphi \in \mathcal{F}_1 : U \in \varphi\}.$$

Με $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$\{O^1(U) : U \in \mathcal{O}(Y)\}.$$

Έστω τ_1 τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$. Με $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1)$ συμβολίζουμε την τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ για την οποία η οικογένεια των συνόλων της μορφής:

$$< I\!\!H, U >_1 = \{f \in C(Y, Z) : O^1(f^{-1}(U)) \in I\!\!H\}$$

αποτελεί υποβάση, όπου $I\!\!H \in \tau_1$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

Η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1)$ επί του συνόλου $C(Y, Z)$ καλείται $\mathcal{F}_1(\tau_1)$-*family-open τοπολογία.*

Βήμα 2. Έστω $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1))$. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του χώρου Y, θέτουμε

$$O^2(U) = \{\varphi \in \mathcal{F}_2 : O^1(U) \in \varphi\}.$$

Με $\mathcal{O}^2(\mathcal{F}_2)$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$\{O^2(U) : U \in \mathcal{O}(Y)\}.$$

Έστω τ_2 τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^2(\mathcal{F}_2)$. Με $t_{\mathcal{F}_2}(\tau_2)$ συμβολίζουμε την τοπολογία επί του $C(Y, Z)$ για την οποία η οικογένεια των συνόλων της μορφής:

$$< I\!\!H, U >_2 = \{f \in C(Y, Z) : O^2(f^{-1}(U)) \in I\!\!H\}$$

αποτελεί υποβάση, όπου $I\!\!H \in \tau_2$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

Η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_2}(\tau_2)$ επί του συνόλου $C(Y, Z)$ καλείται $\mathcal{F}_2(\tau_2)$-*family-open τοπολογία.*

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο φτάνουμε στο Βήμα n:

Βήμα n. Έστω $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{O}^{n-1}(\mathcal{F}_{n-1}))$. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του χώρου Y, θέτουμε

$$O^n(U) = \{\varphi \in \mathcal{F}_n : O^{n-1}(U) \in \varphi\}.$$

Με $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$\{O^n(U) : U \in \mathcal{O}(Y)\}.$$

Έστω τ_n τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$. Με $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ συμβολίζουμε την τοπολογία επί του $C(Y,Z)$ για την οποία η οικογένεια των συνόλων της μορφής:

$$< I\!H, U >_n = \{f \in C(Y,Z) : O^n(f^{-1}(U)) \in I\!H\}$$

αποτελεί υποβάση, όπου $I\!H \in \tau_n$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

Η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του συνόλου $C(Y,Z)$ καλείται $\mathcal{F}_n(\tau_n)$*-family-open τοπολογία.*

3.1.1 Παραδείγματα.

(1) Έστω $\mathbf{S}$ ο χώρος Sierpiński, δηλαδή το σύνολο $\mathbf{S} = \{0,1\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \mathbf{S}\}$. Επίσης, θεωρούμε το σύνολο $Y = \{a,b,c\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία

$$\mathcal{O}(Y) = \{\emptyset, U_1 = \{a\}, U_2 = \{b\}, U_3 = \{a,b\}, Y\}.$$

Η οικογένεια

$$\tau_0 = \{\emptyset, \{U_3\}, \{U_1, U_3\}, \{U_2, U_3\}, \{U_1, U_2, U_3\}, \mathcal{O}(Y)\}$$

ορίζει τοπολογία επί του $\mathcal{O}(Y)$. Θεωρούμε την τοπολογία $t(\tau_0)$ επί του $C(Y,\mathbf{S})$, η οποία έχει ως υποβάση την οικογένεια των συνόλων της μορφής:

$$< I\!H, U > = \{f \in C(Y,\mathbf{S}) : f^{-1}(U) \in I\!H\},$$

όπου $I\!H \in \tau_0$ και $U \in \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$.

• Έστω $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{O}(Y)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{O}(Y))$. Έχουμε

$$O^1(\emptyset) = O^1(U_1) = O^1(U_2) = O^1(U_3) = O^1(Y) = \{\mathcal{O}(Y)\}.$$

Συνεπώς, $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1) = \{\{\mathcal{O}(Y)\}\} = \{\mathcal{F}_1\}$. Θεωρούμε την τοπολογία $\tau_1 = \{\emptyset, \{\mathcal{F}_1\}\}$ επί του συνόλου $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$ και ορίζουμε, χρησιμοποιώντας το **Βήμα 1**, την τοπολογία $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1)$-family-open τοπολογία επί του συνόλου $C(Y,\mathbf{S})$ ως εξής:

Η $\mathcal{F}_1(\tau_1)$-family-open τοπολογία $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1)$ επί του $C(Y,\mathbf{S})$ έχει ως υποβάση την οικογένεια των συνόλων της μορφής:

$$< I\!H, U >_1 = \{f \in C(Y,\mathbf{S}) : f^{-1}(U) \in I\!H\},$$

όπου $I\!H \in \tau_1$ και $U \in \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Παρατηρούμε ότι $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1) \neq t(\tau_0)$ στο σύνολο $C(Y, \mathbf{S})$. Πράγματι, θεωρούμε το σύνολο $I\!H_0 = \{U_3\} \in \tau_0$. Τότε,

$$< I\!H_0, \{1\} >= \{\mathcal{X}_{U_3}\} \in t(\tau_0).$$

Αποδεικνύουμε ότι $< I\!H_0, \{1\} > \notin t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1)$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} < \{\mathcal{F}_1\}, \{1\} >_1 &= \{f \in C(Y, \mathbf{S}) : O^1(f^{-1}(\{1\})) \in \{\{\mathcal{O}(Y)\}\}\} \\ &= \{f \in C(Y, \mathbf{S}) : O^1(f^{-1}(\{1\})) = \{\mathcal{O}(Y)\}\} \\ &= \{\mathcal{X}_\emptyset, \mathcal{X}_{U_1}, \mathcal{X}_{U_2}, \mathcal{X}_{U_3}, \mathcal{X}_Y\} \\ &= C(Y, \mathbf{S}). \end{aligned}$$

Άρα, $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1) = \{\emptyset, C(Y, \mathbf{S})\}$ και συνεπώς $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1) \neq t(\tau_0)$.

• Έστω, τώρα $\mathcal{F}_1' = \{\{U_1, U_3\}, \{U_2, U_3\}\}$. Τότε,

$$\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1') = \{\emptyset, \mathcal{F}_1', \{\{U_1, U_3\}\}, \{\{U_2, U_3\}\}\}.$$

Θεωρούμε τις τοπολογίες

$$\tau_1' = \{\emptyset, \{\mathcal{F}_1', \{\{U_1, U_3\}\}, \mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1')\}\}$$

και

$$\tau_1'' = \{\emptyset, \{\mathcal{F}_1', \{\{U_2, U_3\}\}, \mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1')\}\}$$

επί του συνόλου $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1')$ και ορίζουμε, χρησιμοποιώντας το **Βήμα 1**, τις τοπολογίες $t_{\mathcal{F}_1'}(\tau_1')$ και $t_{\mathcal{F}_1'}(\tau_1'')$ επί του συνόλου $C(Y, \mathbf{S})$. Παρατηρούμε ότι

$$t_{\mathcal{F}_1'}(\tau_1') = \{\emptyset, \{\mathcal{X}_{U_1}, \mathcal{X}_{U_3}\}, C(Y, \mathbf{S})\}$$

και

$$t_{\mathcal{F}_1'}(\tau_1'') = \{\emptyset, \{\mathcal{X}_{U_2}, \mathcal{X}_{U_3}\}, C(Y, \mathbf{S})\}.$$

• Τελικά, έστω $\mathcal{F}_2 = \{\{\mathcal{F}_1'\}\}$, όπου $\mathcal{F}_1' = \{\{U_1, U_3\}, \{U_2, U_3\}\}$. Τότε $\mathcal{O}^2(\mathcal{F}_2) = \{\{\mathcal{F}_2\}\}$. Θεωρούμε την τοπολογία $\tau_2 = \{\emptyset, \{\mathcal{F}_2\}\}$ επί του $\mathcal{O}^2(\mathcal{F}_2)$ και ορίζουμε, χρησιμοποιώντας το **Βήμα 2**, την τοπολογία $t_{\mathcal{F}_2}(\tau_2)$, επί του $C(Y, \mathbf{S})$. Παρατηρούμε ότι $t_{\mathcal{F}_2}(\tau_2) = \{\emptyset, \{\mathcal{X}_{U_3}\}, C(Y, \mathbf{S})\}$.

(2) Έστω $\mathbf{S}$ ο χώρος του Sierpiński (Όπως στο Παράδειγμα 3.1.1(1)). Έστω, επίσης, το σύνολο $Y = \{a, b\}$ εφοδιασμένο με την τοπολογία

$$\mathcal{O}(Y) = \{\emptyset, U = \{a\}, Y\}.$$

Η Scott τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}(Y)$ είναι η οικογένεια

$$\tau_{Sc}(\mathcal{O}(Y)) = \{\emptyset, \{Y\}, \{U, Y\}, \mathcal{O}(Y)\}.$$

Συνεπώς, η Isbell τοπολογία επί του συνόλου $C(Y, \mathbf{S})$ είναι η οικογένεια

$$t_{Is} = \{\emptyset, \{\mathcal{X}_Y\}, \{\mathcal{X}_U, \mathcal{X}_Y\}, C(Y, \mathbf{S})\}.$$

Έστω

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\mathcal{O}(Y)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{U\}, \{Y\}, \{\emptyset, U\}, \{\emptyset, Y\}, \{U, Y\}, \mathcal{O}(Y)\}.$$

Τότε το σύνολο $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$ περιέχει τα παρακάτω στοιχεία:

$O^1(\emptyset) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, U\}, \{\emptyset, Y\}, \mathcal{O}(Y)\}$,

$O^1(U) = \{\{U\}, \{\emptyset, U\}, \{U, Y\}, \mathcal{O}(Y)\}$,

$O^1(Y) = \{\{Y\}, \{\emptyset, Y\}, \{U, Y\}, \mathcal{O}(Y)\}$.

Θεωρούμε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1), \subseteq)$. Παρατηρούμε ότι η Scott τοπολογία $\tau_{Sc}(\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1))$ είναι η διακριτική τοπολογία επί του $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$ και ότι η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_{Sc}(\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)))$ είναι η διακριτική τοπολογία επί του $C(Y, \mathbf{S})$.

(3) Έστω $\mathbf{S}$ ο χώρος Sierpiński και $Y = \mathbb{R}$ ο χώρος των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη τοπολογία. Θεωρούμε τα παρακάτω σύνολα:

$D_1 = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}, 1 \in (a, b)\}$,

$D_2 = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}, 2 \in (a, b)\}$,

$\ldots$

$D_n = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}, n \in (a, b)\}$,

$\ldots$

και

$$\mathcal{F}_1 = \{D_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Τότε $O^1(\emptyset) = O^1(\mathbb{R}) = \emptyset$. Επίσης, για κάθε $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$O^1(U) = \begin{cases} \emptyset, & \text{εάν το } U \text{ είναι μη φραγμένο διάστημα} \\ \emptyset, & \text{εάν } \{1, 2, \ldots\} \cap U = \emptyset \\ \{D_n : n \in \{1, 2, \ldots\} \cap U\}, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1) = \{O^1(U) : U \in \mathcal{O}(\mathbb{R})\}$ και την τοπολογία

$$\tau_1 = \{\{O^1(0,2)\}, \{O^1(0,2), O^1(2,4)\}, \{O^1(0,2), O^1(2,4), O^1(4,6)\}, \ldots\} \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)\}$$

επί του συνόλου $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$. Παρατηρούμε ότι

$$t_{\mathcal{F}_1}(\tau_1) = \{\emptyset, C(Y, \mathbf{S}), \{\mathcal{X}_{(0,2)}\}, \{\mathcal{X}_{(0,2)}, \mathcal{X}_{(2,4)}\}, \{\mathcal{X}_{(0,2)}, \mathcal{X}_{(2,4)}, \mathcal{X}_{(4,6)}\}, \ldots\}.$$

3.2 Βασικές προτάσεις για τις $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογίες

3.2.1 Πρόταση. Έστω Y και Z δύο τοπολογικοί χώροι, τ_n τυχαία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$, όπου $n = 1, 2, \ldots$ και $\tau_{n+1} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{O}^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1}))$ οικογένεια, η οποία περιέχει το κενό σύνολο και ορίζεται ως εξής:

$$I\!H \in \tau_{n+1} \text{ αν και μόνον αν } \{O^n(U) \in \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n) : O^{n+1}(U) \in I\!H\} \in \tau_n.$$

Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Η οικογένεια τ_{n+1} ορίζει τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1})$.

(2) $t_{\mathcal{F}_{n+1}}(\tau_{n+1}) \subseteq t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$.

(3) Εάν η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y, Z)$ είναι διαχωριστική, τότε η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_{n+1}}(\tau_{n+1})$ επί του $C(Y, Z)$ είναι επίσης διαχωριστική.

(4) Εάν η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_{n+1}}(\tau_{n+1})$ επί του $C(Y, Z)$ είναι συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y, Z)$ είναι επίσης συνδετικά συνεχής.

Απόδειξη. (1) Παρατηρούμε ότι $\emptyset, \mathcal{O}^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1}) \in \tau_{n+1}$. Έστω $I\!H_1, I\!H_2 \in \tau_{n+1}$. Τότε

$$I\!H_1' = \{O^n(U) \in \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n) : O^{n+1}(U) \in I\!H_1\} \in \tau_n$$

και

$$\mathbb{H}'_2 = \{O^n(U) \in \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n) : O^{n+1}(U) \in \mathbb{H}_2\} \in \tau_n.$$

Εφόσον η τ_n είναι τοπολογία επί του $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$ και

$$\mathbb{H}'_1 \cap \mathbb{H}'_2 = \{O^n(U) \in \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n) : O^{n+1}(U) \in \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2\},$$

έχουμε ότι $\mathbb{H}'_1 \cap \mathbb{H}'_2 \in \tau_n$. Συνεπώς,

$$\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 \in \tau_{n+1}.$$

Τώρα, έστω $\mathbb{H}_i \in \tau_{n+1}$, $i \in I$. Τότε,

$$\mathbb{H}'_i = \{O^n(U) \in \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n) : O^{n+1}(U) \in \mathbb{H}_i\} \in \tau_n,\ i \in I.$$

Εφόσον η τ_n είναι τοπολογία επί του $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$ και

$$\bigcup_{i\in I} \mathbb{H}'_i = \{O^n(U) \in \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n) : O^{n+1}(U) \in \bigcup_{i\in I} \mathbb{H}_i\},$$

έχουμε ότι

$$\bigcup_{i\in I} \mathbb{H}'_i \in \tau_n$$

και συνεπώς,

$$\bigcup_{i\in I} \mathbb{H}_i \in \tau_{n+1}.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η τ_{n+1} είναι τοπολογία επί του $\mathcal{O}^{n+1}(\mathcal{F}_{n+1})$.

(2) Έστω $g \in C(Y,Z)$ και $< \mathbb{H}, U >_{n+1}$ υποβασικό ανοικτό σύνολο της τοπολογίας $t_{\mathcal{F}_{n+1}}(\tau_{n+1})$ τέτοια, ώστε $g \in < \mathbb{H}, U >_{n+1}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{H}' = \{O^n(U) \in \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n) : O^{n+1}(U) \in \mathbb{H}\}.$$

Τότε $\mathbb{H}' \in \tau_n$. Αποδεικνύουμε ότι

$$g \in < \mathbb{H}', U >_n \subseteq < \mathbb{H}, U >_{n+1} .$$

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι $g \in < \mathbb{H}', U >_n$. Εφόσον

$$g \in < \mathbb{H}, U >_{n+1} = \{f \in C(Y,Z) : O^{n+1}(f^{-1}(U)) \in \mathbb{H}\},$$

έχουμε ότι $O^{n+1}(g^{-1}(U)) \in I\!H$ και συνεπώς, $O^n(g^{-1}(U)) \in I\!H'$. Άρα,

$$g \in < I\!H', U >_n = \{f \in C(Y, Z) : O^n(f^{-1}(U)) \in I\!H'\}.$$

Τώρα, αποδεικνύουμε ότι $< I\!H', U >_n \subseteq < I\!H, U >_{n+1}$. Έστω $\varphi \in < I\!H', U >_n$. Τότε, $O^n(\varphi^{-1}(U)) \in I\!H'$ και άρα, $O^{n+1}(\varphi^{-1}(U)) \in I\!H$. Οπότε, $\varphi \in < I\!H, U >_{n+1}$.

Οι αποδείξεις των (3) και (4) είναι άμεση συνέπεια του (2). □

3.2.2 Πρόταση. Έστω τ_n τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$. Τότε, η απεικόνιση

$$h_n : C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, \mathbf{S}) \to (\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n), \tau_n),$$

με τύπο $h_n(f) = O^n(f^{-1}(\{1\}))$, για κάθε $f \in C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, \mathbf{S})$, είναι συνεχής, ανοικτή και επί.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση h_n είναι συνεχής. Έστω $I\!H \in \tau_n$. Τότε

$$\begin{aligned} h_n^{-1}(I\!H) &= \{f \in C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, \mathbf{S}) : O^n(f^{-1}(\{1\})) \in I\!H\} \\ &= < I\!H, \{1\} >_n, \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει και τη συνέχεια της απεικόνισης. Τώρα, αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση h_n είναι ανοικτή. Έστω $< I\!H, \{1\} >_n$ ένα υποβασικό ανοικτό υποσύνολο του $C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, \mathbf{S})$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$h_n(< I\!H, \{1\} >_n) = I\!H.$$

Πράγματι, έστω $O^n(U) \in h_n(< I\!H, \{1\} >_n)$. Τότε υπάρχει $f \in < I\!H, \{1\} >_n$ τέτοιο, ώστε

$$O^n(U) = h_n(f) = O^n(f^{-1}(\{1\})) \in I\!H.$$

Οπότε, $h_n(< I\!H, \{1\} >_n) \subseteq I\!H$. Έστω $O^n(U) \in I\!H$. Θεωρούμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathcal{X}_U : Y \to \mathbf{S}$ του U με

$$\mathcal{X}_U(y) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } y \in U \\ 0, & \text{εάν } y \in Y \setminus U \end{cases}$$

Τότε $\mathcal{X}_U^{-1}(\{1\}) = U$ και συνεπώς,

$$h_n(\mathcal{X}_U) = O^n(\mathcal{X}_U^{-1}(\{1\})) = O^n(U) \in I\!H.$$

Δηλαδή $O^n(U) \in h_n(< \mathbb{H}, \{1\} >_n)$. Οπότε, $\mathbb{H} \subseteq h_n(< \mathbb{H}, \{1\} >_n)$. Άρα,

$$h_n(< \mathbb{H}, \{1\} >_n) = \mathbb{H}.$$

Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση h_n είναι επί. □

3.2.3 Σημείωση. Με $\Phi_{\mathcal{F}_n}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του συνόλου $\mathcal{O}(Y)$ στο σύνολο $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$, για την οποία $\Phi_{\mathcal{F}_n}(U) = O^n(U)$, για κάθε $U \in \mathcal{O}(Y)$.

3.2.4 Πρόταση. Έστω τ_n τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$. Εάν η απεικόνιση $\Phi_{\mathcal{F}_n}$ είναι ένα προς ένα, τότε η απεικόνιση

$$h_n : C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, \mathbf{S}) \to (\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n), \tau_n)$$

είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\Phi_{\mathcal{F}_n}$ είναι ένα προς ένα. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.2 αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση h_n είναι ένα προς ένα. Πράγματι, έστω $f, g \in C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, \mathbf{S})$ τέτοιες, ώστε $h_n(f) = h_n(g)$. Τότε,

$$O^n(f^{-1}(\{1\})) = O^n(g^{-1}(\{1\}))$$

ή ισοδύναμα,

$$\Phi_{\mathcal{F}_n}(f^{-1}(\{1\})) = \Phi_{\mathcal{F}_n}(g^{-1}(\{1\})).$$

Εξ υποθέσεως,

$$f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\}).$$

Συνεπώς, $f = g$. □

3.2.5 Πρόταση. Έστω Y τοπολογικός χώρος, τ_0 μία T_0-τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}(Y)$ και τ_i μία T_0-τοπολογία επί του $\mathcal{O}^i(\mathcal{F}_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Εάν $\mathcal{F}_{i+1} = \tau_i$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$, τότε οι χώροι $C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, \mathbf{S})$ και $(\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n), \tau_n)$ είναι ομοιόμορφοι μεταξύ τους.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.4 αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\Phi_{\mathcal{F}_n}$ είναι ένα προς ένα. Έστω $U, V \in \mathcal{O}(Y)$ τέτοια, ώστε $U \neq V$. Αποδεικνύουμε ότι

$$\Phi_{\mathcal{F}_n}(U) \neq \Phi_{\mathcal{F}_n}(V).$$

Πράγματι, σύμφωνα με την κατασκευή που περιγράψαμε στην αρχή του κεφαλαίου, έχουμε:

Βήμα 1. Εφόσον $\mathcal{F}_1 = \tau_0$, οι οικογένειες $O^1(U)$ και $O^1(V)$ είναι φίλτρα ανοικτών περιοχών των U και V, αντίστοιχα, στην τοπολογία τ_0. Όμως, η τοπολογία τ_0 επί του συνόλου $\mathcal{O}(Y)$ είναι T_0 και συνεπώς,

$$O^1(U) \neq O^1(V).$$

Βήμα 2. Εφόσον $\mathcal{F}_2 = \tau_1$, οι οικογένειες $O^2(U)$ και $O^2(V)$ είναι φίλτρα ανοικτών περιοχών των $O^1(U)$ και $O^1(V)$, αντίστοιχα, στην τοπολογία τ_1. Όμως, η τοπολογία τ_1 επί του συνόλου $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$ είναι T_0. Συνεπώς,

$$O^2(U) \neq O^2(V).$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο Βήμα n:

Βήμα n. Εφόσον $\mathcal{F}_n = \tau_{n-1}$, οι οικογένειες $O^n(U)$ και $O^n(V)$ είναι φίλτρα ανοικτών περιοχών των $O^{n-1}(U)$ και $O^{n-1}(V)$, αντίστοιχα, στην τοπολογία τ_{n-1}. Όμως, η τοπολογία τ_{n-1} επί του συνόλου $\mathcal{O}^{n-1}(\mathcal{F}_{n-1})$ είναι T_0. Άρα, $O^n(U) \neq O^n(V)$, ή ισοδύναμα, $\Phi_{\mathcal{F}_n}(U) \neq \Phi_{\mathcal{F}_n}(V)$. □

3.3 Χαρακτηρισμός $\mathcal{A}$-διαχωριστικών τοπολογιών για τις $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογίες επί του $C(Y, Z)$

3.3.1 Ορισμός. Έστω τ_n τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$. Λέμε ότι η απεικόνιση

$$M : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$$

είναι *συνεχής ως προς την πρώτη μεταβλητή* εάν για κάθε σταθερό $U \in \mathcal{O}(Z)$, η απεικόνιση

$$M_U : X \to (\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n), \tau_n),$$

για την οποία $M_U(x) = M(x, U)$, για κάθε $x \in X$, είναι συνεχής.

3.3.2 Σημείωση. Έστω X τοπολογικός χώρος. Εάν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι συνεχής, τότε με $\overline{F}_n$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του συνόλου $X \times \mathcal{O}(Z)$ στο σύνολο $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$, για την οποία $\overline{F}_n(x,U) = O^n(F_x^{-1}(U))$, για κάθε $x \in X$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

3.3.3 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και τ_n τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$, όπου $n = 1, 2, \ldots$. Η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του συνόλου $C(Y,Z)$ είναι $\mathcal{A}$-διαχωριστική εάν και μόνον εάν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$, η συνέχεια της απεικόνισης $F : X \times Y \to Z$ συνεπάγεται τη συνέχεια, ως προς την πρώτη μεταβλητή, της απεικόνισης

$$\overline{F}_n : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y,Z)$ είναι $\mathcal{A}$-διαχωριστική, X είναι ένα στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ συνεχής απεικόνιση. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\overline{F}_n : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$$

είναι συνεχής ως προς την πρώτη μεταβλητή. Έστω U ένα σταθερό στοιχείο του συνόλου $\mathcal{O}(Z)$, $x \in X$ και $\mathbb{H} \in \tau_n$. Έστω, επίσης,

$$(\overline{F}_n)_U(x) = \overline{F}_n(x,U) = O^n(F_x^{-1}(U)) \in \mathbb{H}.$$

Πρέπει να βρούμε μία ανοικτή περιοχή V του x, στο χώρο X τέτοια, ώστε

$$(\overline{F}_n)_U(V) = \overline{F}_n(V \times \{U\}) \subseteq \mathbb{H}.$$

Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $< \mathbb{H}, U >_n$ του χώρου $C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y,Z)$. Τότε

$$F_x \in < \mathbb{H}, U >_n .$$

Εφόσον η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ είναι $\mathcal{A}$-διαχωριστική, η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y,Z)$$

είναι συνεχής. Οπότε, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x, στον X τέτοια, ώστε

$$\widehat{F}(V) \subseteq < \mathbb{H}, U >_n .$$

Αποδεικνύουμε ότι

$$(\overline{F}_n)_U(V) = \overline{F}_n(V \times \{U\}) \subseteq I\!H.$$

Πράγματι, έστω $x' \in V$. Τότε

$$\widehat{F}(x') = F_{x'} \in < I\!H, U >_n .$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$O^n(F_{x'}^{-1}(U)) \in I\!H$$

ή ισοδύναμα,

$$(\overline{F}_n)_U(x') = \overline{F}_n(x', U) \in I\!H.$$

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε στοιχείο X της οικογένειας $\mathcal{A}$, η συνέχεια της απεικόνισης $F : X \times Y \to Z$ συνεπάγεται τη συνέχεια, ως προς την πρώτη μεταβλητή, της απεικόνισης $\overline{F}_n$. Αποδεικνύουμε ότι η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y, Z)$ είναι $\mathcal{A}$-διαχωριστική. Έστω $X \in \mathcal{A}$. Έστω, επίσης, $F : X \times Y \to Z$ μία συνεχής απεικόνιση. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to C_{t_{\mathcal{F}_n(\tau_n)}}(Y, Z)$$

είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $< I\!H, U >_n$ μία ανοικτή περιοχή του $\widehat{F}(x)$, στον $C_{t_{\mathcal{F}_n(\tau_n)}}(Y, Z)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x στον X τέτοια, ώστε

$$\widehat{F}(V) \subseteq < I\!H, U >_n .$$

Όμως,

$$\widehat{F}(x) = F_x \in < I\!H, U >_n,$$

άρα,

$$O^n((\widehat{F}(x))^{-1}(U)) \in I\!H.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$(\overline{F}_n)_U(x) = \overline{F}_n(x, U) \in I\!H.$$

Εξ υποθέσεως, η απεικόνιση $\overline{F}_n$ είναι συνεχής, ως προς την πρώτη μεταβλητή. Οπότε, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x στον X τέτοια, ώστε

$$(\overline{F}_n)_U(V) = \overline{F}_n(V \times \{U\}) \subseteq I\!H.$$

Αποδεικνύουμε ότι

$$\widehat{F}(V) \subseteq < I\!H, U >_n .$$

Πράγματι, έστω $x' \in V$. Τότε

$$(\overline{F}_n)_U(x') = \overline{F}_n(x', U) \in I\!H.$$

Άρα,

$$O^n(F_{x'}^{-1}(U)) \in I\!H$$

και συνεπώς, $\widehat{F}(x') \in < I\!H, U >_n$. $\square$

3.3.4 Πόρισμα. Έστω τ_n τοπολογία επί του $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$, όπου $n = 1, 2, \ldots$. Τότε η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y,Z)$ είναι διαχωριστική εάν και μόνον εάν για κάθε χώρο X η συνέχεια της απεικόνισης $F : X \times Y \to Z$ συνεπάγεται τη συνέχεια, ως προς την πρώτη μεταβλητή, της απεικόνισης

$$\overline{F}_n : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n).$$

3.3.5 Σημείωση. Για κάθε συνεχή απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ συμβολίζουμε με F^* την απεικόνιση του συνόλου $X \times \mathcal{O}(Z)$ στο σύνολο $\mathcal{O}(Y)$ για την οποία

$$F^*(x, U) = F_x^{-1}(U),$$

για κάθε $(x, U) \in X \times \mathcal{O}(Z)$.

3.3.6 Ορισμός. Έστω $F : X \times Y \to Z$ συνεχής απεικόνιση και $\tau_{Sc}(\mathcal{O}(Y))$ η Scott τοπολογία επί του $\mathcal{O}(Y)$. Λέμε ότι η απεικόνιση

$$F^* : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}(Y)$$

είναι *Scott συνεχής ως προς την πρώτη μεταβλητή*, εάν για κάθε σταθερό σημείο U του $\mathcal{O}(Z)$, η απεικόνιση

$$(F^*)_U : X \to \mathcal{O}(Y),$$

για την οποία $(F^*)_U(x) = F_x^{-1}(U)$, για κάθε $x \in X$, είναι συνεχής.

3.3.7 Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $(\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n), \subseteq)$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε την Scott τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$.

3.3.8 Ορισμός. Λέμε ότι η απεικόνιση

$$f : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$$

είναι *Scott συνεχής*, εάν η απεικόνιση f είναι συνεχής όταν τα σύνολα $\mathcal{O}(Y)$ και $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$ είναι εφοδιασμένα με την Scott τοπολογία.

3.3.9 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Εάν η απεικόνιση

$$\Phi_{\mathcal{F}_n} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$$

είναι Scott συνεχής, τότε η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_{Sc}(\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)))$ επί του συνόλου $C(Y, Z)$ είναι $\mathcal{A}$-διαχωριστική, για κάθε τοπολογικό χώρο Z.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ συνεχής απεικόνιση. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.3 αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\overline{F}_n : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$$

είναι συνεχής ως προς την πρώτη μεταβλητή. Πράγματι, έστω $U \in \mathcal{O}(Z)$. Για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\overline{F}(x, U) = O^n(F_x^{-1}(U)) = (\Phi_{\mathcal{F}_n} \circ F^*)(x, U).$$

Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση F^* είναι Scott συνεχής ως προς την πρώτη μεταβλητή. Έστω $x \in X$, $\mathbb{H}$ ένα Scott ανοικτό σύνολο του $\mathcal{O}(Y)$ και $(F^*)_U(x) \in \mathbb{H}$. Πρέπει να βρούμε μία ανοικτή περιοχή V του $x \in X$ τέτοια, ώστε

$$(F^*)_U(V) \subseteq \mathbb{H}.$$

Όμως,

$$(F^*)_U(x) = F_x^{-1}(U) = (\widehat{F}(x))^{-1}(U) \in \mathbb{H},$$

δηλαδή $\widehat{F}(x) \in (\mathbb{H}, U)$. Εφόσον η Isbell τοπολογία επί του συνόλου $C(Y, Z)$ είναι διαχωριστική, η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to C_{t_{Is}}(Y, Z)$$

είναι συνεχής. Άρα, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του $x \in X$ τέτοια, ώστε

$$\widehat{F}(V) \subseteq (\mathbb{H}, U).$$

Αποδεικνύουμε ότι $(F^*)_U(V) \subseteq I\!H$. Πράγματι, έστω $y \in V$. Τότε

$$\widehat{F}(y) \in (I\!H, U) \text{ ή } (\widehat{F}(y))^{-1}(U) \in I\!H.$$

Δηλαδή $(F^*)_U(y) \in I\!H$. Συνεπώς, η απεικόνιση F^* είναι Scott συνεχής ως προς την πρώτη μεταβλητή. $\square$

3.3.10 Πόρισμα. Εάν η απεικόνιση $\Phi_{\mathcal{F}_n} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$ είναι Scott συνεχής, τότε η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_{Sc}(\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)))$ επί του συνόλου $C(Y, Z)$ είναι διαχωριστική για κάθε τοπολογικό χώρο Z.

3.3.11 Λήμμα. Έστω $\tau_{Sc}(\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n))$ η Scott τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$ και $\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \tau_{Sc}(\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n))$. Εάν $O^n(V) \subseteq O^n(U)$, τότε $O^{n+1}(V) \subseteq O^{n+1}(U)$.

Απόδειξη. Έστω

$$\psi \in O^{n+1}(V) = \{\varphi \in \mathcal{F}_{n+1} : O^n(V) \in \varphi\}.$$

Τότε $O^n(V) \in \psi$, $O^n(V) \subseteq O^n(U)$ και ψ είναι ένα Scott ανοικτό σύνολο του $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$. Συνεπώς, $O^n(U) \in \psi$. Οπότε,

$$\psi \in O^{n+1}(U) = \{\varphi \in \mathcal{F}_{n+1} : O^n(U) \in \varphi\}.\square$$

3.3.12 Λήμμα. Έστω $\tau_{Sc}(\mathcal{O}(Y))$ η Scott τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}(Y)$ και

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \tau_{Sc}(\mathcal{O}(Y)).$$

Εάν $\{V_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathcal{O}(Y)$, τότε

$$O^n(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O^n(\bigcup_{\alpha \in \lambda} V_\alpha),$$

όπου Λ είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του A.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.3.11 παρατηρούμε ότι

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O^1(\bigcup_{\alpha \in \lambda} V_\alpha) \subseteq O^1(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha).$$

Αποδεικνύουμε ότι

$$O^1(\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O^1(\bigcup_{\alpha \in \lambda} V_\alpha).$$

Πράγματι, έστω

$$\psi \in O^1(\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha) = \{\varphi \in \mathcal{F}_1 : \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in \varphi\}.$$

Τότε

$$\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in \psi.$$

Εφόσον το ψ είναι Scott ανοικτό στο $\mathcal{O}(Y)$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο, ώστε

$$\bigcup_{\alpha\in\lambda_0} V_\alpha \in \psi.$$

Οπότε,

$$\psi \in O^1(\bigcup_{\alpha\in\lambda_0} V_\alpha) = \{\varphi \in \mathcal{F}_1 : \bigcup_{\alpha\in\lambda_0} V_\alpha \in \varphi\} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O^1(\bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha). \square$$

3.3.13 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, $\tau_{Sc}(\mathcal{O}(Y))$ η Scott τοπολογία επί του $\mathcal{O}(Y)$ και $\mathcal{F}_1 \subseteq \tau_{Sc}(\mathcal{O}(Y))$. Τότε η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_{Sc}(\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)))$ επί του συνόλου $C(Y,Z)$ είναι $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.9, αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\Phi_{\mathcal{F}_1} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$$

είναι Scott συνεχής. Έστω $I\!H$ Scott ανοικτό σύνολο του $\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)$. Αποδεικνύουμε ότι το σύνολο

$$I\!H' = \Phi^{-1}_{\mathcal{F}_1}(I\!H) = \{V \in \mathcal{O}(Y) : \Phi_{\mathcal{F}_1}(V) = O^1(V) \in I\!H\}$$

είναι Scott ανοικτό στο $\mathcal{O}(Y)$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $I\!H'$ ικανοποιεί τις δύο συνθήκες του ορισμού της Scott τοπολογίας.

(1) Έστω $V \in I\!H'$, $U \in \mathcal{O}(Y)$ και $V \subseteq U$. Αποδεικνύουμε ότι $U \in I\!H'$. Εφόσον $V \in I\!H'$, είναι $O^1(V) \in I\!H$. Επίσης, $V \subseteq U$. Οπότε από το Λήμμα 3.3.11, είναι $O^1(V) \subseteq O^1(U)$. Άρα, $O^1(U) \in I\!H$ και συνεπώς $U \in I\!H'$.

(2) Έστω

$$V = \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha \in I\!H',$$

όπου $V_\alpha \in \mathcal{O}(Y),\ \alpha \in A$. Τότε

$$O^1(V) = O^1(\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha) \in I\!H.$$

Από το Λήμμα 3.3.12,

$$O^1(\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O^1(\bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha),$$

όπου Λ είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του A. Εφόσον το $\mathbb{H}$ είναι Scott ανοικτό, υπάρχουν $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ στοιχεία του Λ τέτοια, ώστε

$$\bigcup_{i=1}^{n} O^1(\bigcup_{\alpha\in\lambda_i} V_\alpha) \in \mathbb{H}.$$

Επίσης,

$$\bigcup_{i=1}^{n} O^1(\bigcup_{\alpha\in\lambda_i} V_\alpha) \subseteq O^1(\bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{\alpha\in\lambda_i} V_\alpha))$$

και το $\mathbb{H}$ είναι Scott ανοικτό σύνολο του $O^1(\mathcal{F}_1)$. Άρα, έχουμε ότι

$$O^1(\bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{\alpha\in\lambda_i} V_\alpha)) \in \mathbb{H},$$

που σημαίνει ότι

$$\bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{\alpha\in\lambda_i} V_\alpha) \in \mathbb{H}'.$$

Συνεπώς, το $\mathbb{H}' = \Phi^{-1}_{\mathcal{F}_1}(\mathbb{H})$ είναι Scott ανοικτό. $\square$

3.3.14 Πόρισμα. Έστω $\mathcal{F}_1 \subseteq \tau_{Sc}(\mathcal{O}(Y))$. Τότε η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_1}(\tau_{Sc}(\mathcal{O}^1(\mathcal{F}_1)))$ επί του συνόλου $C(Y,Z)$ είναι διαχωριστική.

3.4 Χαρακτηρισμός των $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών για τις $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογίες επί του $C(Y,Z)$

3.4.1 Σημείωση. Έστω X τοπολογικός χώρος. Εάν $G : X \to C(Y,Z)$ είναι μία απεικόνιση, τότε με $\overline{G}_n$, όπου $n = 1,2,\ldots$, συμβολίζουμε την απεικόνιση του συνόλου $X \times \mathcal{O}(Z)$ στο σύνολο $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$, για την οποία

$$\overline{G}_n(x,U) = O^n((G(x))^{-1}(U)),$$

για κάθε $x \in X$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

3.4.2 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και τ_n τοπολογία επί του $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$, όπου $n = 1, 2, \ldots$. Η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y, Z)$ είναι $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, εάν και μόνον εάν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$, η συνέχεια, ως προς την πρώτη μεταβλητή, της απεικόνισης $\overline{G}_n$, συνεπάγεται τη συνέχεια της απεικόνισης

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y, Z)$ είναι $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, X είναι στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{A}$ και

$$\overline{G}_n : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F})$$

είναι συνεχής απεικόνιση, ως προς την πρώτη μεταβλητή. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση $\widetilde{G} : X \times Y \to Z$ είναι συνεχής. Εφόσον η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y, Z)$ είναι $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$G : X \to C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, Z)$$

είναι συνεχής. Πράγματι, έστω $x \in X$, $U \in \mathcal{O}(Z)$ και $I\!H \in \tau_n$ τέτοια, ώστε

$$G(x) \in < I\!H, U >_n .$$

Πρέπει να βρούμε ανοικτή περιοχή V του x στο X τέτοια, ώστε

$$G(V) \subseteq < I\!H, U >_n .$$

Όμως,

$$O^n((G(x))^{-1}(U)) \in I\!H$$

και επειδή η απεικόνιση

$$\overline{G}_n : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F})$$

είναι συνεχής, ως προς την πρώτη μεταβλητή και

$$O^n((G(x))^{-1}(U)) \in I\!H,$$

υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x στο X τέτοια, ώστε

$$(\overline{G}_n)_U(V) = \overline{G}_n(V \times \{U\}) \subseteq I\!H.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι

$$G(V) \subseteq < I\!\!H, U >_n .$$

Πράγματι, έστω $x' \in V$. Τότε

$$\overline{G}_n(x', U) = O^n((G(x'))^{-1}(U)) \in I\!\!H$$

ή ισοδύναμα,

$$G(x') \in < I\!\!H, U >_n .$$

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ η συνέχεια της απεικόνισης $\overline{G}_n$, ως προς την πρώτη μεταβλητή, συνεπάγεται τη συνέχεια της απεικόνισης

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z.$$

Αποδεικνύουμε ότι η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ είναι $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και

$$G : X \to C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, Z)$$

συνεχής απεικόνιση. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι συνεχής. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\overline{G}_n : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}^n(\mathcal{F})$$

είναι συνεχής ως προς την πρώτη μεταβλητή. Πράγματι, έστω $x \in X$, $U \in \mathcal{O}(Z)$ και $I\!\!H \in \tau_n$ τέτοιο, ώστε

$$(\overline{G}_n)_U(x) = \overline{G}_n(x, U) \in I\!\!H.$$

Πρέπει να βρούμε ανοικτή περιοχή V του x στο X τέτοια, ώστε

$$\overline{G}_{n,U}(V) \subseteq I\!\!H.$$

Θεωρώντας το ανοικτό σύνολο $< I\!\!H, U >_n$ του χώρου $C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, Z)$ έχουμε ότι

$$G(x) \in < I\!\!H, U >_n .$$

Εφόσον η απεικόνιση

$$G : X \to C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y, Z)$$

είναι συνεχής και

$$G(x) \in < \mathbb{H}, U >_n,$$

υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x στο X τέτοια, ώστε

$$G(V) \subseteq < \mathbb{H}, U >_n .$$

Αποδεικνύουμε ότι

$$(\overline{G}_n)_U(V) = \overline{G}_n(V \times \{U\}) \subseteq \mathbb{H}.$$

Πράγματι, έστω $x' \in V$. Τότε

$$G(x') \in < \mathbb{H}, U >_n$$

ή ισοδύναμα,

$$O^n((G(x'))^{-1}(U)) \in \mathbb{H}.$$

Άρα,

$$\overline{G}_n(x', U) \in \mathbb{H}$$

και συνεπώς,

$$\overline{G}_n(V \times \{U\}) \subseteq \mathbb{H}. \ \square$$

3.4.3 Πόρισμα. Έστω τ_n τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{O}^n(\mathcal{F}_n)$, όπου $n = 1, 2, \ldots$. Η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ επί του $C(Y, Z)$ είναι συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν, για κάθε χώρο X, η συνέχεια, ως προς την πρώτη μεταβλητή, της απεικόνισης $\overline{G}_n$, συνεπάγεται τη συνέχεια της απεικόνισης $\widetilde{G} : X \times Y \to Z$.

Κεφάλαιο 4

Τοπολογίες επί των συνόλων $\mathcal{M}(Y,Z)$ και $\sigma_Z(\tau_Y)$

Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε και μελετάμε τις έννοιες των μετρήσιμων και χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ των μετρήσιμων απεικονίσεων του χώρου Y στο χώρο Z. Επίσης, παρουσιάζουμε και αναλύουμε σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ και επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ των μετρήσιμων υποσυνόλων του χώρου Y, τα οποία είναι αντίστροφες εικόνες μετρήσιμων υποσυνόλων του χώρου Z. Επίσης, ορίζουμε και εξετάζουμε σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών επί των συνόλων αυτών.

4.0 Βασικές έννοιες

4.0.1 Ορισμός. Έστω $(Y,\mathcal{S}_1)$, $(Z,\mathcal{S}_2)$ μετρήσιμοι χώροι και $f : Y \to Z$ απεικόνιση του χώρου Y στο χώρο Z. Η f καλείται *μετρήσιμη* ή *Borel* εάν $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$, για κάθε $A \in \mathcal{S}_2$.

4.0.2 Πρόταση. Έστω $(Y,\mathcal{S}_1)$, $(Z,\mathcal{S}_2)$ μετρήσιμοι χώροι, $f : Y \to Z$ απεικόνιση, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ και $S_2 = \sigma(\mathcal{E})$. Η απεικόνιση f είναι μετρήσιμη εάν $f^{-1}(A) \in \mathcal{S}_1$, για κάθε $A \in \mathcal{E}$.

4.0.3 Πρόταση. Έστω X, Y, και Z μετρήσιμοι χώροι και $F : X \times Y \to Z$ μετρήσιμη απεικόνιση. Τότε για κάθε $x \in X$ και για κάθε $y \in Y$ οι απεικονίσεις $F_x : Y \to Z$

και $F^y : X \to Z$, με τύπους $F_x(y) = F(x, y)$ για κάθε $y \in Y$ και $F^y(x) = F(x, y)$, είναι μετρήσιμες.

4.0.4 Ορισμός. Έστω Y, Z τοπολογικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f : Y \to Z$ καλείται *μετρήσιμη* (ή *Borel*) *απεικόνιση* αν για κάθε $B \in \sigma(\tau_Z)$ είναι $f^{-1}(B) \in \sigma(\tau_Y)$. Το σύνολο των μετρήσιμων απεικονίσεων του χώρου Y στον χώρο Z συμβολίζεται με $\mathcal{M}(Y, Z)$.

4.0.5 Πρόταση. Έστω Y, Z τοπολογικοί χώροι. Η απεικόνιση $f : Y \to Z$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο $U \in Z$ είναι $f^{-1}(U) \in \sigma(\tau_Y)$.

4.0.6 Πρόταση. Έστω Y, Z δύο τοπολογικοί χώροι και $f : Y \to Z$ μία συνεχής απεικόνιση. Τότε η f είναι μετρήσιμη.

4.0.7 Πρόταση. Έστω X, Y, Z τοπολογικοί χώροι και οι μετρήσιμες απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Η σύνθεση $f \circ g$ είναι μετρήσιμη απεικόνιση.

4.0.8 Ορισμός. Ένα υποσύνολο Q ενός τοπολογικού χώρου X καλείται G_δ-*σύνολο* (αντίστοιχα, F_σ-*σύνολο*), εάν το Q είναι τομή (αντίστοιχα, ένωση) αριθμήσιμου πλήθους ανοικτών (αντίστοιχα, κλειστών) υποσυνόλων του X.

4.1 Χωριστά μετρήσιμες $\mathcal{A}$-διαχωριστικές και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχείς τοπολογίες επί του $\mathcal{M}(Y, Z)$

Σε ό,τι ακολουθεί οι Y και Z είναι σταθεροί τοπολογικοί χώροι. Επίσης αν t είναι μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$, τότε ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος θα συμβολίζεται με $\mathcal{M}_t(Y, Z)$.

4.1.1 Σημείωση. Έστω X τοπολογικός χώρος και $F : X \times Y \to Z$ απεικόνιση. Με F_x συμβολίζουμε την απεικόνιση του χώρου Y στον χώρο Z, για την οποία ισχύει $F_x(y) = F(x, y)$, για κάθε $y \in Y$ και με F^y συμβολίζουμε την απεικόνιση του χώρου X στον χώρο Z, με τιμή $F^y(x) = F(x, y)$, για κάθε $x \in X$.

Η απεικόνιση

$$e : \mathcal{M}(Y,Z) \times Y \to Z,$$

η οποία ορίζεται ως $e(f,y) = f(y)$, για κάθε $(f,y) \in \mathcal{M}(Y,Z) \times Y$, καλείται $\mathcal{M}$-*απεικόνιση εκτίμησης*.

4.1.2 Ορισμός. Έστω X τυχαίος τοπολογικός χώρος. Η απεικόνιση

$$F : X \times Y \to Z$$

καλείται *χωριστά μετρήσιμη* αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $y \in Y$ οι απεικονίσεις $F_x : Y \to Z$ και $F^y : X \to Z$ είναι μετρήσιμες.

4.1.3 Παρατήρηση. (1) Αν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι μετρήσιμη, τότε είναι και χωριστά μετρήσιμη.
(2) Έστω $F : X \times Y \to Z$ χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Με $\widehat{F}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του χώρου X στον χώρο $\mathcal{M}(Y,Z)$, για την οποία ισχύει $\widehat{F}(x) = F_x$, για κάθε $x \in X$.
(3) Έστω G απεικόνιση του χώρου X στον χώρο $\mathcal{M}(Y,Z)$. Με $\widetilde{G}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του χώρου $X \times Y$ στον χώρο Z, για την οποία ισχύει $\widetilde{G}(x,y) = G(x)(y)$, για κάθε $(x,y) \in X \times Y$.

4.1.4 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων.

(1) Μία τοπολογία t επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ καλείται *χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική* αν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση $\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_t(Y,Z)$ είναι μετρήσιμη.

(2) Μία τοπολογία t επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ καλείται *χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής* αν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση $G : X \to \mathcal{M}_t(Y,Z)$ είναι μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση $\widetilde{G} : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά μετρήσιμη.

4.1.5 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια όλων των τοπολογικών χώρων, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες των χωριστά μετρήσιμων διαχωριστικών και χωριστά μετρήσιμων συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντί των εννοιών των χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντίστοιχα.

4.1.6 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Τότε η τοπολογία t επι του $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν η $\mathcal{M}$-απεικόνιση εκτίμησης

$$e : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη.

Απόδειξη. Έστω t μία χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{M}$-απεικόνιση εκτίμησης

$$e : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Θεωρούμε ως X το χώρο $\mathcal{M}_t(Y,Z)$ και ως απεικόνιση G την ταυτοτική απεικόνιση

$$id : \mathcal{M}_t(Y,Z) \to \mathcal{M}_t(Y,Z).$$

Επειδή η απεικόνιση G είναι μετρήσιμη και η τοπολογία t είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Παρατηρούμε ότι $\widetilde{G} = e$. Συνεπώς, η απεικόνιση e είναι χωριστά μετρήσιμη.

Αντιστρόφως, έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε η $\mathcal{M}$-απεικόνιση εκτίμησης e να είναι χωριστά μετρήσιμη, $X \in \mathcal{A}$ και $G : X \to \mathcal{M}_t(Y,Z)$ μία μετρήσιμη απεικόνιση. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Έστω $x \in X$. Τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\widetilde{G}(x,y) = G(x)(y) = e(G(x),y).$$

Οπότε, $\widetilde{G}_x(y) = e_{G(x)}(y)$ για κάθε $y \in Y$. Συνεπώς, $\widetilde{G}_x = e_{G(x)}$.

Επειδή η απεικόνιση e είναι χωριστά μετρήσιμη, η απεικόνιση $e_{G(x)}$ και συνεπώς, η απεικόνιση $\widetilde{G}_x$ είναι μετρήσιμη.

Τώρα, έστω $y \in Y$. Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\widetilde{G}^y(x) = \widetilde{G}(x,y) = G(x)(y) = e(G(x),y) = e^y(G(x)) = (e^y \circ G)(x).$$

Επειδή η απεικόνιση e είναι χωριστά μετρήσιμη, η απεικόνιση e^y είναι μετρήσιμη. Συνεπώς, επειδή η απεικόνιση G είναι μετρήσιμη, η σύνθεση $e^y \circ G$ είναι μετρήσιμη. Άρα, η απεικόνιση $\widetilde{G}^y$ είναι μετρήσιμη. Οπότε, η απεικόνιση $\widetilde{G}$ είναι χωριστά μετρήσιμη. $\square$

4.1.7 Πόρισμα. Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν η $\mathcal{M}$-απεικόνιση εκτίμησης e είναι χωριστά μετρήσιμη.

4.1.8 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$.

(1) Εάν η t είναι μικρότερη από μία χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία u επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$, τότε η t είναι επίσης χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

(2) Εάν η t είναι μεγαλύτερη από μία χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία u επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ και $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$, τότε η t είναι επίσης χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

Απόδειξη. (1) Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Επειδή η τοπολογία u είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_u(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Αφού $t \subseteq u$, έχουμε

$$\sigma(t) \subseteq \sigma(u)$$

και συνεπώς, η ταυτοτική απεικόνιση $id : \mathcal{M}_u(Y,Z) \to \mathcal{M}_t(Y,Z)$ είναι μετρήσιμη. Άρα, η απεικόνιση

$$id \circ \widehat{F} : X \to \mathcal{M}_t(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Συνεπώς, η τοπολογία t είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

(2) Επειδή $u \subseteq t$, έχουμε

$$\sigma(u) \subseteq \sigma(t)$$

και συνεπώς, η ταυτοτική απεικόνιση

$$G = id : \mathcal{M}_t(Y,Z) \to \mathcal{M}_u(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Επειδή η τοπολογία u είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής και $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Παρατηρούμε ότι $\widetilde{G} = e$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.6, η τοπολογία t είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής. □

4.1.9 Πόρισμα. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ μικρότερη από μία χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι επίσης χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική.

(2) Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ μεγαλύτερη από μία χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχή τοπολογία επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι επίσης χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

4.1.10 Πρόταση. Έστω t μία χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Τότε για κάθε χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία u επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ έχουμε ότι $\sigma(u) \subseteq \sigma(t)$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.1.6 έχουμε ότι η $\mathcal{M}$-απεικόνιση εκτίμησης

$$e : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Επίσης, επειδή η τοπολογία u είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική και $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{e} : \mathcal{M}_t(Y,Z) \to \mathcal{M}_u(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Παρατηρούμε ότι $\widehat{e} = id$. Συνεπώς, $\sigma(u) \subseteq \sigma(t)$. □

4.1.11 Πόρισμα. Έστω t μία χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Τότε, για κάθε χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία u επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ έχουμε ότι $\sigma(u) \subseteq \sigma(t)$.

4.1.12 Παρατήρηση. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων. Παρατηρούμε ότι, γενικά, στο σύνολο $\mathcal{M}(Y,Z)$ δεν υπάρχει η μεγαλύτερη χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία. Αυτό το συμπέρασμα δίνει ένα διαφορετικό αποτέλεσμα από την κλασσική θεωρία των συναρτησιακών τοπολογικών χώρων. (βλέπε [3] και [28])

4.1.13 Πρόταση. Η τετριμμένη τοπολογία t_{tr} επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι η μικρότερη χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η t_{tr} είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_{tr}(Y,Z).$$

Επειδή $\widehat{F}^{-1}(\mathcal{M}(Y,Z)) = X$ και $\widehat{F}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, έχουμε ότι η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι μετρήσιμη. Συνεπώς η t_{tr} είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία. $\square$

4.1.14 Πρόταση. Η διακριτική τοπολογία t_d επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι η μεγαλύτερη χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $G : X \to \mathcal{M}_{t_d}(Y,Z)$ μία μετρήσιμη απεικόνιση. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Έστω $x \in X$ και $\widetilde{G}_x : Y \to Z$ μία απεικόνιση για την οποία

$$\widetilde{G}_x(y) = \widetilde{G}(x,y) = G(x)(y),$$

για κάθε $y \in Y$. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση $\widetilde{G}_x$ είναι μετρήσιμη. Επειδή $G(x) \in \mathcal{M}(Y,Z)$, η απεικόνιση $\widetilde{G}_x$ είναι μετρήσιμη.
Έστω, τώρα $y \in Y$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\widetilde{G}^y : X \to Z$, για την οποία

$$\widetilde{G}^y(x) = \widetilde{G}(x,y) = G(x)(y),$$

για κάθε $x \in X$. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση $\widetilde{G}^y$ είναι μετρήσιμη. Πράγματι, έστω W ανοικτό υποσύνολο του χώρου Z. Τότε

$$(\widetilde{G}^y)^{-1}(W) \;\; = \;\; \{x \in X : \widetilde{G}^y(x) \in W\}$$

$$= \{x \in X : G(x)(y) \in W\}.$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$O = \{f \in \mathcal{M}(Y, Z) : f(y) \in W\}.$$

Τότε

$$G^{-1}(O) = \{x \in X : G(x)(y) \in W\}.$$

Δηλαδή $(\widetilde{G}^y)^{-1}(W) = G^{-1}(O)$. Επειδή $O \in t_d$ και η απεικόνιση G είναι μετρήσιμη, έχουμε

$$(\widetilde{G}^y)^{-1}(W) = G^{-1}(O) \in \sigma(\tau_X)$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\widetilde{G}^y$ είναι μετρήσιμη. $\square$

4.1.15 Ορισμός. Έστω $y \in Y$. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\}, U) = \{f \in \mathcal{M}(Y, Z) : f(y) \in U\},$$

όπου U ανοικτό υποσύνολο του χώρου Z, καλείται y-*τοπολογία* και συμβολίζεται με t_y.

4.1.16 Πρόταση. Η y-τοπολογία t_y επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_{t_y}(Y, Z)$ είναι μετρήσιμη. Έστω $O \in t_y$. Τότε υπάρχουν

$$U_1^i, \ldots, U_{k(i)}^i \text{ ανοικτά υποσύνολα του } Z, \ i \in I$$

τέτοια, ώστε

$$O = \cup\{(\{y\}, U_1^i) \cap \ldots \cap (\{y\}, U_{k(i)}^i) : i \in I\}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
\widehat{F}^{-1}(O) &= \widehat{F}^{-1}(\cup\{(\{y\}, U_1^i) \cap \ldots \cap (\{y\}, U_{k(i)}^i) : i \in I\}) \\
&= \widehat{F}^{-1}((\{y\}, \cup\{U_1^i \cap \ldots \cap U_{k(i)}^i : i \in I\}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{x \in X : \widehat{F}(x)(y) = F^y(x) \in \cup\{U_1^i \cap \ldots \cap U_{k(i)}^i : i \in I\}\} \\ &= (F^y)^{-1}(\cup\{U_1^i \cap \ldots \cap U_{k(i)}^i : i \in I\}). \end{aligned}$$

Επειδή η απεικόνιση F^y είναι μετρήσιμη και $\cup\{U_1^i \cap \cdots \cap U_{k(i)}^i : i \in I\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου Z, έπεται ότι

$$(F^y)^{-1}(\cup\{U_1^i \cap \ldots \cap U_{k(i)}^i : i \in I\}) \in \sigma(\tau_X).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι μετρήσιμη. □

4.1.17 Ορισμός. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\}, U) = \{f \in \mathcal{M}(Y,Z) : f(y) \in U\},$$

όπου $y \in Y$ και U ανοικτό υποσύνολο του χώρου Z, καλείται *σημειακή-ανοικτή τοπολογία* και συμβολίζεται με t_p.

4.1.18 Πρόταση. Η σημειακή-ανοικτή τοπολογία t_p επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $G : X \to \mathcal{M}_{t_p}(Y,Z)$ μία μετρήσιμη απεικόνιση. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Έστω $x \in X$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\widetilde{G}_x : Y \to Z$. Τότε έχουμε

$$\widetilde{G}_x(y) = \widetilde{G}(x,y) = G(x)(y),$$

για κάθε $y \in Y$. Επειδή $G(x) \in \mathcal{M}_{t_p}(Y,Z)$, η απεικόνιση $\widetilde{G}_x = G(x)$ είναι μετρήσιμη.

Έστω, τώρα $y \in Y$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\widetilde{G}^y : X \to Z$. Τότε, έχουμε

$$\widetilde{G}^y(x) = \widetilde{G}(x,y) = G(x)(y),$$

για κάθε $x \in X$. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση $\widetilde{G}^y$ είναι μετρήσιμη. Έστω W ανοικτό υποσύνολο του χώρου Z. Τότε

$$(\widetilde{G}^y)^{-1}(W) \;=\; \{x \in X : \widetilde{G}^y(x) = \widetilde{G}(x,y) = G(x)(y) \in W\}$$

$$= \quad G^{-1}((\{y\}, W)).$$

Επειδή η απεικόνιση G είναι μετρήσιμη, έχουμε

$$G^{-1}((\{y\}, W)) \in \sigma(\tau_X)$$

και συνεπώς, $(\widetilde{G}^y)^{-1}(W) \in \sigma(\tau_X)$. Άρα, η απεικόνιση $\widetilde{G}^y$ είναι μετρήσιμη. □

4.1.19 Πρόταση. Αν η υποβάση που αναφέρεται στον Ορισμό 4.1.17 είναι αριθμήσιμη, τότε η σημειακή-ανοικτή τοπολογία t_p επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_{t_p}(Y, Z)$$

είναι μετρήσιμη. Έστω

$$\bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J_i}(\{y_j\}, W_j)) \in t_p,$$

όπου $|I| \leq \aleph_0$, $|J_i| < \aleph_0$, $y_j \in Y$ και $W_j \in \mathcal{O}(Z)$, για κάθε $j \in J_i$. Τότε

$$\begin{aligned}
&\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J_i}(\{y_j\}, W_j))) = \bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J_i} \widehat{F}^{-1}(\{y_j\}, W_j)) \\
&= \bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J_i}\{x \in X : \widehat{F}(x)(y_j) = F(x, y_j) = F^{y_j}(x) \in W_j\}) \\
&= \bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J_i}(F^{y_j})^{-1}(W_j)).
\end{aligned}$$

Επειδή η απεικόνιση F^{y_i} είναι μετρήσιμη, είναι

$$(F^{y_j})^{-1}(W_j) \in \sigma(\tau_X)$$

και άρα,

$$\bigcap_{j \in J_i}(F^{y_j})^{-1}(W_j), \; \bigcup_{i \in I}(\bigcap_{j \in J_i}(F^{y_j})^{-1}(W_j)) \in \sigma(\tau_X).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι μετρήσιμη. □

4.1.20 Ορισμός. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\}, B) = \{f \in \mathcal{M}(Y, Z) : f(y) \in B\},$$

όπου $y \in Y$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$, καλείται *σημειακή-μετρήσιμη τοπολογία* και συμβολίζεται με t_{pm}.

4.1.21 Παρατήρηση. Είναι ξεκάθαρο ότι $t_p \subseteq t_{pm}$.

4.1.22 Πρόταση. Η σημειακή-μετρήσιμη τοπολογία t_{pm} επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Παρατήρησης 4.1.21 και των Προτάσεων 4.1.8 (2) και 4.1.18. □

4.1.23 Πρόταση. Αν η υποβάση που αναφέρεται στον Ορισμό 4.1.20 είναι αριθμήσιμη, τότε η σημειακή-μετρήσιμη τοπολογία t_{pm} επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_{t_{pm}}(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\{y_j\},B_j)) \in t_{pm},$$

όπου $|I| \leq \aleph_0$, $|J_i| < \aleph_0$, $y_j \in Y$ και $B_j \in \sigma(\tau_Z)$, για κάθε $j \in J_i$. Τότε

$$\begin{aligned}
&\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\{y_j\},B_j))) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(\{y_j\},B_j)) \\
&= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\{x \in X : \widehat{F}(x)(y_j) = F(x,y_j) = F^{y_j}(x) \in B_j\}) \\
&= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(B_j)).
\end{aligned}$$

Επειδή η απεικόνιση F^{y_i} είναι μετρήσιμη, είναι

$$(F^{y_j})^{-1}(B_j) \in \sigma(\tau_X)$$

και άρα,

$$\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(B_j),\ \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(B_j)) \in \sigma(\tau_X).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι μετρήσιμη. □

4.1.24 Ορισμός. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\},A)=\{f\in\mathcal{M}(Y,Z):f(y)\in A\},$$

όπου $y\in Y$ και A είναι ένα G_δ-σύνολο του χώρου Z, καλείται *σημειακή-G_δ τοπολογία* και συμβολίζεται με t_{pG_δ}.

4.1.25 Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι $t_p\subseteq t_{pG_\delta}\subseteq t_{pm}$.

4.1.26 Πρόταση. Η σημειακή-G_δ τοπολογία t_{pG_δ} επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Παρατήρησης 4.1.25 και των Προτάσεων 4.1.8 (2) και 4.1.18. □

4.1.27 Πρόταση. Αν η υποβάση που αναφέρεται στον Ορισμό 4.1.24 είναι αριθμήσιμη, τότε η σημειακή-G_δ τοπολογία t_{pG_δ} επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $X\in\mathcal{A}$ και $F:X\times Y\to Z$ μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F}:X\to\mathcal{M}_{t_{pG_\delta}}(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\{y_j\},A_j))\in t_{pG_\delta},$$

όπου $|I|\leq\aleph_0$, $|J_i|<\aleph_0$, $y_j\in Y$ και A_j ένα G_δ σύνολο του χώρου Z, για κάθε $j\in J_i$. Τότε

$$\begin{aligned}&\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\{y_j\},A_j)))=\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(\{y_j\},A_j))\\&=\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\{x\in X:\widehat{F}(x)(y_j)=F(x,y_j)=F^{y_j}(x)\in A_j\})\\&=\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(A_j)).\end{aligned}$$

Επειδή η απεικόνιση F^{y_i} είναι μετρήσιμη, είναι

$$(F^{y_j})^{-1}(A_j)\in\sigma(\tau_X)$$

και άρα,

$$\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(A_j),\ \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(A_j))\in\sigma(\tau_X).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι μετρήσιμη. $\square$

4.2 Μετρήσιμες $\mathcal{A}$-διαχωριστικές και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχείς τοπολογίες επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$

4.2.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων.

(1) Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ καλείται *μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική* αν για κάθε χώρο $X\in\mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση $F: X\times Y\to Z$ είναι μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση $\widehat{F}: X\to\mathcal{M}_t(Y,Z)$ είναι μετρήσιμη.

(2) Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ καλείται *μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής* αν για κάθε χώρο $X\in\mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση $G: X\to\mathcal{M}_t(Y,Z)$ είναι μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση $\widetilde{G}: X\times Y\to Z$ είναι μετρήσιμη.

4.2.2 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια όλων των τοπολογικών χώρων, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες των μετρήσιμων διαχωριστικών και μετρήσιμων συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντί των εννοιών των μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και μετρήσιμων $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντίστοιχα.

4.2.3 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$.

(1) Αν η t είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία, τότε είναι και μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

(2) Αν η t είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία, τότε είναι και χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

Απόδειξη. (1) Είναι άμεση συνέπεια του ότι αν η απεικόνιση $F: X\times Y\to Z$ είναι μετρήσιμη, τότε είναι και χωριστά μετρήσιμη.

(2) Είναι άμεση συνέπεια του ότι αν η απεικόνιση $\widetilde{G}: X\times Y\to Z$ είναι μετρήσιμη, τότε είναι και χωριστά μετρήσιμη. $\square$

4.2.4 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Τότε η τοπολογία t επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν η $\mathcal{M}$-απεικόνιση εκτίμησης $e : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Έστω t μία μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση

$$e : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι μετρήσιμη. Θεωρούμε ως X το χώρο $\mathcal{M}_t(Y,Z)$ και ως G την ταυτοτική απεικόνιση

$$id : \mathcal{M}_t(Y,Z) \to \mathcal{M}_t(Y,Z).$$

Εφόσον η απεικόνιση G είναι μετρήσιμη και η τοπολογία t μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, έχουμε ότι η απεικόνιση $\widetilde{G} : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$ είναι μετρήσιμη. Παρατηρούμε ότι $\widetilde{G} = e$. Άρα, η απεικόνιση e είναι μετρήσιμη.

Αντιστρόφως, έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε η απεικόνιση $e : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$ να είναι μετρήσιμη, $X \in \mathcal{A}$ και $G : X \to \mathcal{M}_t(Y,Z)$ μία μετρήσιμη απεικόνιση. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι μετρήσιμη. Έστω $id_Y : Y \to Y$ η ταυτοτική απεικόνιση από το χώρο Y στο χώρο Y. Τότε για κάθε $(x,y) \in X \times Y$ έχουμε

$$\begin{aligned}(e \circ (G \times id_Y))(x,y) &= e((G \times id_Y)(x,y)) = e(G(x),y) \\ &= G(x)(y) = \widetilde{G}(x,y).\end{aligned}$$

Εφ' όσον οι απεικονίσεις G, id_Y και e είναι μετρήσιμες, η απεικόνιση $\widetilde{G}$ είναι μετρήσιμη. Συνεπώς, η τοπολογία t είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής. □

4.2.5 Πόρισμα. Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι μετρήσιμη συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν η $\mathcal{M}$-απεικόνιση εκτίμησης $e : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$ είναι μετρήσιμη.

4.2.6 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$.

(1) Αν u είναι μία μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ και $t \subseteq u$, τότε η t είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

(2) Αν u είναι μία μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$, $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$ και $u \subseteq t$, τότε η t είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

Απόδειξη. (1) Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ μία μετρήσιμη απεικόνιση. Επειδή η τοπολογία u είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_u(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Εφόσον $t \subseteq u$, έχουμε

$$\sigma(t) \subseteq \sigma(u)$$

και συνεπώς, η ταυτοτική απεικόνιση

$$id : \mathcal{M}_u(Y,Z) \to \mathcal{M}_t(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Άρα, η απεικόνιση

$$id \circ \widehat{F} : X \to \mathcal{M}_t(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Συνεπώς, η τοπολογία t είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

(2) Επειδή $u \subseteq t$, έχουμε

$$\sigma(u) \subseteq \sigma(t)$$

και συνεπώς, η ταυτοτική απεικόνιση

$$id : \mathcal{M}_t(Y,Z) \to \mathcal{M}_u(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Επειδή η τοπολογία u είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής και $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι μετρήσιμη. Παρατηρούμε ότι $\widetilde{G} = e$. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.4, η τοπολογία t είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής. $\square$

4.2.7 Πόρισμα. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ μικρότερη από μία μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι επίσης μετρήσιμη διαχωριστική.

(2) Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ μεγαλύτερη από μία μετρήσιμη συνδετικά συνεχή τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι επίσης μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

4.2.8 Πρόταση. Έστω t μία μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Τότε για κάθε μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία u επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ έχουμε

$$\sigma(u) \subseteq \sigma(t).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.2.4 έχουμε ότι η $\mathcal{M}$-απεικόνιση εκτίμησης

$$e : \mathcal{M}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι μετρήσιμη. Επίσης, επειδή η τοπολογία u είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική και $\mathcal{M}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{e} : \mathcal{M}_t(Y,Z) \to \mathcal{M}_u(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Παρατηρούμε ότι $\widehat{e} = id$. Συνεπώς, $\sigma(u) \subseteq \sigma(t)$. □

4.2.9 Πόρισμα. Έστω t μία μετρήσιμη συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Τότε για κάθε μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία u επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ έχουμε $\sigma(u) \subseteq \sigma(t)$.

4.2.10 Ορισμός. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(M,U) = \{f \in \mathcal{M}(Y,Z) : f(M) \subseteq U\},$$

όπου το M είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του Y και U ανοικτό υποσύνολο του Z καλείται *αριθμήσιμη-ανοικτή τοπολογία* και συμβολίζεται με t_{count}.

4.2.11 Πρόταση. Εάν η υποβάση που αναφέρεται στον Ορισμό 4.2.10 είναι αριθμήσιμη, τότε η αριθμήσιμη-ανοικτή τοπολογία t_{count} επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$ είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ μετρήσιμη απεικόνιση. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_{t_{count}}(Y, Z)$$

είναι μετρήσιμη. Έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(M_j, W_j)) \in t_{count},$$

όπου $|I| \leq \aleph_0$, $|J_i| < \aleph_0$, M_j αριθμήσιμο υποσύνολο του Y και W_j ανοικτό υποσύνολο του Z. Τότε

$$\begin{aligned}
\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(M_j, W_j))) &= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(M_j, W_j)) \\
&= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{y\in M_j}\{y\}, W_j)) \\
&= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(\bigcap_{y\in M_j}(\{y\}, W_j))) \\
&= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\bigcap_{y\in M_j}(\widehat{F}^{-1}(\{y\}, W_j))).
\end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε $y \in M_j$ έχουμε

$$\widehat{F}^{-1}((\{y\}, W_j)) = \{x \in X : \widehat{F}(x)(y) = F(x, y) = F^y(x) \in W_j\} = (F^y)^{-1}(W_j).$$

Εφόσον η απεικόνιση F είναι μετρήσιμη, είναι επίσης και χωριστά μετρήσιμη. Άρα, η απεικόνιση F^y είναι μετρήσιμη. Αυτό σημαίνει ότι

$$(F^y)^{-1}(W_j) \in \sigma(\tau_X), \text{ για κάθε } y \in M_j.$$

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(M_j, W_j))) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\bigcap_{y\in M_j}(F^y)^{-1}(W_j))) \in \sigma(\tau_X).$$

Οπότε, η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι μετρήσιμη και συνεπώς, η τοπολογία t_{count} είναι μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική. $\square$

4.3 Δυϊκές τοπολογίες επί του συνόλου των μετρήσιμων συνόλων

Σε αυτή την ενότητα, για δύο σταθερούς τοπολογικούς χώρους Y και Z θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{M}(Y,Z)$ όλων των μετρήσιμων απεικονίσεων από το Y στο Z και το σύνολο

$$\sigma_Z(\tau_Y) \equiv \{f^{-1}(B) : f \in \mathcal{M}(Y,Z),\ B \in \sigma(\tau_Z)\}.$$

Μελετάμε τοπολογίες επί των συνόλων $\mathcal{M}(Y,Z)$ και $\sigma_Z(\tau_Y)$, αναφερόμενοι στις έννοιες των χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών τοπολογιών και των χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών.

4.3.1 Σημείωση. Έστω $\mathbb{H} \subseteq \sigma_Z(\tau_Y)$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}(Y,Z)$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$. Θέτουμε

$$(\mathbb{H}, B) = \{f \in \mathcal{M}(Y,Z) : f^{-1}(B) \in \mathbb{H}\}$$

και

$$(\mathcal{H}, B) = \{f^{-1}(B) : f \in \mathcal{H}\}.$$

4.3.2 Ορισμός. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα $(\mathbb{H}, B)$, όπου $\mathbb{H} \in \tau$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$ καλείται *δυϊκή της* τ και συμβολίζεται με $t(\tau)$.

4.3.3 Ορισμός. Έστω t τοπολογία επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$. Η τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα $(\mathcal{H}, B)$, όπου $\mathcal{H} \in t$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$ καλείται *δυϊκή της* t και συμβολίζεται με $\tau(t)$.

Συμβολισμός. Σε ό,τι ακολουθεί με $s(\tau)$ συμβολίζουμε την οικογένεια

$$\{(\mathbb{H}, B) : \mathbb{H} \in \tau,\ B \in \sigma(\tau_Z)\}.$$

Επίσης, με $r(t)$ συμβολίζουμε την οικογένεια

$$\{(\mathcal{H}, B) : \mathcal{H} \in t,\ B \in \sigma(\tau_Z)\}.$$

4.3.4 Παρατηρήσεις. (1) Έστω ότι $F : X \times Y \to Z$ είναι μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Με $\overline{F}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του $X \times \sigma(\tau_Z)$ στο $\sigma_Z(\tau_Y)$, για την οποία $\overline{F}(x, B) = F_x^{-1}(B)$ για κάθε $x \in X$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$.

(2) Έστω $G : X \to \mathcal{M}(Y,Z)$ απεικόνιση. Με $\overline{G}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του $X \times \sigma(\tau_Z)$ στο $\sigma_Z(\tau_Y)$, για την οποία $\overline{G}(x,B) = (G(x))^{-1}(B)$ για κάθε $x \in X$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$.

4.3.5 Ορισμός. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Λέμε ότι η απεικόνιση M του $X \times \sigma(\tau_Z)$ στο $\sigma_Z(\tau_Y)$ είναι *μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή* εάν για κάθε σταθερό στοιχείο $B \in \sigma(\tau_Z)$ η απεικόνιση

$$M_B : X \to (\sigma_Z(\tau_Y), \tau),$$

με $M_B(x) = M(x,B)$, για κάθε $x \in X$, είναι μετρήσιμη.

4.3.6 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων.

(1) Μία τοπολογία τ επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ καλείται *χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική*, εάν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει το επόμενο: εάν η απεικόνιση

$$F : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση

$$\overline{F} : X \times \sigma(\tau_Z) \to (\sigma_Z(\tau_Y), \tau)$$

είναι μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή.

(2) Μία τοπολογία τ επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ καλείται *χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής*, εάν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ και για κάθε απεικόνιση

$$G : X \to \mathcal{M}(Y,Z)$$

ισχύει το επόμενο: εάν η απεικόνιση

$$\overline{G} : X \times \sigma(\tau_Z) \to (\sigma_Z(\tau_Y), \tau)$$

είναι μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή, τότε η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη.

4.3.7 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια όλων των τοπολογικών χώρων, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες των χωριστά μετρήσιμων διαχωριστικών και χωριστά μετρήσιμων συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντί των χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και χωριστά μετρήσιμων $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντίστοιχα.

4.3.8 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Εάν η τοπολογία $t(\tau)$ επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, τότε η τοπολογία τ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η τοπολογία $t(\tau)$ επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ είναι μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\overline{F} : X \times \sigma(\tau_Z) \to (\sigma_Z(\tau_Y), \tau)$$

είναι μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή. Πράγματι, έστω $B \in \sigma(\tau_Z)$ και $\mathbb{H} \in \tau$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\overline{F}_B^{-1}(\mathbb{H}) \in \sigma(\tau_X).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{F}_B^{-1}(\mathbb{H}) &= \{x \in X : \overline{F}_B(x) = F_x^{-1}(B) = \widehat{F}(x)^{-1}(B) \in \mathbb{H}\} \\ &= \widehat{F}^{-1}((\mathbb{H}, B)).\end{aligned}$$

Επειδή η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά μετρήσιμη και η $t(\tau)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathcal{M}_{t(\tau)}(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Συνεπώς, $\overline{F}_B^{-1}(\mathbb{H}) \in \sigma(\tau_X)$. □

4.3.9 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του $\sigma_Z(\tau_Y)$. Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία τ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η τοπολογία τ επί του $\sigma_Z(\tau_Y)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ μία χωριστά μετρήσιμη απεικόνιση.

Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F}: X \to \mathcal{M}_{t(\tau)}(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}_j, B_j)) \in t(\tau),$$

όπου $|I| \leq \aleph_0$, $|J_i| < \aleph_0$, $\mathbb{H}_j \in \tau$ και $B_j \in \sigma(\tau_Z)$ για κάθε $j \in J_i$ και $i \in I$. Τότε έχουμε

$$\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}_j, B_j))) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(\mathbb{H}_j, B_j)) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\overline{F}_{B_j}^{-1}(\mathbb{H})).$$

Επειδή η απεικόνιση $\overline{F}_{B_j}$ είναι μετρήσιμη και $|I| \leq \aleph_0$, έχουμε ότι

$$\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}_j, B_j))) \in \sigma(\tau_X).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι μετρήσιμη. □

4.3.10 Πόρισμα. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική, τότε η τοπολογία τ είναι χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική.

(2) Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία τ είναι χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική.

4.3.11 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Εάν η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, τότε η τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.3.8. □

4.3.12 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία t είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.3.9. □

4.3.13 Πόρισμα. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ είναι χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική, τότε η τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική.

(2) Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία t είναι χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική.

4.3.14 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Εάν η τ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

Απόδειξη. Έστω ότι η τοπολογία τ επί του $\sigma_Z(\tau_Y)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, $X \in \mathcal{A}$ και $G : X \to \mathcal{M}_{t(\tau)}(Y,Z)$ μία μετρήσιμη απεικόνιση. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Πρέπει να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\overline{G} : X \times \sigma(\tau_Z) \to (\sigma_Z(\tau_Y), \tau)$$

είναι μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή. Πράγματι, έστω $B \in \sigma(\tau_Z)$ και $\mathbb{H} \in \tau$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{G}_B^{\,-1}(\mathbb{H}) &= \{x \in X : \overline{G}_B(x) = G(x)^{-1}(B) \in \mathbb{H}\} \\ &= G^{-1}((\mathbb{H}, B)). \end{aligned}$$

Εφ' όσον η απεικόνιση G είναι μετρήσιμη, είναι

$$G^{-1}((\mathbb{H}, B)) \in \sigma(\tau_X)$$

και συνεπώς,

$$\overline{G}_B^{\,-1}(\mathbb{H}) \in \sigma(\tau_X).$$

Άρα, η απεικόνιση $\overline{G}$ είναι μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή. $\square$

4.3.15 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και $t(\tau)$ είναι μία χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία, τότε η τ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

Απόδειξη. Έστω ότι η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, $X \in \mathcal{A}$, $G : X \to \mathcal{M}(Y,Z)$ και

$$\overline{G} : X \times \sigma(\tau_Z) \to (\sigma_Z(\tau_Y), \tau)$$

μία μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή απεικόνιση. Πρέπει να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά μετρήσιμη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$G : X \to \mathcal{M}_{t(\tau)}(Y,Z)$$

είναι μετρήσιμη. Πράγματι, έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}_j, B_j)) \in t(\tau),$$

όπου $|I| \leq \aleph_0$, $|J_i| < \aleph_0$, $\mathbb{H}_j \in \tau$ και $B_j \in \sigma(\tau_Z)$ για κάθε $j \in J_i$ και $i \in I$. Τότε έχουμε

$$G^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}_j, B_j))) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i} G^{-1}(\mathbb{H}_j, B_j)) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i} \overline{G}_{B_j}^{-1}(\mathbb{H})).$$

Εφόσον η απεικόνιση $\overline{G}_{B_j}$ είναι μετρήσιμη και $|I| \leq \aleph_0$, έχουμε

$$G^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}_j, B_j))) \in \sigma(\tau_X).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση G είναι μετρήσιμη. $\square$

4.3.16 Πόρισμα. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν η τ είναι χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ είναι χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

(2) Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και $t(\tau)$ είναι μία χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής τοπολογία, τότε η τ είναι χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής τοπολογία.

4.3.17 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$. Εάν η t είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.3.14. □

4.3.18 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$. Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία t είναι χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.3.15. □

4.3.19 Πόρισμα. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν η t είναι χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ είναι χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

(2) Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία t είναι χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

4.3.20 Ορισμός. Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$ (αντίστοιχα, επί του $\sigma_Z(\tau_Y)$) λέγεται ότι είναι *family-measurable τοπολογία* εάν είναι δυϊκή με μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ (αντίστοιχα, επί του $\mathcal{M}(Y, Z)$).

4.3.21 Λήμμα. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Εάν το σύνολο γ είναι υποβάση για την τοπολογία τ, τότε το σύνολο

$$s(\gamma) = \{(\mathbb{H}, B) : \mathbb{H} \in \gamma,\ B \in \sigma(\tau_Z)\}$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία $t(\tau)$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{H} \in \tau$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$. Έστω, επίσης, $f \in (\mathbb{H}, B)$. Τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $\mathbb{H}_0, \ldots, \mathbb{H}_n$ του γ τέτοια ώστε

$$f^{-1}(B) \in \mathbb{H}_0 \cap \ldots \cap \mathbb{H}_n \subseteq \mathbb{H}.$$

Συνεπώς,

$$f \in (\mathbb{H}_0 \cap \ldots \cap \mathbb{H}_n, B) \subseteq (\mathbb{H}, B).$$

Οπότε, οποιοδήποτε στοιχείο της υποβάσης $s(\tau)$ της τοπολογίας $t(\tau)$ είναι ένωση πεπερασμένων τομών στοιχείων του συνόλου $s(\gamma)$, που σημαίνει ότι αυτό το σύνολο είναι επίσης μία υποβάση για την τοπολογία $t(\tau)$. □

4.3.22 Λήμμα. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Εάν το σύνολο s είναι μία υποβάση για την τοπολογία t, τότε το σύνολο

$$r(s) = \{(\mathcal{H}, B) : \mathcal{H} \in s,\ B \in \sigma(\tau_Z)\}$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία $\tau(t)$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{H} \in t$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$. Έστω, επίσης, $A \in (\mathcal{H}, B)$. Τότε υπάρχει στοιχείο $f \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $A = f^{-1}(B)$. Επίσης, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $\mathcal{H}_0, \ldots, \mathcal{H}_n$ του s τέτοιο ώστε

$$f \in \mathcal{H}_0 \cap \ldots \cap \mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}.$$

Συνεπώς,

$$A \in (\mathcal{H}_0 \cap \ldots \cap \mathcal{H}_n, B) \subseteq (\mathcal{H}, B).$$

Δηλαδή, κάθε στοιχείο της υποβάσης $r(t)$ της τοπολογίας $\tau(t)$ είναι ένωση πεπερασμένων τομών στοιχείων του συνόλου $r(s)$, που σημαίνει ότι το σύνολο αυτό είναι επίσης μία υποβάση για την τοπολογία $\tau(t)$. □

4.3.23 Παραδείγματα. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα για family-measurable τοπολογίες επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$.

(1) Για κάθε $y \in Y$ θέτουμε

$$\sigma_Z(y) = \{A \in \sigma_Z(\tau_Y) : y \in A\}.$$

Έστω τ η τοπολογία επι του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ η οποία έχει ως υποβάση τα σύνολα $\sigma_Z(y)$, όπου $y \in Y$. Από το Λήμμα 4.3.21 το σύνολο

$$\{(\sigma_Z(y), B) : y \in Y,\ B \in \sigma(\tau_Z)\}$$

είναι υποβάση της τοπολογίας $t(\tau)$. Παρατηρούμε ότι

$$(\sigma_Z(y), B) = (\{y\}, B),$$

για κάθε $y \in Y$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$. Συνεπώς $t(\tau) = t_{pm}$, που σημαίνει ότι η σημειακή-μετρήσιμη τοπολογία είναι family-measurable.

(2) Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y, Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(M, B) = \{f \in \mathcal{M}(Y, Z) : f(M) \subseteq B\},$$

όπου M αριθμήσιμο υποσύνολο του Y και $B \in \sigma(\tau_Z)$, καλείται *αριθμήσιμη-μετρήσιμη τοπολογία* και συμβολίζεται με t_{cm}.
Για κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο M του Y θέτουμε

$$\sigma_Z(M) = \{A \in \sigma_Z(\tau_Y) : M \subseteq A\}.$$

Έστω τ η τοπολογία επι του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα $\sigma_Z(M)$, όπου M αριθμήσιμο υποσύνολο του Y. Από το Λήμμα 4.3.21 το σύνολο

$$\{(\sigma_Z(M), B) : M \text{ αριθμήσιμο υποσύνολο του } Y,\ B \in \sigma(\tau_Z)\}$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία $t(\tau)$. Παρατηρούμε ότι

$$(\sigma_Z(M), B) = (M, B)$$

για κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο M του Y και $B \in \sigma(\tau_Z)$. Συνεπώς, $t(\tau) = t_{cm}$, που σημαίνει ότι η αριθμήσιμη-μετρήσιμη τοπολογία είναι family-measurable.

4.3.24 Λήμμα. Έστω $\mathbb{H}$ ένα υποσύνολο του $\sigma_Z(\tau_Y)$. Τότε,

$$\mathbb{H} = \bigcup \big\{ \big((\mathbb{H}, B), B\big) : B \in \sigma(\tau_Z) \big\}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $B \in \sigma(\tau_Z)$ έχουμε

$$\big((\mathbb{H}, B), B\big) = \{f^{-1}(B) : f \in (\mathbb{H}, B)\} = \{f^{-1}(B) : f^{-1}(B) \in \mathbb{H}\} \subseteq \mathbb{H}.$$

Συνεπώς,

$$\bigcup \big\{ \big((\mathbb{H}, B), B\big) : B \in \sigma(\tau_Z) \big\} \subseteq \mathbb{H}.$$

Έστω $A \in \mathbb{H}$. Τότε υπάρχουν $f \in \mathcal{M}(Y,Z)$ και $B \in \sigma(\tau_Z)$ τέτοια, ώστε $A = f^{-1}(B)$. Εφόσον

$$f^{-1}(B) \in \big((\mathbb{H}, B), B\big),$$

έχουμε

$$\mathbb{H} \subseteq \bigcup \big\{ \big((\mathbb{H}, B), B\big) : B \in \sigma(\tau_Z) \big\}.$$

Άρα,

$$\mathbb{H} = \bigcup \big\{ \big((\mathbb{H}, B), B\big) : B \in \sigma(\tau_Z) \big\}. \ \Box$$

4.3.25 Λήμμα. Έστω τ_1 και τ_2 δύο τοπολογίες επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ τέτοιες, ώστε $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Τότε $t(\tau_1) \subseteq t(\tau_2)$.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του Ορισμού 4.3.2. $\Box$

4.3.26 Λήμμα. Έστω t_1 και t_2 δύο τοπολογίες επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοιες, ώστε $t_1 \subseteq t_2$. Τότε, $\tau(t_1) \subseteq \tau(t_2)$.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του Ορισμού 4.3.3. $\Box$

4.3.27 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Τότε έχουμε

$$\tau \subseteq \tau\big(t(\tau)\big) \subseteq \tau\Big(t\big(\tau\big(t(\tau)\big)\big)\Big) \subseteq \dots$$

και

$$t(\tau) \subseteq t\big(\tau\big(t(\tau)\big)\big) \subseteq t\Big(\tau\Big(t\big(\tau\big(t(\tau)\big)\big)\Big)\Big) \subseteq \dots$$

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $\tau \subseteq \tau\big(t(\tau)\big)$ είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.3.24. Όλοι οι άλλοι εγκλεισμοί απορρέουν από τα Λήμματα 4.3.25 και 4.3.26. $\Box$

4.3.28 Ορισμός. Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ και t τοπολογία επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$. Το ζεύγος (τ, t) καλείται *ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών* εάν $\tau = \tau(t)$ και $t = t(\tau)$.

4.3.29 Λήμμα. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Θεωρούμε το σύνολο $\{\tau_i : i \in I\}$ που αποτελείται από τοπολογίες επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$, για τις οποίες ισχύει $t(\tau_i) = t$ για κάθε $i \in I$. Τότε $t(\tau) = t$, όπου $\tau = \bigvee\{\tau_i : i \in I\}$.

Απόδειξη. Το σύνολο $\gamma = \bigcup\{\tau_i : i \in I\}$ είναι μία υποβάση για την τ. Από το Λήμμα 4.3.21 το σύνολο $s(\gamma)$ είναι υποβάση για την $t(\tau)$. Όμως, το σύνολο $s(\gamma)$ είναι μία υποβάση για την τοπολογία t. Συνεπώς, $t(\tau) = t$. □

4.3.30 Λήμμα. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Θεωρούμε το σύνολο $\{t_i : i \in I\}$ που αποτελείται από τοπολογίες επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$, για τις οποίες ισχύει $\tau(t_i) = \tau$ για κάθε $i \in I$. Τότε $\tau(t) = \tau$, όπου $t = \bigvee\{t_i : i \in I\}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του Λήμματος 4.3.29. □

4.3.31 Πρόταση. Έστω t μία family-measurable τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Τότε επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ υπάρχει μία τοπολογία τ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $t(\tau) = t$ και

(β) εάν τ' είναι μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ τέτοια, ώστε $t(\tau') = t$, τότε $\tau' \subseteq \tau$.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.3.29. □

4.3.32 Πρόταση. Έστω τ μία family-measurable τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Τότε επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ υπάρχει μία τοπολογία t με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\tau(t) = \tau$ και

(β) εάν t' είναι μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια ώστε $\tau(t') = \tau$, τότε $t' \subseteq t$.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.3.30. □

4.3.33 Πρόταση. Έστω τ_0 μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$. Τότε υπάρχει ένα ζεύγος (τ, t) αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών, με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\tau_0 \subseteq \tau$ και

(β) εάν (τ', t') είναι ένα ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών τέτοιο, ώστε $\tau_0 \subseteq \tau'$, τότε $\tau \subseteq \tau'$ και $t \subseteq t'$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\tau_1 = \tau\big(t(\tau_0)\big),\ \tau_2 = \tau\Big(t\Big(\tau\big(t(\tau_0)\big)\Big)\Big), \ldots$$

και

$$\tau = \bigvee \big\{\tau_i : i \in \{0,1,2,\ldots\}\big\}.$$

Επίσης, θέτουμε

$$t_1 = t(\tau_0),\ t_2 = t\big(\tau\big(t(\tau_0)\big)\big),\ldots$$

και

$$t = \bigvee \big\{t_i : i \in \{1,2,\ldots\}\big\}.$$

Προφανώς, $\tau_0 \subseteq \tau$. Το σύνολο

$$\gamma = \bigcup \big\{\tau_i : i \in \{0,1,2,\ldots\}\big\}$$

είναι μία υποβάση για την τ και συνεπώς, το σύνολο

$$s(\gamma) = \bigcup \big\{s(\tau_i) : i \in \{0,1,2,\ldots\}\big\}$$

είναι μία υποβάση για την $t(\tau)$. Όμως, το σύνολο $s(\tau_i)$ είναι μία υποβάση για την $t(\tau_i) = t_{i+1}$, που σημαίνει ότι το σύνολο

$$\bigcup \big\{s(\tau_i) : i \in \{0,1,2,\ldots\}\big\}$$

είναι υποβάση για την t. Άρα, $t(\tau) = t$. Παρόμοια, αποδεικνύουμε ότι $\tau(t) = \tau$. Συνεπώς, το ζεύγος (τ,t) είναι ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών.

Έστω, τώρα, (τ',t') ένα ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών τέτοιο, ώστε $\tau_0 \subseteq \tau'$. Τότε

$$t(\tau_0) \subseteq t(\tau') = t',\ \tau\big(t(\tau_0)\big) \subseteq \tau(t') = \tau',\ t\big(\tau\big(t(\tau_0)\big)\big) \subseteq t(\tau') = t',\ldots$$

Συνεπώς, $\tau_i \subseteq \tau'$ για κάθε $i \in \{0,1,2,\ldots\}$ και $t_i \subseteq t'$ για κάθε $i \in \{1,2,\ldots\}$. Οπότε, $\tau \subseteq \tau'$ και $t \subseteq t'$. $\square$

4.3.34 Πρόταση. Έστω t_0 μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Τότε υπάρχει ένα ζεύγος (τ,t) αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $t_0 \subseteq t$ και

(β) εάν (τ',t') είναι ένα ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών τέτοιο, ώστε $t_0 \subseteq t'$, τότε $\tau \subseteq \tau'$ και $t \subseteq t'$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$t_1 = t\big(\tau(t_0)\big),\ t_2 = t\Big(\tau\Big(t\big(\tau(t_0)\big)\Big)\Big), \dots$$

και

$$t = \bigvee \big\{t_i : i \in \{0, 1, 2, ...\}\big\}.$$

Επίσης, θέτουμε

$$\tau_1 = \tau(t_0),\ \tau_2 = \tau\Big(t\big(\tau(t_0)\big)\Big), \dots$$

και

$$\tau = \bigvee \big\{\tau_i : i \in \{1, 2, ...\}\big\}.$$

Παρατηρούμε ότι $t_0 \subseteq t$. Το σύνολο

$$s = \bigcup \big\{t_i : i \in \{0, 1, 2, ...\}\big\}$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία t και συνεπώς, το σύνολο

$$r(s) = \bigcup \big\{r(t_i) : i \in \{0, 1, 2, ...\}\big\}$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία $\tau(t)$. Όμως, το σύνολο $r(t_i)$ είναι υποβάση για την τοπολογία $\tau(t_i) = \tau_{i+1}$ και συνεπώς, το σύνολο

$$\bigcup \big\{r(t_i) : i \in \{0, 1, 2, ...\}\big\}$$

είναι υποβάση για την t. Δηλαδή $\tau(t) = \tau$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $t(\tau) = t$. Άρα το ζεύγος (τ, t) είναι ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών.

Θεωρούμε, τώρα, το ζεύγος (τ', t') αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών, για το οποίο ισχύει $t_0 \subseteq t'$. Τότε

$$\tau(t_0) \subseteq \tau(t') = \tau',\ t\big(\tau(t_0)\big) \subseteq t(\tau') = t',\ \tau\Big(t\big(\tau(t_0)\big)\Big) \subseteq \tau(t') = \tau', \dots$$

Δηλαδή $t_i \subseteq t'$, για κάθε $i \in \{0, 1, 2, ...\}$ και $\tau_i \subseteq \tau'$. Συνεπώς $t \subseteq t'$ και $\tau \subseteq \tau'$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Τοπολογίες επί των συνόλων $\mathcal{B}(Y,Z)$ και $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$

Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια που αποτελείται από πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους και Y, Z δύο πλήρως κανονικοί Hausdorff χώροι. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται και εξετάζονται οι έννοιες των χωριστά Baire μετρήσιμων και Baire μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ των Baire απεικονίσεων, από το χώρο Y στο χώρο Z. Επίσης, παρουσιάζονται και αναλύονται σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ και του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ των Baire υποσυνόλων του χώρου Y τα οποία είναι αντίστροφες εικόνες Baire υποσυνόλων του χώρου Z. Οι αποδείξεις των προτάσεων αυτού του Κεφαλαίου είναι παρόμοιες με αυτές του Κεφαλαίου 4, οπότε και παραλείπονται.

5.0 Βασικές έννοιες

5.0.1 Ορισμός. Έστω Y και Z δύο πλήρως κανονικοί Hausdorff χώροι. Μία απεικόνιση $f : Y \to Z$ καλείται *Baire μετρήσιμη*, αν είναι μετρήσιμη απεικόνιση του χώρου $(Y, \sigma(\mathcal{Z}(Y)))$ στο χώρο $(Z, \sigma(\mathcal{Z}(Z)))$. Το σύνολο των Baire μετρήσιμων απεικονίσεων του χώρου Y στο χώρο Z συμβολίζεται με $\mathcal{B}(Y,Z)$.

5.0.2 Πρόταση. Έστω οι Baire χώροι $(Y, \sigma(\mathcal{Z}(Y)))$ και $(Z, \sigma(\mathcal{Z}(Z)))$. Μία απεικόνιση $f : Y \to Z$ είναι Baire μετρήσιμη, αν $f^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{Z}(Y))$, για κάθε $B \in \mathcal{Z}(Z)$.

5.1 Χωριστά Baire μετρήσιμες $\mathcal{A}$-διαχωριστικές και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχείς τοπολογίες επί του $\mathcal{B}(Y, Z)$

Στο κεφάλαιο αυτό οι Y και Z είναι δύο πλήρως κανονικοί Hausdorff χώροι. Επίσης, αν t είναι μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$, τότε ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος συμβολίζεται με $\mathcal{B}_t(Y, Z)$.

5.1.1 Ορισμός. Με e συμβολίζουμε την απεικόνιση του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z) \times Y$ στο σύνολο Z, η οποία ορίζεται ως $e(f, y) = f(y)$ για κάθε $(f, y) \in \mathcal{B}(Y, Z) \times Y$. Η απεικόνιση e καλείται *$\mathcal{B}$-απεικόνιση εκτίμησης*.

5.1.2 Ορισμός. Έστω X ένας τυχαίος πλήρως κανονικός Hausdorff χώρος. Η απεικόνιση

$$F : X \times Y \to Z$$

καλείται *χωριστά Baire μετρήσιμη* αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $y \in Y$ οι απεικονίσεις $F_x : Y \to Z$ και $F^y : X \to Z$ είναι Baire μετρήσιμες.

5.1.3 Παρατήρηση. Αν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι Baire μετρήσιμη, τότε είναι και χωριστά Baire μετρήσιμη.

5.1.4 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια που αποτελείται από πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους.

(1) Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ καλείται *χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική* αν για κάθε τοπολογικό χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση $\widehat{F} : X \to \mathcal{B}_t(Y, Z)$ είναι Baire μετρήσιμη.

(2) Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ καλείται *χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής* αν για κάθε τοπολογικό χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση $G : X \to \mathcal{B}_t(Y, Z)$ είναι Baire μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση $\widetilde{G} : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη.

5.1.5 Παρατηρήσεις. (1) Αν η οικογένεια $\mathcal{A}$ αποτελείται από όλους τους πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες των χωριστά Baire μετρήσιμων διαχωριστικών και χωριστά Baire μετρήσιμων συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντί των εννοιών των χωριστά Baire μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και χωριστά Baire μετρήσιμων $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντίστοιχα.

(2) Παρατηρούμε ότι οι Προτάσεις 4.1.6, 4.1.8, 4.1.10, 4.1.13, 4.1.14 καθώς και τα Πορίσματα 4.1.7, 4.1.9, 4.1.11 αληθεύουν αντικαθιστώντας τις έννοιες του Κεφαλαίου 4 με τις αντίστοιχες έννοιες αυτού του Κεφαλαίου:

5.1.6 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{B}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Τότε η τοπολογία t επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν η $\mathcal{B}$-απεικόνιση εκτίμησης

$$e : \mathcal{B}_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Baire μετρήσιμη.

5.1.7 Πόρισμα. Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν η $\mathcal{B}$-απεικόνιση εκτίμησης e είναι χωριστά Baire μετρήσιμη.

5.1.8 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$.

(1) Εάν η t είναι μικρότερη από μία χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία u επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$, τότε η t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

(2) Εάν η t είναι μεγαλύτερη από μία χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχή τοπολογία u επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ και $\mathcal{B}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$, τότε η t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

5.1.9 Πόρισμα. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ μικρότερη από μία χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι επίσης χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική.

(2) Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ μεγαλύτερη από μία χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχή τοπολογία επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι επίσης χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

5.1.10 Πρόταση. Έστω t μία χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{B}_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Τότε για κάθε χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία u επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$ έχουμε ότι

$$\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{B}_u(Y,Z))) \subseteq \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{B}_t(Y,Z))).$$

5.1.11 Πόρισμα. Έστω t μία χωριστά μετρήσιμη συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$. Τότε για κάθε χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία u επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$ έχουμε ότι

$$\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{B}_u(Y,Z))) \subseteq \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{B}_t(Y,Z))).$$

5.1.12 Παρατήρηση. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια που αποτελείται από πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους. Είναι ξεκάθαρο ότι, γενικά, στο σύνολο $\mathcal{B}(Y,Z)$ δεν υπάρχει η μεγαλύτερη χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία. Αυτό το συμπέρασμα δίνει ένα διαφορετικό αποτέλεσμα από την κλασσική θεωρία των συναρτησιακών τοπολογικών χώρων. (βλέπε [28] και [3]).

5.1.13 Πρόταση. Η τετριμμένη τοπολογία t_{tr} επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι η μικρότερη χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

5.1.14 Πρόταση. Η διακριτική τοπολογία t_d επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι η μεγαλύτερη χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

5.1.15 Ορισμός. Έστω $y \in Y$. Η τοπολογία t_{yB} επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι αυτή που έχει ως υποβάση όλα τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\}, B) = \{f \in \mathcal{B}(Y,Z) : f(y) \in B\},$$

όπου $B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))$. Η τοπολογία t_{yB} καλείται *y-Baire τοπολογία.*

5.1.16 Πρόταση. Η y-Baire τοπολογία t_{yB} επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

5.1.17 Ορισμός. Η τοπολογία t_{pB} επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι αυτή που έχει ως υποβάση όλα τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\}, B) = \{f \in \mathcal{B}(Y,Z) : f(y) \in B\},$$

όπου $y \in Y$ και $B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))$. Η τοπολογία t_{pB} καλείται *σημειακή-Baire τοπολογία.* Ανάλογες των Προτάσεων 4.1.18 και 4.1.19 είναι οι επόμενες δύο προτάσεις:

5.1.18 Πρόταση. Η σημειακή-Baire τοπολογία t_{pB} επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

5.1.19 Πρόταση. Αν η υποβάση της τοπολογίας t_{pB} είναι αριθμήσιμη, τότε η σημειακή-Baire τοπολογία t_{pB} επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

5.2 Baire μετρήσιμες $\mathcal{A}$-διαχωριστικές και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχείς τοπολογίες επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε τις Baire μετρήσιμες $\mathcal{A}$-διαχωριστικές και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχείς τοπολογίες επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$, αναφερόμενοι στις κύριες ιδιότητες αυτών. Οι αποδείξεις παραλείπονται καθώς είναι παρόμοιες των Προτάσεων 4.2.3, 4.2.4, 4.2.6, 4.2.8, 4.2.11 και των Πορισμάτων 4.2.5, 4.2.7 και 4.2.9.

5.2.1 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια που αποτελείται από πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους.

(1) Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ καλείται *Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική* αν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι Baire μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση $\widehat{F} : X \to \mathcal{B}_t(Y,Z)$ είναι μετρήσιμη.

(2) Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ καλείται *Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής* αν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση $G : X \to \mathcal{B}_t(Y,Z)$ είναι Baire μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση $\widetilde{G} : X \times Y \to Z$ είναι Baire μετρήσιμη.

5.2.2 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια που αποτελείται από όλους τους πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες των Baire μετρήσιμων διαχωριστικών και Baire μετρήσιμων συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντί των εννοιών των μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και μετρήσιμων $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντίστοιχα.

5.2.3 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$.

(1) Αν η t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία, τότε είναι και Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

(2) Αν η t είναι Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία, τότε είναι και χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

5.2.4 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του $\mathcal{B}(Y, Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{B}_t(Y, Z) \in \mathcal{A}$. Τότε η τοπολογία t επί του $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής εάν και μόνον εάν η $\mathcal{B}$-απεικόνιση εκτίμησης $e : \mathcal{B}_t(Y, Z) \times Y \to Z$ είναι Baire μετρήσιμη.

5.2.5 Πόρισμα. Μία τοπολογία t επί του $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής, εάν και μόνον εάν η $\mathcal{B}$-απεικόνιση εκτίμησης $e : \mathcal{B}_t(Y, Z) \times Y \to Z$ είναι Baire μετρήσιμη.

5.2.6 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$.

(1) Αν u είναι μία Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ και $t \subseteq u$, τότε η t είναι Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

(2) Αν u είναι μία Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$, $\mathcal{B}_t(Y, Z) \in \mathcal{A}$ και $u \subseteq t$, τότε η t είναι Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

5.2.7 Πόρισμα. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ μικρότερη από μία Baire μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι επίσης Baire μετρήσιμη διαχωριστική.

(2) Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ μεγαλύτερη από μία Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχή τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι επίσης Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

5.2.8 Πρόταση. Έστω t μία Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ τέτοια, ώστε $\mathcal{B}_t(Y, Z) \in \mathcal{A}$. Τότε για κάθε Baire μετρήσιμη

$\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία u επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ έχουμε

$$\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{B}_u(Y,Z))) \subseteq \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{B}_t(Y,Z))).$$

5.2.9 Πόρισμα. Έστω t μία Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$. Τότε για κάθε Baire μετρήσιμη διαχωριστική τοπολογία u επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ έχουμε

$$\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{B}_u(Y,Z))) \subseteq \sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{B}_t(Y,Z))).$$

5.2.10 Ορισμός. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(M,B) = \{f \in \mathcal{B}(Y,Z) : f(M) \subseteq B\},$$

όπου το M αριθμήσιμο υποσύνολο του Y και $B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))$, καλείται *αριθμήσιμη-Baire τοπολογία* και συμβολίζεται με t_{countB}.

5.2.11 Πρόταση. Εάν η υποβάση που αναφέρεται στον Ορισμό 5.2.10 είναι αριθμήσιμη, τότε η αριθμήσιμη-Baire τοπολογία t_{countB} επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ είναι Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία.

5.3 Δυϊκές τοπολογίες επί του συνόλου των Baire συνόλων

Έστω, Y και Z δύο σταθεροί πλήρως κανονικοί Hausdorff τοπολογικοί χώροι. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}(Y,Z)$ όλων των Baire μετρήσιμων απεικονίσεων από το Y στο Z και το σύνολο

$$\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y)) = \{f^{-1}(B) : f \in \mathcal{B}(Y,Z),\ B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))\}.$$

5.3.1 Σημείωση. Έστω $\mathbb{H} \subseteq \sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}(Y,Z)$ και $B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))$. Θέτουμε

$$(\mathbb{H},B) = \{f \in \mathcal{B}(Y,Z) : f^{-1}(B) \in \mathbb{H}\} \quad \text{και} \quad (\mathcal{H},B) = \{f^{-1}(B) : f \in \mathcal{H}\}.$$

5.3.2 Ορισμός. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα $(\mathbb{H},B)$, όπου $\mathbb{H}\in\tau$ και $B\in\sigma(\mathcal{Z}(Z))$, καλείται *δυϊκή της* τ και συμβολίζεται με $t(\tau)$.

5.3.3 Ορισμός. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$. Η τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα $(\mathcal{H},B)$, όπου $\mathcal{H}\in t$ και $B\in\sigma(\mathcal{Z}(Z))$, καλείται *δυϊκή της* t και συμβολίζεται με $\tau(t)$.

5.3.4 Συμβολισμοί. (1) Με $s(\tau)$ συμβολίζουμε την οικογένεια

$$\{(\mathbb{H},B):\mathbb{H}\in\tau,\ B\in\sigma(\mathcal{Z}(Z))\}.$$

(2) Με $r(t)$ συμβολίζουμε την οικογένεια

$$\{(\mathcal{H},B):\mathcal{H}\in t,\ B\in\sigma(\mathcal{Z}(Z))\}.$$

(3) Έστω ότι $F:X\times Y\to Z$ είναι μία χωριστά Baire μετρήσιμη απεικόνιση. Με $\overline{F}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του $X\times\sigma(\mathcal{Z}(Z))$ στο $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$, για την οποία

$$\overline{F}(x,B)=F_x^{-1}(B),\ \text{για κάθε } x\in X \text{ και } B\in\sigma(\mathcal{Z}(Z)).$$

(4) Έστω G μία απεικόνιση του X στο $\mathcal{B}(Y,Z)$. Με $\overline{G}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του $\overline{G}:X\times\sigma(\mathcal{Z}(Z))$ στο $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$, για την οποία

$$\overline{G}(x,B)=(G(x))^{-1}(B) \text{ για κάθε } x\in X \text{ και } B\in\sigma(\mathcal{Z}(Z)).$$

5.3.5 Ορισμός. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Λέμε ότι η απεικόνιση

$$M:X\times\sigma(\mathcal{Z}(Z))\to\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$$

είναι *Baire μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή* εάν για κάθε σταθερό στοιχείο $B\in\sigma(\mathcal{Z}(Z))$, η απεικόνιση

$$M_B:X\to(\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y)),\tau),$$

με $M_B(x)=M(x,B)$, για κάθε $x\in X$, είναι Baire μετρήσιμη.

5.3.6 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια που αποτελείται από πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους.

(1) Μία τοπολογία τ επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ καλείται *χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική*, εάν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι:
εάν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη, τότε η απεικόνιση

$$\overline{F} : X \times \sigma(\mathcal{Z}(Z)) \to (\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y)), \tau)$$

είναι Baire μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή.

(2) Μία τοπολογία τ επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ καλείται *χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής* εάν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ και για κάθε απεικόνιση

$$G : X \to \mathcal{B}(Y, Z)$$

ισχύει ότι: εάν η απεικόνιση

$$\overline{G} : X \times \sigma(\mathcal{Z}(Z)) \to (\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y)), \tau)$$

είναι Baire μετρήσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή, τότε η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Baire μετρήσιμη.

5.3.7 Παρατηρήσεις. (1) Αν $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια που αποτελείται από όλους τους πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες των χωριστά Baire μετρήσιμων διαχωριστικών και χωριστά Baire μετρήσιμων συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντί των εννοιών των χωριστά Baire μετρήσιμων $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και χωριστά Baire μετρήσιμων $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών, αντίστοιχα.
(2) Οι αποδείξεις των επόμενων Προτάσεων και των αντίστοιχων Πορισμάτων είναι ανάλογες των Προτάσεων 4.3.8, 4.3.9, 4.3.11, 4.3.12, 4.3.14, 4.3.15, 4.3.17, 4.3.18 και των Πορισμάτων 4.3.10, 4.3.13, 4.3.16, 4.3.19, αντίστοιχα.

5.3.8 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Εάν η τοπολογία $t(\tau)$ επί του $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, τότε η τοπολογία τ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

5.3.9 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία τ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

5.3.10 Πόρισμα. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική, τότε η τοπολογία τ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική.

(2) Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία τ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι Baire χωριστά μετρήσιμη διαχωριστική.

5.3.11 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$. Εάν η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, τότε η τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

5.3.12 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$. Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική.

5.3.13 Πόρισμα. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$. Ισχύουν τα εξής:

(1) Εάν η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική, τότε η τοπολογία t επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική.

(2) Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη διαχωριστική.

5.3.14 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Εάν η τ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$ είναι Baire χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

5.3.15 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και $t(\tau)$ είναι μία χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία, τότε η τ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία.

5.3.16 Πόρισμα. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν η τ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

(2) Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και $t(\tau)$ είναι μία χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής τοπολογία, τότε η τ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής τοπολογία.

5.3.17 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$. Εάν η t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

5.3.18 Πρόταση. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$. Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής.

5.3.19 Πόρισμα. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν η t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

(2) Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής, τότε η τοπολογία t είναι χωριστά Baire μετρήσιμη συνδετικά συνεχής.

5.3.20 Ορισμός. Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ (αντίστοιχα, επί του $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$) λέγεται ότι είναι μία *family-Baire measurable τοπολογία* εάν είναι δυϊκή με μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ (αντίστοιχα, επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$).

Οι αποδείξεις των επόμενων Λημμάτων και Προτάσεων είναι παρόμοιες των Λημμάτων 4.3.21, 4.3.22, 4.3.24, 4.3.25, 4.3.26, 4.3.29, 4.3.30 και των Προτάσεων

4.3.27, 4.3.31, 4.3.32, 4.3.33, 4.3.34, αντίστοιχα, τις οποίες προσαρμόζουμε στις αντίστοιχες έννοιες αυτού του Κεφαλαίου.

5.3.21 Λήμμα. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Εάν το σύνολο γ είναι υποβάση για την τοπολογία τ, τότε το σύνολο

$$s(\gamma) = \{(\mathbb{H}, B) : \mathbb{H} \in \gamma,\ B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))\}$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία $t(\tau)$.

5.3.22 Λήμμα. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$. Εάν το σύνολο s είναι μία υποβάση για την τοπολογία t, τότε το σύνολο

$$r(s) = \{(\mathcal{H}, B) : \mathcal{H} \in s,\ B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))\}$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία $\tau(t)$.

5.3.23 Παραδείγματα. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα για family-Baire measurable τοπολογίες, επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$.

(1) Για κάθε $y \in Y$ θεωρούμε το σύνολο

$$\sigma_Z(y) = \{A \in \sigma_Z(\mathcal{Z}(Y)) : y \in A\}.$$

Έστω τ η τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα $\sigma_Z(y)$, όπου $y \in Y$. Από το Λήμμα 5.3.21 το σύνολο

$$\{(\sigma_Z(y), B) : y \in Y,\ B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))\}$$

είναι μία υποβάση της τοπολογίας $t(\tau)$. Παρατηρούμε ότι

$$(\sigma_Z(y), B) = (\{y\}, B),$$

για κάθε $y \in Y$ και $B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))$. Συνεπώς, $t(\tau) = t_{pB}$, το οποίο σημαίνει ότι η σημειακή-Baire τοπολογία είναι family-Baire measurable.

(2) Η τοπολογία επί του $\mathcal{B}(Y, Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(M, B) = \{f \in \mathcal{B}(Y, Z) : f(M) \subseteq B\},$$

όπου M αριθμήσιμο υποσύνολο του Y και $B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))$, καλείται *αριθμήσιμη-Baire μετρήσιμη τοπολογία* και συμβολίζεται t_{cBm}.
Για κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο M του Y θεωρούμε το σύνολο

$$\sigma_Z(M) = \{A \in \sigma_Z(\mathcal{Z}(Y)) : M \subseteq A\}.$$

Έστω τ η τοπολογία επί του $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα $\sigma_Z(M)$, όπου M αριθμήσιμο υποσύνολο του Y. Από το Λήμμα 5.3.21 το σύνολο

$$\big\{\big(\sigma_Z(M), B\big) : M \text{ αριθμήσιμο υποσύνολο του } Y,\ B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))\big\}$$

είναι μία υποβάση για την τοπολογία $t(\tau)$. Παρατηρούμε ότι

$$\big(\sigma_Z(M), B\big) = (M, B)$$

για κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο M του Y και $B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))$. Άρα, $t(\tau) = t_{cBm}$, που σημαίνει ότι η αριθμήσιμη-Baire μετρήσιμη τοπολογία είναι family-Baire measurable.

5.3.24 Λήμμα. Έστω $\mathbb{H}$ ένα υποσύνολο του $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Τότε

$$\mathbb{H} = \bigcup \big\{\big((\mathbb{H}, B), B\big) : B \in \sigma(\mathcal{Z}(Z))\big\}.$$

5.3.25 Λήμμα. Έστω τ_1 και τ_2 δύο τοπολογίες επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ τέτοιες, ώστε $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Τότε $t(\tau_1) \subseteq t(\tau_2)$.

5.3.26 Λήμμα. Έστω t_1 και t_2 δύο τοπολογίες επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ τέτοιες, ώστε $t_1 \subseteq t_2$. Τότε $\tau(t_1) \subseteq \tau(t_2)$.

5.3.27 Πρόταση. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Τότε έχουμε

$$\tau \subseteq \tau\big(t(\tau)\big) \subseteq \tau\Big(t\big(\tau\big(t(\tau)\big)\big)\Big) \subseteq \dots$$

και

$$t(\tau) \subseteq t\big(\tau\big(t(\tau)\big)\big) \subseteq t\Big(\tau\Big(t\big(\tau\big(t(\tau)\big)\big)\Big)\Big) \subseteq \dots$$

5.3.28 Ορισμός. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ και t μία τοπολογία επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$. Το ζεύγος (τ, t) καλείται *ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών Baire τοπολογιών* εάν $\tau = \tau(t)$ και $t = t(\tau)$.

5.3.29 Λήμμα. Έστω t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$. Έστω ότι το σύνολο $\{\tau_i : i \in I\}$ αποτελείται από τοπολογίες επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ τέτοιες, ώστε $t(\tau_i) = t$ για κάθε $i \in I$. Τότε $t(\tau) = t$, όπου $\tau = \bigvee\{\tau_i : i \in I\}$.

5.3.30 Λήμμα. Έστω τ μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Έστω ότι το σύνολο $\{t_i : i \in I\}$ αποτελείται από τοπολογίες επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ τέτοιες, ώστε $\tau(t_i) = \tau$ για κάθε $i \in I$. Τότε $\tau(t) = \tau$, όπου $t = \bigvee\{t_i : i \in I\}$.

5.3.31 Πρόταση. Έστω t μία family-Baire measurable τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$. Τότε επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ υπάρχει μία τοπολογία τ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $t(\tau) = t$ και

(β) εάν τ' είναι μία τοπολογία επί του $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ τέτοια, ώστε $t(\tau') = t$, τότε $\tau' \subseteq \tau$.

5.3.32 Πρόταση. Έστω τ μία family-Baire measurable τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Τότε επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$ υπάρχει μία τοπολογία t με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\tau(t) = \tau$ και

(β) εάν t' είναι μία τοπολογία επί του $\mathcal{B}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\tau(t') = \tau$, τότε $t' \subseteq t$.

5.3.33 Πρόταση. Έστω τ_0 μία τοπολογία επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$. Τότε υπάρχει ένα ζεύγος (τ, t) αμοιβαίως δυϊκών Baire τοπολογιών με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $\tau_0 \subseteq \tau$ και

(β) εάν (τ', t') είναι ένα ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών Baire τοπολογιών για το οποίο ισχύει $\tau_0 \subseteq \tau'$, τότε $\tau \subseteq \tau'$ και $t \subseteq t'$.

5.3.34 Πρόταση. Έστω t_0 μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y,Z)$. Τότε υπάρχει ένα ζεύγος (τ, t) αμοιβαίως δυϊκών Baire τοπολογιών με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $t_0 \subseteq t$ και

(β) εάν (τ', t') είναι ένα ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών Baire τοπολογιών για το οποίο ισχύει $t_0 \subseteq t'$, τότε $\tau \subseteq \tau'$ και $t \subseteq t'$.

Κεφάλαιο 6

Τοπολογίες επί των συνόλων $\mathrm{B}^{\alpha}(Y,Z)$ και $\mathrm{G}_{\alpha}^{Z}(Y)$

Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια τοπολογικών G_δ-χώρων και $\alpha < \omega_1$ ένας διατακτικός αριθμός. Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται και εξετάζονται οι έννοιες των χωριστά Borel και Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών κλάσης α επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$, των Borel απεικονίσεων κλάσης α από τον χώρο Y στο χώρο Z. Επίσης, παρουσιάζονται και αναλύονται σχέσεις μεταξύ των Borel τοπολογιών κλάσης α επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ και επί του συνόλου

$$\mathbf{G}_{\alpha}^{Z}(Y) = \{f^{-1}(U) : f \in \mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z),\ U \in \mathcal{O}(Z)\}.$$

6.0 Βασικές έννοιες

Σε ό,τι ακολουθεί ω_1 είναι ο πρώτος μη αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός.

6.0.1 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Η μικρότερη οικογένεια υποσυνόλων του X που περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του X και είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις (άρα και στις αριθμήσιμες τομές), καλείται *οικογένεια Borel υποσυνόλων* του X και συμβολίζεται με $\mathbf{B}(X)$.

6.0.2 Παρατήρηση. Έστω X χώρος τέτοιος, ώστε κάθε κλειστό υποσύνολό του είναι G_δ-σύνολο (και συνεπώς κάθε ανοικτό υποσύνολό του είναι F_σ-σύνολο). Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\mathbf{B}(X)$ μπορεί να γραφεί ως ένωση των οικογενειών $\mathbf{F}_\alpha$, $\alpha < \omega_1$, οι οποίες ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

(α) $\mathbf{F}_0$ είναι η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του X,

(β) εάν $\alpha \neq 0$ είναι ένας περιττός (αντίστοιχα, ένα άρτιος) διατακτικός, τότε η οικογένεια $\mathbf{F}_\alpha$ αποτελείται από αριθμήσιμες ενώσεις (αντίστοιχα, αριθμήσιμες τομές) στοιχείων της οικογένειας

$$\cup\{\mathbf{F}_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{B}(X) = \cup\{\mathbf{F}_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Επίσης,

$$\mathbf{B}(X) = \cup\{\mathbf{G}_\alpha : \alpha < \omega_1\},$$

όπου:

(α) $\mathbf{G}_0$ είναι η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X, και

(β) εάν $\alpha \neq 0$ είναι ένας περιττός (αντίστοιχα, άρτιος) διατακτικός, τότε η οικογένεια $\mathbf{G}_\alpha$ αποτελείται από αριθμήσιμες τομές (αντίστοιχα, αριθμήσιμες ενώσεις) στοιχείων της οικογένειας

$$\cup\{\mathbf{G}_\beta : \beta < \alpha\}.$$

6.0.3 Ορισμός. Η *πολλαπλασιαστική κλάση* α και η *προσθετική κλάση* α, όπου $\alpha < \omega_1$, είναι οικογένειες στοιχείων της οικογένειας $\mathbf{B}(X)$, συμβολίζονται με $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ και $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, αντίστοιχα, και ορίζονται ως εξής:

(α) Εάν α είναι ένας περιττός διατακτικός αριθμός, τότε η πολλαπλασιαστική κλάση α συμπίπτει με την οικογένεια $\mathbf{G}_\alpha$ και η προσθετική κλάση α συμπίπτει με την $\mathbf{F}_\alpha$.

(β) εάν α είναι ένας άρτιος διατακτικός αριθμός, τότε η πολλαπλασιαστική κλάση α συμπίπτει με την οικογένεια $\mathbf{F}_\alpha$ και η προσθετική κλάση α συμπίπτει με την $\mathbf{G}_\alpha$.

6.0.4 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται *G_δ-χώρος* εάν $\mathbf{G}_0 \subseteq \mathbf{F}_1$.

6.0.5 Παρατήρηση. Κάθε μετρικός χώρος είναι G_δ-χώρος.

6.0.6 Ορισμός. Έστω Y και Z G_δ-χώροι, $f : Y \to Z$ απεικόνιση και $\alpha < \omega_1$ διατακτικός αριθμός. Η απεικόνιση f καλείται *Borel απεικόνιση κλάσης* α (ή απλά *απεικόνιση κλάσης* α) εάν για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του Z, το υποσύνολο

$f^{-1}(U)$ είναι προσθετικής κλάσης α στο χώρο Y (ισοδύναμα, για κάθε κλειστό υποσύνολο F του Z, το $f^{-1}(F)$ είναι πολλαπλασιαστικής κλάσης α στο Y). Με $\mathbf{B}^{\alpha}(Y, Z)$ συμβολίζουμε την οικογένεια των Borel απεικονίσεων κλάσης α του χώρου Y στο χώρο Z.

6.0.7 Πρόταση. Για τις απεικονίσεις κλάσεις α ισχύουν τα παρακάτω (για παράδειγμα, βλέπε [10] και [51]):

(1) Η απεικόνιση f είναι κλάσης 0 εάν και μόνον εάν η f είναι συνεχής.

(2) Οι απεικονίσεις κλάσης α είναι επίσης και κλάσης β, για κάθε $\beta > \alpha$.

(3) Εάν η απεικόνιση f είναι κλάσης α, η απεικόνιση g είναι κλάσης β και ορίζεται η απεικόνιση $g \circ f$, τότε η $g \circ f$ είναι κλάσης $\alpha + \beta$.

6.1 Τοπολογίες επί του συνόλου $\mathrm{B}^{\alpha}(Y, Z)$

Στη συνέχεια του κεφαλαίου Y και Z είναι δύο σταθεροί G_{δ}-χώροι και $\alpha < \omega_1$ ένας σταθερός διατακτικός αριθμός. Επίσης, αν t είναι μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y, Z)$, τότε ο αντίστοιχος τοπολογικός χώρος συμβολίζεται με $\mathbf{B}^{\alpha}_{t}(Y, Z)$.

6.1.1 Ορισμός Έστω X ένας τυχαίος τοπολογικός χώρος. Η απεικόνιση

$$F : X \times Y \to Z$$

καλείται *χωριστά Borel κλάσης* α εάν για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$ οι απεικονίσεις

$$F_x : Y \to Z \text{ και } F^y : X \to Z$$

είναι Borel απεικονίσεις κλάσης α.

6.1.2 Παρατηρήσεις. (1) Παρατηρούμε ότι αν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά Borel κλάσης α, τότε είναι και χωριστά Borel απεικόνιση. Επίσης, αν η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι Borel κλάσης α, τότε είναι και χωριστά Borel κλάσης α (βλέπε [51]).

(2) Έστω $F : X \times Y \to Z$ μία χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Με $\widehat{F}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του X στο σύνολο $\mathbf{B}^{\alpha}(Y, Z)$ για την οποία είναι $\widehat{F}(x) = F_x$ για κάθε $x \in X$.

(3) Έστω G μία απεικόνιση του X στο σύνολο $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$. Τότε με $\widetilde{G}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του $X\times Y$ στο Z για την οποία είναι $\widetilde{G}(x,y)=G(x)(y)$ για κάθε $(x,y)\in X\times Y$.

6.1.3 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια G_δ-χώρων.

(1) Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ καλείται *χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική κλάσης* α αν για κάθε χώρο $X\in\mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση

$$F : X\times Y\to Z$$

είναι χωριστά Borel κλάσης α, τότε η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X\to \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α.

(2) Μία τοπολογία t επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ καλείται *χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης* α αν για κάθε χώρο $X\in\mathcal{A}$ ισχύει ότι: αν η απεικόνιση

$$G : X\to \mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α, τότε η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X\times Y\to Z$$

είναι χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α.

6.1.4 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια όλων των G_δ-χώρων, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες των χωριστά Borel διαχωριστικών τοπολογιών κλάσης α και των χωριστά Borel συνδετικά συνεχών τοπολογιών κλάσης α, αντί για τις έννοιες των χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστικά τοπολογιών κλάσης α και των χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών κλάσης α, αντίστοιχα.

6.1.5 Ορισμός Με e συμβολίζουμε την απεικόνιση $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)\times Y$ στο Z για την οποία είναι $e(f,y)=f(y)$ για κάθε $(f,y)\in\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)\times Y$. Η e καλείται *απεικόνιση εκτίμησης κλάσης* α.

6.1.6 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια G_δ-χώρων και t μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $\mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$. Αν η τοπολογία t επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α, τότε η απεικόνιση εκτίμησης

$$e : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α.

Απόδειξη. Θεωρούμε ως χώρο X το χώρο $\mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z)$ και ως G την ταυτοτική απεικόνιση

$$id : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \to \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z).$$

Εφόσον η απεικόνιση G είναι Borel κλάσης α και η τοπολογία t επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Borel κλάσης α. Παρατηρούμε ότι $\widetilde{G} = e$. Άρα, η απεικόνιση e είναι χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. $\square$

6.1.7 Πόρισμα. Έστω t χωριστά Borel συνδετικά συνεχής κλάσης α τοπολογία επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ τέτοια, ώστε ο χώρος $\mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z)$ να είναι G_δ-χώρος. Τότε η απεικόνιση εκτίμησης

$$e : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α.

6.1.8 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ κλάση G_δ-χώρων και t τοπολογία επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$. Εάν η απεικόνιση $e^y : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \to Z$ είναι συνεχής, για κάθε $y \in Y$ (οπότε, η απεικόνιση εκτίμησης $e : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \times Y \to Z$ είναι χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α), τότε η τοπολογία t επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $G : X \to \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z)$ μία Borel απεικόνιση κλάσης α. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Έστω $x \in X$. Τότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$\widetilde{G}(x,y) = G(x)(y).$$

Δηλαδή, $\widetilde{G}_x(y) = G(x)(y)$ για κάθε $y \in Y$. Συνεπώς, $\widetilde{G}_x = G(x)$ η οποία είναι Borel απεικόνιση κλάσης α σύμφωνα με την υπόθεση.
Τώρα αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση $\widetilde{G}^y$, $y \in Y$, είναι Borel απεικόνιση κλάσης α. Έστω $y \in Y$. Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\widetilde{G}^y(x) = \widetilde{G}(x,y) = G(x)(y) = e(G(x),y) = e^y(G(x)) = (e^y \circ G)(x).$$

Εφόσον η απεικόνιση e^y είναι συνεχής και η απεικόνιση G είναι Borel απεικόνιση κλάσης α έχουμε ότι η απεικόνιση $e^y \circ G$ είναι Borel απεικόνιση κλάσης α. Άρα, η απεικόνιση $\widetilde{G}^y$ είναι Borel απεικόνιση κλάσης α και συνεπώς, η απεικόνιση $\widetilde{G}$ είναι χωριστά Borel κλάσης α. $\square$

6.1.9 Πόρισμα. Εάν η απεικόνιση $e^y : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \to Z$ είναι συνεχής, για κάθε $y \in Y$, τότε η τοπολογία t επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής κλάσης α.

6.1.10 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια G_δ-χώρων. Τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

(1) Εάν t είναι μία τοπολογία μικρότερη από μία χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία u κλάσης α επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$, τότε η t είναι επίσης χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

(2) Εάν t είναι μία τοπολογία μεγαλύτερη από μία χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α τοπολογία u επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$, $\mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \in \mathcal{A}$ και η απεικόνιση $e^y : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \to Z$ είναι συνεχής για κάθε $y \in Y$, τότε η t είναι επίσης χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. (1) Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Εφόσον η τοπολογία u είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α, η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathbf{B}^\alpha_u(Y,Z)$$

είναι Borel κλάσης α. Όμως $t \subseteq u$ και άρα η ταυτοτική απεικόνιση

$$id : \mathbf{B}^\alpha_u(Y,Z) \to \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z)$$

είναι συνεχής. Οπότε, η απεικόνιση

$$\widehat{F} = id \circ \widehat{F} : X \to \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z)$$

είναι Borel κλάσης α και συνεπώς, η τοπολογία t είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

(2) Έστω $y \in Y$. Εφόσον η απεικόνιση

$$e^y : \mathbf{B}^\alpha_u(Y,Z) \to Z$$

είναι συνεχής και $u \subseteq t$, η απεικόνιση

$$e^y : \mathbf{B}^\alpha_t(Y,Z) \to Z$$

είναι επίσης συνεχής. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.8, η τοπολογία t είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α. $\square$

6.1.11 Πόρισμα. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν t είναι μία τοπολογία μικρότερη από μία χωριστά Borel διαχωριστική τοπολογία u κλάσης α επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$, τότε η t είναι επίσης χωριστά Borel διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

(2) Εάν t είναι μία τοπολογία μεγαλύτερη από μία χωριστά Borel συνδετικά συνεχή τοπολογία u κλάσης α επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ και η απεικόνιση

$$e^y : \mathbf{B}^\alpha_u(Y,Z) \to Z$$

είναι συνεχής για κάθε $y \in Y$, τότε η τοπολογία t είναι επίσης χωριστά Borel συνδετικά συνεχής κλάσης α.

6.1.12 Παρατήρηση. Έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των G_δ-χώρων. Γενικά, επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ δεν υπάρχει η μεγαλύτερη χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία. Το συμπέρασμα αυτό δίνει ένα διαφορετικό αποτέλεσμα από την κλασσική θεωρία των συναρτησιακών τοπολογικών χώρων (βλέπε [3] και [27]).

6.1.13 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια G_δ-χώρων. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Η τετριμμένη τοπολογία t_{tr} επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι η μικρότερη χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

(2) Η διακριτική τοπολογία t_d επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι η μεγαλύτερη χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. (1) Έστω $X \in \mathcal{A}$ ένας G_δ τοπολογικός χώρος και $F : X \times Y \to Z$ μία χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathbf{B}^\alpha_{t_{tr}}(Y,Z)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α.

Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{F}^{-1}(\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)) = X \in \mathbf{G}_0 \subseteq \mathbf{G}_\alpha.$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $\widehat{F} : X \to \mathbf{B}^\alpha_{t_{tr}}(Y,Z)$ είναι Borel κλάσης α. $\square$

(2) Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση

$$e^y : \mathbf{B}^\alpha_{t_d}(Y,Z) \to Z$$

είναι συνεχής. Συνεπώς, από την Πρόταση 6.1.8, η διακριτική τοπολογία επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α. $\square$

6.1.14 Ορισμός. Έστω $y \in Y$. Η τοπολογία επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ που αποτελείται από τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\}, U) = \{f \in \mathbf{B}^\alpha(Y,Z) : f(y) \in U\},$$

όπου U ανοικτό υποσύνολο του Z, καλείται *y-τοπολογία κλάσης* α και συμβολίζεται με t^α_y.

6.1.15 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ κλάση G_δ-χώρων. Η τοπολογία t^α_y επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathbf{B}^\alpha_{t^\alpha_y}(Y,Z)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α. Έστω $(\{y\},U) \in t_y^{\alpha}$. Έχουμε

$$\widehat{F}^{-1}((\{y\},U)) = \{x \in X : \widehat{F}(x)(y) = F^y(x) \in U\} = (F^y)^{-1}(U).$$

Εφόσον η F^y είναι Borel απεικόνιση κλάσης α και το U είναι ανοικτό υποσύνολο του Z, έχουμε ότι

$$(F^y)^{-1}(U) \in \mathbf{\Sigma}_{\alpha}^{0}(X).$$

Έτσι, η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι Borel απεικόνιση κλάσης α. □

6.1.16 Ορισμός. Η τοπολογία επί του $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\},U) = \{f \in \mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z) : f(y) \in U\},$$

όπου $y \in Y$ και U ανοικτό υποσύνολο του Z, καλείται *σημειακή-ανοικτή τοπολογία κλάσης* α και συμβολίζεται με t_p^{α}.

6.1.17 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ κλάση G_{δ}-χώρων. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Η τοπολογία t_p^{α} επί του $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α.

(2) Εάν η υποβάση που αναφέρεται στον Ορισμό 6.1.16 είναι αριθμήσιμη, τότε η τοπολογία t_p^{α} επί του $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. (1) Σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.8 αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$e^y : \mathbf{B}_{t_p^{\alpha}}^{\alpha}(Y,Z) \to Z$$

είναι συνεχής. Πράγματι, έστω U ανοικτό υποσύνολο του Z. Έχουμε

$$(e^y)^{-1}(U) = \{f \in \mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z) : e^y(f) = e(f,y) = f(y) \in U\} = (\{y\},U).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση e^y είναι συνεχής.

(2) Έστω $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathbf{B}_{t_p^{\alpha}}^{\alpha}(Y,Z)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α. Έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\{y_j\}, W_j)) \in t_p^\alpha,$$

όπου $|I| \le \aleph_0$, $|J_i| < \aleph_0$, $y_j \in Y$ και W_j ανοικτό υποσύνολο του Z, για κάθε $j \in J_i$. Τότε

$$\begin{aligned}\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\{y_j\}, W_j))) &= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(\{y_j\}, W_j)) \\ &= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\{x \in X : \widehat{F}(x)(y_j) = F(x, y_j) = F^{y_j}(x) \in W_j\}) \\ &= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(W_j)).\end{aligned}$$

Εφόσον η F^{y_i} είναι Borel απεικόνιση κλάσης α και $|I| \le \aleph_0$, έχουμε ότι

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(W_j)) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X).$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι Borel απεικόνιση κλάσης α. $\square$

6.1.18 Ορισμός. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\}, B) = \{f \in \mathbf{B}^\alpha(Y, Z) : f(y) \in B\},$$

όπου $y \in Y$ και $B \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(Z)$, καλείται *σημειακή-Borel τοπολογία κλάσης* α και συμβολίζεται με $t^\alpha_{p\mathbf{B}}$.

6.1.19 Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι $t_p^\alpha \subseteq t^\alpha_{p\mathbf{B}}$.

6.1.20 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια G_δ-χώρων. Εάν η απεικόνιση

$$e^y : \mathbf{B}^\alpha_{t_p^\alpha}(Y, Z) \to Z$$

είναι συνεχής, για κάθε $y \in Y$, τότε η τοπολογία $t^\alpha_{p\mathbf{B}}$ επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. Η απόδειξη απορρέει άμεσα από την Παρατήρηση 6.1.19 και από την Πρόταση 6.1.10 (2). $\square$

6.1.21 Ορισμός. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής

$$(\{y\},A)=\{f\in\mathbf{B}^\alpha(Y,Z): f(y)\in A\},$$

όπου $y\in Y$ και το A είναι G_δ-σύνολο του Z, καλείται *σημειακή-G_δ τοπολογία κλάσης* α και συμβολίζεται με $t^\alpha_{pG_\delta}$.

6.1.22 Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι $t^\alpha_p\subseteq t^\alpha_{pG_\delta}\subseteq t^\alpha_{p\mathbf{B}}$.

6.1.23 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ κλάση G_δ-χώρων. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:
(1) Εάν η απεικόνιση

$$e^y:\mathbf{B}^\alpha_{t^\alpha_p}(Y,Z)\to Z$$

είναι συνεχής για κάθε $y\in Y$, τότε η τοπολογία $t^\alpha_{pG_\delta}$ επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.
(2) Εάν η υποβάση που αναφέρεται στον Ορισμό 6.1.21 είναι αριθμήσιμη, τότε η τοπολογία $t^\alpha_{pG_\delta}$ επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. (1) Η απόδειξη απορρέει άμεσα από το γεγονός ότι $t^\alpha_p\subseteq t^\alpha_{pG_\delta}$ και από την Πρόταση 6.1.10 (2). $\square$
(2) Έστω $X\in\mathcal{A}$ και $F:X\times Y\to Z$ χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F}:X\to\mathbf{B}^\alpha_{t^\alpha_{pG_\delta}}(Y,Z)$$

είναι Borel κλάσης α. Έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\{y_j\},W_j))\in t^\alpha_{pG_\delta},$$

όπου $|I|\leq\aleph_0$, $|J_i|<\aleph_0$, $y_j\in Y$ και W_j G_δ-σύνολο του Z, για κάθε $j\in J_i$. Τότε

$$\begin{aligned}&\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\{y_j\},W_j)))=\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(\{y_j\},W_j))\\&=\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\{x\in X:\widehat{F}(x)(y_j)=F(x,y_j)=F^{y_j}(x)\in W_j\})\\&=\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(F^{y_j})^{-1}(W_j)).\end{aligned}$$

Εφόσον η F^{y_i} είναι Borel απεικόνιση κλάσης α, $(F^{y_j})^{-1}(W_j) \in \mathbf{G}_\alpha$ και συνεπώς,

$$\bigcap_{j \in J_i} (F^{y_j})^{-1}(W_j) \in \mathbf{G}_\alpha.$$

Άρα,

$$\bigcup_{i \in I} \Big(\bigcap_{j \in J_i} (F^{y_j})^{-1}(W_j) \Big) \in \mathbf{G}_\alpha.$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι Borel κλάσης α. $\square$

6.2 Δυϊκές τοπολογίες επί των συνόλων $\mathrm{B}^\alpha(Y, Z)$ και $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$

Έστω Y, Z δύο σταθεροί G_δ-χώροι. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbf{G}^Z_\alpha(Y) = \{f^{-1}(U) : f \in \mathbf{B}^\alpha(Y, Z),\ U \in \mathcal{O}(Z)\}.$$

Στην παράγραφο αυτή ορίζουμε και εξετάζουμε σχέσεις μεταξύ των τοπολογιών επί των συνόλων $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ και $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$, όσον αφορά στις έννοιες των χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστικών τοπολογιών κλάσης α και των χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών κλάσης α.

6.2.1 Σημείωση. Έστω $\mathbb{H}^\alpha \subseteq \mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$, $\mathcal{H}^\alpha \subseteq \mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Θέτουμε

$$(\mathbb{H}^\alpha, U) = \{f \in \mathbf{B}^\alpha(Y, Z) : f^{-1}(U) \in \mathbb{H}^\alpha\}$$

και

$$(\mathcal{H}^\alpha, U) = \{f^{-1}(U) : f \in \mathcal{H}^\alpha\}.$$

6.2.2 Ορισμός. Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής $(\mathbb{H}^\alpha, U)$, όπου $\mathbb{H}^\alpha \in \tau$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$, καλείται *δυϊκή τοπολογία της* τ και συμβολίζεται με $t(\tau)$.

6.2.3 Ορισμός. Έστω t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$. Η τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής $(\mathcal{H}^\alpha, U)$, όπου $\mathcal{H}^\alpha \in t$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$, καλείται *δυϊκή τοπολογία της* t και συμβολίζεται με $\tau(t)$.

6.2.4 Πρόταση. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Έστω τ_1, τ_2 τοπολογίες επί του $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ τέτοιες, ώστε $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Τότε $t(\tau_1) \subseteq t(\tau_2)$.

(2) Έστω t_1, t_2 τοπολογίες επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ τέτοιες, ώστε $t_1 \subseteq t_2$. Τότε $\tau(t_1) \subseteq \tau(t_2)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των Ορισμών 6.2.2 και 6.2.3. □

6.2.5 Συμβολισμοί. (1) Έστω τ και t τοπολογίες επί των συνόλων $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ και $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$, αντίστοιχα. Σε ό,τι ακολουθεί με $s(\tau)$ συμβολίζουμε την οικογένεια

$$\{(\mathbb{H}^\alpha, U) : \mathbb{H}^\alpha \in \tau,\ U \in \mathcal{O}(Z)\}.$$

Επίσης, με $r(t)$ συμβολίζουμε την οικογένεια

$$\{(\mathcal{H}^\alpha, U) : \mathcal{H}^\alpha \in t,\ U \in \mathcal{O}(Z)\}.$$

(2) Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά Borel κλάσης α. Με $\overline{F}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του συνόλου $X \times \mathcal{O}(Z)$ στο σύνολο $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$, για την οποία $\overline{F}(x,U) = F_x^{-1}(U)$, για κάθε $x \in X$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

(3) Θεωρούμε την απεικόνιση $G : X \to \mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$. Με $\overline{G}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση του συνόλου $X \times \mathcal{O}(Z)$ στο σύνολο $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$, για την οποία $\overline{G}(x,U) = (G(x))^{-1}(U)$, για κάθε $x \in X$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

6.2.6 Ορισμός. Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$. Λέμε ότι η απεικόνιση

$$M : X \times \mathcal{O}(Z) \to \mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$$

είναι *Borel απεικόνιση κλάσης α, ως προς την πρώτη μεταβλητή* αν για κάθε σταθερό στοιχείο $U \in \mathcal{O}(Z)$, η απεικόνιση

$$M_U : X \to (\mathbf{G}_\alpha^Z(Y), \tau),$$

με $M_U(x) = M(x,U)$, για κάθε $x \in X$, είναι Borel απεικόνιση κλάσης α.

6.2.7 Ορισμός. Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια G_δ-χώρων.

(1) Η τοπολογία τ επί του συνόλου $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ καλείται *χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α* αν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ ισχύει το εξής: αν η απεικόνιση

$$F : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Borel κλάσης α, τότε η απεικόνιση

$$\overline{F} : X \times \mathcal{O}(Z) \to (\mathbf{G}^Z_\alpha(Y), \tau)$$

είναι Borel κλάσης α ως προς την πρώτη μεταβλητή.

(2) Η τοπολογία τ επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$ καλείται *χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης* α αν για κάθε χώρο $X \in \mathcal{A}$ και για κάθε απεικόνιση

$$G : X \to \mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$$

ισχύει το εξής: αν η απεικόνιση

$$\overline{G} : X \times \mathcal{O}(Z) \to (\mathbf{G}^Z_\alpha(Y), \tau)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α ως προς την πρώτη μεταβλητή, τότε η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Borel κλάσης α.

6.2.8 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια όλων των G_δ-χώρων, τότε χρησιμοποιούμε τις έννοιες των χωριστά Borel διαχωριστικών και συνδετικά συνεχών τοπολογιών κλάσης α, αντί για τις έννοιες των χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστικών και $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχών τοπολογιών κλάσης α, αντίστοιχα.

6.2.9 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ κλάση G_δ-χώρων. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$. Αν η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική κλάσης α, τότε η τοπολογία τ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική κλάσης α.

(2) Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$. Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία τ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική κλάσης α.

Απόδειξη. (1) Υποθέτουμε ότι η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α, $X \in \mathcal{A}$, και $F : X \times Y \to Z$ χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\overline{F} : X \times \mathcal{O}(Z) \to (\mathbf{G}^Z_\alpha(Y), \tau)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α ως προς την πρώτη μεταβλητή. Έστω $U \in \mathcal{O}(Z)$ και $\mathbb{H}^\alpha \in \tau$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\overline{F}_U^{\,-1}(\mathbb{H}^\alpha) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\overline{F}_U^{\,-1}(\mathbb{H}^\alpha) &= \{x \in X : \overline{F}_U(x) = F_x^{-1}(U) = \widehat{F}(x)^{-1}(U) \in \mathbb{H}^\alpha\}\\ &= \widehat{F}^{-1}((\mathbb{H}^\alpha, U)).\end{aligned}$$

Εφόσον η απεικόνιση $F : X \times Y \to Z$ είναι χωριστά Borel κλάσης α, η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathbf{B}^\alpha_{t(\tau)}(Y,Z)$$

είναι Borel κλάσης α. Άρα, $\overline{F}_U^{\,-1}(\mathbb{H}^\alpha) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$.

(2) Υποθέτουμε ότι η τοπολογία τ επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α, $X \in \mathcal{A}$ και $F : X \times Y \to Z$ χωριστά Borel απεικόνιση κλάσης α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\widehat{F} : X \to \mathbf{B}^\alpha_{t(\tau)}(Y,Z)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α. Έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}^\alpha_j, U_j)) \in t(\tau),$$

όπου $|I| \leq \aleph_0$, $|J_i| < \aleph_0$, $\mathbb{H}^\alpha_j \in \tau$ και $U_j \in \mathcal{O}(Z)$ για κάθε $j \in J_i$ και $i \in I$. Έχουμε

$$\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}^\alpha_j, U_j))) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\widehat{F}^{-1}(\mathbb{H}^\alpha_j, U_j)) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}\overline{F}_{U_j}^{-1}(\mathbb{H}^\alpha_j)).$$

Εφόσον η απεικόνιση $\overline{F}_{U_j}$ είναι Borel κλάσης α και $|I| \leq \aleph_0$, έχουμε ότι

$$\widehat{F}^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}^\alpha_j, U_j))) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X).$$

Άρα, η απεικόνιση $\widehat{F}$ είναι Borel κλάσης α. $\square$

6.2.10 Πόρισμα. Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Αν η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel διαχωριστική κλάσης α, τότε η τοπολογία τ είναι χωριστά Borel διαχωριστική κλάσης α.

(2) Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία τ είναι χωριστά Borel διαχωριστική κλάσης α, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

6.2.11 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ κλάση G_{δ}-χώρων. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Έστω t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$. Εάν η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\mathbf{G}^{Z}_{\alpha}(Y)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική κλάσης α, τότε η τοπολογία t είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

(2) Έστω t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$. Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία t είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη της Πρότασης 6.2.9. $\square$

6.2.12 Πόρισμα. Έστω t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(1) Εάν η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\mathbf{G}^{Z}_{\alpha}(Y)$ είναι χωριστά Borel διαχωριστική τοπολογία κλάσης α, τότε η τοπολογία t επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

(2) Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία t είναι χωριστά Borel διαχωριστική τοπολογία κλάσης α, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά Borel διαχωριστική τοπολογία κλάσης α.

6.2.13 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ κλάση G_{δ}-χώρων. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}^{Z}_{\alpha}(Y)$. Εάν η τ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α, τότε η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνέχής κλάσης α.

(2) Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}^{Z}_{\alpha}(Y)$. Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^{\alpha}(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α, τότε η τ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η τοπολογία τ επί του συνόλου $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α, $X \in \mathcal{A}$ και $G : X \to \mathbf{B}^\alpha_{t(\tau)}(Y,Z)$ Borel απεικόνιση κλάσης α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Borel κλάσης α, δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\overline{G} : X \times \mathcal{O}(Z) \to (\mathbf{G}_\alpha^Z(Y), \tau)$$

είναι Borel κλάσης α ως προς την πρώτη μεταβλητή. Πράγματι, έστω $U \in \mathcal{O}(Z)$ και $\mathbb{H}^\alpha \in \tau$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \overline{G}_U{}^{-1}(\mathbb{H}^\alpha) &= \{x \in X : \overline{G}_U(x) = G(x)^{-1}(U) \in \mathbb{H}^\alpha\} \\ &= G^{-1}((\mathbb{H}^\alpha, U)). \end{aligned}$$

Εφόσον η απεικόνιση G είναι Borel κλάσης α, είναι

$$G^{-1}((\mathbb{H}^\alpha, U)) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$$

και συνεπώς,

$$\overline{G}_U{}^{-1}(\mathbb{H}^\alpha) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X).$$

Άρα, η απεικόνιση $\overline{G}$ είναι Borel κλάσης α ως προς την πρώτη μεταβλητή.

(2) Έστω ότι η τοπολογία $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής κλάσης α, $X \in \mathcal{A}$, $G : X \to \mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ και

$$\overline{G} : X \times \mathcal{O}(Z) \to (\mathbf{G}_\alpha^Z(Y), \tau)$$

Borel απεικόνιση κλάσης α, ως προς την πρώτη μεταβλητή. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\widetilde{G} : X \times Y \to Z$$

είναι χωριστά Borel κλάσης α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση

$$G : X \to \mathbf{B}^\alpha_{t(\tau)}(Y,Z)$$

είναι Borel απεικόνιση κλάσης α. Πράγματι, έστω

$$\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}^\alpha_j, U_j)) \in t(\tau),$$

όπου $|I| \leq \aleph_0$, $|J_i| < \aleph_0$, $\mathbb{H}_j^\alpha \in \tau$ και $U_j \in \mathcal{O}(Z)$ για κάθε $j \in J_i$ και $i \in I$. Τότε έχουμε

$$G^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}_j^\alpha, U_j))) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i} G^{-1}(\mathbb{H}_j^\alpha, U_j)) = \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i} \overline{G}_{U_j}^{-1}(\mathbb{H}^\alpha)).$$

Εφόσον η απεικόνιση $\overline{G}_{U_j}$ είναι Borel κλάσης α και $|I| \leq \aleph_0$, έχουμε

$$G^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j\in J_i}(\mathbb{H}_j^\alpha, U_j))) \in \mathbf{\Sigma}_\alpha^0(X).$$

Άρα, η απεικόνιση G είναι Borel κλάσης α. □

6.2.14 Πόρισμα. Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(1) Εάν η τ είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α, τότε η $t(\tau)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.

(2) Εάν $|s(\tau)| \leq \aleph_0$ και η $t(\tau)$ είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α, τότε η τ είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.

6.2.15 Πρόταση. Έστω $\mathcal{A}$ κλάση G_δ-χώρων. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Έστω t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$. Εάν η t είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.

(2) Έστω t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$. Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α, τότε η τοπολογία t είναι χωριστά Borel $\mathcal{A}$-συνδετικά συνεχής τοπολογία κλάσης α.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη της Πρότασης 6.2.13. □

6.2.16 Πόρισμα. Έστω t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$. Ισχύουν τα παρακάτω:

(1) Εάν η τοπολογία t είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής κλάσης α, τότε η τοπολογία $\tau(t)$ επί του συνόλου $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής κλάσης α.

(2) Εάν $|r(t)| \leq \aleph_0$ και η τοπολογία $\tau(t)$ είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής κλάσης α, τότε η τοπολογία t είναι χωριστά Borel συνδετικά συνεχής κλάσης α.

6.2.17 Ορισμός. Μία τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ (αντίστοιχα, επί του $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$) λέγεται ότι είναι μία *family-Borel τοπολογία κλάσης* α εάν είναι δυϊκή μιας τοπολογίας επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$ (αντίστοιχα, μιας τοπολογίας επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$).

6.2.18 Πρόταση. Έστω τ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}^Z_\alpha(Y)$. Εάν το σύνολο γ είναι υποβάση για την τοπολογία τ, τότε το σύνολο

$$s(\gamma) = \{(\mathbb{H}^\alpha, U) : \mathbb{H}^\alpha \in \gamma,\ U \in \mathcal{O}(Z)\}$$

είναι υποβάση για την τοπολογία $t(\tau)$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{H}^\alpha \in \tau$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Έστω, επίσης, $f \in (\mathbb{H}^\alpha, U)$. Τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $\mathbb{H}^\alpha_0, \ldots, \mathbb{H}^\alpha_n$ της υποβάσης γ τέτοια, ώστε

$$f^{-1}(U) \in \mathbb{H}^\alpha_0 \cap \ldots \cap \mathbb{H}^\alpha_n \subseteq \mathbb{H}^\alpha.$$

Συνεπώς,

$$f \in (\mathbb{H}^\alpha_0 \cap \ldots \cap \mathbb{H}^\alpha_n, U) \subseteq (\mathbb{H}^\alpha, U).$$

Δηλαδή, κάθε στοιχείο της οικογένειας $s(\tau)$ της τοπολογίας $t(\tau)$ είναι ένωση πεπερασμένων τομών στοιχειών του συνόλου $s(\gamma)$, το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο αυτό είναι επίσης υποβάση για την τοπολογία $t(\tau)$. $\square$

6.2.19 Πρόταση. Έστω t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$. Εάν το σύνολο s είναι υποβάση για την t, τότε το σύνολο

$$r(s) = \{(\mathcal{H}^\alpha, U) : \mathcal{H}^\alpha \in s,\ U \in \mathcal{O}(Z)\}$$

είναι υποβάση για την τοπολογία $\tau(t)$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{H}^\alpha \in t$, $U \in \mathcal{O}(Z)$ και $A \in (\mathcal{H}^\alpha, U)$. Τότε υπάρχει στοιχείο $f \in \mathcal{H}$ τέτοιο, ώστε $A = f^{-1}(U)$. Εφόσον το s είναι υποβάση, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $\mathcal{H}^\alpha_0, \ldots, \mathcal{H}^\alpha_n$ του s τέτοια, ώστε

$$f \in \mathcal{H}^\alpha_0 \cap \ldots \cap \mathcal{H}^\alpha_n \subseteq \mathcal{H}.$$

Συνεπώς,

$$A \in (\mathcal{H}^\alpha_0 \cap \ldots \cap \mathcal{H}^\alpha_n, U) \subseteq (\mathcal{H}^\alpha, U).$$

Δηλαδή, κάθε στοιχείο της υποβάσης $r(t)$ της τοπολογίας $\tau(t)$ είναι ένωση πεπερασμένων τομών στοιχείων του συνόλου $r(s)$, το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο αυτό είναι επίσης υποβάση για την τοπολογία $\tau(t)$. $\square$

6.2.20 Παραδείγματα. Παρακάτω δίνουμε παραδείγματα family-Borel τοπολογιών κλάσης α επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$.

(1) Για κάθε $y \in Y$, θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbf{G}_\alpha^Z(y) = \{A \in \mathbf{G}_\alpha^Z(Y) : y \in A\}.$$

Έστω τ η τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ που έχει ως υποβάση τα σύνολα $\mathbf{G}_\alpha^Z(y)$, όπου $y \in Y$.

Από την Πρόταση 6.2.18 το σύνολο

$$\{(\mathbf{G}_\alpha^Z(y), U) : y \in Y,\ U \in \mathcal{O}(Z)\}$$

είναι υποβάση για την τοπολογία $t(\tau)$. Παρατηρούμε ότι

$$(\mathbf{G}_\alpha^Z(y), U) = (\{y\}, U),$$

για κάθε $y \in Y$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Συνεπώς, $t(\tau) = t_p^\alpha$, το οποίο σημαίνει ότι η σημειακή-Borel τοπολογία κλάσης α είναι μία family-Borel τοπολογία κλάσης α.

(2) Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Η $t_\mathcal{M}^\alpha$ τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ είναι η τοπολογία που έχει τα σύνολα της μορφής

$$(M, U) = \{f \in \mathbf{B}^\alpha(Y,Z) : f(M) \subseteq U\}$$

ως υποβάση, όπου $M \in \mathcal{M}$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

Για κάθε $M \in \mathcal{M}$ θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbf{G}_\alpha^Z(M) = \{A \in \mathbf{G}_\alpha^Z(Y) : M \subseteq A\}.$$

Έστω τ τοπολογία επί του $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ για την οποία η οικογένεια όλων των συνόλων $\mathbf{G}_\alpha^Z(M)$, όπου $M \in \mathcal{M}$ είναι υποβάση. Από την Πρόταση 6.2.18 το σύνολο

$$\{(\mathbf{G}_\alpha^Z(M), U) : M \in \mathcal{M},\ U \in \mathcal{O}(Z)\}$$

είναι υποβάση για την $t(\tau)$. Παρατηρούμε ότι

$$(\mathbf{G}_\alpha^Z(M), U) = (M, U)$$

για κάθε $M \in \mathcal{M}$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Συνεπώς, $t(\tau) = t^\alpha_{\mathcal{M}}$, το οποίο σημαίνει ότι η τοπολογία $t^\alpha_{\mathcal{M}}$ είναι family-Borel τοπολογία κλάσης α.

6.2.21 Πρόταση. Έστω $\mathbb{H}^\alpha$ υποσύνολο του $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Τότε

$$\big((\mathbb{H}^\alpha, U), U\big) \subseteq \mathbb{H}^\alpha.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\big((\mathbb{H}^\alpha, U), U\big) = \{f^{-1}(U) : f \in (\mathbb{H}^\alpha, U)\} = \{f^{-1}(U) : f^{-1}(U) \in \mathbb{H}^\alpha\} \subseteq \mathbb{H}^\alpha. \ \square$$

6.2.22 Πρόταση. Έστω $\mathcal{H}^\alpha$ υποσύνολο του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Τότε

$$\big((\mathcal{H}^\alpha, U), U\big) \supseteq \mathcal{H}^\alpha.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{H}^\alpha$. Τότε, $f^{-1}(U) \in (\mathcal{H}^\alpha, U)$ και άρα, $f \in \big((\mathcal{H}^\alpha, U), U\big)$. $\square$

6.2.23 Πρόταση. Έστω $\mathbb{H}^\alpha$ υποσύνολο του $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$, $\mathcal{H}^\alpha$ υποσύνολο του $\mathbf{B}^\alpha(Y,Z)$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Τότε

$$\Big(\big((\mathbb{H}^\alpha, U), U\big), U\Big) = (\mathbb{H}^\alpha, U)$$

και

$$\Big(\big((\mathcal{H}^\alpha, U), U\big), U\Big) = (\mathcal{H}^\alpha, U).$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.21 έχουμε $\big((\mathbb{H}^\alpha, U), U\big) \subseteq \mathbb{H}^\alpha$ και συνεπώς,

$$\Big(\big((\mathbb{H}^\alpha, U), U\big), U\Big) \subseteq (\mathbb{H}^\alpha, U).$$

Από την Πρόταση 6.2.22 για $\mathcal{H}^\alpha = (\mathbb{H}^\alpha, U)$ έχουμε $\Big(\big((\mathbb{H}^\alpha, U), U\big), U\Big) \supseteq (\mathbb{H}^\alpha, U)$. Οπότε,

$$\Big(\big((\mathbb{H}^\alpha, U), U\big), U\Big) = (\mathbb{H}^\alpha, U).$$

Από την Πρόταση 6.2.22 έχουμε $\big((\mathcal{H}^\alpha, U), U\big) \supseteq \mathcal{H}^\alpha$ και συνεπώς,

$$\Big(\big((\mathcal{H}^\alpha, U), U\big), U\Big) \supseteq (\mathcal{H}^\alpha, U).$$

Επίσης από την Πρόταση 6.2.21 για $\mathbb{H}^\alpha = (\mathcal{H}^\alpha, U)$ έχουμε

$$\big(\big((\mathcal{H}^\alpha, U), U\big), U\big) \subseteq (\mathcal{H}^\alpha, U).$$

Έτσι, $\big(\big((\mathcal{H}^\alpha, U), U\big), U\big) = (\mathcal{H}^\alpha, U)$. □

6.2.24 Ορισμός. Έστω τ τοπολογία επί του $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ και t τοπολογία επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$. Το ζεύγος (τ, t) καλείται *ζεύγος αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών κλάσης* α εάν $\tau = \tau(t)$ και $t = t(\tau)$.

6.2.25 Πρόταση. Έστω τ_0 τοπολογία επί του $\mathbf{G}_\alpha^Z(Y)$ και t_0 τοπολογία επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$. Τότε

$$t(\tau_0) = t\big(\tau\big(t(\tau_0)\big)\big)$$

και

$$\tau(t_0) = \tau\big(t\big(\tau(t_0)\big)\big).$$

Συνεπώς $\big(\tau\big(t(\tau_0)\big), t(\tau_0)\big)$ και $\big(\tau(t_0), t\big(\tau(t_0)\big)\big)$ είναι ζεύγη αμοιβαίως δυϊκών τοπολογιών κλάσης α.

Απόδειξη. Η τοπολογία $t(\tau_0)$ επί του $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής $(\mathbb{H}^\alpha, U)$, όπου $\mathbb{H}^\alpha \in \tau_0$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η τοπολογία $t\big(\tau\big(t(\tau_0)\big)\big)$ επί του συνόλου $\mathbf{B}^\alpha(Y, Z)$ έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής $\big(\big((\mathbb{H}^\alpha, U), U\big), U\big)$, όπου $\mathbb{H}^\alpha \in \tau_0$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$. Από την Πρόταση 6.2.23 έχουμε $t(\tau_0) = t\big(\tau\big(t(\tau_0)\big)\big)$. Παρόμοια βλέπουμε ότι $\tau(t_0) = \tau\big(t\big(\tau(t_0)\big)\big)$. □

6.3 Ερωτήματα

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε κάποια ερωτήματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της μελέτης μας. Τα ερωτήματα αυτά θα μας απασχολήσουν στο άμεσο μέλλον.

(1) Υπό ποιες προϋποθέσεις και συνθήκες των χώρων Y και Z η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ είναι διαχωριστική;

(2) Υπό ποιες προϋποθέσεις και συνθήκες των χώρων Y και Z η τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)$ είναι συνδετικά συνεχής;

(3) Γνωρίζουμε ότι, επί του $C(Y,Z)$, η μεγαλύτερη διαχωριστική τοπολογία υπάρχει πάντα. Είναι η τοπολογία αυτή $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογία;

(4) Έστω t τυχαία set-open τοπολογία επί του $C(Y,Z)$. Είναι η τοπολογία αυτή $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογία;

(5) Μπορούν να αποδειχθούν θεωρήματα τύπου Arzela-Ascoli για την τοπολογία $t_{\mathcal{F}_n}$, $n=1,2,\ldots$.

(6) Έστω $t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n), n=1,2,\ldots$ τοπολογίες επί του $C(Y,Z)$, που κατασκευάζονται σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.1. Υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε:

$$t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)=t_{\mathcal{F}_{n+1}}(\tau_{n+1})=t_{\mathcal{F}_{n+2}}(\tau_{n+2})=\ldots\ ;$$

(7) Έστω $\mathbf{S}$ ο χώρος Sierpiński. Τότε, το σύνολο $C(Y,\mathbf{S})$ συμπίπτει με το σύνολο $\mathcal{CL}(Y)$, των κλειστών υποσυνόλων του Y. Επί του συνόλου $C(Y,\mathbf{S})$, θεωρούμε τις παρακάτω τοπολογίες:

(α) την Vietoris τοπολογία t_V και

(β) την Fell τοπολογία t_F.

Είναι οι προαναφερθείσες τοπολογίες $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογίες;

(8) Επί του συνόλου $C(Y,Z)$, θεωρούμε τις παρακάτω τοπολογίες (για παράδειγμα, βλέπε [56]):

(α) την fine τοπολογία,

(β) την graph τοπολογία και

(γ) την Krikorian τοπολογία.

Είναι οι προαναφερθείσες τοπολογίες $\mathcal{F}_n(\tau_n)$-family-open τοπολογίες;

(9) Έστω X τοπολογικός χώρος. Με $w(X)$ συμβολίζουμε το βάρος του X. Ισχύει η σχέση $w(C_{t_{\mathcal{F}_n}(\tau_n)}(Y,Z))\leq w(Y)w(Z)$, για $n=1,2,\ldots$;

(10) Έστω t_0 τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{M}(Y,Z)$. Υπάρχει family-measurable τοπολογία t επί του $\mathcal{M}(Y,Z)$ τέτοια, ώστε $t_0\subseteq t$; Πιο συγκεκριμένα, αληθεύει ότι $t_0\subseteq t(\tau(t_0))$;

(11) Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Υπάρχει επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ η μεγαλύτερη χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία;

(12) Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Υπάρχει επί του συνόλου $\sigma_Z(\tau_Y)$ η μεγαλύτερη χωριστά μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική family-measurable τοπολογία;

(13) Έστω t_0 τοπολογία επί του συνόλου $\mathcal{B}(Y, Z)$. Υπάρχει family-Baire-measurable τοπολογία t επί του $\mathcal{B}(Y, Z)$ τέτοια, ώστε $t_0 \subseteq t$; Πιο συγκεκριμένα, αληθεύει ότι $t_0 \subseteq t(\tau(t_0))$;

(14) Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια που αποτελείται από πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους. Υπάρχει επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ η μεγαλύτερη χωριστά Baire-μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική τοπολογία;

(15) Έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια που αποτελείται από πλήρως κανονικούς Hausdorff χώρους. Υπάρχει επί του συνόλου $\sigma_Z(\mathcal{Z}(Y))$ η μεγαλύτερη χωριστά Baire μετρήσιμη $\mathcal{A}$-διαχωριστική family-Baire- measurable τοπολογία;

Βιβλιογραφία

[1] Ahmed M. Abd-Allah and Ronald Brown, *A compact open topology on partial maps with open domain*, J. London Math. Soc., (1980), s2-21 (3), pp. 480-486.

[2] R. F. Arens, *A topology for spaces of transformations*, Ann. of Math. vol. 47, (1946), pp. 480-495.

[3] R. Arens and J. Dugundji, *Topologies for function spaces*, Pacific J. Math., Vol. 1, 1951, pp. 5-31.

[4] A. V. Arhangel'skii, *General Topology III: Paracompactness, function spaces, descriptive theory.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 51. Springer-Verlag, Berlin, 1995, vi+229, pp. 71-156.

[5] Robert J. Aumann, *Borel structures for function spaces*, Illinois J. Math. 5, 1961, pp. 614-630.

[6] Robert J. Aumann, *Spaces of measurable transformations*, Bull. Amer. Math. Soc. 66, 1960, pp. 301-304.

[7] S. K. Berberian, *Borel Spaces*, Functional analysis and its applications (Proc. International Autumn School, Nice, 25 August-20 September, 1986), World Scientifc Publ. Co., Singapore, 1988, pp. 134-197.

[8] C. B. Boyer and U. L. Merzbach, *A History of Mathematics*, 2nd ed., John Wiley and sons, New York, 1991.

[9] R. Brown, *Elements of Modern Topology*, Mc Graw Hill, London, 1968.

[10] G. Choquet, Lectures on analysis, Vol. I: Integration and topological vector spaces, Benjamin, New York, 1969.

[11] S. Dolecki, G. H. Greco, A. Lechicki, *When do the upper Kuratowski topology (homeomorphically, Scott topology) and the co-compact topology coincide?* Trans. Amer. Math. Soc. 347, (1995), no. 8, pp. 2869–2884.

[12] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.

[13] Zbigniew Duszynski, *Functions and Baire Spaces*, Kragujevac Journal of Mathematics Volume 35 Number 1 (2011), pp. 5-12.

[14] R. Engelking, *General Topology*, Rivised and completed edition, Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[15] M. H. Escardo, *Function-space compactifications of function spaces*, Topology Appl. 120 (2002), no. 3, pp. 441-463.

[16] M. Escardo, R. Heckmann *Topologies on spaces of continuous functions*, Proceedings of the 16th Summer Conference on General Topology and its Applications (New York), Topology Proc. 26 (2001/02), no. 2, pp. 545-564.

[17] R. H. Fox, *On topologies for function spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), pp. 429-432.

[18] D. H. Fremlin, R. W. Hansell and H. J. K. Junnila, *Borel functions of bounded class*, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), pp. 835-849.

[19] D. Gale, *Compact sets of functions and function rings*, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), pp. 303-308.

[20] D. N. Georgiou, *On function spaces*, Quaderno Theory And Applications of Proximity, Nearness and Uniformity, (2009), pp. 89-101.

[21] D. N. Georgiou and S. D. Iliadis, *General Topology - Metric and Topological Spaces*, Patra 2008.

[22] D. N. Georgiou and S. D. Iliadis, *Set Theory*, Patra 2008.

[23] D. N. Georgiou and S. D. Iliadis, *On the compact open and finest splitting topologies*, Topology and its Applications 2, Elsevier, Amsterdam (2007), pp. 193-196.

[24] D. N. Georgiou and S. D. Iliadis, *Some problems concerning splitting and admissible topologies*, Q and A in General Topology, 23 (2005), pp. 101-105.

[25] D. N. Georgiou and S. D. Iliadis, *Some topologies on Lattices*, Atti Sem. Fis. Iniv. Modena a Regio Emilia, 53 (2005), pp. 119-129.

[26] D. N. Georgiou, S. D. Iliadis, and F. Mynard, *Function Space Topologies*, (appear in Open Problems in Topology 2 (Elsevier)).

[27] D. N. Georgiou, S. D. Illadis, and B. K. Papadopoulos, *Topologies on function spaces*, Journal of Mathematical Sciences, VoL 81, No. 2, 1996, pp. 2506-2514.

[28] D. N. Georgiou, S. D. Illadis, and B. K. Papadopoulos, *Topologies on function spaces and the coordinate continuity*, Topology proceedings, Volume 25, 2000, pp. 505-517.

[29] D. N. Georgiou, S. D. Illadis, and B. K. Papadopoulos, *On dual topologies*, Topology and its Applications 140 (2004), 57–68.

[30] D. N. Georgiou, I. Kougias, and A. C. Megaritis, *Borel structures on the set of Borel mappings*, Topology and its Applications 159 (2012), pp. 1906-1915.

[31] D. N. Georgiou, A. C. Megaritis, *The quasi Isbell topology on function spaces*, Colloq. Math. 141 (2015), pp. 13-24

[32] D. Georgiou, A. Megaritis, K. Papadopoulos, V. Petropoulos, *A study concerning splitting and jointly continuous topologies on* $C(Y, Z)$, Quaestiones Mathematicae Vol. 39 (2016), Issue 3, pp. 363-379.

[33] D. N. Georgiou, A. C. Megaritis and V. I. Petropoulos, *Function Measurable Spaces*, Topology Proceedings Volume 43 (2014), pp. 159-181.

[34] D. N. Georgiou, A. C. Megaritis and V. I. Petropoulos, *Topologies on the Set of Borel Maps of Class α*, Filomat 29:1 (2015), pp. 143-154.

[35] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, and D. S. Scott, *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[36] R. W. Hansell, *Borel Measurable Mappings for Nonseparable Metric Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 161, (Nov. 1971), pp. 145-169.

[37] R. W. Hansell, *Sums, Products and Continuity of Borel Maps in Nonseparable Metric Spaces*, Transactions of the Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 104, Number 2, October 1988.

[38] M. Henry, D. Reynolds and G. Trapp, *A note on Gale's property*, Topology Proceedings, 7 (1982), pp. 193-196.

[39] K. H. Hofmann, *A Note on Baire Spaces and Continuous Lattices*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 21 (1980), pp. 265-279.

[40] K. H. Hofmann and J. D. Lawson, *The Spectral Theory of Distributive Continuous Lattices*, Trans. Amer. Math. Soc. 246 (1978), pp. 285-310.

[41] E. Howard, *An Introduction to the History of Mathematics* 6th ed., Saunders College Publising, Philadelphia, 1990.

[42] J. Isbell, *Function spaces and adjoints*, Math. Scand., 36 (1975), pp. 317-339.

[43] J. Isbell, *General function spaces, products and continuous lattices*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 100 (1986), pp. 193-205.

[44] J. Isbell, *Meet Continuous Lattices*, Symposia Mathematica 16 Convegni del Marzo 1973 e del Gennaio 1974, Romma: INDAM, Academic Press London - New York 1975, pp. 41-54.

[45] Paul R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, 1974.

[46] G. Jager, *Function spaces in FTS*, J. Fuzzy Math. 6 (4) (1998), pp. 929-939.

[47] S. K. Kaul, *Compact subsets in function spaces*, Can. Math. Bull. 12 (1969), pp. 461-466.

[48] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[49] J. L. Kelley, *General Topology*, Springer, Berlin-Heideberg-New York, 1955.

[50] Lj. D. R. Kocinac, *Closure properties of function spaces*, Applied General Topology 4 (2) (2003), pp. 255-261.

[51] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press, 1966.

[52] P. Th. Lambrinos, *On the Scott function space topology*, Abstracts Amer. Math. Soc. no 5 3 (1982), pp. 796-54-282.

[53] P. Th. Lambrinos, *The bounded - open topology on function spaces*, Manuscr. Math. 36 (1981), pp. 47-66.

[54] P. Th. Lambrinos and B. K. Papadopoulos, *The (strong) Isbell topology and (weakly) continuous lattices,* Continuous Lattices and Applications, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. No. 101, Marcel Dekker, New York 1984, pp. 191-211.

[55] Lepcaliuc Anamaria, *The Oldest Object that Proves the Existence of a Method of Calculation*, International Journal of Social and Educational Innovation No.2 2014, pp. 37-44.

[56] G. Di Maio, L. Holá, D. Holý and R. McCoy, *Topologies on the set space of continuous functions*, Topology Appl. 86 (1998), no. 2, pp. 105–122.

[57] G. Di Maio, E. Meccariello, S. Naimpally, *Hyper-continuous convergence in function spaces*, Questions and Answers in General Topology, vol. 22, no. 2, 2004, pp. 157-162.

[58] G. Di Maio, E. Meccariello, S. Naimpally, *Hyper-continuous convergence in function spaces*, II, Ricerche di Matematica, vol. 54, no. 1, 2005, pp. 245-254.

[59] G. Di Maio, E. Meccariello, S. Naimpally, *Duality in function spaces*, Mediterr. J. Math. 3 (2006), no. 2, pp. 189-204.

[60] G. Di Maio, E. Meccariello, S. Naimpally, *Hyperspace and function space are duals*, Questions Answers Gen. Topology 25 (2007), no. 1, pp. 23-43.

[61] G. W. Mackey, *Borel structure in groups and their duals*, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), pp. 134-165.

[62] R. McCoy and I. Ntantu, *Topological properties of spaces of continuous functions*, Lecture Notes in Mathematics, 1315, Springer Verlang.

[63] M. Mislove, *Topology, domain theory and theoretical computer science*, Topology Appl., 1998, 89(1-2), pp. 3-59.

[64] S. A. Naimpally, *Graph topology for function spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 123, 1966, pp. 267-272.

[65] B. K. Papadopoulos, *A study of the Isbell Topology on Function Spaces*, PhD Thesis, Xanthi 1985 (In Greek).

[66] B. K. Papadopoulos, *An extension of an Ascoli Type Theorem*, Radovi Matematicki, Vol.2 (1986), pp. 237-240.

[67] B. K. Papadopoulos, *On the Isbell topology*, Math. Japonica 35, No. 6 (1990), pp. 1043-1046.

[68] B. K. Papadopoulos, *On the Scott topology on the set $C(Y, Z)$ of continuous maps*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 41 (1991), No. 3, pp. 373-377.

[69] B. K. Papadopoulos, *Proper topologies on the set* S^Y, Clasnik Matematicki (43) 23 (1988), pp. 143-146.

[70] H. Render, *Nonstandard topology on function spaces with applications to hyperspaces*, Transactions of the American Mathematical Society (1) 336 (1993), pp. 101-119.

[71] F. Schwarz, *Powers and exponential objects in initially structured categories and application to categories of limits spaces*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Quaestiones Mathematicae 6 (1983), pp. 227-254.

[72] F. Schwarz, *Topological continuous convergence*, Intistute für Mathematik 142 Universitat Hannover, 1982.

[73] F. Schwarz and S. Weck, *Scott topology, Isbell topology, and continuous convergence*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. No. 101, Marcel Dekker, New York, 1984, pp. 251-271.

[74] S. M. Srivastava, *A Course on Borel Sets*, Springer Verlag, 1991.

[75] L. A.Steen, J.A.Seebach Jr. *Counterexamples in Topology* 2nd ed. 1970, Springer-Verlag.

[76] B. V. Rao, *Borel structures function spaces*, Colloquium Mathematicum, Vol. XXIII, 1971, pp. 33-38.

[77] N. V. Velichko, *λ-Topologies on Function Spaces*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 131, No. 4, 2005, pp. 5701-5737.

[78] A. Wilansky, *Topology for Analysis*, Xerox College Publishing, Lexington, Massachusetts, Toronto, 1970.

[79] P. Wilker, *Adjoint product and hom fuctors in general topology*, Pacific J. Math. 34 (1970), pp. 269-283

[80] O. Wyler, *Convenient categories for topology*, Gen. Top. App. 3 (1973), pp. 225-242.

[81] Xiaoyong Xi, Jinbo Yang, *Coincidence of the Isbell and Scott topologies on domain function spaces*, Topology Appl. 164 (2014), pp. 197-206.

[82] X. Y. Xi, *When do the Isbell and Scott topologies agree on domain function spaces?*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) (5) 48 (2005), pp. 1021-1028.

[83] A. P. Youschkevitch, *The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*, Archive for History of Exacts Science, Vol. 16, Springer-Verlag, Berlin-Heindelbertg-New York, 1976/77.

Ευρετήριο