ΣΧΟΛΗ ΑΝΘΡΩΠΙΣΤΙΚΩΝ & ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ & ΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΠΜΣ στην Κατεύθυνση Διδακτικής των Θετικών Επιστημών: Διδακτικές διαδικασίες, Εκπαιδευτικά προγράμματα, Αξιολόγηση & Τεχνολογίες των Επικοινωνιών και της Πληροφορίας στην Εκπαίδευση

Η προσέγγιση του νόμου του Hooke από μαθητές/τριες Β΄ Γυμνασίου: από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις στο μαθηματικό μοντέλο

Διπλωματική Εργασία

Βαΐα Φαρμάκη
Α.Μ. 1050276

Επιβλέποντες:

Κωνσταντίνος Ζαχάρος και Κωνσταντίνος Ραβάνης
Καθηγητές στο Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η. Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα 2017

Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο τέλος των μεταπτυχιακών μου σπουδών με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά τους ανθρώπους που συνέβαλαν στην εκπόνησή της. Θα ήθελα να ευχαριστήσω λοιπόν τους επιβλέποντες, καθηγητές του Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η., κ. Κωνσταντίνο Ζαχάρο και κ. Κωνσταντίνο Ραβάνη για την πολύτιμη καθοδήγηση και υποστήριξή τους. Οι παρατηρήσεις και οι συμβουλές τους στα κρίσιμα σημεία υλοποίησης της έρευνας αποτέλεσαν καθοριστικό οδηγό στην εξέλιξη και ολοκλήρωσή της. Επίσης, θα ήθελα να τους ευχαριστήσω ακόμη περισσότερο, για το ευχάριστο και ενθαρρυντικό κλίμα που υπήρχε στη συνεργασία μας καθώς και για την άμεση ανταπόκριση και βοήθειά τους σε όλες τις περιπτώσεις που το είχα ανάγκη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Δημήτριο Κολιόπουλο, καθηγητή και πρόεδρο του Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η. ο οποίος με τίμησε με τη συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή μου.

Δήλωση ακαδημαϊκής ακεραιότητας

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή έχει γραφτεί από εμένα, χωρίς οποιαδήποτε εξωτερική μη αδειοδοτημένη βοήθεια, ότι δεν έχει υποβληθεί σε οποιοδήποτε ίδρυμα ή οργανισμό προς αξιολόγηση, ούτε έχει δημοσιευθεί στο παρελθόν μέρος της ή στο σύνολό της.

Οποιαδήποτε μέρη, λέξεις ή ιδέες, της μεταπτυχιακής διατριβής, αν και περιορισμένα, συμπεριλαμβανομένων πινάκων, γραφημάτων, χαρτών κ.λπ., τα οποία είναι εισηγμένα από (ή με βάση) άλλες πηγές, έχουν αναγνωριστεί ως τέτοια χωρίς καμία εξαίρεση.

Βαΐα Φαρμάκη

Περίληψη

Σκοπός της έρευνας μας ήταν η μελέτη της πορείας και των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές στη Β γυμνασίου όταν επιχειρούν να αξιοποιήσουν τις μαθηματικές γνώσεις τους για να οικοδομήσουν το νόμο του Hooke στη Φυσική και πιο συγκεκριμένα, δυσκολίες στην: 1) οικοδόμηση του μαθηματικού μοντέλου του νόμου του Hooke μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων των ανάλογων ποσών, 2) συσχέτιση της κλίσης της ευθείας στη γραφική παράσταση των πειραματικών δεδομένων με τη σκληρότητα του ελατηρίου. 3) αξιοποίηση του νόμου του Hooke στην κατασκευή ενός δυναμόμετρου. Οργανώσαμε μια διδακτική παρέμβαση στην οποία οι μαθητές κλήθηκαν να πραγματοποιήσουν τους ανωτέρω στόχους. Για τη διερεύνηση του συλλογισμού των μαθητών πραγματοποιήθηκαν τυποποιημένες ανοικτού τύπου ατομικές συνεντεύξεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές: 1) μπορούν να οικοδομήσουν το μαθηματικό μοντέλο του νόμου του Hooke εάν διαθέτουν ευχέρεια στη «μετάφραση» μεταξύ των αναπαραστάσεων των ανάλογων ποσών, 2) επιτυγχάνουν καλύτερη συσχέτιση της γεωμετρικής κλίσης της ευθείας με τη σκληρότητα του ελατηρίου σε σχέση με την αλγεβρική έκφρασή της, 3) μπορούν να εφαρμόσουν το νόμο του Hooke στη βαθμονόμηση του δυναμόμετρου εάν ξεπεράσουν το αρχικό στάδιο κατασκευής του.

Abstract

The aim of our research was the study of the course and of the difficulties dealt with by students of 2nd grade of secondary school when they attempt to deploy their mathematical knowledge in order to build Hooke’s Law in Physics and particularly, difficulties in: 1) building the mathematical model of Hooke’s Law by means of multiple representations of the proportional amounts, 2) the association of the slope of the straight line in the graphic representation of the experimental data with the hardness of the coil, 3) employment of Hooke’s Law in constructing a dynamometer. We organized a teaching agency where students were called upon to accomplish the aforementioned goals. To analyze students’ reasoning we carried out formulaic, open, individual interviews. The results indicated that students: 1) can build the mathematical model of Hooke’s Law if they have competence in “translation” between representations of proportional amounts, 3) achieve better association of the geometric slope of the straight line with the hardness of the coil in comparison with its algebraic expression, 3) can apply Hooke’s Law in the calibration of the dynamometer if they overcome the initial stage of its construction.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή ... 6

Α΄Μέρος ... 11

Θεωρητικό πλαίσιο ... 11

Ρόλος των μαθηματικών στην εκπαίδευση της φυσικής ... 11

Αναπαραστάσεις (Representations) - Πολλαπλές Μαθηματικές αναπαραστάσεις ... 15

Representation και Visualitation στη μάθηση ... 17

Περιορισμοί των αναπαραστάσεων στη μάθηση ... 22

Β' μέρος ... 24

Μεθοδολογικό πλαίσιο ... 24

Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα ... 24

Το δείγμα της έρευνας ... 24

Μεθοδολογικές επιλογές ... 25

Πλαίσιο Ανάλυσης ... 31

Παρουσίαση και Ανάλυση αποτελεσμάτων ... 36

1. Από το Φυσικό Κόσμο στο Μαθηματικό μοντέλο ... 36

2. Διερεύνηση των παραμέτρων του Μαθηματικού Μοντέλου και ερμηνεία στο Φυσικό Κόσμο ... 49

3. Εφαρμογή και αξιοποίηση του Μαθηματικού Μοντέλου στο Φυσικό Κόσμο ... 60

Συζήτηση αποτελεσμάτων- Συμπεράσματα ... 70

Βιβλιογραφία ... 80

Παράρτημα ... 86

Φύλλο Εργασίας Μαθητή ... 86

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά είναι κάτι παραπάνω από εργαλείο εργασίας στα προβλήματα φυσικής. Μαθηματικές έννοιες, δομές, διαδικασίες και μέθοδοι είναι δομικά μέρη της φυσικής όπως την ξέρουμε σήμερα. Ο λόγος της φυσικής είναι τα μαθηματικά (Uhden, Karam, Pietrocola, & Pospiech, 2012). Αυτή η άρρηκτη σχέση μεταξύ των δύο επιστημών αποτελεί μεγάλη πρόκληση στην εκπαίδευση της φυσικής. Διότι, ακόμη κι αν τα μαθηματικά μπορεί να είναι η γλώσσα της φυσικής «τα μαθηματικά - στη - φυσική είναι μια ξεχωριστή διάλεκτος». Οι φυσικοί συνδυάζουν τις έννοιες της φυσικής με τα μαθηματικά σύμβολα μ’ έναν τρόπο που επηρεάζει βαθιά τη χρήση και ερμηνεία των εξισώσεων. Η φυσική είναι κάτι περισσότερο από ένα πλαίσιο εφαρμογής των μαθηματικών (Redish, 2006).

Οι Uhden et all (2012) διαπιστώνουν ότι η γνώση μας για την υποστηρικτική χρήση των μαθηματικών στην εκπαίδευση της φυσικής είναι ακόμη αποσπασματική και υιοθετούν τη δήλωση του Hestenes (2003) ότι «Η πρόκληση είναι να εξετάσουμε σοβαρά το σχεδιασμό και τη χρήση των μαθηματικών ως ένα σημαντικό θέμα για την έρευνα εκπαίδευσης στη φυσική». Πάντως μέχρι σήμερα πολλές έρευνες έχουν ασχοληθεί με το θέμα της χρήσης των μαθηματικών στην εκπαίδευση των φυσικών επιστημών και ιδιαίτερα της φυσικής, καθώς και με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε σχέση με το θέμα αυτό (Erickson, 2006; Nilsen, Angell, & Grønmo, 2013; Meltzer, 2002; Planinic, Milin-Sipus, Katic, Susac, & Ivanjek, 2012).

Από την έρευνα έχει φανεί ότι οι μαθηματικές δεξιότητες επηρεάζουν τα επιτεύγματα των μαθητών στη φυσική (Lawrenz, Wood, Kirchhoff, Kim, & Eisenkraft, 2009) ή τα μαθησιακά οφέλη στη φυσική (Meltzer, 2002) καθώς και ότι η φυσική συχνά θεωρείται δύσκολο σχολικό αντικείμενο από τους μαθητές (Duit, Niedderer, & Schecker, 2007). Πολλές δυσκολίες των μαθητών στη φυσική συχνά εμπλέκουν τη χρήση των μαθηματικών (Meltzer, 2002; Redish, 2006). Τα προκαταρκτικά ευρήματα στη διδακτορική έρευνα των Uhden & Pospiech, (2010) δείχνουν ότι για τους μαθητές το φυσικό νόημα των εννοιών και οι μαθηματικοί υπολογισμοί είναι δύο διαφορετικά πράγματα καθώς και ότι η χρήση των μαθηματικών στη φυσική κατανοείται περισσότερο εργαλειακά παρά σχεσιακά. Παρόλο όμως που τις περισσότερες φορές οι δάσκαλοι της φυσικής αποδίδουν τις μαθηματικές δυσκολίες των μαθητών στο μάθημα της φυσικής στις ανεπαρκείς μαθηματικές γνώσεις τους (Karam & Pietrocola, 2009), πολλοί μαθητές παραδέχονται, ότι αν και η άλγεβρα στη φυσική είναι απλή δεν μπορούν όμως να βρουν τις σωστές εξισώσεις και να τις εφαρμόσουν με τις κατάλληλες μαθηματικές διαδικασίες (Angell, Kind, Henriksen,, & Guttersrud,, 2008). Ο Tuminaro (2004), ισχυρίζεται ότι οι λόγοι που οι μαθητές δυσκολεύονται με τα μαθηματικά στη φυσική είναι από τη μια η έλλειψη μαθηματικών δεξιοτήτων, απαραίτητων για την επίλυση προβλημάτων στη φυσική και από την άλλη το ότι οι μαθητές δεν ξέρουν πώς να εφαρμόσουν τις μαθηματικές δεξιότητες που έχουν στα ιδιαίτερα προβλήματα της φυσικής. Οι Roth & McGinn (1997) αποδίδουν τις δυσκολίες των μαθητών στην έλλειψη εμπειρίας σχετικά με την κατασκευή και χρήση γραφημάτων καθώς επίσης και στην έλλειψη ευκαιριών να αποδώσουν νόημα στα γραφήματά τους.

Στο πεδίο της έρευνας για τη μοντελοποίηση στη φυσική ο Kanderakis (2016) υποστηρίζει ότι τα προγράμματα φυσικής που έχουν ως βασικό συστατικό την κατασκευή, τη χρήση και την αξιολόγηση μοντέλων, στοχεύουν στη βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών. Η βαθιά αλληλεξάρτηση της φύσης των μαθηματικών και της φυσικής δεν επιτρέπει την πλήρη διάκριση ενός φυσικού (ποιοτικού) από ένα μαθηματικό (ποσοτικό) μοντέλο στην εκπαίδευση της φυσικής. Η μαθηματική μάλιστα μοντελοποίηση - περιγραφόμενη ως η μεταφραστική διαδικασία μεταξύ των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου από τους Blum & Borromeo Ferri (2009) - αναγνωρίζεται ως ιδιαίτερα σημαντική για τη σχολική εκπαίδευση αλλά και ως δύσκολη διαδικασία για τους μαθητές (Uhden et all, 2012). Και πάλι, παρόλο που η μαθηματική επεξεργασία των εξισώσεων σε διαδικασίες μοντελοποίησης είναι οικεία στους μαθητές πολλοί απ' αυτούς δεν μπορούν να τα καταφέρουν. Είτε γιατί έχουν έλλειψη διαδικαστικής γνώσης, είτε γιατί δεν μπορούν να χειριστούν τη μετάβαση μεταξύ μαθηματικών συμβόλων και φυσικού νοήματος (Kanderakis, 2016).

Σε έρευνες των McDermott, Rosenguist, & van Zee, (1987), Planinic et all, (2012), που εξέτασαν τις ικανότητες των μαθητών στο πλαίσιο των μαθηματικών και στο πλαίσιο της φυσικής στις ίδιες γραφικές παραστάσεις βρέθηκε ότι οι μαθητές τα κατάφεραν καλύτερα στα μαθηματικά και επιβεβαίωσαν την άποψη ότι η έλλειψη των μαθηματικών γνώσεων δεν ήταν η κύρια αιτία δυσκολιών των μαθητών στα γραφήματα της φυσικής. Συχνά έλειπε η ερμηνεία των μαθηματικών ποσοτήτων στο πλαίσιο της φυσικής και ακόμη κι αν οι μαθητές κατείχαν την απαραίτητη μαθηματική γνώση δεν μπορούσαν να τη χρησιμοποιήσουν αν δεν μπορούσαν να μεταφέρουν την κατανόησή τους μεταξύ των δύο πλαισίων. Έρευνες σαν τις δύο προηγούμενες επικεντρώνονται στο πρόβλημα της μεταφοράς της γνώσης, στον τρόπο δηλαδή με τον οποίο η γνώση που αποκτήθηκε σε έναν τομέα όπως π.χ. τα μαθηματικά να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μάθηση σε έναν δεύτερο. Οι θεωρίες μεταφοράς της γνώσης (transfer of knowledge) βασίζονται στην ιδέα ότι η γνώση μπορεί να μεταφερθεί από μια κατάσταση σε μια άλλη μέσω συνδέσεων με τη νέα κατάσταση και οι πληροφορίες ανακτώνται από τη μνήμη. Ωστόσο η επιτυχής μεταφορά γνώσης μεταξύ διαφορετικών τομέων όπως έχει αποδειχθεί σε πολλές έρευνες, δεν είναι πάντα δεδομένη, έχει αποτύχει σε πολλές περιπτώσεις, φαίνεται να εξαρτάται από το είδος της μεταφερόμενης γνώσης (εννοιολογική ή διαδικαστική) και από ένα σύνολο άλλων παραγόντων των οποίων η γνώση είναι επιτακτική (Potgieter, Harding, & Engelbrech, 2008). Πολλοί από τους ερευνητές αυτούς προτείνουν για την καλύτερη αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών με τα μαθηματικά στη φυσική τη δημιουργία ισχυρότερων συνδέσεων μεταξύ μαθηματικών και φυσικής στη διάρκεια της διδασκαλίας μέσω παραδειγματικών εφαρμογών, έκθεσης των μαθητών σε μαθηματικά εργαλεία που εφαρμόζονται άμεσα σε προβλήματα φυσικής και παροχή ευκαιριών για ερμηνείες των μαθηματικών στο πλαίσιο της φυσικής (Nilsen et all, 2013; Planinic et all, 2012; Roth & McGinn 1997; Witten, 2005)

Υπάρχουν ερευνητές οι οποίοι διαφωνούν με τις θεωρίες μεταφοράς της γνώσης και υποστηρίζουν ότι η μεταφορά της γνώσης δεν επιτυγχάνεται στον επιθυμητό βαθμό, δεδομένου ότι η γνώση και η κατανόηση αποκτώνται σε συγκεκριμένο πλαίσιο (situated knowledge) αποτελούν δηλαδή μέρος του προϊόντος της δραστηριότητας, των εργαλείων, του πλαισίου και του πολιτισμού στον οποίο αναπτύσσονται και χρησιμοποιούνται (Lave,1988; Brown, Collins, & Duguid, 1989). Ως εναλλακτική στο πρόβλημα μεταφοράς της γνώσης οι ερευνητές αυτοί προτείνουν τη γνωστική μαθητεία (cognitive apprenticeship) την απόκτηση δηλαδή της γνώσης μέσα σε αυθεντικά περιβάλλοντα μέσω κοινωνικών πρακτικών (Boaler, 1998).

Σύμφωνα με τον Niss (1999) το νόημα μιας μαθηματικής έννοιας για τους μαθητές καθορίζεται από τους ειδικούς τομείς στους οποίους η έννοια αυτή έχει παρουσιαστεί στους μαθητές. Όταν μια έννοια εισάγεται σε ένα στενό μαθηματικό πεδίο, ο μαθητής μπορεί να τη δει ως ένα τυπικό αντικείμενο με αυθαίρετους κανόνες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δυσκολία αναγνώρισης της έννοιας σε ένα νέο πλαίσιο. (Niss, 1999). Κριτικάροντας το παραδοσιακό μοντέλο του πλήρους διαχωρισμού των διδακτικών καταστάσεων τη φυσικής και των μαθηματικών η Lobato, (2003) προτείνει ένα πλαίσιο προσανατολισμένο στη δράση στο οποίο οι μαθητές θα δημιουργούν διαρκώς συνδέσεις μεταξύ καταστάσεων, παρακινημένοι από πλευρές τις οποίες οι ίδιοι θεωρούν ενδιαφέρουσες. Στο ίδιο μήκος κύματος ο Michelsen, (2006) θεωρεί κρίσιμης σημασίας τη διεπιστημονικότητα στην εκπαίδευση για την επίτευξη βαθύτερης κατανόησης των μαθητών τόσο στις φυσικές επιστήμες όσο και στα ίδια τα μαθηματικά και τονίζει την αναγκαιότητα της χρήσης των μαθηματικών ως γλώσσας της φυσικής (εξαιτίας της ουσιαστικής και άρρηκτης συνύφανσης των δύο επιστημών) στην περιοχή της μαθηματικής μοντελοποίησης των φυσικών φαινομένων για το σκοπό αυτό. Επαυξάνοντας, οι Lesh & Sriraman, (2005) για την αντιμετώπιση των δυσκολιών που συναντούν οι απόφοιτοι σε διεπιστημονικούς τομείς όπως η μαθηματική βιολογία και η βιοπληροφορική, προτείνουν η μελέτη και μοντελοποίηση σύνθετων συστημάτων πραγματικών καταστάσεων να αρχίζει από την πρώιμη εκπαίδευση. Την αναγκαιότητα της χρήσης των μαθηματικών ως γλώσσας για τη διδασκαλία της φυσικής καθώς και της διάκρισης των δυνατών ρόλων τους στο πλαίσιο της φυσικής εκπαίδευσης τονίζουν επίσης και ο Pietrocola με τους συνεργάτες του, (Karam, Pospiech, & Pietrocola, (2011); Pietrocola, (2010); Pospiech, (2015); Uhden & Pospiech (2010); Uhden et all, (2012)) σε αντιπαραβολή με την απλή πρόσθεση περισσότερων ωρών μαθηματικών στο πρόγραμμα σπουδών. Η μεγάλη σημασία των μαθηματικών κατά τη γνώμη τους, βρίσκεται κυρίως στο δομικό ρόλο (structural role) που μπορούν να διαδραματίσουν στη διαδικασία παραγωγής αντικειμένων που διαμορφώνουν ερμηνείες του φυσικού κόσμου και λιγότερο στο τεχνικό μέρος τους (technical role). Επομένως ο ρόλος τους ως γλώσσα δεν είναι τόσο αυτός της μετάφρασης, όσο το γεγονός ότι τα ίδια είναι μέρος της κατασκευής της γνώσης που εκφράζουν, γεγονός ουσιώδες για τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών της φυσικής από τους μαθητές.

Από την προηγούμενη επισκόπηση της βιβλιογραφίας διαπιστώνουμε ότι η διασύνδεση των μαθηματικών με τη φυσική στην εκπαίδευση είναι ζωτικής σημασίας και ότι απαιτείται κι άλλη έρευνα σχετικά με τον τρόπο ενσωμάτωσης και εφαρμογής των μαθηματικών στη φυσική (Nilsen et all, 2013). Γι’ αυτό το σκοπό η έρευνά μας θα διερευνήσει περαιτέρω το θέμα της εμπλοκής των μαθηματικών ως γλώσσας με δομικό ρόλο, στην οικοδόμηση του μαθηματικού μοντέλου ενός φυσικού νόμου από μαθητές γυμνασίου, στη διερεύνησή του και την τελική εφαρμογή του στο φυσικό κόσμο. Στην έρευνα υιοθετούμε το μοντέλο χρήσης των μαθηματικών στη φυσική εκπαίδευση όπως αναπτύχθηκε από τους Uhden et all, (2012) Πρωταγωνιστικό ρόλο στο εγχείρημα αυτό θα παίξουν οι πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις ως εργαλείο οικοδόμησης νοήματος και επικοινωνίας από τους μαθητές στη διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας. Στην άποψή μας αυτή συνηγορούν και οι Angell et all, (2008), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η κατανόηση της φυσικής περιγραφής των φαινομένων περιλαμβάνει την ικανότητα της αναπαράστασης αυτών των φαινομένων μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων καθώς και την ικανότητα μετάφρασης μεταξύ τους.

.

Α΄Μέρος

Θεωρητικό πλαίσιο

Ρόλος των μαθηματικών στην εκπαίδευση της φυσικής

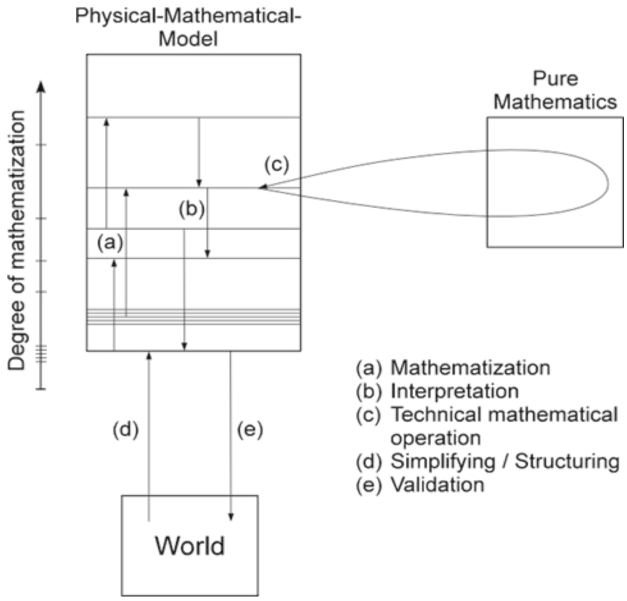
Κατά τον Pietrocola, (2010) η φυσική και τα μαθηματικά έχουν βαθιά αλληλεξάρτηση και αυτή η αμοιβαία σχέση τους έχει διαδραματίσει ουσιαστικό ρόλο στην εξέλιξη και των δύο. Η ιστορική και φιλοσοφική προσέγγιση της αλληλεπίδρασης των δύο επιστημών αντανακλά προεκτάσεις και στην εκπαίδευση της φυσικής, ως προς το ποια διδασκαλία μαθηματικών στη φυσική επιτρέπει τη μάθηση των φυσικών περιεχομένων. Κατά τον Pietrocola διαφαίνονται δύο τύποι διδασκαλίας:

1. Η διδασκαλία που βασίζεται στον *τεχνικό τομέα* των μαθηματικών συστημάτων στην εκπαίδευση στη φυσική όπως π.χ. οι λειτουργίες με αλγορίθμους, η επίλυση διαφορικών εξισώσεων κλπ. και τα χαρακτηριστικά της είναι οι τεχνικές δεξιότητες (technical skills). Οι δεξιότητες αυτές αφορούν το εσωτερικό πλαίσιο της καθαρής μαθηματικής γνώσης, με την έννοια ότι ασχολούνται με συγκεκριμένους κανόνες και ιδιότητες των μαθηματικών συστημάτων.

2. Η διδασκαλία που βασίζεται στην *ικανότητα της εμπλοκής* της μαθηματικής γνώσης στη δόμηση των φυσικών καταστάσεων και την αναγνώρισή των αλληλεπιδράσεών τους και τα χαρακτηριστικά της είναι οι δομικές δεξιότητες (structural skills). Οι δεξιότητες αυτές αφορούν την οργανωτική χρήση των μαθηματικών σε εξωτερικούς τομείς.

Ενώ η πρώτη δεξιότητα μπορεί να αποκτηθεί έξω από την εκπαίδευση της φυσικής, αποκλειστικά δηλαδή στο πλαίσιο του μαθήματος των μαθηματικών, η δεύτερη δεν μπορεί να το κάνει. Η ικανότητα αντιμετώπισης των μαθηματικών στις δικές τους καταστάσεις δεν εγγυάται την ικανότητα χρήσης τους σε άλλους τομείς της γνώσης, όπως η φυσική. Η τεχνική δεινότητα δηλαδή στα μαθηματικά, δεν εγγυάται τη διαρθρωτική τους ικανότητα στη δόμηση της σκέψης στον τομέα της φυσικής. Επομένως, ο σκοπός στην εκπαίδευση της φυσικής κατά τον Pietrocola, (2010), είναι να αναπτυχθούν οι δομικές δεξιότητες των μαθητών στη χρήση των μαθηματικών, κι αυτό μπορεί να επιτευχθεί με διαδικασίες «μετάφρασης» μεταξύ των μαθηματικών και της φυσικής στην εκπαίδευση. Τέτοιες διαδικασίες που εξυπηρετούν τη σκέψη με δομικές δραστηριότητες είναι η μαθηματική μοντελοποίηση με το πέρασμα των «ωμών» δεδομένων του εμπειρικού τομέα στην εννοιολογική τους αναπαράσταση καθώς και η εργασία των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων φυσικής με περιοριστικές συνθήκες. Αντιθέτως, οι περισσότεροι δάσκαλοι φυσικής θεωρούν τα μαθηματικά ως τεχνικές δεξιότητες για τη φυσική. Οι μαθητές αν γνωρίζουν π.χ. να λύνουν εξισώσεις είναι αρκετό για να ξέρουν φυσική, πράγμα που αποδεικνύεται αντικειμενικό-παιδαγωγικό εμπόδιο για τη μάθηση των φυσικών εννοιών εξαιτίας της στροφής του ενδιαφέροντος των μαθητών σε τεχνικά θέματα όπως π.χ. στην επίλυση εξισώσεων κλπ. Μέσα από επιστημολογικές και εμπειρικές μελέτες έχουν εντοπιστεί τέσσερις δομικές δεξιότητες (Karam & Pietrocola, 2009): α) *Εντοπισμός ουσιωδών πτυχών στα φυσικά φαινόμενα που δικαιολογούν τη χρήση μαθηματικών δομών (Mathematisation* - από τη φυσική στα μαθηματικά). Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τους λόγους για τους οποίους μια συγκεκριμένη μαθηματική δομή είναι χρήσιμη για την περιγραφή ενός συγκεκριμένου φυσικού φαινομένου, π.χ. οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορούν να εκφράσουν περιοδικότητα, οι γραμμικές συναρτήσεις εκφράζουν αναλογικότητα κλπ. Οι μαθηματικές γνώσεις που χρησιμοποιούνται εδώ συνυφαίνονται άμεσα με το νόημα στη φυσική, σε αντίθεση με τις τεχνικές δεξιότητες οι οποίες επιτελούν δύσκολες διεργασίες χωρίς όμως συνδέσεις με το φυσικό νόημα. β) *Εννοιολογική κατανόηση μαθηματικών στοιχείων της φυσικής (Interpretation* - από τα μαθηματικά στη φυσική): Η ικανότητα των μαθητών π.χ. να «διαβάζουν» τις φυσικές εξισώσεις και να ερμηνεύουν το νόημά τους ή να αποδίδουν φυσικό νόημα σε γεωμετρικά στοιχεία των γραφικών παραστάσεων κλπ. γ) *Παραγωγή εξισώσεων από βασικές αρχές της φυσικής* ((Derivation - Ικανότητα για ερωτήσεις «γιατί»). Η Derivation εκφράζει το λογικό/παραγωγικό συλλογισμό δηλαδή τις γνώσεις του μαθητή σχετικά με την προέλευση των εξισώσεων της φυσικής, οι οποίες επιτρέπουν τη διείσδυση στην εσωτερική δομή της λογικής της φυσικής, δ) *Αναγνώριση της σημασίας του αναλογικού συλλογισμού* (Analogies – Ανακάλυψη κρυμμένων ομοιοτήτων). Η αναλογία είναι μια σχέση, είτε π.χ. μεταξύ δύο υποθέσεων, ή μεταξύ μιας υπόθεσης και ενός συγκεκριμένου πειραματικού αποτελέσματος, στην οποία ορισμένες πτυχές και των δύο μπορούν να περιγραφούν από τον ίδιο μαθηματικό φορμαλισμό.

Οι Uhden et all, (2012) βασιζόμενοι στις παραπάνω θεωρήσεις τροποποίησαν προϋπάρχοντα μοντέλα άλλων ερευνητών και κατασκεύασαν ένα μοντέλο ανάλυσης του μαθηματικού συλλογισμού στη φυσική, της χρήσης δηλαδή των μαθηματικών στη φυσική εκπαίδευση το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Το μοντέλο τους αναδεικνύει τους διαφορετικούς βαθμούς μαθηματικοποίησης στη φυσική και διακρίνει τις τεχνικές από τις δομικές δεξιότητες που εμπλέκονται στις διαδικασίες λύσεων στη φυσική.



Σχήμα 1. Μοντέλο ανάλυσης για τη χρήση των μαθηματικών στη φυσική εκπαίδευση από Uhden et all, (2012).

Ο χώρος αλληλεπίδρασης των μαθηματικών και της φυσικής στον οποίο χτίζεται το μοντέλο της εννοιολογικής κατανόησης είναι ενιαίος και αναπαριστάται στο μεγάλο κεντρικό ορθογώνιο πλαίσιο που αφορά το *δομικό ρόλο* των μαθηματικών στη φυσική. Ο χώρος αυτός αναφέρεται στις structural skills με βασικές κατευθύνσεις, από τη φυσική στα μαθηματικά (Mathematisation) και από τα μαθηματικά στη φυσική (Interpretation). Η κάθετη διάσταση του πλαισίου αυτού εκφράζει τα διάφορα επίπεδα του βαθμού μαθηματικοποίησης της εννοιολογικής κατανόησης. Η "ποιοτική" φυσική χωρίς μαθηματικά βρίσκεται στο κατώτερο μέρος του πλαισίου χωρίς να αποτελεί όμως από μόνη της διακριτό επίπεδο και συνυφαίνεται άμεσα με τα επόμενα επίπεδα μαθηματικοποίησης τα οποία διαρκώς τείνουν σε όλο και μεγαλύτερα επίπεδα αφαίρεσης. Ο *τεχνικός ρόλος* των μαθηματικών εκφράζεται στο πλαίσιο Pure Mathematics (καθαρά μαθηματικά χωρίς αναφορές στη φυσική). Ο χώρος αυτός τροφοδοτεί τις technical skills οι οποίες αναπαριστώνται με κλειστή διαδρομή μεταξύ του ενιαίου φυσικού-μαθηματικού μοντέλου της εννοιολογικής κατανόησης και των καθαρών μαθηματικών. Τέλος, ο φυσικός κόσμος συνδέεται με το κατώτερο μέρος του μεγάλου ορθογωνίου πλαισίου δηλαδή την "ποιοτική" φυσική, μέσω δύο διεργασιών μετάφρασης. Τη μετάφραση Simplification / idealisation στην οποία ο φυσικός κόσμος εισέρχεται στον κόσμο του μοντέλου με τη δημιουργία εννοιών και εξιδανικεύσεων καθώς και τη μετάφραση Validation στην οποία το μοντέλο επικυρώνεται και αξιολογείται με την επιστροφή του ξανά στο φυσικό κόσμο.

Το ζητούμενο στην κατακόρυφη διάσταση της μαθηματικοποίησης είναι η εννοιολογική κατανόηση να φτάσει σε υψηλά επίπεδα αφαίρεσης, με βαθμιαίο τρόπο μεταξύ των επιπέδων ο οποίος να εμπεριέχει διαρκώς συνδέσεις μεταξύ του φυσικού νοήματος και των μαθηματικών αναπαραστάσεων. Ένα παράδειγμα: Η συνάρτηση y=αx βρίσκεται σε υψηλότερο επίπεδο μαθηματικοποίησης από την παράσταση «το Α είναι ανάλογο του Β», η οποία βρίσκεται ψηλότερα από την έκφραση «οι ποσότητες Α και Β αυξάνονται σταθερά». Αυτό στο μοντέλο θα απεικονίζεται με πολλά μικρά βέλη που θα «ανεβαίνουν» διαδοχικά στα διάφορα επίπεδα ενώ ταυτόχρονα κρίνεται απαραίτητο να υπάρχουν και βέλη που θα «κατεβαίνουν» μεταξύ των επιπέδων ώστε να επιτυγχάνεται και η απόδοση του φυσικού νοήματος στις μαθηματικές εκφράσεις (interpretation). Πολύ σημαντικό βέβαια, είναι η άνοδος μεταξύ των επιπέδων να είναι βαθμιαία και όχι αλματώδης, πράγμα που θα σήμαινε περίπλοκους υπολογισμούς με μετατόπιση του βάρους στις τεχνικές δεξιότητες και απώλεια του φυσικού νοήματος.

Οι Uhden et all, (2012) προτείνουν το μοντέλο ανάλυσής τους να χρησιμοποιηθεί ως καθοδηγητικό πλαίσιο στην αντιμετώπιση πτυχών σχετικά με το μαθηματικό συλλογισμό στη φυσική, π.χ. ως εργαλείο υποστήριξης διδακτικών στρατηγικών που ενισχύουν τις δομικές δεξιότητες των μαθητών, ανάλυσης μαθηματικών δεξιοτήτων, ανίχνευσης δυσκολιών των μαθητών κλπ.

Αναπαραστάσεις (Representations) - Πολλαπλές Μαθηματικές αναπαραστάσεις

Το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2017) των ΗΠΑ στις κατευθυντήριες αρχές για τη διδασκαλία των μαθηματικών αναφέρει ότι αναπαραστάσεις, όπως εικόνες, υλικά, πίνακες, γραφήματα, σύμβολα με αριθμούς και γράμματα κλπ., που εκφράζουν μαθηματικές ιδέες, είναι θεμελιώδεις για την κατανόηση και χρήση των ιδεών αυτών. Οι μαθητές όταν έχουν πρόσβαση στις μαθηματικές αναπαραστάσεις και τις ιδέες που αναπαριστούν καθώς και όταν μπορούν να δημιουργούν αναπαραστάσεις για να αποδίδουν μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, τότε έχουν αποκτήσει ένα σύνολο εργαλείων τα οποία επεκτείνουν σημαντικά την ικανότητά τους για μοντελοποίηση και ερμηνεία φυσικών, κοινωνικών και μαθηματικών φαινομένων. Επίσης, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) των μαθηματικών για το γυμνάσιο στην Ελλάδα (ΔΕΠΠΣ Μαθηματικών, 2003, σελ. 4026) προτείνονται δραστηριότητες οι οποίες αποσκοπούν στην ανάγνωση, κατασκευή και ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που περιγράφουν τη λύση πραγματικών προβλημάτων: «αισθητοποίηση φαινομένων, γεγονότων ή καταστάσεων μέσα από την κατασκευή αναπαραστάσεων (πίνακες, διαγράμματα κλπ.» (Μαθηματικά, Ιστορία, Φυσική, Βιολογία, Γεωγραφία). Οι Dufour-Janvie, Bednarz, & Belanger, (1987) υποστηρίζουν ότι οι αναπαραστάσεις είναι ένα εγγενές μέρος των μαθηματικών, είναι πολλαπλές υλοποιήσεις μιας έννοιας, χρησιμοποιούνται τοπικά για να μετριάσουν ορισμένες δυσκολίες και ότι προορίζονται να κάνουν τα μαθηματικά πιο ελκυστικά και ενδιαφέροντα.

Υπάρχουν πολλοί ορισμοί των «αναπαραστάσεων» στη μαθηματική εκπαίδευση. Η αναπαράσταση κατά τον Peirce, (1955) ορίζεται ως η σημειογραφία μιας λειτουργίας η οποία πρέπει να ερμηνευτεί από κάποιον και να της αποδοθεί νόημα. Συμπεριλαμβάνει τρεις έννοιες: Κάτι που αντιπροσωπεύεται, η αναφερόμενη έκφραση σ’ αυτό και η ερμηνεία που συνδέει την αναφερόμενη έκφραση με αυτό που αντιπροσωπεύεται. Ως εκ τούτου, πίνακες, εξισώσεις και γραφήματα γίνονται αναπαραστάσεις μόνο όταν κάποιος τους δίνει νόημα μέσω της ερμηνείας τους. (Greeno & Hall, 1997).

Οι περισσότεροι ερευνητές διαφοροποιούν τις εξωτερικές από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Ως εξωτερικές ορίζονται αυτές που ενσωματώνουν ιδέες ή έννοιες και «λειτουργούν ως ερεθίσματα στις αισθήσεις» (Janvier, Girardon, & Morand, 1993) όπως π.χ. τα σχέδια, οι πίνακες, τα γραφήματα κλπ. ενώ ως εσωτερικές ορίζονται τα νοητικά μοντέλα που διαθέτει ένα άτομο (Ozgun-Koca, 1998). Μεταξύ των δύο τύπων αναπαραστάσεων υπάρχει αμοιβαία αλληλεπίδραση (Pape & Tchoshanov, 2001). Στις θέσεις του NCTM (2000, σ. 67) για τη μαθηματική εκπαίδευση «ο όρος αναπαράσταση αναφέρεται τόσο στη διαδικασία όσο και στο προϊόν … στην πράξη της σύλληψης μιας μαθηματικής έννοιας ή σχέσης σε μια φόρμα αλλά και στη φόρμα την ίδια». Οι αναπαραστάσεις δηλαδή που αναφέρονται στο κείμενο του NCTM (2000) μπορούν να θεωρηθούν ως εσωτερικά, γνωστικά σχήματα ή ως εξωτερίκευση αυτών των διανοητικών δομών (Pape & Tchoshanov, 2001).

Συναφής έννοια με την έννοια της αναπαράστασης είναι και η έννοια της visualization η οποία αναφέρεται στις έρευνες ως ουσιαστικό, δηλαδή το τελικό προϊόν, η οπτική εικόνα, αλλά και ως ρήμα με την έννοια της διαδικασίας ή δραστηριότητας που οδηγεί στο τελικό προϊόν (Bishop, 1989, σελ. 7). Ο Reisberg (1997) για παράδειγμα αναφερόμενος στην έννοια visualization κάνει διάκριση μεταξύ της visual perception η οποία αναφέρεται στην εικόνα (image) ενός αντικειμένου που επιτυγχάνεται όταν και όπως βλέπεται, της visual imagery που σημαίνει τη νοητική παραγωγή (production) μιας εικόνας ενός αντικειμένου κατά την απουσία του και της spatial imagery δηλαδή την παραγωγή με απτικά μέσα της νοητικής αναπαράστασης ενός αντικειμένου. Επίσης η Gobert, (2005) ταξινομεί τις χρήσεις του όρου visualization ως εξωτερικές αναπαραστάσεις (στην επιστήμη π.χ. είναι διαγράμματα, γραφήματα, μοντέλα, προσομοιώσεις κλπ. εξ ορισμού πλούσιες σημασιολογικά, δεδομένου ότι αφορούν πολύπλοκα, ειδικά συμβολικά συστημικά πλαίσια), ως εσωτερικές αναπαραστάσεις (εσωτερικές νοητικές κατασκευές, νοητικά μοντέλα κλπ.) καθώς ως spatial skill (ικανότητα χειρισμού και μετατροπής μιας εικόνας ή ενός χωρικού μοτίβου σε άλλες διευθετήσεις). Βέβαια και οι τρεις έννοιες κατά την Gobert λειτουργούν συμπληρωματικά και αλληλένδετα: Π.χ. η μάθηση με μια εξωτερική αναπαράσταση πιθανώς να απαιτεί την κατασκευή μιας εσωτερικής νοητικής αναπαράστασης του υπο διερεύνηση φαινομένου και τότε η spatial skill μπορεί να παίζει ένα ρόλο σ' αυτή τη διαδικασία οικοδόμησης.

Representation και Visualitation στη μάθηση

Συχνά οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων επινοούν άτυπες μορφές αναπαραστάσεων με εποικοδομητικό τρόπο, οι οποίες εξυπηρετούν άμεσους, ειδικούς σκοπούς, όπως π.χ. αφηγήσεις ή σχεδιάσματα που χρησιμοποιούνται στην εισαγωγή δεδομένων για την αναπαράσταση του μοντέλου της δομής ενός προβλήματος κλπ. (Hall, Kibler, Wenger, & Truxaw, 1989). Επιπλέον, το νόημα των αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια της διαδικασίας μπορεί να μετατοπιστεί καθώς οι σκοποί της επίλυσης και οι δυσκολίες του προβλήματος αλλάζουν. Μ’ αυτόν τον τρόπο οι αναπαραστάσεις μπορούν να δώσουν μια εικόνα της σκέψης των μαθητών καθώς δουλεύουν ένα πρόβλημα (Greeno & Hall), (1997). Μια γραφική απεικόνιση μπορεί να υποστηρίξει την αποκάλυψη των αφανών χαρακτηριστικών των δεδομένων ενός προβλήματος (κρυμμένων από αδιαφανείς παραμέτρους) διότι είναι κάτι περισσότερο απ’ αυτό που περιγράφει. Η οπτική λύση ενός προβλήματος μπορεί να μας επιτρέψει να ασχοληθούμε με έννοιες και προβλήματα τα οποία εύκολα θα μπορούσαν να προσπεραστούν από τη συμβολική λύση του προβλήματος (Arcavi, 2003).

Οι Loewenstein, Thompson, & Gentner, (1999) και Mevarech & Kramarsky, (1997) αναφέρουν ότι η ερμηνεία ενός γραφήματος αφορά την ικανότητα απόκτησης νοήματος από το γράφημα. Οι Greeno & Hall, (1997) υποστηρίζουν ότι : «είναι σημαντικό για τους μαθητές να μάθουν να χρησιμοποιούν τις τυπικές φόρμες των αναπαραστάσεων καθώς και τις κοινές συμβάσεις τους. Όμως, είναι εξίσου σημαντικό να εμπλέκονται πιο ενεργά στην κατασκευή και ερμηνεία των αναπαραστάσεων μέσα από τη συζήτηση των ιδιοτήτων τους καθώς και των πλεονεκτημάτων και ορίων τους».

Ο συνδυασμός πολλαπλών αναπαραστάσεων (ως πολλαπλές αναπαραστάσεις εννοούνται οι μαθηματικές ενσωματώσεις ιδεών και εννοιών οι οποίες εκφράζουν με πολλές διαφορετικές μορφές την ίδια πληροφορία), καθίσταται σημαντικός για τη μάθηση όπως προκύπτει από τη διατύπωση της αρχής της πολλαπλής ενσωμάτωσης του Dienes ή αρχή της αντιληπτικής μεταβλητότητας (The Multi-embodiment Principle or Perceptual Variability Principle): Οι μαθηματικές έννοιες θα πρέπει να παρουσιάζονται σε όσο το δυνατόν περισσότερες μορφές προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν τη μαθηματική ουσία μιας αφαίρεσης. Η εννοιολογική μάθηση μεγιστοποιείται όταν τα παιδιά εκτίθενται σε μια μαθηματική έννοια μέσω μιας ποικιλίας φυσικών πλαισίων ή ενσωματώσεων (Dienes, 1960; Yerusalmy, 1991).

« Η γνωστική σύνδεση των αναπαραστάσεων δημιουργεί ένα όλον το οποίο είναι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του …Μας επιτρέπει να «βλέπουμε» πολύπλοκες ιδέες με ένα νέο τρόπο και να τις εφαρμόζουμε πιο αποτελεσματικά» (Kaput, 1989). Ο συνδυασμός στρατηγικών και αναπαραστάσεων βελτιώνει τις επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων καθώς με τον τρόπο αυτό εξαλείφονται οι εσωτερικοί περιορισμοί της κάθε στρατηγικής ή αναπαράστασης ξεχωριστά (Piez & Voxman, 1997, Tabachneck, Koedinger, & Nathan, 1994). Επίσης, στο ΑΠΣ των μαθηματικών στην Ελλάδα προτείνεται «Η επεξεργασία του προβλήματος να μπορεί να γίνει, όπου αυτό είναι δυνατό, σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (π.χ. αριθμητικό-γραφικό) μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορέσει να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.… Είναι σημαντικό να παρέχονται στους μαθητές δικλείδες ασφαλείας στην αναζήτηση της γνώσης. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα πολλαπλής προσέγγισης μιας έννοιας όπως: μέσω διαφόρων τύπων αναπαραστάσεων (συμβολικά, με γραφικές παραστάσεις, με πίνακες, με γεωμετρικά σχήματα)». Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν την ευκαιρία να εξασκούνται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των εσωτερικών και εξωτερικών τους αναπαραστάσεων, σε συνεργατικά περιβάλλοντα που εμπλέκουν ποικίλες εξωτερικές αναπαραστάσεις και τεχνικές (π.χ. αναλυτικές και γεωμετρικές). Οι αναπαραστάσεις στην τάξη θα πρέπει να αντιμετωπίζονται ως εργαλεία συλλογισμού, εξηγήσεων και αιτιολογήσεων ισχυρισμών. Έχει μάλιστα παρατηρηθεί ότι όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν πολλαπλές αναπαραστάσεις οι συνεργατικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους αυξάνονται, καθώς είναι πιο πρόθυμοι να ανταλλάξουν ιδέες μεταξύ τους και να μάθει ο ένας απ’ τον άλλο διαφορετικούς τρόπους λύσεων (Pape & Tchoshanov, 2001).

Οι Greeno & Hall (1997) θεωρούν ότι σε κατάλληλα πλαίσια οι αναπαραστάσεις μπορεί να αποτελέσουν βασικά εργαλεία επικοινωνίας, συλλογισμού και οικοδόμησης νοήματος για τους μαθητές, και να λειτουργήσουν ως πόροι σκέψης σχετικά με έννοιες και πληροφορίες στα μαθηματικά, στις φυσικές επιστήμες κλπ. Τυπικό παράδειγμα τέτοιων λειτουργιών των αναπαραστάσεων είναι π.χ. ένα project βιολογίας, στο οποίο οι μαθητές αντλούν αναπαραστασιακά στοιχεία (κείμενα, πίνακες, γραφήματα κλπ.) από μια βάση δεδομένων με σκοπό να δημιουργήσουν μοντέλα, να διακρίνουν τάσεις και να προτείνουν λύσεις για τον έλεγχο ζωικών πληθυσμών καθώς και να επικοινωνήσουν τα συμπεράσματά τους σε άλλες ομάδες μαθητών (Greeno & Hall, 1997).

Ο Gilbert, (2005) ισχυρίζεται ότι οι διεργασίες visualitation, οι απαιτήσεις και η ευέλικτη χρήση τους διευκολύνουν τη μεταγνώση (metacognition), την ικανότητα δηλαδή κάποιος να κατανοεί τον τρόπο εξέλιξης, ενσωμάτωσης και επέκτασης, της δικής του μάθησης. Για να αναπτύξει ένα άτομο μεταγνωστικές ικανότητες στο πεδίο της επιστήμης θα πρέπει να κατέχει τουλάχιστον τη γνώση των ιδιαίτερων συμβάσεων των διαφόρων αναπαραστασιακών τύπων που χρησιμοποιούνται σ' αυτήν καθώς και των σκοπών και ορίων της κάθε αναπαράστασης (visualitation ως μεταγνωστική δεξιότητα) Ο Arcavi (2003) αναφέρει ένα πείραμα σε τάξη που πραγματοποίησαν οι diSessa, Hammer, Sherin, & Kolpakowski, (1991). Στο πείραμα αυτό μικροί μαθητές ενθαρρύνθηκαν να δημιουργήσουν μια αναπαράσταση για μια κατάσταση κίνησης. Μετά από μερικές σχολικές περιόδους οι μαθητές κατέληξαν να «εφεύρουν» καρτεσιανό γράφημα. Γινόμενοι όχι μόνο «καταναλωτές» οπτικών αναπαραστάσεων, αλλά και συλλογικοί δημιουργοί με επικοινωνία και κριτική, αυτοί οι μαθητές ανάπτυξαν μετα-αναπαραστασιακή εξειδίκευση, καθορίζοντας και εφαρμόζοντας κριτήρια που αφορούσαν την ποιότητα και την επάρκεια των παραστάσεων. Έτσι η visualitation δεν ήταν γι' αυτούς μόνο ένας τρόπος για να δουλέψουν με τα προκαθορισμένα προϊόντα, αλλά ήταν επίσης από μόνη της το αντικείμενο της ανάλυσης (Arcavi, 2003).

Η Ainsworth (1999) αναπτύσσει ένα θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο ταξινομεί τη λειτουργική χρήση των πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων (Multiple External Representations) (MERs) στη διαδικασία της μάθησης σε τρεις κατηγορίες, οι οποίες με τη σειρά τους μπορούν να αναλυθούν σε μικρότερες υποκατηγορίες

α) *Συμπληρωματικότητα (to complement)* : Οι MERs έχουν τη δυνατότητα να:

i) *Υποστηρίζουν συμπληρωματικά, γνωστικές διαδικασίες*: Η Ainsworth (1999) βασιζόμενη στη βιβλιογραφία υποστηρίζει ότι διαφορετικές αναπαραστάσεις που περιέχουν ισοδύναμες πληροφορίες μπορούν να οδηγήσουν στην εξαγωγή διαφορετικών συμπερασμάτων ή να διαφέρουν ως προς τη συμπερασματική ισχύ τους π.χ. οι διαφορές που προκύπτουν στην έκφραση της μεταβολής μιας ποσοτικής σχέσης από ένα γράφημα ή από μια εξίσωση. Η μεταβολή αποδίδεται καλύτερα στο γράφημα απ' ότι στην (πληροφοριακά) ισοδύναμη εξίσωση. Σπάνια, αν υπάρχει, μια αναπαράσταση είναι αποτελεσματική σε όλους τους τομείς, μάλλον συγκεκριμένες αναπαραστάσεις διευκολύνουν την απόδοση των μαθητών σε μερικούς τομείς αλλά όχι σε άλλους. Η εκμετάλλευση του συνδυασμού των αναπαραστάσεων μπορεί να προσφέρει αξιοσημείωτα πλεονεκτήματα στη μάθηση καθώς είναι λιγότερο πιθανόν οι εκπαιδευόμενοι να περιορίζονται από τις αδυναμίες της κάθε αναπαράστασης.

ii) *Περιέχουν συμπληρωματικές πληροφορίες*: Στην περίπτωση που μια εξωτερική αναπαράσταση κωδικοποιεί ειδικές πτυχές ενός θέματος και παρουσιάζει διαφορετικές πληροφορίες από μια άλλη που αφορά το ίδιο θέμα καθώς και στην περίπτωση που υπάρχει ένας βαθμός περιττής πληροφορίας που μοιράζονται οι δύο αναπαραστάσεις ενώ ταυτόχρονα εμπεριέχονται μοναδικές πληροφορίες στην καθεμία, είναι ωφέλιμη η συμπληρωματική αξιοποίηση των διαφορών στις πληροφορίες που εκφράζονται από την καθεμία.

β) *Περιοριστικότητα (to constrain)*: Οι MERs βοηθούν στην επίτευξη καλύτερης κατανόησης των μαθητών, μέσω της χρήσης μιας αναπαράστασης η οποία περιορίζει τις ερμηνείες μιας δεύτερης, με δυο τρόπους:

i) *Μια οικεία αναπαράσταση περιορίζει την ερμηνεία μιας δεύτερης, λιγότερο οικείας ή πιο αφηρημένης αναπαράστασης,* παρέχοντας στήριξη στον εκπαιδευόμενο καθώς επεκτείνονται, ή αναθεωρούνται παρανοήσεις, στην κατανόηση της άγνωστης αναπαράστασης. Η εξοικείωση του εκπαιδευόμενου με την περιοριστική αναπαράσταση, ή η ευκολία του με την ερμηνεία, είναι βασικές σ' αυτή τη λειτουργία.

ii) *Οι εγγενείς ιδιότητες μιας αναπαράστασης περιορίζουν την ερμηνεία μιας δεύτερης αναπαράστασης, ανεξάρτητα από την εξοικείωση η εμπειρία του εκπαιδευόμενου,* π.χ. η ταυτόχρονη παρουσίαση μιας εικαστικής αναπαράστασης (π.χ. φωτογραφία) πλάι σε μια προτασιακή αναπαράσταση. Η εικαστική αναπαράσταση είναι σε θέση να περιορίσει τις ερμηνείες που μπορεί να προέλθουν από ασάφειες στην έκφραση της προτασιακής αναπαράστασης.

γ) *Οικοδόμηση (to construct)* : Οι MERs ενθαρρύνουν την οικοδόμηση βαθύτερης κατανόησης μιας κατάστασης, δηλαδή:

i) *Προάγουν την αφαίρεση,* μέσω της παροχής στους μαθητές μιας πλούσιας πηγής αναπαραστάσεων ενός θέματος ή οποία τους δίνει τη δυνατότητα της μετάφρασης ή της κατασκευής αναφορών μεταξύ αυτών των αναπαραστάσεων.

Αυτές οι γνώσεις στη συνέχεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να παρουσιάσουν την υποκείμενη, *αφηρημένη* δομή του θέματος που αναπαριστάται.

ii) *Ενθαρρύνουν τη γενίκευση ή επέκταση* μιας μαθησιακής κατάστασης, υπό δύο έννοιες: Την *επέκταση των τομέων* όπου χρησιμοποιείται μια δεδομένη αναπαράσταση ή την *επέκταση του τρόπου* με τον οποίο αυτή η γνώση του τομέα ενσωματώνεται για να συμπεριλάβει και άλλες αναπαραστάσεις. Σε αντίθεση με την αφαίρεση, εδώ η επεκτεινόμενη γνώση δεν απαιτεί αναδιοργάνωση σε υψηλότερο επίπεδο, δεν αλλάζει δηλαδή ουσιαστικά η φύση της γνώσης.

Την πρώτη περίπτωση επέκτασης μπορούμε να δούμε όταν μια αναπαράσταση που διδάσκεται για ένα σκοπό ή σε έναν τομέα, χρησιμοποιείται για την εξυπηρέτηση ενός άλλου. Για παράδειγμα, κοινές παραστάσεις, όπως πίνακες και γραφήματα ενώ πρώτα διδάσκονται στα μαθηματικά, στη συνέχεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν πληροφορίες απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων στη φυσική, γεωγραφία, οικονομικά κλπ.

Ο δεύτερος τύπος επέκτασης, είναι η επέκταση της γνώσης εντός του ίδιου τομέα μέσω της έκφρασης της σε μια ποικιλία αναπαραστάσεων (αναπαραστασιακή επέκταση). Π.χ. όταν ένας μαθητής εκμεταλλεύεται την κατανόηση που έχει στο πως μια αναπαράσταση εκφράζει μια έννοια, για να αποκτήσει κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μια δεύτερη αναπαράσταση ενσωματώνει την ίδια έννοια.

iii) *Χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία που αφορά τις σχέσεις μεταξύ των αναπαραστάσεων*, είτε ως αυτόνομος σκοπός (οι μαθητές μαθαίνουν να κατασκευάζουν ένα γράφημα με βάση την εξίσωση που το περιγράφει) είτε για να εξυπηρετηθούν άλλοι ευρύτεροι σκοποί στους οποίους είναι απαραίτητη η εμβάθυνση στη μετάφραση μεταξύ των αναπαραστάσεων, π.χ. ενθάρρυνση της αφαίρεσης ή της επέκτασης κλπ (Ainsworth, 1999).

Περιορισμοί των αναπαραστάσεων στη μάθηση

Οι αναπαραστάσεις είναι χρήσιμες ως γνωστικά εργαλεία και εργαλεία επικοινωνίας. Πολλές φορές όμως καταλήγουν να διδάσκονται ως αυτοσκοπός. Αρκετές φορές οι εκπαιδευτικοί υπό την πίεση του χρόνου δεν προλαβαίνουν να διδάξουν ποια αναπαράσταση είναι για τι, καθώς και τη χρησιμότητα και αποτελεσματικότητα των τύπων τους. (Greeno & Hall, 1997)

Η απλή παροχή δύο πληροφοριακών πηγών ταυτόχρονα δεν οδηγεί αναγκαστικά στη βελτίωση της μάθησης διότι μπορεί να αυξήσει το γνωστικό φόρτο των μαθητών, ιδιαίτερα αν αυτοί δε γνωρίζουν ότι το αντικείμενο που περιγράφεται στις πηγές αυτές είναι το ίδιο (Gobert, 1994). Επιπρόσθετα, εάν οι μαθητές δεν κατέχουν την απαραίτητη γνώση του σχετικού τομέα ώστε να οδηγηθούν στις ανάλογες χωρικές, αιτιακές και δυναμικές πληροφορίες, η υποστήριξη (scaffolding) είναι απαραίτητη. Εάν δεν υπάρχει, οι παροχές των αναπαραστάσεων σπαταλιούνται επειδή οι μαθητές συγχύζονται προσπαθώντας να καταλάβουν τι συμβαίνει ή δεν εμπλέκονται σε βαθιά κατανόηση (Gobert 2005). Εάν η «μετάφραση» δεν είναι απαραίτητη για την επίτευξη μιας συγκεκριμένης λειτουργίας, (αυτό αφορά κυρίως αναπαραστάσεις που προσφέρονται από υπολογιστικά μαθησιακά περιβάλλοντα), τότε η ταυτόχρονη παροχή συν-παρουσίας αναπαραστάσεων μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητές να προσπαθήσουν να τις συσχετίσουν, αναστέλλοντας έτσι την επιτυχία των μαθησιακών τους αποτελεσμάτων. Επίσης, όσο περισσότερο δυο αναπαραστάσεις διαφέρουν στο σχήμα και τους χειρισμούς, τόσο δυσκολότερα οι μαθητές μπορούν να εκτιμήσουν τη σχέση μεταξύ τους (Ainsworth 1999)

Άλλη γνωστική δυσκολία προκύπτει από την ανάγκη να επιτευχθεί ευελιξία και κατάλληλη μετάφραση εμπρός και πίσω μεταξύ οπτικών και αναλυτικών παραστάσεων της ίδιας κατάστασης, απαραίτητη βέβαια για την κατανόηση των περισσότερων μαθηματικών. Το να μάθουν οι μαθητές να καταλαβαίνουν και να είναι ικανοί στο χειρισμό των πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να είναι μια μακροχρόνια, εξαρτώμενη από το περιβάλλον, μη γραμμική ακόμη και βασανιστική διαδικασία (Schoenfeld, Smith, & Arcavi, 1993) Υπάρχουν άφθονα στοιχεία ότι η μετάφραση μεταξύ των αναπαραστάσεων μπορεί να είναι μια πολύ δύσκολη διαδικασία (Tabachneck et al., 1994)

Σημαντικό θέμα στη μάθηση με αναπαραστάσεις αποτελεί το θέμα των «εικονογραφικών αποσπάσεων». Οι Bell & Janvier (1981) περιγράφουν ως «εικονογραφική απόσπαση» (pictorial distractions) την περίπτωση κατά την οποία οι μαθητές κρίνουν τις γραφικές παραστάσεις με βάση οπτικά χαρακτηριστικά στοιχεία τους, ανεξάρτητα από τις υποκείμενες έννοιες (Arcavi, 2003). Τέτοιες είναι π.χ. οι περιπτώσεις όπου οι μαθητές τείνουν να βασίζονται σε ένα διαισθητικό στοιχείο γνώσης «αυτό που βλέπετε-είναι-αυτό που-παίρνετε» το οποίο προκαλείται από το πιο συναρπαστικό οπτικό χαρακτηριστικό μιας αναπαράστασης (π.χ. ευθεία γραμμή σημαίνει σταθερότητα, σχήμα λόφου σημαίνει λόφο) (Ainsworth, 2006). Ο Presmeg (1986) τονίζει ότι πολλές φορές μια εικόνα ή ένα διάγραμμα μπορεί να προσκολλήσει τη σκέψη σε άσχετες λεπτομέρειες, άσχετες βέβαια για έναν ειδικό.

Ο Arcavi, (2003) διατείνεται ότι αυτό που βλέπουμε σε μια γραφική παράσταση όχι μόνο καθορίζεται από την εμπειρία και το ποσό της προηγούμενης γνώσης μας που κατευθύνει τα μάτια μας, αλλά σε πολλές περιπτώσεις προσδιορίζεται επίσης και από το πλαίσιο εντός του οποίου γίνεται η παρατήρηση. Σε διαφορετικά πλαίσια, τα «ίδια» οπτικά αντικείμενα μπορεί να έχουν διαφορετικές σημασίες ακόμη και για τους ειδικούς.

Β' μέρος

Μεθοδολογικό πλαίσιο

Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Απώτερος σκοπός της έρευνας είναι να μελετηθούν οι δυσκολίες και η πορεία μάθησης των μαθητών όταν καλούνται να εμπλέξουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, κυρίως όσον αφορά την πτυχή των μαθηματικών δομικών δεξιοτήτων στη μάθηση της φυσικής και πιο συγκεκριμένα:

Η μελέτη και ανάλυση της πορείας και των δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές κατά τη διάρκεια υλοποίησης ενός διδακτικού έργου, στο οποίο εμπλέκουν πειραματικά δεδομένα και μαθηματικές αναπαραστάσεις των ανάλογων ποσών για να οικοδομήσουν το νόμο του Hooke, να τον διερευνήσουν και να τον αξιοποιήσουν στην κατασκευή ενός δυναμόμετρου.

Η ανάλυση του σκοπού της έρευνας εξειδικεύεται στα επόμενα τρία ερευνητικά ερωτήματα:

α) Μπορεί η επεξεργασία κατάλληλων πειραματικών δεδομένων με τη συνεισφορά των πολλαπλών αναπαραστάσεων της μαθηματικής έννοιας των ανάλογων ποσών να οδηγήσει τους μαθητές στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου του νόμου του Hooke;

β) Μπορούν οι μαθητές να συσχετίσουν την (γεωμετρική-αλγεβρική) κλίση της ευθείας που περιγράφει τα ανάλογα ποσά, της δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα και της επιμήκυνσης του ελατηρίου στο οποίο αναρτάται το σώμα, με τη σκληρότητα του ελατηρίου;

γ) Μπορούν οι μαθητές να αξιοποιήσουν το μαθηματικό μοντέλο του νόμου του Hooke για να κατασκευάσουν ένα δυναμόμετρο;

Το δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν συνολικά δεκαεπτά μαθητές - οκτώ αγόρια και εννέα κορίτσια - που ζούσαν σε ημιαστική περιοχή του νομού Ηλείας και φοιτούσαν στη Β τάξη γυμνασίου.

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε το Φεβρουάριο-Μάρτιο του 2017. Η επιλογή αυτής της χρονικής περιόδου έγινε προκειμένου οι μαθητές να έχουν επιτύχει την ολοκλήρωση των γνώσεών τους στα μαθηματικά (ανάλογα ποσά) οι οποίες ήταν προαπαιτούμενες για την πραγματοποίηση της έρευνας.

Μεθοδολογικές επιλογές

Το ερευνητικό μας θέμα είναι μια διδακτική κατάσταση στην οποία ο στόχος είναι να παρακολουθήσουμε από κοντά τη μαθησιακή συμπεριφορά των μαθητών στην πορεία υλοποίησης συγκεκριμένων διδακτικών έργων, τις δυσκολίες και τον τρόπο υπέρβασής τους. Για να αναδειχθούν και να αποσαφηνιστούν καλύτερα αυτά τα ζητήματα σχετικά με τη μαθησιακή διαδικασία της χρήσης των μαθηματικών ως γλώσσας διδασκαλίας της φυσικής, κρίναμε ότι το παράδειγμα που ενδεικνυόταν περισσότερο για τους σκοπούς της έρευνάς μας ήταν το ποιοτικό παράδειγμα. Στο πλαίσιο αυτής της επιλογής η τεχνική που χρησιμοποιήσαμε ήταν η ερευνητική συνέντευξη.

Η ερευνητική συνέντευξη έχει οριστεί κατά τους Cannell & Kahn, (1968, p. 527) ως «συζήτηση δύο ατόμων, που αρχίζει από το συνεντευκτή, με ειδικό σκοπό την απόκτηση σχετικά με την έρευνα πληροφοριών και επικεντρώνεται από αυτόν […] σε περιεχόμενο καθορισμένο από τους στόχους της έρευνας με συστηματική περιγραφή, πρόβλεψη ή ερμηνεία». Η συνέντευξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξουμε και αναπτύξουμε υποθέσεις ή για να διατυπώσουμε νέες, ή ως ένας επεξηγηματικός μηχανισμός για να αναγνωριστούν οι σχέσεις και οι μεταβλητές τους (Cohen, Manion, & Morisson, 2005). Κατά τον Oppenheim, (1992, pp. 81-82) οι συνεντεύξεις έχουν τη δυνατότητα για συλλογή περισσότερων πληροφοριών από τα ερωτηματολόγια και επιτρέπουν καλύτερους χειρισμούς σε δυσκολότερες και ανοικτού τύπου ερωτήσεις (Cohen, Manion, & Morisson, 2005).

Με βάση τα προηγούμενα κρίναμε ότι καταλληλότερες για τους σκοπούς της έρευνας ήταν οι τυποποιημένες ανοικτού τύπου ατομικές συνεντεύξεις των μαθητών στη διάρκεια των οποίων αυτοί προσπαθούν να φέρουν σε πέρας ένα ειδικά σχεδιασμένο διδακτικό έργο για το σκοπό αυτό. Στις τυποποιημένες ανοικτού τύπου συνεντεύξεις όλοι οι συμμετέχοντες απαντούν στις ίδιες βασικές ερωτήσεις με την ίδια σειρά, με αποτέλεσμα να αυξάνεται η συγκρισιμότητα των απαντήσεων, τα δεδομένα για κάθε άτομο να είναι περισσότερο ολοκληρωμένα ως προς το θέμα της συνέντευξης και να διευκολύνεται η οργάνωση και ανάλυση των δεδομένων (Cohen, Manion, & Morisson, 2005)

Οι ερωτήσεις της συνέντευξης αποτελούσαν στην ουσία το Φύλλο Εργασίας του μαθητή πάνω στο οποίο σχεδιάστηκε η ειδική διδακτική παρέμβαση. Η κάθε συνέντευξη δηλαδή ήταν μια ατομική διδακτική κατάσταση στην οποία ο κάθε μαθητής ξεχωριστά με τη βοήθεια της ερευνήτριας – εκπαιδευτικού παρατηρούνταν και ταυτόχρονα υποστηρίζονταν στους μαθησιακούς του στόχους. Η ιδιαιτερότητα της διαδικασίας, δηλαδή μια διδακτική κατάσταση στην οποία η τάξη είναι ένας μοναδικός μαθητής με μόνη δυνατή τροφοδότηση από ένα άτομο, απαίτησε από την ερευνήτρια να έχει και ενεργό ρόλο ως εκπαιδευτικός στην όλη διαδικασία. Ως εκπαιδευτικός χρειάστηκε να ενισχύσει τον κάθε μαθητή στο συλλογισμό του ώστε να είναι σε θέση να εμπλακεί στα διάφορα στάδια της διαδικασίας με απώτερο σκοπό να αναδειχθούν και να γίνουν περισσότερο διακριτά τα σημεία που ενδιέφεραν τους σκοπούς της έρευνας. Επομένως η συμμετοχή της ήταν ενισχυτική της προσπάθειας των μαθητών όταν αυτοί επιζητούσαν επιβεβαίωση για να συνεχίσουν καθώς και διευκρινιστική όπου απαιτούνταν. Σε μερικά σημεία χρειάστηκε να επαναλάβει ή να επαναδιατυπώσει ερωτήσεις προς τους μαθητές ώστε να κατανοήσουν καλύτερα το περιεχόμενό τους, ή να τους υποδείξει προηγούμενες απαντήσεις τους ώστε να προκαλέσει αναστοχασμό στη μαθησιακή διαδικασία.

Ως ερευνήτρια κατέγραψε ηχητικά τις συνεντεύξεις σημειώνοντας παράλληλα τις μη λεκτικές συμπεριφορές των μαθητών που είχαν σημασία για τους σκοπούς της έρευνας. Πριν ξεκινήσει η κανονική σειρά των συνεντεύξεων πραγματοποιήθηκαν δοκιμαστικές συνεντεύξεις ώστε να αντιμετωπιστούν πιθανά προβλήματα στη διαδικασία ή στο Φύλλο Εργασίας των μαθητών και να διορθωθούν. Οι μαθητές που συμμετείχαν σ' αυτή την προ-έρευνα δεν εντάχθηκαν στο δείγμα της έρευνας. Η κάθε συνέντευξη διήρκεσε κατά μέσο όρο περίπου δύο διδακτικές ώρες.

Μετά το πέρας των συνεντεύξεων πραγματοποιήθηκε η μεταγραφή τους σε γραπτό κείμενο και στη συνέχεια ακολούθησε η ανάλυση, η παρουσίαση των αποτελεσμάτων, η συζήτηση και η εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Σχεδιασμός Φύλλου Εργασίας Μαθητή

Ο ρόλος του πειράματος στην εκπαίδευση

Οι Koponen & Mantyla,(2006) ανατρέχοντας σε έρευνες για το ρόλο των πειραμάτων στην εκπαίδευση της φυσικής σήμερα, διαπιστώνουν ότι ο ρόλος των εκπαιδευτικών πειραμάτων στη σημερινή εκπαίδευση της φυσικής είναι πολύ περιορισμένος και με πολύ στενή στόχευση, παρόλο που απ’ τους περισσότερους ερευνητές υποστηρίζεται ότι οι μαθητές μέσω των πειραμάτων πρέπει να: α) συμμετέχουν στην απόκτηση και οικοδόμηση της γνώσης, β) βλέπουν πώς επιτυγχάνεται και δικαιολογείται αυτή η γνώση και γ) κατανοούν πως παράγεται το νόημα των εννοιών και των νόμων στη φυσική. Σε αντίθεση όμως με τα προαναφερθέντα, στα παραδοσιακά βιβλία της φυσικής η μεγαλύτερη έμφαση δίδεται στη χρήση πειραμάτων με επακόλουθη δικαιολόγηση (consequential justification of knowledge) δηλαδή στην επιβεβαίωση ή απόρριψη της θεωρίας που έχει ήδη διδαχθεί (Lazarowitz & Tamir, 1994; Berry & Sahlberg, 1996; Trumper, 2003). Στο άλλο άκρο η ανακαλυπτική μάθηση (discovery learning) εξαιτίας της υπεραπλουστευμένης επαγωγικής χρήσης των πειραμάτων και της αντιμετώπισης των μαθητών ως «αρχάριων ερευνητών» αποδείχθηκε σε μεγάλο βαθμό αναποτελεσματική (Trumper 2003). Οι Koponen & Mantyla, (2006) προτείνουν μια εναλλακτική πρόταση βασισμένη στην ιστορία και φιλοσοφία της επιστήμης, με σκοπό να αναδείξουν στην πειραματική διδασκαλία στην εκπαίδευση, την παραμελημένη επιστημολογική διάσταση των πειραμάτων της φυσικής του 19ου αιώνα, σε συνδυασμό πάντα με τις κονστρουκτιβιστικές θεωρίες μάθησης. Τα πειράματα δηλαδή, να χρησιμοποιηθούν στη μάθηση ως πηγή νέας γνώσης στη θεωρία (generative justification of knowledge) με αναφορά στη θεωρία και έμφαση στις εμπειρικές παρατηρήσεις και στον ποσοτικό χαρακτήρα της μεθοδολογίας τους, δίνοντας έτσι, ένα σημείο εκκίνησης στους μαθητές για την οικοδόμηση της προσωπικής τους γνώσης.

Στη δική μας έρευνα το πείραμα χρησιμοποιείται για να οικοδομηθεί νέα γνώση από τους μαθητές σύμφωνα με την προοπτική των πειραμάτων στην εκπαίδευση των Koponen & Mantyla,(2006). Οι μαθητές καλούνται μέσα από την επεξεργασία των εμπειρικών τους παρατηρήσεων να προχωρήσουν στην οικοδόμηση του νόμου του Hook (και όχι στην απλή επιβεβαίωσή του όπως προτείνεται στο σχολικό εγχειρίδιο) ο οποίος αποτελεί διδακτέα ύλη στη φυσική της Β γυμνασίου. Καθοριστικό ρόλο στην όλη διαδικασία θα έχει η αξιοποίηση των μαθηματικών ως γλώσσας στη φυσική με τη οποία οι μαθητές θα εμβαθύνουν στο φυσικό φαινόμενο.

Πρότερες γνώσεις των μαθητών

Η διδασκαλία των ανάλογων ποσών στην Ελλάδα ακολουθεί το σπειροειδές πρόγραμμα ξεκινώντας από το Δημοτικό και συνεχίζοντας στην Α και Β γυμνασίου.

Στη Β γυμνασίου οι μαθητές έχουν πια ολοκληρώσει το θέμα αυτό έχουν διδαχθεί δηλαδή την έννοια των ανάλογων ποσών, την αλγεβρική μορφή της συνάρτησης που τα περιγράφει (y=αx), και τη γραφική τους παράσταση. Γνωρίζουν να κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση της ευθείας με χρήση πίνακα τιμών, επίσης γνωρίζουν την έννοια της κλίσης ευθείας καθώς και τη σχέση της κλίσης με τον αλγεβρικό συντελεστή της ευθείας α (ΔΕΠΠΣ Μαθηματικών, 2003).

Όσον αφορά την πλευρά της φυσικής οι μαθητές στην Α Γυμνασίου διδάσκονται την κατασκευή γραφικών παραστάσεων με χρήση πειραματικών δεδομένων. Στη Β γυμνασίου έχουν διδαχθεί γενικά την έννοια της δύναμης, τη μονάδα της στο Διεθνές Σύστημα, την έννοια του βάρους καθώς και τη σχέση του με τη μάζα (Β=mg).

Διδακτικά έργα

Για το σχεδιασμό του Φύλλου Εργασίας χρησιμοποιήθηκε ως πλαίσιο το μοντέλο χρήσης των μαθηματικών στη φυσική εκπαίδευση των Uhden et all, (2012). Ο σκοπός ήταν οι μαθητές όσο το δυνατόν περισσότερο, να εμπλέξουν τις μαθηματικές τους γνώσεις γύρω από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των ανάλογων ποσών στα τρία διδακτικά έργα με τρόπο όμως που να διευκολύνει την ανάδειξη κυρίως των δομικών δεξιοτήτων των μαθητών στη χρήση των μαθηματικών στη φυσική. Έτσι αποφεύχθηκαν να σχεδιαστούν διδακτικά έργα με περίπλοκους υπολογισμούς και περιττή απομνημόνευση τύπων και κανόνων που θα αποσπούσαν την προσοχή των μαθητών από τις συνδέσεις με το φυσικό περιεχόμενο. Οι εξωτερικές πολλαπλές αναπαραστάσεις των ανάλογων ποσών χρησιμοποιήθηκαν στη διαδικασία για να οικοδομήσουν βαθύτερη κατανόηση είτε προάγοντας την αφαίρεση στην κατανόηση είτε την επέκταση (από τον τομέα των μαθηματικών στον τομέα της φυσικής) στο πρώτο διδακτικό έργο (Ainsworth, 1999) είτε για να οικοδομήσουν νόημα μέσω πιθανών ερμηνειών στο δεύτερο διδακτικό έργο (Greeno & Hall (1997). Στο τρίτο διδακτικό έργο οι μαθητές θα αξιοποιήσουν το μοντέλο του φυσικού νόμου που οικοδόμησαν για να παράγουν την εξωτερική «απτική» αναπαράσταση του δυναμόμετρου.

Πρώτο διδακτικό έργο: «Κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου»

Το ζητούμενο στο πρώτο διδακτικό έργο είναι οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν δεδομένα από το φυσικό κόσμο (μάζα, επιμήκυνση ελατηρίου) ώστε να προβούν μέσω της mathematization βαθμιαία (και όχι με χρήση πολύπλοκων υπολογισμών που αντιστοιχούν σε τεχνικές δεξιότητες) σε όλο και μεγαλύτερα επίπεδα μαθηματικοποίησης, διατηρώντας όμως σταθερά τις συνδέσεις με το φυσικό νόημα, στην τελική οικοδόμηση του μαθηματικού μοντέλου του νόμου του Hook και τη λεκτική του αναπαράσταση.

Αναλυτικότερα οι διαδικασίες σύμφωνα με τον αριθμό της ερώτησης στο Φύλλο Εργασίας (Δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή) είναι:

Α1.1: Εισαγωγή εμπειρικών δεδομένων από το φυσικό κόσμο (μάζας η οποία μεταφράζεται στη δύναμη (F) του βάρους, επιμήκυνσης ελατηρίου (Δl)) σε πίνακα τιμών → 1η εξωτερική αναπαράσταση ανάλογων ποσών στη Φυσική (*mathematization*)

Α1.2: Διαπίστωση συμμεταβολής των F, Δl → 2η εξωτερική αναπαράσταση ανάλογων ποσών στη Φυσική (*mathematization*)

Α2: Κατασκευή γραφικής παράστασης στους άξονες F-Δl από πίνακα τιμών → 3η εξωτερική αναπαράσταση ανάλογων ποσών στη Φυσική (*mathematization*)

Α3: Ανάδυση έννοιας «ανάλογα ποσά» μέσω του συνδυασμού των προηγούμενων πολλαπλών αναπαραστάσεων και της οπτικής *αναλογίας* της 3ης εξωτερικής αναπαράστασης F-Δl με τη γραφική αναπαράσταση y-x των ανάλογων ποσών → Χτίσιμο σύνδεσης μεταξύ του μαθηματικού και φυσικού πεδίου.

Α4: Μετάφραση της εξωτερικής γραφικής αναπαράστασης y-x στην αλγεβρική μορφή y= αx → Διεργασία στα μαθηματικά

Α5: Επιστροφή στη φυσική με χρήση αναλογίας και εξαγωγή της σχέσης F=αΔl από τη σχέση y=αx → 4η εξωτερική αναπαράσταση ανάλογων ποσών στη Φυσική (*mathematization*)

Α6: Λεκτική διατύπωση - ερμηνεία στη φυσική- της αλγεβρικής σχέσης F=αΔl, → 5η εξωτερική αναπαράσταση ανάλογων ποσών στη Φυσική (*interpretation*).

Δεύτερο διδακτικό έργο: «Κλίση ευθείας και σκληρότητα ελατηρίου»

Το ζητούμενο στο δεύτερο διδακτικό έργο είναι οι μαθητές να ερμηνεύσουν το μαθηματικό στοιχείο της κλίσης ευθείας στη γραφική παράσταση των αξόνων F–Δl ως έκφραση του φυσικού μεγέθους της σκληρότητας του ελατηρίου. Η γενική κατεύθυνση στο έργο αυτό είναι από τα μαθηματικά στη φυσική (*interpretation*).

Αναλυτικότερα οι διαδικασίες σύμφωνα με τον αριθμό της ερώτησης στο Φύλλο Εργασίας (Δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή) είναι:

Β1, Β2: Κατασκευή της γραφικής παράστασης στους άξονες F - Δl ενός δεύτερου ελατηρίου (διαφορετικής σκληρότητας από το πρώτο) στο ίδιο σύστημα αξόνων, για να διευκολυνθεί η σύγκρισή τους.

Β3: Πιθανές εξηγήσεις και ερμηνείες από τους μαθητές για την εμφανή οπτική διαφορά των κλίσεων των ευθειών σε δύο φάσεις, πριν και μετά την απτική επαφή με τα δύο ελατήρια → Από τα μαθηματικά στη φυσική (*interpretation*)

Β4, Β5: Συσχέτιση σκληρότητας ελατηρίου με τη γεωμετρική πλευρά της κλίσης → Από τα μαθηματικά στη φυσική (*interpretation*)

Β6: Συσχέτιση γεωμετρικής πλευράς κλίσης με τον αλγεβρικό συντελεστή της ευθείας → Διεργασία στα μαθηματικά.

Β7: Λεκτική διατύπωση της ομοιότροπης συμπεριφοράς: μεγάλη κλίση ευθείας – μεγάλη σκληρότητα ελατηρίου → μεγαλύτερος βαθμός αφαίρεσης στη συσχέτιση της σκληρότητας ελατηρίου και της κλίσης (από τη γεωμετρική πλευρά της κλίσης στην έννοια της κλίσης) δηλαδή mathematization, ταυτόχρονα όμως και απόδοση φυσικού νοήματος στην έννοια της κλίσης δηλαδή interpretation.

Τρίτο διδακτικό έργο: «Κατασκευή δυναμόμετρου»

Το ζητούμενο στο τρίτο διδακτικό έργο είναι οι μαθητές να μεταφέρουν την κατανόηση που αποκόμισαν από την οικοδόμηση του μαθηματικού μοντέλου του νόμου ξανά στο φυσικό κόσμο μέσω του σχεδιασμού ενός δυναμόμετρου, στην ουσία κυριαρχεί δηλαδή η κατεύθυνση της validation. Το ερώτημα τίθεται με ανοικτό τρόπο στους μαθητές μέσα από δυο περιορισμούς: να αξιοποιήσουν το νόμο του Hook καθώς και να χρησιμοποιήσουν όποια και όσα υλικά θέλουν από τα διαθέσιμα υλικά του εργαστηριακού πάγκου. Τα υλικά που διατίθενται στον πάγκο είναι: ελατήρια, πινέζες, καρφάκια, σελοτέιπ, χάρακες, ορθοστάτης, λευκή χαρτοταινία, μολύβια, ξύλινα πηχάκια, ψαλίδι και μεταλλικά σταθμά.

Πλαίσιο Ανάλυσης

Η ανάλυση των στιχομυθιών όπως αυτές καταγράφηκαν κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων βασίστηκε σε τρεις άξονες. Κάθε ένας από τους άξονες αυτούς αντιστοιχεί σε ένα ερευνητικό ερώτημα. Πιο συγκεκριμένα οι άξονες είναι:

Πρώτος άξονας ανάλυσης: ***Οι μαθητές μεταβαίνουν από το Φυσικό Κόσμο στο Μαθηματικό Μοντέλο.***

Στον άξονα αυτό αντιστοιχεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα: «Μπορεί η επεξεργασία κατάλληλων πειραματικών δεδομένων με τη συνεισφορά των πολλαπλών αναπαραστάσεων της μαθηματικής έννοιας των ανάλογων ποσών να οδηγήσει τους μαθητές στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου του νόμου του Hooke;».

Συγκεκριμένα, καταγράφηκαν και αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών κατά τη διάρκεια της συνέντευξης στις επιμέρους ερωτήσεις του φύλλου εργασίας. Οι απαντήσεις των μαθητών σχηματοποιήθηκαν στις επόμενες κατηγορίες:

1α. *Πίνακας τιμών και αναγνώριση της συμμεταβολής των μεγεθών ως ανάλογα ποσά* (Ερώτηση Α1.2, δες Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή).

Στην περίπτωση αυτή καταγράφηκε η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη συσχέτιση των πειραματικών δεδομένων του πίνακα τιμών (F, Δl) για την διαπίστωση του ταυτόχρονου διπλασιασμού των δύο μεγεθών (ποιοτικός φορμαλισμός).

1β. *Γραφική παράσταση και έννοια των ανάλογων ποσών* (Ερώτηση Α3, δες Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή)

Στην περίπτωση αυτή καταγράφηκε η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη συσχέτιση της γραφικής παράστασης με την έννοια των ανάλογων ποσών.

1γ. *Γραφική παράσταση και αλγεβρικός τύπος των ανάλογων ποσών*

1γ.1. Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη συσχέτιση της γραφικής παράστασης με τον αλγεβρικό τύπο y=αx (Ερώτηση Α4, δες Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή)

1γ.2. Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάβαση από τον αλγεβρικό τύπο y=αx στο μαθηματικό μοντέλο του νόμου του Hooke F=αΔl (Ερώτηση Α5, δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή)

1δ. *Λεκτική αναπαράσταση του μαθηματικού μοντέλου* (Ερώτηση Α6, δες Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή)

Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη λεκτική αναπαράσταση του μαθηματικού μοντέλου που κατασκευάστηκε.

Δεύτερος άξονας ανάλυσης: *Οι μαθητές διερευνούν τις παραμέτρους του Μαθηματικού Μοντέλου και τις ερμηνεύουν στο Φυσικό Κόσμο.*

Στον άξονα αυτό αντιστοιχεί το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα: «Μπορούν οι μαθητές να συσχετίσουν την (γεωμετρική-αλγεβρική) κλίση της ευθείας που περιγράφει τα ανάλογα ποσά, της δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα και της επιμήκυνσης του ελατηρίου στο οποίο αναρτάται το σώμα, με τη σκληρότητα του ελατηρίου;»

Συγκεκριμένα καταγράφηκαν και αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών κατά τη διάρκεια της συνέντευξης στις παρακάτω κατηγορίες ανάλυσης:

2α. *Φυσικό μέγεθος (σκληρότητα ελατηρίου) – γεωμετρικός προσδιορισμός κλίσης*

2α.1. *Συσχέτιση της γεωμετρικής απεικόνισης της διαφοράς κλίσης δύο ευθειών με τις φυσικές ιδιότητες των ελατηρίων που αντιστοιχούν σ' αυτές* (Ερώτηση Β3, δες Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή).

Καταγραφή των ερμηνειών που δόθηκαν από τους μαθητές στις γεωμετρικές απεικονίσεις των διαφορετικών κλίσεων δύο ευθειών που αντιστοιχούν σε διαφορετικά ελατήρια αναφορικά με την εμπλοκή ή όχι φυσικών ιδιοτήτων των ελατηρίων. Οι ερμηνείες των μαθητών προέκυψαν σε δύο φάσεις:

2α.1.1. Ερμηνείες με απλή παρατήρηση των γραφικών παραστάσεων.

2α.1.2. Ερμηνείες με απτική επαφή των ελατηρίων.

2α.2. *Σκληρότητα ελατηρίου μέσω ορισμού* (Ερώτηση Β4, δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή)

2α.3. *Σύνδεση σκληρότητας - γεωμετρικού προσδιορισμού κλίσης* (Ερώτηση Β5, δες Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή)

Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη σύνδεση της σκληρότητας του ελατηρίου με το γεωμετρικό προσδιορισμό της κλίσης που αναπαριστάται στη γραφική παράσταση και περιγράφεται με το λεκτικό προσδιορισμό «πιο ψηλά», «πιο χαμηλά».

2β. *Σύνδεση γεωμετρικού - αλγεβρικού προσδιορισμού κλίσης* (Ερώτηση Β6, δες Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή)

Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη σύνδεση γεωμετρικού και αλγεβρικού προσδιορισμού της κλίσης.

2γ. *Λεκτική συσχέτιση του φυσικού μεγέθους σκληρότητα ελατηρίου και της μαθηματικής έννοιας κλίση ευθείας* (Ερώτηση Β7, δες Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή)

Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη λεκτική συσχέτιση του φυσικού μεγέθους *σκληρότητα* ελατηρίου και της μαθηματικής έννοιας *κλίση* ευθείας.

Τρίτος άξονας ανάλυσης: ***Οι μαθητές εφαρμόζουν και αξιοποιούν το Μαθηματικό Μοντέλο στο Φυσικό Κόσμο.***

Στον άξονα αυτό αντιστοιχεί το τρίτο ερευνητικό ερώτημα: «Μπορούν οι μαθητές να αξιοποιήσουν το μαθηματικό μοντέλο του νόμου του Hooke για να κατασκευάσουν ένα δυναμόμετρο;»

Οι κατηγορίες ανάλυσης με βάση τις οποίες καταγράφηκαν και αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών, όσον αφορά τις προσπάθειές τους να υλοποιήσουν τη δημιουργία του δυναμόμετρου, βασιζόμενοι στην αξιοποίηση του μαθηματικού μοντέλου που έχουν κατασκευάσει, είναι οι ακόλουθες:

3α. *Χρήση υλικών-Προτάσεις σύνθεσης δυναμόμετρων.*

Καταγράφηκε ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα υλικά που τους δόθηκαν καθώς και τα κύρια σχήματα των κατασκευών που δημιούργησαν προκειμένου να φτιάξουν το δυναμόμετρο.

3β. *Βαθμονόμηση δυναμόμετρου.*

Καταγράφεται η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθεια βαθμονόμησης του δυναμόμετρου στα διάφορα στάδιά της:

3β.1. *Προσδιορισμός του σημείου μηδέν.*

Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στον προσδιορισμό του σημείου μηδέν στην κλίμακα του δυναμόμετρου – Λάθη που σημειώθηκαν.

3β.2. *Προσδιορισμός της αρχικής τιμής μέτρησης.*

Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στον προσδιορισμό της αρχικής τιμής μέτρησης στην κλίμακα του δυναμόμετρου -Λάθη που σημειώθηκαν.

3β.3. *Προσδιορισμός των υπόλοιπων τιμών μέτρησης.*

Δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στον προσδιορισμό των υπόλοιπων τιμών μέτρησης στην κλίμακα του δυναμόμετρου ο οποίος έγινε με δύο τρόπους:

3β.3.1: *Χωρίς περιορισμό από τον εκπαιδευτικό* στο πλήθος των μαζών που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές.

3β.3.2 *Με περιορισμό από τον εκπαιδευτικό στη χρήση των μαζών* που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές σε μία ή δύο.

Παρουσίαση και Ανάλυση αποτελεσμάτων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται και αναλύονται τα αποτελέσματα της έρευνας με τη σειρά των τριών ερευνητικών αξόνων. Πιο συγκεκριμένα σε κάθε ερευνητικό άξονα παρουσιάζεται μια σύνοψη των απαντήσεων των μαθητών (πίνακας συχνοτήτων) των αντίστοιχων ερωτήσεων στο Φύλλο Εργασίας του Μαθητή (δες, παράρτημα) και ακολουθεί η ανάλυση των στιχομυθιών που σχετίζονται με τα αντίστοιχα ερωτήματα. Στην κατεύθυνση αυτή παρουσιάζονται ενδεικτικά αποσπάσματα.

1. Από το Φυσικό Κόσμο στο Μαθηματικό μοντέλο

1α. *Πίνακας τιμών και αναγνώριση της συμμεταβολής των μεγεθών ως ανάλογα ποσά*

Η ανάλυση της κατηγορίας βασίζεται στις απαντήσεις των συμμετεχόντων μαθητών στην Ερώτηση Α1.2. (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή), «Παρατηρήστε τις τιμές των δυνάμεων και των αντίστοιχων επιμηκύνσεων: Όταν διπλασιαστεί η δύναμη πως μεταβάλλεται η επιμήκυνση;»

Όπως φαίνεται και στον πίνακα 1α, ένας στους δύο περίπου μαθητές απάντησαν σωστά στην ερώτηση αυτή χωρίς παρέμβαση της εκπαιδευτικού.

Πίνακας 1α: Αναγνώριση της συμμεταβολής της επιμήκυνσης και της δύναμης, ανάλογα με τον βαθμό παρέμβασης της εκπαιδευτικού.

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
1α-1	**Χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού:** «Θα διπλασιαστεί», «Σχεδόν διπλασιάστηκε», «Διπλασιάζεται», «Το διπλό»	Μ1,Μ2,Μ3,Μ4,Μ9,Μ10 Μ15,Μ17	8
1α-2	**Μικρή παρέμβαση εκπαιδευτικού:** «Διπλασιάστηκε»	Μ5,Μ7,Μ8	2
1α-3	**Καθοριστική παρέμβαση εκπαιδευτικού:** «Διπλασιάστηκε»	Μ6,Μ11,Μ12,Μ13,Μ14 ,Μ16	7

Αναλυτικότερα, οι μαθητές της ομάδας «χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού» φαίνεται (δες στιχομυθία 1α-1) ότι αναγνωρίζουν άμεσα το μαθηματικό και το φυσικό περιεχόμενο της προτεινόμενης δραστηριότητας και εντοπίζουν την αλλαγή των φυσικών μεγεθών χωρίς παρέμβαση του εκπαιδευτικού. Οι συνήθεις απαντήσεις ήταν: «Θα διπλασιαστεί», «Σχεδόν διπλασιάστηκε», «Διπλασιάζεται», «Το διπλό».

Στιχομυθία 1α-1: Αναγνώριση συμμεταβολής χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού

« Ε (Εκπαιδευτικός): Δες λίγο το πινακάκι. Πάρε μια δύναμη και δες την επιμήκυνσή της
Μ9 (Μαθητής 9): 1(δύναμη), 4 (επιμήκυνση)
Ε: Αν διπλασιαστεί η δύναμη τι θα γίνει η επιμήκυνση;
Μ9: Θα διπλασιαστεί κι αυτή
Ε: Δηλαδή;
Μ9: 8»

Επίσης, τρεις μαθητές (δες πίνακα 1α) απάντησαν σωστά με μικρή παρέμβαση της εκπαιδευτικού. Στην περίπτωση αυτή φαίνεται (δες στιχομυθία 1α-2) ότι η εκπαιδευτικός υποστηρίζει το συλλογισμό του μαθητή κυρίως σε σχέση με την εστίαση της προσοχής του σε συγκεκριμένες τιμές των μεγεθών που μεταβάλλονται και ταυτόχρονα κάνει διάκριση των φυσικών μεγεθών. Ο μαθητής δηλαδή, φαίνεται να δυσκολεύεται στο να διακρίνει την ταυτόχρονη μεταβολή της δύναμης και της αντίστοιχής της επιμήκυνσης, ωστόσο στο μαθηματικό περιεχόμενο «διπλασιάστηκε» δεν παρουσιάζει δυσκολίες.

Στιχομυθία 1α-2: Αναγνώριση συμμεταβολής με μικρή παρέμβαση εκπαιδευτικού

«Ε: Διάλεξε μια δύναμη
Μ5: 2 (Ν)
Ε: Πόση επιμήκυνση έχει;
Μ5: 8
Ε: Όταν διπλασιαστεί η δύναμη, πόση θα γίνει η επιμήκυνση;
Μ5:(*Παύση*)…
Ε: Όταν διπλασιάσεις το 2;
Μ5: 4
Ε: Τι επιμήκυνση έχει το 4;
Μ5: 16
Ε: Όταν διπλασιάστηκε η δύναμη, από 2 έγινε 4,η επιμήκυνση τι έκανε;
Μ5: Διπλασιάστηκε

Επίσης, σε έξι μαθητές (δες πίνακα 1α) η παρέμβαση της εκπαιδευτικού ήταν εντονότερη και καθοριστική. Στην περίπτωση αυτή (δες στιχομυθία 1α-3.1) ο μαθητής φαίνεται να έχει δυσκολία στην ίδια την έννοια του «διπλασιάστηκε». Δεν την αναγνωρίζει αμέσως και χρειάζεται η υποστήριξη της εκπαιδευτικού στην εστίαση του συλλογισμού του στις συγκεκριμένες τιμές των μεγεθών που διπλασιάζονται ταυτόχρονα.

Στιχομυθία 1α-3.1: Αναγνώριση συμμεταβολής με καθοριστική παρέμβαση εκπαιδευτικού

Ε: Περίμενε… Η δύναμη αν διπλασιαστεί από 2 πόσο θα γίνει;
Μ13: 4
Ε: 4… Η επιμήκυνση που ήταν 8 πόσο έγινε;
Μ13: 16
Ε: Όταν διπλασιάστηκε η δύναμη τι έκανε λοιπόν η επιμήκυνση;
Μ13: Μεγάλωσε και η επιμήκυνση
Ε: Πόσο;
Μ13: *Έγινε 8 φορές*
Ε: 8 φορές έγινε; Από 8 έγινε 16
Μ13: Α, έγινε 8, όχι…
Ε: Ήταν 8 και έγινε 16. Τι σχέση έχει το 16 με το 8;
Μ13: ….(Παύση) …. Μπερδεύτηκα
Ε: Λοιπόν, είχες δύναμη 1 και η επιμήκυνση ήταν 4. Όταν διπλασιάστηκε η δύναμη πόσο έγινε η επιμήκυνση;
Μ13: 8
Ε: 8. Τι έκανε δηλαδή η επιμήκυνση;
Μ13: Διπλασιάστηκε»

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι στις απαντήσεις τεσσάρων μαθητών (Μ6, Μ8, Μ11, Μ12,) περιλαμβάνονται και εκφράσεις όπως: «Θα τετραπλασιαστεί;», «Πολλαπλασιάζεται επί τέσσερα», «Επί τέσσερα», «Κατά τέσσερα» εξαιτίας της ύπαρξης των αριθμών 4 και 8 στις επιμηκύνσεις του πίνακα τιμών (δες στιχομυθία 1α-3.2). Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι μαθητές αυτοί οδηγήθηκαν σε λανθασμένες αποφάνσεις παρασυρόμενοι από εξωτερικές «επιδερμικές» παρατηρήσεις των στοιχείων τους.

Στιχομυθία 1α-3.2: Η αναγνώριση της σχέσης των μεγεθών επηρεάζεται από συγκεκριμένες τιμές και όχι από τη σύγκριση των αντίστοιχων τιμών των μεγεθών

«Ε: Άρα τι θα απαντήσουμε εδώ;
Μ12: Πως μεταβάλλονται *κατά 4*
Ε: Όταν διπλασιαστεί η δύναμη πως μεταβάλλεται η επιμήκυνση;
Μ12: *Κατά 4*
Ε: Από 1(Ν) που ήταν η δύναμη, έγινε 2(Ν). Η 4(cm) έγινε 8(cm). Θέλω τη σχέση της αρχικής με την τελική επιμήκυνση
Μ12: Εεε… δεν είπαμε *κατά4;*
Ε: Αυξήθηκε κατά 4. Αλλά σε σχέση με τη δύναμη που διπλασιάστηκε, η επιμήκυνση το 4 έγινε 8 δηλαδή, τι έγινε;
Μ12: Διπλασιάστηκε»
Ε: Διπλασιάστηκε»

1β. *Γραφική παράσταση και έννοια των ανάλογων ποσών*

Η ανάλυση της κατηγορίας βασίζεται στις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές στην Ερώτηση Α3 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Περιγράψτε τη μορφή της γραφικής παράστασης που μόλις σχεδιάσατε. Ποια ποσά συνδέει κατά τη γνώμη σας;»

Στον πίνακα 1β.1 βλέπουμε την κατανομή των απαντήσεων των μαθητών ανάλογα με την επιτυχή απάντηση και το βαθμό παρέμβασης της εκπαιδευτικού.

Πίνακας 1β: Αναγνώριση της συσχέτισης της γραφικής παράστασης της ευθείας με την έννοια των ανάλογων ποσών ανάλογα με το βαθμό παρέμβασης της εκπαιδευτικού.

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
1β.1-1	Σωστή απάντηση χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού	Μ2,Μ3,Μ4,Μ5,Μ6,Μ7,Μ8, Μ9,Μ11,Μ12,Μ17	11
1β.1-2	Μικρή παρέμβαση εκπαιδευτικού	Μ1,Μ10,Μ13,Μ16	3
1β.1-3	Τυχαία σωστή απάντηση /Καμία απάντηση	Μ14, Μ15	2

Η μεγαλύτερη ομάδα απαντήσεων περιλαμβάνει έντεκα μαθητές (δες, πίνακα 1β), οι οποίοι έδωσαν τη σωστή απάντηση *ανάλογα ποσά* χωρίς να χρειαστεί παρέμβαση της εκπαιδευτικού**.** Δηλαδή οι μαθητές αυτοί βρήκαν αμέσως ότι η γραφική παράσταση της ευθείας που έχουν κατασκευάσει περιγράφει ανάλογα ποσά παρά το γεγονός ότι οι άξονες συντεταγμένων δεν περιγράφονταν στο μαθηματικό πλαίσιο (x, y) αλλά βρίσκονταν στο πλαίσιο της φυσικής (F, Δl). (Ενδεικτική στιχομυθία 1β-1).

Στιχομυθία 1β-1: «Ανάλογα ποσά» χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού

«Ε: Ποια ποσά συνδέει κατά τη γνώμη σου …. η ευθεία… η γραφική παράσταση ευθεία;
Μ9: Τη δύναμη και τη….
Ε: Τη δύναμη και την επιμήκυνση
Μ9: Ναι
Ε: Τι ποσά είναι αυτά στα μαθηματικά; …που έχουν αυτή εδώ τη γραφική παράσταση…
Μ9: Ανάλογα
Ε: Ανάλογα. Γιατί το λες αυτό;
Μ9: Επειδή όσο μεγαλώνει το ένα μεγαλώνει και το άλλο»

Επίσης, τρεις μαθητές (δες πίνακα 1β) δυσκολεύονται στην αναγνώριση της έννοιας των ανάλογων ποσών με μόνο στοιχείο τη γραφική παράσταση. Η εκπαιδευτικός κάνει μικρή παρέμβαση υποδεικνύοντας ως επιπλέον στοιχείο, την περίπτωση του ταυτόχρονου διπλασιασμού των μεγεθών που έχει καταγραφεί σε προηγούμενη ερώτηση με αποτέλεσμα οι μαθητές να επιτύχουν σωστή απάντηση όπως φαίνεται στη στιχομυθία 1β-2:

Στιχομυθία 1β-2: «Ανάλογα» ποσά με παρέμβαση εκπαιδευτικού

Ε: Από τα σημεία αυτά εδώ πέρα. Ποια ποσά συνδέει κατά τη γνώμη σου;
Μ10: Ποια ποσά; Το 1 με το 4 ….
Ε: Όταν λέμε ποια ποσά εννοούμε στα μαθηματικά… η ευθεία σ΄ αυτή τη γραφική παράσταση αν την είχες στα μαθηματικά, τι ποσά θα σου συνέδεε;
Μ10: Το x και το y
Ε: Ναι… τα οποία τι θα ήταν μεταξύ τους;
Μ10: Ίσα;
Ε: Ίσα; Για σκέψου λίγο… (παύση)…. Σε βοηθάει, κοίταξε τι παρατήρησες πιο πριν: Όταν διπλασιαστεί η δύναμη, η επιμήκυνση…
Μ10: Α, ανάλογα

Στην κατηγορία αυτή υπήρξαν και δύο μαθητές οι οποίοι δε φάνηκε να διαθέτουν την κατάλληλη μαθηματική γνώση από τα ανάλογα ποσά για να αναγνωρίσουν τη μαθηματική έννοια *ανάλογα ποσά,* επομένως έδωσαν τυχαία απάντηση (δες στιχομυθία 1β-3.1), είτε δεν έδωσαν καμία απάντηση

Στιχομυθία 1β-3.1: «Ανάλογα ποσά» Τυχαία απάντηση

«Ε: Αυτή τη γραφική παράσταση αν την είχες στα μαθηματικά, τι ποσά θα σου συνέδεε;
Μ15: Δύσκολα μου βάζετε τώρα…
Ε: Στα μαθηματικά θυμήσου …. εδώ έχεις το μέγεθος δύναμη και το μέγεθος επιμήκυνση…
Μ15: Όμως είναι τα ποσά 1, 2, 3, 4…. (*μιλούν ταυτόχρονα*)
Ε: Δύναμη δηλαδή και επιμήκυνση
Μ15: Δύναμη, επιμήκυνση
Ε: Τι ποσά είναι μεταξύ τους αυτά;
Μ15: Ανάλογα
Ε: Γιατί το είπες αυτό
Μ15: Στην τύχη
Ε: Στην τύχη; Περίμενε, γιατί μου πες ανάλογα και δε μου πες αντιστρόφως ανάλογα;
Μ15: ….. Στην τύχη σας το πα»

1γ. *Γραφική παράσταση και αλγεβρικός τύπος των ανάλογων ποσών*
Στην κατηγορία αυτή διερευνήθηκαν δύο ζητήματα:

Το πρώτο ζήτημα αφορά τη δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στη συσχέτιση της γραφικής παράστασης της ευθείας που είχαν κατασκευάσει με βάση τα πειραματικά τους δεδομένα και του ζητούμενου αλγεβρικού τύπου y=αx. Το ζήτημα αναλύθηκε με βάση τις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση Α4 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Ποια γνωστή σας συνάρτηση από τα μαθηματικά εκφράζει η γραφική παράσταση που μόλις σχεδιάσατε; (τύπος)». Οι ομάδες απαντήσεων που προέκυψαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 1γ.1

Πίνακας 1γ.1: Συσχέτιση της γραφικής παράστασης με τον αλγεβρικό τύπο.

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
1γ.1-1	Κατέληξαν στο σωστό αλγεβρικό τύπο χωρίς βοήθεια	Μ4, Μ5,Μ6, Μ8, Μ9, Μ10, Μ12, Μ16	8
1γ.1-2	Κατέληξαν στο σωστό αλγεβρικό τύπο με βοήθεια	Μ1, Μ2, Μ3, Μ7, Μ11, Μ14	6
1γ.1-3	Δεν κατέληξαν στο σωστό αλγεβρικό τύπο	Μ13, Μ15, Μ17	3

Οι οκτώ μαθητές της 1ης ομάδας του πίνακα 1γ.1 κατέληξαν χωρίς καμία βοήθεια από την εκπαιδευτικό, στη σωστή απάντηση ότι η γραφική παράσταση της ευθείας που είχαν κατασκευάσει εκφράζεται από τον αλγεβρικό τύπο y=αx όπως διαπιστώνουμε π.χ. στη στιχομυθία 1γ.1-1.1:

Στιχομυθία 1γ.1-1.1: Κατέληξαν στον y= α x χωρίς βοήθεια εκπαιδευτικού

«Μ5:…. y= α x
Ε: Πολύ ωραία. Δικαιολόγησέ το λίγο αυτό, γιατί είπες ότι είναι η y= α x;
Μ5: Γιατί τα ποσά είναι ανάλογα και η γραφική παράσταση είναι ευθεία»

Στη 2η ομάδα απαντήσεων που πίνακα 1γ.1 υπήρξαν έξι μαθητές οι οποίοι κατέληξαν στον αλγεβρικό τύπο y= α x με βοήθεια από την εκπαιδευτικό. Η βοήθεια της εκπαιδευτικού δόθηκε με τους εξής τρόπους:

1) Η εκπαιδευτικός επισημαίνει συνέχεια ότι δουλεύουν στο πεδίο των μαθηματικών και όχι της φυσικής. Ο Michelsen, (2006) υποστηρίζει ότι σε μια διεπιστημονική προσέγγιση μπορεί να χρειαστεί κάποιες πλευρές οικοδόμησης να αντιμετωπιστούν μόνο στο μαθηματικό πλαίσιο. Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο δάσκαλος αυτό πρέπει να το επισημαίνει στους μαθητές ώστε να μην αναζητούν συνδέσεις. Παραδείγματα από τέτοιες επισημάνσεις της εκπαιδευτικού βλέπουμε στις στιχομυθίες 1γ.1-2.1: «Στα μαθηματικά τι έχουμε σ΄ αυτούς τους άξονες;» κλπ. και 1γ.1-2.2: «Στα μαθηματικά θέλουμε…» κλπ. όπου έχουν σημειωθεί με **έντονη γραφή** τα σχετικά σημεία.

2) Η εκπαιδευτικός επικεντρώνεται στο ότι το ζητούμενο είναι «τύπος» και εστιάζει την προσοχή των μαθητών στη χρήση των χαρακτηριστικών αλγεβρικών μεταβλητών «x» και «y». Για τους μαθητές δεν φάνηκε να ήταν ξεκάθαρο ποια αναπαράσταση συνδέεται άμεσα με τη λέξη «τύπος» με επακόλουθη συνέπεια τη δυσκολία τους στην επιλογή μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων, όπως π.χ. ο μαθητής Μ3 στη στιχομυθία 1γ.1-2.1 με την έννοια της συμμεταβολής των μεγεθών: «Όταν ένα ποσό αυξάνεται, αυξάνεται και το άλλο» ή ο μαθητής Μ7 με την αναπαράσταση του πίνακα τιμών την οποία αναφέρει ως «πινακάκι» στη στιχομυθία 1γ.1-2.2.

3) Υπήρξαν δύο περιπτώσεις μαθητών που δώσανε ως αρχική απάντηση την αλγεβρική σχέση που παραπέμπει στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά (y=α/x). Στις περιπτώσεις αυτές ίσως επικρατεί σύγχυση μεταξύ των δύο νοητικών μοντέλων (ανάλογα-αντιστρόφως ανάλογα ποσά). Η παρέμβαση της εκπαιδευτικού βοηθάει στον επαναπροσδιορισμό του μοντέλου μέσω της γνωστικής σύγκρουσης που επέρχεται από τη σύγκριση των συνεπειών του μοντέλου και των πειραματικών δεδομένων. Ενδεικτικό παράδειγμα η στιχομυθία 1γ.1-2.3

4) Σε δύο περιπτώσεις η εκπαιδευτικός χρειάστηκε να υποστηρίξει συνειρμικά την ανάκληση του ζητούμενου αλγεβρικού φορμαλισμού από τους μαθητές με την παροχή του πρώτου μέρους της μαθηματικής σχέσης y=αx, δηλαδή: «y=;» όπως μπορούμε να δούμε στο μαθητή Μ7 στην ίδια στιχομυθία 1γ.1-2.2.

Στιχομυθία 1γ.1-2.1: Κατέληξαν στον y=αx με βοήθεια εκπαιδευτικού:

«Μ3: … (*Παύση*)… ε ε ..x=y … α=y x
Ε: …(*Παύση*)… α=y x ε; (*ο μαθητής δείχνει προβληματισμένος και αβέβαιος*). Θες να το ξανασκεφτείς λίγο; …(Παύση)… **Θυμήσου στα μαθηματικά όταν έχεις κάτι αντίστοιχο με την ευθεία,** τι έχεις σ' αυτόν τον άξονα; (*δείχνει τον άξονα των F*) …(*Παύση*)… Εδώ εμείς έχουμε F και Δl γιατί έχουμε φυσικά μεγέθη
Μ3: Ναι
Ε: **Στα μαθηματικά τι έχουμε σ΄ αυτούς τους άξονες**;
Μ3: (*Μεγάλη παύση*)… (*αβέβαια μονολογώντας*) F επί l;
Ε: Όχι, δεν θέλω να μου πεις αυτό … Η συνάρτηση των ανάλογων ποσών, που εκφράζει τα ανάλογα ποσά… **ο τύπος της ποιος είναι**; …(*Μεγάλη παύση*)…
Μ3: Ανάλογα ποσά ποιος είναι ο τύπος;
Ε: Ναι ναι, **ο τύπος** που εκφράζει αυτή την ευθεία…
Μ3: Ότι όσο αυξάνεται το ένα αυξάνεται και το…
Ε: Όχι, **ο τύπος, ο μαθηματικός τύπος**
Μ3: Όταν ένα ποσό αυξάνεται, αυξάνεται και το άλλο
Ε: Ναι. Αλλά αυτό δεν έχει… Πριν κάτι είπες, **με τα y και με τα x** κάτι είπες.
Μ3: Ναι εε… (*αποφασιστικά*) y= α x»

Στιχομυθία 1γ.1-2.2: Κατέληξαν στον y=αx με βοήθεια εκπαιδευτικού:

«M7: Ωχ …Νομίζω… όχι, αυτό με το πινακάκι ήταν,… x και y;
E: **Στα μαθηματικά η συνάρτηση προφανώς θα είναι με μεταβλητές x και y**
M7: Ναι
E: Ποια συνάρτηση, αν σκεφτείς ότι είναι μια γραφική παράσταση **στα μαθηματικά αυτή εδώ (η ευθεία)** , ποια συνάρτηση έχει αυτή τη γραφική παράσταση;
M7: Αυτό με τη συνισταμένη, …το α;
E: **Στα μαθηματικά θέλουμε**… Ποια είναι **η σχέση των μαθηματικών** που έχει γραφική παράσταση ευθεία;
M7: Αυτό με το x και y που κάναμε το …πινακάκι
E: Που κάναμε το πινακάκι, ναι,… **τον τύπο** πως τον λέγαμε;
M7: Είχε κάποια σχέση με το α,…το θυμάμαι
E: Ναι έχει σχέση…
M7: α= y … όχι y … δε θυμάμαι τώρα
E: **y=;**
M7: εε,… α επί … εε … επί x (y=αx)
E: Ωραία
M7: Αυτή είναι;
E: Εσύ θα μου πεις
M7: Πιστεύω ότι αυτή είναι»

Στιχομυθία 1γ.1-2.3: Γνωστική σύγκρουση

Ο μαθητής σημειώνει y=α/x
Δ: y= α/x λες.
M11:Ναι
Δ: Για να δούμε λίγο στο y= α/x… Αν το x μεγαλώσει, το y τι θα κάνει;
M11: Μικραίνει
Δ: Στη δική σου την περίπτωση συνέβαινε αυτό; Όταν μεγάλωνε η επιμήκυνση μίκραινε η δύναμη;
M11: Όχι… (Παύση)… Οπότε δεν είναι αυτό…
Δ: Οπότε δεν είναι αυτό
M11: Εεε…..
Δ: y =;
M11: Α, x επί α (Διορθώνει στο φύλλο εργασίας και γράφει y= xα)

Οι τρεις μαθητές της τελευταίας ομάδας του πίνακα 1γ δε φάνηκε να διαθέτουν το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο για να μπορέσουν να συσχετίσουν τη γραφική παράσταση της ευθείας με τον αλγεβρικό τύπο y=αx. Ενδεικτική η στιχομυθία 1γ.1-3.1

Στιχομυθία 1γ.1-3.1: Δεν κατέληξαν στον αλγεβρικό τύπο y= α x

«E: Τώρα πρέπει να θυμηθείς λίγο τα μαθηματικά… Είναι ανάλογα ποσά
M17: Ναι

E: Στα μαθηματικά έχουν έναν τύπο τα ανάλογα ποσά, στα μαθηματικά δεν έχουμε F και Δl… στα μαθηματικά έχουμε άλλα σύμβολα… x, y
M17: Ναι
E: Ποιος είναι ο τύπος που εκφράζει η ευθεία, τα ανάλογα ποσά;… Με y και με x είναι αυτός ο τύπος, τον θυμάσαι;
M17:….
E: Όχι;
M17: Όχι»

Από αυτό το ερώτημα αναδεικνύεται ο σημαντικός ρόλος του μαθηματικού υποβάθρου των μαθητών. Όποιοι δεν το είχαν δεν μπορούσαν να προχωρήσουν.

Το δεύτερο ζήτημα που διερεύνησε η κατηγορία « Γραφική παράσταση και αλγεβρικός τύπος των ανάλογων ποσών» αφορά στη δυσκολία που συνάντησαν οι μαθητές κατά τη μετάβαση από τον αλγεβρικό τύπο y=αx στο μαθηματικό μοντέλο του νόμου του Hooke F=αΔl. Οι μαθητές αντιμετώπισαν την ερώτηση Α5 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Να αντιστοιχίσετε τα μεγέθη F, Δl της γραφικής σας παράστασης με τις μεταβλητές y, x της μαθηματικής συνάρτησης που βρήκατε. Ποιος τύπος προκύπτει;» και οι απαντήσεις τους παρουσιάζονται στον πίνακα 1γ.2

Πίνακας 1γ.2: Μετάβαση από τη μαθηματική συνάρτηση στο νόμο του Hooke.

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
1γ.2-1	Επιτυχής μετάβαση χωρίς βοήθεια	M1,M2,M3,M4,M5, M6, M7, M8, M9,M10, M11,M14	12
1γ.2-2	Επιτυχής μετάβαση με μικρή βοήθεια	M12, M16	2
1γ.2-3	Ανεπιτυχής μετάβαση	M13,M15, M17	3

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη ομάδα απαντήσεων του πίνακα 1γ.2 ανήκει η πλειονότητα των μαθητών (12 μαθητές), οι οποίοι προχώρησαν με επιτυχία στην αντικατάσταση των φυσικών μεγεθών F και Δl στον αλγεβρικό τύπο y=αx χωρίς καμία βοήθεια από την εκπαιδευτικό. Παράδειγμα η στιχομυθία 1γ.2-1 του μαθητή M9:

Στιχομυθία 1γ.2-1: Επιτυχής μετάβαση στον τύπο F=αΔl χωρίς βοήθεια

E: Εδώ η γενική σου συνάρτηση είναι y= α x. Στα μαθηματικά έχεις το y και το x. Στο δικό μας το διάγραμμα ποιο είναι το y και ποιο είναι το x;
M9: Α, το y είναι F και το x είναι το Δl
E: Αν τα βάλεις στη συνάρτηση που είπες πριν, την y= α x, πως θα γίνει;
M9: F=αΔl

Δύο από τους μαθητές χρειάστηκαν μικρή βοήθεια από την εκπαιδευτικό για να μεταβούν από τον αλγεβρικό τύπο y=αx στο νόμο του Hooke F=αΔl, περισσότερο με την έννοια της ενθάρρυνσης και της επιβεβαίωσης (δες πίνακα 1γ.2) Ενδεικτικό παράδειγμα είναι η στιχομυθία 1γ.2-2:

Στιχομυθία 1γ.2-2: Επιτυχής μετάβαση στον τύπο F=αΔl με μικρή βοήθεια

Ε: Εμείς στη φυσική δεν έχουμε y και x, έχουμε… δύναμη και επιμήκυνση. Πως θα γίνει ο τύπος αυτός των μαθηματικών αν βάλουμε τα μεγέθη της φυσικής;
Μ16: ….
Ε: Ποιο θα είναι y σου και ποιο θα είναι το x;
Μ16: Το y θα είναι το F και το x θα είναι το Δl
Ε: Γιατί;
Μ16: Γιατί… είναι οι συναρτήσεις όπως στα μαθηματικά
Ε: Ωραία… για αντικατάστησε τον τύπο
Μ16: Να πάμε στο…
Ε: Ναι και το γράφεις
Ο μαθητής γράφει F και σταματάει
Ε: Το y ποιο θα είναι;
Μ16: Το F
Ε: Το F… Άρα στον τύπο y… έβαλες το F
Μ16: Ναι
Ε: Και θέλεις τώρα να συνεχίσεις να το γράφεις… F ίσον; Τι θα γράψεις παρακάτω;
Μ16: F=α…
Ε: Ναι… Επί;
Μ16: Επί Δl
Ε: Επί Δl…

Στην τελευταία ομάδα απαντήσεων του πίνακα 1γ.2 ανήκουν οι τρεις μαθητές της ομάδας 1γ.1-3 του προηγούμενου ερωτήματος οι οποίοι δεν είχαν καταλήξει στον αλγεβρικό τύπο και επομένως δεν μπόρεσαν να προχωρήσουν στην αντικατάσταση των φυσικών μεγεθών.

1δ. *Λεκτική αναπαράσταση του μαθηματικού μοντέλου*

Στην τελευταία κατηγορία του πρώτου άξονα καταγράφηκε η δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στη λεκτική αναπαράσταση του μαθηματικού μοντέλου που κατασκεύασαν. Οι μαθητές απάντησαν στην ερώτηση Α6 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Διατυπώστε το συμπέρασμά σας σχετικά με την επιμήκυνση που προκαλεί σ΄ ένα ελατήριο η δύναμη που ασκείται σ΄ αυτό: Η επιμήκυνση ενός ελατηρίου είναι (*συμπληρώστε τη λέξη στο κενό*)…… με τη δύναμη που ασκείται σ' αυτό». Στον πίνακα 1δ παρουσιάζονται οι ομάδες των απαντήσεων των μαθητών ανάλογα με την επιτυχία τους και το βαθμό παρέμβασης της εκπαιδευτικού:

Πίνακας 1δ: Απόδοση λεκτικής αναπαράστασης του νόμου του Hooke ανάλογα με το βαθμό παρέμβασης της εκπαιδευτικού

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
1δ-1	Σωστή απάντηση χωρίς βοήθεια	M3,M4,M5, M7, M8, M10, M17	7
1δ-2	Σωστή απάντηση με μικρή βοήθεια	M1,M2,M6,M9,M11, M12, M16	7
1δ-3	Δεν κατέληξαν στη σωστή απάντηση	M13,M14, M15	3

Οι επτά μαθητές της πρώτης ομάδας του πίνακα 1δ βρήκαν αμέσως τη ζητούμενη λέξη «ανάλογη» στην ερώτηση Α6 και διατύπωσαν λεκτικά το νόμο του Hook χωρίς καμία βοήθεια από την εκπαιδευτικό όπως π.χ. ο μαθητής Μ7 στη στιχομυθία 1δ-1 που ακολουθεί:

Στιχομυθία 1δ-1: Αναφορά λέξης «ανάλογη» χωρίς βοήθεια από την εκπαιδευτικό

«Μ7: (*Διαβάζει την ερώτηση Α6*): «Διατυπώστε το συμπέρασμά σας σχετικά με την επιμήκυνση που προκαλεί σ' ένα ελατήριο η δύναμη που ασκείται σ' αυτό: Η επιμήκυνση ενός ελατηρίου είναι …… με τη δύναμη που ασκείται σ' αυτό» (*Αμέσως*) Είναι ανάλογη;
Ε: Ωραία»

Η παρέμβαση της εκπαιδευτικού φαίνεται να είναι κυρίως διευκρινιστική στους επτά μαθητές της δεύτερης ομάδας του πίνακα 1δ βοηθώντας περισσότερο στην εστίαση των μαθητών σ' αυτά που έχουν ήδη διαπιστώσει, όπως φαίνεται στη στιχομυθία 1δ-2.1:

Στιχομυθία 1δ-2.1: Αναφορά λέξης «ανάλογη» με μικρή βοήθεια από την εκπαιδευτικό

«Ε: …..Να διατυπώσουμε από αυτόν εδώ τον τύπο τον παρακάτω νόμο: Η επιμήκυνση ενός ελατηρίου είναι …… με τη δύναμη που ασκείται σ' αυτό …(*Παύση*) …Η επιμήκυνση, δηλαδή το Δl του ελατηρίου τι είναι με τη δύναμη F που ασκείται σ' αυτό;
Μ2: Μμμ
Ε: Θα σε βοηθήσουν κι αυτά που έχεις γράψει προηγούμενα …(Παύση)…
Μ2: …Διπλάσια;
Ε: Θα μπορούσαν να είναι και τριπλάσια ή και τετραπλάσια…. Τι σχέση έχουν, γιατί λες ότι είναι διπλάσια ή τριπλάσια, τι είναι (μεταξύ τους) η F με τη Δl; ….(Μεγάλη

παύση)…. Το έχεις γράψει …
Μ2: (*Διστακτικά*)… Ανάλογα ποσά;»

Ενδιαφέρον είναι ότι στην ίδια ομάδα τρεις μαθητές **(** Μ6, Μ9, Μ12) στις απαντήσεις τους κατέληξαν στη σωστή λέξη «ανάλογη» αφού πρώτα ανάφεραν τις λέξεις «ίση» ή «ισοδύναμη», επομένως στο σημείο αυτό εμφανίζεται η πρόσθετη δυσκολία της ευθυγράμμισης των λεκτικών εξηγήσεων με τους μαθηματικούς όρους. (Pospiech, Böhm, & Geyer, 2012).

Παράδειγμα τέτοιων αναφορών αποτελεί η στιχομυθία 1δ-2.2:

Στιχομυθία 1δ-2.2: Αναφορά λέξης «ανάλογη» με μικρή βοήθεια από την εκπαιδευτικό – Εμφάνιση αναφοράς «ίση», «ισοδύναμη»

«Μ9: (*Διαβάζει την ερώτηση Α6*): «Διατυπώστε το συμπέρασμά σας σχετικά με την επιμήκυνση που προκαλεί σ' ένα ελατήριο η δύναμη που ασκείται σ' αυτό: Η επιμήκυνση ενός ελατηρίου είναι …… με τη δύναμη που ασκείται σ' αυτό»
Ε: Τι είναι;
Μ9: Ίση
Ε: Ίση;
Μ9: Ισοδύναμη
Ε: Ισοδύναμη;
Μ9: Μμ ….(παύση)…
Ε: Έχεις βρει τι ποσά είναι το F και το Δl. Τι ποσά είναι;
Μ9: Ανάλογα
Ε: Ανάλογα
Μ9: Είναι ανάλογη»

Στην τελευταία ομάδα του πίνακα 1δ κατατάσσονται τρεις μαθητές οι οποίοι δεν κατέληξαν στη σωστή απάντηση (αναφορά της λέξης «ανάλογη») είτε γιατί δεν είχαν απαντήσει καθόλου στη σχετική ερώτηση Α3 (Μ14), είτε είχαν απαντήσει αλλά χωρίς καμία αιτιολόγηση (Μ15). Εξαίρεση αποτελεί ο μαθητής Μ13 (στιχομυθία 1δ-3) που είχε αναφέρει αιτιολογημένα σε προηγούμενη ερώτηση ότι τα ποσά είναι «ανάλογα» αλλά στην παρούσα ερώτηση φαίνεται ότι δεν μπόρεσε να αντιληφθεί το νόημα της ερώτησης:

Στιχομυθία 1δ-3: Δεν κατέληξαν στη σωστή απάντηση

Ε:Ναι… και παρακάτω έχεις σημειώσει κι άλλα πράγματα …. (Μεγάλη παύση)…. Τι είναι η δύναμη με την επιμήκυνση;
Μ13: ….(Μεγάλη παύση)… Η επιμήκυνση είναι … παραμορφώνεται
Ε: Ναι. Δεν έχει καμιά σχέση με τη δύναμη;

M13: Έχει
Ε; Τι σχέση έχει;
Μ13: (Πολύ μεγάλη παύση)… Δεν ξέρω πώς να το πω… δεν μπορώ να το εκφράσω….»

2. Διερεύνηση των παραμέτρων του Μαθηματικού Μοντέλου και ερμηνεία στο Φυσικό Κόσμο

2α. *Φυσικό μέγεθος (σκληρότητα ελατηρίου) – γεωμετρικός προσδιορισμός κλίσης*

Η κατηγορία αυτή επιχειρεί να διερευνήσει μέσα από τις απαντήσεις τους τη σύνδεση που επιτυγχάνουν οι μαθητές μεταξύ των εννοιών της φυσικής και των μαθηματικών, αντίστοιχα. Για το σκοπό αυτό κρίθηκε σκόπιμο για την καλύτερη μελέτη των απαντήσεων των μαθητών να χωριστεί στις εξής υποκατηγορίες:

2α.1. *Συσχέτιση της γεωμετρικής απεικόνισης της διαφοράς κλίσης δύο ευθειών με τις φυσικές ιδιότητες των ελατηρίων που αντιστοιχούν σ' αυτές*

Το ζητούμενο στην υποκατηγορία αυτή είναι να αναλυθούν οι ερμηνείες που έδωσαν οι μαθητές στις γεωμετρικές απεικονίσεις των διαφορετικών κλίσεων δύο ευθειών που αντιστοιχούν σε διαφορετικά ελατήρια αναφορικά με την εμπλοκή ή όχι φυσικών ιδιοτήτων των ελατηρίων. Η ανάλυση της υποκατηγορίας βασίστηκε στις απαντήσεις των συμμετεχόντων μαθητών στην ερώτηση Β3 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Γιατί κατά τη γνώμη σου, οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι διαφορετικές; Που μπορεί να οφείλεται αυτό;»

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές απάντησαν σε δύο φάσεις:

2α.1.1. *Ερμηνείες με απλή παρατήρηση των γραφικών παραστάσεων*

Στη φάση αυτή έγινε προσπάθεια από τους μαθητές να ερμηνευθεί αρχικά η ύπαρξη της διαφοράς κλίσης των ευθειών που αντιστοιχούν στα δύο ελατήρια διαισθητικά μόνο με την απλή παρατήρηση των γραφικών παραστάσεων. Οι περισσότεροι μαθητές μάλιστα ανέπτυξαν συλλογισμό με πολλαπλές απαντήσεις οι οποίες ομαδοποιήθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν στον πίνακα 2α.1.1.

Πίνακας 2α.1.1: Πολλαπλές απαντήσεις των μαθητών αναφορικά με την ερμηνεία της διαφοράς κλίσης που εμφανίζουν οι ευθείες στις γραφικές παραστάσεις των αξόνων F-Δl των δύο ελατηρίων, *μόνο με απλή παρατήρηση των ευθειών*.

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
2α.1.1-1	Η διαφορά κλίσης των ευθειών αποδίδεται στα διαφορετικά ελατήρια με αιτιολόγηση που «περιγράφει» το φυσικό μέγεθος σκληρότητα	Μ2, Μ10, Μ11,Μ13, Μ15, Μ17	6
2α.1.1-2	Η διαφορά κλίσης των ευθειών αποδίδεται στα διαφορετικά ελατήρια χωρίς αιτιολόγηση	Μ1, Μ3, Μ7, Μ9,	4

2α.1.1-3	Η διαφορά κλίσης των ευθειών αποδίδεται όχι σε κάποια φυσική ιδιότητα των ελατηρίων αλλά στο αποτέλεσμα της δράσης της δύναμης δηλ. την επιμήκυνση	M3, M4,M5, M6, M8,M9,M12, M13,M14,M16	10
2α.1.1-4	Η διαφορά κλίσης των ευθειών αποδίδεται όχι σε κάποια φυσική ιδιότητα των ελατηρίων αλλά σε μαθηματικές έννοιες, όπως π.χ. η ευθεία του 2ου ελατηρίου δεν εκφράζει ανάλογα ποσά κλπ	M4, M6, M7	3

Οι έξι απαντήσεις της πρώτης ομάδας του πίνακα 2α.1.1 αποδίδουν τη διαφορά (κλίσης) που έχουν οι δύο ευθείες στις γραφικές παραστάσεις στη διαφορά των ελατηρίων και παρέχουν αιτιολόγηση που «περιγράφει» το φυσικό μέγεθος σκληρότητα: Δηλαδή αναφέρθηκε ότι το 1ο ελατήριο είναι πιο: «σκληρό», «σφιχτό», «δυνατό», «βαρύ» με την έννοια του σκληρού, «δεν ανοίγει εύκολα» ενώ το 2ο ελατήριο «ανοίγει πιο εύκολα», είναι πιο «ελαστικό», «μαλακό» κλπ. Παράδειγμα αυτής της κατηγορίας αποτελεί η στιχομυθία 2α.1.1-1:

Στιχομυθία 2α.1.1-1: Η διαφορά των κλίσεων περιγράφεται από τη *σκληρότητα*

Ε: Που μπορεί να οφείλεται αυτό;
Μ10: Στο ελατήριο
Ε: Δηλαδή;
Μ10: Δηλαδή…. αυτό ποιο είναι; (*δείχνει το 2ο ελατήριο*) είναι πιο μαλακό .
Ε: Ποιο;
Μ10: Το πράσινο (*2ο ελατήριο*)
Ε: Πως το κατάλαβες αυτό; Δεν το έπιασες στα χέρια.
Μ10: Όχι αλλά βάλαμε τις ίδιες δυνάμεις και κατέβηκε πιο πολύ.

Τέσσερις απαντήσεις επίσης (δες πίνακα 2α.1.1), αποδίδουν τη διαφορά των ευθειών στις δύο γραφικές παραστάσεις στο γεγονός ότι απλά έχουμε δύο ξεχωριστά (διαφορετικά) ελατήρια, χωρίς να παρέχουν άλλη δικαιολόγηση, όπως φαίνεται στη στιχομυθία 2α.1.1-2:

Στιχομυθία 2α.1.1-2: Η διαφορά των κλίσεων οφείλεται στο γεγονός ότι τα ελατήρια είναι δύο ξεχωριστά (διαφορετικά)

Ε: Έχεις δηλαδή τη μια γραφική παράσταση έτσι και την άλλη έτσι… (*δείχνει τις γραφικές παραστάσεις*)… Γιατί βγήκαν διαφορετικές; Τι διαφορετικό έχουν;
Μ1: …Διαφορετικά ελατήρια
Ε: Είναι διαφορετικό το ελατήριο;
Μ1: Ναι

Οι απαντήσεις όμως της τρίτης ομάδας (δέκα μαθητές) του πίνακα 2α.1.1 αποδίδουν τη διαφορά των ευθειών στις δύο γραφικές παραστάσεις όχι σε κάποια φυσική ιδιότητα του ελατηρίου, αλλά στο αποτέλεσμα της δράσης της δύναμης δηλαδή στην επιμήκυνση, όπως φαίνεται στη στιχομυθία που ακολουθεί:

Στιχομυθία 2α.1.1-3: Η διαφορά των κλίσεων οφείλεται στο αποτέλεσμα της δράσης της δύναμης (επιμήκυνση)

Ε: Γιατί δεν έπεσε η μία παράσταση πάνω στην άλλη;… (Παύση)…. Τι παίζει ρόλο;
Μ16: ….(Παύση)… Η επιμήκυνση του ελατηρίου;
Ε: Η επιμήκυνση που είχε το καθένα;
Μ16: Ναι
Ε: Που ήταν ίδιες ή διαφορετικές;
Μ16: Διαφορετικές;
Ε: Γιατί ήταν διαφορετικές; … Αυτό ζητάμε, γιατί το κάθε ελατήριο είχε διαφορετική επιμήκυνση από το άλλο;
Μ16: ……..

Τέλος, τρεις απαντήσεις της τελευταίας ομάδας του πίνακα 2α.1.1 αποδώσανε τη διαφορά της κλίσης στις δύο γραφικές παραστάσεις σε μαθηματικές έννοιες όπως π.χ. η ευθεία του 2ου ελατηρίου δεν εκφράζει ανάλογα ποσά, ή η διαφορά οφείλεται στη συνάρτηση y=αx κλπ. Στην ομάδα αυτή μπορούμε να δούμε και την επίδραση που μπορεί να έχουν τα σφάλματα στις πειραματικές μετρήσεις στη διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Ενδεικτικό παράδειγμα η στιχομυθία 2α.1.1-4:

Στιχομυθία 2α.1.1-4: Η διαφορά των κλίσεων αποδίδεται σε μαθηματικές έννοιες –Δυσκολίες που οφείλονται σε σφάλματα στις πειραματικές μετρήσεις

Μ6: Αυτά τα δύο δεν είναι ανάλογα ποσά
Ε: Για την κόκκινη ευθεία είπες πριν ότι ήταν ανάλογα ποσά.
Μ6: Ναι. Αυτά δεν είναι όμως.
Ε: Η πράσινη γραμμή δεν είναι ανάλογα ποσά;
Μ6: Όχι
Ε: Γιατί; Για να το εξετάσουμε στην πράσινη γραμμή. Πάρε μια δύναμη…
Μ6: Την 1(N)
Ε: Έχει επιμήκυνση;
Μ6: 6,5. 6,5 και 6,5 μου κάνει 13 όμως, όχι 13,5 (*μέτρηση που υπάρχει στον πίνακα τιμών και αντιστοιχεί στη διπλάσια δύναμη*).
Ε: Είναι πολύ μικρή διαφορά όμως, μπορεί να είναι και λόγω σφάλματος (στη μέτρηση)…
Μ6: Ωω…

Βλέπουμε δηλαδή ότι τα σφάλματα στις πειραματικές μετρήσεις μπορούν να λειτουργήσουν ως εμπόδια στην εννοιολογική κατανόηση.

2α.1.2. *Ερμηνεία με βάση την απτική επαφή και επεξεργασία των ελατηρίων*

Πολύ διαφορετικά όμως είναι τα αποτελέσματα που προέκυψαν στη δεύτερη φάση των απαντήσεων στην ερώτηση Β3. Στη φάση αυτή δόθηκαν στους μαθητές τα ελατήρια που είχαν χρησιμοποιήσει για την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων, με την προτροπή να τα περιεργαστούν και να τα τεντώσουν με τα χέρια τους (απτική επαφή).

Οι απαντήσεις που προέκυψαν ομαδοποιήθηκαν και κατηγοριοποιήθηκαν στον πίνακα 2α.1.2. Όπως προκύπτει από τον πίνακα, η συντριπτική πλειονότητα των μαθητών (14 μαθητές) μετά την απτική επαφή και επεξεργασία των ελατηρίων απέδωσε τη διαφορά των δύο γραφικών παραστάσεων στη φυσική ιδιότητα *σκληρότητα* του ελατηρίου.

Πίνακας 2α.1.2: Τελικές απαντήσεις των μαθητών αναφορικά με την ερμηνεία της διαφοράς κλίσης που εμφανίζουν οι ευθείες στις γραφικές παραστάσεις F-Δl των δύο ελατηρίων, *μετά την απτική επαφή και επεξεργασία των ελατηρίων.*

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
2α.1.2-1	Η διαφορά κλίσης των ευθειών αποδίδεται στα διαφορετικά ελατήρια με αιτιολόγηση που «περιγράφει» το φυσικό μέγεθος σκληρότητα ελατηρίου	Μ1,Μ2,Μ4,Μ5,Μ7 Μ8,Μ9,Μ10,Μ11, Μ12,Μ13,Μ14, Μ15, Μ17	14
2α.1.2-2	Άλλες απαντήσεις που δεν κατέληξαν σε «περιγραφή» σκληρότητας / «Δεν ξέρω»	Μ3,Μ6,Μ16	3

Οι εκφράσεις που χρησιμοποιήθηκαν και «περιγράφουν» σκληρότητα είναι οι εξής: Το 1ο ελατήριο είναι πιο «σφιχτό», «δυνατό», «ζόρικο», «σκληρό», «ανοίγει πιο δύσκολα», «έχει μεγαλύτερη αντίσταση», το 2ο είναι πιο «ελαστικό», «ανοίγει πιο εύκολα» κλπ. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της κατηγορίας απαντήσεων είναι η στιχομυθία 2α.1.2-1.1 που ακολουθεί:

Στιχομυθία 2α.1.2-1.1: Η διαφορά των κλίσεων αποδίδεται στη *σκληρότητα*

Ε: Για πιάσε λίγο τα ελατήρια, πιάστα και τέντωσέ τα… κάνε κάτι
Ο μαθητής τα περιεργάζεται, τα τεντώνει
Ε: Παρατηρείς κάτι;
Μ5: Αυτό έχει μεγαλύτερη αντίσταση
Ε: Ποιο είναι αυτό;
Μ5: Με το κόκκινο κορδελάκι
Ε: Με το κόκκινο κορδελάκι. Άρα μήπως μπορεί να είναι και κάτι άλλο; Το ότι

έχουμε δυο γραφικές παραστάσεις και δεν είναι ακριβώς ίδιες να το ξαναδούμε λοιπόν, που μπορεί να οφείλεται;
M5: Οφείλεται στο ότι το ένα ελατήριο έχει μεγαλύτερη αντίσταση
E: Αντίσταση που;
M5: Στο τέντωμα.

Στην δεύτερη ομάδα του πίνακα 2α.1.2 υπήρξαν τρεις μαθητές οι οποίοι έδωσαν άλλες απαντήσεις, που δεν απέδωσαν τη διαφορά κλίσης των ευθειών στο φυσικό μέγεθος σκληρότητα του ελατηρίου ή απάντησαν «Δεν ξέρω»: Ενδεικτική είναι η στιχομυθία 2α.1.2-2.1 που ακολουθεί:

Στιχομυθία 2α.1.2-2.1: Δεν ξέρω

M6: Είναι ανάλογα ποσά
E: Είναι ανάλογα ποσά… Και τα δύο ελατήρια
M6: Ωραία
E: Το ένα όμως έχει αυτή τη γραφική παράσταση και το άλλο έχει διαφορετική γραφική παράσταση
M6: Δεν ξέρω τι να σας πω…

2α.2. *Σκληρότητα ελατηρίου μέσω ορισμού*

Στην υποκατηγορία αυτή εισάγεται μέσω της ερώτησης B4 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Ένα ελατήριο θεωρείται πιο «σκληρό» από κάποιο άλλο όταν για την ίδια δύναμη επιμηκύνεται λιγότερο από το άλλο. Ποιο από τα ελατήρια (1) και (2) θεωρείς σκληρότερο;», η έννοια *σκληρότητα* του ελατηρίου και ζητείται από τους μαθητές να διαπιστώσουν ποιο από τα ελατήρια που χρησιμοποίησαν θεωρούν σκληρότερο, αξιοποιώντας τον πίνακα τιμών.

Όλοι οι μαθητές στην ερώτηση αυτή απάντησαν ότι θεωρούν σκληρότερο το 1ο ελατήριο (αντιστοιχεί στην ευθεία με κόκκινο χρώμα) όπως φαίνεται π.χ. και στη στιχομυθία 2α.2:

Στιχομυθία 2α.2: Το 1ο ελατήριο (κόκκινο) είναι πιο σκληρό

M12: Το κόκκινο
E: Γιατί το θεώρησες πιο σκληρό; Επειδή το έπιασες στο χέρι σου; Μπορείς αυτό να το διαπιστώσεις από κάπου αλλού; Απ΄ τις τιμές που έχεις πάρει ας πούμε; Τι λέει η ερώτηση;
Είναι πιο «σκληρό», όταν για την ίδια δύναμη επιμηκύνεται λιγότερο από το άλλο. Βρες μια δύναμη που την έβαλες και στα δύο ελατήρια…
M12:Εεε … το 1N
E: Ναι, τι επιμήκυνση είχες στο 1N;

M12: Στο κόκκινο 4 και στο άλλο είχε 7
Ε: Οπότε;
M12: Πιο σκληρό είναι το κόκκινο, το 1ο

2α.3. *Σύνδεση σκληρότητας - γεωμετρικού προσδιορισμού κλίσης*

Στην τελευταία υποκατηγορία της πρώτης κατηγορίας του δεύτερου άξονα ανάλυσης, εξετάστηκε η δυσκολία που αντιμετωπίσανε οι μαθητές στη σύνδεση της σκληρότητας του ελατηρίου με το γεωμετρικό προσδιορισμό της κλίσης που αναπαριστάται στη γραφική παράσταση και περιγράφεται με το λεκτικό προσδιορισμό «πιο ψηλά», «πιο χαμηλά».

Οι απαντήσεις στην ερώτηση Β5 του φύλλου εργασίας (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Αν ένα ελατήριο είναι πιο «σκληρό» από ένα άλλο, η ευθεία πάει πιο «ψηλά» ή πιο «χαμηλά»;» αποτέλεσαν τη βάση για τις ομάδες απαντήσεων του πίνακα 2α.3. Ας σημειωθεί στο σημείο αυτό, ότι *όλοι* οι μαθητές έχουν προσδιορίσει ήδη όπως φαίνεται και από την προηγούμενη υποκατηγορία 2α.2 ότι το σκληρότερο ελατήριο είναι αυτό που αντιστοιχεί στην κόκκινη ευθεία.

Πίνακας 2α.3: Αναγνώριση της συσχέτισης της σκληρότητας του ελατηρίου με τον γεωμετρικό προσδιορισμό της κλίσης ευθείας που εδώ περιγράφεται με το λεκτικό προσδιορισμό «πιο ψηλά» και πιο «χαμηλά».

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
2α.3-1	Σωστή απάντηση χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού: «πιο ψηλά»	Μ1,Μ2,Μ3,Μ4, Μ5,Μ6, Μ7, Μ8, Μ9, Μ10, Μ11, Μ14, Μ15, Μ16,Μ17	15
2α.3-2	Σωστή απάντηση με υπόδειξη εκπαιδευτικού	Μ12, Μ13	2

Η συντριπτική πλειονότητα των μαθητών (δεκαπέντε μαθητές) όπως βλέπουμε στον πίνακα 2α.3 απάντησαν, χωρίς βοήθεια από την εκπαιδευτικό, ότι η ευθεία που αντιστοιχεί στο σκληρότερο ελατήριο πάει «πιο ψηλά» όπως π.χ. ο μαθητής Μ17 στη στιχομυθία 2α.3-1:

Στιχομυθία 2α.3-1: Σωστή απάντηση χωρίς βοήθεια από την εκπαιδευτικό

Μ17: Άμα είναι πιο σκληρό το ελατήριο πάει πιο ψηλά…
Ε: Ναι
Μ17: Άμα είναι….
Ε: Λιγότερο σκληρό

M17: Λιγότερο σκληρό, πάει πιο χαμηλά πιο κάτω.

Επίσης, παρατηρούμε ότι και στους δύο μαθητές που δεν έδωσαν αμέσως τη σωστή απάντηση (δες πίνακα 2α.3) η εκπαιδευτικός χρειάστηκε να τους υποδείξει ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που παριστούν τις ευθείες είναι απείρου μήκους (στιχομυθίες 2α.3-2.1 και 2α.3-2.2)

Στιχομυθία 2α.3-2.1: Σωστή απάντηση με υπόδειξη της εκπαιδευτικού

M12: Ίδια θεωρώ..
Ε: Αυτό εδώ είναι άπειρο, μη συγκρίνεις… δεν υπάρχει τέλος στις ευθείες
M12: Α
Ε: Κοιτάς τις ευθείες … η ευθεία πάει πιο ψηλά ή πιο χαμηλά
M12: Εε, του κόκκινου πάει πιο ψηλά.

Στιχομυθία 2α.3-2.2: Σωστή απάντηση με υπόδειξη της εκπαιδευτικού

Ε: Το κόκκινο ελατήριο με την κόκκινη γραμμή είπες είναι πιο σκληρό, έτσι; Η ευθεία του πάει πιο ψηλά η πιο χαμηλά;
M13: Πιο χαμηλά
Ε: Οι ευθείες δεν έχουν τέλος
M13: Αα…
Ε: Χωρίς να κοιτάς τα άκρα των ευθειών …
M13: Είναι ίσες
Ε: Ποια ευθεία πάει πιο ψηλά από δω … και ποια πάει πιο χαμηλά;
M13: Η κόκκινη πάει πιο ψηλά

2β. *Σύνδεση γεωμετρικού - αλγεβρικού προσδιορισμού κλίσης*

Η κατηγορία αυτή αφορά καθαρά στο πεδίο των μαθηματικών και διερευνά τη δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στη συσχέτιση της γεωμετρικής απεικόνισης της κλίσης ευθείας, μέσω του λεκτικού προσδιορισμού «πιο ψηλά», «πιο χαμηλά», με τον αλγεβρικό συντελεστή ευθείας $α$ της συνάρτησης y=αx.

Η κατηγορία αναλύθηκε μέσω των απαντήσεων των μαθητών στην ερώτηση Β6 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Στη συνάρτηση y=αx πιο γράμμα μας δείχνει αν η ευθεία θα πάει πιο «ψηλά» ή πιο «χαμηλά»; Πως ονομάζουμε στα μαθηματικά το γράμμα αυτό;». Παρατηρώντας τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον πίνακα 2β.1, διαπιστώνουμε ότι λιγότεροι από τους μισούς μαθητές (μόνο οκτώ) ήταν σε θέση να απαντήσουν σωστά χωρίς καμία παρέμβαση από την εκπαιδευτικό, ότι το γράμμα που προσδιορίζει τη γεωμετρία μιας ευθείας στη συνάρτηση y=αx είναι το *α* (δες, στιχομυθία 2β.1-1).

Πίνακας 2β.1: Αναγνώριση της συσχέτισης της γεωμετρικής απεικόνισης της κλίσης ευθείας μέσω του λεκτικού προσδιορισμού «πιο ψηλά», «πιο χαμηλά» με τον αλγεβρικό συντελεστή ευθείας *α* της συνάρτησης y= αx.

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
2β.1-1	Σωστή απάντηση χωρίς παρέμβαση της εκπαιδευτικού: Το γράμμα είναι το *α*	Μ3,Μ4,Μ5, Μ6, Μ8, Μ9,Μ10, Μ12	8
2β.1-2	Σωστή απάντηση με παρέμβαση εκπαιδευτικού	Μ1, Μ11, Μ14,Μ17	4
2β.1-3	Λάθος απάντηση /Καμία απάντηση	Μ2,Μ7,Μ13, Μ15,Μ16,	5

Στιχομυθία 2β.1-1: Σωστή απάντηση χωρίς παρέμβαση της εκπαιδευτικού

Ε: Πιο γράμμα στην y=αx θα μας δείξει αν η ευθεία θα πάει πιο «ψηλά» ή πιο «χαμηλά»;
Μ3: Το α… που ονομάζεται κλίση.

Επίσης, από τον πίνακα 2β.1 βλέπουμε ότι τέσσερις μαθητές έδωσαν τη σωστή απάντηση με παρέμβαση της εκπαιδευτικού. Η δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές αυτοί φάνηκε να σχετίζεται με την επάρκεια του μαθηματικού τους υποβάθρου. Αυτό διαπιστώνεται με τη διαδοχική επιλογή και συσχέτιση των αλγεβρικών όρων x,y και α με τη γεωμετρική απεικόνιση της κλίσης της ευθείας που περιγράφεται με τους λεκτικούς προσδιορισμούς «πιο ψηλά» και «πιο χαμηλά». Η παρέμβαση της εκπαιδευτικού συνίσταται στην επιβεβαίωση ή όχι του σωστού αλγεβρικού όρου. Ενδεικτικά αναφέρεται η στιχομυθία 2β.1-2:

Στιχομυθία 2β.1-2: Σωστή απάντηση με παρέμβαση της εκπαιδευτικού

Μ11:Το x
Ε: Το x μας δείχνει αν θα πάει πιο ψηλά ή πιο χαμηλά;
Μ11: Το y
Ε: Το y; Πως ονομάζουμε το γράμμα που μας δείχνει αν πάει πιο ψηλά ή χαμηλά μια ευθεία;
Μ11: Το α
Ε: Ποιο απ΄ όλα είναι;
Μ11: Νομίζω ότι είναι το α
Ε: Το α. Πως το ονομάζουμε;
Μ11: Εεε … α

Τέλος, οι πέντε μαθητές της τελευταίας ομάδας του πίνακα 2β.1 δεν έδωσαν καμία απάντηση ή έδωσαν λάθος απάντηση, γεγονός που προφανώς οφείλεται στην έλλειψη του κατάλληλου μαθηματικού υποβάθρου. Ενδεικτική η επόμενη στιχομυθία 2β.1-3:

Στιχομυθία 2β.1-3: Λάθος απάντηση /Καμία απάντηση

Μας δείχνει τοooo… το y, αν θα πάει πιο ψηλά νομίζω…
Ε: Το y μας δείχνει; αν θα πάει πιο ψηλά;
Μ15: Το x πάει εδώ και το y πάει εδώ (*δείχνει τους άξονες*)
Ε: Ναι…
Μ15: Ναι, το y νομίζω

Στην ίδια ερώτηση Β6 ζητήθηκε, επίσης, από τους μαθητές να αναφέρουν την ονομασία του αλγεβρικού συντελεστή ευθείας *α*. Οι απαντήσεις των μαθητών παρουσιάζονται στον πίνακα 2β.2:

Πίνακας 2β.2: Απόδοση λεκτικής περιγραφής του αλγεβρικού συντελεστή ευθείας α

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
2β.2-1	Αναφορά της λέξης *κλίση*	Μ3,Μ4,Μ5, Μ6, Μ8,Μ10,Μ12	7
2β.2-2	Μη αναφορά της λέξης *κλίση*	Μ1,Μ2,Μ7,Μ9, Μ11, Μ13, Μ14, Μ15,Μ16, Μ17	10

Η πλειονότητα των μαθητών (10 μαθητές στους 17) και στο ερώτημα αυτό δε φάνηκε να γνωρίζει ότι ο αλγεβρικός συντελεστής της ευθείας *α* ονομάζεται *κλίση*, δυσκολία που σχετίζεται κι εδώ με το μαθηματικό υπόβαθρο των μαθητών.

2γ. *Λεκτική συσχέτιση του φυσικού μεγέθους «σκληρότητα ελατηρίου» και της μαθηματικής έννοιας «κλίση ευθείας».*

Η τρίτη και τελευταία κατηγορία του δεύτερου άξονα, εξετάζει τη δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στη διατύπωση υπό μορφή συμπεράσματος, της σχέσης που βρήκαν μεταξύ των μεγεθών *σκληρότητα ελατηρίου – κλίση ευθείας* στις προηγούμενες παρατηρήσεις τους.

Η ανάλυση της κατηγορίας αυτής έγινε με βάση τις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση Β7 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Συσχετίστε τις κλίσεις των ευθειών με τις σκληρότητες των ελατηρίων και συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση: ¨Το ελατήριο με τη μεγαλύτερη σκληρότητα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της ευθείας με τη ……………………………………. κλίση ενώ το ελατήριο με τη μικρότερη σκληρότητα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της ευθείας με τη ………………………. κλίση.¨». Στον παρακάτω πίνακα 2γ καταγράφονται και παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών.

Πίνακας 2γ: Λεκτική συσχέτιση του φυσικού μεγέθους *σκληρότητα ελατηρίου* και της μαθηματικής έννοιας *κλίση ευθείας* ανάλογα με το βαθμό παρέμβασης της εκπαιδευτικού

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
2γ-1	Σωστή απάντηση χωρίς παρέμβαση της εκπαιδευτικού: *μεγαλύτερη- μικρότερη*	Μ5, Μ6, Μ8, Μ9,Μ10,Μ11, Μ12	7
2γ-2	Σωστή απάντηση με διευκρίνηση της εκπαιδευτικού Διευκρίνιση: Η κλίση δείχνει αν η ευθεία πάει πιο *ψηλά* ή πιο *χαμηλά*	Μ1,Μ2,Μ3, Μ4, Μ7, Μ13, Μ14, Μ15	8
2γ-3	Λάθος απάντηση : *μικρότερη-μεγαλύτερη*	Μ16, Μ17	2

Στην πρώτη ομάδα του πίνακα 2γ επτά μαθητές σημείωσαν τη σωστή απάντηση στο φύλλο εργασίας τους χωρίς να χρειαστεί καμία παρέμβαση από την εκπαιδευτικό. Οι μαθητές αυτοί τοποθέτησαν σωστά τους προσδιορισμούς της κλίσης *μεγαλύτερη - μικρότερη* στα κενά του κειμένου αναφερόμενοι, αντίστοιχα, στη μεγαλύτερη σκληρότητα – μικρότερη σκληρότητα των ελατηρίων, όπως μπορούμε να δούμε στη στιχομυθία 2γ-1:

Στιχομυθία 2γ-1: Σωστή απάντηση χωρίς παρέμβαση της εκπαιδευτικού

Μ8: *Σημειώνει στο πρώτο κενό τη λέξη μεγαλύτερη και στο δεύτερο τη λέξη μικρότερη.*
Ε: Άρα όσο πιο σκληρό είναι το ελατήριο η κλίση του τι κάνει;
Μ8: Είναι μεγαλύτερη κλίση.

Επίσης, στη δεύτερη ομάδα (δες πίνακα 2γ) βλέπουμε οκτώ μαθητές να επιτυγχάνουν σωστή απάντηση με διευκρινιστική παρέμβαση της εκπαιδευτικού**.** Η εκπαιδευτικός χρειάστηκε να παρέμβει περισσότερο, για να διευκρινίσει στους μαθητές αυτούς ότι η έννοια *κλίση* δείχνει αν μια ευθεία θα πάει πιο *ψηλά* ή πιο *χαμηλά* (διευκρίνιση σε σχέση με τον ορισμό), είτε γιατί οι μαθητές αυτοί είχαν προβλήματα στην κατανόηση της έννοιας κλίση , είτε γιατί είχαν άγνοια μόνο στη λεκτική περιγραφή της όπως βλέπουμε και στον πίνακα 2β.2. Ενδεικτική είναι η στιχομυθία 2γ-2 που ακολουθεί:

Στιχομυθία 2γ-2: Σωστή απάντηση με διευκρίνιση εκπαιδευτικού- Σύγχυση στην έννοια της κλίσης

Ε: Καταρχήν να ρωτήσω η κλίση τι μας δείχνει στην ευθεία;
Μ4: Το μήκος
Ε: Το μήκος της ευθείας μας δείχνει η κλίση;
Μ4: Α, το πόσο.. τι είναι… πόσο… παρα…, πόσο αυτό θα πάει ψηλά ή αυτό χαμηλά.
Ε: Ωραία, άρα τι σου λέει : «Το ελατήριο με τη μεγαλύτερη σκληρότητα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της ευθείας με την;…….. κλίση.» Την μεγαλύτερη ή τη μικρότερη σα να λέμε…
Μ4: Τη μικρότερη… Α, με τη μεγαλύτερη.

Τέλος, μόνο δύο μαθητές έδωσαν λάθος απάντηση (*μικρότερη-μεγαλύτερη*) στην ερώτηση Β7, αντιστοιχίζοντας την μεγαλύτερη κλίση ευθείας στη μικρότερη σκληρότητα ελατηρίου και το αντίστροφο όπως φαίνεται στο παράδειγμα της στιχομυθία 2γ-3:

Στιχομυθία 2γ-3: Λάθος απάντηση- Σύγχυση στην έννοια της κλίσης

Ε: Ποια έχει πιο μεγάλη κλίση; Όταν λέμε κλίση τι εννοούμε;
Μ17: Πιο μεγάλη ευθεία
Ε: Οι ευθείες φτάνουν μέχρι το άπειρο…
Μ17: Α, εε… πιο μεγάλη κλίση;
Ε: Τι σημαίνει πιο μεγάλη κλίση στα μαθηματικά;
Μ17: Η πράσινη έχει…
Ε: Πιο μεγάλη κλίση;
Μ17: Ναι
Ε: Γιατί;
Μ17: Γιατί η πράσινη είναι σα να πέφτει και πάει να ακουμπήσει εδώ π.χ.
Ε: Άρα είναι πιο μεγάλη η κλίση της;
Μ17: Ναι
Ε:Ωραία… γράψε
Ο μαθητής σημειώνει «μικρότερη», «μεγαλύτερη» στα κενά για το ελατήριο μεγαλύτερης και μικρότερης σκληρότητας αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ξανά να εμφανίζεται σύγχυση στην έννοια της κλίσης ευθείας εξαιτίας του μήκους του σχεδιασμένου ευθύγραμμου τμήματος που αναπαριστά την ευθεία στον μαθητή Μ17 αλλά ακόμη και στον μαθητή Μ4 που τελικά έδωσε σωστή απάντηση στην ερώτηση Β7.

3. Εφαρμογή και αξιοποίηση του Μαθηματικού Μοντέλου στο Φυσικό Κόσμο

3α. *Χρήση υλικών - Προτάσεις σύνθεσης δυναμόμετρου.*

Η ανάλυση της κατηγορίας αυτής βασίζεται στις απαντήσεις των συμμετεχόντων μαθητών στην Ερώτηση Γ1 (δες, Παράρτημα: Φύλλο Εργασίας Μαθητή): «Χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που αποκτήσατε για το νόμο του Hook και έχοντας στη διάθεσή σας τα υλικά που βρίσκονται στον πάγκο (πηχάκια, χαρτοταινία, πινέζες, βαράκια, ελατήρια κλπ) να περιγράψετε έναν τρόπο για να κατασκευάσετε κι εσείς ένα δυναμόμετρο».

Όπως φαίνεται και στον πίνακα 3α που καταγράφει τις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση Γ1, η πλειονότητα των μαθητών έφθασε τελικά στη σωστή ιδέα της κατακόρυφης διάταξης του δυναμόμετρου, επηρεασμένη κατά τα φαινόμενα από την πειραματική διαδικασία που είχε προηγηθεί και στην οποία είχαν χρησιμοποιήσει κατακόρυφο ελατήριο πλάι σε κατακόρυφο βαθμονομημένο άξονα.

Πίνακας 3α: Απαντήσεις των μαθητών αναφορικά με τον τρόπο που θα χρησιμοποιήσουν τα υλικά τους για να συνθέσουν το δυναμόμετρο.

α/α	Περιγραφή κατηγορίας	Μαθητές	Συχνότητα
3α-1	Κατακόρυφο ελατήριο πλάι σε κατακόρυφο άξονα που θα βαθμονομηθεί για απευθείας μετρήσεις	M1,M2,M4, M8,M9,M10, M11,M12,M13, M14,M17	11
3α-2	Κατακόρυφο ελατήριο με χρήση χάρακα για μέτρηση επιμηκύνσεων και παράλληλη αξιοποίηση γραφικής παράστασης για εύρεση άγνωστης δύναμης	M6	1
3α-3	Κατασκευές χωρίς νόημα/ Αδυναμία κατασκευής	M5,M15,M16/ M3,M7	5

Πιο συγκεκριμένα, έντεκα μαθητές απέδωσαν την ιδέα του δυναμόμετρου ως ένα κατακόρυφο ελατήριο πλάι σε κατακόρυφο άξονα που θα βαθμονομηθεί και στον οποίο θα γίνονται απευθείας μετρήσεις της άγνωστης δύναμης (δες, στιχομυθία 3α-1). Ένας μαθητής επίσης (M6), πρότεινε την ίδια ιδέα του κατακόρυφου ελατηρίου, συνοδευόμενη όμως από την παράλληλη χρήση ενός χάρακα για την εύρεση των επιμηκύνσεων του ελατηρίου εξαιτίας της άγνωστης δύναμης και την ταυτόχρονη αξιοποίηση της υπάρχουσας γραφικής παράστασης για την εύρεση της ζητούμενης δύναμης (δες, στιχομυθία 3α-2)

Στιχομυθία 3α-1: Κατακόρυφο ελατήριο πλάι σε κατακόρυφο άξονα που θα βαθμονομηθεί για απευθείας μετρήσεις της άγνωστης δύναμης

M14: Μμμ … θα πάρουμε το χαρτί
Ε: θα πάρουμε το χαρτί, τη χαρτοταινία δηλαδή…
M14: Ναι… θα την κολλήσουμε σε ένα από τα πηχάκια
Ε: Θα την κολλήσουμε στα πηχάκια…. ωραία… που;
M14: Εδώ πάνω, με σελοτέιπ…(*Κολλάει τη χαρτοταινία κατά μήκος στο πηχάκι*)
Ε: Ωραία… και μετά; … Την κολλήσαμε…. Να χρησιμοποιήσεις το νόμο του Χουκ, όπου τι λέει ο νόμος του Χουκ; Τι σχέση έχει η δύναμη και η επιμήκυνση;
M14: Μήπως να πάρουμε πινέζες …. να βάλουμε μήπως εδώ μια τρύπα
Ε: Που εδώ;
M14: Εδώ… (*Δείχνει ένα σημείο στη μια άκρη από το πηχάκι*)
Ε: Ναι… να κάνουμε μια τρύπα και;
M14: Και μετά να πάρουμε τα ελατήρια
Ε: Πάρε ένα ελατήριο … ωραία…
M14: Να το βάλουμε στην τρύπα που θα ανοίξουμε (*να κρεμάσει το ελατήριο από την καρφωμένη πινέζα, κατά μήκος στο πηχάκι*)
Ε: Να ανοίξουμε λες μια τρύπα
M14: Ναι
Ε: Ωραία, έχουμε και καρφάκια … πες μου πως θα το κάνουμε… κάντο εσύ…
Καρφώνει ένα καρφάκι στη θέση της πινέζας στην κορυφή από το πηχάκι
Ε:Και τώρα τι θα κάνεις;
M14: Θα βάλουμε αυτό εδώ…
Ε: Κρεμάς το ελατήριο… ωραία (*Ο μαθητής κρεμάει κατακόρυφα το ελατήριο από το καρφάκι που έχει τοποθετηθεί στην πάνω άκρη από το πηχάκι. Από πίσω του βρίσκεται κολλημένη η λευκή χαρτοταινία*)

Στιχομυθία 3α-2: Κατακόρυφο ελατήριο με χρήση χάρακα για μέτρηση επιμηκύνσεων και παράλληλη χρήση γραφικής παράστασης για εύρεση της άγνωστης δύναμης

Ε: Πως θα μου δείξεις τώρα ….Έχεις άγνωστες μάζες… να δείχνει πόσο είναι η κάθε μία μάζα … (*Παύση*)… Τι βάρος ασκείται στην καθεμία;
M6: Ας πούμε θα παίρναμε αυτό…
Ε: Ναι, αλλά δε θα ξέρεις πόσα γραμμάρια είναι…
M6: Ναι, θα το βάζαμε (*κρεμάει το βαράκι από το ελατήριο*) και θα υπολογίζαμε…
Ε: Τι θα υπολογίζαμε;
M6: Το μήκος βασικά θα βλέπαμε πόσο είναι…
Ε: Ναι..
M6: Εδώ πόσο είναι; 20,5…λοιποοον..
Ε: Και μετά;
M6: Μετά… (*Παύση*)… Α, θα κάναμε αυτό που κάναμε με την τέτοια (γραφική παράσταση)…
Ε: Θα χρησιμοποιήσεις τη γραφική παράσταση;
M6: Ναι
Ε: Σωστά, σωστός είναι ο τρόπος, αλλά τώρα θέλουμε να το κάνουμε χωρίς γραφική παράσταση

Ας σημειωθεί, στο σημείο αυτό, ότι ο μαθητής Μ6 στη συνέχεια της διαδικασίας μετά από προτροπή της εκπαιδευτικού, προσπάθησε να βαθμονομήσει το δυναμόμετρο όπως οι μαθητές της 1ης ομάδας του πίνακα 3α και να επιτύχει απευθείας μέτρηση των άγνωστων δυνάμεων.

Τέλος, υπήρξαν και πέντε μαθητές (δες, πίνακα 3α) στο σύνολο των δεκαεπτά, οι οποίοι δήλωσαν αδυναμία να υλοποιήσουν την κατασκευή του δυναμόμετρου ή η σύνθεση που δημιούργησαν με τα υλικά που τους δόθηκαν στερούνταν νοήματος. Οι μαθητές αυτής της ομάδας δεν έλαβαν υπόψη σε μεγάλο βαθμό την πειραματική διαδικασία που είχε προηγηθεί και προχώρησαν αυτοσχεδιάζοντας χωρίς σκοπό. Ορισμένοι μάλιστα όπως ο Μ5 (στιχομυθία 3α-3.1) και Μ15 φαίνεται επιπλέον να επηρεάζονται και από την ιδέα του ζυγού με ίσους βραχίονες για την εύρεση άγνωστων βαρών, ιδέα που προέρχεται από την καθημερινή ζωή:

Στιχομυθία 3α-3.1: Κατασκευή χωρίς νόημα – Επίδραση της ιδέας ***ζυγαριά***

Ε: Έχω το αντικείμενο που θέλω να μετρήσω το βάρος του, είναι η κασετίνα που είχαμε πιο πριν, ωραία. Το πηχάκι έχει γίνει κάπως **σαν ζυγαριά** που κρέμεται από ελατήριο
Μ5: Από τη μία μεριά θα κρεμάσουμε την κασετίνα
Ε: Ναι, να βάλουμε ένα καρφάκι και να την κρεμάσουμε
Μ5: Και από την άλλη μεριά θα ανοίξουμε μια τρύπα και θα βάλουμε ένα βαράκι που να αντιστοιχεί στο βάρος της κασετίνας και μετά αυτό που θα βγει θα το διαιρέσουμε με το 2

3β. *Βαθμονόμηση δυναμόμετρου.*

Η δεύτερη κατηγορία του τελευταίου άξονα ανάλυσης, προέκυψε ως φυσική συνέχεια της ανάλυσης των απαντήσεων των μαθητών στην προαναφερθείσα ερώτηση Γ1: «Χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που αποκτήσατε για το νόμο του Hook και έχοντας στη διάθεσή σας τα υλικά που βρίσκονται στον πάγκο (πηχάκια, χαρτοταινία, πινέζες, βαράκια, ελατήρια κλπ) να περιγράψετε έναν τρόπο για να κατασκευάσετε κι εσείς ένα δυναμόμετρο». Εξαιτίας της συνθετότητας των απαντήσεων των μαθητών κρίθηκε σκόπιμο για την καλύτερη μελέτη τους, η κατηγορία να χωριστεί σε τρεις υποκατηγορίες:

3β.1. *Δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στον προσδιορισμό του σημείου μηδέν στην κλίμακα του δυναμόμετρου*

Οι ομάδες απαντήσεων των δώδεκα μαθητών (Σημείωση: οι υπόλοιποι πέντε, από τους δεκαεπτά μαθητές εγκατέλειψαν την προσπάθεια μετά το αρχικό στάδιο σχεδιασμού του δυναμόμετρου, δες πίνακα 3α) στην υποκατηγορία αυτή μαζί με τα κυριότερα λάθη που σημειώθηκαν, παρουσιάζονται στον πίνακα 3β.1. Στον πίνακα βλέπουμε ότι μόνο τέσσερις μαθητές (δες, στιχομυθία 3β.1-1) στους δώδεκα που συνέχισαν στο στάδιο της βαθμονόμησης του δυναμόμετρου, μπόρεσαν να επιτύχουν τον προσδιορισμό της ένδειξης *0* στην κλίμακα του δυναμόμετρου χωρίς να χρειαστεί καμία παρέμβαση της εκπαιδευτικού.

Πίνακας 3β.1: Τοποθέτηση της ένδειξης *0* (μηδέν) στην κλίμακα του δυναμόμετρου-Λάθη που σημειώθηκαν

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών		Μαθητές	Συχνότητα
3β.1-1	Χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού		M8,M12, M14, M17	4
3β.1-2	Με μικρή υπόδειξη εκπαιδευτικού	Λάθος 1: Τοποθέτηση *0* τυχαία	M2,M6,M13	3
		Λάθος 2: Τοποθέτηση *1* αντί *0* στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου	M1,M4,M9, M10,M11	5

Στιχομυθία 3β.1-1: Θέση σημείου *μηδέν* χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού

Ε: Μπορείς να μου πεις που θα βάλεις το 0Ν, 1Ν;
Μ12: Από εδώ αρχίζει… από εδώ που αρχίζει… (*Δείχνει την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου στην οποία είναι προσαρμοσμένος ένας μεταλλικός δείκτης-βελόνα*)
Ε:Εδώ που αρχίζει ο δείκτης
Μ12: Ναι
Ε: Εδώ τι θα βάλεις δηλαδή; 1Ν;
Μ12: Μηδέν
Ε: Μηδέν, αφού δεν έχουμε κρεμάσει κάτι

Όσον αφορά στους υπόλοιπους μαθητές χρειάστηκε μικρή παρέμβαση από την εκπαιδευτικό για να αντιμετωπιστούν δύο κυρίως είδη λαθών που εμφανίστηκαν:

Στην πρώτη περίπτωση λάθους (δες, πίνακα 3β.1: Λάθος 1), τρεις μαθητές τοποθέτησαν τυχαία την ένδειξη «μηδέν» στην κλίμακα του δυναμόμετρου. Η εκπαιδευτικός υποστήριξε το συλλογισμό των μαθητών αυτών κυρίως με την εστίαση της προσοχής τους στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου το οποίο δεν έφερε την επίδραση καμιάς δύναμης, όπως μπορούμε να διακρίνουμε στη στιχομυθία 3β.1-2.1:

Στιχομυθία 3β.1-2.1: Λάθος 1:Τοποθέτηση *μηδέν* τυχαία

Ε: Το μηδέν που θα το βάλω καταρχήν;
Μ2: Εδώ (*δείχνει κάπου πιο πάνω τυχαία*)
Ε: Δηλαδή το μηδέν δε θα έχει σχέση με το ελατήριο;
Μ2: Αα, ε, .. (*Παύση*)…
Ε: Τώρα πάνω στο ελατήριο έχω κρεμασμένο βαράκι;
Μ2: Όχι
Ε: Άρα, τι δείχνει τώρα το ελατήριο;
Μ2: Δείχνει το μηδέν
Ε: Μηδέν. Οπότε που θα βάλω το μηδέν;
Μ2: Εδώ (*Δείχνει το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου*)

Στη δεύτερη περίπτωση λάθους (δες πίνακα 3β.1: Λάθος 2), πέντε μαθητές τοποθέτησαν την ένδειξη *1* αντί *0* στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Η εκπαιδευτικός υποστήριξε το συλλογισμό των μαθητών αυτών με την εστίαση της προσοχής τους στο γεγονός ότι το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος χωρίς να ασκείται πάνω του καμιά δύναμη (στιχομυθία 3β.1-2.2)

Στιχομυθία 3β.1-2.2: Λάθος 2: Τοποθέτηση *1* αντί *0* στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου

Ε: Εσύ αποφασίζεις… από πού θα ξεκινήσεις;
Μ10: Από δω πέρα (*Δείχνει την άκρη του ελατηρίου με το άγκιστρο*)
Ε: Από το δείκτη καλύτερα του ελατηρίου, για να είναι πιο σίγουρο
Μ10: Εντάξει, από το δείκτη
Ε: Τι θα βάλεις εδώ που είναι ο δείκτης;
Μ10: Το 1Ν
Ε: Γιατί; Υπάρχει βάρος πάνω στο ελατήριο;
Μ10: Όχι
Ε: Άρα;…
Μ10: Μηδέν

3β.2. *Δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στον προσδιορισμό της πρώτης ένδειξης μετά το μηδέν, στην κλίμακα του δυναμόμετρου*

Το ίδιο μοτίβο παρατηρείται και σ' αυτή την υποκατηγορία. Κι εδώ μόνο τέσσερις μαθητές (δες, πίνακα 3β.2) βρήκαν σωστά χωρίς την παρέμβαση της εκπαιδευτικού, τη θέση της πρώτης ένδειξης (μετά το μηδέν) στην κλίμακα του δυναμόμετρου. Οι μαθητές αυτοί ανάρτησαν μια γνωστή μάζα (μάζα αναφοράς) στο ελατήριο και σημειώσανε το βάρος της στη θέση που ισορρόπησε το ελατήριο. Ενδεικτική αυτής της ομάδας μαθητών είναι η στιχομυθία 3β.2-1:

Πίνακας 3β.2: Τοποθέτηση της πρώτης ένδειξης στην κλίμακα του δυναμόμετρου- Λάθη που σημειώθηκαν

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών		Μαθητές	Συχνότητα
3β.2-1	Σωστός τρόπος: Με χρήση μάζας αναφοράς (Χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού)		M4,M6,M8, M9	4
3β.2-2	Χωρίς χρήση μάζας αναφοράς (Με παρέμβαση εκπαιδευτικού)	Λάθος 1: Τοποθέτηση τυχαία	M10,M11, M12,M13, M14	5
		Λάθος 2: Τοποθέτηση τιμής με βάση τις ενδείξεις χάρακα	M1,M2,M17	3

Στιχομυθία 3β.2-1: Χρήση μάζας αναφοράς χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού

Ε: Ωραία. Πες μου με ποιο τρόπο θα κάνω τη βαθμονόμηση, δηλαδή που θα βάλω 1N, 2N, 3N
M8: Ας πούμε βάζουμε το βαράκι (*50 γραμμαρίων*) εδώ (κρεμάει το βαράκι)
Ε: Αυτό το βαράκι είναι 50 γραμμάρια
M8: Το βελάκι πάει εδώ. Εδώ είναι 50 γραμμάρια, δηλαδή πόσα Νιούτον είναι;
Ε: Μισό Νιούτον… Άρα κρεμάσαμε το γνωστό βαράκι και σημειώνουμε στην άκρη του δείκτη 0,5 Νιούτον;
M8: Ναι

Οι υπόλοιποι οκτώ μαθητές για να ολοκληρώσουν τον προσδιορισμό της πρώτης ένδειξης μετά το μηδέν στην κλίμακα του δυναμόμετρου, χρειάστηκαν μικρή παρέμβαση από την εκπαιδευτικό για να αντιμετωπιστούν κι εδώ δύο είδη λαθών που εμφανίστηκαν.

Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη περίπτωση λάθους (δες πίνακα 3β.2: Λάθος 1), πέντε μαθητές τοποθέτησαν τυχαία την πρώτη τιμή στην κλίμακα του δυναμόμετρου. Οι μαθητές της ομάδας αυτής δε λάβανε υπόψη τους ότι για την τοποθέτηση της πρώτης τιμής στην κλίμακα του δυναμόμετρου (μετά το μηδέν) είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουν μια γνωστή μάζα αναφοράς για να έχει φυσικό νόημα η τιμή, παραπλανημένοι ίσως από την βαθμονόμηση της ευθείας των φυσικών αριθμών στα μαθηματικά όπου η τοποθέτηση των αριθμών δεν αντιστοιχεί σε κάποιο φυσικό νόημα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της περίπτωσης λάθους αποτελεί η στιχομυθία 3β.2-2.1:

Στιχομυθία 3β.2-2.1: Τοποθέτηση τιμής τυχαία, χωρίς χρήση μάζας αναφοράς

Ε: Που θα βάλεις το 1Ν;
Μ10: Εδώ; (*στην τύχη*)
Ε: Και γιατί όχι εδώ;… Και γιατί όχι εδώ; (*δείχνει σε διάφορα σημεία*) Τι πρέπει να ξέρεις για να βάλεις την τιμή…
Μ10: Άρα βάζουμε 100
Ε: Πόσα Νιούτον είναι τα 100 γραμμάρια;
Μ10: Εε,… 0,1;
Ε: 0,1 κιλά. Νιούτον;
Μ10: 1
Ε: 1… Άρα κρεμάς λοιπόν το 1(Νιούτον)

Στη δεύτερη περίπτωση λάθους τρεις μαθητές (δες, πίνακα 3β.2: Λάθος 2), τοποθέτησαν την πρώτη τιμή μετά το μηδέν στην κλίμακα του δυναμόμετρου με βάση τις ενδείξεις ενός χάρακα, χωρίς να γίνεται κι εδώ χρήση μάζας αναφοράς. Και σ' αυτή την κατηγορία εμφανίζεται η ίδια δυσκολία δηλαδή, η απουσία φυσικού νοήματος από τις βαθμονομημένες τιμές με αποτέλεσμα να γίνεται από τους μαθητές ευθεία αντιστοίχηση της κλίμακας του δυναμόμετρου με την ευθεία των φυσικών αριθμών. Ενδεικτική αυτής της περίπτωσης λάθους είναι η στιχομυθία 3β.2-2.2 που ακολουθεί:

Στιχομυθία 3β.2-2.2: Τοποθέτηση τιμής με βάση τις ενδείξεις του χάρακα, χωρίς χρήση μάζας αναφοράς

Μ1: Θα βάλουμε το χάρακα εδώ στο μηδέν και λίγο πιο κάτω (είναι) το 1Ν (*εννοεί το 1cm του χάρακα*)
Ε: Και που ξέρεις ότι είναι το 1Ν; αν πάρω το άλλο ελατήριο κι αυτό θα δείξει 1; …ήταν διαφορετικά τα ελατήρια (Μεγάλη παύση).. Εδώ στον πίνακα (τιμών του κόκκινου ελατηρίου) όταν έχεις το 1 Νιούτον…
Μ1: Ναι;
Ε: Πόση επιμήκυνση έχεις στο ελατήριό σου;
Μ1: 4…θα πρεπε να βάλω το 4;
Ε: Το 1 Νιούτον τι βαράκι ήταν, πόσα γραμμάρια;
Μ1: 100
Ε: 100 γραμμάρια …(Μεγάλη παύση)…
Μ1: Να κρεμάσω το 100;
Ε: Δεν ξέρω…
Μ1: Να κρεμάσω πρώτα το 100…
Ε: …που είναι 1 Νιούτον… Έχουμε βάλει (σημειώσει) είπαμε, το μηδέν πιο πριν… τι λες τώρα να κάνεις;
Μ1: Θα βάλω το 100…
Ε: Ναι… (Παύση)…Άρα;
Μ1: το 1, βρήκαμε το 1(Ν)

3β.3. *Δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στον προσδιορισμό των υπόλοιπων ενδείξεων στην κλίμακα του δυναμόμετρου*

Το τελευταίο στάδιο της βαθμονόμησης του δυναμόμετρου στο οποίο οι μαθητές ολοκλήρωσαν την τοποθέτηση και των υπόλοιπων ενδείξεων στην κλίμακά του, αποτελεί το περιεχόμενο της υποκατηγορίας αυτής. Στους μαθητές ζητήθηκε σ' αυτό το στάδιο από την εκπαιδευτικό να δώσουν απαντήσεις με δύο τρόπους:

3β.3.1 *Δεν τέθηκε κανένας περιορισμός από την εκπαιδευτικό στο πλήθος των μαζών που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές.*

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών παρουσιάζεται στον πίνακα 3β.3.1. Όλες οι απαντήσεις των μαθητών ήταν σωστές και δόθηκαν μάλιστα χωρίς να χρειαστεί καμία παρέμβαση από την εκπαιδευτικό.

Πίνακας 3β.3.1: Τοποθέτηση των υπόλοιπων ενδείξεων στην κλίμακα του δυναμόμετρου -Εφαρμογή του νόμου του Hook χωρίς περιορισμό στις χρησιμοποιούμενες μάζες

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
3β.3.1-1	Χρήση διαδοχικών μαζών γνωστού βάρους -Χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού	M1,M4, M6,M8, M9,M10,M11,M12 , M13,M14,M17	11
3β.3.1-2	Μέτρηση της απόστασης μεταξύ των δύο πρώτων ενδείξεων και επανάληψή της -Χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού	M2	1

Οι έντεκα από τους δώδεκα μαθητές (δες, πίνακα 3β.3.1) εφάρμοσαν επιτυχώς το νόμο του Hook στον προσδιορισμό των υπόλοιπων ενδείξεων στην κλίμακα του δυναμόμετρου αναρτώντας διαδοχικά γνωστές μάζες στο ελατήριο και σημειώνοντας το βάρος τους στην κατάλληλη θέση. Ενδεικτικά αναφέρεται η στιχομυθία 3β.3.1-1:

Στιχομυθία 3β.3.1-1: Χρήση διαδοχικών μαζών γνωστού βάρους

M9: Άρα το 1 το γράφουμε εδώ (*Σημειώνει στο άκρο του ελατηρίου που κρέμεται το βαράκι 1N*) Και μετά το 2 εκεί στην παρακάτω θέση (*Κρεμάει βαράκι 2N*)
Ε: Κρεμάς τα 200 γραμμάρια
M9: Ναι
Ε:Και θα γράψουμε το 2 (*σημειώνουν 2N*). Το 3;
M9: Θα βάλουμε κι άλλο βαράκι

Ο ένας και μοναδικός μαθητής (Μ2) της δεύτερης ομάδας του πίνακα 3β.3.1 πραγματοποίησε μια πιο εξειδικευμένη εφαρμογή του νόμου του Hook για τον προσδιορισμό των υπόλοιπων ενδείξεων στην κλίμακα του δυναμόμετρου. Μετά την τοποθέτηση της ένδειξης 1Ν μέτρησε την απόσταση μεταξύ των θέσεων 0Ν και 1Ν (είναι οι δύο πρώτες ενδείξεις του στην κλίμακα) και επαναλαμβάνοντάς την διαδοχικά τοποθέτησε και τις υπόλοιπες ενδείξεις αυξημένες κατά 1Ν. Ακολουθεί η στιχομυθία 3β.3.1-2 του μαθητή Μ2:

Στιχομυθία 3β.3.1-2: Μέτρηση της απόστασης μεταξύ των δύο πρώτων ενδείξεων και επανάληψή της

Ε: Το σημειώνουμε (*Ο μαθητής σημειώνει με μολύβι 1Ν*)…Ωραία, τα δύο Newton που θα τα βάλουμε;
Μ2: Θα τα βάλουμε άλλες 4 γραμμές (εκατοστά) πιο κάτω
Ε: Θα μετρήσεις δηλαδή την απόσταση από το 0(Ν)μέχρι…
Μ2: Μέχρι το 1
Ε: το 1(Ν). Γιατί θα το κάνεις αυτό; Γιατί θα το βάλεις αυτό παρακάτω και θα βάλεις το 2;
Μ2: Γιατί είδαμε ότι τα ποσά είναι ανάλογα …

3β.3.2. *Η εκπαιδευτικός περιόρισε τη χρήση των μαζών που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές σε μία ή δύο το πολύ*

Ο περιορισμός αποσκοπεί σε μια πιο εξειδικευμένη εφαρμογή του νόμου του Hooke. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών παρουσιάζεται στον πίνακα 3β.3.2. Και σ' αυτόν τον τρόπο, όλοι οι μαθητές έδωσαν σωστές απαντήσεις χωρίς να χρειαστεί καμία παρέμβαση από την εκπαιδευτικό, με μόνη εξαίρεση έναν μαθητή που χρειάστηκε μια μικρή βοήθεια.

Σημείωση: Στο ερώτημα αυτό έχει ήδη απαντήσει επιτυχώς ο μαθητής Μ2 στον προηγούμενο τρόπο οπότε δε θα ληφθεί υπόψη η συμμετοχή του στο σύνολο των υπόλοιπων μαθητών, επομένως τώρα το σύνολο των μαθητών είναι 11.

Πίνακας 3β.3.2: Τοποθέτηση των υπόλοιπων ενδείξεων στην κλίμακα του δυναμόμετρου- Ειδική εφαρμογή του νόμου του Hooke με περιορισμό των χρησιμοποιούμενων μαζών

α/α	Ομάδες απαντήσεων μαθητών	Μαθητές	Συχνότητα
3β.3.2-1	Μέτρηση της απόστασης μεταξύ των δύο πρώτων ενδείξεων και επανάληψή της -	Μ1,Μ4, Μ6,Μ8, Μ9,Μ10,Μ11,Μ12	10

	Χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού	Μ14,Μ17	
3β.3.2-2	Μέτρηση της απόστασης μεταξύ των δύο πρώτων ενδείξεων και επανάληψή της - Μικρή παρέμβαση εκπαιδευτικού	Μ13	1

Πιο συγκεκριμένα, οι δέκα από τους έντεκα μαθητές (δες, πίνακα 3β.3.2) ανταποκρίθηκαν με επιτυχία στην απαίτηση της εκπαιδευτικού για μια πιο εξειδικευμένη εφαρμογή του νόμου του Hook στη βαθμονόμηση, πραγματοποιώντας την ακόλουθη διαδικασία: Μετά την τοποθέτηση δύο ενδείξεων στην κλίμακα του δυναμόμετρου μέτρησαν την απόσταση μεταξύ τους με το χάρακα και επαναλαμβάνοντάς την διαδοχικά τοποθέτησαν και τις υπόλοιπες ενδείξεις με την ανάλογη αύξηση όπως βλέπουμε π.χ. στη στιχομυθία 3β.3.2-1 που ακολουθεί:

Στιχομυθία 3β.3.2-1: Χωρίς παρέμβαση εκπαιδευτικού

Ε: Αν όμως τώρα τελειώσουν τα βαράκια και δεν έχεις άλλα… κανένα άλλο βαράκι, που θα βάλεις το 3;
Μ9: Θα βρω την απόσταση αυτών των δύο και θα …
Ε: Ποιων δύο;
Μ9: Του 1 και του 2
Ε: Θα βρεις την απόσταση και; Να μετρήσουμε πόσα εκατοστά είναι… (*μετράνε*) Η απόσταση αυτή είναι;
Μ9: Τέσσερα
Ε: Τέσσερα εκατοστά
Μ9: Και μετά από το 2N, τέσσερα εκατοστά πιο κάτω θα είναι το 3N.

Τέλος, η παρέμβαση της εκπαιδευτικού που χρειάστηκε στην περίπτωση του ενός μαθητή (δες, πίνακα 3β.3.2), αφορούσε κυρίως στην εστίαση της προσοχής του στο νόμο του Hook και στην υπενθύμιση της αναλογίας των μεγεθών δύναμη και επιμήκυνση.

Τελικά, βλέπουμε ότι οι μαθητές που ξεπέρασαν το εμπόδιο της αρχικής σύνθεσης του δυναμόμετρου με τα υλικά που τους δόθηκαν καθώς και το στάδιο του προσδιορισμού της 1ης τιμής μπόρεσαν όλοι να εφαρμόσουν το νόμο του Hook στη βαθμονόμηση της κλίμακας χωρίς να χρειαστούν την παρέμβαση της εκπαιδευτικού.

Συζήτηση αποτελεσμάτων- Συμπεράσματα

Στην έρευνα αυτή παρουσιάσαμε μια διδακτική πρόταση η οποία αποσκοπούσε στην αξιοποίηση των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών σχετικά με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των ανάλογων ποσών, στο πλαίσιο της φυσικής και συγκεκριμένα στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου του νόμου του Hooke, στη διερεύνησή του και στην εφαρμογή του στη μέτρηση άγνωστων δυνάμεων. Ο σκοπός ήταν οι μαθητές όσο το δυνατόν περισσότερο, να εμπλέξουν τις μαθηματικές τους γνώσεις γύρω από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των ανάλογων ποσών με τρόπο όμως που να διευκολύνει τη χρήση και ανάδειξη κυρίως των δομικών δεξιοτήτων των μαθηματικών στη φυσική. Στην πορεία υλοποίησης της πρότασης καταγράφηκαν τα σημαντικά σημεία και οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές στα τρία αυτά στάδια της διαδικασίας τα οποία με τη σειρά τους αντιστοιχίζονταν στα τρία ερευνητικά ερωτήματα.

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε μερικά θέματα που αναδείχθηκαν σε σχέση με το πρώτο ερευνητικό μας ερώτημα: «Μπορεί η επεξεργασία κατάλληλων πειραματικών δεδομένων με τη συνεισφορά των πολλαπλών αναπαραστάσεων της μαθηματικής έννοιας των ανάλογων ποσών να οδηγήσει τους μαθητές στην κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου του νόμου του Hooke;».

Οι μαθητές που είχαν ευχέρεια στη «μετάφραση» μεταξύ των αναπαραστάσεων (καλή κατανόηση της συσχέτισης του γραφήματος με τη μαθηματική έννοια των ανάλογων ποσών καθώς και της συσχέτισης του γραφήματος με τον αλγεβρικό φορμαλισμό) φάνηκε ότι μπορούν να αναγνωρίσουν τη συσχέτιση αυτή ακόμη και μέσα στο πλαίσιο της φυσικής και να οδηγηθούν με τον τρόπο αυτό στην τελική κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου. Το γεγονός αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με την έρευνα των Potgieter et al (2008) στην οποία βρέθηκε ότι όπου υπήρχε καλή αλγεβρική βάση των φοιτητών χημείας στα μαθηματικά αυτό αντανακλάστηκε στην ευκολία χειρισμού της αντίστοιχης χημικής εξίσωσης και όπου υπήρχε έλλειψη διασύνδεσης μεταξύ των αλγεβρικών και γραφικών δεξιοτήτων στα μαθηματικά είχε ως αποτέλεσμα τη μεγαλύτερη δυσκολία των φοιτητών στο χειρισμό των αντίστοιχων οντοτήτων της χημείας. Έτσι και στη δική μας περίπτωση, είδαμε ότι οι έντεκα στους δεκαεπτά μαθητές (Πίνακας 1β.1) αναγνώρισαν αμέσως ότι η γραφική παράσταση της ευθείας που έχουν κατασκευάσει, περιγράφει ανάλογα ποσά παρά το γεγονός ότι οι άξονες συντεταγμένων δεν περιγράφονταν στο μαθηματικό πλαίσιο (x, y) αλλά βρίσκονταν στο πλαίσιο της φυσικής (F, Δl). Η επιτυχής μεταφορά γνώσης μεταξύ των δύο πλαισίων εκτιμούμε ότι μπορεί να οφείλεται σε τρεις λόγους: 1) Τα ανάλογα ποσά είναι ένα θέμα αρκετά οικείο στους μαθητές οι οποίοι το έχουν συναντήσει στο δημοτικό καθώς και στις δυο πρώτες τάξεις του γυμνασίου, κυρίως όσον αφορά τον ταυτόχρονο διπλασιασμό τους. 2) Οι μαθητές χρησιμοποίησαν επιτυχημένα τον αναλογικό συλλογισμό εξαιτίας της οπτικής αναλογίας που εμφάνιζε η γραφική παράσταση που κατασκεύασαν πειραματικά, με τη γραφική παράσταση στους άξονες x,y των ανάλογων ποσών που είχαν διδαχθεί πρόσφατα στα μαθηματικά. «Ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί μια νοητική διαδικασία, η οποία επιτρέπει την κινητοποίηση και προσαρμογή ειδικών γνώσεων, συγκροτημένων υπό κάποιες συνθήκες σε μια δεδομένη γνωστική περιοχή, για την αντιμετώπιση προβλημάτων των οποίων τα χαρακτηριστικά και οι απαιτήσεις σχετίζονται με άλλες γνωστικές περιοχές» (Ραβάνης, 2016, pp.171). 3) Οι μαθητές πιθανόν να αξιοποίησαν στο συλλογισμό και την εξαγωγή του συμπεράσματός τους την πρόσθετη παρουσία των άλλων αναπαραστάσεων των ανάλογων ποσών που είχαν εμπλακεί στη διαδικασία όπως π.χ. του πίνακα τιμών ή τη συμμεταβολή των μεγεθών που είχαν διαπιστώσει στην προηγούμενη ερώτηση (Ενδεικτική στιχομυθία 1β-1 αλλά και η στιχομυθία 1β-2). Το γεγονός αυτό αναδεικνύει τη σημασία των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση για την επίτευξη βαθύτερης κατανόησης (Dienes, 1960; Piez & Voxman, 1997)

Κρίσιμο σημείο για τη συνέχιση της οικοδόμησης του μαθηματικού μοντέλου αποτέλεσε για τους μαθητές η συσχέτιση μεταξύ των ανάλογων ποσών και της γραφικής τους παράστασης με την αλγεβρική μορφή y=αx. Όποιοι μαθητές δε διέθεταν αυτή τη γνώση δεν ήταν σε θέση να προχωρήσουν σε υψηλότερο επίπεδο στο αφαιρετικό τους μοντέλο. Οι Karam & Pietrocola, (2009) υποστηρίζουν ότι η απουσία βασικών μαθηματικών ικανοτήτων είναι σημαντικός παράγοντας για την αποτυχία των μαθητών στη φυσική χωρίς βέβαια η παρουσία τους να αποτελεί και εγγύηση για την επιτυχία τους. Επίσης ο Boaler (1998) διαπίστωσε σε έρευνά του ότι η επαρκής κατανόηση των μαθηματικών από τους μαθητές επιτρέπει την κατάλληλη χρήση τους και σε άλλους τομείς. Στη δική μας περίπτωση μόνο οκτώ στους δεκαεπτά μαθητές πέτυχαν τη συσχέτιση αυτή χωρίς βοήθεια και άλλοι έξι με βοήθεια από τον εκπαιδευτικό (Πίνακας 1γ.1).

Από τη στιγμή που οι μαθητές αυτοί (συνολικά 14), διέκριναν τη σχέση μεταξύ της ευθείας των πειραματικών δεδομένων και του μαθηματικού φορμαλισμού y=αx, συνέδεσαν δηλαδή με κάποιο τρόπο το φυσικό περιεχόμενο με τη μαθηματική έκφρασή του, φάνηκε ότι τους ήταν πλέον πολύ εύκολο να επιτύχουν την αναγωγή του τύπου αυτού στον αντίστοιχο τύπο της φυσικής F=αΔl με αντικατάσταση των αντίστοιχων μεταβλητών στον μαθηματικό τύπο, όπως προκύπτει από το γεγονός ότι οι δώδεκα το πέτυχαν αυτό χωρίς καμία βοήθεια και οι άλλοι δύο με μικρή βοήθεια (Πίνακας 1γ.2). Το μεγάλο ποσοστό των μαθητών που έκανε την επιτυχή μετάβαση στον τύπο της φυσικής οφείλεται στην ερώτηση που είχε προηγηθεί, όταν καλέστηκαν δηλαδή να αναγνωρίσουν ότι η ευθεία των πειραματικών μετρήσεων που είχαν κατασκευάσει στους άξονες F και Δl αντιστοιχούσε στον αλγεβρικό τύπο y=αx. Εκεί χρειάστηκε πρώτα να αναγνωρίσουν μέσω οπτικής αναλογίας με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της ευθείας των ανάλογων ποσών στους άξονες y και x των μαθηματικών, ότι τα μεγέθη F και Δl της φυσικής αντιστοιχίζονται στις μεταβλητές y και x των μαθηματικών ώστε να καταλήξουν στον τύπο y=αx.

Στο τελικό στάδιο οι μαθητές εμφάνισαν δυσκολίες στη λεκτική έκφραση του νόμου του Hook παρόλο που οι δεκατέσσερις απ' αυτούς είχαν διατυπώσει (οι δώδεκα χωρίς βοήθεια) το μαθηματικό του μοντέλο F=αΔl. Μόνο οι επτά μαθητές ήταν σε θέση να τον διατυπώσουν λεκτικά χωρίς βοήθεια (Πίνακας 1δ). Τρείς μαθητές στη θέση της λέξης «ανάλογη» τοποθέτησαν τη λέξη «ίση» ή «ισοδύναμη». Οι Pospiech et al (2012) αναφέρουν ότι υπάρχει δυσκολία στην ευθυγράμμιση των λεκτικών εξηγήσεων των μαθητών με τους μαθηματικούς όρους. Η λεκτική περιγραφή (σε έρευνά τους με μαθητές του grades 6) της αύξησης της θερμοκρασίας σε πειράματα θέρμανσης νερού δεν καθόριζε με μοναδικό τρόπο την αναλογικότητα. Οι διατυπώσεις των περισσότερων μαθητών ήταν της μορφής: «Η θερμοκρασία του πάγου/νερού αυξάνει σταθερά».

Το δεύτερο ερευνητικό μας ερώτημα: «Μπορούν οι μαθητές να συσχετίσουν την (γεωμετρική-αλγεβρική) κλίση της ευθείας που περιγράφει τα ανάλογα ποσά, της δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα και της επιμήκυνσης του ελατηρίου στο οποίο αναρτάται το σώμα, με τη σκληρότητα του ελατηρίου;» επιχειρεί να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να αποδώσουν φυσική ερμηνεία σε παραμέτρους του μαθηματικού τους μοντέλου. Στην ουσία οι μαθητές κλήθηκαν να εξηγήσουν το γεγονός της εμφάνισης δύο ευθειών διαφορετικής κλίσης οι οποίες αντιστοιχούσαν σε δύο ελατήρια διαφορετικής σκληρότητας με απώτερο σκοπό την ερμηνεία του μαθηματικού μεγέθους της κλίσης ευθείας ως έκφραση του φυσικού μεγέθους της σκληρότητας ελατηρίου. Κατά τον Beichner, (1994) ένας σημαντικός παράγοντας για την κατανόηση της σύνδεσης μεταξύ γραφικών αναπαραστάσεων και πραγματικότητας είναι η ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν προς τη μία και την άλλη πλευρά.

Μελετώντας τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι οι μαθητές φαίνεται να επιτυγχάνουν καλύτερη σύνδεση μεταξύ της σκληρότητας του ελατηρίου με τη γεωμετρική - οπτική απεικόνιση της διαφοράς κλίσης των δύο ευθειών σε σχέση με τον αλγεβρικό προσδιορισμό της από το συντελεστή ευθείας α . Το εύρημα συμφωνεί με τον Arcavi, (2003) ο οποίος υποστηρίζει ότι η γεωμετρική οπτικοποίηση μπορεί να υποστηρίξει αυτό που φαίνεται ως καθαρά συμβολική/ αλγεβρική ιδιότητα όπως π.χ. η γεωμετρική απεικόνιση μιας αλγεβρικής απόδειξης.

Αρχικά απαιτήθηκε από τους μαθητές να προσεγγίσουν διαισθητικά και να δώσουν πιθανές ερμηνείες για το αίτιο διαφοροποίησης των γραφικών παραστάσεων των δύο ευθειών μόνο με απλή παρατήρησή τους, με απώτερο σκοπό τον προσανατολισμό των μαθητών προς τη μετάβαση από την γραφική αναπαράσταση στις ιδιότητες του φυσικού συστήματος. Περίπου το 1/3 των μαθητών (6 στους 17 μαθητές, Πίνακας 2α.1.1) έδωσε στη φάση αυτή μονοσήμαντη ερμηνεία στη διαφοροποίηση των ευθειών, η οποία διαφοροποίηση αποδίδονταν στο φυσικό μέγεθος της σκληρότητας ελατηρίου. Επίσης άλλοι τέσσερις μαθητές αποδώσανε το αίτιο της διαφοροποίησης γενικά στο γεγονός ότι τα ελατήρια ήταν διαφορετικά. Η εικόνα όμως αλλάζει σημαντικά μετά την απτική επαφή των μαθητών με τα ελατήρια. Η πλειονότητα των μαθητών (14 στους 17 μαθητές, Πίνακας 2α.1.2) αποδίδουν τώρα τη διαφοροποίηση των ευθειών στη διαφορετική σκληρότητα των ελατηρίων. Η απτική επαφή δηλαδή φάνηκε να νοηματοδοτεί την αφηρημένη γεωμετρική κατασκευή με φυσικό περιεχόμενο. Στο τέλος και οι δεκαεπτά μαθητές (οι 15 χωρίς καμία βοήθεια, Πίνακας 2α.3) μπόρεσαν να αποφανθούν ότι αν ένα ελατήριο είναι πιο σκληρό από ένα άλλο η ευθεία του πάει πιο «ψηλά», μπόρεσαν δηλαδή να αποδώσουν νόημα στη γεωμετρική διαφοροποίηση των ευθειών επιβεβαιώνοντας έτσι τους Greeno & Hall, (1997) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η διαδικασία απαίτησης πιθανών ερμηνειών των αναπαραστάσεων από τους μαθητές μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στην οικοδόμηση νοήματος.

Περισσότερη δυσκολία φάνηκε να αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη σύνδεση της σκληρότητας του ελατηρίου με τον αλγεβρικό προσδιορισμό της κλίσης δηλαδή τον συντελεστή ευθείας *α*, εξαιτίας κυρίως της έλλειψης διασύνδεσης μεταξύ των αλγεβρικών και γραφικών δεξιοτήτων που εμφανίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά (Potgieter et al, 2008). Σύμφωνα με τους Potgieter et al οι μαθητές πρέπει να διδάσκονται να χρησιμοποιούν αυτές τις δεξιότητες ως συμπληρωματικές για να αποκτήσουν μια καλύτερη κατανόηση των προτύπων συμπεριφοράς των συναρτήσεων. Μόνο οι μισοί περίπου μαθητές (8 στους 17, Πίνακας 2β.1) αναγνώρισαν χωρίς καμιά βοήθεια στην ερώτηση που αφορούσε καθαρά τις μαθηματικές τους γνώσεις, ότι το γράμμα *α* στην εξίσωση y=αx προσδιόριζε το πόσο «ψηλά» ή «χαμηλά» πάει μια ευθεία ενώ μόνο επτά στους δεκαεπτά ανάφεραν ότι το γράμμα αυτό ονομάζεται κλίση (Πίνακας 2β.2). Στο τέλος επτά μαθητές (Πίνακας 2γ) ήταν σε θέση να αποδώσουν λεκτικά χωρίς βοήθεια, τη συσχέτιση: μεγαλύτερη κλίση ευθείας - μεγαλύτερη σκληρότητα ελατηρίου ενώ άλλοι οκτώ ήταν σε θέση να πράξουν το ίδιο αλλά με βοήθεια από τον εκπαιδευτικό.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ένα ζήτημα που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής σε ένα εγχείρημα σαν το δικό μας. Το θέμα αφορά την παραγωγή των γραφημάτων στη φυσική από πειραματικά δεδομένα καθώς και το ρόλο των σφαλμάτων των πειραματικών μετρήσεων στη διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών που επιχειρούν οι μαθητές με βάση τις μετρήσεις αυτές. Στην πολύπλοκη αυτή διαδικασία συχνά δε δίδεται η απαραίτητη προσοχή από τα σχολικά εγχειρίδια και τη διδασκαλία ώστε οι μαθητές να έχουν επίγνωση για τις δυσκολίες της. Έτσι συχνά τραβούν μια ευθεία γραμμή μεταξύ των πειραματικών σημείων γιατί συνήθως το ζητάει ο δάσκαλός τους και δεν μπορούν να ελέγξουν πτυχές του θέματος που μπορεί να προκύψουν, όπως π.χ. αν τα στοιχεία τους είναι ¨αληθινά¨, αν υπάρχουν επιπρόσθετες παρεμβολές μεταξύ των μετρούμενων τιμών κλπ. (Pospiech, 2015). Στη στιχομυθία 2α.1.1-4 π.χ. βλέπουμε ότι ο μαθητής τώρα ¨ανακάλυψε¨ ότι οι πειραματικές τιμές δεν είναι τοποθετημένες ακριβώς πάνω στη δεύτερη ευθεία και μη έχοντας την απαραίτητη εξοικείωση με τα σφάλματα στις πειραματικές μετρήσεις προβαίνει στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι η δεύτερη ευθεία δεν περιγράφει ανάλογα ποσά. Τα σφάλματα των μετρήσεων και γενικά λεπτά σημεία στην κατασκευή των γραφικών παραστάσεων απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή ώστε να μην αποτελέσουν πηγή σύγχυσης και λειτουργήσουν δυνάμει ως εμπόδια στην προσπάθεια των μαθητών να οικοδομήσουν κατανόηση. Επομένως οι διδάσκοντες εκπαιδευτικοί καλό θα ήταν να δώσουν την απαραίτητη βαρύτητα σ' αυτό το απαιτητικό θέμα και να εξοικειώσουν τους μαθητές τους με τέτοιου είδους προβλήματα καθώς και με τις κατάλληλες τεχνικές αντιμετώπισής τους (Pospiech, 2015).

Η έννοια της κλίσης της ευθείας είναι επίσης ένα θέμα στο οποίο εμφάνισαν δυσκολία τουλάχιστον δύο από τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, όπως προκύπτει από τις στιχομυθίες 2α.3-2.1 και 2α.3-2.2. Οι συγκεκριμένοι μαθητές παρουσίαζαν σύγχυση στο ποια ευθεία πάει πιο «ψηλά» ή πιο «χαμηλά» εξαιτίας των πεπερασμένων μηκών των ευθύγραμμων τμημάτων που παρίσταναν τις ευθείες, τα οποία τμήματα είχαν σχεδιαστεί με τυχαίο, άνισο μήκος. Την ευθεία που αναπαριστώνταν από το τμήμα με το μεγαλύτερο μήκος οι μαθητές την αντιλαμβάνονταν ότι πάει πιο «ψηλά» ενώ αυτή που αναπαριστώνταν από το τμήμα μικρότερου μήκους την αντιλαμβάνονταν ότι πάει πιο «χαμηλά», ανεξάρτητα από τη γωνία κλίσης τους. Και στις δύο περιπτώσεις η εκπαιδευτικός για να υπερβεί το εμπόδιο χρειάστηκε να υποδείξει στους μαθητές της ότι οι ευθείες δεν είναι πεπερασμένα ευθύγραμμα τμήματα αλλά έχουν άπειρο μήκος.

Τέλος, το τρίτο ερευνητικό μας ερώτημα «Μπορούν οι μαθητές να αξιοποιήσουν το μαθηματικό μοντέλο του νόμου του Hooke για να κατασκευάσουν ένα δυναμόμετρο;» αφορά μια πρακτική η οποία δεν είναι συνήθης στην ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση και μάλιστα στην κατώτερη. Οι μαθητές στο στάδιο αυτό κλήθηκαν να αξιοποιήσουν στην πράξη το μαθηματικό μοντέλο της φυσικής που οι ίδιοι οικοδόμησαν με σκοπό την κατασκευή ενός οργάνου μέτρησης να επιστρέψουν δηλαδή, από τον ιδεατό κόσμο της φυσικής στο φυσικό κόσμο, διαδικασία η οποία σχετίζεται με τη validation του μοντέλου ανάλυσης των Uhden et all, (2012).

Η πλειονότητα των μαθητών (12 στους 17, Πίνακας 3α) κατάφερε τελικά να προσεγγίσει την ιδέα της κατακόρυφης διάταξης του δυναμόμετρου επηρεασμένη ίσως από την πειραματική διαδικασία που είχε προηγηθεί. Οι Meli, Zacharos, & Koliopoulos, (2016) υποστηρίζουν ότι οι μαθητές πολλές φορές κάνουν επιλογές για να λύσουν ένα πρόβλημα με κριτήριο προηγούμενες επιτυχείς δράσεις και όχι απαραίτητα τις συνθήκες της άσκησης. Οι κύριες δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι πέντε μαθητές που δεν τα κατάφεραν στη βασική σύνθεση του δυναμόμετρου φαίνεται να ήταν δύο. 1) Ο τυχαίος αυτοσχεδιασμός στην εκτέλεση του έργου χωρίς κανένα στοιχειώδη συλλογισμό των βημάτων που απαιτούνταν. Στη βιβλιογραφία συχνά έχει αναφερθεί ότι σε προσπάθειες επίλυσης προβλημάτων οι φοιτητές καθώς και οι μαθητές σε αντίθεση με τους επιστήμονες ξεκινούν να λύνουν το πρόβλημα επικεντρωνόμενοι σε επιφανειακά χαρακτηριστικά χωρίς να σχηματίζουν πρώτα μια γενική εικόνα του προβλήματος (Chi, 1981; Larkin & Reif, 1979; Meli et al, 2016) και 2) Η προϋπάρχουσα ιδέα του ζυγού με τους ίσους βραχίονες, ιδέα μεταφερμένη από την καθημερινή ζωή, φαίνεται να δρούσε ανασχετικά στην όλη διαδικασία (Ραβάνης, 2016) όπως μπορούμε να δούμε στη στιχομυθία 3α-3.1.

Στο στάδιο της βαθμονόμησης του δυναμόμετρου ως πιο προβληματικά σημεία αναδείχθηκαν η τοποθέτηση στην κλίμακα της ένδειξης του μηδενός καθώς και της ένδειξης της πρώτης τιμής μετά το μηδέν. Τις ενδείξεις αυτές μόνο τέσσερις μαθητές (από τους δώδεκα που συνέχισαν), για κάθε περίπτωση, μπόρεσαν να προσδιορίσουν χωρίς καμία βοήθεια (Πίνακες 3β.1 και 3β.2). Η κύρια αιτία των λαθών που σημειώθηκαν από τους μαθητές στην τοποθέτηση των ενδείξεων φαίνεται να είναι το γεγονός ότι οι μαθητές δεν αποδίδουν φυσικό νόημα στις διαβαθμίσεις των κλιμάκων των οργάνων μέτρησης καθώς και στη διαδικασία βαθμονόμησης των οργάνων. Έτσι τοποθετούν το μηδέν σε τυχαία θέση, χωρίς να συνδυάζουν τη θέση αυτή με την απουσία δύναμης. Ο Pospiech (2015) αναφέρει την περίπτωση ερευνών οι οποίες έδειξαν ότι πολλές φορές η χρήση και το νόημα του ¨0¨ για τους μαθητές εμφορείται περισσότερο από διαισθητικές έννοιες και όχι από φυσικό-μαθηματικό συλλογισμό. Η έλλειψη της σύνδεσης με το φυσικό περιεχόμενο αποκαλύπτεται επίσης και στην τοποθέτηση της πρώτης μετά το μηδέν ένδειξης στην κλίμακα του δυναμόμετρου η οποία και πάλι γινόταν τυχαία ή ταυτιζότανε με τις ενδείξεις της μετροταινίας, χωρίς να γίνεται χρήση κάποιας γνωστής δύναμης αναφοράς.

Στο επόμενο στάδιο της βαθμονόμησης και οι δώδεκα μαθητές που συνέχισαν μετά τη σύνθεση της κατακόρυφης διάταξης του δυναμόμετρου, μπόρεσαν όλοι να αξιοποιήσουν το νόμο του Hook (είτε χρησιμοποιώντας πολλές μάζες, είτε με τον περιορισμό να χρησιμοποιήσουν μόνο μία) με επιτυχία και χωρίς καμία βοήθεια και να τοποθετήσουν τις υπόλοιπες τιμές στην κλίμακα του δυναμόμετρου (Πίνακες 3β.3.1 και 3β.3.2). Ίσως αυτό το γεγονός να δείχνει ότι οι μαθητές πέτυχαν σε κάποιο βαθμό να οικοδομήσουν το μοντέλο του φυσικού νόμου με τρόπο που να τους επιτρέπει να το αξιοποιήσουν πρακτικά στην κατασκευή του οργάνου μέτρησης των δυνάμεων. Το κρίσιμο σημείο για τη βαθμονόμηση του δυναμόμετρου που η επιτυχής μετάβασή του επέτρεψε την ολοκλήρωση της βαθμονόμησης αποτέλεσε στην ουσία η αρχική φάση της, η τοποθέτηση δηλαδή των δύο πρώτων ενδείξεων στην κλίμακα. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν περισσότερο στη φάση αυτή εξαιτίας ίσως της περιορισμένης έκθεσής τους σε παρόμοιες δραστηριότητες βαθμονόμησης που να τους δίδουν την ευκαιρία να αποδίδουν φυσικό περιεχόμενο σ' αυτές.

Σε κάθε ένα από τα τρία στάδια υλοποίησης της διδακτικής πρότασης υπήρξε ένας τουλάχιστον μαθητής, διαφορετικός κάθε φορά, ο οποίος δε χρειάστηκε καμία βοήθεια για να ολοκληρώσει με επιτυχία το αντίστοιχο έργο ενώ στο ίδιο έργο υπήρχαν ταυτόχρονα άλλοι τρεις τέσσερις οι οποίοι το ολοκλήρωναν με μία μόνο παρέμβαση από την εκπαιδευτικό. Στο σύνολο της διδακτικής πρότασης υπήρξαν μόνο δύο μαθητές οι οποίοι χρειάστηκαν τουλάχιστον δύο μικρές παρεμβάσεις από την εκπαιδευτικό για να ολοκληρώσουν επιτυχώς το σύνολο του έργου.

Ολοκληρώνοντας τη συζήτηση σχετικά με τα ερευνητικά ερωτήματα και γενικότερα το σκοπό της έρευνας μπορούμε να προβούμε στις ακόλουθες διαπιστώσεις:

Η βασική δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο μάθημα της φυσικής είναι η εγκατάσταση συνδέσεων μεταξύ των φυσικών φαινομένων και εννοιών και του αφηρημένου μαθηματικού κόσμου (Bagno, Berger, & Eylon, 2008; Redish, 2006). Τη δυσκολία αυτή την αντιμετωπίσαμε και στη δική μας έρευνα είτε όταν οι μαθητές προσπάθησαν να ερμηνεύσουν τη διαφορά κλίσης των δύο γραφικών παραστάσεων στο πλαίσιο της φυσικής, είτε όταν αντιμετωπίσανε τα σφάλματα των πειραματικών μετρήσεων στη γραφική παράταση, είτε όταν κλήθηκαν να τοποθετήσουν τις αρχικές τιμές στη βαθμονόμηση του δυναμόμετρου. Επομένως, όταν σχεδιάζουμε μια διδακτική κατάσταση στη φυσική στην οποία τα μαθηματικά προορίζονται να παίξουν έναν ουσιαστικό και δομικό ρόλο θα πρέπει να λαμβάνουμε σοβαρά υπόψη μας τη δυσκολία αυτή. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να προσφέρουμε ευκαιρίες για να δημιουργούνται συνδέσεις μεταξύ των δύο πεδίων στη διάρκεια της διδασκαλίας (Planinic et al, 2012). Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτέλεσε η απτική επαφή και επεξεργασία των ελατηρίων στην προσπάθεια των μαθητών να ερμηνεύσουν τις διαφορετικές γραφικές παραστάσεις καθώς και η ίδια η απαίτηση της ερμηνείας των γραφικών παραστάσεων και η διαδικασία της κατασκευής και βαθμονόμησης του δυναμόμετρου στην οποία αντιμετωπίσανε άμεσα το πρόβλημα της εφαρμογής του νοητικού τους μοντέλου στο φυσικό κόσμο.

Δυσκολίες επίσης, συνάντησαν οι μαθητές και στο ίδιο το πεδίο των μαθηματικών στο θέμα των πολλαπλών αναπαραστάσεων των ανάλογων ποσών. Η συσχέτιση των αλγεβρικών αναπαραστάσεων με τις γραφικές φάνηκε αδύναμη σε πολλούς μαθητές επιβεβαιώνοντας έτσι τους Potgieter et al, (2008) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι γραφικές και οι αλγεβρικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας πρέπει να διδάσκονται συνδεδεμένα στη διδασκαλία. Ο Arcavi (2003) επίσης, υποστηρίζει τη χρήση της οπτικοποίησης στην υποστήριξη των αλγεβρικών ιδιοτήτων των εννοιών στη μάθηση.

Η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων μπορεί να αποτελέσει ισχυρό γνωστικό εργαλείο στις διδακτικές καταστάσεις της φυσικής όπως φάνηκε και στην έρευνά μας. Η μετάφραση μεταξύ των αναπαραστάσεων, η κατασκευή και η ερμηνεία τους καθώς και η συσχέτισή τους με το φυσικό κόσμο είναι πτυχές που προσφέρουν δυνατότητες στην οικοδόμηση τόσο του μαθηματικού όσο και του φυσικού νοήματος (Ainsworth, 1999; Greeno & Hall, 1997; Pape & Tchoshanov, 2001).

Από την εμπειρία της έρευνάς μας φάνηκε ότι η επικοινωνία των εννοιών μεταξύ των δύο πεδίων, μαθηματικών και φυσικής, παρά τις δυσκολίες που εμπεριέχει μπορεί να ωφελήσει τη μάθηση των μαθητών και στα δύο πεδία (Michelsen, 2006; Meli, 2016). Από τη μια οι μαθηματικές έννοιες μπόρεσαν να εμπλουτιστούν με την έκφρασή τους στη γλώσσα της φυσικής ενώ από την άλλη η εφαρμογή του πλαισίου των μαθηματικών στο πλαίσιο της φυσικής φάνηκε να οδηγεί σε αποκόμιση κέρδους για τη φυσική (Nilsen et al, 2013) όπως έδειξαν τα τελικά ποσοστά των μαθητών που οικοδόμησαν το μαθηματικό μοντέλο, ερμήνευσαν τη διαφορά κλίσης των ευθειών των ελατηρίων και κατασκεύασαν το δυναμόμετρο. Το πλαίσιο ανάλυσης των Uhden et al, (2012) με τη διάκριση των δομικών και τεχνικών δεξιοτήτων στη χρήση των μαθηματικών στη διδασκαλία της φυσικής, μπορεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο βοήθημα στην υπηρεσία των εκπαιδευτικών για το σχεδιασμό διδακτικών παρεμβάσεων οι οποίες να αποσκοπούν στην ενίσχυση των δομικών δεξιοτήτων των μαθηματικών στη φυσική.

Τέλος, ενδιαφέρον θα είχε για τη μελλοντική έρευνα να διερευνήσει παρόμοιες διδακτικές καταστάσεις με τη δική μας σχετικά με το δομικό ρόλο των μαθηματικών στην εκπαίδευση της φυσικής, σε επίπεδο σχολικής τάξης. Να διερευνηθεί δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να επιλύουν συνεργατικά τις δυσκολίες που προκύπτουν από τη χρήση των μαθηματικών ως γλώσσας στη διδασκαλία της φυσικής καθώς επίσης και ο τρόπος υποστήριξης του εκπαιδευτικού προς τους μαθητές για την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών.

Βιβλιογραφία

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computer & Education 33*, σσ. 131-152.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*, σσ. 183-198.

Angell, C., Kind, M. P., Henriksen, E., & Guttersrud, O. (2008). An empirical-mathematical modeling approach to upper secondary physics. *Physics Education 43(3)*, σσ. 256-264.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52*, σσ. 215-241.

Bagno, E., Berger, H., & Eylon, B. (2008). Meeting the challenge of students' understanding formulas in high-school physics: a learning tool. *Physics Education, 43*, σσ. 75-82.

Beichner, R. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs . *American Journal of Physics, 62(8)* , σσ. 750-762.

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics 2(1)*, σσ. 34-42.

Berry, J., & Sahlberg, P. (1996). Investigating Pupils’ Ideas of Learning. *Learning and Instruction 6*, σσ. 19-36.

Bishop, A. (1989). Review of research in visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics 11(1)*, σσ. 7-16.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application 1(1)*, σσ. 45-58.

Boaler, J. (1998). Open and Closed Mathematics: Student Experiences and Understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29(1)*, σσ. 41-62.

Brown, J., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Education Researcher, 18(1)*, σσ. 32-42.

Cannell, C., & Kahn, R. (1968). Interviewing. Στο G. Lindzey, & A. Aronson, *The Handbook of Social Psychology, 2: Research Methods* (σσ. 526-595). New York: Addison Wesley.

Chi, M. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognition Science, 5*, σσ. 121-152.

Cohen, L., Manion, L., & Morisson, K. (2005). *Research Methods in Education.* Taylor & Francis e-Library.

Dienes, Z. (1973). *The six stages in the process of learning mathematics.* Slough: NFER-Nelson.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics.* Great Britain: Anchor Press,Hutchinson Educational.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B., & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing:Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior, 10*, σσ. 117-160.

Dufour-Janvie, B., Bednarz, & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. Στο C. Janvier, *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (σσ. 109-122). Hillsade, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Duit, R., Niedderer, H., & Schecker, H. (2007). Teaching physics. Στο S. K. Abell, & N. Lederman, *Handbook of research on science education* (σσ. 599-629). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Erickson, T. (2006). Stealing from physics: modeling with mathematical functions in data-rich contexts. *Teaching mathematics and its applications, 25(1)*, σσ. 23-32.

Gilbert, J. (2005). Visualization: A metacognitive skill in sciense and sciense education. Στο J. Gilbert, *Visualization in science education* (σσ. 9-27). Netherlands: Springer.

Gobert, J. (1994). *Expertise in the comprehension of architectural plans: Contribution of representation and domain knowledge.* Toronto: Unpublished doctoral dissertation. University of Toronto.

Gobert, J. (2005). Leveraging technology and cognitive theory on visualization to promote students' science. Στο J. Gilbert, *Visualization in science education* (σσ. 73-90). Netherlands: Springer.

Gold, R. (1958). Roles in sociological field observations. *Social Forces 36*, σσ. 217-223.

Greeno, J., & Hall, R. (1997, Jan). Practising Representation: Learning with and about Representational forms. *The Phi Delta Kappan 78 (5)*, σσ. 361-367.

Hall, R., Kibler, D., Wenger, E., & Truxaw. (1989). Cognition and Instruction 6. *Exploring the episodic structure of algebra story problem solving*, σσ. 223-283.

Hestenes, D. (2003). Oersted medal lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics. *American Journal of Physics, 71(2)*, σσ. 104-121.

Janvier, G., Girardon, C., & Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. Στο P. Wilson, *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (σσ. 79-102). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kanderakis, N. (2016). The Mathematics of High School Physics: Models, Symbols, Algorithmic Operations and Meaning. *Science & Education 25*, σσ. 837–868.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. Στο S. Wagner, & C. Kieran, *Research issues in the learning and teaching of algebra* (σσ. 167-194). Hillsdale: NJ: Erlbaum.

Karam, R., & Pietrocola, M. (2009). Recognizing the structural role of mathematics in physical thought. Στο M. Tasar, & G. Cakmaki, *Contemporary science education research: International perspectives, a collection of Papers presented at ESERA 2009 conference* (σσ. 65-76). Istanbul.

Karam, R., Pospiech, G., & Pietrocola, M. (2011). Mathematics in physics lessons: developing structural skills. *GIPER-EPEC & PHEC 2009 International Conference August*, (σσ. 17-21).

Koponen, I., & Mantyla, T. (2006). Generative Role of Experiments in Physics and in Teaching Physics: A Suggestion for Epistemological Reconstruction. *Science & Education 15*, σσ. 31-54.

Larkin, J., & Reif, E. (1979). Understanding and teaching problem—Solving in physics. *European Journal of Science Education, 1(2)*, σσ. 191-203.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lawrenz, F., Wood, N., Kirchhoff, A., Kim, N., & Eisenkraft, A. (2009). Variables affecting physics achievement. *Journal of Research in Science Teaching, 46(9)*, σσ. 961-976 doi: 10.1002/tea.20292.

Lazarowitz, R., & Tamir, P. (1994). ‘Research on Using Laboratory Instruction in Science. Στο D. Gabel, *Handbook of Science Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2005). John Dewey revisited-Pragmatism and the models-modeling perspective on mathematical learning. Στο A. Beckmann, A. Michelsen, & B. Sriraman, *Proceedings of The First International Symposium of Mathematics and its Connection to the Arts and Sciences* (σσ. 7-31). Hildesheim & Berlin: Verlag Franzbecker.

Lobato, J. (2003). How Design Experiments Can Inform a Rethinking of Transfer and Vice Versa. *Educational Researcher 31 (1)*, σσ. 17-20.

Loewenstein, J., Thompson, L., & Gentner, D. (1999). Analogical encoding facilitates knowledge transfer in negotiation. *Psychonomic Bulletin & Review, 6*, σσ. 586-597.

McDermott, L., Rosenguist, M., & van Zee, E. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics, 55(6)*, σσ. 503-513.

Meli, K., Zacharos, K., & Koliopoulos, D. (2016). The Integration of Mathematics in Physics Problem Solving: A Case Study of Greek Upper Secondary School Students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,16(1)*, σσ. 48-63.

Meltzer, D. (2002). The relationship between mathematics preparation and conceptual learning gains in physics: A possible “hidden variable” in diagnostic pretest scores. *American journal of Physics, 70*, σσ. 12-59.

Mevarech, Z., & Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations:Stability and change in students’ alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*, σσ. 229-263.

Michelsen, C. (2006, June). Functions: a modelling tool in mathematics and science . *ZDM38 (3)*, σσ. 269-280.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2017, Augoust 3). Ανάκτηση από Executive Summary Principles and Standards for School Mathematics: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf

Nilsen, T., Angell, C., & Grønmo, L. (2013). Mathematical competencies and the role of mathematics in physics education: A trend analysis of TIMSS Advanced 1995 and 2008. *Acta Didactica Norge 7(1)Art 6*.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 40*, σσ. 1-24.

Oppenheim, A. (1992). *Questionnaire Design, Interviewing and Attitute Measurement.* London: Pinter Publishers Ltd.

Ozgun-Koca, S. A. (1998). Students' Use of Representations in Mathematics Education. *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Raleigh, NC.

Pape, S., & Tchoshanov, M. (2001). The Role of Representation(s) in Developing Mathematical Understanding. *Theory Into Practice 40(2)*, σσ. 118-127.

Peirce, C. S. (1955). Logic as semiotic:The theory of signs. Στο J. Buchler, *Philosophical writings of Peirce 1893-1910* (σσ. 98-119). New York: Dover.

Pietrocola, M. (2010). Mathematics strucutural language of physics thought. Στο M. Vicentini, & E. Sassi, *Connecting research in physics education with teacher education(2 edn.,Vol 2)* (σσ. 35-48). New Delhi: Angus & Grapher Publishers.

Piez, C., & Voxman, M. (1997). Multiple representation-Using different perspectives to form a clearer picture. *The Mathematics Teacher, 90(2)*, σσ. 164-166.

Planinic, M., Milin-Sipus, Z., Katic, H., Susac, A., & Ivanjek, L. (2012). Comparison of Student Understanding of Line Graph Slope in Physics and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, σσ. 1-22 doi: 10.1007/s10763-012-9344-1.

Pospiech, G. (2015). Interplay of mathematics and physics in physics education . *Proceedings of MACAS-2015,36.*

Pospiech, G., Böhm, U., & Geyer, M. (2012). Making Meaning of Graphical Representations in Beginners’ Physics Lessons. *Discourse and Argumentation in Science Education,65*.

Potgieter, M., Harding, A., & Engelbrech, J. (2008). Transfer of Algebraic and Graphical Thinking between. *Journal of Research in Science Teaching, 45 (2)*, σσ. 197-218.

Redish, E. (2006). Problem Solving and the Use of Math in Physics Courses. *Invited talk presented at the conference, World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change.* Delhi, August 21-26, 2005: To be published in the proceedings.

Reisberg, D. (1997). *Cognition.* New York: Norton.

Roth, W., & McGinn, M. (1997). Graphing: Cognitive ability or practice? *Science Education, 81*, σσ. 91-106.

Schoenfeld, A., Smith, J., & Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student’s evolving understanding of a complex subject matter domain. Στο R. Glaser, *Advances in Instructional Psychology (4)* (σσ. 55-176). Hillsdale,NJ: Erlbaum.

Sweller, J., Chandler, P., Tierney, P., & Cooper, M. (1990). Cognitive load as a factor in the structuring of technical material. *Journal of Experimental Psychology 119(2)*, σσ. 176-192.

Tabachneck, H., Koedinger, K., & Nathan, M. (1994). Towards a theoretical account of strategy use and sense making in mathematical problem solving. Στο A. Ram, & K. Eiselt, *Proceedings of the 16th annual conference of the cognitive science society* (σσ. 836-841). Hillsdale: NJ: Erlbaum.

Trumper, R. (2003). The Physics Laboratory – A Historical Overview and Future and Perspectives. *Science & Education 12*, σσ. 645-670.

Tuminaro, J. (2004). *A cognitive framework for analyzing and describing introductory students' use and understanding of mathematics in physics.* Dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School of theUniversity of Maryland, College Park in partial fulfillmentof the requirements for the degree of Doctor of Philosophy.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2012). Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education. *Science & Education 21*, σσ. 485-506.

Uhden, O., & Pospiech, G. (2010). Translating between mathematics and physics: Analysis of student’s difficulties. *GIREP*, (σσ. 102-106).

Witten, G. (2005). Designing a mathematics course for chemistry and geology students. *Educational Studies in Mathematics, 58*, σσ. 1-19.

Yerusalmy, M. (1991). Student perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning, 7*, σσ. 42-57.

ΔΕΠΠΣ Μαθηματικών. (2003, 3 13). *Υ.Α. 21072α/Γ2, ΦΕΚ 303/τεύχος Β΄*. Αθήνα, Ελλάδα: Εφημερίδα της Κυβερνήσεως.

Ραβάνης, Κ. (2016). *Εισαγωγή στη Διδακτική και στη Διδασκαλία των Φυσικών Επιστημών.* Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

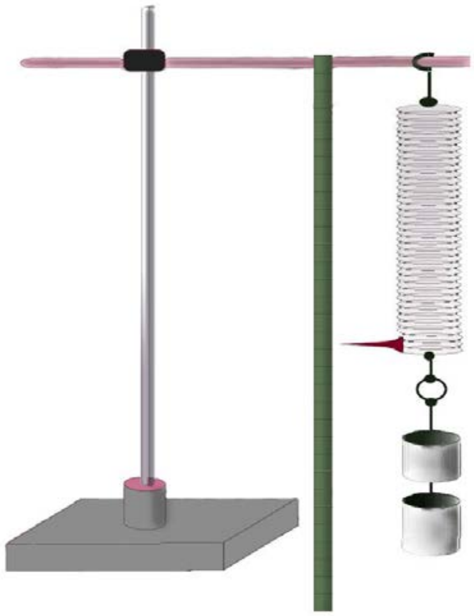
Παράρτημα

Φύλλο Εργασίας Μαθητή

ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ HOOKE

Α. Κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου

1.1. Υποθέστε ότι στο ελεύθερο άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου που φαίνεται στο σχήμα 1, κρεμάμε σώμα βάρους w και η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος είναι Δl.



Σχήμα 1

Σημειώστε τη θέση (L_o) του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου:

L_o = ……………… cm

Στη συνέχεια κρεμάστε στο ελατήριο βαράκια των 100gr, 200gr, 250gr και 400gr και σημειώστε κάθε φορά στον πίνακα που ακολουθεί το μήκος L του ελατηρίου (στήλη 3).

Υπολογίστε την επιμήκυνση του ελατηρίου για κάθε βαράκι και συμπληρώστε την αντίστοιχη στήλη του πίνακα (στήλη 4).

1	**2**	**3**	**4**
Μάζα (Kg)	**Βάρος = Δύναμη F που επιμηκύνει το ελατήριο (N)***	**Μήκος (L) ελατηρίου (cm)**	**Επιμήκυνση ελατηρίου Δl =L-L_o (cm)**
0,1	1		
0,2	2		
0,25	2,5		
0,4	4		

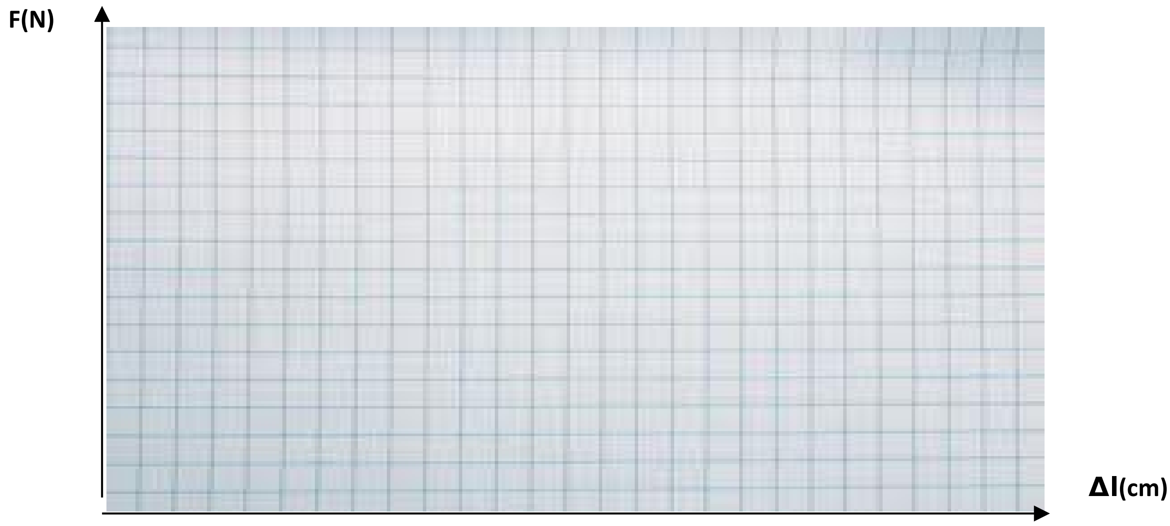
Πίνακας 1. (Ελατήριο 1: Τιμές δύναμης και αντίστοιχες επιμηκύνσεις)

*** Σημείωση:** Το μέτρο της δύναμης που επιμηκύνει το ελατήριο, όταν το σύστημα ελατήριο – σώμα είναι σε ισορροπία, είναι ίσο με το μέτρο του βάρους του σώματος που αναρτούμε από το ελεύθερο άκρο του (F=w).

1.2. Παρατηρήστε τις τιμές των δυνάμεων και των αντίστοιχων επιμηκύνσεων: Όταν διπλασιαστεί η δύναμη πως μεταβάλλεται η επιμήκυνση;

……………………………………………

2. Με βάση τις τιμές του παραπάνω πίνακα να κατασκευάσετε με κόκκινο χρώμα τη γραφική παράσταση δύναμης – επιμήκυνσης του ελατηρίου στους παρακάτω άξονες:



3. Περιγράψτε τη μορφή της γραφικής παράστασης που μόλις σχεδιάσατε. Ποια ποσά συνδέει κατά τη γνώμη σας;

…………..………

………..

4. Ποια γνωστή σας συνάρτηση από τα μαθηματικά εκφράζει η γραφική παράσταση που μόλις σχεδιάσατε; (τύπος)

………

……….

....

5. Να αντιστοιχίσετε τα μεγέθη F, Δl της γραφικής σας παράστασης με τις μεταβλητές y, x της μαθηματικής συνάρτησης που βρήκατε. Ποιος τύπος προκύπτει;

6. Διατυπώστε το συμπέρασμά σας σχετικά με την επιμήκυνση που προκαλεί σε ένα ελατήριο μια δύναμη που ασκείται σ′ αυτό:

¨Η επιμήκυνση ενός ελατηρίου είναι .... με τη δύναμη που ασκείται σ˙αυτό¨ (Νόμος Hook).

Β. Κλίση ευθείας και σκληρότητα ελατηρίου

1. Αντικαταστήστε το ελατήριο (1) που χρησιμοποιήσατε ως τώρα με ένα νέο ελατήριο (2). Σημειώστε τη θέση (L_o) του ελεύθερου άκρου του νέου ελατηρίου:

L_o = ……………… cm

Να συμπληρώσετε τον πίνακα 2 αφού κρεμάσετε στο ελατήριο (2) τα ίδια βάρη που χρησιμοποιήσατε και στο ελατήριο (1):

1	2	3	4
Μάζα (Kg)	**Βάρος = Δύναμη F που επιμηκύνει το ελατήριο (N)***	**Μήκος (L) ελατηρίου (cm)**	**Επιμήκυνση ελατηρίου $\Delta l = L - L_o$ (cm)**
0,1	1		
0,2	2		
0,25	2,5		
0,4	4		

Πίνακας 2. Ελατήριο 2: Τιμές δύναμης και αντίστοιχες επιμηκύνσεις

2. Κατασκευάστε με πράσινο χρώμα τη γραφική παράσταση δύναμης-επιμήκυνσης του ελατηρίου(2) στους ίδιους άξονες με τη γραφική παράσταση του 1^{ου} ελατηρίου

3. Γιατί κατά τη γνώμη σου, οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι διαφορετικές; Που μπορεί να οφείλεται αυτό;

………

………

Πιάσε τα δύο ελατήρια στα χέρια σου και τέντωσέ τα. Ποια είναι τώρα η γνώμη σου; ………..

4. Ένα ελατήριο θεωρείται πιο «σκληρό» από κάποιο άλλο όταν για την ίδια δύναμη επιμηκύνεται λιγότερο από το άλλο. Ποιο από τα ελατήρια (1) και (2) θεωρείς σκληρότερο; ……………………………………………………………………………………

5. Αν ένα ελατήριο είναι πιο «σκληρό» από ένα άλλο η ευθεία πάει πιο «ψηλά» ή πιο «χαμηλά»; ……………………………………………………………………………………………………..

6. Στη συνάρτηση y=αx πιο γράμμα μας δείχνει αν η ευθεία θα πάει πιο «ψηλά» ή πιο «χαμηλά»; Πως ονομάζουμε στα μαθηματικά το γράμμα αυτό;

………

……….

7. Συσχετίστε τις κλίσεις των ευθειών με τις σκληρότητες των ελατηρίων και συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω πρόταση:

¨Το ελατήριο με τη μεγαλύτερη σκληρότητα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της ευθείας με τη ……………………………………. κλίση ενώ το ελατήριο με τη μικρότερη σκληρότητα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της ευθείας με τη ……………………… κλίση.¨

Γ. Κατασκευή δυναμόμετρου

1. Χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που αποκτήσατε για το νόμο του Hook και έχοντας στη διάθεσή σας τα υλικά που βρίσκονται στον πάγκο (πηχάκια, χαρτοταινία, πινέζες, βαράκια, ελατήρια κλπ) να περιγράψετε έναν τρόπο για να κατασκευάσετε κι εσείς ένα δυναμόμετρο: ………………………………………………………………

………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………
………..