

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ, ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ
ΚΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΛΕΩΝΙΔΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ

ΠΑΤΡΑ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2008

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της απόκτησης Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης (Μ.Δ.Ε.) στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και συγκεκριμένα στην κατεύθυνση 'Εφαρμοσμένη Ανάλυση και Μαθηματική Φυσική'. Έχει σκοπό να μελετήσει τις σχέσεις μεταξύ ορισμένων αλγορίθμων της Αριθμητικής Ανάλυσης, Ορθογωνίων Πολυωνύμων και Διακριτών Ολοκληρώσιμων Συστημάτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός να βρίσκει κανείς κοινά γνωρίσματα σε πεδία των Μαθηματικών που φαίνονται αρχικά να μην έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τους αλγόριθμους ϵ , ρ και qd με έμφαση στους ειδικούς κανόνες τους για την αντιμετώπιση των ιδιομορφιών καθώς επίσης και την σύνδεση του αλγορίθμου qd με τα ορθογώνια πολυώνυμα στην πραγματική ευθεία. Στα διακριτά ολοκληρώσιμα συστήματα αντίστοιχο των ειδικών κανόνων κριτήριο περιορισμού ιδιομορφιών έχει οδηγήσει στην εύρεση αξιοσημείωτων εξισώσεων διαφορών. Επίσης ο αλγόριθμος qd με κατάλληλη παραμετρικοποίηση σχετίζεται με πλέγματα Toda διακριτού χρόνου.

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής που συνέβαλαν κατά τον καλύτερο τρόπο για την πραγμάτωση αυτού του στόχου. Τον Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών κ. Παναγιώτη Σιαφάρικα ο οποίος έδρασε καταλυτικά στην πρόοδο των σπουδών μου, τόσο προπτυχιακά όσο και μεταπτυχιακά, με την πολύτιμη διδασκαλία του. Τον Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών κ. Μιχάλη Βραχάτη ο οποίος με τις γνώσεις που μου μετέδωσε προπτυχιακά συνέβαλε σημαντικά σε αυτήν την εργασία. Ιδιαίτερος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπ. Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών και επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Βασίλειο Παπαγεωργίου, για την αμέριστη συμπαράστασή του, την υπομονή, την συνέπεια, την εργατικότητα και την υπευθυνότητα που επέδειξε κατά την διάρκεια της συνεργασίας μας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Κώστα και Χρυσούλα για την υποστήριξη, την καθοδήγηση και την ανεκτίμητη βοήθειά τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και τους Γιώργο και Βασιλική για την ηθική υποστήριξη που μου προσέφεραν.

Λεωνίδας Κωνσταντόπουλος

Πάτρα, 2008

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Αλγόριθμοι	1
1.2	Ορθογώνια Πολυώνυμα	2
1.3	Διακριτά Ολοκληρώσιμα Συστήματα	3
2	Αλγόριθμοι	5
2.1	ε -αλγόριθμος	5
2.2	ρ -αλγόριθμος	10
2.3	qd -αλγόριθμος	14
2.4	qd -αλγόριθμος και Εφαρμογές	16
2.5	Πίνακες Padé, Σχέσεις με ε - και qd -αλγόριθμο	20
3	Ορθογώνια Πολυώνυμα	35
3.1	Ορθογώνια Πολυώνυμα (ΟΠ) στην πραγματική ευθεία	35
3.2	qd -αλγόριθμος, ΟΠ και Πλέγμα Toda διακριτού χρόνου	37
3.3	Ορθογώνια Πολυώνυμα στον μοναδιαίο κύκλο	43
3.4	Ο πίνακας CMV	49
4	Ανακεφαλαίωση	55

1 Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται μια σύντομη παρουσίαση για την μορφή των αλγορίθμων, τα ορθογώνια πολυώνυμα και τα διακριτά ολοκληρώσιμα συστήματα. Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι ϵ , ρ και qd με έμφαση στους ειδικούς κανόνες για την αποφυγή των ιδιομορφιών και ο πίνακας των προσεγγιζουσών Padé και η σχέση του με τον ϵ -αλγόριθμο και τα συνεχή κλάσματα. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται τα ορθογώνια πολυώνυμα στην πραγματική ευθεία και η σχέση τους με τον qd -αλγόριθμο όπως και πρόσφατα αποτελέσματα για ορθογώνια πολυώνυμα στον μοναδιαίο κύκλο και η σύνδεσή τους με πενταδιαγώνιους πίνακες.

1.1 Αλγόριθμοι

Στην αριθμητική ανάλυση, στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και στη μηχανική τυχαίνει να ασχοληθεί κανείς με ακολουθίες και σειρές. Παράγονται από επαναληπτικές μεθόδους, τεχνικές διαταραχών, προσεγγιστικές διαδικασίες που εξαρτώνται από μία παράμετρο, κ.α. Συχνά στην πράξη αυτές οι ακολουθίες ή οι σειρές συγκλίνουν τόσο αργά που είναι μεγάλο μειονέκτημα στη σπουδαία δράση τους. Αυτός είναι ο λόγος που εδώ και πολλά χρόνια μελετώνται οι μέθοδοι ταχείας σύγκλισης και εφαρμόζονται σε πολλές περιπτώσεις. Βασίζονται στην φυσική ιδέα της εξαγωγής συμπερασμάτων και σε πολλές περιπτώσεις επιλύουν προβλήματα που διαφορετικά είναι άλυτα. Οι μέθοδοι εξαγωγής συμπερασμάτων αποτελούν ένα συγκεκριμένο πεδίο της αριθμητικής ανάλυσης έχοντας σχέση με πολλά σημαντικά κεφάλαια όπως οι προσεγγίσεις Padé, τα συνεχή κλάσματα, τα κλασικά ορθογώνια πολυώνυμα, οι μέθοδοι προβολής, κ.α. Αποτελούν επίσης τη βάση για νέες μεθόδους επίλυσης διαφόρων προβλημάτων, ενώ έχουν και πολλές εφαρμογές. Αναλυτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται όλο και πιο συχνά στην αριθμητική ανάλυση και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και μπορεί να σκεφτεί κανείς ότι οι διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων θα χρησιμοποιηθούν σε πιο ευρεία έκταση στο μέλλον.

Τα τελευταία χρόνια ένας μεγάλος αριθμός αλγορίθμων βρίσκουν εφαρμογή στην Αριθμητική Ανάλυση. Αυτοί οι αλγόριθμοι συνδέουν όρους ενός πίνακα συναρτήσεων ή αριθμών, ο γενικός όρος του οποίου θα συμβολίζεται για τις ανάγκες της εργασίας με

$\phi_s^{(m)}$. Ο πίνακας αυτός, μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \phi_{-1}^{(0)} & & & & & & \\
 & \phi_0^{(0)} & & & & & \\
 \phi_{-1}^{(1)} & & \phi_1^{(0)} & & & & \\
 & \phi_0^{(1)} & & \ddots & & & \\
 \phi_{-1}^{(2)} & & \phi_1^{(1)} & & \phi_s^{(0)} & & \\
 & \phi_0^{(2)} & & \ddots & & \phi_{s+1}^{(0)} & \\
 \phi_{-1}^{(3)} & \vdots & \phi_1^{(2)} & & \phi_s^{(1)} & \ddots & \\
 \vdots & & \vdots & \ddots & & \phi_{s+1}^{(1)} & \\
 & & & & \phi_s^{(2)} & & \ddots \\
 & & & & \vdots & \phi_{s+1}^{(2)} &
 \end{array}$$

έτσι ώστε ο άνω δείκτης m να συμβολίζει τη διαγώνια στήλη, ενώ ο κάτω δείκτης s την κάθετη στήλη.

Όλοι οι αλγόριθμοι που θα μελετήσουμε είναι ένα διάγραμμα ρόμβου, τέτοιο ώστε κάθε ποσότητα $\phi_s^{(m)}$ να παράγεται από μία σχέση της μορφής

$$\theta_s^{(m)} \left\{ \phi_s^{(m)}, \phi_{s-1}^{(m)}, \phi_{s-1}^{(m+1)}, \phi_{s-2}^{(m+1)} \right\} = 0 \quad (1.1)$$

που επηρεάζεται μόνο από τις ποσότητες που βρίσκονται στις άκρες του ρόμβου του εκάστοτε πίνακα. Στους αλγόριθμους που θα εξετάσουμε στην εργασία αυτή, η μορφή της συναρτησιακής σχέσης (1.1) είναι ανεξάρτητη του s , ενώ σε άλλες περιπτώσεις η (1.1) εξαρτάται απ' το αν το s είναι άρτιο ή περιττό.

Σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να συμβεί η (1.1) να δίνει μη-προσδιορίσιμα αποτελέσματα, δηλαδή να υπάρχει ιδιομορφία για κάποιες συγκεκριμένες τιμές των όρων του πίνακα. Στις παραγράφους 2.1-2.3 δείχνουμε πώς αυτές οι απροσδιοριστίες μπορούν να απαλειφθούν ώστε να συνεχιστεί ο αλγόριθμος και να υπολογιστούν όλοι οι υπόλοιποι όροι.

1.2 Ορθογώνια Πολυώνυμα

Είναι γνωστό ότι τα ορθογώνια πολυώνυμα στην πραγματική ευθεία είναι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα του κύριου υποπίνακα του συγκεκριμένου τριδιαγώνιου άπειρου πίνακα

που καλείται πίνακας Jacobi. Ο πίνακας Jacobi είναι η αναπαράσταση του πολλαπλασιαστικού τελεστή στον γραμμικό χώρο των πραγματικών πολυωνύμων ως προς μία βάση ορθογωνίων πολυωνύμων. Το γεγονός ότι τα ορθογώνια πολυώνυμα ικανοποιούν μια αναδρομική σχέση τριών όρων είναι ο λόγος για την τριδιαγώνια μορφή του πίνακα Jacobi. Αυτή η μορφή του πίνακα Jacobi βοηθά στην εύρεση ιδιοτήτων των ορθογωνίων πολυωνύμων μέσω τεχνικών της θεωρίας τελεστών. Για παράδειγμα, αποτελέσματα για τις ρίζες των ορθογωνίων πολυωνύμων εξάγονται με την φασματική ανάλυση των κύριων υποπινάκων του πίνακα Jacobi.

Τα τελευταία χρόνια έχει αυξηθεί το ενδιαφέρον για τις ρίζες των ορθογωνίων πολυωνύμων στον μοναδιαίο κύκλο λόγω των εφαρμογών τους στην ανάλυση των διακριτών συστημάτων, και συγκεκριμένα στην επεξεργασία ψηφιακών σημάτων. Δυστυχώς, δεν είναι πολλά πράγματα γνωστά σχετικά με τις ρίζες στην περίπτωση των ορθογωνίων πολυωνύμων στο μοναδιαίο κύκλο, καθώς η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη από την περίπτωση της πραγματικής ευθείας. Τα ορθογώνια πολυώνυμα στον μοναδιαίο κύκλο ικανοποιούν επίσης μια αναδρομική σχέση τριών όρων η οποία μπορεί να σχετιστεί με έναν τριδιαγώνιο τελεστή, αλλά δεν παρέχει μια φασματική αναπαράσταση για τις ρίζες. Ωστόσο, είναι πιθανόν να πετύχουμε μια τέτοια αναπαράσταση, μόνο και μόνο υπολογίζοντας τον πίνακα που σχετίζεται με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή στον γραμμικό χώρο των μιγαδικών πολυωνύμων στην περίπτωση που τα ορθογώνια πολυώνυμα έχουν επιλεγεί σαν βάση. Το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας Hessenberg, πολύ πιο πολύπλοκος από τον πίνακα Jacobi στην πραγματική ευθεία. Οπότε, δεν είναι ένας εύκολος τρόπος για να μελετήσουμε τις ιδιότητες των ορθογωνίων πολυωνύμων στον μοναδιαίο κύκλο. Η κατάσταση βελτιώνεται με την εύρεση ενός πενταδιαγώνιου πίνακα αναπαράστασης ο οποίος δίνει μια φασματική ερμηνεία για τις ρίζες των ορθογωνίων πολυωνύμων. Αυτό το αποτέλεσμα προέρχεται από τον πίνακα αναπαράστασης του πολλαπλασιαστικού τελεστή στον γραμμικό χώρο των πολυωνύμων Laurent, όπου έχει επιλεγεί μια κατάλληλη βάση σχετική με ορθογώνια πολυώνυμα. Αυτός ο πίνακας αναπαράστασης δίνει μια φασματική αναπαράσταση για τις ρίζες των ορθογωνίων πολυωνύμων, πολύ πιο εύκολα από αυτήν που δίνεται από τους πίνακες Hessenberg [4].

1.3 Διακριτά Ολοκληρώσιμα Συστήματα

Τα διακριτά ολοκληρώσιμα συστήματα που θεωρούμε στην παρούσα εργασία είναι της μορφής

$$Q(u_s^{(m)}, u_s^{(m-1)}, u_{s-1}^{(m)}, u_{s+1}^{(m-1)}) = 0, \quad (1.2)$$

δηλαδή εξισώσεις που συνδέουν τις τιμές που βρίσκονται στις κορυφές του παρακάτω ρόμβου,

$$\begin{array}{ccc} & u_s^{(m-1)} & \\ u_{s-1}^{(m)} & & u_{s+1}^{(m-1)} \\ & u_s^{(m)} & \end{array}$$

όπου Q μια συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών (συνήθως ρητού τύπου) η οποία μπορεί να εξαρτάται και από παραμέτρους. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν και εξισώσεις μερικών διαφορών. Τα χαρακτηριστικά της ολοκληρωσιμότητας πηγάζουν από το γεγονός ότι η εξίσωση (1.2) είναι συνθήκη συμβατότητας ενός ζεύγους γραμμικών εξισώσεων (ζεύγος Lax) ως προς τη βοηθητική συνάρτηση $\phi_s^{(m)}$:

$$\phi_s^{(m)} = L_{s-1}^{(m)} \phi_{s-1}^{(m)}, \quad \phi_{s+1}^{(m-1)} = M_s^{(m)} \phi_s^{(m)}$$

με $L_{s-1}^{(m)}$, $M_s^{(m)}$ τετραγωνικούς πίνακες. Ο υπολογισμός του $\phi_{s+1}^{(m)}$ με δύο τρόπους επιβάλλει την ισότητα

$$M_s^{(m)} L_{s-1}^{(m)} = L_s^{(m-1)} M_{s-1}^{(m)}$$

που ισοδυναμεί με την (1.2).

Ο όρος ‘ολοκληρώσιμο σύστημα’ προκύπτει από το γεγονός ότι προβλήματα αρχικών συνοριακών τιμών στο πλέγμα, οδηγούν σε πλήρως ολοκληρώσιμες απεικονίσεις. Έτσι, θεωρώντας το πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών για την (1.2) περιοδικού τύπου, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα

$$\begin{array}{ccc} & a_0 & a'_0 \\ a_1 & & a'_1 \\ & a_2 & a'_2 \\ a_3 & & a'_3 \\ & a_4 & a'_4 \\ a_5 & & a'_5 \\ & a_0 & a'_0 \\ a_1 & & a'_1 \end{array}$$

και εφαρμόζοντας την εξίσωση (1.2) προκύπτει η απεικόνιση

$$(a_0, \dots, a_5) \xrightarrow{A} (a'_0, \dots, a'_5).$$

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος Lax, είναι δυνατόν να βρούμε ‘σταθερές κίνησης’ για την απεικόνιση A οι οποίες, στην περίπτωση ύπαρξης συμπλεκτικής δομής που παραμένει αμετάβλητη από την απεικόνιση, βρίσκονται σε ενέλιξη ως προς μία δομή Poisson και η απεικόνιση είναι πλήρως ολοκληρώσιμη κατά Liouville [5].

2 Αλγόριθμοι

2.1 ε-αλγόριθμος

Η επαναληπτική σχέση του ε-αλγορίθμου [16] είναι

$$(\varepsilon_{s+1}^{(m)} - \varepsilon_{s-1}^{(m+1)})(\varepsilon_s^{(m+1)} - \varepsilon_s^{(m)}) = 1 \quad (2.1)$$

η οποία στην ευθεία μορφή μπορεί να γραφεί

$$\varepsilon_{s+1}^{(m)} = \varepsilon_{s-1}^{(m+1)} + \frac{1}{\varepsilon_s^{(m+1)} - \varepsilon_s^{(m)}} \quad (2.2)$$

Μπορεί εύκολα να φανεί (από τη σχέση (2.2) θέτοντας όπου s το $s-2$ και m το $m+1$) ότι

$$\varepsilon_{s-1}^{(m+1)} = \varepsilon_{s-3}^{(m+2)} + \frac{1}{\varepsilon_{s-2}^{(m+2)} - \varepsilon_{s-2}^{(m+1)}}$$

Ας θέσουμε τώρα: $\delta = \varepsilon_{s-2}^{(m+2)} - \varepsilon_{s-2}^{(m+1)}$, οπότε

$$\varepsilon_{s-1}^{(m+1)} = \varepsilon_{s-3}^{(m+2)} + \frac{1}{\delta}$$

Αν υποθέσουμε ότι και οι δύο τιμές $(\varepsilon_{s-2}^{(m+2)}, \varepsilon_{s-2}^{(m+1)})$ τείνουν στον ίδιο αριθμό a , τότε το δ τείνει στο 0 οπότε το $\frac{1}{\delta}$ τείνει στο ∞ και το $\varepsilon_{s-1}^{(m+1)}$ τείνει στο ∞ , με αποτέλεσμα τα $\varepsilon_s^{(m)}, \varepsilon_s^{(m+1)}$ να τείνουν στο a και το $\varepsilon_{s+1}^{(m)}$ να είναι απροσδιόριστο.

Η διαδικασία του ε-αλγορίθμου στα παραπάνω, φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \varepsilon_{s-1}^{(m)} & & & \\ & & & (a)\varepsilon_{s-2}^{(m+1)} & & (a)\varepsilon_s^{(m)} & \\ \varepsilon_{s-3}^{(m+2)} & & & (\infty)\varepsilon_{s-1}^{(m+1)} & & (*)\varepsilon_{s+1}^{(m)} & \\ & & & (a)\varepsilon_{s-2}^{(m+2)} & & (a)\varepsilon_s^{(m+1)} & \\ & & & & \varepsilon_{s-1}^{(m+2)} & & \end{array} \quad (2.3)$$

Παρακάτω αναπτύσουμε την τεχνική για να αποφύγουμε αυτήν την απροσδιοριστία εργαζόμεστε ως εξής. Για ευκολία των πράξεων αντιστοιχίζουμε το παραπάνω σχή-

μα με το ακόλουθο:

$$\begin{array}{ccccc} & & N & & \\ & a & & b & \\ W & & C & & E \\ & c & & d & \\ & & S & & \end{array}$$

Από τη σχέση (2.2) έχουμε

$$\begin{aligned} E &= C + \frac{1}{d-b} = \\ C + \frac{1}{c + \frac{1}{S-C} - a - \frac{1}{C-N}} &= \\ C + \frac{1}{\frac{1}{C-W} + \frac{1}{S-C} - \frac{1}{C-N}} & \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\frac{1}{E-C} = \frac{1}{C-W} + \frac{1}{S-C} - \frac{1}{C-N}$$

Άρα

$$\frac{1}{C-S} + \frac{1}{C-N} = \frac{1}{C-W} + \frac{1}{C-E} \quad (2.4)$$

Η σχέση (2.4) παραμένει αναλλοίωτη από την αντιστροφή $x \mapsto \frac{1}{x}$, δηλαδή αν θέσουμε όπου

$$C \rightarrow \frac{1}{C}, \quad E \rightarrow \frac{1}{E}, \quad W \rightarrow \frac{1}{W}, \quad S \rightarrow \frac{1}{S}, \quad N \rightarrow \frac{1}{N}.$$

Πράγματι η μετασχηματισμένη σχέση

$$\frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{1}{S}} + \frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{1}{N}} = \frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{1}{W}} + \frac{1}{\frac{1}{C} - \frac{1}{E}} \quad (2.5)$$

γράφεται

$$\frac{S}{S-C} + \frac{N}{N-C} = \frac{W}{W-C} + \frac{E}{E-C}$$

δηλαδή

$$\frac{S-C+C}{S-C} + \frac{N-C+C}{N-C} = \frac{W-C+C}{W-C} + \frac{E-C+C}{E-C}$$

στη συνέχεια

$$1 + \frac{C}{S-C} + 1 + \frac{C}{N-C} = 1 + \frac{C}{W-C} + 1 + \frac{C}{E-C}$$

και τελικά

$$\frac{1}{S-C} + \frac{1}{N-C} = \frac{1}{W-C} + \frac{1}{E-C}$$

Άρα (2.4) \Leftrightarrow (2.5). Καθώς το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι το C τείνει στο ∞ χρησιμοποιώντας την ισοδύναμη σχέση (2.5) έχουμε

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{N} = \frac{1}{W} + \frac{1}{E}$$

δηλαδή

$$S + N = W + E$$

και

$$E = S + N - W$$

ή ισοδύναμα

$$\varepsilon_{s+1}^{(m)} = \varepsilon_{s-1}^{(m+2)} + \varepsilon_{s-1}^{(m)} - \varepsilon_{s-3}^{(m+2)} \quad (2.6)$$

Συνεπώς, για να υπολογίσουμε το $\varepsilon_{s+1}^{(m)}$ χρειαζόμαστε μόνο τις ακραίες τιμές του παραπάνω ρόμβου $\varepsilon_{s-1}^{(m+2)}$, $\varepsilon_{s-1}^{(m)}$, $\varepsilon_{s-3}^{(m+2)}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση (2.4), παραμένει αναλλοίωτη και στην περίπτωση που θέσουμε όπου

$$C \rightarrow C + h, E \rightarrow E + h, W \rightarrow W + h, S \rightarrow S + h, N \rightarrow N + h.$$

Πράγματι:

$$\frac{1}{C+h-S-h} + \frac{1}{C+h-N-h} = \frac{1}{C+h-W-h} + \frac{1}{C+h-E-h}$$

Οπότε

$$\frac{1}{C-S} + \frac{1}{C-N} = \frac{1}{C-W} + \frac{1}{C-E}$$

Τέλος η σχέση (2.4) παραμένει αναλλοίωτη και αν θέσουμε

$$C \rightarrow aC, E \rightarrow aE, W \rightarrow aW, S \rightarrow aS, N \rightarrow aN, \quad a \neq 0.$$

Πράγματι:

$$\frac{1}{aC - aS} + \frac{1}{aC - aN} = \frac{1}{aC - aW} + \frac{1}{aC - aE}$$

τότε

$$\frac{1}{a(C - S)} + \frac{1}{a(C - N)} = \frac{1}{a(C - W)} + \frac{1}{a(C - E)}$$

Οπότε

$$\frac{1}{C - S} + \frac{1}{C - N} = \frac{1}{C - W} + \frac{1}{C - E}$$

Άρα, αφού η (2.4) παραμένει αναλλοίωτη και ως προς τους τρεις μετασχηματισμούς ($x \mapsto C + x$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto ax$) τότε παραμένει αναλλοίωτη ως προς κάθε μετασχηματισμό Möbius δηλαδή μετασχηματισμούς της μορφής $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ με $ad - bc \neq 0$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα όπου χρησιμοποιείται ο ε-αλγόριθμος για τη σειρά $\sum_{s=0}^{\infty} u_s$, στην οποία, για κάποιο r , ισχύει

$$u_r = u_{r+1}.$$

Οι αρχικές συνθήκες για τον ε-αλγόριθμο στην περίπτωση αυτή είναι

$$\varepsilon_{-1}^{(m)} = 0, \quad \varepsilon_0^{(m)} = \sum_{s=0}^{m-1} u_s, \quad m = 1, 2, \dots; \quad \varepsilon_0^{(0)} = 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι

$$u_s = \frac{x^s}{s!}, \quad s = 0, 1, \dots$$

Τότε

$$\varepsilon_0^{(1)} = u_0 = \frac{x^0}{0!} = 1$$

$$\varepsilon_0^{(2)} = \sum_{s=0}^1 u_s = u_0 + u_1 = 1 + \frac{x^1}{1!} = 1 + x$$

$$\varepsilon_0^{(3)} = \sum_{s=0}^2 u_s = u_0 + u_1 + u_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\varepsilon_0^{(4)} = \sum_{s=0}^3 u_s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$\varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_{-1}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon_0^{(2)} - \varepsilon_0^{(1)}} = 0 + \frac{1}{1 - 0} = 1$$

$$\varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_{-1}^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon_0^{(3)} - \varepsilon_0^{(2)}} = 0 + \frac{1}{1 + x - 1} = \frac{1}{x}$$

$$\varepsilon_1^{(3)} = \varepsilon_{-1}^{(4)} + \frac{1}{\varepsilon_0^{(4)} - \varepsilon_0^{(3)}} = 0 + \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 - x} = \frac{2}{x^2}$$

$$\varepsilon_1^{(4)} = \varepsilon_{-1}^{(5)} + \frac{1}{\varepsilon_0^{(5)} - \varepsilon_0^{(4)}} = 0 + \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \frac{6}{x^3}$$

$$\varepsilon_2^{(1)} = \varepsilon_0^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon_1^{(2)} - \varepsilon_1^{(1)}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

$$\varepsilon_2^{(2)} = \varepsilon_0^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon_1^{(3)} - \varepsilon_1^{(2)}} = 1 + x + \frac{1}{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{2 + x}{2 - x}$$

$$\varepsilon_2^{(3)} = \varepsilon_0^{(4)} + \frac{1}{\varepsilon_1^{(4)} - \varepsilon_1^{(3)}} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2}} = \frac{6 + 4x + x^2}{6 - 2x}$$

$$\varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_1^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon_2^{(2)} - \varepsilon_2^{(1)}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{\frac{2+x}{2-x} - 1}{2-x}} = \frac{2 - 4x + x^2}{-x^2}$$

$$\varepsilon_3^{(2)} = \varepsilon_1^{(3)} + \frac{1}{\varepsilon_2^{(3)} - \varepsilon_2^{(2)}} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{\frac{\frac{6+4x+x^2}{6-2x} - \frac{2+x}{2-x}}{6-2x}} = -\frac{2(6 - 6x + x^2)}{x^3}$$

$$\varepsilon_4^{(1)} = \varepsilon_1^{(4)} + \frac{1}{\varepsilon_3^{(4)} - \varepsilon_3^{(1)}} = \frac{2 + x}{2 - x} + \frac{1}{-\frac{2(6-6x+x^2)}{x^3} - \frac{2-4x+x^2}{-x^2}} = \frac{2(3 + x)}{6 - 4x + x^2}$$

Άρα ο ρόμβος του ε-αλγορίθμου (2.3) για το συγκεκριμένο παράδειγμα γίνεται

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 0 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \frac{1}{1-x} & & \\
 0 & & & \frac{1}{x} & & \frac{2-4x+x^2}{-x^2} & \\
 & & 1+x & & \frac{2+x}{2-x} & & \frac{2(3+x)}{6-4x+x^2} \\
 0 & & & \frac{2}{x^2} & & -\frac{2(6-6x+x^2)}{x^3} & \\
 & & 1+x+\frac{x^2}{2} & & \frac{6+4x+x^2}{6-2x} & & \\
 0 & & & \frac{6}{x^3} & & & \\
 & & 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6} & & & &
 \end{array}$$

Όταν $x = 2$ ο παραπάνω πίνακας γίνεται

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 1 & & & -1 & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
 3 & & & \infty & & 5 & \\
 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
 5 & & & 9 & & & \\
 & & \frac{3}{4} & & & & \\
 \frac{19}{3} & & & & & &
 \end{array}$$

Διαπιστώνουμε δηλαδή, ότι μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα του ε-αλγορίθμου ανεξάρτητα από την ύπαρξη απροσδιόριστων στοιχείων.

2.2 ρ-αλγόριθμος

Η επαναληπτική σχέση του ρ-αλγορίθμου είναι

$$(\rho_{s+1}^{(m)} - \rho_{s-1}^{(m+1)}) \cdot (\rho_s^{(m+1)} - \rho_s^{(m)}) = s + 1 \quad (2.7)$$

οπότε το $\rho_{s+1}^{(m)}$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\rho_{s+1}^{(m)} = \rho_{s-1}^{(m+1)} + \frac{s+1}{\rho_s^{(m+1)} - \rho_s^{(m)}}. \quad (2.8)$$

Από τη σχέση (2.8), θέτοντας όπου s και m τα $s - 2$ και $m + 1$ αντίστοιχα, έχουμε

$$\rho_{s-1}^{(m+1)} = \rho_{s-3}^{(m+2)} + \frac{s-1}{\rho_{s-2}^{(m+1)} - \rho_{s-2}^{(m+2)}}$$

απ' όπου παρατηρούμε ότι για να υπολογίσουμε το $\rho_{s-1}^{(m+1)}$ πρέπει τα $\rho_{s-2}^{(m+1)}$, $\rho_{s-2}^{(m+2)}$ να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι απροσδιοριστία εμφανίζεται αν τα $\rho_{s-2}^{(m+1)}$, $\rho_{s-2}^{(m+2)}$ είναι ίσα.

Η διαδικασία του ρ -αλγορίθμου φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:

$$\begin{array}{ccccc} & & \rho_{s-1}^{(m)} & & \\ & (a)\rho_{s-2}^{(m+1)} & & (a)\rho_s^{(m)} & \\ \rho_{s-3}^{(m+2)} & & (\infty)\rho_{s-1}^{(m+1)} & & (*)\rho_{s+1}^{(m)} \\ & (a)\rho_{s-2}^{(m+2)} & & (a)\rho_s^{(m+1)} & \\ & & \rho_{s-1}^{(m+2)} & & \end{array} \quad (2.9)$$

Από τον ρόμβο (2.9) μπορούμε να υπολογίσουμε τα

$$\begin{aligned} \rho_{s+1}^{(m)} &= \rho_{s-1}^{(m+1)} + \frac{s+1}{\rho_s^{(m+1)} - \rho_s^{(m)}}, \\ \rho_s^{(m)} &= \rho_{s-2}^{(m+1)} + \frac{s}{\rho_{s-1}^{(m)} - \rho_{s-1}^{(m+1)}}, \\ \rho_s^{(m+1)} &= \rho_{s-2}^{(m+2)} + \frac{s}{\rho_{s-1}^{(m+2)} - \rho_{s-1}^{(m+1)}}, \\ \rho_{s-1}^{(m+1)} &= \rho_{s-3}^{(m+2)} + \frac{s-1}{\rho_{s-2}^{(m+2)} - \rho_{s-2}^{(m+1)}}. \end{aligned}$$

Για ευκολία των πράξεων αντιστοιχίζουμε τον ρόμβο (2.9) με τον ακόλουθο:

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ & \beta & \gamma \\ W & C & E \\ & \alpha & \delta \\ & S & \end{array}$$

οπότε οι παραπάνω σχέσεις γίνονται

$$E = C + \frac{s+1}{\delta - \gamma},$$

$$\gamma = \beta + \frac{s}{C - N},$$

$$\delta = \alpha + \frac{s}{S - C},$$

$$C = W + \frac{s - 1}{\alpha - \beta}$$

τις οποίες μπορούμε να τις γράψουμε

$$\delta - \gamma = \frac{s + 1}{E - C},$$

$$\gamma - \beta = \frac{s}{C - N},$$

$$\alpha - \delta = -\frac{s}{S - C},$$

$$\beta - \alpha = -\frac{s - 1}{C - W}.$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις τελευταίες σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{s + 1}{E - C} + \frac{s}{C - N} = \frac{s}{S - C} + \frac{s - 1}{C - W} \quad (2.10)$$

ή σύμφωνα με τον ρόμβο (2.9)

$$\frac{s + 1}{\rho_{s+1}^{(m)} - \rho_{s-1}^{(m+1)}} + \frac{s}{\rho_{s-1}^{(m+1)} - \rho_{s-1}^{(m)}} = \frac{s}{\rho_{s-1}^{(m+2)} - \rho_{s-1}^{(m+1)}} + \frac{s - 1}{\rho_{s-1}^{(m+1)} - \rho_{s-3}^{(m+2)}} \quad (2.11)$$

απ' όπου φαίνεται ότι για να υπολογίσουμε το $\rho_{s+1}^{(m)}$ αρκεί να ξέρουμε μόνο τα σημεία που είναι στα άκρα του ρόμβου. Οπότε μπορούμε να συνεχίσουμε τον αλγόριθμο, παρ' όλο που υπάρχει απροσδιοριστία.

Θα αποδείξουμε ότι όπως και στον ε-αλγόριθμο, έτσι και εδώ, η σχέση (2.11) (ή η ισοδύναμή της (2.10)) παραμένει αναλλοίωτη ως προς τον μετασχηματισμό Möbius.

Αν θέσουμε στην (2.10) όπου

$$E \rightarrow E + h, C \rightarrow C + h, N \rightarrow N + h, W \rightarrow W + h, S \rightarrow S + h,$$

αυτή γίνεται

$$\frac{s + 1}{E + h - C - h} + \frac{s}{C + h - N - h} = \frac{s}{S + h - C - h} + \frac{s - 1}{C + h - W - h}$$

δηλαδή

$$\frac{s+1}{E-C} + \frac{s}{C-N} = \frac{s}{S-C} + \frac{s-1}{C-W}$$

η οποία είναι η ίδια (2.10). Άρα η (2.10) παραμένει αναλλοίωτη ως προς τον πρώτο μετασχηματισμό.

Αν θέσουμε τώρα στην (2.10) όπου

$$E \rightarrow aE, C \rightarrow aC, N \rightarrow aN, W \rightarrow aW, S \rightarrow aS,$$

γίνεται

$$\frac{s+1}{aE-aC} + \frac{s}{aC-aN} = \frac{s}{aS-aC} + \frac{s-1}{aC-aW}$$

δηλαδή

$$\frac{s+1}{a(E-C)} + \frac{s}{a(C-N)} = \frac{s}{a(S-C)} + \frac{s-1}{a(C-W)}$$

οπότε

$$\frac{s+1}{E-C} + \frac{s}{C-N} = \frac{s}{S-C} + \frac{s-1}{C-W}$$

η οποία είναι ίδια η (2.10). Οπότε η (2.10) είναι αναλλοίωτη και ως προς τον δεύτερο μετασχηματισμό.

Αν θέσουμε τέλος, στην (2.10) όπου

$$E \rightarrow \frac{1}{E}, C \rightarrow \frac{1}{C}, N \rightarrow \frac{1}{N}, W \rightarrow \frac{1}{W}, S \rightarrow \frac{1}{S},$$

γίνεται

$$\frac{s+1}{\frac{1}{E}-\frac{1}{C}} + \frac{s}{\frac{1}{C}-\frac{1}{N}} = \frac{s}{\frac{1}{S}-\frac{1}{C}} + \frac{s-1}{\frac{1}{C}-\frac{1}{W}}$$

δηλαδή

$$\frac{EC(s+1)}{C-E} + \frac{CNs}{N-C} = \frac{SCs}{C-S} + \frac{CW(s-1)}{W-C}$$

ή

$$\frac{E(s+1)}{C-E} + \frac{Ns}{N-C} = \frac{Ss}{C-S} + \frac{W(s-1)}{W-C}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} & \frac{E(s+1) - C(s+1) + C(s+1)}{C-E} + \frac{Ns - Cs + Cs}{N-C} = \\ & \frac{Ss - Cs + Cs}{C-S} + \frac{W(s-1) - C(s-1) + C(s-1)}{W-C} = \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} & \frac{(E-C)(s+1)}{C-E} + \frac{C(s+1)}{C-E} + \frac{(N-C)s}{N-C} + \frac{Cs}{N-C} = \\ & \frac{(S-C)s}{C-S} + \frac{Cs}{C-S} + \frac{(W-C)(s-1)}{W-C} + \frac{C(s-1)}{W-C} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$-s-1 + \frac{C(s+1)}{C-E} + s + \frac{Cs}{N-C} = -s + \frac{Cs}{C-S} + s-1 + \frac{C(s-1)}{W-C}$$

άρα

$$\frac{C(s+1)}{C-E} + \frac{Cs}{N-C} = \frac{Cs}{C-S} + \frac{C(s-1)}{W-C}$$

και

$$\frac{s+1}{C-E} + \frac{s}{N-C} = \frac{s}{C-S} + \frac{s-1}{W-C}$$

ή αλλιώς

$$\frac{s+1}{E-C} + \frac{s}{C-N} = \frac{s}{S-C} + \frac{s-1}{C-W}$$

η οποία είναι ίδια η (2.10). Οπότε η (2.10) είναι αναλλοίωτη και ως προς τον τρίτο μετασχηματισμό. Άρα, πράγματι, η (2.10) είναι αναλλοίωτη ως προς κάθε μετασχηματισμό Möbius.

2.3 qd-αλγόριθμος

Οι σχέσεις του qd αλγορίθμου είναι

$$e_s^{(m)} + q_s^{(m)} = e_{s-1}^{(m+1)} + q_s^{(m+1)}, \quad e_s^{(m)} q_{s+1}^{(m)} = e_s^{(m+1)} q_s^{(m+1)} \quad (2.12)$$

οπότε οι q και e συναρτήσεις προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$e_s^{(m)} = e_{s-1}^{(m+1)} + q_s^{(m+1)} - q_s^{(m)}, \quad q_{s+1}^{(m)} = \frac{e_s^{(m+1)} q_s^{(m+1)}}{e_s^{(m)}} \quad (2.13)$$

Απροσδιοριστία εμφανίζεται όταν το $e_s^{(m)}$ είναι κοντά στο 0, οπότε ο πίνακας γίνεται

$$\begin{array}{cccccc}
 & & e_{s+1}^{(m-2)} & & & \\
 & (0)q_{s+1}^{(m-1)} & & (*)q_{s+2}^{(m-2)} & & \\
 (0)e_s^{(m)} & & (\infty)e_{s+1}^{(m-1)} & & (*)e_{s+2}^{(m-2)} & \\
 & (\infty)q_{s+1}^{(m)} & & (\infty)q_{s+2}^{(m-1)} & & (*)q_{s+3}^{(m-2)} \\
 & & (\infty)e_{s+1}^{(m)} & & (0)e_{s+2}^{(m-1)} & \\
 & & & (0)q_{s+2}^{(m)} & & (*)q_{s+3}^{(m-1)}
 \end{array}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε, τώρα, τους όρους που έχουν (*), γράφουμε:

$$b = e_s^{(m)} - q_{s+1}^{(m-1)},$$

$$c = q_s^{(m+1)} \cdot e_s^{(m+1)},$$

$$d = q_{s+1}^{(m+1)} + e_s^{(m+1)},$$

$$g = q_{s+1}^{(m+1)} \cdot e_{s+1}^{(m+1)},$$

και

$$f = g + [d \cdot (q_{s+1}^{(m)})^{-1} - 1] \cdot (d \cdot e_s^{(m)} - c) \cdot [1 - q_s^{(m)} \cdot (e_s^{(m-1)})^{-1}] \cdot [b \cdot (q_{s+1}^{(m)})^{-1} + 1].$$

Τότε

$$q_{s+2}^{(m-2)} = (e_s^{(m)} \cdot b + c) \cdot q_s^{(m)} \cdot (e_{s+1}^{(m-2)})^{-1} \cdot e_s^{(m-1)-1},$$

$$e_{s+2}^{(m-2)} = b - q_{s+2}^{(m-2)} + (d + b) \cdot [1 + (q_s^{(m)})^{-1} \cdot b]^{-1},$$

$$q_{s+3}^{(m-2)} = [b \cdot (q_{s+1}^{(m)})^{-1} + 1] \cdot f \cdot (e_{s+2}^{(m-2)})^{-1}$$

και

$$q_{s+1}^{(m-1)} = e_{s+2}^{(m)} \cdot g \cdot f^{-1}.$$

Με αυτόν τον τρόπο καταφέρνουμε να μην χρησιμοποιήσουμε τους όρους που είναι απροσδιόριστοι και να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των παρακάτω όρων του αλγορίθμου.

2.4 qd-αλγόριθμος και Εφαρμογές

Ορισμός 2.1. Έστω η δυναμοσειρά $F := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Θέτουμε $a_m := 0$, $m < 0$. Για τυχαίους ακέραιους n και $k \geq 0$ ορίζουμε τις ορίζουσες $H_k^{(n)}$ ως εξής:

$$H_k^{(n)} := \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+k-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} & \dots & a_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

με $H_0^{(n)} := 1$. Αυτές οι ορίζουσες ονομάζονται ορίζουσες *Hankel* για την δυναμοσειρά F .

Θεώρημα 2.2. [9, σελ. 595] (Ταυτότητα του *Jacobi*) Για κάθε ακέραιο n και για $k \geq 1$:

$$(H_k^{(n)})^2 - H_k^{(n-1)}H_k^{(n+1)} + H_{k+1}^{(n-1)}H_{k-1}^{(n+1)} = 0. \quad (2.15)$$

Ορισμός 2.3. Μια δυναμοσειρά καλείται *κανονική* αν οι αντίστοιχες ορίζουσες *Hankel* ικανοποιούν τη σχέση $H_m^{(n)} \neq 0$ για κάθε $m \geq 0$ και $n \geq 0$. Μια δυναμοσειρά καλείται *k-κανονική* αν $H_m^{(n)} \neq 0$ για $m = 0, 1, \dots, k$ και για κάθε $n \geq 0$. Τέλος, μια δυναμοσειρά καλείται *υπερκανονική* αν $H_m^{(n)} \neq 0$ για $m = 1, 2, \dots$ και για κάθε $n > -m$.

Θεώρημα 2.4. [9, σελ. 610] Έστω μια δυναμοσειρά F και έστω $H_k^{(n)}$ οι ορίζουσες *Hankel* που αντιστοιχούν στην F . Αν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε η F να είναι *k-κανονική*, τότε υπάρχουν οι στήλες $q_m^{(n)}$ του πίνακα του qd-αλγορίθμου που σχετίζεται με την F για $m = 1, 2, \dots, k$ και

$$q_m^{(n)} = \frac{H_m^{(n+1)}H_{m-1}^{(n)}}{H_m^{(n)}H_{m-1}^{(n+1)}}, \quad (2.16)$$

$$e_m^{(n)} = \frac{H_{m+1}^{(n)}H_{m-1}^{(n+1)}}{H_m^{(n)}H_m^{(n+1)}}. \quad (2.17)$$

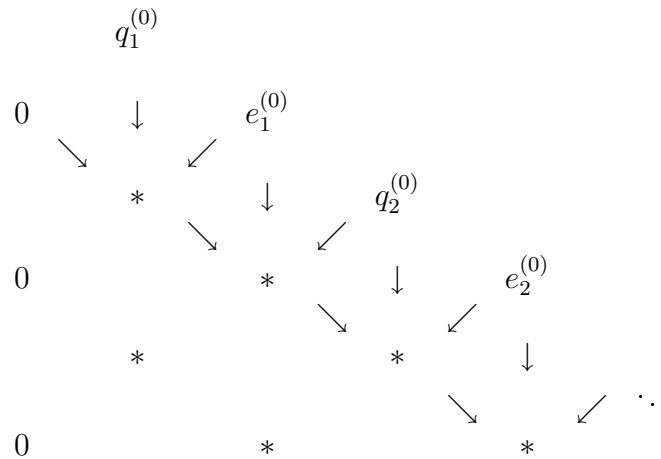
για $m = 1, 2, \dots, k$ και για κάθε $n \geq 0$.

Ας ασχοληθούμε τώρα με την προσδευτική μορφή του qd-αλγορίθμου. Οι επαναληπτικές σχέσεις του αλγορίθμου είναι οι εξής:

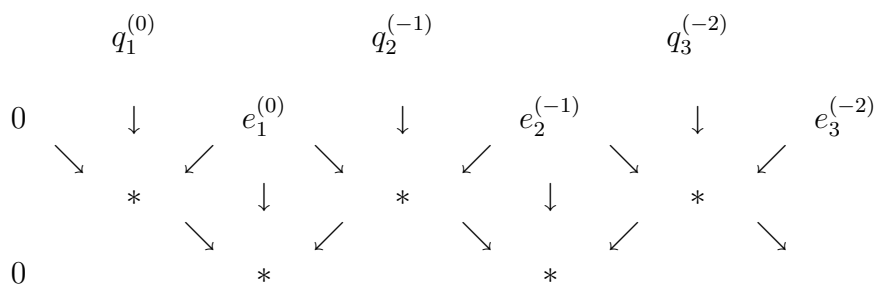
$$q_m^{(n+1)} = [e_m^{(n)} - e_{m-1}^{(n+1)}] + q_m^{(n)}, \quad (2.18)$$

$$e_m^{(n+1)} = \frac{q_{m+1}^{(n)}}{q_m^{(n+1)}} e_m^{(n)} \tag{2.19}$$

και η μορφή του πίνακα είναι



Η αρχή γίνεται από τις δύο πρώτες οριζόντιες γραμμές με την ακόλουθη διαδικασία:



Επειδή οι παρανομαστές από τις σχέσεις (2.18) και (2.19) δεν είναι μηδέν, τότε τα $q_m^{(n)}$ και $e_m^{(n)}$ μπορούν να οριστούν από τις ίδιες σχέσεις και για αρνητικές τιμές του n . Αν η δυναμοσειρά F είναι υπερκανονική οι παρανομαστές στα $q_m^{(n)}$ και $e_m^{(n)}$ είναι $\neq 0$ για $n > -m$, $m = 1, 2, \dots$ και συγκεκριμένα για τις δύο πρώτες σειρές του παραπάνω πίνακα. Φαίνεται εύκολα ότι

$$q_m^{(1-m)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \tag{2.20}$$

Οι ποσότητες $e_m^{(1-m)}$ σχετίζονται με τον πίνακα qd της αντίστροφης σειράς F^{-1} όπως φαίνεται από το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.5. [9, σελ. 615] Έστω η υπερκανονική σειρά $F := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ και έστω

$$\hat{F} := b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^{-1} = F^{-1}$$

η αντίστροφη της F . Τότε η \hat{F} είναι επίσης υπερκανονική και ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις για τα $(q_m^{(n)}, e_m^{(n)})$ και $(\hat{q}_m^{(n)}, \hat{e}_m^{(n)})$ των πινάκων qd που σχετίζονται με τις σειρές F και \hat{F} :

$$\hat{q}_1^{(0)} = -q_1^{(0)}, \quad (2.21)$$

$$\hat{q}_m^{(n)} = e_{n+m}^{(1-n)}, \quad \hat{e}_m^{(n)} = q_{n+m}^{(1-n)}, \quad n > -m, \quad (2.22)$$

$$q_m^{(n)} = \hat{e}_{n+m-1}^{(1-n)}, \quad e_m^{(n)} = \hat{q}_{n+m}^{(1-n)}, \quad n > -m. \quad (2.23)$$

Συγκεκριμένα,

$$e_m^{(1-m)} = \hat{q}_1^{(m)} = \frac{b_{m+1}}{b_m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Λήμμα 2.6. Οι επαναληπτικές σχέσεις του qd -αλγορίθμου (2.18), (2.19) ισχύουν και για την αντίστροφη F^{-1} .

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για να βρούμε τις ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού k , $p(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + b_kz^k$, ή αντίστοιχα τους πόλους της (αντίστροφής της) ρητής συνάρτησης $r = p^{-1}$. Υπολογίζουμε:

$$q_1^{(0)} = -\hat{q}_1^{(0)} = -\frac{b_1}{b_0}, \quad q_2^{(-1)} = q_3^{(-2)} = \dots = 0,$$

$$e_1^{(0)} = e_1^{(1-1)} = \frac{b_2}{b_1}, \quad e_2^{(-1)} = e_1^{(1-2)} = \frac{b_3}{b_2}, \quad e_3^{(-2)} = e_1^{(1-3)} = \frac{b_4}{b_3}, \dots$$

Τότε ο qd πίνακας γίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{cccccc} & -\frac{b_1}{b_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \frac{b_2}{b_1} & & \frac{b_3}{b_2} & & \frac{b_4}{b_3} & & & \\ & * & & * & & * & & * & & \\ 0 & & * & & * & & * & & * & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & z_1^{-1} & & z_2^{-1} & & z_3^{-1} & & z_4^{-1} & & \end{array}$$

Οι όροι του πίνακα με τα (*) υπολογίζονται με βάση την προοδευτική μορφή του qd -αλγορίθμου.

Τέλος, δίνουμε τη σχέση του qd -αλγορίθμου με συνεχή κλάσματα.

Ορισμός 2.7. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$t_m : u \rightarrow \frac{za_m}{1+u}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

όπου τα a_1, a_2, \dots είναι τυχαίες μη μηδενικές μιγαδικές σταθερές και όπου z μιγαδική μεταβλητή. Εφαρμόζοντας τέτοιους μετασχηματισμούς, παίρνουμε συνεχές κλάσμα του οποίου οι προσεγγίσεις εξαρτώνται από την παράμετρο z . Το συνεχές κλάσμα που προκύπτει

$$C(z) = t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ \dots(0) = \frac{a_1}{|1} + \frac{za_2}{|1} + \frac{za_3}{|1} = \frac{1}{z} \Phi_{m=1}^{\infty} \frac{za_m}{1} \quad (2.25)$$

θα καλείται *RITZ* κλάσμα.

Οι ακολουθίες των αριθμητών p_n και των παρανομαστών q_n του C ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες

$$p_0 = 0, \quad p_1 = a_1, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = 1 \quad (2.26)$$

και οι αναδρομικές σχέσεις

$$p_n = za_n p_{n-2} + p_{n-1}, \quad q_n = za_n q_{n-2} + q_{n-1}, \quad (2.27)$$

όπου $n = 2, 3, \dots$

Θεώρημα 2.8. [10, σελ. 518] Δοθείσης μιας δυναμοσειράς

$$P = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

υπάρχει το πολύ ένα *RITZ* κλάσμα που αντιστοιχεί στην P . Υπάρχει ακριβώς ένα τέτοιο συνεχές κλάσμα αν και μόνο αν οι ορίζουσες *Hankel*

$$H_k^{(n)} := \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \dots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}$$

ικανοποιούν την σχέση

$$H_k^{(n)} \neq 0$$

για $n = 0, 1, \dots$ και $k = 1, 2, \dots$. Αν τα $q_k^{(n)}$ και $e_k^{(n)}$ συμβολίζουν τα στοιχεία του qd -πίνακα που σχετίζεται με την P , τότε το *RITZ* κλάσμα που αντιστοιχεί στην P δίνεται από τον τύπο

$$C = \frac{c_0}{|1} - \frac{q_1^{(0)} z}{|1} - \frac{e_1^{(0)} z}{|1} - \frac{q_2^{(0)} z}{|1} - \frac{e_2^{(0)} z}{|1} - \dots \quad (2.28)$$

2.5 Πίνακες Padé, Σχέσεις με ε - και q d-αλγόριθμο

Έστω P η κλάση των συνήθων δυναμοσειρών στον \mathbb{C} που περιέχει όλες τις εκφράσεις της μορφής

$$C(z) \equiv c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

με σταθερές $c_k \in \mathbb{C}$.

Έστω $C(z) \in P$ και έστω m και n μη-αρνητικοί ακέραιοι. Τότε η μιγαδική κλασματική μορφή

$$\frac{u(z)}{v(z)} = \frac{u_0 + u_1z + \dots + u_m z^m}{v_0 + v_1z + \dots + v_n z^n}$$

είναι Padé μορφή τύπου (m, n) για την $C(z)$ αν $v \neq 0$ και

$$C(z)v(z) - u(z) = O(z^{m+n+1}).$$

Το δεύτερο μέλος σημαίνει ότι είναι μία δυναμοσειρά με όρους $z^{m+n+k+1}$, $0 \leq k < \infty$.

Θεώρημα 2.9. [7] (Frobenius) Υπάρχουν πάντα μορφές Padé τύπου (m, n) για την $C(z)$. Κάθε τέτοια μορφή είναι μια αναπαράσταση της ίδιας ρητής συνάρτησης $r_{m,n}$. Η αναπαράσταση

$$r_{m,n}(z) = \frac{p_{m,n}(z)}{q_{m,n}(z)}$$

είναι δυνατή με $p_{m,n}$ και $q_{m,n}$ πρώτα μεταξύ τους και $p_{m,n}(0) = c_0$, $q_{m,n}(0) = 1$.

Ο άπειρος πίνακας

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \infty & r_{0,0} & r_{0,1} & r_{0,2} & r_{0,3} & \dots \\ \infty & r_{1,0} & r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \dots \\ \infty & r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & \dots \\ \infty & r_{3,0} & r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

είναι ο εκτεταμένος πίνακας Padé για την $C(z)$. Η δεύτερη στήλη του πίνακα περιέχει τα μερικά αθροίσματα

$$C_m(z) \equiv \sum_{k=0}^m c_k z^k$$

του $C(z)$. Οι φυσικές επεκτάσεις των u και v ορίζονται να είναι

$$u_{m,-1}(z) \equiv z^m, \quad v_{m,-1}(z) \equiv 0, \quad m \geq 0,$$

όπου τα μη-τετριμμένα κλάσματα Padé $r_{m,n}$ δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} r_{01}(z) &= \frac{1}{1-z}, & r_{21} &= \frac{1-z-z^2}{1-2z}, \\ r_{31}(z) &= \frac{1-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}}{1-\frac{3z}{2}}, & r_{41}(z) &= \frac{1-\frac{z}{3}-\frac{z^2}{3}+\frac{2z^3}{3}+\frac{z^4}{3}}{1-\frac{4z}{3}}, \\ r_{22}(z) &= \frac{1-z^2}{1-z-z^2}, & r_{32}(z) &= \frac{1-z+z^3}{1-2z+z^2}, \\ r_{03}(z) &= \frac{1}{1-z-z^3}, & r_{06}(z) &= \frac{1}{1-z-z^3+z^6}, \\ r_{16}(z) &= \frac{1-z}{1-2z+z^2-z^3+z^4+z^6}, & r_{07}(z) &= \frac{1}{1-z-z^3+z^6+z^7}. \end{aligned}$$

Είναι ευρέως γνωστές οι σχέσεις μεταξύ των πινάκων Padé για εκθετικές σειρές και αρκετών συνεχών κλασμάτων που σχετίζονται με τις σειρές. Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι που κατασκευάζουν συνεχή κλάσματα των οποίων οι συγκλίνοντες όροι κατασκευάζουν ακολουθίες σε κανονικούς πίνακες Padé. Πιθανόν ο πιο θεμελιώδης από αυτούς να είναι ο αλγόριθμος ηλίικου-διαφοράς του Rutishauer. Είναι ο γνωστός μας qd-αλγόριθμος που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

$$\begin{array}{ccccccc} q_1^0 & & q_2^{-1} & & q_3^{-2} & & \dots \\ & e_1^0 & & e_2^{-1} & & & \\ q_1^1 & & q_2^0 & & q_3^{-1} & & \dots \\ & e_1^1 & & e_2^0 & & & \\ q_1^2 & & q_2^1 & & q_3^0 & & \dots \\ & e_1^2 & & e_2^1 & & & \\ q_1^3 & & q_2^2 & & q_3^1 & & \dots \\ & e_1^3 & & e_2^2 & & & \vdots \\ q_1^4 & & q_2^3 & & & & \vdots \\ & e_1^4 & & & & & \vdots \\ q_1^5 & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \end{array}$$

Η ακολουθία των οριζουσών Padé $P_{0,k}, P_{1,k}, P_{1,k+1}, P_{2,k+1}, P_{2,k+2}, \dots$ που είναι σε μορφή σκάλας, είναι οι διαδοχικές συγκλίσεις του συνεχούς κλάσματος [10]

$$c_0 + c_1x + \dots + \frac{c_k x^k}{1 - \frac{q_1^k x}{1 - \frac{e_1^k x}{1 - \frac{q_2^k x}{1 - \frac{e_2^k x}{1 - \frac{q_3^k x}{1 - \dots}}}}}}.$$

Ας δούμε τώρα τί σχέση έχουν οι προσεγγίσεις Padé και με τον ε -αλγόριθμο.

Αναφέρουμε δύο θεωρήματα χωρίς απόδειξη. Για τα παρακάτω, θεωρούμε ότι

$$w_{m,n}(z) \equiv P(z)u_{m,n}(z) + Q(z)v_{m,n}(z)$$

όπου $P(z)$, $Q(z)$ τυχαίες συνήθεις δυναμοσειρές. Για το ζευγάρι $(P(z), Q(z))$ ισχύουν τρεις δυνατές περιπτώσεις $(1, 0)$, $(0, 1)$ και $(-1, C(z))$. Δηλαδή το $w_{m,n}(z)$ μπορεί να πάρει τις μορφές

$$w_{m,n}(z) = u_{m,n}(z),$$

$$w_{m,n}(z) = v_{m,n}(z)$$

και

$$w_{m,n}(z) = C(z)v_{m,n}(z) - u_{m,n}(z).$$

Θεώρημα 2.10. [7] *Ισχύει η δευτέρου βαθμού ορίζουσα:*

$$\begin{array}{c} * \\ * \otimes * \\ * \end{array} w_{m-1,n}w_{m+1,n} + w_{m,n-1}w_{m,n+1} = w_{m,n}^2.$$

Θεώρημα 2.11. [7] *Έστω ότι (m, n) και (m', n') αντιστοιχούν σε διακεκριμένες θέσεις στον πίνακα Padé, και*

$$\mu \equiv \min(m + n, m' + n'), \quad \nu \equiv \min(m' + n, m + n').$$

Τότε το αποτέλεσμα του σταυρού

$$u_{m'n'}v_{mn} - u_{mn}v_{m'n'} \equiv e_{mn}^{(m',n')}$$

είναι ένα πολυώνυμο το πολύ βαθμού ν , και διαιρείται με την δύναμη $z^{\mu+1}$. Συγκεκριμένα, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις, που σχετίζονται με τις γειτονικές θέσεις των όρων στον πίνακα Padé:

$$\begin{array}{l} \otimes \\ * \end{array} u_{m+1,n}v_{m,n} - u_{m,n}v_{m+1,n} = (-1)^n c_{m+1,n}c_{m+1,n+1}z^{m+n+1},$$

$$\otimes * u_{m,n+1}v_{m,n} - u_{m,n}v_{m,n+1} = (-1)^n c_{m,n+1}c_{m+1,n+1}z^{m+n+1},$$

Θεώρημα 2.12. *Αν το κλάσμα Padé r_{mn} είναι κανονικό, τότε ισχύει η ταυτότητα*

$$\begin{array}{c} * \\ * \otimes * \\ * \end{array} \frac{1}{r_{m+1,n} - r_{m,n}} + \frac{1}{r_{m-1,n} - r_{m,n}} = \frac{1}{r_{m,n+1} - r_{m,n}} + \frac{1}{r_{m,n-1} - r_{m,n}}$$

Απόδειξη: Αν το $r_{m,n}$ είναι κανονικό, τότε κανένα από τα Padé κλάσματα που εμφανίζονται στην ορίζουσα δεν ισούται με κάποιο άλλο. Επίσης, κάθε γραμμικό σύστημα $S_{\mu,\nu}$ είναι μέγιστης τάξης ούτως ώστε $u_{\mu,\nu} = r_{\mu,\nu}v_{\mu,\nu} \neq 0$. Θεωρούμε

$$\begin{array}{ccc} & (m-1, n) & N \\ (m, n-1) & (m, n) & (m, n+1) \equiv W \quad C \quad E \\ & (m+1, n) & (m+1, n+1) \quad S \quad SE \end{array}$$

Από το Θεώρημα (2.11), έχουμε

$$\begin{array}{l} * \\ \otimes \\ * \end{array} u_{m,n}v_{m-1,n} - u_{m-1,n}v_{m,n} = (-1)^n c_{m,n}c_{m,n+1}z^{m+n},$$

$$\begin{array}{l} \otimes \\ * \end{array} u_{m+1,n}v_{m,n} - u_{m,n}v_{m+1,n} = (-1)^n c_{m+1,n}c_{m+1,n+1}z^{m+n+1},$$

$$\otimes * u_{m,n+1}v_{m,n} - u_{m,n}v_{m,n+1} = (-1)^n c_{m,n+1}c_{m+1,n+1}z^{m+n+1},$$

$$* \otimes u_{m,n}v_{m,n-1} - u_{m,n-1}v_{m,n} = (-1)^{n-1} c_{m,n}c_{m+1,n}z^{m+n},$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} r_{m,n}v_{m,n}v_{m-1,n} - r_{m-1,n}v_{m-1,n}v_{m,n} &= (-1)^n c_{m,n}c_{m,n+1}z^{m+n}, \\ r_{m+1,n}v_{m+1,n}v_{m,n} - r_{m,n}v_{m,n}v_{m+1,n} &= (-1)^n c_{m+1,n}c_{m+1,n+1}z^{m+n+1}, \\ r_{m,n+1}v_{m,n+1}v_{m,n} - r_{m,n}v_{m,n}v_{m,n+1} &= (-1)^n c_{m,n+1}c_{m+1,n+1}z^{m+n+1}, \\ r_{m,n}v_{m,n}v_{m,n-1} - r_{m,n-1}v_{m,n-1}v_{m,n} &= (-1)^{n-1} c_{m,n}c_{m+1,n}z^{m+n}, \end{aligned}$$

δηλαδή σύμφωνα με τον παραπάνω ρόμβο

$$\begin{aligned} r_{CV}v_{CV} - r_{NV}v_{NV} &= (-1)^n c_{CC}c_{CE}z^{m+n}, \\ r_{SV}v_{SV} - r_{CV}v_{CV} &= (-1)^n c_{SC}c_{SE}z^{m+n+1}, \\ r_{EV}v_{EV} - r_{CV}v_{CV} &= (-1)^n c_{EC}c_{SE}z^{m+n+1}, \end{aligned}$$

$$r_C v_C v_W - r_W v_W v_N = -(-1)^n c_C c_S z^{m+n}$$

οπότε

$$v_C v_N (r_N - r_C) = -(-1)^n c_C c_E z^{m+n}, \quad (2.29)$$

$$v_S v_C (r_S - r_C) = (-1)^n c_S c_{SE} z^{m+n+1}, \quad (2.30)$$

$$v_E v_C (r_E - r_C) = (-1)^n c_E c_{SE} z^{m+n+1}, \quad (2.31)$$

$$v_C v_W (r_C - r_W) = -(-1)^n c_C c_S z^{m+n}. \quad (2.32)$$

Διαιρώντας την (2.29) με την (2.31) και την (2.30) με την (2.32), έχουμε

$$\frac{v_C v_N (r_N - r_C)}{v_E v_C (r_E - r_C)} = \frac{-(-1)^n c_C c_E z^{m+n}}{(-1)^n c_E c_{SE} z^{m+n+1}},$$

$$\frac{v_S v_C (r_S - r_C)}{v_C v_W (r_C - r_W)} = \frac{(-1)^n c_S c_{SE} z^{m+n+1}}{-(-1)^n c_C c_S z^{m+n}}$$

αντίστοιχα, οπότε

$$\frac{v_N (r_N - r_C)}{v_E (r_E - r_C)} = \frac{-c_C}{c_{SE} z}, \quad (2.33)$$

και

$$\frac{v_S (r_S - r_C)}{v_W (r_C - r_W)} = \frac{c_{SE} z}{-c_C}. \quad (2.34)$$

Παρατηρούμε ότι αν αντιστρέψουμε την (2.34) και την αφαιρέσουμε από την (2.33), έχουμε

$$\frac{v_N (r_N - r_C)}{v_E (r_E - r_C)} - \frac{v_W (r_C - r_W)}{v_S (r_S - r_C)} = 0.$$

Δηλαδή

$$v_N v_S (r_N - r_C) (r_S - r_C) + v_W v_E (r_E - r_C) (r_W - r_C) = 0. \quad (2.35)$$

Από την σχέση $u_{m,n} = r_{m,n} v_{m,n}$ και από το Θεώρημα (2.10), έχουμε διαδοχικά

$$v_N v_S r_N r_S + v_W v_E r_E r_W = u_N u_S + u_W u_E = u_C^2 = r_C^2 v_C^2 = r_C^2 (v_N v_S - v_W v_E)$$

δηλαδή τελικά

$$v_N v_S (r_N r_S - r_C^2) + v_W v_E (r_E r_W - r_C^2) = 0. \quad (2.36)$$

Από τις (2.35) και (2.36) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{vmatrix} r_N r_S - r_C^2 & r_E r_W - r_C^2 \\ (r_N - r_C)(r_S - r_C) & (r_E - r_C)(r_W - r_C) \end{vmatrix} = 0$$

απ' όπου με αφαίρεση των στηλών προκύπτει

$$r_C \begin{vmatrix} (r_N - r_C) + (r_S - r_C) & (r_W - r_C) + (r_E - r_C) \\ (r_N - r_C)(r_S - r_C) & (r_E - r_C)(r_W - r_C) \end{vmatrix} = 0.$$

Από την ορίζουσα προκύπτει ότι

$$(r_E - r_C)(r_W - r_C)[(r_N - r_C) + (r_S - r_C)] = (r_N - r_C)(r_S - r_C)[(r_W - r_C) + (r_E - r_C)]$$

δηλαδή,

$$\frac{(r_N - r_C) + (r_S - r_C)}{(r_N - r_C)(r_S - r_C)} = \frac{(r_W - r_C) + (r_E - r_C)}{(r_E - r_C)(r_W - r_C)}$$

οπότε

$$\begin{aligned} & \frac{r_N - r_C}{(r_N - r_C)(r_S - r_C)} + \frac{r_S - r_C}{(r_N - r_C)(r_S - r_C)} = \\ & = \frac{r_W - r_C}{(r_E - r_C)(r_W - r_C)} + \frac{r_E - r_C}{(r_E - r_C)(r_W - r_C)} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{1}{r_S - r_C} + \frac{1}{r_N - r_C} = \frac{1}{r_E - r_C} + \frac{1}{r_W - r_C}$$

το οποίο είναι η αρχική μας ζητούμενη σχέση

$$\frac{1}{r_{m+1,n} - r_{m,n}} + \frac{1}{r_{m-1,n} - r_{m,n}} = \frac{1}{r_{m,n+1} - r_{m,n}} + \frac{1}{r_{m,n-1} - r_{m,n}}.$$

Αυτό που αποδείξαμε στο παραπάνω Θεώρημα είναι ότι οι προσεγγίσεις Padé ικανοποιούν την (2.4). Αυτό δίνει την ιδέα στο να παρεμβάλουμε κατάλληλα στον πίνακα Padé στοιχεία ώστε να αναδείξουμε τη χρήση του ε-αλγορίθμου. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει τον παρακάτω πίνακα

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & r'_{0,0} & r'_{0,1} & r'_{0,2} & r'_{0,3} & \dots \\ & r_{0,0} & r_{0,1} & r_{0,2} & r_{0,3} & \dots \\ 0 & r'_{1,0} & r'_{1,1} & r'_{1,2} & r'_{1,3} & \dots \\ & r_{1,0} & r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & \dots \\ 0 & r'_{2,0} & r'_{2,1} & r'_{2,2} & r'_{2,3} & \dots \\ & r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & \dots \\ 0 & r'_{3,0} & r'_{3,1} & r'_{3,2} & r'_{3,3} & \dots \\ \vdots & r_{3,0} & \vdots & r_{3,1} & \vdots & r_{3,2} & \vdots & r_{3,3} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \dots \end{array}$$

μέσω του ε-αλγορίθμου με τον κανόνα του ρόμβου

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ W & & E \\ & S & \end{array} \quad (r_S - r_N)(r'_E - r'_W) = (r'_S - r'_N)(r_E - r_W) = 1,$$

με συνοριακές συνθήκες $r_{m,0}(z) = C_m(z)$. Από τον κανόνα του ρόμβου για τον παραπάνω πίνακα (για ευκολία βάζουμε N, E, S, W)

$$\begin{array}{ccccc} & & r_N & & \\ & & r'_{NW} & & r'_{NE} \\ r_W & & r_W & & r_E \\ & & r'_{SW} & & r'_{SE} \\ & & r_S & & \end{array}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_N - r_C} + \frac{1}{r_S - r_C} &= (r'_{NW} - r'_{NE}) + (r'_{SE} - r'_{SW}) \\ &= (r'_{NW} - r'_{SW}) + (r'_{SE} - r'_{NE}) \\ &= \frac{1}{r_W - r_C} + \frac{1}{r_E - r_C}. \end{aligned}$$

Φαίνεται δηλαδή ότι μπορούν να απαλειφθούν τα $r'_{m,n}$ και προκύπτει η ιδιότητα του σταυρού. Αυτό σημαίνει ότι τα $r_{m,n}$ είναι κλάσματα Padé τύπου (m, n) για την $C(z)$. Συμπεραίνουμε ότι τα μισά στοιχεία του πίνακα ενός ε-αλγορίθμου είναι κλάσματα Padé.

Στη συνέχεια θα δείξουμε τη σχέση του πίνακα Padé με συνεχή κλάσματα [8, 11].

Δίνουμε τους ορισμούς σε γενικότερη μορφή από αυτή στην προηγούμενη παράγραφο. Το συνεχές κλάσμα συχνά ορίζεται σαν μια έκφραση της μορφής

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (2.37)$$

το οποίο μπορεί επίσης να γραφεί

$$\frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \frac{a_3|}{|b_3|} + \dots \quad (2.38)$$

Ορισμός 2.13. Ένα (άπειρο) συνεχές κλάσμα είναι τρεις ακολουθίες $[a_n|_1^\infty, b_n|_1^\infty, w_n|_1^\infty]$, όπου a_1, a_2, \dots και b_1, b_2, \dots μιγαδικοί αριθμοί, με $a_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, και w_n ορίζεται ως εξής: Αν t_k είναι ο μετασχηματισμός Möbius

$$t_k : u \rightarrow \frac{a_k}{b_k + u}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.39)$$

τότε

$$w_n := t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n(0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

Με w_n συμβολίζουμε την n -οστή προσέγγιση του συνεχούς κλάσματος και μπορούμε πλέον να συμβολίσουμε το συνεχές κλάσμα με

$$\Phi_{n=1}^\infty \frac{a_n}{b_n}. \quad (2.41)$$

Για πεπερασμένα συνεχή κλάσματα έχουμε

$$w_{m,n} := t_m \circ t_{m+1} \circ \dots \circ t_n(0), \quad m = 1, 2, \dots, n$$

δηλαδή

$$w_{m,n} = \frac{a_m}{b_m + w_{m+1,n}}, \quad m = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού πεπερασμένου συνεχούς κλάσματος. Για να υπολογίσουμε το

$$\frac{2|}{|-1} + \frac{7|}{|6} - \frac{1|}{|5} + \frac{3|}{|4} - \frac{2|}{|3} - \frac{5|}{|2},$$

έχουμε

m	6	5	4	3	2	1
a_m	-5	-2	3	-1	7	2
b_m	2	3	4	5	6	-1
$w_{m,6}$	$-\frac{5}{2}$	4	∞	0	$\frac{7}{6}$	12

Συνεπώς η τιμή του συνεχούς κλάσματος είναι 12. Το γεγονός ότι μια ενδιάμεση τιμή του $w_{m,n}$ είναι άπειρο δεν μας επηρεάζει, γιατί οι μετασχηματισμοί Möbius ορίζονται στο εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο. Όλες οι συναρτήσεις

$$t_{1,m} := t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

είναι μετασχηματισμοί Möbius. Επίσης, συμβολίζοντας τον πίνακα του μετασχηματισμού t_k ως εξής

$$M_k := \begin{pmatrix} 0 & a_k \\ 1 & b_k \end{pmatrix},$$

έχουμε

$$t_{1,m}(u) = \frac{r_m u + p_m}{s_m u + q_m},$$

όπου

$$M_{1,m} := \begin{pmatrix} r_m & p_m \\ s_m & q_m \end{pmatrix} = M_1 M_2 \cdots M_m.$$

Επειδή $M_{1,m} = M_{1,m-1} M_m$ έχουμε τότε

$$\begin{pmatrix} r_m & p_m \\ s_m & q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{m-1} & p_{m-1} \\ s_{m-1} & q_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_m \\ 1 & b_m \end{pmatrix}, \quad m = 2, 3, \dots$$

απ' όπου προκύπτουν

$$r_m = p_{m-1}, \quad s_m = q_{m-1}, \quad (2.42)$$

και

$$p_m = a_m r_{m-1} + b_m p_{m-1},$$

$$q_m = a_m s_{m-1} + b_m q_{m-1},$$

$m = 2, 3, \dots$. Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} = a_m \begin{pmatrix} p_{m-2} \\ q_{m-2} \end{pmatrix} + b_m \begin{pmatrix} p_{m-1} \\ q_{m-1} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Θεώρημα 2.14. [10, σελ. 477] Έστω ότι το t_k ορίζεται από την σχέση (2.39). Τότε για $n = 1, 2, \dots$, ο μετασχηματισμός Möbius

$$t_{1,n} := t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n$$

σχετίζεται με τον πίνακα

$$M_{1,n} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

όπου τα p_n και q_n καθορίζονται από την αναδρομική σχέση (2.43).

Επειδή η n -οστή προσέγγιση δίνεται από την σχέση

$$w_n = t_{1,n}(0),$$

παίρνουμε αμέσως:

Λήμμα 2.15. Για $n = 1, 2, \dots$ η n -οστή προσέγγιση του συνεχούς κλάσματος (2.41) είναι:

$$w_n = \frac{p_n}{q_n}. \quad (2.45)$$

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα, πώς από μια συνάρτηση $C(z)$ θα κατασκευάσουμε μέσω του πίνακα Padé το συνεχές κλάσμα αυτής. Έστω

$$C(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Ο εκτεταμένος πίνακας Padé αυτής είναι

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \infty & r_{0,0} & r_{0,1} & r_{0,2} & \dots \\ \infty & r_{1,0} & r_{1,1} & r_{1,2} & \dots \\ \infty & r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

όπου $r_{m,0}(z) = c_m(z)$ με $c_m(z)$ να είναι το μερικό άθροισμα της $C(z)$ μέχρι όρους m -τάξης, δηλαδή

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \infty & 1 & r_{0,1} & r_{0,2} & \dots \\ \infty & 1 + z & r_{1,1} & r_{1,2} & \dots \\ \infty & 1 + z + \frac{z^2}{2} & r_{2,1} & r_{2,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Ας υπολογίσουμε τον παραπάνω πίνακα Padé. Με βάση τον κανόνα του σταυρού που αναφέραμε νωρίτερα, προσδιορίζουμε το $r_{0,1}$, έχοντας υπ' όψην ότι το κλάσμα με το ∞ στον παρανομαστή ισούται με 0:

$$\frac{1}{r_{0,1} - 1} + \frac{1}{\infty - 1} = \frac{1}{1 + z - 1} + \frac{1}{0 - 1},$$

απ' όπου έχουμε

$$\frac{1}{r_{0,1} - 1} = \frac{1}{z} - 1,$$

δηλαδή

$$r_{0,1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{z} - 1},$$

άρα

$$r_{0,1} = \frac{1}{1 - z}.$$

Προσδιορίζουμε το $r_{1,1}$ πάλι με εφαρμογή του κανόνα του σταυρού:

$$\frac{1}{r_{1,1} - 1 - z} + \frac{1}{\infty - 1 - z} = \frac{1}{1 + z + \frac{z^2}{2} - 1 - z} + \frac{1}{1 - 1 - z},$$

ή

$$\frac{1}{r_{1,1} - 1 - z} = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z},$$

δηλαδή

$$r_{1,1} - 1 - z = \frac{z^2}{2 - z},$$

οπότε

$$r_{1,1} = 1 + z + \frac{z^2}{2 - z},$$

και

$$r_{1,1} = \frac{2 + z}{2 - z},$$

άρα

$$r_{1,1} = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}.$$

Ακριβώς με ίδια διαδικασία υπολογίζουμε

$$r_{0,2} = \frac{1}{1 - z - \frac{z^2}{2}},$$

$$r_{1,2} = \frac{1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}{1 - \frac{1}{3}z}$$

κ.ο.κ., οπότε ο πίνακας Padé γίνεται

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{1-z} & \frac{1}{1-z-\frac{z^2}{2}} & \cdots \\ 1+z & \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} & \frac{1+\frac{1}{3}z}{1-\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2} & \cdots \\ 1+z+\frac{z^2}{2} & \frac{1+\frac{2}{3}z+\frac{1}{6}z^2}{1-\frac{1}{3}z} & \frac{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{12}z^2}{1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{12}z^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}.$$

Το συνεχές κλάσμα προκύπτει από τους ακόλουθους κλιμακωτούς όρους του πίνακα Padé

$$\begin{array}{ccc} r_{0,0} & & \\ r_{1,0} & r_{1,1} & \\ & r_{2,1} & r_{2,2} \\ & & r_{3,2} & r_{3,3} \end{array} .$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} r_{0,0} &= 1, \\ r_{0,1} &= 1 + z, \\ r_{1,1} &= \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1 - \frac{z}{2} + z}{1 - \frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{1 - \frac{z}{2}}, \\ r_{2,1} &= \frac{1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}{1 - \frac{1}{3}z} = \frac{6 + 4z + z^2}{6 - 2z} = \frac{6 - 2z + 6z + z^2}{6 - 2z} = \\ &= 1 + \frac{6z + z^2}{6 - 2z} = 1 + z \frac{6 + z}{6 - 2z} = 1 + \frac{z}{\frac{6-2z}{6+z}} = \\ &= 1 + \frac{z}{\frac{6+z-3z}{6+z}} = 1 + \frac{z}{1 - \frac{3z}{6+z}} = 1 + \frac{z}{1 - \frac{1}{2} \frac{6z}{6+z}} = \\ &= 1 + \frac{z}{1 - \frac{1}{2} \frac{z}{1 + \frac{1}{6}z}}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι με την ίδια διαδικασία δημιουργείται το ζητούμενο συνεχές κλάσμα.

Ας δούμε τώρα το ανάποδο. Πώς, δηλαδή, από ένα συνεχές κλάσμα μπορούμε να κατασκευάσουμε όρους του πίνακα Padé. Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε το ίδιο συνεχές κλάσμα, (για να μπορούμε να ελέγξουμε για την ορθότητα των πράξεων)

$$1 + \frac{z}{1 - \frac{\frac{z}{2}}{1 + \frac{\frac{z}{6}}{1 - \frac{z}{1 + \dots}}}}.$$

Οι πρώτες προσεγγίσεις είναι

$$\begin{aligned} r_{0,0} &= 1, \\ r_{1,0} &= 1 + z, \\ r_{1,1} &= 1 + \frac{z}{1 - \frac{1}{2}z} = 1 + \frac{2z}{2 - z} = \frac{2 - z + 2z}{2 - z} = \frac{2 + z}{2 - z} = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{2,1} &= 1 + \frac{z}{1 - \frac{1}{2} \frac{z}{1 + \frac{1}{6}z}} = 1 + \frac{z}{1 - \frac{1}{2} \frac{6z}{6-z}} = 1 + \frac{z}{1 - \frac{3z}{6-z}} = \\
&= 1 + \frac{z(6-z)}{6-z-3z} = 1 + \frac{6z-z^2}{6-4z} = \\
&= \frac{6-4z+6z-z^2}{6-4z} = \frac{6+2z-z^2}{6-4z} = \\
&= \frac{1 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}z^2}{1 - \frac{2}{3}z}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε τους όρους του πίνακα Padé από το δοσμένο συνεχές κλάσμα.

3 Ορθογώνια Πολυώνυμα

3.1 Ορθογώνια Πολυώνυμα (ΟΠ) στην πραγματική ευθεία

Έστω ότι ν ένα μη τετριμμένο μέτρο (π.χ. με πεπερασμένο κάλυμμα) στο \mathbb{R} τέτοιο ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\nu(x) < \infty$$

για κάθε $n \geq 0$. Αφού το ν είναι μη τετριμμένο, τα μονώνυμα

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε monic ορθογώνια πολυώνυμα $\{P_n\}_{n \geq 0}$ και τα αντίστοιχα ορθοκανονικά πολυώνυμα $\{p_n\}_{n \geq 0}$ χρησιμοποιώντας τη διαδικασία Gram-Schmidt. Για $n, m \geq 0$ παίρνουμε ότι

$$(P_n, P_m) = \gamma_n^{-2} \delta_{nm}, \quad (p_n, p_m) = \delta_{nm},$$

όπου

$$P_n(x) = x^n + f(x), \quad p_n(x) = x^n + g(x),$$

με τα $f(x)$ και $g(x)$ να είναι πολυώνυμα του x τάξης $n-1$, $\gamma_n > 0$ και (\cdot, \cdot) συμβολίζει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$,

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\nu(x).$$

Σημειώνουμε ότι

$$(xf, g) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)g(x)d\nu(x) = (f, xg).$$

Αυτή η απλή παρατήρηση μας επιτρέπει να αποδείξουμε τις αναδρομικές σχέσεις για τα ορθογώνια πολυώνυμα στην πραγματική ευθεία. Μάλιστα, για $n \geq 0$, το $xP_n(x)$ είναι monic βαθμού $n+1$, οπότε η διαφορά

$$xP_n(x) - P_{n+1}(x)$$

είναι ένα πολυώνυμο το πολύ βαθμού n . Επίσης, για $j \leq n-2$,

$$(xP_n, P_j) = (P_n, xP_j) = 0 = (P_{n+1}, P_j)$$

αφού $n > j + 1 = \deg(xP_j)$. Επιπλέον,

$$(xP_n, P_{n-1}) = (P_n, xP_{n-1}) = (P_n, x^n) = \|P_n\|^2 > 0.$$

Οπότε υπάρχουν αριθμοί $a_k > 0$ και $b_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, τέτοιοι ώστε

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + b_{n+1}P_n(x) + a_n^2P_{n-1}(x)$$

για κάθε $n \geq 0$, με $a_0 = 0$ και

$$a_n = \frac{\|P_n\|}{\|P_{n-1}\|}$$

για $n \geq 1$.

Αυτό σημαίνει ότι

$$\gamma_n^{-1} = \|P_n\| = \prod_{j=1}^n a_j.$$

Οπότε,

$$p_n(x) = \frac{1}{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} P_n(x)$$

και τα ορθοκανονικά πολυώνυμα ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_{n+1}p_n(x) + a_n p_{n-1}(x) \quad (3.46)$$

Με άλλα λόγια, ο τελεστής πολλαπλασιασμού με το x στον $L^2(d\nu)$ μπορεί να αναπαρασταθεί στην βάση των ορθογωνίων πολυωνύμων με τον πίνακα Jacobi

$$J_\nu = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \\ & a_2 & b_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 3.16. (Favard) Κάθε ακολουθία πολυωνύμων $p_n(x)_{n \geq 0}$ που ικανοποιεί μια αναδρομική σχέση της μορφής (3.46) είναι ορθογώνια ως προς τουλάχιστον μια συνάρτηση κατανομής ν , ή διαφορετικά, δοθέντος οποιουδήποτε πίνακα Jacobi J , υπάρχει ένα μέτρο ν στην πραγματική ευθεία τέτοιο ώστε

$$J = J_\nu.$$

Γενικά, το ν δεν είναι μοναδικό. (Θα το συγκρίνουμε αυτό με το Θεώρημα του Verblunsky στον μοναδιαίο κύκλο στην παράγραφο 3.3.)

3.2 qd-αλγόριθμος, ΟΠ και Πλέγμα Toda διακριτού χρόνου

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τη σχέση του qd-αλγορίθμου με το πλέγμα Toda διακριτού χρόνου μέσω ορθογώνιων πολυωνύμων σύμφωνα με την [14].

Θεωρούμε τα πραγματικά πολυώνυμα της μεταβλητής x και την γραμμική μορφή c η οποία δίνεται από την ακολουθία των τιμών της στην κανονική βάση, $c(x^k) = c_k$. Επίσης θεωρούμε τη διγραμμική μορφή $(,)$ που ορίζεται ως εξής: $(p, q) = c(pq)$. Με την προϋπόθεση ότι η $(,)$ είναι ορισμένη, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια οικογένεια P_k πολυωνύμων με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) ο βαθμός του P_k είναι k ,
- (ii) το P_k είναι ορθογώνιο προς όλα τα πολυώνυμα με βαθμό μικρότερο του k και
- (iii) τα P_k είναι monic πολυώνυμα.

Θεωρούμε τώρα την μετατοπισμένη γραμμική μορφή \bar{c} που ορίζεται ως εξής: $\bar{c}(x^l) = c_{l+1}$ που σημαίνει ότι, για κάθε πολυώνυμο p ισχύει $\bar{c}(p) = c(xp)$. Η αντίστοιχη οικογένεια \bar{P}_k είναι η λεγόμενη γειτονική (*adjacent*) (στην P_k) οικογένεια των πολυωνύμων. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (i) και (iii) για τις οικογένειες P_k και \bar{P}_k , έχουμε

$$x\bar{P}_k(x) = P_{k+1}(x) + \sum_{j=0}^k \delta_j(k)P_j(x),$$

έτσι, για $0 \leq i < k$, παίρνουμε

$$\bar{c}(\bar{P}_k\bar{P}_i) = c(x\bar{P}_k\bar{P}_i) = c(P_{k+1}\bar{P}_i) + \sum_{j=0}^k \delta_j(k)c(P_j\bar{P}_i).$$

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα και την τριγωνική ιδιότητα στο (i, k) , καταλήγουμε ότι $\delta_i(k) = 0$, για $i = 0, \dots, k-1$. Τέλος, συμβολίζοντας $\delta_k(k) = q_k$, έχουμε

$$x\bar{P}_k(x) = P_{k+1}(x) + q_k P_k(x). \quad (3.1)$$

Χρησιμοποιώντας ανάλογα επιχειρήματα, έχουμε επίσης

$$\bar{P}_{k+1}(x) = P_{k+1}(x) - e_k \bar{P}_k(x). \quad (3.2)$$

Μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία θεωρώντας μεγαλύτερες μετατοπίσεις για την γραμμική μορφή c τις οποίες τις ονομάζουμε με τον πάνω δείκτη στην παρένθεση: $c^{(n)}(x^i) = c_{i+n}$. Μ' αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε υψηλότερα γειτονικά πολυώνυμα $P_k^{(n)}(x)$. Τότε, ξαναγράφουμε τις (3.1), (3.2) ως προς δύο συνεχόμενους γειτονικούς

δείκτες, κάνουμε μια ανθαιρεσία και θεωρούμε το x να είναι μια φασματική παράμετρος λ και το πολυώνυμο $P_k^{(n)}(x)$ να είναι η φασματική συνάρτηση $\psi_k^{(n)}(\lambda)$ και παίρνουμε

$$\lambda\psi_k^{(n+1)}(\lambda) = \psi_{k+1}^{(n)}(\lambda) + q_k^{(n)}\psi_k^{(n)}(\lambda), \quad (3.3)$$

$$\psi_{k+1}^{(n)}(\lambda) = \psi_{k+1}^{(n+1)}(\lambda) + e_k^{(n)}\psi_k^{(n+1)}(\lambda). \quad (3.4)$$

Στα επόμενα θεωρούμε τους δείκτες n, k να ανήκουν στο \mathbb{Z} .

Η (3.3) μέσω της (3.4) γίνεται

$$\lambda\psi_k^{(n+1)}(\lambda) = \psi_{k+1}^{(n+1)}(\lambda) + e_k^{(n)}\psi_k^{(n+1)}(\lambda) + q_k^{(n)}(\psi_k^{(n+1)}(\lambda) + e_{k-1}^{(n)}\psi_{k-1}^{(n+1)}(\lambda))$$

Οπότε,

$$\lambda\psi_k^{(n+1)}(\lambda) = \psi_{k+1}^{(n+1)}(\lambda) + [q_k^{(n)} + e_k^{(n)}]\psi_k^{(n+1)}(\lambda) + q_k^{(n)}e_{k-1}^{(n)}\psi_{k-1}^{(n+1)}(\lambda) \quad (3.5)$$

Θέτοντας όπου n το $n+1$ και όπου k το $k-1$ η (3.4) γίνεται

$$\psi_k^{(n+1)}(\lambda) = \psi_k^{(n+2)}(\lambda) + e_{k-1}^{(n+1)}\psi_{k-1}^{(n+2)}(\lambda) \quad (3.6)$$

ενώ θέτοντας όπου n το $n+1$ και όπου k το $k-1$ η (3.3) γίνεται

$$\psi_{k-1}^{(n+2)}(\lambda) = \frac{\psi_k^{(n+1)}(\lambda) + q_{k-1}^{(n+1)}\psi_{k-1}^{(n+1)}(\lambda)}{\lambda}. \quad (3.7)$$

Επίσης, η (3.3) θέτοντας μόνο όπου n το $n+1$, παίρνει τη μορφή:

$$\psi_k^{(n+2)}(\lambda) = \frac{\psi_{k+1}^{(n+1)}(\lambda) + q_k^{(n+1)}\psi_k^{(n+1)}(\lambda)}{\lambda} \quad (3.8)$$

Τότε η (3.6) από τις (3.7) και (3.8) γίνεται

$$\lambda\psi_k^{(n+1)}(\lambda) = \psi_{k+1}^{(n+1)}(\lambda) + q_k^{(n+1)}\psi_k^{(n+1)}(\lambda) + e_{k-1}^{(n+1)}\psi_k^{(n+1)}(\lambda) + q_{k-1}^{(n+1)}e_{k-1}^{(n+1)}\psi_{k-1}^{(n+1)}(\lambda)$$

ή

$$\lambda\psi_k^{(n+1)}(\lambda) = \psi_{k+1}^{(n+1)}(\lambda) + [q_k^{(n+1)} + e_{k-1}^{(n+1)}]\psi_k^{(n+1)}(\lambda) + q_{k-1}^{(n+1)}e_{k-1}^{(n+1)}\psi_{k-1}^{(n+1)}(\lambda) \quad (3.9)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.5) και (3.9), συμπεραίνουμε ότι η συμβατότητα των (3.3), (3.4) αποδίδεται στις σχέσεις

$$e_{k-1}^{(n+1)}q_{k-1}^{(n+1)} = q_k^{(n)}e_{k-1}^{(n)}, \quad (3.10)$$

$$e_{k-1}^{(n+1)} + q_k^{(n+1)} = q_k^{(n)} + e_k^{(n)}. \quad (3.11)$$

οι οποίες παριστάνουν έναν q-d αλγόριθμο.

Το πρόβλημα, λοιπόν, μετατίθεται στο να βρούμε την αναπαράσταση της διακριτής μη-δενικής καμπυλότητας για την εξέλιξη του q-d αλγορίθμου όσον αφορά στον άνω δείκτη και στις δοσμένες τιμές $q_k^{(0)}$ και $e_k^{(0)}$. Γράφουμε τις (3.3), (3.4) με μορφή τελεστών χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σημειογραφία: $\psi(\lambda)$ είναι η ακολουθία $(\psi_k(\lambda))$, ο τελεστής Σ δρα σε ακολουθίες ως τελεστής μετατόπισης, δηλαδή $(\Sigma\psi)_k = \psi_{k+1}$ και οι τελεστές Q , E δρουν διαγώνια, δηλαδή $(Q\psi)_k = q_k\psi_k$, $(E\psi)_k = e_k\psi_k$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} \lambda\psi^{(n+1)}(\lambda) &= \Sigma\psi^{(n)}(\lambda) + Q^{(n)}\psi^{(n)}(\lambda) \\ \Sigma\psi^{(n)}(\lambda) &= \Sigma\psi^{(n+1)}(\lambda) + E^{(n)}\psi^{(n+1)}(\lambda) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\lambda\psi^{(n+1)}(\lambda) = U^{(n)}\psi^{(n)}(\lambda), \quad \psi^{(n)}(\lambda) = L^{(n)}\psi^{(n+1)}(\lambda) \quad (3.12)$$

όπου $L^{(n)} = \Sigma^0 + \Sigma^{-1}E^{(n)}$ είναι ο 'κάτω' και $U^{(n)} = \Sigma + Q^n$ ο 'άνω' τελεστής. Η διακριτή αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας, δηλαδή η συμβατότητα της (3.12), είναι

$$L^{(n+1)}U^{(n+1)} = U^{(n)}L^{(n)} \quad (3.13)$$

Η απόδειξη της (3.13) φαίνεται εύκολα από την (3.12):

$$\begin{aligned} \lambda\psi^{(n+1)}(\lambda) &= U^{(n)}\psi^{(n)}(\lambda) \\ \Rightarrow \psi^{(n+1)}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}U^{(n)}\psi^{(n)}(\lambda) \end{aligned}$$

Οπότε η δεύτερη σχέση της (3.12) γίνεται

$$\psi^{(n)}(\lambda) = L^{(n)}\frac{1}{\lambda}U^{(n)}\psi^{(n)}(\lambda)$$

Οπότε

$$\lambda\psi^{(n)}(\lambda) = L^{(n)}U^{(n)}\psi^{(n)}(\lambda) \quad (3.14)$$

Η πρώτη σχέση της (3.12) λόγω της δεύτερης γίνεται

$$\lambda\psi^{(n+1)}(\lambda) = U^{(n)}L^{(n)}\psi^{(n+1)}(\lambda)$$

και για $n \rightarrow n-1$

$$\lambda\psi^{(n)}(\lambda) = U^{(n-1)}L^{(n-1)}\psi^{(n)}(\lambda) \quad (3.15)$$

Από τις (3.14) και (3.15) παρατηρούμε ότι

$$L^{(n+1)}U^{(n+1)} = U^{(n)}L^{(n)}$$

ισχύει δηλαδή η (3.13).

Για σταθερά n και k , οι τιμές των $q_k^{(n+1)}$, $e_k^{(n+1)}$ δεν δίνονται ρητά (και τοπικά) όσον αφορά στα $q_m^{(n)}$, $e_m^{(n)}$. Οπότε οι (3.10) και (3.11), στην περίπτωση περιοδικών συνοριακών συνθηκών για παράδειγμα, δίνουν πλειότιμες και ολοκληρώσιμες αντιστοιχίες αντί για απεικονίσεις. Παρ' όλα αυτά, θεωρώντας την συνοριακή συνθήκη $e_0^{(n)} = 0$ για κάθε n , ή τις συνοριακές συνθήκες μηδενικού τοίχου, δηλαδή $e_0^{(n)} = 0 = e_N^{(n)}$, για κάθε n , παίρνουμε μια πεπερασμένη εξέλιξη όσον αφορά τον άνω δείκτη. Για ευκολία, δίνουμε παρακάτω τον πεπερασμένο πίνακα αναπαράστασης των τελεστών L και U όσον αφορά στις συνοριακές συνθήκες μηδενικού τοίχου :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ e_1 & 1 & & & & & & & 0 \\ & e_2 & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & & & \\ 0 & & & & e_{N-2} & 1 & & & \\ & & & & & e_{N-1} & 1 & & \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} q_1 & 1 & & & & & & & \\ & q_2 & 1 & & & & & & 0 \\ & & q_3 & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & 1 & & & \\ 0 & & & & & & q_{N-1} & 1 & \\ & & & & & & & q_N & \end{pmatrix}$$

Οι σταθερές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του γινομένου LU , δηλαδή:

$$\det(LU - \lambda I) = 0$$

παρέχουν ένα εναλλακτικό σύνολο σταθερών για την εξέλιξη. Αυτό το πολυώνυμο μπορεί να υπολογιστεί από την επανάληψη του Lanczos:

$$\begin{aligned} P_{-1}(\lambda) &= 0, \quad P_0(\lambda) = 1, \\ P_{k+1}(\lambda) &= (a_{k+1} - \lambda)P_k(\lambda) - b_k P_{k-1}(\lambda), \quad k = 0, \dots, N-1, \\ \det(LU - \lambda I) &= P_N(\lambda) \end{aligned} \tag{3.16}$$

όπου

$$a_1 = q_1, \quad a_2 = q_2 + e_1, \quad \dots \quad a_N = q_N + e_{N-1}, \quad b_j = q_j e_j, \quad j = 1, \dots, N-1$$

Σημειώνουμε ότι η (3.16) είναι ίδια με την (3.9). Θεωρώντας την ποσότητα $\Lambda \equiv LU = \Sigma + A + \Sigma^{-1}B$, όπου $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$, σε σχέση με

τις μεταβλητές (a_j, b_j) , προκύπτει η ισοδύναμη μορφή της διακριτής αναπαράστασης μη-δενικής καμπυλότητας της (3.13):

$$\Lambda^{n+1}U^n = U^n \Lambda^n.$$

Αν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε (a_j, b_j) αντί για τις μεταβλητές (q_j, e_j) , πρέπει να εκφράσουμε τις τιμές του U σε σχέση με τις τελευταίες μεταβλητές προκειμένου να πάρουμε τα ακόλουθα συνεχή κλάσματα:

$$q_1 = a_1, \quad q_j = a_j - \frac{b_j}{a_{j-1} - \frac{b_{j-1}}{a_{j-2} - \dots}}, \quad j = 2, \dots, N.$$

Για να κατανοήσουμε την εξέλιξη που ορίζεται από τις (3.10), (3.11) με δοσμένες αρχικές συνθήκες, $e_{k-\nu}^{(n+1+\nu)}$, $q_{k-\nu}^{(n+\nu)}$ για ακέραιο ν , κατασκευάζουμε έναν μετασχηματισμό στο πλέγμα (k, n) το οποίο μας οδηγεί στον επαναπροσδιορισμό των μεταβλητών ως εξής: $\psi_k^{(n)}(\lambda)$ γίνεται $\psi_k^{(n+k)}(\lambda)$, $q_k^{(n)}$ γίνεται $q_k^{(n+k)}$ και $e_k^{(n)}$ γίνεται $e_k^{(n+k+1)}$. Τότε, αν ονομάσουμε πάλι $n + k = m$, παίρνουμε ένα ισοδύναμο σύστημα των (3.3), (3.4):

$$\lambda \psi_k^{(m+1)}(\lambda) = \psi_{k+1}^{(m+1)}(\lambda) + q_k^{(m)} \psi_k^{(m)}(\lambda),$$

$$\psi_{k+1}^{(m)}(\lambda) = \psi_{k+1}^{(m+1)}(\lambda) + e_k^{(m)} \psi_k^{(m)}(\lambda),$$

δηλαδή, ένα γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών, ζευγαρωμένο με μια διακριτή γραμμική εξέλιξη του $\psi_k^{(m)}(\lambda)$ το οποίο, με μορφή τελεστών γράφεται ως εξής:

$$\lambda K^{(n)} \psi^{(n)}(\lambda) = A^{(n)} \psi^{(n)}(\lambda), \quad \psi^{(n+1)}(\lambda) = K^{(n)} \psi^{(n)}(\lambda), \quad (3.17)$$

όπου

$$A^{(n)} = \Sigma + D^{(n)}, \quad K^{(n)} = \Sigma^0 - \Sigma^{-1} E^{(n)}, \quad D = Q - E.$$

Η “διακριτή αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας” γράφεται ως εξής:

$$A^{(m+1)} K^{(m)} = K^{(m+1)} A^{(m)} \quad (3.18)$$

από την οποία προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις

$$e_k^{(m)} d_{k+1}^{(m+1)} = d_k^{(m)} e_k^{(m+1)}, \quad (3.19)$$

$$d_k^{(m+1)} - e_k^{(m)} = d_k^{(m)} - e_{k-1}^{(m+1)}. \quad (3.20)$$

Συγκρίνοντας τη διακριτή αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας (3.13) με την (3.18), βλέπουμε ότι και οι δύο σχετίζονται με την αλλαγή των παραγόντων του γινομένου ενός κάτω και ενός άνω τελεστή (αντίστοιχα κανονικοποιημένου) σε κάθε βήμα του χρόνου. Ωστόσο, η (3.13) σχετίζεται με την ανάλυση σε συνιστώσες $g_1 g_2$ με g_1 κάτω και g_2 άνω, ενώ η (3.18) χρησιμοποιεί $g_1^{-1} g_2$.

Μπορούμε να πάρουμε μια ισοδύναμη μορφή του συστήματος (3.19), (3.20) με όρους μιας μεταβλητής ως εξής: έστω $d_k^{(m)} = \frac{s_k^{(m)}}{s_k^{(m-1)}}$. Τότε η (3.19) δίνει $e_k^{(m)} = H(k) \frac{s_{k+1}^{(m)}}{s_k^{(m-1)}}$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας, μέσω του μετασχηματισμού, $s_k^{(m)} \rightarrow s_k^{(m)} \phi(k)$ ο οποίος αφήνει το $d_k^{(m)}$ αμετάβλητο, μπορούμε να μετατρέψουμε το $H(k)$ σε μια σταθερά h^2 . Τότε η (3.20) γίνεται

$$\frac{s_k^{(m+1)}}{s_k^{(m)}} - \frac{s_k^{(m)}}{s_k^{(m-1)}} = h^2 \left\{ \frac{s_{k+1}^{(m)}}{s_k^{(m-1)}} - \frac{s_k^{(m+1)}}{s_{k-1}^{(m)}} \right\}. \quad (3.21)$$

Θέτοντας $s_k^{(m)} = e^{x_k(t)}$, $t = mh + t_0$, παίρνουμε το πλέγμα του Toda στον διακριτό χρόνο του Suris

$$e^{x_k(t+h)-x_k(t)} - e^{x_k(t)-x_k(t-h)} = h^2 (e^{x_{k+1}(t)-x_k(t-h)} - e^{x_k(t+h)-x_{k-1}(t)}). \quad (3.22)$$

Αυτή είναι μια διαφορετική λύση από την παραπάνω διαδικασία η οποία περιγράφεται καλύτερα ως προς τις μεταβλητές q , e : αντικαθιστώντας $d_k^{(m)} = q_k^{(m)} - e_k^{(m)}$ στις (3.19), (3.20) και μετά από κάποιους υπολογισμούς, καταλήγουμε στις

$$e_k^{(m)} q_{k+1}^{(m)} = q_k^{(m)} e_k^{(m+1)}, \quad (3.23)$$

$$q_k^{(m+1)} - e_k^{(m+1)} = q_k^{(m)} - e_{k-1}^{(m+1)}. \quad (3.24)$$

Έστω τώρα $q_k^{(m)} = \frac{r_k^{(m)}}{r_k^{(m-1)}}$. Τότε, όπως και προηγούμενα, η (3.23) δίνει $e_k^{(m)} = h^2 \frac{r_{k+1}^{(m-1)}}{r_k^{(m-1)}}$, όπου (χωρίς βλάβη της γενικότητας) το h είναι μια σταθερά και η (3.24) δίνει

$$\frac{r_k^{(m+1)}}{r_k^{(m)}} - \frac{r_k^{(m)}}{r_k^{(m-1)}} = h^2 \left\{ \frac{r_{k+1}^{(m)}}{r_k^{(m)}} - \frac{r_k^{(m)}}{r_{k-1}^{(m)}} \right\}. \quad (3.25)$$

Θέτοντας $r_k^{(m)} = e^{y_k(t)}$, $t = t_0 + mh$, παίρνουμε την εξίσωση για τον διακριτό χρόνο του πλέγματος του Toda που κατασκεύασε ο Hirota:

$$e^{y_k(t+h)-y_k(t)} - e^{y_k(t)-y_k(t-h)} = h^2 (e^{y_{k+1}(t)-y_k(t)} - e^{y_k(t)-y_{k-1}(t)}). \quad (3.26)$$

3.3 Ορθογώνια Πολυώνυμα στον μοναδιαίο κύκλο

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε κάποιες βασικές έννοιες και αποτελέσματα σχετικά με τα ορθογώνια πολυώνυμα στον μοναδιαίο κύκλο ακολουθώντας τις [4] και [13].

Θέτουμε $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ και $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και το μέτρο πιθανότητας μ ορισμένο στο S^1 . Αν το μ είναι φραγμένο σε άπειρα σημεία, τότε τα μονώνυμα $\{z^n\}_{n \geq 0}$ είναι ανεξάρτητα στον $L^2(d\mu)$ και μπορεί κάποιος να εφαρμόσει την διαδικασία Gram-Schmidt για να δημιουργήσει τα monic ορθογώνια πολυώνυμα $\{\Phi_n\}_{n \geq 0}$ και τα αντίστοιχα ορθοκανονικά πολυώνυμα

$$\phi_n(z) = \frac{\Phi_n(z)}{\|\Phi_n\|_{L^2(d\mu)}}.$$

Για κάθε $n \geq 0$, ορίζουμε τον τελεστή R_n στον $L^2(d\mu)$ ως εξής:

$$(R_n f)(z) = z^n \overline{f(z)} = z^n \overline{f(1/\bar{z})}.$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί $z = 1/\bar{z}$ στον S^1 . Σημειώνουμε ότι ο τελεστής R_n είναι anti-unitary, ισχύει $R_n^2 = I$ και αν f είναι ένα πολυώνυμο το πολύ βαθμού n , τότε το ίδιο ισχύει και για το $R_n f$.

Για ορθογώνια πολυώνυμα Φ_n και ϕ_n , θα χρησιμοποιούμε τον συνήθη (αλλά κάπως ασαφή) συμβολισμό

$$\Phi_n^* = R_n \Phi_n, \quad \phi_n^* = R_n \phi_n.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το Φ_n είναι, ως προς μια πολλαπλασιαστική σταθερά, το μοναδικό πολυώνυμο το πολύ βαθμού n ορθογώνιο με τα $1, z, \dots, z^{n-1}$. Αφού ο R_n είναι anti-unitary και

$$R_n z^j = z^{n-j},$$

προκύπτει ότι το Φ_n^* είναι πάλι, ως προς μια πολλαπλασιαστική σταθερά, το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου με n το οποίο είναι ορθογώνιο με τα z, z^2, \dots, z^n .

Επιπλέον σημειώνουμε ότι $\Phi_n^*(0) = 1$ (αφού το Φ_n είναι monic), και

$$\|\Phi_n\|^2 = \|R_n \Phi_n\|^2 = \|\Phi_n^*\|^2 = \int \Phi_n^*(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}), \quad (3.27)$$

όπου όλες οι norm είναι στον $L^2(d\mu)$.

Θεώρημα 3.1. (Αναδρομική σχέση του Szego) Για κάθε μη τετριμμένο μέτρο μ στον S^1 , υπάρχει μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $\{a_n\}_{n \geq 0} \subset D$ έτσι ώστε τα monic ορθογώνια πολυώνυμα να υπακούουν στην αναδρομική σχέση του Szego

$$\Phi_{k+1}(z) = z\Phi_k(z) - \bar{a}_k \Phi_k^*(z) \quad (3.28)$$

$$\Phi_{k+1}^*(z) = \Phi_k^*(z) - a_k z \Phi_k(z) \quad (3.29)$$

Επιπλέον,

$$\|\Phi_{n+1}\|_{L^2(d\mu)}^2 = \prod_{j=0}^n (1 - |a_j|^2) \quad (3.30)$$

Απόδειξη: Αφού τα Φ_j είναι monic πολυώνυμα βαθμού j , η διαφορά

$$\Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z)$$

είναι ένα πολυώνυμο το πολύ βαθμού n . Επιπλέον, για $1 \leq j \leq n$, έχουμε

$$(z\Phi_n, z^j) = (\Phi_n, \bar{z}z^j) = (\Phi_n, z^{j-1}) = 0 = (\Phi_{n+1}, z^j).$$

Από την προηγούμενη σχέση, βλέπουμε ότι η διαφορά $\Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z)$ πρέπει να είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $\Phi_n^*(z)$,

$$\Phi_{n+1}(z) - z\Phi_n(z) = -\bar{a}_n \Phi_n^*(z)$$

για κάποια $a_n \in \mathbb{C}$. Αυτή είναι η εξίσωση (3.28). Για την εξίσωση (3.29), εφαρμόζουμε στην (3.28) το R_{n+1} .

Ξαναγράφουμε την (3.28) ως εξής

$$z\Phi_n(z) = \Phi_{n+1}(z) + \bar{a}_n \Phi_n^*(z)$$

και παίρνουμε τις νόρμες

$$\begin{aligned} \|\Phi_n(z)\|^2 &= \|z\Phi_n(z)\|^2 = (z\Phi_n(z), z\Phi_n(z)) = \\ &= (\Phi_{n+1}(z) + \bar{a}_n \Phi_n^*(z), \Phi_{n+1}(z) + \bar{a}_n \Phi_n^*(z)) = \\ &= (\Phi_{n+1}(z), \Phi_{n+1}(z)) + |a_n|(\Phi_{n+1}(z), \Phi_n^*(z)) + \\ &\quad + |a_n|(\Phi_n^*(z), \Phi_{n+1}(z)) + |a_n|^2(\Phi_n^*(z), \Phi_n^*(z)) \end{aligned}$$

Επειδή ο βαθμός των Φ_n^* είναι μικρότερος ή το πολύ ίσος με n , έχουμε ότι τα Φ_{n+1} είναι ορθογώνια με τα Φ_n^* , οπότε

$$\|\Phi_n(z)\|^2 = \|z\Phi_n(z)\|^2 = (\Phi_{n+1}(z), \Phi_{n+1}(z)) + |a_n|^2(\Phi_n^*(z), \Phi_n^*(z))$$

δηλαδή

$$\|\Phi_n\|^2 = \|z\Phi_n\|^2 = \|\Phi_{n+1}\|^2 + |a_n|^2 \|\Phi_n^*\|^2$$

Αλλά ξέρουμε ότι $\|\Phi_n^*(z)\|^2 = \|\Phi_n(z)\|^2$, οπότε

$$\|\Phi_{n+1}\|^2 = (1 - |a_n|^2)\|\Phi_n\|^2 \quad (3.31)$$

Η (3.31) ισχύει για κάθε n , οπότε αν θέσουμε όπου n το $n - 1$ γίνεται:

$$\|\Phi_n\|^2 = (1 - |a_{n-1}|^2)\|\Phi_{n-1}\|^2. \quad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας την (3.32) στην (3.31) παίρνουμε

$$\|\Phi_{n+1}\|^2 = (1 - |a_n|^2)(1 - |a_{n-1}|^2)\|\Phi_{n-1}\|^2.$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, η (3.31) παίρνει τη μορφή:

$$\|\Phi_{n+1}\|^2 = \prod_{j=0}^n (1 - |a_j|^2)\|\Phi_0\|^2$$

όπου το Φ_0 είναι ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού και μάλιστα monic, οπότε $\Phi_0 = 1$. Άρα

$$\|\Phi_{n+1}\|^2 = \prod_{j=0}^n (1 - |a_j|^2)$$

η οποία είναι η εξίσωση (3.30).

Παρατήρηση 3.2. Σύμφωνα με τον *Simon*, τα a_n ονομάζονται σταθερές του *Verblunsky*. Η επιλογή της χρησιμοποίησης του $-\bar{a}_n$ στην (3.28) έγινε έτσι ώστε τα a να αντιπροσωπεύουν τις σταθερές στον αλγόριθμο του *Schur* για την συνάρτηση του *Schur* ως προς το μέτρο μ .

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\phi_n(z) = \frac{\Phi_n(z)}{\|\Phi_n\|} = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \rho_j\right)^{-1} \Phi_n(z)$$

όπου

$$\rho_j = \sqrt{1 - |a_j|^2}.$$

Έτσι

$$\phi_{n+1}(z) = \left(\prod_{j=0}^n \rho_j\right)^{-1} \Phi_{n+1}(z)$$

λόγω της (3.28)

$$\phi_{n+1}(z) = \frac{1}{\rho_1} \frac{1}{\rho_2} \dots \frac{1}{\rho_n} [z\Phi_n(z) - \bar{a}_n \Phi_n^*(z)]$$

τότε

$$\phi_{n+1}(z) = \frac{1}{\rho_n} [z(\prod_{j=0}^{n-1} \rho_j)^{-1} \Phi_n(z) - \bar{a}_n (\prod_{j=0}^{n-1} \rho_j)^{-1} \Phi_n^*(z)]$$

Οπότε

$$\phi_{n+1}(z) = \frac{1}{\rho_n} [z\phi_n(z) - \bar{a}_n \phi_n^*(z)]$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα ρ_j είναι πραγματικά για κάθε $j \geq 0$, οπότε

$$R_n((\prod_{j=0}^{n-1} \rho_j)^{-1} \Phi_n) = (\prod_{j=0}^{n-1} \rho_j)^{-1} R_n \Phi_n.$$

Άρα τα ορθοκανονικά πολυώνυμα $\phi_n(z)$ ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις

$$\phi_{n+1}(z) = \frac{1}{\rho_n} [z\phi_n(z) - \bar{a}_n \phi_n^*(z)] \quad (3.33)$$

και

$$\phi_{n+1}^*(z) = \frac{1}{\rho_n} [\phi_n^*(z) - a_n z \phi_n(z)] \quad (3.34)$$

Αυτές οι αναδρομικές σχέσεις για τα ορθοκανονικά πολυώνυμα μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\begin{bmatrix} \phi_n(z) \\ \phi_n^*(z) \end{bmatrix} = A(a_{n-1}, z) \begin{bmatrix} \phi_{n-1}(z) \\ \phi_{n-1}^*(z) \end{bmatrix}$$

όπου

$$A(a_k, z) = \frac{1}{\rho_k} \begin{bmatrix} z & -\bar{a}_k \\ -a_k z & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Ορίζουμε τον πίνακα μεταφοράς

$$T_n(z) = A(a_{n-1}, z) \dots A(a_0, z) \quad (3.36)$$

για κάθε $n \geq 1$, οπότε

$$\begin{bmatrix} \phi_n(z) \\ \phi_n^*(z) \end{bmatrix} = A(a_{n-1}, z) A(a_{n-2}, z) \begin{bmatrix} \phi_{n-2}(z) \\ \phi_{n-2}^*(z) \end{bmatrix}$$

...

άρα

$$\begin{bmatrix} \phi_n(z) \\ \phi_n^*(z) \end{bmatrix} = A(a_{n-1}, z) \dots A(a_0, z) \begin{bmatrix} \phi_0(z) \\ \phi_0^*(z) \end{bmatrix}$$

και επειδή τα $\phi_n(z)$, $\phi_n^*(z)$ είναι monic πολυώνυμα το πολύ βαθμού n , τότε $\phi_0(z) = 1$, $\phi_0^*(z) = 1$ και

$$\begin{bmatrix} \phi_n(z) \\ \phi_n^*(z) \end{bmatrix} = T_n(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Λήμμα 3.3. Για κάθε $n \geq 0$, υπάρχουν πολυώνυμα A_n και B_n βαθμού n , τα οποία καλούνται πολυώνυμα Wall, τέτοια ώστε

$$T_n(z) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \rho_j \right)^{-1} \begin{bmatrix} zB_{n-1}^*(z) & -A_{n-1}^*(z) \\ -zA_{n-1}(z) & B_{n-1}(z) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Επιπλέον, τα πολυώνυμα αυτά ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις

$$A_{n+1}(z) = A_n(z) + a_{n+1}zB_n^*(z) \quad (3.38)$$

$$B_{n+1}(z) = B_n(z) + a_{n+1}zA_n^*(z) \quad (3.39)$$

με $A_0(z) = a_0$ και $B_0(z) = 1$.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Για $n = 1$ (η (3.36)) γίνεται:

$$T_1(z) = A(a_0(z), z) = \frac{1}{\rho_0} \begin{bmatrix} z & -\bar{a}_0 \\ -a_0z & 1 \end{bmatrix}$$

η οποία είναι η (3.37) με $A_0(z) = a_0$ και $B_0(z) = 1$.

Υποθέτουμε ότι η (3.37) ισχύει για κάποιο $n \geq 2$. Τότε

$$\begin{aligned} T_{n+2}(z) &= A(a_{n+1}, z)T_{n+1}(z) = \\ &= \frac{1}{\rho_{n+1}} \begin{bmatrix} z & -\bar{a}_0 \\ -a_0z & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1} \rho_j} \begin{bmatrix} zB_n^*(z) & -A_n^*(z) \\ -zA_n(z) & B_n(z) \end{bmatrix} \\ &= \left(\prod_{j=0}^{n+1} \rho_j \right)^{-1} \begin{bmatrix} z(zB_{n-1}^*(z) + \bar{a}_{n+1}A_n(z)) & -(zA_n^*(z) + \bar{a}_{n+1}B_n(z)) \\ -z(a_{n+1}zB_n^*(z) + A_n(z)) & a_{n+1}zA_n^*(z) + B_n(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι από την (3.37) έχουμε

$$T_{n+2}(z) = \left(\prod_{j=0}^{n+1} \rho_j \right)^{-1} \begin{bmatrix} zB_{n+1}^*(z) & -A_{n+1}^*(z) \\ -zA_{n+1}(z) & B_{n+1}(z) \end{bmatrix}$$

οπότε πρέπει

$$B_{n+1}(z) = B_n(z) + a_{n+1}zA_n^*(z)$$

και

$$A_{n+1}(z) = A_n(z) + a_{n+1}zB_n^*(z).$$

Τότε

$$B_{n+1}^*(z) = R_{n+1}B_{n+1}(z) = R_{n+1}B_n(z) + \bar{a}_{n+1}R_{n+1}(zA_n^*(z))$$

δηλαδή

$$B_{n+1}^*(z) = zR_nB_n(z) + \bar{a}_{n+1}R_nA_n^*(z)$$

Άρα

$$B_{n+1}^*(z) = zB_n^*(z) + \bar{a}_{n+1}A_n(z).$$

Ομοίως

$$A_{n+1}^*(z) = zA_n^*(z) + \bar{a}_{n+1}B_n(z).$$

Αυτό αποδεικνύει τις (3.37), (3.38) και (3.39) για $n + 1$.

Σημειώνουμε επίσης ότι

$$A_{n+1}^*(z) = zA_n^*(z) + \bar{a}_{n+1}B_n(z)$$

$$B_{n+1}^*(z) = zB_n^*(z) + \bar{a}_{n+1}A_n(z).$$

Αφού τα $B_0^*(z) = 1$ και $A_0^*(z) = \bar{a}_0$ είναι μηδενικού βαθμού, αυτές οι αναδρομικές σχέσεις δηλώνουν επίσης ότι τα πολυώνυμα B_k^* και A_k^* είναι βαθμού ακριβώς k , για κάθε $0 \leq k \leq n + 1$. Αυτό, μαζί με τις (3.38) και (3.39), δηλώνει ότι και τα πολυώνυμα B_k και A_k είναι επίσης βαθμού (ακριβώς ίσου με) k , όπως ισχυριστήκαμε.

Τέλος, παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το θεώρημα το οποίο είναι ανάλογο στον μοναδιαίο κύκλο του θεωρήματος του Favard στην πραγματική ευθεία.

Θεώρημα 3.4. (*Verblunsky*) Υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ μη τετριμμένων μέτρων πιθανότητας στον μοναδιαίο κύκλο και των ακολουθιών των σταθερών του Verblunsky $\{a_n\}_{n \geq 0} \subset D$.

3.4 Ο πίνακας CMV

Έστω ότι έχουμε τον τελεστή

$$f(z) \mapsto zf(z)$$

στον $L^2(d\mu)$. Θέλουμε να αναπαραστήσουμε τον τελεστή σαν ένα πίνακα. Για να το καταφέρουμε αυτό, πρέπει πρώτα να επιλέξουμε μια κατάλληλη βάση στον $L^2(d\mu)$.

Αρχικά, μια φυσική επιλογή θα ήταν να θεωρήσουμε το σύνολο των ορθοκανονικών πολυωνύμων, $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$. Αλλά υπάρχουν αρκετοί λόγοι γιατί αυτή δεν είναι η καλύτερη επιλογή. Απ' τη μία, τα ορθοκανονικά πολυώνυμα σχηματίζουν μια βάση στον $L^2(d\mu)$ αν και μόνο αν οι σταθερές του Verblunsky δεν είναι τετραγωνικώς αθροίσιμες: $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 = \infty$. Απ' την άλλη μεριά, στην περίπτωση που τα ϕ_j είναι μια βάση στον $L^2(d\mu)$, ο πίνακας που παίρνουμε είναι ένας πίνακας Hessenberg:

$$G_{kl} = (\phi_k, z\phi_l) = \begin{cases} -\bar{a}_l a_{k-1} \prod_{j=k}^{l-1} \rho_j, & 0 \leq k \leq l, \\ \rho_l, & k = l + 1, \\ 0, & k \geq l + 2. \end{cases}$$

Γενικά, όλες οι παραπάνω τιμές της κύριας διαγωνίου και της πρώτης υποδιαγωνίου είναι μη-μηδενικές και εξαρτώνται από έναν μη φραγμένο αριθμό των σταθερών του Verblunsky. Συνεπώς, η αναπαράσταση μέσω πίνακα, ο οποίος είναι γνωστός ως GGT πίνακας, είναι αρκετά δύσκολος για να υπολογιστεί.

Μια πιο χρήσιμη ορθοκανονική βάση ανακαλύφθηκε πρόσφατα από τους Cantero, Moral και Velazquez. Μάλιστα, ορίζουν δύο τέτοιες βάσεις: Εφαρμόζοντας τη διαδικασί-α Gram-Schmidt στην ακολουθία

$$1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \dots$$

στον $L^2(d\mu)$ παράγουμε την ορθοκανονική βάση $\{\chi_n\}_{n \geq 0}$. Ομοίως, παίρνουμε μια δεύτερη ορθοκανονική βάση $\{x_n\}_{n \geq 0}$ από την

$$1, z^{-1}, z, z^{-2}, z^2, \dots$$

Σημειώνουμε ότι

$$\chi_n^0(z) = \begin{cases} z^{-k}, & n = 2k, \\ z^{k+1}, & n = 2k + 1, \end{cases}$$

και $P^{(n)}$ η ορθοκανονική προβολή στον $L^2(d\mu)$ στον

$$H^{(n)} = \begin{cases} H_{(-k,k)}, & n = 2k, \\ H_{(-k,k+1)}, & n = 2k + 1, \end{cases}$$

όπου $H_{(k,l)}$ είναι ο υπόχωρος των πολυωνύμων Laurent που συνδέονται με τα z^k, z^{k+1}, \dots, z^l . Τότε σημειώνουμε ότι

$$\chi_n = \frac{(1 - P^n)\chi_n^{(0)}}{\|(1 - P^n)\chi_n^{(0)}\|}.$$

Πρόταση 3.5. Έχουμε

$$\chi_n(z) = \begin{cases} z^{-k+1}\phi_{2k-1}(z), & n = 2k - 1, \\ z^{-k}\phi_{2k}^*(z), & n = 2k, \end{cases} \quad (3.40)$$

και

$$x_n(z) = \begin{cases} z^{-k}\phi_{2k-1}^*(z), & n = 2k - 1, \\ z^{-k}\phi_{2k}(z), & n = 2k. \end{cases} \quad (3.41)$$

Συγκεκριμένα,

$$x_n(z) = \overline{\chi_n(1/\bar{z})}. \quad (3.42)$$

Απόδειξη: Σημειώνουμε ότι

$$\phi_{2n-1}(z) = \frac{(1 - P_{(0,2n-2)})z^{2n-1}}{\|(1 - P_{(0,2n-2)})z^{2n-1}\|},$$

όπου $P_{(k,l)}$ είναι η ορθοκανονική προβολή στον $L^2(d\mu)$ στον $H_{(k,l)}$. Σημειώνουμε επίσης ότι

$$z^l P_{(k,m)} z^{-l} = P_{(k+l,m+l)}.$$

Δοθέντων των δύο παραπάνω, παίρνουμε

$$z^{-k+1}\phi_{2k-1}(z) = \frac{[z^{-k+1}(1 - P_{(0,2k-2)})z^{k-1}]z^k}{\|[z^{-k+1}(1 - P_{(0,2k-2)})z^{k-1}]z^k\|}$$

οπότε

$$z^{-k+1}\phi_{2k-1}(z) = \frac{(1 - P_{(-k+1,k-1)})z^k}{\|(1 - P_{(-k+1,k-1)})z^k\|}$$

τότε

$$z^{-k+1}\phi_{2k-1}(z) = \frac{(1 - P^{(2k-2)})\chi_{2k-1}^{(0)}}{\|(1 - P^{(2k-2)})\chi_{2k-1}^{(0)}\|}$$

Άρα

$$z^{-k+1}\phi_{2k-1}(z) = \chi_{2k-1},$$

το οποίο αποδεικνύει το μισό μέρος της (3.40). Το άλλο μισό μέρος της (3.40), όπως και της (3.41), μπορεί να αποδειχθεί με ανάλογους υπολογισμούς. Τέλος, η (3.42) προκύπτει άμεσα από τις (3.40) και (3.41).

Πράγματι:

$$\overline{\chi_{2k-1}(1/\bar{z})} = \overline{z^{-(-k+1)}\phi_{2k-1}(1/\bar{z})}$$

δηλαδή

$$\overline{\chi_{2k-1}(1/\bar{z})} = z^{k-1}\overline{\phi_{2k-1}(1/\bar{z})}$$

τότε

$$\overline{\chi_{2k-1}(1/\bar{z})} = z^{-k}z^{2k-1}\overline{\phi_{2k-1}(1/\bar{z})}$$

οπότε

$$\overline{\chi_{2k-1}(1/\bar{z})} = z^{-k}\phi_{2k-1}^*(z).$$

Άρα

$$\overline{\chi_{2k-1}(1/\bar{z})} = x_{2k-1}(z).$$

Επίσης

$$\overline{\chi_{2k}(1/\bar{z})} = \overline{z^{-(-k)}\phi_{2k}^*(1/\bar{z})}$$

οπότε

$$\overline{\chi_{2k}(1/\bar{z})} = z^k\overline{\phi_{2k}^*(1/\bar{z})}$$

τότε

$$\overline{\chi_{2k}(1/\bar{z})} = z^{-k}z^{2k}\overline{\phi_{2k}^*(1/\bar{z})}$$

δηλαδή

$$\overline{\chi_{2k}(1/\bar{z})} = z^{-k}\phi_{2k}(z)$$

Άρα

$$\overline{\chi_{2k}(1/\bar{z})} = x_{2k}(z).$$

Ο πίνακας αναπαράστασης CMV ορίζεται μέσω της σχέσης

$$C_{k,l} = (\chi_k, z\chi_l)$$

για κάθε $k, l \geq 0$.

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού του πίνακα CMV.

Πρόταση 3.6. Ο πίνακας *CMV* δίνεται από τη σχέση

$$C = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & \rho_0 \bar{a}_1 & \rho_0 \rho_1 & 0 & 0 & \dots \\ \rho_0 & -a_0 \bar{a}_1 & -a_0 \rho_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \rho_1 \bar{a}_2 & -a_1 \bar{a}_2 & \rho_2 \bar{a}_3 & \rho_2 \rho_3 & \dots \\ 0 & \rho_1 \rho_2 & -a_1 \rho_2 & -a_2 \bar{a}_3 & -a_2 \rho_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3 \bar{a}_4 & -a_3 \bar{a}_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Με άλλα λόγια, για κάθε άρτιο $j \geq 0$, οι μη-μηδενικές τιμές της j και στη $j + 1$ σειρά του C δίνονται από τις σχέσεις:

$$C_{j,j-1} = \rho_{j-1} \bar{a}_j,$$

$$C_{j,j} = -a_{j-1} \bar{a}_j,$$

$$C_{j,j+1} = \rho_j \bar{a}_{j+1},$$

$$C_{j,j+2} = \rho_j \rho_{j+1},$$

για την j σειρά, και

$$C_{j+1,j-1} = \rho_{j-1} \rho_j,$$

$$C_{j+1,j} = -a_{j-1} \rho_j,$$

$$C_{j+1,j+1} = -a_j \bar{a}_{j+1},$$

$$C_{j+1,j+2} = -a_j \rho_{j+1},$$

για τη $j + 1$ σειρά, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι $a_{-1} = -1$.

Απόδειξη: Αφού

$$C_{k,l} = (\chi_k, z\chi_l),$$

και τα χ μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ϕ και ϕ^* όπως στην (3.40), τότε υπολείπεται ο υπολογισμός των συγκεκριμένων εσωτερικών γινομένων των πολυωνύμων.

Για παράδειγμα, για $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} C_{2j,2j+2} &= (\chi_{2j}, z\chi_{2j+2}) = (z^{-j} \phi_{2j}^*, z z^{-j-1} \phi_{2j+2}^*) \\ &= (\phi_{2j+2}^*) = (\phi_{2j}^*(0), \phi_{2j+2}^*) \\ &= \left(\prod_{l=0}^{2j-1} \rho_l \right)^{-1} \left(\prod_{l=0}^{2j+1} \rho_l \right)^{-1} (1, \Phi_{2j+2}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\rho_{2j}\rho_{2j+1}} \left(\prod_{l=0}^{2j-1} \rho_l \right)^{-2} \|\Phi_{2j+2}\|^2 \\
 &= \frac{1}{\rho_{2j}\rho_{2j+1}} \left(\prod_{l=0}^{2j-1} \rho_l \right)^{-2} \left(\prod_{l=0}^{2j+1} \rho_l \right)^2 \\
 &= \rho_{2j}\rho_{2j+1}.
 \end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα ϕ_k^* είναι ορθογώνια με τα z, z^2, \dots, z^k , όπως επίσης και τις σχέσεις (3.40) και (3.30).

Όλες οι άλλες εκφράσεις για τις τιμές του πίνακα C αποδεικνύονται περίπου με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις (3.28) και (3.29) μαζί με τις ταυτότητες τις οποίες χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.

Υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος για να περιγράψουμε τον C , ο οποίος είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικός. Θα τον παρουσιάσουμε χωρίς απόδειξη, κυρίως γιατί αποδεικνύοντάς τον θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά επιχειρήματα παρόμοια με αυτά της απόδειξης της πρότασης (3.6).

Για $i, j \geq 0$, ορίζουμε

$$L_{i,j} = (\chi_i(z), z\chi_j(z)), \quad M_{i,j} = (x_i(z), \chi_j(z)).$$

Θέτουμε

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \bar{a}_k & \rho_k \\ \rho_k & -a_k \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$L = \text{diag}(\Theta_0, \Theta_2, \Theta_4, \dots), \quad M = \text{diag}([1], \Theta_1, \Theta_3, \dots) \quad (3.43)$$

και

$$C = LM.$$

Παρατήρηση 3.7. Ας σημειώσουμε εδώ ότι οι δείκτες των γραμμών και των στηλών των πινάκων αρχίζουν από το 0: για παράδειγμα, $L_{jj} = \bar{a}_j$ για κάθε $j \geq 0$, και j άρτιο. Ο (άπειρος) CMV πίνακας C είναι ο πίνακας που χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε τα ζευγάρια Lax για τις ροές από τις Χαμιλτονιανές των Ablowitz-Ladik στις σταθερές a_j , $j \geq 0$.

4 Ανακεφαλαίωση

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκαν ορισμένοι αλγόριθμοι που συνδέονται με ορθογώνια πολυώνυμα και διακριτά ολοκληρώσιμα συστήματα. Οι κανόνες των αλγορίθμων αυτών είναι ρητού τύπου και συνδέουν τιμές που βρίσκονται σε κορυφές ρόμβων. Έμφαση δόθηκε στους λεγόμενους ιδιάζοντες κανόνες που αφορούν στην εξέλιξη των αλγορίθμων στην περίπτωση ιδιομορφιών. Παρουσιάστηκαν οι κανόνες των αλγορίθμων ϵ , ρ και qd όπως και κανόνες που προέκυψαν από τους δύο πρώτους των οποίων η μορφή είναι αναλλοίωτη από μετασχηματισμούς Möbius με αποτέλεσμα την εύρεση ιδιάζόντων κανόνων για τον περιορισμό των ιδιομορφιών. Αποδείξαμε ότι ο αλγόριθμος qd συνδέεται με τα ορθογώνια πολυώνυμα στην πραγματική ευθεία και ο ϵ -αλγόριθμος με τους πίνακες Padé. Παρουσιάστηκε η εύρεση του τριδιαγώνιου πίνακα Jacobi από τις σχέσεις που συνδέουν γειτονικές ακολουθίες ορθογωνίων πολυωνύμων και αποδείξαμε ότι ο πίνακας Jacobi εκφράζει την γραμμική αναδρομική σχέση τριών διαδοχικών ορθογωνίων πολυωνύμων. Παρουσιάστηκαν αντίστοιχα αποτελέσματα για τα ορθογώνια πολυώνυμα στον μοναδιαίο κύκλο και το ανάλογο του πίνακα Jacobi που αποτελεί ο πενταδιαγώνιος πίνακας CMV. Μια προέκταση της εργασίας αυτής που θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο έρευνας είναι το αντίστοιχο ανάλογο του αλγορίθμου qd για ορθογώνια πολυώνυμα στον μοναδιαίο κύκλο και η σύνδεσή του με διακριτά ολοκληρώσιμα συστήματα.

Αναφορές

- [1] **B. Beckermann, C. Carstensen**, QD-Type Algorithms for the Nonnormal Newton-Padé Approximation Table, *Constructive Approximation*, (1996) 12: 307-329.
- [2] **C. Brezinski**, History of Continued Fractions and Padé Approximants, *Springer-Verlag*.
- [3] **C. Brezinski**, Extrapolation Methods Theory and Practice, *Elsevier Science Publishers B. V.* (1991).
- [4] **M. J. Cantero, L. Moral, L. Velazquez**, Five-diagonal matrices and zeros of orthogonal polynomials on the unit circle, *Linear Algebra and its Applications* 362 (2003) 29-56.
- [5] **H.W. Capel, F.W. Nijhoff and V.G. Papageorgiou**, Complete Integrability of Lagrangian Mappings and Lattices of KDV Type, *Physics Letters* 155A (1991), 377-387.
- [6] **A. K. Common**, Singularity confinement in the discrete time Toda lattice and the Q-D algorithm, *Physics Letters A* 184 (1994) 194-197.
- [7] **W. B. Gragg**, The Padé Table and its Relation to Certain Algorithms of Numerical Analysis, *SIAM Review* Vol. 14, No. 1 (1972), 1-62
- [8] **W. B. Gragg, D. D. Warner**, Two Constructive Results in Continued Fractions, *SIAM Journal on Numerical Analysis* Vol. 20, No. 6 (1983), 1187-1197.
- [9] **P. Henrici**, Applied and Computational Complex Analysis Volume 1, *Wiley Classics Library* (1988).
- [10] **P. Henrici**, Applied and Computational Complex Analysis Volume 2, *Wiley Classics Library* (1991).
- [11] **L. Lorentzen, H. Waadeland**, Continued Fractions with Applications, *North-Holland*, (1992).
- [12] **J. H. McCabe**, The Quotient-Difference Algorithm and the Padé Table: An Alternative Form and a General Continued Fraction, *Mathematics of Computation*, Vol. 41, No, 163 (1983), 183-197.

- [13] **I. Nenciu**, Lax Pairs for the Ablowitz-Ladik System via Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, *Thesis* California Institute of Technology (2005).
- [14] **V. Papageorgiou, B. Grammaticos, A. Ramani**, Orthogonal Polynomials Approach to Discrete Lax Pairs for Initial Boundary-Value Problems of the QD Algorithm, *Letters in Mathematical Physics* 34: (1995) 91-101.
- [15] **B. Simon**, CMV Matrices: Five Years After, *Proceedings of the W. D. Evans' 65th Birthday Conference* (2006).
- [16] **P. Wynn**, Singular Rules for Certain Non-Linear Algorithms, *BIT* 3 (1963) 175-195.
- [17] **P. Wynn**, The Epsilon Algorithm and Operational Formulas of Numerical Analysis, *Mathematics of Computation*, Vol. 15, No. 74 (1961) 151-158.