ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Μελέτη Απλών και Αποδοτικών Μηχανισμών Τιμολόγησης

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ ΑΡΓ. ΚΕΡΕΝΤΖΗ

Επιβλέπων: Ιωάννης Καραγιάννης,
Καθηγητής

Πάτρα, Ιούλιος 2020

Πανεπιστήμιο Πατρών
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής

Μελέτη Απλών και Αποδοτικών Μηχανισμών Τιμολόγησης

Μεταπτυχιακη Διπλωματικη Εργασια

του

ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ ΑΡΓ. ΚΕΡΕΝΤΖΗ

Επιβλέπων: Ιωάννης Καραγιάννης
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 30η Ιουλίου 2020.

(Upograf)	(Upograf)	(Upograf)
....	....	....
Ιωάννης Καραγιάννης	Χρήστος Κακλαμάνης	Σωτήριος Νικολετσέας
Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγητής

Πάτρα, Ιούλιος 2020

Πανεπιστήμιο Πατρών
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής

UpeÔjunh D lwsh

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας, και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Τέλος, βεβαιώνω ότι αυτή η διπλωματική εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Υπολογιστική Δεδομένων και Αποφάσεων».

(Upograf)

....
Απόστολος Κερεντζής

Perílhyh

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, αξιοποιώντας έννοιες και εργαλεία της Σχεδίασης Μηχανισμών, αποσκοπεί στην προσέγγιση ενός βασικού ερωτήματος· της οριοθέτησης της απόκλισης απλών και συνάμα αποδοτικών μηχανισμών, εν συγκρίσει με τους αντίστοιχους βέλτιστους. Η μελέτη εστιάζει στην απόδοση, ως προς το κοινωνικό όφελος και το εισόδημα, του μηχανισμού κατανομής ενός διαιρέσιμου πόρου και συγκεκριμένα ενός μηχανισμού με γραμμικό κανόνα πληρωμής. Βάσει αυτού, χρησιμοποιείται μια σταθερή τιμή p ανά μονάδα προϊόντος και n υποψήφιοι αγοραστές εκδηλώνουν σταδιακά την αποτίμηση τους. Στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης που περιγράφουμε, ο κάθε αγοραστής i επιλέγει την αποτίμηση του τυχαία και ανεξάρτητα από τους ανταγωνιστές του, από μια πιθανοτική κατανομή F_i πάνω σε συνεχείς, κοίλες, και μη φθίνουσες συναρτήσεις στο $[0;1]$. Η αλληλουχία με την οποίο ο μηχανισμός παίρνει στην είσοδο του τις αποτιμήσεις των αγοραστών είναι ουσιώδης για το κάτω φράγμα του κοινωνικού οφέλους, ενώ αντίθετα δεν λαμβάνεται υπόψη για τους υπολογισμούς του αντίστοιχου ορίου του εισοδήματος.

Στο πλαίσιο της Εργασίας μελετήθηκαν και παρουσιάζονται μηχανισμοί πώλησης μη διαιρέσιμων αντικειμένων παραθέτοντας εκτενώς τεχνικές όπως η ανισότητα του Προφήτη και γνωστά αποτελέσματα από τη σχετική πλούσια βιβλιογραφία. Με κατάλληλες τροποποιήσεις εξάγονται (ενδεχομένως για πρώτη φορά) αντίστοιχα φράγματα μηχανισμών κατανομής και για το διαιρέσιμο αντικείμενο. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε ένα κάτω φράγμα 31,78% για τον κοινωνικό πλούτο, όριο το οποίο δύναται να αυξηθεί σε 41,9% με τυχαία αναδιάταξη των υποψήφιων αγοραστών. Όσον αφορά το εισόδημα, γίνεται αξιοποίηση των εννοιών της εκ των προτέρων χαλάρωσης του περιορισμού υλοποίησης (ως ένα ιδεατό φράγμα) που ορίζει πως θα διατεθεί το πολύ ένα αντικείμενο με βάση τις εκτιμώμενες αποτιμήσεις και ενός μαθηματικού προγράμματος, ανάλογου του προγράμματος των Alaei et al. [1]. Με το πρόγραμμα αυτό συγκρίνεται εν τέλει ο γραμμικός μηχανισμός τιμολόγησης με τον (ex-ante) βέλτιστο. Μέσα από μια σειρά Λημμάτων και ενός κατάλληλου παραδείγματος, καταλήγουμε τέλος ότι η απόκλιση των μηχανισμών εκτιμάται μεταξύ $(\ln \quad)$ και $O(\quad^2)$, όπου ορίζεται ως ο λόγος $\frac{v^0(0)}{v(1)}$.

Lèxeic Kleidiˆ

Σχεδίαση μηχανισμών, κατανομή διαιρέσιμου αντικειμένου, κάτω φράγμα, κοινωνικός πλούτος, εισόδημα, ex-ante χαλάρωση, τριγωνικές κατανομές εισοδήματος.

Abstract

In this Master Thesis, using notions and techniques from Mechanism Design, we are trying to approach the answer of a fundamental question: How much revenue can the simple and efficient posted pricing mechanism guarantee, compared to the optimal yet complicated mechanism? Here, we analyze the performance, subject to social welfare and revenue, of a special case of divisible resource mechanisms, the one with linear pricing rule. According to this model, a static price per unit p is used and n agents with ordering gradually, one after the other, reveal their valuation function for the item. In the incomplete information setting we describe, every agent i draws, independently from other agents, from a publicly known distribution F_i, her valuation function $v_i : [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, which is continuous, concave and monotone non-decreasing. The order that agents act seems to be of importance for the computation of the lower bound of the social welfare, while it is insubstantial for the corresponding bound in the case of revenue calculation.

We cover previously known results from the rich literature related to non-divisible items, as well as present useful techniques like the prophet inequalities which are tight connected with posted pricing Mechanisms. In addition to that, with the right readjustments, we proove, for the first time in our knowledge, new lower bounds for the case of the divisible item. Specifically, in terms of the social welfare, a lower bound equal to 31.78% for the order-oblivious posted pricing model is presented. This bound can get further improoved, by agents' random rearrangement, to 41.9%. As far as revenue is concerned, we make use the ex-ante relaxation, which relaxes the feasibility constraint to bind in expectation over the random values of the agents (rather than on the values that are realized ex post), which for our case implies that the total amount of units sold must be at most one. Finally, using a mathematical program analogous to the approach of Alaei et al [1], we conclude that the revenue gap between the ex-ante optimal mechanism and the proposed one, is between (ln) and $O(\ ^2)$, where is defined $\frac{v'(0)}{v(1)}$, i.e a measure of curvature of the valuation function agents have.

Keywords

Mechanism Design, Divisible Item Allocation Mechanism, Lower Bound, Social Welfare, Revenue, Ex-Ante Relaxation, Triangular Distributions

sth Jeod¸ra, th mikr Afrodÿth kai
ton pio mikrì Eu^ggelo

Euqaristiec

Θα ήθελα πρώτα από όλους να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Ιωάννη Καραγιάννη για την καθοδήγηση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας. Ομολογουμένως, πριν την έναρξη της, δύσκολα μπορούσα να κατατάξω τον εαυτό μου ως μέλος μιας επιστημονικής ερευνητικής ομάδας. Με την αρωγή και την υπομονή που επέδειξε, κατάφερε να μου μεταλαμπαδεύσει ένα μέρος από το πάθος που τον διακατέχει για την έρευνα και την επίλυση προβλημάτων, ανοίγοντας μου παράλληλα νέους ορίζοντες στην ακαδημαϊκή εκπαίδευση.

Επίσης θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου τους συναδέλφους στην Πολεμική Αεροπορία, οι οποίοι, είτε με ενθάρρυναν να ξεκινήσω αυτό το νέο ακαδημαϊκό ταξίδι, είτε με αναπλήρωσαν στα εργασιακά μου καθήκοντα, όποτε κρίθηκε απαραίτητο κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κκ. Χρήστο Κακλαμάνη και Σωτήρη Νικολετσέα, Καθηγητές του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή αυτής της εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς την σύζυγο μου Θεοδώρα για την αγόγγυστη υπομονή και την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Perieqìmena

Kat^logoc Sqhm^twn

Kat^logoc Pin^kwn

Kef ˆ laio 1

Eisagwg

\A theory that you can't explain to a
bartender is probably not damn good"

Ernest Rutherford

Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1820, ο Ιρλανδός Alexander Turner Stewart εγκαινίασε ένα κατάστημα πώλησης υφασμάτων, υιοθετώντας παράλληλα μία πρωτοποριακή μέθοδο πώλησης των εμπορευμάτων. Σε αντίθεση με την κοινή πρακτική που καθόριζε την τιμή πώλησης κατόπιν συνδιαλλαγής με τον εκάστοτε πελάτη (π.χ διαπραγμάτευση, δημοπρασία), ο Stewart έγινε ο πρώτος που όρισε μία συγκεκριμένη τιμή (one price policy) για κάθε προϊόν [30]. Αν και οι ανταγωνιστές του προέβλεψαν ότι αυτή η μέθοδος δεν θα ήταν επικερδής και ότι σύντομα θα τον οδηγούσε στη χρεοκοπία, η ιδέα αυτή καθώς και άλλες πρωτοποριακές που αποτελούν ορόσημα στην εξέλιξη του εμπορίου [31], αποτελούν την αιτία για την οποία ο Stewart κατέχει μια περίοπτη θέση στη λίστα με τους 100 πλουσιότερους επιχειρηματίες που δραστηριοποιήθηκαν ποτέ στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής [22].

Διακόσια περίπου χρόνια αργότερα λοιπόν, η πολιτική των καθορισμένων τιμών[1] (static xed pricing) αποτελεί τον κύριο μηχανισμό πώλησης αγαθών και έναν από τους σημαντικότερους τρόπους για την αγοραπωλησία υπηρεσιών. Ενδεικτικά, αναφέρεται το γεγονός ότι τουλάχιστον το ήμισυ της ετήσιας δαπάνης του μέσου Αμερικανού καταναλωτή, καταβάλλεται σε αγαθά και υπηρεσίες που έχουν καθορισμένη τιμή [30]. Οι Einav et al. σε μελέτη τους [10] παρατηρούν ότι ο όγκος των διαδικτυακών πωλήσεων έχει μετακυλισθεί από τις δημοπρασίες στην τιμολόγηση και ο βασικός λόγος για αυτή τη ροή, έγκειται στην απλότητα των μηχανισμών τιμολόγησης. Επιπλέον, ένας άλλος λόγος που κάνει αυτού του είδους τους μηχανισμούς να υπερτερούν στην πράξη είναι ότι εκμηδενίζουν τη στρατηγική συμπεριφορά των υποψηφίων αγοραστών. Αναλογιζόμενος την επιτυχία της τιμολόγησης που εφάρμοσε με επιτυχία ο Stewart καθώς και τη διαδεδομένη αξιοποίηση της, κάποιος αναγνώστης που δεν

[1] To montèlo autì leitourgeÐ wc akoloÔjwc: 'Enac pwlht c diajètei èna antikeÐmeno proc p¸ lhsh se mÐa sugkekrimènh tim *p*. Oi upoy fioi agorastèc, erqìmenoi o ènac metˆ ton ˆllo, sugkrÐnoun thn apotÐmhsh touc me thn tim *p*. To antikeÐmeno dÐnetai sthn pr¸ th perÐptwsh agorast gia ton opoÐo h anwtèrw diaforˆ eÐnai mh arnhtik .

είναι εξοικειωμένος με το θεωρητικό υπόβαθρο της Σχεδίασης Μηχανισμών, μπορεί εσφαλμένα να εικάσει ότι ο μηχανισμός αυτός είναι και ο βέλτιστος. Τουναντίον, ο μηχανισμός τιμολόγησης δεν παράγει το μέγιστο εισόδημα μεταξύ όλων των μηχανισμών που προσπαθούν να επιλύσουν το πρόβλημα της πώλησης ενός αντικειμένου σε περισσότερους του ενός αγοραστές. Η βέλτιστη λύση ακούει στο όνομα της εξέχουσας δημοπρασίας του Myerson[2] [29] η οποία όμως είναι αρκετά περίπλοκη για δύο βασικούς λόγους:

1. Διακρίνει τους αγοραστές που έχουν διαφορετικές κατανομές αποτίμησης. Το γεγονός αυτό δύναται να δημιουργήσει θέματα δικαιοσύνης καθώς και θέματα εφαρμογής διότι δεν είναι εφικτή η υλοποίηση του σε ορισμένες αγορές.

2. Το μοντέλο δημοπρασίας απαιτεί περισσότερη επικοινωνία μεταξύ πωλητή και αγοραστών. Αυτό μπορεί να εγείρει θέματα ιδιωτικότητας για τους τελευταίους, μιας και πρέπει να αποκαλύψουν την αποτίμηση τους, ενώ με τον μηχανισμό τιμολόγησης καλούνται να λάβουν μια και μόνο take-it-or-leave-it απόφαση.

Γιατί όμως στην πράξη, οι βέλτιστοι μηχανισμοί δίνουν τη θέση τους σε προσεγγιστικούς μηχανισμούς; Σύμφωνα με τους Roughgarden και Talgam-Cohen [32] υπάρχουν τρεις βασικοί λόγοι:

1. Uperbolik Plhrofìrhsh

   Ο Myerson [29] απέδειξε ότι η δημοπρασία ενός αντικειμένου που μεγιστοποιεί το εκτιμώμενο εισόδημα, δίνει το αντικείμενο στον υποψήφιο αγοραστή με τη μέγιστη θετική εικονική αποτίμηση. Για την υλοποίηση αυτού του μηχανισμού απαιτείται η γνώση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_i(v_i)$ και της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F_i(v_i)$ της αποτίμησης κάθε αγοραστή i. Η μέγιστη δυνατή απλοποίηση του προβλήματος επιτυγχάνεται όταν όλες οι κατανομές F_i είναι ίσες και ως εκ τούτου και οι συναρτήσεις εικονικής αποτίμησης ${}_i$ ταυτίζονται. Τότε η βέλτιστη δημοπρασία είναι μια δημοπρασία δεύτερης τιμής με τιμή κατωφλίου ${}^1(0)$. Ένα βασικό εμπόδιο για την εφαρμογή του μηχανισμού που υπολογίζει τις εικονικές αποτιμήσεις, είναι ότι δεν είναι πάντα δυνατή η ακριβής γνώση των κατανομών και σύμφωνα με τον Robert Wilson [37] (Wilson's doctrine) η σχεδίαση δημοπρασιών πρέπει να είναι ανεξάρτητη των κατανομών των αγοραστών. Επιπλέον, ακόμη και στην περίπτωση που αυτή η πληροφορία είναι διαθέσιμη, η έξοδος του αντίστοιχου βέλτιστου μηχανισμού μπορεί να φαντάζει ακατανόητη όταν εφαρμόζεται στην πράξη[3].

2. Uperbolikì 'Ogkoc PlhroforÐac

   Στην περίπτωση δημοπρασίας m διαφορετικών αντικειμένων σε n διαφορετικούς υποψήφιους αγοραστές, κάθε αγοραστής i έχει και μία διαφορετική αποτίμηση $v_i(S)$ για κάθε σύνολο S αντικειμένων που μπορεί να κερδίσει. Επομένως υπάρχουν 2^m διαφορετικοί παράμετροι για κάθε αγοραστή ενώ ο μηχανισμός που μεγιστοποιεί τον κοινωνικό

[2] H dhmoprasÐa tou Myerson parousi^zetai analutik^ sto Kef^laio 2.

[3] Qarakthristikì par^deigma apotup¸netai sto Kef^laio 2.

πλούτο καλείται μεταξύ των συνόλων $S_1; S_2; \quad ; S_n$ να επιλέξει εκείνα που μεγιστοποιούν τον όρο $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα βρίσκεται στον μηχανισμό Vickrey-Clarks-Grooves (VCG). Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι ο VCG ως direct revelation μηχανισμός συγκεντρώνει 2^m αριθμούς από κάθε αγοραστή. Το μέγεθος αυτό δύναται να γίνει εξωφρενικά μεγάλο αναλογικά με το πλήθος των αντικειμένων. Ενδεικτικά στις περιπτώσεις που $m = 10$ και $m = 20$, για κάθε αγοραστή συλλέγονται αντίστοιχα 1024 και περίπου ένα εκατομμύριο παράμετροι, ενώ στις δημοπρασίες φάσματος (spectrum auctions), η τάξη μεγέθους του m είναι εκατοντάδες ή και μεγαλύτερη.

3. **Upologistik poluplokìthta** Ακόμη και στην περίπτωση που οι αποτιμήσεις των αγοραστών είναι δυνατό να κοινοποιηθούν χωρίς δυσχέρεια στο μηχανισμό, η υλοποίηση του VCG δεν παραμένει απλή υπόθεση. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε την περίπτωση που κάθε υποψήφιος αγοραστής ενδιαφέρεται μόνο για ένα υποσύνολο T_i αντικειμένων και έχει αποτίμηση v_i για κάθε υπερσύνολο που το περιέχει και 0 για όλα τα υπόλοιπα. Αν και το περιβάλλον αυτό είναι μιας παραμέτρου, ο υπολογισμός της κατανομής που μεγιστοποιεί τον κοινωνικό πλούτο καθώς και ο καθορισμός του αντίστοιχου κανόνα πληρωμής παρουσιάζει μεγάλη υπολογιστική πολυπλοκότητα και απαιτεί ένα σεβαστό χρονικό διάστημα. Και αυτό διότι καθώς ο αριθμός των αγοραστών αυξάνεται γραμμικά, ο αριθμός των υποψήφιων λύσεων του προβλήματος αυξάνεται εκθετικά. Παρότι για κάποια υπολογιστικά προβλήματα έχει βρεθεί ο αλγόριθμος, που εξετάζοντας ένα μικρό τμήμα των υποψήφιων λύσεων, δίνει τη βέλτιστη λύση, για "NP-hard" προβλήματα όπως το προαναφερθέν δεν διαφαίνεται ακόμη ανάλογη «παράκαμψη» προς τη βέλτιστη λύση.

1.1 Org^nwsh thc Diplwmatik c

Η εργασία αυτή είναι οργανωμένη σε έξι κεφάλαια: Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το θεωρητικό υπόβαθρο των μηχανισμών και των εννοιών που σχετίζονται με την πώληση ενός αντικειμένου. Αρχικά περιγράφονται οι βέλτιστοι μηχανισμοί, στη συνέχεια η θεωρία της βέλτιστης παύσης και τέλος δίνεται αναλυτική περιγραφή της έννοιας και των εφαρμογών της ανισότητας του Προφήτη. Στο Κεφάλαιο 3 αρχικά περιγράφονται οι μηχανισμοί που σχετίζονται με την πώληση του μη διαιρέσιμου αντικειμένου καθώς και οι αποκλίσεις που έχουν βρεθεί, ενώ στη συνέχεια παρουσιάζεται το μοντέλο που περιγράφει τον μηχανισμό πώλησης του διαιρέσιμου αντικειμένου με έμφαση στον μηχανισμό γραμμικής τιμολόγησης που αποτελεί το κύριο αντικείμενο μελέτης της παρούσας Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας. Στα Κεφάλαια 4 και 5 αποτυπώνονται τα αποτελέσματα του μηχανισμού ως προς το κοινωνικό όφελος και το εισόδημα αντίστοιχα. Για την οριοθέτηση της απόκλισης του μηχανισμού αναφορικά με το εισόδημα, γίνεται εκτενής αναφορά στις έννοιες που αξιοποιούνται, ήτοι την εκ των προτέρων χαλάρωση του περιορισμού υλοποίησης και των τριγωνικών κατανομών αποτίμησης. Τέλος στο Κεφάλαιο δίνεται η συνεισφορά αυτής της διπλωματικής εργασίας, τα παραμένοντα ανοικτά προβλήματα καθώς και μελλοντικές επεκτάσεις.

Kef^laio 2

Jewrhtikì upìbajro

Σε συνέχεια των προαναφερθέντων στην Εισαγωγή, σημειώνουμε ότι ένας απλός προσεγγιστικός μηχανισμός M αποφέρει πάντα τουλάχιστον ένα ποσοστό   του περίπλοκου αντίστοιχου βέλτιστου. Στις περιπτώσεις που η προσέγγιση πλησιάζει το 100%, συμπεραίνεται ότι οι επιπλέον περιορισμοί των βέλτιστων δεν είναι απαραίτητοι ή διαφορετικά ότι η πρόβλεψη της εξόδου του ιδανικού μοντέλου είναι εύρωστη καθώς όταν το μοντέλο αποκλίνει από την ιδανικότητα, η έξοδος του υποβαθμίζεται ομαλά και πάντα μέχρι ένα συγκεκριμένο βαθμό. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή η απόδοση του μηχανισμού απέχει αρκετά από το ορόσημο, τότε αυτό αποτελεί ένα ακλόνητο επιχείρημα ότι η πολυπλοκότητα είναι αναπόσπαστο τμήμα της επίλυσης του προβλήματος. Η τελευταία κατηγορία αποτελεί και την πλειοψηφία των προσεγγιστικών μηχανισμών και ένα ενδιαφέρον ερώτημα που ανακύπτει, έχει να κάνει με την ερμηνεία του ποσοστού προσέγγισης. Για παράδειγμα στο άκουσμα ότι η προσέγγιση ανέρχεται στο 63%, κάποιος θα μπορούσε (όχι δίκαια) να αναρωτηθεί τι γίνεται με το υπόλοιπο 37% που μένει ανεκμετάλλευτο. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έγκειται στο γεγονός ότι το κέρδος που αποφέρει ο βέλτιστος είναι απλά ένα ορόσημο, ένα μέτρο σύγκρισης ή πιο απλά ένα εργαλείο στο χέρι του αναλυτή. Ο σχεδιαστής του μηχανισμού δεν καλείται να αποφασίσει εάν θα αξιοποιήσει το βέλτιστο μηχανισμό αλλά εάν θα ακολουθήσει τη μοναδική προς το παρόν διαθέσιμη επιλογή, την εφαρμογή ενός μηχανισμού με τον καλύτερο δυνατό προσεγγιστικό λόγο.

2.1 Bèltistoi mhqanismoÐ

Παρακάτω αναφέρονται δύο μηχανισμοί εκ των οποίων ο μεν πρώτος βελτιστοποιεί το κοινωνικό όφελος ενώ ο άλλος το εισόδημα, για την περίπτωση πώλησης ενός αντικειμένου.

2.1.1 Η δημοπρασία του Vickrey

Στη δημοπρασία που σχεδίασε ο Vickrey [36] και έχει γίνει ευρέως γνωστή ως δημοπρασία δεύτερης τιμής (second price auction (SPA)) ενός αντικειμένου, υπάρχει ένας πωλητής και ένα αντικείμενο για το οποίο ο πωλητής δεν έχει αποτίμηση. Υπάρχουν n υποψήφιοι αγοραστές και κάθε αγοραστής i έχει αποτίμηση v_i που είναι άγνωστη στον πωλητή. Η δημοπρασία Vickrey είναι σχεδιασμένη για να μεγιστοποιεί το κοινωνικό όφελος, το οποίο για την περίπτωση του ενός αντικειμένου σημαίνει ότι το αντικείμενο απονέμεται στον υποψήφιο με την μεγαλύτερη αποτίμηση. Αναλυτικά, ο μηχανισμός της SPA συλλέγει τις προσφορές από κάθε υποψήφιο και βάσει του εκ των υστέρων (ex post) περιορισμού κατανομής ενός αντικειμένου, διαθέτει το αντικείμενο στον πλειοδότη ($i = \mathrm{argmax}_j\, b_j$) ενώ τον καλεί να καταβάλει το ποσό που είναι ίσο με την δεύτερη υψηλότερη προσφορά. Ο συγκεκριμένος κανόνας πληρωμής αποσκοπεί στην εξασφάλιση της φιλαλήθειας σε κυρίαρχες στρατηγικές, δηλαδή στην ώθηση που αποφέρει στον αγοραστή αναφορικά με την αποκάλυψη της πραγματικής του αποτίμησης.

2.1.2 Η δημοπρασία του Myerson

Όταν αντικειμενικός στόχος είναι η μεγιστοποίηση του εισοδήματος, δυστυχώς δεν υπάρχει μηχανισμός που να το μεγιστοποιεί εκ των προτέρων. Δηλαδή είναι απαραίτητο για τον πωλητή να γνωρίζει τις κατανομές αποτίμησης F_i των υποψήφιων i αγοραστών προκειμένου να προσεγγίσει το εκτιμώμενο εισόδημα. Ο Myerson [29] όρισε τη βέλτιστη δημοπρασία, ως προς το εισόδημα, τροποποιώντας ελάχιστα την δημοπρασία του Vickrey με την υιοθέτηση της τιμής κατωφλίου r (reserve price)[1]. Η βέλτιστη τιμή κατωφλίου είναι ίση με $\mathrm{argmax}_p[p\ \ (1\ \ F(p))]$ (monopoly price) και είναι η καλύτερη take-it-or-leave-it προσφορά σε έναν υποψήφιο αγοραστή του οποίου η αποτίμηση προέρχεται από την κατανομή F. Ο μηχανισμός που περιγράφτηκε ανωτέρω εκτός από θεωρητικά βέλτιστος, χαρακτηρίζεται και από απλότητα. Το δυσκολότερο βήμα είναι αυτό κατά το οποίο κάθε προσφορά b_i, μετατρέπεται σε εικονική προσφορά $\ \ _i(b_i)$ σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$\ \ _i(b_i) = b_i \quad \frac{1 \quad F_i(b_i)}{f_i(b_i)}:$$

Σημειώνεται δε, ότι η τιμή κατωφλίου δεν διαφοροποιείται καθώς αλλάζει ο αριθμός των αγοραστών, ενώ παραμένει η ίδια για τις δημοπρασίες πρώτης και δεύτερης τιμής. Γιατί όμως η εισαγωγή στο μηχανισμό της τιμής κατωφλίου οδηγεί σε αύξηση του εισοδήματος? Προκειμένου να απαντήσει, ο Krishna [24] παραθέτει το ακόλουθο παράδειγμα που εξετάζει τη δημοπρασία δεύτερης τιμής με δύο αγοραστές. Θέτοντας την τιμή κατωφλίου r, ο πωλητής αντιμετωπίζει το ρίσκο της μη πώλησης του αντικειμένου στην περίπτωση που η μεγαλύτερη από τις δύο αποτιμήσεις είναι μικρότερη από την r. Η πιθανή όμως αυτή απώλεια, αντισταθμίζεται από την πιθανότητα η τιμή κατωφλίου να βρίσκεται ανάμεσα στις δύο προσφορές. Επισημαίνεται εδώ ότι για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, η r δεν αποφέρει καμία συνεισφορά στην έξοδο του μηχανισμού. Εν τέλει, η πιθανότητα της πρώτης περίπτωσης είναι ίση με $F(r)^2$ και η απώλεια το πολύ r ενώ για τη δεύτερη περίπτωση που έχει πιθανότητα $2rF(r)$ και κέρδος τάξεως r, το εκτιμώμενο όφελος είναι ίσο με $2rF(r)(1\ \ F(r))$. Επομένως το αναμενόμενο όφελος από τη θέσπιση μιας χαμηλής τιμής κατωφλίου είναι πάντα μεγαλύτερο από την εκτιμώμενη απώλεια

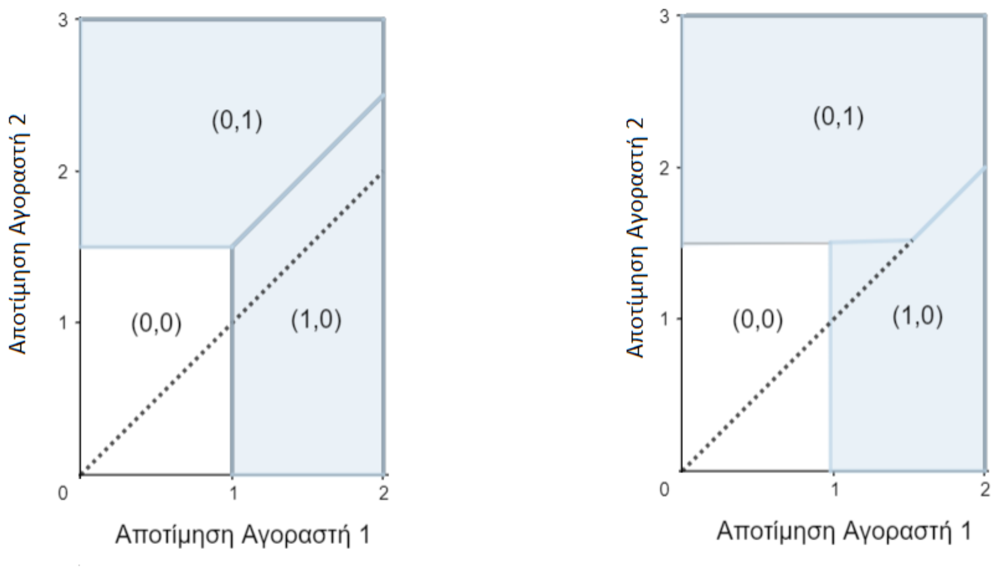
[1] Dhlad o nikht c thc dhmoprasÐac eÐnai o pleiodìthc arkeÐ h d lwsh apotÐmhshc tou na eÐnai megalÔterh apì thn tim katwflÐou. O nikht c kaleÐtai na plhr¸sei th uyhlìterh deÔterh tim thn tim katwflÐou, ìpoia eÐnai megalÔterh.

[2]. Η προαναφερθείσα λύση όμως δεν έχει καθολική εφαρμογή καθότι η κατάσταση περιπλέκεται αρκετά στην περίπτωση που οι αποτιμήσεις των αγοραστών δεν είναι ανεξάρτητες ή/και προέρχονται από διαφορετικές κατανομές. Το γεγονός αυτό καθιστά τον βέλτιστο μηχανισμό αρκετά πολύπλοκο και ανόμοιο με τους μηχανισμούς που χρησιμοποιούνται στην πράξη.

Par^deigma 2.1. 'Estw èna antikeÐmeno proc p¸lhsh kai dÔo upoy fioi agorastèc. Oi apotim seic twn agorast¸n 1 kai 2 epilègontai wc v_1 $U[0;2]$ kai v_2 $U[0;3]$ antÐstoiqa. Se aut thn perÐptwsh parathroÔme ìti to perib^llon eÐnai mh summetrikì ($F_1 \neq F_2$), en¸ oi sunart seic twn eikonik¸n apotim sewn eÐnai Ðsec me $_1(v_1) = 2v_1$ 2 kai $_2(v_2) = 2v_2$ 3 antÐstoiqa. O kanìnac an^jeshc ston bèltisto mhqanismì anajètei to antikeÐmeno wc ex c:

Ston Agorast 1, ìtan $_1(v_1) > \max f \; _2(v_2); 0 g$ diaforetik^ ìtan $v_1 > \max f v_2 \; \frac{1}{2}; 1 g$

Ston Agorast 2, ìtan $_2(v_2) > \max f \; _1(v_1); 0 g$ diaforetik^ ìtan $v_2 > \max f v_1 + \frac{1}{2}; \frac{3}{2} g$



(aþ) Bèltisth dhmoprasÐa

(bþ) DhmoprasÐa me xeqwrist tim katwflÐou an^ agorast

Σχήμα 2.1: Κατανομή του αντικειμένου σε μη συμμετρική βέλτιστη δημοπρασία και μη συμμετρική δημοπρασία 2[hc] τιμής με ξεχωριστή τιμή κατωφλίου ανά αγοραστή.

[2] To gegonìc autì eÐnai gnwstì wc kanìnac thc exaÐreshc (exclusion principle) kaj¸c o pwlht c protim^ na apokleÐsei touc agorastèc me apotÐmhsh mikrìterh apì thn tim katwflÐou, parìti h apotÐmhsh touc uperbaÐnei thn apotÐmhs pou èqei o pwlht c gia to antikeÐmeno.

Τα ανωτέρω αποτελέσματα προκύπτουν από το γεγονός ότι ο κανόνας ανάθεσης στην βέλτιστη δημοπρασία αποσκοπεί στη μεγιστοποίηση του εικονικού πλούτου. Παρατηρούνται όμως περιπτώσεις για τις οποίες ο μηχανισμός διαθέτει το αντικείμενο στον αγοραστή 1 ακόμη και αν η προσφορά του (π.χ 1,2) είναι μικρότερη από εκείνη του αγοραστή 2 (π.χ 1.68)[3]. Έτσι ομολογουμένως, η αποτελεσματικότητα της δημοπρασίας του Myerson γίνεται αντικείμενο δυσπιστίας από κάποιον που δεν είναι εξοικειωμένος με την έννοια της εικονικής αποτίμησης. Συνειρμικά λοιπόν προκύπτει η ανάγκη εύρεσης μηχανισμών που συνδυάζουν απλότητα και ταυτόχρονα εξασφαλίζουν ένα ικανό τμήμα (approximately optimal) του εισοδήματος που αποφέρουν οι βέλτιστοι αλλά συνάμα πολύπλοκοι θεωρητικοί μηχανισμοί. Ουσιαστικά, η εύρεση μιας σταθερής απόκλισης μεταξύ απλών και βέλτιστων μηχανισμών αποδομεί τελικά ως ένα βαθμό, τη συνεισφορά χαρακτηριστικών όπως η κατηγοριοποίηση (discrimination) μεταξύ των αγοραστών ή η ταυτόχρονη υλοποίηση (simultaneity) του μηχανισμού, για τον καθορισμό του εισοδήματος.

2.2 ApIoÐ proseggistikoÐ mhqanismoÐ

2.2.1 Η δημοπρασία $2^{ης}$ τιμής με διαφορετική τιμή κατωφλίου ανά υποψήφιο αγοραστή

Η πρώτη μορφή προσεγγιστικού μηχανισμού που θα εξετάσουμε αποτελεί μια παραλλαγή της δημοπρασίας 2^{hc} τιμής με τιμή κατωφλίου. Αναλυτικά:

Για κάθε υποψήφιο αγοραστή i υπολογίζεται η αντίστοιχη τιμή κατωφλίου $r_i = \;{}_i{}^{1}(0)$.

Από όλους τους αγοραστές για τους οποίους ισχύει $v_i \quad r_i$, το αντικείμενο ανατίθεται σε εκείνον με την μεγαλύτερη αποτίμηση.

Εάν το αντικείμενο ανατίθεται σε κάποιον αγοραστή, η χρέωση του είναι το μέγιστο μεταξύ της επόμενης ιεραρχικά αποτίμησης και της τιμής κατωφλίου του νικητή, ήτοι $\max_{j \neq i}\{v_j; r_i\}$.

Η μοναδική αλλαγή σε σχέση με την δημοπρασία 2^{hc} τιμής με τιμή κατωφλίου η οποία είναι βέλτιστη ως προς τα έσοδα σε i.i.d περιβάλλον, είναι η εφαρμογή διαφορετικής reserve price για κάθε αγοραστή. Ο νέος μηχανισμός, κάνοντας χρήση της πληροφορίας που έχουμε για τους αγοραστές (F_i), μας επιτρέπει να αυξήσουμε τα έσοδα θέτοντας υψηλότερη reserve price για τους αγοραστές των οποίων η αποτίμηση είναι «στοχαστικά» υψηλή. Αναπόφευκτα λοιπόν εγείρεται το ερώτημα εάν η κατηγοριοποίηση (discrimination) μεταξύ των αποτιμήσεων που εφαρμόσαμε είναι αρκετή για να μας εγγυηθεί ένα ικανό κομμάτι των βέλτιστων εσόδων ή ο περίπλοκος κανόνας ανάθεσης της δημοπρασίας του Myerson είναι μονόδρομος. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα έρχεται μέσω της θεωρίας της βέλτιστης παύσης (optimal stopping) και της έννοιας της ανισότητας του Προφήτη (prophet inequality). Με την αξιοποίηση της

[3] O mhqanismìc exwj¸ntac ton Agorast me thn megalÔterh dunat apotÐmhsh ¸ste na upob^lei uyhlìterec prosforèc, tou epib^lei poin $\frac{1}{2}$.

τελευταίας αποδεικνύεται ότι ακόμη και ένας μηχανισμός που αναθέτει τυχαία σε οποιονδήποτε αγοραστή προσφέρει ποσό μεγαλύτερο από το reserve price που του αντιστοιχεί, επιτυγχάνει πάντα τουλάχιστον το ήμισυ του βέλτιστου κέρδους.

Je¸rhma 2.1 (Chawla et al. [4], Hartline and Roughgarden [15]). 'Otan oi upoy fioi agorastèc epilègoun tic apotim seic touc anex^rthta apì omalèc kai ìqi aparaÐthta Ðdiec kata-nomèc se perib^llon miac paramètrou, h dhmoprasÐa 2^{hc} tim c me xeqwrist tim katwflÐou an^ agorast , epitugq^nei toul^qiston to misì tou kèrdouc thc mh summetrik c bèltisthc dhmoprasÐac.

2.2.2 Μηχανισμός διαδοχικής τιμολόγησης

Μια διαφορετική προσέγγιση του μηχανισμού τιμολόγησης είναι ο μηχανισμός που εξετάζει σταδιακά τις αποτιμήσεις των αγοραστών και όσο το αντικείμενο είναι διαθέσιμο, προσφέρει στον εκάστοτε αγοραστή μια take-or-leave-it προσφορά. Η προσφορά που προτείνεται στον αγοραστή i σχετίζεται με τις τιμές που έχουν δοθεί στους προηγούμενους από αυτόν, καθώς και στην κατανομή αποτιμήσεων F. Ο μηχανισμός είναι ευρέως διαδεδομένος και στα θετικά χαρακτηριστικά του συγκαταλέγονται τα κάτωθι. Πρώτον, η έκφραση της αληθινής αποτίμησης αποτελεί κυρίαρχη στρατηγική, ενώ εκ φύσεως του μηχανισμού αποτρέπεται η συνεργασία μεταξύ των αγοραστών. Πράγματι, ο μοναδικός τρόπος για να «βοηθήσει» κάποιος αγοραστής έναν άλλον, γίνεται μόνο αν αρνηθεί μια προσφορά την οποία θα είχε συμφέρον να αποδεχθεί, δηλαδή να μειώσει την ωφέλεια του. Δεύτερον, οι αγοραστές δεν υποχρεούνται να γνωρίζουν ή να αναφέρουν την αποτίμηση τους, αλλά αντιθέτως να αξιολογήσουν την τιμή που τους προσφέρεται. Τρίτο και τελευταίο, η έξοδος του μηχανισμού είναι άμεση καθότι οι αγοραστές συνειδητοποιούν απευθείας αν θα αποκτήσουν το αντικείμενο ή όχι.

Orismìc 2.1. (Mhqanismìc diadoqik c timolìghshc, *Chawla et al.* [5]) 'Enac mhqanismìc diadoqik c timolìghshc (*sequential posted-price mechanism(SPM)*) S orÐzetai apì mia allhlouqÐa agorast¸n kai èna sÔnolo tim¸n p_i gia i 2 $[n]$. O mhqanismìc leitourgeÐ wc akoloÔjwc:

1. ArqikopoÐhsh A ;.
2. Gia $i = 1$ èwc n:
   (aþ) An A[f (i)g 2 J , tìte prìsfere ston agorast (i) tim agor^c p_i.
   (bþ) An o agorast c apodeqjeÐ, A A [f (i)g:
3. Exuphrèthse touc agorastèc pou an koun sto sÔnolo A.

Έστω c_i η πιθανότητα με την οποία ο μηχανισμός θα υποβάλει πρόταση στον αγοραστή i λαμβάνοντας υπόψη τις αποτιμήσεις των αγοραστών (1); ; (i 1). Το εκτιμώμενο κέρδος του μηχανισμού SPM είναι ίσο με $R_{\mathbf{p}} = \sum_i c_i q_i p_i$, όπου $q_i = 1 \; F_i(p_i)$.

2.3 Optimal stopping

Η θεωρία της βέλτιστης παύσης[4] (optimal stopping) εξετάζει το πρόβλημα της εύρεσης του χρόνου υλοποίησης μιας συγκεκριμένης δράσης, δεδομένης της παρακολούθησης μιας αλληλουχίας τυχαίων μεταβλητών. Αντικειμενικός στόχος είναι η μεγιστοποίηση του εκτιμώμενου οφέλους ή διαφορετικά η ελαχιστοποίηση του εκτιμώμενου κόστους. Αυτού του είδους τα προβλήματα αποτελούν αντικείμενα έρευνας επιστημονικών κλάδων όπως η Στατιστική (έλεγχος υποθέσεων, εκτίμηση παραμέτρων) και η Επιχειρησιακή Έρευνα (ανισότητα του προφήτη (prophet inequality)[5], πρόβλημα γραμματέα (secretary problem) κ.α[6].

Orismìc 2.2. Bèltisth paÔsh. Ta probl mata bèltisthc paÔshc orÐzontai apì dÔo paramètrouc,

1. Thn allhlouqÐa tuqaÐwn metablht¸n $X_1; X_2; :::; X_n$, twn opoÐwn h koin katanom jewreÐtai gnwst , kai
2. Thn allhlouqÐa twn antÐtimwn $y_0; y_1(x_1); y_2(x_1; x_2); :::; y_1 (x_1; x_2; :::)$ pou lamb^nei o paÐkthc se k^je st^dio.

Δεδομένων αυτών των δύο παραμέτρων, το συσχετιζόμενο πρόβλημα βέλτιστης παύσης, περιγράφεται ως ακολούθως. Η αλληλουχία $X_1; X_2; :::$ μπορεί να γίνεται αντικείμενο παρατήρησης για όσο επιθυμεί ο παίκτης. Για κάθε στάδιο $n = 1; 2; :::$, μετά την υλοποίηση της τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή $X_1 = x_1; X_2 = x_2; :::; X_n = x_n$, ο συμμετέχων μπορεί είτε να σταματήσει και να λάβει το γνωστό αντίτιμο $y_n(x_1; :::; x_n)$, είτε να προχωρήσει και να παρατηρήσει την υλοποίηση της μεταβλητής X_{n+1}. Το πρόβλημα δηλαδή, έγκειται στον υπολογισμό της πιθανότητας παύσης $\;_n(x_1; x_2; :::; x_n)$ του παιχνιδιού στο στάδιο n, όταν έχει προηγηθεί η παρατήρηση της υλοποίησης των $X_1; X_2; :::; X_n$ μεταβλητών.

$$\;_n(X_1; X_2; :::; X_n) = P(N = njN \quad n; X = x); n = 0; 1; :::$$

2.4 H anisìthta tou Prof th

Σε συνέχεια των ανωτέρω διαλαμβανομένων, ας υποθέσουμε ότι συμμετέχουμε σε ένα παίγνιο με τους ακόλουθους κανόνες:

Υπάρχουν n στάδια.

Στο στάδιο i γινόμαστε αποδέκτες ενός μη αρνητικού επάθλου $\;_i$ που επιλέγεται από μια κατανομή G_i. Σημειώνεται ότι ο παίκτης γνωρίζει όλες τις κατανομές πριν την έναρξη του παιγνίου καθώς επίσης και ότι τα έπαθλα επιλέγονται ανεξάρτητα από κάθε κατανομή.

[4] Gia perissìterec sqetikèc leptomèreiec, o anagn¸sthc dÔnatai na anatrèxei sto biblÐo *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping* [35].

[5] Gia perissìterec sqetikèc leptomèreiec, o anagn¸sthc dÔnatai na anatrèxei stic èreunec twn Lucier [27] kai Hill, Kertz [17].

[6] 'Etera gnwst^ probl mata eÐnai ta house selling problem [28], job search problem [26], maximazing the average [6], one-armed bandit [2], detecting a change point [34], the burglar problem [12], k.a.

Η αξία $_i$ του κάθε επάθλου γίνεται γνωστή στον παίκτη στην αρχή του σταδίου i.

Μετά την αποκάλυψη του επάθλου ο παίκτης μπορεί είτε να αποδεχθεί το βραβείο και να σταματήσει, είτε να αρνηθεί και να προχωρήσει στο επόμενο στάδιο.

Er¸thsh: Υπάρχει κάποια στρατηγική σε αυτό το παίγνιο έτσι ώστε το κέρδος του συμμετέχοντα να είναι ικανό να ανταγωνιστεί το κέρδος ενός Προφήτη που γνωρίζει εκ των προτέρων όλες τις υλοποιήσεις των κατανομών και επιλέγει να σταματήσει στο στάδιο που του προσφέρει την υψηλότερη;
Προκειμένου να απαντήσει κάποιος, καλείται να αξιολογήσει τα εξής:

1. Εάν αποδεχθεί το έπαθλο στα πρώτα στάδια του παιχνιδιού χάνεται αυτόματα η ευκαιρία για ένα μεγαλύτερο βραβείο σε επόμενα στάδια.
2. Εάν απεναντίας προχωρήσει προς το τελευταίο στάδιο, ελοχεύει ο κίνδυνος να αποδεχτεί ένα βραβείο χαμηλής αξίας (μη έχοντας κάποια καλύτερη επιλογή).

Η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη μπορεί να επαληθευτεί με αναδρομική επαγωγή (backwards induction). Στο n (τελευταίο) στάδιο του παιχνιδιού, ο παίκτης πρέπει να αποδεχτεί οποιοδήποτε υλοποίηση $_n$ της κατανομής G_n. Στο n 1 στάδιο, ο παίκτης πρέπει να αποδεχτεί αν και μόνο αν $_{n\ 1}$ $_n$. Κατά το στάδιο n 2 ο παίκτης συγκρίνει την υλοποίηση της κατανομής $G_{n\ 2}$ και αποδέχεται μόνο αν $_{n\ 2}$ max$f$ $_{n\ 1};$ $_n g$ κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο ο παίκτης θα υπολογίσει ένα κατώφλι $_i$ για κάθε στάδιο και η βέλτιστη στρατηγική του θα είναι να σταματήσει στην περίπτωση που v_i $_i$. Ο μηχανισμός που περιγράψαμε παρουσιάζει δυστυχώς ορισμένα σημαντικά μειονεκτήματά:

1. Χρειάζεται n στάδια για να υπολογιστούν οι παράμετροι.
2. Δεν είναι εύρωστος υπό την έννοια ότι εάν διαφοροποιηθεί η σειρά των σταδίων ή το εύρος των κατανομών, η έξοδος του μηχανισμού αλλάζει σημαντικά.

Για την άμβλυνση των μειονεκτημάτων αυτών, διαφοροποιείται ελαφρώς ο μηχανισμός με τον ορισμό ενός κατωφλίου . Παράλληλα ορίζεται η αποδοχή εκ μέρους του παίκτη και κατ΄ επέκταση ο τερματισμός του παιχνιδιού την πρώτη φορά κατά την οποία ισχύει v_i [7].

Je¸rhma 2.2. **(anisìthta tou Prof th**, *Samuel-Cahn [33]*). Gia opoiad pote akolouj¶a $G_1; G_2; :::; G_n$ anex^rthtwn tuqa¶wn katanom¸n, up^rqei m¶a strathgik h opo¶a exasfal¶zei ìti h ektim¸menh ax¶a tou ep^j lou e¶nai toul^qiston $\frac{1}{2}$E $_G$(max$_i$ $_i$). Epiplèon autì epitugq^netai an kai mìno an h ax¶a tou apodektoÔ brabe¶ou i (dhlad $_i$) e¶nai toul^qiston ¶sh me èna kat¸ f li t.

Apìdeixh. Θεωρούμε μια στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι t και συμβολίζουμε με $z^+ =$ max$fz; 0g$. Καθώς είναι δύσκολο να συγκρίνουμε απευθείας το εκτιμώμενο κέρδος αυτής της στρατηγικής με το εκτιμώμενο κέρδος που αποκομίζει ο προφήτης, θα υπολογίσουμε και θα

[7] H strathgik katwfl¶ou den e¶nai bèltisth (sub-optimal) diìti akìmh kai sto n st^dio an $v_n <$ o summetèqwn den ja apodeqte¶ kai ja apokom¶sei mhdenikì ìfeloc.

συγκρίνουμε το κάτω και το άνω φράγμα των δύο αυτών ποσοτήτων. Έστω $q(t)$ η πιθανότητα η στρατηγική κατωφλίου να μην αποδεχθεί κανένα βραβείο. Σημειώνεται ότι καθώς το t αυξάνεται, αυξάνονται παράλληλα η πιθανότητα $q(t)$ και η εκτιμώμενη αξία ενός βραβείου που γίνεται αποδεκτό.

Αναφορικά με το κέρδος της στρατηγικής σημειώνουμε ότι με πιθανότητα $q(t)$ και $1 \quad q(t)$ αποφέρει μηδενικό και τουλάχιστον t αντίστοιχα. Στην περίπτωση που ακριβώς ένα βραβείο i ικανοποιεί τη συνθήκη $_i \quad t$, τότε πρέπει να στοχοποιήσουμε το επιπλέον κέρδος $_i \quad t$. Στην περίπτωση που τουλάχιστον δύο βραβεία i και j υπερβαίνουν το κατώφλι, τότε το επιπλέον κέρδος είναι είτε $_i \quad t$, είτε $_j \quad t$, ανάλογα ποιό θα εμφανιστεί πρώτο. Ουσιαστικά θα φράξουμε το κέρδος της στρατηγικής κατωφλίου από κάτω ως ακολούθως:

$$
\begin{aligned}
E_{\ \ G}&[\text{κέρδος στρατηγικής κατωφλίου}] \\
= &\ \underbrace{(1 \quad q(t))}_{\text{pijanìthta na uperboÔme to kat¸fli}} t \quad + \ \text{μέσο επιπλέον κέρδος} \\
&((1 \quad q(t))t + \sum_{i=1} E[\ _i \quad t \mid \ _i \quad t;\ _j < t\ ; \forall j \neq i] \Pr[\ _i \quad t;\ _j < t\ ; \forall j \neq i] \\
= &((1 \quad q(t))t + \sum_{i=1} E\,[\underbrace{\ _i \quad t \mid \ _i \quad t] \Pr[\ _i \quad t]}_{E[(\ _i \quad t)^+]}\ \underbrace{\Pr[\ _j < t\ ; \forall j \neq i]}_{q(t)} \\
&((1 \quad q(t))t + q(t) \sum_{i=1} E\,[(\ _i \quad t)^+]
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Η τρίτη ισότητα προκύπτει λόγω της ανεξαρτησίας των κατανομών G_i που μας επιτρέπει να παραγοντοποιήσουμε τους δύο πιθανοτικούς όρους, ενώ η εξίσωση 2.1 απορρέει από το γεγονός ότι $q(t) = \Pr[\ _j < t; \forall j] \quad \Pr[\ _j < t; \forall j \neq i]$[8].

Στη συνέχεια τα υπολογίσουμε το άνω φράγμα για τον προφήτη και θα το συγκρίνουμε με τη σχέση 2.1.

$$
\begin{aligned}
E\left[\max_{i=1}^{n} \ _i\right] &= E\left[t + \max_{i=1}^{n}(\ _i \quad t)\right] \\
&\quad t + E\left[\max_{i=1}^{n}(\ _i \quad t)^+\right] \\
&\quad t + \sum_{i=1} E\left[(\ _i \quad t)^+\right] .
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι το άθροισμα μη αρνητικών όρων είναι μεγαλύτερο ή ισο από τον μέγιστο όρο. Συγκρίνοντας τέλος τις εξισώσεις 2.1 και 2.2, μπορούμε να θέσουμε κατάλληλο t τέτοιο ώστε $q(t) = \frac{1}{2}$, δηλαδή μια τιμή που να δίνει 50% πιθανότητα αποδοχής του βραβείου. □

Υπάρχουν διάφορες άλλες αποδείξεις (ενδεικτικά [16, 21, 23]) για το ανωτέρω θεώρημα, ενώ μέσω του ακόλουθου παραδείγματος αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που οι υποψήφιοι

[8] O ìroc $q(t)$ ekfr^zei thn pijanìthta ìla ta brabeÐa (kai to i) na eÐnai mikrìtera apì to kat¸fli t. O ìroc $\Pr[\ _j < t; j \neq i]$ eÐnai mia ligìtero austhr perÐptwsh thc $q(t)$ diìti to brabeÐo i eÐnai megalÔtero apì to kat¸fli

(n 2) δεν επιλέγουν ανεξάρτητα από την ίδια κατανομή (non i.i.d), το όριο αυτό είναι αυστηρό (tight).

Par^deigma 2.2. Upojètoume dÔo katanomèc ek twn opoÐwn h G_1 ex orismoÔ eÐnai Ðsh me 1, en¸ h G_2 dÔnatai na p^rei thn tim $\frac{1}{}$ me pijanìthta (2 $(0; 1]$) thn tim 0 me pijanìthta 1 . H mègisth ektim¸menh tim , ^ra kai h tim pou ja epilèxei o prof thc, eÐnai Ðsh me E $_G(\max_i$ $_i)$ = $\frac{1}{}$ + 1 (1) = 2 , en¸ h mèsh ektim¸menh tim den mporeÐ na eÐnai megalÔterh apì 1. Kai autì diìti o paÐkthc mporeÐ eÐte na apodeqjeÐ to apotèlesma thc katanom c G_1 pou ja tou d¸sei brabeÐo me bèbaih axÐa 1, eÐte na proqwr sei sto epìmeno st^dio kai na diekdik sei to brabeÐo thc katanom c G_2 to opoÐo epÐshc èqei ektim¸menh axÐa 1.

Για την περίπτωση που η αξία των επάθλων επιλέγεται από την ίδια κατανομή, οι Hill και Kertz [18] υπολόγισαν κάτω φράγμα ίσο με $1 \quad \frac{1}{e}$ ($0{:}63$), ενώ οι Correa et al. [7] επιβεβαίωσαν ότι το άνω όριο είναι περίπου $0{:}745$. Εκμεταλλευόμενοι την ανισότητα του προφήτη, οι Hajiaghayi et al. [13] ήταν οι πρώτοι που διαπίστωσαν την αναλογία που έχει με τον μηχανισμό πώλησης ενός αντικειμένου. Αναλυτικά, ένας πωλητής αποσκοπεί στην πώληση ενός αντικειμένου σε μια ακολουθία από n υποψήφιους αγοραστές. Κάθε αγοραστής i έχει αποτίμηση v_i F_i και οι ενδιαφερόμενοι φτάνουν, ο ένας μετά τον άλλον, αποκαλύπτοντας την αποτίμηση τους. Με την άφιξη ενός αγοραστή, ο πωλητής καλείται να αποφασίσει άμεσα και αμετάκλητα εάν θα πουλήσει το αντικείμενο ή αν θα προχωρήσει στον επόμενο αγοραστή, με γνώμονα πάντα τη μεγιστοποίηση της εκτιμώμενης αποτίμησης, άρα και του κέρδους που προσδοκά να αποκομίσει.

2.5 Episkìphsh bibliografÐac

2.5.1 Η ανισότητα του Προφήτη με δυνατότητα αποδοχής περισσότερων βραβείων

Εξετάζοντας εκ νέου την ανισότητα του Προφήτη, τροποποιούμε το μηχανισμό ως εξής. Σε κάθε συμμετέχοντα i προσφέρεται η δυνατότητα να αποδεχτεί περισσότερα του ενός βραβεία. Επομένως σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα διάνυσμα βραβείων $= (\ _1; :::; \ _n)$ και ένα σύνολο F με όλες τις δυνατές αναθέσεις των βραβείων που θα γίνουν αποδεκτά. Κατά αντιπαραβολή με το μοντέλο που παρουσιάστηκε προηγουμένως, το σύνολο των δυνατών αναθέσεων αποτελείται από όλα τα $_i$ (singletons) και την περίπτωση που δεν γίνεται ανάθεση ($_i <$).

Μελετώντας τη σύνδεση μεταξύ των μηχανισμών τιμολόγησης και της ανισότητας του προφήτη, οι Hajiaghayi et al. [13] εξέτασαν την προέκταση για την οποία μπορούν να γίνουν αποδεκτά k 1 βραβεία. Η αναλογία ως προς τον μηχανισμό τιμολόγησης ορίζεται ως εξής: ο πωλητής διαθέτει k όμοια αντικείμενα σε n υποψήφιους αγοραστές που ενδιαφέρονται για την αγορά το πολύ ενός προϊόντος. Με την χρήση της ανισότητας του προφήτη αποδεικνύεται ότι καθώς το k αυξάνεται ο συντελεστής προσέγγισης με τον βέλτιστο μηχανισμό, τείνει στη μονάδα.

Je¸rhma 2.3 (Hajiaghayi και άλλοι [13]). *Sto montèlo thc anisìthtac tou prof th ìpou eÐnai dunat h apodoq $k \geq 1$ brabeÐwn, up^rqei mia strathgik katwflÐou pou epitugq^nei suntelest prosèggishc to polÔ $1 + \sqrt{\frac{8\ln(k)}{k}}$.*

2.5.2 Περιορισμοί προβλήματος σακιδίου

Στον περιορισμό σακιδίου, κάθε αγοραστής πέραν της αποτίμησης του (v_i), συσχετίζεται και με ένα μέγεθος $s_i \in [0,1]$. Ο περιορισμός υλοποίησης ορίζεται ως το σύνολο S από αγοραστές που μπορεί να εξυπηρετηθεί ταυτόχρονα αν και μόνο αν $\sum_{i \in S} s_i \leq 1$.

Fractional Knapsack. Οι Feldman και άλλοι [11] εξέτασαν μια παραλλαγή του αρχικού προβλήματος στην οποία σε κάθε αγοραστή i, ο μηχανισμός μπορεί να προσφέρει αμετάκλητα ένα βαθμό εξυπηρέτησης ίσο με $x_i \in [0,1]$. Τότε, η συνολική αξία που συγκεντρώνεται γίνεται ίση με $\sum_i x_i v_i$, ενώ ο περιορισμός υλοποίησης ισούται με $\sum_i x_i s_i \leq 1$. Η ερμηνεία του προβλήματος με βάση τη φιλοσοφία της ανισότητας του προφήτη και τον μηχανισμό τιμολόγησης για ένα διαιρέσιμο αντικείμενο, γίνεται ως εξής: κάθε αγοραστής έχει αποτίμηση $\frac{v_i}{s_i}$ για κάθε κομμάτι που κερδίζει (μέχρι το πολύ s_i τμήματα).

Στη ίδια μελέτη, οι Feldman και άλλοι κατάφεραν να αποδείξουν μία προσεγγιστική σταθερά ως προς το βέλτιστο μηχανισμό. Παίρνοντάς τη σκυτάλη, οι Dütting και άλλοι [8] βελτίωσαν το λόγο αυτό σε 2, ο οποίος εφαρμόζεται ακόμη και στην περίπτωση που τα μεγέθη s_i και v_i αποτελούν αποκλειστική πληροφορία του αγοραστή και συσχετίζονται τυχαία με τους υπόλοιπους αγοραστές. Δηλαδή, η πληροφορία (s_i, v_i) μπορεί να εκληφθεί ως το προφίλ του αγοραστή i, με τον μηχανισμό να επιτρέπει στα προφίλ αυτά να επιλέγονται από κάποια γνωστή κατανομή. Η προσέγγιση των Dütting et al. αποτελεί ουσιαστικά έναν μηχανισμό τιμολόγησης μιας σταθερής τιμής p ανά ποσοστό του αντικειμένου, που προσφέρεται σταδιακά (στον έναν μετά τον άλλον) σε κάθε αγοραστή, δίνοντας του την ευκαιρία να πάρει όσο τμήμα του αντικειμένου επιθυμεί, αρκεί να υφίσταται διαθέσιμο απόθεμα. Δηλαδή εάν συμβολίσουμε με $V^* = \sum_i v_i x_i^*$ την τυχαία μεταβλητή που υποδηλώνει την συνολική αξία της βέλτιστης κατανομής x_i^* (τυχαία μεταξύ των προφίλ (s_i, v_i) των αγοραστών), τότε η τιμή που προτείνει ο πωλητής είναι $p = \frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*]$.

Je¸rhma 2.4 (Dütting και άλλοι [8]). *Gia to prìblhma sakidÐou pou perigr^fthke anwtèrw, h politik timolìghshc pou epib^lei tim an^ mon^da proðìntoc $\frac{1}{2}\mathbb{E}[V^*]$ kai epitrèpei ston k^je agorast na apokt sei thn epijumht posìthta (wc exant l sewc tou apojèmatoc), èqei suntelest prosèggishc 2.*

Apìdeixh. Αρχικά αναλογιζόμαστε το πρόβλημα στην μορφή για την οποία τα προφίλ των αγοραστών είναι γνωστά εκ των προτέρων στον πωλητή (full information version). Συμβολίζουμε με $\mathbf{x}^*$ την βέλτιστη ανάθεση η οποία αποφέρει εισόδημα ίσο με $V^* = \sum_i v_i x_i^*$. Τότε ο πωλητής θα προσφέρει τιμή $\frac{1}{2}V^*$ και για να αποδειχθεί αυτό θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις του εισοδήματος και του κοινωνικού οφέλους ξεχωριστά:

Eisìdhma: Υποθέτουμε ότι συνολικά αποδίδεται $Y \leq 1$ ποσοστό του αντικειμένου. Επομένως το εισόδημα που παράγεται είναι ίσο με $p \cdot Y = \frac{1}{2}V^* \cdot$.

Koinwnikì 'Ofeloc: Παρατηρώντας ότι όταν έχει διατεθεί Y ποσοστό του αντικειμένου,

$1 \quad Y$ ποσοστό είναι διαθέσιμο κατά την άφιξη του επόμενου αγοραστή. Συγκεκριμένα, υπάρχει αρκετό απόθεμα έτσι ώστε ο κάθε αγοραστής να αποκτήσει την βέλτιστη ποσότητα [9] υποβαθμισμένη κατά ένα παράγοντα $(1 \quad Y)$. Συνεπώς, κάθε αγοραστής θα αποκομίσει το ελάχιστο όφελος που δικαιούται αγοράζοντας $s_i x_i (1 \quad Y)$ ποσοστό του αντικειμένου. Το γεγονός αυτό δημιουργεί ένα φράγμα για το όφελος ίσο με:

$$\sum_i v_i \quad ps_i \quad x_i (1 \quad Y) = \sum_i (v_i x_i) \quad p \sum_i (s_i x_i) \quad (1 \quad Y)$$
$$(V \quad p) \quad (1 \quad Y)$$
$$= \frac{1}{2} V \quad (1 \quad Y)$$

με την ανισότητα να ισχύει εξαιτίας του γεγονότος ότι $\sum_i s_i x_i \quad 1$. Προσθέτοντας τις σχέσεις που βρήκαμε για εισόδημα και κοινωνικό όφελος, προκύπτει ότι το συνολικό όφελος είναι τουλάχιστον $\frac{1}{2} V$. Το φράγμα αυτό λοιπόν μπορεί να εκφράσει την στοχαστική όψη αυτού του προβλήματος, αξιοποιώντας τις εκτιμώμενες τιμές και την γραμμικότητα τους. Δηλαδή το εκτιμώμενο εισόδημα θα γίνει ίσο με $p = E[V \quad]$ φορές την εκτιμώμενη πωληθείσα ποσότητα, που είναι ίση με $\frac{1}{2} E[Y]$. Για να οριοθετήσουμε το εκτιμώμενο κοινωνικό όφελος, παρατηρούμε ότι ο κάθε αγοραστής λαμβάνει τουλάχιστον $\frac{1}{2} E[V \quad]$ φορές την εκτιμώμενη ποσότητα που βρίσκει διαθέσιμη, ήτοι $E(1 \quad Y)$. Προσθέτοντας τις δύο αυτές εκτιμώμενες ποσότητες, επέρχεται η απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος. □

Akèraia morf probl matoc sakidÐou. Για την περίπτωση του προβλήματος του σακιδίου κατά την οποία το πλήθος των αντικειμένων που αποτελούν τμήμα της λύσης, είναι εξ ορισμού ακέραιος αριθμός, οι Dütting και άλλοι [8] κάνοντας πάλι χρήση μηχανισμού στατικής τιμολόγησης απέδειξαν συντελεστή προσέγγισης ίσο με 5. Τα επιχειρήματα τους ακολουθούν τα επιχειρήματα που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα με τη διαφορά όμως ότι για τη συγκεκριμένη περίπτωση εξετάζεται ξεχωριστά η συνεισφορά των αγοραστών στο βέλτιστο εισόδημα. Αναλυτικά, οι αγοραστές κατηγοριοποιούνται στους «μεγάλους» όταν $s_i > \frac{1}{2}$ και τους «μικρούς» όταν $s_i \quad \frac{1}{2}$. Ο χειρισμός της πρώτης κατηγορίας είναι απλός καθώς η βέλτιστη ανάθεση μπορεί να περιέχει το πολύ έναν τέτοιο αγοραστή. Κάνοντας χρήση της ανισότητας του Προφήτη, ο μηχανισμός ορίζει μια take-it-or-leave-it τιμή για όλο το αντικείμενο που δίνει συντελεστή προσέγγισης 2 για την συνεισφορά της κατηγορίας των αγοραστών με υψηλή τιμή s_i. Για την έτερη κατηγορία, εφαρμόζεται μια μικρή παραλλαγή του fractional προβλήματος σακιδίου όπου με το προσφέρεται τιμή $\frac{2}{3} V$ (αντί για $\frac{1}{2} V$), επιτυγχάνεται συντελεστής προσέγγισης ίσος με 3. Λαμβάνοντας υπόψη αυτά τα δύο φράγματα και αναλογιζόμενοι τον χείριστο συνδυασμό μεταξύ των δύο κατηγοριών των αγοραστών, καταλήγουμε εν τέλει στον συντελεστή προσέγγισης 5.

[9] Thn posìthta pou ja èbriske diajèsimh gia agorˆ sthn perÐptwsh pou eÐte tan o monadikìc agorast c, eÐte tan o pr¸toc sthn allhlouqÐa metaxÔ twn agorast¸n.

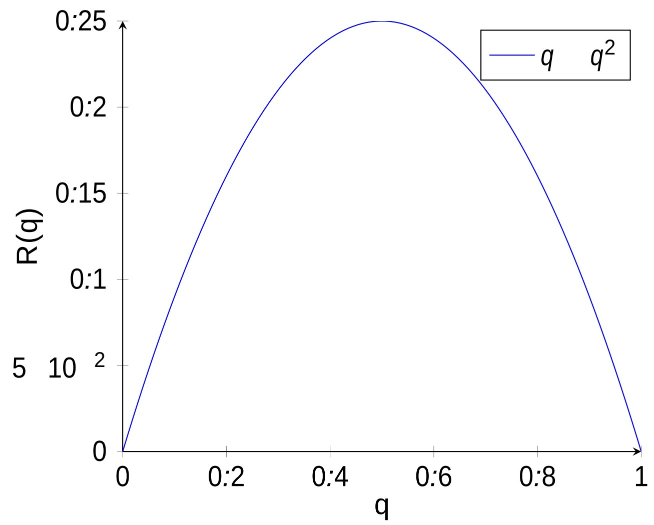
Kef^laio 3

Mhqanismoί p¸lhshc enìc antikeimènou

Στο Κεφάλαιο αυτό αρχικά γίνεται περιγραφή των βασικών εννοιών πάνω στις οποίες στηρίζεται ο υπολογισμός της συσχέτισης μεταξύ των μηχανισμών που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Αρχικά, λοιπόν, παρουσιάζονται οι κατανομές εισοδήματος, με ιδιαίτερη έμφαση σε μια συγκεκριμένη υποκατηγορία τους, τις τριγωνικές κατανομές. Τα ανωτέρω, σε συνδυασμό με την ex ante χαλάρωση του περιορισμού υλοποίησης, αποτελούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη που επέτρεψαν στη σύγκλιση του εύρους μεταξύ των μηχανισμών σε μη συμμετρικό περιβάλλον. Όπως αποτυπώθηκε και στο Κεφάλαιο 2, η γεφύρωση του χάσματος μεταξύ του απλού μηχανισμού τιμολόγησης και των αποδοτικότερων, σε σχέση με το εισόδημα, έτερων μηχανισμών, αποτελεί αντικείμενο ύψιστης ερευνητικής σημασίας. Οι μηχανισμοί τιμολόγησης συγκροτούν έναν ελκυστικό και ευρέως διαδεδομένο τρόπο πώλησης σε στρατηγικούς καταναλωτές. Και αυτό διότι οι υποψήφιοι αγοραστές έρχονται αντιμέτωποι με μια συγκεκριμένη επιλογή (take-or-leave-it o er), είτε να δεχθούν την τιμή πώλησης και να αγοράσουν όταν έχουν μη αρνητικό όφελος, είτε να αποχωρήσουν στην περίπτωση που έχουν αρνητικό όφελος. Εν συνεχεία, εξετάζεται η δυναμική των μηχανισμών πώλησης του μη διαιρέσιμου αντικειμένου και παρουσιάζονται αποτελέσματα από την σχετική πλούσια βιβλιογραφία. Το Κεφάλαιο τέλος καταλήγει, με τη παρουσίαση των παραμέτρων και του μηχανισμού γραμμικής τιμολόγησης του διαιρέσιμου αντικείμενου, κύριο ερευνητικό αντικείμενο της παρούσας Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας.

3.1 KampÔlec eisod matoc

Έστω ένας υποψήφιος αγοραστής του οποίου η αποτίμηση v προέρχεται από μια κατανομή F. Μεταξύ της αποτίμησης και τις σχετικής ισχύος της, συγκρινόμενη με την κατανομή που προήλθε, υπάρχει ένα-προς-ένα αντιστοίχηση. Για παράδειγμα, εάν η κατανομή είναι η $U[0;1]$ και η αποτίμηση είναι $v = 0:9$, τότε η συγκεκριμένη αποτίμηση είναι μεγαλύτερη από το 90% και μικρότερη από το 10% των τιμών που δύναται να προκύψουν από αυτή την κατανομή. Συμβολίζουμε με q το εκατοστημόριο (quantile) που υποδηλώνει τη σχετική ισχύ



Σχήμα 3.1: Καμπύλη εισοδήματος ομοιόμορφης κατανομής στο [0,1].

μιας αποτίμησης ($q = 0$ και $q = 1$ όταν η αποτίμηση ταυτίζεται με το άνω και κάτω όριο της κατανομής, αντίστοιχα) ενώ με $V(\cdot)$ την αντίστροφη καμπύλη ζήτησης (demand curve) που αντιστοιχίζει τα εκατοστημόρια σε αποτιμήσεις. Το εκατοστημόριο εν τέλει, αποτελεί το μέτρο ύπαρξης μεγαλύτερων τιμών ή $q = 1 - F(v)$, ενώ η αντίστροφη καμπύλη ζήτησης δίνεται από τον τύπο[1] $V(q) = F^{-1}(1 - q)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι προβάλουμε μια τιμή $V(q)$ την οποία ο υποψήφιος αγοραστής καλείται είτε να την αποδεχθεί, είτε να την απορρίψει (take-it-or-leave-it). Από τον ορισμό της $V(\cdot)$, η τιμή αυτή γίνεται αποδεκτή με (εκ των προτέρων) πιθανότητα q. Ο κανόνας ανάθεσης αυτού του μηχανισμού τιμολόγησης είναι απλά η αντίστροφη βηματική συνάρτηση (reverse step function), η οποία ξεκινά από το 1 (διαθέσιμο όλο το υλικό) και καταλήγει στο 0, στο σημείο q. Η καμπύλη εισοδήματος[2] (Revenue curve) λοιπόν, μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της εκ των προτέρων πιθανότητας q και είναι ίση με $R(q) = q \cdot V(q), \forall q \in [0,1]$.

3.2 Ek twn protèrwn qal^rwsh

Μία από τις δυσκολότερες προκλήσεις στον σχεδιασμό και την ανάλυση των απλών προσεγγιστικών μηχανισμών αποτελεί το γεγονός ότι οι βέλτιστοι μηχανισμοί είναι πολύπλοκοι και δύσκολοι στην ανάλυση τους. Στις δημοπρασίες ενός αντικειμένου η δυσκολία εγείρεται στον υπολογισμό των εικονικών αποτιμήσεων μέσω αυθαίρετα μονότονων συναρτήσεων. Μία μέθοδος εύρεσης άνω φράγματος για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι η χαλάρωση ορισμένων περιορισμών του. Για παράδειγμα, η εκ των υστέρων (ex post) υλοποίηση της βέλτιστης δημοπρασίας ενός αντικειμένου, απαιτεί ότι νικητής του μηχανισμού θα αναδειχθεί το πολύ ένας αγοραστής. Επομένως αφού τρέξει ο μηχανισμός και λάβει ως είσοδο τις αποτιμήσεις των αγοραστών, θα τις συγκρίνει και θα αποδώσει το αντικείμενο στον πλειοδότη, τον

[1] An h $F \sim U[0,1]$ tìte $q = 1 - F(v) = 1 - v$ kai $V(q) = F^{-1}(1 - q) = 1 - q$.
[2] An h $F \sim U[0,1]$, tìte $R(q) = q \cdot V(q) = q(1 - q) = q - q^2$

οποίο θα καλέσει να καταβάλει την δεύτερη υψηλότερη τιμή. Για Bayesian σχεδίαση μηχανισμών, η ανωτέρω προϋπόθεσή μπορεί να αμβλυνθεί και να ισχύει μόνο εκ των προτέρων (ex ante) για τις τυχαίες εκτιμώμενες αποτιμήσεις των αγοραστών. Ο περιορισμός δηλαδή του μηχανισμού πώλησης ενός αντικειμένου, να ορίζει ότι ο εκτιμώμενος (expected) αριθμός των αγοραστών που θα εξυπηρετηθεί είναι το πολύ ένας.

Orismìc 3.3. H ek twn protèrwn qal^rwsh enìc probl matoc eÐnai to prìblhma beltistopoÐhshc sto opoÐo o ek twn ustèrwn periorismìc ulopoÐhshc, antikajÐstatai apì ènan periorismì pou isqÔei me prosdokÐa (*expectation*) kai efarmìzetai me tuqaÐo trìpo p^nw ston mhqanismì kai touc tÔpouc twn upoyhfÐwn agorast¸n. H epÐlush tou probl matoc me ton *ex ante* periorismì eÐnai o bèltistoc *ex ante* mhqanismìc.

Προκειμένου να γίνει κατανοητό το όφελος της χαλάρωσης του εκ των υστέρων περιορισμού σε εκ των προτέρων, παρατίθεται το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω $\hat{q} = (\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_n)$ οι εκ των προτέρων πιθανότητες με τις οποίες ο μηχανισμός εξυπηρετεί κάθε έναν από τους n υποψήφιους αγοραστές. Λόγω γραμμικότητας, ο εκτιμώμενος αριθμός των πελατών που θα εξυπηρετηθούν είναι $\sum_i \hat{q}_i$, άθροισμα το οποίο για την περίπτωση πώληση ενός αντικειμένου είναι μικρότερο ή ίσο της μονάδας. Αναφορικά με τον περιορισμό, σημειώνεται ότι η επίδραση της παρουσίας του αγοραστή i (externality) στους ανταγωνιστές του, γίνεται μόνο μέσω της εκ των προτέρων πιθανότητας κατανομής. Και αυτό ισχύει για κάθε αγοραστή i στον οποίο αποδίδεται με ex ante πιθανότητα $\hat{q}_i$ διότι η υπόλοιπη πιθανότητα κατανομής είναι ίση με το πολύ $1 - \hat{q}_i$. Οποιαδήποτε μέθοδος εξυπηρετεί τον αγοραστή i με ex ante πιθανότητα $\hat{q}_i$ μπορεί να συνδυαστεί με οποιαδήποτε άλλη που εξυπηρετεί έναν εκτιμώμενο $1 - \hat{q}_i$ αριθμό των υπόλοιπων αγοραστών. Επομένως η εκδοχή (relaxed version) αυτή του προβλήματος βελτιστοποίησης μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους τους αγοραστές. Αναλογιζόμενοι λοιπόν τον αγοραστή i, ένας τρόπος εξυπηρέτησης του με εκ των προτέρων πιθανότητα $\hat{q}_i$, είναι η χρήση εκ των προτέρων βέλτιστου μηχανισμού τιμολόγησης με κλήρωση. Η εκτιμώμενη πληρωμή του αγοραστή, δίνεται από την καμπύλη κέρδους για το αντίστοιχο εκατοστημόριο. Επομένως για το διάνυσμα των ex ante πιθανοτήτων $\hat{q}$, το βέλτιστο εισόδημα είναι $\sum_i R(\hat{q}_i)$. Το πρόβλημα σχεδίασης εκ των προτέρων βέλτιστων μηχανισμών αντιστοιχεί στο πρόβλημα της Μικροοικονομικής Θεωρίας το οποίο προσπαθεί να βελτιστοποιήσει την ποσότητα κατανομής (fractional allocation) ενός υλικού στους πελάτες.

Η εφαρμογή της εκ των προτέρων χαλάρωσης σε μηχανισμούς με πολλαπλούς αγοραστές υλοποιείται σε τρία στάδια:

1. **AplopoÐhsh se mhqanismoÔc enìc agorast :** Υπολογισμός της εκ των προτέρων πιθανότητας κάθε αγοραστή να αποκτήσει το αντικείμενο. Το άθροισμα των πιθανοτήτων αυτών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από 1.

2. **EpÐlush twn problhm^twn enìc agorast :** Για κάθε αγοραστή πρέπει να υπολογιστεί ο προσεγγιστικά βέλτιστος μηχανισμός που ικανοποιεί τον εκ των προτέρων περιορισμό ανάθεσης του πρώτου σταδίου.

3. **Sônjesh twn mhqanism¸n enìc agorast** : Συνδυασμός των μηχανισμών ενός αγοραστή που αναπτύχθηκαν στο δεύτερο στάδιο και δημιουργία ενός μηχανισμού που ικανοποιεί εκ των υστέρων τον περιορισμό ανάθεσης.

Στο ακόλουθο παράδειγμα θα συγκρίνουμε το εισόδημα που παράγεται από την πώληση ενός μη διαρέσιμου αντικειμένου, από τέσσερις μηχανισμούς που μελετήθηκαν μέχρι αυτό το σημείο. Δηλαδή τον μηχανισμό τιμολόγησης, τον μηχανισμό διαδοχικής τιμολόγησης, τον βέλτιστο μηχανισμό του Myerson και τον μηχανισμό που αξιοποιεί την εκ των προτέρων χαλάρωση.

Par^deigma 3.3. 'Estw èna antikeðmeno proc p¸lhsh kai dÔo upoy fioi agorastèc me apotðmhsh $v_i \sim U[0,1]$. Kaj¸c h katanom eðnai omoiìmorfh, h ajroistik sun^rthsh puknìthtac pijanìthtac ja eðnai ðsh me $F(p) = p$ gia $p \in [0,1]$.

Gia to mègisto eisìdhma tou mhqanismoÔ timolìghshc isqÔei:

$$AP_{\max}(p) = \max\left\{p\left(1 - \prod_{i=1} F_i(p)\right) : p \in \mathbb{R}_{\geq 0}\right\} = \max\left\{p(1-p^2)\right\} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.385.$$

Gia to mègisto eisìdhma tou mhqanismoÔ diadoqik c timolìghshc isqÔei:

$$SPM(p_1, p_2) = p_1(1 - p_1) + p_2(1 - p_2)p_1$$

To eisìdhma megistopoieðtai gia di^nusma $\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (\frac{5}{8}, \frac{1}{2})$ kai eðnai ðso me $\frac{25}{64} \approx 0.391$.

O bèltistoc mhqanismìc wc proc to eisìdhma eðnai h dhmoprasða tou *Myerson* h opoða sthn summetrik perðptwsh tautðzetai me mia dhmoprasða 2^{hc} tim c me tim katwflðou $r = \phi^{-1}(0) = \frac{1}{2}$. 'Estw v_i oi apotim seic twn agorast¸n kai $Y_1 = \min\{v_1, v_2\}$, $Y_2 = \max\{v_1, v_2\}$. Tìte to eisìdhma pou sugkentr¸netai eðnai ðso me:

$$OPT = \frac{1}{2}Pr\left[Y_1 \leq \frac{1}{2}, Y_2 \geq \frac{1}{2}\right] + Pr\left[Y_1 \geq \frac{1}{2}\right] E\left[Y_1 \mid Y_1 \geq \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{2}{3} = \frac{5}{12} \approx 0.417.$$

H ektim¸menh tim thc $E[Y_1] = \frac{2}{3}$ prokÔptei apì to gegonìc ìti gia th sugkekrimènh perðptwsh oi timèc $v_1, v_2 \sim U[\frac{1}{2}, 1]$ kai ton upologismì tou $\int_{\frac{1}{2}}^{1} p \cdot 2(1-p)dp = \frac{1}{6}$.

Gia to eisìdhma pou proèrqetai me thn ek twn protèrwn qal^rwsh tou periorismoÔ ulopoðhshc:

$$R_{Ex-ante} = \max\left\{q_1(1-q_1) + q_2(1-q_2) : \mathbf{q} \in [0,1]^2, \sum_i q_i \leq 1\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Η σειρά κατάταξης με βάση το εισόδημα που συγκεντρώνουν οι μηχανισμοί στο συγκεκριμένο παράδειγμα, είναι η ακόλουθη:

$$R_{Ex-ante} > OPT > SPM > AP$$

Στο ακόλουθο Λήμμα των Dütting et al. [9], αποδεικνύεται ότι η εκ των προτέρων χαλάρωση ενός μηχανισμού, αποτελεί άνω φράγμα του εισοδήματος της βέλτιστης δημοπρασίας και ως εκ τούτου και του βέλτιστου εισοδήματος και των υπόλοιπων προσεγγιστικών μηχανισμών.

L mma 3.1. 'Estw $n, k \in \mathbb{N}$ me $k \leq n$ kai tuqaÐa katanom apotim sewn F. Tìte up^rqei $\mathbf{q} \in [0,1]^n$ tètoio ¸ste $\sum_{i=1}^{n} q_i \leq k$ kai $OPT \leq \sum_{i=1}^{n} R(q_i)$.

Apìdeixh. Εξ ορισμού του μηχανισμού που περιγράφει ο Myerson [29], υφίσταται ένας μηχανισμός M, με φιλαλήθεια σε κυρίαρχες στρατηγικές, ο οποίος πουλάει το πολύ k αντικείμενα σε n υποψήφιους αγοραστές και προσκομίζει εισόδημα ίσο με $R^m_{n,k}$. Ουσιαστικά ο $M = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$, αποτελείται από κατάλληλους κανόνες ανάθεσης $\mathbf{x} : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to [0,1]^n$ και πληρωμής $\mathbf{p} : \mathbb{R}^n_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, έτσι ώστε για κάθε διάνυσμα αποτιμήσεων $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, η $(\mathbf{x}(\mathbf{v}))_i$ αποτελεί την πιθανότητα ο M να αποδώσει το αντικείμενο στον αγοραστή i καλώντας τον να πληρώσει $(\mathbf{p}(\mathbf{v}))_i$. Για κάθε αγοραστή i, από τον μηχανισμό M δύναται να κατασκευαστεί μηχανισμός M_i ο οποίος πουλάει το πολύ ένα αντικείμενο σε κάθε μεμονωμένο αγοραστή. Δηλαδή, δεδομένης της αποτίμησης v_i, ο μηχανισμός επιλέγει το υπόλοιπο διάνυσμα των αποτιμήσεων $(v_j)_{j \in [n] \setminus i}$ από τις κατανομές F^{n-1} και κατανέμει το αντικείμενο με πιθανότητα $x_i(\mathbf{v})$ και εισόδημα $p_i(\mathbf{v})$.

Συμβολίζοντας με R_i το εκτιμώμενο εισόδημα που επιτυγχάνει ο M_i παρατηρούμε ότι $OPT = \sum_i^n R_i$. Καθότι, από την πλευρά του αγοραστή οι μηχανισμοί M και M_i είναι πανομοιότυποι, ο μηχανισμός M_i χαρακτηρίζεται και αυτός από φιλαλήθεια σε κυρίαρχες στρατηγικές. Το γεγονός αυτό υπονοεί ότι $R_i \leq R(q_i)$, διότι ο μηχανισμός M_i πουλάει στον αγοραστή i με πιθανότητα q_i και το εισόδημα που επιτυγχάνει ο μηχανισμός τιμολόγησης για την περίπτωση ενός και μόνο αγοραστή $R(q_i)$, είναι βέλτιστο. Επομένως:

$$OPT = \sum_{i=1}^{n} R_i \leq \sum_{i=1}^{n} R(q_i)$$

□

3.3 Trigwnikèc kampÔlec eisod matoc

Προκειμένου να επιλύσουν το πρόβλημα ex-ante relaxation vs anonymous pricing, οι Alaei και άλλοι [1], πρώτοι απέδειξαν ότι η δυσμενέστερη περίπτωση επιτυγχάνεται μέσω ενός υποσυνόλου των ομαλών κατανομών, τις τριγωνικές κατανομές. Η αξιοποίηση των τριγωνικών κατανομών βασίζεται στο γεγονός ότι για την περιγραφή τους απαιτούνται ακριβώς δύο παράμετροι, ήτοι η μέγιστη τιμή του εισοδήματος $\overline{\mathrm{R}} \in [0, \infty)$ και το εκατοστημόριο $\overline{\mathrm{q}} \in [0,1]$ στο οποίο επιτυγχάνεται το μέγιστο. Επομένως, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.2α′, η κατανομή ορίζεται από τρεις κορυφές στα σημεία (0,0), $(\overline{q}, \overline{R})$ και (1,0). Οι τιμές p για τις οποίες ισχύει ότι $p\overline{q} > \overline{R}$ δεν γίνονται αποδεκτές από τον αγοραστή με κατανομή $Tri(\overline{R}, \overline{q})$. Η αθροιστική συνάρτηση της τριγωνικής κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$F(p) = \begin{cases} 1 & \text{όταν } p\overline{q} \geq \overline{R} \\ \frac{p(1-\overline{q})}{p(1-\overline{q})+\overline{R}} & \text{όταν } 0 \leq p\overline{q} < \overline{R} \end{cases}$$

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που $\overline{q} > 0$, η μέγιστη τιμή στο πεδίο ορισμού της κατανομής είναι εξ ορισμού η $\overline{v} \triangleq \frac{\overline{R}}{\overline{q}}$, ενώ στο σημείο $\overline{v}$ υπάρχει ασυνέχεια στην CDF (σχήμα 3.2β′).

Η σχηματική ομοιότητα της τριγωνικής κατανομής με την κοίλη ομαλή, καθιστά την πρώτη χρήσιμη για την απλοποίηση του μαθηματικού προγράμματος.

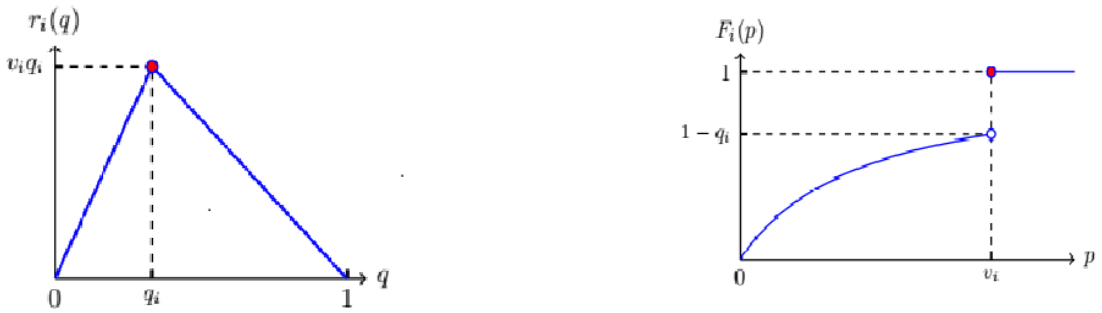
Orismìc 3.4. 'Ena n upoyhfðwn agorast¸n par^deigma (*instance*) $I = \{F_i\}_{i=1}^n$ kaleðtai omalì ìtan h katanom k^je upoyhfðou agorast eðnai omal .

Για οποιοδήποτε ομαλό παράδειγμα $F = \{F_i\}_{i=1}^n$, η εκ των προτέρων χαλάρωση βασίζεται μόνο στο σύνολο που περιέχει τις τιμές πιθανότητα-εισόδημα, $\{\hat{q}_i, F_i(\hat{q}_i)\}_{i=1}^n$.

L mma 3.2 (Alaei et al. [1]). H mègisth tim tou eisod matoc pou par^getai apì ton *ex-ante* mhqanismì gia opoiod pote omalì par^deigma I, eðnai ðsh me th mègisth tim tou eisod matoc gia to antðstoiqo par^deigma trigwnik¸n katanom¸n $I' = \{Tri(v_i, q_i)\}_{i=1}^n$.

Από όλα λοιπόν τα παραδείγματα με τα ίδια ζεύγη τιμών οι Alaei et al. [1] απέδειξαν ότι υπάρχει ένα συγκεκριμένο το οποίο αν και παράγει το ίδιο ex-ante εισόδημα, στοχαστικά υποσκελίζεται από τα υπόλοιπα και προσφέρει το μικρότερο εισόδημα για το μηχανισμό ανώνυμης τιμολόγησης (για οποιαδήποτε τιμή πώλησης $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$)[3]. Δηλαδή:

$$AP(p; \{Tri(v_i, q_i)\}_{i=1}^n) \leq AP(p; \{F_i\}_{i=1}^n), \quad \forall p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$



(að) Kampôlh Eisod matoc-ekatosthmìriou

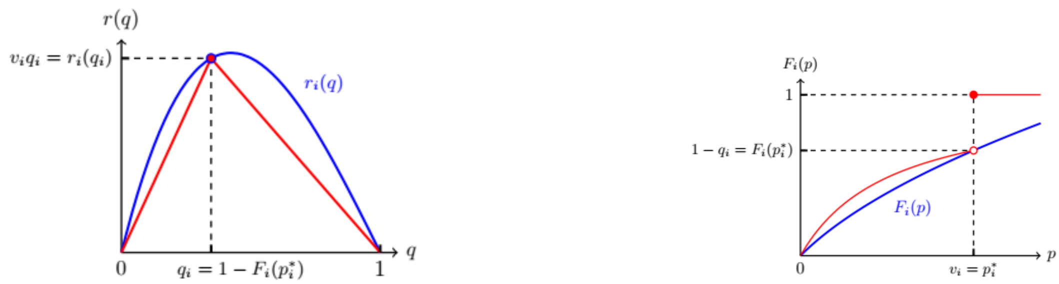
(bð) Kampôlh ajroistik c sun^rthshc katanom c

Σχήμα 3.2: Απεικόνιση Τριγωνικής κατανομής $TRI(v_i, q_i)$

3.4 Mh diairèsimo antikeðmeno

Στην απλούστερη μορφή του το πρόβλημα έχει ως ακολούθως. Ο πωλητής διαθέτει προς πώληση ένα αντικείμενο σε ένα σύνολο από γνωστούς πιθανούς αγοραστές. Ο πωλητής δεν έχει αποτίμηση για το αντικείμενο, ενώ οι αγοραστές έχουν ανεξάρτητες τυχαίες αποτιμήσεις, οι οποίες προέρχονται, όχι απαραίτητα από την ίδια κατανομή. Η κύρια ερώτηση είναι ο σχεδιασμός ενός μηχανισμού που θα μεγιστοποιεί το εισόδημα του πωλητή. Η απάντηση στο

[3] Gia ton mhqanismì diadoqik c timolìghshc (Sequential Posted Pricing), oi Jin et al. [20] èdeixan ìti to trigwnikì par^deigma uposkelðzei ta antðstoiqa omal^.



(aþ) KampÔlec Eisod matoc-ekatosthmìriou

(bþ) KampÔlec ajroistik c sun^rthshc katanom c

Σχήμα 3.3: Μετασχηματισμός ομαλού παραδείγματος $\{F_i\}_{i=1}^n$ σε τριγωνικό $\{TRI(v_i; q_i)\}_{i=1}^n$

πρόβλημα δόθηκε από τον Myerson [29] και σε ορισμένες περιπτώσεις, ο μηχανισμός είναι εξαιρετικά απλός. Ωστόσο σε αρκετές περιπτώσεις, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, η εφαρμογή του είναι εξαιρετικά δυσχερής και στη θέση του καταλήγει να χρησιμοποιείται ο μηχανισμός τιμολόγησης (posted pricing).

Orismìc 3.5. Timolìghsh *(Posted Pricing).* Gia mÐa sugkekrimènh tim p¸lhshc p, o mhqanismìc omoiìmorfhc timolìghshc (*uniform pricing*) apodÐdei to antikeÐmeno ston pr¸to agorast pou èqei mh arnhtikì ìfeloc isodÔnama $u_i = v_i - p \geq 0$. Se perÐptwsh isopalÐac, oi diaforèc epilÔontai me tuqaÐo trìpo.

Με βάση τον ανωτέρω ορισμό διαφαίνεται αφενός ότι για την περίπτωση ενός και μόνο αγοραστή, ο μηχανισμός αυτός είναι βέλτιστος και αφετέρου την σημασία για την αποτελεσματικότητα του μηχανισμού που προσδίδει ο καθορισμός της τιμής p. Η βέλτιστη λοιπόν τιμή πώλησης, καλείται να λάβει υπόψη της τις αποτιμήσεις v των αγοραστών οι οποίες επιλέγονται από μια κατανομή F, της οποίας η μορφή και τα όρια δύναται να εκτιμηθούν με στατιστικές μεθόδους. Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας (cumulative distribution function) μιας τυχαίας μεταβλητής (τ.μ) v που επιλέγεται από μια κατανομή F, καθορίζει την πιθανότητα να η τ.μ να είναι τουλάχιστον ίση με z και συμβολίζεται με $F(z) = Pr_{v \sim F}[v \leq z]$. Για να προσεγγίσουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα για τον ανωτέρω μηχανισμό, πρέπει να προσημειώσουμε στο μέτρο του δυνατού το αποτέλεσμα της δημοπρασίας δεύτερης τιμής. Σε μια τέτοια δημοπρασία με n ανεξάρτητους αγοραστές που επιλέγουν την αποτίμηση τους από την ίδια κατανομή, η εκ των προτέρων (ex ante), δηλαδή πριν επιλεχθούν οι αποτιμήσεις, πιθανότητα νίκης ενός συγκεκριμένου αγοραστή i είναι $\frac{1}{n}$. Για να μιμηθούμε το αποτέλεσμα της SPA για οποιοδήποτε υποψήφιο αγοραστή, αρκεί να θέσουμε την τιμή p με τέτοιο τρόπο ώστε η πιθανότητα η αποτίμηση του να είναι τουλάχιστον p να είναι ακριβώς $\frac{1}{n}$, ή διαφορετικά $p = F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$. Εν αντιθέσει με την SPA, στον μηχανισμό τιμολόγησης το αντικείμενο είτε δεν πωλείται ($\forall i \; v_i < p$), είτε δύναται να περιέλθει στην ιδιοκτησία αγοραστή που δεν είχε την μεγαλύτερη μεταξύ των αποτιμήσεων ($\exists n \geq 2 \; v_i \geq p$ και αυτός με την χαμηλότερη αποτίμηση ανταποκρίθηκε πρώτος).

Je¸rhma 3.5. 'Otan oi apotim seic epilègontai anex^rthta apì thn ðdia omal katanom F, o mhqanismìc timolìghshc $p = F^{-1}(1-\frac{1}{n})$ eðnai $\frac{e}{e-1} \approx 1.58$ prosèggish tou mhqanismoÔ pou dðnei to mègisto eisìdhma (*Myerson Auction* isodÔnama *SPA* me tim katwflðou).

Από την απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος, για την οποία ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο του Hartline [14], αξίζει κανείς να εστιάσει σε δύο παραμέτρους. Πρώτον, ότι για το i.i.d μοντέλο στο οποίο η κατανομή είναι ομαλή, ο βέλτιστος μηχανισμός ταυτίζεται με το μηχανισμό διαδοχικής τιμολόγησης. Επομένως το ίδιο αυστηρό φράγμα ισχύει και σε αυτή την περίπτωση. Δεύτερον, ότι η τιμή της προσέγγισης προκύπτει από την σύγκριση ενός μηχανισμού (UB) που δεν υπόκειται στον ex post περιορισμό απόδοσης ενός και μόνο αντικειμένου και της δημοπρασίας δεύτερης τιμής. Ο μηχανισμός (UB) αποτελεί άνω όριο για το κοινωνικό όφελος διότι και οι δύο μηχανισμοί εξυπηρετούν τον κάθε υποψήφιο αγοραστή με την ίδια ex ante πιθανότητα $\frac{1}{n}$, αλλά ο (UB) έχει έναν περιορισμό λιγότερο. Αναφορικά με το ελάχιστο εγγυημένο κοινωνικό όφελος της τιμολόγησης, αυτό φράσσεται από την τιμή $\frac{e-1}{e} \approx 0.63$ [4] που εκφράζει την πιθανότητα πώλησης.

Je¸rhma 3.6 (SPM vs. AP (I.I.D), Dütting και άλλοι [9]). Gia arijmì n agorast¸n me anex^rthtec apotim seic apì mia omal katanom F kaj¸c kai gia opoiod pote arijmì $k \le n$ proðìntwn h analogða tou *Ex-ante* mhqanismoÔ proc ton mhqanismì apl c timolìghshc eðnai:

$$\frac{R_{Ex-ante}}{AP} \le \frac{k}{\mathbb{E}_{X\sim Bin(n,\frac{k}{n})}[\min\{X,k\}]} \le \frac{k}{\mathbb{E}_{X\sim Poi(n,\frac{k}{n})}[\min\{X,k\}]} = \frac{1}{1-\frac{k^k}{e^k k!}}$$

Sumpèrasma 3.1. Gia thn perðptwsh ìpou $k = 1$, to ^nw ìrio thc apìklishc twn mhqanism¸n pou exet^zontai sto Je¸rhma 3.6, tautðzetai me to ìrio tou Jewr matoc 3.5. Epiprìsjeta, gia meg^lec timèc tou k, sÔmfwna me ton tÔpo tou *Stirling* $k! \approx \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$, h analogða tou eisod matoc pou apofèroun oi mhqanismoÐ gðnetai:

$$\frac{R_{Ex-ante}}{AP} \le \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}}.$$

Je¸rhma 3.7 (SPM vs AP Asymetrical, Jin et al. [20]). Se perib^llon pou oi apotim seic twn agorast¸n epilègontai apì diaforetikèc kai omalèc katanomèc, h mègisth analogða metaxÔ tou mhqanismoÔ diadoqik c timolìghshc kai tou mhqanismoÔ apl c timolìghshc eðnai ðsh me

$$C^* \stackrel{\text{def}}{=} 2 + \int_1^{\infty} (1 - e^{-Q(x)})\, dx \approx 2.6202,$$

ìpou $Q(p) \stackrel{\text{def}}{=} -\ln(1-p^{-2}) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} p^{-2k}$.

[4] H pijanìthta oi apotim seic ìlwn twn upoy fiwn agorast¸n na eðnai mikrìterec apì èna ìrio (p) eðnai ðsh me $(1-\frac{1}{n})^n$. Epeid $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ kai h sun^rthsh eðnai aÔxousa, h tim $\frac{1}{e}$ apoteleð ^nw fr^gma. Epomènwc h pijanìthta na up^rqei ènac agorast c me apotðmhsh toul^qiston p eðnai $\frac{e-1}{e}$.

Je¸rhma 3.8 (Ex ante relaxation vs AP, Alaei και άλλοι [1]). Se perib^llon p¸lhshc enìc antikeimènou gia to opoÐo oi agorastèc epilègoun thn apotÐmhsh touc anex^rthta apì diaforetikèc katanomèc, o qeÐristoc suntelest c prosèggishc thc an¸numhc timolìghshc proc ton bèltisto *ex ante* mhqanismì, upologÐsthke Ðsoc me $= V\,Q^{1}(1) + 1 \quad e$ $2{:}718$, ìpou $V(p)\ ,\ p \quad \ln \frac{p^2}{p^2\ 1}$ kai $Q(p)\ ,\ \int_p^{1} \frac{V'(v)}{v}dv$.

Apìdeixh. Ακολουθώντας το συμβολισμό των Alaei et al. [1], το εκτιμώμενο εισόδημα του μηχανισμού τιμολόγησης για την περίπτωση ενός παραδείγματος $I = fF_i g_i^n$, είναι ίσο με:

$$PRICEREV(I;p)\ ,\ p \prod_i F_i(p)\ ;$$

ενώ το εκτιμώμενο εισόδημα του βέλτιστου μηχανισμού ανώνυμης τιμολόγησης είναι ίσο με:

$$OPTPRICEREV(I)\ ,\ \max_{p2\mathbb{R}_+} PRICEREV(I;p):$$

Ο στόχος λοιπόν του Θεωρήματος, είναι ο υπολογισμός του λόγου του εισοδήματος που υπολογίζεται από την εκ των προτέρων χαλάρωση του περιορισμού υλοποίησης, προς το βέλτιστο εισόδημα του μηχανισμού τιμολόγησης, λαμβάνοντας υπόψη την χειρότερη περίπτωση.

$$,\ \sup_{I2REG} \frac{EXANTEREV(I)}{OPTPRICEREV(I)}; \qquad \text{(P1)}$$

όπου με REG συμβολίζεται το σύνολο όλων των ομαλών περιπτώσεων. Οριοθετώντας το βέλτιστο εισόδημα από το μηχανισμό ανώνυμης τιμολόγησης να είναι το πολύ ίσο με τη μονάδα, το πρόγραμμα (P1) γίνεται ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόγραμμα:

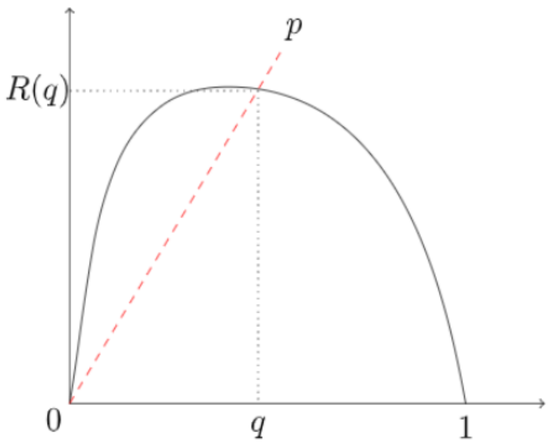
$$= \sup_{I2REG} EXANTEREV(I) \qquad \text{(P2)}$$

$$\text{υπό τον περιορισμό} \quad PRICEREV(I;p) \quad 1; \quad 8p > 1: \qquad \text{(P2.1)}$$

Για το τελευταίο πρόγραμμα, δεν υφίσταται περιορισμός $p \quad 1$, καθότι ο περιορισμός (P2.1) ικανοποιείται αυτόματα όταν $p \quad 1$. Για τη συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος και το μετασχηματισμό του στόχου του προγράμματος (P2), αξιοποιούνται οι τριγωνικές καμπύλες εισοδήματος καθότι, σύμφωνα με το ακόλουθο Λήμμα, διατηρούν το ίδιο ex ante εισόδημα ενώ παράλληλα μειώνουν το εισόδημα από κάθε μη απλό μηχανισμό τιμολόγησης.

L mma 3.3. H mègisth tim tou progr^mmatoc *(P2)* epitugq^netai mèsw peript¸sewn trigwnik¸n kampul¸n thc morf c $T = fTRI(R_i;q_i)g_{i=1}^n$ me $\sum_{i=1}^n q_i) \quad 1$.

Apìdeixh. Έστω $\hat{R}_i$ η καμπύλη εισοδήματος μιας τριγωνικής κατανομής $TRI(R_i;q_i)$. Παρατηρούμε ότι η αλλαγή της κατανομής δεν επηρεάζει το εισόδημα που υπολογίζεται με την εκ των προτέρων χαλάρωση διότι $\hat{R}_i(q_i) = R_i(q_i) = R_i$ για $i\ 2\ f1; \quad ;ng$ και η $\hat{R}_i$ είναι χαμηλότερα από την R_i καθώς η τελευταία είναι κοίλη σύμφωνα με το σχήμα 3.3α′. Επομένως αυτή η αντικατάσταση διατηρεί τη βέλτιστη τιμή του προγράμματος για το EXANTEREV, ή διαφορετικά $EXANTEREV(\hat{I}) = EXANTEREV(I)$. Αναφορικά με την επίπτωση της αλλαγής αυτής στο εισόδημα του μηχανισμού τιμολόγησης, σημειώνεται ότι αυτό δύναται μόνο να μειωθεί. Ας εξετάσουμε λοιπόν μια τιμή p και την ευθεία που ανταποκρίνεται στην τιμή αυτή, ήτοι η ευθεία με αφετηρία την αρχή των αξόνων και κλίση p, όπως απεικονίζεται και στο σχήμα 3.4. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η πιθανότητα η αποτίμηση του αγοραστή i να είναι μεγα-



Σχήμα 3.4: Αντιστοίχηση καμπύλης εισοδήματος και τιμής

λύτερη από p είναι ίση με q στο σημείο για το οποίο η ευθεία με κλίση p τέμνει την καμπύλη εισοδήματος $R_i(q)$. Δεδομένου ότι η καμπύλη $R_i(q)$ είναι κοίλη και ως εκ τούτου η τριγωνική καμπύλη αποτελεί παντού κάτω φράγμα αυτής, η αντικατάσταση της μιας από την άλλη, μπορεί μόνο να μειώσει την πιθανότητα η αποτίμηση του αγοραστή i να υπερβεί την τιμή p. Επομένως $PRICEREV(\hat{I}) \quad PRICEREV(I)$. □

Πέραν των ανωτέρω, οι Alaei et al. [1] παρατηρούν ότι το πρόβλημα περιορίζεται σε ένα διακριτό πρόβλημα βελτιστοποίησης μη πεπερασμένων μεταβλητών $\mathbf{R}$, $(R_1; \quad ; R_n)$ και $\mathbf{q}$, $(q_1; \quad ; q_n)$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3 και αντικαθιστώντας στον τύπο υπολογισμού του εισοδήματος, τον τύπο που υπολογίζει το εισόδημα για την περίπτωση των τριγωνικών καμπύλων, προκύπτει το ακόλουθο μαθηματικό πρόγραμμα:

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}; \mathbf{R}; \mathbf{q}} \sum_{i=1} R_i \qquad \text{(P3)}$$

$$\text{υπό τους περιορισμούς} \quad p \quad 1 \quad \prod_{i: pq_i \quad R_i} \frac{1}{1 + \frac{R_i}{p(1 \quad q_i)}} \Bigg) \quad 1; \quad \forall p > 1 \qquad \text{(P3.1)}$$

$$\sum_{i=1} q_i \quad 1$$

$$R_i \quad 0; q_i \quad 0; \quad \forall i \in \{1; \quad ; n\}.$$

Στο σημείο αυτό εντοπίζεται μια συγκεκριμένη χαλάρωση του προγράμματος (P3) κατά την οποία η χειρότερη περίπτωση έχει έναν αγοραστή με $q_1 = 0$ και $v_1 = \infty$, ενώ όλοι οι υπόλοιποι $i \in \{2, \dots, n\}$ έχουν $q_i > 0$ και πεπερασμένη αποτίμηση $[0; v_i = \frac{R_i}{q_i}]$. Σε αυτή την διευρυμένη μορφή του προγράμματος, ο περιορισμός (P3.1) μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει για όλα τα $p \in (v_2, \dots, v_n)$. Σαν αποτέλεσμα αυτού η χαλάρωση αυτή μπορεί να γραφεί ως ένα πρόγραμμα με μοναδικές μεταβλητές $\mathbf{v}_{-1} = (v_2, \dots, v_n)$. Ταξινομώντας τους αγοραστές με φθίνουσα σειρά των άνω ορίων αποτίμησης $v_i = \frac{R_i}{\hat{q}_i}$, ο περιορισμός (P3.1) μπορεί να αναδιαταχθεί για οποιοδήποτε $v_k \geq p \geq 1$ ως

$$\prod_{i=1} \left(1 + \frac{\hat{R}_i}{p \cdot (1 - \hat{q}_i)}\right) \leq \frac{p}{p-1}; \quad \forall k : v_k \geq p \geq 1.$$

Εξαιρώντας τον $(1 - q_i)$ όρο από τον παρονομαστή της LHS και λογαριθμίζοντας (ως προς το φυσικό λογάριθμο), προκύπτει η ακόλουθη μορφή του περιορισμού.

$$\sum_{i=1} \ln\left(1 + \frac{\hat{R}_i}{p}\right) \leq \ln\left(\frac{p}{p-1}\right); \quad \forall k : v_k \geq p \geq 1. \tag{3.1}$$

Lήmma 3.4. Gia k^je dunat an^jesh $(R; q)$ tou dieurumènou progr^mmatoc *(P3)* upì ton periorismì 3.1, up^rqei mia èterh dunat an^jesh $(R'; q')$ me thn Ðdia toul^qiston antikeimenik tim , toi $\sum_i R'_i \leq \sum_j R_j$ me $R'_1 = 1$ kai $q'_i > 0; \ \forall i \geq 2$.

Με την τιμή του $R_i = 1$, είναι δυνατή η μεταφορά του πρώτου όρου του αθροίσματος της εξίσωσης 3.1 από την LHS στην RHS. Επομένως προκύπτει:

$$\sum_{i=2} \ln\left(1 + \frac{R_i}{p}\right) \leq \ln\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right); \quad \forall k : v_k \geq p \geq 1. \tag{3.2}$$

Εφαρμόζοντας την ισχύ της $\frac{1}{\alpha}\ln(q + \alpha) \leq \ln(1 + \frac{q}{\alpha})$ για κάθε $\alpha \geq 1$ και $q \geq 0$ μας επιτρέπει να φράξουμε τον όρο $In\left(1 + \frac{\hat{R}_i}{p}\right)$ από τον όρο $\frac{1}{p}\ln\left(1 + R_i\right)$. Η διεύρυνση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να μεταφέρουμε $\frac{1}{p}$ όρους από την LHS στην RHS της ανισότητας 3.2 προσδιορίζοντας την ακόλουθη ανισότητα:

$$\sum_{i=2} \ln\left(1 + R_i\right) \leq p \ln\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right); \quad \forall k : v_k \geq p \geq 1. \tag{3.3}$$

Εφαρμόζοντας τις ανωτέρω χαλαρώσεις και ορίζοντας ως $V(p) = p \cdot \ln\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)$, λαμβάνουμε το παρακάτω πρόγραμμα:

$$^0 = \sup_{n2N;\mathbf{v};\mathbf{q}} 1 + \sum_{i=2} v_i q_i \qquad \text{(P4)}$$

$$\text{υπό τους περιορισμούς} \quad \sum_{i=2}^{k} \ln(1 + v_i q_i) \quad V(v_k) \quad 8k\ 2\ f2; \quad ;ng \qquad \text{(P4.1)}$$

$$\sum_{i=1} q_i \quad 1$$

$$v_{i+1} \quad v_i; \quad 8i\ 2\ f2; \quad ;n \quad 1g:$$

$$v_i \quad 1; q_i > 0 \quad 8i\ 2\ f2; \quad ;ng:$$

L mma 3.5. Gia k^je efikt an^jesh (v; q tou progr^mmatoc *(P4)*, up^rqei mia ^llh $(\mathbf{v}^0; \mathbf{q}^0)$ pou eÐnai kanonik *(canonical)* toi h isqÔc tou periorismoÔ *(P4.1)* eÐnai austhr gia ìla ta $k\ 2\ f2; \quad ;ng$ kai epitugq^nei thn Ðdia antikeimenik tim , $\sum_i^n v_i q_i = \sum_i^n v_i^0 q_i^0$.

Apìdeixh. Η RHS του περιορισμού (P4.1) ($V(v_k)$) είναι φθίνουσα ως προς $(v_k))$ και τείνει στο 0 καθώς η $(v_k)) \ ! \ 1$. Συνεπώς θα υπάρχει $(v_k^0)) \quad (v_k))$ τέτοιο ώστε:

$$\sum_{i=2}^{k} \ln(1 + v_i q_i) = V(v_k)$$

Παρατηρούμε όμως ότι εκ της παραπάνω συλλογιστικής, ισχύει πάντα $v_2^0 \quad v_n^0$ και προβαίνοντας στο μετασχηματισμό $q_k^0 = q_k \frac{v_k}{v_k^0}$, προκύπτει η ζητούμενη εφικτή ανάθεση $(\mathbf{v}_i^0; \mathbf{q}_i^0)$.

□

Από την εφαρμογή του προηγούμενου Λήμματος, μπορούμε να εντοπίσουμε μια κανονική ανάθεση αρκεί να περιοριστούμε μόνο στον προσδιορισμό των $\mathbf{v}\ _1 = (v_2; \quad ; v)_n)$ αφού οι αντίστοιχες πιθανότητες $\mathbf{q}\ _1 = (q_2; \quad ; q)_n)$, δίνονται από τον τύπο:

$$q_k = \frac{e^{V(v_k) \quad V(v_{k\ 1})} \quad 1}{v_k}$$

Ως εκ τούτου από το πρόγραμμα (P4) προκύπτει το επόμενο:

$$^0 = \sup_{n2N;\mathbf{v}} 1 + \sum_{i=2} v_i q_i \qquad \text{(P5)}$$

$$\text{υπό τους περιορισμούς} \quad q_k = \frac{e^{V(v_k) \quad V(v_{k\ 1})} \quad 1}{v_k} \quad 8k\ 2\ f2; \quad ;ng \qquad \text{(P5.1)}$$

$$\sum_{i=1} q_i \quad 1 \qquad \text{(P5.2)}$$

$$v_{i+1} \quad v_i; \quad 8i\ 2\ f2; \quad ;n \quad 1g:$$

$$v_i \quad 1; q_i > 0 \quad 8i\ 2\ f2; \quad ;ng:$$

Για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή $p' > p > 1$, ορίζεται μια αλληλουχία αγοραστών $[p; p')$ με τον καθορισμό m διακριτών και ακέραιων συνόλων που χωρίζουν το διάστημα $[p; p')$. Για κάθε οικογένεια αγοραστών, λαμβάνουμε υπόψη τις κατανομές $\{TRI(e^{V(u_j)} \; V(u_{j} \; 1)} \; 1; (\frac{e^{V(u_j)} \; V(u_j \; 1)} \; 1}{u_j})\}_{j=1}^{m}$ όπου $u_j = p' + \frac{j}{m \; 1}(p \quad p')$ για $j \in \{0; \quad ; m \quad 1\}$. Αρχικά παρατηρείται ότι οι αγοραστές πληρούν την συνθήκη (P5.1) όπως επίσης και την

$$\lim_{\to 0} = \frac{e^{V(v) \quad V(v+ \;)} \quad 1}{v} \frac{1}{} = \frac{V'(v)}{v}:$$

Άρα, στην αλληλουχία των αγοραστών $[p; p')$, κάθε μεμονωμένος αγοραστής v έχει τριγωνική κατανομή ίση με $TRI(\; V'(v); \quad \frac{V'(v)}{v} dv)$ που σηματοδοτεί ότι η συνολική συνεισφορά των $[p; p')$ στην αντικειμενική τιμή του προγράμματος (P.5) είναι:

$$\int_{p}^{p'} v \; (\quad \frac{V'(v)}{v}) dv = V(p) \quad V(p');$$

και η επιμέρους συνεισφορά του $[p; p')$ στον περιορισμό (P5.2), που οι Alaei et al. αναφέρουν ως περιορισμό χωρητικότητας, είναι:

$$\int_{p}^{p'} (\frac{V'(v)}{v}) dv = Q(p) \quad Q(p');$$

για τη συνάρτηση $Q(p)$ που ορίστηκε στο Θεώρημα 3.8. Τέλος λόγω της παραπάνω προέλευσης της αλληλουχίας των αγοραστών, το πρόγραμμα (P.5) για το σύνολο που θα ανταποκρίνεται στο διάστημα $[p; \; 1 \;)$ απλοποιείται στη μορφή του προγράμματος (P.6).

$$" = \max_{p \quad 1} 1 + V(p) \qquad \text{(P6)}$$

$$\text{υπό τον περιορισμό} \quad Q(p) \quad 1$$

L mma 3.6. H tim tou progr^mmatoc *(P6)* apotele? ^nw fr^gma gia thn tim tou progr^mmatoc *(P5)*.

□

Je¸rhma 3.9 (AR vs. AP, Yin και άλλοι [20]). H mègisth analog?a tou eisod matoc pou epitugq^nei h dhmopras?a me tim katwfl?ou en sugkr?sei me ton mhqanismì timolìghshc e?nai ?sh me $\frac{2}{6} \quad 1{:}6449$. To fr^gma autì isqÔei gia (a) mh summetrikèc genikèc, (b) mh summetrikèc omalèc (g) kai *I.I.D.* genikèc katanomèc.

Apìdeixh. Αρχικά ταξινομούνται οι αποτιμήσεις $v = \{v_i\}_{i=1}^{n}$ των αγοραστών κατά φθίνουσα σειρά έτσι ώστε $v_{(1)} \quad v_{(2)} \quad ; v_{(n)}$ και συμβολίζονται με $D_1; D_2$ οι αθροιστικές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας της μέγιστης (v_1) και της δεύτερης μεγαλύτερης αποτίμησης (v_2). Για την CDF D_1 ισχύει:

$$D_1(p) = \Pr\{v_{(1)} \quad p\} = \Pr\{\forall i \in [n] : v_i \quad p\} = \prod_{i=1} \Pr\{v_i \quad p\} = \prod_{i=1} F_i(p):$$

Για την CDF D_2, το σύνολο για το οποίο η δεύτερη μεγαλύτερη αποτίμηση είναι το πολύ ίση με $\Pr\{v_{(2)} \leq p\}$, μπορεί να διαιρεθεί στα ακόλουθα $(n+1)$ ξένα μεταξύ τους υποσύνολα: $A_i \stackrel{\text{def}}{=} \{(v_i > p) \wedge (\forall j \neq i : v_j \leq p)\}$ για κάθε $i \in [n]$ και $A_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\forall i \in [n] : v_i \leq p\}$. Επομένως:

$$D_2(p) = \Pr\{A_0\} + \sum_{i=1}^{n} \Pr\{A_i\} = D_1(p) + \sum_{i=1}^{n} (1 - F_i(p)) \prod_{j \neq i} F_j(p) = D_1(p) \cdot \Big[1 + \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{F_i(p)} - 1\Big)\Big].$$

Δεδομένης μιας οποιαδήποτε τιμής κατωφλίου $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, αναφορικά με το εισόδημα υπάρχουν τρία πιθανά αποτελέσματα: (a) μηδενικό όταν καμία αποτίμηση δεν είναι μεγαλύτερη από την τιμή κατωφλίου, σύνολο $\{v_{(1)} < p\}$, (b) ίσο με p όταν ακριβώς μια αποτίμηση είναι τουλάχιστον ίση με την τιμή κατωφλίου, σύνολο $\{v_{(1)} \geq p > v_{(2)}\}$ και (g) ίσο με $v_{(2)}$ όταν τουλάχιστον δύο αποτιμήσεις υπερβαίνουν την τιμή κατωφλίου, σύνολο $\{v_{(2)} \geq p\}$. Επομένως το εισόδημα από αυτόν τον μηχανισμό είναι ίσο με:

$$\begin{aligned}
AR(p) &= \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}}\Big[p \cdot \mathbb{1}\{v_{(1)} \geq p > v_{(2)}\} + v_{(2)} \cdot \mathbb{1}\{v_{(2)} \geq p\}\Big] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}}\Big[p \cdot \mathbb{1}\{v_{(1)} \geq p\} + \big(v_{(2)} - p\big) \cdot \mathbb{1}\{v_{(2)} \geq p\}\Big] \\
&= p \cdot (1 - D_1(p)) + \int_p^{\infty} (x - p)\, dD_2(x) \\
&= p \cdot (1 - D_1(p)) + \int_p^{\infty} (1 - D_2(x))\, dx. \qquad \text{(Ολοκλήρωση κατά μέλη)}
\end{aligned}$$

Οπότε δεδομένης της εξίσωσης που υπολογίζει το εισόδημα $AR(p)$, η διαφορά μεταξύ αυτού του μηχανισμού και της απλής τιμολόγησης, δίνεται από το ακόλουθο μαθηματικό πρόγραμμα:

$$\max_{\{F_i\}_{i=1}^{n},\, p \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \quad AP(p) = p \cdot \big(1 - D_1(p)\big) + \int_p^{\infty} (1 - D_2(x))\, dx$$

Υπό τον περιορισμό $\quad AP(x) = x \cdot \big(1 - D_1(x)\big) \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$

An´lush 'Anw Fr´gmatoc

Λόγω του περιορισμού του μαθηματικού προγράμματος, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $D_1(p) \leq \Phi_1(p) \stackrel{\text{def}}{=} \big(1 - \frac{1}{p}\big)_+$ για κάθε $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Πρακτικά, θεωρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή της κατανομής D_1 είναι στοχαστικά μικρότερη από την κατανομή Φ_1. Επιπρόσθετα,

$$\begin{aligned}
D_2(p) &= D_1(p) \cdot \Big[1 + \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{F_i(p)} - 1\Big)\Big] \\
&\geq D_1(p) \cdot \Big[1 + \sum_{i=1}^{n} \ln\Big(\frac{1}{F_i(p)}\Big)\Big] \\
&= D_1(p) \cdot \big(1 - \ln D_1(p)\big)
\end{aligned}$$

Η ανισότητα ισχύει καθώς $x \geq \ln(1+x), \ \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ενώ επίσης παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $d(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot (1 - \ln x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $x \in (0, 1]$ με $\lim_{x \to 0^+} d(x) = 0$. Άρα,

$D_2(p) \geq d\,\phi_1(p) = \phi_2(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, όπου

$$\phi_2(p) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{όταν } p \in [0,1] \\ \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right) & \text{όταν } p \in (1,\infty). \end{cases}$$

Συνεπώς για $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, το εισόδημα που αποφέρει η δημοπρασία με τιμή κατωφλίου p είναι:

$$AR(p) \geq p\,(1-\phi_1(p)) + \int_p^{\infty} (1-\phi_2(x))dx \tag{3.4}$$

Αναλύοντας την RHS της ανισότητας 3.4 παρατηρούμε ότι:

Όταν $p \leq 1$: $p + \int_p^1 1\,dx + \int_1^{\infty}(1-\phi_2(x))dx = 1 + \int_1^{\infty}(1-\phi_2(x))dx$

Όταν $p > 1$: $1 + \int_p^{\infty}(1-\phi_2(x))dx < 1 + \int_1^{\infty}(1-\phi_2(x))dx$.

Συνδυάζοντας τις ανωτέρω δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σε:

$$\begin{aligned} AR = \max_{p \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \{AR(p)\} &\geq 1 + \int_1^{\infty}(1-\phi_2(x))dx \\ &= 1 + \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x} - \left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,x^k}\right)dx \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{k+1}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \text{(Πρόβλημα Basel)} \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει καθότι $\ln(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$.

An^lush K^tw Fr^gmatoc

Αρχικά, μέσω ενός παραδείγματος, θα αναλύσουμε το κάτω φράγμα για την περίπτωση που οι αγοραστές επιλέγουν την αποτίμηση τους από την ίδια γενική (ομαλή ή μη ομαλή) κατανομή.

Par^deigma 3.4. 'Estw n upoy fioi agorastèc pou epilègoun thn apotÐmhsh touc apì mia koin katanom $F_n(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{\phi_1(p)}$, dhlad :

$$F_n(p) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{ìtan } p \in [0,1] \\ \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{n}} & \text{ìtan } p \in (1,\infty). \end{cases}$$

ParathroÔme ìti $AP(p) = p\left[1-(F_n(p))^n\right] = p\,(1-\phi_1(p))$ gia k^je $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegonìc pou den parabi^zei ton periorismì tou majhmatikoÔ progr^mmatoc kai kajist^ thn perÐptwsh $\{F_n\}^n$ ulopoi simh. Gia thn CDF thc deÔterhc megalÔterhc tim c D_2 isqÔei:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} D_2(p) &= \lim_{n\to\infty} F_n(p)^n\left[1 + n\left(\frac{1}{F_n(p)}-1\right)\right] \\ &= \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1 + \lim_{n\to\infty}\frac{exp[-\ln(1-\frac{1}{p})n^{-1}]-1}{n^{-1}}\right) = \phi_2(p). \end{aligned}$$

Jètontac wc tim katwflÐou th mon^da, prokÔptei mia sugklÐnousa seir^ pou upologÐzei to $AR(p)$ wc:

$$\lim_{n ! 1} AR(1; fF_n g^n) = 1 + \int_1^{1} 1 \quad {}_2(x)\ dx = \frac{2}{6}:$$

Tèloc parathroÔme ìti h perÐptwsh $fF_n g^n$ eÐnai h qeirìterh perÐptwsh tou majhmatikoÔ progr^mmatoc diìti $AP(p; fF_n g^n) = 1$ gia k^je $p\ 2\ (1; 1)$, en¸ ston akìloujo pÐnaka paratÐjentai endeiktik^ ta k^tw fr^gmata gia di^forec timèc tou n[5].

n	2	3	4		1
Αναλογία	$2\ln 2 \quad 1{:}3863$	$3\ln 3 \quad \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad 1{:}4820$	$9\ln 2 \quad \frac{3\pi}{2} \quad 1{:}5259$		$\frac{\pi^2}{6}$

Πίνακας 3.1: Ενδεικτικές τιμές κάτω φράγματος AR vs. AP για μικρό αριθμό αγοραστών

Για την περίπτωση μη συμμετρικών κατανομών, οι Jin et al [20] κάνουν χρήση του ακόλουθου παραδείγματος:

Par^deigma 3.5. Gia opoiad pote stajer^ $2\ (0; 1)$ kai akèraio, megalÔtero Ðso thc mon^dac, arijmì agorast¸n, èstw $\stackrel{\text{def}}{=} +$, $\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{1}{}$ kai $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{}{n}$. Basismènoi sthn sun^rthsh $V(p) \stackrel{\text{def}}{=} p \ln(\frac{p}{p\ 1})$, jewroÔme mia trigwnik perÐptwsh[6] $fTRI(v_i; q_i)g_{i=1}^{2n}$ gia thn opoÐa:

$$v_i \stackrel{\text{def}}{=} \quad ; \qquad q_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{n} \quad V(v_i)}{v_i + \frac{1}{n} \quad V(v_i)}; \qquad 8i\ 2\ [n]$$

$$v_i \stackrel{\text{def}}{=} \quad (i \quad n) \quad ; \qquad q_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V(v_i) \quad V(v_{i\ 1})}{v_i + V(v_i) \quad V(v_{i\ 1})}; \qquad 8i\ 2\ [n+1; 2n]:$$

KinoÔmenoi se antistoiqÐa me prin, parathroÔme ìti h sun^rthsh den parabi^zei ton periorismì tou majhmatikoÔ progr^mmatoc. Dhlad $AP(p; fTRI(v_i; q_i)g_{i=1}^{2n} = p\ (1 \quad \prod_{i=1}^{2n} F_i(p))$ 1, isodÔnama $\sum_{i=1}^{2n} \ln F_i(p) \quad \ln(1 \quad \frac{1}{p})$. Pr^gmati:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} \ln F_i(p) &= \sum_{i: v_i \ p} \ln(1 + \frac{v_i q_i}{1 \quad q_i} \quad \frac{1}{p}) \\ & \sum_{i: v_i \ p} \frac{v_i q_i}{1 \quad q_i} \quad \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{p} \quad V \quad \min_{i 2 [2n]} fv_i j v_i \quad pg \\ & \frac{1}{p} V(p) = \ln(1 \quad \frac{1}{p}): \end{aligned}$$

[5] P.q gia $n = 2$ to ${}_2(p) = (1 \quad \frac{1}{p})\left(\frac{exp[\quad \ln(1 \quad \frac{1}{p})\ 0{:}5] \quad 1}{0{:}5}\right)$ kai $\lim_{n ! 2} AR(1; fF_2 g^2) = 1 + \int_1^{1} (1 \quad {}_2(x))dx = 2\ln 2$.

[6] Sqetik^ me tic trigwnikèc katanomèc gia perissìterec leptomèreiec o anagn¸sthc dÔnatai na anatrèxei sto Kef^laio 3.

Oi anisìthtec isqÔoun lìgw $\ln(1+x)$ x kai monotonÐac (fjÐnousa) thc $V(p)$. H isìthta prokÔptei apì touc anwtèrw orismoÔc tou q_i. Tèloc to je¸rhma 3.9 apodeiknÔetai mèsw tou akìloujou L mmatoc:

L mma 3.7 (Yin και άλλοι, [20]). Lamb^nontac upìyh thn trigwnik perÐptwsh tou paradeÐgmatoc prokÔptei ìti AR $AR(\ )$ $\frac{2}{6}$ 3 , gia k^je perÐptwsh eparkoÔc meg^lou arijmoÔ agorast¸n n.

ApÐdeixh. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\,!\,1} D_1(p) = \ _1(p)$ για κάθε $p\ 2\ [\ ;\ ]$. Παρατηρούμε ότι (a) όταν $n\ !\ 1$, το $q_i\ !\ 0^+$ για κάθε $i\ 2\ [2n]$ και (b) $= v_{2n} < v_{2n\ 1} <\ \ <$ $v_{n+1} < v_n =$ είναι μια ομοιόμορφη διαίρεση του διαστήματος $[\ ;\ ]$ με βήμα $= \frac{}{n}$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\,!\,1} D_1(p) &= exp\ \mathrm{h}\ \lim_{n\,!\,1} \mathrm{X}_{i:v_i\ p} \ln(1+\frac{v_i q_i}{1\ \ q_i}\ \ \frac{1}{p})\ \mathrm{i} \\
&= exp\ \lim_{n\,!\,1} \mathrm{X}_{i:v_i\ p} \frac{v_i q_i}{1\ \ q_i}\ \frac{1}{p} && (\text{Ισχυρισμός (a)}) \\
&= exp\ \ \frac{1}{p}\ \ V(\min_{i2[2n]} f v_i j v_i\ \ \ p g) \\
&= exp\ \ \frac{1}{p}\ \ V(p)\ \ = 1\ \ \frac{1}{p}: && (\text{Ισχυρισμός (b)})
\end{aligned}
$$

Όμοια μπορεί να αποδειχθεί ότι $\lim_{n\,!\,1} D_2(p) = \ _2(p)$ για κάθε $p\ 2\ [\ ;\ ]$. Θέτοντας τιμή κατωφλίου ίση με $= 1 +$, το εισόδημα που αποφέρει η δημοπρασία είναι τουλάχιστον:

$$
\begin{aligned}
AR(\ ) &\ \ (1\ \ \ _1(\ ))+\ \mathrm{Z}\ (1\ \ \ _2(x))dx \\
&= \frac{2}{6}\ \mathrm{Z}_1\ +\ \mathrm{Z}_1\ (1\ \ \ _2(x))dx\ \ :
\end{aligned}
$$

Παρατηρώντας από τον ορισμό του $_2(p)$, προκύπτει $_2(p) = (1\ \ \frac{1}{p})\ \ 1\ \ \ln(1\ \ \frac{1}{p})\ \ \ 1\ \ \frac{1}{p^2}$ διότι $\ln(1\ \ \frac{1}{p})\ \ \ \frac{1}{p}$, ενώ ο ενδιάμεσος όρος της ανισότητας που υπολογίζει το εισόδημα περιορίζεται από:

$$
\mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_1 (1\ \ \ _2(x))dx\ \ \ \mathrm{Z}_1 + \mathrm{Z}_1 \frac{dx}{x^2} = 1\ \ \ \frac{1}{} + \frac{1}{} = \frac{2}{1+}\ \ \ 2:
$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται αντικαθιστώντας την τελευταία ανισότητα στον υπολογισμό του $AR(\ )$. □

□

Στον ακόλουθο πίνακα συνοψίζεται η τρέχουσα πρόοδος στο αντικείμενο ενδιαφέροντος που μελετάμε. Για κάθε περίπτωση συγκρινόμενων μηχανισμών, με τη μορφή διαστήματος παρουσιάζεται το κάτω και άνω όριο αντίστοιχα, ενώ στις περιπτώσεις εμφάνισης ενός και μόνο αριθμού, υποδηλώνεται η αυστηρότητα του εκάστοτε ορίου.

Perib^llon	SÔgkrish	AnalogÐa	Anafor^
I.I.D Regular	OPT vs. AP	$\frac{e}{e\ 1}$	Chawla et al [5]
	SPM vs. AP		Dütting et al. [9]
Asym. Regular	OPT vs. AR	$[2{:}16; 2{:}62]$	Jin et al. [20], Alaei et al [1]
	OPT vs. AP	$2{:}62$	Alaei et al. [1], Jin et al. [19]
	SPM vs. AP	$2{:}62$	Jin et al. [20]
	OPM vs. AP	$[\frac{e}{e\ 1}; 2{:}62]$	Jin et al. [20], Dütting et al. [9]
	AR vs. AP	$\frac{^2}{6}$	Jin et al. [20]

Πίνακας 3.2: Συγκεντρωτικός πίνακας με τις αποκλίσεις των μηχανισμών σε συμμετρικό και μη συμμετρικό περιβάλλον.

3.5 Diairèsimo antikeÐmeno

Όπως έγινε αντιληπτό από την προηγούμενη ενότητα, η μελέτη-βιβλιογραφία των μηχανισμών πώλησης του μη διαιρέσιμου αντικειμένου είναι εκτενής. Το αντίθετο όμως φαίνεται να ισχύει για την περίπτωση του διαιρέσιμου αντικειμένου, του οποίου οι μηχανισμοί πώλησης δεν έχουν, εισέτι, στοχοποιηθεί από την επιστημονική-ερευνητική κοινότητα του κλάδου. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων ομοιογενών και πλήρως διαιρέσιμων αντικειμένων, αποτελούν εφαρμογές που πωλούνται στο πλαίσιο υπηρεσιών cloud καθώς επίσης και υπολογιστική υποδομή όπως CPU's και μνήμη. Ανατρέχοντας λοιπόν σε σχετικές έρευνες, ένα πρόβλημα που ανάγεται στη μεγιστοποίηση του εισοδήματος του πωλητή, μελετά την σχέση μεταξύ της διάθεσης ολόκληρου του αντικειμένου έναντι της πώλησης του σε ξεχωριστά τμήματα [25]. Στην εν λόγω δημοσίευση ο μηχανισμός πώλησης που εξετάζεται από τους Levy et al. είναι η δημοπρασία και το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουν συναρτάται από την μορφή των συναρτήσεων αποτίμησης των υποψηφίων αγοραστών. Συγκεκριμένα όταν όλες οι συναρτήσεις είναι κυρτές, τότε η πώληση του προϊόντος σε τμήματα αποφέρει υψηλότερο εισόδημα από την πώληση του ως ένα αντικείμενο. Απεναντίας όταν οι συναρτήσεις είναι κοίλες και καθώς αυξάνεται ο αριθμός των αγοραστών, η πώληση σε κομμάτια φαντάζει περισσότερο ελκυστική.

Στην παρούσα Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, ο μηχανισμός τιμολόγησης που εξετάζεται υποθέτει αριθμό n από υποψήφιους αγοραστές, των οποίων η συνάρτηση αποτίμησης[7] v_i επιλέγεται τυχαία και ανεξάρτητα από μια γνωστή συνάρτηση κατανομής $\mathbf{F_i}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής, παραγωγίσιμη (di erentiable), μη-αρνητική, κοίλη (concave) και αύξουσα ως προς το τμήμα/αναλογία (fraction) του διαιρέσιμου αντικειμένου. Ο μηχανισμός υλοποιείται σε περιβάλλον ελλιπούς πληροφόρησης (incomplete information setting) και στόχος του κάθε υποψήφιου αγοραστή i είναι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης ωφέλειας του, για κάθε πιθανή συνάρτηση αποτίμησης v_i που μπορεί να επιλέξει από την κατανομή F_i. Με $\mathbf{F}$ συμβολίζεται η ένωση των κατανομών $F_1 \quad F_2 \quad ::: \quad F_n$, ενώ με $\mathbf{v}$ το τυχαίο διάνυσμα των συναρτήσεων αποτίμησης που επιλέγουν οι υποψήφιοι αγοραστές, δηλαδή $hv_1; v_2; :::; v_n i$. Η σειρά με την οποία αποκαλύπτονται οι αποτιμήσεις των αγοραστών επιλέγεται αυθαίρετα,

[7] En antijèsei me thn perÐptwsh tou mh diairèsimou antikeimènou pou epilègetai apotÐmhsh.

δημιουργώντας έτσι μία καθορισμένη αλληλουχία (permutation) των αγοραστών για την οποία ο πωλητής αν και γνωρίζει εκ των προτέρων τις κατανομές, δεν γνωρίζει ποιός θα είναι ο επόμενος υποψήφιος πελάτης[8]. Αναφορικά με τον κανόνα πληρωμής του μηχανισμού, αυτός είναι γραμμικός, δηλαδή ο αγοραστής που σύμφωνα με την έξοδο του μηχανισμού κατανέμεται ποσοστό $y_i \in [0;1]$, καλείται να καταβάλει αντίτιμο ίσο με $p \cdot y_i$ (pay-as-you-buy).

Ο μηχανισμός που περιγράφουμε είναι απλός και πρακτικός. Διαθέτει αρκετές επιθυμητές ιδιότητες όπως :

Anwnum©a. Σε όλους τους υποψήφιους αγοραστές, ανεξάρτητα από την κατανομή που επιλέγουν την αποτίμηση τους, προσφέρεται η ίδια τιμή ανά τμήμα του προϊόντος.

Statikìthta. Η επιλογή της χρέωσης ανά τμήμα προϊόντος δεν μεταβάλλεται καθώς εξελίσσεται ο μηχανισμός.

Anexarthს©a. Το εισόδημα που επιτυγχάνεται είναι ανεξάρτητο της σειράς με την οποία έρχονται οι υποψήφιοι αγοραστές.

Επιπλέον, επειδή σε κάθε υποψήφιο αγοραστή γίνεται μια προσφορά την οποία μπορεί να αποδεχθεί ή να απορρίψει, ο μηχανισμός έχει τα χαρακτηριστικά της φιλαλήθειας σε κυρίαρχες στρατηγικές και της εθελοντικής συμμετοχής. Συγκεκριμένα υπάρχει το πολύ μία στρατηγική απόφαση που μπορεί να πάρει (αγορά ή μη) ο αγοραστής και το όφελος του δεν μπορεί να επηρεαστεί από οποιαδήποτε προηγούμενη ή επόμενη έξοδο του μηχανισμού. Τέλος ο μηχανισμός ενισχύει την αποφυγή της κακόβουλης συνεννόησης μεταξύ των αγοραστών καθώς κανείς δεν μπορεί να τροποποιήσει με τις ενέργειες του, την τιμή ανά τμήμα αντικειμένου.

[8] 'Opwc ja doÔme sta epìmena Kef^laia, h seir^ emf^nishc e©nai ousi¸dhc gia thn melèth tou koinwnikoÔ ofèlouc, en¸ ant©jeta epousi¸dhc gia thn megistopo©hsh tou eisod matoc.

Kef^laio 4

Apotelèsmata wc proc to koinwnikì ìfeloc

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανάλυση του λόγου προσέγγισης ως προς τον μηχανισμό που μεγιστοποιεί το κοινωνικό όφελος.

4.1 OrismoÐ-SumbolismoÐ

Σε συνέχεια των εισαγωγικών εννοιών του διαιρέσιμου αντικειμένου, ορίζονται τα ακόλουθα μεγέθη:

$y_i(\mathrm{v}; p;\ )$ ως το ποσοστό του αντικειμένου που ο υποψήφιος αγοραστής i λαμβάνει έναντι τιμής ανά μονάδα p, όταν η σειρά αποκάλυψης της αποτίμησης του γίνεται σύμφωνα με την αλληλουχία .

$y_i\ (v_i; p)$ ως το ποσοστό του αντικειμένου που ο υποψήφιος αγοραστής i λαμβάνει έναντι τιμής ανά μονάδα p, όταν κατέχει την πρώτη θέση στην αλληλουχία ή ισοδύναμα εάν είναι ο μοναδικός αγοραστής.

$u_i(\mathrm{v}; p;\ )$[1] ως το όφελος του υποψήφιου αγοραστή i, το οποίο στην περίπτωση του διαιρέσιμου αντικειμένου, ορίζεται ως η διαφορά αποτίμησης και πληρωμής για το ποσοστό που κατανέμεται, ή $u_i(\mathrm{v}; p;\ ) = v_i(y_i(\mathrm{v}; p;\ ))\quad p\quad y_i(\mathrm{v}; p;\ )$.

$SW(\mathrm{v}; p;\ ) = \sum_{i \in [n]} v_i(y_i(\mathrm{v}; p;\ ))$ ως το κοινωνικό όφελος που παράγει ο μηχανισμός.

$SW\ (\mathrm{v}) = \sum_{i \in [n]} v_i(x_i(\mathrm{v})$ ως το κοινωνικό όφελος που παράγει ο βέλτιστος μηχανισμός που αναθέτει στον αγοραστή i, ποσοστό αντικειμένου ίσο με $(x_i(\mathrm{v}))$.

[1] Agor^zontac tm ma z se tim mon^doc p, to ìfeloc tou agorast i eÐnai Ðso me $v_i(z)\quad p\quad z$. Epeid h sun^rthsh apotÐmhshc eÐnai koÐlh, h par^gwgoc tou ofèlouc, $v_i^0(z)\quad p$, eÐnai mÐa monìtonh fjÐnousa sun^rthsh. Epomènwc e^n thn stigm pou o agorast c i epenergeÐ sto mhqanismì, tm ma tou antikeimènou eÐnai diajèsimo, tìte eÐte ja p^rei to komm^ti pou mhdenÐzei thn par^gwgo tou ofèlouc ($v_i^0(z) = p$), eÐte den ja p^rei tÐpota ($v_i^0(0) < p$), eÐte tèloc ja p^rei ìlo to upìloipo antikeÐmeno ($v_i^0(\ ) > p$).

Shmeÿwsh 1. Sunoyÿzontac touc orismoÔc gia to posostì tou antikeimènou pou lamb^nei o k^je agorast c kai sumbolÿzontac me $j \quad i$ to gegonìc ìti b^sei thc allhlouqÿac , o agorast c i ekdhl¸nei thn apotÿmhsh tou prin ton agorast j, isqÔei:

$$y_i(\mathbf{v};p;\ ) = \begin{cases} y_i(v_i;p); & \text{e\^{}n } \sum_{j\ \ i} y_i(v_i;p) \quad 1 \\ 1 \quad \sum_{j\ \ i} y_i(v_i;p); & \text{e\^{}n } \sum_{j\ \ i} y_i(v_i;p) \quad 1 < \sum_{j\ \ i} y_i(v_i;p) \\ 0; & \text{e\^{}n } \sum_{j\ \ i} y_i(v_i;p) > 1 \end{cases}$$

Shmeÿwsh 2. Gia opoiad pote di^nusma apotim sewn $\mathbf{v}$, tim an^ mon^da p¸lhshc p kai allhlouqÿa emf^nishc agorast¸n , isqÔei:

$$\sum_{i2[n]} y_i(\mathbf{v};p;\ ) = \min f1; \sum_{i2[n]} y_i(\mathbf{v};p;\ ))g \tag{4.1}$$

4.2 Upologismìc fragm^twn koinwnikoÔ ofèlouc

Στην ενότητα αυτή θα διατυπωθούν τα δύο βασικά θεωρήματα με τα οποία ο μηχανισμός γραμμικής τιμολόγησης προσεγγίζει κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό το βέλτιστο. Στην πρώτη περίπτωση δεν λαμβάνεται υπόψη η σειρά εμφάνισης των αγοραστών (worst case) ενώ στη δεύτερη που οι αγοραστές ανακατανέμονται τυχαία (random ordering).

4.2.1 Υπολογισμός φράγματος για οποιαδήποτε σειρά των αγοραστών

L mma 4.8. Gia k^je agorast i, tim an^ mon^da p, allhlouqÿa emf^nishc kai > 0, isqÔei:

$$E_{\mathbf{v}\ \ F}[u_i(\mathbf{v};p;\ )]$$
$$E_{\mathbf{v}\ \ F}[v_i(x_i(\mathbf{v}))] \quad pE_{\mathbf{v}\ \ F}[x_i(\mathbf{v})] \quad 1 \quad e^{\frac{1}{}} \int_0^{1} e^{\frac{1}{}} \ Pr_{\mathbf{v}\ \ F}\left(\sum_{j\ \ i} y_j(v_j;p) \quad t \right) dt :$$

Apìdeixh. Στην ανωτέρω εξίσωση παρατηρούμε ότι η δεύτερη παρένθεση του Λήμματος 4.8 είναι μη αρνητικός αριθμός. Εάν και η πρώτη παρένθεση είναι αρνητική, τότε αυτό συνεπάγεται την ισχύ του Λήμματος. Επομένως στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι $E_{\mathbf{v}\ \ F}[v_i(x_i\mathbf{v})]$ $pE_{\mathbf{v}\ \ F}[x_i(\mathbf{v})]$.

Έχοντας ορίσει ως $\mathbf{v}$ το διάνυσμα των αποτιμήσεων όλων των αγοραστών, θέτουμε ως $t\ 2\ [0;1]$ την ποσότητα που εκφράζει το τμήμα του αντικειμένου που έχει αποδοθεί σε αγορές που υλοποιήθηκαν πριν την άφιξη του αγοραστή i. Η ισοδύναμα όταν $\sum_{j<i} y_j(v_j;p) \quad t$, τμήμα ίσο με $1 \quad t$ είναι ακόμη διαθέσιμο στον αγοραστή i. Αφού ο αγοραστής i προτιμά κομμάτι μεγέθους $y_i(\mathbf{v};p)$ από τμήμα $(1 \quad t)E_{\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}}\ \ F_{\ \mathbf{i}}}[x_i(v_i;\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}})]$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{v};p;\ ) \quad & v_i \ (1 \quad t)E_{\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}}\ \ F_{\ \mathbf{i}}}[x_i(v_i;\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}})] \quad (1 \quad t) \ pE_{\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}}\ \ F_{\ \mathbf{i}}}[x_i(v_i;\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}})] \\ & (1 \quad t)E_{\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}}\ \ F_{\ \mathbf{i}}}[v_i \ \ x_i(v_i;\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}}) \ ] \quad (1 \quad t) \ pE_{\mathbf{v}^0_{\ \mathbf{i}}\ \ F_{\ \mathbf{i}}}(x_i(v_i;\mathbf{v}^0_{\mathbf{i}}))] : \end{aligned} \tag{4.2}$$

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει καθώς η συνάρτηση των αποτιμήσεων είναι κοίλη. Παρατηρώντας στη συνέχεια ότι:
$\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[u_i(\mathbf{v};p;\ )]\quad \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\Big[u_i(\mathbf{v};p;\ )1\{\sum_{j\ i} y_j(\mathbf{v};p)\}\ t\Big]$ για κάθε $t\ 2\ [0;1]$ καθώς επίσης και ότι η τιμή του έχει επιλεχθεί διότι ικανοποιεί την εξίσωση: $\int_0^1 e^{\frac{1}{}}\ \frac{dt}{1\ t}=1$, η ανισότητα 4.2 δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[u_i(\mathbf{v};p;\ )]\\
&\quad \int_0^1 e^{\frac{1}{}}\ \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\Big[u_i(\mathbf{v};p;\ )1\{\sum_{j\ i} y_j(v_j;p)\ \ tg\Big]\frac{dt}{1\ t}\\
&\quad \int_0^1 e^{\frac{1}{}}\ \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\Big[\mathrm{E}_{\mathbf{v}'_i\ \mathbf{F}_i}[v_i\ x_i(v_i;\mathbf{v}'_i)\ ]\ \ p\,\mathrm{E}_{\mathbf{v}'_i\ \mathbf{F}_i}(x_i(v_i;\mathbf{v}'_i)1\{\sum_{j\ i} y_j(v_j;p)\ \ tg\ dt\Big]\\
&= \int_0^1 e^{\frac{1}{}}\ \mathrm{E}_{v_i\ \mathbf{F}_i}\Big[\mathrm{E}_{\mathbf{v}'_i\ \mathbf{F}_i}[v_i\ x_i(v_i;\mathbf{v}'_i)\ ]\ \ p\,\mathrm{E}_{\mathbf{v}'_i\ \mathbf{F}_i}[(x_i(v_i;\mathbf{v}'_i)]\Big]\\
&\quad Pr_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\Big[\sum_{j\ i} y_j(v_j;p)\ \ t\Big]\ dt\\
&\quad \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[v_i(x_i(\mathbf{v}))]\ \ p\,\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[x_i(\mathbf{v})]\quad 1\ \ e^{\frac{1}{}}\ \int_0^1 e^{\frac{1}{}}\ Pr_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\Big[\sum_{j\ i} y_j(v_j;p)\ \ t\Big]\ dt\ :
\end{aligned}
$$

Στην αλληλουχία των ανωτέρω ανισώσεων-ισότητας, η ισότητα ισχύει διότι η ποσότητα $\mathrm{E}_{\mathbf{v}'_i\ \mathbf{F}_i}\big[v_i(x_i(v_i;\mathbf{v}'_i))\ \ p\,\mathrm{E}_{\mathbf{v}'_i\ \mathbf{F}_i}[x_i(v_i;\mathbf{v}'_i)]$ είναι ανεξάρτητη της συνθήκης $\sum_{j\ i} y_j(v_j;p)\ \ t$, ενώ η τελευταία ανισότητα επειδή $\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[v_i(x_i(\mathbf{v}))]\ \ p\,\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[x_i(\mathbf{v})]$: □

Je¸rhma 4.10 (Caragiannis & Kerentzis, (2020), [3]). 'Estw h jetik rÐza thc exÐswshc $e^{\frac{1}{}} = 2 + \frac{1}{}$, diaforetik^ $0{:}872453$ kai $_1 = e^{\frac{1}{}}$ $0{:}317844$. 'Estw epÐshc p kat^llhlo ¸ste o mhqanismìc grammik c timolìghshc pou den lamb^nei upìyh thn seir^ pou emfanÐzontai oi upoy fioi agorastèc, na ikanopoieÐ th sunj kh $\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[\sum_{i2[n]} y_i(\mathbf{v};p)] = \ _1$: O mhqanismìc autìc par^gei mia $_1$-prosèggish tou bèltistou koinwnikoÔ ofèlouc.

$$
\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[u_i(\mathbf{v};p;\ )]\quad _1\ \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[v_i(x_i(\mathbf{v})]\quad _1\ p\,\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[(x_i(\mathbf{v})] \tag{4.3}
$$

Apìdeixh. Από τον ορισμό του κοινωνικού οφέλους ισχύει:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[SW(\mathbf{v};p;\ )] &= \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\Big[\sum_{i2[n]} v_i(y_i(\mathbf{v};p;\ ))\Big]\\
&= \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\Big[\sum_{i2[n]}(v_i(y_i(\mathbf{v};p;\ ))\ \ p\ \ y_i(\mathbf{v};p;\ ))\Big] + p\ \ \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\Big[\sum_{i2[n]} y_i(\mathbf{v};p;\ )\Big]\\
&\qquad\qquad \text{(προσθαφαιρώντας τον όρο } p\ \textstyle\sum_{i2[n]} y_i(\mathbf{v};p;\ ))\\
&= \sum_{i2[n]} \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}\,u_i(\mathbf{v};p)] + \ _1\ p\\
&\quad _1\sum_{i2[n]} \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[v_i(x_i(\mathbf{v})]\quad _1 p\sum_{i2[n]} \mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[(x_i(\mathbf{v})] + \ _1\ p\\
&= \ _1\,\mathrm{E}_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[SW\ (\mathbf{v})]:
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της γραμμικότητας της εκτιμώμενης τιμής καθώς επίσης και λόγω της ισχύος $\sum_{i\in[n]} x_i(\mathbf{v}) = 1$ για κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}$. Επιπλέον αξιοποιώντας την ιδιότητα $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\alpha} Pr[X \geq t]dt = \mathbb{E}[\min\{\alpha; X\}]$ για οποιαδήποτε μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X, το Λήμμα 4.8 και την εξίσωση 4.1 προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1-e^{-\frac{1}{\alpha}}} Pr_{\mathbf{v}\sim F}\Big[\sum_{j\neq i} y_j(v_j;p) \geq t\Big]dt &\geq \int_0^{1-e^{-\frac{1}{\alpha}}} Pr_{\mathbf{v}\sim F}\Big[\sum_{j\in[n]} y_j(v_j;p) \geq t\Big]dt \\
&= \mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}\Big[\min\Big\{1-e^{-\frac{1}{\alpha}}; \sum_{j\in[n]} y_j(v_j;p)\Big\}\Big] \\
&\geq \mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}\Big[\sum_{j\in[n]} y_j(v_j;p)\Big] \\
&= e^{-\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Η ανισότητα 4.4 ισχύει διότι $\min\left\{1; \sum_{j<i} y_j(v_j;p)\right\} = \sum_{j\in[n]} y_j(\mathbf{v};p;\alpha)$ και $\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}[\sum_{j\in[n]} y_j(\mathbf{v};p)] = e^{-\frac{1}{\alpha}}$ από τον ορισμό του μηχανισμού. Τέλος, λόγω της υποθέσεως ότι $\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}[v_i(x_i(\mathbf{v}))] - p\,\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}[x_i(\mathbf{v})] \geq 0$, του Λήμματος 4.8 και της ανισότητας 4.4 προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}[u_i(\mathbf{v};p;\alpha)] &\geq (1-2e^{-\frac{1}{\alpha}})\,\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}[v_i(x_i(\mathbf{v}))] - p\,\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}[x_i(\mathbf{v})] \\
&= \beta_1 \mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}[v_i(x_i(\mathbf{v})] - \gamma_1 p\,\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}[(x_i(\mathbf{v})].
\end{aligned}
$$

(από τον ορισμό των β_1 και γ_1)

□

4.2.2 Υπολογισμός φράγματος με τυχαία αναδιάταξη των υποψηφίων αγοραστών

Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι η επιλογή της αλληλουχίας της εμφάνισης των αγοραστών γίνεται τυχαία από όλες τις δυνατές επιλογές του συνόλου $[n]$ και συμβολίζουμε με σ την κατανομή πιθανότητας. Πλέον του Λήμματος 4.8, για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.11, θα χρειαστεί η απόδειξη του ακόλουθου Λήμματος:

Lmma 4.9. Gia k^je agorast i, tim mon^dac p kai $\alpha > 0$, isqÔei:

$$
\mathbb{E}_{\sigma,\mathbf{v}\sim F}\Big[\min\Big\{\alpha; \sum_{j\prec i} y_j(v_j;p)\Big\}\Big] \geq \max\Big\{\alpha; \frac{1}{2}\Big\}\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim F}\Big[\sum_{j\in[n]} y_j(\mathbf{v};p;\alpha)\Big].
$$

Apìdeixh. Για κάθε αλληλουχία σ του συνόλου $[n]$, συμβολίζουμε με σ' την αντίστροφη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε αλληλουχία επιλέγεται με ίση πιθανότητα και την εξίσωση 4.1 προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
E_{v \; F}\Big[\min f\; ; \sum_{j\; i} y_j(v_j;p)g\Big] &= E_{v\; F}\Big[\frac{1}{2}\min f\; ; \sum_{j\; i} y_j(v_j;p)g + \frac{1}{2}\min f\; ; \sum_{j\; 0i} y_j(v_j;p)g\Big] \\
& \quad E_{v\; F}\Big[\min f\; ;\frac{1}{2}\sum_{j2[n]ni} y_j(v_j;p)g\Big] \\
& \quad \max f\; ;\frac{1}{2}g\, E_{v\; F}\Big[\min f1;\sum_{j2[n]} y_j(v_j;p)g\Big] \\
& = \max f\; ;\frac{1}{2}g\, E_{v\; F}\Big[\sum_{j2[n]} y_j(v_j;p)g\Big]:
\end{aligned}
$$

□

Je¸rhma 4.11 (Caragiannis & Kerentzis, (2020), [3]). 'Estw $_2 = (1+2\ln 2)^{\;1}$ $0{:}41906$. 'Estw epÐshc p kat^llhlo ¸ste o mhqanismìc grammik c timolìghshc pou anakatanèmei tuqaÐa thn seir^ pou emfanÐzontai oi upoy fioi agorastèc, na ikanopoieÐ th sunj kh $E_{v\; F;}\big[\sum_{i2[n]} y_i(v;p;\;)\big] = {}_2$: O mhqanismìc autìc par^gei mia $_2$-prosèggish tou bèltistou koinwnikoÔ ofèlouc.

$$
E_{v\; F}[u_i(v;p;\;)] \quad _2\, E_{v\; F}[v_i(x_i(v)] \quad _2\; p\,E_{v\; F}[(x_i(v)] \tag{4.5}
$$

Apìdeixh. Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης του Θεωρήματος 4.10. Από τον ορισμό του κοινωνικού οφέλους ισχύει

$$
\begin{aligned}
E_{v\; F}[SW(v;p;\;)] &= E_{v\; F}\Big[\sum_{i2[n]} v_i(y_i(v;p;\;))\Big] \\
&= E_{v\; F}\Big[\sum_{i2[n]} (v_i(y_i(v;p;\;)) \quad p\;\; y_i(v;p;\;))\Big] + p\;\; E_{v\; F}\Big[\sum_{i2[n]} y_i(v;p;\;)\Big] \\
& \qquad \text{(προσθαφαιρώντας τον όρο } p \textstyle\sum_{i2[n]} y_i(v;p;\;)) \\
&= \sum_{i2[n]} E_{v\; F}\; u_i(v;p;\;)] + {}_2\; p \\
& \quad {}_2 \sum_{i2[n]} E_{v\; F}[v_i(x_i(v)] \quad {}_2\; p \sum_{i2[n]} E_{v\; F}[(x_i(v)] + {}_2\; p \\
&= {}_2\, E_{v\; F}[SW\;(v)]:
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της γραμμικότητας της εκτιμώμενης τιμής καθώς επίσης και λόγω της ισχύος $\sum_{i2[n]} x_i(v) = 1$ για κάθε διάνυσμα v. Επιπλέον αξιοποιώντας την ιδιότητα $E[X] = \int_0 Pr[X \quad t]dt = E[\min f\;\; ; Xg]$ για οποιαδήποτε μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X, προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} Pr_{v\; F}\Big[\sum_{j\; i} y_j(v_j;p) \quad t\Big]dt &= E_{v\; F}\Big[\min\Big\{\frac{1}{2};\sum_{j\; i} y_j(v_j;p)\Big\}\Big] \\
& \quad \frac{1}{2}\; E_{v\; F}\Big[\sum_{j2[n]} y_j(v;p;\;)\Big] \\
&= \frac{\;_2}{2}:
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Από την υπόθεση ότι ο όρος $E_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[v_i(x_i(\mathbf{v}))] \quad p E_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[x_i(\mathbf{v})]$ είναι μη αρνητικός, το Λήμμα 4.8 για $\ = \frac{1}{\ln 2}$ και την ανισότητα 4.6, προκύπτει:

$$E_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[u_i(\mathbf{v}; p;\ )] \qquad 1 \quad e^{\frac{1}{}} \quad \frac{2}{2} \quad E_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[v_i(x_i(\mathbf{v}))] \quad p E_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[x_i(\mathbf{v})]$$

$$= \ {}_2 E_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[v_i(x_i(\mathbf{v}))] \quad {}_2 p E_{\mathbf{v}\ \mathbf{F}}[x_i(\mathbf{v})]: \ (\text{Από τον ορισμό των } \quad \text{και } \ _2)$$

□

Kef ˆ laio 5

Apotelèsmata mhqanismoÔ wc proc to eisìdhma

5.1 Prosèggish tou bèltistou eisod matoc

Σε συνέχεια του υπολογισμού του κάτω φράγματος του κοινωνικού οφέλους που παράγει ο μηχανισμός, ο συμβολισμός παραμένει ο ίδιος και για την προσέγγιση του εισοδήματος που αυτός επιφέρει. Για την ανάλυση του εισοδήματος, θα χρειαστεί να θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις αποτίμησης έχουν πεπερασμένη καμπυλότητα (curvature). Συγκεκριμένα, αξιοποιούμε το λόγο $\frac{v^0(0)}{v(1)}$ ως μέτρο της καμπυλότητας με τους υποψήφιους αγοραστές να επιλέγουν τις αποτιμήσεις τους από συναρτήσεις με καμπυλότητα το πολύ 1. Επομένως, η οριοθέτηση της μέγιστης απόκλισης μεταξύ του εισοδήματος που αποδίδει ο βέλτιστος μηχανισμός και του βέλτιστου εισοδήματος που παράγει ο προτεινόμενος μηχανισμός γραμμικής τιμολόγησης γίνεται συναρτήσει της παραμέτρου . Επιπλέον, για κάθε αγοραστή i 2 $[n]$ και κομμάτι του αντικειμένου x 2 $[0; 1]$, υποθέτουμε ότι η τιμή της παραγώγου $v_i^0(x)$, επιλέγεται από μία ομαλή κατανομή πιθανότητας με αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $F_{i;x}$. Εφεξής με τον όρο «ομαλές αποτιμήσεις» θα αναφερόμαστε σε αυτή την συνθήκη ομαλότητας. Το βασικότερο συμπέρασμα αναφορικά με το εισόδημα συνοψίζεται στο ακόλουθο Θεώρημα:

Je¸rhma 5.12 (Caragiannis & Kerentzis, (2020), [3]). H apìklish tou eisod matoc pou epitugqˆnei o mhqanismìc grammik c timolìghshc enìc diairèsimou antikeimènou, se n agorastèc pou epilègoun tic apotim seic touc apì sunart seic me mègisth kampulìthta 1, eÐnai to polÔ $O(^2)$.

5.2 Majhmatikì prìgramma upologismoÔ apìklishc

Για να οριοθετήσουμε τη μέγιστη αναλογία του εισοδήματος, υιοθετούμε την προσέγγιση που εφάρμοσαν οι Alaei et al [1] και παρουσιάσαμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3. Για την περίπτωση που μελετάμε το μαθηματικό πρόγραμμα ορίζεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\text{Μεγιστοποίηση} \quad & \sum_{i\in[n]} r_i H_i^{-1}(1-r_i) && \text{(P7)}\\
\text{υπό τους περιορισμούς} \quad & \sum_{i\in[n]} r_i \le 1 \\
& p\left(1-\prod_{i\in[n]} H_i(p)\right) \le R, \quad \forall p > R \\
& r_i \in [0,1], \quad \forall i \in [n] \\
& H_i \ \text{είναι μια ομαλή cdf}, \quad \forall i \in [n].
\end{aligned}
$$

Je¸rhma 5.13 (Alaei et al. [1]). Gia k^je $R \ge 1$, h antikeimenik tim tou majhmatikoÔ progr^mmatoc $P7$ eÐnai to polÔ eR.

Στην προσέγγιση μας, αξιοποιείται η εκ των προτέρων χαλάρωση έτσι ώστε να εκφραστεί το άνω φράγμα του βέλτιστου εισοδήματος και να συσχετιστεί με το αντίστοιχο του μηχανισμού γραμμικής τιμολόγησης.

Έστω $p_i : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ οι συναρτήσεις τιμολόγησης που μεγιστοποιούν το εισόδημα για κάθε υποψήφιο αγοραστή $i \in [n]$.

Έστω $q_i(x)$ η πιθανότητα ο αγοραστής i να αγοράσει κομμάτι ίσο με x, πληρώνοντας παράλληλα $p_i(x)$. Η πιθανότητα αυτή είναι ίση με $Pr[v_i'(x) \ge p_i'(x)]$ διότι στον αγοραστή i κατανέμεται τμήμα x μόνο αν η παράγωγος του οφέλους του στο σημείο x είναι μη αρνητικός αριθμός[1].

Οι ποσότητες $p_i'(x)$ και $q_i(x)$ συνδέονται καθώς $q_i(x) = 1 - F_{i,x}(p_i'(x))$ ή ισοδύναμα $p_i'(x) = F_{i,x}^{-1}(1-q_i(x))$. Επομένως η αναμενόμενη πληρωμή του αγοραστή i ορίζεται ως

$$
\int_0^1 q_i(x)p_i'(x)dx = \int_0^1 q_i(x)F_{i,x}^{-1}(1-q_i(x))dx
$$

ενώ το αναμενόμενο εισόδημα που συλλέγεται από τη συνεισφορά όλων των αγοραστών στο βέλτιστο μηχανισμό είναι ίσο με:

$$
\mathrm{E}[REV] = \sum_{i\in[n]} \int_0^1 q_i(x)F_{i,x}^{-1}(1-q_i(x))dx \tag{5.1}
$$

Η βέλτιστη εκ των προτέρων χαλάρωση, αποσκοπεί στον υπολογισμό των ποσοτήτων $q_i(x)$ και $F_{i,x}$ για κάθε αγοραστή i έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η εξίσωση 5.1 υπό τον περιορισμό ότι

$$
\sum_{i\in[n]} \int_0^1 q_i(x)dx \le 1 \tag{5.2}
$$

[1] $u'_i(x) = (v_i(x) - p_i(x)\,x)' = v_i'(x) - p_i'(x) \ge 0$

που επί της ουσίας δεσμεύει το μηχανισμό στην απόδοση το πολύ ενός ολόκληρου αντικειμένου. Αφού πλέον έχουμε στη διάθεση μας ένα μέτρο σύγκρισης, στην συνέχεια θα οριοθετήσουμε το εισόδημα που παράγει ο γραμμικός μηχανισμός τιμολόγησης το οποίο είναι ίσο με την τιμή πώλησης ανά μονάδα επί την αναμενόμενη ποσότητα του αντικειμένου που θα πωληθεί, ήτοι

$$p \cdot \mathrm{E}[\sum_{i \in [n]} y_i(\mathbf{v}; p)]$$

Για να προσδιορίσουμε την ποσότητα $p \cdot \mathrm{E}[\sum_{i \in [n]} y_i(\mathbf{v}; p)]$, θα κάνουμε χρήση του παρακάτω λήμματος.

Lèmma 5.10. 'Estw $X_1, X_2, \dots, X_k$ mia tuqaÐa metablht me $X_i \in [0, 1]$ gia kˆje $i \in [k]$ kai $X = \sum_{i \in [k]} X_i$. Tìte, $\mathrm{E}[\min\{1, X\}] \geq 1 - \prod_{i \in [k]}(1 - \mathrm{E}[X_i])$.

Apìdeixh. Για την απόδειξη του ανωτέρω λήμματος, ισχυριζόμαστε ότι ο όρος $\mathrm{E}[\min\{1, X\}]$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του, όταν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$ ακολουθούν την κατανομή Bernoulli. Τότε συγκεκριμένα θα ισχύει:

$$\mathrm{E}[\min\{1, X\}] = Pr[X = 1] = 1 - \prod_{i \in [k]} Pr[X_i = 0] = 1 - \prod_{i \in [k]} Pr[(1 - \mathrm{E}[X_i]);$$

οπότε σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, θα επιβεβαιώνεται η ανισότητα του λήμματος. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού και αντικαθιστώντας την τυχαία μεταβλητή X_k με μία τυχαία μεταβλητή Bernoulli Y_k, για την οποία ισχύει $Pr[Y_k = 1] = \mathrm{E}[X_k] = 1 - Pr[Y_k = 0]$, θα δείξουμε ότι η εκτιμώμενη τιμή του όρου $\mathrm{E}[\min\{1, X\}]$ μπορεί μόνο να μειωθεί ($\mathrm{E}[\min\{1, X\}] \geq \mathrm{E}[\min\{1, Y\}]$). Ο ισχυρισμός θα επαληθευτεί επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα και αντικαθιστώντας κάθε τυχαία μεταβλητή X_i με μία ίσης εκτιμώμενης τιμής τ.μ Bernoulli[2]. Συμβολίζοντας με G την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής Y_k και με δεδομένο ότι το άθροισμα των $k - 1$ πρώτων όρων είναι σταθερό ($X' = \sum_{i=1}^{k-1} X_i = w$), η εκτιμώμενη συνεισφορά του όρου X_k στο $\min\{1, X\}$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\min\{1, X\} - X' | X' = w] &= \int_0^{1-w} 1 - G(z)\, dz \\
&\geq (1 - w) \int_0^1 1 - G(z)\, dz \\
&= (1 - w)\, \mathrm{E}[X_k] \\
&= (1 - w) Pr[Y_k = 1] \\
&= \mathrm{E}[min\{1, Y\} - X' | X' = w]
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $1 - G(z)$ είναι μη αύξουσα συναρτήσει του z, γεγονός που συνεπάγεται ότι η καμπύλη του ολοκληρώματος $\int_0^t 1 - G(z)\, dz$ είναι κοίλη ως προς t και κανένα σημείο της δεν βρίσκεται κάτω από την ευθεία $t \int_0^1 1 - G(z)\, dz$ για $t \in [0, 1]$.[3] Συμβολίζοντας τέλος με

[2] Dhlad gia thn pr¸th antikat^stash to ^jroisma twn tuqaÐwn metablht¸n eÐnai Ðso me $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{k-1} + Y_k$

[3] AxiopoÐhsh thc idiìthtac gia koÐlh sunˆrthsh: $f(tx) = f(tx + (1 - t) \cdot 0) \geq tf(x) + (1 - t)f(0) \geq tf(x)$.

f την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X', προκύπτει

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\min\{1, X\}] &= \int_0^1 f(w) \cdot \mathbb{E}[\min\{1, X\} \mid X' = w]\, dw \\
&\le \int_0^1 f(w) \cdot \mathbb{E}[\min\{1, Y\} \mid X' = w])\, dw \\
&= \mathbb{E}[\min\{1, Y\}]
\end{aligned}$$

□

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.10 με παραμέτρους $k = n, X_i = y_i(\mathbf{v}; p)$ για κάθε $i \in [n]$ προκύπτει ότι το εκτιμώμενο τμήμα του αντικειμένου που θα πωληθεί σε τιμή μονάδας p είναι ίσο

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[REV(\mathbf{v}; p; \cdot)\right] &= p \cdot \mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}}\left[\sum_{i \in [n]} \cdot_i(\mathbf{v}; p; \cdot)\right] \\
&= p\,\mathbb{E}_{\mathbf{v} \sim \mathbf{F}}\left[\min\left\{1, \sum_{i \in [n]} y_i(v_i; p)\right\}\right] && \text{(Από εξίσωση 4.1)} \\
&\ge p\left(1 - \prod_{i \in [n]}(1 - \mathbb{E}[y_i(\mathbf{v}; p)])\right) && (5.3)
\end{aligned}$$

Για τον καθορισμό της διαφοράς του εισοδήματος, απαιτούμε από τον μηχανισμό γραμμικής τιμολόγησης με τιμή ανά μονάδα προϊόντος p, να αποδίδει εισόδημα το πολύ ίσο με τη μονάδα και διερευνούμε τη δυναμική του εισοδήματος του βέλτιστου μηχανισμού με την εκ των προτέρων χαλάρωση. Προσδιορίζοντας το άνω φράγμα της RHS της ανισότητας 5.3 είναι αρκετό για να περιορίσουμε το εισόδημα γραμμικής τιμολόγησης από τη μονάδα. Τότε, το μέγιστο εισόδημα του βέλτιστου μηχανισμού μπορεί να οριοθετηθεί εκ των άνωθεν από την τιμή της RHS της εξίσωσης 5.1 υπό τον περιορισμό της 5.2. Εν κατακλείδι, θα προσδιορίσουμε την απόκλιση αξιοποιώντας το ακόλουθο μαθηματικό πρόγραμμα που εκλαμβάνει ως μεταβλητές του τις cdf's $F_{i,x}(t)$ για κάθε $i \in [n], x \in [0, 1]$ και $t \in [0, \infty)$ και τις πιθανότητες $q_i(x)$ για $i \in [n], x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
&\text{Μεγιστοποίηση} \quad \sum_{i \in [n]} \int_0^1 q_i(x) F_{i,x}^{-1}(1 - q_i(x))\, dx && \text{(P8)} \\
&\text{υπό τους περιορισμούς} \quad \sum_{i \in [n]} \int_0^1 q_i(x)\, dx \le 1 \\
&p\left(1 - \prod_{i \in [n]}\left(1 - \mathbb{E}_{v_i \sim \mathbf{F}_i}[y_i(v_i; p)]\right)\right) \le 1, \quad \forall p > 1 \\
&q_i(x) \in [0, 1], \quad \forall i \in [n], x \in [0, 1] \\
&F_{i,x} \ \text{είναι μια ομαλή cdf}, \quad \forall i \in [n], x \in [0, 1].
\end{aligned}$$

5.3 Oriojèthsh thc antikeimenik c tim c tou majhmatikoÔ progr^mmatoc

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το άνω φράγμα της αντικειμενικής τιμής του μαθηματικού προγράμματος (P8), συσχετίζοντας το με το πρόγραμμα (P7), ενώ παράλληλα θα αξιοποιήσουμε τη ήδη υπολογισμένη αναλογία του Θεωρήματος 5.13 για τον μηχανισμό της ανώνυμης τιμολόγησης.

L mma 5.11. Dedomènhc thc bèltisthc lÔshc q; F tou progr^mmatoc *(P8)*, to zeÔgoc r; H pou orÐzetai apì $r_i = \int_0^1 q_i(x)dx$ kai $H_i(t) = F_{i;0}(2\ t)$ gia k^je agorast $i\ 2\ [n]$ kai $t\ \ 0$ eÐnai mÐa efikt epÐlush tou majhmatikoÔ progr^mmatoc *(P7)* me $R = 2\ \ 1$.

Apìdeixh. Προφανώς, η λύση r; H ικανοποιεί τον πρώτο περιορισμό του προγράμματος (P7) καθώς τα q; F ικανοποιούν τον πρώτο περιορισμό του προγράμματος (P8). Παρακάτω, με τη βοήθεια δύο τεχνικών Λημμάτων, θα δείξουμε ότι και ο δεύτερος περιορισμός δεν παραβιάζεται.

L mma 5.12. 'Estw akèraioc arijmìc k kai $0\ \ z_1; \ \ ; z_k\ \ 1$. Tìte gia k^je $t\ 2\ (0; 1)$ isqÔei:

$$1\ \prod_{i 2 k} 1\ \ t\ z_i\ \ \ t\ 1\ \prod_{i 2 [k]} (1\ \ z_i)$$

Apìdeixh. Αρκεί να δείξουμε ότι η LHS της ανισότητας είναι κοίλη συνάρτηση ως προς t, γεγονός που θα σημαίνει ότι είναι τουλάχιστον ίση με την ευθεία που ενώνει το σημείο (0,0) και το σημείο $(1; 1\ \ \prod_{i 2 [k]}(1\ \ z_i))$, δηλαδή την LHS της ανωτέρω ανισότητας. Πράγματι, η πρώτη παράγωγος της LHS είναι ίση με

$$\prod_{i 2 [k]} (1\ \ t\ z_i)\ \sum_{i 2 [k]} \frac{z_i}{1\ \ t\ z_i};$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική διότι

$$\prod_{i 2 [k]} (1\ \ t\ z_i)\ \ \sum_{i 2 [k]} \frac{z_i}{1\ \ t\ z_i}^{2}\ \ \sum_{i 2 [k]} \frac{z_i}{1\ \ t\ z_i}^{2} < 0$$

□

L mma 5.13. Gia k^je agorast $i\ 2\ [n]$ kai tim p, isqÔei ìti $E_{v_i\ \ F_i}[y_i\ (v_i; p)]\ \ \ \frac{1}{2}\frac{H_i(p)}{1}$:

Apìdeixh. Υποθέτοντας ότι $v_i^0(0)\ \ 2\ p$, εξ ορισμού του προκύπτει $v_i(1)\ \ 2p$. Επιπλέον, από τον ορισμό του $y_i\ (v_i; p)$ ισχύει $v_i^0(z)\ \ p$ για $z\ \ y_i\ (v_i; p)$. Συνεπώς:

$$v_i(y_i\ (v_i; p))\ \ v_i(1)\ \ v_i^0(y_i\ (v_i; p))(1\ \ y_i\ (v_i; p))\ \ v_i(1)\ \ p(1\ \ y_i\ (v_i; p)) \quad (5.4)$$

Επιπρόσθετα ισχύει $v_i^0(z)\ \ \ v_i(1)$ για $z\ \ y_i\ (v_i; p)$. Άρα,

$$v_i(y_i\ (v_i; p))\ \ \ v_i(1)\ \ y_i\ (v_i; p): \quad (5.5)$$

Από τις εξισώσεις 5.4 και 5.5 παράγεται η

$$y_i(v_i; p) \quad \frac{v_i(1) \quad p}{v_i(1) \quad p} \quad \frac{1}{2 \quad 1}$$

. Τελικά, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα,

$$\mathrm{E}_{v_i \quad \mathbf{F}_i}[y_i(v_i; p)] \quad \mathrm{E}_{v_i \quad \mathbf{F}_i}[y_i(v_i; p) 1 f v_i^0(0) \quad 2 \quad pg] \quad \frac{1 \quad F_{i;0}(2 \quad p)}{2 \quad 1} = \frac{1 \quad H_i(p)}{2 \quad 1}$$

. □

Συνδυάζοντας στη συνέχεια τον δεύτερο περιορισμό του προγράμματος (P8) για $p > 2 \quad 1$ και τα Λήμματα 5.8 και 5.9, παίρνουμε τις ακόλουθες ανισότητες

$$1 \quad p \; 1 \prod_{i \in [n]} 1 \quad \mathrm{E}_{v_i \quad \mathbf{F}_i}[y_i(v_i; p)]$$

$$p \; 1 \prod_{i \in [n]} 1 \quad \frac{1 \quad H_i(p)}{2 \quad 1}$$

$$\frac{p}{2 \quad 1} \quad 1 \prod_{i \in [n]} H_i(p)$$

$$; \text{ή διαφορετικά} \quad p \; 1 \prod_{i \in [n]} H_i(p) \quad R; \quad 8p > R;$$

με $R = 2 \quad 1$, όπως άλλωστε απαιτεί ο δεύτερος περιορισμός του προγράμματος (P7). □

L mma 5.14. H antikeimenik tim tou majhmatikoÔ progr^mmatoc *(P8)* me lÔsh $q; F$ g¨netai to polÔ 2 forèc h antikeimenik tim tou progr^mmatoc *(P7)* me $R = 2 \quad 1$ sthn lÔsh $r; H$.

Apìdeixh. Από τον ορισμό του H ισχύει $F_{i;0}^{\;1}(t) = 2 \quad H_i^{\;1}(t)$. Επομένως:

$$\int_0^1 q_i(x) F_{i;x}^{\;1}(1 \quad q_i(x))dx \quad \int_0^1 q_i(x) F_{i;0}^{\;1}(1 \quad q_i(x))dx$$

$$\int_0^1 q_i(x)dx \quad F_{i;0}^{\;1} \; 1 \quad \int_0^1 q_i(x)dx \quad = 2 \quad r_i H_i^{\;1}(1 \quad r_i):$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει λόγω των κοίλων συναρτήσεων αποτίμησης που σηματοδοτούν ότι η $F_{i;x}^{\;1}(t)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση ως προς x, ενώ εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen για κοίλες συνρτήσεις, εξασφαλίζεται η ισχύς και της δεύτερης ανισότητας καθότι εξ' αιτίας της ομαλότητας των $v_i^0(0)$, η συνάρτηση $q \quad F_{i;0}^{\;1}(1 \quad q)$ είναι κοίλη ως προς q. Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.12 προκύπτει από το Θεώρημα 5.13 και τα Λήμματα 5.7 και 5.10 αποδεικνύοντας μια απόκλιση εισοδήματος ίση με $2 \quad (2 \quad 1)e$. □

5.4 K^tw fr^gma eisod matoc

Μέσω του ακόλουθου Θεωρήματος, θα αποδείξουμε τέλος ότι η συσχέτιση της απόκλισης του εισοδήματος που επιτυγχάνουν οι μηχανισμοί, με το , είναι αναπόφευκτη.

Je¸rhma 5.14. Gia k^je   > 1, up^rqei kat^llhlh koÐlh sun^rthsh apotÐmhshc me kampulìthta , tètoia ¸ste opoiosd pote mhqanismìc grammik c timolìghshc na mporeÐ na sugkentr¸sei to polÔ èna $\frac{1}{}$ tm ma tou bèltistou eisod matoc, me   1 + ln .

Apìdeixh. Έστω , κατάλληλο ώστε   ln   = 1 + ln   και συνάρτηση αποτίμησης $v(x)$

$$v(x) = \begin{cases} z; & \text{όταν } 0 \quad x \quad \frac{1}{} \\ 1 + \frac{1}{} \ln x; & \text{όταν } \frac{1}{} \quad x \quad 1 \end{cases}$$

Προφανώς, η v είναι κοίλη με καμπυλότητα . Στην προκειμένη περίπτωση είναι γραμμική στο $[0; \frac{1}{}]$ και παρουσιάζει αυστηρώς μειούμενη παράγωγο στο διάστημα $[\frac{1}{}; 1]$. Αρχικά παρατηρούμε ότι το μέγιστο κομμάτι του αντικειμένου που μπορεί να πωληθεί σε τιμή , είναι $\frac{1}{}$. Παράλληλα, ολόκληρο το αντικείμενο δίδεται σε τιμή $p < \frac{1}{}$ εφόσον $v^0(1) = \frac{1}{}$. Για τη τιμή p 2 $[\frac{1}{};\ ]$, το αναλογούν τμήμα x που πωλείται είναι τέτοιο ώστε $v^0(x) = p$, ή ισοδύναμα ίσο με $\frac{1}{p}$. Σε κάθε πάντως περίπτωση, το μέγιστο εισόδημα είναι ίσο με $\frac{1}{}$. Στον αντίποδα, η τιμολόγηση της μορφής $p(x) = v(x)$ θα εξασφαλίσει συνολικό εισόδημα 1. □

Kefˆlaio 6

Epϑlogoc

Στην παρούσα Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, μελετήθηκαν μηχανισμοί πώλησης ενός αντικειμένου, με ιδιαίτερη έμφαση να δύνεται στην περίπτωση του μηχανισμού γραμμικής τιμολόγησης για το διαιρέσιμο αντικείμενο. Αναλύθηκαν και βρέθηκαν νέα κάτω φράγματα για το κοινωνικό όφελος και το εισόδημα. Αρχικά υπολογίστηκε κάτω φράγμα ίσο με 31,78% στο order oblivious μοντέλο, ενώ με τυχαία αναδιάταξη των υποψήφιων αγοραστών επετεύχθη βελτίωση του ορίου σε 41,9%. Αντιστοιχίζοντας το παράδειγμα μέσω του οποίου αποδεικνύεται ότι η 2-προσέγγιση είναι η βέλτιστη δυνατή για το μη διαιρέσιμο αντικείμενο, καθώς και την περιγραφή του προβλήματος του fractional knapsack [27], εκτιμάται ότι και για την περίπτωση του διαιρέσιμου αντικειμένου, ο λόγος του κοινωνικού οφέλους που επιτυγχάνει ο μηχανισμός που μελετήθηκε θα σέβεται το ίδιο άνω φράγμα.

Για τους υπολογισμούς του εισοδήματος και συγκεκριμένα για την εύρεση του άνω φράγματος αξιοποιείται η εκ των προτέρων χαλάρωση του περιορισμού υλοποίησης, ενώ τροποποιείται κατάλληλα η τεχνική των Alaei et al. [1] με παράλληλη αξιοποίηση του λόγου $\ = \frac{v'(0)}{v(1)}$ ως μέτρο της καμπυλότητας των συναρτήσεων αποτίμησης των αγοραστών. Μέσω μιας αλληλουχίας Λημμάτων προσδιορίζουμε το άνω όριο του μαθηματικού προγράμματος σε $O(\ ^2)$. Στην προσπάθεια προσδιορισμού του χάσματος μεταξύ του μηχανισμού γραμμικής τιμολόγησης και του αντίστοιχου βέλτιστου, αποδεικνύεται ότι η έκφραση του ως προς το είναι αναπόφευκτη. Με τη χρήση κατάλληλου παραδείγματος, το κάτω φράγμα οριοθετείται σε $\frac{1}{\ }$ με $\ = 1 + \ln\ $.

Ένα προφανές πρόβλημα που παραμένει ανοικτό, είναι ο υπολογισμός αυστηρών φραγμάτων για τον κοινωνικό πλούτο και το εισόδημα. Και αν για την πρώτη παράμετρο, η παρούσα εργασία κατάφερε να πλησιάζει αρκετά το στόχο, για την περίπτωση του εισοδήματος η μελέτη φαντάζει αρκετά δύσκολη εξ αιτίας του αναγκαίου περιορισμού για πεπερασμένη παράγωγο αποτίμησης σε μηδενικό (ή απειροελάχιστο) κομμάτι του αντικειμένου. Ακόμη και η εύρεση λογαριθμικού παράγοντα απόκλισης, αποτελεί μια πρόκληση για μελλοντικές εργασίες που κατά τη γνώμη του συγγραφέα αξίζει να αντιμετωπιστεί, χάρη στο ασύγκριτο πλεονέκτημα της απλότητας που προσφέρει η γραμμική τιμολόγηση.

Bibliografía

[1] Saeed Alaei, Jason Hartline, Rad Niazadeh, Emmanouil Pountourakis και Yang Yuan. Optimal auctions vs. anonymous pricing. *Games and Economic Behavior*, 118:494–510, 2019.

[2] Russell N Bradt, SM Johnson και Samuel Karlin. On sequential designs for maximizing the sum of n observations. *The Annals of Mathematical Statistics*, 27(4):1060–1074, 1956.

[3] Ioannis Caragiannis και Apostolis Kerentzis. Simple posted pricing mechanisms for selling a divisible item. *arXiv preprint arXiv:2007.08246*, 2020.

[4] Shuchi Chawla, Jason D Hartline και Robert Kleinberg. Algorithmic pricing via virtual valuations. Στο *Proceedings of the 8th ACM Conference on Electronic Commerce*, σελίδες 243–251, 2007.

[5] Shuchi Chawla, Jason D Hartline, David L Malec και Balasubramanian Sivan. Multi-parameter mechanism design and sequential posted pricing. Στο *Proceedings of the 42nd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, σελίδες 311–320, 2010.

[6] Yuan Shih Chow και Herbert Robbins. On optimal stopping rules. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 2(1):33–49, 1963.

[7] Jose Correa, Patricio Foncea, Ruben Hoeksma, Tim Oosterwijk και Tjark Vredeveld. Posted price mechanisms for a random stream of customers. Στο *Proceedings of the 2017 ACM Conference on Economics and Computation (EC)*, σελίδες 169–186, 2017.

[8] Paul Dütting, Michal Feldman, Thomas Kesselheim και Brendan Lucier. Prophet inequalities made easy: Stochastic optimization by pricing non-stochastic inputs. Στο *2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, σελίδες 540–551. IEEE, 2017.

[9] Paul Dütting, Felix Fischer και Max Klimm. Revenue gaps for static and dynamic posted pricing of homogeneous goods. *arXiv preprint arXiv:1607.07105*, 2016.

[10] Liran Einav, Chiara Farronato, Jonathan Levin και Neel Sundaresan. Auctions versus posted prices in online markets. *Journal of Political Economy*, 126(1):178–215, 2018.

[11] Moran Feldman, Ola Svensson και Rico Zenklusen. A simple o (log log (rank))-competitive algorithm for the matroid secretary problem. Στο *Proceedings of the 26th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, σελίδες 1189–1201. SIAM, 2014.

[12] Gus W Haggstrom. Optimal stopping and experimental design. *The Annals of Mathematical Statistics*, σελίδες 7–29, 1966.

[13] Mohammad Taghi Hajiaghayi, Robert Kleinberg και Tuomas Sandholm. Automated online mechanism design and prophet inequalities. Στο *Association for the Advancement of Arti cial Intelligence (AAAI)*, τόμος 7, σελίδες 58–65, 2007.

[14] Jason D Hartline. Mechanism design and approximation. *Book*, 122, 2016.

[15] Jason D Hartline και Tim Roughgarden. Simple versus optimal mechanisms. Στο *Proceedings of the 10th ACM Conference on Electronic Commerce*, σελίδες 225–234, 2009.

[16] Theodore P Hill και Robert P Kertz. Ratio comparisons of supremum and stop rule expectations. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 56(2):283–285, 1981.

[17] Theodore P Hill και Robert P Kertz. A survey of prophet inequalities in optimal stopping theory. *Contemporary Mathematics*, 125:191–207, 1992.

[18] Theodore P Hill, Robert P Kertz και others. Comparisons of stop rule and supremum expectations of iid random variables. *The Annals of Probability*, 10(2):336–345, 1982.

[19] Yaonan Jin, Pinyan Lu, Qi Qi, Zhihao Gavin Tang και Tao Xiao. Tight approximation ratio of anonymous pricing. Στο *Proceedings of the 51st Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing (STOC)*, σελίδες 674–685, 2019.

[20] Yaonan Jin, Pinyan Lu, Zhihao Gavin Tang και Tao Xiao. Tight revenue gaps among simple mechanisms. Στο *Proceedings of the 30th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, σελίδες 209–228. SIAM, 2019.

[21] Robert Kleinberg και Seth Matthew Weinberg. Matroid prophet inequalities. Στο *Proceedings of the 44th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, σελίδες 123–136, 2012.

[22] Michael M Klepper και Robert E Gunther. *The Wealthy 100: From Benjamin Franklin to Bill Gates{A ranking of the richest Americans, past and present*. Carol Publishing Group, 1996.

[23] Ulrich Krengel και Louis Sucheston. On semiamarts, amarts, and processes with nite value. *Advances in Probability*, 4(197-266):1–5, 1978.

[24] Vijay Krishna. *Auction theory*. Academic press, 2009.

[25] Omer Levy, Rann Smorodinsky και Moshe Tennenholtz. Undivide and conquer: On selling a divisible and homogeneous good. *The BE Journal of Theoretical Economics*, 15(1):1–23, 2015.

[26] Steven A Lippman και John J McCall. Job search in a dynamic economy. *Journal of Economic Theory*, 12(3):365–390, 1976.

[27] Brendan Lucier. An economic view of prophet inequalities. *ACM SIGecom Exchanges*, 16(1):24–47, 2017.

[28] James MacQueen και RG Miller Jr. Optimal persistence policies. *Operations Research*, 8(3):362–380, 1960.

[29] Roger B Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):58–73, 1981.

[30] Robert Phillips. Why are prices set the way they are. *The Oxford handbook of pricing management*, σελίδες 13–44, 2012.

[31] Harry E Resseguie. Alexander turney stewart and the development of the department store, 1823-1876. *Business History Review*, 39(3):301–322, 1965.

[32] Tim Roughgarden και Inbal Talgam-Cohen. Approximately optimal mechanism design. *Annual Review of Economics*, 11:355–381, 2019.

[33] Ester Samuel-Cahn. Comparison of threshold stop rules and maximum for independent nonnegative random variables. *the Annals of Probability*, 12(4):1213–1216, 1984.

[34] Albert N Shiryaev. On optimum methods in quickest detection problems. *Theory of Probability & Its Applications*, 8(1):22–46, 1963.

[35] David Siegmund, Harold G Marcus και Herbert Ellis Robbins. *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*. 1971.

[36] William Vickrey. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of Finance*, 16(1):8–37, 1961.

[37] Robert Wilson. Auction theory. *The New Palgrave. MacMillan, London*, 1987.

SuntomografÐec - Arktikìlexa - - AkrwnÔmia

βλπ	βλέπε
κ.λπ.	και λοιπά
κ.ο.κ	και ούτω καθεξής
et al.	et alii, et aliae (and others)
i.e	id est (that is)
SPA	Second Price Auction
SPM	Sequential Posting-Pricing Mechanism
AR	Anonymous Reserve
AP	Anonymous Pricing
OPM	Order-Oblivious Posted-Pricing Mechanism

Apìdosh xenìglwsswn ìrwn

Apìdosh	Xenìglwssoc ìroc
υποψήφιοι αγοραστές	buyers/bidders
συμμετέχοντες	agents
προσφορές	bids
δηλώσεις αποτίμησης	reports
αποτίμηση	valuation
εισόδημα	revenue
κοινωνικό όφελος	social welfare
κατώφλι	reserve
βέλτιστος	optimal
εκ των προτέρων	ex-ante
εκ των υστέρων	ex-post
τριγωνική	triangular

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ - ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Melèth Apl ¸n kai Apodotik ¸n
Mhqanism ¸n Timol ìghshc

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Απόστολος Αργ. Κερεντζής

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2020

Θέση barcode

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ - ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Melèth Apl ¸n kai Apodotik ¸n
Mhqanism ¸n Timol ìghshc

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Απόστολος Αργ. Κερεντζής

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2020

Θέση barcode

PANEPISTHMIO PATRWN
POLUTEQNIKH SQOLH
TMHMA MHQANIKWN HLEKTRONIKWN
UPOLOGISTWN KAI PLHROFORIKHS

METAPTUQIAKH DIPLWMATIKH ERGASIA

Melèth Apl¸n kai Apodotik¸n Mhqanism¸n Timolìghshc

Apìstoloc Arg. Kerentz c

PATRA

IOULIOS 2020