ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΒΑ
«Νέες Αρχές Διοίκησης Επιχειρήσεων»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗΣ ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗΣ:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΙΕΡΑΡΧΙΚΗΣ ΚΑΛΥΨΗΣ ΣΕ ΤΡΑΠΕΖΙΚΑ ΚΑΤΑΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Ι.ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ

Ποταμιάνος Βαγγέλης
Α.Μ. 109

Ιανουάριος 2010

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αποφάσεις χωροθέτησης λαμβάνονται σε όλα τα επίπεδα χωροταξικής οργάνωσης, από τα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις μέχρι τις κυβερνήσεις ή ακόμα και τις διεθνείς οργανώσεις. Ορισμένες δε φορές, τέτοιου είδους αποφάσεις αποτελούν στρατηγικής σημασίας επιλογές καθώς έχουν μακροχρόνιες συνέπειες και μεγάλο κόστος για να υλοποιηθούν. Σε επιχειρηματικό επίπεδο μπορεί ακόμα να αντανακλούν την δυνατότητα μιας επιχείρησης να επιβιώσει στο ανταγωνιστικό περιβάλλον. Σε κοινωνικό και δημόσιο επίπεδο επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα των παρεχομένων από το κράτος υπηρεσιών και την ικανότητα αυτών να προσελκύσουν την ανάλογη δραστηριότητα. Κατά συνέπεια, αυτού του είδους οι επιλογές μπορεί να στοχεύουν είτε στην οικονομική ανάπτυξη μιας περιοχής, είτε στην οικολογική προστασία της και αποφυγή της περαιτέρω μόλυνσής της ή ακόμα απλά στην κυκλοφοριακή αποσυμφόρησή της.

Γενικά όλα τα μοντέλα χωροθέτησης έχουν μια κοινή δόμηση: έναν χώρο μέσα στον οποίο τοποθετούνται τόσο οι πελάτες όσο και οι εγκαταστάσεις για την εξυπηρέτηση των πελατών από τον αποφασίζοντα (Drezner & Eiselt 2002). Οι περισσότεροι συγγραφείς κατηγοριοποιούν τα μοντέλα βάσει της χωροταξικής τους δομής (ευκλείδεια ή δικτυακά), του αριθμού των εγκαταστάσεων προς χωροθέτηση και του σκοπού που αυτές πρόκειται να εξυπηρετήσουν. Τέλος υπάρχει ένας ακόμα παράγοντας που ασχολείται με την ανάλυση της συμπεριφοράς του καταναλωτή. Σε αυτή την περίπτωση ο μελετητής πρέπει να κατανοήσει πως συμπεριφέρονται οι καταναλωτές και πως κάνουν τις χωρικές τους επιλογές. Τη μεγάλη σημασία αυτής της ανάλυσης της διαδικασίας επιλογών επισημαίνουν οι Colledge και Simpson το 1987.

Τα προβλήματα χωροθέτησης αποσκοπούν στην εύρεση των βέλτιστων λύσεων ή τουλάχιστον λύσεων που δεν επιδέχονται βελτίωσης. Είναι δηλαδή προβλήματα βελτιστοποίησης που είτε στοχεύουν στην ελαχιστοποίηση κάποιου κόστους, είτε στη μεγιστοποίηση κέρδους ή ποιότητας. Στα ευκολότερα από αυτά τα προβλήματα ο σκοπός παρουσιάζεται ως ένα και μόνο κριτήριο αλλά στις πιο σύνθετες εφαρμογές πρέπει να πληρούνται ταυτόχρονα πολλαπλά κριτήρια. Ενώ στην πρώτη περίπτωση στόχος είναι η εύρεση του μέγιστου ή του ελάχιστου κάποιας συνάρτησης, στη δεύτερη περίπτωση ο πραγματικός σκοπός δεν είναι ευκρινώς ορισμένος. Οι μεθοδολογίες είναι πολλές και ορισμένες φορές οδηγούν και σε συγκρουόμενα αποτελέσματα. Η πιο συνήθης προσέγγιση είναι ο καθορισμός εκείνων των λύσεων για τις οποίες καμία άλλη υπαρκτή λύση να μην ικανοποιεί εξίσου καλά όλα τα κριτήρια αλλά και ταυτόχρονα να μην ικανοποιεί καλύτερα έστω και ένα από αυτά. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία είναι αρκετά δύσκολη και συνήθως οι λύσεις που δίνει δεν μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα καθώς δεν οδηγεί με σαφήνεια προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η πεποίθηση ότι τα μοντέλα χωροθέτησης καταλήγουν σε μια βέλτιστη λύση βασίζεται στην εύρεση και ποσοτικοποίηση κάποιων αντικειμενικών δεδομένων. Για παράδειγμα, στον τομέα της χωροθέτησης ιδιωτικών εγκαταστάσεων, ένα αντικειμενικό κριτήριο χωροθέτησης μιας αποθήκης θα ήταν η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής και διανομής.

Εφόσον οι παράγοντες κόστους συμπεριλαμβάνονται στα αντικειμενικά κριτήρια χωροθέτησης, λογικά μπορούμε να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι τα μοντέλα αυτά μπορούν να απεικονίσουν με αρκετά καλή ακρίβεια το πραγματικό πρόβλημα που καλούνται να αντιμετωπίσουν. Από την άλλη πλευρά όμως, στην περίπτωση χωροθέτησης εγκαταστάσεων δημοσίου συμφέροντος εμφανίζονται δυσκολίες στην ποσοτικοποίηση κάποιων παραμέτρων καθώς κοινωνικοί, οικονομικοί και πολιτικοί παράγοντες επηρεάζουν το πρόβλημα. Παραδείγματα τέτοιων εγκαταστάσεων είναι νοσοκομεία, αστυνομικά τμήματα, χώροι υγειονομικής ταφής απορριμμάτων κ.α. Στις περιπτώσεις αυτές εκτός από τα αντικειμενικά κριτήρια όπως η προσβασιμότητα και η απόσταση, θα πρέπει κανείς να λάβει υπόψη και παράγοντες όπως περιβαλλοντικές επιπτώσεις ή ακόμα και τη συνολική αποδοχή τους (ΧΥΤΑ).

Από τα παραπάνω αντιλαμβάνεται κανείς ότι προκύπτει η ανάγκη ύπαρξης μοντέλων, τα οποία μελετούν και αναλύουν την ανταγωνιστική χωροθέτηση διαφόρων εγκαταστάσεων κάνοντας χρήση διαφορετικών κριτηρίων ανάλογα με την περίπτωση.

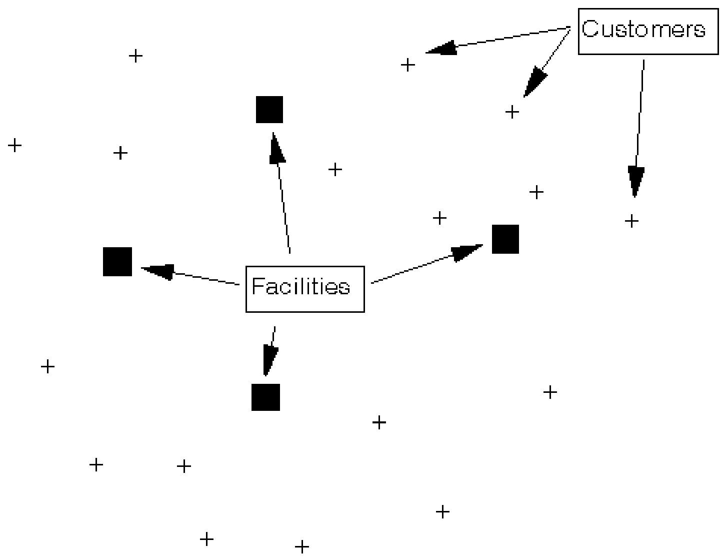
Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε τα σημαντικότερα από αυτά τα μοντέλα ανταγωνιστικής χωροθέτησης εγκαταστάσεων, τα οποία χρησιμοποιούν διαφορετικά κριτήρια χωροθέτησης μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, επιλύουμε και αναλύουμε το μοντέλο Μέγιστης Ιεραρχικής Κάλυψης των Serra, Marianov και Re-Velle με εφαρμογή σε τραπεζικά καταστήματα, που διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα με το επίπεδο των παρεχομένων υπηρεσιών.

2. ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗ ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

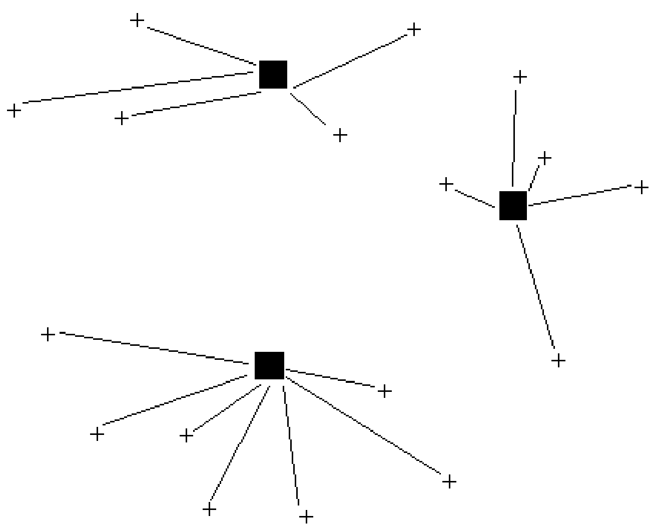
Το γενικό πρόβλημα της χωροθέτησης εγκαταστάσεων δεδομένου του συνόλου των εγκαταστάσεων καθώς και του συνόλου των σημείων (πελατών) που πρέπει να εξυπηρετηθούν από αυτές, είναι η απάντηση στα παρακάτω ερωτήματα:

- Ποιες από τις εγκαταστάσεις θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν;
- Ποιοι πελάτες θα εξυπηρετηθούν και από ποιες εγκαταστάσεις ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος;

Παρακάτω παρουσιάζεται μια γραφική απεικόνιση του προβλήματος.



Μια πιθανή λύση είναι η εξής:



2.1 Προβλήματα Χωροθέτησης Συνεχούς Χώρου Δεδομένων

Τέτοιου είδους προβλήματα χωροθέτησης προκύπτουν όταν ο χώρος περιγράφεται από συνεχείς μεταβλητές – συνήθως συντεταγμένες, Στις περισσότερες των περιπτώσεων ο χώρος είναι συνήθως διδιάστατος όπως μία επιφάνεια, ένα κομμάτι γης, ή ακόμα ολόκληρη η γη. Χρειάζονται δηλαδή δύο συντεταγμένες για να καθοριστεί η θέση. Για χωροθέτηση όμως μέσα σε ένα κτήριο, κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας ή ακόμα και στον αέρα πρέπει να ληφθεί υπόψη και το βάθος ή το ύψος επομένως απαιτείται και τρίτη συντεταγμένη. Από την άλλη υπάρχουν και προβλήματα μίας διάστασης όπως η χωροθέτηση πάνω σε μια γραμμή πχ σε αυτοκινητόδρομο ή σιδηρόδρομο.

Στα προβλήματα συνεχούς χώρου δεδομένων δεν μπορούμε να ορίσουμε διακριτές υποψήφιες θέσεις χωροθέτησης, καθώς αντιμετωπίζουμε μια πιο ασαφή κατάσταση και θα πρέπει να ερευνήσουμε το σύνολο του χώρου όπως αυτός ορίζεται από διάφορους περιορισμούς. Όταν το πρόβλημα είναι γεωγραφικής φύσης, οι υποψήφιες θέσεις συνήθως ορίζονται από τα όρια κάποιου πολυγώνου. Όταν όμως τεχνικοί, οικονομικοί ή πολιτικοί παράγοντες εμφανίζονται ως περιορισμοί το πρόβλημα δυσκολεύει – πχ εύρεση βέλτιστης θέσης χωροθέτησης κάποιου εργοστασίου λαμβάνοντας όμως υπόψη και περιορισμούς με σκοπό την αποφυγή της διάδοσης της μόλυνσης του περιβάλλοντος.

Τα μοντέλα χωροθέτησης συνεχούς χώρου δεδομένων, από τη μια πλευρά, συχνά χρησιμοποιούνται ως μια πρώτη προσέγγιση κάποιου πραγματικού προβλήματος. Ακόμα και αν κανείς γνωρίζει ότι η καλύτερη λύση για ένα πρόβλημα μπορεί να προκύψει από μοντέλο διακριτών δεδομένων για να εφαρμόσει κάτι τέτοιο συνήθως απαιτείται πολύ μεγάλος όγκος δεδομένων που ορισμένες φορές δεν μπορούν καν να αποκτηθούν. Έτσι, εφαρμόζει ένα μοντέλο συνεχών δεδομένων (μικρότερες απαιτήσεις δεδομένων), ως μια μέθοδο που θα καταδείξει τις πλέον καλύτερες υποψήφιες περιοχές χωροθέτησης και στη συνέχεια μελετά αυτές με μεγαλύτερη ακρίβεια. Από την άλλη πλευρά, τα προβλήματα βελτιστοποίησης απαιτούν κατά κανόνα ακριβείς μαθηματικές φόρμουλες, μεταβλητές, περιορισμούς και σκοπούς, που όμως περιγράφουν μόνο την ποσοτική πλευρά του προβλήματος, αφήνοντας την ποιοτική πλευρά του προβλήματος στον αποφασίζοντα. Ακόμα τα δεδομένα στα οποία βασίζονται αυτά τα μοντέλα, δεν είναι πάντα ακριβή και πολύ συχνά αποτελούν απλά μια προσέγγιση των πραγματικών δεδομένων. Αυτό συμβαίνει διότι το περιβάλλον που αυτά αντιπροσωπεύουν αλλάζει διαρκώς. Σε αυτές τις περιπτώσεις το μοντέλο βελτιστοποίησης χρησιμοποιείται απλά ως βοήθημα και δεν αντιμετωπίζεται ως εργαλείο καθορισμού αποφάσεων καθώς απλά καταδεικνύει τις καλύτερες από αυτές και αποκλείει τις χειρότερες. Αυτό προκύπτει από την ανάλυση ευαισθησίας από τις ληφθείσες λύσεις, οι οποίες στην περίπτωση των μοντέλων χωροθέτησης έχουν τη μορφή κάποιας περιοχής που σχεδόν πληροί ιδανικά τα κριτήρια ή σε άλλες περιπτώσεις λύσεις που εμπεριέχουν τη βέλτιστη.

2.2 Προβλήματα Χωροθέτησης Διακριτών Δεδομένων

Τέτοιου είδους μοντέλα απαντούν σε προβλήματα που εμφανίζονται καθημερινά και είναι παρόντα σε πάρα πολλές ανθρώπινες δραστηριότητες. Χωροθέτηση αεροδρομίων, λιμανιών, εργοστασίων, αποθηκών, καταστημάτων λιανικής, σχολείων, νοσοκομείων, στάσεις μέσων μεταφοράς ακόμα και δορυφόρων της γης αποτελούν προβλήματα που έχουν απασχολήσει την επιστημονική και επιχειρηματική κοινότητα, με αποτέλεσμα να έχουν υποκινήσει το ενδιαφέρον είτε των ερευνητών είτε των διοικούντων.

Τα μοντέλα αυτά είναι συχνά πολύ δύσκολο να επιλυθούν ώστε να δώσουν το βέλτιστο αποτέλεσμα. Ακόμα και τα πιο βασικά και απλά από αυτά, για μεγάλο όγκο δεδομένων υπολογιστικά είναι δυσεπίλυτα. Και αυτός είναι ο κυριότερος λόγος που τα μεγάλα σε υπολογιστικές απαιτήσεις προβλήματα, κίνησαν το ενδιαφέρον των μελετητών μετά την ανάπτυξη ισχυρών επεξεργαστών. Τέλος, κάθε μοντέλο αναπτύσσεται για την αντιμετώπιση ενός συγκεκριμένου προβλήματος και ορίζεται από τις εκάστοτε μεταβλητές. Μπορεί να υπάρχουν γενικές μεθοδολογίες, αλλά αυτές προσαρμόζονται στις απαιτήσεις της κάθε περίπτωσης και δεν υπάρχει γενική φόρμουλα για κάθε δυνατή εφαρμογή.

Γενικά θα λέγαμε ότι στη βιβλιογραφία δεν υπάρχουν μοντέλα χωροθέτησης εγκαταστάσεων που να αφορούν συγκεκριμένες εφαρμογές (μελέτες περιπτώσεων). Η προσπάθεια επικεντρώνεται τόσο στην ανάπτυξη νέων μοντέλων και παραλλαγών υπαρχόντων, τα οποία έχουν πολλαπλές δυνατότητες εφαρμογών - ακολουθώντας μια γενική μεθοδολογία όπως αναφέρθηκε πιο πάνω – όσο και στη διαμόρφωση αποτελεσματικών τεχνικών επίλυσης νέων ή υπαρχόντων μοντέλων. Πολλοί είναι οι λόγοι που εμφανίζεται αυτή η τάση και δεν επικεντρώνεται η προσπάθεια στις μελέτες περιπτώσεων. Καταρχήν νέες εφαρμογές συχνά χρησιμοποιούν υπάρχοντα μοντέλα και τεχνικές επίλυσης. Συνεπώς δεν αντιμετωπίζονται ως πρόκληση από την επιστημονική κοινότητα αλλά ως υπάρχουσα τεχνολογία. Ακόμα, συγκεκριμένες εφαρμογές ανατίθενται σε συμβούλους, επάγγελμα που δεν κινητοποιεί τον ασκούντα να δημοσιεύσει την εφαρμογή σε επιστημονικά περιοδικά. Παράλληλα, οι ιδιωτικές επιχειρηματικές πρωτοβουλίες στη χωροθέτηση εγκαταστάσεων συχνά αποτελούν ανταγωνιστικό πλεονέκτημα και συνεπώς δεν μοιράζονται με την ευρύτερη κοινότητα. (Παρόλα αυτά υπάρχουν αρκετά άρθρα που σχετίζονται με τέτοιου είδους προβλήματα).

2.3 Μοντέλα Ανταγωνιστικής Χωροθέτησης

Ένα από τα βασικά προβλήματα της ανταγωνιστικής χωροθέτησης είναι η εκτίμηση του μεριδίου αγοράς που καταλαμβάνει κάθε εγκατάσταση. Αυτό το μερίδιο αγοράς εξαρτάται από τρεις παράγοντες:

1. Τα Χαρακτηριστικά των Καταναλωτών
2. Τα Χαρακτηριστικά των Εγκαταστάσεων
3. Τον Χωρικό Διαχωρισμό μεταξύ Εγκαταστάσεων και Καταναλωτών

Τα χαρακτηριστικά των καταναλωτών περιλαμβάνουν το διαθέσιμο για κατανάλωση εισόδημα ως μέτρο της αγοραστικής τους δύναμης, την ηλικία τους και το μορφωτικό τους επίπεδο. Όλα τα παραπάνω καθορίζουν τι μπορούν εν δυνάμει να καταναλώσουν, τι απολαμβάνουν περισσότερο και γενικότερα τον τρόπο ζωής τους. Τα χαρακτηριστικά των εγκαταστάσεων περιλαμβάνουν την ποικιλία επιλογών που προσφέρουν, όπως ο αριθμός των βιβλίων σε μια βιβλιοθήκη, τον αριθμό και την ποιότητα των προσφερόμενων υπηρεσιών σε μια μονάδα υγείας, ή τα αγαθά σε ένα πολυκατάστημα. Τέλος, ο χωρικός διαχωρισμός (πχ η απόσταση μεταξύ ενός πελάτη και μιας εγκατάστασης) θα καθορίσει τη συχνή επιλογή της συγκεκριμένης εγκατάστασης από τον συγκεκριμένο πελάτη. Γενικότερα, όσο μεγαλύτερη η απόσταση αυτή τόσο λιγότερο ελκυστικό είναι το κατάστημα για τον πελάτη. Αυτό συχνά αναφέρεται ως κόστος μεταφοράς, το οποίο περιλαμβάνει το πραγματικό μεταφορικό κόστος, τον χρόνο που απαιτείται για την κάλυψη των αποστάσεων.

Για να γίνει απόλυτα κατανοητή η σημασία της συμπεριφοράς του πελάτη στην ανταγωνιστική χωροθέτηση θα θεωρήσουμε ένα πρόβλημα χωροθέτησης ενός βενζινάδικου και μια περίπτωση στην οποία ένας πελάτης κάνει την ίδια διαδρομή κάθε μέρα από το σπίτι του που βρίσκεται σε ένα προάστιο, προς τη δουλειά του που λογικά βρίσκεται προς το κέντρο της πόλης. Αν θέλει να βάλει βενζίνη το πρωί θα προτιμήσει το βενζινάδικο να είναι τοποθετημένο δεξιά του, ώστε να είναι πιο εύκολη η πρόσβαση σε αυτό καθώς οι αριστερές στροφές απαιτούν περισσότερη προσοχή από τις δεξιές και λογικά απαιτούν και περισσότερο χρόνο. Ακόμα, για να φτάσει κανείς σε ένα βενζινάδικο στην αριστερή πλευρά του δρόμου, ορισμένες φορές θα πρέπει να διασχίσει δύο φορές την λωρίδα των αντιθέτως κινούμενων οχημάτων. Τα αντίθετα ακριβώς συμβαίνουν όταν ο πελάτης βάζει βενζίνη κατά την επιστροφή από τη δουλειά του στο σπίτι του. Καθώς οι πελάτες είναι πιο βιαστικοί το πρωί στο δρόμο για τη δουλειά τους παρά στην επιστροφή, θα προτιμούν να βάζουν βενζίνη κατά την επιστροφή τους. Αυτός είναι ένας από τους λόγους για τον οποίο πολλά βενζινάδικα βρίσκονται στη δεξιά πλευρά του δρόμου με κατεύθυνση από το κέντρο της πόλης προς τα προάστια.

Ένας μεγάλος αριθμός αποφάσεων μπορούν να μοντελοποιηθούν ως χωροταξικά προβλήματα. Ενώ όμως τα συνήθη μοντέλα χωροθέτησης προβλέπουν την τοποθέτηση μιας και μόνο εγκατάστασης, τα ανταγωνιστικά μοντέλα επιτρέπουν στις υπόλοιπες εγκαταστάσεις να αντιδράσουν στις κινήσεις των ανταγωνιστών και ενδεχομένως να μετακινούν κάποιες από τις μονάδες. τους. Επομένως, το ερώτημα δεν είναι μόνο πού να τοποθετηθεί μια νέα εγκατάσταση, αλλά αν οι επαναλαμβανόμενες τοποθετήσεις συγκλίνουν σε ένα συγκεκριμένο μοτίβο.

Παραδοσιακά, οι περισσότερες μελέτες σχετικά με τα χωροταξικά μοντέλα δημοσιεύονταν σε οικονομικού και γεωγραφικού περιεχομένου περιοδικά. Πιο πρόσφατα, τα ίδια μοντέλα ξεκίνησαν να πρωταγωνιστούν σε περιοδικά που ασχολούνταν με το μάρκετινγκ, την πολιτική κλπ. Δύο είναι οι λόγοι για αυτή την αλλαγή: Ο πρώτος είναι ότι οι αναλύσεις των ανταγωνιστικών χωρικών μοντέλων χρησιμοποιούν εργαλεία από ποικίλα πεδία όπως θεωρία παιγνίων, στοχαστικές μεθόδους κ.α. Ο δεύτερος είναι ότι όλο και περισσότερες καθημερινές δραστηριότητες περιγράφονται από χωροταξικά μοντέλα. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την χωροθέτηση πολιτικών υποψηφίων σε ένα πρόβλημα του οποίου οι «διαστάσεις» να είναι οι σημαντικές πολιτικές κατευθύνσεις και επιλογές, ή ακόμα την επιλογή του κατάλληλου ανθρώπου μιας επιχείρησης στην κατάλληλη δουλειά σε μοντέλο με διαστάσεις τις ικανότητες των εργαζομένων.

Παρακάτω αναλύονται οι τα βασικά στοιχεία ενός ανταγωνιστικού μοντέλου χωροθέτησης.

Η πρώτη βασική παράμετρος είναι ο χώρος. Γίνεται διάκριση μεταξύ χωρικών μοντέλων με διακριτά δεδομένα, κυρίως σε δίκτυα και σε μοντέλα με συνεχή δεδομένα. Είναι της μορφής R^d με $d \leq 3$ στις περιπτώσεις γεωγραφικής χωροθέτησης, Έχει αποδειχτεί ότι ακόμα και τα απλά μοντέλα της μορφής R^2 είναι αρκετά πολύπλοκα από μαθηματικής απόψεως. Άλλα προβλήματα, όπως η τοποθέτηση προϊόντων σε πιθανές θέσεις, είναι της μορφής R^d με $d \geq 3$ και συνήθως είναι αρκετά πολύπλοκα.

Η δεύτερη βασική παράμετρος είναι αυτή η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων. Σε μοντέλα δικτύου οι αποστάσεις μπορούν να οριστούν κατά βούληση. Σε μοντέλα της μορφής R^2 επιλέγεται μια από τις L_k συναρτήσεις απόστασης. Για παράδειγμα η απόσταση μεταξύ $Pi = (xi, Yi)$ και $Pj = (xj, yj)$ ορίζεται

$$d_{ij}^k = \left[\left| X_i - X_j \right|^k - \left| Y_i - Y_j \right|^k \right]^{1/k}$$

Η τρίτη βασική παράμετρος είναι αυτή των πελατών. Σε μοντέλα που αναλύουν πολιτικά δεδομένα ο όρος πελάτης αναφέρεται στον ψηφοφόρο και σε μοντέλα που βρίσκουν εφαρμογή στο χώρο εργασίας, πελάτες είναι οι διάφορες δραστηριότητες που πρέπει να γίνουν. Ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό των πελατών είναι η κατανομή τους στο χώρο και ένα άλλο είναι η αγοραστική τους δύναμη. Οι περισσότεροι μελετητές θεωρούν ότι οι πελάτες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο χώρο. Στην πραγματικότητα, πυκνή κατανομή πελατών συγκεντρώνεται γύρω από προϊόντα που παρουσιάζουν παραδοσιακά υψηλό δείκτη προτίμησης. Ακόμα, η αγοραστική δύναμη είναι σημαντικός παράγοντας. Σε ένα μοντέλο πολιτικών εκλογών ένας ψηφοφόρος μπορεί να έχει το πολύ μία ψήφο ανεξάρτητα από την κατανομή των υποψηφίων. Σε ένα μοντέλο επιλογής προϊόντων όμως, ο πελάτης μπορεί κάλλιστα να πειστεί να αγοράσει περισσότερα από ένα προϊόντα ή ακόμα και το ίδιο προϊόν πάνω από μία φορά.

Η τέταρτη βασική παράμετρος στα ανταγωνιστικά μοντέλα χωροθέτησης είναι οι συναρτήσεις 'προσέλκυσης'. Τέτοιες συναρτήσεις μετρούν πόσο έντονα προσελκύεται ένας πελάτης από μία εγκατάσταση, ένα προϊόν κλπ. καθώς και το 'βάρος'. Χαρακτηριστικό των συναρτήσεων αυτών είναι οι αποστάσεις μεταξύ πελάτη και εγκατάστασης. Σε γενικές γραμμές όσο μεγαλύτερη η απόσταση τόσο μικρότερη η προσέλκυση και όσο μεγαλύτερο το 'βάρος' τόσο μεγαλύτερη η προσέλκυση. Το νόημα του 'βάρους' εξαρτάται από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Αν οι εγκαταστάσεις είναι μαγαζιά ή εμπορικά κέντρα βάρος μπορεί να είναι το μέγεθος του καταστήματος ή η ποικιλία των προσφερομένων προϊόντων. Σε μοντέλα που βρίσκουν εφαρμογή στην πολιτική το βάρος μπορεί να χαρακτηρίζει τη δημοσιότητα ενός πολιτικού προσώπου. Ακόμα, το βάρος μπορεί να αναφέρεται στη συχνότητα επίσκεψης κάποιου πελάτη σε κάποιο κατάστημα ή ακόμα και στη «σπουδαιότητα» του πελάτη. Αποτελεί δηλαδή πολύ συχνά, κάποιο συντελεστή που έχει ως στόχο να ποσοτικοποιήσει ένα μέγεθος (πχ συχνότητα επίσκεψης) κατ' αναλογία.

Η πέμπτη βασική παράμετρος είναι οι εγκαταστάσεις που πρόκειται να χωροθετηθούν. Ο αριθμός των εγκαταστάσεων προς τοποθέτηση από κάθε ανταγωνιστή μπορεί να είναι σταθερός ή να ποικίλει. Μπορεί για παράδειγμα μια αλυσίδα super market να σκοπεύει να εγκαταστήσει έναν αριθμό καταστημάτων σε συγκεκριμένο χώρο (πχ νομό) χωρίς να γνωρίζει όμως πόσα.

Η έκτη βασική παράμετρος που λαμβάνεται υπόψη είναι αυτή του σκοπού ή στόχου μιας εγκατάστασης. Αν και η μεγιστοποίηση του κέρδους είναι αντικειμενικός σκοπός, ορισμένες φορές και άλλοι στόχοι έχουν σημαντική σημασία. Ειδικά σε περιπτώσεις μοντέλων επανεγκατάστασης ή εισαγωγής νέων εγκαταστάσεων, σκοπός μπορεί να είναι η προστασία μιας περιοχής από την εγκατάσταση σε αυτή κάποιου ανταγωνιστή. Με τον τρόπο αυτό γίνεται προσπάθεια να επιτευχθεί όσο το δυνατό υψηλότερο κέρδος δεδομένου όμως ότι η τοποθέτηση κάποιου ανταγωνιστή θα γίνει στο χειρότερο δυνατό σημείο. Αυτή η συμπεριφορά ομοιάζει στο κριτήριο minimax της θεωρίας παιγνίων.

Η έβδομη βασική παράμετρος είναι αυτή του κανόνα της αγοράς. Έτσι μπορεί είτε αρχικά ο χώρος να θεωρείται κενός και όλες οι ανταγωνιστικές μονάδες εγκαθίστανται ταυτόχρονα ή να υπάρχει μια σειρά. Μια παρόμοια περίπτωση εμφανίζεται όταν ο αριθμός των μονάδων δεν αλλάζει αλλά έχουν όμως τη δυνατότητα επανεγκατάστασης, Παράλληλα, οι κανόνες της αγοράς μπορεί να θέτουν κάποιες προϋποθέσεις είτε στην εγκατάσταση μιας νέας μονάδας όπου δραστηριοποιούνται ανταγωνιστές είτε στην έξοδο της από το χώρο αυτό.

Η όγδοη και τελευταία παράμετρος καθορίζει κατά πόσο το μοντέλο είναι νομοτελειακό ή 'στοχαστικό'. Σε ένα νομοτελειακό μοντέλο θεωρείται ότι ο πελάτης ενισχύει αποκλειστικά τη μονάδα από την οποία προσελκύεται περισσότερο και αυτό αποτελεί τη βάση για τον περαιτέρω υπολογισμό του κέρδους και μεριδίου αγοράς. Στην περίπτωση του 'στοχαστικού' μοντέλου, χρησιμοποιείται η προτίμηση του πελάτη σε μια μονάδα ως δείκτης του ποσοστού των αγορών που θα κάνει από τη συγκεκριμένη εγκατάσταση. Λογικά, αυτά τα μοντέλα είναι και πιο πολύπλοκα από τα νομοτελειακά.

3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗΣ ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗΣ

Κατά τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί πολλά μαθηματικά υποδείγματα-μοντέλα ανταγωνιστικής χωροθέτησης. Ανάλογα με την εφαρμογή και τη χρήση που θέλει να κάνει ο αποφασίζων, επιλέγει και το πλέον κατάλληλο. Σε αυτό το κεφάλαιο, γίνεται μια συνοπτική περιγραφή των βασικότερων μοντέλων παραθέτοντας τα κύρια χαρακτηριστικά τους.

3.1 Το Πρόβλημα Μέγιστης Κάλυψης Re-Velle και Serra

Το αρχικό πρόβλημα μέγιστης Κάλυψης (MAXCAP) αναζητούσε την τοποθεσία ενός συγκεκριμένου αριθμού μονάδων μιας εταιρίας στην αγορά, όπου δραστηριοποιούνταν ανταγωνιστικά και μονάδες άλλων εταιριών. Ο ανταγωνισμός βασιζόταν αποκλειστικά στην απόσταση: μια αγορά καταλαμβανόταν από μια μονάδα αν δεν υπήρχε ανταγωνιστής σε κοντινότερη απόσταση. Αν μονάδες δύο εταιριών απείχαν εξίσου από μια αγορά, τότε η κάλυψή της μοιραζόταν εξίσου και στις δύο. Συνεπώς, ο σκοπός της νεοεισερχομένης εταιρίας ήταν να καταλάβει όσο το δυνατό μεγαλύτερο μερίδιο, σκοπός σχεδόν ισοδύναμος με τη μεγιστοποίηση του κέρδους.

Στη μελέτη που ακολουθεί παρουσιάζεται ένα μοντέλο σχετικά με την τοποθεσία και την πολιτική τιμών μιας εταιρίας, που επιθυμεί να εισέλθει σε μια αγορά, όπου δραστηριοποιείται μονοπωλιακά ένας ανταγωνιστής με διάφορα σημεία πώλησης. Σκοπός είναι η εύρεση των βέλτιστων σημείων χωροθέτησης και οι τιμές πώλησης, δεδομένου ότι ο ανταγωνιστής αντιδρά στη νέα είσοδο.

Θεωρούμε μια αγορά, όπου δραστηριοποιείται μια εταιρία (εταιρία B) με q μονάδες. Μια νέα εταιρία (εταιρία A) επιθυμεί να εισέλθει με p μονάδες και να ανταγωνιστεί την B σε επίπεδο θέσης και τιμών. Σκοπός και των δύο είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους. Θεωρούμε ότι τα προς πώληση προϊόντα δεν διαφέρουν από εταιρία σε εταιρία και ότι ο χώρος είναι σαφώς ορισμένος και ορίζεται από μια συνεχές γράφημα. Σε κάθε κορυφή του γραφήματος υπάρχει μια τοπική αγορά με έναν συγκεκριμένο αριθμό καταναλωτών που δημιουργούν μια ζήτηση για προϊόντα. Κάθε καταναλωτής αγοράζει ένα και μόνο προϊόν από την εταιρία που το πουλάει φθηνότερα. Ορίζουμε με i την κάθε αγορά και με I

το σύνολο των τοπικών αγορών που βρίσκονται στις κορυφές του γραφήματος. Οι μονάδες επιτρέπεται να εγκαθίστανται μόνο στις κορυφές του γραφήματος. Ορίζουμε με j την κάθε πιθανή τοποθεσία χωροθέτησης μιας μονάδας της εταιρίας A και με J το σύνολο αυτών, ενώ με J^B το σύνολο των τοποθεσιών που ήδη είναι εγκατεστημένες οι μονάδες της εταιρίας B. Και οι δύο εταιρίας έχουν την ίδια πολιτική τιμών επιβαρύνοντας με το κόστος μεταφοράς των πελάτη. Έτσι, η προτίμηση του καταναλωτή βασίζεται αποκλειστικά στο κόστος μεταφοράς και στην τιμή του προϊόντος. Οι καταναλωτές πάντα κάνουν τις αγορές τους από τη φθηνότερη μονάδα ασχέτως με το ιδιοκτησιακό καθεστώς που επικρατεί σε αυτή.

Ορίζουμε με d_{ij} την απόσταση μεταξύ της τοπικής αγοράς i και μιας μονάδας στο j και με t το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς. Και οι δύο εταιρίες χρεώνουν με σταθερές τιμές τους πελάτες τους, p^A και p^B, αντίστοιχα, ανεξάρτητα της τοποθεσίας τους. Επίσης, θεωρούμε ότι οι τιμές δε διαφέρουν μεταξύ των μονάδων. Έτσι, η τιμή π με την οποία χρεώνεται κάθε πελάτης σε κάθε τοπική αγορά i, μπορεί να γραφεί ως $\pi_i = p + d_{ibi}$, όπου b_i είναι η κοντινότερη μονάδα στο i. Η ζήτηση μιας τοπικής αγοράς i είναι συνάρτηση των χαρακτηριστικών της αγοράς και των τιμών που επικρατούν και καθορίζεται ως $D^i(\pi_i)$. Ορίζουμε ως $Di(p + td_{ibi})$ τη ζήτηση μιας τοπικής αγοράς I, που κάνει τις αγορές της από την πιο κοντινή μονάδα. Με τον τρόπο αυτό η συνάρτηση ζήτησης για κάθε τοπική αγορά i για την εταιρία ορίζεται ως εξής: αν b_i^A είναι η πιο κοντινή μονάδα της εταιρίας A στο i και b_i^B είναι η πιο κοντινή μονάδα της εταιρίας B, τότε η ζήτηση D_i^A είναι:

$$D_i^A(\pi^A, \pi^B) = D_i^A(\pi^A), \qquad if\ p^A + td_{ibi^A} < p^B + td_{ibi^B} \text{ ή}$$
$$D_i^A(\pi^A, \pi^B) = 0, \qquad if\ p^A + td_{ibi^A} \geq p^B + td_{ibi^B}$$

που σημαίνει ότι η εταιρία α θα καλύψει τη ζήτηση της τοπικής αγοράς i, αν η συνολική τιμή π_i^A (τιμή πώλησης συν κόστος μεταφοράς από την τοπική μονάδα της εταιρίας A) είναι μικρότερη από τη συνολική τιμή π_i^B της εταιρίας B.

Υποθέτουμε ότι η παραγωγή περιλαμβάνει για κάθε μονάδα ένα κόστος f_j που ποικίλει ανάλογα με την τοποθεσία, και ένα οριακό κόστος, u, ώστε για κάθε μονάδα τα κόστη να δίνονται από τη συνάρτηση $f_j + uq$, όπου q είναι οι παραγόμενες ποσότητες στη συγκεκριμένη τοποθεσία. Αν J^A είναι το σύνολο των πραγματικών τοποθεσιών των μονάδων της εταιρίας Α ($J^A \in J$), τότε το σύνολο των κερδών της εταιρίας Α είναι:

$$\Pi^A = (p^A - v)\sum_{i\in I} D_i^A(\pi^A, \pi^B) - \sum_{j\in J^A} f_j \qquad (2)$$

Το πρόβλημα για την εταιρία Α είναι να καθοριστούν οι τοποθεσίες από το σύνολο J^A και η τιμή p^A που μεγιστοποιεί τα κέρδη. Τα κέρδη βέβαια εξαρτώνται και από άλλους παράγοντες όπως η τοποθεσία και οι τιμές της ανταγωνίστριας εταιρίας καθώς και από τη συνάρτηση ζήτησης των καταναλωτών. Αν η συνάρτηση ζήτησης των τοπικών αγορών είναι εντελώς ανελαστική σε σχέση με τις τιμές, μπορεί να γραφεί ως $D_i = a_i$, όπου a_i είναι η συνολική ποσότητα που μια αγορά i θα καταναλώσει. Το πρόβλημα PMAXCAP γίνεται:

$$\mathrm{Max}\Pi = (p^A - v)(\sum_{i\in I} a_i y_i) - \sum_{j\in J} f_j x_j \qquad (3)$$

με τους περιορισμούς:

$$y_i^A \leq \sum_{j\in N_i(b_i^B)} x_j^A \qquad \forall i \in I \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^A = n^A \qquad (5)$$

$$y_i^A, x_j^A = (0,1) \qquad \forall i \in I, \forall j \in J$$

και

$$N_i(b_i^B) = \{\forall j \in J, \quad p^A + td_{ij} < p^B + td_{ib_i^B}\}$$

n^A = ο αριθμός των μονάδων της εταιρίας Α

οι μεταβλητές ορίζονται ως εξής:

y_i^A = 1, αν ο κόμβος i καταληφθεί από μονάδα της εταιρίας Α

y_i^A = 0, σε διαφορετική περίπτωση

x_j^A = 1, αν η εταιρία Α τοποθετήσει μια μονάδα στον κόμβο j

x_j^A = 0, σε διαφορετική περίπτωση

και ως PMAXCAP ορίζουμε το πρόβλημα που μεγιστοποιεί το κέρδος.

Το πρώτο σύνολο περιορισμών (4), εξαρτάται από το σύνολο $N_i(b_i^B)$, το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων. Κάθε ένας από τους κόμβους ζήτησης i έχει ένα σχετιζόμενο σύνολο $N_i(b_i^B)$, το οποίο περιλαμβάνει όλους τους πιθανούς κόμβους στους οποίους η εταιρία Α μπορεί να τοποθετήσει μια μονάδα και να ικανοποιήσει την τοπική ζήτηση της αγοράς i. Έτσι, αν μια από τις μεταβλητές x_j^A, είναι 1 (η μονάδα είναι εγκατεστημένη εντός της περιοχής του κόμβου i), τότε η μεταβλητή y_i^A μπορεί να πάρει την τιμή 1 που σημαίνει ότι ο κόμβος καταλαμβάνεται από μονάδα της εταιρίας Α. Τέλος, το τελευταίο σετ περιορισμών ορίζει τον αριθμό των μονάδων που η εταιρία Α πρόκειται να εγκαταστήσει.

Η αντικειμενική συνάρτηση καθορίζει το συνολικό κέρδος που μπρεί να επιτύχει η εταιρία Α με την τοποθέτηση των n^A μονάδων της. Για κάθε τοπική αγορά υπάρχει ζήτηση a_i που πρέπει να καλυφθεί. Αν y_i^A = 1, τότε ο όρος $(p^A - u)a_i$ προστίθεται στα έσοδα. Τα σταθερά κόστη πολλαπλασιάζονται με x_j, έτσι ώστε αν μια μονάδα ανοίξει στο j, το σταθερό της κόστος αφαιρείται από την αντικειμενική. Σημειώνεται ότι για να μεγαλώσουν τα κέρδη θα πρέπει να αυξηθεί ο αριθμός των μονάδων που εγκαθίστανται, αλλά από την άλλη αυτό αυξάνει τα σταθερά κόστη εγκατάστασης νέων μονάδων. Έχουμε δηλαδή δύο δυνάμεις που δρουν αντίθετα. Το σύνολο N_i περιλαμβάνει όλους τους υποψήφιους κόμβους, όπου οι καταναλωτές μιας τοπικής αγοράς i, θα επιλέξουν την εταιρία Α καθώς η τιμή π^A είναι μικρότερη από την τιμή της πλησιέστερης ανταγωνίστριας μονάδας b_i^B.

Αν η συνάρτηση ζήτησης δεν είναι απόλυτα ανελαστική, τότε το πρόβλημα PMAXCAP πρέπει να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\max \Pi = \left(p^A - v\right) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} D_i^A \left(\pi^A, \pi^B\right) x_{ij} - \sum_{j \in J} f_j z_j \qquad (6)$$

με τους περιορισμούς:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I \quad (7)$$

$$x_{ij} \leq z_j \qquad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (8)$$

$$\sum_{j \in J} z_j = n^A \qquad (9)$$

$$x_{ij}, z_j = (0,1) \quad \forall i \in I, \forall j \in J$$

όπου x_{ij} είναι 1 αν η περιοχή ζήτησης καλύπτεται από μονάδα της εταιρίας A, και το z_j δείχνει ότι υπάρχει εγκατεστημένη μονάδα στον κόμβο j όταν τιμή του γίνεται 1, αλλιώς η τιμή του είναι 0. Ο περιορισμός (7) αναθέτει μια περιοχή ζήτησης i σε μια μόνο μονάδα. Για να είναι εφικτή η ανάθεση, το j απαιτείται να έχει μονάδα εγκατεστημένη κάτι που ελέγχεται από τον περιορισμό (8):το i δεν μπορεί9 να ανατεθεί στο j εκτός και αν υπάρχει μια μονάδα στο j. Ο τελευταίος περιορισμός (9) περιορίζει το συνολικό αριθμό μονάδων που θα εγκαταστήσει η εταιρία A.

Το πρόβλημα PMAXCAP όπως σχηματίζεται δεν μπορεί να λυθεί με γραμμικό προγραμματισμό, καθώς η αντικειμενική συνάρτηση δεν είναι γραμμική και οι συναρτήσεις της τοπικής ζήτησης D_i^A (π_a, π_b) εξαρτώνται από την τιμή p^A, που είναι γνωστή εξ αρχής.

Ακολουθεί μια μέθοδος επίλυσης και για τα δύο προβλήματα όπως παρουσιάστηκε από τους Re Velle και Serra. Περιλαμβάνει μια διαδικασία από την οποία προκύπτουν οι βέλτιστες τοποθεσίες με μια μέθοδο έρευνας για να βρεθούν οι τιμές. Υπολογίζεται βασικά σε κάθε πιθανή εναλλαγή τοποθεσίας μιας μονάδας η τιμή που δίνει το μέγιστο κέρδος για την εταιρία A. Φαίνεται ότι, δεδομένων των τιμών και των τοποθεσιών της ανταγωνίστριας εταιρίας, αλλά και των τοποθεσιών της εισερχόμενης οι τιμές της εισερχόμενης μπορούν να παρουσιάσουν ένα τοπικό ακρότατο. Έστω ότι η τιμή πώλησης της ανταγωνίστριας είναι p^B και η εισερχόμενη κοστολογεί σε p^A, τότε τα κέρδη θα είναι $\Pi^A = \Pi^A(p^A,p^B)$. Αν τώρα η εταιρία που εισέρχεται, αυξήσει την τιμή κατά e, $p^{A'} = p^A + e$, δύο αντίθετες συνέπειες επιδρούν στα κέρδη. Για έναν κόμβο i:

- Αν $p^{A'} + td_{ib_i}{}^A < p^B + td_{ib_i}{}^B$, ο κόμβος i εξακολουθεί να καταλαμβάνεται από την πλησιέστερη μονάδα b_i^A. Έτσι τα τοπικά κέρδη στον κόμβο i θα αυξηθούν αν $(p^A\text{-}u)D_i(\pi^A,\pi^B) < (p^{A'} - u)D_i(\pi^{A'},\pi^B)$ ή με άλλα λόγια αν η ζήτηση είναι ανελαστική. Αντιθέτως, αν $(pA\text{-}u)D_i(\pi^A,\pi^B) > (p^{A'} - u)D_i(\pi^{A'},\pi^B)$ δηλαδή, αν η ζήτηση είναι ελαστική, τα κέρδη από τον κόμβο i θα μειωθούν.

- Αν $p^{A'} + td_{ibi}^A > p^B + td_{ibi}^B$, ο κόμβος i, καταλαμβάνεται από τον ανταγωνιστή με συνέπεια τη σχετική μείωση των κερδών της εταιρίας Α.

Συνεπώς, δύο παράγοντες επιδρούν στα κέρδη της εταιρίας Α όταν η τιμή p^A αυξάνει. Από τη μία, τα κέρδη μειώνονται καθώς κάποιοι κόμβοι ζήτησης περνούν στην ανταγωνίστρια εταιρία, αφού η τιμή π_i που πληρώνουν οι πελάτες καθίσταται μικρότερη και από την άλλη, ακόμα και αν ο κόμβος παραμείνει στην εισερχόμενη εταιρία μετά από την αύξηση της τιμής, τα κέρδη μπορεί να μειωθούν επειδή η αύξηση της τιμής δεν καλύπτει την απώλεια κερδών από την πτώση της ζήτησης. Βέβαια από την άλλη πλευρά, τα τοπικά κέρδη από την αύξηση της τιμής σε έναν συγκεκριμένο κόμβο ζήτησης, μπορεί να αυξηθούν καθώς αυτή η αύξηση υπερκαλύπτει την πτώση της ζήτησης σε άλλους κόμβους ζήτησης.

Η διαδικασία για να καθοριστεί η τιμή που μεγιστοποιεί τα κέρδη για την εταιρία Α, δεδομένων των συνόλων J^A (τοποθεσίες μονάδων της εταιρίας Α) και των συνόλων J^B (τοποθεσίες μονάδων της εταιρίας Β) και δεδομένων των τιμών της Β, p^B, είναι η ακόλουθη:

Αρχικά υπολογίζεται το άνω και κάτω άκρο p_l και p_u των τιμών της εταιρίας Α. Στη συνέχεια, επιλέγεται μια τιμή, p_c μέσα σε αυτά τα όρια και υπολογίζονται τα κέρδη. Ακολούθως, μειώνεται η p_c κατά ένα ποσό e και υπολογίζονται τα νέα κέρδη. Αν είναι μεγαλύτερα από τα προηγούμενα αποθηκεύεται η τιμή αυτή ως η καλύτερη λύση. Αν όχι απορρίπτεται. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε στο κάτω άκρο p_l ή μέχρι τα κέρδη που προκύπτουν να είναι μικρότερα από ένα συγκεκριμένο επίπεδο ανοχής τα σε σχέση με τα βέλτιστα κέρδη που έχουν βρεθεί από τους προηγούμενους υπολογισμούς. Το ίδιο θα πρέπει να γίνει και για τις τιμές (p_c, p_u). Η διαδικασία ξεκινάει από την τιμή που βρέθηκε στην αρχή και σε κάθε βήμα η τιμή αυξάνεται κατά e, υπολογίζονται τα κέρδη και συγκρίνονται με τη μέχρι στιγμής βέλτιστη λύση. Η διαδικασία σταματά όταν φτάσει η τιμή στην p_u ή όταν τα κέρδη που υπολογίζονται είναι μικρότερα κατά τ από τα βέλτιστα κέρδη που μέχρι στιγμής έχουν βρεθεί. Τα πάνω όριο βρίσκεται με τον υπολογισμό της υψηλότερης τιμής που η εταιρία Α μπορεί να θέσει ώστε να έχει μηδενικά έσοδα. Αυτό υπολογίζεται ως εξής: Για κάθε τοπική αγορά i, βρίσκουμε την τιμή που πληρώνει ο καταναλωτής στην κοντινότερη μονάδα της εταιρίας Β $p^B + td_{ibi}{}^B$ και το κόστος μεταφοράς στην κοντινότερη μονάδα της εταιρίας Α $td_{ibi}{}^A$. Αν $p_A = p^B + td_{ibi}{}^B - td_{ibi}{}^A$ οι δύο εταιρίες μοιράζονται τα κέρδη της τοπικής αγοράς. Αν το p_A είναι μεγαλύτερο, όλα τα τοπικά κέρδη του κόμβου i τα παίρνει ο ανταγωνιστής. Έτσι:

$$p_u = \max(p^B + td_{ib_i^B} - td_{ib_i^A}, i \in I)$$

Το κάτω όριο υπολογίζεται αν θέσουμε $p_l = u$

Μέχρι στιγμής έχουμε υπολογίσει τη βέλτιστη τιμή του p^A δεδομένων των τοποθεσιών των εταιριών Α και Β καθώς και των τιμών της Β. Ακολουθεί η διαδικασία εύρεσης των βέλτιστων τιμών και τοποθεσιών, η οποία έχει δύο φάσεις: Στην πρώτη φάση η εταιρία Α εγκαθιστά p μονάδες, με μια διαδικασία που σε κάθε επανάληψή της ο κόμβος με το καλύτερο κέρδος προστίθεται στο σύνολο των λύσεων, μέχρι να φτάσουμε στο n^A.

Στη δεύτερη φάση, η εταιρία Α ψάχνει για καλύτερη λύση με μετακίνηση των n^A μονάδων. Σε κάθε επανάληψη γίνεται μετακίνηση μιας μονάδας της Α και υπολογίζεται η βέλτιστη τιμή πώλησης και το αντίστοιχο κέρδος. Αν από τη μετακίνηση προκύπτει βελτιωμένη τιμή στα παραπάνω, θεωρείται το νέο σύνολο τοποθεσιών το καλύτερο. Σε άλλη περίπτωση, αγνοείται η μετακίνηση και επανέρχεται η προηγούμενη λύση. Αυτό γίνεται για κάθε κόμβο και μονάδα της Α και επαναλαμβάνεται μέχρι να μην υπάρχει καμία βελτίωση στις τιμές.

Από την παραπάνω διαδικασία όμως, εξετάζονται μόνο κόμβοι που βελτιώνουν την αντικειμενική με αποτέλεσμα να υπάρχει ο κίνδυνος να καταλήξει σε τοπικό ακρότατο. Για να αποφευχθεί αυτό, εξετάζεται μέρος του γειτονικού χώρου της λύσης ακόμα κι αν αυτό χειροτερεύει την αντικειμενική συνάρτηση.

Μέχρι στιγμής, θεωρούνταν ότι η εταιρία Β δεν αντιδρά στην είσοδο της Α και στις τιμές πώλησης που η τελευταία επιλέγει. Κάτι τέτοιο είναι απίθανο να συμβεί. Υποθέτουμε ότι η εταιρία Α γνωρίζει ότι η ανταγωνίστρια θα αντιδράσει, δεδομένου ότι γνωρίζει τις τιμές και τις τοποθεσίες εγκατάστασης των μονάδων της Α. Τώρα το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι η εύρεση των βέλτιστων τοποθεσιών και τιμών, δεδομένης της αντίδρασης της Β. Πρόκειται δηλαδή για ένα παιχνίδι "leader – follower" με ηγέτη (leader) την εταιρία Α.

Δεδομένων των τοποθεσιών και των δύο εταιριών, μπορούν να υπολογιστούν 'συναρτήσεις αντίδρασης' για τις τιμές και για τις δύο εταιρίες. Με τον όρο 'συναρτήσεις αντίδρασης' εννοείται η εύρεση της βέλτιστης τιμής δεδομένης της τιμής του ανταγωνιστή. Η συνάρτηση αντίδρασης της Α είναι τέτοια, ώστε $p^A = f^A(p^B)$, όπου για κάθε p^B υπάρχει ένα p^A που μεγιστοποιεί το Π^A. Ομοίως, υπάρχει και 'συνάρτηση αντίδρασης' $f^B(p^A)$ για την εταιρία Β δεδομένου του p^A. Αφού λοιπόν είναι γνωστές οι 'συναρτήσεις αντίδρασης' και για τους δύο ανταγωνιστές, η εταιρία Α μπορεί να χρησιμοποιήσει τη συνάρτηση της Β, ώστε να βρει την τιμή που μεγιστοποιεί τα κέρδη της δεδομένης της αντίδρασης της Β. Σε κάθε επανάληψη όπου υπολογίζεται το p_t^A, η εταιρία Α χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο υπολογισμού της Β, ώστε να αποκτήσει την τιμή πώλησης που θα έθετε η Β δεδομένης της p_t^A. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η τιμή $\hat{p}_t^B$ και μπορεί η Α να βρει τα κέρδη Π_t^A μέσω της επιλογής της $\hat{p}_t^A$ που μεγιστοποιεί τα κέρδη.

3.2 Αρχικό Μοντέλο Hotelling (Eiselt & Laporte)

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, τα ανταγωνιστικά μοντέλα επιτρέπουν στις υπόλοιπες εγκαταστάσεις να αντιδράσουν στις κινήσεις των ανταγωνιστών και ενδεχομένως να μετακινούν κάποιες από τις μονάδες. τους. Επομένως, το ερώτημα δεν είναι μόνο πού να τοποθετηθεί μια νέα εγκατάσταση, αλλά αν οι επαναλαμβανόμενες τοποθετήσεις (επανεγκαταστάσεις) συγκλίνουν σε ένα συγκεκριμένο μοτίβο. Στα παρακάτω γίνεται η προσπάθεια εύρεσης σημείων ισορροπίας μετά από επανεγκαταστάσεις με προφανή τη χρήση της θεωρία παιγνίων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε n μονάδες με x^k μεταβλητές (τοποθεσία, τιμή) της k μονάδας. Το $\bar{x}^k$ δείχνει ότι η μεταβλητή έχει τουλάχιστον προσωρινά οριστεί. Ορίζουμε $F_i(\bar{x})$ την αντικειμενική συνάρτηση της i μονάδας με ορισμένες μεταβλητές $\bar{x} = \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \ldots, \bar{x}_n$ και X^i είναι όλες οι πιθανές τιμές του x^i. Το πρόβλημα βελτιστοποίηση γίνεται για την ι μονάδα:

$$(\mathbf{P}_i): \quad \text{Maximize}$$
$$z_i = F_i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^{i-1}, x^i, \bar{x}^{i+1}, \ldots, \bar{x}^n)$$

Αυτού του είδους τα προβλήματα βελτιστοποίησης είτε λύνονται ταυτόχρονα, ένα πρόβλημα για κάθε εγκατάσταση, είτε κατά σειρά. Στη δεύτερη περίπτωση η πρώτη μονάδα τοποθετείται στη λογική ότι οι υπόλοιπες μονάδες θα παραμείνουν αμετάβλητες. Μόλις ολοκληρωθεί η βελτιστοποίηση η λύση ενσωματώνεται και προχωράει το πρόβλημα στη δεύτερη μονάδα. Μόλις ολοκληρωθεί η βελτιστοποίηση εγκατάστασης όλων των μονάδων έχει κλείσει ένας κύκλος βελτιστοποίησης και ξεκινάει ο δεύτερος, Μετά από μια σειρά τέτοιων κύκλων, μπορεί οι τοποθεσίες, οι τιμές, ή οποιεσδήποτε μεταβλητές να συγκλίνουν σε μια ισορροπία. Συγκεκριμένα ορίζουμε την ισορροπία κατά Nash ως μια κατάσταση στην οποία:

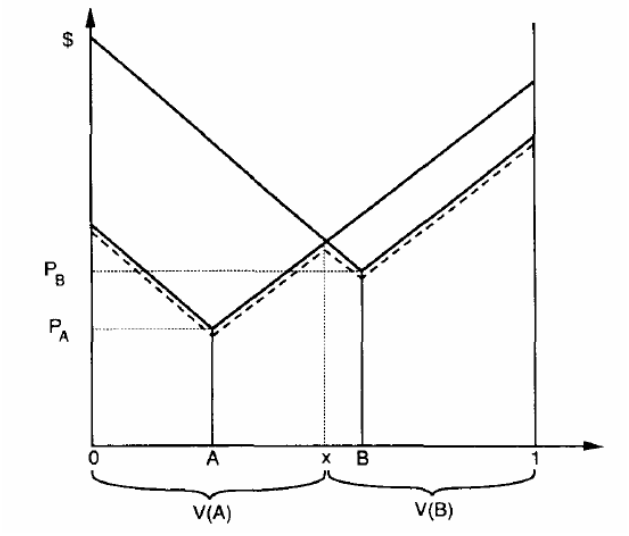
$$\max_{x^i \in X^i} F_i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{i-1}, x^i, \bar{x}^{i+1}, \ldots, \bar{x}^n)$$
$$\leqslant F_i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^{i-1}, \bar{x}^i, \bar{x}^{i+1}, \ldots, \bar{x}^n)$$
$$\forall i = 1, \ldots, n.$$

Με άλλα λόγια, ισορροπία κατά Nash επιτυγχάνεται όταν καμία από τις μονάδες δεν μπορεί να βελτιώσει την θέση της δεδομένου ότι δεν αλλάζουν οι μεταβλητές.

Μοντέλο Hotelling

Μετά από τα παραπάνω μπορούμε να περιγράψουμε το αρχικό μοντέλο Hotelling. Αν υποθέσουμε ότι η αγορά παρουσιάζεται ως ευθύγραμμο τμήμα μήκους l το οποίο είναι ομογενές. Αυτή η αγορά συνήθως χαρακτηρίζεται ως γραμμική. Οι πελάτες είναι ομοιογενώς διασκορπισμένοι και θα θεωρήσουμε για απλότητα ότι η συνολική ζήτηση ανά πελάτη είναι μοναδιαία. Δύο μονάδες σε πλήρη ανταγωνισμό πρόκειται να τοποθετηθούν στην αγορά βάσει δύο παραμέτρων: της τιμής και της τοποθεσίας. Ο πελάτης αγοράζει ένα προϊόν βάσει της τιμής του η οποία καθορίζεται από την τιμή πώλησης του προϊόντος συν το κόστος μεταφοράς. Αυτή την τιμή θα την ονομάσουμε τελική τιμή. Τα κόστη μεταφοράς θα θεωρηθούν γραμμικά και τα κόστη παραγωγής μηδενικά χάριν απλότητας. Με αυτά τα δεδομένα, το μοντέλο Hotelling καταλήγει ότι η κύρια δύναμη που καθορίζει την πορεία της επιλογής είναι μια ισχυρή έλξη μεταξύ των δύο μονάδων ώστε να τοποθετηθούν η μία κοντά στην άλλη. Το επιχείρημα αυτό βέβαια αγνοεί το γεγονός ότι οι μονάδες που γειτνιάζουν αναγκαστικά θα εμπλακούν σε πόλεμο τιμών. Αυτή είναι μια αντίθετη δύναμη η οποία ωθεί την εγκατάσταση των μονάδων μακριά η μια από την άλλη.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε δύο εγκαταστάσεις A και B που τοποθετούν a και b μονάδες στο αριστερό και δεξί άκρο της αγοράς αντίστοιχα, έτσι ώστε η A να βρίσκεται στα αριστερά της B. Οι τελικές τιμές των δύο μονάδων ορίζονται ως P_A και P_B και το κόστος μεταφοράς c. Αν η αγορά εκτείνεται από το 0 μέχρι το 1, τότε η τιμή που θα πληρώσει ένας πελάτης σε κάποιο σημείο $y \in [0; 1]$ είναι $P_A + cd_{yA}$ αν η αγορά γίνει από τη μονάδα A και $P_B + cd_{yB}$ αν η αγορά γίνει από τη μονάδα B, όπου d_{ij} είναι η απόσταση μεταξύ i και j. Καθώς ο πελάτης θα κάνει την αγορά του από τη μονάδα με τη συνολικά χαμηλότερη τιμή, η τιμή που τελικά θα πληρώσει δίνεται από το χαμηλότερο σημείο της καμπύλης που σχηματίζεται από τις δύο τύπου V συναρτήσεις στο παρακάτω σχήμα. Ειδικότερα, αν κάποιος πελάτης βρίσκεται ακριβώς στο σημείο x του είναι αδιάφορο από ποια από τις δύο μονάδες θα κάνει την αγορά του, ενώ οι πελάτες αριστερά του x προτιμούν τη μονάδα A και αυτοί δεξιά του x προτιμούν τη μονάδα B. Έτσι το τμήμα αγοράς της μονάδας A είναι το τμήμα 0x και της B το τμήμα x1. Αν ορίσουμε με V(A) και V(B) τα τμήματα αγοράς των μονάδων A και B αντίστοιχα (τμήματα Voronoi), τότε τα αντίστοιχα κέρδη θα είναι $Þ_A = V(A)\, p_A$ και $Þ_B = V(B)\, p_B$



Αν θεωρήσουμε ότι το όριο μεταξύ των δύο μονάδων είναι σε μια απόσταση ε μονάδων δεξιά της Α βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon = (1/2c)\left[\, p_B - p_A + c(1 - a - b)\right],$$

έτσι ώστε

$$\mathscr{P}_A = ap_A + \tfrac{1}{2}(1 - a - b) + (1/2c)\, p_A p_B - (1/2c)\, p_A^2$$

και ομοίως για τη μονάδα Β. Μια μερική παραγώγιση ως προς τις τιμές όπως πχ δ Þ $_A$ / δ p_B = 0 και δ Þ $_B$ / δ p_A = 0 καταλήγει σε δύο ταυτόχρονα γραμμικές εξισώσεις των οποίων οι λύσεις αποτελούν τις βέλτιστες τιμές:

$$\bar{p}_A = c\left[1 + \tfrac{1}{3}(a - b)\right]$$

Και

$$\bar{p}_B = c\left[1 - \tfrac{1}{3}(a - b)\right].$$

Τα βέλτιστα κέρδη τελικά είναι $\overline{\text{Þ}_A}$ και $\overline{\text{Þ}_B}$ αντίστοιχα. Καθώς δ$\overline{\text{Þ}_A}$/δa > 0 και δ$\overline{\text{Þ}_B}$/δb > 0 το συμπέρασμα είναι να αυξάνουν τα a και b – δηλαδή οι δυο μονάδες να μετακινούνται πιο κοντά η μια στην άλλη. Αυτό είναι το αρχικό συμπέρασμα Hotelling: και οι δύο μονάδες μαζεύονται στο κέντρο. Αυτό το αποτέλεσμα συχνά ονομάζεται αρχή της ελάχιστης διαφοροποίησης. Σε αντίθεση με τα παραπάνω αν θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το σύνολο του κόστους μεταφοράς θα πρέπει οι μονάδες να τοποθετηθούν στα σημεία $\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$ αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι για οποιοδήποτε ζεύγος τοποθεσιών, οι βέλτιστες τιμές είναι γνωστές. Ακόμα, έχει αποδειχτεί ότι για κόστη που περιγράφονται από δευτεροβάθμιες εξισώσεις και όχι γραμμικές, όχι μόνο δεν καταλήγει στην ίδια λύση, αλλά οι τοποθεσίες που προτείνει βρίσκονται στα δύο άκρα της αγοράς.

Γενικά τα μοντέλα που έχουν προταθεί μπορούν να καταταχθούν σε μία από τις παρακάτω κατηγορίες:

Α) Ίσες τελικές τιμές για όλες τις μονάδες

Β) Διαφορετικές θεωρήσεις των μονάδων σχετικά με την καταναλωτική συμπεριφορά

Γ) Κατά σειρά είσοδος στην αγορά

Δ) Στοχαστικά μοντέλα

Υπάρχουν βέβαια και μοντέλα που μπορούν να υπαχθούν ταυτόχρονα σε παραπάνω από μία κατηγορία.

Μοντέλα Μεγιστοποίησης Κέρδους σε Γραμμικές Αγορές

Αν θεωρήσουμε ότι μια μονάδα θεωρεί δεδομένη τη θέση και τις τιμές της ανταγωνίστριάς της, είναι σε θέση να βελτιστοποιήσει τη δική της χωροθέτηση και τις τιμές της. Στην πορεία η αντίπαλος βελτιστοποιεί εκ νέου τη θέση της και τις τιμές της βάσει των νέων δεδομένων. Η επανάληψη αυτής της διαδικασίας βελτιστοποίησης καταλήγει σε μια περιοδική αλλαγή θέσεων και τιμών. Δεν επέρχεται ισορροπία. Αυτό έδειξαν σε μελέτη τους οι Lerner και Singer το 1937. Ο Smithies (1941) θεωρεί σχέση μεταξύ τιμής και ποσότητας για να καθορίζει τη ζήτηση. Στη συνέχεια διακρίνει δύο αντίθετες δυνάμεις: την πιθανότητα απόκτησης μεγαλύτερου μεριδίου αγοράς (μετακινώντας τη μια μονάδα πιο κοντά στην αντίπαλη) και την απώλεια μεριδίου αγοράς καθώς η μονάδα θα έχει μετακινηθεί πιο μακριά από κάποια σημεία ζήτησης. Ο Smithies δε δέχεται την υπονόμευση του αντιπάλου καθώς θεωρεί ότι οδηγεί σε οικονομικό πόλεμο και περιγράφει διάφορα σενάρια από πλήρη συνεργασία μέχρι πλήρη ανταγωνισμό σχετικά τόσο με τις τιμές όσο και μα τις τοποθεσίες.

Τα παραπάνω δείχνουν μια σχετική αστάθεια στο μοντέλο Hotelling καθώς μικρές αλλαγές στις θεωρήσεις του μοντέλου έχουν δραματικές αλλαγές στο αποτέλεσμα. Ο Anderson (1987) θεωρεί ότι η μονάδα Α προηγείται στο παιχνίδι της χωροθέτησης και η Β ακολουθεί. Από την άλλη η μονάδα Β προηγείται στο παιχνίδι των αλλαγών τιμών και η Α ακολουθεί. Τελικά αποδεικνύεται ότι επέρχεται ισορροπία κατά την οποία η μονάδα Α είναι τοποθετημένη στο κέντρο της αγοράς και η Β στο ένα από τα άκρα της. Το κέρδος με αυτόν τον τρόπο της Α είναι σχεδόν διπλάσιο από της Β. Μια άλλη μελέτη, αυτή των Artle και Carruthers (1988) εισάγει ένα νέο δεδομένο. Κάποιος ιδιοκτήτης γης νοικιάζει εκτάσεις σε υποψήφιες προς χωροθέτηση εγκαταστάσεις σε γραμμική αγορά, με σκοπό τη μεγιστοποίηση του ενοικίου. Θεωρητικά όσο υψηλότερα τα κέρδη των μονάδων τόσο υψηλότερο το ενοίκιο που θα παίρνει αθροιστικά από τις μονάδες. Αν θεωρήσουμε ακόμα ότι, οι διαφορά στις τιμές μεταξύ των δύο μονάδων είναι μικρότερες από το κόστος μεταφοράς και αφήσουμε τον ιδιοκτήτη της γης να καθορίσει πόσες μονάδες θα εγκατασταθούν τελικά, αποδεικνύεται ότι σε δύο μονάδες θα επιτραπεί η εγκατάσταση. Θα τοποθετηθούν δε στα σημεία 0 και 0,4 και θα χρεώνουν με διαφορετικές τιμές τους πελάτες τους.

Ο Bonanno (1987) στη μελέτη του, αντί να θεωρεί η μονάδες που ανταγωνίζονται μεταξύ τους, εισάγει 'παίκτες' που ο καθένας έχει στην κατοχή του έναν αριθμό μονάδων. Ο ένας 'παίκτης' έχει δύο μονάδες και ο άλλος μία. Θεωρώντας κόστη που περιγράφονται από δευτεροβάθμιες εξισώσεις, συγκεκριμένα κόστη εγκατάστασης, ένα πάνω όριο τιμής που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο πελάτης για μία αγορά του και τον πρώτο 'παίκτη' να προηγείται στην τοποθέτηση και των δύο μονάδων του, αποδεικνύεται ότι τοποθετούνται στο $\frac{1}{4}$ και στα $\frac{3}{4}$ της αγοράς αντίστοιχα. Ο δεύτερος 'παίκτης' θα τοποθετήσει τη μονάδα του με τον τρόπο που μια μικρή μονάδα εισέρχεται σε ένα χώρο όπου κυριαρχεί ο μεγάλος ανταγωνιστής: μακριά από τις εγκαταστάσεις του. Αυτό επιτυγχάνεται ακριβώς στο κέντρο της αγοράς.

Μεγιστοποίηση του Μεριδίου Αγοράς σε Γραμμική Αγορά

Τα μοντέλα εδώ έχουν κοινό ότι οι τιμές που χρεώνουν όλες οι μονάδες είναι ίδιες. Αυτό μπορεί και να συμβαίνει στην πραγματικότητα σε περιπτώσεις όπως τα βενζινάδικα ή σε προϊόντα μεγάλων αλυσίδων. Το πιο απλό πρόβλημα αποτελείται από δύο ανταγωνιστικές μονάδες που σκοπεύουν να τοποθετηθούν στην αγορά στις βέλτιστες θέσεις. Έχει αποδειχτεί στα προηγούμενα ότι θα τοποθετηθούν και οι δύο στο κέντρο της αγοράς αφού και εδώ βρίσκει εφαρμογή η αρχή της ελάχιστης διαφοροποίησης. Οι Prescott και Visscher (1977) έδειξαν ότι και στην περίπτωση που οι μονάδες εισέρχονται κατά σειρά στην αγορά, ισχύουν τα ίδια αποτελέσματα. Ο σκοπός της μονάδας που εισέρχεται πρώτη είναι να τοποθετηθεί με τρόπο ώστε, να έχει τις μικρότερες δυνατές απώλειες από την είσοδο της δεύτερης, γεγονός που εξετάζουν και πολλά μοντέλα που βασίζονται στη θεωρία παιγνίων. Το παραπάνω αποτέλεσμα όμως, δεν μπορεί να γενικευτεί και για περιπτώσεις που οι μονάδες είναι περισσότερες από δύο. Οι Lerner και Singer (1937) έδειξαν ότι δεν υπάρχει ισορροπία στην περίπτωση τριών μονάδων. Δύο είναι τα σενάρια που προκύπτουν και εξαρτώνται από τη σειρά που εισέρχονται οι μονάδες στην αγορά και πιθανώς από τις αρχικές τους θέσεις. Πρώτα οι μονάδες θα συγκεντρωθούν στο κέντρο της αγοράς και η μία θα βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο ανταγωνιστών. Η μονάδα αυτή δεν έχει καθόλου μερίδιο αγοράς με αποτέλεσμα να μετακινηθεί αφήνοντας κάποια άλλη στη μέση. Στη φάση αυτή είτε αυτή η μετακίνηση επαναλαμβάνεται σε κοντινά από το κέντρο σημεία, είτε σχηματίζονται δύο γκρουπ από μία και δύο μονάδες αντίστοιχα και εξαπλώνονται μέχρι να φτάσουν το πρώτο και τρίτο τέταρτο της αγοράς οπότε πλέον σχηματίζεται ένα γκρουπ τριών μονάδων. Στη συνέχεια όλο το γκρουπ μετακινείται προς το κέντρο, οπότε και επαναλαμβάνεται η όλη διαδικασία. Οι Eaton και Lipsey (1975) δημιούργησαν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την επίτευξη ισορροπίας με n μονάδες σε γραμμική αγορά. Η ισορροπία επιτυγχάνεται αν και μόνο αν καμία από τις μονάδες δεν έχει μερίδιο αγοράς περισσότερο από το διπλάσιο κάποιας άλλης. Έδειξαν ότι για $n = 3$ δεν υπάρχει ισορροπία, ενώ για $n > 5$ υπάρχουν άπειρα σημεία ισορροπίας.

Ένα διαφορετικό αποτέλεσμα για τρεις μονάδες προκύπτει αν μπουν κατά σειρά οι μονάδες στην αγορά. Οι Prescott και Visscher (1977) έδειξαν ότι οι δύο μονάδες τοποθετούνται στο πρώτο και τρίτο τέταρτο της αγοράς και κάπου στο ανάμεσά τους η τρίτη. Αν επιτρέπεται η επανεγκατάσταση θα ξεκινούσαν οι αλλαγές και δε θα επιτυγχάνονταν ποτέ ισορροπία. Το μοντέλο του Teitz (1968) αποτελείται από τρεις μονάδες εκ των οποίων τις δύο τις έχει ο παίκτης Α και την τρίτη ο παίκτης Β. Χρησιμοποιώντας τη συνήθη στρατηγική μεγιστοποίησης του μεριδίου αγοράς οι μονάδες τοποθετούνται γύρω από το κέντρο της αγοράς και ξεκινούν οι μετεγκαταστάσεις. Ο παίκτης Α στοχεύει να αποκτήσει τα $\frac{3}{4}$ της αγοράς και ο Β το $\frac{1}{4}$. Αν και οι δύο παίκτες έχουν πολλαπλές μονάδες προς εγκατάσταση, επιτυγχάνεται ισορροπία, αν ο παίκτης με τις περισσότερες μονάδες ξεκινήσει τη διαδικασία εγκατάστασης και ακολουθήσει ο παίκτης με τις λιγότερες βάσει των δεδομένων που προκύπτουν από τον πρώτο.

Σύμφωνα με τους Prescott και Visscher (1977), αν θεωρήσουμε δύο μονάδες Α και Β με τη μονάδα Β να έχει ήδη εγκατασταθεί σε κάποιο σημείο y. Τότε η συνάρτηση μεριδίου αγοράς της Α μονάδας, που τοποθετείται στο σημείο x, θα είναι:

$$V(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}(y - x) & \text{if } x < y, \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = y, \\ (1 - x) + \frac{1}{2}(x - y) & \text{if } x > y, \end{cases}$$

που ναι μεν είναι γραμμικό αλλά είναι και ασυνεχές. Για να ξεπεραστεί αυτή η ασυνέχεια, ο Kohlberg (1983) προτείνει την εισαγωγή μιας παραμέτρου συμπεριφοράς, σύμφωνα με την οποία οι πελάτες λαμβάνουν υπόψη τους και το χρόνο αναμονής προκειμένου να εξυπηρετηθούν σε μία μονάδα πχ βενζινάδικο. Άρα παίζει ρόλο ο χρόνος για την κάλυψη της απόστασης μέχρι τη μονάδα συν το χρόνο αναμονής στη μονάδα. Όσο μεγαλύτερο το μερίδιο αγοράς μιας μονάδας τόσο μεγαλύτερος εμφανίζεται ο χρόνος αναμονής. Τότε, η συνάρτηση μεριδίου αγοράς είναι συνεχής και θα περίμενε κανείς να υπάρχει και ισορροπία για την περίπτωση των τριών μονάδων. Αποδεικνύεται όμως ότι δεν υπάρχει ισορροπία για $n > 2$

Μοντέλα στο Γενικότερο Χώρο

Η αναζήτηση για πιο ρεαλιστικά μοντέλα οδήγησε τους ερευνητές σε έρευνα χώρων που ομοιάζουν στην πραγματικότητα. Σαφώς οι δυσκολίες που αντιμετωπίζονται σε τέτοιους χώρους ακόμα δεν έχουν ξεπεραστεί. Οι Eaton και Lipsey (1975) ερευνούν προβλήματα ισορροπίας για $n = 3$ μέχρι και 17 μονάδες που προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν το μερίδιο αγοράς τους. Θεωρούν τρεις τρόπους με τους οποίους μπορεί να επιτευχθεί ισορροπία. Στον πρώτο, όλες οι μονάδες είναι τοποθετημένες σε ένα μικρό κύκλο γύρω από το κέντρο του δίσκου, στο δεύτερο είναι τοποθετημένες όπως και στον πρώτο με τη διαφορά όμως ότι μία μονάδα βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου και στον τρίτο θεωρούν τις μονάδες τοποθετημένες σε εξάγωνο με μια μονάδα στο κέντρο. Θεωρώντας διαδοχικές επανεγκαταστάσεις οι συγγραφείς υπολογίζουν τα μερίδια αγοράς όταν οι μονάδες επανεγκαθίστανται. Αποδεικνύεται ότι οι μονάδες στην πρώτη περίπτωση είναι τοποθετημένες σε σημεία μεγιστοποίησης μεριδίου τοπικά αλλά όχι και συνολικά. Το ίδιο ισχύει και στη δεύτερη περίπτωση με την κεντρική μονάδα να εμφανίζει ένα ακόμα πρόβλημα: για $n = 3$ δεν είναι ούτε τοπικά σε σημείο μεγιστοποίησης μεριδίου. Στην τελευταία περίπτωση το εξάγωνο δεν διατηρείται και διαλύεται μετά από έναν γύρο βελτιστοποίησης. Συμπερασματικά σε καμία περίπτωση δεν υπάρχει ισορροπία και οι μονάδες τείνουν να μετακινούνται η μία κοντά στην άλλη συμπεριφορά που παρατηρείται και στις γραμμικές αγορές.

3.3 Πολυκριτηριακή Ανάλυση σε Ανταγωνιστικό Περιβάλλον (Καρκαζής)

Το αρχικό πρόβλημα που μελετήθηκε από τον Hakimi (1983) ασχολείται με τη χωροθέτηση μονάδων σε ένα ανταγωνιστικό περιβάλλον ως εξής: Δεδομένου ότι, η εταιρία Α έχει ήδη εγκαταστήσει έναν αριθμό 'μαγαζιών' σε κατάλληλα επιλεγμένα σημεία του δικτύου και σε αυτά έχει μοιραστεί ο πληθυσμός των πελατών, μια άλλη εταιρία Β σκοπεύει να εισέλθει σε αυτό το δίκτυο εγκαθιστώντας έναν αριθμό p 'μαγαζιών' με στόχο την απόσπαση μεριδίου αγοράς. Θεωρείται ότι οι πελάτες βασίζουν την επιλογή τους αποκλειστικά στο κριτήριο της απόστασης και κάνουν την αγορά τους από το πλησιέστερο σε αυτούς 'μαγαζί'. Στο μοντέλο που ακολουθεί παρουσιάζεται μια γενίκευση των παραπάνω με τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- α) Η εταιρία Β μπορεί να επιλέξει από συγκεκριμένου τύπου 'μαγαζιά', και κάθε τύπος από αυτά σχετίζεται με διαφορετικό κόστος.
- β) Ο αριθμός και ο τύπος των 'μαγαζιών' δεν είναι προαποφασισμένα αλλά εξαρτώνται από έναν δεδομένο προϋπολογισμό και από τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού των πελατών.
- γ) Οι πελάτες βασίζουν την επιλογή τους σε δύο κριτήρια, αυτό της απόστασης και του επιπέδου του 'μαγαζιού'.

Θεωρούμε δίκτυο G που αποτελείται από n κομβικά σημείαV_i, i= 1 . . . . . n, με βάρη Wi= W(V_i) όπου το Wi αναφέρεται στον αριθμό των πελατών στο σημείο V_i. Για κάθε σημείο V_i , ένας αριθμός a_i ;έχει υπολογιστεί και αναφέρεται στο ποσό των χρημάτων που αναμένεται να δαπανηθεί από το μέσο πελάτη στο σημείο V_i, μέσα σε χρονικό διάστημα τ. Επιπροσθέτως, με d_{ij} συμβολίζουμε την απόσταση των σημείων V_i και V_j . Θεωρούμε ότι η εταιρία Α έχει ήδη εγκαταστήσει q μονάδες στα κομβικά σημεία του δικτυού G (όχι πάνω από μια μονάδα ανά σημείο). Σημειώνουμε εδώ, ότι οι μονάδες διαθέτουν η καθεμία έναν αριθμό ευχερειών που καθορίζει το επίπεδο εξυπηρέτησης από τις συνολικά m ευχέρειες. Δεδομένου ενός προϋπολογισμού M, η εταιρία Β σκοπεύει να εγκαταστήσει έναν αριθμό μονάδων στο δίκτυο με σκοπό την απόκτηση μεριδίου αγοράς και τη μεγιστοποίηση του κέρδους της. Σημειώνουμε τις παρακάτω μεταβλητές

f_i^k = το κόστος εγκατάστασης μιας μονάδας με ευχέρεια k στο σημείο V_i

$l(i)$ = το επίπεδο ευχέρειας στο σημείο V_i

A = τα σημείο μονάδων της εταιρίας A

B = τα σημεία μονάδων της εταιρίας B

N = τα συνολικά σημεία του δικτύου G

Βασικές Έννοιες της Μεθόδου

1. <u>Η έννοια της προτίμησης</u>

Δεδομένου του μεγάλου αριθμού των πελατών και του διαφορετικού τρόπου που κάθε πελάτης αντιδρά στη διαφοροποίηση των κριτηρίων απόστασης και επιπέδου εξυπηρέτησης (ευχέρεια καταστήματος), η κατανομή που περιγράφει αυτά τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού είναι του Gauss: $f(x) = 1 - e^{-x^2/2s^2}$, όπου το s είναι σταθερά που απεικονίζει κάποια χαρακτηριστικά προτίμησης του πληθυσμού.

Θεωρείται ότι οι πελάτες επιλέγουν βάσει δύο κριτηρίων:

(α) Του κριτηρίου επιπέδου εξυπηρέτησης (ευχέρειας καταστήματος) το οποίο καθορίζεται από τη συνάρτηση ευχέρειας:

$$P_\ell(j,k) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-x^2/2s_\ell^2} & \text{if } x > 0, \end{cases}$$
$$\text{where } x = l(j) - l(k), \quad j, k \in N. \qquad (1)$$

Για οποιονδήποτε πελάτη στο σημείο V_i, η $P_l(J, k)$ δίνει ένα μέτρο της προτίμησης για μια μονάδα στο V_j σε σχέση με μια μονάδα στο V_k που βασίζεται αποκλειστικά σε κριτήρια επιπέδου εξυπηρέτησης. Θεωρείται ακόμα ότι το κοινωνικοοικονομικό υπόβαθρο των πελατών δε διαφέρει από σημείο σε σημείο και με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται ότι η προτίμηση των πελατών σχετικά με την ευχέρεια των καταστημάτων δεν επηρεάζεται από άλλους παράγοντες από σημείο σε σημείο.

(β) Του κριτηρίου της απόστασης που εκφράζεται από τη συνάρτηση απόστασης:

$$P_d^i(j,k) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-x^2/2s_d^2} & \text{if } x > 0, \end{cases}$$
$$\text{where } x = d_{ik} - d_{ij}. \qquad (2)$$

Το P_d^i (j, k) εκφράζει για έναν πελάτη στο V_i ένα μέτρο της σχετικής προτίμησης για μία μονάδα V_j σε σχέση με μια μονάδα στο V_k που βασίζεται αποκλειστικά σε κριτήρια απόστασης. Οι τιμές s_l και s_d που εμφανίστηκαν παραπάνω μπορεί να είναι το αποτέλεσμα πειραματισμού σχετικά με τις προτιμήσεις των πελατών στην περιοχή του ενδιαφέροντος.

Η εκτίμηση των συναρτήσεων προτίμησης προέκυψε από την ακόλουθη διαδικασία: ένα δείγμα πελατών επιλέχθηκε και έδωσε πληροφορίες σχετικά με το πώς κατανέμει το συνολικό ποσό των χρημάτων, α, σε έναν συγκεκριμένο αριθμό προεπιλεγμένων 'μαγαζιών' ίδιας ευχέρειας l (επιπέδου εξυπηρέτησης). Η ίδια διαδικασία ακολουθήθηκε και για την περίπτωση του κριτηρίου της απόστασης. Και στις δύο περιπτώσεις έγινε προσαρμογή της καμπύλης κατανομής Gauss με ικανοποιητικά αποτελέσματα.

2. <u>Η Έννοια της Κυριαρχίας</u>

Οι Brans και Mareschal (1986) εισήγαγαν την ακόλουθη γενικευμένη έννοια της 'κυριαρχίας' Αν με S χαρακτηρίζουμε έναν πιθανό αριθμό δράσεων, και με P_i (i Є K) χαρακτηρίσουμε τις συναρτήσεις προτίμησης, λ,μ είναι αριθμοί στο διάστημα μεταξύ (0,1) τέτοιοι ώστε λ < μ και τα a, b Є S τότε η a (λ, μ) κυριαρχεί επί της b αν

$$P_j(a,\, b) > \mu, \quad j \in k, \qquad (3)$$
and
$$P_i(b,\, a) \leqslant \lambda, \quad V_i \in K.$$

Στο δικό μας πρόβλημα όπου S = N και K= (1,2) και η συνάρτηση κυριαρχίας εκφράζεται ως πίνακας κυριαρχίας D^i που συνδέεται με κάθε πελάτη στο V_i

$$D^i = \left(D^i_{jk}\right), \quad j,\, k \in A \cup B,$$

όπου:

$$D^i_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{if } \left(P_\ell(j,\, k) > \mu \right. \\ & \quad \left. \text{and } P^i_{\mathrm{d}}(k,\, j) \leqslant \lambda\right), \\ & \text{or } \left(P^i_{\mathrm{d}}(j,\, k) > \mu \right. \\ & \quad \left. \text{and } P_\ell(k,\, j) \leqslant \lambda\right), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (4)$$

Με λ χαρακτηρίζουμε ένα επίπεδο ανοχής μιας σχετικά μικρής αξίας (κοντά στο 0) που ουσιαστικά επιτρέπει μόνο ασήμαντες τιμές για το b βάσει κάποιου κριτηρίου επιλογής, και με μ χαρακτηρίζουμε την κυρίαρχη παράμετρο σχετικά μεγάλης αξίας (κοντά στη μονάδα). Απαιτείται για τουλάχιστον ένα κριτήριο το α να είναι ισχυρά προτιμώμενο σε σχέση με το b. Ένα άμεσο αποτέλεσμα των παραπάνω είναι:

$$\text{if } D^i_{jk} = 1, \text{ then } D^i_{kj} = 0 \qquad (5)$$
(the reverse is not always true).

Σημειώνουμε εδώ ότι το επίπεδο ανοχής λ εξαρτάται από το πρόβλημα και τις τιμές του, και καθορίζεται από τον αποφασίζοντα που στην περίπτωσή μας είναι ο πελάτης. Η συμπεριφορά του πελάτη τελικά (μοτίβο προτίμησης) αναπαρίσταται σε μια γραμμική δομή, κάθε ευθύγραμμο τμήμα της οποίας αντιστοιχεί σε μια μοναδική τιμή προτίμησης. Τα μήκη αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων, αποτελούν και μέτρο της προτίμησης του.

3. Η Έννοια της Δυναμικότητας

Σύμφωνα με τον ορισμό των Brans και Mareschal (1986) η δράση α είναι (λ, μ) αποδοτική, αν δεν κυριαρχείται κατά (λ, μ) από κάποια άλλη δράση του συνόλου δράσεων S.Το ζήτημα στην περίπτωσή μας είναι να βρούμε για οποιονδήποτε πελάτη στο σημείο V_j, το σύνολο όλων των E^j αποδοτικών κατά (λ, μ) σημείων. Από τον ορισμό της (λ, μ) αποδοτικότητας αμέσως προκύπτει ότι:

$$E^j = \{ k \in O = A \cup B : D^j_{ik} = 0 \ \forall i \in O \}. \qquad (6)$$

Συμπέρασμα: Δεδομένου του πίνακα κυριαρχίας D_i για κάποιον πελάτη στο σημείο V_i , ένα σημείο V_k θα είναι αποδοτικό κατά (λ, μ) αν όλα τα δεδομένα της k στήλης του πίνακα D_i είναι ίσα με το μηδέν.

4. Κανόνας επιλογής

Το βασικό σημείο αναφοράς ενός πελάτη στο σημείο V_i φια να επιλέξει μονάδα, είναι το E^i. Όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα, η κατανομή των προτιμήσεων του πελάτη χαρακτηρίζεται από μια γραμμική δομή που προσεγγίζεται από μια συνάρτηση Gauss. Τα στοιχεία του συνόλου E^i αντιστοιχούν στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα της ίδιας αξίας προτίμησης. Συμπερασματικά, ο πελάτης κατανέμει ισοδύναμα την προτίμησή του (και συνεπώς το ποσό των χρημάτων a) σε όλες τις μονάδες του συνόλου E^i. Συνεπώς αν ο αριθμός των στοιχείων του συνόλου E^i

είναι m, τότε το ποσό a_i/m θα αποδίδεται σε κάθε μία από τις μονάδες του συνόλου E^i.

Στρατηγική Επίλυσης του Προβλήματος

Οι μεταβλητές του προβλήματος αλληλεπιδρούν σε μεγάλο βαθμό μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, το κριτήριο της ευχέρειας (επιπέδου εξυπηρέτησης), επηρεάζεται από το κριτήριο της απόστασης και το αντίστροφο. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι δεν υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ της προτίμησης των πελατών και των χωροταξικών χαρακτηριστικών αυτής , αλλά συνδέονται με μια πολύπλοκη συνάρτηση. Αντί λοιπόν να υπολογιστεί ταυτόχρονα η θέση και η ευχέρεια των μονάδων η διαδικασία θα γίνει σε δύο στάδια:

α) Στο πρώτο στάδιο αναθέτονται ευχέρειες στις τοποθεσίες

β) Στο δεύτερο στάδιο αναθέτονται οι τοποθεσίες στις μονάδες με την επίλυση ενός τυπικού προβλήματος χωροθέτησης.

Ανάλυση του πρώτου σταδίου της μεθόδου

Θέτουμε Β το σύνολο των τοποθεσιών που υπάρχουν μονάδες της εταιρίας Β. Ορίζουμε Ο = Α U Β. Για κάθε k που δεν ανήκει στο Ο, υπολογίζεται ένας δείκτης ευχέρειας LI(k).

Αυτός ο δείκτης αντιπροσωπεύει την ευχέρεια ενός καταστήματος στη θέση V_k που καταλήγει σε ένα ελάχιστο καθαρό κέρδος για την εταιρία Β. Ο υπολογισμός του LI(k) βασίζεται στην εισαγωγή μιας ποσότητας $AC^i(k)$, η οποία δίνει ένα μέτρο της σχετικής προτίμησης των πελατών στο V_i προς ένα κατάστημα στη θέση V_k σε σύγκριση με τα καταστήματα της εταιρίας Α. Η ποσότητα $AC^i(k)$ λέγεται συντελεστής προσέλκυσης της θέσης V_k για τους πελάτες στο V_i. Μετά την ανάθεση ευχερειών στις διαφορές θέσεις το πρόβλημα σχηματίζεται ως εξής:

(P): Maximize

$$z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i \in N} f_i^{l(i)} y_i \qquad (7)$$

με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \sum_{i \in N} f_i^{l(i)} y_i \leqslant M, \quad x_{ij},\ y_i \in \{0,1\}, \\
&\text{(b)} \quad \sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad j \in N, \\
&\text{(c)} \quad x_{ij} \leqslant y_i, \quad i,\ j \in N,
\end{aligned}$$

Όπου a_j, είναι το μέσο ποσό χρημάτων που δαπανάται από έναν πελάτη στο V_j, $c_{ij} = a_j AC^J(i) w_j$ είναι το ποσό που η εταιρία Β παίρνει από τους πελάτες στο σημείο V_i , z είναι το συνολικό καθαρό κέρδος της εταιρίας Β που σχετίζεται με τη λύση x_{ij}, y_i και Μ είναι ο προϋπολογισμός. Επιπλέον, x_{ij} = 1 ή 0 ανάλογα με το αν οι πελάτες στο j εξυπηρετούνται από μια μονάδα στο ι και y_i = 1 ή 0 ανάλογα με το αν μια μονάδα της εταιρίας Β βρίσκεται στο σημείο i.

Βάσει της παραπάνω συνάρτησης P συνδυάζουμε πολλαπλασιαστές Lagrange λ_j , $j \in N$, με τους περιορισμούς ζήτησης, σχέση 2, μεταφέρουμε στην αντικειμενική συνάρτηση και έχουμε:

$$\text{(P): Maximize} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \left((c_{ij} - \lambda_j) x_{ij} - f_i^{l(i)} y_i \right) + \sum_{j \in N} \lambda_j \qquad (8)$$

με τους περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \sum_{i \in N} f_i^{l(i)} y_i \leqslant M, \\
&\text{(b)} \quad x_{ij} \leqslant y_i, \quad i,\ j \in N, \\
&\qquad x_{ii},\ y_i \in \{0,1\}.
\end{aligned}$$

Ορίζουμε τη βέλτιστη τιμή της P που προκύπτει από γραμμικό προγραμματισμό ως $U_0(p)$ και τη τιμή της βέλτιστης λύσης της αντικειμενικής συνάρτησης (x, y) ως b (x, y) και προκύπτει:

$$G(\lambda) \equiv U_0(P_\lambda) \geqslant U_0(P) \geqslant f(x, y) \qquad (9)$$

για κάθε λ και για κάθε εφικτή λύση (x, y) της P

έτσι:

$$G(\lambda^*) = \min_{\lambda} G(\lambda) \geqslant U_0(P). \qquad (10)$$

Το πρόβλημα που προκύπτει από τη σχέση 10, αντιμετωπίζεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση προτείνεται ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό του πάνω ορίου G (λ′) της βέλτιστης τιμής του προβλήματος P, όπου λ΄ είναι μια προσέγγιση του βέλτιστου πολλαπλασιαστή λ*. Στη δεύτερη φάση εξάγουμε από το λ΄ τα στοιχεία του συνόλου B (τα σύνολο των σημείων που έχει μονάδες η εταιρία B) και το συνολικό καθαρό κέρδος της εταιρίας B.

Άρα, ορίζουμε:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\lambda) &= C_{ij} - \lambda_j, \\ T_i(\lambda) &= \sum_{j \in N} \max\{0, C_{ij}(\lambda)\} - f_i^{l(i)}, \end{aligned} \qquad (11)$$

και θεωρούμε δύο περιπτώσεις για τη βέλτιστη τιμή y_i^* της y στην P_λ

i) Αν $y_i^*= 1$ τότε το x_{ij} μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα [0, 1]. Αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης το x_{ij} θα πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή, δηλαδή 1 αν $C_{ij}(\lambda) > 0$ και τη μικρότερη δυνατή τιμή δηλαδή 0 αν $C_{ij}(\lambda) \leq 0$

ii) Αν $y_i^*= 0$ τότε $x_{ij} = o$

Άρα συνοψίζοντας:

$$x_{ij}^* = \begin{cases} 1 & \text{if } y_i^* = 1 \text{ and } C_{ij}(\lambda) > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (12)$$

Η αντίστοιχη συνεισφορά του $C_i^*(\lambda)$ στην αντικειμενική συνάρτηση θα είναι:

$$\begin{cases} C_i^*(\lambda) = T_i(\lambda) & \text{if } y_i^* = 1, \\ C_i^*(\lambda) = 0 & \text{if } y_i^* = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Αν έλειπε ο πρώτος περιορισμός της P_λ οι βέλτιστες τιμές του y_i θα υπολογίζονταν εύκολα:

$$y_i^* = \begin{cases} 1 & \text{if } T_i(\lambda) > 0, \\ 0 & \text{if } T_i(\lambda) \leqslant 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Δεδομένου όμως ότι, I ={ i: $T_i(\lambda) > 0$} το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με:

$$(\mathrm{K}): \text{Maximize } \sum_{i \in I} T_i(\lambda)\, y_i$$

Με τον περιορισμό:

$$\sum_{i \in I} f_i^{l(i)} y_i \leqslant M, \quad y_i \in \{0, 1\}.$$

Για τη λύση του K ορίζουμε:

$$r_i = T_i(\lambda)/f_i^{l(i)}, \quad i \in I, \tag{15}$$

Και ταξινομούμε τα r_i σε φθίνουσα σειρά οπότε προκύπτει:

$$r_{p(1)} \geqslant r_{p(2)} \geqslant \cdots \geqslant r_{p(n_I)}, \quad \text{where } |I| = n_I, \tag{16}$$

Διαλέγουμε φ τέτοιο ώστε:

$$F(\varphi) = f_{p(1)}^{l(p(1))} + \cdots + f_{p(w)}^{l(p(w))} \leqslant M < F(\varphi + 1). \tag{17}$$

Τότε η βέλτιστη λύση της K και συνεπώς της P_λ είναι:

$$G(\lambda) = \sum_{i=1}^{\varphi} T_{p(i)}(\lambda) \tag{18}$$

Και η βέλτιστη λύση (y*, x*) της Pλ

$$\begin{aligned} y_i^* &= \begin{cases} 1 & \text{if } i \in I^*, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ &\text{where } I^* = \{ p(i) : i \in I \}, \\ x_{ij}^* &= \begin{cases} 1 & \text{if } y_i^* = 1 \text{ and } C_{ij}(\lambda) > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

Ελαχιστοποίηση της Συνάρτησης Lagrange

Θεωρούμε οποιοδήποτε διάνυσμα λ και διεύθυνση d = d(λ). Θα πρέπει ουσιαστικά να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση G (λ) στη διεύθυνση d, δηλαδή:

$$K(t) = G(\boldsymbol{\lambda} + t \cdot \boldsymbol{d}) \qquad (20)$$

Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη προσέγγιση:

$$\frac{\mathrm{d}K(t)}{\mathrm{d}t} \simeq \frac{K(t+\Delta t) - K(t)}{\Delta t} \qquad (21)$$

Σε οποιοδήποτε σημείο λ, η προκύπτουσα διεύθυνση $S^{(\lambda)}$ = ($S_j\lambda$) ορίζεται ως εξής:

$$S_j^{(\lambda)} = 1 - \sum_{i \in N} x_{ij}^*, \qquad (22)$$

όπου x* είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος P_λ.

Αν $S^{(\lambda)}$ = 0 τότε το λ είναι το βέλτιστο σημείο, δηλαδή το σημείο που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση G (λ). Σημειώνουμε ότι αφού $S^{(\lambda)}$ = 0

(i) $\Sigma_{i \in N} x_{ij}^* = 1$ που σημαίνει ότι η λύση (y*, x*) είναι εφικτή για το πρόβλημα P

(ii) $U_0(P_\lambda) = f\,(y^*, x^*)$

Από τις σχέσεις i και ii προκύπτει ότι το λ είναι το βέλτιστο σημείο.

3.4 Πρόβλημα Ανταγωνιστικής Χωροθέτησης και Σχεδιασμού (Aboolian, Berman, Krass)

Στην μελέτη που ακολουθεί, αντιμετωπίζεται ταυτόχρονα το πρόβλημα της χωροθέτησης και του σχεδιασμού για ένα σύνολο νέων μονάδων που ανταγωνίζονται μεταξύ τους, αλλά και με προϋπάρχουσες μονάδες. Γίνεται προσπάθεια να απαντηθούν τα παρακάτω ερωτήματα:

1. Πόσες νέες μονάδες θα πρέπει να εγκατασταθούν;
2. Πού θα πρέπει να εγκατασταθούν;
3. Τι είδους μονάδες (μέγεθος, ποικιλία προϊόντων κλπ) θα πρέπει να εγκατασταθούν;

Προφανώς τα παραπάνω ερωτήματα αλληλοσυνδέονται. Για παράδειγμα ο αριθμός των μονάδων προς χωροθέτηση επηρεάζεται από το μέγεθος των μονάδων. Ακόμα, θεωρείται ότι οι πελάτες μοιράζουν τη ζήτηση τους για προϊόντα στις μονάδες, κατ' αναλογία με τη χρησιμότητα που αντλούν από τη συγκεκριμένη μονάδα σε σχέση με τη συνολική χρησιμότητα όλων των μονάδων. Αυτή η χρησιμότητα που αντλείται από μια συγκεκριμένη μονάδα θεωρείται ότι δεν αυξάνει σε σχέση με την απόσταση που διανύει για να φτάσει κανείς στη μονάδα, αλλά και δε μειώνεται σε σχέση με την ελκυστικότητα της μονάδας. Με τον όρο ελκυστικότητα εννοούμε τα χαρακτηριστικά σχεδίασης όπως το μέγεθος, η εικόνα, η προσβασιμότητα, η ποικιλία προϊόντων, κ.α. Συνεπώς, κάθε μονάδα καλύπτει ένα μερίδιο της συνολικής ζήτησης κάθε πελάτη. Υπάρχουν συγκεκριμένοι κόμβοι ζήτησης και συγκεκριμένοι κόμβοι όπου μπορούν να χωροθετηθούν οι μονάδες. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το μοντέλο καλύπτει πραγματικά προβλήματα όπως:

1. <u>Κανιβαλισμός της ζήτησης μεταξύ μονάδων της ίδιας και ανταγωνιστικών εταιριών</u>. Για παράδειγμα αναφέρουμε την αναδιανομή της ζήτησης ως συνέπεια της εισόδου νέων μονάδων ή αλλαγών σε υπάρχουσες.
2. <u>Επέκταση της αγοράς</u>: αύξηση της ζήτησης καθώς αυξάνεται το επίπεδο των υπηρεσιών που παρέχονται από τις υπάρχουσες μονάδες.
3. <u>Αλληλεπίδραση μεταξύ αποφάσεων χωροθέτησης και σχεδιασμού</u>: αφού η επισκεψιμότητα που εμφανίζει ένας πελάτης σε ένα συγκεκριμένο κατάστημα είναι συνέπεια της χρησιμότητας που αντλεί από αυτό και η χρησιμότητα εξαρτάται από τη θέση και από το σχεδιασμό της μονάδας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η απόσταση μεταξύ πελάτη και μονάδας αποτελεί χαρακτηριστικό του σχεδιασμού της.

Παρακάτω δίνονται κάποιοι ορισμοί σχετικά με το μοντέλο που ακολουθεί.

Ορισμοί

P Ένα μετρικό διάστημα

N Ένα σύνολο σημείων ζήτησης, $N = \{1, 2, \dots, n\}$

ω_i Το βάρος της ζήτησης του σημείου $i \in N$

$P \in N$ Ένα σύνολο πιθανών θέσεων της μονάδας συμπεριλαμβανομένων των θέσεων των υπαρχουσών μονάδων

$C \in P$ Ένα υποσύνολο των μονάδων που ελέγχονται από τον ανταγωνισμό

$S = P - C$ Το σύνολο των εγκαταστάσεων που ελέγχονται από τον αποφασίζοντα ("επιχείρηση")- μερικές από τις εγκαταστάσεις μπορεί να είναι "ψεύτικες"

D_{ij} Μια συνάρτηση απόστασης i, j Є N

A_j Η ελκυστικότητα της μονάδας j, Aj > 0

A Ένα διάνυσμα S – διαστάσεων των στοιχείων A_j, j Є S

U_{ij} Η χρησιμότητα των πελατών στο σημείο i Є N για τη μονάδα που βρίσκεται στη θέση j Є P

U_i Η συνολική χρησιμότητα για τους πελάτες της αγοράς i Є N

MS_{ij} Το μερίδιο ζήτησης της αγοράς i που κατέχεται από τη μονάδα j

g(U) Η συνάρτηση ζήτησης

$U_i(S)$ Η συνολική χρησιμότητα για τους πελάτες της αγοράς i από τις μονάδες που ελέγχονται από την εταιρία

$U_i(C)$ Η συνολική χρησιμότητα για τους πελάτες της αγοράς i από τις μονάδες που ελέγχονται από τους ανταγωνιστές

MS_i Το συνολικό μερίδιο αγοράς i που ανήκει στην εταιρία

λ Η παράμετρος ελαστικότητας, λ> 0

β Η παράμετρος ευαισθησίας της απόστασης, β> 0

K Ο αριθμός των χαρακτηριστικών ελκυστικότητας

Y_{jk} Το επίπεδο βελτίωσης πέρα από το βασικό σχεδιασμό σε σχέση με τα k χαρακτηριστικά σχεδιασμού για τη μονάδα j

a_j Το βασικό επίπεδο ελκυστικότητας

I{j} Η συνάρτηση κατάστασης που είναι ίση με 1 εάν η μονάδα ανοίγει στο j και 0 διαφορετικά

θ_k Η παράμετρος ευαισθησίας της συνάρτησης χρησιμότητας για το χαρακτηριστικό k, $0< \theta_k \leq 1$

f_j Το σταθερό κόστος που συνδέεται με το άνοιγμα μιας βασικής μονάδας στη θέση j Є S

$c_j(y_{jk})$ Το κόστος βελτίωσης του χαρακτηριστικού k του βασικού σχεδίου στο επίπεδο $y_{jk} > 0$

B Ο συνολικός διαθέσιμος προϋπολογισμός

V_k Το σύνολο των πιθανών τιμών για τα χαρακτηριστικά απόφασης k

x_j Μια μεταβλητή απόφασης που είναι ίση με 1 εάν η μονάδα ανοίξει στη θέση j και 0 διαφορετικά

M Ένας μεγάλος αριθμός

y_k^{max} Το ανώτατο όριο των k χαρακτηριστικών

Υποθέτουμε ότι η ζήτηση των καταναλωτών συγκεντρώνεται στο N στο μετρικό διάστημα P και ότι οι πελάτες σε οποιοδήποτε σημείο i Є N είναι ίδιοι όσον αφορά τις προτιμήσεις τους στην εταιρεία και τις αποφάσεις για τις δαπάνες τους. Κάθε πιθανή θέση P υποθέτουμε ότι είναι ικανή για την υποστήριξη ακριβώς μιας μονάδας. Μπορούν πάντα να προστεθούν νέες μονάδες εάν οι τοποθεσίες είναι σε θέση να υποστηρίξουν πολλαπλές εγκαταστάσεις. Υποθέτουμε ότι το P χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση απόστασης d_{ij}, i, j Є N . Εάν το P αντιπροσωπεύει ένα δίκτυο N κόμβων, η συνάρτηση d_{ij} μπορεί να οριστεί ως η πιο σύντομη διαδρομή απόστασης. Όπως ήδη αναφέρθηκε, υποθέτουμε ότι η χρησιμότητα u_{ij} μπορεί να θεωρηθεί ως μια αναλογία μιας μη μειούμενης συνάρτησης της ελκυστικότητας A_j της μονάδας και μιας μη αυξανόμενης συνάρτησης της διανυόμενης απόστασης d_{ij}:

$$u_{i,j} = \frac{F(A_j)}{H(d_{ij})}. \qquad (1)$$

Σημειώνουμε ότι το $F(A_j)$ εξαφανίζεται στο 0, και έτσι οι ανύπαρκτες μονάδες μπορούν να αντιπροσωπευθούν ως "ψεύτικες μονάδες" έχοντας μηδενική ελκυστικότητα, δηλαδή, $A_j = 0$. Κατά συνέπεια, μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι όλες οι περιοχές j Є P περιέχουν μονάδες, μερικές από τις οποίες μπορεί να είναι ψεύτικες. Υποθέτοντας ότι οι αποφάσεις ελκυστικότητας A_j για όλα τα j Є S έχουν ήδη ληφθεί και ότι οι τιμές A_j είναι γνωστές για τις ανταγωνιστικές μονάδες j Є S, μπορούμε να ορίσουμε:

$$U_i = \sum_{j \in S \cup C} u_{ij}, \qquad (2)$$

υποθέτουμε ότι το μερίδιο αγοράς MS_{ij} είναι:

$$MS_{ij} = \frac{u_{ij}}{U_i}. \qquad (3)$$

όπου:

$$U_i(S) = \sum_{j \in S} u_{ij}, \quad and \quad U_i(C) = \sum_{j \in C} u_{ij}, \qquad (4)$$

$$MS_i = \frac{U_i(S)}{U_i(S) + U_i(C)} = \frac{U_i(S)}{U_i}. \qquad (5)$$

Υποθέτουμε ότι η συνολική ζήτηση των καταναλωτών στο i Є N είναι ελαστική, και είναι συνάρτηση της συνολικής χρησιμότητας U_i. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g(U_i)$ ορίζεται με $0 \le g(U_i) \le 1$, καθορίζοντας το ποσοστό της μέγιστης διαθέσιμης ζήτησης ω_i : δηλαδή, για μια δεδομένη τιμή της συνολικής χρησιμότητας U_i, η συνολική ζήτηση των καταναλωτών στο i δίνεται από την $\omega_i g(U_i)$, και οι μονάδες της εταιρίας καταλαμβάνουν ζήτηση $\omega_i g(U_i) MS_i$. Ο στόχος της εταιρίας είναι να καθορίσει τις βέλτιστες τιμές του A_j για όλο τα j Є S, (όπου οι θετικές τιμές του A_j δείχνουν ότι μια νέα μονάδα πρέπει να εγκατασταθεί στο j), ώστε να μεγιστοποιηθεί η γενική ζήτηση που εξυπηρετείται από τις εγκαταστάσεις στο S, Η ζήτηση ορίζεται ως:

$$Z(A) = \sum_{i \in N} \omega_i g(U_i) MS_i. \qquad (6)$$

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιείται η εκθετική μορφή της ζήτησης, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά:

$$\mathrm{g(U)} = 1 - \exp(-\lambda U) \qquad (7)$$

Σημειώνεται ότι όταν η παράμετρος ελαστικότητας λ, είναι πολύ μεγάλη (λ Є ∞), η ζήτηση είναι ανελαστική — δηλ., οι δαπάνες των πελατών στο i είναι πολύ κοντά στο ω_i ανεξάρτητα από τη χρησιμότητα που παρέχεται από τις εγκαταστάσεις. Αντίθετα, όταν το λ τείνει στο 0, η ζήτηση είναι ελαστική — μια μικρή αλλαγή της συνολικής χρησιμότητας U_i έχει ως αποτέλεσμα μεγάλες αλλαγών των δαπανών $\omega_i g(U_i)$. Παρακάτω ορίζεται με λεπτομέρεια η χρησιμότητα u_{ij} και οι παράγοντες ελκυστικότητας A_j,

$$u_{ij} = A_j (d_{ij} + 1)^{-\beta}, \qquad i \in N, j \in P, \qquad (8)$$

Η σχέση (8) ορίζει ότι η χρησιμότητα, που μειώνεται με την απόσταση, καθορίζεται εξ ολοκλήρου από τον όρο ελκυστικότητας A_j για τους πελάτες που βρίσκονται στον ίδιο κόμβο με τη μονάδα. Σημειώνεται ότι αυτή η σχέση υποθέτει ότι μια μονάδα θα προσελκύσει αυτόματα όλους τους καταναλωτές ανεξάρτητα από το πόσο ελκυστική είναι — υπόθεση που θεωρείται ως μη ρεαλιστική, ειδικά στις πρακτικές καταστάσεις όπου το γεωγραφικό στοιχείο λαμβάνεται πάντα υπόψη και ένα σημείο ζήτησης του μοντέλου αντιπροσωπεύει μια αρκετά μεγάλη γεωγραφική περιοχή. Επιπλέον, αυτή η εναλλακτική μορφή οδηγεί σε τεχνικές δυσκολίες εφόσον $u_{ij} \rightarrow \infty$ όταν $d_{ij} \rightarrow 0$.

Ο όρος ελκυστικότητας A_j ορίζεται ως εξής. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν K ιδιότητες ελκυστικότητας, ποιοτικές ή ποσοτικές, όπως π.χ. το μέγεθος της μονάδας, το σύστημα σηματοδότησης της, ο αριθμός των χώρων στάθμευσης της, κ.α. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για κάθε πιθανή περιοχή εγκατάστασης j, υπάρχει ένα "βασικό" σχέδιο εγκατάστασης με επίπεδο ελκυστικότητας a_j, το οποίο ισχύει εάν υπάρχει μια ανοικτή μονάδα στο σημείο j και όλες οι μεταβλητές $y_{jk} = 0$. Κατά συνέπεια, η θετική τιμή του y_{jk} μπορεί να ερμηνευθεί ως το επίπεδο βελτίωσης πέρα από το βασικό σχέδιο όσον αφορά τις ιδιότητες k. Η ελκυστικότητα A_j μιας μονάδας στο j Є P καθορίζεται ως εξής:

$$A_j = I\{j\} a_j \prod_{k=1}^{K} (1 + y_{jk})^{\theta_k}, \qquad (9)$$

όπου I{j} = 1 όταν η μονάδα βρίσκεται εγκατεστημένη στο j, και 0 διαφορετικά.

Οι τιμές του yjk ανήκουν σε ένα ορισμένο διάστημα $[0, y_k^{max}]$ όπου, όπως σημειώθηκε νωρίτερα, το $y_{jk} = 0$ δείχνει το βασικό σχέδιο όσον αφορά το χαρακτηριστικό k. Για τις ιδιότητες που είναι ποιοτικές, το y_{jk} ανήκει σε ένα ορισμένο ιδιαίτερο σύνολο με τις πιθανές τιμές να κωδικοποιούνται έτσι ώστε το 0 να αντιπροσωπεύει το βασικό σχέδιο, και οι άλλες τιμές να τίθενται κατά αυξανόμενη σειρά ελκυστικότητας, δηλ., $y'_{jk} > y_{jk}$, πράγμα που σημαίνει ότι το σχέδιο y'_{jk} είναι προτιμότερο από το y_{jk} όσον αφορά τις ιδιότητες k. Σημειώνεται ότι το A_j αυξάνεται στο y_{jk}. Επιπλέον, εάν $\theta_k \leq 1$, για κάθε k, το A_j είναι κοίλο στο y, πράγμα που υπονοεί ότι η οριακή ελκυστικότητα μειώνεται καθώς πραγματοποιούνται βελτιώσεις στο σχεδιασμό. Υποθέτουμε ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων α, j Є P, θ_k, K Є {1, , K}, και β είναι διαθέσιμες εκ των προτέρων.

Για να ολοκληρωθεί η διατύπωση του μοντέλου, πρέπει να καθοριστούν οι σταθερές και μεταβλητές δαπάνες που συνδέονται με την επιλογή ενός επιπέδου ελκυστικότητας για τις ιδιότητες k και την περιοχή j. Το σταθερό κόστος f_j μπορεί να θεωρηθεί ως το κόστος μετατροπής της ελκυστικότητας για την περιοχή j από το 0 στο a_j. Το μεταβλητό κόστος $c_j(y_{jk})$ είναι μια μη μειούμενη συνάρτηση με $c_j(0) = 0$. Άρα:

$$\begin{aligned}
&\max \quad \sum_{i \in N} w_i g(U_i) MS_i \\
&\textit{Subject to} \quad \sum_{j \in S} \left[\sum_{k=1}^{K} c_j(y_{jk}) + f_j x_j \right] \leq B, \\
&\sum_{k=1}^{K} y_{jk} \leq x_j M, \qquad j \in S, \\
&y_{jk} \in V_k, \qquad x_j \in \{0,1\},
\end{aligned}$$

όπου V_k μπορεί να είναι ένα διάστημα για τα διαρκώς εκτιμώμενα χαρακτηριστικά, και το M είναι ισοδύναμο με το Ky_k^{max}. Ο πρώτος περιορισμός εξασφαλίζει ότι δεν ξεπερνιέται ο διαθέσιμος προϋπολογισμός, ενώ ο δεύτερος περιορισμός περιορίζει τις τιμές των μεταβλητών σε 0 εάν δεν υπάρχει καμία μονάδα στον j. Τέλος, ο όρος U_i στην αντικειμενική συνάρτηση καθορίζεται από τις σχέσεις (4), (8) και (9).

3.5 Μοντέλο Μέγιστης Ιεραρχικής Κάλυψης (Serra, Marianov, Re-Velle)

Στη μελέτη αυτή, οι Serra, Marianov και ReVelle παρουσιάζουν ένα μοντέλο χωροθέτησης εγκαταστάσεων σε μία ιεραρχική δομή, όταν υπάρχει ανταγωνισμός στην περιοχή ενδιαφέροντος. Το μοντέλο λειτουργεί με ιεραρχική δόμηση και επιτρέπει την εγκατάσταση νέων μονάδων ή ακόμα και την επανεγκατάσταση υπαρχόντων. Ένα ιεραρχικό σύστημα, ταξινομεί τις μονάδες που παρέχουν υπηρεσίες ή αγαθά, ανάλογα με το επίπεδο των προσφερομένων υπηρεσιών. Αυτές οι υπηρεσίες συνδέονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους. Μπορεί να είναι αμοιβαία αποκλειόμενες ή μπορεί να περιέχει η μία την άλλη. Στη δεύτερη περίπτωση μία μονάδα υψηλότερου επιπέδου μπορεί να παρέχει υπηρεσίες που επίσης παρέχονται και σε χαμηλότερου επιπέδου μονάδες.

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα εταιριών που είναι δομημένες ιεραρχικά και προσπαθούν να επιτύχουν τη μεγαλύτερη δυνατή κάλυψη μεριδίου αγοράς. Στον τραπεζικό τομέα, για παράδειγμα, μπορούν εύκολα να αναγνωριστούν τρία επίπεδα μονάδων εξυπηρέτησης, Το πρώτο είναι οι αυτόματες ταμειολογιστικές μηχανές (ATM), που παρέχουν βασικού τύπου υπηρεσίες όπως αναλήψεις καταθέσεις κλπ. Το δεύτερο είναι τα τοπικά καταστήματα των τραπεζών (retail), στα οποία παρέχονται όλες οι υπηρεσίες που παρέχουν τα ATM, αλλά και ακόμα πιο εξειδικευμένες και τέλος τα περιφερειακά καταστήματα (full banking), όπου παρέχονται όλες οι δυνατές τραπεζικές εργασίες.

Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί και ο τομέας της υγείας. Περιφερειακά υπάρχουν τα τοπικά κέντρα υγείας και στα μεγάλα αστικά κέντρα νοσοκομεία με όλες τις ειδικότητες των ιατρών. Ακόμα ένα παράδειγμα συναντάμε στον τομέα της λιανικής πώλησης τροφών και ειδών οικιακής χρήσης. Τέτοια είδη μπορεί να βρει κανείς και σε τοπικά μικρά καταστήματα (μικρή απόσταση από τον αγοραστή), σε super market (μεγαλύτερη απόσταση) αλλά ακόμα και σε υπεραγορές (ακόμα μεγαλύτερη απόσταση). Οι αγοραστές είναι διατεθειμένοι να επιλέγουν τα super market παρόλο που είναι πιο μακριά συνήθως από τα τοπικά καταστήματα, αλλά αυτό συμβαίνει μέχρι μια μέγιστη διαφορά απόστασης. Το ίδιο συμβαίνει και στην επιλογή μεταξύ super market και υπεραγοράς. Η ανταγωνιστική χωροθέτηση συνεπώς παίζει ουσιαστικό ρόλο στις επιλογές αυτές των πελατών.

Παρακάτω παρουσιάζεται μια προσέγγιση του προβλήματος της χωροθέτησης μονάδων με ιεραρχικές υπηρεσίες σε περιοχές όπου επικρατεί ανταγωνισμός. Το μοντέλο επιτρέπει και την περίπτωση της μετεγκατάστασης υπάρχουσας μονάδας. Θα θεωρηθούν δύο εταιρίες, η *A* που προσπαθεί να βελτιώσει την υπάρχουσα θέση της και να τοποθετήσει και νέες μονάδες, και η *C*, η ανταγωνίστρια που οι μονάδες της είναι ήδη εγκατεστημένες.

Περιγραφή Μοντέλου

Θεωρούμε έναν κόμβο πλήρως κατειλημμένο από τύπου *A* – μονάδα, αν υπάρχει τέτοια μονάδα πιο κοντά στον κόμβο από ότι μια μονάδα ανταγωνίστρια. Ακόμα, θα θεωρούμε έναν κόμβο μερικώς κατειλημμένο, αν υπάρχει μονάδα που ανήκει στην *A* εταιρία, στην ίδια απόσταση από τον κόμβο με την αντίστοιχη απόσταση της μονάδας της *C* εταιρίας από τον κόμβο. Το πρόβλημα είναι ακέραιου προγραμματισμού και έχει ως εξής:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} \tfrac{1}{2} a_i z_i \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad y_i \leqslant \sum_{j \in N_i} x_j \quad \forall i \in I, \qquad (2)$$

$$z_i \leqslant \sum_{k \in O_i} x_k \quad \forall i \in I, \qquad (3)$$

$$z_i + y_i \leqslant 1 \quad \forall i \in I, \qquad (4)$$

$$\sum_{j \in J} x_j = r + p, \qquad (5)$$

$$\sum_{j \in J_A} x_j = p - s, \qquad (6)$$

$$y_i,\ z_i,\ x_j = 0, 1, \quad \forall i \in I,\ j \in J \qquad (7)$$

όπου:

- I = το σύνολο όλων των κόμβων ζήτησης
- J = το σύνολο όλων των επιλέξιμων τοποθεσιών συμπεριλαμβανομένων και εκείνων που ήδη είναι κατειλημμένες
- J_A = το σύνολο των σημείων που ήδη είναι κατειλημμένα από την εταιρία *A*

- S_i = η απόσταση του κόμβου i από την πλησιέστερη μονάδα μιας ανταγωνίστριας εταιρίας, είτε της A είτε της C
- d_{ij} = η μικρότερη απόσταση μεταξύ του κόμβου i και της τοποθεσίας j
- $N_i = \{j \in J \mid d_{ij} < S_i\}$ = το σύνολο των διαθέσιμων τοποθεσιών που είναι αυστηρά πιο κοντά στον κόμβο i από ότι ο πλησιέστερος ήδη εγκατεστημένος ανταγωνιστής
- $O_i = \{j \in J \mid d_{ij} = S_i\}$ = το σύνολο των τοποθεσιών που βρίσκονται ακριβώς σε απόσταση S_i από τον κόμβο i
- Y_i = 1, 0: 1 αν ο κόμβος επίλυσης i είναι πλήρως κατειλημμένος, δηλαδή, στον κόμβο i βρίσκεται μια μονάδα τύπου A πιο κοντά από ότι η απόσταση S_i (ή πιο κοντά από ότι μια μονάδα της εταιρίας C)
- x_j = 1, 0: 1 αν μια μονάδα της εταιρίας A είναι τοποθετημένη στο j
- a_i = ο πληθυσμός στον κόμβο i
- p = ο αριθμός των μονάδων τύπου A που είναι ήδη εγκατεστημένες
- r = ο αριθμός των νέων μονάδων τύπου A προς εγκατάσταση
- s = ο αριθμός των μονάδων τύπου A προς επανεγκατάσταση

Το πρώτο σετ περιορισμών επιτρέπει στον κόμβο i να καταληφθεί πλήρως από μια μονάδα τύπου A ($Y_i = 1$), αν η μονάδα είναι τοποθετημένη πιο κοντά στον κόμβο απ' ότι ο πλησιέστερος ανταγωνιστής ($x_j = 1$, $j \in N_i$). Ομοίως, το δεύτερο σετ περιορισμών επιτρέπει στον κόμβο i να καταληφθεί μερικώς ($z_i = 1$) αν υπάρχει μονάδα της εταιρίας A που βρίσκεται στην ίδια απόσταση με την πλησιέστερη μονάδα της εταιρίας C ($x_k = 1$, $k \in O_i$). Το τρίτο σετ περιορισμών δεν επιτρέπει στον κόμβο i να είναι ταυτόχρονα και πλήρως και μερικώς κατειλημμένος. Όταν οι συνθήκες επιτρέπουν σε έναν κόμβο να είναι ταυτόχρονα και μερικώς και πλήρως κατειλημμένος, θα προτιμάται η πλήρης κατάληψή του. Ο περιορισμός (5) ορίζει το σύνολο των μονάδων που θα τοποθετηθούν συμπεριλαμβανομένου και των παλαιών. Ο περιορισμός (6) ορίζει τον αριθμό των μονάδων που δεν μπορούν να επανεγκατασταθούν. Η αντικειμενική συνάρτηση σε αυτό το μοντέλο, λαμβάνει υπόψη την επιλογή μονάδας του συνολικού πληθυσμού, μετά από την εγκατάσταση ή τη μετακίνηση μιας μονάδας. Ακόμα οι μονάδες οποιουδήποτε επιπέδου, προσφέρουν τουλάχιστον τις υπηρεσίες του κατώτερου επιπέδου. Θα θεωρήσουμε m ιεραρχικά επίπεδα. Για κάθε επίπεδο k υπάρχει ένας σκοπός: Η μεγιστοποίηση του πληθυσμού που καταλαμβάνεται για υπηρεσίες επιπέδου -k παρουσία των ανταγωνιστών. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως βάρος λ_k την επιλογή της πληθυσμιακής ομάδας για την k επιπέδου μονάδα, βάρος το οποίο είναι και ανάλογο της κερδοφορίας ανά μονάδα πληθυσμού.

Ανταγωνιστική Χωροθέτηση των Μονάδων Ιεραρχικών Επιπέδων

Σε ένα ανταγωνιστικό σύστημα, η κατάληψη κάποιου κόμβου ζήτησης επιτυγχάνεται με την εγκατάσταση μιας μονάδας πιο κοντά σε αυτόν από τη μονάδα του ανταγωνιστή. Οι υψηλού ιεραρχικού επιπέδου μονάδες όμως, που προσφέρουν μια μεγαλύτερη ποικιλία υπηρεσιών ή αγαθών, μπορεί να ασκούν μεγαλύτερη επιρροή σε σχέση με τις μικρότερου επιπέδου μονάδες. Κατά συνέπεια, αν μια μονάδα υψηλού επιπέδου της εταιρίας A είναι εγκατεστημένη πιο μακριά από τον κόμβο i σε σχέση με μια μονάδα χαμηλότερου επιπέδου της εταιρίας C, είναι πιθανό η μονάδα της εταιρίας A να εξυπηρετεί τη ζήτηση του κόμβου i ακόμα και για τις υπηρεσίες ή αγαθά επιπέδου της μονάδας της εταιρίας C. Ορίζουμε ως T_k την επιπλέον απόσταση που είναι διατεθειμένος ο πελάτης να διανύσει μέχρι μια μονάδα υψηλότερου επιπέδου για υπηρεσίες και αγαθά επιπέδου k. Η απόσταση αυτή είναι δηλαδή μεγαλύτερη από την απόσταση που θα διένυε για να φτάσει σε μια μονάδα που προσφέρει μέχρι k επιπέδου υπηρεσίες ή αγαθά, με στόχο να αποκτήσει k επιπέδου υπηρεσίες ή αγαθά.

Θεωρούμε έναν κόμβο ζήτησης i και τη μονάδα της εταιρίας C επιπέδου -k που βρίσκεται σε απόσταση d_c. Μια μονάδα υψηλότερου επιπέδου της εταιρίας A σε απόσταση $d_c + T_k$ από τον κόμβο i θα ικανοποιήσει τη ζήτηση για επιπέδου-k υπηρεσίες ή αγαθά. Αντιθέτως, μια επιπέδου-k μονάδα της εταιρίας A τοποθετημένη σε απόσταση d_A από έναν κόμβο ζήτησης i δε θα ικανοποιήσει τη ζήτηση για τον κόμβο αυτό, αν υπάρχει μια υψηλότερου επιπέδου μονάδα της εταιρίας C τοποθετημένη σε απόσταση $d_A + T_k$.

Η έννοια μιας ακριβούς απόστασης που είναι διατεθειμένοι να διανύουν οι πελάτες προς μια μονάδα υψηλότερου επιπέδου αποτελεί απλούστευση. Θα μπορούσαν μερικοί από αυτούς να διανύσουν απόσταση T_k και μερικοί ακόμα μεγαλύτερη απόσταση. Η επιλογή της T_k ως την επιπλέον απόσταση που είναι οι πελάτες διατεθειμένοι να διανύσουν, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μια απότομα φθίνουσα καμπύλη στην περιοχή γύρω από την T_k. Αυτό, διότι οι περισσότεροι πελάτες διανύουν την απόσταση T_k και μια μικρή μερίδα από αυτούς είναι διατεθειμένοι να διανύσουν ακόμα μεγαλύτερη απόσταση.

Ορίζουμε ως S_{ik} την απόσταση μέσα στην οποία η εταιρία A πρέπει να εγκαταστήσει μια μονάδα επιπέδου-k προκειμένου να καλύψει τη ζήτηση του κόμβου i για επιπέδου-k υπηρεσίες ή αγαθά. Η απόσταση S_{ik} λαμβάνει υπόψη και τις θέσεις των ανταγωνιστριών μονάδων, αλλά θα πρέπει να λάβει υπόψη και την επιρροή που ασκούν υψηλότερου επιπέδου μονάδες της εταιρίας C. Αν d_k είναι η απόσταση του κόμβου i μέχρι την πλησιέστερη μονάδα της εταιρίας C επιπέδου-k και d_h είναι η απόσταση μέχρι την υψηλότερου επιπέδου μονάδα της εταιρίας C, τότε:

$$S_{ik} = \min(d_k, d_h - T_k).$$

Ο κόμβος i μπορεί να εξυπηρετηθεί για επιπέδου-k υπηρεσίες ή αγαθά, με την εγκατάσταση μιας επιπέδου-k μονάδας της εταιρίας A μέσα σε απόσταση S_{ik} από αυτόν. Αλλιώς, αφού οι υψηλότερου επιπέδου μονάδες της εταιρίας A ασκούν και μεγαλύτερη επιρροή, ο κόμβος i μπορεί να εξυπηρετηθεί με την εγκατάσταση μιας μονάδας της εταιρίας A επιπέδου υψηλότερου από k εντός απόστασης $S_{ik} + T_k$ από τον κόμβο i.

Συνοψίζοντας, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα συστήματος δύο-επιπέδων, με το επίπεδο 2 να είναι το υψηλότερο. Τρεις περιπτώσεις πρέπει να εξεταστούν σχετικά με την κάλυψη της ζήτησης του κόμβου i από την εταιρία A για επιπέδου-1 υπηρεσίες ή αγαθά.

- Περίπτωση 1. Ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου 1 βρίσκεται σε απόσταση d_1. Ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου 2 βρίσκεται σε απόσταση d_2 όπου $d_2 - T_1 > d_1$: $S_{i1} = d_1$. Ο κόμβος ζήτησης i καταλαμβάνεται από την εταιρία A σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις ή ταυτόχρονα και στις δύο:

  (a) Υπάρχει μονάδα της εταιρίας A επιπέδου-1 πλησιέστερα από την απόσταση S_{i1}

(b) Υπάρχει μονάδα της εταιρίας Α επιπέδου-2 πλησιέστερα από την απόσταση $S_{i1} + T_1$

- <u>Περίπτωση 2</u>. Ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου 1 βρίσκεται σε απόσταση d_1, και υπάρχει επιπέδου 2 ανταγωνιστής σε απόσταση d_2 όπου $d_2 - T_1 < d_1$. Τότε Then $S_{i1} = d_2 - T_1$. Ο κόμβος ζήτησης i καταλαμβάνεται από την εταιρία Α σε επίπεδο 1 σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις ή ταυτόχρονα και στις δύο:

  (a) Υπάρχει μονάδα της εταιρίας Α επιπέδου 1 πλησιέστερα από την απόσταση S_{i1}

  (b) Υπάρχει μονάδα της εταιρίας Α επιπέδου 2 πλησιέστερα από την απόσταση $S_{i1} + T_1$ (που ισούται με d_2)

- <u>Περίπτωση 3</u>.Ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου 2 βρίσκεται σε απόσταση d_2. $S_{i1} = d_2 - T_1$ Ο κόμβος ζήτησης i καταλαμβάνεται από την εταιρία Α σε επίπεδο 1 σε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις ή ταυτόχρονα και στις δύο:

  (a) Υπάρχει μονάδα της εταιρίας Α επιπέδου 1 πλησιέστερα από την απόσταση S_{i1}

  (b) Υπάρχει μονάδα της εταιρίας Α επιπέδου 2 πλησιέστερα από την απόσταση $S_{i1} + T_1$ (που ισούται με d_2)

Για επιπέδου-2 υπηρεσίες ή αγαθά, η εταιρία Α θα εξυπηρετήσει τον κόμβο i (για επιπέδου 2 ζήτηση), μόνο αν υπάρχει επιπέδου-2 μονάδα της, πλησιέστερα από μια επιπέδου-2 μονάδα της ανταγωνίστριας. Οι κόμβοι ζήτησης θα είναι μερικώς κατειλημμένοι αν οι συνθήκες ισχύουν εξίσου.

Αν το πρόβλημα είχε τριών επιπέδων μονάδες θα διαμορφωνόταν ως εξής:

$$\max \quad Z=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\Big(\sum_{i\in I}a_i y_i^k+\sum_{i\in I}\tfrac{1}{2}a_i z_i^k\Big) \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad y_i^1 \leqslant \sum_{j\in N_i^1} x_j^1+\sum_{j\in N_i^2}\left(x_j^2+x_j^3\right) \quad \forall i\in I, \tag{9}$$

$$z_i^1 \leqslant \sum_{j\in O_i^1} x_j^1+\sum_{j\in O_i^2}\left(x_j^2+x_j^3\right) \quad \forall i\in I, \tag{10}$$

$$y_i^2 \leqslant \sum_{j\in P_i^2} x_j^2+\sum_{j\in P_i^3} x_j^3 \quad \forall i\in I, \tag{11}$$

$$z_i^2 \leqslant \sum_{j\in Q_i^2} x_j^2+\sum_{j\in Q_i^3} x_j^3 \quad \forall i\in I, \tag{12}$$

$$y_i^3 \leqslant \sum_{j\in R_i} x_j^3 \quad \forall i\in I, \tag{13}$$

$$z_i^3 \leqslant \sum_{j\in W_i} x_j^3 \quad \forall i\in I, \tag{14}$$

$$z_i^k+y_i^k \leqslant 1 \quad \forall i\in I,\ k=1,2,3, \tag{15}$$

$$\sum_{j\in J} x_j^k = r^k+p^k,\ k=1,2,3, \tag{16}$$

$$\sum_{j\in J_A^k} x_j^k = p^k-s^k,\ k=1,2,3, \tag{17}$$

$$y_i^k,\ z_i^k,\ x_j^k=0,1, \quad \forall i\in I,\ j\in J,\ k\in K. \tag{18}$$

Από τα επίπεδα ιεραρχίας το 1 είναι το χαμηλότερο και το 3 το υψηλότερο. Εφόσον ένας κόμβος ζήτησης i επιπέδου-1 μπορεί να εξυπηρετηθεί και από επιπέδου-2 ή -3 μονάδες, ορίζονται δυο σύνολα τοποθεσιών ως πιθανές για την εξυπηρέτηση του κόμβου i. Το σύνολο N_i^1 είναι οι πιθανές μονάδες επιπέδου-1 που βρίσκονται πλησιέστερα στον κόμβο από την απόσταση S_{i1}. Έτσι, αν οι επιπέδου-1 μονάδες είναι εγκατεστημένες σε τοποθεσίες που ανήκουν στο σύνολο N_i^1 ο κόμβος i εξυπηρετείται από την εταιρία A για επιπέδου-1 υπηρεσίες ή αγαθά. Το δεύτερο σύνολο N_i^2, είναι το σύνολο των πιθανών μονάδων επιπέδου-2 ή επιπέδου-3, που βρίσκονται πλησιέστερα στον κόμβο i από την απόσταση S_{i1} + T_1. Με άλλα λόγια, αν οι επιπέδου-2 ή -3 μονάδες είναι εγκατεστημένες σε τοποθεσίες που ανήκουν στο σύνολο N_i^2 , ο κόμβος i εξυπηρετείται για επιπέδου-1 ζήτηση, από υψηλότερου επιπέδου μονάδες λόγω της μεγαλύτερης επιρροής που αυτές ασκούν.

Ομοίως, ορίζονται δύο σύνολα O_i^1 and O_i^2 για την περίπτωση της μερικής κάλυψης, όπου το O_i^1 είναι οι πιθανές μονάδες επιπέδου-1 που βρίσκονται ακριβώς σε απόσταση S_{i1}, και O_i^2 το σύνολο των πιθανών μονάδων επιπέδου-2 και επιπέδου-3 που βρίσκονται σε απόσταση $S_{i1} + T_1$. Παράλληλα, σε όρους εξυπηρέτησης σε επίπεδο-2 ορίζεται το σύνολο P_i^2 τα οποίο περιέχει τις τοποθεσίες j που βρίσκονται πιο κοντά στο i σε σχέση με την απόσταση S_{i2}. Ορίζεται ακόμα το σύνολο P_i^3 με τις πιθανές μονάδες επιπέδου-3, πλησιέστερα στον κόμβο i σε σχέση με την απόσταση than $S_{i2} + T_2$. Το σύνολο Q_i^2 περιέχει εκείνες τις τοποθεσίες j που βρίσκονται ακριβώς στην ίδια απόσταση από τον κόμβο i όσο και η απόσταση S_{i2}, και το σύνολο Q_i^3 είναι το σύνολο των πιθανών επιπέδου-3 μονάδων ακριβώς στην απόσταση $S_{i2} + T_2$ από τον κόμβο i. Τα σύνολα R_i περιέχουν εκείνες τις τοποθεσίες j πλησιέστερα στο i απ' ότι ο πλησιέστερος ανταγωνιστής επιπέδου-3.Τα σύνολα W_i περιέχουν εκείνες τις τοποθεσίες με ίση απόσταση από το i όσο και γη απόσταση του πλησιέστερου επιπέδου-3 ανταγωνιστή.

Η σχέση (8) μεγιστοποιεί τον αριθμό των κόμβων που καταλαμβάνονται σε κάθε επίπεδο, με τη στάθμιση της κερδοφορίας λ_k από την κάλυψη του συγκεκριμένου επιπέδου, και τη στάθμιση του πληθυσμού του συγκεκριμένου κόμβου. Αν ο κόμβος είναι μόνο μερικώς κατειλημμένος, ο πληθυσμός διαιρείται δια του 2. Το σύνολο των περιορισμών (9) δείχνει την κάλυψη σε επίπεδο 1: ο κόμβος i θα είναι κατειλημμένος σε επίπεδο-1 ($Y_{i1} = 1$) αν ένα ή περισσότερα x_j^1 = 1, j Є N_i^1, ή ένα ή περισσότερα $x_j^l = 1$, j Є N_i^2, όπου το l είναι είτε 2 είτε 3, που σημαίνει επίπεδο υψηλότερο από το 1. Το σύνολο των εξισώσεων (10) ορίζει ότι ένας κόμβος i είναι μερικώς κατειλημμένος σε επίπεδο-1 ($z_i^1 = 1$) αν υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_j^l = 1$, j Є O_i^1, ή τουλάχιστον ένα $x_j^l = 1$, j Є Oi2 όπου l = 2 ή 3. Οι σχέσεις (11) και (12) ορίζουν την κάλυψη σε επίπεδο-2, με τον ίδιο τρόπο που οι (9) και (10) ορίζουν για επίπεδο-1, και οι (13) και (14) ορίζουν τις συνθήκες για την κάλυψη σε επίπεδο-3.

Ο περιορισμός (15) εξαναγκάζει έναν κόμβο i να είναι είτε πλήρως κατειλημμένος από την εταιρία A για κάθε επίπεδο ($y_i^k = 1$), είτε μερικώς κατειλημμένος για το ίδιο επίπεδο ($z_i^k = 1$). Η σχέση (16) περιορίζει τον αριθμό των μονάδων της εταιρίας A που εγκαθίστανται σε κάθε ιεραρχικό επίπεδο.

Τέλος, η σχέση (17) εξαναγκάζει έναν συγκεκριμένο αριθμό μονάδων να παραμείνουν στην τοποθεσία τους, καθώς το J_A^k είναι το υπάρχον σετ τοποθεσιών μονάδων επιπέδου-k της εταιρίας Α. Όλες οι μεταβλητές του προβλήματος παίρνουν είτε την τιμή 0 είτε την τιμή 1. Παρόλα αυτά αποδεικνύεται ότι αν χρησιμοποιηθεί μια γραμμική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος, κάποιες από τις μεταβλητές δε χρειάζεται να δηλωθούν ακέραιες καθώς θα πάρουν ακέραια τιμή από τη διαδικασία επίλυσης.

Το μοντέλο μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να έχει ως σκοπό τη μεγιστοποίηση του πληθυσμού που καλύπτεται από όλα τα επίπεδα m ταυτόχρονα. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή δύο νέων μεταβλητών των u_i και w_i που παίρνουν τιμές 0 ή 1. Η τιμή της u_i θα είναι 1 αν ο κόμβος i είναι πλήρως κατειλημμένος σε όλα τα επίπεδα από την εταιρία Α και η τιμή της w_i θα είναι 1 αν ο κόμβος i είναι τουλάχιστον μερικώς κατειλημμένος σε όλα τα επίπεδα από την εταιρία Α. Οι κόμβοι που είναι μερικώς κατειλημμένοι σε κάποια επίπεδα και πλήρως κατειλημμένοι σε άλλα, θεωρούνται γενικά μερικώς κατειλημμένοι.

Επίσης θα πρέπει να προστεθούν και οι ακόλουθοι περιορισμοί.

$$u_i \leqslant y_i^k \quad \forall i \in I, \ k = 1, 2, 3, \tag{19}$$

$$w_i \leqslant z_i^k + y_i^k \quad \forall i \in I, \ k = 1, 2, 3, \tag{20}$$

and replacing constraint (15) by

$$u_i + w_i \leqslant 1 \quad \forall i \in I. \tag{21}$$

Η αντικειμενική γίνεται:

$$\max \quad Z = \sum_{i \in I} \left(a_i u_i + \tfrac{1}{2} a_i w_i \right). \tag{22}$$

Ο περιορισμός (19) αναγκάζει τη μεταβλητή συνολικής κάλυψης u να είναι μηδέν, εκτός αν ο κόμβος i είναι κατειλημμένος σε όλα τα επίπεδα, κάτι που συμβαίνει όταν οι μεταβλητές y_i^k είναι 1 για κάθε k. Ο περιορισμός (20) αναγκάζει τη μεταβλητή μερικής κάλυψης να είναι μηδέν, εκτός αν ο κόμβος i είναι τουλάχιστον μερικώς κατειλημμένος σε όλα τα επίπεδα. Ο περιορισμός (21) δεν επιτρέπει στους κόμβους να είναι ταυτόχρονα και μερικώς και πλήρως κατειλημμένοι. Ένα μειονέκτημα των παραπάνω είναι ότι αν από τη λύση προκύπτει ότι ένας κόμβος i είναι κατειλημμένος σε ένα επίπεδο από την ανταγωνίστρια εταιρία, η κάλυψή του σε άλλα επίπεδα, δε βελτιώνει την αντικειμενική και έτσι το μοντέλο δεν επιχειρεί την κάλυψή του σε άλλα επίπεδα.

Το κόστος εγκατάστασης νέων μονάδων, που πιθανό να βαίνει αυξανόμενο όσο αυξάνεται και το επίπεδο των μονάδων, μπορεί να περιγραφεί σε μια ξεχωριστή αντικειμενική:

$$\min \quad Z_2 = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_j^k x_j^k \qquad (23)$$

όπου c^k_j είναι το κόστος εγκατάστασης μιας μονάδας επιπέδου k στην τοποθεσία j.

4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΙΕΡΑΡΧΙΚΗΣ ΚΑΛΥΨΗΣ

Στην παρούσα εργασία, θα εφαρμόσουμε το μοντέλο max cover για τη χωροθέτηση καταστημάτων χωρίς την ύπαρξη ανταγωνιστή και βάσει των αποτελεσμάτων αυτού θα εφαρμοστεί το μοντέλο μέγιστης ιεραρχικής κάλυψης, το οποίο αναλύσαμε παραπάνω, με στόχο την είσοδο ανταγωνίστριας Τράπεζας στον ίδιο χώρο. Παράλληλα θα παρουσιαστούν και εφαρμογές επανεγκατάστασης "relocation" με στόχο την ακόμα μεγαλύτερη κάλυψη της ζήτησης. Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι πραγματικά δεδομένα και ελήφθησαν από μεγάλη ελληνική τράπεζα, Αφορούν στη χωροθέτηση καταστημάτων στο Νομό Αττικής και αναφέρονται σε αποστάσεις σε μέτρα των τραπεζικών καταστημάτων από τα σημεία ζήτησης.

4.1 Μέθοδος Χωροθέτησης Ανταγωνιστικών Τραπεζικών Καταστημάτων

Θεωρώντας τα δεδομένα του πίνακα 1 του παραρτήματος, θα επιλύσουμε το μοντέλο μέγιστης κάλυψης (max cover). Αρχικά, αποτελεί ένα πρόβλημα χωροθέτησης τραπεζικών καταστημάτων με τρόπο ώστε να εξυπηρετήσουν τη ζήτηση με το βέλτιστο δυνατό τρόπο. Θεωρούμε ότι ένας κόμβος ζήτησης δύναται να εξυπηρετηθεί από ένα κατάστημα όταν αυτό απέχει λιγότερο από ένα χιλιόμετρο από τον κόμβο. Γίνεται δηλαδή σύγκριση του πίνακα 1 του παραρτήματος με τα 1000 μέτρα και προκύπτει κατ' αντιστοιχία ο πίνακας 2 του παραρτήματος. Η τιμή 1 αναφέρεται σε δυνατότητα εξυπηρέτησης του κόμβου ζήτησης από κάθε σημείο προσφοράς και η τιμή 0 υποδηλώνει ότι η απόσταση είναι μεγαλύτερη από αυτή που έχει οριστεί ως εφικτή για την κάλυψη του κόμβου ζήτησης από το αντίστοιχο σημείο προσφοράς. Το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί είναι αυτό της μέγιστης κάλυψης και περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$
\begin{array}{lll}
\text{I. Maximize} & z = \sum_{i \in I} a_i y_i & \\
\text{S.T.} & \sum_{j \in N_i} x_j \geq y_i & \text{for all } i \in I \\
 & \sum_{j \in J} x_j = P & \\
 & x_j = (0, 1) & \text{for all } j \in J \\
 & y_i = (0, 1) & \text{for all } i \in I
\end{array}
$$

Όπου:

I: το σύνολο των κόμβων ζήτησης

J: το σύνολο των σημείων προσφοράς (τραπεζικά καταστήματα)

S: εκείνη η απόσταση η οποία ορίζει ένα σημείο ζήτησης ως μη καλυπτόμενο

D_{ij}: η πλησιέστερη απόσταση του κόμβου i από το σημείο j

x_j = 1 αν ένα κατάστημα εγκαθίσταται στο σημείο j και 0 διαφορετικά

p = ο αριθμός των καταστημάτων προς χωροθέτηση

a_i:ο πληθυσμός που εξυπηρετείται στον κόμβο ζήτησης j

N_i: το σύνολο των τοποθεσιών που είναι δυνατό λόγω απόστασης να καλύψουν τα σημεία ζήτησης.

Το πρόβλημα επιλύεται στο excel με τη χρήση του εργαλείου επίλυσης (solver). Στόχος είναι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή η καλύτερη δυνατή κάλυψη των σημείων ζήτησης δεδομένου ενός συγκεκριμένου αριθμού τραπεζικών καταστημάτων που στην περίπτωσή μας είναι 20. Θεωρούμε δυαδικές μεταβλητές την εγκατάσταση ή μη τραπεζικού καταστήματος σε κάποιο εν δυνάμει σημείο προσφοράς, καθώς και την κάλυψη ή μη κάθε κόμβου ζήτησης. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι:

POINTS	Facilities		Yi
0	0		1
1	0		1
2	0		1
3	0		1
4	0		1
5	0		1
6	0		1
7	0		1
8	0		1
9	1		1
10	0		1
11	0		1
12	1		1
13	1		1
14	1		1

15	0		1
16	0		1
17	1		1
18	0		1
19	0		1
20	0		1
21	0		1
22	0		1
23	0		1
24	0		1
25	0		1
26	0		1
27	0		1
28	0		1
29	1		1
30	0		1
31	0		1
32	0		1
33	0		1
34	0		1
35	0		1
36	0		1
37	0		1
38	0		1
39	0		1
40	0		1
41	0		1
42	0		1
43	0		1
44	0		1
45	0		1
Total Nr Servers	**6**	**Points Covered**	**46**
Available servres	**20**		

Από τα αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι καλύπτονται όλα τα σημεία ζήτησης (όλα τα y_i είναι 1) και τοποθετούνται συνολικά 6 τραπεζικά καταστήματα στα σημεία που φαίνονται στον παραπάνω πίνακα.

Δεδομένων των αποτελεσμάτων και περνώντας στην επίλυση του προβλήματος του μοντέλου της ανταγωνιστικής χωροθέτησης, θεωρούμε ότι η εταιρία C (τράπεζα C), που αναφέρεται στην περιγραφή του μοντέλου στην παράγραφο 3.5, εφαρμόζει το παραπάνω σύστημα για την καλύτερη χωροθέτηση των καταστημάτων της. Η τράπεζα Α, δεδομένων των θέσεων των καταστημάτων της C, εφαρμόζει το μοντέλο ανταγωνιστικής χωροθέτησης, που περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 3.5. Παρακάτω φαίνεται εν συντομία η μαθηματική περιγραφή του μοντέλου:

$$\text{Max} \quad Z = \sum_{i \in I} a_i y_i + \sum_{i \in I} \tfrac{1}{2} a_i z_i \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad y_i \leqslant \sum_{j \in N_i} x_j \quad \forall i \in I, \qquad (2)$$

$$z_i \leqslant \sum_{k \in O_i} x_k \quad \forall i \in I, \qquad (3)$$

$$z_i + y_i \leqslant 1 \quad \forall i \in I, \qquad (4)$$

$$\sum_{j \in J} x_j = r + p, \qquad (5)$$

$$\sum_{j \in J_A} x_j = p - s, \qquad (6)$$

$$y_i,\ z_i,\ x_j = 0,\ 1, \quad \forall i \in I,\ j \in J \qquad (7)$$

Αρχικά, και πριν εφαρμοστεί η διαδικασία της επανεγκατάστασης, ορίζεται στο 6 ο μέγιστος αριθμός τραπεζικών καταστημάτων που μπορεί να εγκαταστήσει η τράπεζα A (καθώς τόσα έχει εγκαταστήσει η C). Με το εργαλείο επίλυσης του excel γίνεται μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης θεωρώντας έναν κόμβο πλήρως κατειλημμένο από της τράπεζα A (Y_i = 1), αν υπάρχει κατάστημά της πιο κοντά στον κόμβο από ότι της C. Ακόμα, θεωρούμε έναν κόμβο μερικώς κατειλημμένο (z_i = 1), αν υπάρχει κατάστημα της A, στην ίδια απόσταση από τον κόμβο με την αντίστοιχη απόσταση καταστήματος της C από τον κόμβο. Εισάγουμε κατάλληλο περιορισμό ώστε να μην επιτρέπεται σε έναν κόμβο i να είναι ταυτόχρονα και πλήρως και μερικώς κατειλημμένος και διατηρούνται οι δυαδικές μεταβλητές του προηγούμενου προβλήματος με την προσθήκη της z_i. Τα αποτελέσματα είναι:

POINTS	Facilities C	YiC	Facilities A	YiA	ZiA
0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	0	1	0
7	0	1	0	1	0
8	0	1	0	1	0
9	1	1	0	1	0

10	0	1	0	1	0
11	0	1	0	1	0
12	1	1	1	0	1
13	1	1	1	0	1
14	1	1	1	0	1
15	0	1	0	1	0
16	0	1	0	1	0
17	1	1	1	0	1
18	0	1	0	1	0
19	0	1	1	1	0
20	0	1	0	1	0
21	0	1	0	1	0
22	0	1	0	1	0
23	0	1	0	1	0
24	0	1	0	1	0
25	0	1	0	1	0
26	0	1	0	1	0
27	0	1	0	1	0
28	0	1	0	1	0
29	1	1	1	0	1
30	0	1	0	1	0
31	0	1	0	1	0
32	0	1	0	1	0
33	0	1	0	1	0
34	0	1	0	1	0
35	0	1	0	1	0
36	0	1	0	1	0
37	0	1	0	1	0
38	0	1	0	1	0
39	0	1	0	1	0
40	0	1	0	1	0
41	0	1	0	1	0
42	0	1	0	1	0
43	0	1	0	1	0
44	0	1	0	1	0
45	0	1	0	1	0
Nr Servers	6	46	6	41	5
				Points Covered	
Available servres	20	6			

Από τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι για να μεγιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση από τα 6 διαθέσιμα καταστήματα, τα 5 τοποθετούνται σε σημεία που ήδη δραστηριοποιούνται καταστήματα της τράπεζας C. Αν τώρα υποθέσουμε ότι διατηρούμε τα 3 από τα 6 καταστήματα σταθερά και επιτρέψουμε στα υπόλοιπα τρία να επανεγκατασταθούν και ταυτόχρονα αυξήσουμε κατά 2 τα συνολικά καταστήματα της τράπεζας A, τα αποτελέσματα είναι:

POINTS	Facilities C	YiC	Facilities A	YiA	ZiA	New Facilities A	New YiA	New ZiA
0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0	0	1	0
6	0	1	0	1	0	1	1	0
7	0	1	0	1	0	0	1	0
8	0	1	0	1	0	0	1	0
9	1	1	0	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	0	1	0
11	0	1	0	1	0	0	1	0
12	1	1	1	0	1	1	0	1
13	1	1	1	0	1	1	0	1
14	1	1	1	0	1	0	1	0
15	0	1	0	1	0	0	1	0
16	0	1	0	1	0	0	1	0
17	1	1	1	0	1	1	0	1
18	0	1	0	1	0	0	1	0
19	0	1	1	1	0	1	1	0
20	0	1	0	1	0	0	1	0
21	0	1	0	1	0	0	1	0
22	0	1	0	1	0	0	1	0
23	0	1	0	1	0	0	1	0
24	0	1	0	1	0	0	1	0
25	0	1	0	1	0	1	1	0
26	0	1	0	1	0	0	1	0
27	0	1	0	1	0	0	1	0
28	0	1	0	1	0	0	1	0
29	1	1	1	0	1	0	1	0
30	0	1	0	1	0	0	1	0
31	0	1	0	1	0	0	1	0
32	0	1	0	1	0	0	1	0
33	0	1	0	1	0	0	1	0
34	0	1	0	1	0	0	1	0
35	0	1	0	1	0	0	1	0
36	0	1	0	1	0	0	1	0
37	0	1	0	1	0	0	1	0
38	0	1	0	1	0	0	1	0
39	0	1	0	1	0	0	1	0
40	0	1	0	1	0	0	1	0
41	0	1	0	1	0	1	1	0
42	0	1	0	1	0	0	1	0
43	0	1	0	1	0	0	1	0
44	0	1	0	1	0	0	1	0
45	0	1	0	1	0	0	1	0
Nr Servers	6	46	6	41	5	8	43	3
				Points Covered			**Points Covered**	
Available servres	20		6			8		

Όπως παρατηρούμε, για να μεγιστοποιηθεί η αντικειμενική συνάρτηση από τα 8 συνολικά καταστήματα της τράπεζας A (νέα και υπάρχοντα), τα τρία τοποθετούνται σε κοινά σημεία με την τράπεζα C, και τα 5 σε διαφορετικά, μεγιστοποιώντας την κάλυψη της συνολικής ζήτησης.

4.2 Μέθοδος Χωροθέτησης Ανταγωνιστικών Τραπεζικών Καταστημάτων ανά Ιεραρχικό Επίπεδο Υπηρεσιών

Υποθέτουμε τρία ιεραρχικά επίπεδα τραπεζικών καταστημάτων ανάλογα με τις παρεχόμενες υπηρεσίες. Τα υψηλότερου ιεραρχικού επιπέδου καταστήματα, προσφέρουν μια μεγαλύτερη ποικιλία υπηρεσιών και κατά συνέπεια, ασκούν μεγαλύτερη επιρροή σε σχέση με τις μικρότερου επιπέδου καταστήματα. Συνεπώς, αν ένα κατάστημα υψηλού επιπέδου της τράπεζας A είναι εγκατεστημένο πιο μακριά από τον κόμβο i σε σχέση με ένα κατάστημα χαμηλότερου επιπέδου της τράπεζας C, είναι πιθανό το κατάστημα της A να εξυπηρετεί τη ζήτηση του κόμβου i ακόμα και για τις υπηρεσίες της τράπεζας C. Το μοντέλο έχει αναλυθεί στην παράγραφο 3.5 και παρακάτω φαίνεται εν συντομία η μαθηματική του περιγραφή:

$$\max \quad Z = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \Big(\sum_{i \in I} a_i y_i^k + \sum_{i \in I} \tfrac{1}{2} a_i z_i^k \Big) \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad y_i^1 \leqslant \sum_{j \in N_i^1} x_j^1 + \sum_{j \in N_i^2} \left(x_j^2 + x_j^3 \right) \quad \forall i \in I, \tag{9}$$

$$z_i^1 \leqslant \sum_{j \in O_i^1} x_j^1 + \sum_{j \in O_i^2} \left(x_j^2 + x_j^3 \right) \quad \forall i \in I, \tag{10}$$

$$y_i^2 \leqslant \sum_{j \in P_i^2} x_j^2 + \sum_{j \in P_i^3} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{11}$$

$$z_i^2 \leqslant \sum_{j \in Q_i^2} x_j^2 + \sum_{j \in Q_i^3} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{12}$$

$$y_i^3 \leqslant \sum_{j \in R_i} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{13}$$

$$z_i^3 \leqslant \sum_{j \in W_i} x_j^3 \quad \forall i \in I, \tag{14}$$

$$z_i^k + y_i^k \leqslant 1 \quad \forall i \in I, \; k = 1, 2, 3, \tag{15}$$

$$\sum_{j \in J} x_j^k = r^k + p^k, \; k = 1, 2, 3, \qquad (16)$$

$$\sum_{j \in J_A^k} x_j^k = p^k - s^k, \; k = 1, 2, 3, \qquad (17)$$

$$y_i^k, \; z_i^k, \; x_j^k = 0, 1,$$

$$\forall i \in I, \; j \in J, \; k \in K. \qquad (18)$$

Από τα επίπεδα ιεραρχίας το 1 είναι το χαμηλότερο και το 3 το υψηλότερο. Αρχικά είχαμε θεωρήσει ότι τα καταστήματα επιπέδου 1 μπορούν να προτιμηθούν από πελάτες σε απόσταση μέχρι και 1000 μέτρα. Θεωρούμε ότι τα τραπεζικά καταστήματα επιπέδου 2 μπορούν να προτιμηθούν από πελάτες σε απόσταση μέχρι και 1200 μέτρα και τέλος τα καταστήματα επιπέδου 3 από πελάτες σε απόσταση μέχρι και 1300 μέτρα. Αρχικά λύνεται το πρόβλημα της χωροθέτησης των καταστημάτων ιεραρχικών επιπέδων με δεδομένο ότι μπορούν να εγκατασταθούν μέχρι και έξι από αυτά. Οι κόμβοι διακρίνονται σε μερικώς και πλήρως κατειλημμένους με τον ίδιο τρόπο όπως ακριβώς στις προηγούμενες περιπτώσεις. Οι περιορισμοί είναι οι ίδιοι μόνο που τροποποιούνται ώστε να καλύπτουν τα καταστήματα και των τριών επιπέδων. Τα αποτελέσματα που πήραμε από το εργαλείο επίλυσης του excel είναι:

POINTS	Facilities A 1	YiA1	Zi1	YiA1+Zi1	Facilities A 2	YiA2	Zi2	YiA2+Zi2	Facilities A 3	YiA3	Zi3	YiA3+Zi3	YiA+Zi
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
10	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
12	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1
14	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
15	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
17	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
18	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
19	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
22	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
23	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
24	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
25	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
26	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
27	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
28	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
29	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
30	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
31	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
32	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
33	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
35	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
36	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
37	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
38	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
39	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
40	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
41	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
42	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
43	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
44	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
45	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
	1	26	1		1	14	1		1	3	1		46
	Nr Servers	26,5 Points Covered			Nr Servers	14,5 Points Covered			Nr Servers	3,5 Points Covered		44,5 Total	Total Points Covered

Παρατηρούμε ότι χωροθετούνται τρία καταστήματα, ένα από κάθε ιεραρχικό επίπεδο και καλύπτονται όλα τα σημεία ζήτησης. Περαιτέρω ανάλυση των αποτελεσμάτων αυτών ακολουθεί στην επόμενη ενότητα. Στη συνέχεια, διατηρώντας τα δύο τραπεζικά καταστήματα επιπέδου 1 και 2 και δίνοντας τη δυνατότητα εγκατάστασης και ενός ακόμα (συνολικά 4) οποιουδήποτε επιπέδου προκύπτει:

POINTS	Facilities A 1	YiA1	Zi1	YiA1+Zi1	Facilities A 2	YiA2	Zi2	YiA2+Zi2	Facilities A 3	YiA3	Zi3	YiA3+Zi3	YiA+Zi
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
8	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
11	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
12	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
17	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
18	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
19	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
20	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
21	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
22	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
23	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
24	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
25	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
26	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
27	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
28	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
29	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
30	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
31	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
32	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
33	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
34	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
35	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
36	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
37	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
38	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
39	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
40	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
41	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
42	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
43	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
44	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
45	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
	2	26	1		2	18	1		0	0	0		46
	Nr Servers		26,5		Nr Servers		18,5		Nr Servers		0	45	Total Points
		Points Covered				Points Covered				Points Covered		Total	Covered

Παρατηρούμε ότι και πάλι καλύπτεται όλη η ζήτηση και ότι η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνεται (45). Δύο νέα καταστήματα χωροθετούνται επιπέδων 1 και 2.

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Η χωροθέτηση εγκαταστάσεων παρουσία ανταγωνιστικών μονάδων είναι μια ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία. Οι μελετητές συχνά θεωρούν ότι οι πελάτες επιλέγουν τις μονάδες από όπου θα εξυπηρετηθούν με μόνο κριτήριο την απόσταση. Η θεώρηση αυτή από τη μια πλευρά απλοποιεί τα μοντέλα επίλυσης τέτοιου είδους προβλημάτων, παράλληλα όμως αποτελεί μια απλουστευτική προσέγγιση της ανθρώπινης συμπεριφοράς. Είναι όμως προφανές, ότι προκειμένου να είναι εφικτή μια προσέγγιση της διαδικασίας επιλογής μονάδας εξυπηρέτησης είναι αναγκαίο να γίνουν κάποιες παραδοχές και εκλογικεύσεις της ανθρώπινης συμπεριφοράς. Η παραδοχή που γίνεται στην προηγούμενη ενότητα είναι ότι οι πελάτες είναι διατεθειμένοι να διανύσουν μια επιπλέον απόσταση προκειμένου να εξυπηρετηθούν από μια μονάδα καλύτερου επιπέδου. Θα μπορούσαν μερικοί από αυτούς να διανύσουν την απόσταση αυτή και μερικοί ακόμα μεγαλύτερη.

Στην παραπάνω εφαρμογή, αρχικά χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο μέγιστης κάλυψης ώστε να βρεθούν οι θέσεις των τραπεζικών καταστημάτων μιας τράπεζας C με τρόπο ώστε να καλύψει τη μεγαλύτερη δυνατή ζήτηση. Από 20 διαθέσιμα καταστήματα χωροθετήθηκαν 6, που κάλυπταν τη συνολική ζήτηση με κριτήριο η απόσταση από τα σημεία ζήτησης να μην υπερβαίνει τα 1000 μέτρα. Θεωρώντας τα καταστήματα αυτά ως ανταγωνιστικά, εφαρμόστηκε μοντέλο ανταγωνιστικής χωροθέτησης για εγκατάσταση επίσης 6 καταστημάτων της τράπεζας A. Από τα 6 σημεία χωροθέτησης τα 5 ήταν κοινά με εκείνα της τράπεζας C με αποτέλεσμα να μοιράζεται η ζήτηση μεταξύ τους. Οι κόμβοι αυτοί συνεπώς θεωρούνται μερικώς κατειλημμένοι από την τράπεζα A και ο ένας όπου δεν υπάρχει κατάστημα και της τράπεζας C πλήρως κατειλημμένος. Στη συνέχεια θεωρήθηκε δυνατότητα μετεγκατάστασης των τριών από τα έξι καταστήματα της A και ταυτόχρονα δυνατότητα χωροθέτησης και δύο νέων. Η διαδικασία αυτή είχε ως αποτέλεσμα να επιλεγούν πέντε νέοι κόμβοι εγκατάστασης και τρεις να διατηρηθούν κοινοί με της τράπεζας C.

Από τη διαδικασία αυτή προκύπτει η βέλτιστη λύση γεγονός που σημαίνει, ότι δεδομένης της αρχικής κατάστασης (πέντε κοινοί κόμβοι) και της δυνατότητας αύξησης κατά δύο των καταστημάτων της A, είναι προτιμότερο τελικά να μοιραστεί η ζήτηση για τρεις κόμβους παρά να επιλεγούν οκτώ νέοι κόμβοι όπου δεν δραστηριοποιείται η τράπεζα C. Η κάλυψη δηλαδή της ζήτησης είναι μεγαλύτερη σε αυτή την περίπτωση.

Στη συνέχεια θεωρήθηκαν τρία ιεραρχικά επίπεδα καταστημάτων και λύθηκε το πρόβλημα χωροθέτησης αυτών της τράπεζας A, δεδομένου ότι διατηρούνται σταθερά τα καταστήματα της C. Ενδιαφέρον προκαλεί ότι ενώ θα μπορούσαν να εγκατασταθούν μέχρι και έξι καταστήματα η λύση που παίρνουμε μας δίνει μόνο τρία, ένα για κάθε ιεραρχικό επίπεδο. Παρόλα αυτά όμως, όπως βλέπουμε καλύπτονται όλα τα σημεία ζήτησης και η αντικειμενική συνάρτηση έχει τιμή 44,5 πολύ κοντά στο βέλτιστο 46. Αυτό συμβαίνει διότι έχουν μεγαλώσει οι αποστάσεις από τις οποίες μπορεί να εξυπηρετηθεί η ζήτηση με την προσθήκη των καταστημάτων μεγαλύτερου επιπέδου, για τα οποία οι πελάτες είναι διατεθειμένοι να διανύσουν μεγαλύτερη απόσταση.

Ακολούθως, θεωρήθηκαν, από την προηγούμενη λύση τα δύο καταστήματα σταθερά και δόθηκε η δυνατότητα εγκατάστασης ενός ακόμα οποιουδήποτε επιπέδου (συνολικά τέσσερα). Η αντικειμενική συνάρτηση με την προσθήκη αυτή βελτιώθηκε και τα δύο νέα καταστήματα που χωροθετήθηκαν ήταν επιπέδου 1 και 2 αντίστοιχα. Σε δοκιμές περαιτέρω αύξησης του αριθμού των καταστημάτων, παρατηρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση δε βελτιώνεται καθώς η ζήτηση ήδη καλύπτεται λόγω των τριών ιεραρχικών επιπέδων. Ακόμα, τα αποτελέσματα τροποποιούνται αν θεωρήσουμε διαφορετικές αποστάσεις κάλυψης της ζήτησης για κάθε ιεραρχικό επίπεδο. Ειδικά, αν ξεπεράσουμε τα 1500 μέτρα για τρίτου επιπέδου κατάστημα πχ, από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι καλύπτεται όλη η ζήτηση με τη χωροθέτηση μόνο δύο καταστημάτων επιπέδου 3. Έχει μεγάλη σημασία δηλαδή αν εξετάζει κανείς τη χωροθέτηση καταστημάτων εντός ενός αστικού κέντρου (ζήτηση περισσότερο ομοιογενής) ή σε έναν περιφερειακό νομό με διασκορπισμένη τη ζήτηση.

Διαπιστώνουμε από τα προηγούμενα, ότι όλα τα μοντέλα έχουν ρεαλιστικά αποτελέσματα. Θα μπορούσαν να βρουν εφαρμογή σε περιπτώσεις τραπεζών που εξετάζουν το ενδεχόμενο χωροθέτησης καταστημάτων full banking, retail η απλά θυρίδες. Σαφώς και θα πρέπει να παραμετροποιηθούν και άλλοι παράγοντες όπως πχ η ελκυστικότητα των προϊόντων μιας τράπεζας ή ακόμα και η φήμη της. Κάτι τέτοιο βέβαια αποδεικνύεται ιδιαίτερα δύσκολο, δηλαδή να συμπεριληφθούν σε ένα και μόνο μοντέλο όλες οι μεταβλητές, και για το λόγο αυτό, σε τέτοιου είδους μελέτες συνήθως εξετάζονται ξεχωριστά και στη συνέχεια παραμετροποιούνται με κατάλληλους συντελεστές βαρύτητας.

Τέλος, μια πρόταση για περαιτέρω έρευνα και για ποσοτική σύγκριση των μοντέλων, θα ήταν να τροποποιηθεί το συγκεκριμένο πρόβλημα ώστε να έχει ως σκοπό τη μεγιστοποίηση του πληθυσμού που καλύπτεται από όλα τα ιεραρχικά επίπεδα ταυτόχρονα, καθώς θα είχε ενδιαφέρον να δει κανείς αν οι τελικές αποφάσεις-επιλογές ταυτίζονται ή όχι και γιατί. Μια άλλη τροποποίηση που θα μπορούσε να εφαρμοστεί είναι να γίνει διάκριση σε ιεραρχικά επίπεδα όχι μόνο των μονάδων εξυπηρέτησης αλλά ταυτόχρονα και των αναγκών των πελατών. Ακόμα, θα μπορούσε να λυθεί και το ανάποδο πρόβλημα, δηλαδή της εύρεσης της μεγαλύτερης δυνατής απόστασης για την κάλυψη συγκεκριμένης ζήτησης, δεδομένου συγκεκριμένου αριθμού και επιπέδου καταστημάτων.

6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Zvi Drezner, Horst W Hamacher, FACILITY LOCATION Applications and Theory, Springer
2. Μπουραντάς Δ., ΜΑΝΑΤΖΜΕΝΤ. Εκδόσεις Μπένου, Αθήνα 2001.
3. Σίσκος Γ., ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ, Β′ έκδοση. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα 2000.
4. Σίσκος Γ., Μοντέλα Αποφάσεων – Μεθοδολογία Επιχειρησιακής Έρευνας, Θεωρία Πολυκριτήριας Ανάλυσης, Εφαρμογές σε Επιχειρήσεις και Οργανισμούς, Αθήνα, 2008
5. Robert Aboolian, Oded Berman and Dimitry Krass, (2007), Competitive Facility Location and Design Problem, Science Direct, European Journal of Operational Research 182 p.40-62
6. John Karkazis, (1989), Facilities Location in a Competitive Environment: A Promethee Based on Multiple Criteria Analysis, European Journal of Operational Research 42 p. 294-304
7. H.A. Eiselt and G. Laporte, (1989), Competitive Spatial Models, European Journal of Operational Research 39, p. 231-242
8. Daniel Serra and Charles ReVelle, Competitive Location and Pricing on Networks, Journal of Economic Literature Classification
9. Jesse K. Pearson, (2007), A Comparative Business Site-Location Feasibility Analysis using GIS and the Gravity Model
10. Daniel Serra, Vladimir Marianov and Charles ReVelle, (1992), The Maximum-Capture Hierarchical Location Problem, European Journal of Operational Research 62, p. 363-371
11. Hansen, P., Labbe, M., Peeters, D., and Thisse, J.E. (1987), "Facility location analysis, in: R. Arnott, (ed.), Systems of Cities and Facility Location, Harwood, New York, 1-70.
12. ReVelle, C. (1986), "The maximum capture or sphere of influence location problem: Hotelling revisited on a net-work", Journal of Regional Science 26, 343-358.

7 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ1

Distances

UID	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	337	828	1341	1834	2332	2827	3334
1	337	0	494	1006	1498	1997	2491	2999
2	828	494	0	513	1005	1504	1998	2505
3	1341	1006	513	0	493	991	1486	1993
4	1834	1498	1005	493	0	499	993	1501
5	2332	1997	1504	991	499	0	495	1003
6	2827	2491	1998	1486	993	495	0	508
7	3334	2999	2505	1993	1501	1003	508	0
8	3831	3496	3003	2490	1998	1500	1005	498
9	4316	3981	3488	2976	2484	1986	1491	983
10	4619	4285	3791	3279	2788	2291	1796	1289
11	274	484	913	1412	1899	2392	2882	3384
12	444	353	613	1086	1564	2052	2539	3039
13	878	605	352	644	1092	1568	2049	2545
14	1358	1052	609	388	660	1098	1565	2055
15	1849	1532	1057	622	425	672	1095	1571
16	2344	2022	1538	1059	652	445	672	1100
17	2841	2516	2028	1536	1081	666	450	674
18	3338	3012	2522	2023	1554	1091	674	445
19	3836	3509	3018	2516	2039	1561	1098	665
20	4335	4007	3515	3011	2530	2045	1568	1089
21	4769	4441	3950	3445	2964	2477	1995	1506
22	834	994	1304	1738	2189	2654	3122	3607
23	866	853	989	1348	1767	2215	2673	3151
24	1151	984	852	1026	1366	1776	2213	2679
25	1549	1308	986	888	1054	1378	1774	2218
26	1993	1718	1311	1012	925	1070	1378	1778
27	2459	2166	1722	1327	1049	945	1073	1381
28	2936	2633	2171	1731	1358	1067	950	1072
29	3420	3110	2638	2175	1758	1373	1075	945
30	3908	3594	3116	2640	2198	1769	1381	1066
31	4370	4052	3570	3085	2630	2178	1746	1341
32	4716	4393	3905	3409	2938	2463	1999	1537
33	1137	1247	1474	1849	2262	2700	3147	3615
34	1306	1309	1393	1670	2026	2426	2847	3296
35	1509	1403	1311	1441	1709	2054	2443	2870
36	1793	1607	1365	1316	1452	1713	2051	2449
37	2143	1902	1549	1320	1270	1390	1645	1995
38	2615	2348	1942	1604	1388	1310	1402	1643
39	3120	2842	2416	2033	1731	1512	1427	1502
40	3570	3283	2840	2423	2065	1755	1535	1445
41	4021	3724	3268	2826	2430	2058	1742	1508
42	4342	4037	3568	3105	2679	2264	1883	1551
43	3399	3135	2727	2366	2081	1866	1756	1773
44	3734	3465	3045	2663	2345	2077	1892	1815
45	4041	3761	3326	2918	2563	2243	1985	1815

8	9	10	11	12	13	14	15	16
3831	4316	4619	274	444	878	1358	1849	2344
3496	3981	4285	484	353	605	1052	1532	2022
3003	3488	3791	913	613	352	609	1057	1538
2490	2976	3279	1412	1086	644	388	622	1059
1998	2484	2788	1899	1564	1092	660	425	652
1500	1986	2291	2392	2052	1568	1098	672	445
1005	1491	1796	2882	2539	2049	1565	1095	672
498	983	1289	3384	3039	2545	2055	1571	1100
0	488	797	3882	3536	3042	2549	2061	1579
488	0	310	4361	4014	3518	3022	2529	2038
797	310	0	4660	4311	3813	3316	2820	2326
3882	4361	4660	0	354	853	1353	1853	2353
3536	4014	4311	354	0	500	1000	1500	2000
3042	3518	3813	853	500	0	500	1000	1500
2549	3022	3316	1353	1000	500	0	500	1000
2061	2529	2820	1853	1500	1000	500	0	500
1579	2038	2326	2353	2000	1500	1000	500	0
1114	1554	1834	2853	2500	2000	1500	1000	500
698	1085	1350	3353	3000	2500	2000	1500	1000
485	661	882	3853	3500	3000	2500	2000	1500
695	445	484	4353	4000	3500	3000	2500	2000
1067	656	446	4786	4433	3933	3433	2933	2433
4097	4562	4848	561	699	1099	1558	2036	2523
3639	4100	4384	637	500	707	1118	1581	2062
3160	3615	3895	1004	707	500	707	1118	1581
2690	3135	3410	1453	1118	707	500	707	1118
2232	2663	2930	1927	1581	1118	707	500	707
1797	2202	2458	2412	2062	1581	1118	707	500
1406	1764	2000	2901	2550	2062	1581	1118	707
1106	1368	1567	3394	3041	2550	2062	1581	1118
985	1064	1189	3889	3536	3041	2550	2062	1581
1077	928	925	4357	4003	3508	3013	2521	2032
1153	822	680	4718	4364	3866	3367	2869	2373
4095	4547	4825	864	914	1208	1607	2052	2517
3766	4206	4476	1056	957	1068	1367	1759	2196
3329	3758	4021	1309	1083	959	1080	1383	1777
2892	3308	3565	1641	1349	1044	928	1064	1380
2416	2817	3066	2036	1709	1299	975	846	990
2009	2369	2599	2532	2194	1745	1334	1008	866
1760	2043	2235	3045	2704	2245	1808	1413	1107
1568	1751	1895	3507	3162	2693	2236	1803	1414
1470	1517	1592	3969	3621	3143	2673	2216	1782
1380	1299	1306	4306	3955	3468	2985	2510	2046
1965	2182	2335	3306	2973	2532	2118	1750	1462
1918	2060	2172	3647	3311	2863	2436	2042	1705
1823	1882	1950	3965	3625	3165	2720	2297	1912

17	18	19	20	21	22	23	24	25
2841	3338	3836	4335	4769	834	866	1151	1549
2516	3012	3509	4007	4441	994	853	984	1308
2028	2522	3018	3515	3950	1304	989	852	986
1536	2023	2516	3011	3445	1738	1348	1026	888
1081	1554	2039	2530	2964	2189	1767	1366	1054
666	1091	1561	2045	2477	2654	2215	1776	1378
450	674	1098	1568	1995	3122	2673	2213	1774
674	445	665	1089	1506	3607	3151	2679	2218
1114	698	485	695	1067	4097	3639	3160	2690
1554	1085	661	445	656	4562	4100	3615	3135
1834	1350	882	484	446	4848	4384	3895	3410
2853	3353	3853	4353	4786	561	637	1004	1453
2500	3000	3500	4000	4433	699	500	707	1118
2000	2500	3000	3500	3933	1099	707	500	707
1500	2000	2500	3000	3433	1558	1118	707	500
1000	1500	2000	2500	2933	2036	1581	1118	707
500	1000	1500	2000	2433	2523	2062	1581	1118
0	500	1000	1500	1933	3014	2550	2062	1581
500	0	500	1000	1433	3508	3041	2550	2062
1000	500	0	500	934	4003	3536	3041	2550
1500	1000	500	0	435	4499	4031	3536	3041
1933	1433	934	435	0	4926	4457	3960	3464
3014	3508	4003	4499	4926	0	470	970	1470
2550	3041	3536	4031	4457	470	0	500	1000
2062	2550	3041	3536	3960	970	500	0	500
1581	2062	2550	3041	3464	1470	1000	500	0
1118	1581	2062	2550	2969	1970	1500	1000	500
707	1118	1581	2062	2476	2470	2000	1500	1000
500	707	1118	1581	1987	2970	2500	2000	1500
707	500	707	1118	1505	3470	3000	2500	2000
1118	707	500	707	1041	3970	3500	3000	2500
1551	1087	677	484	639	4444	3974	3474	2974
1877	1386	903	459	265	4829	4359	3860	3361
2993	3476	3963	4453	4873	329	501	936	1415
2655	3126	3606	4090	4504	659	457	660	1078
2215	2674	3146	3626	4036	1068	682	459	676
1782	2224	2686	3160	3567	1505	1068	642	429
1321	1734	2185	2653	3056	1982	1525	1044	596
992	1311	1718	2165	2555	2509	2048	1559	1079
977	1088	1383	1772	2129	3025	2566	2076	1594
1118	1000	1118	1414	1726	3503	3041	2550	2062
1393	1098	986	1112	1340	3981	3518	3024	2531
1605	1209	922	859	990	4345	3878	3381	2884
1309	1337	1537	1854	2162	3239	2791	2316	1855
1463	1370	1454	1688	1945	3587	3138	2661	2194
1592	1384	1339	1474	1674	3926	3472	2989	2513

26	27	28	29	30	31	32	33	34
1993	2459	2936	3420	3908	4370	4716	1137	1306
1718	2166	2633	3110	3594	4052	4393	1247	1309
1311	1722	2171	2638	3116	3570	3905	1474	1393
1012	1327	1731	2175	2640	3085	3409	1849	1670
925	1049	1358	1758	2198	2630	2938	2262	2026
1070	945	1067	1373	1769	2178	2463	2700	2426
1378	1073	950	1075	1381	1746	1999	3147	2847
1778	1381	1072	945	1066	1341	1537	3615	3296
2232	1797	1406	1106	985	1077	1153	4095	3766
2663	2202	1764	1368	1064	928	822	4547	4206
2930	2458	2000	1567	1189	925	680	4825	4476
1927	2412	2901	3394	3889	4357	4718	864	1056
1581	2062	2550	3041	3536	4003	4364	914	957
1118	1581	2062	2550	3041	3508	3866	1208	1068
707	1118	1581	2062	2550	3013	3367	1607	1367
500	707	1118	1581	2062	2521	2869	2052	1759
707	500	707	1118	1581	2032	2373	2517	2196
1118	707	500	707	1118	1551	1877	2993	2655
1581	1118	707	500	707	1087	1386	3476	3126
2062	1581	1118	707	500	677	903	3963	3606
2550	2062	1581	1118	707	484	459	4453	4090
2969	2476	1987	1505	1041	639	265	4873	4504
1970	2470	2970	3470	3970	4444	4829	329	659
1500	2000	2500	3000	3500	3974	4359	501	457
1000	1500	2000	2500	3000	3474	3860	936	660
500	1000	1500	2000	2500	2974	3361	1415	1078
0	500	1000	1500	2000	2474	2862	1904	1546
500	0	500	1000	1500	1974	2364	2398	2029
1000	500	0	500	1000	1474	1866	2894	2518
1500	1000	500	0	500	974	1370	3391	3011
2000	1500	1000	500	0	474	879	3889	3506
2474	1974	1474	974	474	0	426	4363	3979
2862	2364	1866	1370	879	426	0	4760	4382
1904	2398	2894	3391	3889	4363	4760	0	417
1546	2029	2518	3011	3506	3979	4382	417	0
1097	1565	2049	2538	3031	3503	3908	887	480
674	1107	1580	2066	2557	3028	3435	1357	956
346	620	1072	1553	2044	2515	2922	1860	1466
632	366	607	1050	1529	1995	2408	2391	1994
1127	706	477	675	1089	1534	1957	2899	2498
1581	1118	707	500	707	1103	1528	3379	2977
2043	1562	1098	686	486	701	1113	3862	3461
2388	1895	1406	930	502	381	742	4237	3841
1420	1044	816	861	1147	1533	1957	3085	2673
1747	1336	1011	870	996	1307	1720	3431	3020
2048	1604	1205	912	843	1042	1432	3779	3369

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1509	1793	2143	2615	3120	3570	4021	4342	3399	3734	4041
1403	1607	1902	2348	2842	3283	3724	4037	3135	3465	3761
1311	1365	1549	1942	2416	2840	3268	3568	2727	3045	3326
1441	1316	1320	1604	2033	2423	2826	3105	2366	2663	2918
1709	1452	1270	1388	1731	2065	2430	2679	2081	2345	2563
2054	1713	1390	1310	1512	1755	2058	2264	1866	2077	2243
2443	2051	1645	1402	1427	1535	1742	1883	1756	1892	1985
2870	2449	1995	1643	1502	1445	1508	1551	1773	1815	1815
3329	2892	2416	2009	1760	1568	1470	1380	1965	1918	1823
3758	3308	2817	2369	2043	1751	1517	1299	2182	2060	1882
4021	3565	3066	2599	2235	1895	1592	1306	2335	2172	1950
1309	1641	2036	2532	3045	3507	3969	4306	3306	3647	3965
1083	1349	1709	2194	2704	3162	3621	3955	2973	3311	3625
959	1044	1299	1745	2245	2693	3143	3468	2532	2863	3165
1080	928	975	1334	1808	2236	2673	2985	2118	2436	2720
1383	1064	846	1008	1413	1803	2216	2510	1750	2042	2297
1777	1380	990	866	1107	1414	1782	2046	1462	1705	1912
2215	1782	1321	992	977	1118	1393	1605	1309	1463	1592
2674	2224	1734	1311	1088	1000	1098	1209	1337	1370	1384
3146	2686	2185	1718	1383	1118	986	922	1537	1454	1339
3626	3160	2653	2165	1772	1414	1112	859	1854	1688	1474
4036	3567	3056	2555	2129	1726	1340	990	2162	1945	1674
1068	1505	1982	2509	3025	3503	3981	4345	3239	3587	3926
682	1068	1525	2048	2566	3041	3518	3878	2791	3138	3472
459	642	1044	1559	2076	2550	3024	3381	2316	2661	2989
676	429	596	1079	1594	2062	2531	2884	1855	2194	2513
1097	674	346	632	1127	1581	2043	2388	1420	1747	2048
1565	1107	620	366	706	1118	1562	1895	1044	1336	1604
2049	1580	1072	607	477	707	1098	1406	816	1011	1205
2538	2066	1553	1050	675	500	686	930	861	870	912
3031	2557	2044	1529	1089	707	486	502	1147	996	843
3503	3028	2515	1995	1534	1103	701	381	1533	1307	1042
3908	3435	2922	2408	1957	1528	1113	742	1957	1720	1432
887	1357	1860	2391	2899	3379	3862	4237	3085	3431	3779
480	956	1466	1994	2498	2977	3461	3841	2673	3020	3369
0	476	988	1515	2018	2497	2981	3361	2197	2544	2892
476	0	513	1038	1543	2022	2506	2885	1735	2083	2426
988	513	0	530	1044	1522	2004	2377	1272	1616	1947
1515	1038	530	0	517	994	1474	1847	788	1119	1434
2018	1543	1044	517	0	479	963	1348	356	631	922
2497	2022	1522	994	479	0	485	876	440	370	499
2981	2506	2004	1474	963	485	0	402	868	607	366
3361	2885	2377	1847	1348	876	402	0	1270	996	691
2197	1735	1272	788	356	440	868	1270	0	347	697
2544	2083	1616	1119	631	370	607	996	347	0	358
2892	2426	1947	1434	922	499	366	691	697	358	0

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

UID	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	1	1	1	0
6	0	0	0	0	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	0	0	0	0	0
12	1	1	1	0	0	0	0	0
13	1	1	1	1	0	0	0	0
14	0	0	1	1	1	0	0	0
15	0	0	0	1	1	1	0	0
16	0	0	0	0	1	1	1	0
17	0	0	0	0	0	1	1	1
18	0	0	0	0	0	0	1	1
19	0	0	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	1	0	0	0	0	0	0
23	1	1	1	0	0	0	0	0
24	0	1	1	0	0	0	0	0
25	0	0	1	1	0	0	0	0
26	0	0	0	0	1	0	0	0
27	0	0	0	0	0	1	0	0
28	0	0	0	0	0	0	1	0
29	0	0	0	0	0	0	0	1
30	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0
41	0	0	0	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	0	0	0	0	0	0	0
44	0	0	0	0	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0

8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

26	27	28	29	30	31	32	33	34
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0

35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1