Πανεπιστημιο Πατρων
Τμημα Μαθηματικων

Εισαγωγή στη Θεωρία Υπερκυκλικών Τελεστών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του ΣΟΥΡΜΕΛΙΔΗ ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ: ΒΑΓΙΑ ΒΛΑΧΟΥ

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2015

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την αναπληρώτρια καθηγήτρια κ.Βάγια Βλάχου η οποία έχοντας γνώση των μαθηματικών μου προτιμήσεων, μου συνέστισε αυτή την εντυπωσιακή περιοχή των μαθηματικών. Η βοήθεια της καθ' όλη τη διαρκεια του χρόνου υπήρξε καθοριστική για την εκπόνηση αυτής της εργασίας.
Ευχαριστώ επίσης τον καθηγητή κ.Βασίλειο Νεστορίδη και τον λέκτορα κ.Γεώργιο Ελευθεράκη, που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.
Ακόμα, ένα μεγάλο ευχαριστώ στα οικεία μου πρόσωπα που με στήριξαν στις επιλογές μου όλα αυτά τα χρόνια, πιστεύοντας στις δυνατότητές μου και ενθαρρυνοντάς με.
Τέλος, εκφράζω την βαθιά μου ευγνωμοσύνη στο ίδρυμα Ωνάση για την οικονομική του υποστήριξη, χάριν στην οποία ήταν δυνατή η ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή **5**

1 Τοπολογικά δυναμικά συστήματα **6**
- 1.1 Δυναμικά συστήματα . . . 6
- 1.2 Topologically transitive απεικονίσεις . . . 7
- 1.3 Χάος . . . 11
- 1.4 Mixing και ασθενώς mixing απεικονίσεις . . . 14
- 1.5 Minimal και Syndetically transitive απεικονίσεις . . . 17
- 1.6 Καθολικότητα . . . 19

2 Υπερκυκλικοί και χαοτικοί τελεστές **21**
- 2.1 Γραμμικά δυναμικά συστήματα . . . 21
- 2.2 Υπερκυκλικοί τελεστές . . . 31
- 2.3 Γραμμικό χάος . . . 36
- 2.4 Το σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων . . . 40

3 Κριτήρια Υπερκυκλικότητας **48**
- 3.1 Κριτήρια για χάος και mixing . . . 48
- 3.2 Κριτήριο Gethner-Shapiro και Κριτήριο Υπερκυκλικότητας . . . 50
- 3.3 Υπερκυκλικές ακολουθίες τελεστών . . . 59

4 Θεώρημα Ansari και Θεώρημα Bourdon-Feldman **61**
- 4.1 Θεώρημα Ansari . . . 61
- 4.2 Θεώρημα Bourdon-Feldman . . . 65

5 Συχνά Υπερκυκλικοί Τελεστές **70**
- 5.1 Συχνή υπερκυκλικότητα . . . 70
- 5.2 Το σύνολο των συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων . . . 80

6 Κοινά Υπερκυκλικά Διανύσματα **83**

Αναφορές **92**

Εισαγωγή

Είναι ευρέως διαδεδομένο ότι η έννοια του χάους συνδέεται με τη μη γραμμικότητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι διαισθητικά περιμένουμε από μία γραμμική απεικόνιση να παρουσιάζει μία "προβλέψιμη" συμπεριφορά. Κάτι το οποίο όμως δεν αληθεύει.

Πρώτος ο G.D. Birkhoff (1929) βρήκε ένα παράδειγμα ενός τελεστή με ένα σημαντικό στοιχείο του χάους: ο τελεστής είχε πυκνή τροχιά. Στη συνέχεια ακολούθησαν οι G.R. Maclane (1952) και S. Rolewisz (1969), οι οποιοί βρήκαν επιπλέον παραδείγματα τελεστών με πυκνή τροχιά. Παρακινούμενοι από αυτά τα παραδείγματα, πολλοί ερευνητές άρχισαν να μελετούν την έννοια του χάους υπό το πρίσμα της γραμμικότητας, ονομάζοντας τους τελεστές με πυκνή τροχιά υπερκυκλικούς.

Το καθοριστικό βήμα έγινε από τους G. Godefroy και J.H. Shapiro (1991), οι οποίοι όχι μόνο ανακάλυψαν καινούργιες κλάσεις υπερκυκλικών τελεστών, αλλά πρότειναν επίσης να γίνει αποδεκτός ο ορισμός του (μη γραμμικου) χάους, που είχε δοθει από τον Devaney, ως ο ορισμός του γραμμικού χάους:

Ένας τελεστής είναι χαοτικός αν:

1) έχει πυκνή τροχιά,

2) έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες,

3) το σύνολο των περιοδικών του σημείων είναι πυκνό.

Σκοπός αυτής της εργασίας, η οποία βασίζεται στο βιβλίο Linear Chaos των Karl-G. Grosse-Erdmann και A.Peris Manguillot, είναι να γίνει μία εισαγωγή στη θεωρία των υπερκυκλικών τελεστών και ταυτόχρονα να παρουσιαστούν ορισμένα από τα πιο θεμελιώδη θεωρήματα της θεωρίας αυτής.

Στο 1ο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων (όχι απαραίτητα γραμμικών) και παρουσιάζονται ορισμένα αποτελέσματα με βασικότερο αυτών, το θεώρημα του Birkhoff που δίνει μία συνθήκη ώστε μία απεικόνιση να έχει πυκνή τροχιά.

Στο 2ο κεφάλαιο γίνεται η κατασκευή των χώρων Fréchet, που είναι μία γενίκευση των χώρων Banach και στη συνέχεια μεταφέρουμε τα αποτελέσματα του 1ου κεφαλαίου πάνω σε γραμμικά δυναμικά συστήματα.

Στο 3ο κεφάλαιο παρουσιάζονται ορισμένα κριτήρια που αν ικανοποιεί ένας τελεστής, θα είναι υπερκυκλικός ή ακόμα και χαοτικός, με τελικό το κριτήριο Υπερκυκλικότητας.

Στο 4ο κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο από τα σπουδαιότερα θεωρήματα της θεωρίας των υπερκυκλικών τελεστών:

1)το θεώρημα της Ansari,

2)το θεώρημα των Bourdon-Feldmann.

Στο 5ο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία από τις πιο πρόσφατες έννοιες στη θεωρία των υπερκυκλικών τελεστών και που έχει γεννηθεί από την εργοδική θεωρία: αυτή της συχνής υπερκυκλικότητας.

Τέλος, στο 6ο κεφάλαιο μελετάται η ύπαρξη κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων μίας υπεραριθμήσιμης οικογένειας τελεστών.

1 Τοπολογικά δυναμικά συστήματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων. Δίνονται οι ορισμοί των topologically transitive απεικονίσεων, των χαοτικών και (ασθενώς) mixing απεικονίσεων, των minimal και syndetically transitive απεικονίσεων καθώς και ορισμένες από τις βασικότερες ιδιότητες που έχουν. Παρουσιάζεται το θεώρημα του Birkhoff το οποίο αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων (και κατ' επέκταση των υπερκυκλικών τελεστών). Αξίζει να σημειωθεί ότι η έννοια της γραμμικότητας δεν εμφανίζεται και δεν είναι απαραίτητη στο παρόν κεφάλαιο.

1.1 Δυναμικά συστήματα

Ορισμός 1.1.1. *Ένα (διακριτό) δυναμικό σύστημα είναι ένα ζευγάρι (X, T) αποτελούμενο από ένα μετρικό χώρο X και μία συνεχή απεικόνιση $T : X \to X$.*

Παρατήρηση: Για συντομία θα λέμε έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα ή ακόμη έστω T ένα δυναμικό σύστημα (αν ο χώρος X είναι προφανής). Επίσης θα γράφουμε Tx αντί για $T(x)$, συμβολισμός που έχει επικρατήσει στη Θεωρία Τελεστών.

Η κύρια έννοια που μελετάται στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων είναι αυτή της πυκνής τροχιάς ενός σημείου $x \in X$ μέσω της απεικόνισης T.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Για ένα $x \in X$, το σύνολο $orb(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \dots\} = \{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$ καλείται τροχιά του x μέσω του T, όπου $T^n = T \circ \cdots \circ T$ (n φορές) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $T^0 = I$.*

Πολλές φορές για τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός δυναμικού συστήματος, είναι πιο εύκολο να μελετηθεί ένα άλλο δυναμικό σύστημα, το οποίο είναι "ισοδύναμο" με το αρχικό.

Ορισμός 1.1.3. *Έστω $S : Y \to Y$ και $T : X \to X$ δύο δυναμικά συστήματα.*
(i) Το T καλείται quasiconjugate του S αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\phi : Y \to X$ με πυκνό πεδίο τιμών τέτοια ώστε $T \circ \phi = \phi \circ S$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\phi"'] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "T"'] & X \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.
(ii) Αν η ϕ μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι ομοιομορφισμός, τότε τα S και T καλούνται conjugate.

Ορισμός 1.1.4. *Θα λέμε ότι μία ιδιότητα των δυναμικών συστήματων $\mathcal{P}$ διατηρείται μέσω μιας (quasi)conjugacy σχέσης, αν ισχύει το εξής: αν ένα δυναμικό σύστημα $S : Y \to Y$ έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$, τότε κάθε δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ το οποίο είναι (quasi)conjugate του S έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$.*

1.2 Topologically transitive απεικονίσεις

Ένας τρόπος για να ορίσουμε ένα καινούργιο δυναμικό συστήμα από ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$, είναι να περιορίσουμε την απεικόνιση T σε ένα υποσύνολο Y του X, με την προϋπόθεση όμως ότι το Y θα απεικονίζεται μέσω της T στον εαυτό του.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Τότε ένα υποσύνολο $Y \subseteq X$ καλείται T-αναλλοίωτο ή αναλλοίωτο μέσω του T αν $T(Y) \subseteq Y$.*

Παρατήρηση: Οπότε αν το $Y \subseteq X$ είναι T-αναλλοίωτο, τότε το $T|_Y : Y \to Y$ είναι επίσης δυναμικό σύστημα.

Ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ λέγεται ανάγωγο ή αλλιώς ο X είναι T-ανάγωγος, αν δεν μπορεί να γραφεί σαν ξένη ένωση δύο T-αναλλοίωτων υποσυνόλων του με μη κενό εσωτερικό. Τα δυναμικά συστήματα που παρουσιαζούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και με τα οποία θα ασχοληθούμε, έχουν αυτή την ιδιότητα και πιο συγκεκριμένα μία πιο ισχυρή από αυτή.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Θεωρούμε τις προτάσεις:*
(i) ο X δεν μπορεί να γραφεί ως $X = A \cup B$, όπου A, B είναι ξένα μεταξύ τους T-αναλλοίωτα υποσύνολα του X τέτοια ώστε να έχουν μη κενό εσωτερικό.
(ii) ο X δεν μπορεί να γραφεί ως $X = A \cup B$, όπου A, B είναι ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X, τέτοια ώστε το A να είναι T-αναλλοίωτο και τα A και B να έχουν μη κενό εσωτερικό.
(iii) για κάθε U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
(iv) για κάθε U μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X, το σύνολο $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ είναι πυκνό στο X.
(v) για κάθε U μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X, το σύνολο $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ είναι πυκνό στο X.
Τότε για τις παραπάνω προτάσεις ισχύει ότι $(i) \Leftarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$.

Απόδειξη. $(ii) \Rightarrow (i)$. Είναι άμεσο.
$(ii) \Rightarrow (iv)$. Έστω U ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Θέτουμε $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ και $B = X \setminus A$. Θα αποδείξουμε ότι το A είναι πυκνό στο X :
1ο Βήμα: Το A είναι T-αναλλοίωτο.
Πράγματι, έστω $b \in T(A) \Rightarrow \exists a \in A$ τέτοιο ώστε $Ta = b$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } a \in T^{n_0}(U) \\ &\Rightarrow b = Ta \in T^{n_0+1}(U) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U) = A \\ &\Rightarrow b \in A. \end{aligned}$$

Άρα $T(A) \subseteq A$.
<u>2ο Βήμα: Ισχύει ότι $A^o \neq \emptyset$.</u>
$U = T^0(U) \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^n(U) = A$ και $U \neq \emptyset$. Άρα $A^o \neq \emptyset$.
<u>3ο Βήμα: Το A είναι πυκνό.</u>
Επειδή $X = A \cup B$ όπου A, B ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X και το A είναι T-αναλλοίωτο με μη κενό εσωτερικό, από (ii) συνεπάγεται ότι $B^o = \emptyset$. Οπότε για κάθε μη κενό ανοικτό $V \subseteq X$, ισχύει ότι $V \nsubseteq B \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$. Έστω ότι $X = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$ και $T(A) \subseteq A$. Αποδεικνύουμε ότι $A^o = \emptyset$ ή $B^o = \emptyset$. Έστω ότι και τα δύο έχουν μη κενό εσωτερικό. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Για $U = A^o$ και $V = B^o$ ισχύει από (iii) ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $\emptyset \neq T^n(A^o) \cap B^o \subseteq T^n(A) \cap B \subseteq A \cap B = \emptyset$, πράγμα άτοπο. Άρα $A^o = \emptyset$ ή $B^o = \emptyset$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Από (iv) το σύνολο $\bigcup\limits_{n=o}^{\infty} T^n(U)$ είναι πυκνό στο X. Οπότε
$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^n(U) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
Για να αποδείξουμε ότι $(v) \Leftrightarrow (iii)$, πρέπει πρώτα να αποδείξουμε ότι $T^n(U) \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$.
Πράγματι,
$$\begin{aligned} T^n(U) \cap V \neq \emptyset &\Leftrightarrow \exists x \in U \text{ τέτοιο ώστε } T^n x \in V \\ &\Leftrightarrow \exists x \in U \text{ τέτοιο ώστε } x \in T^{-n}(V) \\ &\Leftrightarrow U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset. \end{aligned}$$
$(v) \Rightarrow (iii)$. Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Επειδή το $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V)$ είναι πυκνό στο X, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset \Leftrightarrow T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
$(iii) \Rightarrow (v)$. Έστω U μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Θα αποδείξουμε ότι το $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ είναι πυκνό στο X :
Έστω V μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Αποδείξαμε ότι η πρόταση (iii) συνεπάγεται την πρόταση (iv), οπότε
$$\begin{aligned} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(V) \cap U \neq \emptyset &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } T^n(V) \cap U \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } V \cap T^{-n}(U) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow V \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U) \neq \emptyset. \end{aligned}$$
Άρα το $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ είναι πυκνό στο X.

Υπάρχει αντιπαράδειγμα που αποδεικνύει ότι η (i) συνθήκη δε συνεπάγεται τις υπόλοιπες. Οπότε η συνθήκη (iii) είναι πιο ισχυρή από το να είναι ο χώρος T-ανάγωγος. Αποτελεί μάλιστα μία τόσο χρήσιμη ιδιότητα των δυναμικών συστημάτων, που της δόθηκε ξεχωριστός ορισμός.

Ορισμός 1.2.2. *Ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ καλείται topologically transitive, αν για κάθε U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Πρόταση 1.2.2. *Η topologically transitive ιδιότητα διατηρείται μέσω μιας quasiconjugacy σχέσης.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα που είναι *quasiconjugate* ενός άλλου δυναμικού συστήματος $S : Y \to Y$ μέσω μίας $\phi : Y \to X$. Δηλαδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών και $T \circ \phi = \phi \circ S$. Έστω ότι το $S : Y \to Y$ είναι *topologically transitive*. Θα αποδείξουμε ότι και το $T : X \to X$ είναι *topologically transitive* :
Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Η ϕ έχει πυκνό πεδίο τιμών, οπότε $\phi(Y) \cap U \neq \emptyset$ και $\phi(Y) \cap V \neq \emptyset$, το οποίο έχουμε δείξει ότι είναι ισοδύναμο με $\phi^{-1}(U) = Y \cap \phi^{-1}(U) \neq \emptyset$ και $\phi^{-1}(V) = Y \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$. Η ϕ έιναι συνεχής, άρα τα $\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Y. Τέλος, επειδή το $S : Y \to Y$ είναι *topologically transitive* και τα $\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V)$ είναι μη κενά ανοικτά υποσύνολα του Y, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} S^n\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset &\Rightarrow \left(\phi \circ S^n\right)\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \left(T^n \circ \phi\right)\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow T^n(U) \cap V \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Άρα το $T : X \to X$ είναι *topologically transitive*.

Με βάση την ισοδυναμία $(iv) \Leftrightarrow (v)$ της πρότασης 1.2.1 έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.3. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα με συνεχής αντίστροφη συνάρτηση T^{-1}, δηλαδή το T είναι ομοιομορφισμός. Τότε το $T^{-1} : X \to X$ είναι δυναμικό σύστημα και ισχύει ότι το T είναι topologically transitive αν και μόνο αν το T^{-1} είναι topologically transitive.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} T \textit{ topologically transitive} &\Leftrightarrow \forall\, U \subseteq X \text{ μη κενό ανοικτό, το } \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U) \text{ είναι πυκνό στο } X \\ &\Leftrightarrow \forall\, U \subseteq X \text{ μη κενό ανοικτό, το } \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U) \text{ είναι πυκνό στο } X \\ &\Leftrightarrow T^{-1} \textit{ topologically transitive.} \end{aligned}$$

Οι Kolyada και Snoha [31] κάνουν μία αναλυτική έρευνα πάνω στα *topologically transitive* δυναμικά συστήματα και δίνουν περαιτέρω συνθήκες που είναι ισοδύναμες με την *topologically transitive* ιδιότητα.

Η *topologically transitive* συμπεριφορά ενός δυναμικού συστήματος $T : X \to X$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η ιδιότητα του T να συνδέει τα υποσύνολα του X με μη κενό εσωτερικό. Αυτή η ιδότητα όμως είναι κάτι που προκύπτει άμεσα αν το T έχει πυκνή τροχιά.

Πρόταση 1.2.4. *Έστω T μία συνεχής απεικόνιση σε ένα μετρικό χώρο X χωρίς μεμονωμένα σημεία.*
(i) Αν υπάρχει $x \in X$ με πυκνή τροχιά στο X, τότε το $T^n x$ έχει πυκνή τροχιά στο X, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) Αν το T έχει πυκνή τροχιά, τότε είναι topologically transitive.

Απόδειξη. (i) Έστω $x \in X$ με πυκνή τροχια στο X και $n \in \mathbb{N}$. Η τροχιά του $T^n x$ είναι το σύνολο $orb(T^n x, T) = \{T^m (T^n x) : m \in \mathbb{N}_0\} = orb(x, T) \setminus \{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\}$. Θα αποδείξουμε ότι $\overline{orb(T^n x, T)} = X$:
Έστω $y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $U = S(y, \varepsilon) \setminus \{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\}$. Επειδή ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, το $S(y, \varepsilon)$ περιέχει άπειρα σημεία και άρα το $U \subseteq X$ είναι μη κενό ανοικτό. Από υπόθεση ισχύει ότι $orb(x, T) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow orb(x, T) \setminus \{x, Tx, \ldots, T^{n-1}x\} \cap S(y, \varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow orb(T^n x, T) \cap S(y, \varepsilon) \neq \emptyset$. Άρα το $T^n x$ έχει πυκνή τροχιά στο X.
(ii) Έστω ότι υπάρχει $x \in X$ με πυκνή τροχιά στο X. Θα αποδείξουμε ότι το T είναι *topologically transitive* :
Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Το $orb(x, T) \cap U \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T^n x \in U$. Από (i) το $orb(T^n x, T)$ είναι πυκνό στο X, οπότε $orb(T^n x, T) \cap V \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $m \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T^m(T^n x) \in V$. Βρήκαμε δηλαδή $m \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Άρα το T είναι *topologically transitive*.

Υπάρχει παράδειγμα δυναμικού συστήματος που είναι *topologically transitive* αλλά δεν έχει σημείο με πυκνή τροχιά. Παρ᾽ όλ᾽ αυτά, αν ο χώρος μας είναι "καλός", τότε οι δύο έννοιες, αυτή της πυκνής τροχιάς και αυτή της *topologically transitive*, είναι ισοδύναμες. Η σπουδαιότητα του επόμενου θεωρήματος έγκειται στην εφαρμογή του για την απόδειξη ύπαρξης σημείου με πυκνή τροχιά, όταν η ευρεσή του μέσω του δοθέντος T είναι δύσκολη έως αδύνατη.

Θεώρημα 1.2.1 (Birkhoff transitivity theorem). *Έστω T μία συνεχής απεικόνιση σε ένα πλήρη και διαχωρίσιμο μετρικό χώρο X ο οποίος δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) *Το T είναι topologically transitive.*
(ii) *Υπάρχει $x \in X$ με πυκνή τροχιά στο X.*
Αν ισχύει μία από τις παραπάνω συνθήκες, τότε το σύνολο των σημείων του X με πυκνή τροχιά, είναι πυκνό G_δ-σύνολο.

Απόδειξη. $(ii) \Rightarrow (i)$ Αποδείχτηκε στην πρόταση 1.2.4.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω ότι το T είναι *topologically transitive* και έστω $\mathcal{D}(T)$ το σύνολο των σημείων του X που έχουν πυκνή τροχιά στο X. Θα αποδείξουμε ότι το $\mathcal{D}(T)$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο, οπότε και διαφορετικό του κενού:
(α) Επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολό του $\{y_j / j \in \mathbb{N}\}$. Το σύνολο $A = \{S\left(y_j, \frac{1}{m}\right) : j, m \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί μία βάση της τοπολογίας του X. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $U \subseteq X$ ανοικτό τέτοιο ώστε $x \in U$. Το U είναι ανοικτό, οπότε υπάρχει $m_x \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $S(x, \frac{2}{m_x}) \subseteq U$. Το $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο X, οπότε υπάρχει $j_x \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $y_{j_x} \in S(x, \frac{1}{m_x})$. Άρα $x \in S(y_{j_x}, \frac{1}{m_x}) \subseteq S(x, \frac{2}{m_x}) \subseteq U$.
(β) Επειδή το A είναι αριθμήσιμο (είναι ισόμορφο με το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$), θεωρούμε μία αρίθμηση των στοιχείων του, $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}(T) &\Leftrightarrow orb(x, T) \text{ είναι πυκνό στο } X \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ orb(x, T) \cap U_k \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } T^n x \in U_k \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \text{ το } x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k). \end{aligned}$$

Άρα $\mathcal{D}(T) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$.

(γ) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Επειδή το U_k είναι ανοικτό και η T είναι συνεχής (άρα και T^n συνεχής για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$), το $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων. Επίσης, επειδή $U_k \neq \emptyset$ και T *topologically transitive*, από πρόταση 1.2.1 συνεπάγεται ότι $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ είναι πυκνό στο X. Οπότε το $\mathcal{D}(T)$ είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών (άρα G_δ- σύνολο) και πυκνών υποσυνόλων του πλήρη μετρικού χώρου X. Από θεώρημα Baire, το $\mathcal{D}(T)$ είναι πυκνό στο X.

Πρόταση 1.2.5. *Η ιδιότητα της πυκνής τροχιάς διατηρείται μέσω μιας quasiconjugacy σχέσης.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα που είναι *quasiconjugate* ενός άλλου δυναμικού συστήματος $S : Y \to Y$ μέσω μίας $\phi : Y \to X$. Δηλαδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών και $T \circ \phi = \phi \circ S$. Έστω ότι υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε το $orb(y, S)$ να είναι πυκνό στο Y. Θα αποδείξουμε ότι το $\phi(y) \in X$ έχει πυκνή τροχιά στο X :

Έστω $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Επειδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών, το $\phi^{-1}(U)$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του Y.

Τότε,
$$\begin{aligned} orb(y,S) \cap \phi^{-1}(U) \neq \emptyset &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } S^n y \in \phi^{-1}(U) \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } \phi\left(S^n y\right) \in U \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } T^n \phi(y) \in U \\ &\Rightarrow orb\left(\phi(y), T\right) \cap U \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Άρα το $orb\left(\phi(y), T\right)$ είναι πυκνό στο X.

1.3 Χάος

Οι Grosse-Erdmann και Peris ξεκινάνε πολύ ωραία το πρόλογο σε αυτή την ενότητα με την εξής ερώτηση: Τι είναι χάος; Ή αλλιώς πότε θα λέμε ότι ένα δυναμικό σύστημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά;

Οι μαθηματικοί έχουν δόσει διάφορους ορισμούς. Ανάμεσα σε αυτούς όμως, ιδιαίτερη απήχηση έχει αυτός που δόθηκε από τον Devaney [23] και ο οποίος χαρακτηρίζεται από τρεις έννοιες.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία. Τότε ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ λέμε ότι έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $y \in X$ με $d(x, y) < \varepsilon$ ώστε για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$, $d(T^n x, T^n y) > \delta$. Ο αριθμός δ καλείται σταθερά ευαισθησίας για το T.*

Ορισμός 1.3.2. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα.*
(i) Ένα σημείο $x \in X$ καλείται σταθερό σημείο του T αν $Tx = x$.
(ii) Ένα σημείο $x \in X$ καλείται περιοδικό σημείο του T αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n x = x$. Ο ελάχιστος τέτοιος φυσικός καλείται περίοδος του x και το σύνολο των περιοδικών σημείων του T συμβολίζεται με $Per(T)$.

Παρατήρηση: Ένα σημείο $x \in X$ είναι περιοδικό σημείο του T, αν και μόνο αν, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε το x να είναι σταθερό σημείο του T^n.

Πρόταση 1.3.1. *Η ιδιότητα το σύνολο των περιοδικών σημείων να είναι πυκνό στο χώρο διατηρείται μέσω μιας quasiconjugacy σχέσης.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα που είναι *quasiconjugate* ενός άλλου δυναμικού συστήματος $S : Y \to Y$ μέσω μίας $\phi : Y \to X$. Δηλαδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών και $T \circ \phi = \phi \circ S$. Έστω ότι το $Per(S)$ είναι πυκνό στο Y. Θα αποδείξουμε ότι το $Per(T)$ είναι πυκνό στο X :
Έστω $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Επειδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών, το $\phi^{-1}(U)$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του Y.
Τότε, $Per(S) \cap \phi^{-1}(U) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in Per(S)$ και $y \in \phi^{-1}(U)$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $S^n y = y$ και $\phi(y) \in U$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n \phi(y) = \phi(S^n y) = \phi(y)$ και $\phi(y) \in U$

$\Rightarrow \phi(y) \in Per(T) \cap U$

$\Rightarrow Per(T) \cap U \neq \emptyset$.

Άρα το $Per(T)$ είναι πυκνό στο X.

Ορισμός 1.3.3 (Devaney chaos -πρώτη εκδοχή). *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία. Τότε ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ καλείται χαοτικό (υπό την έννοια του Devaney), αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) Το T έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες.

(ii) Το T είναι topologically transitive.

(iii) Το $Per(T)$ είναι πυκνό στο X.

Ο παραπάνω ορισμός του χάους έχει ένα αδύνατο σημείο. Όπως φαίνεται και στον ορισμό της, η ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες ενός δυναμικού συστήματος εξαρτάται από τη μετρική του χώρου. Υπάρχει παράδειγμα μάλιστα που δείχνει ότι δε διατηρείται μέσω μίας *conjugacy* σχέσης. Αποδεικνύεται όμως ότι η ευαίσθητη εξάρτηση μπορεί να παραληφθεί από τον ορισμό του χάους, επειδή συνεπάγεται από τις δύο άλλες συνθήκες του ορισμού. Η απόδειξη έγινε από τους Banks, Brooks, Cairns, Davis και Stacey [8].

Θεώρημα 1.3.1 (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey). *Έστω X ένας μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία. Αν ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ είναι topologically transitive και το $Per(T)$ είναι πυκνό στο X, τότε το T έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες ως προς οποιαδήποτε μετρική ορίζει την τοπολογία του X.*

Απόδειξη. Έστω d μία τυχαία μετρική επί του X.
<u>1ο Βήμα.</u> Έστω $x, y \in Per(T)$. Τότε $orb(x, T) = orb(y, T)$ ή $orb(x, T) \cap orb(y, T) = \emptyset$:
Έστω ότι $orb(x, T) \cap orb(y, T) \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $z \in orb(x, T) \cap orb(y, T)$. Παρατηρούμε ότι $orb(x, T) = \{x, Tx, \ldots, T^N x\}$ και $orb(y, T) = \{y, Ty, \ldots, T^M y\}$ όπου N, M οι περίοδοι των x, y αντίστοιχα. Άρα υπάρχουν $0 \leq n_0 \leq N$ και $0 \leq m_0 \leq M$ ώστε $z = T^{n_0} x = T^{m_0} y$. Τότε, $T^{M-m_0+n_0} x = T^{M-m_0} T^{n_0} x = T^{M-m_0} T^{m_0} y = T^M y = y$, δηλαδή $y \in orb(x, T)$ και οπότε $orb(y, T) \subseteq orb(x, T)$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $orb(x, T) \subseteq orb(y, T)$. Άρα οι τροχιές τους είναι ίσες.
<u>2ο Βήμα.</u> Υπάρχει μία σταθερά $\eta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$, υπάρχει περιοδικό σημείο p τέτοιο ώστε $d(x, T^n p) \geq \eta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$:

Επειδή ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, είναι ένα άπειρο σύνολο. Οπότε μπορούμε να βρούμε $p_1, p_2 \in Per(T)$ που να έχουν ξένες μεταξύ τους τροχιές. Πράγματι, έστω $x \in Per(T)$ και ότι για κάθε $y \in Per(T)$, $orb(x,T) \cap orb(y,T) \neq \emptyset$. Από το 1ο βήμα προκύπτει ότι $orb(x,T) = orb(y,T)$ και ειδικότερα $y \in orb(x,T)$. Δηλαδή $Per(T) \subseteq orb(x,T)$ το οποίο είναι πεπερασμένο σύνολο, ενώ το $Per(T)$ είναι πυκνό στο X που είναι άπειρο σύνολο. Άτοπο.
Οπότε υπάρχουν $p_1, p_2 \in Per(T)$ με ξένες μεταξύ τους τροχιές και έτσι μπορούμε να ορίσουμε $\eta = \inf\limits_{m,n \in \mathbb{N}_0} d\left(T^m p_1, T^n p_2\right)/2 = \min\limits_{\substack{0 \leq m \leq M \\ 0 \leq n \leq N}} d\left(T^m p_1, T^n p_2\right)/2 > 0$, όπου M, N οι περίοδοι των p_1, p_2 αντίστοιχα.

Ισχυρισμός: Έστω $x \in X$ τυχαίο. Αν υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $d(x, T^{n_1} p_1) < \eta$, τότε $d(x, T^n p_2) \geq \eta$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω ότι υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $d(x, T^{n_2} p_2) < \eta$. Τότε, $\eta \leq \dfrac{d\left(T^{n_1} p_1, T^{n_2} p_2\right)}{2} \leq \dfrac{d(x, T^{n_1} p_1)}{2} + \dfrac{d(x, T^{n_2} p_2)}{2} < \dfrac{\eta}{2} + \dfrac{\eta}{2} = \eta \Rightarrow \eta < \eta$. Άτοπο.
Άρα $d(x, T^n p_2) \geq \eta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $d(x, T^{n_2} p_2) < \eta$, τότε $d(x, T^n p_1) \geq \eta$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

<u>3ο Βήμα.</u> Το T έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες με σταθερά ευαισθησίας $\delta = \dfrac{\eta}{4}$:
Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή το $Per(T)$ είναι πυκνό στο X, υπάρχει περιοδικό σημείο q τέτοιο ώστε $d(x,q) < min\{\varepsilon, \delta\}$. Έστω N η περίοδος του q. **(∗)**
Από το 2ο βήμα γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιοδικό σημείο p τέτοιο ώστε $d(x, T^n p) \geq \eta = 4\delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. **(∗∗)**
Η T^n είναι συνεχής για κάθε $n = 0, 1, \ldots, N$. Άρα το $V = \bigcap\limits_{n=0}^{N} T^{-n}\left(S\left(T^n p, \delta\right)\right)$ είναι ανοικτό ως πεπερασμένη ένωση ανοικτών και διαφορετικό του κενού επειδή το $p \in V$. Από αυτό έχουμε ότι $d\left(T^n p, T^n y\right) < \delta$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots, N$ και για κάθε $y \in V$. Επίσης, το T είναι *topologically transitive*. Οπότε για τα μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, $S(x, \varepsilon)$ και V, υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^k\left(S(x,\varepsilon)\right) \cap V \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $z \in X$ με $d(x,z) < \varepsilon$ και $T^k z \in V$. **(∗∗∗)**
Έστω $j \in \mathbb{N}_0$ ώστε $k \leq jN < k + N \Rightarrow 0 \leq jN - k < N \overset{(***)}{\Rightarrow} d\left(T^{jN-k} p, T^{jN-k} T^k z\right) < \delta$.
Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned} d\left(T^{jN} q, T^{jN} z\right) &= d\left(T^{jN} q, T^{jN-k} T^k z\right) \\ &\overset{(*)}{=} d\left(q, T^{jN-k} T^k z\right) \\ &\geq d\left(T^{jN-k} T^k z, x\right) - d(x,q) \\ &\geq d\left(T^{jN-k} p, x\right) - d\left(T^{jN-k} p, T^{jN-k} T^k z\right) - d(x,q) \underset{(***)}{\overset{(*)}{\geq}} 4\delta - \delta - \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Οπότε από τριγωνική ανισότητα άλλη μια φορά, συνεπάγεται ότι $d\left(T^{jN} x, T^{jN} q\right) > \delta$ (και $d(x,q) < \varepsilon$ από **(∗)**) ή $d\left(T^{jN} x, T^{jN} z\right) > \delta$ (και $d(x,z) < \varepsilon$ από **(∗∗∗)**). Άρα σε κάθε περίπτωση, προκύπτει ότι το T έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες.

Ορισμός 1.3.4 (Devaney chaos). *Ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ καλείται χαοτικό (υπό την έννοια του Devaney), αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*
(i) Το T είναι topologically transitive.
(ii) Το $Per(T)$ είναι πυκνό στο X.

Πρόταση 1.3.2. *Η ιδιότητα του χάους διατηρείται μέσω μιας quasiconjugacy σχέσης.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τον ορισμό 1.3.4 και τις προτάσεις 1.2.2 και 1.3.1.

1.4 Mixing και ασθενώς mixing απεικονίσεις

Σε αυτή την ενότητα και στην επόμενη μελετώνται δυναμικά συστήματα που έχουν ιδιότητες ισχυρότερες της *topologically transitive* ιδιότητας.

Ορισμός 1.4.1. *Ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ καλείται mixing αν, για κάθε U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, υπάρχει $N \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ για κάθε $n \geq N$.*

Πρόταση 1.4.1. *Η mixing ιδιότητα διατηρείται μέσω μιας quasiconjugacy σχέσης.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα που είναι *quasiconjugate* ενός άλλου δυναμικού συστήματος $S : Y \to Y$ μέσω μίας $\phi : Y \to X$. Δηλαδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών και $T \circ \phi = \phi \circ S$. Έστω ότι το S είναι *mixing*. Θα αποδείξουμε ότι το T είναι *mixing* :

Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών, οπότε τα $\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V) \subseteq Y$ είναι μη κενά ανοικτά. Επειδή το S είναι *mixing*, υπάρχει $N \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε: $S^n\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$ για κάθε $n \geq N$

$$\Rightarrow \left(\phi \circ S^n\right)\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap \phi\left(\phi^{-1}(V)\right) \supseteq \phi\left(S^n\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap \phi^{-1}(V)\right) \neq \emptyset \text{ για κάθε } n \geq N$$

$$\Rightarrow \left(T^n \circ \phi\right)\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap V \neq \emptyset \text{ για κάθε } n \geq N$$

$$\Rightarrow T^n(U) \cap V \neq \emptyset \text{ για κάθε } n \geq N.$$

Άρα το T είναι *mixing*.

Ορισμός 1.4.2. *Ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ καλείται ασθενώς mixing αν, για κάθε τετράδα U_1, U_2, V_1, V_2 μη κενών ανοικτών υποσυνόλων του X, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ και $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.*

Παρατήρηση: Ισχύει ότι *mixing* $\Rightarrow$ ασθενώς *mixing* $\Rightarrow$ *topologically transitive*.
Πράγματι, έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα.
1) *mixing* $\Rightarrow$ ασθενώς *mixing*.
Έστω U_1, U_2, V_1, V_2 μη κενά ανοικτά υποσυνόλα του X. Τότε υπάρχουν $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ για κάθε $n \geq N_1$ και $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ για κάθε $n \geq N_2$. Οπότε για $N = max\{N_1, N_2\}$, συνεπάγεται ότι $T^N(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ και $T^N(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.
2) ασθενώς *mixing* $\Rightarrow$ *topological transitivity*.
Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Τότε για την τετράδα U, V, U, V, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Πρόταση 1.4.2. *Η ασθενώς mixing ιδιότητα διατηρείται μέσω μιας quasiconjugacy σχέσης.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα που είναι *quasiconjugate* ενός άλλου δυναμικού συστήματος $S : Y \to Y$ μέσω μίας $\phi : Y \to X$. Δηλαδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών και $T \circ \phi = \phi \circ S$. Έστω ότι το S είναι ασθενώς *mixing*. Θα αποδείξουμε ότι το

T είναι ασθενώς $mixing$:
Έστω U_1, U_2, V_1, V_2 μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών, άρα τα $\phi^{-1}(U_1), \phi^{-1}(U_2), \phi^{-1}(V_1), \phi^{-1}(V_2) \subseteq Y$ μη κενά ανοικτά. Επειδή το S είναι ασθενώς $mixing$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε:

$S^n(\phi^{-1}(U_1)) \cap \phi^{-1}(V_1) \neq \emptyset$ και $S^n(\phi^{-1}(U_2)) \cap \phi^{-1}(V_2) \neq \emptyset$
$\Rightarrow (\phi \circ S^n)(\phi^{-1}(U_1)) \cap \phi(\phi^{-1}(V_1)) \supseteq \phi(S^n(\phi^{-1}(U_1)) \cap \phi^{-1}(V_1)) \neq \emptyset$ και ομοίως
$(\phi \circ S^n)(\phi^{-1}(U_2)) \cap \phi(\phi^{-1}(V_2)) \neq \emptyset$
$\Rightarrow (T^n \circ \phi)(\phi^{-1}(U_1)) \cap V_1 \neq \emptyset$ και $(T^n \circ \phi)(\phi^{-1}(U_2)) \cap V_2 \neq \emptyset$
$\Rightarrow T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ και $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Άρα το T είναι ασθενώς $mixing$.

Στη συνέχεια δίνεται ο ορισμός του συνόλου επιστροφής, διευκολύνοντας με αυτό τον τρόπο τη μελέτη μας των δυναμικών συστημάτων.

Ορισμός 1.4.3. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Τότε, για κάθε δύο σύνολα $A, B \subseteq X$, ορίζουμε το σύνολο επιστροφής (return set) του A στο B ως εξής:*

$$N_T(A, B) = N(A, B) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n(A) \cap B \neq \emptyset\}$$

Πρόταση 1.4.3. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Τότε:*
(i) Το T είναι topologically transitive (ή mixing αντίστοιχα), αν και μόνο αν, για κάθε U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, το $N(U, V)$ είναι διαφορετικό του κενού (ή το $\mathbb{N}_0 \setminus N(U, V)$ είναι πεπερασμένο αντίστοιχα).
(ii) Το T είναι ασθενώς mixing, αν και μόνο αν, για κάθε τετράδα U_1, U_2, V_1, V_2 μη κενών ανοικτών υποσυνόλων του X, ισχύει ότι $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς που έχουν δοθεί.

Σ' αυτό το σημείο αποδεικνύεται μία χρήσιμη ιδιότητα των $topologically\ transitive$ απεικονίσεων.

Πρόταση 1.4.4. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Αν το T είναι topologically transitive τότε:*
(i) Το T έχει πυκνό πεδίο τιμών στο X.
(ii) Για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, το $N(U, V)$ είναι άπειρο.

Απόδειξη. (i) Έστω $U = S(x, r_1) \subseteq X$. Θα αποδείξουμε ότι $U \cap T(X) \neq \emptyset$:
Έστω $V = S(y, r_2) \subseteq X$ τέτοιο ώστε $U \cap V = \emptyset$. Το T είναι $topologically\ transitive$, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ($n \neq 0$ επειδή $U \cap V = \emptyset$) τέτοιο ώστε $T^n(V) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow T^n(X) \cap U \neq \emptyset$. Επειδή $T^n(X) \subseteq T(X)$ για κάθε $n \geq 1$, έχουμε ότι $T(X) \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow T^{-1}(U) \neq \emptyset$.
(ii) Έστω $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Το T είναι $topologically\ transitive$, άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^{n_1}(U) \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow U \cap T^{-n_1}(V) \neq \emptyset$, δηλαδή $n_1 \in N(U, V)$. Το $T^{-n_1}(V)$ είναι ανοικτό και διαφορετικό του κενού. Από (i), το $T^{-1}(T^{-n_1}(V)) = T^{-(n_1+1)}(V)$ είναι ανοικτό και διαφορετικό του κενού. Οπότε για τα $U, T^{-(n_1+1)}(V)$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^m(U) \cap T^{-(n_1+1)}(V) \neq \emptyset \Leftrightarrow T^{m+n_1+1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Θέτωντας $n_2 = m + n_1 + 1$, έχουμε ότι $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ και $n_2 \in N(U, V)$. Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο, κατασκευάζουμε γνησίως

αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, οι όροι της οποίας ανήκουν στο $N(U,V)$. Άρα το $N(U,V)$ είναι άπειρο.

Σύμφωνα με το (ii) της πρότασης 1.4.3, αν το T είναι ασθενώς *mixing* τότε για κάθε δύο ζευγάρια μη κενών ανοικτών U_1, V_1 και U_2, V_2, ισχύει ότι $N(U_1,V_1)\cap N(U_2,V_2)\neq\emptyset$. Ο Furstenberg [32] απέδειξε κάτι ισχυρότερο.

Θεώρημα 1.4.1 (Furstenberg). *Έστω $T : X\to X$ ένα ασθενώς mixing δυναμικό σύστημα και $n\in\mathbb{N}$ τυχαίο. Τότε για κάθε $U_k, V_k\subseteq X$, $k=1,\ldots,n$, μη κενά ανοικτά, ισχύει $\bigcap\limits_{k=1}^{n} N(U_k,V_k)\neq\emptyset$.*

Απόδειξη. Με τη μέθοδο της επαγωγής:
Για $n=1$. Ισχύει επειδή το T είναι ασθενώς *mixing* $\Rightarrow$ το T είναι *topologically transitive.*
Για $n=2$. Ισχύει επειδή το T είναι ασθενώς *mixing.*
Έστω ότι ισχύει για $n=m$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=m+1$:
Έστω $U_k, V_k\subseteq X$, $k=1,\ldots,m+1$, μη κενά ανοικτά. Επειδή το T είναι ασθενώς *mixing*, υπάρχει $l\in\mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^l(U_m)\cap U_{m+1}\neq\emptyset$ και $T^l(V_m)\cap V_{m+1}\neq\emptyset$. Αν θέσουμε $U'_m = U_m\cap T^{-l}(U_{m+1})$ και $V'_m = V_m\cap T^{-l}(V_{m+1})$, έχουμε ότι τα $U'_m, V'_m\subseteq X$ είναι μη κενά ανοικτά. Επειδή το T είναι *topologically transitive*, $N(U'_m,V'_m)\neq\emptyset$ (και για την ακρίβεια άπειρο). Έστω $q\in N(U'_m,V'_m)$. Τότε υπάρχει $x\in U'_m\subseteq U_m$ με $T^q x\in V'_m\subseteq V_m\Rightarrow q\in N(U_m,V_m)$. Επίσης $T^l x\in T^l(U'_m)\subseteq U_{m+1}$ και $T^q\left(T^l x\right) = T^l\left(T^q x\right)\in T^l(V'_m)\subseteq V_{m+1}\Rightarrow q\in N(U_{m+1},V_{m+1})$. Άρα $N(U'_m,V'_m)\subseteq N(U_m,V_m)\cap N(U_{m+1},V_{m+1})$. Από την υπόθεση της επαγωγής, για τα $U_1,V_1,\ldots,U_{m-1},V_{m-1},U'_m,V'_m$, ισχύει ότι $\bigcap\limits_{k=1}^{m-1} N(U_k,V_k)\cap N(U'_m,V'_m)\neq\emptyset\Rightarrow\bigcap\limits_{k=1}^{m+1} N(U_k,V_k) = \bigcap\limits_{k=1}^{m-1} N(U_k,V_k)\cap N(U_m,V_m)\cap N(U_{m+1},V_{m+1})\supseteq\bigcap\limits_{k=1}^{m-1} N(U_k,V_k)\cap N(U'_m,V'_m)\neq\emptyset$

Για να αποδειχθεί ότι ένα δυναμικό σύστημα είναι ασθενώς *mixing*, χρειάζεται μία τετράδα μη κενών ανοικτών. Στις παρακάτω δυο προτάσεις αποδεικνύεται ότι ο ορισμός ενός ασθενώς *mixing* δυναμικού συστήματος μπορεί να γίνει με τρία αλλά και με δύο μη κενά ανοικτά. Οι παρακάτω συνθήκες δόθηκαν από τους Banks [7] και Akin [2]. Μάλιστα, στο βιβλίο του Akin η πρόταση 1.4.6 καλείται "Furstenberg Intersection Lemma".

Πρόταση 1.4.5. *Έστω $T : X\to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Το T είναι ασθενώς mixing, αν και μόνο αν, για κάθε $U, V_1, V_2\subseteq X$ μη κενά ανοικτά, ισχύει ότι $N(U,V_1)\cap N(U,V_2)\neq\emptyset$.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Προφανές.
Αντίστροφο. Έστω U_1,V_1,U_2,V_2 μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Θα αποδείξουμε ότι $N(U_1,V_1)\cap N(U_2,V_2)\neq\emptyset$:
Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει $n\in N(U_1,U_2)\cap N(U_1,V_2)\neq\emptyset$. Τότε το σύνολο $U = U_1\cap T^{-n}(U_2)\neq\emptyset$ είναι ανοικτό και το $T^{-n}(V_2)\supseteq U_1\cap T^{-n}(V_2)\neq\emptyset$ είναι ανοικτό. Άρα πάλι από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει $m\in N(U,V_1)\cap N(U,T^{-n}(V_2))\neq\emptyset$. Δηλαδή, ισχύει $U\cap T^{-m}(V_1)\neq\emptyset$ και $U\cap T^{-(n+m)}(V_2)\neq\emptyset$

$\Rightarrow U_1 \cap T^{-m}(V_1) \neq \emptyset$ και $T^{-n}(U_2 \cap T^{-m}(V_2)) = T^{-n}(U_2) \cap T^{-n}(T^{-m}(V_2)) \neq \emptyset$
$\Rightarrow U_1 \cap T^{-m}(V_1) \neq \emptyset$ και $U_2 \cap T^{-m}(V_2) \neq \emptyset$
$\Rightarrow m \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$.

Πρόταση 1.4.6. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Το T είναι ασθενώς mixing, αν και μόνο αν, για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, ισχύει ότι $N(U,U) \cap N(U,V) \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Προφανές.
Αντίστροφο. Σύμφωνα με την πρόταση 1.4.5, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $U, V_1, V_2 \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, ισχύει ότι $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$:
Έστω $U, V_1, V_2 \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Από υπόθεση υπάρχει $n \in N(U,U) \cap N(U, V_1)$. Τότε το σύνολο $U_1 = U \cap T^{-n}(V_1) \neq \emptyset$ είναι ανοικτό. Με βάση την υπόθεση αποδεικνύεται επίσης πολύ εύκολα ότι το T είναι *topologically transitive*. Άρα από την πρόταση 1.4.4 συνεπάγεται ότι το $T^{-n}(V_2)$ είναι μη κενό ανοικτό. Οπότε για τα μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X, U_1 και $T^{-n}(V_2)$, θα ισχύει ότι $N(U_1, U_1) \cap N(U_1, T^{-n}(V_2)) \neq \emptyset$ Δηλαδή,
υπάρχει $m \in N(U_1, U_1) \cap N(U_1, T^{-n}(V_2) \Rightarrow \exists x, y \in U_1$ ώστε $T^m x \in U_1$ και $T^m y \in T^{-n}(V_2)$
$\Rightarrow x, y \in U$ και $T^n T^m x \in V_1$ και $T^n T^m y \in V_2$
$\Rightarrow T^{n+m}(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ και $T^{n+m}(U) \cap V_2 \neq \emptyset$
$\Rightarrow n + m \in N(U, V_1) \cap N(U, V_2)$.

1.5 Minimal και Syndetically transitive απεικονίσεις

Ορισμός 1.5.1. *Ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ καλείται minimal αν κάθε $x \in X$ έχει πυκνή τροχιά.*

Πρόταση 1.5.1. *Η minimal ιδιότητα διατηρείται μέσω μίας conjugate σχέσης.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα που είναι *conjugate* ενός άλλου δυναμικού συστήματος $S : Y \to Y$ μέσω μίας $\phi : Y \to X$. Δηλαδή η ϕ είναι ομοιομορφισμός και $T \circ \phi = \phi \circ S$. Έστω ότι το S είναι *minimal*. Θα αποδείξουμε ότι το T είναι *minimal* :
Έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει $y \in Y$ τέτοιο ώστε $\phi(y) = x$. Με βάση την υποθεσή μας, θα έχουμε ότι
$\overline{orb(x,T)} = \overline{\{T^n \phi(y) : n \in \mathbb{N}_0\}} = \overline{\{\phi(S^n y) : n \in \mathbb{N}_0\}} = \overline{\phi(orb(y,S))} = \phi(\overline{orb(y,S)}) = \phi(Y) = X.$

Πριν δοθεί ο ορισμός ενός *syndetically transitive* δυναμικού συστήματος, χρειάζεται ο ορισμός του συνδετικού συνόλου.

Ορισμός 1.5.2. *Μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ καλείται συνδετική αν*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (n_{k+1} - n_k) < \infty.$$

Ένα άπειρο σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}_0$ καλείται συνδετικό, αν η γνησίως αύξουσα ακολουθία των στοιχείων του A είναι συνδετική.

Παρακάτω δίνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα σύνολο συνδετικό.

Πρόταση 1.5.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}_0$ άπειρο. Το A είναι συνδετικό, αν και μόνο αν, το $\mathbb{N}_0 \setminus A$ δεν περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Έστω ότι το A είναι συνδετικό. Θα αποδείξουμε ότι το $\mathbb{N}_0 \setminus A$ δεν περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών:
Έστω $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η γνησίως αύξουσα ακολουθία των στοιχείων του A. Εξ ορισμού υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $n_{k+1} - n_k \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Οπότε σε κάθε διάστημα φυσικών του $\{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq n_1\}$ με μήκος M, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A. Άρα το $\mathbb{N}_0 \setminus A$ δεν μπορεί να περιέχει διαστήματα φυσικών μήκους N, όπου $N \geq \max\{n_1, M+1\}$.
Αντίστροφο. Έστω ότι το $\mathbb{N}_0 \setminus A$ δεν περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών. Θα αποδείξουμε ότι το A είναι συνδετικό:
Έστω $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η γνησίως αύξουσα ακολουθία των στοιχείων του A. Επειδή το $\mathbb{N}_0 \setminus A$ δεν περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:
– για $N = 0$, υπάρει $n_{k_0} \in \{0, 1, \ldots, M-1\} \cap A \neq \emptyset$,
– για $N = M$, υπάρχει $n_{k_M} \in \{M, M+1, \ldots, 2M-1\} \cap A \neq \emptyset$,
$\vdots$
– για $N = lM$, $l \in \mathbb{N}_0$, υπάρχει $n_{k_{lM}} \in \{lM+1, lM+2, \ldots, (l+1)M-1\}$, $l \in \mathbb{N}_0$.
Από τον τρόπο που την κατασκευάσαμε, η ακολουθία $(n_{k_{lM}})_{l\in\mathbb{N}_0}$ είναι γνησίως αύξουσα υπακολουθία της $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $(n_{k_{(l+1)M}} - n_{k_{lM}}) \leq 2M-1$ για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$.
Έστω $k \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $l \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n_{k_{lM}} \leq n_k < n_{k+1} \leq n_{k_{(l+1)M}}$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $n_{k+1} - n_k \leq 2M-1$. Άρα $n_{k+1} - n_k \leq 2M-1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή η $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι συνδετική και οπότε το A είναι συνδετικό.

Ορισμός 1.5.3. *Ένα δυναμικό σύστημα $T : X \to X$ καλείται syndetically transitive αν για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, το σύνολο $N(U,V)$ είναι συνδετικό.*

Ο Moothathu [35] απέδειξε ότι ένα *minimal* δυναμικό σύστημα σ᾽ ένα συμπαγή μετρικό χώρο, είναι *syndetically transitive*.

Πρόταση 1.5.3. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Αν ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και το T είναι minimal, τότε για κάθε $x \in X$ και για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό που περιέχει το x, το σύνολο $N(x,U) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\}$ είναι συνδετικό. Αυτό συνεπάγεται ότι το T είναι sundetically transitive.*

Απόδειξη. 1ο Βήμα: Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ και για κάθε $U \subseteq X$ ανοικτό που περιέχει το x, το σύνολο $N(x,U) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\}$ είναι συνδετικό:
Έστω ότι το $A = N(x,U)$ δεν είναι συνδετικό. Από την πρόταση 1.5.2 συνεπάγεται ότι το $\mathbb{N}_0 \setminus A$ περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών.Οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $n_k, n_k+1, ..., n_k+k \in \mathbb{N}_0 \setminus A$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και άρα θα ισχύει ότι $T^{n_k+i}x \in X \setminus U$, για κάθε $i = 0, ..., k$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία $(n_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ της $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $T^{n_{k_m}}x \longrightarrow y$ για κάποιο $y \in X$. Άρα το $y \in \overline{X \setminus U} = X \setminus U$ (το U είναι ανοικτό).
Έστω $j \in \mathbb{N}_0$. Επειδή η ακολουθία των δεικτών $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα εξ ορισμού, υπάρχει $m_j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k_{m_j} \geq j$. Τότε, για την ακολουθία $(T^{n_{k_m}+j}x)_{m\geq m_j}$, της οποίας τα

στοιχεία ανήκουν στο $X \setminus U$, ισχύει ότι $T^{n_{k_m}+j}x = T^j(T^{n_{k_m}}x) \longrightarrow T^j y$ (T συνεχής). Δηλαδή, $T^j y \in \overline{X \setminus U} = X \setminus U, \forall j \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow orb(y,T) \subseteq X \setminus U \Rightarrow X \overset{(*)}{=} \overline{orb(y,T)} \subseteq X \setminus U \Rightarrow U = \emptyset$. Άτοπο επειδή το $x \in U$. Άρα το $A = N(x,U)$ είναι συνδετικό.
$(*)$: T $minimal$

2ο Βήμα: Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, το σύνολο $N(U,V)$ είναι συνδετικό:

Έστω $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Επειδή το T είναι $minimal$, είναι προφανές ότι είναι και *topologically transitive*. Οπότε το $N(U,V) \neq \emptyset$. Έστω $n_0 \in N(U,V)$. Το σύνολο $W = U \cap T^{-n_0}(V)$ είναι μη κενό ανοικτό. Αν $x \in W$, τότε από το 1ο βήμα έχουμε ότι το σύνολο $N(x,W)$ είναι συνδετικό. Άρα και το σύνολο $n_0 + N(x,W)$ είναι συνδετικό. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $n_0 + N(x,W) \subseteq N(U,V)$. Πράγματι, έστω $m \in N(x,W)$. Θα έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} x \in W = U \cap T^{-n_0}(V) \text{ και } T^m x \in W &\Rightarrow x \in U \text{ και } x \in T^{n_0+m}(V) \\ &\Rightarrow n_0 + m \in N(U,V) \\ &\Rightarrow n_0 + N(x,W) \subseteq N(U,V). \end{aligned}$$

1.6 Καθολικότητα

Τα βασικότερα αποτελέσματα που διατυπώθηκαν σ' αυτό το κεφάλαιο μπορούν να γενικευθούν στη θεωρία των δυναμικών συστημάτων όπου η τροχιά ενός σημείου x του χώρου X δεν αποτελείται από τις επαναλήψεις της απεικόνισης T στο x, αλλά από τις εικόνες του x μέσω μίας ακολουθίας απεικονίσεων $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ορισμός 1.6.1. *Έστω X και Y δύο μετρικοί χώροι και $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία συνεχών απεικονίσεων. Τότε η τροχιά του x μέσω της $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζεται ως εξής:*

$$orb(x,(T_n)) = \{T_n x : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ένα στοιχείο $x \in X$ καλείται καθολικό στοιχείο της $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αν το $orb(x,(T_n))$ είναι πυκνό στο Y.

Ορισμός 1.6.2. *Έστω $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία συνεχών απεικονίσεων μεταξύ των μετρικών χώρων X και Y. Τότε η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται topologically transitive αν, για κάθε $U \subseteq X$ και $V \subseteq Y$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται mixing αν, για κάθε $U \subseteq X$ και $V \subseteq Y$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$ για κάθε $n \geq N$.

Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται ασθενώς mixing αν, για κάθε $U_1, U_2 \subseteq X$ και $V_1, V_2 \subseteq Y$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T_n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ και $T_n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$

Το παρακάτω θεώρημα δόθηκε από τον Grosse-Erdmann [26].

Θεώρημα 1.6.1 (Κριτήριο Καθολικότητας). *Έστω X ένας πλήρης μετρικός χώρος, Y ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία συνεχών απεικονίσεων. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι topologically transitive.

(ii) Υπάρχει πυκνό σύνολο σημείων $x \in X$ για τα οποία ισχύει ότι $orb(x,(T_n))$ είναι πυκνό στο Y.
Αν ισχύει μία από τις παραπάνω συνθήκες, τότε το σύνολο των σημείων του X με πυκνή τροχιά στο Y, είναι πυκνό G_δ-σύνολο στο X.

Απόδειξη. $(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα των X, Y αντίστοιχα. Τότε από υπόθεση υπάρχει $x \in U$ με πυκνή τροχιά στο Y. Οπότε $orb(x,(T_n)) \cap V \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T_n x \in V$, το οποίο συνεπάγεται $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$. Άρα η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive*.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Για να αποδείξουμε ότι το $\{x \in X : \overline{orb(x,(T_n))} = Y\}$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο του X, χρησιμοποιούμε ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με αυτά της απόδειξης του $(i) \Rightarrow (ii)$ στο θεώρημα Birkhoff (θεώρημα 1.2.1) με κατάλληλες μετατροπές όπου χρειάζεται.

Θεώρημα 1.6.2 (Furstenberg για ακολουθίες). *Έστω $T_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, μία αντιμεταθετική ακολουθία συνεχών απεικονίσεων επί του μετρικού χώρου X, η οποία είναι ασθενώς mixing και $m \in \mathbb{N}$ τυχαίο. Τότε για κάθε $U_k, V_k \subseteq X$, $k = 1, \dots, m$, μη κενά ανοικτά, ισχύει $\bigcap_{k=1}^{m} N(U_k, V_k) \neq \emptyset$, όπου $N(A,B) = \{n \in \mathbb{N} : T_n(A) \cap B \neq \emptyset\}$ για κάθε $A, B \subseteq X$.*

Απόδειξη. Στην απόδειξη χρησιμοποιούνται ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με αυτά της απόδειξης του θεωρήματος Furstenberg (θεώρημα 1.4.1) κάνοντας κατάλληλες μετατροπές όπου χρειάζεται.

Η χρησιμότητα αυτής της ενότητας φαίνεται ήδη στην παρακάτω πρόταση. Οι Akin [2], Glasner [24] και Peris και Saldivia [38] απέδειξαν ανεξάρτητα ότι ισχύει η ισοδυναμία. Για την εργασία όμως χρειάζεται μόνο η συνεπαγωγή.

Πρόταση 1.6.1. *Έστω $T : X \to X$ ένα δυναμικό σύστημα. Αν το T είναι ασθενώς mixing, τότε για κάθε συνδετική ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, η ακολουθία $(T^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι topologically transitive (με την έννοια του ορισμού 1.6.2 για $T_k = T^{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$ και $X = Y$).*

Απόδειξη. Έστω $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συνδετική ακολουθία. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(T^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive*:
Έστω $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά και $m \in \mathbb{N}$. Επειδή το T είναι *topologically transitive*, τα $T^{-k}(V)$, $k = 1, \dots, m$ είναι μη κενά ανοικτά. Από το θεώρημα του Furstenberg (θεώρημα 1.4.1), υπάρχει $n \in \bigcap_{k=1}^{m} N(U, T^{-k}(V)) \neq \emptyset$.

$$\text{Οπότε } T^n(U) \cap T^{-k}(V) \neq \emptyset,\ \forall k \in \{1,\dots,m\} \Rightarrow T^{n+k}(U) \cap V \neq \emptyset,\ \forall k \in \{1,\dots,m\}$$
$$\Rightarrow n + k \in N(U,V),\ \forall k \in \{1,\dots,m\}.$$

Το m επιλέχτηκε τυχαία. Άρα το $N(U,V)$ περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών. Έστω $A = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ και έστω ότι $A \cap N(U,V) = \emptyset$, δηλαδή $N(U,V) \subseteq \mathbb{N}_0 \setminus A$. Τότε το $\mathbb{N}_0 \setminus A$ περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών. Από πρόταση 1.5.2, το A δεν είναι συνδετικό, πράγμα αδύνατο. Άρα $A \cap N(U,V) \neq \emptyset \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$.

2 Υπερκυκλικοί και χαοτικοί τελεστές

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μελέτη των γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τοπολογικούς γραμμικούς χώρους και συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις. Κλασσικά παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι οι χώροι Banach και Hilbert. Παρ᾽ όλ᾽ αυτά, ενδιαφέροντα αποτελέσματα δίνουν τα γραμμικά δυναμικά συστήματα πάνω σε πιο γενικευμένους χώρους, τους λεγόμενους χώρους Fréchet. Αρχικά γίνεται μία εισαγωγή στη θεωρία των χώρων αυτών, κατόπιν επαναδιατυπώνονται τα βασικότερα αποτελέσματα του 1ου κεφαλαίου προσθέτωντας την έννοια της γραμμικότητας και τέλος δίνονται ορισμένα αποτελέσματα σχετικά με το συνόλο των σημείων με πυκνή τροχιά.

2.1 Γραμμικά δυναμικά συστήματα

Μία εισαγωγή στους χώρους Fréchet μπορεί να βρεθεί στους Rudin [39] και Meise και Vogt [34].

Ορισμός 2.1.1. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Ένα συναρτησοειδές $p : X \to \mathbb{R}_+$ καλείται ημινόρμα αν, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ισχύει ότι:*
(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Ορισμός 2.1.2. *Μία νόρμα είναι μία ημινόρμα που έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι αν $p(x) = 0$ τότε $x = 0$. Ένας χώρος Banach είναι ένας διανυσματικός χώρος X εφοδιασμένος με μία νόρμα, που συμβολίζεται συνήθως με $||\cdot||$, του οποίου η τοπολογία ορίζεται από τη μετρική $d(x, y) = ||x - y||$, $x, y \in X$, και ο οποίος είναι πλήρης με αυτή τη μετρική. Αν επιπλέον η νόρμα επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, δηλαδή $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $x \in X$, τότε ο X καλείται χώρος Hilbert.*

Ορισμός 2.1.3. *Μία ακολουθία ημινορμών $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται διαχωρίζουσα αν ισχύει ότι:* $p_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$.

Ορισμός 2.1.4. *Λέμε ότι μία μετρική $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ είναι ανεξάρτητη ως προς τις μεταφορές αν $d(x, y) = d(x + z, y + z)$, $\forall x, y, z \in X$.*

Πρόταση 2.1.1. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος και $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία από ημινόρμες. Μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα (θεωρώντας μία καινούργια ακολουθία $q_n = \sup_{k\leq n} p_k$ αν χρειαστεί). Αν επιπλέον η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίζουσα,* *τότε η συνάρτηση* $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *με τύπο* $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y))$, $x, y \in X$, *είναι μία μετρική επί του* X, *η οποία είναι ανεξάρτητη ως προς τις μεταφορές.*

Απόδειξη. (α) Η d είναι καλά ορισμένη:

Έστω $x, y \in X$. Τότε $0 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$
$$\Rightarrow d(x,y) \in \mathbb{R}_+.$$

(β) $d(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$.

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)) = 0$$
$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow p_n(x-y) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\overset{(**)}{\Leftrightarrow} x - y = 0$$
$$\Leftrightarrow x = y,$$

όπου **(∗)** : $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)) \right)_{N \in \mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών

και **(∗∗)** : η $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι διαχωρίζουσα.

(γ) $p_n(x-y) = p_n(-(y-x)) = |-1| p_n(y-x) = p_n(y-x)$ για κάθε $x, y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$.
Άρα από τον τρόπο που έχει οριστεί η d, έχουμε ότι $d(x,y) = d(y,x)$.

(δ) Έστω $x, y, z \in X$. Τότε $p_n(x-y) = p_n(x-z+z-y) \leq p_n(x-z) + p_n(z-x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Θέτουμε $A_n = \min(1, p_n(x-y))$, $B_n = \min(1, p_n(x-z))$ και $C_n = \min(1, p_n(z-y))$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Έστω $k \in \mathbb{N}$:

− αν $B_k = 1$, τότε $A_k \leq 1 \leq 1 + C_k = B_k + C_k$,
− αν $C_k = 1$, τότε $A_k \leq 1 \leq B_k + 1 = B_k + C_k$,
− αν $B_k, C_k \neq 1$, τότε $A_k \leq p_n(x-y) \leq p_n(x-z) + p_n(z-x) = B_k + C_k$.

Οπότε $A_n \leq B_n + C_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} A_n \leq \frac{1}{2^n} B_n + \frac{1}{2^n} C_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} A_n \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} B_n + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} C_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} C_n, \forall N \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} A_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} B_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} C_n = d(x,z) + d(z,y)$$

(ε) Έστω $x, y, z \in X$. Τότε:

$$d(x+z, y+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n((x+z)-(y+z))) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, p_n(x-y)) = d(x,y).$$

Ορισμός 2.1.5. *Ένας χώρος Fréchet X είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρος του οποίου η τοπολογία επάγεται από μία διαχωρίζουσα και αύξουσα ακολουθία ημινορμών $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Παρατήρηση: Η κατασκευή ενός χώρου Frechét από μία ακολουθία ημινορμών, είναι μία γενίκευση της κατασκευής ενός χώρου Banach από μία νόρμα.

Μία πρώτη σχέση μεταξύ μίας ακολουθίας ημινορμών και της μετρικής που ορίζουν, δίνεται παρακάτω:

Λήμμα 2.1.1. *Έστω $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία διαχωρίζουσα και αύξουσα ακολουθία ημινορμών επί ενός διανυσματικού χώρου X και d η μετρική που ορίσαμε στην πρόταση 2.1.1. Τότε:*
(i) αν $p_n(x-y) < \dfrac{1}{2^n}$ για κάποια $x, y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε $d(x,y) < \dfrac{2}{2^n}$,
(ii) αν $d(x,y) < \dfrac{1}{2^{2n}}$ για κάποια $x, y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε $p_k(x-y) < \dfrac{1}{2^n}$ για κάθε $k \le n$.

Απόδειξη. *(i)* Έστω $x, y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $p_n(x-y) < \dfrac{1}{2^n}$. Θα αποδείξουμε ότι $d(x,y) < \dfrac{2}{2^n}$:

Η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Άρα $p_k(x-y) \le p_n(x-y) < \dfrac{1}{2^n} < 1$, για κάθε $k \le n$

$$\Rightarrow \min(1, p_k(x-y)) = p_k(x-y) \text{ για κάθε } k \le n.$$

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(1, p_k(x-y)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \min(1, p_k(x-y)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(1, p_k(x-y)) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} p_k(x-y) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+n}} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n}.$$

(ii) Έστω $x, y \in X$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $d(x,y) < \dfrac{1}{2^{2n}}$. Θα αποδείξουμε ότι $p_k(x-y) < \dfrac{1}{2^n}$ για κάθε $k \le n$:

$$d(x,y) < \frac{1}{2^{2n}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(1, p_k(x-y)) < \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k} \min(1, p_k(x-y)) < \frac{1}{2^{2n}}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \min(1, p_k(x-y)) < \frac{1}{2^{2n-k}} \le \frac{1}{2^n} < 1, \ \forall k \le n$$

$$\Rightarrow p_k(x-y) = \min(1, p_k(x-y)) < \frac{1}{2^n}, \ \forall k \le n.$$

Το προηγούμενο λήμμα κάνει εμφανές ότι η μελέτη της τοπολογίας ενός χώρου Fréchet μπορεί να αναχθεί στην μελέτη της ακολουθίας των ημινορμών του, πράγμα το οποίο φαίνεται και παρακάτω.

Λήμμα 2.1.2. *Έστω X ένας χώρος Fréchet με μία διαχωρίζουσα και αύξουσα ακολουθία ημινορμών $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $x_k, x \in X$, $k \in \mathbb{N}$, και $U \subseteq X$. Τότε:*
(i) $x_k \longrightarrow x$ αν και μόνο αν $p_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
(ii) η $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν $p_n(x_k - x_l) \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
(iii) το U είναι γειτονιά του x (δηλαδή U ανοικτό και $x \in U$) αν και μόνο αν υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $\{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} \subseteq U$.

Απόδειξη. (i) *Ευθύ.* Έστω ότι $d(x_k, x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Θα αποδείξουμε ότι $p_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε μπορούμε να βρούμε $m \geq n$ φυσικό τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{2^m} < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} d(x_k, x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 &\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } d(x_k, x) < \frac{1}{2^{2m}}, \ \forall k \geq k_0 \\ &\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } p_j(x_k - x) < \frac{1}{2^m}, \ \forall k \geq k_0 \text{ και } \forall j \leq m \quad (\text{λήμμα } 2.1.1) \\ &\overset{j=n}{\Rightarrow} \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } p_n(x_k - x) < \frac{1}{2^m} < \varepsilon, \ \forall k \geq k_0 \\ &\Rightarrow p_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Το $n \in \mathbb{N}$ επιλέχτηκε τυχαία. Οπότε $p_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Αντίστροφο. Έστω ότι $p_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι $d(x_k, x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$:
Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{2}{2^n} < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} p_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 &\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } p_n(x_k - x) < \frac{1}{2^n}, \ \forall k \geq k_0 \\ &\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } d(x_k, x) < \frac{2}{2^n} < \varepsilon, \ \forall k \geq k_0 \quad (\text{λήμμα } 2.1.1) \\ &\Rightarrow d(x_k, x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης του (i).
(iii)*Ευθύ.* Έστω U γειτονιά του x. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $\{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} \subseteq U$:
Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $S(x, \frac{2}{2^m}) \subseteq U$. Με βάση το (i) του λήμματος 2.1.1 έχουμε ότι, για $m = n$ και $\varepsilon = \dfrac{1}{2^m} > 0$, $\{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} \subseteq S(x, \frac{2}{2^m}) \subseteq U$.
Αντίστροφο. Έστω ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $\{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} \subseteq U$. Θα αποδείξουμε ότι το U είναι γειτονιά του x :
Μπορούμε να βρούμε $m \geq n$ τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{2^m} < \varepsilon$. Από το λήμμα 2.1.1 συνεπάγεται ότι $S(x, \frac{1}{2^{2m}}) \subseteq \{y \in X : p_j(y - x) < \frac{1}{2^m}\} \subseteq \{y \in X : p_j(y - x) < \varepsilon\}$, $\forall j \leq m$. Οπότε για $j = n$, θα έχουμε $x \in S(x, \frac{1}{2^{2m}}) \subseteq \{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} \subseteq U$. Άρα το U είναι γειτονιά του x.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω X ένας χώρος Fréchet με μία διαχωρίζουσα και αύξουσα ακολουθία ημινορμών $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η ημινόρμα $p_n : X \to \mathbb{R}_+$ είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω $N \in \mathbb{N}$. Η 1η ιδιότητα μίας ημινόρμας, που είναι η τριγωνική ανισότητα, μας δίνει άλλη μία σχέση: $|p_n(x) - p_n(y)| \leq p_n(x - y)$, $\forall x, y \in X$.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X τέτοια ώστε $x_n \longrightarrow x$, $x \in X$. Τότε ισχύει ότι $p_k(x_n - x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |p_N(x_n) - p_N(x)| \leq p_N(x_n - x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow p_N(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_N(x)$.

Η επόμενη πρόταση επιβεβαιώνει ότι οι χώροι Fréchet είναι πιο γενικοί από τους γνωστούς χώρους Banach και Hilbert.

Πρόταση 2.1.3. *Κάθε χώρος Banach (ή Hilbert) είναι χώρος Fréchet.*

Απόδειξη. Έστω X χώρος Banach με μία νόρμα $||\cdot||$. Θέτουμε $p_n = ||\cdot||$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και διαχωρίζουσα, οπότε μένει να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του X, συγκλίνει στο X. Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy του X. Με βάση το λήμμα 2.1.2, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} p_n(x_k - x_l) \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall n \in \mathbb{N} &\Rightarrow ||x_k - x_l|| \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Rightarrow \exists x \in X \text{ ώστε } ||x_k - x|| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (X \text{ χώρος Banach}) \\ &\Rightarrow \exists x \in X \text{ ώστε } p_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο θα γίνει η κατασκευή δύο από τους πιο γνωστούς χώρους Fréchet, πάνω στους οποίους θα παρουσιαστούν στη συνέχεια της εργασίας μερικά βασικά αποτελέσματα.

Πρόταση 2.1.4. *Ο χώρος των ακεραίων συναρτήσεων, $H(\mathbb{C})$, εφοδιασμένος με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή σύνολα, είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Fréchet.*

Απόδειξη. Ο $H(\mathbb{C})$ είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{C}$. Θα αποδείξουμε ότι είναι χώρος Fréchet.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το $p_n : H(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$ με τύπο $p_n(f) = \max\limits_{|z|\leq n} |f(z)|$, $\forall f \in H(\mathbb{C})$.

<u>1ο Βήμα.</u> Η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ημινορμών:

− Η p_n είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $f \in H(\mathbb{C})$ τότε υπάρχει το $\max\limits_{|z|\leq n} |f(z)| \geq 0$ επειδή η f λαμβάνει μέγιστη τιμή πάνω στα συμπαγή σύνολα.

− Έστω $f, g \in H(\mathbb{C})$. Τότε

$$\begin{aligned} |(f+g)(z)| &\leq |f(z)| + |g(z)| \\ &\leq \max_{|z|\leq n} |f(z)| + \max_{|z|\leq n} |g(z)|, \\ &= p_n(f) + p_n(g),\ \forall z \in \overline{S(0,n)} \\ \Rightarrow p_n(f+g) = \max_{|z|\leq n} |(f+g)(z)| &\leq p_n(f) + p_n(g). \end{aligned}$$

− Έστω $f \in H(\mathbb{C})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε $p_n(\lambda f) = \max\limits_{|z|\leq n} |(\lambda f)(z)| = |\lambda| \max\limits_{|z|\leq n} |f(z)| = |\lambda| p_n(f)$.

<u>2ο Βήμα.</u> Η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα:

Έστω $f \in H(\mathbb{C})$ και $m, n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $m > n$. Επειδή ισχύει η σχέση $\{|f(z)| : |z| \leq n\} \subseteq \{|f(z)| : |z| \leq m\}$, θα έχουμε ότι $p_n(f) = \max\limits_{|z|\leq n} |f(z)| \leq \max\limits_{|z|\leq m} |f(z)| = p_m(f)$.

<u>3ο Βήμα.</u> Η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίζουσα:

Έστω ότι υπάρχει $f \in H(\mathbb{C})$ τέτοια ώστε $p_n(f) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η f δεν μπορεί παρά να είναι η μηδενική συνάρτηση. Πράγματι, έστω ένα $z_0 \in \mathbb{C}$. Υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε $|z_0| \leq M$. Τότε έχουμε ότι $|f(z_0)| \leq \max\limits_{|z|\leq M} |f(z)| = p_M(f) = 0 \Rightarrow f(z_0) = 0$. Το z_0 επιλέχθηκε τυχαία, άρα $f = \mathbf{0}$.

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε επί του $H(\mathbb{C})$ τη μετρική της πρότασης 2.1.1. Παρατηρούμε ότι μία ακολουθία στοιχείων του $H(\mathbb{C})$, $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει σε μία $f \in H(\mathbb{C})$ αν και μόνο αν
$d(f_n, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \max\limits_{|z|\leq k} |f_n(z) - f(z)| = p_k(f_n - f_m) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$
$\Leftrightarrow f_n \longrightarrow f$ τοπικά ομοιόμορφα.

<u>4ο Βήμα.</u> Ο $H(\mathbb{C})$ είναι πλήρης:

Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία Cauchy του $H(\mathbb{C})$. Τότε έχουμε ότι,

$p_k(f_n - f_m) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \max\limits_{|z|\leq k} |f_n(z) - f_m(z)| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy σε κάθε κλειστό δίσκο του $\mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists f \in H(\mathbb{C})$ ώστε $f_n \longrightarrow f$ τοπικά ομοιόμορφα

$\Rightarrow d(f_n, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και $f \in H(\mathbb{C})$.

Άρα ο $H(\mathbb{C})$ είναι πλήρης.

<u>5ο Βήμα.</u> Ο $H(\mathbb{C})$ είναι διαχωρίσιμος:

Για κάθε $f \in H(\mathbb{C})$, έχουμε ότι $f(z) \overset{\tau.o\mu.}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n,\ \forall z \in \mathbb{C}$. Άρα το σύνολο όλων των πολυωνύμων είναι πυκνό του $H(\mathbb{C})$. Θεωρούμε το σύνολο $D = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} D_n$, όπου

$- \ D_0 = \{a_0 : a_0 \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$- \ D_1 = \{a_0 + a_1 z : a_0, a_1 \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\} \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$\vdots$

$- \ D_n = \{a_0 + a_1 z + \cdots + z^n : a_0, a_1 \ldots, a_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\} \simeq \underbrace{\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{2n},\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$

Το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Θα αποδείξουμε ότι το D είναι πυκνό στο $H(\mathbb{C})$.

Έστω $f \in H(\mathbb{C})$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ τέτοιο ώστε $d(f, p) < \frac{\varepsilon}{2}$. Για το $\frac{\varepsilon}{2}$ υπάρχει $M \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ τέτοιο ώστε $\frac{2}{2^M} < \frac{\varepsilon}{2}$. Επίσης, για τους συντελεστές $a_n, \ldots, a_0$, υπάρχουν $b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ έτσι ώστε $|a_k - b_k| < \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2^M} \frac{M-1}{M^{n+1}-1}$, για κάθε $k = 0, \ldots, n$ ($\overline{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} = \mathbb{C}$). Θέτουμε $q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \in D$.

Τότε,
$$\begin{aligned} |p(z) - q(z)| &\leq |a_n - b_n||z|^n + |a_{n-1} - b_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1 - b_1||z| + |a_0 - b_0| \\ &\leq \tilde{\varepsilon} M^n + \tilde{\varepsilon} M^{n-1} + \cdots + \tilde{\varepsilon} M + \tilde{\varepsilon} \\ &= \tilde{\varepsilon}(M^n + M^{n-1} + \cdots + M + 1) = \tilde{\varepsilon} \frac{M^{n+1}-1}{M-1} = \frac{1}{2^M},\ \forall z \in \overline{S(0, M)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_n(p - q) = \max_{|z|\leq M} |p(z) - q(z)| < \frac{1}{2^M}$$

$$\Rightarrow d(p, q) < \frac{2}{2^M} \quad \text{(λήμμα 2.1.1)}$$

$$\Rightarrow d(f, q) \leq d(f, p) + d(p, q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2}{2^M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Πρόταση 2.1.5. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Fréchet. Τότε ο διανυσματικός χώρος $X^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in X,\, n \in \mathbb{N}\}$, εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο, είναι διαχωρίσιμος χώρος Fréchet.*

Απόδειξη. Έστω $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία ημινορμών του χώρου Fréchet X. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το $q_n : X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}_+$ με τύπο $q_n(\mathtt{x}) = \max\limits_{k\le n} p_n(x_k)$, $\mathtt{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$.

1ο Βήμα. Η $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ημινορμών:

− Η q_n είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $\mathtt{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, τότε υπάρχει το $q_n(\mathtt{x}) \in \mathbb{R}_+$ ως μέγιστο του πεπερασμένου συνόλου $\{p_n(x_1), ..., p_n(x_n)\}$.

− Έστω $\mathtt{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathtt{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Τότε,

$$p_n(x_k + y_k) \le p_n(x_k) + p_n(y_k) \le \max_{k\le n} p_n(x_k) + \max_{k\le n} p_n(y_k) = q_n(\mathtt{x}) + q_n(\mathtt{y}),\ \forall k \le n$$

$$\Rightarrow q_n(\mathtt{x}+\mathtt{y}) = q_n((x_k + y_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \max_{k\le n} p_n(x_k + y_k) \le q_n(\mathtt{x}) + q_n(\mathtt{y}).$$

− Έστω $\mathtt{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Τότε,

$$q_n(\lambda\mathtt{x}) = q_n((\lambda x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \max_{k\le n} p_n(\lambda x_k) = \max_{k\le n} |\lambda| p_n(x_k) = |\lambda| \max_{k\le n} p_n(x_k) = |\lambda| q_n(\mathtt{x}).$$

2ο Βήμα. Η $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα:

Έστω $\mathtt{x} \in X^{\mathbb{N}}$ και $n, m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $n < m$. Επειδή η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, έχουμε

$$p_n(x_k) \le p_m(x_k) \le \max_{k\le n} p_m(x_k),\ \forall k \le n \Rightarrow \max_{k\le n} p_n(x_k) \le \max_{k\le n} p_m(x_k) \le \max_{k\le m} p_n(x_k)\ (n < m)$$
$$\Rightarrow q_n(\mathtt{x}) \le q_m(\mathtt{x}).$$

3ο Βήμα. Η $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίζουσα:

Έστω ότι υπάρχει $\mathtt{x} \in X^{\mathbb{N}}$ τέτοιο ώστε

$$q_n(\mathtt{x}) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \max_{k\le n} p_n(x_k) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow p_n(x_k) = 0,\ \forall k \le n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Το $p_n(x_k) = 0$, για κάθε $n \ge k$. Επειδή η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, ισχύει επίσης ότι $p_n(x_k) \le p_k(x_k) = 0$, για κάθε $n \le k$. Τότε έχουμε ότι $p_n(x_k) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο συνεπάγεται ότι $x_k = 0$ (η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίζουσα). Το k επιλέχθηκε τυχαία, οπότε $x_k = 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, το $\mathtt{x} = 0$.

4ο Βήμα. Ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι πλήρης με τη μετρική που επάγεται απο την $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Έστω $(\mathtt{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy του $X^{\mathbb{N}}$. Αν $\mathtt{x}_n = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε,

$$q_l(\mathtt{x}_n - \mathtt{x}_m) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall l \in \mathbb{N} \Rightarrow q_l\left(\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}}\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall l \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \max_{k\le l} p_l\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall l \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow p_l\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \le l,\ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $p_l\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, για κάθε $l \ge k$ και επειδή η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, ισχύει επίσης $p_l\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right) \le p_k\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, για κάθε $l \le k$. Τότε έχουμε ότι $p_l\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\left(x_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ του X είναι Cauchy. Το k επιλέχθηκε τυχαία, οπότε η $\left(x_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία

Cauchy , για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επειδή ο X είναι πλήρης, υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k \in X$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\mathtt{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathtt{x}_n \longrightarrow \mathtt{x}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε ότι $q_l(\mathtt{x}_n - \mathtt{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Πράγματι έστω $l \in \mathbb{N}$. Έχουμε αποδείξει ότι $p_l\left(x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \le l \Rightarrow p_l\left(x_k^{(n)} - x_k\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \le l$

$$\Rightarrow \max_{k\le l} p_l\left(x_k^{(n)} - x_k\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Rightarrow q_l(\mathtt{x}_n - \mathtt{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Άρα ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι χώρος Fréchet.

5ο Βήμα. Ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος:

Ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος. Δηλαδή υπάρχει $A \subseteq X$ το οποίο είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο X. Ορίζουμε το σύνολο $C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, όπου

– $A_1 = \{(a_1, 0, 0, ...) : a_1 \in A\} \simeq A$

– $A_2 = \{(a_1, a_2, 0, 0, ...) : a_1, a_2 \in A\} \simeq A \times A$

$\vdots$

– $A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...) : a_1, a_2, ..., a_n \in A\} \simeq \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Το C είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$ ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Θα αποδείξουμε ότι είναι πυκνό στο $X^{\mathbb{N}}$.

Έστω $\mathtt{x} \in X^{\mathbb{N}}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{2}{2^N} < \varepsilon$. Επειδή το A είναι πυκνό στο X, για τα $x_1, x_2, ..., x_N \in X$, υπάρχουν $a_1, a_2, ..., a_N \in A$ τέτοια ώστε $d(x_i, a_i) < \frac{1}{2^{2N}}$, $\forall i = 1, ..., N$. Θέτουμε $\mathsf{a} = (a_1, a_2, ..., a_N, 0, ...) \in A_N \subseteq C$. Τότε έχουμε ότι

$$d(x_i, a_i) < \frac{1}{2^{2N}},\ \forall i = 1, ..., N \Rightarrow p_k(x_i - a_i) < \frac{1}{2^N},\ \forall k \le N,\ \forall i = 1, ..., N \quad \text{(λήμμα 2.1.1)}$$
$$\overset{k=N}{\Rightarrow} \max_{1\le i\le N} p_N(x_i - a_i) < \frac{1}{2^N}$$
$$\Rightarrow q_N(\mathtt{x} - \mathsf{a}) < \frac{1}{2^N}$$
$$\Rightarrow d'(\mathtt{x}, \mathsf{a}) < \frac{2}{2^N} < \varepsilon, \text{ όπου } d' \text{ η μετρική του } X^{\mathbb{N}}.$$

Άρα το C είναι πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του $X^{\mathbb{N}}$. Δηλαδή ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος.

Παρατήρηση: Όπως φάνηκε και στην απόδειξη της πληρότητας του $X^{\mathbb{N}}$, από τον τρόπο που ορίσαμε την $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μέσω της $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μία ακολουθία στοιχείων του $X^{\mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη. Δηλαδή, αν $\mathtt{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $\mathtt{x_n} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\mathtt{x}_n \overset{d'}{\longrightarrow} x \Leftrightarrow x_k^{(n)} \overset{d}{\longrightarrow} x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Οπότε η τοπολογία του $X^{\mathbb{N}}$ που επάγεται από την $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι η τοπολογία γινόμενο του (X, d).

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι σ' ένα χώρο Fréchet μπορεί να ορισθεί ένα συναρτησοειδές με ιδιότητες που είναι παρόμοιες με αυτές της νόρμας που έχουν οι χώροι Banach.

Πρόταση 2.1.6. *Έστω X ένας χώρος Fréchet με μία διαχωρίζουσα και αύξουσα ακολουθία ημινορμών $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ορίζουμε το συναρτησοειδές $||\cdot||_F : X \to \mathbb{R}_+$ με τύπο*
$||x||_F = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\min(1,p_n(x))$, *$x \in X$. Τότε για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$:*
(i) $||x+y||_F \leq ||x||_F + ||y||_F$,
(ii) $||\lambda x||_F \leq ||x||_F$, *αν* $|\lambda| \leq 1$,
(iii) $\lim_{\lambda\to 0} ||\lambda x||_F = 0$,
(iv) αν $||x||_F = 0$, *τότε* $x = 0$.

Απόδειξη. Αν d η μετρική του χώρου Fréchet X, τότε $d(x,y) = ||x-y||_F$ για κάθε $x, y \in X$.
(i) Έστω $x, y \in X$. Τότε με βάση την πρόταση 2.1.1, έχουμε:
$||x+y||_F = d(x+y,0) \leq d(x+y,y) + d(y,0) = d(x,0) + d(y,0) = ||x||_F + ||y||_F$.
(ii) Έστω $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ με $|\lambda| \leq 1$. Τότε $p_n(\lambda x) = |\lambda| p_n(x) \leq p_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Έστω $n \in \mathbb{N}$:
$-$ αν $\min(1,p_n(\lambda x)) = p_n(\lambda x) \Rightarrow p_n(\lambda x) \leq 1$ και $p_n(\lambda x) \leq p_n(x)$
$\Rightarrow \min(1,p_n(\lambda x)) = p_n(\lambda x) \leq \min(1,p_n(x))$,
$-$ αν $\min(1,p_n(\lambda x)) = 1 \Rightarrow 1 \leq p_n(\lambda x) \leq p_n(x)$
$\Rightarrow \min(1,p_n(\lambda x)) = 1 = \min(1,p_n(x))$.
Άρα $\min(1,p_n(\lambda x)) \leq \min(1,p_n(x))$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\min(1,p_n(\lambda x)) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\min(1,p_n(x))$$

$\Rightarrow ||\lambda x||_F \leq ||x||_F$.
(iii) Έστω $x \in X$ και $\lambda_k \in \mathbb{K}^*$, $k \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\lambda_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Τότε:
$p_n(\lambda_k x - 0) = |\lambda_k| p_n(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow ||\lambda_k x||_F = d(\lambda_k x, 0) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. (λήμμα 2.1.2)
Άρα $\lim_{\lambda\to 0} ||\lambda x||_F = 0$.
(iv) Έστω $x \in X$ τέτοιο ώστε $||x||_F = 0 \Rightarrow d(x,0) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ορισμός 2.1.6. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος. Ένα συναρτησοειδές $||\cdot||_F : X \to \mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $(i)-(iv)$ της πρότασης 2.1.6, καλείται F-νόρμα.*

Κλείνοντας την εισαγωγή στους χώρους Fréchet, αποδεικνύονται στα επόμενα δύο λήμματα ορισμένες ιδιότητες που έχουν τα ανοικτά υποσύνολα ενός χώρου Fréchet.

Λήμμα 2.1.3. *Έστω X ένας χώρος Fréchet και d η μετρική του χώρου X. Αν U ένα μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X, τότε υπάρχει μη κενό ανοικτό $U_1 \subseteq U$ και μία ανοικτή γειτονιά του 0, W, ώστε $U_1 + W \subseteq U$. Αν W είναι μία ανοικτή γειτονιά του 0, τότε υπάρχει ανοικτή γειτονιά του 0, W_1, ώστε $W_1 + W_1 \subseteq W$.*

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Υπάρχει $x_0 \in U$ και $\varepsilon > 0$ ώστε το $S(x_0,\varepsilon) \subseteq U$. Αν θέσουμε $U_1 = S(x_0,\frac{\varepsilon}{2}) \subseteq U$ και $W = S(0,\frac{\varepsilon}{2})$, τότε $U_1 + W \subseteq U$. Πράγματι, για $u \in U_1$ και $w \in W$, έχουμε ότι $d(u+w,x_0) \leq d(u+w,u) + d(u,x_0) = d(w,0) + d(u,x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, δηλαδή $u + w \in S(x_0,\varepsilon) \subseteq U$ και άρα $U_1 + W \subseteq U$.

Έστω W μία ανοικτή γειτονιά του 0. Αν θέσουμε $W_1 = S(0, \frac{\varepsilon}{2})$, τότε αποδεικνύεται όπως προηγουμένως ότι $W_1 + W_1 \subseteq W$.

Λήμμα 2.1.4. *Έστω X ένας χώρος Fréchet και d η μετρική του χώρου X. Αν U ένα μη κενό ανοικτό ανοικτό υποσύνολο του X, τότε:*
(i) το $x + U = \{x + u : u \in U\}$ είναι ανοικτό, για κάθε $x \in X$,
(ii) το $aU = \{au : u \in U\}$ είναι ανοικτό, για κάθε $a \in \mathbb{K}^*$.

Απόδειξη. (i) Έστω $y \in x + U \Rightarrow \exists u \in U$ τέτοιο ώστε $y = x + u$
$$\Rightarrow y - x = u \in U$$
$$\Rightarrow \exists r > 0 \text{ τέτοιο ώστε } S(y - x, r) \subseteq U.$$
Έστω $w \in S(y, r) \Rightarrow d(y - x, w - x) = d(y, w) < r$
$$\Rightarrow w - x \in S(y - x, r) \subseteq U$$
$$\Rightarrow w = x + w - x \in x + U.$$
Άρα $S(y, r) \subseteq x + U$.
(ii) Έστω $y \in U \Rightarrow \exists u \in U$ τέτοιο ώστε $y = au$
$$\Rightarrow \frac{1}{a} y = u \in U$$
$$\Rightarrow \exists r > 0 \text{ τέτοιο ώστε } S\left(\tfrac{1}{a} y, r\right) \subseteq U.$$
Για το $\dfrac{1}{a}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n - 1 < \left|\dfrac{1}{a}\right| \leq n$. Αν θέσουμε $r' = \dfrac{r}{n}$, τότε $\forall w \in S(y, r')$
$$\left|\left|\frac{1}{a} y - \frac{1}{a} w\right|\right|_F = \left|\left|\frac{1}{a}(y - w)\right|\right|_F = \left|\left|n \frac{1}{na}(y - w)\right|\right|_F = \left|\left|\underbrace{\frac{1}{a}(y - w) + \cdots + \frac{1}{a}(y - w)}_{n}\right|\right|_F$$
$$\Rightarrow \left|\left|\frac{1}{a} y - \frac{1}{a} w\right|\right|_F \leq n \left|\left|\frac{1}{na}(y - w)\right|\right|_F \overset{(*)}{\leq} n||y - w||_F < nr' = r \quad (*) : \text{πρόταση 2.1.6-}(ii)$$
$$\Rightarrow d\left(\frac{1}{a} y, \frac{1}{a} w\right) < r \Rightarrow \frac{1}{a} w \in S\left(\tfrac{1}{a} y, r\right) \subseteq U \Rightarrow w = a \frac{1}{a} w \in aU.$$
Άρα $S(y, r') \subseteq U$.

Έχοντας πλέον κατασκευάσει τους χώρους Fréchet, δίνεται στη συνέχεια ο ορισμός των απεικονίσεων οι οποίες θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης σ' αυτή την εργασία.

Ορισμός 2.1.7. *Έστω X και Y δύο χώροι Fréchet. Τότε μία συνεχής και γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$ καλείται τελεστής. Το σύνολο αυτών των τελεστών συμβολίζεται με $L(X, Y)$. Αν $Y = X$, θα λέμε ότι ο T είναι τελεστής επί του X και θα συμβολίζουμε $L(X) = L(X, X)$.*

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί γενίκευση ένος πολύ γνωστό αποτέλεσματος της Θεωρίας Τελεστών σε χώρους Banach.

Πρόταση 2.1.7. *Έστω X και Y δύο χώροι Fréchet με διαχωρίζουσες και αύξουσες ακολουθίες ημινορμών $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αντίστοιχα. Τότε μία γραμμική απεικόνιση $T : X \to Y$ είναι τελεστής, αν και μόνο αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$ τέτοια ώστε $q_m(Tx) \leq M p_n(x)$, $\forall x \in X$.*

Απόδειξη. *Αντίστροφο.* Έστω ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$ τέτοια ώστε $q_m(Tx) \leq Mp_n(x)$, $\forall x \in X$. Θα αποδείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση T είναι συνεχής:
Έστω $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του X τέτοια ώστε $x_k \longrightarrow x$, $x \in X$, το οποίο είναι ισοδύναμο με $p_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$ τέτοια ώστε $q_m(Tx) \leq Mp_n(x)$, $\forall x \in X$. Τότε $p_m(Tx_k - Tx) = p_m(T(x_k - x)) \leq Mp_n(x_k - x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Οπότε $p_m(Tx_k - Tx) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow Tx_k \longrightarrow Tx \Rightarrow T$ συνεχής (και γραμμική). Άρα T τελεστής.
Ευθύ. Έστω ότι T είναι ένας τελεστής. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$ τέτοια ώστε $q_m(Tx) \leq Mp_n(x)$, $\forall x \in X$:
Έστω $m \in \mathbb{N}$. Από το λήμμα 2.1.2, το $W = \{y \in Y : q_m(y) < 1\}$ είναι ανοικτή γειτονιά του 0 στο Y. **(∗)**
Επειδή ο T είναι συνεχής, υπάρχει W' ανοικτή γειτονιά του 0 στο X ώστε $T(W') \subseteq W$. Σύμφωνα με το λήμμα 2.1.2, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\{x \in X : p_n(x) < \varepsilon\} \subseteq W'$. **(∗∗)**
Έστω $x \in X$ και $\delta > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}
p_n\left(\frac{\varepsilon}{p_n(x)+\delta}x\right) = \varepsilon\frac{p_n(x)}{p_n(x)+\delta} < \varepsilon \overset{(*)}{\Rightarrow} & \frac{\varepsilon}{p_n(x)+\delta}x \in W' \\
\Rightarrow & \frac{\varepsilon}{p_n(x)+\delta}Tx = T\left(\frac{\varepsilon}{p_n(x)+\delta}x\right) \in T(W') \subseteq W \\
\overset{(**)}{\Rightarrow} & q_m\left(\frac{\varepsilon}{p_n(x)+\delta}Tx\right) < 1 \\
\Rightarrow & q_m(Tx) < \frac{p_n(x)+\delta}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Τα $\delta > 0$ και $x \in X$ είναι τυχαία. Άρα $q_m(Tx) \leq \dfrac{p_n(x)}{\varepsilon} = Mp_n(x)$, $\forall x \in X$, όπου $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Στο τέλος αυτής της ενότητας δίνεται ο ορισμός των γραμμικών δυναμικών συστημάτων, κάτι που δε θα μπορούσε να γίνει χωρίς την κατάλληλη προεργασία.

Ορισμός 2.1.8. *Ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα είναι ένα ζευγάρι (X,T) αποτελούμενο από ένα διαχωρίσιμο χώρο Fréchet X και έναν τελεστή $T : X \to X$.*

Παρατήρηση: Για συντομία θα λέμε έστω $T : X \to X$ ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα ή ακόμη έστω T ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα (αν ο χώρος X είναι προφανής). Από το παρακάτω κεφάλαιο, θα θεωρούμε ότι όλοι οι τελεστές ορίζονται σε διαχωρίσιμους χώρους Fréchet, εκτός και αν διατυπώνεται κάτι διαφορετκό.

2.2 Υπερκυκλικοί τελεστές

Αρχικά δίνεται ο ορισμός των τελεστών που έχουν πυκνή τροχιά.

Ορισμός 2.2.1. *Ένας τελεστής $T : X \to X$ καλείται υπερκυκλικός αν υπάρχει $x \in X$ του οποίου η τροχιά μέσω του T είναι πυκνή στο X. Σε αυτή την περίπτωση, το x καλείται υπερκυκλικό διάνυσμα για τον T. Το σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων για τον T συμβολίζεται με $HC(T)$.*

Ο όρος "υπερκυκλικό" για διανύσματα με πυκνή τροχιά χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά γύρω στο 1986 από τον Beauzamy [12], [13], [14], και αργότερα γύρω στο 1988 για τελεστές με πυκνή τροχιά από τους Bourdon, Godefroy και Shapiro [20], [25]. Κίνητρο της έρευνας του Beauzamy, και της ορολογίας που χρησιμοποίησε, ήταν το πρόβλημα του κλειστού αναλλοίωτου υποχώρου και κατ' επέκταση το πρόβλημα του κλειστού αναλλοιώτου υποσυνόλου ενός χώρου.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $T \to X$ ένας τελεστής. Ο X δεν έχει μη τετριμμένα T-αναλλοίωτα κλειστά υποσύνολα, αν και μόνο αν, κάθε μη μηδενικό στοιχείο του X είναι υπερκυκλικό.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Έστω ότι τα μόνα T-αναλλοίωτα κλειστα υποσύνολα του X είναι το $\{0\}$ και το X. Θα αποδείξουμε ότι $X \setminus \{0\} \subseteq HC(T)$ και άρα τα δύο σύνολα είναι ίσα:
Έστω $x \in X \setminus \{0\}$ και $x \notin HC(T)$. Θέτουμε $A = \overline{orb(x,T)} \neq X$.
(α) Το A είναι κλειστό.
(β) $\{0\} \neq A \subsetneq X$.
(γ) Έστω $y \in T(A) \Rightarrow \exists z \in A$ τέτοιο ώστε $Tz = y$
$\Rightarrow \exists (T^{n_k}x)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $T^{n_k}x \longrightarrow z$
$\Rightarrow T(T^{n_k}) \longrightarrow Tz \quad$ (T συνεχής)
$\Rightarrow T^{n_k+1} \longrightarrow y$ και $T^{n_k+1}x \in orb(x,T)$, $\forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow y \in A$.
Οπότε $T(A) \subseteq A$.
Άρα το A μη τετριμμένο T-αναλλοίωτο κλειστό υποσύνολο του X. Άτοπο.
Αντίστροφο. Έστω ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο του X είναι υπερκυκλικό. Θα αποδείξουμε ότι τα μόνα T-αναλλοίωτα κλειστά υποσύνολα του X είναι το $\{0\}$ και το X:
Έστω A T-αναλλοίωτο κλειστό υποσύνολο του X και $A \neq \{0\}$. Τότε υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x \neq 0$. Από υπόθεση έχουμε ότι $\overline{orb(x,T)} = X$. Επειδή το A είναι κλειστό T-αναλλοίωτο σύνολο και $x \in A$, ισχύει ότι $orb(x,T) \subseteq A \Rightarrow \overline{orb(x,T)} \subseteq \overline{A} = A \Rightarrow X \subseteq A \Rightarrow A = X$.

Όπως αναφέρθηκε και στο 1ο κεφάλαιο, πολλές φορές είναι δύσκολο να κατασκευαστει ένα σημείο ενός δυναμικού συστήματος που να έχει πυκνή τροχιά. Αν όμως ο χώρος του συστήματος είναι "καλός", τότε το θεώρημα του Birkhoff διευκολύνει την απόδειξη ύπαρξης τέτοιου σημείου.

Παρατήρηση: Ένας χώρος Fréchet $X \neq \{0\}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Πράγματι, έστω $x \in X \setminus \{0\}$. Θεωρούμε την ακολουθία στοιχείων του X, $x_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)x$, $k \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $p_n(x_k - x) = p_n\left(\frac{1}{k}x\right) = \frac{1}{k}p_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $x_k \longrightarrow x$ και επειδή $x_k \neq x$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το x είναι σημείο συσσώρευσης του X. Για $x = 0$ θεωρούμε την ακολουθία $x_k = \frac{1}{k}y$, $k \in \mathbb{N}$ όπου $y \in X \setminus \{0\}$.

Οπότε για τους τελεστές, το θεώρημα του Birkhoff που έχει ήδη αποδειχθεί (θεώρημα 1.2.1), διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 2.2.1 (Birkhoff transitivity theorem). *Ένας τελεστής $T : X \to X$ είναι υπερκυκλικός αν και μόνο αν είναι topologically transitive. Σε αυτή την περίπτωση, το σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων, $HC(T)$, είναι πυκνό G_δ-σύνολο.*

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να αποδειχθεί η υπερκυκλικότητα ενός τελεστή αποδεικνύοντας την υπερκυκλικότητα ενός άλλου. Μερικοί από αυτούς δίνονται παρακάτω.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω T ένας αντιστρέψιμος τελεστής. Τότε ο T είναι υπερκυκλικός αν και μόνο αν ο T^{-1} είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη. Με βάση το θεώρημα 2.2.1 και την πρόταση 1.2.3, έχουμε ότι:
T υπερκυκλικός $\Leftrightarrow$ T *topologically transitive* $\Leftrightarrow$ T^{-1} *topologically transitive* $\Leftrightarrow$ T^{-1} υπερκυκλικός.

Πρόταση 2.2.3. *Η υπερκυκλικότητα διατηρείται μέσω μίας quasiconjugacy σχέσης.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής που είναι *quasiconjugate* ενός άλλου τελεστή $S : Y \to Y$ και έστω S υπερκυκλικός. Με βάση το θεώρημα 2.2.1 και την πρόταση 1.2.2, αποδεικνύουμε ότι ο T είναι υπερκυκλικός:
S υπερκυκλικός $\Rightarrow$ S *topologically transitive* $\Rightarrow$ T *topologically transitive* $\Rightarrow$ T υπερκυκλικός.

Στην περίπτωση που ένας τελεστής ορίζεται επί ενός πραγματικού χώρου Fréchet, το να εξεταστεί αν είναι υπερκυκλικός ή όχι, ανάγεται στη μελέτη της μιγαδοποίησης του, της οποίας η κατασκευή γίνεται στη συνέχεια.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω X ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Τότε ορίζουμε τη μιγαδοποίηση του X, να είναι ο διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, $\widetilde{X} = X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$, τον οποίο θα συμβολίζουμε για χάριν ευκολίας $\widetilde{X} = \{x + iy : x, y \in X\}$, με τις εξής πράξεις:*
− $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$, $x + iy, x' + iy' \in \widetilde{X}$,
− $(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay - bx)$, $a + ib \in \mathbb{C}$, $x + iy \in \widetilde{X}$.

Πρόταση 2.2.4. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Fréchet επί του σώματος $\mathbb{R}$. Τότε ο διανυσματικός χώρος $\widetilde{X}$, εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο, είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Fréchet.*

Απόδειξη. Έστω $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία ημινορμών του χώρου Fréchet X. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το $\tilde{p}_n : \widetilde{X} \to \mathbb{R}_+$ με τύπο $\tilde{p}_n(x + iy) = \max\limits_{0\le t\le 2\pi} p_n(xcost - ysint)$, $x + iy \in \widetilde{X}$.

<u>1ο Βήμα.</u> Η $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ημινορμών:

− Η $\tilde{p}_n$ είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $x + iy \in \widetilde{X}$ τότε υπάρχει το $\max\limits_{0\le t\le 2\pi} p_n(xcost - ysint)$ και είναι μη αρνητικό επειδή το $\{p_n(xcost - ysint) : t \in [0, 2\pi]\} \subseteq \mathbb{R}$ είναι συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου.

− Έστω $x + iy, x' + iy' \in \widetilde{X}$. Τότε,

$$\begin{aligned} p_n((x + x')cost - (y + y')sint) &\le p_n(xcost - ysint) + p_n(x'cost - y'sint) \\ &\le \max_{0\le t\le 2\pi} p_n(xcost - ysint) + \max_{0\le t\le 2\pi} p_n(x'cost - y'sint) \\ &= \tilde{p}_n(x + iy) + \tilde{p}_n(x' + iy'),\ \forall t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{p}_n((x + iy) + (x' + iy')) = \tilde{p}_n((x + x') + i(y + y')) &= \max_{0\le t\le 2\pi} p_n((x + x')cost - (y + y')sint) \\ &\le \tilde{p}_n(x + iy) + \tilde{p}_n(x' + iy') \end{aligned}$$

– Έστω $x+iy \in \widetilde{X}$, $a+ib \in \mathbb{C}$. Το $a+ib = |a+ib|(cos\theta_0 + isin\theta_0)$, για κάποιο $\theta_0 \in [0,2\pi)$.
Τότε,
$$\begin{aligned}
\tilde{p}_n((a+ib)(x+iy)) &= \tilde{p}_n(|a+ib|(cos\theta_0+isin\theta_0)(x+iy))\\
&= \tilde{p}_n(|a+ib|(xcos\theta_0 - ysin\theta_0) + i|a+ib|(xsin\theta_0+ycos\theta_0))\\
&= \max_{0\le t\le 2\pi} p_n(|a+ib|(xcos\theta_0-ysin\theta_0)cost-|a+ib|(xsin\theta_0+ycos\theta_0)sint)\\
&= \max_{0\le t\le 2\pi} p_n(|a+ib|(xcos\theta_0cost-ysin\theta_0cost-xsin\theta_0sint-ycos\theta_0sint))\\
&= |a+ib|\max_{0\le t\le 2\pi} p_n(x(cos\theta_0cost-sin\theta_0sint)-y(sin\theta_0cost+cos\theta_0sint))\\
&= |a+ib|\max_{0\le t\le 2\pi} p_n(xcos(t+\theta_0)-ysin(t+\theta_0))\\
&= |a+ib|\max_{\theta_0\le \theta\le 2\pi+\theta_0} p_n(xcos\theta-ysin\theta)\\
&\overset{(*)}{=} |a+ib|\max_{0\le t\le 2\pi} p_n(xcost-ysint)\\
&= |a+ib|\tilde{p}_n(x+iy).
\end{aligned}$$

(∗)$\{xcost-ysint : t\in[0,2\pi]\} = \{xcos\theta - ysin\theta : \theta\in[\theta_0, 2\pi+\theta_0]\}$:
Έστω $a \in \{xcost-ysint : t\in[0,2\pi]\} \Rightarrow \exists t\in[0,2\pi]$ τέτοιο ώστε $a = xcost - ycost$.
• Αν $\theta_0 \le t \le 2\pi \Rightarrow t\in[\theta_0,2\pi] \subseteq [\theta_0,\theta_0+2\pi] \Rightarrow a \in \{xcos\theta-ysin\theta : \theta\in[\theta_0,2\pi+\theta_0]\}$.
• Αν $0 \le t < \theta_0 \Rightarrow 2\pi+t \in [2\pi,\theta_0+2\pi) \subseteq [\theta_0,\theta_0+2\pi]$ και επειδή ισχύει ότι
$a = xcost-ysint = xcos(2\pi+t)-ysin(2\pi+t)$, θα έχουμε $a\in\{xcos\theta-ysin\theta : \theta\in[\theta_0,2\pi+\theta_0]\}$.
Άρα $\{xcost-ysint : t\in[0,2\pi]\} \subseteq \{xcos\theta-ysin\theta : \theta\in[\theta_0,2\pi+\theta_0]\}$.
Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\{xcos\theta-ysin\theta : \theta\in[\theta_0,2\pi+\theta_0]\} \subseteq \{xcost-ysint : t\in[0,2\pi]$.

<u>2ο Βήμα.</u> Η $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα:
Έστω $x+iy\in\widetilde{X}$ και $n,m\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $n<m$. Επειδή η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, έχουμε
$p_n(xcost-ycost) \le p_m(xcost-ycost) \le \max_{0\le t\le 2\pi} p_m(xcost-ycost) = \tilde{p}_m(x+iy)$, $\forall t\in[0,2\pi]$
$\Rightarrow \tilde{p}_n(x+iy) = \max_{0\le t\le 2\pi} p_n(xcost-ycost) \le \tilde{p}_m(x+iy)$.

<u>3ο Βήμα.</u> Η $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίζουσα:
Έστω ότι υπάρχει $x+iy\in\widetilde{X}$ τέτοιο ώστε
$$\begin{aligned}
\tilde{p}_n(x+iy) = 0,\ \forall n\in\mathbb{N} &\Rightarrow \max_{0\le t\le 2\pi} p_n(xcost-ycost) = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}\\
&\Rightarrow p_n(xcost-ycost)=0,\ \forall t\in[0,2\pi],\ \forall n\in\mathbb{N}\\
&\Rightarrow xcost-ycost = 0,\ \forall t\in[0,2\pi] \quad ((p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ διαχωρίσιμη}).
\end{aligned}$$
Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $t\in[0,2\pi]$, θα ισχύει και για
• $t=0 \Rightarrow x=0$,
• $t=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y=0$.
Άρα $x+iy = 0+i0 = 0$.

<u>4ο Βήμα.</u> Ο $\widetilde{X}$ είναι πλήρης με τη μετρική $\tilde{d}$ της πρότασης 2.1.1 που επάγεται απο την $(\tilde{p}_m)_{n\in\mathbb{N}}$:
Έστω $a_n = (x_n+iy_n)$,$n\in\mathbb{N}$ ακολουθία Cauchy του $\widetilde{X}$. Τότε,
$$\begin{aligned}
\tilde{p_k}(a_n-a_m) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k\in\mathbb{N} &\Rightarrow \tilde{p_k}((x_n-x_m)+i(y_n-y_m)) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k\in\mathbb{N}\\
&\Rightarrow \max_{0\le t\le 2\pi} p_k((x_n-x_m)cost-(y_n-y_m)sint) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k\in\mathbb{N}\\
&\Rightarrow p_k((x_n-x_m)cost-(y_n-y_m)sint) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \forall t\in[0,2\pi], \forall k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$
Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $t\in[0,2\pi]$, θα ισχύει και για

- $t = 0 \Rightarrow p_k(x_n - x_m) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow$ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy του χώρου Fréchet X
  $\Rightarrow \exists x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \longrightarrow x$,
- $t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \exists y \in X$ τέτοιο ώστε $y_n \longrightarrow y$.

Θα αποδείξουμε ότι η $a_n = (x_n + iy_n)$, $n \in \mathbb{N}$ συγλίνει στο $a = x + iy \in \widetilde{X}$.
$p_k((x_n - x)cost - (y_n - y)sint) \leq |cost|p_k(x_n - x) + |sint|p_k(y_n - y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \forall t \in [0, 2\pi], \forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \max\limits_{0\leq t\leq 2\pi} p_k((x_n - x)cost - (y_n - y)sint) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \tilde{p}_k(a_n - a) = \tilde{p}_k((x_n - x) + i(y_n - y)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \tilde{d}(a_n, a) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και $a \in \widetilde{X}$.
Άρα ο $\widetilde{X}$ είναι χώρος Fréchet.
5ο Βήμα. Ο $\widetilde{X}$ είναι διαχωρίσιμος:
Ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος. Δηλαδή υπάρχει $A \subseteq X$ το οποίο είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο X. Το $A + iA \subseteq \widetilde{X}$ είναι αριθμήσιμο επειδή είναι ισόμορφο με το $A \times A$. Θα αποδείξουμε ότι είναι πυκνό στο $\widetilde{X}$. Έστω $x + iy \in \widetilde{X}$ και $\varepsilon > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 2.1.1. Για το $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{2}{2^n} < \varepsilon$. Επειδή το A είναι πυκνό στο X, για τα $x, y \in X$ θα υπάρχουν $a, b \in A$ τέτοια ώστε $d(x, a) < \dfrac{1}{2^{2(n+1)}}$ και $d(y, b) < \dfrac{1}{2^{2(n+1)}}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $p_k(x - a) < \dfrac{1}{2^{n+1}}$ και $p_k(y - b) < \dfrac{1}{2^{n+1}}$, για κάθε $k \leq n + 1$.
Τότε,
$$\begin{aligned} p_n((x - a)cost - (y - b)sint) &\leq |cost|p_n(x - a) + |sint|p_n(y - b) \\ &\leq p_n(x - a) + p_n(y - b) \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n},\ \forall t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \max_{0\leq t\leq 2\pi} p_n((x - a)cost - (y - b)sint) < \frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow \tilde{p}_n((x + iy) - (a + ib)) = \tilde{p}_n((x - a) + i(y - b)) < \frac{1}{2^n}$$
$$\Rightarrow \tilde{d}(x + iy, a + ib) < \frac{2}{2^n} < \varepsilon \text{ και } a + ib \in A + iA.$$
Άρα το $A + iA$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο $\widetilde{X}$. Δηλαδή ο $\widetilde{X}$ είναι διαχωρίσιμος.

Παρατήρηση: Όπως φάνηκε και στην απόδειξη της πληρότητας του $\widetilde{X}$, από τον τρόπο που ορίσαμε την $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μέσω της $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μία ακολουθία στοιχείων του $\widetilde{X}$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη. Δηλαδή, αν $a = x + iy$ και $a_n = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε $a_n \overset{\tilde{d}}{\longrightarrow} a \Leftrightarrow x_n \overset{d}{\longrightarrow} x$ και $y_n \overset{d}{\longrightarrow} y$. Οπότε η τοπολογία του $\widetilde{X}$ που επάγεται από την $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι η τοπολογία γινόμενο του (X, d).

Ορισμός 2.2.3. *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής επί του πραγματικού χώρου X. Τότε ορίζουμε τη μιγαδοποίηση του T, $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ με τύπο $\widetilde{T}(x + iy) = Tx + iTy$, όπου $\widetilde{X}$ η μιγαδοποίηση του X.*

Πρόταση 2.2.5. *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Τότε η μιγαδοποίηση του, $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, είναι τελεστής.*

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η $\widetilde{T}$ είναι γραμμική απεικόνιση. Έστω $x+iy, x'+iy' \in \widetilde{X}$ και $a+ib, a'+ib' \in \mathbb{C}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}((a+ib)(x+iy)+(a'+ib')(x'+iy')) &= \widetilde{T}((ax-by+a'x'-b'y')+i(ay+bx+a'y'+b'x') \\ &= T(ax-by+a'x'-b'y')+iT(ay+bx+a'y'+b'x') \\ &\overset{(*)}{=} aTx-bTy+a'Tx'-b'Ty'+i(aTy+bTx+a'Ty'+b'Tx') \\ &= (a+ib)(Tx+iTy)+(a'+ib')(Tx'+iTy') \\ &= (a+ib)\widetilde{T}(x+iy)+(a'+ib')\widetilde{T}(x'+iy').\end{aligned}$$

(∗) : Ο T είναι τελεστής.
Τώρα σύμφωνα με την πρόταση 2.1.7, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$ τέτοια ώστε $\tilde{p}_m(\widetilde{T}(x+iy)) \leq M\tilde{p}_n(x+iy)$, $\forall x+iy \in \widetilde{X}$:
Έστω $m \in \mathbb{N}$. Από **(∗)**, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$ τέτοια ώστε $p_m(Tx) \leq Mp_n(x)$, $\forall x \in X$.

$$\begin{aligned}\text{Τότε, } p_m(Tx\cdot cost - Ty\cdot sint) &\overset{(*)}{=} p_m(T(xcost-ysint)) \\ &\leq Mp_n(xcost-ysint) \\ &\leq M\max_{0\leq t\leq 2\pi} p_n(xcost-ysint) \\ &= M\tilde{p}_n(x+iy),\ \forall t\in[0,2\pi],\ \forall x+iy\in\widetilde{X}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \max_{0\leq t\leq 2\pi} p_m(Tx\cdot cost - Ty\cdot sint) \leq M\tilde{p}_n(x+iy),\ \forall x+iy\in\widetilde{X}$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_m(T(x+iy)) = \tilde{p}_m(Tx+iTy) \leq M\tilde{p}_n(x+iy),\ \forall x+iy\in\widetilde{X}.$$

Πρόταση 2.2.6. *Έστω T ένας τελεστής σ' ένα πραγματικό και διαχωρίσιμο χώρο Fréchet. Αν η μιγαδοποίηση του $\widetilde{T}$ είναι υπερκυκλικός, τότε και ο T είναι υπερκυκλικός.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι *quasiconjugate* του $\widetilde{T}$:
Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \widetilde{X} \to X$ με τύπο $\phi(x+iy) = x$, $x+iy \in \widetilde{X}$ (προβολή στην πρώτη συντεταγμένη). Η ϕ είναι επί (οπότε έχει πυκνό πεδίο τιμών). Επίσης, αν $x_n + iy_n \longrightarrow x+iy$, τότε $\tilde{p}_k((x_n+iy_n)-(x+iy)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \tilde{p}_k((x_n-x)cost-(y_n-y)sint) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall t \in [0,2\pi]$, $\forall k \in \mathbb{N}$
$\overset{t=0}{\Rightarrow} p_k(x_n-x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \phi(x_n+iy_n) = x_n \longrightarrow x = \phi(x+iy)$.
Άρα η ϕ είναι συνεχής.
Τέλος, $(\phi\circ\widetilde{T})(x+iy) = \phi(Tx+iTy) = Tx = (T\circ\phi)(x+iy)$, $\forall x+iy \in \widetilde{X}$.
Οπότε ο T είναι *quasiconjugate* του $\widetilde{T}$. Επειδή ο $\widetilde{T}$ ειναι υπερκυκλικός, από την πρόταση 2.2.3 συνεπάγεται ότι ο T είναι υπερκυκλικός.

2.3 Γραμμικό χάος

Πρώτοι οι Godefroy και Shapiro [25] πρότειναν τον ορισμό του χάους που δόθηκε από τον Devaney, ως τον ορισμό του γραμμικού χάους.

Ορισμός 2.3.1 (Γραμμικό χάος). *Έστω X ένας χώρος Fréchet. Τότε ένας τελεστής $T : X \to X$ καλείται χαοτικός, αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*
(i) Ο T είναι υπερκυκλικός.
(ii) Το $Per(T)$ είναι πυκνό.

Όπως αποδείχθηκε και στο θεώρημα 1.3.1, η ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθηκες είναι συνέπεια των δύο άλλως συνθηκών του ορισμού του χάους, όταν ο μετρικός χώρος δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Στη περίπτωση όμως των γραμμικών δυναμικών συστημάτων, η υπερκυκλικότητα συνεπάγεται από μόνη της την ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες. Η απόδειξη έγινε από τους Godefroy και Shapiro [25].

Πρόταση 2.3.1. *Αν T ένας υπερκυκλικός τελεστής, τότε ο T έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες (ως προς οποιαδήποτε μετρική που επάγει την τοπολογία του χώρου Fréchet).*

Απόδειξη. Έστω $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ μία μετρική η οποία επάγει την τοπολογία του X. Η d επάγεται από μία αύξουσα και διαχωρίζουσα ακολουθία ημινορμών $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι ο τετριμμένος χώρος $X = \{0\}$. Έστω $x \in X \setminus \{0\}$. Επειδή η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίζουσα, υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $p_{N_1}(x) > 0$. Τότε υπάρχει $N_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $p_{N_1}(x) > \frac{1}{2^{N_2}}$. Η $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, οπότε αν θέσουμε $N = \max\{N_1, N_2\}$, έχουμε ότι $p_N(x) \geq p_{N_1}(x) > \frac{1}{2^{N_2}} \geq \frac{1}{2^N} \Rightarrow p_N(x) > \frac{1}{2^N}$. Από το λήμμα 2.1.1 συνεπάγεται ότι $d(0, x) \geq \frac{1}{2^{2N}} > \frac{1}{2^{2N+1}}$ και άρα $x \in \{z \in X : d(0, z) > \frac{1}{2^{2N+1}}\}$. Θα αποδείξουμε ότι ο T έχει ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες με σταθερά εξαρτησίας $\delta = \frac{1}{2^{2N+1}}$:
Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αναζητούμε $n \in \mathbb{N}_0$ και $y \in X$ τέτοια ώστε $d(x, y) < \varepsilon$ και $d(T^n x, T^n y) > \delta$. Θεωρούμε τα μη κενά ανοικτά σύνολα $U = \{z \in X : d(0, z) < \varepsilon\}$ (το $0 \in U$) και $V = \{z \in X : d(0, z) > \delta\}$. Επειδή ο T είναι υπερκυκλικός σε χώρο Fréchet, θα είναι *topologically transitive* και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει $z \in U$ ώστε $T^n z \in V$. Αν θέσουμε $y = x + z \in X$, τότε $d(x, y) = d(x, x + z) = d(0, z) < \varepsilon$ και $d(T^n x, T^n y) = d(T^n x, T^n x + T^n z) = d(0, T^n z) > \delta$.

Το σύνολο των περιοδικών σημειών μίας γραμμικής απεικόνισης επί ενός διανυσματικού χώρου έχει κάποιες ενδιαφέρουσες και χρήσιμες ιδιότητες, όπως φαίνεται και στις επόμενες δύο προτάσεις.

Πρόταση 2.3.2. *Έστω T μία γραμμική απεικόνιση επί ενός διανυσματικού χώρου X. Τότε το $Per(T)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη. Έστω $x, y \in Per(T)$ και $a, b \in \mathbb{K}$. Υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $T^n x = x$ και $T^m y = y$. Τότε για το φυσικό mn ισχύει ότι:
$T^{mn}(ax + by) = a\underbrace{(T^n \circ \cdots \circ T^n)}_{m}x + b\underbrace{(T^m \circ \cdots \circ T^m)}_{n}y = ax + by \Rightarrow ax + by \in Per(T)$.
Άρα το $Per(T)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω T μία γραμμική απεικόνιση επί ενός μιγαδικού διανυσματικού χώρου X. Τότε ισχύει ότι $Per(T) = \mathrm{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{Q}\}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{Q}\}$. Υπάρχει $\alpha = \frac{k}{n}$, με $k \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $Tx = e^{\alpha\pi i}x$. Τότε για τον φυσικό $2n$ ισχύει ότι:

$\underbrace{(T \circ \cdots \circ T)}_{2n} x = e^{2n\alpha\pi i}x = e^{2k\pi i}x = x \Rightarrow x \in Per(T)$.

Άρα $\{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{Q}\} \subseteq Per(T)$ και επειδή το $Per(T)$ είναι υπόχωρος του X, έχουμε ότι $\text{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{Q}\} \subseteq Per(T)$.

Έστω $x \in Per(T)$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n x = x$. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι n-τάξεως ρίζες της μονάδας. Για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$ ορίζουμε τα πολυώνυμα $p_k(z) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (z - \lambda_j)$.

<u>1ο Βήμα.</u> Το σύνολο $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων με μιγαδικούς συντελεστές και βαθμό που δεν υπερβαίνει το $n-1$:
Έστω $a_1p_1(z) + a_2p_2(z) + \cdots + a_np_n(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, ένας γραμμικός τους συνδυασμός που είναι ίσος με 0. Τότε,
– για $z = \lambda_1$: $a_1p_1(\lambda_1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$
– για $z = \lambda_2$: $a_2p_2(\lambda_2) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$
$\vdots$
– για $z = \lambda_n$: $a_1p_1(\lambda_n) = 0 \Rightarrow a_n = 0$.
Άρα ισχύει ότι $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, δηλαδή τα $p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Έστω p ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές και βαθμό που δεν υπερβαίνει το $n-1$. Θέτουμε $\widetilde{p}(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p(\lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i - \lambda_j)} p_i(z)$ και $q(z) = p(z) - \widetilde{p}(z)$. Παρατηρούμε ότι το q είναι μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$ και ότι $q(\lambda_1) = q(\lambda_2) = \cdots = q(\lambda_n) = 0$, δηλαδή το q έχει τουλάχιστον n ρίζες. Από αυτό συνεπάγεται ότι $q(z) = 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και άρα $p(z) = \widetilde{p}(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{p(\lambda_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i - \lambda_j)} p_i(z)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Οπότε κάθε πολυώνυμο p βαθμού μικρότερου του $n-1$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

<u>2ο Βήμα.</u> Έστω $T : X \to X$ μία απεικόνιση και $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ένα πολυώνυμο με $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ και $a_n \neq 0$. Ορίζουμε την απεικόνιση $p(T) : X \to X$ με $p(T) = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_1T + a_0I$. (Παρατηρούμε ότι αν ο T είναι τελεστής, τότε και το $p(T)$ είναι τελεστής.)
Από το 1ο βήμα, συνεπάγεται ότι για το πολυώνυμο 1 υπάρχουν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kp_k(z)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Αντικαθιστώντας το z με T, έχουμε ότι $I = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kp_k(T)$.

<u>3ο Βήμα.</u> Για το περιοδικό σημείο x, θα ισχύει ότι $x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_kp_k(T)x = \sum\limits_{k=1}^{n} a_ky_k$ με $y_k = p_k(T)x$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$(T-\lambda_k)y_k = (T-\lambda_k)p_k(T)x = (T-\lambda_k)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}(T-\lambda_j)x = \prod_{j=1}^{n}(T-\lambda_j)x = (T^n - I)x = T^nx - x = 0.$$

Δηλαδή $Ty_k = \lambda_k y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Επειδή $\lambda_k^n = 1$, υπάρχουν $a_k \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\lambda_k = e^{a_k \pi i}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Οπότε έχουμε ότι:

$Ty_k = e^{a_k \pi i} y_k$, $a_k \in \mathbb{Q}$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$\Rightarrow y_k \in \{x \in X : Tx = e^{\alpha \pi i} x$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{Q}\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$\Rightarrow x \in \text{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha \pi i} x$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{Q}\}$, επειδή $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k y_k$

$\Rightarrow Per(T) \subseteq \text{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha \pi i} x$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{Q}\}$.

Άρα $Per(T) = \text{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha \pi i} x$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{Q}\}$.

Στο τέλος της ενότητας αυτής, αποδεικνύεται μία πρόταση για το χώρο των ολόμορφων συναρτήσεων και η οποία θα χρειαστεί μαζί με την πρόταση 2.3.3 στο 3ο κεφάλαιο, όπου θα γίνει λόγος για δύο διάσημους τελεστές. Η απόδειξη της πρότασης είναι των Aron και Markose [5].

Πρόταση 2.3.4. *Έστω $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$, ορίζουμε τις συναρτήσεις $e_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $e_\lambda(z) = e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$. Αν το Λ έχει σημείο συσσώρευσης, τότε το σύνολο* $\text{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *είναι πυκνό του $H(\mathbb{C})$.*

Απόδειξη. Το Λ έχει σημείο συσσώρευσης. Δηλαδή υπάρχει ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ και μία ακολουθία στοιχείων του Λ, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ώστε $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ και $\lambda_n \neq \lambda$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι:

$(*)$: Αν $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές τότε $\displaystyle\sup_{z \in K} \left| e^{\lambda z} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(\lambda_n - \lambda)^{k-i+1} z^k}{k!} \right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $i \in \mathbb{N}$. Επειδή K συμπαγές, υπάρχουν θετικοί αριθμοί M_1, M_2 τέτοιοι ώστε $|e^{\lambda z}| \leq M_1$ και $|z| \leq M_2$, για κάθε $z \in K$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\lambda_n - \lambda| < \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2M_1 e^{M_2}}\right)$, για κάθε $n \geq n_0$.

Τότε,

$$\begin{aligned}
\left| e^{\lambda z} \sum_{k=i}^{N} \frac{(\lambda_n - \lambda)^{k-i+1} z^k}{k!} \right| &\leq M_1 |\lambda_n - \lambda| \sum_{k=i}^{N} \frac{|\lambda_n - \lambda|^{k-i} M_2^k}{k!} \\
&< M_1 |\lambda_n - \lambda| \sum_{k=i}^{N} \frac{M_2^k}{k!} \\
&< M_1 |\lambda_n - \lambda| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_2^k}{k!} \\
&= M_1 |\lambda_n - \lambda| e^{M_2} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall N \geq i, \forall z \in K, \forall n \geq n_0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{z \in K} \left| e^{\lambda z} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(\lambda_n - \lambda)^{k-i+1} z^k}{k!} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

- $\displaystyle e^{\lambda_n z} = e^{\lambda z} e^{(\lambda_n - \lambda) z} = e^{\lambda z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n - \lambda)^k z^k}{k!} = e^{\lambda z} + e^{\lambda z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n - \lambda)^k z^k}{k!}, \ \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z} = e^{\lambda z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n - \lambda)^k z^k}{k!}, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow \forall K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές, ισχύει ότι $\sup\limits_{z\in K}|e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}| = \sup\limits_{z\in K}\left|e^{\lambda z}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)^k z^k}{k!}\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (*)$
$\Rightarrow e_{\lambda_n} \longrightarrow e_\lambda$ τοπικά ομοιόμορφα
$\Rightarrow e_{\lambda_n} \longrightarrow g_0$ στο $H(\mathbb{C})$, όπου $g_0 = e_\lambda$
$\Rightarrow g_0 \in \overline{\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}. \quad (**)$

- $e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z} = e^{\lambda z}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)^k z^k}{k!}, \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} = e^{\lambda z}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)^{k-1} z^k}{k!}, \forall z \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} - ze^{\lambda z} = e^{\lambda z}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)^{k-1} z^k}{k!}, \forall z \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \forall K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές, ισχύει ότι $\sup\limits_{z\in K}\left|\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda z}}{\lambda_n - \lambda} - ze^{\lambda z}\right| = \sup\limits_{z\in K}\left|e^{\lambda z}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda_n-\lambda)^{k-1} z^k}{k!}\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ (*)$
$\Rightarrow \frac{e_{\lambda_n} - e_\lambda}{\lambda_n - \lambda} \longrightarrow g_1$ τοπικά ομοιόμορφα, όπου $g_1(z) = ze^{\lambda z}, \forall z \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow \frac{e_{\lambda_n}}{\lambda_n - \lambda} - \frac{g_0}{\lambda_n - \lambda} \longrightarrow g_1$ στο $H(\mathbb{C})$
$\overset{(**)}{\Rightarrow} g_1 \in \overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}.$
$\vdots$
Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$, οι συναρτήσεις $g_k(z) = z^k e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$, ανήκουν στο σύνολο $\overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Έστω $f \in H(\mathbb{C})$. Τότε θα έχουμε ότι $f(z) = e^{\lambda z}\left(e^{-\lambda z}f(z)\right) \overset{\tau.o\mu.}{=} e^{\lambda z}\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k e^{\lambda z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ με $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f \in \overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\}$.
Άρα $H(\mathbb{C}) \subseteq \overline{\text{span}}\{e_{\lambda_n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{\text{span}}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$
$\Rightarrow H(\mathbb{C}) = \overline{\text{span}}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

2.4 Το σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων

Ένα ενδιαφέρον θέμα στα γραμμικά δυναμικά συστήματα είναι η μελέτη της δομής του συνόλου των υπερκυκλικών διανυσμάτων. Από το θεώρημα Birkhoff είναι ήδη γνωστό ότι αποτελεί ένα πυκνό G_δ-σύνολο του χώρου. Η επιπλέον συνθήκη της γραμμικότητας δίνει στο σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων επιπρόσθετες ιδότητες, όπως είναι η παρακάτω.

Πρόταση 2.4.1. *Έστω T ένας υπερκυκλικός τελεστής σ' ένα διαχωρίσιμο χώρο Fréchet X. Τότε ισχύει ότι $X = HC(T) + HC(T)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Τα σύνολα $HC(T), x - HC(T)$ είναι πυκνά G_δ-σύνολα (ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία) στον πλήρη μετρικό χώρο X. Από το θεώρημα Baire θα ισχύει ότι

$HC(T) \cap (x - HC(T)) \neq \emptyset$. Άρα υπάρχουν στοιχεία $u, v \in HC(T)$ τέτοια ώστε $u = x - v \Rightarrow x = u + v \in HC(T) + HC(T)$. Οπότε $X \subseteq HC(T) + HC(T) \Rightarrow X = HC(T) + HC(T)$.

Στο τέλος της ενότητας αποδεικνύεται ότι το σύνολο των υπερκυκλικών διανυσμάτων είναι συνεκτικό σύνολο. Για να αποδειχθεί αυτή η πρόταση όμως, χρειάζονται ορισμένα βοηθητικά αποτελέσματα, εξίσου σημαντικά, που δίνουν επιπλέον πληροφορίες για τα στοιχεία του συνόλου των υπερκυκλικών διανυσμάτων.

Ορισμός 2.4.1. *Έστω X ένας χώρος Fréchet. Ορίζουμε το δυϊκό του χώρο $X^* = L(X, \mathbb{K})$ να είναι το σύνολο των γραμμικών και συνεχών συναρτησοειδών στον X.*
Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Ορίζουμε τον δυϊκό του να είναι η απεικόνιση $T^* : X^* \to X^*$ με τύπο $T^* x^* = x^* \circ T$, $x^* \in X^*$.

Το πρώτο μέρος του παρακάτω λήμματος αποδείχθηκε από την Kitai [30], ενώ το δεύτερο μέρος μπορεί να βρεθεί στους Bonet και Peris [17].

Λήμμα 2.4.1. *(i) Έστω T ένας υπερκυκλικός τελεστής. Τότε ισχύει ότι ο συζυγής του, T^*, δεν έχει ιδιοτιμές. Επίσης, ο T^* δεν έχει ιδιοτιμές, αν και μόνο αν, κάθε τελεστής της μορφής $T - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, έχει πυκνό πεδίο τιμών.*
(ii) Έστω T ένας υπερκυκλικός τελεστής σ' ένα πραγματικό και διαχωρίσιμο χώρο Fréchet. Τότε ο συζυγής της μιγαδοποίησης του, $\widetilde{T}^*$, δεν έχει ιδιοτιμές. Επίσης, ο $\widetilde{T}^*$ δεν έχει ιδιοτιμές, αν και μόνο αν, κάθε τελεστής της μορφής $\widetilde{T} - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, έχει πυκνό πεδίο τιμών.

Απόδειξη. (i) Έστω ένα $x_0 \in HC(T)$. Υποθέτουμε ότι ο T^* έχει ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο:
Επειδή ο T^* έχει ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{K}^*$, θα υπάρχει $x^* \in X^* \setminus \{\mathbf{0}\}$ τέτοιο ώστε $T^* x^* = \lambda x^*$. Τότε θα ισχύει ότι $x^*(T^n x_0) = (x^* \circ T^n)(x_0) = ((T^*)^n x^*)(x_0) = \lambda^n x^*(x_0)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Οπότε $x^*(orb(x_0, T)) = \{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Επειδή το σύνολο $orb(x_0, T)$ είναι πυκνό στο X και το x^* είναι συνεχής απεικόνιση, το σύνολο $x^*(orb(x_0, T)$ θα είναι πυκνό στο $x^*(X)$.
Έστω ένα $x \in X$ τέτοιο ώστε $x^*(x) \neq \emptyset$. Τέτοιο x υπάρχει επειδή $x^* \neq \mathbf{0}$. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{K}$, έχουμε ότι $x^*\left(\dfrac{k}{x^*(x)} x\right) = k$. Δηλαδή το x^* είναι επί απεικόνιση και άρα το $\{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} = x^*(orb(x_0, T))$ είναι πυκνό στο $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.
– Αν $x^*(x_0) = 0$, τότε το σύνολο $\{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{0\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{K}$. Άτοπο.
– Αν $x^*(x_0) \neq 0$ και $|\lambda| > 1$, τότε έχουμε ότι $\lambda^n x^*(x_0) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$. Δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $\{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} \cap S(0, M) = \emptyset$, το $0 \in \mathbb{K}$ και το $\{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{K}$. Άτοπο.
– Αν $x^*(x_0) \neq 0$ και $|\lambda| < 1$, τότε έχουμε ότι $\lambda^n x^*(x_0) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε $\{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} \cap (\mathbb{K} \setminus S(0, M)) = \emptyset$, το $\mathbb{K}$ δεν είναι φραγμένο και το $\{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{K}$. Άτοπο.
– Αν $x^*(x_0) \neq 0$ και $|\lambda| = 1$, τότε έχουμε ότι $\{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \partial S(0, |x^*(x_0)|)$ και το $\{\lambda^n x^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{K}$. Άτοπο.
Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα ο T^* δεν έχει ιδιοτιμές.
Αναφέρουμε ένα πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach για χώρους Fréchet , το οποίο είναι

απαραίτητο για την ολοκλήρωση της απόδειξης:

Έστω X ένας χώρος Fréchet. Τότε ισχύει ότι ένας διανυσματικός υπόχωρος M του X είναι πυκνό υποσύνολο του X, αν και μόνο αν, για κάθε $x^* \in X^*$ με $x^*(x) = 0$, $\forall x \in M$, να συνεπάγεται ότι $x^*(x) = 0$, $\forall x \in X$.

Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$ και $M_\lambda = (T - \lambda I)(X)$. Ο M_λ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X. Πράγματι, έστω $y, y' \in M_\lambda$ και $\mu, \mu' \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \exists x, x' \in X$ τέτοια ώστε $(T - \lambda I)(x) = y$ και $(T - \lambda I)(x') = y'$

$\Rightarrow (T - \lambda I)(\mu x + \mu' x') = \mu(T - \lambda I)(x) + \mu'(T - \lambda I)(x') = \mu y + \mu' y'$ $\quad$ ($T - \lambda I$ τελεστής)

$\Rightarrow \mu y + \mu' y' \in M_\lambda$.

Άρα το M_λ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X. Τώρα αν $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε θα έχουμε την παρακάτω ισοδυναμία:

$T - \lambda I$ έχει πυκνό πεδίο τιμών

$\Leftrightarrow$ το M_λ είναι πυκνό στο X

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x^* \in X^*$ με $x^*(y) = 0$, $\forall y \in M_\lambda$, συνεπάγεται ότι $x^*(x) = 0$, $\forall x \in X$

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x^* \in X^*$ με $(x^* \circ (T - \lambda I))(x) = 0$, $\forall x \in X$, συνεπάγεται ότι $x^*(x) = 0$, $\forall x \in X$

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x^* \in X^*$ με $(T^* - \lambda I^*)(x^*)(x) = 0$, $\forall x \in X$, συνεπάγεται ότι $x^*(x) = 0$, $\forall x \in X$

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x^* \in X^*$ με $(T^* - \lambda I^*)(x^*) = 0$, συνεπάγεται ότι $x^* = 0$

$\Leftrightarrow$ για κάθε $x^* \in X^*$ με $T^* x^* = \lambda x^*$, συνεπάγεται ότι $x^* = 0$

$\Leftrightarrow$ το λ δεν είναι ιδιοτιμή του T^*.

Άρα T υπερκυκλικός $\Rightarrow$ ο T^* δεν έχει ιδιοτιμές $\Leftrightarrow$ κάθε $T - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, έχει πυκνό πεδίο τιμών.

(ii)Έστω $T : X \to X$ ένας υπερκυκλικός τελεστής σ' ένα πραγματικό και διαχωρίσιμο χώρο Fréchet X. Έστω $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ η μιγαδοποίηση του T και έστω ένα $x_0 \in HC(T)$. Τότε έχουμε ότι $\widetilde{T}^* x_0 = Tx_0 + iT0 = Tx_0$. Υποθέτουμε ότι ο $\widetilde{T}^*$ έχει ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο:

Επειδή ο $\widetilde{T}^*$ έχει ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$, θα υπάρχει $\widetilde{x}^* \in \widetilde{X}^* \setminus \{\mathbf{0}\}$ τέτοιο ώστε $\widetilde{T}^* x^* = \lambda x^*$. Τότε, $|\widetilde{x}^*(T^n x_0)| = |\widetilde{x}^*(\widetilde{T}^n x_0)| = |(x^* \circ \widetilde{T}^n)(x_0)| = |((\widetilde{T}^*)^n \widetilde{x}^*)(x_0)| = |\lambda^n \widetilde{x}^*(x_0)| = |\lambda|^n |\widetilde{x}^*(x_0)|$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Οπότε $|\widetilde{x}^*|(orb(x_0, T)| = \{|\lambda|^n |\widetilde{x}^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$. Επειδή το σύνολο $orb(x_0, T)$ είναι πυκνό στο X και η $|x^*|$ είναι συνεχής απεικόνιση, το σύνολο $|x^*|(orb(x_0, T))$ θα είναι πυκνό στο $|x^*|(X)$.

Έστω ένα $x + ix' \in \widetilde{X}$ ώστε $\widetilde{x}^*(x + ix') = \widetilde{x}^*(x) + i\widetilde{x}^*(x') \neq 0$. Τέτοιο $x + ix'$ υπάρχει επειδή $\widetilde{x}^* \neq \mathbf{0}$. Άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $\widetilde{x}^*(x) \neq 0 \Leftrightarrow |\widetilde{x}^*(x)| \neq 0$. Είναι προφανές ότι $|x^*|(X) \subseteq \mathbb{R}_+$. Από την άλλη, αν $r \in \mathbb{R}_+$, τότε υπάρχει $\dfrac{rx}{|\widetilde{x}^*(x)|} \in X$ ώστε $\left|\widetilde{x}^*\left(\dfrac{rx}{|\widetilde{x}^*(x)|}\right)\right| = r$. Δηλαδή $\mathbb{R}_+ \subseteq |\widetilde{x}^*|(X)$ και άρα το $\{|\lambda|^n |\widetilde{x}^*(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} = |x^*|(orb(x_0, T))$ είναι πυκνό στο $|\widetilde{x}^*|(X) = \mathbb{R}_+$.

Διακρίνοντας τις ίδιες περιπτώσεις με το (i) και χρησιμοποιώνας τα ίδια επιχειρήματα, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Άρα ο $\widetilde{T}^*$ δεν έχει ιδιοτιμές. Τέλος εφαρμόζοντας το ίδιο πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach στο χώρο Fréchet $\widetilde{X}$, θα καταλήξουμε στη σχέση:

T υπερκυκλικός $\Rightarrow$ ο $\widetilde{T}^*$ δεν έχει ιδιοτιμές $\Leftrightarrow$ κάθε $\widetilde{T} - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, έχει πυκνό πεδίο τιμών.

Με βάση το παραπάνω λήμμα, αποδεικνύεται ένα σημαντικό αποτέλεσμα για τη θεωρία των γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Η απόδειξη της μιγαδικής περίπτωσης έγινε αρχικά από τον Bourdon [18], ενώ η απόδειξη της πραγματικής περίπτωσης προστέθηκε αργότερα από τον Bès [15]. Η απόδειξη που δίνεται όμως οφείλεται στον Martínez [33].

Θεώρημα 2.4.1 (Bourdon). *Αν T είναι ένας υπερκυκλικός τελεστής και p ένα μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο τελεστής $p(T)$ έχει πυκνό πεδίο τιμών.*

Απόδειξη. 1η περίπτωση. Ο T είναι τελεστής επί ενός μιγαδικού χώρου Fréchet X :

Έστω $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ ένα πολυώνυμο με $a_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, \dots N$, $a_N \neq 0$ και $N \in \mathbb{N}$. Τότε $p(z) = a_N(z-\lambda_1)\dots(z-\lambda_N)$, όπου λ_i, $i = 1, \dots, N$, οι ρίζες του πολυωνύμου. Αντικαθιστώντας το z με T, έχουμε ότι $p(T) = a_N(T-\lambda_1 I)\circ\dots\circ(T-\lambda_N I)$. Ο T είναι υπερκυκλικός. Οπότε από το λήμμα 2.4.1 συνεπάγεται ότι οι τελεστές $T-\lambda_i I$, $i = 0, \dots, N$, έχουν πυκνό πεδίο τιμών. Θα αποδείξουμε ότι ο $p(T)$ έχει πυκνό πεδίο τιμών. Έστω $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Τότε, $(T-\lambda_1 I)^{-1}(\frac{1}{a_N}U) \neq \emptyset$ ανοικτό

$\Rightarrow (T-\lambda_2 I)^{-1}(T-\lambda_1 I)^{-1}(\frac{1}{a_N}U) \neq \emptyset$ ανοικτό

$\vdots$

$\Rightarrow (T-\lambda_N I)^{-1}\dots(T-\lambda_1)^{-1}(\frac{1}{a_N}U) \neq \emptyset$ ανοικτό

$\Rightarrow ((T-\lambda_1 I)\circ\dots\circ(T-\lambda_N I))^{-1}(\frac{1}{a_N}U) \neq \emptyset$

$\Rightarrow (p(T))^{-1}(U) \neq \emptyset$.

Άρα ο $p(T)$ έχει πυκνό πεδίο τιμών.

2η περίπτωση. Ο T είναι τελεστής επί ενός πραγματικού χώρου Fréchet X :

Έστω $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ ένα πολυώνυμο με $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, \dots N$, $a_N \neq 0$ και $N \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη μιγαδοποίηση του T, $\widetilde{T} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$. Ο T είναι υπερκυκλικός. Οπότε από το λήμμα 2.4.1 συνεπάγεται ότι οι τελεστές $(\widetilde{T}-\lambda_i I)$, $i = 1, \dots, N$, έχουν πυκνό πεδίο τιμών. Καταλήγουμε όπως προηγουμένως ότι ο $p(\widetilde{T}) : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ έχει πυκνό πεδίο τιμών. Επειδή οι συντελεστές του πολυωνύμου p είναι πραγματικοί αριθμοί, ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι $p(\widetilde{T})(x+iy) = p(T)x + ip(T)y$, για κάθε $x + iy \in \widetilde{X}$.

Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{2}{2^{2N}} < \varepsilon$. Για το $x + i0 \in \widetilde{X}$ και το $\frac{1}{2^{2N}}$, υπάρχει $x' + iy' \in \widetilde{X}$ τέτοιο ώστε $\tilde{d}(p(\widetilde{T})(x'+iy'), x) < \frac{1}{2^{2N}}$. Από το λήμμα 2.1.1 έχουμε, $\tilde{d}(p(T)x' + ip(T)y', x) < \frac{1}{2^{2N}}$

$$\Rightarrow \tilde{p}_k(p(T)x' - x + ip(T)y') < \frac{1}{2^N}, \forall k \leq N$$

$$\Rightarrow \max_{0\leq t\leq 2\pi} p_k((p(T)x'-x)cost - p(T)y'sint) < \frac{1}{2^N}, \forall k \leq N$$

$$\Rightarrow p_k((p(T)x'-x)cost - p(T)y' \cdot sint) < \frac{1}{2^N}, \forall t \in [0, 2\pi], \forall k \leq N$$

$$\underset{k=N}{\overset{t=0}{\Rightarrow}} p_N(p(T)x'-x) < \frac{1}{2^N}$$

$$\Rightarrow d(p(T)x', x) < \frac{2}{2^N} < \varepsilon.$$

Οπότε για $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x' \in X$ ώστε $d(p(T)x', x) < \varepsilon$. Άρα ο $p(T)$ έχει πυκνό πεδίο τιμών.

Ένα άμεσο πόρισμα του προηγούμενου θεωρήματος είναι το παρακάτω:

Πόρισμα 2.4.1. *Έστω T ένας τελεστής. Αν $x \in HC(T)$, τότε το σύνολο $orb(x,T)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X δεν είναι ο τετριμμένος χώρος.
Έστω ότι το $orb(x,T)$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^{N+1}x = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x$ για κάποια $a_n \in \mathbb{K}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = z^{N+1} - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$. Επειδή το p είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, απο το θεώρημα Bourdon (θεώρημα 2.4.1) έχουμε ότι ο τελεστής $p(T)$ ε'χει πυκνό πεδίο τιμών. Επίσης το $p(T)x = 0$ και άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει $p(T)(T^n x) = T^n(p(T)x) = T^n 0 = 0$. Δηλαδή, $p(T)(orb(x,T)) = \{0\}$. Το $p(T)(orb(x,T))$ είναι συνεχής εικόνα πυκνού συνόλου. Οπότε $\{0\} = \overline{p(T)(orb(x,T))} = p(T)(X)$
$\Rightarrow \{0\} = \overline{p(T)(X)} = X$. Άτοπο.

Μετά το θεώρημα Bourdon αποδεικνύεται μία ιδιότητα των υπερκυκλικών διανυσμάτων. Η απόδειξη έγινε από τους Herrero [29] και Bourdon [18].

Θεώρημα 2.4.2 (Herrero-Bourdon). *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Αν $x \in HC(T)$, τότε το σύνολο $\{p(T)x : p \neq 0 \text{ πολυώνυμο}\}$ είναι πυκνό στο X. Πιο συγκεκριμένα είναι, χωρίς το 0, ένας T-αναλλοίωτος υπόχωρος του X, τα στοιχεία του οποίου είναι υπερκυκλικά διανύσματα.*

Απόδειξη. Έστω $x \in HC(T)$ Θέτουμε $M = \{p(T)x : p \text{ πολυώνυμο}\}$.
<u>1ο Βήμα.</u> Το $M = \mathrm{span}(orb(x,T))$:

Έστω $x_0 \in M$. Τότε υπάρχει $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ ένα πολυώνυμο με $a_n \in \mathbb{K}$, $n = 0, \ldots N$, $a_N \neq 0$ και $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_0 = p(T)x = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n\right) x = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x \in \mathrm{span}(orb(x,T))$.
Έστω $x_0 \in \mathrm{span}(orb(x,T))$. Τότε υπάρχουν $a_n \in \mathbb{K}$, $n = 0, \ldots, N$, $a_N \neq 0$ και $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $x_0 = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n\right) x = p(T)x \in M$, όπου $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$.
<u>2ο Βήμα.</u> Το $M \setminus \{0\}$ είναι πυκνό στο X :
Έχουμε ότι $x \in HC(T) \Rightarrow \overline{orb(x,T)} = X \Rightarrow \overline{\mathrm{span}}(orb(x,T)) = X \Rightarrow \overline{M} = X$. Επειδή ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, συνεπάγεται ότι $\overline{M \setminus \{0\}} = X$.
<u>3ο Βήμα.</u> Το M είναι T-αναλλοίωτος διανυσματικός υπόχωρος του X :

Έστω $a, b \in M$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$. Τότε, $a = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x$ και $b = \sum_{m=0}^{M} b_m T^m x$ με $a_n, b_m \in \mathbb{K}$, $n = 0, \ldots, N$, $m = 0, \ldots, M$, $a_N \neq 0$, $b_M \neq 0$ και $N, M \in \mathbb{N}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $N = M$.

Τότε, $\kappa a + \lambda b = \kappa \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x + \lambda \sum_{m=0}^{M} b_m T^m x = \sum_{m=0}^{M} (\kappa a_m + \lambda b_m) T^m x \in \mathrm{span}(orb(x,T)) = M$.

Άρα το M είναι διανυσματικός υπόχωρος του X.
Έστω $b \in T(M) \Rightarrow \exists a \in M$ τέτοιο ώστε $T(a) = b$

$$\Rightarrow a = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x \text{ και } b = T\left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n x\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n T^{n+1} x$$
$$\Rightarrow b \in M.$$

Άρα $T(M) \subseteq M$. Δηλαδή το M είναι T-αναλοίωτο.
4ο Βήμα. $M \setminus \{0\} \subseteq HC(T)$:

Έστω $a \in M \setminus \{0\}$. Υπάρχει $p(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ ένα πολυώνυμο με $a_n \in \mathbb{K}$, $n = 0, \ldots N$, $a_N \neq 0$ και $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $a = p(T)x = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n\right) x = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n x$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε,

$$T^k a = T^k\left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n x\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n (T^k x) = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n T^n\right)(T^k x) = p(T)(T^k x)$$

$\Rightarrow orb(a, T) = p(T)(orb(x, T))$.

Επειδή το $x \in HC(T)$, το $orb(x, T)$ είναι πυκνό στο X. Επίσης από το θεώρημα Bourdon (θεώρημα 2.4.1) ο $p(T)$ έχει πυκνό πεδίο τιμών. Θα αποδείξουμε ότι το $orb(a, T)$ είναι πυκνό στο X. Έστω $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό $\Rightarrow p(T)^{-1}(U) \neq \emptyset$ ανοικτό

$$\Rightarrow orb(x, T) \cap p(T)^{-1}(U) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow p(T)(orb(x, T)) \cap U \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow orb(a, T) \cap U \neq \emptyset.$$

Άρα το $a \in HC(T) \Rightarrow M \setminus \{0\} \subseteq HC(T)$.

Τέλος, αξιοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, αποδεικνύεται με σχετικά εύκολα επιχειρήματα η συνεκτικότητα του συνόλου των υπερκυκλικών διανυσμάτων.

Πρόταση 2.4.2. *Έστω $T : X \to X$ ένας υπερκυκλικός τελεστής. Τότε το $HC(T)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε μία βασική τοπολογική πρόταση που δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί:
Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$ συνεκτικό. Αν $B \subseteq X$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, τότε το B είναι συνεκτικό.

Αν θέσουμε $M = \{p(T)x : p \text{ πολυώνυμο}\}$, τότε από το θεώρημα Herrero-Bourdon (θεώρημα 2.4.2) συνεπάγεται ότι $M \setminus \{0\} \subseteq HC(T) \subseteq X = \overline{M \setminus \{0\}}$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το $M \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X. Πριν το αποδείξουμε αυτό όμως, θα αποδείξουμε ότι το M ως διανυσματικός υπόχωρος έχει διάσταση που είναι μεγαλύτερη του 1:
Το $M \neq \emptyset$, οπότε $\dim(M) \neq 0$. Έστω ότι $\dim(M) = 1$. Τότε υπάρχει $x_0 \in M \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε $M = \{\lambda^n x_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Επειδή το M είναι T-αναλλοίωτο, το $Tx_0 \in M \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $Tx_0 = \lambda x_0 \Rightarrow orb(x_0, T) = \{\lambda^n x_0 : n \in \mathbb{N}_0\}$. Το x_0 είναι υπερκυκλικό διάνυσμα, άρα το $\{\lambda^n x_0 : n \in \mathbb{N}_0\} = orb(x_0, T)$ είναι πυκνό στο X.
− Αν το $\lambda = 0$, τότε το $\{\lambda^n x_0 : n \in \mathbb{N}_0\} = \{0\}$ είναι πυκνό στο X. Άτοπο.

$-$ Αν το $\lambda \neq 0$ τότε, επειδή το $x_0 \neq 0$ και η ακολουθία ημινορμών του X, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι διαχωρίζουσα, θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $q_N(x_0) \neq 0$. Οπότε αν $k \in \mathbb{R}_+$, τότε $q_N\left(\dfrac{k}{q_N(x_0)}x_0\right) = k$. Δηλαδή η q_N είναι επί. Το σύνολο $\{|\lambda|^n q_N(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} = q_N(orb(x_0, T))$ είναι πυκνό στο $q_N(X) = \mathbb{R}_+$ ως συνεχής εικόνα πυκνού υποσυνόλου του X.

• Αν $|\lambda| > 1$, τότε έχουμε ότι $|\lambda|^n q_N(x_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\{|\lambda|^n q_N(x_0)n :\in \mathbb{N}_0\} \cap [0, M) = \emptyset$, το $0 \in \mathbb{R}_+$ και το $\{|\lambda|^n q_N(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$. Άτοπο.

• Αν $|\lambda| < 1$, τότε έχουμε ότι $|\lambda|^n q_N(x_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Δηλαδή υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\{|\lambda|^n q_N(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} \cap [M, +\infty) = \emptyset$, το $\mathbb{R}_+$ δεν είναι φραγμένο και το $\{|\lambda|^n q_N(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$. Άτοπο.

• Αν $|\lambda| = 1$, τότε το $\{|\lambda^n| q_N(x_0) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{q_N(x_0)\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$. Άτοπο.

Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $\dim(M) \geq 2$.

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ότι το $M \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό:

Έστω ότι το $M \setminus \{0\}$ δεν είναι συνεκτικό. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Υπάρχουν $U, V \subseteq X$ ανοικτά και ξένα μεταξύ τους τέτοια ώστε $(M \setminus \{0\}) \cap U \neq \emptyset$, $(M \setminus \{0\}) \cap V \neq \emptyset$ και $M \setminus \{0\} \subseteq U \cup V$. Θεωρούμε μία βάση του M, $B = \{v_i : i \in I$ και $|I| \geq 2\}$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $v_{i_0} \in U$.

Έστω $v_j \in B$ με $v_j \neq v_{i_0}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\gamma : [0, 1] \to X$ με τύπο $\gamma(t) = (1-t)v_{i_0} + tv_j$, $t \in [0, 1]$ και συμβολίζουμε την εικόνα της $\gamma([0, 1])$ με $[v_{i_0}, v_j]$.

• Ο M είναι διανυσματικός χώρος και τα $v_{i_0}, v_j \in M$. Άρα κάθε γραμμικός τους συνδυασμός ανήκει στο M. Δηλαδή $[v_{i_0}, v_j] \subseteq M$.

• Έστω ότι το $0 \in [v_{i_0}, v_j] \Rightarrow \exists t_0 \in [0, 1]$ ώστε $\gamma(t_0) = 0$

$$\Rightarrow (1 - t_0)v_{i_0} + t_0 v_j = 0.$$

Επειδή τα v_{i_0}, v_j είναι γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπάγεται ότι $t_0 = 1$ και $t_0 = 0$. Άτοπο.

Άρα το $[v_{i_0}, v_j] \subseteq M \setminus \{0\}$

• Έστω $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $[0, 1]$ τέτοια ώστε $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$, $t \in [0, 1]$. Τότε,

$$q_k(\gamma(t_n) - \gamma(t)) = q_k((t - t_n)v_{i_0} + (t_n - t)v_j) = |t - t_n| q_k(v_{i_0} - v_j) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \gamma(t_n) \longrightarrow \gamma(t)$.

Άρα η γ είναι συνεχής. Οπότε το $[v_{i_0}, v_j] = \gamma([0, 1])$ είναι συνεκτικό ως συνεχής εικόνα συνεκτικού, με $[v_{i_0}, v_j] \subseteq M \setminus \{0\} \subseteq U \cup V$ και $v_{i_0} \in U$. Αυτό συνεπάγεται ότι $[v_{i_0}, v_j] \subseteq U$. Οπότε $v_j \in U$ και άρα $B \subseteq U$.

Από υπόθεση υπάρχει $b \in M \setminus \{0\} \cap V \neq \emptyset \Rightarrow b = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_{i_n} v_{i_n}$ με $b_{i_n} \in \mathbb{K}^*$, $n = 1, \ldots, N$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\gamma_1 : [0, 1] \to X$ με τύπο $\gamma_1(t) = (1 - t)v_{i_1} + tb$, $t \in [0, 1]$.

Αν $\gamma_1(t) \neq 0$, $\forall t \in [0, 1]$, τότε το $[v_{i_1}, b]$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $M \setminus \{0\}$ και $v_{i_1} \in U$. Αυτό συνεπάγεται ότι $b \in U$. Άτοπο.

Οπότε υπάρχει $t_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $\gamma_1(t_0) = 0$.

• Αν $t_0 = 0 \Rightarrow \gamma_1(0) = 0 \Rightarrow v_{i_1} = 0$. Άτοπο.

• Αν $t_0 = 1 \Rightarrow \gamma_1(1) = 0 \Rightarrow b = 0$. Άτοπο.

Άρα $t_0 \in (0, 1) \Rightarrow (1 - t_0)v_{i_1} + t_0 b = 0 \Rightarrow b = b_1 v_{i_1}$, όπου $b_1 = \dfrac{1 - t_0}{t_0} \neq 0$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\gamma_2 : [0,1] \to X$ με τύπο $\gamma_2(t) = (1-t)v_{i_2} + tb_1 v_{i_1}$, $t \in [0,1]$.
Όπως προηγουμένως, υπάρχει $t_1 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\gamma_2(t_1) = 0 \Rightarrow (1-t_1)v_{i_2} + t_1 b_1 v_{i_1} = 0$.
Επειδή τα v_{i_1}, v_{i_2} είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε ότι $t_1 = 1$ και $t_1 b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0$. Άτοπο.

3 Κριτήρια Υπερκυκλικότητας

Το θεώρημα του Birkhoff είναι ένα κριτήριο που αν ικανοποιεί ένας τελεστής, τότε είναι υπερκυκλικός. Πολλές φορές όμως δεν είναι εύκολο να αποδειχθει ότι ένας τελεστής είναι *topologically transitive*. Υπήρξε λοιπόν η ανάγκη ανάπτυξης διάφορων κριτηρίων υπερκυκλικότητας, τα οποία όμως στη συνέχεια αποδείχθηκε ότι έχουν καθοριστικό ρόλο στη κατανόηση των γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Ορισμένα από τα βασικότερα παρουσιάζονται σ' αυτό το κεφάλαιο.

3.1 Κριτήρια για χάος και mixing

Το μήνυμα του πρώτου κριτηρίου είναι σχετικά απλό. Αποδεικνύει οτι ένα "μεγάλο" πλήθος κατάλληλων ιδιοδιανυσμάτων, συνεπάγεται το χάος.

Θεώρημα 3.1.1 (**Κριτήριο Godefroy-Shapiro**). *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Θεωρούμε τους υποχώρους του X*

$$X_0 = \operatorname{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| < 1\} \text{ και}$$

$$Y_0 = \operatorname{span}\{x \in X : Tx = \lambda x \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| > 1\}.$$

Αν τα X_0, Y_0 είναι πυκνά στο X, τότε ο T είναι mixing και άρα υπερκυκλικός. Στην περίπτωση που ο X είναι μιγαδικός χώρος και ο υπόχωρος του

$$Z_0 = \operatorname{span}\{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x \text{ για κάποιο } a \in \mathbb{Q}\}$$

είναι και αυτός πυκνό στο X, τότε ο T είναι χαοτικός.

Απόδειξη. Έστω $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Από υπόθεση υπάρχουν $x \in X_0 \cap U \neq \emptyset$ και $y \in Y_0 \cap V \neq \emptyset$. Τότε τα x, y γράφονται $x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k$ και $y = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k$, όπου $Tx_k = \lambda_k x_k$ και $Ty_k = \mu_k y_k$ με $a_k, b_k, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{K}$, $|\lambda_k| < 1$ και $|\mu_k| > 1$, $k = 1, \ldots, m$.
Τότε, $p_l(T^n x) = p_l\left(T^n\left(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right)\right) = p_l\left(\sum_{k=1}^{m} a_k T^n x_k\right) = p_l\left(\sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_k^n x_k\right)$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |a_k||\lambda_k|^n p_l(x_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \forall l \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow T^n x \longrightarrow 0.$ (∗)

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν $u_n = \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{1}{\mu_k^n} y_k$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $u_n \longrightarrow 0$. **(**)**

Επίσης $T^n u_n = T^n \left(\sum_{k=1}^{m} b_k \frac{1}{\mu_k^n} y_k \right) = \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{1}{\mu_k^n} T^n y_k = \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{1}{\mu_k^n} \mu_k^n y_k = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k = y$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. **(***)**
Τα U, V είναι ανοικτά και $x \in U$, $y \in V$. Οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $S(x,r) \subseteq U$ και $S(y,r) \subseteq V$. Επειδή $x + u_n \longrightarrow x$ και $T^n x + y \longrightarrow y$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x + u_n \in S(x,r) \subseteq U$ και $T^n(x + u_n) = T^n x + T_n^u = T^n x + y \in S(y,r) \subseteq V$, $\forall n \geq N$. Δείξαμε ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, $\forall n \geq N$. Επομένως ο T είναι *mixing*. Αυτό συνεπάγεται ότι ο T είναι *topologically transitive* και άρα από το θεώρημα Birkhoff, ο T είναι υπερκυκλικός.

Αν ο X είναι μιγαδικός χώρος, τότε σύμφωνα με την πρόταση 2.3.3 το $Z_0 = Per(T)$. Άρα ο T ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:
– ο T είναι υπερκυκλικός,
– το $Per(T) = Z_0$ είναι πυκνό στο X.
Δηλαδή ο T είναι χαοτικός.

Το παραπάνω κριτήριο, αλλά και τα επόμενα που θα παρουσιαστούν, προέκυψαν από τη μελέτη συγκεκριμένων τελεστών σε χώρους ακολουθίων ή συναρτήσεων. Δύο από τους πιο δημοφιλείς ως αντικείμενο μελέτης δίνονται παρακάτω. Ο πρώτος μάλιστα τελεστής μπορεί να θεωρηθεί χωρίς υπερβολή το έναυσμα για τη μελέτη των γραμμικών δυναμικών συστημάτων.

Πόρισμα 3.1.1 (Τελεστές Birkhoff και MacLane). 1) *Έστω $a \in \mathbb{C}^*$. Θεωρούμε τον τελεστή $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ με τύπο $T_a f(z) = f(z + a)$, $z \in \mathbb{C}$. Ο T_a ικανοποιεί το κριτήριο Godefroy-Shapiro και άρα είναι χαοτικός και mixing τελεστής.*
2) *Θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ με τύπο $Df = f'$. Ο D ικανοποιεί το κριτήριο Godefroy-Shapiro και άρα είναι χαοτικός και mixing τελεστής.*

Απόδειξη. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, ορίζουμε τις ακέραιες συναρτήσεις $e_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $e_\lambda(z) = e^{\lambda z}$, $z \in \mathbb{C}$.
1) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε $T_a e_\lambda(z) = e_\lambda(z + a) = e^{\lambda a} e^{\lambda z} = e^{\lambda a} e_\lambda(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow T_a e_\lambda = e^{\lambda a} e_\lambda$. Δηλαδή, η e_λ είναι ιδιοδιάνυσμα του T_a με αντίστοιχη ιδιοτιμή το $e^{\lambda a}$. Επειδή τα σύνολα $\Lambda_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |e^{\lambda a}| < 1\}$, $\Lambda_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |e^{\lambda a}| > 1\}$ και $\Lambda_3 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \frac{b}{a}\pi i$ για κάποιο $b \in \mathbb{Q}\}$ έχουν σημεία συσσώρευσης στο $\mathbb{C}$, από την πρόταση 2.3.4 έχουμε ότι τα $\mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\}$, $\mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_2\}$ και $\mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_3\}$ είναι πυκνά στο $H(\mathbb{C})$. Τέλος, παρατηρούμε ότι για τους χώρους του κριτηρίου ισχύει ότι $X_0 \supseteq \mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\}$, $Y_0 \supseteq \mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_2\}$ και $Z_0 \supseteq \mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_3\}$. Οπότε ο T_a ικανοποιεί το κριτήριο Godefroy-Shapiro και άρα είναι χαοτικός και *mixing* τελεστής.
2) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε $De_\lambda(z) = e'_\lambda(z) = \lambda e^{\lambda z} = \lambda e_\lambda(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow De_\lambda = \lambda e_\lambda$. Δηλαδή, η e_λ είναι ιδιοδιάνυσμα του D με αντίστοιχη ιδιοτιμή το λ. Επειδή τα σύνολα $\Lambda_1 = D(0,1)$, $\Lambda_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$ και $\Lambda_3 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = e^{b\pi i}$ για κάποιο $b \in \mathbb{Q}\}$ έχουν σημεία συσσώρευσης στο $\mathbb{C}$, από την πρόταση 2.3.4 έχουμε ότι τα $\mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\}$, $\mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_2\}$ και $\mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_3\}$ είναι πυκνά στο $H(\mathbb{C})$. Τέλος, παρατηρούμε ότι για τους χώρους του κριτηρίου ισχύει ότι $X_0 \supseteq \mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_1\}$, $Y_0 \supseteq \mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_2\}$ και $Z_0 \supseteq \mathrm{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda_3\}$. Οπότε ο D ικανοποιεί το κριτήριο Godefroy-Shapiro και άρα είναι χαοτικός και *mixing* τελεστής.

Παρατήρηση: Στην απόδειξη του κριτηρίου, χρειάστηκαν δύο πυκνά υποσύνολα του X, X_0 και Y_0, ώστε για κάθε $x \in X_0$, το $T^n x \longrightarrow 0$ και για κάθε $y \in Y_0$ να υπάρχει ακολουθία στοιχείων του X, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ώστε $u_n \longrightarrow 0$ και $T^n u_n = y$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Μπορεί να αντικατασταθεί η συνθήκη για τα στοιχεία του Y_0 με την εξής:
Υπάρχει απεικόνιση $S : Y_0 \to Y_0$ τέτοια ώστε $S^n y \longrightarrow 0$ και $TSy = y$ για κάθε $y \in Y$. Τότε θέτουμε $u_n = S^n y$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Θεώρημα 3.1.2 (Κριτήριο Kitai). *Έστω $T : X \longrightarrow X$ ένας τελεστής. Αν υπάρχουν X_0 και Y_0 πυκνά υποσύνολα του X και μία απεικόνιση $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ έτσι ώστε, για κάθε $x \in X_0$ και $y \in Y_0$:*
(i) $T^n x \longrightarrow 0$,
(ii) $S^n y \longrightarrow 0$,
(iii) $TSy = y$,
τότε ο T είναι mixing και άρα υπερκυκλικός.

Απόδειξη. Έστω $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Από υπόθεση υπάρχουν $x \in X_0 \cap U \neq \emptyset$ και $y \in Y_0 \cap V \neq \emptyset$. Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται τα $(*)$, $(**)$ και $(***)$ της απόδειξης του θεωρήματος 3.1.1. Οπότε η απόδειξη συνεχίζει ακριβώς όπως στο θεώρημα 3.1.1.

Πόρισμα 3.1.2 (Τελεστής MacLane). *Θεωρούμε τον τελεστή $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ με τύπο $Df = f'$. Ο D ικανοποιεί το κριτήριο Kitai και άρα είναι mixing τελεστής.*

Απόδειξη. Θέτουμε $X_0 = Y_0 = \{p \in H(\mathbb{C}) : p \text{ πολυώνυμο}\}$, το οποίο είναι πυκνό στο $H(\mathbb{C})$. Θεωρούμε επίσης την απεικόνιση $S : Y_0 \to Y_0$ με τύπο $Sp(z) = \displaystyle\int_0^z p(\zeta)d\zeta$, $z \in \mathbb{C}$, η οποία είναι καλά ορισμένη. Έστω $p \in X_0$ και $q \in Y_0$.
(i) Αν ο βαθμός του p είναι N, τότε για κάθε $n \geq N+1$ ισύει ότι $D^n p = 0 \Rightarrow D^n p \xrightarrow{\tau.o\mu.} 0$.
(ii) $DSq(z) = D\left(\displaystyle\int_0^z q(\zeta)d\zeta\right) = q(z), \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow DSq = q$.
(iii) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $S^n q \xrightarrow{\tau.o\mu.} 0$. Επειδή η S είναι γραμμική απεικόνιση, αρκεί να δείξουμε ότι $S^n g_k \xrightarrow{\tau.o\mu.} 0$, όπου $g_k(z) = z^k$, $z \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Πράγματι, έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε $S^n g_k(z) = S^n(z^k) = \dfrac{k!}{(k+n)!} z^{k+n} \xrightarrow{\tau.o\mu.} 0$.
Οπότε ο D ικανοποιεί το κριτήριο Kitai και άρα είναι *mixing* τελεστής.

3.2 Κριτήριο Gethner-Shapiro και Κριτήριο Υπερκυκλικότητας

Θεώρημα 3.2.1 (Κριτήριο Gethner-Shapiro). *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Αν υπάρχουν X_0 και Y_0 πυκνά υποσύνολα του X, μία αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και μία απεικόνιση $S : Y_0 \to Y_0$ έτσι ώστε, για κάθε $x \in X_0$ και $y \in Y_0$:*
(i) $T^{n_k} x \longrightarrow 0$,
(ii) $S^{n_k} y \longrightarrow 0$,
(iii) $TSy = y$,
τότε ο T είναι ασθενώς mixing και άρα υπερκυκλικός.

Απόδειξη. Έστω $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Από υπόθεση υπάρχουν $x_1 \in U_1 \cap X_0$, $x_2 \in U_2 \cap X_0$, $y_1 \in V_1 \cap Y_0$, $y_2 \in V_2 \cap Y_0$. Τότε,
– $T^{n_k} x_j \longrightarrow 0 \Rightarrow T^{n_k} x_j + y_j \longrightarrow y_j$, $j = 1, 2$,
– $S^{n_k} y_j \longrightarrow 0 \Rightarrow x_j + S^{n_k} y_j \longrightarrow x_j$, $j = 1, 2$.
Επειδή τα U_1, U_2, V_1, V_2 είναι ανοικτά και $x_j \in U_j$, $y_j \in V_j$, $j = 1, 2$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^{n_k} x_j + y_j \in V_j$ και $x_j + S^{n_k} y_j \in U_j$, $j = 1, 2$, $\forall k \geq N$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_j + S^{n_k} y_j \in U_j \\ T^{n_k}(x_j + S^{n_k} y_j) = T^{n_k} x_j + T^{n_k} S^{n_k} y_j = T^{n_k} x_j + y_j \in V_j \end{cases}, \ j = 1, 2, \ \forall k \geq N$$

$\Rightarrow T^{n_k}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ και $T^{n_k}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, $\forall k \geq N$
$\Rightarrow n_k \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$, $\forall k \geq N$
$\Rightarrow N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.
Επομένως ο T είναι ασθενώς *mixing*. Αυτό συνεπάγεται ότι ο T είναι *topologically transitive* και άρα από το θεώρημα Birkhoff, ο T είναι υπερκυκλικός.

Οι συνθήκες που απαιτεί το παραπάνω κριτήριο από έναν τελεστή για να είναι υπερκυκλικός είναι προφανώς ασθενέστερες από αυτές του κριτηρίου της Kitai. Αντικαθιστά τη πλήρη ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ με μία αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Κάνοντας το αυτό όμως, ο τελεστής χάνει τη *mixing* ιδιότητα.

Στο επόμενο κριτήριο επιδιώκεται η αντικατάσταση της συνθήκης ύπαρξης δεξιού αντίστροφου S του κριτηρίου Gethner-Shapiro με κάτι ασθενέστερο. Η απόδειξη του έγινε από τους Bès και Peris [16].

Θεώρημα 3.2.2 (Κριτήριο Υπερκυκλικότητας). *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Αν υπάρχουν X_0 και Y_0 πυκνά υποσύνολα του X, μία αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και μία ακολουθία απεικονίσεων $S_{n_k} : Y_0 \to X$, $k \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε, για κάθε $x \in X_0$ και $y \in Y_0$:*
(i) $T^{n_k} x \longrightarrow 0$,
(ii) $S_{n_k} y \longrightarrow 0$,
(iii) $T^{n_k} S_{n_k} y \longrightarrow y$,
τότε ο T είναι ασθενώς mixing και άρα υπερκυκλικός.

Απόδειξη. Έστω $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Από υπόθεση υπάρχουν $x_1 \in U_1 \cap X_0$, $x_2 \in U_2 \cap X_0$, $y_1 \in V_1 \cap Y_0$, $y_2 \in V_2 \cap Y_0$. Τότε,
– $T^{n_k} x_j \longrightarrow 0$, $j = 1, 2$,
– $S_{n_k} y_j \longrightarrow 0 \Rightarrow x_j + S_{n_k} y_j \longrightarrow x_j$, $j = 1, 2$
– $T^{n_k} S_{n_k} y_j \longrightarrow y_j \Rightarrow T^{n_k} x_j + T^{n_k} S_{n_k} y_j \longrightarrow y_j$, $j = 1, 2$.
Επειδή τα U_1, U_2, V_1, V_2 είναι ανοικτά και $x_j \in U_j$, $y_j \in V_j$, $j = 1, 2$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_j + S_{n_k} y_j \in U_j$ και $T^{n_k} x_j + T^{n_k} S_{n_k} y_j \in V_j$, $j = 1, 2$, $\forall k \geq N$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_j + S_{n_k} y_j \in U_j \\ T^{n_k}(x_j + S_{n_k} y_j) = T^{n_k} x_j + T^{n_k} S_{n_k} y_j \in V_j \end{cases}, \ j = 1, 2, \ \forall k \geq N$$

$\Rightarrow n_k \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$, $\forall k \geq N$
$\Rightarrow N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.
Επομένως ο T είναι ασθενώς *mixing*. Αυτό συνεπάγεται ότι ο T είναι *topologically transitive* και άρα από το θεώρημα Birkhoff, ο T είναι υπερκυκλικός.

Παρατήρηση: Αν ο T ικανοποιεί το κριτήριο Gethner-Shapiro ή το κριτήριο Υπερκυκλικότητας για την ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε όπως φαίνεται στις αποδείξεις τους ο T είναι *mixing*. Για την ακρίβεια το κριτήριο Gethner-Shapiro γίνεται το κριτήριο Kitai για την ακολουθία $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ένα εντυπωσιακό και μάλλον απροσδόκητο αποτέλεσμα είναι το γεγονός ότι το κριτήριο Υπερκυκλικότητας αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένας τελεστής ασθενώς *mixing*. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος έγινε από τους Bès και Peris [16] και επιτυγχάνεται με τη μεσολάβηση της έννοιας του *hereditarily* υπερκυκλικού τελεστή.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία αύξουσα ακολουθία φυσικών. Ένας τελεστής T λέγεται hereditarily υπερκυκλικός ως προς την ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, αν για κάθε υπακολουθία $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, υπάρχει ένα $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{T^{m_k}x : k \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στο X.*

Παρατήρηση: Για συντομία θα λέμε ότι ο T είναι *hereditarily* υπερκυκλικός αν είναι *hereditarily* υπερκυκλικός ως προς μία αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Θεώρημα 3.2.3 (Bès-Peris). *Έστω T ένας τελεστής. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) Ο T ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας.
(ii) Ο T είναι ασθενώς mixing.
(iii) Ο T είναι hereditarily υπερκυκλικός.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$. Το αποδείξαμε στο θεώρημα 3.2.2.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας του $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επίσης, θεωρούμε $(U_j, V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ να είναι μία αρίθμηση των ζευγαριών $(O_n, O_m)_{n,m\in\mathbb{N}}$. Θα κατασκευάσουμε αναδρομικά μία αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να ισχύει $T^{n_k}(U_j) \cap V_j \neq \emptyset$, για κάθε $j = 1, \dots, k$:
– Για $k = 1$. Ο T είναι ασθενώς *mixing*, άρα και *topologically transitive*. Οπότε για τα μη κενά ανοικτά σύνολα U_1, V_1, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^{n_1}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$.
– Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει τα $n_1, \dots, n_{k-1}$.
– Τα σύνολα $T^{-n_{k-1}}(V_1), \dots, T^{-n_{k-1}}(V_k)$ είναι μη κενά ανοικτά, επειδή ο T είναι *topologically transitive* και άρα έχει πυκνό πεδίο τιμών σύμφωνα με την πρόταση 1.4.4. Ο T είναι ασθενώς *mixing*. Οπότε από το θεώρημα Furstenberg (θεώρημα 1.4.1), για τα μη κενά ανοικτά σύνολα $U_1, T^{-n_{k-1}}(V_1), \dots, U_k, T^{-n_{k-1}}(V_k)$ ισχύει ότι:

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{j=1}^{k} N(U_j, T^{-n_{k-1}}(V_j)) \neq \emptyset \Rightarrow \exists \tilde{n}_k \in \bigcap_{j=1}^{k} N(U_j, T^{-n_{k-1}}(V_j)) \\
&\Rightarrow T^{\tilde{n}_k}(U_j) \cap T^{-n_{k-1}}(V_j) \neq \emptyset,\ \forall j = 1, \dots, k \\
&\Rightarrow T^{n_k}(U_j) \cap V_j \neq \emptyset,\ \forall j = 1, \dots, k, \text{ όπου } n_k = \tilde{n}_k + n_{k-1} \geq n_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Θα αποδείξουμε ότι ο T είναι *hereditarily* υπερκυκλικός ως προς την ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

Έστω $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία υπακολουθία της $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Θεωρούμε την ακολουθία τελεστών $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ με $T_k = T^{m_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Υπάρχουν $n, m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $O_n \subseteq U$ και $O_m \subseteq V$ και άρα υπάρχει $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $U_j = O_n \subseteq U$ και $V_j = O_m \subseteq V$. Το $m_j = n_k$ για κάποιο $k \geq j$. Τότε, $T^{n_k}(U_j) \cap V_j \neq \emptyset$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow T^{m_j}(U) \cap V \supseteq T^{m_j}(U_j) \cap V_j \neq \emptyset \\
&\Rightarrow T_j(U) \cap V \neq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Άρα η $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive* με την έννοια του ορισμού 1.6.2. Οπότε από το κριτήριο Καθολικότητας (θεώρημα 1.6.1), υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο $orb(x,(T_k)) = \{T_k x : k \in \mathbb{N}\} = \{T^{m_k}x : k \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στο X.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Ο T είναι *hereditarily* υπερκυκλικός ως προς μία ακολουθία $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{T^{m_k}x : k \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στο X. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το $S_k = S(0, \frac{1}{k}) \setminus \{T^{m_1}x, \ldots, T^{m_k}x\}$ είναι μη κενό ανοικτό, άρα $\{T^{m_l}x : l \in \mathbb{N}\} \cap S_k \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $q_k \in \{m_l : l \geq k+1\}$ τέτοιο ώστε $T^{q_k}x \in S_k \subseteq S(0, \frac{1}{k})$.
Κατασκευάσαμε μία υπακολουθία της $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $T^{q_k}x \longrightarrow 0$. Επειδή ο T είναι *hereditarily* υπερκυκλικός ως προς την$(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, υπάρχει $y \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{T^{q_k}y : k \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στο X. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το $U_k = k \cdot S\left(x, \frac{1}{k}\right) \setminus \{T^{q_1}y, \ldots, T^{q_k}y\}$ είναι μη κενό ανοικτό, άρα $\{T^{q_l}y : l \in \mathbb{N}\} \cap U_k \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $n_k \in \{q_l : l \geq k+1\}$ τέτοιο ώστε $T^{n_k}y \in U_k \subseteq k \cdot S(x, \frac{1}{k})$.
Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $x_k = \dfrac{1}{k}y$. Τότε ισχύει ότι,
– $x_k \longrightarrow 0 \quad (*)$
– $T^{n_k}x_k = T^{n_k}\left(\dfrac{1}{k}y\right) = \dfrac{1}{k}T^{n_k}y \longrightarrow x \quad (**)$
– $T^{n_k}x \longrightarrow 0 \quad$ (η $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$) $\quad (***)$
Η $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, άρα και της $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι αύξουσα εξ υποθέσεως. Θέτουμε $X_0 = Y_0 = orb(x,T)$ που είναι πυκνό υποσύνολο του X επειδή $orb(x,T) \supseteq \{T^{m_k}x : k \in \mathbb{N}\}$. Τέλος, ορίζουμε την ακολουθία των απεικονίσεων $S_{n_k} : Y_0 \to X$, $k \in \mathbb{N}$, με τύπο $S_{n_k}(T^n x) = T^n x_k$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
Έστω $x_0 \in X_0$ και $y_0 \in Y_0$. Υπάρχουν $m,n \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $x_0 = T^n x$ και $T^m x = y_0$. Τότε:
– $T^{n_k}(T^n x) = T^n(T^{n_k}x) \longrightarrow T^n 0 = 0 \quad (***)$
– $S_{n_k}(T^m x) = T^m x_k \longrightarrow T^m 0 = 0 \quad (*)$
– $T^{n_k}S_{n_k}(T^m x) = T^{n_k}(T^m x_k) = T^m(T^{n_k}x_k) \longrightarrow T^m x = y. \quad (**)$
Άρα ο T ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας.

Μία πιο προσεκτική εξέταση της απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος, φανερώνει μία ισχυρότερη σύνδεση ανάμεσα στο κριτήριο Υπερκυκλικότητας και στην έννοια της *hereditarily* υπερκυκλικότητας.

Πρόταση 3.2.1. *Ένας τελεστής T είναι hereditarily υπερκυκλικός ως προς μία αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, αν και μόνο αν, κάθε υπακολουθία $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, έχει υπακολουθία $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε ο T να ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας ως προς την $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Είναι η απόδειξη $(iii) \Rightarrow (i)$ του θεωρήματος Bès-Peris (θεώρημα 3.2.3), όπου εδώ θέτουμε την τελική ακολουθία $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ αντί για $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Αντίστροφο. Έστω $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία υπακολουθία της $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ για την οποία ο T ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας. Δηλαδή, υπάρχουν X_0, Y_0 πυκνά υποσύνολα του X και μία ακολουθία απεικονίσεων $S_{q_k} : Y_0 \to X$, $k \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε, για κάθε $x \in X_0$ και για κάθε $y \in Y_0$,
– $T^{q_k}x \longrightarrow 0$,

– $S_{q_k}y \longrightarrow 0$,
– $T^{q_k}S_{q_k}y \longrightarrow y$.
Έστω $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Τότε υπάρχουν $x \in X_0 \cap U \neq \emptyset$ και $y \in Y_0 \neq \emptyset$. Επειδή ισχύει ότι $x + S_{q_k}y \longrightarrow x$ και $T^{q_k}x + T^{q_k}S_{q_k}y \longrightarrow y$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall k \geq k_0$
$x + S_{q_k}y \in U$ και $T^{q_k}(x + S_{q_k}y) = T^{q_k}x + T^{q_k}S_{q_k}y \in V$
$\Rightarrow T^{q_k}(U) \cap V \neq \emptyset, \forall k \geq k_0$.
Άρα η $(T^{q_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive* με την έννοια του ορισμού 1.6.2. Οπότε από το κριτήριο Καθολικότητας (θεώρημα 1.6.1), υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε το σύνολο $orb(x, (T^{q_k})) = \{T^{q_k}x : k \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στο X. Επειδή η $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, συνεπάγεται ότι το σύνολο $\{T^{m_k}x : k \in \mathbb{N}\} \supseteq \{T^{q_k}x : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο X.

Στη συνέχεια δίνεται ένα κριτήριο το οποίο φαινομενικά είναι ασθενέστερο του κριτηρίου Υπερκυκλικότητας αλλά αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμα.

Πρόταση 3.2.2. *Έστω T ένας τελεστής. Ο T ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας αν και μόνο αν ικανοποιεί το παρακάτω κριτήριο:*
(1) *Υπάρχει πυκνός υπόχωρος X_0 του X, μία αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και μία ακολουθία γραμμικών συναρτήσεων $S_{n_k} : X_0 \to X$, $k \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε, $\forall x \in X_0$ να ισχύει,*
– $T^{n_k}x \longrightarrow 0$,
– $S_{n_k}x \longrightarrow 0$,
– $T^{n_k}S_{n_k}x \longrightarrow x$.

Απόδειξη. *Αντίστροφο.* Αν ο T ικανοποιεί το κριτήριο **(1)** τότε, θέτωντας $Y_0 = X_0$, παρατηρούμε ότι ο T θα ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας.
Ευθύ. Έστω ότι ο T ικανοποεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας. Θα αποδείξουμε ότι ικανοποιεί το κριτήριο **(1)** :
Παραπέμπουμε στην απόδειξη $(iii) \Rightarrow (i)$ του θεωρήματος Bès-Peris (θεώρημα 3.2.3), όπου αποδείξαμε ότι υπάρχει $x \in HC(T)$, μία αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και μία ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X έτσι ώστε ο T να ικανοποεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας για $X_0 = Y_0 = orb(x, T)$ και ακολουθία απεικονίσεων $S_{n_k} : orb(x, T) \to X$, $k \in \mathbb{N}$, με τύπο $S_{n_k}(T^n x) = T^n x_k$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Παρατηρούμε ότι οι S_{n_k} είναι γραμμικές απεικονίσεις.
Θέτουμε $X_0 = \mathrm{span}(orb(x, T))$. Ο X_0 είναι πυκνός υπόχωρος του X. Για την αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, επεκτείνουμε γραμμικά τις απεικονίσεις S_{n_k} στο X_0, το οποίο είναι δυνατό επειδή το $x \in HC(T)$ και άρα από πόρισμα 2.4.1, το $orb(x, T)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, ορίζουμε $\widetilde{S}_{n_k} : X_0 \to X$ με τύπο $\widetilde{S}_{n_k}y = \widetilde{S}_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i T^i x\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i S_{n_k}(T^i x) = \sum_{i=1}^{m} a_i T^i x_k$,
όπου $y = \sum_{i=1}^{m} a_i T^i x$ για κάποια $a_i \in \mathbb{K}$. Οι $\widetilde{S}_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, είναι γραμμικές απεικονίσεις.

Έστω ένα $y \in X_0$. Το $y = \sum_{i=1}^{m} a_i T^i x$ για κάποια $a_i \in \mathbb{K}$. Τότε έχουμε ότι,

$$- T^{n_k}y = T^{n_k}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i T^i x\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i T^{n_k}(T^i x) \longrightarrow 0 \quad (*),$$

$$- \widetilde{S}_{n_k}y = \sum_{i=0}^{m} a_i T^i x_k \longrightarrow 0 \quad (**),$$

$$- T^{n_k}\widetilde{S}_{n_k}y = T^{n_k}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i T^i x_k\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i T^i(T^{n_k}x_k) \longrightarrow \sum_{i=0}^{m} a_i T^i x = y \quad (***).$$

$(*)$: Η ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε $T^{n_k}z \longrightarrow 0$, για κάθε $z \in orb(x,T)$.
$(**)$: Η ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει κατασκευστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε $x_k \longrightarrow 0$.
$(***)$: Οι ακολουθίες $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχουν κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο, ώστε $T^{n_k}x_k \longrightarrow x$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι το κριτήριο Υπερκυκλικότητας είναι ισοδύναμο με το κριτήριο Gethner-Shapiro. Για να αποδειχθεί όμως, απαραίτητο είναι το παρακάτω θεώρημα, το οποίο μπορεί να βρεθεί στον Arens [4]:

Θεώρημα 3.2.4 (Mittag-Lefler). *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία από πλήρεις μετρικούς χώρους και $f_n : X_{n+1} \to X_n$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία συνεχών απεικονίσεων με πυκνό πεδίο τιμών. Αν $U \subseteq X_1$ μη κενό ανοικτό, τότε υπάρχει ακολουθία στοιχείων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $x_n \in X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε το $x_1 \in U$ και $f_n(x_{n+1}) = x_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω d_n η μετρική του X_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $U \subseteq X_1$ μη κενό ανοικτό. Υπάρχει $x \in U$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $\{y \in X : d_1(x,y) < \varepsilon\} = S_1(x,\varepsilon) \subseteq U$. Θέτουμε $x_{1,1} = x$. Η απεικόνιση $f_1 : X_2 \to X_1$ έχει πυκνό πεδίο τιμών. Άρα για το $x_{1,1} \in X_1$ και $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, υπάρχει $x_{1,2} \in f(X_2) \cap S_1(x_{1,1}, \frac{\varepsilon}{2})$. Άρα υπάρχει ένα $x_{2,2} \in X_2$ τέτοιο ώστε $f_1(x_{2,2}) = x_{1,2}$ και $d_1(x_{1,1}, x_{1,2}) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Η απεικόνιση $f_1 : X_2 \to X_1$ είναι συνεχής. Οπότε το σύνολο $f_1^{-1}(S_1(x_{1,2}, \frac{\varepsilon}{2^2}))$ είναι μη κενό (το $x_{2,2}$ ανήκει σ᾽ αυτό) ανοικτό. Υπάρχει $0 < r < \dfrac{\varepsilon}{2^2}$ τέτοιο ώστε $S_2(x_{2,2}, r) \subseteq f^{-1}(S_1(x_{1,2}, \frac{\varepsilon}{2^2}))$. Επειδή η απεικόνιση $f_2 : X_3 \to X_2$ έχει πυκνό πεδίο τιμών, υπάρχει $x_{2,3} \in f_2(X_3) \cap S_2(x_{2,2}, r)$. Άρα υπάρχει ένα $x_{3,3} \in X_3$ τέτοιο ώστε $f_2(x_{3,3}) = x_{2,3}$ και $d_2(x_{2,2}, x_{2,3}) < \dfrac{\varepsilon}{2^2}$. Επίσης, αν θέσουμε $x_{1,3} = f_1(x_{2,3})$, τότε έχουμε ότι $d_1(x_{1,2}, x_{1,3}) < \dfrac{\varepsilon}{2^2}$.

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει τα $x_{j,k} \in X_j$, $1 \le j \le k$ και $1 \le k \le n$, έτσι ώστε:

$f_j(x_{j+1,k}) = x_{j,k}$ και $d_j(x_{j,k-1}, x_{j,k}) < \dfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}$, $1 \le j \le k-1$ και $2 \le k \le n$.

Οι απεικονίσεις f_j, $1 \le j \le n-1$, είναι συνεχείς. Οπότε υπάρχει $0 < r < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in S_n(x_{n,n}, r)$ να ισχύει $d_j(x_{j,n}, f_j \circ \cdots \circ f_{n-1}(y)) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$, $1 \le j \le n-1$.

Επειδή η $f_n : X_{n+1} \to X_n$ έχει πυκνό πεδίο τιμών, υπάρχει $x_{n,n+1} \in f_n(X_{n+1}) \cap S_n(x_{n,n}, r)$. Άρα υπάρχει ένα $x_{n+1,n+1} \in X_{n+1,n+1}$ τέτοιο ώστε $d_n(x_{n,n}, x_{n+1,n+1}) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Αν επίσης ορίσουμε αναδρομικά $x_{j,n+1} = f_j(x_{j+1,n+1})$, $1 \leq j \leq n$, τότε έχουμε ότι $d_j(x_{j,n}, x_{j,n+1}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, $1 \leq j \leq n$.

Κατασκευάσαμε επαγωγικά την αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{A} = \{x_{j,k} \in X_j : k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k\}$, τα στοιχεία της οποίας ικανοποιούν τις σχέσεις:

$f_j(x_{j+1,k+1}) = x_{j,k+1}$ και $d_j(x_{j,k}, x_{j,k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, για κάθε $1 \leq j \leq k$ και $k \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(x_{j,k})_{k \geq j}$ του X_j είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, για $n > m \geq j$ έχουμε ότι $d(x_{j,n}, x_{j,m}) \leq \sum\limits_{i=m}^{n-1} d(x_{j,i}, x_{j,i+1}) < \sum\limits_{i=m}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2^i} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Επειδή ο X_j είναι πλήρης, υπάρχει το $x_j = \lim\limits_{k\to\infty} x_{j,k}$ και $x_j \in X_j$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει ότι:

$-\ d(x, x_1) = d(x, \lim\limits_{k\to\infty} x_{1,k}) = \lim\limits_{k\to\infty} d(x_{1,1}, x_{1,k}) \leq \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{l=1}^{k-1} d(x_{1,l}, x_{1,l+1}) < \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{l=1}^{k-1} \frac{\varepsilon}{2^l} = \varepsilon$

$\Rightarrow x_1 \in S_1(x, \varepsilon) \subseteq U$,

$-\ f_j(x_{j+1}) = f_j(\lim\limits_{k\to\infty} x_{j+1,k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f_j(x_{j+1,k}) = \lim\limits_{k\to\infty} x_{j,k} = x_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Το επόμενο θεώρημα αποδείχθηκε από τον Peris [36].

Θεώρημα 3.2.5. *Έστω T ένας τελεστής. Ο T ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας αν και μόνο αν ο T ικανοποιεί το κριτήριο Gethner-Shapiro.*

Απόδειξη. *Αντίστροφο.* Παρατηρούμε ότι αν ο T ικανοποιεί το κριτήριο Gethner-Shapiro για κάποια αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, τότε ο T ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας με την ίδια ακολουθία, όπου $S_{n_k} = S^{n_k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Ευθύ. Έστω ότι ο T ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας. Θα αποδείξουμε ότι ο T ικανοποιεί το κριτήριο Gethner-Shapiro:

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{X} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : Tx_{n+1} = x_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Ο X είναι διαχωρίσιμος χώρος Fréchet και άρα από την πρόταση 2.1.5, ο $X^{\mathbb{N}}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Fréchet.

1ο Βήμα. Ο $\mathcal{X}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Fréchet:

$-$ Έστω $\mathtt{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathtt{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Επειδή ο X είναι διανυσματικός χώρος, ισχύει ότι $\lambda x_n + \mu y_n \in X$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε $\lambda\mathtt{x} + \mu\mathtt{y} = (\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Επίσης, $T(\lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}) = \lambda T x_{n+1} + \mu T y_{n+1} = \lambda x_n + \mu y_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα ο $\mathcal{X}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $X^{\mathbb{N}}$.

$-$ Έστω $\mathtt{x} \in \overline{\mathcal{X}}$. Υπάρχει ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{X}$, $(\mathtt{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $\mathtt{x}_n \longrightarrow \mathtt{x}$ στο $X^{\mathbb{N}}$. Αν $\mathtt{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και $\mathtt{x_n} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $x_k^{(n)} \longrightarrow x_k$ στο X, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε επίσης ότι $Tx_{k+1} = T\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{k+1}^{(n)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} T x_{k+1}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\mathtt{x} \in \mathcal{X} \Rightarrow \overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{X}$ κλειστό του $X^{\mathbb{N}}$.

Άρα ο $\mathcal{X}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Fréchet ως κλειστός υπόχωρος του $X^{\mathbb{N}}$.

2ο Βήμα. Ορίζουμε, μέσω του τελεστή T, την απεικόνιση $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ η οποία έχει τύπο $\mathcal{T}(x_1, x_2, x_3, \dots) = (Tx_1, Tx_2, Tx_3, \dots) = (Tx_1, x_1, x_2, \dots)$, $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$. Η $\mathcal{T}$ είναι ένας αντιστρέψιμος τελεστής:

$-$ Έστω $\mathtt{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathtt{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε,

$\mathcal{T}(\lambda\mathtt{x} + \mu\mathtt{y}) = \mathcal{T}(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \dots)$

$$
\begin{aligned}
&= (T(\lambda x_1 + \mu y_1), \lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, ...) \\
&= (\lambda T x_1 + \mu T y_1, \lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, ...) \\
&= \lambda (T x_1, x_1, x_2, ...) + \mu (T y_1, y_1, y_2, ...) \\
&= \lambda \mathcal{T} \mathtt{x} + \mu \mathcal{T} \mathtt{y}.
\end{aligned}
$$

Άρα η $\mathcal{T}$ είναι γραμμική απεικόνιση.

– Έστω $(\mathtt{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{X}$, με $\mathtt{x}_n = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, και $\mathtt{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ έτσι ώστε $\mathtt{x}_n \longrightarrow \mathtt{x}$ στο $\mathcal{X} \Rightarrow x_k^{(n)} \longrightarrow x_k$ στο X, $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow T x_1^{(n)} \longrightarrow T x_1$ στο X και $x_k^{(n)} \longrightarrow x_k$ στο X, $\forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathcal{T}\mathtt{x_n} \longrightarrow \mathcal{T}\mathtt{x}$.

Οπότε η $\mathcal{T}$ είναι συνεχής και γραμμική απεικόνιση στο χώρο Fréchet $\mathcal{X}$. Άρα $\mathcal{T}$ τελεστής.

– Θεωρούμε την απεικόνιση $\mathcal{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ με $\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$. Τότε,

- $(\mathcal{T} \circ \mathcal{B})(x_1, x_2, x_3, ...) = \mathcal{T}(x_2, x_3, x_4, ...) = (T x_2, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_2, x_3, ...)$, $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$,
- $(\mathcal{B} \circ \mathcal{T})(x_1, x_2, x_3, ...) = \mathcal{B}(T x_1, x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, x_3, ...)$, $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$.

Άρα ο $\mathcal{T}$ είναι αντιστρέψιμος τελεστής με $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{B}$ και αποδεικνύεται ομοίως όπως με τον $\mathcal{T}$, ότι η απεικόνιση $\mathcal{B}$ είναι τελεστής.

3ο Βήμα. Επειδή ο T ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας, από το θεώρημα Bès-Peris (θεώρημα 3.2.3), συνεπάγεται ότι ο T είναι *hereditarily* υπερκυκλικός ως προς μία αύξουσα ακολουθία φυσικών $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(\mathcal{T}^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive* :

Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ μη κενά ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{T}^{m_k}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$. Αρκεί να το δείξουμε για τα ανοικτά της βάσης της τοπολογίας του $\mathcal{X}$ που ξέρουμε τη μορφή τους επειδή $\mathcal{X} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ και το $X^{\mathbb{N}}$ έχει την τοπολογία γινόμενο. Έστω $\mathcal{U} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X} : x_n \in U_n,\ n = 1, ..., N\}$ και $\mathcal{V} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X} : x_n \in V_n,\ n = 1, ..., N\}$ μη κενά ανοικτά υποσύνολα του $\mathcal{X}$, όπου $N \in \mathbb{N}$ και U_n, V_n, $n = 1, ..., N$ μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X.

Έστω $\mathtt{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ και $\mathtt{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{V}$. Επειδή ισχύει $T^j(x_N) = x_{N-j} \in U_{N-j}$, $T^j(y_N) = y_{N-j} \in V_{N-j}$, $j = 1, ..., N-1$, και ο T είναι συνεχής, υπάρχουν $U'_N \subseteq U_N$ και $V'_N \subseteq V_N$ ανοικτές περιοχές των x_N και y_N αντίστοιχα έτσι ώστε $T^j(U'_N) \subseteq U_{N-j}$ και $T^j(V'_N) \subseteq V_{N-j}$, για κάθε $j = 1, ..., N-1$.

Ο T είναι *hereditarily* υπερκυκλικός ως προς την $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, οπότε υπάρχει $x \in X$ ώστε το $orb(x, (T^{m_k})) = \{T^{m_k} x : k \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στο X, ο οποίος δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Από το κριτήριο Καθολικότητας (θεώρημα 1.6.1) έπεται ότι η $(T^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive* και άρα για τα μη κενά ανοικτά $U'_N, V'_N \subseteq X$ υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^{m_{k_1}}(U'_N) \cap V'_N \neq \emptyset \Leftrightarrow U''_N = U'_N \cap T^{-m_{k_1}}(V'_N) \neq \emptyset$.

Αν θέσουμε $X_n = X$ και $f_n = T$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε από το θεώρημα Mittag-Lefler (θεώρημα 3.2.4), το σύνολο $Y = \{x \in X : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ με $x_1 = x$ και $T x_{n+1} = x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Οπότε για το μη κενό ανοικτό $U''_N \subseteq X$ ισχύει ότι υπάρχει $u_N \in Y \cap U''_N \neq \emptyset$.

(1) $u_N \in Y \Rightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ με $x_1 = u_N$ και $T x_{n+1} = x_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν θέσουμε $u_n = x_{n-N}$, $n > N$, τότε έχουμε ότι $T u_{n+1} = u_n$, για κάθε $n \geq N$.

(2) $u_N \in U''_N \subseteq U'_N \subseteq U_N$ και $T^j(U'_N) \subseteq U_{N-j}$, για κάθε $j = 1, ..., N-1$.
Αν θέσουμε $u_n = T^{N-n}u_N$, $n < N$, τότε έχουμε ότι $Tu_{n+1} = u_n$ και $u_n \in T^{N-n}(U'_N) \subseteq U_n$, για κάθε $n < N$.
Από (1) και (2) συνεπάγεται ότι το $\mathrm{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$.
(3) Για την ακολουθία $(T^{m_{k_1}}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει ότι $T(T^{m_{k_1}}u_{n+1}) = T^{m_{k_1}}(Tu_{n+1}) = T^{m_{k_1}}u_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $(T^{m_{k_1}}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$.
(4) $U''_N \subseteq T^{-m_{k_1}}(V'_N) \Rightarrow T^{m_{k_1}}(U''_N) \subseteq V'_N \subseteq V_N$ και $T^j(V'_N) \subseteq V_{N-j}$, για κάθε $j = 1, ..., N-1$. Τότε $T^{m_{k_1}}u_n = T^{m_{k_1}}(T^{N-n}u_N) = T^{N-n}(T^{m_{k_1}}u_N) \in T^{N-n}(V'_N) \subseteq V_n$, για κάθε $n < N$ και $T^{m_{k_1}}u_N \in T^{m_{k_1}}(U''_N) \subseteq V_N$.
Από (3) και (4) συνεπάγεται ότι $\mathcal{T}^{m_{k_1}}\mathrm{u} = (T^{m_{k_1}}u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{V}$.
Άρα $\mathcal{T}^{m_{k_1}}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$.
4ο Βήμα. Υπάρχει Y_0 πυκνό υποσύνολο του X, μία απεικόνιση $S : Y_0 \to Y_0$ και μία υπακολουθία $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $S^{q_k}y \longrightarrow 0$ και $TSy = y$, για κάθε $y \in Y_0$:
Η $(\mathcal{T}^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive*
$\Rightarrow$ για κάθε $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{T}^{m_k}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ για κάθε $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{U} \cap \mathcal{T}^{-m_k}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ για κάθε $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathcal{U} \cap \mathcal{B}^{m_k}(\mathcal{V}) \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ η $(\mathcal{B}^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive.*
Σύμφωνα με το κριτήριο Καθολικότητας (θεώρημα 1.6.1), για τις ακολουθίες $(\mathcal{T}^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και $(\mathcal{B}^{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ υπάρχουν πυκνά G_δ-σύνολα στοιχείων με πυκνή τροχιά ως προς κάθε ακολουθία αντίστοιχα. Από θεώρημα Baire η τομή των δύο G_δ-συνόλων είναι διαφορετική του κενού. Δηλαδή υπάρχει $\mathrm{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $\overline{orb(\mathrm{y}, (\mathcal{T}^{m_k}))} = \mathcal{X} = \overline{orb(\mathrm{y}, (\mathcal{B}^{m_k}))}$, όπου $orb(\mathrm{y}, (\mathcal{T}^{m_k})) = \{(T^{m_k}y_1, T^{m_k}y_2, ...) : k \in \mathbb{N}\}$ και $orb(\mathrm{y}, (\mathcal{B}^{m_k})) = \{(y_{m_k+1}, y_{m_k+2}, ...) : k \in \mathbb{N}\}$. Θέτουμε $Y_0 = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ και θεωρούμε την απεικόνιση $p : \mathcal{X} \to X$ με τύπο $p((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_1$ (προβολή στην πρώτη συντεταγμένη) η οποία είναι συνεχής και επί. Τότε έχουμε ότι
$orb(\mathrm{y}, (\mathcal{B}^{m_k}))$ πυκνό στο $\mathcal{X} \Rightarrow p(orb(\mathrm{y}, (\mathcal{B}^{m_k})))$ πυκνό στο $p(\mathcal{X}) = X$
$\Rightarrow Y_0 \supseteq p(orb(\mathrm{y}, (\mathcal{B}^{m_k})))$ πυκνό στο X.
Ορίζουμε την απεικόνιση $S : Y_0 \to Y_0$ με τύπο $Sy_n = y_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η S είναι καλά ορισμένη επειδή $y_m \neq y_n$ αν $m \neq n$. Διαφορετικά έστω ότι $y_n = y_m$ για κάποια $m > n$. Τότε, $y_n = y_m \Rightarrow T^{m-n}y_m = y_m \Rightarrow T^{m-1}(T^{m-n}y_m) = T^{m-1}y_m \Rightarrow T^{m-n}y_1 = y_1 \Rightarrow y_1 \in Per(T)$. Άρα το $orb(y_1, T)$ είναι πεπερασμένο. Από την άλλη όμως έχουμε ότι
$orb(\mathrm{y}, (\mathcal{T}^{m_k}))$ πυκνό στο $\mathcal{X} \Rightarrow p(orb(\mathrm{y}, (\mathcal{T}^{m_k})))$ πυκνό στο $p(\mathcal{X}) = X$
$\Rightarrow orb(y_1, T) \supseteq p(orb(\mathrm{y}, (\mathcal{B}^{m_k})))$ πυκνό στο X. Άτοπο.
Επειδή $\mathrm{y} \in \mathcal{X}$, συνεπάγεται ότι $(T \circ S)(y_n) = Ty_{n+1} = y_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $TSy = y$, για κάθε $y \in Y_0$. Κατασκευάζουμε όπως στην απόδειξη $(iii) \Rightarrow (i)$ του θεωρήματος Bès-Peris (θεώρημα 3.2.3), μία υπακολουθία $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $\mathcal{B}^{m_k}\mathrm{y} = (y_{1+q_k}, y_{2+q_k}, ...) \longrightarrow 0$ στο $\mathcal{X}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $S^{q_k}y_n = y_{n+q_k} \longrightarrow 0$ στο X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $S^{q_k}y \longrightarrow 0$, για κάθε $y \in Y_0$.
5ο Βήμα. Ο τελεστής T ικανοποιεί το κριτήριο Gethner-Shapiro:
Ο T είναι *hereditarily* υπερκυκλικός ως προς την αύξουσα ακολουθία $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Οπότε για την υπακολουθία της $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, υπάρχει $w \in HC(T)$ ώστε $\{T^{q_k}w : k \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στο X. Από την $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ κατασκευάζουμε μία υπακολουθία της $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ώστε $T^{n_k}w \longrightarrow 0$. Αν θέσουμε

$X_0 = orb(w,T)$, που είναι πυκνό στο X, τότε για κάθε $x \in X_0$ και για κάθε $y \in Y_0$:
– $T^{n_k}x = T^{n_k}(T^m w) = T^m(T^{n_k}w) \longrightarrow T^m 0 = 0$, όπου $x = T^m w$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}_0$,
– $S^{n_k}y \longrightarrow 0 \quad ((n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(q_k)_{k\in\mathbb{N}})$,
– $TSy = y$.

3.3 Υπερκυκλικές ακολουθίες τελεστών

Σε αυτή την ενότητα γενικεύονται ορισμένα από τα προηγούμενα αποτελέσματα σε ακολουθίες τελεστών $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, όπου X και Y είναι διαχωρίσιμοι χώροι Fréchet.

Ορισμός 3.3.1. *Έστω $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία τελεστών. Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται υπερκυκλική αν υπάρχει $x \in X$ ώστε η τροχιά του $orb(x,(T_n)) = \{T_n x : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι πυκνό στο Y. Σε αυτή την περίπτωση, το x καλείται υπερκυκλικό ή καθολικό διάνυσμα της $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $T_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, μία αντιμεταθετική ακολουθία τελεστών με πυκνό πεδίο τιμών. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι topologically transitive.
(ii) Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι υπερκυκλική.
Αν ισχύει μία από τις παραπάνω συνθήκες, τότε το σύνολο των καθολικών διανυσμάτων της $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο στο X.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$. Είναι η απόδειξη $(i) \Rightarrow (ii)$ του κριτηρίου Καθολικότητας (θεώρημα 1.6.1).
$(ii) \Rightarrow (i)$. Έστω ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε το $orb(x,(T_n))$ είναι πυκνό στο X. Θα αποδείξουμε ότι η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive* :
Έστω U, V μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T_n x \in U$. Επειδή ο T_n έχει πυκνό πεδίο τιμών, συνεπάγεται ότι $T_n^{-1}(V) \neq \emptyset$ και ανοικτό. Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $T_m x \in T_n^{-1}(V) \Rightarrow T_n(T_m x) \in V \Rightarrow T_m(T_n x) \in V \Rightarrow T_m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Θεώρημα 3.3.2 (Κριτήριο Υπερκυκλικότητας για ακολουθίες τελεστών). *Έστω $T_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία τελεστών. Αν υπάρχουν $X_0 \subseteq X$ και $Y_0 \subseteq Y$ πυκνά σύνολα, μία αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ και μία ακολουθία απεικονίσεων $S_{n_k} : Y_0 \to X$, $k \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε, για κάθε $x \in X_0$ και $y \in Y_0$:*
(i) $T_{n_k}x \longrightarrow 0$,
(ii) $S_{n_k}y \longrightarrow 0$,
(iii) $T_{n_k}S_{n_k}y \longrightarrow y$,
τότε η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς mixing και άρα υπερκυκλική.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με την απόδειξη του κριτηρίου Υπερκυκλικότητας (θεωρήμα 3.2.2) όπου $T^{n_k} = T_{n_k}$. Σ' αυτή την περίπτωση η υπερκυκλικότητα συνεπάγεται από το κριτήριο Καθολικότητας (θεώρημα 1.6.1).

Ορισμός 3.3.2. *Έστω $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία τελεστών.*
Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται hereditarily υπερκυκλική αν υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ώστε για κάθε υπακολουθία της $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, η ακολουθία τελεστών $(T_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι υπερκυκλική.

Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται hereditarily transitive αν υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ώστε για κάθε υπακολουθία της $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, η ακολουθία τελεστών $(T_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι topologically transitive.

Θεώρημα 3.3.3 (Bès-Peris για ακολουθίες τελεστών). *Έστω $T_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$, μία αντιμεταθετική ακολουθία τελεστών. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
(i) Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας.
(ii) Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς mixing.
(iii) Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι hereditarily transitive.
(iv) Η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι hereditarily υπερκυκλική.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$. Είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος 3.3.2.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Χρησιμοποιούμε ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με αυτά της απόδειξης $(ii) \Rightarrow (iii)$. του θεωρήματος Bès-Peris (θεώρημα 3.2.3) όπου με κατάλληλες μετατροπές αποδεικνύουμε ότι η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι *hereditarily transitive*.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. Μία απλή εφαρμογή των ορισμών 3.3.2 και του κριτηρίου Καθολικότητας (θεώρημα 1.6.1) δίνει το αποτέλεσμα.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Χρησιμοποιούμε ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με αυτά της απόδειξης $(iii) \Rightarrow (i)$. του θεωρήματος Bès-Peris (θεώρημα 3.2.3) όπου με κατάλληλες μετατροπές αποδεικνύουμε ότι η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί το κριτήριο Υπερκυκλικότητας.

4 Θεώρημα Ansari και Θεώρημα Bourdon-Feldman

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ορισμένα θεμελιώδη θεωρήματα της θεωρίας γραμμικών δυναμικών συστημάτων τα οποία δίνουν θετική απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις:
1) Έστω ότι ο T έχει πυκνή τροχιά. Τότε θα έχει και κάθε δυναμή του T^p πυκνή τροχιά;
2) Έστω ότι μία τροχιά είναι κάπου πυκνό σύνολο. Τότε είναι πυκνό σύνολο;
3) Έστω ότι υπάρχει πεπερασμένη συλλογή τροχιών, των οποίων η ένωση είναι πυκνό σύνολο. Τότε είναι κάποια από τις τροχιές της συλλογής αυτής, πυκνό σύνολο;

4.1 Θεώρημα Ansari

Σ' αυτή την ενότητα δίνεται απάντηση στο πρώτο ερώτημα. Η Ansari [3] απέδειξε ότι οι δυνάμεις ενός υπερκυκλικού τελεστή, είναι και αυτές υπερκυκλικοί τελεστές. Η απόδειξη του θεωρήματος που δίνεται εδώ συνδυάζει ιδέες από τους Banks [6] και Peris [37].
Αρχικά αποδεικνύονται δύο βοηθητικά λήμματα, των οποίων η απόδειξη έγινε από τον Peris [37].

Λήμμα 4.1.1. *Έστω X ένας μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία, $T : X \to X$ συνεχής και $x \in X$. Τότε, για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $int(\overline{orb(x,T)}) \subseteq int(\overline{\{T^k x : k \geq n_0\}})$.*

Απόδειξη. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}_0$ και έστω $w \in int(\overline{orb(x,T)}) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ ώστε $S(w,\varepsilon) \subseteq \overline{orb(x,T)}$.
Θα αποδείξουμε ότι $S(w,\varepsilon) \subseteq \overline{\{T^k x : k \geq n_0\}}$:
Έστω $p \in S(w,\varepsilon)$ και έστω $\delta > 0$. Τότε υπάρχει $t \in (0,\delta)$ τέτοιο ώστε $S(p,t) \subseteq S(w,\varepsilon)$. Ο (X,d) δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Οπότε το σύνολο $S(p,t) \setminus \{T^k x : k < n_0\}$ είναι μη κενό ανοικτό. Υπάρχει $q \in S(p,t)$ και $\eta > 0$ ώστε $S(q,\eta) \subseteq S(p,t) \setminus \{T^k x : k < n_0\}$. Τότε έχουμε,
− $S(q,\eta) \cap \{T^k x : k < n_0\} = \emptyset$. Ισχύει επίσης ότι $q \in S(p,t) \subseteq S(w,\varepsilon) \subseteq \overline{orb(x,T)}$ και άρα $S(q,\eta) \cap orb(x,T) \neq \emptyset$. Οπότε, $S(q,\eta) \cap \{T^k x : k \geq n_0\} \neq \emptyset$.
− $S(q,\eta) \subseteq S(p,t) \subseteq S(p,\delta) \Rightarrow S(p,\delta) \cap \{T^k x : k \geq n_0\} \neq \emptyset$.
Το δ επιλέχθηκε τυχαία. Άρα $p \in \overline{\{T^k x : k \geq n_0\}} \Rightarrow S(w,\varepsilon) \subseteq \overline{\{T^k x : k \geq n_0\}}$
$\Rightarrow w \in int(\overline{\{T^k x : k \geq n_0\}})$.

Λήμμα 4.1.2. *Έστω X ένας μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία και $T : X \to X$ συνεχής. Τότε, για κάθε $x, y \in X$ ισχύει ότι:*
$int(\overline{orb(x,T)} \cap int(\overline{orb(y,T)} = \emptyset$ ή $int(\overline{orb(x,T)} = int(\overline{orb(y,T)})$.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$ τέτοια ώστε $int(\overline{orb(x,T)}) \cap int(\overline{orb(y,T)}) \neq \emptyset$. Θα αποδείξουμε ότι $int(\overline{orb(x,T)}) = int(\overline{orb(y,T)})$:
Έστω $z \in int(\overline{orb(x,T)}) \cap int(\overline{orb(y,T)}) \Rightarrow \exists r > 0$ ώστε $S(z,r) \subseteq \overline{orb(x,T)} \cap \overline{orb(y,T)}$.

• Επειδή το $z \in \overline{orb(x,T)}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^{n_0}x \in S(z,r) \subseteq \overline{orb(y,T)}$. Οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι το $\overline{orb(y,T)}$ είναι T-αναλοίωτο. Πράγματι,

$\zeta \in T(\overline{orb(y,T)}) \Rightarrow \exists w \in \overline{orb(y,T)}$ τέτοιο ώστε $Tw = \zeta$
$\Rightarrow \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία φυσικών τέτοια ώστε $T^{n_k}y \longrightarrow w$
$\Rightarrow T(T^{n_k}y) \longrightarrow Tw \quad (T$ συνεχής$)$
$\Rightarrow \exists (n_k+1)_{k\in\mathbb{N}}$ ακολουθία φυσικών τέτοια ώστε $T^{n_k+1}y \longrightarrow \zeta$
$\Rightarrow \zeta \in \overline{orb(y,T)}$.

Το $T^{n_0}x \in \overline{orb(y,T)} \Rightarrow T^k x \in \overline{orb(y,T)}, \forall k \geq n_0$. Τότε,
$\{T^k x : k \geq n_0\} \subseteq \overline{orb(y,T)} \Rightarrow \overline{\{T^k x : k \geq n_0\}} \subseteq \overline{orb(y,T)}$
$\Rightarrow int(\overline{\{T^k x : k \geq n_0\}}) \subseteq int(\overline{orb(y,T)})$.
Από το λήμμα 4.1.1, συνεπάγεται ότι $int(\overline{orb(x,T)}) \subseteq int(\overline{\{T^k x : k \geq n_0\}}) \subseteq int(\overline{orb(y,T)})$.
• Με συμμετρικό τρόπο αποδεικνύουμε $int(\overline{orb(y,T)}) \subseteq int(\overline{orb(x,T)})$.
Οπότε, $int(\overline{orb(y,T)}) = int(\overline{orb(x,T)})$.

Θεώρημα 4.1.1 (Ansari). *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Τότε, για κάθε $p \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $HC(T) = HC(T^p)$. Οπότε, ο T είναι υπερκυκλικός τελεστής, αν και μόνο αν, κάθε δύναμη του, T^p, είναι υπερκυκλικός τελεστής.*

Απόδειξη. Έστω $x \in HC(T^p) \Rightarrow \overline{orb(x,T)} \supseteq \overline{orb(x,T^p)} = X \Rightarrow x \in HC(T)$.
Άρα $HC(T^p) \subseteq HC(T)$.
Έστω $x \in HC(T)$. Από το (i) της πρότασης 1.2.4 και την πρόταση 2.4.2, συνεπάγεται ότι το $D = HC(T)$ είναι πυκνό, T-αναλλοίωτο και συνεκτικό υποσύνολο του X. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να περιορίσουμε τον T στο D, $T : D \to D$.
− Το D δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Πράγματι, έστω $y \in D$ και $S(y,\varepsilon) \cap D$ ανοικτό του y στο D. Ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία και το D είναι πυκνό στο X. Άρα για το μη κενό ανοικτό $S(y,\varepsilon) \setminus \{y\}$ του X, ισχύει ότι $(S(y,\varepsilon) \setminus \{y\}) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow (S(y,\varepsilon) \cap D) \setminus \{y\} \neq \emptyset$.
− Αν δείξουμε ότι $\overline{orb(x,T^p)}^D = D$, τότε το $x \in HC(T^p)$. Πράγματι, αν U μη κενό ανοικτό του X, τότε το $U \cap D \neq \emptyset$ (D πυκνό στο X) ανοικτό υποσύνολο του D. Οπότε θα έχουμε ότι $orb(x,T^p) \cap U \supseteq orb(x,T^p) \cap (U \cap D) \neq \emptyset \Rightarrow \overline{orb(x,T^p)} = X \Rightarrow x \in HC(T^p)$.
Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{orb(x,T^p)}^D = D$. Ορίζουμε τα σύνολα $D_j = \overline{orb(T^j x,T^p)}^D$, $j = 0,1,...,p-1$. Μπορούμε να ορίσουμε όλα τα σύνολα D_i, $i \in \mathbb{N}_0$ και παρατηρούμε εύκολα ότι $D_i = \overline{orb(T^i x,T^p)}^D \subseteq \overline{orb(T^j x,T^p)}^D = D_j$, όπου $i = kp + j$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$ και $j = 0,1,...,p-1$. Δηλαδή, $D_i \subseteq D_{i(mod\, p)} = D_{i-kp}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$ ώστε $0 \leq i - kp < p$.
Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το $D = D_0$. Παρατηρούμε ότι,
• $D = \bigcup_{j=0}^{p-1} D_j$:

$$D = D \cap X = D \cap \overline{orb(x,T)} = \overline{orb(x,T)}^D = \overline{\bigcup_{j=0}^{p-1} orb(T^j x,T^p)}^D = \bigcup_{j=0}^{p-1} \overline{orb(T^j x,T^p)}^D = \bigcup_{j=0}^{p-1} D_j$$

• $T^l(D_j) \subseteq D_{j+l(mod\, p)}, \forall j \in \{0,1,...,p-1\}, \forall l \in \mathbb{N}$:
Έστω $j \in \{0,1,...,p-1\}$, $l \in \mathbb{N}$ και $y \in T^l(D_j) \Rightarrow \exists w \in D_j$ τέτοιο ώστε $T^l w = y$
$\Rightarrow \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ώστε $(T^p)^{n_k}(T^j x) \longrightarrow w$
$\Rightarrow T^l(T^{p\cdot n_k}(T^j x)) \longrightarrow T^l w \quad (T$ συνεχής$)$

$$\Rightarrow \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ώστε } (T^p)^{n_k}(T^{j+l}x) \longrightarrow y$$
$$\Rightarrow y \in \overline{orb(T^{j+l}x, T^p)}^D = D_{j+l} \subseteq D_{j+l(mod\, p)}.$$

Έστω $F \subseteq \{0,1,...,p-1\}$ ένα σύνολο με το ελάχιστο πλήθος στοιχείων που απαιτούνται ώστε $D = \bigcup_{j\in F} D_j$.

Ισχυρισμός: Το F είναι μονοσύνολο.

Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω ότι το F δεν είναι μονοσύνολο. Θα καταλήξουμε σε άτοπο: Έστω ότι $int_D(D_j) \cap int_D(D_k) \neq \emptyset$ για κάποια $j,k \in F$ με $j \neq k$. Από το λήμμα 4.1.2 συνεπάγεται ότι $int_D(D_j) = int_D(D_k)$.

Από τον τρόπο που ορίσαμε το F, το σύνολο $B = D \setminus \left(\bigcup_{l\in F\setminus\{j\}} D_l\right)$ θα είναι διαφορετικό του κενού και ανοικτό υποσύνολο του D ως συμπλήρωμα πεπερασμένης ένωσης κλειστών του D. Επειδή το $B \cap \left(\bigcup_{l\in F\setminus\{j\}} D_l\right) = \emptyset$ και $D = \left(\bigcup_{l\in F\setminus\{j\}} D_l\right) \cup D_j$, θα έχουμε ότι $B \subseteq D_j$. Το B όμως είναι ανοικτό. Άρα $B \subseteq int_D(D_j) = int_D(D_k) \subseteq D_k$, το οποίο όμως είναι άτοπο επειδή $B \cap D_k = \emptyset$.

Οπότε ισχύει ότι $int_D(D_j) \cap int_D(D_k) = \emptyset$, $\forall j,k \in F$ με $j \neq k$
$$\Rightarrow int_D(D_j \cap D_k) = \emptyset, \forall j,k \in F \text{ με } j \neq k.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τα σύνολα $F_l = F + l(mod\, p) = \{f + l(mod\, p) : f \in F\}$, $l = 0,1,...,p-1$. Τότε, $D \overset{(*)}{=} \overline{T^l(D)}^D = \overline{T^l(\bigcup_{j\in F} D_j)}^D = \overline{\bigcup_{j\in F} T^l(D_j)}^D = \bigcup_{j\in F} \overline{T^l(D_j)}^D \overset{(**)}{=} \bigcup_{k\in F_l} D_k, \forall l = 0,...,p-1$.

$(*)$: Έστω $l \in \{0,1,...,p-1\}$ και έστω $U \cap D$ μη κενό ανοικτό υποσύνολο του D, όπου U μη κενό ανοικτό του X. Θα αποδείξουμε ότι $T^l(D) \cap (U \cap D) \neq \emptyset$. Πράγματι έστω $y \in U \cap D$. Επειδή ο X δεν έχει μεμονωμένα σημεία, ισχύει ότι $T^m y \in D$, για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$ (πρόταση 1.2.4). Επιλέγουμε ένα $m \geq l$. Για το U υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T^k(T^m y) \in U$. Επειδή $k + m - l \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $T^{k+m-l}y \in D$ και $T^{k+m}y \in U \cap D \Rightarrow T^l(T^{k+m-l}y) \in U \cap D \Rightarrow T^l(D) \cap (U \cap D) \neq \emptyset$.

$(**)$: Έστω $l \in \{0,1,...,p-1\}$.

- $\bigcup_{j\in F} \overline{T^l(D_j)}^D \subseteq \bigcup_{j\in F} \overline{D_{j+l(mod\, p)}}^D = \bigcup_{j\in F} D_{j+l(mod\, p)} = \bigcup_{k\in F_l} D_k$.
- Έστω $y \in \bigcup_{k\in F_l} D_k \Rightarrow \exists k \in F_l$ τέτοιο ώστε $y \in D_k$

$$\Rightarrow \exists j \in F \text{ ώστε } k = j + l(mod\, p) \text{ και } y \in D_{j+l(mod\, p)}$$
$$\Rightarrow y \in D_{j+l-np}, \text{ με } n \in \{0,1\} \quad (0 \leq j + l \leq 2p-2)$$
$$\Rightarrow \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ώστε } (T^p)^{n_k}(T^{j+l-np}x) \longrightarrow y$$
$$\Rightarrow T^l(T^{(n_k-n)\cdot p}(T^j x)) \longrightarrow y \text{ και } T^{(n_k-n)\cdot p}(T^j x) \in D_j, \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow y \in \overline{T^l(D_j)}^D \subseteq \bigcup_{j\in F} \overline{T^l(D_j)}^D.$$

Άρα $\bigcup_{j\in F} \overline{T^l(D_j)}^D = \bigcup_{k\in F_l} D_k$.

Από τον τρόπο που έχουμε ορίσει τα F_l, $l = 0,1,...p-1$, παρατηρούμε ότι $\forall l \in \{0,1,...,p-1\}$:

$-$ $F_l \subseteq \{0,1,...,p-1\}$,

$-$ $\text{card}(F_l) \leq \text{card}(F)$,
$-$ $D = \bigcup\limits_{k \in F_l} D_k$,
$-$ $F \subseteq \{0, 1, ..., p-1\}$ σύνολο με το ελάχιστο πλήθος στοιχείων ώστε $D = \bigcup\limits_{j \in F} D_j$.

Άρα θα έχουμε ότι $\text{card}(F_l) = \text{card}(F)$ και αποδεικνύεται ομοίως όπως στην περίπτωση του F ότι $int_D(D_j \cap D_k) = \emptyset$, $\forall j, k \in F_l$ με $j \neq k$ και $\forall l = 0, 1, ..., p-1$.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \bigcup\limits_{l=0}^{p-1} \bigcup\limits_{\substack{j,k \in F_l \\ j \neq k}} (D_j \cap D_k)$, το οποίο είναι πουθενά πυκνό ($int_D\left(\overline{A}^D\right) = \emptyset$) και κλειστό υποσύνολο του D ως πεπερασμένη ένωση πουθενά πυκνών και κλειστών υποσυνόλων του D.

$-$ Το A είναι T-αναλλοίωτο:

Έστω $y \in T(A) \Rightarrow \exists w \in A = \bigcup\limits_{l=0}^{p-1} \bigcup\limits_{\substack{j,k \in F_l \\ j \neq k}} (D_j \cap D_k)$ τέτοιο ώστε $Tw = y$

$\Rightarrow \exists l \in \{0, 1, ..., p-1\}$ ώστε $w \in \bigcup\limits_{\substack{j,k \in F_l \\ j \neq k}} (D_j \cap D_k)$

$\Rightarrow \exists j, k \in F_l$ με $j \neq k$ τέτοια ώστε $w \in D_j \cap D_k$

$\Rightarrow Tw \in T(D_j \cap D_k) \subseteq T(D_j) \cap T(D_k) \subseteq D_{j+1(mod\,p)} \cap D_{k+1(mod\,p)}$

$\Rightarrow y \in D_J \cap D_K$, $J = j + 1(mod\ p)$, $K = k + 1(mod\ p)$.

Το $j \in F_l \Rightarrow \exists f \in F$ τέτοιο ώστε $j = f + l(mod\ p)$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $j = f + l - np$ και $0 \leq j < p$

$\Rightarrow J = f + l + 1 - np(mod\ p)$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $J = f + l + 1 - np - mp$ και $0 \leq J < p$

$\Rightarrow J = f + l + 1 - Np$, με $N \in \mathbb{N}_0$ και $0 \leq J < p$

• Αν $0 \leq l < p-1$, τότε $l + 1 \leq p - 1$ και $J = f + (l+1) - Np \Rightarrow J \in F_{l+1}$

• Αν $l = p-1$, τότε $l+1 = p$ και $J = f + p - Np = f \in F_0$ (το N είναι υποχρεωτικά 1 εδώ).

Οπότε, σε κάθε περίπτωση, το $J \in F_L$ όπου $L = l + 1(mod\ p)$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι το $K \in F_L$. Τέλος, επειδή $j \neq k$, θα ισχύει επίσης ότι $J \neq K$. Πράγματι, έστω $J = f + l + 1 - Np$ και $K = e + l + 1 - Mp$, με $j = f + l - np$ και $k = e + l - mp$, για κάποια $f, e \in F$ και $N, M, n, m \in \mathbb{N}_0$. Αν $J = K \Rightarrow f = e - (N+M)p$

$\Rightarrow j = e + l - (N+M)p - np$

$$\Rightarrow \begin{cases} e + l = (N+M+n)p + j & ,0 \leq j < p \\ e + l = mp + k & ,0 \leq k < p \end{cases}.$$

Από τη μοναδικότητα της ευκλείδειας διαίρεσης, συνεπάγεται ότι $j = k$. Άτοπο.

Συνοπτικά λοιπόν έχουμε ότι $y \in D_J \cap D_K$ για κάποια $J, K \in F_L$ με $J \neq K$ και για κάποιο $L \in \{0, 1, ..., p-1\}$. Άρα $y \in A \Rightarrow T(A) \subseteq A$. $\mathbf{(***)}$

$-$ Το $A = \emptyset$:

Έστω ότι το $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in A \subseteq D$

$\Rightarrow D = D \cap X = D \cap \overline{orb(y,T)} = \overline{orb(y,T)}^D \overset{(***)}{\subseteq} \overline{A}^D = A$

$\Rightarrow D = A$

$\Rightarrow int_D(D) = int_D(A)$

$\Rightarrow D = \emptyset$. Άτοπο.

Άρα το $A=\emptyset \Rightarrow \bigcup_{\substack{j,k\in F_l\\ j\neq k}} (D_j \cap D_k)=\emptyset,\ \forall l \in \{0,1,...,p-1\}$

$\overset{l=0}{\Rightarrow} D_j \cap D_k = \emptyset,\ \forall j,k \in F_0 = F$ και $j\neq k$

$\Rightarrow$ το $D=\bigcup_{j\in F} D_j$ είναι ένωση κλειστών και ανά δύο ξένων υποσυνόλων του.

Άρα το $D=(D\setminus D_j)\cup\left(D\setminus\left(\bigcup_{l\in F\setminus\{j\}} D_l\right)\right)$ είναι ένωση μη κενών, ανοικτών και ανά δύο ξένων υποσυνόλων του. Δηλαδή το D όχι συνεκτικό. Άτοπο. Το άτοπο προέκυψε επειδή υποθέσαμε ότι το F δεν είναι μονοσύνολο. Οπότε το $F=\{j\}$ για κάποιο $j\in\{0,1,...,p-1\}$. Δηλαδή το $D=D_j$.

$-\ D=D_j \Rightarrow T^{p-j}(D)=T^{p-j}(D_j)\subseteq D_{p-j+j(mod\,p)}=D_0 \Rightarrow T^{p-j}(D)\subseteq D_0$. $\mathbf{(****)}$

$-\ D \overset{(*)}{=} \overline{T^{p-j}(D)}^{D} = \overline{T^{p-j}(D_j)}^{D} \overset{(****)}{\subseteq} \overline{D_0}^{D} = D_0 \Rightarrow D\subseteq D_0$.

Άρα $D=D_0$.

4.2 Θεώρημα Bourdon-Feldman

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου αποδεικνύονται τα θεωρήματα Bourdon-Feldman και Κωστάκης-Peris. Πριν γίνει αυτό όμως, χρειάζεται μία μικρή προεργασία.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω $T:X\to X$ ένας τελεστής. Για κάθε $x\in X$, ορίζουμε τα σύνολα $D(x)=\overline{orb(x,T)}$ και $U(x)=intD(x)$. Αν $x\in X$, τότε:*
(i) Αν $y\in D(x)$, τότε $D(y)\subseteq D(x)$.
(ii) $U(x)=U(T^kx)$ για κάθε $k\in\mathbb{N}_0$.
(iii) Αν $R:X\to X$ συνεχής απεικόνιση που αντιμετατίθεται με τον T, τότε $R(D(x))\subseteq D(Rx)$.

Απόδειξη. (i). Έστω $y\in X$ και $y\in D(x)=\overline{orb(x,T)}$. Έχουμε δείξει ότι αν T συνεχής, τότε το $D(x)$ είναι T-αναλλοίωτο. Άρα $T^ny\in D(x),\ \forall n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow orb(y,T)\subseteq D(x)$

$\Rightarrow \overline{orb(x,T)}\subseteq\overline{D(x)}=D(x)$

$\Rightarrow D(y)\subseteq D(x)$.

(ii). Έστω $k\in\mathbb{N}_0$. Τότε $T^kx\in orb(x,T)\subseteq D(x)\Rightarrow D(T^kx)\subseteq D(x)$

$\Rightarrow int(D(T^kx))\subseteq int(D(x))$

$\Rightarrow U(T^kx)\subseteq U(x)$.

Επειδή ο X είναι μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα σημεία και $T:X\to X$ συνεχής, από το λήμμα 4.1.1 συνεπάγεται ότι $U(x)\subseteq U(T^kx)$. Άρα $U(x)=U(T^kx)$.

(iii). Έστω $R:X\to X$ συνεχής απεικόνσιη που αντιμετατίθεται με τον T. Τότε,

$y\in R(D(x))\Rightarrow \exists w\in D(x)$ τέτοιο ώστε $Rw=y$

$\Rightarrow \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $T^{n_k}x\longrightarrow w$

$\Rightarrow R(T^{n_k}x)\longrightarrow Rw$ (R συνεχής)

$\Rightarrow T^{n_k}(Rx)\longrightarrow y$

$\Rightarrow y\in D(Rx)$.

Άρα $R(D(x))\subseteq D(Rx)$.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Αν ο T έχει κάπου πυκνή τροχιά και p ένα μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο τελεστής $p(T)$ έχει πυκνό πεδίο τιμών.*

Απόδειξη. Το συγκεκριμένο λήμμα είναι μία "ασθενής" εκδοχή του θεωρήματος Bourdon (θεώρημα 2.4.1) σε συνδυασμό με το λήμμα 2.4.1. Οι αποδείξεις είναι ίδιες με την μικρή παραλλαγή ότι ο T έχει κάπου πυκνή τροχιά. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι κάπου πυκνό σύνολο αν $int(\overline{A}) \neq \emptyset$.

Λήμμα 4.2.2. *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής και $x \in X$. Αν το $orb(x, T)$ είναι κάπου πυκνό σύνολο, τότε το σύνολο $\{p(T)x : p \neq 0 \text{ πολυώνυμο}\}$ είναι συνεκτικό και πυκνό στο X.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \{p(T)x : p \neq 0 \text{ πολυώνυμο}\}$.
− Το A είναι κατά τόξα συνεκτικό:
Έστω $y, w \in A$. Υπάρχουν μη μηδενικά πολυώνυμα p, q τέτοια ώστε $y = p(T)x$ και $w = q(T)x$.
• Αν $q \neq \lambda p$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση $\gamma : [0, 1] \to X$ που έχει τύπο $\gamma(t) = tp(T)x + (1 - t)q(T)x = (tp(T) + (1 - t)q(T))x$, $\forall t \in [0, 1]$. Το πολύωνυμο $\Gamma(t) = tp+(1-t)q$ είναι διαφορετικό του μηδενός για κάθε $t \in [0, 1]$. Πράγματι το $\Gamma(0) = q \neq 0$, το $\Gamma(1) = p \neq 0$ και αν υπήρχε $t \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\Gamma(t) = 0$, τότε το $q = \dfrac{t}{t-1}p$ το οποίο είναι αδύνατο. Άρα $\Gamma(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [0, 1] \Rightarrow \gamma([0, 1]) \subseteq A$. Η γ είναι συνεχής απεικόνιση και $\gamma(0) = q(T)x = w, \gamma(1) = p(T)x = y$.
• Αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $q = \lambda p$, τότε θεωρούμε και ένα τρίτο μη μηδενικό πολυώνυμο r που να μην είναι πολλαπλάσιο του q (άρα και του p). Σ' αυτή την περίπτωση θεωρούμε τις:
$\gamma_1 : [0, 1] \to X$ με τύπο $\gamma_1(t) = (1 - t)p(T)x + tr(T)x$ και
$\gamma_2 : [0, 1] \to X$ με τύπο $\gamma_2(t) = (1 - t)r(T)x + tq(T)x$.
Όπως στην 1η περίπτωση οι γ_1, γ_2 είναι συνεχείς, οι εικόνες τους περιέχονται στο A και συνδέουν τα σημεία $p(T)x, r(T)x$ και $r(T)x, q(T)x$ αντίστοιχα.
Θέτουμε $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$.
Η γ είναι συνεχής, το $\gamma(0) = p(T)x$, το $\gamma(1) = q(T)x$ και $\gamma([0, 1]) = \gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_2([0, 1]) \subseteq A$. Οπότε κάθε δύο σημεία του A συνδέονται με καμπύλη που η εικόνα της περιέχεται στο A. Δηλαδή το A είναι κατά τόξα συνεκτικό και άρα συνεκτικό.
− Το A είναι πυκνό στο X :
• Το $\overline{A}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του X.
Το $0 \in \overline{A}$. Πράγματι, επειδή το $x \neq 0$ (αλλιώς δε θα είχε κάπου πυκνή τροχιά), θεωρούμε την ακολουθία στοιχείων του A, $\left(\dfrac{1}{n}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$, για την οποία ισχύει $\dfrac{1}{n}x \longrightarrow 0$.
Έστω $y, w \in \overline{A}$ και $\lambda, \kappa \in \mathbb{K}$. Υπάρχουν $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες μη μηδενικών πολυωνύμων ώστε $p_n(T)x \longrightarrow y$ και $q_n(T)x \longrightarrow w$. Τότε $(\lambda p_n(T)x + \kappa q_n(T)x)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων του $\overline{A}$ και $\lambda p_n(T)x + \kappa q_n(T)x \longrightarrow \lambda y + \kappa w \Rightarrow \lambda y + \kappa w \in \overline{A}$.
• Το $\overline{A}$ είναι T-αναλλοίωτο.

$$
\begin{aligned}
\text{Έστω } y \in T(\overline{A}) &\Rightarrow \exists w \in \overline{A} \text{ τέτοιο ώστε } Tw = y \\
&\Rightarrow \exists (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ακολουθία μη μηδενικών πολυωνύμων ώστε } p_n(T)x \longrightarrow w \\
&\Rightarrow \underbrace{Tp_n(T)}_{q_n(T)}x \longrightarrow Tw \quad (T \text{ συνεχής.})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \exists (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη μηδενικών πολυωνύμων ώστε $q_n(T)x \longrightarrow y$
$\Rightarrow y \in \overline{A}$.
Άρα $T(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$.
• Το A είναι κάπου πυκνό.
Επειδή το $x \in \overline{A}$ και το $\overline{A}$ είναι T-αναλοίωτο, ισχύει ότι
$orb(x,T) \subseteq \overline{A} \Rightarrow \overline{orb(x,T)} \subseteq \overline{A}$
$\Rightarrow \emptyset \neq int(D(x)) \subseteq int(\overline{A})$.
Δηλαδή το A είναι κάπου πυκνό.
Οπότε υπάρχει $x_0 \in \overline{A}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $x_0 + S(0,\varepsilon) = S(x_0,\varepsilon) \subseteq \overline{A}$. Έστω $y \in X$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n}y \in S(0,\varepsilon) \Rightarrow y \in n \cdot S(0,\varepsilon)$
$\Rightarrow y \in n(x_0 + S(0,\varepsilon)) - nx_0 \subseteq n\overline{A} - n\overline{A} \subseteq \overline{A}$ (A διαν. χώρος)
$\Rightarrow y \in \overline{A}$.
Άρα $X \subseteq \overline{A} \Rightarrow X = \overline{A} \Rightarrow$ το A είναι πυκνό στο X.

Το παρακάτω θεώρημα αποδείχθηκε από τους Bourdon και Feldman [19].

Θεώρημα 4.2.1 (**Bourdon-Feldman**). *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής και $x \in X$. Αν το x έχει κάπου πυκνή τροχιά, τότε έχει πυκνή τροχιά στο X.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι αν $U(x) \neq \emptyset$, τότε $D(x) = X$. Για συντομία θα παραπέμπουμε στην πρόταση 4.2.1 με ένα $\boldsymbol{(\alpha)}$, στο λήμμα 4.2.1 με ένα $\boldsymbol{(\beta)}$ και στο λήμμα 4.2.2 με ένα $\boldsymbol{(\gamma)}$.
1ο Βήμα. Το $X \setminus U(x)$ είναι T-αναλοίωτο. Δηλαδή, $T(X \setminus U(x)) \subseteq X \setminus U(x)$:
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $T^{-1}(U(x)) \subseteq U(x)$. Επειδή το $U(x) \neq \emptyset$, θα έχουμε ότι υπάρχει $S(w,r) \subseteq D(x) \Rightarrow S(w,r) \cap orb(x,T) \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^m x \in S(w,r) \subseteq D(x)$
$\Rightarrow x_m = T^m x \in U(x)$.
Έστω $y \in T^{-1}(U(x))$ και έστω V ανοικτό του y. Από $\boldsymbol{(\alpha)}$ γνωρίζουμε ότι $U(x_m) = U(x) \neq \emptyset$, δηλαδή το x_m έχει κάπου πυκνή τροχιά και επειδή το $V \cap T^{-1}(U(x)) \neq \emptyset$ είναι ανοικτό σύνολο, σύμφωνα με το $\boldsymbol{(\gamma)}$ θα υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο p ώστε $p(T)x_m \in V \cap T^{-1}(U(x))$.
$-\ p(T)x_m \in T^{-1}(U(x)) \Rightarrow Tp(T)x_m \in U(x) \subseteq D(x) \Rightarrow Tp(T)x_m \in D(x)$.
$$- \ p(T)x_m \in p(T)(U(x)) \overset{\boldsymbol{(\alpha)}}{=} p(T)((U(T^{m+1}x)) \subseteq p(T)(D(T^{m+1}x)) \overset{\boldsymbol{(\alpha)}}{\subseteq} D(p(T)(T^{m+1}x)) = D(Tp(T)(T^m x)) = D(Tp(T)x_m) \overset{\boldsymbol{(\alpha)}}{\subseteq} D(x).$$
$\Rightarrow p(T)x_m \in D(x)$ και $p(T)x_m \in V \Rightarrow V \cap D(x) \neq \emptyset$.
Το V ήταν τυχαίο ανοικτό του $y \Rightarrow y \in \overline{D(x)} = D(x)$.
Το y ήταν τυχαίο στοιχείο του $T^{-1}(U(x)) \Rightarrow T^{-1}(U(x)) \subseteq D(x)$. Επειδή το $T^{-1}(U(x))$ είναι ανοικτό συνεπάγεται ότι $T^{-1}(U(x)) \subseteq int(D(x)) = U(x)$.
Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε οτι $T(X \setminus U(x)) \subseteq X \setminus U(x)$. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει και καταλήγουμε σε άτοπο. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $w \in T(X \setminus U(x))$ και $w \notin X \setminus U(x)$. Τότε υπάρχει $h \in X \setminus U(x)$ ώστε $Th = w \in U(x) \Rightarrow h \in X \setminus U(x) \cap T^{-1}(U(x)) \subseteq X \setminus U(x) \cap U(x)$
$\Rightarrow X \setminus U(x) \cap U(x) \neq \emptyset$. Άτοπο.

Άρα το $X \setminus U(x)$ είναι T-αναλλοίωτο.
2ο Βήμα. Για κάθε $z \in X \setminus U(x)$, το $D(z) \subseteq X \setminus U(x)$:
Έστω $z \in X \setminus U(x) \Rightarrow orb(z,T) \subseteq X \setminus U(x)$ (το $X \setminus U(x)$ είναι T-αναλλοίωτο)
$\Rightarrow D(z) = \overline{orb(z,T)} \subseteq \overline{X \setminus U(x)} = X \setminus U(x)$. ($X \setminus U(x)$ κλειστό)
3ο Βήμα. Για κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο p ισχύει ότι $p(T)x \in X \setminus \partial D(x)$:
Έστω ότι υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $p(T)x \notin X \setminus \partial D(x)$.

$$
\begin{aligned}
- \ p(T)x \in \partial D(x) &\Rightarrow p(T)x \notin int(D(x)) = U(x) \\
&\Rightarrow p(T)x \in X \setminus U(x) \\
&\Rightarrow D(p(T)x) \subseteq X \setminus U(x) \quad \text{(2ο βήμα)} \\
&\Rightarrow p(T)(D(x)) \overset{(\boldsymbol{\alpha})}{\subseteq} D(p(T)x) \subseteq X \setminus U(x). \\
&\Rightarrow D(x) \subseteq p(T)^{-1}(X \setminus U(x)) = X \setminus p(T)^{-1}(U(x)) \\
&\Rightarrow D(x) \cap p(T)^{-1}(U(x)) = \emptyset.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- \ \text{Το } U(x) \neq \emptyset &\overset{(\boldsymbol{\beta})}{\Rightarrow} \text{το } p(T) \text{ έχει πυκνό πεδίο τιμών και } U(x) \neq \emptyset \text{ ανοικτό} \\
&\Rightarrow \exists y \in X \text{ τέτοιο ώστε το } p(T)y \in U(x) \\
&\Rightarrow y \in p(T)^{-1}(U(x)) \text{ και } D(x) \cap p(T)^{-1}(U(x)) = \emptyset \\
&\Rightarrow y \in X \setminus D(x) \text{ και } X \setminus D(x) \text{ ανοικτό} \\
&\Rightarrow \exists S(y,r) \subseteq X \setminus D(x).
\end{aligned}
$$

Θέτουμε $V = p(T)^{-1}(U(x)) \cap S(y,r)$. Επειδή το $V \neq \emptyset$ ($y \in V$) και ανοικτό, από **($\boldsymbol{\gamma}$)** υπάρχει πολυώνυμο $q \neq 0$ τέτοιο ώστε $q(T)x \in V \Rightarrow q(T)x \in S(y,r) \subseteq X \setminus D(x) \subseteq X \setminus U(x)$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow D(q(T)x) \subseteq X \setminus U(x) \quad \text{(2ο βήμα)} \\
&\Rightarrow q(T)(D(x)) \overset{(\boldsymbol{\alpha})}{\subseteq} D(q(T)x) \subseteq X \setminus U(x).
\end{aligned}
$$

$- \ q(T)x \in V = p(T)^{-1}(U(x)) \cap S(y,r) \Rightarrow p(T)(q(T)x) \in U(x)$.
$- \ p(T)(q(T)x) = q(T)(p(T)x) \in q(T)(\partial D(x)) \subseteq q(T)(D(x)) \subseteq X \setminus U(x)$
$\Rightarrow p(T)(q(T)x) \in X \setminus U(x)$
$\Rightarrow p(T)(q(T)x) \in U(x) \cap X \setminus U(x)$. Άτοπο.
Άρα για κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο p, ισχύει ότι $p(T)x \in X \setminus \partial D(x)$.
4ο Βήμα. Το $D(x) = X$:
Από το 3ο βήμα, για το σύνολο $A = \{p(T)x : p \neq 0 \text{ πολυώνυμο}\}$ ισχύει ότι $A \subseteq X \setminus \partial D(x)$. Δηλαδή, $A \subseteq U(x) \cup (X \setminus D(x))$ και $U(x)$, $X \setminus D(x)$ ανοικτά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X. Από το **($\boldsymbol{\gamma}$)** γνωρίζουμε ότι το A είναι συνεκτικό και πυκνό στο X. Οπότε το A είναι συνεκτικό και $A \cap U(x) \neq \emptyset \Rightarrow A \cap (X \setminus D(x)) = \emptyset$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow A \subseteq D(x) \\
&\Rightarrow X = \overline{A} \subseteq \overline{D(x)} = D(x).
\end{aligned}
$$

Στο τέλος της ενότητας αποδεικνύεται και το τελευταίο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή του συγκεκριμένου κεφαλαίου. Το επόμενο θεώρημα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Κωστάκης [21] και Peris [37]. Από τις αποδείξεις που έδωσαν, προέκυψε το ερώτημα αν μία κάπου πυκνή τροχιά είναι παντού πυκνή, του οποίου την απάντηση έδωσαν αργότερα οι Bourdon και Feldman. Η απόδειξη που δίνεται εδώ γίνεται με τη βοήθεια του θεωρήματος Bourdon-Feldman.

Θεώρημα 4.2.2 (Κωστάκης-Peris). *Έστω $T : X \to X$ τελεστής και $x_1, x_2, ..., x_n \in X$. Αν το σύνολο $\bigcup_{j=1}^{n} orb(x_j, T)$ είναι πυκνό στο X, τότε υπάρχει $j \in \{1, 2, ..., n\}$ τέτοιο ώστε το $orb(x_j, T)$ να είναι πυκνό στο X.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\bigcup_{j=1}^{n} \overline{orb(x_j, T)} = \overline{\bigcup_{j=1}^{n} orb(x_j, T)} = X$. Επειδή η πεπερασμένη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων είναι πουθενά πυκνό σύνολο, θα υπάρχει $j \in \{1, 2, ..., n\}$ τέτοιο ώστε το $orb(x_j, T)$ να είναι κάπου πυκνό στο X. Από το θεώρημα Bourdon-Feldman συνεπάγεται ότι το $orb(x_j, T)$ είναι πυκνό στο X.

Στη συνέχεια θα δώσουμε μία δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος της Ansari, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Κωστάκης-Peris, το οποίο συνεπάγεται από το θεώρημα Bourdon-Feldman.

Πόρισμα 4.2.1 (Ansari). *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Τότε, για κάθε $p \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $HC(T) = HC(T^p)$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύεται όπως στο θεώρημα της Ansari ότι $HC(T^p) \subseteq HC(T)$.

Έστω $x \in HC(T)$. Τότε το $\overline{\bigcup_{j=0}^{p-1} orb(T^j x, T^p)} = \overline{orb(x, T)} = X$. Από το θεώρημα Κωστάκης - Peris, υπάρχει $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$ τέτοιο ώστε $\overline{orb(T^j x, T^p)} = X$ και άρα $T^j x \in HC(T^p)$. **(∗)**

$-$ Έστω $y \in T^{p-j}(orb(T^j x, T^p)) \Rightarrow \exists w \in orb(T^j x, T^p)$ τέτοιο ώστε $T^{p-j} w = y$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 \text{ ώστε } y = T^{p-j} w = T^{p-j}(T^{kp}(T^j x)) = T^{(k+1)p} x$$
$$\Rightarrow y \in orb(x, T^p).$$

Άρα $T^{p-j}(orb(T^j x, T^p)) \subseteq orb(x, T^p)$.

$-$ Ο T^{p-j} έχει πυκνό πεδίο τιμών ως σύνθεση πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεων του τελεστή T που έχει πυκνό πεδίο τιμών επειδή είναι υπερκυκλικός και άρα *topologically transitive*.

$-$ Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in X$ τέτοιο ώστε $T^{p-j} y \in S(x, \varepsilon)$. Λόγω της συνέχειας του T^{p-j}, υπάρχει $r > 0$ ώστε $S(y, r) \subseteq (T^{p-j})^{-1}(S(x, \varepsilon))$. Από **(∗)**, θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T^{kp}(T^j x) \in S(y, r) \Rightarrow T^{p-j}(T^{kp}(T^j x)) \in S(x, \varepsilon) \Rightarrow T^{p-j}(orb(T^j x, T^p)) \cap S(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Δηλαδή το $T^{p-j}(orb(T^j x, T^p))$ είναι πυκνό στο X.

Τότε $\overline{orb(x, T^p)} \supseteq \overline{T^{p-j}(orb(T^j x, T^p))} = X \Rightarrow \overline{orb(x, T^p)} = X \Rightarrow x \in HC(T^p)$.

5 Συχνά Υπερκυκλικοί Τελεστές

Η θεωρία των γραμμικών δυναμικών συστημάτων έχει τις ρίζες της στη θεωρία των τοπολογικά δυναμικών συστημάτων. Παράλληλα υπάρχει και η θεωρία των μετρήσιμων δυναμικών συστημάτων η οποία είναι ευρύτερα γνωστή ως εργοδική θεωρία. Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα νέο είδος υπερκυκλικότητας, του οποίου η γέννηση προήλθε από αυτή τη θεωρία: η συχνή υπερκυκλικότητα.

Αρχικά δίνεται ο ορισμός αυτής της έννοιας, στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι οι τελεστές Birkhoff παρουσιάζουν αυτού του είδους την υπερκυκλικότητα και τέλος, δίνονται ορισμένες βασικές ιδιότητες του συνόλου των συχνα υπερκυκλικών διανυσμάτων.

5.1 Συχνή υπερκυκλικότητα

Πρώτοι οι Bayart και Grivaux [10], [11] έδωσαν τον ορισμό της συχνής υπερκυκλικότητας και ασχολήθηκαν με τη μελέτη των συχνά υπερκυκλικών τελεστών. Απαραίτητος για τον ορισμό της συχνής υπερκυκλικότητας είναι ο ορισμός της *lower density* ενός υποσυνόλου του $\mathbb{N}_0$.

Ορισμός 5.1.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}_0$. Η lower density του A ορίζεται να είναι*

$$\underline{\text{dens}}(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\text{card}\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1}.$$

Παρατήρηση: Έστω $a_N = \dfrac{\text{card}\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$ και $b_M = \inf\{a_N : N \leq M\}$, $M \in \mathbb{N}$. Τότε, $0 \leq a_N \leq 1$, $\forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \leq b_M \leq 1$, $\forall M \in \mathbb{N}$ και $(b_M)_{M\in\mathbb{N}}$ αύξουσα

$\Rightarrow$ υπάρχει το $\lim\limits_{M\to\infty} b_M = \underline{\text{dens}}(A)$ και $0 \leq \underline{\text{dens}}(A) \leq 1$.

Ορισμός 5.1.2. *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Ο T καλείται συχνά υπερκυκλκός αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό, να ισχύει*

$$\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\} > 0.$$

Σ' αυτή την περίπτωση το x καλείται συχνά υπερκυκλικό διάνυσμα για τον T και το $orb(x,T)$ συχνά επαναλαμβανόμενη τροχιά. Το σύνολο των συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων για τον T συμβολίζεται με $FHC(T)$.

Παρατήρηση: Ισχύει ότι $FHC(T) \subseteq HC(T)$. Πράγματι, έστω $x \in FHC(T)$ και $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Τότε, $\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\} > 0 \Rightarrow \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\} \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \overline{orb(x,T)} \cap U \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \overline{orb(x,T)} = X$$
$$\Rightarrow x \in HC(T).$$

Υπάρχει ένας ισοδύναμος ορισμός με αυτόν της συχνής υπερκυκλικότητας που δόθηκε παραπάνω. Προαπαιτούμενο για τη διατύπωσή του είναι το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 5.1.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}_0$ άπειρο και $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η γνησίως αύξουσα ακολουθία των στοιχείων του A. Τότε το $\underline{\text{dens}}(A) = \liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}$.*

Απόδειξη. Για διευκόλυνση υποθέτουμε ότι $n_1 > 0$, κάτι που δεν επηρεάζει την απόδειξη. Για κάθε $N \geq n_1$ φυσικό, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n_k \leq N < n_{k+1} \Rightarrow \frac{1}{n_{k+1}} \leq \frac{1}{N+1} \leq \frac{1}{n_k} \Rightarrow \frac{k}{n_{k+1}} \leq \frac{\text{card}\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1} \leq \frac{k}{n_k}.$$

<u>1ο Βήμα.</u> Το $\liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = \liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_{k+1}}$:

Το n_1 είναι ο πρώτος φυσικός που ανήκει στο A. Άρα το $n_1 \geq 1$. Επειδή το $n_2 > n_1$, έχουμε ότι $n_2 \geq 2$. Αποδεικνύεται λοιπόν επαγωγικά ότι $k \leq n_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ή αλλιώς $\dfrac{k}{n_k} \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει το $\liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = a \in [0,1]$. Θα αποδείξουμε ότι το $\liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_{k+1}} = a$. Πράγματι,

$$a = \liminf_{k\to\infty} \tfrac{k}{n_k} = \liminf_{k\to\infty} \tfrac{k+1}{n_{k+1}} = \liminf_{k\to\infty} \left(\tfrac{k}{n_{k+1}} + \tfrac{1}{n_{k+1}}\right) = \liminf_{k\to\infty} \tfrac{k}{n_{k+1}} + \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{n_{k+1}} = \liminf_{k\to\infty} \tfrac{k}{n_{k+1}}.$$

<u>2ο Βήμα.</u> Το $\underline{\text{dens}}(A) = \liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}$:

– Έστω $N \geq n_1$ φυσικός. Υπάρχει $k_N \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{k_N}{n_{k_N+1}} \leq \dfrac{\text{card}\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1} \leq \dfrac{k_N}{n_{k_N}}$.

Από το 1ο βήμα έχουμε ότι $\liminf\limits_{N\to\infty} \frac{k_N}{n_{k_N}} = \liminf\limits_{N\to\infty} \frac{k_N}{n_{k_N+1}} \Rightarrow \underline{\text{dens}}(A) = \liminf\limits_{N\to\infty} \frac{k_N}{n_{k_N}}$.

Οι όροι της $\left(\dfrac{k_N}{n_{k_N}}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι οι όροι της $\left(\dfrac{k}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ επαναλαμβανόμενοι ίσως περισσότερες από μία φορές. Άρα $\liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} \leq \liminf\limits_{N\to\infty} \frac{k_N}{n_{k_N}} = \underline{\text{dens}}(A)$.

– Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $N_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{k}{n_{k+1}} \leq \dfrac{\text{card}\{0 \leq n \leq N_k : n \in A\}}{N_k+1} \leq \dfrac{k}{n_k}$.

Αν θέσουμε $a_N = \dfrac{\text{card}\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1}$, $N \in \mathbb{N}$, τότε από το 1ο βήμα έχουμε ότι $\liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = \liminf\limits_{k\to\infty} a_{N_k}$.

Οι όροι της $(a_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι οι όροι της $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ επαναλαμβανόμενοι ίσως περισσότερες από μία φορές. Άρα $\underline{\text{dens}}(A) = \liminf\limits_{N\to\infty} a_N \leq \liminf\limits_{k\to\infty} a_{N_k} = \liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}$.

Άρα $\underline{\text{dens}}(A) = \liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}$.

Παρατήρηση: (i) Είναι προφανές ότι αν $A \subseteq \mathbb{N}_0$ είναι πεπερασμένο, τότε $\underline{\text{dens}}(A) = 0$.
(ii) Έστω $A \subseteq \mathbb{N}_0$ άπειρο και $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η γνησίως αύξουσα ακολουθία των στοιχείων του A. Τότε $\underline{\text{dens}}(A) > 0 \Leftrightarrow \liminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} > 0$

$$\Leftrightarrow \limsup_{k\to\infty} \tfrac{n_k}{k} = \liminf_{k\to\infty} \tfrac{k}{n_k} \in \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow \text{η } \left(\frac{n_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ είναι φραγμένη.}$$

Η τελευταία παρατήρηση οδηγεί σ᾽ έναν ορισμό που είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 5.1.2:

Ορισμός 5.1.3. *Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής. Ο T καλείται συχνά υπερκυκλικός αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $T^{n_k}x \in U$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\left(\frac{n_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία.*

Πρόταση 5.1.1. *Η ιδιότητα της συχνής υπερκυκλικότητας διατηρείται μέσω μίας quasiconjugate σχέσης.*

Απόδειξη. Έστω $T : X \to X$ ένας τελεστής που είναι *quasiconjugate* ενός άλλου τελεστή $S : Y \to Y$ μέσω μίας $\phi : Y \to X$. Δηλαδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών και $T \circ \phi = \phi \circ S$. Έστω ότι ο $S : Y \to Y$ είναι συχνά υπερκυκλικός. Θα αποδείξουμε ότι και ο $T : X \to X$ είναι συχνά υπερκυκλικός:
Έστω $x \in FHC(S)$. Θα αποδείξουμε ότι το $\phi(x) \in FHC(T)$. Πράγματι, έστω $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Επειδή η ϕ είναι συνεχής με πυκνό πεδίο τιμών, το $\phi^{-1}(U)$ είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο του Y. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε

$S^{n_k}x \in \phi^{-1}(U)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\left(\frac{n_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία
$\Rightarrow \phi(S^{n_k}x) \in U$, $\forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow T^{n_k}\phi(x) \in U$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\left(\frac{n_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία
$\Rightarrow \phi(x) \in FHC(T)$.

Στο τέλος της ενότητας αυτής, στην οποία δόθηκε ουσιαστικά μόνο ο ορισμός της συχνής υπερκυκλικότητας, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν συχνά υπερκυκλικοί τελεστές, κάτι που είναι βασικό για να έχει νόημα η θεωρία των συχνά υπερκυκλικών τελεστών. Απαραίτητο εργαλείο για την απόδειξη ύπαρξης είναι το επόμενο λήμμα, το οποίο αποδείχθηκε από τους Bayart και Grivaux [11].

Λήμμα 5.1.2. *Για κάθε $l, \nu \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $A(l,\nu) \subseteq \mathbb{N}_0$, που είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και έχουν $\underline{\text{dens}}(A(l,\nu)) > 0$, τέτοια ώστε για κάθε $n \in A(l,\nu)$ και $m \in A(k,\mu)$, να ισχύει ότι $n \geq \nu$ και $|n-m| \geq \nu + \mu$, αν $n \neq m$.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε κατασκευάζοντας μία οικογένεια συνόλων $I(l,\nu) \subseteq \mathbb{N}_0$, $l, \nu \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\underline{\text{dens}}(I(l,\nu)) > 0$, για κάθε $l, \nu \in \mathbb{N}$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την δυαδική αναπαράσταση του $n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j \equiv (a_0, a_1, a_2, ...)$, με $a_j \in \{0,1\}$, για κάθε $j \in \mathbb{N}_0$ και ορίζουμε τα $I(l,\nu) = \{n \in \mathbb{N} : n = (\underbrace{0,0,..,0}_{l-1}, \underbrace{1,1,...,1}_{\nu}, 0, *)\}$, όπου $*$ τυχαία "ουρά", για κάθε $l, \nu \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m \in I(l,\nu)$, έχουμε $m = a + \sum_{j=l+\nu}^{\infty} a_j 2^j = a + 2^{l+\nu} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+l+\nu} 2^j}_{\widetilde{m}} = a + 2^{l+\nu}\widetilde{m}$, όπου $\widetilde{m}$ φυσικός αριθμός και το

$a = (\underbrace{0,0,..,0,1,1,...,1,0}_{l+\nu},0,0,...) = \sum_{j=l-1}^{l+\nu-2} 2^j$. Οπότε, για κάθε $l,\nu \in \mathbb{N}$, υπάρχει $a \in \mathbb{N}$ ώστε το $I(l,\nu) = \{a + 2^{l+\nu}n : n \in \mathbb{N}\}$. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι $\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I(l,\nu) = \mathbb{N}$ και $I(l,\nu) \cap I(k,\mu) = \emptyset$, αν $l \neq k$ ή $\nu \neq \mu$. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{0 \leq m \leq N : m \in I(l,\nu)\}}{N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\left\{0 \leq n \leq \frac{N-a}{2^{l+\nu}} : n \in \mathbb{N}\right\}}{N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\left[\frac{N-a}{2^{l+\nu}}\right]+1}{N+1} = \frac{1}{2^{l+\nu}}$$

$$\Rightarrow \underline{\operatorname{dens}}(I(l,\nu)) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{0 \leq m \leq N : m \in I(l,\nu)\}}{N+1} = \frac{1}{2^{l+\nu}} > 0,\ \forall l,\nu \in \mathbb{N}.$$

Τα $I(l,\nu)$, $l,\nu \in \mathbb{N}$ δεν είναι η ζητούμενη οικογένεια επειδή δεν πληρούν την τελευταία ιδιότητα που θέλουμε να έχουν τα $A(l,\nu)$. Πράγματι, για το $1 \in I(1,1)$ και το $3 \in I(1,2)$, δεν ισχύει $|1-3| = 2 > 1+2$.

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Υπάρχουν $l,\nu \in \mathbb{N}$ ώστε $k \in I(l,\nu)$ και τότε θέτουμε $\delta_k = \nu$. Θεωρούμε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τα $n_k = 2\sum_{i=1}^{k-1}\delta_i + \delta_k$. Η ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα επειδή το

$$n_{k+1} = 2\sum_{i=1}^{k}\delta_i + \delta_{k+1} = 2\sum_{i=1}^{k-1}\delta_i + \delta_k + \delta_k + \delta_{k+1} = n_k + \delta_k + \delta_{k+1} > n_k, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε τα σύνολα $A(l,\nu) = \{n_k : k \in I(l,\nu)\}$, $l,\nu \in \mathbb{N}$.

• Τα $A(l,\nu)$, $l,\nu \in \mathbb{N}$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους:

Έστω $A(l,\nu) \cap A(k,\mu) \neq \emptyset$ με $l \neq k \Rightarrow \exists a \in A(l,\nu) \cap A(k,\mu)$

$\Rightarrow$ υπάρχουν $p \in I(l,\nu)$ και $q \in I(k,\mu)$ ώστε $a = n_p = n_q$

$\Rightarrow p = q \quad ((n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα)

$\Rightarrow I(l,\nu) \cap I(k,\mu) \neq \emptyset$ και $l \neq k$. Άτοπο.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $A(l,\nu) \cap A(k,\mu) = \emptyset$, αν $\nu \neq \mu$.

• Τα $A(l,\nu)$, $l,\nu \in \mathbb{N}$ έχουν θετική *lower density* :

Ισχυρισμός: Έστω $l,\nu \in \mathbb{N}$. Αν $N \in \mathbb{N}$ και $N+2 < l+\nu$, τότε κάθε στοιχείο του $I(l,\nu)$ είναι μεγαλύτερο του 2^N.

Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $N+2 < l+\nu$. Τότε για κάθε $k \in I(l,\nu)$, υπάρχει $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$k = a + 2^{l+\nu}\widetilde{k} = \sum_{j=l-1}^{l+\nu-2} 2^j + 2^{l+\nu}\widetilde{k} = \sum_{j=l-1}^{l+\nu-1} 2^j + 2^{l+\nu-2} + 2^{l+\nu}\widetilde{k} > \sum_{j=l-1}^{l+\nu-1} 2^j + 2^N + 2^{l+\nu}\widetilde{k} > 2^N.$$

Άρα κάθε στοιχείο του $I(l,\nu)$ είναι μεγαλύτερο του 2^N.

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Με βάση τον ισχυρισμό και το γεγονός ότι τα $I(l,\nu)$, $l,\nu \in \mathbb{N}$, αποτελούν μία διαμέριση του $\mathbb{N}$, έχουμε ότι για κάθε $i \in \{1,...,2^N\}$, υπάρχουν $l_i,\nu_i \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $l_i + \nu_i \leq N+2$ και $i \in I(l_i,\nu_i)$. Τότε,

$$n_{2^N} = 2\sum_{i=1}^{2^N-1}\delta_i + \delta_{2^N} \leq 2\sum_{i=1}^{2^N}\delta_i = 2\sum_{i=1}^{2^N}\nu_i \leq 2\sum_{i=1}^{2^N} 2^{N+2-(l_i+\nu_i)}\nu_i \leq 2\sum_{l+\nu\leq N+2} 2^{N+2-(l+\nu)}\nu$$

$$\Rightarrow n_{2^N} \leq \underbrace{\left(8\sum_{l,\nu\geq 1}\frac{\nu}{2^{l+\nu}}\right)}_{M'<\infty}2^N$$

$\Rightarrow n_{2^N} \leq M'2^N$, $\forall N \in \mathbb{N}$.
Έστω $k \in \mathbb{N}$. Υπάχει $N_k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2^{N_k-1} \leq k < 2^{N_k} \Rightarrow n_k < n_{2^{N_k}} \leq M'2^{N_k} \leq 2M'k$.
Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $n_k \leq Mk$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Έστω $l, \nu \in \mathbb{N}$ και έστω $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ η γνησίως αύξουσα ακολουθία των στοιχείων του $I(l,\nu)$. Επειδή το $\underline{\text{dens}}(I(l,\nu)) > 0$, θα υπάρχει $K > 0$ τέτοιο ώστε $k_j \leq Kj$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τότε για την $(n_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, η οποία είναι η γνησίως αύξουσα ακολουθία στοιχείων του $A(l,\nu)$, ισχύει ότι $n_{k_j} \leq Mk_j \leq MKj$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα, $\underline{\text{dens}}(A(l,\nu)) > 0$.

• Για κάθε $n \in A(l,\nu)$ και $m \in A(k,\mu)$, ισχύει ότι $n \geq \nu$ και $|n-m| \geq \nu + \mu$, αν $n \neq m$:
Έστω $n_p \in A(l,\nu)$ και $n_q \in A(k,\mu)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $p > q$. Τότε,

$$- \ n_p = 2\sum_{i=1}^{p-1}\delta_i + \delta_p = 2\sum_{i=1}^{p-1}\delta_i + \nu \geq \nu,$$

$$- \ n_p - n_q = 2\sum_{i=1}^{p-1}\delta_i + \delta_p - 2\sum_{i=1}^{q-1}\delta_i - \delta_q = 2\sum_{i=q}^{p-1}\delta_i + \delta_p - \delta_q \geq \delta_p + \delta_q = \nu + \mu.$$

Οι Bayart και Grivaux [11] απέδειξαν ότι οι τελεστές Birkhoff έχουν συχνά υπερκυκλικό διάνυσμα. Για την απλούστευση της απόδειξης, λαμβάνεται υπόψη και η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.1.2 (Τελεστές Birkhoff). *Έστω $a \in \mathbb{C}^*$ και $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ ο τελεστής με τύπο $T_af(z) = f(z+a)$, $z \in \mathbb{C}$. Τότε ο T_1 είναι conjugate του T_a, για κάθε $a \in \mathbb{C}^*$.*

Απόδειξη. Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $\Phi : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ τέτοιος ώστε $\Phi \circ T_a = T_1 \circ \Phi$:

Ορίζουμε τις απεικονίσεις $\Phi, \Psi : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ με τύπους αντίστοιχα $\Phi f(z) = f(az)$, $z \in \mathbb{C}$, και $\Psi f(z) = f(\frac{1}{a}z)$, $z \in \mathbb{C}$, για κάθε $f \in H(\mathbb{C})$.
– Έστω $f \in H(\mathbb{C})$. Τότε $(\Phi \circ \Psi)(f)(z) = \Phi(\Psi f)(z) = \Phi f(\frac{1}{a}z) = f(\frac{1}{a}az) = f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Δηλαδή $(\Phi \circ \Psi)(f) = f$ και ομοίως $(\Psi \circ \Phi)(f) = f$. Άρα η Φ είναι 1-1 και επί με $\Phi^{-1} = \Psi$.
– Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f \in H(\mathbb{C})$ ώστε $f_n \longrightarrow f$ τοπικά ομοιόμορφα. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sup_{|z|\leq k}|\Phi f_n(z) - \Phi f(z)| = \sup_{|z|\leq n}|f_n(az) - f(az)| \leq \sup_{|w|\leq |a|k}|f_n(w) - f(w)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow \Phi f_n \longrightarrow \Phi f$ τοπικά ομοιόμορφα
$\Rightarrow$ η Φ είναι συνεχής.
Ομοίως αποδεικνύεται ότι η $\Psi = \Phi^{-1}$ είναι συνεχής.
– Έστω $f \in H(\mathbb{C})$. Τότε $(\Phi \circ T_a)(f)(z) = \Phi(T_af)(z) = \Phi f(z+a) = f(az+a)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $(T_1 \circ \Phi)(f)(z) = T_1(\Phi f)(z) = T_1 f(az) = f(a(z+1)) = f(az+a)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Άρα $(\Phi \circ T_a)(f)(z) = (T_1 \circ \Phi)(f)(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow (\Phi \circ T_a)(f) = (T_1 \circ \Phi)(f)$.

Πρόταση 5.1.3 (Τελεστές Birkhoff). *Έστω $a \in \mathbb{C}^*$. Τότε ο τελεστής $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ με τύπο $T_af(z) = f(z+a)$, $z \in \mathbb{C}$, είναι συχνά υπερκυκλικός.*

Απόδειξη. Με βάση την πρόταση 5.1.1 και την πρόταση 5.1.2, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T_1 είναι συχνά υπερκυκλικός.

Έστω $A(l,\nu)$, $l,\nu \in \mathbb{N}$ να είναι τα σύνολα του λήμματος 5.1.2 και έστω $(P_l)_{l\in\mathbb{N}}$ μία πυκνή ακολουθία πολυωνύμων. Τέτοια ακολουθία υπάρχει επειδή το σύνολο των πολυωνύμων με ρητούς συντελεστές είναι πυκνό στο $H(\mathbb{C})$. Έστω $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η γνησίως αύξουσα ακολουθία των στοιχείων του αριθμήσιμου συνόλου $\bigcup\limits_{l,n\geq 1} A(l,\nu)$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $l,\nu \in \mathbb{N}$ ώστε $n_k \in A(l,\nu)$. Σ' αυτή την περίπτωση θέτουμε $B_k = \overline{D(n_k, r_k)}$, με $r_k = \frac{\nu}{2}$, και ορίζουμε στο B_k τη συνάρτηση $g_k(z) = P_l(z-n_k)$, $z \in \mathbb{C}$. Από το λήμμα 5.1.2 συνεπάγεται ότι τα B_k, $k \in \mathbb{N}$, είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Πράγματι, έστω $k,m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $k \neq m$. Τότε,

$$n_k \neq n_m \Rightarrow |n_k - n_m| \geq \nu + \mu > \frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} = r_k + r_m, \text{ όπου } n_k \in A(l,\nu) \text{ και } n_m \in A(p,\mu)$$
$$\Rightarrow B_k \cap B_m = \emptyset.$$

Το "κλειδί" αυτής της απόδειξης είναι ένα πόρισμα του θεωρήματος Runge:

Έστω Ω απλά συνεκτικό χωρίο του $\mathbb{C}$. Τότε το σύνολο των πολυωνύμων είναι πυκνό στο $H(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f$ ολόμορφη$\}$.

Θα εφαρμόσουμε αυτό το πόρισμα αναδρομικά για να κατασκευάσουμε μία ακολουθία ακεραίων συναρτήσεων $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Έστω $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία θετικών αριθμών, τους όρους της οποίας θα προσδιορίσουμε αργότερα. Θέτουμε $f_1 = g_1$ και υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει τις ακέραιες συναρτήσεις $f_1, ..., f_k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.

$$B_k \cap B_{k+1} = \emptyset \Rightarrow S_k \cap B_{k+1} = \emptyset, \text{ όπου } S_k = \overline{D(0, n_k + r_k)} \supseteq B_k$$
$$\Rightarrow \text{υπάρχουν } U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C} \text{ ανοικτά και απλά συνεκτικά τέτοια ώστε}$$
$$S_k \subseteq U_1,\ B_{k+1} \subseteq U_2 \text{ και } U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}$ με τύπο $h(z) = \begin{cases} f_k(z) & , z \in U_1 \\ g_{k+1}(z) & , z \in U_2 \end{cases}$. Το σύνολο $\Omega = U_1 \cup U_2$ είναι απλά συνεκτικό χωρίο, το $K = S_k \cup B_{k+1} \subseteq \Omega$ είναι συμπαγές και η $h : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη. Για το $\varepsilon_k > 0$, θα υπάρχει πολυώνυμο f_{k+1} (άρα ακέραια συνάρτηση) τέτοιο ώστε $\sup\limits_{z\in K} |f_{k+1}(z) - h(z)| < \varepsilon_k \Rightarrow \begin{cases} \sup\limits_{z\in S_k} |f_{k+1}(z) - f_k(z)| < \varepsilon_k & (*) \\ \sup\limits_{z\in B_{k+1}} |f_{k+1}(z) - g_{k+1}(z)| < \varepsilon_k & (**) \end{cases}$.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε μία ακολουθία ακεραίων συναρτήσεων $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ οι οποίες πληρούν τις ιδιότητες $(*), (**)$.

Αν η ακολουθία $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύει $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, τότε η συνάρτηση $f(z) = f_1(z) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(z) - f_k(z)) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(z)$, $z \in \mathbb{C}$, είναι ακέραια συνάρτηση:

Έστω $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $K \subseteq S_k$, $\forall k \geq k_0$ και άρα από $(*)$ έχουμε ότι $|f_{k+1}(z) - f_k(z)| < \varepsilon_k$, $\forall z \in K$, $\forall k \geq k_0$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=M}^{N}(f_{k+1}(z) - f_k(z))\right| \leq \sum_{k=M}^{N}|f_{k+1}(z) - f_k(z)| \leq \sum_{k=M}^{N}\varepsilon_k,\ \forall z \in K,\ \forall N, M \geq k_0$$

$$\Rightarrow \sup_{z\in K}\left|\sum_{k=M}^{N}(f_{k+1}(z)-f_k(z))\right| \overset{N,M\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{N}(f_{k+1}(z)-f_k(z))\right)_{N\in\mathbb{N}} \text{ ομοιόμορφα Cauchy στο } K$$
$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{N}(f_{k+1}(z)-f_k(z))\right)_{N\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα.}$$

Οπότε η $f(z) = f_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(z)-f_k(z))$ ακέραια συνάρτηση. Είναι προφανές επίσης ότι

$$f_N(z) = f_1(z) + \sum_{k=1}^{N-1}(f_{k+1}(z)-f_k(z)) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{k+1}(z)-f_k(z)) = f(z),\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

Έστω $k\in\mathbb{N}$. Αν θέσουμε επιπλέον $\varepsilon_0 = 0$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|f(z)-g_k(z)| &= \left|f_1(z) + \sum_{j=1}^{\infty}(f_{j+1}(z)-f_j(z)) - g_k(z)\right| \\
&= \left|\sum_{j=k}^{\infty}(f_{j+1}(z)-f_j(z)) + f_k(z) - g_k(z)\right| \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty}|f_{j+1}(z)-f_j(z)| + |f_k(z)-g_k(z)| \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty}\sup_{z\in B_k}|f_{j+1}(z)-f_j(z)| + \sup_{z\in B_k}|f_k(z)-g_k(z)| \\
&\leq \sum_{j=k}^{\infty}\sup_{z\in S_k}|f_{j+1}(z)-f_j(z)| + \sup_{z\in B_k}|f_k(z)-g_k(z)| \\
&\underset{(**)}{\overset{(*)}{\leq}} \sum_{j=k}^{\infty}\varepsilon_j + \varepsilon_{k-1} = \sum_{j=k-1}^{\infty}\varepsilon_j,\ \forall z\in B_k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{z\in B_k}|f(z)-g_k(z)| \leq \sum_{j=k-1}^{\infty}\varepsilon_j$$

$$\Rightarrow \sup_{|z-n_k|\leq\frac{\nu}{2}}|f(z)-P_l(z-n_k)| \leq \sum_{j=k-1}^{\infty}\varepsilon_j.$$

Για κάθε $k\in\mathbb{N}$, υπάρχουν $l_k,\nu_k\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε $n_k\in A(l_k,\nu_k)$. Θέτουμε $\mu_1=\nu_1$, $\mu_{k+1} = \max\{\nu_{k+1},\mu_k\}+1 > \mu_k$ και $\varepsilon_k = \frac{1}{2^{\mu_{k+1}+1}}$, για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Τότε έχουμε ότι $\sum_{j=k-1}^{\infty}\varepsilon_j = \sum_{j=k-1}^{\infty}\frac{1}{2^{\mu_{j+1}+1}} \leq \sum_{j=\mu_k+1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^{\mu_k+1}} = \frac{1}{2^{\mu_k}} \leq \frac{1}{2^{\nu_k}} < \frac{1}{\nu_k}$, για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Έχοντας πλέον κατασκευάσει την $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sup_{|z-n_k|\leq\frac{\nu}{2}}|f(z)-P_l(z-n_k)| < \frac{1}{\nu}, \text{ αν } n_k\in A(l,\nu) \Rightarrow \sup_{|z|\leq\frac{\nu}{2}}|T_1^{n_k}f(z)-P_l(z)| < \frac{1}{\nu}, \text{ αν } n_k\in A(l,\nu).$$

Για κάθε $l,\nu \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τα σύνολα $U_{l,\nu} = \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\leq \frac{\nu}{2}} |g(z) - P_l(z)| < \frac{1}{\nu} \right\}$ και με βάση το λήμμα 2.1.2 θα αποδείξουμε ότι αποτελούν βάση της τοπολογίας του $H(\mathbb{C})$:

– Έστω $l,\nu \in \mathbb{N}$. Τότε για $n = \nu$ και $\varepsilon = \frac{1}{n}$, ισχύει $\{g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\leq n} |g(z) - P_l(z)| < \varepsilon\} \subseteq U_{l,\nu}$.

Πράγματι, έστω $g \in \{g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\leq n} |g(z) - P_l(z)| < \varepsilon\}$

$$\Rightarrow \sup_{|z|\leq n} |g(z) - P_l(z)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{|z|\leq \frac{\nu}{2}} |g(z) - P_l(z)| \leq \sup_{|z|\leq n} |g(z) - P_l(z)| < \varepsilon = \frac{1}{\nu}$$

$$\Rightarrow g \in U_{l,\nu}.$$

Άρα το $U_{l,\nu}$ είναι ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το P_l.

– Έστω $U \subseteq H(\mathbb{C})$ ανοικτό και $h \in U$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για το ανοικτό $V = \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\leq n} |g(z) - h(z)| < \frac{1}{n} \right\}$ να ισχύει $V \subseteq U$. Επειδή η $(P_l)_{l\in\mathbb{N}}$ πυκνή, υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $P_l \in \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z|\leq n} |g(z) - h(z)| < \frac{1}{2n} \right\}$. Αν θέσουμε $\nu = 2n$ τότε θα έχουμε $h \in U_{l,\nu} \subseteq V \subseteq U$. Πράγματι,

- $\sup_{|z|\leq \frac{\nu}{2}} |h(z) - P_l(z)| = \sup_{|z|\leq n} |h(z) - P_l(z)| < \frac{1}{2n} = \frac{1}{\nu} \Rightarrow h \in U(l,\nu)$,
- $g \in U_{l,\nu} \Rightarrow |g(z) - h(z)| \leq |g(z) - P_l(z)| + |P_l(z) - h(z)| < \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$, $\forall z : |z| \leq \frac{\nu}{2} = n$

$$\Rightarrow \sup_{|z|\leq n} |g(z) - h(z)| < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow g \in V.$$

Είμαστε πια σε θέση να αποδείξουμε ότι ο T_1 είναι συχνά υπερκυκλικός . Έστω $U \subseteq H(\mathbb{C})$ μη κενό ανοικτό. Υπάρχουν $l,\nu \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $U_{l,\nu} \subseteq U$ και από τον τρόπο που κατασκευάστηκε η f, προκύπτει ότι $T_1^{n_k} f \in U(l,\nu) \subseteq U$, για κάθε $n_k \in A(l,\nu)$. Τότε όμως έχουμε, $\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : T_1^n f \in U\} \geq \underline{\text{dens}}(A(l,\nu)) > 0$. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμο 5.1.2, ο T_1 είναι συχνά υπερκυκλικός με συχνά υπερκυκλικό διάνυσμα την f.

Κάθε συχνά υπερκυκλικός τελεστής είναι προφανώς υπερκυκλικός. Για την ακρίβεια αποδεικνύεται ότι κάθε συχνά υπερκυκλικός τελεστής είναι ασθενώς *mixing*. Για την απόδειξη αυτή, χρειάζεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.1 (Erdös-Sárközy). *Έστω $A \subseteq \mathbb{N}_0$ με θετική lower density. Τότε το σύνολο $A - A = \{n - m : n, m \in A \text{ και } n \geq m\}$ είναι συνδετικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $D = A - A$ δεν είναι συνδετικό. Θα καταλήξουμε σε άτοπο:

Από την πρόταση 1.5.2 συνεπάγεται ότι το $\mathbb{N}_0 \setminus D$ περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών. Προφανώς, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}_0 \setminus D$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n_2 \in \mathbb{N}_0 \setminus D$ τέτοιο ώστε $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}_0 \setminus D$. Πράγματι, έστω ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}_0 \setminus D$, ισχύει ότι $n_1 + m \in D$. Επειδή το $\mathbb{N}_0 \setminus D$ περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών, θα περιέχει και διάστημα φυσικών ακτίνας $2n_1$ και κέντρου $k \in \mathbb{N}_0 \setminus D$. Τότε όμως, το $k + n_1 \in D \cap (\mathbb{N}_0 \setminus D) = \emptyset$. Άτοπο. Οπότε, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}_0 \setminus D$ τέτοιο ώστε $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}_0 \setminus D$. Δηλαδή, $\{n_1, n_2, n_1 + n_2\} \subseteq \mathbb{N}_0 \setminus D$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}_0 \setminus D$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\{n_1, n_2, n_3, n_1+n_2, n_1+n_3, n_2+n_3, n_1+n_2+n_3\} \subseteq \mathbb{N}_0 \setminus D$ και γενικά συνεχίζοντας κατ᾽ αυτό τον τρόπο, κατασκευάζουμε μία ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}_0 \setminus D$ για την οποία ισχύει ότι κάθε πεπερασμένο άθροισμα όρων της ανήκει στο $\mathbb{N}_0 \setminus D$.

Ορίζουμε τα σύνολα $A_k = A + n_1 + \cdots + n_k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επειδή $\underline{\text{dens}}(A) > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\underline{\text{dens}}(A) > \dfrac{1}{m}$.

Ισχυρισμός: Ισχύει ότι $\underline{\text{dens}}(A_k) = \underline{\text{dens}}(A)$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Θα αποδείξουμε τη γενικότερη περίπτωση. Έστω $B = A + l$ με το $l \in \mathbb{N}_0$. Τότε έχουμε,

$$\underbrace{\frac{\text{card}\{0 \le n \le N : n \in B\}}{N+1}}_{b_N} = \underbrace{\frac{\text{card}\{0 \le n \le N-l : n \in A\}}{N-l+1}}_{a_{N-l}} \cdot \underbrace{\frac{N-l+1}{N+1}}_{c_N}, \ \forall N \ge l$$

$$\Rightarrow \liminf_{N\to\infty} b_N = \liminf_{N\to\infty}(a_{N-l} \cdot c_N) = \lim_{N\to\infty} c_N \cdot \liminf_{N\to\infty} a_N = \liminf_{N\to\infty} a_N$$

$$\Rightarrow \underline{\text{dens}}(B) = \underline{\text{dens}}(A).$$

Επειδή $\underline{\text{dens}}(A_k) = \underline{\text{dens}}(A) > \dfrac{1}{m}$ για κάθε $k \in \{1, 2, ..., m\}$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\text{card}\{0 \le n \le N : n \in A_k\}}{N+1} > \frac{1}{m}, \ \forall k \in \{1, 2, ..., m\}$$

$$\Rightarrow \text{card}\{0 \le n \le N : n \in A_k\} > \frac{N+1}{m}, \ \forall k \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Αν τα A_k, $k = 1, 2, ..., m$, είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, τότε έχουμε ότι

$$\text{card}\{0 \le n \le N : n \in A_1 \cup ... \cup A_m\} = \sum_{k=1}^{m} \text{card}\{0 \le n \le N : n \in A_k\} > m\frac{N+1}{m} = N+1,$$

πράγμα το οποίο είναι αδύνατο. Άρα υπάρχουν $j < k \le m$ τέτοια ώστε $A_j \cap A_k \ne \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $p \in A_j \cap A_k \Rightarrow \exists a_1, a_2 \in A$ τέτοια ώστε $p = a_1 + n_1 + \cdots + n_k = a_2 + n_1 + \cdots + n_j$

$$\Rightarrow 0 < n_{j+1} + \cdots + n_k = a_2 - a_1 \in A - A = D. \text{ Άτοπο.}$$

Το επόμενο θεώρημα αποδείχθηκε από τους Grosse-Erdmann και Peris [27].

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω $T : X \to X$ ένας συχνά υπερκυκλικός τελεστής. Τότε ο T είναι ασθενώς mixing.*

Απόδειξη. Ιο Βήμα. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά και $W \subseteq X$ ανοικτή γειτονιά του 0, ισχύει ότι $N(U, W) \cap N(W, V) \ne \emptyset$:

Επειδή ο T είναι συχνά υπερκυκλικός, θα είναι υπερκυκλικός τελεστής και άρα από το θεώρημα Birkhoff, ο T είναι *topologically transitive*. Οπότε, για τα U και W, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^{n_0}(U) \cap W \ne \emptyset \Rightarrow U_0 = U \cap T^{-n_0}(W) \ne \emptyset$ ανοικτό. Έστω $x \in FHC(T)$. Για το U_0, υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N}_0$ με $\underline{\text{dens}}(A) > 0$ τέτοιο ώστε $T^n x \in U_0$, για κάθε $n \in A$. Τότε,

$T^{n_0+m-n}(T^n x) = T^{n_0}(T^m x) \in T^{n_0}(U_0) \subseteq W$, $\forall m, n \in A$ με $m \geq n$
$\Rightarrow T^{n_0+m-n}(U) \cap W \supseteq T^{n_0+m-n}(U_0) \cap W \neq \emptyset$, $\forall m, n \in A$ με $m \geq n$
$\Rightarrow n_0 + m - n \in N(U, W)$, $\forall m, n \in A$ με $m \geq n$
$\Rightarrow n_0 + A - A \subseteq N(U, W)$ και από το θεώρημα Erdös-Sárközy, το $A - A$ είναι συνδετικό
$\Rightarrow N(U, W)$ είναι συνδετικό. **(∗)**

Επειδή ο T είναι συνεχής και γραμμική απεικόνιση, το $T^{-k}(W)$ είναι ανοικτή γειτονιά του 0, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε το σύνολο $W_0 = \bigcap_{k=1}^{m} T^{-k}(W)$ είναι μία ανοικτή γειτονιά του 0 τέτοια ώστε $T^k(W_0) \subseteq W$, για κάθε $k \in \{1, ..., m\}$. Ο T είναι *topologically transitive*, άρα υπάρχει $K > m$ τέτοιο ώστε $T^K(W_0) \cap V \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists y \in W_0$ τέτοιο ώστε $T^K y \in V$
$\Rightarrow T^k y \in W$, $\forall k \in \{1, ..., m\}$ και $T^K y \in V$
$\Rightarrow T^{K-k}(T^k y) \in T^{K-k}(W) \cap V$, $\forall k \in \{1, ..., m\}$
$\Rightarrow K - k \in N(W, V)$, $\forall k \in \{1, ..., m\}$.

Το m ήταν τυχαίο. Άρα το $N(W, V)$ περιέχει οσοδήποτε μεγάλου μήκους διαστήματα φυσικών. **(∗∗)**

Από **(∗)** και **(∗∗)** συνεπάγεται ότι $N(U, W) \cap N(W, V) \neq \emptyset$.

2ο Βήμα. Σύμφωνα με την πρόταση 1.4.6, αν αποδείξουμε ότι για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά ισχύει ότι $N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset$, τότε ο T θα είναι ασθενώς *mixing* :

Έστω $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Από το λήμμα 2.1.3 γνωρίζουμε ότι υπάρχουν U_1, V_1 μη κενά ανοικτά υποσύνολα των U, V αντίστοιχα και ανοικτές γειτονιές του 0 $W, \widetilde{W}$ ώστε $U_1 + W \subseteq U$ και $V_1 + \widetilde{W} \subseteq V$. Αν επιπλέον θέσουμε $W_1 = W \cap \widetilde{W}$, τότε το W_1 είναι μία ανοικτή γειτονιά του 0 τέτοια ώστε $U_1 + W_1 \subseteq U$ και $V_1 + W_1 \subseteq V$.

Ισχυρισμός: Υπάρχει ανοικτό σύνολο $U_2 \subseteq U_1$ και ανοικτή γειτονιά του 0 $W_2 \subseteq W_1$ τέτοια ώστε $N(W_2, U_2) \subseteq N(W_1, V_1)$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Επειδή ο T είναι *topologically transitive*, υπάρχει $m \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Αν θέσουμε $U_2 = U_1 \cap T^{-m}(V_1)$, τότε $U_2 \subseteq U_1$ και $T^m(U_2) \subseteq V_1$. Επίσης, ο T είναι συνεχής και γραμμική απεικόνιση. Άρα το σύνολο $W_2 = W_1 \cap T^{-m}(W_1)$ είναι μία ανοικτή γειτονιά του 0 τέτοια ώστε $W_2 \subseteq W_1$ και $T^m(W_2) \subseteq W_1$.

Έστω $n \in N(W_2, U_2) \Rightarrow \exists x \in W_2$ τέτοιο ώστε $T^n x \in U_2$
$\Rightarrow T^m x \in T^m(W_2) \subseteq W_1$ και $T^n(T^m x) = T^m(T^n x) \in T^m(U_2) \subseteq V_1$
$\Rightarrow T^n(W_1) \cap V_1 \neq \emptyset$
$\Rightarrow n \in N(W_1, V_1)$.

Από το 1ο βήμα γνωρίζουμε ότι το $N(U_2, W_2) \cap N(W_2, U_2) \neq \emptyset$. Με βάση τον ισχυρισμό θα έχουμε επίσης ότι υπάρχει $k \in N(U_2, W_2) \cap N(W_2, U_2) \subseteq N(U_2, W_2) \cap N(W_1, V_1)$. Άρα υπάρχουν $u_2 \in U_2$, $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$ τέτοια ώστε $T^k u_2 \in W_2$, $T^k w_1 \in V_1$ και $T^k w_2 \in U_2$. Αν θέσουμε $u_3 = u_2 + w_2 \in U_2 + W_2 \subseteq U_1 + W_1 \subseteq U$ και $u_4 = u_2 + w_1 \in U_2 + W_1 \subseteq U_1 + W_1 \subseteq U$, τότε $T^k u_3 = T^k u_2 + T^k w_2 \in W_2 + U_2 \subseteq U$ και $T^k u_4 = T^k u_2 + T^k w_1 \in W_2 + V_1 \subseteq W_1 + V_1 \subseteq V$
$\Rightarrow T^k(U) \cap U \neq \emptyset$ και $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$
$\Rightarrow k \in N(U, U) \cap N(U, V)$.

5.2 Το σύνολο των συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων

Στη συνέχεια αποδεικνύεται το ανάλογο του θεωρήματος της Ansari στο επίπεδο των συχνά υπερκυκλικών τελεστών. Το θεώρημα αποδείχθηκε αρχικά απο τους Bayart και Grivaux [11], ενώ η εναλλακτική απόδειξη που δίνεται εδώ, έγινε απο τους Grosse-Erdmann και Peris [28].

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $T : X \to X$ τελεστής. Τότε ισχύει ότι $FHC(T) = FHC(T^p)$, για κάθε $p \in \mathbb{N}$. Οπότε, ο T είναι συχνά υπερκυκλικός τελεστής, αν και μόνο αν, κάθε δυναμή του, T^p, είναι συχνά υπερκυκλικός τελεστής.*

Απόδειξη. Κατ᾽ αρχήν θα αποδείξουμε ότι $FHC(T^p) \subseteq FHC(T)$. Έστω $x \in FHC(T^p)$ και έστω $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Τότε υπάρχει $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών και $M > 0$ τέτοια ώστε $(T^p)^{n_k}x \in U$ και $n_k \leq Mk$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Οπότε για το τυχαίο μη κενό ανοικτό $U \subseteq X$, υπάρχει $(pn_k)_{k\in\mathbb{N}}$ γνησιώς αύξουσα ακολουθία φυσικών και $M' = pM > 0$ τέτοια ώστε $T^{pn_k}x \in U$ και $pn_k \leq M'k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή το $x \in FHC(T)$.

Μένει να αποδείξουμε ότι $FHC(T) \subseteq FHC(T^p)$. Έστω $x \in FHC(T)$ και έστω $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Ορίζουμε την ακολουθία φυσικών $n_k = kp - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι, επειδή $n_{k+1} = (k+1)p - 1 = kp - 1 + p = n_k + p$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, η $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}(n_{k+1} - n_k) = p < \infty$. Δηλαδή, η $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι συνδετική ακολουθία.

Ο T είναι συχνά υπερκυκλικός. Άρα από το θεώρημα 5.1.2 ο T είναι ασθενώς *mixing*. Ανατρέχοντας επίσης στην πρόταση 1.6.1, για την συνδετική ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έπεται ότι η $(T^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι *topologically transitive*.

– Το $U \subseteq X$ είναι μη κενό ανοικτό. Τότε θα υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^{n_{k_1}}(U) \cap U \neq \emptyset$. Αν θέσουμε $m_1 = n_{k_1} = k_1 p - 1$, θα έχουμε ότι το $U_1 = U \cap T^{-m_1}(U)$ είναι μη κενό ανοικτό.

– Τα σύνολα $U_1, T^{-m_1}(U_1)$ είναι μη κενά ανοικτά. Τότε θα υπάρχει $\tilde{k}_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^{n_{\tilde{k}_2}}(U_1) \cap T^{-m_1}(U_1) \neq \emptyset$. Αν θέσουμε $m_2 = n_{\tilde{k}_2} + m_1 = \underbrace{(\tilde{k}_2 + k_1)}_{k_2}p - 2 = k_2 p - 2$, θα έχουμε ότι το $U_2 = U_1 \cap T^{-(n_{\tilde{k}_2}+m_1)}(U_1) = U_1 \cap T^{-m_2}(U_1)$ είναι μη κενό ανοικτό.

Συνεχίζοντας κατ᾽ αυτό τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακεραίους $m_j \geq 0$, $j = 1, ..., p-1$, οι οποίοι είναι της μορφής $m_j = k_j p - j$, τέτοιοι ώστε $U_j = U_{j-1} \cap T^{-m_j}(U_{j-1})$, για κάθε $j \in \{1, ..., p-1\}$, με $U_0 = U$. Θέτουμε επιπλέον $k_0 = 0$ και $V = U_{p-1}$.

Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε τα U_j, $j = 0, ..., p-1$, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} V \subseteq U_j \subseteq T^{-m_j}(U_{j-1}),\ \forall j \in \{1, ..., p-1\} &\Rightarrow T^{m_j}(V) \subseteq U_{j-1} \subseteq U,\ \forall j \in \{1, ..., p-1\} \\ &\Rightarrow T^{k_j p - j}(V) \subseteq U,\ \forall j \in \{0, 1, ..., p-1\}. \end{aligned}$$

Επειδή το $x \in FHC(T)$, για το μη κενό ανοικτό V, υπάρχει $A \subseteq \mathbb{N}_0$ με $\underline{\text{dens}}(A) > 0$ έτσι ώστε $T^n x \in V$, για κάθε $n \in A$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ με τύπο $f(n) = \frac{n-j}{p} + k_j$, αν $n = j (mod\, p)$, $j = 0, 1, ..., p-1$. Η f είναι προφανώς καλά ορισμένη επειδή το $\frac{n-j}{p} = m \in \mathbb{N}_0$.

Θέτουμε $B = f(A)$. Για $p = 1$ δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα. Οπότε το p της υπόθεσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2. Επίσης από τον τρόπο που κατασκευάστηκαν τα k_j, $j = 0, 1, ..., p-1$, προκύπτει ότι $k_0 \leq k_1 \leq ... \leq k_{p-1}$.

– Ισχύει ότι $\underline{\text{dens}}(B) \geq \underline{\text{dens}}(A) > 0$. Πράγματι, έστω $N \geq 2k_{p-1}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε

$n \in A$ ώστε $0 \leq n \leq N$, θα έχουμε ότι $0 \leq \dfrac{n-j}{p} + k_j \leq \dfrac{N-j}{p} + k_j \leq \dfrac{N-j}{2} + \dfrac{N}{2} \leq N$.
Άρα, $\dfrac{\text{card}\{0 \leq n \leq N : n \in A\}}{N+1} \leq \dfrac{\text{card}\{0 \leq f(n) \leq N : n \in A\}}{N+1}$, $\forall N \geq 2k_{p-1}$

$\Rightarrow \underline{\text{dens}}(A) \leq \underline{\text{dens}}(B)$.
Οπότε το B έχει θετική *lower density*.
− Έστω $m \in B$. Υπάρχει $n \in A$ τέτοιο ώστε $m = f(n) = \dfrac{n-j}{p} + k_j$, με $n = j(mod\ p)$.
Τότε, $(T^p)^m x = T^{n-j+k_j p}x = T^{k_j p - j}(T^n x) \in T^{k_j p - j}(V) \subseteq U$. Δηλαδή, $(T^p)^m x \in U$, $\forall m \in B$.
Άρα $x \in FHC(T^p)$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες, το σύνολο των συχνά υπερκυκλικών διανυσμάτων είναι σχετικά "μικρό". Η απόδειξη δίνεται από τους Bayart και Grivaux [11].

Πρόταση 5.2.1. *Έστω $T : X \to X$ τελεστής. Αν υπάρχει πυκνό υποσύνολο X_0 του X τέτοιο ώστε $T^n x \to 0$, για κάθε $x \in X_0$, τότε το $FHC(T)$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας Baire. Δηλαδή είναι αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων.*

Απόδειξη. Έστω $||\cdot||_F : X \to \mathbb{R}_+$ η F-νόρμα του χώρου Fréchet X και έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $V = \{x \in X : ||x||_F > \delta\}$ να είναι διαφορετικό του κενού.
<u>1ο Βήμα:</u> Το $FHC(T) \subseteq E$, όπου $E = \{x \in X : \underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : ||T^n x||_F \geq \delta\} > 0\}$:
Έστω $x \in FHC(T) \Rightarrow \forall U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό ισχύει ότι $\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in U\} > 0$
$\Rightarrow$ για $U = V$ θα έχουμε ότι $\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : ||T^n x||_F > \delta\} > 0$
$\Rightarrow \underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : ||T^n x||_F \geq \delta\} \geq \underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : ||T^n x||_F > \delta\} > 0$
$\Rightarrow x \in E$.
Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι το E είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας Baire.
<u>2ο Βήμα:</u> Αν ορίσουμε $E_{k,M} = \bigcap_{N \geq M} \{x \in X : \text{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F \geq \delta\} \geq \frac{N+1}{k}\}$, $k, M \in \mathbb{N}$, τότε το $E = \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{M \geq 1} E_{k,M}$:
− Έστω $k, M \in \mathbb{N}$ και $y \in E_{k,M}$. Τότε θα έχουμε ότι
$y \in \{x \in X : \text{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F \geq \delta\} \geq \frac{N+1}{k}\}$, $\forall N \geq M$
$\Rightarrow \dfrac{\text{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n y||_F \geq \delta\}}{N+1} \geq \dfrac{1}{k}$, $\forall N \geq M$
$\Rightarrow \underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : ||T^n y||_F \geq \delta\} \geq \dfrac{1}{k} > 0$
$\Rightarrow y \in E$.
Άρα $E_{k,M} \subseteq E$, $\forall k, M \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{M \geq 1} E_{k,M} \subseteq E$.
− Έστω $y \in E \Rightarrow \underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : ||T^n y||_F \geq \delta\} > 0$
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\underline{\text{dens}}\{n \in \mathbb{N}_0 : ||T^n y||_F \geq \delta\} \geq \dfrac{1}{k}$
$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{\text{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n y||_F \geq \delta\}}{N+1} \geq \dfrac{1}{k}$, $\forall N \geq M$
$\Rightarrow \text{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n y||_F \geq \delta\} \geq \dfrac{N+1}{k}$, $\forall N \geq M$

$$\Rightarrow y \in E_{k,M} \subseteq \bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{M\geq 1} E_{k,M}.$$

Άρα $E \subseteq \bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{M\geq 1} E_{k,M} \Rightarrow E = \bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{M\geq 1} E_{k,M}$.

3ο Βήμα: Τα $E_{k,M}$, $k, M \in \mathbb{N}$ είναι πουθενά πυκνά σύνολα:
Έστω $k, M \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
X \setminus E_{k,M} &= \bigcup_{N\geq M} \left(X \setminus \{x \in X : \mathrm{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F \geq \delta\} \geq \tfrac{N+1}{k}\}\right) \\
&= \bigcup_{N\geq M} \{x \in X : \mathrm{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F \geq \delta\} < \tfrac{N+1}{k}\} \\
&= \bigcup_{N\geq M} \{x \in X : N+1-\mathrm{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F \geq \delta\} > N+1-\tfrac{N+1}{k}\} \\
&= \bigcup_{N\geq M} \{x \in X : \mathrm{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F < \delta\} > (N+1)\left(1-\tfrac{1}{k}\right)\} \\
&= \bigcup_{N\geq M} A_N,
\end{aligned}$$

όπου $A_N = \{x \in X : \mathrm{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F < \delta\} > (N+1)(1-\frac{1}{k})\}$, $N \geq M$.
– Θα αποδείξουμε ότι το $X \setminus E_{k,M}$ είναι ανοικτό. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το A_N είναι ανοικτό για τυχαίο $N \geq M$.
Έστω $N \geq M$ και $y \in A_N$. Τότε για τον $a = \mathrm{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n y||_F < \delta\}$, ισχύει $a > (N+1)\left(1-\frac{1}{k}\right) > 0$. Αν $n_1, ..., n_a \in \{0, ..., n\}$ οι φυσικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει ότι $||T^{n_i} y||_F < \delta$, για κάθε $i \in \{1, ..., a\}$, τότε το σύνολο $U = \bigcap_{i=1}^{a} T^{-n_i}(S(0,\delta))$ είναι διαφορετικό του κενού επειδή το $y \in U$ και ανοικτό ως πεπερασμένη ένωση ανοικτών.

$$\begin{aligned}
\text{Έστω } w \in U &\Rightarrow ||T^{n_i} w||_F < \delta,\ \forall i \in \{1, ..., a\} \\
&\Rightarrow \mathrm{card}\{n \leq N : ||T^n w||_F < \delta\} \geq \mathrm{card}\{n \leq N : ||T^n y||_F < \delta\} > (N+1)\left(1-\tfrac{1}{k}\right) \\
&\Rightarrow w \in A_N \\
&\Rightarrow y \in U \subseteq A_N \text{ και } U \text{ ανοικτό.}
\end{aligned}$$

Τα y και N επιλέχθηκαν τυχαία. Οπότε το A_N είναι ανοικτό για κάθε $N \geq M$ και κατά συνέπεια το $X \setminus E_{k,M}$ είναι ανοικτό.
– Θα αποδείξουμε ότι το $X \setminus E_{k,M}$ είναι πυκνό. Αρκεί να δείξουμε ότι το $X_0 \subseteq X \setminus E_{k,M}$. Έστω $x \in X_0$. Επειδή από υπόθεση έχουμε ότι $T^n x \longrightarrow 0$, για το $\delta > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $||T^n x||_F < \delta$, για κάθε $n \geq n_0$. Αν θέσουμε $m = \mathrm{card}\{0 \leq n \leq n_0 : ||T^n x||_F < \delta\}$, τότε

$$\frac{\mathrm{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F < \delta\}}{N+1} = \frac{N-n_0+m}{N+1},\ \forall N \geq n_0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}\{0 \leq n \leq N : ||T^n x||_F < \delta\}}{N+1} = 1$$

$$\Rightarrow \text{για το } 1-\frac{1}{k} < 1, \text{ υπάρχει } N_0 \geq M \text{ ώστε } \frac{\mathrm{card}\{0 \leq n \leq N_0 : ||T^n x||_F < \delta\}}{N_0+1} > 1-\frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow x \in A_{N_0} \subseteq X \setminus E_{k,M}.$$

Οπότε, επειδή τα $X \setminus E_{k,M}$, $k, M \in \mathbb{N}$, είναι ανοικτά και πυκνά σύνολα, συνεπάγεται ότι τα $E_{k,M}$, $k, M \in \mathbb{N}$, είναι πουθενά πυκνά σύνολα και άρα το $E = \bigcup_{k\geq 1} \bigcup_{M\geq 1} E_{k,M}$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας Baire.

6 Κοινά Υπερκυκλικά Διανύσματα

Στο τελευταίο κεφάλαιο μελετάται η ύπαρξη συνόλου κοινών υπερκυκλικών διανσυμάτων μίας τυχαίας οικογένεια υπερκυκλικών τελεστών. Δηλαδή ενός συνόλου, του οποίου κάθε στοιχείο είναι υπερκυκλικό διάνυσμα για κάθε τελεστή της οικογένειας. Στην περίπτωση που η οικογένεια των τελεστών είναι αριθμήσιμη, αποδεικνύεται εύκολα ότι το σύνολο των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων είναι πυκνό G_δ-σύνολο. Ωστόσο, αν η οικογένεια των τελεστών είναι υπεραριθμήσιμη, μπορεί να μην υπάρχει κανένα κοινό υπερκυκλικό διάνυσμα. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να δοθεί ένα κριτήριο που αν πληροί μία υπεραριθμήσιμη οικογένεια τελεστών, τότε έχει πυκνό G_δ-σύνολο κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων. Τέλος, αποδεικνύεται ότι η οικογένεια των τελεστών Birkhoff έχει κοινό υπερκυκλικό διάνυσμα.

Αρχικά δίνεται ο ορισμός του συνόλου των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων.

Ορισμός 6.0.1. *Έστω $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μία οικογένεια υπερκυκλικών τελεστών σ' ένα διαχωρίσιμο χώρο Fréchet X. Αν ένα στοιχείο $x \in X$ είναι υπερκυκλικό διάνυσμα για κάθε τελεστή T_λ, $\lambda \in \Lambda$, τότε το x καλείται κοινό υπερκυκλικό διάνυσμα για την οικογένεια $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Δηλαδή, το σύνολο των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων είναι το $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$.*

Πρόταση 6.0.2. *Έστω $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μία οικογένεια υπερκυκλικών τελεστών και Λ αριθμήσιμο. Τότε το σύνολο των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων είναι πυκνό G_δ-σύνολο και κατά συνέπεια διαφορετικό του κενού.*

Απόδειξη. Από την απόδειξη του θεωρήματος Birkhoff, έχουμε ότι το $HC(T_\lambda)$ είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Επειδή το Λ είναι αριθμήσιμο, το σύνολο $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$ θα είναι αριθμήσιμη τομή πυκνών και ανοικτών υποσυνόλων του X. Από το θεώρημα Baire συνεπάγεται ότι το $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο.

Για την απόδειξη του βασικού θεωρήματος αυτού του κεφαλαίου, πρέπει να γίνει μία κατάλληλη προετοιμασία.

Ορισμός 6.0.2. *Έστω Λ ένας μετρικός χώρος. Μία οικογένεια τελεστών $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ σ' ένα χώρο Fréchet X καλείται συνεχής, αν για κάθε $x \in X$, η απεικόνιση $\phi_x : \Lambda \to X$ με τύπο $\phi_x(\lambda) = T_\lambda x$, $\lambda \in \Lambda$, είναι συνεχής στο Λ.*

Πρόταση 6.0.3. *Αν Λ είναι ένας μετρικός χώρος και $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μία συνεχής οικογένεια τελεστών σ' ένα χώρο Fréchet X, τότε η απεικόνιση $\phi : \Lambda \times X \to X$ με τύπο $\phi(\lambda, x) = T_\lambda x$, $(\lambda, x) \in \Lambda \times X$, είναι συνεχής στο $\Lambda \times X$.*

Απόδειξη. Έστω $((\lambda_n, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $\Lambda \times X$ και $(\lambda_0, x_0) \in \Lambda \times X$ τέτοια ώστε $(\lambda_n, x_n) \longrightarrow (\lambda_0, x_0)$. Θα αποδείξουμε ότι $\phi(\lambda_n, x_n) \longrightarrow \phi(\lambda_0, x_0)$:
Για την απόδειξη χρειαζόμαστε το θεώρημα Banach-Steinhaus για χώρους Fréchet:
Έστω X, Y δύο χώροι Fréchet και $T_j : X \to Y$, $j \in J$, μία οικογένεια τελεστών. Αν για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{T_j x : j \in J\}$ είναι φραγμένο στο Y, τότε η οικογένεια $(T_j)_{j\in J}$ είναι ισοσυνεχής.

Έστω $x \in X$. Επειδή η $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι συνεχής και $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0$, συνεπάγεται ότι $T_{\lambda_n}x \longrightarrow T_{\lambda_0}x$. Οπότε το σύνολο $\{T_{\lambda_n}x : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο στο X και άρα από το θεώρημα Banach-Steinhaus, η $(T_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοσυνεχής.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν d η μετρική του X, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in X$ με $d(x_0, y) < \delta$, να συνεπάγεται $d(T_{\lambda_n}x_0, T_{\lambda_n}y) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. **(∗)**

– Για το $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(T_{\lambda_n}x_0, T_{\lambda_0}x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n \geq n_1$.

– Για το $\delta > 0$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x_n, x_0) < \delta$, για κάθε $n \geq n_2$. Από **(∗)** συνεπάγεται ότι $d(T_{\lambda_m}x_0, T_{\lambda_m}x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_2$, $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow d(T_{\lambda_n}x_0, T_{\lambda_n}x_n) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_2$.

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$, έχουμε ότι

$$d(T_{\lambda_n}x_n, T_{\lambda_0}x_0) \leq d(T_{\lambda_n}x_n, T_{\lambda_n}x_0) + d(T_{\lambda_n}x_0, T_{\lambda_0}x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \phi(\lambda_n, x_n) \longrightarrow \phi(\lambda_0, x_0)$.

Το (α) μέρος του παρακάτω θεωρήματος αποδείθηκε αρχικά απο τον Saint Raymond [1],[9]. Η απόδειξη που δίνεται εδώ οφείλεται στους Κωστάκης και Submarino [22]. Το (β) μέρος αποδείχθηκε από τον Shkarin [40].

Θεώρημα 6.0.2. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Fréchet, Λ ένας σ-συμπαγής μετρικός χώρος (είναι δηλαδή αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του) και $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μία συνεχής οικογένεια τελεστών στο X.*
(α) Το σύνολο των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων της $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι G_δ-σύνολο.
(β) Οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:
(i) Το σύνολο των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων της $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι πυκνό G_δ- σύνολο.
(ii) Για κάθε $K \subseteq \Lambda$ συμπαγές και για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $x \in U$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \in K$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T_\lambda^n x \in V$.

Απόδειξη. (α) Επειδή ο X είναι διαχωρίσιμος, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας του $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Έστω επίσης $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του Λ, τέτοια ώστε $\Lambda = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} K_m$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E(K_m, V_k),$$

όπου $E(K, V) = \{x \in X : \forall\lambda \in K, \exists n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_\lambda^n x \in V\}$ για κάθε $K \subseteq \Lambda$ συμπαγές και $V \subseteq X$ μη κενό ανοικτό:
– Έστω $x \in \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E(K_m, V_k)$. Έστω επίσης $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό και $\lambda_0 \in \Lambda$. Τότε

υπάρχουν $k_0, m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $V_{k_0} \subseteq U$ και $\lambda_0 \in K_{m_0}$. Επειδή το $x \in E(K_{m_0}, V_{k_0})$, θα έχουμε ότι για το $\lambda_0 \in K_{m_0}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_{\lambda_0}^n \in V_{k_0} \subseteq U$. Το U επιλέχθηκε τυχαία, άρα το $x \in HC(T_{\lambda_0})$. Όμως και το λ_0 επιλέχθηκε τυχαία, οπότε το $x \in HC(T_\lambda)$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Δηλαδή, το $x \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} HC(T_\lambda)$.

– Έστω $x \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} HC(T_\lambda)$. Δηλαδή, το $x \in HC(T_\lambda)$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Έστω $m, k \in \mathbb{N}$. Επειδή το $x \in HC(T_\lambda)$, για κάθε $\lambda \in K_m \subseteq \Lambda$, για το μη κενό ανοικτό $V_k \subseteq X$ θα ισχύει ότι για κάθε $\lambda \in K_m$, θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_\lambda^n x \in V_k$. Άρα το $x \in E(K_m, V_k)$ και επειδή τα m, k επιλέχθηκαν τυχαία, συνεπάγεται ότι το $x \in \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} E(K_m, V_k)$.

Μένει να αποδείξουμε ότι το σύνολο $E(K, V)$, όπου $K \subseteq \Lambda$ συμπαγές και $V \subseteq X$ μη κενό ανοικτό, είναι ανοικτό υποσύνολο του X :

Έστω $x_0 \in E(K, V)$. Τότε για κάθε $\lambda \in K$, υπάρχει $n_\lambda \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_\lambda^{n_\lambda} x_0 \in V$.

Ισχυρισμός: Η οικογένεια $(T_\mu^{n_\lambda})_{\mu \in \Lambda}$ είναι συνεχής για κάθε $\lambda \in K$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \Lambda \times X \to X$ με τύπο $\phi(\mu, x) = T_\mu x$, $(\mu, x) \in \Lambda \times X$. Επειδή η οικογένεια $(T_\mu)_{\mu \in \Lambda}$ είναι συνεχής, από την πρόταση 6.0.3 γνωρίζουμε ότι η ϕ θα είναι συνεχής. **(∗)**

Έστω $x \in X$ και $\lambda \in K$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\phi_x : \Lambda \to X$ με τύπο $\phi_x(\mu) = T_\mu^{n_\lambda} x$, $\mu \in \Lambda$, είναι συνεχής. Οπότε έστω $(\mu_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του Λ τέτοια ώστε $\mu_l \longrightarrow \mu$, $\mu \in \Lambda$. Αν $n_\lambda = 0$, τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $n_\lambda \geq 1$, τότε $T_{\mu_l} x \longrightarrow T_\mu x \Rightarrow (\mu_l, T_{\mu_l} x) \longrightarrow (\mu, T_\mu x)$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} T_{\mu_l}^2 x = T_{\mu_l}(T_{\mu_l} x) = \phi(\mu_l, T_{\mu_l} x) \longrightarrow \phi(\mu, T_\mu x) = T_\mu(T_\mu x) = T_\mu^2 x$$

$$\vdots$$

$\Rightarrow \phi_x(\mu_l) = T_{\mu_l}^{n_\lambda} \longrightarrow T_\mu^{n_\lambda} x = \phi_x(\mu)$. Έστω $\lambda \in K$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi^\lambda : \Lambda \times X \to X$ που έχει τύπο $\phi^\lambda(\mu, x) = T_\mu^{n_\lambda} x$, $(\mu, x) \in \Lambda \times X$. Επειδή η οικογένεια $(T_\mu^{n_\lambda})_{\mu \in \Lambda}$ είναι συνεχής, από την πρόταση 6.0.3 γνωρίζουμε ότι η ϕ^λ θα είναι συνεχής. Από την υπόθεση έχουμε επίσης ότι $\phi^\lambda(\lambda, x_0) = T_\lambda^{n_\lambda} x_0 \in V$ και το V είναι ανοικτό. Οπότε υπάρχει ανοικτή γειτονιά O_λ του λ και ανοικτή γειτονιά U_λ του x_0, έτσι ώστε $\phi^\lambda(O_\lambda \times U_\lambda) \subseteq V$.

Το $K \subseteq \bigcup\limits_{\lambda \in K} O_\lambda$ και είναι συμπαγές. Άρα υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_J \in K$ ώστε $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{J} O_{\lambda_j}$. Τότε θέτουμε $U_{x_0} = \bigcap\limits_{j=1}^{J} U_{\lambda_j}$, το οποίο είναι γειτονιά του x_0 ως πεπερασμένη τομή γειτονιών του x_0, και ισχυριζόμαστε ότι $U_{x_0} \subseteq E(K, V)$. Πράγματι, έστω $x \in U_{x_0}$ και $\lambda \in K$. Υπάρχει $j \in \{1, ..., J\}$ τέτοιο ώστε $\lambda \in O_{\lambda_j}$. Ταυτόχρονα όμως έχουμε ότι $x \in U_j$ και $\phi^{\lambda_j}(O_{\lambda_j} \times U_j) \subseteq V$. Άρα $T_\lambda^{n_{\lambda_j}} x = \phi^{\lambda_j}(\lambda, x) \in V$. Το λ επιλέχθηκε τυχαία, οπότε το $x \in E(K, V)$.

(β) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Baire, έχουμε ότι το $\bigcap\limits_{\lambda \in K} HC(T_\lambda) = \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} E(K_m, V_k)$ είναι πυκνό, αν και μόνο αν, για κάθε $m, k \in \mathbb{N}$, το $E(K_m, V_k)$ είναι πυκνό.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Έστω ότι το $\bigcap\limits_{\lambda \in K} HC(T_\lambda)$ είναι πυκνό. Έστω επίσης $K \subseteq \Lambda$ συμπαγές και $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x \in U$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \in K$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T_\lambda^n x \in V$:

Έστω $\lambda_0 \in K \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} K_m$. Τότε υπάρχουν $m_0, k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\lambda_0 \in K_{m_0}$ και $V_{k_0} \subseteq V$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι το $E(K_{m_0}, V_{k_0})$ είναι πυκνό. Τότε για το μη κενό ανοικτό $U \subseteq X$, έχουμε $E(K_{m_0}, V_{k_0}) \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in E(K_{m_0}, V_{k_0}) \cap U$

$\Rightarrow \forall \lambda \in K_{m_0}$, $\exists n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T_\lambda^n x \in V_{k_0} \subseteq V$.

$\Rightarrow$ για το $\lambda_0 \in K_{m_0}$, $\exists n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T_{\lambda_0}^n x \in V$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Έστω ότι για κάθε $K \subseteq \Lambda$ συμπαγές και για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $x \in U$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \in K$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T_\lambda^n x \in V$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $m, k \in \mathbb{N}$, το $E(K_m, V_k)$ είναι πυκνό στο X :

Έστω $m, k \in \mathbb{N}$ και $U \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Από την υπόθεση έχουμε ότι, για $K = K_m$, $V = V_k$ και U, υπάρχει $x \in E(K_m, V_k) \cap U$. Δηλαδή, $E(K_m, V_k) \cap U \neq \emptyset$ και άρα $E(K_m, V_k)$ είναι πυκνό στο X.

Παρατηρήσεις:(α) Στην περίπτωση που το $\Lambda = \{\lambda\}$ τότε το παραπάνω θεώρημα έχει την εξής μορφή:

Έστω X διαχωρίσμος χώρος Fréchet και $T_\lambda : X \to X$ ένας τελεστής. Τότε το $HC(T_\lambda)$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο, αν και μόνο αν, για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_\lambda^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Αυτό όμως δεν είναι άλλο από το θεώρημα Birkhoff (θεώρημα 2.2.1).

(β) Όπως φάνηκε καθώς αποδεικνύαμε ότι το $E(K, V)$ είναι ανοικτό, δε χρειαζόμαστε για κάθε $\lambda \in K$ και ένα $n_\lambda \in \mathbb{N}_0$, αλλά πεπερασμένους φυσικούς. Μπορούμε λοιπόν να αντικαταστήσουμε τον ισχυρισμό (ii) με τον παρακάτω που είναι ισχυρότερος:

(ii')*Για κάθε $K \subseteq \Lambda$ συμπαγές και για κάθε $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, υπάρχουν $x \in U$ και $n_1, ..., n_J \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε για κάθε $\lambda \in K$, υπάρχει $j \in \{1, ..., J\}$ ώστε $T_\lambda^{n_j} x \in V$.*

Πόρισμα 6.0.1. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Fréchet, Λ ένας σ-συμπαγής μετρικός χώρος και $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μία συνεχής οικογένεια τελεστών στο X. Αν υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ ώστε ο τελεστής T_{λ_0} να αντιμετατίθεται με κάθε τελεστή της οικογένειας $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, τότε το $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$ είναι το κενό σύνολο ή πυκνό G_δ-σύνολο.*

Απόδειξη.Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$. Θα αποδείξουμε ότι το $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο. Σύμφωνα με το θεώρημα 6.0.2, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $K \subseteq \Lambda$ συμπαγες και $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $x \in U \cap E(K, V)$, όπου $E(K, V)$ όπως έχει οριστεί στο θεώρημα 6.0.2:

Έστω $K \subseteq \Lambda$ συμπαγές και $U, V \subseteq X$ μη κενά ανοικτά. Ο T_{λ_0} είναι υπερκυκλικός, όπως και κάθε άλλος τελεστής της οικογένειας $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, επειδή το $x_0 \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda)$. Οπότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_{\lambda_0}^m x_0 \in U$. Από το θεώρημα Birkhoff (θεώρημα 2.2.1) γνωρίζουμε ότι ο T_{λ_0} είναι και *topologically transitive*. Άρα από την πρόταση 1.4.4 συνεπάγεται ότι το $T_{\lambda_0}^{-m}(V) \subseteq X$ είναι μη κενό ανοικτό.

Όπως είδαμε και στην απόδειξη του θεωρήματος 6.0.2, το $x_0 \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} HC(T_\lambda) \Leftrightarrow x_0 \in E(M, W)$, για κάθε $M \subseteq \Lambda$ συμπαγές και $W \subseteq X$ μη κενό ανοικτό. Άρα το $x_0 \in E(K, T_{\lambda_0}^{-m}(V))$. **(∗)**

Τώρα είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το $T_{\lambda_0}^m x_0 \in U \cap E(K, V)$. Πράγματι, από **(∗)** έχουμε

ότι $\forall\lambda \in K$, $\exists n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_\lambda^n x \in T_{\lambda_0}^{-m}(V)$
$\Rightarrow \forall\lambda \in K$, $\exists n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_{\lambda_0}^m(T_\lambda^n x_0) \in V$
$\Rightarrow \forall\lambda \in K$, $\exists n \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T_\lambda^n(T_{\lambda_0}^m x_0) \in V$
$\Rightarrow T_{\lambda_0}^m x_0 \in U \cap E(K,V)$.

Ως επίλογο της εργασίας, δίνεται η απόδειξη ύπαρξης κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων για τους τελεστές Birkhoff. Το επόμενο λήμμα είναι καθοριστικής σημασίας για να αποδειχθεί η ύπαρξη τέτοιων διανυσμάτων.

Λήμμα 6.0.1. *Έστω a ένας θετικός άρρητος και $T : [0,1] \to [0,1]$ η συνεχής απεικόνιση με τύπο $Tx = x + a - [x+a]$, $x \in [0,1]$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του αριθμού x. Τότε ισχύει ότι για κάθε $x \in [0,1]$ και για κάθε $U \subseteq [0,1]$ ανοικτό που περιέχει το x, το σύνολο $N(x,U) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x = x + na - [x+na] \in U\}$ είναι συνδετικό.*

Απόδειξη. Επειδή ο μετρικός χώρος $X = [0,1]$ είναι συμπαγής, από την πρόταση 1.5.3 αρκεί να αποδείξουμε ότι το δυναμικό σύστημα T είναι *minimal*.

Θέτουμε $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ και θεωρούμε την απεικόνιση $S : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με τύπο $Sz = e^{2\pi ai}z$, $z \in \mathbb{T}$. Αν "ταυτίσουμε" τα σημεία 0 και 1 του $[0,1]$ τότε δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{T}$ με τύπο $\phi(x) = e^{2\pi xi}$, $x \in [0,1]$, είναι ομοιομορφισμός με $\phi \circ T = S \circ \phi$. Δηλαδή, η S είναι *conjugate* της T και άρα η T είναι *conjugate* της S μέσω της ϕ^{-1}. Με βάση την πρόταση 1.5.1, αρκεί να αποδείξουμε ότι το δυναμικό σύστημα S είναι *minimal*.

<u>1ο Βήμα.</u> Το σύνολο $orb(1,S) = \{e^{2\pi nai} : n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{T}$:

Αν θέσουμε $z_n = e^{2\pi nai}$, $n \in \mathbb{N}_0$, τότε η $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ακολουθία στοιχείων του συμπαγή μετρικού χώρου $\mathbb{T}$. Άρα υπάρχει $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $z_{n_k} \longrightarrow \zeta$, για κάποιο $\zeta \in \mathbb{T}$.

Για $\varepsilon = 1$, υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $z_{n_k} \in D(\zeta,1) \cap \mathbb{T}$, $\forall k \geq k_1$. Θέτουμε $l_1 = n_{k_1}$.

Για $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $z_{n_k} \in D(\zeta,\frac{1}{2}) \cap \mathbb{T}$, $\forall k \geq k_2$. Θέτουμε $l_2 = \max\{l_1, n_{k_2}\} + 1$.

Για $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, υπάρχει $k_3 \in \mathbb{N}$ ώστε $z_{n_k} \in D(\zeta,\frac{1}{3}) \cap \mathbb{T}$, $\forall k \geq k_3$. Θέτουμε $l_3 = \max\{2l_2 - l_1, n_{k_3}\} + 1$.

$\vdots$

Συνεχίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο, κατασκευάζουμε υπακολουθία $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ της $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $z_{l_k} \longrightarrow \zeta$ και $l_{k+2} - l_{k+1} > l_{k+1} - l_k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία $m_k = l_{k+1} - l_k$, $k \in \mathbb{N}$, είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών και άρα η $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι υπακολουθία της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, τέτοια ώστε $z_{m_k} = \dfrac{z_{l_{k+1}}}{z_{l_k}} \longrightarrow \dfrac{\zeta}{\zeta} = 1$. Δηλαδή το 1 είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Παρατηρούμε ότι $z_n \neq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $z_m = 1 \Rightarrow e^{2\pi mai} = 1 \Rightarrow ma = b \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow a = \dfrac{b}{m} \in \mathbb{Q}$. Άτοπο. Από αυτό το δεδομένο και επειδή το 1 είναι σημείο συσσώρευσης της $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, συνεπάγεται ότι το σύνολο $orb(1,S) = \{z_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ είναι άπειρο και το $1 \in \overline{orb(1,S)} \setminus orb(1,S)$.

Έστω $w \in \mathbb{T}$ και $\varepsilon > 0$ το μήκος του "ανοικτού" τόξου με κέντρο το w. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{2\pi}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Διαμερίζουμε τον κύκλο $\mathbb{T}$ σε n τόξα μήκους $\dfrac{2\pi}{n}$. Δείξαμε ότι στο "ανοικτό" τόξο κέντρου 1 και μήκους $2 \cdot \dfrac{2\pi}{n}$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $Arg(z_m) \in (0, \frac{4\pi}{n}) \cup (2\pi - \frac{4\pi}{n}, 2\pi)$ (θεωρούμε ότι $Arg(z) \in [0, 2\pi)$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$). Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία $z_{km} = z_m^k$, $k \in \mathbb{N}$, "διατρέχει" το $\mathbb{T}$ με "βήμα" μικρότερο του $\dfrac{4\pi}{n} < \varepsilon$. Οπότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $S^{km}1 = z_{km}$ να ανήκει στο τόξο κέντρου w και μήκους ε. Άρα το $orb(1, S)$ είναι πυκνό στο $\mathbb{T}$.

2ο Βήμα. Για κάθε $z \in \mathbb{T}$, το $orb(z, S)$ είναι πυκνό στο $\mathbb{T}$:

Έστω $z_0 \in \mathbb{T}$. Τότε το $orb(z_0, S) = z_0 \cdot orb(1, S)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} w \in orb(z_0, S) &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } S^n z_0 = w \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } e^{2\pi nai} z_0 = w \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τέτοιο ώστε } z_0 \cdot S^n 1 = w \\ &\Leftrightarrow w \in z_0 \cdot orb(1, S). \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ με τύπο $\psi(w) = z_0 w$, $w \in \mathbb{T}$, είναι ομοιομορφισμός. Οπότε έχουμε ότι $\overline{orb(z_0, S)} = \overline{z_0 \cdot orb(1, S)} = \overline{\psi(orb(1, S))} = \psi(\overline{orb(1, S)}) = \psi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.

Τα παρακάτω θεωρήματα αποδείχθηκαν από τους Κωστάκης και Submarino [22].

Θεώρημα 6.0.3 (Κωστάκης-Submarino I). *Έστω $r > 0$ και $\theta \in [0, 1]$. Ορίζουμε τον τελεστή $T_{re^{2\pi\theta i}} : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ με τύπο $T_{re^{2\pi\theta i}} f(z) = f(z + re^{2\pi\theta i})$, $z \in \mathbb{C}$. Έστω $\theta \in [0, 1]$. Τότε ισχύει ότι $HC(T_{e^{2\pi\theta i}}) \subseteq HC(T_{re^{2\pi\theta i}})$, για κάθε $r > 0$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι $T^n_{re^{2\pi\theta i}} = T_{nre^{2\pi\theta i}}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε από το θεώρημα της Ansari (θεώρημα 4.1.1) συνεπάγεται ότι για κάθε θετικό ρητό $r = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, ισχύει $HC(T_{e^{2\pi\theta i}}) = HC(T^p_{e^{2\pi\theta i}}) = HC(T_{pe^{2\pi\theta i}}) = HC(T_{qre^{2\pi\theta i}}) = HC(T^q_{re^{2\pi\theta i}}) = HC(T_{re^{2\pi\theta i}})$.

Έστω r ένας θετικός άρρητος και $f \in HC(T_{e^{2\pi\theta i}})$. Θα αποδείξουμε ότι το $f \in HC(T_{re^{2\pi\theta i}})$:
Έστω $U \subseteq H(\mathbb{C})$ μη κενό ανοικτό. Τότε υπάρχει $g \in H(\mathbb{C})$, $N \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε $\left\{ \phi \in H(\mathbb{C}) : \sup\limits_{|z| \leq N} |\phi(z) - g(z)| < \varepsilon \right\} \subseteq U$. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\sup\limits_{z \in D} |f(z + nre^{2\pi\theta i}) - g(z)| < \varepsilon$, όπου $D = \overline{D(0, N)}$.

Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{D(0, N+1)}$. Άρα για το $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, υπάρχει $0 < \delta < 1$ έτσι ώστε για κάθε $z, w \in \overline{D(0, N+1)}$ με $|z - w| < \delta$, να ισχύει ότι $|g(z) - g(w)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. **(1)**

Θέτουμε $D_\delta = \{z \in \mathbb{C} : d(z, D) \leq \delta\} = \overline{D(0, N+\delta)}$ και επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k > 2(N + \delta)$ **(2)**

Επειδή ο αριθμός $a = \dfrac{r}{k}$ είναι άρρητος, η απεικόνιση $T : [0, 1] \to [0, 1]$ με $Tx = x + a - [x + a]$, $x \in [0, 1]$, ικανοποιεί το λήμμα 6.0.1. Οπότε για $x = 0$ και $I = \left[0, \frac{\delta}{k}\right)$ ανοικτό του 0 στο $[0, 1]$, συνεπάγεται ότι το σύνολο $N(0, I) = \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq na - [na] < \dfrac{\delta}{k} \right\}$ είναι συνδετικό.

Δηλαδή, αν $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι η γνησίως αύξουσα ακολουθία των στοιχείων του $N(0,I)$, τότε $0 \leq n_j r - [n_j a]k < \delta$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |n_{j+1} - n_j| < M$ για κάποιο $M > 0$. **(3)**

Θέτουμε $m_j = [n_j a] \in \mathbb{N}$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τότε, από το **(3)** συνεπάγεται ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ισχύει $0 \leq n_j r - m_j k < \delta$ και $|m_{j+1} - m_j| = [n_{j+1}a] - [n_j a] < n_{j+1}a - n_j a + 1 < Ma + 1 \leq m$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $0 \leq n_j r - m_j k < \delta$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |m_{j+1} - m_j| < m$. **(4)**

Θέτουμε $D_\delta^\ell = D_\delta + \ell k e^{2\pi\theta i}$, $\ell = 0, 1, ..., m-1$ τα οποία είναι κλειστοί δίσκοι του $\mathbb{C}$ και από τον τρόπο που επιλέξαμε το k στο **(2)**, προκύπτει ότι είναι και ανά δύο ξένοι μεταξύ τους. Οπότε υπάρχουν V_ℓ, $\ell = 0, 1, ...m-1$, ανοικτοί δίσκοι του $\mathbb{C}$ που είναι ανά δύο ξένοι μεταξύ τους ώστε $D_\delta^\ell \subseteq V_\ell$, για κάθε $\ell = 0, 1, ...m-1$.

Θέτουμε $V = \bigcup\limits_{\ell=0}^{m-1} V_l$ και $K = \bigcup\limits_{\ell=0}^{m-1} D_\delta^\ell$. Τότε το K είναι συμπαγές σύνολο, το V είναι ανοικτό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $K \subseteq V$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : V \to \mathbb{C}$ με τύπο $h(z) = g(z - \ell k e^{2\pi\theta i})$, αν $z \in V_\ell$ για κάποιο $\ell \in \{0, 1, ..., m-1\}$. Σύμφωνα με το θεώρημα Runge, θα υπάρχει $\phi \in H(\mathbb{C})$ έτσι ώστε $\sup\limits_{z\in K} |\phi(z) - h(z)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. **(5)**

Από το θεώρημα της Ansari, γνωρίζουμε ότι το $f \in HC(T_{e^{2\pi\theta i}}) = HC(T^k_{e^{2\pi\theta i}})$. Οπότε, για το μη κενό ανοικτό $W = \left\{\psi \in H(\mathbb{C}) : \sup\limits_{z\in K} |\psi(z) - \phi(z)| < \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $(T^k_{e^{2\pi\theta i}})^n f \in W$. Δηλαδή, $\sup\limits_{z\in K} |f(z + nke^{2\pi\theta i}) - \phi(z)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. **(6)**

Από το **(4)** θα υπάρχει $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n \leq m_j \leq n+m-1 \Rightarrow nk \leq m_j k \leq nk+(m-1)k$. Είναι επίσης προφανές ότι υπάρχει $\ell \in \{0, 1, ..., m-1\}$ τέτοιο ώστε $m_j = n + \ell \Rightarrow m_j k = nk + \ell k$. Θέτουμε $w = (n_j r - m_j k)e^{2\pi\theta i}$. Τότε, με βάση το **(4)**, έχουμε ότι $|w| = |n_j r - m_j k| < \delta$ και άρα για κάθε $z \in D$, ισχύει ότι $|z + w| \leq |z| + |w| \leq N + \delta \Rightarrow z + w \in D_\delta$. **(7)**

Έστω $z \in D$. Τότε έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

(i) Το $z \in D \subseteq \overline{D(0, N+1)}$, από το **(7)** το $z+w \in D_\delta \subseteq \overline{D(0, N+1)}$ και $|z+w-z| = |w| < \delta$. Άρα από το **(1)** έχουμε ότι $|g(z+w) - g(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. **(∗)**

(ii) Το $z + w \in D_\delta \Rightarrow z + w + \ell k e^{2\pi\theta i} \in D_\delta^\ell \subseteq K$. Άρα από το **(6)** έχουμε ότι
$|f(z + w + (\ell k + nk)e^{2\pi\theta i}) - \phi(z + w + \ell k e^{2\pi\theta i})| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. **(∗∗)**

(iii) Το $\eta = z + w + \ell k e^{2\pi\theta i} \in D_\delta^\ell \subseteq K$. Άρα από το **(5)** έχουμε ότι
$|\phi(z + w + \ell k e^{2\pi\theta i}) - g(z+w)| = |\phi(\eta) - g(\eta - \ell k e^{2\pi\theta i})| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. **(∗ ∗ ∗)**

Από τις σχέσεις **(∗)**, **(∗∗)** και **(∗ ∗ ∗)** συνεπάγεται ότι για κάθε $z \in D$,

$$\begin{aligned}
|f(z + n_j r e^{2\pi\theta i}) - g(z)| &= |f(z + (n_j r - m_j k)e^{2\pi\theta i} + m_j k e^{2\pi\theta i}) - g(z)| \\
&\leq |f(z + w + (\ell k + nk)e^{2\pi\theta i}) - \phi(z + w + \ell k e^{2\pi\theta i})| \\
&+|\phi(z + w + \ell k e^{2\pi\theta i}) - g(z+w)| \\
&+|g(z+w) - g(z)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sup\limits_{z\in D} |f(z + n_j r e^{2\pi\theta i}) - g(z)| < \varepsilon$.

Θεώρημα 6.0.4 (Κωστάκης-Submarino II). *Έστω $\theta \in [0,1]$ και $T_{e^{2\pi\theta i}} : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ ο τελεστής με τύπο $T_{e^{2\pi\theta i}} f(z) = f(z + e^{2\pi\theta i})$, $z \in \mathbb{C}$. Τότε το σύνολο των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων της οικογένειας $(T_{e^{2\pi\theta i}})_{\theta\in[0,1]}$, $\bigcap\limits_{\theta\in[0,1]} HC(T_{e^{2\pi\theta i}})$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο.*

Απόδειξη. Το $[0,1]$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και το $H(\mathbb{C})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Fréchet. Επίσης, η οικογένεια των τελεστών $(T_{e^{2\pi\theta i}})_{\theta\in[0,1]}$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω ένα $f \in H(\mathbb{C})$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\phi_f : [0,1] \to H(\mathbb{C})$ με τύπο $\phi_f(\theta) = T_{e^{2\pi\theta i}} f$, $\theta \in [0,1]$, είναι συνεχής.

Έστω $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $[0,1]$ τέτοια ώστε $\theta_n \xrightarrow{n\to\infty} \theta$ για κάποιο $\theta \in [0,1]$, $K = \overline{D(0,N)} \subseteq \mathbb{C}$ και $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{D(0,N+1)}$. Άρα για το $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $z, w \in \overline{D(0,N+1)}$ με $|z-w| < \delta$, να ισχύει ότι $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Επειδή η $g(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, είναι συνεχής, για το $\delta > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\begin{aligned}
|e^{2\pi\theta_n i} - e^{2\pi\theta i}| < \delta,\ \forall n \geq n_0 &\Rightarrow |z + e^{2\pi\theta_n i} - (z + e^{2\pi\theta i})| < \delta,\ \forall n \geq n_0,\ \forall z \in K \\
&\Rightarrow |f(z + e^{2\pi\theta_n i}) - f(z + e^{2\pi\theta i})| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ \forall z \in K \\
&\Rightarrow \sup_{z\in K} |T_{e^{2\pi\theta_n i}} f(z) - T_{e^{2\pi\theta i}} f(z)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \\
&\Rightarrow \phi_f(\theta_n) \xrightarrow{\tau.o\mu.} \phi(\theta).
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 6.0.2, για να αποδείξουμε ότι το $\bigcap\limits_{\theta\in[0,1]} HC(T_{e^{2\pi\theta i}})$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $K \subseteq [0,1]$ συμπαγές και $U, V \subseteq H(\mathbb{C})$ μη κενά ανοικτά, υπάρχει $f \in U$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \in K$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T^n_{e^{2\pi\theta i}} f \in V$. Οπότε έστω $K \subseteq [0,1]$ συμπαγές και $U, V \subseteq H(\mathbb{C})$ μη κενά ανοικτά. Επειδή το $[0,1]$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $K = [0,1]$. Για τα $U, V \subseteq H(\mathbb{C})$, υπάρχουν $f, g \in H(\mathbb{C})$, $N \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $M_1 = \left\{ \phi \in H(\mathbb{C}) : \sup\limits_{|z|\leq N} |\phi(z) - f(z)| < \varepsilon \right\} \subseteq U$ και $M_2 = \left\{ \phi \in H(\mathbb{C}) : \sup\limits_{|z|\leq N} |\phi(z) - g(z)| < \varepsilon \right\} \subseteq V$.

Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{D(0, \frac{5N}{4})}$. Άρα για το $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, υπάρχει $0 < \delta \leq \dfrac{N}{4}$ τέτοιο ώστε για κάθε $z, w \in \overline{D(0, \frac{5N}{4})}$ με $|z - w| \leq \delta$, να ισχύει ότι $|g(z) - g(w)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. **(1)**

Επειδή η αρμονική σειρά αποκλίνει, θα υπάρχει $J \in \mathbb{N}$ ώστε $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{J-1} \frac{\delta}{3\nu 2\pi N} \leq 1 < \sum_{\nu=1}^{J} \frac{\delta}{3\nu 2\pi N}$.

Τότε, θεωρούμε μία διαμέριση του $[0,1]$ να είναι $\theta_0 = 0$, $\theta_j = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{j} \frac{\delta}{3\nu 2\pi N}$, $0 < j < J$, $\theta_J = 1$ και ορίζουμε $n_j = 3jN$, $j = 1, ..., J$.

Θέτουμε $D_0 = \overline{D(0,N)}$ και $D_j = \overline{D(n_j e^{2\pi\theta_j i}, \frac{5N}{4})}$, $j = 1, ..., J$. Από τον τρόπο που ορίσαμε τα n_j, $j = 1, ..., J$ συνεπάγεται ότι οι κλειστοί δίσκοι D_j, $j = 0, 1, ..., J$ είναι ανά δύο ξένοι μεταξύ τους. Οπότε υπάρχουν V_j, $j = 0, 1, ...m-1$, ανοικτοί δίσκοι του $\mathbb{C}$ που είναι ανά δύο ξένοι μεταξύ τους ώστε $D_j \subseteq V_j$, για κάθε $j = 0, 1, ...m-1$.

Θέτουμε $W = \bigcup_{j=0}^{m-1} V_j$ και $L = \bigcup_{j=0}^{m-1} D_j$. Τότε το L είναι συμπαγές σύνολο, το W είναι ανοικτό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $L \subseteq W$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : W \to \mathbb{C}$ με τύπο $h(z) = \begin{cases} f(z) & , z \in V_0 \\ g(z - n_j e^{2\pi\theta_j i}) & , z \in V_j, j = 1, ..., J \end{cases}$. Σύμφωνα με το θεώρημα Runge, θα υπάρχει $\phi \in H(\mathbb{C})$ έτσι ώστε $\sup_{z\in L} |\phi(z) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Από αυτή τη σχέση, προκύπτουν οι ανισότητες:

(i) $\sup_{|z|\leq N} |\phi(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ και

(ii) $\sup_{z\in D_j} |\phi(z) - g(z - n_j e^{2\pi\theta_j i})| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall j = 1, ..., J$.

Από την (i) συνεπάγεται ότι $\phi \in M_1 \subseteq U$. Μένει να αποδείξουμε ότι για κάθε $\theta \in K$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $T^n_{e^{2\pi\theta i}} \phi \in M_2 \subseteq V \Leftrightarrow \sup_{|z|\leq N} |\phi(z + ne^{2\pi\theta i}) - g(z)| < \varepsilon$:

Έστω $\theta \in K = [0, 1]$. Υπάρχει $j \in \{1, ..., J\}$ τέτοιο ώστε $\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j$. Τότε έχουμε ότι

$-|\theta - \theta_j| = \theta_j - \theta \leq \theta_j - \theta_{j-1} = \frac{\delta}{3j2\pi N}$,

$-|n_j e^{2\pi\theta i} - n_j e^{2\pi\theta_j i}| = n_j |e^{2\pi\theta i} - e^{2\pi\theta_j i}| \leq n_j |2\pi\theta - 2\pi\theta_j| \leq \delta \leq \frac{N}{4}$.

Έστω $z \in \overline{D(0, N)}$. Τότε για το μιγαδικό $w = z + n_j e^{2\pi\theta i}$ ισχύει ότι $w \in D_j$. Πράγματι, $|w - n_j e^{2\pi\theta_j i}| = |z + n_j e^{2\pi\theta i} - n_j e^{2\pi\theta_j i}| \leq N + \frac{N}{4} = \frac{5N}{4}$ και άρα από το (ii) θα έχουμε ότι $|\phi(z + n_j e^{2\pi\theta_j i}) - g(z + n_j e^{2\pi\theta i} - n_j e^{2\pi\theta_j i})| = |\phi(w) - g(w - n_j e^{2\pi\theta_j i})| < \frac{\varepsilon}{2}$. **(∗)**

Είναι προφανές επίσης ότι το $\zeta = z + n_j e^{2\pi\theta i} - n_j e^{2\pi\theta_j i} = w - n_j e^{2\pi\theta_j i} \in \overline{D(0, \frac{5N}{4})}$ καθώς και ότι $|\zeta - z| = |n_j e^{2\pi\theta i} - n_j e^{2\pi\theta_j i}| \leq \delta$. Άρα από το **(1)** συνεπάγεται ότι $|g(z) - g(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2}$. **(∗∗)**

Από τις σχέσεις **(∗)** και **(∗∗)** συνεπάγεται ότι για κάθε $z \in D_0 = \overline{D(0, N)}$,

$$\begin{aligned} |g(z) - \phi(z + n_j e^{2\pi\theta i})| &\leq |g(z) - g(z + n_j e^{2\pi\theta i} - n_j e^{2\pi\theta_j i})| + |g(z + n_j e^{2\pi\theta i} - n_j e^{2\pi\theta_j i}) - \phi(z + n_j e^{2\pi\theta i})| \\ &= |g(z) - g(\zeta)| + |g(w - n_j e^{2\pi\theta_j i}) - \phi(w)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sup_{|z|\leq N} |\xi(z + n_j e^{2\pi\theta i}) - g(z)| < \varepsilon$.

Θεώρημα 6.0.5 (Κωστάκης-Submarino III). *Έστω $a \in \mathbb{C}^*$ και $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ ο τελεστής με τύπο $T_a f(z) = f(z + a)$, $z \in \mathbb{C}$. Τότε το σύνολο των κοινών υπερκυκλικών διανυσμάτων της οικογένειας $(T_a)_{a\in\mathbb{C}^*}$, $\bigcap_{a\in\mathbb{C}^*} HC(T_a)$ είναι πυκνό G_δ-σύνολο.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 6.0.3 έχουμε ότι

$$\bigcap_{a\in\mathbb{C}^*} HC(T_a) = \bigcap_{\theta\in[0,1]} \bigcap_{r>0} HC(T_{re^{2\pi\theta i}}) = \bigcap_{\theta\in[0,1]} HC(T_{e^{2\pi\theta i}})$$

το οποίο είναι πυκνό G_δ-σύνολο σύμφωνα με το θεώρημα 6.0.4.

Αναφορές

[1] E. Abakumov and J. Gordon, Common hypercyclic vectors for multiples of backward shift, *J. Funct. Anal.* 200 (2003), 494-504.

[2] E. Akin, *Rucurrence in topological dynamics. Furstenberg families and Ellis actions*, Plenum Press, New York, 1997.

[3] S.I. Ansari, Hypercyclic and cyclic vectors, *J. Funct. Anal.* 128 (1995), 374-383.

[4] R. Arens, Dense inverse limit rings, *Michigan Math. J.* 5 (1958), 169-182.

[5] R. Aron and D. Markose, On universal functions, *J. Korean Math. Soc.* 41 (2004), 65-76.

[6] J. Banks, Regular periodic decompositions for topologically transitive maps, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 17 (1997), 505-529.

[7] J. Banks, Topological mapping properties defined by digraphs, *Discrete Contn. Dynam. Systems 5* (1999), 83-92.

[8] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P.Stacey, On Devaney's definition of chaos, *Amer. Math. Monthly* 99 (1992), 332-334.

[9] F. Bayart, Common hypercyclic vectors for composition operators, *J. Operator Theory* 52 (2004), 353-370.

[10] F. Bayart and S. Grivaux, Hyperclicité: le rôle du spectre ponctuel unimodulaire, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 338 (2004), 703-708.

[11] F. Bayart and S. Grivaux, Frequently hypercyclic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 358 (2006), 5083-5117.

[12] B. Beauzamy, Un opérateur, sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 303 (1986) 923-925.

[13] B. Beauzamy, An operator on a separable Hilbert space with many hypercyclic vectors, *Studia Math.* 87 (1987), 71-78.

[14] B. Beauzamy, *Introduction to operator theory and invariant subspaces,* North-Holland, Amsterdam, 1988.

[15] J.P. Bès, Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127 (1999), 1801-1804.

[16] J. Bès and A. Peris, Hereditarily hypercyclic operators, *J. Funct. Anal.* 167 (1999), 94-112.

[17] J.Bonet and A. Peris, Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces, *J. Funct. Anal.* 159 (1998), 587-595.

[18] P.S. Bourdon, Invariant manifolds of hypercyclic vectors, *Proc. Amer. Math. Soc.* 118 (1993), 845-847.

[19] P.S. Bourdon and N.S. Feldman, Somewhere dense orbits are everywhere dense, *Indiana Univ. Math. J.* 52 (2003), 811-819.

[20] P.S. Bourdon and J.H. Shapiro, Cyclic composition operators on H^2, *Operator Theory: Operator Algebras and Applications, Part 2* (Proc. Summer Res. Inst., Durham, NH, 1988), 43-53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[21] G. Costakis, On a conjecture of D. Herrero concerning hypercyclic operators, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 330 (2000), 179-182.

[22] G. Costakis and M. Submarino, Genericity of wild holomorfic functions and common hypercyclic vectors, *Adv. Math.* 182 (2004), 278-306.

[23] L.R. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1986; second edition, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.

[24] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[25] G. Godefroy and J.H. Shapiro, Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds, *J. Funct. Anal.* 98 (1991), 229-269.

[26] K.-G. Grosse-Erdmann, Holomorfe Monster und universelle Funktionen, *Mitt. Math. Sem. Giessen* 176 (1987).

[27] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris, Frequently dense orbits, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 341 (2005), 123-128.

[28] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris, Corrigendum to the note "Frequently dense orbits" (2008), not accepted for publication in *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.*

[29] D.A. Herrero, Limits of hypercyclic and supercyclic operators, *J. Funct. Anal.* 99 (1991), 179-190.

[30] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

[31] S. Kolyada and L. Snoha, Some aspects of topological transitivity-a survey, *Iternational theory* (Proc. Conf., Opava, 1994) 3-35, Grazer Math.. Ber. 334, Graz, 1997.

[32] H. Furstenberg, Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation, *Math. Systems Theory* 1 (1967), 1-49.

[33] F. Martínez-Giménez, Operadores hipercíclicos en espacios de Fréchet, *Rev. Colombiana Mat.* 33 (1999), 51-76.

[34] R. Meise and D. Vogt, *Introduction to functional analysis*, Oxford University Press, New York, 1997.

[35] T.K.S. Moothathu, Weak mixing and mixing of a single transformation of a topological (semi)group, *Aequationes Math.* 78 (2009), 147-155.

[36] A. Peris, Hypercyclicity criteria and the Mittag-Lefler theorem, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 70 (2001), 365-371.

[37] A. Peris, Multi-hypercyclic operators are hypercyclic, *Math. Z.* 236 (2001), 779-786.

[38] A. Peris and L. Saldivia, Syndetically hypercyclic operators, *Integral Equations Operator Theory* 51 (2005), 275-281.

[39] W. Rudin, *Functional analysis*, second edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[40] S. Shkarin, Remarks on common hypercyclic vectors, *J. Funct. Anal.* 258 (2010), 132-160.