



Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικών
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Μαθηματικά των Υπολογιστών και των Αποφάσεων"

Διπλωματική Εργασία

Παίγνια δύο παικτών
Υπολογιστικά Θέματα και Αλγόριθμοι

Δελιγκάς Αργύρης

Πάτρα 2011

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι αποτέλεσμα δουλειάς αρκετών μηνών και δε θα είχε ολοκληρωθεί χωρίς τη βοήθεια και τη συμπαράσταση πολλών ανθρώπων. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή που επέβλεψε αυτή την εργασία κ. Δημήτριο Καββαδία. Είναι ο άνθρωπος που μου υπόδειξε το θέμα αυτό, με βοήθησε να ξεπεράσω τις δυσκολίες που προέκυπταν στην πορεία και είδαμε μαζί πολλά καινούργια πράγματα. Οι υποδείξεις και οι συμβουλές του με καθοδήγησαν στην περάτωση της εργασίας.

Ευχαριστώ επίσης και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής μου καθηγητές κ.κ. Παναγιώτη Αλεβίζο και Νικόλαο Τσάντα, για τη βοήθειά και τις συμβουλές τους όποτε και αν τις χρειάστηκα.

Θα ήθελα, επιπλέον, να ευχαριστήσω τον μεταπτυχιακό φοιτητή και φίλο Νίκο Σαββίδη για τις παραγωγικές συζητήσεις που είχαμε σε όλη τη διάρκεια της εργασίας. Φυσικά δε γίνεται να παραλείψω όλους τους φίλους μου που μου συμπαρατάθηκαν και με ανέχτηκαν όλο αυτό τον καιρό.

Τέλος, το μεγαλύτερο ίσως ευχαριστώ, το οφείλω στους γονείς μου -όσο τετριμμένο κι αν ακούγεται αυτό- διότι είναι οι άνθρωποι που με στηρίζουν πάντα, με όποιο τρόπο μπορούν, ψυχολογικά και οικονομικά, σε κάθε βήμα μου.

Περίληψη

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία μελετάμε το πρόβλημα εύρεσης ενός Nash σημείου ισορροπίας για παίγνια δύο παικτών. Παρουσιάζεται ο αλγόριθμος Lemke - Howson, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου καθώς και η κλάση πολυπλοκότητας PPAD, όπου και αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα εύρεσης ενός Nash σημείου ισορροπίας είναι πλήρες για την κλάση αυτή.

Αναλυτικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη ιστορική αναδρομή της θεωρίας παιγνίων, παρουσιάζονται κάποιες βασικές έννοιες και προτείνονται κάποιες καταστάσεις ως λύσεις ενός παιγνίου, με κύρια αυτή του Nash σημείου ισορροπίας.

Το δεύτερο κεφάλαιο ασχολείται με τα παίγνια δύο παικτών ή παίγνια διπίνακα. Αρχικά ορίζονται τα στοιχεία που συνιστούν το παίγνιο, δηλαδή οι παίκτες, οι στρατηγικές τους, η βέλτιστη απόκριση και το Nash σημείο ισορροπίας και παρουσιάζονται με τη βοήθεια ενός παραδείγματος. Στη συνέχεια, ορίζονται τα πολύεδρα και τα πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης με βάση τους πίνακες κερδών των δύο παικτών, που αποτελούν και βάση του αλγορίθμου Lemke - Howson.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά ο αλγόριθμος Lemke - Howson στη γεωμετρική και στην αριθμητική του μορφή και εφαρμόζεται για ένα συγκεκριμένο παίγνιο. Η γεωμετρική εφαρμογή γίνεται με τη βοήθεια των πολυτόπων βέλτιστης απόκρισης και η αριθμητική μέσω του ακέραιου ρινοiting, που είναι μια παραλλαγή της μεθόδου simplex.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετάται μία κατηγορία παιγνίων όπου ο αλγόριθμος δεν είναι αποδοτικός. Για την κατασκευή των παιγνίων της κατηγορίας αυτής χρειάζεται πρώτα να δούμε τα κυκλικά πολύτοπα και να παρουσιάσουμε κάποιες ιδιότητές τους. Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος απαιτεί εκθετικό χρόνο μέχρι να καταλήξει σε ένα Nash σημείο ισορροπίας του παιγνίου, σε σχέση με το μέγεθος του παιγνίου.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία αναγωγή του προβλήματος της εύρεσης ενός Nash σημείου ισορροπίας ενός παιγνίου δύο παικτών σε αυτό του πλήρους ταιριάσματος ενός γραφήματος, όπου και πάλι χρησιμοποιούμε ιδιότητες των πολυτόπων βέλτιστης απόκρισης καθώς και των δεικτοδοτημένων συμβολοσειρών Gale.

Το έκτο και τελευταίο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την κλάση πολυπλοκότητας PPAD. Αρχικά, ορίζουμε την κλάση και δίνουμε το πλήρες πρόβλημα οδηγό για την κλάση αυτή, το END OF LINE. Στη συνέχεια, δίνουμε μια διαισθητική αναγωγή του παραπάνω προβλήματος στο πρόβλημα SPERNER και έπειτα του SPERNER στο πρόβλημα BROUWER που πρόκειται για μία διακριτοποιημένη και απλόποιημένη εκδοχή της εύρεσης ενός σταθερού σημείου μίας συνάρτησης f . Η τελευταία αναγωγή είναι αυτή του BROUWER στο 2NASH, δηλαδή την εύρεση ενός Nash σημείου ισορροπίας σε ένα παίγνιο δύο παικτών. Με αυτό τον τρόπο αποδεικνύεται ότι το 2NASH είναι PPAD πλήρες και δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος για το πρόβλημα αυτό εκτός και αν $P = PPAD$.

Στο τέλος της εργασίας υπάρχουν δύο παραρτήματα, όπου στο πρώτο παρουσιάζονται τα μονοπάτια που κατασκευάζει ο αλγόριθμος Lemke - Howson και κάποιες ιδιότητες αυτού και στο δεύτερο παράρτημα παρουσιάζεται ένα παράδειγμα κατασκευής ενός παιγνίου όπου ο αλγόριθμος δεν είναι αποδοτικός, παρατίθεται ο κώδικας σε MATLAB για την παραγωγή των παιγνίων της κλάσης αυτής και παρουσιάζονται τα μήκη των μονοπατιών που κατασκευάζει ο αλγόριθμος παίγνια της κλάσης.

Abstract

In this thesis we study the problem of finding a Nash equilibrium for bimatrix games. We describe Lemke - Howson algorithm and its complexity. Also we study the PPAD complexity class and we give the reduction which shows that the problem of finding a Nash equilibrium (NASH) is PPAD complete even for bimatrix games.

In section 1, we give a short history view of game theory and some essential notions about games, players and game solutions such as Nash equilibrium.

In section 2, we define bimatrix games: each player's strategies, payoffs, mixed strategies, best response, Nash equilibria and we demonstrate all of them with an example. After that, we present best response polyhedra and best response polyhedra in which the Lemke - Howson algorithm is based.

In section 3, we describe in detail Lemke - Howson algorithm intuitively, by moves on best response polytopes, and arithmetically, by integer pivoting, which is a variant of simplex method.

In section 4, is described a class of games where Lemke - Howson needs exponential time to find a Nash equilibrium. For the construction of the games we use cyclic polytopes and the Gale evenness condition and their properties. We show in detail the Lemke - Howson paths and we compute their lengths for each dropped label.

In section 5, we give a reduction from Perfect Matching to Nash equilibrium for a special case of games and we show that at these games a Nash equilibrium can be computed in polynomial time.

In the final section we study the complexity class PPAD. First of all, we define formally the class and we give the first complete problem for this class, END OF LINE. After that, we reduce END OF LINE to SPERNER and SPERNER to BROUWER which is a simplified, discretized version of finding a fixed point for a continuous function f . Finally, we give in detail the reduction from BROUWER to 2NASH and we show that 2NASH is PPAD-complete which means that there is no polynomial time algorithm for 2NASH unless $P = PPAD$.

At the end there are two appendices: At the first one we demonstrate the LH paths and at the second we give the source code in MATLAB for the construction of payoff tables for the LH worst case.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	11
1.1	Ιστορική αναδρομή	11
1.2	Βασικές έννοιες	12
1.2.1	Ορισμός παιγνίου	12
1.2.2	Επιλογή στρατηγικών	12
1.2.3	Σύνολο υποστήριξης - Support ενός παίκτη	13
1.2.4	Αναμενόμενο κέρδος	13
1.2.5	Βέλτιστη απόκριση - Best Response	13
1.3	Λύση ενός παιγνίου	13
1.3.1	Λύση Κυρίαρχης Στρατηγικής - Dominant Strategy solution	13
1.3.2	Αγνό σημείο ισορροπίας κατά Nash	14
1.3.3	Μεικτό σημείο ισορροπίας κατά Nash	14
1.3.4	Άλλα σημεία ισορροπίας	14
2	Παίγνια Διπίνακα - Bimatrix games	17
2.1	Στρατηγικές	17
2.2	Πίνακες κερδών	17
2.3	Nash σημείο ισορροπίας	17
2.4	Βέλτιστη απόκριση	18
2.5	Παράδειγμα	18
2.5.1	Μη εκφυλισμένα - Nondegenerate παίγνια	19
2.6	Παίγνια διπίνακα σαν προβλήμα γραμμικού προγραμματισμού	21
2.7	Πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης	22
2.7.1	Βασικές έννοιες	22
2.7.2	Πολύεδρο βέλτιστης απόκρισης	23
2.7.3	Σημεία ισορροπίας πάνω στα πολύεδρα βέλτιστης απόκρισης	24
2.7.4	Πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης	24
3	Ο αλγόριθμος Lemke-Howson	27
3.1	Χαρακτηρισμοί των δεικτών	27
3.2	Περιγραφή του αλγορίθμου	27
3.3	Παράδειγμα	28
3.4	Παρατηρήσεις	29
3.5	Αριθμητική υλοποίηση του Lemke-Howson	31
3.5.1	Εφαρμογή	32
4	Πολυπλοκότητα του Lemke Howson	35
4.1	Γενικά περί πολύτων	35
4.1.1	Βασικές έννοιες	35
4.1.2	Κυκλικά-cycle πολύτοπα	36
4.1.3	Η συνθήκη του Gale	36
4.1.4	Δυϊκά κυκλικά πολύτοπα	38
4.2	Παραγωγή των πινάκων του παιγνίου	38
4.2.1	Παραγωγή πίνακα κερδών για τον Pl_2	39
4.2.2	Παραγωγή πίνακα κερδών για τον Pl_1	39
4.3	Σημεία ισορροπίας του παιγνίου	41
4.4	Τα ειδικά μονοπάτια $\pi(d, 1)$ και $\pi(d, 2d)$	43
4.4.1	Το μονοπάτι $\pi(d, 1)$	43

4.4.2	Το μονοπάτι $\pi(d, 2d)$	43
4.4.3	Σύνθεση μονοπατιών	47
4.5	Μήκη των LH μονοπατιών	50
4.6	Το μικρότερο μονοπάτι	53
5	Εύρεση Nash σημείων ισορροπίας με τη βοήθεια των δεικτοδοτημένων συμβολοσειρών Gale	55
5.1	Δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale	55
5.2	Αναγωγή στο πλήρες ταίριασμα	56
5.3	Εφαρμογή των δεικτοδοτημένων συμβολοσειρών Gale σε παίγνια	57
5.3.1	Κατασκευή του πολυτόπου	57
5.3.2	Αντιστοίχιση του $\mathbf{0}$ στο P^Δ	58
5.3.3	Μεικτές στρατηγικές στο νέο πολύτοπο	58
5.3.4	Συμμετρικά παίγνια	58
5.4	Εφαρμογή και σε άλλα παίγνια	59
5.4.1	Παίγνια μοναδιαίου διανύσματος	59
5.4.2	Imitation games	59
5.5	Κατασκευή παιγνίων	60
6	Η κλάση πολυπλοκότητας PPAD	61
6.1	Οι κλάσεις PPA και PPAD	62
6.1.1	Η κλάση PPA	62
6.1.2	Η κλάση PPAD	62
6.2	Πληρότητα για την κλάση PPAD	63
6.2.1	Το 3D-SPERNER είναι PPAD-πλήρες	64
6.3	Το πρόβλημα BROUWER	66
6.4	Το BROUWER ανήκει στο PPAD	67
6.4.1	Το BROUWER είναι PPAD πλήρες	68
6.5	Το πρόβλημα 2NASH	71
6.5.1	Λογική της αναγωγής	71
6.5.2	Βασικά στοιχεία της αναγωγής	72
6.5.3	Τα κέρδη του \mathcal{G}^* και η κλάση παιγνίων \mathcal{L}	74
6.5.4	Οι κατασκευές	74
6.5.5	Κατασκευή του παιγνίου \mathcal{G}	76
6.5.6	Η αναγωγή	78
6.6	Τα Gale strings και η κλάση PPAD	79
6.7	Συμπεράσματα	80
A'	Παράρτημα A: Μονοπάτια του Lemke - Howson	81
B'	Παράρτημα B: Παραδείγματα για την χειρότερη περίπτωση	89
B'.1	Κατασκευή του παιγνίου 2×2	89
B'.2	Το γράφημα $P \times Q$ για το παραπάνω παίγνιο	90
B'.2.1	Το μονοπάτι $\pi(2, 1)$	91
B'.2.2	Το μονοπάτι $\pi(2, 2)$	91
B'.2.3	Το μονοπάτι $\pi(2, 3)$	92
B'.2.4	Το μονοπάτι $\pi(2, 4)$	92
B'.3	Κατασκευή πινάκων κερδών για τη χειρότερη περίπτωση του Lemke - Howson, υλοποίηση σε MATLAB	93
B'.4	Το παίγνιο 4×4	95

B'.4.1	Πίνακες κερδών	95
B'.4.2	Τα μονοπάτια του Lemke - Howson	95
B'.5	Μήκη μονοπατιών για διάφορα αρχικούς δείκτες που λείπουν	97

Αναφορές		100
-----------------	--	------------

1 Εισαγωγή

Η θεωρία παιγνίων μοντελοποιεί στρατηγικές καταστάσεις, ή παίγνια, που η επιτυχία του κάθε ατόμου για τις επιλογές του εξαρτάται από τις επιλογές και των άλλων. Χρησιμοποιείται τόσο στις κοινωνικές επιστήμες (οικονομικά, management, επιχειρησιακή έρευνα, πολιτικές επιστήμες) όσο και στις θετικές επιστήμες (λόγική, στατιστική, computer science) καθώς και στη βιολογία (εξελικτική βιολογία, οικολογία). Παρόλο που αρχικά αναπτύχθηκε για την ανάλυση καταστάσεων που το κέρδος του κάθε εμπλεκόμενου ήταν η απώλεια του αντιπάλου του (zero sum games), επεκτάθηκε σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών που μπορούν να διαχωριστούν με βάση πολλά κριτήρια.

Οι παραδοσιακές εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων καθορίζουν και μελετούν τα σημεία ισορροπίας (equilibria) των παιγνίων αυτών. Σε ένα σημείο ισορροπίας κάθε παίκτης έχει υιοθετήσει μια στρατηγική που δεν μπορεί να αυξήσει την ωφέλειά του δεδομένων των στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών. Έχουν προταθεί αρκετοί διαφορετικοί ορισμοί για το σημείο ισορροπίας με γνωστότερο αυτόν που προτάθηκε από τον Nash[16]. Πρόκειται για έναν συνδυασμό στρατηγικών, μία για κάθε παίκτη, όπου δεν υπάρχει παίκτης που να αυξήσει την αναμενόμενη ωφέλειά του αν αλλάξει τη στρατηγική του.

Η αλγοριθμική θεωρία παιγνίων είναι ένας σχετικά νέος τομέας που βρίσκεται στην τομή της κλασσικής θεωρίας παιγνίων και της θεωρίας του υπολογισμού. Η περιοχή της αλγοριθμικής θεωρίας παιγνίων έχει πολλές διαστάσεις με περισσότερο προφανή αυτή των υπολογιστικών ζητημάτων της θεωρίας παιγνίων. Ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα που εντάσσεται εδώ είναι το πρόβλημα υπολογισμού μιας ισορροπίας Nash, καθώς η απόδειξη ύπαρξης ισορροπιών Nash είναι κατασκευαστική και δεν υπονοεί κάποιον πολυωνυμικό αλγόριθμο υπολογισμού τους.

1.1 Ιστορική αναδρομή

Τα πρώτα παραδείγματα από παιχνίδια δύο παικτών αναφέρθηκαν πολύ πριν από την ανάπτυξη της μοντέρνας μαθηματικής επιστήμης της θεωρίας παιγνίων. Η πρώτη γνωστή αναφορά για τη θεωρία παιγνίων εμφανίζεται σε ένα γράμμα από τον James Waldegrave το 1713. Στο γράμμα αυτό, ο Waldegrave παρουσιάζει μια minimax μεικτή στρατηγική για ένα παιχνίδι καρτών δύο παικτών. Ο Antoine Augustin Cournot, το 1838, όρισε ένα διπώλιο και παρουσίασε μία λύση που είναι μια πιο αυστηρή εκδοχή του Nash σημείου ισορροπίας. Ο Δανός μαθηματικός Zeuthen απέδειξε ότι ένα μαθηματικό μοντέλο έχει μια νικηφόρα στρατηγική χρησιμοποιώντας το δεύτερο θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer.

Η θεωρία παιγνίων ουσιαστικά δεν υπήρχε σαν ξεχωριστή επιστήμη μέχρι που ο John von Neumann[23] τη θεμελίωσε το 1928 χρησιμοποιώντας το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, που έγινε μία γενική μέθοδος στη θεωρία παιγνίων και στα οικονομικά μαθηματικά. Τον ακολούθησε το 1944 ο Oskar Morgenstern[24], με τη συνεργασία τους για τη συγγραφή του βιβλίου "Theory of Games and Economic Behavior", όπου όρισαν παίγνια με πολλούς παίκτες. Η δεύτερη έκδοση του βιβλίου θεμελίωσε αξιωματικά το αναμενόμενο όφελος, πράγμα που βοήθησε τους στατιστικούς και τους οικονομολόγους να αντιμετωπίσουν τη θεωρία αποφάσεων υπό αβεβαιότητα. Αυτή η θεμελιώδης εργασία περιέχει μία μέθοδο για την εύρεση αμοιβαία αποδεκτών λύσεων για παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος. Αυτή τη περίοδο η έρευνα επικεντρώθηκε στην συνεργατική (cooperative) θεωρία παιγνίων, που αναλύει τις βέλτιστες στρατηγικές θεωρώντας ότι μπορούν να γίνουν συμφωνίες μεταξύ των παικτών.

Το 1950 ο μαθηματικός John Nash έδωσε μια νέα διάσταση στη θεωρία παιγνίων, εισάγοντας την έννοια της ισορροπίας, γνωστή πλέον ως ισορροπία Nash (NE). Περιέγραψε επίσης μια ευρεία

κλάση παιγνίων που όλα έχουν μια τέτοια ισορροπία. Αμέσως μετά τη δημοσίευση του Nash, διάφορα παιγνιοθεωρητικά μοντέλα άρχισαν να χρησιμοποιούνται στην οικονομική θεωρία και την πολιτική επιστήμη.

Το 1965 ο οικονομολόγος Reinhard Selten διατύπωσε μια νέα έννοια ισορροπίας, εκλεπτύνοντας την ισορροπία Nash. Το 1967 ο οικονομολόγος John Harsanyi ανέπτυξε τις αρχές που διέπουν τα παίγνια στα οποία οι παίκτες έχουν ατελή πληροφόρηση. Κατά τη δεκαετία του 1970 η θεωρία παιγνίων άρχισε να εφαρμόζεται συστηματικά στη βιολογία, κυρίως ως αποτέλεσμα της εργασίας του βιολόγου John Maynard Smith, που εισήγαγε την έννοια της εξελικτικά σταθερής στρατηγικής. Από τότε, οι παιγνιοθεωρητικές μέθοδοι άρχισαν να χρησιμοποιούνται σε πολλά πεδία των οικονομικών, των κοινωνικών και των επιστημών συμπεριφοράς.

Το 1994 απενεμήθη το βραβείο Nobel οικονομικών επιστημών στους John Harsanyi, John Nash και Reinhard Selten "για την πρωτοποριακή ανάλυση ισορροπιών στη θεωρία μη συνεργατικών παιγνίων". Το 2005 τιμήθηκαν με το ίδιο βραβείο οι Thomas Schelling και Robert Aumann "επειδή εμπλούτισαν την αντίληψη μας σχετικά με τις έννοιες του ανταγωνισμού και της συνεργασίας μέσω της παιγνιοθεωρητικής ανάλυσης". Τους ακολούθησαν το 2007 οι Roger Myerson, Leonid Hurwicz και Eric Maskin "για τη θεμελίωση της θεωρίας σχεδιασμού μηχανισμών".

1.2 Βασικές έννοιες

1.2.1 Ορισμός παιγνίου

Ο βασικός τρόπος αναπαράστασης ενός παιγνίου είναι σε στρατηγική μορφή ή αλλιώς κανονική μορφή (normal form).

Ορισμός 1.1. Ένα παίγνιο n παικτών σε στρατηγική μορφή αποτελείται από τα παρακάτω:

1. Ένα σύνολο $N = \{1, 2, \dots, n\}$ παικτών.
2. Ο κάθε παίκτης $i \in N$ έχει ένα πεπερασμένο σύνολο καθαρών στρατηγικών (pure strategies) $S^i = \{1, \dots, m_i\}$. Ορίζουμε σαν $S := S^1 \times S^2 \times \dots \times S^n$ το καρτεσιανό γινόμενο των καθαρών στρατηγικών όλων των παικτών. Δηλαδή, τον κάθε πιθανό συνδυασμό καθαρών στρατηγικών των n παικτών. Δηλαδή, σε ένα προφίλ καθαρών στρατηγικών $s \in S$ ο πρώτος παίκτης έχει διαλέξει τη στρατηγική $s_1 \in S^1$, ο δεύτερος την $s_2 \in S_2$, ..., ο n -οστός την $s_n \in S^n$.
3. Ο κάθε παίκτης $i \in N$, έχει μια συνάρτηση ωφέλειας $u^i : S \rightarrow \mathbb{R}$ που περιγράφει το κέρδος $u_i(s_1, \dots, s_n)$ του παίκτη i για οποιοδήποτε συνδυασμό $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το κέρδος του κάθε παίκτη εξαρτάται από το σύνολο των στρατηγικών που θα επιλεγούν από όλους τους παίκτες και όχι μόνο από τη δική του επιλογή.

1.2.2 Επιλογή στρατηγικών

Ο κάθε παίκτης μπορεί να επιλέξει είτε μία μόνο στρατηγική για να παίξει, δηλαδή να παίξει καθαρά, ή να επιλέξει πιθανοτικά ανάμεσα σε περισσότερες από μία στρατηγικές, δηλαδή να παίξει μεικτά.

Ορισμός 1.2. Μια μεικτή στρατηγική x_i για τον παίκτη i με σύνολο στρατηγικών $S^i = \{1, \dots, m_i\}$ είναι μια κατανομή πιθανότητας στο S^i . Με άλλα λόγια, είναι ένα διάνυσμα $x_i = (x_i(1), \dots, x_i(m_i))$ έτσι ώστε $x_i(j) \geq 0$ για $1 \leq j \leq m_i$. Πρέπει να ισχύει ότι $x_i(1) + \dots + x_i(m_i) = 1$.

Αν X_i είναι το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του παίκτη i , δηλαδή όλες οι δυνατές κατανομές πιθανότητας πάνω στις m_i καθαρές στρατηγικές του, τότε για τους n παίκτες το $X = X_1 \times \dots \times X_n$ είναι το σύνολο όλων των δυνατών συνδιασμών των μεικτών στρατηγικών.

Ο συμβολισμός x_{-i} σημαίνει τις στρατηγικές όλων εκτός του παίκτη i . Δηλαδή, αν $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ τότε $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Για μία μεικτή στρατηγική $y_i \in X_i$ ορίζουμε το (y_i, x_{-i}) σαν το $(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Δηλαδή, όλοι οι παίκτες παίζουν τις μεικτές στρατηγικές που έχουν στο x ενώ ο παίκτης i αλλάζει τη στρατηγική του από x_i σε y_i .

1.2.3 Σύνολο υποστήριξης - Support ενός παίκτη

Το σύνολο υποστήριξης του παίκτη i για μία μεικτή στρατηγική x_i ορίζεται σαν το σύνολο των καθαρών στρατηγικών που έχουν θετική πιθανότητα να παιχτούν. Δηλαδή, για κάποιο x_i το στήριγμα είναι το $Sp_i = \{j | x_i(j) > 0\}$.

1.2.4 Αναμενόμενο κέρδος

Το αναμενόμενο κέρδος για τον παίκτη i δείχνει τι περιμένει να κερδίσει, δεδομένου ενός παίξιματος $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$.

$$U_i(x) = \sum_{s \in S} x(s) * u_i(s) \quad (1.1)$$

Σκοπός του κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

1.2.5 Βέλτιστη απόκριση - Best Response

Μια μεικτή στρατηγική z_i είναι βέλτιστη απόκριση για τον παίκτη i στο παίξιμο x_{-i} αν για όλα τα $y_i \in X_i$ ισχύει:

$$U_i((z_i, x_{-i})) \geq U_i((y_i, x_{-i})) \quad (1.2)$$

Δηλαδή, με τη βέλτιστη απόκριση μεγιστοποιείται το αναμενόμενο κέρδος του. Αν οποιοσδήποτε παίκτης γνώριζε εκ των προτέρων τι στρατηγικές θα παίξουν οι αντίπαλοί του τότε θα επέλεγε μια στρατηγική που είναι βέλτιστη απόκριση.

1.3 Λύση ενός παιγνίου

Λύση ενός παιγνίου θεωρείται μια κατάσταση όπου όλοι οι παίκτες καταλήγουν σε μία στρατηγική, αγνή ή μεικτή, και δεν την αλλάζουν γιατί δεν μπορούν να αυξήσουν το κέρδος τους.

1.3.1 Λύση Κυρίαρχης Στρατηγικής - Dominant Strategy solution

Στο παιχνίδι που έχει λύση της παραπάνω μορφής κάθε παίκτης έχει μία μοναδική βέλτιστη στρατηγική, ανεξάρτητα με το τι θα παίξουν οι υπόλοιποι παίκτες. Δηλαδή, για κάθε παίκτη i υπάρχει στρατηγική y έτσι ώστε για κάθε στρατηγική z διαφορετική της y να ισχύει:

$$u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(z_i, x_{-i}) \quad (1.3)$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η λύση της κυρίαρχης στρατηγικής μπορεί να μη δίνει τα βέλτιστα κέρδη σε κανέναν από τους παίκτες. Επίσης, η ύπαρξη μιας και μόνο κυρίαρχης στρατηγικής για κάθε παίκτη είναι ένας πολύ αυστηρός περιορισμός για το παιχνίδι και πολύ λίγα παίγνια ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή.

1.3.2 Αγνό σημείο ισορροπίας κατά Nash

Από τη στιγμή που τα παίγνια έχουν σπάνια την ιδιότητα της κυρίαρχης στρατηγικής, επρέπε να βρεθεί μια λύση λιγότερο αυστηρή και περισσότερο εφαρμόσιμη. Μια επιθυμητή λύση θα ήταν μία όπου κάθε παίκτης παίζει σύμφωνα με τα κινητρά του, μεγιστοποιώντας το δικό του κέρδος. Η ιδέα ήρθε από τον Nash. Το σημείο ισορροπίας (equilibrium) που πρότεινε, είναι μία λύση που είναι σταθερή, δηλαδή κανένας από τους παίκτες δεν βελτιώνει το κέρδος του αν αποκλίσει μονομερώς από αυτό το σημείο ισορροπίας, επομένως δεν τον συμφέρει να αλλάξει στρατηγική.

Ένα διάνυσμα αγνών στρατηγικών $s \in S$ ονομάζεται καθαρό σημείο ισορροπίας κατά Nash (pure Nash equilibrium) αν για όλους τους παίκτες i και για κάθε εναλλακτική στρατηγική $s'_i \in S^i$, έχουμε ότι

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \quad (1.4)$$

Δηλαδή, κανένας παίκτης i μπορεί να αλλάξει στρατηγική από την s_i στην s'_i και να βελτιώσει το κέρδος του, υποθέτοντας ότι οι υπόλοιποι παίκτες παραμένουν στη στρατηγική s .

Προφανώς, μια λύση κυρίαρχης στρατηγικής είναι ένα καθαρό σημείο ισορροπίας κατά Nash. Επιπλέον, αν η λύση είναι αυστηρά κυρίαρχη (strictly dominating), δηλαδή αν αλλάζοντας σ'αυτή βελτιώνεται πάντα το αποτέλεσμα, αποτελεί και το μοναδικό καθαρό σημείο ισορροπίας κατά Nash του παίγνιου. Παρόλα αυτά, τα σημεία ισορροπίας κατά Nash μπορεί να μην είναι μοναδικά για το παίγνιο. Γνωρίζουμε από πριν ότι το σημείο ισορροπίας Nash μπορεί να μην είναι βέλτιστο από πλευράς κέρδους, και μάλιστα σε παίγνια με περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας μπορεί να υπάρχουν μεγάλες διαφορές στα κέρδη των παικτών ανάμεσα στα σημεία αυτά.

1.3.3 Μεικτό σημείο ισορροπίας κατά Nash

Στους παραπάνω ορισμούς θεωρούσαμε ότι οι παίκτες επιλέγουν μόνο μία στρατηγική για να παίξουν και γ'αυτό τα ονομάσαμε αγνά σημεία ισορροπίας. Όταν οι παίκτες παίζουν μεικτές στρατηγικές έχουν σαν γνώμονα το αναμενόμενο κέρδος.

Ορισμός 1.3. Για ένα παίγνιο n παικτών το διάνυσμα στρατηγικών $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ είναι ένα μεικτό σημείο ισορροπίας κατά Nash, αν για κάθε παίκτη i το x_i είναι βέλτιστη απόκριση στο x_{-i} .

Ο Nash [16] το 1951 βασιζόμενος στο θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer απέδειξε ότι κάθε παίγνιο με πεπερασμένο αριθμό παικτών και πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών έχει τουλάχιστον ένα Nash σημείο ισορροπίας μεικτών στρατηγικών.

Το ότι ο Nash απέδειξε ότι κάθε παίγνιο έχει ένα σημείο της παραπάνω μορφής έκλεισε κατά κάποιον τρόπο το πρώτο κομμάτι της θεωρίας παιγνίων που έπρεπε να καθιερωθεί μια λύση κοινώς αποδεκτή, αλλά άνοιξε ένα νέο κομμάτι που ασχολούνταν με την εύρεση τέτοιων σημείων ισορροπίας, πράγμα που αποδείχθηκε τελικά αρκετά δύσκολο.

1.3.4 Άλλα σημεία ισορροπίας

Μετά από τον ορισμό του Nash ακολούθησαν και άλλοι, που βασίστηκαν βέβαια πάνω στον ορισμό του Nash, με σκοπό να απλοποιήσουν ακόμη περισσότερο την ιδέα του ισορροπίας ούτως ώστε να διευκολυνθούμε στην εύρεση τους.

Correlated σημεία ισορροπίας

Σ' αυτό το είδος των σημείων ισορροπίας οι παίκτες υπακούν σε έναν παρατηρητή του παιγνίου που συμβουλεύει τον κάθε παίκτη τι να παίξει. Βασική προϋπόθεση είναι ότι ο παρατηρητής είναι αξιόπιστος και αμερόληπτος για όλους τους παίκτες. Έτσι, αν η μεικτή στρατηγική που θα προταθεί από τον παρατηρητή ακολουθηθεί από όλους τους παίκτες, τότε είναι η βέλτιστη για όλους. Τα παραπάνω οδήγησαν τον Aumann το 1974 να δώσει τον παρακάτω ορισμό για το correlated equilibrium:

Ορισμός 1.4. Ένα correlated σημείο ισορροπίας είναι μια κατανομή πιθανότητας p_s στο χώρο των στρατηγικών των παικτών για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες: Για κάθε παίκτη i και κάθε δύο διαφορετικές στρατηγικές j, j' του i , υπό την προϋπόθεση ότι η στρατηγική j υπάρχει στη κατανομή p_s , το αναμενόμενο κέρδος παίζοντας την j είναι μεγαλύτερο ή ίσο από αυτό της j' .

Προσεγγιστικά σημεία ισορροπίας - Approximate equilibria

Έστω $\epsilon > 0$ ένας πραγματικός αριθμός. Ένα ϵ -προσεγγιστικό σημείο ισορροπίας κατά Nash είναι ένα διάνυσμα μεικτών στρατηγικών έτσι ώστε καμία στρατηγική που αποκλίνει από αυτή δε μπορεί να βελτιώσει το κέρδος παραπάνω από ϵ . Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ένα ϵ -προσεγγιστικό σημείο ισορροπίας κατά Nash μπορεί να είναι πολύ κοντά αλλά και μακριά από ένα πραγματικό σημείο ισορροπίας Nash. Η έννοια του παραπάνω σημείων ισορροπίας είναι αναγκαία, καθώς τα παίγνια δύο παικτών μπορούν να έχουν πάντα ρητά Nash σημεία ισορροπίας, ενώ παίγνια με περισσότερους παίκτες μπορεί να έχουν μόνο άρρητα. Συνεπώς, κάθε αναγωγή των τελευταίων σε παίγνια δύο παικτών απαιτούν κάποιου είδους προσέγγιση.

2 Παίγνια Διπίνακα - Bimatrix games

Παίγνια διπίνακα ονομάζουμε τα παίγνια μεταξύ δύο παικτών. Σύμφωνα με τον αρχικό ορισμό για το παίγνιο χρειαζόμαστε το σύνολο των στρατηγικών για τον κάθε παίκτη και το κέρδος του για κάθε πιθανό συνδυασμό στρατηγικών. Ο συνδυασμός που επιλέγουν οι παίκτες θα ονομάζεται προφίλ στρατηγικών.

2.1 Στρατηγικές

Εδώ έχουμε 2 παίκτες τον Pl_1 με στρατηγικές που ονομάζονται $M = \{1, \dots, m\}$ και τον Pl_2 με τις στρατηγικές $N = \{1, \dots, n\}$. Είναι βολικό να μετονομάσουμε τις στρατηγικές του Pl_2 στο σύνολο $N' = \{m+1, \dots, m+n\}$, ούτως ώστε να μη χρειάζεται να προσδιορίζουμε σε ποιον παίκτη ανήκει η κάθε στρατηγική. Μία μεικτή στρατηγική θα αναπαριστάται με ένα διάνυσμα στήλη m στοιχείων για τον Pl_1 και n στοιχείων για τον Pl_2 .

2.2 Πίνακες κερδών

Τα κέρδη του καθενός μπορούν να αναπαρασταθούν σε δύο πίνακες A και B μεγέθους $m \times n$ όπου οι γραμμές αντιστοιχούν στις αγνές στρατηγικές του Pl_1 και οι στήλες στις αγνές στρατηγικές του Pl_2 . Το στοιχείο $A(i, j)$ αντιπροσωπεύει το κέρδος του Pl_1 αν αυτός παίξει τη στρατηγική $i \in M$ και ο Pl_2 παίξει τη στρατηγική $j \in N$. Αντίστοιχα το κέρδος του Pl_2 για το αντίστοιχο παίξιμο αντιστοιχεί στο στοιχείο $B(i, j)$. Ένα τέτοιο παίγνιο μπορεί απλά να προσδιοριστεί σαν (A, B) .

Έστω X το σύνολο όλων των δυνατών κατανομών πιθανότητας πάνω στις στρατηγικές του Pl_1 και Y το σύνολο των κατανομών πιθανότητας για τον Pl_2 . Με $x \in X$ θα συμβολίζουμε μια μεικτή στρατηγική του Pl_1 και με $y \in Y$ μια μεικτή στρατηγική του Pl_2 . Στην ουσία το x είναι ένα διάνυσμα m θέσεων, δηλαδή $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ και το y ένα διάνυσμα n θέσεων, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ όπου το άρθιοσμα των στοιχείων του κάθε διανύσματος ισούται με 1, αφού πρόκειται για κατανομή πιθανότητας, δηλαδή $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ και $\sum_{j=1}^n y_j = 1$.

Το αναμενόμενο κέρδος του κάθε παίκτη εξαρτάται τόσο από τον τρόπο κατανομής των πιθανοτήτων πάνω στις δικές του στρατηγικές, όσο και στην επιλογή της κατανομής των πιθανοτήτων του αντιπάλου. Έτσι για τον Pl_1 το αναμενόμενο κέρδος, σύμφωνα με τον τύπο 1.1, ισούται με $x^T Ay$ και για τον Pl_2 ισούται $x^T By$.

2.3 Nash σημείο ισορροπίας

Ένα ζεύγος κατανομών πιθανότητας (x^*, y^*) , $x^* \in X$, $y^* \in Y$ είναι σημείο ισορροπίας κατά Nash αν κανένας από τους δύο παίκτες δεν μπορεί να αυξήσει το κέρδος του αλλάζοντας μόνο αυτός τη στρατηγική του. Δηλαδή, θα ισχύει ότι

$$x^{*T} Ay^* \geq x^T Ay^*, \quad \forall x \in X \quad x^{*T} By^* \geq x^{*T} By, \quad \forall y \in Y$$

Το θεώρημα του Nash ισχύει και για τα παίγνια δύο παικτών και μας λέει ουσιαστικά ότι οποιοδήποτε ζεύγος πινάκων A, B θα έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας κατά Nash.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι πίνακες A, B έχουν όλα τα στοιχεία τους μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός. Ακόμη και αν δεν ίσχυε η παραπάνω παραδοχή - δηλαδή οι A', B' είχαν και αρνητικά στοιχεία-, μπορούμε να τους μετασχηματίσουμε στους A, B , προσθέτοντας τον κατάλληλο αριθμό στον κάθε πίνακα, χωρίς να αλλάξουν τα σημεία ισορροπίας του παιγνίου.

2.4 Βέλτιστη απόκριση

Η βέλτιστη απόκριση του Pl_1 στη στρατηγική y του Pl_2 είναι η μεικτή στρατηγική x που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος $x^T Ay$. Ένα ζεύγος στρατηγικών (x, y) είναι Nash σημείο ισορροπίας (NE) αν το ένα αποτελεί βέλτιστη απόκριση του άλλου. Επειδή όπως έχουμε προαναφέρει σε κάθε παίγνιο υπάρχει τουλάχιστον ένα Nash σημείο ισορροπίας, θα υπάρχουν πάντα δύο βέλτιστες αποκρίσεις που η μία θα είναι βέλτιστη απόκριση της άλλης. Έτσι προκύπτει ένας ισοδύναμος ορισμός για το Nash σημείο ισορροπίας.

Πρόταση 2.1. Έστω ένα ζεύγος στρατηγικών (x, y) μεικτών στρατηγικών για τους δύο παίκτες αντίστοιχα. Με $(Ay)_i$ ορίζουμε το i -οστό στοιχείο του διανύσματος Ay , που είναι το αναμενόμενο κέρδος για τον Pl_1 όταν θα παίζει τη γραμμή i . Τότε το x είναι βέλτιστη στο y αν και μόνον αν για κάθε $i \in M$ ισχύει:

$$x_i > 0 \implies (Ay)_i = u = \max\{(Ay)_k | k \in M\} \quad (2.1)$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι:

$$x^T Ay = \sum_{i \in M} x_i (Ay)_i = \sum_{i \in M} x_i (u - (u - (Ay)_i)) = u - \sum_{i \in M} x_i (u - (Ay)_i)$$

Έτσι $x^T Ay \leq u$ επειδή $x_i \geq 0$ και $u - (Ay)_i \geq 0$ για κάθε $i \in M$, και $x^T Ay = u$ αν και μόνον αν το $x_i > 0$ που υποδηλώνει ότι $(Ay)_i = u$. \square

2.5 Παράδειγμα

Για να γίνουν όλα τα παραπάνω αντιληπτά θα μας βοηθήσει το παρακάτω παράδειγμα. Θεωρούμε το 3×2 παίγνιο (A, B) όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Δηλαδή, ο Pl_1 έχει σύνολο στρατηγικών το $M = \{1, 2, 3\}$ και ο Pl_2 έχει το $N = \{4, 5\}$. Αν ο Pl_1 παίζει 2 και ο Pl_2 παίζει 5, τότε ο Pl_1 θα έχει κέρδος 5 και ο Pl_2 κέρδος 6. Αν το παίγνιο φτάσει σ'αυτή την κατάσταση, δηλαδή ο Pl_1 γνωρίζει ότι ο Pl_2 θα παίζει 5 και ο Pl_2 γνωρίζει ότι ο αντίπαλός του θα παίζει 2, η βέλτιστη απόκριση για τον Pl_2 είναι να παραμείνει σταθερός, δεδομένου ότι ο αντίπαλος παραμένει σταθερός, καθώς δε μπορεί να αυξήσει παραπάνω το κέρδος του (βρίσκεται δηλαδή σε βέλτιστη απόκριση). Αντίθετα, ο Pl_1 συμφέρει να αλλάξει τη στρατηγική του σε 3 καθώς έτσι αυξάνει το κέρδος του σε 6. Αν γίνει όμως αυτό, το κέρδος του Pl_2 πέφτει σε 1 και τον συμφέρει να αλλάξει και αυτός τη στρατηγική του σε 4. Αυτή τη φορά ο Pl_1 ξαναλλάζει στρατηγική πηγαίνοντας στην 1. Παρατηρούμε ότι με αυτό το τρόπο οι παίκτες έφτασαν σε καθαρό NE το $(x, y) = ((1, 0, 0), (1, 0))$ καθώς η στρατηγική του κάθε παίκτη είναι βέλτιστη απόκριση στη στρατηγική του αντιπάλου του.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην αρχική κατάσταση το κέρδος και για τους δύο παίκτες ήταν μεγαλύτερο από ότι είναι στο NE. Επίσης πρέπει να τονιστεί ότι η παραπάνω διαδικασία δεν οδηγεί πάντα σε NE, καθώς αφενός το παίγνιο μπορεί να μην έχει αγνό NE και αφετέρου μπορεί να δημιουργηθεί ένας κύκλος από βέλτιστες αποκρίσεις που θα οδηγήσει στην αρχική κατάσταση (ακόμη και όταν υπάρχει αγνό NE στο παίγνιο). Δηλαδή, ο κύκλος αποφεύγει τις αμοιβαίες βέλτιστες αποκρίσεις, που είναι και καθαρό Nash σημείο ισορροπίας.

Το παραπάνω παίγνιο έχει τρία NE, ένα καθαρό και δύο μεικτά. Εκτός από το αγνό που παρουσιάστηκε παραπάνω, τα άλλα δύο NE είναι τα:

$((4/5, 1/5, 0), (2/3, 1/3))$ με σύνολο υποστήριξης $\{1, 2\}$ για τον Pl_1 και $\{4, 5\}$ για τον Pl_2
 $((0, 1/3, 2/3), (1/3, 2/3))$ με σύνολο υποστήριξης $\{2, 3\}$ για τον Pl_1 και $\{4, 5\}$ για τον Pl_2 .

Εύκολα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη συνθήκη της βέλτιστης απόκρισης και να την επαληθεύσουμε, επαληθεύοντας ταυτόχρονα ότι είναι και Nash σημείο ισορροπίας (αφού κάθε στρατηγική είναι βέλτιστη απόκριση για την άλλη).

Αναλυτικότερα, για το $((0, 1/3, 2/3), (1/3, 2/3))$ έχουμε:

Για τον Pl_1 :

$$Ay = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 > 0 \end{array} \right.$$

Για τον Pl_2 :

$$x^T B = (0 \quad 1/3 \quad 2/3) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = (\frac{8}{3} \quad \frac{8}{3})$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να ελέγξουμε αν ο τελευταίος συνδιασμός στρατηγικών είναι πράγματι ένα NE.

Παρατηρούμε ότι είναι εύκολο να ελέγξουμε αν ένα ζεύγος στρατηγικών (x, y) αποτελεί NE για ένα παίγνιο, όπου λέγοντας εύκολο εννοούμε ότι χρειάζεται πολυωνυμικός χρόνος -πολυωνυμικός αριθμός πράξεων- για να γίνει ο σχετικός έλεγχος.

Εδώ θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί ένα πρώτο απλό αλγόριθμο για την εύρεση NE σε παίγνια δύο παικτών, χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.1:

Για κάθε πιθανό προφίλ στρατηγικών έλεγξε με τον παραπάνω τύπο αν αποτελεί η μία βέλτιστη απόκριση στην άλλη.

Βέβαια, ο αλγόριθμος αυτός είναι μη χρηστικός, διότι μιλάμε για κατανομές πιθανοτήτων και έχουμε πάρα πολλές δυνατές αποτιμήσεις πιθανοτήτων για τον κάθε παίκτη. Παρόλα αυτά, βλέπουμε ότι το πρόβλημα μοιάζει κάπως με ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, δηλαδή έχουμε πάρα πολλά σημεία που ικανοποιούν τους περιορισμούς που θέτουμε, αλλά εμείς ψάχνουμε μόνο στα ακραία σημεία. Και σε αυτήν την περίπτωση θα ψάξουμε, με κάποιο τρόπο, μόνο σε αρκαίες τιμές πιθανοτήτων πάνω στις στρατηγικές.

2.5.1 Μη εκφυλισμένα - Nondegenerate παίγνια

Στο παραπάνω παίγνιο παρατηρούμε επίσης ότι σε κάθε Nash σημείο ισορροπίας οι παίκτες παίζουν τον ίδιο αριθμό στρατηγικών. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.2. Ένα παίγνιο δύο παικτών ονομάζεται μη εκφυλισμένο αν καμία μεικτή στρατηγική με σύνολο υποστήριξης μεγέθους k δεν έχει παραπάνω από k βέλτιστες αποκρίσεις.

Πρόταση 2.3. Σε οποιοδήποτε Nash σημείο ισορροπίας (x, y) ενός μη εκφυλισμένου παιγνίου δύο παικτών τα x και y έχουν σύνολο υποστήριξης ίσου μεγέθους.

Με βάση την παραπάνω πρόταση κάποιος θα μπορούσε να προτείνει ένα βελτιωμένο αλγόριθμο για την εύρεση NE:

Για κάθε $k = 1, \dots, \min\{|N|, |M|\}$ και για κάθε ζευγάρι στηριγμάτων (I, J) μεγέθους k , όπου $I \subseteq M$ και $J \subseteq N$, λύσε τις εξισώσεις

- $\sum_{i \in I} x_i b_{ij} = v$ με $j \in J$
- $\sum_{i \in I} x_i = 1$
- $\sum_{j \in J} a_{ij} y_j = u$ με $i \in I$
- $\sum_{j \in J} y_j = 1$

και ελέγξε αν $x_i \geq 0, \forall i \in I$ και $y_j \geq 0, \forall j \in J$ και ότι τα x και y είναι βέλτιστη απόκριση το ένα για το άλλο.

Οι παραπάνω γραμμικές εξισώσεις μπορεί να μην έχουν λύση κάποιες φορές και αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει NE για το παίγνιο με αυτά τα σύνολα υποστήριξης.

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε αν τα σύνολα υποστήριξης $S_{p_1} = \{1, 2\}$ και $S_{p_2} = \{4, 5\}$ οδηγούν σε NE. Σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο έχουμε να λύσουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= v \\ 2x_1 + 6x_2 &= v \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις ως προς x_1 και x_2 βρίσκουμε ότι $x_1 = 4/5$ και $x_2 = 1/5$ που ικανοποιούν τη σχέση $x_i \geq 0, i = \{1, 2\}$. Το v δεν επηρεάζει τις εξισώσεις και μπορούμε να το απλοποιήσουμε. Άλλωστε, το v θα το υπολογίσουμε μετά, για να δούμε ότι πράγματι η κατανομή πιθανοτήτων που βρήκαμε σε αυτό το σύνολο υποστήριξης αποτελεί όντως βέλτιστη απόκριση.

Επίσης έχουμε και τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} 3y_4 + 3y_5 &= u \\ 2y_4 + 3y_5 &= u \\ y_4 + y_5 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας και αυτές τις εξισώσεις βρίσκουμε $y_4 = 2/3$ και $y_5 = 1/3$ που ικανοποιούν τη σχέση $y_j \geq 0, j = \{4, 5\}$.

Το μόνο που μένει τώρα να ελέγξουμε είναι αν το ένα είναι βέλτιστη απόκριση στο άλλο. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη μέθοδο βρίσκουμε ότι $Ay = (3, 3, 2)$ και $x^T B = (14/5, 14/5)$ που συμφωνεί με τον ορισμό 2.1 της βέλτιστης απόκρισης, οπότε βρήκαμε ένα Nash σημείο ισορροπίας.

Αν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο στο σύνολο υποστήριξης του Pl_1 , $Sp_1 = \{1, 3\}$ παίρνουμε τις εξισώσεις

$$3x_1 + 3x_2 = v$$

$$2x_1 + x_2 = v$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

που έχουν σαν λύση $x_1 = 2$ και $x_3 = -1$, πράγμα που μας κάνει να απορρίψουμε τον παραπάνω συνδυασμό από υποψήφιο για NE, καθώς δεν πρόκειται για κατανομή πιθανότητας.

Αναμφίβολα, ο αλγόριθμος αυτός μειώνει τις επαναλήψεις σε σχέση με τον προηγούμενο που έλεγχε κάθε πιθανή κατανομή, αλλά δε παύει να απαιτεί και αυτός εκθετικό αριθμό επαναλήψεων αν σκεφτεί κανείς ότι μόνο για τον παίκτη με τις λιγότερες στρατηγικές, έστω k , έχουμε 2^k υποψήφια σύνολα υποστήριξης. Το πρόβλημα στον αλγόριθμο αυτό είναι ότι ελέγχονται πολλά ζευγάρια συνόλων υποστήριξης που δεν είναι βέλτιστη απόκριση το ένα για το άλλο. Μία πιθανή βελτίωση είναι αν περιορίσουμε τον έλεγχο μόνο σε σύνολα υποστήριξης που είναι βέλτιστες αποκρίσεις.

2.6 Παίγνια διπίνακα σαν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού

Αν ξεχάσουμε προς στιγμή ότι αναφερόμαστε σε παίγνια, μπορούμε να δούμε ότι παραπάνω έχουμε περιγράψει δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, ένα για τον κάθε παίκτη. Πιο συγκεκριμένα για τον Pl_1 έχουμε:

$$\max x^T Ay$$

- Με περιορισμούς
- $x_i \geq 0, \quad \forall i \in M$
 - $\sum_{i=1}^m x_i = 1$
 - Το x να είναι βέλτιστη απόκριση στο y :
 - $x_i > 0$ αν και μόνον αν $(Ay)_i = u$
 - $x_i = 0$ αν και μόνον αν $(Ay)_i < u$.

Ενώ αντίστοιχα για τον Pl_2 έχουμε:

$$\max x^T By$$

- Με περιορισμούς
- $y_i \geq 0, \quad \forall i \in N$
 - $\sum_{i=m+1}^{m+n} x_i = 1$
 - Το y να είναι βέλτιστη απόκριση στο x :
 - $y_j > 0$ αν και μόνον αν $(x^T B)_j = v$
 - $x_j = 0$ αν και μόνον αν $(x^T B)_j < v$.

Το ζητούμενο στα παραπάνω δύο προβλήματα γραμμικού περιορισμού είναι να μεγιστοποιήσουμε και τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις ταυτόχρονα. Παρόλα αυτά δεν πρόκειται για ένα κλασικό πρόβλημα μεγιστοποίησης με δύο αντικειμενικές συναρτήσεις. Το σημείο που διαφοροποιείται από ένα κλασικό πρόβλημα είναι ότι έδω μεταβάλλονται οι αντικειμενικές συναρτήσεις καθώς τα x και y αλλάζουν. Δηλαδή, στην περίπτωσή μας έχουμε δύο προβλήματα που τρέχουν

κατά κάποιο τρόπο εναλλάξ: μια μεταβολή στο ένα αλλάζει τα δεδομένα στο άλλο και έτσι πρέπει να μεγιστοποιείται η αντικειμενική συνάρτηση στο καθένα με βάση τα δεδομένα του άλλου. Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου να μεγιστοποιηθούν και οι δύο αντικειμενικές συναρτήσεις (όπου τα x και y είναι βέλτιστη απόκριση το ένα στο άλλο).

Αφού ορίσαμε το παίγνιο σαν δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, για να είναι πλήρης η περιγραφή των προβλημάτων πρέπει να υπολογίσουμε και την περιοχή εφικτών λύσεων για το κάθε ένα από τα προβλήματα αυτά. Η περιοχή εφικτών λύσεων είναι ως συνήθως ένα πολύεδρο που πρέπει να περιγραφεί.

2.7 Πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης

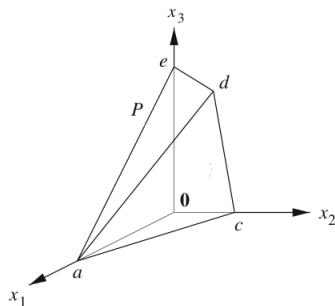
Πριν προχωρήσουμε παρακάτω στον αυστηρό ορισμό των πολύτόπων που δημιουργούνται από ένα παίγνιο διπίνακα, αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες από τα πολύεδρα θα χρειαστούν παρακάτω.

2.7.1 Βασικές έννοιες

Ένα πολύεδρο P στον \mathbb{R}^d είναι ένα σύνολο σημείων z για τα οποία ισχύει $\{z \in \mathbb{R}^d \mid Cz \leq q\}$ για κάποιο πίνακα C και κάποιο διάνυσμα q . Το πολύεδρο είναι full-dimensional αν έχει διάσταση d δηλαδή αν υπάρχουν στο σύνολο αυτό $d + 1$ σημεία, αλλά όχι παραπάνω, αιφνικά ανεξάρτητα (affine independent). Ένα πολύεδρο, αν είναι φραγμένο, ονομάζεται πολύτοπο.

Μία όψη (face) του P είναι ένα σύνολο $\{z \in \mathbb{R}^d \mid c^T z = q_0\}$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}^d$ και $q_0 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει η ανισότητα $c^T z \leq q_0$. Μια κορυφή του P είναι μια όψη του P μηδενικής διάστασης. Μία ακμή του P είναι μίας μονοδιάστατης όψης του P . Μια έδρα (facet) ενός d -διάστατου πολυέδρου είναι μια όψη του P που έχει διάσταση $d - 1$. Κάθε μη κενή όψη F του P μπορεί να κατασκευαστεί αλλάζοντας κάποιες από τις ανισώσεις που ορίζουν το P σε ισότητες, οι οποίες ονομάζονται προσδιορίζουσες (binding) ανισότητες. Δηλαδή, $F = \{z \in P \mid c_i z = q_i, i \in I\}$ όπου $c_i z \leq q_i$ για $i \in I$ είναι κάποιες από τις γραμμές του $Cz \leq q$. Μία έδρα χαρακτηρίζεται από μία και μόνο προσδιορίζουσα ανισότητα. Οι ανισότητες αυτές είναι μοναδικές για το πολύτοπο, υπό την έννοια ότι για να αλλάξει μια ανισότητα, δηλαδή μια όψη, πρέπει να αλλάξει ολόκληρο το πολύεδρο.

Ένα d -διάστατο πολύεδρο P ονομάζεται απλό (simple) αν κανένα σημείο ανήκει δεν ανήκει σε παραπάνω από d έδρες του P , πράγμα που ισχύει αν δεν υπάρχει κάποια ειδική εξάρτηση μεταξύ των ανισοτήτων που προσδιορίζουν τις έδρες.



Σχήμα 1: Εκφυλισμένο πολύτοπο. Παρατηρούμε ότι δεν είναι απλό αφού η κορυφή a ανήκει σε τέσσερις έδρες ενώ η καθεμία από τις υπόλοιπες κορυφές ανήκουν σε τρεις έδρες.

2.7.2 Πολύεδρο βέλτιστης απόκρισης

Το πολύεδρο της βέλτιστης απόκρισης για κάθε παίκτη είναι το σύνολο των μεικτών στρατηγικών του παίκτη μαζί με το αναμενόμενο κέρδος του αντιπάλου του. Οι σχέσεις που ορίζουν το πολύεδρα αυτά, \bar{P} για τον Pl_2 και \bar{Q} για τον Pl_1 , είναι οι ακόλουθες:

$$\bar{P} = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \mid x \geq \mathbf{0}, B^T x \leq \mathbf{1}v, \sum_{i=1}^M x_i = 1 \right\}$$

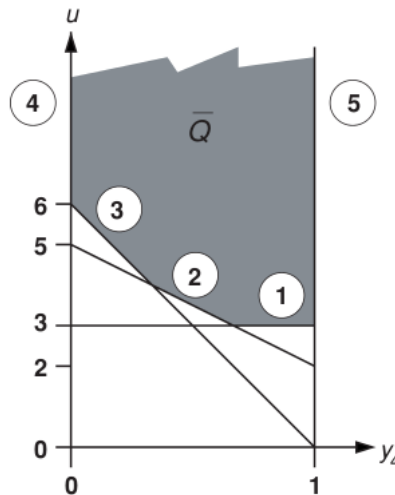
$$\bar{Q} = \left\{ (y, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid Ay \leq \mathbf{1}u, y \geq \mathbf{0}, \sum_{i=M+1}^{M+N} y_i = 1 \right\} \quad (2.3)$$

όπου $x \geq \mathbf{0}$ σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία του διανύσματος x είναι όλα μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός. Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις που ορίζουν τα πολύτοπα δεν είναι στην ίδια σειρά στο \bar{P} και στο \bar{Q} . Αυτό δεν είναι τυχαίο καθώς αυτή η σειρά είναι που θα μας βοηθήσει να βρούμε πιο εύκολα τα Nash σημεία ισορροπίας.

Για το παράδειγμα 2.2 αν θελήσουμε να οπτικοποιήσουμε τα πολύεδρα \bar{Q} για τον Pl_1 και το \bar{P} για τον Pl_2 θα έχουμε τις εξής εξισώσεις:

\bar{Q}	\bar{P}
$3y_4 + 3y_5 \leq u$ (1)	$x_1 \geq 0$ (1)
$2y_4 + 5y_5 \leq u$ (2)	$x_2 \geq 0$ (2)
$6y_5 \leq u$ (3)	$x_3 \geq 0$ (3)
$y_4 \geq 0$ (4)	$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq v$ (4)
$y_5 \geq 0$ (5)	$2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq v$ (5)
$y_4 + y_5 = 1$	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Αν σχεδιάσουμε το πολύεδρο έχουμε το Σχήμα 2 όπου στον οριζόντιο άξονα είναι η πιθανότητα y_4 - η πιθανότητα y_5 ορίζεται μοναδικά σαν $1 - y_4$ - και στον κάθετο άξονα το αναμενόμενο κέρδος u για τον Pl_1 .



Σχήμα 2: Το πολύεδρο βέλτιστης απόκρισης \bar{Q} για τον Pl_1

Παρατηρούμε ότι κάθε έδρα του \bar{Q} έχει ένα δείκτη (label). Ο δείκτης αυτός δείχνει τον αριθμό της προσδιορίζουσας ανίσωσης σύμφωνα με την αρίθμηση που δώσαμε παραπάνω. Με τη βοήθεια του

παραπάνω πολυέδρου και μόνο ο Pl_1 μπορεί να επιλέξει πάντα τη στρατηγική (μεικτή ή καθαρή) που τον συμφέρει να παίξει, δηλαδή τη βέλτιστη απόκριση. Έτσι βλέποντας μόνο τις πιθανότητες με τις οποίες θα παίξει ο Pl_2 τις στρατηγικές του, ο Pl_1 αποφασίζει τι θα παίξει μεγιστοποιώντας το κέρδος του. Δηλαδή, οι τρεις πρώτες ανισώσεις με δείκτες 1, 2, 3 αντιστοιχούν στις βέλτιστες αποκρίσεις του Pl_1 μαζί με το αντίστοιχο κέρδος του. Οι ευθείες που έχουν τους δείκτες 1 και 2 τέμνονται για $y_4 = 2/3$ (οπότε $y_5 = 1/3$) και οι ευθείες που έχουν τους δείκτες 2 και 3 τέμνονται για $y_4 = 1/3$ ($y_5 = 2/3$). Έτσι αν ο Pl_2 παίξει τη στρατηγική 4 με πιθανότητα $y_4 > 2/3$ η βέλτιστη απόκριση για τον Pl_1 είναι να παίξει τη στρατηγική 1 με αναμενόμενο κέρδος 3. Η επιλογή της στρατηγικής 1 για τον Pl_1 είναι ξεκάθαρη από το σχήμα 2, αφού οι υπόλοιπες στρατηγικές δίνουν μικρότερο κέρδος αν η πιθανότητα y_4 είναι μεγαλύτερη από $2/3$. Με την παραπάνω λογική, δηλαδή ότι ο παίκτης επιλέγει όποια στρατηγική του αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος, έχουμε καλύψει τα διαστήματα $[0, 1/3)$, $(1/3, 2/3)$, $(2/3, 1]$ και ο Pl_1 παίξει καθαρά τις στρατηγικές 3, 2 και 1 αντίστοιχα στο κάθε διάστημα. Το μόνο που μένει να εξετάσουμε είναι τι συμβαίνει στα σημεία τομής των ευθειών. Το σημείο που τέμνονται οι ευθείες 2 και 3 είναι το $(y_4, y_5, u) = (1/3, 2/3, 4)$ αντιστοιχεί στην μεικτή στρατηγική $y = (1/3, 2/3)$ με αναμενόμενο κέρδος 4 για τον Pl_1 . Οι δείκτες 2, 3 σημαίνουν ότι ο Pl_1 πρέπει να έχει στο σύνολο υποστήριξης του τις στρατηγικές 2 και 3. Ο τρόπος που θα κάνει την κατανομή της πιθανότητας θα προσδιοριστεί από το πολυέδρο βέλτιστης απόκρισης \bar{P} . Αντίστοιχα το σημείο τομής των ευθειών 1 και 2 είναι το $(y_4, y_5, u) = (2/3, 1/3, 3)$, αντιστοιχεί στη στρατηγική $y = (2/3, 1/3)$ έχει αναμενόμενο κέρδος 3 για τον Pl_1 και σύνολο υποστήριξης τις στρατηγικές 1 και 2 σαν βέλτιστη απόκριση.

Ορισμός 2.4. Ένα σημείο $(y, u) \in \bar{Q}$ έχει το δείκτη $k \in M \cup N$ αν η k -οστή ανίσωση είναι προσδιορίζουσα. Ένα σημείο μπορεί να έχει παραπάνω από ένα δείκτες, αν βρίσκεται στη τομή δύο ή περισσότερων προσδιορίζουσών ανισώσεων.

Στο συγκεκριμένο πολυέδρο μπορεί να έχει μέχρι δύο δείκτες, ενώ αν το πολυέδρο ήταν στον \mathbb{R}^d ένα σημείο μπορεί να έχει μέχρι και d δείκτες, αφού μιλάμε για μη εκφυλισμένο παίγνιο. Με αντίστοιχο τρόπο κατασκευάζεται το πολυέδρο \bar{P} στον \mathbb{R}^3 και κάθε σημείο του έχει κάποιους δείκτες που δίνονται και πάλι από τις προσδιορίζουσες ανισώσεις.

2.7.3 Σημεία ισορροπίας πάνω στα πολυέδρα βέλτιστης απόκρισης

Ορισμός 2.5. Ένα Nash σημείο ισορροπίας μεικτών στρατηγικών (x, y) και αναμενόμενο κέρδος u, v για τον κάθε παίκτη, αντιστοιχεί στο ζευγάρι $((x, v), (y, u))$ του $\bar{P} \times \bar{Q}$ που είναι πλήρως δεικτοδοτημένο (completely labeled-π.δ.). Δηλαδή, κάθε δείκτης $k \in M \cup N$ εμφανίζεται σαν δείκτης είτε στο (x, v) ή στο (y, u) .

Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τη συνθήκη της βέλτιστης απόκρισης 2.1 που δώσαμε νωρίτερα: Ένας δείκτης i που λείπει σημαίνει ότι μία στρατηγική i ενός παίκτη, έστω του Pl_1 , έχει πιθανότητα μεγαλύτερη του μηδενός, αφού δεν εμφανίζεται ο δείκτης i στο σημείο (x, v) του \bar{P} , και ότι επίσης δεν είναι βέλτιστη απόκριση, αφού δεν εμφανίζεται στο σημείο (y, u) του \bar{Q} . Αλλά αυτό συμβαίνει όταν παραβιάζεται η συνθήκη της βέλτιστης απόκρισης. Άρα αν εμφανίζεται κάθε δείκτης είτε στο \bar{P} ή στο \bar{Q} τότε κάθε καθαρή στρατηγική έχει πιθανότητα ίση με μηδέν ή είναι βέλτιστη απόκριση, έτσι τα x και y είναι βέλτιστη απόκριση το ένα στο άλλο.

2.7.4 Πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης

Παρατηρούμε ότι οι περιορισμοί που ορίζουν τα πολυέδρα \bar{P} και \bar{Q} μπορούν να απλοποιηθούν διαγράφοντας τις μεταβλητές του κέρδους u και v . Η απλοποίηση αυτή μπορεί να γίνει εφόσον ισχύει $u > 0$ και $v > 0$ δηλαδή αν οι πίνακες A και B^T έχουν στοιχεία μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός και δεν έχουν καμία μηδενική στήλη, πράγμα που μπορεί να ισχύει σε κάθε περίπτωση χωρίς

περιορισμό της γενικότητας.

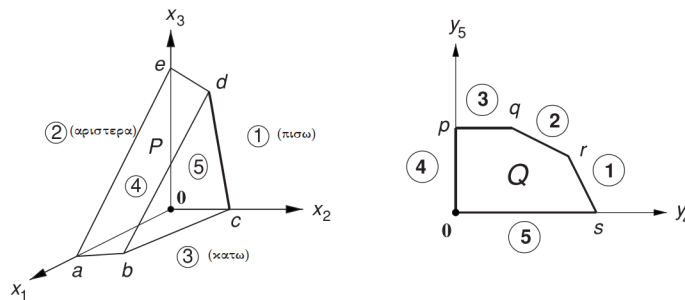
Για το \bar{P} , αν διαιρέσουμε κάθε ανίσωση $\sum_{i \in M} b_{ij} x_i \leq v$ με το v παίρνουμε $\sum_{i \in M} b_{ij} (x_i/v) \leq 1$. Το κλάσμα (x_i/v) το βλέπουμε σαν μία νέα μεταβλητή που την ονομάζουμε και πάλι x_i και το πολύτοπο που παράγεται το ονομάζουμε P . Με παρόμοιο τρόπο αντικαθιστούμε το \bar{Q} με το Q διαιρώντας κάθε ανίσωση του $Ay \leq \mathbf{1}u$ με u . Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τώρα τα πολύτοπα P, Q αυστηρά και οι 2.3 γίνονται:

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^M \mid x \geq \mathbf{0}, B^T x \leq \mathbf{1}\} \\ Q &= \{y \in \mathbb{R}^N \mid Ay \leq \mathbf{1}, y \geq \mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Λόγω της σύμβασης που κάναμε για τους πίνακες A, B^T , ότι δηλαδή έχουν μη αρνητικά στοιχεία και ότι δεν έχουν καμία μηδενική στήλη, τα πολύτοπα P και Q είναι full-dimensional. Επειδή συμβαίνει αυτό, κανονικοποιήσαμε το αναμενόμενο κέρδος να ισούται με 1 και αφαιρέσαμε τους περιορισμούς $\sum_{i \in M} x_i = 1, \sum_{j \in N} y_j = 1$. Πρέπει να τονιστεί ότι οι συντεταγμένες των σημείων x και y στα πολύτοπα P και Q δεν είναι πιθανότητες, αλλά αντιστοιχίζονται μονοσήμαντα σε πιθανότητες. Η αντιστοίχιση αυτή γίνεται με τον πολλαπλασιασμό του $v = 1 / \sum_{i \in M} x_i$ με το x και του $u = 1 / \sum_{j \in N} y_j$. Όπου v, u είναι το κέρδος για τον Pl_1 και Pl_2 αντίστοιχα.

Για το σύνολο \bar{P} υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία με το $P - \{\mathbf{0}\}$ μέσω της απεικόνισης $(x, v) \mapsto x \cdot (1/v)$. Ομοίως η απεικόνιση $(y, u) \mapsto y \cdot (1/u)$ ορίζει μια προβολή $Q \rightarrow Q - \{\mathbf{0}\}$. Οι προβολές αυτές δεν είναι γραμμικές, αλλά είναι γνωστές σαν "προβολικοί μετασχηματισμοί" (projective transformations). Οι προβολικοί μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται κυρίως για την αλλαγή του σχήματος του πολύτοπου χωρίς να αλλάξει η συνδυαστική (combinatorial) δομή του. Στην περίπτωση μας διατηρείται η γειτνίαση μεταξύ των εδρών καθώς και η διατήρηση των δεικτών στις έδρες. Πιο συγκεκριμένα, τα σημεία έχουν τους ίδιους δείκτες που ορίζονται από τις προσδιορίζουσες ανισώσεις, που είναι κάποιες από τις $m + n$ ανισώσεις που ορίζουν καθένα από τα πολύτοπα αυτά. Συνεπώς, ένα Nash σημείο ισορροπίας είναι ένα πλήρως δεικτοδοτούμενο ζεύγος κορυφών $(x, y) \in P \times Q - \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$, που έχει για κάθε δείκτη $i \in M$ την αντίστοιχη προσδιορίζουσα ανίσωση στις $x \geq \mathbf{0}$ ή στις $Ay \leq \mathbf{1}$ και για κάθε $j \in N$ την αντίστοιχη προσδιορίζουσα ανίσωση στις $B^T x \leq \mathbf{1}$ ή στις $y \geq \mathbf{0}$. Τέλος να σημειώσουμε ότι το σημείο $\mathbf{0}$ και στα δύο πολύτοπα προέρχεται από την "προβολή του απείρου" όπου $x_i = 0, \forall i \in M$ για το P και $y_j = 0, \forall j \in N$ για το Q .

Αν οπτικοποιήσουμε τα δύο πολύτοπα, για το παίγνιο που έχουμε για παράδειγμα, το αποτέλεσμα θα είναι τα παρακάτω δύο πολύτοπα P και Q .



Σχήμα 3: Τα πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης

Και για τα δύο πολύτοπα τα σημεία με τις συντεταγμένες και δείκτες για το καθένα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πολύτοπο P			Πολύτοπο Q		
Σημείο	Συντεταγμένες	Δείκτες	Σημείο	Συντεταγμένες	Δείκτες
0	(0, 0, 0)	1, 2, 3	0	(0, 0)	4, 5
a	(1/3, 0, 0)	2, 3, 4	p	(0, 1/6)	3, 4
b	(2/7, 1/14, 0)	3, 4, 5	q	(1/12, 1/6)	2, 3
c	(0, 1/6, 0)	1, 3, 5	r	(1/6, 1/9)	1, 2
d	(0, 1/8, 1/4)	1, 4, 5	s	(1/3, 0)	1, 5
e	(0, 0, 1/3)	1, 2, 4			

Πίνακας 1: Περιγραφή των σημείων των πολύτοπων με συντεταγμένες και δείκτες

Σε αυτό το σημείο κάποιος θα μπορούσε κάποιος να προτείνει τον εξής αλγόριθμο, βελτίωση του τελευταίου: Για κάθε κορυφή x του $P - \mathbf{0}$ και κάθε κορυφή y του $Q - \mathbf{0}$, αν το (x, y) είναι πλήρως δεικτοδοτούμενο τότε το $(x \cdot 1/\sum x_i, y \cdot 1/\sum y_j)$ είναι ένα Nash σημείο ισορροπίας του παίγνιου. Αυτός ο αλγόριθμος αποτελεί βελτίωση από τον προηγούμενο καθώς αν και οι δύο παίκτες είχαν από n στρατηγικές, ο προηγούμενος θα έπρεπε να ελέγξει περίπου 4^n πιθανά σύνολα υποστήριξης ενώ αυτός έχει να ελέγξει λιγότερες από $2 \cdot 6^n$ κορυφές λόγω του "upper bound" θεωρήματος για τα πολύτοπα.

Παρατηρούμε και εδώ ότι η κάθε κορυφή έχει τον ίδιο αριθμό δεικτών με όλες τις υπόλοιπες του ίδιου πολύτοπου. Αυτό συμβαίνει καθώς το παίγνιο είναι μη εκφυλισμένο. Δηλαδή, το ότι το παίγνιο είναι μη εκφυλισμένο μεταφράζεται στο ότι κανένα σημείο του P έχει περισσότερα από m δείκτες και κανένα σημείο του Q έχει περισσότερα από n δείκτες. Οπότε τα P και Q είναι απλά πολύτοπα γιατί κανένα σημείο δεν ανήκει σε περισσότερες από m και n έδρες αντίστοιχα. Από την άλλη, αν τα πολύτοπα είναι απλά αυτό δεν συνεπάγεται ότι το παίγνιο είναι μη εκφυλισμένο καθώς μπορεί να υπάρχει κάποια ανισότητα που μπορεί να παραληφθεί για την κατασκευή του πολύτοπου. Αυτό μπορεί να συμβεί αν μία αγνή στρατηγική είναι ασθενώς κυριαρχούμενη από τις υπόλοιπες ή αν το αναμενόμενο κέρδος είναι ίδιο για κάποια μεικτή στρατηγική.

Μέχρι στιγμής έχουμε φτιάξει τα δύο πολύτοπα βέλτοστης απόκρισης και έχουμε δώσει δείκτες στις έδρες και στις κορυφές του πολύτοπου. Ο σκοπός που κατασκευάσαμε τα πολύτοπα είναι για να εξετάσουμε το παίγνιο σαν δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Παρόλα αυτά, με την προσθήκη των δεικτών παρατηρήσαμε ένα νέο κριτήριο για το αν ένα ζεύγος σημείων αποτελεί ένα Nash σημείο ισορροπίας του παιχνιδιού. Το κριτήριο αυτό είναι το αν το ζεύγος κορυφών είναι πλήρως δεικτοδοτούμενο, αν δηλαδή τα σημεία αυτά ανήκουν σε έδρες πάνω στις οποίες υπάρχουν όλα οι $m + n$ δείκτες. Το κριτήριο αυτό εκμετελεύεται ο αλγόριθμος που πρότειναν οι Lemke και Howson [14] το 1964.

3 Ο αλγόριθμος Lemke-Howson

Οι προηγούμενοι αλγόριθμοι που αναφέραμε βρίσκουν όλα τα Nash σημεία ισορροπίας ενός μη εκφυλισμένου παιγνίου δύο παικτών. Σε αντίθεση με αυτούς, ο αλγόριθμος Lemke-Howson (για συντομία LH) βρίσκει ένα Nash σημείο ισορροπίας του παιγνίου. Ο αλγόριθμος LH φτιάχνει ένα μονοπάτι από ζευγάρια κορυφών $x \times y$ του $P \times Q$ όπου τα P και Q είναι τα πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης που ορίσαμε προηγουμένως. Το μονοπάτι αυτό, ένα LH μονοπάτι, ξεκινά από το σημείο $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ και σταματά σε ένα Nash σημείο ισορροπίας.

3.1 Χαρακτηρισμοί των δεικτών

Ένα LH μονοπάτι ακολουθεί εναλλάξ κορυφές στα P και Q . Η ακολουθία αυτή των κορυφών δεν είναι τυχαία, καθώς σε κάθε βήμα του αλγορίθμου η κορυφή στο ένα πολύτοπο παραμένει σταθερή ενώ η άλλη αλλάζει διασχίζοντας μια από τις ακμές του πολύτοπου πάνω στις οποίες ανήκει. Επειδή το παίγνιο είναι μη εκφυλισμένο, μια κορυφή του P προσδιορίζεται από m δείκτες και του Q από n δείκτες, ενώ μια ακμή από $m - 1$ και $n - 1$ δείκτες αντίστοιχα. Όταν λέμε ότι κάνουμε άφεση του δείκτη l (drop label l) σε μία κορυφή x του P , εννοούμε ότι διασχίζουμε την μοναδική ακμή που έχει όλους τους δείκτες του x εκτός από το δείκτη l . Για παράδειγμα, αν αφήσουμε το δείκτη 2 στην κορυφή $\mathbf{0}$ του P διασχίζουμε την ακμή που ορίζεται από τους δείκτες 1 και 3 και καταλήγουμε στην κορυφή c . Από το τέλος της ακμής λείπει ο δείκτης που κάνουμε άφεση ενώ υπάρχει ένας νέος δείκτης που παίρνει τη θέση αυτού που αφήσαμε. Για αυτός το νέο δείκτη λέμε ότι γίνεται λήψη του δείκτη. Δηλαδή, για το παράδειγμα στην κορυφή c γίνεται λήψη του δείκτη 5. Ένα ζεύγος κορυφών που του λείπει ο δείκτης k και έχει διπλό δείκτη το l ονομάζεται k -σχεδόν πλήρες.

3.2 Περιγραφή του αλγορίθμου

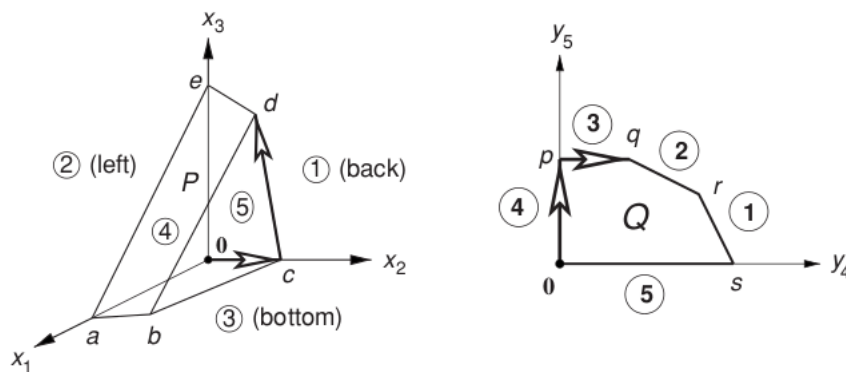
Η λογική του αλγορίθμου είναι η εξής: Στην αρχή ένας από τους δύο παίκτες επιλέγει μια στρατηγική που θα παίξει και την ανακοινώνει στον αντίπαλό του. Στη συνέχεια ο αντίπαλος παίζει τη στρατηγική που τον συμφέρει (δηλαδή τη βέλτιστη απόκρισή του) και ανακοινώνει την επιλογή του στον πρώτο παίκτη. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρις ότου να φτάσουν οι δύο παίκτες σε ένα Nash σημείο ισορροπίας. Σε αυτό το σημείο βέβαια πρέπει να τονιστεί ότι και οι δύο παίκτες δεν παίζουν τυχαία στρατηγικές, αλλά συμβουλευούνται το πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης και απαιτούν στις κινήσεις του αντιπάλου σύμφωνα με αυτό. Η μόνη στρατηγική που επιλέγεται τυχαία είναι η πρώτη στρατηγική που θα επιλέξει ο παίκτης που θα παίξει πρώτος.

Αφού ορίσαμε διαισθητικά τον αλγόριθμο ακολουθεί ο αυστηρός ορισμός του: Ο αλγόριθμος LH ξεκινά από το $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ του $P \times Q$, που ονομάζεται τεχνητό σημείο ισορροπίας, αφού είναι πλήρως δεικτοδοτούμενο αλλά δεν αντιστοιχεί σε κάποιο πραγματικό Nash σημείο ισορροπίας αφού η πιθανότητα παιξίματος κάθε αγνής στρατηγικής ισούται με μηδέν. Ένας από τους δύο παίκτες επιλέγει τυχαία μια καθαρή στρατηγική $k \in M \cup N$, που ορίζεται σαν το δείκτη που λείπει. Ξεκινώντας από το $(x, y) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, αφήνεται ο δείκτης k σε ένα από τα δύο πολύτοπα. Στο άκρο της ακμής που διασχίζεται στην άφεση αυτή (που θα ανήκει στο P αν $k \in M$ και στο Q αν $k \in N$) γίνεται λήψη ενός νέου δείκτης, που όμως ο δείκτης αυτός υπάρχει ήδη στην κορυφή του άλλου πολύτοπου. Ο δείκτης αυτός, που υπάρχει δύο φορές στο ζεύγος των κορυφών, ονομάζεται διπλός δείκτης και γίνεται άφεση στο άλλο πολύτοπο. Αν ο νέος δείκτης που έγινε λήψη είναι ο δείκτης που λείπει τότε ο αλγόριθμος σταματά και έχει βρει ένα Nash σημείο ισορροπίας. Διαφορετικά, ο αλγόριθμος συνεχίζει κάνοντας άφεση το νέο δείκτη που έγινε διπλός και συνεχίζει μέχρις ότου να γίνει λήψη του δείκτη που λείπει. Λόγω του θεωρήματος του Nash γνωρίζουμε ότι ο αλγόριθμος θα σταματήσει κάποια στιγμή, καθώς υπάρχουν τουλάχιστον δύο σύνολα υποστήριξης που το ένα είναι βέλτιστη απόκριση του άλλου.

3.3 Παράδειγμα

Για παράδειγμα, έστω ότι ο δείκτης που λείπει είναι το $k = 2$ για τα παραπάνω πολύτοπα. Ο αλγόριθμος θα ακολουθήσει την παρακάτω διαδικασία και τα βήματα φαίνονται στο Σχήμα 4:

- Ξεκινώντας από το σημείο $\mathbf{0}$ του P γίνεται άφεση του δείκτη 2. Διασχίζουμε την ακμή $\mathbf{0} \rightarrow c$ και εκεί γίνεται λήψη του δείκτη 5.
- Έχουμε το ζεύγος σημείων $(c, \mathbf{0})$ όπου ο δείκτης που λείπει εξακολουθεί να είναι το 2 και ο διπλός δείκτης είναι το 5. Οπότε, πρέπει να γίνει άφεση του 5 στο Q .
- Από το σημείο $\mathbf{0}$ του Q κάνουμε άφεση του δείκτη 5, που σημαίνει ότι θα διασχίσουμε την ακμή $\mathbf{0} \rightarrow p$ κρατώντας την κορυφή c σταθερή. Στην κορυφή p έγινε λήψη του δείκτη 3, που τώρα είναι διπλός.
- Πηγαίνουμε στο πολύτοπο P και κάνουμε άφεση του δείκτη 3 στο σημείο c , που σημαίνει ότι διασχίζουμε την ακμή $c \rightarrow d$. Στην κορυφή d γίνεται λήψη του δείκτη 4, που τώρα είναι διπλός.
- Στο πολύτοπο Q κάνουμε άφεση το δείκτη 4 από την κορυφή p και διασχίζουμε την ακμή $p \rightarrow q$. Στην κορυφή q γίνεται λήψη του δείκτη 2.
- Ο δείκτης 2 ήταν ο δείκτης που έλειπε, οπότε το ζεύγος κορυφών (d, q) είναι πλήρως δεικτοδοτημένο και συνεπώς ο αλγόριθμος βρήκε ένα Nash σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 4: Ο αλγόριθμος Lemke - Howson για αρχικό drop το δείκτη 2

Το παράδειγμα συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα

Πολύτοπο P Παίκτης Pl_1			Πολύτοπο Q Παίκτης Pl_2			
Σημείο	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	Σημείο	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	Διπλός Δείκτης
$\mathbf{0}$	1, 2, 3	-	$\mathbf{0}$	4, 5	-	-
c	1, 5, 3	2	$\mathbf{0}$	4, 5	-	5
c	1, 5, 3	2	p	4, 3	5	3
d	1, 5, 4	2, 3	p	4, 3	5	4
d	1, 5, 4	2, 3	q	2, 3	4, 5	

Πίνακας 2: Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson για αρχική άφεση του δείκτη 2

Αν θελήσουμε να πάρουμε το πραγματικό Nash σημείο ισορροπίας (δηλαδή τις κατανομές πι-

θανότητας στις στρατηγικές των δύο παικτών) πρέπει πρώτα να πάρουμε τις συντεταγμένες των σημείων x, y και να τις μεταφράσουμε σε πιθανότητες. Αν ξαναδούμε τον Πίνακα 1 θα δούμε ότι το σημείο x με δείκτες $(1, 4, 5)$ έχει συντεταγμένες $(0, 1/8, 1/4)$ και το σημείο y με δείκτες $(2, 3)$ έχει συντεταγμένες $(1/12, 1/6)$. Χρησιμοποιώντας τους τύπους $x \cdot 1/\sum x_i$ και $y \cdot 1/\sum y_i$ έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} & x \cdot \frac{1}{\sum x_i} &= \left(0, \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3}, \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3}\right) = (0, 1/3, 2/3) \\ \sum y_j &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} & y \cdot \frac{1}{\sum y_j} &= \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{12}{3}, \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{3}\right) = (1/3, 2/3) \end{aligned}$$

Οπότε βλέπουμε ότι πράγματι πρόκειται για το ίδιο Nash σημείο ισορροπίας που βρήκαμε και νωρίτερα.

Θα μπορούσαμε απλά να τονίσουμε τις ακμές που διασχίζουμε μέχρι να βρούμε το Nash σημείο ισορροπίας, αλλά αντί γι'αυτό έχουμε βάλει βέλη που δείχνουν κάποια κατεύθυνση. Αυτό γίνεται γιατί αν βρεθούμε σε ένα τυχαίο σημείο του μονοπατιού που παράγει ο αλγόριθμος μπορούμε να βρούμε το επόμενο σημείο του αν ξέρουμε ποιος παίκτης παίζει.

Αν θελήσουμε να μεταφράσουμε την παραπάνω διαδικασία σε όρους του παιχνιδιού έχουμε τα εξής: Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου, δηλαδή η επιλογή του δείκτη που θα λείπει $k = 2$, είναι ότι ο Pl_1 αποφασίζει να ξεκινήσει το παιχνίδι παίζοντας αγνά την στρατηγική 2. Έπειτα, ο Pl_2 απαντά στη στρατηγική αυτή παίζοντας τη βέλτιστη απόκρισή του γι'αυτή, δηλαδή την στρατηγική 5. Επειδή το ζεύγος των στρατηγικών αυτών δεν είναι Nash σημείο ισορροπίας, διότι ο Pl_1 μπορεί να αυξήσει τα κέρδη του, ο Pl_1 αλλάζει τη στρατηγική του και προσθέτει στο σύλλογο υποστήριξης του τη στρατηγική 3 και κατανέμει τις πιθανότητες σύμφωνα με το πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης P . Στη συνέχεια, ο Pl_2 απαντά βάζοντας τη στρατηγική 4 στο σύλλογο υποστήριξης του κατανέμοντας και πάλι τις πιθανότητες όπως πρέπει σύμφωνα με το πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης Q .

3.4 Παρατηρήσεις

Αξίζει να επισημανθούν κάποια στοιχεία για τον αλγόριθμο που ισχύουν αν εφαρμοστεί σε ένα μη εκφυλισμένο παίγνιο:

◊ Το μοναδικό τυχαίο σημείο του αλγορίθμου είναι η επιλογή του δείκτη που θα λείπει, στην αρχή του αλγορίθμου.

◊ Από το σημείο αυτό και μετά το κάθε LH μονοπάτι ορίζεται μοναδικά και δεν υπάρχει κανένα στοιχείο τυχαιότητας.

◊ Ένας διπλός δείκτης μπορεί να σημαίνει δύο πράγματα: είτε να είναι νέα βέλτιστη απόκριση και θα αποκτήσει θετική πιθανότητα στο επόμενο βήμα του αλγορίθμου, δηλαδή θα μπει στο σύλλογο υποστήριξης του παίκτη που θα παίζει, ή να είναι μία στρατηγική που η πιθανότητά της μόλις έγινε μηδέν, δηλαδή βγήκε από το σύνολο υποστήριξης του παίκτη που έπαιξε. Η πρώτη περίπτωση συμβαίνει αν ο διπλός δείκτης, έστω d , ανήκει στις στρατηγικές του αντίπαλου παίκτη, ενώ η δεύτερη αν το d ανήκει στις στρατηγικές του παίκτη που μόλις έπαιξε.

◊ Αν γίνει λήψη του δείκτη που λείπει, τότε έχουμε φτάσει σε Nash σημείο ισορροπίας.

◊ Έστω ότι φτάσαμε σε ένα πλήρως δεικτοδοτούμενο ζεύγος κορυφών (x, y) που το σημείο x του P έχει τους δείκτες $L_1 = \{l_i, 1 \leq i \leq m\}$ και το σημείο y έχει τους δείκτες $L_2 = \{k_j, m \leq$

$j \leq m + n$. Τότε για τον παίκτη Pl_1 , που αντιστοιχεί στο P , θα ισχύει $Pr(s_1) = 0$ αν $s_1 \in L_1$ και $Pr(s_1) > 0$ αν $s_1 \notin L_1$, όπου το s_1 είναι οποιαδήποτε στρατηγική του Pl_1 . Αντίστοιχα, για τον Pl_2 θα ισχύει ότι $Pr(s_2) = 0$ αν $s_2 \in L_2$ και $Pr(s_2) > 0$ αν $s_2 \notin L_2$, όπου το s_2 είναι οποιαδήποτε στρατηγική του Pl_2 .

Για παράδειγμα αν φτάσουμε στο πλήρως δεικτοδοτούμενο ζευγάρι κορυφών που το x έχει τους δείκτες (1, 4, 5) και το y έχει τους δείκτες (2, 3) σημαίνει ότι ο Pl_1 θα παίξει τις στρατηγικές 2 και 3, ενώ ο Pl_2 θα παίξει τις στρατηγικές 4 και 5.

◊ Ο αλγόριθμος μπορεί να ξεκινήσει από οποιοδήποτε πλήρως δεικτοδοτούμενο ζεύγος κορυφών, δηλαδή είτε από το τεχνητό σημείο ισορροπίας ή από οποιοδήποτε πραγματικό Nash σημείο ισορροπίας.

◊ Αν ξεκινήσουμε από το τεχνητό σημείο ισορροπίας $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ και φτάσουμε σε ένα Nash σημείο ισορροπίας μετά από δύο βήματα του αλγορίθμου, σημαίνει ότι είμαστε σε καθαρό Nash σημείο ισορροπίας.

◊ Έστω ότι φτάσουμε σε ένα Nash σημείο ισορροπίας NE_1 έχοντας δείκτη που λείπει το k , ξεκινώντας είτε από το τεχνητό σημείο ισορροπίας ή από κάποιο πραγματικό σημείο ισορροπίας NE_0 . Αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο ξεκινώντας από το NE_1 με αρχικό δείκτη που λείπει το ίδιο k θα καταλήξουμε στο αρχικό NE_0

◊ Για όλους τους δείκτες εκτός του k μπορεί να γίνει άφεση και λήψη τους περισσότερες από μία φορές σε ένα LH μονοπάτι.

◊ Για οποιοδήποτε δείκτη που λείπει ο αλγόριθμος φτάνει σε ένα Nash σημείο ισορροπίας.

◊ Δύο ή περισσότεροι διαφορετικοί δείκτες που λείπουν μπορεί να οδηγήσουν τον αλγόριθμο στο ίδιο Nash σημείο ισορροπίας. Αυτό είναι προφανές, καθώς ένα παίγνιο μπορεί να έχει μόνο ένα Nash σημείο ισορροπίας και όλοι οι δείκτες που λείπουν θα οδηγήσουν σε αυτό το σημείο ισορροπίας.

◊ Λόγω του παραπάνω, συνάγεται το συμπέρασμα ότι μπορεί να υπάρχουν Nash σημεία ισορροπίας στο παίγνιο που να μην βρεθούν από τον αλγόριθμο Lemke-Howson.

◊ Ο αλγόριθμος για σταθερό k περνά από κάθε κορυφή των πολυτόπων το πολύ μία φορά.

◊ Αν πάρουμε στο γράφημα $P \times Q$ όλες τις κορυφές που είναι k -σχεδόν πλήρεις, για σταθερό k παίρνουμε ένα γράφημα που αποτελείται από κύκλους και μονοπάτια. Τα άκρα του κάθε μονοπατιού είναι Nash σημεία ισορροπίας, είτε τα πραγματικά ή το τεχνητό.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις παρουσιάζονται αναλυτικά για το παραπάνω παίγνιο στο Παράρτημα Α΄.

Λόγω της τελευταίας ιδιότητας και ότι τα άκρα των μονοπατιών έχουν άρτιο πλήθος μπορούμε να βγάλουμε το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 3.1. Ένα μη εκφυλισμένο παίγνιο δύο παικτών έχει περσιτό αριθμό από Nash σημεία ισορροπίας.

Παρατηρούμε ότι αν βρεθούμε σε κάποιο σημείο του αλγορίθμου και γνωρίζουμε ποιος παίζει μπορούμε να βρούμε εύκολα το επόμενο ζεύγος κορυφών, δηλαδή το επόμενο σημείο του μονοπατιού.

Αλγόριθμος Lemke Howson	
Βήμα 1	Επέλεξε τυχαία ένα δείκτη $k \in M \cup N$
Βήμα 2	Θέσε το k σαν δείκτη που λείπει
Βήμα 3	Κάνε άφεση το δείκτη k στο πολύτοπο που πρέπει
Βήμα 4	Πήγαινε στο άλλο πολύτοπο και κάνε άφεση του διπλού δείκτη
Βήμα 5	Έλεγε αν ο δείκτης που έγινε λήψη είναι ο δείκτης που λείπει, διαφορετικά πήγαινε στο 4

Πίνακας 3: Περιγραφή του Lemke Howson

3.5 Αριθμητική υλοποίηση του Lemke-Howson

Η παραπάνω περιγραφή και υλοποίηση του αλγορίθμου βασίζεται στη γεωμετρική ερμηνεία των πολύτοπων και στους δείκτες τους. Αν κοιτάξει κάποιος προσεκτικά τη διαδικασία θα δει ότι ουσιαστικά το κάθε βήμα του είναι ένα βήμα του αλγορίθμου simplex. Κάθε φορά που διασχίζουμε μια ακμή σε ένα πολύτοπο ουσιαστικά αλλάζουμε τη βάση για το πρόβλημα κάνοντας ένα pivot.

Πρώτα από όλα, θα φέρουμε το πρόβλημα στην τυπική μορφή όπου οι ανισώσεις θα μετατραπούν σε γραμμικές εξισώσεις με τη προσθήκη μη αρνητικών slack μεταβλητών. Για τα πολύτοπα P και Q της σχέσης 2.4 αυτές οι slack μεταβλητές είναι διανύσματα $s \in \mathbb{R}^N$ και $r \in \mathbb{R}^M$, με μη αρνητικά στοιχεία, έτσι ώστε το $x \in P$ και $y \in Q$ αν και μόνον αν

$$B^T x + s = \mathbf{1}, \quad r + Ay = \mathbf{1} \quad (3.1)$$

και επιπλέον

$$x \geq \mathbf{0}, \quad s \geq \mathbf{0}, \quad r \geq \mathbf{0}, \quad y \geq \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Μια προσδιορίζουσα ανίσωση αντιστοιχεί σε μία slack μεταβλητή ίση με μηδέν. Το ζεύγος (x, y) είναι πλήρως δεικτοδοτούμενο αν και μόνον αν $x_i r_i = 0$ για κάθε $i \in M$ και $y_j s_j = 0$ για κάθε $j \in N$, που λόγω της 3.2 μπορεί να γραφεί σαν τη συνθήκη:

$$x^T r = 0, \quad y^T s = 0 \quad (3.3)$$

Μία βασική λύση για την 3.3 δίνεται από n βασικές (γραμμικώς ανεξάρτητες) στήλες του $B^T x + s = \mathbf{1}$ και από m βασικές στήλες του $r + Ay = \mathbf{1}$ όπου οι μη βασικές μεταβλητές αντιστοιχούν στις m και n αντίστοιχα μη βασικές στήλες που ορίζονται ίσες με μηδέν, έτσι οι βασικές μεταβλητές προσδιορίζονται μοναδικά. Μία βασική εφικτή λύση, ικανοποιεί την 3.2 και ορίζει μια κορυφή x στο P και μία κορυφή y στο Q . Οι δείκτες μιας τέτοιας κορυφής δίνονται από τις αντίστοιχες μη βασικές στήλες.

Τα pivots είναι ουσιαστικά μια αλλαγή της βάσης, όπου μια μη βασική μεταβλητή μπαίνει στο σύνολο των βασικών μεταβλητών, ενώ συνεχίζουν να ισχύουν οι σχέσεις 3.2.

Στο συγκεκριμένο είδος pivoting αξίζει να χρησιμοποιήσουμε το Ακέραιο (Integer) Pivoting, όπου ουσιαστικά είναι ο αλγόριθμος simplex που όμως σε όλα τα βήματα του διατηρεί τους συντελεστές ακέραιους αριθμούς. Με αυτόν τον τρόπο δεν συσσωρεύονται αριθμητικά λάθη στις επαναλήψεις, με μοναδικό πρόβλημα το ότι μπορεί οι συντελεστές να φτάσουν σε μεγάλα νούμερα και να μην μπορούν απλοποιηθούν.

3.5.1 Εφαρμογή

Για να γίνουν τα παραπάνω πλήρως κατανοητά θα δείξουμε πως φτάνουμε σε Nash σημείο ισοροπίας εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία. Το ακέραιο pivoting που θα πραγματοποιήσουμε θα αντιστοιχεί για δείκτη που λείπει ίσο με 2.

Ξεκινώντας, κάνουμε άφεση του δείκτη 2, οπότε πρέπει να βάλουμε τη μεταβλητή που αντιστοιχεί στη στρατηγική 2 στη βάση, δηλαδή τη μεταβλητή x_2 . Η μεταβλητή x_2 μπορεί να εισαχθεί στη βάση μόνο στο σύστημα που την περιέχει, το $B^T + s = \mathbf{1}$. Για να γίνει αυτό πρέπει να αυξήσουμε την τιμή της μεταβλητής x_2 τόσο ώστε να εξακολουθούν οι σχέσεις 3.2, δηλαδή οι μεταβλητές s_4 και s_5 να παραμείνουν μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός. Στην περίπτωση μας έχουμε ότι πρέπει να ισχύει το: $x_2 \leq 1/6$ καθώς το $1/6$ ο ελάχιστος λόγος (minimum ratio) σε όλες τις γραμμές του $B^T + s = \mathbf{1}$. Αυτό υπολογίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_4 &= 1 \\ 2x_1 + \boxed{6}x_2 + x_3 + s_5 &= 1 \end{aligned}$$

Ο ελάχιστος λόγος υπολογίζεται ως εξής: πάμε στη στήλη που θέλουμε να εισάγουμε στη βάση και βρίσκουμε το μικρότερο λόγο που σαν παρανομαστή θα έχει το συντελεστή της μεταβλητής της κάθε γραμμής και σαν αριθμητή τον αριθμό που έχουμε στο δεξί μέλος της ισότητας στη γραμμή αυτή. Στον υπολογισμό του λόγου αυτού λαμβάνουμε υπόψη μας μόνο τους συντελεστές που είναι θετικοί, συνεπώς ο ελάχιστος λόγος θα είναι πάντοτε θετικός αριθμός. Ο έλεγχος του ελάχιστου λόγου προσδιορίζει μοναδικά το s_5 σαν τη μεταβλητή που θα βγει από τη βάση, δίνοντας το δείκτη 5 που θα γίνει λήψη στο βήμα αυτό. Ο συντελεστής 6 στην περίπτωσή μας καλείται στοιχείο του pivot, η γραμμή που ανήκει γραμμή του pivot και η στήλη, στήλη του pivot.

Αλγεβρικά, το pivoting γίνεται κάνοντας πράξεις επί των γραμμών στην παραπάνω σχέση έτσι ώστε η νέα μεταβλητή που μπαίνει στη βάση να έχει συντελεστή τη μονάδα, έτσι ώστε η λύση να δίνεται από το δεξί μέλος των σχέσεων. Ωστόσο, στο ακέραιο pivoting δεν απαιτούμε να έχουμε σαν συντελεστή τη μονάδα για να μην υπάρξουν αριθμητικά λάθη. Έτσι, για την εφαρμογή του ακέραιου pivoting πρώτα πολλαπλασιάζουμε όλες τις γραμμές με το στοιχείο του pivot εκτός από τη γραμμή του pivot και παίρνουμε το ενδιάμεσο σύστημα:

$$\begin{aligned} 18x_1 + 12x_2 + 18x_3 + 6s_4 &= 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + s_5 &= 1 \end{aligned}$$

και στη συνέχεια κάνοντας την αφαίρεση έχουμε:

$$\begin{aligned} 14x_1 + 18x_3 + 6s_4 - 2s_5 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + s_5 &= 1 \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση (το είχαμε διαπιστώσει από τον υπολογισμό του ελάχιστου λόγου) βλέπουμε ότι πρέπει να εισάγουμε την μεταβλητή y_5 στην βάση του άλλου συστήματος ακολουθώντας την ίδια διαδικασία. Δηλαδή, θα πάμε στο σύστημα $r + Ay = \mathbf{1}$, θα υπολογίσουμε τον ελάχιστο λόγο

$$\begin{aligned} r_1 + 3y_4 + 3y_5 &= 1 \\ r_2 + 2y_4 + 5y_5 &= 1 \\ r_3 + \boxed{6}y_5 &= 1 \end{aligned}$$

στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με το στοιχείο του pivot

$$\begin{aligned} 6r_1 &+ 18y_4 + 18y_5 = 6 \\ 6r_2 &+ 12y_4 + 30y_5 = 6 \\ r_3 &+ 6y_5 = 1 \end{aligned}$$

και τέλος κάνουμε τις αφαιρέσεις και ότι απλοποιήσεις μπορούμε και καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{aligned} 2r_1 - r_3 + 6y_4 &= 6 \\ 6r_2 - 5r_3 + 12y_4 &= 6 \\ r_3 + 6y_5 &= 1 \end{aligned}$$

Από το τελευταίο σύστημα καταλαβαίνουμε ότι τώρα πρέπει να εισάγουμε στη βάση μεταβλητή x_3 .

Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε σε ένα Nash σημείο ισορροπίας και συνοψίζεται στον παρακάτω πίνακα παραλείποντας τα ενδιάμεσα βήματα.

Πολυτοπο P $B^T x + s = \mathbf{1}$			Πολύτοπο Q $r + Ay = \mathbf{1}$		
Σύστημα	min ratio	Λήψη	Σύστημα	min ratio	Λήψη
$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_4 = 1$					
$2x_1 + \boxed{6}x_2 + x_3 + s_5 = 1$	1/6				
$14x_1 + 16x_3 + 6s_4 - 2s_5 = 4$					
$2x_1 + 6x_2 + x_3 + s_5 = 1$		5			
			$r_1 + 3y_4 + 3y_5 = 1$		
			$r_2 + 2y_4 + 2y_5 = 1$		
			$r_3 + \boxed{6}y_5 = 1$	1/6	
			$2r_1 - r_3 + 6y_4 = 1$		
			$6r_2 - 5r_3 + 12y_4 = 1$		
			$r_3 + 6y_5 = 1$		3
$14x_1 + \boxed{16}x_3 + 6s_4 - 2s_5 = 4$	4/16				
$2x_1 + 6x_2 + x_3 + s_5 = 1$					
$14x_1 + 16x_3 + 6s_4 - 2s_5 = 4$					
$3x_1 + 16x_2 - s_4 + 3s_5 = 2$		4			
			$2r_1 - r_3 + 6y_4 = 1$		
			$6r_2 - 5r_3 + \boxed{12}y_4 = 1$	1/12	
			$r_3 + 6y_5 = 1$		
			$4r_1 - 2r_2 - 8r_3 = 1$		
			$6r_2 - 5r_3 + 12y_4 = 1$		
			$r_3 + 6y_5 = 1$		2

Πίνακας 4: Ακέραιο pivoting για δείκτη που λείπει ίσο με 2

Από τις τελευταίες δύο διαμορφώσεις μπορούμε εύκολα να βρούμε το ζεύγος σημείων (x, y) που αντιστοιχεί σε Nash σημείο ισορροπίας για το παίγνιο, διαιρώντας κάθε γραμμή του συστήματος με το συντελεστή της μεταβλητής που είναι στη βάση. Οι συντεταγμένες του σημείου θα είναι οι αριθμοί στο δεξιό μέλος των εξισώσεων.

Δηλαδή, από το σύστημα $B^T x + s = \mathbf{1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{14}{16}x_1 + x_3 + \frac{6}{16}s_4 - \frac{2}{16}s_5 &= \frac{4}{16} \\ \frac{3}{16}x_1 + x_2 - \frac{1}{16}s_4 + \frac{3}{16}s_5 &= \frac{2}{16} \end{aligned}$$

δηλαδή το σημείο x είναι το $(0, 4/16, 2/16) = (0, 1/4, 1/8)$ και παρατηρούμε ότι είναι ακριβώς το ίδιο με το πολύτοπο.

Αντίστοιχα για το σύστημα $r + Ay = \mathbf{1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} r_1 - \frac{2}{4}r_2 - \frac{8}{4}r_3 &= \frac{1}{4} \\ \frac{6}{12}r_2 - \frac{5}{12}r_3 + y_4 &= \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6}r_3 + y_5 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε ότι το σημείο y είναι το $(1/12, 1/6)$ και ότι επίσης η στρατηγική 1 έχει πιθανότητα ίση με μηδέν αφού η slack μεταβλητή r_1 ανήκει στη βάση.

Έτσι, επαληθεύουμε ότι κάνοντας στην αρχή drop το label 2 στο pivoting καταλήγουμε στο ίδιο Nash σημείο ισορροπίας με τη γεωμετρική υλοποίηση για δείκτη που λείπει ίσο με 2.

Ακέραιο Pivoting	
Βήμα 1	Βρες τη μεταβλητή που έχει δείκτη ίδιο με αυτόν που θα γίνει άφεση και δεν είναι στη βάση
Βήμα 2	Υπολόγισε τον ελάχιστο λόγο για τη μεταβλητή αυτή
Βήμα 3	Βάλε τη μεταβλητή αυτή στη βάση
Βήμα 4	Βρες τη μεταβλητή που γίνεται λήψη
Βήμα 5	Αν ο δείκτης της μεταβλητής που γίνεται λήψη είναι ίδιος με τον δείκτη που λείπει, πήγαινε στο 8
Βήμα 6	Πήγαινε στον άλλον παίκτη και κάνε άφεση την μεταβλητή που έγινε έγινε λήψη
Βήμα 7	Πήγαινε στο 3
Βήμα 8	Τέλος

Πίνακας 5: Περιγραφή του Ακέραιου Pivoting

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος Lemke Howson είναι σαφώς καλύτερος από τους πρώτους που προτάθηκαν, είτε στη γεωμετρική του μορφή είτε στην αριθμητική, καθώς εκμεταλεύεται πλήρως όλα τα στοιχεία του παιχνιδιού που μπορούν να τον βοηθήσουν. Παρόλα αυτά, για πολλά χρόνια η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ήταν άγνωστη. Αν και ο αλγόριθμος προτάθηκε το 1964 από τους Lemke και Howson[14], μόνο το 2004 οι Bernhard von Stengel και Rahul Savani[19][20] βρήκαν κάποια παίγνια τα οποία μπόρεσαν να χαρακτηρίσουν την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

4 Πολυπλοκότητα του Lemke Howson

Το μέτρο πολυπλοκότητας για τον αλγόριθμο Lemke-Howson είναι ο αριθμός των βημάτων που κάνει μέχρι να βρει ένα Nash σημείο ισορροπίας, μιας και κάθε βήμα υλοποιείται σε πολυωνυμικό χρόνο. Τα βήματα αυτά μετρώνται είτε σαν βήματα πάνω στις ακμές των πολυτόπων βέλτιστης απόκρισης P και Q , που φτιάχουν ένα μονοπάτι στο $P \times Q$, είτε σαν pivots στο ακέραιο pivoting. Έτσι, για να βρει κάποιος την περίπτωση που ο αλγόριθμος Lemke Howson θα χρειαζόταν τα περισσότερα βήματα για να φτάσει σε ένα Nash σημείο ισορροπίας, έπρεπε να φτάξει ένα παίγνιο που ο αλγόριθμος θα ακολουθούσε μεγάλα μονοπάτια στο $P \times Q$. Βέβαια, για να πει κανείς ότι ο αλγόριθμος δεν είναι αποδοτικός για κάποιο παίγνιο, θα πρέπει να ακολουθεί μεγάλα σε μήκος μονοπάτια στο $P \times Q$ για οποιοδήποτε αρχικό δείκτη που λείπει.

Ένα τέτοιο παίγνιο κατασκεύασαν οι von Stengel και Savani[20]. Η κατασκευή αυτή είχε μια ανάποδη σειρά για να έχει το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Δηλαδή, δεν κατασκεύασαν το παίγνιο αρχικά, αλλά η κατασκευή άρχισε από τα πολύτοπα καθώς είναι πιο εύκολα στη μελέτη τους. Στη συνέχεια, με βάση αυτά ορίστηκαν οι πίνακες των κερδών. Τα πολύτοπα κατασκευάστηκαν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οποιοδήποτε δείκτης κι αν οριστεί σαν αρχικός δείκτης που λείπει, τα LH μονοπάτια που παράγονται έχουν εκθετικό μήκος σε σχέση με το μέγεθος του παιγνίου.

Η κατασκευή έχει ως εξής: Αρχικά κατασκευάζεται ένα δυϊκό κυκλικό πολύτοπο (dual cycle polytope) με d κορυφές και $2d$ έδρες. Με βάση το πολύτοπο αυτό κατασκευάζουμε το παίγνιο (A, B) , με d στρατηγικές για τον κάθε παίκτη, που έχει συγκεκριμένη δομή έτσι ώστε να έχει μόνο ένα Nash σημείο ισορροπίας. Έπειτα, αποδεικνύεται ότι τα LH μονοπάτια για οποιοδήποτε δείκτη που λείπει εκφράζονται με τη βοήθεια δύο συγκεκριμένων μονοπατιών. Δηλαδή, αν μελετήσουμε τα μονοπάτια που παράγονται στο $P \times Q$ για αρχικούς δείκτες που λείπουν το 1 και το d , στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κομμάτια των μονοπατιών αυτών για να μελετήσουμε και τα μονοπάτια που παράγονται για τους υπόλοιπους δείκτες που λείπουν. Τέλος, υπολογίζεται το μήκος των LH μονοπατιών για οποιοδήποτε δείκτη που λείπει και δείχνεται ότι ο αλγόριθμος Lemke - Howson απαιτεί εκθετικό αριθμό βημάτων για την εύρεση του Nash σημείου ισορροπίας του παιγνίου, αν συγκρίνουμε τον αριθμό αυτό με το μέγεθος του παιγνίου.

4.1 Γενικά περί πολυτόπων

Κρίνεται αναγκαίο να αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες σχετικά με τα πολύτοπα έτσι ώστε να είναι εύκολη η κατανόηση της κατασκευής και της απόδειξης της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου Lemke - Howson για το συγκεκριμένο είδος παιγνίων.

4.1.1 Βασικές έννοιες

Ένα κυρτό πολύτοπο μπορεί να οριστεί είτε με τη μορφή ανισοτήτων ή σαν η κυρτή θήκη σημείων. Οι δύο περιγραφές είναι ισοδύναμες, αλλά η κάθε μία έχει διαφορετικές ιδιότητες και είναι καταλληλότερη για διαφορετικές εφαρμογές. Μέχρι στιγμής έχουμε δει τον ορισμό με τις ανισότητες που ορίζει ένα κυρτό πολύτοπο P σαν

$$P = \{z \in \mathbb{R}^d \mid Az \leq q, z \geq 0\} \quad (4.1)$$

όπου A είναι ένας πίνακας $d \times n$ και q ένα διάνυσμα $1 \times d$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο παραπάνω ορισμός μοιάζει πάρα πολύ με τον ορισμό του πολυτόπου βέλτιστης απόκρισης 2.4.

Αν το πολύτοπο είναι μη εκφυλισμένο, κάθε έδρα F_i ορίζεται μία προσδιορίζουσα ανίσωση, δηλαδή από μία από τις σχέσεις $F_i = \{A^i z = q_i\}$ όπου A^i είναι η i -οστή γραμμή του πίνακα A και q_i είναι το i -οστό στοιχείο του διανύσματος q ή μία από τις $F_i = \{z_i = 0\}$. Μία κορυφή του μη εκφυλισμένου πολύτοπου ορίζεται από d τέτοιες ανισώσεις.

4.1.2 Κυκλικά-cycle πολύτοπα

Μία βασική μέθοδος κατασκευής κυκλικού(cycle) πολύτοπου είναι να χρησιμοποιήσουμε την καμπύλη ροπών (moment curve). Η καμπύλη ροπών στον \mathbb{R}^d ορίζεται σαν

$$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto \mathbf{x}(t) := (t, t^2, \dots, t^d)^T \in \mathbb{R}^d \quad (4.2)$$

Ένα κυκλικό πολύτοπο στις d διαστάσεις με n σημεία ορίζεται σαν την κυρτή θήκη n σημείων ($n > d$) πάνω στην καμπύλη ροπών. Ένα τέτοιο κυκλικό πολύτοπο $C_d(t_1, \dots, t_n)$, είναι η κυρτή θήκη

$$C_d(t_1, \dots, t_n) := \text{conv}\{\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_n)\}$$

των n διακριτών σημείων $\mathbf{x}(t_i)$ με $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ πάνω στην καμπύλη ροπών. Η επιλογή των παραμέτρων t_i αφήνει ανεπηρέαστη τη δομή του πολύτοπου, αφού μόνο αυτή μας ενδιαφέρει στην προκειμένη περίπτωση. Για την κατασκευή του πολύτοπου που θέλουμε, ορίζουμε $n = 2d$.

Για παράδειγμα, για $d = 4$ παίρνουμε $2d = 8$ σημεία πάνω στη καμπύλη ροπών. Για ευκολία, θα θεωρήσουμε t_i , $1 \leq i \leq 8$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= (1, 1, 1, 1)^T & x(t_5) &= (5, 25, 125, 625)^T \\ x(t_2) &= (2, 4, 8, 16)^T & x(t_6) &= (6, 36, 216, 1296)^T \\ x(t_3) &= (3, 9, 27, 81)^T & x(t_7) &= (7, 49, 343, 2401)^T \\ x(t_4) &= (4, 16, 64, 256)^T & x(t_8) &= (8, 64, 512, 4096)^T \end{aligned}$$

και το πολύτοπο είναι η κυρτή θήκη των παραπάνω σημείων, δηλαδή το σύνολο

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_8 \mathbf{x}_8 \quad \text{όπου ισχύει} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_8 = 1$$

Μέχρι στιγμής έχουμε κατασκευάσει ένα κυκλικό πολύτοπο με $2d$ κορυφές. Παρόλα αυτά, το πολύτοπο έχει τη μορφή της κυρτής θήκης που δεν μας βολεύει για τον ορισμό του σαν πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης. Συνεπώς, πρέπει να το φέρουμε στη μορφή της 2.4 με κάποιο τρόπο. Για τη μετατροπή αυτή θα μας βοηθήσει το δυϊκό κυκλικό πολύτοπο.

4.1.3 Η συνθήκη του Gale

Ο David Gale το 1963 απέδειξε ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα για τα κυκλικά πολύτοπα. Το θεώρημα αυτό παρέχει μία εύκολη συνθήκη για τον καθορισμό των εδρών του πολύτοπου.

Θεώρημα 4.1. [11] Έστω $n > d \geq 2$. Το $[n]$ δηλώνει το σύνολο $\{1, \dots, n\}$ και επιλέγουμε πραγματικές παραμέτρους $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Το κυκλικό πολύτοπο $C_d(n) := \text{conv}\{\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \dots, \mathbf{x}(t_n)\}$ είναι ένα απλό πολύτοπο στις d διαστάσεις, όπου τα $\mathbf{x}(t_i)$ είναι σημεία πάνω στην καμπύλη ροπών. Ένα υποσύνολο $S \subseteq [n]$ ορίζει μια έδρα του $C_d(n)$ αν και μόνον αν ισχύει η παρακάτω συνθήκη αριότητας (evenness condition) ισχύει:

Αν τα $i < j$ δεν ανήκουν στο S , τότε ο αριθμός των $k \in S$ ανάμεσα στα i και j είναι άρτιος:

$$2 \mid \#\{k : k \in S, i < k < j\} \quad i, j \notin S$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε την ταυτότητα Vandemonde για τις ορίζουσες:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x}(t_0) & \mathbf{x}(t_1) & \dots & \mathbf{x}(t_d) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_0 & t_1 & \dots & t_d \\ t_0^2 & t_1^2 & \dots & t_d^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^{d-1} & t_1^{d-1} & \dots & t_d^{d-1} \\ t_0^d & t_1^d & \dots & t_d^d \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq d} (t_j - t_i)$$

Από την παραπάνω ισότητα βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν $d+1$ σημεία πάνω στη καμπύλη ροπών που να είναι αφινικά συσχετισμένα. Πιο συγκεκριμένα αυτό δείχνει ότι το $C_d(n)$ είναι ένα απλό d -διάστατο πολύτοπο.

Έστω τώρα το σύνολο $S = \{i_1, \dots, i_d\} \subseteq [n]$. Τότε το υπερεπίπεδο H_S ορίζεται από τη σχέση

$$H_S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : F_S(\mathbf{x}) = 0\}$$

όπου

$$F_S(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x} & \mathbf{x}(t_{i_1}) & \dots & \mathbf{x}(t_{i_d}) \end{pmatrix}$$

Η συνάρτηση $F_S(\mathbf{x})$ είναι μια γραμμική συνάρτηση στο \mathbf{x} και μηδενίζεται στα παραπάνω σημεία. Τώρα αν αφήσουμε το σημείο $\mathbf{x}(t)$ να κινηθεί πάνω στην καμπύλη ροπών $\{\mathbf{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, βλέπουμε ότι το $F_S(\mathbf{x}(t))$ είναι ένα πολυώνυμο του t βαθμού d . Το πολυώνυμο αυτό μηδενίζεται για $t = t_{i_s}$, οπότε έχει d διαφορετικά σημεία που μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο στο καθένα από αυτά.

Το S είναι μια έδρα του πολύτοπου αν και μόνον αν η $F_S(\mathbf{x}(t_i))$ έχει το ίδιο πρόσημο για όλα τα σημεία $\mathbf{x}(t_i)$ με $t_i \in [n] \setminus S$, που σημαίνει ότι το $F_S(\mathbf{x}(t_i))$ πρέπει να έχει άρτιο αριθμό αλλαγών προσήμου μεταξύ των σημείων $t = t_i$ και $t = t_j$ για $i < j$ και $i, j \in [n] \setminus S$. \square

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 4.1 στο πολύτοπο που κατασκευάσαμε νωρίτερα συμβολίζοντας με 1 τις κορυφές που ανήκουν στην έδρα και με 0 αυτές που δεν ανήκουν θα σχηματίσουμε μία σειμβολοσειρά 8 θέσεων όπου το i -οστό bit θα αντιστοιχεί στη κορυφή t_i . Συνολικά το πολύτοπο έχει 20 έδρες.

Έδρα	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	Έδρα	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
1	1	0	0	0	0	1	1	1	11	0	1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	0	1	1	0	1	12	0	1	1	0	1	1	0	0
3	1	0	0	1	1	0	0	1	13	0	1	1	0	0	1	1	0
4	1	0	1	1	0	0	0	1	14	0	1	1	0	0	0	1	1
5	1	1	1	0	0	0	0	1	15	0	0	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	1	0	0	0	0	16	0	0	1	1	0	1	1	0
7	1	1	0	1	1	0	0	0	17	0	0	1	1	0	0	1	1
8	1	1	0	0	1	1	0	0	18	0	0	0	1	1	1	1	0
9	1	1	0	0	0	1	1	0	19	0	0	0	1	1	0	1	1
10	1	1	0	0	0	0	1	1	20	0	0	0	0	1	1	1	1

Πίνακας 6: Οι έδρες του $C_4(8)$ όπως ορίζονται από τη συνθήκη του Gale

Ο πίνακας 6 ορίζει πλήρως τις έδρες του πολύτοπου $C_4(8)$. Αν πάρουμε την έδρα 7 για παράδειγμα, βλέπουμε ότι ορίζεται από τη συμβολοσειρά 11011000, δηλαδή $S = \{t_1, t_2, t_4, t_5\}$. Παρατηρούμε ότι στην συγκεκριμένη έδρα έχουμε δύο ζευγάρια άσων, δηλαδή άρτιος αριθμός και στις δύο φορές. Οπότε τα σημεία $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), \mathbf{x}(t_4), \mathbf{x}(t_5)$ ορίζουν μια από τις είκοσι έδρες του $C_4(8)$ στον \mathbb{R}^4 . Αν εξετάσουμε τώρα την έδρα 1, βλέπουμε ότι ορίζεται από τα σημεία t_1, t_6, t_7, t_8 . Σε αυτή την

περίπτωση όμως βλέπουμε ότι έχουμε μόνον έναν άσο στο t_1 και τρεις άσους στο τέλος στα t_6, t_7, t_8 , που με την πρώτη ματιά δεν ικανοποιούν τη συνθήκη αρτιότητας. Παρόλα αυτά, αν δούμε πιο προσεκτικά, καταλαβαίνουμε ότι ισχύει και εδώ η συνθήκη καθώς μπορούμε να κάνουμε μία κυκλική μετατόπιση του t_1 μετά από το t_8 και να έχουμε τέσσερις άσους στη σειρά, δηλαδή άρτιο αριθμό. Συνεπώς, η έδρα 1 έχει σαν κορυφές τα σημεία της καμπύλης ροπών $\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_6), \mathbf{x}(t_7), \mathbf{x}(t_8)$ στον \mathbb{R}^4 .

4.1.4 Δυϊκά κυκλικά πολύτοπα

Το δυϊκό σύνολο ενός συνόλου P στις d διαστάσεις ορίζεται σαν $P^\Delta = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d | \mathbf{c}\mathbf{z} \leq 1, \forall \mathbf{z} \in P\}$ [26][12]. Ένας ισοδύναμος ορισμός για το δυϊκό πολύτοπο που αφορά την κυρτή θήκη ενός συνόλου n σημείων στον \mathbb{R}^d είναι ο εξής: Αν ένα πολύτοπο P με το $\mathbf{0}$ στο εσωτερικό του δίνεται σαν την κυρτή θήκη ενός συνόλου n σημείων V , $P = \text{conv}(V)$, τότε το δυϊκό είναι το $P^\Delta = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}\mathbf{V} \leq \mathbf{1}\}$.

Αρα, για να πάρουμε το δυϊκό του κυκλικού πολύτοπου που κατασκευάσαμε αρκεί να μετασχηματίσουμε το αρχικό πολύτοπο έτσι ώστε να έχει το $\mathbf{0}$ στο εσωτερικό του. Αυτό μπορεί να γίνει αφαιρώντας τον αριθμητικό μέσο $\bar{\mu}$ των σημείων $\mu(t_i)$ από κάθε τέτοιο σημείο. Για την κατασκευή μας τα διανύσματα που θα προκύψουν, τα $c_i = \mu(t_i) - \bar{\mu}$ ορίζουν το δυϊκό κυκλικό πολύτοπο

$$P' = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d | c_i^T \mathbf{z} \leq 1, 1 \leq i \leq 2d\} \quad (4.3)$$

Μια έδρα του αρχικού κυκλικού πολύτοπου αντιστοιχεί σε μία κορυφή του δυϊκού και αντίστροφα. Μία κορυφή ενός τέτοιου πολύτοπου μπορεί να χαρακτηριστεί από μια συμβολοσειρά $u_1 u_2 \dots u_{2d}$ με το k -οστό bit u_k να υποδεικνύει αν η κορυφή u ανήκει στην k -οστή έδρα ($u_k = 1$) ή όχι ($u_k = 0$). Επειδή το πολύτοπο είναι απλό, ακριβώς d bits είναι 1 και τα υπόλοιπα d είναι 0.

Στο δυϊκό κυκλικό πολύτοπο η συνθήκη του Gale ?? προσδιορίζει πλέον τις κορυφές. Δηλαδή, συμβολοσειρά αναπαριστά μια κορυφή του P' αν και μόνον αν κάθε υποσειρά της μορφής $01 \dots 10$ έχει άρτιο μήκος. Για παράδειγμα τα 0110 και 011110 επιτρέπονται, ενώ τα 010, 01110 όχι. Μια μεγιστοτική υποσειρά με 1 θα ονομάζεται run. Στην κατασκευή μας θα θεωρήσουμε μόνο άρτια d οπότε οι συμβολοσειρές μπορούν να ξεκινούν από περιττό αριθμό από 1 και να τελειώνουν με περιττό αριθμό από 1, αρκεί βέβαια στο εσωτερικό τους να ισχύει η συνθήκη. Θα συμβολίζουμε με $G(d)$ το σύνολο των συμβολοσειρών Gale μήκους $2d$ με d άσους.

Για $d = 4$, έχουμε φτιάξει ένα δυϊκό κυκλικό πολύτοπο με 20 κορυφές που χαρακτηρίζονται από τις Gale συμβολοσειρές του Πίνακα 6.

Με τη μορφή 4.3 το πολύτοπο πλησιάζει στην επιθυμητή μορφή των ανισώσεων και το επόμενο βήμα είναι να κάνουμε μια αντιστοιχία αυτού με το πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης 2.4.

4.2 Παραγωγή των πινάκων του παιγνίου

Μέχρι στιγμής έχουμε παράγει ένα δυϊκό κυκλικό πολύτοπο με $2d$ έδρες και έχουμε χαρακτηρίσει τις κορυφές του με τη βοήθεια των Gale συμβολοσειρών του πάνω πίνακα. Με βάση το πολύτοπο αυτό θα ορίσουμε αρχικά τον πίνακα κερδών B για τον Pl_2 και στη συνέχεια με βάση αυτόν τον πίνακα θα κατασκευάσουμε και τον πίνακα A του Pl_1 .

4.2.1 Παραγωγή πίνακα κερδών για τον Pl_2

Εδώ θα δείξουμε πώς από ένα τυχαίο πολύτοπο μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα κερδών. Με αυτό το τρόπο θα πάρουμε τον πίνακα κερδών B του παίκτη Pl_2 .

Πρόταση 4.2. [25] Έστω το απλό πολύτοπο P' , στις d διαστάσεις, με $2d$ δεικτοδοτημένες έδρες. Τότε υπάρχει ένας $d \times d$ πίνακας B που ορίζει το πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης P της 2.4 και ένας αντιστρέψιμος αφινικός μετασχηματισμός από το P' στο P που απεικονίζουν το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο x' στο $\mathbf{0}$.

Απόδειξη. Στο πολύτοπο P' 4.3 κάνουμε μία μετάθεση των $2d$ δεικτών στις έδρες έτσι ώστε το x' να έχει όλους τους δείκτες $1, \dots, d$. Έπειτα, χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι πρώτες d ανισώσεις αντιστοιχούν στις ανισώσεις $x_i \geq 0$ και στις έδρες $1, 2, \dots, d$ και οι άλλες d στις υπόλοιπες ανισώσεις. Συνεπώς, μπορούμε να το γράψουμε σαν

$$P' = \{z \in \mathbb{R}^d \mid Cz \leq p, \quad Dz \leq q\} \quad (4.4)$$

Από τις d προσδιορίζουσες ανισώσεις για την κορυφή x' έχουμε ότι $Cx' = p$ και $Dx' < q$ αφού το P' είναι απλό. Οι d προσδιορίζουσες ανισώσεις για το x' είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, αφού το x' είναι κορυφή του πολύτοπου, οπότε ο C είναι αντιστρέψιμος και ο $z \mapsto x = -Cz + p$ είναι ένας αφινικός μετασχηματισμός με αντίστροφο $z = -C^{-1}(x - p)$. Έστω $P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -C^{-1}(x - p) \in P'\}$. Τότε, αν θέσουμε $r = q - DC^{-1}p$ έχουμε:

$$P' = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \geq \mathbf{0}, -DC^{-1}x \leq r\}$$

Τα αντίστοιχα σημεία του P και του P' έχουν τους ίδιους δείκτες. Από τη στιγμή που η κορυφή $\mathbf{0}$ αντιστοιχίζεται στην x' στο P' , ισχύει ότι $\mathbf{0} \leq r$. Έτσι, η j -οστή γραμμή του $-DC^{-1} \leq r$ μπορεί να κανονικοποιηθεί πολλαπλασιάζοντας την με το $1/r_j$, άρα μπορούμε να ορίσουμε τον διαγώνιο πίνακα S με στοιχεία $s_{jj} = r_j$ και $r_{ij} = 0$ αν $i \neq j$. Τότε το P ορίζεται ακριβώς όπως στην σχέση 2.4 με τον αντεστραμμένο πίνακα $B^T = -SDC^{-1}$ και καταλήγουμε στο :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \geq \mathbf{0}, -SDC^{-1}x \leq \mathbf{1}\} \quad (4.5)$$

Δηλαδή, ο πίνακας κερδών για τον Pl_2 είναι ο $B = (-SDC^{-1})^T$. □

Αν και η παραπάνω πρόταση ισχύει για τυχαίο πολύτοπο P' , εμείς θα την εφαρμόσουμε στο δυϊκό κυκλικό πολύτοπο. Γνωρίζουμε όμως ότι οι αφινικοί μετασχηματισμοί αφήνουν τη δομή του πολύτοπου ανεπηρέαστη, οπότε και στο 4.5 θα ισχύει η συνθήκη του Gale. Οι συμβολοσειρές που θα φτιάξουν το χώρο $G(d)$ θα αντιστοιχούν στις $2d$ εξισώσεις που ορίζουν το P με τη σειρά της 4.5.

4.2.2 Παραγωγή πίνακα κερδών για τον Pl_1

Καθώς το d είναι άρτιος, η συνθήκη του Gale συνεχίζει να ισχύει και μετά από μία κυκλική μετακίνηση d θέσεων. Δηλαδή, αν αλλάξουμε θέση τις d πρώτες σχέσεις που ορίζουν το 4.5 με τις d που είναι στο τέλος, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης \bar{Q} για τον Pl_2 που ορίζεται από

$$\bar{Q} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^d \mid -SDC^{-1}\bar{y} \leq \mathbf{1}, \bar{y} \geq \mathbf{0}\} \quad (4.6)$$

και το παίγνιο που παράγεται είναι ένα συμμετρικό παίγνιο (B, B) .

Στην περίπτωση μας, το παίγνιο που έφτιαξαν οι von Stengel και Savani δεν είναι συμμετρικό, γιατί οι δείκτες στο πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης του Pl_2 δεν είναι με τη σειρά που δίνονται στη 4.6 αλλά με αλλαγή.

Ορισμός 4.3. Μετάθεση ενός συνόλου A λέγεται μια συνάρτηση λ από το A στο A που είναι ταυτόχρονα ένα προς ένα και επί.

Αυτό που θα κάνουμε εμείς είναι να αλλάξουμε τη σειρά (δηλαδή τους δείκτες) στις ανισώσεις με τη βοήθεια μιας μετάθεσης λ . Η k -οστή ανίσωση θα έχει το δείκτη $l'(k)$ σύμφωνα με την μετάθεση $\lambda(k) = l'(k)$

$$l'(k) = \begin{cases} k, & k = 1, d, \\ k + (-1)^k, & 2 \leq k \leq d - 1, \\ k - (-1)^k, & d + 1 \leq k \leq 2d \end{cases} \quad (4.7)$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω μετάθεση στις ανισώσεις που ορίζουν το $C_4(8)$ οι δείκτες θα δίνονται σύμφωνα με τον πίνακα 7.

Δείκτης k	1	2	3	4	5	6	7	8
Νέος δείκτης $l'(k)$	1	3	2	4	6	5	8	7

Πίνακας 7: Εφαρμογή της μετάθεσης $l'(k)$ στο $C_4(8)$

Το τεχνητό σημείο ισορροπίας e_0 είναι ένα ζευγάρι κορυφών (u, v) έτσι ώστε η u έχει τους δείκτες $1, \dots, d$ και η v τους $d + 1, \dots, 2d$. Αν το μεταφράσουμε σε όρους του παιγνίου σημαίνει ότι κανείς από τους δύο παίκτες δεν έχει δώσει θετική πιθανότητα σε καμία στρατηγική του, δηλαδή βρισκόμαστε στο σημείο $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ του $P \times Q$. Αυτό με όρους των συμβολοσειρών μεταφράζονται σαν: $u = 1^d 0^d$ (δηλαδή d άσοι στη σειρά που ακολουθούνται από d μηδενικά) και $v = 0^d 1^d$, που και για τα δύο ισχύει η συνθήκη του Gale με τους δείκτες l και l' αντίστοιχα, δηλαδή

$$e_0 = (1^d 0^d, 0^d 1^d) \in G(d) \times G(d) \quad (4.8)$$

Αν ορίσουμε ότι $\lambda(S) = \{\lambda(k) | k \in S\}$ για $S \subseteq \{1, \dots, 2d\}$, η μετάθεση αυτή έχει την ιδιότητα

$$\lambda(\{1, \dots, d\}) = \{1, \dots, d\} \quad (4.9)$$

Από την ιδιότητα συνεπάγεται ότι $\lambda(\{d + 1, \dots, 2d\}) = \{d + 1, \dots, 2d\}$.

Με την επόμενη πρόταση κατασκευάζουμε το παίγνιο (A, B) στο οποίο θα δείξουμε ότι ο αλγόριθμος Lemke-Howson δεν είναι αποδοτικός.

Πρόταση 4.4. [20] Έστω δύο δυϊκά κυκλικά πολύτοπα στις d διαστάσεις με $2d$ έδρες, όπου κάθε κορυφή αναπαριστάται από το σύνολο των άρτιων συμβολοσειρών Gale $G(d)$. Έστω λ μία μετάθεση των $\{1, \dots, 2d\}$ που ικανοποιεί την 4.9. Για $k = 1, \dots, 2d$, μία κορυφή u στο $G(d)$ του πρώτου πολύτοπου έχει τους δείκτες k όπου $u_k = 1$, δηλαδή το bit στη θέση k του bitstring u , ενώ μια κορυφή v στο $G(d)$ του δεύτερου πολύτοπου έχει τους δείκτες $\lambda(k)$ όπου $v_k = 1$. Τότε υπάρχει ένα $d \times d$ παίγνιο δύο παικτών (A, B) όπου τα Nash σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν στα πλήρως δεικτοδοτημένα ζευγάρια κορυφών και το τεχνητό σημείο ισορροπίας αντιστοιχεί στο e_0 . Ο πίνακας B δίνεται σαν $B^T = -SDC^{-1}$ όπως στην 4.5. Τα στοιχεία $a(i, j)$ του πίνακα A τα παίρνουμε από τα στοιχεία $b(i, j)$ του B από την

$$a(\lambda(i), \lambda(j + d) - d) = b(j, i) \quad (1 \leq i, j \leq d) \quad (4.10)$$

Απόδειξη. Για τον χαρακτηρισμό των Nash σημείων ισορροπίας, η συνδυαστική δομή των πολυτόπων επαρκεί, όπως δίνεται από τις άρτιες συμβολοσειρές Gale $G(d)$. Και το P στην 4.5 και το \bar{Q} στην 4.6 παριστάνουν τέτοιου είδους πολύτοπα. Από την υπόθεση, για $k = 1, \dots, 2d$ η k -οστή ανισότητα της 4.5 έχει το δείκτη k ενώ η k -οστή ανισότητα της 4.6 έχει το δείκτη $\lambda(k)$.

Έστω $B^T = -SDC^{-1}$, ορίζουμε τον πίνακα A με στοιχεία $a(i, j)$ σύμφωνα με την 4.10 και έστω

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^d \mid Ay \leq \mathbf{1}, y \geq \mathbf{0}\} \quad (4.11)$$

Τα πολύτοπα P και Q στις 4.5 και 4.11 αντιστοιχούν στο παίγνιο δύο παικτών (A, B) . Οι έδρες του Q έχουν δείκτες με τη σειρά των ανισώσεων στην 4.11. Αρκεί να δείξουμε ότι τους δείκτες k αντιστοιχούν τους δείκτες $\lambda(k)$ του \bar{Q} .

Πιο συγκεκριμένα, οι ανισότητες στην 4.6 είναι

$$\begin{aligned} \bar{Q} = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{j=1}^d b(j, i) \bar{y}_j \leq 1 \quad (1 \leq i \leq d), \\ \bar{y}_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq d) \} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Για $1 \leq j \leq d$, η d -οστή ανίσωση στην 4.12 έχει το δείκτη $\lambda(d+j)$. Οπότε, πρέπει να εμφανιστεί σαν την $\lambda(d+j)$ στην 4.11, όπου από την 4.9 είναι η ανίσωση $y_{\lambda(d+j)-d} \geq 0$. Αυτό επιτυγχάνεται με τη αντιστοιχία μεταξύ y στην 4.11 και \bar{y} στην 4.12 που δίνεται από τη σχέση $y_{\lambda(d+j)-d} = \bar{y}_j$.

Η i -οστή από τις d πρώτες ανισώσεις στην 4.12, για $1 \leq i \leq d$, έχει το δείκτη $\lambda(i)$. Πρέπει να εμφανίζεται σαν η $\lambda(i)$ -οστή ανίσωση στην 4.11. Αυτή η ανίσωση έχει τη μορφή

$$\sum_{l=1}^d a(\lambda(i), l) y_l \leq 1$$

η οποία με τη βοήθεια της 4.9 μπορεί να ξαναγραφεί σαν

$$\sum_{j=1}^d a(\lambda(i), \lambda(d+j) - d) y_{\lambda(d+j)-d} \leq 1$$

που λόγω της 4.10 είναι η i -οστή ανισότητα της 4.12 όπως ισχυριστήκαμε. \square

Μετά από αυτό το σημείο, που έχουμε πλέον έτοιμο το παίγνιο για τους δύο παίκτες μένει να δείξουμε ότι τα μονοπάτια που παράγονται από τον αλγόριθμο Lemke-Howson έχουν εκθετικό μήκος σε σχέση με το μέγεθος του παιχνιδιού, για οποιοδήποτε αρχικό δείκτη που λείπει. Ο τρόπος κατασκευής των πινάκων κερδών συνοψίζεται στον Πίνακα 8.

4.3 Σημεία ισορροπίας του παιγνίου

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει και παραπάνω, ένα Nash σημείο ισορροπίας αντιστοιχεί σε ένα πλήρως δεικτοδοτημένος ζεύγος κορυφών των P και Q όπως έχουν οριστεί στις 4.5 και 4.11. Ήδη δείξαμε ότι το τεχνητό Nash σημείο ισορροπίας e_0 4.8 αντιστοιχεί στο $(u, v) = (1^d 0^d, 0^d 1^d)$. Το παίγνιο που φτιάχτηκε παραπάνω, έχει μόνο ένα Nash σημείο ισορροπίας το e_1 .

Λήμμα 4.5. [20] Έστω το $e_1 = (0^d 1^d, 1^d 0^d)$. Αυτό είναι το μοναδικό Nash σημείο ισορροπίας του παιγνίου.

Παραγωγή των πινάκων κερδών για παίγνιο $d \times d$	
1:	Πάρε $2d$ σημεία πάνω στη καμπύλη ρολών
2:	Βαλε το $\mathbf{0}$ στο εσωτερικό του πολυτόπου αφαιρώντας τον αριθμητικό μέσο των σημείων
3:	"Σπάσε" τα σημεία στους πίνακες C και D
4:	Μετασχηματισμός στη μορφή $P = \{x \in \mathbf{R}^d x \geq 0, -DC^{-1} \leq r\}, r = \mathbf{1} - DC^{-1}\mathbf{1}$
5:	Κανονικοποίησε για να έχεις στη θέση του r το 1. Αυτός είναι ο πίνακας B^T
6:	Φτιάξε τον πίνακα A σύμφωνα με τη μετάθεση $a((\lambda(i), \lambda(j+d) - d) = b(j, i)$

Πίνακας 8: Παραγωγή των payoff πινάκων A, B στις $d \times d$ διαστάσεις για την παρουσίαση της χειρότερης περίπτωσης του αλγορίθμου Lemke - Howson.

Απόδειξη. Έστω ότι το (u, v) είναι πλήρως δεικτοδοτημένο και έστω ότι $u_d = 1$. Αν $u_{d+1} = 1$, τότε $v_d = 0$ και $v_{d+2} = 0$ λόγω του ότι οι κορυφές είναι πλήρως δεικτοδοτημένες και ότι ισχύει $l'(d+1) = d+2$. Άρα από τη συνθήκη Gale, έχουμε $v_{d+1} = 0$ και οπότε $u_{d+2} = 1$. Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, όλοι οι άσσοι από τα δεξιά του d -οστού bit u_d του u μπαίνουν ανά δύο. Δηλαδή, γειμίζουμε από το d -οστό bit μέχρι το $2d$ -οστό bit του u με άσσους. Ομοίως, αν $u_{d-1} = 1$, τότε $v_{d-2} = 0$ που μαζί με το $v_d = 0$ πράγμα που σημαίνει ότι $v_{d-1} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι οι άσσοι από αριστερά του u_d έρχονται σε ζεύγη αν υπάρχει ένα μηδενικό στα αριστερά τους. Στην τελευταία περίπτωση, που και το u_{d-1} είναι άσος, οι άσσοι που περιέχουν το u_d είναι άρτιου πλήθους, οπότε πρέπει να περιέχουν και το u_{2d} . Αλλά σε αυτή την περίπτωση οι άσσοι είναι περισσότεροι από όσοι πρέπει (είναι παραπάνω από d). Άρα η μόνη περίπτωση να έχουμε πλήρως δεικτοδοτημένο ζεύγος κορυφών και το $u_d = 1$ είναι όταν $(u, v) = e_0$. Ομοίως, αν $u_d = 0$ έχουμε το $(u, v) = e_1$. \square

Θέση Δείκτης	Πολύτοπο P											Πολύτοπο Q											
	1	2	3	...	d-2	d-1	d	d+1	...	2d-1	2d	1	2	3	...	d-2	d-1	d	d+1	...	2d-2	2d-1	2d
e_0	1	1	1	...	1	1	1	0	...	0	0	0	0	0	...	0	0	0	1	...	1	1	1
e_1	0	0	0	...	0	0	0	1	...	1	1	1	1	1	...	1	1	1	0	...	0	0	0

Πίνακας 9: Δείκτες των πολυτόπων και τα δύο μοναδικά πλήρως δεικτοδοτημένα ζεύγη κορυφών

Από τη στιγμή που υπάρχει μόνο ένα Nash σημείο ισορροπίας, για οποιοδήποτε αρχικό δείκτη που λείπει το μονοπάτι που ξεκινά από το e_0 καταλήγει στο e_1 . Θα συμβολίζουμε με $\pi(d, k)$ το μονοπάτι όταν κάνουμε αρχικά άφεση το δείκτη k σε ένα παίγνιο στις d διαστάσεις. Ένα μονοπάτι $\pi(d, k)$ αποτελείται από τα ζεύγη κορυφών $(u^0, v^0), (u^1, v^1), \dots, (u^L, v^L)$ του $P \times Q$, δηλαδή στο $G(d) \times G(d)$, και το μήκος του συμβολίζεται $L(d, k)$. Με (u^i, v^i) θα συμβολίζουμε το i -οστό σημείο του μονοπατιού $\pi(d, k)$ που ανήκει στο $P \times Q$. Πιο συγκεκριμένα, το u^i συμβολίζει μια κορυφή του P και προσδιορίζεται πλήρως από μια συμβολοσειρά Gale. Το ίδιο ισχύει και για την κορυφή $v^i \in Q$. Τέλος, με (u^{L-i}, v^{L-i}) συμβολίζουμε την κορυφή του μονοπατιού $\pi(d, k)$ που είναι i βήματα πριν από το τέλος του μονοπατιού.

Παρατηρούμε ότι με τη βοήθεια των άρτιων συμβολοσειρών Gale δε χρειάζεται να βλέπουμε καθόλου τα πολύτοπα, αλλά μόνο μέσα από τις συμβολοσειρές των δεικτών μπορούμε να δούμε τα βήματα του αλγορίθμου ένα προς ένα. Δηλαδή, ανά πάσα στιγμή του αλγορίθμου γνωρίζοντας το ποιος παίκτης παίζει μπορούμε να βρούμε το προηγούμενο και το επόμενο ζεύγος κορυφών για οποιοδήποτε μονοπάτι του αλγορίθμου.

4.4 Τα ειδικά μονοπάτια $\pi(d, 1)$ και $\pi(d, 2d)$

Στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε τα μονοπάτια $\pi(d, 1)$ και $\pi(d, 2d)$ καθώς έχουν κάποιες συγκεκριμένες συμμετρίες και θα μας βοηθήσουν στη μελέτη του μήκους όλων των μονοπατιών, καθώς όλα τα υπόλοιπα μονοπάτια μπορούν να εκφραστούν από όρους αυτών των δύο μονοπατιών.

4.4.1 Το μονοπάτι $\pi(d, 1)$

Λήμμα 4.6. [20] Έστω $L = L(d, 1)$ και έστω το (u^i, v^i) να είναι το i -οστό ζεύγος κορυφών του μονοπατιού $\pi(d, 1)$. Τότε, για $0 \leq i \leq L$ έχουμε $(u^i, v^i) = (v^{L-i}, u^{L-i})$.

Απόδειξη. Η συγκεκριμένη ονομασία των δεικτών δεν έχει κάποια ιδιαίτερη σημασία, οπότε αν μετονομάσουμε τους δείκτες για το P και το Q χρησιμοποιώντας τη μετάθεση l' , η k -οστή έδρα του P έχει το δείκτη $l'(l(k))$, που είναι το $l'(k)$, και η k -οστή έδρα του Q έχει το δείκτη $l'(l'(k))$, που είναι το $l(k)$. Αλλά μετά από αυτό τα P και Q αλλάζουν ρόλους, το e_0 αλλάζει με το e_1 , ο δείκτης 1 μένει το ίδιο και το μονοπάτι προς τα πίσω αντιστοιχεί στο $\pi(d, 1)$ όπως ισχυριστήκαμε. \square

Δηλαδή, το μονοπάτι $\pi(d, 1)$ από το e_0 στο e_1 είναι το ίδιο με το μονοπάτι από το e_1 στο e_0 αν αλλάξουμε τη σειρά των κορυφών u και v .

Θέση Δείκτης	Πολύτοπο P								Πολύτοπο Q							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
3	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
4	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
5	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
6	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
7	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
8	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
9	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
10	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Πίνακας 10: Το μονοπάτι $\pi(4, 1)$

Στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ξεκάθαρα το Λήμμα που μόλις δείξαμε. Πρέπει να τονιστεί ότι ο παραπάνω πίνακας αντιστοιχεί σε 20 βήματα του αλγορίθμου, γιατί η κάθε γραμμή είναι δύο βήματα. Στην προκειμένη περίπτωση, αφού γίνεται αρχικά drop το 1, σε κάθε γραμμή πρώτα παίζει ο Pl_1 και στη συνέχεια ακολουθεί ο Pl_2 .

4.4.2 Το μονοπάτι $\pi(d, 2d)$

Για το δεύτερο ειδικό μονοπάτι $\pi(d, 2d)$ αγνοούμε το πρώτο ζεύγος κορυφών και τα δύο τελευταία ζεύγη. Το μονοπάτι που απομένει, που ονομάζουμε $B(d)$, είναι συμμετρικό σε κάθε πολύτοπο, αντιστρέφοντας τις συμβολοσειρές και αγνοώντας το bit που είναι μηδέν για το δείκτη που λείπει.

Λήμμα 4.7. [20] Έστω $L = L(d, 2d)$ και έστω το (u^i, v^i) να είναι η i -οστό ζεύγος κορυφών του

μονοπατιού $\pi(d, 2d)$ για $0 \leq i \leq L = L(d, 2d)$. Τότε για $1 \leq i \leq L - 2$ έχουμε

$$u_k^i = u_{2d-k}^{L-1-i} \quad (1 \leq k \leq 2d-1) \quad (1)$$

$$v_1^i = v_{2d}^{L-1-i} = 1 \quad (2)$$

$$v_k^i = v_{2d-k}^{L-1-i} \quad (2 \leq k \leq 2d-2) \quad (3)$$

$$u_{2d}^i = v_{2d-1}^i = 0 \quad (4)$$

Στο (u^1, v^1) ο διπλός δείκτης είναι ο 1, που γίνεται άφεση στο P και ποτέ δε ξαναγίνεται λήψη του.

Απόδειξη. Η εξίσωση (4) ισχύει επειδή ο δείκτης $2d$ λείπει για όλα τα $i = 1, \dots, L - 2$. Ο δείκτης αυτός είναι ο δείκτης που λείπει, οπότε μετά το πρώτο βήμα του αλγόριθμου γίνεται άφεση του δείκτη αυτού και θα λείπει μέχρι τέλους, οπότε η σχέση (4) ισχύει. Άρα μετά από ένα βήμα στο $\pi(d, 2d)$ φτάνουμε στην κορυφή

$$(u^1, v^1) = (1^d 0^d, 10^{d-1} 1^{d-2} 01) \quad (5)$$

Ο διπλός δείκτης είναι το 1, που γίνεται λήψη στο Q και θα γίνει άφεση στο P από το u^1 . Το τελευταίο ζευγάρι κορυφών του $\pi(d, 2d)$ είναι το $(u^L, v^L) = e_1$. Σ'αυτό φτάνουμε κάνοντας λήψη του δείκτη $2d$ στο P . Το αμέσως προηγούμενο ζευγάρι κορυφών επομένως είναι το $(u^{L-1}, v^{L-1}) = (0^{d-1} 1^d 0, 1^d 0^d)$, όπου ο δείκτης d είναι διπλός. Οπότε στο $L - 2$ βήμα είμαστε στο ζευγάρι

$$(u^{L-2}, v^{L-2}) = (0^{d-1} 1^d 0, 1^{d-1} 0^d 1) \quad (6)$$

με διπλό δείκτη το $2d - 1$. Εδώ φτάνουμε από το

$$(u^{L-3}, v^{L-3}) = (0^{d-2} 1^d 00, 1^{d-1} 0^d 1) \quad (7)$$

κάνοντας λήψη το δείκτη $2d - 1$ στο P . Η εξίσωση (5) περιγράφει το αρχικό ζευγάρι κορυφών (u^1, v^1) και η (6) το τελευταίο ζευγάρι κορυφών (u^{L-2}, v^{L-2}) του μονοπατιού $B(d)$.

Για τη συνέχεια θα ορίσουμε μια ακόμη απεικόνιση r που θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε τη συμμετρία του $B(d)$. Η απεικόνιση αυτή είναι $r(k) = 2d - k$ για $1 \leq k \leq 2d - 1$. Άρα η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την

$$u_k^i = u_{r(k)}^{L-1-i} \quad (1 \leq k \leq 2d-1) \quad (8)$$

Επίσης, οι σχέσεις (2) και (3) μαζί, είναι ισοδύναμες με τη σχέση

$$v_{l'(k)}^i = v_{l'(r(k))}^{L-1-i} \quad (1 \leq k \leq 2d-1) \quad (9)$$

Αυτό συμβαίνει καθώς όταν γίνεται άφεση του δείκτη k στο Q από το v^i , τότε το bit v_j^i στη θέση j , για το οποίο ισχύει $l'(j) = k$, αλλάζει από άσος σε μηδέν. Επίσης, γνωρίζουμε ότι ισχύει $l'(l'(i)) = i$, ισχύει ότι $j = l'(k)$. Οπότε η (9) μπορεί να διαβαστεί ως εξής: το bit της κορυφής v^i στη θέση $l'(k)$ που έχει το δείκτη k , είναι ίσο με το bit της κορυφής v^{L-i-1} στη θέση $l'(r(k))$ που έχει το δείκτη $r(k)$.

Για τις σχέσεις (8) και (9) θα δείξουμε με επαγωγή στο i επίσης ότι: Αν ο δείκτης k είναι διπλός στο ζευγάρι κορυφών (u^i, v^i) , τότε ο δείκτης $r(k)$ είναι διπλός στο ζευγάρι (u^{L-1-i}, v^{L-1-i}) και όταν γίνεται άφεση του δείκτη k σε ένα πολύτοπο (P ή Q) και πάμε από το (u^i, v^i) στο (u^{i+1}, v^{i+1}) , τότε ο δείκτης $r(k)$ γίνεται άφεση στο ίδιο πολύτοπο πηγαίνοντας αντίθετα από το (u^{L-1-i}, v^{L-1-i}) στο (u^{L-2-i}, v^{L-2-i}) .

Οι σχέσεις (5) και (6) δείχνουν ότι η (8) ισχύει για $i = 1$, όπου ο διπλός δείκτης είναι το 1 στο (u^1, v^1) και το $r(1)$ στο (u^{L-2}, v^{L-2}) . Όταν το i είναι περιττό το βήμα από το (u^i, v^i) στο (u^{i+1}, v^{i+1}) γίνεται άφεση του διπλού δείκτη στο P , οπότε η κορυφή στο πολύτοπο Q παραμένει σταθερή και $v^i = v^{i+1}$. Κατά τον ίδιο τρόπο στο αντίστροφο βήμα, δηλαδή από το (u^{L-1-i}, v^{L-1-i}) στο (u^{L-2-i}, v^{L-2-i}) , γίνεται επίσης με άφεση του διπλού δείκτη στο P . Αν σ'αυτά τα δύο βήματα οι διπλοί δείκτες είναι οι k και $r(k)$ αντίστοιχα, τότε η (8) ισχύει και για $i + 1$ αντί για i , γιατί το r διατηρεί την Gale συνθήκη αρτιότητας (το r είναι μια αναστροφή των συμβολοσειρών μαζί με μια κυκλική μετακίνηση κατά μία θέση). Άρα οι κορυφές u^i και u^{i+1} συνδέονται μια ακμή στο P αν και μόνον αν συνδέονται και οι u^{L-1-i}, u^{L-2-i} με ακμή (που ορίζεται από τον ίδιο δείκτη χρησιμοποιώντας το r) στο P . Επιπλέον, ένας νέος δείκτης k' γίνεται λήψη στο P που είναι ο διπλός δείκτης στο (u^{i+1}, v^{i+1}) και ο διπλός δείκτης στο (u^{L-2-i}, v^{L-2-i}) είναι το $r(k)$. Εδώ τελειώνει η επαγωγή για i περιττό.

Τώρα θα εξετάσουμε το πολύτοπο Q . Το σύνολο $\{2, 3, \dots, 2d-2\}$ απεικονίζεται στον εαυτό του και με το r και με το l' , σημειώνουμε ότι και οι δύο απεικονίσεις απεικονίζουν το d στον εαυτό του. Είναι εύκολο να δούμε ότι η (3) είναι ισοδύναμη με την (9) για $2 \leq k \leq 2d-2$. Για $k = 1$, έχουμε $l'(k) = 1$ και $l'(r(k)) = 2d$, άρα η (9) για $k = 1$ (ή για $k = 2d-1$) προκύπτει από την (2). Εμείς θα αποδείξουμε την (7).

Για την επαγωγή, υποθέτουμε ότι για κάποιο i οι σχέσεις (2), (8) και (9) ισχύουν. Επιπλέον, ότι ο διπλός δείκτης είναι το k και γίνεται άφεση στη κορυφή v^i του Q (που σημαίνει ότι το i είναι άρτιο) και ότι ο διπλός δείκτης που θα γίνει άφεση όταν πηγαίνουμε αντίθετα από το v^{L-1-i} στο v^{L-2-i} είναι το $r(k)$. Αυτό ισχύει για $i = 2$ από την (7), όπου $k = d+1$. Υποθέτουμε ότι γίνεται λήψη του δείκτη k' στο Q στην κορυφή v^{i+1} . Θα δείξουμε ότι η κορυφή v^{L-2-i} έχει το νέο δείκτη $r(k')$.

Ονομάζουμε δύο δείκτες οποιασδήποτε κορυφής στο Q γειτονικούς, αν είναι οι δείκτες δύο κυκλικά γειτονικών θέσεων στη συμβολοσειρά, όπως αυτές ορίζονται από το l' . Αντίθετα από το P , υπάρχουν περιπτώσεις που οι δείκτες a, b είναι γειτονικοί στο Q ενώ τα $r(a), r(b)$ όχι. Αυτό συμβαίνει λόγω της μετάθεσης l' και όταν οι δείκτες (a, b) είναι ένα από τα $(1, 3), (2d-3, 2d), (2d, 2d-1)$. Ομοίως τα $r(a), r(b)$ είναι γειτονικά όταν τα (a, b) είναι $(2d-1, 2d-3), (3, 2d), (2d, 1)$ αλλά τα a και b δεν είναι γειτονικά. Παρόλα αυτά, θα δείξουμε ότι δεν μας επηρεάζει, εξετάζοντας με τη σειρά αυτές τις περιπτώσεις.

Λόγω των σχέσεων (2) και (4), έχουμε ότι οι γειτονικοί δείκτες $2d, 2d-1, 1$ στο Q , στις θέσεις $2d-1, 2d, 1$ αντίστοιχα, έχουν τα bits 0, 1, 1 και στη κορυφή v^i και στην v^{L-i-1} . Το δείκτη 1 μπορούμε να το βάλουμε στο τέλος, μετά το $2d-1$, γιατί το πολύτοπο είναι κυκλικό.

Έτσι βλέπουμε ότι στη θέση 1 έχουμε αναγκαστικά άσσο.

		Πολύτοπο Q		
θέση	...	2d-1	2d	1
label	...	2d	2d-1	1
v^i	...	0	1	1
v^{L-i-1}	...	0	1	1

Πίνακας 11: Δείκτες στις κορυφές του Q

Για τον πρώτο έλεγχο, έστω ότι όταν γίνει άφεση ο δείκτης k στο v^i , προκύπτει ότι οι δείκτες 1 και 3 είναι γειτονικοί. Αυτό σημαίνει ότι το gap των άσπων άλλαξε πηγαίνοντας από το v^i στο v^{i+1} και συμπεριλαμβάνει πλέον οι δείκτες 1 και 3, που βρίσκονται στις θέσεις 1 και 2 αντίστοιχα. Αν

γινόταν αυτό θα είχαμε πρόβλημα, καθώς οι δείκτες $r(1) = 2d - 1$ και $r(3) = 2d - 3$ στο v^{L-1-i} δεν είναι γειτονικά (επειδή αντιστοιχούν στις θέσεις $2d$ και $2d - 2$). Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο σε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $k = 2d - 1$, γιατί τα παραπάνω 3 bits θα αλλάξουν από 011 σε 001. Τότε το άρτιο run των άσσων που ξεκινούσε από τη θέση $2d$ με δείκτη $2d - 1$, πρέπει να μετακινηθεί κατά μία θέση προς τα δεξιά, δηλαδή στις θέσεις 1 και 3 του Q με δείκτες 1 και 2 αντίστοιχα. Αλλά τότε, λόγω των υποθέσεων της επαγωγής, ο δείκτης $r(k)$ που γίνεται άφεση όταν πάμε αντίστροφα από το v^{L-1-i} στο v^{L-2-i} είναι το 1, που είναι το τελευταίο bit στο 011. Οπότε η πάνω τριάδα πρέπει να γίνει 110 πράγμα που είναι αντίθετο στη σχέση (4), γιατί ο δείκτης που γίνεται λήψη σ' αυτήν την περίπτωση είναι το $2d$.
2. Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν η παραπάνω συμβολοσειρά γίνεται από 011 \rightarrow 111 όπου ο άσος που μπαίνει στη θέση $2d - 1$ μετακινείται κατά μία θέση προς τα αριστερά από τη θέση 2. Και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει πρόβλημα στο αντίστροφο βήμα γιατί θα γίνει λήψη ο δείκτης $2d$.

Στη δεύτερη περίπτωση, έστω ότι συμβαίνει οι δείκτες $2d - 3$ και $2d$ να είναι γειτονικοί στο v^i αλλά τα $r(2d - 3)$ στο v^{L-1-i} να μην είναι. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν γίνει λήψη του δείκτη $2d$, που λόγω της (4) αυτό δεν γίνεται.

Στη τρίτη περίπτωση, το γεγονός ότι οι δείκτες $2d$ και $2d - 1$ είναι γειτονικοί στο v^i ενώ τα $r(2d)$ και $r(2d - 1)$ στο v^{L-1-i} δεν είναι, δε χρειάζεται να την εξετάσουμε καν αφού ο δείκτης $2d$ δε γίνεται λήψη παρά μόνο στο τέλος και μάλιστα στο πολύτοπο P .

Οι άλλες τρεις περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με παρόμοιο τρόπο. Αυτή που έχει γειτονικούς τους δείκτες $r(2d - 1), r(2d - 3)$ στο v^{L-1-i} ενώ τα $2d - 1, 2d - 3$ στο v^i δεν είναι, αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως η πρώτη περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω. Οι άλλες δύο περιπτώσεις είναι και αυτές μη προβληματικές.

Με αυτό το τρόπο ολοκληρώνεται το βήμα της επαγωγής από το i στο $i + 1$ για όλα τα i , οπότε οι εξισώσεις (1) – (4) ισχύουν. \square

Όπως φαίνεται και από τα παραπάνω, δύο κορυφές του $G(d)$ είναι γειτονικές αν και μονον αν οι αντίστοιχες συμβολοσειρές διαφέρουν μόνο κατά δύο bits το ένα από το άλλο. Λέμε ότι μία ακμή ξαναγυρίζει στην αρχή (wrap around), αν κάποια συμβολοσειρά έχει άσσους στην πρώτη και τελευταία θέση ενώ το προηγούμενο του δεν είχε. Για παράδειγμα, η ακμή 00001111 \rightarrow 10001101 ξαναγυρίζει στην αρχή. Σε κάθε άλλη περίπτωση η ακμή δεν ξαναγυρίζει στην αρχή.

Λήμμα 4.8. [20] *Καμία ακμή του $\pi(d, 1)$ δεν ξαναγυρίζει στην αρχή σε κανένα πολύτοπο: Αν μία ακμή συνδέει το (u, v) με το (u', v) , τότε η ακμή που συνδέει τα u και u' στο P δεν ξαναγυρίζει στην αρχή και αν η ακμή του $\pi(d, 1)$ συνδέει το (u, v) με το (u, v') , τότε η ακμή που συνδέει τα v και v' στο Q δεν ξαναγυρίζει στην αρχή.*

Απόδειξη. Η πρώτη ακμή του $\pi(d, 1)$ συνδέει το e_0 με το $(01^d 0^{d-1}, 0^d 1^d)$ δεν ξαναγυρίζει στην αρχή και δεν κάνει ούτε η τελευταία που συνδέει το $(0^d 1^d, 01^d 0^{d-1})$. Σε όλες τις υπόλοιπες ακμές η θέση 1 είναι μίθδεν, οπότε καμία από αυτές δεν ξαναγυρίζει στην αρχή. \square

4.4.3 Σύνθεση μονοπατιών

Για δύο μονοπάτια π και π' στο $G(d) \times G(d)$, ορίζουμε με $\pi + \pi'$ το μονοπάτι που παίρνουμε ενώνοντας την τελευταία κορυφή του π με την πρώτη του π' , εφόσον αυτό γίνεται. Το μήκος του νέου μονοπατιού είναι το άθροισμα των μηκών των π και π' συν ένα. Ο αριθμός των κορυφών (που στην ουσία είναι ζεύγη κορυφών) είναι το αντίστοιχο άθροισμα.

Το επόμενο θεώρημα περιγράφει πως τα μονοπάτια $\pi(d, 1)$ και $\pi(d, 2d)$ συνθέτονται από άλλα μονοπάτια μικρότερης διάστασης. Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται κάποιες απεικονίσεις που έχουν σαν είσοδο μια κορυφή του $p \times Q$ και την αντιστοιχίζουν σε κάποια άλλη. Οι απεικονίσεις εφαρμόζονται πάνω στις συμβολοσειρές που του ζεύγους κορυφών που περιγράφουν ένα σημείο του μονοπατιού. Με τη χρήση των απεικονίσεων αυτό που ουσιαστικά πετυχαίνουμε είναι να δείξουμε ότι οποιοδήποτε μονοπάτι που παράγει ο αλγόριθμος μπορεί να περιγραφεί από τα δύο ειδικά μονοπάτια που προσδιορίσαμε πλήρως προηγουμένως.

Θεώρημα 4.9. [20] Έστω $A(d) = \pi(d, 1)$ και $B(d) = (u^1, v^1) \dots (u^{L-2}, v^{L-2})$, όπου (u^i, v^i) είναι το i -οστό ζευγάρι κορυφών του $\pi(d, 2d)$, $0 \leq i \leq L = L(d, 2d)$. Τότε υπάρχουν μονοπάτια $C(d)$ και απεικονίσεις $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$, που ορίζονται πάνω στα ζεύγη κορυφών, έτσι ώστε

$$A(d) = \beta(B(d)) + C(d) \quad (4.13)$$

$$C(d) = \alpha(A(d-2)) + \beta'(B(d)) \quad (4.14)$$

$$B(d) = \gamma(A(d-2)) + \gamma'(C(d-2)) \quad (4.15)$$

Πριν να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα δώσουμε πρώτα τους ορισμούς των απεικονίσεων που θα τους χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Οι απεικονίσεις β, β' ορίζονται στο $G(d) \times G(d)$ σαν

$$\beta(u, v) = (u, 0v_2v_3 \dots v_{2d-2}1v_{2d})$$

και το β' ορίζεται από το β και τη χρήση του λήμματος που προσδιορίζει το μονοπάτι $\pi(d, 1)$. Τα υπόλοιπα μονοπάτια ορίζονται $\alpha, \gamma, \gamma' : G(d-2) \times G(d-2) \rightarrow G(d) \times G(d)$. Αν με \overleftarrow{w} συμβολίζουμε τη συμβολοσειρά w ανεστραμμένη, τότε η απεικόνιση α ορίζεται σαν

$$\alpha(u, v) = (0\overleftarrow{u}110, 0\overleftarrow{v}110) \quad (4.16)$$

Με $c = 2d - 4$, η απεικόνιση γ είναι

$$\gamma(u_1 \dots u_c, v) = (u_111u_2 \dots u_c00, 10v01) \quad (4.17)$$

και την απεικόνιση γ' την παίρνουμε από το λήμμα για το μονοπάτι του $\pi(d, 2d)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι $C(d)$ είναι απλά ένα κομμάτι του τέλους του $A(d)$. Οπότε μπορούμε πρώτα να δείξουμε μια σχέση ισοδύναμη για τις 4.13 και 4.14

$$A(d) = \beta(B(d)) + \alpha(A(d-2)) + \beta'(B(d)) \quad (4.18)$$

Για την απόδειξη της σχέσης αυτής θα εξετάζουμε το $A(d)$ κομμάτι κομμάτι, για να δούμε ότι δεν υπάρχει κάποιο πρόβλημα στο κάθε επιμέρους κομμάτι και να βλέπουμε ότι όντως μπορούμε να πάμε από το κομμάτι στο άλλο κάνοντας "πρόσθεση μονοπατιών".

- Το κομμάτι $\beta(B(d))$: Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση β αλλάζει στο Q μόνο τις θέσεις 1 και $2d - 1$ και αυτές οι θέσεις είναι σταθερές σε όλο το $B(d)$ από τις σχέσεις (2) και (4). Το πρώτο

σημείο (u^1, v^1) του $B(d)$ είναι το $(1^d 0^d, 10^{d-1} 1^{d-2} 01)$ σύμφωνα με τη (5) και γίνεται άφεση του δείκτη 1 στο P . Το μονοπάτι $A(d)$ επίσης ξεκινά κάνοντας άφεση του δείκτη 1 στο P . Βλέπουμε ότι $\beta(u^1, v^1) = e_0^d$ και ότι και στις δύο περιπτώσεις γίνεται άφεση του δείκτη 1 στο P . Καθώς τα (u^1, v^1) και e_0^d διαφέρουν μόνο τις θέσεις που είναι σταθερές σε όλο το $B(d)$, το μονοπάτι $B(d)$ απεικονίζεται στο $\beta(B(d))$ και αναπαριστά το αρχικό κομμάτι του $A(d)$. Λόγω της (6) το τέλος του $\beta(B(d))$ είναι το

$$\beta(0^{d-1} 1^d 0, 1^{d-1} 0^d 1) = (0^{d-1} 1^d 0, 01^{d-2} 0^{d-1} 11) \quad (4.19)$$

και ο διπλός δείκτης είναι ο $2d - 1$ που γίνεται λήψη στο P και σε αυτό το σημείο πρέπει να παύσει ο Pl_2 , δηλαδή να γίνει άφεση ο δείκτης $2d - 1$ στο Q . Έτσι, στο επόμενο βήμα του $A(d)$ γίνεται άφεση ο δείκτης $2d - 1$ στο Q , γίνεται λήψη ο δείκτης $2d - 3$ και έχουμε το ζεύγος κορυφών

$$(u^*, v^*) = (0^{d-1} 1^d 0, 01^{d-2} 0^{d-2} 110)$$

Αυτή είναι η ακμή που του $A(d)$ συνδέει το $\beta(B(d))$ με το $\alpha(A(d - 2))$.

- Το κομμάτι $\alpha(A(d - 2))$: Τώρα βρισκόμαστε στην αρχή του μονοπατιού $C(d)$, δηλαδή του $\alpha(A(d - 2))$. Είμαστε στο σημείο (u^*, v^*) όπου ο διπλός δείκτης είναι ο $2d - 3$, που πρέπει να γίνει άφεση στο P στο επόμενο βήμα. Το πρώτο βήμα αναπαριστάται από το $\alpha(A(d - 2))$ καθώς στο χαμηλότερης διάστασης πολύτοπο γίνεται άφεση ο δείκτης 1 και απεικονίζεται μέσω του α στο δείκτη $2d - 3$ στην υψηλότερη διάσταση. Τα επόμενα βήματα του $\alpha(A(d - 2))$ απεικονίζονται στην υψηλότερη διάσταση λόγω της 4.16 και του τελευταίου λήμματος. Το μόνο που χρειάζεται να ελέγχσουμε είναι αν τα bits που προσθέτει η απεικόνιση στην υψηλότερη διάσταση είναι επιτρεπτά υπό την έννοια της συνθήκης Gale και υπό την έννοια των διπλών δεικτών, ότι δηλαδή δεν έχουμε παραπάνω από έναν διπλό δείκτη. Στην υψηλότερη διάσταση, προστίθενται τα bits στις θέσεις $1, 2d - 2, 2d - 1, 2d$ και στις δύο συμβολοσειρές. Η πρώτη θέση είναι μηδέν και στα δύο πολύτοπα σύμφωνα με την 4.16 και είναι επιτρεπτό καθώς η θέση αυτή και στα δύο πολύτοπα έχει το δείκτη 1, που είναι και ο δείκτης που λείπει. Οι θέσεις $2d - 1$ και $2d$ έχουν αποδεκτή αποτίμηση λόγω της 4.16. Η θέση $2d - 2$ έχει το δείκτη $2d - 2$ στο P και το $2d - 3$ στο Q . Δηλαδή, πρέπει να εξετάσουμε τη θέση που έχει ο δείκτης $2d - 2$ στο Q και τη θέση που έχει το δείκτη $2d - 3$ στο πολύτοπο P . Ο δείκτης $2d - 2$ στο Q είναι στη θέση $2d - 3$ που είναι πάντα μηδέν αφού αντιστοιχεί στη θέση 1 στο $A(d - 2)$, που είναι μηδέν αφού είναι ο δείκτης που λείπει. Ο δείκτης $2d - 3$ στο P είναι στη θέση $2d - 3$ που είναι πάντα μηδέν για τον ίδιο ακριβώς λόγο.

Άρα το κομμάτι αυτό του $A(d)$ είναι το $\alpha(A(d - 2))$. Στο τελευταίο βήμα του $A(d - 2)$ γίνεται λήψη ο δείκτης 1 στο Q . Άρα στο τελευταίο βήμα του $\alpha(A(d - 2))$ γίνεται λήψη ο δείκτης $2d - 2$ στο Q και είμαστε στο ζευγάρι σημείων $(v^*, u^*) = \alpha(e_1^{d-2}) = (01^{d-2} 0^{d-2} 110, 0^{d-1} 1^d 0)$. Το επόμενο ζεύγος σημείων πάμε κάνοντας άφεση το δείκτη $2d - 2$ στο P και φτάνουμε στο σημείο

$$(u', v') = (01^{d-2} 0^{d-1} 11, 0^{d-1} 1^d 0) \quad (4.20)$$

που συμφωνεί με το Λήμμα 4.6 και την 4.16.

- Το κομμάτι $\beta'(B(d))$: Το τελευταίο κομμάτι του $A(d)$, σύμφωνα με τα παραπάνω είναι το μονοπάτι $\beta(B(d))$ προς τα πίσω και με τις συμβολοσειρές των P και Q ανταλλαγμένες. Βέβαια, χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του $B(d)$ στο Λήμμα 4.7, αυτό το κομμάτι του μονοπατιού μπορεί να εκφραστεί σαν $\beta'(B(d))$ με μία κατάλληλα ορισμένη απεικόνιση β' , όμοια με τη β που ανταλλάσει τις απεικονίσεις των P και Q . Και έτσι αποδεικνύεται η 4.18.

		B(4)								A(4)																									
Δείκτες		1	2	3	4	5	6	7	8	1	3	2	4	6	5	8	7	1	2	3	4	5	6	7	8	1	3	2	4	6	5	8	7		
(u^1, v^1)		1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	$\beta(u^1, v^1)$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	$\beta(B(4))$
(u^2, v^2)		0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	$\beta(u^2, v^2)$	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
(u^3, v^3)		0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	$\beta(u^3, v^3)$	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	
(u^4, v^4)		0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	$\beta(u^4, v^4)$	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	
(u^5, v^5)		0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	$\beta(u^5, v^5)$	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	
(u^6, v^6)		0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	$\beta(u^6, v^6)$	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	
(u^7, v^7)		0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	$\beta(u^7, v^7)$	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	
(u^8, v^8)		0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	$\beta(u^8, v^8)$	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	
																	(u^*, v^*)	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0		
		A(2)																																	
Δείκτες		1	2	3	4	1	2	4	3																										
(u^0, v^0)		1	1	0	0	0	0	1	1	$\alpha(u^0, v^0)$	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	$\alpha(A(2))$									
(u^1, v^1)		0	1	1	0	0	0	1	1	$\alpha(u^1, v^1)$	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1										
(u^2, v^2)		0	1	1	0	0	0	1	1	$\alpha(u^2, v^2)$	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1											
(u^3, v^3)		0	0	1	1	0	1	1	0	$\alpha(u^3, v^3)$	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1											
(u^4, v^4)		0	0	1	1	1	1	0	0	$\alpha(u^4, v^4)$	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1											
		B(4)																																	
Δείκτες		1	2	3	4	5	6	7	8	1	3	2	4	6	5	8	7																		
(u^1, v^1)		1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	$\beta'(u^1, v^1)$	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	$\beta'(B(4))$
(u^2, v^2)		0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	$\beta'(u^2, v^2)$	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	
(u^3, v^3)		0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	$\beta'(u^3, v^3)$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	
(u^4, v^4)		0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	$\beta'(u^4, v^4)$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	
(u^5, v^5)		0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	$\beta'(u^5, v^5)$	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	
(u^6, v^6)		0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	$\beta'(u^6, v^6)$	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	
(u^7, v^7)		0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	$\beta'(u^7, v^7)$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	
(u^8, v^8)		0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	$\beta'(u^8, v^8)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	

Πίνακας 12: Η σύνθεση του μονοπατιού $A(4) = \beta(B(4)) + \alpha(A(d-2)) + \beta'(B(d))$.

Τώρα θα αποδείξουμε τη σχέση 4.15: $B(d) = \gamma(A(d-2)) + \gamma'(C(d-2))$.

- Το κομμάτι $\gamma(A(d-2))$: Το πρώτο κομμάτι του $B(d)$ είναι πράγματι το $\gamma(A(d-2))$ καθώς και τα δύο ξεκινάνε κάνοντας άφεση το δείκτη 1 στο P και το πρώτο σημείο του $B(d)$ είναι το $\gamma(e_0^{d-2})$. Στη συνέχεια το $B(d)$ προχωρά όπως το $\gamma(A(d-2))$ λόγω του λήμματος 4.8 και λόγω του ότι στην υψηλότερη διάσταση η αποτίμηση των bits στις σταθερές θέσεις είναι αποδεκτή, που ελέγχεται εύκολα με τη χρήση της 4.17.

- Στη συνέχεια, αν εφαρμόσουμε το γ στη σχέση 4.18 στις $d-2$ έχουμε

$$\gamma(A(d-2)) = \gamma[\beta(B(d-2)) + \alpha(A(d-4)) + \beta'(B(d-2))] \quad (4.21)$$

Τώρα θεωρούμε το σημείο (u'', v'') που ξεκινά το $\beta'(B(d-2))$ που είναι το (u', v') της 4.20 αλλά με διάσταση $d-2$ αντί για d . Επιπλέον θεωρούμε το τέλος του $\beta(B(d-2))$ που είναι το τέλος e_1^{d-2} του $A(d-2)$. Οι εικόνες των σημείων αυτών με τη χρήση της γ είναι

$$\begin{aligned} \gamma(u'', v'') &= \gamma(01^{d-4}0^{d-3}11, 0^{d-3}1^{d-2}0) = (01^{d-2}0^{d-3}1100, 10^{d-2}1^{d-2}001) \\ \gamma(e_1^{d-2}) &= \gamma(0^{d-2}1^{d-2}, 1^{d-2}0^{d-2}) = (0110^{d-3}1^{d-2}00, 101^{d-2}0^{d-1}1) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω δύο ζεύγη κορυφών $\gamma(u'', v'')$ και $\gamma(e_1^{d-2})$ είναι αντεστραμμένες εικόνες σύμφωνα με τη συμμετρία του $B(d)$ που περιγράφηκε στο Λήμμα 4.7. Αυτό σημαίνει ότι το τέλος $\gamma(e_1^{d-2})$ του $A(d-2)$ είναι ήδη στο δεύτερο μισό του $B(d)$. Το κεντρικό κομμάτι του $B(d)$ δίνεται από το τελευταίο κομμάτι του $\gamma(A(d-2))$ στην 4.21. Συνεπώς υπάρχει μία απεικόνιση γ' τέτοια ώστε

$$B(d) = \gamma[\beta(B(d-2)) + \alpha(A(d-4)) + \beta'(B(d-2))] + \gamma'[\alpha(A(d-4)) + \beta'(B(d-2))]$$

επειδή τα μονοπάτια $A(d-4)$ και $B(d-2)$ είναι συμμετρικά και επομένως δε χρειάζεται να γραφούν ανάποδα. Η αναπαράσταση αυτή είναι ισοδύναμη με την 4.15 όπως ισχυριστήκαμε. \square

4.5 Μήκη των LH μονοπατιών

Αφού έχουμε μελετήσει τα δύο αυτά μονοπάτια και είδαμε πως συνθέτονται από μονοπάτια χαμηλότερης διάστασης, μένει να δούμε και τα μήκη των μονοπατιών αυτών. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για να πούμε ότι ο αλγόριθμος Lemke - Howson δεν είναι αποδοτικός για κάποιο παίγνιο πρέπει να μην φτάνει σε ένα Nash σημείο ισορροπίας με πολυωνυμικό αριθμό βημάτων σε σχέση με το μέγεθος του παιγνίου για οποιοδήποτε δείκτη που λείπει. Αυτό που θα κάνουμε στο σημείο αυτό είναι να μελετήσουμε τα μήκη των μονοπατιών ένα προς ένα, για οποιοδήποτε δείκτη που λείπει.

Με a_n θα συμβολίζουμε τον αριθμό από τα ζεύγη κορυφών που έχει το $A(2n)$, που είναι ένα περισσότερο από το μήκος $L(2n, 1)$ του μονοπατιού. Τα b_n και c_n θα συμβολίζουν τους αριθμούς των κορυφών για τα $B(2n)$ και $C(2n)$ αντίστοιχα. Δηλαδή,

$$a_n = L(2n, 1) + 1, \quad b_n = L(2n, 4n) - 2 \quad (n \geq 1) \quad (4.22)$$

Η σύνθεση των μονοπατιών στη σχέση 4.13 υποδηλώνει ότι $a_n = b_n + c_n$, στη 4.14 ότι $c_n = a_{n-1} + b_n$ και στη 4.15 ότι $b_n = a_{n-1} + c_{n-1}$. Επιπλέον, τα μονοπάτια $\pi(2, 1)$ και $\pi(2, 4)$ έχουν μήκος $4 = a_1 - 1 = b_1 + 2$. Αυτό δείχνει ότι οι αριθμοί $b_1, c_1, a_1, b_2, c_2, a_2, \dots$ είναι οι αριθμοί Fibonacci $2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ που δίνονται από τις σχέσεις

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 2, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (4.23)$$

που σημαίνει

$$a_n = f_{3n}, \quad b_n = f_{3n-2} \quad (n \geq 1) \quad (4.24)$$

Έτσι, τα μήκη των μονοπατιών $\pi(d, 1)$ και $\pi(d, 2d)$ για άρτιο $d = 2n = 2, 4, 6, \dots$ δίνονται από κάθε τρίτο αριθμό Fibonacci. Αυτά είναι τα μακρύτερα μονοπάτια και εμφανίζονται πολλές φορές, καθώς $L(d, 1) = L(d, d)$ και $L(d, d+1) = L(d, d+2) = L(d, 2d-1) = L(2, 2d)$. Αυτό συμβαίνει λόγω της συμμετρίας των συμβολοσειρών Gale και των δεικτών που έχουμε δώσει στα πολύτοπα. Τα υπόλοιπα μονοπάτια δίνονται σαν ένωση των μονοπατιών αυτών σε χαμηλότερη διάσταση. Στο επόμενο θεώρημα βρίσκουμε όλα τα μήκη των μονοπατιών για όλα τα δυνατά k .

Θεώρημα 4.10. [20] Τα μήκη των μονοπατιών που παράγει ο αλγόριθμος Lemke - Howson χαρακτηρίζονται από τις σχέσεις 4.22, 4.23, 4.24 και από τις παρακάτω σχέσεις

- (a) $L(d, k) = L(d, d+1-k)$ και $L(d, d+k) = L(d, 2d+1-k)$, για $1 \leq k \leq d$
- (b) $L(d, k) = L(d, d+1)$ για άρτιο k όταν $2 \leq k \leq d-2$, και περιττό k όταν $d+1 \leq k \leq 2d-1$
- (c) $L(d, k) = L(k, 1) + L(d-k, 1)$ για άρτιο k και $2 \leq k \leq d-2$
- (d) $L(d, d+k) = L(k, 2k) + L(d-k+2, 2(d-k+2)) - 4 = b_{k/2} + b_{d/2-k/2+1}$ όταν k άρτιος και $4 \leq k \leq d-2$

Το (a) αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας χρησιμοποιώντας μία κυκλική μετατόπιση κατά d θέσεις της κάθε συμβολοσειράς του $G(d)$ μαζί με μία αντιστροφή των ψηφίων, που δεν αλλάζει το $G(d)$ και είναι σύμφωνο με τις δεικτοδοτήσεις l και l' . Το (b) αποδεικνύεται όπως το Λήμμα 4.6. Για το (c), ενώνονται τα μονοπάτια $A(k), A(d-k)$ χρησιμοποιώντας απεικονίσεις όμοιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως. Τέλος, χρησιμοποιώντας ένα παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το (d). Χρησιμοποιώντας το (b), οι περιπτώσεις (c) και (d) καλύπτουν όλους τους πιθανούς δείκτες που λείπουν.

Απόδειξη. •(a) Έστω η απεικόνιση ψ , που ορίζεται σαν $\psi(k) = d-k+1$ και $\psi(d+k) = 2d-k+1$ για $k = 1, \dots, k$. Αυτό είναι μια κυκλική μετατόπιση κατά d μαζί με αντιστροφή των θέσεων. Το ψ επιπλέον ανταλλάσσει τις δεικτοδοτήσεις l και l' στα P και Q χωρίς να χαλάει η συνθήκη του

Gale. Οπότε ο αλγόριθμος Lemke - Howson προχωρά με τον ίδιο τρόπο. Δηλαδή, αν δούμε τα ζευγάρια κορυφών του μονοπατιού $\pi(d, k)$ σαν ζευγάρια συμβολοσειρών είναι σε κάθε βήμα ίδιες όταν οι θέσεις στην κάθε συμβολοσειρά αλλάξουν σύμφωνα με το ψ . Αν εφαρμόσουμε το ψ στα e_0, e_1 παίρνουμε τα ίδια ζεύγη κορυφών, αλλά οι θέσεις αλλάζουν σύμφωνα με τα παραπάνω. Αυτό σημαίνει ότι εφαρμόζοντας το ψ , το μονοπάτι $\pi(d, k)$ απεικονίζεται στο $\pi(d, d - k + 1)$, οπότε αυτά τα δύο μονοπάτια έχουν το ίδιο μήκος.

•(b) Για να δείξουμε το (b), θεωρούμε ότι $2 \leq k \leq d - 2$. Όπως στο Λήμμα 4.6 η δεικτοδότηση της 4.7 αν εφαρμοστεί και στα δύο πολύτοπα P και Q δείχνει ότι το $\pi(d, k)$ αντιστοιχεί στο μονοπάτι $\pi(d, k + 1)$ προς τα πίσω (δηλαδή ξεκινώντας από το e_1), οπότε τα δύο αυτά μονοπάτια έχουν το ίδιο μήκος.

•(c) Για την απόδειξη του (c) θα χρειαστεί περισσότερη δουλειά. Για οποιοδήποτε δύο μονοπάτια M_1, M_2 στο $G(n) \times G(n)$, αν τα δούμε σαν ακολουθίες από ζεύγη κορυφών, ορίζουμε $M_1 M_2$ να είναι το μονοπάτι M_1 που ενώνεται με το μονοπάτι M_2 , όπου το τελευταίο ζεύγος κορυφών του M_1 είναι το ίδιο με το πρώτο του M_2 . Το μήκος του $M_1 M_2$ ισούται με το άρθιοσμα του μήκους του M_1 με αυτό του M_2 .

Θα αποδείξουμε το παρακάτω, που ισοδυναμεί με το (c): Έστω k άρτιος και $2 \leq k \leq d - 2$. Τότε

$$\pi(d, k) = \alpha(A(k))\beta(A(d - k))$$

με $\alpha : G(k) \times G(k) \rightarrow G(d) \times G(d) = P \times Q$,

$$\alpha(u, v) = (u_k \dots u_1 1^{d-k} 0^{d-k} u_{2k} \dots u_{k+1}, v_k \dots v_1 0^{d-k} 1^{d-k} v_{2k} \dots v_{k+1}), \quad (4.25)$$

και $\beta : G(d - k) \times G(d - k) \rightarrow G(d) \times G(d)$,

$$\beta(u, v) = (0^k u 1^k, 1^k v 0^k).$$

Το πρώτο ζεύγος κορυφών του $\pi(d, k)$ είναι το e_0^d . Όπως απαιτείται ισχύει ότι $\alpha(e_0^k) = e_0^d$. Στο πρώτο βήμα του $\pi(d, k)$ γίνεται άφεση ο δείκτης k στο P . Η θέση 1 για τα πολύτοπα της χαμηλότερης διάστασης δίδεται από τα bit u_1 και v_1 της 4.25 και απεικονίζεται στη θέση k και στο P και στο Q στην υψηλότερη διάσταση. Στο P , η θέση k έχει το δείκτη k , που είναι και ο δείκτης που λείπει στο $\pi(d, k)$. Αυτός ο δείκτης στο υψηλότερης διάστασης πολύτοπο P αντιστοιχεί στο δείκτη 1 στη χαμηλότερη διάσταση. Καθώς το α διατηρεί τη γειτνίαση των δεικτών κυκλικά και επειδή το μονοπάτι $A(k)$ δεν ξαναγυρίζει στην αρχή λόγω του λήμματος 4.8, τα πρώτα $L(k, 1)$ βήματα του $\pi(d, k)$ ακολουθούν τη σειρά που ορίζεται από το $\alpha(A(k))$. Το μόνο που χρειάζεται να ελέγξουμε πλέον είναι αν η αποτίμηση των θέσεων στην υψηλότερη διάσταση είναι αποδεκτή, που λόγω του α οι θέσεις αυτές έχουν σταθερή αποτίμηση.

	Πολύτοπο P											Πολύτοπο Q														
Θέση	...	k	k+1	k+2	...	d-1	d	d+1	...	2d-(k+1)	2d-k	2d-k+1	k	k+1	k+2	...	d-1	d	d+1	...	2d-(k+1)	2d-k	2d-k+1	...
Δείκτης	...	k	k+1	k+2	...	d-1	d	d+1	...	2d-(k+1)	2d-k	2d-k+1	k+1	k	k+3	...	d-2	d	d+2	...	2d-k	2d-(k+1)	2d-k+2	...
bit	...	u_1	1	1	...	1	0	0	...	0	0	u_{2k}	v_1	0	0	...	0	1	1	...	1	1	v_{2k}	...

Πίνακας 13: Η απεικόνιση $\alpha(A(k))$. Η αποτίμηση στην υψηλότερη διάσταση βλέπουμε ότι είναι αποδεκτή και ότι το μόνο που επηρεάζει το μονοπάτι $\pi(d, k)$ είναι το μονοπάτι της χαμηλότερης διάστασης, καθώς μόνο μέσα σε αυτό βρίσκεται ο διπλός δείκτης σε κάθε βήμα.

Για τις θέσεις $k + 2, \dots, 2d - k$ η αποδεκτή αποτίμηση φαίνεται αμέσως. Οι θέσεις k στο P και $k + 1$ στο Q αντιστοιχούν στο δείκτη που λείπει k του $\pi(d, k)$ και επομένως είναι μηδέν. Τέλος, η θέση

$k + 1$ στο P , με με δείκτη $k + 1$, είναι 1 σύμφωνα με την 4.25 και είναι αποδεκτή αποτίμηση αφού η θέση k του Q με δείκτη $k + 1$ είναι 0, καθώς αντιστοιχεί στο δείκτη που λείπει της χαμηλότερης διάστασης. Στο τέλος των $L(k, 1)$ βημάτων φτάνουμε στο $\alpha(e_1^k)$ όπου

$$\alpha(e_1^k) = (0^k 1^{d-k} 0^{d-k} 1^k, 1^k 0^{d-k} 1^{d-k} 0^k) = \beta(e_0^{d-k})$$

Στο $\alpha(e_1^k)$ έχουμε διπλό δείκτη το $k + 1$ που αντιστοιχεί στο δείκτη 1 για τη διάσταση $d - k$. Αυτό είναι όντως η αρχή του $\beta(A(d - k))$. Δηλαδή, γίνεται άφεση του δείκτη 1 και ξεκινά το μονοπάτι $\pi(d - k, 1)$. Στον πίνακα 14 βλέπουμε ότι έχουμε νόμιμη αποτίμηση στην υψηλότερη διάσταση και ότι το μόνο που επηρεάζει το μονοπάτι είναι οι διπλοί δείκτες που προκύπτουν στο εσωτερικό μονοπάτι μικρότερης διάστασης. Συνεπώς μετά από $L(d - k, 1)$ βήματα θα καταλήξουμε στο $\beta(e_1^{d-k}) = e_1^d$ και αυτό είναι το δεύτερο κομμάτι του $\pi(d, k)$.

	Πολύτοπο P										Πολύτοπο Q									
Θέση	1	...	k	k+1	...	2d-(k+1)	2d-k	2d-k+1	...	2d	1	...	k	k+1	...	2d-(k+1)	2d-k	2d-k+1	...	2d
Δείκτης	1	...	k	k+1	...	2d-(k+1)	2d-k	2d-k+1	...	2d	1	...	k+1	k	...	2d-(k+2)	2d-k+1	2d-k	...	2d-1
bit	0	...	0	u_1	...	u_{2k-1}	u_{2k}	1	...	1	1	...	1	v_1	...	v_{2k-1}	v_{2k}	0	...	0

Πίνακας 14: Το δεύτερο κομμάτι του μονοπατιού $\pi(d, k)$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της υψηλότερης διάστασης δεν επηρεάζουν την πορεία του μονοπατιού.

•(d) Για την απόδειξη του d θα ορίσουμε δύο νέες απεικονίσεις τις γ και δ και θα εξετάσουμε μόνο τις περιπτώσεις που το k είναι άρτιο και $4 \leq k \leq d - 2$. Οι απεικονίσεις έχουν την ιδιότητα

$$\pi(d, d + k) = e_0^d + \gamma(B(k))\delta(B(d - k + 2)) + e_1^d \quad (4.26)$$

και ορίζονται: $\gamma G(k) \times G(k) \rightarrow G(d) \times G(d) = P \times Q$,

$$\gamma(u, v) = (u_1 1^{d-k} u_2 \dots u_{2k} 0^{d-k}, v_1 0^{d-k} v_2 \dots v_{2k} 1^{d-k}) \quad (4.27)$$

και $\delta G(d - k + 2) \times G(d - k + 2) \rightarrow G(d) \times G(d) = P \times Q$,

$$\delta(u, v) = (v_{d-k+2} \dots v_{2d-2k+2} 0^{k-2} 1^k 0 v_2 \dots v_{d-k+1}, \\ u_{d-k+2} \dots u_{2d-2k+2} 1^{k-2} u_{2d-2k+3} 0^{k-1} u_1 \dots u_{d-k+1})$$

Οι απεικονίσεις αυτές διατηρούν τη γειτνίαση των δεικτών καθώς επίσης και την αποδεκτή αποτίμηση στις συμβολοσειρές. Το μονοπάτι $\pi(d, d + k)$ ξεκινά ως εξής: Γίνεται άφεση ο δείκτης $d + k$ στο Q στο σημείο e_0^d , που βρίσκεται στη θέση $d + k - 1$. Φτάνουμε στο ζεύγος κορυφών

$$(1^d 0^d, 10^{d-1} 1^{k-2} 0 1^{d-k+1})$$

που ισούται με το $\gamma(u^1, v^1)$, για το πρώτο ζευγάρι κορυφών (u^1, v^1) του $B(k)$ και έχει διπλό δείκτη το 1. Το μονοπάτι συνεχίζει όπως περιγράφει η 4.27 καθώς τα bits v_1 και v_{2k} της σχέσης αυτής παραμένουν σταθερά σύμφωνα με τη σχέση (4) του λήμματος 4.7. Το τελευταίο ζεύγος κορυφών του $\gamma(B(k))$ είναι το

$$\gamma(0^{k-1} 1^k 0, 1^{k-1} 0^k 1) = (0 1^{d-k} 0^{k-2} 1^k 0^{d-k+1}, 10^{d-k} 1^{k-2} 0^k 1^{d-k+1})$$

καθώς το $(0^{k-1} 1^k 0, 1^{k-1} 0^k 1)$ είναι το τελευταίο ζεύγος σημείων του $B(k)$. Το σημείο αυτό ισούται με το $\delta(1^{d-k+2} 0^{d-k+2}, 10^{d-k+1} 1^{d-k} 0 1)$, που είναι το πρώτο σημείο του $B(d - k + 2)$ αν εφαρμοστεί πάνω του η απεικόνιση δ . Ο διπλός δείκτης που πρέπει να γίνει άφεση είναι το $d + k - 1$, στη θέση $d - k$ του Q , και είναι η εικόνα του bit u_1 αν εφαρμοστεί πάνω του το δ . Αυτό το bit γίνεται άφεση

και στο $B(d - k + 2)$ λόγω του λήμματος 4.7. Το τελευταίο ζευγάρι κορυφών του $\delta(B(d - k + 2))$ είναι

$$\delta(0^{d-k+1}1^{d-k+2}0, 1^{d-k+1}0^{d-k+2}1) = (0^{d-1}1^k 0d - k, 1^d 0^d)$$

με διπλό δείκτη το d , που μόλις έχει γίνει λήψη στο Q σαν η εικόνα του bit $u_{2d-2k+3}$ με την εφαρμογή του δ . Η επόμενη κίνηση είναι να γίνει drop το d στο P και με αυτό το τρόπο φτάνουμε στο e_1^d και τερματίζει το μονοπάτι $\pi(d, d + k)$. Με αυτό το τρόπο αποδεικνύεται η 4.26, και σύμφωνα με αυτή το μήκος του $\pi(d, d + k)$ είναι το άθροισμα από τα μήκη των $B(k)$ και $B(d - k + 2)$ συν δύο (για την πρώτη ακμή από το e_0^d και για την τελευταία ακμή προς το e_1^d). \square

4.6 Το μικρότερο μονοπάτι

Είναι εύκολο να δούμε ότι το μονοπάτι με το μικρότερο μήκος βρίσκεται ως εξής:

- Αν το d είναι πολλαπλάσιο του 4, σημαίνει ότι το $d/2$ είναι άρτιος. Τότε το μικρότερο μονοπάτι παράγεται όταν κάνουμε αρχικά άφεση το δείκτη $d/2$ και το μήκος του είναι $L(d, d/2) = 2a_{d/2} - 2$ σύμφωνα με το Θεώρημα 4.10(c).

- Αν το $d/2$ είναι περιττός, τότε το μονοπάτι με το μικρότερο μήκος παράγεται όταν γίνει αρχικά άφεση ο δείκτης $3d/2$, με μήκος $L(d, 3d/2) = L(d, 3d/2 + 1) = 2bd/2 + 1$ σύμφωνα με το Θεώρημα 4.10(b) και (d). Όταν το $d/2$ είναι άρτιο, το μονοπάτι που παράγεται όταν γίνει αρχικά άφεση ο δείκτης $3d/2$ είναι μόνο δύο βήματα μεγαλύτερο από αυτό που παράγεται αν γίνει άφεση ο $d/2$ καθώς $L(d, 3d/2) = b_{d/2} + b_{d/2+1} = b_{d/2} + a_{d/2} + c_{d/2} = 2a_{d/2}$. Άρα, ουσιαστικά, τα μικρότερα μονοπάτια παράγονται όταν γίνει άφεση ο δείκτης $3d/2$.

Για να ελέγξουμε την πολυπλοκότητα του αλγόριθμου πρέπει να δούμε τα μήκη των μονοπατιών, όπως αναφέραμε και στην αρχή. Για το μικρότερο δυνατό μονοπάτι, η ακολουθία $L(2n, 3n)$ $n = n/2 = 1, 2, 3, \dots$ για τα μήκη είναι η 4, 10, 16, 42, 68, 178, \dots που είναι η ακολουθία Fibonacci πολλαπλασιασμένη με δύο και παραλείποντας τον κάθε τρίτο αριθμό.

Γνωρίζουμε όμως ότι οι αριθμοί Fibonacci δίνονται αναλυτικά από την έκφραση

$$f_n = K\theta^n + \bar{K}\bar{\theta}^n, \quad \theta, \bar{\theta} = 0.5 \pm 0.5\sqrt{5}, \quad K, \bar{K} = 0.5 \pm 0.3\sqrt{5}$$

όπου $\theta = 1.618\dots$ είναι η Χρυσή Τομή και $K = 1.170\dots$ Τότε το f_n είναι το $K\theta^n$ στρογγυλοποιημένο στον κοντινότερο ακέραιο, καθώς το $\bar{K}\bar{\theta}^n$ είναι μικρότερο από 0.5.

Άρα τα μικρότερα μονοπάτια του Lemke - Howson μεγαλώνουν σύμφωνα με τη τετραγωνική ρίζα των μεγαλύτερων μονοπατιών και είναι επίσης εκθετικά.

Στο κομμάτι αυτό, κατασκευάσαμε ένα παίγνιο με d στρατηγικές για τον κάθε παίκτη και υπολογίσαμε τα μήκη των μονοπατιών που παράγει ο αλγόριθμος Lemke - Howson για οποιοδήποτε δείκτη που λείπει, που είναι και η μόνη ελεύθερη μεταβλητή για τον αλγόριθμο. Δείξαμε επίσης ότι το μήκος όλων των μονοπατιών αυξάνεται εκθετικά σε σχέση με τις στατηγικές που προστίθενται στους παίκτες. Από τα παραπάνω βγαίνει το εξής πόρισμα

Πόρισμα 4.11. Υπάρχουν $d \times d$ παίγνια, για άρτιο d , όπου κάθε μονοπάτι που παράγεται από τον αλγόριθμο Lemke - Howson έχει μήκος $\Omega(\theta^{3d/4})$.

Το πλήθος των παιγνίων είναι ίσο με τον αριθμό των μεταθέσεων που μπορούμε να κάνουμε στους πίνακες κερδών των δύο παικτών χωρίς να χαλάσουμε τις ιδιότητες των πολυτόπων που

φτιάξαμε.

Τέλος, το ότι κατασκευάσαμε παίγνια με άρτιο πλήθος στρατηγικών για τον κάθε παίκτη δεν είναι πρόβλημα καθώς αρκεί για να χαρακτηρίσουμε την πολυπλοκότητα του αλγόριθμου. Παίγνια με περιττό πλήθος στρατηγικών μπορούν να φτιαχτούν με τον τετριμμένο τρόπο, όπου προστίθεται μία στρατηγική στις υπάρχουσες του καθενός την οποία δεν συμφέρει να την παίξει κανένας παίκτης.

5 Εύρεση Nash σημείων ισορροπίας με τη βοήθεια των δεικτοδοτημένων συμβολοσειρών Gale

Προηγουμένως είδαμε ότι ο αλγόριθμος Lemke - Howson χρειάζεται εκθετικό αριθμό βημάτων μέχρι να φτάσει σε ένα Nash σημείο ισορροπίας του παιγνίου. Μάλιστα, αποδείξαμε ότι για παίγνια που κατασκευάζονται με μία συγκεκριμένη δομή ο αλγόριθμος απαιτεί εκθετικό αριθμό βημάτων για οποιοδήποτε δείκτη που λείπει. Για να υπολογίσουμε τα μήκη των μονοπατιών που δημιουργεί ο αλγόριθμος Lemke - Howson χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη του Gale και πιο συγκεκριμένα τις Gale συμβολοσειρές.

Βλέποντας κάποιος τις Gale συμβολοσειρές, εύκολα μπορεί να αναρωτηθεί αν μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε με κάποιο τρόπο για να βρούμε ένα Nash σημείο ισορροπίας ενός παιγνίου. Παρακάτω θα δείξουμε ότι όντως οι Gale συμβολοσειρές μπορούν να μας βοηθήσουν στην εύρεση των Nash σημείων ισορροπίας κάποιων παιγνίων δύο παικτών και μάλιστα βρίσκουμε το κάθε σημείο ισορροπίας σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό γίνεται κάνοντας αναγωγή του προβλήματος της εύρεσης ενός Nash σημείου ισορροπίας σε ένα πρόβλημα Πλήρους Ταυριάσματος (Perfect Matching) σε ένα γράφημα.

Αρχικά, θα ορίσουμε τις δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale (Labeled Gale strings) καθώς και τα προβλήματα που θέλουμε να αντιμετωπίσουμε. Στη συνέχεια, θα κάνουμε την αναγωγή στο πλήρες ταίριασμα κάνοντας πλήρη περιγραφή του γραφήματος της αναγωγής. Έπειτα, θα δείξουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε παίγνια στα οποία η παραπάνω αναγωγή μας δίνει καλά αποτελέσματα.

5.1 Δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale

Προηγουμένως είχαμε δει τις συμβολοσειρές Gale με μήκος $2d$ και d ακριβώς άσους. Τώρα θα δώσουμε ένα γενικότερο ορισμό που και γι' αυτόν ισχύουν οι ιδιότητες του Gale.

Ορισμός 5.1. Το $G(d, n)$ είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών s με μήκος n έτσι ώστε ακριβώς d bits είναι 1 και το κάθε s ικανοποιεί τη συνθήκη του Gale. Ένα στοιχείο του $G(d, n)$ καλείται Gale συμβολοσειρά διάστασης d .

Ο ορισμός ισχύει τόσο για άρτιο d , όσο και για περιττό. Εμείς θα θεωρούμε ότι το d είναι άρτιος. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1, το $G(4, 6)$ αποτελείται από τις εξής εννιά συμβολοσειρές 111100, 111001, 110110, 101101, 100111, 011110, 011011, 001111, ενώ στον Πίνακα 6 είναι οι συμβολοσειρές του $G(4, 8)$.

Δεδομένου ενός συνόλου G από συμβολοσειρές μήκους n και διάστασης d , μία δεικτοδότηση είναι μια συνάρτηση $l : [n] \rightarrow [d]$, δηλαδή σε κάθε μία από τις n θέσεις της συμβολοσειράς δίνεται ένας δείκτης από το 1 έως το d . Δεδομένης μίας δεικτοδότησης, η συμβολοσειρά s είναι πλήρως δεικτοδοτημένη αν κάθε δείκτης του $[d]$ εμφανίζεται σαν $l(i)$ για τουλάχιστον ένα bit $s(i)$ έτσι ώστε $s(i) = 1$, δηλαδή οι άσοι της συμβολοσειράς να είναι σε θέσεις που καλύπτουν και τους d δείκτες. Προφανώς, αν το s είναι πλήρως δεικτοδοτημένο, τότε στο s τουλάχιστον d bits είναι 1 και αν ακριβώς d bits είναι 1, τότε κάθε δείκτης εμφανίζεται ακριβώς μία φορά.

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα απόφασης
COMPLETELY LABELED GALE STRING

Δίδεται: Μια δεικτοδότηση $l : [n] \rightarrow [d]$, όπου το d είναι άρτιος και $d < n$.

Ζητείται: Υπάρχει μία συμβολοσειρά Gale στο $G(d, n)$ που είναι πλήρως δεικτοδοτημένη;

Για παράδειγμα, στη δεικτοδότηση $l = 1123143$, με $d = 4$, οι πλήρως δεικτοδοτημένες Gale συμβολοσειρές είναι τα 0110011 και 0011110. Για το $l = 123432$ είναι 111100, 110110, 100111 και 101101. Το $l = 121314$ δεν έχει καμία πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale.

Το σύνολο $G(d, n)$ έχει τέτοια δομή που χάρη σ'αυτή ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 5.2. [3] Για οποιοδήποτε δεικτοδότηση $l : [n] \rightarrow [d]$, όπου το d είναι άρτιος και $d < n$, ο αριθμός των πλήρως δεικτοδοτημένων συμβολοσειρών Gale του $G(d, n)$ είναι άρτιος.

Το Θεώρημα 5.2 ουσιαστικά λέει ότι αν υπάρχει μια πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale, τότε θα υπάρχει σίγουρα άλλο μία. Με βάση το θεώρημα αυτό θα ορίσουμε το επόμενο υπολογιστικό πρόβλημα που ζητά να υπολογιστεί μια πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale εφόσον έχει δοθεί ήδη ένα τέτοιο.

ANOTHER COMPLETELY LABELED GALE STRING

Δίδεται: Μια δεικτοδότηση $l : [n] \rightarrow [d]$, όπου το d είναι άρτιος και $d < n$ και μια πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale s στο $G(d, n)$.

Ζητείται: Μία πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale s' στο $G(d, n)$, όπου $s' \neq s$.

5.2 Αναγωγή στο πλήρες ταίριασμα

Θα δείξουμε ότι και τα δύο προβλήματα που ορίσαμε μέχρι στιγμής επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο. Για την απόδειξη γίνεται αναγωγή στο πρόβλημα του πλήρες ταιριάσματος που είναι γνωστό ότι επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο από τον Edmonds[10].

PERFECT MATCHING

Δίδεται: Γράφημα $G = (V, E)$.

Ζητείται: Υπάρχει ένα σύνολο $M \subseteq E$ από μη γειτονικές ακμές έτσι ώστε κάθε κορυφή $v \in V$ να είναι πάνω σε ακριβώς μία ακμή του M ;

Θεώρημα 5.3. [?] Τα προβλήματα COMPLETELY LABELED GALE STRING και ANOTHER COMPLETELY LABELED GALE STRING μπορούν να επιλυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο.

Απόδειξη. Το θεώρημα αποδεικνύεται κάνοντας την αναγωγή που προαναφέραμε. Δηλαδή, δεδομένης μίας δεικτοδότησης $l : [n] \rightarrow [d]$ θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα $G(V, E)$ με $|V| = |d|$ και $|E| \leq n$ έτσι ώστε το γράφημα G να έχει πλήρες ταίριασμα αν και μόνον αν υπάρχει πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale για τη δεικτοδότηση l . Το γράφημα που θα κατασκευάσουμε μπορεί να είναι πολυγράφημα, δηλαδή ανά δύο οι κορυφές του μπορεί να ενώνονται με παραπάνω από μία ακμή. Η κατασκευή του γραφήματος έχει ως εξής:

- Τοποθέτησε τις d κορυφές.
- Για $i = 1$ έως n , φτιάξε την ακμή $(l(i), l(i + 1))$ αν $l(i) \neq l(i + 1)$ (για να μην έχουμε αυτοβρόγχους).

Δεχόμαστε ότι ισχύει $n + 1 = 1$ για να ισχύει η "κυκλικότητα" των Gale συμβολοσειρών. Το $G(V, E)$ είναι έτοιμο.

Έστω ότι έχουμε μία πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale s . Υπενθυμίζουμε ότι το s έχει άρτιο πλήθος bits. Οπότε, μπορούμε να το χωρίσουμε σε $d/2$ ζευγάρια του τύπου $i, i + 1$ έτσι ώστε οι δείκτες $l(i), l(i + 1)$ να είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να εμφανίζονται όλα οι δείκτες $1, \dots, n$. Λόγω της κατασκευής του γραφήματος είναι ξεκάθαρο ότι αυτό αντιστοιχεί σε ένα πλήρες ταίριασμα στο G .

Αντίθετα, ένα πλήρες ταίριασμα M ορίζει μία συμβολοσειρά Gale όπου $s(i) = s(i + 1) = 1$ αν η ακμή που ενώνει τα $l(i), l(i + 1)$ ανήκει στο M και $s(i) = 0$ διαφορετικά. Άρα το s είναι πλήρως δεικτοδοτημένο.

Η εύρεση ενός πλήρους ταιριάσματος ή η απόφαση ότι το γράφημα δεν έχει γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ($O(|V|^4)$ ή $O(|E||V|^{1/2})$).

Μένει να αποδείξουμε ότι και το ANOTHER COMPLETELY LABELED GALE STRING υπολογίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Αν το G είναι πολυγράφημα, δηλαδή έχει παράλληλες ακμές, αντικαθιστούμε μία ακμή του M με μία παράλληλή της και έχουμε ένα νέο πλήρες ταιρίασμα, άρα και μία πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale. Στην περίπτωση που το γράφημα δεν έχει παράλληλες ακμές, γνωρίζουμε ότι το γράφημα θα έχει ακόμη ένα πλήρες ταιρίασμα τουλάχιστον καθώς υπάρχει σίγουρα άλλη μία πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale. Το νέο ταιρίασμα M' δε θα χρησιμοποιεί τουλάχιστον μία ακμή του M . Επομένως, τουλάχιστον ένα από τα $d/2$ υπογραφήματα του G , που παράγονται αφαιρώντας μια ακμή του M , έχει ένα πλήρες ταιρίασμα M' . Ο υπολογισμός του M' και πάλι απαιτεί πολυωνυμικό χρόνο και αντιστοιχεί σε μία νέα πλήρως δεικτοδοτημένη συμβολοσειρά Gale $s' \neq s$. \square

Οι πλήρως δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale θυμίζουν έντονα τον αλγόριθμο Lemke - Howson. Ο αλγόριθμος ουσιαστικά ξεκινούσε από ένα πλήρως δεικτοδοτημένο ζεύγος κορυφών και έψαχνε να βρει ένα άλλο πλήρως δεικτοδοτημένο ζεύγος κορυφών στο $P \times Q$. Το ίδιο γίνεται και στα προηγούμενα προβλήματα και ειδικότερα στο ANOTHER COMPLETELY LABELED GALE STRING. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην περιγραφή του αλγόριθμου είχαμε δύο πολύτοπα με δείκτες στις κορυφές τους ενώ εδώ μόνο μία δεικτοδότηση.

5.3 Εφαρμογή των δεικτοδοτημένων συμβολοσειρών Gale σε παίγνια

Από τη στιγμή που αποδείξαμε ότι οι πλήρως δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο, μπορούμε να βρούμε ένα Nash σημείο ισορροπίας ενός παιγνίου αν μπορέσουμε να το αναπαραστήσουμε με μία δεικτοδότηση.

Την παραπάνω ιδέα, δηλαδή την αναπαράσταση ενός παιγνίου δύο παικτών από δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale, την εφάρμοσαν οι von Stengel και Balthasar[2]. Κατασκεύασαν ένα πολύτοπο Q , που αντιστοιχεί σε ένα παίγνιο, και έδωσαν μία δεικτοδότηση στις κορυφές του με τέτοιο τρόπο ώστε η μια πλήρως δεικτοδοτημένη κορυφή του πολύτοπου να αντιστοιχεί στο σημείο $\mathbf{0}$ και οι υπόλοιπες στα Nash σημεία ισορροπίας του παιγνίου.

5.3.1 Κατασκευή του πολύτοπου

Για ακόμη μία φορά θα χρησιμοποιήσουμε το δυϊκό πολύτοπο P^Δ αντί για το απλό πολύτοπο

$$P = \{x \in \mathbb{R}^d | x \geq \mathbf{0}, x^T B \leq \mathbf{1}\} \quad (5.1)$$

που είναι το γνωστό πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης. Έστω ότι το Q είναι ένα πολύτοπο

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^d | x^T c_i \leq 1, 1 \leq i \leq k\} \quad (5.2)$$

όπου τα διανύσματα c_1, \dots, c_k είναι στον \mathbb{R}^d . Το δυϊκό πολύτοπο του Q δίδεται σαν την κυρτή θήκη των c_i όπως είχαμε πει και νωρίτερα, δηλαδή

$$Q = \text{conv}\{c_1, \dots, c_k\}$$

Το πολύτοπο P της 5.1 πρέπει να μετασχηματιστεί έτσι ώστε να έχει το $\mathbf{0}$ στο εσωτερικό του, έτσι ώστε να γραφεί με τη μορφή της 5.2. Επιπλέον, μας βολεύει να έχει τα αρνητικά μοναδιαία διανύσματα (unit vectors) $-e_i$ σαν κορυφές του P^Δ (όπου μοναδιαίο διάνυσμα είναι ένα διάνυσμα στήλη με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν εκτός από το στοιχείο της θέσης i που ισούται με 1). Αυτό μπορεί να γίνει μετασχηματίζοντας το P στο $P' = \{x - \mathbf{1} | x \in P\}$. Τότε το $\mathbf{0}$ θα είναι στο εσωτερικό του

P' αν το $\mathbf{1}$ είναι στο εσωτερικό του P , που σημαίνει ότι πρέπει να ισχύει $\mathbf{1}^T b_j < 1$ για $1 \leq j \leq n$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί χωρίς περιορισμό της γενικότητας πολλαπλασιάζοντας όλα τα κέρδη του πίνακα B με έναν κατάλληλα μικρό σταθερό αριθμό, που δεν αλλάζει το παίγνιο.

Τότε, το $x' \in P' = \{x - \mathbf{1} | x \in P\}$ αν και μόνον αν $x' + \mathbf{1} \geq \mathbf{0}$ και $(x' + \mathbf{1})^T B \leq \mathbf{1}$ που σημαίνει $-x'_i \leq 1$ για $1 \leq i \leq d$ και επίσης $x'^T b_j / (1 - \mathbf{1}^T b_j) \leq 1$ για $1 \leq j \leq n$. Αν γράψουμε το P αντί για το P' έχουμε

$$P^\Delta = \text{conv}(\{-e_1, \dots, -e_d\} \cup \{b_j / (1 - \mathbf{1}^T b_j) | 1 \leq j \leq n\}) \quad (5.3)$$

5.3.2 Αντιστοίχιση του $\mathbf{0}$ στο P^Δ

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, οι έδρες του P^Δ αντιστοιχούν σε κορυφές του P και αντιστρόφως. Το πολύτοπο P^Δ είναι απλό, δηλαδή κάθε έδρα έχει ακριβώς d κορυφές, γιατί το P είναι απλό. Έτσι οι δείκτες των εδρών του P γίνονται δείκτες των κορυφών του P^Δ . Εκ κατασκευής, οι κορυφές αυτές είναι οι $-e_i$ με δείκτη i για $1 \leq i \leq d$ και $b_j / (1 - \mathbf{1}^T b_j)$ με δείκτη j για $1 \leq j \leq n$.

Συνεπώς, η όψη που αντιστοιχεί στην κορυφή $\mathbf{0}$ του P δίδεται από $F_0 = \text{conv}\{-e_1, \dots, -e_d\}$

5.3.3 Μεικτές στρατηγικές στο νέο πολύτοπο

Για το ορισμό των μεικτών στρατηγικών στο δυϊκό πολύτοπο θα χρειαστούμε τα κανονικά διανύσματα (normal vectors).

Ορισμός 5.4. Μία έδρα F του P^Δ έχει κανονικό διάνυσμα (normal vector) το v αν $F = \{x \in P^\Delta | v^T x = 1\}$ και ισχύει $v^T x \leq 1$ για όλα τα x στο P^Δ .

Τα κανονικά διανύσματα των εδρών F εκτός του F_0 αναπαριστούν μεικτές στρατηγικές σύμφωνα με το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 5.5. Έστω $F \neq F_0$ μία έδρα του P^Δ της 5.3 με κανονικό διάνυσμα v . Τότε το v αναπαριστά τη μεικτή στρατηγική $x = (v + \mathbf{1}) / \mathbf{1}^T (v + \mathbf{1})$ και $x_i = 0$ αν και μόνον αν $-e_i \in F$ για $1 \leq i \leq d$. Κάθε άλλος δείκτης j της F , έτσι ώστε το $b_j / (1 - \mathbf{1}^T b_j)$ είναι κορυφή της F , αναπαριστά μία αγνή βέλτιστη απόκριση στο x .

Απόδειξη. Το παραπάνω ισχύει καθώς το δυϊκό του δυϊκού είναι το αρχικό πολύτοπο. Πιο συγκεκριμένα, το $P^{\Delta\Delta}$ είναι το παραπάνω P' , οπότε το κανονικό διάνυσμα $v = (v_1, \dots, v_d)^T$ είναι μια κορυφή του P' και επομένως το $v + \mathbf{1}$ είναι μια κορυφή του P στην 5.1. Αν $-e_i \in F$, τότε $v_i = -1$ και επομένως $x_i = 0$. \square

5.3.4 Συμμετρικά παίγνια

Το παραπάνω λήμμα ουσιαστικά σημαίνει ότι οι δείκτες μίας έδρας F του P^Δ , που το κανονικό διάνυσμα του αναπαριστά μια μεικτή στρατηγική x , είναι οι αγνές στρατηγικές που δεν παίζονται στην x ή οι αγνές βέλτιστες αποκρίσεις για την x . Επειδή το παίγνιο είναι μη εκφυλισμένο, παρατηρούμε ότι κάθε συμμετρικό σημείο ισορροπίας (x, x) στο συμμετρικό παίγνιο (B^T, B) αντιστοιχεί σε μία έδρα του P^Δ . Συνεπώς, εύκολα καταλήγουμε στο παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 5.6. Έστω $F \neq F_0$ μία έδρα του P^Δ της 5.3 με κανονικό διάνυσμα v και έστω $x = (v + \mathbf{1}) / \mathbf{1}^T (v + \mathbf{1})$ σύμφωνα με το λήμμα 5.5. Τότε το (x, x) είναι ένα συμμετρικό σημείο ισορροπίας του (B^T, B) αν και μόνον αν η F έχει όλους τους δείκτες $1, \dots, d$.

Απόδειξη. Ένα σημείο ισορροπίας (x, x) δίδεται από μία μεικτή στρατηγική x όπου για κάθε $i = 1, \dots, d$ ισχύει είτε $x_i = 0$ ή ότι το i είναι μια βέλτιστη απόκριση στο x . Λόγω του λήμματος 5.5 αυτό σημαίνει ότι η F έχει όλους τους δείκτες. \square

5.4 Εφαρμογή και σε άλλα παίγνια

Εκτός από τα συμμετρικά παίγνια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πλήρως δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale στα παίγνια μοναδιαίου διανύσματος (unit vector παίγνια), στα παίγνια μίμησης (imitation games) καθώς και σε παραλλαγές αυτών.

5.4.1 Παίγνια μοναδιαίου διανύσματος

Στα παίγνια αυτά ο πίνακας κερδών του ενός παίκτη αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα και συμβολίζονται σαν (U, B) ή (A, U) .

Λήμμα 5.7. Έστω ένα απλό πολύτοπο Q στις d διαστάσεις με το $\mathbf{0}$ στο εσωτερικό του, με κορυφές τις $-e_1, \dots, -e_d, c_1, \dots, c_n$ έτσι ώστε το $F_0 = \text{conv}\{-e_1, \dots, -e_d\}$ να είναι μία όψη του Q . Έστω το $-e_i$ να έχει το δείκτη i για $1 \leq i \leq d$ και το c_j να έχει το δείκτη j για $1 \leq j \leq n$. Έστω το (U, B) να είναι το $d \times n$ παίγνιο με $U = [e_{l(1)} \cdots e_{l(n)}]$ και $B = [b_1 \cdots b_n]$, όπου $b_j = c_j / (1 + \mathbf{1}^T c_j)$ για $1 \leq j \leq n$. Τότε οι πλήρως δεικτοδοτημένες έδρες F του Q , με εξαίρεση την F_0 , είναι μια ένα προς ένα αντιστοιχία με τα Nash σημεία ισορροπίας (x, y) του παιγνίου (U, B) , όπου το x αντιστοιχεί στο F σύμφωνα με το λήμμα 5.5 και το y είναι μια κατάλληλα μοιρασμένη μοναδιαία κατανομή.

Απόδειξη. Έστω μία έδρα F του Q τέτοια ώστε $F = \text{conv}\{-e_i | i \in K \cup c_j | j \in J\} \neq F_0$. Έστω v το κανονικό διάνυσμα της F και επίσης $x = (v + \mathbf{1}) / \mathbf{1}^T (v + \mathbf{1})$ όπως στο λήμμα 5.5. Τότε το x είναι μια μεικτή στρατηγική για τον Pl_1 , που έχει σύνολο υποστήριξης το $1, \dots, d - K$ μεγέθους $|J|$. Επιπλέον, το J είναι το σύνολο των αγνών βέλτιστων αποκρίσεων του Pl_2 για το x , που έχει σαν πίνακα κερδών τον πίνακα B .

Σε ένα σημείο ισορροπίας (x, y) του παιγνίου (U, B) για την μεικτή στρατηγική $y \in \mathbb{R}^n$ του Pl_2 , μόνο οι βέλτιστες αποκρίσεις μπορούν να παιχτούν με θετική πιθανότητα x_i ή y_j . Για τον Pl_2 αυτό σημαίνει ότι $y_j > 0$ μόνον αν $j \in J$. Για τον Pl_1 χρειαζόμαστε $|J|$ αγνές βέλτιστες αποκρίσεις. Επειδή οι στήλες του πίνακα κερδών U του Pl_1 είναι μοναδιαία διανύσματα, το παραπάνω ισχύει μόνον αν $y_j = 1/|J|$ αν $j \in J$ και $y_j = 0$ διαφορετικά και αν για κάθε $i \in \text{supp}(x) = 1, \dots, d - K$, υπάρχει κάποιο $j \in J$ τέτοιο ώστε $i = l(j)$ επειδή τότε η στήλη j του U είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $e_{l(j)}$. Αυτή όμως είναι ακριβώς η συνθήκη όπου το σύνολο των δεικτών της F , δηλαδή το $K \cup l(j) | j \in J$, είναι το $1, \dots, d$. Δηλαδή, η F είναι πλήρως δεικτοδοτημένη και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξη. \square

5.4.2 Imitation games

Τα παίγνια αυτά είναι μια ειδική περίπτωση των παιγνίων μοναδιαίου διανύσματος, όπου στη θέση του πίνακα κερδών U έχουμε τον μοναδιαίο πίνακα I . Τα παίγνια μίμησης προτάθηκαν από τους McLennan και Tourky[1], οι οποίοι απέδειξαν ότι τα συμμετρικά σημεία ισορροπίας (x, x) του παιγνίου (B^T, B) αντιστοιχίζονται ένα προς ένα με τα σημεία ισορροπίας (x, y) του μιμητικού παιγνίου (I, B) .

Τα παίγνια μίμησης μπορούν να περιγράψουν τυχαία παίγνια δύο παικτών. Ένα $m \times n$ παίγνιο δύο παικτών (A, B) με θετικούς πίνακες κερδών A, B μπορεί να γραφεί με τη μορφή ενός συμμετρικού παιγνίου (C^T, C) μεγέθους $(m + n) \times (m + n)$ με

$$C = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$$

όπου τα Nash σημεία ισορροπίας του αρχικού αντιστοιχούν ένα προς ένα με τα συμμετρικά σημεία ισορροπίας του νέου παιγνίου. Αν χρησιμοποιήσουμε και το αποτέλεσμα των McLennan και Tourky, το συμμετρικό παίγνιο είναι ισοδύναμο με το (I, C) .

5.5 Κατασκευή παιγνίων

Είδαμε παραπάνω κάποια αποτελέσματα για όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πλήρως δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale και πως μπορούμε να μετατρέψουμε παίγνια στη μορφή που θέλουμε έτσι ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν οι δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές Gale. Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε τέτοια παίγνια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα κυκλικά πολύτοπα.

Αν το Q είναι ένα κυκλικό πολύτοπο στις d διαστάσεις με $d + n$ κορυφές τότε η συμβολοσειρά των δεικτών $l(1) \cdots l(n)$ στο λήμμα 5.7 ορίζει μία δεικτοδότηση $l' : [d + n] \rightarrow [d]$ όπου $l'(i) = i$ για $i \in [d]$ και $l'(d + j) = j$ για $j \in [n]$. Τότε το l' έχει μια τετριμμένη συμβολοσειρά Gale πλήρως δεικτοδοτημένη την $1^d 0^n$ που ορίζει την όψη F_0 . Τότε το πρόβλημα ANOTHER COMPLETELY LABELED GALE STRING ορίζει ακριβώς το πρόβλημα της εύρεσης ενός Nash σημείου ισορροπίας του παιγνίου μοναδιαίου διανύσματος (I, B) . Πρέπει να τονιστεί ότι ο B δεν είναι ένας τυχαίος πίνακας, αλλά καθορίζεται από τις τελευταίες n των $d + n$ κορυφών ενός κυκλικού πολυτόπου διάστασης d .

6 Η κλάση πολυπλοκότητας PPAD

Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει τον αλγόριθμο Lemke - Howson και έχουμε δει ότι υπάρχουν παίγνια όπου απαιτούνται εκθετικά πολλές επαναλήψεις του αλγορίθμου, ή εκθετικά πολλά βήματα στο μονοπάτι που ακολουθεί ο αλγόριθμος μέχρι να φτάσει σε ένα Nash σημείο ισορροπίας του παίγνιου. Το ερώτημα που εύκολα τίθεται μετά την ανάλυση του αλγορίθμου αυτού είναι το αν ευθύνεται ο αλγόριθμος που δεν επιλύει αποδοτικά το πρόβλημα ή αν είναι το ίδιο το πρόβλημα που οδηγεί οποιονδήποτε αλγόριθμο να κάνει εκθετικά πολλές επαναλήψεις. Αν ισχύει το δεύτερο, τότε θα πρέπει να βρούμε σε ποια κλάση πολυπλοκότητας ανήκει το πρόβλημα της εύρεσης ενός Nash σημείου ισορροπίας σε ένα παίγνιο δύο παικτών. Βασιζόμενοι σε αυτό και στο γεγονός ότι πενήντα χρόνια μετά από την απόδειξη του Nash δεν έχει βρεθεί αποτελεσματικός αλγόριθμος για την εύρεση Nash σημείων ισορροπίας, έγινε η προσπάθεια για την ταξινόμηση του προβλήματος σε κάποια κλάση πολυπλοκότητας έξω από το P .

Αν προσπαθήσουμε να κατατάξουμε το πρόβλημα σε μία από τις πιο γνωστές κλάσεις, θα δούμε ότι δεν μπορούμε να το εντάξουμε κάπου, λόγω της φύσης του, ή μπορούμε να "περιορίσουμε" την πολυπλοκότητα ακόμη περισσότερο από όσο το κάνει η ίδια η κλάση. Πιο συγκεκριμένα, αποκλείουμε εύκολα την κλάση NP. Το αποφαντικό πρόβλημα για το αν κάποιο παίγνιο έχει Nash σημείο ισορροπίας απαντήθηκε από τον Nash που απέδειξε ότι η απάντηση είναι πάντα "ΝΑΙ". Το πρόβλημα εύρεσης ενός Nash σημείου ισορροπίας, δεν ανήκει από τη φύση του στο NP, καθώς η απάντηση που ζητάμε δεν είναι "ΝΑΙ"/"ΟΧΙ" αλλά κατανομές πιθανοτήτων στις στρατηγικές των παικτών.

Η επόμενη κλάση πολυπλοκότητας που θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε να κατατάξουμε το πρόβλημα είναι η FNP[17]. Ένα τυπικό πρόβλημα στην κλάση αυτή ορίζεται από το στυγμιότυπο του προβλήματος και από τη λύση που έχει πολυωνυμικό μέγεθος αν υπάρχει και "ΟΧΙ" αν το στιγμιότυπο δεν έχει λύση. Ένα ενδεικτικό πρόβλημα που ανήκει στην κλάση FNP είναι το εξής:

Δίδεται: Γράφημα $G = (V, E)$

Ζητείται: Ένας κύκλος Hamilton, αν υπάρχει, ή "ΟΧΙ" αν το γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton.

Και εδώ βλέπουμε ότι το πρόβλημα μας είναι πιο "εύκολο" από τα υπόλοιπα της κλάσης αφού ποτέ δε θα φτάσουμε στο "ΟΧΙ" καθώς γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα έχει πάντα λύση. Αν προσπαθούσε να εντάξει το πρόβλημα στην κλάση FNP, το αποτέλεσμα θα είχε μη αναμενόμενα αποτελέσματα όπως ότι $NP = coNP$.

Το επόμενο βήμα είναι να πάμε στην κλάση TFNP[15] όπου κάθε πρόβλημα στην κλάση αυτή έχει σίγουρα μία λύση. Ένα παράδειγμα προβλήματος της κλάσης αυτής που σχετίζεται και με το κύκλο Hamilton βασίζεται πάνω στο επόμενο θεώρημα του Smith:

Θεώρημα 6.1. [22] Κάθε γράφημα που όλες οι κορυφές του είναι περιττού βαθμού έχει άρτιο αριθμό από κύκλους Hamilton που διασχίζουν την ακμή xy .

Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να ορίσουμε το πρόβλημα Another Hamilton Cycle που ανήκει στην κλάση TFNP:

Δίδεται: Γράφημα $G = (V, E)$ με άρτιο βαθμό κορυφών και ένας κύκλος Hamilton

Ζητείται: Ένας άλλος κύκλος Hamilton.

Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση TFNP καθώς το θεώρημα του Smith εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον άλλου ένα κύκλου Hamilton.

Προφανώς ισχύει ότι $FP \subseteq TFNP \subseteq FNP$ και είναι ανοιχτό για το αν ισχύουν οι ισότητες. Το πρόβλημα με την κλάση αυτή είναι ότι είναι σημαντική (semantic) και όχι συντακτική (syntactic), δηλαδή

δεν έχει πλήρες πρόβλημα και δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν όντως ένα πρόβλημα ανήκει στην κλάση αυτή[21].

Από τα παραπάνω λοιπόν, φαίνεται να υπάρχει η ανάγκη για τον ορισμό μιας νέας συντακτικής κλάσης που θα περιείχε τα προβλήματα που αποδεδειγμένα έχουν λύση αλλά η εύρεση της λύσης αυτής δεν είναι εύκολη. Λέγοντας εύκολη εννοούμε ότι δεν βρίσκεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Χαρακτηριστικά πρόβλήματα που γνωρίζουμε ότι έχουν λύση αλλά δεν γνωρίζουμε κάποιον αποδοτικό τρόπο για την εύρεση της είναι τα σταθερά σημεία του Brouwer, τα πανχρωματικά simplex του Sperner, τα Nash σημεία ισορροπίας των παιγνίων από δύο παίκτες και πάνω. Οι κλάσεις που δημιουργήθηκαν για να κατατάξουμε τέτοια προβλήματα είναι η PPA : Polynomial Parity Argument και η PPAD : Polynomial Parity Argument Directed case.[18]

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά θα ορίσουμε αυστηρά τις κλάσεις PPA και PPAD και θα αναφέρουμε κάποιες σχέσεις που ισχύουν γι'αυτές. Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε στην κλάση PPAD και θα δώσουμε το πλήρες πρόβλημα για την κλάση αυτή. Έπειτα, θα δούμε πως εντάσσονται τα προβλήματα εύρεσης Nash σημείων ισορροπίας σε παίγνια πολλών παικτών στην κλάση αυτή και θα καταλήξουμε στα παίγνια δύο παικτών που και αυτά με τη σειρά τους ανήκουν στο PPAD.

6.1 Οι κλάσεις PPA και PPAD

Θα δώσουμε τον αυστηρό ορισμό των κλάσεων, δηλαδή θα τις ορίσουμε με τη βοήθεια των μηχανών Turing. Θα ορίσουμε πρώτα την PPA καθώς είναι γενικότερη από την PPAD και την περιέχει.

6.1.1 Η κλάση PPA

Ένα πρόβλημα A που ανήκει στο PPA ορίζεται από μια πολυωνυμικού χρόνου ντετερμινιστική μηχανή Turing M . Έστω ότι το x είναι ένα στιγμιότυπο του A . Ο χώρος διαμορφώσεων $C(x)$ της μηχανής είναι $\Sigma^{[p(|x|)]}$, δηλαδή το σύνολο όλων των διαμορφώσεων της μηχανής με μήκος το πολύ $p(|x|)$, όπου το p είναι ένα πολυώνυμο. Δεδομένης μιας διαμόρφωσης $c \in C(x)$, η μηχανή M έχει σαν έξοδο, σε χρόνο $O(p(n))$, το σύνολο $M(x, c)$ που περιέχει το πολύ δύο διαμορφώσεις. Μέχρι στιγμής δεν απαιτούμε να ισχύει $c' \in M(x, c)$ αν έχουμε ότι $c \in M(x, c')$. Αυτό εξασφαλίζεται από τον παρακάτω ορισμό: Λέμε ότι δύο διαμορφώσεις c, c' είναι γειτονικές ($[c, c'] \in G(x)$) αν $c \in M(x, c')$ και $c' \in M(x, c)$. Προφανώς, το $G(x)$ είναι ένα γράφημα βαθμού το πολύ δύο. Η μηχανή M είναι τέτοια ώστε $M(x, 0 \cdots 0) = 1 \cdots 1$ και $0 \cdots 0 \in M(x, 1 \cdots 1)$, οπότε το $0 \cdots 0$ είναι πάντα φύλλο. Το πρόβλημα A που σχετίζεται με τη M είναι το εξής πρόβλημα: "Δεδομένου του x , βρες ένα φύλλο του $G(x)$ διαφορετικό του $0 \cdots 0$."

Η PPA είναι η κλάση όλων των προβλημάτων A που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο.

6.1.2 Η κλάση PPAD

Για τον ορισμό της κλάσης PPAD θα τροποποιήσουμε τον παραπάνω ορισμό έτσι ώστε το $M(x, c)$ να είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος διαμορφώσεων. Αυτή τη φορά το γράφημα $G(x)$ είναι κατευθυνόμενο: $(c, c') \in G(x)$ αν και μόνον αν το c' είναι το δεύτερο στοιχείο του $M(c, x)$ και το c είναι το πρώτο στοιχείο του $M(c', x)$. Στην κλάση αυτή ζητάμε οποιοδήποτε κόμβο του γραφήματος, εκτός του $0 \cdots 0$, που να ισχύει ότι $\text{indegree} + \text{outdegree} = 1$. Με άλλα λόγια, μία αποδεκτή έξοδος είναι μία οποιαδήποτε αρχή (source) ή οποιοδήποτε τέλος (sink) ενός μονοπατιού του κατευθυνόμενου γραφήματος εκτός από την πηγή $0 \cdots 0$.

Πρόταση 6.2. [18] $FP \subseteq PPAD \subseteq PPA \subseteq FNP$.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο κλάσεις ουσιαστικά ακολουθούμε ένα μονοπάτι έως ότου να φτάσουμε στο τέλος του. Στο τέλος του μονοπατιού έχουμε φτάσει και στη λύση του προβλήματος που μας ενδιαφέρει. Στο μονοπάτι αυτό βρίσκουμε σε πολυωνυμικό χρόνο τους γείτονες του κάθε κόμβου που είμαστε και επομένως καταλαβαίνουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν έχουμε φτάσει στο τέλος του μονοπατιού. Παρόλα αυτά, δεν έχουμε κάποιο περιορισμό για το μήκος του μονοπατιού καθώς μπορεί να είναι εκθετικά μακρύ.

Δηλαδή, όλα τα προβλήματα και στις δύο κλάσεις μπορούμε να τα δούμε σαν γραφήματα που αποτελούνται από κόμβους με βαθμό το πολύ δύο. Το γράφημα που θα περιγράψει το κάθε πρόβλημα θα αποτελείται από κύκλους και μονοπάτια. Το ζητούμενο και στις δύο κλάσεις είναι ξεκινώντας από το άκρο ενός μονοπατιού του γραφήματος να βρούμε το άλλο άκρο του, που θα αντιστοιχεί και στη λύση του προβλήματος που εξετάζουμε. Οι κόμβοι του γραφήματος θα αντιστοιχούν στις ενδιάμεσες καταστάσεις του προβλήματος και οι ακμές στα βήματα, που είναι πολυωνυμικού χρόνου, που πραγματοποιούνται για να φτάσουμε από την μία κατάσταση στην άλλη. Όταν φτάσουμε στο τέλος του μονοπατιού μπορούμε να ελέγξουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ότι όντως πρόκειται για μία λύση του αρχικού μας προβλήματος.

Αν συνοψίσουμε τα παραπάνω, το προφανές πλήρες πρόβλημα και για τις δύο κλάσεις είναι το END OF LINE:

Δίδεται: Γράφημα $G = (V, E)$, που αποτελείται από κύκλους και μονοπάτια και η αρχή ενός μονοπατιού.

Ζητείται: Το άλλο άκρο του μονοπατιού που δίδεται.

Η μόνη διαφορά ανάμεσα στην κλάση PPA και στην PPAD είναι ότι το μονοπάτι στην δεύτερη είναι κατευθυνόμενο. Αυτό είναι και το σημείο που διαφοροποιεί τις δύο κλάσεις. Δηλαδή, αν βρεθούμε σε μία κορυφή ενός μονοπατιού στην κλάση PPA μπορούμε να βρούμε τους δύο γειτονικούς κόμβους αλλά δεν γνωρίζουμε την κατεύθυνση που πρέπει να ακολουθήσουμε. Στην PPAD, αντίθετα, έχουμε μια επιπλέον πληροφορία που καθορίζει την κατεύθυνση. Αν σκεφτούμε τα μονοπάτια των κλάσεων αυτών σαν τα μονοπάτια που παράγει ο Lemke - Howson μπορούμε εύκολα να καταλάβουμε τα παραπάνω. Δηλαδή, αν βρεθούμε στο μέσο ενός μονοπατιού και έχουμε τους δείκτες των δύο κορυφών που ορίζουν τον κόμβο, μπορούμε πολύ εύκολα να βρούμε τους δύο γειτονικούς κόμβους στο συγκεκριμένο μονοπάτι. Αλλά δεν ξέρουμε προς τα που να κινηθούμε για να φτάσουμε στο επιθυμητό τέλος του μονοπατιού. Βέβαια, ο αλγόριθμος παρήγαγε κατευθυνόμενα μονοπάτια. Αυτό γινόταν γιατί σε κάθε κόμβο γνωρίζαμε επιπλέον τον παίκτη που πρόκειται να παίξει.

Παρατηρούμε ότι, από πολύ νωρίς, το πρόβλημα ανήκει στο PPAD αφού περιγράφεται από ένα μονοπάτι που έχει τις προδιαγραφές που απαιτούνται. Πριν προσπαθήσουμε να δείξουμε και την πληρότητα του προβλήματος, πρέπει να ορίσουμε ένα πλήρες πρόβλημα οδηγό για την κλάση.

6.2 Πληρότητα για την κλάση PPAD

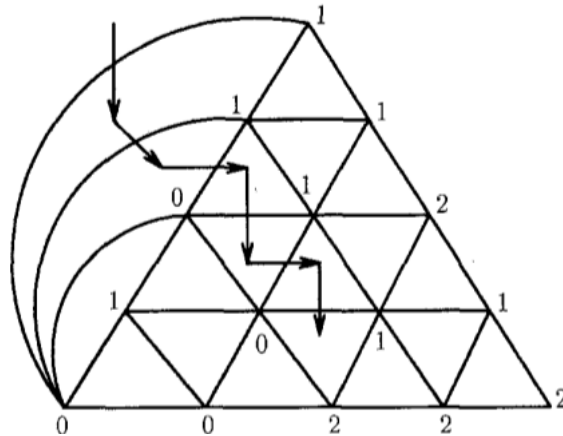
Όπως ήδη έχουμε αναφέρει παραπάνω το προφανές πλήρες πρόβλημα για την κλάση PPAD είναι το END OF LINE. Δηλαδή, δεδομένου ενός άκρου ενός μονοπατιού ζητείται να βρεθεί το άλλο άκρο του. Για να ορίσουμε πιο αυστηρά ένα πλήρες πρόβλημα για την κλάση PPAD θα δείξουμε ότι το πρόβλημα του SPERNER είναι PPAD πλήρες. Για να είναι πλήρης η αναγωγή θα πρέπει να δείξουμε ότι πρώτα από όλα ότι το SPERNER ανήκει στο PPAD και στη συνέχεια να το εκφράσουμε με τη μορφή ενός μονοπατιού όπου βρίσκουμε κάθε φορά τον επόμενο κόμβο του μονοπατιού σε πολυωνυμικό χρόνο.

Αρχικά θα ορίσουμε το πρόβλημα του SPERNER. Σύμφωνα με το λήμμα του Sperner, έχουμε ένα d -διάστατο simplex με κορυφές $0, 1, 2, \dots, d$ και έχουμε και μία τριγωνοποίηση (simplicization)

(δηλαδή αν χωρίσουμε το simplex σε simplices ίδιας διάστασης). Υποθέτουμε ότι όλες οι κορυφές της τριγωνοποίησης είναι νόμιμα χρωματισμένες, δηλαδή τους έχουν ανατεθεί τα χρώματα $0, \dots, d$ έτσι ώστε αν η κορυφή v είναι στο εξωτερικό simplex πάνω στην έδρα i_0, \dots, i_k το χρώμα της να είναι ένα από τα i_0, \dots, i_k . Τότε το λήμμα του Sperner εγγυάται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα simplex στη τριγωνοποίηση που είναι πανχρωματικό, δηλαδή στις κορυφές του υπάρχουν και τα $d + 1$ χρώματα. Το υπολογιστικό πρόβλημα SPERNER είναι να βρεθεί ένα πανχρωματικό simplex.

Δίδεται: Simplex στις n διαστάσεις, μία τριγωνοποίηση του και ένας νόμιμος χρωματισμός.

Ζητείται: Ένα simplex χρωματισμένο με $n + 1$ χρώματα.



Σχήμα 5: Το λήμμα του Sperner στις δύο διαστάσεις και το μονοπάτι που σχηματίζεται μέχρι το τριχρωματικό τρίγωνο.

Το λήμμα αυτό εφαρμόζεται και γίνεται κατανοητό πολύ εύκολα στις δύο διαστάσεις (σχήμα 5), αλλά αν θελήσουμε να το εφαρμόσουμε σε μεγαλύτερη διάσταση υπάρχει μια δυσκολία. Η δυσκολία αυτή είναι ότι δεν υπάρχει ένας αλγοριθμικός τρόπος για να κάνουμε τριγωνοποίηση του d -διάστατου simplex. Όταν πρωτοορίστηκε η κλάση προτάθηκαν διάφοροι τρόποι για να παρακαμφθεί το πρόβλημα αυτό, αλλά ο πιο αποτελεσματικός φάνηκε να είναι να ορίσουμε το υπολογιστικό πρόβλημα SPERNER με όρους του υπερκύβου[18]. Αρχικά, θα δώσουμε μια σκιαγράφιση της απόδειξης της πληρότητας για το 3D-SPERNER, για να γίνει κατανοητός ο τρόπος αντιμετώπισης των προβλημάτων στην PPAD και στη συνέχεια θα αποδείξουμε αυστηρά ότι μία απλοποιημένη εκδοχή του υπολογιστικού προβλήματος του Brouwer είναι PPAD-πλήρης. Το πρόβλημα BROUWER θα είναι αυτό που θα μας βοηθήσει για την πληρότητα του προβλήματος NASH.

6.2.1 Το 3D-SPERNER είναι PPAD-πλήρες

Έστω ότι έχουμε ένα πρόβλημα A στο PPAD. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε έναν αλγόριθμο M που υπολογίζει για κάθε είσοδο x και κάθε κόμβο $v \in \{0, 1\}^N$ (όπου $N = |x|^k$) του $G(x)$, τα πιθανά παιδιά $M(x, v) \in \{0, 1\}^{2N}$. Θα κατασκευάσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο έναν πολυωνυμικό αλγόριθμο M' και έναν ακέραιο n , που θα βασίζονται στα x και M , που θα υπολογίζουν τα νόμιμα χρώματα για τα $n \times n \times n$ σημεία της υποδιαίρεσης του μοναδιαίου κύβου έτσι ώστε μια λύση για το στιγμιότυπο x του προβλήματος A (που είναι ένας κόμβος χωρίς απόγονο στο $G(x)$) να μπορεί να βρεθεί εύκολα από οποιοδήποτε τετραχρωματικό κυβίδιο (cubelet).

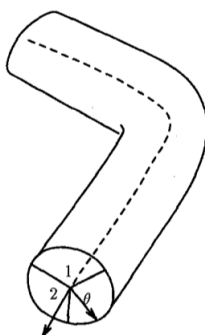
Αυτό που περιγράψαμε μόλις είναι η λογική της αναγωγής του προβλήματος. Αυτό που θέλουμε ουσιαστικά να κάνουμε πλέον είναι να περιγράψουμε το πρόβλημα σαν ένα μονοπάτι που κινείται μέσα στον μοναδιαίο κύβο. Κάθε σημείο του μονοπατιού μπορεί να μας δώσει μια τιμή για το

πρόβλημα, αλλά η λύση του προβλήματος θα δίνεται μόνο από τα τετραχρωματικά κυβίδια. Πρέπει να δείξουμε ότι το μονοπάτι που παράγεται μπορεί να είναι όσο μακρύ χρειάζεται μέχρι να φτάσουμε σε μια λύση του προβλήματος A. Δηλαδή, να υπάρχει ένα αρκούντως μακρύ μονοπάτι που κάθε σημείο του χαρακτηρίζεται μόνο από τρία χρώματα και μόνο στο άκρο του υπάρχουν και τα τέσσερα χρώματα.

Αφού ορίσαμε τι πρέπει να κατασκευάσουμε και με ποιες ιδιότητες θα περιγράψουμε την κατασκευή και το χρωματισμό του μοναδιαίου κύβου, χωρίς πολλές λεπτομέρειες. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι γιατί η απόδειξη είναι αρκετά διαισθητική και προτιμάται η αυστηρή απόδειξη της πληρότητας του προβλήματος BROUWER.

Το κυβίδιο είναι ένα κυβάκι της διαμέρισης του μοναδιαίου κύβου και το n είναι ο αριθμός των διαμερίσεων στην κάθε διάσταση. Η πλειοψηφία των κυβιδίων είναι χρωματισμένα με το χρώμα 0. Για παράδειγμα, όλα τα σημεία των όψεων που περιέχουν το $(0, 0, 0)$ έχουν το χρώμα 0, εκτός από αυτά που δεν μπορούν λόγω της νομιμότητας του χρωματισμού. Οι άλλες τρεις όψεις του κύβου χρωματίζονται με ένα από τα νόμιμα χρώματα 1, 2, 3, ακολουθώντας για ακόμη μία φορά την νομιμότητα του χρωματισμού. Τέλος, η κορυφή $(1, 1, 1)$ χρωματίζεται με το χρώμα 1. Η κορυφή αυτή είναι η μοναδική στο εξωτερικό του κύβου που έχει τριγύρω της και τα τρία "σπάνια" χρώματα.

Η λογική από δω και πέρα είναι η εξής: πρέπει να φτιάξουμε ένα μονοπάτι που θα ορίζεται από τις τριχρωματικές κορυφές και με κάποιο τρόπο θα το προφυλάξουμε από το χρώμα 0, μέχρι να φτάσουμε στο τέλος του μονοπατιού. Η "προστασία" του μονοπατιού από το χρώμα 0 γίνεται χρησιμοποιώντας ένα "σωλήνα". Στο κέντρο του σωλήνα είναι τα τριχρωματικά σημεία και τριγύρω τους είναι τα χρώματα 1, 2, 3 χωρίς να υπάρχει πουθενά αλλού τριχρωματικό σημείο.

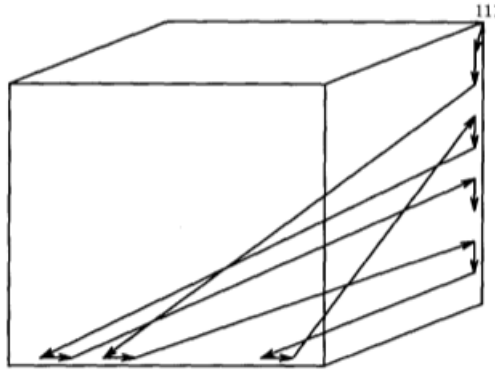


Σχήμα 6: Ο "σωλήνας" και ο χρωματισμός του

Το θ είναι η διάμετρος του σωλήνα που εξασφαλίζει ότι μπορεί να στρίψει και να περιστραφεί χωρίς να υπάρχει πρόβλημα στο χρωματισμό. Κοιτάζοντας τον τρόπο που είναι χρωματισμένο το εσωτερικό του σωλήνα μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνση του μονοπατιού.

Αφού περιγράψαμε και το χρωματισμό, μένει να περιγράψουμε και το γράφημα $G(x)$. Δηλαδή, τις κορυφές και τις ακμές που φτιάχνουν το μονοπάτι που ορίζει το $G(x)$. Και οι κορυφές και οι ακμές θα αντιστοιχίζονται σε ένα κομμάτι του σωλήνα μέσα στον κύβο. Οι ακμές είναι τα τμήματα του σωλήνα που είναι παράλληλα στην ακμή του κύβου $(1, 1, 1) - (1, 1, 0)$ και οι κορυφές αυτά που είναι παράλληλα στην ακμή $(0, 0, 0) - (1, 0, 0)$. Έτσι για κάθε ακμή (i, j) του $G(x)$ υπάρχει ένα κομμάτι του σωλήνα που ξεκινά από το σημείο του σωλήνα που αντιστοιχεί στην κορυφή i συνεχίζει στο κομμάτι που αντιστοιχεί στην ακμή (i, j) και καταλήγει στο κομμάτι αυτό που αντιστοιχεί στην

κορυφή j . Το μονοπάτι αυτό αποδεικνύεται ότι είναι όσο μακρύ χρειάζεται για να περιγράψει το $G(x)$ χωρίς να υπάρχει κίνδυνος τομής των σωληνώσεων μιας και η διάμετρος είναι όσο μικρή πρέπει. Το μονοπάτι συνοψίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 7: Το μονοπάτι του 3D-SPERNER μέσα στον κύβο

Η παραπάνω περιγραφή δόθηκε περισσότερο για να εξοικιωθούμε με τον τρόπο που αντιμετωπίζουμε τα προβλήματα στο PPAD. Δηλαδή, ότι πρέπει να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι που στο άκρο του να είναι η λύση του προβλήματος που μας ενδιαφέρει και επιπλέον ότι σε κάθε σημείο του μονοπατιού αποφασίζουμε τοπικά την κατεύθυνση που ακολουθούμε. Η πληρότητα του υπολογιστικού προβλήματος του Sperner ήταν η πρώτη που δόθηκε για την κλάση PPAD. Χρειάστηκε να περάσουν αρκετά χρόνια και να ωριμάσει η ιδέα της κλάσης PPAD έως ώτου δωθεί η αυστηρή απόδειξη πληρότητας του υπολογιστικού προβλήματος BROUWER που πάνω σ' αυτή ανάγεται και το πρόβλημα του υπολογισμού του Nash σημείου ισορροπίας.

6.3 Το πρόβλημα BROUWER

Όπως είπαμε και προηγουμένως για την αναγωγή του υπολογιστικού προβλήματος NASH χρειαζόμαστε το πρόβλημα BROUWER[7]. Το θερημα του Brouwer λέει το εξής: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f(x)$ από ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του ευκλείδιου χώρου στον εαυτό του περιέχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο $f(x) = x$. Το υπολογιστικό πρόβλημα BROUWER είναι δεδομένης μιας συνάρτησης f που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες, βρες ένα σταθερό σημείο. Πριν όμως προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα σταθερά σημεία της f , θα πρέπει να ορίσουμε υπολογιστικά το κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του Ευκλείδιου χώρου, τη συνεχή απεικόνιση καθώς και τα πιθανά άρρητα σταθερά σημεία. Τα παραπάνω δεν ορίζονται εύκολα υπολογιστικά και γι' αυτό θα πρέπει να τα παρακάμψουμε με κάποιο τρόπο, αλλά παράλληλα να συνεχίσει να ισχύει το θεώρημα.

Αρχικά θα ορίσουμε το κυρτό και συμπαγές υποσύνολο να είναι ο μοναδιαίος υπερκύβος $[0, 1]^m$. Έπειτα θα υποθέσουμε ότι για τη συνάρτηση f ισχύει η συνθήκη του Lipschitz

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq K \cdot d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1]^m$$

όπου $d(\cdot, \cdot)$ είναι η ευκλείδια απόσταση και K η σταθερά Lipschitz της f . Η παραπάνω συνθήκη εγγυάται ότι μπορούμε να εντοπίσουμε προσεγγιστικά σταθερά σημεία, εξετάζοντας τη συνάρτηση σε διακριτοποιημένα σημεία. Άρα με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να προσπεράσουμε και τα προβλήματα της συνέχειας και των πιθανών άρρητων σταθερών σημείων.

Το πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι η διακριτοποιημένη και απλοποιημένη εκδοχή που σχετίζεται με την εύρεση ενός σταθερού σημείου. Δίδεται μια συνεχής συνάρτηση ϕ από τον τρισδιάστατο μοναδιαίο κύβο στον εαυτό του, που ορίζεται με όρους των τιμών στα κέντρα των 2^{3n} κυβιδίων πλευράς 2^{-n} . Το κυβίδιο K_{ijk} ορίζεται σαν

$$K_{ijk} = \{(x, y, z) : i * 2^{-n} \leq x \leq (i + 1) * 2^{-n}, \\ j * 2^{-n} \leq y \leq (j + 1) * 2^{-n}, \\ k * 2^{-n} \leq z \leq (k + 1) * 2^{-n}\}$$

και συμβολίζουμε με c_{ijk} το κέντρο του κάθε κυβιδίου. Τα i, j, k είναι ακέραιοι στο σύνολο $\{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ και η τιμή της ϕ στο κέντρο c_{ijk} του κυβιδίου είναι $\phi(c_{ijk}) = c_{ijk} + \delta_{ijk}$, όπου δ_{ijk} είναι ένα από τα τέσσερα ακόλουθα διανύσματα, που τα λέμε και χρώματα :

- $\delta_1 = (\alpha, 0, 0)$
- $\delta_2 = (0, \alpha, 0)$
- $\delta_3 = (0, 0, \alpha)$
- $\delta_4 = (-\alpha, -\alpha, -\alpha)$

Όπου $\alpha > 0$ είναι μια ποσότητα κατά πολύ μικρότερη από την πλευρά του κυβιδίου, έστω 2^{-2n} .

Άρα, για τον υπολογισμό της ϕ στο κέντρο του κυβιδίου K_{ijk} το μόνο που χρειάζεται να γνωρίσουμε είναι ποιο από τα τέσσερα διανύσματα θα προσθέσουμε. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται από ένα Boolean κύκλωμα C που έχει σαν είσοδο $3n$ bits που προσδιορίζουν το κέντρο του κυβιδίου που θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή του και σαν έξοδο έχει 2 bits που υποδεικνύουν το διάνυσμα που θα προσθεθεί στις συντεταγμένες του κέντρου.

Αρχικά, θα ορίσουμε το χρωματισμό στις πλευρές του μοναδιαίου κύβου έτσι ώστε η συνάρτηση ϕ να δίνει τα σωστά διανύσματα στις πλευρές ώστε να δείχνουν προς το εσωτερικό του κύβου και να είναι ένας νόμιμος χρωματισμός. Έτσι ορίζουμε $C(0, j, k) = 1, C(i, 0, k) = 2, C(i, j, 0) = 3, C(2^n - 1, j, k) = C(i, 2^n - 1, k) = C(i, j, 2^n - 1) = 0$ με τα σημεία που τυχόν τους δίνονται δύο χρώματα να παίρνουν ένα από αυτά με τυχαίο τρόπο. Μία κορυφή ενός κυβιδίου ονομάζεται πανχρωματική αν, αναμέσα στα γειτονικά του κυβίδια, υπάρχουν και τα τέσσερα χρώματα $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Το BROUWER είναι το εξής υπολογιστικό πρόβλημα: Δεδομένου ενός Boolean κυκλώματος C όπως περιγράφεται παραπάνω, βρες μία πανχρωματική κορυφή. Η σχέση που συνδέει τις κορυφές με τα σταθερά σημεία του Brouwer είναι ότι τα σταθερά σημεία της ϕ εμφανίζονται μόνο στη γειτονία μιας πανχρωματικής κορυφής.

6.4 Το BROUWER ανήκει στο PPA

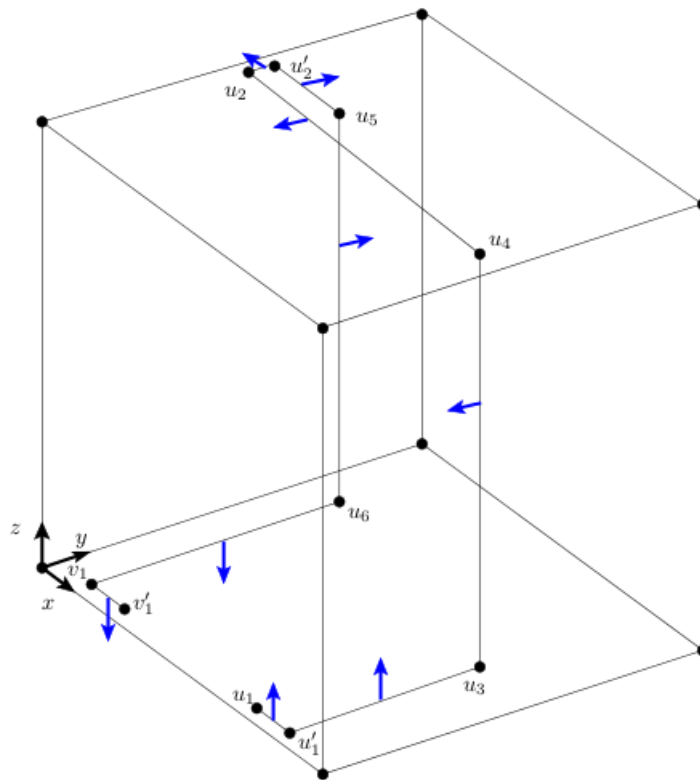
Παρατηρούμε ότι ο χρωματισμός των πλευρών του μοναδιαίου κύβου είναι ένας νόμιμος χρωματισμός για τις προϋποθέσεις του λήμματος του Sperner. Άρα το λήμμα του Sperner εγγυάται ότι οποιοδήποτε κύκλωμα C ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες ο μοναδιαίος κύβος θα έχει τουλάχιστον μία πανχρωματική κορυφή. Συνεπώς γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα έχει πάντα λύση. Για να ανήκει στο PPA όμως θα πρέπει να το ορίσουμε με όρους του END OF LINE. Το μονοπάτι ουσιαστικά θα αποτελείται από τριχρωματικά σημεία του κύβου και το τέλος του θα είναι ένα τετραχρωματικό σημείο. Οι κορυφές του μονοπατιού θα είναι οι κορυφές των κυβιδίων και οι ακμές του μονοπατιού θα είναι οι κοινές ακμές των κυβιδίων ανά τέσσερα που ανάμεσα τους υπάρχουν τα τρία χρώματα.

6.4.1 Το BROUWER είναι PPAD πλήρες

Θα ανάγουμε το END OF LINE στο BROUWER[8]. Δηλαδή, δεδομένων δύο boolean κυκλωμάτων S και P με n εισόδους και εξόδους που δείχνουν τον επόμενο και προηγούμενο κόμβο του μονοπατιού αντίστοιχα, θα κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο στιγμιότυπο του BROUWER. Δηλαδή, ένα άλλο boolean κύκλωμα C με $3m = 3(n+4)$ bits εισόδου και δύο bits εξόδου που υπολογίζει το χρώμα για το κάθε κυβίδιο με πλευρά 2^{-m} .

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τη συνάρτηση ϕ : θα περιγράψουμε πως θα κινείται το μονοπάτι μέσα στον μοναδιαίο κύβο και πως θα χρωματίζονται τα κυβίδια και θα αποδείξουμε ότι ο χρωματισμός αυτός μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο. Τέλος θα δείξουμε ότι ο χρωματισμός αυτός μπορεί να γίνει τοπικά και ότι οι πανχρωματικές κορυφές αντιστοιχούν σε ακρό του μονοπατιού διαφορετικό από το 0^n του $G_{S,P}$, όπου $G_{S,P}$ είναι το κατευθυνόμενο γράφημα που ορίζεται από τα S και P . Θα υποθέσουμε ότι το γράφημα $G_{S,P}$ είναι τέτοιο που για κάθε ακμή (u, v) μία από τις κορυφές της είναι άρτια (τελείωνει σε 0) και η άλλη περιττή. Αν δεν ισχύει, μπορούμε εύκολα να το κάνουμε διπλασιάζοντας τις κορυφές του γραφήματος $G_{S,P}$.

Θα συμβολίζουμε με L ένα μονοδιάστατο ευθύγραμμο τμήμα του μονοπατιού που θα παραχθεί. Το L θα κινείται παράλληλα με τους άξονες και όλες οι συντεταγμένες των άκρων των τμημάτων του θα είναι ακέραια πολλαπλάσια του 2^{-m} .



Σχήμα 8: Το ορθοκανονικό μονοπάτι που ενώνει τις κορυφές (u, v) . Τα βέλη δείχνουν τον προσανατολισμό των χρωμάτων γύρω από το μονοπάτι.

Έστω το $u \in \{0, 1\}^n$ μία κορυφή του $G_{S,P}$. Με $\langle u \rangle$ συμβολίζουμε τον ακέραιο αριθμό μεταξύ 0 και 2^{n-1} που η δυαδική του αναπαράσταση είναι η u . Από το u εξαρτώνται δύο τμήματα του L μήκους

4 το καθένα. Το πρώτο είναι το αρχικό κομμάτι του u με άκρα τα $u_1 = (8\langle u \rangle + 2, 3, 3)$ και $u'_1 = (8\langle u \rangle + 6, 3, 3)$. Το άλλο είναι το βοηθητικό κομμάτι και έχει σαν άκρα τα $u_2 = (3, 8\langle u \rangle + 6, 2^m - 3)$ και $u'_2 = (3, 8\langle u \rangle + 10, 2^m - 3)$. Τα κομμάτια αυτά ενώνονται μεταξύ τους με τη βοήθεια των κορυφών u_3 και u_4 , με $u_3 = (8\langle u \rangle + 6, 8\langle u \rangle + 6, 3)$ και $u_4 = (8\langle u \rangle + 6, 8\langle u \rangle + 6, 2^m - 3)$. Το κομμάτι αυτό του μονοπατιού αντιστοιχεί στην κορυφή u του γραφήματος $G_{S,P}$.

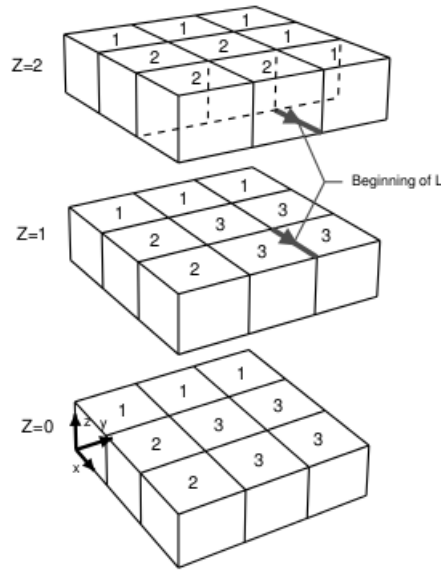
Η περιγραφή της ακμής (u, v) στο μονοπάτι L ξεκινά από το u'_2 και τελειώνει στο v_1 . Από το u'_2 συνεχίσουμε στο $u_5 = (8\langle v \rangle + 2, 8\langle u \rangle + 10, 2^m - 3)$, πάμε στο $u_6 = (8\langle v \rangle + 2, 8\langle u \rangle + 10, 3)$ και καταλήγουμε στο v_1 που δίνεται από τον τύπο ανάλογο του u_1 , δηλαδή $v_1 = (8\langle v \rangle + 2, 3, 3)$. Το μονοπάτι L συνεχίζει με το ίδιο μοτίβο για κάθε κορυφή και ακμή του $G_{S,P}$. Η μόνη διαφορά είναι ότι η αρχή του μονοπατιού, δηλαδή το 0^n αποτελείται από τα $0_1 = (2, 2, 2)$, $0'_1 = (6, 2, 2)$ και $0_3 = (6, 6, 2)$. Με αυτό τον τρόπο έχουμε περιγράψει πλήρως το μονοπάτι μέσα στο κύβο και αποδεικνύεται εύκολα ότι το μονοπάτι αυτό μπορεί να διασχίζει τον κύβο χωρίς να διασταυρωθούν οι ακμές που το απαρτίζουν.

Στη συνέχεια πρέπει να περιγράψουμε το χρωματισμό των 2^{3m} κυβιδίων με τα τέσσερα χρώματα. Για να είμαστε σύμφωνοι με τις προϋποθέσεις που απαιτεί το κύκλωμα του BROUWER χρωματίζουμε κάθε κυβίδιο K_{ijk} με 0, αν κάποιο από τα i, j, k είναι $2^m - 1$. Επιπλέον, χρωματίζουμε με 1 κάθε κυβίδιο με $i = 0$, με 2 κάθε κυβίδιο με $j = 0$, ενώ τα υπόλοιπα κυβίδια στο εξωτερικό του κύβου τα χρωματίζουμε με 3. Αφού έχουμε χρωματίσει τα εξωτερικά κυβίδια μένει να χρωματίσουμε τα εσωτερικά. Κάθε εσωτερικό κυβίδιο θα είναι χρωματισμένο με 0 εκτός και αν μία από τις κορυφές του είναι ένα σημείο του μονοπατιού L , που σε αυτή τη περίπτωση θα πάρει ένα από τα άλλα τρία χρώματα. Ο τρόπος χρωματισμού αυτών των κυβιδίων θα περιγραφεί παρακάτω. Διαισθητικά, αυτό που θα προκύψει από το χρωματισμό είναι προστάσια του τριχρωματικού μονοπατιού L που ξεκινά από το $(2, 2, 2)$ από το χρώμα 0. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα το μοναδικό τετραχρωματικό σημείο να είναι η κορυφή u'_2 ή η u_1 , όπου το u είναι το άκρο του μονοπατιού του γραφήματος $G_{S,P}$. Παρατηρούμε ότι η λογική είναι ακριβώς η ίδια με το 3D-SPERNER που περιγράψαμε παραπάνω, απλά αυτή τη φορά όλα είναι ορισμένα πολύ πιο αυστηρά.

Στο Σχήμα 9 παρατηρούμε το χρωματισμό των κυβιδίων που περιβάλλουν την αρχή του μονοπατιού L . Παρατηρούμε ότι η πρώτη ακμή του μονοπατιού, η ακμή $(2, 2, 2) - (3, 2, 2)$ είναι ανάμεσα σε τέσσερα κυβίδια που τα δύο από αυτά έχουν το χρώμα 3 και τα άλλα τα χρώματα 1 και 2. Κάθε ακμή του μονοπατιού L θα περικλείεται από δύο κυβίδια χρώματος 3 και τα άλλα δύο θα έχουν τα χρώματα 1 και 2. Ο προσανατολισμός αυτών των δύο κυβιδίων χρώματος 3 μαζί με την κάθε κορυφή u του γραφήματος $G_{S,P}$ θα προσδιορίζουν την κατεύθυνση του μονοπατιού L . Δηλαδή, αν βρεθούμε σε ένα τριχρωματικό σημείο του μονοπατιού, κοιτώντας το χρωματισμό (την θέση που βρίσκονται τα κυβίδια χρώματος 3) και το u μπορούμε να πούμε αμέσως το προς τα που θα κινηθεί το μονοπάτι.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι πρέπει να οριστεί αυστηρά η κατεύθυνση d για κάθε κομμάτι $[a, b]$ του L που σε αυτήν θα χρωματιστούν τα κυβίδια με το χρώμα 3. Αναλυτικά οι κανόνες χρωματισμού είναι οι εξής:

- Αν $[a, b] = [u_1, u'_1]$, τότε $d = (0, 0, -1)$ αν u άρτιος και $d = (0, 0, 1)$ αν u περιττός.
- Αν $[a, b] = [u'_1, u_3]$, τότε $d = (0, 0, -1)$ αν u άρτιος και $d = (0, 0, 1)$ αν u περιττός.
- Αν $[a, b] = [u_3, u_4]$, τότε $d = (0, 1, 0)$ αν u άρτιος και $d = (0, -1, 0)$ αν u περιττός.
- Αν $[a, b] = [u_4, u_2]$, τότε $d = (0, 1, 0)$ αν u άρτιος και $d = (0, -1, 0)$ αν u περιττός.
- Αν $[a, b] = [u_2, u'_2]$, τότε $d = (1, 0, 0)$ αν u άρτιος και $d = (-1, 0, 0)$ αν u περιττός.
- Αν $[a, b] = [u'_2, u_5]$, τότε $d = (0, -1, 0)$ αν u άρτιος και $d = (0, 1, 0)$ αν u περιττός.
- Αν $[a, b] = [u_5, u_6]$, τότε $d = (0, -1, 0)$ αν u άρτιος και $d = (0, 1, 0)$ αν u περιττός.
- Αν $[a, b] = [u_6, v_1]$, τότε $d = (0, 0, 1)$ αν u άρτιος και $d = (0, 0, -1)$ αν u περιττός.



Σχήμα 9: Τα 27 κυβίδια γύρω από το $(2, 2, 2)$, την αρχή του L και ο χρωματισμός τους.

Τα βελάκια πάνω στις ακμές του μονοπατιού L του Σχήματος 8 δείχνουν τους παραπάνω κανόνες στην πράξη.

Και με αυτό το τρόπο ολοκληρώνεται η περιγραφή της κατασκευής. Παρατηρούμε ότι απαιτούμε οι ακμές του μονοπατιού του $G_{S,P}$ πρέπει να εναλλάσσονται ανάμεσα σε άρτιες και περιττές για να ισχύουν οι παραπάνω κανόνες χρωματισμού.

Από τη στιγμή που έχει ολοκληρωθεί η περιγραφή της κατασκευής, το μόνο που μένει να αποδειχθεί είναι η αντιστοιχία των πανχρωματικών σημείων με τα άκρα του μονοπατιού $G_{S,P}$ και ότι ο υπολογισμός των χρωμάτων γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Τα πανχρωματικά σημεία, λόγω της κατασκευής, εμφανίζονται μόνο αν η κυρφή u του $G_{S,P}$ είναι αρχή ή τέλος ενός μονοπατιού, δηλαδή στα u'_2 ή u_1 . Δεν υπάρχει άλλος τρόπος για να φτάσει το μονοπάτι L στο χρώμα 0, οπότε δεν υπάρχει άλλη πανχρωματική κορυφή στον μοναδιαίο κύβο. Όσον αφορά το χρωματισμό των κυβιδίων, αυτός πράγματι γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο καθώς ήδη έχουμε αναφέρει το χρωματισμό των κυβιδίων που είναι στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύβου και ο χρωματισμός των υπολοίπων κυβιδίων που είναι πάνω στο μονοπάτι L γίνεται με τη βοήθεια του τελευταίου bit της δυαδικής μορφής του $\langle u \rangle$. Πιο συγκεκριμένα για το κομμάτι $[u'_1, u_3]$, $u \neq 0^n$ τα χρώματα των κυβιδίων $C(i, j, k)$ που εφάπτονται στο L δίνονται από τις σχέσεις, όπου $x = \langle u \rangle$ και το $LSB(x)$ να συμβολίζει το τελευταίο bit του $\langle u \rangle$:

1. Αν $k = 2$ και $i = 8x + 5$ και $LSB(x) = 1$ και $j \in 3, \dots, 8x + 6$, τότε $C(i, j, k) = 2$.
2. Αν $k = 2$ και $i = 8x + 6$ και $LSB(x) = 1$ και $j \in 3, \dots, 8x + 6$, τότε $C(i, j, k) = 1$.
3. Αν $k = 3$ και $(i = 8x + 5$ ή $i = 8x + 6)$ και $LSB(x) = 1$ και $j \in 3, \dots, 8x + 5$, τότε $C(i, j, k) = 3$.
4. Αν $k = 2$ και $(i = 8x + 5$ ή $i = 8x + 6)$ και $LSB(x) = 0$ και $j \in 3, \dots, 8x + 6$, τότε $C(i, j, k) = 3$.
5. Αν $k = 3$ και $i = 8x + 5$ και $LSB(x) = 0$ και $j \in 3, \dots, 8x + 5$, τότε $C(i, j, k) = 1$.
6. Αν $k = 3$ και $i = 8x + 6$ και $LSB(x) = 0$ και $j \in 3, \dots, 8x + 5$, τότε $C(i, j, k) = 2$.

Αυτό που περιγράφουν οι παραπάνω σχέσεις είναι το χρωματισμό των κυβιδίων που εφάπτονται πάνω σε κάθε $[u'_1, u_3]$ κομμάτι του L . Με παρόμοιες σχέσεις μπορούμε να περιγράψουμε το χρωματισμό για οποιοδήποτε κομμάτι του L , οπότε και ο χρωματισμός του μοναδιαίου κύβου γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώνεται και η αναγωγή του προβλήματος, που σημαίνει ότι το πρόβλημα BROUWER είναι PPAD πλήρες. Πάνω σε αυτό το πρόβλημα γίνεται και η αναγωγή για το 2NASH.

6.5 Το πρόβλημα 2NASH

Βασιζόμενοι στο πρόβλημα BROUWER και με τη βοήθεια των graphical games[13] οι Goldberg, Δασκαλάκης και Παπαδημητρίου απέδειξαν ότι το 4NASH[8] είναι PPAD πλήρες πρόβλημα και στη συνέχεια με κάποιες μικρές αλλαγές απέδειξαν ότι και το 3NASH είναι PPAD πλήρες[9]. Παράλληλα με αυτούς απέδειξαν ότι το 3NASH είναι PPAD πλήρες και οι Xi Chen και Xiaotie Deng ανεξάρτητα από τους προηγούμενους[4]. Στη συνέχεια, οι τελευταίοι απέδειξαν ότι και το 2NASH είναι PPAD πλήρες[6][5] κάνοντας μια αναγωγή απευθείας από το BROUWER[8]. Η λογική τους ήταν κάπως διαφορετική από αυτή του [8], αλλά χρησιμοποίησαν αρκετές τεχνικές τους.

6.5.1 Λογική της αναγωγής

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα θα ανάγουμε το πρόβλημα του BROUWER στο NASH. Δηλαδή, θα κατασκευάσουμε ένα παίγνιο τέτοιο ώστε δεδομένου ενός ϵ προσεγγιστικού Nash σημείου ισορροπίας του μπορούμε να βρούμε ένα τετραχρωματικό σημείο του μοναδιαίου κύβου σε πολυωνυμικό χρόνο.

Στο BROUWER αυτό που έχουμε είναι ένα boolean κύκλωμα που σαν είσοδο δέχεται $3n$ bits, που είναι οι συντεταγμένες του σημείου πάνω στο πλέγμα των κυβιδίων, και σαν έξοδο έχει 2 bits που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\delta_i, 0 \leq i \leq 3$. Από την άλλη ένα Nash σημείο ισορροπίας είναι ένα σύνολο από κατανομές πιθανότητας πάνω στις στρατηγικές των παικτών. Αυτό που θέλουμε να κατασκευάσουμε, λοιπόν, είναι ένα παίγνιο που θα μιμείται το boolean κύκλωμα που χρωματίζει τα σημεία του κύβου και εφόσον καταλήξουμε σε ένα Nash σημείο ισορροπίας του παιγνίου να μπορούμε να βρούμε ένα τετραχρωματικό σημείο του μοναδιαίου κύβου σε πολυωνυμικό χρόνο.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι το παίγνιο θα πρέπει με κάποιο τρόπο να δέχεται σαν είσοδο το σημείο του μοναδιαίου κύβου, να μιμείται τις λογικές πύλες και να μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με το κύκλωμα σε κάθε σημείο του κύβου. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια κάποιων κατασκευών "υποπαιγνίων" που το καθένα από αυτά θα αντιστοιχεί σε μία λογική πύλη. Αναλυτικότερα, θα κατασκευάσουμε τα υποπαιγνια G_{\vee}, G_{\wedge} και G_{\neg} που το καθένα από αυτά έχει σαν Nash σημείο ισορροπίας την αντίστοιχη λογική πράξη που συμβολίζει. Στη συνέχεια ένας συνδυασμός αυτών των υποπαιγνίων θα μας δώσει το επιθυμητό boolean κύκλωμα.

Δυστυχώς, μόνο η προσομείωση του boolean κυκλώματος δεν αρκεί. Το σημείο μέσα στον $[0, 1]^3$ δεν δίνεται σε δυαδική μορφή, αλλά με τη μορφή μιας τριάδας $(x, y, z) \in [0, 1]^3$ δεκαδικών αριθμών. Συνεπώς, δεν μπορεί να εισαχθεί αμέσως στο κομμάτι του παιγνίου που μιμείται το boolean κυκλωμα, αλλά πρέπει πρώτα να μετατραπούν σε δυαδικούς αριθμούς. Για τη διαδικασία εξαγωγής των bit από τους δεκαδικούς αριθμούς κατασκευάζουμε και νέες κατασκευές "υποπαιγνια" που το κάθε ένα σε κάθε Nash σημείο ισορροπίας του δίνει το αποτέλεσμα της πράξης που έχει σχεδιαστεί να κάνει. Έτσι μετά από τη χρήση των υποπαιγνίων αυτών εξάγουμε τα n πρώτα bits από την κάθε

συντεταγμένη του σημείου και πλέον μπορούμε να τα εισάγουμε στο κομμάτι εκείνο του παιγνίου που μιμείται το boolean κύκλωμα.

Αλλά και εδώ υπάρχει ακόμη μία δυσκολία, καθώς η παραπάνω διαδικασία δεν δίνει πάντα το σωστό αποτέλεσμα. Αυτό οφείλεται στην κατασκευή $G_{<}$ που μιμείται τη σύγκριση μεταξύ δύο αριθμών και χρησιμοποιείται στην εξαγωγή των bits. Η κατασκευή αυτή σε κάποιες περιπτώσεις δεν δίνει το σωστό αποτέλεσμα και συνεπώς δεν μπορούμε να εισάγουμε το σημείο στο boolean κύκλωμα. Το λάθος αποτέλεσμα δεν οφείλεται στο σχεδιασμό της κατασκευής, αλλά στη φύση του υποπαιγνίου που συγκρίνει δύο αριθμούς. Για να ξεπεραστεί και αυτό το πρόβλημα, δεν υπολογίζεται η τιμή μόνο ενός σημείου $z = (x, y, z)$ αλλά πολλά σημεία γύρω από αυτό, εξασφαλίζοντας ότι το κύκλωμα θα δώσει το σωστό αποτέλεσμα. Στη συνέχεια βρίσκεται ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων του κυκλώματος και ελέγχουμε αν βρισκόμαστε σε ένα Nash σημείο ισορροπίας. Αν έχουμε Nash σημείο ισορροπίας τότε μπορούμε να βρούμε εύκολα και το κυβίδιο του μοναδιαίου κύβου που είναι τετραχρωματικό. Αν δεν είμαστε σε Nash σημείο ισορροπίας, το αποτέλεσμα που θα δώσει το boolean κύκλωμα μας λέει ποια συντεταγμένη του $z = (x, y, z)$ πρέπει να αυξήσουμε και να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία.

Τέλος, για να σιγουρευτούμε ότι όλα τα παραπάνω λειτουργούν κανονικά χρησιμοποιούμε ένα τέχνασμα που εξασφαλίζει θετική πιθανότητα σε κάθε στρατηγική του παιγνίου που συνεπάγεται ομαλή λειτουργία του κάθε υποπαιγνίου.

Συνοψίζοντας, η αναγωγή ξεκινά με ένα σημείο του μοναδιαίου κύβου, στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις αριθμητικές κατασκευές παίρνουμε πολλά σημεία γύρω από αυτό, έπειτα μετατρέπουμε κάθε σημείο στη δυαδική μορφή με τη χρήση ενός κομματιού του παιγνίου που αποτελείται από αριθμητικές κατασκευές, το κάθε σημείο στη δυαδική μορφή έρχεται σαν είσοδος στο κομμάτι εκείνο που αποτελείται από τις λογικές κατασκευές και μιμείται το boolean κύκλωμα και τέλος υπολογίζεται ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων και ελέγχουμε αν όντως πρόκειται για Nash σημείο ισορροπίας.

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω περιγραφή δεν αναφέρθηκε πουθενά ο αριθμός των παικτών του παιγνίου. Αυτό έγινε σκόπιμα καθώς με αυτή τη κατασκευή αποδείχθηκε ότι το 4-NASH είναι PPAD πλήρες, στη συνέχεια με ένα παραπάνω βήμα αποδείχθηκε ότι το 3-NASH είναι PPAD πλήρες και τέλος με την ίδια ακριβώς λογική με την παραπάνω, αλλά μία μικρή διαφοροποίηση στις στρατηγικές και στο διαχωρισμό των παικτών αποδείχθηκε ότι και το 2-NASH είναι πλήρες για την κλάση PPAD.

Η λογική της αναγωγής του BROUWER στο 4-NASH ήταν να κατασκευαστεί ένα graphical game GG που θα αναπαριστούσε το boolean κύκλωμα χρωματισμού C . Το GG αποτελείται από δύο ειδών κορυφές τις αριθμητικές και τις εσωτερικές όπου ο κάθε κόμβος έχει από δύο στρατηγικές. Για την επόμενη αναγωγή θα χρειαστούμε τον αριθμό k_0 που ορίζεται να είναι ο ακέραιος εκείνος για τον οποίο ισχύει για το οποιοδήποτε ζεύγος input $(C, 0^n)$ του BROUWER ο αριθμός των αριθμητικών κορυφών του graphical game GG να είναι μικρότερος ή ίσος του $|(C, 0^n)|^{k_0}$.

6.5.2 Βασικά στοιχεία της αναγωγής

Αφού έχουμε κατανοήσει τη λογική της αναγωγής θα προσδιορίσουμε τα κύρια σημεία για την αναγωγή του BROUWER στο 2NASH. Δηλαδή, δεδομένου ενός στιγμιότυπου του BROUWER θα κατασκευάσουμε ένα παίγνιο \mathcal{G} , σε πολυωνυμικό χρόνο, τέτοιο ώστε δεδομένου ενός ϵ -Nash σημείου ισορροπίας του παιγνίου να μπορούμε να βρούμε εύκολα μια πανχρωματική κορυφή της συνάρτησης ϕ , όπου $\epsilon = 2^{-(m+4n)}$ με m τον μικρότερο ακέραιο για τον οποίο ισχύει $2^m \geq |(C, 0^n)|^{k_0}$.

Αρχικά θα ορίσουμε τους παίκτες και θα τους ονομάσουμε P_1 και P_2 όπου ο κάθε παίκτης P_i θα έχει ένα σύνολο από κόμβους N_i , όπου $|N_i| = K = 2^m$. Ο κάθε κόμβος u περιέχει δύο στρατηγικές $(u, 0)$ και $(u, 1)$, οπότε το σύνολο στρατηγικών S_i του κάθε παίκτη P_i αποτελείται από συνολικά $2K$ στρατηγικές, όπου

$$S_i = \{(u, j) | u \in N_i, j \in \{0, 1\}\}, \quad i \in 1, 2$$

Θα αναφερόμαστε σε κόμβους του N_1 χρησιμοποιώντας το v και το w για αυτούς του N_2 . Δεδομένου ενός μεικτού προφίλ στρατηγικών \mathbf{p} του \mathcal{G} , θα χρησιμοποιούμε το $\mathbf{p}[v]$ για να συμβολίσουμε την πιθανότητα με την οποία ο P_1 θα επιλέξει τη στρατηγική $(v, 1)$ και το $\mathbf{p}_C[v]$ για την πιθανότητα ο P_1 να επιλέξει την $(v, 1)$ και την $(v, 2)$ που καλείται επίσης και χωρητικότητα της v στο προφίλ \mathbf{p} . Το ίδιο ισχύει και για τους κόμβους w του P_2 .

Η λογική της κατασκευής είναι παρόμοια με αυτή στο [8]. Οι κόμβοι στο N_1 είναι οι αριθμητικοί κόμβοι, ενώ αυτοί στο N_2 είναι οι εσωτερικοί κόμβοι. Οι κόμβοι $v \in N_1$ θα χρησιμοποιούνται για να έχουν τις τιμές για τις αριθμητικές και λογικές πράξεις, ενώ οι κόμβοι $w \in N_2$ βοηθούν σαν ενδιάμεσα βήματα για να πραγματοποιηθούν οι πράξεις αυτές. Θα κατασκευάσουμε gadgets που θα προσομοιώνουν τις λογικές και αριθμητικές πράξεις και κάθε κατασκευή θα έχει ακριβώς έναν εσωτερικό κόμβο $w \in N_2$.

Για να εξασφαλίζουμε ότι κάθε κόμβος θα έχει θετική πιθανότητα, το παίγνιο \mathcal{G} θα βασιστεί σε ένα άλλο παίγνιο \mathcal{G}^* που είναι μια γενίκευση του generalized matching pennies, με $M = 2^{4(m+n)+1}$

Ορισμός 6.3. Το παίγνιο δύο παικτών generalized matching pennies ορίζεται ως εξής: Καλούμε τους δύο παίκτες pursuer και evader και έστω το $[n] = 1, 2, \dots, n$ οι στρατηγικές τους. Αν για οποιοδήποτε $i \in [n]$ οι δύο παίκτες παίζουν i , τότε ο pursuer έχει payoff $u > 0$ και ο evader $-u$. Σε κάθε άλλη περίπτωση και οι δύο παίκτες έχουν κέρδος ίσο με μηδέν. Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι το παίγνιο έχει ένα μοναδικό Nash σημείο ισορροπίας όπου και οι δύο παίκτες χρησιμοποιούν την ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή παίζουν την κάθε αγνή στρατηγική τους ισοπίθανα.

Το \mathcal{G}^* έχει ίδιο αριθμό παικτών και ίδια σύνολα στρατηγικών με το \mathcal{G} και χρησιμοποιούμε το u^* για να συμβολίσουμε τα κέρδη του. Για να καταλήξουμε στο \mathcal{G} , προσθέτουμε τις κατασκευές στο \mathcal{G}^* και κάνουμε την διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως. Δηλαδή, προσομοιώνουμε τις συντεταγμένες του σημείου, τον υπολογισμό των σημείων γύρω από αυτό, την εξαγωγή των bits από όλα τα σημεία, την εισαγωγή τους στο λογικό κύκλωμα και τέλος τον υπολογισμό του χρώματος. Κάθε κατασκευή έχει ακριβώς έναν εσωτερικό κόμβο που ανήκει στο N_2 και το πολύ τρεις αριθμητικούς κόμβους του N_1 . Ο ένας αριθμητικός κόμβος καλείται κόμβος εξόδου και οι υπόλοιποι κόμβοι εισόδου. Έστω ο $w \in N_2$ και ο $v \in N_1$ να είναι ο εσωτερικός και ο αριθμητικός κόμβος αντίστοιχα.

Λέγοντας ότι προσθέτουμε την κατασκευή G στο \mathcal{G}^* εννοούμε ότι τροποποιούμε τα ακόλουθα κέρδη του \mathcal{G}^* που σχετίζονται με τα v και w :

- το κέρδος u_s^{*1} του P_1 όπου το αγνό προφίλ στρατηγικών s περιέχει τον κόμβο v
- το κέρδος u_s^{*2} του P_2 όπου το αγνό προφίλ στρατηγικών s περιέχει τον κόμβο w

Πιο συγκεκριμένα, θα προστεθούν ακέραιες σταθερές, που θα ανήκουν στο $[0, 1]$ σε αυτά τα κέρδη, ενώ όλα τα υπόλοιπα θα μείνουν ως έχουν. Για κάθε αριθμητικό κόμβο $v \in N_1$ υπάρχει ακριβώς μία κατασκευή στην οποία είναι κόμβος εξόδου, ενώ μπορεί να είναι κόμβος εισόδου σε τυχαία πολλές κατασκευές.

6.5.3 Τα κέρδη του \mathcal{G}^* και η κλάση παιγνίων \mathcal{L}

Τα κέρδη των δύο παικτών στο \mathcal{G}^* πρέπει να τα ορίσουμε έτσι ώστε να λειτουργεί το παίγνιο όπως το generalized matching pennies. Δηλαδή, πρέπει με κάποιο τρόπο να χωρίσουμε τους κόμβους σε ζευγάρια έτσι ώστε ο ένας να έχει το ρόλο του pursuer και ο άλλος του evader. Αυτό γίνεται με την παρακάτω διαδικασία που ορίζει τα κέρδη u^* , με $M = 2^{4(m+n)+1} = 2K^4 2^{4n}$.

Τα κέρδη u^* του παιγνίου \mathcal{G}^*	
1:	Διάλεξε μία ένα προς ένα αντιστοιχία T από το N_1 στο N_2
2:	for για κάθε αγνό προφίλ στρατηγικών $s = ((v, i_1), (w, i_2)), v \in N_1, w \in N_2, i_1, i_2 \in \{0, 1\}$ do
3:	if $T(v) = w$ then
4:	θέσε $u_s^{*1} = M$ και $u_s^{*2} = -M$
5:	else
6:	θέσε $u_s^{*1} = u_s^{*2} = 0$

Πίνακας 15: Κατασκευή των κερδών u^* του παιγνίου \mathcal{G}^*

Αφού ορίσαμε πλέον αυστηρά το παίγνιο \mathcal{G}^* θα ορίσουμε μία κλάση παιγνίων \mathcal{L} που βασίζονται στο παίγνιο αυτό.

Ορισμός 6.4. Ένα παίγνιο 2 παικτών \mathcal{G}' , με ίδια σύνολα στρατηγικών όπως το \mathcal{G} , ανήκει στην \mathcal{L} αν για τα κέρδη του u' ισχύει ότι $u_s'^i \in [u_s^{*i}, u_s^{*i} + 1]$ για οποιοδήποτε προφίλ $s \in S_1 \times S_2$ και $i \in \{1, 2\}$.

Σε κάθε παίγνιο $\mathcal{G}' \in \mathcal{L}$ οι παίκτες επιλέγουν τους κόμβους με την ομοιόμορφη κατανομή σε οποιοδήποτε ≤ 1 -Nash σημεία ισορροπίας. Επίσης, τα παίγνια της κλάσης \mathcal{L} έχουν την παρακάτω ιδιότητα:

Λήμμα 6.5. Έστω \mathbf{p} κάποιο ≤ 1 -Nash σημείο ισορροπίας του παιγνίου $\mathcal{G}' \in \mathcal{L}$. Τότε για οποιοδήποτε κόμβους $v \in N_1, w \in N_2$ ισχύει ότι $\frac{1}{K} - \epsilon < \mathbf{p}_C[v], \mathbf{p}_C[w] < \frac{1}{K} + \epsilon$

Έχοντας ορίσει πλήρως το παίγνιο \mathcal{G}^* και την κλάση παιγνίων \mathcal{L} μένει να περιγράψουμε τις κατασκευές που προσομοιώνουν τις λογικές και τις αριθμητικές πράξεις και να τα εισάγουμε στο \mathcal{G}^* και να ολοκληρώσουμε την αναγωγή.

6.5.4 Οι κατασκευές

Στο κομμάτι αυτό θα περιγράψουμε αυστηρά τις κατασκευές που σαν σκοπό έχουν την προσομοίωση των λογικών και των αριθμητικών πράξεων. Όταν λέμε ότι ο κόμβος v αποθηκεύει το 1 σημαίνει ότι $\mathbf{p}[v] = \mathbf{p}_C[v]$ και όταν αποθηκεύει το 0 ότι $\mathbf{p}[v] = 0$.

Πρόταση 6.6. (Gadget \mathbf{G}_+) Έστω \mathcal{G}' ένα παίγνιο δύο παικτών, με κέρδη u' , στην \mathcal{L} και κόμβους $v_1, v_2, v_3 \in N_1$ και $w \in N_2$. Έστω τα αγνά προφίλ στρατηγικών $s_1 = ((v_1, 1), (w, 1)), s_2 = ((v_2, 1), (w, 1)), s_3 = ((v_3, 1), (w, 0)), s_4 = ((v_3, 1), (w, 1))$ και $s_5 = ((v_3, 0), (w, 0))$. Αν το \mathcal{G}' ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $u_{s_1}'^2 = u_{s_1}^{*2} + 1, u_{s_2}'^2 = u_{s_2}^{*2} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 1), u_s'^2 = u_s^{*2}$
2. $u_{s_3}'^2 = u_{s_3}^{*2} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 0), u_s'^2 = u_s^{*2}$
3. $u_{s_4}'^1 = u_{s_4}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_3, 1), u_s'^1 = u_s^{*1}$
4. $u_{s_5}'^1 = u_{s_5}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_3, 0), u_s'^1 = u_s^{*1}$

τότε σε οποιοδήποτε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G}' ισχύει ότι $\mathbf{p}[v_3] = \min(\mathbf{p}[v_1] + \mathbf{p}[v_2], \mathbf{p}_C[v_3]) \pm \epsilon$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες 1. – 4. δείχνουν ότι σε οποιοδήποτε μεικτό προφίλ του παιγνίου \mathcal{G}' έχουμε:

κέρδος του P_2 αν επιλέξει $(w, 1)$ - κέρδος του P_2 αν επιλέξει $(w, 0) = \mathbf{p}[v_1] + \mathbf{p}[v_2] - \mathbf{p}[v_3]$

κέρδος του P_1 αν επιλέξει $(v_3, 1)$ - κέρδος του P_1 αν επιλέξει $(v_3, 0) = \mathbf{p}[w] - (\mathbf{p}_C[w] - \mathbf{p}[w])$

Αν $\mathbf{p}[v_3] - (\mathbf{p}[v_1] + \mathbf{p}[v_2]) > \epsilon$, τότε η πρώτη σχέση δείχνει ότι $\mathbf{p}[w] = 0$ που είναι αντίθετο με την υπόθεση ότι $\mathbf{p}[v_3] > \mathbf{p}[v_1] + \mathbf{p}[v_2] + \epsilon > 0$.

Αν $\mathbf{p}[v_3] - (\mathbf{p}[v_1] + \mathbf{p}[v_2]) < -\epsilon$ τότε η πρώτη σχέση δείχνει ότι $\mathbf{p}[w] = \mathbf{p}_C[w]$ και η δεύτερη ότι $\mathbf{p}[v_3] = \mathbf{p}_C[v_3]$.

Εφόσον $\mathbf{p}_C[v_3] = \mathbf{p}[v_3] < \mathbf{p}[v_1] + \mathbf{p}[v_2]$, έχουμε ότι $\mathbf{p}[v_3] = \mathbf{p}_C[v_3] > \mathbf{p}_C[v_3] - \epsilon = \min(\mathbf{p}[v_1] + \mathbf{p}[v_2], \mathbf{p}_C[v_3]) \pm \epsilon$. \square

Για τις επόμενες κατασκευές δεν θα δώσουμε απόδειξη καθώς είναι παρόμοια με την παραπάνω.

Πρόταση 6.7. (Gadget \mathbf{G}_ζ)(με $\zeta \leq 1/K - \epsilon$) Έστω \mathcal{G}' ένα παίγνιο δύο παικτών, με κέρδη u' , στην \mathcal{L} και κόμβους $v \in N_1$ και $w \in N_2$. Έστω τα αγνά προφίλ στρατηγικών $s_1 = ((v, 1), (w, 1))$, $s_2 = ((v, 1), (w, 0))$, $s_3 = ((v, 0), (w, 1))$. Αν το \mathcal{G}' ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $u'_{s_1} = u_{s_1}^{*2} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 1)$, $u'_s = u_s^{*2}$

2. για κάθε s που περιέχει το $(w, 0)$, $u'_s = u_s^{*2} + \zeta$

3. $u'_{s_2} = u_{s_2}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v, 1)$, $u'_s = u_s^{*1}$

4. $u'_{s_3} = u_{s_3}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v, 0)$, $u'_s = u_s^{*1}$

τότε σε οποιοδήποτε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G}' ισχύει ότι $\mathbf{p}[v] = \zeta \pm \epsilon$.

Πρόταση 6.8. (Gadget $\mathbf{G}_{\times\zeta}$)(με $\zeta \leq 1$) Έστω \mathcal{G}' ένα παίγνιο δύο παικτών, με κέρδη u' , στην \mathcal{L} και κόμβους $v_1, v_2 \in N_1$ και $w \in N_2$. Έστω τα αγνά προφίλ στρατηγικών $s_1 = ((v_1, 1), (w, 1))$, $s_2 = ((v_2, 1), (w, 0))$, $s_3 = ((v_2, 1), (w, 1))$ και $s_4 = ((v_2, 0), (w, 0))$. Αν το \mathcal{G}' ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $u'_{s_1} = u_{s_1}^{*2} + \zeta$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 1)$, $u'_s = u_s^{*2}$

2. $u'_{s_2} = u_{s_2}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 0)$, $u'_s = u_s^{*2}$

3. $u'_{s_3} = u_{s_3}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_2, 1)$, $u'_s = u_s^{*1}$

4. $u'_{s_4} = u_{s_4}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_2, 0)$, $u'_s = u_s^{*1}$

τότε σε οποιοδήποτε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G}' ισχύει ότι $\mathbf{p}[v_2] = \min(\zeta\mathbf{p}[v_1], \mathbf{p}_C[v_2]) \pm \epsilon$.

Πρόταση 6.9. (Gadget $\mathbf{G}_=$) Η κατασκευή $G_=$ είναι μια ειδική περίπτωση του $G_{\times\zeta}$, βάζοντας $\zeta = 1$. Τότε σε οποιοδήποτε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G}' ισχύει ότι $\mathbf{p}[v_2] = \min(\mathbf{p}[v_1], \mathbf{p}_C[v_2]) \pm \epsilon$

Πρόταση 6.10. (Gadget \mathbf{G}_-) Έστω \mathcal{G}' ένα παίγνιο δύο παικτών, με κέρδη u' , στην \mathcal{L} και κόμβους $v_1, v_2, v_3 \in N_1$ και $w \in N_2$. Έστω τα αγνά προφίλ στρατηγικών $s_1 = ((v_1, 1), (w, 1))$, $s_2 = ((v_2, 1), (w, 0))$, $s_3 = ((v_3, 1), (w, 0))$, $s_4 = ((v_3, 1), (w, 1))$ και $s_5 = ((v_3, 0), (w, 0))$. Αν το \mathcal{G}' ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $u'_{s_1} = u_{s_1}^{*2} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 1)$, $u'_s = u_s^{*2}$

2. $u'_{s_2} = u_{s_2}^{*2} + 1$, $u'_{s_3} = u_{s_3}^{*2} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 0)$, $u'_s = u_s^{*2}$

3. $u'_{s_4} = u_{s_4}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_3, 1)$, $u'_s = u_s^{*1}$

4. $u'_{s_5} = u_{s_5}^{*1} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_3, 0)$, $u'_s = u_s^{*1}$

τότε σε οποιοδήποτε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G}' ισχύει ότι $\min(\mathbf{p}[v_1] - \mathbf{p}[v_2], \mathbf{p}_C[v_3]) - \epsilon \leq \mathbf{p}[v_3] \leq \max(\mathbf{p}[v_1] - \mathbf{p}[v_2], 0) + \epsilon$.

Πρόταση 6.11. (Gadget $\mathbf{G}_<$) Έστω \mathcal{G}' ένα παίγνιο δύο παικτών, με κέρδη u' , στην \mathcal{L} και κόμβους $v_1, v_2 \in N_1$ και $w \in N_2$. Έστω τα αγνά προφίλ στρατηγικών $s_1 = ((v_1, 1), (w, 1))$, $s_2 = ((v_2, 1), (w, 0))$, $s_3 = ((v_3, 1), (w, 0))$, $s_4 = ((v_3, 0), (w, 1))$. Αν το \mathcal{G}' ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $u'_{s_1} = u_{s_1}^{*2} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 1)$, $u'_s = u_s^{*2}$

2. $u'_{s_2} = u_{s_2}^{*2} + 1$, $u'_{s_3} = u_{s_3}^{*2} + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 0)$, $u'_s = u_s^{*2}$

3. $u'_{s_3} = u_{s_3}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_3, 1)$, $u'_s = u_s^*$
4. $u'_{s_4} = u_{s_4}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_3, 0)$, $u'_s = u_s^*$

τότε σε οποιοδήποτε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G}' ισχύει ότι $\mathbf{p}[v_3] = \mathbf{p}_C[v_3]$ αν $\mathbf{p}[v_1] < \mathbf{p}[v_2] - \epsilon$ και $\mathbf{p}[v_3] = 0$ αν $\mathbf{p}[v_1] > \mathbf{p}[v_2] + \epsilon$.

Πρόταση 6.12. (Gadget G_{\vee}) Έστω \mathcal{G}' ένα παίγνιο δύο παικτών, με κέρδη u' , στην \mathcal{L} και κόμβους $v_1, v_2 \in N_1$ και $w \in N_2$. Έστω τα αγνά προφίλ στρατηγικών $s_1 = ((v_1, 1), (w, 1))$, $s_2 = ((v_2, 1), (w, 1))$, $s_3 = ((v_3, 1), (w, 1))$, $s_4 = ((v_3, 0), (w, 0))$. Αν το \mathcal{G}' ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $u'_{s_1} = u_{s_1}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 1)$, $u'_s = u_s^*$
2. για οποιοδήποτε s που περιέχει το $(w, 0)$, $u'_s = u_s^* + 1/(2K)$
3. $u'_{s_3} = u_{s_3}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_3, 1)$, $u'_s = u_s^*$
4. $u'_{s_4} = u_{s_4}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_3, 0)$, $u'_s = u_s^*$

τότε σε οποιοδήποτε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G}' ισχύει ότι $\mathbf{p}[v_3] = \mathbf{p}_C[v_3]$ αν $\mathbf{p}[v_1] = \mathbf{p}_C[v_1]$ ή $\mathbf{p}[v_2] = \mathbf{p}_C[v_2]$ και $\mathbf{p}[v_3] = 0$ αν $\mathbf{p}[v_1] = \mathbf{p}[v_2] = 0$.

Πρόταση 6.13. (Gadget G_{\wedge}) Η κατασκευή G_{\wedge} είναι παρόμοια με το G_{\vee} . Απλά αλλάζουμε τη σταθερά στη συνθήκη 2. της προηγούμενης κατασκευής από $1/(2K)$ σε $3/(2K)$ και τότε σε κάθε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} ισχύει ότι $\mathbf{p}[v_3] = 0$ αν $\mathbf{p}[v_1] = 0$ ή $\mathbf{p}[v_2] = 0$ και $\mathbf{p}[v_3] = \mathbf{p}_C[v_3]$ αν $\mathbf{p}[v_1] = \mathbf{p}_C[v_1]$ και $\mathbf{p}[v_2] = \mathbf{p}_C[v_2]$.

Πρόταση 6.14. (Gadget G_{\neg}) Έστω \mathcal{G}' ένα παίγνιο δύο παικτών, με κέρδη u' , στην \mathcal{L} και κόμβους $v_1, v_2 \in N_1$ και $w \in N_2$. Έστω τα αγνά προφίλ στρατηγικών $s_1 = ((v_1, 1), (w, 1))$, $s_2 = ((v_2, 1), (w, 0))$, $s_3 = ((v_2, 1), (w, 0))$, $s_4 = ((v_2, 0), (w, 1))$. Αν το \mathcal{G}' ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $u'_{s_1} = u_{s_1}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 1)$, $u'_s = u_s^*$
2. $u'_{s_2} = u_{s_2}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(w, 0)$, $u'_s = u_s^*$
3. $u'_{s_3} = u_{s_3}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_2, 1)$, $u'_s = u_s^*$
4. $u'_{s_4} = u_{s_4}^* + 1$ και σε οποιοδήποτε άλλο s που περιέχει το $(v_2, 0)$, $u'_s = u_s^*$

τότε σε οποιοδήποτε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} ισχύει ότι $\mathbf{p}[v_2] = 0$ αν $\mathbf{p}[v_1] = \mathbf{p}_C[v_1]$ και $\mathbf{p}[v_2] = \mathbf{p}_C[v_2]$ αν $\mathbf{p}[v_1] = 0$.

Αφού περιγράψαμε και τις εννέα κατασκευές είμαστε έτοιμοι να τα χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε το τελικό παίγνιο \mathcal{G} . Θα χρησιμοποιούμε το $G_{\zeta}(v, w)$ για να συμβολίσουμε την εισαγωγή μιας κατασκευής G_{ζ} στο \mathcal{G}^* με τον v σαν κόμβο εξόδου και τον w σαν εσωτερικό κόμβο. Για τις κατασκευές με έναν κόμβο εισόδου, δηλαδή τα $G_{\times\zeta}$, G_{\neg} , $G_{=}$, χρησιμοποιούμε το $G(v_1, v_2, w)$ για την εισαγωγή τους όπου τα v_1, v_2, w είναι κόμβοι εισόδου, εξόδου και εσωτερικός αντίστοιχα. Τέλος, οι υπόλοιπες κατασκευές που έχουν δυο κόμβους εισόδου τα συμβολίζουμε με $G(v_1, v_2, v_3, w)$ όπου οι δύο πρώτοι είναι οι κόμβοι εισόδου, ο v_3 είναι ο κόμβος εξόδου και ο w είναι ο εσωτερικός.

Αν προσέξουμε την κατασκευή $G_{<}$ θα παρατηρήσουμε ότι στο $\mathbf{p}[v_3]$ δεν ορίζουμε τι θα γίνει αν $|\mathbf{p}[v_1] - \mathbf{p}[v_2]| \leq \epsilon$. Αυτό το πρόβλημα λύνεται παίρνοντας αντί για ένα σημείο του μοναδιαίου κύβου, πολλά και κοντινά μεταξύ τους και στη συνέχεια υπολογίζεται ο μέσος όρος των αποτελεσμάτων. Για την ακρίβεια, παίρνονται 41^3 σημεία της μορφής $(x + p\alpha, y + q\alpha, z + r\alpha)$ με $-20 \leq p, q, r \leq 20$, όπου $\alpha = 2^{-2n}$ από το BROUWER.

6.5.5 Κατασκευή του παιγνίου \mathcal{G}

Η κατασκευή του \mathcal{G} αποτελείται από 5 βήματα. Πριν δούμε αναλυτικά το καθένα, θα δώσουμε διαισθητικά την κατασκευή του παιγνίου. Υπάρχουν 3 διακεκριμένοι κόμβοι, οι v_x, v_y, v_z στο N_1 , και οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbf{p}[v_x], \mathbf{p}[v_y], \mathbf{p}[v_z]$ που κωδικοποιούν το σημείο $\mathbf{t} = (x, y, z)$ του μοναδιαίου κύβου, όπου $x = K\mathbf{p}[v_x], y = K\mathbf{p}[v_y], z = K\mathbf{p}[v_z]$. Αν το C_{ijk} είναι το κυβίδιο που περιέχει το σημείο, ξεκινάμε από τα v_x, v_y, v_z , εξάγουμε n bits από το καθένα που αναπαριστούν την τριάδα

i, j, k και χρησιμοποιούμε τις κατασκευές των λογικών πράξεων για να προσομοιώσουμε το boolean κύκλωμα C του BROUWER. Με αυτό το τρόπο βρίσκουμε το διάνυσμα δ_i που θα προστεθεί στο c_{ijk} .

Ομως, όπως έχουμε προαναφέρει, μόνο αυτό δεν επαρκεί. Θα επαναλάβουμε τη διαδικασία για τα 41^3 σημεία και στο τέλος θα βρούμε το μέσο όρο των αποτελεσμάτων. Τελος, αφού προσθέσουμε το μέσο όρο στα $\mathbf{p}[v_x], \mathbf{p}[v_y], \mathbf{p}[v_z]$ χρησιμοποιούμε το gadget G_- για να ελέγξουμε ότι στο ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} , ο μέσος όρος των διανυσμάτων είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Η τελευταία ιδιότητα εγγυάται ότι υπάρχει μια πανχρωματική κορυφή κοντά στο \mathbf{t} , που μπορεί να βρεθεί εύκολα από το \mathbf{p} .

Βήμα1 Ξεκινώντας από τις τρεις διακεκριμένες κορυφές $v_x, v_y, v_z \in N_1$, για κάθε $-20 \leq i \leq 20$ υπάρχουν τρεις οι κόμβοι $v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i} \in N_1$. Προσθέτοντας τις κατασκευές G_{zeta}, G_-, G_+ ελέγχουμε ότι σε κάθε ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G} ισχύει ότι $\mathbf{p}[v_{x_i}] = \min(\mathbf{p}[v_x] + i\alpha', \mathbf{p}_C[v_{x_i}]) \pm 4\epsilon$ αν $i \geq 0$ και $\mathbf{p}[v_{x_i}] = \min(\mathbf{p}[v_x] + i\alpha', 0) \pm 4\epsilon$ αν $i < 0$, όπου $\alpha' = \alpha 2^{-m}$. Κάνουμε το ίδιο και για τους κόμβους v_{y_i} και v_{z_i} .

Αυτά είναι τα 41^3 σημεία που με βάση αυτά θα υπολογίσει στη συνέχεια το μέσο όρο των διανυσμάτων δ_i .

Βήμα2 Για κάθε $-20 \leq p \leq 20$ εξάγουμε συνολικά $3n$ bits από τα $\mathbf{p}[v_{x_p}], \mathbf{p}[v_{y_p}], \mathbf{p}[v_{z_p}]$, ξεκινώντας από το $(m+1)$ -bit και φτάνοντας στο $(m+n)$ -bit, και τα αποθηκεύουμε στους κομβούς $v_{x_p}^i, v_{y_p}^i, v_{z_p}^i \in N_1$ όπου $1 \leq i \leq n$. Η εξαγωγή των n bits από τον κάθε κόμβο γίνεται με την παρακάτω διαδικασία, που ουσιαστικά είναι ένα δίκτυο από gadgets.

	Εξαγωγή n bits από το $\mathbf{p}[v_{x_p}]$
1:	Πάρε τους χρησιμοποιήσιμους κόμβους $v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in N_1$ και $w \in N_2$
2:	$G_-(v_{x_p}, v_1, w)$
3:	for κάθε $1 \leq i \leq n$ do
4:	πάρε χρησιμοποιήσιμους κόμβους $v^1, v^2, v^3 \in N_1$ και $w^1, w^2, w^3, w^4 \in N_2$
5:	$G_{2-(m+i)}(v^1, w^1), G_<(v^1, v_i, v^2, w^2), G_{\times 2^{-i}}(v^2, v^3, w^3), G_-(v_i, v^3, v_{i+1}, w^4)$

Πίνακας 16: Εξαγωγή των n bits από το $\mathbf{p}[v_{x_p}]$. Η ίδια διαδικασία γίνεται και για τους κόμβους $\mathbf{p}[v_{y_p}], \mathbf{p}[v_{z_p}]$.

Αν και ελπίζουμε ότι $\mathbf{p}[v_{x_p}^i] = 0$ όταν το $(m+1)$ bit του $\mathbf{p}[v_{x_p}]$ είναι 0, και $\mathbf{p}[v_{x_p}^i] = \mathbf{p}_C[v_{x_p}^i]$ όταν είναι 1, αυτό μπορεί να μην είναι αληθές λόγω της κατασκευής $G_<$.

Λήμμα 6.15. Αν $\mathbf{p}[v_{x_p}] \geq 1/K - 61\alpha'$, τότε $\mathbf{p}[v_{x_p}^i] = \mathbf{p}_C[v_{x_p}^i]$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Αν $\mathbf{p}[v_{x_p}] \leq 61\alpha'$, τότε $\mathbf{p}[v_{x_p}^i] = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Διαφορετικά, αν το $\mathbf{p}[v_{x_p}]$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\left| \mathbf{p}[v_{x_p}] - \frac{|2^{n+m}\mathbf{p}[v_{x_p}]|}{2^{n+m}} \right| > n^2\epsilon$$

τότε $\mathbf{p}[v_{x_p}^i] = 0$ αν το $(m+i)$ bit του πραγματικού αριθμού $\mathbf{p}[v_{x_p}]$ είναι 0 και $\mathbf{p}[v_{x_p}^i] = \mathbf{p}_C[v_{x_p}^i]$ αν είναι 1, για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Το παραπάνω λήμμα είναι εύκολο να ελεγχθεί και ισχύει επίσης για τα $v_{y_p}^i, v_{z_p}^i$.

Στο βήμα αυτό, ουσιαστικά παίρνουμε τη δυαδική μορφή των σημείων που έχουμε υπολογίσει στο προηγούμενο βήμα με σκοπό να δώσουμε τη μορφή αυτή σαν είσοδο στις κατασκευές που προσομοιώνουν το boolean κύκλωμα C .

Βήμα3 Για κάθε $-20 \leq p, q, r \leq 20$ βάζουμε τους $3n$ κόμβους $v_{x_p}^i, v_{y_p}^i, v_{z_p}^i \in N_1, 1 \leq i \leq n$ σαν είσοδο στο boolean κύκλωμα C και χρησιμοποιούμε τις κατασκευές λογικών πράξεων G_V, G_\wedge, G_-

για να το προσομοιώσουμε. Την έξοδο του C τη μετατρέπουμε σε 6 bits από τα 2 που ήταν στην αρχική αναγωγή της PPAΔ πληρότητας του BROUWER. Η ίδια διαδικασία έγινε και στην αρχική απόδειξη του 4-NASH. Αντί λοιπόν για τα 2 bits έχουμε πλέον 6 bits έξοδου τα $\Delta x^+, \Delta x^-, \Delta y^+, \Delta y^-, \Delta z^+, \Delta z^-$ που όμως έχουν μόνο τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς που είναι ισοδύναμο με την αρχική έξοδο. Οι τέσσερις συνδυασμοί είναι οι εξής:

1. $\Delta x^+ = 1$ και τα άλλα πέντε bits είναι 0 $\implies \delta = \delta_1 = (\alpha, 0, 0)$
2. $\Delta y^+ = 1$ και τα άλλα πέντε bits είναι 0 $\implies \delta = \delta_2 = (0, \alpha, 0)$
3. $\Delta z^+ = 1$ και τα άλλα πέντε bits είναι 0 $\implies \delta = \delta_3 = (0, 0, \alpha)$
4. $\Delta x^- = \Delta y^- = \Delta z^- = 1$ και τα άλλα τρία bits είναι 0 $\implies \delta = \delta_0 = (\alpha, \alpha, \alpha)$

Τα bits εξόδου αποθηκεύονται σε 6 κόμβους $\Delta x_{pqr}^+, \Delta x_{pqr}^-, \Delta y_{pqr}^+, \Delta y_{pqr}^-, \Delta z_{pqr}^+, \Delta z_{pqr}^- \in N_1$.

Βήμα4 Πάρε 6 νέους κόμβους $\Delta x^+, \Delta x^-, \Delta y^+, \Delta y^-, \Delta z^+, \Delta z^- \in N_1$. Χρησιμοποιώντας τις κατασκευές $G_{\times\zeta}$ και G_+ σιγουρευόμαστε ότι σε κάθε ϵ -Nash ισορροπίας \mathbf{p} του παίγνιου \mathcal{G} ισχύει:

$$\mathbf{p}[\Delta x^+] = \left(\sum_{p,q,r} \frac{\alpha}{41^3} \mathbf{p}[\Delta x_{pqr}^+] \right) \pm 3 \cdot 41^3 \epsilon \quad \mathbf{p}[\Delta x^-] = \left(\sum_{p,q,r} \frac{\alpha}{41^3} \mathbf{p}[\Delta x_{pqr}^-] \right) \pm 3 \cdot 41^3 \epsilon$$

και κάνουμε τον ίδιο έλεγχο και για τους κόμβους $\Delta y^+, \Delta y^-, \Delta z^+, \Delta z^-$.

Βήμα5 Πάρε τους αχρησιμοποίητους κόμβους $v_1, v_2, v_3, v'_x, v'_y, v'_z \in N_1, w_1, \dots, w_9 \in N_2$ και πρόσθεσε τις επόμενες εννιά κατασκευές στο παίγνιο \mathcal{G}^*

$$\begin{array}{lll} G_+(v_x, \Delta x^+, v_1, w_1) & G_-(v_1, \Delta x^-, v'_x, w_2) & G_=(v'_x, v_x, w_3) \\ G_+(v_y, \Delta y^+, v_2, w_4) & G_-(v_2, \Delta y^-, v'_y, w_5) & G_=(v'_y, v_y, w_6) \\ G_+(v_z, \Delta z^+, v_3, w_7) & G_-(v_3, \Delta z^-, v'_z, w_8) & G_=(v'_z, v_z, w_9) \end{array}$$

Αν μεταφράσουμε τη λειτουργία των παραπάνω κατασκευών θα δούμε ότι αυτό που κάνει ουσιαστικά είναι να ελέγχει αν είμαστε κοντά σε ένα σταθερό σημείο, από τη στιγμή που το διάνυσμα που προκύπτει να προστεθεί στο σημείο είναι πολύ κοντά στο μηδέν και άρα υπάρχει μια πανχρωματική κορυφή κοντά στο σημείο που είμαστε.

6.5.6 Η αναγωγή

Προφανώς, το παίγνιο \mathcal{G} ανήκει στην \mathcal{L} και όλες οι κατασκευές που έχουμε εισάγει λειτουργούν όπως πρέπει μέσα σε αυτό. Το μέγεθος του \mathcal{G} είναι πολυωνυμικό σε μέγεθος σε σχέση με το $|(C, 0^n)|$, καθώς και ο αριθμός των στρατηγικών και ο αριθμός των bits που χρειάζονται να αναπαραστήσουν τα κέρδη u_s^i είναι πολυωνυμικά στο $|(C, 0^n)|$. Επίσης, το \mathcal{G} μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο από το $(C, 0^n)$. Τέλος με το επόμενο θεώρημα δείχνουμε ότι δεδομένου ενός ϵ -Nash σημείου ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G} , όπου $\epsilon = 2^{-(m+2n)}$, μια πανχρωματική κορυφή του $(C, 0^n)$ μπορεί να βρεθεί εύκολα.

Θεώρημα 6.16. [5] Έστω το ϵ -Nash σημείο ισορροπίας \mathbf{p} του \mathcal{G} που φτιάξαμε παραπάνω. $x = K\mathbf{p}[v_x], y = K\mathbf{p}[v_y], z = K\mathbf{p}[v_z]$, όπου $K = 2^m$. Έστω p, q, r τρεις ακέραιοι που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{aligned} (p-1)2^{-n} &< x - 30\alpha < x + 30\alpha < (p+1)2^{-n} \\ (q-1)2^{-n} &< y - 30\alpha < y + 30\alpha < (q+1)2^{-n} \\ (r-1)2^{-n} &< z - 30\alpha < z + 30\alpha < (r+1)2^{-n} \end{aligned}$$

τότε η κορυφή $p2^{-n}, q2^{-n}, r2^{-n}$ είναι μια πανχρωματική κορυφή του $(C, 0^n)$.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε ένα λήμμα που πρωτοαποδείχτηκε στο 4-NASH **Να δώσω reference**.

Λήμμα 6.17. [8] Έστω ότι οι μη αρνητικοί ακέραιοι k_0, k_1, k_2, k_3 και έστω οι τρεις συντεταγμένες του $\sum_{i=0}^3 k_i \delta_i$ ότι είναι απολύτως μικρότερες από $\alpha k/5$ όπου $k = \sum_{i=0}^3 k_i$. Τότε και τα τέσσερα k_i είναι θετικά.

Απόδειξη. Έστω ότι $k_1 = 0$. Τότε θα έχουμε $k_0 < k/5$, διαφορετικά η αρνητική συντεταγμένη x του $\sum_{i=0}^3 k_i \delta_i$ θα είναι πολύ μεγάλη. Οπότε κάποιο από τα k_2, k_3 είναι μεγαλύτερο από $2k/5$ και κάνει την αντίστοιχη συντεταγμένη του $\sum_{i=0}^3 k_i \delta_i$ πολύ μεγάλη, πράγμα άτοπο. Ομοίως αν $k_2 = 0$ ή $k_3 = 0$. Τέλος, αν $k_0 = 0$, τότε ένα από τα k_1, k_2, k_3 είναι τουλάχιστον $k/3$ και η αντίστοιχη συντεταγμένη του $\sum_{i=0}^3 k_i \delta_i$ είναι τουλάχιστον $\alpha k/3$, που πάλι είναι άτοπο. \square

Αφου δείξαμε και το λήμμα μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.16.

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το σημείο $\mathbf{t} = (x, y, z)$ δεν μπορεί να είναι κοντά στα σύνορα του μοναδιαίου κύβου. Αν $\mathbf{p}[v_x] \leq 40\alpha'$, τότε το Λήμμα 6.15 δείχνει ότι για κάθε $-20 \leq i, j, k \leq 20$ έχουμε ότι $\mathbf{p}[\Delta x_{ijk}^+] = \mathbf{p}_C[\Delta x_{ijk}^+]$. Οπότε το $\mathbf{p}[\Delta x^+]$ είναι πολύ κοντά στο $\alpha' = \alpha 2^{-m}$, ενώ το $\mathbf{p}[\Delta x^-]$ είναι πολύ κοντά στο 0. Καθώς το α' είναι πολύ μεγαλύτερο από το ϵ έχουμε πρόβλημα στο $G = (v'_x, v_x, w_3)$ στο **Βήμα 5**. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\mathbf{p}[v_x] < 1/K - 40\alpha'$. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και για τα $\mathbf{p}[v_y], \mathbf{p}[v_z]$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε την υπέρβαση των ακεραίων p, q, r που ικανοποιούν τις τρεις παραπάνω συνθήκες. Έστω T το σύνολο των οκτώ κέντρων γύρω από $(p2^{-n}, q2^{-n}, r2^{-n})$, $V = \{(i, j, k), -20 \leq i, j, k \leq 20\}$ και το V_1 είναι το υποσύνολο του V έτσι ώστε η τριάδα $(i, j, k) \in V_1$ αν και μόνον αν

$$\left| \mathbf{p}[v_{x_i}] - p2^{-(n+m)} \right| \leq n^2 \epsilon \quad \text{ή} \quad \left| \mathbf{p}[v_{y_j}] - q2^{-(n+m)} \right| \leq n^2 \epsilon \quad \text{ή} \quad \left| \mathbf{p}[v_{z_k}] - r2^{-(n+m)} \right| \leq n^2 \epsilon$$

Από τη στιγμή που το α' είναι πολύ μεγαλύτερο από το ϵ , έχουμε ότι $|V_1| \leq 3 \cdot 41^2$. Για κάθε τριάδα $(i, j, k) \in V - V_1$ το Λήμμα 6.15 δείχνει ότι όλα τα $3n$ bits των $\mathbf{p}[v_{x_i}], \mathbf{p}[v_{y_j}], \mathbf{p}[v_{z_k}]$ έχουν εξαχθεί με επιτυχία και οι τιμές των $\Delta \times_{ijk}^\pm$ πρέπει να δείχνουν μία μετατόπιση ίδια με αυτή των κέντρων του T . Έστω k_t , με $0 \leq t \leq 3$, ο αριθμός των τριάδων στο $V - V_1$ των οποίων οι τιμές $\Delta \times_{ijk}^\pm$ σημαίνουν το διάνυσμα δ_t , τότε και τα τέσσερα k_i πρέπει να είναι θετικά σύμφωνα με το Λήμμα 6.17, που δείχνει ότι το $(p2^{-n}, q2^{-n}, r2^{-n})$ είναι μια πανχρωματική κορυφή του $(C, 2^n)$. \square

Με το παραπάνω θεώρημα ολοκληρώνεται η αναγωγή του BROUWER στο 2-NASH και συνεπώς ότι το 2-NASH είναι PPAD πλήρες.

6.6 Τα Gale strings και η κλάση PPAD

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις δεικτοδοτημένες συμβολοσειρές gale. Με αυτά είχε γίνει μια διαφορετική προσέγγιση για τον ορισμό της κλάσης PPAD, μέσω των κατευθυνόμενων μονοπατιών που όριζαν οι παραπάνω συμβολοσειρές, που παρόλα αυτά φαίνεται ότι δεν είναι τόσο ισχυρά για να ορίσουν την κλάση. Αυτό γιατί δεν μπορούν, όπως είχαμε προαναφέρει, να περιγράψουν ένα τυχαίο παίγνιο, αλλά μόνο κάποια από αυτά. Αν τελικά μπορούσαμε να ορίσουμε την κλάση με τις συγκεκριμένες συμβολοσειρές θα ήταν ένας πολύ απλούστερος και κατανοητός ορισμός της κλάσης, αλλά αποδείχτηκε ότι αυτό δεν μπορεί να γίνει.

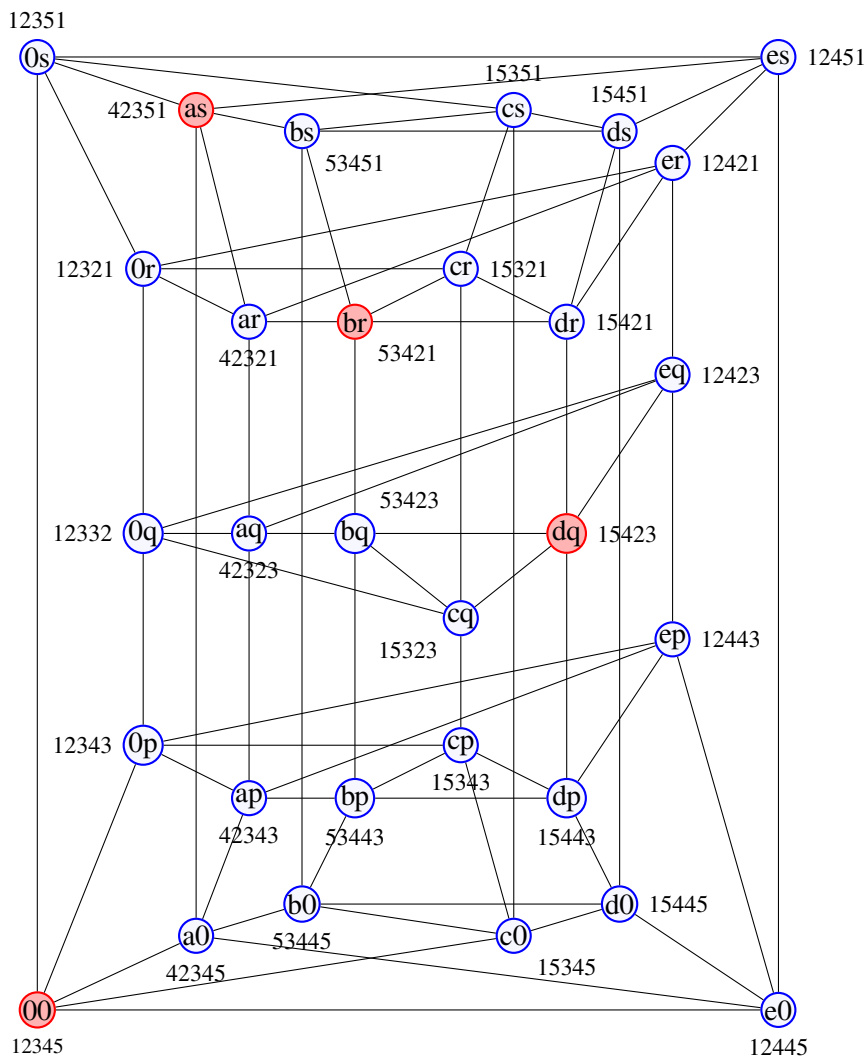
6.7 Συμπεράσματα

Αποδείξαμε ότι το NASH είναι PPAD πλήρες. Δηλαδή, δεν υπάρχει αλγόριθμος που να υπολογίζει ένα Nash σημείο ισορροπίας σε πολυωνυμικό χρόνο σε σχέση με το μέγεθος του παιγνίου, εκτός και αν $PPAD = FP$. Άρα στους ίδιους τους παίκτες μπορεί να πάρει εκθετικό χρόνο για να φτάσουν σε ένα Nash σημείο ισορροπίας, πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί και να μη φτάσουν ποτέ. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι πρέπει να απορρίψουμε την έννοια του Nash σημείου ισορροπίας σαν τη λύση ενός παιγνίου, καθώς οι παίκτες θα το προσεγγίζουν όσο περνά ο χρόνος, σαν να γίνονται σοφότεροι ως προς το παίξιμό τους.

Α' Παράρτημα Α: Μονοπάτια του Lemke - Howson

Πολυτοπο P		Πολύτοπο Q	
Σημείο	Δείκτες	Σημείο	Δείκτες
0	1, 2, 3	0	4, 5
a	2, 3, 4	p	3, 4
b	3, 4, 5	q	2, 3
c	1, 3, 5	r	1, 2
d	1, 4, 5	s	1, 5
e	1, 2, 4		

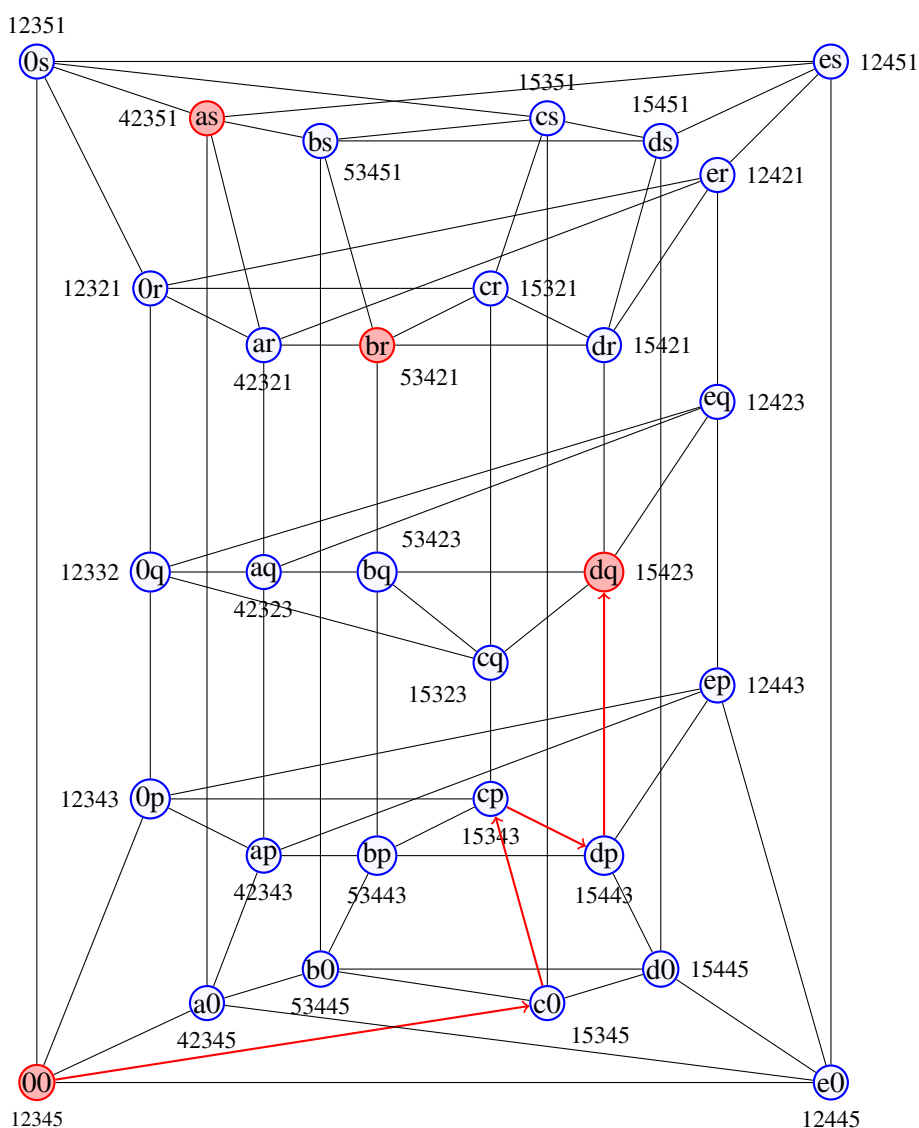
Πίνακας 17: Τα σημεία των πολυτόπων βέλτιστης απόκρισης και οι αντίστοιχοι δείκτες



Σχήμα 10: Το γράφημα $P \times Q$ για το παραπάνω παίγνιο. Πάνω σε αυτό θα δημιουργήσει τα μονοπάτια ο αλγόριθμος Lemke - Howson. Με κόκκινο έχουμε σημειώσει τις πλήρως δεικτοδοτημένες κορυφές.

Κόμβος	Πολύτοπο P Παίκτης Pl_1		Πολύτοπο Q Παίκτης Pl_2		Διπλός Δείκτης
	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	
00	1, 2, 3	-	4, 5	-	-
c0	1, 5, 3	2	4, 5	-	5
cp	1, 5, 3	2	4, 3	5	3
dp	1, 5, 4	2, 3	4, 3	5	4
dq	1, 5, 4	2, 3	2, 3	4, 5	

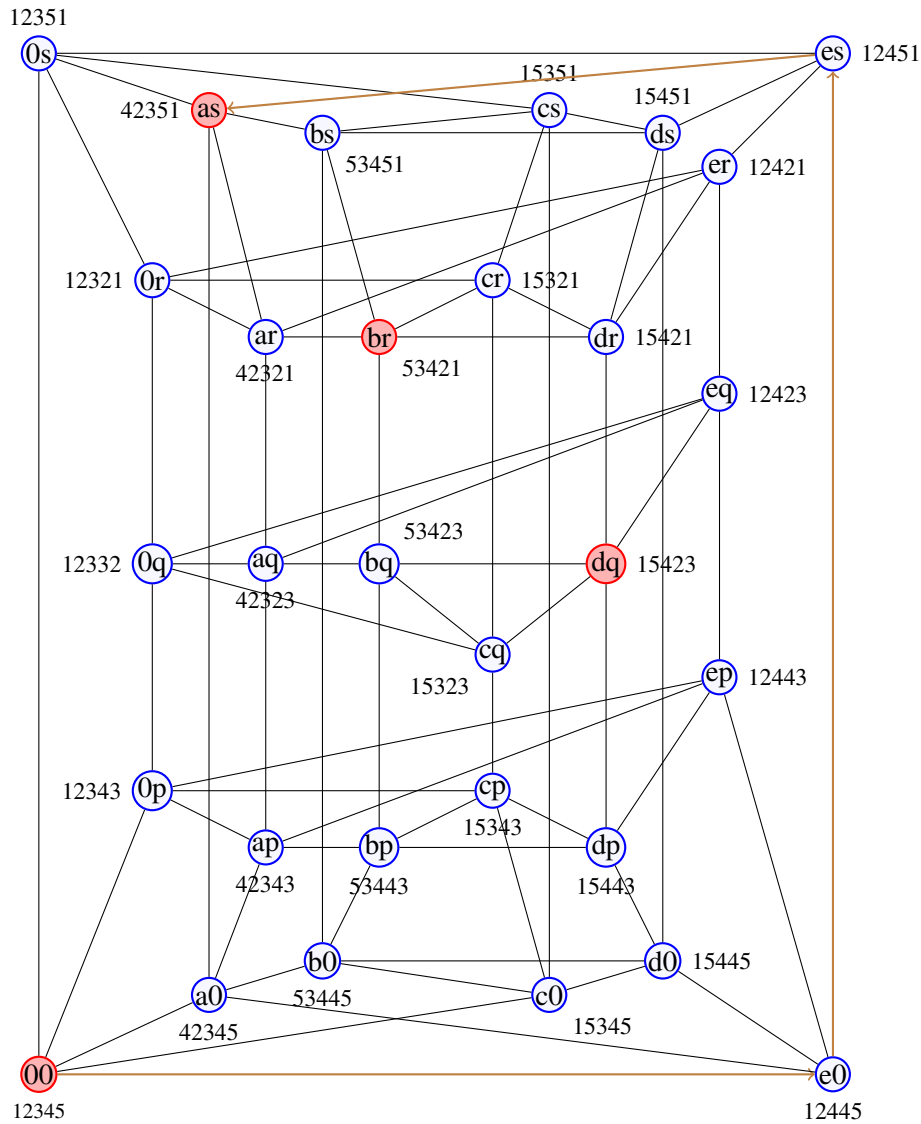
Πίνακας 18: Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson για αρχική άφεση του δείκτη 2



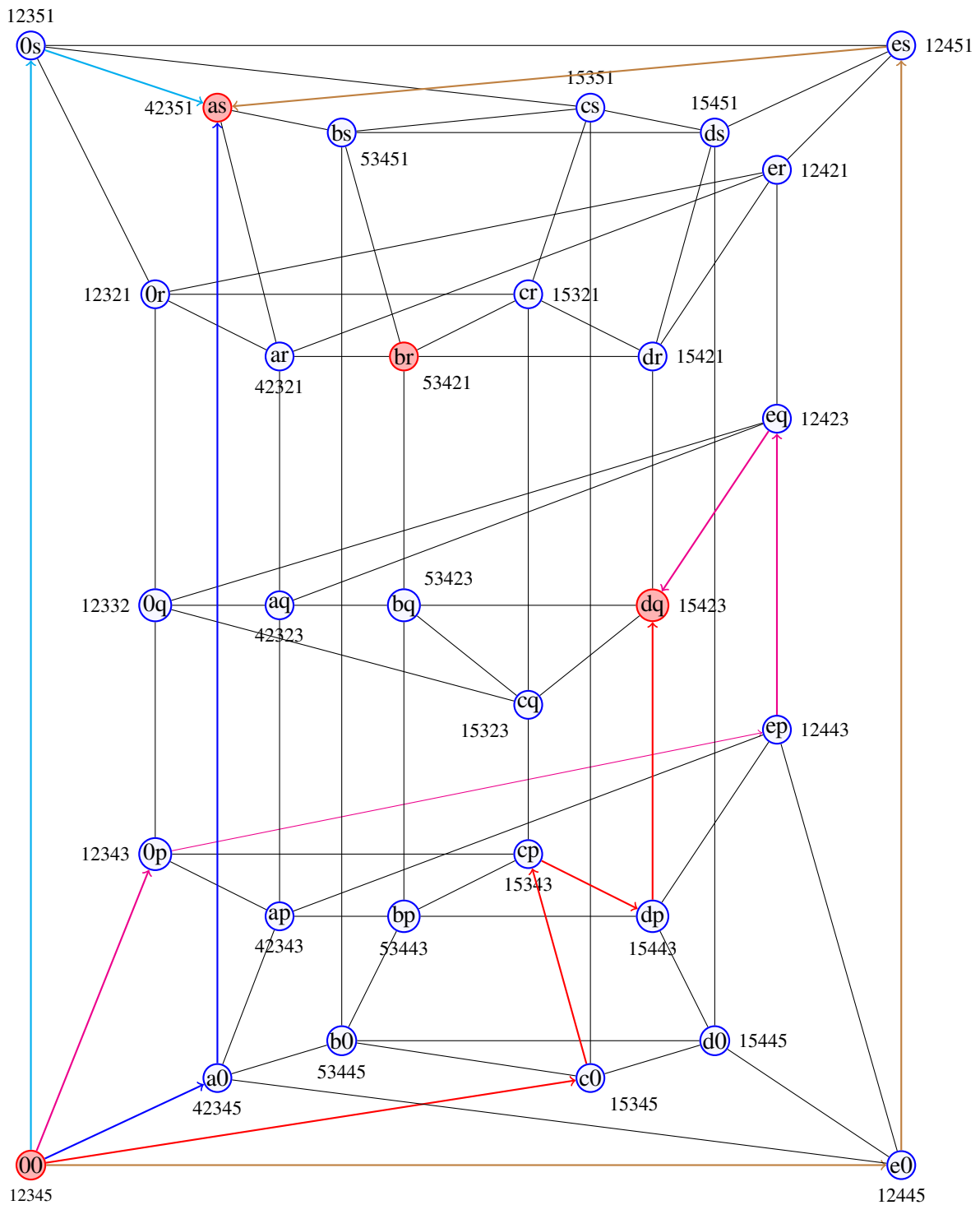
Σχήμα 11: Το μονοπάτι για αρχική άφεση του δείκτη 2.

Κόμβος	Πολύτοπο P Παίκτης P_1		Πολύτοπο Q Παίκτης P_2		Διπλός Δείκτης
	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	
00	1, 2, 3	-	4, 5	-	-
e0	1, 2, 4	3	4, 5	-	3
es	1, 2, 4	3	1, 5	4	1
as	3, 2, 4	1	1, 5	4	

Πίνακας 20: Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson για αρχική άφεση του δείκτη 3. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος έφτασε και πάλι σε αγνό Nash σημείο ισορροπίας κάνοντας 3 βήματα αυτή τη φορά.



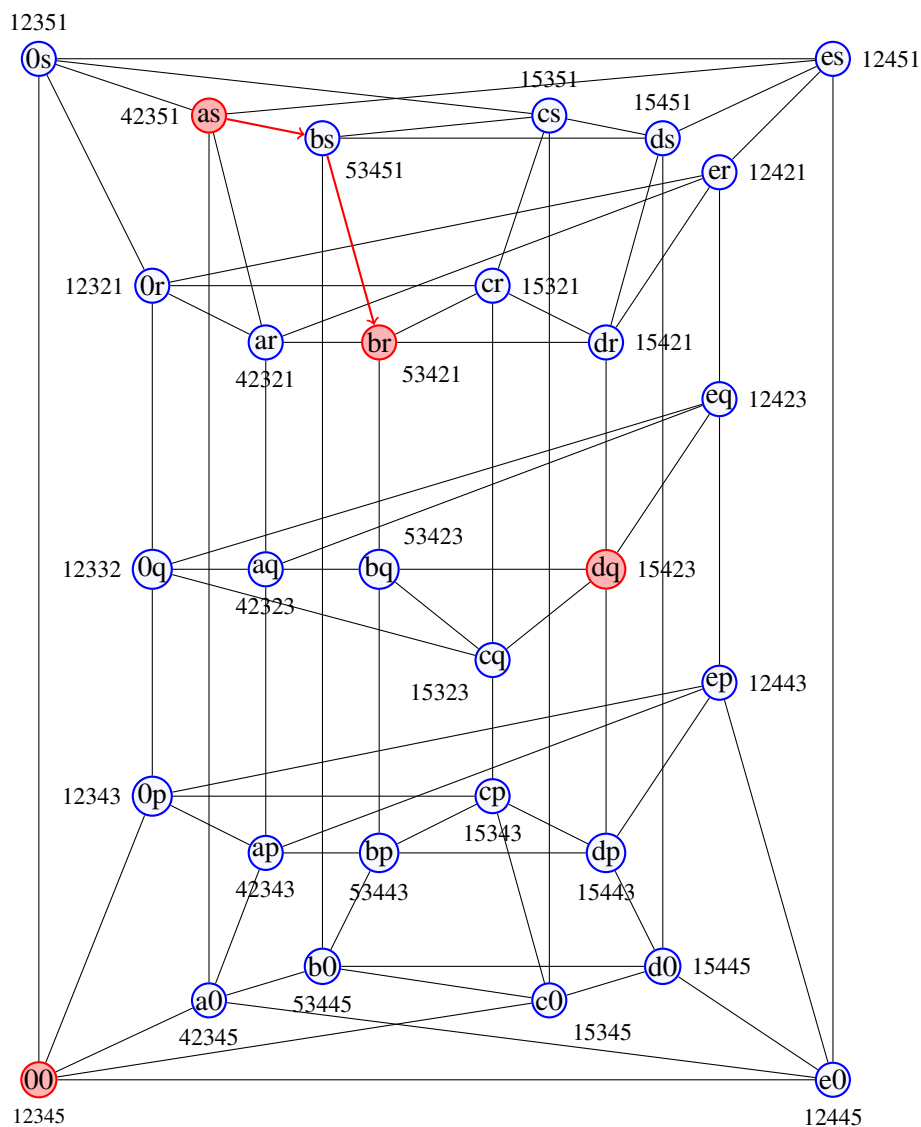
Σχήμα 13: Το μονοπάτι για αρχική άφεση του δείκτη 3.



Σχήμα 15: Όλα τα μονοπάτια που σχηματίζει ο αλγόριθμος Lemke - Howson ξεκινώντας από το τεχνητό Nash σημείο ισορροπίας $(0, 0)$. Παρατηρούμε ότι δεν φτάνει καμία φορά στο πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (b, r) .

Κόμβος	Πολυτοπο Ρ Παίκτης Pl_1		Πολύτοπο Q Παίκτης Pl_2		Διπλός Δείκτης
	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	
as	4, 2, 3	1	1, 5	4	-
bs	5, 4, 3	1, 2	1, 5	4	5
br	5, 4, 3	1, 2	1, 2	4, 5	

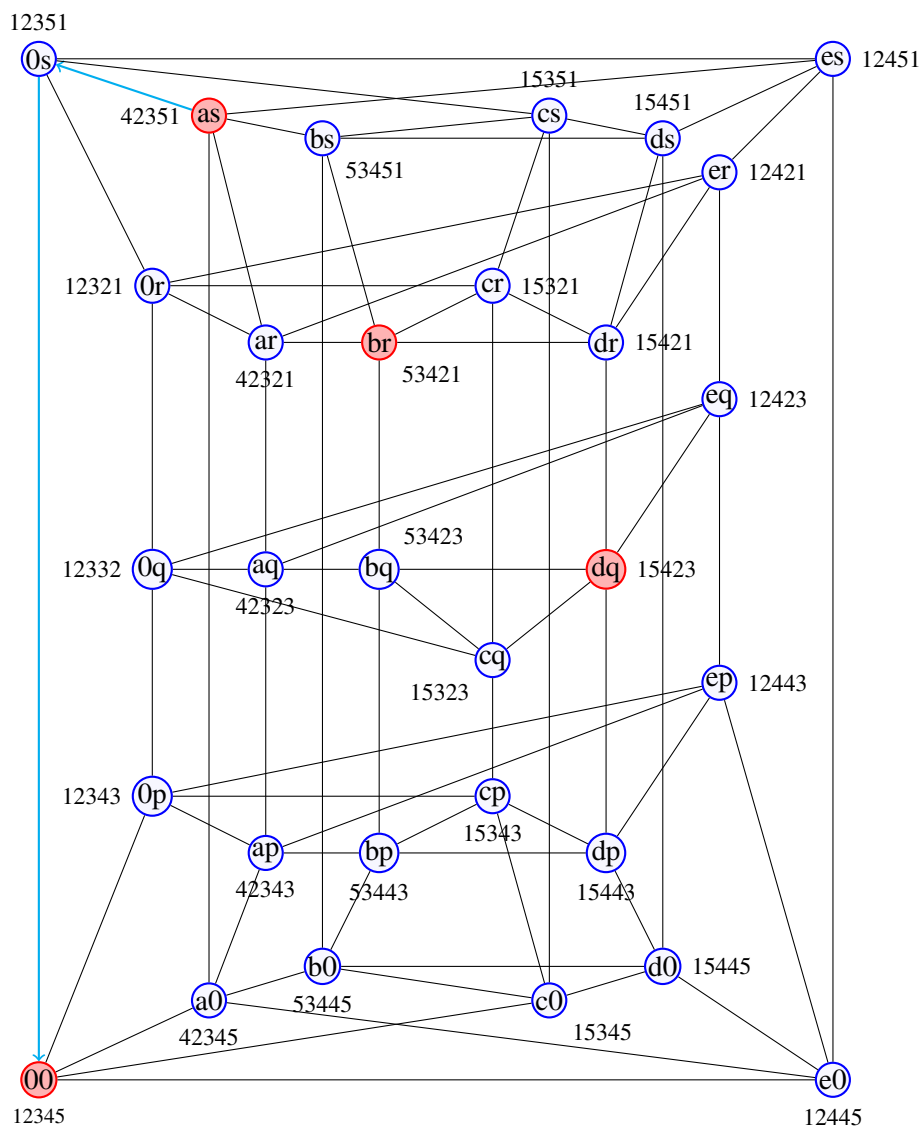
Πίνακας 22: Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson κάνοντας αρχικά άφεση το δείκτη 2, ξεκινώντας αυτή τη φορά από το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (a, s) .



Σχήμα 16: Το μονοπάτι για αρχικό δείκτη που λείπει το 2, ξεκινώντας από το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (a, s) .

Κόμβος	Πολύτοπο P Παίκτης P_{l_1}		Πολύτοπο Q Παίκτης P_{l_2}		Διπλός Δείκτης
	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	Δείκτες	Σύνολο Υποστήριξης	
as	4, 2, 3	1	1, 5	4	-
0s	1, 2, 3	-	1, 5	4	1
00	1, 2, 3	-	4, 5	-	-

Πίνακας 23: Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson κάνοντας αρχικά άφεση το δείκτη 4, ξεκινώντας αυτή τη φορά από το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (a, s) . Όπως το περιμέναμε ο αλγόριθμος μας οδηγεί στο τεχνητό Nash σημείο ισορροπίας $(0, 0)$.



Σχήμα 17: Το μονοπάτι για αρχική άφεση του δείκτη 4 ξεκινώντας από το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (a, s) .

Β' Παράρτημα Β: Παραδείγματα για την χειρότερη περίπτωση

Β.1 Κατασκευή του παιγνίου 2×2

Βήμα1 Παίρνουμε $2d$ σημεία πάνω στη καμπύλη ροπών

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Βήμα2 Αφαιρούμε τον αριθμητικό μέσο των σημείων για να βάλουμε το $\mathbf{0}$ στο εσωτερικό του πολυτόπου και παίρνουμε το δυϊκό κυκλικό πολύτοπο (dual cyclic polytope) $P' = \{z \in \mathbb{R}^2 | c_i^T z \leq \mathbf{1}, 1 \leq i \leq 4\}$

$$c_1 = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -3.5 \end{pmatrix} \quad c_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2.5 \end{pmatrix} \quad c_3 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad c_4 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 5.5 \end{pmatrix}$$

Βήμα3 Το "σπάμε" στους πίνακες $C, D, P' = \{z \in \mathbb{R}^2 | Cz \leq \mathbf{1}, Dz \leq \mathbf{1}\}$

$$C = \begin{pmatrix} -1.5 & -3.5 \\ -0.5 & -2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & 5.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3^T \\ c_4^T \end{pmatrix}$$

Βήμα4 Φέρνουμε το πολύτοπο στη μορφή $P = \{x \in \mathbb{R}^2 | x \leq \mathbf{0}, -DC^{-1}x \leq r\}$ με $r = \mathbf{1} - DC^{-1}\mathbf{1}$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1.25 & -1.75 \\ 0.25 & -0.75 \end{pmatrix} \quad -DC^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Βήμα5 Κανονικοποιώ το r και βρίσκω τον $P = \{x \in \mathbb{R}^2 | x \leq \mathbf{0}, B^T x \leq \mathbf{1}\}$ και βρίσκουμε ότι:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Βήμα6 Κατασκευάζω τον πίνακα A σύμφωνα με τη μετάθεση $a((\lambda(i), \lambda(j+d) - d) = b(j, i)$

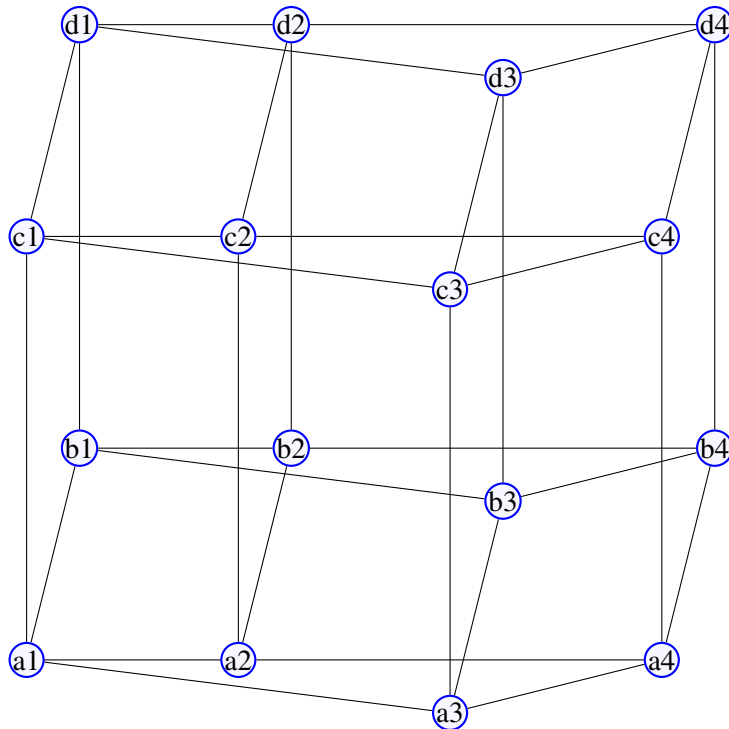
$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Β.2 Το γράφημα $P \times Q$ για το παραπάνω παίγνιο

Το πολύτοπο βέλτιστης απόκρισης P αποτελείται από τις κορυφές a, b, c, d και το Q από τις κορυφές 1, 2, 3, 4. Οι δείκτες της καε κορυφής δίνονται από τον παρακάτω πίνακα

	Πολύτοπο P				Πολύτοπο Q				
Θέση	1	2	3	4	1	2	3	4	
Δείκτης	1	2	3	4	1	2	4	3	
a:	1	1	0	0	1:	0	0	1	1
b:	0	1	1	0	2:	0	1	1	0
c:	1	0	0	1	3:	1	0	0	1
d:	0	0	1	1	4:	1	1	0	0

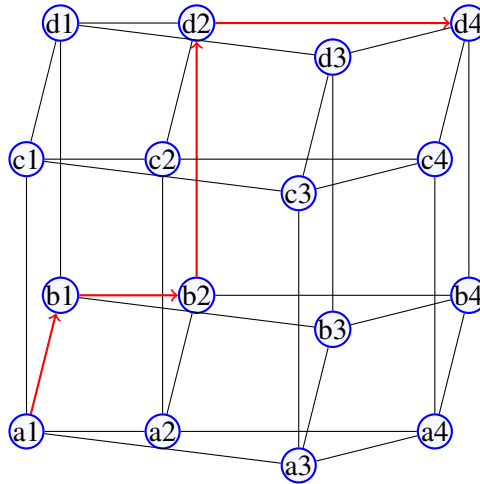
Το γινόμενό τους, όπου πάνω σε αυτό θα κινηθεί ο αλγόριθμος Lemke - Howson είναι το παρακάτω γράφημα όπου δείκτες του κάθε κόμβου δίνονται από την ετικέτα του κάθε κόμβου. Για παράδειγμα ο κόμβος $d2$ έχει τις συμβολοσειρές gale 0011 και 0110 που σημαίνει ότι έχει τους δείκτες 3, 4, 2, 4, δηλαδή έχει δείκτη που λείπει το 1 και διπλό δείκτη το 4.



Σχήμα 18: Το γράφημα $P \times Q$ για το παραπάνω παίγνιο. Πάνω σε αυτό θα δημιουργήσει τα μονοπάτια ο αλγόριθμος Lemke - Howson

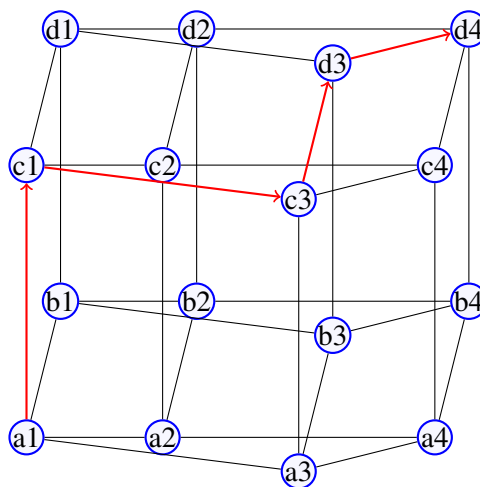
Β.2.1 Το μονοπάτι $\pi(2, 1)$

	Πολύτοπο P				Πολύτοπο Q			
Δείκτες	1	2	3	4	1	2	4	3
	1	1	0	0	0	0	1	1
	0	1	1	0	0	1	1	0
	0	0	1	1	1	1	0	0



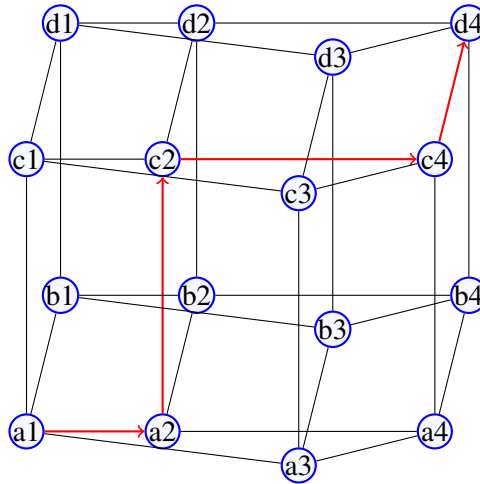
Β.2.2 Το μονοπάτι $\pi(2, 2)$

	Πολύτοπο P				Πολύτοπο Q			
Δείκτες	1	2	3	4	1	2	4	3
	1	1	0	0	0	0	1	1
	1	0	0	1	1	0	0	1
	0	0	1	1	1	1	0	0



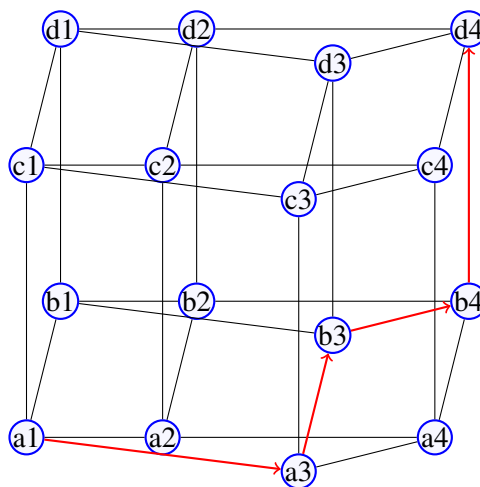
Β.2.3 Το μονοπάτι $\pi(2, 3)$

	Πολύτοπο P				Πολύτοπο Q			
Δείκτες	1	2	3	4	1	2	4	3
	1	1	0	0	0	0	1	1
	1	0	0	1	0	1	1	0
	0	0	1	1	1	1	0	0



Β.2.4 Το μονοπάτι $\pi(2, 4)$

	Πολύτοπο P				Πολύτοπο Q			
Δείκτες	1	2	3	4	1	2	4	3
	1	1	0	0	0	0	1	1
	0	1	1	0	1	0	0	1
	0	0	1	1	1	1	0	0



B'.3 Κατασκευή πινάκων κερδών για τη χειρότερη περίπτωση του Lemke - Howson, υλοποίηση σε MATLAB

Listing 1: Το κύριο πρόγραμμα

```
1 % Construction of payoff tables according to Savani – von Stengel
2
3 function[A, B] = savani_game(d)
4
5 % Take 2d points on the moment curve
6 P1 = cyclic_polytope(d);
7
8 % Put the 0 in the polytope.
9 P2 = mhden(P1);
10
11 % Construction of payoff table B for player 2
12 B = Player2(P2);
13
14 % Construction of payoff table A for player 1 using permutation l'
15 A = Player1(B);
```

Listing 2: Παραγωγή του κυκλικού πολυτόπου

```
1 % Construction of a cyclic d–dimensional polytope with 2d points
2 % The input is the dimension.
3
4 function [A] = cyclic_polytope(d)
5
6
7 A = zeros(d, 2*d);
8 for i = 1:2*d
9     for j = 1:d
10        A(j,i) = i^j;
11    end
12 end
```

Listing 3: Εισαγωγή του 0 στο εσωτερικό του πολυτόπου

```
1 function[A] = mhden(P1)
2 [m,n]=size(P1);
3 A = zeros(m,n);
4 for i = 1:m
5     sum = 0;
6     for j = 1:n
7         sum = sum + P1(i,j);
8     end
9     sub = sum/n;
10    for j = 1:n
11        A(i,j) = P1(i,j) - sub;
12    end
13 end
```

Listing 4: Κατασκευή του πίνακα κερδών B για τον παίκτη 2

```

1 function [B] = Player2(P)
2
3
4 % Matrix C is the first d columns of matrix P inverted
5 % Matrix D is the rest of them inverted
6 [m, n] = size(P);
7
8 C = zeros(m,m);
9 D = zeros(m,m);
10
11 for i=1:m
12     for j=1:m
13         C(i,j) = P(i,j);
14         D(i,j) = P(i,j+m);
15     end
16 end
17 C = C';
18 D = D';
19 %Cana = inv(C);
20 r = ones(m,1);
21
22 r = r - (D/C)*r;
23 S = -(D/C);
24 for i = 1:m
25     for j = 1:m
26         B(i,j) = S(i,j)/r(i);
27     end
28 end
29 B = B';

```

Listing 5: Κατασκευή του πίνακα κερδών A για τον παίκτη 1

```

1 function [A] = Player1(B)
2
3 [d,n] = size(B);
4 l = ones(d,1);
5 for k = 1:2*d
6     if k == 1
7         l(k) = 1;
8     elseif k == d
9         l(k) = d;
10    elseif k < (d)
11        l(k) = k + (-1)^k;
12    else
13        l(k)= k - (-1)^k;
14    end
15 end
16
17 A=zeros(d,d);
18 for i = 1:d
19     for j = 1:d
20         A(l(i),l(j+d)-d) = B(j,i);
21     end
22 end

```

Β.4 Το παίγνιο 4×4

Β.4.1 Πίνακες κερδών

Οι πίνακες κερδών A, B για $d = 4$ όπως δίνονται από το πρόγραμμα του MATLAB.

$$A = \begin{pmatrix} -12.25 & 2.75 & -19.25 & 22.75 \\ -1.05 & 0.4167 & -0.5833 & 1.75 \\ -5.25 & 1.35 & -5.25 & 8.75 \\ 1.75 & -0.25 & 1.75 & -2.45 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2.75 & 1.35 & 0.4167 & -0.25 \\ -12.25 & -5.25 & -1.05 & 1.75 \\ 22.75 & 8.75 & 1.75 & -2.45 \\ -19.25 & -5.25 & -0.5833 & 1.75 \end{pmatrix}$$

Β.4.2 Τα μονοπάτια του Lemke - Howson

Δείκτης	Πολύτοπο P								Πολύτοπο Q							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	3	2	4	6	5	8	7
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 24: Το μονοπάτι $\pi(4, 1)$

Δείκτης	Πολύτοπο P								Πολύτοπο Q							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	3	2	4	6	5	8	7
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1
	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Πίνακας 25: Το μονοπάτι $\pi(4, 2)$

Δείκτης	Πολύτοπο P								Πολύτοπο Q							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	3	2	4	6	5	8	7
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0
	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Πίνακας 26: Το μονοπάτι $\pi(4, 4)$

Δείκτης	Πολύτοπο P								Πολύτοπο Q							
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	3	2	4	6	5	8	7
	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Πίνακας 27: Το μονοπάτι $\pi(4, 8)$

Β.5 Μήκη μονοπατιών για διάφορα αρχικούς δείκτες που λείπουν

Δείκτης	Διάσταση						
	2	4	6	8	10	12	14
1	4	20	88	376	1596	6764	28656
2	4	8	24	92	380	1600	6768
3	4	8	24	92	380	1600	6768
4	4	20	24	40	108	396	1616
5		10	24	40	108	396	1616
6		10	88	92	108	176	464
7		10	36	92	108	176	464
8		10	36	376	380	396	464
9			16	146	380	396	464
10			16	146	1596	1600	1616
11			36	42	612	1600	1616
12			36	42	612	6764	6768
13				42	152	2586	1616
14				42	152	2586	28656
15				146	68	618	10948
16				146	68	618	10948
17					152	178	2592
18					152	178	2592
19					612	178	644
20					612	178	644
21						618	288
22						618	288
23						2586	644
24						2586	644
25							2592
26							2592
27							10948
28							10948

Πίνακας 28: Τα μήκη των μονοπατιών για όλους τους δυνατούς δείκτες που λείπουν.

Κατάλογος σχημάτων

1	Εκφυλισμένο πολύτοπο. Παρατηρούμε ότι δεν είναι απλό αφού η κορυφή a ανήκει σε τέσσερις έδρες ενώ η καθεμία από τις υπόλοιπες κορυφές ανήκουν σε τρεις έδρες.	22
2	Το πολύεδρο βέλτιστης απόκρισης \bar{Q} για τον Pl_1	23
3	Τα πολύτοπα βέλτιστης απόκρισης	25
4	Ο αλγόριθμος Lemke - Howson για αρχικό drop το δείκτη 2	28
5	Το λήμμα του Sperner στις δύο διαστάσεις και το μονοπάτι που σχηματίζεται μέχρι το τριχρωματικό τρίγωνο.	64
6	Ο "σωλήνας" και ο χρωματισμός του	65
7	Το μονοπάτι του 3D-SPERNER μέσα στον κύβο	66
8	Το ορθοκανονικό μονοπάτι που ενώνει τις κορυφές (u,v) . Τα βέλη δείχνουν τον προσανατολισμό των χρωμάτων γύρω από το μονοπάτι.	68
9	Τα 27 κυβίδια γύρω από το $(2, 2, 2)$, την αρχή του L και ο χρωματισμός τους.	70
10	Το γράφημα $P \times Q$ για το παραπάνω παίγνιο. Πάνω σε αυτό θα δημιουργήσει τα μονοπάτια ο αλγόριθμος Lemke - Howson. Με κόκκινο έχουμε σημειώσει τις πλήρως δεικτοδοτημένες κορυφές.	81
11	Το μονοπάτι για αρχική άφεση του δείκτη 2.	82
12	Το μονοπάτι για αρχική άφεση του δείκτη 1.	83
13	Το μονοπάτι για αρχική άφεση του δείκτη 3.	84
14	Το μονοπάτι για αρχική άφεση του δείκτη 5.	85
15	Όλα τα μονοπάτια που σχηματίζει ο αλγόριθμος Lemke - Howson ξεκινώντας από το τεχνητό Nash σημείο ισορροπίας $(0, 0)$. Παρατηρούμε ότι δεν φτάνει καμία φορά στο πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (b, r)	86
16	Το μονοπάτι για αρχικό δείκτη που λείπει το 2, ξεκινώντας από το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (a, s)	87
17	Το μονοπάτι για αρχική άφεση του δείκτη 4 ξεκινώντας από το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (a, s)	88
18	Το γράφημα $P \times Q$ για το παραπάνω παίγνιο. Πάνω σε αυτό θα δημιουργήσει τα μονοπάτια ο αλγόριθμος Lemke - Howson	90

Κατάλογος πινάκων

1	Περιγραφή των σημείων των πολυτόπων με συντεταγμένες και δείκτες	26
2	Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson για αρχική άφεση του δείκτη 2	28
3	Περιγραφή του Lemke Howson	31
4	Ακέραιο pivoting για δείκτη που λείπει ίσο με 2	33
5	Περιγραφή του Ακέραιου Pivoting	34
6	Οι έδρες του $C_4(8)$ όπως ορίζονται από τη συνθήκη του Gale	37
7	Εφαρμογή της μετάθεσης $l'(k)$ στο $C_4(8)$	40
8	Παραγωγή των payoff πινάκων A, B στις $d \times d$ διαστάσεις για την παρουσίαση της χειρότερης περίπτωσης του αλγορίθμου Lemke - Howson.	42
9	Δείκτες των πολυτόπων και τα δύο μοναδικά πλήρως δεικτοδοτημένα ζεύγη κορυφών	42
10	Το μονοπάτι $\pi(4, 1)$	43
11	Δείκτες στις κορυφές του Q	45
12	Η σύνθεση του μονοπατιού $A(4) = \beta(B(4)) + \alpha(A(d - 2)) + \beta'(B(d))$	49
13	Η απεικόνιση $\alpha(A(k))$. Η αποτίμηση στην υψηλότερη διάσταση βλέπουμε ότι είναι αποδεκτή και ότι το μόνο που επηρεάζει το μονοπάτι $\pi(d, k)$ είναι το μονοπάτι της χαμηλότερης διάστασης, καθώς μόνο μέσα σε αυτό βρίσκεται ο διπλός δείκτης σε κάθε βήμα.	51
14	Το δεύτερο κομμάτι του μονοπατιού $\pi(d, k)$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της υψηλότερης διάστασης δεν επηρεάζουν την πορεία του μονοπατιού.	52
15	Κατασκευή των κερδών u^* του παιγνίου \mathcal{G}^*	74
16	Εξαγωγή των n bits από το $\mathbf{p}[v_{x_p}]$. Η ίδια διαδικασία γίνεται και για τους κόμβους $\mathbf{p}[v_{y_p}], \mathbf{p}[v_{z_p}]$	77
17	Τα σημεία των πολυτόπων βέλτιστης απόκρισης και οι αντίστοιχοι δείκτες	81
18	Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson για αρχική άφεση του δείκτη 2	82
19	Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson για δείκτη που λείπει ίσο με 1. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος έφτασε σε Nash σημείο ισορροπίας μόνο σε 2 βήματα, πράγμα που σημαίνει ότι αυτό το σημείο ισορροπίας είναι αγνό.	83
20	Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson για αρχική άφεση του δείκτη 3. Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος έφτασε και πάλι σε αγνό Nash σημείο ισορροπίας κάνοντας 3 βήματα αυτή τη φορά.	84
21	Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson για αρχική άφεση του δείκτη 5.	85
22	Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson κάνοντας αρχικά άφεση το δείκτη 2, ξεκινώντας αυτή τη φορά από το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (a, s)	87
23	Σύνοψη του αλγορίθμου Lemke Howson κάνοντας αρχικά άφεση το δείκτη 4, ξεκινώντας αυτή τη φορά από το πλήρως δεικτοδοτημένο σημείο (a, s) . Όπως το περιμέναμε ο αλγόριθμος μας οδηγεί στο τεχνητό Nash σημείο ισορροπίας $(0, 0)$	88
24	Το μονοπάτι $\pi(4, 1)$	95
25	Το μονοπάτι $\pi(4, 2)$	95
26	Το μονοπάτι $\pi(4, 4)$	96
27	Το μονοπάτι $\pi(4, 8)$	96
28	Τα μήκη των μονοπατιών για όλους τους δυνατούς δείκτες που λείπουν.	97

Αναφορές

- [1] A., M., and Tourky, R. Simple complexity from imitation games. *Games Econ. Behav* 68 (2010), 683--688.
- [2] Balthasar, A. V. Geometry and equilibria in bimatrix games. *PhD Thesis* (2009).
- [3] Casetti, M. M., Merschen, J., and von Stengel, B. Finding gale strings. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 36, 0 (2010), 1065 -- 1072. ISCO 2010 - International Symposium on Combinatorial Optimization.
- [4] Chen, X., and Deng, X. 3-nash is ppad-complete. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)* (2005).
- [5] Chen, X., and Deng, X. Settling the complexity of two-player nash equilibrium. In *47th FOCS* (2006), pp. 261--272.
- [6] Chen, X., Deng, X., and Teng, S. Computing nash equilibria: Approximation and smoothed complexity. In *47th FOCS* (2006).
- [7] Constantinos, and Daskalakis. Nash equilibria: Complexity, symmetries, and approximation. *Computer Science Review* 3, 2 (2009), 87 -- 100.
- [8] Daskalakis, C., Goldberg, P. W., and Papadimitriou, C. H. The complexity of computing a nash equilibrium. *SIAM Journal on Computing* 39, 1 (May 2009), 195--259.
- [9] Daskalakis, C., and Papadimitriou, C. H. Three-player games are hard. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)* (2005).
- [10] Edmonds, J. Paths, trees, and flowers. *Canad. J. Math.*, 17 (1965), 449--467.
- [11] Gale, D. Neighborly and cyclic polytopes. *Convexity, Proc. Symposia in Pure Math* 7 (1963), 225--232.
- [12] Grunbaum, B. *Convex polytopes, 2nd ed.* Springer New York, 2003.
- [13] Kearns, M., Littman, M., and Singh, S. Graphical models for game theory. In *17th Conference in Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI 2001)*.
- [14] Lemke, C. E., and Howson, J. Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 12 (1964), 413--423.
- [15] Megiddo, N., and Papadimitriou, C. H. A note on total functions, existence theorems, and computational complexity. *IBM Research Report RJ* (1989).
- [16] Nash, J. F. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics* 54, 2 (1951), 286--295.
- [17] Papadimitriou, C. H. *Computational Complexity*. Addison-Wesley, 1994.
- [18] Papadimitriou, C. H. On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence. *Journal of Computer and System Sciences* 48 (1994), 498--532.
- [19] Savani, R., and von Stengel, B. Hard-to-solve bimatrix games. *Econometrica* 74 (2006), 397--429.
- [20] Savani, R., and von Stengel, B. Exponentially many steps for finding a nash equilibrium in a bimatrix game. In *45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2004)*.
- [21] Sipser, M. On relativization and the existence of complete sets. In *9th ICALP* (1982).

- [22] Tomason, A. Hamilton cycles and uniquely edge colourable graphs. *Ann. Discrete Math.* 3 (1978), 259--268.
- [23] von Neuman, J. On the theory of games of strategy. *Mathematische Annalen* 100 (1928).
- [24] von Neuman, J., and Morgenstern, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [25] von Stengel, B. New maximal numbers of equilibria in bimatrix games. *Discrete and Computational Geometry* 21 (1999), 557 -- 568.
- [26] Ziegler, G. M. *Lectures on Polytopes*. Springer-Verlag New York, 1997.