ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μοντελοποιηση σε Μπλοκ Προσημασμενων Γραφων

ΘΕΟΔΩΡΟΣ Α. ΚΟΤΙΝΑΣ

Επιβλέπων

ΜΩΥΣΗΣ Α. ΜΠΟΥΝΤΟΥΡΙΔΗΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΑΤΡΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2008

Copyright © 2007-2008 Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών

Θεόδωρος Α. Κοτινάς
Πανεπιστήμιο Πατρών, 261 10 Πάτρα
Τμήμα Μαθηματικών
e-mail: kotinas@master.math.upatras.gr

Στους γονείς μου

Σπυριδούλα & Αριστοτέλη,

καθώς και στους δασκάλους μου
με ευγνωμοσύνη και αγάπη

Ευχαριστίες

Έχοντας φτάσει στο τέλος της διπλωματικής μου εργασίας, νιώθω την υποχρέωση να αναφερθώ στους ανθρώπους (συνεργάτες, συναδέλφους και φίλους), που ο καθένας με το δικό του τρόπο, σημάδεψαν την πορεία μου στα χρόνια των σπουδών μου και να τους ευχαριστήσω.

Πρώτα από όλους, ευχαριστώ τον επιβλέποντα μου, κύριο Μωυσή Μπουντουρίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, γιατί η συνεργασία του μαζί μου υπήρξε καταλυτική στην ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Η συνεργασία μας ξεκίνησε από την εποχή που ήμουν τριτοετής φοιτητής, στα πλαίσια του μαθήματος Αυτόματα και Τυπικές Γλώσσες. Η αμέριστη ηθική συμπαράστασή του, η εμπιστοσύνη του στο άτομό μου, ειδικά τα τελευταία χρόνια, με όπλισε με αυτοπεποίθηση, δύναμη και μου έδωσε το κουράγιο να συνεχίσω την προσπάθειά μου για την επίτευξη της διπλωματικής μου εργασίας. Καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών ως επιβλέπων μου, ήταν πάντα δίπλα μου, ακόμα και σε ώρες πέραν της εργασίας του.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Επιτροπής, τον Καθηγητή κύριο Γεώργιο Μητακίδη και τον Επίκουρο Καθηγητή κύριο Φίλιππο Αλεβίζο.

Θέλω επίσης να ευχαριστήσω τους φίλους μου, Αλέξη Μαστρογιάννη, Σταύρο Μπέκα και Ιωαννή Λιβιέρη. Η βοήθεια τους, στο στάδιο της συγγραφής της παρούσας εργασίας, ήταν εξαιρετικά πολύτιμη.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Αριστοτέλη και Σπυριδούλα καθώς και τον αδερφό μου Κωνσταντίνο για την αμέριστη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα δύσκολα χρόνια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Στους γονείς μου αφιερώνω το παρόν πόνημα, ως ελάχιστο δείγμα ευγνωμοσύνης για την κατανόηση και την υπομονή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Θεόδωρος Α. Κοτινάς
Πάτρα, Σεπτέμβριος 2008

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες **v**

Κατάλογος Σχημάτων **ix**

Κατάλογος Πινάκων **xi**

Περίληψη **xiii**

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Γενικά περί Γράφων 1

1.2 Μοντελοποίηση σε Μπλοκ Γράφων 3

2 Δομική Ισορροπία Προσημασμένων Γράφων **9**

2.1 Η Θεωρία του Heider 9

2.2 Δομική Ισορροπία 13

2.3 Γενικευμένη Δομική Ισορροπία 14

2.4 Η Θεμελιώδης Υπόθεση της Δομικής Ισορροπίας 16

3 Διαμερισμοί Προσημασμένων Γράφων **19**

3.1 Διαμερισμοί Προσημασμένων Γράφων και Ημιδακτυλίων 19

3.2 Διαμερισμοί με Τεχνικές Βελτιστοποίησης 21

3.3 Προσημασμένοι Διμερείς Γράφοι 24

4 Παραδείγματα **31**

4.1 Δύο Πρώτα Απλά Παραδείγματα 31

4.1.1 Το Παράδειγμα του Chartrand 31
4.1.2 Το Παράδειγμα του Roberts 32
4.2 Τρια Παραδείγματα με k-Ισορροπημένες Δομές 33
4.2.1 Ένα Πρώτο (Τεχνητό) Παράδειγμα 33
4.2.2 Το Παράδειγμα του Young 34
4.2.3 Ένα Τρίτο (Τεχνητό) Παράδειγμα 35
4.3 Οι Δύο Γράφοι του Davis 37
4.4 Το Παράδειγμα των Θεατρικών Σκηνών 38
4.5 Η Μελέτη του Sampson 41
4.6 Η Μελέτη του Bales 51
4.7 Η Μελέτη των Δικαστών 55

Κατάλογος Σχημάτων

2.1 Οκτώ κατευθυνόμενες *pox* τριάδες: οι τέσσερις τριάδες της πάνω σειράς είναι ισορροπημένες και οι τέσσερις τριάδες της κάτω σειράς είναι μη ισορροπημένες. 10

2.2 Μια τριάδα απλού σχηματισμού μονάδων *pox* 11

2.3 Μια τριάδα απλών συναισθηματικών σχέσεων *poq* 11

3.1 Ένας τεχνητός διμερής γράφος 28

4.1 Ο γράφος του Chartrand 31

4.2 Ο γράφος του Roberts 32

4.3 Τεχνητός k-ισορροπημένος γράφος 33

4.4 Προσημασμένος γράφος φυλών με 3 θετικά σύνολα 35

4.5 Προσημασμένος κατευθυνόμενος γράφος 9 κορυφών 35

4.6 Οι δύο προσημασμένοι γράφοι του Davis: Ένας διαμερίσιμος και ένας μή διαμερίσιμος 37

4.7 Τέσσερις θεατρικές σκηνές 39

4.8 Ο διαμερισμός των προσημασμένων διμερών δεδομένων για τις Ιδεολογικές Περιπτώσεις 55

4.9 Ο διμερής προσημασμένος γράφος για τις Ιδεολογικές Περιπτώσεις 57

4.10 Ο διαμερισμός των προσημασμένων διμερών δεδομένων για τα ζευγάρια των 'ακραίων' δικαστών 58

4.11 Ο διμερής προσημασμένος γράφος για τα ζευγάρια των 'ακραίων' δικαστών 59

4.12 Ο διαμερισμός των προσημασμένων διμερών δεδομένων για τους Μεμονωμένους Ακραίους Δικαστές 60

4.13 Ο διμερής γράφος των διαμερισμών για τους Μεμονωμένους Ακραίους Δικαστές 61
4.14 Ο διαμερισμός σε μια Αδιάσπαστη Πτέρυγα και σε μια Διασπασμένη Πτέρυγα 62
4.15 Οι πέντε υποθέσεις χωρίς καμία χρήσιμη δομή διαμερισμού 63
4.16 Ένα μη παραδοσιακό μοντέλο τεσσάρων μπλοκ 64

Κατάλογος Πινάκων

1.1 Πίνακας γειτνίασης για το γράφο του Everett 5
1.2 Πίνακας γειτνίασης με 9 μπλοκ 5
1.3 Πίνακας αναπαράστασης των μπλοκ 7

2.1 Οκτώ προσημασμένες τριάδες 12
2.2 Προ-μεταβατικές συνθήκες και ισορροπία 18

3.1 Ημιδακτύλιος ισορροπίας 19
3.2 Ημιδακτύλιος διαμερισμού 21
3.3 Διαμερισμός του τεχνητού διμερούς γράφου 27

4.1 Γράφος του Chartrand: πίνακας κλειστότητας 32
4.2 Ο πίνακας προσημασμένης γειτνίασης και ο πίνακας κλειστότητας για το παράδειγμα του Roberts 33
4.3 Τιμές της συνάρτησης κριτηρίου για το γράφο του σχήματος 4.5 . 36
4.4 Τιμές της συνάρτησης κριτηρίου για τους γράφους του Davis . . 38
4.5 Τιμές της συνάρτησης κριτηρίου για τους γράφους του σχήματος 4.7 40
4.6 Οι συναισθηματικοί δεσμοί μεταξύ των 18 δρώντων στις τρεις χρονικές περιόδους 42
4.7 Συνέχεια πίνακα 4.6 43
4.8 Μέτρα ανισορροπίας μέσα στο χρόνο 44
4.9 Οι διαμερισμοί σε θετικά σύνολα δρώντων (για $k = 3$) σε κάθε χρονική περίοδο 46
4.10 Συνέχεια πίνακα 4.9 47
4.11 Ασυνεπείς δεσμοί στην 3-ισορροπία 48

4.12 Οι δύο πίνακες συμπάθειας-αντιπάθειας για τα δεδομένα του Bales 52
4.13 Ο μοναδικός διαμερισμός της ομάδας του Bales ($k = 2$) 53
4.14 Ο γενικός διαμερισμός της ομάδας του Bales σε τέσσερα θετικά σύνολα 54

Περίληψη

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη της ομαδοποίησης των προσημασμένων γράφων. Σαν προσημασμένο γράφο, εννοούμε έναν γράφο (κατευθυνόμενο ή μη κατευθυνόμενο), πάνω στις συνδέσεις (τόξα ή ακμές) του οποίου ορίζεται ένα πρόσημο. Όταν ο γράφος αναπαριστά ένα δίκτυο κοινωνικών σχέσεων μεταξύ ανθρώπων (δρώντων), η θετική σύνδεση (δηλαδή, η σύνδεση με θετικό πρόσημο) αποτελεί μια σχέση συμπάθειας ή έλξης μεταξύ των συνδεόμενων ατόμων, ενώ η αρνητική σύνδεση (δηλαδή, η σύνδεση με αρνητικό πρόσημο) αποτελεί μια σχέση αντιπάθειας ή απώθησης μεταξύ αυτών. Εδώ, θα ασχοληθούμε με μια συγκεκριμένη τεχνική ομαδοποίησης των κορυφών τέτοιων γράφων (οι οποίες κορυφές αναπαριστούν τους δρώντες του κοινωνικού δικτύου), την ονομαζόμενη "μοντελοποίηση σε μπλοκ". Ουσιαστικά, με την τεχνική αυτή, προσπαθούμε να διαμερίσουμε τις κορυφές ενός προσημασμένου γράφου σε ομάδες κορυφών, οι οποίες πρέπει να σχηματίζουν όμοιες ή παρόμοιες δομές συνδέσεων με άλλες ομάδες.

Η διπλωματική εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, γίνεται μια γενική εισαγωγή στους γράφους και στις τεχνικές της μοντελοποίησης σε μπλοκ. Στο δεύτερο κεφάλαιο, πρώτα, περιγράφεται η θεωρία του Heider και δίνονται οι εφαρμογές της για τριάδες αλληλεπιδρώντων ατόμων. Μετά, μελετάται αφενός η δομική ισορροπία και αφετέρου η γενικευμένη δομική ισορροπία για την περίπτωση των προσημασμένων γράφων. Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποιες τεχνικές διαμερισμού και ομαδοποίησης, με μεθόδους βελτιστοποίησης, των κορυφών των προσημασμένων γράφων. Επιπλέον, γίνεται μια επέκταση των προηγούμενων θεωριών για την περίπτωση των προσημασμένων διμερών γράφων. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο, δίνονται έντεκα συγκεκριμένα εμπειρικά παραδείγματα: (1) τα παραδείγματα του Chartrand και του Roberts, (2) τρια παραδείγματα με k-ισορροπημένες δομές, (3) οι δύο γράφοι του Davis, (4) οι θεατρικές σκηνές των Harary *et al.* (1965), (5) η μελέτη του Sampson, (6) η μελέτη του Bales και (7) η μελέτη των αποφάσεων του Ανώτατου Δικαστηρίου των ΗΠΑ κατά την περίοδο 2006-7.

Κεφαλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά περί Γράφων

Γράφος είναι μια διατεταγμένη τριάδα $G = (U, E, A)$, στην οποία τα σύνολα U, E και A, είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Το σύνολο U περιέχει τις κορυφές του γράφου G. Το σύνολο E περιέχει τις ακμές (μη κατευθυνόμενες γραμμές) του γράφου G. Τέλος, το σύνολο A περιέχει τα τόξα (κατευθυνόμενες γραμμές) του γράφου G. Τα σύνολα E και A μπορεί να είναι κενά. Αν το $A = \varnothing$, ο γράφος G είναι *μη κατευθυνόμενος*. Αν τώρα το $E = \varnothing$, ο γράφος G είναι *κατευθυνόμενος*. Κάθε γραμμή από το σύνολο $L = E \cup A$ συνδέει ένα ζευγάρι κορυφών. Οι δυο κορυφές, που συνδέονται μέσω μιας γραμμής, αποτελούν τα άκρα της γραμμής. Στην περίπτωση του τόξου, υπάρχει μια αρχική και μια τελική κορυφή.

Αν η ακμή e έχει άκρα τις κορυφές u και v, τότε γράφεται ως $e(u : v)$ ή ισοδύναμα ως $e(v : u)$. Ομοίως, το τόξο το οποία έχει άκρα τις κορυφές u και v γράφεται ως $a(v : u)$, όπου u είναι η αρχική κορυφή και v η τελική. Γενικά, μια γραμμή $p \in L$ συνδέει τις κορυφές που έχει για άκρα, ενώ πιο συγκεκριμένα ένα τόξο $a \in A$ συνδέει την αρχική κορυφή με την αντίστοιχη τελική. Η γραμμή $p \in L$, που έχει για άκρα την ίδια κορυφή, αποτελεί ένα *βρόχο* (*loop*). Μια κορυφή, η οποία δεν είναι άκρο καμιάς γραμμής, λέγεται *μεμονωμένη*.

Γενικά, όταν αναφέρουμε γραμμές, θα ενοούμε είτε ακμές είτε τόξα. Έστω η γραμμή $p \in L$:

1. Όταν γράφουμε $p(u, v) \equiv (p \in E \wedge p(u : v)) \vee (p \in A \wedge p(u, v))$, εννοούμε ότι η γραμμή p συνδέει την κορυφή u με την κορυφή v.
2. Όταν γράφουμε $p(u : v) \equiv p(u, v) \vee p(v, u)$, εννοούμε ότι η γραμμή p συνδέει τις κορυφές u και v μεταξύ τους.

Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $uLv = \exists p \in L : p(u, v)$, για να καθορίζουμε την σχέση γειτνίασης.

Έστω $G = (U, R)$ ένας γράφος με $U = (X_1, X_2, ..., X_n)$ ένα πεπερασμένο σύνολο κορυφών. Το σύνολο E των γραμμών του γράφου μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζεται από μια διμερή σχέση $R \subseteq U \times U$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα δυαδικό πίνακα $R = [r_{ij}]_{n \times n}$, που ονομάζεται *πίνακας γειτνίασης*, ως εξής:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & X_i R X_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ένας γράφος λέγεται *απλός* αν και μόνο αν, για κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in U$, ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) είτε καμία γραμμή (ακμή ή τόξο) δεν συνδέει τις δύο κορυφές ή

(ii) $u = v$ και υπάρχει ακριβώς ένας κατευθυνόμενος βρόχος στο u ή

(iii) $u \neq v$ και υπάρχει ακριβώς μια ακμή και κανένα τόξο με τις u, v ως τα άκρα της ή

(iv) $u \neq v$ και υπάρχει το πολύ ένα τόξο σε κάθε κατεύθυνση και καμία ακμή με τις u, v ως τα άκρα της.

Από εδώ και στο εξής, όταν αναφερόμαστε σε γράφους, θα αναφερόμαστε σε *απλούς* γράφους.

Ένας *διατιμημένος γράφος* είναι μια διατεταγμένη τριάδα $\mathcal{N} = (U, L, \nu)$, όπου:

(i) (U, L) είναι ένας απλός γράφος,

(ii) $\nu : L \to S$ είναι μια συνάρτηση βάρους, που προσδιορίζει κάποιες τιμές στις γραμμές L. Το σύνολο S είναι το σύνολο των δυνατών τιμών για τις γραμμές L.

Μερικές φορές το σύνολο των κορυφών U ενός γράφου $\mathcal{N} = (U, L, \nu)$ ονομάζεται *σύνολο μονάδων*. Όταν οι τιμές των γραμμών δεν δίνονται, υποθέτουμε ότι παίρνουν τις τιμές:

$$\nu(x, y) = \begin{cases} 1, & xLy \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

1.2 Μοντελοποίηση σε Μπλοκ Γράφων

Για $\varnothing \neq X, Y \subseteq U$, ένα μπλοκ ορίζεται ως:

$$L(X,Y) = \{p \in L : \exists x \in X \exists y \in Y : p(x,y)\}$$

και ένα πλήρες μπλοκ ορίζεται ως:

$$K(X,Y) = \{(x:y) : x \in X, y \in Y\} \cup \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Ένα μπλοκ της μορφής $L(X,X)$ ονομάζεται *διαγώνιο*, ενώ ένα μπλοκ της μορφής $L(X,Y), X \cap Y = \varnothing$, ονομάζεται *μη διαγώνιο*.

Η μοντελοποίηση ενός δοθέντος γράφου σε μπλοκ έχει ως κύριο στόχο την αναγνώριση των *ομάδων* (*clusters*) κορυφών, κάθε μια από τις οποίες συνδέεται με άλλες κορυφές με όμοιο ή παρόμοιο τρόπο.

Μια οικογένεια **A** μη κενών υποσυνόλων ενός συνόλου A, $A_i \subseteq A$, ονομάζεται *ομαδοποίηση* (*clustering*) του A. Τα σύνολα A_i ονομάζονται *ομάδες* (*clusters*). Μια ομαδοποίηση λέγεται *πλήρης ή διαμερισμός* αν η ένωση όλων των ομάδων είναι το σύνολο A και κάθε δύο διακριτές ομάδες είναι ξένες μεταξύ τους, δηλαδή, αν:

$$\begin{aligned} \bigcup_i A_i &= A \\ i \neq j &\Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι κάθε διαμερισμός ενός συνόλου ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο αυτό και, αντίστροφα, κάθε σχέση ισοδυναμίας ορίζει ένα διαμερισμό.

Έστω μια ομαδοποίηση **C** του συνόλου U των κορυφών του γράφου G:

$$\mathbf{C} = \{C_1, C_2, ..., C_k\}.$$

Η ομαδοποίηση αυτή **C** μπορεί επίσης να θεωρηθεί ότι διαμερίζει σε *μπλοκ σχέσεων* και την σχέση R, που αντιστοιχεί στο σύνολο κορυφών του γράφου:

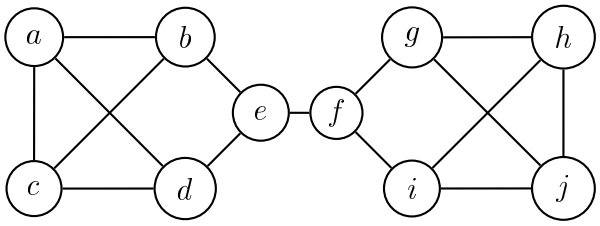
$$R(C_i, C_j) = R \cap C_i \times C_j$$

Κάθε τέτοιο μπλοκ αποτελείται από τις κορυφές, που ανήκουν στις ομάδες C_i και C_j και από όλα τα τόξα, τα οποία ξεκινούν από την ομάδα C_i και καταλήγουν στην ομάδα C_j. Αν $i = j$, τότε το μπλοκ $R(C_i, C_i)$ ονομάζεται *διαγώνιο*.

Ο όρος μπλοκ είναι διφορούμενος, επειδή έχει δύο έννοιες στην βιβλιογραφία για την μοντελοποιήση γράφων σε μπλοκ. Κατά την μια έννοια, μπλοκ είναι ένα σύνολο κορυφών, που ανήκουν σε μια ομάδα. Στην παρούσα εργασία, θα χρησιμοποιηθεί η δεύτερη έννοια του μπλοκ, κατά την οποία ένα *μπλοκ είναι μια σχέση μεταξύ δύο ομάδων κορυφών*. Ένα μοντέλο σε μπλοκ με k ομάδες περιλαμβάνει k^2 μπλοκ. Φυσικά, υπάρχουν k διαγώνια και $k \cdot (k-1)$ μη-διαγώνια μπλοκ.

Ένα μοντέλο σε μπλοκ αποτελείται από τις δομές, που έχουν προκύψει μέσω της αναγνώρισης όλων των κορυφών, οι οποίες ανήκουν στην ίδια ομάδα της ομαδοποίησης $\mathbf{C}$. Ένα μοντέλο σε μπλοκ μπορεί να αναπαραστεί από τον αντίστοιχο απλοποιημένο γράφο των μπλοκ ή από τον αντίστοιχο πίνακα γειτνίασης των μπλοκ, που ονομάζεται *πίνακας αναπαράστασης* (των μπλοκ). Οι κορυφές στον απλοποιημένο γράφο των μπλοκ αντιστοιχούν στις ομάδες, οι οποίες ονομάζονται *θέσεις*, ενώ τα τόξα αντοιχούν στις σχέσεις μεταξύ των θέσεων. Για να δοθεί ένας ακριβής ορισμός ενός μοντέλου σε μπλοκ χρειάζεται να οριστούν ποιά μπλοκ παράγουν ένα τόξο στον απλοποιημένο γράφο των μπλοκ και ποιά όχι.

Παρακάτω, δίνουμε ένα παράδειγμα ενός μοντέλου σε μπλοκ για ένα γράφο με 10 κορυφές, το οποίο είναι γνωστο σαν γράφος του Everett. Ο συγκεκριμένος γράφος φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης δίνεται στον Πίνακα 1.1.



Ας μελετήσουμε την ομαδοποίηση σε 3 ομάδες:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
c	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
d	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
e	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
f	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
g	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
h	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
i	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
j	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Πίνακας 1.1: Πίνακας γειτνίασης για το γράφο του Everett

$$\mathbf{C} = \{\{a, c, h, j\}, \{b, d, g, i\}, \{e, f\}\}.$$

Η σχέση ισοδυναμίας, που έχει χρησιμοποιηθεί για να επιτευχθεί μια τέτοια ομαδοποίηση, ονομάζεται *κανονική ισοδυναμία*. Σε επόμενο κεφάλαιο, θα ορίσουμε αυστηρά αυτή την σχέση ισοδυναμίας. Διαισθητικά, στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να διαμερίσουμε τον πίνακα γειτνίασης σε μπλοκ, που έχουν όλα τα στοιχεία τους μηδέν και σε μπλοκ που θα έχουν σε κάθε γραμμή και στήλη τους τουλάχιστον ένα άσσο.

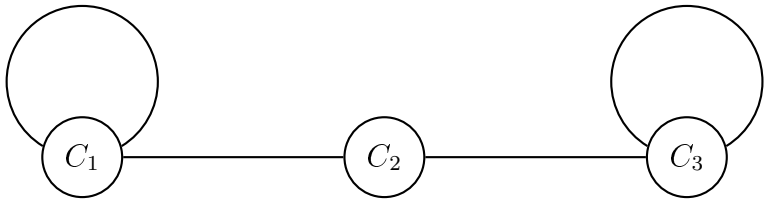
	a	c	h	j	b	d	g	i	e	f
a	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
c	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
h	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
j	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
b	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
d	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
i	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
e	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
f	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Πίνακας 1.2: Πίνακας γειτνίασης με 9 μπλοκ

Η ομαδοποιήση αυτή διαμερίζει τον πίνακα γειτνίασης σε 9 μπλοκ, τα οποία παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.2. Τα μπλοκ σ' αυτόν τον πίνακα έχουν προκύψει

απο την αντιμετάθεση γραμμών και στηλών του πίνακα γειτνίασης. Το διάνυσμα των θέσεων, που ορίζεται από τις ομάδες, μαζί με τις αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ των ομάδων, αποτελούν το μοντέλο σε μπλοκ του γράφου.

Το μοντέλο σε μπλοκ για το συγκεκριμένο γράφο μπορεί να αναπαραστεί σαν ένας γράφος 3 κορυφών (αυτός είνα ο απλοποιημένος γράφος) με τον αντίστοιχο πίνακα αναπαράστασης των μπλοκ να δίνεται από τον Πίνακας 1.3. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται ο συγκεκριμένος γράφος 3 κορυφών.



Στο γράφο αυτό, η θέση (κορυφή) C_1 αντιπροσωπεύει την πρώτη ομάδα κορυφών $\{a, c, h, j\}$, η θέση C_2 αντιπροσωπεύει την δεύτερη ομάδα κορυφών $\{b, d, g, i\}$, ενώ, τέλος, η C_3 αντιπροσωπεύει την τρίτη ομάδα κορυφών $\{e, f\}$. Τα στοιχεία που συγκροτούν τον πίνακα αναπαράστασης των μπλοκ (Πίνακας 1.3) αντιπροσωπεύουν τα 9 μπλοκ, που έχουν προκύψει από τον πίνακα γειτνίασης (Πίνακας 1.2). Τα στοιχεία του πίνακα αυτού είναι μηδενικά και μονάδες. Τα μηδενικά αντιπροσωπεύουν τα μπλοκ, που συγκροτούνται αποκλειστικά από μηδενικά, όπως ο μηδενικός δεσμός από την θέση C_1 προς την θέση C_3. Οι άσσοι αντιπροσωπεύουν τα μπλοκ, που έχουν το λιγότερο ένα άσσο σε κάθε γραμμή και στήλη τους. Οι θέσεις C_1 και C_3 έχουν τους δικούς τους βρόχους. Αυτοί οι βρόχοι αντιπροσωπεύουν τους δεσμούς μεταξύ των κορυφών, που αντιστοιχούν στα διαγώνια μπλοκ.

	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1	0
C_2	1	0	1
C_3	0	1	1

Πίνακας 1.3: Πίνακας αναπαράστασης των μπλοκ

Κεφαλαιο 2

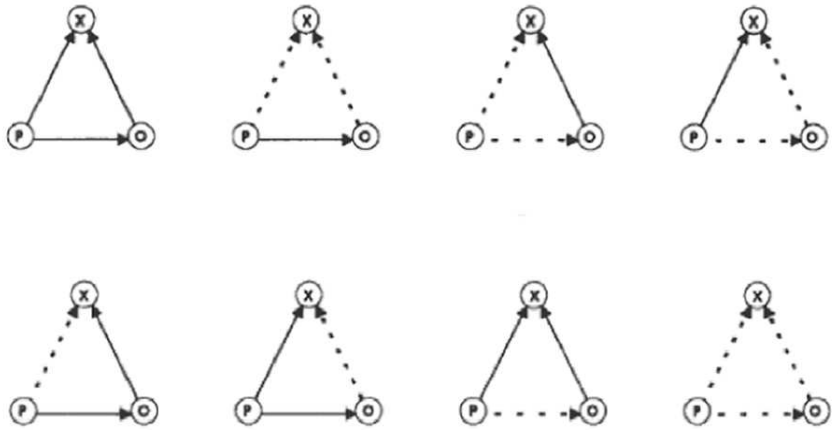
Δομική Ισορροπία Προσημασμένων Γράφων

2.1 Η Θεωρία του Heider

Ο Heider σε άρθρο του το 1946 αναφέρει: Οι συμπεριφορές μεταξύ ατόμων και σχηματισμών αιτιωδών μονάδων αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η κεντρική ιδέα την δομικής ισορροπίας είναι μια τριάδα pox, όπου p και o είναι δρώντες και x είναι μια απρόσωπη οντότητα, όπως μία κατάσταση, ένα γεγονός, μια ιδέα, ένα αντικείμενο. Σε αυτήν την τριάδα, $p \rightarrow o$ είναι μία σχέση από το p στο o, $p \rightarrow x$ είναι μία σχέση από το p στο x και $o \rightarrow x$ είναι μια αντίληψη του p για το δεσμό μεταξύ του o και του x. 'Ενας γενικός τύπος σχέσης που διατύπωσε ο Heider είναι η σχέση του 'σχηματισμού μονάδων' U. Παραδείγματα της σχέσης αυτής είναι: η εγγύτητα, π.χ., ο p είναι κοντά στο x, η αιτία, π.χ., ο p προκαλεί το x να συμβεί, η ένταξη σε ομάδες, π.χ., ο p είναι μέλος του x, ή ακόμα η σχέση του περιέχεσθαι, π.χ., ο p ανήκει στο x. Η άρνηση του U, δηλαδή, $\neg U$, δηλώνει το αντίθετο ανάλογα με τις παραπάνω έννοιες. Γενικώς, η τριάδα pox μπορεί να είναι μιας απο τις οκτώ βασικές μορφές του σχήματος 2.1, όπου οι συνεχόμενες γραμμές συμβολίζουν θετικούς δεσμούς και οι διακεκομμένες αρνητικούς δεσμούς.

Το σχήμα 2.2 απεικονίζει μια τριάδα για κάποια απρόσωπη οντότητα x. Εάν το x είναι μια κατηγορία, τότε το $o \rightarrow x$ δείχνει ότι το o ανήκει στην κατηγορία του x, δηλαδή, oUx. Ο δεσμός $p \rightarrow x$ απεικονίζει την διάθεση του p απέναντι στο x και η σχέση $p \rightarrow o$ είναι ο δεσμός του p με το o (ο οποίος συχνά δεν εξαρτάται από το αν το p γνωρίζει ή έχει μια αντίληψη της σχέσης oUx).

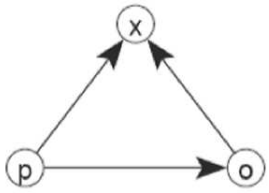
Η δεύτερη σχέση, που συμβολίζεται με L, αποδίδει προσημασμένες συναισθηματικές σχέσεις, όπως, π.χ., αρέσκειας/αντιπάθειας, αγάπης/μίσους, σεβασμού/ασέβειας, και η $\neg L$ συμβολίζει την αντίθετη σχέση. Για την καλύτερη κατανόηση, το θετικό κομμάτι της σχέσης θα το συμβολίζουμε με P, ενώ την



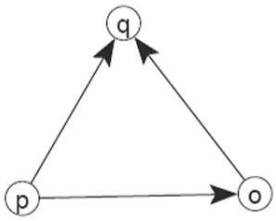
Σχήμα 2.1: Οκτώ κατευθυνόμενες pox τριάδες: οι τέσσερις τριάδες της πάνω σειράς είναι ισορροπημένες και οι τέσσερις τριάδες της κάτω σειράς είναι μη ισορροπημένες.

άρνησή του $\neg L$ θα την συμβολίζουμε με N. Οι δεσμοί της σχέσης L σε μία προσημασμένη τριάδα μπορεί να είναι θετικοί (P), αρνητικοί (N) ή μηδενικοί. Αγνοώντας προς το παρόν τους μηδενικούς δεσμούς, το pPo συμβολίζει έναν θετικό δεσμό από p στο o, ενώ το pNo συμβολίζει έναν αρνητικό δεσμό από το p στο o. Η τριάδα pox στο σχήμα 2.2 γίνεται η τριάδα poq του σχήματος 2.3, όταν το x (ένα απρόσωπο αντικείμενο) αντικατασταθεί από το q (ένα τρίτο άτομο). Η οντότητα $o \rightarrow q$ είναι η αντίληψη του p για την σχέση του o με το q. Ο πίνακας 2.1 δείχνει τις 8 δυνατές προσημασμένες τριάδες (όταν οι μηδενικοί δεσμοί έχουν αποκλειστεί). Οι τριάδες pox και poq έχουν την ίδια λογική δομή.

Για τη σχέση του περιέχεσθαι, ένας ισχυρός σχηματισμός μονάδων δεσμών ορίζεται από τη φυλή. Υποθέτουμε ότι το p είναι ένας λευκός δρώντας, το o ένας μαύρος και το x η κατηγορία των 'μαύρων'. Ο δεσμός $o \rightarrow x$ είναι μια σχέση σχηματισμού μονάδων, όταν το p αναγνωρίζει ότι το o ανήκει στο x (oUx ή το o είναι μαύρος). Στη συνέχεια, το $p \rightarrow x$ συμβολίζει την διάθεση που έχει το p για το x (διάθεση αρέσκειας, αντιπάθειας ή ουδέτερη) και το $p \rightarrow o$ είναι ο συναισθηματικός δεσμός του p για το o. Διαισθητικά, θα φαινόταν ότι αν το p έκλινε ευνοικά προς το x και έβλεπε ότι το o ανήκει στο x, τότε του p θα του άρεσε το o. (Αυτό μπορεί να είναι ένα παράδειγμα για την περίπτωση που η τριάδα PPP είναι μια από τις ισορροπημένες τριάδες στο αριστερό μέρος του πίνακα 2.1.)



Σχήμα 2.2: Μια τριάδα απλού σχηματισμού μονάδων *pox*



Σχήμα 2.3: Μια τριάδα απλών συναισθηματικών σχέσεων *poq*

Εναλλακτικά, αν το p αντιπαθεί το x, βλέπει το o να ανήκει στο x, φαίνεται λογικό ότι το p θα αντιπαθήσει το o. (Αυτό μπορεί να είναι ένα παράδειγμα μιας μη ισορροπημένης τριάδας NNP στο δεξιό μέρος του πίνακα 2.1). Συνδυασμοί των τριών δεσμών από το σύνολο σχέσεων $\{L, \neg L, U, \neg U\}$ δημιουργούν αυτές τις τριάδες, που όρισε ο Heider, όπου τα L και U συμβολίζονται με P, ενώ οι αρνήσεις τους συμβολίζονται με N. Αυτές οι τριάδες διαφέρουν σημαντικά από αυτές που φαίνονται στον πίνακα 2.1 Έτσι, στο αριστερό μέρος του πίνακα εμφανίζονται οι ονομαζόμενες ισορροπημένες τριάδες, ενώ οι ονομαζόμενες μη ισορροπημένες τριάδες εμφανίζονται στο δεξιό μέρος του πίνακα, με τα P και N να συμβολίζουν τα πρόσημα των δεσμών στις τριάδες. Η δομή στις τριάδες με x και στις τριάδες q είναι ίδιες στον πίνακα 2.1.

Οι μηχανισμοί του Heider

Στην προσέγγιση του Heider, οι δρώντες σχηματίζουν κάποιες πνευματικές εικόνες, συναισθηματικά καθορισμένες, και συνδέονται μεταξύ τους με δεσμούς

Balanced			Imbalanced		
$p \rightarrow o$	$p \rightarrow x$	$o \rightarrow x$	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow x$	$o \rightarrow x$
$p \rightarrow o$	$p \rightarrow q$	$o \rightarrow q$	$p \rightarrow o$	$p \rightarrow q$	$o \rightarrow q$
P	P	P	P	P	N
P	N	N	P	N	P
N	P	N	N	P	P
N	N	P	N	N	N

Πίνακας 2.1: Οκτώ προσημασμένες τριάδες

σχηματισμού μονάδων. Μια τριάδα, που περιέχει έναν άρτιο αριθμό αρνητικών δεσμών, ορίζεται ως ισορροπημένη, ενώ μια τριάδα με περιττό αριθμό αρνητικών δεσμών ορίζεται ως μη ισορροπημένη. Η παρουσία μη ισορροπημένων τριάδων δημιουργεί κάποια 'ένταση' σε έναν δρώντα και, κατά συνέπεια, κάποια ψυχολογική δυσφορία. Έτσι, ο κάθε δρώντας προσπαθεί να μειώσει την ένταση αυτή κάνοντας ισορροπημένες τις μη ισορροπημένες τριάδες. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ο p αντιπαθεί τους μαύρους (pNx), αναγνωρίζει ότι ο o είναι μαύρος (oUx) και του p αρέσει ο o (pPo). Σύμφωνα με τον Heider, η κατάσταση αυτή δεν είναι ισορροπημένη. Ο δρώντας p έχει τρεις επιλογές για να πετύχει ισορροπία. Η πρώτη, και πιθανόν λιγότερο πιστευτή, είναι να αποφασίσει ότι ο o δεν είναι μαύρος και να δημιουργηθεί ο δεσμός $o\neg Ux$. Η δεύτερη επιλογή είναι να αποφασίσει ότι η αποστροφή των μαύρων είναι ισχυρότερη από την συμπάθεια στον o, σαν άτομο, και, έτσι, να δημιουργηθεί ο δεσμός pNo. Η τρίτη επιλογή είναι να αλλάξει στο δεσμό pLx, δοθέντος του δεσμού pLo. Και οι τρεις αλλάγες οδηγούν σε μια ισορροπημένη τριάδα, μολονότι οι τριάδες διαφέρουν μεταξύ τους. Φυσικά, τα πράγματα θα ήταν πιο πολύπλοκα, εάν ο p ανήκε σε πολλαπλές τριάδες και εάν οι αλλαγές για την ισορροπία σε μια τριάδα δημιουργούσαν ανισορροπία σε μια άλλη τριάδα. Υπάρχουν 'δυνάμεις,' οι οποίες οδηγούν, με την πάροδο του χρόνου, προς την ισορροπία όλες τις τριάδες και εξωθούν τους δρώντες να βρίσκονται μόνο μέσα σε ισορροπημένες τριάδες. Η ακριβής διατύπωση της θεωρίας της δομικής ισορροπίας είναι ότι οι δρώντες κινούνται 'προς την ισορροπία,' ενώ υπάρχει μια εξυπακουόμενη προϋπόθεση ότι οι δρώντες μπορούν στην πραγματικότητα να επιτύχουν την ισορροπία μετά από αρκετό χρόνο.

2.2 Δομική Ισορροπία

Ένας προσημασμένος κατευθυνόμενος γράφος είναι ένα διαταγμένο ζεύγος (G, σ), όπου (Batagelj, 1994):

(i) $G = (V, R)$ είναι ένας κατευθυνόμενος γράφος, χωρίς βρόγχους, με σύνολο κορυφών V, σύνολο τόξων $R \subseteq V \times V$ και

(ii) $\sigma : R \to \{p, n\}$ είναι η συνάρτηση προσήμου. Τα τόξα με πρόσημο p είναι θετικά, ενώ τα τόξα με πρόσημο n είναι αρνητικά. Ισοδύναμα, $\sigma : R \to \{+1, -1\}$.

Σε συντομία, θα συμβολίζουμε ένα τέτοιο γράφο με $G = (V, R, \sigma)$. Για τις τριάδες pox των Heider και Newcomb, $p, o, x \in V$, ενώ οι σχέσεις μεταξύ τους $\in R$. Για ένα κοινωνικό δίκτυο, οι δρώντες $u_i \in V$ και τα διαταγμένα ζευγάρια $(u_i, u_j) \in R$, για $u_i, u_j \in V$.

Τα πρόσημο των διαδρομών, κύκλων, ημιδιαδρομών και ημικύκλων καθορίζονται από το γινόμενο των προσήμων των τόξων, που τα αποτελούν. Αυτά είναι είτε θετικά είτε αρνητικά, ενώ ένας κατευθυνόμενος γράφος G είναι ισορροπημένος εάν κάθε ημικύκλος σε αυτόν είναι θετικός.

Ο παρακάτω διαμερισμός της δομικής ισορροπίας είναι βασισμένος σε γνωστά αποτελέσματα του Harary (1965):

Θεώρημα 2.1. *Ένας προσημασμένος κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, R, \sigma)$ είναι ισορροπημένος εάν και μόνο εάν, για κάθε ζευγάρι κορυφών στο V, όλες οι ημιδιαδρομές που τις ενώνουν έχουν το ίδιο πρόσημο.*

Θεώρημα 2.2. *Ένας προσημασμένος κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, R, \sigma)$ είναι ισορροπημένος εάν και μόνο εάν κάθε ημικύκλος του είναι θετικός.*

Θεώρημα 2.3. (**Cartwright & Harary**, 1956.) *Ένας προσημασμένος κατευθυνόμενος γράφος $G = (V, R, \sigma)$ είναι ισορροπημένος εάν και μόνο εάν το V μπορεί να διαμεριστεί σε δύο υποσύνολα A και B, που ονομάζονται θετικά σύνολα (plus-sets), έτσι ώστε όλοι οι θετικοί δεσμοί μεταξύ των δρώντων να βρίσκονται μέσα στα θετικά σύνολα, ενώ όλοι οι αρνητικοί δεσμοί να ενώνουν δρώντες από διαφορετικά θετικά σύνολα, δηλαδή, να ισχύουν τα εξής:*

(i) $\forall (u_i, u_j)$, απεικονιζόμενο στο p κάτω από τη σ, $u_i, u_j \in A$ ή $u_i, u_j \in B$ και

(ii) $\forall(u_i, u_j)$ *απεικονιζόμενο στο* n *κάτω από τη* σ, $u_i \in A$ *και* $u_j \in A$, *ή αντίστροφα.*

Το Θεώρημα 2.3 λέγεται και 'θεώρημα της δομής' για προφανείς λόγους. Μια (μάκρο-) δικτυακή ιδιότητα είναι αυτή, που τον διαχωρίζει σε δύο αμοιβαία ανταγωνιστικές υποομάδες, κάθε μια από τις οποίες έχει εσωτερική ενότητα (μόνο θετικούς δεσμούς).

2.3 Γενικευμένη Δομική Ισορροπία

Οι Cartwright και Harray (1956) έκαναν την γενίκευση της θεωρίας του Heider με έναν τρόπο που είχε τόσο τεχνικές όσο και θεμελιώδεις συνέπειες. Στην προσπάθεια αυτή, πρώτο, μετέφεραν την εμπειρική εστίαση από τις πνευματικές συναισθηματικές διαδικασίες στη δυναμική σε ομαδικό επίπεδο και στις παρατηρήσιμες σχέσεις μεταξύ των δρώντων. Δεύτερο, συγχώνευσαν τις ιδέες των συναισθηματικών δεσμών και των δεσμών σχηματισμού μονάδων θεωρώντας μόνο προσημασμένους δεσμούς. Η τρίτη αλλαγή που έκαναν ήταν ότι θεώρησαν κύκλους (και ημικύκλους) δεσμών και, έτσι, κινήθηκαν πέρα από τις τριάδες. Το πρόσημο μιας τριάδας ορίστηκε ως το γινόμενο των πρόσημων στην τριάδα και η ιδέα αυτή επεκτάθηκε έτσι ώστε το πρόσημο ενός κύκλου (ή ενός ημικύκλου) να είναι το γινόμενο των προσήμων στον κύκλο (ή στον ημικύκλο). Ένας κύκλος είναι ισορροπημένος αν το γινόμενο των πρόσημων στον κύκλο αυτό είναι θετικό (δηλαδή, υπάρχει άρτιος αριθμός αρνητικών δεσμών στον κύκλο). Παρόμοια ένας κύκλος με περιττό αριθμό δεσμών ειναι μη ισορροπημένος. Έτσι, η εστίαση μεταφέρθηκε από τα σύνολα τριάδων σε δίκτυα ή γράφους προσημασμένων δεσμών, οπότε ένα προσημασμένο δίκτυο ή γράφος είναι ισορροπημένο αν όλοι του οι κύκλοι είναι ισορροπημένοι.

Οι Cartwright και Harary απέδειξαν το προηγούμενο αξιοσημείωτο θεώρημα της δομής, το Θεώρημα 2.3. Το θεώρημα αυτό της δομικής ισορροπίας αποτελεί στη ουσία μια ευφυή σύνδεση των πνευματικών συναισθηματικών διαδικασιών με τη (μάκρο-) δομή της ομάδας. Το μειονέκτημα είναι ότι οι πνευματικές συναισθηματικές διαδικασίες είτε εξαφανίζονται εντελώς είτε υποτίθεται ότι λειτουργούν όταν όλοι οι δρώντες έχουν μια ακριβή και πλήρη εικόνα των προσημασμένων δικτύων στα οποία βρίσκονται. Εάν υπήρχε μια τάση προς ισορροπία, τότε ο αριθμός των αρνητικών κύκλων θα μειωνόταν και η δομή της ομάδας θα έτεινε προς ισορροπία στη μορφή δύο αμοιβαία εχθρικών υποομάδων με την κάθε μια από αυτές να έχει στο εσωτερικό της θετικούς δεσμούς.

Η κατανόηση της κίνησης προς ισορροπία απαιτεί την μέτρηση της ανισορροπίας. Σε ένα μεγάλο μέρος της προηγούμενης δουλειάς χρησιμοποιούνταν τα πρόσημα των κύκλων για τον ορισμό μέτρων ανισορροπίας δια μέσου του ποσοστού των κύκλων που δεν ήταν ισορροπημένοι. Αυτό γινόταν πολυπλοκότερο λόγω της ύπαρξης κύκλων διαφορετικών μηκών, οπότε έπρεπε να ορισθούν βάρη στα μήκη των κύκλων. Η χρήση των κύκλων για τον ορισμό της ανισορροπίας δεν ήταν αποτελεσματική, γιατί ο υπολογισμός ενός μέτρου ανισορροπίας, που βασίζεται στους κύκλους, είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα για οποιοδήποτε δίκτυο ή γράφο και η γενική λύση του δόθηκε από τους Hummon και Fararo (1995) μόνο μετά το 1995. Δύο πιο χρήσιμα μέτρα ανισορροπίας είναι τα εξής:

Ορισμός 2.1. *(i) Ονομάζουμε δείκτη αντιστροφής (προσήμου) το μικρότερο αριθμό συνδέσεων, των οποίων η αντιστροφή των πρόσημων οδηγεί σε ένα ισορροπημένο γράφο. Ειδικότερα, μια συλλογή συνδέσεων ονομάζεται 'ελάχιστη' σε αντιστροφή εάν η αντιστροφή προσήμων οδηγεί σε ισορροπία, αλλά η αντιστροφή προσήμων σε οποιοδήποτε γνήσιο υποσύνολό της δεν φέρνει αυτό το αποτέλεσμα (Harary et al., 1965).*

(ii) Ονομάζουμε δείκτη διαγραφής (προσήμου) το μικρότερο αριθμό συνδέσεων, των οποίων η απομάκρυνση οδηγεί σε ένα ισορροπημένο γράφο.

Ο δείκτης αντιστροφής (προσήμου) συνδέσεων και ο δείκτης διαγραφής συνδέσεων είναι ταυτόσημοι (Harary *et al.*, 1965). Πάντως, από εδώ και στο εξής, θα χρησημοποιούμε τον δείκτη της ελάχιστης αντιστροφής προσήμων σαν ένα μέτρο της ανισορροπίας των προσημασμένων κατευθυνόμενων γράφων (κάτι που γενικεύεται αμέσως για τις περιπτώσεις του $k > 2$).

Η ιδέα της διαμέρισης μιας ομάδας σε δυο αμοιβαία εχθρικές υποομάδες είναι πολύ σημαντική. Ο Davis (1967), παρατηρώντας ότι οι ομάδες συχνά διαμερίζονται σε περισσότερές από δύο αμοιβαία εχθρικές υποομάδες, διερεύνησε τους τρόπους της θεωρίας της ισορροπίας, με τους οποίους ένας τέτοιος διαμερισμός μπορεί να συμβεί. Καταρχήν θεώρησε όλες τις αρνητικές τριάδες ως ισορροπημένες. Επιπλέον, θεώρησε ότι ένας κύκλος είναι μη ισορροπημένος αν έχει ακριβώς έναν αρνητικό δεσμό και ισορροπημένος διαφορετικά. Ένας γράφος, τώρα, είναι ισορροπημένος αν όλοι οι κύκλοι είναι ισορροπήμενοι (με αυτήν την τροποποιημένη έννοια). Με τον τρόπο αυτό, απέδειξε ένα δεύτερο θεώρημα της δομής, το οποίο λέει ότι: Ένας γράφος είναι ισορροπημένος αν και μόνο αν το σύνολο των κορυφών μπορεί να διαμεριστεί σε δύο ή περισσότερα θετικά σύνολα, στα οποία όλοι οι θετικοί δεσμοί βρίσκονται μέσα στα θετικά σύνολα, ενώ όλοι οι αρνητικοί δεσμοί ενώνουν δρώντες σε διαφορετικά θετικά σύνολα. Έτσι, γενικώς μιλάμε για k-ισορροπία, όπου k είναι ο αριθμός των θετικών συνόλων. Προφανώς, για $k = 2$, προκύπτει ο κλασσικός ορισμός της δομικής ισορροπίας,

ενώ για $k > 2$ έχουμε τον ορισμό της γενικευμένης δομικής ισορροπίας.

Θεώρημα 2.4. (**Davis**, 1967.) *Ένας προσημασμένος κατευθυνόμενος γράφος είναι k-ισορροπημένος εάν και μόνο εάν δεν περιέχει κανένα ημικύκλο με ακριβώς ένα αρνητικό τόξο.*

2.4 Η Θεμελιώδης Υπόθεση της Δομικής Ισορροπίας

Η θεμελιώδης υπόθεση της δομικής ισορροπίας (ΘΥΔΙ) είναι εύκολο να διατυπωθεί απλά: Τα προσημασμένα ανθρώπινα κοινωνικά δίκτυα κινούνται προς την ισορροπία μέσα στο χρόνο. Για να επιβεβαιώσουμε αυτή την υπόθεση, χρειάζεται να έχουμε στη διάθεσή μας κάποια χρονικώς μεταβαλλόμενα δεδομένα για ένα προσημασμένο δίκτυο. Ένα από τα λίγα σύνολα τέτοιων δεδομένων που υπάρχουν είναι τα δεδομένα της μελέτης του Sampson (1968), τα οποία θα τα συζητήσουμε στο τέταρτο κεφάλαιο των παραδειγμάτων (Παράδειγμα 4.5). Οι Doreian και Mrvar (1996) χρησιμοποίησαν αυτά τα δεδομένα, για να δείξουν ότι ο δείκτης ανισορροπίας των συνδέσεων είχε την τάση να μειώνεται σε τρεις διαδοχικές χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια μιας περιόδου αυξανόμενης πόλωσης και σύγκρουσης ως προς τη σχέση συμπάθειας-αντιπάθειας μιας ομάδας δόκιμων μοναχών ενός μοναστηριού. Αυτοί οι δόκιμοι μοναχοί διαμερίζονται σε 3 παρόμοιες υποομάδες (θετικά σύνολα) σε κάθε μια από τις θεωρούμενες χρονικές στιγμές. Επιπλέον, το μέτρο της ανισορροπίας μειώνεται με το χρόνο. Οι ταυτότητες και η σύνθεση των τριών υποομάδων στηρίζονταν στην εθνογραφική αφηγηματική δουλειά του Sampson (1968).

Μια άλλη ιστορική συλλογή χρονικώς μεταβαλλόμενων δεδομένων περιέχεται στη μελέτη του Newcomb (1961), όπως περιγράφεται στη διδακτορική διατριβή του Nordlie (1958) για δεκαπέντε χρονικές στιγμές. Οι Doreian *et al.* (1996) χρησιμοποίησαν αυτά τα δεδομένα, για να εξετάσουν την χρονική μεταβολή των ιδιοτήτων της αμοιβαιότητας, της μεταβατικότητας και της ανισορροπίας. Η αμοιβαιότητα ήταν σημαντικά μεγαλύτερη από τις τυχαίες τιμές, που θα μπορούσε να πάρει σε δεκαπέντε χρονικές στιγμές. Είχε αυξομειώσεις μέσα στη συνολική περίοδο, αλλά δεν απέκλεινε κατά πολύ από την αρχική της τιμή. Το ποσοστό της μεταβατικότητας δεν ήταν σημαντικά διάφορο του μηδενός στο πρώτο χρονικό σημείο. Όμως, αυξάνονταν στις πρώτες οκτώ χρονικές στιγμές και στη συνέχεια παρέμενε ουσιαστικά σταθερό. Το ποσοστό της μεταβατικότητας γινόταν σημαντικά διαφορετικό του μηδενός στην τρίτη χρονική στιγμή. Το ποσοστό της δομικής ανισορροπίας μειωνόντα συνεχώς σε όλη τη χρονική

περίοδο (παρόλο που η μείωση δεν ήταν μονότονη). Αυτές οι τρεις συζευγμένες διαδικασίες, που έχουν διαφορετικές χρονικές κλίμακες, αποτελούν ένα ενδιαφέρον παράδειγμα για περετέρω μελέτη.

Οι Doreian και Krackhardt (2001) επέστρεψαν στη μελέτη των δεδομένων του Newcomb, για να κάνουν μια καλύτερη ανάλυση της χρονικής συμπεριφοράς των δεδομένων της δομικής ισορροπίας. Επικεντρώθηκαν στους οκτώ τύπους τριάδων του πίνακα 2.1 και επαναδιατύπωσαν την ΘΥΔΙ με δύο υποθέσεις: (1) ο αριθμός των ισορροπημένων τριάδων θα αυξάνεται μέσα στον χρόνο και (2) ο αριθμός των μη ισορροπημένων τριάδων θα μειώνεται μέσα στο χρόνο. Όρισαν μια 'προ-μεταβατική' συνθήκη ορισμένη από τους δεσμούς $p \rightarrow o$ και $o \rightarrow q$ και εξέτασαν κατά πόσο ο τρίτος δεσμός $p \rightarrow q$ μπορούσε να συμπληρωθεί με ένα τρόπο συνεπή με την ΘΥΔΙ. Τα αποτελέσματά τους ήταν σύνθετα και συνοψίζονται στον πίνακα 2.2 (που έχει παρθεί από την εργασία τους). Η συχνότητα εμφάνισης των ισορροπημένων τριάδων PPP και PNN αυξάνονταν μέσα στο χρόνο, κάτι που στηρίζει τη ΘΥΔΙ. Όμως, η συχνότητα των ισορροπημένων τριάδων NPN και NNP *μειώνονταν* κατά την διάρκεια του χρόνου, κάτι που έρχεται σε αντίφαση με τη ΘΥΔΙ. Οι μη ισορροπημένες τριάδες PPN και PNP μειώνονταν σε συχνότητα κατά τη διάρκεια του χρόνου, κάτι που παρείχε επιπλέον στήριξη στη ΘΥΔΙ. Παρόλα αυτά, ο αριθμός των μη ισορροπημένων τριάδων NPP *αυξάνονταν* κατά τη διάρκεια του χρόνου, πάλι σε αντίφαση με τη ΘΥΔΙ. Ο αριθμός των τριάδων NNN αυξάνονταν με το χρόνο. Για τη θεωρία της ισορροπίας με k=2, αυτό έρχεται σε αντίθεση με την ΘΥΔΙ αλλά, για $k > 2$, αυτές οι αυξήσεις συμφωνούν με τη ΘΥΔΙ. (Για αυτό το λόγο, χρησιμοποιούνται οι παρενθέσεις στην τελευταία γραμμή του πίνακα 2.2.)

Ενώ αυτά τα αποτελέσματα είναι προβληματικά για την θεωρία της δομικής ισορροπίας, πιθανόν η διερεύνηση των εναλλακτικών μηχανισμών των Doreian και Krackhardt (2001) να είναι ακόμη περισσότερο προβληματική. Εστιάζοντας στις τροχιές, που *δεν* στηρίζουν τη θεωρία της ισορροπίας, βρήκαν ότι για όλες αυτές τις τροχιές ο δεσμός $p \rightarrow o$ είναι αρνητικός. Θέτοντάς το διαφορετικά, αν ισχύει pPo, τότε οι μηχανισμοί της ισορροπίας λειτουργούν, αλλά αν ισχύει pNo, τότε οι μηχανισμοί της ισορροπίας δεν λειτουργούν, κάτι που είχε προβλεφθεί από τον Newcomb (1968). Ας παρατηρήσουμε ότι η κατάσταση της τριάδας NNN είναι διφορούμενη, καθώς μπορεί να θεωρηθεί και μη ισορροπημένη (για $k = 2$) και ισορροπημένη (για $k > 2$).

Ακόμα περισσότερο προβληματικό είναι ένα άλλο σημείο του πίνακα 2.2 για τις τριάδες, των οποίων οι τροχιές αυξάνονται σε συχνότητα με το χρόνο. Τέτοιες τροχιές επιδεικνύουν το κοινό χαρακτηριστικό να έχουν τους δύο τελευταίους

Triple	Tie 1 $p \rightarrow o$	Tie 2 $o \rightarrow q$	Tie 3 $p \rightarrow q$	Balance	Supports Balance
PPP	+	+	+	yes	supports
PPN	+	+	-	no	supports
PNP	+	-	+	no	supports
PNN	+	-	-	yes	supports
NPP	-	+	+	no	contradicts
NPN	-	+	-	yes	contradicts
NNP	-	-	+	yes	contradicts
NNN	-	-	-	yes/no	(supports)

Πίνακας 2.2: Προ-μεταβατικές συνθήκες και ισορροπία

δεσμούς να είναι είτε PP είτε NN. Δηλαδή, η αύξηση της συχνότητας έρχεται, όταν οι δεσμοί $p \rightarrow q$ και $o \rightarrow q$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Ανεξάρτητα από την κατάσταση του δεσμού $p \rightarrow o$, η τριάδα αυξάνεται σε συχνότητα, όταν οι p και o συμφωνούν ως προς τους δεσμούς τους (συμπάθειας ή αντιπάθειας) με το q. Αυτό υποδηλώνει ότι τα χαρακτηριστικά του q παίζουν ένα μεγάλο ρόλο, κάτι που είναι μια μη δομική ιδιότητα! Οι Doreian και Krackhardt (2001) υπέθεσαν ότι είναι δυνατό η διαφοροποιημένη δημοτικότητα/μη δημοτικότητα να παρερμηνευθεί από τη λειτουργία των μηχανισμών της δομικής ισορροπίας. Τελικά, τα αποτελέσματά τους υποδηλώνουν ότι μπορεί να υπάρχει μια μορφή συν-εξέλιξης μεταξύ των δρώντων και των χαρακτηριστικών τους: κάποιοι δρώντες, για τους οποίους στο τέλος της μελέτης υπήρχε μεγάλη αντιπάθεια για αυτούς, στην αρχή της διαδικασίας δεν έχαιραν τόσο μεγάλης αντιπάθειας. Καθώς η δομή της ομάδας μορφοποιείται από τρεις ξεχωριστές υποομάδες σε μια μεγάλη υποομάδα, η μέτρηση των θετικών και αρνητικών δεσμών άλλαζε συστηματικά. Το λιγότερο, αυτά τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι η ΘΥΔΙ έχει περιορισμένη χρησιμότητα για την κατανόηση της δυναμικής της δομικής ισορροπίας και ότι αυτές οι διαδικασίες της κοινωνικής ισορροπίας λειτουργούν με τρόπους, οι οποίοι είναι περισσότερο πολύπλοκοι από ό,τι υποδηλώνει η θεμελιώδης υπόθεση της δομικής ισορροπίας. Επίσης, καταδεικνύουν κάποιους από τους σοβαρούς περιορισμούς της μεθόδου, που εστιάζεται μόνο στη δυναμική στο επίπεδο της ομάδας. Επομένως, είναι δικαιολογημένη η προσπάθεια των Hummon & Doreian (2003) να επιστρέψουν στις αρχικές ιδέες του Heider για τη δομική ισορροπία.

Κεφαλαιο 3

Διαμερισμοί Προσημασμένων Γράφων

3.1 Διαμερισμοί Προσημασμένων Γράφων και Ημιδακτυλίων

Σε αυτή την παράγραφο, θα μελετήσουμε τα θεωρήματα της δομικής ισορροπίας πάνω στην άλγεβρα των πινάκων και σε κατάλληλα ορισμένους ημιδακτύλιους. Για να κατασκευάσουμε έναν ημιδακτύλιο, που να ανταποκρίνεται στο πρόβλημα της ισορροπίας, ορίζουμε ένα σύνολο A με τέσσερα στοιχεία (Cartwright & Harary, 1956, και Doreian, 1970):

0 = δεν υπάρχει περίπατος,

n = όλοι οι περίπατοι είναι αρνητικοί,

p = όλοι οι περίπατοι είναι θετικοί,

a = τουλάχιστον υπάρχει ένας θετικός και τουλάχιστον ένας αρνητικός περίπατος.

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε τους πίνακες Cayley για τον ημιδακτύλιο της ισορροπίας (βλέπε πίνακα 3.1).

$+$	0	n	p	a
0	0	n	p	a
n	n	n	a	a
p	p	a	p	a
a	a	a	a	a

$\cdot$	0	n	p	a
0	0	0	0	0
n	0	p	n	a
p	0	n	p	a
a	0	a	a	a

x	x^*
0	p
n	a
p	p
a	a

Πίνακας 3.1: Ημιδακτύλιος ισορροπίας

Για να κατασκευάσουμε τον αντίστοιχο ημιδακτύλιο του διαμερισμού, χρειάζεται να εισάγουμε το σύνολο A ως εξής (Batagelj, 1994):

0 = δεν υπάρχει κανένας περίπατος,

n = τουλάχιστον ένας περίπατος με ακριβώς ένα αρνητικό τόξο και κανένας περίπατος με μόνο θετικά τόξα,

p = τουλάχιστον ένας περίπατος με μόνο θετικά τόξα και κανένας περίπατος με ακριβώς ένα αρνητικό τόξο,

a = τουλάχιστον ένας περίπατος με μόνο θετικά τόξα και τουλάχιστον ένας περίπατος με ακριβώς ένα αρνητικό τόξο,

q = κάθε περίπατος έχει τουλάχιστον δύο αρνητικά τόξα.

Οι πίνακες Cayley για τον ημιδακτύλιο του διαμερισμού φαίνονται στον πίνακα 3.2. Ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 3.1. *Ένας προσημασμένος γράφος (G, σ) είναι ισορροπημένος αν και μόνο αν η διαγώνιος του πίνακα κλειστότητας της ισορροπίας $\mathbf{D}_B^\bullet$ περιέχει μόνο στοιχεία με τιμή p.*

Θεώρημα 3.2. *Ένας προσημασμένος γράφος (G, σ) είναι διαμερίσιμος αν και μόνο αν η διαγώνιος του πίνακα κλειστότητας της διαμέρισης $\mathbf{D}_P^\bullet$ περιέχει μόνο στοιχεία με τιμή p.*

Ο πίνακας κλειστότητας της ισορροπίας ενός ισορροπημένου προσημασμένου γράφου δεν περιέχει κανένα στοιχείο με την τιμή a, καθώς σε αυτήν την περίπτωση τα αντίστοιχα διαγώνια στοιχεία θα είχαν επίσης την τιμή a. Παρόμοια, ο πίνακας κλειστότητας του διαμερισμού ενός διαμερίσιμου προσημασμένου γράφου δεν περιέχει κανένα στοιχείο με τιμή a.

Μία ομάδα είναι ένα μέγιστο σύνολο κορυφών με ίδιες γραμμές στον πίνακα $\mathbf{D}^\bullet$.

Στην κλειστότητα ισορροπίας ενός ισορροπημένου προσημασμένου γράφου και στην κλειστότητα διαμερισμού ενός διαμερίσιμου προσημασμένου γράφου, όλα τα στοιχεία μεταξύ των ομάδων έχουν την ίδια τιμή. Η τιμή των στοιχείων μεταξύ κορυφών της ίδιας ομάδας είναι p.

Και στις δύο περιπτώσεις, οι διαφορετικοί διαμερισμοί του συνόλου των κορυφών αντιστοιχούν σε (μη ισοδύναμους) χρωματισμούς του γράφου με τις ομάδες

$+$	0	n	p	a	q
0	0	n	p	a	q
n	n	n	a	a	n
p	p	a	p	a	p
a	a	a	a	a	a
q	q	n	p	a	q

$\cdot$	0	n	p	a	q
0	0	0	0	0	0
n	0	q	n	n	q
p	0	n	p	a	q
a	0	n	a	a	q
q	0	q	q	q	q

x	x^*
0	p
n	a
p	p
a	a
q	p

Πίνακας 3.2: Ημιδακτύλιος διαμερισμού

ως κορυφές, στις οποίες υπάρχει μία ακμή αν και μόνο εάν τα στοιχεία μεταξύ των αντίστοιχων ομάδων στον πίνακα $D^\bullet$ έχουν την τιμή n.

Υπάρχει ένας άλλος τρόπος να διερευνήσουμε την διαμερισιμότητα ενός προσημασμένου γράφου. Έστω R η σχέση γειτνίασης στο γράφο G. Συμβολίζουμε με R^+ το σύνολο όλων των θετικών τόξων και με R^- το σύνολο όλων των αρνητικών τόξων.

Θεώρημα 3.3. *Ένας προσημασμένος γράφος (G, σ) είναι διαμερίσιμος αν και μόνο αν $(R^+)^\bullet \cap R^- = \emptyset$, όπου η κλειστότητα $\bullet$ υπολογίζεται στον ημιδακτύλιο $(\{0,1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$.*

Η μορφή αυτή του παραπάνω θεωρήματος έχει σημαντική αξία, γιατί η τομή $(R^+)^\bullet \cap R^-$ αποτελείται από εκείνα τα τόξα, που εμποδίζουν τον προσημασμένο γράφο (G, σ) να είναι διαμερίσιμος.

3.2 Διαμερισμοί με Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Η Ferligoj και συνεργάτες (1994) παρουσίασαν μια μέθοδο διαμερισμού και μοντελοποίησης σε μπλοκ μέσω διαδικασιών βελτιστοποίησης. Για τις περιπτώσεις της δομικής ισοδυναμίας (Batagelj *et al.*, 1992a), της κανονικής ισοδυναμίας (Batagelj *et al.*, 1992b) καθώς και της θεωρίας της γενικευμένης ισοδυναμίας (Doreian *et al.*, 1994), προσδιορίστηκε μια συνάρτηση κριτηρίου, η οποία ελαχιστοποιείται. Για οποιανδήποτε τύπο ισοδυναμίας, το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι το εξής: προσδιορίστε μια ομαδοποίηση (διαμερισμό) C^*, για την οποία ισχύει:

$$P(C^*) = \min_{C \in \Phi} P(C)$$

όπου C είναι μια ομαδοποίηση των κορυφών του V, Φ είναι το σύνολο όλων

των δυνατών ομάδοποιήσεων και $P : \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση του κριτηρίου της ελαχιστοποίησης.

Το αρχικό θεώρημα της δομής (Θεώρημα 2.3) και η γενίκευσή του (Θεώρημα 2.4) περιγράφουν τους διαμερισμούς του V. Κάθε διαμερισμός έχει κάποια θετικά σύνολα και μια κατανομή δεσμών, η οποία αντιστοιχεί στο θεωρούμενο τύπο του διαμερισμού. Ο δείκτης της ελάχιστης αντιστροφής προσήμων για την ανισορροπία και την γενικευμένη ανισορροπία προτείνει μια φυσική συνάρτηση κριτηρίου. Οι αποκλίσεις από τη δομική ή τη γενικευμένη δομική ισορροπία προέρχονται είτε από αρνητικά τόξα μέσα σε θετικά σύνολα, είτε από θετικά τόξα μεταξύ θετικών συνόλων. Συνεπώς, η φυσική συνάρτηση κριτηρίου θα είναι:

$$P(C) = \sum_{n} + \sum_{p}$$

όπου $\sum_p$ είναι ο αριθμός των θετικών τόξων μεταξύ θετικών συνόλων και $\sum_n$ είναι ο αριθμός των αρνητικών τόξων μέσα σε θετικά σύνολα. Ενοείται ότι οι δυο αυτοί οι τύποι λάθους είναι εξίσου σημαντικοί. Παρόλα αυτά, σε κάποιες εμπειρικές περιπτώσεις, ο ένας τύπος λάθους μπορεί να είναι πιο σημαντικός από τον άλλον. Για παράδειγμα, αρνητικά τόξα μέσα σε θετικά σύνολα μπορεί να προκαλέσουν μεγαλύτερη τάση για ανισορροπία από ότι θετικά τόξα μεταξύ θετικών συνόλων. Έτσι, η συνάρτηση κριτηρίου μπορεί να γραφεί:

$$P(C) = \alpha \sum_{n} + (1 - \alpha) \sum_{p}$$

όπου $0 \leq \alpha \leq 1$. Αν $\alpha = 0.5$, οι δύο τύποι λάθους θα είναι εξίσου σημαντικοί και οι δυο παραπάνω μορφές της συνάρτησης κριτηρίου ταυτίζονται. Για $0 \leq \alpha \leq 0.5$, τα θετικά λάθη είναι πιο σημαντικά, ενώ, όταν $0.5 \leq \alpha \leq 1$, τα αρνητικά λάθη είναι πιο σημαντικά.

Αναφορικά τώρα με τη μοναδικότητα της ελάχιστης τιμής της συνάρτησης κριτηρίου, έχουμε το αποτέλεσμα που ακολουθεί. Έστω λοιπόν k ο αριθμός των θετικών συνόλων σε ένα διαμερισμό, όπου $1 \leq k \leq n$. Διαμερισμοί με k και $k + 1$ θετικά σύνολα λέγονται ότι είναι γειτονικοί.

Θεώρημα 3.4. *Σε οποιονδήποτε προσημασμένο γράφο, υπάρχει μια μοναδική ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου. Αυτή η τιμή επιτυγχάνεται είτε όταν έχουμε διαμερισμούς σε θετικά σύνολα, το καθένα από τα οποία αποτελείται από μια μόνο κορυφή, είτε όταν έχουμε γειτονικούς διαμερισμούς.*

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος υπάρχει στη σέλίδα 306 του βιβλίου των Doreian, Batagelj & Ferligoj (2005).

Οι Doreian & Mrvar (1996) έχουν προτείνει την παρακάτω διαδικασία βελτιστοποίησης. Έστω k ο αριθμός των θετικών συνόλων, για τα οποία αναζητούμε έναν διαμερισμό. Το σύνολο των κορυφών V διαμερίζεται τυχαία σε μια ομαδοποιήση k ομάδων και ο διαμερισμός αυτός έχει ένα συγκεκριμένο σύνολο γειτόνων. Οι γείτονες αυτοί προκύπτουν από την ομαδοποίηση είτε μεταφέροντας μια κορυφή από μια ομάδα σε μια άλλη, είτε εναλλάσοντας δύο κορυφές από διαφορετικές ομάδες. Η συνάρτηση κριτηρίου υπολογίζεται από τον αρχικό τυχαίο διαμερισμό. Εξετάζονται οι γείτονες μιας δοθείσης λύσης και η συνάρτηση κριτηρίου υπολογίζεται για τους γείτονες. Εάν βρεθεί ένας διαμερισμός με μικρότερη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου, τότε κρατάμε αυτή την λύση. Εάν όχι, εξετάζουμε μια άλλη γειτονιά του χρησιμοποιούμενου διαμερισμού. Ας παρατηρήσουμε ότι η μέθοδος προσδιορισμού των γειτόνων είναι μια τυχαία επιλογή. Επιπλέον, όταν τελειώσει μια εναλλαγή κορυφών, επιλέγουμε την επόμενη εναλλαγή από ένα τυχαία δημιουργούμενο σύνολο δυνατών εναλλαγών. Η μετακίνηση μιας κορυφής από μια ομάδα σε μια άλλη γίνεται και αυτή τυχαία. Όταν υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης κριτηρίου για ένα επιλεγμένο γείτονα, δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την συνάρτηση κριτηρίου για όλο τον γράφο. Ένας τέτοιος υπολογισμός θα έχει χρονική πολυπλοκότητα τάξης $O(n^2)$. Αντί αυτού, υπολογίζουμε την διαφορά στη συνάρτηση κριτηρίου, κάτι το οποίο είναι ένας υπολογισμός με χρονική πολυπλοκότητα της τάξης μόνο $O(n)$. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές. Για κάθε τυχαίο διαμερισμό σε k ομάδες, υπολογίζεται η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου και τα σύνολα των τελικών διαμερισμών είναι εκείνα, που έχουν την ελαχιστοποιημένη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου πάνω σε όλους τους τυχαία επιλεγμένους αρχικούς διαμερισμούς.

Με αυτήν την διαδικασία προσδιορίζεται ο αριθμός των ομάδων και χρησιμοποιείται μια υπορουτίνα τοπικής βελτιστοποίησης για την εύρεση του συνόλου των διαμερισμών, που έχουν την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου. Αυτές οι ομάδες θα είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στα αντίστοιχα θετικά σύνολα του διαμερισμού. Επιπρόσθετα με αυτούς τους διαμερισμούς, βρίσκουμε και το δείκτη των τόξων της θεωρούμενης μορφής ισορροπίας από τις προηγούμενες εξισώσεις και, έτσι, προσδιορίζουμε τα τόξα, που δεν είναι συνεπή με την υποκείμενη μορφή ισορροπίας της διαμερισμένης δομής.

Καθώς ο αλγόριθμος είναι η υλοποίηση μιας διαδικασίας τοπικής βελτιστοποίησης, υπάρχει το ρίσκο να πάρουμε μόνο τοπικά βέλτιστες λύσεις. Για μικρούς

γράφους, μπορούμε να ψάξουμε όλους τους διαμερισμούς. Οταν το κάνουμε, θα γνωρίζουμε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης κριτηρίου. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η διαδικασία της τοπικής βελτιστοποίησης πάντοτε εντοπίζει τα ολικά ελάχιστα. Ας τονίσουμε ότι πρέπει να επαναλαμβάνουμε τον αλγόριθμο πολλές φορές. Ένα ενδεχομένως ενδιαφέρον χαρακτηριστικό είναι ότι μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι του ενός διαμερισμοί, για δοθείσα τιμή του k, με την ίδια ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου. Ας παρατηρήσουμε ότι ο Davis (1967) το είχε προβλέψει αυτό για $k > 2$ και τελικά αυτό μπορεί να ισχύει και για $k = 2$.

Δεν υπάρχουν σίγουροι αρχικοί διαμερισμοί, από τους οποίους μπορεί να ξεκινήσει αυτή η διαδικασία τοπικής βελτιστοποίησης. Οι προφανείς υποψήφιες περιπτώσεις είναι οι διαμερισμοί από κάποιους αλγόριθμους δομικής ισοδυναμίας, όπως, για παράδειγμα, ο αλγόριθμος CONCOR. Ο Doreian και συνεργάτες (1995) έχουν δείξει ότι οι διαμερισμοί της δομικής ισοδυναμίας των προσημασμένων γράφων (με συσσωρευμένους θετικούς και αρνητικούς δεσμούς) οδηγούν σε πολύ μεγάλες τιμές της συνάρτησης κριτηρίου και μακριά από τους k-ισορροπημένους διαμερισμούς. Η διαδικασία τοπικής βελτιστοποίησης, που έχουν χρησιμοποιήσει οι Doreian & Mrvar (1996), παράγει διαμερισμούς με χαμηλότερες τιμές της συνάρτησης κριτηρίου.

3.3 Προσημασμένοι Διμερείς Γράφοι

Οι Borgatti και Everett (1992) πρότειναν την ιδέα της μοντελοποίησης σε μπλοκ γράφων με πολλαπλούς τύπους συνδέσεων. Στο πλαίσιο της θεωρίας της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, οι Doreian και συνεργάτες (2004, 2005) επέκτειναν την ανάλυση αυτή για την περίπτωση των διμερών γράφων. Αυτή η επέκταση αποτέλεσε το έναυσμα της περετέρω έρευνας άλλων ερευνητών, όπως οι Brusco και Stenley (2006, 2007). Η εφαρμογή της γενικής ιδέας σε προσημασμένους διμερείς γράφους ακολουθεί την ίδια λογική.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό για την περίπτωση του μονομερούς γράφου: Ένας προσημασμένος γράφος είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (G, σ), όπου:

1. $G = (U, E)$ είναι ένας (μη κατευθυνόμενος) γράφος, χωρίς αυτοβρόγχους, με σύνολο μονάδων (κορυφών) U και σύνολο ακμών $E \subset U \times U$ και
2. $\sigma : E \rightarrow (p, n)$ είναι μια συνάρτηση προσήμου. Οι ακμές με πρόσημο p είναι οι θετικές ακμές, ενώ οι ακμές με πρόσημο n είναι οι αρνητικές. Ισοδύναμα, έχουμε $\sigma : E \rightarrow (+1, -1)$.

Στο παράδειγμα της ανάλυσης των αποφάσεων των δικαστών του Ανώτατου Δικαστηρίου, για μια σειρά υποθέσεων, ένα παράδειγμα με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, υπάρχουν δύο τρόποι συγκρότησης του διμερούς γράφου. Κατά τον πρώτο τρόπο, οι δικαστές σχηματίζουν το ένα σύνολο, ενώ οι αποφάσεις (για τις συγκεκριμένες υποθέσεις) σχηματίζουν το άλλο σύνολο του διμερούς γράφου. Κάθε δικαστής συνδέεται με μια απόφαση με τις ψήφους του σε αυτήν και, έτσι, ορίζονται οι δεσμοί σχηματισμού μονάδων. Ο δεύτερος τρόπος, τον οποίο θα ακολουθήσουμε, είναι όταν οι δικαστές σχηματίζουν το ένα σύνολο, ενώ οι υποθέσεις (για τις οποίες αποφασίζουν) σχηματίζουν το άλλο σύνολο του διμερούς γράφου. Εδώ, κάθε δικαστής συνδέεται με μια υπόθεση, για την οποία αποφασίζει, και, έτσι, ορίζονται τώρα οι δεσμοί σχηματισμού μονάδων. Επιπλέον, αν η ψήφος ενός δικαστή ανήκει στην πλειοψηφία των συνολικών ψήφων όλων των δικαστών για μια συγκεκριμένη υπόθεση, τότε ο δεσμός του δικαστή αυτού με την υπόθεση αυτή θεωρείται ότι έχει θετικό πρόσημο, ενώ αν η ψήφος του βρίσκεται στην μειοψηφία, ο δεσμός θεωρείται ότι έχει αρνητικό πρόσημο. Με τον τρόπο αυτό, το σύνολο όλων των δικαστών και το σύνολο όλων των υποθέσεων, για τις οποίες οι δικαστές αποφασίζουν (θετικά ή αρνητικά, ανάλογα με το αν βρίσκονται στην πλειοψηφία ή τη μειοψηφία), σχηματίζουν τη δομή ενός προσημασμένου διμερούς γράφου.

Για έναν προσημασμένο διμερή γράφο, η διατύπωση του ορισμού της ισορροπίας πρέπει να αλλάξει έτσι ώστε να περιλαμβάνει δύο σύνολα (αντί για ένα). Χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς: Έστω $U = \{u_1, u_2, ..., u_{n1}\}$ το ένα σύνολο των κορυφών ενός διμερούς γράφου και $V = \{v_1, v_2, ..., v_{n2}\}$ το δεύτερο σύνολο. Ένας *προσημασμένος διμερής γράφος* είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (G, σ), όπου:

1. $G = (U, V, E)$ είναι ένας διμερής γράφος με σύνολα μονάδων U και V και σύνολο ακμών $E \subseteq U \times V$ και

2. $\sigma : E \rightarrow \{p, n\}$ είναι μια συνάρτηση προσήμου. Οι ακμές με πρόσημο p είναι θετικές, ενώ οι ακμές με πρόσημο n είναι αρνητικές. Ισοδύναμα, η $\sigma : E \rightarrow (+1, -1)$.

Μπορεί τα θεωρήματα των διαμερισμών της δομικής ισορροπίας να μην εφαρμόζονται για τους προσημασμένους διμερείς γράφους, αλλά η βασική ιδέα των θετικών μπλοκ (με μόνο θετικούς ή μηδενικούς δεσμούς) και των αρνητικών μπλοκ (με μόνο αρνητικούς ή μηδενικούς δεσμούς) έχει μεγάλη σημασία για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ προσημασμένων διμερών γράφων. Θέτοντας τις βάσεις της γενικευμένης μοντελοποίησης γράφων σε μπλοκ, οι Doreian και συνεργάτες (2005) χρησιμοποίησαν τις έννοιες της δομικής ισοδυναμίας (Lorrain και White,

1971) και της κανονικής ισοδυναμίας (White και Reitz, 1983) και τις μετέφεραν στους επιτρεπτούς τύπους μπλοκ μιας συγκεκριμένης ισοδυναμίας, έτσι ώστε να μπορέσουν να προσαρμόσουν το μοντέλο των μπλοκ σε τέτοια δεδομένα χρησιμοποιώντας απευθείας τους τύπους των μπλοκ. Σε ένα μέρος της γενίκευσής τους έπρεπε να ορίσουν τις ισοδυναμίες μέσω συνόλων νέων τύπων μπλοκ (Doreian *et al.*, 2005). Ακολουθούμε την ίδια ιδέα εδώ ψάχνοντας για διαμερισμούς των U και V και θεωρώντας τα μπλοκ που ορίζονται από αυτούς τους διαμερισμούς σε διμερή δεδομένα, τα οποία (μπλοκ) είναι είτε θετικά είτε αρνητικά. Έστω n_1 και n_2 τα μεγέθη των U και V, αντίστοιχα. Έστω k_1 ο αριθμός των ομάδων στο U και k_2 ο αριθμός των ομάδων στο V. Προφανώς ισχύει $1 \leq k_1 \leq n_1$ και $1 \leq k_2 \leq n_2$. Ονομάζουμε τον διαμερισμό με k_1 και k_2 ομάδες (k_1, k_2)-διαμερισμό των προσημασμένων διμερών δεδομένων. Επειδή ο όρος είναι αρκετά μεγάλος, θα λέμε σε συντομία *προσημασμένη 2-ομαδοποίηση*. Για συγκεκριμένο διαμερισμό (όταν οι τιμές των k_1 και k_2 είναι προφανείς), θα αναφερόμαστε σε αυτόν σαν '2-ομαδοποίηση'.

Στην μοντελοποίηση σε μπλοκ ενός προσημασμένου διμερούς γράφου $G = (U, V, E)$ προσπαθούμε να προσδιορίσουμε μια 2-ομαδοποίηση $\mathbf{C} = (\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2})$, όπου $\mathbf{C_1}$ είναι ένας διαμερισμός του U και $\mathbf{C_2}$ ένας διαμερισμός του V, τέτοια ώστε να δημιουργούνται θετικά και αρνητικά μπλοκ. Επιπλέον, συμβολίζουμε με Φ το σύνολο όλων των δυνατών 2-ομαδοποιήσεων.

Σύμφωνα με τους Doreian *et al.* (2004, 2005), το πρόβλημα της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ των διμερών γράφων μπορεί να διατυπωθει σαν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης $(\Phi, P, \min)$:

$$\text{Προσδιορίστε την 2-ομαδοποίηση } \mathbf{C}^* = (\mathbf{C_1^*}, \mathbf{C_2^*}) \in \Phi, \text{ για την οποία}$$

$$P(\mathbf{C}^*) = \min_{\mathbf{C} \in \Phi} P(\mathbf{C})$$

όπου Φ είναι το σύνολο όλων των δυνατών 2-ομαδοποιήσεων και P είναι η συνάρτηση κριτηρίου.

Για προσημασμένους γράφους (ανεξάρτητα αν είναι διμερείς ή όχι), η συνάρτηση κριτηρίου είναι κατασκευασμένη σε σχέση με τα θετικά και τα αρνητικά μπλοκ δια μέσου μιας αρίθμησης των στοιχείων, που δεν είναι συνεπή με τον ιδανικό k-ισορροπημένο διαμερισμό (για μονομερή δεδομένα) ή με τον ιδανικό (k_1, k_2)-διαμερισμό (για διμερή δεδομένα). Οι ασυνέπειες αυτές παίρνουν την μορφή αρνητικών δεσμών μέσα στα θετικά μπλοκ και θετικών δεσμών μέσα στα αρνητικά μπλοκ. Έστω N ο συνολικός αριθμός των αρνητικών δεσμών μέσα

στα θετικά μπλοκ και P ο συνολικός αριθμός των θετικών δεσμών μέσα στα αρνητικά μπλοκ. Τότε, μια γενική συνάρτηση κριτηρίου είναι η

$$P(\mathbf{C}) = \alpha N + (1 - \alpha)P$$

όπου $0 \leq \alpha \leq 1$. Όταν $\alpha = 0.5$, οι δυο ασυνέπειες έχουν το ίδιο βάρος. Για $0 \leq \alpha < 0.5$, οι θετικές ασυνέπειες θεωρούνται σημαντικότερες και, για $0.5 < \alpha \leq 1$, οι αρνητικές ασυνέπειες θεωρούνται σημαντικότερες.

Για τα δεδομένα του τεχνητού παραδείγματος του σχήματος 3.1, όπως φαίνονται στον πίνακα 4.3, ισχύει $k_1 = k_2 = 2$. Επιπλέον, P(**C**)= 0.5, λόγω ενός δεσμού (της θετικής ακμής που συνδέει το p6 με το b3), που είναι γνωστό ότι είναι ένας ασυνεπής δεσμός ως προς τις πεποιθήσεις των δύο υποομάδων και για $\alpha = 0.5$.

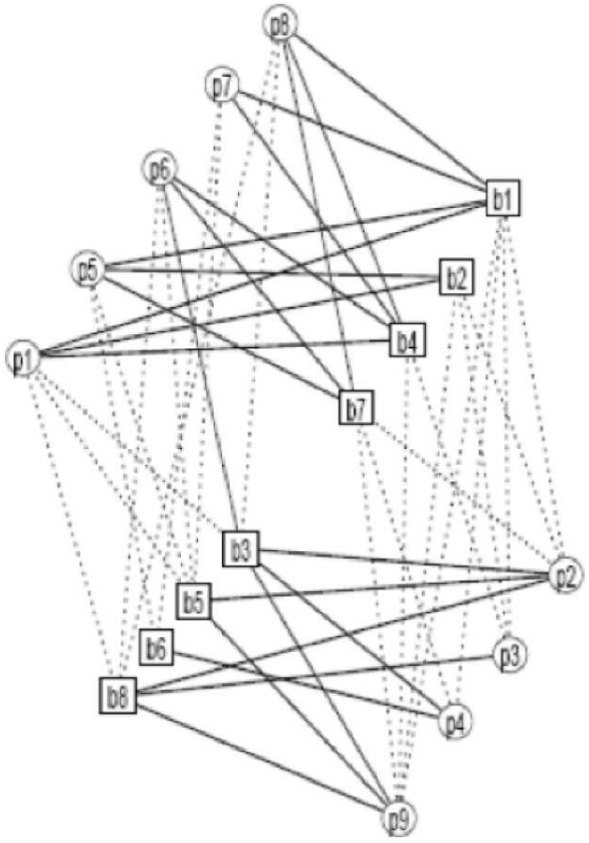
	b1	b2	b7	b4	b5	b6	b3	b8
p1	1	1	0	1	-1	0	-1	-1
p5	1	1	1	0	-1	-1	0	0
p6	0	0	1	1	-1	0	*1*	-1
p7	1	0	0	1	-1	-1	0	0
p8	1	0	1	1	0	0	-1	-1
p2	-1	-1	-1	0	1	0	1	1
p3	-1	-1	0	-1	0	0	0	1
p4	-1	0	-1	0	0	1	1	0
p9	-1	-1	-1	-1	1	0	1	1

Πίνακας 3.3: Διαμερισμός του τεχνητού διμερούς γράφου

Η συμπεριφορά του $P(\mathbf{C})$ σε σχέση με τα k_1 και k_2 πάνω στο σύνολο των βέλτιστων (k_1, k_2)-διαμερισμών δίνεται από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.5. *Δοθέντος ενός προσημασμένου διμερούς γράφου $G = (U, V, E)$ και του συνόλου των βέλτιστων διαμερισμών για τους προσημασμένους (k_1, k_2)-διαμερισμούς, με $1 \leq k_1 \leq n_1$ και $1 \leq k_2 \leq n_2$, οι βέλτιστες τιμές του $P(\mathbf{C} = (\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}))$ ελαττώνονται μονότονα συναρτήσει του k_1, για κάθε τιμή του k_2, και μονότονα συναρτήσει του k_2, για κάθε τιμή του k_1.*

Απόδειξη: Θεωρούμε έναν βέλτιστο (k_1, k_2)-διαμερισμό με k_1 ομάδες στις γραμμές και k_2 ομάδες στις στήλες, **C**, και συμβολίζουμε το βέλτιστο $P(\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{1(k_1)}, \mathbf{C}_{2(k_2)}))$ με c_{k_1,k_2}. Στην συνέχεια, θεωρούμε έναν βέλτιστο διαμερισμό με $k_1 + 1$ ομάδες στις στήλες, που προέρχονται από τον (k_1, k_2)-διαμερισμό χωρίζοντας μια ομάδα γραμμής αυτού του διαμερισμού, ενώ το k_2 κρατείται



Σχήμα 3.1: Ένας τεχνητός διμερής γράφος

σταθερό. Αυτός ο διαχωρισμός δημιουργεί επιπλέον διαχωρισμούς στα μπλοκ για την διαχωριζόμενη ομάδα κάθε στήλης. Συμβολίζουμε τη νέα συνάρτηση κριτηρίου $P(\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{1(k_1+1)}, \mathbf{C}_{2(k_2)})) = c_{k_1+1,k_2}$. Θεωρούμε ένα διαχωρισμό των μπλοκ σε δύο υπο-μπλοκ. Εάν αυτός ήταν διαχωρισμός ενός αρνητικού μπλοκ σε δυο αρνητικά υπο-μπλοκ, τα ίδια $+1$ θα παραμείνουν ασυνεπή και $c_{k_1+1,k_2} = c_{k_1,k_2}$. Όμως, έαν ένα υπο-μπλοκ ενός αρνητικού μπλοκ είναι τώρα ένα θετικό μπλοκ, τότε πρέπει να υπάρχουν περισσότερα $+1$ από -1 και η συνάρτηση κριτηρίου θα γίνει μικρότερη του c_{k_1,k_2}. Άρα, $c_{k_1+1,k_2} < c_{k_1,k_2}$ και $P(\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{1(k_1+1)}, \mathbf{C}_{2(k_2)})) < P(\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{1(k_1)}, \mathbf{C}_{2(k_2)})$. Παίρνοντας και τους δυο τύπους μεταβολών, που δημιουργούνται από το διαχωρισμό μιας ομάδας, $P(\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{1(k_1+1)}, \mathbf{C}_{2(k_2)})) \leq P(\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{1(k_1)}, \mathbf{C}_{2(k_2)})$. Ένα παρόμοιο επιχείρημα ισχύει για το διαχωρισμό των θετικών μπλοκ σε αρνητικά υπο-μπλοκ, αλλά τότε ο ρόλος των $+1$ και -1 αντιστρέφεται. Επίσης ένα παρόμοιο επιχείρημα ισχύει για τον διαχωρισμό μιας στήλης σε έναν βέλτιστο (k_1, k_2)-διαμερισμό, όταν το

k_1 διατηρείται σταθερό.

Ας θεωρήσουμε ότι μετακινούμαστε από έναν (k_1, k_2)-διαμερισμό σε έναν (k_1+1, k_2)-διαμερισμό. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας βέλτιστος (k_1+1, k_2)-διαμερισμός που δεν είναι εμφωλιασμένος μέσα σε έναν βέλτιστο (k_1, k_2)-διαμερισμό και για αυτόν το διαμερισμό $P(\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{1(k_1+1)}, \mathbf{C}_{2(k_2)})) = d_{k_1+1,k_2}$. Με το παραπάνω επιχείρημα, ένας βέλτιστος (k_1, k_2)-διαμερισμός μπορεί να διαχωριστεί για να δημιουργήσει ένα νέο διαμερισμό, στον οποίο ισχύει $P(\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{1(k_1+1)}, \mathbf{C}_{2(k_2)})) = c_{k_1+1,k_2}$. Εάν $d_{k_1+1,k_2} < c_{k_1+1,k_2}$, τότε ο διαμερισμός δεν είναι βέλτιστος. Έπεται ότι $d_{k_1+1,k_2} \geq c_{k_1+1,k_2}$. Ένα παρόμοιο επιχείρημα ισχύει όταν πάμε σε έναν (k_1, k_2+1)-διαμερισμό από έναν(k_1, k_2)-διαμερισμό.

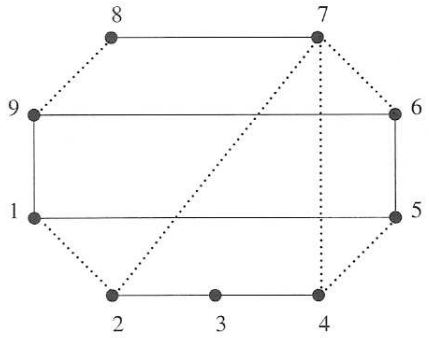
Η συμπεριφορά του $P(\mathbf{C})$ για το διαμερισμό προσημασμένων διμερών γράφων, που δίνεται από το παραπάνω θεώρημα, συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει κάποιος ξεκάθαρος κανόνας, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την δομική ισορροπία των προσημασμένων μονομερών γράφων.

Κεφαλαιο 4

Παραδείγματα

4.1 Δύο Πρώτα Απλά Παραδείγματα

4.1.1 Το Παράδειγμα του Chartrand



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	*n*	0	0	*p*	0	0	0	*p*
2	*n*	0	*p*	0	0	0	*n*	0	0
3	0	*p*	0	*p*	0	0	0	0	0
4	0	0	*p*	0	*n*	0	*n*	0	0
5	*p*	0	0	*n*	0	*p*	0	0	0
6	0	0	0	0	*p*	0	*n*	0	*p*
7	0	*n*	0	*n*	0	*n*	0	*p*	0
8	0	0	0	0	0	0	*p*	0	*n*
9	*p*	0	0	0	0	*p*	0	*n*	0

Σχήμα 4.1: Ο γράφος του Chartrand

Στο πρώτο παράδειγμα μοντελοποίησης σε μπλοκ ενός προσημασμένου γράφου θα ασχοληθούμε με τον γράφο του Chartrand (1985, σελ. 181), ο οποίος απεικονίζεται στο σχήμα 4.1, όπου επίσης δίνεται ο αντίστοιχος προσημασμένος

πίνακας γειτνίασης. Στο σχήμα αυτό, οι θετικές ακμές αναπαριστώνται από συνεχόμενες γραμμές, ενώ οι αρνητικές από διακεκομμένες.

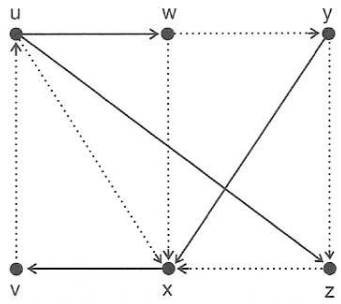
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	**p**	*n*	*n*	*n*	**p**	**p**	*n*	*n*	**p**
2	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*n*	**p**	**p**	**p**	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
3	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*n*	**p**	**p**	**p**	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
4	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*n*	**p**	**p**	**p**	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*
5	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	**p**	*n*	*n*	*n*	**p**	**p**	*n*	*n*	**p**
6	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	**p**	*n*	*n*	*n*	**p**	**p**	*n*	*n*	**p**
7	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	**p**	**p**	*n*
8	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	*n*	**p**	**p**	*n*
9	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	**p**	*n*	*n*	*n*	**p**	**p**	*n*	*n*	**p**

Πίνακας 4.1: Γράφος του Chartrand: πίνακας κλειστότητας

Στα αριστερά του πίνακα 4.1, δίνεται η αντίστοιχη κλειστότητα ισορροπίας και είναι σαφές ότι ο γράφος δεν είναι ισορροπημένος για $k = 2$. Παρόλα αυτά, από την κλειστότητα διαμερισμού στο δεξιό μέρος του πίνακα 4.1, είναι προφανές ότι ο γράφος είναι διαμερίσιμος σε τρεις ομάδες:

$$C_1 = \{1, 5, 6, 9\}, C_2 = \{2, 3, 4\}, C_3 = \{7, 8\}$$

4.1.2 Το Παράδειγμα του Roberts



Σχήμα 4.2: Ο γράφος του Roberts

Το δεύτερο πράδειγμα είναι ο προσημασμένος γράφος του Robert (1976), που απεικονίζεται στο σχήμα 4.2, ενώ ο αντίστοχος πίνακας γειτνίασης δίνεται στο αριστερό μέρος του πίνακα 4.2. Σε αυτήν την περίπτωση, η κλειστότητα διαμερισμού και η κλειστότητα ισορροπίας είναι ίσες (το δεξιό μέρος του πίνακα 4.2). Ο αντίστοιχος διαμερισμός είναι:

$$C_1 = \{v, x, y\}, C_2 = \{u, w, z\}$$

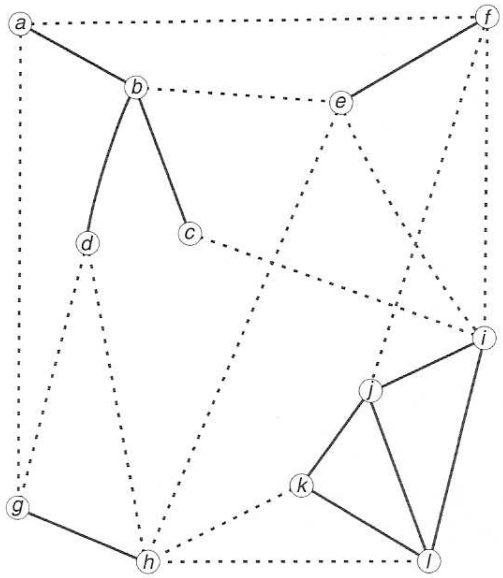
	u	v	w	x	y	z
u	0	0	p	n	0	p
v	n	0	0	0	0	0
w	0	0	0	n	n	0
x	0	p	0	0	0	0
y	0	0	0	p	0	n
z	0	0	0	n	0	0

	u	v	w	x	y	z
u	**p**	n	**p**	n	n	**p**
v	n	**p**	n	**p**	**p**	n
w	**p**	n	**p**	n	n	**p**
x	n	**p**	n	**p**	**p**	n
y	n	**p**	n	**p**	**p**	n
z	**p**	n	**p**	n	n	**p**

Πίνακας 4.2: Ο πίνακας προσημασμένης γειτνίασης και ο πίνακας κλειστότητας για το παράδειγμα του Roberts

4.2 Τρια Παραδείγματα με k-Ισορροπημένες Δομές

4.2.1 Ένα Πρώτο (Τεχνητό) Παράδειγμα



Σχήμα 4.3: Τεχνητός k-ισορροπημένος γράφος

Θεωρούμε πρώτα ένα τεχνητό (κατασκευασμένο) παράδειγμα, τον γράφο του σχήματος 4.3. Ο γράφος αυτός περιέχει 10 θετικούς δεσμούς και 12 αρνητικούς. Έτσι, όπως είναι κατασκευασμένος ο γράφος, είναι σαφές ότι μπορεί να διαμεριστεί σε τέσσερα θετικά σύνολα, τα οποία δεν έχουν καμία ασυνέπεια. Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση κριτηρίου για αυτόν τον διαμερισμό θα είναι 0.

Τώρα, ας εξετάσουμε όλους τους διαμερισμούς ($1 \leq k \leq n$) και ας επιλέξουμε εκείνους με την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου, για κάθε k. Για αυτόν τον απλό γράφο, ο αριθμός των θετικών συνόλων μπορεί να ποικίλει από 1 έως 12. Η κατανομή του αριθμού των θετικών συνόλων (ομάδες) μαζί με τις τιμές της συνάρτησης κριτηρίου, καθώς και το πλήθος των διαφορετικών διαμερισμών για κάθε αριθμό θετικών συνόλων υπολογίζονται ως εξής:

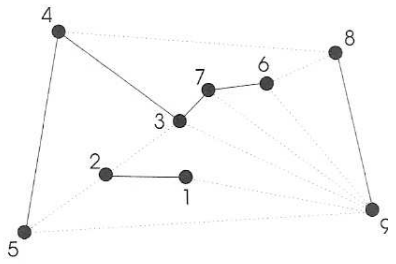
Number of plus-sets	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Criterion function	12	2	1	0	1	2	3	4	6	8	9	10
Number of partitions	1	2	4	1	4	5	2	1	3	11	1	1

Είναι φανερό ότι όταν όλες οι κορυφές του γράφου ανήκουν στην ίδια ομάδα (θετικό σύνολο), όλοι οι αρνητικοί δεσμοί θα μετρηθούν ως ασυνέπιες. Έτσι, ο διαμερισμός σε μια ομάδα θα έχει 12 ασυνέπειες. Παρόμοια, στην άλλη ακραία περίπτωση, αν κάθε κορυφή σχηματίζει τη δική της ξεχωριστή ομάδα, τότε όλοι οι θετικοί δεσμοί θα μετρούνται ως ασυνέπειες και η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου θα είναι 10. Μεταξύ αυτών των δύο ακραίων περιπτώσεων, ο τρόπος εξάρτησης της συνάρτησης κριτηρίου από τον αριθμό των θετικών συνόλων έχει μεγάλο ενδιαφέρον.

4.2.2 Το Παράδειγμα του Young

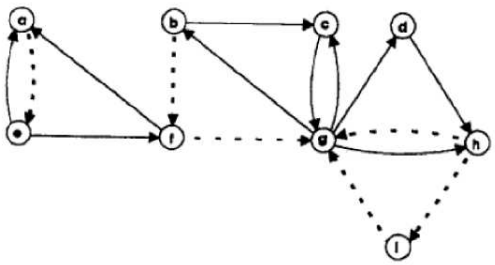
Ο Young (1971) παρατήρησε τη ζωή στο χωριό Kaluana στα Highlands της Νέας Γουινέα. Οι κορυφές στο σχήμα 4.4 αναπαριστούν φυλές ή τμήματα φυλών. Είναι οι εξής 1: Mulina I, 2: Mulina II, 3: Ainaona, 4: Malabuabua, 5: Folayai, 6: Lulauvile I, 7: Lulavile II, 8: Nouneya και 9: Iwaoyana. Οι θετικές και οι αρνητικές γραμμές αναπαριστούν σχέσεις φιλίας και εχθρότητας, αντίστοιχα. Προφανώς, δεν υπάρχουν δυο θετικά σύνολα, για να είναι η δομή αυτή ισορροπημένη. Όμως η δομή αυτή είναι ακριβώς διαμερίσιμη σε 3 θετικά σύνολα φυλών. Οι δύο φυλές Mulina αποτελούν ένα θετικό σύνολο. Το άλλο θετικό σύνολο αποτελείται από τις φυλές Nouneya και Iwaoyana. Οι υπόλοιπες φυλές ανήκουν στο τρίτο θετικό σύνολο. Όλα τα ζεύγη θετικών συνόλων

ενώνονται μεταξύ τους με αρνητικούς δεσμούς.



Σχήμα 4.4: Προσημασμένος γράφος φυλών με 3 θετικά σύνολα

4.2.3 Ένα Τρίτο (Τεχνητό) Παράδειγμα



Σχήμα 4.5: Προσημασμένος κατευθυνόμενος γράφος 9 κορυφών

Οι βασικές παράμετροι, που απαιτούνται για να ξεκινήσει η διαδικασία βελτιστοποίησης, είναι τα k και α. Για την δομική ισορροπία, η παράμετρος k παίρνει την τιμή 2, ενώ για την γενικευμένη ισορροπία του Davis (1967) είναι μεγαλύτερη του 2. Εδώ, θα θεωρήσουμε ότι $k \geq 2$. Έστω λοιπόν ο προσημασμένος κατευθυνόμενος γράφος με 9 κορυφές του σχήματος 4.5. Ο πίνακας 4.3 δίνει τις τιμές της συνάρτησης κριτηρίου για κάθε πλήθος ομάδων μαζί με το πλήθος των διαμερισμών, στους οποίους επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου Σε μια ακραία περίπτωση, όταν όλες οι κορυφές ανήκουν στην ίδια ομάδα, τότε όλα τα αρνητικά τόξα του γράφου συνεισφέρουν στα συνολικά λάθη. Στην άλλη ακραία περίπτωση, όταν ο γράφος διαμερίζεται σε σύνολα αποτελούμενα το καθένα από μια κορυφή, τότε όλα τα θετικά τόξα συνεισφέρουν στην συνάρτηση κριτηρίου. Οι μεγαλύτερες τιμές της συνάρτησης κριτηρίου επιτυγχάνονται στις δύο αυτές ακραίες περιπτώσεις. Γενικώς όμως, οι Doreian &

Mrvar (1996) έχουν βρει ότι η μορφή της εξάρτησης των τιμών της συνάρτησης κριτηρίου από τον αριθμό των ομάδων είναι μια κοίλη συνάρτηση, όπως δείχνουν και οι τιμές του πίνακα 4.3.

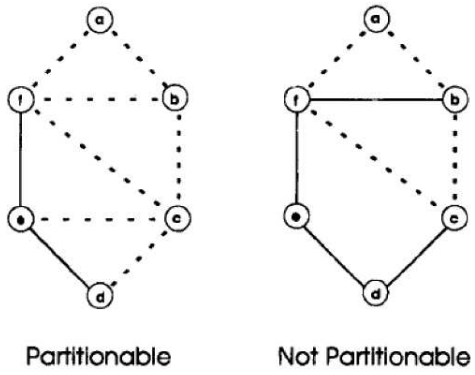
Number of clusters	Minimized value of criterion function	Number of partitions
1	3.0	1
2	1.0	1
3	1.0	1
4	1.5	3
5	2.0	6
6	2.5	4
7	3.0	1
8	4.0	1
9	5.0	1

Πίνακας 4.3: Τιμές της συνάρτησης κριτηρίου για το γράφο του σχήματος 4.5

Έτσι, βλέπουμε ότι υπάρχει ένας μοναδικός διαμερισμός σε δυο ομάδες, που έχουν την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου. Ο διαμερισμός αυτός είναι τα δυο σύνολα {a, e, f, i,}, {b, c, d, g, h}, όπου τα τόξα, τα οποία είναι ασυνεπή με την δομική ισορροπία, είναι οι αρνητικοί δεσμοί από a σε e και από h σε g. Και τα δυο αυτά λάθη βρίσκονται μέσα σε μη ισορροπημένους κύκλους του γράφου. Παρόμοια, ο μοναδικός διαμερισμός σε τρεις ομάδες είναι τα σύνολα {a, e, f}, {b, c, d, g, h}, {i}. Αυτή η λύση των τριων ομάδων δίνει τα ίδια δυο ασυνεπή τόξα για την γενικευμένη ισορροπία.

Οι διαμερισμοί των κορυφών σε τέσσερις, πέντε ή έξι ομάδες παράγουν ο καθένας περισσότερες της μιας περιπτώσεις με την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου. Γενικώς, οι Doreian & Mrvar τείνουν να δεχθούν το διαμερισμό με την ελάχιστη συνολική τιμή της συνάρτησης κριτηρίου και προτιμούν είτε το μοναδικό διαμερισμό, που αντιστοιχεί σε αυτήν την τιμή της συνάρτησης κριτηρίου, ή έναν μικρό αριθμό διαμερισμών, που ο καθένας τους έχει την ίδια τιμή της συνάρτησης κριτηρίου.

4.3 Οι Δύο Γράφοι του Davis



Σχήμα 4.6: Οι δύο προσημασμένοι γράφοι του Davis: Ένας διαμερίσιμος και ένας μή διαμερίσιμος

Ερχόμαστε τώρα να εξετάσουμε τους δυο γράφους που χρησιμοποιήθηκαν από τον Davis (1967) σαν παραδείγματα της γενικευμένης ισορροπίας. Οι γράφοι αυτοί δείχνονται στο σχήμα 4.6. Ο γράφος στα αριστερά είναι k-ισορροπημένος (με μηδενικά λάθη), ενώ ο άλλος δεν είναι. Ο πίνακας 4.4 δείχνει τις τιμές των συναρτήσεων κριτηρίου, για τον καθένα γράφο, καθώς και τα πλήθη των ομάδων σε όλους τους διαμερισμούς.

Ο k-ισορροπημένος γράφος έχει δύο διαμερισμούς με μηδενικά λάθη. Η ομαδοποίηση {a, c}, {b}, {d, e, f} είναι 3-ισορροπημένη. Ο διαμερισμός σε τέσσερις ομάδες, όταν a, b και c είναι ξεχωριστές ομάδες με ένα στοιχείο και {d, e, f} η τέταρτη ομάδα, είναι 4-ισορροπημένος. Αυτοί ακριβώς είναι οι διαμερισμοί που βρήκε ο Davis. Το δεύτερο μισό του πίνακα 4.4 φανερώνει ότι ο δεύτερος γράφος του σχήματος 4.6 δεν μπορεί να διαμεριστεί έτσι ώστε να έχει τιμή της συνάρτησης κριτηρίου 0, ανεξάρτητα του πλήθους των ομάδων, όπως είχε παρατηρήσει ο Davis.

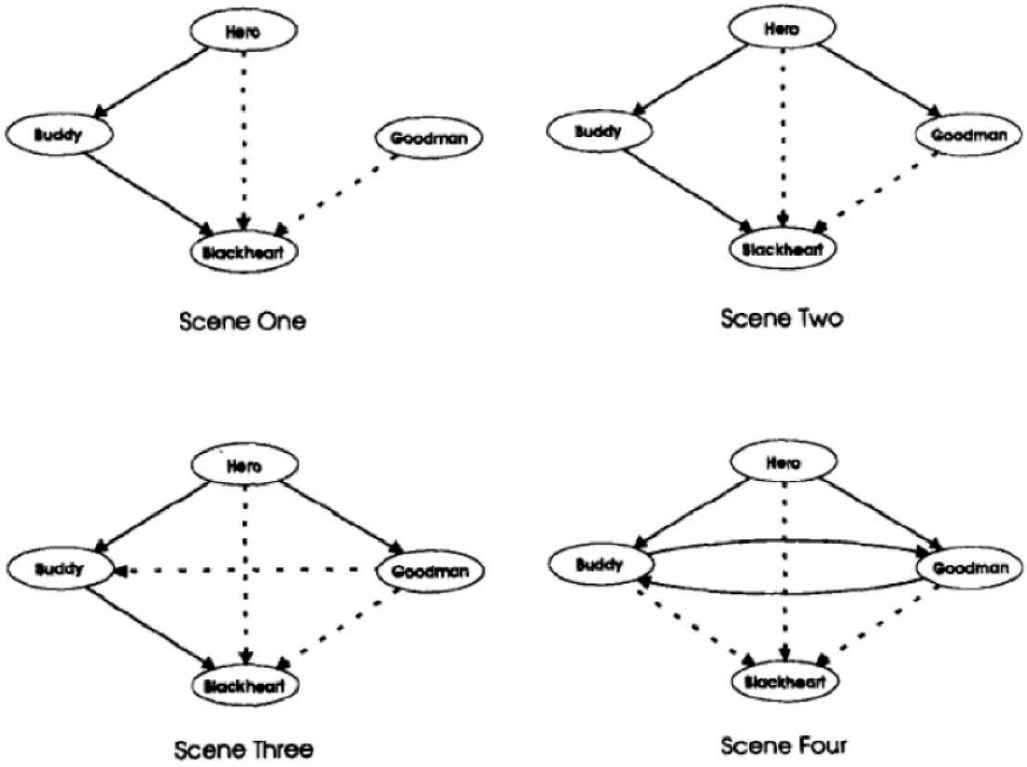
Number of clusters	Minimized value of criterion function	Number of partitions
The k-balanced graph		
1	7	1
2	1	1
3	0	1
4	0	1
5	1	2
6	2	1
The k-imbalanced graph		
1	4	1
2	1	3
3	1	3
4	2	6
5	3	4
6	4	1

Πίνακας 4.4: Τιμές της συνάρτησης κριτηρίου για τους γράφους του Davis

4.4 Το Παράδειγμα των Θεατρικών Σκηνών

Ερευνώντας μέτρα δομικής ισορροπίας, οι Harary *et al.* (1965) παρουσίασαν την ανάλυση ενός θεατρικού έργου με τέσσερις σκηνές, που είναι διατεταγμένες χρονικά. Το σχήμα 4.7 δείχνει τις προσημασμένες σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων πρωταγωνιστών σε κάθε μια από τις τέσσερις θεατρικές σκηνές. Το θεατρικό έργο ήταν γραμμένο έτσι ώστε να δείξει πως οι σχέσεις μεταξύ των πρωταγωνιστών άλλαζαν στο χρόνο και ότι στο τέλος του έργου η δομή κατέληγε να είναι ισορροπημένη. Ο πίνακας 4.5 δείχνει τις τιμές της συνάρτησης κριτηρίου για κάθε μια σκηνή του σχήματος 4.7. Επικεντρώνοντας στην δομική ισορροπία, παρατηρούμε ότι ο κατάλληλος αριθμός ομάδων είναι 2 και ότι η δεύτερη γραμμή του πίνακα 4.5 δίνει τη συνάρτηση κριτηρίου σαν μέτρο ισορροπίας. Είναι προφανές ότι στις τρεις πρώτες χρονικές περιόδους, η δομή δέν είναι ισορροπημένη αλλά, στο τέλος του έργου, έχουμε έναν ισορροπημένο σχηματισμό.

Οι Harary *et al.* (1965) πρότειναν επίσης ότι ο δείκτης αντιστροφής (προσήμου) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό εκείνων των συνδέσεων του γράφου, η αλλαγή του προσήμου των οποίων θα οδηγήσει σε ισορροπήμένη δομή. Εδώ, θα ακολουθήσουμε την ανάλυση των Doreian & Mrvar (1996) για τον προσδιορισμό των διαμερισμών της δομικής ισορροπίας. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί διαμερισμοί των κορυφών που έχουν την ίδια μικρότερη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου. Ο πρώτος διαμερισμός είναι οι δυο ομάδες {Hero, Buddy, Blackheart} και {Goodman}. Η σύνδεση, που είναι ασυνεπής ως προς την ισορροπία, είναι η αρνητική σύνδεση από τον Hero στον Blackheart. Όμως,



Σχήμα 4.7: Τέσσερις θεατρικές σκηνές

αν οποιαδήποτε από τις θετικές συνδέσεις στην τριάδα των τριων ατόμων γίνει αρνητική, τότε η συνολική δομή γίνεται ισορροπημένη. Παρατηρούμε επίσης ότι η σύνδεση Hero – Blackheart παραμένει αρνητική σε κάθε σκηνή, συμπεριλαμβανομένης και της τελικής ισορροπημένης δομής. Επιπλέον, οι διαμερισμοί αυτοί δεν μπορούν να προσδιορίσουν με μοναδικό τρόπο το τόξο που απαιτείται να αλλάξει πρόσημο. Ένας άλλος διαμερισμός με ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι οι ομάδες {Hero, Goodman} και {Buddy, Blackheart}. Σε αυτό το διαμερισμό, η ασυνεπής σύνδεση είναι το θετικό τόξο από τον Hero στον Buddy. Ο τρίτος διαμερισμός με την ελαχιστοποιημένη συνάρτηση κριτηρίου είναι τα σύνολα {Hero, Buddy, Goodman} και {Blackheart}. Αυτή τη φορά, η ασυνεπής σύνδεση είναι το θετικό τόξο από τον Buddy στον Blackheart. Επομένως, κάθε σύνδεση στην μη ισορροπημένη τριάδα είναι μια ασυνεπής σύνδεση, ανάλογα με την θεωρούμενη χρονική περίοδο. Για αυτό, το σύνολο των διαμερισμών αυτού του δομικού σχηματισμού δεν μπορεί, από μόνο του, να μας βοηθήσει να ξεχωρίσουμε ποια σύνδεση θα πρέπει να αλλάξει πρόσημο, για να έχουμε ισορροπία.

Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν για κάθε μια από τις υπόλοιπες σκηνές του σχήματος 4.7. Για την τρίτη σκηνή, υπάρχει ένας μοναδικός διαμερισμός που δίνει την μικρότερη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου και αυτός είναι οι ομάδες {Hero, Goodman} και {Buddy, Blackheart}. Η αντίστοιχη ασυνεπής σύνδεση είναι το θετικό τόξο από τον Hero στον Buddy. Στην τελευταία σκηνή, αυτή η σύνδεση δεν αλλάζει. Επομένως, ακόμη και για μοναδικούς διαμερισμούς παρότι η μέθοδος των διαμερισμών μπορεί να προσδιορίσει τον πλησιέστερο στην ισορροπία διαμερισμό και να μας δώσει ένα κατάλληλο μέτρο ανισορροπίας, δεν μπορεί να εντοπίσει τις ιδιαίτερες συνδέσεις, η αλλαγή του προσήμου των οποίων θα οδηγήσει σε ισορροπία.

Number of clusters	Minimized value of the criterion function			
	Scene one	Scene two	Scene three	Scene four
1	1.0	1.0	1.5	1.5
2	0.5	0.5	0.5	0
3	0.5	1.0	1.0	1.0
4	1.0	1.5	1.5	2.0

Πίνακας 4.5: Τιμές της συνάρτησης κριτηρίου για τους γράφους του σχήματος 4.7

4.5 Η Μελέτη του Sampson

Η μελέτη του Sampson (1968) μας παρέχει μια πολύ χρήσιμη και πλούσια βάση κοινωνικομετρικών δεδομένων, στην οποία καταγράφεται μια ποικιλία κοινωνικών σχέσεων μεταξύ μιας ομάδας νεαρών ανδρών, που ήσαν είτε υποψήφιοι ή δόκιμοι μοναχοί σε ένα μοναστήρι της Νέας Αγγλίας. Εδώ, θα θεωρήσουμε τη συναισθηματική σχέση μεταξύ των μοναχών για τρεις χρονικές περιόδους, που μελέτησε ο Sampson. Την χρονική περίοδο T_1, ο Sampson ταυτοποίησε 13 δόκιμους μοναχούς, από τους οποίους οι έξι παρέμειναν και την χρονική περίοδο T_2. Ανάμεσά τους αρχηγός ήταν ο Peter, πλαισιωνόμενος από τους Bonaventure και Berthold, που αποτελούσαν τον πυρήνα των υπόλοιπων δόκιμων μοναχών. Ο Mark χαρακτηριζόταν ως απομονωμένος, ενώ ο Victor και ο Ambrose περιγράφονταν ως περιφερειακά μέλη της ομάδας, που διατηρούνταν μετά την περίοδο T_1. Την χρονική περίοδο T_2, έγιναν δεκτά στο μοναστήρι 12 νεά μέλη της τάξης: οι John Bosco, Gregory, Basil, Romuald, Louis, Winfred, Amand, Hugh, Boniface, Albert, Elias, και Simplicius. Μέσα στη νέα ομάδα, ο John Bosco και ο Gregory αναδύθηκαν από νωρίς ως ηγέτες και ο Basil θεωρήθηκε ότι έχει προβλήματα προσωπικότητας. Ο Sampson παρατήρησε ότι η υπόλοιπη ομάδα ανεχόταν τον Basil, χωρίς να τον αποδέχεται. Επιπροσθέτως, ο Elias και ο Simplicius χαρακτηρίζονταν ανώριμοι, παιδιάστικοι και άτομα που χρειάζονταν βοήθεια. Η χρονική περίοδος T_3 περιγραφόταν από τον Sampson ως περίοδος διαφοροποιήσεων στις συμπεριφορές και πολώσεων, ενώ η επόμενη περίοδος T_4 αποτέλεσε την προτελευταία περίοδο πριν λάβει χώρα η εκδίωξη αρκετών μελών της νέας τάξης.

Περιγράφοντας τη δομή των υπο-ομάδων αυτών των δρώντων, ο Sampson βρήκε τρεις ξεχωριστές ομάδες. Οι *Νεότουρκοι* αποτελούνταν από τους John Bosco, Gregory, Mark, Winfred, Hugh, Boniface και Albert. Η *Νομοταγής Αντιπολίτευση* περιλάμβανε τους Peter, Bonaventure, Berthold, Victor, Ambrose, Romuald, Louis και Amand. Οι υπόλοιποι δρώντες, δηλαδή, οι Basil, Elias και Simplicius χαρακτηρίζονταν ως οι *Παριάδες*.

Αφού το διάστημα μεταξύ T_2 και T_4 ήταν μια περίοδος διαφοροποιήσεων και πολώσεων, είναι λογικό να περιμένουμε ότι, με το πέρασμα του χρόνου, το μέτρο της k-ισσορροπίας για αυτό το σύνολο δρώντων θα μειωνόταν και οι δρώντες θα μπορούσαν να διασμεριστούν σε διαφορετικές υπο-ομάδες, οι οποίες θα ήταν ανά δύο ανταγωνιστικές. Πιο συγκεκριμένα, οι αλγόριθμοι διαμέρισης, που έχουμε περιγράψει εδώ, θα έδιναν τις συνεκτικές υπο-ομάδες, οι οποίες προσδιορίστηκαν στην βιβλιογραφία, ενώ το μέτρο ανισορροπίας θα έπρεπε να μειωνόταν από την T_2 στην T_4.

Table 4
Affect ties among 18 actors at three time points

	T_2																	
1 John Bosco	0	0	2	0	3	−2	−1	0	0	−3	0	0	0	1	0	0	0	0
2 Gregory	3	0	0	0	0	0	2	0	0	−1	0	0	−3	1	0	0	−2	0
3 Basil	2	3	0	−1	0	0	0	−3	−2	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4 Peter	0	0	−2	0	3	1	−3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	−1
5 Bonaventure	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0
6 Berthold	1	0	0	3	0	0	−3	−1	2	0	0	−2	0	0	0	0	0	0
7 Mark	0	2	0	−3	−1	−2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
8 Victor	3	2	−3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	−2	0	0	−1	0
9 Ambrose	0	0	−3	0	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1	−2	−1
10 Romuald	0	0	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
11 Louis	0	0	−1	0	3	0	0	1	0	0	0	0	−3	2	0	0	−2	0
12 Winfrid	3	2	−1	−3	0	0	0	0	0	0	−2	0	0	1	0	0	0	0
13 Amand	0	−3	0	0	2	−2	1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	3
14 Hugh	3	0	0	0	0	0	0	−2	0	0	1	2	−3	0	2	0	−1	0
15 Boniface	3	2	−2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−3	1	0	0	−1	−1
16 Albert	1	2	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	−3	−2
17 Elias	0	0	3	−3	−2	0	0	0	0	0	−1	0	2	0	0	0	0	1
18 Simplicius	2	3	0	−3	0	−2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	0
	T_3																	
1 John Bosco	0	2	0	−2	1	0	0	3	0	−3	−1	0	0	0	0	0	0	0
2 Gregory	3	0	0	−3	0	0	1	−2	0	0	0	2	−1	0	1	0	0	0
3 Basil	3	−1	0	0	0	−2	0	−3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
4 Peter	−2	−3	0	0	3	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5 Bonaventure	2	0	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6 Berthold	1	0	−3	3	0	0	0	−1	2	0	0	−2	0	0	0	0	0	0
7 Mark	1	2	0	−3	0	−2	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
8 Victor	−2	−3	−1	3	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
9 Ambrose	0	0	−3	0	1	0	0	3	0	0	0	2	0	0	0	0	−2	−1
10 Romuald	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
11 Louis	−1	−3	−2	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
12 Winfrid	3	1	−3	0	0	−2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	−1	0
13 Amand	0	−3	0	0	2	−2	1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	3
14 Hugh	3	1	0	−3	0	0	0	0	0	−2	0	1	0	0	2	0	−1	0
15 Boniface	2	3	−2	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	−3	1	0	0	−1	0
16 Albert	0	2	−1	−3	0	0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	−2	0
17 Elias	0	1	2	−2	0	−1	0	0	0	0	−3	0	0	0	0	0	0	3
18 Simplicius	0	1	0	−3	0	−2	0	0	0	0	−1	0	2	0	0	0	3	0

Πίνακας 4.6: Οι συναισθηματικοί δεσμοί μεταξύ των 18 δρώντων στις τρεις χρονικές περιόδους

	T_4																	
1 John Bosco	0	−2	3	0	0	0	−3	0	0	−1	0	1	0	2	0	0	0	0
2 Gregory	3	0	0	−3	0	0	1	−2	0	0	0	2	−1	0	0	0	0	0
3 Basil	3	−2	0	−3	0	−2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	−1	1	2
4 Peter	−2	−3	0	0	3	1	0	0	0	0	2	0	0	−1	0	0	0	0
5 Bonaventure	0	0	0	3	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0
6 Berthold	0	−1	−3	3	1	0	−2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	−2	0
7 Mark	0	3	0	−3	0	−2	0	−1	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0
8 Victor	0	−3	−2	3	0	2	0	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0
9 Ambrose	0	0	−3	0	1	0	0	3	0	0	0	2	0	0	0	0	−2	−1
10 Romuald	0	0	0	3	1	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0
11 Louis	−1	−3	−2	0	2	0	0	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
12 Winfrid	3	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13 Amand	0	−3	0	0	2	−2	1	0	0	0	0	−1	0	0	0	0	0	3
14 Hugh	3	0	0	−3	0	0	0	−2	0	0	0	1	0	0	2	0	−1	0
15 Boniface	0	3	−2	−1	0	0	1	0	0	0	0	2	−3	0	0	0	0	0
16 Albert	0	3	−1	−3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−2	0
17 Elias	0	1	2	−1	0	−3	0	−2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
18 Simplicius	0	1	2	−1	0	0	0	−3	0	−2	0	0	0	0	0	0	3	0

Πίνακας 4.7: Συνέχεια πίνακα 4.6

Ο Sampson παρουσίασε τα κοινωνικομετρικά δεδομένα του στη μορφή προσημασμένων γράφων. Σε κάθε δρώντα, γινόνταν η ερώτηση να δώσει τα ονόματα τριων άλλων δρώντων, με τους οποίους είχε την μεγαλύτερη θετική συναισθηματική σχέση, καθώς και τα ονόματα τριων δρώντων, τους οποίους αντιπαθούσε περισσότερο Οι δεσμοί θετικής συναισθηματικής σχέσης παίρνουν τις τιμές 1, 2 και 3 με αύξουσα σειρά, ενώ οι δεσμοί αντιπάθειας παίρνουν τις τιμές $-1, -2$ και -3 με φθίνουσα σειρά. Οι τρεις προσημασμένοι γράφοι δείχνονται στους πίνακες 4.6 και 4.7.

Για να δουλέψουμε με αυτούς τους προσημασμένους και διατιμημένους κατευθυνόμενους γράφους, πρέπει να τροποποιήσουμε την συνάρτηση κριτηρίου, λαμβάνοντας υπόψη το μέγεθος των δεσμών. Έστω C ένας διαμερισμός του συνόλου κορυφών V σε k ομάδες. Σύμφωνα με την διατύπωση του Davis (1967), το σύνολο ομάδων $\{C_k : 1 \leq k \leq K\}$ ονομάζεται οικογένεια θετικών συνόλων. Έστω l και m δύο σημεία μέσα στο θετικό σύνολο C_k. Τότε, θα υπάρχουν 'αρνητικά' λάθη, όσο υπάρχουν αρνητικά τόξα μέσα στα θετικά σύνολα. Εάν n_{lm}^k είναι η αριθμητική τιμή ενός αρνητικού τόξου από το l στο m μέσα στο C_k, τότε η συνεισφορά του C_k στο αρνητικό λάθος είναι $\sum_{l,m} n_{lm}^k$. Οι συνεισφορές στο 'θετικό' λάθος προέρχονται από τα θετικά τόξα μεταξύ των θετικών συνόλων. Έστω C_r και C_s δύο διαφορετικές ομάδες. Επιπλέον, έστω i μια κορυφή στο C_r και j μια κορυφή στο C_s. Συμβολίζουμε με p_{ij}^{rs} την αριθμητική τιμή ενός θετικού τόξου από το i στο j. Η συνεισφορά του C_r και του C_s στο θετικό

Number of clusters	Time Points		
	T_2	T_3	T_4
1	48.5	48.0	47.0
2	21.5	16.0	12.5
3	17.5	11.0	10.5
4	19.0	13.5	12.5
5	20.5	16.0	15.0

Πίνακας 4.8: Μέτρα ανισορροπίας μέσα στο χρόνο

λάθος είναι $\sum_{i,j} p_{ij}^{rs}$. Σταθμίζοντας τα θετικά και αρνητικά λάθη ομοιόμορφα, έχουμε:

$$P(C) = \sum_k \left(\sum_{l,m} n_{lm}^k \right) + \sum_{r,s} \left(\sum_{i,j} p_{ij}^{rs} \right)$$

και εάν τα θετικά και αρνητικά λάθη δεν είναι ομοιόμορφα σταθμισμένα, έχουμε:

$$P(C) = \alpha \left[\sum_k \left(\sum_{l,m} n_{lm}^k \right) \right] + (1-\alpha) \left[\sum_{r,s} \left(\sum_{i,j} p_{ij}^{rs} \right) \right]$$

όπου το α είναι όπως έχει οριστεί προηγουμένως.

Εάν έπρεπε να εστιαστούμε στην αυστηρή δομική ισορροπία, τότε θα έπρεπε να θεωρήσουμε διαμερισμούς σε δυο ομάδες σύμφωνα με το θεώρημα 2.3. Όμως, εάν μας ενδιαφέρουν οι διαμερισμοί του Davis (1967), τότε μπορούμε να ασχοληθούμε με διαμερισμούς σε αυθαίρετο αριθμό ομάδων, σύμφωνα με το θεώρημα 2.4. Ο πίνακας 4.8 δίνει τις τιμές της βελτιστοποιημένης συνάρτησης κριτηρίου για διαμερισμούς σε μέχρι 5 ομάδες.

Στην δεύτερη γραμμή του πίνακα 4.8 έχουμε τα μέτρα ανισορροπίας 21.5, 16.0 και 12.5 για τρεις διαδοχικές χρονικές περιόδους. Είναι προφανές ότι το μέγεθος της δομικής ανισορροπίας μειώνεται σταθερά στο χρόνο. Όμως, έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η βελτιστοποιημένη συνάρτηση κριτηρίου έχει μεγαλύτερες τιμές για διαμερισμούς σε δύο ομάδες παρά για διαμερισμούς σε τρεις ομάδες. Αυτό υποδεικνύει ότι η γενικευμένη μορφή του διαμερισμού είναι πιο κατάλληλη για αυτό τον γράφο. Το μέτρο της (γενικευμένης) δομικής ισορροπίας επίσης μειώνεται στο χρόνο.

Στο T_2 υπάρχει μόνο ένας διαμερισμός, στον οποίον η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι ίση με 17.5. Σε αυτόν, υπάρχει μια ομάδα, που οποτελείται από τους John Bosco, Gregory, Mark, Winfred, Hugh, Boniface και Albert. Αυτή η ομάδα δρώντων είναι ακριβώς η ομάδα των *Νεότουρκων*, που είχε προσδιορίσει ο Sampson. Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τους Peter, Bonaventure, Berthold, Victor, Ambrose, Romuald και Louis. Με μια εξαίρεση, αυτή είναι η ομάδα της *Νομοταγούς Αντιπολίτευσης*, που είχε προσδιορίσει ο Sampson. Τέλος, η τρίτη ομάδα αποτελείται από τους Basil, Elias, Simpilicius και Amand και περιλαμβάνει όλους τους *Παριάδες*. Η μόνη διαφορά μεταξύ αυτού του διαμερισμού και της ομαδοποιήσης του Sampson είναι η θέση του Amand μεταξύ των *Παριάδων* αντί της *Νομοταγούς Αντιπολίτευσης*. Στο χρόνο T_3, υπάρχει πάλι μόνο ένας διαμερισμός, στον οποίο η συνάρτηση κριτηρίου παίρνει την ελάχιστη τιμή (11). Ο διαμερισμός αυτός είναι ακριβώς ο διαμερισμός της περιόδου T_2. Για την τελική χρονική περίοδο, υπάρχουν δύο διαμερισμοί, στους οποίους η συνάρτηση κριτηρίου παίρνει την ελάχιστη τιμή 10.5, και ένας από αυτούς είναι ακριβώς ο ίδιος με έναν από τους διαμερισμούς των προηγούμενων δύο χρονικών περιόδων. Επομένως, φαίνεται ότι αυτή η διαμέριση των δρώντων είναι ευσταθής και ότι υπάρχει μια διαδικασία πόλωσης, που οδηγεί σε μια αυξανόμενη 3-ισορροπία μέσα στο χρόνο.

Στους πίνακες 4.9 και 4.10 μπορούμε να δούμε τις τιμές της συναισθηματικής σχέσης μεταξύ των 18 δρώντων, οι οποίοι είναι διατεταγμένοι σύμφωνα με τις ομάδες που ανήκουν σε κάθε χρονική περίοδο. Είναι αμέσως προφανές ότι υπάρχουν ελάχιστες αρνητικές συνδέσεις μέσα στο εσωτερικό των ομάδων σε κάθε χρονική περίοδο. Οι *Νεότουρκοι* έχουν μια αρνητική σύνδεση την T_2 και δύο την T_4. Η *Νομοταγής Αντιπολίτευση* έχει μια αρνητική σύνδεση την T_2 και την T_3. Σε συντριπτική υπεροχη, οι θετικοί δεσμοί μεταξύ των ομάδων είναι αυτοί που συνεισφέρουν περισσότερο στην καταμέτρηση των σφαλμάτων. Αυτό υποδεικνύει ότι οι αρνητικοί δεσμοί μέσα σε (πολωμένες) ομάδες δεν γίνονται ανεκτοί, ενώ υπάρχει κάποιο περιθώριο για το σχηματισμό θετικών συνδέσεων μεταξύ διαφορετικών ομάδων.

Ο πίνακας 4.11 δείχνει τους ασυνεπείς δεσμούς στην γενικευμένη ισορροπία ($k = 3$) για κάθε χρονική περίοδο. Σε συμφωνία με τη μείωση των μέτρων ανισορροπίας του πίνακα 4.8, ο αριθμός αυτών των δεσμών επίσης μειώνεται στο χρόνο. Την T_2, παρατηρούμε ότι υπάρχουν 20 τόξα, που συνεισφέρουν στον δείκτη ανισορροπίας. Δύο από αυτά ήταν αρνητικοί δεσμοί μέσα στο εσωτερικό των ομάδων, όπως παρατηρήσαμε πιο πριν, και 18 ήταν θετικές συνδέσεις μεταξύ ομάδων. Την T_3, υπήρχαν μόνο 14 δεσμοί, που συνεισέφεραν στην γενικευμένη

ανισορροπία. Τέλος, την T_4, ο αριθμός των δεσμών που συνεισφέρουν στην γενικευμένη ανισορροπία έχει πέσει στους 11.

Actor	id	Actors																	
		1	2	7	12	14	15	16	3	13	17	18	4	5	6	8	9	10	11
T_2																			
John Bosco	1	·	·	−1	·	1	·	·	2	·	·	·	·	3	−2	·	·	−3	·
Gregory	2	3	·	2	·	1	·	·	·	−3	−2	·	·	·	·	·	·	−1	·
Mark	7	·	2	·	·	·	·	3	·	·	·	·	−3	−1	−2	1	·	·	·
Winfrid	12	3	2	·	·	1	·	·	−1	·	·	·	−3	·	·	·	·	·	−2
Hugh	14	3	·	·	2	·	2	·	·	−3	−1	·	·	·	·	−2	·	·	1
Boniface	15	3	2	·	·	1	·	·	−2	−3	−1	−1	·	·	·	·	·	·	·
Albert	16	1	2	3	·	·	·	·	·	−1	−3	−2	·	·	·	·	·	·	·
Basil	3	2	3	·	·	·	·	·	·	·	1	·	−1	·	·	−3	−2	·	·
Amand	13	·	−3	1	−1	·	·	·	·	·	·	3	·	2	−2	·	·	·	·
Elias	17	·	·	·	·	·	·	·	3	2	·	1	−3	−2	·	·	·	·	−1
Simplicius	18	2	3	1	·	·	·	−1	·	·	·	·	−3	·	−2	·	·	·	·
Peter	4	·	·	−3	·	·	·	·	−2	·	·	−1	·	3	1	·	·	2	·
Bonaventure	5	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	3	·	·	·	·	·	2
Berthold	6	1	·	−3	−2	·	·	·	·	·	·	·	3	·	·	−1	2	·	·
Victor	8	3	2	·	·	−2	·	·	−3	·	−1	·	·	·	·	·	1	·	·
Ambrose	9	·	·	·	·	·	·	1	−3	·	−2	−1	·	2	·	3	·	·	·
Romuald	10	·	·	·	·	2	·	·	·	·	·	·	3	·	·	1	·	·	·
Louis	11	·	·	·	·	2	·	·	−1	−3	−2	·	·	3	·	1	·	·	·
T_3																			
John Bosco	1	·	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	−2	1	·	3	·	−3	−1
Gregory	2	3	·	1	2	·	1	·	·	−1	·	·	−3	·	·	−2	·	·	·
Mark	7	1	2	·	·	·	·	3	·	·	·	·	−3	·	−2	−1	·	·	·
Winfrid	12	3	1	·	·	2	·	·	−3	·	−1	·	·	·	−2	·	·	·	·
Hugh	14	3	1	·	1	·	2	·	·	·	−1	·	−3	·	·	·	·	−2	·
Boniface	15	2	3	·	·	1	·	·	−2	−3	−1	·	·	1	·	·	·	−1	·
Albert	16	·	2	3	1	·	·	·	−1	·	−2	·	−3	·	·	·	·	·	·
Basil	3	3	−1	·	·	·	·	·	·	·	1	2	·	·	−2	−3	·	·	·
Amand	13	·	−3	1	−1	·	·	·	·	·	·	3	·	2	−2	·	·	·	·
Elias	17	·	1	·	·	·	·	·	2	·	·	3	−2	·	−1	·	·	·	−3
Simplicius	18	·	1	·	·	·	·	·	·	2	3	·	−3	·	−2	·	·	·	−1
Peter	4	−2	−3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	3	2	·	·	·	1
Bonaventure	5	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	3	·	·	·	·	·	1
Berthold	6	1	·	·	−2	·	·	·	−3	·	·	·	3	·	·	−1	2	·	·
Victor	8	−2	−3	·	·	·	·	·	−1	·	·	·	3	·	1	·	·	2	·
Ambrose	9	·	·	·	2	·	·	·	−3	·	−2	−1	·	1	·	3	·	·	·
Romuald	10	·	·	·	·	·	·	·	·	2	·	·	3	1	·	·	·	·	·
Louis	11	−1	−3	·	·	·	·	1	−2	·	·	·	2	3	·	·	·	·	·

Πίνακας 4.9: Οι διαμερισμοί σε θετικά σύνολα δρώντων (για $k = 3$) σε κάθε χρονική περίοδο

Actor	id	Actors																	
		1	2	7	12	14	15	16	3	13	17	18	4	5	6	8	9	10	11
T_4																			
John Bosco	1	·	−2	−3	1	2	·	·	3	·	·	·	·	·	·	·	·	−1	·
Gregory	2	3	·	1	2	·	·	·	·	−1	·	·	−3	·	·	−2	·	·	·
Mark	7	·	3	·	1	·	·	2	·	·	·	·	−3	·	−2	−1	·	·	·
Winfrid	12	3	2	1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
Hugh	14	3	·	·	1	·	2	·	·	·	−1	·	−3	·	·	−2	·	·	·
Boniface	15	·	3	1	2	·	·	·	−2	−3	·	·	−1	·	·	·	·	·	·
Albert	16	·	3	2	·	·	1	·	−1	·	−2	·	−3	·	·	·	·	·	·
Basil	3	3	−2	·	·	·	·	−1	·	2	1	2	−3	·	−2	·	·	·	·
Amand	13	·	−3	1	−1	·	·	·	·	·	·	3	·	2	−2	·	·	·	·
Elias	17	·	1	·	·	·	·	·	2	·	·	3	−1	·	−3	−2	·	·	·
Simplicius	18	·	1	·	·	·	·	·	2	·	3	·	−1	·	·	−3	·	−2	·
Peter	4	−2	−3	·	·	−1	·	·	·	·	·	·	·	3	1	·	·	·	2
Bonaventure	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	3	·	·	·	1	·	2
Berthold	6	·	−1	−2	·	·	·	·	−3	·	−2	·	3	1	·	·	2	·	·
Victor	8	·	−3	·	·	−1	·	·	−2	·	·	·	3	·	2	·	1	·	·
Ambrose	9	·	·	·	2	·	·	·	−3	·	−2	−1	·	1	·	3	·	·	·
Romuald	10	·	·	·	·	·	·	·	·	2	·	·	3	1	·	·	1	·	·
Louis	11	−1	−3	·	·	1	·	·	−2	·	·	·	·	2	·	3	·	·	·

Πίνακας 4.10: Συνέχεια πίνακα 4.9

Value	Ties identified
T_2	
(−1)	John Bosco → Mark
(+2)	John Bosco → Basil
(+3)	John Bosco → Bonaventure
(+1)	Mark → Victor
(+1)	Hugh → Louis
(+2)	Basil → John Bosco
(+3)	Basil → Gregory
(+1)	Amand → Mark
(+2)	Amand → Bonaventure
(+2)	Simplicius → John Bosco
(+3)	Simplicius → Gregory
(+1)	Simplicius → Mark
(+1)	Bonaventure → Amand
(+1)	Berthold → John Bosco
(−1)	Berthold → Victor
(+3)	Victor → John Bosco
(+2)	Victor → Gregory
(+1)	Ambrose → Albert
(+2)	Romuald → Hugh
(+2)	Louis → Hugh
T_3	
(+1)	John Bosco → Bonaventure
(+3)	John Bosco → Victor
(+1)	Boniface → Bonaventure
(+3)	Basil → John Bosco
(+1)	Amand → Mark
(+2)	Amand → Bonaventure
(+1)	Elias → Gregory
(+1)	Simplicius → Gregory
(+2)	Bonaventure → John Bosco
(+1)	Berthold → John Bosco
(−1)	Berthold → Victor
(+2)	Ambrose → Winfrid
(+2)	Romuald → Amand
(+1)	Louis → Albert
T_4	
(−2)	John Bosco → Gregory
(−3)	John Bosco → Mark
(+3)	John Bosco → Basil
(+3)	Basil → John Bosco
(+1)	Amand → Mark
(+2)	Amand → Bonaventure
(+1)	Elias → Gregory
(+1)	Simplicius → Gregory
(+2)	Ambrose → Winfrid
(+1)	Romuald → Amand
(+1)	Louis → Hugh

Πίνακας 4.11: Ασυνεπείς δεσμοί στην 3-ισορροπία

Οι Doreian και Krackhardt (2001) παρουσίασαν μια καινούργια ανάλυση των δεδομένων του Sampson με βάση τη δουλειά του Newcomb (1961) πάνω στις τριάδες p, o, q. Ειδικότερα, εξέτασαν το βαθμό, στον οποίο οι προ-μεταβατικές συνθήκες $p \rightarrow o$ και $o \rightarrow q$ μπορούσαν να συμπληρωθούν σε σχέση με την $p \rightarrow q$ με τρόπους συνεπείς προς τη δομική θεωρία. Μέτρησαν, στις διάφορες χρονικές περιόδους, το πλήθος των τριάδων του σχήματος 2.1. Μια απλή ερμηνεία της θεωρίας της δομικής ισορροπίας και της προσδοκίας για τη χρονική μείωση της ανισορροπίας είναι ότι η συχνότητα των ισορροπημένων τριάδων θα αυξάνεται χρονικά, ενώ η συχνότητα των μη ισορροπημένων τριάδων θα μειώνεται χρονικά. Συμβολίζοντας τις τριάδες του σχήματος 2.1 μέσω των προσήμων (p ή n) των δεσμών των τριάδων, όπου ο πρώτος δεσμός είναι $p \rightarrow o$, ο δεύτερος δεσμός είναι $o \rightarrow q$ και ο τρίτος δεσμός είναι $p \rightarrow q$, βρήκαν ότι οι ισορροπημένες τριάδες ppp και pnn, πράγματι, συμπεριφερόντουσαν σύμφωνα με τη θεωρία της ισορροπίας και αυξάνονταν η συχνότητα εμφάνισής τους. Επίσης βρήκαν ότι οι μη ισορροπημένες ppn και pnp εμφανίζονταν όλο και με μικρότερη συχνότητα. Όλα αυτά στηρίζουν την θεωρία της δομικής ισορροπίας. Όμως, επιπλέον, βρήκαν ότι οι ισορροπημένες τριάδες npn και nnp εμφανίζονταν με μικρότερη συχνότητα, κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τις προσδοκίες της θεωρίας της δομικής ισορροπίας. Αυτό που έκανε τα πράγματα χειρότερα ήταν ότι η μη ισορροπημένη τριάδα npp εμφανίζονταν όλο και με μικρότερη συχνότητα. Αλλά, παράλληλα, και η μη ισορροπημένη τριάδα nnn εμφανίζονταν και αυτή με μικρότερη συχνότητα. Τα τελευταία ευρήματα μπορούν να ερμηνευτούν με δυο τρόπους: Με βάση την $(k = 2)$-ισορροπία, προκύπτει μια αντιφατική μαρτυρία για την δομική ισορροπία, αλλά, με βάση την $(k > 2)$-ισορροπία, πρόκειται για ένα εύρημα που την στηρίζει.

Μετά από όλα αυτά, οι Doreian και Krackhardt (2001) συμπέραναν ότι ο αυτονόητος απλός μηχανισμός της θεωρίας της δομικής ισορροπίας μπορεί καλύτερα να αντικατασταθεί από ένα σύνολο πολλαπλών μηχανισμών και ότι δεν είναι δυνατόν όλες οι θεωρητικές υποθέσεις της δομικής ισορροπίας να μπορούν να επιβεβαιωθούν εμπειρικά. Ο χαρακτηρισμός των περιπτώσεων, στις οποίες η συχνότητα αυξάνεται ή μειώνεται, μπορεί να γίνει με δυο τρόπους. Πρώτο, όλες οι περιπτώσεις, των οποίων η συχνότητα δεν αυξάνεται, περιλαμβάνουν το $p \rightarrow o$ σαν τον πρώτο δεσμό της τριάδας με αρνητικό πρόσημο. Η δομική θεωρία της ισορροπίας δεν θα δούλευε, αν αυτός ο πρώτος δεσμός ήταν αρνητικός – αποτέλεσμα που προβλέφθηκε από τον Newcomb (1968). Δεύτερο, όλες οι τριάδες, των οποίων η συχνότητα αυξάνεται, έχουν τους επόμενους δύο δεσμούς με το ίδιο πρόσημο. Αυτό που βλέπουμε σαν ελλάτωση της ανισορροπίας μπορεί να είναι το αποτέλεσμα της ύπαρξης κάποιας διαφοροποιημένης δημοτικότητας ή μη δημοτικότητας των δρώντων. Τα πράγματα φαίνονται πιο πολύπλοκα, αν ληφθεί υπόψη ότι συνεξελίσσονται οι δομές και οι τύποι των δρώντων.

4.6 Η Μελέτη του Bales

Στο παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε τα δεδομένα που προέκυψαν από τη μελέτη του Bales (1970), όπως παρουσιάστηκαν από τους Schwartz και Sprintzen (1984). Τα δεδομένα αυτά αφορούν τις σχέσεις μεταξύ των ατόμων μιας μικρής ομάδας. Κατά την διάρκεια 13 εβδομάδων αλληλεπίδρασης, τα μέλη της ομάδας βαθμολόγησαν τις μεταξύ τους σχέσεις ως προς τρεις κατευθύνσεις: τη θετική συναισθηματική σχέση (συμπάθεια), την αρνητική συναισθηματική σχέση (αντιπάθεια) και την αίσθηση της αμοιβαίας ομοιότητας. Οι Schwartz και Sprintzen επανακωδικοποίησαν τα δεδομένα θέτοντας διχοτομικές τιμές (0 ή 1) στους κοινωνικομετρικούς δυαδικούς πίνακες. Ο πίνακας 4.12 δείχνει τα δεδομένα για τις δυο σχέσεις της συμπάθειας και της αντιπάθειας. Στην παρούσα ανάλυση αγνοείται η σχέση της ομοιότητας.

Αν το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στη δομική ισορροπία, τότε το πρόβλημα αντιμετωπίζεται καλύτερα σαν πρόβλημα διαμέρισης της δομικής ισορροπίας παρά σαν πρόβλημα μοντελοποίησης σε μπλοκ. Ακολουθώντας αυτήν την προσέγγιση, παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας μοναδικός διαμερισμός σε δύο θετικά σύνολα, τα οποία περιέχουν 16 ασυνεπείς δεσμούς. Αυτός ο μοναδικός διαμερισμός για δύο θετικά σύνολα δείχνεται στον πίνακα 4.13. Οι δυο ομάδες είναι:

$$\{A, B, C, E, G, H, I, J, K, L, N, O, P, Q, S, T\}, \{D, F, M, R\}$$

Όταν η τιμή του k είναι μεγαλύτερη του 2, ο μοναδικός διαμερισμός (για $k = 4$) παρουσιάζεται στον πίνακα 4.14. Το μικρότερο θετικό σύνολο για τον διαμερισμό έχει διασπαστεί σε δύο μονοσύνολα, το καθένα από τα οποία περιέχει μια κορυφή, και σε μια δυάδα, λόγω της παρουσίας των αρνητικών δεσμών μεταξύ των τριων ομάδων.

Οι Schwartz και Sprintzen (1984) χρησιμοποίησαν στην ανάλυσή τους την μέθοδο της δομικής ισοδυναμιάς CONCOR. Ο διαμερισμός σε τέσσερις ομάδες που βρήκαν είναι:

$$\{A, J, K, O, Q, T\}, \{F, P, R, S\}, \{B, D, M\}, \{C, E, G, H, I, L, N\},$$

ενώ συμψηφίζοντας ανά δύο τις παραπάνω ομάδες πήραν τον εξής διαμερισμό σε δύο ομάδες:

$$\{A, F, J, K, O, P, Q, R, S, T\}, \{B, C, D, E, G, H, I, L, M, N\}$$

Like (Positive Affect Ties)																				
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
C	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
H	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
L	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Q	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
R	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Dislike (Negative Affect Ties)																				
A	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
D	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
H	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
J	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
N	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Q	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 4.12: Οι δύο πίνακες συμπάθειας-αντιπάθειας για τα δεδομένα του Bales

	A	*B*	*C*	*E*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*S*	*T*	*D*	*F*	*M*	*R*
A	.	.	1	.	1	−1	1	.	1	.	.	1	1	1	.	.	.	−1	.	−1
B	.	.	.	.	.	.	1	−1	.	1	.	1	.	−1	1	.	.	1	.	.
C	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	−1	.	.	.	.	.	−1	−1
E	.	.	.	.	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.
G	1	.	1	1	.	1	1	1	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	−1	−1
H	−1	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	.	−1	.	.	.	−1	−1	.	−1
I	1	1	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	−1	1	.	.	.	.	−1
J	.	−1	1	.	1	1	.	.	1	1	.	1	1	1	.	1	1	.	.	1
K	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	1	−1
L	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	−1	.	.	.	.	.	.
N	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	.	−1
O	1	1	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	−1	.	.	.
P	1	.	−1	.	.	−1	.	1	.	1	.	.	.	1	1	.	.	.	.	−1
Q	1	−1	.	.	.	.	−1	1	.	−1	.	1	1	.	.	.	.	.	−1	.
S	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	−1	.
T	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	1
D	.	.	.	.	.	−1	.	1	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	−1	.	1
F	−1	1	.	.	.	−1	.	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	−1	.	−1	.
M	.	.	−1	1	−1	.	.	.	1	.	.	.	.	−1	−1	−1	.	−1	.	−1
R	−1	.	−1	.	−1	−1	−1	1	−1	.	−1	.	−1	.	.	1	1	.	−1	.

Πίνακας 4.13: Ο μοναδικός διαμερισμός της ομάδας του Bales ($k = 2$)

Οι διαμερισμοί αυτοί φαίνεται να βρίσκονται σε μικρή συμφωνία με τις ιδέες της δομικής ισορροπίας. Για την δομική ισορροπία ($k = 2$), στον βέλτιστο διαμερισμό του πίνακα 4.13, η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι 8.5 (με 17 ασυνεπείς δεσμούς και $\alpha = 0.5$). Για τον διαμερισμό των Schwartz και Sprintzen, η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι 14 (με 28 ασυνεπείς δεσμούς και $\alpha = 0.5$). Για $k = 4$, υπάρχουν πάλι διαφορές ανάμεσα στους δυο διαμερισμούς. Για το διαμερισμό της δομικής ισοδυναμίας, η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι 15.5 (με 31 ασυνεπείς δεσμούς και $\alpha = 0.5$), ενώ ο διαμερισμός του πίνακα 4.14 έχει τη συνάρτηση κριτηρίου να παίρνει την τιμή 7 (με 14 ασυνεπείς δεσμούς και $\alpha = 0.5$).

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν ψάξουμε απευθείας για έναν διαμερισμό με τρεις ομάδες χρησιμοποιώντας την γενικευμένη προσέγγιση, θα βρούμε τέσσερις διαμερισμούς, ο καθένας με 14 ασυνέπειες. Οι διαμερισμοί αυτοί είναι παρόμοιοι με τον προηγούμενο διαμερισμό σε τέσσερις ομάδες. Από την πλευρά της δομικής ισορροπίας, το βασικό πρόβλημα με τους διαμερισμούς των Schwartz και Sprintzen είναι ότι δεν ταιριάζουν καλά με τις βασικές αρχές της δομικής ισορροπίας. Ο λόγος οφείλεται στη χρήση της δομικής ισοδυναμίας παρά στον προτεινόμενο αλγόριθμο. Αν τοποθετούσαμε μαζί τους δύο πίνακες των συναισθηματικών σχέσεων (συμπάθειας-αντιπάθειας) και διαμερίζαμε σε τρεις ομάδες χρησιμοποιώντας απευθείας τον αλγόριθμο της τοπικής βελτιστοποίησης για τη δομική

	A	*B*	*C*	*E*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*N*	*O*	*P*	*Q*	*S*	*T*	*D*	*R*	*F*	*M*
A	.	.	1	.	1	−1	1	.	1	.	.	1	1	1	.	.	.	−1	−1	.
B	.	.	.	.	.	.	1	−1	.	1	.	1	.	−1	1	.	.	.	1	.
C	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	−1	.	.	.	.	−1	.	−1
E	.	.	.	.	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
G	1	.	1	1	.	1	1	1	1	.	1	1	.	.	.	1	.	−1	.	−1
H	−1	.	.	1	1	.	1	1	.	.	.	.	−1	.	.	.	−1	−1	−1	.
I	1	1	1	1	1	1	.	.	1	.	.	.	.	−1	1	.	.	−1	.	.
J	.	−1	1	.	1	1	.	.	1	1	.	1	1	1	.	1	1	1	.	.
K	1	.	.	.	1	.	1	1	.	.	.	1	.	.	.	.	.	−1	.	1
L	.	1	.	1	.	.	.	1	.	.	.	.	1	−1	.	.	.	.	.	.
N	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	−1	−1	.
O	1	1	1	.	1	.	.	1	1	.	.	.	.	1	.	.	−1	.	.	.
P	1	.	−1	.	.	−1	.	1	.	1	.	.	.	1	1	.	.	−1	.	.
Q	1	−1	.	.	.	.	−1	1	.	−1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	−1
S	.	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	−1
T	.	.	.	.	1	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	−1
D	.	.	.	.	.	−1	.	1	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	1	−1	.
R	−1	.	−1	.	−1	−1	−1	1	−1	.	−1	.	−1	.	.	1	1	.	.	−1
F	−1	1	.	.	.	−1	.	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	−1	.	.	−1
M	.	.	−1	1	−1	.	.	.	1	.	.	.	.	−1	−1	−1	.	−1	−1	.

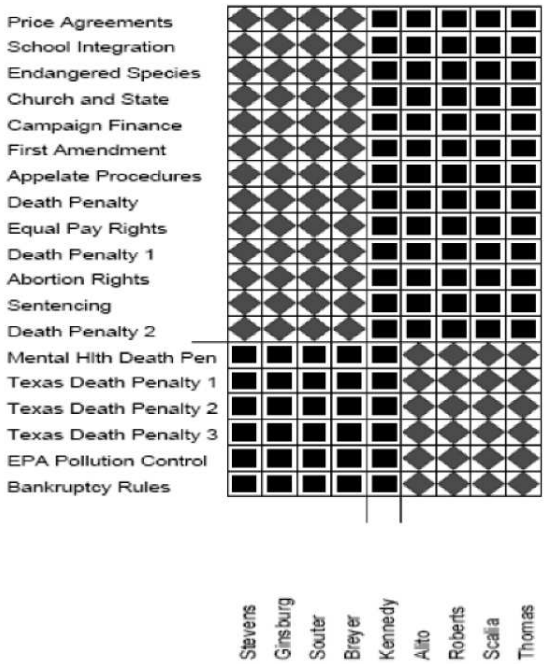
Πίνακας 4.14: Ο γενικός διαμερισμός της ομάδας του Bales σε τέσσερα θετικά σύνολα

ισοδυναμία, τα αποτέλεσματα θα ήταν κάπως χειρότερα. Έτσι, θα παίρναμε τέσσερις διαμερισμούς με την ίδια τιμή της συνάρτησης κριτηρίου. Για αυτούς τους διαμερισμούς, θα είχαμε τις ασυνέπειες με τιμές συνάρτησης κριτηρίου: 20.5, 22.5, 23 και 24. Αυτές οι ασυνέπειες θα ήταν μεγαλύτερες και από εκείνες του διαμερισμού των Schwartz και Sprintzen. Κοντολογίς, οι διαμερισμοί με δύο και τέσσερις ομάδες είναι μάλλον ακατάλληλοι.

Συμπερασματικά, από αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι η δομική ισοδυναμία δεν είναι η πλέον κατάλληλη μέθοδος για τέτοιου τύπου δεδομένα. Για προσημασμένα δεδομένα συναισθηματικής συμπάθειας, είναι καταλληλότερο να χρησιμοποιούμε τις μεθόδους διαμερισμού της δομικής ισορροπίας. Επιπλέον, για τέτοια δεδομένα, η συνένωση των πινάκων θετικής συμπάθειας και αρνητικής ανιπάθειας δεν αποτελεί ένα κατάλληλο βήμα για την ανάλυση προσημασμένων σχέσεων. Επομένως, είναι πολύ σημαντική η επιλογή του τρόπου διαμέρισης.

4.7 Η Μελέτη των Δικαστών

Το τελευταίο παράδειγμά μας στηρίζεται σε 74 αποφάσεις, που πάρθηκαν από το Ανώτατο Δικαστήριο των ΗΠΑ την περίοδο $2006-2007$, όταν το δικαστήριο αποτελείτο από τους δικαστές {Stevens, Ginsberg, Souter, Breyer, Kennedy, Alito, Roberts, Scalia, Thomas}. Εδώ, θα ακολουθήσουμε την εργασία των Mrvar και Doreian (2007), οι οποίοι συνέλεξαν τα δεδομένα για τις ψηφοφορίες των δικαστών από τον ιστότοπο http://www.supremecourtus.gov. Τα δεδομένα αυτά περιλαμβάνουν πληροφορίες για το περιεχόμενο των ψηφοφοριών, για το ποιος δικαστής, με την ψήφο του, συμφώνησε ή διαφώνησε με ποιον άλλον δικαστή, σε σχέση με ποια υπόθεση κ.ο.κ. Ας παρατηρήσουμε ότι ο κύριος σκοπός της ανάλυσης των Mrvar και Doreian δεν ήταν να ερμηνεύσουν την πολιτική των δικαστών και τα αντίστοιχα νομικά θέματα, αλλά να εφαρμόσουν στην ανάλυση των αποτελεσμάτων των ψηφοφοριών των δικαστών μια μέθοδο διαμέρισης προσημασμένων διμερών γράφων.



Σχήμα 4.8: Ο διαμερισμός των προσημασμένων διμερών δεδομένων για τις Ιδεολογικές Περιπτώσεις

Το σχήμα 4.8 δείχνει το διμερή διαμερισμό 19 υποθέσεων, που πάρθηκαν με πλειοψηφία 5-4, όταν όλοι οι δικαστές, συντηρητικοί και φιλελεύθεροι, ψήφιζαν

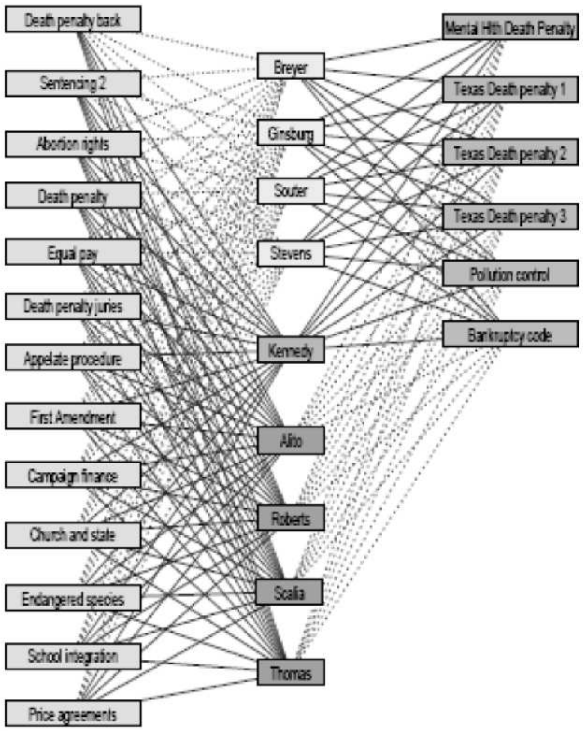
μέσα σε μπλοκ. Ο δικαστής Kennedy συμφωνούσε ή διαφωνούσε με την μια ή την άλλη πλευρά, ανάλογα με την υπόθεση. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο διαμερισμού για προσημασμένους διμερείς γράφους, βρίσκεται ένας $(2,3)$-διαμερισμός, που είναι και ο μοναδικός διαμερισμός με $P(\mathbf{C}) = 0$. Στο σχήμα 4.8, οι θετικές ψήφοι συμβολίζονται με τετράγωνα, ενώ οι αρνητικές με ρόμβους. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις, η συντηρητική πτέρυγα επικράτησε σε 13 υποθέσεις, έναντι 6 της φιλελεύθερης, τρεις από τις οποίες αφορούσαν ακυρώσεις εκτελέσεων θανατικών ποινών στην πολιτεία του Texas.

Κάποιες από τις υποθέσεις συγκέντρωσαν το ενδιαφέρον των Μέσων Μαζικής Επικοινωνίας περισσότερο από κάποιες άλλες. Μια από αυτές τις 'μεγάλες' υποθέσεις ήταν η υπόθεση των Σχολικών Συνενώσεων. Οι συντηρητικοί δικαστές {Alito, Roberts, Scalia, Thomas} έδειξαν ιδιαίτερο δισταγμό για να ψηφίσουν υπέρ των θυμάτων διακρίσεων (affirmative action) και σχημάτιζαν μια πλειοψηφία, όταν τίθεντο θέματα για την αναδιαμόρφωση σχολικών περιφερειών, όπου προσπαθούσαν να υποβαθμίσουν το ζήτημα της φυλετικής διαφοράς. Σε θέματα που αφορούσαν το δικαίωμα της άμβλωσης, οι συντηρητικοί πάλι επικρατούσαν θεωρώντας ότι το ζήτημα αυτό αποτελεί ένα αντισυνταγματικό δικαίωμα. Στο θέμα των Ίσων Δικαιώματων για το μισθό, οι συντηρητικοί, κάποια φορά, ανέτρεψαν τις αποφάσεις μιας προηγούμενης δίκης, στην οποία δικαιωνόταν μια γυναίκα, που είχε πέσει θύμα διακρίσεων από τον εργοδότη της. Αυτά είναι κάποια από τα παραδείγματα των διαφορών στις 'ιδεολογικές' αποφάσεις, που έπαιρναν οι δικαστές της φιλελεύθερης και της συντηρητικής πλευράς – με το Δικαστή Kennedy να βρίσκεται στο μέσο μεταξύ τους. Γενικώς, η παρατηρούμενη δομή του εν λόγω διαμερισμού είναι η εξής:

Αρνητικό	Θετικό	Θετικό
Θετικό	Θετικό	Αρνητικό

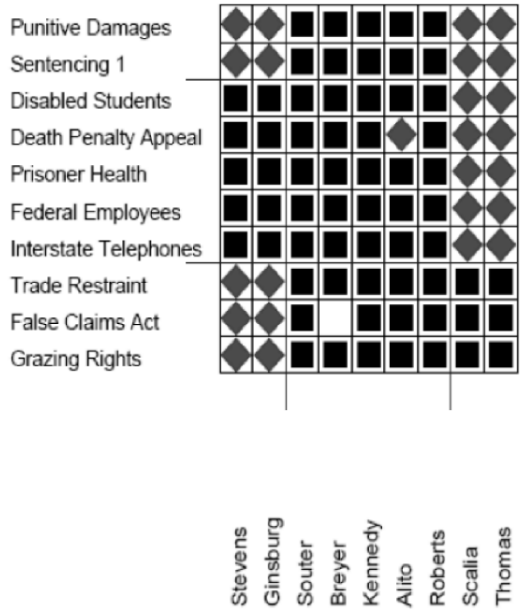
Το σχήμα 4.9 δείχνει το διμερή γράφο για αυτές τις 'ιδεολογικές' περιπτώσεις. Οι υποθέσεις και οι δικαστές ομαδοποιούνται σύμφωνα με το διαμερισμό του σχήματος 4.8. Οι περιπτώσεις, στις οποίες επικράτησαν οι συντηρητικοί, φαίνονται στην αριστερή στήλη, ενώ δεξιά φαίνονται οι υποθέσεις, που κέρδισαν οι φιλελεύθεροι. Στην μεσαία στήλη είναι οι δικαστές, στο πάνω μέρος οι φιλελεύθεροι, στο κάτω μέρος οι συντηρητικοί και ο Δικαστής Kennedy στο μέσο.

Στην συνέχεια, θα θεωρήσουμε ένα σύνολο 10 υποθέσεων, στις οποίες δυο ζευγάρια δικαστών εμφανίζονται μαζί στην μειοψηφία (να διαφωνούν με την πλειοψηφία των υπόλοιπων δικαστών). Στο κέντρο πάλι βρίσκεται ο Δικαστής Kennedy μαζί με δύο φιλελεύθερους και δύο συντηρητικούς δικαστές. Δύο φιλελεύθεροι δικαστές, {Stevens, Ginsburg}, σχηματίζουν τη δική τους ομάδα, όπως



Σχήμα 4.9: Ο διμερής προσημασμένος γράφος για τις Ιδεολογικές Περιπτώσεις

κάνουν και δύο συντηρητικοί δικαστές, {Scalia, Thomas}. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το 'κέντρο' επικρατεί με 5 μέλη της πλειοψηφίας. Οι εξαιρέσεις ήταν ο Δικαστής Alito, ο οποίος ανήκε στην μειοψηφία για την υπόθεση της Έφεσης της Θανατικής Ποινής (που είναι η μοναδική συνεισφορά στην μη μηδενική τιμή $P(\mathbf{C}) = 0.5$ αυτού του διαμερισμού) και ο Δικαστής Breyer, που υποστήριξε την υπόθεση του Νόμου Ψευδών Διεκδικήσεων (η οποία δεν συνεισφέρει στο $P(\mathbf{C})$). Αυτές οι υποθέσεις διαμερίζονται σε 3 σύνολα. Για τις δύο υποθέσεις στην κορυφή της ομάδας του σχήματος 4.10, τα δυο ζευγάρια {Stevens, Ginsburg} και {Scalia, Thomas} φέρονται να διαφωνούν. Στην επόμενη ομάδα 5 υποθέσεων, οι {Scalia, Thomas} διαφωνούν, ενώ οι {Steven, Ginsburg} βρίσκονται στο κέντρο. Τέλος, στις τρεις υποθέσεις της ομάδας του κάτω μέρους του διαμερισμού, μόνο οι {Stevens, Ginsburg} διαφωνούν. Μια μερική ερμηνεία είναι ότι οι Δικαστές Stevens και Ginsburg είναι περισσότερο φιλελεύθεροι από τους άλλους δύο δικαστές της φιλελεύθερης πτέρυγας, ενώ οι Δικαστές Scalia και Thomas είναι περισσότερο συντηρητικοί από τους άλλους δικαστές της συντηρητικής πτέρυγας. Βέβαια, πρόκειται για μια ατελή ερμηνεία, αφού τα δύο 'ακραία' ζευγάρια διαφωνούν σε δύο υποθέσεις. Η δομή των μπλοκ αυτών των υποθέσεων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

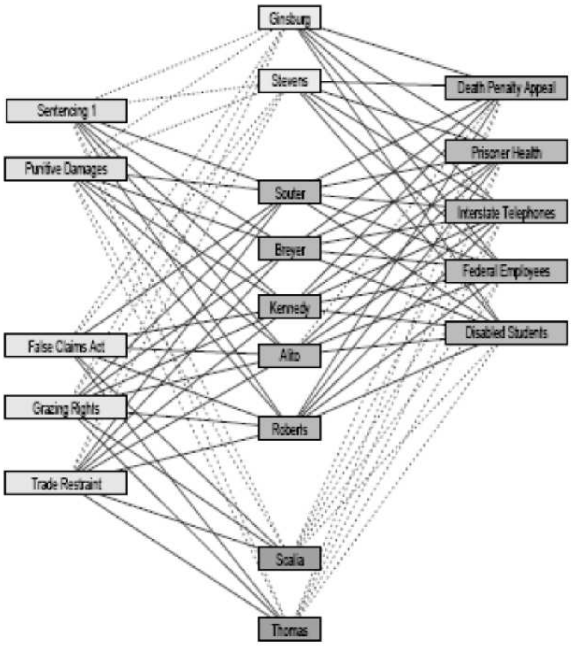


Σχήμα 4.10: Ο διαμερισμός των προσημασμένων διμερών δεδομένων για τα ζευγάρια των 'ακραίων' δικαστών

Αρνητικό	Θετικό	Αρνητικό
Θετικό	Θετικό	Αρνητικό
Αρνητικό	Θετικό	Θετικό

Το σχήμα 4.11 δείχνει τον αντίστοιχο διμερή γράφο για αυτά τα προσημασμένα διμερή δεδομένα. Οι πέντε δικαστές, που είναι πάντοτε στην πλειοψηφία, βρίσκονται στο κέντρο της μεσαίας στήλης. Το ζευγάρι των φιλελεύθερων Δικαστών {Stevens, Ginsburg}, που διαφωνούν μαζί, βρίσκονται στην κορυφή της μεσαίας στήλης, ενώ το ζευγάρι των συντηρητικών Δικαστών {Scalia, Thomas} βρίσκονται στο κάτω μέρος της στήλης αυτής. Το σύνολο των υποθέσεων, στις οποίες οι Δικαστές Scalia και Thomas διαφωνούν, βρίσκονται στην δεξιά στήλη. Οι τρεις υποθέσεις, όπου οι Δικαστές Stevens και Ginsburg διαφωνούν, βρίσκονται στο κάτω μέρος της αριστερής στήλης. Οι δύο υποθέσεις, όπου και τα δυο ζευγάρια δικαστών διαφωνούν, βρίσκονται στην κορυφή αυτής της στήλης.

Στις περιπτώσεις πλειοψηφίας 8-1, υπάρχουν δικαστές, που διαφωνούν σε κάποια απόφαση αντίθετα με τους συναδέλφους τους, που την υποστηρίζουν. Με κάποια έννοια, αυτή είναι μια ακραία περίπτωση, η οποία χαρακτηρίζεται από την επιθυμία των δικαστών να στέκονται μόνοι τους σε δημόσια θέματα, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους δικαστές. Το σχήμα 4.12 δείχνει έναν βέλτιστο $(2,3)$-διαμερισμό για έξι υποθέσεις, στις οποίες είτε ο Δικαστής Stevens ή ο



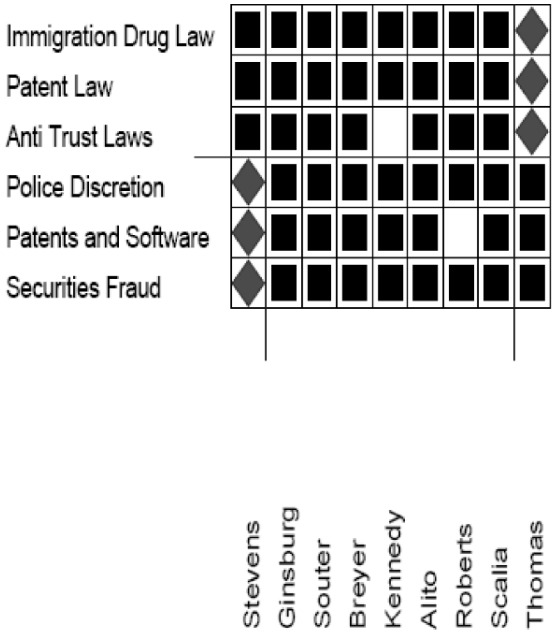
Σχήμα 4.11: Ο διμερής προσημασμένος γράφος για τα ζευγάρια των 'ακραίων' δικαστών

Δικαστής Thomas στέκονται μόνοι τους. Το κέντρο σε αυτήν την περίπτωση αποτελείται από τους 7 εναπομείναντες δικαστές. Η δομή των μπλοκ αυτού του διαμερισμού είναι:

Θετικό	Θετικό	Αρνητικό
Αρνητικό	Θετικό	Θετικό

Στο βαθμό που είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ των μελών μιας πτέρυγας δικαστών, παρατηρούμε ότι τα ζευγάρια {Stevens, Ginsburg} και {Scalia, Thomas} αποτελούν ακραίες περιπτώσεις. Παραδείγματα περιπτώσεων μεμονομένων ακραίων δικαστών είναι ο φιλελεύθερος Δικαστής Stevens και ο συντηρητικός Δικαστής Thomas. Αυτοί οι δικαστές ποτέ δεν διαφώνησαν μαζί.

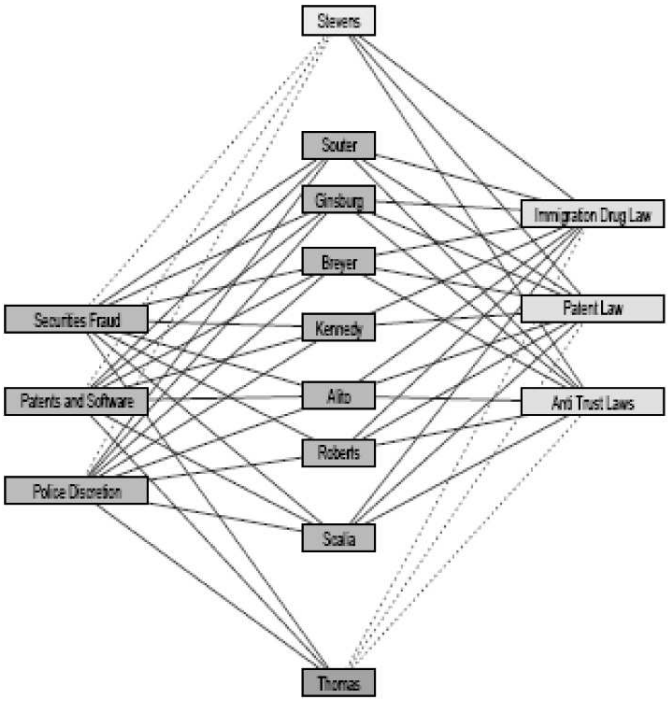
Στο διμερή γράφο του σχήματος 4.13, η αριστερή στήλη περιλαμβάνει τις υποθέσεις, όπου ο Δικαστής Stevens διαφωνούσε, όταν ο Δικαστής Thomas συντάσσονταν με την πλειοψηφία. Η δεξιά στήλη δείχνει ακριβώς το αντίθετο: όταν ο Δικαστής Stevens συντάσσονταν με την πλειοψηφία, ο Δικαστής Thomas διαφωνούσε. Στο μέσο της κεντρικής στήλης περιλαμβάνονται οι εφτά δικαστές,



Σχήμα 4.12: Ο διαμερισμός των προσημασμένων διμερών δεδομένων για τους Μεμονωμένους Ακραίους Δικαστές

που είναι πάντοτε στην πλειοψηφία, στην κορυφή ο Δικαστής Stevens και στο κάτω μέρος ο Δικαστής Thomas.

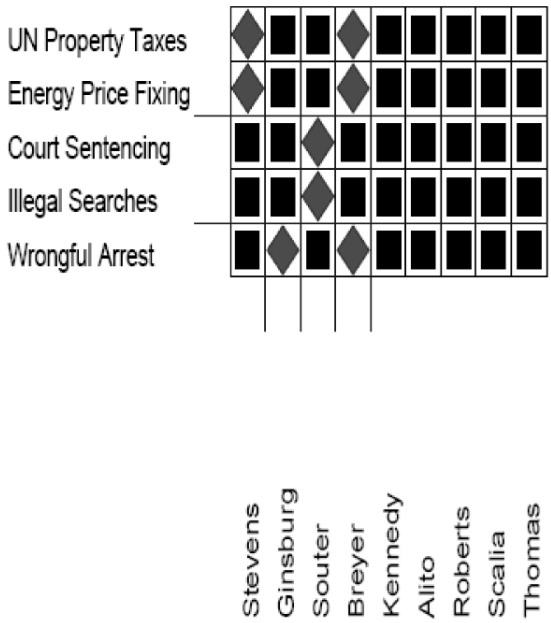
Ως τώρα, ασχοληθήκαμε με ένα σύνολο υποθέσεων, οι οποίες, όταν διαμεριστούν, αποκαλύπτουν πώς το Ανώτατο Δικαστήριο αποτελείται από δυο πτέρυγες, των οποίων τα μέλη ψηφίζουν μαζί σαν μπλοκ. Ουσιαστικά, ο Δικαστής Kennedy ήταν ο κρίσιμος δικαστής, που καθόριζε το αποτέλεσμα της ψηφοφορίας, ταυτιζόμενος είτε με την μια ή με την άλλη πτέρυγα. Στην συνέχεια, είδαμε περιπτώσεις, στις οποίες κάθε μια πτέρυγα είχε απώλειες προς το κέντρο και σχηματίζονταν ζευγάρια, ένα από κάθε πτέρυγα, που διαφωνούσαν σε ορισμένες αποφάσεις. Προχωρώντας πιο πέρα, συναντήσαμε ένα άλλο σύνολο υποθέσεων, στις οποίες μεμονωμένοι δικαστές, ένας από κάθε πτέρυγα, διαφωνούσαν. Τώρα, ερχόμαστε να δούμε τη δομή του σχήματος 4.14. Εδώ έχουμε έναν πιο εκλεπτισμένο διαμερισμό με τρεις ομάδες υποθέσεων και πέντε ομάδες δικαστών. Στα δεξιά του σχήματος, η συντηρητική πτέρυγα μαζί με τον Δικαστή Kennedy σχηματίζουν τον πυρήνα της πλειοψηφίας. Τα μέλη της φιλελεύθερης πτέρυγας συντάσσονται με τον πυρήνα αυτό κατά περίπτωση, αλλά ο τρόπος που ψηφίζουν είναι μεμονωμένος. Στις υποθέσεις του Φόρου Περιουσίας των Ηνωμένων Εθνών και της Σταθεροποίησης των Τιμών της Ενέργειας,



Σχήμα 4.13: Ο διμερής γράφος των διαμερισμών για τους Μεμονωμένους Ακραίους Δικαστές

οι Δικαστές Ginsburg και Souter τάχθηκαν με την πλειοψηφία, ενώ οι δικαστές Stevens και Breyer διαφώνησαν. Στις υποθέσεις της Επιβολής Ποινών Δικαστηρίου και των Παράνομων Αναζητήσεων, ο Δικαστής Souter διαφώνησε μόνος του, ενώ στην υπόθεση των Εσφαλμένων Συλλήψεων διαφώνησαν οι Δικαστές Ginsburg και Breyer. Η συντηρητική πτέρυγα είναι αδιάσπαστη για αυτές τις υποθέσεις, ενώ η φιλελεύθερη πτέρυγα είναι εντελώς διασπασμένη. Σε αυτό το μικρό αριθμό υποθέσεων, ο όρος 'φιλελεύθερος' φαίνεται να μην είναι ακριβής, αφού τα μέλη της πτέρυγας των φιλελεύθερων συντάσσονται επιλεκτικά με την πτέρυγα των συντηρητικών για ορισμένες υποθέσεις.

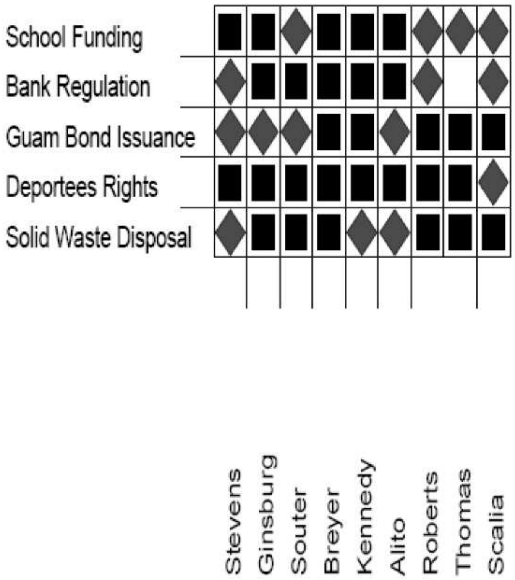
Υπάρχει ένα ακόμη σύνολο μη ομόφωνων αποφάσεων, από το οποίο όμως δεν αναδύεται καμιά συνεκτική μορφή συμπεριφοράς των δικαστών στις ψηφοφορίες. Στο σχήμα 4.15 βλέπουμε έναν ακριβή διαμερισμό με $P(\mathbf{C}) = 0$, ο οποίος όμως περιέχει 5 ομάδες αποφάσεων και 8 ομάδες δικαστών, κάτι το οποίο δεν μπορεί να θεωρηθεί ουσιαστική απλούστευση. Επομένως, καταλήγουμε ότι δεν αναδύεται καμία δομή από το διαμερισμό αυτό. Η μόνη 'απλούστευση' είναι η



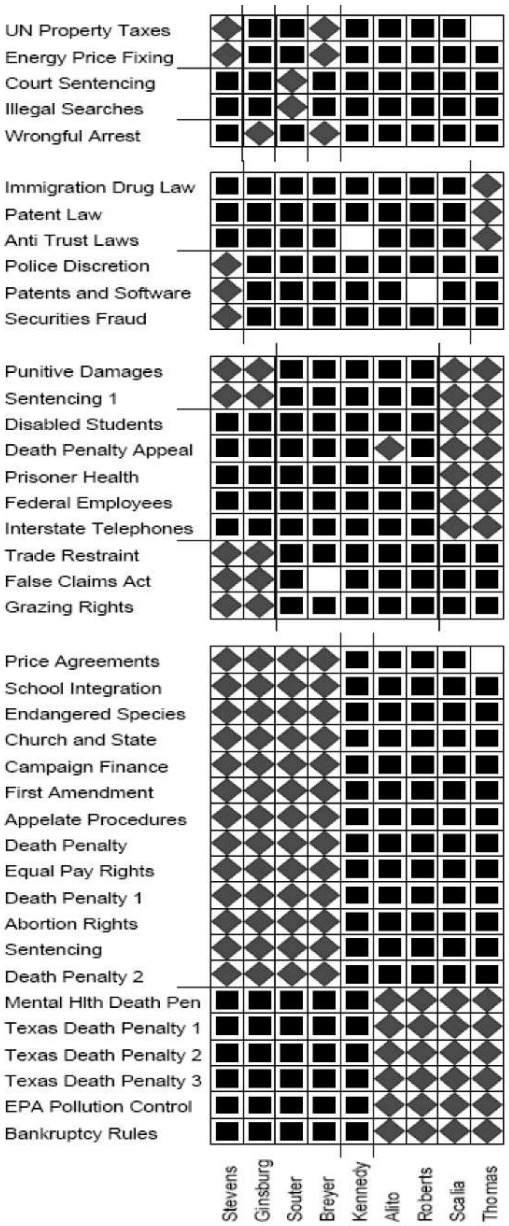
Σχήμα 4.14: Ο διαμερισμός σε μια Αδιάσπαστη Πτέρυγα και σε μια Διασπασμένη Πτέρυγα

συνομαδοποιήση των Δικαστών Roberts και Thomas, όταν οι υπόλοιποι δικαστές είναι μεμονωμένοι στις ομάδες τους. Ο Δικαστής Breyer είναι ο μόνος που βρίσκεται στην πλειοψηφία για όλες αυτές τις υποθέσεις.

Όλοι οι πίνακες των διαμερισμένων διμερών γράφων, που είδαμε ως εδώ, μπορούν να συνενωθούν στο ενιαίο μοντέλο μπλοκ του σχήματος 4.16. Οι ιδεολογικές υποθέσεις αποτελούν τον πυρήνα στο κάτω μέρος του διαμερισμού, ενώ οι δυο πτέρυγες και ο Δικαστής Kennedy βρίσκονται ενδιάμεσα. Η δεύτερη ομάδα, πιο πάνω από το κάτω μέρος, περιλαμβάνει ζευγάρια διαφωνούντων δικαστών, με το Δικαστή Kennedy να συντάσσεται πάλι με τη μια ή την άλλη πτέρυγα. Στην επόμενη ομάδα, προς τα πάνω, οι Δικαστες Stevens και Thomas αποτελούν περιπτώσεις μεμονωμένων δικαστών. Στην κορυφή του σχήματος 4.16, βρίσκεται μια ομάδα, που αποτελείται από μια αδιάσπαστη και μια διασπασμένη πτέρυγα. Οι διαχωριστικές γραμμές μεταξύ των δικαστών επεκτείνονται μεταξύ των ομάδων τους. Μπορούμε να δούμε καθαρά αυτές τις ομάδες, γιατί δεν υπάρχει καμία μετάθεση των δικαστών μέσα σε αυτές.



Σχήμα 4.15: Οι πέντε υποθέσεις χωρίς καμία χρήσιμη δομή διαμερισμού



Σχήμα 4.16: Ένα μη παραδοσιακό μοντέλο τεσσάρων μπλοκ

Βιβλιογραφία

[1] Bales, R.F. (1970). *Personality and Interpersonal Behavior*. New York: Holt, Rinerhart and Winston.

[2] Batagelj, V. (1994). Semirings for social network analysis, *Journal of Mathematical Sociology*, 19, no. 1, 53-68.

[3] Batagelj, V., Doreian, P., & Ferligoj, A. (1992b). An optimization approach to regular equivalence, *Social Networks*, 14, 121-135.

[4] Batagelj, V., Ferligoj, A., & Doreian, P. (1992a). Direct and indirect methods for structural equivalence, *Social Networks*, 14, 63-90.

[5] Borgatti, S.P., & Everett, M. J. (1992). Regular blockmodels of multiway, multimode matrices, *Social Networks*, 14, 91-120.

[6] Brusco, M.J., & Steinley, D. (2006). Inducing a blockmodel structure for two-mode binary data using seriation procedures, *Journal of Mathematical Psychology*, 50, 468-477.

[7] Brusco, M.J., & Steinley, D. (2007). A variable method search method for generalized blockmodeling structure of two-mode binary matrices, *Journal of Mathematical Psychology*, 51.

[8] Cartwright, D., & Harary, F. (1956). Structural balance: A generalization of Heider's theory, *Psychological Review*, 63, 277-292.

[9] Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. New York: Dover.

[10] Davis, J.A. (1967). Clustering and structural balance in graphs, *Human Relations*, 20, 181-187.

[11] Doreian, P. (1970). *Mathematics and the Study of Social Relations*. London: Weidenfeld and Nicolson.

[12] Doreian, P. (2002). Event sequences as generators of social network evolution, *Social Networks*, 24, 93-119.

[13] Doreian, P. (2004). Evolution of human signed networks, *Metodolski Zvezki: Journal of the Statistical Society of Slovenia*, 1, 277-293.

[14] Doreian, P., Batagelj, V., & Ferligoj, A. (1994). Partitioning networks based on generalized concepts of equivalence, *Journal of Mathematical Sociology*, 19, no. 1, 1-27.

[15] Doreian, P., Batagelj, V., & Ferligoj, A. (2005). Generalized blockmodeling of two-mode network data, *Social Networks*, 26, 29-53.

[16] Doreian, P., Batagelj, V., & Ferligoj, A. (2005). *Generalized Blockmodeling*. New York: Cambridge University Press.

[17] Doreian, P., & Krackhardt, D. (2001). Pre-transitive balance mechanisms for signed networks, *Journal of Mathematical Sociology*, 25, 43-67.

[18] Doreian, P., & Mrvar A. (1996). A partitioning approach to structural balance, *Social Networks*, 18, 149-168.

[19] Ferligoj, A., Batagelj, V., & Doreian, P. (1994). On connecting network analysis and cluster analysis. In G.H. Fischer and D. Laming, eds., *Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics and Methodology* (Springer-Verlag, New York), 329-344.

[20] Harary, F., Norman, R.Z., & Cartwright, D. (1965). Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. New York: John Wiley.

[21] Heider, F. (1946). Attitudes and cognitive organization, *Journal of Psychology*, 45, 107-112.

[22] Hummon, N.P., & Doreian, P. (2003). Dynamics of social balance processes. *Social Networks*, 25, 17-49.

[23] Hummon, N.P., & Fararo, T.J. (1995). Assessing hierarchy and balance in dynamic networks, *Journal of Mathematical Sociology*, 21, 145-159.

[24] Lorrain, F., & White, H.C. (1971). Structural equivalence of individuals in social networks, *Journal of Mathematical Sociology*, 1, 49-80.

[25] Mrvar, A., & Doreian, P. (2007). Partitioning signed two-mode networks.

[26] Newcomb, T.M. (1961). *The Acquaintance Process*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

[27] Nordlie, P.H. (1958). *A longitudinal Study of Interpersonal Attraction in a Natural Setting*. Ph.D. Thesis, University of Michigan.

[28] Roberts, F.S. (1976). Discrete Mathematical Models with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[29] Sampson, S.F. (1968). A Novitiate in a Period of Change: An Experimental and Case Study of Social Relationships. Ph.D. Thesis, Cornell University.

[30] Schwartz, J.E., & Sprinzen, M. (1984). Structures of connectivity, *Social Networks*, 6, 103-140.

[31] Young, M.W. (1971). *Fighting with Food*. Cambridge: Cambridge University Press.

[32] White, D.R., & Reitz, K.P. (1983). Graph and semigroup homomorphisms on networks of relations, *Social Networks*, 5, 193-234.