Χριστοδουλόπουλος Ηλίας

Μεταπτυχιακός Φοιτητής - Α.Μ.: 261

Διπλωματική Εργασία

ΔΙΚΤΥΩΤΑ
ΚΑΙ
ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Πατρών
Πάτρα 2006

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διπλωματική μου εργασία εκπονήθηκε στο δεύτερο έτος φοίτησής μου, στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών του Τομέα Θεωρητικών Μαθηματικών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Καθοριστικό ρόλο για τη συγγραφή της έπαιξε η σειρά σεμιναρίων της ομάδας Γενικής Τοπολογίας του τμήματος, που έγιναν από τον καθηγητή Σταύρο Ηλιάδη και τον επίκουρο καθηγητή Δημήτρη Γεωργίου.

Ο μεταπτυχιακός φοιτητής

Ηλίας Χριστοδουλόπουλος

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Το 1969 ο Dana Scott οδηγήθηκε από προβλήματα που αφορούσαν γλώσσες προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών στο να εργαστεί περισσότερο με μερικώς διατεταγμένες δομές. Ενσωμάτωσε τα δικτυωτά στη θεωρία του και έκανε τα πρώτα βήματα για τον ορισμό των συνεχών δικτυωτών ως απόρροια των αλγεβρικών δικτυωτών. Η πρώτη του πολύ γνωστή εργασία στο χώρο έχει τίτλο: "Continuous Lattices".

Στη συνέχεια πάρα πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν και ασχολούνται με τη μελέτη της θεωρίας αυτής. Για παράδειγμα αναφέρουμε τους Gerhard Gierz, Lawson, Hofman, Stralka, Keimel, Misolve και Banaschewski κλπ.

Η διπλωματική αυτή εργασία, περιέχει τέσσερα κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 1 ορίζονται τα μερικώς διατεταγμένα, τα ολικώς διατεταγμένα, τα κατευθυνόμενα, τα άνω και τα κάτω σύνολα. Δίνονται βασικές ιδιότητες αυτών και παραθέτονται παραδείγματα.

Στο Κεφάλαιο 2 ορίζονται τα δικτυωτά, τα πλήρη δικτυωτά και τα πλήρως κατευθυνόμενα μερικώς διατεταγμένα σύνολα (dcpo). Επίσης δίνεται μια νέα σχέση $\ll$ (way below), μεταξύ σημείων ενός πλήρους δικτυωτού και ορίζονται, με τη βοήθεια της σχέσης αυτής, τα συνεχή μερικώς διατεταγμένα σύνολα.

Τέλος, δίνονται βασικές ιδιότητες των παραπάνω εννοιών και παραθέτονται παραδείγματα.

Στο Κεφάλαιο 3 ορίζεται και μελετάται η Scott τοπολογία σ' ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Δίνονται βασικές ιδιότητες αυτής και παραδείγματα. Τέλος, ορίζονται η σημειακή - ανοικτή, η συμπαγής - ανοικτή και η Isbell τοπολογία σε χώρους συναρτήσεων. Ειδικότερα, η Isbell τοπολογία ορίζεται με χρήση της Scott τοπολογίας.

Στο Κεφάλαιο 4 ορίζονται η κάτω τοπολογία (lower topology) και η Lawson τοπολογία σ' ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Επίσης δίνονται βασικές ιδιότητες αυτών.

Κεφάλαιο 1

Διατεταγμένα Σύνολα

Ορισμός 1.1. Έστω L σύνολο και $\leq \subseteq L \times L$. Η διμελής σχέση $\leq$ είναι *σχέση μερικής διάταξης* όταν:

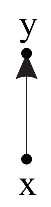
(i) $x \leq x, \ \forall x \in L$ (ανακλαστική).

(ii) $x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \Rightarrow \ x = y$ (αντισυμμετρική).

(iii) $x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \Rightarrow \ x \leq z$ (μεταβατική).

Το ζεύγος $(L, \leq)$ καλείται *μερικώς διατεταγμένο σύνολο* (partial ordered set ή poset).

Έστω $x, y \in L$. Γράφουμε: $x < y$ όταν $x \neq y$ και $x \leq y$. Σχηματική παράσταση του $x < y$ έχουμε στο παρακάτω διάγραμμα:



Παράδειγμα 1.2. Σ' ότι ακολουθεί με ω, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών, ρητών, ακεραίων και πραγματικών αριθμών αντίστοιχα.

(i) Τα $(\omega, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, όπου $\leq$ είναι η φυσική διάταξη αυτών, είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα.

(ii) Το $(\omega, \leq_1)$, όπου η $\leq_1$ ορίζεται ως εξής:

$$x \leq_1 y \;\Leftrightarrow x/y \text{ (το } x \text{ διαιρεί το } y)$$

είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

(iii) Έστω X σύνολο και $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X. Τότε το $(\mathcal{P}(\mathrm{X}), \subseteq)$ είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

(iv) Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος. Δηλαδή το υποσύνολο τ του $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

1) $\emptyset$, $X \in$τ.

2) Αν $U_1, U_2 \in$τ, τότε $U_1 \cap U_2 \in$τ.

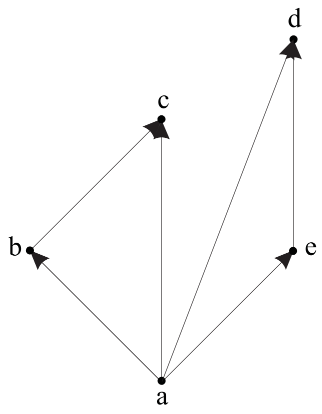
3) Αν $U_i \in$τ, $i \in I$, τότε η $\cup\{U_i : i \in I\} \in$τ.

Τότε το (τ,$\subseteq$) είναι μερικώς διατεταγμένο.

Έχει επικρατήσει, το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X, δηλαδή το τ, να το συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(X)$. Οπότε το παραπάνω μερικώς διατεταγμένο σύνολο συμβολίζεται $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$.

(v) Το $(X, \leq)$, όπου $X = \{a, b, c, d, e\}$ και

$$\leq = \{(a,b),(b,c),(a,c),(a,e),(e,d),(a,d),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\},$$



δεν είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο, καθ' ότι η σχέση $\leq$ δεν είναι σχέση μερικής διάταξης, αφού $(a, a) \notin \leq$.

(vi) Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Το $(L, \leq^{op})$, όπου η $\leq^{op}$ ορίζεται ως

$$x \leq^{op} y \Leftrightarrow y \leq x, \forall x, y \in L,$$

είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

Πράγματι, έχουμε:

- $x \leq^{op} x$, διότι $x \leq x$, αφού $x \in X$ και $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο.
- $x \leq^{op} y \wedge y \leq^{op} x \Rightarrow y \leq x \wedge x \leq y \Rightarrow x = y$.
- $x \leq^{op} y \wedge y \leq^{op} z \Rightarrow y \leq x \wedge z \leq y \Rightarrow z \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow z \leq x \Rightarrow x \leq^{op} z$.

Το σύνολο $(L, \leq^{op})$ καλείται *αντίθετο μερικώς διατεταγμένο σύνολο*. Σ' ότι ακολουθεί, τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα $(L, \leq)$ και $(L, \leq^{op})$ τα συμβολίζουμε με L και L^{op} αντίστοιχα.

Άνω και Κάτω Φράγμα

Ορισμός 1.3. Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω $A \subseteq L$. Το στοιχείο $m \in L$ καλείται *άνω φράγμα του* A, όταν $a \leq m, \forall a \in A$.

Επίσης το στοιχείο m' καλείται *κάτω φράγμα του* A, όταν $m' \leq a, \forall a \in A$.

Το ελάχιστο των άνω φραγμάτων του A καλείται *supremum του* A και συμβολίζεται με $\vee A$ ή $\sup(A)$.

Το μέγιστο των κάτω φραγμάτων του A καλείται $infimum$ *του* A και συμβολίζεται με $\wedge A$ ή $\inf(A)$.

Αν $A = \{x, y, z\}$, τότε για το $\sup(A)$ και $\inf(A)$ έχουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

$$\sup(A) = \vee A = x \vee y \vee z \quad \text{και} \quad \inf(A) = \wedge A = x \wedge y \wedge z.$$

Επίσης, αν $A = \{x_i : i \in I\}$, τότε

- $\sup(A) = \wedge A = \wedge\{x_i : i \in I\}$
- $\inf(a) = \vee A = \vee\{x_i : i \in I\}$

Οπότε, αν $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $x, y \in L$, τότε:

- $x \wedge (y \vee z) = \inf\{x, \sup\{x, z\}\}$
- $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = \sup\{\inf\{x, y\}, \inf\{x, z\}\}$

Παράδειγμα 1.4.

(i) Έστω $(\omega, \leq)$ και $A = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Τότε: $\wedge A = 0 \notin A$ και $\vee A = 1 \in A$.

(ii) Έστω $(\mathbb{R}, \leq)$ και $A = (0,1)$. Τότε $\wedge A = 0$ και $\vee A = 1$.

(iii) Έστω $(\omega, \leq_1)$, όπου $x \leq_1 y \Leftrightarrow x/y$. Αν $x, y \in \omega$, τότε:

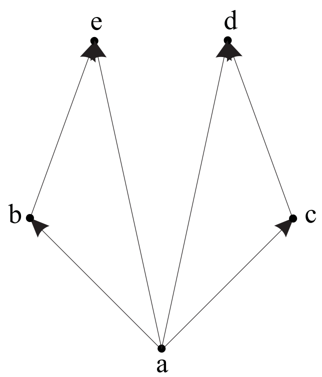
$\wedge\{x,y\} = m =$ Μ.Κ.Δ.(x,y), αφού m/x και m/y και m ο μέγιστος δυνατός διαιρέτης.

$\vee\{x,y\} = m' =$ Ε.Κ.Π.(x,y), αφού x/m' και y/m' και m' το ελάχιστο δυνατό πολλαπλάσιο.

Παρατήρηση 1.5. *Δεν έχουν όλα τα σύνολα supremum και infimum. (Βλέπε Παράδειγμα 1.6).*

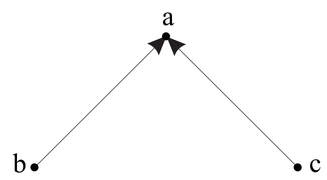
Παράδειγμα 1.6.

(1) Έστω $L = \{a,b,c,d,e\}$, $R = \{(a,b),(b,e),(a,e),(a,c),(c,d),(a,d)\}$ και $\leq = R \cup I_x$, όπου $I_x = \{(x,x) : x \in L\}$. Δηλαδή η $\leq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης που περιγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Τότε $\wedge\{b,c\} = b \wedge c = a$ και $\vee\{b,c\} = b \vee c$ δεν υπάρχει. Δηλαδή το $\{b,c\}$ δεν έχει supremum.

(2) Έστω $L = \{a,b,c\}$, $R = \{(b,a),(c,a)\}$ και $\leq = R \cup I_x$, όπου $I_x = \{(x,x) : x \in L\}$. Δηλαδή η $\leq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης που περιγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Παρατηρούμε ότι το $\{b, c\}$ δεν έχει infimum.

Ολικώς ή Γραμμικώς Διατεταγμένα Σύνολα

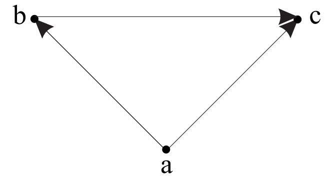
Ορισμός 1.7. Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(X, \leq)$ καλείται *ολικώς ή γραμμικώς διατεταγμένο*, όταν $x \leq y$ ή $y \leq x$, $\forall x, y \in X$. Ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο αναφέρεται πολλές φορές και ως *αλυσίδα*.

Παράδειγμα 1.8.

(i) Το $(\omega, \leq)$, όπου $\leq$ είναι η φυσική διάταξη του ω, είναι μερικώς διατεταγμένο και ολικώς διατεταγμένο.

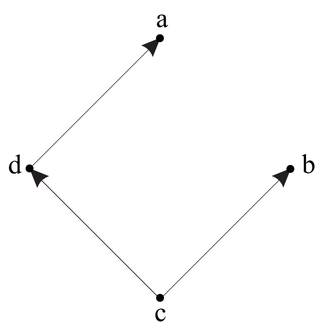
(ii) Το $(\omega, \leq_1)$, όπου $x \leq_1 y \Leftrightarrow x/y$, $x, y \in \omega$, είναι μερικώς διατεταγμένο, αλλά όχι ολικώς διατεταγμένο, διότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί, για παράδειγμα οι 3, 8, για τους οποίους έχουμε ότι $3 \not\leq 8$, και $8 \not\leq 3$.

(iii) Έστω $(L = \{a, b, c\}, \leq)$, όπου $\leq = \{(a, b), (a, c), (b, c), (a, a), (b, b), (c, c)\}$. Δηλαδή $\leq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης που περιγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σύνολο είναι ολικώς διατεταγμένο.

(iv) Έστω $(L = \{a, b, c, d\}, \leq)$, όπου $\leq= \{(c, d), (c, b), (d, a), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$. Δηλαδή η $\leq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης που περιγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Παρατηρούμε ότι το παραπάνω σύνολο δεν είναι ολικώς διατεταγμένο, αφού a, b είναι στοιχεία του συνόλου L που δε συγκρίνονται.

(v) Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ δεν είναι ολικώς διατεταγμένο. Πράγματι, αν $A, B \in \mathcal{P}(X)$ με $A \cap B = \emptyset$, τότε δεν αληθεύει $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$.

(vi) Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε, ότι αν (X,τ) είναι τοπολογικός χώρος, τότε προφανώς το $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ δεν είναι ολικώς διατεταγμένο σύνολο.

Παρατήρηση 1.9. *Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Αν $x \nleq y$, τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι $x > y$, διότι τα x, y μπορεί να μη συγκρίνονται.*

Έστω $(L, \leq)$ ολικώς διατεταγμένο σύνολο. Αν $x \nleq y$, τότε $x > y$, διότι αφού $x \nleq y$, έχουμε ότι $x \neq y$ και $x \nless y$. Άρα $x > y$, διότι όλα τα στοιχεία του L συγκρίνονται.

Πρόταση 1.10. *Έστω $(L, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο που έχει supremum για κάθε υποσύνολό του. Τότε κάθε υποσύνολο του L έχει και infimum.*

Απόδειξη. Έστω $S \subseteq L$. Αποδεικνύουμε ότι το S έχει infimum. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in L : x \leq s,\ \forall s \in S\} \subseteq L.$$

Επειδή κάθε υποσύνολο του L έχει supremum, έχουμε ότι το $\vee A = \sup(A)$ υπάρχει. Αποδεικνύουμε ότι το $\inf(S) = \wedge S = \vee A$.

- Το $\vee A$ είναι κάτω φράγμα του S. Έστω ότι $s \in S$. Αποδεικνύουμε ότι το $\vee A \leq s$. Πράγματι, έχουμε ότι $x \leq s$, $\forall x \in A$. Άρα και το $\sup(A) = \vee A \leq s$.

- Το $\vee A$ είναι το μέγιστο των κάτω φραγμάτων του S. Έστω y το κάτω φράγμα του S. Δηλαδή, $y \leq s$, $\forall s \in S$. Τότε από τον ορισμό του A, έχουμε ότι $y \in A$. Συνεπώς $y \leq \vee A$. Άρα $\vee A$ είναι το μέγιστο των κάτω φραγμάτων του S και ισχύει ότι $\inf(S) = \wedge S = \vee A$.

□

Ορισμός 1.11. Αν $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq L$, τότε το $y \in A$ καλείται *ελάχιστο στοιχείο του* A, όταν $y \leq x$, $\forall x \in A$, και *μέγιστο στοιχείο του* A, όταν $x \leq y$, $\forall x \in A$.

Επιπλέον, αν το $A = L$, τότε το y καλείται *ελάχιστο* στοιχείο, αντίστοιχα *μέγιστο* στοιχείο του L.

Πρόταση 1.12. *Αν $(L, \leq)$ είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο (τα οποία συμβολίζουμε με 0_L ή 0 και 1_L ή 1 αντίστοιχα), τότε τα στοιχεία αυτά είναι μοναδικά.*

Απόδειξη. Έστω ότι 0_L και $0'_L$ δύο ελάχιστα στοιχεία του L.

- Αν υποθέσουμε ότι ελάχιστο στοιχείο είναι το 0_L, τότε

$$0_L \leq 0'_L \quad (1)$$

- Αν υποθέσουμε ότι ελάχιστο στοιχείο είναι το $0'_L$, τότε

$$0'_L \leq 0_L \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε ότι $0_L = 0'_L$.

Ομοίως αποδεικνύεται η μοναδικότητα του μέγιστου στοιχείου 1_L.

□

Παράδειγμα 1.13. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος. Για το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ το $\emptyset$ είναι το ελάχιστο στοιχείο και το X είναι το μέγιστο στοιχείο. Το $\emptyset$ είναι το ελάχιστο ανοικτό σύνολο που περιέχεται σε όλα τα ανοικτά, και το X είναι το μέγιστο ανοικτό σύνολο που περιέχει όλα τα ανοικτά.

Παρατήρηση 1.14. *Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω ότι υπάρχουν τα 1_L και 0_L. Θα βρούμε το supremum και το infimum του κενού συνόλου.*

(i) Αναζητούμε το $\wedge\emptyset$.

Αν το $x \in \emptyset$, τότε το $p \leq x,\ \forall p \in L$.

Άρα κάθε στοιχείο p του L είναι κάτω φράγμα του $\emptyset$.

Συνεπώς $\wedge\emptyset = \inf(\emptyset) = \max\{p : p \in L\} = 1_L$.

(ii) Αναζητούμε το $\vee\emptyset$.

Αν το $x \in \emptyset$, τότε το $x \leq p,\ \forall p \in L$.

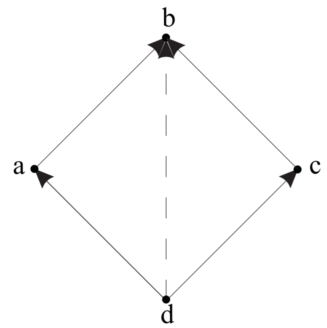
Άρα κάθε στοιχείο p του L είναι άνω φράγμα του $\emptyset$.

Συνεπώς $\vee\emptyset = \sup(\emptyset) = \min\{p : p \in L\} = 0_L$.

Συμπέρασμα: Όταν για ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(L, \leq)$ ισχυριζόμαστε ότι τα $\wedge\emptyset$ και $\vee\emptyset$ υπάρχουν, αυτό είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(L, \leq)$ έχει ελάχιστο στοιχείο 0_L και μέγιστο στοιχείο 1_L. Μάλιστα δε, ισχύει ότι: $\wedge\emptyset = 1_L$ και $\vee\emptyset = 0_L$.

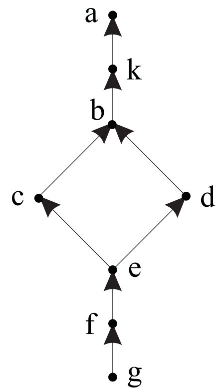
Παράδειγμα 1.15.

(i) Έστω $(L = \{a, b, c, d\}, \leq)$, όπου $\leq = \{(d, a), (d, c), (d, b), (a, b), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, μερικώς διατεταγμένο σύνολο.



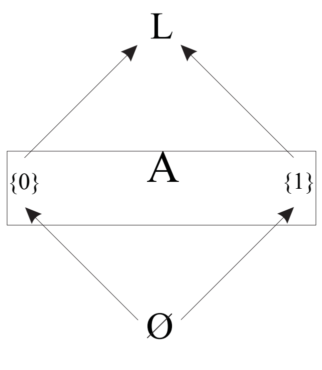
Έχουμε ότι: $\inf\{a, c\} = a \wedge c = \wedge\{a, c\} = d$ και $\sup\{a, c\} = a \vee c = \vee\{a, c\} = b$.

(ii) Έστω $(L = \{a, b, c, d, e, f, g, k\}, \leq)$, όπου $\leq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης που προσδιορίζεται από το παρακάτω διάγραμμα.



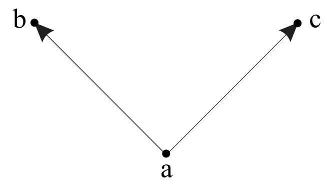
Έχουμε ότι: $\inf\{b, c, d\} = b \wedge c \wedge d = \wedge\{b, c, d\} = \max\{e, f, g\} = e$ και $\sup\{b, c, d\} = b \vee c \vee d = \vee\{b, c, d\} = \min\{b, k, a\} = b$.

(iii) Έστω $L = \{0, 1\}$ και $(\mathcal{P}(L), \subseteq)$, όπου $\subseteq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης που προσδιορίζεται από το παρακάτω διάγραμμα.



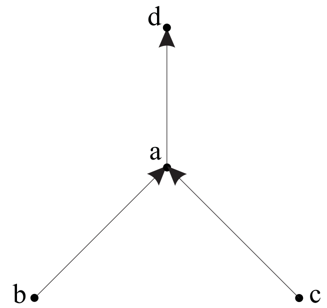
Έχουμε ότι: $\inf A = \inf\{\{0\}, \{1\}\} = \{0\} \wedge \{1\} = \emptyset$ και $\sup A = \sup\{\{0\}, \{1\}\} = \{0\} \vee \{1\} = \{0, 1\} = L$.

(iv) Έστω $(X = \{a, b, c\}, \leq)$, όπου $\leq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης που προσδιορίζεται από το παρακάτω διάγραμμα.



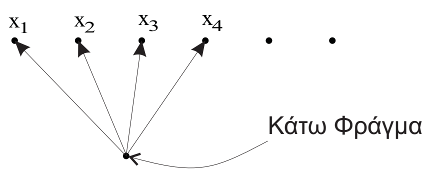
Έχουμε ότι: $b \wedge c = a$ και $b \vee c =$ δεν υπάρχει. Παρατηρούμε ότι το $\{b, c\}$ δεν έχει άνω φράγμα.

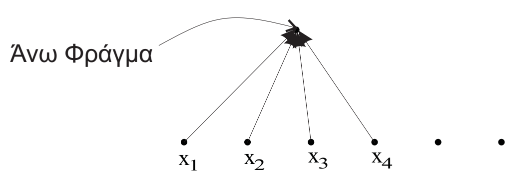
(v) Έστω $(L = \{a, b, c\}, \leq)$, όπου $\leq$ η σχέση μερικής διάταξης που προσδιορίζεται από το παρακάτω διάγραμμα.



Έχουμε ότι: $b \vee c = \min\{a, d\} = a$ και $b \wedge c =$ δεν υπάρχει. Παρατηρούμε ότι το $\{b, c\}$ δεν έχει κάτω φράγμα.

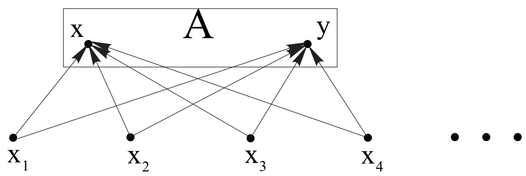
(vi) Έστω $(L = \{x_i : i \in \omega\}, \leq)$, όπου $\leq$ είναι η σχέση μερικής διάταξης που προσδιορίζεται από το κάθε ένα απο τα παρακάτω διαγράμματα. Τα ακόλουθα δύο σχήματα απεικονίζουν ένα άνω και ένα κάτω φράγμα αντίστοιχα, του L.



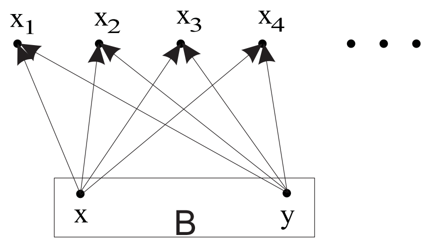


Παρατήρηση 1.16.

(i) *Έστω* $(L_1 = \{x, y, x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \leq)$, *όπου* $\leq$ *είναι η σχέση μερικής διάταξης που προσδιορίζεται από το ακόλουθο διάγραμμα. Αν* $A = \{x, y\}$ *τότε δεν υπάρχει το infimum του* A. *Τα* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *είναι κάτω φράγματα του* A, *αλλά δεν υπάρχει το μέγιστο των κάτω φραγμάτων.*



(ii) *Αντίστοιχα, αν* $(L_2 = \{x, y, x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \leq)$, *όπου* $\leq$ *είναι η σχέση διάταξης που προσδιορίζεται από το ακόλουθο διάγραμμα, και* $B = \{x, y\}$ *τότε δεν υπάρχει το supremum του* B. *Τα* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *είναι άνω φράγματα του* B, *αλλά δεν υπάρχει το ελάχιστο των άνω φραγμάτων.*



Πρόταση 1.17. *Έστω* $(L, \leq)$ *μερικώς διατεταγμένο σύνολο τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολό του να έχει infimum. Τότε κάθε υποσύνολό του έχει επίσης supremum.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το διατεταγμένο σύνολο $(L, \leq^{op}) \equiv X^{op}$, όπου $\leq^{op} = \{(x, y) \in L \times L : (y, x) \in \leq\}$, δηλαδή $x \leq^{op} y \Leftrightarrow y \leq x$.

Επειδή κάθε υποσύνολο A του $(L, \leq)$ έχει infimum, έχουμε ότι κάθε υποσύνολο A του $(L, \leq^{op})$ έχει supremum. Οπότε καθε υποσύνολο του $(L, \leq^{op})$ θα έχει και infimum (βλέπε Πρόταση 1.10), και συνεπώς καθε υποσύνολο του $(L, \leq)$ έχει supremum. □

Παράδειγμα 1.18. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και έστω $K(X)$ ή τ^c το σύνολο των κλειστών υποσυνόλων του X. Δηλαδή:

$$F \in K(X) \Leftrightarrow F^c \in \tau.$$

Το $(K(X), \subseteq)$ είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο και κάθε υποσύνολό του, $\{F_i : i \in I\} \subseteq K(X)$ έχει infimum, που είναι η $\cap\{F_i : i \in I\} = F$.

Πράγματι, $F \subseteq F_i$, $\forall i \in I$. Επίσης, αν K κλειστό σύνολο τέτοιο ώστε $K \subseteq F_i$, $\forall i \in I$, τότε $K \subseteq \cap\{F_i : i \in I\} = F$. Άρα το F είναι το μέγιστο κάτω φράγμα, και συνεπώς είναι το $infimum$ της $\{F_i : i \in I\}$.

Ορισμός 1.19. Ένα διατεταγμένο σύνολο $(X, \leq)$ καλείται *καλώς διατεταγμένο*, όταν κάθε υποσύνολο $A \neq \emptyset$ του X έχει ελάχιστο στοιχείο στο A.

Πρόταση 1.20. *Κάθε καλώς διατεταγμένο σύνολο $(X, \leq)$ είναι ολικά διατεταγμένο.*

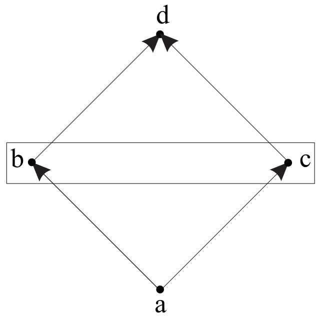
Απόδειξη. Έστω $x, y \in X$. Τότε $\{x, y\} \subseteq X$. Επειδή το $(X, \leq)$ είναι καλώς διατεταγμένο, υπάρχει το $min\{x, y\}$ και μάλιστα $min\{x, y\} \in \{x, y\}$. Άρα $x \leq y$ ή $y \leq x$, ανάλογα με το ποιό είναι το $minimum$, το x ή το y. □

Παράδειγμα 1.21.

(i) Τα $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ δεν είναι καλώς διατεταγμένα.

(ii) Το $(\omega, \leq)$ είναι καλώς διατεταγμένο.

(iii) Έστω $(X = \{a, b, c, d\}, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, όπου η διάταξη $\leq$ περιγράφεται απ' το ακόλουθο διάγραμμα.



Το $(X, \leq)$ δεν είναι καλώς διατεταγμένο σύνολο, διότι δεν αληθεύει $b \leq c$ ή $c \leq b$.

(iv) Έστω $(X = \{a, b, c, d\}, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, όπου η $\leq$ περιγράφεται απ' το ακόλουθο διάγραμμα.

Το $(X, \leq)$ είναι καλώς διατεταγμένο σύνολο.

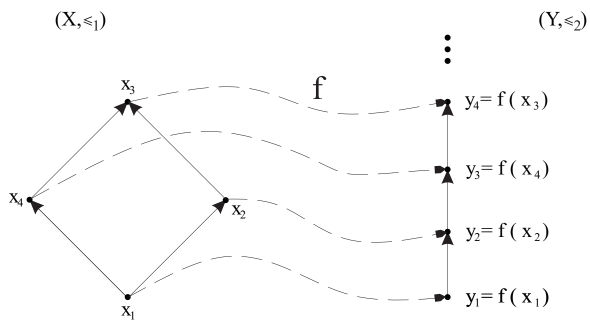
(v) Το $((1, 30), \leq)$ δεν έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

(vi) Το $([1, 3], \leq)$ είναι καλώς διατεταγμένο.

Ισομορφισμός Μεταξύ Μερικώς Διατεταγμένων Συνόλων

Ορισμός 1.22. Ένας *ισομορφισμός μεταξύ δύο μερικώς διατεταγμένων συνόλων* $(X, \leq_1)$ και $(Y, \leq_2)$ είναι μία "$1-1$" και επί συνάρτηση $f : X \to Y$, τέτοια ώστε $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \leq_1 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Συμβολικά γράφουμε $X \approx Y$.

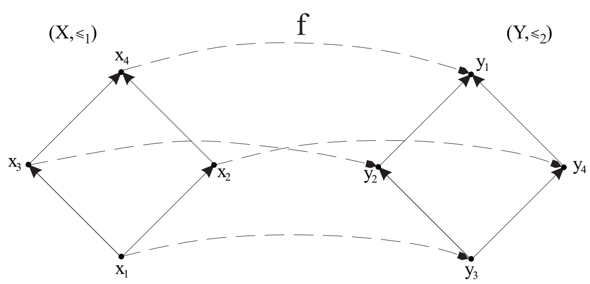
Παράδειγμα 1.23. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνουμε δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα $(X, \leq_1),\ (Y, \leq_2)$ και $f : X \to Y$.



Το X δεν είναι ισόμορφο με το Y $(X \not\approx Y)$, διότι:

$y_2 = f(x_2) \leq y_3 = f(x_4)$, αλλά $x_2 \nleq x_4$.

Παράδειγμα 1.24. Στο παρακάτω διάγραμμα έχουμε την παράσταση δύο ισόμορφων μερικώς διατεταγμένων συνόλων.



Πρόταση 1.25. *Έστω f μια "1−1" και επί συνάρτηση από ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο $(X, \leq_1)$ στο μερικώς διατεταγμένο $(Y, \leq_2)$, για την οποία έχουμε $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \leq_1 x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Τότε η f είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in X$ τέτοια ώστε $f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Αποδεικνύουμε ότι $x_1 \leq_1 x_2$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$, επειδή η συνάρτηση f είναι "$1-1$". Άρα $x_1 \leq_1 x_2$.

(ii) Αν $f(x_1) <_2 f(x_2)$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ και $f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Αποδεικνύουμε ότι $x_1 \leq_1 x_2$. Υποθέτουμε ότι $x_1 \not\leq_1 x_2$. Επειδή $(X, \leq_1)$ είναι ολικά διατεταγμένο, έχουμε ότι $x_2 \leq_1 x_1$ και μάλιστα $x_1 \neq x_2$. Οπότε $f(x_2) \leq_2 f(x_1)$. Συνεπώς $f(x_2) <_2 f(x_1)$. Άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι $f(x_1) <_2 f(x_2)$.

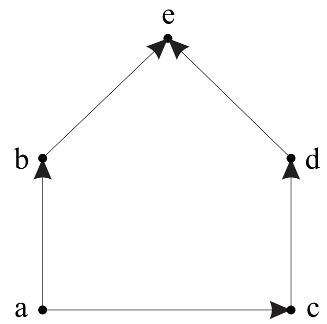
□

Κατευθυνόμενα Σύνολα

Ορισμός 1.26. Έστω ότι $(L, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $D \neq \emptyset$ ένα υποσύνολο του L. Λέμε ότι το D είναι *κατευθυνόμενο* (*directed*), αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του D έχει άνω φράγμα μέσα στο D.

Παρατήρηση 1.27. *Το D είναι κατευθυνόμενο αν και μόνον αν για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in D$ υπάρχει $\lambda_0 \in D$ τέτοιο ώστε $\lambda_1 \leq \lambda_0$ και $\lambda_2 \leq \lambda_0$.*

Παράδειγμα 1.28. Έστω $L = \{a, b, c, d, e\}$, όπου $\leq$ είναι η μερική διάταξη στο L, του παρακάτω διαγράμματος.



(i) $D_1 = \{b, c, e\} \subseteq L$ και είναι κατευθυνόμενο.

(ii) $D_2 = \{b, c\} \subseteq L$ δεν είναι κατευθυνόμενο.

(iii) $D_3 = \{a, b, c\} \subseteq L$ δεν είναι κατευθυνόμενο, διότι για το b και το c δεν υπάρχει $\lambda_0 \in D_3$ τέτοιο ώστε $b \leq \lambda_0$ και $c \leq \lambda_0$.

Συμβολισμοί

Έστω $(L, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, $x \in L$ και $A \subseteq L$. Τότε:

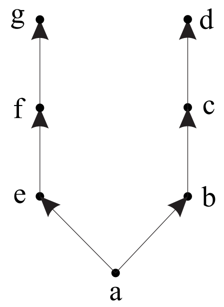
(i) $\uparrow \{x\} =\uparrow x = \{y \in L : x \leq y\}$.

(ii) $\downarrow \{x\} =\downarrow x = \{y \in L : y \leq x\}$.

(iii) $\uparrow A = \{y \in L : (\exists x \in A)(x \leq y)\}$.

(iv) $\downarrow A = \{y \in L : (\exists x \in A)(y \leq x)\}$.

Παράδειγμα 1.29. Έστω $L = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, όπου $\leq$ είναι η μερική διάταξη στο L, του παρακάτω διαγράμματος.



(i) $\uparrow e = \{e, f, g\}$.

(ii) $\downarrow b = \{b, a\}$.

(iii) $A = \{c, e\}$. Τότε:

$\uparrow A = \{y \in L : (\exists x \in A)(x \leq y)\} = \{c, d, e, f, g\} = \cup\{\uparrow x : x \in A\}$.

$\downarrow A = \{y \in L : (\exists x \in A)(y \leq x)\} = \{c, b, a, e\} = \cup\{\downarrow x : x \in A\}$.

Πρόταση 1.30. *Έστω $(L, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq L$. Τότε:*

(i) $\uparrow A = \cup\{\uparrow x : x \in A\}$.

(ii) $\downarrow A = \cup\{\downarrow x : x \in A\}$.

Απόδειξη.

(i) Έστω $y \in \uparrow A$. Τότε υπάρχει $x \in A : x \leq y$. Προφανώς, το $y \in \uparrow x$. Οπότε $y \in \cup\{\uparrow x : x \in A\}$. Αντιστρόφως: Έστω ότι το $y \in \cup\{\uparrow x : x \in A\}$. Τότε υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $y \in \uparrow x$. Οπότε υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x \leq y$. Συνεπώς $y \in \uparrow A$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\uparrow A = \cup\{\uparrow x : x \in A\}$.

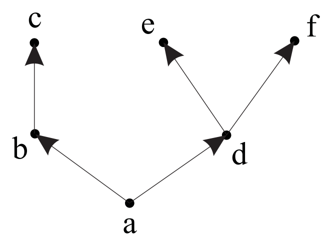
(ii) Έστω $y \in \downarrow A$. Τότε υπάρχει $x \in A : y \leq x$. Προφανώς, το $y \in \downarrow x$. Οπότε $y \in \cup\{\downarrow x : x \in A\}$. Αντιστρόφως: Έστω ότι το $y \in \cup\{\downarrow x : x \in A\}$. Τότε υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $y \in \downarrow x$. Οπότε υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $y \leq x$. Συνεπώς $y \in \downarrow A$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\downarrow A = \cup\{\downarrow x : x \in A\}$.

□

Άνω και Κάτω Σύνολα (Upper and Lower Sets)

Ορισμός 1.31. Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq L$. Λέμε ότι το A είναι *άνω σύνολο (upper set)* (*αντίστοιχα κάτω σύνολο (lower set)*) όταν $A = \uparrow A$ (αντίστοιχα $A = \downarrow A$).

Παράδειγμα 1.32. Έστω $(L = \{a, b, c, d, e, f\}, \leq)$, όπου η μερική διάταξη $\leq$ φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



(i) $A_1 = \{d, e, f\}$. Είναι προφανές ότι $A_1 \subseteq \uparrow A_1$. Ελέγχουμε αν ισχύει ότι $\uparrow A_1 \subseteq A_1$. Έχουμε λοιπόν ότι: $\uparrow A_1 = \{y \in L : (\exists x \in A_1)(x \leq y)\} = \{d, e, f\} = A_1$. Άρα το A_1 είναι άνω σύνολο.Έχουμε όμως ότι $\downarrow A_1 = \{a, d, e, f\} \neq A_1$. Άρα το A_1 δεν είναι κάτω σύνολο.

(ii) $A_2 = \{a, b, c\}$. Προφανώς $\uparrow A_2 = L \neq A_2$. Άρα το A_2 δεν είναι άνω σύνολο. Έχουμε όμως ότι $\downarrow A_2 = A_2$ και συνεπώς το A_2 είναι κάτω σύνολο.

(iii) $A_3 = \{d, f\}$. Έχουμε ότι $\uparrow A_3 = \{d, e, f\} \neq A_3$, δηλαδή το A_3 δεν είναι άνω σύνολο. Επίσης ισχύει ότι $\downarrow A_3 = \{a, d, f\} \neq A_3$, που σημαίνει ότι το A_3 δεν είναι ούτε κάτω σύνολο.

Ορισμός 1.33. Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq L$. Λέμε ότι το A είναι *ιδεώδες*, όταν το A είναι κατευθυνόμενο και κάτω σύνολο.

Παράδειγμα 1.34.

(i) Το σύνολο A_2 του προηγούμενου παραδείγματος, είναι κατευθυνόμενο και όπως δείξαμε, είναι και κάτω σύνολο. Συνεπώς το A_2 είναι ιδεώδες.

(ii) Τα σύνολα A_1, A_3 του προηγούμενου παραδείγματος δεν είναι ιδεώδη, διότι δεν είναι κάτω σύνολα.

Πρόταση 1.35. *Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq L$. Τότε $\downarrow A = \downarrow (\downarrow A)$. Δηλαδή το $\downarrow A$ είναι κάτω σύνολο.*

Απόδειξη. Προφανώς $\downarrow A \subseteq \downarrow (\downarrow A)$. Αποδεικνύουμε ότι $\downarrow (\downarrow A) \subseteq \downarrow A$. Έστω $x \in \downarrow (\downarrow A)$ τότε υπάρχει $y \in \downarrow A$ τέτοιο ώστε $x \leq y$.
Επειδή $y \in \downarrow A$, υπάρχει $z \in A$ τέτοιο ώστε $y \leq z$. Συνεπώς το $x \leq y \leq z$ και $z \in A$. Δηλαδή για το $x \in \downarrow (\downarrow A)$ υπάρχει $z \in A$ τέτοιο ώστε $x \leq z$. Οπότε $x \in \downarrow A$. Άρα $\downarrow (\downarrow A) \subseteq \downarrow A$. □

Πρόταση 1.36. *Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $A \subseteq L$. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

1. *A κατευθυνόμενο.*
2. *$\downarrow A$ κατευθυνόμενο.*
3. *$\downarrow A$ ιδεώδες.*

Απόδειξη.

$(1 \Rightarrow 2)$ Έστω $B \subseteq \downarrow A$ πεπερασμένο σύνολο. Αποδεικνύουμε ότι το B έχει άνω φράγμα στο $\downarrow A$.

Έστω $x \in B$. Τότε $x \in \downarrow A$. Συνεπώς υπάρχει $x' \in A$ τέτοιο ώστε $x \leq x'$. Θέτουμε ως B' το υποσύνολο του A που περιέχει όλα τα στοιχεία x' που αναφέραμε προηγουμένως. Το B' είναι πεπερασμένο υποσύνολο του A. Επειδή το A είναι κατευθυνόμενο, το B' έχει άνω φράγμα β' που ανήκει στο A. Δηλαδή $\forall x' \in B'$, $x' \leq \beta'$. Προφανώς, το β' είναι άνω φράγμα του B. Επιπλέον, έχουμε ότι $A \subseteq \downarrow A$. Οπότε $\beta' \in \downarrow A$ και είναι άνω φράγμα, όπως προαναφέρθηκε, του B. Άρα το $\downarrow A$ είναι κατευθυνόμενο.

$(2 \Rightarrow 1)$ Έστω $B \subseteq A$ πεπερασμένο σύνολο. Αποδεικνύουμε ότι το B έχει άνω φράγμα στο A. Γνωρίζουμε ότι $A \subseteq \downarrow A$. Οπότε το πεπερασμένο υποσύνολο (του A) B είναι και υποσύνολο του $\downarrow A$. Επειδή το $\downarrow A$ είναι κατευθυνόμενο, το B έχει άνω φράγμα β στο $\downarrow A$. Δηλαδή $\beta \in \downarrow A$ και $\forall x \in B$ $x \leq \beta$. Επειδή $\beta \in \downarrow A$, υπάρχει $\beta' \in A$ τέτοιο ώστε $\beta \leq \beta'$. Οπότε το $\beta' \in A$ και επιπλέον $\forall x \in B$, $x \leq \beta'$. Άρα το β' είναι άνω φράγμα του B και επιπλέον το A είναι κατευθυνόμενο σύνολο.

$(2 \Rightarrow 3)$ Η απόδειξη προκύπτει από την Πρόταση 1.35.

$(3 \Rightarrow 2)$ Η απόδειξη είναι προφανής.

$\square$

Πρόταση 1.37. *Έστω $(L, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω ότι κάθε κατευθυνόμενο υποσύνολό του, και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του L, έχει supremum. Τότε κάθε υποσύνολο του L έχει supremum. (Συνεπώς και κάθε υποσύνολό του θα έχει και infimum).*

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq L$. Αποδεικνύουμε ότι το $\sup X$ υπάρχει και ανήκει στο L. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F} = \{\sup F : F \subseteq X$ και F πεπερασμένο$\}$. Αποδεικνύουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι κατευθυνόμενο και επιπλέον ότι $\sup \mathcal{F} = \sup X$.

Έστω ότι $\sup F_1, \ \sup F_2 \in \mathcal{F}$. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\sup F \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\sup F_1 \leq \sup F$ και $\sup F_2 \leq \sup F$. Επειδή $F_1, \ F_2$ είναι πεπερασμένα, το $F = F_1 \cup F_2$, είναι επίσης πεπερασμένο. (Βλέπε Παρατήρηση 1.27). Αφού $F_1, \ F_2 \subseteq X$, το $F = F_1 \cup F_2 \subseteq X$. Οπότε το $\sup F \in \mathcal{F}$ και επιπλέον προφανώς έχουμε ότι $\sup F_1 \leq \sup F$ και $\sup F_2 \leq \sup F$.

Άρα το $\mathcal{F}$ είναι κατευθυνόμενο και συνεπώς, απ' την υπόθεση, υπάρχει το $\sup \mathcal{F}$. Αποδεικνύουμε ότι αυτό είναι και το $\sup X$. Δηλαδή ότι το $\sup \mathcal{F}$ είναι άνω φράγμα του X και μάλιστα το ελάχιστο των άνω φραγμάτων του X.

- Παρατηρούμε ότι $\forall x \in X, \ \{x\} \subseteq X, \ \{x\}$ πεπερασμένο και άρα το $x = \sup\{x\} \in \mathcal{F}$. Συνεπώς $x \leq \sup \mathcal{F}, \ \forall x \in X$. Δηλαδή το $\sup \mathcal{F}$ είναι άνω φάγμα του X.

- Έστω y άνω φράγμα του X. Αποδεικνύουμε ότι $\sup \mathcal{F} \leq y$. Επειδή y είναι άνω φράγμα του X, έχουμε ότι $\sup F \leq y$, $\forall F \subseteq X$ και F πεπερασμένο. Οπότε το y είναι άνω φράγμα του $\mathcal{F}$. Συνεπώς $\sup \mathcal{F} \leq y$.

$\square$

Κεφάλαιο 2

Δικτυωτά

Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $\mathcal{O}(X)$ το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X. Θεωρούμε το διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$. Θα ελέγξουμε αν αυτό έχει supremum.

Έστω $\{U_i : i \in I\}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X, δηλαδή $\{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{O}(X)$. Η οικογένεια αυτή έχει supremum. Πράγματι, η $\cup\{U_i : i \in I\}$ είναι ανοικτό σύνολο, $U_j \subseteq \cup\{U_i : i \in I\}$, $\forall j \in I$ και επιπλέον $\cup\{U_i : i \in I\}$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της $\{U_i : i \in I\}$.

Επειδή κάθε υποσύνολο του διατεταγμένου συνόλου $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ έχει supremum, από την Πρόταση 1.10, συμπεραίνουμε ότι θα έχει και infimum. Συνεπώς, το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ έχει την ιδιότητα: *Κάθε υποσύνολό του έχει supremum και infimum.* Λέμε τότε ότι αυτό είναι ένα *πλήρες δικτυωτό (complete lattice).*

Επιπλέον, αυτό το διατεταγμένο σύνολο έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο, που είναι το $\emptyset$ και το X, αντίστοιχα.

Ορισμός 2.1. Ένα *πλήρες δικτυωτό (complete lattice)* είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, στο οποίο κάθε υποσύνολό του έχει supremum και infimum.

Παρατήρηση 2.2. *Όπως έχουμε αναφέρει, σ' ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, αν κάθε υποσύνολό του έχει supremum, θα έχει και infimum και επιπλέον, αν κάθε υποσύνολό του έχει infimum, τότε θα έχει και supremum.*

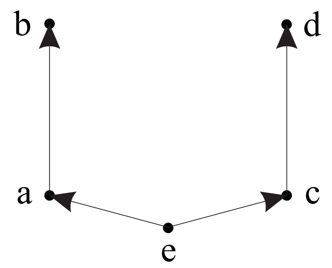
Συνεπώς, στον ορισμό του πλήρους δικτυωτού, αρκεί να υποθέσουμε ότι για κάθε υποσύνολό του υπάρχει πάντα το supremum (ή υπάρχει πάντα το infimum).

Παράδειγμα 2.3. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος, $\mathcal{O}(X)$ (αντίστοιχα $K(X)$) η οικογένεια όλων των ανοικτών (αντίστοιχα, κλειστών) υποσυνόλων του X. Τότε τα $(\mathcal{O}(X),\subseteq)$ και $(K(X),\subseteq)$, είναι πλήρη δικτυωτά.

Ορισμός 2.4. Ένα *ημιδικτυωτό* (semilattice) είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο οποίο κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολό του έχει infimum.

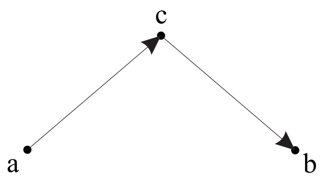
Παράδειγμα 2.5.

(i) Έστω $(L=\{a,b,c,d,e\},\leq)$, ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, όπου $\leq$ η σχέση μερικής διάταξης που προκύπτει από το παρακάτω διάγραμμα.



Το $(L,\leq)$ είναι ημιδικτυωτό.

(ii) Έστω $(L = \{a, b, c\}, \leq)$, ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, όπου $\leq$ η σχέση μερικής διάταξης που προκύπτει από το παρακάτω διάγραμμα.



Το σύνολο $A = \{a, b\}$ δεν έχει infimum, οπότε το $(L, \leq)$ δεν είναι ημιδικτυωτό.

(iii) Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος. Τα $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ και $(K(X), \subseteq)$ είναι ημιδικτυωτά.

Ορισμός 2.6. Ένα *δικτυωτό (lattice)* είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο οποίο κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολό του έχει και supremum και infimum.

Παράδειγμα 2.7. Για τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα του παραδείγματος 2.5 έχουμε ότι:

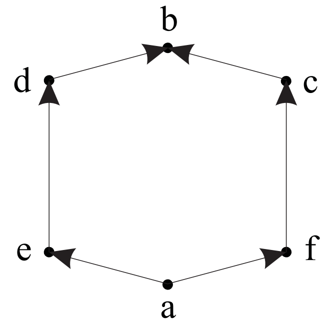
Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (i) δεν είναι δικτυωτό, διότι υπάρχει το $\inf\{b, d\}$, αλλά δεν υπάρχει το $\sup\{b, d\}$.

Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο (ii) δεν είναι δικτυωτό, διότι υπάρχει το $\sup\{a, b\}$, αλλά δεν υπάρχει το $\inf\{a, b\}$.

Τέλος, τα $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ και $(K(X), \subseteq)$ είναι δικτυωτά.

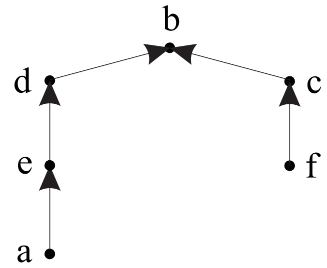
Παράδειγμα 2.8.

(i) Έστω $(L = \{a, b, c, d, e, f\}, \leq)$ ένα διατεταγμένο σύνολο, όπου η μερική διάταξη $\leq$ περιγράφεται απ' το ακόλουθο διάγραμμα.



Το $(L, \leq)$ είναι δικτυωτό.

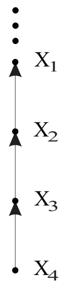
(ii) Έστω $(L = \{a, b, c, d, e, f\}, \leq)$ ένα διατεταγμένο σύνολο, όπου η μερική διάταξη $\leq$ περιγράφεται απ' το ακόλουθο διάγραμμα.



Το $(L, \leq)$ δεν είναι δικτυωτό.

Παρατήρηση 2.9. *Ένα πλήρες δικτυωτό είναι δικτυωτό. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα: Το* $([1, +\infty), \leq)$ *είναι δικτυωτό, αλλά δεν είναι πλήρες δικτυωτό. Πράγματι, αν* $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq [1, +\infty)$*, τότε υπάρχει το* $\inf(A)$ *και το* $\sup(A)$*. Ενώ το* $(2, +\infty)$ *δεν έχει supremum.*

Παράδειγμα 2.10. Έστω $(X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \leq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, όπου η μερική διάταξη $\leq$ περιγράφεται απ' το ακόλουθο διάγραμμα.



Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}, \leq)$, είναι δικτυωτό, διότι κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολό του έχει infimum και supremum. Δεν είναι πλήρες δικτυωτό, διότι δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Παρατήρηση 2.11. *Για να ελέγξουμε αν ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι πλήρες δικτυωτό, πρέπει να εξετάσουμε αν:*

- *έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, που πρέπει υποχρεωτικά να έχει, και*
- *αν κάθε υποσύνολό του έχει supremum ή κάθε υποσύνολό του έχει infimum.*

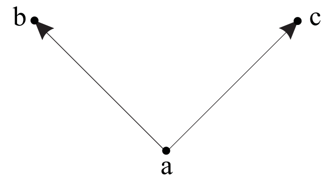
Πρόταση 2.12. *Έστω $(L, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο, έτσι ώστε κάθε κατευθυνόμενο υποσύνολό του, και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του L έχει supremum. Τότε $(L, \leq)$ είναι πλήρες δικτυωτό.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη της Πρότασης βλέπε Πρόταση 1.37. □

Ορισμός 2.13. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(L, \leq)$ καλείται *πλήρως κατευθυνόμενο μερικώς διατεταγμένο σύνολο (Directed Complete Partial Ordered ή εν συντομία DCPO)*, αν κάθε κατευθυνόμενο υποσύνολο του L έχει supremum στο L.

Παρατήρηση 2.14. *Προφανώς κάθε πλήρες δικτυωτό είναι πλήρως κατευθυνόμενο μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Το αντίστροφο, όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα, δεν αληθεύει.*

Παράδειγμα 2.15. Έστω $(X = \{a, b, c\}, \leq)$ ένα σύνολο όπου η μερική διάταξη $\leq$ απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Τα κατευθυνόμενα υποσύνολα του X είναι τα: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, τα οποία έχουν και supremum. Αλλά το $\sup\{a, b, c\}$ δεν υπάρχει. Άρα το $(X, \leq)$ είναι πλήρως κατευθυνόμενο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(DCPO)$, αλλά δεν είναι πλήρες δικτυωτό.

Ορισμός 2.16. Μία *πλήρης Boolean άλγεβρα (Complete Boolean Algebra CBA)* είναι ένα πλήρες δικτυωτό $(L, \leq)$, που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \ \forall x, y, z \in L$ (επιμεριστική).

(ii) Για κάθε $x \in L$ υπάρχει $x' \in L$ τέτοιο ώστε $x \wedge x' = 0_L$ και $x \vee x' = 1_L$, όπου 0_L είναι το ελάχιστο στοιχείο και 1_L το μέγιστο στοιχείο του L. Το x' καλείται *συμπλήρωμα* του x.

Παράδειγμα 2.17. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το σύνολο των υποσυνόλων του X. Το $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ είναι πλήρης Boolean άλγεβρα.

Ορισμός 2.18. Μια *Boolean άλγεβρα (Boolean Algebra)* είναι ένα δικτυωτό $(L, \leq)$, με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο 0_L και 1_L αντίστοιχα, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες (i) και (ii) του προηγούμενου ορισμού.

Παράδειγμα 2.19. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και έστω $\mathcal{O}(X)$ το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X. Τότε το $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ είναι δικτυωτό και πλήρες δικτυωτό, αλλά δεν είναι πλήρης Boolean άλγεβρα και Boolean άλγεβρα, διότι δεν υπάρχει για κάθε ανοικτό σύνολο το συμπλήρωμά του, που να είναι ανοικτό. Δηλαδή δεν ικανοποιείται η 2η ιδιότητα των ορισμών 2.16 και 2.18.

Ορισμός 2.20. Μια *πλήρης Heyting άλγεβρα (Complete Heyting Algebra ή frame)* είναι ένα πλήρες δικτυωτό, που έχει την παρακάτω ιδιότητα:

$$X \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge y : y \in Y\},\ \forall Y \subseteq L$$

ή

$$\inf\{X, \sup Y\} = \sup\{\inf\{x, y\} : y \in Y\},\ \forall Y \subseteq L.$$

Παράδειγμα 2.21. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $\mathcal{O}(X)$ το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων του X. Το $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ είναι μια πλήρης Heyting άλγεβρα.

Πρόταση 2.22. *Έστω $(L, \leq)$ μία Boolean άλγεβρα. Τότε:*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),\ \forall x, y, z \in L.$$

Απόδειξη. Έχουμε: $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] = (*)$

$(x \vee y) \wedge x = \sup\{x, y\} \wedge x = \inf\{\sup\{x, y\}, x\} =$

- $=\inf\{y, x\} = x$, αν $x \leq y$.

- $=\inf\{x,x\} = x$, αν $y \leq x$.

$$
\begin{aligned}
(*) \quad &= x \vee [(x \vee y) \wedge z] = x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] = [x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z) \\
&= \sup\Big\{\Big[\sup\{x, \inf\{x,z\}\}\Big], \inf\{y,z\}\Big\} \\
&= \begin{cases} \sup\Big\{\sup\{x,x\}, \inf\{y,z\}\Big\} & , \text{ αν } x \leq z \\ \sup\Big\{\sup\{x,z\}, \inf\{y,z\}\Big\} & , \text{ αν } x \geq z \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sup\Big\{x, \inf\{y,z\}\Big\} & , \text{ αν } x \leq z \\ \sup\Big\{x, \inf\{y,z\}\Big\} & , \text{ αν } x \geq z \end{cases} \\
&= \sup\Big\{x, \inf\{y,z\}\Big\} = x \vee (y \wedge z).
\end{aligned}
$$

□

Πρόταση 2.23. *Έστω $(L, \leq)$ μία Boolean άλγεβρα. Για κάθε $x \in L$ το συμπληρωματικό στοιχείο $x' \in L$ του x, είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει x'' τέτοιο ώστε $x \wedge x'' = 0_L$ και $x \vee x'' = 1_L$. Έχουμε επίσης ότι $x \wedge x' = 0_L$ και $x \vee x' = 1_L$. Αποδεικνύουμε ότι $x' = x''$.

- $x' = x' \wedge 1_L = x' \wedge (x \vee x'') = (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') = 0_L \vee (x' \wedge x'')$

  $= x' \wedge x'' = \inf\{x', x''\}$.

  Άρα $x' \leq x''$.

- $x' = x' \vee 0_L = x' \vee (x \wedge x'') = (x' \vee x) \wedge (x' \vee x'') = 1_L \wedge (x' \vee x'')$

  $= x' \vee x'' = \sup\{x', x''\}$.

  Άρα $x'' \leq x'$.

Συνεπώς, $x' = x''$. □

Πρόταση 2.24. *Έστω $(L, \leq)$ μία Boolean άλγεβρα. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $(x')' = x, \ \forall x \in L.$

(ii) $(x \vee y)' = x' \wedge y', \ \forall x, y \in L.$

(iii) $(x \wedge y)' = x' \vee y', \ \forall x, y \in L.$

Απόδειξη.

(i) $x \wedge x' = 0_L$ και $x \vee x' = 1_L$. Επειδή το συμπληρωματικό του x' είναι μοναδικό, έχουμε ότι $(x')' = x$.

(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') = 0_L$ και $(x \vee y) \vee (x' \wedge y') = 1_L$. Πράγματι, έχουμε:

- $$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x' \wedge y') &= (x \wedge (x' \wedge y')) \vee (y \wedge (x' \wedge y')) \\ &= ((x \wedge x') \wedge y') \vee ((y \wedge y') \wedge x') \\ &= (0_L \wedge y') \vee (0_L \wedge x') \\ &= 0_L \vee 0_L \\ &= 0_L.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}(x \vee y) \vee (x' \wedge y') &= ((x \vee y) \vee x') \wedge ((x \vee y) \vee y') \\ &= ((x \vee x') \vee y) \wedge (x \vee (y \vee y')) \\ &= (1_L \vee y) \wedge (x \vee 1_L) \\ &= 1_L \wedge 1_L \\ &= 1_L.\end{aligned}$$

(iii) Η απόδειξη είναι ανάλογη του (ii).

□

Ορισμός 2.25. Έστω $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό και έστω ότι $x, y \in L$. Λέμε ότι το x είναι *πολύ κατώτερο* (*way below*) του y, και συμβολικά γράφουμε $x \ll y$, όταν για κάθε κατευθυνόμενο σύνολο $D \subseteq L$ τέτοιο ώστε για $y \leq \sup D$ υπάρχει $d \in D$ με $x \leq d$.

Αν $x \ll x$, τότε λέμε ότι το x είναι *συμπαγές*.

Ορισμός 2.26. Έστω $(X$,τ$)$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X$,τ$)$ καλείται *συμπαγής*, όταν για κάθε ανοικτό κάλυμμα του X, $\{U_i : i \in I\}$, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ του καλύμματος αυτού, τέτοια ώστε

$$X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n}.$$

Ορισμός 2.27. Έστω $(X$,τ$)$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Λέμε ότι το A είναι *συμπαγές* υποσύνολο του X, όταν ο τοπολογικός χώρος $(A$,τ$_A)$, όπου τ$_A = \{U \cap A : U \in$τ$\}$, είναι συμπαγής.

Παρατήρηση 2.28. *Συνήθως, για να αποδείξουμε ότι το A είναι συμπαγές υποσύνολο του $(X$,τ$)$, θεωρούμε μία τυχαία οικογένεια ανοικτών συνόλων του X, $\{U_i : i \in I\}$, τέτοια ώστε $A \subseteq \cup\{U_i : i \in I\}$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ στοιχεία της οικογένειας αυτής, τέτοια ώστε $A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n}$.*

Πρόταση 2.29. *Έστω $(L, \leq)$ πλήρες δικτυωτό. Ισχύουν οι ιδιότητες:*

(i) $x \ll y \Rightarrow x \leq y$.

(ii) $u \leq x \ll y \leq v \Rightarrow u \ll v$.

(iii) $x \ll u \wedge y \ll u \Rightarrow x \vee y \ll u$.

(iv) Αν $x_i \ll y_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, τότε $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \ll y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n$.

(v) $0_L \ll x, \ \forall x \in L$.

Απόδειξη.

(i) Έστω το κατευθυνόμενο σύνολο $D = \{y\}$. Επειδή $x \ll y$ και $y \leq \sup D = \sup\{y\} = y$, υπάρχει $d \in \{y\}$ τέτοιο ώστε $x \leq d$. Προφανώς $d = y$. Άρα $x \leq y$.

(ii) Έστω D ένα κατευθυνόμενο σύνολο τέτοιο ώστε $v \leq \sup D$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $u \leq d$. Τότε $y \leq v \leq \sup D$. Επειδή $x \ll y$, υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \leq d$. Οπότε υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $u \leq x \leq d$, δηλαδή $u \leq d$. Επομένως $u \ll v$.

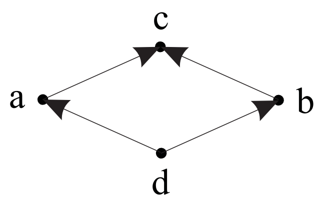
(iii) Έστω D ένα κατευθυνόμενο σύνολο τέτοιο ώστε $u \leq \sup D$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \vee y \leq d$. Επειδή $x \ll u$ και $y \ll u$, υπάρχουν $d_1, d_2 \in D$ τέτοια ώστε $x \leq d_1$ και $y \leq d_2$. Επειδή το D είναι κατευθυνόμενο σύνολο, υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $d_1 \leq d$ και $d_2 \leq d$. Οπότε υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \leq d$ και $y \leq d$. Συνεπώς υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $\sup\{x, y\} = x \vee y \leq d$ και επιπλέον $x \vee y \ll u$.

(iv) Έστω D ένα κατευθυνόμενο σύνολο τέτοιο ώστε $y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n \leq \sup D$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \leq d$. Τότε $y_i \leq y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n \leq \sup D, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Επειδή $x_i \ll y_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ υπάρχουν $d_i \in D$, με $i = 1, 2, \ldots, n$, τέτοια ώστε $x_i \leq d_i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Επειδή το D είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x_i \leq d_i \leq d, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Συνεπώς υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $\sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \leq d$. Επιπλέον $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n \ll y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n$.

(v) Έστω D κατευθυνόμενο σύνολο τέτοιο ώστε $x \leq \sup D$. Προφανώς, όποιο $d \in D$ και να επιλέξουμε, έχουμε ότι $0_L \leq d$. Σημειώνουμε ότι το 0_L υπάρχει, διότι το $(L, \leq)$ είναι πλήρες δικτυωτό.

$\square$

Παράδειγμα 2.30. Έστω $(L = \{a, b, c, d\} \leq)$, με $\leq$ τη μερική διάταξη που περιγράφεται στο ακόλουθο διάγραμμα.



Παρατηρούμε ότι:

(i) $a \not\ll b$, διότι $a \not\leq b$.

(ii) για κάθε D κατευθυνόμενο υποσύνολο του L τέτοιο ώστε $c \leq \sup D$, υπάρχει στοιχείο $z \in D$ με $b \leq z$. Συνεπώς, το b είναι πολύ κατώτερο του c, δηλαδή $b \ll c$.

Πρόταση 2.31. *Έστω ότι $(L, \leq)$ είναι ένα πλήρες δικτυωτό και $X \subseteq L$. Αν $F = \{\sup A : A \subseteq X$ και A πεπερασμένο$\}$, τότε το F είναι κατευθυνόμενο και $\sup F = \sup X$.*

Απόδειξη. Έστω $a = \sup A$ και $b = \sup B$, όπου $A, B \subseteq X$ και A, B πεπερασμένα. Θεωρούμε το σύνολο $A \cup B$. Προφανώς $A \cup B \subseteq X$ και $A \cup B$ πεπερασμένο ως ένωση πεπερασμένων συνόλων. Οπότε $\sup(A \cup B) \in F$ και επιπλέον επειδή $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, έχουμε ότι $\sup A,\ \sup B \leq \sup(A \cup B)$. Δηλαδή $a, b \leq \sup(A \cup B)$ και F κατευθυνόμενο. (Βλέπε Παρατήρηση 1.27).

Έστω $x \in X$. Τότε $x = \sup\{x\} \in F$, αφού $\{x\} \subseteq X$ και $\{x\}$ πεπερασμένο, και συνεπώς $X \subseteq F$. Οπότε και $\sup X \leq \sup F$. Αποδεικνύουμε ότι το $\sup F$, που είναι άνω φράγμα του X, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. Έστω y άνω φράγμα του X. Τότε $x \leq y$, $\forall x \in X$. Επιπλέον $\sup A \leq y$, $A \subseteq X$ και A πεπερασμένο. Συνεπώς το $\sup\{\sup A : A \subseteq X$ και A πεπερασμένο$\} \leq y$ ή $\sup F \leq y$ και άρα $\sup F = \sup X$. □

Πρόταση 2.32. *Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και έστω $\mathcal{O}(X) \equiv \tau$. Για το πλήρες δικτυωτό $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:*

(i) Αν $U, V \in \mathcal{O}(X)$ και υπάρχει συμπαγές υποσύνολο Q του X τέτοιο ώστε $U \subseteq Q \subseteq V$, τότε $U \ll V$.

(ii) Αν ο χώρος (X,τ) είναι τοπικά συμπαγής (δηλαδή για κάθε σημείο $x \in X$ και για κάθε W_x ανοικτή περιοχή του x, υπάρχει οσοδήποτε μικρή συμπαγής περιοχή Q_x, τέτοια ώστε $x \in Q_x \subseteq W_x$), τότε $U \ll V$, αν και μόνον αν υπάρχει σύνολο Q συμπαγές τέτοιο ώστε $U \subseteq Q \subseteq V$.

Απόδειξη.

(i) Έστω D κατευθυνόμενο υποσύνολο του $\mathcal{O}(X)$. Επειδή στο πλήρες δικτυωτό $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ οι ενώσεις είναι τα supremum, το D θα αποτελείται από πεπερασμένες ενώσεις ανοικτών συνόλων.

Υποθέτουμε ότι το D είναι τέτοιο ώστε $V \subseteq \sup D = \cup\{U : U \in D\}$, όπου U είναι ανοικτά σύνολα. Επειδή το Q είναι συμπαγές και $Q \subseteq V \subseteq \sup D = \cup\{U : U \in D\}$, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $U_1, U_2, \ldots, U_n \in D$ τέτοια ώστε $Q \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$.

Προφανώς $sup\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \in D$, αφού το D είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Συνεπώς υπάρχει $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n \in D$ τέτοιο ώστε $U \subseteq Q \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$. Άρα $U \ll V$.

(ii) ($\Leftarrow$) Αποδείχθηκε στο (i).

($\Rightarrow$) Έστω ότι $U \ll V$. Επειδή ο (X,τ) είναι τοπικά συμπαγής, για κάθε $x \in V$ υπάρχει συμπαγές σύνολο Q_x τέτοιο ώστε $x \in Q_x \subseteq V$. Προφανώς $V = \cup\{Int(Q_x) : x \in V\}$, διότι $Int(Q_x) \subseteq Q_x \subseteq V$.

Θεωρούμε το κατευθυνόμενο σύνολο D, που περιέχει το σύνολο $\{Int(Q_x) : x \in V\}$, δηλαδή $\{Int(Q_x) : x \in V\} \subseteq D$ και επιπλέον το D περιέχει όλες τις πεπερασμένες ενώσεις απ' τα $Int(Q_x),\ x \in V$.

Επειδή $U \ll V$ και $V \subseteq supD$, υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $U \subseteq d$. Αλλά $d = Int(Q_{x_1}) \cup Int(Q_{x_2}) \cup \ldots \cup Int(Q_{x_n})$. Οπότε $U \subseteq Int(Q_{x_1}) \cup Int(Q_{x_2}) \cup \ldots \cup Int(Q_{x_n}) \subseteq Q_{x_1} \cup Q_{x_2} \cup \ldots \cup Q_{x_n} \subseteq V$.

Θέτουμε $Q = Q_{x_1} \cup Q_{x_2} \cup \ldots \cup Q_{x_n}$. Το Q είναι συμπαγές ως πεπερασμένη ένωση συμπαγών και $U \subseteq Q \subseteq V$.

□

Πρόταση 2.33. *Έστω $(L, \leq)$ πλήρες δικτυωτό και έστω $x, y \in L$. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) $x \ll y$.

(ii) Η υπόθεση $y \leq \sup X$ και $X \subseteq L$, πάντοτε δίνει ως συμπέρασμα την ύπαρξη ενός πεπερασμένου υποσυνόλου A του X με $x \leq \sup A$.

(iii) Η υπόθεση $y \leq \sup I$, όπου I ιδεώδες του L, πάντοτε δίνει ως συμπέρασμα ότι $x \in I$.

Απόδειξη.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω $x \ll y$ και $X \subseteq L$ τέτοιο ώστε $y \leq \sup X$. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο σύνολο A του X τέτοιο ώστε $x \leq \sup A$. Θεωρούμε το σύνολο $D = \{\sup A : A \subseteq X$ και A πεπερασμένο$\}$. Το D είναι κατευθυνόμενο (βλέπε Πρόταση 2.31) και $\sup D = \sup X$.

Οπότε $y \leq \sup X = \sup D$. Επειδή $x \ll y$, υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \leq d$. Αλλά $d = \sup A$, όπου $A \subseteq X$ και A πεπερασμένο. Συνεπώς το A είναι το ζητούμενο υποσύνολο του X.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω ότι I ένα ιδεώδες του L τέτοιο ώστε $y \leq \sup I$. Από τη (ii), που έχουμε ως υπόθεση, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο A του I τέτοιο ώστε $x \leq \sup A$. Αλλά τότε το $x \in I$, διότι το I είναι ιδεώδες και συνεπώς έχει τις ιδιότητες: $I = \downarrow I$ (I κάτω σύνολο) και I κατευθυνόμενο. Οπότε $\sup A \in I$, (διότι I είναι κατευθυνόμενο αφού είναι ιδεώδες και A πεπερασμένο), και $x \leq \sup A \in I$, δηλαδή $x \in I$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Έστω ότι D κατευθυνόμενο σύνολο τέτοιο ώστε $y \leq \sup D$. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \leq d$. (Δηλαδή $x \ll y$). Έχουμε αποδείξει ότι το $\downarrow D$ είναι κατευθυνόμενο και ότι το $\downarrow (\downarrow D) = \downarrow D$ είναι κάτω σύνολο. Άρα το $\downarrow D$ είναι ιδεώδες. Αλλά $D \subseteq \downarrow D$. Οπότε $y \leq \sup D \leq \sup \downarrow D$. Συνεπώς $x \in \downarrow D$. Άρα υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \leq d$. Άρα $x \ll y$. □

Ορισμός 2.34. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(L, \leq)$ καλείται *συνεχές (continuous)*, αν για κάθε $x \in L$, το σύνολο $\Downarrow x = \{y \in L : y \ll x\}$ είναι κατευθυνόμενο και $x = \sup\{u \in L : u \ll x\} = \sup(\Downarrow x)$.

Πρόταση 2.35. *Έστω $(L, \leq)$ συνεχές μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $x, z \in L$ τέτοια ώστε $x \ll z$ και $z \leq \sup D$ για κάποιο κατευθυνόμενο υποσύνολο D του L. Τότε υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \ll d$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $I = \cup\{\Downarrow d : d \in D\}$. Θα δείξουμε ότι το I είναι ένα ιδεώδες. Δηλαδή ότι (α) το I είναι κατευθυνόμενο και ότι (β) $I = \downarrow I$.

(α) Αποδεικνύουμε ότι το I είναι κατευθυνόμενο (βλέπε Παρατήρηση 1.27). Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in I$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda_0 \in I$ τέτοιο ώστε $\lambda_1 \leq \lambda_0$ και $\lambda_2 \leq \lambda_0$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

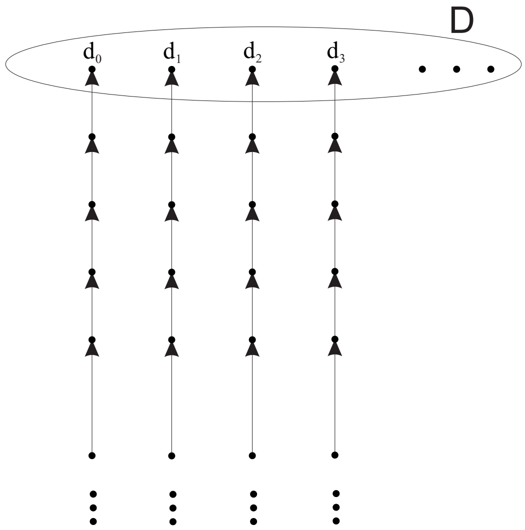
- $\lambda_1, \lambda_2 \in \Downarrow d_0$, για $d_0 \in D$. Επειδή το $\Downarrow d_0$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο, ως στοιχείο συνεχούς μερικώς διατεταγμένου συνόλου, υπάρχει $\lambda_0 \in \Downarrow d_0 \subset I$ τέτοιο ώστε $\lambda_1 \leq \lambda_0$ και $\lambda_2 \leq \lambda_0$.
- $\lambda_1 \in \Downarrow d_1$, για $d_1 \in D$ και $\lambda_2 \in \Downarrow d_2$, για $d_2 \in D$. Τα $\Downarrow d_1$ και $\Downarrow d_2$ είναι κατευθυνόμενα σύνολα, ως στοιχεία συνεχούς μερικώς διατεταγμένου συνόλου. Συνεπώς, υπάρχουν $\lambda_1' \in \Downarrow d_1$ και $\lambda_2' \in \Downarrow d_2$ τέτοια ώστε $\lambda_1 \leq \lambda_1'$ και $\lambda_2 \leq \lambda_2'$. Επειδή όμως $\lambda_1' \in \Downarrow d_1$ και $\lambda_2' \in \Downarrow d_2$, έχουμε ότι $\lambda_1' \ll d_1$ και $\lambda_2' \ll d_2$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.29 (*iv*), έχουμε ότι $\lambda_1' \vee \lambda_2' \ll d_1 \vee d_2$. Επειδή το D είναι κατευθυνόμενο, $d_1 \vee d_2 \in D$ και $\lambda_1' \vee \lambda_2' \in \Downarrow (d_1 \vee d_2) \subset I$. Έχουμε λοιπόν ότι $\lambda_1 \leq \lambda_1' \leq \lambda_1' \vee \lambda_2' \in I$ και $\lambda_2 \leq \lambda_2' \leq \lambda_1' \vee \lambda_2' \in I$.

Οπότε το I είναι κατευθυνόμενο.

(β) Θα δείξουμε τώρα ότι το I είναι κάτω σύνολο, δηλαδή ότι $I = \downarrow I$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\downarrow (\Downarrow d) = \Downarrow d$, $\forall d \in D$.

Προφανώς $\Downarrow d \subseteq \downarrow (\Downarrow d)$. Μένει να δείξουμε ότι $\downarrow (\Downarrow d) \subseteq \Downarrow d$. Πράγματι, έστω $y \in \downarrow (\Downarrow d)$. Τότε υπάρχει $u \in \Downarrow d$ τέτοιο ώστε $y \leq u$. Επειδή όμως

$u \in \Downarrow d$, έπεται ότι $u \ll d$. Οπότε $y \leq u \ll d \leq d$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.29 (ii), έχουμε ότι $y \ll d$. Δηλαδή $y \in \Downarrow d$. Επομένως $\downarrow (\Downarrow d) \subseteq \Downarrow d$, που σημαίνει ότι $\downarrow (\Downarrow d) = \Downarrow d, \forall d \in D$. Άρα το I είναι κάτω σύνολο και συνεπώς ιδεώδες.



Θα δείξουμε τώρα ότι $\sup I = \sup D$.

Ισχύει ότι $d \leq \sup D$, $\forall d \in D$. Συνεπώς $\sup(\Downarrow d) \leq \sup D$, $\forall d \in D$. Δηλαδή $\sup I \leq \sup D$. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι $\sup I \geq \sup D$.

Έχουμε ότι $\Downarrow d \subseteq I$, $\forall d \in D$. Απ' αυτό έπεται ότι $\sup(\Downarrow d) \leq \sup I$, $\forall d \in D$. Συνεπώς $d \leq \sup I$, $\forall d \in D$. Άρα $\sup D \leq \sup I$. Επομένως $\sup I = \sup D$.

Εξ' υποθέσεως, έχουμε ότι $x \ll z$ και $z \leq \sup D = \sup I$, όπου I ιδεώδες και $x, z \in L$. Έχουμε λοιπόν ότι $(x \leq) x \ll z \leq \sup I$, που σημαίνει ότι $x \leq \sup I$. Συνεπώς $x \in I$. Οπότε, από κατασκευής του I, υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \in \Downarrow d$ και επιπλέον $x \ll d$. $\square$

Πρόταση 2.36. *Έστω $(L, \leq)$ ένα συνεχές μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $x, z \in L$ τέτοια ώστε $x \ll z$. Τότε υπάρχει $y \in L$ τέτοιο ώστε $x \ll y \ll z$.*

Απόδειξη. Επειδή $(L, \leq)$ είναι συνεχές μερικώς διατεταγμένο σύνολο, έχουμε ότι $z = \sup(\Downarrow z) = \sup\{y \in L : y \ll z\}$, και $\Downarrow z$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Θέτουμε $D = \Downarrow z$. Από την προηγούμενη Πρόταση (2.35), επειδή $x, z \in L$ με $x \ll z$ και προφανώς $z \leq \sup(\Downarrow z) = \sup D$, όπου $D = \Downarrow z$ κατευθυνόμενο, υπάρχει $y \in \Downarrow z (= D)$ τέτοιο ώστε $x \ll y$.
Επειδή όμως $y \in \Downarrow z$, έπεται ότι $y \ll z$. Συνεπώς $x \ll y \ll z$. □

Κεφάλαιο 3

Scott Τοπολογία

Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $\mathcal{O}(X) = \tau$. Στο σύνολο $\mathcal{O}(X)$ ορίζουμε μια νέα τοπολογία η οποία καλείται *Scott τοπολογία*.

Ορισμός 3.1. Ένα υποσύνολο $\mathbb{H}$ του $\mathcal{O}(X)$, δηλαδή $\mathbb{H} = \{U, V, W, \ldots\}$ όπου $U, V, W, \ldots \in \tau = \mathcal{O}(X)$, καλείται *Scott ανοικτό*, αν έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

(i) Αν $U \in \mathbb{H},\ V \in \mathcal{O}(X)$ και $U \subseteq V$, τότε $V \subseteq \mathbb{H}$.

(ii) Αν $\{U_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, δηλαδή $U_i \in \mathcal{O}(X)$, $\forall i \in I$, τέτοια ώστε $\cup\{U_i : i \in I\} \in \mathbb{H}$, τότε υπάρχουν $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ τέτοια ώστε $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$.

Το συμπλήρωμα ενός Scott ανοικτού συνόλου καλείται *Scott κλειστό.*

Συμβολίζουμε με τ_{sc} την οικογένεια όλων των υποσυνόλων $\mathbb{H}$ του $\mathcal{O}(X)$.

Παρατήρηση 3.2. *Προφανώς:*

(i) $\emptyset, \mathcal{O}(X) \in \tau_{sc}$.

(ii) Αν $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2 \in \tau_{sc}$*, τότε* $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 \in \tau_{sc}$.

(iii) Αν $\{\mathbb{H}_i : i \in I\}$ *τέτοια ώστε* $\mathbb{H}_i \in \tau_{sc}$*, τότε* $\cup\{\mathbb{H}_i : i \in I\} \in \tau_{sc}$.

Δηλαδή ο $(\mathcal{O}(X), \tau_{sc})$ είναι τοπολογικός χώρος.

Πρόταση 3.3. *Έστω* $(L, \leq)$ *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω* $\mathbb{H} \subseteq L$ *τέτοιο ώστε:*

(1) $\mathbb{H} = \uparrow \mathbb{H}$*, δηλαδή το* $\mathbb{H}$ *είναι άνω σύνολο.*

(2) Για κάθε κατευθυνόμενο σύνολο D *του* L *τέτοιο ώστε* $\sup D \in \mathbb{H}$*, έχουμε ότι* $D \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$*. (Δηλαδή υπάρχει ένα* $d \in D$ *με* $d \in \mathbb{H}$*).*

Έστω τ_{sc} *η οικογένεια όλων των υποσυνόλων* $\mathbb{H}$ *του* L*, που έχει τις παραπάνω ιδιότητες (1) και (2). Τότε το ζεύγος* (L, τ_{sc}) *είναι τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι το (L, τ_{sc}) είναι τοπολογικός χώρος, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι τρεις ιδιότητες των τοπολογικών χώρων.

(i) Προφανώς $\emptyset, L \in \tau_{sc}$.

(ii)
- Έστω $\mathbb{H}_1,\ \mathbb{H}_2 \in \tau_{sc}$. Αποδεικνύουμε ότι $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 \in \tau_{sc}$.

$$\begin{aligned}\uparrow (\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2) &= \{y \in L : (\exists x \in \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2)(x \leq y)\} \\ &= \{y \in L : (\exists x)(x \in \mathbb{H}_1 \wedge x \in \mathbb{H}_2)(x \leq y)\} \\ &= \{y \in L : (\exists x \in \mathbb{H}_1)(x \leq y)\} \cap \{y \in L : (\exists x \in \mathbb{H}_2)(x \leq y)\} \\ &= \uparrow \mathbb{H}_1 \cap \uparrow \mathbb{H}_2.\end{aligned}$$

- Έστω ότι D είναι ένα κατευθυνόμενο υποσύνολο του L, τέτοιο ώστε $\sup D \in \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$. Τότε $\sup D \in \mathbb{H}_1$ και $\sup D \in \mathbb{H}_2$.

  Επειδή $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2 \in \tau_{sc}$ ισχύει ότι $D \cap \mathbb{H}_1 \neq \emptyset$ και $D \cap \mathbb{H}_2 \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχουν $d_1, d_2 \in D$ τέτοια ώστε $d_1 \in \mathbb{H}_1$ και $d_2 \in \mathbb{H}_2$.

Εφ' όσον το D είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $d_1 \leq d$ και $d_2 \leq d$.

Αφού $d_1 \leq d$, $d_1 \in \mathbb{H}_1$ και $\mathbb{H}_1 = \uparrow \mathbb{H}_1$, έχουμε ότι $d \in \mathbb{H}_1$.

Ομοίως, επειδή $d_2 \leq d$, $d_2 \in \mathbb{H}_2$ και $\mathbb{H}_2 = \uparrow \mathbb{H}_2$, έχουμε ότι $d \in \mathbb{H}_2$.

Άρα $d \in \mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2$. Συνεπώς $D \cap (\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2) \neq \emptyset$ και $\mathbb{H}_1 \cap \mathbb{H}_2 \in \tau_{sc}$.

(iii) • Έστω $\mathbb{H}_i \in \tau_{sc}$, $i \in I$. Αποδεικνύουμε ότι $\cup\{\mathbb{H}_i : i \in I\} \in \tau_{sc}$.

Επειδή $\mathbb{H}_i \in \tau_{sc}$, $i \in I$, έχουμε ότι $\uparrow \mathbb{H}_i = \mathbb{H}_i$, $\forall i \in I$.

$$\begin{aligned}\uparrow (\cup\{\mathbb{H}_i : i \in I\}) &= \{y \in L : (\exists x \in \cup\{\mathbb{H}_i : i \in I\})(x \leq y)\}\\ &= \{y \in L : (\exists x \in \mathbb{H}_i : i \in I)(x \leq y)\}\\ &= \cup\{\uparrow \mathbb{H}_i : i \in I\}\\ &= \cup\{\mathbb{H}_i : i \in I\}.\end{aligned}$$

• Έστω D κατευθυνόμενο υποσύνολο του L τέτοιο ώστε $\sup D \in \cup\{\mathbb{H}_i : i \in I\}$. Τότε υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $\sup D \in \mathbb{H}_i$. Επειδή $\mathbb{H}_i \in \tau_{sc}$, έχουμε ότι $\mathbb{H}_i \cap D \neq \emptyset$. Οπότε $(\cup\{\mathbb{H}_i : i \in I\}) \cap D \neq \emptyset$. Άρα $\cup\{\mathbb{H}_i : i \in I\} \in \tau_{sc}$.

Συνεπώς ο (L,τ_{sc}) είναι ένας τοπολογικός χώρος. □

Ορισμός 3.4. Η τοπολογία τ_{sc} επί του L καλείται *Scott τοπολογία*. Σ' ότι ακολουθεί, πολλές φορές για την τοπολογία τ_{sc} επί του L, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\tau_{sc}(L)$.

Παρατήρηση 3.5. *Για τον ορισμό του Scott ανοικτού συνόλου είδαμε τους παρακάτω ορισμούς (A) και (B).*

Ορισμός (A). Έστω ότι $(L, \leq)$ ένα διατεταγμένο σύνολο και $\mathbb{H}$ ένα υποσύνολο του L. Το $\mathbb{H}$ καλείται *Scott ανοικτό*, όταν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) $\mathbb{H} = \uparrow \mathbb{H}$, ($\mathbb{H}$ είναι άνω σύνολο, με $\uparrow \mathbb{H} = \{y \in L : (\exists x \in \mathbb{H})(x \leq y)\}$).

(2) Για κάθε κατευθυνόμενο σύνολο D του L τέτοιο ώστε $\sup D \in \mathbb{H}$, έχουμε ότι $D \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει ένα $d \in D$ με $d \in \mathbb{H}$.

Ορισμός (B). Έστω ότι (X,τ) είναι ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\mathcal{O}(X) \equiv \tau$. Το $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{O}(X) \equiv \tau$ καλείται *Scott ανοικτό*, όταν ισχύουν οι ιδιότητες:

(1) Αν $U \in \mathcal{O}(X)$, $V \in \mathbb{H}$ και $V \subseteq U$, τότε $U \in \mathbb{H}$.

(2) Αν $\{U_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών συνόλων του X τέτοια ώστε $\cup\{U_i : i \in I\} \in \mathbb{H}$, τότε υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ αυτής (της οικογένειας), τέτοια ώστε $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$.

Αποδεικνύουμε ότι οι ορισμοί (A) και (B) είναι ισοδύναμοι στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$.

Απόδειξη.

α) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η ιδιότητα (1) του ορισμού (A) είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα (1) του ορισμού (B).

Αν $L \equiv \mathcal{O}(X)$ και $\leq \equiv \subseteq$, τότε η ιδιότητα (1) του (B) ουσιαστικά σημαίνει ότι το σύνολο $\mathbb{H}$ είναι άνω σύνολο, δηλαδή $\mathbb{H} = \uparrow \mathbb{H}$. Συνεπώς είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα (1) του ορισμού (A).

β) Αποδεικνύουμε τώρα ότι η ιδιότητα (2) του ορισμού (A) είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα (2) του ορισμού (B).

$((\mathbf{A})(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{B})(\mathbf{2}))$ Έστω ότι για κάθε κατευθυνόμενο σύνολο D του $\mathcal{O}(X)$ τέτοιο ώστε $\sup D \in \mathbb{H}$, έχουμε ότι $D \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι αν $\{U_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών συνόλων του X τέτοια ώστε $\cup\{U_i : i \in I\} \in \mathbb{H}$, τότε υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ της οικογένειας αυτής, τέτοια ώστε $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$.

Θεωρούμε το κατευθυνόμενο σύνολο D που αποτελείται από τα στοιχεία της οικογένειας $\{U_i : i \in I\}$ και όλες τις πεπερασμένες ενώσεις αυτών. Προφανώς $\sup D = \cup\{U_i : i \in I\} \in \mathbb{H}$. Οπότε εξ υποθέσεως, $D \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$. Συνεπώς υπάρχει $d \in D \cap \mathbb{H}$.

Επειδή $d \in D$ και το D αποτελείται απ' τα στοιχεία της οικογένειας $\{U_i : i \in I\}$ και τις πεπερασμένες ενώσεις αυτών, υπάρχουν $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ της οικογένειας αυτής, τέτοια ώστε $d = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n}$.

Επιπλέον, αφού το $d \in \mathbb{H}$, έχουμε $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$.

$((\mathbf{B})(\mathbf{2}) \Rightarrow (\mathbf{A})(\mathbf{2}))$ Έστω ότι για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{U_i : i \in I\}$ του X, τέτοια ώστε $\cup\{U_i : i \in I\} \in \mathbb{H}$, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ στοιχεία της οικογένειας αυτής, τέτοια ώστε $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$. Θα δείξουμε ότι, αν D είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο του $\mathcal{O}(X)$ τέτοιο ώστε $\sup D \in \mathbb{H}$, τότε $D \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$.

Έστω D το κατευθυνόμενο σύνολο που αποτελείται απ' τα στοιχεία της οικογένειας $\{U_i : i \in I\}$ και όλες τις πεπερασμένες ενώσεις αυτών. Για την οικογένεια ανοικτών συνόλων D, έχουμε ότι $\sup D = \cup\{U : U \in D\} \in \mathbb{H}$. Οπότε εξ' υποθέσεως υπάρχουν $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ που ανήκουν στο D τέτοια ώστε $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$.

Επειδή το D είναι κατευθυνόμενο υπάρχει $W \in D$ τέτοιο ώστε $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n} \subseteq W$. Οπότε $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \subseteq W$. Αφού $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \subseteq W$, $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$ και $W \in \mathcal{O}(X)$, τότε, εξ' υποθέσεως, έχουμε ότι $W \in \mathbb{H}$.

Συνεπώς $W \in D \cap \mathbb{H}$ και άρα $D \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$.

□

Παράδειγμα 3.6.

1. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το $\mathbb{H} = \{U \in \mathcal{O}(X) : K \subseteq U\}$ είναι Scott ανοικτό.

Πράγματι:

(α) Έστω $U \in \mathcal{O}(X)$, $V \in \mathbb{H}$ και $V \subseteq U$. Τότε $K \subseteq V \subseteq U$. Οπότε $U \in \mathbb{H}$.

(β) Έστω $\{U_i : i \in I\}$ μια οικογένεια ανοικτών συνόλων τέτοια ώστε $\cup\{U_i : i \in I\} \in \mathbb{H}$. Τότε $K \subseteq \cup\{U_i : i \in I\}$. Επειδή το K είναι συμπαγές σύνολο, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ της οικογένειας $\{U_i : i \in I\}$ τέτοια ώστε $K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$. Οπότε $U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} \in \mathbb{H}$.

Συνεπώς το $\mathbb{H}$ είναι Scott ανοικτό.

2. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $\mathbb{H} \subseteq \mathcal{O}(X)$. Τότε προφανώς το $\mathcal{O}(X)$ είναι Scott ανοικτό.

3. Έστω $(X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\})$.

(α) Τα σύνολα $\mathbb{H} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\}$ και $\mathbb{H}_1 = \{\emptyset, X\{a,b\}\}$ είναι προφανώς Scott ανοικτά.

(β) Το σύνολο $\mathbb{H}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ δεν είναι Scott ανοικτό, διότι $\{a\} \in \mathbb{H}_2$, $\{a,b\} \in \mathcal{O}(X)$ και $\{a\} \subseteq \{a,b\}$, αλλά $\{a,b\} \notin \mathbb{H}_2$.

4. Έστω $(L, \leq)$ ένα συνεχές πλήρες δικτυωτό και $x \in L$. Τότε το σύνολο $\Uparrow x = \{y \in L : x \ll y\}$ είναι Scott ανοικτό. Πράγματι:

(α) Προφανώς ισχύει ότι $\Uparrow x \subseteq \uparrow (\Uparrow x)$. Θα δείξουμε ότι $\uparrow (\Uparrow x) \subseteq \Uparrow x$. Έστω $z \in \uparrow (\Uparrow x)$. Τότε υπάρχει $y \in \Uparrow x$ τέτοιο ώστε $y \leq z$. Επειδή $y \in \Uparrow x$, έχουμε ότι $x \ll y$. Άρα $x \ll y \leq z$. Οπότε $x \ll z$ (βλέπε Πρόταση 2.29 (ii)). Συνεπώς, αφού $x \ll z$ έχουμε ότι $z \in \Uparrow x$. Άρα $\Uparrow x = \uparrow (\Uparrow x)$, δηλαδή το $\Uparrow x$ είναι άνω σύνολο.

(β) Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε κατευθυνόμενο σύνολο D τέτοιο ώστε $\sup D \in \Uparrow x$ ισχύει ότι $D \cap \Uparrow x \neq \emptyset$. Έστω D κατευθυνόμενο σύνολο τέτοιο ώστε $\sup D \in \Uparrow x$. Τότε υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $x \ll d$. Συνεπώς, εξ' ορισμού του $\Uparrow x$, έχουμε ότι $d \in \Uparrow x$. Άρα $D \cap \Uparrow x \neq \emptyset$.

Ορισμός 3.7. Έστω L ένα DCPO και $S \subseteq L$. Λέμε ότι το S είναι closed under directed sups αν και μόνον αν για κάθε μη κενό κατευθυνόμενο υποσύνολο D του L τέτοιο ώστε $D \subseteq S$, ισχύει ότι $\sup D \in S$.

Πρόταση 3.8. *Σε κάθε DCPO L ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) Ένα σύνολο είναι Scott κλειστό αν και μόνον αν είναι κάτω σύνολο και closed under directed sups.

(ii) $\downarrow x = \overline{\{x\}}$ *(η κλειστή θήκη του* $\{x\}$ *ως προς το σύνολο όλων των Scott ανοικτών υποσυνόλων του L),* $\forall x \in L$.

(iii) *Ο* (L, τ_{sc}) *είναι* T_0 *- χώρος.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι προφανής. □

Παράδειγμα 3.9. Έστω L ένα $DCPO$. Ισχύουν τα εξής.

(1) Αν το L είναι πεπερασμένο, τότε τα Scott ανοικτά σύνολα είναι μόνο τα άνω σύνολα.

(2) Για την αλυσίδα $2 = \{0, 1\}$, έχουμε ότι $\tau_{sc} = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Ο χώρος 2 με την τοπολογία αυτή, είναι γνωστός ως χώρος του Sierpinski.

Πρόταση 3.10. *Έστω L συνεχές DCPO. Τότε:*

(i) *τα σύνολα* $\Uparrow u,\ u \in L$ *είναι Scott ανοικτά.*

(ii) *για κάθε σημείο* $x \in L$*, τα σύνολα της μορφής* $\Uparrow u,\ u \ll x$*, αποτελούν μια βάση για το* L*, στο σημείο* x.

(iii) $Int(\uparrow u) = \Uparrow u,\ u \in L$.

(iv) *για κάθε υποσύνολο A του L,* $Int(A) = \cup\{\Uparrow u : \Uparrow u \subseteq A\}$.

(v) *ένα άνω σύνολο U του L, είναι Scott ανοικτό αν και μόνον αν για κάθε* $x \in U$ *υπάρχει ένα στοιχείο u του U τέτοιο ώστε* $u \ll x$.

Απόδειξη.

(*i*) Έστω $u \in L$. Τότε το σύνολο $\Uparrow u$ είναι ένα άνω σύνολο[1].

Έστω τώρα, D ένα κατευθυνόμενο σύνολο με $\sup D \in \Uparrow u$. Θα δείξουμε ότι $D \cap \Uparrow u \neq \emptyset$.

Αφού $\sup D \in \Uparrow u$, έπεται ότι $u \ll \sup D$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.29 (i) έχουμε ότι $u \leq \sup D$. Επειδή λοιπόν $u \ll \sup D,\ u \leq \sup D$, υπάρχει $d \in D$ τέτοιο ώστε $u \ll d$. Οπότε $d \in D \cap \Uparrow u$ και $D \cap \Uparrow u \neq \emptyset$. Συνεπώς το σύνολο $\Uparrow u,\ u \in L$, είναι Scott ανοικτό.

(*ii*) Έστω $x \in L$, U ένα Scott ανοικτό σύνολο και $x \in U$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $u \in L$ τέτοιο ώστε $x \in \Uparrow u \subseteq U$.

Επειδή το L είναι συνεχές (βλέπε Ορισμό 2.34), έχουμε ότι

$$x = \sup \Downarrow x = \sup\{\nu \in L : \nu \ll x\} \in U.$$

Εφ' όσον το σύνολο $\Downarrow x = \{\nu \in L : \nu \ll x\}$ είναι κατευθυνόμενο (διότι το L είναι συνεχές) και το U είναι Scott ανοικτό, έπεται ότι

$$\{\nu \in L : \nu \ll x\} \cap U \neq \emptyset.$$

Έστω $u \in \{\nu \in L : \nu \ll x\} \cap U$. Αποδεικνύουμε ότι το u είναι το απαιτούμενο στοιχείο του L.

Απ' τη σχέση $u \ll x$ έπεται ότι $x \in \Uparrow u$. Έστω $y \in \Uparrow u$. Τότε $u \ll y$ και άρα (από Πρόταση 2.29 (i)) $u \leq y$. Επειδή το U είναι Scott ανοικτό, θα είναι άνω σύνολο, δηλαδή $U = \uparrow U = \{y \in L : \exists x \in U \text{ με } x \leq y\}$.

[1] Βλέπε Πρόταση 2.29 (i): $u \ll x \Rightarrow u \leq x$ ή $x \in \Uparrow u \Rightarrow x \in \uparrow u$, όπου το $\uparrow u$ είναι άνω σύνολο.

Έχουμε ότι $u \in U = \uparrow U$. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει $x \in U$ τέτοιο ώστε $x \leq u$. Ισχύει όμως ότι $u \leq y$. Άρα $x \leq y$, και συνεπώς υπάρχει $x \in U$ τέτοιο ώστε $x (\leq u) \leq y$. Δηλαδή $y \in U$.

Επομένως $\Uparrow u \subseteq U$.

(iii) Έστω $u \in L$. Επειδή $\Uparrow u \subseteq \uparrow u$ (λόγω της Πρότασης 2.29 (i)) και το $\Uparrow u$ είναι Scott ανοικτό σύνολο, έχουμε ότι

$$\Uparrow u = Int(\Uparrow u) \subseteq Int(\uparrow u).$$

Δηλαδή $\Uparrow u \subseteq Int(\uparrow u)$. Αποδεικνύουμε τώρα ότι $Int(\uparrow u) \subseteq \Uparrow u$.

Έστω $x \in Int(\uparrow u)$. Θα δείξουμε ότι $x \in \Uparrow u$, δηλαδή ότι $u \ll x$. Υπάρχει ένα στοιχείο $y \in \uparrow u$ τέτοιο ώστε $x \in \Uparrow y \subseteq \uparrow u$. Τότε $u \leq y \ll x$ και συνεπώς $u \ll x$.

(iv) Αυτό έπεται άμεσα από το (ii), διότι τα σύνολα της μορφής $\Uparrow u$, $u \in L$ αποτελούν βάση για τη Scott τοπολογία.

Οπότε το εσωτερικό του χώρου $A \subseteq L$, $(Int(A))$, μπορεί να γραφεί ως ένωση στοιχείων της βάσης αυτής.

(v) Έστω U ένα Scott ανοικτό σύνολο και $x \in U$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $u \in U$ τέτοιο ώστε $u \ll x$.

Επειδή το $\Downarrow x$ είναι κατευθυνόμενο και $x = \sup(\Downarrow x) \in U$, καθώς το L είναι συνεχές (βλέπε Ορισμό 2.34), έχουμε ότι $U \cap \Downarrow x \neq \emptyset$. Άρα υπάρχει $u \in U \cap \Downarrow x$. Δηλαδή $u \in U$ και $u \in \Downarrow x$, που σημαίνει ότι $u \ll x$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in U$, υπάρχει ένα στοιχείο u_x του U, τέτοιο ώστε $u_x \ll x$. Το σύνολο U είναι η ένωση Scott ανοικτών συνόλων $\Uparrow u_x$, $x \in U$. Άρα το U είναι Scott ανοικτό, ως ένωση Scott ανοικτών συνόλων, αφού τα Scott ανοικτά σύνολα αποτελούν μία τοπολογία (τη Scott τοπολογία) και άρα η ένωση Scott ανοικτών συνόλων δίνει Scott ανοικτό σύνολο. $\square$

Πρόταση 3.11. *Έστω L ένα συνεχές DCPO. Τότε ο χώρος (L,τ_{sc}) είναι τοπικά συμπαγής. Συνεπώς, αν στο L υπάρχει το ελάχιστο στοιχείο, τότε ο (L,τ_{sc}) είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $x \in U \in\tau_{sc}$. Από την Πρόταση 3.10 (2), υπάρχει ένα $y \in U$ τέτοιο ώστε $x \in\Uparrow y \subseteq\uparrow y \subseteq U$. Επειδή το $\uparrow y$ είναι συμπαγές ως προς οποιαδήποτε τοπολογία της οποίας τα ανοικτά σύνολα είναι άνω σύνολα, ο χώρος (L,τ_{sc}) είναι τοπικά συμπαγής.

Υποθέτουμε τώρα, ότι στο L υπάρχει το ελάχιστο στοιχείο 0_L. Επειδή $L =\uparrow 0_L$[1], ο χώρος (L,τ_{sc}) είναι συμπαγής. $\square$

Παρατήρηση 3.12. *Έστω S και T δύο DCPO. Αποδεικνύεται ότι για κάθε απεικόνιση f από το χώρο $(S,\tau_{sc}(S))$ στο χώρο $(T,\tau_{sc}(T))$, οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(1) η fείναι συνεχής ως προς τη Scott τοπολογία, δηλαδή $f^{-1}(U) \in \tau_{sc}(S)$, για κάθε $U \in \tau_{sc}(T)$.

(2) η f διατηρεί τα supremum των διατεταγμένων συνόλων, δηλαδή η f διατηρεί τη διάταξη και $f(\sup D) = \sup f(D)$, για όλα τα κατευθυνόμενα υποσύνολα D του S.

Επιπλέον, αν τα S και T είναι συνεχή DCPO, τότε οι σχέσεις (1) και (2) είναι ισοδύναμες με την ακόλουθη συνθήκη:

[1] $\uparrow 0_L = \{y \in L : 0_L \leq y\} = L$.

(3) $f(x) = \sup\{f(\omega) : \omega \ll x\}$, *για κάθε* $x \in S$.

Ορισμός 3.13. Μια συνάρτηση $f : S \to T$ μεταξύ DCPO είναι *Scott συνεχής* αν και μόνον αν ικανοποιεί τις ισοδύναμες σχέσεις της προηγούμενης πρότασης, (1), (2) ή (3).

Παρατήρηση 3.14. *Έστω* R, S *και* T *DCPO. Αποδεικνύεται ότι μια συνάρτηση* $f : R \times S \to T$ *είναι Scott συνεχής στο καρτεσιανό γινόμενο* $R \times S$ *αν και μόνον αν η* f *είναι Scott συνεχής σε κάθε μεταβλητή χωριστά, δηλαδή:*

(α) για όλα τα $s \in S$, *η συνάρτηση* $r \mapsto f(r, s) : R \to T$ *είναι Scott συνεχής.*

(β) για όλα τα $r \in R$, *η συνάρτηση* $s \mapsto f(r, s) : S \to T$ *είναι Scott συνεχής.*

Τοπολογίες σε Χώρους Συναρτήσεων

Ορισμός 3.15. Έστω Y και Z τοπολογικοί χώροι και έστω $C(Y, Z)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : Y \to Z$.

1. Με $\mathbf{t_p}$ ορίζουμε τη σημειακή - ανοικτή (point - open) τοπολογία στο $C(Y, Z)$.
Η τοπολογία αυτή έχει ως υποβάση της τα υποσύνολα
$(\{y\}, U) = \{f \in C(Y, Z) : f(y) \in U\}$, του $C(Y, Z)$, όπου $y \in Y$ και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

2. Με $\mathbf{t_{co}}$ ορίζουμε τη συμπαγή - ανοικτή (compact - open) τοπολογία στο $C(Y, Z)$.
Η τοπολογία αυτή έχει ως υποβάση της τα υποσύνολα
$(K, U) = \{f \in C(Y, Z) : f(K) \subseteq U\}$, του $C(Y, Z)$, όπου K συμπαγές

υποσύνολο του Y και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

Προφανώς ισχύει ότι $t_p \subseteq t_{co}$.

3. Με $\mathbf{t_{is}}$ ορίζουμε την *Isbell* τοπολογία στο $C(Y,Z)$.

Η τοπολογία αυτή έχει ως υποβάση της τα υποσύνολα $(\mathbb{H},U) = \{f \in C(Y,Z) : f^{-1}(U) \in \mathbb{H}\}$, του $C(Y,Z)$, όπου το $\mathbb{H}$ είναι Scott ανοικτό υποσύνολο του Y και $U \in \mathcal{O}(Z)$.

Επειδή τα σύνολα $\mathbb{H} = \{U \in \mathcal{O}(Y) : K \subseteq U, K$ συμπαγές υποσύνολο του $U\}$ είναι Scott ανοικτά, έχουμε ότι $t_{co} \subseteq t_{is}$.

Συνεπώς, από τα παραπάνω, έχουμε ότι $t_p \subseteq t_{co} \subseteq t_{is}$.

Προβληματισμοί με τη Scott τοπολογία στο C(Y,Z)

1. Έστω Y τοπολογικός χώρος και $(L, \leq)$ ένα πλήρες δικτυωτό. Θεωρούμε τη Scott τοπολογία τ_{sc} επί του L. Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο $C(Y,(L,\tau_{sc}))$. Ορίζουμε μια διάταξη $\leq_1$ στο $C(Y,L)$ ως εξής:

   Αν $f, g \in C(Y,(L,\tau_{sc}))$, τότε $f \leq_1 g \Leftrightarrow f(y) \leq g(y),\ \forall y \in Y$.

   Αν στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(C(Y,L), \leq_1)$ θεωρήσει κανείς τη Scott τοπολογία, τότε έχει ενδιαφέρον να δει κανείς υπό ποιές προϋποθέσεις αυτή συμπίπτει με τις $t_p,\ t_{co}$ και t_{is} τοπολογίες στο $C(Y,(L,\tau_{sc}))$.

   Το θέμα αυτό έχει μελετηθεί και μελετάται.

2. Έστω Y και Z τοπολογικοί χώροι. Αν Z regular, τότε η t_{is} στο $C(Y,Z)$ είναι regular; Το πρόβλημα αυτό είναι ανοικτό μέχρι σήμερα.

Κεφάλαιο 4

Lawson Τοπολογία

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται η lower και η Lawson τοπολογία σ' ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

Ορισμός 4.1. Έστω L ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Την τοπολογία που παράγεται από τα συμπληρώματα $L\setminus \uparrow x,\ x \in L$ καλούμε *κάτω τοπολογία του L (lower topology)* και τη συμβολίζουμε με $\omega(L)$.

Ορισμός 4.2. Έστω L ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Την τοπολογία που παράγεται από τα συμπληρώματα $L\setminus \downarrow x,\ x \in L$ καλούμε *άνω τοπολογία του L (upper topology)* και τη συμβολίζουμε με $u(L)$.
Προφανώς, $u(L) \subseteq \tau_{sc}$.

Παρατήρηση 4.3.

(1) *Αν $(S, \leq_S)$ και $(T, \leq_T)$ είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα, τότε το $(S \times T, \leq)$, όπου $\leq$ η διμελής σχέση: $x \leq y \Leftrightarrow x_1 \leq_S y_1$ και $x_2 \leq_T y_2$, με $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in S \times T$, είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο.*

(2) *Αν S και T είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα, τότε $\omega(S \times T)$ είναι η τοπολογία γινόμενο των τοπολογιών $\omega(S)$ και $\omega(T)$.*

(3) *Αν L είναι ένα ημιδικτυωτό, τότε $(L, \omega(L))$ είναι ένα τοπολογικό ημιδικτυωτό, δηλαδή η απεικόνιση infimum*

$$(x, y) \mapsto x \wedge y : (L, \omega(L)) \times (L, \omega(L)) \to (L, \omega(L)),$$

είναι συνεχής.

Ορισμός 4.4. Έστω L ένα DCPO. Η $\tau_\lambda = \tau_{sc}(L) \vee \omega(L)$ καλείται *Lawson τοπολογία* στο L.

Παρατήρηση 4.5.

(1) *Η Lawson τοπολογία έχει ως υποβάση της τα σύνολα U, με $U \in \tau_{sc}(L)$, μαζί με τα σύνολα $L \setminus \uparrow x$, για $x \in L$. Τα σύνολα $U \setminus \uparrow F$, όπου $U \in \tau_{sc}(L)$, και F, είναι πεπερασμένα στο L, σχηματίζουν μια βάση για τη Lawson τοπολογία $\tau_\lambda(L)$. Προφανώς,*

$$\tau_{sc}(L) \subseteq \tau_\lambda(L) \text{ και } \omega(L) \subseteq \tau_\lambda(L).$$

(2) *Έστω L ένα DCPO. Ένα άνω σύνολο U είναι Lawson ανοικτό αν και μόνον αν είναι Scott ανοικτό.*

Ορισμός 4.6. Ένα DCPO L καλείται *meet-continuous*, αν για κάθε $x \in L$ και κάθε κατευθυνόμενο σύνολο D του L, με $x \leq \sup D$, $x \in Cl_{\tau_{sc}(L)}(\downarrow D \cap \downarrow x)$.

Πρόταση 4.7. *Αν L είναι meet-continuous, τότε για κάθε $x \in L$ και $U \in \tau_{sc}(L)$, έχουμε ότι $\uparrow (U \cap \downarrow x) \in \tau_{sc}(L)$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $\uparrow (U \cap \downarrow x)$ είναι ένα άνω σύνολο. Έστω D ένα κατευθυνόμενο σύνολο του L με $\sup D \in \uparrow (U \cap \downarrow x)$. Αποδεικνύουμε ότι $D \cap \uparrow (U \cap \downarrow x) \neq \emptyset$. (Βλέπε Πρόταση 3.3.)
Υπάρχει $z \in U \cap \downarrow x$ με $z \leq \sup D$. Επειδή το L είναι meet-continuous, έχουμε ότι $z \in Cl_{\tau_{sc}(L)}(\downarrow D \cap \downarrow z)$.

Εφ' όσον το $z \in U \in \tau_{sc}(L)$, $\downarrow D \cap \downarrow z \cap U \neq \emptyset$, απ' όπου έπεται ότι $D \cap \uparrow (U \cap \downarrow z) \neq \emptyset$. Ισχύει όμως ότι $D \cap \uparrow (U \cap \downarrow z) \subseteq D \cap \uparrow (U \cap \downarrow x)$ που σημαίνει ότι $D \cap \uparrow (U \cap \downarrow x) \neq \emptyset$. Άρα $\uparrow (U \cap \downarrow x) \in \tau_{sc}(L)$. □

Πρόταση 4.8. *Για ένα meet-continuous DCPO L, έχουμε:*

(1) αν $U \in \tau_\lambda$, τότε $\uparrow U \in \tau_{sc}(L)$.

(2) αν A είναι ένα άνω σύνολο, τότε $Int_{\tau_\lambda}(A) = Int_{\tau_{sc}(L)}(A)$.

(3) αν A είναι ένα κάτω σύνολο, τότε $Cl_{\tau_\lambda}(A) = Cl_{\tau_{sc}(L)}(A)$.

Απόδειξη.

(1) Έστω $U \in \tau_\lambda$. Για να δείξουμε ότι $\uparrow U \in \tau_{sc}(L)$, αρκεί να δείξουμε ότι $\uparrow U \subseteq Int_{\tau_{sc}(L)}(\uparrow U)$.

Έστω $y \in \uparrow U$. Τότε υπάρχει ένα στοιχείο x του U τέτοιο ώστε $y \in \uparrow x$. Επίσης, υπάρχει $V \setminus \uparrow F \in \tau_\lambda$, όπου $V \in \tau_{sc}(L)$ και F είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του L, τέτοιο ώστε $x \in V \setminus \uparrow F \subseteq U$. Τότε

$$\uparrow (V \cap \downarrow x) \subseteq \uparrow (V \setminus \uparrow F) \subseteq \uparrow U.$$

Επειδή το L είναι meet-continuous, $\uparrow (V \cap \downarrow x) \in \tau_{sc}(L)$ (βλέπε Πρόταση 4.7). Ισχύει όμως ότι $y \in \uparrow (V \cap \downarrow x)$.

Άρα $y \in Int_{\tau_{sc}(L)}(\uparrow U)$ και συνεπώς το σύνολο $\uparrow U \in \tau_{sc}(L)$.

(2) Προφανώς, $Int_{\tau_{sc}(L)}(A) \subseteq Int_{\tau_\lambda}(A)$. Επίσης, επειδή το A, εξ' υποθέσεως, είναι άνω σύνολο, έχουμε ότι

$$Int_{\tau_\lambda}(A) \subseteq \uparrow Int_{\tau_\lambda}(A) \subseteq \uparrow A = A.$$

Απ' το (1), $\uparrow Int_{\tau_\lambda}(A) \in \tau_{sc}(L)$ και συνεπώς $Int_{\tau_\lambda}(A) \subseteq Int_{\tau_{sc}(L)}(A)$.

Άρα $Int_{\tau_\lambda}(A) = Int_{\tau_{sc}(L)}(A)$.

(3) Η απόδειξη είναι ανάλογη μ' αυτή του (2). □

Θεώρημα 4.9. *Για ένα πλήρες (ημι)δικτυωτό L, η Lawson τοπολογία $\tau_\lambda(L)$ είναι μια συμπαγής T_1 τοπολογία.*

Απόδειξη. Αρχικά, για $x \in L$ έχουμε ότι $\{x\} = \downarrow x \cap \uparrow x$. Το $\downarrow x$ είναι Scott κλειστό, ενώ το $\uparrow x$ είναι κλειστό στην κάτω τοπολογία. Άρα, εξ' ορισμού του Lawson κλειστού συνόλου, το $\{x\}$ είναι Lawson κλειστό. Δηλαδή η $\tau_\lambda(L)$ είναι μια T_1 τοπολογία.

Για να δείξουμε ότι η Lawson τοπολογία, $\tau_\lambda(L)$, είναι συμπαγής, υποθέτουμε πρώτα ότι το L είναι ένα πλήρες δικτυωτό και χρησιμοποιούμε το Λήμμα υποβάσης του Alexander[1].

Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα $\{U_j \in \tau_{sc}(L) : j \in J\}$ και $\{L \setminus \uparrow x_k : k \in K\}$ σχηματίζουν ένα κάλυμμα του L.

Έστω $x = \sup\{x_k : k \in K\}$. Τότε

$$\bigcup\{L \setminus \uparrow x_k : k \in K\} = L \setminus \bigcap\{\uparrow x_k : k \in K\} = L \setminus \uparrow x.$$

Αλλά $x \notin L \setminus \uparrow x$. Επομένως, υπάρχει ένα j τέτοιο ώστε $x \in U_j$. Επειδή το U_j είναι Scott ανοικτό σύνολο, υπάρχουν δείκτες $k_1, \ldots, k_n$ τέτοιοι ώστε $x_{k_1} \vee \ldots \vee x_{k_n} \in U_j$.

Τότε

$$U_j \cup (L \setminus \uparrow x_{k_1}) \cup \ldots \cup (L \setminus \uparrow x_{k_n}) = L.$$

Δηλαδή βρήκαμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του χώρου L που αποτελείται από τα U_j, $L \setminus \uparrow x_{k_1}$, $L \setminus \uparrow x_{k_2}, \ldots, L \setminus \uparrow x_{k_n}$. Συνεπώς η Lawson τοπολογία $\tau_\lambda(L)$ είναι συμπαγής. □

[1] Ένας χώρος είναι συμπαγής αν κάθε ανοικτό κάλυμμα αποτελούμενο από ανοικτά σύνολα της υποβάσης, περιέχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Ορισμός 4.10. Έστω L *poset*. Το L θα καλείται *συνεχές*, αν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

αν $x \not\leq y$, τότε υπάρχει ένα $u \ll x$ τέτοιο ώστε $u \not\leq y$, με $x, y, u \in L$.

Θεώρημα 4.11. *Για ένα συνεχές DCPO L, η Lawson τοπολογία $\tau_\lambda(L)$ είναι μια Hausdorff τοπολογία.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $x \neq y$, με $x,\ y \in L$ και έστω ότι $x \not\leq y$.
Τότε από τον Ορισμό 4.10, υπάρχει ένα $u \ll x$ με $u \not\leq y$. Επειδή το L είναι συνεχές $DCPO$, λόγω της Πρότασης 3.10 (i), το $\Uparrow u$ είναι Scott ανοικτό σύνολο. Και αφού $u \ll x$, έπεται ότι $x \in \Uparrow u$.
Δηλαδή το $\Uparrow u$ είναι μια Scott (άρα και Lawson (βλέπε Παρατήρηση 4.5 (2))) ανοικτή γειτονιά του x και το $L \backslash \uparrow x$ είναι μια $\omega(L)$ (άρα Lawson) ανοικτή γειτονιά του y.
Επειδή $x \not\leq y,\ y \in L \backslash \uparrow x$.
Συνεπώς τα $x, y \in L$, διαχωρίζονται από, ξένες μεταξύ τους, ανοικτές γειτονιές $\Uparrow u$ και $L \backslash \uparrow x$, αντίστοιχα.
Άρα λοιπόν η Lawson τοπολογία $\tau_\lambda(L)$ είναι μια Hausdorff τοπολογία. □

Από τα δύο τελευταία Θεωρήματα έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα:

Πόρισμα 4.12. Για οποιοδήποτε πλήρες συνεχές ημιδικτυωτό, και ειδικότερα για οποιοδήποτε συνεχές δικτυωτό, η Lawson τοπολογία είναι συμπαγής και Hausdorff.

Βιβλιογραφία

[1] D. S. Scott, Continuous Lattices, Springer - Verlag Lecture Notes in Math., 274 (1972), 97-136.

[2] Encyclopedia Of Mathematics And Its Applications - Volume 93: Continuous Lattices and Domains, G. Gierz, Cambridge University Press, 2003.

[3] R-E Hoffmann, Continuous Lattices and Related Topics, Mathematik Arbeitspapiere der Universitat Bemen.

[4] H. Lamarr Bentley, Horst Herrlich, M. Rajagopalan and H. Wolff, Categorical Topology, Heldermann Sigma Series in Pure Mathematics.

[5] R-E Hoffman and Karl H. Hoffmann, Contimuous Lattices and Their Applications,Mercel Dekker Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics.

[6] Steven Vickers, Topology via Logic, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science (2nd Edition 1990).

[7] B. A. Davey and H. A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Presss, 1990.

[8] S. Abramsky and A. Jung, Domain Theory, D. M. Gabbay and T. S. E. Mailbaum, Handbook of logic in Computer Science.

[9] V. Stolenberg - Hansen, I. Lindstrom and E. R. Griffor, Mathematical Theory Of Domains, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science.

Ευρετήριο

Σ

Ξένη ορολογία