Πανεπιστημιο Πατρων
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Δομες Hamilton Σε Εξισωσεις Εξελιξης

Διπλωματική Εργασία

του

Νικόλαου Χ. Καλλίνικου

Μεταπτυχιακο Διπλωμα Ειδικευσης στα Εφαρμοσμενα Μαθηματικα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : Καθηγητής Δημήτρης Γ. Τσουμπελής

Φεβρουαριος 2009

At its foundations, the universe seems to be Hamiltonian.
The fundamental laws of classical mechanics, gravity,
electromagnetism, and even quantum mechanics in a sense,
are Hamiltonian. Why this is so is a mystery to me.

R. S. MacKay

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Δημήτρη Τσουμπελή, όχι μόνο για την επίβλεψη της παρούσας εργασίας, αλλά και για την συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξή του καθ' όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Είναι ένας από τους πρώτους που με καλωσόρισαν στο Τμήμα Μαθηματικών της Πάτρας, και παράλληλα εκείνος που μου άνοιξε την πόρτα στον θαυμαστό κόσμο των συμμετριών. Ο τρόπος σκέψης καθώς και οι κατευθύνσεις που μου υπέδειξε μέσα από την πολύπλευρη διδασκαλία του αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της προσπάθειας που ακολουθεί.

Θέλω επίσης να ευχαρίστησω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Τάσο Μπούντη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Βασίλη Παπαγεωργίου, για τα χρήσιμα σχόλια και τις πολύτιμες παρατηρήσεις τους. Η συμβολή και των δύο υπήρξε καθοριστική για την κατανόηση διαφόρων εννοιών της Μαθηματικής Φυσικής, ενώ η βοήθεια και το ενδιαφέρον τους ήταν αναντικατάστατα.

Από την θέση αυτή θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Χριστόδουλο Σοφοκλέους για την φιλοξενία του στο Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής του Πανεπιστημίου της Κύπρου, καθώς και τον Καθηγητή κ. Peter Leach, που είχα την ευκαιρία να γνωρίσω εκεί. Τόσο οι υποδείξεις όσο και οι συζητήσεις με δύο ειδήμονες στον χώρο των συμμετριών μου έδωσαν το πλεονέκτημα μιας άλλης οπτικής γωνίας.

Επίσης ευχαριστώ πολύ τον Τάσο Τόγκα για την αμέριστη βοήθεια που μου προσέφερε απλόχερα σε κάθε επίπεδο, όπως και τους Παύλο Ξενιτίδη, Θοδωρή Κουλούκα για τον χρόνο που αφιέρωσαν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο σε πολλές από τις επόμενες σελίδες. Τέλος, στους Γιώργο Παπαμίκο, Ήλια Ρουστέμογλου και Σωτήρη Κωνσταντίνου-Ρίζο οφείλω κάτι πολύ περισσότερο από ένα απλό «ευχαριστώ» για όλα εκείνα που μου έδωσαν στην κοινή μας πορεία σαν συμφοιτητές, αλλά πολύ περισσότερο σαν φίλοι.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η μελέτη συνήθων διαφορικών εξισώσεων συχνά χρησιμοποιεί μεθόδους γνωστές από την κλασική Μηχανική. Η πιο γνωστή από αυτές φέρει το όνομα του εμπνευστή της, του Ιρλανδού Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865), κι αποτελεί μία μαθηματικά πλήρη θεωρία για τα λεγόμενα συστήματα Hamilton. Πρόσφατα, όμως, δομές τύπου Hamilton άρχισαν να μελετώνται και σε συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων, συγκεκριμένα εξισώσεων εξέλιξης. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη της θεωρίας Hamilton για τα συστήματα αυτά και ιδιαίτερα για τις περιπτώσεις εκείνες που εμφανίζουν ολοκληρωσιμότητα.

Η γραμμή που θα ακολουθήσουμε έχει ως κύριο οδηγό τις συμμετρίες των διαφορικών εξισώσεων, ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση οποιασδήποτε διαφορικής εξίσωσης, που πρώτος ανέδειξε ο Νορβηγός Marius Sophus Lie (1842 - 1899). Στο πρώτο κεφάλαιο λοιπόν γίνεται μία εισαγωγή στην θεωρία των (γεωμετρικών) συμμετριών, ενώ επίσης παρουσιάζονται τρόποι επίλυσης και γενικότερα αντιμετώπισης ξεχωριστά συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων με την χρήση των ομάδων συμμετρίας τους.

Το δεύτερο κεφάλαιο φιλοδοξεί να αναδείξει την αντιστοιχία μεταξύ των συμμετριών ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων και των νόμων διατήρησης στους οποίους υπακούει το φυσικό σύστημα που περιγράφουν. Αυτό είναι και το περιεχόμενο του θεωρήματος που διατύπωσε η Γερμανίδα Amalie Emmy Noether (1882 - 1935), το οποίο ισχύει και στην ειδική περίπτωση των συστημάτων Hamilton. Το πρώτο, λοιπόν, βήμα προς αυτήν την κατεύθυνση είναι η επέκταση της έννοιας της συμμετρίας στις λεγόμενες γενικευμένες συμμετρίες, με ιδιαίτερη έμφαση στις εξισώσεις εξέλιξης. Το δεύτερο είναι ουσιαστικά μια μικρή εισαγωγή στην θεωρία μεταβολών, απαραίτητη όμως και για τα επόμενα κεφάλαια.

Την γνωστή θεωρία Hamilton για πεπερασμένα συστήματα, συστήματα δηλαδή συνήθων διαφορικών εξισώσεων πραγματεύεται το τρίτο κεφάλαιο. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού δεν είναι η πλήρης περιγραφή της θεωρίας, αλλά η διατύπωση των εννοιών εκείνων που μπορούν να γενικευτούν και στην περίπτωση των απειροδιάστατων συστημάτων. Για τον λόγο αυτό έχει προτιμηθεί η κάπως πιο αφηρημένη και σίγουρα όχι τόσο συνηθισμένη περιγραφή στο πλαίσιο της γεωμετρίας Poisson. Αντιμετωπίζοντας τις συμπλεκτικές δομές, οι οποίες επικρατούν στην βιβλιογραφία, ως μια υποπερίπτωση των γενικότερων δομών Poisson, έχουμε ουσιαστικά αποφύγει τελείως την χρήση διαφορικών μορφών, στρέφοντας περισσότερο την προσοχή στις ομάδες συμμετρίας Hamilton, μία έννοια-κλειδί για την ολοκληρωσιμότητα των συστημάτων αυτών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το κεντρικό θέμα αυτής της εργασίας, δηλαδή τη θεωρία Hamilton για απειροδιάστατα συστήματα εξισώσεων εξέλιξης, και ειδικότερα την ολοκληρωσιμότητα τους. Τα βασικά μας εργαλεία είναι αυτά που παρουσιάστηκαν νωρίτερα, δηλαδή οι (γενικευμένες) συμμετρίες και οι νόμοι διατήρησης από την μια, και τα διανυσματικά πεδία Hamilton από την άλλη που μας επιτρέπουν την μεταξύ τους αντιστοιχία. Με βάση αυτά τα εργαλεία βλέπουμε πως η μελέτη πολλών μερικών διαφορικών εξισώσεων θυμίζει εκείνων των κλασικών συστημάτων Hamilton της Μηχανικής.

Στην παραπάνω αντιστοιχία βασίζεται και η έννοια των δι-Χαμιλτονικών συστημάτων, την οποία μελετάμε στο πέμπτο κεφάλαιο. Μέσα από το παράδειγμα της εξίσωσης Korteweg-de Vries αναδεικνύονται τα πλεονεκτήματα της εύρεσης δύο διαφορετικών, ανεξάρτητων εκφράσεων Hamilton, που οδηγούν στην κατασκευή άπειρων συμμετριών ή ακόμα και νόμων διατήρησης. Η διπλή αυτή δομή Hamilton των απειροδιάστατων συστημάτων συνδέεται, όπως θα δούμε, με την ολοκληρωσιμότητα είτε με την έννοια του Liouville, είτε με διάφορα άλλα κριτήρια. Γνωστά παραδείγματα παραθέτονται, πέρα από την KdV, όπως η εξίσωση Schrödinger, η modified KdV, κι άλλες μη γραμμικές κυματικές εξισώσεις.

Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την περίπτωση, όπου ένα σύστημα επιδέχεται πολλαπλή δομή Hamilton. Τέτοιου είδους συστήματα μας επιτρέπουν να δούμε προϋπάρχουσες έννοιες από την θεωρία Hamilton, αλλά κι όχι μόνο, κάτω από μία άλλη σκοπιά. Γι' αυτό κι έχουν απασχολήσει την σύγχρονη βιβλιογραφία, πάνω στην οποία κάνουμε μία σύντομη επισκόπηση, τόσο στο κομμάτι εκείνο που ασχολείται με τις πρόσφατες εξελίξεις της θεωρίας Hamilton, όσο και με την μελέτη γενικότερα της ολοκληρωσιμότητας των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Κεφάλαιο 1

Συμμετρίες Lie Διαφορικών Εξισώσεων

Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \tag{1.1}$$

όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f δεν εξαρτάται από την μεταβλητή y, τότε η εξίσωση αυτή είναι πολύ εύκολο να λυθεί με μία απλή ολοκλήρωση

$$y\left(x\right) = \int f\left(x\right) dx$$

Θα θέλαμε λοιπόν να βρούμε νέες μεταβλητές $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ στις οποίες η παραπάνω διαφορική εξίσωση (1.1) να παίρνει την μορφή

$$\frac{d\widetilde{y}}{d\widetilde{x}} = \widetilde{f}\left(\widetilde{x}\right) \tag{1.2}$$

έτσι ώστε από την συνάρτηση $\widetilde{y}\left(\widetilde{x}\right)$ που θα βρούμε λύνοντας την (1.2), να μπορούμε να επιστρέψουμε στις αρχικές μεταβλητές x, y για να βρούμε την λύση $y\left(x\right)$ της (1.1).

Παράδειγμα 1.1. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της y δεν παίζει ρόλο, αφού η εξίσωση παραμένει ίδια όποιο και να 'ναι αυτό. Έτσι χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $y > 0$ κι αντικαθιστούμε την μεταβλητή y με την $\widetilde{y} = \ln y$. Τότε η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$\frac{d\widetilde{y}}{dx} = x$$

η οποία λύνεται με απευθείας ολοκλήρωση δίνοντας

$$\widetilde{y}\,(x) = \frac{x^2}{2} + \widetilde{c}$$

οπότε, ξαναγυρνώντας στην αρχική μεταβλητή y, βρίσκουμε την γενική λύση

$$y\,(x) = c\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

Φυσικά στο παράδειγμα αυτό η εξίσωση μπορεί να λυθεί κι απευθείας χωρίζοντας τις μεταβλητές στο αριστερό και δεξί μέλος, κι έπειτα ολοκληρώνοντας. Όμως, όλες οι περιπτώσεις δεν είναι τόσο απλές. Ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.2. Η εξίσωση Riccati

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}$$

λύνεται γενικά βρίσκοντας μία ειδική λύση $y_1(x)$. Κάνοντας τον μετασχηματισμό $y = y_1 + z^{-1}$ καταλήγουμε σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση 1ης τάξης με άγνωστη την z. Λύνοντάς την, βρίσκουμε την γενική λύση $y\,(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$.

Αν όμως εισαγάγουμε νέες μεταβλητές

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= \frac{y}{x} \\ \widetilde{y} &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

τότε θα πάρουμε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d\widetilde{y}}{d\widetilde{x}} = \frac{1}{1+\widetilde{x}^{\,2}}$$

Ολοκληρώνοντάς την, βρίσκουμε

$$\widetilde{y}\,(\widetilde{x}) = \arctan \widetilde{x} + c$$

κι επιστρέφοντας στις αρχικές

$$y\,(x) = -\,x \tan\left(\frac{1}{x} + c\right)$$

Όπως βλέπουμε καταλήξαμε στην λύση της εξίσωσης με έναν διαφορετικό τρόπο, ο οποίος εκ των υστέρων μπορούμε να πούμε ότι φαντάζει πιο απλός.

Για την αντιμετώπιση συνήθων διαφορικών εξισώσεων, υπάρχουν διάφορες τεχνικές επίλυσης, πολλές από τις οποίες βασίζονται σε κάποιου είδους τέχνασμα που φέρνει την εξίσωση σε μια απλούστερη γνωστή μορφή. Οι τεχνικές αυτές, φαινομενικά άσχετες μεταξύ τους, εφαρμόζονται μόνο σε κάποιες συγκεκριμενες εξισώσεις, αφήνοντας την πλειοψηφεία των περιπτώσεων απ' έξω. Στην πραγματικότητα αποτελούν απλώς ένα μικρό κομμάτι μιας ολόκληρης θεωρίας με την οποία μπορούμε να μελετήσουμε οποιαδήποε διαφορική εξίσωση, και η οποία βασίζεται στην έννοια της συμμετρίας. Οι μετασχηματισμοί που χρησιμοποιήσαμε στα παραπάνω παραδείγματα για να ολοκληρώσουμε απευθείας την διαφορική εξίσωση δεν βρέθηκαν τυχαία, αλλά προκύπτουν μέσω αυτής ακριβώς της θεωρίας.

1.1 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Για να αντιληφθούμε την έννοια της συμμετρίας θα πρέπει να εξετάσουμε τις διαφορικές εξισώσεις κάτω από μία πιο γεωμετρική σκοπιά. Έστω λοιπόν

$$x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^p\right)$$

οι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος που μελετάμε, και

$$u = f\left(x\right) = \left(u^1, u^2, \ldots, u^q\right)$$

οι εξαρτημένες, όπου x και u το τυχαίο σημείο των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων X και U αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με

$$u^i_J = \frac{\partial^k f^i}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \cdots \partial x^{j_k}}$$

την k τάξης μερική παράγωγο της συνιστώσας $f^i(x)$ ως προς τις μεταβλητές $x^{j_1}, \ldots, x^{j_k}$ (για $k = 0$ εννοούμε την ίδια την u^i), και με U_k το σύνολο όλων αυτών των k-τάξης παραγώγων όλων των συνιστωσών της u για κάθε επιλογή του $J = (j_1, \ldots, j_k)$. Τέλος με $u^{(n)}$ συμβολίζουμε όλες τις παραγώγους μέχρι και n-οστής τάξης της u και με $U^{(n)}$ το σύνολο τους.

Ο χώρος των ανεξάρτητων και των εξαρτημένων μεταβλητών, καθώς και όλων των παραγώγων μέχρι και n-οστής τάξης

$$X \times U^{(n)} \equiv X \times U \times U_1 \times \cdots \times U_n$$

ονομάζεται *jet χώρος* n-οστής τάξης του $X \times U$, και οι ομαλές πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται σε αυτόν *διαφορικές συναρτήσεις*.

Από δω και στο εξής, εκτός κι αν αναφέρεται διαφορετικά, θα θεωρούμε ότι ο δείκτης i παίρνει τιμές από 1 έως q, ο δείκτης j (με ή χωρίς υποδείκτη) από 1 έως p κσι ο δείκτης k από 0 έως

n. Επίσης θα υιοθετήσουμε την σύμβαση Einstein, σύμφωνα με την οποία, επαναλαμβανόμενος δείκτης πάνω και κάτω σημαίνει άθροιση. Συγκεκριμένα η άθροιση ως προς τον δείκτη J γίνεται ως προς όλες τις k-άδες για κάθε k από 0 έως n.

Ένα *σύστημα διαφορικών εξισώσεων* n-οστής τάξης αποτελείται από ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\Delta_\nu\left(x, u^{(n)}\right) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

όπου Δ_ν διαφορικές συναρτήσεις που ορίζονται στον χώρο $X \times U^{(n)}$. Θεωρώντας την αντίστοιχη διανυσματική συνάρτηση $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_l)$ το σύστημα γράφεται κι ως

$$\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0 \tag{1.3}$$

Μία ομαλή συνάρτηση $u = f(x)$ με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο $\Omega \subset X$ ονομάζεται *λύση* του συστήματος αν επαληθεύει τις εξισώσεις (1.3) για κάθε $x \in \Omega$, δηλαδή αν

$$x \in \Omega \ \Rightarrow \ \Delta\left(x, f^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{1.4}$$

1.2 Ομάδες μετασχηματισμών

Προκειμένου να περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων μετασχηματίζεται κάτω από μία αλλαγή μεταβλητών, θα χρειαστούμε κάποιες έννοιες της διαφορικής γεωμετρίας.

Ξεκινώντας από την πιο βασική, ας θεωρήσουμε ένα *διανυσματικό πεδίο* v μιας q-διάστατης διαφορίσιμης πολλαπλότητας X, που σε κάθε σημείο $x \in X$ αντιστοιχεί ένα *εφαπτόμενο* διάνυσμα v_x της πολλαπλότητας. Ο λόγος που η αντιστοιχία αυτή γίνεται σε ένα στοιχείο του εφαπτόμενου χώρου, είναι ότι μία πολλαπλότητα δεν είναι γενικά εφοδιασμένη με την δομή διανυσματικού χώρου, όπως π.χ. ο γνώστος Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^q$, ενώ ο εφαπτόμενος χώρος είναι.

Παράλληλα με αυτήν την εποπτική, γεωμετρική ερμηνεία, υπάρχει μία πιο αφηρημένη (προκειμένου για πεπερασμένης διάστασης πολλαπλότητες), σύμφωνα με την οποία ένα διανυσματικό πεδίο v μπορεί ισοδύναμα να οριστεί ως ένας *διαφορικός* τελεστής, που δρα στον χώρο $C^\infty(X)$ των ομαλών πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στην πολλαπλότητα X. Απεικονίζει δηλαδή μία ομαλή συνάρτηση σε μία άλλη και είναι γραμμική ως προς την πράξη της πρόσθεσης συναρτήσεων, ενώ ακολουθεί τον κανόνα του Leibniz, ως προς την πράξη του γινομένου. Σε τοπικές συντεταγμένες $\left(x^1, \ldots, x^q\right)$ ο τελεστής αυτός εκφράζεται ως

$$\mathrm{v} = \xi^{\,i}(x)\,\frac{\partial}{\partial x^{\,i}} \tag{1.5}$$

όπου ξ^i ομαλές συναρτήσεις του x.

Μπορούμε να φανταστούμε ότι το διανυσματικό πεδίο v είναι για παράδειγμα το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, δηλαδή σε κάθε σημείο $x \in X$ αντιστοιχεί μία ταχύτητα v_x με συγκεκριμένη φορά και μέτρο. Ένα σωματίδιο τότε του ρευστού που ξεκινάει τυχαία από κάποιο σημείο του x_o, ακολουθεί μία τροχιά $x = \varphi\,(t)$, σε κάθε σημείο της οποίας η ταχύτητα του είναι ίση με αυτήν του πεδίου $\mathrm{v}_{\varphi(t)}$, δηλαδή

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{v}_{\varphi(t)} \;\Rightarrow\; \frac{d\varphi^{\,i}}{dt} = \xi^{\,i}\,(\varphi\,(t))$$

Το σύνολο όλων αυτών των τροχιών, κάθε μία εκ των οποίων ξεκινάει κι από ένα διαφορετικό σημείο x_o του ρευστού, μας περιγράφει την ροή του.

Επιστρέφοντας στην γενικότερη περίπτωση ενός διανυσματικού πεδίου (1.5), εφόσον οι ξ^i είναι ομαλές συναρτήσεις, η λύση $\varphi\,(\epsilon)$ του συστήματος

$$\frac{dx^{\,i}}{d\epsilon} = \xi^{\,i}\,(x) \tag{1.6}$$

για δοσμένες αρχικές συνθήκες $\varphi\,(0) = x_o$ υπάρχει και είναι μοναδική, τουλάχιστον σε μια περιοχή του x_o, σύμφωνα με τα γνωστά θεωρήματα συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Λόγω της μοναδικότητας των λύσεων, δύο καμπύλες $\varphi\,(\epsilon)$ που αντιστοιχούν σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες δεν μπορούν να τέμνονται γιατί τότε από το σημείο τομής τους θα ξεκινούσαν δύο λύσεις του συστήματος. Άρα από ένα σταθερό σημείο x της πολλαπλότητας περνάει μία τέτοια καμπύλη $\varphi\,(\epsilon)$, την οποία συμβολίζουμε με $\varphi_x(\epsilon)$. Αφήνοντας το x να μεταβάλλεται, θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi\,(\epsilon, x) = \varphi_x(\epsilon)$.

Ροή τότε ενός διανυσματικού πεδίου v μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας X ονομάζεται το σύνολο των λύσεων $\varphi\,(\epsilon, x)$ του συστήματος (1.6), κάθε μία εκ των οποίων περνάει από ένα διαφορετικό σημείο $x \in X$. Με άλλα λόγια είναι μία απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, όπου M ένα ανοιχτό υποσύνολο της X, που ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις ιδιότητες

$$\frac{\partial\varphi\,(\epsilon, x)}{\partial\epsilon} = \mathrm{v}_{\varphi(\epsilon,\,x)} \tag{1.7}$$

$$\varphi\,(0, x) = x \tag{1.8}$$

$$\varphi\,(\epsilon, \varphi\,(\delta, x)) = \varphi\,(\epsilon + \delta, x) \tag{1.9}$$

Η πρώτη ιδιότητα, που είναι ουσιαστικά το σύστημα (1.6), εκφράζει το γεγονός ότι το διανυσματικό πεδίο v είναι εφαπτόμενο για κάποιο σταθερό x στην καμπύλη $\varphi\,(\epsilon, x)$ σε κάθε σημείο της. Η δεύτερη είναι οι αρχικές συνθήκες του συστήματος, ενώ η τρίτη ιδιότητα προέρχεται από την μοναδικότητα των λύσεων του συστήματος.

Η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ μαζί με τις ιδιότητες (1.8) και (1.9) ορίζει μία τοπική δράση της ομάδας Lie $\mathbb{R}$ στην πολλαπλότητα X, που συχνά αναφέρεται κι ως *τοπική μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών*. Εφόσον η φ είναι ομαλή απεικόνιση, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Taylor, οι συντεταγμένες συναρτήσεις της, κοντά στο σημείο $(0, x)$, εκφράζονται ως εξής :

$$\varphi^i(\epsilon, x) = \varphi^i(0, x) + \epsilon \left.\frac{\partial \varphi^i}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \frac{\epsilon^2}{2} \left.\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} + \cdots$$

Από τις (1.7) και (1.8) έπεται ότι

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial \epsilon} = \xi^i(\varphi(\epsilon, x)) \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial \varphi^i}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \xi^i(x)$$

ενώ, παραγωγίζοντας την (1.7), καταλήγουμε στην

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial \epsilon} = \xi^i(\varphi(\epsilon, x)) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \epsilon^2} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \varphi^j}\frac{\partial \varphi^j}{\partial \epsilon} \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\, \xi^j(x)$$

Άρα,

$$\varphi^i(\epsilon, x) = x^i + \epsilon\, \xi^i(x) + \frac{\epsilon^2}{2} \xi^j(x) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \cdots$$

και, λόγω της (1.5),

$$\begin{aligned} \varphi^i(\epsilon, x) &= x^i + \epsilon\, \mathrm{v}(x^i) + \frac{\epsilon^2}{2}\, \mathrm{v}(\xi^i) + \cdots \\ &= x^i + \epsilon\, \mathrm{v}(x^i) + \frac{\epsilon^2}{2}\, \mathrm{v}(\mathrm{v}(x^i)) + \cdots = \left(I + \epsilon\, \mathrm{v} + \frac{\epsilon^2}{2}\, \mathrm{v}^2 + \cdots \right) x^i \end{aligned}$$

Δηλαδή, μέσω της ροής φ ενός διανυσματικού πεδίου v, ένα σημείο x μετασχηματίζεται σε ένα σημείο $\widetilde{x}$, όπου

$$\widetilde{x} = \varphi(\epsilon, x) = \left(I + \epsilon\, \mathrm{v} + \frac{\epsilon^2}{2}\, \mathrm{v}^2 + \cdots \right) x$$

Με διαδοχικές παραγωγίσεις της (1.7), μπορεί να δειχθεί ότι, ο *απειροστός* αυτός μετασχηματισμός δίνεται από την λεγόμενη *σειρά Lie*

$$\widetilde{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!}\, \mathrm{v}^k(x)$$

Η έκφραση αυτή δικαιολογεί και την συμβολική γραφή

$$\widetilde{x} = e^{\epsilon \mathrm{v}}(x) \tag{1.10}$$

που είναι γνωστή κι ως *εκθετοποίηση του απειροστικού γεννήτορα* v.

Αντίστοιχα, κάτω από την ροή του διανυσματικού πεδίου v, μία συνάρτηση f που ορίζεται στην πολλαπλότητα X, μετασχηματίζεται στην

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}) = e^{\epsilon \mathrm{v}}(f(x)) = f(x) + \epsilon\, \mathrm{v}(f)(x) + \frac{\epsilon^2}{2}\, \mathrm{v}^2(f)(x) + \cdots \tag{1.11}$$

Από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι, η δράση ενός διανυσματικού πεδίου v σε μια συνάρτηση f μας δίνει την απειροστή μεταβολή της συνάρτησης κάτω από την ροή του πεδίου. Ισοδύναμα, η $\widetilde{f}\,(\widetilde{x})$ προσδιορίζεται από την λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial \varphi^i}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \widetilde{x}^i}\,\xi^i(\widetilde{x}) = \mathrm{v}\Big(\widetilde{f}\Big)\,, \qquad \widetilde{f}\,(x) = f\,(x) \tag{1.12}$$

Στην (1.11) καταλήγουμε, όπως και πριν, αναπτύσσοντας κατά Taylor και υπολογίζοντας έναν-έναν τους συντελεστές από την (1.12). Θέτοντας $\epsilon = 0$ στην τελευταία, παίρνουμε

$$\left.\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\,\xi^i(x) = \mathrm{v}(f)(x)$$

Συνεχίζοντας στην δεύτερη παράγωγο, βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial \epsilon^2} = \frac{\partial}{\partial \epsilon}\left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial \varphi^i}{\partial \epsilon}\right) = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial \widetilde{x}^i \partial \widetilde{x}^j}\frac{\partial \varphi^i}{\partial \epsilon}\frac{\partial \varphi^j}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \epsilon^2}$$

Η σχέση αυτή για $\epsilon = 0$ μας δίνει

$$\left.\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial \epsilon^2}\right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\,\xi^i\,\xi^j + \frac{\partial f}{\partial \widetilde{x}^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\,\xi^j = \xi^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\,\xi^i\right) = \mathrm{v}^2(f)(x)$$

και συνεχίζοντας και σε ανώτερες τάξεις παραγώγων, καταλήγουμε τελικά στην σειρά Lie της (1.11).

Όπως προαναφέρθηκε η ροή ενός διανυσματικού πεδίου αποτελεί μία (τοπική) μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών. Είναι όμως λογικό να φανταστούμε μία ομάδα μετασχηματισμών G, που εξαρτάται από δύο, τρεις ή γενικά r παραμέτρους $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r$. Μία r-παραμετρική ομάδα μετασχηματισμών G αυτού του είδους μπορεί αντίστοιχα να θεωρηθεί ότι γεννιέται από r γραμμικά ανεξάρτητα διανυσματικά πεδία $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_r$. Αυτό σημαίνει ότι, κάτω από την δράση της, ένα σημείο x της πολλαπλότητας μετασχηματίζεται στο σημείο

$$\widetilde{x} = e^{\epsilon_1 \mathrm{v}_1} e^{\epsilon_2 \mathrm{v}_2} \cdots e^{\epsilon_r \mathrm{v}_r}(x)$$

Τα διανυσματικά πεδία $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_r$ αποτελούν την βάση μίας άλγεβρας Lie ως προς την πράξη που ορίζεται από την *αγκύλη Lie* δύο τυχαίων διανυσματικών πεδίων v, w :

$$[\mathrm{v}, \mathrm{w}] = \mathrm{v}\,\mathrm{w} - \mathrm{w}\,\mathrm{v}$$

Αυτή ονομάζεται άλγεβρα Lie, που αντιστοιχεί στην ομάδα Lie G, και συμβολίζεται με $\mathfrak{g}$. Τα πεδία $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_r$ χαρακτηρίζονται από την θεμελιακή σχέση

$$[\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j] = c_{ij}^k\,\mathrm{v}_k$$

για $i, j, k = 1 \ldots r$, όπου c_{ij}^k σταθερές ποσότητες. Οι τελευταίες αναφέρονται ως *σταθερές δομής* της $\mathfrak{g}$ και ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες

1. $c_{ij}^{k} = -c_{ji}^{k}$ (αντισυμμετρικότητα)

2. $c_{ij}^{k}\, c_{kl}^{m} + c_{li}^{k}\, c_{kj}^{m} + c_{jl}^{k}\, c_{ki}^{m} \;=\; 0$ (ταυτότητα Jacobi)

1.3 Μετασχηματισμοί διαφορικών εξισώσεων

Αν θεωρήσουμε ένα διανυσματικό πεδίο v στον χώρο $X \times U$ των ανεξάρτητων κι εξαρτημένων μεταβλητών ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$, τότε ο μετασχηματισμός των μεταβλητών x και u κάτω από την ροή του v, σε

$$\widetilde{x} \;=\; e^{\epsilon \mathrm{v}}(x) \tag{1.13}$$

$$\widetilde{u} \;=\; e^{\epsilon \mathrm{v}}(u) \tag{1.14}$$

έχει ως φυσικό αποτέλεσμα τον μετασχηματισμό των παραγώγων μιας τυχαίας συνάρτησης $u = f(x)$ στις αντίστοιχες παραγώγους της $\widetilde{u} = \widetilde{f}(\widetilde{x})$. Σε πιο αυστηρή γλώσσα, η μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών G, που γεννάει το πεδίο v, και δρα σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $M \subset X \times U$ μέσω της ροής του φ

$$\varphi\left(\epsilon, (x, u)\right) = (\widetilde{x}, \widetilde{u})$$

επεκτείνεται με φυσικό τρόπο σε μία αντίστοιχη μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών $G^{(n)}$ που δρα στον n-jet χώρο $M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, με την απαίτηση ο μετασχηματισμός των παραγώγων $u^{(n)}$ να είναι οι παράγωγοι μέχρι n-οστής τάξης της $\widetilde{u}$, δηλαδή $\widetilde{u^{(n)}} = \widetilde{u}^{(n)}$. Η δράση αυτή ορίζεται από την απεικόνιση $\varphi^{(n)} : \mathbb{R} \times M^{(n)} \longrightarrow M^{(n)}$ με

$$\varphi^{(n)}\left(\epsilon, \left(x, u^{(n)}\right)\right) = \left(\widetilde{x}, \widetilde{u}^{(n)}\right)$$

και μπορούμε να της αντιστοιχίσουμε την ροή $\varphi^{(n)}$ ενός διανυσματικού πεδίου $\mathrm{v}^{(n)}$ του χώρου $M^{(n)}$ που ικανοποιεί την σχέση

$$\left.\frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \mathrm{v}^{(n)}_{\left(x, u^{(n)}\right)} \tag{1.15}$$

Το πεδίο που ορίζεται από την σχέση (1.15) ονομάζεται n-οστή *επέκταση (prolongation)* του διανυσματικού πεδίου v. Με άλλα λόγια, γνωρίζοντας το $\mathrm{v}^{(n)}$ μπορούμε να περιγράψουμε τον μετασχηματισμό του συστήματος $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$, που γεννάει η αλλαγή μεταβλητών που δίνεται από τις (1.13)-(1.14), χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\widetilde{x} \;=\; e^{\epsilon \mathrm{v}^{(n)}}(x) \tag{1.16}$$

$$\widetilde{u}^{(n)} \;=\; e^{\epsilon \mathrm{v}^{(n)}}(u^{(n)}) \tag{1.17}$$

Παράδειγμα 1.3. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής $x \in \mathbb{R}$ και μιας εξαρτημένης $u \in \mathbb{R}$, και το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v} = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$$

Η ροή του πεδίου αυτού στον $\mathbb{R}^2$, σύμφωνα με τις σχέσεις (1.13)-(1.14), είναι

$$\widetilde{x} = e^{\epsilon \mathrm{v}}(x) = \left(I + \epsilon\,\mathrm{v} + \frac{\epsilon^2}{2}\mathrm{v}^2 + \cdots\right)x = x + \epsilon x + \frac{\epsilon^2}{2}x + \cdots = xe^{\epsilon}$$

$$\widetilde{u} = e^{\epsilon \mathrm{v}}(u) = \left(I + \epsilon\,\mathrm{v} + \frac{\epsilon^2}{2}\mathrm{v}^2 + \cdots\right)u = u - \epsilon 2u + \frac{\epsilon^2}{2}4u + \cdots = ue^{-2\epsilon}$$

Δηλαδή

$$\varphi\left(\epsilon, (x, u)\right) = \left(xe^{\epsilon}, ue^{-2\epsilon}\right)$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε την παράγωγο $\widetilde{u}_{\widetilde{x}}$ συναρτήσει της παραγώγου u_x

$$\widetilde{u}_{\widetilde{x}} = \frac{d\widetilde{u}}{d\widetilde{x}} = \frac{d\widetilde{u}}{du}\,\frac{du}{dx}\left(\frac{d\widetilde{x}}{dx}\right)^{-1} = e^{-2\epsilon}\,\frac{du}{dx}\,e^{-\epsilon} = e^{-3\epsilon}u_x$$

Άρα, ο μετασχηματισμός στον $M \equiv \mathbb{R}^2$ με συντεταγμένες (x, u) επεκτείνεται σε έναν μετασχηματισμό στον $M^{(1)} \equiv \mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες (x, u, u_x), ο οποίος είναι

$$\varphi^{(1)}\left(\epsilon, (x, u, u_x)\right) = \left(xe^{\epsilon}, ue^{-2\epsilon}, u_x e^{-3\epsilon}\right)$$

Όμοια για την δεύτερη παράγωγο $\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}$

$$\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}} = \frac{d\widetilde{u}_{\widetilde{x}}}{d\widetilde{x}} = \frac{d\widetilde{u}_{\widetilde{x}}}{du_x}\,\frac{du_x}{dx}\left(\frac{d\widetilde{x}}{dx}\right)^{-1} = e^{-3\epsilon}\,\frac{du_x}{dx}\,e^{-\epsilon} = e^{-4\epsilon}u_{xx}$$

οπότε προκύπτει ο μετασχηματισμός

$$\varphi^{(2)}\left(\epsilon, (x, u, u_x, u_{xx})\right) = \left(xe^{\epsilon}, ue^{-2\epsilon}, u_x e^{-3\epsilon}, u_{xx}e^{-4\epsilon}\right)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση αυτή ως προς ϵ και θέτοντας $\epsilon = 0$

$$\left.\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = (x, -2u, -3u_x, -4u_{xx})$$

βρίσκουμε τις συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου $\mathrm{v}^{(2)}$ που γεννάει την ροή $\varphi^{(2)}$ στον $M^{(2)} \equiv \mathbb{R}^4$ με συντεταγμένες (x, u, u_x, u_{xx}). Συγκεκριμένα,

$$\mathrm{v}^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - 4u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα μπορεί να εφαρμοστεί γενικά σε οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v} = \xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i(x,u)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

που ορίζεται στον χώρο M. Θα μας δώσει, με επαγωγικό τρόπο, την n-οστή επέκταση του v στον χώρο $M^{(n)}$. Ο γενικός τύπος που προκύπτει είναι

$$\mathrm{v}^{(n)} = \xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta_i^J\left(x,u^{(n)}\right)\frac{\partial}{\partial u_J^i} \tag{1.18}$$

όπου

$$\eta_i^J\left(x,u^{(n)}\right) = \frac{d}{dx^J}\left(\eta^i - \xi^j\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) + \xi^j\frac{\partial u_J^i}{\partial x^j}$$

και

$$\frac{d}{dx^J} = \frac{d}{dx^{j_1}}\frac{d}{dx^{j_2}}\cdots\frac{d}{dx^{j_k}}$$

ο τελεστής της ολικής παραγώγισης ως προς τις μεταβλητές $x^{j_1}, x^{j_2}, \ldots, x^{j_k}$ για $k \leq n$, όπου για $k = 0$ εννοείται ο ταυτοτικός τελεστής I. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η n-οστή επέκταση $\mathrm{v}^{(n)}$ του πεδίου v μπορεί να ειδωθεί κι ως η πρώτη επέκταση του πεδίου $\mathrm{v}^{(n-1)}$, όπως ακριβώς η n-οστή παράγωγος μιας συνάρτησης είναι η παράγωγος της $(n-1)$-οστής παραγώγου. Γι' αυτό και στην πράξη ο υπολογισμός των συνιστωσών η_i^J γίνεται τελικά βήμα-βήμα, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική σχέση

$$\eta_i^J = \frac{d\eta_i^{J/k}}{dx^{j_k}} - \frac{d\xi^j}{dx^{j_k}}\frac{\partial u_{J/k}^i}{\partial x^j} \tag{1.19}$$

όπου $J/k = (j_1, \ldots, j_{k-1})$. Στην περίπτωση μιας ανέξαρτητης μεταβλητής x και μιας εξαρτημένης u η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$\eta^{(k)} = \frac{d\eta^{(k-1)}}{dx} - \frac{d\xi}{dx}\frac{d^k u}{dx^k} \tag{1.20}$$

Είναι ίσως προτιμότερο στο σημείο αυτό να δούμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα, προκειμένου να αποφύγουμε τις όποιες συγχύσεις προκαλεί ο παραπάνω συμβολισμός.

Παράδειγμα 1.4. Ας εξετάσουμε την περίπτωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x και t, και μιας εξαρτημένης u. Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v} = \xi\,(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial x} + \tau\,(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial t} + \eta\,(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial u}$$

Η πρώτη επέκταση του πεδίου αυτού είναι

$$\mathrm{v}^{(1)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t}$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t}$$

όπου, σύμφωνα με την (1.19),

$$\eta^x = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dx} u_x - \frac{d\tau}{dx} u_t = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)\, u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t$$

$$\eta^t = \frac{d\eta}{dt} - \frac{d\xi}{dt} u_x - \frac{d\tau}{dt} u_t = \eta_t + (\eta_u - \tau_t)\, u_t - \xi_t u_x - \tau_u u_t^2 - \xi_u u_x u_t$$

Όμοια, η δεύτερη επέκταση είναι

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{(1)} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}$$

όπου, για παράδειγμα

$$\begin{aligned} \eta^{xx} &= \frac{d\eta^x}{dx} - \frac{d\xi}{dx} u_{xx} - \frac{d\tau}{dx} u_{xt} \\ &= \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})\, u_x - \tau_{xx} u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})\, u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 - \\ &\quad -\tau_{uu} u_x^2 u_t + (\eta_u - 2\xi_x)\, u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt} \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε ανεβαίνοντας τάξεις, ο υπολογισμός των συνιστωσών των επεκταμένων διανυσματικών πεδίων γίνεται όλο και πιο περίπλοκος. Για παράδειγμα το στοιχείο η^{xxx} της τρίτης επέκτασης είναι

$$\begin{aligned} \eta^{xxx} &= \frac{d\eta^{xx}}{dx} - \frac{d\xi}{dx} u_{xxx} - \frac{d\tau}{dx} u_{xxt} \\ &= \eta_{xxx} + (3\eta_{xxu} - \xi_{xxx})\, u_x - \tau_{xxx} u_t + (3\eta_{xuu} - 3\xi_{xxu})\, u_x^2 - 3\tau_{xxu} u_x u_t + (\eta_{uuu} - 3\xi_{xuu})\, u_x^3 \\ &\quad -3\tau_{xuu} u_x^2 u_t - \xi_{uuu} u_x^4 - \tau_{uuu} u_x^3 u_t + 3\,(\eta_{xu} - \xi_{xx})\, u_{xx} - 3\tau_{xx} u_{xt} + 3\,(\eta_{uu} - 2\xi_{xu})\, u_x u_{xx} \\ &\quad -3\tau_{xu} u_t u_{xx} - 6\tau_{xu} u_x u_{xt} - 6\xi_{uu} u_x^2 u_{xx} - 3\tau_{uu} u_x u_t u_{xx} - 3\tau_{uu} u_x^2 u_{xt} - 3\xi_u u_{xx}^2 - 3\tau_u u_{xx} u_{xt} \\ &\quad + (\eta_u - 3\xi_x)\, u_{xxx} - 3\tau_x u_{xxt} - 4\xi_u u_x u_{xxx} - 3\tau_u u_x u_{xxt} - \tau_u u_t u_{xxx} \end{aligned}$$

1.4 Ομάδες συμμετρίας

Οι μετασχηματισμοί που περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους απεικονίζουν ένα τυχαίο σημείο (x, u) σε κάποιο άλλο $(\widetilde{x}, \widetilde{u})$ και προέρχονται από την δράση μιας ομάδας Lie στην πολλαπλότητα $X \times U$. Γι' αυτό ονομάζονται *σημειακοί μετασχηματισμοί Lie (Lie point transformations)*. Από δω και στο εξής με τον όρο ομάδα μετασχηματισμών θα εννοούμε μια ομάδα σημειακών μετασχηματισμών Lie.

Ορισμός 1. *Μία τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο M του χώρου $X \times U$ των ανεξάρτητων κι εξαρτημένων μεταβλητών ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$, με την ιδιότητα, αν η $u = f(x)$ είναι μία λύση του συστήματος, τότε και η $\widetilde{u} = \widetilde{f}(\widetilde{x})$ αποτελεί επίσης λύση του συστήματος, ονομάζεται ομάδα συμμετρίας του συστήματος.*

Ας δούμε τις συνέπειες του παραπάνω ορισμού, προκειμένου να βρούμε έναν τρόπο να τις υπολογίζουμε. Έστω ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v} = \xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i(x,u)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

γεννάει μία ομάδα συμμετρίας, οπότε σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, αν $u = f(x)$ είναι μία λύση του συστήματος $\Delta_\nu\big(x, u^{(n)}\big) = 0$, τότε και η $\widetilde{u} = \widetilde{f}(\widetilde{x})$ είναι επίσης λύση του, όπου $\widetilde{x}, \widetilde{u}$ δίνονται από τις (1.13) $-$ (1.14). Σύμφωνα με την (1.4) θα πρέπει

$$\widetilde{\Delta}_\nu\Big(\widetilde{x}, \widetilde{u}^{(n)}\Big) = 0$$

Παραγωγίζοντας ως προς ϵ και θέτοντας $\epsilon = 0$ παίρνουμε

$$\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^j}\left.\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u^i_J}\left.\frac{\partial \widetilde{u}^i_J}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$$

Από τον ορισμό (1.15) και σε συνδυασμό με την (1.18), η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\xi^j\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^j} + \eta^J_i\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u^i_J} = 0 \qquad \text{ή} \qquad \mathrm{v}^{(n)}(\Delta_\nu) = 0$$

Άρα καταλήξαμε στο συμπέρασμα, ότι όταν ένα διανυσματικό πεδίο v γεννάει μία ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$, τότε ισχύει $\mathrm{v}^{(n)}(\Delta) = 0$ όταν $\Delta = 0$. Φυσικά εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι το αντίστροφο, δηλαδή να βρούμε μία αναγκαία συνθήκη για τον προσδιορισμό των συμμετριών ενός συστήματος.

Έστω λοιπόν v ένα διανυσματικό πεδίο του $X \times U$ για το οποίο ισχύει $\mathrm{v}^{(n)}(\Delta_\nu) = 0$ για κάθε λύση του συστήματος $u = f(x)$, δηλαδή όταν $\Delta_\nu = 0$. Εισάγουμε για ευκολία την μεταβλητή $z = \big(x, u^{(n)}\big)$, η οποία εκφράζει ένα σημείο του χώρου $M^{(n)}$ με τοπικές συντεταγμένες $\big(z^1, \ldots, z^m\big)$, όπου m η διάσταση του $M^{(n)}$ και $z^\mu = \big(x^j, u^i_J\big)$ για $\mu = 1, \ldots, m$. Εάν η τάξη (rank) του Ιακωβιανού $l \times m$ πίνακα

$$\mathrm{J}_\Delta = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial z^\mu}\right)$$

είναι ίση με l όταν $\Delta(z) = 0$, το σύστημα ονομάζεται *μεγίστου βαθμού.* Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων, μπορούμε τοπικά παντού να λύσουμε το σύστημα

$$\Delta_\nu\big(z^1, \ldots, z^m\big) = 0$$

ως προς l από τις μεταβλητές z^{μ} συναρτήσει των υπολοίπων $m-l$, δηλαδή

$$z^{\mu_{\nu}} = f_{\nu}\left(z^{\mu_{l+1}}, \ldots, z^{\mu_m}\right), \qquad \nu = 1, \ldots, l$$

Επειδή $\mathrm{v}^{(n)} \neq 0$, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλες συντεταγμένες $\left(y^1, \ldots, y^m\right)$ στις οποίες η επέκταση του διανυσματικού πεδίου v εκφράζεται ως

$$\mathrm{v}^{(n)} = \frac{\partial}{\partial y^1}$$

όπου y^1 κάποια από τις μεταβλητές $z^{\mu_{l+1}}, \ldots, z^{\mu_m}$. Έτσι η αρχική μας υπόθεση μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί ως

$$\frac{\partial f_{\nu}}{\partial y^1} = 0$$

όταν $y = \left(y^1, y^2, \ldots, y^m\right)$ είναι μία λύση του συστήματος, $\Delta\left(y\right) = 0$. Επειδή οι συναρτήσεις f_{ν} δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή y^1, τότε και ο μετασχηματισμός $\widetilde{y} = \left(y^1 + \epsilon, y^2, \ldots, y^m\right)$, που γεννάει το διανυσματικό πεδίο v, και κατ' επέκταση το $\mathrm{v}^{(n)}$, αποτελεί επίσης λύση του συστήματος. Άρα το σύστημα έχει μία ομάδα συμμετρίας, η ύπαρξη της οποίας σύμφωνα με τον ορισμό 1 είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε.

Προφανώς τα παραπάνω συμπεράσματα δεν περιορίζονται σε μονοπαραμετρικές ομάδες συμμετριών, αφού την ίδια πορεία μπορούμε να ακολουθήσουμε για κάθε απειροστικό γεννήτορα v_i μιας r-παραμετρικής ομάδας. Επομένως καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1. *Έστω $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$ ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων μεγίστου βαθμού. Ένα διανυσματικό πεδίο* v *γεννάει μία ομάδα συμμετρίας του συστήματος αν και μόνο αν $\mathrm{v}^{(n)}(\Delta) = 0$ όταν $\Delta = 0$.*

Το παραπάνω θεώρημα είναι το κριτήριο που μας επιτρέπει να βρούμε όλες τις συμμετρίες μιας διαφορικής εξίσωσης, να βρούμε δηλαδή την πιο γενική ομάδα συμμετρίας που επιδέχεται το σύστημα. Ας σημειώσουμε ότι, η απαίτηση $\mathrm{v}^{(n)}(\Delta) = 0$ θέλουμε να ισχύει μόνο για λύσεις του συστήματος. Επιπλέον, μία λύση $\Delta_{\nu} = 0$ δεν ικανοποιεί μόνο τις εξισώσεις που το αποτελούν, αλλά και εκείνες που προκύπτουν παραγωγίζοντάς τις ως προς οποιεσδήποτε ανεξάρτητες μεταβλητές $x^{j_1}, \ldots, x^{j_k}$, δηλαδή και τα συστήματα

$$\frac{d\Delta_{\nu}}{dx^J} = 0$$

Παράδειγμα 1.5. Έστω η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} - u^2$$

Η δεύτερη επέκταση του διανυσματικού πεδίου

$$\mathrm{v} = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}\ ,$$

που είδαμε στο παράδειγμα 1.3, είναι ίση με

$$\mathrm{v}^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3u_x\frac{\partial}{\partial u_x} - 4u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{v}^{(2)}\left(u_{xx} - \frac{u_x^2}{u} + u^2\right) = -4u_{xx} - 3u_x\left(-\frac{2u_x}{u}\right) - 2u\left(\frac{u_x^2}{u^2} + 2u\right) = -4\left(u_{xx} - \frac{u_x^2}{u} + u^2\right)$$

και άρα

$$\mathrm{v}^{(2)}\left(u_{xx} - \frac{u_x^2}{u} + u^2\right) = 0, \quad \text{όταν} \quad u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} - u^2$$

Επομένως το πεδίο v γεννάει μία ομάδα συμμετρίας της εξίσωσης.

Αν θέλουμε όμως να βρούμε όλες τις συμμετρίες της, θα πρέπει να εργαστούμε αντίστροφα, να απαιτήσουμε δηλαδή το τυχαίο διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v} = \xi\,(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta\,(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u}$$

να ικανοποιεί την συνθήκη του θεωρήματος 1

$$\mathrm{v}^{(2)}\left(u_{xx} - \frac{u_x^2}{u} + u^2\right) = 0 \quad \text{όταν} \quad u_{xx} = \frac{u_x^2}{u} - u^2$$

Από την (1.18) έπεται ότι

$$\mathrm{v}^{(2)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}$$

ενώ η (1.20) μας δίνει

$$\eta^x = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dx}u_x$$
$$\eta^{xx} = \frac{d\eta^x}{dx} - \frac{d\xi}{dx}u_{xx}$$

Περιορίζοντας το παράδειγμα 1.4 στην περίπτωση μιας ανεξάρτητης και μιας εξαρτημένης μεταβλητής, θεωρώντας δηλαδή $\tau = 0$, $u_t = 0$, παίρνουμε την αναλυτική έκφραση των η^x και η^{xx}. Αντικαθιστώντας και την u_{xx} από την έκφραση $u_x^2/u - u^2$, μεβάση την ίδια την εξίσωση, η παραπάνω συνθήκη γίνεται

$$\left(-\xi_{uu} - \frac{\xi_u}{u}\right)u_x^3 + \left(\frac{\eta}{u^2} - \frac{\eta_u}{u} + \eta_{uu} - 2\xi_{xu}\right)u_x^2 + \left(-\frac{2\eta_x}{u} + 2\eta_{xu} - \xi_{xx} + 3\xi_u u^2\right)u_x +$$
$$+ \left(2\eta u + \eta_{xx} - \eta_u u^2 + 2\xi_x u^2\right) = 0$$

Οι συναρτήσεις ξ και η εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές x, u κι όχι από την u_x, άρα η παραπάνω εξίσωση, που ισχύει για κάθε u_x, είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned}
-\xi_{uu} - \frac{\xi_u}{u} &= 0 \\
\frac{\eta}{u^2} - \frac{\eta_u}{u} + \eta_{uu} - 2\xi_{xu} &= 0 \\
-\frac{2\eta_x}{u} + 2\eta_{xu} - \xi_{xx} + 3\xi_u u^2 &= 0 \\
2\eta u + \eta_{xx} - \eta_u u^2 + 2\xi_x u^2 &= 0
\end{aligned}$$

Ξεκινώντας απ' την πρώτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος, βρίσκουμε

$$u\xi_{uu} + \xi_u = 0 \;\Rightarrow\; u\xi_u = f_1(x) \;\Rightarrow\; \boxed{\xi = f_1(x)\ln u + f_2(x)}$$

Αντικαθιστούμε την έκφραση αυτή για την ξ στην δεύτερη, για να βρούμε, βήμα-βήμα, ότι

$$\eta_{uu} - \frac{\eta_u u - \eta}{u^2} - \frac{2f_1'(x)}{u} = 0 \quad\Rightarrow\quad \eta_u - \frac{\eta}{u} - 2f_1'(x)\ln u = f_3(x) \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\eta_u u - \eta}{u^2} - 2f_1'(x)\frac{\ln u}{u} = \frac{f_3(x)}{u} \quad\Rightarrow\quad \frac{\eta}{u} - f_1'(x)\ln^2 u = f_3(x)\ln u + f_4(x) \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\eta = f_1'(x)u\ln^2 u + f_3(x)u\ln u + f_4(x)u}$$

Έπειτα αντικαθιστούμε τις ξ και η στην τρίτη των εξισώσεων του συστήματος, οπότε καταλήγουμε στην

$$3f_1''(x)\ln u + 3f_1(x)u + 2f_3'(x) - f_2''(x) = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται όταν οι συντελεστές των συναρτήσεων της u μηδενίζονται, οπότε καταλήγουμε στις

$$\boxed{f_1(x) = 0} \quad \text{και} \quad f_2'(x) = 2f_3(x) + c_1,$$

όπου c_1 αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Τέλος, από όλες αυτές τις σχέσεις που βρήκαμε, η τέταρτη γίνεται

$$f_3(x)u^2\ln u + f_3''(x)u\ln u + \left(f_4(x) + 3f_3(x) + 2c_1\right)u^2 + f_4''(x)u = 0$$

οπότε, όπως και πριν, παίρνουμε

$$\boxed{f_3(x) = 0} \quad \text{και} \quad \boxed{f_4(x) = -2c_1} \quad \text{κι άρα και} \quad \boxed{f_2(x) = c_1x + c_2}$$

όπου c_2 επίσης αυθαίρετη πραγματική σταθερά. Τελικά η γενική λύση του συστήματος των καθοριστικών εξισώσεων είναι

$$\begin{aligned}
\xi\,(x,u) &= c_1x + c_2 \\
\eta\,(x,u) &= -2c_1u
\end{aligned}$$

Δηλαδή κάθε πεδίο της μορφής

$$\mathrm{v} = (c_1 x + c_2)\frac{\partial}{\partial x} - 2c_1 u \frac{\partial}{\partial u}$$

γεννάει μία ομάδα συμμετρίας της εξίσωσης. Με άλλα λόγια το σύστημα επιδέχεται μία 2-παραμετρική ομάδα συμμετρίας, της οποίας η άλγεβρα παράγεται από τα διανυσματικά πεδία

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \mathrm{v}_2 &= x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί, δηλαδή οι μονοπαραμετρικές ομάδες που γεννάνε, είναι οι

$$\begin{aligned} G_1 &: (\widetilde{x}, \widetilde{u}) \longmapsto (x + \epsilon, u) \\ G_2 &: (\widetilde{x}, \widetilde{u}) \longmapsto \left(e^{\epsilon} x, e^{-2\epsilon} u\right) \end{aligned}$$

Άρα, αν $u = f(x)$ είναι μία λύση της εξίσωσης, τότε είναι και οι

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x - \epsilon) \\ u_2 &= e^{-2\epsilon} f\left(e^{-\epsilon} x\right) \end{aligned}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε τις συμμετρίες μιας διαφορικής εξίσωσης ή γενικότερα ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Η όλη διαδικασία αποτελείται ουσιαστικά από τα παρακάτω βήματα : (i) Εφαρμόζουμε την συνθήκη $\mathrm{v}^{(n)}(\Delta) = 0$ του θεωρήματος 1. (ii) Απλοποιούμε, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς $\Delta = 0$ μεταξύ των παραγώγων. (iii) Έπειτα, εξισώνουμε τους συντελεστές των παραγώγων με το μηδέν (αφού οι συναρτήσεις ξ και η εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές x, u κι όχι από τις παραγώγους της u), οπότε καταλήγουμε σε ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, που ονομάζονται *καθοριστικές εξισώσεις (determining equations)* της ομάδας συμμετρίας του Δ. (iv) Τέλος, λύνουμε το σύστημα αυτό, για να βρούμε την γενικότερη μορφή των συντελεστών ξ και η του διανυσματικού πεδίου v, κι άρα και την γενικότερη ομάδα συμμετρίας του συστήματος.

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα υπολογισμού της ομάδας συμμετρίας μιας εξίσωσης που, αυτή τη φορά, να περιέχει μερικές παραγώγους.

Παράδειγμα 1.6. Μία εξίσωση, που θα χρησιμοποιήσουμε ως «οδηγό» και στα επόμενα κεφάλαια για την ανάπτυξη διαφόρων εννοιών, είναι η *εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV)*,

$$u_t = u_{xxx} + u u_x$$

Αν και βρίσκει αρκετές εφαρμογές, περιγράφοντας τον τρόπο διάδοσης (συνήθως υδάτινων, αλλά και ηχητικών) κυμάτων σε διάφορα φυσικά προβλήματα, παρουσιάζει, όπως θα δούμε παρακάτω, περισσότερο ενδιαφέρον από μαθηματική σκοπιά.

Για να βρούμε την ομάδα συμμετρίας της, θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v} = \xi\,(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial x} + \tau\,(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial t} + \eta\,(x,t,u)\,\frac{\partial}{\partial u}$$

κι απαιτούμε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1, να ισχύει η συνθήκη:

$$\mathrm{v}^{(3)}(u_t - u_{xxx} - uu_x) = 0 \quad \text{όταν} \quad u_t = u_{xxx} + uu_x$$

Η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$\eta^t - \eta^{xxx} - \eta u_x - \eta^x u = 0$$

όπου τα $\eta^x, \eta^t, \eta^{xxx}$ έχουν ήδη υπολογιστεί στο παράδειγμα 1.4. Από την ίδια την εξίσωση αντικαθιστούμε την u_t, καθώς επίσης και τις παραγώγους της

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u_{xxxx} + u_x^2 + uu_{xx} \\ u_{xxt} &= u_{xxxxx} + 3u_xu_{xx} + uu_{xxx} \end{aligned}$$

Τελικά παίρνουμε το παρακάτω σύστημα καθοριστικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \tau_u &= 0 \\ \tau_x &= 0 \\ \xi_u &= 0 \\ \eta_{uu} &= 0 \\ \eta_{xu} - \xi_{xx} &= 0 \\ \tau_t - 3\xi_x &= 0 \\ \eta + \xi_t + 2\,(u\xi_x + \eta_{xxu}) &= 0 \\ -\eta_t + u\eta_x + \eta_{xxx} &= 0 \end{aligned}$$

Απ' τις πρώτες δύο εξισώσεις αυτού του συστήματος, συμπεραίνουμε ότι

$$\tau = f_1(t)$$

ενώ απ' την τρίτη και την έκτη καταλήγουμε στην

$$\xi = \frac{1}{3}f_1'(t)\,x + f_2(t)$$

Αυτή σε συνδυασμό με την τέταρτη και την πέμπτη εξίσωση του συστήματος μας δίνουν

$$\eta = \left(\frac{1}{3}f_1'(t) + f_3(t)\right) u + f_4(x,t)$$

Αντικαθιστώντας τις ξ και η που βρήκαμε, στην έβδομη

$$\left(f_1'(t) + f_3(t)\right) u + \frac{1}{3}f_1''(t)x + f_4(x,t) + f_2'(t) = 0$$

καταλήγουμε στις

$$f_1(t) = c_1 t + c_2, \qquad f_3(t) = -c_1, \qquad f_4(t) = -f_2'(t)$$

Τέλος απ' την τελευταία,

$$-f_2''(t) = 0,$$

παίρνουμε

$$f_2(t) = c_3 t + c_4$$

όπου c_1, c_2, c_3, c_4 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Κάνοντας και την αντικατάσταση $c_1 \to 3c_1$, τελικά βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\xi\,(x,t,u) &= c_1 x + c_3 t + c_4 \\
\tau\,(x,t,u) &= 3c_1 t + c_2 \\
\eta\,(x,t,u) &= -2c_1 u - c_3
\end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση KdV επιδέχεται μία 4-παραμετρική ομάδα συμμετρίας, η οποία παράγεται από τα διανυσματικά πεδία

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\
\mathrm{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\mathrm{v}_3 &= t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u} \\
\mathrm{v}_4 &= x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}
\end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες μονοπαραμετρικές ομάδες είναι

$$\begin{aligned}
G_1 &: \left(\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{u}\right) \longmapsto (x + \epsilon, t, u) \\
G_2 &: \left(\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{u}\right) \longmapsto (x, t + \epsilon, u) \\
G_3 &: \left(\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{u}\right) \longmapsto (x + \epsilon\, t, t, u - \epsilon) \\
G_4 &: \left(\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{u}\right) \longmapsto \left(e^{\epsilon} x, e^{3\epsilon} t, e^{-2\epsilon} u\right)
\end{aligned}$$

Άρα, αν $u = f(x)$ είναι μία λύση της εξίσωσης, τότε είναι και οι

$$\begin{aligned} u_1 &= f(x-\epsilon, t) \\ u_2 &= f(x, t-\epsilon) \\ u_3 &= f(x-\epsilon t, t) - \epsilon \\ u_4 &= e^{-2\epsilon} f\left(e^{-\epsilon}x, e^{-3\epsilon}t\right) \end{aligned}$$

Αν αποδώσουμε στην μεταβλητή x την έννοια του χώρου και στην μεταβλητή t την έννοια του χρόνου, τότε οι ομάδες G_1 και G_2 αντιπροσωπεύουν την συμμετρία της εξίσωσης κάτω από χωρικές και χρονικές μετατοπίσεις αντίστοιχα. Η ομάδα συμμετρίας G_3, αν θεωρήσουμε ότι η u εκφράζει ταχύτητα, είναι ένα είδος μετασχηματισμού Γαλιλαίου, για ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα ϵ ως προς αδρανειακό παρατηρητή, ενώ τέλος η G_4 αντιστοιχεί σε συμμετρία της εξίσωσης κάτω από αλλαγές κλίμακας.

Όπως είπαμε, μία συμμετρία μιας διαφορικής εξίσωσης εξ ορισμού μετασχηματίζει μία λύση της σε μία άλλη. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τις συμμετρίες, όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, για να κατασκευάσουμε νέες λύσεις $\widetilde{u} = \widetilde{f}(\widetilde{x})$ από ήδη γνωστές $u = f(x)$. Προφανώς, αυτή η μέθοδος κατασκευής λύσεων έχει το μειονέκτημα, ότι θα πρέπει να 'χουμε ήδη βρει κάποια λύση. Επιπλέον, αν οι συμμετρίες που βρήκαμε είναι συνηθισμένοι μετασχηματισμοί, όπως μετατοπίσεις ή διαστολές, οι καινούριες λύσεις ποιοτικά δεν διαφερούν απ' τις παλιές.

Υπάρχει ένας άλλος τρόπος να χειριστούμε την πληροφορία μιας συμμετρίας, που αν και διαφοροποιείται από τις συνήθεις στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, στην ουσία είναι ο ίδιος. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην έννοια του αναλλοίωτου και για τις μεν συνήθεις μας οδηγεί προς την ολοκλήρωσή τους, για τις δε μερικές στην εύρεση ειδικού τύπου λύσεων.

1.5 Ολοκλήρωση συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Όπως είναι γνωστό κάθε συνήθης διαφορική εξίσωση n-οστής τάξης μπορεί να μετατραπεί σε ένα σύστημα n συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Έτσι, το γενικό σύστημα που έχουμε θεωρήσει, $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$, και για το οποίο έχουμε απαιτήσει να είναι μεγίστου βαθμού, στην περίπτωση της μιας ανεξάρτητης μεταβλητής x θα είναι και αυτό ισοδύναμο προς κάποιον αριθμό συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{du}{dx} = F(x, u) \tag{1.21}$$

όπου x η ανεξάρτητη μεταβλητή και $u = \left(u^1, \ldots, u^q\right)$ οι εξαρτημένες, ενώ F ομαλή διανυσματική συνάρτηση που ορίζεται στον χώρο $X \times U$. Έστω v ο απειροστικός γεννήτορας μιας μονοπαραμετρικής ομάδας συμμετρίας του συστήματος (1.21). Σε κάθε σημείο (x, u) όπου $\mathrm{v} \neq 0$ μπορούμε να μεταβούμε σε νέες συντεταγμένες (y, w), έτσι ώστε

$$\mathrm{v} = \frac{\partial}{\partial w^1}$$

Το σύστημα σε αυτές τις συντεταγμένες παίρνει την μορφή

$$\frac{dw}{dy} = G\left(y, w\right)$$

ενώ $\mathrm{v}^{(n)} = \mathrm{v}$. Άρα το κριτήριο συμμετρίας του θεωρήματος 1 έκφράζεται τώρα ως εξής

$$\mathrm{v}^{(1)}\left(\frac{dw^i}{dy} - G_i(y, w)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial G_i}{\partial w^1} = 0$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις G_i δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή w^1, οπότε τελικά έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
\frac{dw^1}{dy} &= G_1(y, w^2, \ldots, w^q) \\
\frac{dw^2}{dy} &= G_2(y, w^2, \ldots, w^q) \\
&\vdots \\
\frac{dw^q}{dy} &= G_q(y, w^2, \ldots, w^q)
\end{aligned}$$

Οι τελευταίες $(q-1)$ εξισώσεις λύνονται ανεξάρτητα από την πρώτη, κι αφού λυθούν, τότε η πρώτη λύνεται με μία απλή ολοκλήρωση

$$w^1 = \int G_1(y, w^2, \ldots, w^q) dy$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι *η ύπαρξη μιας μονοπαραμετρικής ομάδας συμμετρίας ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης υποβιβάζει την τάξη του κατά ένα.*

Παράδειγμα 1.7. Είχαμε δει νωρίτερα ότι η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - u^2$$

έχει μία μονοπαραμετρική ομάδα συμμετρίας που γεννιέται από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v}_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως ένα σύστημα δεύτερης τάξης

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= v \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{v^2}{u} - u^2 \end{aligned}$$

οπότε το v_2 αντίστοιχα εκφράζεται

$$\mathrm{v}_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3v\frac{\partial}{\partial v}$$

Ζητάμε νέες μεταβλητές (y, w, z) στις οποίες το πεδίο αυτό να παίρνει την μορφή

$$\mathrm{v}_2 = \frac{\partial}{\partial w}$$

Με βάση τις συνθήκες $\mathrm{v}_2\,(y) = \mathrm{v}_2\,(z) = 0$ και $\mathrm{v}_2\,(w) = 1$, κάνουμε την επιλογή

$$\begin{aligned} y &= ux^2 \\ w &= \ln x \\ z &= vx^3 \end{aligned}$$

στις οποίες το σύστημα παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dy} &= \frac{1}{2y + z} \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{z^2 - y^3 + 3zy}{y\,(2y + z)} \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε, η δεύτερη εξίσωση λύνεται ως προς z ανεξάρτητα της πρώτης, κι αντικαθιστώντας την λύση που θα βρούμε στην πρώτη, η w έπειτα υπολογίζεται απλά ολοκληρώνοντας. Άρα πράγματι η τάξη του συστήματος μειώθηκε κατά ένα, αφού αρκεί να λύσουμε μία εξίσωση πρώτης τάξης για να βρούμε την γενική λύση του συστήματος.

Είναι λογικό να περιμένει κανείς πως η ύπαρξη μιας r-παραμετρικής ομάδας συμμετρίας θα υποβιβάζει αντίστοιχα την τάξη ενός συστήματος κατά r. Όμως, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει πάντα. Ας θυμηθούμε ότι για την διαφορική εξίσωση του προηγούμενου παραδείγματος είχαμε βρει μία 2-παραμετρική ομάδα συμμετρίας στο παράδειγμα 1.5. Όταν μειώσαμε την τάξη του συστήματος, χρησιμοποιώντας την μία συμμετρία, καταλήξαμε σε ένα άλλο, στο οποίο η πληροφορία της δεύτερης είχε χαθεί.

Η έννοια που χρειαζόμαστε για να αποφύγουμε τέτοιου είδους περιπτώσεις είναι εκείνη της *επιλύσιμης* ομάδας συμμετρίας. Μία r-διάστατη ομάδα Lie είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η αντίστοιχη άλγεβρα Lie διαθέτει μία βάση $\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_r\}$ τέτοια ώστε

$$[\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j] = \sum_{k=1}^{j-1} c_{ij}^k \, \mathrm{v}_k \qquad \text{για} \qquad i < j \tag{1.22}$$

Ας σημειώσουμε ότι κάθε *αβελιανή* άλγεβρα Lie, δηλαδή μία άλγεβρα Lie για την οποία η αγκύλη Lie είναι πάντα μηδέν, όπως και κάθε δισδιάστατη άλγεβρα Lie είναι πάντα επιλύσιμη. *Αν λοιπόν η άλγεβρα Lie της r-παραμετρικής ομάδας συμμετρίας του συστήματος (1.21) είναι επιλύσιμη, τότε μπορούμε να υποβιβάσουμε την τάξη του κατά r.* Για να το πετύχουμε, ξεκινάμε τον υποβιβασμό χρησιμοποιώντας το v_1, έπειτα το v_2, και συνεχίζουμε με αυτή την σειρά μέχρι και το v_r. Η σχέση (1.22) ουσιαστικά μας εξασφαλίζει ότι η r-παραμετρική ομάδα μετασχηματισμών Lie του συστήματος χωρίζεται σε r μονοπαραμετρικές υποομάδες μετασχηματισμών, κάθε μία από τις οποίες δρα ανεξάρτητα από την επόμενη. Έτσι, ακολουθώντας την σειρά αυτή, που ενδέχεται να μην είναι και μοναδική, διατηρούνται σε κάθε βήμα οι υπόλοιπες συμμετρίες και στο υποβιβασμένο σύστημα.

Παράδειγμα 1.8. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα (1.7), υπολογίζουμε την αγκύλη Lie των δύο διανυσματικών πεδίων

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \mathrm{v}_2 &= x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} - 3v\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

που γεννάνε την 2-παραμετρική ομαδά συμμετρίας του συστήματος, οπότε βρίσκουμε

$$[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = \mathrm{v}_1$$

Άρα ξεκινάμε τον υποβιβασμό χρησιμοποιώντας το v_1, η συμμετρία του οποίου εκφράζει το γεγονός ότι το σύστημα είναι αυτόνομο. Το πεδίο αυτό είναι ήδη στην ζητούμενη μορφή, οπότε χρησιμοποιούμε τις ίδιες μεταβλητές, θεωρώντας όμως τις x και v ως συναρτήσεις της u. Έτσι μεταβαίνουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{1}{v} \\ \frac{dv}{du} &= \frac{v}{u} - \frac{u^2}{v} \end{aligned}$$

που είναι μιας τάξης μικρότερης του αρχικού.

Συνεχίζουμε με το διανυσματικό πεδίο v_2, το οποίο πράγματι εξακολουθεί να αποτελεί συμμετρία του συστήματος. Δηλαδή,

$$\mathrm{v}_2^{(1)}\left(x_u - \frac{1}{v}\right) = 0 \qquad \text{όταν} \qquad x_u - \frac{1}{v} = 0$$

$$\mathrm{v}_2^{(1)}\left(v_u - \frac{v}{u} - \frac{u^2}{v}\right) = 0 \qquad \text{όταν} \qquad v_u - \frac{v}{u} - \frac{u^2}{v} = 0$$

όπου η πρώτη επέκταση του ως προς αυτές τις νέες μεταβλητές είναι

$$\mathrm{v}_2^{(1)} = -2u\frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial x} - 3v\frac{\partial}{\partial v} + 3x_u\frac{\partial}{\partial x_u} - v_u\frac{\partial}{\partial v_u}$$

Αλλάζοντας τις u, v σε

$$\begin{aligned} y &= \frac{u^3}{v^2} \\ w &= -\frac{\ln u}{2} \end{aligned}$$

έτσι ώστε $\mathrm{v}_2\left(y\right) = 0$ και $\mathrm{v}_2\left(w\right) = 1$, το σύστημα παίρνει τελικά την μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{e^w}{\sqrt{y}\left(2y+1\right)} \\ \frac{dw}{dy} &= -\frac{1}{2y\left(2y+1\right)} \end{aligned}$$

και μπορεί να λυθεί απευθείας. Τελικά, χρησιμοποιώντας την επιλύσιμη δισδιάστατη ομάδα συμμετρίας με την συγκεκριμένη σειρά των γεννητόρων της, καταφέραμε να υποβιβάσουμε την τάξη του συστήματος κατά δύο.

Τώρα μπορούμε να βρούμε την λύση του συστήματος απλά ολοκληρώνοντας. Από την δεύτερη εξίσωση, βρίσκουμε

$$w = \ln\left(\frac{2y+1}{c_1^2 y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Έπειτα, αντικαθιστούμε την w στην πρώτη και ολοκληρώνουμε, οπότε

$$x = \frac{1}{c_1}\ln\frac{\sqrt{2y+1}-1}{\sqrt{2y+1}+1} + c_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2e^{c_1(x-c_2)}}{\left(1-e^{c_1(x-c_2)}\right)^2}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό, έχουμε

$$u = e^{-2w} = c_1^2\frac{y}{2y+1} = \frac{2c_1^2 e^{c_1(x-c_2)}}{\left(1+e^{c_1(x-c_2)}\right)^2}$$

κι αν κάνουμε την αντικατάσταση $c_1 \to 2c_1$, βρίσκουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι η

$$u = 2\,c_1^2\,\mathrm{sech}^2(c_1(x-c_2))$$

1.6 Αναλλοίωτες λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων

Για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, συχνά αναγκαζόμαστε να καταφύγουμε σε μία υπόθεση εργασίας (ansatz), αδυνατώντας να βρούμε την γενική λύση. Το γεγονός αυτό δεν είναι τόσο απογοητευτικό όσο ακούγεται, καθώς αυτές οι ειδικού τύπου λύσεις μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για την ασυμπτωτική ή ακόμα και την κυρίαρχη συμπεριφορά της γενικής λύσης, ενώ κι από φυσική άποψη μπορεί να έχουν μεγάλη σημασία. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η αναζήτηση οδευόντων κυμάτων στις κυματικές εξισώσεις, καθώς και η γνωστή μέθοδος χωρισμού μεταβλητών. Η ανάλυση μέσω συμμετριών θα μπορούσαμε να πούμε πως μας βοηθάει στο να κάνουμε τις σωστές υποθέσεις. Μας επιτρέπει δηλαδή να προσδιορίσουμε εκ των προτέρων την μορφή ορισμένων οικογενειών λύσεων που επιδέχεται η εξίσωσή μας.

Ακολουθώντας την ίδια γραμμή με την προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε τώρα ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων

$$\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$$

κι έστω v ο απειροστικός γεννήτορας μιας μονοπαραμετρικής ομάδας συμμετρίας του συστήματος. Σε κάθε σημείο (x, u) όπου $\mathrm{v} \neq 0$ μπορούμε να μεταβούμε σε νέες συντεταγμένες (y, w), έτσι ώστε

$$\mathrm{v} = \frac{\partial}{\partial y^1}$$

οπότε $\mathrm{v}^{(n)} = \mathrm{v}$. Η συνθήκη συμμετρίας του ισοδύναμου συστήματος

$$\widetilde{\Delta}\left(y, w^{(n)}\right) = 0$$

εκφράζεται τώρα ως εξής

$$\mathrm{v}^{(n)}\left(\widetilde{\Delta}_\nu\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \widetilde{\Delta}_\nu}{\partial y^1} = 0$$

Το γεγονός ότι στο σύστημα αυτό δεν εμφανίζεται ρητά η μεταβλητή y^1, μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές w δεν εξαρτώνται από αυτήν. Έτσι, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι, αυτή η υπόθεση εργασίας δεν θα αποδειχθεί λανθασμένη για το σύστημα που μελετάμε.

Για να βρούμε πώς μετασχηματίζεται το Δ, θα πρέπει να εκφράσουμε τις μεταβλητές u συναρτήσει των νέων μεταβλητών y, w. Στην έκφραση αυτή ενδέχεται να υπάρχουν και κάποιες απ' τις παλιές ανεξάρτητες μεταβλητές x, οι οποίες όμως εμφανίζονται πλέον σαν παράμετροι και δεν θα πρέπει να μας προβληματίζουν. Θα έχουμε λοιπόν $u = u\,(x, y, w)$, και παραγωγίζοντας την σχέση αυτή σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας

$$u^i_{x^j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^i}{\partial y^m}\frac{\partial y^m}{\partial x^j} + \frac{\partial u^i}{\partial w^n}\frac{\partial w^n}{\partial y^m}\frac{\partial y^m}{\partial x^j}$$

θα πάρουμε τελικά μία αντίστοιχη έκφραση της μορφής $u_x = u_x(x, y, w, w_y)$, λαμβάνοντας υπόψη και την υπόθεση μας $w_{y^1} = 0$. Στην συνέχεια βρίσκουμε και τις παραγώγους ανώτερης τάξης, οπότε με αντικατάσταση στο αρχικό σύστημα Δ βρίσκουμε την μορφή του $\widetilde{\Delta}$.

Παράδειγμα 1.9. Είχαμε δει προηγουμένως ότι μία από τις συμμετρίες της εξίσωσης KdV

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

γεννάει το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v}_3 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}$$

Διαλέγουμε νέες μεταβλητές $(s, y, w) = (x/t, t, x + tu)$, έτσι ώστε $\mathrm{v}_3\,(s) = 1$, $\mathrm{v}_3\,(y) = \mathrm{v}_3\,(w) = 0$. Λύνουμε την $w = x + tu$ ως προς u,

$$u = \frac{w - x}{y}$$

και υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$u_t = \frac{yw_y + x - w}{y^2} \qquad u_x = -\frac{1}{y} \qquad u_{xxx} = 0$$

Αντικαθιστώντας στην KdV παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{dw}{dy} = 0$$

κι από την λύση της $w = c$, βρίσκουμε τελικά

$$u = \frac{c - x}{t}$$

Παρατηρούμε, κι απ' το παραπάνω παράδειγμα, ότι η μεταβλητή y^1, που απαλείφουμε, τελικά δεν παίζει κανένα ρόλο. Πράγματι για να μεταβούμε στο σύστημα $\widetilde{\Delta}$, αρκεί να γνωρίζουμε όλες τις υπόλοιπες $\left(y^2, \ldots, y^p, w^1, \ldots, w^q\right)$, που μηδενίζουν τον απειροστικό γεννήτορα v της συμμετρίας,

$$\mathrm{v}\left(y^2\right) = \cdots = \mathrm{v}\left(y^q\right) = \mathrm{v}\left(w^1\right) = \cdots = \mathrm{v}\left(w^q\right) = 0$$

κι έπειτα, από τον κανόνα της αλυσίδας, να εκφράσουμε τις παραγώγους των παλιών μεταβλητών, u, συναρτήσει των καινούριων, w. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται *αναλλοίωτες* της ομάδας συμμετρίας, καθώς όπως βλέπουμε κι από την σχέση (1.11), παραμένουν σταθερές κάτω από τους μετασχηματισμούς της.

Αν υπάρχει μία δεύτερη συμμετρία για το σύστημα, τότε για να κάνουμε μία δεύτερη υπόθεση εργασίας, να απαλείψουμε δηλαδή μία ακόμα μεταβλητή, θα πρέπει η συμμετρία αυτή να διατηρείται στο μετασχηματισμένο σύστημα $\widetilde{\Delta}$. Δηλαδή, όπως και στον υποβιβασμό τάξης στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, θα πρέπει μία r-παραμετρική ομάδα συμμετρίας να είναι επιλύσιμη, για να απαλείψουμε r ανεξάρτητες μεταβλητές του συστήματος. Με την προϋπόθεση αυτή, χρησιμοποιώντας $p - 1$ συμμετρίες, όπου p ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών, μπορούμε τελικά να καταλήξουμε σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Κι αν $r \geq p$, τότε, απ' τις συμμετρίες που απομείναν μπορούμε, να υποβιβάσουμε την τάξη αυτού του συστήματος, με τον τρόπο που δείξαμε και στην προηγούμενη παράγραφο.

Αντί όμως να βρούμε τις αναλλοίωτες $\left(y^2, \ldots, y^p, w^1, \ldots, w^q\right)$ της πρώτης συμμετρίας v_1, έπειτα να βρούμε μία δεύτερη v_2 που να ικανοποιεί την σχέση $[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = c^1_{12}\mathrm{v}_1$, και ύστερα να βρούμε τις δικές της, $\left(\widetilde{y}^2, \ldots, \widetilde{y}^p, \widetilde{w}^1, \ldots, \widetilde{w}^q\right)$, κ.ο.κ., μπορούμε κατευθείαν να βρούμε τις αναλλοίωτες όλης της ομάδας συμμετρίας που γεννάνε τα διανυσματικά πεδία $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r$. Μπορούμε δηλαδή, αντί να χρησιμοποιήσουμε μία-μία τις συμμετρίες, να τις χρησιμοποιήσουμε όλες μαζί ταυτόχρονα, βρίσκοντας κατευθείαν τις συναρτήσεις $\phi\,(x, u)$ εκείνες, για τις οποίες

$$c_1\mathrm{v}_1(\phi) + \cdots + c_r\mathrm{v}_r(\phi) = 0 \tag{1.23}$$

Υπολογίζοντας τις αναλλοίωτες ϕ ολόκληρης της ομάδας συμμετρίας από την παραπάνω σχέση, διαλέγουμε ποιές απ' αυτές θα χρησιμοποιήσουμε ως ανεξάρτητες και ποιές ως εξαρτημένες μεταβλητές στο νέο σύστημα, κι έπειτα συνεχίζουμε όπως και πριν στον μετασχηματισμό των παραγώγων. Φυσικά, αν η ομάδα συμμετρίας, που 'χουμε βρει έχει διάσταση μεγαλύτερη από τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών, όπως στην περίπτωση της KdV, τότε μπορούμε να επιλέξουμε μία οποιαδήποτε υποομάδα της.

Παράδειγμα 1.10. Ας πάρουμε για παράδειγμα τον γραμμικό συνδυασμό των δύο πρώτων συμμετριών της KdV,

$$\mathrm{v}_{12} = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}$$

που δημιουργεί την υποομάδα μετασχηματισμών G_{12}

$$\left(\widetilde{x}, \widetilde{t}, \widetilde{u}\right) \longmapsto (x + c\,\epsilon, t + \epsilon, u)$$

όπου c σταθερά. Αναλλοίωτες της ομάδας αυτής είναι οι $(y, w) = (x - c\,t, u)$. Ας σημειώσουμε ότι διαλέγοντας την ποσότητα $x - c\,t$ ως ανέξαρτητη μεταβλητή, με το x στον ρόλο του χώρου και το t στον ρόλο του χρόνου, η συνάρτηση $u\,(x - c\,t)$ περιγράφει μία διαταραχή που διαδίδεται στην διεύθυνση x με ταχύτητα c, γνωστή ως οδεύον κύμα. Αντικαθιστώντας τις

$$u = w \qquad u_t = -cw_y \qquad u_x = w_y \qquad u_{xxx} = w_{yyy}$$

στην KdV, καταλήγουμε στην συνήθη διαφορική εξίσωση

$$cw_y + w_{yyy} + ww_y = 0$$

η οποία ολοκληρώνεται απευθείας,

$$cw + w_{yy} + \frac{w^2}{2} + k = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας με w_y και ξανά ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\frac{cw^2}{2} + \frac{w_y^2}{2} + \frac{w^3}{6} + kw + l = 0$$

όπου k, l αυθαίρετες σταθερές. Αν ζητάμε λύσεις οι οποίες μηδενίζονται στο άπειρο, τότε από τις προηγούμενες δύο σχέσεις βρίσκουμε $k = l = 0$. Στην περίπτωση αυτή, η παραπάνω εξίσωση έχει γενική λύση

$$w = -\,3\,c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}y + b\right)$$

υποθέτωντας ότι η ταχύτητα c είναι θετική, ενώ b αυθαίρετη σταθερά. Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές, καταλήγουμε στην

$$u\,(x,t) = -\,3\,c\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\,(x - c\,t) + b\right)$$

Συναρτήσεις όπως αυτή, αλλά κι όχι μόνο, περιγράφουν μια ειδική κατηγορία κυμάτων με αξιοσημείωτες ιδιότητες, τα οποία εμφανίζονται στις μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Τα κύματα αυτά ονομάζονται *σολιτόνια (solitons)* κι αποτελούν χαρακτηριστικό των ολοκληρώσιμων συστημάτων.

Κεφάλαιο 2

Γενικευμένες Συμμετρίες και Νόμοι Διατήρησης

2.1 Γενικευμένα διανυσματικά πεδία

Ας θεωρήσουμε στον χώρο των ανεξάρτητων και των εξαρτημένων μεταβλητών, x και u αντίστοιχα, το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v} = \xi^j(x,u)\frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i(x,u)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

καθώς επίσης και τις συναρτήσεις

$$Q_i = \eta^i - \xi^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \tag{2.1}$$

που εξαρτώνται εκτός από τις x, u κι από τις παραγώγους της u. Η n-οστή επέκταση του v, σύμφωνα με την (1.18), μπορεί τότε να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \mathrm{v}^{(n)} &= \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{dQ_i}{dx^J}\frac{\partial}{\partial u^i_J} + \xi^j \frac{\partial u^i_J}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial u^i_J} = \frac{dQ_i}{dx^J}\frac{\partial}{\partial u^i_J} + \xi^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial u^i_J}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial u^i_J}\right) \\ &= \frac{dQ_i}{dx^J}\frac{\partial}{\partial u^i_J} + \xi^j \frac{d}{dx^j} \end{aligned}$$

Άρα, αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v}_Q = Q_i\Big(x, u^{(1)}\Big)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

τότε, ένας ισοδύναμος και πιο εύκολος τρόπος να υπολογίσουμε την επέκταση του v είναι μέσω του τύπου

$$\mathrm{v}^{(n)} = \mathrm{v}^{(n)}_Q + \xi^j \frac{d}{dx^j} \tag{2.2}$$

Η παρατήρηση αυτή μας επιτρέπει γενικότερα να θεωρήσουμε διανυσματικά πεδία των οποίων οι συνιστώσες τους ξ^j και η^i δεν εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές x και u, αλλά κι από παραγώγους της u κάποιας πεπερασμένης τάξης n. Τα πεδία αυτά,

$$\mathrm{v} = \xi^j\left(x, u^{(n)}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i\left(x, u^{(n)}\right) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

ονομάζονται *γενικευμένα διανυσματικά πεδία*, και μπορούμε να ορίσουμε την επέκταση τους από την σχέση (1.18).

Εκ πρώτης όψεως, τα γενικευμένα διανυσματικά πεδία με τις αντίστοιχες επεκτάσεις τους, δεν διαφέρουν σε τίποτα από πλευράς φορμαλισμού από τα προηγούμενα. Υπάρχει όμως μια πολύ σημαντική διαφορά, ως προς το νόημα που αποδίδεται στην ροή των πεδίων αυτών ή των επεκτάσεών τους. Γιατί, ένα τέτοιο πεδίο γεννάει μετασχηματισμούς που εξαρτώνται τώρα κι απ' τις παραγώγους, οι οποίες όμως επίσης μετασχηματίζονται. Άρα η αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών δεν δρα πλέον στον χώρο $X \times U$, ούτε όμως ορίζει την δράση σε κάποιον n-jet χώρο $X \times U^{(n)}$, αφού οι συνιστώσες της n-οστής επέκτασης του πεδίου θα εξαρτώνται από παραγώγους τάξης ακόμα μεγαλύτερης του n. Ο μόνος τρόπος να αποφύγουμε αυτό το αδιέξοδο, είναι να ορίσουμε την ροή των γενικευμένων διανυσματικών πεδίων σε έναν απειροδιάστατο χώρο.

Για τον σκοπό αυτό, αλλά και γενικότερα για την μελέτη των γενικευμένων συμμετριών, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τα ισοδύναμα *διανυσματικά πεδία εξέλιξης*, δηλαδή πεδία σαν αυτό που γνωρίσαμε στην αρχή της παραγράφου

$$\mathrm{v}_Q = Q_i\left(x, u^{(n)}\right) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

όπου η συνάρτηση $Q = (Q_1, \ldots, Q_q)$ ονομάζεται *χαρακτηριστική* του πεδίου. Η n-οστή επέκταση του v_Q δίνεται όπως είπαμε από την (1.18), που παίρνει τώρα την απλή μορφή

$$\mathrm{v}_Q^{(n)} = \frac{dQ_i}{dx^J} \frac{\partial}{\partial u^i_J} \tag{2.3}$$

Λέγοντας ισοδύναμο, εννοούμε ότι υπάρχει ένα άλλο γενικευμένο διανυσματικό πεδίο v, του οποίου οι συνιστώσες ξ και η συνδέονται με την Q, όπως στην σχέση (2.1), ενώ η επέκταση του δίνεται αντίστοιχα από την (2.2).

Ένα διανυσματικό πεδίο εξέλιξης v_Q μετασχηματίζει προφανώς μόνο τις εξαρτημένες μεταβλητές $u = f(x)$, ενώ αφήνει αμετάβλητες τις ανεξάρτητες x. Έστω λοιπόν $\widetilde{u} = \widetilde{f}(x, \epsilon)$ οι νέες μεταβλητές. Η ροή του v_Q ορίζεται ως η λύση του συστήματος

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \epsilon} = \mathrm{v}_{\widetilde{Q}}\,, \qquad \widetilde{f}(x, 0) = f(x) \tag{2.4}$$

Είναι δηλαδή μία τοπική μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών $\widetilde{u} = e^{\epsilon \mathrm{v}_Q} u$, που δρα στον συναρτησιακό χώρο των αρχικών συνθηκών $u = f(x)$, με την προϋπόθεση ότι η λύση του παραπάνω προβλήματος Cauchy υπάρχει και είναι μοναδική, τουλάχιστον για ϵ ικανοποιητικά μικρό.

Κάτω από αυτό το πρίσμα, μπορούμε να δώσουμε νόημα και στην επέκταση ενός διανυσματικού πεδίου εξέλιξης v_Q. Η τάξη της από δω και στο εξής δε θα μας απασχολήσει, γι' αυτό και θα θεωρήσουμε την *άπειρη επέκταση*, την οποία συμβολίζουμε με

$$\mathrm{pr}\ \mathrm{v}_Q = \frac{dQ_i}{dx^J} \frac{\partial}{\partial u^i_J}$$

όπου τώρα η άθροιση ως προς τον δείκτη J γίνεται ως προς όλες τις k-άδες για κάθε $k \geq 0$. Ας σημειώσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathrm{pr}\ \mathrm{v}_Q$ απεικονίζει μία διαφορική συνάρτηση $P\left(x, u^{(n)}\right)$ σε μία άλλη διαφορική συνάρτηση $\mathrm{pr}\ \mathrm{v}_Q\,(P)$, χωρίς όμως να διατηρείται η τάξη n των παραγώγων απο τις οποίες εξαρτάται. Το γεγονός ότι η επέκταση αυτή δίνεται από ένα άπειρο άθροισμα δεν θα πρέπει και πολύ να μας ανησυχεί, καθώς ο υπολογισμός της $\mathrm{pr}\ \mathrm{v}_Q\,(P)$ απαιτεί σε κάθε περίπτωση μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος όρων.

Έστω $\widetilde{P}\left(x, \widetilde{u}^{(\widetilde{n})}\right)$ η συνάρτηση P στις νέες μεταβλητές $\widetilde{u} = \widetilde{f}\,(x, \epsilon)$. Παραγωγίζοντας ως προς ϵ, παίρνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \widetilde{u}^i_J} \frac{\partial \widetilde{f}^i_J}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \widetilde{u}^i_J} \frac{d}{dx^J} \left(\frac{\partial \widetilde{f}^i}{\partial \epsilon} \right) = \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \widetilde{u}^i_J} \frac{d\widetilde{Q}_i}{dx^J} = \mathrm{pr}\ \mathrm{v}_{\widetilde{Q}} \left(\widetilde{P} \right) \tag{2.5}$$

με αρχικές συνθήκες $\widetilde{P}\left(x, \widetilde{f}^{(\widetilde{n})}(x, 0)\right) = P\left(x, f^{(n)}(x)\right)$. Θέτοντας $\epsilon = 0$, βρίσκουμε

$$\left. \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \mathrm{pr}\ \mathrm{v}_Q\,(P)$$

Με άλλα λόγια το $\mathrm{pr}\ \mathrm{v}_Q\,(P)$ καθορίζει την απειροστή μεταβολή της συνάρτησης P κάτω από την ροή του διανυσματικού πεδίου v_Q :

$$\widetilde{P}\left(x, \widetilde{u}^{(\widetilde{n})}\right) = P\left(x, u^{(n)}\right) + \epsilon\ \mathrm{pr}\ \mathrm{v}_Q \left(P\left(x, u^{(n)}\right) \right) + O\left(\epsilon^2\right)$$

Παραγωγίζοντας ξανά και ξανά την (2.5) ως προς ϵ, καταλήγουμε στην σειρά Lie,

$$\widetilde{P} = e^{\,\epsilon\, \mathrm{pr}\ \mathrm{v}_Q}(P) \tag{2.6}$$

η οποία έχει νόημα, εφόσον το πρόβλημα Cauchy (2.5) έχει μοναδική λύση. Παρατηρήστε την αντιστοιχία των σχέσεων (2.4), (2.5), (2.6) με τις (1.7), (1.12), (1.11).

2.2 Γενικευμένες συμμετρίες

Οι συμμετρίες που γνωρίσαμε στο πρώτο κεφάλαιο, και οι οποίες αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως *συμμετρίες Lie ή γεωμετρικές συμμετρίες*, ορίστηκαν με βάση την ιδιότητα να μετασχηματίζουν μία λύση σε μία άλλη. Όπως είδαμε, τα γενικευμένα διανυσματικά πεδία δεν μπορούν να περιγράψουν γεωμετρικούς μετασχηματισμούς μιας συνάρτησης $u = f(x)$ ή έστω κάποιας παραγώγου της. Το μειονέκτημα λοιπόν αυτό δεν μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε με έναν φυσικό τρόπο την έννοια της συμμετρίας για τα πεδία αυτά. Προκειμένου όμως να υπάρχει μία συμφωνία με τις γεωμετρικές συμμετρίες, θα ορίσουμε τις συμμετρίες που γεννάνε τα γενικευμένα διανυσματικά πεδία, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του θεωρήματος 1.

Ορισμός 2. *Ενα γενικευμένο διανυσματικό πεδίο* v *ονομάζεται γενικευμένη απειροστή συμμετρία του συστήματος* $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$, *αν και μόνο αν* $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}\,(\Delta) = 0$ *όταν* $\Delta = 0$.

Όπως στο Θεώρημα 1 είχαμε απαιτήσει το σύστημα Δ να είναι μεγίστου βαθμού, έτσι και ο παραπάνω ορισμός επιβάλλει κάποιες ανάλογες συνθήκες. Αν ανατρέξουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1, θα δούμε ότι η αλλαγή μεταβλητών $z \longmapsto y$, έτσι ώστε η επέκταση του πεδίου να αποτελείται από μία συνιστώσα, προϋποθέτει όχι μόνο το Δ αλλά και κάθε σύστημα $d\Delta/dx^J$ να είναι μεγίστου βαθμού. Κι αυτό γιατί η συνάρτηση $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}\,(\Delta)$ δεν εξαρτάται τώρα μόνο από παραγώγους n-οστής τάξης, αλλά κι ακόμα μεγαλύτερης.

Ακόμα όμως μία συνθήκη, είναι απαραίτητο να απαιτήσουμε από δω και στο εξής. Μέχρι τώρα αντιμετωπίσαμε τις διαφορικές εξισώσεις, ανεξάρτητα από αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Θεωρήσαμε δηλαδή μία λύση του συστήματος ότι ικανοποιεί απλώς τις διαφορικές του εξισώσεις, και με αυτήν την έννοια ορίσαμε τις συμμετρίες ως μετασχηματισμούς που απεικονίζουν μία λύση σε μία άλλη. Είναι όμως δυνατόν δοσμένων κάποιων ¨αρχικών συνθηκών¨ το σύστημα να μην έχει λύση, ιδιαίτερα μάλιστα στην περίπτωση των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Παρόλο που και στην συνέχεια δεν θα ασχοληθούμε με προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών, θα χρειαστούμε την υπόθεση αυτή ότι δηλαδή, σε κάθε σημείο $\left(x_o, u_o^{(n)}\right)$ του συνόλου $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$ αντιστοιχεί και μία λύση του συστήματος.

Ένα σύστημα που ικανοποιεί αυτή την συνθήκη ονομάζεται *τοπικά επιλύσιμο (locally solvable)*, κι αν είναι ταυτόχρονα τοπικά επιλύσιμο και μεγίστου βαθμού, τότε ονομάζεται *μη εκφυλισμένο (nondegenerate)*. Τέλος, αν τόσο το Δ όσο και τα συστήματα $d\Delta/dx^J$ είναι μη εκφυλισμένα, τότε ονομάζεται *ολικά μη εκφυλισμένο (totally nondegenerate)*. Στην περίπτωση αυτή, αποδεικνύεται ότι η συνθήκη,

$$F\left(x, u^{(m)}\right) = 0 \text{ για κάθε λύση } u = f(x) \text{ του } \Delta$$

είναι ισοδύναμη με την

$$F = G_\nu^J\Big(x, u^{(m)}\Big)\,\frac{d\Delta_\nu}{dx^J} \text{ για κάθε συνάρτηση } u = f(x) \tag{2.7}$$

Ας δούμε τώρα πώς ο ορισμός που δώσαμε της γενικευμενής συμμετρίας, εξακολουθεί να έχει την απλή ερμηνεία ενός μετασχηματισμού μίας λύσης του συστήματος σε μία άλλη. Ας θυμηθούμε καταρχάς ότι σε κάθε γενικευμένο διανυσματικό πεδίο v μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα πεδίο εξέλιξης v_Q. Η ισοδυναμία των δύο πεδίων εκφράζεται από το γεγονός ότι, αν το v είναι μία γενικευμένη συμμετρία, τότε το ίδιο ισχύει και για το v_Q, κι αντίστροφα. Γιατί, παραγωγίζοντας τις εξισώσεις του συστήματος $\Delta_\nu = 0$ ως προς οποιαδήποτε ανεξάρτητη μεταβλητή x^j, παίρνουμε

$$\frac{d\Delta_\nu}{dx^j} = 0$$

για κάθε λύση του συστήματος. Οπότε, λόγω της (2.2) βλέπουμε ότι,

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(\Delta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{pr}\,\mathrm{v}(\Delta) = 0$$

Στην πραγματικότητα λοιπόν προσδιορίζουν την ίδια συμμετρία. Είναι όμως πιο εύκολο να χρησιμοποιησούμε το πεδίο εξέλιξης v_Q, καθώς έχουμε να υπολογίσουμε μόνο q άγνωστες συναρτήσεις αντί των $p+q$ του v.

Ένα άλλο όμως πλεονέκτημα είναι ότι, η ροή ενός πεδίου εξέλιξης μπορεί να εκφράσει τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζεται μία λύση του συστήματος. Έστω λοιπόν $u = f(x)$ μία λύση ενός ολικά μη εκφυλισμένου συστήματος Δ και v_Q μία γενικευμένη συμμετρία του. Ο μετασχηματισμός της συνάρτησης $\Delta\left(x, u^{(n)}\right)$ κάτω από την ροή του v_Q είναι σύμφωνα με την (2.6)

$$\widetilde{\Delta} = e^{\epsilon\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q}(\Delta)$$

με την προϋπόθεση ότι το γραμμικό σύστημα

$$\frac{\partial\widetilde{\Delta}_\nu}{\partial\epsilon} = \widetilde{G}^J_{\nu\mu}\,\frac{d\widetilde{\Delta}_\mu}{dx^J}$$

που προκύπτει από τις (2.5) και (2.7), με αρχικές συνθήκες $\widetilde{\Delta}\Big(x, \widetilde{f}^{(\widetilde{n})}(x,0)\Big) = \Delta\left(x, f^{(n)}(x)\right)$, έχει μοναδική λύση. Εφόσον όμως $\Delta\left(x, f^{(n)}(x)\right) = 0$, τότε σύμφωνα με την παραπάνω σχέση θα είναι και $\widetilde{\Delta}\Big(x, \widetilde{f}^{(\widetilde{n})}(x,\epsilon)\Big) = 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι και η $\widetilde{u} = \widetilde{f}(x,\epsilon)$ αποτελεί λύση του συστήματος.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι η $\widetilde{u} = \widetilde{f}(x,\epsilon)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος για κάθε ϵ, $\widetilde{\Delta}\left(x, \widetilde{u}^{(\widetilde{n})}\right) = 0$. Σύμφωνα με την (2.5) έχουμε

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\widetilde{Q}}\Big(\widetilde{\Delta}\Big) = \frac{\partial\widetilde{\Delta}}{\partial\epsilon} = 0$$

Οπότε για $\epsilon = 0$ παίρνουμε $\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q\left(\Delta\right) = 0$ για κάθε λύση $u = f\left(x\right)$ του Δ. Άρα το πεδίο εξέλιξης v_Q αποτελεί μία γενικευμένη συμμετρία του Δ. Τα παραπάνω συμπεράσματα μας οδηγούν στο επόμενο θεώρημα, χάριν στο οποίο επανακτούμε την αρχική ιδέα της συμμετρίας.

Θεώρημα 2. *Έστω $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$ ένα ολικά μη εκφυλισμένο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Ένα διανυσματικό πεδίο εξέλιξης v_Q αποτελεί μία γενικευμένη συμμετρία του συστήματος αν και μόνο αν η ροή που γεννάει μετασχηματίζει λύσεις του συστήματος σε άλλες λύσεις.*

Παρόλο λοιπόν τη διαφορετική σημασία ενός γενικευμένου μετασχηματισμού από έναν γεωμετρικό, τόσο η έννοια όσο και το κριτήριο ύπαρξης μιας συμμετρίας παραμένουν τελικά ίδια. Τέλος, μία ακόμα αντιστοιχία μεταξύ των δύο ειδών συμμετρίας, είναι ότι και η αγκύλη Lie δύο γενικευμένων συμμετριών ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων είναι επίσης μία γενικευμένη συμμετρία (όχι απαραίτητα καινούρια) του συστήματος.

Επειδή όμως εμφανίζονται παράγωγοι στις συνιστώσες των γενικευμένων πεδίων, η αγκύλη Lie στην περίπτωση αυτή ορίζεται γενικότερα για τις επεκτάσεις τους. *Η αγκύλη Lie δύο γενικευμένων διανυσματικών πεδίων* v *και* w *ορίζεται ως το μοναδικό γενικευμένο διανυσματικό πεδίο εξέλιξης που ικανοποιεί την*

$$\mathrm{pr}\left[\mathrm{v}, \mathrm{w}\right] = \mathrm{pr}\, \mathrm{v}\, \mathrm{pr}\, \mathrm{w} - \mathrm{pr}\, \mathrm{w}\, \mathrm{pr}\, \mathrm{v} \tag{2.8}$$

Έτσι, όπως και στην περίπτωση των συμμετριών Lie, *το σύνολο όλων των γενικευμένων συμμετριών ενός συστήματος, εφοδιασμένο με την αγκύλη Lie (2.8), αποτελεί μία άλγεβρα Lie.*

Από τον παραπάνω ορισμό αποδεικνύεται ακόμα, ότι η αγκύλη Lie δύο γενικευμένων διανυσματικών πεδίων εξέλιξης v_Q και v_P είναι το διανυσματικό πεδίο εξέλιξης

$$\left[\mathrm{v}_P, \mathrm{v}_Q\right] = \left(\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_P\left(Q_i\right) - \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q\left(P_i\right)\right) \frac{\partial}{\partial u^i} \tag{2.9}$$

Πράγματι από το γεγονός ότι η επέκταση ενός διανυσματικού πεδίου εξέλιξης αντιμετατίθεται με κάθε τελεστή ολικής διαφορίσης,

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \frac{d}{dx^j} &= \frac{dQ_i}{dx^J} \frac{\partial}{\partial u^i_J} \frac{d}{dx^j} = \frac{dQ_i}{dx^J} \left(\frac{\partial}{\partial u^i_J} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial u^i_J} \frac{\partial u^l_I}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial u^l_I} \right) \\
&= \frac{dQ_i}{dx^J} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial u^i_J} + \frac{\partial u^l_I}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial u^l_I} \frac{\partial}{\partial u^i_J} + \frac{\partial}{\partial u^i_{J/k}} \right) = \frac{dQ_i}{dx^J} \left(\frac{d}{dx^j} \frac{\partial}{\partial u^i_J} + \frac{\partial}{\partial u^i_{J/k}} \right) \\
&= \frac{dQ_i}{dx^J} \frac{d}{dx^j} \frac{\partial}{\partial u^i_J} + \frac{d}{dx^j} \left(\frac{dQ_i}{dx^J} \right) \frac{\partial}{\partial u^i_J} \\
&= \frac{d}{dx^j}\, \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q
\end{aligned}$$

προκύπτει έπειτα ότι,

$$\operatorname{pr}[\mathrm{v}_P, \mathrm{v}_Q] = \operatorname{pr}\mathrm{v}_P \operatorname{pr}\mathrm{v}_Q - \operatorname{pr}\mathrm{v}_Q \operatorname{pr}\mathrm{v}_P = \operatorname{pr}\mathrm{v}_P \frac{dQ_i}{dx^J}\frac{\partial}{\partial u^i_J} - \operatorname{pr}\mathrm{v}_Q \frac{dP_i}{dx^J}\frac{\partial}{\partial u^i_J}$$

$$= \frac{d}{dx^J}\left(\operatorname{pr}\mathrm{v}_P(Q_i) - \operatorname{pr}\mathrm{v}_Q(P_i)\right)\frac{\partial}{\partial u^i_J}$$

2.3 Επαναληπτικός τελεστής

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζουμε γενικευμένες συμμετρίες είναι ουσιαστικά ο ίδιος με αυτόν που είδαμε για τις Lie συμμετρίες, εκτός όμως από μία βασική διαφορά. Θα πρέπει από πριν να καθορίσουμε μέχρι ποιάς τάξης παραγώγους θα εξαρτάται η χαρακτηριστική της συμμετρίας.

Υπάρχει όμως κι ένα άλλο σημείο που χρειάζεται να προσέξουμε. Εφόσον μέσα στις συνιστώσες των συμμετριών που ψάχνουμε εμφανίζονται τώρα και οι παράγωγοι της u, είναι δυνατόν αυτές να μηδενίζονται πάνω στις λύσεις του συστήματος, να ισχύει δηλαδή $Q = 0$ όταν $\Delta = 0$. Όμως τότε το κριτήριο συμμετρίας, $\operatorname{pr}\mathrm{v}_Q(\Delta) = 0$ όταν $\Delta = 0$, θα ικανοποιήται αυτόματα. Οι *τετριμμένες* αυτές συμμετρίες δεν παρουσιάζουν κάποιο ενδιαφέρον, και θέλουμε να τις αποφύγουμε. Για τον λόγο αυτόν μία συμμετρία v_Q που διαφέρει από κάποια άλλη $\mathrm{v}_{\widetilde{Q}}$, κατά μία τετριμμένη συμμετρία, δηλαδή η μια χαρακτηριστική Q προκύπτει απ' την άλλη $\widetilde{Q}$ με αντικατάσταση κάποιων παραγώγων από την ίδιες τις εξισώσεις του συστήματος, θα θεωρούνται *ισοδύναμες*.

Παράδειγμα 2.1. Ας θεωρήσουμε την μη γραμμική κυματική εξίσωση

$$u_t = uu_x$$

Ζητάμε να βρούμε γενικευμένες συμμετρίες της μορφής

$$\mathrm{v}_Q = Q(t, x, u, u_x, u_{xx})\frac{\partial}{\partial u}$$

Ο λόγος που δεν συμπεριλάβαμε στην χαρακτηριστική Q και παραγώγους της u ως προς t, είναι ότι και να υπήρχαν θα μπορούσαμε να τις αντικαταστήσουμε από την ίδια την εξίσωση, σύμφωνα με την παραπάνω έννοια ισοδυναμίας. Η επέκταση του v_Q είναι ίση με

$$\operatorname{pr}\mathrm{v}_Q = Q\frac{\partial}{\partial u} + \frac{dQ}{dt}\frac{\partial}{\partial u_t} + \frac{dQ}{dx}\frac{\partial}{\partial u_x} + \cdots$$

Έχουμε λοιπόν

$$\operatorname{pr}\mathrm{v}_Q(u_t - uu_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} - Qu_x - u\frac{dQ}{dx} = 0$$

Παρατηρούμε πόσο περίπλοκοι γίνονται οι υπολογισμοί, καθώς τώρα η συνιστώσα Q εξαρτάται από περισσότερες μεταβλητές, οπότε για παράδειγμα

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial u} u_t + \frac{\partial Q}{\partial u_x} u_{xt} + \frac{\partial Q}{\partial u_{xx}} u_{xxt}$$

Από την $u_t = uu_x$ κι απαλοίφοντας όρους, παίρνουμε την γραμμική μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - u\frac{\partial Q}{\partial x} + u_x^2 \frac{\partial Q}{\partial u_x} + 3u_x u_{xx} \frac{\partial Q}{\partial u_{xx}} = Qu_x$$

η οποία μπορεί να λυθεί με την μέθοδο των χαρακτηριστικών

$$dt = -\frac{dx}{u} = \frac{du_x}{u_x^2} = \frac{du_{xx}}{3u_x u_{xx}} = \frac{dQ}{Qu_x}$$

Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$Q = u_x R\left(x + tu, u, t + \frac{1}{u_x}, \frac{u_{xx}}{u_x^3}\right)$$

Όπως βλέπουμε ο υπολογισμός των γενικευμένων συμμετριών είναι σαφώς πιο δύσκολος, και δυσκολεύει ακόμα περισσότερο όσο ανεβαίνουμε τάξεις παραγώγων. Έχουμε να κάνουμε πολύ περισσότερες πράξεις, και να λύσουμε πιο περίπλοκες καθοριστικές εξισώσεις. Ένα ακόμα μειονέκτημα είναι ότι δεν μπορούμε να βρούμε όλες τις γενικευμένες συμμετρίες, αφού εξ αρχής περιοριζόμαστε ως προς την τάξη των παραγώγων. Ένας άλλος τρόπος να προσδιορίζουμε γενικευμένες συμμετρίες βασίζεται στην έννοια του επαναληπτικού τελεστή (recursion operator), και μας παρέχει μία απειρία συμμετριών.

Ορισμός 3. *Ένας γραμμικός τελεστής $\mathcal{R}$, που απεικονίζει μία διαφορική διανυσματική συνάρτηση σε μία άλλη, ονομάζεται επαναληπτικός τελεστής ενός συστήματος $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$, αν για κάθε γενικευμένη συμμετρία v_Q του Δ, το διανυσματικό πεδίο εξέλιξης $\mathrm{v}_{\mathcal{R}Q}$ αποτελεί επίσης συμμετρία του συστήματος.*

Παράδειγμα 2.2. Έστω η εξίσωση θερμότητας

$$u_t = u_{xx}$$

Ένα διανυσματικό πεδίο εξέλιξης v_Q είναι μία γενικευμένη συμμετρία αν ικανοποιεί την συνθήκη

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

όταν $u_t = u_{xx}$. Εύκολα λοιπόν συμπεραίνουμε ότι ο

$$\mathcal{R} = \frac{d}{dx}$$

είναι επαναληπτικός τελεστής για την εξίσωση θερμότητας, αφού

$$\frac{d(\mathcal{R}Q)}{dt} - \frac{d^2(\mathcal{R}Q)}{dx^2} = \left(\frac{d}{dt} - \frac{d^2}{dx^2}\right)\frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dQ}{dt} - \frac{d^2Q}{dx^2}\right) = 0$$

όταν $u_t = u_{xx}$.

Έστω ένα σύστημα $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$ κι ένα διανυσματικό πεδίο εξέλιξης v_Q. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των διαφορικών συναρτήσεων Q και Δ, θεωρούμε τον τελεστή D_Δ, που ορίζεται από την σχέση

$$D_\Delta(Q) = \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(\Delta) \tag{2.10}$$

Είναι δηλαδή ένας $q \times l$ πίνακας διαφορικών τελεστών με στοιχεία

$$(D_\Delta)_{\nu i} = \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u^i_J}\frac{d}{dx^J}$$

που περιγράφει την *παράγωγο Frechet* μιας διαφορικής διανυσματικής συνάρτησης. Το κριτήριο συμμετρίας για το πεδίο v_Q μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί

$$D_\Delta(Q) = 0$$

όταν $\Delta = 0$. Αν θεωρήσουμε έναν άλλο γραμμικό τελεστή $\mathcal{R}$, τότε για να είναι το πεδίο εξέλιξης $\mathrm{v}_{\mathcal{R}Q}$ επίσης συμμετρία του συστήματος θα πρέπει

$$D_\Delta(\mathcal{R}Q) = 0$$

όταν $\Delta = 0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι, αν οι δύο τελεστές D_Δ και $\mathcal{R}$ αντιμετατίθονται, όπως στην περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος, τότε ο $\mathcal{R}$ είναι επαναληπτικός τελεστής του συστήματος. Μπορούμε να κάνουμε ένα ακόμα βήμα σ' αυτήν την υπόθεση και να συμπεριλάβουμε την γενικότερη περίπτωση, που φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3. *Ένας γραμμικός τελεστής $\mathcal{R}$ είναι επαναληπτικός για το σύστημα $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$, αν ισχύει $D_\Delta \mathcal{R} = \widetilde{\mathcal{R}} D_\Delta$ για κάθε λύση του συστήματος, όπου $\widetilde{\mathcal{R}}$ ένας άλλος γραμμικός διαφορικός τελεστής.*

Παράδειγμα 2.3. Στην εξίσωση KdV

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

αντιστοιχεί ο τελεστής

$$D_\Delta = \frac{d^3}{dx^3} + u\frac{d}{dx} + u_x - \frac{d}{dt}$$

ο οποίος αντιμετατίθεται με τον

$$\mathcal{R} = 3\frac{d^2}{dx^2} + 2u + u_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$$

Πράγματι, είναι

$$D_\Delta\mathcal{R} = 3\frac{d^5}{dx^5} + 5u\frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d}{dt}\frac{d^2}{dx^2} + 10u_x\frac{d^2}{dx^2} + \left(9u_{xx} + 2u^2\right)\frac{d}{dx} - 2u\frac{d}{dt} + \\ +5\left(u_{xxx} + uu_x\right) - 2u_t + \left(u_{xxxx} + uu_{xx} + u_x^2 - u_{xt}\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} - u_x\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$$

κι αν απαλείψουμε όρους από τις

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xxx} + uu_x \\ u_{xt} &= u_{xxxx} + u_x^2 + uu_{xx} \end{aligned}$$

θα καταλήξουμε στην έκφραση $\mathcal{R}D_\Delta$. Άρα ο $\mathcal{R}$ είναι ένας επαναληπτικός τελεστής για την KdV. Για να το δούμε αυτό, ας γράψουμε, χρησιμοποιώντας την σχέση (2.1), τις συμμετρίες Lie, που βρήκαμε στο παράδειγμα 1.6, σαν πεδία εξέλιξης

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_1 &= u_x\frac{\partial}{\partial u} \\ \mathrm{v}_2 &= u_t\frac{\partial}{\partial u} \\ \mathrm{v}_3 &= \left(1 + tu_x\right)\frac{\partial}{\partial u} \\ \mathrm{v}_4 &= \left(2u + xu_x + 3tu_t\right)\frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

Αν δράσουμε με τον τελεστή $\mathcal{R}$ στην χαρακτηριστική u_x της πρώτης συμμετρίας, θα βρούμε

$$\mathcal{R}u_x = 3\left(u_{xxx} + uu_x\right)$$

που είναι μία ισοδύναμη έκφραση της δεύτερης συμμετρίας, με την έννοια που δώσαμε στην αρχή της παραγράφου. Όμοια αν δράσουμε στην τρίτη συμμετρία,

$$\mathcal{R}\left(1 + tu_x\right) = 2u + xu_x + 3t\left(u_{xxx} + uu_x\right)$$

βρίσκουμε μία ισοδύναμη της τέταρτης συμμετρίας. Συνεχίζοντας, αν δράσουμε στην δεύτερη συμμετρία,

$$\mathcal{R}u_t = 3u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 10u_xu_{xx} + \frac{5}{2}u^2u_x$$

βρίσκουμε μία πέμπτη καινούρια συμμετρία, κ.ο.κ.

Από τις σχέσεις (2.1), (2.2) διαπιστώνουμε ότι κάθε συμμετρία Lie αντιστοιχεί σε μία γενικευμένη με χαρακτηριστική, η οποία περιέχει μέχρι και πρώτης τάξης παραγώγους. Στην περίπτωση των συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\frac{du}{dx} = F\left(x, u\right)$$

ισχύει και το αντίστροφο. Μία γενικευμένη συμμετρία για τα συστήματα αυτά ισοδυναμεί πάντα με μία συμμετρία Lie, αφού οι παράγωγοι που εμφανίζονται μέσα στην χαρακτηριστική της, μπορούν να αντικατασταθούν από τις εξισώσεις του συστήματος.

Στην περίπτωση όμως των μερικών διαφορικών εξισώσεων οι γενικευμένες συμμετρίες είναι περισσότερες από τις γεωμετρικές, και όσο μεγαλώνει η τάξη των παραγώγων στην χαρακτηριστική της συμμετρίας που αναζητούμε, τόσο περισσότερες θα βρούμε. Επομένως, μελετώντας μία μερική διαφορική εξίσωση μέσα από τις γενικευμένες συμμετρίες, θα μπορέσουμε να αντλήσουμε περισσότερες πληροφορίες, χάνοντας όμως την άμεση γεωμετρική ερμηνεία που μας προσφέρουν οι Lie συμμετρίες.

Παρόλο αυτά, όπως θα δούμε παρακάτω, μπορούμε σε πολλές περιπτώσεις να τους αποδώσουμε ένα άλλο νόημα, που σχετίζεται με την διατήρηση κάποιας φυσικής ποσότητας του προβλήματος που μελετάμε. Προτού όμως φτάσουμε σε αυτό, θα πρέπει να εκφράσουμε και το σύστημα $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$ με έναν τρόπο πιο φυσικό, δηλαδή ως ένα σύστημα εξέλιξης.

2.4 Εξισώσεις εξέλιξης

Μία αντίστοιχη έννοια των συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, είναι οι λεγόμενες *εξισώσεις εξέλιξης*, συστήματα δηλαδή μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$u_t = P\left(x, u^{(n)}\right) \tag{2.11}$$

Στις εξισώσεις αυτές, μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, που την συμβολίζουμε με t, παίζει έναν ξεχωριστό ρόλο και διαχωρίζεται από τις υπόλοιπες $x = \left(x^1, \ldots, x^p\right)$. Την t μάλιστα θα την ονομάζουμε *χρόνο*, ενώ τις x *χωρικές μεταβλητές* του συστήματος. Οι παράγωγοι ως προς t είναι μόνο πρώτης τάξης, ενώ οι παράγωγοι ως προς x μπορούν να είναι μέχρι και n-οστής τάξης. Αυτές ακριβώς συμβολίζουμε με $u^{(n)}$, οπότε, όπως και πριν, η διαφορική συνάρτηση $P = (P_1, \ldots, P_q)$ ορίζεται στον n-jet χώρο $X \times U^{(n)}$.

Έστω το σύστημα (2.11) και v_Q μία συμμετρία του. Όπως και για τα συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, που σχολιάσαμε στην προηγούμενη σελίδα, έτσι και στα συστήματα εξισώσεων εξέλιξης, μία γενικευμένη συμμετρία τους ισοδυναμεί με μία άλλη με χαρακτηριστική

$Q\left(t, x, u^{(n)}\right)$, αντικαθιστώντας τις παραγώγους ως προς t οποιασδήποτε τάξης από τις εξισώσεις του συστήματος.

Θεωρώντας λοιπόν σε αυτήν την μορφή την χαρακτηριστική του v_Q, το κριτήριο συμμετρίας για τα συστήματα αυτά παίρνει την μορφή

$$\frac{dQ_i}{dt} - \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\left(P_i\right) = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial u_J^j}\frac{\partial u_J^j}{\partial t} - \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\left(P_i\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial u_J^j}\frac{d}{dx^J}\left(\frac{\partial u^j}{\partial t}\right) - \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\left(P_\nu\right) = 0$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial u_J^j}\frac{dP_j}{dx^J} - \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\left(P_i\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_P\left(Q_i\right) - \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\left(P_i\right) = 0$$

Παρατηρούμε ότι στην τελευταία εξίσωση καταλήξαμε έχοντας αντικαταστήσει τις παραγώγους u_t από τις εξισώσεις του συστήματος, έχοντας δηλαδή χρησιμοποιήσει την απαίτηση να ισχύει η (2.12) πάνω στις λύσεις του συστήματος. Άρα θα πρέπει να ισχύει ταυτοτικά για κάθε x, t, u. Θέτοντας

$$\frac{\partial \mathrm{v}_Q}{\partial t} = \frac{\partial Q_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u^i} \tag{2.13}$$

και χρησιμοποιώντας την (2.9), συμπεραίνουμε ότι *ένα διανυσματικό πεδίο εξέλιξης* v_Q *είναι μία γενικευμένη συμμετρία του συστήματος* $u_t = P\left(x, u^{(n)}\right)$ *αν και μόνο αν για κάθε* x, t, u *ισχύει ταυτοτικά*

$$\frac{\partial \mathrm{v}_Q}{\partial t} + \left[\mathrm{v}_P, \mathrm{v}_Q\right] = 0 \tag{2.14}$$

Τέλος, ας δούμε πώς εφαρμόζεται το Θεώρημα 3 στην περίπτωση των εξισώσεων εξέλιξης. Ο τελεστής του συστήματος (2.11) παίρνει τώρα την μορφή

$$D_\Delta = \frac{d}{dt} - D_P$$

όπου D_P διαφορικός τελεστής μόνο ως προς x,

$$\left(D_P\right)_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial u_J^j}\frac{d}{dx^J}$$

Θεωρούμε έναν τελεστή R, ο οποίος επίσης δεν περιλαμβάνει διαφορικούς τελεστές ως προς t. Για να είναι ο $\mathcal{R}$ επαναληπτικός τελεστής του συστήματος, θα πρέπει να ισχύει

$$\left(\frac{d}{dt} - D_P\right)\mathcal{R} = \widetilde{\mathcal{R}}\left(\frac{d}{dt} - D_P\right)$$

και ισοδύναμα

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} + \mathcal{R}\frac{d}{dt} - D_P\mathcal{R} = \widetilde{\mathcal{R}}\frac{d}{dt} - \widetilde{\mathcal{R}}D_P$$

Εξισώνοντας τους τελεστές που παραγωγίζουν ως προς τον χρόνο παίρνουμε

$$\mathcal{R}\frac{d}{dt} = \widetilde{\mathcal{R}}\frac{d}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} = \widetilde{\mathcal{R}}$$

ενώ από τους υπόλοιπους, η συνθήκη ύπαρξης ενός επαναληπτικού τελεστή R γράφεται ως εξής

$$\mathcal{R}_t = [D_P, \mathcal{R}] \tag{2.15}$$

Η έκφραση αυτή έχει την μορφή ενός *ζεύγους Lax*, μία έννοια που χρησιμοποιείται συχνά στην μελέτη εξισώσεων τύπου soliton.

Ας σημειώσουμε ότι για έναν τελεστή της μορφής

$$R = Q^J\left(x, u^{(n)}\right)\frac{d}{dx^J}$$

η χρονική του παράγωγος R_t, λόγω και της (2.11), είναι ίση με

$$R_t = \frac{dQ^J}{dt}\frac{d}{dx^J} = \frac{\partial Q^J}{\partial u^i_{\widetilde{J}}}\frac{du^i_{\widetilde{J}}}{dt}\frac{d}{dx^J} = \frac{\partial Q^J}{\partial u^i_{\widetilde{J}}}\frac{du^i_t}{dx^{\widetilde{J}}}\frac{d}{dx^J} = \frac{\partial Q^J}{\partial u^i_{\widetilde{J}}}\frac{dP^i}{dx^{\widetilde{J}}}\frac{d}{dx^J} = \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_P\left(Q^J\right)\frac{d}{dx^J}$$

Ο τελεστής αυτός, ο οποίος εκφράζει την απειροστή μεταβολή του R κατά την ροή v_P, είναι γνωστός ως η *παράγωγος Lie του τελεστή R ως προς το διανυσματικό πεδίο* v_P και συμβολίζεται με

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_P\left(R\right) = \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_P\left(Q^J\right)\frac{d}{dx^J} \tag{2.16}$$

2.5 Νόμοι διατήρησης

Νόμος διατήρησης ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, είναι γενικά μία έκφραση της μορφής

$$\mathrm{Div}P = 0$$

που ισχύει για κάθε λύση του συστήματος. Με Div συμβολίζουμε τον *τελεστή της ολικής απόκλισης*, ο οποίος δρα σε μία διαφορική διανυσματική συνάρτηση $P = (P_1, \ldots, P_p)$ και μας δίνει μία βαθμωτή, σύμφωνα με τον τύπο

$$\mathrm{Div}P = \frac{dP_1}{dx^1} + \frac{dP_2}{dx^2} + \cdots + \frac{dP_p}{dx^p}$$

Αν το σύστημα αποτελείται από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t, τότε η παραπάνω έκφραση παίρνει την απλή μορφή

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

που είναι γνωστή και ως *πρώτο ολοκλήρωμα* ή *σταθερά της κίνησης*.

Για τα συστήματα εξισώσεων εξέλιξης, που είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο, ένας νόμος διατήρησης εκφράζεται ως

$$\frac{dT}{dt} + \mathrm{Div}X = 0$$

όπου T, X ομαλές συναρτήσεις των $\left(t, x, u^{(n)}\right)$. Αν η X μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$, τότε

$$\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega T\,dx\right) = \int_\Omega \frac{dT}{dt}\,dx = -\int_\Omega \mathrm{Div}X\,dx = -\int_{\partial\Omega} X \cdot ds = 0$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει από το θεώρημα της απόκλισης των Gauss-Ostrogradsky. Με άλλα λόγια, αν υπάρχουν λύσεις του συστήματος $u_t = P\left(x, u^{(n)}\right)$, τέτοιες ώστε $X \to 0$ καθώς $x \to \partial\Omega$, τότε το *συναρτησιακό*

$$\mathcal{T}\left[u; t\right] = \int_\Omega T\left(t, x, u^{(n)}\right) dx$$

παίρνει σταθερή τιμή ανεξάρτητη του χρόνου.

Παράδειγμα 2.4. Το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα νόμου διατήρησης είναι η *εξίσωση συνέχειας*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{Div}(\rho u) = 0$$

που συνήθως ισχύει κατά την κίνηση ενός ρευστού. Η $u\left(x, t\right)$ εκφράζει την ταχύτητα ενός σωματιδίου του ρευστού, που βρίσκεται στην θέση x την χρονική στιγμή t, και $\rho\left(x, t\right)$ είναι η πυκνότητα του ρευστού. Η μάζα m του ρευστού που περικλείεται μέσα σε μια περιοχή Ω δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$m = \int_\Omega \rho\,dx$$

Η ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης της συνέχειας εκφράζεται λοιπόν ως,

$$\frac{dm}{dt} = -\int_{\partial\Omega} \rho\,u \cdot ds$$

και δηλώνει πολύ απλά ότι η μεταβολή της μάζας m του ρευστού σε μια περιοχή Ω είναι ίση με την μάζα που εισρέει στην περιοχή αυτή. Αν λοιπόν δεν εισέρχονται μέσα στην Ω σωματίδια, αν δηλαδή η ταχύτητα u είναι κάθετη στο διάνυσμα ds της επιφάνειας $\partial\Omega$, τότε η μάζα m παραμένει σταθερή.

2.6 Λογισμός μεταβολών

Στην προήγουμενη παράγραφο συναντήσαμε την έννοια του συναρτησιακού, μελετώντας φυσικές ποσότητες που παραμένουν σταθερές στον χρόνο. Ένα *συναρτησιακό* είναι πολύ απλά το ολοκλήρωμα μιας διαφορικής συνάρτησης, που ορίζεται σε ένα ανοιχτό συνεκτικό υποσύνολο $\Omega \subset X$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$,

$$\mathcal{L}\left[u\right] = \int_{\Omega} L\left(x, u^{(n)}\right) dx \tag{2.17}$$

Η εύρεση των συναρτήσεων $u = f\left(x\right)$, για τις οποίες το ολοκλήρωμα αυτό παίρνει ακρότατες τιμές, αποτελεί ένα *πρόβλημα μεταβολών*, και στην περίπτωση αυτή η L ονομάζεται *συνάρτηση Lagrange* του προβλήματος. Συνοριακές ή άλλες συνθήκες, όπως διαφορισιμότητα, που απαιτούνται από την φύση του προβλήματος, καθορίζουν την κλάση των συναρτήσεων, στην οποία θέλουμε να ανήκει η f που θα κάνει το συναρτησιακό μέγιστο ή ελάχιστο.

Όπως τα ακρότατα μιας συνάρτησης βρίσκονται ανάμεσα στα σημεία μηδενισμού της κλίσης της, έτσι και τα ακρότατα ενός συναρτησιακού θα τα αναζητήσουμε στα σημεία μηδενισμού της παραγώγου του. Η *μεταβολική παράγωγος (variational derivative)* ενός συναρτησιακού $\mathcal{L}\left[u\right]$ ορίζεται ως η διανυσματική συνάρτηση $\delta\mathcal{L}\left[u\right] = \left(\delta_1\mathcal{L}\left[u\right], \ldots, \delta_q\mathcal{L}\left[u\right]\right)$, που ικανοποιεί την σχέση

$$\left.\frac{d\mathcal{L}\left[u+\epsilon v\right]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega} \delta_i\mathcal{L}[u]\, v^i\, dx \tag{2.18}$$

όπου $u = f\left(x\right), v = g\left(x\right)$ ομαλές διανυσματικές συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x, που ορίζονται στο Ω. Η g μάλιστα έχει συμπαγές έρεισμα[1] στο Ω, έτσι ώστε το πρόβλημα μεταβολών του $\mathcal{L}\left[u+\epsilon v\right]$ να ορίζεται στον ίδιο συναρτησιακό χώρο με εκείνο του $\mathcal{L}\left[u\right]$. Η τυχαία συνιστώσα της $\delta\mathcal{L}$ συμβολίζεται με

$$\delta_i\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^i}$$

και ονομάζεται *μεταβολική παράγωγος του $\mathcal{L}$ ως προς u^i*.

Για να βρούμε την έκφραση της $\delta\mathcal{L}$, εναλλάσουμε την σειρά ολοκλήρωσης και παραγώγισης,

$$\left.\frac{d\mathcal{L}\left[u+\epsilon v\right]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega} \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} L\left(x, (u+\epsilon v)^{(n)}\right) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial u^i_J}\, v^i_J\, dx$$

κι έπειτα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, καταλήγουμε στην

$$\left.\frac{d\mathcal{L}\left[u+\epsilon v\right]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_{\Omega} (-1)^k \frac{d}{dx^J}\frac{\partial L}{\partial u^i_J}\, v^i\, dx$$

αφού η $v = g\left(x\right)$ έχει συμπαγές έρεισμα. Αν θεωρήσουμε τον *τελεστή Euler* $\mathrm{E} = \left(\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_q\right)$, του οποίου οι συνιστώσες δίνονται από τον τύπο

$$\mathrm{E}_i = (-1)^k \frac{d}{dx^J}\frac{\partial}{\partial u^i_J}$$

τότε, από τον ορισμό της μεταβολικής παραγώγου και την τελευταία σχέση, παίρνουμε τελικά

$$\delta\mathcal{L} = \mathrm{E}\left(L\right)$$

[1] Η κλειστότητα του συνόλου στο οποίο μια συνάρτηση παίρνει μη μηδενικές τιμές

Αν λοιπόν $u = f(x)$ είναι ένα ακρότατο του $\mathcal{L}[u]$, τότε, επειδή η $v = g(x)$ έχει συμπαγές έρεισμα στο Ω, θα πρέπει και το συναρτησιακό $\mathcal{L}[u + \epsilon v]$, ως συνάρτηση του ϵ, να εμφανίζει ακρότατο στο σημείο $\epsilon = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα στην (2.18) είναι ίσο με μηδέν για κάθε συνάρτηση v. Άρα θα πρέπει $\delta\mathcal{L}[u] = 0$ για κάθε $x \in \Omega$. Χρησιμοποιώντας και την παραπάνω σχέση, συμπεραίνουμε τελικά ότι, *αν η $u = f(x)$ είναι ένα ακρότατο του προβλήματος μεταβολών $\mathcal{L}[u]$, τότε θα πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange* $\mathrm{E}(L) = 0$.

Στην συνέχεια εξετάζουμε κάποια πολύ γνωστά προβλήματα μεταβολών.

Παράδειγμα 2.5. Η ηλεκτροστατική ενέργεια, σε μια περιοχή Ω που δεν περιέχει φορτία, δίνεται από το ολοκλήρωμα,

$$\int_\Omega \frac{(\nabla u)^2}{2}\, dxdydz = \int_\Omega \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2}\, dxdydz$$

όπου u το δυναμικό του ηλεκτροστατικού πεδίου. Σύμφωνα με την *αρχή του Dirichlet*, η ενέργεια αυτή παίρνει ελάχιστη τιμή, όταν η u είναι αρμονική συνάρτηση, όταν δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση Laplace,

$$\mathrm{E}(L) = -\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u_x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial L}{\partial u_y} - \frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial u_z} = -u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = -\Delta u = 0$$

Παράδειγμα 2.6. Έστω ένα μηχανικό σύστημα n σωματιδίων που κινούνται στον χώρο με κινητική ενέργεια T υπό την επίδραση ενός δυναμικού U. Θεωρούμε την συνάρτηση Lagrange,

$$L(t, q, q_t) = T(q_t) - U(t, q) = \frac{1}{2} m_i \left(q_t^i\right)^2 - U(t, q)$$

για $i = 1, \ldots, n$, όπου m_i η μάζα του i-σωματιδίου που βρίσκεται την χρονική στιγμή t στην θέση q^i με ταχύτητα q_t^i. Σύμφωνα με την *αρχή του Hamilton* η κίνηση του συστήματος στο χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ γίνεται κατά μήκος εκείνης της καμπύλης για την οποία το ολοκλήρωμα,

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

παίρνει στάσιμη τιμή. Οι αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange, που περιγράφουν την κίνηση του συστήματος, συμπίπτουν με εκείνες του Νεύτωνα,

$$\mathrm{E}_i(L) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_t^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i} - m_i\, q_{tt}^i = F_i - m_i\, q_{tt}^i = 0$$

όπου F_i η δύναμη που ασκεί το πεδίο, που αντιστοιχεί στο δυναμικό U, στο i-σωματίδιο.

Παράδειγμα 2.7. Στο πλαίσιο της γεωμετρικής οπτικής οι νόμοι της ανάκλασης και διάθλασης, αλλά και γενικότερα ο τρόπος διάδοσης του φωτός, μπορούν να μελετηθούν σύμφωνα με την *αρχή του Fermat*. Έστω c η ταχύτητα του φωτός και $\eta(x, y, z)$ ο δείκτης διάθλασης του μέσου στο οποίο διαδίδεται. Η ταχύτητα τότε μιας οπτικής ακτίνας είναι c/η, κι άρα ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει από το σημείο $A = (x_1, y_1, z_1)$ στο σημείο $B = (x_2, y_2, z_2)$ είναι

$$\int_A^B \frac{\eta}{c}\, dl = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2} \eta\sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}\, ds$$

όπου έχουμε θεωρήσει τις μεταβλητές x, y, z συναρτήσει μιας παραμέτρου s. Σύμφωνα με την αρχή του Fermat, η τροχιά που θα ακολουθήσει η φωτεινή ακτίνα είναι εκείνη για την οποία ο χρόνος αυτός γίνεται ελάχιστος. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{d}{ds}\left(\eta\,\frac{x_s}{|r_s|}\right) &= 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{d}{ds}\left(\eta\,\frac{y_s}{|r_s|}\right) &= 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(\eta\,\frac{z_s}{|r_s|}\right) &= 0 \end{aligned}$$

όπου $r\,(s) = (x(s), y(s), z(s))$, ή σε διανυσματική μορφή,

$$\nabla\eta = \frac{d}{ds}\,(\eta\,\tau)$$

όπου $\tau = r_s/\,|r_s|$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα.

Αν η συνάρτηση Lagrange L αποτελεί την ολική απόκλιση μιας άλλης συνάρτησης P, είναι δηλαδή $L = \text{Div}P$, τότε το συναρτησιακό

$$\mathcal{L}\,[u] = \int_\Omega L\, dx = -\int_{\partial\Omega} P \cdot ds$$

εξαρτάται μόνο από την συμπεριφορά των συναρτήσεων $u = f\,(x)$ στο σύνορο $\partial\Omega$. Οπότε, αν η f αποτελεί ακρότατο του $\mathcal{L}$, τότε και κάθε συνάρτηση ανεξαρτήτου μορφής, που ικανοποιεί απλώς τις ίδιες συνοριακές συνθήκες με την f θα είναι επίσης ακρότατο. Όπως αποδεικνύεται, οι εξισώσεις Euler-Lagrange ισχύουν τότε ταυτοτικά, $\mathrm{E}\,(\text{Div}P) = 0$. Προφανώς μια τέτοια περίπτωση δεν ανήκει στα φυσικά προβλήματα που μας ενδιαφέρουν, και για να την αποκλείσουμε θα θεωρούμε δύο συναρτησιακά $\mathcal{L}$ και $\widetilde{\mathcal{L}}$ *ισοδύναμα* αν και μόνο αν $L = \widetilde{L} + \text{Div}P$ για κάποια διαφορική διανυσματική συνάρτηση P.

Κλείνοντας την παράγραφο αυτήν, θα πρέπει να επισημάνουμε ένα σημαντικό μειονέκτημα που εμφανίζουν τα συναρτησιακά. Ο χώρος A των διαφορικών συναρτήσεων $L\left(x, u^{(n)}\right)$, που ορίζονται σε κάποιο πεπερασμένης τάξης jet χώρο $X \times U^{(n)}$, αποτελεί μία άλγεβρα. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να προσθέσουμε αλλά και να πολλαπλασιάσουμε διαφορικές συναρτήσεις. Αντίθετα ο χώρος $\mathcal{A}$ των συναρτησιακών $\mathcal{L}\,[u] = \int L\left(x, u^{(n)}\right) dx$, έχει δομή μόνο διανυσματικού χώρου. Δηλαδή μπορούμε να προσθέσουμε συναρτησιακά, αλλά όχι να τα πολλαπλασιάσουμε.

2.7 Θεώρημα Noether

Όπως φαίνεται κι από τα παραδείγματα της προηγούμενης παραγράφου, πολλές εξισώσεις στην φυσική, που περιγράφουν βασικές θεωρίες, από την κλασική μηχανική μέχρι τον ηλεκτρομαγνητισμό ή ακόμα την θεωρία της σχετικότητας, προέρχονται από κάποια αρχή μεταβολών. Είναι λοιπόν σκόπιμο να εξετάσει κανείς τις συμμετρίες που εμφανίζουν συγκεριμένα οι εξισώσεις Euler-Lagrange, ή κάποιο υποσύνολό τους.

Αυτό λοιπόν έκανε και η Emmy Noether, καταλήγοντας στο περίφημο θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο, κάθε νόμος διατήρησης ενός τέτοιου συστήματος αντιστοιχεί και σε μια γενικευμένη συμμετρία. Στην παράγραφο αυτή θα σκιαγραφήσουμε τα βασικά σημεία της θεωρίας αυτής, καθώς οι τεχνικές λεπτομέρειες μίας πλήρους περιγραφής απαιτούν, όχι μόνο έκταση, αλλά και έννοιες που παρεκλίνουν αρκετά από τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε εδώ. Φυσικά, στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε αναλυτικά, πώς το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται στην περίπτωση των συστημάτων τύπου Hamilton, που είναι εξ άλλου και το κύριο θέμα μας.

Ας θεωρήσουμε το συναρτησιακό,

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L\left(x, u^{(n)}\right) dx$$

του οποίου οι ακρότατες τιμές ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Η σύνθηκη αυτή δεν είναι αναγκαία, δηλαδή κάθε λύση των εξισώσεων $\mathrm{E}(L) = 0$ δεν είναι ακρότατο του $\mathcal{L}$. Γι' αυτό και δεν έχει νόημα να βρούμε όλες τις συμμετρίες τους, οι οποίες μετασχηματίζουν μία λύση σε μία άλλη οποιαδήποτε λύση. Με άλλα λόγια οι συμμετρίες που μας ενδιαφέρουν είναι εκείνες που αφήνουν αναλλοίωτο το πρόβλημα μεταβολών, δηλαδή το συναρτησιακό, κι όχι τις εξισώσεις Euler-Lagrange.

Ορισμός 4. *Ένα διανυσματικό πεδίο εξέλιξης* v_Q *ονομάζεται μεταβολική συμμετρία (variational summetry) του συναρτησιακού* $\mathcal{L}[u]$ *αν και μόνο αν υπάρχει διαφορική διανυσματική συνάρτηση* $B = (B_1, \ldots, B_p)$ *τέτοια ώστε* $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(L) = \mathrm{Div} B$.

Όπως ο ορισμός των γενικευμένων συμμετριών, έτσι και ο παραπάνω προέρχεται από ένα θεώρημα που ισχύει στην περίπτωση των συμμετριών Lie. Η συνθήκη που εκφράζει απορέει από τον πρωταρχική ιδιότητα μιας μεταβολικής συμμετρίας να αφήνει ένα συναρτησιακό αμετάβλητο.

Έστω για παράδειγμα v_Q μία συμμετρία του συναρτησιακού $\mathcal{L}$. Κάτω από τις σχετικές προϋποθέσεις ύπαρξης και μοναδικότητας του αντίστοιχου προβλήματος Cauchy, η συνάρτηση Lagrange $\widetilde{L}\left(x, \widetilde{u}^{(\widetilde{n})}\right)$, κάτω από την ροή του πεδίου v_Q, δίνεται από την σχέση

$$\widetilde{L} = L + \epsilon\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(L) + \frac{\epsilon^2}{2}\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\left(\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(L)\right) + \cdots$$

Είναι όμως $\text{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(L) = \text{Div}B$, οπότε παίρνουμε

$$\widetilde{L} = L + \epsilon\,\text{Div}B + \frac{\epsilon^2}{2}\,\text{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(\text{Div}B) + \cdots$$

Στην παράγραφο 2.1 είχαμε δείξει ότι η επέκταση ενός πεδίου εξέλιξης αντιμετατίθεται με κάθε τελεστή ολικής παραγώγισης, Άρα

$$\text{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(\text{Div}B) = \text{pr}\,\mathrm{v}_Q \frac{dB_j}{dx^j} = \frac{d}{dx^j}\left(\text{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(B_j)\right) = \text{Div}C$$

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε και για μεγαλύτερες δυνάμεις του τελεστή $\text{pr}\,\mathrm{v}_Q$, και τελικά να δείξουμε ότι, υπάρχει διαφορική συνάρτηση P έτσι ώστε να ισχύει

$$\widetilde{L} = L + \text{Div}P$$

Σύμφωνα όμως με την ισοδυναμία που εισαγάγαμε, αυτό σημαίνει $\widetilde{\mathcal{L}}\,[\widetilde{u}] = \mathcal{L}\,[u]$, δηλαδή

$$\int_\Omega \widetilde{L}\left(x, \widetilde{u}^{(\widetilde{n})}\right) dx = \int_\Omega L\left(x, u^{(n)}\right) dx$$

Αντίστροφα, ας θεωρήσουμε ότι κατά την ροή ενός πεδίου εξέλιξης v_Q, το συναρτησιακό $\mathcal{L}$ παραμένει αμετάβλητο, ότι δηλαδή,

$$\int_\Omega \widetilde{L}\left(x, \widetilde{u}^{(\widetilde{n})}\right) dx = \int_\Omega L\left(x, u^{(n)}\right) dx$$

Παραγωγίζοντας ως προς ϵ, παίρνουμε σύμφωνα με την (2.5)

$$\int_\Omega \text{pr}\,\mathrm{v}_{\widetilde{Q}}\left(\widetilde{L}\right) dx = 0$$

και για $\epsilon = 0$, προκύπτει

$$\int_\Omega \text{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(L)\, dx = 0$$

για κάθε περιοχή Ω. Στον συναρτησιακό χώρο όμως που επιλέξαμε να εργαστούμε, το παραπάνω συναρτησιακό είναι ίσο με μηδέν αν και μόνο αν $\text{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(L) = \text{Div}B$, αν δηλαδή το v_Q είναι είναι μία συμμετρία του $\mathcal{L}$. Τα παραπάνω συμπεράσματα διατυπώνονται στο παρακάτω θεώρημα, το οποίο εκφράζει την βασική έννοια μιας μεταβολικής συμμετρίας.

Θεώρημα 4. *Ένα διανυσματικό πεδίο εξέλιξης* v_Q *αποτελεί μία μεταβολική συμμετρία ενός προβλήματος μεταβολών* $\mathcal{L}$ *αν και μόνο αν η ροή που γεννάει αφήνει αναλλοίωτο το συναρτησιακό,* $\widetilde{\mathcal{L}}\,[\widetilde{u}] = \mathcal{L}\,[u]$.

Υπενθυμίζουμε ότι, όπως είδαμε στην παράγραφο 2.5, ένα συναρτησιακό που παίρνει σταθερή τιμή ανεξάρτητη του t για κάθε λύση u του συστήματος εξέλιξης $u_t = Q$, αποτελεί ένα νόμο διατήρησης. Ταυτόχρονα όμως η λύση αυτή καθορίζει και την ροή του πεδίου εξέλιξης v_Q. Με άλλα λόγια μπορούμε δούμε το παραπάνω θεώρημα κι από την εξής σκοπιά : *ένα συναρτησιακό $\mathcal{L}[u]$ αποτελεί έναν νόμο διατηρήσης του συστήματος εξέλιξης $u_t = Q$ αν και μόνο αν το διανυσματικό πεδίο εξέλιξης v_Q αποτελεί μία μεταβολική συμμετρία του προβλήματος μεταβολών $\mathcal{L}$.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το διανυσματικό πεδίο v_Q είναι μια συμμετρία του συναρτησιακού $\mathcal{L}[u]$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό, υπάρχει διαφορική διανυσματική συνάρτηση B τέτοια ώστε

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(L) = \mathrm{Div}B$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(L) = \frac{dQ_i}{dx^J}\frac{\partial L}{\partial u^i_J} = (-1)^k Q_i \frac{d}{dx^J}\frac{\partial L}{\partial u^i_J} + \mathrm{Div}R$$

όπου η αναλυτική έκφραση της $R \in A^p$ δεν μας ενδιαφέρει. Με άλλα λόγια,

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(L) = Q \cdot \mathrm{E}(L) + \mathrm{Div}R \tag{2.19}$$

Η σχέση αυτή παίζει τον κύριο ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος της Noether. Γιατί, σύφωνα με αυτήν, η παραπάνω συνθήκη συμμετρίας παίρνει την μορφή

$$\mathrm{Div}(B - R) = Q \cdot \mathrm{E}(L)$$

Οπότε για κάθε λύση των εξισώσεων Euler-Lagrange, ισχύει $\mathrm{Div}(B - R) = 0$, δηλαδή η συνάρτηση $P = B - R$ αποτελεί έναν νόμο διατήρησης του συστήματος $\mathrm{E}(L) = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι σε κάθε μεταβολική συμμετρία ενός προβλήματος μεταβολών αντιστοιχεί ένας νόμος διατήρησης των εξισώσεων Euler-Lagrange.

Για να δείξουμε το αντίστροφο, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange αποτελούν ένα ολικά μη εκφυλισμένο σύστημα. Σύμφωνα τότε με την (2.7), μία διαφορική διανυσματική συνάρτηση P καθορίζει έναν νόμο διατήρησης $\mathrm{Div}P = 0$ του συστήματος $\Delta = \mathrm{E}(L) = 0$ αν και μόνο αν

$$\mathrm{Div}P = G^J_i \frac{d\Delta_i}{dx^J}$$

Ολοκληρώνοντας όπως και πριν κατά παράγοντες, καταλήγουμε στην

$$\mathrm{Div}P = (-1)^k \frac{dG^J_i}{dx^J}\Delta_i + \mathrm{Div}W$$

όπου W μία έκφραση η οποία μηδενίζεται πάνω στις λύσεις του συστήματος. Θέτοντας

$$Q_i = (-1)^k \frac{dG_i^J}{dx^J}$$

η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$\text{Div}\,(P - W) = Q \cdot \Delta$$

Εφόσον η συνάρτηση W μηδενίζεται για κάθε λύση του συστήματος, ο νόμος διατήρησης $\text{Div}W = 0$ είναι *τετριμμένος*, δηλαδή δεν παρέχει κάποια καινούρια πληροφορία για το σύστημα. Με την έννοια αυτή οι νόμοι διατήρησης που καθορίζουν οι συναρτήσεις P και $P - W$ είναι ουσιαστικά *ισοδύναμοι*. Με βάση αυτή την ισοδυναμία, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί κι ως

$$\text{Div}P = Q \cdot \Delta \tag{2.20}$$

Η συνάρτηση $Q = (Q_1, \ldots, Q_q)$ ονομάζεται τότε *χαρακτηριστική* του νόμου διατήρησης P. Κάτω από ορισμένες επιπλέον προϋποθέσεις για το σύστημα αλλά και σχέσεις ισοδυναμίας τόσο για τους νόμους διατήρησης όσο και για τις χαρακτηριστικές τους, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι σε κάθε νόμο διατήρησης P αντιστοιχεί μία χαρακτηριστική Q, και το αντίστροφο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις σχέσεις (2.19) και (2.20), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μία μεταβολική συμμετρία, $\text{pr}\,\mathbf{v}_Q\,(L) = \text{Div}\,(P - R)$, με την ίδια χαρακτηριστική Q με τον νόμο διατήρησης P.

Μία πλήρως τεκμηριομένη περιγραφή όλων των επιμέρους στοιχείων της απόδειξης του θεωρήματος της Noether, μπορούμε να βρούμε στο [36], σε δύο μάλιστα στάδια, πρώτα για απλές συμμετρίες Lie, κι έπειτα για γενικευμένες. Στο [3], όπως και στα περισσότερα βιβλία, υπάρχουν πιο περιεκτικές αποδείξεις, που όμως περιορίζονται μόνο στο ευθύ κι όχι στο αντίστροφο του ισχυρισμού του θεωρήματος. Σε κάθε πάντως περίπτωση οι σχέσεις (2.19) και (2.20), με την μία ή την άλλη μορφή, έχουν τον πρώτο λόγο στην κατανόηση του θεωρήματος, το οποίο στην γενικότερη του μορφή διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 5 (Noether). *Ένα διανυσματικό πεδίο εξέλιξης* $\mathbf{v}_Q$ *αποτελεί μία μεταβολική συμμετρία ενός συναρτησιακού* $\mathcal{L}\,[u] = \int L\; dx$ *αν και μόνο αν η χαρακτηριστική του* Q *είναι η χαρακτηριστική ενός νόμου διατήρησης* $\text{Div}P = 0$ *των αντίστοιχων εξισώσεων Euler-Lagrange.*

Το επόμενο ερώτημα που γεννάται, είναι αν τελικά υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των νόμων διατήρησης των εξισώσεων Euler-Lagrange, και των συμμετριών των ίδιων των εξισώσεων. Για να απαντήσουμε σε αυτό, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας νόμος διατήρησης ή ισοδύναμα, από το παραπάνω θεώρημα, μία μεταβολική συμμετρία v_Q ενός προβλήματος μεταβολών $\mathcal{L}$. Τότε, σύμφωνα με τα όσα ειπώθηκαν στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου, θα ισχύει $\mathrm{E}\left(\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(L)\right) = 0$ ή $\mathrm{E}\,(Q \cdot \mathrm{E}\,(L)) = 0$, λόγω της (2.19). Είναι όμως

$$\mathrm{E}\,(Q \cdot \mathrm{E}\,(L)) = \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(\mathrm{E}\,(L)) + D\,(\mathrm{E}\,(L))$$

όπου D ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής (βλ. [36], Λήμμα 5.54). Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει τελικά ότι $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(\mathrm{E}\,(L)) = 0$ όταν $\mathrm{E}\,(L) = 0$, δηλαδή :

Θεώρημα 6. *Αν το διανυσματικό πεδίο εξέλιξης v_Q είναι μία μεταβολική συμμετρία ενός συναρτησιακού $\mathcal{L}\,[u] = \int L\,dx$, τότε είναι μία γενικευμένη συμμετρία των αντίστοιχων εξισώσεων Euler-Lagrange* $\mathrm{E}\,(L) = 0$.

Στην πράξη ο υπολογισμός των μεταβολικών συμμετρίων ενός συναρτησιακού βασίζεται στο θεώρημα αυτό. Πρώτα δηλαδή υπολογίζουμε τις συμμετρίες των εξισώσεων Euler-Lagrange, κι έπειτα ψάχνουμε να βρούμε ποιες από αυτές ικανοποιούν την συνθήκη $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(L) = \mathrm{Div}B$, χωρίς όμως να υπάρχει ένας συστηματικός τρόπος κατασκευής της συνάρτησης B.

Το μειονέκτημα αυτό συναντάμε δυστυχώς και στην εφαρμογή του θεωρήματος της Noether, για την εύρεση νόμων διατήρησης από δοσμένες συμμετρίες. Αλλά κι αν γνωρίζουμε μία μεταβολική συμμετρία, τότε για να βρούμε τον αντίστοιχο νόμο διατήρησης, θα πρέπει να υπολογίσουμε την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης R. Όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη των παραγώγων από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος, τόσο πιο δύσκολος γίνεται ο υπολογισμός αυτός.

Παρατήρηση. Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η ορολογία που έχουμε χρησιμοποιήσει δεν είναι και η επικρατέστερη. Σε πολλά βιβλία, όπως στα [3], [42], χρησιμοποιείται ο όρος *συμμετρίες Lie-Bäcklund* αντί των γενικευμένων συμμετριών. Όμως, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Olver [36], ούτε ο Lie ούτε ο Bäcklund είχαν θεωρήσει γνήσιους γενικευμένους μετασχηματισμούς, παρά μονάχα γεωμετρικούς μετασχηματισμούς σε έναν jet χώρο πεπερασμένης τάξης. Μία τέτοια περίπτωση είναι οι *συμμετρίες επαφής (contact symmetries)*, οι οποίες γεννιούνται από διανυσματικά πεδία των οποίων οι συνιστώσες μπορούν να εξαρτώνται από παραγώγους μέχρι και πρώτης τάξης, με τον περιορισμό στην πρώτη επέκτασή τους να μην εμφανίζονται παράγωγοι δεύτερης τάξης κι άνω. Η ροή ενός τέτοιου πεδίου μετασχηματίζει απλώς σημεία του 1-jet χώρου. Για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις ένας μετασχηματισμός του n-jet χώρου $X \times U^{(n)}$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά η n-οστή επέκταση ενός μετασχηματισμού του $X \times U$, ενώ για τις συνήθεις υπάρχουν εξαιρέσεις, οι οποίες οδηγούν στην θεωρία των *δυναμικών ή εσωτερικών συμμετριών (dynamical or internal symmetries)*. Η Noether ήταν η πρώτη που χρησιμοποίησε γενικευμένες συμμετρίες, γι' αυτό και σε άλλα βιβλία αναφέρονται κι ως *μετασχηματισμοί Noether*, αν και οι τελευταίοι αναφέρονται αποκλειστικά σε μεταβολικές συμμετρίες ενός συναρτησιακού.

Κεφάλαιο 3

Πεπερασμένα Συστήματα Hamilton

Στο παράδειγμα 2.6 είδαμε ότι οι εξισώσεις του Νεύτωνα για ένα μηχανικό σύστημα προέρχονται από μία αρχή μεταβολών, την αρχή του Hamilton. Μπορούμε για τα συστήματα αυτά, αντί της συνάρτησης Lagrange L, να θεωρήσουμε μία άλλη συνάρτηση που χαρακτηρίζει πλήρως το σύστημα και η οποία ονομάζεται *συνάρτηση Hamilton* H. Η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από τις θέσεις q^i και τις *συζυγείς ορμές*

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial q_t^i} \tag{3.1}$$

(κι ενδεχομένως τον χρόνο t), και συνδέεται με την L μέσω της σχέσης

$$H\left(q^i, p^i, t\right) = p^i q_t^i - L\left(q^i, q_t^i, t\right) \tag{3.2}$$

αντικαθιστώντας τις ταχύτητες q_t^i από τις σχέσεις $p^i = p^i\left(q^j, q_t^j, t\right)$ που προκύπτουν απ΄ τις (3.1). Στο παράδειγμα μας η μεταβλητή $p^i = m_i\, q_t^i$ αντιστοιχεί στην ορμή του i-σωματιδίου, ενώ η συνάρτηση Hamilton στην ενέργεια του συστήματος, $H = T + U$.

Ισοδύναμα, από την (3.2), η *τροποποιημένη αρχή του Hamilton* εκφράζεται μέσω του συναρτησιακού

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(p^i q_t^i - H\right) dt$$

όπου η συνάρτηση Lagrange εξαρτάται τώρα από τις μεταβλητές q^i, p^i, τις παραγώγους q_t^i (αλλά όχι και p_t^i) για $i = 1 \ldots n$, και τον χρόνο t. Οι αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange εύκολα βλέπουμε ότι αποτελούνται από το σύστημα των $2n$ εξισώσεων

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i} \tag{3.3}$$

$$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{3.4}$$

που είναι γνωστές ως *εξισώσεις Hamilton*. Οι εξισώσεις αυτές ισοδυναμούν, όπως είδαμε, με τις εξισώσεις του Νεύτωνα και για να τις γράψουμε δεν χρειάζεται παρά να γνωρίζουμε την συνάρτηση Hamilton του συστήματος. Οι συντεταγμένες $q = \left(q^1, \ldots, q^n\right)$ και $p = \left(p^1, \ldots, p^n\right)$, για τις οποίες οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος παίρνουν αυτήν την μορφή, ονομάζονται *κανονικές συντεταγμένες*.

Η ισοδυναμία της Νευτώνειας Μηχανικής με την Μηχανική Hamilton δεν περιορίζεται μόνο στα συντηρητικά πεδία, όπως στο παράδειγμα μας, αλλά ισχύει για κάθε μηχανικό σύστημα. Η διατύπωση όμως Hamilton προσφέρει μία πιο θεωρητική, συστηματική αντιμετώπιση, ανεξαρτήτου προβλήματος, με αποτέλεσμα την επέκταση της στην μελέτη γενικότερα των δυναμικών συστημάτων, αλλά και σε άλλους κλάδους της φυσικής. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, και θα μελετήσουμε τα πλεονεκτήματα αυτά από την πλευρά των συμμετριών και των νόμων διατήρησης - πρώτων ολοκληρωμάτων.

3.1 Δομή Poisson

Οι εξισώσεις (3.3)-(3.4) εκφράζουν με τον πιο απλό τρόπο τις εξισώσεις Hamilton, και είναι αυτές που πρέπει να 'χει κανείς υπόψη του, όταν αντιμετώπιζει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Για μία όμως πιο θεωρητική μελέτη των *συστήματων Hamilton*, είναι σκόπιμο να παρεκλίνουμε από την μορφή αυτή σε δύο βασικά σημεία.

Καταρχάς θα αποφύγουμε την χρήση των κανονικών συντεταγμένων q και p, καθώς η εύρεση τους στην περίπτωση των απειροδιάστατων συστημάτων, που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, δεν είναι και πάντα εφικτή. Πίσω από αυτές κρύβεται η δομή του πίνακα

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

όπου I_n ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας, τον οποίο βλέπουμε να εμφανίζεται στις εξισώσεις Hamilton υπό την μορφή

$$\begin{pmatrix} \frac{dq^i}{dt} \\ \frac{dp^i}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q^i} \\ \frac{\partial H}{\partial p^i} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Θεωρώντας τις μεταβλητές (q, p) ως τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου x μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας X, οι τελευταίες γράφονται κι ως

$$\frac{dx}{dt} = J\,\nabla H$$

όπου ∇H το διάνυσμα-στήλη της κλίσης της συνάρτησης H. Από δω βλέπουμε ότι η μορφή του πίνακα J είναι άμεσα συνδεδεμένη με την επιλογή των τοπικών συντεταγμένων στις οποίες εκφράζεται το σημείο x. Αν θέλουμε λοιπόν να περιγράψουμε τις εξισώσεις Hamilton ανεξάρτητα από το συγκεκριμένο σύστημα των q και p, θα πρέπει να επιμείνουμε στις ιδιότητες που ικανοποιεί ο πίνακας αυτός κι όχι στην μορφή του.

Το δεύτερο σημείο έχει να κάνει με τον αριθμό των εξισώσεων ή αλλιώς την διάσταση ενός συστήματος Hamilton, που εμμέσως πλην σαφώς θεωρήσαμε ότι είναι άρτια. Την συνθήκη αυτή θα παραβιάσουμε, προκειμένου να συμπεριλάβουμε και κάποιες άλλες (εκφυλισμένες, όπως θα δούμε παρακάτω) περιπτώσεις, που περιγράφουν όμως κλασικά προβλήματα μηχανικής, όπως για παράδειγμα την κίνηση στερεού σώματος. Αυτό, σε σύνδεση και με τα προηγούμενα, σημαίνει ότι ο πίνακας J δεν είναι απαραίτητα αρτιοδιάστατος, εξακολουθώντας να διατηρεί τις ίδιες ιδιότητες, τις οποίες βλέπουμε παρακάτω.

Σημείωση. Τα συστήματα Hamilton συνήθων διαφορικών εξισώσεων προέρχονται, όπως είπαμε, από την κλασική μηχανική. Στα προβλήματα αυτά, η εξαρτημένη μεταβλητή παριστάνει την θέση ενός κινητού, για αυτό και στο κεφάλαιο αυτό θα συμβολίζεται με x, κι όχι με u, καθώς εκφάζει την χωρική μεταβλητή των εξισώσεων εξέλιξης του συστήματος. Αντίστοιχα, η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος, γι' αυτό και συμβολίζεται με t.

Ορισμός 5. *Ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων*

$$\frac{dx}{dt} = f\,(x)$$

όπου x ανήκει σε μια n-διάστατη διαφορισίμη πολλαπλότητα X και f μία ομαλή διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στην X, ονομάζεται σύστημα Hamilton, αν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\frac{dx}{dt} = J\,\nabla H \tag{3.6}$$

όπου H μία ομαλή πραγματική συνάρτηση του x, ∇H η κλίση της, και J ένας $n \times n$ πίνακας συναρτήσεων του x, που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες

1. $J^{ij} = -\,J^{ji}$ *(αντισυμμετρικότητα)*
2. $J^{ij}\,\dfrac{\partial J^{kl}}{\partial x^j} + J^{lj}\,\dfrac{\partial J^{ik}}{\partial x^j} + J^{kj}\,\dfrac{\partial J^{li}}{\partial x^j} \;=\; 0$ *(ταυτότητα Jacobi)*

Όπως βλέπουμε ο ορισμός αυτός αναφέρεται μόνο σε αυτόνομα συστήματα, αλλά σύμφωνα με την σχέση (3.2) η συνάρτηση Hamilton μπορεί να εξαρτάται άμεσα κι από τον χρόνο t. Στην περίπτωση αυτή ένα σύστημα Hamilton μπορεί να οριστεί ακριβώς με τον ίδιο τρόπο,

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\,\nabla H(x,t) \tag{3.7}$$

θεωρώντας και πάλι την κλίση μόνο ως προς τις χωρικές μεταβλητές x. Αντίθετα, η εξάρτηση του πίνακα J από την μεταβλητή t έχει ουσιαστικά νόημα μονάχα σε προβλήματα, στα οποία οι έννοιες του χώρου και του χρόνου είναι άρρηκτα συνδεδεμένες, όπως για παράδειγμα στην σχετικιστική κίνηση ενός σώματος. Στις περιπτώσεις αυτές το σύστημα μπορεί να επεκταθεί σε ένα $(n+2)$-διάστατο αυτόνομο σύστημα Hamilton και να μελετηθεί ανάλογα.

Η αντισυμμετρικότητα του πίνακα J εμφανίστηκε ήδη από την αρχή, όταν γνωρίσαμε τις εξισώσεις Hamilton στην κανονική μορφή (3.5). Η ταυτότητα Jacobi όμως, όπως εκφράζεται εδώ, δεν εξηγεί ακριβώς την παρουσία της. Θα επανέλθουμε σε αυτήν αργότερα, αφού πρώτα δούμε τα συστήματα Hamilton κάτω από μια γεωμετρική σκοπιά.

Η πλευρά τους αυτή αναδεικνύεται καλύτερα αν θεωρήσουμε πολύ απλά την μεταβολή μιας συνάρτησης του x ως προς τον χρόνο t, κάτι το οποίο είναι απαραίτητο και για την μελέτη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με τα οποία θα ασχοληθούμε παρακάτω. Έστω λοιπόν το σύστημα Hamilton (3.6) και μία συνάρτηση $F(x)$, που ορίζεται στην πολλαπλότητα X. Η μεταβολή της στον χρόνο t είναι ίση με

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x^i}\,\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x^i}\,J^{ij}\,\frac{\partial H}{\partial x^j} = \nabla F \cdot J\,\nabla H$$

Η έκφραση αυτή είναι γνωστή ως *αγκύλη Poisson* $\{F, H\}$ των συναρτήσεων F και H, και μπορεί να οριστεί για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις F, G του x,

$$\{F, G\} = \nabla F \cdot J\,\nabla G \tag{3.8}$$

Από τις ιδιότητες του τελεστή της κλίσης ∇ συμπεραίνουμε ότι η αγκύλη Poisson είναι μία διγραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz, ενώ από τον πίνακα J, ότι είναι αντισυμμετρική κι ότι ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi.

Ορισμός 6. *Έστω X μία διαφορίσιμη πολλαπότητα και $C^\infty(X)$ ο χώρος των ομαλών πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται σε αυτήν. Μία απεικόνιση $\{\ ,\ \} : C^\infty(X) \times C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες*

1. $\{a\,F + b\,G, H\} = a\,\{F, H\} + b\,\{G, H\}$ *(διγραμμικότητα)*
2. $\{F, G\} = -\,\{G, F\}$ *(αντισυμμετρικότητα)*
3. $\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0$ *(ταυτότητα Jacobi)*
4. $\{F\,G, H\} = \{F, H\}\,G + F\,\{G, H\}$ *(κανόνας του Leibniz)*

για κάθε $F, G, H \in C^\infty(X)$ και $a, b \in \mathbb{R}$ ονομάζεται αγκύλη Poisson, ενώ η X ονομάζεται πολλαπλότητα Poisson.

Αν και ο ορισμός αυτός είναι κάπως αφηρημένος, η αγκύλη Poisson εκφράζεται τελικά σε κάθε περίπτωση από την σχέση (3.8). Με άλλα λόγια η ύπαρξη του πίνακα J, που είναι καθοριστικής σημασίας για ένα σύστημα Hamilton, και της αγκύλης Poisson είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 1. *Έστω μια n-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα X. Ένας $n \times n$ πίνακας $J(x)$ συναρτήσεων του $x \in X$ ορίζει μία αγκύλη Poisson στην X μέσω της σχέσης $\{F, G\} = \nabla F \cdot J\, \nabla G$ αν και μόνο αν είναι αντισυμμετρικός και ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi.*

Οι ιδιότητες της διγραμμικότητας και του κανόνα του Leibniz ικανοποιούνται αυτόματα από την σχέση (3.8), ενώ η ισοδυναμία της αντισυμμετρικότητας του πίνακα J και της αγκύλης αυτής είναι προφανής. Τέλος, για την ισοδυναμία της ταυτότητας Jacobi, ξεκινάμε για παράδειγμα από τον πρώτο όρο

$$\begin{aligned}\{\{F,G\},H\} &= J^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(J^{kl}\frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial G}{\partial x^l}\right)\frac{\partial H}{\partial x^j}\\ &= J^{ij}\frac{\partial J^{kl}}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial G}{\partial x^l}\frac{\partial H}{\partial x^j} + J^{ij}J^{kl}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial G}{\partial x^l}\frac{\partial H}{\partial x^j} + J^{ij}J^{kl}\frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^l}\frac{\partial H}{\partial x^j}\end{aligned}$$

Όμοια καταλήγουμε και στις σχέσεις

$$\{\{H,F\},G\} = J^{il}\frac{\partial J^{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial G}{\partial x^l} + J^{il}J^{jk}\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial G}{\partial x^l} + J^{il}J^{jk}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial G}{\partial x^l}$$

$$\{\{G,H\},F\} = J^{ik}\frac{\partial J^{lj}}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^l}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial F}{\partial x^k} + J^{ik}J^{lj}\frac{\partial^2 G}{\partial x^i \partial x^l}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial F}{\partial x^k} + J^{ik}J^{lj}\frac{\partial G}{\partial x^l}\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial F}{\partial x^k}$$

Μπορούμε να εναλλάξουμε κατάλληλα τους δείκτες, όπως για παράδειγμα :

$$J^{il}J^{jk}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial G}{\partial x^l} = J^{kl}J^{ji}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial^2 F}{\partial x^k \partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^l}$$

Έτσι, προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις παραπάνω σχέσεις, παίρνουμε

$$\{\{F,G\},H\} + \{\{H,F\},G\} + \{\{G,H\},F\} = \left(J^{ij}\frac{\partial J^{kl}}{\partial x^i} + J^{il}\frac{\partial J^{jk}}{\partial x^i} + J^{ik}\frac{\partial J^{lj}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial G}{\partial x^l}\frac{\partial H}{\partial x^j}$$

όπου οι όροι με δεύτερης τάξης παραγώγους έχουν απαλειφθεί λόγω αντισυμμετρικότητας του πίνακα J. Από δω λοιπόν βλέπουμε ότι η ταυτότητα Jacobi της αγκύλης Poisson (3.8) ισοδυναμεί με την ταυτότητα Jacobi του αντίστοιχου πίνακα J.

Το βασικό συμπέρασμα που εξάγουμε από την παραπάνω πρόταση είναι ότι ο χώρος στον οποίο εξελίσσεται ένα σύστημα Hamilton είναι μια πολλαπλότητα Poisson. Για το σύστημα (3.6), ή ακόμα και (3.7), η δομή Poisson της πολλαπλότητας εκφράζεται από την αγκύλη

$$\{F, G\} = \nabla F \cdot J\, \nabla G = J^{\,ij}\,\frac{\partial F}{\partial x^i}\,\frac{\partial G}{\partial x^j}$$

Αντίστροφα, από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα J, ο οποίος ονομάζεται και *πίνακας δομής* της πολλαπλότητας, καθορίζονται από τις σχέσεις

$$J^{ij} = \left\{x^i, x^j\right\}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την αγκύλη Poisson, οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται κι ως

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\}$$

Παράδειγμα 3.1. Η περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος στον $\mathbb{R}^3$ γύρω από το κέντρο μάζας του, απουσία εξωτερικών δυνάμεων, περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_2\, I_3}\, L_2\, L_3$$

$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_3\, I_1}\, L_3\, L_1$$

$$\frac{dL_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_1\, I_2}\, L_1\, L_2$$

όπου L_1, L_2, L_3 οι συνιστώσες της στροφορμής L, και I_1, I_2, I_3 οι κύριες ροπές αδράνειας. Αν επιλέξουμε την ενέργεια του συστήματος ως συνάρτηση Hamilton

$$H\left(L_1, L_2, L_3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}\right) \tag{3.9}$$

και θεωρήσουμε τον πίνακα

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -L_3 & L_2 \\ L_3 & 0 & -L_1 \\ -L_2 & L_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

τότε οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν

$$\frac{dL}{dt} = J\,\nabla H$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{dL}{dt} = L \times \nabla H$$

Η αγκύλη Poisson λοιπόν για δύο τυχαίες συναρτήσεις F, G είναι

$$\{F, G\} = \nabla F \cdot J\,\nabla G = \nabla F \cdot L \times \nabla G = -\,L \cdot \nabla F \times \nabla G$$

3.2 Αγκύλη Lie-Poisson

Ένα εύλογο ερώτημα είναι, πώς κανείς βρίσκει την δομή Hamilton ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η συνάρτηση Hamilton έχει συνήθως ένα φυσικό νόημα, το οποίο μας υποδεικνύει ορισμένες δυνατές επιλογές, διευκολύνοντας έτσι σημαντικά την εύρεση της. Μπορούμε μάλιστα, με σχεδόν απόλυτη σιγουριά να πούμε ότι στα περισσότερα από αυτά τα προβλήματα η ποσότητα που εκφράζει δεν είναι άλλη από την ενέργεια του συστήματος. Σε κάθε περίπτωση είναι δευτερεύουσας σημασίας, καθώς εξαρτάται έμμεσα κι από τον πίνακα J της δομής Poisson. Ο πίνακας αυτός είναι πολύ πιο δύσκολο να βρεθεί, έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ιδιότητες της αντισυμμετρικότητας και της ταυτότητας Jacobi. Ιδιαίτερα η τελευταία, εκτός από την περίπτωση, όπου τα στοιχεία του πίνακα είναι σταθερές, κι οπότε ικανοποιήται αυτόματα, απαιτεί αρκετές πράξεις για να ελεχθεί η ισχύς της.

Μία διέξοδο στο πρόβλημα αυτό βρίσκουμε όταν η δομή Poisson προέρχεται από μία άλγεβρα Lie. Οι τρεις πρώτες ιδιότητες της αγκύλης Poisson είναι οι ίδιες ιδιότητες που ορίζουν και την πράξη της αγκύλης Lie σε έναν διανυσματικό χώρο. Επομένως αν θεωρήσουμε μία άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ με σταθερές δομής c_{ij}^k, τότε ο πίνακας J με στοιχεία τις γραμμικές συναρτήσεις

$$J^{ij} = c_{ij}^k \, x^k$$

των συντεταγμένων x ενός διανυσματικού χώρου X, ορίζει μία αγκύλη Poisson στον X, σύμφωνα με την Πρόταση 1 και τις ιδιότητες των c_{ij}^k. Η αγκύλη αυτή ονομάζεται *αγκύλη Lie-Poisson* και είναι ίση με

$$\{F, G\} = c_{ij}^k \, x^k \, \frac{\partial F}{\partial x^i} \, \frac{\partial G}{\partial x^j} \tag{3.11}$$

Στην πραγματικότητα, *η πολλαπλότητα Poisson X είναι σε αυτήν την περίπτωση ο δϋικός χώρος της* $\mathfrak{g}$. Ο χώρος αυτός αποτελείται από το σύνολο όλων των γραμμικών πραγματικών απεικονίσεων της $\mathfrak{g}$, και συμβολίζεται με $\mathfrak{g}^*$. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα στοιχείου ενός δϋικού χώρου V^* είναι η κλίση ∇F μιας συνάρτησης $F \in C^\infty(V)$, η οποία ορίζεται από την σχέση

$$D_y F(x) = \langle \nabla F(x) \, ; \, y \rangle = \frac{\partial F}{\partial x^i} \, y^i$$

όπου x, y διανύσματα του V με συντεταγμένες αντίστοιχα x^i, y^i και $D_y F(x)$ η κατά κατεύθυνση παράγωγος στο σημείο x στην κατεύθυνση του διανύσματος y. Με $\langle a; b \rangle$ συμβολίζεται γενικά η απεικόνιση ενός διανύσματος b του V μέσω μιας συνάρτησης a του V^* σε έναν πραγματικό αριθμό. Στους πεπερασμένους χώρους, που εξετάζουμε εδώ, ισχύει $(\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$, εννοώντας ότι οι δύο χώροι είναι ισόμορφοι. Έτσι αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση $F : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, τότε η κλίση της είναι ένα στοιχείο της $\mathfrak{g}$.

Έστω λοιπόν $\{\mathrm{v}_1, \cdots, \mathrm{v}_n\}$ μία βάση της $\mathfrak{g}$ στην οποία αντιστοιχούν οι σταθερές δομής c_{ij}^k. Η αγκύλη Lie στην $\mathfrak{g}$, των κλίσεων δύο πραγματικών συναρτήσεων F και G, που ορίζονται στην $\mathfrak{g}^*$, είναι ίση με

$$[\nabla F(x), \nabla G(x)] = \left[\frac{\partial F}{\partial x^i}\,\mathrm{v}_i\,, \frac{\partial G}{\partial x^j}\,\mathrm{v}_j\right] = \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j}\,[\mathrm{v}_i\,, \mathrm{v}_j] = \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j}\,c_{ij}^k\,\mathrm{v}_k$$

Θεωρώντας την δϋική βάση $\{\mathrm{v}_1^*, \cdots, \mathrm{v}_n^*\}$ της $\mathfrak{g}^*$, που ορίζεται από τις σχέσεις $\langle \mathrm{v}_i^*; \mathrm{v}_j\rangle = \delta_{ij}$, κάθε σημείο $x \in \mathfrak{g}^*$ εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός, $x = x^i\,\mathrm{v}_i^*$. Η δράση του x στο στοιχείο $[\nabla F(x), \nabla G(x)] \in \mathfrak{g}$ είναι ίση με

$$\langle x\,; [\nabla F(x), \nabla G(x)]\rangle = \left\langle x^l\,\mathrm{v}_l^*\,; \frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j}\,c_{ij}^k\,\mathrm{v}_k\right\rangle = x^l\,\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial G}{\partial x^j}\,c_{ij}^k\,\langle \mathrm{v}_l^*; \mathrm{v}_k\rangle = c_{ij}^k x^k\,\frac{\partial F}{\partial x^i}\,\frac{\partial G}{\partial x^j}$$

Άρα η αγκύλη Lie-Poisson στην $\mathfrak{g}^*$ μπορεί τελικά να οριστεί από την σχέση

$$\{F, G\}\,(x) = \langle x\,; [\nabla F(x), \nabla G(x)]\rangle \tag{3.12}$$

Παράδειγμα 3.2. Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι οι εξισώσεις Euler που περιγράφουν την περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος στον $\mathbb{R}^3$, αποτελούν ένα σύστημα Hamilton. Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να ανακαλύψουμε την δομή τους αυτή, σύμφωνα με τα παραπάνω.

Στο πρώτο κεφάλαιο συναντήσαμε διάφορες ομάδες μετασχηματισμών που περιγράφουν μετατοπίσεις, διαστολές, κλπ. Ένα άλλο είδος γεωμετρικών μετασχηματισμών που συναντάται συχνά στις συμμετρίες διαφόρων συστημάτων είναι οι στροφές, οι οποίες θα μας απασχολήσουν εδώ.

Έστω λοιπόν ο $\mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες x, y, z και το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v}_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

Η ροή του είναι ίση με

$$\begin{aligned}
(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) &= e^{\epsilon \mathrm{v}_3}(x, y, z) = \left(I + \epsilon\,\mathrm{v}_3 + \frac{\epsilon^2}{2}\,\mathrm{v}_3^2 + \cdots\right)(x, y, z) \\
&= \left(x - \epsilon y - \frac{\epsilon^2}{2}x + \frac{\epsilon^3}{6}y + \cdots\,,\ y + \epsilon x - \frac{\epsilon^2}{2}y - \frac{\epsilon^3}{6}x + \cdots\,,\ z\right) \\
&= \left(\left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} + \cdots\right)x - \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{6} + \cdots\right)y,\ \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{6} + \cdots\right)x + \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} + \cdots\right)y,\ z\right)
\end{aligned}$$

Οι σειρές στις παρενθέσεις δεν είναι άλλες από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του ημιτόνου και συνιμιτόνου, οπότε τελικά

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon,\ x\sin\epsilon + y\cos\epsilon,\ z)$$

ή υπό μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon & 0 \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Όμοια οι ροές των διανυσματικών πεδίων

$$\mathrm{v}_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{και} \qquad \mathrm{v}_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$$

περιγράφουν στροφές γύρω από τους άξονες x και y αντίστοιχα, κι εκφράζονται από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ 0 & \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad \begin{pmatrix} \cos\epsilon & 0 & \sin\epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\epsilon & 0 & \cos\epsilon \end{pmatrix}$$

Ο συνολικός μετασχηματισμός

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

εκφράζει επομένως μια τυχαία στροφή στον $\mathbb{R}^3$, η οποία αναλύεται σε τρεις διαδοχικές στροφές κατά γωνίες α, β, γ γύρω από τους άξονες x, y, z αντίστοιχα. Όπως αποδεικνύεται ο πίνακας A έχει ως αντίστροφο τον ανάστροφο του, $A^{-1} = A^T$ και ορίζουσα $|A| = 1$. Το σύνολο των πινάκων με αυτές τις ιδιότητες αποτελούν την 3-παραμετρική ομάδα Lie SO(3), ενώ τα διανυσματικά πεδία $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3$ αποτελούν μία βάση της αντίστοιχης άλγεβρας Lie $\mathfrak{so}(3)$.

Ξεκινώντας λοιπόν από την $\mathfrak{so}(3)$, επιλέγουμε την βάση $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ των παραπάνω διανυσματικών πεδίων και υπολογίζουμε ως προς αυτήν τις σταθερές δομής c_{ij}^k από τις αγκύλες

$$[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = -\,\mathrm{v}_3\ , \qquad [\mathrm{v}_3, \mathrm{v}_1] = -\,\mathrm{v}_2\ , \qquad [\mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3] = -\,\mathrm{v}_1$$

Είναι λοιπόν $c_{12}^3 = c_{31}^2 = c_{23}^1 = -1$ και λόγω αντισυμμετρικότητας $c_{21}^3 = c_{13}^2 = c_{32}^1 = 1$, ενώ οι υπόλοιπες μηδέν. Εφοδιάζουμε έπειτα τον δϋικό χώρο $\mathfrak{so}^*(3)$ της άλγεβρας με την αγκύλη Lie-Poisson $\langle L\,; [\nabla F, \nabla G]\rangle$, όπου L το τυχαίο σημείο του $\mathfrak{so}^*(3)$ και F, G δύο ομαλές πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται εκεί. Τα στοιχεία του πίνακα δομής J, που αντιστοιχεί στην αγκύλη αυτή, υπολογίζονται από τις σχέσεις $J^{ij} = c_{ij}^k L_k$, αφού γνωρίζουμε τις σταθερές δομής c_{ij}^k. Έτσι βρίσκουμε τον πίνακα (3.10) και την αγκύλη Poisson, που συναντήσαμε στο παράδειγμα 3.1. Αν τώρα θεωρήσουμε την συνάρτηση Hamilton (3.9), τότε το αντίστοιχο σύστημα Hamilton που κινείται στην πολλαπλότητα Poisson $\mathfrak{so}^*(3) = \mathbb{R}^3$, αποτελείται από τις εξισώσεις Euler της περιστροφικής κίνησης στερεού σώματος απουσία εξωτερικών δυνάμεων.

3.3 Διανυσματικά πεδία Hamilton

Για να μελετήσουμε τα συστήματα Hamilton μέσα από τις συμμετρίες, είναι προφανώς προτιμότερο να εκμεταλλευτούμε την ιδιαίτερη δομή τους. Από όλα τα διανυσματικα πεδία που γεννάνε τις συμμετρίες ενός τέτοιου συστήματος, ένα συγκεκριμένο υποσύνολο τους παίζει σημαντικότερο ρόλο από τα υπόλοιπα. Αν μάλιστα θυμηθούμε ότι οι εξισώσεις Hamilton είναι οι εξισώσεις Euler-Lagrange ενός συναρτησιακού αυτό δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει. Το υποσύνολο αυτό, όπως θα δούμε, αποτελείται από τα λεγόμενα διανυσματικά πεδία Hamilton.

Δύο από τις τέσσερις ιδιότητες της αγκύλης Poisson, η διγραμμικότητα και ο κανόνας του Leibniz, μας επιτρέπουν να της αντιστοιχίσουμε ένα διανυσματικό πεδίο, το οποίο ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο Hamilton*. Δηλαδή, δοσμένης μιας τυχαίας συνάρτησης F, η αγκύλη $\{\ \ ,F\}$ δρα πάνω στις ομαλές πραγματικές συναρτήσεις σαν ένας διαφορικός τελεστής, όπως ακριβώς ένα διανυσματικό πεδίο.

Ορισμός 7. *Έστω μία πολλαπλότητα Poisson X και μία τυχαία συνάρτηση $F \in C^{\infty}(X)$. Το μοναδικό διανυσματικό πεδίο v_F, που ικανοποιεί την σχέση $\mathrm{v}_F = \{\ \ ,F\}$, ονομάζεται διανυσματικό πεδίο Hamilton, που αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.*

Ένα τέτοιο πεδίο είναι ένα πεδίο εξέλιξης, με την έννοια ότι μετασχηματίζει μόνο τις εξαρτημένες μεταβλητές x, αλλά όχι γενικευμένο, καθώς δεν εμφανίζονται παράγωγοι μέσα στις συνιστώσες του. Συμβολίζεται, όπως κάθε πεδίο εξέλιξης, με v_F, με την διαφορά όμως ότι με τον χαρακτηρισμό «Hamilton» εννοούμε ότι η χαρακτηριστική του είναι ίση με $J\,\nabla F$.

Στην γλώσσα αυτή, η λύση των εξισώσεων Hamilton, δηλαδή η εξέλιξη ενός συστήματος Hamilton, δεν είναι παρά η ροή του διανυσματικού πεδίου Hamilton

$$\mathrm{v}_H = \{\ \ ,H\} = J^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Ας επανέλθουμε τώρα στην ταυτότητα Jacobi του πίνακα δομής J ή ισοδύναμα της αγκύλης Poisson,

$$\{\{F,G\},H\} + \{\{H,F\},G\} + \{\{G,H\},F\} = 0$$

η οποία διατυπώνεται κι ως εξής

$$-\{H,\{F,G\}\} + \mathrm{v}_G(\{H,F\}) + \mathrm{v}_F(-\{H,G\}) = 0$$
$$-\mathrm{v}_{\{F,G\}}(H) + \mathrm{v}_G\,\mathrm{v}_F(H) - \mathrm{v}_F\,\mathrm{v}_G(H) = 0$$

Χρησιμοποιώντας την αγκύλη Lie δύο διανυσματικών πεδίων, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\mathrm{v}_{\{F,G\}} = [\mathrm{v}_G, \mathrm{v}_F] \tag{3.13}$$

Με άλλα λόγια η αγκύλη Lie δύο διανυσματικών πεδίων Hamilton που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις G και F, είναι επίσης ένα διανυσματικό πεδίο Hamilton με αντίστοιχη συνάρτηση την αγκύλη Poisson $\{F, G\}$. Μιλώντας πιο αυστηρά αυτό σημαίνει ότι *το σύνολο των διαυυσματικών πεδίων Hamilton αποτελεί μια άλγεβρα Lie*.

3.4 Κανονικές συντεταγμένες

Στα περισσότερα βιβλία τα συστήματα Hamilton θεμελιώνονται στα πλαίσια της συμπλεκτικής γεωμετρίας αντί της γεωμετρίας Poisson που χρησιμοποιήσαμε εδώ. Η συμπλεκτική δομή σε αντιστοιχία με την δομή Poisson ορίζεται πάνω σε μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα, η οποία ονομάζεται *συμπλεκτική πολλαπλότητα*, αν ο πίνακας J πέρα από τις προηγούμενες ιδιότητες είναι κι επιπλέον αντιστρέψιμος. Η απαίτηση όμως αυτή προϋποθέτει η διάσταση του (δηλαδή η διάσταση της πολλαπλότητας ή αλλιώς του συστήματος) να είναι άρτια. Πράγματι λόγω αντισυμμετρικότητας η ορίζουσα του είναι ίση με

$$|J| = \left|-J^T\right| = (-1)^n \left|J^T\right| = (-1)^n |J|$$

όπου n η διάσταση του πίνακα J και J^T ο ανάστροφος του. Απ' την σχέση αυτή βλέπουμε ότι στην περίπτωση που ο n είναι περιττός η ορίζουσα του πίνακα J είναι ίση με μηδέν. Άρα μονάχα στην περίπτωση όπου ο n είναι άρτιος μπορεί ο J να είναι αντιστρέψιμος.

Η τάξη ενός αντιστρέψιμου πίνακα J είναι εξ ορισμού σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας ίση με την διάσταση του, δηλαδή μέγιστη, ενώ όπως είδαμε σε συνδυασμό με την αντισυμμετρικότητα οφείλει να 'ναι κι άρτια. Αντίθετα, για τις δομές Poisson που μελετάμε, η τάξη του πίνακα δομής J δεν είναι απαραίτητα σταθερή, πόσο μάλλον μέγιστη, αλλά *είναι και πάλι παντού άρτια λόγω αντισυμμετρικότητας*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι στο τυχαίο σημείο x μιας n-διάστατης πολλαπλότητας Poisson η τάξη του πίνακα δομής J είναι διάφορη του μηδενός. Τότε μπορούμε να βρούμε ομαλές πραγματικές συναρτήσεις F, P έτσι ώστε $\mathrm{v}_P(F) = \{F, P\} \neq 0$. Επειδή $\mathrm{v}_P \neq 0$, μπορούμε μάλιστα να βρούμε μία συνάρτηση Q, τέτοια ώστε $\mathrm{v}_P(Q) = \{Q, P\} = 1$. Αν θέσουμε $q = Q(x)$ και $p = P(x)$, τότε επειδή η αγκύλη $\{q, p\} = 1$, είναι δηλαδή σταθερή, θα είναι $\mathrm{v}_{\{q,p\}} = [\mathrm{v}_p, \mathrm{v}_q] = 0$. Έτσι μπορούμε να διαλέξουμε νέες τοπικές συντεταγμένες $\left(q, p, y^1, \ldots, y^{n-2}\right)$ στις οποίες τα διανυσματικά πεδία $\mathrm{v}_p, \mathrm{v}_q$ εκφράζονται ως εξής

$$\mathrm{v}_p = \{\ \ , p\} = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathrm{v}_q = \{\ \ , q\} = -\frac{\partial}{\partial p}$$

Από δω βλέπουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις $\{y^i, q\} = \{y^i, p\} = 0$, που μαζί με την $\{q, p\} = 1$, υποδεικνύουν ότι ο πίνακας δομής παίρνει την μορφή

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{J} \end{pmatrix}$$

όπου $\widetilde{J}$ είναι ο πίνακας δομής της αγκύλης Poisson στην $(n-2)$-διάστατη υποπολλαπλότητα με τοπικές συντεταγμένες $\left(y^1, \ldots, y^{n-2}\right)$. Τα στοιχεία του δίνονται δηλαδή από τις σχέσεις $\widetilde{J}^{ij} = \{y^i, y^j\}$, κι εύκολα αποδεικνύονται ότι είναι ανεξάρτητα από τις μεταβλητές q, p. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Jacobi και τις προηγούμενες σχέσεις, παίρνουμε

$$\frac{\partial \widetilde{J}^{ij}}{\partial q} = \left\{\widetilde{J}^{ij}, p\right\} = \left\{\left\{y^i, y^j\right\}, p\right\} = -\left\{\left\{p, y^i\right\}, y^j\right\} - \left\{\left\{y^j, p\right\}, y^i\right\} = 0$$

Έτσι η αγκύλη Poisson σε μια γειτονιά του σημείου x εκφράζεται ως εξής

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} + \widetilde{\nabla} F \cdot \widetilde{J}\, \widetilde{\nabla} G$$

όπου $\widetilde{\nabla}$ η κλίση ως προς τις μεταβλητές $\left(y^1, \ldots, y^{n-2}\right)$. Μπορούμε να συνεχίσουμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και με διαδοχικά βήματα να καταλήξουμε τελικά στο παρακάτω θεώρημα του Darboux, το οποίο, τουλάχιστον τοπικά, μας επαναφέρει στις κανονικές συντεταγμένες που χρησιμοποιούνται στις συμπλεκτικές πολλαπλοτήτες.

Θεώρημα 7 (Darboux). *Έστω X μια n-διάστατη πολλαπλότητα Poisson, της οποίας ο πίνακας δομής έχει παντού σταθερή τάξη $2k \leq n$. Τότε σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας υπάρχουν τοπικές κανονικές συντεταγμένες $(q, p, z) = \left(q^1, \cdots, q^k, p^1, \cdots, p^k, z^1, \cdots, z^{n-2k}\right)$ στις οποίες η αγκύλη Poisson παίρνει την μορφή*

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial G}{\partial q^i}$$

για $i = 1, \cdots, k$. Ο πίνακας δομής J της πολλαπλότητας Poisson X γράφεται τότε ως

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_k & 0 \\ -I_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ οι εξισώσεις Hamilton που αντιστοιχούν στην συνάρτηση H

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}\,, \qquad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}\,, \qquad \frac{dz^l}{dt} = 0$$

για $i = 1, \ldots, k$ και $l = 1, \ldots, n-2k$.

Παράδειγμα 3.3. Ας επιστρέψουμε και πάλι στην περίπτωση της περιστροφικής κίνησης στερεού σώματος στον $\mathbb{R}^3$. Σε περιοχές μακριά από τον άξονα L_3 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τοπικές συντεταγμένες (q,p,z) που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} q &= L_3 \\ p &= \arctan\frac{L_2}{L_1} \\ z &= \sqrt{L_1^2+L_2^2+L_3^2} \end{aligned}$$

Η επιλογή των μεταβλητών αυτών έγινε, όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος Darboux, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις $\{q,p\}=1$ και $\{q,z\}=\{p,z\}=0$. Οι εξισώσεις Euler παίρνουν τώρα την μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{I_1-I_2}{2I_1I_2}\left(z^2-q^2\right)\sin 2p \\ \frac{dp}{dt} &= q\left(\frac{\cos^2 p}{I_1}+\frac{\sin^2 p}{I_2}-\frac{1}{I_3}\right) \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

ενώ η συνάρτηση Hamilton

$$H(q,p,z)=\frac{1}{2}\left(z^2-q^2\right)\left(\frac{\cos^2 p}{I_1}+\frac{\sin^2 p}{I_2}\right)+\frac{q^2}{2I_3}$$

Στην περιοχή λοιπόν αυτή, το αρχικό σύστημα Hamilton των εξισώσεων Euler εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

3.5 Συμμετρίες Hamilton

Στο μεγαλύτερο κομμάτι της βιβλιογραφίας, κεντρικό ρόλο στην θεωρία Hamilton παίζουν τα πρώτα ολοκληρώματα, τα οποία συχνά μάλιστα χρησιμοποιούνται και ως συντεταγμένες, γνωστές ως *δράσεις*. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό γίνεται αντιληπτός, αν θυμηθούμε το περιεχόμενο του θεωρήματος της Noether. Σύμφωνα με αυτό, αναμένουμε μία αντιστοιχία μεταξύ των νόμων διατήρησης-πρώτων ολοκληρωμάτων και ορισμένων από τις συμμετρίες ενός συστήματος Hamilton. Το είδος αυτό συμμετρίας, που θα γνωρίσουμε αμέσως παρακάτω, ονομάζεται *συμμετρία Hamilton*.

Έστω λοιπόν ένα πρώτο ολοκλήρωμα $P(x,t)$ ενός συστήματος Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\,\nabla H(x,t)$$

Αναπτύσσουμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Hamilton, οπότε παίρνουμε

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x^i}J^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^j} = \frac{\partial P}{\partial t} + \{P,H\}$$

Έτσι τα πρώτα ολοκληρώματα μπορούν να χαρακτηριστούν χρησιμοποιώντας την αγκύλη Poisson.

Πρόταση 2. *Μία ομαλή πραγματική συνάρτηση $P(x,t)$ αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης του συστήματος Hamilton (3.7) αν και μόνο αν για κάθε x, t ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \{P,H\} = 0 \tag{3.14}$$

Σύμφωνα με την πρόταση αυτή μία χρονοανεξάρτητη συνάρτηση $P(x)$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα αν και μόνο αν $\{P,H\} = 0$. Έπίσης βλέπουμε ότι *στην περίπτωση που το σύστημα είναι αυτόνομο, τότε η ίδια η συνάρτηση Hamilton είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα.*

Ορισμός 8. *Έστω X μία πολλαπλότητα Poisson. Μία ομαλή πραγματική συνάρτηση $C(x,t)$ όπου $x \in X$, ονομάζεται συνάρτηση Casimir, αν το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο Hamilton $\mathrm{v}_C = \{\ \ ,C\}$ είναι παντού μηδέν.*

Με άλλα λόγια, η αγκύλη Poisson των συναρτήσεων Casimir με οποιαδήποτε άλλη συνάρτηση F είναι πάντα ίση με μηδέν, $\{F,C\} = 0$. Οι σταθερές και οι συναρτήσεις, που εξαρτώνται μόνο από τον χρόνο t, είναι τέτοιες συναρτήσεις. Στην περίπτωση μάλιστα των συμπλεκτικών πολλαπλοτήτων αυτές είναι και οι μοναδικές συναρτήσεις Casimir. Οι μεταβλητές z που συναντήσαμε στο θεώρημα Darboux είναι επίσης συναρτήσεις Casimir. Τέλος, η μερική παράγωγος C_t μιας συνάρτησης Casimir ως προς τον χρόνο είναι επίσης συνάρτηση Casimir. Πράγματι, παραγωγίζοντας ως προς t, παίρνουμε $\{F,C\}_t = \{F_t,C\} + \{F,C_t\} = \{F,C_t\} = 0$ για κάθε F.

Παράδειγμα 3.4. Η μεταβλητή z του προηγούμενου παραδείγματος, που παριστάνει το μέτρο της στροφορμής L στην περιστροφική κίνηση ενός στερεού, είναι μια συνάρτηση Casimir :

$$\begin{aligned}\{\ \ ,L^2\} &= \{\ \ ,L_1^2 + L_2^2 + L_3^2\} = \{\ \ ,L_1^2\} + \{\ \ ,L_2^2\} + \{\ \ ,L_3^2\} \\ &= 2L_1\{\ \ ,L_1\} + 2L_2\{\ \ ,L_2\} + 2L_3\{\ \ ,L_3\} \\ &= 2L_1\left(L_3\frac{\partial}{\partial L_2} - L_2\frac{\partial}{\partial L_3}\right) + 2L_2\left(L_1\frac{\partial}{\partial L_3} - L_3\frac{\partial}{\partial L_1}\right) + 2L_3\left(L_2\frac{\partial}{\partial L_1} - L_1\frac{\partial}{\partial L_2}\right) = 0\end{aligned}$$

Μία χρονοανεξάρτητη συνάρτηση Casimir $C(x)$ είναι αυτόματα ένα πρώτο ολοκλήρωμα, αλλά η σημασία των συναρτήσεων αυτών δεν περιορίζεται μόνο στην πρόταση αυτή. Στην πραγματικότητα, στην ύπαρξη τους οφείλεται το γεγονός ότι δεν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε διανυσματικό πεδίο Hamilton κι από μία συνάρτηση. Γιατί το διανυσματικό πεδίο $\{\ ,F\}$ είναι προφανώς ίδιο με το $\{\ ,F+C\} = \{\ ,F\} + \{\ ,C\}$. Η σπουδαιότητα της παρατήρησης αυτής θα γίνει σύντομα κατανοητή.

Έστω ένα πρώτο ολοκλήρωμα $P(x,t)$, που σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση ικανοποιεί την (3.14). Το διανυσματικό πεδίο Hamilton που αντιστοιχεί στην συνάρτηση που βλέπουμε στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι το

$$\left\{\ ,\frac{\partial P}{\partial t} + \{P,H\}\right\} = \left\{\ ,\frac{\partial P}{\partial t}\right\} + \{\ ,\{P,H\}\} = J^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + \mathrm{v}_{\{P,H\}}$$

Επειδή ο πίνακας J δεν εξαρτάται από τον χρόνο t, τότε λόγω των (2.13) και (3.13), το πεδίο τελικά γράφεται

$$\frac{\partial \mathrm{v}_P}{\partial t} + [\mathrm{v}_H, \mathrm{v}_P] = 0$$

και είναι φυσικά ίσο με μηδέν. Η συνθήκη όμως αυτή δεν είναι άλλη από την (2.14), σύμφωνα με την οποία το πεδίο εξέλιξης v_P με χαρακτηριστική $J\nabla P$ γεννάει μία μονοπαραμετρική ομάδα συμμετρίας. Η συμμετρία μάλιστα αυτή είναι μια Lie συμμετρία, αφού τόσο ο πίνακας J όσο και η συνάρτηση P εξαρτώνται μόνο από τις εξαρτημένες μεταβλητές x κι όχι από τις παραγώγους τους. Το στοιχείο όμως που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι ότι η συμμετρία γεννιέται από ενα πεδίο Hamilton.

Ορισμός 9. *Μία ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος Hamilton, της οποίας οι γεννήτορες είναι διανυσματικά πεδία Hamilton ονομάζεται ομάδα συμμετρίας Hamilton.*

Ας δούμε τώρα αν μπορούμε να ακολουθήσουμε το παραπάνω συλλογισμό κι αντίστροφα. Έστω λοιπόν μια συμμετρία Hamilton με γεννήτορα ένα διανυσματικό πεδίο Hamilton v_P, που συνεπώς ικανοποιεί την συνθήκη (2.14). Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής αποτελεί επίσης ένα διανυσματικό πεδίο Hamilton, αφού μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\partial \mathrm{v}_P}{\partial t} + [\mathrm{v}_H, \mathrm{v}_P] = \left\{\ ,\frac{\partial P}{\partial t} + \{P,H\}\right\}$$

Στο επόμενο όμως βήμα σκοντάφτουμε στην παρατήρηση, που έγινε νωρίτερα πάνω στις συναρτήσεις Casimir. Γιατί η έκφραση αυτή δεν είναι και η μοναδική, με αποτέλεσμα από την σχέση (2.14) να συνάγουμε την

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \{P,H\} + C = 0$$

όπου C μια συνάρτηση Casimir. Μπορούμε ακόμα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρήσουμε στην θέση της την παράγωγο μιας συνάρτησης Casimir ως προς τον χρόνο, οπότε θα έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \{P, H\} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial\,(P + C)}{\partial t} + \{P + C, H\} = 0$$

Άρα δηλαδή, η συνάρτηση $\widetilde{P} = P + C$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα.

Θεώρημα 8. *Ένα διανυσματικό πεδίο Hamilton v_P, που αντιστοιχεί στην συνάρτηση $P(x, t)$, γεννάει μία μονοπαραμετρική ομάδα συμμετρίας Hamilton ενός συστήματος Hamilton αν και μόνο αν η συνάρτηση $P + C$, όπου $C(x, t)$ μια τυχαία συνάρτηση Casimir, αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα.*

Παράδειγμα 3.5. Ας θεωρήσουμε ένα υλικό σημείο μάζας $m = 1$ που κινείται στον $\mathbb{R}^3$ ύπο την επίδραση ενός δυναμικού U, που εξαρτάται μόνο από την θέση του q, σύμφωνα με τις εξισώσεις του Νεύτωνα

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\nabla U$$

Γνωρίζουμε ήδη, από την εισαγωγή του κεφαλαίου και το παράδειγμα 2.6, ότι οι εξισώσεις αυτές γράφονται ως σύστημα Hamilton,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

για $i = 1, 2, 3$, με κανονικές συντεταγμένες τις συνιστώσες της θέσης $q = (q_1, q_2, q_3)$ και της ορμής $p = (p_1, p_2, p_3)$ του σώματος, και συνάρτηση Hamilton την ενέργεια του,

$$H\,(q, p) = \frac{p^2}{2} + U(q)$$

Η αγκύλη Poisson είναι ίση με

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

Όπως σχολιάστηκε, η χρονοανεξάρτητη συνάρτηση H αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα, γνωστό ως το *ολοκλήρωμα της ενέργειας*, το οποίο εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο Hamilton

$$\mathrm{v}_H = \{\ \ , H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial t}$$

γεννάει μία συμμετρία Hamilton του συστήματος. Η ροή του εκφράζει την εξέλιξη του συστήματος, δηλαδή χρονικές μετατοπίσεις,

$$\widetilde{t} = e^{\epsilon \mathrm{v}_H}(t) = \left(I + \epsilon\,\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\epsilon^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right) t = t + \epsilon$$

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας είναι λοιπόν ισοδύναμη με την ομογένεια του χρόνου.

Στην περίπτωση όπου το δυναμικό δεν εξαρτάται από μία χωρική συνιστώσα, ας πούμε την q_3, τότε, όπως βλέπουμε από τις εξισώσεις Hamilton, η αντίστοιχη ορμή p_3 διατηρείται,

$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_3} = 0$$

κι αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα, το *ολοκλήρωμα της ορμής* p_3. Το αντίστοιχο πεδίο Hamilton

$$\mathrm{v}_{p_3} = \{\ \ , p_3\} = \frac{\partial}{\partial q_3}$$

γεννάει μία συμμετρία, που αφήνει τώρα αναλλοίωτες τις χωρικές μετατοπίσεις, $\widetilde{q}_3 = q_3 + \epsilon$. Αν το υλικό σημείο κινείται τελείως ελεύθερα, χωρίς την επίδραση δυνάμεων, $U = 0$, τότε και οι τρεις συνιστώσες της ορμής διατηρούνται και το σύστημα παραμένει αμετάβλητο κάτω από τον συνολικό μετασχηματισμό $\widetilde{q} = q + \epsilon$. Βλέπουμε λοιπόν τότε ότι *η αρχή διατήρησης της ορμής ισοδυναμεί με την ομογένεια του χώρου.*

Τέλος, στην περίπτωση ενός κεντρικού δυναμικού, δηλαδή ενός δυναμικού που εξαρτάται μόνο από την απόσταση $r = |q|$, τότε υπάρχει το *ολοκλήρωμα της στροφορμής* $L = q \times p$,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dq}{dt} \times p + q \times \frac{dp}{dt} = q \times (-\nabla U) = -\, q \times \left(\frac{dU}{dr}\frac{q}{r}\right) = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι οι τρεις συνιστώσες της,

$$L_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2\ , \qquad L_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3\ , \qquad L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$$

παραμένουν σταθερές. Τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία Hamilton,

$$\{\ \ , L_1\} = q_2 \frac{\partial}{\partial q_3} - q_3 \frac{\partial}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} - p_3 \frac{\partial}{\partial p_2}$$

$$\{\ \ , L_2\} = q_3 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_3} + p_3 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_3}$$

$$\{\ \ , L_3\} = q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1}$$

γεννάνε, όπως είδαμε νωρίτερα, στροφές τόσο στον χώρο των θέσεων (q_1, q_2, q_3), όσο και των ορμών (p_1, p_2, p_3). Συνεπώς *η αρχή διατήρησης της στροφορμής ισοδυναμεί με την ισοτροπία του χώρου,* την συμμετρία δηλαδή του συστήματος κάτω από στροφές.

3.6 Ολοκληρωσιμότητα

Γνώριζοντας τα συστήματα Hamilton μέσα από τις συμμετρίες, μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε με βάση τις μεθόδους που αναπτύξαμε στην παράγραφο 1.5. Η μόνη διαφορά είναι ότι χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες Hamilton μπορούμε να υποβιβάσουμε την τάξη του συστήματος ακόμα περισσότερο, γεγονός το οποίο αναδεικνύει την σπουδαιότητα τους.

Έστω ένα n-διάστατο σύστημα Hamilton και v_P ένα διανυσματικό πεδίο Hamilton, που γεννάει μία συμμετρία του. Ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης του θεωρήματος Darboux, σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας Poisson όπου $\mathrm{v}_P \neq 0$, βρίσκουμε νέες συντεταγμένες $\left(q, p, y^1, \ldots, y^{n-2}\right)$, με $p = P(x)$, τέτοιες ώστε $\{q, p\} = 1$ και $\left\{y^i, p\right\} = 0$. Η απαίτηση $\left\{y^i, q\right\} = 0$ δεν είναι απαραίτητη εδώ, με άλλα λόγια έχουμε «ευθυγραμμίσει» μόνο το πεδίο

$$\mathrm{v}_p = \{\ \ , p\} = \frac{\partial}{\partial q} \tag{3.15}$$

κι όχι και το v_q. Έτσι ο πίνακας δομής παίρνει την μορφή

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -a^T & 0 & \widetilde{J} \end{pmatrix}$$

όπου $a(p, y)$ το διάνυσμα-γραμμή με στοιχεία $a^i = \left\{q, y^i\right\}$, a^T το αντίστοιχο διάνυσμα-στήλη και $\widetilde{J}(p, y)$ ο $(n-2) \times (n-2)$ πίνακας με στοιχεία $\widetilde{J}^{ij} = \left\{y^i, y^j\right\}$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Jacobi, όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος Darboux, αποδεικνύεται ότι τα στοιχεία a^i και $\widetilde{J}^{ij}$ δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή q. Παρατηρούμε ακόμα, ότι και η συνάρτηση Hamilton δεν εξαρτάται από την q,

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \{H, p\} = -\frac{dp}{dt} = 0$$

Τελικά το αρχικό σύστημα παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} + a^i \frac{\partial H}{\partial y^i} \\ \frac{dp}{dt} &= 0 \\ \frac{dy^i}{dt} &= \widetilde{J}^{ij} \frac{\partial H}{\partial y^j}, \qquad i = 1 \cdots n-2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Η δεύτερη εξίσωση εκφράζει αυτό που ήδη ξέρουμε ότι η μεταβλητή p είναι μια σταθερά. Επειδή ο πίνακας $\widetilde{J}$ και η συνάρτηση Hamilton H δεν εξαρτώνται από την q, οι τελευταίες $(n-2)$ εξισώσεις λύνονται για κάθε σταθερή τιμή της p ανεξάρτητα από την πρώτη. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν μάλιστα ένα σύστημα Hamilton με πίνακα δομής τον *ανηγμένο* πίνακα $\widetilde{J}$ και συνάρτηση Hamilton την αρχική συνάρτηση H στις νέες μεταβλητές y. Γνωρίζοντας την λύση του συστήματος αυτού μπορούμε έπειτα να λύσουμε την πρώτη με μία απλή ολοκλήρωση, αφού η συνάρτηση στο δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη της q.

Θεώρημα 9. *Η ύπαρξη μιας μονοπαραμετρικής ομάδας συμμετρίας Hamilton ενός συστήματος Hamilton υποβιβάζει την τάξη του κατά δύο. Το ανηγμένο σύστημα αποτελεί επίσης σύστημα Hamilton.*

Ας σημειώσουμε ότι σε κάθε περίπτωση η ύπαρξη ενός πρώτου ολοκληρώματος P υποβιβάζει την τάξη κατά ένα, αφού η εξέλιξη του συστήματος περιορίζεται στην σταθμική υπερεπιφάνεια $P(x^1, \ldots, x^n) = c$ διάστασης $(n-1)$. Έτσι, σύμφωνα και με προηγούμενη παρατήρηση, συμπεραίνουμε ότι *κάθε χρονοανεξάρτητη συνάρτηση Casimir υποβιβάζει την τάξη του συστήματος κατά ένα.*

Παράδειγμα 3.6. Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^4$ το σύστημα Hamilton

$$\frac{dq_1}{dt} = p_1 \ , \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dU}{dr} \ , \quad \frac{dq_2}{dt} = p_2 \ , \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{dU}{dr}$$

όπου $r = q_1 - q_2$, με συνάρτηση Hamilton

$$H\left(q_1, q_2, p_1, p_2\right) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + U(q_1 - q_2)$$

και πίνακα δομής

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Η αγκύλη Poisson είναι

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

για $i = 1, 2$. Το σύστημα αυτό βρίσκει για παράδειγμα εφαρμογή στο πρόβλημα δύο μαζών που κινούνται στο επίπεδο συνδεδεμένες με ένα ελατήριο.

Εύκολα παρατηρούμε από τις εξισώσεις Hamilton ότι η συνάρτηση $p_1 + p_2$ αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα, στο οποίο αντιστοιχεί το διανυσματικό πεδίο

$$\{\ \ , p_1 + p_2\} = \{\ \ , p_1\} + \{\ \ , p_2\} = \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2}$$

Θέτουμε $p = p_1 + p_2$ και αναζητούμε μία συνάρτηση q τέοια ώστε $\{q, p\} = 1$. Με βάση την παραπάνω σχέση διαλέγουμε $q = q_1$. Στην συνέχεια επιλέγουμε άλλες δύο συναρτήσεις y_1, y_2 έτσι ώστε $\{y_1, p\} = \{y_2, p\} = 0$. Μία τέτοια επιλογή είναι $y_1 = p_1$ και $y_2 = r = q_1 - q_2$. Σε αυτές λοιπόν τις νέες μεταβλητές το σύστημα γράφεται

$$\frac{dq}{dt} = y_1 \ , \quad \frac{dp}{dt} = 0 \ , \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dU}{dy_2} \ , \quad \frac{dy_2}{dt} = 2y_1 - p$$

Η λύση της πρώτης εξίσωσης

$$q(t) = \int y_1(t)\, dt + a \tag{3.17}$$

όπου a σταθερά, καθορίζεται αν βρούμε την $y_1(t)$. Απ' την δεύτερη έχουμε $p(t) = 2\,b$, όπου b σταθερά, ενώ οι δύο τελευταίες λύνονται ανεξάρτητα από τις άλλες για κάθε σταθερή τιμή της p. Η συνάρτηση Hamilton εκφρασμένη στις νέες συντεταγμένες είναι

$$H(y_1, y_2) = y_1^2 - 2\,b\,y_1 + U(y_2) + 2\,b^2 \tag{3.18}$$

Εύκολα τώρα παρατηρούμε ότι οι δύο εξισώσεις του ανηγμένου συστήματος, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση αυτή, γράφονται ως σύστημα Hamilton,

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2} \ , \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_1}$$

Ας σημειώσουμε ότι με τον τρόπο αυτό, όπως φαίνεται κι από τις εξισώσεις (3.16), ανάγουμε ουσιαστικά το σύστημα σε μια $(n-1)$-διάστατη πολλαπλότητα Poisson με τοπικές συντεταγμένες $\left(p, y^i\right)$, όπου το ολοκλήρωμα της κίνησης εμφανίζεται τελικά ως μια συνάρτηση Casimir. Πράγματι από την (3.15), βλέπουμε ότι για κάθε $F\left(p, y^i\right)$ είναι

$$\{F, P\} = \frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

Η εύρεση των συντεταγμένων q, y^i που «ευθυγραμμίζουν» την συμμετρία, γίνεται σε πολλές περιπτώσεις ιδιαίτερα δύσκολη. Όταν μάλιστα το αντίστοιχο πρώτο ολοκλήρωμα είναι η ίδια η συνάρτηση Hamilton, τότε είναι το ίδιο με το να προσπαθεί κανείς να λύσει το ίδιο το σύστημα. Αν λοιπόν το διανυσματικό πεδίο Hamilton v_P που γεννάει την συμμετρία είναι αρκετά περίπλοκο, τότε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε το αντίστοιχο πρώτο ολοκλήρωμα P.

Στην περίπτωση της συνάρτησης Hamilton H αυτό γίνεται μεταβαίνοντας σε ένα μη αυτόνομο σύστημα Hamilton μικρότερης διάστασης κατά δύο τάξεις. Λέγοντας μη αυτόνομο δεν εννοούμε όμως ως προς τον χρόνο t, αλλά μία από τις εξαρτημένες χωρικές μεταβλητές x^i. Αναλυτικά, για να το δούμε αυτό είναι συνήθως απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τις συντεταγμένες $\left(q, p, y^1, \ldots, y^{n-2}\right)$, που γνωρίσαμε και στο θεώρημα Darboux, στις οποίες το σύστημα παίρνει την μορφή

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \ , \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \ , \qquad \frac{dy^i}{dt} = \widetilde{J}^{ij}\,\frac{\partial H}{\partial y^j} \ , \qquad i = 1 \cdots n-2$$

Λύνουμε έπειτα την εξίσωση $H\left(q,p,y^i\right)=c$, ως προς p (ή και ως προς q μπορούμε), οπότε παίρνουμε $p=Z\left(c,q,y^i\right)$. Στην συνέχεια γράφουμε το σύστημα θεωρώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή την q (ή αντίστοιχα την p) κι ως εξαρτημένες τις t,c,y^i,

$$\frac{dt}{dq}=\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}=\frac{\partial Z}{\partial c}\,,\qquad \frac{dc}{dq}=\frac{dc}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right)^{-1}=0$$

$$\frac{dy^i}{dq}=\frac{dy^i}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right)^{-1}=\widetilde{J}^{ij}\,\frac{\partial H}{\partial y^j}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}=\widetilde{J}^{ij}\,\frac{\partial Z}{\partial y^j}$$

Όπως είχαμε δείξει, ο πίνακας $\widetilde{J}$ εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές $y^1,\ldots,y^{n-2}$, κι άρα οι τελευταίες $(n-2)$ εξισώσεις αποτελούν ένα μη αυτόνομο σύστημα Hamilton που λύνεται ανεξάρτητα από την πρώτη για κάθε σταθερή τιμή c. Βρίσκοντας την λύση αυτή, μπορούμε έπειτα από την πρώτη να βρούμε με μια ολοκλήρωση την $t(q)$.

Για να λύσουμε βέβαια την σχέση $H=c$ ως προς την μεταβλητή p, θα πρέπει $\partial H/\partial p\neq 0$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η μεταβλητή q αποτελεί ένα άλλο πρώτο ολοκλήρωμα, οπότε μπορούμε να υποβιβάσουμε πρώτα το σύστημα σύμφωνα με την προηγούμενη μέθοδο και ύστερα να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης Hamilton, όπως παραπάνω.

Παράδειγμα 3.7. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση Hamilton του ανηγμένου συστήματος (3.18) στο προηγούμενο παράδειγμα είναι ανεξάρτητη του χρόνου, κι άρα αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα. Λύνουμε λοιπόν την $H=c$ ως προς μία από τις δύο μεταβλητές, ας πούμε την y_1,

$$y_1=b\pm\sqrt{c-b^2-U(y_2)} \tag{3.19}$$

κι αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση, οπότε έχουμε

$$\frac{dy_2}{dt}=2y_1-2b=\pm 2\sqrt{c-b^2-U(y_2)}$$

Με χωρισμό μεταβλητών παίρνουμε τελικά

$$t-t_0=\mp\int\frac{dy_2}{2\sqrt{c-b^2-U(y_2)}} \tag{3.20}$$

Από αυτήν την εξισώση μπορούμε με μία ολοκλήρωση να βρούμε την $y_2(t)$, κι επιστρέφοντας στην (3.19) να βρούμε έπειτα και την $y_1(t)$.

Γενικότερα όταν έχουμε ένα πρώτο ολοκλήρωμα P, περιορίζουμε αρχικά το σύστημα στην υπερεπιφάνεια $P\left(x\right)=c$ και ύστερα, χρησιμοποιώντας την συμμετρία, προχωρούμε σε υποβιβασμό κατά μία ακόμα τάξη. Η προσέγγιση αυτή είναι πιο λογική απ' το να εκμεταλλευτούμε πρώτα την συμμετρία, για να αναχθούμε σε ένα $(n{-}1)$-διάστατο σύστημα Hamilton, όπου το ολοκλήρωμα της κίνησης παρουσιάζεται πλέον σαν μια συνάρτηση Casimir.

Αυτό σημαίνει ότι αντί να ψάχνουμε στα «τυφλά» να βρούμε τις συναρτήσεις q, y^i, είναι καλύτερα πρώτα να μεταβούμε στον $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο, πάνω στον οποίο διατηρείται η ποσότητα P κι απ' όπου η αντίστοιχη συμμετρία v_P εκφράζεται πιο άμεσα. Εκεί, διαλέγοντας κατάλληλα τοπικές συντεταγμένες, οι ζητούμενες συναρτήσεις απλουστεύονται σημαντικά, καθιστώντας πιο εύκολη την εύρεση τους.

Παράδειγμα 3.8. Ας θεωρήσουμε το σύστημα Hamilton στον $\mathbb{R}^6$,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

όπου $i = 1, 2, 3$, που μελετήσαμε και στο παράδειγμα 3.5, με συνάρτηση Hamilton

$$H\left(q, p\right) = \frac{p^2}{2} + U(q)$$

Έστω ότι η τρίτη συνιστώσα της στροφορμής του συστήματος, $L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1$, αποτελεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα. Η μορφή του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου Hamilton,

$$\{\ \ , L_3\} = q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - q_2\frac{\partial}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial}{\partial p_2} - p_2\frac{\partial}{\partial p_1}$$

όπως βλέπουμε, δεν είναι και τόσο απλή. Γνωρίζουμε όμως ότι εκφράζει συμμετρία του συστήματος γύρω από τον άξονα z. Είναι επομένως λογικό να θεωρήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$q = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, q_3) \qquad\qquad p = (\rho\cos\psi, \rho\sin\psi, p_3)$$

στις οποίες το ολοκλήρωμα γράφεται

$$L_3 = r\rho\sin\phi = c \tag{3.21}$$

όπου $\phi = \psi - \vartheta$. Για την μελέτη του συστήματος, τρεις από τις συντεταγμένες r, ϑ, ρ, ψ είναι αρκετές, καθώς η τέταρτη μπορεί έπειτα να υπολογιστεί από την σχέση (3.21). Επιλέγουμε τις r, ϑ κι αντί της ρ ή της ψ, διαλέγουμε την ϕ.

Περιορίζοντας λοιπόν το σύστημα στην υπερεπιφάνεια $L_3 = c$, χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες $r, \vartheta, \phi, q_3, p_3$ για την περιγραφή του. Το σύστημα παίρνει τώρα την μορφή

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{r\tan\phi}\,, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2}\,, \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{r\sin^2\phi}{c}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{c}{r^2}\,, \qquad \frac{dq_3}{dt} = p_3\,, \qquad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_3}$$

Η συμμετρία, που εκφράζεται τώρα ως

$$\{\ \ , L_3\} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

συνεχίζει να διατηρείται, αφού σε καμιά από τις εξισώσεις αυτές δεν υπεισέρχεται η μεταβλητή ϑ. Ακόμα και για το δυναμικό U είμαστε σίγουροι ότι δεν εξαρτάται από την ϑ, καθώς από την (3.14) έχουμε $\{H, L_3\} = 0$ κι άρα

$$\{H, L_3\} = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0$$

Επομένως τελικά το αρχικό σύστημα έχει υποβιβαστεί στο

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{r \tan\phi}\,, \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{r\sin^2\phi}{c}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{c}{r^2}$$

$$\frac{dq_3}{dt} = p_3\,, \qquad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_3}$$

το οποίο αποτελεί σύστημα Hamilton με αντίστοιχη συνάρτηση

$$H(r, \phi, q_3, p_3) = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{r^2 \sin^2\phi} + p_3^2\right) + U(r, q_3)$$

και πίνακα δομής

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r\sin^2\phi}{c_2} & 0 & 0 \\ \frac{r\sin^2\phi}{c_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ας έρθουμε τώρα στην γενικότερη περίπτωση μιας r-παραμετρικής ομάδας συμμετρίας Hamilton. Σύμφωνα με τον Ορισμό 9 και το Θεώρημα 8, οι γεννήτορες $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_r$ μιας τέτοιας ομάδας προέρχονται από πρώτα ολοκληρώματα, έστω $P_1, \ldots, P_r$, σύμφωνα με την σχέση $\mathrm{v}_i = \{\ \ , P_i\}$. Τα πεδία όμως αυτά αποτελούν μία βάση της αντίστοιχης άλγεβρας Lie, οπότε ικανοποιούν τις σχέσεις $[\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j] = c_{ij}^k \mathrm{v}_k$, όπου c_{ij}^k οι σταθερές δομής της άλγεβρας. Λόγω όμως της (3.13), οι τελευταίες γράφονται και ως $\{\ \ , \{P_j, P_i\}\} = c_{ij}^k \{\ \ , P_k\}$, ενώ απ' την διγραμμικότητα της αγκύλης Poisson, παίρνουμε τελικά

$$\{P_i, P_j\} = c_{ji}^k P_k \tag{3.22}$$

Θεώρημα 10 (Poisson). *Η αγκύλη Poisson δύο πρώτων ολοκληρωμάτων της κίνησης ενός συστήματος Hamilton αποτελεί επίσης πρώτο ολοκλήρωμα.*

Για το σύστημα που μελετήσαμε στα παραδείγματα 3.6 και 3.7 είδαμε ότι η ύπαρξη δύο ολοκληρωμάτων της κίνησης οδήγησε σε υποβιβασμό τάξης συνολικά κατά τέσσερα. Γενικά όμως, r πρώτα ολοκληρώματα ενός συστήματος Hamilton δεν συνεπάγονται πάντοτε υποβιβασμό κατά $2r$. Ακομά κι αν απαιτήσουμε να είναι επιλύσιμη η ομάδα συμμετρίας Hamilton, δεν αρκεί για να επιτύχουμε αυτόν τον σκοπό. Για τα συστήματα Hamilton ισχύει το παρακάτω θεώρημα, το οποίο γενικεύεται για κάθε σύστημα Euler-Lagrange μιας ανεξάρτητης και μιας εξαρτημένης μεταβλητής, που διαθέτει μια ομάδα μεταβολικών συμμετριών.

Θεώρημα 11. *Η ύπαρξη μιας r-παραμετρικής αβελιανής ομάδας συμμετρίας Hamilton ενός συστήματος Hamilton υποβιβάζει την τάξη του κατά $2r$. Το ανηγμένο σύστημα αποτελεί επίσης σύστημα Hamilton.*

Αβελιανή σημαίνει όλα τα στοιχεία της ομάδας να αντιμετατίθονται μεταξύ τους, δηλαδή, όπως είπαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, οι σταθερές δομής της άλγεβρας να είναι όλες ίσες με μηδέν. Τότε όμως, από την (3.22), τα αντίστοχα πρώτα ολοκληρώματα βρίσκονται, όπως λέμε, σε *ενέλιξη* μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει $\{P_i, P_j\} = 0$ για κάθε i, j. *Ένα $2n$-διάστατο σύστημα Hamilton, που διαθέτει μία n-παραμετρική αβελιανή ομάδα συμμετρίας Hamilton ή ισοδύναμα n πρώτα ολοκληρώματα σε ενέλιξη, ονομάζεται πλήρως ολοκληρώσιμο.*

Ας σημειώσουμε ότι σε κάθε περίπτωση το ολοκλήρωμα της ενέργειας H, βρίσκεται πάντα σε ενέλιξη με κάθε άλλο χρονοανεξάρτητο πρώτο ολοκλήρωμα, σύμφωνα με την Πρόταση 2. Αυτή ακριβώς ήταν και η περίπτωση του πλήρως ολοκληρώσιμου συστήματος που είδαμε στα παραδείγματα 3.5 και 3.6.

Όταν η ομάδα συμμετρίας Hamilton δεν είναι αβελιανή μπορούμε πάντα να υποβιβάσουμε το σύστημα τουλάχιστον κατά r, περιορίζοντάς το στην υποπολλαπλότητα $L_c = \{P_i(x) = c_i\}$. Ο περαιτέρω υποβιβασμός του εξαρτάται από το πόσες από τις αρχικές συμμετρίες διατηρούνται εκεί. Αν η ομάδα είναι αβελιανή, τότε διατηρούνται όλες, με αποτέλεσμα να μπορούμε να κάνουμε αναγωγή κατά r τάξεις ακόμα. Στην γενικότερη όμως περίπτωση διατηρείται μονάχα μια υποομάδα της αρχικής ομάδας συμμετρίας διάστασης $s \leq r$, επιτρέποντας επομένως υποβιβασμό ακόμα κατά s. Έτσι καταλήγουμε σε ένα σύστημα μικρότερης διάστασης κατά $(r+s)$, στο οποίο επάγεται η αρχική δομή Hamilton.

Η αναγωγή των πεπερασμένων συστημάτων Hamilton αποτελεί μια ξεχωριστή ενότητα, η οποία μελετάται με γεωμετρικές μεθόδους. Πρωταγωνιστής σε αυτές είναι η *απεικόνιση ορμής (momentum map)*, που μας μεταφέρει από την πολλαπλότητα Poisson στον δυϊκό χώρο της άλγεβρας Lie της ομάδας συμμετρίας Hamilton. Νωρίτερα είδαμε ότι ο χώρος αυτός μπορεί να εφοδιαστεί με την αγκύλη Lie-Poisson και να αποκτήσει την δομή μιας άλλης πολλαπλότητας Poisson. Μέσα λοιπόν από αυτήν την αντιστοιχία, και κάτω βέβαια από ορισμένες προϋποθέσεις, μπορεί κανείς να θεωρήσει την μέθοδο υποβιβασμού, που γνωρίσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα. Για μια αναλυτική περιγραφή βλέπε [31], [36].

Παράδειγμα 3.9. Ας επιστρέψουμε στο προηγούμενο παράδειγμα, θεωρώντας ότι εκτός από την στροφορμή L_3 διατηρείται και η ορμή p_3. Γνωρίζοντας ήδη την μορφή του διανυσματικού πεδίου $\{\ \ , L_3\}$ βλέπουμε ότι τα δύο ολοκληρώματα βρίσκονται σε ενέλιξη $\{p_3, L_3\} = 0$, παράγοντας μία αβελιανή δισδιάστατη ομάδα συμμετρίας Hamilton. Ο δεύτερος γεννήτορας της ομάδας αυτής,

$$\{\ \ , p_3\} = \frac{\partial}{\partial q_3}$$

βρίσκεται ήδη στην ζητούμενη μορφή. Γι' αυτό και πάλι διαλέγουμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες

$$q = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, q_3) \qquad p = (\rho\cos\psi, \rho\sin\psi, p_3)$$

προτού περιορίσουμε το σύστημα στο σταθμικό υποσύνολο $L_c = \{p_3 = c_1, L_3 = c_2\}$. Χρησιμοποιώντας τις r, ϑ, ϕ, q_3, όπου $\phi = \psi - \vartheta$, οι εξισώσεις παίρνουν την μορφή

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c_2}{r\tan\phi}\,, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c_2}{r^2}\,, \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{r\sin^2\phi}{c_2}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{c_2}{r^2}\,, \qquad \frac{dq_3}{dt} = c_1$$

Όπως βλέπουμε οι μεταβλητές ϑ και q_3 δεν εμφανίζονται πουθενά, γεγονός το οποίο αντανακλά την διατήρηση όλης της ομάδας συμμετρίας στο L_c. Έτσι το σύστημα υποβιβάζεται κατά δύο ακόμα τάξεις στις εξισώσεις

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c_2}{r\tan\phi}\,, \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{r\sin^2\phi}{c_2}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{c_2}{r^2} \tag{3.23}$$

οι οποίες αποτελούν σύστημα Hamilton με συνάρτηση Hamilton την αρχική συνάρτηση H στις νέες μεταβλητές

$$H(r,\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_2^2}{r^2\sin^2\phi} + c_1^2\right) + U(r)$$

Ο πίνακας δομής της δισδιάστατης πολλαπλότητας Poisson με τοπικές συντεταγμένες r, ϕ είναι

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r\sin^2\phi}{c_2} \\ \frac{r\sin^2\phi}{c_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Τέλος, επειδή η συνάρτηση Hamilton είναι ανεξάρτητη του χρόνου, υπάρχει ένα ακόμα πρώτο ολοκλήρωμα, το ολοκλήρωμα της ενέργειας. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι, όπως σχολιάστηκε, πάντα σε ενέλιξη με τα υπόλοιπα, γι' αυτό και η αντίστοιχη συμμετρία διατηρείται και στο ανηγμένο σύστημα. Πράγματι, όπως βλέπουμε, το σύστημα Hamilton (3.23) είναι αυτόνομο, κι άρα μπορούμε, τουλάχιστον θεωρητικά, να ολοκληρώσουμε πλήρως το αρχικό σύστημα.

Παράδειγμα 3.10. Το 3-διάστατο σύστημα των εξισώσεων Euler, που είδαμε στο παράδειγμα 3.1, είναι αυτόνομο κι άρα έχει το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}\right) = c_1 \tag{3.24}$$

Αργότερα όμως ανακαλύψαμε κι ένα ακόμα πρώτο ολοκλήρωμα, το μέτρο της στροφορμής L,

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = c_2 \tag{3.25}$$

το οποίο, όπως είδαμε, αποτελεί συνάρτηση Casimir.

Μπορούμε λοιπόν να περιορίσουμε το σύστημα στην τομή του ελλειψοειδούς $H = c_1$ και της σφαίρας $L^2 = c_2$. Πάνω στην τομή αυτή η συμμετρία Hamilton, που αντιστοιχεί στην H, και γεννιέται από το πεδίο $\mathrm{v}_H = \partial_t$ προφανώς διατηρείται, με αποτέλεσμα να μπορούμε να ολοκληρώσουμε πλήρως το σύστημα. Λύνοντας τις εξισώσεις (3.24) και (3.25) ως προς δυο μεταβλητές, ας πούμε τις L_2 και L_3,

$$L_2 = \pm\sqrt{\frac{I_2\, I_3}{I_2 - I_3}\left(-2c_1 + \frac{c_2}{I_3} + \frac{I_3 - I_1}{I_3\, I_1} L_1^2\right)}$$

$$L_3 = \pm\sqrt{\frac{I_2\, I_3}{I_2 - I_3}\left(2c_1 - \frac{c_2}{I_2} + \frac{I_1 - I_2}{I_1\, I_2} L_1^2\right)}$$

κι αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην πρώτη εξίσωση Euler, παίρνουμε

$$\frac{dL_1}{dt} = \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_3\, I_1}\frac{I_2 - I_1}{I_1\, I_2}\left(\frac{I_1\left(c_2 - 2c_1 I_3\right)}{I_3 - I_1} - L_1^2\right)\left(\frac{I_1\left(2c_1 I_2 - c_2\right)}{I_2 - I_1} - L_1^2\right)}$$

Η εξίσωση αυτή είναι πράγματι αυτόνομη και μπορεί να λυθεί με χωρισμό μεταβλητών, καταλήγοντας σε ένα ολοκλήρωμα το οποίο υπολογίζεται με την βοήθεια ελλειπτικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 3.11. Στο παράδειγμα 3.5 είδαμε ότι όταν το σύστημα

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ , \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ , \qquad\qquad i = 1, 2, 3$$

περιγράφεται από ένα πεδίο κεντρικών δυνάμεων

$$H\left(q, p\right) = \frac{p^2}{2} + U(r)$$

τότε η στροφορμή του $\vec{L}$ διατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι οι συνιστώσες της L_1, L_2, L_3 αποτελούν τρία πρώτα ολοκληρώματα, τα οποία όμως, βλέπουμε ότι δεν βρίσκονται σε ενέλιξη μεταξύ τους

$$\{L_1, L_2\} = L_3\ , \qquad \{L_3, L_1\} = L_2\ , \qquad \{L_2, L_3\} = L_1$$

Παρόλο αυτά μπορούμε να υποβιβάσουμε το σύστημα κατά τέσσερις τάξεις, καθώς το πρώτο ολοκλήρωμα L^2 βρίσκεται σε ενέλιξη με κάθενα απ' τα L_1, L_2, L_3. Για παράδειγμα,

$$\left\{L^2, L_3\right\} = \left\{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, L_3\right\} = \left\{L_1^2, L_3\right\} + \left\{L_2^2, L_3\right\} + \left\{L_3^2, L_3\right\} =$$

$$= 2L_1\left\{L_1, L_3\right\} + 2L_2\left\{L_2, L_3\right\} = -2L_1 L_2 + 2L_2 L_1 = 0$$

Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά γιατί συμβαίνει αυτό. Λέγοντας ότι η στροφορμή παραμένει σταθερή, εννοούμε τόσο ως μέτρο L αλλά κι ως διάνυσμα $\vec{L}$. Ένα σώμα που περιστρέφεται γύρω από τον ίδιο σταθερό άξονα, πάνω στον οποίο βρίσκεται το διάνυσμα της στροφορμής $\vec{L}$, κινείται αναγκαστικά σε ένα επίπεδο κάθετο σε αυτόν. Με άλλα λόγια το διάνυσμα θέσης $\vec{q}$ και η ορμή του $\vec{p}$ είναι συνεχώς κάθετα στο σταθερό διάνυσμα $\vec{q} \times \vec{p}$. Έτσι η τάξη του 6-διάστατου συστήματος πέφτει αρχικά κατά δύο. Το γεγονός ότι αυτή η περιστροφή γίνεται με σταθερό μέτρο L, δηλαδή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, είναι μία πληροφορία που αφορά μόνο το επίπεδο της κίνησης, ανεξάρτητα απ' το αν αυτό παραμένει σταθερό η όχι. Επομένως, προσφέρει στο υποβιβασμένο 4-διάστατο σύστημα ένα πρώτο ολοκλήρωμα της κίνησης, $L = c$, που, όπως γνωρίζουμε, ρίχνει την τάξη του κατά δύο ακόμα. Τελικά, μπορούμε να πούμε ότι η διατήρηση της στροφορμής μας παρέχει δύο πρώτα ολοκληρώματα σε ενέλιξη, το μέτρο της και την διεύθυνση της.

Με βάση την παρατήρηση αυτή ας δούμε τώρα πώς μπορεί να γίνει η αναγωγή του συστήματος. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι, η στροφορμή βρίσκεται στον άξονα z, δηλαδή $\vec{L} = (0, 0, L_3)$. Η κίνηση τότε γίνεται στο xy-επίπεδο ($q_3 = p_3 = 0$), ρίχνοντας έτσι την τάξη κατά δύο. Χρησιμοποιώντας έπειτα πολικές συντεταγμένες, $q = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ και $p = (\rho\cos\psi, \rho\sin\psi)$, και το ολοκλήρωμα $L_3 = r\rho\sin(\psi - \vartheta) = c$, μπορούμε να πέσουμε κατά δύο τάξεις ακόμα με τον τρόπο που δείξαμε στο παράδειγμα 3.8. Καταλήγουμε λοιπόν στο δισδιάστατο σύστημα

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{r\tan\phi}\,, \qquad \frac{d\phi}{dt} = \frac{r\sin^2\phi}{c}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{c}{r^2}$$

όπου $\phi = \psi - \vartheta$, το οποίο, όπως είδαμε και νωρίτερα, αποτελεί ένα αυτόνομο σύστημα Hamilton. Άρα τελικά το αρχικό μας σύστημα είναι πλήρως ολοκληρώσιμο και οι λύσεις του, $q(t)$ και $p(t)$, μπορούν να βρεθούν με ολοκλήρωση.

Ας έρθουμε τώρα στην γενική περίπτωση, όπου $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$, θεωρώντας τα αντίστοιχα τρία πρώτα ολοκληρώματα $L_1 = c_1, L_2 = c_2, L_3 = c_3$. Για να βρούμε την λύση του συστήματος, θα εκμεταλλευτούμε την συμμετρία του. Στο παράδειγμα 3.5 είδαμε ότι η συμμετρία αυτή εκφράζεται από την ομάδα SO(3) που περιγράφει στροφές στον $\mathbb{R}^3$, της θέσης q και της ορμής p ταυτόχρονα. Επομένως, αν βρούμε τις $q(t)$ και $p(t)$ στην περίπτωση που το διάνυσμα της στροφορμής βρίσκεται πάνω στον άξονα z, τότε, στρέφοντάς τις κατάλληλα, μπορούμε να ανακτήσουμε την λύση για μια τυχαία θέση του. Η στροφή αυτή αφήνει αναλλοίωτο το μέτρο της στροφορμής, άρα $c_1^2 + c_2^2 + c_3^3 = c^2$, αλλά μετασχηματίζει τις συνιστώσες της, σύμφωνα με την σχέση

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

όπου A ο πίνακας, που συναντήσαμε στο παράδειγμα 3.2. Ο πίνακας αυτός εξαρτάται από τις τρεις γωνίες του Euler, α, β, γ, κατά τις οποίες στρέφονται οι άξονες x, y, z αντίστοιχα. Η προηγούμενη απαίτηση ικανοποιείται όταν

$$\alpha = \arctan \frac{c_2}{c_3}\,, \qquad \beta = \arcsin \frac{c_1}{c}\,, \qquad \gamma \in \mathbb{R} \tag{3.26}$$

Επομένως η γενική λύση του συστήματος είναι τελικά η $(A\, q(t), A\, p(t))$, όπου $(q(t), p(t))$ η λύση όταν η στροφορμή βρίσκεται στον άξονα z, και $A \in \mathrm{SO}(3)$ με γωνίες Euler τις (3.26).

Κεφάλαιο 4

Η Μέθοδος Hamilton σε Εξισώσεις Εξέλιξης

Για παραπάνω από έναν αιώνα, η Μηχανική Hamilton εξελισσόταν με όλο και περισσότερες γεωμετρικές κατασκευές κι ερμηνείες, βγαλμένες από τα θεωρητικά μαθηματικά. Η εξέλιξη της όμως είχε πάντα ως αφετηρία συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Οι Arnold και Gardner ήταν οι πρώτοι που εφάρμοσαν την θεωρία Hamilton και σε μερικές διαφορικές εξισώσεις, συγκεκριμένα στις εξισώσεις Euler, που περιγράφουν την ροή ενός ιδανικού ρευστού, ο πρώτος και στην εξίσωση KdV ο δεύτερος.

Από τα δύο άρθρα που δημοσίευσε ο ίδιος ο Hamilton στα 1834-1835 μέχρι τις εργασίες των Arnold και Gardner το 1969 και 1971 αντίστοιχα, μεσολάβει όπως βλέπουμε ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα. Ο κύριος λόγος για την «καθυστέρηση» αυτή ήταν η επιμονή στην χρήση κανονικών συντεταγμένων, η ύπαρξη όμως των οποίων δεν εξασφαλίζεται στην περίπτωση των απειροδιάστατων συστημάτων εξέλιξης, όπως με το θεώρημα Darboux. Γι' αυτό και η προσέγγιση των συστημάτων Hamilton μέσω της ευρύτερης έννοιας της δομής Poisson κρίθηκε αργότερα ως πιο κατάλληλη.

Η διατύπωση Hamilton στις μερικές διαφορικές εξισώσεις έχει θεμελιωθεί πάνω στην βάση μιας ειδικής κατηγορίας συστημάτων. Πρόκειται για συστήματα εξέλιξης της γενικής μορφής

$$u_t = F\left(x, u^{(n)}\right)$$

που γνωρίσαμε στην παράγραφο 2.4. Πολλές απ' τις γνωστές μερικές διαφορικές εξισώσεις, που περιγράφουν διάφορα φυσικά φαινόμενα, εκφράζονται είτε άμεσα είτε έμμεσα από τέτοιου είδους συστήματα. Η γενίκευση της θεωρίας Hamilton, που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για τα συστήματα αυτά βασίζεται συνοπτικά στις εξής αντιστοιχίες:

αντί της συνάρτησης Hamilton $H(x)$, έχουμε ένα συναρτησιακό Hamilton $\mathcal{H}[u]$, επομένως

αντί της κλίσης ∇H, έχουμε την μεταβολική παράγωγο $\delta\mathcal{H}$, και τέλος

αντί του πίνακα J με στοιχεία συναρτήσεις του x, έχουμε έναν πίνακα $\mathfrak{D}$ με στοιχεία διαφορικούς τελεστές ως προς x, που μπορεί να εξαρτώνται από τις x, u και $u^{(n)}$.

4.1 Συστήματα Hamilton άπειρης διάστασης

Προτού ξεκινήσουμε κρίνεται μάλλον απαραίτητο να υπενθυμίσουμε κάποιες έννοιες από τα πρώτα δύο κεφάλαια. Όπως είπαμε θα μας απασχολήσουν συστήματα της μορφής

$$u_t = F\left(x, u^{(n)}\right) \tag{4.1}$$

όπου t και $x = \left(x^1, \ldots, x^p\right)$ οι ανεξάρτητες μεταβλητές, $u = \left(u^1, \ldots, u^q\right)$ οι εξαρτημένες και $u^{(n)}$ οι παράγωγοι των u μονο ως προς x μέχρι και n-οστής τάξης. Η συνάρτηση F είναι μια διαφορική συνάρτηση, δηλαδή μια ομαλή πραγματική συνάρτηση, που ορίζεται στον n-jet χώρο των x και u.

Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων αποτελεί μία άλγεβρα, την οποία συμβολίζουμε με A. Το σύνολο των συναρτησιακών $\int F\left(x, u^{(n)}\right) dx$ απ' την άλλη, μπορεί να ειδωθεί ως ο χώρος των διαφορικών συναρτήσεων, η διαφορά των οποίων δεν μπορεί να γραφεί ως η ολική απόκλιση $\mathrm{Div}P$ μιας διαφορικής διανυσματικής συνάρτησης $P \in A^p$. Ο χώρος αυτός, που είναι γνωστός κι ως χώρος-πηλίκο του A κάτω απ' την σχέση ισοδυναμίας $F = \widetilde{F} + \mathrm{Div}P$, αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο, τον οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$.

Στην περίπωση των συστημάτων (4.1), ο χώρος των συναρτησιακών κρίνεται ως ο πλέον κατάλληλος για να εφοδιαστεί με την δομή Poisson. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η δομή αυτή κρύβεται ουσιαστικά πίσω από την έννοια ενός συστήματος Hamilton. Για την περιγραφή των πεπερασμένων συστημάτων θα μπορούσαμε μάλιστα να 'χαμε ξεκινήσει ισοδύναμα από την αγκύλη $\nabla F \cdot J\,\nabla G$ και μέσω των ιδιοτήτων της να επιβάλουμε τις συνθήκες που ικανοποιεί ο πίνακας J, για να καταλήξουμε στον ορισμό $x_t = J\,\nabla H$. Μία αντίστοιχη πορεία θα ακολουθήσουμε τώρα για να ορίσουμε τα απειροδιάστατα συστήματα Hamilton.

Το κύριο χαρακτηριστικό της αγκύλης (3.8) είναι ότι απεικονίζει δύο συναρτήσεις σε μία τρίτη που εξαρτάται γραμμικά από τις κλίσεις τους. Σε πλήρη λοιπόν αντιστοιχία, η αγκύλη Poisson δύο συναρτησιακών θα είναι ένα συναρτησιακό που εξαρτάται γραμμικά από τις μεταβολικές τους παραγώγους. Συγκεκριμένα, ορίζουμε ως αγκύλη Poisson των συναρτησιακών $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ το συναρτησιακό

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int \delta\mathcal{F} \cdot \mathfrak{D}\,\delta\mathcal{G}\,dx \tag{4.2}$$

όπου $\mathfrak{D}$ κατάλληλος γραμμικός τελεστής. Μ' αυτόν τον τρόπο έχουμε εξασφαλίσει μόλις μία από τις τέσσερις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την αγκύλη Poisson, την διγραμμικότητα. Την αντισυμμετρικότητα και την ταυτότητα Jacobi μπορούμε επίσης να τις αποδώσουμε στον τελεστή $\mathfrak{D}$, όπως άλλωστε γίνεται και στα πεπερασμένα συστήματα χάρη στην Πρόταση 1. Η ύπαρξη τώρα ενός τέτοιου τελεστή είναι καθοριστικής σημασίας για την έκφραση Hamilton ενός συστήματος, όπως ήταν και του πίνακα J στον Ορισμό 5. Γι' αυτό και δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 10. *Ένας γραμμικός τελεστής $\mathfrak{D} : A^q \longrightarrow A^q$, που απεικονίζει μία διαφορική διανυσματική συνάρτηση σε μία άλλη, ονομάζεται τελεστής Hamilton αν η αντίστοιχη αγκύλη Poisson $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int \delta\mathcal{F} \cdot \mathfrak{D}\, \delta\mathcal{G}\, dx$ ικανοποιεί τις ιδιότητες της αντισυμμετρικότητας και της ταυτότητας Jacobi*

1. $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = -\{\mathcal{G}, \mathcal{F}\}$

2. $\{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}, \mathcal{H}\} + \{\{\mathcal{H}, \mathcal{F}\}, \mathcal{G}\} + \{\{\mathcal{G}, \mathcal{H}\}, \mathcal{F}\} = 0$

Η τελευταία ιδιότητα της αγκύλης Poisson, ο κανόνας του Leibniz, δεν μπορεί να ικανοποιηθεί στον $\mathcal{A}$. Το μειονέκτημα αυτό οφείλεται στο γεγονός, που έχουμε ήδη επισημάνει, ότι ο πολλαπλασιασμός των συναρτησιακών δεν είναι δυνατόν να οριστεί με έναν συνεπή τρόπο. Παρ' όλ' αυτά, ο κύριος σκοπός που εξυπηρετούσε η ιδιότητα αυτή, η αντιστοιχία δηλαδή της αγκύλης Poisson με ένα διανυσματικό πεδίο Hamilton, μπορεί και στην περίπτωση των απειροδιάστατων συστημάτων Hamilton να πραγματοποιηθεί.

Αυτό γίνεται, ορίζοντας ένα γενικευμένο πεδίο εξέλιξης v_Q και γενικά την επέκταση του $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q$ στον χώρο $\mathcal{A}$ των συναρτησιακών $\mathcal{F}[u] = \int F\left(x, u^{(n)}\right) dx$, ως εξής

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(\mathcal{F}) := \int \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(F)\, dx \tag{4.3}$$

Η επέκταση τότε ενός πεδίου με χαρακτηριστική $Q = \mathfrak{D}\,\delta\,\mathcal{G} = \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G)$ είναι λόγω της (2.19) ίση με την αγκύλη Poisson των συναρτησιακών $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$,

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(\mathcal{F}) = \int \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(F)\, dx = \int Q \cdot \mathrm{E}(F)\, dx = \int \mathrm{E}(F) \cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G)\, dx = \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} \tag{4.4}$$

Καταφέραμε λοιπόν να ανακτήσουμε την έννοια του διανυσματικού πεδίου Hamilton, που είναι όπως είδαμε απαραίτητη στην κατά συμμετρίες μελέτη των συστημάτων Hamilton.

Ορισμός 11. *Έστω $\mathfrak{D}$ ένας τελεστής Hamilton με αγκύλη Poisson $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int \delta\mathcal{F} \cdot \mathfrak{D}\, \delta\mathcal{G}\, dx$. Το μοναδικό γενικευμένο διανυσματικό πεδίο εξέλιξης $\mathrm{v}_{\mathcal{F}}$, που ικανοποιεί την σχέση $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{F}} = \{\ \ , \mathcal{F}\}$, ονομάζεται διανυσματικό πεδίο Hamilton, που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$.*

Όπως και στην περίπτωση των πεπερασμένων συστημάτων, έτσι κι εδώ, λέγοντας διανυσματικό πεδίο Hamilton $\mathrm{v}_{\mathcal{F}}$ εννοούμε ότι η χαρακτηριστική του είναι ίση με $\mathfrak{D}\,\delta\,\mathcal{F} = \mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(F)$.

Τελικά, έστω και με τις τρεις από τις τέσσερις ιδιότητες της δομής Poisson, σε συνδυασμό όμως με την παραπάνω θεώρηση των διανυσματικών πεδίων στον χώρο $\mathcal{A}$, η αγκύλη (4.2) βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με την (3.8). Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε τα συστήματα Hamilton, έχοντας ως πρότυπο την σχέση (3.6).

Ορισμός 12. *Ένα σύστημα εξισώσεων εξέλιξης*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(x, u^{(n)}\right)$$

ονομάζεται σύστημα Hamilton, αν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{D}\,\delta\,\mathcal{H} \tag{4.5}$$

όπου $\mathcal{H}\,[u]$ ένα συναρτησιακό, $\delta\,\mathcal{H}$ η μεταβολική παράγωγός του, και $\mathfrak{D}$ ένας τελεστής Hamilton.

Παράδειγμα 4.1. Η εξίσωση KdV

$$u_t = u_{xxx} + uu_x$$

είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός τέτοιου συστήματος Hamilton. Θεωρούμε τον τελεστή

$$\mathfrak{D} = \frac{d}{dx}$$

και το συναρτησιακό

$$\mathcal{H}\,[u] = \int H\,(u, u_x)\,dx = \int \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2}\right) dx$$

Η μεταβολική παράγωγος του συναρτησιακού υπολογίζεται, δρώντας με τον τελεστή Euler πάνω στην συνάρτηση H:

$$\delta\mathcal{H} = \mathrm{E}\,(H) = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial u_x}\right) + \cdots\right)\left(\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2}\right) = \frac{u^2}{2} + u_{xx}$$

Συνεπώς,

$$\mathfrak{D}\,\delta\mathcal{H} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\right) = uu_x + u_{xxx}$$

Άρα η εξίσωση KdV γράφεται ως $u_t = \mathfrak{D}\,\delta\mathcal{H}$, οπότε αποτελεί απειροδιάστατο σύστημα Hamilton.

Παράδειγμα 4.2. Μία άλλη εξίσωση που χρησιμοποιήται για την μελέτη της εξέλιξης υδάτινων κυμάτων σε ρηχά νερά, είναι η *εξίσωση Boussinesq*

$$u_{tt} = u_{xxxx} + u_x^2 + uu_{xx}$$

η οποία σε αντίθεση με την KdV, περιγράφει οδεύοντα κύματα, που διαδίδονται προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις.

Η εξίσωση αυτή αποτελεί επίσης ένα απειροδιάστατο σύστημα Hamilton, αν εκφραστεί ισοδύναμα ως εξής

$$\begin{aligned} u_t &= v_x \\ v_t &= u_{xxx} + u u_x \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τον πίνακα-τελεστή,

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix}$$

και το συναρτησιακό

$$\mathcal{H}[u] = \int H(u, v, u_x)\, dx = \int \left(\frac{u^3}{6} + \frac{v^2}{2} - \frac{u_x^2}{2} \right) dx$$

Η μεταβολική παράγωγος του $\mathcal{H}$ είναι το διάνυσμα

$$\delta\mathcal{H} = \left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u}, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta v} \right)$$

με συνιστώσες

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} = \mathbf{E}_u(H) = \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial u_x} \right) + \cdots \right) \left(\frac{u^3}{6} + \frac{v^2}{2} - \frac{u_x^2}{2} \right) = \frac{u^2}{2} + u_{xx}$$

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta v} = \mathbf{E}_v(H) = \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial v_x} \right) + \cdots \right) \left(\frac{u^3}{6} + \frac{v^2}{2} - \frac{u_x^2}{2} \right) = v$$

Οπότε πράγματι

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta u} \\ \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta v} \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα βέβαια με τον Ορισμό 10, θα πρέπει ένας τελεστής να πληροί κάποιες συνθήκες προκειμένου να είναι τελεστής Hamilton. Έστω λοιπόν ότι ο $\mathfrak{D}$ είναι της μορφής

$$\mathfrak{D} = Q^J\left(x, u^{(n)}\right) \frac{d}{dx^J} \tag{4.6}$$

Ως *συζυγής* τελεστή $\mathfrak{D}^*$ του $\mathfrak{D}$ ορίζεται ο τελεστής που για κάθε ζεύγος διαφορικών συναρτήσεων M, N ικανοποιεί την σχέση

$$\int M \cdot \mathfrak{D} N \, dx = \int \mathfrak{D}^* M \cdot N \, dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες το αριστερό μέλος της εξίσωσης, μπορούμε να εκφράσουμε τον $\mathfrak{D}^*$ συναρτήσει των συνιστωσών Q^J του $\mathfrak{D}$,

$$\mathfrak{D}^* M = (-1)^k \frac{d\left(MQ^J\right)}{dx^J} \tag{4.7}$$

Έτσι η αντισυμμετρικότητα της αγκύλης Poisson, σημαίνει ότι

$$\int \mathrm{E}(F) \cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G)\,dx = -\int \mathrm{E}(G) \cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(F)\,dx = -\int \mathrm{E}(F) \cdot \mathfrak{D}^*\,\mathrm{E}(G)\,dx$$

Δηλαδή ο $\mathfrak{D}$ πρέπει να είναι *αντισυζυγής (skew-adjoint)*, $\mathfrak{D}^* = -\mathfrak{D}$.

Πρόταση 3. *Έστω ένας διαφορικός τελεστής $\mathfrak{D}$, που δρα στον χώρο των διανυσματικών διαφορικών συναρτήσεων, και ορίζει την αγκύλη $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int \delta\mathcal{F} \cdot \mathfrak{D}\,\delta\mathcal{G}\,dx$ στον χώρο των συναρτησιακών. Η αγκύλη αυτή είναι αντισυμμετρική, αν και μόνο αν ο $\mathfrak{D}$ είναι αντισυζυγής $\mathfrak{D}^* = -\mathfrak{D}$.*

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την σχέση (4.4), έχουμε ένα άμεσο κριτήριο για να ελέγξουμε την αντισυμμετρικότητα. Για παράδειγμα ο τελεστής Hamilton της KdV, θέτοντας $k = Q = 1$, εύκολα βλέπουμε ότι είναι αντισυζυγής. Η ταυτότητα Jacobi όμως είναι μία ιδιότητα που οι συνέπειες της στον τελεστή Hamilton είναι πολύ πιο δύσκολο να αναδειχθούν. Από την άλλη, ο απευθείας έλεγχος της ισχύς της, ακόμα και γι' αυτήν την απλή περίπτωση, απαιτεί επίπονες πράξεις, καθιστώντας ένα πιο απλό κριτήριο ιδιαίτερα αναγκαίο. Για τον λόγο αυτό θα χρειαστεί να παρεκκλίνουμε λίγο από την πορεία μας, παρουσιάζοντας όσο πιο συνοπτικά γίνεται κάποια θεωρητικά εργαλεία, που θα μας βοηθήσουν να απλοποιήσουμε την ιδιότητα αυτή.

4.2 Η ταυτότητα Jacobi

Ας ξεκινήσουμε, αναλύοντας τον πρώτο όρο της ταυτότητας Jacobi,

$$\{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}, \mathcal{H}\} = \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}) = \int \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}\left(\mathrm{E}(F) \cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G)\right) dx$$

όπου ο $\mathfrak{D}$ δίνεται από την (4.6). Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibniz και λαμβαίνοντας υπόψη ότι κάθε τελεστής ολικής διαφόρισης αντιμετατίθεται με την επέκταση οποιουδήποτε διανυσματικού πεδίου εξέλιξης (βλ. παράγραφο 2.2), το συναρτησιακό αυτό εκφράζεται ως άθροισμα τριών ολοκληρώματων, δηλαδή ως

$$\int \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\mathrm{E}(F)) \cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G)\,dx + \int \mathrm{E}(F) \cdot \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}(G)\,dx + \int \mathrm{E}(F) \cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\mathrm{E}(G))\,dx$$

όπου ο τελεστής $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{D})$ δίνεται από την (2.16). Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.10) το πρώτο ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int D_{\mathrm{E}(F)}\left(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)\right) \cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G)\,dx$$

ενώ, σε συνδυασμό με την $\mathfrak{D}^* = -\mathfrak{D}$, το τρίτο γίνεται

$$-\int \mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(F)\cdot D_{\mathrm{E}(G)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(H))\,dx$$

Ο δεύτερος κι ο τρίτος όρος της ταυτότητας Jacobi περιέχουν παρόμοιες εκφράσεις· συγκεκριμένα δίνουν αντίστοιχα τα ολοκληρώματα

$$\{\{\mathcal{H},\mathcal{F}\},\mathcal{G}\}\longrightarrow \int D_{\mathrm{E}(H)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(G))\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(F)\,dx \quad \text{και} \quad -\int \mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(H)\cdot D_{\mathrm{E}(F)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(G))\,dx$$

$$\{\{\mathcal{G},\mathcal{H}\},\mathcal{F}\}\longrightarrow \int D_{\mathrm{E}(G)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(F))\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(H)\,dx \quad \text{και} \quad -\int \mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(G)\cdot D_{\mathrm{E}(H)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(F))\,dx$$

Σύμφωνα όμως με ένα σπουδαίο θεώρημα της διαφορικής γεωμετρίας, *ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, $\Delta = 0$, προέρχεται από μία αρχή μεταβολών, $\Delta = E\,(L)$, αν και μόνο αν ο αντίστοιχος τελεστής D_Δ είναι αυτοσυζυγής, $D_\Delta = D_\Delta^*$* (βλ. [36], Θεώρημα 5.92). Επομένως οι τελεστές $D_{\mathrm{E}(F)}, D_{\mathrm{E}(G)}, D_{\mathrm{E}(H)}$ που εμφανίζονται στα προηγουμενα ολοκληρώματα είναι αυτοσυζυγείς, κι άρα όλοι αυτοί οι όροι αλληλοαναιρούνται. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα $\int D_{\mathrm{E}(F)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(H))\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(G)\,dx$, που εμφανίζεται στον πρώτο όρο, μαζί με το ολοκλήρωμα $-\int \mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(H)\cdot D_{\mathrm{E}(F)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(G))\,dx$, που εμφανίζεται στον δεύτερο όρο, δίνουν άθροισμα μηδέν. Αντίστοιχα το ολοκλήρωμα $-\int \mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(F)\cdot D_{\mathrm{E}(G)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(H))\,dx$ του πρώτου όρου εξουδετερώνεται από το ολοκλήρωμα $\int D_{\mathrm{E}(G)}\,(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(F))\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(H)\,dx$ του τρίτου όρου. Τελικά μόνο το ολοκλήρωμα $\int \mathrm{E}\,(F)\cdot \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}\,(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}\,(G)\,dx$ επιβιώνει από τον πρώτο όρο. Όμοια γίνεται και με τους άλλους δύο όρους, οπότε η ταυτότητα Jacobi παίρνει την μορφή

$$\int \Big(\mathrm{E}\,(F)\cdot\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}\,(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}\,(G)+\mathrm{E}\,(H)\cdot\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{G}}\,(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}\,(F)+\mathrm{E}\,(G)\cdot\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{F}}\,(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}\,(H)\Big)dx = 0 \qquad (4.8)$$

Ας σημειώσουμε καταρχάς ότι η σχέση αυτή ικανοποιείται αυτόματα στην περίπτωση που οι συνιστώσες Q^J του $\mathfrak{D}$ δεν εξαρτώνται από την u ή τις παραγώγους της. Γιατί πολύ απλά η επέκταση ενός πεδίου εξέλιξης

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q = \frac{dQ}{dx^J}\frac{\partial}{\partial u_J^i}$$

μετασχηματίζει μονάχα αυτές. Επομένως τότε θα ισχύει $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\,(\mathfrak{D}) = 0$ για κάθε πεδίο εξέλιξης v_Q.

Πρόταση 4. *Ένας αντισυζυγής διαφορικός τελεστής, του οποίου οι συνιστώσες δεν εξαρτώνται από την u ή τις παραγώγους της, είναι ένας τελεστής Hamilton.*

Χάρη στην πρόταση αυτή μπορούμε, για παράδειγμα, κατευθείαν να συναγάγουμε ότι οι αντισυζυγείς τελεστές, που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα για την εξίσωση KdV και την Boussinesq αντίστοιχα, είναι πράγματι τελεστές Hamilton.

Η έκφραση όμως (4.8), που είναι σίγουρα πιο εύχρηστη από την αρχική μορφή της ταυτότητας Jacobi, μπορεί να απλοποιηθεί κι άλλο. Ας δούμε αρχικά έναν άλλο τρόπο με τον οποίο μπορούμε να εκφράσουμε την αντισυμμετρικότητα της αγκύλης Poisson,

$$\{\mathcal{F},\mathcal{G}\} = \int \mathrm{E}\,(F)\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(G)\,dx = \frac{1}{2}\int \Big(\mathrm{E}\,(F)\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(G) - \mathfrak{D}\,\mathrm{E}\,(F)\cdot\mathrm{E}\,(G)\Big)dx$$

Η παράσταση μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα αποτελεί έναν γενικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να κατασκευάσουμε αντισυμμετρικά μεγέθη. Με αυτό εννοούμε ότι η ποσότητα για παράδειγμα $A_1A_2 - A_2A_1$ (όπου η σειρά του γινομένου έχει σημασία) είναι πάντα αντισυμμετρική ως προς την εναλλαγή των A_1 και A_2 ή ισοδύναμα των δεικτών 1 και 2. Μία τέτοια έκφραση θα την συμβολίζουμε για την ώρα με $A_1 \wedge A_2$ και θα εξηγήσουμε αργότερα τι σημαίνει. Προς το παρόν θα αρκεστούμε μόνο να πούμε ότι αν $A_1 = A_2$ τότε $A_1 \wedge A_2 = 0$. Έτσι αν θεωρήσουμε την διγραμμική απεικόνιση

$$S = \frac{1}{2}\int s\wedge\mathfrak{D}s\,dx$$

η οποία δρα στον χώρο των συναρτησιακών, τότε η παραπάνω αγκύλη μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως εξής

$$\langle S;\delta\mathcal{F},\delta\mathcal{G}\rangle = \{\mathcal{F},\mathcal{G}\}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε και την ταυτότητα Jacobi, η οποία ήδη από την αρχική της έκφραση φαίνεται ότι είναι αντισυμμετρική ως προς την εναλλαγή δύο οποιωνδήποτε συναρτήσεων. Αυτό μπορούμε να το δούμε και στην (4.8), αν λάβουμε υπόψη μας το εξής: Μπορεί ν' αποδειχτεί ότι αν ο $\mathfrak{D}$ είναι αντισυζυγής, τότε και ο $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(\mathfrak{D})$ είναι επίσης αντισυζυγής για κάθε πεδίο εξέλιξης v_Q. Αυτού του είδους την αντισυμμετρία μεταξύ τριών μεγεθών μπορούμε αντίστοιχα να την παραστήσουμε ως εξής

$$A_1\wedge A_2\wedge A_3 = A_1A_2A_3 - A_3A_2A_1 + A_2A_3A_1 - A_1A_3A_2 + A_3A_1A_2 - A_2A_1A_3$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε την τριγραμμική απεικόνιση

$$Z = \frac{1}{2}\int s\wedge\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathfrak{D}s}\,(\mathfrak{D})\wedge s\,dx \tag{4.9}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε την σχέση (4.8) και στη μορφή

$$\langle Z;\delta\mathcal{F},\delta\mathcal{H},\delta\mathcal{G}\rangle = 0 \tag{4.10}$$

όπου $F,H,G\in\mathcal{A}^q$. Αυτό όμως σημαίνει ότι *η ταυτότητα Jacobi για έναν αντισυζυγή διαφορικό τελεστή $\mathfrak{D}$ ικανοποιείται όταν η απεικόνιση Z μηδενίζεται ταυτοτικά,* $Z = 0$. Αν ο $\mathfrak{D}$ δίνεται από την (4.6), τότε η (4.9) γράφεται

$$Z = \frac{1}{2}\int s\wedge\frac{d\,(\mathfrak{D}s)}{dx^K}\frac{\partial Q^J}{\partial u_K}\wedge s_J\,dx$$

όπου με s_J εννοούμε την ολική παράγωγο ds/dx^J της συνάρτησης s. Σε κάθε περίπτωση, το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται όπως και πριν. Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι ενδεικτικό του τρόπου υπολογισμού του παραπάνω ολοκληρώματος.

Παράδειγμα 4.3. Ας θεωρήσουμε τον τελεστή

$$\mathfrak{D} = 3\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u_x$$

Από την σχέση (4.7) βλέπουμε ότι είναι αντισυζυγής:

$$\mathfrak{D}^* = -3\frac{d^3}{dx^3} - \frac{d}{dx}2u + u_x = -3\frac{d^3}{dx^3} - 2u_x - 2u\frac{d}{dx} + u_x = -\mathfrak{D}$$

Σύμφωνα τώρα με την (4.9),

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2}\int s \wedge \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathfrak{D}s}\left(\mathfrak{D}\right) \wedge s\,dx = \frac{1}{2}\int s \wedge \frac{d\left(\mathfrak{D}s\right)}{dx^K}\frac{\partial Q^J}{\partial u_K} \wedge s_J\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int s \wedge \mathfrak{D}s\,\frac{\partial(2u)}{\partial u} \wedge s_x\,dx = -\int \mathfrak{D}s \wedge s \wedge s_x\,dx = -\int s_{xxx} \wedge s \wedge s_x\,dx \\ &= \int s_{xx} \wedge \frac{d}{dx}\left(s \wedge s_x\right)dx = \int \big(s_{xx} \wedge s_x \wedge s_x + s_{xx} \wedge s \wedge s_{xx}\big)dx = 0 \end{aligned}$$

Άρα ο τελεστής $\mathfrak{D}$ ικανοποιεί και την ταυτότητα Jacobi.

Όσο εύκολος στην πράξη είναι ο υπολογισμός της απεικόνισης Z, τόσο δύσκολα ορίζεται από θεωρητικής πλευράς. Γιατί η απεικόνιση αυτή είναι ένα είδος τανυστικού πεδίου πάνω στον n-jet χώρο $X \times U^{(n)}$, το οποίο δρα σε *συναρτησιακές 1-μορφές (functional 1-forms)*. Οι μορφές αυτές έστω τάξης k εκφράζονται γενικά ως εξής

$$\int \left(P_{\mathbf{i}}^{\mathbf{J}} du_{J_1}^{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{J_k}^{i_k}\right)dx$$

όπου $P_{\mathbf{i}}^{\mathbf{J}}$ διαφορικές συναρτήσεις και $\wedge$ το *εξωτερικό γινόμενο (wedge product)*, που σιωπηλά χρησιμοποιήσαμε νωρίτερα. Τα δυικά στοιχεία των μορφών αυτών ονομάζονται *συναρτησιακά k-διανύσματα (functional k-vectors)* κι εκφράζονται αντίστοιχα ως εξής

$$\int \left(R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{J}} \frac{\partial}{\partial u_{J_1}^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial u_{J_k}^{i_k}}\right)dx$$

Για παράδειγμα, η μεταβολική παράγωγος δL ενός συναρτησιακού αποτελεί μία συναρτησιακή 1-μορφή, ενώ η επέκταση ενός πεδίου εξέλιξης $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q$, του οποίου η δράση του στον χώρο των συναρτησιακών ορίζεται σύμφωνα με την (4.3), είναι ένα συναρτησιακό 1-διάνυσμα.

Στην γλώσσα της τανυστικής ανάλυσης η απεικόνιση Z είναι ουσιαστικά ένας αναλλοίωτος πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής 3ης τάξης (ο όρος *trivector* έχει επικρατήσει στην σύγχρονη ξένη βιβλιογραφία), του οποίου η έκφραση συναρτήσει μόνο των $s^i = \partial/\partial u^i$ κι ενός αντισυζυγή τελεστή προκύπτει έπειτα από ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Μία πλήρης, αναλυτική περιγραφή των συναρτησιακών μορφών και την εφαρμογή τους σε διάφορα θέματα διαφορικών εξισώσεων υπάρχει στον Olver [36]. Εκεί και συγκεκριμένα στην άσκηση 6.20 μπορεί κανείς να δει πώς στα πεπερασμένα συστήματα Hamilton το αντίστοιχο της σχέσης (4.10) ισοδυναμεί με τον ταυτοτικό μηδενισμό της λεγόμενης *αγκύλης Schouten* ενός 2-διανύσματος (*bivector*) με τον εαυτό του.

4.3 Νόμοι διατήρησης και συμμετρίες Hamilton

Έστω ένα σύστημα Hamilton $u_t = \mathfrak{D}\,\delta\,\mathcal{H}$ και μία διαφορικη συνάρτηση $T\left(t, x, u^{(n)}\right)$, που εξαρτάται ρητά από τον χρόνο. Η μεταβολή του αντίστοιχου συναρτησιακού $\mathcal{T}[u;t]$ κατά την εξέλιξη του συστήματος είναι ίση με

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u^i_J}\frac{\partial u^i_J}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial u^i_J}\frac{d}{dx^J}\left(\mathfrak{D}\delta\mathcal{H}\right)^i = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{T}\right) = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \{\mathcal{T}, \mathcal{H}\}$$

Παρατηρούμε ότι η έκφραση αυτή από πλευράς φορμαλισμού είναι ίδια με την μεταβολή μιας συνάρτησης κατά την εξέλιξη ενός πεπερασμένου συστήματος Hamilton.

Στην παράγραφο 2.5 είχαμε δει ότι ένας νόμος διατήρησης ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων,

$$\frac{dT}{dt} + \mathrm{Div}X = 0$$

εκφράζει ισοδύναμα ότι το συναρτησιακό $\mathcal{T}$ παραμένει σταθερό κατά την εξέλιξη του συστήματος για όλες τις λύσεις u τέτοιες ώστε $X\left(t, x, u^{(n)}\right) \longrightarrow 0$. Σε συνδυασμό λοιπόν και με την προηγούμενη σχέση, που μας δίνει την μεταβολή του $\mathcal{T}$ για ένα σύστημα Hamilton, καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση που βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με την Πρόταση 2.

Πρόταση 5. *Ένα συναρτησιακό $\mathcal{P}[u;t]$ καθορίζει έναν νόμο διατήρησης ενός συστήματος Hamilton $u_t = \mathfrak{D}\,\delta\,\mathcal{H}$, αν και μόνο αν ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \{\mathcal{P}, \mathcal{H}\} = 0 \tag{4.11}$$

Παράδειγμα 4.4. Έστω η εξίσωση KdV

$$u_t = u_{xxx} + uu_x = \mathfrak{D}\delta\mathcal{H}$$

όπου $\mathfrak{D}$ και $\mathcal{H}$ ο τελεστής και το συναρτησιακό Hamilton αντίστοιχα, που συναντήσαμε στο παράδειγμα 4.1. Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$\mathcal{P}[u] = \int \frac{u^2}{2}\,dx$$

και υπολογίζουμε την αγκύλη Poisson των $\mathcal{P}$ και $\mathcal{H}$,

$$\{\mathcal{P},\mathcal{H}\} = \int \mathrm{E}(P)\cdot \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)\,dx = \int u\,\frac{d}{dx}\left(\frac{u^2}{2}+u_{xx}\right)dx = \int \left(u^2u_x + uu_{xxx}\right)dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες μονάχα όμως τον δεύτερο όρο, βρίσκουμε

$$\{\mathcal{P},\mathcal{H}\} = \int \left(u^2u_x - u_xu_{xx}\right)dx = \int \frac{d}{dx}\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u_x^2}{2}\right)dx = 0$$

καθώς η συνάρτηση που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα αποτελεί την ολική απόκλιση μιας άλλης. Αρα το συναρτησιακό $\mathcal{P}$ εκφράζει έναν νόμο διατήρησης για την KdV.

Όπως είχαμε δει στα πεπερασμένα συστήματα, κάποιες συναρτήσεις, οι οποίες προέρχονταν από τον εκφυλισμό της δομής Poisson, αποτελούσαν πρώτα ολοκληρώματα. Αντίστοιχα με αυτές υπάρχουν τα συναρτησιακά Casimir, τα οποία αντιστοιχούν εδώ σε νόμους διατήρησης.

Ορισμός 13. *Έστω $\mathfrak{D}$ ένας τελεστής Hamilton. Ένα συναρτησιακό $\mathcal{C}\,[u;t]$ ονομάζεται συναρτησιακό Casimir, αν ικανοποιεί την σχέση $\mathfrak{D}\delta\,\mathcal{C} = 0$ για κάθε x, u.*

Όπως και πριν δηλαδή, το διανυσματικό πεδίο Hamilton $\mathrm{v}_{\mathcal{C}}$ είναι παντού μηδέν και άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 11, η αγκύλη Poisson του $\mathcal{C}$ με οποιοδήποτε άλλο συναρτησιακό είναι επίσης μηδέν. Από την (4.11) βλέπουμε ότι ένα χρονοανεξάρτητο συναρτησιακό Casimir αποτελεί έναν νόμο διατήρησης για κάθε σύστημα με τελεστή Hamilton τον $\mathfrak{D}$.

Παράδειγμα 4.5. Αν δεχτούμε ότι η $u\,(x,t)$ εκφράζει την πυκνότητα ενός ρευστού, τότε το συναρτησιακό

$$\mathcal{M} = \int_\Omega u\,dx$$

εκφράζει την μάζα του συστήματος που περικλείεται στην περιοχή Ω. Όμως $\delta\mathcal{M} = 1$, κι άρα

$$\frac{d}{dx}\,\delta\mathcal{M} = 0$$

Δηλαδή κάθε σύστημα Hamilton της μορφής $u_t = \frac{d}{dx}\delta\mathcal{H}$ υπακούει στον νόμο διατήρησης της μάζας $\mathcal{M}$.

Μία ακόμα αντιστοιχία αφορά την αγκύλη Lie δύο διανυσματικών πεδίων Hamilton. Από την ταυτότητα Jacobi και την (4.4) παίρνουμε

$$\{\{\mathcal{F},\mathcal{G}\},\mathcal{H}\} + \{\{\mathcal{H},\mathcal{F}\},\mathcal{G}\} + \{\{\mathcal{G},\mathcal{H}\},\mathcal{F}\} = 0$$

$$-\{\mathcal{H},\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}\} + \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{G}}\left(\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}\right) + \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{F}}\left(-\{\mathcal{H},\mathcal{G}\}\right) = 0$$

$$-\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}}\left(\mathcal{H}\right)+\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{G}}\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{F}}\left(\mathcal{H}\right)-\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{F}}\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{H}\right)=0$$

Λόγω της (2.8) το προηγούμενο αποτέλεσμα γράφεται σαν

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}}\left(\mathcal{H}\right)=\mathrm{pr}\left[\mathrm{v}_{\mathcal{G}},\mathrm{v}_{\mathcal{F}}\right]\left(\mathcal{H}\right)$$

ή

$$\mathrm{v}_{\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}}=\left[\mathrm{v}_{\mathcal{G}},\mathrm{v}_{\mathcal{F}}\right] \tag{4.12}$$

Βλέπουμε λοιπόν και πάλι ότι, η αγκύλη Lie δύο διανυσματικών πεδίων Hamilton που αντιστοιχούν στα συναρτησιακά $\mathcal{G}$ και $\mathcal{F}$, είναι επίσης ένα διανυσματικό πεδίο Hamilton με αντίστοιχη συνάρτηση την αγκύλη Poisson $\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}$.

Έστω τώρα ένα συναρτησιακό $\mathcal{P}\left[u;t\right]$, το οποίο καθορίζει έναν νόμο διατήρησης, οπότε ικανοποιεί την (4.11). Άρα για κάθε $\mathcal{Q}\in\mathcal{A}$ θα είναι

$$0=\left\{\mathcal{Q},\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}+\{\mathcal{P},\mathcal{H}\}\right\}=\left\{\mathcal{Q},\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}\right\}+\{\mathcal{Q},\{\mathcal{P},\mathcal{H}\}\}=\int\delta\mathcal{Q}\cdot\mathfrak{D}\,\delta\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}\right)dx+\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\{\mathcal{P},\mathcal{H}\}}\left(\mathcal{Q}\right)$$

$$=\int\mathrm{E}\left(Q\right)\cdot\frac{\partial\left(\mathfrak{D}\,\delta\mathcal{P}\right)}{\partial t}\,dx+\mathrm{pr}\left[\mathrm{v}_{\mathcal{H}},\mathrm{v}_{\mathcal{P}}\right]\left(\mathcal{Q}\right)=\mathrm{pr}\,\frac{\partial\mathrm{v}_{\mathcal{P}}}{\partial t}\left(\mathcal{Q}\right)+\mathrm{pr}\left[\mathrm{v}_{\mathcal{H}},\mathrm{v}_{\mathcal{P}}\right]\left(\mathcal{Q}\right)$$

Η τελευταία σχέση μεταφέρεται από τις επεκτάσεις στα ίδια τα πεδία,

$$\frac{\partial\mathrm{v}_{\mathcal{P}}}{\partial t}\left(\mathcal{Q}\right)+\left[\mathrm{v}_{\mathcal{H}},\mathrm{v}_{\mathcal{P}}\right]\left(\mathcal{Q}\right)=0$$

κι επειδή ισχύει για κάθε $\mathcal{Q}$ θα έχουμε τελικά ταυτοτικά

$$\frac{\partial\mathrm{v}_{\mathcal{P}}}{\partial t}+\left[\mathrm{v}_{\mathcal{H}},\mathrm{v}_{\mathcal{P}}\right]=0$$

που είναι η συνθήκη ύπαρξης γενικευμένης συμμετρίας (2.14).

Αντίστροφα τώρα, υποθέτωντας ότι το σύστημα διαθέτει μία γενικευμένη συμμετρία, ακολουθώντας ανάποδα την προηγούμενη πορεία καταλήγουμε στην

$$\left\{\ ,\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}+\{\mathcal{P},\mathcal{H}\}\right\}=0$$

Αυτό σημαίνει ότι, το συναρτησιακό στο οποίο αντιστοιχεί το πεδίο αυτό,

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}+\{\mathcal{P},\mathcal{H}\}$$

είναι ένα συναρτησιακό Casimir. Μπορούμε μάλιστα χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι είναι ίσο με την μερική παράγωγο ενός συναρτησιακού Casimir ως προς τον χρόνο. Γιατί αν

$\mathcal{C}[u;t]$ είναι ένα συναρτησιακό Casimir, τότε, παραγωγίζοντας την $\{\mathcal{F},\mathcal{C}\}=0$ ως προς τον χρόνο, για κάθε $\mathcal{F}[u;t]$ παίρνουμε

$$0=\frac{\partial}{\partial t}\{\mathcal{F},\mathcal{C}\}=\int\frac{\partial\left(\mathrm{E}\left(F\right)\right)}{\partial t}\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\left(C\right)\,dx+\int\mathrm{E}\left(F\right)\cdot\mathfrak{D}\,\frac{\partial\left(\mathrm{E}\left(C\right)\right)}{\partial t}\,dx$$

Επειδή όμως οι τελεστές $\partial/\partial t$ και E αντιμετατίθενται, είναι

$$\int\mathrm{E}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\left(C\right)dx+\int\mathrm{E}\left(F\right)\cdot\mathfrak{D}\,\mathrm{E}\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)dx=\left\{\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t},\mathcal{C}\right\}+\left\{\mathcal{F},\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}\right\}=\left\{\mathcal{F},\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}\right\}=0$$

Άρα, η παράγωγος ως προς τον χρόνο ενός συναρτησιακού Casimir είναι επίσης ένα συναρτησιακό Casimir. Επομένως έχουμε

$$\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial t}+\{\mathcal{P},\mathcal{H}\}=-\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial t}\qquad\text{ή}\qquad\frac{\partial\left(\mathcal{P}+\mathcal{C}\right)}{\partial t}+\{\mathcal{P}+\mathcal{C},\mathcal{H}\}=0$$

Τελικά συμπεραίνουμε ότι το συναρτησιακό $\mathcal{P}+\mathcal{C}$ καθορίζει έναν νόμο διατήρησης του συστήματος.

Θεώρημα 12. *Ένα γενικευμένο διανυσματικό πεδίο Hamilton $\mathrm{v}_{\mathcal{P}}$, που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό $\mathcal{P}[u;t]$, αποτελεί μία γενικευμένη συμμετρία του συστήματος Hamilton $u_t=\mathfrak{D}\,\delta\mathcal{H}$, αν και μόνο αν το συναρτησιακό $\mathcal{P}+\mathcal{C}$, όπου $\mathcal{C}[u;t]$ ένα συναρτησιακό Casimir, καθορίζει έναν νόμο διατήρησης του συστήματος.*

Το παραπάνω θεώρημα είναι προφανώς τελείως ανάλογο του Θεωρηματος 8, και εκφράζει το θεώρημα Noether στην περίπτωση των απειροδιάστατων συστημάτων Hamilton. Οι γενικευμένες συμμετρίες των συστημάτων αυτών, που προέρχονται από ένα πεδίο Hamilton και οι οποίες αντιστοιχούν σε έναν νόμο διατήρησης, ονομάζονται όπως και πριν *συμμετρίες Hamilton*.

Παράδειγμα 4.6. Στο παράδειγμα 1.6 είχαμε δει ότι η εξίσωση KdV

$$u_t=u_{xxx}+uu_x$$

επιδέχεται μία 4-παραμετρική ομάδα συμμετρίας. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.1), εκφράζουμε τους γεννήτορες που βρήκαμε της ομάδας αυτής ως διανυσματικά πεδία εξέλιξης, αντικαθιστώντας την u_t από την ίδια την εξίσωση:

$$\begin{aligned}\mathrm{v}_{Q_1}&=u_x\frac{\partial}{\partial u}\\ \mathrm{v}_{Q_2}&=\left(u_{xxx}+uu_x\right)\frac{\partial}{\partial u}\\ \mathrm{v}_{Q_3}&=\left(1+tu_x\right)\frac{\partial}{\partial u}\\ \mathrm{v}_{Q_4}&=\left(2u+xu_x+3t\left(u_{xxx}+uu_x\right)\right)\frac{\partial}{\partial u}\end{aligned}$$

Από τα τέσσερα αυτά πεδία, τα τρία πρώτα είναι διανυσματικά πεδία Hamilton, καθώς οι χαρακτηριστικές τους μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$Q_i = \frac{d}{dx}\,\delta\mathcal{P}_i$$

Τα συναρτησιακά στα οποία αντιστοιχούν είναι

$$\mathcal{P}_1 = \int \frac{u^2}{2}\,dx \qquad \mathcal{P}_2 = \int \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2}\right) dx \qquad \mathcal{P}_3 = \int \left(xu + \frac{tu^2}{2}\right) dx$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα 12 τα τελευταία αποτελούν νόμους διατήρησης της KdV.

Το συναρτησιακό $\mathcal{P}_1$ είδαμε πράγματι στο παράδειγμα 4.4 ότι αποτελεί έναν νόμο διατήρησης, ενώ το $\mathcal{P}_2$ είναι το συναρτησιακό Hamilton της εξίσωσης, το οποίο εφόσον είναι ανεξάρτητο του χρόνου, ικανοποιεί προφανώς την (4.11). Συνδυάζοντας τα $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_3$, βρίσκουμε ακόμα ότι

$$\int xu\,dx = c_1 t + c_2$$

όπου $c_1 = -\mathcal{P}_1$ και $c_2 = \mathcal{P}_3$ σταθερές. Τέλος, όπως είδαμε στο παράδειγμα 4.5, υπάρχει κι ένας άλλος νόμος διατήρησης που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό Casimir

$$\mathcal{M} = \int u\,dx$$

Παράδειγμα 4.7. Η *μη γραμμική εξίσωση Schrödinger*

$$iu_t = -\,u_{xx} + 2\,k\,|u|^2 u\ , \qquad k \in \mathbb{R}$$

γράφεται ως σύστημα δύο εξισώσεων,

$$\begin{aligned} q_t &= -\,p_{xx} + 2\,k\,p\left(q^2 + p^2\right) \\ p_t &= q_{xx} - 2\,k\,q\left(q^2 + p^2\right) \end{aligned}$$

αν θεωρήσουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της u, θέτοντας δηλαδή $q = \operatorname{Re} u$ και $p = \operatorname{Im} u$ αντίστοιχα. Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν σύστημα Hamilton, εκφρασμένο μάλιστα σε «κανονικές» συντεταγμένες q και p, καθώς τελεστής Hamilton είναι ο γνωστός συμπλεκτικός πίνακας

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

με αντίστοιχο συναρτησιακό

$$\mathcal{H}\,[q,p] = \frac{1}{2}\int \left(q_x^2 + p_x^2 + k\left(q^2 + p^2\right)^2\right) dx$$

Με μία σχετικά μικρή εμπειρία, μπορεί κανείς να δει «με το μάτι» κάποιες Lie συμμετρίες του παραπάνω συστήματος - αυτές που παράγονται από τα παρακάτω διανυσματικά πεδία:

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t} &&= \left(p_{xx} - 2\,k\,p\left(q^2+p^2\right)\right)\frac{\partial}{\partial q} - \left(q_{xx} - 2\,k\,q\left(q^2+p^2\right)\right)\frac{\partial}{\partial p} \\
\mathrm{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial x} &&= -\,q_x\frac{\partial}{\partial q} - p_x\frac{\partial}{\partial p} \\
\mathrm{v}_3 &= p\frac{\partial}{\partial q} - q\frac{\partial}{\partial p} &&= p\frac{\partial}{\partial q} - q\frac{\partial}{\partial p} \\
\mathrm{v}_4 &= 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - q\frac{\partial}{\partial q} - p\frac{\partial}{\partial p} &&= -\left(q + xq_x + 2tq_t\right)\frac{\partial}{\partial q} - \left(p + xp_x + 2tp_t\right)\frac{\partial}{\partial p} \\
\mathrm{v}_5 &= 2t\frac{\partial}{\partial x} - xp\frac{\partial}{\partial q} + xq\frac{\partial}{\partial p} &&= -\left(xp + 2tq_x\right)\frac{\partial}{\partial q} + \left(xq - 2tp_x\right)\frac{\partial}{\partial p}
\end{aligned}$$

Για μια πλήρη περιγραφή ολόκληρης της ομάδας συμμετρίας, βλέπε [40]. Εκεί μελετάται η γενικότερη περίπτωση της n-διάστατης μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger και παρουσιάζονται νέες ειδικές λύσεις.

Διαπιστώνουμε ότι, εκτός από την Q_4, όλες οι υπόλοιπες αντιστοιχούν σε νόμους διατήρησης, που καθορίζουν τα συναρτησιακά

$$\mathcal{P}_1 = -\mathcal{H}\,, \qquad \mathcal{P}_2 = \int qp_x\,dx\,, \qquad \mathcal{P}_3 = \frac{1}{2}\int\left(q^2+p^2\right)dx\,, \qquad \mathcal{P}_4 = \int\left(2tqp_x - \frac{x}{2}\left(q^2+p^2\right)\right)dx$$

Από τα $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_4$ παίρνουμε ακόμα την σχέση

$$\int x\left(q^2+p^2\right)dx = c_1 t + c_2$$

όπου $c_1 = 4\mathcal{P}_2$ και $c_2 = -2\mathcal{P}_4$ σταθερές.

Παράδειγμα 4.8. Μία ακόμα ενδιαφέρουσα περίπτωση αποτελούν οι *εξισώσεις Maxwell*, οι οποίες μπορούν επίσης να μελετηθούν ως ένα σύστημα Hamilton με συμμετρίες. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν γενικά το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και εκφράζουν με έναν διαφορετικό τρόπο τους νόμους των Gauss, Faraday και Ampere. Η μορφή τους στην περίπτωση που ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό είναι η εξής

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \nabla\times B\,, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla\times E \tag{4.13}$$

$$\nabla\cdot E = 0 \quad , \qquad \nabla\cdot B = 0 \tag{4.14}$$

όπου $E = (E_1, E_2, E_3)$ και $B = (B_1, B_2, B_3)$ διανυσματικές συναρτήσεις, οι οποίες εκφράζουν την *ένταση του ηλεκτρικού πεδίου* και την *μαγνητική επαγωγή* αντίστοιχα, κι εξαρτώνται από τις χωρικές μεταβλητές x, y, z και τον χρόνο t.

Προτού δούμε πώς επεισέρχεται η δομή Hamilton στις παραπάνω εξισώσεις κρίνεται σκόπιμο να κάνουμε την εξής παρατήρηση. Το σύστημα (4.13) αποτελείται συνολικά από έξι εξισώσεις με άγνωστες μεταβλητές τις έξι συνιστώσες $E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3$. Επομένως αρκεί για να προσδιορίσουμε τα διανύσματα E και B. Υπό αυτήν την έννοια οι (4.14) αποτελούν κάποιους επιπλέον *περιορισμούς* που πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις $E(x,y,z,t), B(x,y,z,t)$ που θα βρούμε. Οι εξισώσεις Maxwell είναι λοιπόν ένα *υπερκαθορισμένο* σύστημα, στο οποίο τον πρώτο λόγο έχουν οι εξισώσεις εξέλιξης (4.13).

Όπως είδαμε στην εισαγωγή του προηγούμενου κεφαλαίου, μπορούμε, προκειμένου για πεπερασμένα συστήματα, να περάσουμε με έναν συστηματικό τρόπο από ένα σύστημα Euler-Lagrange σε ένα σύστημα Hamilton. Την ίδια λογική μπορούμε να υιοθετήσουμε και στα απειροδιάστατα κι αυτήν ακριβώς θα εφαρμόσουμε εδώ. Θεωρούμε λοιπόν το πρόβλημα μεταβολών για το συναρτησιακό

$$\mathcal{L}[A,\phi] = \frac{1}{2}\int \left[(A_t + \nabla\phi)^2 - (\nabla\times A)^2\right] dt dx dy dz$$

όπου $A = (A_1, A_2, A_3)$ μία διανυσματική συνάρτηση και ϕ μία βαθμωτή των x, y, z, t. Γράφοντας την συνάρτηση Lagrange πιο αναλυτικά,

$$L = \frac{1}{2}\left[(A_{1t}+\phi_x)^2 + (A_{2t}+\phi_y)^2 + (A_{3t}+\phi_z)^2 - (A_{3y}-A_{2z})^2 - (A_{1z}-A_{3x})^2 - (A_{2x}-A_{1y})^2\right]$$

βρίσκουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}(A_{1t}+\phi_x) - \frac{d}{dy}(A_{2x}-A_{1y}) + \frac{d}{dz}(A_{1z}-A_{3x}) &= 0\\
-\frac{d}{dt}(A_{2t}+\phi_y) - \frac{d}{dz}(A_{3y}-A_{2z}) + \frac{d}{dx}(A_{2x}-A_{1y}) &= 0\\
-\frac{d}{dt}(A_{3t}+\phi_z) - \frac{d}{dx}(A_{1z}-A_{3x}) + \frac{d}{dy}(A_{3y}-A_{2z}) &= 0\\
-\frac{d}{dx}(A_{1t}+\phi_x) - \frac{d}{dy}(A_{2t}+\phi_y) - \frac{d}{dz}(A_{3t}+\phi_z) &= 0
\end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα γράφεται σε διανυσματική μορφή ως εξής

$$\frac{d}{dt}(A_t + \nabla\phi) = -\nabla\times\nabla\times A \tag{4.15}$$

$$\nabla\cdot(A_t+\nabla\phi) = 0 \tag{4.16}$$

Αν υποθέσουμε ότι τα A και ϕ εκφράζουν το *μαγνητικό* και *ηλεκτρικό δυναμικό* αντίστοιχα, τότε οι μεταβλητές E και B του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνονται από τις σχέσεις

$$E = -A_t - \nabla\phi \tag{4.17}$$

$$B = \nabla\times A \tag{4.18}$$

Από την (4.17), χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\nabla \times \nabla\phi = 0$, παίρνουμε

$$A_t + \nabla\phi = -E \quad \Rightarrow \quad \nabla \times A_t = -\nabla \times E \quad \Leftrightarrow \quad B_t = -\nabla \times E$$

ενώ από την (4.18), χρησιμοποιώντας την $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$, έχουμε $\nabla \cdot B = 0$. Αντικαθιστώντας ακόμη τις E και B στις (4.15)-(4.16), προκύπτουν συνολικά οι εξισώσεις (4.13)-(4.14). Έτσι λοιπόν διατυπώνονται στην μορφή Lagrange οι εξισώσεις του Maxwell στο κενό.

Για να περάσουμε στην διατύπωση Hamilton, θεωρούμε τις συζυγείς «ορμές», $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ και υ, των μεταβλητών A και ϕ αντίστοιχα, οι οποίες ορίζονται, όπως και η (3.1), από τις σχέσεις

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial A_{it}} \quad \text{και} \quad \upsilon = \frac{\partial L}{\partial \phi_t}$$

για $i = 1, 2, 3$. Ας σημειώσουμε ότι η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται από την ϕ_t, οπότε παίρνουμε

$$\pi = A_t + \nabla\phi \quad \text{και} \quad \upsilon = 0 \tag{4.19}$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός των μεταβλητών A_t, ϕ_t στις π, υ δεν είναι αντιστρέψιμος. Δεν μπορούμε δηλαδή να λύσουμε τις εξισώσεις (4.19) ως προς A_t, ϕ_t, γεγονός το οποίο δεν μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Hamilton σύμφωνα με τον τύπο (3.2).

Το εμπόδιο αυτό μπορούμε να παρακάμψουμε αν αντιμετωπίσουμε την ϕ σαν παράμετρο. Τότε ορίζουμε το συναρτησιακό Hamilton ως εξής

$$\mathcal{H}[A, \pi] = \int H \, dxdydz = \int (\pi \cdot A_t - L) \, dxdydz$$

Αντικαθιστώντας την μεταβλητή A_t συναρτήσει της π από την σχέση $\pi = A_t + \nabla\phi$, το παραπάνω συναρτησιακό παίρνει την μορφή

$$\mathcal{H}[A, \pi] = \frac{1}{2} \int \left[\pi^2 + (\nabla \times A)^2 - 2\pi \cdot \nabla\phi\right] dxdydz$$

Χρησιμοποιώντας επιπλέον την ταυτότητα $\nabla \cdot (\phi\,\pi) = \phi\,\nabla \cdot \pi + \pi \cdot \nabla\phi$, η τελευταία σχέση γράφεται κι ως

$$\mathcal{H}[A, \pi] = \frac{1}{2} \int \left[\pi^2 + (\nabla \times A)^2 + 2\phi\,\nabla \cdot \pi\right] dxdydz \tag{4.20}$$

Η συνάρτηση υπό ολοκλήρωση H πιο αναλυτικά είναι η

$$H = \frac{1}{2} \left[\pi_1^2 + \pi_3^2 + \pi_3^2 + (A_{3y} - A_{2z})^2 + (A_{1z} - A_{3x})^2 + (A_{2x} - A_{1y})^2 + 2\phi\,(\pi_{1x} + \pi_{2y} + \pi_{3z})\right]$$

Για να εφαρμόσουμε την τροποποιημένη αρχή του Hamilton, να βρούμε δηλαδή τα ακρότατα του παρακάτω συναρτησιακού

$$\mathcal{L}[A, \pi] = \int (\pi A_t - H) \, dtdxdydz = \frac{1}{2} \int \left[2\pi A_t - \pi^2 - (\nabla \times A)^2 - 2\phi\,\nabla \cdot \pi\right] dtdxdydz$$

θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι το δυναμικό ϕ, παίζοντας τον ρόλο της παραμέτρου, αποτελεί έναν πολλαπλασιαστή Lagrange, που όμως εξαρτάται από την ανεξάρτητες μεταβλητές t, x, y, z. Αυτό σημαίνει ότι εκτός από τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \pi} = 0 \tag{4.21}$$

παίρνουμε και μία άλλη,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \pi = 0 \tag{4.22}$$

που αποτελεί έναν περιορισμό του προβλήματος μεταβολών (βλ. [6], σελ. 230).

Από τις (4.21) προκύπτουν οι κανονικές εξισώσεις Hamilton,

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi_i}, \qquad \frac{\partial \pi_i}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta A_i} \tag{4.23}$$

για $i = 1, 2, 3$, οι οποίες για το συναρτησιακό (4.20) μας δίνουν

$$\begin{aligned}
A_{1t} &= \pi_1 - \phi_x \\
A_{2t} &= \pi_2 - \phi_y \\
A_{3t} &= \pi_3 - \phi_z \\
\pi_{1t} &= \frac{d}{dz}(A_{1z} - A_{3x}) - \frac{d}{dy}(A_{2x} - A_{1y}) \\
\pi_{2t} &= \frac{d}{dx}(A_{2x} - A_{1y}) - \frac{d}{dz}(A_{3y} - A_{2z}) \\
\pi_{3t} &= \frac{d}{dy}(A_{3y} - A_{2z}) - \frac{d}{dx}(A_{1z} - A_{3x})
\end{aligned}$$

ή συνοπτικά σε διανυσματική μορφή

$$A_t = \pi - \nabla \phi \tag{4.24}$$

$$\pi_t = -\nabla \times \nabla \times A \tag{4.25}$$

Όπως κάναμε και για την διατυπώση Lagrange, έτσι κι εδώ μετατρέπουμε το σύστημα στις μεταβλητές E και B του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Με βάση λοιπόν τις (4.17)-(4.18), βρίσκουμε $E = -\pi$ και $B = \nabla \times A$, κι αντικαθιστούμε. Η (4.24), παίρνοντας, όπως και πριν, τον στροβιλισμό του A_t, μαζί με την (4.25) μας δίνουν αντίστοιχα,

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E\ , \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \times B$$

ενώ η (4.22), $\nabla \cdot E = 0$. Τέλος, όπως είδαμε και πριν, $B = \nabla \times A \;\Rightarrow\; \nabla \cdot B = 0$. Συνοψίζοντας, η τροποποιημένη αρχή του Hamilton, μας δίνει τις εξισώσεις εξέλιξης (4.13), με τον περιορισμό $\nabla \cdot E = 0$, ενώ η $\nabla \cdot B = 0$ προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό του B.

Με τον τρόπο λοιπόν αυτό μπορούμε να εκφράσουμε υπό την μορφή Hamilton τις εξισώσεις Maxwell για την διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο κενό. Έτσι μάλιστα αναδεικνύεται και εκείνο που επισημάναμε από την αρχή, ότι οι εξισώσεις $\nabla \cdot E = \nabla \cdot B = 0$ αποτελούν κάποιους επιπλέον περιορισμούς στις εξισώσεις εξέλιξης

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \times B \;, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$$

Οι τελευταίες, δηλαδή, είναι ουσιαστικά εκείνες που διαθέτουν την δομή Hamilton, η οποία αν και στις μεταβλητές A, π έχει την κανονική μορφή (4.23), στις E και B περιγράφεται μέσω του τελεστή-πίνακα

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -D_z & D_y \\ 0 & 0 & 0 & D_z & 0 & -D_x \\ 0 & 0 & 0 & -D_y & D_x & 0 \\ 0 & D_z & -D_y & 0 & 0 & 0 \\ -D_z & 0 & D_x & 0 & 0 & 0 \\ D_y & -D_x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

όπου για παράδειγμα $D_x = d/dx$. Ο συμμετρικός αυτός πίνακας έχει στοιχεία αντισυζυγείς τελεστές, οπότε συνολικά αποτελεί έναν αντισυζυγή τελεστή, που δεν εξαρτάται από τις εξαρτημένες μεταβλητές E και B, κι άρα σύμφωνα με την Πρόταση 4 είναι τελεστής Hamilton. Αντίστοιχα το συναρτησιακό Hamilton, που δίνεται από την (4.20), λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό $\nabla \cdot \pi = 0$, παίρνει τώρα την μορφή

$$\mathcal{H}\left[E, B\right] = \frac{1}{2} \int \left(E^2 + B^2\right) dxdydz$$

κι εκφράζει την ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύστημα αυτό είναι αναλλοίωτο κάτω από χωρικές μετατοπίσεις, που γεννάνε τα διανυσματικά πεδία $\partial_x, \partial_y, \partial_z$. Οι συμμετρίες αυτές προέρχονται από το συναρτησιακό

$$\mathcal{P} = \int E \times B \, dxdydz$$

όπου το $S = E \times B$ είναι γνωστό ως *διάνυσμα Poynting*. Για παράδειγμα η μεταβολική παράγωγος της πρώτης συνιστώσας,

$$\mathcal{P}_1 = \int \left(E_2 B_3 - E_3 B_2\right) dxdydz$$

είναι ίση με $\delta\mathcal{P}_1 = (0, B_3, -B_2, 0, -E_3, E_2)$. Άρα η αντίστοιχη συμμετρία έχει χαρακτηριστική $Q_1 = \mathfrak{D}\delta\mathcal{P}_1 = (E_{3z} + E_{2y}, -E_{2x}, -E_{3x}, B_{3z} + B_{2y}, -B_{2x}, -B_{3x})$. Λόγω όμως των περιορισμών που έχουμε εξαρχής, $\nabla \cdot E = \nabla \cdot B = 0$, το διανυσματικό πεδίο τελικά γράφεται

$$\mathrm{v}_1 = -\frac{\partial E_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial E_1} - \frac{\partial E_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial E_2} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial E_3} - \frac{\partial B_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial B_1} - \frac{\partial B_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial B_2} - \frac{\partial B_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial B_3} = \frac{\partial}{\partial x}$$

Ομοια οι άλλες δύο συνιστώσες $\mathcal{P}_2$ και $\mathcal{P}_3$ αντιστοιχούν στις συμμετρίες που γεννάνε τα διανυσματικά πεδία ∂_y και ∂_z.

Η αναγωγή των εξισώσεων (4.23) στο υποβιβασμένο σύστημα (4.13) μπορεί επίσης να γίνει χρησιμοποιώντας την έννοια της απεικόνισης ορμής. Η περίπτωση αυτή μελετάται στο [30] μαζί με άλλα παραδείγματα από την Υδροδυναμική, την Φυσική Πλάσματος, κλπ. Μία άλλη οπτική γωνία, μέσα όμως από την σκοπιά της κβαντομηχανικής, βλέπουμε στο [5]. Στο πλαίσιο αυτό η ορμή αποδίδεται στον τελεστή της κλίσης μιας συνάρτησης κι έτσι μπορεί να οριστεί ως η αγκύλη Poisson που αντιστοιχεί στο διάνυσμα Poynting.

Οι εξισώσεις Maxwell μπορούν ακόμα να εκφραστούν με έναν εναλλακτικό τρόπο ως οι εξισώσεις Euler-Lagrange ενός προβλήματος μεταβολών και να μελετηθούν ανάλογα (βλέπε [26]).

Κεφάλαιο 5

Απειροδιάστατα Συστήματα με Διπλή Δομή Hamilton

Αν και η μέθοδος Hamilton άργησε να εφαρμοστεί στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, το ενδιαφέρον των απειροδιάστατων συστημάτων Hamilton γρήγορα αναζοπυρώθηκε. Λίγα χρόνια μετά τον Gardner [19], ο Magri παρουσίασε μία δεύτερη έκφραση Hamilton της KdV, αλλά και άλλων εξισώσεων, βλέπε [29]. Ας σημειώσουμε ότι το ενδεχόμενο ένα σύστημα να μπορεί να μελετηθεί με την μέθοδο Hamilton με δύο διαφορετικούς τρόπους δεν είχε ποτέ απασχολήσει την θεωρία των πεπερασμένων συστημάτων. Ενώ αντίθετα για τα συστήματα άπειρης διάστασης, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο, την ιδέα του Magri σύντομα ακολούθησε η εύρεση εξισώσεων εξέλιξης με ακόμα περισσότερες δομές Hamilton.

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε λοιπόν με συστήματα εξέλιξης, που έχουν την δυνατότητα να εκφραστούν με δύο τελείως ανεξάρτητους τρόπους ως συστήματα Hamilton. Ο κύριος λόγος που η συγκεκριμένη ιδιότητα τραβάει την προσοχή μας είναι ότι συνδέεται, κάτω από ορισμένες ήπιες προϋποθέσεις, με την ολοκληρωσιμότητα τους. Προτού δούμε αναλυτικά την σύνδεση αυτή, είναι σημαντικό να πάρουμε μία πρώτη γεύση μέσα από ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, όπως αυτό της KdV, που άλλωστε ήταν και ιστορικά το πρώτο.

Παράδειγμα 5.1. Στο παράδειγμα 4.3 είχαμε δει ότι ο

$$\mathfrak{D}_2 = 3\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u_x$$

είναι ένας τελεστής Hamilton. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το συναρτησιακό

$$\mathcal{H}_2\left[u\right] = \int \frac{u^2}{6}\, dx$$

η εξίσωση KdV μπορεί να εκφραστεί ως σύστημα Hamilton με έναν άλλο τρόπο

$$u_t = \mathfrak{D}_2 \delta \mathcal{H}_2 = \left(3\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u_x\right)\frac{u}{3} = u_{xxx} + uu_x$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 12, οι νόμοι διατήρησης, που υπολογίσαμε από την πρώτη έκφραση στο παράδειγμα 4.5, αντιστοιχούν σε συμμετρίες Hamilton του συστήματος. Οι χαρακτηριστικές των συμμετριών αυτών είναι

$$\mathfrak{D}_2 \delta \mathcal{P}_2 = \left(3\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u_x\right)\left(\frac{u^2}{2} + u_{xx}\right) = 3u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 10u_x u_{xx} + \frac{5}{2}u^2 u_x$$

$$\mathfrak{D}_2 \delta \mathcal{P}_3 = \left(3\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u_x\right)(x + tu) = 3tu_{xxx} + 2u + 3tuu_x + xu_x = Q_4$$

$$\mathfrak{D}_2 \delta \mathcal{M} = \left(3\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u_x\right)1 = u_x = Q_1$$

ενώ για το $\mathcal{P}_1 = 3\mathcal{H}_2$ είναι προφανώς $\mathfrak{D}_2 \delta \mathcal{P}_1 = 3Q_2$. Βλέπουμε λοιπόν ότι απ' το συναρτησιακό $\mathcal{P}_2$ προκύπτει μια καινούρια συμμετρία με χαρακτηριστική $Q_5 = \mathfrak{D}_2 \delta \mathcal{P}_2$,

$$\mathrm{v}_{Q_5} = \left(3u_{xxxxx} + 5uu_{xxx} + 10u_x u_{xx} + \frac{5}{2}u^2 u_x\right)\frac{\partial}{\partial u}$$

Αντίστροφα τώρα από τις συμμετρίες τις οποίες γνωρίζουμε, μπορούμε να βρούμε ποιές από αυτές αποτελούν συμμετρίες Hamilton ως προς την δεύτερη έκφραση του συστήματος, κι έπειτα να δούμε αν αντιστοιχούν σε νέους νόμους διατήρησης. Έχουμε ήδη βρει ότι οι χαρακτηριστικές Q_1, Q_2, Q_4 αντιστοιχούν στα συναρτησιακά $\mathcal{M}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3$, ενώ η v_{Q_3} δεν εκφράζει πια συμμετρία Hamilton. Άρα από αυτήν την σκοπιά καμιά καινούρια πληροφορία δεν αντλήσαμε.

Μένει ακόμα να δούμε αν η νέα συμμετρία που βρήκαμε v_{Q_5} αντιστοιχεί και σε έναν καινούριο νόμο διατήρησης $\mathcal{P}_5$, δηλαδή αν είναι συμμετρία Hamilton ως προς τον πρώτο τελεστή Hamilton $\mathfrak{D}_1 = d/dx$. Πράγματι υπάρχει συναρτησιακό,

$$\mathcal{P}_5 = \int \left(\frac{3u_{xx}^2}{2} - \frac{5uu_x^2}{2} + \frac{5u^4}{24}\right) dx$$

που να ικανοποιεί την σχέση $Q_5 = \mathfrak{D}_1 \delta \mathcal{P}_5$, παρέχοντας έτσι έναν ακόμη νόμο διατήρησης. Μπορούμε τώρα να συνεχίσουμε, ανακαλύπτοντας μια καινούρια συμμετρία με χαρακτηριστική $Q_6 = \mathfrak{D}_2 \delta \mathcal{P}_5$ και ψάχνοντας αν σ' αυτήν αντιστοιχεί ένας νέος νόμος διατήρησης $\mathcal{P}_6$, αν δηλαδή ισχύει $Q_6 = \mathfrak{D}_1 \delta \mathcal{P}_6$, κ.ο.κ.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, «μπαινοβγαίνοντας» μέσα από τις δύο εκφράσεις Hamilton, μπορούμε να βρούμε νέες συμμετρίες ή ακόμα και νέους νόμους διατήρησης. Μία τέτοια διαδικασία, κατά την οποία από γνωστές συμμετρίες να βρίσκουμε καινούριες, μας θυμίζει τον επαναληπτικό τελεστή, που συναντήσαμε στην παράγραφο 2.3. Πράγματι κι εδώ, η έννοια αυτή κρύβεται από πίσω, εφόσον ένας από τους δύο τελεστές Hamilton είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα 13. *Έστω ένα σύστημα εξισώσεων εξέλιξης, το οποίο μπορεί να γραφεί ως σύστημα Hamilton με δύο διαφορετικούς τρόπους,* $u_t = \mathfrak{D}_1 \delta \mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_2 \delta \mathcal{H}_2$. *Αν ένας από τους δύο τελεστές Hamilton είναι αντιστρέψιμος, ας πούμε ο* $\mathfrak{D}_1$, *τότε ο* $\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1^{-1}$ *είναι επαναληπτικός τελεστής του συστήματος.*

Για να το δείξουμε αυτό θα χρειαστεί πρώτα να αποδείξουμε δύο άλλες σχέσεις. Θεωρούμε λοιπόν την ταυτότητα Jacobi υπό την μορφή (4.8). Όπως είπαμε, ο $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{D})$ είναι ένας αντισυζυγής τελεστής. Επομένως μπορούμε να γράψουμε την (4.8) ως εξής

$$\int \mathrm{E}(F) \cdot \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}(G)\,dx = \int \Big(\mathrm{E}(F) \cdot \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}(H) - \mathrm{E}(G) \cdot \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}(H)\Big) dx$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibniz και την (2.10), αναλύουμε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης

$$\begin{aligned} &\int \Big\{ \mathrm{E}(F) \cdot \Big(\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)) - \mathfrak{D}\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{G}}(\mathrm{E}(H))\Big) \\ &\qquad - \mathrm{E}(G) \cdot \Big(\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)) - \mathfrak{D}\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{F}}(\mathrm{E}(H))\Big)\Big\} dx = \\ &= \int \Big\{ \mathrm{E}(F) \cdot \Big(D_{\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)}\,\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G) - \mathfrak{D} D_{\mathrm{E}(H)} \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G)\Big) \\ &\qquad - \mathrm{E}(G) \cdot \Big(D_{\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)}\,\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(F) - \mathfrak{D} D_{\mathrm{E}(H)} \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(F)\Big)\Big\} dx \end{aligned}$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.3, τελεστές σαν τον $D_{\mathrm{E}(H)}$ είναι αυτοσυζυγείς, κι επειδή ο $\mathfrak{D}$ είναι αντισυζυγής, ο συνολικός τελεστής $D_{\mathrm{E}(H)} \mathfrak{D} D_{\mathrm{E}(H)}$ θα είναι αυτοσυζυγής. Έτσι τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int \mathrm{E}(F) \cdot \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{D})\,\mathrm{E}(G)\,dx &= \int \mathrm{E}(F) \cdot D_{\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)}\,\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(G) - \mathrm{E}(G) \cdot D_{\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)}\,\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(F)\,dx \\ &= \int \mathrm{E}(F) \cdot \big(D_{\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)}\,\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\,D^*_{\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)}\big)\mathrm{E}(G)\,dx \end{aligned}$$

Επομένως καταλήγουμε στην σχέση

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{D}) = D_{\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)}\,\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\,D^*_{\mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)} \tag{5.1}$$

που ισχύει για κάθε σύστημα Hamilton $u_t = \mathfrak{D}\,\mathrm{E}(H)$.

Η δεύτερη σχέση που θα χρειαστούμε έχει να κάνει με την έκφραση του τελεστή $\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\big(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\big)$. Θεωρούμε λοιπόν μία διαφορική συνάρτηση P, και εφαρμόζοντας όπως και πριν τον κανόνα του Leibniz, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\big(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\big)\,\mathfrak{D}_1 P &= \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q\big(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\mathfrak{D}_1 P\big) - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(\mathfrak{D}_1 P) \\ &= \mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(\mathfrak{D}_2)\,P + \mathfrak{D}_2\,\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(P) - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(\mathfrak{D}_1)\,P - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\mathfrak{D}_1\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_Q(P) \end{aligned}$$

$$= \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \left(\mathfrak{D}_2\right) P - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \left(\mathfrak{D}_1\right) P$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \left(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\right) \mathfrak{D}_1 = \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \left(\mathfrak{D}_2\right) - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \left(\mathfrak{D}_1\right)$$

και πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με τον αντίστροφο $\mathfrak{D}_1^{-1}$, παίρνουμε τελικά

$$\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \left(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\right) = \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \left(\mathfrak{D}_2\right) \mathfrak{D}_1^{-1} - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_Q \left(\mathfrak{D}_1\right) \mathfrak{D}_1^{-1} \tag{5.2}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να ελέγξουμε το κριτήριο (2.15) για τον τελεστή $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}$, αν επιπλέον θυμηθούμε ότι για το σύστημα εξέλιξης $u_t = P$, ισχύει η σχέση $R_t = \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_P(R)$, που συναντήσαμε στην παράγραφο 2.4. Με βάση λοιπόν και τις (5.1), (5.2) είναι

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\right)_t &= \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_P(\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}) = \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_P \left(\mathfrak{D}_2\right) \mathfrak{D}_1^{-1} - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\mathrm{pr}\, \mathrm{v}_P \left(\mathfrak{D}_1\right) \mathfrak{D}_1^{-1}\\ &= \left(D_P\, \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_2 D_P^*\right) \mathfrak{D}_1^{-1} - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1} \left(D_P\, \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_1 D_P^*\right) \mathfrak{D}_1^{-1}\\ &= D_P\, \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1} - \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1} D_P = \left[D_P,\, \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}\right]\end{aligned}$$

Επομένως η σχέση (2.15), που εκφράζει το Θεώρημα 3 για τα συστήματα εξέλιξης, ικανοποιείται κι άρα ο τελεστής $\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1}$ είναι επαναληπτικός τελεστής του συστήματος.

Παράδειγμα 5.2. Οι δύο τελεστές Hamilton

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{d}{dx}\,, \qquad \mathfrak{D}_2 = 3\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u_x$$

της εξίσωσης KdV, μας δίνουν τον επαναληπτικό τελεστή

$$\mathcal{R} = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1} = 3\frac{d^2}{dx^2} + 2u + u_x \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$$

που συναντήσαμε στο παράδειγμα 2.3.

Ας σημειώσουμε ότι το Θεώρημα 13 μας εξασφαλίζει μέσω του επαναληπτικού τελεστή μία απειρία συμμετριών, χωρίς όμως να καθορίζει αν οι συμμετρίες αυτές είναι Hamilton ή όχι. Θα πρέπει επιπλέον οι δύο εκφράσεις Hamilton να είναι κατά κάποιο τρόπο συμβατές για να εγγυηθούμε ότι υπάρχουν άπειρες συμμετρίες Hamilton κι επομένως άπειροι νόμοι διατήρησης. Η συμβατότητα αυτή εμπεριέχεται στην έννοια των *δι-Χαμιλτονικών (bi-Hamiltonian) συστημάτων* που ορίζονται παρακάτω.

Ορισμός 14. *Ένα σύστημα εξισώσεων εξέλιξης ονομάζεται δι-Χαμιλτονικό αν μπορεί να εκφραστεί με δύο ανεξάρτητους τρόπους, $u_t = \mathfrak{D}_1\delta\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_2$, έτσι ώστε κάθε γραμμικός συνδυασμός $a_1\mathfrak{D}_1 + a_2\mathfrak{D}_2$ να είναι επίσης τελεστής Hamilton.*

Επειδή ο γραμμικός συνδυασμός δύο αντισυζυγών τελεστών θα είναι πάντα ένας αντισυζυγής τελεστής, εκείνο που καλούμαστε να δείξουμε για ένα δι-Χαμιλτονικό σύστημα είναι ουσιαστικά ότι ο $a_1\mathfrak{D}_1 + a_2\mathfrak{D}_2$ ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi.

Η συνθήκη συμβατότητας μεταξύ των δύο τελεστών Hamilton μας εξασφαλίζει, μαζί με μία ακόμα απαίτηση, ότι οι συμμετρίες που βρίσκουμε χρησιμοποιώντας τον έναν από τους δύο και τους νόμους διατήρησης του άλλου, θα είναι και ως προς τον πρώτο συμμετρίες Hamilton, δηλαδή νέοι νόμοι διατήρησης (βλ. [36], Λήμμα 7.25). Αν ας πούμε θεώρησουμε το δι-Χαμιλτονικό σύστημα $u_t = \mathfrak{D}_1\delta\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_0$, τότε το συναρτησιακό Hamilton $\mathcal{H}_1$ αποτελεί έναν νόμο διατήρησης, που αντιστοιχεί στην συμμετρία Hamilton με χαρακτηριστική $\mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_1$. Αν τώρα απαιτήσουμε $\mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_1 F_2$, τότε, λόγω της συμβατότητας, αποδεικνύεται ότι $F_2 = \delta\mathcal{H}_2$. Η συμμετρία δηλαδή με χαρακτηριστική $\mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_1$ αποτελεί συμμετρία Hamilton και για τον τελεστή $\mathfrak{D}_1$, καθορίζοντας έτσι έναν νέο νόμο διατήρησης $\mathcal{H}_2$. Όμοια καταλήγουμε σε μία σειρά από σχέσεις

$$\mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_1\delta\mathcal{H}_2$$

$$\mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_2 = \mathfrak{D}_1\delta\mathcal{H}_3$$

....

....

$$\mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_{n-1} = \mathfrak{D}_1\delta\mathcal{H}_n$$

....

Επομένως υπάρχει μία απειρία νόμων διατήρησης $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$ για τους οποίους ισχύει

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\}_{\mathfrak{D}_1} &= \int \delta\mathcal{H}_n\,\mathfrak{D}_1\delta\mathcal{H}_m\,dx = \int \delta\mathcal{H}_n\,\mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_{m-1}\,dx = \{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{m-1}\}_{\mathfrak{D}_2} = -\{\mathcal{H}_{m-1}, \mathcal{H}_n\}_{\mathfrak{D}_2} \\
&= -\int \delta\mathcal{H}_{m-1}\,\mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_n\,dx = -\int \delta\mathcal{H}_{m-1}\,\mathfrak{D}_1\delta\mathcal{H}_{n+1}\,dx = -\{\mathcal{H}_{m-1}, \mathcal{H}_{n+1}\}_{\mathfrak{D}_1} \\
&= \{\mathcal{H}_{n+1}, \mathcal{H}_{m-1}\}_{\mathfrak{D}_1}
\end{aligned}$$

Έτσι για $n < m$, αν ο $m - n$ είναι άρτιος, τότε

$$\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\}_{\mathfrak{D}_1} = \{\mathcal{H}_{n+1}, \mathcal{H}_{m-1}\}_{\mathfrak{D}_1} = \cdots = \{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_k\}_{\mathfrak{D}_1} = 0$$

όπου $k = (m-n)/2$, ενώ αν ο $m - n$ είναι περιττός, τότε

$$\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{m-1}\}_{\mathfrak{D}_2} = \{\mathcal{H}_{n+1}, \mathcal{H}_{m-2}\}_{\mathfrak{D}_2} = \cdots = \{\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_l\}_{\mathfrak{D}_2} = 0$$

όπου $l = (m-n-1)/2$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση το σύστημα διαθέτει άπειρους νόμους διατήρησης, οι οποίοι βρίσκονται σε ενέλιξη μεταξύ τους. Από την σχέση (4.11) βλέπουμε ότι αυτό συνεπάγεται $[\mathrm{v}_{\mathcal{H}_n}, \mathrm{v}_{\mathcal{H}_m}] = 0$. Ένα τέτοιο σύστημα εξισώσεων εξέλιξης χαρακτηρίζεται ως *πλήρως ολοκληρώσιμο ή ολοκληρώσιμο κατά Liouville* κι επιδέχεται μία απειροδιάστατη αβελιανή ομάδα συμμετρίας.

Τέλος ας σημειώσουμε ότι τα συναρτησιακά $\mathcal{H}_i$ αποτελούν νόμους διατήρησης για κάθε δι-Χαμιλτονικό σύστημα της μορφής $u_t = K_n\left(x, u^{(n)}\right) = \mathfrak{D}_1 \delta\mathcal{H}_n = \mathfrak{D}_2 \delta\mathcal{H}_{n-1}$, οπότε οδηγούμαστε σε μια *ιεραρχία* πλήρως ολοκληρώσιμων συστημάτων.

Θεώρημα 14. *Έστω ένα απειροδιάστατο δι-Χαμιλτονικό σύστημα εξέλιξης $u_t = \mathfrak{D}_1 \delta\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_2 \delta\mathcal{H}_o$, όπου $\mathfrak{D}_1$ αντιστρέψιμος. Αν για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ορίζεται η σχέση $K_n = \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1^{-1} K_{n-1}$, ξεκινώντας από $K_0 = \mathfrak{D}_1 \delta\mathcal{H}_0$, τότε το σύστημα αλλά και κάθε δι-Χαμιλτονικό σύστημα $u_t = K_n\left(x, u^{(n)}\right) = \mathfrak{D}_1 \delta\mathcal{H}_n = \mathfrak{D}_2 \delta\mathcal{H}_{n-1}$ είναι πλήρως ολοκληρώσιμο με την έννοια του Liouville, διαθέτει δηλαδή άπειρους νόμους διατήρησης $\mathcal{H}_n$ σε ενέλιξη μεταξύ τους, $\{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m\} = 0$.*

Ένα λεπτό σημείο, που χρειάζεται προσοχή, είναι ότι σε κάθε βήμα θα πρέπει να υποθέτουμε ότι μπορούμε να δράσουμε με τον επαναληπτικό τελεστή του συστήματος στο K_{n-1} για να παράγουμε το K_n. Με άλλα λόγια ότι για κάθε n το K_{n-1} ανήκει στην εικόνα του $\mathfrak{D}_1$. Αν και μία γενική απόδειξη δεν υπάρχει, στις περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί μέχρι σημέρα πάντα αυτό ισχύει (συγκεκριμένα για την περίπτωση της KdV, βλ. [36], Θεώρημα 5.31).

Παράδειγμα 5.3. Η γνωστή μας KdV είναι το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός πλήρως ολοκληρώσιμου δι-Χαμιλτονικού συστήματος,

$$u_t = u_{xxx} + u u_x$$

ως προς τους τελεστές Hamilton και τα συναρτησιακά

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{d}{dx} \qquad \mathcal{H}_1 = \int \left(\frac{u^3}{6} - \frac{u_x^2}{2}\right) dx$$

$$\mathfrak{D}_2 = 3\frac{d^3}{dx^3} + 2u\frac{d}{dx} + u_x \qquad \mathcal{H}_2 = \int \frac{u^2}{6}\, dx$$

Ο επαναληπτικός τελεστής του συστήματος θυμίζουμε ότι είναι

$$\mathcal{R} = \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1^{-1} = 3\frac{d^2}{dx^2} + 2u + u_x \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}$$

Η απόδειξη ότι ο γραμμικός συνδυασμός

$$\mathfrak{D} = a_1 \mathfrak{D}_1 + a_2 \mathfrak{D}_2 = 3a_2 \frac{d^3}{dx^3} + (2a_2 u + a_1)\frac{d}{dx} + a_2 u_x$$

είναι τελεστής Hamilton, είναι ουσιαστικά ίδια με του $\mathfrak{D}_2$,

$$Z = \frac{1}{2}\int s \wedge \mathrm{pr}\, \mathrm{v}_{\mathfrak{D}s}(\mathfrak{D}) \wedge s\, dx = \frac{1}{2}\int s \wedge \frac{d\,(\mathfrak{D}s)}{dx^K}\frac{\partial Q^J}{\partial u_K} \wedge s_J\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int s \wedge \mathfrak{D}s\,\frac{\partial\,(2a_2 u)}{\partial u} \wedge s_x\,dx = -a_2 \int \mathfrak{D}s \wedge s \wedge s_x\,dx = 0$$

που είδαμε στο παράδειγμα 4.3.

Παράδειγμα 5.4. Αν και συναντήσαμε πρώτα την μη γραμμική, η γραμμική *εξίσωση Schrödinger* στις τρεις διαστάσεις,

$$i\hbar\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta u + U(x)\,u$$

χρήζει ιδιαίτερης σημασίας, καθώς κυβερνά τα κβαντομηχανικά φαινόμενα. Στην θεωρία μάλιστα αυτή είναι γνωστός ο Χαμιλτονιανός της χαρακτήρας, ο οποίος όμως ερμηνεύεται μέσα από μία άλλη φυσική σκοπιά. Με μία κατάλληλη αλλαγή κλίμακας $\big(t \to t/\hbar$ και $x \to 2mx/\hbar^2\big)$ η εξίσωση αυτή παίρνει την μορφή

$$iu_t = -\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + U(x)\,u$$

και χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές $q = \operatorname{Re} u$ και $p = \operatorname{Im} u$, γράφεται ως σύστημα

$$\begin{aligned} q_t &= -\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}\right) + Up \\ p_t &= q_{xx} + q_{yy} + q_{zz} - Uq \end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν ως σύστημα Hamilton με δύο διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας τους τελεστές και τα αντίστοιχα συναρτησιακά

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\int \Big((\nabla q)^2 + (\nabla p)^2 + U(q^2+p^2)\Big)\,dx$$

$$\mathfrak{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta + U \\ \Delta - U & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}\int \left(q^2 + p^2\right)dx$$

όπου το $\mathcal{H}_2$ εκφράζει στην γλώσσα της κβαντομηχανικής την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στο στοιχείο όγκου dx γύρω από το σημείο x την χρονική στιγμή t.

Απ΄ την αντισυμμετρικότητα των πινάκων εύκολα βλέπουμε ότι οι $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ είναι αντισυζυγείς, ενώ αφού δεν εξαρτώνται από τις q και p ή τις παραγώγους τους, θα ικανοποιούν και την ταυτότητα Jacobi. Το ίδιο προφανώς θα ισχύει και για κάθε γραμμικό συνδυασμό τους, άρα το σύστημα αυτό είναι δι-Χαμιλτονικό και πλήρως ολοκληρώσιμο, με επαναληπτικό τελεστή

$$\mathcal{R} = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta + U \\ -\Delta + U & 0 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 5.5. Ένα άλλο μοντέλο που περιγράφει την διάδοση υδάτινων κυμάτων, γνωστό ως *long dispersive equations*, αποτελεί το σύστημα

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 2v_x + 2uu_x \\ v_t &= -v_{xx} + 2(uv)_x \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να εκφραστούν ως σύστημα Hamilton με δύο διαφορετικούς τρόπους σύμφωνα με τους εξής τελεστές

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_1 = \int \left(u_x v + u^2 v + v^2\right) dx$$

$$\mathfrak{D}_2 = \begin{pmatrix} 2\frac{d}{dx} & \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}u \\ -\frac{d^2}{dx^2} + u\frac{d}{dx} & v\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}v \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_2 = \int uv\, dx$$

Ο τελεστής $\mathfrak{D}_1$, που συναντήσαμε και νωρίτερα στην εξίσωση Boussinesq, εύκολα συμπεραίνουμε ότι είναι τελεστής Hamilton.

Για να δείξουμε ότι κι ο $\mathfrak{D}_2$ είναι πράγματι Hamilton, θεωρούμε δύο διανυσματικές διαφορικές συναρτήσεις $M = (M_1, M_2)$ και $N = (N_1, N_2)$. Είναι

$$\begin{aligned} &\int M \cdot \mathfrak{D}_2 N\, dx = \\ &= \int \left(M_1 \left(2\frac{dN_1}{dx} + \frac{d^2 N_2}{dx^2} + \frac{d\,(uN_2)}{dx} \right) + M_2 \left(-\frac{d^2 N_1}{dx^2} + u\frac{dN_1}{dx} + v\frac{dN_2}{dx} + \frac{d\,(vN_2)}{dx} \right) \right) dx \\ &= \int \left(-2N_1\frac{dM_1}{dx} + N_2\frac{d^2 M_1}{dx^2} - uN_2\frac{dM_1}{dx} - N_1\frac{d^2 M_2}{dx^2} - N_1\frac{d\,(uM_2)}{dx} - N_2\frac{d\,(vM_2)}{dx} - vN_2\frac{dM_2}{dx} \right) dx \\ &= \int \left(N_1 \left(-2\frac{dM_1}{dx} - \frac{d^2 M_2}{dx^2} - \frac{d\,(uM_2)}{dx} \right) + N_2 \left(\frac{d^2 M_1}{dx^2} - u\frac{dM_1}{dx} - v\frac{dM_2}{dx} - \frac{d\,(vM_2)}{dx} \right) \right) dx \\ &= \int N \cdot (-\mathfrak{D}_2) M\, dx \end{aligned}$$

Άρα $\mathfrak{D}_2^* = -\mathfrak{D}_2$. Η ταυτότητα Jacobi απαιτεί στην περίπτωση αυτή λίγο περισσοτερο προσοχή απ' ότι συνήθως. Θεωρώντας $s = \left(s^1, s^2\right)$, υπολογίζουμε με την σειρά τα εξής

$$\mathfrak{D}_2 s = \begin{pmatrix} 2s_x^1 + s_{xx}^2 + u_x s^2 + us_x^2 \\ -s_{xx}^1 + us_x^1 + 2vs_x^2 + v_x s^2 \end{pmatrix}$$

Οπότε το πεδίο εξέλιξης με χαρακτηριστική $Q = \mathfrak{D}_2 s = (Q_1, Q_2)$ είναι

$$\mathrm{v}_{\mathfrak{D}_2 s} = \left(2s_x^1 + s_{xx}^2 + u_x s^2 + us_x^2\right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(-s_{xx}^1 + us_x^1 + 2vs_x^2 + v_x s^2\right) \frac{\partial}{\partial v}$$

Η επέκταση του θα είναι ίση με

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathfrak{D}_2 s} = \frac{dQ_1}{dx^J}\frac{\partial}{\partial u_J} + \frac{dQ_2}{dx^J}\frac{\partial}{\partial v_J}$$

κι άρα

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{v}_{\mathfrak{D}_2 s}\left(\mathfrak{D}_2\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dQ_1}{dx} + Q_1\frac{d}{dx} \\ Q_1\frac{d}{dx} & 2Q_2\frac{d}{dx} + \frac{dQ_2}{dx} \end{pmatrix}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την απεικόνιση Z από την (4.9), και να δούμε αν μηδενίζεται,

$$Z = \frac{1}{2}\int \left(s^1 \wedge \frac{dQ_1}{dx} \wedge s^2 + s^1 \wedge Q_1 \wedge s^2_x + s^2 \wedge Q_1 \wedge s^1_x + s^2 \wedge 2Q_2 \wedge s^2_x\right) dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τον πρώτο όρο, ο δεύτερος απαλοίφεται, οπότε παίρνουμε

$$Z = \int \left(s^2 \wedge Q_1 \wedge s^1_x + s^2 \wedge Q_2 \wedge s^2_x\right) dx$$

Αντικαθιστώντας τα Q_1 και Q_2 καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} Z &= \int \left(s^2 \wedge s^2_{xx} \wedge s^1_x + s^2 \wedge us^2_x \wedge s^1_x - s^2 \wedge s^1_{xx} \wedge s^2_x + s^2 \wedge us^1_x \wedge s^2_x\right) dx \\ &= \int \left(-\,s^2_{xx} \wedge s^2 \wedge s^1_x - us^2 \wedge s^1_x \wedge s^2_x + s^2 \wedge s^2_x \wedge s^1_{xx} + us^2 \wedge s^1_x \wedge s^2_x\right) dx \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας ξανά κατά παράγοντες τον πρώτο όρο βρίσκουμε τελικά

$$Z = \int \left(s^2_x \wedge s^2 \wedge s^1_{xx} - s^2_x \wedge s^2 \wedge s^1_{xx}\right) dx = 0$$

Άρα πράγματι ο $\mathfrak{D}_2$ ειναι τελεστής Hamilton. Με παρόμοιο, αν όχι ίδιο, τρόπο αποδεικνύεται κι ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός $a_1\mathfrak{D}_1 + a_2\mathfrak{D}_2$ είναι επίσης τελεστής Hamilton. Επομένως το σύστημα είναι ένα πλήρως ολοκληρώσιμο δι-Χαμιλτονικό σύστημα. Υπάρχει μάλιστα και τρίτος τρόπος να εκφραστεί ως Hamilton, συμβατός με καθέναν από τους προηγούμενους δύο, αποτελώντας έτσι ένα *τρι-Χαμιλτονικό (tri-Hamiltonian)* σύστημα.

Παράδειγμα 5.6. Μία εξίσωση που συνδέεται άμεσα με την KdV, είναι η λεγόμενη *τροποποιημένη KdV (modified KdV)*,

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_x$$

είναι επίσης ένα πλήρως ολοκληρώσιμο δι-Χαμιλτονικό σύστημα. Οι δύο διατυπώσεις Hamilton αποτελούνται από τους παρακάτω τελεστές και συναρτησιακά

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{d}{dx} \qquad \mathcal{H}_1 = \int \left(\frac{u^4}{12} - \frac{u_x^2}{2}\right) dx$$

$$\mathfrak{D}_2 = 3\frac{d^3}{dx^3} + 2u^2\frac{d}{dx} + 2u_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} u\,\frac{d}{dx} \qquad \mathcal{H}_2 = \int \frac{u^2}{6}\,dx$$

Οπότε ο επαναληπτικός τελεστής του συστήματος είναι

$$\mathcal{R} = 3\frac{d^2}{dx^2} + 2u^2 + 2u_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} u$$

Ο τελεστής $D_x^{-1} = (d/dx)^{-1}$ ορίζεται ως ο αντίστροφος του $D_x = d/dx$ και είναι αντισυζυγής,

$$D_x D_x^{-1} = I \;\Rightarrow\; \left(D_x^{-1}\right)^* (D_x)^* = I \;\Rightarrow\; -\left(D_x^{-1}\right)^* D_x = I \;\Rightarrow\; \left(D_x^{-1}\right)^* = -D_x^{-1}$$

Η παρουσία του δυσκολεύει κατά πολύ την απόδειξη ότι ο $\mathfrak{D}_2$ είναι πράγματι τελεστής Hamilton. Ακόμα και για να δείξει κανείς ότι είναι απλά αντισυζυγής, δεν είναι καθόλου απλό, όπως βλέπουμε παρακάτω,

$$\int M\mathfrak{D}_2 N dx = \int M\left(3\frac{d^3N}{dx^3} + 2u^2\frac{dN}{dx} + 2u_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(u\frac{dN}{dx}\right)\right)dx$$

$$= \int\left(-3N\frac{d^3M}{dx^3} - 2N\frac{d}{dx}\left(u^2M\right) - 2u\frac{dN}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}(u_xM)\right)dx$$

$$= \int\left(-3N\frac{d^3M}{dx^3} - 2Nu^2\frac{dM}{dx} - 4uu_xNM + 2N\frac{d}{dx}\left(u\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}(u_xM)\right)\right)dx$$

$$= \int\left(-3N\frac{d^3M}{dx^3} - 2Nu^2\frac{dM}{dx} - 2uu_xNM + 2Nu_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(\frac{d\,(uM)}{dx} - u\frac{dM}{dx}\right)\right)dx$$

$$= \int\left(-3\frac{d^3M}{dx^3} - 2u^2\frac{dM}{dx} - 2u_x\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(u\frac{dM}{dx}\right)\right)N\,dx = -\int N\mathfrak{D}_2 M dx$$

Παράδειγμα 5.7. Η μη γραμμική Schrödinger, που ξεκινήσαμε να μελετάμε στο παράδειγμα 4.7, υπό την μορφή

$$\begin{aligned} q_t &= -\,p_{xx} + 2\,k\,p\left(q^2 + p^2\right) \\ p_t &= q_{xx} - 2\,k\,q\left(q^2 + p^2\right) \end{aligned}$$

διαθέτει επίσης έναν δεύτερο τρόπο να εκφραστεί ως σύστημα Hamilton. Παρακάτω βλέπουμε τους δύο τελεστές Hamilton και τα συναρτησιακά στα οποία αντιστοιχούν,

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\int\left((q_x + p_x)^2 + k\left(q^2 + p^2\right)^2\right)dx$$

$$\mathfrak{D}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dx} + 4kp\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} p & -4kp\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} q \\ -4kq\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} p & -\frac{d}{dx} + 4kq\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} q \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}\int qp_x\,dx$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα πλήρως ολοκληρώσιμο δι-Χαμιλτονικό σύστημα, με επαναληπτικό τελεστή,

$$\mathcal{R} = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -4kp\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} q & \frac{d}{dx} - 4kp\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} p \\ -\frac{d}{dx} + 4kq\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} q & 4kq\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} p \end{pmatrix}$$

Αν ανατρέξουμε στις συμμετρίες που είχαμε βρει, θα δούμε πράγματι ότι ο $\mathcal{R}$ απεικονίζει την χαρακτηριστική Q_3 στην χαρακτηριστική Q_2, και την Q_2 στην $-Q_1$, που είναι όλες συμμετρίες Hamilton. Τέλος, από την $-Q_1$, παίρνουμε μία καινούρια με χαρακτηριστική

$$Q_6 = \left(q_{xxx} - 6kq_x\left(q^2+p^2\right), p_{xxx} - 6kp_x\left(q^2+p^2\right)\right)$$

Η συμμετρία αυτή γεννιέται ισοδύναμα από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{v}_6 = 6k\left(q^2+p^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + q_{xxx}\frac{\partial}{\partial q} + p_{xxx}\frac{\partial}{\partial p}$$

και είναι επίσης Hamilton, καθώς αντιστοιχεί στον νόμο διατήρησης, που καθορίζει το συναρτησιακό

$$\mathcal{P}_6 = \int \Big(- qp_{xxx} + 2kqp_x\left(q^2+3p^2\right)\Big)dx$$

Παράδειγμα 5.8. Ανάμεσα στα προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής, μία εξίσωση που επίσης παρουσιάζει ενδιαφέρον, είναι και η *εξίσωση Harry Dym*

$$u_t = -\frac{15u_x^3}{8u^3\sqrt{u}} + \frac{9u_xu_{xx}}{4u^2\sqrt{u}} - \frac{u_{xxx}}{u\sqrt{u}}$$

Η εξίσωση αυτή διατυπώνεται ως σύστημα Hamilton με τους εξής δύο διαφορετικούς τρόπους :

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{d^3}{dx^3} \qquad \mathcal{H}_1 = \int 2\sqrt{u}\,dx$$

$$\mathfrak{D}_2 = 2u\frac{d}{dx} + u_x \qquad \mathcal{H}_2 = \int\left(\frac{u_{xx}}{2u\sqrt{u}} - \frac{5u_x^2}{8u^2\sqrt{u}}\right)dx$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, που είδαμε στο παράδειγμα 5.3, αποδεικνύεται ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των $\mathfrak{D}_1$ και $\mathfrak{D}_2$ αποτελεί επίσης έναν τελεστή Hamilton. Άρα και ή εξίσωση Harry Dym είναι ένα πλήρως ολοκληρώσιμο σύστημα με διπλή δομή Hamilton.

Κεφάλαιο 6

Συστήματα με Πολλαπλή Δομή Hamilton - Σύγχρονες Εξελίξεις

6.1 Απειροδιάστατα συστήματα

Η δι-Χαμιλτονική δομή για τα συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι ένας άμεσος και κομψός τρόπος για να δείξουμε την ολοκληρωσιμότητα τους. Το αποτέλεσμα αυτό, που αντικατοπτρίζεται στο Θεώρημα 14, οφείλεται στον Magri [29]. Στο άρθρο του παρουσιάζονται ως χαρακτηριστικά παραδείγματα η εξίσωση KdV, η mKdV, η μη γραμμική Schrödinger και η Harry Dym, που είδαμε νωρίτερα. Ένα εύλογο ερώτημα είναι, πώς ανακαλύπτουμε την δομή Hamilton ενός συστήματος και μάλιστα εκφρασμένη με δύο διαφορετικούς τρόπους; Ιδιαίτερα όταν ο ένας από τους δύο είναι τόσο περίπλοκος όσο αυτός των προηγούμενων παραδειγμάτων, τότε η απάντηση δεν είναι καθόλου προφανής.

Μία βασική μέθοδος, που αναπτύχθηκε τις δύο τελευταίες δεκαετίες κυρίως από τον Tu [44], βασίζεται στην *ταυτότητα ίχνους (trace identity)*. Μάλιστα, με τον τρόπο αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε απειροδιάστατα συστήματα εξέλιξης με πολλαπλή δομή Hamilton. Σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου αποτελεί το γεγονός ότι το σύστημα υπό κατασκευή είναι τόσο γενικό, που περιλαμβάνει διάφορες εξισώσεις εξέλιξης απλά ως υποπεριπτώσεις. Έτσι τελικά, όπως θα δούμε παρακάτω, ξεκινώντας από ένα πρόβλημα καταλήγουμε σε μία ολόκληρη ιεραρχία *πολυ-Χαμιλτονικών (multi-Hamiltonian)* συστημάτων.

Η κεντρική ιδέα, που κρύβεται πίσω από την παραπάνω τεχνική, είναι η έκφραση των μη γραμμικών εξισώσεων εξέλιξης μέσω της *αναπαράστασης μηδενικής καμπυλότητας (zero curvature representation)*, η οποία κι αποτελεί μία άλλη έκφανση της ολοκληρωσιμότητας. Με τον παραπάνω όρο εννοούμε την εύρεση δύο γραμμικών τελεστών U και V, τέτοιων ώστε, ξεκινώντας από ένα υπερκαθορισμένο σύστημα για μια τυχαία συνάρτηση $\psi(x,t)$,

$$\psi_x = U\psi$$
$$\psi_t = V\psi$$

το υπό μελέτη σύστημα εξέλιξης να προκύπτει μέσα από την συνθήκη συμβατότητας $\psi_{xt} = \psi_{tx}$. Η τελευταία σχέση, χρησιμοποιώντας τις δύο προηγούμενες, γράφεται

$$U_t\psi + U\psi_t = V_x\psi + V\psi_x \quad \Rightarrow \quad U_t\psi + UV\psi - V_x\psi - VU\psi = 0$$

Οπότε ισοδύναμα παίρνουμε την εξίσωση

$$U_t - V_x + [U,V] = 0 \tag{6.1}$$

η οποία ονομάζεται *εξίσωση μηδενικής καμπυλότητας*. Οι τελεστές U και V εξαρτώνται από μία παράμετρο λ, την λεγόμενη *φασματική παράμετρο*, και μία συνάρτηση u των ανεξάρτητων μεταβλητών x και t, που αναφέρεται κι ως *δυναμικό*. Ας θυμηθούμε ότι στην περίπτωση όπου $V_x = 0$, τότε οι U και V αποτελούν ένα ζεύγος Lax.

Παράδειγμα 6.1. Αν θεωρήσουμε το σύστημα

$$\psi_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \lambda + \frac{u}{6} & 0 \end{pmatrix}\psi$$

$$\psi_t = \begin{pmatrix} -\frac{u_x}{6} & 4\lambda - \frac{u}{3} \\ -4\lambda^2 - \frac{\lambda u}{3} + \frac{u_{xx}}{6} + \frac{u^2}{18} & \frac{u_x}{6} \end{pmatrix}\psi$$

τότε η σχέση 6.1 γράφεται

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{u_t}{6} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{u_{xx}}{6} & -\frac{u_x}{3} \\ -\frac{\lambda u_x}{3} + \frac{u_{xxx}}{6} + \frac{uu_x}{9} & \frac{u_{xx}}{6} \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 4\lambda^2 + \frac{\lambda u}{3} - \frac{u_{xx}}{6} - \frac{u^2}{18} & -\frac{u_x}{6} \\ -\frac{\lambda u_x}{6} - \frac{uu_x}{36} & 4\lambda^2 + \frac{\lambda u}{3} - \frac{u_{xx}}{6} - \frac{u^2}{18} \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} 4\lambda^2 + \frac{\lambda u}{3} - \frac{u_{xx}}{6} - \frac{u^2}{18} & \frac{u_x}{6} \\ \frac{\lambda u_x}{6} + \frac{uu_x}{36} & 4\lambda^2 + \frac{\lambda u}{3} - \frac{u_{xx}}{6} - \frac{u^2}{18} \end{pmatrix} = 0$$

και τελικά μας δίνει

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{u_t}{6} - \frac{u_{xxx}}{6} - \frac{uu_x}{6} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

την εξίσωση KdV,

$$u_t = u_{xxx} + u u_x$$

Το πλεονέκτημα της αναπαράστασης μηδενικής καμπυλότητας είναι προφανές: Αντί μιας μη γραμμικής εξίσωσης εξέλιξης, έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Την ιδέα αυτή εμπνεύστηκε πρώτος ο Lax, έπειτα από την δημοσίευση των Gardner, Greene, Kruskal και Miura μιας νέας μεθόδου για την κατασκευή ειδικών λύσεων της εξίσωσης KdV [20]. Με την συμβολή του η τεχνική τους εξελίχθηκε στην λεγόμενη *μέθοδο αντίστροφης σκέδασης*, η οποία εφαρμόστηκε στην συνέχεια με επιτυχία και σε άλλες μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, θα αναφέρουμε τα κύρια συστατικά της παραπάνω μεθόδου, προκειμένου να γίνουν πιο εύκολα κατανοητές ορισμένες έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Η μέθοδος βασίζεται στην σύνδεση της άγνωστης συνάρτησης $u(x,t)$, που ικανοποιεί την εξίσωση που θέλουμε να επιλύσουμε, με την μονοδιάστατη χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger

$$\Psi_{xx} + (\lambda + u)\,\Psi = 0 \tag{6.2}$$

Το πρόβλημα ιδιοτιμών (6.2) για την παράμετρο λ και την συνάρτηση $\Psi(x)$ περιγράφει ένα φυσικό πρόβλημα σκέδασης στην κβαντομηχανική. Εδώ η μεταβλητή u εκφράζει το δυναμικό του συστήματος και θεωρείται αρχικά συνάρτηση μόνο του x. Από φυσικής πλευράς η $u(x)$ απαιτείται να μηδενίζεται στο άπειρο. Έτσι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της Ψ είναι δυνατόν να βρεθεί από την εξίσωση

$$\Psi_{xx} + \lambda\Psi = 0 \tag{6.3}$$

Από την άλλη, εφόσον γνωρίζουμε το δυναμικό u, μπορούμε επακριβώς να προσδιορίσουμε την Ψ, λύνοντας την αρχική εξίσωση (6.2). Συγκρίνοντας την λύση αυτή με την λύση της (6.3), εξάγουμε διάφορα συμπεράσματα για την μορφή της τελευταίας, που αντανακλάνε τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζεται η *κυματοσυνάρτηση* $\Psi(x)$ όταν συναντήσει το δυναμικό $u(x)$, και τα οποία μεταφράζονται ποσοτικά στον υπολογισμό ορισμένων μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται *δεδομένα σκέδασης*, και η εύρεσή τους με αφετηρία την μορφή του δυναμικού είναι γνωστή ως το *πρόβλημα ευθείας σκέδασης*.

Στην αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή, γνωρίζοντας τα δεδομένα σκέδασης, να προσδιορίσουμε το άγνωστο δυναμικό, βασίζεται η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης. Συνοπτικά αυτό επιτυγχάνεται, χρησιμοποιώντας ένα είδος μετασχηματισμού, όπως είναι για παράδειγμα ο μετασχηματισμός Fourier για τις γραμμικές εξισώσεις. Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο, εκτός από την εξίσωση Schrödinger (6.2), λαμβάνουμε υπόψη μας και μία άλλη εξίσωση, η οποία καθορίζει την χρονική εξέλιξη των δεδομένων σκέδασης. Η δεύτερη αυτή εξίσωση δεν είναι τυχαία, αλλά μαζί με την (6.2) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα, του οποίου η συνθήκη συμβατότητας εκφράζεται από την εξίσωση εξέλιξης που ικανοποιεί το δυναμικό $u(x,t)$.

Παράδειγμα 6.2. Αν θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= -\left(\lambda + \frac{u}{6}\right)\Psi \\ \Psi_t &= 4\Psi_{xxx} + u\Psi_x + \frac{u_x}{2}\Psi \end{aligned}$$

τότε για να ισχύει η συνθήκη συμβατότητας $\Psi_{xxt} = \Psi_{txx}$, θα πρέπει το δυναμικό u να ικανοποιεί την εξίσωση KdV. Το σύστημα αυτό δεν είναι άλλο από εκείνο που είδαμε στο παράδειγμα 6.1 αν θέσουμε $\psi = (\Psi, -\Psi_x)$.

Συνδέοντας λοιπόν με τον παραπάνω τρόπο την εξίσωση εξέλιξης, που θέλουμε να επιλύσουμε, με την χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger, αντιμετωπίζουμε την άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ ως το «δυναμικό» του αντίστοιχου συστήματος. Για να κατασκευάσουμε λύσεις της εξίσωσης εξέλιξης λειτουργούμε ως εξής: Ξεκινώντας από ένα δυναμικό $u(x,0) = f(x)$ βρίσκουμε τα δεδομένα σκέδασης, λύνοντας το πρόβλημα της ευθείας σκέδασης, τα εξελίσσουμε έπειτα χρονικά και τέλος βρίσκουμε την εξέλιξη του δυναμικού $u(x,t)$ μέσω του μετασχηματισμού της αντίστροφης σκέδασης. Η KdV ήταν η πρώτη εξίσωση που επιλύθηκε, όπως είπαμε, από τους Gardner, Greene, Kruskal και Miura με την τεχνική αυτή, ενώ λίγα χρόνια αργότερα ακολούθησε η μη γραμμική Schrödinger από τους Zakharov και Shabat.

Έπειτα οι Ablowitz, Kaup, Newell και Segur σκέφτηκαν έναν τρόπο να χρησιμοποιήσουν τον μετασχηματισμό της αντίστροφης σκέδασης ταυτόχρονα σε παραπάνω από μία εξισώσεις. Η ιδέα τους ήταν να θεωρήσουν, αντί ένα, δύο δυναμικά, έστω $q(x,t)$ και $r(x,t)$, κι αντίστοιχα ένα δισδιάστατο πρόβλημα ιδιοτιμών αντί της μονοδιάστατης χρονοανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger :

$$\psi_x = U\psi = \begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ r & i\lambda \end{pmatrix} \psi \tag{6.4}$$

όπου $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. Ας σημειώσουμε ότι το παραπάνω πρόβλημα περιλαμβάνει την εξίσωση (6.2) ως ειδική υποπερίπτωση: Θέτοντας $r = -1$, παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων $\psi_{1x} = -i\lambda\psi_1 + q\psi_2$ και $\psi_{2x} = -\psi_1 + i\lambda\psi_2$. Παραγωγίζοντας την δεύτερη ως προς x κι αντικαθιστώντας τα ψ_{1x}, ψ_{2x} από τις εξισώσεις έχουμε $\psi_{2xx} = i\lambda\psi_1 - q\psi_2 + i\lambda(-\psi_1 + i\lambda\psi_2) = -(q+\lambda)\psi_2$.

Η συνθήκη συμβατότητας της (6.4) με την $\psi_t = V\psi$, όπου V ένας 2×2 πίνακας με ίχνος μηδέν, δίνει ένα σύστημα τριών εξισώσεων που πρέπει να ικανοποιούνται για κάθε λ. Κάνοντας διάφορες υποθέσεις για την εξάρτηση των στοιχείων του V από το λ, οι Ablowitz, Kaup, Newell και Segur κατάφεραν, με έναν τρόπο που θα δούμε παρακάτω, όχι μόνο να βρουν τον πίνακα V, αλλά και τις δύο εξισώσεις εξέλιξης που ικανοποιούν τα δυναμικά q και r. Εκφράζοντας το r συναρτήσει του q, οι δύο αυτές εξισώσεις κατέληγαν σε μία, παίρνοντας έτσι την KdV, την sine-Gordon, κ.α.

Κατασκευάζοντας τον πίνακα V, απο κει και ύστερα ακολουθούσαν τα ίδια βήματα με την μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης. Το πλεονέκτημα όμως ήταν ακριβώς ότι έτσι είχαν επιλύσει ένα γενικό σύστημα δύο εξισώσεων, που περιείχε ως ειδικές περιπτώσεις διάφορες γνωστές μονοδιάστατες εξισώσεις. Η μέθοδος αυτή έμεινε γνωστή, από τα αρχικά τους, ως μέθοδος AKNS, ενώ αργότερα επεκτάθηκε, χρησιμοποιώντας και n-διάστατα προβλήματα ιδιοτιμών.

Κλείνοντας αυτή την παρένθεση της ιστορικής αναδρομής, εκείνο που πρέπει να συγκρατήσουμε είναι το εξής: Η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης αποτελεί έναν τρόπο ολοκλήρωσης μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, ο οποίος επιτυγχάνεται όταν το σύστημα υπό μελέτη μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί μέσα από την συνθήκη συμβατότητας ενός γραμμικού συστήματος, ας πούμε της μορφής $\psi_x = U\psi$, $\psi_t = V\psi$. Για την εύρεση του γραμμικού συστήματος, συνήθως ξεκινάμε από τον πίνακα U και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε τον V, έτσι ώστε τελικά να προκύψουν διάφορες γνωστές εξισώσεις εξέλιξης μέσα από την (6.1). Η εξάρτηση των U, V από τις συναρτήσεις $q(x,t)$ και $r(x,t)$, καθώς κι από την παράμετρο λ, προέρχεται σαν ιδέα από το πρόβλημα σκέδασης στην κβαντομηχανική, γεγονός το οποίο δικαιολογεί και την ορολογία «δυναμικά» και «φασματική παράμετρος».

Το μονοπάτι της αναπαράστασης μηδενικής καμπυλότητας ακολουθεί και η διατύπωση της ολοκληρωσιμότητας μέσα από τις πολλαπλές δομές Hamilton. Με τον ίδιο δηλαδή τρόπο μπορούμε όχι μόνο να κατασκευάσουμε εξισώσεις εξέλιξης, αλλά και να βρούμε την πολυ-Χαμιλτονική δομή τους. Έτσι λοιπόν προκύπτουν διάφοροι τελεστές Hamilton, ενώ, όπως είπαμε και νωρίτερα, καθοριστικό ρόλο παίζει η ταυτότητα ίχνους, ένα ισχυρό εργαλείο για την εύρεση των νόμων διατήρησης. Την μέθοδο αυτή, που έχει πρόσφατα αποφέρει αρκετά σημαντικά αποτελέσματα, θα περιγράψουμε παρακάτω μέσα από το σύστημα που μελετάει ο Fan στο [14].

Στο άρθρο αυτό μελετάται μια σειρά από εξισώσεις, ξεκινώντας από την εξίσωση $\psi_x = U\psi$, με

$$U = \begin{pmatrix} -i\lambda^2 - i\beta qr & \lambda q \\ \lambda r & i\lambda^2 + i\beta qr \end{pmatrix}$$

όπου β μία αυθαίρετη σταθερά. Παρατηρείστε κάποια κοινά χαρακτηριστικά που έχει ο παραπάνω πίνακας με εκείνον των AKNS, όπως για παράδειγμα ότι το ίχνος του είναι ίσο με μηδέν. Έστω

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

όπου a, b, c, d είναι όλες συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών x, t και της φασματικής παραμέτρου λ.

Απαιτούμε τώρα να ισχύει, αντί της (6.1), η συνθήκη $V_x = [U, V]$. Έτσι καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\begin{aligned}
a_x &= \lambda qc - b\lambda r \\
b_x &= 2b\left(-i\lambda^2 - i\beta qr\right) + \lambda qd - a\lambda q \\
c_x &= \lambda ra + 2c\left(i\lambda^2 + i\beta qr\right) - d\lambda r \\
d_x &= \lambda rb - c\lambda q
\end{aligned}$$

Ας σημειώσουμε ότι οι εξισώσεις αυτές πρέπει να ισχύουν για κάθε λ. Μπορούμε επομένως να διαλέξουμε τα a, b, c, d με διάφορους τρόπους προκειμένου να ικανοποιείται το παραπάνω σύστημα. Για παράδειγμα βλέπουμε πως η πρώτη και η τέταρτη είναι συμβατές, αν $a = -d$. Τότε καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned}
a_x &= qc\lambda - rb\lambda \\
b_x &= -2ib\lambda^2 - 2qa\lambda - 2i\beta qrb \\
c_x &= 2ic\lambda^2 + 2ra\lambda + 2i\beta qrc
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο πίνακας V εξαρτάται με πολυωνυμικό τρόπο από την λ^{-1}. Είναι δηλαδή $a(x,t,\lambda) = a_j(x,t)\lambda^{-j},\ b(x,t,\lambda) = b_j(x,t)\lambda^{-j},\ c(x,t,\lambda) = c_j(x,t)\lambda^{-j}$ όπου $j \geq 0$. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του λ, οπότε προκύπτουν οι επαναληπτικές σχέσεις,

$$\begin{gathered}
a_{2j+1} = b_{2j} = c_{2j} = 0 \\
a_{2jx} = qc_{2j+1} - rb_{2j+1} = -\beta qr\left(qc_{2j-1} - rb_{2j-1}\right) - \tfrac{i}{2}\left(qc_{2j-1x} + rb_{2j-1x}\right) \\
b_{2j+1} = \tfrac{i}{2}b_{2j-1x} + iqa_{2j} - \beta qrb_{2j-1} \\
c_{2j+1} = \tfrac{i}{2}c_{2j-1x} + ira_{2j} - \beta qrc_{2j-1}
\end{gathered}$$

Από την πρώτη σχέση βλέπουμε ότι μόνο οι συντελεστές a_j που έχουν άρτιο δείκτη επιβιώνουν, ενώ από τους b_j, c_j εκείνοι που έχουν περιττό. Οι εξισώσεις αυτές λύνονται διαδοχικά, ξεκινώντας ας πούμε με $a_0 = -2i$ και $b_1 = 2q,\ c_1 = 2r$. Έτσι παίρνουμε από την δεύτερη εξίσωση

$$a_{2x} = -\frac{i}{2}(2qr_x + 2rq_x) = -i(qr)_x \ \Rightarrow\ a_2 = -iqr$$

κι αντικαθιστώντας το a_2 που βρήκαμε, στην τρίτη και στην τέταρτη προκύπτουν:

$$b_3 = iq_x + (1-2\beta)q^2r \quad \text{και} \quad c_3 = ir_x + (1-2\beta)qr^2$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με την βοήθεια κι ενός υπολογιστικού προγράμματος, π.χ. Mathematica, βρίσκουμε τελικά

$$\begin{pmatrix} c_{2j+1} \\ b_{2j+1} \end{pmatrix} = L_1 L_2 \begin{pmatrix} c_{2j-1} \\ b_{2j-1} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

όπου

$$L_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} r & -i + r\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} q \\ i + q\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} r & q\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} q \end{pmatrix}$$

και

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} + 2i\beta qr \\ \frac{d}{dx} - 2i\beta qr & 0 \end{pmatrix}$$

Μέχρι στιγμής έχουμε θεωρήσει μόνο την εξίσωση $\psi_x = U\psi$. Η δεύτερη εξίσωση, που θα απαιτήσουμε να είναι συμβατή με την προηγούμενη, είναι η $\psi_t = V^{(n)}\psi$. Δηλαδή, ο τελεστής $V^{(n)}$ κι όχι ο V είναι τελικά εκείνος, που θα κατασκευάσουμε μέσα από την συνθήκη μηδενικής καμπυλότητας,

$$U_t - V_x^{(n)} + \left[U, V^{(n)}\right] = 0 \tag{6.6}$$

Αυτό γίνεται με την βοήθεια του V, που ήδη βρήκαμε, θέτοντας

$$V^{(n)} = \begin{pmatrix} \Delta_n & 0 \\ 0 & -\Delta_n \end{pmatrix} + \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} a_{2j}\lambda^{2(n-j)+2} & b_{2j+1}\lambda^{2(n-j)+1} \\ c_{2j+1}\lambda^{2(n-j)+1} & -a_{2j}\lambda^{2(n-j)+2} \end{pmatrix}$$

στην συνθήκη συμβατότητας (6.6). Έτσι παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} \Delta_{nx} &= -i\beta(qr)_t \\ q_t &= b_{2n+1x} + 2i\beta qr b_{2n+1} + 2q\Delta_n \\ r_t &= c_{2n+1x} - 2i\beta qr c_{2n+1} - 2r\Delta_n \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες στην πρώτη έχουμε

$$\Delta_{nx} = -i\beta r\left(b_{2n+1x} + 2i\beta qr b_{2n+1}\right) - i\beta q\left(c_{2n+1x} - 2i\beta qr c_{2n+1}\right)$$

$$= -i\beta\left(qc_{2n+1x} + rb_{2n+1x}\right) - 2\beta^2 qr\left(q_c 2n + 1 - rb_{2n+1}\right) = 2\beta a_{2n+2x}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από την δεύτερη από τις αρχικές επαναληπτικές σχέσεις. Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε $\Delta_n = 2\beta a_{2n+2}$, οπότε καταλήγουμε στις

$$\begin{pmatrix} q_t \\ p_t \end{pmatrix} = L_3 L_2 \begin{pmatrix} c_{2n+1} \\ b_{2n+1} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

όπου

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 - 2i\beta q \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} r & -2i\beta q \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} q \\ 2i\beta r \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} r & 1 + 2i\beta r \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} q \end{pmatrix}$$

Από τις (6.5) και (6.7), παίρνουμε τελικά το παρακάτω σύστημα εξισώσεων εξέλιξης

$$\begin{pmatrix} q_t \\ r_t \end{pmatrix} = L_3 L_2 \left(L_1 L_2\right)^n \begin{pmatrix} 2p \\ 2r \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{6.8}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι από την συνθήκη συμβατότητας των εξισώσεων $\psi_x = U\psi$, $\psi_t = V^{(n)}\psi$ προκύπτει για διάφορες τιμές του n μια σειρά από συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Η σειρά αυτή ή αλλιώς ιεραρχία γράφεται κι ως εξής

$$u_t = JG_{2n+1} = JLG_{2n-1} = \cdots = JL^n G_1 \tag{6.9}$$

όπου $u = (q, r)$, $J = L_3 L_2 L_3^*$, $L = (L_3^*)^{-1} L_1 L_2 L_3^*$ και

$$G_{2j+1} = (c_{2j+1} - 2i\beta r a_{2j}, b_{2j+1} - 2i\beta q a_{2j}) \tag{6.10}$$

Η μορφή αυτή είναι πιο κατάλληλη, γιατί τώρα όλοι οι τελεστές JL^k είναι αντισυζυγείς. Αυτό αποδεικνύεται επαγωγικά, αν παρατηρήσουμε ότι οι L_1, L_2 είναι αντισυζυγείς.

Εκείνο που απομένει είναι να δείξουμε ότι οι G_{2j+1} προέρχονται από την μεταβολή ενός συναρτησιακού. Αυτό γίνεται αν υποθέσουμε ότι η λύση V, που βρήκαμε από την συνθήκη $V_x = [U, V]$, είναι μοναδική μέχρι μια πολλαπλασιαστική σταθερά. Τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει σταθερά γ, τέτοια ώστε για κάποια λύση $\widetilde{V} = \lambda^\gamma V$, να ισχύει

$$\delta \left\langle \widetilde{V}, \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\langle \widetilde{V}, \nabla U \right\rangle \tag{6.11}$$

όπου τόσο η μεταβολική παράγωγος δ, όσο και η κλίση ∇, θεωρούνται ως προς τις μεταβλητές u. Η παραπάνω αγκύλη δύο τυχαίων πινάκων A και B ορίζεται από το ίχνος του γινομένου τους $\langle A, B\rangle = tr(AB)$. Οι πίνακες αυτοί έχουν την δομή μιας ημιαπλής άλγεβρας Lie, ενώ καθένας τους συνδέεται και με ένα πολυώνυμο Laurent του λ, όπως οι U, V. Η σχέση (6.11) είναι γνωστή ως ταυτότητα ίχνους (για περισσότερες πληροφορίες βλ. [44]). Αντικαθιστώντας το $\widetilde{V}$, παίρνουμε

$$\delta \left\langle V, \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right\rangle = \lambda^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^\gamma \left\langle V, \nabla U \right\rangle \tag{6.12}$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό έχουμε

$$\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right\rangle = -4ia\lambda + rb + qc$$

και

$$\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial q} \right\rangle = c\lambda - 2i\beta ra = \left(c_{2j+1} - 2i\beta ra_{2j}\right)\lambda^{-2j}$$
$$\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial r} \right\rangle = b\lambda - 2i\beta qa = \left(b_{2j+1} - 2i\beta qa_{2j}\right)\lambda^{-2j}$$

Επομένως η (6.12), χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, καθώς και την (6.10), κι εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του λ, μας δίνει

$$\delta\left(-4ia_{2j+2} + rb_{2j+1} + qc_{2j+1}\right) = (\gamma - 2j)G_{2j+1}$$

Παίρνοντας την τιμή $j = 0$ βρίσκουμε $\gamma = 0$,

$$\gamma G_1 = \delta\left(-4ia_2 + rb_1 + qc_1\right) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = 0$$

οπότε τελικά έχουμε

$$G_{2j+1} = \frac{\delta \mathcal{H}_j}{\delta u}$$

όπου

$$\mathcal{H}_0 = 2(1-2\beta)qr, \;\; \mathcal{H}_j = \frac{4ia_{2j+2} - rb_{2j+1} - qc_{2j+1}}{2j}, \; j = 1, 2, \ldots$$

Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε από την (6.9) σε ένα πολυ-Χαμιλτονικό σύστημα

$$u_t = J\,\delta\mathcal{H}_n = JL\,\delta\mathcal{H}_{n-1} = \cdots = JL^n \delta\mathcal{H}_0 \tag{6.13}$$

Παρόμοια με πριν, αποδεικνύεται ότι τα συναρτησιακά $\mathcal{H}_i$ είναι όλα σε ενέλιξη μεταξύ τους,

$$\{\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j\} = \int \delta\mathcal{H}_i\, JL^k \delta\mathcal{H}_j\, dx = \int \delta\mathcal{H}_i\, JL^{k-1}\delta\mathcal{H}_{j+1}\, dx = -\int \delta\mathcal{H}_{j+1}\, JL^{k-1}\delta\mathcal{H}_i\, dx =$$
$$= -\int \delta\mathcal{H}_{j+1}\, JL^k \delta\mathcal{H}_{i-1}\, dx = \int \delta\mathcal{H}_{i-1}\, JL^k \delta\mathcal{H}_{j+1}\, dx = \{\mathcal{H}_{i-1}, \mathcal{H}_{j+1}\} = \cdots = \{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_k\} = 0$$

κι άρα η ιεραρχία (6.13) αποτελεί ένα πλήρως ολοκληρώσιμο σύστημα με την έννοια του Liouville.

Για διάφορες τιμές του β, τα μέλη της ιεραρχίας αυτής μας δίνουν ορισμένες γνωστές εξισώσεις. Για παράδειγμα απ' το πρώτο μέλος ($n = 1$), θέτοντας $r = -q^*$, παίρνουμε την *εξίσωση Kundu*,

$$iq_t + q_{xx} - 2i(2\beta - 1)\,|q|^2\, q_x - i(4\beta - 1)\,|q|^2\, q_x^* + \beta(4\beta - 1)\,|q|^4\, q = 0$$

που με την σειρά της μας δίνει κάποιες γενικεύσεις της εξίσωσης Schrödinger, όπως οι

$$iq_t + q_{xx} + i\left(|q|^2\, q\right)_x = 0 \qquad \text{(Kaup-Newell)}$$
$$iq_t + q_{xx} + i\,|q|^2\, q_x = 0 \qquad \text{(Chen-Lee-Liu)}$$
$$iq_t + q_{xx} - i\,|q|^2\, q_x^* + \frac{1}{2}\,|q|^4\, q = 0 \qquad \text{(Gerjikov-Ivanov)}$$

για $\beta = 0, \beta = 1/4, \beta = 1/2$ αντίστοιχα. Για $r = i$ και $\beta = 1/4$ παίρνουμε μία άλλη εξίσωση,

$$iq_t + q_{xx} + qq_x = 0$$

που αντιστοιχεί στην γνωστή *εξίσωση Burgers* $q_t + q_{xx} + qq_x = 0$, αν θεωρήσουμε το ίδιο φασματικό πρόβλημα με λ αντί $i\lambda$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, καθένα από τα συστήματα αυτά είναι δι-Χαμιλτονικά,

$$u_t = J\,\delta\mathcal{H}_1 = JL\,\delta\mathcal{H}_0$$

Το δεύτερο μέλος αυτής της ιεραρχίας ($n = 2$), θέτοντας $q = 2$, μας δίνει για $\beta = 1/2$ την mKdV,

$$q_t + \frac{1}{2}q_{xxx} + 3q^2 q_x = 0$$

ενώ για $\beta = 1/4$ και $i\lambda \to \lambda$ μας δίνει την *εξίσωση Sharma-Tass-Olver*,

$$q_t + \frac{1}{2}q_{xxx} - \frac{3}{2}(qq_x)_x - \frac{3}{2}q^2 q_x = 0$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις αποτελούν ένα τρι-Χαμιλτονικό σύστημα,

$$u_t = J\,\delta\mathcal{H}_2 = JL\,\delta\mathcal{H}_1 = JL^2\delta\mathcal{H}_0$$

Τέλος ας σημειώσουμε ότι θέτοντας $\beta = 0$ στο αρχικό φασματικό πρόβλημα παίρνουμε την λεγόμενη ιεραρχία Kaup-Newell.

Με την μέθοδο που σκιαγραφήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα, έχει αναδειχθεί η δομή Hamilton πολλών ολοκληρώσιμων συστημάτων. Στο [44] αρχικά παρουσιάζονται η θεωρία που κρύβεται πίσω από την τεχνική αυτή και τα επιχειρήματα που την δικαιολογούν, ενώ έπειτα βλέπουμε πως προκύπτουν διάφορες ιεραρχίες ολοκληρώσιμων συστημάτων Hamilton, όπως η TC, η TA, η Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) και η N-AKNS, η Kaup-Newell, που αναφέραμε και πιο πάνω, η Wadati-Konno-Ichikawa, η Boiti-Pempinelli-Tu και η TB. Σε πιο πρόσφατες δημοσιεύσεις βλέπουμε μία ακόμη γενίκευση της ιεραρχίας Kaup-Newell [15], καθώς και την ιεραρχία Dispersive Long Wave [21], το δεύτερο μέλος της οποίας μελετήσαμε στο παράδειγμα (5.5). Η ταυτότητα ίχνους είναι δυνατόν μάλιστα να χρησιμοποιηθεί για την αναλυτική κατασκευή αγκυλών Poisson, βλέπε [45]. Σ' αυτό το ίδιο άρθρο ο Tu παρουσιάζει άλλες τρεις ιεραρχίες, την Giachetti-Johnson, την Jaulent-Miodek και την ιεραρχία Yang. Τέλος με τον τρόπο αυτό μπορούν να αντιμετωπιστούν και διακριτά συστήματα, όπως στο [46], όπου κατασκευάζεται η ιεραρχία Toda.

Μία άλλη μέθοδος που αποτελεί ουσιαστικά συνέχεια της προηγούμενης οδηγεί στην κατασκευή πεπερασμένων ολοκληρώσιμων συστημάτων. Η τεχνική αυτή αναπτύχθηκε αρχικά από τον Cao κι έπειτα από τους Qiao και Ma, και ονομάζεται *μέθοδος μη γραμμικοποιήσης (nonlinearization technique)*. Ας επιστρέψουμε στο άρθρο [14] του Fan, για να δούμε πως εφαρμόζεται.

Ξεκινώντας από το πρόβλημα $\psi_x = U(\lambda, q, r)\psi$ βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του, λ_i, και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις y_i, x_i. Υπολογίζουμε έπειτα την μεταβολική παράγωγο του λ_i ως προς $u = (q, r)$ η οποία είναι ίση με

$$\delta\lambda_i = \left(\frac{\delta\lambda_i}{\delta q}, \frac{\delta\lambda_i}{\delta r}\right) = \frac{1}{\gamma_i}\left(\lambda_i x_i^2 - 2i\beta r x_i y_i, -\lambda_i y_i^2 - 2i\beta q x_i y_i\right)$$

όπου $\gamma_i = \int \left(q x_i^2 - r y_i^2 + 4i\lambda_i x_i y_i\right) dx$. Η μέθοδος, με την οποία βρίσκουμε την μεταβολική παράγωγο των ιδιοτιμών ως προς τα δυναμικά, περιγράφεται αναλυτικά στο [17].

Έπειτα παρατηρούμε ότι $JL\delta\lambda_i = \lambda_i^2 J\delta\lambda_i$, ενώ σύμφωνα με την (6.9) $JG_{2i+3} = JLG_{2i+1}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι τελεστές JL και J αποτελούν ένα *ζεύγος τελεστών Lenard*, και οι ποσότητες $\{G_{2i+1}\}$ μία *ακολουθία Lenard*.

Εφαρμόζοντας τον *περιορισμό Bargmann (Bargmann constraint)*, $G_1 = \gamma_i\delta\lambda_i$, που ισοδύναμα εκφράζεται ως

$$q = -\frac{\lambda_i y_i^2}{2\left(1 - 2\beta + i\beta x_i y_i\right)} \qquad r = \frac{\lambda_i x_i^2}{2\left(1 - 2\beta + i\beta x_i y_i\right)}$$

η εξίσωση $\psi_x = U\psi$ μετατρέπεται σε ένα πεπερασμένο μη γραμμικό σύστημα Hamilton,

$$\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial y_i}$$

$$\frac{dy_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

με συνάρτηση Hamilton

$$H = i\lambda_i^2 x_i y_i + \frac{\lambda_i x_i^2 \lambda_j y_j^2}{4\left(1 - 2\beta + i\beta x_i y_i\right)}$$

Οι συναρτήσεις

$$P_k = 2\left(1 - 2\beta + i\beta x_i y_i\right)\lambda_i^{2k+2} x_i y_i + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k}\left(\lambda_i^{2l+1}\lambda_j^{2(k-l)+1} x_i^2 y_j^2 - \lambda_i^{2l}\lambda_j^{2(k-l)+2} x_i x_j y_i y_j\right)$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots$ αποτελούν πρώτα ολοκληρώματα, $\{H, P_k\} = 0$, τα οποία βρίσκονται σε ενέλιξη μεταξύ τους, $\{P_k, P_l\} = 0$. Άρα το σύστημα είναι πλήρως ολοκληρώσιμο με την έννοια του Liouville.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτουν κι άλλα πεπερασμένα ολοκληρώσιμα συστήματα Hamilton στον $\mathbb{R}^{2n}$ [15], [21]. Στο τελευταίο άρθρο, βρίσκοντας ένα ζεύγος Lax για το σύστημα υπό μελέτη, τα ολοκληρώματα της κίνησης προκύπτουν μέσα από την ορίζουσα του αντίστοιχου πίνακα

Lax. Σε άλλες περιπτώσεις [28] η εύρεση των ολοκληρωμάτων προέρχεται από το ίχνος του πίνακα Lax. Στο άρθρο αυτό, το φασματικό πρόβλημα, απ' το οποίο ξεκινάει ο Ma την κατασκευή του συστήματος Hamilton συνδέεται με την ιεραρχία mKdV.

Άλλες καινούριες ιεραρχίες έχουν μελετηθεί σε πιο πρόσφατες δημοσιεύσεις, όπως για παράδειγμα η ιεραρχία Harry Dym [37]. Στο άρθρο αυτό βλέπουμε έναν νέο τρόπο κατασκευής της, που συνδέεται με την ιεραρχία Kadomtsev-Petviashivili. Η κατασκευή αυτή στηρίζεται σε μία άλλη μέθοδο, βάση της οποίας αποτελεί η εύρεση μιας συνάρτησης Casimir του τελεστή Hamilton $a_1\mathfrak{D}_1+a_2\mathfrak{D}_2$ ενός δι-Χαμιλτονικού συστήματος $u_t = \mathfrak{D}_1\delta\mathcal{H}_1 = \mathfrak{D}_2\delta\mathcal{H}_2$, η οποία μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent. Ξεκινώντας λοιπόν από την διπλή δομή Hamilton της εξίσωσης Harry Dym, η εύρεση μίας τέτοιας συνάρτησης ανάγεται τελικά στην επίλυση μίας εξίσωσης τύπου Ricatti.

Μία ιεραρχία με αρκετά ενδιαφέρουσες λύσεις μελετάται στο [39], ξεκινώντας από ένα νέο φασματικό πρόβλημα. Οι εξισώσεις που ανήκουν στην ιεραρχία αυτή διαθέτουν όλες δι-Χαμιλτονική δομή κι αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας. Κάτω από διάφορους περιορισμούς, όχι μόνο τον περιορισμό Bargmann, κατασκευάζονται διάφορα πεπερασμένα ολοκληρώσιμα συστήματα Hamilton. Μέσα όμως από τις συνθήκες αυτές μπορούμε να βρούμε διάφορες λύσεις των εξισώσεων της ιεραρχίας. Αναζητώντας λοιπόν οδεύοντα κύματα, προκύπτουν σολιτονικές λύσεις, οι οποίες, αντί του γνωστού σχήματος που θυμίζει καμπάνα, έχουν είτε μία κορυφή, είτε τρεις σε σχήμα W ή M.

6.2 Πεπερασμένα συστήματα

Όπως το δείξαμε κι αναλυτικά, η έννοια της δομής Hamilton ξεκίνησε από τα πεπερασμένα συστήματα κι επεκτάθηκε στα απειροδιάστατα. Με αυτόν τον τρόπο μπορέσαμε να δούμε νέες πλευρές των συστημάτων αυτού του είδους. Πρόσφατα όμως η παραπάνω πορεία αντιστράφηκε. Δηλαδή έννοιες που πρωτοαναπτύχθηκαν στο πλαίσιο των συστημάτων άπειρης διάστασης μεταφέρθηκαν στα πεπερασμένα. Παράδειγμα αποτελεί η έννοια της πολλαπλής δομής Hamilton.

Ας δούμε καταρχάς μία γνωστή περίπτωση δι-Χαμιλτονικού συστήματος πεπερασμένης διάστασης, που είναι το *πλέγμα του Toda*. Στο άρθρο των Δαμιανού και Σοφοκλέους [7] βλέπουμε μία πλήρη περιγραφή της διπλής του δομής, καθώς και τα πλεονεκτήματά της. Μεταξύ άλλων οι συγγραφείς παρουσιάζουν ένα νέο ολοκλήρωμα της κίνησης, την εύρεση του οποίου περιγράφουμε αναλυτικά παρακάτω.

Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος στην περίπτωση n βαθμών ελευθερίας είναι

$$\frac{dq_i}{dt} = p_i \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad\qquad \frac{dp_1}{dt} = -\, e^{q_1 - q_2}$$

$$\frac{dp_k}{dt} = e^{q_{k-1}-q_k} - e^{q_k - q_{k+1}} \quad (k = 2, \ldots, n-1) \qquad \frac{dp_n}{dt} = e^{q_{n-1}-q_n}$$

και αποτελούν ένα δι-Χαμιλτονικό σύστημα, με βάση τους παρακάτω πίνακες Poisson και τις αντίστοιχες συναρτήσεις Hamilton

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad H_1\left(q_i, p_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & C \end{pmatrix} \qquad H_2\left(q_i, p_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i$$

Με A συμβολίζουμε έναν αντισυμμετρικό $n \times n$ πίνακα με στοιχεία $a_{ii} = 0$ και $a_{ij} = 1, i < j$, με B τον διαγώνιο επίσης $n \times n$ πίνακα με $b_{ii} = -p_i$ και τέλος με C τον αντισυμμετρικό $n \times n$ πίνακας, του οποίου τα μοναδικά μη μηδενικά στοιχεία είναι $c_{i,i+1} = e^{q_i - q_{i+1}}$. Το σύστημα είναι πλήρως ολοκληρώσιμο κατά Liouville, δηλαδή υπάρχουν n πρώτα ολοκληρώματα H_i σε ενέλιξη μεταξύ τους.

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να μελετηθούν, αν θεωρήσουμε το αντίστοιχο πρόβλημα μεταβολών $\mathcal{L} = \int L\, dt$ με συνάρτηση Lagrange

$$L\left(q_i, \dot{q}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}}$$

του οποίου οι εξισώσεις Euler-Lagrange,

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6.14}$$

είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις κίνησης. Οι (6.14) επιδέχονται την παρακάτω 5-παραμετρική ομάδα συμμετρίας

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_1 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \\
\mathrm{v}_2 &= t\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \\
\mathrm{v}_3 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
\mathrm{v}_4 &= t\frac{\partial}{\partial t} - 2\sum_{i=2}^{n} (i-1)\frac{\partial}{\partial q_i} \\
\mathrm{v}_5 &= \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i}
\end{aligned}$$

Το θεώρημα της Noether για μία συνάρτηση Lagrange πρώτης τάξης μας λέει ότι μία σημειακή Lie συμμετρία των εξισώσεων Euler-Lagrange,

$$\mathrm{v} = T\frac{\partial}{\partial t} + Q_i\frac{\partial}{\partial q_i}$$

είναι συμμετρία του αντίστοιχου προβλήματος μεταβολών αν υπάρχει συνάρτηση F, γνωστή ως *όρος βαθμίδας (gauge term)*, τέτοια ώστε

$$\frac{dF}{dt} = T\frac{\partial L}{\partial t} + Q_i\frac{\partial L}{\partial q_i} + \left(\frac{dQ_i}{dt} - \dot{q}_i\frac{dT}{dt}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{dT}{dt}L = \mathrm{v}^{(1)}(L) + \frac{dT}{dt}L \tag{6.15}$$

Το αντίστοιχο πρώτο ολοκλήρωμα-νόμος διατήρησης είναι τότε

$$P = F - TL - (Q_i - \dot{q}_i T)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση Lagrange είναι της μορφής

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^2 - U(q_1, \ldots, q_n) \tag{6.16}$$

όπως δηλαδή και στο πρόβλημα που εξετάζουμε, μία συμμετρία v των εξισώσεων Euler-Lagrange είναι και συμμετρία του αντίστοιχου προβλήματος μεταβολών αν

$$T = T(t) \quad \text{και} \quad Q_i = A_{ij}q_j + \frac{1}{2}\frac{dT}{dt}q_i + b_i(t)$$

όπου A_{ij} αντισυμμετρικός πίνακας με σταθερά στοιχεία, βλ. [41]. Τότε ο όρος βαθμίδας παίρνει την μορφή

$$F = \frac{1}{4}\frac{d^2T}{dt^2}\sum_{i=1}^{n}q_i^2 + \frac{db_i}{dt}q_i + d(t)$$

Ελέγχοντας τις παραπάνω συμμετρίες, συμπεραίνουμε ότι μόνο οι πρώτες τρεις είναι συμμετρίες του συναρτησιακού $\mathcal{L} = \int L\,dt$ και αποτελούν μάλιστα μία επίλυσιμη ομάδα συμμετρίας, καθώς ισχύουν $[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_3] = 0$, $[\mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3] = -\mathrm{v}_1$. Τα πρώτα ολοκληρώματα στα οποία αντιστοιχούν είναι η H_2, η $\sum_{i=1}^{n}(q_i - tp_i)$ και η H_1.

Για την εύρεση κι άλλων ολοκληρωμάτων θεωρούμε γενικευμένες συμμετρίες πρώτης τάξης, στην ισοδύναμη μορφή

$$\mathrm{v} = \eta_i\frac{\partial}{\partial q_i}$$

Η συνθήκη συμμετρίας (6.15) για την συνάρτηση Lagrange (6.16) γίνεται

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \eta_i\frac{\partial U}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \eta_i}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)\dot{q}_i \tag{6.17}$$

Από τους συντελεστές των παραγώγων δεύτερης τάξης παίρνουμε

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = q_i \frac{\partial \eta_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε

$$F = \eta_i \dot{q}_i - \Phi\left(t, q_j, \dot{q}_j\right)$$

όπου $\eta_i = \partial\Phi/\partial\dot{q}_i$. Ας σημειώσουμε ότι το ολοκλήρωμα της κίνησης στην περίπτωση αυτή θα είναι $P = \Phi$. Αντικαθιστώντας την F στην (6.17) προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \tag{6.18}$$

Χρησιμοποιώντας το δυναμικό για το πλέγμα του Toda στην περίπτωση των δύο βαθμών ελευθερίας, η λύση της παραπάνω εξίσωσης, μας δίνει τα παρακάτω πρώτα ολοκληρώματα, ένα εκ των οποίων, το P_3, είναι καινούριο:

$$P_1 = p_1 + p_2, \quad P_2 = (p_1 - p_2)^2 + 4e^{q_1 - q_2}, \quad P_3 = \frac{p_1 - p_2 + \sqrt{P_2}}{p_1 - p_2 - \sqrt{P_2}} \exp\left(\frac{q_1 + q_2}{p_1 + p_2}\sqrt{P_2}\right)$$

Τα P_1, P_2 είναι σε ενέλιξη, ενώ η παρουσία του P_3 δείχνει ότι το σύστημα είναι *υπερολοκληρώσιμο*, δηλαδή διαθέτει $2n-1$ πρώτα ολοκληρώματα, όπου $2n$ η διάσταση του.

Εκτός από την εύρεση ενός νέου ολοκληρώματος, οι Δαμιανού και Σοφοκλέους κατέληξαν και σε ένα ακόμα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα. Θεωρούμε τον επαναληπτικό τελεστή του συστήματος $R = J_2 J_1^{-1}$ και την συμμετρία Hamilton

$$Z_0 = (n + 1 - 2i)\frac{\partial}{\partial q_i} + p_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

που αντιστοιχεί στο πρώτο ολοκλήρωμα $P = \sum_{i=1}^{n} q_i$ ως προς τον πίνακα δομής Poisson J_2. Αποδεικνύεται ότι οι πίνακες $J_i = R^{i-1}J_1$ ορίζουν ο καθένας αντίστοιχα μία δομή Poisson [18]. Ακόμα, οι συμμετρίες $Z_i = R^i Z_0$ έχουν την ιδιότητα η αγκύλη τους Lie με μία οποιαδήποτε άλλη συμμετρία v_Q να παράγει μία καινούρια συμμετρία. Οι συμμετρίες αυτές είναι γνωστές ως *master symmetries*, και συγκεκριμένα ισχύει [33],

$$[Z_i, H_j] = (i+j)H_{i+j}, \qquad [Z_i, Z_j] = (j-i)Z_{i+j}, \qquad [Z_i, J_j] = (j-i-2)J_{i+j}$$

όπου $[\ ,\ ]$ η αγκύλη Schouten. Αν F είναι μία ομαλή διανυσματική συνάρτηση, v ένα διανυσματικό πεδίο και J_i ο πίνακας δομής της αγκύλης Poisson $\{\ ,\ \}_i$ τότε $[\mathrm{v}, F] = \mathrm{v}\,(F)$ και $[J_i, F] = \{\ , F\}_i$. Χρησιμοποιώντας την *ταυτότητα super-Jacobi*, που ισχύει για την αγκύλη αυτή [35],

$$\left[\left[J_{n+1}, P\right], Z_1\right] + \left[\left[Z_1, J_{n+1}\right], P\right] + \left[\left[P, Z_1\right], J_{n+1}\right] = 0$$

λαμβάνοντας υπόψη $[P, Z_1] = 0$, μπορούμε να δείξουμε επαγωγικά ότι $Z_n = [J_{n+2}, P]$ ως εξής

$$Z_n = \frac{1}{n-2}[Z_1, Z_{n-1}] = \frac{1}{n-2}[Z_1, [J_{n+1}, P]] = \frac{1}{n-2}[[Z_1, J_{n+1}], P] = [J_{n+2}, P]$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι *η master συμμετρία Z_n είναι το διανυσματικό πεδίο Hamilton που αντιστοιχεί στην συνάρτηση P ως προς την αγκύλη Poisson που ορίζεται από τον πίνακα δομής J_{n+2}*, δηλαδή

$$Z_n = \{\ , P\}_{n+2}$$

Με άλλα λόγια, οι master συμμετρίες μπορούν να υπολογιστούν, κατασκευάζοντας την ιεραρχία Poisson. Το ίδιο ισχύει και για τα πρώτα ολοκληρώματα· για παράδειγμα γνωρίζοντας τον J_3 και την P, έχουμε

$$H_{i+1} = \frac{1}{i+1}\{H_i, P\}_3$$

Τα πεπερασμένα συστήματα Hamilton βρίσκουν πολλές εφαρμογές τόσο στην Μηχανική, από όπου προέρχονται, όσο και σε άλλους κλάδους της Φυσικής αλλά και των υπολοίπων επιστημών. Γι' αυτό και το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν ακόμα και στις λιγότερες διαστάσεις είναι μεγάλο. Ανάμεσα στις πρόσφατες δημοσιεύσεις βλέπουμε την περίπτωση των 3-διάστατων συστημάτων, η οποία έχει μελετηθεί, λύνοντας την ταυτότητα Jacobi για ένα τυχαίο πίνακα J_{ij} [1]. Η λύση που προκύπτει μας δίνει τον γενικό τύπο που έχει ο πίνακας δομής Poisson, ακόμα και σε περιοχές ορισμένων ανωμάλων σημείων. Με βάση αυτόν προκύπτουν κριτήρια για να έχει ένα 3-διάστατο σύστημα διπλή δομή Hamilton, ενώ ακόμα παρουσιάζονται διάφορα παραδείγματα, στα οποία επιτυγχάνεται υποβιβασμός τάξης.

Μία πλήρης ταξινόμηση των ομάδων συμμετρίας Lie τόσο για τα 4-διάστατα όσο και για τα 6-διάστατα συστήματα Hamilton έχει γίνει από τους Δαμιανού και Σοφοκλέους [7]. Οι ίδιοι έχουν ακόμα ταξινομήσει τις μεταβολικές συμμετρίες για τα αντίστοιχα προβλήματα μεταβολών, ελέγχοντας παράλληλα την ολοκληρωσιμότητά τους [8].

Ένα πρώτο βήμα πέρα από την κλασική θεωρία Hamilton είναι η περίπτωση στην οποία μία πολλαπλότητα Poisson εφοδιάζεται με μία μετρική Riemann. Η συνάρτηση Hamilton ορίζεται τότε,

$$H = \frac{1}{2M}\, g_{ij}(q) p_i p_j \tag{6.19}$$

μέσω του μετρικού τανυστή g_{ij}, ο οποίος εξαρτάται μόνο από τις θέσεις $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Όπως αποδεικνύεται [22], όλες οι συναρτήσεις της μορφής $H = p_i^2/2M + U(q)$, μπορούν να εκφραστούν όπως η παραπάνω. Έτσι, διάφορα δυναμικά U μπορούν να μελετηθούν σύμφωνα μ' αυτό το γενικό μοντέλο. Οι κανονικές εξισώσεις Hamilton της συνάρτησης (6.19) αντιστοιχούν στις γεωδαισιακές καμπύλες της πολλαπλότητας Riemann που αντιστοιχεί στην μετρική g_{ij}. Η καμπυλότητα του χώρου μπορεί τότε να μας δώσει πληροφορίες για την συμπεριφορά των τροχιών αυτών· για παράδειγμα αρνητική καμπυλότητα σημαίνει εκθετική απομάκρυνση των τροχιών, ενδεικτικό της ύπαρξης *χάους*, μία έννοια αντιδιαμετρικά αντίθετη της ολοκληρωσιμότητας.

Στην γενικότερη περίπτωση, όπου η συνάρτηση Hamilton περιλαμβάνει κι ένα δυναμικό,

$$H = \frac{1}{2} g_{ij}(q) p_i p_j + U(q) \tag{6.20}$$

υπάρχει ένας πρακτικός αλγόριθμος εύρεσης πρώτων ολοκληρωμάτων πολυωνυμικών ως προς τις ορμές p_i [23]. Με τον τρόπο αυτό έχει μελετηθεί στις δύο διαστάσεις το γενικευμένο δυναμικό Holt,

$$U = q_1^2 + a q_2^2 + \frac{b}{q_1^2} + \frac{c}{q_2^2}$$

και στις τρεις, κυλινδρικά συμμετρικά δυναμικά της μορφής,

$$U = \frac{f(\frac{q_2}{q_1})}{q_1^2 + q_2^2}$$

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο, μπορούμε να ελέγξουμε την ολοκληρωσιμότητα των συστημάτων αυτών για διάφορες τιμές των σταθερών a, b, c στην πρώτη περίπτωση και εκφράσεις της συνάρτησης f στην δεύτερη.

Μία άλλη πλευρά των πεπερασμένων συστημάτων Hamilton, η *διαχωρισιμότητα*, έχει έρθει ξανά στο προσκήνιο μέσω της πολλαπλής δομής Hamilton. Πρόκειται για μια διαφορετική μέθοδο αναγωγής, από αυτές που είδαμε νωρίτερα, όπου πρωταγωνιστής είναι η *εξίσωση Hamilton-Jacobi*. Η λύση της εξίσωσης αυτής μας δίνει την *γενέτειρα συνάρτηση* S ενός *κανονικού μετασχηματισμού*, δηλαδή ενός μετασχηματισμού που διατηρεί την αγκύλη Poisson, ο οποίος μας μεταφέρει σε ένα σύστημα, το οποίο ολοκληρώνεται απευθείας. Η εξίσωση Hamilton-Jacobi είναι μία μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, η οποία σε ορισμένες περιπτώσεις λύνεται με χωρισμό μεταβλητών. Όταν συμβαίνει αυτό, τότε το σύστημα Hamilton ονομάζεται *διαχωρίσιμο*.

Στο Tsiganov [43] βλέπουμε πώς συνδέεται η διπλή δομή Hamilton ενός συστήματος με την διαχωρισιμότητα του. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι κάθε διαχωρίσιμο σύστημα είναι ένα ολοκληρώσιμο δι-Χαμιλτονικό σύστημα. Το άρθρο αυτό επικεντρώνεται στο πλέγμα του Toda, είτε ανοιχτό, δηλαδή με τα άκρα του ελεύθερα, είτε περιοδικό, δηλαδή με τα άκρα του ενωμένα. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχουν δύο διαφορετικές δι-Χαμιλτονικές δομές, μία εκ των οποίων γνωρίσαμε νωρίτερα. Οι δομές αυτές κατασκευάζονται βρίσκοντας ζεύγη Lax, δηλαδή δύο πίνακες A, L, έτσι ώστε οι εξισώσεις του συστήματος να γράφονται ως $\dot{L} = [A, L]$. Όταν συμβαίνει αυτό τότε τα ίχνη των πινάκων $L, L^2, \ldots$ αντιστοιχούν σε πρώτα ολοκληρώματα. Σε κάθεμια από τις δύο δομές αντιστοιχούν χωριζομένες μεταβλητές, που προτάθηκαν από τους Moser και Sklyanin.

Η σχέση της διαχωρισιμότητας με τις τριπλές δομές Hamilton έχει επίσης απασχολήσει την σύγχρονη βιβλιογραφία. Συστήματα Hamilton δύο βαθμών ελευθερίας, διαχωρίσιμα σε ορθογώνια σύνολα συντεταγμένων, μπορούν να επεκταθούν σε τρι-Χαμιλτονικά συστήματα μεγαλύτερης διάστασης [10]. Ο τρόπος κατασκευής βασίζεται σε μία σύνδεση μεταξύ δύο προγενέστερων προσεγγίσεων στο θέμα της διαχωρισιμότητας. Η πρώτη αναφέρεται σε δι-Χαμιλτονικά συστήματα, όπου οι χωριζομένες μεταβλητές προκύπτουν ως ρίζες ενός πολυωνύμου. Η καμπύλη που ορίζεται από αυτό το πολυώνυμο είναι γνωστή ως *seperation curve*. Η δεύτερη εφαρμόζεται σε τρι-Χαμιλτονικά συστήματα $\{J_1, J_2, J_3\}$, όπου οι πίνακες δομής $J_2 - \lambda J_1$ και $J_3 - \mu J_1$ επιδέχονται μία κοινή πολυωνυμική συνάρτηση Casimir $f(\lambda, \mu)$. Αποδεικνύεται ότι τουλάχιστον για το Ευκλείδειο επίπεδο η seperation curve προκύπτει απ' την f έπειτα από μια διαδικασία αναγωγής είτε των J_1, J_2, είτε των J_1, J_3 στα κοινά τους σταθμικά υποσύνολα. Τα αποτελέσματα, αν και περιορίζονται σε αυτήν την ειδική περίπτωση, υποδεικνύουν έναν τρόπο γενίκευσης και σε παραπάνω διαστάσεις. Δύο βασικά παραδείγματα, το σύστημα Hénon-Heiles και το πρόβλημα Kepler, χρησιμοποιούνται για την κατασκευή 7-διάστατων τρι-Χαμιλτονικών συστημάτων, σύμφωνα με την μέθοδο αυτή.

Ο χωρισμός μεταβλητών στις *συντεταγμένες Darboux-Nijenhuis* εξετάζεται από τους Falqui και Pedroni συγκεκριμένα για τα δι-Χαμιλτονικά συστήματα. Οι συντεταγμένες αυτές είναι κανονικές συντεταγμένες ως προς την δομή Poisson, που δίνεται από τον αντιστρέψιμο πίνακα J_1, οι οποίες επιπλέον διαγωνοποιούν τον επαναληπτικό τελεστή $J_2 J_1^{-1}$ του συστήματος. Στο άρθρο τους [13] οι συγγραφείς δίνουν ένα κριτήριο για τον χωρισμό σε αυτές τις μεταβλητές, το οποίο δεν απαιτεί την εύρεση τους. Έμφαση δίνεται σε συναρτήσεις Hamilton της μορφής

$$H(q,p) = \frac{1}{2} g_{ii}(q) p_i^2 + U(q)$$

που σύμφωνα με τον Stäckel καθορίζουν διαχωρίσιμα συστήματα αν και μόνο αν η H είναι μεταξύ των λύσεων H_i του συστήματος

$$S_{ij}(q_i) H_j = \frac{1}{2} p_i^2 - V_i(q_i)$$

όπου S αντιστρέψιμος πίνακας. Η διαχωρισιμότητα Stäckel γενικεύεται και εφαρμόζεται σε μια κλάση δι-Χαμιλτονικών συστημάτων, που μελέτησαν οι Gelfand και Zakharevich. Πρόκειται για συστήματα που ορίζονται σε Poisson πολλαπλότητες περιττής διάστασης με μηδενική στρέψη, γνωστά ως *τύπου Kronecker*, για τα οποία κατασκευάζονται συστηματικά ο πίνακας S και το διάνυσμα-στήλη V.

Η θεωρία των πεπερασμένων συστημάτων Hamilton έχει ακόμα επεκταθεί προς διάφορες άλλες κατευθύνσεις. Μία από αυτές [16] αναφέρεται σε δομές Poisson ή αντίστοιχα συμπλεκτικές δομές, οι οποίες δεν ικανοποιούν την ταυτότητα Jacobi, γνωστές ως *σχεδόν-Poisson ή σχεδόν-συμπλεκτικές (almost-symplectic)*. Η ιδιότητα αυτή, όπως είδαμε, μας εξασφαλίζει ότι τα διανυσματικά πεδία Hamilton αποτελούν μία άλγεβρα Lie. Αν όμως απαιτήσουμε μόνο τα διανυσματικά πεδία Hamilton, που αντιστοιχούν σε πρώτα ολοκληρώματα σε ενέλιξη, να έχουν την δομή μιας άλγεβρας Lie, τότε η ολοκληρωσιμότητα τέτοιου είδους συστημάτων έχει και πάλι την έννοια Liouville. Αυτό γίνεται θεωρώντας ότι καθένα από τα παραπάνω πεδία v_i αφήνει αναλλοίωτη την συμπλεκτική δομή ω, δηλαδή $\mathrm{L}_{\mathrm{v}_i}\omega = 0$, όπου L η παράγωγος Lie. Κάτω από αυτήν την υπόθεση όλα τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην συμπλεκτική περίπτωση μεταφέρονται και στην σχεδόν-συμπλεκτική.

Στο ίδιο πνεύμα βρίσκεται και μία άλλη θεώρηση ολοκληρωσιμότητας των πεπερασμένων συστημάτων, που επιδέχονται διπλή δομή Hamilton. Αφορμή αποτέλεσε το πρόβλημα (μη σχετικιστικής) κίνησης ενός ηλεκτρονίου πάνω στην επιφάνεια τόρου υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικου πεδίου. Το σύστημα αυτό αποτελεί ένα 4-διάστατο σύστημα Hamilton, το οποίο διαθέτει ένα πρώτο ολοκλήρωμα, την συνάρτηση Hamilton H, και μία 3-παραμετρική αβελιανή ομάδα συμμετρίας, που διατηρεί την H. Επομένως είναι ολοκληρώσιμο, αλλά όχι κατά Liouville. Ανάλογα λοιπόν ένα n-διάστατο σύστημα Hamilton ονομάζεται ολοκληρώσιμο με την *ευρεία έννοια (broad sense)*, αν διαθέτει p πρώτα ολοκληρώματα (όχι απαραίτητα σε ενέλιξη) και μία $(n-p)$-παραμετρική αβελιανή ομάδα συμμετρίας (όχι απαραίτητα Hamilton), που αφήνει αναλλοίωτα τα ολοκληρώματα αυτά. Κάτω από μία λιγότερο αυστηρή συνθήκη συμβατότητας μεταξύ των δύο διαφορετικών δομών Poisson, αποδεικνύεται ότι κάθε δι-Χαμιλτονικό σύστημα είναι ολοκληρώσιμο με την ευρεία έννοια. Στο άρθρο του [4] ο Bogoyavlenskij παρουσιάζει ακόμα παραδείγματα από την Υδροδυναμική, τα οποία εμφανίζουν αυτού του είδους την ολοκληρωσιμότητα, και δεν αποτελούν συστήματα Hamilton.

Βιβλιογραφία

[1] **Ay A., Gürses M., Zheltukhin K.** (2003) Hamiltonian equations in $\mathbb{R}^3$, *J. Math. Phys.* **44**, 210-235.

[2] **Bluman G. W., Anco S. C.** (2002) *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag.

[3] **Bluman G. W., Kumei S.** (1989) *Symmetries and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag.

[4] **Bogoyavlenskij O. I.** (1998) Extended Integrability and Bi-Hamiltonian Systems, *Commun. Math. Phys.* **196**, 19-51.

[5] **Born M., Infeld L.** (1935) On the quantization of the new field theory II, *Proc. Roy. Soc. London* **150A**, 141-166.

[6] **Courant R., Hilbert D.** (1989) *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Wiley Classics Lirary, John Wiley & Sons.

[7] **Damianou P. A., Sophocleous C.** (2000) Symmetry Group Classification of Three-Dimensional Hamiltonian Systems, *Appl. Math. Lett.* **13**, 63-70.

[8] **Damianou P. A., Sophocleous C.** (2004) Classification of Noether Symmetries for Lagrangians with Three Degrees of Freedom, *Nonlinear Dynamics* **36**, 3-18.

[9] **Damianou P. A., Sophocleous C.** (2005) Noether and master symmetries for the Toda lattice, *Appl. Math. Lett.* **18**, 163-170.

[10] **Degiovanni L.** (2006) Tri-Hamiltonian extensions of separable systems in the plane, *J. Math. Phys.* **47**, 043505.

[11] **Dickey L. A.** (2003) *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, 2nd edition, Advanced Series in Mathematical Physics, World Scientific.

[12] **Faddeev L. D., Takhtajan L. A.** (1987) *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag.

[13] **Falqui G., Pedroni M.** (2003) Seperation of variables for bi-Hamiltonian systems, *Math. Phys., Anal. Geom.* **6**, 139-179.

[14] **Fan E. G.** (2001) A family of completely integrable multi-Hamiltonian systems explicitly related to some celebrated equations, *J. Math. Phys.* **42**, 4327.

[15] **Fan E. G., Zhang H.** (2000) A hierarchy of nonlinear evolution equations, its bi-Hamiltonian structure, and finite-dimensional integrable systems, *J. Math. Phys.* **41**, 2058.

[16] **Fasso F., Sansonetto N.** (2007) Integrable almost-symplectic Hamiltonian systems, *J. Math. Phys.* **48**, 092902.

[17] **Fokas A. S., Anderson R. L.** (1982) On the use of isospectral eigenvalue problems for obtaining hereditary symmetries for Hamiltonian systems, *J. Math. Phys.* **23** 1066-1073.

[18] **Fuchssteiner B., Fokas A. S.** (1981) Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries, *Physica* **4D**, 47-66.

[19] **Gardner C. S.** (1971) Korteweg-de Vries equation and generalizations IV. The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system, *J. Math. Phys.* **12**, 1548-1551.

[20] **Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.** (1967) Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095.

[21] **Hon Y. C., Fan E. G.** (2005) An algebro-geometric solution for a Hamiltonian system with application to dispersive long wave equation, *J. Math. Phys.* **46**, 032701.

[22] **Horwitz L., Zion Y. B., Lewkowicz M., Shiffer M., Levitan J.** (2007) Geometry of Hamiltonian Chaos, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 234301.

[23] **Horwood J. T.** (2007) Higher order first integrals in classical mechanics, *J. Math. Phys.* **48**, 102902.

[24] **Hydon P. E.** (2000) *Symmetry Methods for Differential Equations, A Beginner's Guide*, Cambridge University Press.

[25] **Ibragimov N. H.** (1999) *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons.

[26] **Ibragimov N. H.** (2008) Symmetries, Lagrangian and Conservation Laws for the Maxwell Equations, *Acta Appl. Math.* (to be published).

[27] **Ιχτιάρογλου Σ.** (2003) *Εισαγωγή στην Μηχανική Hamilton*, 2η έκδοση, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ.

[28] **Ma W. X.** (1994) Symmetry constraint of mKdV equations by binary nonlinearization, *Nonlinear Math. Phys.* **1**, 420-433.

[29] **Magri F.** (1978) A simple model of the integrable Hamiltonian equation, *J. Math. Phys.* **19**, 1156-1162.

[30] **Marsden J. E.** (1982) A group theoretic approach to the equations of plasma physics, *Canad. Math. Bull.* **25**, 129-142.

[31] **Marsden J. E., Ratiu T. S.** (1999) *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd edition, Texts in Applied Mathematics, Springer.

[32] **Nakahara M.** (2003) *Geometry, Topology and Physics*, 2nd edition, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics.

[33] **Oevel W.** (1987) *Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Non-Linear Equations*, World Scientific.

[34] **Olver P. J.** (1977) Evolution equations possesing infinitely many symmetries, *J. Math. Phys.* **18**, 1212-1215.

[35] **Olver P. J.** (1988) Recursion operators and Hamiltonian systems, *Symmetries and Nonlinear Phenomena*, D. Levi and P. Winternitz, eds., CIF Series, Vol. 9, World Scientific, Singapore, 222-249.

[36] **Olver P. J.** (1993) *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer.

[37] **Pedroni M., Sciacca V., Zubelli J. P.** (2002) The bi-Hamiltonian theory of the Harry Dym equation, *Theor. Math. Phys.* **133**, 1585-1597.

[38] **Pohjanpelto P. J.** (1989) First order generalized symmetries of Maxwell's equations, *Phys. Lett. A* **129**, 148-150.

[39] **Qiao Z.** (2007) New integrable hierarchy, its parametric solutions, cuspons, one-peak solitons and M/W-shape peak solitons, *J. Math. Phys.* **48**, 082701.

[40] **Sciarrino A., Winternitz P.** (1997) Symmetries and Solutions of the Vector Nonlinear Schrödinger Equation, *Nuovo Cim.*, 112 B(6), 853-871.

[41] **Sophocleous C., Moyo S., Leach P. G. L., Damianou P. A.** (2000) Noether symmetries and integrals in one, two and three dimensions, *Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus*, TR/16/2000.

[42] **Stephani H.** (1989) *Differential Equations : Their Solution Using Symmetries*, Cambridge University Press.

[43] **Tsiganov A. V.** (2007) On two different bi-Hamiltonian structures for the Toda lattice, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 6395-6406.

[44] **Tu G. Z.** (1989) The trace identity, a powerful tool for constructing the Hamiltonian structure of integrable systems, *J. Math. Phys.* **30**, 330.

[45] **Tu G. Z.** (1989) On Liouville integrability of zero-curvature equations and the Yang hierarchy, *J. Phys. A* **22**, 2375.

[46] **Tu G. Z.** (1990) A trace identity and its applications to the theory of discrete integrable systems, *J. Phys. A* **23**, 3903.

[47] **Τσουμπελής Δ.** (2004) *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, τόμος Α*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

[48] **Τσουμπελής Δ.** (2003) *Ανώτερα Μαθηματικά με Mathematica, Maple και άλλα συστήματα αλγεβρικών υπολογισμών, τόμος Β*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.

[49] **Vilasi G.** (2001) *Hamiltonian Dynamics*, World Scientific.