ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μοντελοποιηση σε Μπλοκ Δικτυων με Βαρη

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Δ. ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

Επιβλέπων

ΜΩΥΣΗΣ Α. ΜΠΟΥΝΤΟΥΡΙΔΗΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2009

Στους γονείς μου,
Δημήτρη και Μαρία.

Ευχαριστίες

Με την περάτωση της παρούσης εργασίας, μου δίνεται η ευκαιρία να σημειώσω ότι, είναι ιδιαίτερα δύσκολο να ολοκληρώσεις το έργο που ξεκινάς κάποια στιγμή έχοντας ταυτόχρονα και άλλες υποχρεώσεις. Για αυτό ακριβώς το λόγο θα ήθελα να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους που με την παρουσία, την υποστήριξη και την ανεκτικότητα τους, βοήθησαν ώστε να καταστεί αυτό εφικτό.

Πρώτα από όλους θα ήθελα ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Μωυσή Μπουντουρίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, για την επιστημονική, πνευματική και ηθική υποστήριξη που μου παρείχε, αφιερώνοντας μου πολύ από τον πολύτιμο χρόνο του.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Παναγιώτη Αλεβίζο, Καθηγητή και τον κ. Φίλιππο Αλεβίζο, Επίκουρο Καθηγητή.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τους φίλους και συμφοιτητές μου, Βραχνό Χρήστο, Επιτροπάκη Μιχάλη και Αργύρη Σταυρούλα για την πολύτιμη βοήθεια που μου έχουν προσφέρει.

Τέλος, θα ήθελα ιδιαίτερα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συμπαράσταση, την κατανόηση και την υπομονή που έδειξαν κατά την διάρκεια των σπουδών μου, όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι η μελέτη κάποιων μαθηματικών μεθόδων για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ δικτύων με βάρη – όπως μελετήθηκαν στην διδακτορική διατριβή του Žiberna (2007a, 2007b). Στο μεγαλύτερό τους μέρος, οι μέθοδοι της μοντελοποίησης σε μπλοκ είχαν αναπτυχθεί αρχικά μόνο για δυαδικά και προσημασμένα δίκτυα κυρίως από τους Doreian et al. (2005). Στην διατριβή του Žiberna (2007a), συζητήθηκαν και αξιολογήθηκαν οι υπάρχουσες προσεγγίσεις και επεκτάθηκαν για την μοντελοποίηση σε μπλοκ δικτύων με βάρη. Για τις έμμεσες προσέγγισεις, σύμφωνα με τον γνωστό ορισμό της κανονικής ισοδυναμίας, ο Žiberna πρότεινε κάποιες σχετικές τροποποιήσεις. Αυτό έγινε επίσης με στόχο να βρεθούν οι καλύτερες μέθοδοι για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ διαφορετικών τύπων δικτύων με βάρη και για την αναζήτηση των βέλτιστων λύσεων, που έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά (σύμφωνα με τους χρησιμοποιούμενους διαφορετικούς τύπους ισοδυναμίας, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2).

Η μοντελοποίηση σε μπλοκ των δικτύων αποτελεί μέρος της ανάλυσης κοινωνικών δικτύων (Wasserman και Faust, 1994), που είναι περιοχή της Μαθηματικής Κοινωνιολογίας. Στη θεωρία αυτή, μια πολύ σύντομη ανασκόπηση της οποίας θα δώσουμε στο Κεφάλαιο 1, ένα (κοινωνικό) δίκτυο είναι ένα σύνολο μονάδων, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με μια ή περισσότερες σχέσεις, που ορίζονται σε αυτές. Η μοντελοποίηση σε μπλοκ (κοινωνικών) δικτύων είναι μια μέθοδος για το διαμερισμό (ή ομαδοποίηση – clustering) των μονάδων ενός δικτύου και για τον προσδιορισμό της δομής των σχέσεων μεταξύ των ομάδων, που σχηματίζονται από τις ομαδοποιημένες (διαμερισμένες) μονάδες. Έτσι, η μοντελοποίηση σε μπλοκ αναζητεί ομάδες ισοδύναμων μονάδων με βάση κάποια συγκεκριμένη έννοια ισοδυναμίας. Όπως παρατηρεί ο Doreian (1988), "η ισοδυναμία έχει γίνει μια θεμελιώδης έννοια της ανάλυσης κοινωνικών δικτύων". Οι δύο ευρύτερα χρησιμοποιούμενες έννοιες ισοδυναμίας είναι η δομική και η κανονική ισοδυναμία.

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2, οι μέθοδοι της μοντελοποίησης σε μπλοκ διαιρούνται στις έμμεσες και τις άμεσες προσεγγίσεις. Οι έμμεσες προσεγγίσεις υπολογίζουν αρχικά κάποιο μέτρο ομοιότητας ή ανομοιότητας μεταξύ των μονάδων ενός δικτύου με βάση ένα επιλεγμένο μέτρο ισοδυναμίας και χρησιμοποιούν, έπειτα, μια από τις κλασσικές τεχνικές ομαδοποίησης, για να προσδιορίσουν τις ομάδες των μονάδων. Από την άλλη μεριά, οι άμεσες προσεγγίσεις αναζητούν άμεσα ένα διαμερισμό, ο οποίος ταιριάζει καλύτερα στην επιλεγμένη ισοδυναμία και ο οποίος μετράται σύμφωνα με μια επιλεγμένη συνάρτηση κριτηρίου (Batagelj et al., 1992b). Η μέθοδος της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ βασίζεται στην άμεση προσέγγιση. Όταν συγκρίνεται με άλλες άμεσες προσεγγίσεις, η κύρια δύναμή

της είναι η προσαρμοστικότητά της. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πραγματοποιήσει κάποια μοντελοποίηση σε μπλοκ σύμφωνα με διαφορετικούς τύπους ισοδυναμίας, συμπεριλαμβανομένης και της γενικευμένης ισοδυναμίας. Η γενικευμένη ισοδυναμία δεν είναι ένας συγκεκριμένος τύπος ισοδυναμίας, αλλά περισσότερο μια έννοια για την κατασκευή "ειδικών" ισοδυναμιών. Ορίζεται σύμφωνα με έναν προηγούμενο καθορισμό των επιτρεπτών τύπων συνδέσεων μεταξύ των ομάδων και μεταξύ των μονάδων μέσα στις ομάδες. Πάντως, ενώ η γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ αρχικά είχε αναπτυχθεί για δυαδικά και προσημασμένα δίκτυα, ο Žiberna (2007a) ήταν ο πρώτος που την μελέτησε για δίκτυα με βάρη. Για το σκοπό αυτό, ο Žiberna εισήγαγε κάποιους νέους τύπους μπλοκ, που είναι κατάλληλοι για δίκτυα με βάρη. Τα κοινά χαρακτηριστικά όλων των προσεγγίσεων γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, εκτός από την κοινή βασική συνάρτηση κριτηρίου, περιλαμβάνουν την δυνατότητα προσδιορισμού της επιθυμητής λύσης, είτε μέσω ενός τύπου ισοδυναμίας (που στη συνέχεια μεταφράζεται στους επιτρεπτούς τύπους μπλοκ) ή μέσω κάποιας γενικευμένης ισοδυναμίας (η οποία ορίζεται άμεσα από τους επιτρεπτούς τύπους μπλοκ ή, ακόμα ακριβέστερα, από το επιθυμητό μοντέλο των μπλοκ). Μια τέτοια έννοια ισοδυναμίας είναι η f-κανονική ισοδυναμία για δίκτυα με βάρη, η οποία αντιστοιχεί στην κανονική ισοδυναμία για τα δυαδικά ή προσημασμένα δίκτυα. Επιπλέον, θα μελετήσουμε στην εργασία αυτή κάποιους αλγόριθμους, που υλοποιούν τους υπολογισμούς για συγκεκριμένες μεθόδους μοντελοποίησης σε μπλοκ. Έτσι, για τις έμμεσες προσεγγίσεις, θα χρησιμοποιήσουμε τους αλγόριθμους `REGE` για τον υπολογισμό των ομοιοτήτων ή ανομοιοτήτων κάτω από τις συνθήκες της κανονικής ισοδυναμίας.

Στο Κεφάλαιο 3, αναπτύσσονται οι μέθοδοι της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ δικτύων με βάρη. Αυτές οι προσεγγίσεις είναι οι εξής: η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ και η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Επιπλέον, ακολουθώντας τη σχετική εργασία του Žiberna (2007a), οι ιδέες των Batagelj και Ferligoj (2000) συζητώνται και αναπτύσσονται περαιτέρω για την περίπτωση της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ. Επίσης, δίνονται κάποιες βελτιώσεις των προτεινόμενων προσεγγίσεων, μαζί με κάποιες πρόσθετες χρήσεις αυτών των προσεγγίσεων. Για να ενσωματώσει τις προτάσεις του για διάφορους τύπους μοντελοποίησης δικτύων με βάρη, ο Žiberna (2007c) έχει αναπτύξει ένα σχετικό υπολογιστικό πακέτο, το `blockmodeling`, το οποίο είναι δομημένο πάνω στο προγραμματιστικό περιβάλλον `R` (`R` Development Core Team, 2006). Αυτό θα παρουσιαστεί και θα συζητηθεί στο τέλος του Κεφαλαίου 3.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, θα εφαρμόσουμε τις μεθόδους της μοντελοποίησης σε μπλοκ σε διάφορα εμπειρικά και τεχνητά παραδείγματα. Ακόμα, στα παραδείγματα αυτά, οι προτεινόμενες προσεγγίσεις θα συγκριθούν ως προς τα θεωρητικά χαρακτηριστικά τους και την απόδοσή τους.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες Δικτύων

1.1 Εισαγωγή και Ορισμοί

Στο κεφάλαιο αυτό, θα κάνουμε μια ανασκόπηση των βασικών εννοιών της ανάλυσης κοινωνικών δικτύων, τα οποία από εδώ και στο εξής θα αναφέρονται απλώς ως δίκτυα. Θεωρούμε τα δίκτυα ως δομές δεδομένων, τις οποίες αναλύουμε μέσω κάποιων μεθόδων μοντελοποίησης σε μπλοκ, που αποτελούν το επίκεντρο της εργασίας αυτής.

Τα δίκτυα συναντώνται σχεδόν παντού. Μπορούν να εκτείνονται από μικρά κοινωνικο-γραφήματα, όπως αυτά που εισήχθησαν από τον Moreno (1934) με λίγες μόνο μονάδες, έως τεράστια δίκτυα, στην πραγματικότητα, με δισεκατομμύρια μονάδες, όπως, για παράδειγμα, το δίκτυο όλων των υπολογιστών, που είναι συνδεδεμένοι στο Internet, ή το δίκτυο όλων των ανθρώπων και των γνωστών τους. Τα δίκτυα συγκροτούνται, όταν μπορούμε να βρούμε μονάδες, που ανά δυο είναι συνδεδεμένες με κάποιο τρόπο μεταξύ τους. Ένας πιο τυπικός ορισμός δίνεται πιο κάτω. Οι μονάδες μπορεί να είναι άτομα, οργανισμοί, χώρες, λέξεις κ.λπ. και, για κάθε ένα από αυτούς τους τύπους των μονάδων, υπάρχει μια σειρά πιθανών δεσμών μεταξύ ζευγαριών μονάδων. Τα δίκτυα, που συνήθως ενδιαφέρουν την ανάλυση κοινωνικών δικτύων, είναι τα δίκτυα μεταξύ ατόμων, όπως τα δίκτυα φιλίας, επικοινωνίας, βοήθειας κ.λπ., τα δίκτυα εμπορίου μεταξύ οργανισμών ή χωρών, τα γενεαλογικά δίκτυα ή τα δίκτυα συγγενειών, τα δίκτυα οργανικών μορίων στη χημεία, τα δίκτυα αλληλουχιών λέξεων σε κάποιο κείμενο, τα δίκτυα μεταφορών κ.λπ. Μια μεγάλη συλλογή εμπειρικών δικτύων, σε μορφή κατάλληλη για επεξεργασία μέσω των υπολογιστικών προγραμμάτων της ανάλυσης κοινωνικών δικτύων, μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα του προγράμματος `Pajek` του Batagelj (2005).

"Ένα κοινωνικό δίκτυο αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο *δρώντων* (actors) και τη σχέση ή τις σχέσεις, που ορίζονται σε ζευγάρια από αυτούς"

(Wasserman και Faust, 1994, σελ. 20). Προφανώς, ο παραπάνω ορισμός καλύπτει και την περίπτωση των γράφων. Αντί για *δρώντες* (στον ορισμό των Wasserman και Faust) χρησιμοποιούμε στην εργασία αυτή τον όρο *μονάδες*. Μερικές φορές, υιοθετώντας την ορολογία της θεωρίας γράφων, οι μονάδες θα αναφέρονται ως *κορυφές* ή *κόμβοι*. Όλοι αυτοί οι όροι αντιπροσωπεύουν την ίδια έννοια.

Τυπικά, ένα δίκτυο μπορεί να γραφεί ως $N = (U, R_1, R_2, \ldots, R_n)$, όπου $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ είναι το σύνολο όλων των μονάδων και $R_1, R_2, \ldots R_n$ είναι n σχέσεις μεταξύ αυτών των μονάδων, δηλαδή, $R_j \subseteq U \times U, j = 1, 2, \ldots n$. Από μαθηματικής πλευράς, ένα δίκτυο μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας πολυγράφος, δηλαδή, ένας γράφος με πολλαπλές σχέσεις (White και Reitz, 1983) ή ως μια συλλογή από γράφους ή δίγραφους (ή και τα δύο) με ένα κοινό σύνολο κορυφών (μονάδων) (Everett και Borgatti, 1993). Εάν ένα δίκτυο έχει μόνο μια σχέση, η αναπαράστασή του δίνεται από έναν γράφο. Οι σχέσεις σε ένα γράφο αναπαρίστανται είτε με τόξα (όταν ο γράφος είναι κατευθυνόμενος – δίγραφος) ή με ακμές (όταν ο γράφος είναι μη κατευθυνόμενος), ή μερικές φορές και από τα δύο.

Συνήθως, ένας γράφος ή μια σχέση σε ένα δίκτυο αναπαριστάται από έναν πίνακα $\mathbf{R}$ με στοιχεία $\{r_{ij}\}$, όπου το r_{ij} είναι η τιμή (ή το βάρος) της σύνδεσης (τόξου ή ακμής) από την μονάδα i στην μονάδα j. Τα δίκτυα με πολλαπλές σχέσεις αναπαρίστανται από πολλαπλούς πίνακες, έναν για κάθε σχέση, που μπορούν επίσης να συνδυαστούν σε τρισδιάστατα διανύσματα, αποκαλούμενα "σχεσιακά κουτιά" από τους Winship και Mandel (1983, σελ. 20).

Στην εργασία αυτή, τα περισσότερα από τα δίκτυα έχουν μόνο μια σχέση R, που ορίζεται για τις μονάδες, αν και οι μέθοδοι και τα εργαλεία, που εισάγονται εδώ, θα μπορούσαν εύκολα να χρησιμοποιηθούν (με ελαφρώς τροποποιημένη μορφή) για δίκτυα, στα οποία συμμετέχουν πολλαπλές σχέσεις. Η σχέση R συνήθως περιγράφεται από τον αντίστοιχο πίνακα βαρών $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{m \times n}$. Το $r_{ij} = 0$ δηλώνει την απουσία σχέσης, ενώ όλες οι άλλες μη μηδενικές τιμές του r_{ij} δείχνουν την παρουσία σχέσης, την έντασή της και την κατεύθυνσή της (το πρόσημό της). Στις πρώτες μεθόδους της μοντελοποίησης σε μπλοκ, οι τιμές του r_{ij} περιορίζονταν σε $(0, 1)$ ή το πολύ σε $(-1, 0, 1)$, δηλαδή, αφορούσαν τις περιπτώσεις δυαδικών ή προσημασμένων δικτύων, αντιστοίχως. Ο στόχος αυτής της εργασίας είναι η μελέτη των μεθόδων της μοντελοποίησης σε μπλοκ για δίκτυα με βάρη. Επομένως, στα δίκτυα αυτά, υποθέτουμε ότι οι σχέσεις, δηλαδή, τα r_{ij}, μετρούνται τουλάχιστον μέσα σε διαστήματα αριθμητικών τιμών.

1.2 Είδη Δικτύων

Τα δίκτυα μπορούν να ταξινομηθούν σε διάφορα είδη, ανάλογα με διαφορετικά κριτήρια. Ορισμένοι τρόποι ταξινόμησης είναι έμμεσοι και έχουν ήδη αναφερθεί παραπάνω. Μία από τις βάσεις της ταξινόμησης μπορεί να είναι το σύνολο των δυνατών τιμών (βαρών), που οι σχέσεις μπορούν να παίρνουν, δηλαδή, η κλίμακα μέτρησης των σχέσεων. Κοντολογίς, μπορούμε να διακρίνουμε τα δυαδικά, τα προσημασμένα, τα κατηγοριακά και τα δίκτυα με βάρη, ως τα κυριότερα είδη δικτύων. Επειδή διαφορετικές σχέσεις σε ένα δίκτυο θα μπορούσαν να μετρηθούν με διαφορετικούς τρόπους, η προηγούμενη ταξινόμηση είναι μάλλον μια ταξινόμηση σχέσεων παρά δικτύων.

Σημειωτέων ότι για την ανάλυση των δικτύων υπάρχουν πολλά υπολογιστικά προγράμματα, τα κυριότερα από τα οποία είναι το `UCINET` (Borgatti et al., 1999) και το `Pajek` (Batagelj και Mrvar, 2005a, 2005b) (αλλά και το παλαιότερο `Model2` του Batagelj, 1996).

Κεφάλαιο 2

Μέθοδοι Μοντελοποίησης σε Μπλοκ

2.1 Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι μία από τις μεθόδους, που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση (κοινωνικών) δικτύων. Στο κεφάλαιο αυτό, εισάγονται οι μέθοδοι της μοντελοποίησης σε μπλοκ. Αρχίζουμε με μια περιγραφή της μοντελοποίησης σε μπλοκ και εξηγούμε τους σκοπούς της. Στη συνέχεια, συζητούμε διάφορα είδη ισοδυναμίας, πρώτα για τα δυαδικά δίκτυα και μετά για τα δίκτυα με βάρη. Ακολούθως, παρουσιάζουμε την έννοια της γενικευμένης ισοδυναμίας, η οποία δεν είναι ένα συγκεκριμένο είδος ισοδυναμίας, αλλά περισσότερο μια ιδέα για την κατασκευή "ειδικών" ισοδυναμιών. Είναι στενά συνδεδεμένη με τη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, που αποτελεί το κύριο θέμα της παρούσας εργασίας. Στη συνέχεια, εξετάζονται άλλα κριτήρια για μοντελοποίηση σε μπλοκ (εκτός από τους τυπικούς ορισμούς των ισοδυναμιών). Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με μια ανασκόπηση των διαφόρων προσεγγίσεων μοντελοποίησης σε μπλοκ, οι οποίες μελετώνται στα κεφάλαια που ακολουθούν.

2.1.1 Περιγραφή και Σκοπός

"Εργαλεία μοντελοποίησης σε μπλοκ αναπτύχθηκαν για το διαμερισμό των μονάδων του δικτύου σε ομάδες, που καλούνται θέσεις, και, ταυτόχρονα, για το διαμερισμό του συνόλου των δεσμών σε μπλοκ, που ορίζονται από τις θέσεις (δείτε Lorrain και White, 1971, Breiger et al., 1975, Burt, 1976, για τη θεμελιώδη θεωρία)" (Doreian et al., 2005, σελ. 29). Με άλλα λόγια, η μοντελοποίηση σε μπλοκ αναζητεί ομάδες ισοδύναμων μονάδων με βάση κάποια έννοια ισοδυναμίας.

Ένας παρόμοιος ορισμός δίνεται από τον Batagelj (1997, σελ. 143), ο οποίος ισχυρίζεται ότι η μοντελοποίηση σε μπλοκ έχει δύο βασικούς στόχους:

1. Το διαμερισμό των μονάδων ή τον προσδιορισμό των μπλοκ (ομάδων), που δημιουργούν το μοντέλο των μπλοκ, και
2. τον καθορισμό των δεσμών μεταξύ των μπλοκ (και των τιμών τους).

Ξεκινήσαμε με τους ορισμούς αυτούς, διότι, σε αντίθεση με ορισμένους παλαιότερους ορισμούς, είναι αρκετά γενικοί ώστε να μην περιλαμβάνουν μόνο τις συμβατικές μοντελοποιήσεις σε μπλοκ, αλλά και τη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Για παράδειγμα, ο ορισμός του μοντέλου των μπλοκ, που χρησιμοποιούν οι Wasserman και Faust (1994, σελ. 395), αναφέρει ότι ένα τέτοιο μοντέλο αποτελείται από δύο πράγματα:

1. Ένα διαμερισμό των μονάδων του δικτύου σε διακριτά υποσύνολα, που καλούνται θέσεις (ομάδες).
2. Και, για κάθε ζεύγος ομάδων, μια επισήμανση της παρουσίας ή της απουσίας δεσμών εντός ή μεταξύ των ομάδων για κάθε σχέση.

Ενώ το πρώτο μέρος του ορισμού τους είναι παρόμοιο με αυτόν του Batagelj, το δεύτερο μέρος διαφέρει κάπως σημαντικότερα. Μιλάνε μόνο για την ανάγκη να προσδιοριστεί η παρουσία ή η απουσία δεσμών στις ομάδες. Αυτός ο ορισμός είναι κατάλληλος μόνο για την κλασική μοντελοποίηση σε μπλοκ, καθώς επίσης και για άλλες προσεγγίσεις μοντελοποίησης σε μπλοκ, που στηρίζονται σε ένα μόνο είδος ισοδυναμίας (εκτός της γενικευμένης ισοδυναμίας). Αλλά και ακόμα και με τον περιορισμό αυτό, δεν είναι κατάλληλος για τα δίκτυα με βάρη.

Οι Borgatti και Everett (1992b, σελ. 91) έχουν γράψει ότι "θεωρούμενη ως μια μέθοδος αναγωγής των δεδομένων, η μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι μια πολύτιμη τεχνική, κατά την οποία τα πλεονάζοντα στοιχεία σε ένα παρατηρούμενο σύστημα μειώνονται, για να παραχθεί ένα απλοποιημένο μοντέλο σχέσεων μεταξύ των τύπων των στοιχείων (μονάδων)". Εδώ, ο στόχος είναι να συνδυάσουμε ταυτόσημες μονάδες, για να μειωθεί, έτσι, η πολυπλοκότητα ή το μέγεθος του δικτύου.

Ωστόσο, οι τελευταίοι επισήμαναν επίσης ότι συνήθως η μοντελοποίηση σε μπλοκ θεωρείται "ως εργαλείο για την ανεύρεση ρόλων και θέσεων, που κατέχονται από τους δρώντες (μονάδες), σε μια κοινωνική δομή (Knoke και Kuklinski, 1982)" (Borgatti και Everett, 1992b, σελ. 92). Αυτή είναι μία από τις πιο σημαντικές χρήσεις της μοντελοποίησης σε μπλοκ. Όπως επισημάνθηκε, το πρόβλημα προκύπτει όταν οι ερευνητές χρησιμοποιούν την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάση την δομική ισοδυναμία, κάτι που μπορεί να χρησιμοποιείται μόνο ως μέθοδος αναγωγής των δεδομένων. Αυτό έχει συμβεί συχνά στο παρελθόν, δεδομένου ότι τότε η μοντελοποίηση σε μπλοκ θεωρείτο μόνο με την έννοια της δομικής ισοδυναμίας. Το ενδιαφέρον για την δομική ισοδυναμία φαίνεται καθαρά στη δήλωση του Harrison C. White (1988, σελ. 229): "Η μοντελοποίηση σε μπλοκ τελικά στηρίζεται στις έννοιες της δομικής ισοδυναμίας". Για τους Borgatti και Everett (1992b, σελ. 92), οι θέσεις αποτελούν το σύνολο δρώντων, που έχουν τους ίδιους δεσμούς με τους ίδιους τύπους άλλων δρώντων, και οι σχέσεις, που οι θέσεις έχουν μεταξύ τους, αποτελούν τους ρόλους των δρώντων.

Οι Winship και Mandel (1983, σελ. 315–317) έχουν υποστηρίξει ότι με την μοντελοποίηση σε μπλοκ μπορεί κανείς να προσδιορίσει μόνο τις θέσεις και όχι τους ρόλους σε ένα κοινωνικό δίκτυο. Ωστόσο, είναι σαφές ότι περιόρισαν τη μοντελοποίηση στη δομική ισοδυναμία. Στην εργασία τους, προτείνουν μια εναλλακτική προσέγγιση (που δεν είναι μοντελοποίηση σε μπλοκ) για τον προσδιορισμό των ρόλων και των συνόλων των ρόλων. Στην πραγματικότητα, ορίζουν τη θέση ως σύνολο δομικώς ισοδύναμων μονάδων. Επιπλέον, συνδέουν τους ρόλους με συγκεκριμένα πρότυπα συμπεριφοράς.

Σύμφωνα με τους Wellman και Berkowitz (1988, σελ. 40), "η μοντελοποίηση σε μπλοκ αποκαλύπτει επαγωγικώς τα υποκείμενα μορφώματα ρόλων σε μια κοινωνική δομή". Επικαλούμενοι άλλους συγγραφείς, προτείνουν ότι η μοντελοποίηση σε μπλοκ βοηθά τη σύγκριση των πραγματικών δικτύων με υποθετικές δομές. Για το σκοπό αυτό, θεωρούν ότι η μέθοδος μοντελοποίησης σε μπλοκ των Batagelj, Ferligoj και Doreian (1998) είναι η πιο κατάλληλη.

Οι Wasserman και Faust (1994, σελ. 348–351) παραθέτουν τον ορισμό που χρησιμοποιούσε ο Linton (1936, σελ. 113–114), για να ορίσει την κοινωνική θέση (που ονόμαζε "καθεστώς"),"ως πολική θέση στα ... σχήματα των αμοιβαίων συμπεριφορών". Επίσης, παραπέμπουν σε αυτόν, παρατηρώντας ότι, όταν κάποιος "θέτει τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις, που συγκροτούν το καθεστώς (θέση) του, τότε εκτελεί έναν ρόλο". Οι Wasserman και Faust (1994, σελ. 348–351) αναφέρουν ότι:

> "Στην ανάλυση των κοινωνικών δικτύων, η θέση αναφέρεται σε μια ομάδα ατόμων, που είναι παρόμοια συνδεδεμένοι στα δίκτυα των σχέσεών τους, ενώ ο ρόλος αναφέρεται στο μόρφωμα των σχέσεων, που σχηματίζεται από τις μονάδες ή από τις θέσεις. Η έννοια της θέσης αναφέρεται συνεπώς σε μια ομάδα μονάδων, οι οποίες είναι παρόμοιες ως προς την κοινωνική δραστηριότητά τους, τους δεσμούς ή τις αλληλεπιδράσεις με τις μονάδες των άλλων θέσεων."

Συνεχίζουν οι Wasserman και Faust (1994, σελ. 349):

> "Η έννοια του κοινωνικού ρόλου είναι εννοιολογικά, θεωρητικά και τυπικά εξαρτημένη από την έννοια της κοινωνικής θέσης. Ενώ η δικτυακή θέση αναφέρεται σε μια ομάδα δρώντων (μονάδων), ο δικτυακός ρόλος αναφέρεται στις συνδέσεις μεταξύ σχέσεων, που συσχετίζουν τις κοινωνικές θέσεις. Έτσι, ο ρόλος ορίζεται μέσω ομάδων σχέσεων και συνδέσεων μεταξύ σχέσεων. ... Είναι επίσης σημαντικό να σημειωθεί ότι οι ρόλοι ορίζονται όχι απλά στις συνδέσεις μεταξύ *δύο* θέσεων, αλλά αναφορικά με το πώς οι σχέσεις συνδέουν ολόκληρη την ομάδα των μονάδων και των θέσεων σε όλο το δίκτυο. Έτσι, οι κοινωνικοί ρόλοι μπορεί να μοντελοποιηθούν σε τρία διαφορετικά επίπεδα: όλων των δρώντων (μονάδων), ενός υποσυνόλου δρώντων και του δικτύου σαν μια ολότητα.
>
> Όπως ο Nadel (1957) και οι Lorrain και White (1971) έχουν παρατηρήσει, ο ρόλος δεν είναι μόνο ένα θεωρητικό κατασκεύασμα, που εφευρέθηκε από τον κοινωνικό επιστήμονα, αλλά επίσης μπορεί να εκφράζεται και στην καθημερινή γλώσσα μας."

Διάφοροι συγγραφείς λοιπόν χρησιμοποιούν τους όρους της θέσης και του ρόλου με διαφορετικούς τρόπους, όπως είδαμε στα παραδείγματα των Winship και Mandel (1983, σελ. 314–315) και Wasserman και Faust (1994, σελ. 348).

Στο σημείο είναι ανάγκη να εισαγάγουμε κάποιον επιπρόσθετο συμβολισμό για την μοντελοποίηση σε μπλοκ:

- Το δίκτυο συμβολίζεται ως $N = (U, R)$, όπου U είναι το σύνολο όλων των μονάδων, $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, και R είναι η σχέση μεταξύ αυτών των μονάδων, $R \subseteq U \times U$. (Το δίκτυο μπορεί επίσης να έχει πολλές σχέσεις, $N = (U, R_1, R_2, \ldots, R_m)$, όπου m ο αριθμός των σχέσεων.)
- Η σχέση R περιγράφεται από τον πίνακα $\mathbf{R} = \{r_{i,j}\}_{m \times n}$, όπου το r_{ij} δηλώνει την τιμή (ή βάρος) ενός τόξου (ή μιας ακμής σε μη κατευθυνόμενους γράφους) από την μονάδα i (ή u_i) στη μονάδα j (ή u_j).
- $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ είναι ένας διαμερισμός (ή ομαδοποίηση) του συνόλου μονάδων U σε k ομάδες. Με Φ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών ομαδοποιήσεων. Μια ομαδοποίηση $\mathbf{C}$ επίσης διαμερίζει τη σχέση R σε μπλοκ, θεωρώντας ότι $R(C_i, C_j) = R \cap C_i \times C_j$. Κάθε μπλοκ σχέσεων αποτελείται από μονάδες, που ανήκουν στις ομάδες C_i και C_j, και όλα τα τόξα, που οδηγούν από την ομάδα C_i στην ομάδα C_j. Αν $i = j$, το μπλοκ $R(C_i, C_i)$ ονομάζεται διαγώνιο μπλοκ.
- n_i είναι ο αριθμός των μονάδων στην ομάδα C_i.

2.1.2 Ισοδυναμίες σε Δυαδικά Δίκτυα

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η μοντελοποίηση σε μπλοκ αναζητεί ομάδες ισοδύναμων μονάδων με βάση κάποια έννοια ισοδυναμίας.

> "Η ισοδυναμία έχει καταστεί μια θεμελιώδης έννοια στην ανάλυση των κοινωνικών δικτύων. Κάθε χρήση μιας έννοιας ισοδυναμίας έχει δύο συνιστώσες: (i) τον ορισμό της ισοδυναμίας και (ii) έναν υπολογιστικό αλγόριθμο για την ανίχνευση της ισοδυναμίας ή του βαθμού, με τον οποίο υπάρχει" (Doreian, 1988, σελ. 243).

Στην πραγματικότητα, έχουν αναπτυχθεί και χρησιμοποιούνται πολλά είδη ισοδυναμιών στην ανάλυση των κοινωνικών δικτύων. Τα πιο διαδεδομένα είδη ισοδυναμίας είναι η δομική και η κανονική ισοδυναμία. Άλλα είδη ισοδυναμίας περιλαμβάνουν την αυτομορφική και την τέλεια ισοδυναμία. Οι σχέσεις μεταξύ όλων αυτών των διαφορετικών ορισμών της ισοδυναμίας περιγράφονται από τους Everett και Borgatti (1994). Σε αυτό το τμήμα της εργασίας μας, θα αναφερθούμε στους πιο συχνά χρησιμοποιούμενους ορισμούς της ισοδυναμίας για την περίπτωση των δυαδικών δικτύων. Στην πραγματικότητα, έτσι, είχαν οριστεί αρχικά οι ισοδυναμίες και, για αυτό, οι ορισμοί αυτοί παρέχουν ένα καλό σημείο εκκίνησης για τους ορισμούς των ισοδυναμιών σε δίκτυα με βάρη.

Δομική Ισοδυναμία

Ο ορισμός της δομικής ισοδυναμίας είχε αρχικά δοθεί από τους Lorrain και White (1971). Σύμφωνα με μια απλή περιγραφή της δομικής ισοδυναμίας των White και Reitz (1983, σελ. 200): "τα δομικά ισοδύναμα σημεία (μονάδες) σχετίζονται με τον ίδιο τρόπο μεταξύ τους, όπως και με όλα τα άλλα σημεία (μονάδες)". Ωστόσο, ο ορισμός αυτός δεν είναι ο μόνος που υπάρχει. Οι Borgatti και Everett (1992a, σελ. 5–10) συγκέντρωσαν σχεδόν όλους τους διαφορετικούς ορισμούς της δομικής ισοδυναμιας.

Ακολουθεί ο αρχικός ορισμός της δομικής ισοδυναμίας από τους Lorrain και White (1971, σελ. 63):

> "Τα αντικείμενα a, b της κατηγορίας C είναι δομικά ισοδύναμα εάν, για κάθε μορφισμό M και για κάθε αντικείμενο x του C, ισχύει aMx αν και μόνο αν bMx και ισχύει xMa αν και μόνο αν xMb. Με άλλα λόγια, το a είναι δομικά ισοδύναμο με το b αν το a σχετίζεται με κάθε αντικείμενο x του C με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και το b. Από την άποψη της λογικής της δομής, αν τα a και b είναι απολύτως ισοδύναμα, τότε είναι αντικαταστάσιμα."

Οι Borgatti και Everett (1992a, σελ. 6) σημειώνουν επίσης ότι σήμερα χρησιμοποιείται ένας διαφορετικός ορισμός, αυτός που εισήχθηκε από τον

Burt (1976, σελ. 96), ο οποίος όρισε ένα σύνολο δομικώς ισοδύναμων κόμβων (μονάδων) ως σύνολο κόμβων (μονάδων), που συνδέονται με τους ίδιους ακριβώς κόμβους (μονάδες). Επίσης, επισήμαναν ότι υπάρχει ένα πρόβλημα στους δύο αυτούς ορισμούς. Αυτό είναι ότι, σε ένα γράφο χωρίς αυτο-βρόχους, οι δρώντες, που συνδέονται μεταξύ τους, δεν μπορούν να κατέχουν τις ίδιες θέσεις. Αυτό είναι βέβαια αλήθεια, αφού και οι δύο ορισμοί δεν αναγνωρίζουν τον ιδιαίτερο ρόλο των αυτο-βρόχων και των δεσμών μεταξύ των μονάδων, οι οποίες ελέγχονται για την δομική ισοδυναμία.

Σύμφωνα με τους Borgatti και Everett (1992a, σελ. 7), ο ορισμός που λειτουργεί σε όλες τις περιπτώσεις δόθηκε από τους Everett et al. (1990, σελ. 164) και είναι: "Ας υποθέσουμε ότι το G είναι ένα προσημασμένος γράφος με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E. Τότε δυο κορυφές a και b είναι δομικά ισοδύναμες εάν και μόνο εάν η αντιμετάθεση (ab) παράγει έναν αυτομορφισμό του G". Σε αυτόν τον ορισμό, μπορούμε επίσης να αντικαταστήσουμε το σύνολο ακμών E από ένα σύνολο γραμμών L, που περιλαμβάνει το σύνολο ακμών E και το σύνολο τόξων A.

Ο παρακάτω ορισμός δόθηκε από τους White και Reitz (1983, σελ. 199):

> "Εάν $G = (V, R)$[1] και $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο V, τότε η σχέση $\equiv$ είναι μια *δομική ισοδυναμία* αν και μόνο αν, για κάθε a, b, $c \in V$ τέτοια ώστε $a \neq b \neq c$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:
>
> i. aRb αν και μόνο αν bRa,
> ii. aRc αν και μόνο αν bRc,
> iii. cRa αν και μόνο αν cRb και
> iv. aRa αν και μόνο αν aRb.
>
> Τα δομικά ισοδύναμα σημεία (μονάδες) σχετίζονται με τον ίδιο τρόπο μεταξύ τους καθώς και με όλα τα άλλα σημεία (μονάδες)."

Όπως έχει επισημάνει ο Žiberna (2007a, σελ. 12), ο ορισμός αυτός έχει ένα τυπογραφικό λάθος, δηλαδή, η τελευταία σχέση θα πρέπει να γίνει "aRa συνεπάγεται bRb". Έχοντας αυτό κατά νου, ο ίδιος ορισμός παρουσιάστηκε από τους Batagelj et al. (1992b) με διαφορετικό συμβολισμό. Εδώ, τον δίνουμε χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό, όπως οι White και Reitz(1983):

> "Εάν $G = (V, R)$ και $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο V τότε η σχέση αυτή $\equiv$ είναι μια *δομική ισοδυναμία* αν και μόνο αν, για κάθε a, b, $c \in V$ τέτοια ώστε $a \neq b \neq c$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:

[1]Όταν αναφερόμαστε σε γράφους, συμβολίζουμε το V το σύνολο των κορυφών τους, και όταν αναφερόμαστε σε δίκτυα, συμβολίζουμε με U το αντίστοιχο σύνολο των μονάδων.

i. aRb αν και μόνο αν bRa,

ii. aRc αν και μόνο αν bRc,

iii. cRa αν και μόνο αν cRb και

iv. aRa αν και μόνο αν bRb."

΄Οπως ήδη αναφέρθηκε πιο πάνω, η δομική ισοδυναμία δεν είναι γενικώς κατάλληλη για τον προσδιορισμό των ρόλων και των θέσεων στα κοινωνικά δίκτυα, αν και έχει χρησιμοποιηθεί για το σκοπό αυτό (Borgatti και Everett, 1992b, σελ. 91, και Winship και Mandel, 1983, σελ. 315). Ωστόσο, ταιριάζει να τη χρησιμοποιούμε, αν θέλουμε να συγκεντρώσουμε όλες τις (σχεδόν) ταυτόσημες μονάδες σε ένα δίκτυο και να κάνουμε, έτσι, μια αναγωγή των δεδομένων (Borgatti και Everett, 1992b, σελ. 91). Ας παρατηρήσουμε ότι οι όροι ρόλος και θέση δεν έχουν χρησιμοποιηθεί συστηματικά στη βιβλιογραφία. Εδώ, υιοθετούμε τις έννοιες που χρησιμοποιούν οι Wasserman και Faust (1994, σελ. 348–351).

Κανονική Ισοδυναμία

Το άλλο κοινό είδος ισοδυναμίας είναι η κανονική ισοδυναμία. "Τα κανονικά ισοδύναμα σημεία (μονάδες) συνδέονται με τον ίδιο τρόπο με τα αντίστοιχα ισοδύναμα" (White και Reitz 1983). ΄Ενας πιο τυπικός ορισμός είναι (White και Reitz 1983, σελ. 200):

> "Αν $G = (V, R)$ και $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο V, τότε η σχέση $\equiv$ είναι μια *κανονική ισοδυναμία* αν και μόνο αν, για όλα τα $a, b, c \in V$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:
>
> i. aRc συνεπάγεται ότι υπάρχει $d \in V$ τέτοιο ώστε bRd και $d \equiv c$,
>
> ii. cRa συνεπάγεται ότι υπάρχει $d \in V$ τέτοιο ώστε dRb και $d \equiv c$."

Οι Batagelj et al. (1992a, σελ. 125) πρότειναν ότι, αν $\mathbf{C} = \{C_i\}$ είναι ένας διαμερισμός, που αντιστοιχεί σε μια κανονική ισοδυναμία, τότε, για κάθε δυο ομάδες (C_u, C_v), τα στοιχεία του πίνακα $\mathbf{R}(C_u, C_v)$ είτε είναι μηδενικά ή ο πίνακας έχει την ιδιότητα ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα 1 (δηλαδή, ένας δεσμός) σε κάθε μια από τις σειρές του και σε κάθε μια από τις στήλες του.

΄Ομως, η απάντηση στο ερώτημα αν ο ορισμός αυτός συμφωνεί πλήρως με τον προηγούμενο ορισμό των White και Reitz (1983, σελ. 200) εξαρτάται από το πώς θα τον ερμηνεύσουμε. Προφανώς, οι Batagelj et al. (1992a, σελ. 125) και Borgatti και Everett (1992b, σελ. 102) τον κατανόησαν με ένα τρόπο, που επιτρέπει το d στα (i) και (ii) να είναι διαφορετικο, ενώ, όπως φαίνεται από τον αλγόριθμο `REGGE`, ο White (1985b) θεώρησε ότι το d αντιπροσωπεύει την ίδια μονάδα και στα δύο (i) και (ii). Η ερμηνεία των Batagelj et al. (1992a, σελ. 125) και Borgatti και Everett (1992b, σελ. 102) είναι καταλληλότερη για τη μέθοδο της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, διότι με αυτόν τον τρόπο κάθε μπλοκ μπορεί να αξιολογείται ανεξάρτητα από τα άλλα. Για αυτό, χρησιμοποιούμε αυτόν τον ορισμό στην παρούσα εργασία.

Άλλες Ισοδυναμίες

Μια άλλη έννοια της ισοδυναμίας είναι η αυτομορφική ισοδυναμία, η οποία είχε εισαχθεί από τον Winship (1974) και από τους Winship και Mandel, (1983, σελ. 315) σε μια ανέκδοτη εργασία. Ο ορισμός είναι: "Δύο άτομα (μονάδες) i και j είναι *αυτομορφικά ισοδύναμα* αν υπάρχει ένας αυτομορφισμός f τέτοιος ώστε $f(i) = j$". Η ισοδυναμία αυτή αναφέρεται επίσης ως *δομικός ισομορφισμός* (Borgatti και Everett, 1992a). Οι Everett και Borgatti (1994) υπογράμμισαν επίσης ότι η αυτομορφική ισοδυναμία είναι μια φυσική γενίκευση της (ασθενούς) δομικής ισοδυναμίας.

Επίσης οι Everett και Borgatti (1994) παρουσίασαν και μια σειρά άλλων εννοιών ισοδυναμίας και εννοιών χρωματισμού και έδειξαν ότι οι περισσότερες από αυτές τις έννοιες είναι ειδικές περιπτώσεις της κανονικής ισοδυναμίας ή του χρωματισμού, με μόνη εξαίρεση τον "οικολογικό χρωματισμό" (Everett και Borgatti, 1996). Ειδικότερα, οι Everett και Borgatti (1994) πρότειναν τον ακόλουθο ορισμό του "ακριβούς χρωματισμού": "Ένας χρωματισμός είναι *ακριβής* αν, όταν δύο κορυφές (μονάδες) είναι χρωματισμένες με το ίδιο χρώμα, οι γειτονιές τους περιέχουν όχι μόνο τα ίδια χρώματα, αλλά και τον ίδιο αριθμό κορυφών στο κάθε παρόν χρώμα". Επίσης, παρέχουν ένα πιο τυπικό ορισμό χρησιμοποιώντας (για κατευθυνόμενους γράφους) δύο είδη γειτονιών: (i) τις γειτονιές που είναι k-χρωματισμένες ως προς τα εξερχόμενα τόξα και (ii) τις γειτονιές που είναι k-χρωματισμένες ως προς τα εισερχόμενα τόξα. Από την ανάλυση των Stadler και Tinhofer (1999), μπορεί να διαπιστωθεί ότι αυτός είναι ακριβώς ο ίδιος ο ορισμός του ακριβούς χρωματισμού. Πολλές άλλες έννοιες ισοδυναμίας έχουν ακόμα προταθεί. Για παράδειγμα, υπάρχει η ισοδυναμία του συνόλου ρόλων των Winship και Mandel, (1983), των (γενικών) τοπικών ρόλων των Everett et al. (1990), μεταξύ άλλων.

2.1.3 Ισοδυναμίες σε Δίκτυα με Βάρη

Υπάρχουν δύο βασικά προβλήματα με τους ορισμούς και τις περιγραφές των ισοδυναμιών, που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο τμήμα. Πρώτον, πολλοί από αυτούς ορίζονται μόνο για δυαδικά δίκτυα. Μερικές φορές, η γενίκευση σε δίκτυα με βάρη (ιδίως συνεχών τιμών) είναι απλή και έχει ήδη δοθεί στη βιβλιογραφία. Η απλούστερη γενίκευση, η οποία συχνά είναι και η καταλληλότερη, είναι να ενισχυθεί ο ορισμός κατά τέτοιο τρόπο ώστε δύο δεσμοί να μπορούν να ικανοποιούν τις απαιτήσεις του ορισμού μόνον εφόσον έχουν τα ίδια βάρη (ίσες τιμές). Αυτό είναι ιδιαίτερα κατάλληλο για την δομική ισοδυναμία, αλλά μπορεί να είναι πολύ προβληματικό για άλλα είδη ισοδυναμίας, ιδίως όταν τα βάρη των δεσμών (συνδέσεων) παίρνουν συνεχείς τιμές και όχι διακριτές.

Το δεύτερο πρόβλημα, που συνδέεται στενά με το πρώτο, είναι ότι ορισμένα από αυτά τα είδη των ισοδυναμιών δεν έχουν ακόμα μελετηθεί στην πληρότητά τους, πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει ακόμη να αναπτυχθούν οι αλγόριθμοι υπολογισμού της απόκλισης ενός διαμερισμού σε σχέση με μια επιλεγμένη ισοδυναμία. Αυτή η απόκλιση θα πρέπει να είναι μηδενική αν και μόνο αν ο διαμερισμός ταιριάζει απόλυτα στην επιλεγμένη ισοδυναμία. Για τα δυαδικά δίκτυα, το πρόβλημα αυτό ισχύει μόνο για ορισμένες ισοδυναμίες και για ορισμένες μεθόδους μοντελοποίησης σε μπλοκ. Για τα δίκτυα με βάρη, το πρόβλημα αυτό συνδέεται στενά με το προηγούμενο.

Ωστόσο, ορισμένες από τις ισοδυναμίες μπορούν να υλοποιηθούν υπολογιστικά σε δίκτυα με βάρη, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχουν οι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό τους, αν και δεν έχει δοθεί ένας σαφής ορισμός για τα δίκτυα με βάρη. Ένα παράδειγμα είναι η κανονική ισοδυναμία και οι αλγόριθμοι `REGE` (White, 2005).

Ένα άλλο πολύ σημαντικό ζήτημα είναι ποιές προαπαιτήσεις πρέπει μία γενίκευση της ισοδυναμίας να πληρεί, για να θεωρηθεί καλή γενίκευση. Τουλάχιστον δύο από αυτές τις προαπαιτήσεις είναι επιθυμητές:

1. Η δυαδική μορφή της ισοδυναμίας είναι μόνο μια ειδική περίπτωση της εκδοχής της για δίκτυα με βάρη, που παίρνουμε υποθέτοντας ότι στα δυαδικά δίκτυα όλα τα βάρη (τιμές) των δεσμών είναι ίσα με 1, και

2. ο ορισμός συλλαμβάνει την “ουσία” της ισοδυναμίας.

Η πρώτη από τις δύο αυτές προαπαιτήσεις είναι απαραίτητη, αλλά και μπορεί εύκολα να ελεγχθεί. Η δεύτερη είναι επίσης πολύ σημαντική, αλλά είναι δύσκολο να ελεγχθεί.

Υπάρχει μια περαιτέρω προαπαίτηση, που πρέπει να πληρείται, την οποία όμως δεν την έχουμε αναφέρει δεδομένου ότι ενδέχεται να είναι προαπαίτηση του αλγορίθμου και όχι του ορισμού. Η προαπαίτηση αυτή είναι ότι ο ορισμός ή τουλάχιστον ο αλγόριθμος, ο οποίος αναζητεί και δοκιμάζει την παρουσία της ισοδυναμίας, πρέπει να παίρνει υπόψη τη φύση των βαρών (τιμών), δηλαδή, δεν πρέπει να τα αντιμετωπίζει μόνο συμβολικά.

Στο τμήμα αυτό, θα δοθεί η έμφαση μόνο σε ορισμούς και όχι σε εφαρμογές. Κάποιες εφαρμογές, κυρίως για την γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, θα εξεταστούν στο Κεφάλαιο 3.

Δομική Ισοδυναμία

Η δομική ισοδυναμία μπορεί να οριστεί με σαφή τρόπο και να υλοποιηθεί υπολογιστικά για δίκτυα με συνεχή βάρη (δείτε Batagelj et al., 1992b, σελ. 65-66, Borgatti και Everett, 1992b, σελ. 101, Wasserman και Faust 1994, σελ. 356–360, Batagelj και Ferligoj, 2000, σελ. 12-13, Breiger και Mohr, 2004, σελ. 21-24, και άλλοι). Και οι δύο, άμεσες και έμμεσες προσεγγίσεις, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για δίκτυα με βάρη. Η δομική ισοδυναμία για δίκτυα με βάρη σημαίνει ότι δύο μονάδες είναι ισοδύναμες εάν είναι συνδεδεμένες με τόξα των ιδίων βαρών (τιμών) με το υπόλοιπο δίκτυο.

Οι Borgatti και Everett (1992b, σελ. 98) έδωσαν έναν τυπικό ορισμό της δομικής ισοδυναμίας για δίκτυα με βάρη. Ο ορισμός τους μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής (σε μια απλοποιημένη μορφή για να γίνει περισσότερο συγκρίσιμος με τους άλλους ορισμούς που παρουσιάζονται): Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, τότε η σχέση $\equiv$ είναι *δομική ισοδυναμία* αν και μόνον αν, για όλα τα $a, b \in U$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:

1. $r_{bi} = r_{ai}$, για ολα τα $i \in U$,
2. $r_{ib} = r_{ia}$, για ολα τα $i \in U$.

Αλλά ο ορισμός της δομικής ισοδυναμίας παρουσιάζει ακριβώς τις ελλείψεις, που οι Borgatti και Everett (1992b, σελ. 5-10) είχαν επικρίνει στον αρχικό ορισμό της δομικής ισοδυναμίας, ο οποίος δόθηκε από τους Lorrain και White (1971). Οι ελλείψεις αυτές αυτές αφορούν το γεγονός ότι, σύμφωνα με τον ορισμό αυτό σε ένα δίκτυο χωρίς αυτό-βρόχους, δύο συνδεδεμένες μονάδες δεν μπορεί να είναι δομικά ισοδύναμες. Αυτό συμβαίνει, διότι οι αυτο-βρόχοι και οι δεσμοί μεταξύ των μονάδων, οι οποίοι ελέγχονται για τη δομική ισοδυναμία, δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται διαφορετικά από οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του πίνακα.

Ένας ορισμός, που ξεπερνάει αυτό το μειονέκτημα, δόθηκε από τους Batagelj et al. (1992b, σελ. 66): Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, τότε η σχέση $\equiv$ είναι *δομική ισοδυναμία* αν και μόνον αν, για όλα τα $a, b \in U$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:

1. $r_{bi} = r_{ai}$, για όλα τα $i \in U \backslash \{a, b\}$,
2. $r_{ib} = r_{ia}$, για όλα τα $i \in U \backslash \{a, b\}$,
3. $r_{bb} = r_{aa}$ και

4. $r_{ab} = r_{ba}$.

Εδώ λαμβάνεται υπόψη, η ιδιαιτερότητα των αυτο-βρόχων και των δεσμών μεταξύ μονάδων, που ελέγχονται για τη δομική ισοδυναμία, αντιμετωπίζοντάς τα ξεχωριστά, με την εξαίρεση τους από τις συνθήκες 1 και 2 και με την προσθήκη δύο άλλων συνθηκών, που αντιστοιχούν σε αυτές τις ειδικές περιπτώσεις. Αυτός θα είναι ο ορισμός της δομικής ισοδυναμίας, που θα χρησιμοποιειούμε στη συνέχεια εδώ.

Βασισμένοι σε υπολογιστικές υλοποιήσεις – τη μέθοδο της "αγνόησης" των διαγώνιων τιμών στο `UCINET` (Borgatti et al., 1999) και τη μέθοδο των ομοιοτήτων και των ανομοιοτήτων (Batagelj et al., 1992b, σελ. 70) – κάποιοι ορίζουν επίσης τη δομική ισοδυναμία ως εξής: Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, τότε η σχέση $\equiv$ είναι *δομική ισοδυναμία* αν και μόνον αν, για όλα τα $a, b \in U$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:

1. $r_{bi} = r_{ai}$, για όλα τα $i \in U \backslash \{a, b\}$,
2. $r_{ib} = r_{ia}$, για όλα τα $i \in U \backslash \{a, b\}$.

Σε αυτόν τον ορισμό, προφανώς αγνοούνται οι αυτο-βρόχοι και οι δεσμοί μεταξύ των μονάδων, που ελέγχονται για τη δομική ισοδυναμία.

Οι γενικεύσεις ή οι άλλες τροποποιήσεις των άλλων ορισμών (συμπεριλαμβανομένων και αυτών της παραγράφου 2.1.2) μπορούν να γίνουν με τον ίδιο τρόπο. Όπως ήδη αναφέρθηκε, η κύρια διαφορά μεταξύ αυτών των ορισμών έγκειται στον τρόπο, με τον οποίο χειρίζονται τους αυτο-βρόχους και τους δεσμούς μεταξύ των μονάδων, που ελέγχονται για τη δομική ισοδυναμία.

Ο ορισμός των Breiger και Mohr, (2004, σελ. 21-24) διαφέρει ελαφρά. Ο ορισμός αυτός είναι ουσιαστικά ο ίδιος με τον ορισμό των (Batagelj et al., 1992b, σελ. 66), εκτός του ότι τα πραγματικά στοιχεία του πίνακα $\mathbf{R}$ αντικαθίστανται από τους όρους αλληλεπίδρασης σε ένα log-γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης.

Κανονική Ισοδυναμία

Οι Borgatti και Everett (1992b, σελ. 102) έχουν επίσης δώσει έναν τυπικό ορισμό της κανονικής ισοδυναμίας για δίκτυα με βάρη. Παρότι ο ορισμός των Borgatti και Everett (1992b) αφορά την περίπτωση βαρών με διακριτές τιμές, μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση δικτύων με βάρη, που μετρούνται σε κλίμακα διαστημάτων. Ο ορισμός αυτός έχει επαναδιατυπωθεί από τον Žiberna (2007a, σελ. 17) ως εξής (σε μια απλοποιημένη μορφή για να καταστεί πιο συγκρίσιμος με κάποιους άλλους ορισμούς): Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, τότε η σχέση $\equiv$ είναι μια *κανονική ισοδυναμία* αν και μόνον αν, για όλα τα $a, b \in U$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:

1. για κάθε r_{ai}, υπάρχει τέτοιο r_{bj} ώστε $r_{bj} = r_{ai}$, όπου $i \equiv j, i, j \in U$, και

2. για κάθε r_{ia}, υπάρχει τέτοιο r_{jb} ώστε $r_{jb} = r_{ia}$, όπου $i \equiv j, i, j \in U$.

Εναλλακτικοί ορισμοί της κανονικής ισοδυναμίας για δίκτυα με βάρη, που μετρούνται τουλάχιστον μέσα σε διαστήματα τιμών, μπορούν να διατυπωθούν από:

1. δύο αλγορίθμους – τον `REGGE` (White, 1985b) και τον `REGDI` (White, 1985a) – για τη μέτρηση των ομοιοτήτων και των ανομοιοτήτων των μονάδων μέσω της κανονικής ισοδυναμίας και

2. τις ιδέες για τον ορισμό των ασυνεπειών μεταξύ των μπλοκ (σύμφωνα με τη μέθοδο της γενικευμένης μοντελοποίησης) για δίκτυα με βάρη, που παρουσίασαν οι Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 12-13), οι οποίες μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την κανονική ισοδυναμία.

Με βάση την εργασία των Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 12-13), ο Žiberna (2007a, σελ. 17) έδωσε τον ακόλουθο ορισμό της κανονικής ισοδυναμίας για δίκτυα με βάρη: Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, που παράγει (ή αντιστοιχεί) τον διαμερισμό $\mathbf{C}$, τότε η σχέση $\equiv$ είναι *κανονική ισοδυναμία* αν και μόνο αν, για κάθε $a, b \in U$ και για όλα τα $X \in \mathbf{C}$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται:

1. $\max_{i \in X}(r_{ai}) = \max_{i \in X}(r_{bi})$ και

2. $\max_{i \in X}(r_{ia}) = \max_{i \in X}(r_{ib})$.

Ο Žiberna (2007a, σελ. 17) έχει απαναδιατυπώσει τον ορισμό αυτό ως εξής (για να τον καταστήσει πιο συγκρίσιμο με τον ορισμό του αλγόριθμου `REGGE`, που θα παρουσιαστεί πιο κάτω): Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, που παράγει (ή αντιστοιχεί) τον διαμερισμό $\mathbf{C}$, τότε η σχέση $\equiv$ είναι *κανονική ισοδυναμία* αν και μόνο αν, για κάθε $a, b \in U$ και για όλα τα $X \in \mathbf{C}$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:

1. για κάθε r_{ai}, υπάρχει τέτοιο r_{bj} ώστε $r_{bj} \geq r_{ai}$, όπου $i \equiv j, i, j \in U$, και

2. για κάθε r_{ia}, υπάρχει τέτοιο r_{jb} ώστε $r_{jb} \geq r_{ia}$, όπου $i \equiv j,\ i, j \in U$.

Σχεδόν ο ίδιος ορισμός έχει διατυπωθεί από τον White (1985b) στην εισαγωγή του αλγόριθμου `REGGE`. Ο ορισμός αυτός διαφέρει από τα παραπάνω μόνο στην περίπτωση των κατευθυνόμενων δικτύων, αφού, σύμφωνα με τον Doug White, τα εισερχόμενα και τα εξερχόμενα τόξα θα πρέπει να αντιμετωπίζονται από κοινού και όχι ξεχωριστά, όπως στην προσέγγιση των Batagelj και Ferligoj.

Ο Žiberna (2007a, σελ. 18) επαναδιατυπώνει πιο τυπικά τον τελευταίο ορισμό ως εξής: Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, που παράγει (ή αντιστοιχεί) τον διαμερισμό $\mathbf{C}$, τότε η σχέση $\equiv$ είναι *κανονική ισοδυναμία* αν και μόνο αν, για κάθε $a, b \in U$ και για όλα τα $X \in \mathbf{C}$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι, για κάθε ζευγάρι (r_{ai}, r_{ia}), υπάρχει ένα τέτοιο ζευγάρι (r_{bj}, r_{jb}) ώστε:

1. $r_{bj} \geq r_{ai}$,
2. $r_{jb} \geq r_{ia}$, όπου
3. $i \equiv j$, $i, j \in U$

Με βάση τον δεύτερο αλγόριθμο `REGDI` του White (1985a), ο Žiberna (2007a, σελ. 18) έχει δώσει έναν ελαφρώς διαφορετικό ορισμό. Σε αυτόν τον αλγόριθμο, όλες οι τιμές, όχι είναι μόνο οι μέγιστες, πρέπει να είναι και ίσες. Όμως, αυτές οι ίσες τιμές εξακολουθούν να μην χρειάζεται να εμφανίζονται σε εισερχόμενα και εξερχόμενα τόξα από τις ίδιες μονάδες. Όπως είναι σύνηθες για την κανονική ισοδυναμία, αρκεί οι μονάδες αυτές να είναι ισοδύναμες.

Η επαναδιατύπωση του Žiberna (2007a, σελ. 18) είναι η εξής: Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, που παράγει (ή αντιστοιχεί) το διαμερισμό $\mathbf{C}$, τότε η σχέση $\equiv$ είναι *κανονική ισοδυναμία* αν και μόνο αν, για κάθε $a, b \in U$ και για όλα τα $X \in \mathbf{C}$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι, για κάθε ζευγάρι (r_{ai}, r_{ia}), υπάρχει ένα τέτοιο ζευγάρι (r_{bj}, r_{jb}) ώστε:

1. $r_{bj} = r_{ai}$,
2. $r_{jb} = r_{ia}$, όπου
3. $i \equiv j$, $i, j \in U$.

Όλοι αυτοί οι ορισμοί πληρούν όλες τις προϋποθέσεις για την γενίκευση της κανονικής ισοδυναμίας σε δίκτυα με βάρη. Πρώτον, είναι σαφές ότι οι ορισμοί αυτοί περιλαμβάνουν την περίπτωση των δυαδικών δικτύων. Αλλά θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι συνεπαγόμενοι ορισμοί για δίκτυα με βάρη αποτελούν μια προσπάθεια γενίκευσης δύο ελαφρώς διαφορετικών ορισμών (ή ερμηνειών του ορισμού) της κανονικής ισοδυναμίας.

Θα μπορούσε επίσης να πει κανείς ότι οι ορισμοί συλλαμβάνουν την "ουσία" της κανονικής ισοδυναμίας, δεδομένου ότι δεν απαιτούν οι δύο μονάδες να πρέπει να συνδέονται με τον ίδιο αριθμό ισοδύναμων μονάδων. Οι ορισμοί επίσης ικανοποιούν την προαπαίτηση όπως ο ορισμός, ή τουλάχιστον ο αλγόριθμος, να λαμβάνει υπόψη τον συνεχή χαρακτήρα των τιμών (βαρών).

Το πλεονέκτημα του ορισμού, που συνεπάγεται από την προσέγγιση των Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 12-13), είναι ότι μετρά ένα δεσμό μεταξύ μιας μονάδας και μιας ομάδας με ένα και μόνο αριθμό, που μπορεί εύκολα να συγκριθεί μεταξύ διαφόρων μονάδων.

f-Κανονική Ισοδυναμία

Άλλο ένα είδος ισοδυναμίας, που μπορεί να είναι χρήσιμο για δίκτυα με βάρη, είναι η f-κανονική (ή συναρτησιακά-κανονική) ισοδυναμία, ο ορισμός της οποίας δεν είναι μια αυστηρή γενίκευση της έννοιας της κανονικής ισοδυναμίας. Ωστόσο, ο ορισμός αυτός προσπαθεί να συλλάβει την ιδέα ότι δεν είναι αναγκαίο για ισοδύναμες μονάδες να είναι ισοδύναμα συνδεδεμένες με μια μεμονωμένη μονάδα, αλλά μόνο με μια ομάδα ισοδύναμων μονάδων. Η ιδέα για αυτό το σύνολο των πιθανών ισοδυναμιών είναι ότι ένας δεσμός μεταξύ μιας μονάδας και μιας ομάδας μονάδων μπορεί να χαρακτηριστεί επαρκώς από μια συνάρτηση, που παίρνει τιμές πάνω στα βάρη των δεσμών, τα οποία συνδέουν αυτήν την μονάδα με τις μονάδες της επιλεγμένης ομάδας. Η ιδέα αυτή μπορεί επίσης να αναγνωριστεί στον ορισμό, που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο τμήμα.

Λέμε ότι έχουμε μια ομάδα f-κανονικων ισοδύναμων μονάδων αν, για κάθε δυο από τις μονάδες αυτές, είναι ίδιες οι τιμές της συνάρτησης f πάνω στα βάρη των συνδέσεων από την κάθε μια συγκεκριμένη μονάδα με όλες τις άλλες μονάδες της ομάδας. Εάν αυτή η συνάρτηση είναι η *μέγιστη τιμή* (max), τότε παίρνουμε τον ορισμό της κανονικής ισοδυναμίας για δίκτυα με βάρη των Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 12-13). Αλλά όμως, και άλλες συναρτήσεις είναι επίσης κατάλληλες, όπως το *άθροισμα* (sum), η *μέση τιμή* (mean) και η *ενδιάμεση τιμή* (median) των βαρών των συνδέσεων. Ειδικά, για δίκτυα, στα οποία οι δεσμοί παίρνουν και αρνητικές τιμές βαρών (εκτός από θετικές), το *ελάχιστο* (min) θα ήταν επίσης μια κατάλληλη συνάρτηση, ενώ για δίκτυα με πολύ μετατοπισμένη στα δεξιά κατανομή των βαρών (τιμών) των δεσμών, ο *γεωμετρικός μέσος* (geometric mean) μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί.

Αυτός ο ορισμός παρουσιάζεται τυπικά καλύτερα μέσω πινάκων και δίνεται παρακάτω. Ο ορισμός δίνεται για δίκτυα μονο-σχεσιακά, αλλά μπορεί να γενικευτεί και για πολυ-σχεσιακά δίκτυα, με την απαίτηση όπως ο ορισμός ισχύει για όλες τις σχέσεις.

Έστω ότι έχουμε ένα δίκτυο $N = (U, R)$. Αν η $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, που παράγει (ή αντιστοιχεί) την ομαδοποίηση (ή διαμερισμό) $\mathbf{C}$, τότε η σχέση $\equiv$ είναι μια *f-κανονική ισοδυναμία* (όπου f είναι μια επιλεγμένη συνάρτηση, π.χ., άθροισμα, μέγιστη τιμή, μέση τιμή κ.λπ.) αν και μόνο αν, για όλα τα $a, b \in U$ και για τα όλα τα $X \in \mathbf{C}$, η $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:

1. $f(\{r_{ai} : i \in X\}) = f(\{r_{bi} : i \in X\})$,

2. $f(\{r_{ia} : i \in X\}) = f(\{r_{ib} : i \in X\})$.

Αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένας άλλος ορισμός της κανονικής ισοδυναμίας για δίκτυα με βάρη ή ένας νέος τύπος ισοδυναμίας. Ο ορισμός, που δίδεται από τους Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 12-13), θα μπορούσε να ονομαστεί max-κανονική ισοδυναμία, ενώ σε άλλες περιπτώσεις θα μπορούσαμε να είχαμε sum-κανονική, mean-κανονική κ.ά. ή, γενικότερα, f-κανονική ισοδυναμία, όπου f είναι οποιαδήποτε κατάλληλη συνάρτηση. Τι είναι μια κατάλληλη συνάρτηση δεν θα συζητηθεί εδώ, αν και τουλάχιστον το άθροισμα και η μέση τιμή (εκτός από τη μέγιστη τιμή) είναι κατάλληλες συναρτήσεις, τουλάχιστον για μερικές περιπτώσεις. Η επιλογή της συνάρτησης εξαρτάται κυρίως από τον τρόπο, με τον οποίο μετράμε τη ισχύ του δεσμού μεταξύ μιας μονάδας και μιας ομάδας.

Όμως, γενικώς, οι f-κανονικές ισοδυναμίες δεν συμμορφώνονται με τις προαπαιτήσεις της καλής γενίκευσης (εκτός από την max-κανονική ισοδυναμία, που συμμορφώνεται). Αυτό δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα, δεδομένου ότι ο στόχος αυτών των ισοδυναμιών δεν είναι να γενικευτεί η κανονική ισοδυναμία στα δίκτυα με βάρη, αλλά να παρουσιαστούν κάποιες χρήσιμες ισοδυναμίες για τα δίκτυα με βάρη, οι οποίες με κάποια έννοια μοιάζουν με την κανονική ισοδυναμία. Μερικές απ' αυτές (συγκεκριμένα η sum-κανονική ισοδυναμία) μπορούν, όμως, να προσαρμοστούν, για να ικανοποιούν τις προαπαιτήσεις της γενίκευσης, ειδικά την πρώτη προαπαίτηση, η οποία είναι η πιο προβληματική για τις f-κανονικές ισοδυναμίες, γενικώς.

Εάν εφαρμόσουμε την sum-κανονική ισοδυναμία για τα δυαδικά δίκτυα (όπου όλα τα βάρη είναι ίσα με 1), λαμβάνουμε πράγματι τον ακριβή χρωματισμό, που παρουσιάστηκε από τους Everett και Borgatti (1994, σελ. 12-13). Όμως, εάν αλλάξουμε τον ορισμό στον ακόλουθο ορισμό της "ισοδυναμίας στάθμης", για $m = 1$, και πάρουμε για τη συνάρτηση f το άθροισμα, τότε ο ορισμός συμμορφώνεται με την κανονική ισοδυναμία.

Έστω ότι έχουμε ένα δίκτυο $N = (U, R)$. Αν η $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο U, που παράγει (ή αντιστοιχεί) την ομαδοποίηση (ή διαμερισμό) $\mathbf{C}$, τότε η σχέση $\equiv$ είναι μια *f-κανονική ισοδυναμία στάθμης m* αν και μόνο αν, για όλα τα $a, b \in U$ και όλα τα $X \in \mathbf{C}$, το $a \equiv b$ να συνεπάγεται ότι:

1. $f(r_{ai}) \geq m$ και $f(r_{bi}) \geq m$ ή $f(r_{ai}) = f(r_{bi}) = 0$, για κάθε $i \in X$, και
2. $f(r_{ia}) \geq m$ και $f(r_{ib}) \geq m$ ή $f(r_{ia}) = f_(r_{ib}) = 0$, για κάθε $i \in X$.

Ο παραπάνω ορισμός είναι επίσης ένα παράδειγμα για το πώς μερικοί από τους πιο τυποποιημένους ορισμούς πρέπει να τροποποιηθούν, έτσι ώστε ο χρησιμοποιούμενος τύπος της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ ή της (γενικευμένης) μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη να είναι ευαίσθητος στις αποκλίσεις από αυτούς τους ορισμούς. Οι έννοιες της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ και της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη εισάγονται στο Κεφάλαιο 3.

Άλλες Ισοδυναμίες

Οι περισσότερες άλλες ισοδυναμίες συνήθως δεν ορίζονται ειδικά για δίκτυα με βάρη. 'Ομως, μερικοί ορισμοί προσαρμόζονται ευκολότερα για δίκτυα με βάρη. Παραδείγματος χάριν, ένας απλός ορισμός της αυτομορφικής ισοδυναμίας είναι ότι οι αυτομορφικά ισοδύναμες μονάδες είναι σχεδόν όμοιες σε ένα μη προσημασμένο γράφο. Δεδομένου ότι δύο μονάδες, που συνδέονται με άλλες μονάδες με δεσμούς διαφορετικής ισχύος, μπορούν να διακριθούν, αυτές δεν μπορούν να είναι αυτομορφικά ισοδύναμες. Ακόμη και εδώ, προκύπτει ένα πρόβλημα, όταν θέλουμε να υπολογίσουμε εάν δύο μονάδες είναι αυτομορφικά ισοδύναμες και, περαιτέρω, εάν θέλουμε να υπολογίσουμε κάποιο μέτρο απόκλισης από την αυτομορφική ισοδυναμία. 'Ομως, οι υπολογιστικές αναλύσεις δεν εξετάζονται εδώ.

Άλλοι ορισμοί, ειδικά εκείνοι που ορίζονται μέσω χρωματισμών και γειτνιάσεων (π.χ., εκείνοι των Everett και Borgatti, 1994), δεν μπορούν τόσο απλά να ερμηνευθούν για δίκτυα με βάρη. 'Οπως προηγουμένως, αυτές οι ισοδυναμίες δεν θα συζητηθούν. Προηγουμένως μόνο ο ακριβής χρωματισμός είχε περιγραφεί με λεπτομέριες. Στην πραγματικότητα, ο ακριβής χρωματισμός αποτελεί μια ειδική περίπτωση της sum-κανονικής ισοδυναμίας, που παρουσιάσαμε πιο πάνω. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι η sum-κανονική ισοδυναμία αποτελεί μια πιθανή γενίκευση του ακριβούς χρωματισμού στα δίκτυα με βάρη. Αυτή η γενίκευση είναι ιδιαίτερα κατάλληλη, εάν οι τιμές των δεσμών αντιπροσωπεύουν, στην πραγματικότητα, τα βάρη.

2.1.4 Γενικευμένη Ισοδυναμία

Η έννοια της γενικευμένης ισοδυναμίας εισήχθη από τους Doreian et al. (1994). Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η γενικευμένη ισοδυναμία δεν είναι ένας συγκεκριμένος τύπος ισοδυναμίας, αλλά μάλλον μια έννοια για την οικοδόμηση "ειδικών" ισοδυναμιών με τον καθορισμό των επιτρεπτών τύπων μπλοκ και, προαιρετικά, των θέσεών τους. Εδώ θα περιγράψουμε μόνο τη βασική έννοια της γενικευμένης ισοδυναμίας, την οποία θα μελετήσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 3.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια, δυο σημεία πρέπει να αναθεωρηθούν. Κατ' αρχάς, μια σχέση R αναπαραστάται στην γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ από έναν πίνακα $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{n \times n}$. Δεύτερο, η ομαδοποίηση $\mathbf{C}$ θεωρείται επίσης ότι διαμερίζει την σχέση R σε μπλοκ, όπου $R(C_i, C_j) =$

$R \cap C_i \times C_j$.

Οι Batagelj et al. (1992b) και Batagelj et al. (1992a) έδειξαν ότι η δομική και η κανονική ισοδυναμία μπορούν να οριστούν κατάλληλα από ένα σύνολο επιτρεπτών ιδανικών μπλοκ και ορίσαν τα κατάλληλα ιδανικά μπλοκ για αυτές τις ισοδυναμίες. Έδειξαν ότι η δομική ισοδυναμία αντιστοιχεί στη χρησιμοποίηση των πλήρων και των μηδενικών ιδανικών μπλοκ, ενώ η κανονική ισοδυναμία αντιστοιχεί στη χρησιμοποίηση των κανονικών και των μηδενικών ιδανικών μπλοκ (δείτε τον Πίνακα 3.2 για τους ορισμούς αυτών των τύπων μπλοκ για τα δυαδικά δίκτυα μέσω της περιγραφής των ιδανικών μπλοκ τους).

Πρότειναν έπειτα δύο γενικεύσεις της ισοδυναμίας, οι οποίες οδηγούν στη γενικευμένη ισοδυναμία και στη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Η πρώτη γενίκευση είναι ότι τα μπλοκ (που παράγονται από την ομαδοποίηση, που είναι βασισμένη στη γενικευμένη ισοδυναμία) μπορούν να προσαρμοστούν σε διάφορους τύπους ισοδυναμιών. Η δεύτερη γενίκευση προχωρά ακόμα πιο πέρα και λέει ότι δεν είναι απαραίτητο κάθε μπλοκ να αντιστοιχεί στην ισοδυναμία. Αρκεί να υπάρχει κάποια ιδιαίτερη δομή, της οποίας οι ειδικοί τύποι ισοδυναμιών να είναι ειδικές περιπτώσεις πιο γενικών μορφωμάτων (Doreian et al., 1994, σελ. 2). Παρουσίασαν επίσης διάφορους τύπους συνδέσεων εντός και μεταξύ των ομάδων, τους αντίστοιχους τύπους μπλοκ και παραδείγματα των δομών συνδέσεων μέσα σε αυτούς τους τύπους μπλοκ (Doreian et al., 1994, σελ. 5-6).

2.1.5 Άλλα Κριτήρια

Οι επιθυμητές ιδιότητες ενός διαμερισμού μερικές φορές δεν καθορίζονται ρητά από τον ορισμό της ισοδυναμίας, αλλά μόνο μέσω μιας συνάρτησης κριτηρίου, η οποία μετρά την καταλληλότητα του διαμερισμού. Όταν χρησιμοποιείται στην μοντελοποίηση σε μπλοκ, η συνάρτηση κριτηρίου είναι μια συνάρτηση, που αξιολογεί έναν διαμερισμό με βάση τα δικτυακά δεδομένα και επιστρέφει μια τιμή. Ο καλύτερος διαμερισμός μπορεί να είναι καταρχήν αυτός με τη χαμηλότερη ή υψηλότερη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου. Καθώς θέλουμε η συνάρτηση κριτηρίου να μπορεί να παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, ο διαμερισμός με τη χαμηλότερη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι ο καλύτερος. Επιπλέον, θέλουμε η συνάρτηση κριτηρίου να παίρνει την μηδενική τιμή μόνο όταν ο διαμερισμός ταιριάζει πλήρως με τον ορισμό της ισοδυναμίας ή με άλλα απαιτούμενα χαρακτηριστικά.

Φυσικά, ένας διαμερισμός πάντα ορίζει μια ισοδυναμία και, επομένως, και η συνάρτηση κριτηρίου, που καθορίζει τον διαμερισμό, ορίζει έμμεσα την ισοδυναμία.

Ακόμη και όταν προηγουμένως συζητούσαμε τους διαφορετικούς τύπους ισοδυναμιών, χρησιμοποιούσαμε μια συνάρτηση κριτηρίου ή έναν τύπο υπολογισμού των ομοιοτήτων, για να διασαφηνίσουμε τον ορισμό της χρησιμοποιούμενης ισοδυναμίας ή για να εξηγήσουμε πώς ο "κλασσικός" ορισμός θα έπρεπε να ερμηνευτεί ή να γενικευτεί για δίκτυα με βάρη.

Όμως, τα κριτήρια για την μοντέλοποίηση σε μπλοκ δεν παρουσιάζονται μέσω της έννοιας της ισοδυναμίας, μολονότι, όταν αναζητάται ένας διαμερισμός, θα μπορούσε αυτό να συνέβαινε. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα με την άμεση προσέγγιση της μοντελοποίησης σε μπλοκ, όπου αναζητάται μια συνάρτηση κριτηρίου, η οποία ταιριάζει με κάποια επιθυμητή ιδιότητα των ομάδων. Τέτοια παραδείγματα, που ψάχνουν για (συνεκτικές) ομάδες, οι οποίες ταιριάζουν με τον ορισμό των ομάδων του Homans (1950, σελ. 84 στο Freeman, 1993, σελ. 227), μπορούν να βρεθούν στις εργασίες των Freeman (1993) και (Benisch, 2004).

Με κάποια έννοια, η μέθοδος των Borgatti et al. (1999), η οποία αποσκοπεί να βρεί την δομή του πυρήνα/περιφέρειας, συμπεριλαμβάνεται σε αυτήν την ομάδα των προσεγγίσεων. Από την άλλη μεριά, θα μπορούσε να υποστηριχτεί ότι μοιάζει περισσότερο με τη προσέγγιση της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (Doreian et al. 1994, 2004), ειδικά με τον τρόπο που την χρησιμοποιούν οι Batagelj et al. (1998).

2.1.6 Διαφορετικές Προσεγγίσεις

Υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις για την μοντελοποίηση σε μπλοκ. Οι Batagelj et al. (1992b, σελ. 66) πρότειναν μια διαίρεση σε έμμεσες και άμεσες προσεγγίσεις:

1. Οι έμμεσες προσεγγίσεις αρχικά υπολογίζουν κάποιο μέτρο ομοιότητας ή ανομοιότητας με βάση ένα επιλεγμένο μέτρο ισοδυναμίας και, έπειτα, χρησιμοποιούν μια από τις κλασσικές τεχνικές ομαδοποίησης, για να βρουν τις ομάδες των μονάδων.

2. Οι άμεσες προσεγγίσεις, από την άλλη μεριά, αναζητούν απευθείας ένα διαμερισμό, ο οποίος ταιριάζει καλύτερα στην επιλεγμένη ισοδυναμία, όπως αυτό μετράται από μια επιλεγμένη συνάρτηση κριτηρίου.

Θα κάνουμε μια ανασκόπηση και των δυο αυτών προσεγγίσεων στο παρόν κεφάλαιο. Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν μπορούν όλες οι προσεγγίσεις να ταξινομηθούν εύκολα σε μια από αυτές τις δύο κατηγορίες. Μια τέτοια προσέγγιση, που δεν ταξινομείται εύκολα είναι η μέθοδος `CONCOR` (Breiger et al., 1975). Αυτή θα περιγραφεί εδώ, στη παράγραφο για τις έμμεσες προσεγγίσεις, δεδομένου ότι δεν υπάρχει μια ακριβής συνάρτηση κριτηρίου για τη μέθοδο αυτή και επειδή το πρώτο βήμα της είναι ο υπολογισμός ενός πίνακα συσχετίσεων (σαν μέτρο ομοιότητας), κάτι το οποίο αποτελεί χαρακτηριστικό των έμμεσων προσεγγίσεων. Ειδικά, καθώς συμπεριλαμβάνουμε τη μέθοδο `CONCOR` στις έμμεσες προσεγγίσεις, μπορούμε επίσης να πούμε ότι αυτή η μέθοδος είναι, από ιστορικής πλευράς, η πρώτη προσέγγιση της μοντελοποίησης σε μπλοκ.

Η προσέγγιση της γενικευμένη μοντελοποίησης σε μπλοκ βασίζεται σε μια άμεση προσέγγιση. Αυτή θα καλυφτεί ξεχωριστά στο Κεφάλαιο 3, όπου επίσης θα παρουσιαστούν και οι προσεγγίσεις της μοντελοποίησης σε μπλοκ για δίκτυα με βάρη, οι οποίες εισήχθηκαν στην διδακτορική διατριβή του Žiberna (2007a). Οι ισοδυναμίες, που συζητούνται σε αυτό το κεφάλαιο, ειδικά εκείνες για τα δίκτυα με βάρη, είναι ένα από τα σημαντικά θεμέλια για πολλές από τις προσεγγίσεις, που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3.

Όλες οι προαναφερθείσες προσεγγίσεις είναι αιτιοκρατικές, πράγμα που σημαίνει ότι δεν βασίζονται σε κάποιο πιθανοκρατικό μοντέλο. Μια στατιστική προσέγγιση έχει αναπτυχθεί από τους Snijders και Nowicki (1997, Nowicki και Snijders, 2001). Εντούτοις, αυτή η προσέγγιση είναι μόνο κατάλληλη για δίκτυα με διακριτές τιμές-βάρη. Δεδομένου ότι στην εργασία μας εστιαζόμαστε πάνω σε δίκτυα με βάρη μέσα σε διαστήματα τιμών, δεν θα σχολιάσουμε αυτήν την προσέγγιση.

2.1.7 Παρατηρήσεις

Στο πρώτο τμήμα του Κεφαλαίου 2, δώσαμε μια εισαγωγή στη μοντελοποίηση σε μπλοκ, η οποία είναι μια μέθοδος για την εύρεση ομάδων μονάδων στα δίκτυα και για την εύρεση των δεσμών μεταξύ των ομάδων.

Η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας έδειξε ότι υπάρχει μια συμφωνία ότι η μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι μια χρήσιμη μέθοδος για την αναγωγή των δικτυακών δεδομένων. Εντούτοις, οι ερευνητές, που ασχολούνται με το θέμα, δεν συμφωνούν αν μπορεί η μέθοδος αυτή επίσης να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση των ρόλων και των θέσεων στα κοινωνικά δίκτυα. Η διαφωνία προκαλείται επίσης από τις διαφορετικές ερμηνείες των όρων της μοντελοποίησης σε μπλοκ, των ρόλων και των θέσων.

Στη συνέχεια, συζητήσαμε διάφορες έννοιες ισοδυναμίας. Η ισοδυναμία είναι μια θεμελιώδης έννοια στην ανάλυση των κοινωνικών δικτύων (Doreian, 1988, σελ. 243). Αρχικά κάναμε μια ανασκόπηση των ισοδυναμιών για δυαδικά δίκτυα, όπου δυο είναι οι ευρύτατα χρησιμοποιημένες ισοδυναμίες, η δομική και η κανονική ισοδυναμία. Αμέσως μετά, εξετάσαμε τις επεκτάσεις των ισοδυναμιών αυτών για δίκτυα με βάρη. Εδώ, υπάρχουν κάποια ανοιχτά ζητήματα, τα οποία τα συζητήσαμε. Επιπλέον, εισάγαμε την f-κανονική ισοδυναμία ως μια χρήσιμη έννοια ισοδυναμίας για τα δίκτυα με βάρη, η οποία είναι συγκρίσιμη με την κανονική ισοδυναμία.

Στο τέλος, παρουσιάσαμε την γενικευμένη ισοδυναμία, η οποία δεν είναι ένας συγκεκριμένός τύπος ισοδυναμίας, αλλά περισσότερο μια έννοια για την οικοδόμηση "ειδικών" ισοδυναμιών. Η έννοια αυτή ισχύει και για τα δυαδικά και για τα δίκτυα με βάρη. Επιπλέον, είναι στενά συνδεδεμένη με τη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, το κύριο θέμα του Κεφαλαίου 3.

2.2 Έμμεσες Προσεγγίσεις

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, μια από τις γενικές μεθόδους της μοντελοποίησης σε μπλοκ είναι η έμμεση προσέγγιση. Στο τμήμα αυτό, θα δώσουμε μια περιγραφή των γενικών χαρακτηριστικών αυτής της προσέγγισης και των μέτρων ομοιότητας–ανομοιότητας, που χρησιμοποιούνται συνήθως στην προσέγγιση αυτή.

Οι Batagelj et al. (1992b, σελ. 66) όρισαν την έμμεση προσέγγιση ως εξής: "αναγωγή στο τυπικό πρόβλημα της ανάλυσης δεδομένων (ανάλυση ομάδων– clusters, πολυδιάστατη κλιμάκωση – MultiDimentional Scaling ή MDS) μέσω του προσδιορισμού ενός πίνακα ανομοιότητας μεταξύ των μονάδων, η οποία (ανομοιότητα) είναι συμβατή με τον επιλεγμένο τύπο ισοδυναμίας". Αυτή η διαδικασία θα περιγραφεί στην συνέχεια. Αν και είναι η κύρια προσέγγιση στο τμήμα αυτό του Κεφαλαίου 2, θα συζητήσουμε ακόμα και μια άλλη διαφορετική προσέγγιση, που δεν συμμορφώνεται πλήρως με τον ορισμό αυτό. Αυτή είναι η μέθοδος `CONCOR` (Breiger et al., 1975), η οποία θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο.

Αρχικά, η μοντελοποίηση σε μπλοκ συνδεόταν μόνο με τη δομική ισοδυναμία, καθώς αυτή ήταν η πρώτη ισοδυναμία, που είχε χρησιμοποιειθεί (για την μοντελοποίηση σε μπλοκ). Εκείνη την εποχή, οι δύο συχνότερα χρησιμοποιούμενοι αλγόριθμοι ήταν ο `STRUCTURE` (Burt, 1976) και ο `CONCOR` (Breiger et al., 1975). Οι ιδέες και των δύο αλγορίθμων αυτών περιγράφονται στο παρόν τμήμα του κεφαλαίου. Ο αλγόριθμος `CONCOR` περιγράφεται πρώτα, καθώς δεν είναι μια κλασσική έμμεση προσέγγιση, τουλάχιστον όχι με την έννοια του ορισμού των (Batagelj et al., 1992b, σελ. 66). Καθώς ο αλγόριθμος `STRUCTURE` υλοποιεί μια κλασσική έμμεση προσέγγιση μοντελοποίησης σε μπλοκ σύμφωνα με τη δομική ισοδυναμία, η περιγραφή του δίνεται στη συνέχεια.

Τα τμήματα, που ακολουθούν την βασική περιγραφή της έμμεσης προσέγγισης, εστιάζονται σε μεμονωμένες ισοδυναμίες ή σε τρόπους υπολογισμού ομοιοτήτων και ανομοιοτήτων, που χρησιμοποιούνται συνήθως στις διαδικασίες των επόμενων παραγράφων. Οι διαδικασίες αυτές μελετώνται από την άποψη της δομικής ισοδυναμίας.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με ομοιότητες–ανομοιότητες από την άποψη της κανονικής ισοδυναμίας. Εκτός από την ανασκόπηση των υπαρχόντων αλγορίθμων για τον υπολογισμό των ομοιοτήτων–ανομοιοτήτων από την άποψη της κανονικής ισοδυναμίας, θα αναφερθούμε και σε κάποιες τροποποιημένες εκδόσεις αυτών των αλγορίθμων. Αυτές οι τροποποιημένες εκδόσεις στοχεύουν είτε να κάνουν τις ομοιότητες–ανομοιότητες (περισσότερο) συμβατές με τις διαφορετικές εκδοχές της κανονικής ισοδυναμίας είτε στην προσαρμογή ομοιοτήτων–ανομοιοτήτων σε ειδικούς τύπους δεδομένων. Επίσης, θα δώσουμε μια ανασκόπηση ενός ακόμη τύπου ομοιότητας, της δομικής ομοιότητας, που έχει εισαχθεί από τους Brandes και Lenrer (2004). Η δομική ομοιότητα μπορεί να αναπαραστήσει την ομοιότητα των μονάδων στο δίκτυο με βάση διάφορα δομικά χαρακτηριστικά του δικτύου.

2.2.1 Ο Αλγόριθμος CONCOR

Όπως αναφέρθηκε πριν, η μέθοδος του αλγόριθμου CONCOR (Breiger et al., 1975) δεν αποτελεί μια τυπική έμμεση προσέγγιση, καθώς δεν υπολογίζει εξ αρχής ένα μέτρο ομοιότητας ή ανομοιότητας, αλλά παράγει άμεσα μια διαχωριστική ιεραρχική ομαδοποίηση. Όμως, τουλάχιστον το πρώτο μέρος αυτής της περιγραφής δεν είναι απολύτως αληθές. Όπως ήδη παρατήρησε ο Sailer (1978, σελ. 77), το πρώτο βήμα του αλγόριθμου CONCOR είναι ο υπολογισμός ενός πίνακας συσχετίσεων, ενός μέτρου ομοιότητας, όπως είναι κοινό για όλες τις έμμεσες προσεγγίσεις. Αλλά εδώ η ομοιότητα του αλγόριθμου CONCOR με τις έμμεσες προσεγγίσεις τερματίζεται, καθώς οι έμμεσες προσεγγίσεις δεν δέχονται τέτοιους πίνακες συσχετίσεων ως εισόδους στο τυπικό πρόβλημα της ανάλυσης δεδομένων. Το CONCOR προέρχεται από την έκφραση "CONvergence of iterated CORrelations", δηλαδή, "Σύγκλιση Επαναλαμβανόμενων Συσχετίσεων", που αποτελεί μια κατάλληλη περιγραφή του έργου του αλγόριθμου. Ο αλγόριθμος CONCOR υπολογίζει με επαναλήψεις, διαδοχικά, τις συσχετίσεις μεταξύ των γραμμών (ή στηλών) ενός πίνακα. Στην πρώτη επανάληψη, αυτός ο πίνακας είναι ο πίνακας των αναλυώμενων σχέσεων, ενώ σε όλες τις άλλες επαναλήψεις είναι ο πίνακας των συσχετίσεων, που υπολογίζονται στην προηγούμενη επανάληψη. Αυτή η διαδικασία συγκλίνει, όταν όλα τα στοιχεία του πίνακα γίνουν είτε 1 είτε -1. Αυτά τα 1 και -1 εμφανίζονται σε τέτοια μορφώματα, στα οποία οι αναλυόμενες μονάδες να μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες, έτσι ώστε όλα τα 1 να βρίσκονται στα διαγώνα μπλοκ και όλα τα -1 να βρίσκονται στα μη-διαγώνια μπλοκ. Ο αλγόριθμος CONCOR μπορεί, στη συνέχεια, να επαναληφθεί για τους υπο-πίνακες, που σχηματίζονται από τον διαμερισμό, ο οποίος προκύπτει στο προηγούμενο βήμα, για να παραχθεί, έτσι, μια σειρά από όλο και πιο λεπτομερείς διαμερισμούς. Επομένως, ο αλγόριθμος CONCOR μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαχωριστική μέθοδος ιεραρχικής ομαδοποίησης (Wasserman και Faust, 1994, σελ. 376–378).

2.2.2 Βασική Περιγραφή της Έμμεσης Προσέγγισης

Εδώ, περιγράφεται η έμμεση προσέγγιση της μοντελοποίησης σε μπλοκ, η οποία ακολουθεί πλήρως τον ορισμό των Batagelj et al. (1992b, σελ. 66). Η προσέγγιση αυτή αρχικά υλοποιήθηκε από το υπολογιστικό πρόγραμμα STRUCTURE (Burt, 1976).

Η προσέγγιση περιλαμβάνει δύο στάδια. Κατ' αρχάς, πρέπει να υπολογιστεί μια ομοιότητα (που μπορεί να πρέπει να μετατραπεί σε ανομοιότητα) ή μια ανομοιότητα, που είναι συμβατές με την επιλεγμένη ισοδυναμία. Αυτή η ανομοιότητα (θα αναφέρουμε μόνο την ανομοιότητα, γιατί ακόμα κι αν οι ομοιότητες υπολογιστούν, μετατρέπονται συνήθως σε ανομοιότητες) χρησιμοποιείται, στη συνέχεια, ως είσοδος στις τυπικές τεχνικές της ανάλυσης δεδομένων για την εύρεση ομάδων, συνήθως μέσω ιεραρχικής ομαδοποίησης. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε ισοδυναμία (όχι μόνο τη δομική), εάν υπάρχει ένα συμβατό μέτρο ομοιότητας ή ανομοιότητας.

Βασιζόμενοι στους Batagelj et al. (1992b, σελ. 66), μπορούμε να πούμε ότι μια ανομοιότητα d είναι *συμβατή* με μια σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ αν και μόνο αν, για οποιεσδήποτε δυο μονάδες $a, b \in U$, το $a \equiv b$ *συνεπάγεται* $d(a, b) = 0$. Πιο κάτω, θα συζητήσουμε τις κατάλληλες ανομοιότητες για διαφορετικούς τύπους ισοδυναμίας.

Όμως, το νέο βήμα δεν εξαρτάται από την χρησιμοποιούμενη ισοδυναμία ή ανομοιότητα. Οι υπολογισθείσες ανομοιότητες χρησιμοποιούνται ως είσοδοι σε μερικές τυπικές τεχνικές ανάλυσης δεδομένων για την εύρεση των ομάδων. Αν και, κατ' αρχάς, μπορούμε να κάνουμε χρήση οποιασδήποτε μεθόδου, που χρησιμοποιεί ως είσοδο τις ανομοιότητες και παράγει ένα διαμερισμό, συνήθως χρησιμοποιούμε την μέθοδο της ιεραρχικής ομαδοποίησης.

Για το σκοπό αυτό, το πρόγραμμα `Pajek` (Batagelj και Mrvar, 2005a, 2005b) παρέχει τις καλύτερες επιλογές από τα άλλα προγράμματα, αφού μπορεί να χρησιμοποιήσει αρκετές διαφορετικές μεθόδους ιεραρχικής ομαδοποίησης:

1. Γενική μέθοδος: χρησιμοποιείται ο επαναλληπτικός τύπος Lance-Williams, για τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ μιας ομάδας k και μιας ομάδας (ij), η οποία σχηματίζεται από την συγχώνευση των ομάδων i και j ως εξής:

$$\begin{aligned} d(C_i \cup C_j, C_k) = \alpha_i d(C_k, C_i) + \alpha_j d(C_k, C_j) + \beta d(C_i, C_j) + \\ + \gamma \left| d(C_k, C_i) - d(C_k, C_j) \right|, \end{aligned}$$

   όπου το $d(X, Y)$ συμβολίζει την απόσταση μεταξύ των ομάδων X και Y και α_i, α_j, β και γ είναι οι παράμετροι του τύπου (Everitt et al., 2001, σελ. 61). Πολλές άλλες τυπικές ιεραρχικές τεχνικές μπορούν να συμπεριληφθούν μέσα σε αυτόν τον τύπο, κάνοντας μια κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων α_i, α_j, β και γ, για παράδειγμα, την ελάχιστη ή μονή σύνδεση, τον πλησιέστερο γείτονα, την μέγιστη ή πλήρη σύνδεση ή τον πιο απομακρυνσμένο γείτονα, τη μέση σύνδεση, τη σύνδεση του κεντροειδούς, την ενδιάμεση σύνδεση και την μέθοδο Ward (Everitt et al., 2001, σελ. 61-63).

2. Μέθοδος της ελάχιστης ή μονής σύνδεσης ή του πλησιέστερου γείτονα: χρησιμοποιείται η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο ομάδων ή, ακριβέστερα, η ελάχιστη τιμή των αποστάσεων μεταξύ ζευγαριών αντικειμένων, όπου το ένα αντικείμενο βρίσκεται στη μια ομάδα και το άλλο στην άλλη.

3. Μέθοδος της μέγιστης ή πλήρους σύνδεσης ή του πιο απομακρυσμένου γείτονα: χρησιμοποιείται η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο ομάδων ή, ακριβέστερα, η μέγιστη τιμή των αποστάσεων μεταξύ ζευγαριών αντικειμένων, όπου το ένα αντικείμενο βρίσκεται στη μια ομάδα και το άλλο στην άλλη.

4. Μέθοδος της μέσης σύνδεσης: χρησιμοποιείται η μέση απόσταση μεταξύ δύο ομάδων, ακριβέστερα, η μέση τιμή των αποστάσεων μεταξύ ζευγαριών αντικειμένων, όπου το ένα αντικείμενο βρίσκεται στη μια ομάδα και το άλλο στην άλλη.

5. Μέθοδος Ward: υποτίθεται ότι ισχύει ο ακόλουθος τύπος, που είναι βασισμένος στον επαναληπτικό τύπο Lance-Williams (Everitt et al., 2001, σελ. 61-63),

$$\begin{aligned} d(C_i \cup C_j, C_k) = \frac{(n_i + n_k)}{(n_i + n_j + n_k)} d(C_i, C_k) + \frac{(n_j + n_k)}{(n_i + n_j + n_k)} d(C_k, C_j) - \\ - \frac{n_k}{(n_i + n_j + n_k)} d(C_i, C_j). \end{aligned}$$

   Προκειμένου να ακολουθήσουμε την αρχική διαδικασία του Ward (Ward, 1963), πρέπει να χρησιμοποιηθεί η τετραγωνική Ευκλείδια απόσταση ως μέτρο ομοιότητας. Για δικτυακά δεδομένα, η τετραγωνική Ευκλείδια απόσταση πρέπει να διορθωθεί, όπως θα κάνουμε πιο κάτω.

6. Μέθοδος τετραγώνου Ward: χρησιμοποιείται ο ίδιος τύπος, όπως παραπάνω, όπου, όμως, οι αποστάσεις τετραγωνίζονται πριν χρησιμοποιηθούν. Αυτό επιτρέπει την άμεση χρήση της Ευκλείδιας απόστασης για την σωστή εφαρμογή της μεθόδου του Ward.

Το πρόγραμμα `STRUCTURE` 4.2 (Burt 1991, σελ 136) παρέχει δύο επιλογές: τη μέθοδο Ward και τη μέθοδο της μονής σύνδεσης. Το πρόγραμμα `UCINET 5` (Borgatti et al., 1999) χρησιμοποιούσε μόνο την μέθοδο της ιεραρχικής ομαδοποίηση της μονής σύνδεσης και για τη δομική και την κανονική ισοδυναμία, ενώ, στην επόμενη έκδοση, το `UCINET` 6 (Borgatti et al., 2002) επιτρέπει στο χρήστη να επιλέξει μεταξύ των μεθόδων της μονής, της πλήρους και της μέσης σύνδεσης. 'Ολα τα προγράμματα επιτρέπουν επίσης στο χρήστη να εξαγάγει τον προκύπτοντα πίνακα ανομοιότητας, για να τον χρησιμοποιήσει και με άλλα προγράμματα.

2.2.3 Δομική Ισοδυναμία

Διάφορα μέτρα ανομοιότητας και ομοιότητας χρησιμοποιούνται για τη δομική ισοδυναμία. Η χρήση του κατάλληλου μέτρου εξαρτάται επίσης από τον χρησιμοποιούμενο ορισμό της ισοδυναμίας, δεδομένου ότι διάφοροι ορισμοί έχουν χρησιμοποιηθεί, όπως περιγράφηκε πιο πάνω.

Όπως ήδη επισημάνθηκε, οι κύριες διαφορές μεταξύ των διάφορων ορισμών και, κατά συνέπεια, οι ανομοιότητες ή ομοιότητες βρίσκονται στον τρόπο χειρισμού των αυτο-βρόχων και των δεσμών μεταξύ των μονάδων, για τις οποίες αξιολογείται η δομική ισοδυναμία. Η άλλη διαφορά μεταξύ των διαφορετικών ανομοιοτήτων – ομοιοτήτων είναι ο τύπος της χρησιμοποιούμενης ανομοιότητας – ομοιότητας, όπως Ευκλείδια ανομοιότητα, ανομοιότητα Manhattan ή, γενικότερα, οποιαδήποτε ανομοιότητα τύπου Minkowski ή κάποιο άλλο μέτρο, όπως η συσχέτιση ή η συνδιακύμανση.

Διάφορα μέτρα ανομοιότητας – ομοιότητας έχουν επίσης σχεδιαστεί ειδικά για δυαδικά δεδομένα, π.χ., τα μέτρα που εξετάζονται από τους Batagelj και Bren (1995) Άλλα μέτρα έχουν σχεδιαστεί για δικτυακά δεδομένα βασισμένα στην ομοιότητα ή την επικάλυψη των γειτονιών, π.χ., εκείνα που υλοποιούνται στο `Pajek` (Batagelj και Mrvar 2005b, σελ. 30).

Η κατάλληλη μορφή της ανομοιότητας, για κάθε επιλογή των ορισμών, που περιγράφηκαν πιο πάνω, θα παρουσιαστεί τώρα για την περίπτωση της Ευκλείδιας ανομοιότητας:

1. Οι αυτο-βρόχοι και οι δεσμοί μεταξύ των μονάδων, που ελέγχονται για τη δομική ισοδυναμία, δεν αντιμετωπίζονται διαφορετικά από οποιαδήποτε άλλα στοιχεία του πίνακα (όπως στους ορισμούς των Lorrain και White, 1971, σελ. 81 και Burt 1976, σελ. 96). Έτσι, η χρησιμοποιούμενη Ευκλείδια απόσταση είναι:

$$d_E(X_i, X_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}((r_{ik} - r_{jk})^2 + (r_{ki} - r_{kj})^2)}.$$

2. Οι αυτο-βρόχοι και οι δεσμοί μεταξύ των μονάδων, που ελέγχονται για την δομική ισοδυναμία, απλώς αγνοούνται (όπως γίνεται για τις διαγώνιες τιμές του πίνακα στο `UCINET` (Borgatti et al., 1999). Έτσι η αποκομμένη Ευκλείδια απόσταση (Faust, 1988, στο Batagelj et al., 1992, σελ. 70) είναι:

$$d_S(X_i, X_j) = \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} ((r_{ik} - r_{jk})^2 + (r_{ki} - r_{kj})^2)}.$$

3. Αναγνωρίζονται οι ειδικοί ρόλοι/θέσεις των αυτο-βρόχων και των δεσμών μεταξύ των μονάδων, που ελέγχονται για τη δομική ισοδυναμία (όπως στον ορισμό των Batagelj et al. (1992b, σελ. 66)). Τότε, η διορθωμένη ανομοιότητα Ευκλειδίου τύπου (Burt και Minor, 1983, στο Batagelj et al., 1992, σελ. 71) είναι:

$$d_e(p)(X_i, X_j) =$$
$$= \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} ((r_{ik} - r_{jk})^2 + (r_{ki} - r_{kj})^2 + p((r_{ii} - r_{jj})^2 + (r_{ij} - r_{ji})^2))}.$$

Για να ταιριάζει πλήρως αυτό το μέτρο ανομοιότητος με τον ορισμό των Batagelj et al. (1992b, σελ. 66), το p πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1, συνήθως 1 ή 2. Αν $p = 1$, τότε παίρνουμε:

$$d_e|_{p=1}(X_i, X_j) =$$
$$= \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{n} ((r_{ik} - r_{jk})^2 + (r_{ki} - r_{kj})^2 + ((r_{ii} - r_{jj})^2 + (r_{ij} - r_{ji})^2))}.$$

Το τελευταίο μέτρο ανομοιότητος (η διορθωμένη Ευκλείδιου τύπου ανομοιότητα) περιλαμβάνει επίσης την αποκομμένη Ευκλείδια απόσταση ως ειδική περίπτωση, όταν $p = 0$.

Οι αρχές, που ακολουθούνται από αυτούς τους τύπους για τις Ευκλείδιες (ή Ευκλείδιου τύπου) ανομοιότητες, μπορούν επίσης να εφαρμοστούν και σε άλλους τύπους ανομοιοτήτων ή ομοιοτήτων (π.χ., την ανομοιότητα του Manhattan ή, γενικότερα, οποιαδήποτε ανομοιότητα τύπου Minkowski ή για κάποιον τύπο συσχέτισης ή συνδιακύμανσης).

Οι Batagelj et al. (1992b, σελ. 70-73) εξέτασαν διάφορα μέτρα ανομοιότητας για τη δομική ισοδυναμία με βάση είτε τη Ευκλείδια είτε την απόσταση Manhattan και απέδειξαν ότι δεν είναι όλα συμβατά με τη δομική ισοδυναμία. Στην πραγματικότητα, έδειξαν ότι μεταξύ αυτών των ανομοιοτήτων μόνον εκείνες, που συσχετίζονται με παρόμοιο τρόπο, όπως η διορθωμένη ανομοιότητα Ευκλείδιου τύπου (Burt και Minor, 1989, στο Batagelj et al., 1992b, σελ. 71), είναι συμβατές με τη δομική ισοδυναμία. Πρέπει να σημειωθεί ότι, σε αυτήν την εργασία, χρησιμοποιούμε τον ίδιο ορισμό της δομικής ισοδυναμίας με αυτόν που παρουσιάζεται από τους Batagelj et al. (1992b, σελ. 65-66). Εννοείται ότι άλλοι ερευνητές μπορεί να χρησιμοποιήσουν ελαφρά διαφορετικούς ορισμούς της δομικής ισοδυναμίας (όπως αναφέραμε πιο πάνω). Και άλλα μέτρα ανομοιότητας (όπως εκείνα που παρουσιάστηκαν πιο πάνω) είναι συμβατά με αυτούς τους ορισμούς.

2.2.4 Κανονική Ισοδυναμία

Δεν υπάρχει κανένα μέτρο ομοιότητας ή ανομοιότητας που να είναι πλήρως συμβατό με την κανονική ισοδυναμία, ομως, υπάρχει ένας αλγόριθμος, που παράγει σε επαναλήψεις μια ακολουθία μέτρων ομοιότητας ή ανομοιότητας (ανάλογα με την περίπτωση) ως προς την κανονική ισοδυναμία (White, 2005). Για τους σκοπούς της μοντελοποίησης σε μπλοκ, ο πίνακας (αν)ομοιοτήτων πρέπει να αναλυθεί χρησιμοποιώντας έναν κατάλληλο αλγόριθμο ομαδοποίησης. Έτσι, έχουν χρησιμοποιηθεί κάποιοι αλγόριθμοι ιεραρχικής ομαδοποίησης. Παραδείγματος χάριν, το πρόγραμμα `UCINET` (Borgatti et al., 1999) χρησιμοποιεί την μέθοδο ιεραρχικής ομαδοποίησης μονής σύνδεσης, για να βρεί ένα κατάλληλο διαμερισμό. Εντούτοις, και άλλοι αλγόριθμοι ομαδοποίησης, όπως η μέθοδος Ward ή η μέθοδος πλήρους σύνδεσης, μπορεί να αποδίδουν καλύτερα.

Η κανονική ισοδυναμία για τα δίκτυα με βάρη υλοποιήθηκε αρχικά με τον αλγόριθμο `REGGE` (White, 1985b, 2005), την πρώτη έκδοση του `REGE`. Εδώ θα συζητήσουμε τις εκδόσεις `REGE`, που σχεδιάστηκαν για δίκτυα με βάρη, με τιμές τουλάχιστον μέσα σε διαστήματα. Όλες οι εκδόσεις έχουν μια κοινή βασική αρχή, την οποία μπορεί να δει κανείς στο πρόγραμμα `FORTAN`, που γράφτηκε από τον White (1985b), για να υλοποιήσει την έννοια της κανονικής ισοδυναμίας, που είχαν εισαγάγει οι White και Reitz (1983).

Μερικές περιγραφές του αλγορίθμου μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία, αλλά δεν είναι ικανοποιητικές. Μια βασική εργασία για το `REGE` γραμμένη από τους White και Reitz (1985b) παραμένει αδημοσίευτη. Επιπλέον, δεν περιγράφει τον αλγόριθμο (White, 1985b), ο οποίος μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα του Douglas R. White (White, 2005), ενώ η περιγραφή των Borgatti και Everett (1993) εστιάζεται πάνω στα δυαδικά δίκτυα και δεν εξηγεί πώς ο ο αλγόριθμος `REGE` μπορεί να χειριστεί τα βάρη των δεσμών. Μερικές επιπρόσθετες εργασίες έχουν γραφτεί (White, 1984a, White, 1980, 1982 και 1984b, στο Borgatti και Everett, 1993) πάνω σε αυτό το θέμα.

Σε αυτή την παράγραφο, δίνουμε την περιγραφή του Žiberna (2007a) για τον αλγόριθμο `REGE` μαζί με κάποιες παραλλαγές του. Εντούτοις, μπορούμε να μάθουμε πολύ περισσότερα μέσω των χρησιμοποιούμενων τύπων στους αλγορίθμους για τον υπολογισμό των ομοιοτήτων ή ανομοιοτήτων ως προς την κανονική ισοδυναμία. Ευτυχώς, οι τύποι και οι σχετικές περιγραφές είναι επαρκείς, για να επιτρέψουν την κατανόηση του αλγόριθμου και των διαφορετικών παραλλαγών του.

Οι αλγόριθμοι `REGE` εκτιμούν την (τον βαθμό της) ισοδυναμία(ς) των μονάδων a και b, προσπαθώντας να ταιριάξουν κάθε σύνδεση (λαμβάνοντας υπόψη τα βάρη) της μονάδας a με την πιο παρόμοια σύνδεση της μονάδος b προς την πιο/μια ισοδύναμη μονάδα και αντίστροφα (κάθε σύνδεση της μονάδας b με την πιο/μια ισοδύναμη σύνδεση της μονάδας a).

Εάν η καλύτερη αντιστοιχία (σύνδεση) δεν έχει τα ίδια βάρη δεσμών (υπάρχουν δύο βάρη ανά σύνδεση) ή εάν η άλλη μονάδα στη σύνδεση της μονάδας a δεν είναι πλήρως ισοδύναμη με την άλλη μονάδα στη σύνδεση της μονάδας b, το λάθος εξαρτάται από τη διαφορά των βαρών των δεσμών, που συγκρίνονται σε σχέση με το μέγεθός και από την ομοιότητα (ως προς την κανονική ισοδυναμία) των άλλων μονάδων στις συγκρινόμενες συνδέσεις. Η κανονική ισοδυναμία δεν απαιτεί οι δύο μονάδες, που είναι ισοδύναμες, να είναι συνδεμένες με τον ίδιο αριθμό ισοδύναμων μονάδων. Οι αλγόριθμοι REGE πιάνουν αυτό το χαρακτηριστικό, επιτρέποντας τις διαφορετικές συνδέσεις του a να μπορούν να ταιριάξουν με την ίδια σύνδεση του b. Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι οι αλγόριθμοι REGE ορίζουν έμμεσα την κανονική ισοδυναμία για δίκτυα με βάρη.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι αλγόριθμοι REGE χρησιμοποιούν μια ελαφρώς διαφορετική ερμηνεία του ορισμού της κανονικής ισοδυναμίας από αυτήν, που χρησιμοποιείται συνήθως στην προσέγγιση της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (και μερικές άλλες προσεγγίσεις) σε αυτή την εργασία. Όμως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η λογική των αλγορίθμων και ακόμη και οι ίδιοι οι αλγόριθμοι μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν στην ερμηνεία της γενικευμένης μοντελοποίησης (Borgatti και Everett, 1993).

2.2.5 Δομική Ομοιότητα

Στην εργασία τους, οι Brandes και Lerner (2004) εισήγαγαν την έννοια της δομικής ομοιότητας, τροποποιώντας τον ορισμό τον ισότιμων διαμερισμών (equitable partitions). Για δυαδικά δίκτυα, οι ισότιμοι διαμερισμοί είναι, στην πραγματικότητα, το ίδιο πράγμα με τον ακριβή χρωματισμό (Everett και Borgatti, 1994, σελ. 43). Οι Brandes και Lerner άλλάζουν την ισοδυναμία με την ομοιότητα και την σχέση ισοδυναμίας με μια προβολή (2004, σελ. 187). Όμως, πρέπει να σημειωθεί ότι οι υπολογιζόμενες ομοιότητες είναι κανονικοποιημένες ομοιότητες. Στην διακριτή περίπτωση, αυτό θα σήμαινε ότι το μέτρο ομοιότητας μεταξύ δύο ισοδύναμων μονάδων ισούται με 1 διαιρούμενο με τον αριθμό των μονάδων στην κλάση ισοδυναμίας τους.

Η δομική ομοιότητα είναι ομοιότητα ως προς κάποια χαρακτηριστικά των γράφων. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό μπορεί να είναι η κεντρικότητα, μια όμοια θέση ως προς τη δομή πυρήνα/περιφέρειας, οι συνεκτικές ομάδες, οι αντίπαλες ομάδες κ.λπ. (Brandes και Lerner, 2004, σελ. 193–194). Το πώς ελέγχεται το ενσωματούμενο χαρακτηριστικό στην ομοιότητα συζητάται πιο κάτω.

Στην εργασία τους οι Brandes και Lerner ανέπτυξαν αυτήν την έννοια μόνο για μη κατευθυνόμενους γράφους. Επέκτειναν την έννοια για την περίπτωση των κατευθυνόμενων γράφων σε μια αδημοσίευτη εργασία (Brandes και Lerner, 2005), που την παρουσίασαν στο συνέδριο Sunbelt XXV. Όμως, αυτή η διαδικασία είναι πιό περίπλοκη και παραμένει μη δοκιμασμένη. Επομένως, η διαδικασία για τους μη κατευθυνόμενους γράφους, που παρουσιάζεται εδώ, είναι βασισμένη στη πρώτη εργασία των Brandes και Lerner (2004), ακολουθώντας μερικές από τις παρατηρήσεις για κατευθυνόμενα δίκτυα, που έκανε ο Žiberna (2007a, σελ. 39-41).

Η διαδικασία βασίζεται σε μια ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα γειτνίασης ενός μη κατευθυνόμενου γράφου. Τα k ιδιοδιανύσματα επιλέγονται, για να αναπαραστήσουν μια προβολή σε ένα k-διάστατο χώρο, που αντιστοιχεί στις k ομάδες της κλασσικής μοντελοποίησης σε μπλοκ. Η επιλογή των κατάλληλων ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων είναι, στην πραγματικότητα, το πιό προβληματικό μέρος της διαδικασίας και θα συζητηθεί αργότερα.

Στη συνέχεια, υπολογίζεται ο πίνακας ομοιότητας ως $P^T P$, όπου P είναι ο πίνακας των επιλεγμένων ιδιοδιανυσμάτων με διαστάσεις $k \times n$, k είναι ο επιλεγμένος αριθμός ιδιοδιανυσμάτων και n είναι, ως συνήθως, ο αριθμός των μονάδων. Όπως αναφέρθηκε, οι προκύτουσες ομοιότητες είναι κανονικοποιημένες με τον τρόπο, που περιγράφηκε πιο πάνω.

Οι δομικές ομοιότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως είσοδος σε κάποια διαδικασία ομαδοποίησης (όπως με όλες τις μεθόδους της έμμεσης μοντελοποίησης σε μπλοκ) και, έτσι, ως βάση για την έμμεση μοντελοποίηση σε μπλοκ. Το πρόβλημα, που θα μπορούσε να προκύψει εδώ, είναι ότι αυτές οι ομοιότητες είναι κανονικοποιημένες και μπορούν μερικές φορές να έχουν επίσης και αρνητικές τιμές. Μια άλλη επιλογή για τον προσδιορισμό του διαμερισμού θα ήταν να χρησιμοποιηθούν τα επιλεγμένα ιδιοδιανύσματα ως είσοδος σε μια κατάλληλη μέθοδο ομαδοποίησης (όπως των k-μέσων) ή να υπολογιστεί ένα μέτρο ανομοιότητας (όπως η Ευκλείδια απόσταση) πάνω σε επιλεγμένα ιδιοδιανύσματα και να χρησιμοποιηθεί αυτό ως είσοδος για μια κατάλληλη μέθοδο ομαδοποίησης (όπως κάποια μέθοδος ιεραρχικής ομαδοποίησης). Οι δύο μέθοδοι (των ιδιοδιανυσμάτων και της ομοιότητας) δεν παράγουν απαραίτητα τα ίδια αποτελέσματα. Όμως, αυτό αντιφάσκει τη βασική ιδέα των Brandes και Lerner (2004, σελ. 185), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι "χρειαζόμαστε μια έννοια ομοιότητας κορυφών (μονάδων), παρά μια ισοδυναμία".

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η δυσκολότερη φάση αυτής της διαδικασίας είναι η επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων και των αντίστοιχων ιδιοτιμών. Η επιλογή των ιδιοτιμών προσδιορίζει τα δομικά χαρακτηριστικά του γράφου, τα οποία η ομοιότητα και τα ιδιοδιανύσματα αναπαριστούν. Οι Brandes και Lerner (2004, σελ. 193–194) δίνουν δύο κανόνες επιλογής των ιδιοδιανυσμάτων. Εάν αναζητούνται k-συνεκτικές ομάδες, επιλέξτε τις k μεγαλύτερες ιδιοτιμές.

Εάν αναζητείται μια δομή πυρήνα/περιφέρειας, επιλέξτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη ιδιοτιμή.

Μολονότι στην αρχή του άρθρου τους εισάγουν τη δομική ομοιότητα ως μια τροποποίηση των ισότιμων διαμερισμών, πρέπει να υπογραμμιστεί ότι δεν υπάρχει καμία (ακριβής) διαδικασία, για να δώσει έναν ισότιμο διαμερισμό (ή έναν ακριβή χρωματισμό) ή ένα μέτρο (όπου η ακριβής προσαρμογή δεν υπάρχει) του ισότιμου διαμερισμού. Εάν ο ακριβής χρωματισμός υπάρχει, μπορεί να προκύψει με την επιλογή κατάλληλων ιδιοτιμών και των αντιστοίχων ιδιοδιανυσμάτων, αλλά όμως δεν υπάρχει κανένας κανόνας ως για το ποιές ιδιοτιμές να επιλεγούν.

Για κατευθυνόμενους γράφους, οι Brandes και Lerner (2005) προτείνουν μια παρόμοια διαδικασία. Πάλι, ο πίνακας αναλύεται, αλλά τώρα χρησιμοποιείται η ανάλυση Schur. Επιλέγονται κατάλληλα διανύσματα Schur με βάση τις ιδιοτιμές. Εισάγονται δύο νέοι τύποι ομοιότητας: η εισερχόμενη–δομική και η εξερχόμενη–δομική ομοιότητα. Όταν μια ομοιότητα είναι και εισερχόμενη– και εξερχόμενη–δομική, τότε λέγεται δομική ομοιότητα. Αυτές οι ομοιότητες δεν έχουν ακόμα δοκιμαστεί και μερικές από τις προτάσεις, που προτείνονται για μη κατευθυνόμενους γράφους, μπορεί να μην ισχύουν. Στην εργασία τους του 2005, οι Brandes και Lerner μελετούν επίσης την ευστάθεια και τη σημασία των δομικών ομοιοτήτων.

Οι δομικές ομοιότητες αντιπροσωπεύουν μια ενδιαφέρουσα νέα οικογένεια ομοιοτήτων ως προς τα δομικά χαρακτηριστικά των μονάδων σε ένα δίκτυο. Όμως, χρειάζεται να υπάρχει μια σαφέστερη κατανόηση της σημασίας τους. Αυτό έχει μεγαλύτερο νόημα για την περίπτωση των κατευθυνόμενων δικτύων. Οι δομικές ομοιότητες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην προσέγγιση της έμμεσης μοντελοποίησης σε μπλοκ, μολονότι αυτό έρχεται σε αντίθεση με τη βασική ιδέα των συγγραφέων (Brandes και Lerner, 2004, σελ. 185), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι ομοιότητες είναι πιό χρήσιμες από τις ισοδυναμίες.

2.2.6 Παρατηρήσεις

Στο δεύτερο τμήμα του Κεφαλαίου 2, έχουμε κάνει μια ανασκόπηση των έμμεσων προσεγγίσεων της μοντελοποίησης σε μπλοκ. Πρώτα εξετάσαμε τον αλγόριθμο `CONCOR` (Breiger et al., 1975), ο οποίος όμως δεν αποτελεί μια κλασσική έμμεση προσέγγιση με τη στενή έννοια. Στη συνέχεια, δώσαμε την περιγραφή της διαδικασίας, που χαρακτηρίζει τις έμμεσες προσεγγίσεις, και των ομοιοτήτων και ανομοιοτήτων, που χρησιμοποιούνται συχνότερα σε τέτοιες προσεγγίσεις. Ακολούθως, κάναμε μια σύντομη επισκόπηση της έννοιας της κανονικής ισοδυναμίας και του αλγορίθμου `REGE` για την μέτρηση των ομοιοτήτων και ανομοιοτήτων ως προς την κανονική ισοδυναμία. Στο τέλος, παρουσιάστηκε η έννοια των δομικών ομοιοτήτων (Brandes και Lerner, 2004) ως μια ενδιαφέρουσα νέα οικογένεια ομοιοτήτων. Βέβαια, η έννοια αυτή είναι πολύ σημαντική για την περίπτωση των κατευθυνόμενων δικτύων.

2.3 Άμεσες Προσεγγίσεις

Ο ορισμός των άμεσων προσεγγίσεων, που χρησιμοποιείται εδώ, προέρχεται από τους Batagelj et al. (1992b, σελ. 66) και είχε παρουσιαστεί στο τέλος του πρώτου τμήματος του κεφαλαίου αυτού. Οι άμεσες προσεγγίσεις αναζητούν απευθείας έναν διαμερισμό του δικτύου, ο οποίος ταιριάζει καλύτερα στην επιλεγόμενη ισοδυναμία. Η προσαρμογή του διαμερισμού στην επιλεγόμενη ισοδυναμία μετράται από μια επιλεγόμενη συνάρτηση κριτηρίου.

Η επιλεγόμενη συνάρτηση κριτηρίου πρέπει να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας μόνο τα δικτυακά δεδομένα (και τον διαμερισμό, τον οποίο αυτή αξιολογεί) και πρέπει να μετρά το βαθμό, στον οποίο ένας ο επιλεγόμενος διαμερισμός των μονάδων σε ένα δοθέν δίκτυο αντιστοιχεί στην επιλεγόμενη ισοδυναμία ή σε άλλα επιθυμητά χαρακτηριστικά.

Στο τμήμα που ακολουθει, θα γίνει μια ιστορική αναδρομή και μια περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών των άμεσων προσεγγίσεων, μαζί με διάφορα παραδείγματα από τη σχετική βιβλιογραφία. Θα εξεταστούν δυο προσεγγίσεις, που περιέχονται σε αυτήν την κατηγορία προσεγγίσεων μοντελοποίησης σε μπλοκ. Η πρώτη είναι η προσέγγιση, που εισήχθηκε από τους Breiger και Mohr (2004). Αυτή είναι μια προσέγγιση μοντελοποίησης σε μπλοκ σύμφωνα με τη δομική ισοδυναμία των πινάκων διασταύρωσης, βασισμένη σε log-γραμμικά μοντέλα. Αυτή η προσέγγιση θα μελετηθεί για την περίπτωση των δικτύων με βάρη.

Η δεύτερη προσέγγιση, που ανασκοπείται στη συνέχεια, είναι η προσέγγιση της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ. Ενώ αυτή η προσέγγιση εισάγεται πιό λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο, εδώ, απλώς θα αναφέρουμε τα γενικά χαρακτηριστικά της και τη θέση της μεταξύ των άμεσων προσεγγίσεων μοντελοποίησης σε μπλοκ.

2.3.1 Εισαγωγή στις Άμεσες Προσεγγίσεις

Η άμεση προσέγγιση μοντελοποίησης σε μπλοκ εισήχθη αρχικά σε τρεις εργασίες στο περιοδικό *Social Networks*, τόμος 14 του 1992 (Batagelj et al., 1992b, Batagelj et al., 1992a, Borgatti και Everett, 1992b). Η πρώτη εργασία (Batagelj et al., 1992b) εισήγαγε τις άμεσες μεθόδους για τη δομική ισοδυναμία και τις σύγκρινε με τις έμμεσες μεθόδους, ενώ η δεύτερη (Batagelj et al., 1992a) εισήγαγε τις μεθόδους για την κανονική ισοδυναμία. Η τρίτη εργασία (Borgatti και Everett, 1992b) δεν εστιάστηκε στις άμεσες μεθόδους, όμως εισήγαγε ένα εναλλακτικό μέτρο προσαρμογής για τα δομικά μοντέλα των μπλοκ, το οποίο μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και σε δίκτυα με βάρη (Borgatti και Everett, 1992b, σελ. 101).

Αυτές οι πρώτες χρήσεις των έμμεσων προσεγγίσεων στόχευαν στη επίτευξη μιας καλύτερης λύσης, από αυτή που θα μπορούσε να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας τις έμμεσες μεθόδους, ή εξασφαλίζοντας τουλάχιστον το γεγονός ότι ο διαμερισμός, που προκύπτει, είναι τουλάχιστον τοπικά βέλτιστος. Επειδή οι άμεσες μέθοδοι ενσωματώνουν μια συνάρτηση κριτηρίου στη διαδικασία αναζήτησης του βέλτιστου διαμερισμού, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι, εάν ελέγξουμε όλους τους πιθανούς διαμερισμούς, θα βρεθεί ο βέλτιστος διαμερισμός/(οι). Καμία τέτοια εγγύηση δεν προσφέρεται από τις έμμεσες μεθόδους. Όμως, λόγω του μεγάλου αριθμού[2] των πιθανών διαμερισμών, η πλήρης ή εξαντλητική αναζήτηση είναι συνήθως αδύνατη. Επομένως, οι έμμεσες μέθοδοι συνήθως είτε μόνο βελτιστοποιούν (προσπαθούν να βελτιώσουν) ένα υπάρχοντα διαμερισμό (π.χ., έναν διαμερισμό, που προκύπτει χρησιμοποιώντας τις έμμεσες μεθόδους) είτε χρησιμοποιούν κάποιο αλγόριθμο αναζήτησης μέσα σε ένα χώρο πιθανών διαμερισμών. Τέτοιες μέθοδοι είναι:

- Η τοπική αναζήτηση με διάφορους (συνήθως τυχαία επιλεγμένους) αρχικούς διαμερισμούς (αυτή είναι η διαδικασία, που χρησιμοποιείται στις προτεινόμενες εδώ μεθόδους, αν και οποιαδήποτε άλλη θα μπορούσε επίσης να χρησιμοποιηθεί).
- Η προσομοιούμενη ανόπτηση (simulating annealing) (Kirkpatrick and Vecchi, 1983).
- Η αναζήτηση Tabu (Glover, 1989).
- Και η μέθοδος των γενετικών αλγορίθμων (Goldberg, 1989).

Όμως, το ενσωματωμένο μέτρο προσαρμογής και η δυνατότητα εύρεσης καλύτερων διαμερισμών είναι μόνο μερικά από τα πλεονεκτήματα των άμεσων μεθόδων. Σε αυτές τις πρώτες χρήσεις τους, αναζητιόταν μια λύση με τις ίδιες ιδιότητες (συνήθως της δομικής ή κανονικής ισοδυναμίας), όπως εκείνες που θα μπορούσαν να βρεθούν με τις έμμεσες μεθόδους. Το δεύτερο πλεονέκτημα βρίσκεται στην ευελιξία των άμεσων μεθόδων. Οι άμεσες μέθοδοι μπορούν να αναπτυχθούν για την εύρεση διαμερισμών με πολύ συγκεκριμένες ιδιότητες. Όλα όσα απαιτούνται είναι μια συνάρτηση κριτηρίου, η οποία να μετρά πόσο ένας συγκεκριμένος διαμερισμός είναι παρόμοιος (ή διαφορετικός) σε σχέση με την ιδανική λύση ή τις ιδιότητες της επιδιωκόμενης λύσης. Κατόπιν, μπορεί

[2] Ο αριθμός των διαμερισμών είναι ο αριθμός Stirling του δεύτερου είδους (Everitt et al., 2001) και αυξάνεται πολύ γρήγορα με τον αριθμό των μονάδων και τον αριθμό των ομάδων. Παραδείγματος χάριν, υπάρχουν 511 πιθανοί διαμερισμοί 10 μονάδων σε 2 ομάδες, 9330 πιθανοί διαμερισμοί 10 μονάδων σε 3 ομάδες και 16383 πιθανοί διαμερισμοί 15 μονάδων σε 2 ομάδες. Εάν αυξήσουμε τον αριθμό των μονάδων σε 30 και τον αριθμό των ομάδων σε 4 (που είναι ακόμα ένα πολύ μικρό δίκτυο και ένας σχετικά μικρός αριθμός ομάδων), ο αριθμός πιθανών διαμερισμών αυξάνεται σε περίπου $4.8 \cdot 10^{16}$.

να χρησιμοποιηθεί κάποια διαδικασία αναζήτησης, για να βρεθεί ένας διαμερισμός, ο οποίος θα θέλαμε να μεγιστοποιεί (ή να ελαχιστοποιεί) την τιμή της επιλεγμένης συνάρτησης κριτηρίου.

Για παράδειγμα, ο Freeman (1993) προσπάθησε να βρεί τις ομάδες (clusters), που αντιστοιχούν στον ορισμό του Homans (1950, σελ. 84, στον Freeman, 1993, σελ. 227) της ομάδας (group). Έτσι κατασκεύασε μια συνάρτηση κριτηρίου (που την ονόμασε"συνάρτηση καταλληλότητας [fitness]") πιστεύοντας ότι αυτή αντιστοιχεί καλύτερα σε εκείνον τον ορισμό της ομάδας (καλύτερα ως προς την καταλληλότητα του διαμερισμού) και, κατόπιν, χρησιμοποίησε έναν απλό γενετικό αλγόριθμο, για να βρεί τον διαμερισμό, που μεγιστοποιεί εκείνη την συνάρτηση κριτηρίου.

Παρόμοια, οι Borgatti και Everett (1999) χρησιμοποίησαν μια άλλη άμεση μέθοδο, για να βρούν τις δομές πυρήνα/περιφέρειας. Με κάποιον τρόπο παρήγαγαν τον επιθυμητό πίνακα εικόνας (ή γράφο) και αναζήτησαν, κατόπιν, ένα διαμερισμό, που ταιριάζει καλύτερα σε εκείνη την εικόνα. Χρησιμοποίησαν σαν τη συνάρτηση κριτηρίου τη συσχέτιση μεταξύ των αναμενόμενων τιμών με βάση τον πίνακα εικόνας (και τον εκτιμούμενο διαμερισμό) και των παρατηρούμενων τιμών. Στη συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποιος αλγόριθμος αναζήτησης, για να βρεθεί ο διαμερισμός με τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου.

2.3.2 Δομική Ισορροπία για Πίνακες Διασταυρώσεων

Οι Breiger και Mohr (2004) εισήγαγαν κάποιες μεθόδους, που βασίζονται σε log-γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης για τον υπολογισμό της δομικής ισοδυναμίας ενός δικτύου με βάρη, στο οποίο τα βάρη αντιπροσωπεύουν μετρήσεις. Η βάση του μοντέλου είναι ένα log-γραμμικό μοντέλο:

$$\ln F_{ij} = u + u_i^R + u_j^C + u_{ii}^D + u_{ij}^{RC},$$

όπου:

- F_{ij} είναι οι εκτιμούμενες αριθμήσεις (μετρήσεις) στοιχείων, όπου τα i και j είναι οι δείκτες γραμμών και στηλών, αντιστοίχως,
- u είναι ένας όρος αποκοπής ή γενικών επιδράσεων,
- u_i^R και u_j^C συμβολίζουν τις επιδράσεις γραμμών και στηλών,
- u_{ii}^D συμβολίζουν τις διαγώνιες αλληλεπιδράσεις και u_{ij}^{RC} τις μη διαγώνιες αλληλεπιδράσεις.

Εάν οι όροι u_{ii}^D και u_{ij}^{RC} τεθούν ίσοι με μηδέν, τότε το μοντέλο θα απλοποιούταν στο μοντέλο της απλής ανεξαρτησίας. Αυτό το μοντέλο γίνεται ένα μοντέλο της δομικής ισοδυναμίας για δίκτυα με βάρη, όταν επιβάλλουμε τους ακόλουθους περιορισμούς (Bian et al., 2005):

$$\begin{aligned} u_{ii}^{D} &= u_{k}^{D}, \text{ για } i \in \text{ στην ομάδα } C_k, \text{ και} \\ u_{ij}^{RC} &= u_{R(C_k,C_l)}^{RC}, \text{ για } (i,j) \in \text{ στο μπλοκ } R(C_k,C_l). \end{aligned}$$

Υπάρχουν επίσης και άλλοι περιορισμοί για τον υπολογισμό ειδικών περιπτώσεων δομικής ισοδυναμίας. Για παραδείγματα, δείτε Breiger και Mohr (2004, σελ. 24-26). Στην εργασία τους οι Breiger και Mohr (2004, σελ. 24) προτείνουν ως μέτρο προσαρμογής τις στατιστικές χ^2 λόγου πιθανοφάνειας. Με αυτήν την συνάρτηση κριτηρίου (στατιστικές χ^2), διάφοροι διαμερισμοί μπορούν να συγκριθούν και να υπολογισθούν ως προς τη δομική ισοδυναμία σε δίκτυα με βάρη. Για την εύρεση ενός βέλτιστου διαμερισμού, μπορούν να χρησιμοποιθούν οι άμεσες μέθοδοι, που παρουσιάστηκαν πιο πριν.

Επιπλέον, οι Breiger και Mohr (2004, σελ. 30-35) προτείνουν μια συσσωρευτική ιεραρχική μέθοδο για την ομαδοποίηση μονάδων ως προς τη δομική ισοδυναμία. Ο αλγόριθμος, που περιγράφεται στην εργασία τους, αναπτύσσεται για διμερή δίκτυα, αλλά δίνεται επίσης και ένας παρόμοιος αλγόριθμος για μονομερή δίκτυα. Ο αλγόριθμος σε κάθε βήμα συνδέει τις δύο μονάδες, που παράγουν ένα μοντέλο, το οποίο είναι το λιγότερο σημαντικά χειρότερο από το προηγούμενο μοντέλο (έχει τη μεγαλύτερη τιμή p).

2.3.3 Γενικευμένη Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

Οι Batagelj, Doreian και Ferligoj ακολούθησαν μια άλλη μέθοδο. Αντί της κατασκευής μιας εξειδικευμένης συνάρτησης κριτηρίου για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, ανέπτυξαν ένα πλαίσιο, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση διάφορων προβλημάτων παρομοίων με εκείνα που παρουσιάζονται πιο πάνω. Οι Doreian et al. (1994) εισήγαγαν την έννοια της γενικευμένης ισοδυναμίας και διάφορους τύπους μπλοκ. Πρώτα, συνοπτικά ο Batagelj (1997) και μετά πιό λεπτομερώς οι Batagelj et al. (1998) εισήγαγαν μια μέθοδο προκαθορισμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυσει ενός ευρέως φάσματος προβλημάτων. Αυτό περιλαμβάνει την εύρεση της δομής πυρήνα/περιφέρειας, όπως στους Borgatti και Everret (1999), των συνεκτικών υποομάδων (αν και με έναν ελαφρώς διαφορετικό ορισμό από αυτόν, που χρησιμοποιεί ο Freeman 1993), των ιεραρχικών δομών (π.χ., Batagelj et al. 1998, σελ. 203–205), της συμμετρικής–ακυκλικής ανάλυσης (Doreian et al., 2000) και άλλων προβλημάτων. Ονόμασαν την προσέγγισή τους "γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ" και πρόσφατα δημοσίευσαν ένα βιβλίο με τον ίδιο τίτλο (Doreian et al., 2005) το οποίο δίνει μια εκτενή ανασκόπηση της μεθόδου αυτής. Αυτή η προσέγγιση, για την περίπτωση των δικτύων με βάρη, θα παρουσιαστεί χωριστά στο επόμενο κεφάλαιο.

2.3.4 Παρατηρήσεις

Σε αυτό το τρίτο τμήμα του Κεφαλαίου 2, κάναμε μια ανασκόπηση της ιστορίας και των βασικών χαρακτηριστικών των άμεσων προσεγγίσεων μοντελοποίησης σε μπλοκ. Ταυτοποιήσαμε επίσης διάφορες προσεγγίσεις από τη βιβλιογραφία, που εμπίπτουν στην κατηγορία αυτή. Σε δύο από αυτές δόθηκε ειδική προσοχή. Μια από αυτές είναι η προσέγγιση των Breiger και Mohr (2004) για την εύρεση της δομικής ισοδυναμίας σε πίνακες διασταυρώσεων. Εξετάστηκε ειδικά εδώ, δεδομένου ότι αποτελεί μια νέα προσέγγιση, που ταιριάζει για τα δίκτυα με βάρη. Η δεύτερη άμεση προσέγγιση, που εισήχθη σε αυτό το τμήμα, είναι η γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Αυτή θα παρουσιαστεί με περισσότερες λεπτομέρειες στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3

Γενικευμένη Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

3.1 Η Κλασσική Μέθοδος

Για τη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ ήδη αναφέραμε κάποια πράγματα στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τώρα θα κάνουμε μια λεπτομερή ανασκόπηση της υπάρχουσας θεωρίας. Επιπλέον, θα παρουσιαστούν κάποιες έννοιες, που θα χρησιμοποιηθούν πιο κάτω στο κεφάλαιο αυτό. Στο δεύτερο τμήμα του Κεφαλαίου 3, θα αναφερθούμε σε κάποιες νέες προσεγγίσεις και σε άλλες εξελίξεις, που προκύπτουν από τις μελέτες του Žiberna (2007a), στον τομέα της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ δικτύων με βάρη.

3.1.1 Εισαγωγή

Οι Doreian et al. (2005, σελ. 25-26) δηλώνουν ότι υπάρχουν τρία κύρια χαρακτηριστικά της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (σε σύγκριση με αυτό που αποκαλούν συμβατική μοντελοποίηση σε μπλοκ):

- η άμεση προσέγγιση είναι μια προσέγγιση βελτιστοποίησης (ο αλγόριθμος δουλεύει απευθείας με δικτυακά δεδομένα και δεν τα μετατρέπει σε κάποια άλλη μορφή),
- ένα πολύ ευρύτερο σύνολο τύπων μπλοκ χρησιμοποιείται, για να ορίσει την ισοδυναμία, αντί λίγων τύπων ισοδυναμίας, και
- το μοντέλο μπορεί να προκαθοριστεί (όχι μόνο οι τύποι μπλοκ, αλλά και οι θέσεις τους).

Επειδή, εκτός από την προσέγγιση αυτή της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, παρουσιάζουμε εδώ και άλλες προσεγγίσεις. Έτσι, εισάγεται η έννοια του τύπου της (γενικευμένης) μοντελοποίησης σε μπλοκ. Διακρίνονται διάφοροι τύποι γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ: δυαδική[1], με βάρη, ομοιογενής και πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Στην περίπτωση της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ, ορίζονται δύο υποκατηγορίες: μοντελοποίηση σε μπλοκ αθροίσματος τετραγώνων και απολύτων αποκλίσεων. Ο στόχος της εργασίας μας είναι να συζητήσουμε την μοντελοποίηση σε μπλοκ δικτύων με βάρη. Επομένως, η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ εξετάζεται μόνο σαν βάση για την ανάπτυξη των κατάλληλων προσεγγίσεων της μοντελοποίησης σε μπλοκ των δικτύων με βάρη. Χρησιμοποιείται επίσης για μια σύγκριση με τις προτεινόμενες προσεγγίσεις.

Η σημαντικότερη διαφορά μεταξύ των τεσσάρων κύριων τύπων της μοντελοποίησης σε μπλοκ βρίσκεται στον κατάλληλο ορισμό των ασυνεπειών των εμπειρικών μπλοκ σε σχέση με τα ιδανικά μπλοκ. Ο τρόπος υπολογισμού των ασυνεπειών μας επιβάλει να λάβουμε υπόψη το γεγονός ότι οι τιμές (βάρη) στους δεσμούς σε ένα δίκτυο με βάρη μετριούνται τουλάχιστον μέσα σε διαστήματα. Επομένως, τα ιδανικά μπλοκ πρέπει επίσης να επανα-οριστούν. Αυτό θα συζητηθεί στο επόμενο τμήμα του κεφαλαίου αυτού.

Στη δυαδική μοντελοποίηση, που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια, αναλύονται τα δυαδικά δίκτυα και, τότε, η συνάρτηση κριτηρίου μετρά τις ασυνέπειες των μπλοκ πρωταρχικά μέσω του αριθμού των λαθών. Οι άλλοι τρεις κύριοι τύποι αναλύουν τα δίκτυα με βάρη. Παρουσιάζονται κυρίως στο επόμενο τμήμα του κεφαλαίου αυτού, μολονότι οι ιδέες των Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 11-13) για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ θα παρουσιαστούν λίγο πιο κάτω στο παρόν τμήμα. Η συνάρτηση κριτηρίου της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη μετρά τις ασυνέπειες των μπλοκ ως την απόκλιση των κατάλληλων τιμών (βαρών)[2] είτε από το 0 είτε από την τιμή της παραμέτρου m. Η συνάρτηση κριτηρίου της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ είναι παρόμοια, όμως, η τιμή της παραμέτρου m αντιστοιχεί στο μέγιστο του μπλοκ (ή μερικές φορές μόνο μιας αναλυόμενης γραμμής ή στήλης στο εσωτερικό του μπλοκ). Οι συναρτήσεις κριτηρίου και των δύο τύπων ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ μετρούν τις ασυνέπειες των μπλοκ μέσω της μεταβλητότητας των κατάλληλων τιμών. Το τι είναι αυτές οι *κατάλληλες τιμές* εξαρτάται από το ιδανικό μπλοκ, σε σχέση με το οποίο υπολογίζονται οι ασυνέπειες, ενώ, όμως, πάντοτε υπολογίζονται με βάση τις τιμές των στοιχείων του εν λόγω μπλοκ.

[1] Ο όρος δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ χρησιμοποιείται για την γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ δυαδικών δικτύων, όπως μελετήθηκε από τους Doreian et al. (2005)

[2] Το ποιες είναι οι κατάλληλες τιμές καθορίζεται στο ιδανικό μπλοκ, από το οποίο οι ασυνέπειες για το επιλεγόμενο εμπειρικό μπλοκ θα υπολογιστούν. Αυτά τα βάρη πάντα βασίζονται στις τιμές των δεσμών στο επιλεγόμενο εμπειρικό μπλοκ.

3.1.2 Η Συνάρτηση Κριτηρίου

Ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων των τύπων μοντελοποίησης σε μπλοκ είναι ότι υπάρχει μια βασική συνάρτηση κριτηρίου. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η χρησιμοποιούμενη συνάρτηση κριτηρίου στη μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι μια συνάρτηση, που εκτιμά τον διαμερισμό με βάση τα δικτυακά δεδομένα, και επιστρέφει μια τιμή. Στη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, η συνάρτηση κριτηρίου μπορεί να παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές. Ο διαμερισμός με τη χαμηλότερη τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι ο καλύτερος, ενώ η μηδενική τιμή της συνάρτησης κριτηρίου σημαίνει ότι ο διαμερισμός ταιριάζει τέλεια με την επιθυμητή ισοδυναμία.

Το μόνο σημείο, στο οποίο η συνάρτηση κριτηρίου αλλάζει μεταξύ των διαφορετικών τύπων μοντελοποίησης σε μπλοκ, είναι εκείνο, όπου υπολογίζονται οι ασυνέπειες ως προς τα ιδανικά μπλοκ. Σε αυτό το τμήμα του κεφαλαίου, θα παρουσιάσουμε το σημείο αυτό. Αυτό εισήχθηκε από τους Batagelj et al. (1992b, σελ. 79) και Batagelj et al. (1992a, σελ. 124) και κατόπιν επεκτάθηκε από τους Doreian et al. (1994, σελ. 7-8). Μια πλήρης περιγραφή μπορεί επίσης να βρεθεί στο βιβλίο Doreian et al. (2005, σελ. 185–187, 223–226).

Ας επαναλάβουμε πρώτα μερικούς ορισμούς και συμβολισμούς (για το δίκτυο, το διαμερισμό και τα μπλοκ) και να ορίσουμε τον συμβολισμό των ιδανικών μπλοκ:

- Το δίκτυο είναι $N = (U, R)$, όπου U είναι το σύνολο όλων των μονάδων $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ και R είναι η σχέση μεταξύ αυτών των μονάδων, $R \subseteq U \times U$.

- Στη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, η σχέση R συνήθως αναπαρίσταται από έναν πίνακα $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{m \times n}$, όπου το r_{ij} δηλώνει την τιμή (ή βάρος) της σύνδεσης από την μονάδα i στη μονάδα j.

- $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ είναι ένας διαμερισμός του συνόλου U. Με Φ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών διαμερισμών. Ένας διαμερισμός $\mathbf{C}$ επίσης διαμερίζει τη σχέση R σε μπλοκ, $R(C_i, C_j) = R \cap C_i \times C_j$. Κάθε τέτοιο μπλοκ $R(C_i, C_j)$ αποτελείται από μονάδες, που ανήκουν στις ομάδες C_i και C_j και όλες τις συνδέσεις, που οδηγούν από την ομάδα C_i στην ομάδα C_j. Αν $i = j$, το μπλοκ $R(C_i, C_i)$ ονομάζεται διαγώνιο μπλοκ.

- Συμβολίζουμε με $T(C_i, C_j)$ το σύνολο των ιδανικών μπλοκ (από όλα τα επιτρεπτά είδη μπλοκ), το οποίο αντιστοιχεί στο μπλοκ $R(C_i, C_j)$.

- $w(T)$ είναι το βάρος, που δίνεται στον τύπο μπλοκ T. Συνήθως όλα αυτά τα βάρη θέτονται ίσα με 1, αν και διαφορετικά βάρη μπορούν να δοθούν σε διαφορετικούς τύπους μπλοκ.

Η ασυνέπεια για τον τύπο μπλοκ $\delta(R(C_i, C_j), T)$ μετρά την ασυνέπεια (απόκλιση) του εμπειρικού μπλοκ $R(C_i, C_i)$ σε σχέση με (από) ένα ιδανικό μπλοκ $T \in T(C_i, C_j)$. Αυτός ο όρος μπορεί επίσης να κανονικοποιηθεί, για να αποκλείσει την επίδραση του μεγέθους του μπλοκ, διαιρώντας τον με τον αριθμό των στοιχείων του μπλοκ.

Η ασυνέπεια για τον τύπο του μπλοκ $p(C_i, C_j)$ ορίζεται ως εξής:

$$p(C_i, C_j) = \min_{T \in T(C_i, C_j)} (w(T)\delta(R(C_i, C_j), T).$$

Η *συνάρτηση κριτηρίου* ορίζεται ως η ολική ασυνέπεια $P(\mathbf{C})$ για κάθε μπλοκ της ομαδοποίησης (διαμερισμού) $\mathbf{C}$, δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα των ασυνεπειών για τον τύπο του μπλοκ:

$$P(\mathbf{C}) = \sum_{C_i, C_j \in \mathbf{C}} p(C_i, C_j).$$

Η συνάρτηση κριτηρίου $P(\mathbf{C})$ έχει επίσης τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $P(\mathbf{C}) \geq 0$,
2. $P(\mathbf{C}) = 0$, αν και μόνο αν ο διαμερισμός $\mathbf{C}$ ταιριάζει απόλυτα στην επιλεγόμενη ισοδυναμία, που ορίζεται από τα επιτρεπτά είδη μπλοκ και προαιρετικά από τις θέσεις τους στο μοντέλο των μπλοκ.

Η δεύτερη ιδιότητα ονομάζεται ευαισθησία της συνάρτησης κριτηρίου. Εάν μια συνάρτηση κριτηρίου δεν είναι ευαίσθητη, η τιμή 0 της συνάρτησης κριτηρίου δεν δείχνει απαραίτητα ότι το δίκτυο και ο διαμερισμός ταιριάζουν τέλεια με την επιλεγόμενη ισοδυναμία.

Αυτοί οι ορισμοί ισχύουν για όλους τους τύπους της (γενικευμένης) μοντελοποίησης σε μπλοκ. Η διαφορά μεταξύ διαφορετικών τύπων μοντελοποίησης σε μπλοκ βρίσκεται στις περιγραφές των ιδανικών μπλοκ των διαφορετικών τύπων και στους ορισμούς των ασυνεπειών για αυτούς τους τύπους μπλοκ. Αυτό καλύπτεται στην επόμενη παράγραφο για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και για τους άλλους τύπους, πιο κάτω στο παρόν κεφάλαιο.

Για να διευκρινιστεί ο ορισμός και η χρήση των εννοιών του τύπου μπλοκ, του ιδανικού μπλοκ, του εμπειρικού μπλοκ, της ασυνέπειας του τύπου μπλοκ και της ασυνέπειας του μπλοκ, σε αυτήν την εργασία, δίνεται η ακόλουθη εξήγηση.

Ένας τύπος μπλοκ είναι ένας τύπος σύνδεσης μεταξύ δύο ομάδων (ή μέσα σε μια ομάδα). Ορίζεται από την περιγραφή της δομής των δεσμών και, για τα δίκτυα με βάρη, επίσης από τα βάρη των δεσμών, που είναι παρόντες στο ιδανικό μπλοκ αυτού του τύπου. Επομένως, ένα ιδανικό μπλοκ ενός δεδομένου τύπου είναι ένα μπλοκ, που τέλεια ταιριάζει με εκείνη την περιγραφή του τύπου του μπλοκ. Καθώς το ιδανικό μπλοκ ενός δοθέντος τύπου ορίζει τον αντίστοιχο τύπο του μπλοκ, ισχύει και το αντίστροφο. Ένα εμπειρικό μπλοκ ενός δοθέντος τύπου είναι το εμπειρικό μπλοκ, το οποίο είχε ταξινομηθεί ότι ήταν εκείνου του τύπου κατά την εφαρμογή της (γενικευμένης) μοντελοποίησης σε μπλοκ.

Οι διαφορετικοί τύποι μπλοκ για τα δυαδικά δίκτυα είναι τα πλήρη μπλοκ, τα μηδενικά μπλοκ, τα κανονικά μπλοκ, τα μπλοκ κανονικής-γραμμής και κανονικής-στήλης, τα μπλοκ κυρίαρχης-γραμμής και κυρίαρχης-στήλης και τα μπλοκ λειτουργικής-γραμμής και λειτουργικής-στήλης. Οι ορισμοί δίνονται στο βιβλίο Doreian et al. (2005, σελ. 14-15, 211–213) και είναι οι εξής (δείτε και Πίνακα 3.1):

- Ένα μπλοκ λέγεται **πλήρες** (**complete**), αν όλα τα στοιχεία του πίνακα του μπλοκ είναι 1.
- Ένα μπλοκ λέγεται **μηδενικό** (**null**), αν όλα τα στοιχεία του πίνακα του μπλοκ είναι 0.
- Ένα μπλοκ λέγεται **κανονικό** (**regular**), αν υπάρχει τουλάχιστον ένα 1 σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πίνακα του μπλόκ.
- Ένα μπλόκ λέγεται **κανονικής-γραμμής** (**row-regular**), αν υπάρχει τουλάχιστον ένα 1 σε κάθε γραμμή του πίνακα του μπλοκ.
- Ένα μπλόκ λέγεται **κανονικής-στήλης** (**column-regular**), αν υπάρχει τουλάχιστον ένα 1 σε κάθε στήλη του πίνακα του μπλοκ.
- Ένα μπλοκ λέγεται **κυρίαρχης-γραμμής** (**row-dominant**), αν υπάρχει τουλάχιστον μια γραμμή με όλα τα στοιχεία της 1 στον πίνακα του μπλοκ.
- Ένα μπλοκ λέγεται **κυρίαρχης-στήλης** (**column-dominant**), αν υπάρχει τουλάχιστον μια στήλη με όλα τα στοιχεία της 1 στον πίνακα του μπλοκ.
- Ένα μπλοκ λέγεται **λειτουργικής-γραμμής** (**row-functional**), αν υπάρχει ακριβώς ένα 1 σε κάθε γραμμή του πίνακα του μπλοκ.
- Ένα μπλοκ λέγεται **λειτουργικής-στήλης** (**column-functional**), αν υπάρχει ακριβώς ένα 1 σε κάθε στήλη του πίνακα του μπλοκ.

Ένας τύπος μπλοκ δοθέντος ονόματος αναφέρεται ως *ονομαστικός* τύπος μπλοκ, όπου το *ονομαστικός* αντικαθίσταται από το όνομα του εν λόγω τύπου μπλοκ. Η λέξη *τύπος* παραλείπεται μερικές φορές, έτσι ώστε το *ονομαστικός*

	Y				
	1	1	1	1	1
X	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1

πλήρης

	Y				
	0	1	0	0	0
X	1	1	1	1	1
	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0

κυρίαρχης-γραμμής

	Y				
	0	0	1	0	0
X	0	0	1	1	0
	1	1	1	0	0
	0	0	1	0	1

κυρίαρχης-στήλης

	Y				
	0	1	0	0	0
X	1	0	1	1	0
	0	0	1	0	1
	1	1	0	0	0

κανονικό

	Y				
	0	1	0	0	0
X	0	1	1	0	0
	1	0	1	0	0
	0	1	0	0	1

κανονικής-γραμμής

	Y				
	0	1	0	1	0
X	1	0	1	0	0
	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0

κανονικής-στήλης

	Y				
	0	0	0	0	0
X	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0

μηδενικό

	Y				
	0	0	0	1	0
X	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	0
	0	0	0	1	0

λειτουργικής-γραμμής

	Y			
	1	0	0	0
X	0	1	0	0
	0	0	1	0
	0	0	0	0
	0	0	0	1

λειτουργικής-στήλης

Πίνακας 3.1: Τύποι μπλοκ για δυαδικά δίκτυα.

τύπος μπλοκ να αναφέρεται μόνο ως *ονομαστικό* μπλοκ. Όμως, το *ονομαστικό* μπλοκ χρησιμοποιείται επίσης, για να αναφέρεται σε ένα εμπειρικό μπλοκ, το οποίο ταξινομείται ως μπλοκ του τύπου *ονομαστικού*. Η διάκριση πρέπει να γίνεται σαφής από τα συμφραζόμενα. Όταν αυτό δεν ισχύει, ο τύπος μπλοκ ενός δοθέντος *ονομαστικού* πρέπει να αναφέρεται ως ο *ονομαστικός* τύπος μπλοκ. Ένα ιδανικό μπλοκ του τύπου ενός δοθέντος *ονομαστικού* αναφέρεται ως *ονομαστικό* ιδανικό μπλοκ. Για να διασαφηνίσουμε τις σχέσεις μεταξύ των εννοιών του τύπου μπλοκ, του ιδανικού μπλοκ και του εμπειρικού μπλοκ, παραθέτουμετο παρακάτω σχήμα.

Ιδανικό – Εμπειρικό / **Τύπος μπλοκ**	**Ιδανικό μπλοκ**	**Εμπειρικό μπλοκ**
Μηδενικό μπλοκ (τύπος)	Μηδενικό ιδανικό	(Εμπειρικό) μηδενικό
Πλήρες μπλοκ (τύπος)	Πλήρες ιδανικό	(Εμπειρικό) πλήρες
Κανονικό μπλοκ (τύπος)	Κανονικό ιδανικό	(Εμπειρικό)κανονικό
Ονομαστικό **μπλοκ (τύπος)** *	*Ονομαστικό* ιδανικό	(Εμπειρικό) *όνομα*

Πίνακας 3.2: Το σχήμα των ιδανικών και των εμπειρικών τύπων μπλοκ.

Η ασυνέπεια ενός εμπειρικού μπλοκ $R(C_i, C_i)$ με έναν τύπο μπλοκ ή, ακριβέστερα, με ένα ιδανικό μπλοκ $T \in T(C_i, C_j)$, δηλαδή, με ένα ιδανικό μπλοκ εκείνου του τύπου μπλοκ, αναφέρεται ως ασυνέπεια του τύπου μπλοκ. Όταν αναφερόμαστε στην ασυνέπεια ενός εμπειρικού μπλοκ με ένα ιδανικό μπλοκ του τύπου *ονομαστικού*, χρησιμοποιείται ο όρος ασυνέπεια του *ονομαστικού* μπλοκ. Π.χ., η ασυνέπεια του εμπειρικού μπλοκ $R(C_i, C_i)$ με ένα μπλοκ μηδενικού τύπου ονομάζεται ασυνέπεια του μηδενικού μπλοκ. Η ελάχιστη ασυνέπεια του τύπου μπλοκ για έναν δοθέν εμπειρικό μπλοκ είναι η ασυνέπεια του μπλοκ, που ορίζεται ως:

$$p(C_i, C_j) = \min_{T \in T(C_i, C_j)} \delta(R(C_i, C_j), T).$$

3.1.3 Δυαδική Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

Η γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ προτάθηκε αρχικά και εφαρμόστηκε στα δυαδικά δίκτυα (Batagelj et al., 1992a, Batagelj et al., 1992b, και Doreian et al., 1994). Επίσης, το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου των Doreian et al. (2005) για την γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ εστιάζεται πάνω στα δυαδικά δίκτυα. Επομένως, αυτή η περιοχή είναι η περισσότερο αναπτυγμένη.

Όπως αναφέρθηκε, μια συνάρτηση κριτηρίου, που περιγράφηκε πιο πάνω, χρησιμοποιείται σε όλους τους τύπους της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, συμπεριλαμβανομένου του τύπου της δυαδικής μοντελοποίησης σε μπλοκ. Όμως, παρουσιάστηκε προηγουμένως μόνο εκείνο το χαρακτηριστικό της συνάρτησης κριτηρίου, που είναι κοινό για όλους τους τύπους. Προκειμένου να ολοκληρωθεί η συζήτηση της συνάρτησης κριτηρίου για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ, πρέπει να καθοριστούν τα ιδανικά μπλοκ και οι αντίστοιχες ασυνέπειες των τύπων μπλοκ.

Τα ιδανικά μπλοκ για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ περιγράφονται στον Πίνακα 3.3.
Στον Πίνακα 3.4, ορίζονται οι ασυνέπειες των μπλοκ της δυαδικής μοντελοποίησης σε μπλοκ. Οι τύποι στον πίνακα αυτόν είναι για τον υπολογισμό της συνάρτησης κριτηρίου βασισμένης σε ένα δυαδικό δίκτυο. Εάν το δίκτυο είναι με βάρη, πρέπει να δυαδικοποιηθεί εξ αρχής. Αυτό γίνεται με την ανακωδικοποίηση όλων των βαρών κάτω από κάποιο προκαθορισμένο κατώφλι (t) σε 0 και όλων των άλλων σε 1.

3.1.4 Υπάρχουσες Ιδέες για Δίκτυα με Βάρη

Οι Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 12-13) παρουσίασαν μια άμεση προσέγγιση για την ομαδοποίηση σχεσιακών δεδομένων, που την ονόμασαν *πεπλεγμένη*

Ιδανικά μπλοκ με "ετικέτα"	**Περιγραφές ιδανικών μπλοκ (ενός δοθέντος τύπου)**
Μηδενικά "null"	Όλα 0 *
Πλήρη "com"	Όλα 1 *
Κυρίαρχης-γραμμής "rdo"	$\exists$ γραμμή με όλα 1 *
Κυρίαρχης-στήλης "cdo"	$\exists$ στήλη με όλα 1 *
Κανονικής-γραμμής "rro"	1-καλυμμένες γραμμές
Κανονικής-στήλης "cro"	1-καλυμμένες στήλες
Κανονικό "reg"	1-καλυμμένες γραμμές και 1-καλυμμένες στήλες
Λειτουργικής-γραμμής "rfn"	$\exists!$ ένα 1 σε κάθε γραμμή
Λειτουργικής-στήλης "cfn"	$\exists!$ ένα 1 σε κάθε στήλη
Πυκνότητα "den"	Ο αριθμός των 1 $\geq \gamma\cdot$ αριθμό στοιχείων του μπλοκ

Επεξήγηση:
* Μια εξαίρεση μπορεί να είναι με στοιχεία στη διαγώνιο, όπου είτε όλα τα στοιχεία πρέπει να έχουν την τιμή 0 είτε όλα την τιμή 1. Το γ είναι μια προκαθορισμένη παράμετρος για την ελάχιστη πυκνότητα στα μπλοκ.

Πίνακας 3.3: Περιγραφή των ιδανικών μπλοκ για τους τύπους μπλοκ (Doreian et al., 2005, σελ. 223).

προσέγγιση. Συζήτησαν αυτήν την προσέγγιση στο πλαίσιο της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ και της ομαδοποίησης με σχεσιακούς περιορισμούς, τους οποίους βλέπουν ως ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος ομαδοποίησης των σχεσιακών δεδομένων. Κρατούν την αρχική συνάρτηση κριτηρίου, όπως έχει ήδη περιγραφεί πιο πάνω. Η προσέγγισή τους μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσέγγιση γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ για πίνακες με βάρη (με μόνο μη αρνητικές τιμές). Ο όρος δίκτυο εσκεμμένα δεν χρησιμοποιείται εδώ, επειδή η διαδικασία είναι σχεδιασμένη για πίνακες, που προέρχονται από σχεσιακά και διμερή δεδομένα. Όμως, και τα δίκτυα με βάρη αναπαριστώνται από πίνακες με βάρη. Παρόμοια με άλλους τύπους γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, η μόνη διαφορά μεταξύ αυτού του τύπου και των άλλων τύπων βρίσκεται στους ορισμούς και τις περιγραφές των ιδανικών μπλοκ των επιλεγόμενων τύπων μπλοκ και, άρα, στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζονται οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ των για τα εμπειρικά μπλοκ σε σχέση με αυτά τα ιδανικά μπλοκ. Στην εργασία τους, δεν δίνουν καμία περιγραφή ή ορισμούς των ιδανικών μπλοκ, παρά μόνο τρία παραδείγματα των τύπων για τον υπολογισμό των ασυνεπειών.

Οι τρεις αρχικοί τύποι γράφονται στον Πίνακα 3.5 με κάποιον διαφορετικό συμβολισμό. Προφανώς, οι ασυνέπειες αυτές είναι ήδη κανονικοποιημένες και παίρνουν τιμές μεταξύ 0 και 1. Οι τύποι, που παρουσιάζονται εδώ, αποτελούν μια γενίκευση του Žiberna (2007a, σελ. 67):

3.1.5 Παρατηρήσεις

Σε αυτό το πρώτο τμήμα του Κεφαλαίου 3, παρουσιάστηκαν τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ. Ο τύπος της

Τύπος Μπλοκ	Ασυνέπειες τύπου μπλοκ $\delta(R(C_i, C_j), T)$	Θέση του μπλοκ
Μηδενικό	s_t	Μη-διαγώνια
	$s_t + \min(0, n_r - 2s_d)$	Διαγώνια
Πλήρες	$n_r n_c - s_t$	Μη-διαγώνια
	$n_r n_c - s_t + \min(-n_r + 2s_d, 0)$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-γραμμής	$(n_c - m_r)n_r$	Μη-διαγώνια
	$(n_c - m_r - 1)n_r$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-στήλης	$(n_r - m_c)n_c$	Μη-διαγώνια
	$(n_r - m_c - 1)n_c$	Διαγώνια
Κανονικής-γραμμής	$(n_r - p_r)n_c$	
Κανονικής-στήλης	$(n_c - p_c)n_r$	
Κανονικό	$(n_c - p_c)n_r + (n_r - p_r)n_c$	
Λειτουργικής-γραμμής	$s_t - p_r + (n_r - p_r)n_c$	
Λειτουργικής-στήλης	$s_t - p_c + (n_c - p_c)n_r$	
Πυκνότητα	$\max(0, \gamma n_r n_c - s_t)$	

Επεξηγήσεις:

s_t	συνολικό άθροισμα στοιχείων του μπλοκ = αριθμός των 1 στο μπλοκ
s_d	διαγώνιο άθροισμα στο μπλοκ = αριθμός των 1 στη διαγώνιο
n_r	αριθμός γραμμών στο μπλοκ = cardC_i
n_c	αριθμός στηλών στο μπλοκ = cardC_j
p_r	αριθμός μη-μηδενικών γραμμών στο μπλοκ
p_c	αριθμός μη-μηδενικών στηλών στο μπλοκ
m_r	μέγιστο άθροισμα γραμμής
m_c	μέγιστο άθροισμα στήλης
γ	μια προκαθορισμένη παράμετρος για την ελάχιστη πυκνότητα στα μπλοκ.

Πίνακας 3.4: Υπολογισμός των ασυνεπειών των τύπων μπλοκ για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ (με μικρή τροποποίηση του Doreian et al., 2005, σελ. 224) (Žiberna, 2007a).

συνάρτησης κριτηρίου, που περιγράφηκε στην Παράγραφο 3.1.2, χρησιμοποιείται σε όλες τις προσεγγίσεις της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ. Η κύρια ιδέα αυτού του τύπου της συνάρτησης κριτηρίου είναι ότι οι ασυνέπειες ενός επιλεγόμενου διαμερισμού (βασισμένου σε ένα συγκεκριμένο δίκτυο), σε σχέση με μια συγκεκριμένη ισοδυναμία, μετριούνται ως το άθροισμα των ασυνεπειών των μεμονωμένων εμπειρικών μπλοκ, σε σχέση με τα αντίστοιχα ιδανικά μπλοκ. Το ποια είδη ιδανικών μπλοκ μπορούν να χρησιμοποιηθούν διευκρινίζεται από την ισοδυναμία, η οποία μπορεί επίσης να είναι η γενικευμένη ισοδυναμία.

Τα ιδανικά μπλοκ για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ, που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 3.1.3, είναι, μαζί με την προηγουμένως αναφερθείσα συνάρτηση κριτηρίου (που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.1.2), τα θεμέλια, πάνω στα οποία στηρίζονται οι προσεγγίσεις, που θα παρουσιαστούν στο τμήμα 3.2. Μολονότι χρησιμοποιούμενες κυρίως για μια περαιτέρω ανάπτυξη της προσέγγισης της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (στην Παράγραφο 3.2.3), οι ιδέες για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ δικτύων με βάρη, που παρουσιάστηκαν από τους Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 11-13), είναι επίσης στενά

Τύπο μπλοκ	Ασυνέπειες τύπων μπλοκ, $\delta(R(C_i, C_j), T)$
Μηδενικό	$\frac{\sum B}{n_r n_c \max\{B \neq 0\}}$
Κυρίαρχης-γραμμής	$1 - \max_i \frac{\sum_j B_{[i,j]}}{n_c \max_j \{B_{[i,j]} \neq 0\}}$
Κανονικής-($\max -$)στήλης	$1 - \frac{\sum_j \max_i B_{[i,j]}}{n_c \max\{B \neq 0\}}$

Εάν το max στον παρονομαστή είναι ίσο με 0, το κλάσμα ισούτε με 0.

Πίνακας 3.5: Η τροποποίηση του Žiberna (2007a, σελ. 67) των τριών παραδειγμάτων των Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 13).

συνδεδεμένες με τη μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, που θα αναπτυχθεί στην Παράγραφο 3.2.1.

3.2 Νέες Προσεγγίσεις για Δίκτυα με Βάρη

Αυτό το τμήμα του Κεφαλαίου 3 αντιπροσωπεύει τον πυρήνα της εργασίας μας. Εδώ, ακολουθώντας των Žiberna (2007a), θα αναπτυχθούν οι νέες προσεγγίσεις και οι νέοι τύποι μοντελοποίησης σε μπλοκ για την γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ δικτύων με βάρη, που είχαν αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτοί είναι η μοντελοποίηση σε μπλοκ *με βάρη*, η *ομοιογενής* και η *πεπλεγμένη* μοντελοποίηση σε μπλοκ.

Η μοντελοποίηση σε μπλοκ *με βάρη* αναπτύσσεται στην Παράγραφο 3.2.1 με βάση τη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ. Η *ομοιογενής* μοντελοποίηση σε μπλοκ αναπτύσσεται ακολούθως στην Παράγραφο 3.2.2 με βάση την ιδέα ότι η ασυνέπεια των μπλοκ σε ένα δίκτυο με βάρη πρέπει να μετράται από κάποιο μέτρο μεταβλητότητας. Παρόμοιες ιδέες για τη δομική ισοδυναμία παρουσιάστηκαν ήδη από τους Borgatti και Everett (1992b, σελ. 101), οι οποίοι υποστήριξαν ότι η μέση διακύμανση μέσα στα μπλοκ του πίνακα είναι ένα φυσικό μέτρο προσαρμογής (fit). Οι βάσεις για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ ήταν οι ιδέες των Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 11-13), την οποία ονόμασαν *πεπλεγμένη προσέγγιση* για την ομαδοποίηση σχεσιακών δεδομένων. Αυτές οι ιδέες παρουσιάστηκαν ήδη στην Παράγραφο 3.1.4. Στην Παράγραφο 3.2.3, αυτές οι ιδέες θα αναπτυχθούν περαιτέρω σε έναν πλήρη τύπο μοντελοποίησης σε μπλοκ με ένα ευρύ σύνολο πιθανών τύπων μπλοκ, ακολουθώντας τις προτάσεις του Žiberna (2007a). Στο τέλος του παρόντος τμήματος, στην Παράγραφο 3.3 θα συζητηθούν κάποιες τεχνικές υπολογιστικής υλοποίησης αυτών των νέων προσεγγίσεων για την μοντελοποίηση σε μπλοκ δικτύων με βάρη, που επεξεργάστηκε ο Žiberna (2007c).

3.2.1 Γενικευμένη Μοντελοποίηση σε Μπλοκ με Βάρη

Στο παρελθόν, όταν αναλύονταν δίκτυα με βάρη μέσω της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, αυτά μετατρέπονταν πρώτα σε δυαδικά δίκτυα κατά τέτοιο τρόπο ώστε τα βάρη, που ήταν μεγαλύτερα (ή ίσα) από ένα ορισμένο κατώφλι, ανακωδικοποιούνταν σε 1 και τα άλλα σε 0 (παραδείγματα μπορούν να βρεθούν Doreian et al., 2005, σελ. 35-37, 44-47, 54-60, 265–269). Η ανάλυση ενός δικτύου με τέτοιο τρόπο προκαλεί την απώλεια ενός σημαντικού μέρους πληροφοριών. Η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη μειώνει τις χαμένες πληροφορίες, μολονότι εξακολουθεί να υπάρχει κάποια απώλεια. Χάνονται οι πληροφορίες για τις τιμές-βάρη των δεσμών (ή μερικές φορές, για ορισμένες τιμές της συνάρτησης f), που είναι μεγαλύτερες μιας παραμέτρου m (που θα οριστεί αργότερα). Εάν το m πάρει μια αρκετά μεγάλη τιμή, καμία πληροφορία δεν χάνεται. Όμως, αυτό μπορεί να μην είναι σωστό για πολλά δίκτυα, αφού θα αναγκάσει σχεδόν όλα ή ακόμη και όλα τα εμπειρικά μπλοκ να ταξινομηθούν ως μηδενικά.

Λόγω της απώλειας πληροφοριών, και η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη δεν είναι ευαίσθητες στις παρεκκλίσεις από τους ορισμούς, που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Εξαίρεση αποτελεί η *f-κανονική ισοδυναμία στάθμης* m, η οποία ορίστηκε στην Παράγραφο 2.1.3, όταν συζητούσαμε τις ισοδυναμίες για δίκτυα με βάρη. Γενικώς λοιπόν, η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη είναι ευαίσθητη στις παρεκκλίσεις από αυτόν τον ορισμό. Φυσικά, και άλλοι ορισμοί μπορούν να τροποποιηθούν με παρόμοιο τρόπο, έτσι ώστε η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη να είναι επίσης ευαίσθητη στις παρεκκλίσεις από αυτούς. Παρόμοια, οι ορισμοί θα μπορούσαν να τροποποιηθούν, έτσι ώστε η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ να είναι ευαίσθητη σε αυτούς.

Όμως, αυτό είναι περιττό. Οι Doreian et al. (1994) εισήγαγαν τη γενικευμένη ισοδυναμία, στην οποία η ισοδυναμία ορίζεται από το σύνολο των επιτρεπτών τύπων μπλοκ και προαιρετικά από τις θέσεις τους στο μοντέλο των μπλοκ. Οι τύποι των μπλοκ ορίζονται ξεχωριστά για κάθε τύπο μοντελοποίησης σε μπλοκ από τις περιγραφές των αντίστοιχων ιδανικών μπλοκ. Και η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη είναι και οι δυο ευαίσθητες στις παρεκκλίσεις από τις γενικευμένες ισοδυναμίες, που ορίζονται από ένα σύνολο επιτρεπτών τύπων μπλοκ των αντίστοιχων τύπων μοντελοποίησης σε μπλοκ και προαιρετικά από τις θέσεις τους στο μοντέλο των μπλοκ.

Οι περιγραφές των ιδανικών μπλοκ για τη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ παρουσιάστηκαν ήδη στον Πίνακα 3.3. Για την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, παρουσιάζονται σε αυτή την παράγραφο. Όμως, ας ξαναδούμε πρώτα τις περιγραφές των ιδανικών μπλοκ για τα δυαδικά δίκτυα. Παρουσιάζονται πάλι στον Πίνακα 3.6 (προς το παρόν, δείτε μόνο τις δύο πρώτες στήλες), καθώς αντιπροσωπεύουν επίσης τη βάση, πάνω στην οποία αναπτύχθηκαν οι περιγραφές των ιδανικών μπλοκ για την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τις γενικεύσεις, είναι χρήσιμο να διαιρέσουμε τα ιδανικά μπλοκ σε δύο ομάδες:

- **Ομάδα 1**: Εκείνα τα ιδανικά μπλοκ, που απαιτούν όπως ορισμένα στοιχεία να έχουν έναν δεσμό (1) ή/και ορισμένα στοιχεία να μην έχουν κανέναν δεσμό (0). Αυτή η ομάδα περιλαμβάνει τα μπλοκ όπως:
  - Πλήρη: όλα τα στοιχεία πρέπει να είναι 1.
  - Κυρίαρχων-γραμμών: όλα τα στοιχεία τουλάχιστον σε μια γραμμή πρέπει να είναι 1.
  - Κυρίαρχων-στηλών: όλα τα στοιχεία τουλάχιστον σε μια στήλη πρέπει να είναι 1.

- Λειτουργικών-γραμμών: ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε γραμμή πρέπει να είναι 1, ενώ όλα τα άλλα 0.
- Λειτουργικών-στηλών: ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε στήλη πρέπει να είναι 1, ενώ όλα τα άλλα 0.
- Μηδενικά: όλα τα στοιχεία πρέπει να είναι 0.

- **Ομάδα 2**: Τα ιδανικά μπλοκ, που απαιτούν όπως κάθε γραμμή ή στήλη (ή και οι δυο) να έχουν τουλάχιστον ένα δεσμό (1). Αυτή η ομάδα περιλαμβάνει όλα ιδανικά μπλοκ του κανονικού τύπου:
  - Κανονικών-γραμμών: πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας δεσμός (1) σε κάθε γραμμή.
  - Κανονικών-στηλών: πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας δεσμός (1) σε κάθε στήλη.
  - Κανονικών: πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας δεσμός (1) σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη.

Επομένως, μπορούμε να δούμε ότι υπάρχουν τρεις τύποι συνθηκών:

1. Ένα ορισμένο στοιχείο πρέπει να είναι (τουλάχιστον) 1.
2. Ένα ορισμένο στοιχείο πρέπει να είναι 0.
3. Τουλάχιστον ένα στοιχείο σε κάθε γραμμή (ή στήλη) πρέπει να είναι 1 ή, για να το θέσουμε διαφορετικά, η συνάρτηση f σε όλα τα στοιχεία κάθε γραμμής (ή στήλης) πρέπει να είναι τουλάχιστον 1, όπου η f είναι κάποια συνάρτηση ορισμένη πάνω στα βάρη, που έχει την ιδιότητα $f(a) \geq \max a$ και το a είναι ένα διάνυσμα βαρών.

Τουλάχιστον μια από αυτές τις τρεις συνθήκες μπορεί να βρεθεί σε κάθε (προηγουμένως αναφερθέντα) ιδανικό μπλοκ και οι τρεις μαζί είναι αρκετές να ορίσουν (με τις σωστές προδιαγραφές *ορισμένων στοιχείων*) οποιαδήποτε[3] από αυτά τα ιδανικά μπλοκ (και τύπους μπλοκ) και να υπολογίσουν τις ασυνέπειες τους για τους τύπους μπλοκ. Η ασυνέπεια ενός εμπειρικού μπλοκ σε σχέση με ένα δοθέν ιδανικό μπλοκ είναι συνήθως[4] το σταθμισμένο άθροισμα των λαθών για αυτές τις συνθήκες ή, ακριβέστερα, το σταθμισμένο άθροισμα του αριθμού των φορών, που κάθε συνθήκη παραβιάζεται (που ισχύει για ένα ορισμένο μπλοκ). Ο όρος "σταθμισμένο άθροισμα" χρησιμοποιείται καθόσον μερικές φορές η ασυνέπεια των μπλοκ ή μέρος της πολλαπλασιάζεται με τον αριθμό

[3] Υπάρχει μια εξαίρεση, το ιδανικό μπλοκ πυκνότητας, το οποίο δεν καλύπτεται από αυτούς τους κανόνες. Το αντίστοιχο ιδανικό μπλοκ στη μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη είναι το μέσο ιδανικό μπλοκ.

[4] Η μόνη εξαίρεση είναι η ασυνέπεια ενός μπλοκ κανονικού τύπου.

Ιδανικά μπλοκ με “ετικέτα”	**Περιγραφή δυαδικής μοντελοποίησης*** **	**Περιγραφή μοντελοποίησης με βάρη**
Μηδενικό “null”	Όλα 0 *	Όλα 0 **
Πλήρες “com”	Όλα 1 *	Όλα τα βάρη τουλάχιστον m **
Κυρίαρχης-γραμμής “rdo”	Υπάρχει μια γραμμή με όλα 1 *	Υπάρχει μια γραμμή με όλα τα βάρη τουλάχιστον m**
Κυρίαρχης-στήλης “cdo”	Υπάρχει μια στήλη με όλα 1 *	Υπάρχει μια στήλη με όλα τα βάρη τουλάχιστον m**
Κανονικής-(f-)γραμμής “rre”	Υπάρχει τουλάχιστον ένα 1 σε κάθε γραμμή	Η f σε κάθε γραμμή είναι τουλάχιστον m
Κανονικής-(f-)στήλης “cre”	Υπάρχει τουλάχιστον ένα 1 σε κάθε στήλη	Η f σε κάθε στήλη είναι τουλάχιστον m
f-κανονική “reg”	Υπάρχει τουλάχιστον ένα 1 σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη	Η f σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη είναι τουλάχιστον m
Λειτουργικής-γραμμής “rfn”	Υπάρχει ακριβώς ένα 1 σε κάθε γραμμή	Υπάρχει ακριβώς ένας δεσμός με βάρος τουλάχιστον m σε κάθε γραμμή, όλα τα άλλα 0
Λειτουργικής-στήλης “cfn”	Υπάρχει ακριβώς ένα 1 σε κάθε στήλη	Υπάρχει ακριβώς ένας δεσμός με βάρος τουλάχιστον m σε κάθε στήλη, όλα τα άλλα 0
Πυκνότητα γ “dns” **Μέσος μ “avg”**	Ο αριθμός των 1 είναι $\geq \gamma\cdot$ (αριθμό στοιχείων)	Το άθροισμα όλων των βαρών είναι $\geq \mu\cdot$ (αριθμός στοιχείων)

Επεξηγήσεις:
* Μια εξαίρεση μπορεί να είναι στα διαγώνια στοιχεία, όπου είτε όλα τα στοιχεία πρέπει να έχουν βάρος 0 ή 1
** Μια εξαίρεση μπορεί να είναι στα διαγώνια στοιχεία, όπου είτε όλα τα στοιχεία πρέπει να έχουν μια τιμή 0 ή τουλάχιστον m.
*** Doreian, Batagelj και Ferligoj, 2005, σελ. 223.

Πίνακας 3.6: Περιγραφή των ιδανικών μπλοκ (Žiberna, 2007a).

των στοιχείων σε μια δοθείσα γραμμή ή στήλη.

Επομένως, εάν μπορούμε να γενικεύσουμε αυτές τις τρεις συνθήκες για δίκτυα με βάρη, θα έχουμε γενικεύσει στην πραγματικότητα τη συνάρτηση κριτηρίου και τη μοντελοποίηση σε μπλοκ για δίκτυα με βάρη. Μόνο μια μικρή τροποποίηση απαιτείται για τη γενίκευση αυτών των τριών συνθηκών στα δίκτυα με βάρη και αυτή είναι η αντικατάσταση των άσσων (1) στις συνθήκες με μια κατάλληλη παράμετρο, ας την συμβολίσουμε με m. Οι νέες συνθήκες μπορούν τότε να γραφτούν ως:

1. Ένα ορισμένο στοιχείο πρέπει να είναι (τουλάχιστον) m.
2. Ένα ορισμένο στοιχείο πρέπει να είναι 0.
3. Η τιμή της συνάρτησης f πάνω σε όλα τα στοιχεία σε κάθε γραμμή (ή στήλη) πρέπει να είναι τουλάχιστον m.

Με βάση την παραπάνω γενίκευση αυτών των συνθηκών και των περιγραφών των ιδανικών μπλοκ για τα δυαδικά δίκτυα (που παρουσιάζονται στη δεύτερη στήλη του Πίνακα 3.6), μπορεί να παραχθεί η περιγραφή των ιδανικών μπλοκ για τα δίκτυα με βάρη, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.6 (η τρίτη στήλη). Η μόνη εξαίρεση είναι η περιγραφή του ιδανικού μπλοκ πυκνότητας. Η περιγραφή του δεν παράγεται από τη γενίκευση αυτών των συνθηκών. Όμως, το ιδανικό μπλοκ πυκνότητας της δυαδικής μοντελοποίησης σε μπλοκ έχει επίσης το αντίστοιχό του στην μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη. Αυτό είναι το μέσο ιδανικό μπλοκ.

Κυρίως, βάσει αυτών των περιγραφών, μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τους τύπους για τον υπολογισμό των αποκλίσεων (ασυνεπειών του τύπου μπλοκ) από αυτά τα ιδανικά μπλοκ. Στον Πίνακα 3.7, παρουσιάζονται οι υπολογισμοί των ασυνεπειών των τύπων μπλοκ για την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη (και για τη σύγκριση με τη δυαδική) για όλους τους τύπους των μπλοκ. Μια άλλη καλή ιδιότητα αυτής της γενίκευσης είναι ότι, εάν έχουμε ένα δίκτυο με βάρη και θέσουμε $m = 1$ και πάρουμε το $\max$ για τη συνάρτηση f, τότε προκύπτουν οι ασυνέπειες των δυαδικών δικτύων. Επομένως, η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη. Επίσης, η ασυνέπεια για το μηδενικό μπλοκ είναι η ίδια με εκείνο το μέρος της συνάρτησης κριτηρίου, που προτάθηκε από τους Doreian και Mrvar (1996, σελ. 161), που αντιστοιχεί στα θετικά λάθη και είναι περιορισμένη μόνο σε έναν μπλοκ.

Όταν η f είναι το $\max$, τότε, εάν σε μια ορισμένη κατάσταση (δίκτυο, μοντέλο μπλοκ ή επιτρεπτούς τύπους μπλοκ, διαμερισμό, m) η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι 0, χρησιμοποιώντας την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου θα ήταν επίσης 0, εάν το δίκτυο μετατρεπόταν σε ένα δυαδικό δίκτυο, χρησιμοποιώντας το κατώφλι t ίσο με m και μετά αναλύοντας κάνοντας την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ. Το αντίθετο συνήθως δεν ισχύει.

Η παράμετρος m

Το κύριο πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της σωστής τιμή της παραμέτρου m, η οποία παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή των βαρών, που πρέπει να χαρακτηρίζει το δεσμό μεταξύ μιας μονάδας και είτε μιας ομάδας (για τους τύπους μπλοκ f-κανονικό, κανονικής-f-γραμμής και κανονικής-f-στήλης) είτε μιας άλλης μονάδας (για τους τύπους μπλοκ πλήρης, κυρίαρχης-γραμμής, κυρίαρχης-στήλης, λειτουργικής-γραμμής και λειτουργικής-στήλης), έτσι ώστε αυτός ο δεσμός να θεωρείται αρκετά ισχυρός, για να ταιριάξει πλήρως με την περιγραφή του επιλεγόμενου ιδανικού μπλοκ.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα δίκτυο βιβλιογραφικών παραπομπών και

Τύπος Μπλοκ	Ασυνέπειες τύπου μπλοκ, $\delta(R(C_i, C_j), T)$ Δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ	Μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη	Θέση του μπλοκ
Μηδενικό	s_t	$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c} b_{ij}$	Μη-διαγώνια
	s_t+ $+\min(0, n_r - 2s_d)$	$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c} b_{ij}+$ $+\min(0, \sum(m - \mathrm{diag}(B))^+ -$ $-\sum \mathrm{diag}(B))$	Διαγώνια
Πλήρες	$n_r n_c - s_t$	$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c}(m - b_{ij})^+$	Μη-διαγώνια
	$n_r n_c - s_t+$ $\min(-n_r + 2s_d, 0)$	$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c}(m - b_{ij})^+ +$ $+\min(-\sum(m - \mathrm{diag}(B))^+ +$ $+\sum \mathrm{diag}(B), 0)$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-γραμμής	$(n_c - m_r)n_r$	$min\left((m-B)^+ \cdot 1\right) n_r$	Μη-διαγώνια
	$[n_c - m_r -$ $(1 - s_d)^+]n_r$	$\min\left((m-B)^+ \cdot 1 +\right.$ $\left. + \left(\sum \mathrm{diag}(B) - \left(\mathrm{diag}(m-B)^+\right)^-\right)\right) n_r$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-στήλης	$(n_r - m_c)n_c$	$min\left(1' \cdot (m-B)^+\right) n_c$	Μη-διαγώνια
	$[n_r - m_c -$ $(1 - s_d)^+]n_c$	$\min\left(1' \cdot (m-B)^+ +\right.$ $\left. \left(\sum \mathrm{diag}(B) - \left(\mathrm{diag}(m-B)^+\right)^-\right)\right) n_c$	Διαγώνια
Κανονικής-f-γραμμής	$(n_r - p_r)n_c$	$\sum_{i=1}^{n_r}(m - f(B_{[i,]}))^+ n_c$	
Κανονικής-f-στήλης	$(n_c - p_c)n_r$	$\sum_{j=1}^{n_c}(m - f(B_{[,j]}))^+ n_r$	
f-Κανονικό	$(n_c - p_c)n_r+$ $(n_r - p_r)n_c$	$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c} \max((m - f(B_{[i,]}))^+,$ $(m - f(B_{[,j]}))^+)$	
Λειτουργικής-γραμμής	$s_t - p_r+$ $+(n_r - p_r)n_c$	$\sum_{i=1}^{n_r}((m - \max(B_{[i,]}))^+ n_c+$ $+ \sum_{j=1, j\neq \arg\max(B_{[i,j]})}^{n_c} B_{[i,j]})$	
Λειτουργικής-στήλης	$s_t - p_c+$ $(n_c - p_c)n_r$	$\sum_{j=1}^{n_c}((m - \max(B_{[,j]}))^+ n_r+$ $+ \sum_{i=1, i\neq \arg\max(B_{[i,j]})}^{n_r} B_{[i,j]})$	
Πυκνότητα γ Μέσος μ	$\max(0,$ $\gamma n_r n_c - s_t)$	$\max\left[0, \mu n_c n_r - \sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c} b_{ij}\right]$	

Επεξηγήσεις:

s_t	συνολικό άθροισμα μπλοκ = = αριθμός των 1 σε ένα μπλοκ	B	ο πίνακας του μπλοκ $R(C_i, C_j)$
s_d	διαγώνιο άθροισμα μπλοκ = = αριθμός των 1 στη διαγώνιο	$B_{[i,]}$	η i-οστή γραμμή του B
n_r	αριθμός γραμμών σε ένα μπλοκ = cardC_i	$B_{[,j]}$	η j-οστή στήλη του B
n_c	αριθμός στηλών σε ένα μπλοκ = cardC_j	b_{ij}	στοιχείο του B, που ορίζεται από την i-οστή γραμμή και j-οστή στήλη
p_r	αριθμός μη-μηδενικών γραμμών σε ένα μπλοκ		
p_c	αριθμός μη-μηδενικών στηλών σε ένα μπλοκ	diag	εξάγει τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα
m_r	μέγιστο άθροισμα γραμμής	m_c	μέγιστο άθροισμα στήλης

$(x)^+ = \begin{cases} x, x > 0, \\ 0, x \leq 0, \end{cases}$ $\qquad$ $(x)^- = \begin{cases} x, x < 0, \\ 0, x \geq 0. \end{cases}$

Δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ: Ελαφρώς τροποποιημένη από Doreian et al. (2005, σελ. 224).

Πίνακας 3.7: Υπολογισμός των ασυνεπειών για τον τύπο μπλοκ για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και την (γενικευμένη από δυαδικά δίκτυα) μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη (Žiberna, 2007a).

πάρουμε $m = 5$. Ένα μπλοκ $R(C_i, C_j)$ σε ένα τέτοιο δίκτυο είναι ένα ιδανικό πλήρες μπλοκ, εάν κάθε συγγραφέας από την ομάδα C_i αναφέρει τουλάχιστον 5 εργασίες καθενός συγγραφέος από την ομάδα C_j. Εδώ, κάθε συγγραφέας της ομάδας C_i πρέπει να συνδέεται (ισχυρά) με κάθε συγγραφέα από την ομάδα C_j. Ένα μπλοκ $R(C_i, C_j)$ σε ένα τέτοιο δίκτυο είναι ένα ιδανικό sum-κανονικό μπλοκ, εάν κάθε συγγραφέας από την ομάδα C_i αναφέρει τους συγγραφείς από την ομάδα C_j τουλάχιστον 5 φορές και κάθε συγγραφέας από την ομάδα C_j αναφέρεται τουλάχιστον 5 φορές από τους συγγραφείς της ομάδας C_i.

Θα ήταν καλύτερα, εάν θα μπορούσαμε να καθορίζαμε το m σύμφωνα με κάποια προγενέστερη γνώση του προβλήματος ή τουλάχιστον από τα δικτυακά χαρακτηριστικά. Μια προηγούμενη λύση θα μπορούσε επίσης να ήταν χρήσιμη για τον προσδιορισμό του σωστού m. Επίσης, καθώς θα γνωρίζαμε την κατάλληλη τιμή ή κατώφλι t για τη δυαδικοποίηση του δικτύου (για να τη χρησιμοποιήσουμε στη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ), η τιμή του m θα έπρεπε να ήταν περίπου $m = 2t$ ή μικρότερη.

Εάν η προγενέστερη γνώση δεν είναι διαθέσιμη, η εμπειρία προτείνει ότι το m θα μπορούσε να καθοριστεί χρησιμοποιώντας τη κατανομή των βαρών των στοιχείων για τα μοντέλα χωρίς τους τύπους μπλοκ f-κανονικό, κανονικής-f-γραμμής και -στήλης (π.χ., μοντέλα με πλήρεις, κυρίαρχους και μηδενικούς τύπους μπλοκ) και από την κατανομή των στατιστικών των γραμμών ή στηλών[5]

[5] Εάν τα μπλοκ κανονικής-f-γραμμής έχουν το κύριο ενδιαφέρον, τότε οι στατιστικές των γραμμών είναι σχετικές, ενώ, εάν τα μπλοκ κανονικής-f-στήλης έχουν το κύριο ενδιαφέρον, τότε οι στατιστικές των στηλών είναι σχετικές. Εάν ο τύπος των f-κανονικών μπλοκ ή και οι δύο τύποι των μπλοκ κανονικής-f-γραμμής και -στήλης μας ενδιαφέρουν, τότε και οι στατιστικές των γραμμών και των στηλών είναι σχετικές. Πρέπει να εξεταστούν είτε ως ξεχωριστές κατανομές ή ως μια κατανομή με στοιχεία και από τις δύο κατανομές ή ως η

για εκείνα με τύπους μπλοκ f-κανονικό, κανονικής-f-γραμμής και -στήλης. Η εξαίρεση είναι, όταν η συνάρτηση f είναι το max. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η κατανομή ή τα βάρη των στοιχείων μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν με μοντέλα για τύπους μπλοκ f-κανονικό, κανονικής-f-γραμμής και -στήλης.

Σε τέτοιες περιπτώσεις, η κατάλληλη τιμή του m είναι συνήθως δύο φορές η τιμή, όπου η πυκνότητα αυτής της κατανομής είναι ελάχιστη. Η τιμή, όπου η πυκνότητα της κατανομής είναι ελάχιστη, επίσης είναι συνήθως κοντά στην κατάλληλη τιμή του κατωφλιού t της δυαδικοποίησης του δικτύου, για να χρησιμοποιηθεί η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ.

Εάν εξεταστεί η κατανομή των στατιστικών των γραμμών ή στηλών και οι χρησιμοποιούμενες στατιστικές επηρεάζονται από τον αριθμό των μονάδων, περισσότερο από αυτό που υπολογίζεται (όπως στο άθροισμα), πρέπει να ληφθεί υπόψη ο αριθμός των αναμενόμενων εμπειρικών τύπων μπλοκ f-κανονικών ή κανονικής-f-γραμμής και -στήλης, που αναμένονται για τουλάχιστον μερικές ομάδες.

Όμως, μπορούν να προκύψουν πολύ καλύτερες εκτιμήσεις (από εκείνες που λαμβάνονται συνήθως ακολουθώντας τις προτάσεις των δύο προηγουμένων παραγράφων) της κατάλληλης τιμής του m με την εξέταση κάποιου προηγούμενου διαμερισμού, που είναι κοντά στον βέλτιστο. Αυτοί οι διαμερισμοί θα μπορούσαν να προκύψουν από τις έμμεσες μεθόδους, που περιγράφηκαν νωρίτερα, ή από την ομοιογενή ή την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, που θα περιγραφούν στα επόμενα δύο τμήματα. Υπάρχουν δύο προβλήματα με αυτόν τον τρόπο υπολογισμού της τιμής της παραμέτρου m. Πρώτον, ο διαμερισμός, που χρησιμοποιείται στην εκτίμηση του m, μπορεί να επηρεάσει πολύ την προκύπτουσα λύση. Αυτό δεν είναι τόσο ενοχλητικό, επειδή το m πάντα (και, επομένως, επίσης η μέθοδος υπολογισμού του) επηρεάζει πολύ τη λύση. Το δεύτερο πρόβλημα είναι ότι άλλες μέθοδοι χρησιμοποιούν μερικές φορές διαφορετικούς ορισμούς ορισμένων τύπων μπλοκ και μερικές από αυτές (έμμεσες μέθοδοι και ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ) δεν επιτρέπουν τόσο πλούσια μοντέλα των μπλοκ, όσο η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, κάτι το οποίο σημαίνει ότι μερικές φορές δεν μπορεί να ληφθεί ο "προηγούμενος διαμερισμός κοντά στο βέλτισο".

3.2.2 Ομοιογενής Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

Μια άλλη προσέγγιση μοντελοποίησης σε μπλοκ, που λαμβάνει υπόψη τα βάρη των δεσμών, είναι η αναζήτηση της ομοιογένειας μέσα σε μπλοκ. Η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ αναζητεί το διαμερισμό, για τον οποίον ελαχιστοποιείται το άθροισμα κάποιου μέτρου μεταβλητότητας μέσα στα μπλοκ

κατανομή των μέσων τους.

και για όλα τα μπλοκ. Αυτό το μέτρο μεταβλητότητας μέσα σε ένα μπλοκ παρουσιάζει μια ασυνέπεια για τον τύπο του μπλοκ. Αυτή βασικά αρκεί για να ενσωματώσει τις ασυνέπειες των νεων τύπων μπλοκ μέσα στο πλαίσιο, που παρουσιάστηκε προηγουμένως, δηλαδή, μέσα στη συνάρτηση κριτηρίου, που παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.1.2. Ένα μέτρο μεταβλητότητας μέσα στα μπλοκ είναι ένας πολύ ευρύς όρος και πρέπει να οριστεί. Μέχρι τώρα, έχουν θεωρηθεί δύο μέτρα μεταβλητότητας, *το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων από το μέσο* (άθροισμα τετραγώνων) και το *άθροισμα των απολύτων αποκλίσεων από τον ενδιάμεσο* (απόλυτες αποκλίσεις). Αυτό που παραμένει να καθοριστεί εδώ είναι το εύρος των τιμών, για τις οποίες αυτά τα μέτρα πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό εξαρτάται από τον τύπο του μπλοκ.

Αυτό το μέτρο μπορεί είτε να υπολογιστεί για όλα τα στοιχεία σε ένα μπλοκ ή για επιλογές στοιχείων, που αντιστοιχούν σε όλα τα στοιχεία του μπλοκ (π.χ., για τύπους μπλοκ πλήρους και λειτουργικής-γραμμής και -στήλης), σε μερικά μόνο επιλεγόμενα στοιχεία σε ένα μπλοκ (π.χ., στα στοιχεία μόνο μιας γραμμής ή στήλης, όπως στους τύπους μπλοκ κυρίαρχης-γραμμής ή -στήλης) ή για τη συνάρτηση πάνω σε γραμμές ή στήλες (π.χ., στους τύπους μπλοκ κανονικής-f-γραμμής και -στήλης και f-κανονικού μπλοκ). Εάν το μέτρο υπολογίζεται πάνω στις τιμές της συνάρτησης f για γραμμές ή στήλες, το αποτέλεσμα πρέπει έπειτα να πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό των στοιχείων σε κάθε γραμμή ή στήλη, αντίστοιχα. Επίσης, εάν το μέτρο υπολογίζεται μόνο σε μια επιλογή τιμών στοιχείων, το αποτέλεσμα πρέπει να διαιρεθεί με εκείνο το ποσοστό, που οι επιλεγμένες τιμές στοιχείων αντιπροσωπεύουν σε ολόκληρο το μπλοκ. Κατά αυτόν τον τρόπο, ταιριάζουν οι ασυνέπειες για το άθροισμα τετραγώνων του τύπου του πλήρους μπλοκ, για το άθροισμα τετραγώνων του τύπου μπλοκ της κανονικής-mean-στήλης και για το άθροισμα τετραγώνων του τύπου μπλοκ της κυρίαρχης-στήλης, εάν οι γραμμές είναι ομοιογενείς, δηλαδή, εάν κάθε γραμμή έχει μηδενική διακύμανση.

Η περιγραφή των ιδανικών μπλοκ για την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ δίνεται στον Πίνακα 3.8. Εδώ μπορεί να φανεί ότι (εάν οι συνθήκες μέσα στις παρενθέσεις παραληφθούν) ο μηδενικός τύπος μπλοκ (στην προσέγγιση της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ) είναι μόνο μια ειδική περίπτωση του πλήρους τύπου μπλοκ. Όπως πάντα με την γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, ο πλήρης τύπος μπλοκ είναι μια ειδική περίπτωση του τύπου μπλοκ κυρίαρχης-γραμμής, κυρίαρχης-στήλης, λειτουργικής-γραμμής, λειτουργικής-στήλης, κανονικής-f-γραμμής, κανονικής-f-στήλης και f-κανονικού μπλοκ. Με την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ, το μηδενικό μπλοκ είναι, επομένως, επίσης μια ειδική περίπτωση αυτών των μπλοκ. Αυτό μπορεί συχνά να είναι προβληματικό, καθώς η διάκριση μεταξύ του μηδενικού τύπου μπλοκ και των άλλων τύπων μπλοκ έχει συνήθως μεγάλη σημασία.

Οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ μπορούν να οριστούν με βάση αυτές τις περιγραφές και ένα επιλεγόμενο μέτρο μεταβλητότητας. Στον Πίνακα 3.9, παρουσιάζονται οι ασυνέπειες για τους τύπους μπλοκ και για τα δύο μέτρα μεταβλητότητας (*άθροισμα τετραγωνικών αποκλίσεων από το μέσο* και *άθροισμα απολύτων αποκλίσεων από τον ενδιάμεσο*). Στον Πίνακα 3.8, διάφοροι τύποι μπλοκ ικανοποιούν την συνθήκη ότι τα βάρη, που πρέπει να είναι ίσα, πρέπει επίσης να είναι διαφορετικά από το 0. Όμως, αυτή η συνθήκη δεν αντανακλάται στους τύπους για τις ασυνέπειες των τύπων μπλοκ. Αυτές οι ασυνέπειες είναι επίσης 0, εάν όλα τα στοιχεία σε έναν μπλοκ έχουν βάρος 0.

Οι ασυνέπειες για τους τύπους μπλοκ μπορούν επίσης να προσαρμοστούν για μια προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ με την έννοια της αντικατάστασης με μια προκαθορισμένη τιμή του μέσου ($\overline{x}$) ή του ενδιάμεσου $\text{median}(x)$ (ως η τιμή, από την οποία υπολογίζονται οι αποκλίσεις). Η ασυνέπεια του μπλοκ για το μηδενικό μπλοκ μπορεί να θεωρηθεί ως παράδειγμα για το πώς η ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ μπορεί να προσαρμοστεί σε μια προκαθορισμένη τιμή 0.

Οι ασυνέπειες τύπων μπλοκ για τους περισσότερους τύπους μπλοκ, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.9, προκύπτουν αρκετά φυσιολογικά από τις περιγραφές των αντίστοιχων ιδανικών μπλοκ στον Πίνακα 3.8. Η μόνη εξαίρεση είναι η ασυνέπεια ενός f-κανονικού μπλοκ.

f-Κανονική Ασυνέπεια των Μπλοκ

Πολλές είναι οι δυνατότητες για τον υπολογισμό της ασυνέπειας των f-κανονικών μπλοκ. Αυτή η ασυνέπεια θα έπρεπε να υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψην και την ασυνέπεια των μπλοκ κανονικής-f-γραμμής και την ασυνέπεια των μπλοκ κανονικής-f-στήλης. Υπάρχουν και άλλες δυνατότητες για τον συνδυασμό αυτών των ασυνεπειών αυτών των δυο τύπων μπλοκ, όπως η χρησιμοποίηση των συναρτήσεων sum και mean αντί του max. Αν και η χρήση του sum φαίνεται η πιο λογική, αυτή πιθανόν να έκανε πολύ μεγάλη την ασυνέπεια των f-κανονικών μπλοκ. Μια παρόμοια προσέγγιση ακολουθήθηκε στην μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, αν και πάρθηκε ειδική φροντίδα εκεί, για να είναι σίγουρο ότι κάθε στοιχείο θα συνέφερε μόνο μια φορά στην ασυνέπεια των f-κανονικών μπλοκ. Αυτή η προσέγγιση δεν είναι δυνατή εδώ.

Το μέγιστο επιλέχτηκε τελικά, επειδή διατηρεί τις ανισότητες των ασυνεπειών των μπλοκ, που ισχύουν και για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και για την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη:

$$\delta(R(C_a, C_b), cre) \leq \delta(R(C_a, C_b), reg),$$

$$\delta(R(C_a, C_b), rre) \leq \delta(R(C_a, C_b), reg).$$

Ιδανικά μπλοκ με "ετικέτα"	Περιγραφή και για τους δυο τύπους ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ
Μηδενικό+ "null"	Όλα 0 (εκτός ίσως της διαγωνίου όπου όλα τότε θα είναι ίσα)
Πλήρες "com"	Όλα ίσα (και διάφορα του 0)*(η διαγώνιος μπορεί να αναλυθεί ξεχωριστά)
Κυρίαρχης-γραμμής μορφή **1 "rdo1"**	Η γραμμή, που είναι η πιο διαφορετική από τις άλλες, έχει όλα τα βάρη ίσα (ενώ όλα τα βάρη στο μπλοκ δεν είναι μηδέν)* (εκτός ίσως της διαγωνίου που είναι ίσα)
Κυρίαρχης-στήλης μορφή **1 "cdo1"**	Η στήλη που είναι η πιο διαφορετική από τις άλλες, έχει όλα τα βάρη ίσα (ενώ όλα τα βάρη στο μπλοκ δεν είναι μηδέν)*(εκτός ίσως της διαγωνίου που είναι ίσα)
Κυρίαρχης-γραμμής μορφή **2 "rdo2"**	Υπάρχει γραμμή με όλα τα βάρη ίσα (ενώ όλα τα βάρη στο μπλοκ δεν είναι μηδέν)* (εκτός ίσως της διαγωνίου που είναι ίσα)
Κυρίαρχης-στήλης μορφή **2 "cdo2"**	Υπάρχει στήλη με όλα τα βάρη ίσα (ενώ όλα τα βάρη στο μπλοκ δεν είναι μηδέν)*(εκτός ίσως της διαγωνίου που είναι ίσα)
Κυρίαρχης-γραμμής μορφή **3 "rdo3"**	Η γραμμή, που έχει την μεγαλύτερη κεντρική τιμή, έχει όλα τα βάρη ίσα (και μη μηδενικά)* (εκτός ίσως της διαγωνίου, όπου όλα τότε είναι ίσα)
Κυρίαρχης-στήλης μορφή **3 "cdo3"**	Η στήλη, που έχει την μεγαλύτερη κεντρική τιμή, έχει όλα τα βάρη ίσα (και μη μηδενικά)* (εκτός ίσως της διαγωνίου, όπου όλα τότε είναι ίσα)
Λειτουργικής-γραμμής "rfn"	Τα μέγιστα (πρέπει να είναι μοναδικά) όλων των γραμμών είναι ίσα (και μη μηδενικά)*, όλα τα άλλα βάρη είναι 0
Λειτουργικής-στήλης "cfn"	Τα μέγιστα (πρέπει να είναι μοναδικά) όλων των στηλων είναι ίσα(και μη μηδενικά)*,όλα τα άλλα βάρη είναι 0
Κανονικής-(f-)γραμμής "rre"	Η συνάρτηση f σε κάθε γραμμή είναι ίση (και μη μηδενική)* για όλες τις γραμμές
Κανονικής-(f-)στήλης "rre"	Η συνάρτηση f σε κάθε στήλη είναι ίση (και μη μηδενική)* για όλες τις στήλες
(f-)κανονική "reg"	Η συνάρτηση f σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη είναι ίση (και μη μηδενική)* για όλες τις γραμμές και όλες τις στήλες χωριστά

Επεξηγήσεις:

* Η συνθήκη μέσα στην παρένθεση προστίθεται, για να διακρίνουμε αυτά τα μπλοκ από τα μηδενικά. Μολονότι συνήθως, από θεωρητικής άποψης, είναι επιθυμητές, οι συνθήκες είναι προαιρετικές. Η συνθήκη δεν υφίσταται, εκτός αν αυτό δηλωθεί ρητά, και δεν αντανακλάται στον τρόπο, που οι ασυνέπειες υπολογίζονται στον Πίνακα 3.9.

+ Ο μηδενικός τύπος μπλοκ συμπεριλαμβάνεται σε αυτόν τον κατάλογο κυρίως για λόγους συνοχής. Εκτός αν δεν χρησιμοποιούνται οι συνθήκες μέσα σε παρενθέσεις μαρκαρισμένες με *, δεν είναι απαραίτητες, καθώς αποτελούν γενικώς μόνο μια ειδική περίπτωση όλων των άλλων τύπων μπλοκ. Εάν χρησιμοποιούνται οι συνθήκες που μαρκάρονται με *, ο συνυπολογισμός του μηδενικού τύπου μπλοκ είναι απαραίτητος.

Πίνακας 3.8: Περιγραφή ιδανικών μπλοκ για ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ (Žiberna, 2007a).

Οι τύποι μπλοκ κανονικής-f-γραμμής ή -στήλης και πλήρους μπλοκ είναι

Ιδανικά μπλοκ	Ασυνέπειες των μπλοκ, $\delta(R(C_a, C_b), T)$: άθροισμα τετραγώνων	Ασυνέπειες των μπλοκ, $\delta(R(C_a, C_b), T)$: απόλυτες αποκλίσεις	Θέση του μπλοκ
Μηδενικό	$\sum_{i,j} b_{ij}^2$	$\sum_{i,j} \lvert b_{ij} \rvert$	Μη-διαγώνια
	$\sum_{i,j} b_{ij}^2 + \mathrm{ss}(\mathrm{diag}(B))$	$\sum_{i,j} \lvert b_{ij} \rvert + \mathrm{ad}(\mathrm{diag}(B))$	Διαγώνια
Πλήρες	$\mathrm{ss}_{i,j}(b_{ij})$	$\mathrm{ad}_{i,j}(b_{ij})$	Μη-διαγώνια
	$\mathrm{ss}_{i\neq j}(b_{ij}) + \mathrm{ss}(\mathrm{diag}(B))$	$\mathrm{ad}_{i\neq j} + \mathrm{ad}(\mathrm{diag}(B))$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-γραμμής μορφή 1	$\min_{i=\arg\max_i\left((\overline{B_{[i,]}}-\overline{B})^2\right)} \left(\mathrm{ss}_j(b_{ij})\right) n_r$	$\min_{i=\arg\max_i\left(\lvert Me(B_{,j})-Me_k(Me(B_{,k}))\rvert\right)} \left(\mathrm{ad}_j(b_{ij})\right) n_r$	Μη-διαγώνια
	$\min\Big(\min_{i=\arg\max_i\left((\overline{B_{[i,]}}-\overline{B})^2\right)} \left(\mathrm{ss}_j(b_{ij})\right),$ $\min_{i=\arg\max_i\left((\overline{B_{[i,]}}-\overline{B})^2\right)} \big(\mathrm{ss}_{j\neq i}(b_{ij})+$ $\left(b_{ii} - \overline{\mathrm{diag}(B)}\right)^2 \big)\Big) n_r$	$\min\Big(\min_{i=\arg\max_i\left(\lvert Me(B_{,j})-Me_k(Me(B_{,k}))\rvert\right)} \left(\mathrm{ad}_j(b_{ij})\right),$ $\min_{i=\arg\max_i\left(\lvert Me(B_{,j})-Me_k(Me(B_{,k}))\rvert\right)} \big(\mathrm{ad}_{j\neq i}(b_{ij})+$ $\lvert b_{ii} - Me(\mathrm{diag}(B))\rvert \big)\Big) n_r$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-στήλης μορφή 1	$\min_{i=\arg\max_j\left((\overline{B_{[,j]}}-\overline{B})^2\right)} \left(\mathrm{ss}_i(b_{ij})\right) n_c$	$\min_{i=\arg\max_j\left(\lvert Me(B_{,j})-Me_k(Me(B_{,k}))\rvert\right)} \left(\mathrm{ad}_i(b_{ij})\right) n_c$	Μη-διαγώνια
	$\min\Big(\min_{j=\arg\max_j\left((\overline{B_{[,j]}}-\overline{B})^2\right)} \left(\mathrm{ss}_j(b_{ij})\right),$ $\min_{i=\arg\max_i\left((\overline{B_{[i,]}}-\overline{B})^2\right)} \big(\mathrm{ss}_{i\neq j}(b_{ij})+$ $\left(b_{jj} - \overline{\mathrm{diag}(B)}\right)^2 \big)\Big) n_c$	$\min\Big(\min_{i=\arg\max_i\left(\lvert Me(B_{,j})-Me_k(Me(B_{,k}))\rvert\right)} \left(\mathrm{ad}_j(b_{ij})\right),$ $\min_{j=\arg\max_j\left(\lvert Me(B_{,j})-Me_k(Me(B_{,k}))\rvert\right)} \big(\mathrm{ad}_{i\neq j}(b_{ij})+$ $\lvert b_{jj} - Me(\mathrm{diag}(B))\rvert \big)\Big) n_c$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-γραμμής (απλή-μορφή 2)	$\min_i^{n_r} \left(\mathrm{ss}_j(b_{ij})\right) n_r$	$\min_i^{n_r} \left(\mathrm{ad}_i(b_{ij})\right) n_r$	Μη-διαγώνια
	$\min\Big(\min_i^{n_r} \left(\mathrm{ss}_j(b_{ij})\right), \min_i^{n_r} \big(\mathrm{ss}_{i\neq j}(b_{ij})+$ $\left(b_{ii} - \overline{\mathrm{diag}(B)}\right)^2 \big)\Big) n_r$	$\min\Big(\min_i^{n_r} \left(\mathrm{ad}_i(b_{ij})\right), \min_i^{n_r} big(\mathrm{ad}_i(b_{ij})+$ $\lvert b_{ii} - Me(\mathrm{diag}(B))\rvert \big)\Big) n_r$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-στήλης (απλή-μορφή 2)	$\min_j^{n_c} \left(\mathrm{ss}_i(b_{ij})\right) n_c$	$\min_j^{n_c} \left(\mathrm{ad}_j(b_{ij})\right) n_c$	Μη-διαγώνια
	$\min\Big(\min_j^{n_c} \left(\mathrm{ss}_i(b_{ij})\right), \min_j^{n_c} \big(\mathrm{ss}_{i\neq j}(b_{ij})+$ $\left(b_{jj} - \overline{\mathrm{diag}(B)}\right)^2 \big)\Big) n_c$	$\min\Big(\min_j^{n_c} \left(\mathrm{ad}_j(b_{ij})\right), \min_j^{n_c} big(\mathrm{ad}_j(b_{ij})+$ $\lvert b_{jj} - Me(\mathrm{diag}(B))\rvert \big)\Big) n_c$	Διαγώνια

Ιδανικά μπλοκ	Μπλοκ ασυνέπειες $\delta(R(C_a,C_b),T)$ — άθροισμα τετραγώνων	απόλυτες αποκλίσεις	Θέση του μπλοκ
Κυρίαρχης-γραμμής	$\min_{i=\arg\max_i(\overline{B_{[i,]}})}(\mathrm{ss}_j(b_{ij}))\,n_r$	$\min_{i=\arg\max_i(Me(B_{,j}))}(\mathrm{ad}_i(b_{ij}))\,n_c$	Μη-διαγώνια
μορφή 3	$\min\Big(\min_{i=\arg\max_i(\overline{B_{[i,]}})}(\mathrm{ss}_j(b_{ij})),\min_{i=\arg\max_i(\overline{B_{[i,]}})}(\mathrm{ss}_{i\neq j}(b_{ij})+\big(b_{ii}-\overline{\mathrm{diag}(B)}\big)^2)\Big)n_r$	$\min\Big(\min_{i=\arg\max_i(Me(B_{,j}))}(\mathrm{ad}_j(b_{ij})),\min_{i=\arg\max_i(Me(B_{,j}))}(\mathrm{ad}_{i\neq j}(b_{ij})+\lvert b_{ii}-Me(\mathrm{diag}(B))\rvert)\Big)n_r$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-στήλης	$\min_{j=\arg\max_j(\overline{B_{[,j]}})}(\mathrm{ss}_i(b_{ij}))\,n_c$	$\min_{j=\arg\max_j(Me(B_{,j}))}(\mathrm{ad}_i(b_{ij}))\,n_c$	Μη-διαγώνια
μορφή 3	$\min\Big(\min_{j=\arg\max_j(\overline{B_{[,j]}})}(\mathrm{ss}_i(b_{ij})),\min_{j=\arg\max_j(\overline{B_{[,j]}})}(\mathrm{ss}_{i\neq j}(b_{ij})+\big(b_{jj}-\overline{\mathrm{diag}(B)}\big)^2)\Big)n_c$	$\min\Big(\min_{j=\arg\max_j(Me(B_{,j}))}(\mathrm{ad}_i(b_{ij})),\min_{j=\arg\max_j(Me(B_{,j}))}(\mathrm{ad}_{i\neq j}(b_{ij})+\lvert b_{jj}-Me(\mathrm{diag}(B))\rvert)\Big)n_c$	Διαγώνια
Λειτουργικής-γραμμής	$\mathrm{ss}(\max(B_{[i,]}))n_c+\sum_{i=1}^{n_r}\Big(\sum_{j=1,j\neq\arg\max_j(B_{[i,]})}b_{ij}^2\Big)$	$\mathrm{ad}(\max(B_{[i,]}))n_c+\sum_{i=1}^{n_r}\Big(\sum_{j=1,j\neq\arg\max_j(B_{[i,]})}\lvert b_{ij}\rvert\Big)$	
Λειτουργικής-στήλης	$\mathrm{ss}(\max(B_{[,j]}))n_r+\sum_{j=1}^{n_c}\Big(\sum_{i=1,i\neq\arg\max_i(B_{[,j]})}b_{ij}^2\Big)$	$\mathrm{ad}(\max(B_{[,j]}))n_r+\sum_{j=1}^{n_c}\Big(\sum_{i=1,j\neq\arg\max_i(B_{[,j]})}\lvert b_{ij}\rvert\Big)$	
Κανονικής-f-γραμμής	$\mathrm{ss}_i(f(B_{[i,]}))n_c$	$\mathrm{ad}_i(f(B_{[i,]}))n_[c]$	
Κανονικής-f-στήλης	$\mathrm{ss}_j(f(B_{[,j]}))n_r$	$\mathrm{ad}_j(f(B_{[,j]}))n_[r]$	
f-κανονικό	$\max(\mathrm{ss}_i(f(B_{[i,]}))n_c,\mathrm{ss}_j(f(B_{[,j]}))n_r)$	$\max(\mathrm{ad}_i(f(B_{[i,]}))n_[c],\mathrm{ad}_j(f(B_{[,j]}))n_[r])$	

Επεξηγήσεις:

B	ο πίνακας του μπλοκ $R(C_i,C_j)$	$\mathrm{diag}(B)$	διάνυσμα των διαγώνιων στοιχείων του B
$B_{[i,]}$	η i-οστή γραμμή του B	$\mathrm{Med}(x)$	ενδιάμεση τιμή
$B_{[,j]}$	η j-οστή στήλη του B	$\overline{x}$	μέση τιμή
b_{ij}	στοιχείο του B, που ορίζεται από την i-οστή γραμμή και j-οστή στήλη		
n_r	αριθμός γραμμών σε ένα μπλοκ $=\mathrm{card}C_i$	$\mathrm{ss}(x)$	άθροισμα τετραγωνικών αποκλίσεων από τον μέσο: $\mathrm{ss}(x)=\sum_i(x_i-\overline{x})^2$
n_c	αριθμός στηλών σε ένα μπλοκ $=\mathrm{card}C_j$	$\mathrm{ad}(x)$	άθροισμα απόλυτων αποκλίσεων από τον ενδιάμεσο: $\mathrm{ad}(x)=\sum_i\lvert x_i-Me(x)\rvert$

Πίνακας 3.9: Ασυνέπειες τύπου μπλοκ της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ (Žiberna, 2007a).

συμβατοί με την έννοια ότι οι ασυνέπειες των μπλοκ για *ομοιογενή πλήρη μπλοκ* και *ομοιογενή μπλοκ κανονικής-f-γραμμής(στήλης)* ταιριάζουν αν και μόνο αν οι γραμμές (στήλες) είναι ομοιογενείς, δηλαδή, εάν κάθε γραμμή (στήλη) έχει μηδενική μεταβλητότητα. Πάντως, οι ανισότητες:

$$\delta(R(C_a, C_b), cre) \leq \delta(R(C_a, C_b), reg) \leq \delta(R(C_a, C_b), com),$$

$$\delta(R(C_a, C_b), rre) \leq \delta(R(C_a, C_b), reg) \leq \delta(R(C_a, C_b), com),$$

ισχύουν στην μοντελοποίηση σε μπλοκ για το άθροισμα τετραγώνων, εάν η συνάρτηση f είναι ο μέσος (mean), όχι όμως γενικώς.

Επομένως, είναι αμφισβητήσιμο, εάν ο f-κανονικός τύπος μπλοκ και οι παρόμοιοι (κανονικής-f-γραμμής και κανονικής-f-στήλης) είναι συμβατοί με τους άλλους τύπους μπλοκ, όταν η συνάρτηση f δεν είναι ο μέσος ή το μέτρο της απόκλισης δεν είναι το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων. Είναι συμβατοί με την έννοια ότι, π.χ., η ασυνέπεια του μπλοκ κανονικής-f-γραμμής είναι μικρότερη από την ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ, εάν η μεταβλητότητα (σε μια κατάλληλα κανονικοποιημένη μορφή, που λαμβάνει υπόψη της τον αριθμό των μονάδων, π.χ., την μεταβλητότητα για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ του αθροίσματος τετραγώνων) στις τιμές της συνάρτησης f, που υπολογίζονται στις γραμμές, είναι μικρότερη από τη μεταβλητότητα σε όλες τις τιμές των στοιχείων. Όμως, για κάποιες συναρτήσεις f, π.χ., το max, που είναι επίσης μια πολύ χρησιμοποιούμενη συνάρτηση, η μεταβλητότητα στις τιμές της συνάρτησης f, που υπολογίζονται στις γραμμές, είναι συχνά μεγαλύτερη από την μεταβλητότητα όλων των τιμών των στοιχείων του μπλοκ. Επομένως, τουλάχιστον γενικώς, οι παραπάνω ανισότητες δεν ισχύουν. Επίσης, ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη f, οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ για f-κανονικά και παρόμοια μπλοκ μπορούν να γίνουν πολύ μεγάλες. Εάν αυτό δεν θεωρείται προβληματικό, τα f-κανονικά και παρόμοια μπλοκ μπορούν να θεωρηθούν συμβατά με άλλους τύπους μπλοκ και, επομένως, να χρησιμοποιηθούν από κοινού.

Εάν πρόκειται να χρησιμοποιηθούν μαζί, χρειάζεται προσοχή. Αυτό είναι ένα πρόβλημα, διότι, όπως είδαμε στην Παράγραφο 2.1.3, το μέγιστο προτείνεται ως κατάλληλη συνάρτηση. Σε περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται οι τύποι μπλοκ κανονικής-max-γραμμής, κανονικής-max-στήλης ή/και το max-κανονικό μπλοκ στο ίδιο μοντέλο μπλοκ, όπως, π.χ., ένας τύπος πλήρους μπλοκ, άλλες προσεγγίσεις μπορεί να είναι περισσότερο κατάλληλες. Αυτό είναι ένα μεγάλο μειονέκτημα για την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ, αφού μια από τις κύριες ιδέες και ένα από τα πλεονεκτήματα της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ είναι ο συνδυασμός διάφορων τύπων μπλοκ στο ίδιο μοντέλο μπλοκ και τα f-κανονικά και παρόμοια μπλοκ είναι κάποιοι από τους σημαντικότερους τύπους μπλοκ.

Σύντομη Σύγκριση με Προηγούμενες Προσεγγίσεις

Το κύριο πλεονέκτημα αυτών των προσεγγίσεων σε σχέση με εκείνες, που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο τμήμα του κεφαλαίου αυτού, είναι ότι δεν απαιτούν καμία πρόσθετη παράμετρο (στην προηγούμενη προσέγγιση, ο προσδιορίσμός της σωστής τιμής του m δημιουργούσε σημαντικά προβλήματα). Επομένως, αν μη τι άλλο, οι λύσεις, που λαμβάνονται από αυτόν τον τύπο μοντελοποίησης σε μπλοκ, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως πρώτο βήμα για την προηγούμενη προσέγγιση της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν με αρνητικές τιμές-βάρη στους δεσμούς, μολονότι για κάποιους τύπους μπλοκ (π.χ., κυρίαρχης-γραμμής και -στήλης μορφής 3 και λειτουργικής-γραμμής και -στήλης), μπορεί να απαιτούνται κάποιοι πρόσθετοι υπο-τύποι, όπου το μέγιστο θα μπορούσε να αντικατασταθεί από το ελάχιστο.

Μια παρόμοια προσέγγιση, τουλάχιστον για την δομική ισοδυναμία, έχει ήδη προταθεί από τους Borgatti και Everett (1992b, σελ. 101), στην οποίαν έπαιρναν τη μέση μεταβλητότητα μέσα στα μπλοκ των πινάκων να είναι ένα φυσικό μέτρο προσαρμογής (fit). Το μειονέκτημα αυτού του μέτρου, σε σύγκριση με το μέτρο του αθροίσματος των τετραγώνων και το μέτρο των απολύτων αποκλίσεων, είναι ότι, στην περίπτωση της μεταβλητότητας, το μέγεθος των μπλοκ επηρρεάζει κατά πολύ την συνεισφορά ενός στοιχείου στην ασυνέπεια.

Η προσέγγιση της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, που παρουσιάστηκε από τους Doreian et al. (2005, σελ. 226), προτείνει όπως οι ασυνέπειες των μπλοκ να *κανονικοποιηθούν* διαιρώντας τους[6] με τον αριθμό των στοιχείων του μπλοκ. Αυτό είναι επίσης δυνατό σε προσεγγίσεις της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ για δίκτυα με βάρη. Σε αυτή την περίπτωση, η προσέγγιση του αθροίσματος των τετραγώνων αντικαθίσταται από την προσέγγιση της μεταβλητότητας.

3.2.3 Πεπλεγμένη Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

Αυτό το τμήμα είναι βασισμένο στην εργασία των Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 11-13), που παρουσιάστηκε στη Παράγραφο 3.1.4. Οι περιγραφές των ιδανικών μπλοκ για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι πολύ παρόμοιες με εκείνες για την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ, που παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 3.8. Πάντως, υπάρχουν μικρές διαφορές. Για αυτό, οι περιγραφές των ιδανικών μπλοκ για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.10.

[6] Στην πραγματικότητα διαιρούν την μη-κανονικοποιημένη ασυνέπεια του μπλοκ $+1(\delta(R(C_a, C_b), T) + 1)$ με τον αριθμό των στοιχείων του μπλοκ (Doreian et al., 2005, σελ. 226).

Ιδανικά μπλοκ με "ετικέτα"	**Περιγραφή για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ**
Μηδενικό$^{+}$ "null"	Όλα 0 (Εκτός ίσως της διαγωνίου, όπου όλα τότε θα είναι ίσα)
Πλήρες "com"	Όλα ίσα και διάφορα του 0* (η διαγώνιος μπορεί να αναλυθεί ξεχωριστά)
Κυρίαρχης-γραμμής "rdo"	Υπάρχει μια γραμμή με όλα τα βάρη ίσα και μη μηδενικά* (εκτός ίσως της διαγωνίου, όπου όλα τότε είναι ίσα)
Κυρίαρχης-στήλης "cdo"	Υπάρχει μια στήλη με όλα τα βάρη ίσα και μη μηδενικά* (εκτός ίσως της διαγωνίου, όπου όλα τότε είναι ίσα)
Λειτουργικής-γραμμής "rfn"	Τα μέγιστα (πρέπει να είναι μοναδικά) όλων των γραμμών είναι ίσα και μη μηδενικά* όλα τα άλλα βάρη είναι 0
Λειτουργικής-στήλης "cfn"	Τα μέγιστα (πρέπει να είναι μοναδικά) όλων των στηλων είναι ίσα και μη μηδενικά* όλα τα άλλα βάρη είναι 0
Κανονικής(-*max*)-γραμμής "rre"	Η συνάρτηση max σε κάθε γραμμή είναι ίση και μη μηδενική* για όλες τις γραμμές
Κανονικής(-*max*)-στήλης "rre"	Η συνάρτηση max σε κάθε στήλη είναι ίση και μη μηδενική* για όλες τις στήλες
(max −) **κανονικής "reg"**	Η συνάρτηση max σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη είναι ίση και μη μηδενική* για όλες τις γραμμές και όλες τις στήλες χωριστά

Επεξήγηση:

* Η συνθήκη ότι οι τιμές πρέπει να είναι μη μηδενικές είναι προαιρετική και εξαρτάται από την χρησιμοποιούμενη μορφή της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ.

Πίνακας 3.10: Περιγραφή ιδανικών μπλοκ για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ (Žiberna, 2007a).

Στον πίνακα 3.5, παρουσιάζονται οι αρχικοί τύποι των Borgatti και Everett (1992b, σελ. 13) για τις ασυνέπειες τριών τύπων μπλοκ. Αυτές οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ είναι κανονικοποιημένες με τιμές μεταξύ 0 και 1. Για να κάνουμε την προσέγγισή τους πιό παρόμοια με άλλες προσεγγίσεις, που παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο, οι τιμές των ασυνεπειών πρέπει να πολλαπλασιαστούν με τον αριθμό των στοιχείων των μπλοκ, επειδή στους αρχικούς τύπους οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ ήταν στην πραγματικότητα διαρημένες με τον αριθμό των στοιχείων των μπλοκ. Αυτό το είδος κανονικοποίησης (που διαιρεί την ασυνέπεια του τύπου μπλοκ με τον αριθμό των στοιχείων) ονομάζεται *κανονικοποίηση μεγέθους μπλοκ*. Μπορεί επίσης να δει κανείς ότι οι τύποι, που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 3.1.4, είναι για μη-διαγώνια μπλοκ.

Βάσει αυτών των παραδειγμάτων, της δυαδικής μοντελοποίησης σε μπλοκ και των προτεινόμενων προσεγγίσεων, που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, αναπτύχθηκαν οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ (χωρίς κανονικοποίηση, χρησιμοποιώντας το μέγεθος του μπλοκ). Ξαναγράφονται επίσης με τέτοιο τρόπο ώστε ότι η ομοιότητα με την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη να γίνεται προφανέστερη. Αυτοί παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.11. Όλοι αυτοί οι τύποι περιλαμβάνουν τη διαίρεση του αριθμητή με το μέγιστο όλων των μη μηδενικών αριθμών είτε ενός μπλοκ είτε μόνο μιας γραμμής είτε μόνο μιας στήλη ενός μπλοκ. Σχετικά με το πώς αυτό ορίζεται, όταν δεν υπάρχει καμία μη μηδενική τιμή-βάρος σε ένα μπλοκ ή σε μια επιλεγμένη γραμμή ή στήλη, δείτε την ακριβώς επόμενη υποενότητα.

Συγκρίνοντας τους τύπους στον Πίνακα 3.11 για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ με τον Πίνακα 3.8 για την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, βλέπουμε πως είναι παρόμοιοι. Υπάρχουν στην πραγματικότητα μόνο δυο διαφορές. Η παράμετρος m στην μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη αντικαθίσταται στην πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ από το μέγιστο είτε ολόκληρου του μπλοκ είτε από το μέγιστο της κατάλληλης γραμμής ή στήλης. Εξαιτίας του γεγονότος ότι αυτό το μέγιστο είναι πάντα μεγαλύτερο ή τουλάχιστον ίσο με την τιμή που εξάγεται από αυτό, δεν υπάρχει καμία ανάγκη να ληφθούν υπόψη μόνο οι θετικές τιμές-βάρη, όπως γίνεται με την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη. Η δεύτερη διαφορά είναι ότι η ασυνέπεια του τύπου μπλοκ διαιρείται εδώ με το μέγιστο (το οποίο αντιστοιχεί στην παράμετρο m της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη), που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό της. Αυτή η κανονικοποίηση θα αναφέρεται ως *μέγιστη κανονικοποίηση*. Αυτή δεν θα είχε καμία επίδραση στην μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, δεδομένου ότι το m είναι πάντα το ίδιο. Όμως, στην πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, το μέγιστο είναι διαφορετικό στα μπλοκ και μερικές φορές ακόμη και μέσα σε ένα μπλοκ, για διαφορετικούς τύπους μπλοκ. Για να καταστήσουμε αυτούς τους τύπους πιό συγκρίσιμους με την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, θα μπορούσαμε να παραλείψουμε τη διαίρεση με το μέγιστο των κατάλληλων τιμών (μέγιστη κανονικοποίηση). Οι τύποι, που προκύπτουν κατά αυτόν τον τρόπο, παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.12.

Επιλογές για Έναν Ειδικό Προσδιορισμό του Μεγίστου των Βαρών

Από τους Πίνακες 3.11 και 3.12, το μέγιστο των μη-μηδενικών τιμών-βαρών σε ένα μπλοκ (ή στην κατάλληλη γραμμή ή στήλη για τα μπλοκ κυρίαρχης-γραμμής ή -στήλης) διαδραματίζει έναν σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό των ασυνεπειών των μπλοκ, για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Το ερώτημα είναι τι πρέπει να γίνει, όταν δεν υπάρχουν καθόλου μη-μηδενικές τιμές-βάρη, δηλαδή, όταν όλες οι τιμές-βάρη είναι 0.

Στην αρχική μορφή της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (Batagelj και Ferligoj, 2000, σελ. 12-13), το πρόβλημα λύθηκε παίρνοντας το κλάσμα, όπου ένα τέτοιο μέγιστο εμφανίζεται, να είναι ίσο με 0, θεωρώντας, κατά συνέπεια, την περίπτωση να έχουμε μόνο 0 στις ασυνέπεις των μπλοκ για το μηδενικό μπλοκ και μόνο 1, για όλους τους άλλους τύπους μπλοκ.

Τύπος μπλοκ	**Ασυνέπειες τύπου μπλοκ,** $\delta(R(C_i, C_j), T)$	**Θέση του μπλοκ**
Μηδενικός	$\frac{\sum B}{\max\{B\neq 0\}}$	Μη-διαγώνια
	$\frac{\sum B+\min(0,-2\sum \mathrm{diag}(B)+\max\{B\neq 0\}n_r)}{\max\{B\neq 0\}} = \frac{\sum B+\min(0,\sum \mathrm{diag}(B)+\sum(\max\{B\neq 0\}-\mathrm{diag}(B)))}{\max\{(B\neq 0\}}$	Διαγώνια
Πλήρης	$n_c n_r - \frac{\sum B}{\max\{B\neq 0\}} = \frac{\sum\{B\neq 0\}-B}{\max\{B\neq 0\}}$	Μη-διαγώνια
	$\frac{\sum(\max\{B\neq 0\}-B)+\min(0,2\sum \mathrm{diag}(B)-\max\{B\neq 0\}n_r}{\max\{B\neq 0\}} = \frac{\sum(\max\{B\neq 0\}-B)+\min(0,\sum \mathrm{diag}(B)-\sum(\max\{B\neq 0\}-\mathrm{diag}(B)))}{\max\{B\neq 0\}}$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-γραμμής	$n_c n_r - \max_i \frac{n_r \sum_j B_{[i,j]}}{\max\{B\neq 0\}}$	Μη-διαγώνια
	$\min_i \frac{\sum\left(\max_j\{B_{[i,j]}\neq 0\}-B_{[i,j]}\right)-\min\left(0,\max_j\{B_{[i,j]}\neq 0\}-2B_{[i,j]}\right)}{\max\{B\neq 0\}} n_r$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-στήλης	$n_c n_r - \max_j \frac{n_c \sum_i B_{[i,j]}}{\max\{B\neq 0\}}$	Μη-διαγώνια
	$\min_j \frac{\sum\left(\max_i\{B_{[i,j]}\neq 0\}-B_{[i,j]}\right)-\min\left(0,\max_i\{B_{[i,j]}\neq 0\}-2B_{[i,j]}\right)}{\max\{B\neq 0\}} n_c$	Διαγώνια
Κανονικής- max- **γραμμής**	$n_r n_c - \frac{n_c \sum_i max_j B_{[i,j]}}{\max\{B\neq 0\}} = \frac{\sum_i\left(\max\{B\neq 0\}-\max_j B_{[i,j]}\right)}{\max\{B\neq 0\}}$	
Κανονικής- $\max -$ **στήλης**	$n_r n_c - \frac{n_r \sum_j max_i B_{[i,j]}}{\max\{B\neq 0\}} = \frac{\sum_j\left(\max\{B\neq 0\}-\max_i B_{[i,j]}\right)}{\max\{B\neq 0\}}$	
$\max -$ **κανονική**	$\frac{\sum_i\left(\max\{B\neq 0\}-\max_j B_{[i,j]}\right)}{\max\{B\neq 0\}} + \frac{\sum_j\left(\max\{B\neq 0\}-\max_i B_{[i,j]}\right)}{\max\{B\neq 0\}} - -\frac{\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c}\min(\max\{B\neq 0\}-\max_k B[i,k],\max\{B\neq 0\}-\max_l B[l,j])}{\max\{B\neq 0\}} = = \frac{\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c}\max(\max\{B\neq 0\}-\max_k B[i,k],\max\{B\neq 0\}-\max_l B[l,j])}{\max\{B\neq 0\}}$	
Λειτουργικής-γραμμής	$\frac{\sum_{i=1}^{n_r}\left((\max\{B\neq 0\}-\max(B_{[i,]}))n_c+\sum_{j=1,j\neq arg\max(B_{[i,j]})}^{n_c} B_{[i,j]}\right)}{\max\{B\neq 0\}}$	
Λειτουργικής-στήλης	$\frac{\sum_{j=1}^{n_c}\left((\max\{B\neq 0\}-\max(B_{[,j]}))n_r+\sum_{i=1,i\neq arg\max(B_{[i,j]})}^{n_r} B_{[i,j]}\right)}{\max\{B\neq 0\}}$	

Πίνακας 3.11: Υπολογισμός των ασυνεπειών των τύπων μπλοκ για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ χωρίς κανονικοποίηση του μεγέθους των μπλοκ (Žiberna, 2007a).

Όμως, αυτό δεν είναι μια ικανοποιητική λύση, όταν δεν υπολογίζονται οι ασυνέπειες των μπλοκ στην κανονικοποιημένη μορφή, δεδομένου ότι χρειαζόμαστε μια συγκεκριμένη τιμή για το μέγιστο. Εξετάζονται τότε δύο επιλογές. Το μέγιστο των διαφορετικών μη μηδενικών στοιχείων, τίθεται, όταν όλα τα στοιχεία είναι 0, ως η μια από τις δυο εξής περιπτώσεις:

1. Ίσο με το μέγιστο μιας μεγαλύτερης δομής από αυτήν, για την οποία υπολογίζεται το μέγιστο. Στην περίπτωση που υπολογίζονταν τα μέγιστα ή τα μη-μηδενικά στοιχεία για ένα μπλοκ, χρησιμοποιείται αντί για αυτά η μέγιστη τιμή ολόκληρου του πίνακα (δικτύου). Εάν πρέπει να υπολογιστεί για μια γραμμή, χρησιμοποιείται αντί για αυτό το μέγιστο ενός μπλοκ και εάν και αυτό είναι επίσης 0, χρησιμοποιείται η μέγιστη τιμή ολόκληρου του πίνακα (δικτύου).

2. Ίσο με 0 και, εάν αυτό είναι κανονικοποιμένο, η ασυνέπεια του οποιοδήποτε μπλοκ (ή γραμμής ή στήλης) τίθεται ίση με 0.

Είναι επίσης πιθανό να επιλεγεί η μια από αυτές τις επιλογές, όταν υπολογίζουμε τα μέγιστα των μη-μηδενικών στοιχείων των μπλοκ, και η άλλη, όταν υπολογίζουμε τα μέγιστα των μη-μηδενικών στοιχείων μιας γραμμής ή στήλης σε ένα μπλοκ. Η πρώτη επιλογή παρέχει στην κανονικοποιημένη περίπτωση τα ίδια αποτελέσματα με την επεξεργασία, που προτάθηκε από τους Batagelj και Ferligoj (2000, σελ. 12-13). Στην πραγματικότητα, οποιοσδήποτε θετικός αριθμός θα μπορούσε να παράγει τα ίδια αποτελέσματα στην κανονικοποιημένη περίπτωση. Πάντως, αυτή η λύση επίσης παρέχει εφικτές ασυνέπειες των τύπων μπλοκ για την μη-κανονικοποιημένη περίπτωση. Η δεύτερη λύση είναι πρακτικά το αντίθετο. Αν και μπορεί να φανεί παράξενο ότι, στην περίπτωση ενός ιδανικού μηδενικού μπλοκ, η ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ θα ήταν επίσης 0, η ανάγκη για μια τέτοια επιλογή προκύπτει, όταν δεν χρησιμοποιούμε τα μηδενικά μπλοκ. Η χρήση αυτής της δεύτερης επιλογής είναι, στην πραγματικότητα, ενδεδειγμένη σε περιπτώσεις, όταν ο μηδενικός τύπος μπλοκ δεν είναι ένας από τους επιτρεπτούς τύπους μπλοκ για οποιοδήποτε μπλοκ του μοντέλου των μπλοκ. Η δεύτερη επιλογή επιτρέπει τον τύπο του μηδενικού μπλοκ να είναι μια ειδική περίπτωση όλων των άλλων τύπων μπλοκ, παρόμοια όπως είναι δυνατό με την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ. Όμως, ενώ αυτή η επιλογή είναι φυσιολογική για την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ, είναι ξένη προς την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ.

Διαφορετικές Μορφές της Πεπλεγμένης Μοντελοποίησης σε Μπλοκ

Η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ έχει κυρίως τρεις επιλογές, που μπορούν να επιλεγούν και οι οποίες οδηγούν σε τρεις διαφορετικές μορφές της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ. Οι επιλογές αυτές είναι, εάν ισχύουν ή όχι τα παρακάτω:

1. ο τύπος του μηδενικού μπλοκ επιτρέπεται, όταν δεν χρησιμοποιείται η προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ,

2. χρησιμοποιείται η μέγιστη κανονικοποίηση και

Τύπος μπλοκ	**Ασυνέπειες τύπων μπλοκ,** $\delta(R(C_i, C_j), T)$	**Θέση του μπλοκ**
Μηδενικός	$\sum B$	Μη-διαγώνια
	$\sum B + \min(0, -2\sum \operatorname{diag}(B) + \max\{B \neq 0\} n_r) =$ $= \sum B + \min(0, \sum \operatorname{diag}(B) + \sum(\max\{B \neq 0\} - \operatorname{diag}(B)))$	Διαγώνια
Πλήρης	$\sum(\max\{B \neq 0\} - B)$	Μη-διαγώνια
	$\sum(\max\{B \neq 0\} - B) + \min(0, 2\sum \operatorname{diag}(B)$ $- \max\{B \neq 0\} n_r = \sum(\max\{B \neq 0\} - B)$ $+ \min(0, \sum \operatorname{diag}(B) - \sum(\max\{B \neq 0\} - \operatorname{diag}(B)))$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-γραμμής	$\min_i \left(\sum_j \left(\max_j \{B_{[i,j]} \neq 0\} - B_{[i,j]} \right) \right) n_r$	Μη-διαγώνια
	$\min_i \ (\sum_j \left(\max_j \{B_{[i,j]} \neq 0\} - B_{[i,j]} \right) -$ $- \min\big(0, \max_j\{B_{[i,j]} \neq 0\} - 2B_{[i,j]}\big)\big) n_r$	Διαγώνια
Κυρίαρχης-στήλης	$\min_j \left(\sum_i \left(\max_i \{B_{[i,j]} \neq 0\} - B_{[i,j]} \right) \right) n_c$	Μη-διαγώνια
	$\min_j \ (\sum_i \left(\max_i \{B_{[i,j]} \neq 0\} - B_{[i,j]} \right) -$ $\min\big(0, \max_i\{B_{[i,j]} \neq 0\} - 2B_{[i,j]}\big)\big) n_c$	Διαγώνια
Κανονικής- max- **γραμμής**	$\sum_i \left(\max\{B \neq 0\} - \max_j B_{[i,j]} \right) n_c$	
Κανονικής- max **στήλης**	$\sum_j \left(\max\{B \neq 0\} - \max_i B_{[i,j]} \right) n_r$	
max **κανονικό**	$\sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_c} \max\big(\max\{B \neq 0\}$ $- \max_k B[i,k], \max\{B \neq 0\} - \max_l B[l,j]\big)$	
Λειτουργικής-γραμμής	$\sum_{i=1}^{n_r} \big((\max\{B \neq 0\} - \max(B_{[i,]}))n_c +$ $+ \sum_{j=1, j \neq arg\max(B_{[i,j]})}^{n_c} B_{[i,j]}\big)$	
Λειτουργικής-στήλης	$\sum_{j=1}^{n_c} \big((\max\{B \neq 0\} - \max(B_{[,j]}))n_r +$ $+ \sum_{i=1, i \neq arg\max(B_{[i,j]})}^{n_r} B_{[i,j]}\big)$	

Πίνακας 3.12: Υπολογισμός των ασυνεπειών των τύπων για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ χωρίς μέγιστη κανονικοποίηση και κανονικοποίηση μεγέθους μπλοκ (Žiberna, 2007a).

3. χρησιμοποιείται η κανονικοποίηση μεγέθους μπλοκ.

Αν και σχεδόν πάντα θα ήταν επιθυμητό να επιτρέπονται τα μηδενικά μπλοκ στο μοντέλο, όπως είναι βεβαίως σημαντικό να διακρίνεται ο μηδενικός τύπος από άλλους τύπους μπλοκ, η αρχική εμπειρία με τη χρήση της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ προτείνει ότι αυτό μπορεί να οδηγήσει σε ανεπαρκείς λύσεις. Ο λόγος είναι ότι η προσθήκη μιας σχετικά μεγάλης τιμής-βάρους (ως προς τις υπόλοιπες τιμές-βάρη) σε οποιοδήποτε μπλοκ καθιστά την ασυνέπειά του πολύ μεγάλη για όλους τους τύπους μπλοκ, εκτός από τον τύπο του μηδενικού μπλοκ. Εάν επίσης χρησιμοποιείται μια μέγιστη κανονικοποίηση, αυτό καθιστά την ασυνέπεια του μηδενικού τύπου μπλοκ, στην πραγματικότητα, ακόμα μικρότερη. Ακόμα κι αν η μέγιστη κανονικοποίηση δεν χρησιμοποιείται, η ασυνέπεια του μηδενικού μπλοκ γίνεται σχετικά μικρότερη συγκρινόμενη με τις ασυνέπειες των άλλων τύπων μπλοκ, καθώς αυτές γίνονται μεγαλύτερες. Αυτό μπορεί να καταστήσει λανθασμένη την ταξινόμηση ενός μπλοκ (όπως έχει δείξει ο Žiberna, 2007a). Επιπλέον, φυσικά επηρρεάζει επίσης το ποιός διαμερισμός είναι βέλτιστος.

Κατά την εφαρμογή της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ σε εμπειρικά και προσομοιωμένα δίκτυα, χρησιμοποιώντας την πεπλεγμένη μοντελοποίηση χωρίς το μηδενικό τύπο μπλοκ ως έναν από τους επιτρεπτούς τύπους μπλοκ, συνήθως παράγονται καλύτεροι διαμερισμοί από ότι με τη χρήση του μηδενικού τύπου μπλοκ. Μια εξαίρεση είναι, όταν χρησιμοποιείται προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Όπως θα περίμενε κανείς, αυτό το πρόβλημα είναι μεγαλύτερο, όταν η κατανομή των τιμών των δεσμών (ή στοιχείων) έχει μια μακριά ουρά στα δεξιά. Επομένως, από την μια μεριά, δεν συνίσταται η χρήση του μηδενικού τύπου μπλοκ ως ενός από τους επιτρεπτούς τύπους μπλοκ. Όπως το παράδειγμα στην επόμενη παράγραφο δείχνει, αυτό, εντούτοις, μπορεί να οδηγήσει σε ακατάλληλους διαμερισμούς. Από την άλλη μεριά, πρέπει να επισημανθεί ότι, μολονότι η αφαίρεση του μηδενικού τύπου μπλοκ από τους επιτρεπτούς τύπους μπλοκ μπορεί να παράγει καλύτερους διαμερισμούς, αυτό διαταράσσει τη λογική της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ. Επομένως, είναι αμφισβητήσιμο, εάν μια τέτοια προσέγγιση είναι εφικτή.

Η χρήση της μέγιστης κανονικοποίησης ειδικά δεν προτείνεται, όταν χρησιμοποιείται ο μηδενικός τύπος μπλοκ, εξαιτίας των συνεπειών, που παρουσιάστηκαν πιο πάνω. Όταν δεν χρησιμοποιείται ο μηδενικός τύπος μπλοκ, το ζήτημα προκύπτει κυρίως, εάν η απόκλιση του μεγέθους των μονάδων είναι μεγαλύτερη, όταν πρόκειται για μια απόκλιση από μια σχετικά χαμηλή τιμή (βάρος), σε σύγκριση με μια απόκλιση του μεγέθους των μονάδων από μια σχετικά μεγάλη τιμή. Ενώ η αρχική εμπειρία προτείνει την αποφυγή χρήσης της μέγιστης κανονικοποίησης, αυτή περιορίζεται μόνο σε λίγες περιπτώσεις.

Το ζήτημα της χρήσης της κανονικοποίησης του μεγέθος μπλοκ είναι το ίδιο όπως και με άλλους τύπους μοντελοποίησης σε μπλοκ. Κατά κανόνα, η χρήση της δεν προτείνεται, δεδομένου ότι το μέγεθος του μπλοκ επηρεάζει τη συνεισφορά ενός στοιχείου στη συνολική ασυνέπεια.

Συγκρίση με τη Μοντελοποίηση σε Μπλοκ με Βάρη και τα Προβλήματα της Ταξινόμησης

Όπως αναφέρθηκε, οι τύποι για την πεπλεγμένη και για την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη είναι παρόμοιοι. Οι δύο προσεγγίσεις υποστηρίζουν πρακτικά σχεδόν όλους τους τύπους των μπλοκ, που εισάγονται στην δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ. Εντούτοις, οι δύο διαφορές μεταξύ της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη και της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, που περιγράφονται πιο πάνω, έχουν μια μεγάλη επίδραση στην λειτουργία αυτών των τύπων της μοντελοποίησης σε μπλοκ, ιδιαίτερα εξαιτίας των μέγιστων αλλαγών μεταξύ των μπλοκ και ακόμη και μέσα στα ίδια τα μπλοκ, για μερικούς τύπους των μπλοκ.

Σε αυτή τη σύγκριση χρησιμοποιείται η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ με μια *μέγιστη* κανονικοποίηση και χωρίς τη χρήση της κανονικοποίησης μεγέθους μπλοκ, η οποία χρησιμοποιεί τις ασυνέπειες των τύπων μπλοκ, που παρουσιάστηκαν στον Πίνακα 3.11. Εντούτοις, τα αποτελέσματα είναι επίσης τα ίδια, εάν χρησιμοποιηθεί η αρχική προσέγγιση (της κανονικοποίησης μεγέθους μπλοκ) αντί της μέγιστης κανονικοποίησης.

Η αντικατάσταση της παραμέτρου m με το μέγιστο, είτε σε ολόκληρο το μπλοκ είτε μόνο σε μια κατάλληλη γραμμή ή στήλη, έχει τα δκά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Το κύριο πλεονέκτημα είναι ότι, παρόμοια με την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ, καμία παράμετρος δεν πρέπει να προκαθοριστεί. Επομένως, η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ συνδυάζει τα πλεονεκτήματα της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη (για συμβατούς τύπους μπλοκ, όπως το μπλοκ μηδενικού τύπου, που δεν είναι μια ειδική περίπτωση άλλων τύπων μπλοκ) και της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ (όπου δεν απαιτείται καμία παράμετρος). Όμως, η αντικατάσταση του m με μια μέγιστη τιμή επίσης θέτει μια σοβαρή απειλή. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο επόμενο παράδειγμα. Θεωρήστε το δίκτυο και το διαμερισμό[7], που παρουσιάζονται με τον πίνακα στο Σχήμα 3.1.

Το πρόβλημα βρίσκεται στην ταξινόμηση των μπλοκ, που παράγονται από

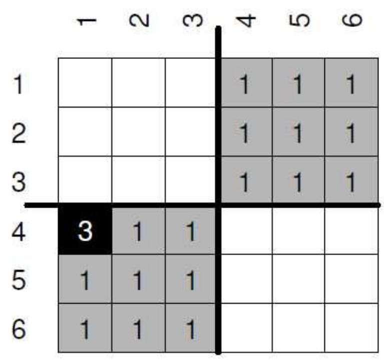
[7] Ο διαμερισμός σε αυτόν τον πίνακα είναι ο μόνος βέλτιστος διαμερισμός, που προκύπτει χρησιμοποιώντας τη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ, την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη για $m = 1$ και την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ (και με τα δύο μέτρα μεταβλητότητας), σύμφωνα με τη δομική ισοδυναμία. Όταν χρησιμοποιούμε την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, ο διαμερισμός είναι πάντοτε βέλτιστος, εφόσον χρησιμοποιείται η μέγιστη κανονικοποίηση (ανεξάρτητα από το εάν χρησιμοποιούνται η κανονικοποίηση μεγέθους μπλοκ και ο μηδενικός τύπος μπλοκ). Όταν χρησιμοποιείται ο μηδενικός τύπος μπλοκ και δεν χρησιμοποιείται η κανονικοποίηση μεγέθους μπλοκ, τότε ο διαμερισμός του Σχήματος 3.1 είναι επίσης βέλτιστος χωρίς την μέγιστη κανονικοποίηση.

την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Θα αναμέναμε να πάρουμε την παρακάτω εικόνα (που παράγεται και από τη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και από την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, για $m = 1$):

	1	2
1	"null"	"com"
2	"com"	"null"

Εντούτοις, αυτό δεν είναι το αποτέλεσμα, που παίρνουμε από την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Η εικόνα, που προκύπτει από την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι (Žiberna, 2007a):

	1	2
1	"null"	"com"
2	"null"	"null"



Σχήμα 3.1: Ένα δίκτυο με βέλτιστο διαμερισμό.

Αν και θα μπορούσε να συζητηθεί πότε πρέπει να θεωρηθεί ένα μπλοκ μηδενικό και πότε πλήρες[8], δεν φαίνεται σωστό ότι το μπλοκ $R(2,1)$ (κάτω αριστερά) πρέπει να είναι μηδενικό, εάν το μπλοκ $R(1,2)$ είναι πλήρες. Τα δύο μπλοκ είναι σχεδόν ίδια, με τη μόνη διαφορά να είναι η τιμή-βάρος 3 στο μπλοκ $R(2,1)$ αντί της τιμής-βάρους 1 στο μπλοκ $R(1,2)$. Έτσι, το μπλοκ $R(2,1)$ έχει όλες τις τιμές-βάρη ίσες ή μεγαλύτερες από εκείνες του μπλοκ $R(1,2)$, αλλά όμως το μπλοκ $R(1,2)$ θεωρείται πλήρες και το μπλοκ $R(2,1)$ μηδενικό. Αυτό μπορεί να είναι προβληματικό, επειδή ένα πλήρες μπλοκ θα έπρεπε να

[8] Για τα δίκτυα με βάρη, δεν είναι απαραίτητο, π.χ., το μπλοκ $[1,2]$ να θεωρείται πλήρες, δεδομένου ότι είναι δυνατόν οι δεσμοί με βάρος 1 να μην είναι αρκετά ισχυροί, για να μεταφερθούν στο αναγόμενο γράφο (εικόνα).

σηματοδοτεί ισχυρότερους δεσμούς από ένα μηδενικό μπλοκ.

Όπως αναφέρεται στην προηγούμενη παράγραφο, αυτό συχνά όχι μόνο έχει επιπτώσεις στην ταξινόμηση των μπλοκ, αλλά και στο διαμερισμό, που είναι βέλτιστος κάτω από μια τέτοια προσέγγιση. Η αρχική εμπειρία προτείνει ότι, όταν δεν χρησιμοποιείται μια προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, ο μηδενικός τύπος μπλοκ δεν μπορεί να είναι ένας από τους επιτρεπτούς τύπους μπλοκ. Όμως, στο παραπάνω παράδειγμα της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, χωρίς τον μηδενικό τύπο μπλοκ και χωρίς τη χρησιμοποίηση της κανονικοποίησης μεγέθους μπλοκ και της μεγίστης κανονικοποίησης, θα οδηγούμασταν σε ένα διαφορετικό διαμερισμό (έναν "λάθος" διαμερισμό) από αυτόν του Σχήματος 3.1.

3.2.4 Παρατηρήσεις

Οι τύποι μοντελοποίησης σε μπλοκ για τη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ δικτύων με βάρη, που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, συγκρίθηκαν στο τμήμα 3.2 με τις έμμεσες προσεγγίσεις, την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και μεταξύ τους. Αυτή η σύγκριση βασίζεται μόνο στις θεωρητικές ιδιότητές τους.

Λίγα καινούρια πράγματα μπορούν να ειπωθούν για τη σύγκριση της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (επίσης για δίκτυα με βάρη) και των έμμεσων προσεγγίσεων. Τα πλεονεκτήματα της προσέγγισης βελτιστοποίησης, που περιγράφεται από τους Doreian et al. (2005, σελ. 245), είναι εξίσου σχετικά για δίκτυα με βάρη, όσο και για δυαδικά δίκτυα. Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ σε σχέση με τις έμμεσες προσεγγίσεις είναι:

- η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου ως μέτρο προσαρμογής (fit) ή ποιότητα διαμερισμού,
- χωρίς να περιορίζονται μόνο στη δομική και την κανονική ισοδυναμία, ο καθορισμός (ορίσμός) της ισοδυναμίας μπορεί να υλοποιηθεί με την επιλογή των επιτρεπτών τύπων μπλοκ,
- η δυνατότητα χρήσης προκαθορισμένων μοντέλων μπλοκ και
- η δυνατότητα επιβεβαιωτικών μοντελοποιήσεων σε μπλοκ (μοντέλα προσαρμογής-fit).

Πάντως, αυτά τα πλεονεκτήματα έχουν και το τίμημά τους. Οι προσεγγίσεις της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ είναι υπολογιστικά πολύ πιο αργές. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα στην υπολογιστική υλοποίησή τους με το πρόγραμμα `blockmodeling` του πακέτου `R` (που θα συζητηθεί στην επόμενη ενότητα).

Καθώς οι έμμεσες προσεγγίσεις έχουν μόνο αναπτυχθεί για τη δομική και την κανονική ισοδυναμία, η πιο άμεση σύγκριση μπορεί να γίνει μόνο για αυτές τις δυο ειδικές περιπτώσεις.

Στην περίπτωση των δικτύων με βάρη, που ταιριάζουν τέλεια με τη δομική ισοδυναμία, οι έμμεσες προσεγγίσεις των δομικών ισοδυναμιών (εφόσον οι διαγώνιες τιμές στον πίνακα αντιμετωπίζονται σωστά) παρέχουν τους ίδιους διαμερισμούς με την ομοιογενή και την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ (σύμφωνα με τη δομική ισοδυναμία). Σε μια ειδική περίπτωση, όπου όλες οι μη-μηδενικές τιμές-βάρη είναι οι ίδιες, προκύπτουν επίσης οι ίδιοι διαμερισμοί, χρησιμοποιώντας την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη (σύμφωνα με τη δομική ισοδυναμία και με μια κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων m και t).

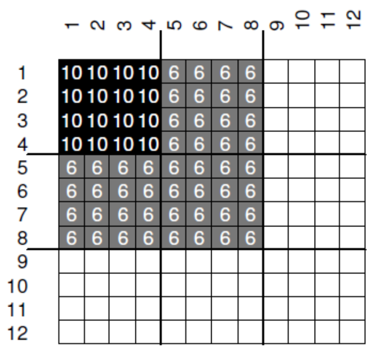
Στην περίπτωση των δικτύων, που ταιριάζουν τέλεια με την max-κανονική ισοδυναμία, προκύπτουν οι ίδιοι διαμερισμοί, χρησιμοποιώντας τη "μονόδρομη" μορφή του αλγορίθμου `REGGE` (`REGGE-OW`) και την ομοιογενή και την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, σύμφωνα με την max-κανονική ισοδυναμία. Όταν όλα τα μέγιστα γραμμών και στηλών μέσα στο μπλοκ έχουν τις ίδιες τιμές-βάρη, η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα (με μια κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων m και t). Στην περίπτωση που όλες οι μη-μηδενικές τιμές-βάρη είναι ίδιες, η "μονόδρομη" μορφή του αλγόριθμου `REGDI` (`REGDI-OW`) επίσης παράγει το ίδιο αποτέλεσμα.

Η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη αναπτύχθηκε κυρίως στη βάση της δυαδικής μοντελοποίησης σε μπλοκ και δεν αποτελεί, επομένως, έκπληξη ότι είναι η πιό παρόμοιοτυπη με αυτήν από όλους τους τύπους μοντελοποίησης σε μπλοκ για δίκτυα με βάρη. Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη έχουν ήδη συγκριθεί σε κάποιο βαθμό στην Παράγραφο 3.2.1, όπου εισήχθη η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη. Εκεί επίσης είχε δειχθεί ότι, όταν εφαρμόζεται σε ένα δυαδικό δίκτυο, η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, με την παράμετρο m ίση με 1, στην πραγματικότητα, γίνεται η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ. Οι δυο άλλοι τύποι μοντελοποίησης σε μπλοκ, η πεπλεγμένη και η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ, είναι πολύ διαφορετικές προσεγγίσεις από την δυαδική μοντελοποίηση. Η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι επίσης πολύ διαφορετική από την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη. Οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ υπολογίζονται πολύ παρόμοια για την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη και για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, όπως παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 3.2.3, όπου εισήχθη η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Η κύρια διαφορά είναι ότι, στο αναλυόμενο μπλοκ, η παράμετρος m αντικαθίσταται από ένα μέγιστο του μπλοκ (στην περίπτωση του μπλοκ κυρίαρχης-γραμμής ή -στήλης από το μέγιστο της κυρίαρχης γραμμής ή στήλης). Από την άλλη μεριά, η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι επίσης πολύ παρόμοια με την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ, επειδή έχουν τα ίδια ιδανικά μπλοκ (εάν, κατά τη χρήση της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ, το μέγιστο χρησιμοποιείται ως συνάρτηση f στα f-κανονικά μπλοκ και σε παρόμοια μπλοκ και, εάν επιλέγται η κατάλληλη μορφή των μπλοκ κυρίαρχης-γραμμής ή -στήλης – η μορφή 2).

Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη είχαν σχεδιαστεί μόνο για να διακρίνουν διαφορετικούς τύπους μπλοκ ή συνδέσεων (με βάση τις δομές των δεσμών). Στη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ, το μόνο σημαντικό πράγμα είναι, εάν ο δεσμός είναι παρόν ή όχι στην δυαδική μορφή του δικτύου, δηλαδή, εάν η τιμή-βάρος των δεσμών είναι μεγαλύτερη ή ίση από το κατώφλι t ή μικρότερη από αυτό. Στην μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, η κατάσταση είναι παρόμοια, μόνο που τώρα έχει σημασία η διαφορά μεταξύ της τιμής-βάρους των δεσμών και είτε του 0 είτε της παραμέτρου m. Όπως μπορούμε να δούμε, σε κάθε μια από αυτές τις προσεγγίσεις αντιστοιχεί μια παράμετρος, η οποία καθορίζει ποιες τιμές-βάρη αντιμετωπίζονται ως σχετικές και ποιές όχι. Αυτό είναι συνήθως ένα μειονέκτημα των προσεγγίσεων αυτών, μολονότι μπορεί να είναι ένα πλεονέκτημα, εφόσον είναι διαθέσιμη μια ικανοποιητική προγενέστερη γνώση και η θεωρία υποστηρίζει μια τέτοια διάκριση μεταξύ σχετικών και μη δεσμών.

Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη δεν έχουν σχεδιαστεί με σκοπό να διακρίνουν τα μπλοκ του ίδιου τύπου, αλλά τα μπλοκ με διαφορετικές τιμές-βάρη. Π.χ., δεν έχουν σχεδιαστεί για τη διάκριση μεταξύ ενός πλήρους μπλοκ, με όλες τις τιμές-βάρη των στοιχείων να παίρνουν την ίδια τιμή a, και ενός πλήρους μπλοκ, με όλες τις τιμές των στοιχείων να παίρνουν την ίδια τιμή b, όπου $a \neq b$. Αυτό σημαίνει ότι η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη δεν μπορούν να προσδιορίσουν τις τρεις ομάδες του Σχήματος 3.2. Αυτοί οι δύο τύποι μοντελοποίησης σε μπλοκ μπορούν είτε να βρούν μόνο το διαμερισμό 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 είτε μόνο τον διαμερισμό 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2. Ο πρώτος διαμερισμός είναι βέλτιστος, εάν η τιμή της παραμέτρου m είναι μεγαλύτερη από 12, όταν χρησιμοποιείται η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, ή όταν η τιμή του κατωφλιού t, που χρησιμοποιείται για τη δυαδικοποίηση, είναι μεγαλύτερη από 6. Διαφορετικά, ο δεύτερος διαμερισμός είναι βέλτιστος. Στην περίπτωση της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη, και οι δύο διαμερισμοί είναι βέλτιστοι, εάν το m είναι ακριβώς 12.

Από την άλλη μεριά, η ομοιογενής και η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ (και οι έμμεσες προσεγγίσεις της δομικής και κανονικής ισοδυναμίας) μπορούν να βρούν το *σωστό* διαμερισμό σε τρεις ομάδες. Αυτές οι προσεγγίσεις μπορούν επίσης να διαχωρίσουν τα μπλοκ του ίδιου τύπου, που έχουν διαφορετικές τιμές-βάρη δεσμών.



Σχήμα 3.2: Ένα δίκτυο με βέλτιστο διαμερισμό.

Ενώ η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι καταλληλότερη για την διάκριση μπλοκ του ίδιου τύπου με βάση τις τιμές-βάρη των δεσμών, είναι λιγότερο κατάλληλη για τη διάκριση διαφορετικών τύπων μπλοκ με παρόμοιες τιμές-βάρη δεσμών. Αυτό οφείλεται στα παρακάτω μειονεκτημάτων της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ:

1. Το μηδενικό ιδανικό μπλοκ ορίζεται στην αρχική μορφή κατά τέτοιο τρόπο ώστε να είναι μια ειδική περίπτωση του οποιουδήποτε άλλου τύπου μπλοκ. Η ασυνέπεια του μηδενικού μπλοκ ορίζεται έτσι ώστε να είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση με την ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ. Για την μοντελοποίηση σε μπλοκ αθροίσματος τετραγώνων, η ασυνέπεια του μηδενικού μπλοκ είναι μόνο ίση με την ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ, στην περίπτωση ενός ιδανικού μηδενικού μπλοκ. Το πρόβλημα είναι λιγότερο σοβαρό για την μοντελοποίηση σε μπλοκ απόλυτων αποκλίσεων, καθώς εκεί όλα τα μπλοκ, όπου τουλάχιστον οι μισές τιμές-βάρη των στοιχείων είναι ίσες με 0, έχουν την ασυνέπεια του μηδενικού μπλοκ ίση με την ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ. Δεδομένου ότι στο τύπο μηδενικού μπλοκ δίνεται συνήθως μια προτεραιότητα, ένα τέτοιο εμπειρικό μπλοκ είναι ταξινομημένο ως μπλοκ μηδενικού τύπου. Αφού η ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ είναι συνήθως μεγαλύτερη από τις περισσότερες άλλες ασυνέπειες των μπλοκ, είναι ακόμη λιγότερο απίθανο ένα εμπειρικό μπλοκ να είναι ταξινομημένο ως μηδενικό, όταν επιτρέπονται επίσης αυτοί οι άλλοι τύποι μπλοκ. Αυτό σημαίνει ότι η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ δεν είναι κατάλληλη για την ταξινόμηση των μπλοκ μηδενικού τύπου σε αντιδιαστολή με κάποιο άλλο τύπο μπλοκ.

2. Είναι συζητήσιμο, εάν τα f-κανονικά μπλοκ, τα μπλοκ κανονικής-f-γραμμής και και τα μπλοκ f-κανονικής στήλης είναι συμβατά με άλλους τύπους μπλοκ, εκτός της μοντελοποίησης σε μπλοκ αθροίσματος τετραγώνων, όταν ως συνάρτηση f χρησιμοποιείται ο μέσος όρος. Αυτό είναι

ιδιαίτερα προβληματικό, αφού το μέγιστο είναι συνήθως η πιο κατάλληλη συνάρτηση για την f.

Η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ μπορεί επίσης να διακρίνει τα μπλοκ του ίδιου τύπου με βάση τις τιμές-βάρη των δεσμών (υποθέτοντας ότι τα μέγιστα των μπλοκ διαφέρουν επίσης) και αυτό δεν έχει προβλήματα με τη συμβατότητα των μπλοκ ή με το μηδενικό μπλοκ, που είναι μια ειδική περίπτωση των άλλων τύπων μπλοκ. Εντούτοις, έχει το δικό της σύνολο προβλημάτων, που οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ υπολογίζονται σε σχέση με το μέγιστο. Αυτό επίσης σημαίνει ότι ο τύπος των μπλοκ πρέπει να ερμηνευθεί σε σχέση με το μέγιστο των μπλοκ. Π.χ., ένα εμπειρικό μηδενικό μπλοκ με μεγαλύτερο μέγιστο μπορεί να έχει όλες τις τιμές-βάρη του μεγαλύτερες (ή ίσες) από ένα εμπειρικό πλήρες μπλοκ με ένα μικρότερο μέγιστο. Αυτό σημαίνει ότι η προσθήκη μιας μεγάλης τιμής-βάρους σε ένα στοιχείο σε κάποιο εμπειρικό μπλοκ, το οποίο ήταν προηγουμένως ταξινομημένο ως πλήρες, μπορεί να σημαίνει ότι αυτό το εμπειρικό μπλοκ ταξινομείται ως μηδενικό μετά από αυτήν την προσθήκη. Ένα παράδειγμα έχει ήδη παρουσιαστεί στην προηγούμενη υποενότητα. Καθώς οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ είναι πολύ ευαίσθητες στις μεταβολές των μεγίστων, αυτό σημαίνει επίσης ότι είναι και πολύ ευαίσθητες στις μεγάλες αποκλίσεις από το μέσο όρο (για εξαιρετικά μεγάλες τιμές-βάρη). Φυσικά, οτιδήποτε επηρεάζει την ταξινόμηση των μπλοκ, άρα, επηρεάζει επίσης και το βέλτιστο διαμερισμό, που παράγεται από την προσέγγιση. Το πρόβλημα είναι σοβαρότερο, εάν χρησιμοποιείται η μέγιστη κανονικοποίηση, αφού, σε αυτήν την περίπτωση, η ασυνέπεια του μηδενικού μπλοκ ενός εμπειρικού μπλοκ, το οποίο δεν είναι ένα ιδανικό μηδενικό μπλοκ, στην πραγματικότητα, μικραίνει, όταν η μεγαλύτερη τιμή-βάρος σε αυτό το μπλοκ αυξάνεται. Μια πιθανή λύση σε αυτό το πρόβλημα θα ήταν να μην χρησιμοποιηθούν τα μηδενικά μπλοκ. Εντούτοις, σε αυτήν την περίπτωση, η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ γίνεται ουσιαστικά μια μορφή της ομοιογενούς (με ένα πολύ ασυνήθιστο μέτρο μεταβλητότητας) και πάσχει από τα ίδια προβλήματα, κυρίως από το πρόβλημα των μηδενικών μπλοκ.

Στο επόμενο τμήμα του κεφαλαίου αυτού, παρουσιάζεται η υλοποίηση αυτών των προσεγγίσεων με το πακέτο `blockmodeling` (Žiberna, 2007c), το οποίο λειτουργεί κάτω από το στατιστικό πρόγραμμα και περιβάλλον `R` (`R` Development Core Team, 2006).

3.3 Υπολογιστική Υλοποίηση στο R

Για λόγους δοκιμών, αξιολόγησης και για χρήσεις σε μικρά δίκτυα, οι περισσότερες από τις προσεγγίσεις, που συζητούνται σε αυτήν την εργασία, υλοποιούνται υπολογιστικά από το πακέτο `blockmodeling` (Žiberna, 2007c), που λειτουργεί μέσω του στατιστικού προγράμματος και περιβάλλοντος `R` (`R` Development Core Team, 2006). Βέβαια, μια τέτοια υλοποίηση μάλλον είναι ανεπαρκής, γιατί οι αλγόριθμοι είναι πολύ αργοί. Για μια σύγκριση, ας πούμε ότι ίδιοι αλγόριθμοι για τη δυαδική γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, που υλοποιούνται στο `Pajek` (Batagelj και Mrvar, 2006), τρέχουν περίπου 1000 φορές γρηγορότερα.

Επιπλέον, μερικές άλλες συναρτήσεις έχουν δημιουργηθεί. Αυτές είναι κυρίως συναρτήσεις σχεδιασμού και άλλες κατάλληλες συναρτήσεις, όπως μια συνάρτηση για τον υπολογισμό των αποστάσεων, στην περίπτωση της δομικής ισοδυναμίας. Περισσότερες λεπτομέρειες για το πακέτο και τις περιεχόμενες συναρτήσεις μπορούν να βρεθούν στα αρχεία βοήθειας (help files) του `blockmodeling`. Επομένως, αυτό το τμήμα του κεφαλαίου περιλαμβάνει μόνο τις βασικές πληροφορίες.

3.3.1 Γενικευμένη Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

Η γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ υλοποιείται υπολογιστικά για τους τύπους μπλοκ του Πίνακα 3.13. Η συνάρτηση f, που χρησιμοποιείται για να υπολογίσει τις στατιστικές στις γραμμές και τις στήλες για τα (f-)κανονικά μπλοκ (και για τα μπλοκ κανονικής-f-γραμμής και -στήλης) δεν παρουσιάζεται στον πίνακα αυτόν, επειδή πολλές συναρτήσεις μπορούν να τροφοδοτηθούν ως ορίσματα (δείτε στην προηγούμενη ενότητα τη συζήτηση για το ποιες συναρτήσεις είναι κατάλληλες). Υποστηρίζονται δίκτυα (πίνακες), που είναι μονομερή ή διμερή ή πολυμερή, μονοσχεσιακά ή πολυσχεσιακά. Οι επιτρεπτοί τύποι μπλοκ μπορούν να καθοριστούν για ολόκληρο τον πίνακα ή για κάθε μπλοκ χωριστά.

Για την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ, οι ασυνέπειες υπολογίζονται με βάση τους τύπους στον Πίνακα 3.9. Υποστηρίζεται επίσης ο προκαθορισμός των κεντρικών τιμών, ενώ άλλες επιλογές δεν υποστηρίζονται.

Το πακέτο `blockmodeling` περιλαμβάνει συναρτήσεις για τον υπολογισμό της τιμής μιας συνάρτησης κριτηρίου (και του πίνακα εικόνας κ.λπ.) για την βελτιστοποίηση των διαμερισμών (πιθανώς τυχαία επιλεγμένων) με βάση τις παραμέτρους εισόδου. Οι συναρτήσεις για την βελτιστοποίηση (ενός ή περισσοτέρων) διαμερισμών είναι πολύ αργές, αφού χρειάζεται να ελέγξουμε τη συνάρτηση κριτηρίου για τη μετακίνηση κάθε μονάδας από μια ομάδα σε μια άλλη και για την ανταλλαγή ζευγαριών μονάδων μεταξύ διαφορετικών ομάδων. Ο αλγόριθμος είναι ουσιαστικά ο ίδιος, όπως αυτός των Doreian et al. (2006, σελ. 150, 188):

> **επανέλαβε:**
>
> > **εάν** στη γειτονιά της τρέχουσας ομαδοποίησης (διαμερισμού) $\mathbf{C}$ υπάρχει μια ομαδοποίηση (διαμερισμός) $\mathbf{C}'$ τέτοια ώστε $P(\mathbf{C}') < P(\mathbf{C})$,
> > **τότε** πήγαινε στην ομαδοποίηση (διαμερισμό) $\mathbf{C}'$
>
> Συνήθως, η γειτονιά καθορίζεται από δυο μετασχηματισμούς: τη μετακίνηση μιας μονάδας από μια ομάδα σε μια άλλη και την ανταλλαγή δυο μονάδων μεταξύ δυο διαφορετικών ομάδων.

Αυτό που δεν είναι εντελώς σαφές είναι τι γίνεται, όταν υπάρχουν πολλοί διαμερισμοί στη γειτονιά του $\mathbf{C}$, οι οποίοι έχουν μικρότερες τιμές της συνάρτησης κριτηρίου. Δύο επιλογές υλοποιούνται στο πακέτο `blockmodeling`:

1. Επιλέγεται ο διαμερισμός με την μικρότερη τιμή συνάτησης κριτηρίου. Εάν περισσότεροι του ενός διαμερισμοί έχουν το ίδιο ελάχιστο, τότε ένας από αυτούς επιλέγεται τυχαία.

2. Επιλέγεται ο πρώτος διαμερισμός $\mathbf{C}'$, που βρίσκεται έτσι ώστε $P(\mathbf{C}') < P(\mathbf{C})$.

Επειδή ο αριθμός των πιθανών διαμερισμών είναι συνήθως τεράστιος, πρέπει να χρησιμοποιείται η προηγούμενη τοπική αναζήτηση. Εντούτοις, για πολύ μικρά δίκτυα με μόνο λίγες ομάδες, μερικές φορές, είναι δυνατή μια πλήρης αναζήτηση. Αυτό σημαίνει ότι, για όλες τις πιθανούς διαμερισμούς (με τον επιθυμητό αριθμό ομάδων), υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου και μετά επιλέγεται ο διαμερισμός (οι διαμερισμοί) με το μικρότερο λάθος.

Στα παραδείγματα, που θα δοθούν στο επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιούνται και οι δύο προσεγγίσεις. Χρησιμοποιείται η πλήρης αναζήτηση για μικρότερα παραδείγματα και η τοπική αναζήτηση με μόνο λίγους αρχικούς διαμερισμούς. Όπου χρησιμοποιείται η τοπική αναζήτηση (και όλοι οι πιθανοί διαμερισμοί δεν ελέγχονται), δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι ο διαμερισμός, που βρίσκεται με τη μικρότερη ασυνέπεια, είναι πραγματικά ο ολικά βέλτιστος διαμερισμός. Επομένως, χρησιμοποιούνται εισαγωγικά για να δείξουν ότι εκείνοι οι διαμερισμοί, που ονομάζονται "βέλτιστοι", μπορούν να είναι μόνο τοπικά βέλτιστοι. Όταν χρησιμοποιείται μια πλήρης αναζήτηση, τα εισαγωγικά δεν μπαίνουν.

Τύπος μοντελοποίησης σε μπλοκ	Δυαδική και με βάρη	Πεπλεγμένη	Ομοιογενής
Υλοποιημένοι τύποι μπλοκ	Μηδενικός ("null")	Μηδενικός ("null")	Μηδενικός ("null")
	Πλήρης ("com")	Πλήρης ("com")	Πλήρης ("com")
	(f-)κανονικός ("reg")	Κανονικός ("reg")	f-κανονικός ("reg")
	Κανονικός-(f-)γραμμής ("rre")	Κανονικός ("rre")	Κανονικός-f-γραμμής ("rre")
	Κανονικός-(f-)στήλης ("cre")	Κανονικός ("cre")	Κανονικός-(f-)στήλης ("cre")
	Κυρίαρχης-γραμμής ("rdo")	Κυρίαρχης-γραμμής ("rdo")	Κυρίαρχης-γραμμής σε 3 δοκιμαστικές μορφές ("rdo1", "rdo2", "rdo3")
	Κυρίαρχης-στήλης ("cdo")	Κυρίαρχης-στήλης ("cdo")	Κυρίαρχης-στήλης σε 3 δοκιμαστικές μορφές ("cdo1", "cdo2", "cdo3")
	Λειτουργικής-γραμμής ("rfn")	Λειτουργικής-γραμμής ("rfn")	Λειτουργικής-γραμμής ("rfn")
	Λειτουργικής-στήλης ("cfn")	Λειτουργικής-στήλης ("cfn")	Λειτουργικής-στήλης ("cfn")
	Πυκνότητα ("d"), Μέσος ("avg")		

Πίνακας 3.13: Υπολογιστικά υλοποιημένοι τύποι μπλοκ ανά τύπο μοντελοποίησης σε μπλοκ (Žiberna, 2007a).

3.3.2 Έμμεσες Προσεγγίσεις

Επιπλέον της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, υλοποιούνται με το `blockmodeling` επίσης και κάποιες έμμεσες προσεγγίσεις. Αυτό έγινε αρχικά μόνο για λόγους συγκρίσεων και για μια γρήγορη ανάλυση πριν την λεπτομερέστερη ανάλυση της γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Πάντως, επίσης περιλαμβάνονται και κάποιες νέες εκδόσεις του `REGE`.

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, έχει επίσης συμπεριληφθεί, για να διευκολύνει την ανάλυση και μια συνάρτηση, που υπολογίζει διαφορές σε σχέση με τη δομική ισοδυναμία. Υλοποιούνται διάφορες δυνατότητες για το χειρισμό των διαγώνιων τιμών του πίνακα σε μονομερή δίκτυα. Για διμερή δίκτυα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η έμμεση προσέγγιση πάνω στο ένα μέρος, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις για τον υπολογισμό των αποστάσεων, που περιλαμβάνονται σε άλλα πακέτα του προγράμματος `R`.

Στο `blockmodeling` υλοποιούνται οι περισσότερες εκδόσεις του `REGE`. Δεν υλοποιούνται κάποιες εκδόσεις του `REGE` για δίκτυα, στα οποία οι τιμές-βάρη των δεσμών επηρεάζονται από το "μέγεθος" των μονάδων (π.χ., εμπορικά δίκτυα μεταξύ χωρών και δίκτυα ροής άνθρακα στη φύση).

3.3.3 Άλλές Συναρτήσεις

Διάφορες άλλες συναρτήσεις περιλαμβάνονται στο πακέτο `blockmodeling`. Αυτές μπορούν να ομαδοποιηθούν στις εξής κατηγορίες:

- σχεδιαστικές συναρτήσεις,
- συναρτήσεις για τη δημιουργία και τη μέτρηση όλων των πιθανών διαμερισμών n μονάδων σε k ομάδες (με κώδικα γραμμένο από τον Chris Andrews),
- συναρτήσεις για την ανάγνωση και την εγγραφή αρχείων `Pajek` (με κώδικα γραμμένο εν μέρει από τον Vladimir Batagelj)
- συναρτήσεις για την εξαγωγή τμημάτων αντικειμένων, που επιστρέφονται από τις συναρτήσεις της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ και
- άλλες χρήσιμες συναρτήσεις υπολογιστικών εργαλείων.

Κεφάλαιο 4

Παραδείγματα και Συγκρίσεις

Αυτό το κεφάλαιο έχει δύο σκοπούς. Ο πρώτος είναι να δείξει την εφαρμογή των παρουσιασθέντων προσεγγίσεων σε πραγματικά δίκτυα. Ο δεύτερος είναι να συγκρίνει τις προτεινόμενες προσεγγίσεις μέσω των εφαρμογών τους με κυρίως εμπειρικά, αλλά τεχνητά, δίκτυα.

4.1 Παράδειγμα 1

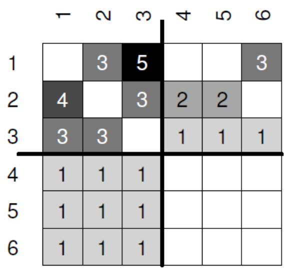
Αυτό το πρώτο παράδειγμα κατασκευάστηκε για διάφορους λόγους. Πρώτο, χρησιμοποιείται να δείξει πώς γίνεται ο υπολογισμός της συνάρτησης κριτηρίου σε ένα πολύ απλό παράδειγμα. Δεύτερον, παρουσιάζει κάποιες ιδιότητες μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη και της δυαδικής μοντελοποίησης σε μπλοκ. Αυτές είναι ότι, εάν ένας διαμερισμός έχει τιμή ίση με 0 της συνάρτησης κριτηρίου για μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, για $m = x$, τότε είναι επίσης ίση με 0 η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου για μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, για όλες τις παραμέτρους m μικρότερες του x. Ο ίδιος διαμερισμός έχει επίσης την ίδια τιμή της συνάρτησης κριτηρίου για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ (όπου όλοι οι δεσμοί αντιμετωπίζονται ως δεσμοί με "1"). Σε περιπτώσεις, που το μέγιστο (αυτό δεν είναι η περίπτωση εδώ) χρησιμοποιείται ως η συνάρτηση f σε f-κανονικούς και άλλους παρόμοιους τύπους μπλοκ, ο ίδιος διαμερισμός έχει την τιμή της συνάρτησης κριτηρίου για την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ για το κατώφλι $t \leq x$.

Επίσης, θα θέλαμε να δείξουμε ότι αρκετές μέθοδοι και επιλογές μέσα στις μεθόδους μπορούν συχνά να παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Ένα απλό τεχνητό δίκτυο παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1. Σχεδιάστηκε ειδικά για να ταιριάζει στη μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη με παράμετρο $m = 3$, για τον διαμερισμό 1, 1, 1, 2, 2, 2 (ο οποίος πιο κάτω, αναφέρεται ως "αρχικός διαμερισμός"), για τη συνάρτηση $f = \mathrm{sum}$ (άθροισμα) και για το εξής μοντέλο των μπλοκ:

	1	2
1	“com”	“reg”
2	“reg”	“null”

Αυτό το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε επίσης ως το προκαθορισμένο μοντέλο των μπλοκ, όταν χρησιμοποιόταν η προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ.



Σχήμα 4.1: Το πρώτο απλό τεχνητό δίκτυο.

Σε αυτήν την ειδική περίπτωση, λόγω του μικρού αριθμού μονάδων και μόνο δυο ομάδων, η συνάρτηση κριτηρίου μπορεί να υπολογιστεί, για όλους τους πιθανούς διαμερισμούς (πλήρης αναζήτηση), σε πολύ μικρό χρόνο.

Δυαδική Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ παράγει τον αρχικό διαμερισμό (στο Σχήμα 4.1) για το κατώφλι $t = 1$ και το παραπάνω προκαθορισμένο μοντέλο. Εδώ η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι 0. Για το κατώφλι $t = 2$, ο βέλτιστος διαμερισμός είναι ο διαμερισμός 1, 1, 2, 2, 2, 2. Ας χρησιμοποιήσουμε αυτό το παράδειγμα (δυαδικής μοντελοποίησης σε μπλοκ με κατώφλι $t = 2$), για να δείξουμε πώς γίνεται ο υπολογισμός της συνάρτησης κριτηρίου για τη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ με τον αρχικό διαμερισμό. Για μεγαλύτερες τιμές του κατωφλιού t, σχηματίζεται μια ομάδα, που περιέχει μόνο μια μονάδα.

Το μπλοκ $R(1, 1)$ είναι προκαθορισμένο ως πλήρες (στο προκαθορισμένο μοντέλο των μπλοκ). Βλέπουμε στο σχήμα 4.1 ότι είναι πράγματι ένα ιδανικό πλήρες μπλοκ, αφού έχει όλες τις τιμές μεγαλύτερες του 2 (εκτός της διαγωνίου, οι οποίες μπορούν να είναι διαφορετικές). Η ασυνέπεια του (πλήρους) μπλοκ για το μπλοκ $R(1, 1)$ είναι, έτσι, 0. Παρόμοια, το μπλοκ $R(2, 2)$ προκαθορίζεται ως μηδενικό και έχει όλες τις τιμές των στοιχείων του ίσες με 0. Σαν τέτοιο, έχει ασυνέπεια (μηδενικού) μπλοκ ίση με 0.

Το μπλοκ $R(2, 1)$ είναι επίσης ένα ιδανικό μηδενικό μπλοκ (καθώς δεν έχει καμία τιμή-βάρος δεσμών ίση με ή μεγαλύτερη από 2), όμως είναι προκαθορισμένο ως κανονικό. Η ασυνέπεια του κανονικού μπλοκ στη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ υπολογίζεται ως $(n_c - p_c)n_r + (n_r - p_r)n_c$, όπου n_c, n_r είναι οι αριθμοί των στηλών και γραμμών, αντιστοίχως, και $n_c = n_r = 3$, επίσης p_r, p_c είναι οι αριθμοί των μη-μηδενικών γραμμών και στηλών σε ένα μπλοκ (οι αριθμοί των γραμμών και στηλών, που έχουν τουλάχιστον μια τιμή-βάρος δεσμού ίση ή μεγαλύτερη από 2) και $p_r = p_c = 0$. Επομένως, η ασυνέπεια του (κανονικού) μπλοκ $R(2, 1)$ είναι $(3 - 0) * 3 + (3 - 0) * 3 = 18$. Το τελευταίο μπλοκ είναι το μπλοκ $R(1, 2)$, το οποίο είναι επίσης προκαθορισμένο ως κανονικό. Επομένως, ο ίδιος τύπος χρησιμοποιείται όπως πριν, με $n_c = n_r = 3$, ενώ $p_c = 3$ και $p_r = 2$. Άρα, η ασυνέπεια του (κανονικού) μπλοκ είναι $(3 - 3) * 3 + (3 - 2) * 3 = 3$. Η συνολική ασυνέπεια των μπλοκ του δικτύου είναι το άθροισμα αυτών των ασυνεπειών των τύπων μπλοκ: $0+3+18+0 = 21$.

Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ, σύμφωνα με την δομική ισοδυναμία, δίνει τον αρχικό διαμερισμό για τα κατώφλια = 1, 2, 3. Τα μοντέλα (εικόνες), που προκύπτουν είναι:

Κατώφλι $t = 1$			**Κατώφλια** $t = 2$ ή 3		
	1	2		1	2
1	"com"	"com"	1	"com"	"null"
2	"com"	"null"	2	"null"	"null"

Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ, σύμφωνα με την κανονική ισοδυναμία, για κατώφλι $t = 1$, βρίσκει τον αρχικό διαμερισμό ως έναν από τους 9 βέλτιστους διαμερισμούς με τιμή συνάρτησης κριτηρίου ίση με 0. Στην περίπτωση του κατωφλιού $t = 3$, η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ βρίσκει επίσης τον αρχικό διαμερισμό ως βέλτιστο με τιμή της συνάρτησης κριτηρίου 1. Τα μοντέλα που προκύπτουν, είναι τα ίδια με τον αρχικό διαμερισμό για την δομική ισοδυναμία, πέρα από το γεγονός ότι τα πλήρη μπλοκ αντικαθίσταται από κανονικά μπλοκ. Εάν χρησιμοποιείται το κατώφλι $t = 2$, προκύπτει ο διαμερισμός με τις μονάδες 1 και 2 στην πρώτη ομάδα. Εάν το κατώφλι t είναι μεγαλύτερο του 3, όταν χρησιμοποιείται η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ για είτε τη δομική ή την κανονική ισοδυναμία, παραμένουν μόνο δύο δεσμοί και όλοι οι διαμερισμοί έχουν ίσες ασυνέπειες.

Μοντελοποίηση σε Μπλοκ με Βάρη

Επειδή το δίκτυο σχεδιάστηκε για την συνάρτηση αθροίσματος πάνω στις σειρές και τις στήλες, μόνο αυτή η συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη και μόνο η συνάρτηση του μέσου[1] για την ομοιογε-

[1] Η χρήση της συνάρτησης του μέσου πάνω στις γραμμές και τις στήλες στην ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι ανάλογη με τη χρήση της συνάρτησης του αθροίσματος πάνω στις γραμμές και τις στήλες στην μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη.

νή μοντελοποίηση σε μπλοκ. Στην μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, σύμφωνα με την προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, για την f = sum και $m = 1, 2, 3$ ή 4, παράγεται ο βέλτιστος διαμερισμός. Όταν η τιμή της παραμέτρου m είναι 1, 2 ή 3, η συνολική ασυνέπεια (του αρχικού διαμερισμού 1, 1, 1, 2, 2, 2) είναι 0. Για $m = 4$, η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου είναι 21. Για m = μικρότερο ή ίσο από 7, οι μονάδες 1 και 2 είναι στην πρώτη ομάδα. Για m μεγαλύτερο ή ίσο από 8, μόνο η μονάδα 1 παραμένει στην πρώτη ομάδα.

Η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, σύμφωνα με την προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ και για $m = 4$, χρησιμοποιείται για να δείξει πως γίνεται ο υπολογισμός της συνάρτησης κριτηρίου για την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη. Το μπλοκ R(1,1) είναι προκαθορισμένο ως πλήρες. Η ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ (για ένα διαγώνιο μπλοκ) υπολογίζεται ως:

$$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c}(m-b_{ij})^+ + \min(-\sum(m-\mathrm{diag}(B))^+ + \sum\mathrm{diag}(B),0)).$$

Το μη-διαγώνιο τμήμα της ασυνέπειας είναι το $\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c}(m-b_{ij})^+$, ενώ το διαγώνιο, είναι το $\min(-\sum(m-diag(B))^+ + \sum\mathrm{diag}(B),0))$. Επομένως, καθώς όλες οι τιμές της διαγωνίου είναι 0, οι ασυνέπειες στη διαγώνιο είναι επίσης 0.

Οι μη-διαγώνιες ασυνέπειες είναι $m - b_{ij}$. Επομένως οι ασυνέπειες των στοιχείων είναι:

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	0	1	0
[2,]	0	0	1
[3,]	1	1	0

Η ασυνέπεια του (πλήρους) μπλοκ $R(1,1)$ είναι, άρα, 4. Το μπλοκ $R(2,2)$ είναι προκαθορισμένο ως μηδενικό. Καθώς όλες οι τιμές είναι 0 και η ασυνέπεια του μηδενικού μπλοκ υπολογίζεται ως το άθροισμα όλων των τιμών των δεσμών στο μπλοκ, η ασυνέπεια του (μηδενικού) μπλοκ $R(2,2)$ είναι 0. Τα μπλοκ $R(2,1)$ και $R(1,2)$ προκαθορισμένα ως sum-κανονικά. Η ασυνέπεια των sum-κανονικών μπλοκ υπολογίζεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c}\max((m-\sum(B_{[i,]}))^+,(m-\sum(B_{[,j]}))^+).$$

Η ασυνέπεια ενός μεμονωμένου στοιχείου στο sum-κανονικό μπλοκ υπολογίζεται ως η διαφορά μεταξύ του m και είτε του αθροίσματος της γραμμής ή της στήλης, όπου ανήκει το στοιχείο. Χρησιμοποιείται η μεγαλύτερη διαφορά.

Εάν η μεγαλύτερη διαφορά είναι αρνητική, η ασυνέπεια του στοιχείου είναι 0. Οι ασυνέπειες των στοιχείων, που υπολογίζονται, έτσι, είναι:

Μπλοκ $R(2,1)$				**Μπλοκ** $R(2,1)$			
	$[,1]$	$[,2]$	$[,3]$		$[,1]$	$[,2]$	$[,3]$
$[1,]$	1	1	1	$[1,]$	1	1	1
$[2,]$	1	1	1	$[2,]$	1	1	0
$[3,]$	1	1	1	$[3,]$	1	1	1

Επομένως, η ασυνέπεια του (sum-κανονικού) μπλοκ $R(2,1)$ είναι 9 και του μπλοκ $R(1,2)$ είναι 8. Αυτό κάνει την συνολική ασυνέπεια του δικτύου για τον διαμερισμό 1, 1, 1, 2, 2, 2, υπολογισμένη χρησιμοποιώντας την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη με $m = 4$, σύμφωνα με το προκαθορισμένο μοντέλο των μπλοκ (γραμμών), ίση με $4 + 8 + 9 + 0 = 21$.

Για τη δομική ισοδυναμία και $m = 1$, 3, 4, 5 ή 6, προκύπτει επίσης ο βέλτιστος διαμερισμός. Οι συνολικές ασυνέπειες είναι 3, 19, 23, 28 και 34, αντιστοίχως. Τα μοντέλα των μπλοκ, που προκύπτουν, είναι:

Παράμετρος $m = 1$			**Παράμετρος** $m =$2, 3, 4, 5, 6 ή 7		
	1	2		1	2
1	"com"	"com"	1	"com"	"null"
2	"com"	"null"	2	"null"	"null"

Για $m = 2$, μόνο οι μονάδες 2 και 3 και, για $m = 7$, μόνο οι μονάδες 1 και 3 συνθέτουν την πρώτη ομάδα. Για m μεγαλύτερο ή ίσο από 8, όλοι οι διαμερισμοί έχουν τις ίδιες ασυνέπειες.

Με την sum-κανονική ισοδυναμία (και πλήρη μπλοκ και ακόμα την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη), οι τιμές του $m = 1$, 2, 3, 5, 6, 7 και 8 παράγουν τον αρχικό διαμερισμό με τιμές της συνολικής ασυνέπειας 0, 0, 0, 19, 19, 24 και 32, αντιστοίχως. Όταν $m = 1$, βρίσκονται επίσης και 8 άλλοι διαμερισμοί (εκτός του αρχικού). Έτσι, προκύπτουν τρία διαφορετικά μοντέλα ανάλογα με την τιμή του m:

Παράμετρος $m = 1$			**Παράμετρος** $m = 2$ ή 3			**Παράμετρος** $m = 5$, 6, 7 ή 8		
	1	2		1	2		1	2
1	"com"	"reg"	1	"com"	"reg"	1	"reg"	"null"
2	"com"	"null"	2	"reg"	"null"	2	"null"	"null"

Για μεγαλύτερες τιμές του m (από 9 και πάνω), όλοι οι διαμερισμοί παράγουν την ίδια συνολική ασυνέπεια, ίση με 40. Αυτό προκύπτει ως το άθροισμα όλων των τιμών-βαρών των στοιχείων, καθώς με τέτοια υψηλή τιμή της παραμέτρου m τα μοντέλα των μπλοκ, που προκύπτουν, αποτελούνται μόνο από μηδενικά μπλοκ.

Σημειώνουμε πως η συνολική ασυνέπεια ποτέ δεν μειώνεται, όταν η παράμετρος m αυξάνεται. Μπορεί μόνο να αυξηθεί ή να παραμείνει σταθερή. Αυτή είναι μια γενική ιδιότητα της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη.

Πεπλεγμένη Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

Για την πεπλεγμένη και την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ (με το άθροισμα των τετραγώνων και των απόλυτων αποκλίσεων), ο αρχικός διαμερισμός είναι ο βέλτιστος, για όλες τις μορφές αυτών των μοντελοποιήσεων σε μπλοκ, που δοκιμάστηκαν. Οι μορφές αφορούν τη χρήση της προκαθορισμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ, της δομικής και της κανονικής ισοδυναμίας. Για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, η δομική και η κανονική ισοδυναμία δοκιμάστηκαν με και χωρίς μηδενικά μπλοκ και με και χωρίς κανονικοποιήσεις (μέγιστη και μεγέθους μπλοκ). Ο υπολογισμός της συνάρτησης κριτηρίου γίνεται εδώ για την περίπτωση της προκαθορισμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (όπως πριν), για κάθε (κύριο) τύπο μοντελοποίησης σε μπλοκ, ξεχωριστά.

Ο πρώτος υπολογισμός της συνάρτησης κριτηρίου για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ εφαρμόζεται στη μη-κανονικοποιημένη μορφή. Το μπλοκ $R(1,1)$ ταξινομείται ως πλήρες. Η ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ (χωρίς κανονικοποίηση) υπολογίζεται ως:

$$\sum(\max\{B \neq 0\} - 0) + \min(0, \sum \operatorname{diag}(B) - \sum(\max\{B \neq 0\} - \operatorname{diag}(B))).$$

Στην περίπτωσή μας, όπου η διαγώνιος περιέχει μόνο μηδενικά, αυτό γίνεται $\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1,j\neq i}^{n_c}(\max\{B \neq 0\} - b_{ij})$, δηλαδή, το άθροισμα των αποκλίσεων των τιμών των στοιχείων από το μέγιστο του μπλοκ για τα μη-διαγώνια στοιχεία. Το μέγιστο του μπλοκ είναι 5 στο μπλοκ $R(1,1)$. Άρα, οι αποκλίσεις είναι:

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	0	2	0
[2,]	1	0	2
[3,]	2	2	0

Η ασυνέπεια του (πλήρους) μπλοκ $R(1,1)$ είναι, επομένως, 9.

Τα μπλοκ $R(2,1)$ και $R(1,2)$ είναι προκαθορισμένα ως κανονικά. Η ασυνέπεια των κανονικών μπλοκ στην πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ υπολογίζεται ως:

$$\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_c}\max\big(\max\{B\neq 0\}-\max_k B_{[i,k]},\max\{B\neq 0\}-\max_l B_{[l,j]}\big).$$

Η ασυνέπεια των κανονικών μπλοκ υπολογίζεται ως το άθροισμα των ασυνεπειών των στοιχείων, οι οποίες υπολογίζονται ως τα μέγιστα των αποκλίσεων των μεγίστων των γραμμών και στηλών (στις οποίες ένα στοιχείο ανήκει) από τα μέγιστα των μπλοκ. Το μπλοκ $R(2,1)$ είναι πράγματι ένα ιδανικό πλήρες μπλοκ με την μέγιστη τιμή στο μπλοκ ίση με 1. Σαν τέτοιο, είναι επίσης ένα ιδανικό κανονικό μπλοκ, αφού όλα τα μέγιστα των γραμμών και στηλών είναι ίσα με το μέγιστο του μπλοκ. Το μπλοκ $R(1,2)$ είναι πιό ενδιαφέρον. Εδώ το μέγιστο του μπλοκ είναι 3. Επομένως οι ασυνέπειες των στοιχείων είναι:

	[, 1]	[, 2]	[, 3]
[1,]	1	1	0
[2,]	1	1	1
[3,]	2	2	2

Η ασυνέπεια του (κανονικού) μπλοκ $R(1,2)$ είναι, επομένως, 11.

Το τελευταίο μπλοκ $R(2,2)$, προκαθορισμένο ως μηδενικό, είναι ένα ιδανικό μηδενικό μπλοκ. Η ασυνέπεια του (μηδενικού) μπλοκ αυτού είναι, επομένως, 0. Η ασυνέπεια του μηδενικού μπλοκ υπολογίζεται ως το άθροισμα όλων των τιμών-βαρών των στοιχείων (αποκλίσεις από το 0). Εάν όλες οι τιμές-βάρη στη διαγώνιο δεν είναι 0, οι ασυνέπειες αυτών των τιμών μπορούν να υπολογιστούν από το μέγιστο του μπλοκ (μόνο στα διαγώνια μπλοκ, όπως είναι το μπλοκ $R(2,2)$). Χρησιμοποιείται ο υπολογισμός εκείνος, που παράγει τη μικρότερη ασυνέπεια του μπλοκ (αλλά όμως οι ασυνέπειες για όλα τα διαγώνια στοιχεία σε ένα δοθέν μπλοκ πρέπει να υπολογιστούν με τον ίδιο τρόπο).

Η συνολική ασυνέπεια για την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, σύμφωνα με την προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ και χωρίς καμία κανονικοποίηση, είναι $9 + 11 + 0 + 0 = 20$.

Ομοιογενής Μοντελοποίηση σε Μπλοκ

Δεδομένου ότι ο υπολογισμός των ασυνεπειών είναι πολύ παρόμοιος για το άθροισμα των τετραγώνων και των απόλυτων αποκλίσεων μοντελοποίησης σε μπλοκ, ο υπολογισμός γίνεται μόνο για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ απόλυτων αποκλίσεων. Στην περίπτωση της μοντελοποίησης σε μπλοκ αθροίσματος τετραγώνων, η διαφορά είναι ότι ο μέσος όρος χρησιμοποιείται ως μέτρο της κεντρικής τιμής (αντί του μέσου) και οι τετραγωνικές αποκλίσεις από εκείνη την τιμή χρησιμοποιούνται αντί των απόλυτων αποκλίσεων. Πάλι, ο υπολογισμός γίνεται στην περίπτωση της προκαθορισμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ και χρησιμοποιείται η συνάρτηση $f = \mathrm{mean}$.

Το μπλοκ R(1,1) είναι προκαθορισμένο ως πλήρες. Η ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ υπολογίζεται ως:

$$\mathrm{ad}(b_{ij}) + \mathrm{ad}(\mathrm{diag}(B)).$$

Δηλαδή, η ασυνέπεια του πλήρους μπλοκ είναι το άθροισμα των απόλυτων αποκλίσεων των τιμών των στοιχείων από το μεσό τους (για τα διαγώνια μπλοκ, όπως το R(1,1), οι απόλυτες αποκλίσεις υπολογίζονται ξεχωριστά για τα μη-διαγώνια και τα διαγώνια στοιχεία). Στο μπλοκ R(1,1), τα διαγώνια στοιχεία είναι όλα ίσα (0) και, επομένως, είναι επίσης ίσα με το μέσο τους. Το άθροισμα των απόλυτων αποκλίσεών τους είναι, άρα, 0.

Οι μη-διαγώνιες τιμές των στοιχείων είναι (ταξινομημένες κατά μέγεθος) 3, 3, 3, 3, 4 και 5. Η ενδιάμεση τιμή είναι 3. Επομένως, οι απόλυτες αποκλίσεις είναι 0, 0, 0, 0, 1 και 2 και το άθροισμά τους είναι 3. Αυτό κάνει την ασυνέπεια του (πλήρους) μπλοκ R(1,1) ίση με 3.

Τα μπλοκ R(2,1) και R(1,2) είναι προκαθορισμένα ως mean-κανονικά. Η ασυνέπεια των mean-κανονικών μπλοκ υπολογίζεται ως:

$$\max\left(\mathrm{ad}_i(\mathrm{mean}(B_{[i,]}))n_c, \mathrm{ad}_j(\mathrm{mean}(B_{[,j]}))n_r\right).$$

Δηλαδή, η ασυνέπεια των mean-κανονικών μπλοκ είναι ίση με το μέγιστο των απόλυτων αποκλίσεων από τον ενδιάμεσο των γραμμών και στηλών, πολλαπλασιαζόμενο με τον αριθμό των στοιχείων σε μια γραμμή ή στήλη, αντιστοίχως.

Για το μπλοκ$R(2,1)$, όλοι οι μέσοι γραμμών και στηλών είναι 1. Προφανώς, το άθροισμα των απόλυτων αποκλίσεων είναι, επομένως, 0 και για τις γραμμές και τις στήλες, κάτι που κάνει τη ασυνέπεια του (mean-κανονικού) μπλοκ R(2,1) ίση με 0. Ο υπολογισμός της ασυνέπειας του (mean-κανονικού) μπλοκ R(1,2) έχει περισσότερο ενδιαφέρον. Οι μέσοι των γραμμών και των στηλών του μπλοκ R(1,2) είναι 1, 1.33 και 1. Η ενδιάμεσή τους τιμή είναι 1, οι απόλυτες αποκλίσεις από αυτήν είναι 0, 0.33 και 0, ενώ το άθροισμά τους είναι 0.33. Αυτό πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό των στοιχείων κάθε γραμμής, που είναι 3. Αυτό κάνει την ασυνέπεια, που βασίζεται στους μέσους των γραμμών, ίση με 3 * 1/3 = 1.

Οι μέοι των στηλών είναι 1, 1 και 1.33, που είναι ουσιαστικά οι ίδιες τιμές με τους μέσους των γραμμών, απλά σε διαφορετική σειρά. Δεδομένου ότι ο αριθμός των στοιχείων σε κάθε στήλη είναι επίσης 3, αυτό καθιστά την ασυνέπεια, που είναι βασισμένη στις στήλες, ίση με την ασυνέπεια των γραμμών, που είναι 1. Το μέγιστο αυτών των δύο 1 είναι επίσης 1. Επομένως, η ασυνέπεια του (mean-κανονικού) μπλοκ $R(2{,}1)$ είναι 1.

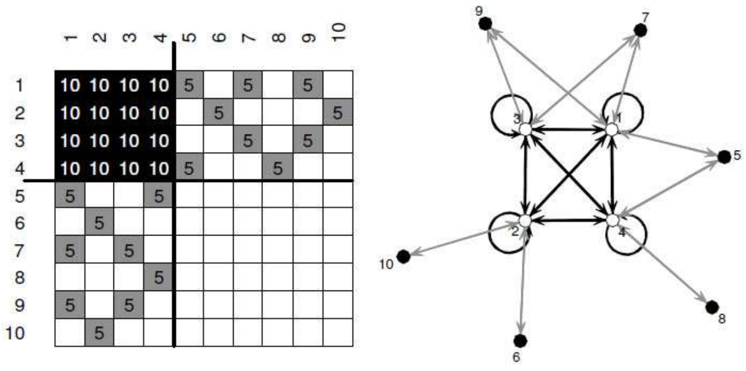
Το τελευταίο μπλοκ $R(2{,}2)$ είναι προκαθορισμένο ως μηδενικό. Η ασυνέπεια του μηδενικού τύπου μπλοκ για απόλυτες αποκλίσεις υπολογίζεται ως το άθροισμα των απόλυτων αποκλίσεων από το 0. Όλες οι τιμές στο μπλοκ $R(2{,}2)$ είναι 0 και, έτσι, είναι ένα ιδανικό μηδενικό μπλοκ με ασυνέπεια ίση με 0. Επομένως, συνολική ασυνέπεια για τις απόλυτες αποκλίσεις είναι $3 + 1 + 0 + 0 = 4$.

4.2 Παράδειγμα 2

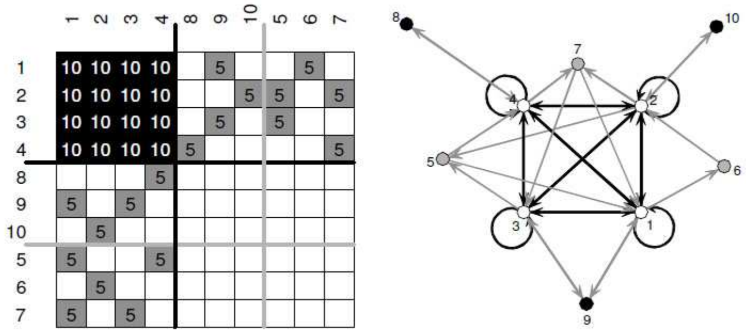
Σε μια προσπάθεια να κατανοήσουμε τις διαφορές μεταξύ των διαφόρων αλγορίθμων REGE, θα δώσουμε κάποια μικρά τεχνητά δίκτυα και θα τα αναλύσουμε με τη χρήση του REGE. Αυτό δεν είναι απαραίτητο για τις άμεσες προσεγγίσεις, καθώς αυτές ορίζουν σαφώς τα ιδανικά μπλοκ. Επιπλέον, η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη δεν είναι κατάλληλες για τέτοια παραδείγματα, όταν δεν μπορούμε να επιλέξουμε τη παράμετρο του κατωφλιού t ή μία τιμή της παραμέτρου m, που να είναι κατάλληλες για όλα τα μπλοκ. Η πεπλεγμένη και η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ (με την max-κανονική ισοδυναμία) είναι πολύ κατάλληλες για αυτού του είδους τα παραδείγματα, ωστόσο, σε αυτά τα ιδανικά πλαίσια θα παράγονται πάντοτε οι ίδιοι διαμερισμοί, όπως στην REGGE-OW. Η εξαίρεση υπάρχει, εάν αναζητούμε έναν διαμερισμό κανονικής ισοδυναμίας, που δεν αντιστοιχεί στην max-κανονική ισοδυναμία. Όλες οι εκδόσεις του REGE είναι κατάλληλες μόνο για την (προσεγγιστική) εύρεση (κατά προσέγγιση) των διαμερισμών της max-κανονικής ισοδυναμίας, ενώ οι προσεγγίσεις της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ μπορούν επίσης να βρουν και άλλους κανονικούς διαμερισμούς.

Το δίκτυο στο Σχήμα 4.2 είναι ένα πολύ απλό δίκτυο. Είναι μια κλασική δομή πυρήνα-περιφέρειας. Έχει ένα προφανή διαμερισμό στις μονάδες του πυρήνα (1-4) και στις μονάδες της περιφέρειας (5-10). Το δίκτυο είναι μη-κατευθυνόμενο, αφού για κάθε τόξο υπάρχει και το αντίστροφό του. Επομένως, ο αντίστοιχος πίνακας είναι συμμετρικός. Αν αυτό ήταν ένα δυαδικό δίκτυο (με όλα τα μη μηδενικά βάρη ίσα με 1), όλες οι εκδόσεις του REGE θα έβρισκαν ότι όλες οι μονάδες αποτελούν από κοινού μία ομάδα (κλάση κανονικής ισοδυναμίας). Ωστόσο, στην περίπτωση με τα βάρη, όλες οι εκδόσεις παράγουν τις δύο ομάδες, που μπορείτε να δείτε στο Σχήμα 4.2. Στον πίνακα, οι ομάδες χωρίζονται από μια παχύτερη μαύρη γραμμή, ενώ στην γραφική αναπαράσταση διακρίνονται από το χρώμα της κορυφής (λευκό για τον πυρήνα, μαύρο για την περιφέρεια).

Το δίκτυο 1 είναι συμμετρικό. Το δίκτυο 2 είναι πολύ παρόμοιο με το δίκτυο 1. Ωστόσο, οι δεσμοί μεταξύ των μονάδων του πυρήνα (1-4) και των μονάδων 5-7 (τρεις από τις μονάδες περιφέρειας) δεν είναι πλέον συμμετρικοί. Η ομάδα της περιφέρειας χωρίζεται σε δύο υπό-ομάδες, όπως φαίνεται από την πρόσθετη γκρι γραμμή στο γράφο του Σχήματος 4.3. Η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών ομάδων φαίνεται καλύτερα στο διάγραμμα του Σχήματος 4.3. Οι μαύρες κορυφές είναι αμετάβλητες και έχουν και οι δυο ένα εισερχόμενο και ένα εξερχόμενο τόξο με τουλάχιστον μία από τις λευκές κορυφές. Οι γκρι κορυφές επίσης συνδέονται με τις λευκές κορυφές μέσω εισερχόμενων και εξερχόμενων τόξων, ωστόσο, καμία γκρι κορυφή δεν έχει και εισερχόμενα και εξερχόμενα τόξα με την ίδια λευκή κορυφή.



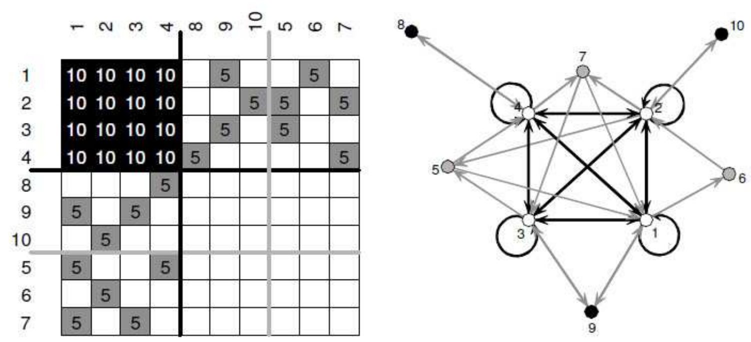
Σχήμα 4.2: Δίκτυο 1.



Σχήμα 4.3: Δίκτυο 2.

Εδώ, είναι σημαντική η διαφορά μεταξύ αυτών των αλγορίθμων, για τους οποίους η συμμετρία παίζει ρόλο, και εκείνων, όπου δεν έχει σημασία (όλοι οι "μονόδρομοι" αλγόριθμοι, που συμβολίζονται με OW, από το "One-Way"). Οι "μονόδρομοι" αλγόριθμοι (ή OW) βρίσκουν τις ίδιες 2 κανονικές ομάδες, όπως στο δίκτυο 1 (με το χώρισμα της μαύρης γραμμής στον πίνακα στο Σχήμα 4.3), ενώ οι άλλες προσεγγίσεις βρίσκουν 3 ομάδες, που παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.3 (με το πρόσθετο χώρισμα της γκρίζας γραμμής).

Η δεύτερη διαφορά μεταξύ των κανονικών διαμερίσεων, που αυτοί οι αλγόριθμοι αναζητούν, αντιστοιχεί στο ποιά βάρη πρέπει να είναι ίσα ώστε οι μονάδες να θεωρούνται κανονικά ισοδύναμες. Για τον αλγόριθμο REGE (όταν ικανοποιείται η απαίτηση για συμμετρία, που αναφέρθηκε πιο πάνω) και για τον αλγόριθμο REGGE-OW, σε κάθε μπλοκ, μόνο τα μέγιστα γραμμών και στηλών πρέπει να είναι ίσα. Από την άλλη πλευρά, για τις άλλες 4 εκδόσεις του REGE, σε κάθε μπλοκ, κάθε γραμμή και κάθε στήλη πρέπει να περιέχουν τις ίδιες τιμές-βάρη (αγνοώντας τα μηδενικά), όπου κάθε μοναδική τιμή-βάρος μπορεί να εμφανιστεί μία ή περισσότερες φορές. Το δίκτυο 1, τροποποιούμενο έτσι ώστε να μπορεί να φανεί αυτή η επίδραση (δίκτυο 3), παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4. Σε αυτό το δίκτυο, οι αλγόριθμοι `REGE` και `REGE-OW` βρίσκουν τις δυο ίδιες ομάδες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.2, και δεν έχουν επηρεαστεί από την προσθήκη των τόξων με βάρος 2 στα μπλοκ $R(2,1)$ και $R(1,2)$.



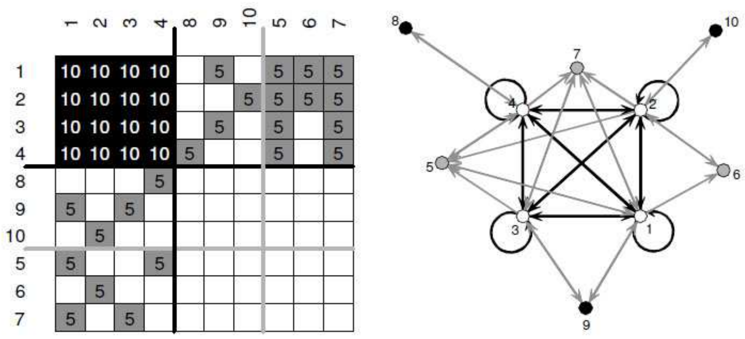
Σχήμα 4.4: Δίκτυο 3.

Οι άλλοι αλγόριθμοι βρίσκουν τις 3 ομάδες, που παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.4. Οι μαύρες κορυφές είναι ίδιες, όπως στο Σχήμα 4.2, ενώ οι γκρι κορυφές έχουν επιπλέον αμφίδρομα τόξα με βάρος 2, που τις συνδέουν με τις λευκές κορυφές.

Η ίδια διαφορά στα χαρακτηριστικά των αλγορίθμων `REGE`, `REGE-OC` και `REGEDI` μπορεί επίσης να φανεί και στο δίκτυο 4 του Σχήματος 4.5, αν και τα μπλοκ $R(2,1)$, $R(3,1)$, $R(1,2)$ και $R(1,3)$ εξακολουθούν να περιέχουν μόνο τόξα με βάρος 5. Ωστόσο, στο δίκτυο 4, το μπλοκ $R(2,1)$ περιέχει τα τόξα από το δίκτυο 1 και το δίκτυο 2 (από το ίδιο μπλοκ). Κάθε γκρι κορυφή έχει τώρα τουλάχιστον ένα ανταποδιδόμενο δεσμό και τουλάχιστον ένα μη ανταποδιδόμενο δεσμό με μια λευκή κορυφή. Ο αλγόριθμος `REGE` βρίσκει μόνο δύο ομάδες σε αυτό το δίκτυο, ενώ οι αλγόριθμοι `REGDI` και `REGGE-OC` βρίσκουν τις τρεις ομάδες που δείχνει το Σχήμα 4.5.

Σε αυτό το παράδειγμα, δείξαμε την διαφορά μεταξύ διαφορετικών εκδόσεων του αλγορίθμου `REGE`. Υπάρχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά, για τα οποία οι εν λόγω αλγόριθμοι διαφέρουν ως προς το είδος των διαμερισμών, που αναζητούν. Η πρώτη διαφορά είναι αν ή όχι υπολογίζουν κάθε τόξο ξεχωριστά ή από κοινού με το τόξο μεταξύ των ίδιων δύο μονάδων προς την αντίθετη κατεύθυνση, εφόσον υπάρχει τέτοιο τόξο. Δηλαδή, εάν μεταχειρίζονται δύο πιθανά τόξα σε μια σύνδεση μεταξύ δύο μονάδων από κοινού ή ξεχωριστά. Στην περίπτωση των μη κατευθυνόμενων δικτύων ή, όταν όλα τα τόξα δεν είναι αντίστροφα, οι αλγορίθμοι, που διαφέρουν μόνο σε αυτά τα χαρακτηριστικά, αναζητούν τους ίδιους ιδανικούς διαμερισμούς.

Το άλλο χαρακτηριστικό, που διακρίνει τους αλγορίθμους REGE, είναι ποιές τιμές-βάρη δεσμών πρέπει να είναι ίσες έτσι ώστε δύο μονάδες να θεωρηθούν ότι είναι κανονικά ισοδύναμες. Μερικοί αλγόριθμοι απαιτούν όπως, εάν η μονάδα a έχει δεσμούς με τιμές-βάρη x, y και z προς τις μονάδες μιας ομάδας C, τότε η μονάδα b μπορεί μόνο να είναι ισοδύναμη με τη μονάδα a, εάν έχει επίσης δεσμούς με τιμές-βάρη x, y και z με τις μονάδες της ομάδας C. Εντούτοις, δεν έχει σημασία πόσοι δεσμοί με αυτές τις τιμές είτε η μονάδα a ή η μονάδα b έχουν με τις μονάδες της ομάδας C ή εάν συνδέονται με όλες ή μόνο με μερικές μονάδες της ομάδας C. Οι άλλοι αλγόριθμοι είναι λιγότερο αυστηροί και απαιτούν ότι, εάν η μονάδα a έχει δεσμούς με τιμές-βάρη x, y και z με τις μονάδες της ομάδας C, τότε η μονάδα b μπορεί μόνο να είναι ισοδύναμη με τη μονάδα a, εάν έχει επίσης έναν δεσμό με τιμή-βάρος ίση με το μέγιστο των x, y και z με μια μονάδα της ομάδας C. Φυσικά, για εκείνους τους αλγορίθμους, που μεταχειρίζονται δύο πιθανά τόξα σε μια σύνδεση από κοινού, αυτό πρέπει επίσης να ληφθεί υπόψη, όπως έχει φανεί στα παραπάνω παραδείγματα.



Σχήμα 4.5: Δίκτυο 4.

Κεφάλαιο 5

Ανακεφαλαίωση

5.1 Σύγκριση Προσεγγίσεων για Δίκτυα με Βάρη

Οι τύποι μοντελοποίησης σε μπλοκ για τη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ δικτύων με βάρη, που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3, αξιολογούνται και συγκρίνονται σε αυτό το τμήμα με τις έμμεσες προσεγγίσεις, την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και μεταξύ τους. Η σύγκριση και η συζήτηση εδώ βασίζονται σε αυτό που παρουσιάζεται στις παρατηρήσεις του τμήματος 3.2. Εντούτοις, εδώ προσπαθούμε να ενσωματώσουμε τα συμπεράσματα από τα παραδείγματα των τεχνητών δικτύων του Κεφαλαίου 4. Επιπλέον, θα συζητήσουμε τις έμμεσες προσεγγίσεις μοντελοποίησης σε μπλοκ σύμφωνα με την κανονική ισοδυναμία, που παρουσιάστηκαν στην Παράγραφο 2.2.4. Στο τέλος αυτού του τμήματος, θα συνοψίσουμε τελικά τα χαρακτηριστικά αυτών των προσεγγίσεων.

5.1.1 Έμμεσες Προσεγγίσεις για την Κανονική Ισοδυναμία

Στην Παράγραφο 2.2.4, παρουσιάστηκαν διάφορες έμμεσες προσεγγίσεις για την κανονική ισοδυναμία. Όπως έχει δείξει ο Žiberna (2007a), οι υπάρχουσες εκδόσεις του REGE (White, 2005, White και Reitz, 1985a), μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις τύπους, αναλόγως με το εάν χειρίζονται ή όχι, από κοινού ή ξεχωριστά, τους δύο πιθανούς δεσμούς μεταξύ δύο μονάδων και με το εάν απαιτούν όπως είναι οι ίδιες όλες οι μοναδικές τιμές-βάρη των δεσμών μεταξύ των μονάδων και μιας ομάδας ή μόνο πρέπει να είναι ίδια τα μέγιστα. Επιπλέον, ο Žiberna (2007a) έχει βρει ότι μπορεί να γίνει μια περαιτέρω διάκριση μεταξύ των εκδόσεων του REGE, που απαιτούν ότι όλες οι μοναδικές τιμές των τιμών-βαρών μεταξύ των μονάδων και μιας ομάδας πρέπει να είναι ίσες ανάλογα με το κατά πόσο παράγουν ένα μέτρο ομοιότητας ή ένα μέτρο ανομοιότητας. Στην Παράγραφο 4.2, δώσαμε κάποια παραδείγματα δικτύων, τα οποία αντιστοιχούν τέλεια στις ισοδυναμίες, που αυτοί οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν.

Στα περισσότερα παραδείγματα του Κεφαλαίου 4 οι αλγόριθμοι `REGE` λειτούργησαν αρκετά καλά (αν και όχι τόσο καλά, όπως στη γενικευμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ). Προέκυψαν χρήσιμοι διαμερισμοί, αν και συχνά όχι με το επιθυμητό πλήθος ομάδων. Υπήρξαν επίσης περιπτώσεις, που ταυτοποιήθηκαν μόνο μερικές ομάδες, συνήθως αυτές του πυρήνα. Επομένως, τα αποτελέσματα, που προέκυψαν, δείχνουν ότι οι αλγόριθμοι, που είναι συμβατοί με τον ίδιο κανονικό ορισμό, μπορεί να παρέχουν διαφορετικούς διαμερισμούς, ενώ εκείνοι, που είναι συμβατοί με διαφορετικούς ορισμούς της κανονικής ισοδυναμίας μπορεί να παρέχουν τους ίδιους διαμερισμούς.

5.1.2 Συγκρίσεις με τις Έμμεσες Προσεγγίσεις

Λίγες επιπρόσθετες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν για τη σύγκριση της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (επίσης και για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ των δικτύων με βάρη) με τις έμμεσες προσεγγίσεις. Τα οφέλη της προσέγγισης βελτιστοποίησης, που περιγράφονται από τους Doreian et al. (2005, σελ. 245), αφορούν τόσο τα δίκτυα με βάρη, όσο και τα δυαδικά δυαδικά. Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ σε σχέση με τις έμμεσες προσεγγίσεις είναι:

- η τιμή της συνάρτησης κριτηρίου ως μέτρο προσαρμογής (fit) ή ποιότητας του διαμερισμού,
- χωρίς να περιορίζεται μόνο στη δομική και την κανονική ισοδυναμία, υπάρχει η δυνατότητα καθορισμού (ορισμού) της ισοδυναμίας μέσω της επιλογής των επιτρεπτών τύπων μπλοκ,
- η δυνατότητα της χρήσης προκαθορισμένων μοντέλων μπλοκ και
- η δυνατότητα της επικύρωσης της μοντελοποίησης σε μπλοκ (μοντέλο προσαρμογής-fitting).

Εντούτοις, αυτά τα πλεονεκτήματα έρχονται με ένα κόστος. Οι προσεγγίσεις της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ είναι πολύ πιό αργές από τις έμμεσες προσεγγίσεις. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για την υλοποίηση τους στο πακέτο `blockmodeling` του περιβάλλοντος `R` (που συζητήθηκε στο Κεφάλαιο 3). Χρησιμοποιώντας αυτό το πρόγραμμα, μπορούν να αναλυθούν μόνο δίκτυα μεγέθους μέχρι περίπου 50 μονάδων. Ακόμη και για τέτοια σχετικώς μικρά δίκτυα, είναι αδύνατο να δοκιμαστεί μια πιό αναλυτική προσέγγιση, που χρησιμοποιεί πολλές διαφορετικές επιλογές (συνδυασμούς αριθμών ομάδων, επιτρεπτών μπλοκ ή προκαθορισμένων μοντέλων κ.λπ.). Εντούτοις, η υλοποίηση με το πρόγραμμα `Pajek` (Batagelj και Mrvar 2006) είναι πολύ γρηγορότερη. Στο πρόγραμμα αυτό, μπορούν να αναλυθούν δίκτυα μέχρι 255 μονάδων (το όριο του Pajek) μέσα σε έναν λογικό χρόνο. Δυστυχώς, μέχρι πρόσφατα, το Pajek υποστηρίζει μόνο την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ (μεταξύ των τύπων της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ). Επίσης, δεν υπάρχει συνήθως καμία εγγύηση ότι το συνολικό βέλτιστο επιτυγχάνεται. Μια τέτοια εγγύηση μπορεί μόνο να δοθεί για πολύ μικρά δίκτυα και πλήθη ομάδων.

Καθώς οι έμμεσες προσεγγίσεις αναπτύσσονται μόνο για δομικές και κανονικές ισοδυναμίες, μια πιο άμεση σύγκριση μπορεί μόνο να γίνει για αυτές τις δυο ειδικές περιπτώσεις.

Στην περίπτωση των δικτύων με βάρη, που συμμορφώνονται πλήρως με τη δομική ισοδυναμία, οι έμμεσες προσεγγίσεις στη δομική ισοδυναμία (υπό τον όρο ότι οι διαγώνιες τιμές του πίνακα αντιμετωπίζονται σωστά) παρέχουν τους ίδιους διαμερισμούς με την ομοιογενή και την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ (σύμφωνα με τη δομική ισοδυναμία).

Στην περίπτωση των δικτύων με βάρη, που συμμορφώνονται πλήρως με την max-κανονική ισοδυναμία, προκύπτουν οι ίδιοι διαμερισμοί χρησιμοποιώντας την "μονόδρομη" έκδοση του αλγορίθμου REGGE (REGGE-OW) και την ομοιογενή και την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ σύμφωνα, με την max-κανονική ισοδυναμία.

Όταν χρησιμοποιήσαμε αυτές τις προσεγγίσεις στα παραδείγματα στο Κεφάλαιο 4, οι προσεγγίσεις της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ απέδωσαν συνήθως καλύτερα. Βρήκαν τους πιο εμφανείς διαμερισμούς σε μπλοκ, οι οποίοι επιτρέπουν μια καλύτερη ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

5.1.3 Τύποι Γενικευμένης Μοντελοποίησης σε Μπλοκ

Η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη αναπτύχθηκε κυρίως με βάση την δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και, επομένως, δεν προκαλεί καμία έκπληξη ότι είναι περισσότερο παρόμοια με τη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ μεταξύ όλων των τύπων μοντελοποίησης σε μπλοκ για δίκτυα με βάρη. Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη ήδη έχουν συγκριθεί ως ένα σημείο στην Παράγραφο 3.2, όπου εισήχθη η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη. Εκεί επίσης δείξαμε ότι, όταν εφαρμόζεται σε ένα δυαδικό δίκτυο, η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη με την παράμετρο m ίση με 1, αυτή, στην πραγματικότητα, αναγάγεται στην δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ. Οι δύο άλλοι τύποι της μοντελοποίησης σε μπλοκ, η ομοιογενής και η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, είναι πολύ διαφορετικοί από τη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ. Με βάση τα αποτελέσματα που παράγουν, είναι επίσης πολύ διαφορετικές προσεγγίσεις από την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη.

Αυτό φαίνεται στα παραδείγματα του Κεφαλαίου 4. Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη συχνά παράγουν παρόμοια αποτελέσματα, αν και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη συχνά παράγει λίγο καλύτερα αποτελέσματα. Πρέπει, εντούτοις, να υπογραμμίσουμε ότι σχεδόν όλες οι συγκρίσεις του Κεφαλαίου 4 γίνονται σύμφωνα με την κανονική ισοδυναμία.

Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη έχουν μόνο σχεδιαστεί για τη διάκριση μεταξύ διαφορετικών τύπων μπλοκ ή συνδέσεων (με βάση τις παρατηρούμενες δομές των συνδέσεων). Στη δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ, το μόνο σημαντικό είναι εάν ο δεσμός είναι παρών ή όχι στην δυαδικοποιημένη μορφή του δικτύου, δηλαδή, εάν το βάρος του δεσμού είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το κατώφλι t ή μικρότερο από αυτό. Στην μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, η κατάσταση είναι παρόμοια, μόνο που τώρα επίσης έχει σημασία η διαφορά μεταξύ του βάρους-τιμών των δεσμών και είτε του 0 ή της παραμέτρου m. Όπως μπορούμε να δούμε, κάθε μια από αυτές τις προσεγγίσεις έχει μια παράμετρο, η οποία καθορίζει ποιες τιμές αντιμετωπίζονται ως σχετικές και ποιές όχι.

Ιδανικά, αυτές οι παράμετροι πρέπει να επιλεγούν πρίν απο τη μοντελοποίηση σε μπλοκ. Όταν αυτό δεν γίνεται, μπορεί να είναι πιό κατάλληλες κάποιες άλλες προσεγγίσεις. Όταν αυτό δεν ήταν δυνατό, έγιναν στην Παράγραφο 3.2.1 κάποιες προτάσεις, ειδικά για την επιλογή της παραμέτρου m, αλλά οι περισσότερες μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και για το κατώφλι t, καθώς είναι πολύ σχετικές. Αυτές αποδείχθηκαν αρκετά κατάλληλες και για τα τα παραδείγματα του Κεφάλαιου 4. Εντούτοις, καθώς οι προτάσεις αυτές δεν είναι ακριβείς, πρέπει να δοκιμαστούν περαιτέρω. Αυτό συχνά είναι προβληματικό, ειδικά για τη μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη, λόγω της αργής υπολογιστικής υλοποίησής της (η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ, εκτός από το πακέτο `blockmodeling`, υλοποιείται επίσης και στο `Pajek` (Batagelj και Mrvar, 2006), όπου η υλοποίηση είναι πολύ γρηγορότερη). Όμως, η θετική πλευρά είναι ότι με την επιλογή διάφορων διαφορετικών τιμών αυτών των παραμέτρων, μπορούν να δοκιμαστούν εναλλακτικές υποθέσεις. Συχνά, διαφορετικές τιμές των παραμέτρων μπορούν να δώσουν διαφορετικούς διαμερισμούς ή μοντέλα μπλοκ.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η ανάγκη να καθοριστούν εκ των προτέρων αυτές οι παράμετροι (t και m) είναι ένα μικρό πρόβλημα. Όμως εάν υπάρχει μια διάκριση μεταξύ των σχετικών και μη δεσμών, όπως υποτίθεται από αυτούς τους δύο τύπους μοντελοποίησης σε μπλοκ και υποστηρίζεται από τη θεωρία και κάποια επαρκή προγενέστερη γνώση για τον καθορισμό των καταλλήλων αυτών τιμών των παραμέτρων, τότε η επιλογή τους μπορεί να γίνει ένα πολύτιμο εργαλείο μοντελοποίησης.

Όπως διαπίστωσε ο Žiberna (2007a), η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη δεν σχεδιάστηκαν για τη διάκριση μεταξύ των μπλοκ του ίδιου τύπου, αλλά διαφορετικών τιμών-βαρών. Π.χ., δεν σχεδιάστηκαν να διακρίνουν μεταξύ ενός πλήρους μπλοκ, στο οποίο όλες οι τιμές-βάρη των στοιχείων είναι ίσες με a, και ενός πλήρους μπλοκ, στο οποίο όλες οι τιμές-βάρη των στοιχείων είναι ίσε με b, όπου $a \neq b$. Η ομοιογενής και η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ (και οι έμμεσες προσεγγίσεις της δομικής και κανονικής ισοδυναμίας) μπορούν επίσης να διακρίνουν τα μπλοκ του ίδιου τύπου, αλλά διαφορετικών τιμών-βαρών των δεσμών. Στα παραδείγματα του Κεφάλαιου 4, αυτό το πρόβλημα δεν φάνηκε να έχει σοβαρές συνέπειες, καθώς φάνηκαν πιο κατάλληλοι οι διαμερισμοί, που ακολουθούσαν κάποια συγκεκριμένη δομή. Ακόμα παρατηρήθηκε ότι δεν ήταν πολύ ομοιογενή τα βάρη των δεσμών (ή οι τιμές της συνάτησης f πάνω στις γραμμές ή στήλες στην περίπτωση των f-κανονικών μπλοκ) στα μπλοκ, τα οποία παράχθηκαν από εκείνους τους διαμερισμούς.

Γενικώς, η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και ειδικά η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη απέδωσαν πολύ καλά στα παραδείγματα του Κεφάλαιου 4, αν και αυτό εν μέρει μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκαν διάφορες τιμές της παραμέτρου m ή του κατωφλιού t και στη συνέχεια επιλέχτηκαν οι καλύτερες λύσεις.

Όπως συζητήσαμε πιο πάνω, η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ και η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη ήταν ακατάλληλες για τη διάκριση των μπλοκ του ίδιου τύπου, αλλά διαφορετικών τιμών-βαρών. Ενώ η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ είναι πολύ κατάλληλη για τη διάκριση των μπλοκ του ίδιου τύπου, με βάση τα βάρη-τιμές των δεσμών, είναι λιγότερο κατάλληλη για τη διάκριση των διαφορετικών τύπων μπλοκ με παρόμοια βάρη-τιμές δεσμών. Στα παραδείγματα του Κεφάλαιου 4 μπορεί επίσης να παρατηρηθεί ότι η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ συχνά παράγει πιό ομοιογενή μπλοκ (αναφορικά με τον τύπο μπλοκ), αλλά συχνά με κόστος την εμφάνιση λιγότερο ξεκάθαρων μηδενικών μπλοκ.

Δημιουργεί εντύπωση το γεγονός ότι η απόδοση της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βαρη και της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ διαφέρουν σε μια τέτοια έκταση. Όπως δείξαμε στην Παράγραφο 3.2, όπου εισήχθει η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ και ειδικά στην υποπαράγραφο 3.2.3, οι ασυνέπειες τύπων μπλοκ υπολογίζονται πολύ παρόμοια σε αυτούς τους δύο τύπους μοντελοποίησης σε μπλοκ. Η κύρια διαφορά βρίσκεται στο ότι η παράμετρος m στη μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη αντικαθίσταται από το μέγιστο του αναλυόμενου μπλοκ (στην περίπτωση ενός μπλοκ κυρίαρχης-γραμμής ή -στήλης). Όμως, η επίδραση μιας σχετικά μικρής διαφοράς είναι τεράστια. Η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ, από την άλλη μεριά, είναι επίσης πολύ όμοια με την ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ, δεδομένου ότι έχουν τα ίδια ιδανικά μπλοκ (εάν στην ομοιογενή μοντελοποίηση σε μπλοκ χρησιμοποιείται το μέγιστο ως η συνάρτηση f, για τα f-κανονικά και τα παρόμοια μπλοκ, και εάν επιλέγεται η κατάλληλη μορφή των μπλοκ κυρίαρχης-γραμμής και -στήλης, η μορφή 2).

Η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ στην αρχική της μορφή παρήγαγε αποτελέσματά, τα οποία, στα παραδείγματα του Κεφαλαίου 4 δεν έμοιαζαν πολύ με τα αποτελέσματα των οποιωνδήποτε άλλων προσεγγίσεων. Εντούτοις, χωρίς το μηδενικό τύπο μπλοκ, τα αποτελέσματά ήταν παρόμοια με εκείνα της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ. Αυτό δεν προκαλεί έκπληξη, αφού σε αυτή την περίπτωση και οι δύο προσεγγίσεις γίνονται σχετικά παρόμοιες. Μπορούμε ακόμη και να θεωρήσουμε ότι η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ αποτελεί μορφή της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ με ένα πολύ παράξενο μέτρο μεταβλητότητας.

Η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ μπορεί επίσης (όπως η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ) να διακρίνει τα μπλοκ του ιδίου τύπου με βάση τα βάρη-τιμές των δεσμών (υποθέτοντας ότι και τα μέγιστα των μπλοκ διαφέρουν επίσης) και δεν έχει προβλήματα με τη συμβατότητα των μπλοκ ή με το μπλοκ μηδενικού τύπου, που είναι μια ειδική περίπτωση των άλλων τύπων μπλοκ. Όμως, έχει το δικό της σύνολο προβλημάτων, που προκαλούνται κυρίως από το γεγονός ότι οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ υπολογίζονται σε σχέση με το μέγιστο των μπλοκ. Οι ασυνέπειες των τύπων μπλοκ της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ είναι πολύ ευαίσθητες στις μεταβολές των μεγίστων των μπλοκ και αυτό σημαίνει επίσης ότι είναι πολύ ευαίσθητες στις εξαιρετικά μεγάλες τιμές (outliers). Το πρόβλημα είναι σοβαρότερο, εάν η όταν χρησιμοποιείται η μέγιστη κανονικοποίηση, δεδομένου ότι, σε εκείνη την περίπτωση, η ασυνέπεια των μηδενικών μπλοκ ενός εμπειρικού μπλοκ, που δεν είναι ένα ιδανικό, είναι πραγματικά μικρότερη, όταν η μέγιστη τιμή σε αυτό το μπλοκ αυξάνεται. Αυτό σημαίνει επίσης ότι οι τύποι μπλοκ πρέπει να ερμηνευθούν σε σχέση με τα μέγιστο των μπλοκ. Αυτό κάνει να είναι ακατάλληλα τα μοντέλα της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ (όταν χρησιμοποιούνται επίσης τα μηδενικά μπλοκ). Είναι απλώς αδικαιολόγητο να ταξινομούνται τα μπλοκ ως μηδενικά με βάση μόνο ένα εξαιρετικά μεγάλο βάρος-τιμή σε ένα μπλοκ. Τέτοια συμπεριφορά μπορεί να φανεί στα περισσότερα παραδείγματα του Κεφάλαιου 4. Λόγω αυτού του προβλήματος, η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ με μηδενικά μπλοκ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όταν υπάρχουν ακραίες τιμές-βάρη των δεσμών στο δίκτυο.

Μια πιθανή λύση σε αυτό το πρόβλημα θα ήταν να μην χρησιμοποιούνται τα μηδενικά μπλοκ. Όμως, σε αυτήν την περίπτωση, η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ γίνεται στην πράξη μια μορφή της ομοιογενούς μοντελοποίησης σε μπλοκ (με ένα πολύ ασυνήθιστο μέτρο μεταβλητότητας) και υποφέρει από τα ίδια προβλήματα, κυρίως από το πρόβλημα των μπλοκ μηδενικού τύπου. Όπως ισχυρίζεται ο Žiberna (2007a), οι αρνητικές συνέπειες της αδυναμίας της πεπλεγμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ να ταξινομεί τα μηδενικά μπλοκ (σε αντιδιαστολή με κάποιο άλλο τύπο μπλοκ) δεν είναι ευτυχώς τόσο σοβαρές όσο η ακαταλληλότητα των μοντέλων μπλοκ, που προκύπτουν από την πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ με μηδενικά μπλοκ. Ανεξάρτητα από αυτό, η χρήση των μηδενικών μπλοκ είναι επιθυμητή, εάν χρησιμοποιείται μια προκαθορισμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ (δηλαδή, εάν είναι διαθέσιμη μια ικανοποιητική θεωρία ή προγενέστερη γνώση). Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα αποτελέσματα βελτιώνονται αισθητά.

5.2 Συμπεράσματα

Οι έμμεσες προσεγγίσεις βρέθηκε ότι παρέχουν τους χρήσιμους διαμερισμούς, αν και συνήθως αυτοί δεν είναι τόσο καλοί όσο οι διαμερισμοί, που προκύπτουν απο μια άμεση προσέγγιση. Οι “μονόδρομες” προσεγγίσεις αποδίδουν παρόμοια με τις αρχικές. Αποδίδουν καλύτερα από τις αρχικές εκείνες οι μορφές της μοντελοποίησης σε μπλοκ, που τροποποιούνται για να αναλύσουν δίκτυα, στα οποία τα βάρη-τιμές των δεσμών επηρεάζονται από το “μέγεθος” των μονάδων.

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης μεταξύ των προσεγγίσεων της γενικευμένης μοντελοποίησης σε μπλοκ είναι κάπως πολύπλοκα. Η μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη αποδίδει πολύ καλά στα παραδείγματα, αλλά τα αποτελέσματά της σε προσομοιώσεις, που έκανε ο Žiberna (2007a), δεν ήταν καθόλου καλά. Επιπλέον, δεν μπορεί να διακρίνει μεταξύ των μπλοκ με διαφορετικές τιμέςβάρη, αλλά αυτό δεν φαίνεται να είναι πολύ σημαντικό, καθώς οι δομές των δεσμών είναι σημαντικότερες. Όμως, αυτό μπορεί να οφείλεται στον τύπο και το μέγεθος των αναλυόμενων δικτύων.

Η δυαδική μοντελοποίηση σε μπλοκ συνήθως αποδίδει παρόμοια ή ελαφρώς χειρότερα από την μοντελοποίηση σε μπλοκ με βάρη. Αυτό είναι αναμενόμενο, αν και η καλύτερη απόδοση της μοντελοποίησης σε μπλοκ με βάρη έχει υπερεκτιμηθεί. Εντούτοις, στις προσομοιώσεις του Žiberna (2007a), έχει αποδώσει μερικές φορές και ελαφρώς καλύτερα.

Η ομοιογενής μοντελοποίηση σε μπλοκ αποδίδει πολύ καλά στις προσομοιώσεις, αλλά στα παραδείγματα αυτό δεν ίσχυε πάντα. Παρήγαγε λιγότερο ξεκάθαρα μηδενικά μπλοκ και μερικές φορές έδινε μεγάλη σημασία στα βάρητιμές των δεσμών σε σύγκριση με τη γενικότερη δομή των δεσμών. Αυτό οφείλεται κυρίως στο πρόβλημα του μηδενικού μπλοκ (όπως το έχει διερευνήσει στην διατριβή του ο Žiberna, 2007a). Επιπλέον, υποφέρει από προβλήματα συμβατότητας.

Η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ βρέθηκε να αποδίδει καλά μόνο σε προκαθορισμένα μπλοκ ή χωρίς μηδενικά μπλοκ. Χωρίς τα μηδενικά μπλοκ, η ταξινόμηση των μπλοκ γίνεται προβληματική. Εντούτοις, αυτό δεν είναι ένα σοβαρό μειονέκτημα, καθώς είναι ακατάλληλα τα μοντέλα των μπλοκ, που παράγονται χρησιμοποιώντας τα μηδενικά μπλοκ. Αλλά παραμένει ανοιχτό το ερώτημα εάν έχει νόημα η πεπλεγμένη μοντελοποίηση σε μπλοκ χωρίς μηδενικά μπλοκ.

Βιβλιογραφία

Batagelj, V. (1996). Model2 - program for generalized prespecified blockmodeling. Manual. Ljubljana.

Batagelj, V. (1997). Notes on blockmodeling. *Social Networks*, 19:143–155.

Batagelj, V. (2005). Pajek datasets. `http://vlado.fmf.unilj.si/pub/networks/data/`.

Batagelj, V. and Bren, M. (1995). Comparing resemblance measures. *Journal of Classification*, 12(1):73–90.

Batagelj, V., Doreian, P., and Ferligoj, A. (1992a). An optimizational approach to regular equivalence. *Social Networks*, 14:121–135.

Batagelj, V. and Ferligoj, A. (2000). Clustering relational data. In Gaul, W., Opitz, O., and Schader, M., editors, *Data Analysis*, pages 3–15. New York: Springer-Verlag.

Batagelj, V., Ferligoj, A., and Doreian, P. (1992b). Direct and indirect methods for structural equivalence. *Social Networks*, 14:63–90.

Batagelj, V., Ferligoj, A., and Doreian, P. (1998). Fitting pre-specified blockmodels. In Hayashi, C., Yajima, K., Bock, H. H., Ohsumi, N., Tanaka, Y., and Baba, Y., editors, *Data Science, Classification, and Related Methods*, pages 199–206. Tokyo: Springer-Verlag.

Batagelj, V. and Mrvar, A. (2005a). Pajek home page. `http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/`.

Batagelj, V. and Mrvar, A. (2005b). Pajek, program for analysis and visualization of large networks, reference manual, list of commands with short explanation, version 1.05. `http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/doc/pajekman.pdf`.

Batagelj, V. and Mrvar, A. (2006). Pajek 1.11. `http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek/`.

Bian, Y., Breiger, R., Davis, D., and Galaskiewicz, J. (2005). Occupation, class, and social networks in urban china. *Social Forces*, 83:1443–1468.

Borgatti, S. and Everett, M. (1992a). Notations of positions in social network analysis. In Marsden, P. V., editor, *Sociological Methodology*, volume 22, pages 1–35. San Francisco: Jossey-Bass.

Borgatti, S. and Everett, M. (1992b). Regular blockmodels of multiway, multimode matrices. *Social Networks*, 14:91–120.

Borgatti, S. and Everett, M. (1993). Two algorithms for computing regular equivalence. *Social Networks*, 15:361–376.

Borgatti, S. and Everett, M. (1999). Models of core/periphery structures. *Social Networks*, 21:375–395.

Borgatti, S., Everett, M., and Freeman, L. (1999). `UCINET 5` *for Windows: Software for Social Network Analysis*. Natic: Analytic Technologies.

Borgatti, S., Everett, M., and Freeman, L. (2002). `UCINET 6` *for Windows: Software for Social Network Analysis, User's Guide*. Harvard, MA: Analytic Technologies.

Brandes, U. and Lerner, J. (2004). Structural similarity in graphs: A relaxation approach for role assignment. In Fleischer, R. and Trippen, G., editors, *ISAAC'04*, pages 184–195. Berlin: Springer-Verlag.

Brandes, U. and Lerner, J. (2005). Characterizing significant structural similarities. Unpublished paper. University of Konstanz.

Breiger, R., Boorman, S., and Arabie, P. (1975). An algorithm for clustering relational data with applications to social network analysis. *Journal of Mathematical Psychology*, 12:329–383.

Breiger, R. and Mohr, J. (2004). Institutional logics from the aggregation of organizational networks: Operational procedures for the analysis of counted data. *Computational and Mathematical Organization Theory*, 10:17–43.

Burt, R. (1976). Positions in networks. *Social Forces*, 55:93–122.

Burt, R. and Minor, M. (1989). *Applied Network Analysis*. Beverly Hills: Sage.

Doreian, P. (1988). Equivalence in a social network. *Journal of Mathematical Sociology*, 13:243–282.

Doreian, P., Batagelj, V., and Ferligoj, A. (1994). Partitioning networks on generalized concepts of equivalence. *Journal of Mathematical Sociology*, 19:1–27.

Doreian, P., Batagelj, V., and Ferligoj, A. (2000). Symmetric-acyclic decomposition of networks. *Journal of Classification*, 17:3–28.

Doreian, P., Batagelj, V., and Ferligoj, A. (2005). *Generalized Blockmodeling*. New York: Cambridge University Press.

Doreian, P. and Mrvar, A. (1996). A partitioning approach to structural balance. *Social Networks*, 18:148–168.

Everett, M. and Borgatti, S. (1993). An extension of regular colouring of graphs to digraphs, networks and hypergraphs. *Social Networks*, 15:237–254.

Everett, M. and Borgatti, S. (1994). Regular equivalence: General theory. *Journal of Mathematical Sociology*, 19:29–52.

Everett, M. and Borgatti, S. (1996). Exact coloration of graphs and digraphs. *Social Networks*, 18:319–331.

Everett, M., Boyd, J., and Borgatti, S. (1990). Ego-centered and local roles: A graph theoretic approach. *Journal of Mathematical Sociology*, 15:163–172.

Everitt, B., Landau, S., and Leese, S. (2001). *Cluster Analysis*. London: Hodder Amold.

Freeman, L. (1993). Finding groups with a simple genetic algorithm. *Journal of Mathematical Sociology*, 17:227–241.

Glover, F. (1989). Tabu search ŭ part 1. *ORSA Journal on Computing*, 1:190ŭ206.

Goldberg, D. (1989). *Genetic Algorithms*. New York: Addison Wesley.

Homans, G. (1950). *The Human Group*. New York: Harcourt, Brace and Company.

Kirkpatrick, S. and Vecchi, G. M. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220:671–680.

Knoke, D. and Kuklinski, J. (1982). *Networks Analysis*.

Linton, R. (1936). *The Study of Man*. New York: D. Appleton-Century.

Lorrain, F. and White, H. (1971). Structural equivalence of individuals in social networks. *Journal of Mathematical Sociology*, 1:49–80.

Moreno, J. (1934). *Who Shall Survive?: Foundations of Sociometry, Group Psychotherapy, and Sociodrama*. Washington, DC: Nervous and Mental Disease Publishing.

Nadel, S. F. (1957). *The Theory of Social Structure*. Melbourne : Melbourne University Press in association with the Australian National University.

Nowicki, K. and Snijders, T. A. B. (2001). Estimation and prediction for stochastic blockstructures. *Journal of the American Statistical Association*, 96:1077–1087.

Sailer, L. D. (1978). Structural equivalence: Meaning and definition, computation and application. *Social Networks*, 1:73–90.

Snijders, T. and Nowicki, K. (1997). Estimation and prediction for stochastic blockmodels for graphs with latent block structure. *Journal of Classification*, 14:75–100.

Stadler, P. and Tinhofer, G. (1999). Equitable partitions, coherent algebras and random walks: Applications to the correlation structure of landscapes, match commun. `http://www.tbi.univie.ac.at/papers/Abstracts/99-NN-003.ps.gz`.

Žiberna, A. (2007a). *Generalized Blockmodeling of Valued Networks*. PhD thesis, Univercity of Ljubljana, Faculty of Social Science.

Žiberna, A. (2007b). Generalized blockmodeling of valued networks. *Social Networks*, 29(1):105–126.

Žiberna, A. (2007c). `blockmodeling 0.1.4`*: An* `R` *package for generalized and classical blockmodeling of valued networks.* `http://www2.arnes.si/∼aziber4/blockmodeling/`.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American Statistical Association*, 58:236–244.

Wasserman, S. and Faust, K. (1994). *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wellman, B. and Berkowitz, S. (1988). Introduction: Studying social structures. In Wellman, B. and Berkowitz, S. D., editors, *Social Structures: A Network Approach*. New York: Cambridge University Press.

White, D. (1985a). `Regular Distances Program`. `http://eclectic.ss.uci.edu/~drwhite/REGGE/REGGE.FOR`.

White, D. (1985b). `Regular Equivalence Winship Alence Program`. `http://eclectic.ss.uci.edu/~drwhite/REGGE/REGGE.FOR`.

White, D. (2005). `REGGE` (web page). `http://eclectic.ss.uci.edu/~drwhite/REGGE/`.

White, D. and Reitz, K. (1983). Graph and semigroup homomorphisms on networks of relations. *Social Networks*, 5:193–234.

White, H. C. (1988). Varieties of markets. In Wellman, B. and Berkowitz, S., editors, *Social Structures: A Network Approach*, pages 226–260. Cambridge: Cambridge University Press.

Winship, C. (1974). Thoughts about roles and relations. Unpublished paper. Harvard University.

Winship, C. and Mandel, M. (1983). Roles and positions: A critique and extension of the blockmodeling approach. In Leinhardt, S., editor, *Sociological Methodology, 1983-4*, pages 314–344. San Francisco: Jossey-Bass.