ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΜΕ ΑΠΕΙΡΟΓΙΝΟΜΕΝΑ

Διπλωματική Εργασία: Κωνσταντίνου Δαλαμάγκα

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Επιβλέπων Καθηγητής: Νικόλαος Σάμαρης

Στην μητέρα μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Νιώθω βαθιά την ανάγκη να ευχαριστήσω την επίκουρο καθηγήτρια Βλάχου Βάγια για την αμέριστη συμπαράσταση και πίστη που μου έδειξε όλα αυτά τα χρόνια καθώς και για την πολύτιμη βοήθεια της στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ επίσης τον καθηγητή κύριο Σάμαρη Νικόλαο για την τιμή που μου έκανε να γίνει επιβλέπων σε αυτή τη διπλωματική εργασία καθώς και για τις σημαντικές μαθηματικές παρατηρήσεις του και τον επίκουρο καθηγητή κύριο Ηλιόπουλο Δημήτρη για την τιμή που μου έκανε να γίνει μέλος της τριμελούς επιτροπής. Τέλος ευχαριστώ θερμά τους συναδέλφους και πάνω απ'ολα φίλους υποψήφιους διδάκτορες Προτσώνη Γρηγόρη και Ματζάρη Απόστολο για την αμέριστη στήριξη και βοήθειά τους.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αποτελείται απο 4 κεφάλαια στα οποία θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων.

Στο κεφάλαιο 1 θα αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες και θεωρήματα από τη μιγαδική ανάλυση που θα χρειαστούμε στην πορεία της μελέτης μας.

Στο Κεφάλαιο 2 θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό των άπειρων γινομένων και θα δείξουμε ότι η σύγκλισή τους έχει παρόμοιες ιδιότητες με τη σύγκλιση των άπειρων σειρών. Στο τέλος του κεφαλαίου θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το βασικό Θεώρημα 2.11 το οποίο αναφέρεται σε απειρογινόμενα αναλυτικών συναρτήσεων. Όπως ακριβώς οι άπειρες σειρές χρησιμοποιούνται για την ανάπτυξη δυναμοσειρών σε αναλυτικές συναρτήσεις, έτσι και τα άπειρα γινόμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη γινομένων σε αναλυτικές συναρτήσεις. Μια σύγκριση ανάμεσα στα αναπτύγματα σειρών και γινομένων θα μας δώσει τη δυνατότητα να καθορίσουμε κάποιες πολύ ενδιαφέρουσες ομοιότητες.

Στο Κεφάλαιο 3 θα αποδείξουμε ένα από τα κεντρικά θεωρήματα της θεωρίας των συναρτήσεων, το Θεώρημα Παραγοντοποίησης του Weierstrass , που αφορά την παραγοντοποίηση ακεραίων συναρτήσεων αλλά και την κατασκευή ακεραίων συναρτήσεων με δοσμένες ρίζες. Στην προσπάθεια αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το πολύ βασικό εργαλείο κατασκευής αναλυτικών συναρτήσεων, το απειρογινόμενο. Πιο συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε $\{a_n\}$ μια ακολουθία σημείων ενός ανοιχτού συνόλου $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ με όρους διάφορους ανά δύο, χωρίς σημεία συσσώρευσης στο Ω και $\{m_n\}$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων. Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια αναλυτική συνάρτηση που οι ρίζες της να είναι τα σημεία a_n με αντίστοιχους βαθμούς πολλαπλότητας m_n. Αν η ακολουθία είναι πεπερασμένη , έστω $a_1, , ..., a_N$, τότε μια τέτοια συνάρτηση θα είναι η συνάρτηση

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} .... (z - a_N)^{m_N}.$$

Αν όμως η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι άπειρη, χωρίς σημεία συσσώρευσης στο Ω με $a_n \neq 0$ για κάθε n, ώστε κάθε a_n επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσος είναι ο βαθμός πολλαπλότητας, τότε αντί των παραγόντων $(z - a_n)$, θα θεωρήσουμε τους παράγοντες $(1-\frac{z}{a_n})e^{g_n(z)}$, που δεν εισάγουν άλλες ρίζες (αφού $e^{g_n(z)} \neq 0$), όπου $g_n(z)$ είναι κατάλληλα πολυώνυμα, ώστε το απειρογινόμενο

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{a_n})e^{g_n(z)}$$

να συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα μελετήσουμε την παραγοντοποίηση της συνάρτησης $\sin(\pi z)$ και θα αποδείξουμε την ταυτότητα του Euler: $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z^2}{n^2})$. Σαν εφαρμογή θα αποδείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Θα ορίσουμε τη $\Gamma-$συνάρτηση κατά Weierstrass, μέσω ενός απειρογινομένου και θα αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες αυτής όπως για παράδειγμα την ταυτότητα $\frac{\pi}{\sin \pi z} = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$. Στο τέλος του κεφαλαίου θα μελετήσουμε την ολοκληρωτική μορφή της $\Gamma-$συνάρτησης κατά Euler(Θεώρημα 3.8).

Τέλος στο Κεφάλαιο 4 θα αποδείξουμε το Θεώρημα Mittag-Leffler:Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και μια ακολουθία $\{a_k\}$ (πεπερασμένη ή άπειρη) από διαφορετικά ανά δύο σημεία του Ω, η οποία δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω. Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση

$$S_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{j,k}}{(z - a_k)^j}$$

όπου m_k θετικοί ακέραιοι και $A_{1,k}, A_{2,k}, ..., A_{m_k,k}$ αυθαίρετοι μιγαδικοί συντελεστές. Τότε υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση f στο Ω, της οποίας οι πόλοι είναι ακριβώς τα σημεία $a_k, k = 1, 2, ...$ και το κύριο μέρος της f στο σημείο $z = a_k$ είναι $S_k(z)$.
Θα χρειαστούμε την πρόταση 4.1 που αναφέρεται στις εξαντλούσες ακολουθίες συμπαγών υποσυνόλων ενός ανοιχτού υποσυνόλου του $\mathbb{C}$ καθώς και το Θεώρημα του Runge.

Κεφάλαιο 1

Προκαταρτικά

Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $d : X \times X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες:
α) $d(x, y) \geqslant 0 \ \forall x, y \in X$
β) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
γ) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in X$
δ) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \ \forall x, y, z \in X$

Το ζευγάρι (X, d) το καλούμε μετρικό χώρο και τη συνάρτηση d μετρική. Αν $X = \mathbb{C}$ και $d(z, w) = |z - w|$ τότε $(\mathbb{C}, d)$ μετρικός χώρος.

1.1 Ορισμός. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία από στοιχεία του X. Θα λέμε ότι η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x και θα γράφουμε $x_n \to x$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $d(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant N$.

Αν $X = \mathbb{C}$ και $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ τότε $z_n \to z$ σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $|z - z_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant N$.

1.2 Ορισμός. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο X καλείται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N ώστε
$$\forall n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Αν ο μετρικός χώρος (X, d) έχει την ιδιότητα ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, τότε ο (X, d) καλείται πλήρης.

1.3 Πρόταση. *Ο $(\mathbb{C}, d)$ είναι πλήρης.*

1.4 Ορισμός. Έστω $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ ακολουθία και $n \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει σε έναν μιγαδικό αριθμό z εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N ώστε $|\sum_{n=0}^{m} z_n - z| < \varepsilon$ για $m \geqslant N$.

1.5 Ορισμός. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως εάν $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ συγκλίνει.

1.6 Θεώρημα. *Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ συγκλίνει.*

1.7 Ορισμός. Έστω $f_n : S \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, ..,$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων πάνω σε ένα τυχαίο σύνολο S. Θα λέμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f : S \to \mathbb{C}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|f_n(s) - f(s)| < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant N(\varepsilon)$ και για κάθε $s \in S$.

1.8 Ορισμός. Έστω $f_n : S \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, ..,$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων πάνω σε ένα τυχαίο σύνολο S. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ λέγεται ότι συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω στο S εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = f_1 + f_2 + .. + f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

1.9 Ορισμός. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ και $f_n, f : A \to \mathbb{C}$. Θα λέμε ότι η ακολουθία f_n συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του A, αν για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N (που εξαρτάται από το K και το ε), ώστε $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ για $n \geq N$ και για $z \in K$.

1.10 Πρόταση. *(Weierstrass M-test)*
Έστω $f_n : X \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in X$ και έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

1.11 Ορισμός. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση και a ρίζα της f. Η τάξη m της ρίζας a της f είναι ο μοναδικός αριθμός m για τον οποίο υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $g(a) \neq 0$, και $f(z) = (z - a)^m g(z)$ για $z \in \Omega$.

1.12 Ορισμός. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $a \in \Omega$, $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση και a πόλος της f. Η τάξη m του πόλου a της f είναι ο μοναδικός αριθμός m για τον οποίο υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $g(a) \neq 0$, και $f(z) = (z - a)^{-m} g(z)$ για $z \in \Omega - \{a\}$.

1.13 Ορισμός. Μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοιχτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και αναλυτική σε αυτό εκτός από τους πόλους της καλείται μερόμορφη συνάρτηση στο Ω.

1.14 Θεώρημα. *(Ανάπτυγμα Laurent)*
Έστω $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ *και* a *μιγαδικός αριθμός. Θέτουμε* $S(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$. *Έστω* $f : S(a, r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ *αναλυτική συνάρτηση. Τότε για κάθε* $z \in S(a, r_1, r_2)$ *είναι*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Οι δύο σειρές συγκλίνουν απολύτως για κάθε $z \in S(a, r_1, r_2)$ *και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του* $S(a, r_1, r_2)$. *Τέλος η ακολουθία* $\{a_n : n = \pm 1, \pm 2, ...\}$ *είναι μοναδική και αν* $r_1 < \rho < r_2$ *τότε*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

για $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Πόρισμα: Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $R > 0$ και f αναλυτική συνάρτηση στο $S(a, 0, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < R\}$ με ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$$

στο $S(a, 0, R)$. Τότε:

α) Η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν $a_{-n} = 0$ για $n = 1, 2, , .$

β) Η f έχει πόλο τάξης $m \geqslant 1$ στο a αν και μόνο αν $a_{-m} \neq 0$ και $a_{-n} = 0$ για κάθε $n > m$.

γ) Η f έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a αν και μόνο αν $a_{-n} \neq 0$ για άπειρους το πλήθος δείκτες $n > 0$.

Παρατήρηση: Έστω ότι η f έχει πόλο τάξεως m στο $z = a$ και $f(z) = (z-a)^{-m} g(z)$. Εφόσον η g είναι αναλυτική σε έναν δίσκο $B(a : R)$, το ανάπτυγμα της δυναμοσειράς της γύρω από το a έστω ότι είναι

$$g(z) = A_m + A_{m-1}(z-a) + ... + A_1(z-1)^{m-1} + (z-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

Τότε

$$f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + ... + \frac{A_1}{z-a} + g_1(z),$$

όπου g_1 είναι αναλυτική στο δίσκο $B(a : R)$ και $A_m \neq 0$.

1.15 Ορισμός. Αν μια συνάρτηση $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ έχει πόλο τάξεως m στο $z = a$ και ικανοποιεί τη σχέση $f(z) = \frac{A_m}{(z-a)^m} + ... + \frac{A_1}{z-a} + g_1(z)$, με g_1 να είναι αναλυτική στο δίσκο $B(a : R)$ και $A_m \neq 0$, τότε το άθροισμα

$$A_m(z-a)^{-m} + ... + A_1(z-a)^{-1}$$

καλείται κύριο μέρος της f στο $z = a$.

1.16 Θεώρημα. *(Casorati-Weierstrass)*
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, $a \in \Omega$ και $f : \Omega - \{a\} \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση. Το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, τότε και μόνο, αν για κάθε $\varepsilon > 0$, ώστε $S(a, 0, \varepsilon) \subseteq \Omega$, έπεται ότι το σύνολο $f(S(a, 0, \varepsilon))$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

1.17 Θεώρημα. *(Ριζών)*
Έστω Ω τόπος στο $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση και $Z_f = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$ το σύνολο ριζών της f. Αν το σύνολο Z_f έχει σημείο συσσώρευσης μέσα στο Ω, τότε $f \equiv 0$.

1.18 Θεώρημα. *(Liouville)*
Κάθε ακεραία και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή.

Εκθετική Συνάρτηση: Είναι γνωστό ότι η εκθετική συνάρτηση στους πραγματικούς αριθμούς είναι 1-1 και επομένως έχει αντίστροφη συνάρτηση τον λογάριθμο, ο οποίος ορίζεται στους θετικούς πραγματικούς αριθμούς. Η εκθετική συνάρτηση όμως στους μιγαδικούς αριθμούς που ορίζεται $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ και έχει τύπο $f(z) = e^z$ δεν είναι 1-1 αφού $e^{z+2\pi i} = e^z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Επίσης εάν $e^z = 1$ τότε, γράφοντας $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, βρίσκουμε ότι $x = 0$ και $y = 2k\pi i$, δηλαδή $z = 2k\pi i$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως εάν $e^{z_1} = e^{z_2}$ τότε $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Έτσι η εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$. Αν καταφέρουμε όμως να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της εκθετικής συνάρτησης σε ένα υποσύνολο το οποίο δεν θα περιέχει σημεία της μορφής $z + 2k\pi i$, όπου k ακέραιος διάφορος του μηδενός, τότε θα περιμένουμε πάνω σε ένα τέτοιο σύνολο η εκθετική συνάρτηση να είναι 1-1. Εφόσον η περίοδος της συνάρτησης είναι ο καθαρά φανταστικός αριθμός $2\pi i$, αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα της μορφής που θέλουμε είναι οι οριζόντιες λωρίδες με ύψος το πολύ $2\pi i$. Επομένως η εκθετική συνάρτηση ορισμένη ως $f : \{-\pi i < Imz \leq \pi i\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.

Λογαριθμική συνάρτηση: Η λογαριθμική συνάρτηση προκύπτει από την θεώρηση των λύσεων z της εξίσωσης $e^z = w$. Επειδή η εκθετική συνάρτηση δεν παίρνει ποτέ την τιμή 0, ας θεωρήσουμε ένα $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ και ας το γράψουμε

$$w = |w|[cos(argw) + isin(argw)] = e^{log|w|}e^{iargw} = e^{log|w| + iargw}.$$

Επομένως οι λύσεις της $e^z = w$ είναι οι αριθμοί

$$z = log|w| + iargw + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$$

Η ποσότητα $log|w| + iargw + 2k\pi i$ λέγεται λογάριθμος του μιγαδικού αριθμού w και ορίζεται για $w \neq 0$, $log : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$.

Από τον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι υπάρχουν άπειρες τιμές του $logw$ που έχουν διαφορά $2k\pi i$. Κάθε τιμή του k ορίζει έναν κλάδο του λογαρίθμου. Στην περίπτωση που $k = 0$ έχουμε τη συνάρτηση $Log : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ με τύπο $Log(w) = log|w| + iArgw$ η οποία λέγεται κύριος κλάδος της $logw$.

Ας εξετάσουμε τώρα την συνάρτηση $log : \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}$ ως προς τη συνέχεια. Καταρχήν το όρισμα $arg : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου

$$G = \{w = u + iv : u, v \in \mathbb{R}, u \notin (-\infty, 0], v = 0\}.$$

Αλλά αν $w = u + iv$ τείνει σε έναν αριθμό $\alpha \in (-\infty, 0]$ με $v > 0$ τότε $argw \to \pi$, ενώ αν το $w = u + iv$ τείνει στο α με $v < 0$ τότε $argw \to -\pi$. Συνεπώς η συνάρτηση $arg : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$ είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο $\alpha \in (-\infty, 0]$, και το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $log : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$. Αν θέλουμε λοιπόν συνεχή κλάδο του λογαρίθμου θα πρέπει να εξαιρέσουμε από το πεδίο ορισμού της την ημιευθεία $\{w = u + iv : v = 0, u \in (-\infty, 0]\}$. Έτσι λοιπόν η συνάρτηση log περιορισμένη στο σύνολο G είναι συνεχής με πεδίο τιμών το σύνολο

$$D = \{z \in \mathbb{C} : z = x + yi, -\infty < x < +\infty, -\pi < y < \pi\}.$$

Δηλαδή $log : G \to \mathbb{C}$ και είναι συνεχής συνάρτηση.

Κεφάλαιο 2

Άπειρα Γινόμενα

Ένα άπειρο γινόμενο είναι μια έκφραση της μορφής $z_1 z_2 z_3 ...$ και συμβολίζεται με $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$, όπου $\{z_n\}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Σε αναλογία με τις άπειρες σειρές δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

2.1 Ορισμός. Έστω $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$, το νιοστό μερικό γινόμενο. Θα λέμε ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει εάν η ακολουθία $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε έναν μιγαδικό αριθμό P. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι $P = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Στον παραπάνω ορισμό μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

(α) Αν ένας από τους παράγοντες είναι μηδέν, τότε το γινόμενο συγκλίνει στο μηδέν , ανεξάρτητα ποιοι είναι οι άλλοι παράγοντες. Θα ήταν ενδιαφέρουσα λοιπόν μια έννοια σύγκλισης που θα ξεπερνούσε αυτήν την 'ανωμαλία' και θα έπαιρνε υπόψη της και τους άλλους παράγοντες.

(β) Είναι δυνατόν ένα άπειρο γινόμενο να συγκλίνει στο μηδέν χωρίς κανένας από τους παράγοντές του να είναι μηδέν (σε αντίθεση με το πεπερασμένο γινόμενο). Για παράδειγμα $\prod_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}) = 0$.

Στην παρούσα εργασία όταν θα αναφερόμαστε στη σύγκλιση των άπειρων γινομένων θα θεωρούμε όλους τους παράγοντές του μη μηδενικούς. Επιπλέον όταν ένα άπειρο γινόμενο δε συγκλίνει θα λέμε ότι αποκλίνει.

Παρατηρούμε ότι αν $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k \to P \neq 0$, τότε

$$z_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1, n \to \infty.$$

Έτσι λοιπόν είναι πιο βολικό να εκφράσουμε ένα άπειρο γινόμενο που συγκλίνει στη μορφή $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$, όπου $z_n \to 0$.

Επιπλέον η σύγκλιση μιας ακολουθίας $\{z_n\}$ στο μηδέν δεν είναι επαρκής για τη σύγκλιση του άπειρου γινομένου $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$. Για παράδειγμα,

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1 \to \infty,$$

επομένως $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ αποκλίνει.

Φαίνεται λοιπόν αναγκαίο να μελετήσουμε τη σύγκριση μεταξύ των άπειρων σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ και των άπειρων γινομένων $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε ένα ενδιαφέρον θεώρημα , το οποίο συσχετίζει τα απειρογινόμενα με τις δυναμοσειρές, χρησιμοποιώντας τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου Log όπως προηγουμένως.

2.2 Θεώρημα. *Έστω $z_n \neq 0$, $n = 1, 2, ...$ μιγαδικοί αριθμοί. Τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει σε μη μηδενικό όριο αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} Log z_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Θέτουμε $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ και $S_n = \sum_{k=1}^{n} Log z_k$.

Υποθέτουμε ότι $S_n \to S$. Παρατηρούμε ότι:
$e^{S_n} = e^{\sum_{k=1}^{n} Log z_k} = e^{Log z_1 + Log z_2 + ... + Log z_n} = e^{Log z_1} e^{Log z_2} ... e^{Log z_n} = z_1 z_2 ... z_n = P_n$.

Επειδή $S_n \to S$ και η εκθετική συνάρτηση e^z είναι συνεχής, προκύπτει ότι

$$e^{S_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^S \; .$$

Άρα $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k \to e^S$, οπότε $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = e^S \neq 0$.

Αντιστρόφως υποθέτουμε ότι $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k \to P \neq 0$.

Ας υποθέτουμε ότι το

$$P \in \mathbb{C} - \{z : Rez \leq 0 \text{ και } Imz = 0\}.$$

Επειδή $P_n \to P$ είναι προφανές ότι από ενα n και πάνω ότι και τα P_n ανήκουν στο παραπάνω σύνολο. Από τη συνέχεια του Log σε αυτό το σύνολο προκύπτει ότι $LogP_n \to LogP$.

Ισχύει
$$e^{S_n} = e^{Logz_1+Logz_2+...Logz_n} = e^{Log(z_1z_2...z_n)} = e^{LogP_n} = P_n,$$
επομένως υπάρχει μια ακολουθία ακεραίων $\{m_n\}$ τέτοια ώστε
$$S_n = LogP_n + 2\pi i m_n.$$

Θα δείξουμε ότι m_n είναι μια σταθερά (έστω m). Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη διαφορά

$$S_n - S_{n-1} = LogP_n + 2\pi i m_n - LogP_{n-1} - 2\pi i m_{n-1} = LogP_n - LogP_{n-1} + 2\pi i(m_n - m_{n-1})$$

Αλλά $S_n - S_{n-1} = Logz_n$ και $Logz_n \to Log1$ επομένως $S_n - S_{n-1} \to 0$.

Επιπλέον
$$LogP_n - LogP_{n-1} \to LogP - LogP = 0.$$

Συνεπώς $2\pi i(m_n - m_{n-1}) \to 0$. Από το γεγονός ότι $m_n - m_{n-1}$ είναι ακολουθία ακεραίων που συγκλίνει στο μηδέν, προκύπτει ότι $m_n - m_{n-1} = 0$, άρα $m_n - m_{n-1} = m$ σταθερά. Επομένως
$$S_n \to LogP + 2\pi i m.$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που $P \notin \mathbb{C} - \{z : Rez \leq 0 \text{ και } Imz = 0\}$, τότε χρησιμοποιούμε διαφορετικό κλάδο λογαρίθμου ώστε η συνάρτηση Log να καταστεί συνεχής.

2.3 Λήμμα. *Αν $z_n \geqslant 0$, τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Έστω $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ και $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_k)$. Παρατηρούμε ότι εφόσον $z_n \geqslant 0$ ισχύει
$$z_1 + z_2 + ... + z_n \leq (1+z_1)(1+z_2)...(1+z_n).$$

Συνεπώς $S_n \leq P_n$. Επιπλέον, επειδή $1+x \leqslant e^x, \forall x \geqslant 0$, έχουμε

$$z_1 + z_2 + ... + z_n \leq (1+z_1)(1+z_2)...(1+z_n) \leqslant e^{z_1}e^{z_2}...e^{z_n},$$

οπότε

$$z_1 + z_2 + ... + z_n \leq (1+z_1)(1+z_2)...(1+z_n) \leqslant e^{z_1+z_2+...+z_n},$$

άρα

$$S_n \leqslant P_n \leqslant e^{S_n} \tag{2.1}$$

Τώρα αν το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό S, τότε το γινόμενο $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_k)$ είναι μια αύξουσα και άνω φραγμένη (από την e^S) ακολουθία, συνεπώς συγκλίνει. Άρα και $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ συγκλίνει.

Αντιστρόφως αν $P_n \to P$, τότε σύμφωνα με τη σχεση (2.1) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει σε μια τιμή όχι μεγαλύτερη του P.

Για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$. Επομένως και το άπειρο γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^p})$ συγκλίνει για $p > 1$ και αποκλίνει για $p \leq 1$.

2.4 Πρόταση. *Έστω $z_n \in \mathbb{C}$ με $z_n \neq 0$ για κάθε $n = 1, 2, 3, ...$ Τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός αν και μόνο αν*

$$\lim_{n,m\to\infty}(z_n \cdot z_{n+1} \cdots z_m) = 1.$$

Απόδειξη: Έστω ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n,m\to\infty}(z_n \cdot z_{n+1} \cdots z_m) = 1$ ή ισοδύναμα ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για $m \geq n \geq n_0 \Rightarrow |z_n \cdot z_{n+1} \cdots z_m - 1| < \epsilon$.

Εφόσον $\prod_{n=1}^{\infty} z_n \neq 0$, υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε $|P_N| > \lambda$ για κάθε N, όπου $P_N = z_1 z_2 ... z_N$. Επίσης αν $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |P_m - P_n| < \lambda\epsilon.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|\frac{P_m}{P_n} - 1| = |\frac{P_m - P_n}{P_n}| < \frac{\lambda\epsilon}{|P_n|} \leq \epsilon.$$

Δηλαδή για κάθε $m \geq n \geq n_0$, είναι

$$|z_n \cdot z_{n+1} \cdots z_m - 1| < \epsilon,$$

και έπεται το ζητούμενο.

Αντιστρόφως έστω ότι ισχύει ότι $\lim_{n,m\to\infty}(z_n \cdot z_{n+1} \cdots z_m) = 1$. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε για κάθε $m \geq k$

$$|z_k \cdot z_{k+1} \cdots z_m - 1| < \frac{1}{2}.$$

Έτσι λοιπόν αν υπάρχει το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$, τότε θα είναι και διάφορο του μηδενός. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την ύπαρξη του απειρογινομένου $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{n,m\to\infty}(z_n \cdot z_{n+1} \cdots z_m) = 1$, υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$|\tfrac{P_m}{P_n} - 1| < \epsilon \text{ για κάθε } n, m \geqslant n_0 \text{ με } m \geqslant n,$$

οπότε (για αυτά τα m και n), $|P_m - P_n| < \epsilon|P_n|$. Για $n \geq n_0$ (n_0 σταθερό) είναι

$$|\frac{P_n}{P_{n_0}} - 1| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon + 1 < |\frac{P_n}{P_{n_0}}| < \epsilon + 1 \Rightarrow (-\epsilon + 1)|P_{n_0}| < |P_n| < (1 + \epsilon)|P_{n_0}|.$$

Άρα το σύνολο $\{|P_n| : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο από το

$$max\{|P_n| : n \leq n_0\} \cup \{(1 + \varepsilon)|P_{n_0}|\}.$$

Συνεπώς ορίζουμε

$$M = \sup\{|P_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

και επομένως $|P_m - P_n| < \epsilon M$, για κάθε $n, m \geqslant n_0$. Δηλαδή η ακολουθία $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Caychy, συνεπώς το όριο

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$$

υπάρχει.

2.5 Πρόταση. *Έστω $z_n \in \mathbb{C}$ με $1 + z_n \neq 0$ για κάθε $n = 1, 2, 3, ...$, έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$. Τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός.*

Απόδειξη: Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, σύμφωνα με το λήμμα (2.3) έπεται ότι

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |z_n|) < \infty.$$

Άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση για $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για $m \geqslant n \geqslant n_0$ να ισχύει

$$|(1+|z_n|)...(1+|z_m|)-1| < \epsilon.$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι η ακόλουθη ανισοτική σχέση είναι αληθής

$$|(1+z_n)...(1+z_m)-1| \leqslant |(1+|z_n|)...(1+|z_m|)-1|.$$

Πράγματι χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής έχουμε:

- για $n = 1$ είναι $|1+z_1-1| \leq 1+|z_1|-1$ που ισχύει.

- Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή

$$|(1+z_1)(1+z_2)...(1+z_k)-1| \leq (1+|z_1|)(1+|z_2|)...(1+|z_k|)-1.$$

- Θα δείξω ότι ισχύει για $n = k+1$, δηλαδή

$$|(1+z_1)(1+z_2)...(1+z_k)(1+z_{k+1})-1| \leq (1+|z_1|)(1+|z_2|)...(1+|z_k|)(1+|z_{k+1}|)-1.$$

Εχουμε λοιπόν

$$|(1+z_1)(1+z_2)...(1+z_k)(1+z_{k+1})-1| = |(1+z_1)(1+z_2)...(1+z_k)(1+z_{k+1})-(1+z_{k+1})+z_{k+1}| =$$

$$|(1+z_{k+1})[(1+z_1)(1+z_2)...(1+z_k)-1]+z_{k+1}| \leq |1+z_{k+1}||(1+z_1)(1+z_2)...(1+z_k)-1|+|z_{k+1}| \leq$$

$$(1+|z_{k+1}|)(1+|z_1|)(1+|z_2|)...(1+|z_k|)-(1+|z_{k+1}|)+|z_{k+1}| =$$

$$(1+|z_1|)(1+|z_2|)...(1+|z_k|)(1+|z_{k+1}|)-1.$$

Συνεπώς

$$m \geqslant n \geqslant n_0 \Rightarrow |(1+z_n)...(1+z_m)-1| < \epsilon.$$

Συνεπώς το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός.

2.6 Ορισμός. Το άπειρο γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ συγκλίνει απολύτως αν $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ συγκλίνει.

Σύμφωνα λοιπόν με το λήμμα (2.3), η απόλυτη σύγκλιση του γινομένου $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ είναι ισοδύναμη με την απόλυτη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Με τον παραπάνω ορισμό της απόλυτης σύγκλισης θα αποδείξουμε ένα λήμμα σε αναλογία με μια πολύ γνωστή ιδιότητα των άπειρων σειρών.

2.7 Λήμμα. *Αν το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη: Εφόσον το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ συγκλίνει , τότε σύμφωνα με το λήμμα (2.3) έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ συγκλίνει. Αλλά σύμφωνα με την πρόταση (2.5) προκύπτει ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ υπάρχει και είναι διάφορο του μηδενός.

Παρατήρηση: Ας δούμε για παράδειγμα πού συγκλίνει το γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{2}{k(k+3)})$.

Έχουμε ότι

$$1+\frac{2}{k(k+3)}=\frac{k^2+3k+2}{k(k+3)}=\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+2}{k+3}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$P_1{\cdot}P_2{\cdot}P_3{\cdots}P_{n-1}{\cdot}P_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+3}=3\cdot(\frac{n+1}{n+3})$$

Επομένως $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$. Άρα $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{2}{k(k+3)})=3$.

Επίσης $\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)})$ συγκλίνει στο $\frac{1}{3}$ διότι

$$1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}=(\frac{k}{k+1})\cdot(\frac{k+3}{k+2})$$

και $P_n=\frac{1}{3}\cdot(\frac{n+3}{n+1})\to\frac{1}{3}$ όταν $n\to\infty$.

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο γινόμενο είναι το αντίστροφο του προηγουμένου.

Στο επόμενο θεώρημα θα αποδείξουμε ότι ο όροι ενός απολύτως συγκλίνοντος γινομένου μπορούν να αναδιαταχθούν χωρίς να επηρεάζεται η σύγκλιση ή η τιμή του γινομένου.

2.8 Θεώρημα. *Αν* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ *συγκλίνει και* $P=\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$, *τότε για κάθε αναδιάταξη* $k\to n_k$ *των θετικών ακεραίων, τότε* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_{n_k})$ *επίσης συγκλίνει στο* P.

Απόδειξη: Εφόσον $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ συγκλίνει, τότε σύμφωνα με το λήμμα (1.3) συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$. Άρα και κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει, οπότε πάλι σύμφωνα με το λήμμα (1.3) το άπειρο γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_{n_k}|)$ συγκλίνει. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_{n_k})$ συγκλίνει στο ίδιο όριο με το γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε $\varepsilon>0$ και Q_j το $j-$οστό μερικό γινόμενο του $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_{n_k})$. Από τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ προκύπτει ότι υπάρχει ένα N_0 ώστε για κάθε $N\geq N_0$ να ισχύει ότι $\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n|<\varepsilon$. Έστω $\{n_1,n_2,n_3,...\}$ μια αναδιάταξη του $\{1,2,3,...\}$. Για $N\geq N_0$ και για J τόσο μεγάλο ώστε $j\geq J$, προκύπτει ότι $\{1,2,3,...N\}\subset\{n_1,n_2,n_3,...,n_j\}$. Τότε για $j\geq J$ έχουμε:

$$|Q_j-P|\leq|Q_j-P_N|+|P_N-P|=$$
$$|(1+z_{n_1})(1+z_{n_2})\cdots(1+z_{n_j})-(1+z_1)(1+z_2)\cdots(1+z_n)|+|P_N-P|=$$
$$|(1+z_1)(1+z_2)\cdots(1+z_n)||\prod_k(1+z_{n_k})-1|+|P_N-P|=$$
$$|P_N||\prod_k(1+z_{n_k})-1|+|P_N-P|, \tag{2.2}$$

όπου το γινόμενο το παίρνουμε για $k\leq j$ ώστε $n_k>N$.

Αλλά επειδή $1+x\leq e^x$ για κάθε $x\geq 0$ έπεται ότι

$$|\prod_{k=1}^{n}(1+z_{n_k})-1|\leq\prod_{k=1}^{n}(1+|z_{n_k}|)-1$$
$$\leq\exp(\sum_{k=1}^{n}|z_{n_k}|)-1$$
$$\leq e^{\epsilon}-1$$

Σύμφωνα λοιπόν με το παραπάνω και τη σχέση (2.2) προκύπτει ότι

$$|Q_j-P|\leq|P_N|(\prod_k(1+|z_{n_k}|)-1)+|P_N-P|\leq|P_N|(e^{\epsilon}-1)+|P_N-P|.$$

Αλλά
$$|P_N|(e^{\epsilon}-1)+|P_N-P|\to 0,$$
για πολύ μικρή τιμή του ϵ και για πολύ μεγάλη τιμή του N. Επομένως $Q_j \to P$.

Όπως ακριβώς από τις σειρές μιγαδικών αριθμών πηγαίνουμε σε σειρές συναρτήσεων, έτσι μπορούμε από γινόμενα μιγαδικών αριθμών σε γινόμενα μιγαδικών συναρτήσεων. Όπως και στην περίπτωση των σειρών των μιγαδικών συναρτήσεων, η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των γινομένων συναρτήσεων.

2.9 Λήμμα. *Έστω $g, g_1, g_2, ...$ μια ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένες σε ένα σύνολο Ω τέτοιες ώστε $g_n(x)\to g(x)$ ομοιόμορφα στο Ω. Αν υπάρχει σταθερά a ώστε $Reg(x)\leqslant a$ για κάθε $x\in\Omega$, τότε $\exp g_n(x)\to \exp g(x)$ ομοιόμορφα για $x\in\Omega$.*

Απόδειξη: Επειδή η συνάρτηση e^z είναι συνεχής στο μηδέν, ισχύει ότι για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για $|z|<\delta$ να είναι $|e^z-1|<\epsilon e^{-a}$. Επιπλέον εφόσον $g_n(x)\to g(x)$ ομοιόμορφα, μπορούμε να διαλέξουμε ένα $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $|g_n(x)-g(x)|<\delta$ για κάθε $x\in\Omega$, όταν $n\geqslant n_0$. Επομένως
$$e^{-a}>|\exp[g_n(x)-g(x)]-1|=|\frac{\exp g_n(x)}{\exp g(x)}-1|.$$
Συνεπώς για $x\in\Omega$ και για $n\geqslant n_0$,
$$|\exp g_n(x)-\exp g(x)|<\epsilon e^{-a}|\exp g(x)|\leqslant \epsilon e^{-a}\exp Reg(x)\leqslant \epsilon e^{-a}e^{a}\leqslant \epsilon.$$

2.10 Πρόταση. *Έστω $g_1, g_2, ...$ μια ακολουθία φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένες σε ένα σύνολο Ω τέτοιες ώστε $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο Ω. Τότε το γινόμενο $f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(x))$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο Ω. Επιπλέον, εάν για κάποιον ακέραιο n_0 ισχύει $f(x)=0$, τότε υπάρχει n εξαρτόμενο από το x με $1\leqslant n\leqslant n_0$ και $g_n(x)=-1$*

Απόδειξη: Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n(x)|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω, υπάρχει ένας ακέραιος n_0 τέτοιος ώστε $|g_n(x)|<\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in\Omega$ και $n>n_0$. Τότε θα είναι $Re[1+g_n(x)]>0$ και σύμφωνα με την ανισότητα
$$\frac{1}{2}|z|\le |Log(1+z)|\le \frac{3}{2}|z|,$$
προκύπτει ότι $|Log(1+g_n(x))|\le \frac{3}{2}|g_n(x)|$, για $n>n_0$ και $x\in\Omega$. Επομένως
$$h(x)=\sum_{n=n_0+1}^{\infty}Log(1+g_n(x))$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $x \in \Omega$. Αλλά επειδή h φραγμένη, έπεται ότι $Reh(x) < a$ για κάθε $x \in \Omega$. Έτσι σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$$\exp h(x) = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} (1 + g_n(x))$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $x \in \Omega$.

Τέλος, ισχύει

$$f(x) = [1 + g_1(x)]...[1 + g_{n_0}(x)] \exp h(x)$$

και $\exp h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Omega$. Έτσι εάν $f(x) = 0$ τότε πρέπει $g_n(x) = -1$ για κάποιο n, με $1 \leqslant n \leqslant n_0$.

2.11 Θεώρημα. *Έστω $f_1, f_2, ...$ αναλυτικές συναρτήσεις στον τόπο Ω. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - 1|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, τότε $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ορίζει μια συνάρτηση f αναλυτική στο Ω. Επιπλέον $\forall z \epsilon \Omega$ ισχύει $f(z) = 0$ αν και μόνο αν $f_n = 0$ για κάποιο n.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε σε πρώτη φάση το ζητούμενο για ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω. Επιλέγουμε λοιπόν $a \in \Omega$ και $r > 0$ τέτοιο ώστε $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$. Από την υπόθεση ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\bar{B}(a, r)$. Άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στην $\bar{B}(a, r)$. Και επειδή το ομοιόμορφο όριο αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική συνάρτηση έπεται ότι $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ είναι αναλυτική στην $\bar{B}(a, r)$. Επομένως $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ είναι αναλυτική στον τόπο Ω.

Επιπλέον θέτοντας $g_n = f_n - 1$, υπάρχει ένας ακέραιος n ώστε

$$f(z) = f_1(z)...f_n(z)g(z)$$

όπου g είναι μια συνάρτηση που δεν μηδενίζεται στην $\bar{B}(a, r)$. Πράγματι επειδή $f_n \to 1$ ομοιόμορφα προκύπτει ότι για κάποιο $n > n_0$ η f_n δεν εχει ρίζες στην $\bar{B}(a, r)$. Η $f(z)$ όμως δεν μπορεί να έχει άπειρες ρίζες στην $\bar{B}(a, r)$ διότι τότε θα είχαμε σημείο συσσώρευσης ριζών στην $\bar{B}(a, r)$ ως άπειρο και φραγμένο σύνολο και με βάση το θεώρημα των ακεραίων ριζών η f θα ήταν ταυτοτικά μηδέν. Επομένως $\forall z \in \bar{B}(a, r)$ ισχύει $f(z) = 0$ αν και μόνο αν $f_n = 0$ για κάποιο n. Δηλαδή $f(z) = 0$ αν και μόνο αν $f_n = 0$ για κάποιο n, $\forall z \in \Omega$.

Κεφάλαιο 3

Θεώρημα παραγοντοποίησης του Weierstrass

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε ότι για οποιαδήποτε ακολουθία σημείων ενός ανοιχτού συνόλου $\Omega \subset \mathbb{C}$ χωρίς σημεία συσσώρευσης στο Ω, υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση f στο Ω που οι ρίζες της είναι ακριβώς τα σημεία της ακολουθίας αυτής και κάθε ρίζα έχει τάξη ίση με τον αριθμό των φορών που εμφανίζεται στην ακολουθία. Θα μπορούμε επιπλέον να παραντογοποιήσουμε κάθε αναλυτική συνάρτηση f σε γινόμενο όπου κάθε παράγοντας του γινομένου να έχει και από μια ρίζα της f και μιας μη μηδενικής ολόμορφης συνάρτησης.

Ας δούμε τι γίνεται στην περίπτωση των πολυωνύμων. Θεωρούμε ένα πολυώνυμο $P(z)$ με ρίζες $z_1, z_2, ...z_n$. Τότε $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n) = z_1 z_1...z_n(1-\frac{z}{z_1})(1-\frac{z}{z_2})...(1-\frac{z}{z_n})$. Έστω $f(z)$ μια ολόμορφη συνάρτηση με ρίζες $z_1, z_2, ...z_n, ...$ τέτοιες ώστε $0 \leq |z_1| \leq |z_2| \leq ... \leq |z_n| \leq ....$ Τότε μια παραγοντοποίηση όμοια με την περίπτωση των πολυωνύμων δεν είναι άμεση, διότι $\prod_{j=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_j})$ μπορεί να αποκλίνει. Γιάυτό χρειαζόμαστε μια διαφορετική προσέγγιση που να μας εξασφαλίζει τη σύγκλιση χρησιμοποιώντας πιο λειτουργικούς παράγοντες από τους $(z-a_n)$. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τους λεγόμενους πρωταρχικούς παράγοντες του Weierstrass.

3.1 Ορισμός. Έστω $E_0(z) = 1-z$ και

$$E_m(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}}, m \geq 1$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση $z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}$ αποτελεί το $m-$οστό μερικό άθροισμα του αναπτύγματος της δυναμοσειράς $-log(1-z)$ γύρω από το $z=0$ και επομένως η ακολουθία $E_m(z) \to (1-z)e^{-Log(1-z)} = 1$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του μοναδιαίου δίσκου. Οι συναρτήσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν για να κατασκευάσουμε αναλυτικές συναρτήσεις με καθορισμένες ρίζες καθορισμένης πολλαπλότητας. Πρώτα όμως θα αποδείξουμε μια ανισότητα που θα μας επιτρέψει να εφαρμόσουμε το θεώρημα (1.11) ώστε να αποκτήσουμε ένα απειρογινόμενο που συγκλίνει. Πιο συγκεκριμένα:

3.2 Λήμμα. *Κάθε $E_m(z)$ είναι μια ακέραιη συνάρτηση με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) Η μοναδική ρίζα των $E_m(z)$ είναι η $z = 1$.

(β) Αν $|z| \leq 1$, τότε $|E_m(z) - 1| \leq |z|^{m+1}$

Απόδειξη: Το μέρος (α) είναι προφανές.
Για να αποδείξουμε το μέρος (β) χρειαζόμαστε την παρακάτω ιδιότητα:

(1) $E'_m(z) = -z^m e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}}$

Πράγματι

$$E'_m(z) = -e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}} + (1-z)(1+z+...+z^{m-1})e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}} =$$

$$e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}}[-1+1+...+z^{m-1}-z-z^2-...-z^m] = -z^m e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(1-E_m(z))' = z^m e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}}.$$

Άρα η παράγωγος της συνάρτησης $1 - E_m(z)$ έχει ρίζα τάξεως m για $z = 0$. Επομένως η συνάρτηση $1 - E_m(z)$ έχει ρίζα τάξεως $m+1$ για $z = 0$. Επιπλέον το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το μηδέν της παραγώγου της συνάρτησης $1 - E_m(z)$ έχει μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές, εφόσον το ίδιο ισχύει για την εκθετική συνάρτηση και τη συνάρτηση $e^{z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^m}{m}}$. Έτσι λοιπόν η συνάρτηση

$$h(z) = \frac{1-E_m(z)}{z^{m+1}}$$

έχει μη αρνητικούς συντελεστές Taylor. Συνεπώς

$$|\frac{1-E_m(z)}{z^{m+1}}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Αλλά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \frac{1-E_m(1)}{1^{m+1}} = 1$. Άρα $|\frac{1-E_m(z)}{z^{m+1}}| \leq 1 \Rightarrow |1-E_m(z)| \leq |z|^{m+1}$.

3.3 Θεώρημα. *Έστω $\{z_n\}$ μια ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $|z_n| \to \infty$. Αν $\{m_n\}$ είναι μια ακολουθία μη μηδενικών ακεραίων τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{|z_n|})^{m_n+1} < \infty$$

για κάθε $r > 0$, τότε το άπειρο γινόμενο

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}(\frac{z}{z_n})$$

ορίζει μια ακέραιη συνάρτηση με ρίζες στα σημεία z_n με συγκεκριμένες τάξεις. Πιο συγκεκριμένα αν το a εμφανίζεται k φορές στην ακολουθία $\{z_n\}$, τότε η f έχει ρίζα στο a τάξεως k.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το μέρος (β) του λήμματος (3.2) θέτοντας όπου $z \to \frac{z}{z_n}$ προκύπτει ότι για συγκεκριμένο $r > 0$,

$$|1 - E_{m_n}(\frac{z}{z_n})| \leq |\frac{z}{z_n}|^{m_n+1} \leq (\frac{r}{|z_n|})^{m_n+1}$$

για κάθε $z \epsilon D(0,r)$ και $r \leq |z_n|$. Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|1 - E_{m_n}(\frac{z}{z_n})|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα (2.11) προκύπτει το συμπέρασμα θέτοντας όπου $f_n(z) = 1 - E_{m_n}(\frac{z}{z_n})$.

Παρατήρηση: Η ύπαρξη της ακολουθίας των μη μηδενικών ακεραίων $\{m_n\}$ ώστε να ισχύει η ανισότητα $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{|z_n|})^{m_n+1} < \infty$ είναι ένα τετριμένο ζήτημα. Επειδή $\lim|z_n| = \infty$ ισχύει ότι για κάθε r υπάρχει ένας ακέραιος N ώστε $|z_n| > 2r$ για κάθε $n \geqslant N$. Επομένως $(\frac{r}{|z_n|}) < \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geqslant N$. Άρα για $m_n = n - 1$ για κάθε n, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{|z_n|})^{m_n+1}$ φράσεται από την $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$. Συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{|z_n|})^{m_n+1}$ συγκλίνει.

3.4 Λήμμα. *Αν f είναι μια ακέραιη συνάρτηση που δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$, τότε $f(z) = e^{g(z)}$, όπου $g(z)$ είναι μια ακέραιη συνάρτηση.*

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε ένα $z_0 \in \mathbb{C}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(z) = \int_{\gamma}\frac{f'(w)}{f(w)} + c_0,$$

όπου γ είναι ένα μονοπάτι στο $\mathbb{C}$ που συνδέει το z_0 με το z και c_0 ένας μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε $e^{c_0} = f(z_0)$. Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από το μονοπάτι γ εφόσον το $\mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικό σύνολο. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g είναι αναλυτική με $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι $f(z)e^{-g(z)} = 1$. Για το σκοπό αυτο παραγωγίζουμε το αριστερό μέρος της ισότητας και έχουμε:

$$(f(z)e^{-g(z)})' = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = e^{-g(z)}[f'(z) - f(z)g'(z)] = 0.$$

Συνεπώς $f(z)e^{-g(z)} = c$. Αλλά για $z \to z_0$ είναι $f(z_0)e^{-c_0} = 1$. Επομένως

$$f(z) = e^{g(z)}$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω λήμμα.

3.5 Λήμμα. *Έστω $\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων ορισμένες σε έναν τόπο D και έστω ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο D σε μια αναλυτική συνάρτηση $f(z)$. Τότε*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'(z)}{1 + f_k(z)},$$

όπου το άθροισμα συγκλίνει ομοιόμορφα στο D όταν $f(z) \neq 0$.

3.6 Θεώρημα. *(Παραγοντοποίησης του Weirstrass)*
Έστω f μια ακέραιη συνάρτηση, $f \neq 0$ και $k \geq 0$ η τάξη της ρίζας της f στο μηδέν. Έστω $\{z_n\}$ οι υπόλοιπες ρίζες της f, όπου κάθε ρίζα z_n επαναλαμβάνεται τόσο συχνά όσο και η πολλαπλότητά της. Τότε υπάρχουν μια ακέραιη συνάρτηση g και μη αρνητικοί ακέραιοι m_n έτσι ώστε

$$f(z) := e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}(\frac{z}{z_n}).$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι ακέραιοι m_n ικανοποιούν τη συνθήκη του θεωρήματος (3.3). Τότε το γινόμενο $h(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}(\frac{z}{z_n})$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή σύνολα. Επιπλέον η συνάρτηση h έχει τις ίδιες ρίζες με την f και με τις ίδιες πολλαπλότητες. Τότε το πηλίκο $\frac{f}{h}$ αποτελεί μια ακέραιη συνάρτηση χωρίς ρίζες. Επομένως, σύμφωνα με το λήμμα (3.4), υπάρχει μια ακέραιη συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$\frac{f}{h} = e^g \Rightarrow f = e^g h \Rightarrow f(z) := e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}(\frac{z}{z_n}).$$

Στη συνέχεια θα δούμε την παραγοντοποίηση Weirstrass της συνάρτησης $\sin(\pi z)$ και της συνάρτησης Γάμμα, καθώς και της σχέσης που υπάρχει μεταξύ τους.

Η συνάρτηση $\sin(\pi z)$ είναι ακέραιη και έχει απλές ρίζες σε όλους τους ακεραίους. Επιπλέον η συνάρτηση

$$z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})$$

είναι επίσης ακέραιη με απλές ρίζες σε όλους τους ακεραίους. Άρα το πηλίκο τους αποτελεί ακέραιη συνάρτηση που δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$. Τότε σύμφωνα με το λήμμα (3.4) θα ισχύει

$$\sin(\pi z)=e^{g(z)}z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}), \tag{3.1}$$

όπου $g(z)$ ακέραιη συνάρτηση. Η κύρια δυσκολία είναι ο προσδιορισμός της συνάρτησης $g(z)$. Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι η $g(z)$ είναι σταθερή. Τότε η σχέση (3.1) γίνεται

$$\sin(\pi z)=cz\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}).$$

Αλλά επειδή

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{z}=\pi=\lim_{z\to 0}c\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})=c,$$

προκύπτει ότι

$$\sin(\pi z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}).$$

Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι πράγματι η $g(z)$ είναι σταθερή.
Παίρνοντας τη λογαριθμική παράγωγο για τη συνάρτηση $\sin(\pi z)$, έπεται ότι

$$\pi ctn(\pi z)=g'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} \tag{3.2}$$

ή

$$\pi ctn(\pi z)=g'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}).$$

Παραγωγίζοντας ξανά έχουμε

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = g''(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right), z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}.$$

Η προηγούμενη σχέση γράφεται και ως εξής:

$$g''(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}, \tag{3.3}$$

απ'οπου έπεται ότι

$$g''(z+1) = g''(z), z \in \mathbb{C}.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $g''(z)$ είναι φραγμένη. Αρχικά θα δείξουμε ότι υπάρχει $M < \infty$ τέτοιο ώστε

$$|g''(z)| \leq M \text{ για } z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}, \text{ με } 0 \leq x \leq 1 \text{ και } |y| \geq 1.$$

Πράγματι για αυτά τα z έχουμε

$$|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-n)^2+y^2} \leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}. \tag{3.4}$$

Αλλά

$$\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i},$$

οπότε από τη σχέση $|z|^2 = z\bar{z}$ προκύπτει ότι

$$|\sin^2(\pi z)| = \left(\frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\pi\bar{z}} - e^{-i\pi\bar{z}}}{-2i}\right)$$

$$= \frac{1}{4}[e^{i\pi(z-\bar{z})} - e^{i\pi(z+\bar{z})} - e^{-i\pi(z+\bar{z})} + e^{-i\pi(z-\bar{z})}]$$

$$\frac{1}{4}[e^{i\pi 2yi} + e^{-i\pi 2yi} - e^{i\pi 2x} - e^{-i\pi 2x}]$$

$$= \frac{e^{2\pi y} + e^{-2\pi y}}{4} - \frac{\cos(2\pi x)}{2}.$$

Επομένως

$$|\sin^2(\pi z)| \geq \tfrac{e^{2\pi|y|}}{4} - \tfrac{1}{2} > 0 \text{ για } |y| \geq 1$$

άρα

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \leq \frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|}-2}. \tag{3.5}$$

Από τη σχέση (3.3) σε συνδυασμό με τις σχέσεις (3.4) και (3.5) δίνει ότι

$$|g''(z)| \leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2} + \frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|}-2} \tag{3.6}$$

για όλα τα z που αναφερθήκαμε. Θέτοντας

$$\sup_{|y|\geq 1}[2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2} + \frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|}-2}] = M < \infty,$$

προκύπτει ότι $|g''(z)| \leq M$ για

$$z \in A = \{z = x+yi : 0 \leq x \leq 1, |y| \geq 1\}.$$

Στη συνέχεια θεωρώ $B = \{z = x+yi : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Επειδή κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη πάνω σε συμπαγές σύνολο πιάνει μέγιστο, έπεται ότι υπάρχει

$$\widetilde{M} > 0 : |g''(z)| \leq \widetilde{M}, z \in B.$$

Για $M' = max\{M, \widetilde{M}\}$ προκύπτει ότι $|g''(z)| \leq M'$, για κάθε $z \in (A \cup B)$.

Για να δείξω ότι είναι φραγμένη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της επαγωγής. Πιο συγκεκριμένα θα δείξω ότι για $z \in \mathbb{C} : n \leq Rez \leq n+1, n \in \mathbb{Z}^+$.

• Για $n = 1$ είναι $1 \leq Rez \leq 2$ που ισχύει διότι τότε $0 \leq Re(z-1) \leq 1$, άρα $|g''(z-1)| \leq M'$. Αλλά επειδή $g''(z) = g''(z-1)$ είναι $|g''(z)| \leq M'$.

• Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή $k \leq Rez \leq k+1$.

• Θα δείξω ότι ισχύει για $n = k+1$, δηλαδή $k+1 \leq Rez \leq k+2$. Έχουμε $k+1 \leq Rez \leq k+2 \Rightarrow k \leq Re(z-1) \leq k+1$. Αλλά επειδή $g''(z) = g''(z-1)$ προκύπτει ότι $k \leq Rez \leq k+1$ που ισχύει από την επαγωγική υπόθεση.

Άρα η $g''(z)$ είναι φραγμένη στο δεξιό ημιεπίπεδο. Θα εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία και για το αριστερό ημιεπίπεδο. Θα δείξουμε ότι για

$z \in \mathbb{C} : n \leq Rez \leq n+1, n \in \mathbb{Z}^-$.

• Για $n = -1$ είναι $-1 \leq Rez \leq 0$ που ισχύει διότι τότε $0 \leq Re(z+1) \leq 1$, άρα $|g''(z+1)| \leq M'$. Αλλά επειδή $g''(z) = g''(z+1)$ είναι $|g''(z)| \leq M'$.

• Έστω ότι ισχύει για $n = -k$, δηλαδή $-k \leq Rez \leq -k+1$.

• Θα δείξω ότι ισχύει για $n = -(k+1)$, δηλαδή $-k-1 \leq Rez \leq -k$. Έχουμε $-k-1 \leq Rez \leq -k \Rightarrow -k \leq Re(z+1) \leq -k+1$. Αλλά επειδή $g''(z) = g''(z+1)$ προκύπτει ότι $-k \leq Rez \leq -k+1$ που ισχύει από την επαγωγική υπόθεση.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η $g''(z)$ είναι φραγμένη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Επομένως g'' σταθερά (ως ακεραία και φραγμένη). Αλλά επειδή

$$\lim_{y\to\infty}[2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}+\frac{4\pi^2}{e^{2\pi|y|}-2}]=0,$$

έπεται ότι $g'' = 0$. Συνεπώς $g' = c_1 =$ σταθερά. Οπότε η σχέση (3.2) γράφεται

$$\pi ctn(\pi z) = c_1 + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Θέτοντας τώρα όπου $z \to -z$ προκύπτει ότι $c_1 = -c_1$ δηλαδή $c_1 = 0$. Επομένως $g = c_2 =$ σταθερά. Άρα πράγματι

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}).$$

Κάθε φορά που βρίσκουμε μια επέκταση μιας ακέραιης συνάρτησης σε άπειρο γινόμενο, είναι πολύ ενδιαφέρον να τη συγκρίνουμε με την επέκταση μιας δυναμοσειράς. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2}) = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} - ....$$

Ο όρος z^3 στο άπειρο γινόμενο είναι

$$\pi z(-z^2)(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...) = -\pi z^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Αλλά από τη μοναδικότητα της επέκτασης κατά Maclaurin, πρέπει να έχουμε

$$-\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{(\pi)^3}{3!}$$

Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Όπως έχουμε δει, η συνάρτηση

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}$$

είναι μια ακέραιη συνάρτηση που έχει απλές ρίζες στους αρνητικούς ακεραίους και καμία άλλη ρίζα. Η συνάρτηση $f(z-1)$ έχει τις ίδιες ρίζες με την $f(z)$. Επομένως

$$f(z-1) = e^{g(z)} z f(z), \tag{3.7}$$

όπου $g(z)$ είναι μια ακέραιη συνάρτηση. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η $g(z)$ είναι σταθερή.

Από τη σχέση (3.7) προκύπτει ότι

$$\frac{f'(z-1)}{f(z-1)} = g'(z) + \frac{1}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)},$$

οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n}) = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}). \tag{3.8}$$

Αλλά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n}) = (\frac{1}{z} - 1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})]$$

$$= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}) + 1$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}).$$

Συγκρίνοντας το τελευταίο αποτέλεσμα με τη σχέση (3.8) προκύπτει ότι $g'(z) = 0$. Συνεπώς $g(z) = \gamma$, όπου γ σταθερά. Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά γ, θέτουμε στη σχέση (3.7) $z = 1$ και προκύπτει:

$$1 = f(0) = e^{\gamma} f(1) = e^{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n})e^{\frac{-1}{n}},$$

ή

$$e^{-\gamma} = \lim_{n\to\infty}[(1+1)(1+\frac{1}{2})...(1+\frac{1}{n})e^{(-(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}))}].$$

Συνεπώς

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n} - ln(1+\frac{1}{n})] = \lim_{n\to\infty}[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - ln(n+1)].$$

Η σταθερά γ είναι γνωστή και ως σταθερά Euler και ισούται περίπου με 0.557.

Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση Γάμμα ως εξής:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\gamma z} z f(z)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z}{n})^{-1} e^{\frac{z}{n}}.$$

3.7 Θεώρημα. *Η συνάρτηση Γάμμα είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία εκτός από τους αρνητικούς ακεραίους και το μηδέν, στα οποία έχει απλούς πόλους. Επιπλέον ισχύει* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ *και* $\Gamma(n+1) = n!$ *για* $n \in \mathbb{N}$.*Τέλος η συνάρτηση*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$$

είναι ακέραιη.

Απόδειξη: Εφόσον $g(z) = \gamma$, από τη σχέση (3.7) έχουμε

$$f(z) = e^{\gamma}(z+1)f(z+1).$$

Οπότε

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{e^{\gamma(z+1)}(z+1)f(z+1)} = \frac{1}{e^{\gamma z}f(z)} = z\Gamma(z).$$

Επίσης θέτοντας $z = n$, όπου n θετικός ακέραιος, προκύπτει ότι

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = ... = n(n-1)...2\Gamma(1).$$

Αλλά

$$\Gamma(1) = \frac{1}{e^{\gamma}}f(1) = \frac{1}{e^{\gamma}e^{-\gamma}} = 1.$$

Άρα $\Gamma(n+1) = n!$

Στη συνέχεια θα δούμε μια ενδιαφέρουσα σχέση ανάμεσα στη συνάρτηση Γάμμα και τη συνάρτηση sin. Από τις σχέσεις

$\sin \pi z = \pi z f(z) f(-z)$ και $f(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z}\Gamma(z)}$, προκύπτει ότι

$$sin\pi z = \frac{\pi}{e^{\gamma z}\Gamma(z)(-z)e^{-\gamma z}\Gamma(-z)} = \frac{\pi}{(-z)\Gamma(z)\Gamma(-z)}.$$

Αλλά $-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$, άρα

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \Gamma(z)\Gamma(1-z),$$

για όλες τις μη ακέραιες τιμές του z.

Θέτοντας $z = \frac{1}{2}$ βρίσκουμε ότι

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \pi, \text{ άρα } \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Όπως είδαμε η συνάρτηση Γ είναι μερόμορφη με απλούς πόλους στα σημεία 0,-1,-2,.., και δεν έχει ρίζες. Η αντίστροφή της είναι μια ακέραιη συνάρτηση με απλές ρίζες στους αρνητικούς ακεραίους και καμία άλλη ρίζα. Δηλαδή

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{k}) e^{-\frac{z}{k}},$$

όπου

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - lnn).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = [\lim_{n\to\infty} ze^{[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}]z-zlnn}] \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(\frac{z+k}{k})e^{-\frac{z}{k}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}[ze^{-zlnn}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{z}{k})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)...(z+n)}{n^z n!}.$$

Προκύπτει λοιπόν μια διαφορετική έκφραση της συνάρτησης Γ που είναι

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}. \tag{3.9}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $z \neq 0, -1, -2, ...$, έχουμε

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)...(z+n+1)}$$

$$= z\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{z+n+1}$$

$$= z\Gamma(z).$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε μια διαφορετική απόδειξη της συναρτησιακής εξίσωσης της συνάρτησης Γ.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την ολοκληρωτική μορφή της συνάρτησης Γ. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα.

3.8 Θεώρημα. *Το ολοκλήρωμα* $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ *συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε κάθε λωρίδα* $\{z : A \leq Rez \leq B\}$ *για* $0 < A < B < \infty$ *και*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \text{ για } Rez > 0.$$

Θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα:

3.9 Λήμμα. *Έστω $S = \{z : A \leq Rez \leq B\}$ όπου $0 < A < B < \infty$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(1) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $z \in S$,

$$0 < \alpha < \beta < \delta \Rightarrow \left| \int_\alpha^\beta t^{z-1} e^{-t} dt \right| < \epsilon.$$

(2) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $0 < \mu < \infty$ ώστε για κάθε $z \in S$,

$$\beta > \alpha > \mu \Rightarrow \left| \int_\alpha^\beta t^{z-1} e^{-t} dt \right| < \epsilon.$$

Απόδειξη: Για $0 \leq t \leq 1$ και $z \in S$ είναι

$$|t^{z-1}e^{-t}| = e^{-t}t^{Rez-1} \leq e^{-t}t^{A-1} \leq t^{A-1}.$$

Οπότε αν $0 < \alpha < \beta < 1$ και $z \in S$ τότε

$$\left| \int_\alpha^\beta t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_\alpha^\beta t^{A-1} dt = \tfrac{1}{A}(\beta^A - \alpha^A). \quad (3)$$

Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{t \to 0} \frac{1}{A} t^A = 0$ υπάρχει δ με $0 < \delta < 1$ ώστε

$$0 < \alpha < \beta < \delta \Rightarrow \tfrac{1}{A}(\beta^A - \alpha^A) < \epsilon. \quad (4)$$

Από (3)και (4) προκύπτει ότι για κάθε $z \in S$,

$$\left| \int_\alpha^\beta t^{z-1} e^{-t} dt \right| < \epsilon \text{ για } 0 < \alpha < \beta < \delta,$$

και έτσι η (1) δείχτηκε.

Θα αποδείξουμε τώρα τη σχέση (2). Για $t \geq 1$ και $z \in S$, είναι $|t^{z-1}| \leq t^{B-1}$. Επιπλέον $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}} t^{B-1} = 0$, άρα η συνάρτηση $e^{-\frac{t}{2}} t^{B-1}, t \geq 1$ είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M < \infty$ ώστε για $t \geq 1$, $e^{-\frac{t}{2}} t^{B-1} \leq M$ ή $t^{B-1} = M e^{\frac{t}{2}}$. Άρα αν $\beta > \alpha > 1$ και $z \in S$,

$$\left| \int_\alpha^\beta t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq M \int_\alpha^\beta e^{-\frac{t}{2}} dt = 2M(e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}}).(5)$$

Όμως $\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 0$, οπότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει $0 < \mu < \infty$ ώστε

$$2M(e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\beta}{2}}) < \epsilon, \text{ όταν } \alpha, \beta > \mu.(6)$$

Από (5) και (6) προκύπτει ότι για κάθε $z \in S$,

$$\left| \int_\alpha^\beta t^{z-1} e^{-t} dt \right| < \epsilon, \text{ όταν } \beta > \alpha > \mu,$$

και έτσι αποδείχτηκε η (2).

Άρα πράγματι το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε κάθε λωρίδα $\{z : A \leq Rez \leq B\}$ για $0 < A < B < \infty$ και μάλιστα συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του ημιεπιπέδου $\{z : Rez > 0\}$.

3.10 Λήμμα. *Η συνάρτηση* $f(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, *ορισμένη για* $Rez > 0$, *είναι αναλυτική.*

Απόδειξη: Για $n = 1, 2, 3, ..$, θέτουμε

$$f_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n t^{z-1} e^{-t} dt, Rez > 0.$$

Ισχυρισμός: Οι συναρτήσεις $f_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^n t^{z-1} e^{-t} dt, Rez > 0$ είναι αναλυτικές.

Για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού θεωρούμε $F(z,t)$ συναρτήσεις ορισμένες για $(z,t) \in \Omega \times [0,1]$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

α) $F(z,t)$ είναι αναλυτική στο z για κάθε t.

β) F συνεχής στο $\Omega \times [0,1]$.

Θα δείξουμε ότι $f(z) = \int_0^1 F(z,t) dt$ είναι αναλυτική.

Πράγματι για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε

$$f_n(z) = (\frac{1}{n}) \sum_{k=1}^n F(z, \frac{k}{n}).$$

Τότε από την ιδιότητα α) οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω. Έστω D ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω. Θα δείξουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Επειδή $F(z,t)$ συνεχής στο συμπαγές D θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής, δηλαδή

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \sup_{z \in D} |F(z,t_1) - F(z,t_2)| < \varepsilon$$

όταν $|t_1 - t_2| < \delta$. Έτσι λοιπόν για $n > \frac{1}{\delta}$ και $z \in D$ έχουμε:

$$|f_n(z) - f(z)| = |\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} F(z, \frac{k}{n}) - F(z,t)dt|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(k-1)}{n}}^{\frac{k}{n}} |F(z, \frac{k}{n}) - F(z,t)dt|$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon.$$

Άρα επειδή οι f_n είναι μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, έπεται ότι η $f(z) = \int_0^1 F(z,t)dt$ είναι αναλυτική στο Ω.

Ο παραπάνω ισχυρισμός ισχύει και όταν οι συναρτήσεις $F(z,t)$ είναι ορισμένες για $(z,t) \in \Omega \times [a,b]$, διότι

$$\int_a^b F(z,t)dt = \int_0^1 F(\frac{z-a}{b-a}, t)dt.$$

Πράγματι θέτοντας $w = \frac{z-a}{b-a}$ είναι $\int_a^b F(w,t)dt = \int_0^1 F(z,t)dt$.

Άρα κάθε f_n είναι αναλυτική και από το λήμμα (3.9), $f_n \to f$, $(n \to \infty)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του ημιεπιπέδου $Rez > 0$. Άρα από το θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass, η συνάρτηση f είναι πράγματι αναλυτική.

3.11 Λήμμα. *Έστω $g_n, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,3,..$ μη αρνητικές συναρτήσεις οι οποίες να είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[0,\infty)$. Υποθέτουμε τα εξής:*

(1) $g_n(t) \leq g(t)$ για κάθε $t \geq 0$ και $n = 1,2,3,...$

(2) Για κάθε δ με $0 < \delta < 1$, $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t)$ ομοιόμορφα για $\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(t)dt = \int_0^\infty g(t)dt.$$

Απόδειξη: Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ και δ με $0 < \delta < 1$ ώστε

$$\int_\delta^{\frac{1}{\delta}} g(t)dt \geq \int_0^\infty g(t)dt - \frac{\epsilon}{2}.(3)$$

Από τη συνθήκη (2) έπεται ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N$ τότε

$$\sup_{\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}} |g_n(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{(1/\delta) - \delta}.(4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι για κάθε $n \geq N$,

$$\int_0^\infty g_n(t)dt \geq \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} g_n(t)dt \geq \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} (g(t) - \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{(1/\delta) - \delta})dt$$

$$\geq \int_\delta^{\frac{1}{\delta}} g(t)dt - \frac{\epsilon}{2} \geq \int_0^\infty g_n(t)dt - \epsilon.$$

Επίσης από τη συνθήκη (1) για $n = 1, 2, 3...$ είναι

$$\int_0^\infty g_n(t)dt \leq \int_0^\infty g(t)dt.$$

Άρα για κάθε $n \geq N$,

$$|\int_0^\infty g_n(t)dt - \int_0^\infty g(t)dt| < \epsilon.$$

Άρα το λήμμα απεδείχθει.

3.12 Λήμμα. *Για κάθε* $x > 0$ *και* $n = 1, 2, 3, ...$,

$$\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}.$$

Απόδειξη: Με αλλαγή μεταβλητής $\frac{t}{n} = s$, παίρνουμε

$$\int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds = n^x \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt.$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση, βρίσκουμε

$$\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-t)^n (\frac{t^x}{x})' dt = -\frac{1}{x} \int_0^1 t^x [(1-t)^n]' dt$$

$$= \frac{n}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{n-1} dt = \frac{n}{x} \int_0^1 (\frac{t^{x+1}}{x+1})' (1-t)^{n-1} dt$$

$$= -\frac{n}{x(x+1)}\int_0^1 t^{x+1}[(1-t)^{n-1}]'dt = \frac{n(n-1)}{x(x+1)}\int_0^1 t^{x+1}(1-t)^{n-2}dt = ...$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)..2\cdot 1}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}\int_0^1 t^{x+n-1}dt$$

$$= \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)}\frac{1}{(x+n)}t^{x+n}\,|_0^1 = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}.$$

Επομένως

$$\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1}dt = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)...(x+n)},$$

δηλαδή

$$\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt = \frac{n!n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}.$$

3.13 Λήμμα. *Για σταθερό $x > 1$, η ακολουθία $t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση $e^{-t}t^{x-1}$, ομοιόμορφα για $\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}$.*

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων $(1+\frac{z}{n})^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση e^z, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του επιπέδου. Ιδιαιτέρως αν $0 < \delta < 1$, η ακολουθία των συναρτήσεων $(1-\frac{t}{n})^n$ συγκλίνει στη συνάρτηση e^{-t}, ομοιόμορφα για $\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}$. Άρα ο ισχυρισμός του λήμματος έπεται από αυτό και από το γεγονός ότι η συνάρτηση t^{x-1} είναι φραγμένη για $\delta \leq t \leq \frac{1}{\delta}$.

3.14 Θεώρημα. *Το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε κάθε λωρίδα $\{z : A \leq Rez \leq B\}$ για $0 < A < B < \infty$ και*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \text{ για } Rez > 0.$$

Απόδειξη: Εφόσον οι συναρτήσεις $\Gamma(z)$ και

$$f(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \text{ για } Rez > 0,$$

είναι αναλυτικές, έπεται από το θεώρημα των ριζών ότι για να δείξουμε ότι $\Gamma(z) = f(z)$ για $Rez > 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma(x) = f(x)$ για $x > 1$.
Έστω λοιπόν $x > 1$. Για κάθε $n = 1, 2, 3, ...$, θέτουμε

$$g_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}(1-\frac{t}{n})^n dt & ,0 \leq t \leq n \\ 0 & ,t > n \end{cases}$$

Τότε $g_n(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε n. Επιπλέον για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε n, $g_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t}$. Πράγματι, αν $t \geq n$ ή $t = 0$ ($t^{x-1} = 0$ όταν $t = 0$), η ανισότητα είναι προφανής. Έστω $0 < t, n$. Τότε

$$\log g_n(t) = n\log(1-\frac{t}{n}) + \log t^{x-1} = -n\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}(\frac{t}{n})^k + \log t^{x-1}$$

$$< -t + \log t^{x-1} = \log(t^{x-1}e^{-t}),$$

και άρα $g_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t}$.
Επίσης αν $0 < \delta < 1$ τότε από το λήμμα (3.11)

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = t^{x-1}e^{-t}, \text{ ομοιόμορφα για } \delta \leq t \leq \tfrac{1}{\delta}.$$

Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του λήμματος (3.9) οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} g_n(t)dt = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Άρα από το λήμμα (3.12)

$$\int_0^{\infty} g_n(t)dt = \frac{n!n^x}{x(x+1)..(x+n)}.$$

Οπότε

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)..(x+n)} = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,$$

και το θεώρημα απεδείχθει.

3.15 Θεώρημα. *Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $A \subset \Omega$ χωρίς σημεία συσσώρευσης στο Ω. Σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχούμε έναν θετικό ακέραιο $m(a)$. Τότε υπάρχει αναλυτική συνάρτηση f στο Ω της οποίας οι ρίζες είναι τα σημεία του συνόλου A και τέτοια ώστε η f να έχει ρίζα τάξης $m(a)$ για κάθε $a \in A$.*

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\infty \in \Omega$ αλλά $\infty \notin A$. Τότε το σύνολο $C - \Omega$ είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο και το ∞ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, τότε η συνάρτηση που αναζητούμε είναι η

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1}...(z-a_n)^{m_n}}{(z-b)^{m_1+...+m_n}}$$

όπου $b \in \mathbb{C} - \Omega$.

Αν το A είναι άπειρο τότε θα είναι αριθμήσιμο διαφορετικά θα υπήρχε σημείο συσσώρευσης στο Ω. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{a_n\}$ που οι όροι της ανήκουν στο A και κάθε $a \in A$ εμφανίζεται ακριβώς $m(a)$ φορές. Λόγω της συμπάγειας του $\mathbb{C} - \Omega$, σε κάθε σημείο a_n αντιστοιχίζουμε ένα σημείο $b_n \in \mathbb{C} - \Omega$ έτσι ώστε $|b_n - a_n| \leq |b - a_n|$ για όλα τα $b \in \mathbb{C} - \Omega$. Τότε θα ισχύει

$$|b_n - a_n| \to 0, n \to \infty.$$

Διαφορετικά το A θα είχε σημείο συσσώρευσης στο Ω. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ στο Ω με τύπο

$$f_n(z) = E_n(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}).$$

Θέτουμε $r_n = 2|a_n - b_n|$. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του Ω. Εφόσον $r_n \to 0$ έπεται ότι $\exists N : \forall n \geq N$ και $\forall z \in K$ $|z - b_n| > r_n$. Επομένως

$$|\frac{a_n - b_n}{z - b_n}| \leq \frac{1}{2}.$$

Άρα σύμφωνα με το λήμμα (2.2) προκύπτει ότι

$$|1 - f_n(z)| = |1 - E_n(\frac{a_n - b_n}{z - b_n})| \leq |\frac{a_n - b_n}{z - b_n}|^{n+1} \leq (\frac{1}{2})^{n+1}.$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα (1.9) και θέτοντας $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ έπεται το ζητούμενο.

3.16 Θεώρημα. *Έστω h μερόμορφη συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Τότε $h = \frac{f}{g}$, όπου f και g αναλυτικές στο Ω.*

Απόδειξη: Έστω A το σύνολο των πόλων της h στο Ω. Για κάθε $a \in A$, θεωρούμε $m(a)$ την τάξη του πόλου της h στο a. Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $f \in H(\Omega)$ της οποίας οι ρίζες συμπίπτουν και ως προς τη θέση αλλά και ως προς την τάξη με τους πόλους της h. Θέτοντας λοιπόν $g(z) = f(z)h(z)$ προκύπτει ότι η $g(z)$ είναι ακέραιη οι ρίζες της f απλοποιούνται με τους πόλους της h. Συνεπώς $h(z) = f(z)/g(z)$, όπου f και g αναλυτικές στο Ω.

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα Mittag-Leffler

Στο προηγούμενο κεφάλαιο στην παραγοντοποίηση της συνάρτησης $\sin(\pi z)$ είδαμε ότι το ανάπτυγμα της μερόμορφης συνάρτησης $\pi ctn(\pi z)$ είναι:

$$\pi ctn(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}).$$

Από το παραπάνω ανάπτυγμα μπορούμε να εντοπίσουμε αμέσως τους πόλους της $\pi ctn(\pi z)$ καθώς και τα αντίστοιχα κύρια μέρη των πόλων αυτών: Η συνάρτηση $\pi ctn(\pi z)$ έχει πόλο σε κάθε $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ με κύριο μέρος $\frac{1}{z-n}$. Όπως θα δούμε κάθε μερόμορφη συνάρτηση f στο επίπεδο μπορεί να γραφεί με ανάλογο τρόπο. Αν βέβαια το σύνολο των πόλων μιας τέτοιας συνάρτησης f είναι πεπερασμένο, έστω $\{a_1, ..., a_N\}$ και το κύριο μέρος του πόλου a_n είναι το

$$k_n(z) = \frac{c_{n1}}{z-a_n} + \frac{c_{n2}}{(z-a_n)^2} + ... + \frac{c_{nm_n}}{(z-a_n)^{m_n}},$$

τότε η συνάρτηση

$$h(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{N} k_n(z)$$

είναι ακεραία. Τότε λοιπόν η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{N} k_n(z).$$

Όταν όμως το σύνολο των πόλων της f είναι άπειρο, το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(z)$ πιθανότατα να μην συγκλίνει, οπότε για να πάρουμε ένα αντίστοιχο ανάπτυγμα της συνάρτησης θα πρέπει να τροποποιήσουμε την παραπάνω κατασκευή.

Η ιδέα λοιπόν του Mittag-Leffler ήταν να θεωρήσει στη θέση του $\sum_{n=1}^{\infty} k_n(z)$ ένα άθροισμα της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty}[k_n(z)+p_n(z)],$$

για κατάλληλα πολυώνυμα $p_n(z)$, έτσι ώστε το άθροισμα να συγκλίνει αλλά και η φύση των πόλων να παραμένει αναλλοίωτη.

4.1 Πρόταση. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό σύνολο. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{K_n\}$ συμπαγών υποσυνόλων του Ω με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$

(2) $K_n \subseteq K_{n+1}^{\circ}$

(3) Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω τότε $K \subseteq K_n$ για κάποιο n.

(4) Κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}^{\infty} - K_n$ περιέχει μια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}^{\infty} - \Omega$.

4.2 Πρόταση. *(Θεώρημα Runge)*
Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, A ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}^{\infty} - K$ που περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}^{\infty} - K$. Θεωρούμε επίσης Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ ώστε $K \subseteq \Omega$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια ρητή συνάρτηση R με τις εξής ιδιότητες:

(1) Οι πόλοι της R ανήκουν στο A.

(2) $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$ για κάθε $z \in K$.

4.3 Θεώρημα. *(Mittag-Leffler) Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και μια ακολουθία $\{a_k\}$ (πεπερασμένη ή άπειρη) από διαφορετικά ανά δύο σημεία του Ω, η οποία δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω. Για κάθε ακέραιο $k \geq 1$ θεωρούμε τη ρητή συνάρτηση*

$$S_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{j,k}}{(z-a_k)^j}$$

όπου m_k θετικοί ακέραιοι και $A_{1,k}, A_{2,k}, ..., A_{m_k,k}$ αυθαίρετοι μιγαδικοί συντελεστές. Τότε υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση f στο Ω, της οποίας οι πόλοι είναι ακριβώς τα σημεία $a_k, k = 1, 2, ...$ και το κύριο μέρος της f στο σημείο $z = a_k$ είναι $S_k(z)$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με την πρόταση (3.1) υπάρχει μια ακολουθία $\{K_n\}$ συμπαγών υποσυνόλων του Ω με τις ιδιότητες 1-4. Εφόσον K_n είναι συμπαγή και $\{a_k\}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο Ω, υπάρχουν μόνο πεπερασμένα το πλήθος a_k που ανήκουν στα K_n. Διαφορετικά αν θεωρούσαμε ότι τα $K_n \cap \{a_n\}$ ήταν απειροσύνολα, θα είχαμε άπειρους όρους της ακολουθίας στα K_n. Αλλά αφού K_n συμπαγή, τα σύνολα $K_n \cap \{a_n\}$ θα είχαν σημεία συσσώρευσης άρα και η ακολουθία a_n θα είχε σημεία συσσώρευσης το οποίο δεν ισχύει από την υπόθεση.

Στη συνέχεια θεωρούμε

$$I_1 = \{k : a_k \in K_1\}$$

$$I_n = \{k : a_k \in K_n - K_{n-1}\}$$

για $n \geq 2$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$f_n(z) = \sum_{k \in I_n} S_k(z)$$

για $n \geq 1$.
Τότε κάθε f_n είναι ρητή συνάρτηση με πόλους τα σημεία $a_k, k \in I_n \subseteq K_n - K_{n-1}$. Επομένως οι συναρτήσεις f_n είναι αναλυτικές σε μια περιοχή του K_{n-1} γιατί δεν έχει πόλους (για $n \geq 2$). Έστω λοιπόν ότι η f_n είναι αναλυτικές στα ανοιχτά σύνολα $K_n^\circ - \{a_k : k \in I_n\}$. Επειδή $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ θα είναι και $K_{n-1} \subseteq K_n^\circ - \{a_k : k \in I_n\}$ για $n \geq 2$. Από το ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}^\infty - K_n$ περιέχει μια συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}^\infty - \Omega$, μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύνολο $B_n \subseteq \mathbb{C}^\infty - \Omega$ ώστε το B_n να περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C}^\infty - K_{n-1}$.

Έτσι από το Θεώρημα Runge για $K_{n-1} \subseteq K_n^\circ - \{a_k : k \in I_n\}$ και $f_n \in H(K_n^\circ - \{a_k : k \in I_n\})$, υπάρχει μια ρητή συνάρτηση R_n της οποίας οι πόλοι ανήκουν στο B_n έτσι ώστε

$$|f_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{2^n}, \forall z \in K_{n-1}.$$

Θέτουμε

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} [f_n(z) - R_n(z)].$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι η απαιτούμενη μερόμορφη συνάρτηση.

Δείχνουμε πρώτα ότι η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}[f_n(z) - R_n(z)]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\Omega - \{a_k : k \geq 1\}$. Πράγματι έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\Omega - \{a_k : k \geq 1\}$. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος N ώστε $K \subseteq K_N$. Αν $n > N$ τότε $|f_n(z) - R_n(z)| < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $z \in K_{n-1} \supseteq K$. Και επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$, σύμφωνα με το κριτήριο σύγκλισης του Weierstrass η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}[f_n(z) - R_n(z)]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η f είναι αναλυτική στο $\Omega - \{a_k : k \geq 1\}$. Αρχικά δείχνουμε ότι το σύνολο $\Omega - \{a_k : k \geq 1\}$ είναι ανοιχτό. Έστω λοιπόν $z_0 \in \Omega - \{a_k : k \geq 1\}$. Επειδή το σύνολο Ω είναι ανοιχτό $\exists D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Τότε $\overline{D(z_0, \frac{r}{2})} \subseteq \Omega$. Επομένως $\overline{D(z_0, \frac{r}{2})} \cap \{a_k : k \geq 1\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα $\exists \varepsilon > 0$ έτσι ώστε $dist(z_0, a_k) > \varepsilon$. Συνεπώς $D(z_0, \varepsilon) \subseteq \Omega - \{a_k : k \geq 1\}$. Πράγματι λοιπόν το σύνολο $\Omega - \{a_k : k \geq 1\}$ είναι ανοιχτό. Επιπλέον οι συναρτήσεις $f_n, n \geq 1$ και $R_n, n \geq 2$ είναι αναλυτικές στο $\Omega - \{a_k : k \geq 1\}$, εφόσον οι πόλοι της f_n ανήκουν στο $\{a_k : k \geq 1\}$ και της R_n στο $\mathbb{C}^{\infty} - \Omega$. Από το παραπάνω σε συνδυασμό με το ότι η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $\Omega - \{a_k : k \geq 1\}$, προκύπτει ότι η f είναι αναλυτική στο $\Omega - \{a_k : k \geq 1\}$.

Τέλος θα δείξουμε ότι κάθε σημείο a_k είναι πόλος της f με αντίστοιχο κύριο μέρος $S_k(z)$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ σταθερό. Τότε υπάρχει $r_k > 0$ έτσι ώστε $\overline{D(a_k, r_k)} \cap \{a_j : j \in \mathbb{N}, j \neq k\} = \emptyset$. Άρα υπάρχει $r_k > 0$ ώστε $\overline{D(a_k, \frac{r_k}{2})} \subseteq \Omega$. Επομένως υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο $D(a_k, r) \subseteq \Omega$ τέτοια ώστε για $0 < |z - a_k| < r$ να ισχύει

$$f(z) = S_k(z) + g(z).$$

Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό (3.5) το σημείο $z = a_k$ είναι πόλος της f και $S_k(z)$ το αντίστοιχο κύριο μέρος.

Βιβλιογραφία

[1] Robert B. Ash and W.P. Novinger, Complex Variables.

[2] John B.Conway, Functions of One Complex Variable , Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1978.

[3] Serge Lang, Complex Variables, Addison-Wesley.

[4] Στυλιανού Α. Νεγρεπόντη, Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1993.

[5] Rolf Nevanhinna and Veikko Paatero, Introduction to Complex Analysis, AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

[6] Anthony P. Osborne, Complex Variables with their Applications, Addison-Wesley.

[7] S.Ponnusamy and Herb Silverman, Complex Variables with Applications, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.

[8] Walter Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill International Edition , 1987.

[9] Elias M. Stein and Rami Shakarchi, Princeton Lectures in Analysis, Complex Analysis, Princeton Univercity Press, Princeton and Oxford, 2003.

[10] Αθανασίου Χ. Τσαρπαλιά - Τηλεμάχου Ε. Χατζηαφράτη, Αναλυτικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2000.