Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικών

Κβαντική Μηχανική - Θεωρία Πεδίων
Πεδίο Yang - Mills

Διπλωματική Εργασία

Ελεωνόρα Η. Ευσταθίου

Επιβλέπων Καθηγητής
Αντώνης Στρέκλας

Πάτρα
2009

This is LaTeX2e 2005/12/01 (MiKTeX 2.4).
Text editors: WinEdt and TeXnicCenter.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία δεν θα μπορούσε να εκπονηθεί και να ολοκληρωθεί χωρίς την βοήθεια και την συμπαράσταση πολλών ανθρώπων τους οποίους και ευχαριστώ.

Αισθάνομαι πρωτίστως την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά το Δάσκαλο μου, καθηγητή κ. Α. Στρέκλα στον οποίον οφείλεται κατά ένα πολύ μεγάλο βαθμό η υλοποίηση της παρούσας εργασίας. Η ουσιαστική καθοδήγησή του στο ξεπέρασμα των ποικίλων δυσκολιών που συνάντησα κατά την διάρκεια της εργασίας, οι πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις του, και η ηθική του συμπαράσταση με βοήθησαν τα μέγιστα.

Επίσης ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους γονείς μου που όλο αυτό τον καιρό με στήριζαν τόσο ψυχολογικά όσο και οικονομικά.

Πρόλογος

Φυσική είναι η επιστήμη που μελετά του νόμους της φύσεως. Η φυσική αποτελείται από δύο μεγάλα κεφάλαια. Την κλασική φυσική που ξεκίνησε από την αρχή του πολιτισμένου ανθρώπου και την κβαντική φυσική που ξεκίνησε στις αρχές του περασμένου αιώνα. Οι δύο θεωρίες συνεχίζουν να αναπτύσσονται σήμερα παράλληλα διότι η κάθε μια μελετά τα δικά της φυσικά συστήματα.

Την ίδια περίπου εποχή στις αρχές του αιώνα η κλασική φυσική εμπλουτίζεται από δύο μεγάλες θεωρίες την ειδική και την γενική σχετικότητα. Η θεωρίες αυτές δέχονται ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η μεγαλύτερη ταχύτητα που μπορεί να έχει ένα μηχανικό σύστημα και είναι σταθερή στα διάφορα αδρανειακά συστήματα. Η ταχύτητα αλληλεπίδρασης οποιωνδήποτε πεδίων δεν ξεπερνάνε αυτή την ταχύτητα που είναι οριακή.

Σε αυτή την εργασία θα περιγράψουμε τις προσπάθειες που έγιναν για να συνδυαστεί η κβαντομηχανική με την σχετικότητα σε μια ενιαία θεωρία. Αναμφίβολα αυτή η σύνθεση είναι πολύ δύσκολη αν όχι αδύνατη και είναι ένα από τα δύσκολα κεντρικά προβλήματα της φυσικής του αιώνα μας.

Στα πρώτα κεφάλαια θα μελετηθεί εκτενώς η θεωρία της κβαντικής μηχανικής όπως διατυπώθηκε από τους νεώτερους φυσικούς. Στο επόμενο κεφάλαιο θα περιγράψουμε πως γίνεται η σύνθεση της με την θεωρία της σχετικότητας σε μια ενιαία θεωρία. Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετηθεί και θα αναπτυχθεί η κβαντική θεωρία των πεδίων. Τέλος, στο τελευταίο κεφάλαιο θα συζητηθεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, οι θεωρίες βαθμίδας και το πεδίο Yang - Mills.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η Κβαντομηχανική

1.1 Εισαγωγή

Φυσική είναι η επιστήμη που μελετά την φύση, αναζητά τους νόμους της και διατυπώνει συμπεράσματα για την συμπεριφορά της. Τα συμπεράσματα αυτά μπορούν να επαληθευτούν από το πείραμα. Η κλασική φυσική ξεκίνησε από τις πρώτες ώρες που ο άνθρωπος συνειδητοποίησε τον κόσμο γύρο του. Αναπτύχθηκε από τους αρχαίους Έλληνες και θεμελιώθηκε στην εποχή μας από τον Νεύτωνα τον Αϊνστάιν και άλλους. Όμως στις αρχές του περασμένου αιώνα όταν οι φυσικοί προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τη κλασική μηχανική για να μελετήσουν και να ερμηνεύσουν πειραματικά αποτελέσματα που αφορούσαν τα άτομα συνάντησαν τρομερές δυσκολίες, η επέκταση της κλασικής θεωρίας στο μικρόκοσμο στάθηκε αδύνατη.

Η Κβαντική Μηχανική (ή Κβαντική Φυσική ή Κβαντομηχανική), είναι μία αξιωματικά θεμελιωμένη φυσική θεωρία, που αναπτύχθηκε με σκοπό την ερμηνεία φαινομένων που η Νευτώνεια μηχανική αδυνατούσε να περιγράψει. Η κβαντομηχανική περιγράφει την συμπεριφορά της ύλης στο μοριακό, ατομικό και υποατομικό επίπεδο. Η λέξη κβάντο στο όνομα της επιστήμης αυτής προέρχεται από τη λέξη quantum που στα Λατινικά σημαίνει ποσό (quantum, μικρή ποσότητα). Αναφέρεται σε διακριτές μονάδες που χαρακτηρίζουν συγκεκριμένες φυσικές ποσότητες, όπως η ενέργεια ενός ατόμου ύλης σε κατάσταση ηρεμίας.

Η κβαντομηχανική είναι μια θεωρία της φυσικής μηχανικής. Θεωρείται πιο θεμελιώδης από την κλασική μηχανική, καθώς εξηγεί φαινόμενα που η κλασική μηχανική και η κλασική ηλεκτροδυναμική αδυνατούν να αναλύσουν.

Οι νόμοι που περιγράφουν τα κβαντικά φαινόμενα συγκλίνουν προς τους νόμους της κλασικής μηχανικής, κι έτσι η κλασική θεωρείται οριακή περίπτωση της κβαντικής μηχανικής. Το γεγονός αυτό είναι γνωστό ως αρχή της αντιστοιχίας, που αρχικά διατύπωσε ο Niels Bohr. Αυτή η οριακή μετάβαση της κβαντικής στην κλασική μηχανική φαίνεται όταν μελετώνται μακροσκοπικά σώματα όπου οι κβαντικοί αριθμοί είναι μεγάλοι. Η οριακή αυτή διαδικασία είναι και μια απόδειξη για την ορθότητα της θεωρίας. Πολλά προβλήματα που λύνει η κβαντομηχανική έχουν κάποιο κλασικό ανάλογο, όμως υπάρχουν και φαινόμενα που εμφανίζονται στον μικρόκοσμο και δεν έχουν κανένα κλασικό ανάλογο όπως είναι για παράδειγμα το σπιν του ηλεκτρονίου.

Η κβαντομηχανική έχει δοκιμαστεί ήδη έναν αιώνα με πολλά πειράματα και δεν έχει διαψευστεί. Κρύβεται πίσω από πολλά φυσικά φαινόμενα και ιδιαιτέρως τα χημικά φαινόμενα όπου απέδειξε τον κατάλογο των ατόμων του Μεντελέγιεφ. Τα ηλεκτρόνια μπορούν να υπάρξουν μόνο σε ιδιαίτερα ενεργειακά επίπεδα, και αυτό τα αποτρέπει από το να κινηθούν σπειροειδώς προς το πυρήνα, όπως προβλέπει η κλασική φυσική. Επίσης η στροφορμή του ηλεκτρονίου μέσα σε ένα άτομο μπορεί να πάρει μόνο κάποιες ειδικές ακέραιες τιμές. Η ιδιότητα της ενέργειας και της στροφορμής να παίρνουν ορισμένες τιμές ονομάζεται κβάντωση. Το φαινόμενο αυτό δίνει στην κβαντομηχανική το όνομά της.

Εφαρμόστηκε επίσης και στη φυσική της στερεάς κατάστασης με επιτυχία και έτσι σήμερα έχουμε τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και τα κινητά τηλέφωνα. Ένας ακόμα κλάδος της επιστήμης είναι και η ιατρική όπου υπάρχουν πολλές εφαρμογές για την διάγνωση και την θεραπεία πολλών ασθενειών.

Στην καρδιά της κβαντομηχανικής βρίσκεται η αρχή της απροσδιοριστίας, η οποία καθιστά απαγορευτική την ταυτόχρονη μέτρηση με απεριόριστη ακρίβεια δυο συζευγμένων μεταβλητών όπως π.χ. είναι η θέση και η ορμή ενός σωματιδίου. Ο σταθερός ευκλείδειος χώρος των φάσεων της κλασικής μηχανικής γίνεται ένας χώρος ασαφής και ρευστός.

Η θεωρία Yang - Mills διέπεται από μια αρχή συμμετρίας βαθμίδας η οποία εξασφαλίζει ότι οι βασικές εξισώσεις παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από ορισμένους μετασχηματισμούς εξαρτώμενους από τη θέση και το χρόνο.

Έχουμε δυο θεμελιώδεις θεωρίες της φυσικής για τα πεδία: Την κβαντική θεωρία πεδίου και την γενική σχετικότητα.

Η κβαντική θεωρία πεδίου λαμβάνει υπόψη της και την κβαντική μηχανική και την ειδική σχετικότητα και είναι θεωρία όλων των δυνάμεων και των σωματιδίων εκτός από την βαρύτητα που την αγνοεί. Η γενική σχετικότητα είναι μια μεγάλη θεωρία της βαρύτητας αλλά αγνοεί την κβαντική μηχανική. Οι ερευνητές που δουλεύουν πάνω στη ¨κβαντική βαρύτητα' προσπαθούν να συνδυάσουν την θεωρία του Αϊνστάιν με την κβαντομηχανική.

Οι δυο θεωρίες κβαντική θεωρία πεδίου και γενική σχετικότητα έχουν διαφορετική στάση απέναντι στην ενεργειακή πυκνότητα του κενού. Η αιτία είναι ότι η κβαντική θεωρία πεδίου δίνει προσοχή μόνο στις διαφορές ενεργείας. Αν μπορούμε να καθορίσουμε την ενεργειακή πυκνότητα του κενού - είναι θέμα σύμβασης. Η ενεργειακή πυκνότητα του κενού καθορίζεται μόνο από πειράματα που περιλαμβάνουν τη γενική σχετικότητα - συγκεκριμένα με τη μέτρηση της κυρτότητας του χωροχρόνου.

Το 1925 ο Werner Heisenberg εργαζόταν πάνω σε μια νέα μαθηματική περιγραφή της ύλης. Οι συλλογισμοί του τον οδήγησαν στην επιβεβαίωση μιας νέας αρχής που έχει γίνει το σήμα κατατεθέν της κβαντικής θεωρίας. Αυτή είναι η γνωστή αβεβαιότητα του Heisenberg.

Αυτή η σχέση αβεβαιότητας μας λέει ότι ο σταθερός χώρος των φάσεων της κλασικής μηχανικής είναι ένας χώρος ασαφής, ένας χώρος ρευστός. Η κλασική μηχανική μας έλεγε ότι αν γνωρίζουμε τις αρχικές θέσεις και τις αρχικές ορμές ενός μηχανικού συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε την εξέλιξη του. Η κβαντομηχανική αντιθέτως υποστηρίζει ότι η ταυτόχρονη γνώση της θέσης και της ορμή δεν είναι σαφώς ορισμένη για κανένα φυσικό σύστημα, κάτι τέτοιο είναι αδύνατο. Ο χώρος των φάσεων είναι ασαφής (fuzzy) και ρευστός.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια εισαγωγή στην κβαντική μηχανική. Θα αναπτύξουμε τα αξιώματα και θα περιγράψουμε την μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας. Η κβαντομηχανική είναι στην ουσία ένας λογισμός τελεστών πάνω σε ένα κατάλληλο χώρο Hilbert. Η κβαντομηχανική συγκλίνει οριακά προς την κλασική μηχανική πλην όμως υπάρχουν και συμπεράσματα που δεν έχουν κανένα κλασικό ανάλογο και δεν προέρχονται από καμία διαφορική εξίσωση.

Θα μελετησουμε επίσης στο κεφάλαιο αυτό τις εξισώσεις των Heisenberg και Schrödinger. Θα αναπτύξουμε και θα συνδυάσουμε τα μαθηματικά της θεωρίας με την φυσική όπως εμφανίζεται στα πειράματα των εργαστηρίων. Ο μαθηματικός φορμαλισμός της κβαντικής θεωρίας του Schrödinger περιέχεται στην εξίσωση του Schrödinger η οποία περιγράφει την χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης ψ ως προς τον χρόνο. Η φυσική σημασία της μιγαδικής συνάρτησης ψ είναι ότι το μέτρο της ψ δίνει την πυκνότητα της πιθανότητας της παρουσίας του σωματίου στο σημείο. Η πιθανότητα να βρεθεί το σωμάτιο σε μια περιοχή dV του χώρου είναι ίση με το γινόμενο $|\psi|^2 dV$. Αυτή η πρόταση δίνει την στατιστική ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής την οποία έδωσε ο Max Born.

1.2 Η σημασία της κβαντικής μηχανικής

Η σημασία της κβαντομηχανικής σαν μια θεμελιώδης φυσική θεωρία είναι πολύ μεγάλη. Τα παρακάτω είναι μεταξύ των σημαντικότερων φυσικών συμπερασμάτων που βρέθηκαν από τα πειράματα και η κβαντομηχανική μπορεί να περιγράψει ενώ η κλασική φυσική δεν μπορεί.

- Διακριτικότητα της ενέργειας και άλλων μεγεθών. Η ενέργεια είναι κβαντισμένη και διαδίδεται σε διακριτά ποσά ενέργειας. Η πρόταση αυτή του Planck, είναι η απολύτως αναγκαία πρόταση έτσι ώστε να εξηγηθεί η ακτινοβολία του μέλανος σώματος. Δεν είναι όμως μόνο η ενέργεια κβαντισμένη. Ένα άλλο κβαντισμένο μέγεθος είναι και η στροφορμή ενός ηλεκτρονίου μέσα σε ένα άτομο. Αυτή η πρόταση είναι αναγκαία για να εξηγηθεί η σταθερότητα του ατόμου και έγινε από τον Μπορ.

- Η δυαδικότητα τους φωτός και της ύλης. Το φως είναι συγχρόνως ένα κύμα του διαδίδεται στο χώρο σαν τα κλασικά κύματα, έχει όμως και σωματιδιακό χαρακτήρα και διαδίδεται στον χώρο σαν τα κλασικά σωμάτια. Τα σωμάτια αυτά ονομάζονται φωτόνια. Είναι και αυτή μια πρόταση αναγκαία ώστε να εξηγηθεί το φαινόμενο Κόμπτον. Πρόταση του Αϊνστάιν.

- Κβαντική σήραγγα. Ένα σωμάτιο μπορεί να περάσει μέσα από περιοχές που είναι απαγορευτικές για την κλασική φυσική. Έτσι ερμηνεύεται το φαινόμενο της ραδιενέργειας για παράδειγμα που για την κλασική φυσική δεν είναι δυνατόν να υπάρχει.

1.3 Οι θεμελιώδεις προτάσεις

Η κβαντομηχανική είναι μια φυσική θεωρία τελείως ανεξάρτητη από την κλασική φυσική, δεν είναι η κλασική φυσική με κάποιες διορθώσεις. Χρησιμοποιεί τις ίδιες λέξεις της κλασικής φυσικής, κατάσταση και μέγεθος π.χ. αλλά οι έννοιες αυτές ορίζονται τελείως διαφορετικά. Στηρίζεται σε πέντε αξιώματα.

1. Η Μαθηματική περιγραφή των φυσικών καταστάσεων

   Σε κάθε κατάσταση ενός φυσικού συστήματος αντιστοιχεί μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη κυματοσυνάρτηση. Η κυματοσυνάρτηση ανήκει σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert και περιέχει όλες τις πληροφορίες για το σύστημα. Ενώ για την κλασική φυσική η κατάσταση είναι ένα σημείο στο χώρο των φάσεων.

2. Η Μαθηματική περιγραφή των φυσικών μεγεθών

   Σε κάθε φυσικό μέγεθος αντιστοιχεί ένας γραμμικός και ερμητιανός τελεστής. Οι μόνες δυνατές τιμές που μπορούν να προκύψουν από τις μετρήσεις των μεγεθών είναι οι ιδιοτιμές των αντίστοιχων τελεστών. Ενώ για την κλασική φυσική φυσικό μέγεθος είναι μια συνάρτηση των συντεταγμένων και των ορμών.

3. Ο κβαντικός νόμος της κίνησης.

- Παράσταση του Schrödinger

  η χρονική εξέλιξη της κατάστασης ενός συστήματος περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = \mathcal{H}\Psi(\vec{r},t) \tag{1.1}$$

  Όπου $\mathcal{H}(-i\hbar\vec{\nabla},\vec{r},t)$ είναι ο τελεστής Hamilton του συστήματος.

- Παράσταση του Heisenberg

  Στην παράσταση του Heisenberg H χρονική εξέλιξη ενός μεγέθους του συστήματος περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση του Heisenberg

$$ih\frac{d}{dt}\hat{A}(\vec{r},t) = ih\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}(\vec{r},t) + [\mathcal{H},\hat{A}(\vec{r},t)] \tag{1.2}$$

  Η πρώτη διαφορική εξίσωση δίνει σαν λύση μια συνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος ενώ η δεύτερη έχει λύση έναν τελεστή που αντιστοιχεί σε ένα παρατηρήσιμο μέγεθος. Αυτό που βρίσκουμε και στις δυο εξισώσεις είναι μια μαθηματική έκφραση που μας βοηθάει να βγάλουμε συμπεράσματα που μπορούν να ελεγχθούν από το πείραμα. Η κβαντομηχανική δίνει πιθανότητες και μέσες τιμές και οι τιμές αυτές βρίσκονται με την βοήθεια κάποιου ολοκληρώματος. Άρα η κυματοσυνάρτηση πολύ νωρίς φάνηκε ότι δεν είναι μια συνάρτηση αλλά είναι ένα συναρτησιακό.

Η κλασική φυσική έχει τρία ανάλογα αξιώματα. Τα μεγέθη και η καταστάσεις της είναι έννοιες πολύ γνωστές και συμβιβαστές με την κοινή λογική μας και ο δυναμικός νόμος εκφράζεται από την εξίσωση του Νεύτωνα. Στην κβαντομηχανική όμως οι έννοιες αυτές δεν είναι καθόλου σαφώς ορισμένες και χρειάζονται ερμηνεία. Τα δύο υπόλοιπα αξιώματα δίνουν μια ερμηνεία που ονομάζεται ορθόδοξη ερμηνεία της κβαντομηχανικής η ερμηνεία της σχολής της Κοπεγχάγης.

4. Η Στατιστική ερμηνεία του Φορμαλισμού

   Υποθέτουμε ότι η κατάσταση του συστήματος γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων του αντίστοιχου τελεστή του μεγέθους της μορφής

$$\Psi = \sum_n a_n\psi_n, \qquad \|\Psi\|^2 = \sum_n |a_n|^2 = 1 \tag{1.3}$$

Τότε κατά την μέτρηση του μεγέθους θα εμφανιστεί η ιδιοτιμή λ_k με πιθανότητα $|a_k|^2$. Η μέση τιμή των μετρήσεων ενός μεγέθους δίνεται από τον τύπο

$$< m >=< \psi|T\psi >= \int \psi^* T\psi \, dV \tag{1.4}$$

5. Ο Νόμος της κβαντικής μέτρησης

   Η κατάσταση ενός συστήματος μετά τη μέτρηση δίνεται από την ιδιοσυνάρτηση της ιδιοτιμής που μετρήθηκε αρχή του φιλτραρίσματος.

1.4 Η περιγραφή των φυσικών καταστάσεων

Στην παράσταση του Schrödinger της κβαντικής μηχανικής η κατάσταση ενός συστήματος περιγράφεται από μια μιγαδική συνάρτηση $\psi(\vec{r}, t)$. Η συνάρτηση αυτή είναι ένα κύμα και ικανοποιεί μια κυματική εξίσωση, την εξίσωση του Schrödinger. Έτσι παρουσιάζονται τα φαινόμενα της συμβολής και της περίθλασης.

Η κυματοσυνάρτηση $\psi(\vec{r}, t)$ δεν παριστάνει κανένα παρατηρήσιμο κλασικό κύμα. Είναι ένα " κύμα πιθανότητας ". Η φυσική σημασία της καθορίζεται από την εξής παραδοχή του Born (σχολή Κοπεγχάγης).

Το μέγεθος

$$\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) \tag{1.5}$$

Είναι μια πυκνότητα πιθανότητας για την θέση του συστήματος. Δηλαδή η ποσότητα $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 dxdydz$ είναι ίση με την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα που περιγράφεται από την $\psi(\vec{r}, t)$ κατά την χρονική στιγμή t, στην περιοχή του χώρου μεταξύ x και $x + dx$, $y + dy$ και $z + dz$.

Το ολοκλήρωμα του $|\psi|^2$ σε όλο το χώρο πρέπει να είναι ίσο με την μονάδα, διότι είναι ίσο με την πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα κάπου στον χώρο. Άρα η κυματοσυνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη κανονικοποίησης

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathcal{R}^3} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1 \tag{1.6}$$

Κατά συνέπεια από τις λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger, μόνο εκείνες που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες είναι φυσικά αποδεκτές. Κατ΄ εξαίρεση για τα ελεύθερα σωμάτια χρησιμοποιούμε πολλές φορές κυματοσυναρτήσεις της μορφής των επιπέδων κυμάτων

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tag{1.7}$$

που δεν μπορούν να κανονικοποιηθούν.

Η εισαγωγή του όρου πιθανότητες για μια φυσική θεωρία που θέλει να ερμηνεύσει μηχανικά συστήματα είναι ένα σημείο τριβής για την φυσική. Εκεί στηρίζεται και η πολεμική που ασκούν οι επιστήμονες της κλασικής φυσικής που εκφράζεται από την φράση του Αϊνστάιν ότι ο Θεός δεν παίζει ζάρια. Ένα ακόμα σημείο διαμάχης είναι ο ορισμός της κατάστασης σαν άθροισμα κάποιων άλλων ιδιοκαταστάσεων. Είναι γνωστό το πείραμα με τη γάτα του Schrödinger. Στο πείραμα αυτό η γάτα της κβαντομηχανικής είναι ένα άθροισμα μιας ζωντανής και μιας νεκρής γάτας.

Ο χώρος στον οποίο εργαζόμαστε είναι ένας πλήρης διανυσματικός που ονομάζεται χώρος Hilbert. Είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινομένου και συνήθως έχει άπειρη διάσταση. Συγκεκριμένα ο χώρος της κβαντομηχανικής είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων κατά Lebesque συναρτήσεων ο οποίος και συμβολίζεται με

$$L_2(\mathcal{R}^3)$$

Η κυματοσυνάρτηση $\psi(\vec{r},t)$ είναι ένα διάνυσμα ενός κατάλληλου χώρου Hilbert. Αν για παράδειγμα το σύστημα περιέχει N σωμάτια (χωρίς σπιν) που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο, τότε η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι ένα διάνυσμα του χώρου $L_2(\mathcal{R}^{3N})$.

Επιλέγουμε σαν πυκνότητα πιθανότητας την ποσότητα $\rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2$. Η πυκνότητα πιθανότητας δεν μπορεί παρά να είναι μια θετική ποσότητα, όπως επίσης απαιτούμε την διατήρησης της πιθανότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ολική πιθανότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r},t) d^3\vec{r}$$

πρέπει να είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Η απαίτηση αυτή αποδεικνύεται ότι ικανοποιείται διότι η εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης ως προς χρόνο δίνεται από την εξίσωση του Shrödinger.

1.5 Η περιγραφή των φυσικών μεγεθών

Σε κάθε φυσικό μέγεθος αντιστοιχεί ένας γραμμικός και ερμητιανός τελεστής. Ο τελεστής αυτός κατασκευάζεται από την κλασική έκφραση του μεγέθους με την αντικατάσταση των βασικών τελεστών.

$$\vec{r} \to \hat{\vec{r}} = (x, y, z) \qquad \vec{p} \to \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.8}$$

Επιπλέον στο φυσικό μέγεθος E ενέργεια αντιστοιχεί ο τελεστής

$$E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.9}$$

Η πιο κάτω εξίσωση είναι η εξίσωση Schrödinger και γράφεται αναλυτικά

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r},t)\right]\psi(\vec{r},t)| \tag{1.10}$$

Οι τελεστές της θέσης και της ορμής ορίστηκαν με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις εναλλαγής

$$[\hat{x},\hat{p}_x] = [\hat{y},\hat{p}_y] = [\hat{z},\hat{p}_z] = i\hbar \tag{1.11}$$

που όπως θα δούμε οδηγούν στις σχέσεις αβεβαιότητας του Heisenberg. Συνεπώς ο ορισμός τους δεν είναι ούτε τυχαίος ούτε αυθαίρετος.

Η κβαντομηχανική μέτρηση

Οι μόνες τιμές που μπορεί να πάρει ένα φυσικό μέγεθος είναι οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου τελεστή. Για να είναι οι τιμές αυτές πραγματικοί αριθμοί είναι απαραίτητο οι τελεστές να είναι ερμητιανοί. Το φυσικό αποτέλεσμα των πειραμάτων ότι ορισμένα μεγέθη παίρνουν ορισμένες μόνο τιμές μεταφέρεται στην μαθηματική ιδιότητα των τελεστών ότι ορισμένοι έχουν διακεκριμένο φάσμα. Επίσης η ιδιότητα αυτή των τελεστών να είναι δηλαδή ερμητιανοί, εξασφαλίζει την ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές. Έτσι μια οποιαδήποτε κατάσταση μπορεί να αναπτυχθεί σαν άθροισμα άλλων ιδιοκαταστάσεων που προφανώς πρέπει να είναι βάση του χώρου. Για τον λόγο αυτό δεχόμαστε χωρίς απόδειξη την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση: " Οι ιδιοσυναρτήσεις ενός ερμητιανού τελεστή που παριστάνει ένα φυσικό μέγεθος αποτελούν ένα πλήρες και ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων "

Ο κβαντικός νόμος της κινήσεως

Στην παράσταση του Schrödinger της κβαντομηχανικής η κατάσταση ενός συστήματος μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση του Schrödinger

Οι τελεστές μένουν αναλλοίωτοι ως προς το χρόνο έκτος και αν έχουν αναλυτική χρονική εξάρτηση οπότε η μεταβολή τους ως προς τον χρόνο οφείλεται στην φύση τους και όχι στην χρονική εξέλιξη του συστήματος.

Η σχέση αβεβαιότητας θέσης - ορμής (Ποιοτική ανάλυση).

Η ακριβής διατύπωση της σχέσης αβεβαιότητας για τα φυσικά μεγέθη θέση και ορμή είναι :

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.12}$$

Δηλαδή: Το γινόμενο των αβεβαιοτήτων θέσης - ορμής δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από το μισό της σταθεράς του Planck

Σε αυτήν την παράγραφο θα περιοριστούμε στην παρουσίαση ορισμένων ποιοτικών επιχειρημάτων τα οποία δείχνουν ότι η σχέση αβεβαιότητας δεν είναι παρά μια αναπόδραστη συνέπεια της κεντρικής αρχής του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού.

Αναφερθήκαμε ήδη πιο πίσω ότι η αβεβαιότητα θέσης Δx εκφράζει χοντρικά το " εύρος " της κυματοσυνάρτησης $\psi(x)$ που περιγράφει σε μια δεδομένη στιγμή την κατάσταση του σωματιδίου. Αν η $\psi(x)$ είναι αρκετά "στενή" δηλαδή έντονα εντοπισμένη γύρω από μια ορισμένη περιοχή,τότε το Δx είναι μικρό. Αν όμως αντίθετα η κυματοσυνάρτηση είναι "πλατειά" τότε η αβεβαιότητα θέσης θα είναι αντίστοιχα μεγάλη.

Μια τελείως ανάλογη εικόνα έχουμε και για την αβεβαιότητα ορμής Δp. Εδώ τον ρόλο της $\psi(x)$ τον παίζει η μετασχηματισμένη της κατά Φουριερ που συμβολίζεται με $\phi(p)$ και όπως έχουμε δει αντιπροσωπεύει το πλάτος πιθανότητας για το φυσικό μέγεθος ορμή. Το Δp εκφράζει λοιπόν με την σειρά του το " εύρος " της κυματοσυνάρτησης στον χώρο των ορμών. Το Δp είναι μεγάλο η μικρό ανάλογα με το αν η $\phi(p)$ είναι μια " πλατιά " η "στενή" συνάρτηση.

Έτσι πια και ενώ έχουμε μια εποπτική παράσταση για τις ποσότητες Δx και Δp μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το περιεχόμενο της σχέσης αβεβαιότητας ως εξής:

Όσο πιο "στενή" είναι η κυματοσυνάρτηση της θέσης $\psi(x)$ τόσο πιο " πλατιά " είναι η κυματοσυνάρτηση της ορμής $\phi(p)$ και αντίστροφα. Η σε μια πιο " λαϊκή " διατύπωση: Όσο πιο "ψιλόλιγνη" είναι η $\psi(x)$ τόσο πιο "κοντόχοντρη" γίνεται η $\phi(p)$.

Κλείνουμε με μια βασική παρατήρηση πάνω στις σχέσεις αβεβαιότητας. Στην κλασική Μηχανική τα φυσικά μεγέθη παριστάνονται με συναρτήσεις ενώ στην Κβαντομηχανική με γραμμικούς τελεστές. Όπως έχουμε ξαναπεί η βασική αλγεβρική διαφορά ανάμεσα στις συνήθεις συναρτήσεις και τους τελεστές βρίσκεται στο γεγονός ότι για τους τελευταίους δεν ισχύει πάντα η αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού. Είναι δηλαδή $AB \neq BA$ εν γένει. Είναι λοιπόν κεντρικής σημασίας η παρατήρηση ότι η δυνατότητα ταυτόχρονης μέτρησης δυο κβαντομηχανικών μεγεθών εξαρτάται από το αν μετατίθενται η όχι οι αντίστοιχοι τελεστές τους. Αν μετατίθενται τότε η " ειδοποιός " διαφορά ανάμεσα στην κλασική και στην κβαντική περίπτωση δεν υπάρχει οπότε πρέπει να περιμένουμε ότι τα μεγέθη θα μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουν τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις. Τα διαφορετικά όμως αυτά μεγέθη μπορούν να έχουν την ίδια ιδιοσυνάρτηση αλλά θα έχουν διαφορετικές ιδιοτιμές.

Αν όμως οι τελεστές δυο μεγεθών δεν μετατίθενται τότε η ταυτόχρονη γνώση τους είναι αδύνατη. Παραδείγματος χάρη οι τελεστές $\hat{x}$ και $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Είναι προφανές ότι δεν μετατίθενται γιατί ο πολλαπλασιασμός με x και η παραγώγιση ως προς x είναι δυο πράξεις που η σειρά της εκτέλεσης τους έχει μεγάλη σημασία. Είναι δηλαδή $\hat{p}_x\hat{x} \neq \hat{x}\hat{p}_x$. Όμως οι τελεστές $\hat{x}$ και $\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$ σίγουρα μετατίθενται αφού το x είναι σαν μια σταθερά ως προς την $y-$ παραγώγιση.

Πρέπει λοιπόν να περιμένουμε ότι η αρχή της αβεβαιότητας ισχύει μόνο για τις ομόλογες συνιστώσες της θέσης και της ορμής. Θα είναι δηλαδή:

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \geq \hbar/2 \qquad (\Delta y)(\Delta p_y) \geq \hbar/2 \qquad (\Delta z)(\Delta p_z) \geq \hbar/2 \quad (1.13)$$

Όλα τα αλλά ζευγάρια μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια. Για παράδειγμα ισχύουν οι σχέσεις

$$(\Delta x)(\Delta p_y) \geq 0 \qquad (\Delta z)(\Delta p_x) \geq 0$$

Οι σχέσεις αυτές είναι δυνατόν να μην είναι σωστές, κάποιες νεώτερες θεωρίες δέχονται π.χ. ότι $(\Delta x)(\Delta p_y) \neq 0$.

Όσο για το ρόλο που παίζει η αρχή της αβεβαιότητας στα πραγματικά φυσικά συστήματα αυτός θα συζητηθεί στα επόμενα κεφάλαια. Θα δούμε ότι η αρχή της αβεβαιότητας και γενικότερα ο πιθανολογικός χαρακτήρας των κβαντικών νόμων όχι μόνο δεν κάνει αβέβαια τη γνώση του φυσικού κόσμου αλλά απεναντίας αποτελεί καίριο στοιχείο της γνωρισιμότητας του.

Όταν ισχύει η σχέση αβεβαιότητας έχουμε σύζευξη δύο καταστάσεων (coherent states) και ισχύει η κβαντομηχανική όταν δεν υπάρχει σύζευξη έχουμε κλασική φυσική. Αν με οποιοδήποτε τρόπο καταφέρουμε να διαχωρίσουμε αυτές τις δύο καταστάσεις τότε καταστρέφουμε αυτή την ειδοποιό διαφορά ανάμεσα στις δύο θεωρίες. Αυτός ο διαχωρισμός εκφράζεται από τον ξένο όρο decoherence. Τα προβλήματα που μελετούν τέτοιες καταστάσεις, διαχωρισμένες ανήκουν στην κλασική φυσική.

Σχέσεις απροσδιοριστίας ισχύουν βέβαια και για αλλά ζεύγη μεγεθών. Η ενέργεια και ο χρόνος για παράδειγμα ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση απροσδιοριστίας

$$(\Delta E)(\Delta\, t) \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (1.14)$$

Η σχέση αυτή είναι τελείως διαφορετική από τις προηγούμενες διότι ο χρόνος δεν είναι ένα δυναμικό μέγεθος αλλά μια παράμετρος που συνοδεύει τις μετρήσεις μας. Η σχέση θα πρέπει να ισχύει μόνο όταν ο χρόνος εμφανίζεται αναλυτικά στην ενέργεια όπως για παράδειγμα όταν το δυναμικό εξαρτάται από τον χρόνο. Αν με Δt συμβολίσουμε τον χρόνο που χρειάζεται ένα σύστημα για να μεταβάλλει την κατάσταση του και να αλλάξει ενέργεια τότε αυτή η αλλαγή της ενέργειας είναι της τάξεως $\Delta E \approx \hbar/(2\Delta\, t)$. Δηλαδή όσο πιο γρήγορα μεταβάλλεται ένα σύστημα τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα της ενέργειας. Αντιστρόφως ένα σύστημα που δεν μεταβάλλεται καθόλου η ενέργεια του $\Delta E = 0$ έχει άπειρο χρόνο ζωής $\Delta t \to \infty$.

Η σχέση της αβεβαιότητας ενέργειας και χρόνου περιορίζει την ακρίβεια με την οποία μπορεί να επαληθευτεί πειραματικά η αρχή διατηρήσεως της ενέργειας.

Αν μετρηθεί η ενέργεια ενός συστήματος δυο φορές τότε τα αποτελέσματα θα διαφέρουν κατά

$$\Delta E \approx \hbar/(2\Delta\, t)$$

Όπου Δt είναι ο χρόνος που διέρρευσε μεταξύ των δυο διαδοχικών μετρήσεων.

1.6 Οι συνέπειες των θεμελιωδών προτάσεων

Συμβιβαστά και ασυμβίβαστα μεγέθη και η γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας.

Δυο κβαντομηχανική μεγέθη μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με απόλυτη ακρίβεια, μόνο αν οι τελεστές τους μετατίθενται. Αν αυτό συμβαίνει, τότε τα μεγέθη ονομάζονται συμβιβαστά. Αν δεν συμβαίνει ονομάζονται ασυμβίβαστα και δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα. Η ταυτόχρονη μετρησιμότητα δυο ασυμβίβαστων φυσικών μεγεθών εκφράζεται από την ακόλουθη γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας.

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2}\,|\langle[A,B]\rangle| \tag{1.15}$$

σύμφωνα με την οποία, το γινόμενο των αβεβαιοτήτων δυο ασυμβίβαστων φυσικών μεγεθών δεν μπορεί ποτέ να γίνει μικρότερο από το ένα δεύτερο της απόλυτης μέσης τιμής του μεταθέτη τους.

Αν ο μεταθέτης των τελεστών γίνει μηδέν τότε προφανώς το γινόμενο των αβεβαιοτήτων τους μπορεί να γίνει μηδέν και έτσι τα αντίστοιχα μεγέθη μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα. Ο μεταθέτης των τελεστών είναι κατά συνέπεια ένας τελεστής καθοριστικός για την πειραματική διαδικασία. Αν δεν είναι μηδέν τα μεγέθη δεν υπάρχουν ταυτόχρονα εφόσον δεν μπορούν να μετρηθούν.

1.7 Τελεστές εξαφανίσεως και δημιουργίας

Με την βοήθεια των τελεστών της θέσης $\hat{x}$ και της ορμής $\hat{p}_x$, ορίζουμε τους ακόλουθους δύο τελεστές

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{1}{m\omega}\hat{p}_x\right) \qquad \hat{a}^{+} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - i\frac{1}{m\omega}\hat{p}_x\right) \tag{1.16}$$

οι όποιοι και ονομάζονται τελεστές **εξαφανίσεως** και **δημιουργίας** αντίστοιχα.

Οι τελεστές αυτοί δεν είναι ερμητιανοί και άρα δεν αντιστοιχούν σε κανένα παρατηρήσιμο μέγεθος. Για να πάρουμε μια διαισθητική εικόνα για τους τελεστές αυτούς μπορούμε να τους αντιστοιχίσουμε με τις εκθετικές μιγαδικές συναρτήσεις $exp(+i\omega\, t)$ και $exp(-i\omega\, t)$, ενώ οι τελεστές της θέσης και της ορμής αντιστοιχούν στα ημίτονα και τα συνημίτονα $\sin(\omega\, t)$, $\cos(\omega\, t)$.

Ο μεταθέτης των δυο αυτών τελεστών όπως μπορεί εύκολα να αποδειχθεί από τον ορισμό τους ότι είναι ίσος με την μονάδα.

$$[a, a^{+}] = aa^{+} - a^{+}a = 1 \tag{1.17}$$

Με την βοήθεια των τελεστών ορίζουμε ένα νέο τελεστή τον

$$\hat{N} = a^{+}a \tag{1.18}$$

Ο τελεστής N ονομάζεται αριθμητικός (number) τελεστής και είναι προφανώς ερμητιανός. Ο τελεστής του Hamilton του αρμονικού ταλαντωτή μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια του τελεστή αυτού. Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^{+} + a^{+}a) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.19}$$

Συμβολίζουμε με $|n>$ τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\hat{N}$ και με n τις αντίστοιχες ιδιοτιμές, δηλαδή έχουμε

$$\hat{N}|n >= n|n > \qquad\qquad a^{+}a|n >= n|n > \tag{1.20}$$

Τα διανύσματα $|n>$ είναι προφανώς ιδιοδιανύσματα και του τελεστή $\mathcal{H}$. Έτσι οι δύο τελεστές, ο αριθμητικός τελεστής και η Χαμιλτονιανή, έχουν τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις και διαφορετικές ιδιοτιμές. Οι ιδιοτιμές του τελεστή της Χαμιλτονιανής που είναι η ενέργεια του συστήματος είναι $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

1.8 Σύμφωνες καταστάσεις

Ορισμός: Σύμφωνες (coherent) καταστάσεις ονομάζουμε τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή εξαφάνισης. Αν συμβολίσουμε με $|a>$ τα ιδιοδιανύσματα αυτά έχουμε

$$a|a >= \alpha|a > \tag{1.21}$$

Οι σύμφωνες καταστάσεις δεν είναι ορθογώνιες δηλαδή $< b|a >\neq 0$, είναι όμως πολύ χρήσιμες σε προβλήματα ακτινοβολίας και επιπλέον παρουσιάζουν την ελάχιστη δυνατή αβεβαιότητα. Οι καταστάσεις αυτές φτιάχνουν ένα πλήρες σύνολο. Κάθε διάνυσμα αναπτύσσεται σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων αυτών, όμως ο τρόπος αναπτύξεως δεν είναι μοναδικός.

Η σχέση πληρότητας γράφεται.

$$\int |a >< a| \frac{d^2 a}{\pi} = 1$$

Η ολοκλήρωση γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο. Ένα τέτοιο σύνολο συναρτήσεων λέγεται υπερπλήρες.

1.9 Οι τελεστές της στροφορμής

Κλασικά η στροφορμή ενός σωματιδίου ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Οι τελεστές της στροφορμής εκφράζονται σε διαφορική μορφή από την σχέση

$$\vec{\hat{L}} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla} \tag{1.22}$$

Αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις αντιμεταθέσεως των τελεστών της στροφορμής είναι

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k \qquad (i,j,k) = (1,2,3) \tag{1.23}$$

όπου ϵ_{ijk} είναι του σύμβολο του Λεβι - Τσιβιτά και παίρνει τις τιμές $+1$ και -1 για τις άρτιες και περιττές μεταθέσεις των αριθμών $(1,2,3)$ αντιστοίχως και την τιμή 0 σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Ορίζουμε τον τελεστή της ολικής στροφορμής από την σχέση

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 \tag{1.24}$$

Ο τελεστής αυτός εναλλάσσεται με όλες τις συνιστώσες τις στροφορμής

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0 \qquad j = 1,2,3 \tag{1.25}$$

Από τις σχέσεις αντιμεταθέσεως προκύπτει ότι από τα τέσσερα φυσικά μεγέθη $\hat{L}^2, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ μόνο το $\hat{L}^2$ μαζί με ένα από τα υπόλοιπα μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα. Διαλέγουμε συνήθως το $\hat{L}_3$ διότι σε σφαιρικές συντεταγμένες έχει την πιο απλή μορφή από τους άλλους. Με την βοήθεια των διαφορικών εκφράσεων των μεγεθών αυτών μπορούμε να βρούμε τις ιδιοσυναρτήσεις και τις ιδιοτιμές των τελεστών αυτών. Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι οι σφαιρικές αρμονικές και οι ιδιοτιμές τους είναι

$$l = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0,1,2,\cdots \qquad l_3 = \pm\,\hbar m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l$$

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών αυτών, εκτός από τις διαφορικές εξισώσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια αλγεβρική μέθοδος με την οποία μπορούμε να λύσουμε το ίδιο πρόβλημα. Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ιδιοτιμές μέσες τιμές και αλλά παρατηρήσιμα μεγέθη χωρίς ιδιαίτερη αναφορά στην διαφορική μορφή των ιδιοσυναρτήσεων. Χωρίς να λύσουμε δηλαδή διαφορικές εξισώσεις. Τα προβλήματα της κλασικής μηχανικής λύνονται μόνο με διαφορικές εξισώσεις, γιατί ολόκληρος ο διαφορικός λογισμός γεννήθηκε μαζί με την κλασική μηχανική.

1.10 Το σπιν

Διάφορα πειραματικά δεδομένα μας οδήγησαν στην παραδοχή ότι τα στοιχειώδη σωματίδια έχουν και άλλες " εσωτερικές ιδιότητες " εκτός από την μάζα και το φορτίο τους για παράδειγμα. Μια τέτοια εσωτερική ιδιότητα των ηλεκτρονίων είναι το σπιν. Το κλασικό πείραμα που έδειξε την παρουσία του σπιν είναι το πείραμα των Stern - Gerlax. Μια δέσμη από άτομα με $\hat{L} = 0$ εκτοξεύονται μέσα σε ένα μη ομογενές μαγνητικό πεδίο. Αποτέλεσμα η δέσμη διασπάται σε δυο μέρη. Το πειραματικό αυτό δεδομένο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μια εσωτερική ιδιότητα των ηλεκτρονίων με δυο τιμές η ιδιότητα αυτή ονομάστηκε σπιν.

Η παραδοχή του σπιν είχε μεγάλη επιτυχία στην κατανόηση του φαινομένου Ζέιμαν. Πολλά σωματίδια όπως για παράδειγμα τα ηλεκτρόνια έχουν σπιν ίσο με $\hbar/2$ με δυο προσανατολισμούς στο χώρο. Το σπιν είναι ένα φυσικό μέγεθος που παριστάνεται από τον διανυσματικό τελεστή $\vec{S}$ με συντεταγμένες τους τελεστές (S_1, S_2, S_3). Οι τελεστές αυτοί εναλλάσσονται με όλους τους τελεστές που έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα. Οι τελεστές του σπιν ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις αντιμεταθέσεως που ικανοποιούν και οι τελεστές της στροφορμής δηλαδή

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k \qquad [S^2, S_k] = 0 \quad k = 1, 2, 3 \tag{1.26}$$

Η κατάσταση ενός σωματιδίου δεν μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως από την κυματοσυνάρτηση $\psi(\vec{r}, t)$ του συστήματος. Πρέπει να προσθέσουμε και το σπιν. Η κατάσταση του σωματιδίου με σπιν περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση.

$$\Psi(\vec{r}, \vec{S}, t) = \psi(\vec{r}, t)U(\vec{S})$$

Το σπιν των σωματιδίων παίζει σπουδαίο ρολό στην στατιστική των στοιχειωδών σωματιδίων. Τα συστήματα σωματιδίων με ακέραιο σπιν περιγράφονται με συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις. Τα σωματίδια αυτά ονομάζονται μποζόνια. Τα συστήματα σωματιδίων με ημιακέραιο σπιν περιγράφονται με αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις και τα σωματίδια αυτά ονομάζονται φερμιόνια. Τα σωματίδια - φορείς όλων των πεδίων είναι τα μποζόνια. Τα φωτόνια για παράδειγμα έχουν σπιν 1. Αντιθέτως τα βασικά πυρηνικά σωματίδια όπως για παράδειγμα τα πρωτόνια και τα νετρόνια είναι φερμιόνια. Τα ηλεκτρόνια, μέσα σε ένα άτομο, έχουν σπιν $\pm\hbar/2$ και είναι επίσης φερμιόνια.

Για τα φερμιόνια ισχύει η απαγορευτική αρχή του Pauli που λέει ότι δεν υπάρχουν δυο ηλεκτρόνια σε ένα άτομο με τους ίδιους ακριβώς κβαντικούς αριθμούς. Αντιθέτως για τα μποζόνια που δεν ισχύει τέτοια απαγορευτική αρχή είναι δυνατόν να συνυπάρχουν σε μια και μοναδική κατάσταση πολλά σωματίδια. Αυτή η συνύπαρξη είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την δημιουργία ενός κλασικού πεδίου όπως είναι για παράδειγμα το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Οι τελεστές του σπιν δεν μπορεί να είναι διαφορικοί τελεστές των συντεταγμένων γιατί το μέγεθος αυτό είναι τελείως ανεξάρτητο από τα γνωστά μεγέθη της κλασικής φυσικής. Δεν έχει κλασικό ανάλογο και εξαφανίζεται στο όριο και άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ η αρχή της αντιστοιχίας του Μπορ. Αναγκαστικά λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε τις μήτρες για να το περιγράψουμε.

Οι μήτρες των τελεστών του σπιν έχουν την μορφή

$$s_j = \frac{1}{2}\hbar\sigma_j \tag{1.27}$$

Όπου οι μήτρες σ_j είναι οι παρακάτω μήτρες του Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

Οι μήτρες του Pauli ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{jk} \qquad \sigma_j^2 = 1 \quad j = 1,2,3 \tag{1.29}$$

Επειδή το σπιν ικανοποιεί σχέσεις εναλλαγής όμοιες με εκείνες τις στροφορμής, το σπιν αναφέρεται συνήθως και σαν εσωτερική στροφορμή. Η μορφή της ιδιοτιμής του είναι όμοια με την ιδιοτιμή της στροφορμής με την διάφορα όμως ότι εδώ έχουμε την τιμή 1/2 και όχι ακέραιες τιμές.

Φαίνεται ότι το σπιν είναι σαν μια μισή στροφορμή πρέπει να " σπινάρουμε " το σύστημα δύο φορές να κάνουμε δηλαδή μια περιστροφή κατά μια γωνία ίση με 2(2π)=4π για να επανέλθει στην θέση του. Οι διαφορές του σπιν από την στροφορμή θα αναπτυχθούν στην επόμενη παράγραφο.

1.11 Η τροχιακή στροφορμή και το σπιν

Ομοιότητες και Διαφορές

	Τροχιακή στροφορμή	Σπιν
Μέτρο στροφορμής	$\lvert\vec{l}\rvert = \hbar\sqrt{l(l+1)}$	$\lvert\vec{s}\rvert = \hbar\sqrt{s(s+1)}$
	$l = 0, 1, 2, \cdots$	$s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots$
Προβολή στροφορμής	$l_z = \hbar m_l$	$S_z = \hbar m_s$
κατά τον άξονα των z	$m_l = -l, \cdots, 0, \cdots, +l$	$m_s = -s, \cdots, 0, \cdots, +s$

Το βήμα των κβαντικών αριθμών της τρίτης προβολής της στροφορμής και του σπιν είναι το ένα και το σύνολο των τιμών είναι $2l+1$ και $2s+1$ αντιστοίχως.

Η βασική διαφορά μεταξύ τροχιακής στροφορμής και σπιν εντοπίζεται στο γεγονός ότι ο κβαντικός αριθμός s του σπιν μπορεί να πάρει όχι μόνο ακέραιες αλλά και ημιακέραιες τιμές. Η δυνατότητα ημιακεραίων τιμών προκύπτει από τον κανόνα ότι το διάστημα από $-s$ έως $+s$ (μήκους $2s$) πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός αφού καλύπτεται πλήρως ξεκινώντας από το $-s$ και φτάνοντας στο $+s$ με βήματα μοναδιαία $2s =$ ακέραιος $\Longrightarrow s =$ ακέραιος η ημιακέραιος.

• Το σπιν του ηλεκτρονίου δεν οφείλεται σε περιστροφή περί τον άξονα του

Λόγος 1

• Διότι για να προκύψει μια τιμή στροφορμής $S_z = \hbar/2$ με ιδιοπεριστροφή, η ταχύτητα περιφοράς του ηλεκτρονίου στον " ισημερινό " του (θεωρώντας το ως σφαίρα) θα έπρεπε να υπερβαίνει κατά πολύ την ταχύτητα του φωτός.

$$S_z = I\omega \approx ma^2\omega \approx mav = \hbar/2 \approx \hbar \ \Rightarrow \ v \approx \hbar/(ma) \approx 10^{17} cm/sec \approx 10^6 c$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας του ηλεκτρονίου και ω η γωνιακή ταχύτητα. Το $a = 10^{-17}$ είναι το σημερινό πειραματικό άνω όριο της ακτίνας του ηλεκτρονίου.

Λόγος 2

• Σε αντίθεση με την τροχιακή στροφορμή της οποίας το μέγεθος μπορεί να μεταβληθεί, το μέγεθος του σπιν είναι ένα πάγιο χαρακτηριστικό του κάθε σωματιδίου όπως η μάζα ηρεμίας η το φορτίο του. Ο κβαντικός αριθμός του σπιν είναι παγωμένος σε μια και μοναδική τιμή. Αυτή η αδυναμία μεταβολής του σπιν είναι αδύνατον να ερμηνευθεί στα πλαίσια μιας κλασικής εικόνας ενός σωματιδίου που περιστρέφεται γύρο από τον άξονα του. Δεν μπορεί να προκύψει από καμία διαφορική εξίσωση.

1.12 Το σπιν και η γενικευμένη αρχή του Pauli

1.12.1 Φερμιόνια και Μποζόνια

Τα φερμιόνια και τα μποζόνια είναι οι δυο θεμελιώδεις κατηγορίες σωματιδίων, και ο ρόλος τους είναι τελείως διαφορετικός στη φύση.

Τα Φερμιόνια έχουν σπιν ίσο με έναν ημιακέραιο αριθμό π.χ. $s = \hbar/2, 3\hbar/2, \cdots$. Το είδος της συμπεριφοράς τους είναι ατομικιστικό δηλαδή υπόκεινται στην αρχή του Pauli που λέει ότι είναι αδύνατη η συνύπαρξη τους στην ιδία κβαντική κατάσταση. Περιγράφονται από αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις. Είναι όλα τα σωματίδια δομικοί λίθοι της ύλης. π.χ τα ηλεκτρόνια τα πρωτόνια τα νετρόνια τα κουάρκς. Όλα έχουν αυτά έχουν σπιν $s = \hbar/2$. Αν ήταν διαφορετικά θα ήταν δυνατή η απεριόριστη συσσώρευση τους στην ιδία περιοχή του χώρου υπό την επίδραση των αμοιβαίων έλξεων με αποτέλεσμα την πλήρη κατάρρευση της ύλης σε μια " σταγόνα " άπειρης πυκνότητας.

Τα μποζόνια έχουν σπιν ίσο με έναν ακέραιο αριθμό π.χ. $s = 0, 1, 2, \cdots$ Το είδος της συμπεριφοράς τους είναι συγκεντρωτικό δηλαδή δεν υπόκεινται στην αρχή του Pauli και άρα είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση. Περιγράφονται από συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις. Είναι όλα τα σωματίδια φορείς των δυνάμεων της φύσης. π.χ. Τα φωτόνια τα σωματίδια $w^{\pm}$, z, τα γλουόνια και το βαρυτόνιο. Όλα έχουν $s = 1$ πλην του βαρυτονίου που εικάζεται ότι έχει σπιν $s = 2$. Έτσι είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση και έτσι είναι δυνατόν να δημιουργηθεί με αυτόν τον τρόπο ένα μακροσκοπικό πεδίο δυνάμεων. Τα πεδία, έχουν φορείς τα σωματίδια αυτά και είναι τέσσερα. Το ηλεκτρομαγνητικό το πεδίο της βαρύτητας και τα δύο πυρηνικά πεδία το ασθενές και το ισχυρό.

1.12.2 Οι συνέπειες της απαγορευτικής αρχής του Pauli

Μια ειδική συνέπεια της αρχής αυτής βρίσκουμε στα ηλεκτρόνια των ατόμων. Τα ατομικά ηλεκτρόνια έχοντας σπιν $1/2$ είναι φερμιόνια και επομένως η συνύπαρξη τους στην ίδια κβαντική κατάσταση ενός ατόμου είναι αδύνατη. Δεδομένου ότι μια κβαντική κατάσταση σε ένα άτομο καθορίζεται μονοσήμαντα από την τετράδα των κβαντικών αριθμών n, l, m_l, m_s η εφαρμογή της αρχής του Pauli στα άτομα οδηγεί στην ακόλουθη απαγορευτική αρχή.

Δυο ηλεκτρόνια σε ένα άτομο είναι αδύνατον να έχουν την ίδια τετράδα κβαντικών αριθμών n, l, m_l, m_s. Θα διαφέρουν τουλάχιστον σε ένα κβαντικό αριθμό. Τα δύο ηλεκτρόνια για παράδειγμα του ατόμου του ηλίου διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το σπιν. Το ένα έχει σπιν πάνω και το άλλο σπιν κάτω.

Η απαγορευτική αρχή του Pauli συνεπάγεται την μη διακρισιμότητα των ταυτόσημων σωματιδίων στην Κβαντική Μηχανική. Στην " ρίζα " της γενικευμένης αρχής του Pauli βρίσκεται το θεμελιώδες γεγονός ότι στην Κβαντική Μηχανική τα ταυτόσημα σωματίδια που ανήκουν στο ίδιο φυσικό σύστημα (π.χ. ένα άτομο) είναι μη διακρίσιμα. Περιγράφονται από αλληλο - επικαλυπτόμενες κυματοσυναρτήσεις και επομένως είναι αδύνατον να πούμε ποιο σωμάτιο είναι αυτό με το νούμερο 1, ποιο είναι αυτό με το νούμερο 2 κ.ο.κ. Αυτή η αδυναμία διάκρισης διασφαλίζεται στην κβαντομηχανική μόνο με κυματοσυναρτήσεις $\psi(x_1, x_2)$ που είναι συμμετρικές δηλαδή $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$ ή αντισυμμετρικές δηλαδή $\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1)$. Οι κυματοσυναρτήσεις αυτές οδηγούν στην ίδια πυκνότητα πιθανότητας $\|\psi(x_1, x_2)\|$ που είναι προφανώς συμμετρική στην εναλλαγή των συντεταγμένων $x_1 \leftrightarrow x_2$ και άρα δεν επιτρέπει τη διάκριση των δυο σωματιδίων.

Κεφάλαιο 2

Η Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τις προσπάθειες που έγιναν για την σύνθεση της κβαντομηχανικής και της σχετικότητας σε μια ενιαία θεωρία. Αναμφίβολα αυτή η σύνθεση αυτή είναι ένα από τα πιο κεντρικά προβλήματα της φυσικής του αιώνα μας που είναι ακόμα και σήμερα ανοικτό.

2.1 Η εξίσωση Klein - Gordon

Όπως ξέρουμε η εξίσωση του Schrödinger είναι μια μη σχετικιστική κυματική εξίσωση. Το σημείο εκκίνησης για την κατασκευή της ήταν η μη σχετικιστική σχέση ενέργειας - ορμής.

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{2.1}$$

Από την οποία προκύπτει η ελεύθερη εξίσωση του Schrödinger με την γνωστή αντικατάσταση. Η αρχή μπορεί να γίνει παίρνοντας την σχετικιστική έκφραση για την ενέργεια και αντικαθιστώντας τα φυσικά μεγέθη με τους αντίστοιχους τελεστές. Από την έκφραση της ενέργειας

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{2.2}$$

και κάνοντας πάλι την αντικατάσταση

$$E \rightarrow \hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\vec{\nabla} \tag{2.3}$$

($\hbar = 1$) προκύπτει εύκολα η παρακάτω εξίσωση γνωστή και ως διαφορική εξίσωση των Klein - Gordon.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)\phi(\vec{r},t) + m^2\phi(\vec{r},t) = 0 \tag{2.4}$$

Η εξίσωση Klein - Gordon έχει σαν λύσεις τα επίπεδα κύματα. Θα μελετήσουμε την εξίσωση σε μία διάσταση στην περίπτωση του ελευθέρου σωματιδίου. Σε μια διάσταση η λύση της εξίσωσης είναι

$$\phi(x,t) = e^{i(px-Et)} \tag{2.5}$$

Αν αντικαταστήσουμε την λύση (1) στην μονοδιάστατη εξίσωση μας ο οδηγεί στην σχετικιστική σχέση ενεργείας - ορμής

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{2.6}$$

από την οποία ένα ελεύθερο σωμάτιο θα έχει όχι μόνο θετικές αλλά και αρνητικές ενέργειες. Θα έχουμε δηλαδή

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2} \tag{2.7}$$

Η πιο πάνω εξίσωση όμως μας δημιουργεί κάποια σοβαρά προβλήματα. Βλέπουμε την ύπαρξη λύσεων με αρνητική ενέργεια $E < 0$ και άρα θα αντιστοιχούν στις λύσεις αυτές και αρνητικές πυκνότητες πιθανότητας.

Τα προβλήματα της εξίσωσης Klein - Gordon είναι πραγματικά πολλά.

- Η εξίσωση επιδέχεται και λύσεις αρνητικής ενέργειας. Πράγμα φυσικά απαράδεκτο για τα ελεύθερα σωματίδια.

- Μη ύπαρξη κάτω φράγματος στην ενέργεια. Το ενεργειακό φάσμα στην αρνητική περιοχή δεν έχει κάτω φράγμα. Έτσι ένα σωμάτιο που καταλαμβάνει μία ενεργειακή στάθμη θα μπορούσε να μεταπίπτει για πάντα σε μία χαμηλότερη στάθμη (αφού πάντα θα υπήρχε μία) αποδίδοντας άπειρη ενέργεια.

- Αδυναμία ορισμού κάποιας ποσότητας ως ρεύμα πιθανότητας. Δεν μπορούμε να ορίσουμε το μέγεθος αυτό έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι βασικές απαιτήσεις της κβαντομηχανικής. Αν υπολογίσει κανείς τα διατηρήσιμα ρεύματα διαπιστώνει ότι χάνεται η ερμηνεία του ρεύματος πιθανότητας ως τέτοια αφού μπορεί πλέον να παίρνει και αρνητικές τιμές.

Το γεγονός ότι η ενέργεια E είναι σε δεύτερη δύναμη και επομένως προκύπτει μια παραγώγιση δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο είναι από μαθηματικής άποψης η βασική αιτία όλων των προβλημάτων. Δεν μπορούμε να τις αγνοήσουμε γιατί είναι εντελώς απαραίτητες για την πληρότητα του συνόλου των λύσεων μας.

Θα μελετήσουμε τώρα την εξίσωση Klein - Gordon παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\vec{E}$ και $\vec{B}$ ορίζετε με την βοήθεια ενός διανυσματικού $\vec{A}(\vec{r},t)$ και ενός βαθμωτού δυναμικού $\phi(\vec{r},t)$ από τις σχέσεις

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \tag{2.8}$$

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ικανοποιεί τις γνωστές εξισώσεις του Maxwell. Τα δυναμικά $\vec{A}$ και ϕ δεν είναι μοναδικά. Τα ακόλουθα τονούμενα δυναμικά δίνουν το ίδιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \qquad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{2.9}$$

όπου $f(\vec{r},t)$ είναι μια τυχαία βαθμωτή συνάρτηση.

Ο τρόπος που θα εισαχθούν τα δυναμικά $\vec{A}$ και ϕ στην εξίσωση Klein - Gordon θα είναι τέτοιος ώστε ο τρόπος εκλογής τους να μην έχει φυσική σημασία. Και αυτό πετυχαίνεται με την ελάσσονα αντικατάσταση.

$$\hat{E} \to \hat{E} - q\phi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi = i\partial_t - q\phi \tag{2.10}$$

$$\vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} = -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{\hbar}\vec{A} = -i\vec{\nabla} - q\vec{A} \tag{2.11}$$

όπου έχουμε θέση $\hbar = c = 1$ και με q συμβολίζουμε το φορτίο του σωματιδίου.

Άρα η εξίσωση Klein - Gordon σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με δυναμικά $\vec{A}$ και ϕ γράφεται ως εξής

$$(i\partial_t - q\phi)^2 \psi = \left(-i\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi + m^2\psi \tag{2.12}$$

Η εξίσωση αυτή παραμένει αναλλοίωτη από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας της εξίσωσης (2.9) αρκεί όμως να συνοδεύεται και με μια αλλαγή φάσης στην κυματοσυνάρτηση ως εξής

$$\psi'(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t)e^{iqf} \tag{2.13}$$

Άρα η εξίσωση (2.12) θα ισχύει και για τις μετασχηματισμένες τονούμενες ποσότητες $\vec{A}', \phi'$ και ψ'.

Ένα πρόβλημα που μπορεί να λυθεί από την εξίσωση αυτή είναι το πρόβλημα του σωματίου μέσα σε δυναμικό Coulomb. Η εξίσωση είναι

$$\vec{\nabla}^2\psi + \left\{(E-V)^2 - m^2\right\}\psi = 0$$

όπου το δυναμικό έχει τη μορφή

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{r} = -\frac{a}{r}$$

όπου $e^2 \rightarrow \frac{e^2}{\hbar c} = a$ αφού θέσαμε $\hbar = c = 1$.

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του δυναμικού οι λύσεις θα έχουν τη χωριζόμενη μορφή

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Upsilon_l^m(\theta,\phi) \tag{2.14}$$

όπου το γωνιακό τους κομμάτι είναι οι σφαιρικές αρμονικές ακριβώς όπως και στην εξίσωση Schrödinger.

Δεν θα προχωρήσουμε περισσότερο στην μελέτη της εξίσωσης αυτής λόγω των πολλών και ανυπέρβλητων προβλημάτων της.

2.2 Η εξίσωση Dirac

Η εξίσωση Dirac είναι μία προσπάθεια για να διατυπωθεί μία σχετικιστική εξίσωση η οποία να μην περιέχει δεύτερης τάξης χρονική παραγώγιση όπως συμβαίνει με την εξίσωση Klein - Gordon που όπως είδαμε δημιούργησε τόσα προβλήματα. Μία εξίσωση που θα περιέχει μια πρώτης τάξη παραγώγιση ως προς τον χρόνο θα έπρεπε να έχει επίσης και πρώτης τάξης εξάρτηση ως προς τις θέσεις και τέλος να μπορεί να αναπαράγει την σωστή σχέση μεταξύ ενέργειας και ορμής.

Ο Dirac πρότεινε την ακόλουθη εξίσωση

$$H\psi = (\vec{a}\cdot\vec{p} + \beta m)\psi \tag{2.15}$$

Θα επιχειρήσουμε τώρα από την εξίσωση αυτή να πάρουμε την γνωστή σχέση της ενέργεια και της ορμής $E^2 = p^2 + m^2$. Για να πάρουμε την σωστή σχέση για την ενέργεια θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω

$$a_i^2 = 1 \qquad a_i a_j + a_j a_i = 0 \tag{2.16}$$

$$a_i\beta + \beta a_i = 0 \qquad \beta^2 = 1 \tag{2.17}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι τα a_j, β δεν είναι δυνατόν να είναι αριθμοί ή συναρτήσεις, θα πρέπει να είναι πίνακες. Οι πίνακες αυτοί πρέπει να είναι ερμιτιανοί αφού η Χαμιλτονιανή είναι ένας ερμητιανός τελεστής και εξαρτάται αποκλειστικά από αυτούς. Οι ιδιοτιμές τους θα είναι ± 1 όπως προκύπτει από τις $a_i^2 = 1$, $\beta^2 = 1$. Τέλος, μπορεί να δείξει κανείς ότι οι πίνακες αυτοί έχουν μηδενικό ίχνος. Όμως ως ίχνος ορίζεται το άθροισμα των ιδιοτιμών που στην περίπτωσή μας είναι οι ± 1. Συνεπώς, η διάσταση των πινάκων αυτών είναι άρτια. Η ελάχιστη δυνατή διάσταση είναι η $n = 4$. Για $n = 2$ προκύπτουν μόλις 3 πίνακες με την αντιμεταθετική ιδιότητα και αυτοί είναι οι μήτρες του Pauli.

Δύο αναπαραστάσεις που ικανοποιούν την συγκεκριμένη άλγεβρα και τις παραπάνω παρατηρήσεις είναι οι αναπαραστάσεις Dirac - Pauli και Weyl με πιο συνηθισμένη την πρώτη αναπαράσταση

Αναπαράσταση Dirac - Pauli.

$$a_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Αναπαράσταση Weyl.

$$a_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

Οι πίνακες σ_i είναι οι γνωστοί μας πίνακες του Pauli, σχέσεις (1.28).

Για να εργαστεί κανείς στην αναπαράσταση του Dirac είναι αναγκαίος ο ορισμός των πινάκων γ και της άλγεβρας που αυτοί ικανοποιούν. Ορίζουμε

$$\gamma^0 = \beta \qquad \gamma^i = \beta a_i \qquad \gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{a}) \tag{2.20}$$

Οι πίνακες αυτοί ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} & & \\ (\gamma^0)^+ &= \gamma^0 & (\gamma^0)^2 &= 1 \\ (\gamma^k)^+ = (\beta a^k)^+ = a^k\beta &= -\gamma^k & (\gamma^k)^2 &= \beta a^k \beta a^k = -1 \end{aligned}$$

Μετά την εισαγωγή των πινάκων γ μπορούμε να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των διατηρουμένων ρευμάτων καθώς και των λύσεων της εξίσωσης του Dirac. Η πυκνότητα πιθανότητας ορίζεται από την σχέση

$$\rho = J_0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \sum_{i=0}^{4} |\psi_i|^2 \geq 0 \tag{2.21}$$

Η πυκνότητα αυτή είναι μια θετικά ορισμένη ποσότητα και έτσι δεν υπάρχει εδώ ένα από τα κεντρικά προβλήματα της εξίσωσης Klein - Gordon.

Η αντιμετώπιση αυτή του Dirac αποφεύγει πολλά προβλήματα που υπάρχουν στην θεωρία του Klain - Gordon. Πλην όμως δεν δίνει την τελική απάντηση διότι δεν λύνει πολλά άλλα προβλήματα της φυσικής. Έδωσε όμως κάτι πολύ σημαντικό. Προέβλεψε την ύπαρξη των αντισωματιδίων που βρέθηκαν αργότερα στα πειράματα που έγιναν στο εργαστήριο. Η ύπαρξη της αντιύλης δεν αμφισβητείται σήμερα, ανιχνεύεται στα εργαστήρια πλην όμως παραμένει το πρόβλημα γιατί δεν βρίσκεται ελεύθερη στην φύση. Λόγω της συμμετρίας της εξίσωσης το σύμπαν θα έπρεπε να αποτελείται από ίσες ποσότητες ύλης και αντιύλης που όμως αυτό δεν φαίνεται να ισχύει.

Θα υποθέσουμε αρχικά ότι ισχύει η απλούστερη περίπτωση κατά την οποία το σωμάτιο μας ηρεμεί ($\vec{p} = 0, E = m$). Η εξίσωση δίνει προφανώς τις ιδιοτιμές $m, m, -m, -m$ και τα παρακάτω ιδιοδιανύσματα αντιστοίχως.

$$U^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Τα ιδιοδιανύσματα αυτά ονομάζονται σπίνορς. Όπως αναμέναμε και από την διάσταση των πινάκων γ^j προκύπτουν 4 ανεξάρτητες καταστάσεις. Συγκεκριμένα εμφανίζεται ένα ζευγάρι σπίνορς θετικής ενέργειας (U^1, U^2) και ένα ζευγάρι αρνητικής ενέργειας (V^1, V^2). Στους σπίνορες της θετικής ενέργειας αποδόθηκε η περιγραφή σωματίων με σπιν " πάνω " και σπιν " κάτω ". Το άλλο ζευγάρι περιέχει μία ανάλογη περιγραφή για το σπιν αλλά και ένα νέο " εξωτικό " σωμάτιο, το αντισωμάτιο του ηλεκτρονίου - το ποζιτρόνιο.

Τα κεντρικά χαρακτηριστικά της εξίσωσης Dirac είναι

1. Η ερμηνεία των λύσεων της σχετικιστικής εξίσωσης που προβλέπει την ύπαρξη του αντισωματίου.

2. Η εξίσωση που εμπεριέχει τους τελεστές του σπιν και προβλέπει ότι τα σωματίδια έχουν κάποια εσωτερική ιδιότητα που ονομάζεται σπιν.

3. Η δυνατότητα απόδοσης πυκνότητας πιθανότητας σε σχετικιστική εξίσωση. Έτσι θεραπεύουμε μια σοβαρή αδυναμία της εξίσωσης των Klein - Gordon.

4. Η αντιμετώπιση της έλλειψης κάτω φράγματος για την ενέργεια.

   Ένα από τα κεντρικά προβλήματα της εξίσωσης Klein - Gordon εμφανίζεται και στην εξίσωση Dirac. Το φάσμα των αρνητικών ενεργειών δεν είναι φραγμένο εκ των κάτω. Ο Dirac για να το αντιμετωπίσει αυτό πρότεινε μία ερμηνεία στην οποία δόθηκε η ονομασία " θάλασσα του Dirac ".

5. Ερμηνεία των λύσεων αρνητικής ενέργειας

   Το τελευταίο πρόβλημα ήταν η ύπαρξη λύσεων αρνητικής ενέργειας. Αρκετά αργότερα προτάθηκε και έγινε αποδεκτή μία ερμηνεία των Feynman - Stuckelberg.

   Προτάθηκε οι αρνητικές λύσεις να αντιστοιχούν σε σωμάτια τα οποία διαδίδονται πίσω στον χρόνο ή αντισωμάτια τα οποία διαδίδονται μπροστά στο χρόνο. Τα " καινούρια " αυτά σωμάτια ονομάστηκαν αντισωμάτια. Μαθηματικά η παραπάνω " παράξενη " φυσική εικόνα μπορεί να εκφραστεί με προφανή τρόπο από το μετασχηματισμό $e^{-i(-E)(-t)} = e^{-iEt}$.

Αυτή η προς τα πίσω διάδοση μας επιβάλει μία εικόνα κατά την οποία ο αριθμός των σωματιδίων που μετέχουν σε μία διαδικασία γενικά μεταβάλλεται. Στην διαδικασία αυτή η αλληλεπίδραση μεταβάλει τον συνολικό αριθμό των σωματιδίων. Άρα υπάρχει η ανάγκη να διατυπωθεί μία φυσική θεωρία η οποία να μπορεί να περιγράψει τέτοιες διαδικασίες. Η κβαντική θεωρία πεδίου είναι μία τέτοια θεωρία αφού μπορεί να περιγράψει συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας.

Μία ακόμα μεγάλη επιτυχία της εξίσωσης Dirac είναι η ερμηνεία της ιδιομορφία του ηλεκτρονικού σπιν. Οι μη σχετικιστική κβαντομηχανική αδυνατεί να ερμηνεύσει το γεγονός ότι ο γυρομαγνητικός λόγος του σπιν του ηλεκτρονίου είναι διπλάσιος από αυτόν της τροχιακής στροφορμής. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι από την εξίσωση του Dirac στο μη σχετικιστικό όριο το παραπάνω γεγονός ερμηνεύεται. Το σπιν αποκαλύπτεται πειραματικά μέσω των αλληλεπιδράσεων του με μαγνητικά πεδία. Για να μελετήσουμε τις προβλέψεις της εξίσωσης Dirac για το σπιν πρέπει να γράψουμε μία Χαμιλτονιανή που να εμπεριέχει και την αλληλεπίδραση με το μαγνητικό πεδίο. Αυτό γίνεται κάνοντας την αντικατάσταση

$$\bar{p} \to \bar{p} + e\bar{A} \equiv \pi \tag{2.23}$$

Η ελεύθερη Χαμιλτονιανή με την παρουσία του μαγνητικού πεδίου, γίνεται

$$\mathcal{H} = \bar{a}\bar{p} + \beta m \to \mathcal{H} = \bar{a}(\bar{p} + e\bar{A}) + \beta m \equiv \bar{a}\bar{\pi} + \beta m \tag{2.24}$$

Μπορούμε να βρούμε το μη σχετικιστικό όριο της Χαμιλτονιανής αυτή και να αποδείξουμε την γνωστή πρόβλεψη της μαγνητικής " ανωμαλίας " του σπιν και την σωστή εξαγωγή των σχετικιστικών διορθώσεων της εξίσωσης του Schrödinger.

2.3 Το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών το οποίο θέτει την εξίσωση Dirac ενώπιον του κινδύνου πλήρους απόρριψης της ως φυσικής θεωρίας.

Ένα πρώτο σημείο που πρέπει να διευκρινιστεί είναι η ριζική διαφορά μεταξύ της κλασικής και της κβαντικής θεωρίας ως προς αυτό το θέμα. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι στην κλασική θεωρία οι φυσικές ποσότητες μπορούν να μεταβάλλονται μόνο κατά συνεχή τρόπο ενώ στην κβαντική θεωρία συμβαίνουν ασυνεχείς μεταβολές και τα περίφημα " κβαντικά άλματα ". Αυτό βέβαια συνιστά και τη θεμελιώδη διάκριση μεταξύ των δυο θεωριών.

Δεδομένου λοιπόν ότι μεταξύ των θετικών και των αρνητικών ενεργειών επικρατεί ένα χάσμα εύρους $2mc^2$, ένα κλασικό σχετικιστικό σωματίδιο με θετική αρχικά ενέργεια δεν θα μπορέσει ποτέ να το διασχίσει αφού η ενέργεια του $E(t) = \sqrt{p(t)^2 + m^2}$ θα είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου που θα ανταποκρίνεται στις συνεχείς επίσης μεταβολές της ορμής του που προκαλούνται από κάποιο εξωτερικό πεδίο. Μια συνεχής συνάρτηση δεν μπορεί να περάσει από μια περιοχή τιμών σε μια άλλη χωρίς να πάρει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Οι αρνητικές ενέργειες είναι λοιπόν απρόσιτες σε ένα κλασικό σωματίδιο και η ύπαρξη τους δεν συνιστά κανένα είδος πρόβλημα για την κλασική θεωρία. Μπορούν άνετα να αγνοηθούν.

Στην κβαντική θεωρία τα πράγματα δεν είναι βεβαίως έτσι όπως στην κλασική φυσική. Εδώ οι ασυνεχείς μεταβολές είναι στην ημερήσια διάταξη και οι μεταπτώσεις από την περιοχή των θετικών στην περιοχή των αρνητικών ενεργειών μπορούν να προκληθούν ακόμη και από ένα ασθενέστερο εξωτερικό πεδίο, ιδίως αν έχει την κατάλληλη συχνότητα. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει κάτω φράγμα στις αρνητικές ενέργειες μπορούμε άνετα να φανταστούμε ένα " απεριόριστο " κατρακύλισμα του σωματιδίου σε αυτή την ατέρμονα ενεργειακή σκάλα με διαρκή εκπομπή της πλεονάζουσας ενέργειας.

Η αρνητική ενέργεια σημαίνει αναγκαστικά και αρνητική μάζα (εννοούμε τη " μάζα κίνησης " $m(v)$ που θα γίνεται αρνητική συγχρόνως με την ενέργεια λόγω της σχέσης ισοδυναμίας $E = mc^2$ δηλαδή αρνητική αδράνεια και αρνητική επίσης βαρυτική μάζα. Έτσι, ένα σωματίδιο αρνητικής ενέργειας θα δέχεται και θα ασκεί απωστικές βαρυτικές δυνάμεις στα συνηθισμένα σωματίδια και επίσης θα " αισθάνεται " με αντίθετο πρόσημο και κάθε άλλη δύναμη. Ένα δυναμικό που είναι ελκτικό για ένα κοινό σωμάτιο θα δρα απωστικά σε ένα άλλο με αρνητική ενέργεια αφού το αρνητικό πρόσημο στη μάζα μπορεί να μεταφερθεί στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης του Νεύτωνα. Οι αρνητικές ενέργειες δεν μπορεί να έχουν θέση σε μια σοβαρή φυσική θεωρία.

Η πρώτη πρόταση για την άρση του αδιεξόδου θα έλθει από τον ίδιο τον Dirac με μια ριζοσπαστική ιδέα που είχε ως συστατικό της στοιχείο και μια δραματική φυσική πρόβλεψη την ύπαρξη αντισωματιδίων.

Η ιδέα του Dirac ήταν πολύ απλή. Αφού οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας δεν μπορούν να αποκλειστούν, θα πρέπει τουλάχιστον να εμποδιστεί η πρόσβαση σε αυτές με τον μόνο μηχανισμό που έχει στη διάθεση της μια κβαντική θεωρία για να το επιτύχει την αρχή του Pauli. Σύμφωνα με τον Dirac όλες οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι κατειλημμένες από σωματίδια δημιουργώντας έτσι ένα τελείως άκαμπτο υπόστρωμα ένα είδος " παγωμένης θάλασσας " όπου κάθε περαιτέρω κίνηση είναι αδύνατη αφού δεν υπάρχουν άλλες διαθέσιμες ενεργειακές καταστάσεις πλην βεβαίως εκείνων με θετική ενέργεια που χωρίζονται όμως από τις προηγούμενες με ένα τεράστιο ενεργειακό χάσμα. Θεωρώντας τώρα αυτό το " παγωμένο " υπόστρωμα ως τη θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος μπορούμε πλέον να τοποθετήσουμε πρόσθετα σωματίδια στις καταστάσεις θετικής ενέργειας τα οποία και θα αντιπροσωπεύουν τα συνήθη σωματίδια μεταξύ των οποίων λαμβάνει χώρα η " κανονική " Φυσική.

Όμως ενώ η συμπλήρωση των καταστάσεων αρνητικής ενέργειας έχει αποκλείσει από αυτές τα κανονικά σωματίδια των θετικών ενεργειών το αντίθετο δεν έχει λόγο να ισχύει. Τα σωματίδια με αρνητικές ενέργειες μπορούν να μεταπηδήσουν στις θετικές αρκεί να του δοθεί η κατάλληλη " ώθηση " υπό μορφή ακτίνων γάμα παραδείγματος χάριν. Η " οπή " που άφησε πίσω του το διεγερμένο στις θετικές ενέργειες σωματίδιο θα συμπεριφέρεται επίσης σαν ένα σωματίδιο με αντίθετο όμως φορτίο και ενέργεια αφού πρόκειται για έλλειμμα από το ολικό φορτίο και ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης που είναι και οι δυο αρνητικές ποσότητες.

Κεφάλαιο 3

Η κβαντική θεωρία των πεδίων

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε την κλασική και την κβαντική θεωρία των πεδίων των συστημάτων δηλαδή με πολλούς ή και άπειρους βαθμούς ελευθερίας.

3.1 Λαγκρανζιανός φορμαλισμός

3.1.1 Ο κλασικός Λαγκρανζιανός φορμαλισμός

Από την κλασική μηχανική είναι γνωστό ότι οι εξισώσεις κίνησης πολλών μηχανικών συστημάτων μπορούν να προκύψουν ως κρίσιμα σημεία μιας έκφρασης της μορφής

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \tag{3.1}$$

όπου $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ είναι η Λαγκρανζιανή του συστήματος και $q_i,\ i = 1, 2, \cdots, N$ είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες που καθορίζουν μονοσήμαντα την θέση του συστήματος ανά πάσα χρονική στιγμή.

Η S είναι γνωστή ως η δράση του προβλήματος. Ένα ακρότατο σημείο (όχι κατ΄ ανάγκη μέγιστο ή ελάχιστο) μιας συνάρτησης χαρακτηρίζεται από τον μηδενισμό του διαφορικού της στην θέση αυτή.

$$\delta S = 0 \tag{3.2}$$

Η παραπάνω εξίσωση σημαίνει ότι η δράση παραμένει αμετάβλητη σε απειροστές αποκλίσεις από την πραγματική κίνηση του συστήματος η οποία επομένως αποτελεί ένα ακρότατο της δράσης και μέσω αυτής οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να διατυπωθούν ως εξής

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \tag{3.3}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η περίφημη εξίσωση Euler - Lagrange που αποτελεί τον νόμο κίνησης του συστήματος.

Για προβλήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας όπου η Λαγκρανζιανή εξαρτάται από N γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \cdots, q_N$ και τις παραγώγους τους, η προηγούμενη διαδικασία επαναλαμβάνεται πανομοιότυπη και οδηγεί στις N εξισώσεις

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{3.4}$$

Οι ποσότητες

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.5}$$

αποκαλούνται γενικευμένες ορμές και παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαδικασία της κβάντωσης ενός μηχανικού συστήματος όπως θα δούμε και πιο κάτω.

Με την βοήθεια των γενικευμένων ορμών οι εξισώσεις κίνησης (3.4) γράφονται

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \tag{3.6}$$

που είναι μια παρόμοια μορφή με εκείνη των εξισώσεων του Νεύτωνα

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i \tag{3.7}$$

μόνο που οι συνήθεις ορμές έχουν αντικατασταθεί με τις γενικευμένες και οι δυνάμεις F_i έχουν παραχωρήσει τη θέση τους στις " γενικευμένες δυνάμεις ". Σε ορισμένα μηχανικά συστήματα η Λαγκρανζιανή δίνεται από την έκφραση

$$L = T - V \tag{3.8}$$

όπου T είναι η κινητική και V η δυναμική ενέργεια του προβλήματος.

Πριν συνεχίσουμε θα πρέπει να απαντηθούν δύο βασικά ερωτήματα.

1. Για κάθε δεδομένη δυναμική εξίσωση υπάρχει πάντα μια Λαγκρανζιανή που την αναπαράγει μέσω των εξισώσεων Euler - Lagrange την κίνηση του συστήματος·

2. Υπάρχει μια και μοναδική Λαγκρανζιανή που παράγει μια δεδομένη δυναμική εξίσωση·

Η απάντηση και στα δυο ερωτήματα είναι αρνητική.

Ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός μπορεί να επεκταθεί και για συστήματα με συνεχές πλήθος βαθμών ελευθερίας. Λαγκρανζιανή θεωρία πεδίου. Το κλασικό παράδειγμα ενός τέτοιου συστήματος είναι η ταλαντευμένη χορδή όπου ο καθορισμός της εκάστοτε μορφής της απαιτεί να ξέρουμε την απομάκρυνση $u = u(x,t)$ σε κάθε σημείου της x από την θέση ισορροπίας του. Εδώ λοιπόν τον ρόλο των γενικευμένων συντεταγμένων $q_i(t)$ τον έχουν οι απομακρύνσεις $u = u(x,t)$ κάθε σημείου x. Έχουμε την αντιστοιχία

$$i \to x \quad q \to u \qquad q_i(t) \to u(x,t) \tag{3.9}$$

Όταν οι εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος είναι ήδη γνωστές τι νόημα έχει να αναζητήσουμε την Λαγκρανζιανή.

Η απάντηση βρίσκεται στην ακόλουθη πρόταση που είναι γνωστή ως θεώρημα της Noether.

Αν οι εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος απορρέουν από μια Λαγκρανζιανή τότε σε κάθε συνεχή συμμετρία της, αντιστοιχεί μια διατηρήσιμη ποσότητα.

Με τον όρο συνεχή συμμετρία κατ΄ αρχάς εννοούμε κάθε μετασχηματισμό της μορφής

$$q_i \to Q_i = Q_i(q_j, a)$$

όπου a είναι μια συνεχής παράμετρος. Ο μετασχηματισμός αυτός έχει την ιδιότητα να αφήνει αμετάβλητη την δράση του συστήματος.

3.1.2 Η κανονική κβάντωση

Θα δούμε εδώ πως ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους μας προσφέρει το κατάλληλο πλαίσιο για την κβάντωση ενός τυχόντος κλασικού συστήματος που επιδέχεται Λαγκρανζιανή περιγραφή. Αφετηρία μας θα είναι οι θεμελιώδεις μεταθετικές σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών της θέσης x_i και της ορμής p_i ενός σωματιδίου οι οποίες αποτελούν το θεμέλιο της κβαντικής περιγραφής της κίνησης του. Υπενθυμίζουμε λοιπόν ότι είναι

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0 \qquad [x_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{3.10}$$

όπου βέβαια θέσαμε $\hbar = 1$ στην τελευταία σχέση.

Η κανονική κβάντωση δεν είναι τίποτα άλλο παρά η πολύ εύλογη ιδέα να επεκτείνουμε τις (3.10) σ'ενα τυχόν σύστημα, αντιστοιχίζοντας τις συντεταγμένες x_j με τις γενικευμένες συντεταγμένες q_j και τις συνήθεις ορμές p_j στις γενικευμένες ορμές $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$.

Η κβάντωση του συστήματος συνίσταται τότε στην προαγωγή των βασικών του μεγεθών q_j και p_j σε τελεστές που θα ικανοποιούν τις θεμελιώδεις μεταθετικές σχέσεις (3.10). Σε τελεστές θα προαχθούν βεβαίως και όλα τα άλλα φυσικά μεγέθη του συστήματος τα οποία είναι συναρτήσεις των q_j και p_j.

Για παράδειγμα, η Χαμιλτονιανή θα περιγράφεται από τον τελεστή

$$\mathcal{H} = p_j \cdot q_j - L(q_i, \cdot q_i) \tag{3.11}$$

στον οποίο οι παράγωγοι $\dot{q}_j$ θα πρέπει να εκφραστούν συναρτήσει των βασικών ποσοτήτων q_j και p_j. Αυτό είναι κατ΄ αρχήν δυνατόν βάσει της σχέσης που ορίζει τις γενικευμένες ορμές

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = F(q_j, \dot{q}_j) \tag{3.12}$$

λύνοντας την ως προς $\dot{q}_j$. Με αυτόν τον τρόπο η (3.11) θα γραφεί σαν συνάρτηση των συντεταγμένων και των ορμών. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_j, p_j)$.

Η συγκεκριμένη μορφή του τελεστή $\mathcal{H}$ θα καθοριστεί από την αναπαράσταση που έχουμε διαλέξει για τα q_j, p_j. Στην αναπαράσταση θέσης, τα q_j δρουν πολλαπλασιαστικά και τα p_j ως παραγωγίσεις ενώ στην αναπαράσταση ορμής γίνεται το αντίθετο.

Μια τελευταία σημαντική παρατήρηση αφορά στη χρήση της αναπαράστασης Schrödinger όπου οι τελεστές είναι ανεξάρτητοι του χρόνου και η χρονική εξέλιξη δίνεται από τις κυματοσυναρτήσεις ή της αναπαράστασης Heisenberg όπου οι τελεστές μεταβάλλονται και οι κυματοσυναρτήσεις είναι ανεξάρτητοι του χρόνου. Οι θεμελιώδεις μεταθετικές σχέσεις ισχύουν αυτούσιες και για τους τελεστές Heisenberg $q_j(t)$ και $p_j(t)$ υπό τον όρο ότι αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$[q_i(t), q_j(t)] = 0 \qquad [p_i(t), p_j(t)] = 0 \qquad [q_i(t), p_j(t)] = i\delta_{ij} \tag{3.13}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι γνωστές ως ισόχρονες μεταθετικές σχέσεις και τις αναφέρουμε ακριβώς για να τονιστεί το γεγονός ότι ισχύουν μόνο εφ΄ όσον οι δυο τελεστές του μεταθέτη έχουν κοινή χρονική μεταβλητή. Η ισχύς των (3.13) είναι προφανής αν θυμηθούμε ότι οι τελεστές Heisenberg συνδέονται με τους τελεστές Schrödinger μ΄ ένα μοναδιαίο μετασχηματισμό κάτω από τον οποίο όλες οι μεταθετικές σχέσεις διατηρούν τη μορφή τους.

Η γενίκευση των παραπάνω σε ένα Λαγκρανζιανό σύστημα με συνεχές πλήθος βαθμών ελευθερίας δηλαδή σε μια Λαγκρανζιανή θεωρία πεδίου είναι τελείως άμεση αρκεί να ανακαλέσουμε την αντιστοιχία

$$\begin{gathered} q_i(t) \equiv q(i,t) \to u(x,t) \qquad p_j(t) \equiv p(j,t) \to \pi(x,t) \\ i \to x, q \to u \quad j \to x, p \to \pi \end{gathered}$$

όπου $\pi(x,t)$ είναι η συζυγής ορμή του πεδίου $u(x,t)$ η οποία έχει ήδη οριστεί μέσω της σχέσης

$$\pi(x,t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \tag{3.14}$$

που είναι το συνεχές ανάλογο της $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$.

Αν στα παραπάνω προστεθεί ότι το συνεχές ανάλογο του συμβόλου Kronecker δ_{ij} είναι η δέλτα συνάρτηση $\delta(x-x')$ τότε η γενίκευση των παραπάνω ισόχρονων μεταβατικών σχέσεων για ένα συνεχές πεδίο θα έχουν ως εξής:

$$[u(x,t),u(x',t)]=0 \qquad [\pi(x,t),\pi(x',t)]=0$$
$$[u(x,t),\pi(x',t)]=i\delta(x-x') \tag{3.15}$$

Η κβάντωση ενός κλασικού πεδίου συνίσταται λοιπόν στην προαγωγή της πεδιακής ποσότητας $u(x,t)$ σε έναν τελεστή οριζόμενο σε όλα τα σημεία του χώρου και του χρόνου. Ένα τελεστικό πεδίο δηλαδή του οποίου ο τελεστικός χαρακτήρας ορίζεται από τις μεταθετικές σχέσεις (3.15).

Πιο κάτω θα δούμε ότι τα κβαντικά πεδία που προκύπτουν με αυτόν τον μαθηματικό μηχανισμό είναι πραγματικά κβαντισμένα με τη φυσική πια σημασία του όρου. Η ενέργεια και η ορμή τους μεταφέρεται από κβαντα που δεν είναι παρά σωματίδια που υπόκεινται όμως στην αρχή του κυματοσωματιδιακού δυισμού.

3.2 Η κβάντωση του πεδίου Klein - Gordon

Ένα προκαταρκτικό παράδειγμα είναι ο αρμονικός ταλαντωτής ως μια θεωρία πεδίου σ'ενα σημείο. Σκοπός αυτής εδώ της προκαταρκτικής εισαγωγής είναι να παρουσιάσει την γνωστή μας αλγεβρική θεωρία του αρμονικού ταλαντωτή μ΄ έναν τρόπο τελείως κατάλληλο με εκείνον που θα ακολουθήσουμε μετά, για την κβάντωση του πεδίου Klein - Gordon.

Όπως για την κβάντωση ενός τυχόντος Λαγκρανζιανού συστήματος το σημείο εκκίνησης μας θα είναι η Λαγκρανζιανή του ταλαντωτή

$$L=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{3.16}$$

Για την ανάπτυξη που θα ακολουθήσει θέτουμε $m=1$ αλλά κρατάμε το ω όπως είναι για να έχουμε την ευχέρεια να εξετάσουμε συστήματα πολλών αρμονικών ταλαντωτών με διαφορετικές συχνότητας που δεν μπορούν να γίνουν όλες μονάδα. Θα είναι λοιπόν

$$L=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\omega^2x^2 \tag{3.17}$$

που είναι μια μορφή τελείως ανάλογη με εκείνη της Λαγκρανζιανής πυκνότητας του πεδίου Klein - Gordon

$$L=\frac{1}{2}\phi_t^2-\frac{1}{2}\phi_x^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.18}$$

με το $\phi(x,t)$ στην θέση του $x(t)$, το m στην θέση του ω και την αυτονόητη βέβαια απουσία από την (3.16) του όρου ϕ_x^2 αφού το $x(t)$ δεν έχει χωρική εξάρτηση. Είναι κατά κάποιο τρόπο ένα πεδίο ορισμένο μόνο σε ένα σημείο του χώρου.

Η συζυγής ορμή $p(t)$ θα ισούται με $p = \partial L/\partial \dot{x}$ και η κανονική κβάντωση του συστήματος (που έχει μόνο ένα βαθμό ελευθερίας) συνίσταται στο να επιβάλουμε στους τελεστές Heisenberg $x(t)$ και $p(t)$ την ισόχρονη μεταθετική σχέση (3.13)

Θα μελετήσουμε τώρα το κβαντισμένο πεδίο Klein - Gordon και την φυσική του ερμηνεία. Θα μελετήσουμε το ανάπτυγμα του πεδίου σε επίπεδα κύματα και την ερμηνεία των συντελεστών του ως τελεστών δημιουργίας και καταστροφής σωματιδίων.

Σε αυτήν την παράγραφο προχωρούμε στην λεγομένη δεύτερη κβάντωση της εξίσωσης Klein - Gordon από την οποία θα προκύψει μια συνεπής σχετικιστική θεωρία των σωματιδίων με σπιν μηδέν. Στο προηγούμενο κεφάλαιο τονίσαμε ότι η μαθηματική διαδικασία της κβάντωσης ενός πεδίου συνίσταται στην προαγωγή του πεδιακού μεγέθους $\phi = \phi(x,t)$ σε ένα τελεστικό πεδίο που θα υπακούει στις ισόχρονες μεταθετικές σχέσεις (3.15). Θα κατασκευάσουμε τις κβαντικές καταστάσεις, θα μελετήσουμε τις ιδιότητες τους και θα επιδείξουμε ότι τα σωματίδια Klein - Gordon είναι μποζόνια. Αφετηρία είναι η θεμελιώδης κατάσταση της Χαμιλτονιανής του πεδίου που συμβολίζεσαι πάντα ως $|0>$ και φέρει συνήθως το όνομα *κατάσταση κενού* (vacuum state) ή απλώς το κενό της θεωρίας. Το "κενο" χαρακτηρίζεσαι μονοσήμαντα από την συνθήκη

$$a_k|0>= 0 \qquad \forall k \tag{3.19}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το προφανές γεγονός ότι είναι η χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση του συστήματος και επομένως η δράση όλων των τελεστών καταστροφής a_k θα πρέπει να την εκμηδενίζει αφού δεν είναι δυνατόν να μεταβούμε σε κατάσταση ακόμη χαμηλότερης ενέργειας. Η κατάσταση

$$|k>= a_k^+|0> \qquad \forall k \tag{3.20}$$

που προκύπτει από το κενό με δράση του τελεστή δημιουργίας a_k^+ είναι η κατάσταση ενός σωματιδίου με ορμή ίση με k και ενέργεια ίση με $\omega_k = E_k = \sqrt{k^2+m^2}$.

Θα καταλήξουμε έτσι στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι τα σωματίδια του κβαντισμένου πεδίου Klein - Gordon είναι υποχρεωτικά μποζόνια. Οι καταστάσεις που τα περιγράφουν έχουν εκ κατασκευής την συμμετρία που απαιτεί η γενικευμένη αρχή του Pauli για μποζόνια. Ξέρουμε από την άλλη μεριά ότι το πεδίο Klein - Gordon επειδή πραγματικά είναι βαθμωτό περιγράφει σωματίδια με σπιν ίσο με το μηδέν. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να διατυπωθεί λοιπόν ως εξής:

Στα πλαίσια της σχετικιστικής κβαντομηχανικής τα σωματίδια με σπιν μηδέν είναι αναγκαστικά μποζόνια.

Η διαφορά με την μη σχετικιστική κβαντομηχανική ως προς αυτό το σημείο είναι θεμελιώδης. Εκεί η σύνδεση σπιν και στατιστικής (διάκριση μποζονίου και φερμιονίων) είναι ανύπαρκτη. Ανεξάρτητα από το σπιν τους μια συλλογή ταυτοσήμων μη σχετικιστικών σωματιδίων μπορεί να περιγράφει είτε με συμμετρικές είτε με αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις. Η επιλογή του καταλλήλου τύπου συμμετρίας γίνεται με βάση το εμπειρικό δεδομένο ότι τα σωματίδια με ημιακέραιο σπιν υπακούουν στην αρχή του Pauli ενώ τα αλλά όχι.

Στην σχετικιστική κβαντομηχανική αυτή η θεμελιώδης θεωρητική εκκρεμότητα αίρεται. Τουλάχιστον για σωματίδια με σπιν μηδέν ο μποζονικός τους χαρακτήρας είναι αναγκαστικός. Όμως σε αυτό το βασικό ζήτημα θα επανέλθουμε στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα επιχειρηθεί η κβάντωση ενός μόνο πεδίου του πεδίου Dirac που περιγράφει σωματίδια με σπιν 1/2. Μόνο τότε θα γίνει πραγματικά κατανοητό πως η τιμή του σπιν επιβάλλει την κατάλληλη στατιστική για το κάθε είδος σωματιδίων. Η σύνδεση σπιν και στατιστικής όπως θα αναδυθεί από αυτήν την μελέτη είναι από τα θεμελιώδη επιτεύγματα της σχετικιστικής κβαντομηχανικής.

Το κβαντισμένο ηχητικό πεδίο σε ένα στερεό είναι ειδική περίπτωση ενός πεδίου Klein - Gordon. Τα ηχητικά κύματα σε ένα στερεό σώμα δεν είναι παρά μικροσκοπικές ταλαντώσεις των ατόμων του γύρω από τη θέση ισορροπίας τους, οι οποίες διαδίδονται μέσα στο σώμα με μια ορισμένη ταχύτητα c που είναι χαρακτηριστική του υλικού. Ένα πραγματικό στερεό δεν είναι βεβαίως μια συνεχής κατανομή ύλης. Αποτελείται από άτομα τοποθετημένα αν πρόκειται για κρυσταλλικό στερεό στις κανονικές θέσεις ενός κρυσταλλικού πλέγματος και με τη δυνατότητα βέβαια να εκτελούν μικρές ταλαντώσεις γύρω απάυτές.

Η κβάντωση του ηχητικού πεδίου δίνει τα φωνόνια ως ηχητικά κβαντα. Κύριο θέμα μας είναι η κβάντωση του ηχητικού πεδίου όπως αυτό περιγράφεται από την κυματική εξίσωση

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad c = 1 \tag{3.21}$$

Η ανάγκη να κβαντωθεί αυτό το πεδίο είναι φανερή. Σε αντίθεση με τα κύματα μιας χορδής ή τα κύματα της θάλασσας όπου έχει να κάνει κανείς με μακροσκοπικές κινήσεις μαζών στα ηχητικά κύματα δεν συμβαίνει το ίδιο. Εδώ το κύμα δεν είναι παρά η συλλογική εκδήλωση της μικροσκοπικής κίνησης πολλών μικροσκοπικών αντικειμένων. Δεδομένου ότι κάθε μια από αυτές τις μικροσκοπικές κινήσεις θα πρέπει να περιγράφεται κβαντικά διότι πρόκειται για άτομα που "παλλονται" σε περιοχές της τάξεως του Angstrom. Το ίδιο θα πρέπει να γίνει και με τη συλλογική τους εκδήλωση δηλαδή το ηχητικό κύμα.

Έτσι η (3.21) θα πρέπει να θεωρηθεί ως μια κβαντική κυματική εξίσωση και από αυτή την θεώρηση να προέλθει και η φυσική της ερμηνεία, η οποία βεβαίως μας είναι ήδη γνωστή. Η κυματική εξίσωση δεν είναι παρά η εξίσωση Klein - Gordon με $m = 0$ και επομένως όλα όσα είπαμε προηγουμένως ισχύουν σημείο προς σημείο και εδώ με μοναδική αλλαγή τον μηδενισμό του $m = 0$ στη σχέση διασποράς (σχέση συχνότητας και κυματαριθμου).

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \tag{3.22}$$

η οποία παίρνει τώρα τη γραμμική μορφή $\omega_k = k\,(= ck)$.

Συμπέρασμα: Στην κβαντική τους εκδοχή τα ηχητικά κύματα στο εσωτερικό ενός στερεού φέρονται από 'ήχητικα κβαντα" γνωστά ως φωνόνια τα οποία συμπεριφέρονται εντός του κρυστάλλου σαν σωματίδια με σχέση ενέργειας - ορμής $E = \hbar\omega_k = c\hbar k = cp$, που είναι ταυτόσημα με εκείνη των φωτονίων μόνο που η ταχύτητα του φωτός έχει αντικατασταθεί με την ταχύτητα του ήχου μέσα στο στερεό.

3.3 Η κβάντωση του πεδίου Dirac

3.3.1 Λαγκρανζιανός φορμαλισμός για την εξίσωση Dirac

Το πρώτο πράγμα για την κβάντωση της εξίσωσης Dirac όπως και κάθε πεδιακής εξίσωσης είναι να βρούμε την Λαγκρανζιανή που την παράγει μέσω των εξισώσεων Euler - Lagrange. Θα δούμε ότι ανεξάρτητα από την μορφή της Χαμιλτονιανής κάθε εξίσωση του γενικού τύπου

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \tag{3.23}$$

προέρχεται από την Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$L = \psi^*(i\partial_t - \mathcal{H})\psi \qquad \acute{\eta} \qquad L = \psi^+(i\partial_t - \mathcal{H})\psi \tag{3.24}$$

Αν η κυματοσυνάρτηση ψ έχει περισσότερες από μια συνιστώσες όπως συμβαίνει στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει εδώ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ψ^+, που δηλώνει τότε το συζυγές διάνυσμα του ψ.

Εδώ θα υποθέσουμε ότι η ψ έχει μια συνιστώσα και θα δούμε ότι όλα τα αποτελέσματα μας είναι άμεσα γενικεύσιμα με την απλή αντικατάσταση του ψ^* με το ψ^+. Εδώ το $\psi(x,t)$ θεωρείται ως κλασικό πεδίο. Όμως τώρα το ψ είναι ένα πεδίο με μιγαδικές τιμές και επομένως έχει δυο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε σημείο που πρέπει να καταμετρηθούν ως ανεξάρτητοι.

Το πεδίο Dirac καλείται να περιγράψει σωματίδια με σπιν 1/2 τα οποία ξέρουμε ότι συμπεριφέρονται ως φερμιόνια, ότι δηλαδή υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli. Για το πεδίο Klein - Gordon δεν υπάρχει δυνατότητα φερμιονικής κβάντωσης. Τα σωματίδια που περιγράφει (που ξέρουμε ότι έχουν σπιν μηδέν) θα είναι υποχρεωτικά μποζόνια. Η σύνδεση σπιν και στατιστικής σε αυτήν την περίπτωση έχει πλέον την ισχύ θεωρήματος. Για το πεδίο Dirac αντίθετα θα δούμε ότι η μορφή της Χαμιλτονιανής του, συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, καθιστά υποχρεωτική την κβάντωση του μέσω αντιμεταθετικών σχέσεων. Τα σωματίδια με σπιν 1/2 δεν έχουν άλλη επιλογή παρά να είναι φερμιόνια.

3.3.2 Το κβαντισμένο πεδίο Dirac

Το βασικό βήμα για τη φυσική ερμηνεία ενός κβαντισμένου πεδίου είναι να αναπτύξουμε τη γενική του λύση σε επίπεδα κύματα και να ερμηνεύσουμε κατόπιν τους συντελεστές αυτού του αναπτύγματος ως τελεστές που δημιουργούν ή καταστρέφουν σωματίδια που έχουν καθορισμένη ορμή και ενέργεια. Στην περίπτωση της ελεύθερης εξίσωσης Dirac, είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι οι λύσεις της εξίσωσης με καθορισμένη ορμή και ενέργεια είναι τα επίπεδα κύματα και έχουν την μορφή

$$\psi_{k,\omega_k} = u(k)e^{i(kx-\omega_k t} \qquad \psi_{k,-\omega_k} = v(k)e^{i(kx+\omega_k t} \tag{3.25}$$

όπου $u(k), v(k)$ είναι τα κανονικοποιημένα διανύσματα

$$u(k) = \sqrt{\frac{\omega_k + m}{2\omega_k}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k}{\omega_k+m} \end{pmatrix} \qquad v(k) = \sqrt{\frac{\omega_k - m}{2\omega_k}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-k}{\omega_k-m} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

που αντιστοιχούν το μεν πρώτο στις λύσεις θετικής ενέργειας το δε δεύτερο στις λύσεις αρνητικής ενέργειας αλλά και στις δυο περιπτώσεις η ορμή είναι ίση με k. Είναι πραγματικά ιδιοδιανύσματα μιας ερμητιανής μήτρας της

$$\mathcal{H}(k) = ak + \beta m = \begin{pmatrix} m & k \\ k & -m \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Με διαφορετικές ιδιοτιμές τα διανύσματα (3.26) ικανοποιούν επιπλέον και τη σχέση ορθογωνιότητας

$$< u|v > \equiv u^{+}(k)v(k) = 0 \tag{3.28}$$

Στην περίπτωση της εξίσωσης Klein - Gordon χρησιμοποιήσαμε ως βάση όχι τις δυο λύσεις της με την ίδια ορμή και αντίθετο πρόσημο ενέργειας αλλά δυο λύσεις με αντίθετη ορμή και ενέργεια. Το πλεονέκτημα αυτής της εκλογής ήταν οι δυο νέες ανεξάρτητες λύσεις να είναι αμοιβαία συζυγείς οπότε και οι συντελεστές τους στο ανάπτυγμα της γενικής λύσης θα είχαν σχέση αμοιβαίας συζυγίας ως τελεστές, επειδή διαδραματίζουν ρόλο τελεστών δημιουργίας και καταστροφής.

Κάτι ανάλογο είναι αναγκαίο να γίνει και εδώ. Αντί δηλαδή των (3.25) είναι σκόπιμο να πάρουμε ως ζεύγος ανεξαρτήτων λύσεων τις

$$\psi_{k,\omega_k} = u(k)e^{i(kx-\omega_k t} \qquad \psi_{-k,-\omega_k} = v(-k)e^{-i(kx-\omega_k t} \tag{3.29}$$

που έχουν όχι μόνο αντίθετο πρόσημο ενέργειας αλλά και ορμής και σαν αποτέλεσμα αυτού τα μιγαδικά τους μέρη (που είναι προφανώς τα εκθετικά) θα είναι το ένα το συζυγές του άλλου.

Ο υπολογισμός της Χαμιλτονιανής του πεδίου Dirac που δίδεται όπως είδαμε από την έκφραση

$$\mathcal{H} = \int \psi^+(H\psi)dx \tag{3.30}$$

όπου $\mathcal{H} = ap + \beta m$ η Χαμιλτονιανή της μονοδιάστατης εξίσωσης Dirac.Μετά από ορισμένες πράξεις λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$\mathcal{H} = \sum_k \left(c_k^+ c_k - d_k d_k^+\right)\omega_k \tag{3.31}$$

Την Χαμιλτονιανή αυτή φαίνεται ότι θα μπορούσαμε να την μαντέψουμε αμέσως αν σκεφτόμασταν ότι η δεν ήταν παρά μια κλασική λύση της εξισώσεως Dirac και όχι ένα κβαντισμένο πεδίο. Η έκφραση (3.11) της πεδιακής Χαμιλτονιανής δεν ήταν τίποτα άλλο παρά η μέση τιμή της ενέργειας ενός σωματιδίου που η κατάσταση του θα περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση του Dirac $\psi(x,t)$.

Τι είναι αυτά ακριβώς τα σωματίδια. Ειδικότερα, ποιά είναι η διαφορά μεταξύ των κβάντων (=σωματιδιων) τύπου c και τύπου d που δημιουργούνται από τα δυο είδη τελεστών δημιουργίας και καταστροφής που εμφανίζονται στο πεδίο Dirac· Η απάντηση προκύπτει πολύ εύκολα αν υπολογίσουμε συναρτήσει των τελεστών c_k και d_k την διατηρήσιμη ποσότητα

$$\mathcal{Q} = \int \psi^+\psi dx \tag{3.32}$$

της οποίας το φυσικό νόημα θα φανεί αμέσως αν θυμηθούμε ότι στα πλαίσια της θεωρίας Dirac (ως μονοσωματιδιακής θεωρίας) η συνάρτηση $\rho(x) = \psi^+(x)\psi(x)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας και άρα και η πυκνότητα φορτίου αν πολλαπλασιαστεί με το φορτίο των σωματιδίων που μπορεί πάντα να θεωρηθεί ως ίσο με την μονάδα. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει κανείς πιο πειστικά αν κάνει στην Λαγκρανζιανή του ελευθέρου πεδίου Dirac

$$L = \psi^+(i\partial_t\psi) - \psi^+(H\psi) \tag{3.33}$$

την ελάσσονα αντικατάσταση

$$i\partial_t \to i\partial_t - q\phi \qquad (c = 1) \tag{3.34}$$

για να βρει τον τρόπο σύζευξης του με ένα ηλεκτροστατικό δυναμικό $\phi = \phi(r)$.

Τώρα για την κατασκευή των καταστάσεων του κβαντισμένου πεδίου Dirac, όπως και στην περίπτωση του πεδίου Klein - Gordon θα είναι

$$|k >= c_k^+|0> \qquad |q >= d_q^+|0> \tag{3.35}$$

Η πρώτη κατάσταση αντιπροσωπεύει ένα σωματίδιο ορμής k και η δεύτερη ένα αντισωματίδιο ορμής q. Μια κατάσταση δυο σωματιδίων θα έχει και πάλι τη μορφή

$$|k_1, k_2 >= c_{k_1}^+ c_{k_2}^+|0> \tag{3.36}$$

Μόνο που τώρα ισχύει η αντιμεταθετική σχέση

$$\{c_{k_1}^+, c_{k_2}^+\} = c_{k_1}^+ c_{k_2}^+ + c_{k_2}^+ c_{k_1}^+ = 0 \tag{3.37}$$

λόγω της οποίας θα είναι

$$|k_1, k_2 >= -|k_2, k_1> \tag{3.38}$$

που δεν είναι άλλη παρά η γενικευμένη αρχή του Pauli για τα φερμιόνια. Για $k_1 = k_2 = k$ η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι

$$|k, k >= 0 \tag{3.39}$$

δηλαδή την απαγορευτική αρχή του Pauli για την κατάσταση ορμής k. Δεν υπάρχει δυνατότητα για την διπλή κατάληψη της ίδιας κατάστασης με ορμή ίση με k.

Όλα τα προηγούμενα επεκτείνονται χωρίς καμία δυσκολία και στην τρισδιάστατη περίπτωση. Πέρα από την τετριμμένη αλλαγή του k σε $\vec{k}$ και του x σε $\vec{r}$ στην έκφραση των επιπέδων κυμάτων το μόνο πραγματικό νέο στοιχείο είναι η παρουσία των βαθμών ελευθερίας που εισάγει η ύπαρξη του σπιν. Έτσι οι λύσεις θετικής και αρνητικής ενέργειας θα χαρακτηρίζονται τώρα και από έναν πρόσθετο δείκτη s με δυο δυνατές τιμές όσες δηλαδή και οι τιμές της προβολής του σπιν σε κάποια κατεύθυνση. Θα είναι συγκεκριμένα

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\psi_{k,\omega_k} = u_s(k)e^{i(kx-\omega_k t} \qquad \frac{1}{\sqrt{V}}\psi_{-k,-\omega_k} = v_s(k)e^{-i(kx-\omega_k t} \tag{3.40}$$

όπου $s = 1$ ή $s = 2$. Το φυσικό νόημα αυτών των λύσεων όσον αφορά την ορμή και την ενέργεια είναι φανερό. Η πρώτη αντιστοιχεί σε καθορισμένη ορμή $\vec{k}$ και θετική ενέργεια $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ ενώ στην δεύτερη και τα δυο αυτά μεγέθη έχουν αντίθετο πρόσημο. Ο δείκτης s συνδέεται βέβαια με το σπιν. Μια από τις δυνατές περιγραφές είναι να διαλέξουμε ως άξονα προβολής του σπιν την ίδια την κατεύθυνση του $\vec{k}$ που ορίζει η κίνηση του σωματιδίου.

3.3.3 Φερμιονική και μποζονική κβάντωση

Η αναγκαιότητα της φερμιονικής κβάντωσης του πεδίου Dirac δεν προκύπτει από την ύπαρξη λύσεων αρνητικής ενέργειας διότι και στα δύο πεδία είναι παρούσες Η απάντηση θα φανεί εύκολη αν αντιπαραβάλλουμε τις Χαμιλτονιανές των δυο πεδίων

$$\mathcal{H} = (1/2) \int \left(\phi_t^2 + \phi_x^2 + m^2\phi^2\right) dx \qquad \mathcal{H} = \int \psi^+(H\psi)dx \tag{3.41}$$

Η διαφορά είναι θεμελιώδης. Αν τα ϕ και ψ θεωρηθούν ως κλασικά πεδία τότε η Χαμιλτονιανή του πεδίου Klein - Gordon είναι μια θετικά ορισμένη ποσότητα ενώ εκείνη του πεδίου Dirac όχι. Επειδή είναι η μέση τιμή μιας μονοσωματιδιακής Χαμιλτονιανής H με θετικό και αρνητικό φάσμα, θα παίρνει θετικές η αρνητικές τιμές ανάλογα με το αν υπερισχύουν οι λύσεις θετικής ή η λύσεις αρνητικής ενέργειας σε μια τυχούσα κατάσταση επαλληλίας. Σε κλασικό λοιπόν επίπεδο κατάρχάς η Χαμιλτονιανή Klein - Gordon δεν διατρέχει κανένα κίνδυνο να δώσει αρνητικές τιμές όσο ισχυρή και αν είναι η συμμετοχή των λύσεων αρνητικής ενέργειας στο ανάπτυγμα του πεδίου σε επίπεδα κύματα. Η ενέργεια του πεδίου θα είναι πάντα μια θετική ποσότητα. Η ενέργεια του πεδίου Dirac αντίθετα θα είναι μια αόριστη έκφραση που μπορεί να γίνει απεριόριστα θετική η απεριόριστα αρνητική. Δεν έχει ούτε πάνω φράγμα (αυτό δεν μας πειράζει) αλλά ούτε και κάτω, το οποίο είναι φυσικά απαράδεκτο.

Τώρα όταν τα πεδία γίνουν κβαντικά τι συμβαίνει όταν οι συντελεστές των γενικών τους λύσεων δεν θα είναι πλέον κοινοί αριθμοί αλλά μη μετατιθέμενοι εν γένει τελεστές· Η απάντηση βρίσκεται στο είδος της μη μεταθετικότητας που επιβάλλει η μια ή η άλλη κβάντωση στους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής.

Αν η άλγεβρα είναι μποζονική τότε θα έχουμε πάντα

$$AB = BA + 1 \qquad ή \qquad AB = BA$$

Δηλαδή οι τελεστές ή θα μετατίθενται ή αν όχι η αλλαγή της σειράς τους θα προκαλεί την εμφάνιση ενός σταθερού όρου αν βέβαια οι εκφράσεις που υπολογίζουμε είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού ως προς τους τελεστές του προβλήματος όπως συμβαίνει και στην περίπτωση των ελευθέρων πεδίων που μας ενδιαφέρει εδώ. Η Χαμιλτονιανή η ορμή το φορτίο κλπ είναι δευτεροβάθμια πολυώνυμα ως προς τους πεδιακούς τελεστές.

Δεδομένου τώρα ότι ένας κλασικός υπολογισμός μιας πεδιακής ποσότητας (ενέργειας, ορμής κλπ) διαφέρει από τον αντίστοιχο κβαντικό μόνο ως προς την πιθανή αλλαγή σειράς σε γινόμενα δυο τελεστών, είναι φανερό ότι η χρήση μποζονικής άλγεβρας θα διατηρήσει τα πρόσημα σε όλους τους όρους του αντιστοίχου κλασικού υπολογισμού και θα τον τροποποιήσει μόνο κατά κάποιους σταθερούς προσθετέους οι οποίοι απορρίπτονται ούτως ή άλλως. Αντιπροσωπεύουν την (άπειρη) ενέργεια φορτίο κλπ του κενού.

Το συμπέρασμα είναι σαφές. Η χρήση μποζονικής άλγεβρας διατηρεί τον θετικό, αρνητικό η αόριστο χαρακτήρα της αρχικής κλασικής έκφρασης. Αν ήταν θετική θα την μετατρέψει σ'έναν θετικά ορισμένο τελεστή και αν ήταν μεταβλητού πρόσημου το ίδιο θα ισχύει και για τις μέσες τιμές η τις ιδιοτιμές του αντιστοίχου κβαντικού τελεστή.

Τα πράγματα δεν είναι έτσι με τη φερμιονική άλγεβρα. Εδώ για ένα τυχόν ζεύγος τελεστών A, B όπου εννοούμε πάντα τελεστές δημιουργίας η καταστροφής, θα είναι

$$AB = -BA + 1 \qquad \text{ή} \qquad AB = -BA$$

το οποίο σημαίνει ότι και εδώ η αλλαγή πρόσημου απλώς προσθέτει κάποιους σταθερούς όρους που όμως δεν έχουν φυσική σημασία όπως είπαμε. Η φερμιονική άλγεβρα έχει λοιπόν την δυνατότητα να μεταβάλλει το ανεπιθύμητο αρνητικό πρόσημο κάποιων όρων της αντίστοιχης κλασικής έκφρασης και να την μετατρέψει από αόριστη σε θετικά ορισμένη.

Κατόπιν όλων αυτών γίνεται πλέον φανερή η αιτία της διαφορετικής κβάντωσης των πεδίων Klein - Gordon και Dirac. Παρ'οτι και στα δυο υπάρχουν λύσεις αρνητικής ενέργειας εν τούτοις δεν επηρεάζουν το πρόσημο της Χαμιλτονιανής με τον ίδιο τρόπο. Στο πεδίο Klein - Gordon η κλασική Χαμιλτονιανή είναι μια θετικά ορισμένη έκφραση και αυτή η θετικότητα σίγουρα διατηρείται με την κβάντωση του ως μποζονικού πεδίου.

Στο πεδίο Dirac που διέπεται από μια εξίσωση τύπου Schrödinger η πεδιακή Χαμιλτονιανή θα έχει τη μορφή μιας κβαντομηχανικής μέσης τιμής οπότε εκεί απαιτείται φερμιονική κβάντωση ώστε να αλλάξουν πρόσημο οι όροι που προέρχονται από τις λύσεις αρνητικής ενέργειας και να φτάσουμε έτσι σε μια θετικά ορισμένη κβαντική έκφραση. Ο βασικός παράγοντας που καθορίζει το είδος της κβάντωσης ενός σχετικιστικού πεδίου είναι λοιπόν η θετικότητα ή ο αόριστος χαρακτήρας της κλασικής Χαμιλτονιανής που το περιγράφει.

3.4 Το κβαντισμένο πεδίο Schrödinger

Τι συμβαίνει αν επιχειρήσει κανείς μια δεύτερη κβάντωση της εξίσωσης Schrödinger. Να θεωρήσει δηλαδή την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ ως ένα κβαντικό πεδίο που ο τελεστικός του χαρακτήρας θα προσδιορίζεσαι από τις κανονικές μποζονικές μεταθετικές σχέσεις

$$\begin{aligned} [\psi(x,t),\psi(x',t)] = \left[\psi^+(x,t),\psi^+(x',t)\right] = 0 \\ \left[\psi(x',t),\psi^+(x',t)\right] = i\delta(x-x') \end{aligned} \tag{3.42}$$

ή ενδεχομένως τις κανονικές φερμιονικές σχέσεις

$$\begin{aligned} \{\psi(x,t),\psi(x',t)\} = \left\{\psi^+(x,t),\psi^+(x',t)\right\} = 0 \\ \left\{\psi(x,t),\psi^+(x',t)\right\} = i\delta(x-x') \end{aligned} \tag{3.43}$$

Είναι γνωστό ότι η μονοδιάστατη εξίσωση του Shrödinger παράγεται από την Λαγκρανζιανή

$$L = \psi^*(i\partial_t - \mathcal{H})\psi \tag{3.44}$$

και άρα η συζυγής ορμή του πεδίου ψ θα είναι η

$$\pi_\psi = i\psi^* \tag{3.45}$$

Οπότε οι παραπάνω μεταθετικές σχέσεις προκύπτουν αμέσως από την γενική μορφή των κανονικών μεταβατικών σχέσεων, του ενός ή του άλλου τύπου, χρησιμοποιώντας την (3.45) αλλά με το ψ^+ στην θέση του ψ^* μια και έχουμε να κάνουμε τώρα με ένα μοναδικό κβαντικό πεδίο.

Η δεύτερη κβάντωση της μη σχετικιστικής μονοσωματιδιακής εξίσωσης του Schrödinger δεν μας δίνει κανένα καινούργιο φυσικό συμπέρασμα. Μπορεί να κβαντωθεί είτε με μεταθετικές είτε με αντιμεταθετικές σχέσεις. Σαν κβαντισμένο πεδίο μπορεί να περιγράψει είτε μποζόνια είτε φερμιόνια είναι συμβιβαστή και με τα δύο. Το κβαντισμένο πεδίο Schrödinger προσφέρει μια ισοδύναμη περιγραφή ενός συστήματος ανεξαρτήτων φερμιονίων ή μποζονίων που κινούνται σε ένα κοινό εξωτερικό δυναμικό.

Αντιθέτως οι δύο άλλες σχετικιστικές εξισώσεις δεν έχουν νόημα ως μονοδιάστατες θεωρίες. λόγω του προβλήματος των αρνητικώς ενεργειών που κατατρύχει και τις δύο. Οι εξισώσεις αυτές επιδέχονται μόνο το ένα ή το άλλο είδος της κβάντωσης.

Ο φορμαλισμός της δεύτερης κβάντωσης διαθέτει ένα σημαντικό τεχνικό πλεονέκτημα έναντι της συνήθους περιγραφής συστημάτων με πολλά ταυτόσημα σωματίδια. Ο τύπος συμμετρίας των καταστάσεων (πλήρως συμμετρικές η πλήρως αντισυμμετρικές) είναι εξάρχής ενσωματωμένος στην αλγεβρική δομή της θεωρίας και δεν επιβάλλεται εξωτερικά όπως στη συνήθη περιγραφή. Για συστήματα με περισσότερα των δυο σωματίδια π.χ. πολυηλεκτρονικά άτομα, πυρήνες, στερεά, αυτό είναι ένα σαφές πλεονέκτημα που κατατάσσει τον φορμαλισμό της δεύτερης κβάντωσης στα σημαντικά εργαλεία της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής.

Η εντοπισιμότητα και η διατήρηση του αριθμού των σωματιδίων είναι μια θεμελιώδης διαφορά μεταξύ σχετικιστικών και μη σχετικιστικών θεωριών. Στην μη σχετικιστική κβαντομηχανική έχουμε την δυνατότητα να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου με όση ακρίβεια επιθυμούμε φτάνοντας μέχρι και τον απόλυτο εντοπισμό. Σε μια σχετικιστική θεωρία αυτό δεν είναι πια δυνατόν. Αν η διάσταση της περιοχής εντοπισμού γίνει μικρότερη από το μήκος κύματος Compton του σωματιδίου τότε η αρχή της αβεβαιότητας θα εξωθήσει την ενέργεια του πέρα από το κατώφλι παραγωγής νέων σωματιδίων καθιστώντας έτσι αβέβαιο τον αριθμό τους μέσα στην περιοχή εντοπισμού.

Αν ειδικότερα το ''άπειλουμενο'' με υπερβολικό εντοπισμό σωματίδιο φέρει φορτίο η κάποιον άλλο προσθετικό κβαντικό αριθμό τότε η απόκριση της θεωρίας θα είναι η παραγωγή ζευγών σωματιδίων - αντισωματιδίων, έτσι ώστε το ολικό ''φορτιο'' μέσα στην περιοχή εντοπισμού να παραμείνει σταθερό. Αν το σωματίδιο δεν φέρει κανένα τέτοιο φορτίο - όπως τα σωματίδια ενός πραγματικού πεδίου Klein - Gordon - τότε θα υπάρξει παραγωγή και άλλων ομοίων του σωματιδίων αφού κανένας νόμος διατήρησης δεν το απαγορεύει. Αντιλαμβανόμαστε έτσι ότι η εντοπισιμότητα (η μη) και η διατήρηση (η μη) του αριθμού των σωματιδίων δεν είναι παρά οι δυο όψεις του ίδιου νομίσματος.

Στην μη σχετικιστική κβαντομηχανική ο αριθμός των σωματιδίων είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα οπότε η θεωρία δεν έχει οδό διαφυγής ενάντια στον οποιοδήποτε ισχυρό εντοπισμό των σωματιδίων της. Ένα εμφανιζόμενο σωματίδιο θα παραμείνει ένα σωματίδιο όση κινητική ενέργεια και αν έχει αποκτήσει. Στην σχετικιστική κβαντομηχανική αντίθετα είτε δεν υπάρχει κανένας σχετικός νόμος διατήρησης (περίπτωση ενός πραγματικού πεδίου) είτε αν υπάρχει (περίπτωση ενός μιγαδικού πεδίου) αυτός θα αφορά το ολικό ''φορτιο'' δηλαδή τη διαφορά του αριθμού σωματιδίων και αντισωματιδίων. Και στις δυο περιπτώσεις ο αριθμός των σωματιδίων του ίδιου είδους δεν αποτελεί διατηρήσιμη ποσότητα και η θεωρία έχει τη δυνατότητα να μεταφέρει την ενέργεια εντοπισμού σε νέα σωματίδια. Ο απόλυτος εντοπισμός γίνεται έτσι αδύνατος.

Τόσο στο πεδίο Dirac όσο και στο πεδίο Schrödinger ο μετασχηματισμός φάσης

$$\psi \to e^{ia}\psi \tag{3.46}$$

είναι μια συμμετρία της Λαγκρανζιανής του, με αντίστοιχη διατηρήσιμη ποσότητα το ολικό φορτίο

$$\mathcal{Q} = \int \psi^{+}(x)\psi(x)dx \tag{3.47}$$

Στην μονοσωματιδιακή θεωρία δεν είναι παρά το ολοκλήρωμα κανονικοποίησης της κατάστασης επαλληλίας και άρα θα ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των συντελεστών της το οποίο στην κβαντισμένη θεωρία θα μετατρέπεται στην τελεστική έκφραση

$$\mathcal{Q} = \sum_{n} a_n^{+} a_n = \sum_{n} N_n = N \tag{3.48}$$

που προφανώς μετράει τον ολικό αριθμό σωματιδίων που είναι παρόντα στις διάφορες καταστάσεις του συστήματος.

Διαπιστώνουμε έτσι ότι στο μη σχετικιστικό πεδίο Schrödinger, ο ίδιος ο αριθμός των σωματιδίων είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα σε αντίθεση με την εξίσωση Dirac όπου μόνο η ολική διαφορά σωματιδίων αντισωματιδίων υπόκειται σε διατήρηση.

Κεφάλαιο 4

Η Θεωρία των Yang - Mills

4.1 Η κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

4.1.1 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Στην ιστορία της φυσικής το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο κατέχει μια μοναδική θέση. Σχεδόν όλες οι θεμελιώδεις φυσικές ανακαλύψεις προήλθαν από τη μελέτη αυτού του πεδίου. Η σταθερότητα της ταχύτητας του φωτός οδήγησε, στη θεωρία της σχετικότητας, ενώ η θερμική ισορροπία ύλης και ακτινοβολίας έφερε στην επιφάνεια την αφετηριακή ιδέα της κβαντικής θεωρίας. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αποτέλεσε επίσης το πρώτο επιτυχές υπόδειγμα ενοποίησης δυο φαινομενικά διαφορετικών δυνάμεων - των ηλεκτρικών και των μαγνητικών - ενώ αναγνωρίζεται σήμερα ως το πρότυπο πεδίο για την ενοποίηση όλων των θεμελιωδών δυνάμεων του μικρόκοσμου με εξαίρεση το πεδίο βαρύτητας. Φαίνεται πως όλες οι άλλες δυνάμεις της φύσεως συντίθενται σε ένα είδος γενικευμένου ηλεκτρομαγνητισμού. **Είναι όλες θεωρίες βαθμίδας**.

Όμως παρά το γεγονός ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο υπήρξε ο "πατέρασ" τόσο της σχετικότητας όσο και της κβαντομηχανικής και είναι η μοναδική εκείνη φυσική οντότητα όπου η συνύπαρξη αυτών των δυο θεμελιωδών θεωριών επιτυγχάνεται τόσο έκδηλα, εν τούτοις η μελέτη του ως σχετικιστικού κβαντικού πεδίου δεν έρχεται πρώτη στον κατάλογο των κεφαλαίων ενός βιβλίου σχετικιστικής κβαντομηχανικής. Συνήθως έρχεται τελευταία και οι λόγοι είναι γνωστοί.

Η κβάντωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι τεχνικά πιο περίπλοκη. Πρώτον διότι πρόκειται για ένα διανυσματικό πεδίο και δεύτερον διότι η περιγραφή του είναι σκόπιμο να γίνει μέσω δυο βοηθητικών πεδίων (ενός βαθμωτού και ενός διανυσματικού) τα οποία όμως δεν ορίζονται μονοσήμαντα και περιέχουν ως εκ τούτος πρόσθετους και μάλλον αφύσικους βαθμούς ελευθερίας.

Ξεκινάμε από τις εξισώσεις Maxwell στο κενό, οι οποίες περιγράφουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ως αυτόνομη φυσική οντότητα ανεξάρτητη από τις πηγές που το δημιούργησαν. Στο σύστημα $C.G.S$ έχουν την μορφή:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{4.1}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{4.2}$$

Όπως ξέρουμε η τρίτη από τις εξισώσεις αυτές, η οποία ισχύει και παρουσία πηγών, ικανοποιείται αυτόματα αν θέσουμε

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{4.3}$$

όπου το $\vec{A}$ είναι το λεγόμενο διανυσματικό δυναμικό. Εισάγοντας την εξίσωση αυτή στην δεύτερη από τις εξισώσεις του Maxwell που επίσης ισχύει παρουσία πηγών, παίρνουμε

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{4.4}$$

η οποία ικανοποιείται αυτόματα αν θέσουμε

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{4.5}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο στο βαθμωτό δυναμικό τέθηκε ώστε να υπάρχει συμφωνία με την ηλεκτροστατική περίπτωση οπότε η παραπάνω εξίσωση καταλήγει στη γνωστή σχέση $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$.

Θα δείξουμε τώρα ότι τα δυναμικά $(\vec{A},\phi)$ δεν ορίζονται μονοσήμαντα. Θεωρούμε τα ακόλουθα νέα δυναμικά

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}f \qquad \phi'=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.6}$$

όπου $f(\vec{r},t)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση. Πράγματι ισχύει

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}+\vec{\nabla}f\right)=\vec{\nabla}\times\vec{A}'+\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Δηλαδή τα νέα δυναμικά $\vec{A}'$, ϕ' δίνουν το ίδιο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και

$$-\vec{\nabla}\phi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\vec{\nabla}\left(\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}+\vec{\nabla}f\right)=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Οι σχέσεις (4.6) ορίζουν του λεγόμενους μετασχηματισμούς βαθμίδας, οι οποίοι περιγράφουν το σύνολο των φυσικά ισοδυνάμων δυναμικών, μέσω μιας αυθαίρετης συνάρτησης f που αποκαλείται συνήθως συνάρτηση βαθμίδας. Θα δείξουμε τώρα ότι με κατάλληλη εκλογή βαθμίδας δηλαδή με κατάλληλη εκλογή της αυθαίρετης συνάρτησης f, μπορούμε να φτάσουμε σε δυναμικά ϕ και $\vec{A}$ τέτοια ώστε

$$\phi = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{4.7}$$

που είναι μια εκλογή γνωστή ως βαθμίδα Coulomb και θα μας χρησιμεύσει άμεσα στην διαδικασία της κβάντωσης. Η απόδειξη είναι αρκετά απλή. Υποθέτουμε ότι ξεκινάμε από ένα ζεύγος δυναμικών ϕ και $\vec{A}$ που δεν ικανοποιεί τις (4.7). Με την βοήθεια των μετασχηματισμών βαθμίδας, μπορούμε να διαλέξουμε τη συνάρτηση $f(\vec{r}, t)$ ώστε να είναι

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.8}$$

από την οποία παίρνουμε για το f την έκφραση

$$f = c\int \phi dt + F(\vec{r}) \tag{4.9}$$

όπου $F(\vec{r})$ είναι μια νέα αυθαίρετη συνάρτηση που είναι όμως ανεξάρτητη του t. Απαιτώντας τώρα και από το νέο δυναμικό $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$ να ικανοποιεί τη συνθήκη $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ παίρνουμε την σχέση

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla}\vec{A} + \nabla^2 f = 0$$

η οποία σε συνδυασμό με την (4.9) δίνει για την απομένουσα ελεύθερη συνάρτηση $F(\vec{r})$ την εξίσωση

$$\nabla^2 F(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - c\int (\nabla^2 \phi) dt \tag{4.10}$$

που είναι τύπου Poisson με γνωστό δεύτερο μέλος. Αυτή περιέχει τα δεδομένα αρχικά δυναμικά ϕ και $\vec{A}$. Όμως ενώ το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ανεξάρτητο του t το δεύτερο φαίνεται να εξαρτάται από αυτό αφού τα ϕ και $\vec{A}$ είναι εν γένει συναρτήσεις του $\vec{r}$ και t. Στην πραγματικότητα η συνολική έκφραση του δεύτερου μέλους είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Αυτό φαίνεται εύκολα αν την παραγωγίσουμε ως προς t, οπότε γράφεται διαδοχικά σαν

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - c\int (\nabla^2 \phi) dt\right) = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - c\vec{\nabla}^2 \phi =$$

$$c\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi\right) = c\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Το δεύτερο μέλος της (4.9) είναι ανεξάρτητο του χρόνου, οπότε έχουμε να κάνουμε με μια τυπική εξίσωση Poisson της μορφής $\nabla^2 F(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ που είναι μια δεδομένη συνάρτηση. Η εξίσωση έχει πάντα λύση ως προς $F(\vec{r})$. Κάθε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στον ελεύθερο χώρο μπορεί λοιπόν να περιγραφεί μόνο μέσω του διανυσματικού δυναμικού $\vec{A}$ που θα ικανοποιεί επιπλέον τη συνθήκη $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. Συναρτήσει ενός τέτοιου δυναμικού τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ θα εκφράζονται σαν

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{4.11}$$

Το μόνο που απομένει για να ολοκληρωθεί η εικόνα είναι να βρούμε τη διαφορική εξίσωση από την οποία θα υπολογίζεται το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$. Η μόνη από τις εξισώσεις του Maxwell που δεν έχουμε χρησιμοποιήσει ακόμη είναι η τελευταία των (4.1).

Εισάγοντας την εξίσωση αυτή στην (4.11) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \Longrightarrow \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A} = 0 - \vec{\nabla}^2\vec{A} &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \qquad \Longrightarrow \\
\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

που δεν είναι άλλη παρά η γνωστή μας κυματική εξίσωση. Οι λύσεις της κυματικής αυτής εξίσωσης έχουν την μορφή επιπέδου κύματος και γράφονται

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \tag{4.13}$$

4.1.2 Ανάπτυγμα του διανυσματικού δυναμικού σε επίπεδα κύματα

Στα πλαίσια της κλασικής ηλεκτροδυναμικής το διανυσματικό δυναμικό είναι ένα διανυσματικό δυναμικό του οποίου ο ρόλος του στην κβαντική θεωρία είναι θεμελιώδης. Ακόμη και στην συνήθη κβαντομηχανική το διανυσματικό δυναμικό είναι εκείνο που εμφανίζεται στην εξίσωση Schrödinger και όχι τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$. Στην διαδικασία της κβάντωσης του ίδιου του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δεν μπορούμε να εργασθούμε χωρίς το δυναμικό. Το τυχόν ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει μόνο δυο ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας (σε κάθε σημείο) αφού το κάθε τι μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του διανυσματικού δυναμικού που έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας και το οποίο ικανοποιεί επιπλέον τη συνθήκη $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, η οποία περιορίζει τελικά των βαθμόν ελευθερίας στους δυο (όσες και οι ανεξάρτητες κατευθύνσεις πόλωσης στα επίπεδα κύματα).

Τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας διαθέτει τόσο το ηλεκτρικό όσο και το μαγνητικό πεδίο αφού και τα δυο ικανοποιούν, στον ελεύθερο χώρο, τη συνθήκη εγκαρσιότητας που εκφράζεται από τις σχέσεις $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ή $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Θα μπορούσαμε κατ' αρχήν να θεωρήσουμε το $\vec{E}$ ως ανεξάρτητο πεδίο και να προχωρήσουμε στη διαδικασία της κβάντωσης αναπτύσσοντας το σε επίπεδα κύματα εφόσον και αυτό ικανοποιεί τη κυματική εξίσωση όπως και το $\vec{A}$. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε τους συντελεστές με το γνωστό τρόπο δηλαδή ως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής.

Όμως τότε για να υπολογίσουμε την ενέργεια του πεδίου που δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) dV \tag{4.14}$$

πρέπει το $\vec{B}$ να εκφραστεί συναρτήσει του $\vec{E}$ και αυτό απαιτεί να λυθεί αναλυτικά η τέταρτη από τις εξισώσεις του Maxwell (4.1). Η διαδικασία όμως αυτή είναι λανθασμένη.

Τα πράγματα είναι ριζικά διαφορετικά αν το διανυσματικό δυναμικό θεωρηθεί ως το βασικό πεδίο. Τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ που θα εισαχθούν στην (4.14) εκφράζονται μέσω διαφορικών σχέσεων. δηλαδή τοπικών εκφράσεων συναρτήσει του $\vec{A}$. Έτσι το πλήθος των ανεξάρτητων βαθμόν ελευθερίας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι ρητά διασφαλισμένο και η διαδικασία της κβάντωσης μπορεί να προχωρήσει ανεμπόδιστα. Έχοντας αποφασίσει ότι το βασικό πεδίο για την κβάντωση είναι το $\vec{A}$, τα υπόλοιπα είναι θέμα απλών υπολογισμών.

Εκτός βέβαια από την ενέργεια η δεύτερη σημαντική ποσότητα ενός πεδίου είναι η ορμή του. Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού είναι γνωστό από την κλασική θεωρία ότι πεδιακή ορμή θα δίδεται από την έκφραση

$$P = \frac{1}{c^2} \int S \, dV \tag{4.15}$$

όπου το διάνυσμα $\vec{S}$ ορίζεται από την σχέση

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \tag{4.16}$$

και είναι το γνωστό διάνυσμα Poynting. Το διάνυσμα αυτό περιγράφει τη ροή της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας δηλαδή πόση ενέργεια διασχίζει τη μονάδα επιφανείας ανά μονάδα χρόνου. Η ροή κάθε χωρικά κατανεμημένης φυσικής ποσότητας συνδέεται με την πυκνότητα κατανομής της μέσω σχέσης Ροή =

πυκνότητα $\times$ ταχύτητα. Τις εκφράσεις τόσο για την ενέργεια όσο και την ορμή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θα μπορούσαμε, να τις είχαμε βρει επίσης ξεκινώντας από τη Λαγκρανζιανή του εφαρμόζοντας τους σχετικούς γενικούς τύπους του θεωρήματος της Noether.

Αποδεικνύεται ότι η πεδιακή ορμή εκφράζεται μέσω των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής από τον τύπο.

$$P = \sum_{k,s} a^{+}_{k,s} a_{k,s} k = \sum_{k,s} N_{k,s} k \tag{4.17}$$

4.1.3 Οι καταστάσεις του κβαντισμένου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τις καταστάσεις του κβαντισμένου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου αρχίζοντας από την κατάσταση του κενού η οποία ορίζεται όπως πάντα από τη συνθήκη

$$a_{k,s}|0>=0 \tag{4.18}$$

Από την σχέση αυτή βρίσκουμε εύκολα τις σχέσεις

$$H|0>=0 \qquad P|0>=0$$

που εκφράζουν το αυτονόητο γεγονός ότι η κατάσταση του κενού έχει μηδενική ενέργεια και μηδενική ορμή αφού κανένα φωτόνιο δεν είναι παρόν. Άλλωστε έτσι ορίστηκε.

Για την κατάσταση ενός φωτονίου ορμής k και με διάνυσμα πόλωσης $\vec{e}_{k,s}$ θα έχουμε

$$|k,s>=a^{+}_{k,s}|0> \tag{4.19}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι αυτή η κατάσταση ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις ιδιοτιμών

$$H|k,s>=\omega_k|k,s> \qquad P|k,s>=k|k,s>$$

Οι εξισώσεις αυτές επιβεβαιώνουν ότι πράγματι η κατάσταση $|k,s>$ έχει καθορισμένη ενέργεια ίση με $E=\hbar\omega$ και ορμή $p=\hbar k$.

Παρομοίως για τις καταστάσεις δυο φωτονίων με χαρακτηριστικά k_1, s_1 και k_2, s_2 θα έχουμε

$$|k_1,s_1;k_2,s_2>=a^{+}_{k_1,s_1}a^{+}_{k_2,s_2}|0>$$

Ισχύει βεβαίως και εδώ, λόγω μεταθετικότητας των τελεστών $a^{+}_{k_1,s_1}$ και $a^{+}_{k_2,s_2}$ η ακόλουθη σχέση συμμετρίας

$$|k_1,s_1;k_2,s_2>=|k_2,s_2;k_1,s_1>$$

η οποία εκφράζει τον χαρακτήρα των φωτεινών κβάντων είναι μποζόνια.

Το είδος των σωματιδίων ενός πεδίου, αν δηλαδή είναι μποζόνια η φερμιόνια, μπορεί να διαγνωστεί κατ΄ ευθείαν από την μορφή της κλασικής Χαμιλτονιανής που το περιγράφει. Αν είναι μια θετικά ορισμένη έκφραση το πεδίο θα κβαντωθεί με μποζονικές μεταθετικές σχέσεις. Οι μποζονικές σχέσεις διατηρούν τη θετικότητα των κλασικών εκφράσεων καθ΄ ότι συνιστούν μια σχεδόν κλασική άλγεβρα. Είναι πάντα $AB = BA+0$ η $AB = BA+1$ οπότε δυο τελεστές η θα μετατίθενται η αν όχι η αλλαγή της σειράς τους θα προσθέσει απλώς ένα σταθερό όρο στην κβαντική Χαμιλτονιανή.

Αν αντίθετα η κλασική Χαμιλτονιανή του πεδίου είναι μια αόριστη έκφραση χωρίς κάτω φράγμα προς τις αρνητικές τιμές, η κβάντωση με αντιμεταθετικές σχέσεις είναι επιβεβλημένη ώστε να επέλθει η αναγκαία αλλαγή προσήμου στους αρνητικούς όρους και να φτάσουμε έτσι σε μια θετικά ορισμένη κβαντική Χαμιλτονιανή.. Η άλγεβρα έχει τώρα τη μορφή $AB = -BA + 0$ η $AB = -BA + 1$.

Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου η κλασική Χαμιλτονιανή είναι ολοφάνερα θετική οπότε ο μποζονικός χαρακτήρας των κβάντων του ήταν εξάρχής βέβαιος. Επειδή τα μποζόνια, τα σωματίδια του φωτός μπορούνε να καταλάβουν απεριόριστα μια κβαντική κατάσταση και να σχηματίσουν έτσι ένα κλασικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Είναι όμως εύκολο να δούμε ότι αυτή η “κλασικη κατασταση” του πεδίου δεν μπορεί να είναι της γνωστής μορφής

$$|n(k,s) >= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^{+}_{k,s}\right)^{n} |0> \tag{4.20}$$

διότι σε μια τέτοια κατάσταση η μέση τιμή του ηλεκτρικού πεδίου

$$< E >=< n(k,s)|E|n(k,s) >$$

είναι μηδέν. Η σχέση (4.20) εκφράζει το γεγονός ότι ένας καθορισμένος αριθμός φωτονίων ορμής k και πόλωσης s έχει δημιουργηθεί.

Αυτός ο μηδενισμός γίνεται αμέσως φανερός αν σκεφτούμε ότι ο τελεστής του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι παρά ένας γραμμικός συνδυασμός τελεστών δημιουργίας και καταστροφής που καθένας από αστούς έχει μέση τιμή μηδέν σε κάθε κατάσταση καθορισμένου αριθμού φωτονίων. Αυτό βεβαίως συμβαίνει διότι η δράση του αλλάζει κατά 1 τον αριθμό των φωτονίων της μιας κατάστασης και άρα την κάνει ορθογώνια προς την άλλη.

Οι κβαντικές καταστάσεις που αντιστοιχούν στα κλασικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι γνωστές ως σύμφωνες καταστάσεις και σε αυτές ο αριθμός των φωτονίων που είναι παρόντα δεν είναι απόλυτα καθορισμένος, έχει διακυμάνσεις γύρω από μια μέση τιμή.

4.2 Θεωρίες Βαθμίδας

Οι θεωρίες βαθμίδας (gauge theories) βασίζονται στην ιδέα ότι κάποιοι μετασχηματισμοί συμμετρίας μπορούν να εφαρμοστούν και τοπικά αλλά και ολικά. Οι θεωρίες βαθμίδας είναι πολύ σημαντικές, καθώς παρέχουν έναν ενιαίο φορμαλισμό περιγραφής των κβαντικών θεωριών των πεδίων. Η θεωρία που περιγράφει με τον ενιαίο αυτό τρόπο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μαζί με το ασθενές και το ισχυρό πυρηνικό πεδίο ονομάστηκε καθιερωμένο πρότυπο.

Τα πλέον επιτυχημένα μοντέλα της σωματιδιακής φυσικής βασίζονται στην ιδέα της συμμετρίας βαθμίδας. Παράδειγμα συμμετρίας βαθμίδας είναι η εξάρτηση του έργου σε ένα βαρυτικό πεδίο από την διαφορά δυναμικού. Διάφορα πεδία σε αυτή τη θεωρία μπορούν να μετασχηματιστούν το ένα στο άλλο. Η ύπαρξη συμμετρίας βαθμίδας στα ηλεκτρικά δυναμικά είναι συνέπεια της διατήρησης του φορτίου.

Για τις εξισώσεις Klein - Gordon και Dirac είδαμε ότι έχουμε ολικές (global) συμμετρίες. Ολικές ονομάζονται γιατί αν κάνουμε ένα μετασχηματισμό φάσης στα πεδία αλλάζει η φάση σε όλο το χώρο. Είναι δυνατόν να μετατρέψουμε αυτές τις συμμετρίες σε τοπικές.

Η Lagrangian Klein - Gordon για μιγαδικό βαθμωτο πεδίο είναι,

$$L = \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi - m^2 \phi^+ \phi \tag{4.21}$$

και είναι αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς $U(1)$

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{ia}\phi(x) \qquad \phi^+(x) \to \phi'^+(x) = e^{-ia}\phi^+(x) \tag{4.22}$$

Θέλω να αναβαθμίσω την παραπάνω συμμετρία έτσι ώστε να μετασχηματίζεται με διαφορετική φάση σε κάθε σημείο δηλαδή η σταθερά a να είναι συνάρτηση του x, $a \to a(x)$. Για να κάνουμε τη θεωρία αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς προσθέτουμε ακόμα ένα όρο στην παράγωγο

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \qquad \partial^\mu \to D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu \tag{4.23}$$

όπου g είναι μια σταθερα. Το πεδίο A_μ απαιτούμε να είναι Lorentz αναλλοίωτο, αλλά και να μεταβάλλεται ανάλογα σε μετασχηματισμούς βαθμιδας.

Αν η ολική παράγωγος δράσει στο ϕ θα έχουμε

$$D^\mu \phi = \partial^\mu \phi - igA^\mu \phi \tag{4.24}$$

Απαιτούμε η παραπάνω παραγώγιση να αλλάζει κατά την ιδία φάση με το ϕ δηλαδή

$$D^\mu \left(e^{ia(x)}\phi(x)\right) = e^{ia(x)} D^\mu \phi(x) \tag{4.25}$$

Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$D^\mu \left(e^{ia(x)}\phi(x)\right) = \partial^\mu \left(e^{ia(x)}\phi(x)\right) - igA'^\mu e^{ia(x)}\phi(x) = \\ e^{ia(x)}\partial^\mu\phi(x) + i\partial^\mu a(x)e^{ia(x)}\phi(x) - igA'^\mu e^{ia(x)}\phi(x) \qquad (4.26)$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε ότι η μεταβολή του A^μ θα πρέπει να είναι

$$A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{g}\,\partial^\mu a(x) \qquad (4.27)$$

Έτσι έχουμε μια θεωρία $U(1)$ αναλλοίωτη σε τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Τέλος, μπορούμε να συμπληρώσουμε την θεωρία προσθέτοντας τον κινητικό όρο του πεδίου στην Lagrangian. Ο όρος αυτό είναι της μορφής $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ όπου

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (4.28)$$

Άλλοι όροι όπως ο όρος μάζας $A_\mu A^\mu$ δεν επιτρέπονται διότι είναι Lorentz αναλλοίωτοι αλλά δεν είναι αναλλοίωτοι από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Έστω ότι έχουμε μια θεωρία όπως την ηλεκτροδυναμική η οποία δίνεται από την πιο κάτω Lagrangian

$$L = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \qquad (4.29)$$

Αυτή η θεωρία θα είναι αναλλοίωτη ως προς $U(1)$ μετασχηματισμούς. Επεκτείνουμε αυτήν την συμμετρία σε τοπική συμμετρία αντικαθιστώντας το a με μια συνάρτηση του x, $a \to a(x)$. Η Lagrangian δεν είναι πια αναλλοίωτη, εφόσον θα πάρουμε έναν ακόμα όρο της μορφής $\partial_\mu a(x)$. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί αν προσθέσουμε ένα ακόμη όρο στην παράγωγο. Η νέα Lagrangian γίνεται

$$L = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu\right)\psi - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \qquad (4.30)$$

όπου το πεδίο μετασχηματίζεται ως εξής. $A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu a(x)$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τώρα την θεωρία βαθμίδας έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει μη - αβελιανές ομάδες. Για να το επιτύχουν αυτό οι Yang - Mills θεώρησαν στην αρχική τους εργασία την ομάδα $SU(2)$. Αυτό είναι το πρώτο σημαντικό παράδειγμα της θεωρίας Yang - Mills.

Η ομάδα $SU(2)$ έχει τρεις γεννήτορες τις μήτρες του *Pauli* σ^1, σ^2 και σ^3 που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\left[\frac{1}{2}\,\sigma^k, \frac{1}{2}\,\sigma^n\right] = i\epsilon_{knm}\frac{1}{2}\,\sigma^m \qquad (4.31)$$

Εδώ έχουμε το ζεύγος των κυματοσυναρτήσεων ψ_1 ψ_2 που μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \qquad \psi(x) \to \exp\left(i\theta^k(x)\frac{1}{2}\,\sigma^k\right)\psi(x) \tag{4.32}$$

Η συμμετάβλητη παράγωγος γίνεται

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^k_\mu \frac{\sigma^k}{2} \tag{4.33}$$

Σε αντίθεση με την περίπτωση της αβελιανής συμμετρίας τώρα έχουμε τρεις θεωρίες βαθμίδας, μια για κάθε γεννήτορα της ομάδας. Ο νόμος μετασχηματισμού για τα πεδία βαθμίδας βρίσκουμε ότι είναι

$$A^k_\mu \frac{\sigma^k}{2} \to A^k_\mu \frac{\sigma^k}{2} + \frac{1}{g}\left(\partial_\mu \theta^k\right)\frac{\sigma^k}{2} + i\left[\theta^k \frac{\sigma^k}{2}, A^n_\mu \frac{\sigma^n}{2}\right] + \cdots \tag{4.34}$$

και ο πεδιακός τανυστής της έντασης

$$F^k_{\mu\nu}\frac{\sigma^k}{2} = \partial_\mu A^k_\nu \frac{\sigma^k}{2} - \partial_\nu A^k_\mu \frac{\sigma^k}{2} - ig\left[A^k_\mu \frac{\sigma^k}{2}, A^n_\nu \frac{\sigma^n}{2}\right] \tag{4.35}$$

Με την βοήθεια της σχέσης αντιμετάθεσης (4.31) βρίσκουμε

$$F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^n_\mu + g\epsilon_{knm} A^n_\mu A^m_\nu \tag{4.36}$$

Τέλος, η Lagrangian που είναι αναλλοίωτη είναι

$$L = \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi - \frac{1}{4}\left(F^k_{\mu\nu}\right)^2 - m\bar{\psi}\psi \tag{4.37}$$

Αυτό είναι και το πρώτο σημαντικό παράδειγμα της θεωρίας Yang - Mills.

4.3 Το πεδίο Yang - Mills

Στο τελευταίο μισό του εικοστού αιώνα, οι φυσικοί κατόρθωσαν να ενοποιήσουν τις τρεις από τις τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις της φύσης. Τα τρία αυτά πεδία είναι το ηλεκτρομαγνητικό, το ασθενές πυρηνικό πεδίο που είναι υπεύθυνο για την ραδιενεργό διάσπαση, και το ισχυρό που είναι υπεύθυνο για τη διατήρηση των σωματιδίων των πυρήνων των ατόμων μαζί. Το βασικό μαθηματικό θεμέλιο για αυτήν την πρόοδο λέγεται θεωρία Yang - Mills από τους φυσικούς Chen Ning Yang και Robert Mills. Προς το παρόν είναι η κυρίαρχη προσέγγιση για την κβαντική θεωρία πεδίου.

Ορίζουμε κάποια Lie άλγεβρα με κατασκευαστικές σταθερές δομής τις f^{abc}, δηλαδή $[\tau^a, \tau^b] = if^{abc}\tau^c$. Ύποθέτουμε ότι ένα φερμιονικό πεδίο $\psi_i(x)$ μετασχηματίζεται με την βοήθεια κάποιας αναπαράστασης της $SU(N)$ ως εξής:

$$\psi_i x = \Omega_{ij}(x)\psi_j(x) \tag{4.38}$$

Το Ω_{ij} είναι ένα στοιχείο της $SU(N)$ που μπορεί να παραμετρικοποιηθεί με την βοήθεια των τοπικών παραμέτρων $\theta^a(x)$ ως

$$\Omega_{ij}(x) = \left(e^{-i\theta^a\tau^a}\right)_{ij} \tag{4.39}$$

Το κρίσιμο σημείο στην θεωρία αυτή είναι ότι τώρα το στοιχείο $\Omega(x)$ της ομάδας είναι συνάρτηση των συντεταγμένων και του χρόνου και δεν είναι μια σταθερά.

Για να κατασκευάσουμε έναν τελεστή παραγώγισης D_μ που να είναι συναλλοίωτος από τον μετασχηματισμό, εισάγουμε ένα νέο πεδίο A_μ και ορίζουμε

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - igA_\mu \qquad A_\mu(x) \equiv A_\mu^a(x)\tau^a \tag{4.40}$$

Για να είναι η συναλλοίωτος παραγώγιση του πεδίου ψ αναλλοίωτη από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας πρέπει.

$$A'_\mu(x) = -\frac{i}{g}\left[\partial_\mu\Omega(x)\right]\Omega^{-1}(x) + \Omega(x)A_\mu\Omega^{-1}(x) \tag{4.41}$$

Όταν η $SU(N)$ αντικατασταθεί με την ομάδα $U(1)$ τότε βρίσκουμε τους γνωστούς μετασχηματισμούς της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής.

Ορίζουμε τον πεδιακό τανυστή από την σχέση

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \tag{4.42}$$

και την δράση του πεδίου της θεωρίας των Yang - Mills.

$$S = \int d^4x\left(-\frac{1}{2}TrF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}\right) \tag{4.43}$$

Τέλος αποδεικνύεται ότι η αναλλοίωτος φερμιονική δράση δίνεται από την σχέση.

$$S = \int d^4x\bar{\psi}\left(i\not{D} - m\right)\psi \tag{4.44}$$

Ο πεδιακός τανυστής ικανοποιεί τις ακόλουθες ταυτότητες (Bianchi).

$$[D_\mu, F_{\nu\rho}] + [D_\nu, F_{\rho\mu}] + [D_\rho, F_{\mu\nu}] = 0 \tag{4.45}$$

Η θεωρία φάνηκε ότι είναι κατάλληλη για να περιγράψει τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων όταν αποδείχθηκε ότι μπορεί να επανακανονικοποιηθεί. Οι προγενέστερες θεωρίες ήταν αναλλοίωτες κάτω από ολικές συμμετρίες. Η θεωρία αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από κάποιες συμμετρίες που εξαρτώνται από κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου, είναι δηλαδή τοπικά ανναλλοίωτη.

Η θεωρία περιέχει το εννοιολογικό πλαίσιο για το Καθιερωμένο Πρότυπο που περιγράφει τις τρείς αλληλεπιδράσεις που υπάρχουν στην φύση και προβλέπει την ύπαρξη του μποζονίου Higgs το οποίο αναμένεται να ανακαλυφθεί από τον επιταχυντή στο Cern. Δυστυχώς η τέταρτη αλληλεπίδραση, η βαρύτητα δεν φαίνεται να ταιριάζει με αυτήν την θεωρία.

Βιβλιογραφία

[1] Στέφανος Τραχανάς. Κβαντομηχανική Ι, Θεμελιώδεις αρχές - απλά συστήματα - δομή της ύλης. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης (2005).

[2] Αντώνης Στρέκλας. Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών (2005).

[3] Στέφανος Τραχανάς. Σχετικιστική Κβαντομηχανική, Μια στοιχειώδης εισαγωγή στην μεγάλη σύνθεση. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης. (1999).

[4] H. Goldstein. Κλασσική Μηχανική. Add - Wesley Pub. Co. Inc. Εκδόσεις Π. Πουρνάρα Θεσσαλονίκη. (1980)

[5] Lewis Ryder. Quantum Field Theory. Cambige University Press (1996).

[6] W. Greiner - J. Reinhardt. Field Quantization. Springer (1996)

[7] W. Greiner - J. Reinhardt. Quantum Electrodynamics. Springer, (2002)

[8] M. E. Peskin - D. V. Schroender. An Intoduction to Quantum Field theory. The Perseus Books Group (2008)