

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΑΝΟΡΘΩΣΗΣ
ΓΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΚΥΜΑΤΙΔΙΩΝ
ΜΕΣΩ ΠΙΝΑΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ LAURENT

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΚΤΗΣΗ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ: ΕΥΦΡΟΣΥΝΗ ΑΝΔΡΕΟΠΟΥΛΟΥ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

Εισαγωγή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

Εισαγωγή στο σχήμα ανόρθωσης (lifting)- Απλά παραδείγματα

Κυματίδια

Μετασχηματισμοί πρόβλεψης και διόρθωσης διακριτού σήματος

Μετασχηματισμοί Πολλαπλής κλίμακας

Παράδειγμα διακριτού μετασχηματισμού Κυματιδίου CDF(2,2) μέσω του σχήματος Ανόρθωσης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°

Διακριτά σήματα και ο z-μετασχηματισμός

Γραμμικοί μετασχηματισμοί διακριτών σημάτων στο z-μετασχηματισμό

Σχήμα Ανόρθωσης και ο πολυφασικός πίνακας στο z-μετασχηματισμό

Συστοιχίες φίλτρων και ο πίνακας Διαμόρφωσης στον z-μετασχηματισμό

Θεώρημα Bezout-Κατασκευή μετασχηματισμών κυματιδίου CDF(p,q)

Από τα φίλτρα σε βήματα Ανόρθωσης

Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος σε μορφή πινάκων

Σύγκριση σχήματος Ανόρθωσης και συστοιχίας φίλτρων

Η ολοκλήρωση του Αλγόριθμου παραγοντοποίησης του σχήματος Ανόρθωσης

Παράδειγμα παραγοντοποίησης πολωνύμου Laurent

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°

Παραδείγματα παραγοντοποίησης μετασχηματισμών

Το κυματίδιο Haar

Ένα κυματίδιο της οικογένειας Φίλτρων Deslauriers-Dubuc

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του σχήματος ανόρθωσης (lifting) που πρότεινε ο Sweldens για την αναπαράσταση διακριτών μετασχηματισμών κυματιδίων και ειδικότερα η παρουσίαση του μαθηματικού υπόβαθρου της μεθόδου που χρησιμοποιεί γινόμενα πινάκων με συντελεστές πολυώνυμα Laurent. Ο μετασχηματισμός κυματιδίου προσφέρει μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της αποδόμησης ενός διακριτού σήματος στο επίπεδο χρόνου-συχνότητας, καθώς είναι βασισμένος στην πολυεπίπεδη τεχνική πολλαπλής ανάλυσης σήματος, γι' αυτό και αποτελεί ένα ιδιαίτερα εύχρηστο και εύκολα προσαρμόσιμο εργαλείο σε πολλές εφαρμογές.

Παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα ενός διακριτού σήματος στο οποίο εφαρμόζουμε τεχνικές πρόβλεψης και διόρθωσης των συστατικών του, κάνοντας μια πολυεπίπεδη ανάλυση που ονομάζεται ανάλυση πολλαπλής ευκρίνειας. Στα διάφορα στάδια αυτής της ανάλυσης ακολουθείται η μέθοδος ανόρθωσης (lifting) που αποτελείται από μια σειρά βημάτων πρόβλεψης και διόρθωσης των συστατικών του διακριτού σήματος. Με τη χρήση αυτής της μεθόδου μπορούμε να αναλύσουμε όλους τους μετασχηματισμούς κυματιδίων τους οποίους χρησιμοποιούμε για να αποδομήσουμε ένα διακριτό σήμα στα συστατικά του. Για την εφαρμογή του σχήματος ανόρθωσης χωρίζουμε το διακριτό σήμα στα άρτια και περιττά μέρη του και στη συνέχεια εφαρμόζουμε διαδοχικούς μετασχηματισμούς πρόβλεψης και διόρθωσης για τα δύο αυτά μέρη του σήματος. Στη συνέχεια αναπαριστούμε την παραπάνω ανάλυση μέσω του z-μετασχηματισμού με χρήση πολυωνύμων Laurent. Ο μετασχηματισμός ανάλυσης κυματιδίου, στον z-μετασχηματισμό, μετατρέπεται σε πολλαπλασιασμό πινάκων με στοιχεία πολυώνυμα Laurent. Η εφαρμογή των βημάτων της μεθόδου ανόρθωσης, ουσιαστικά, οδηγεί σε μια σταδιακή απλοποίηση των παραπάνω πολυωνύμων, η οποία γίνεται με τη χρήση του αλγορίθμου διαίρεσης πολυωνύμων. Παρουσιάζουμε και αναλύουμε τα θεωρήματα στα οποία στηρίζεται η μέθοδος και δίνουμε συγκριμένα παραδείγματα.

Κεφάλαιο I

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια εξετάζονται με μεγάλο ενδιαφέρον νέες τεχνικές μετασχηματισμού σημάτων (2.2) και εικόνων. Στο πεδίο της επεξεργασίας εικόνων, αυτές οι τεχνικές μετασχηματισμού στοχεύουν ιδιαίτερα στην αντιμετώπιση των προβλημάτων της συμπίεσης, της εξαγωγής ακμών και συστατικών από μια εικόνα και την ανάλυση υφής. Αυτές οι τεχνικές διακρίνονται σε: ανάλυση πολλαπλής διακριτικής ικανότητας, ανάλυση χρόνου - συχνότητας, αλγόριθμους πυραμίδας και μετασχηματισμούς κυματιδίου.

Οι μετασχηματισμοί διακριτών σημάτων πολυμέσων (εικόνα, βίντεο, ήχος κ.τ.λ.) είναι πολύ σημαντικοί σήμερα, γιατί έχουν οδηγήσει σε γρήγορους αλγόριθμους επεξεργασίας και συμπίεσης που επιτρέπουν σε συσκευές χαμηλής υπολογιστικής ισχύος και χαμηλού αποθηκευτικού χώρου να αποθηκεύουν και να αναπαράγουν πολυμέσα.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα των προαναφερθέντων αλγορίθμων επεξεργασίας και συμπίεσης αποτελούν: φορητοί MP3 players (βασίζονται σε μετασχηματισμούς συστοιχίας φίλτρων (filter banks), ψηφιακός δίσκος βίντεο (DVD) που χρησιμοποιεί συμπίεση βασισμένη σε διακριτό μετασχηματισμό συνημιτόνου (DCT) και το νέο πρότυπο συμπίεσης JPEG 2000 (που είναι βασισμένο σε διακριτό μετασχηματισμό κυματιδίου).

Η ανάλυση σημάτων συχνά προϋποθέτει ένα συμβιβασμό μεταξύ του πόσο καλά μπορούμε να εντοπίσουμε μεταβάσεις και ασυνέχειες του σήματος και πως μπορεί τελικά να προσδιοριστεί μια μακροπρόθεσμη συμπεριφορά αυτού. Στην ανάλυση με μετασχηματισμό κυματιδίου κάποιος εξετάζει το σήμα σε διαφορετικές κλίμακες ή αναλύσεις. Αυτή η ανάλυση πολλαπλής διακριτικής ικανότητας αποτελεί την ουσία του μετασχηματισμού κυματιδίου ο οποίος τα τελευταία χρόνια είναι ιδιαίτερα δημοφιλής [1].

Η ανάλυση κυματιδίου υλοποιείται με τη χρήση μιας μοναδικής πρωτότυπης συνάρτησης που ονομάζουμε κυματίδιο το οποίο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ζωνοδιαβατό φίλτρο [2] (ορισμούς των εννοιών αυτών δίνουμε στο επόμενο

κεφάλαιο). Η μέθοδος που εφαρμόζεται στο παραπάνω είδος ανάλυσης παρουσιάζεται με λεπτομέρειες στο επόμενο κεφάλαιο.

Η ανάλυση κυματιδίου έχει εισέλθει δυναμικά σε πολλούς θεωρητικούς και εφαρμοσμένους τομείς της επιστήμης και κυρίως της μηχανολογίας και των υπολογιστών [5]. Το κομμάτι των γραφικών μέσω υπολογιστή με τα πολλά και ποικίλα υπολογιστικά προβλήματα δεν αποτελεί εξαίρεση σε αυτόν τον κανόνα. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τις βασικές ιδέες που κρύβονται πίσω από το μετασχηματισμό κυματιδίου και τι είναι αυτό που τον καθιστά ιδιαίτερα επιτυχή στον τομέα των εφαρμογών [5].

Το βασικό κίνητρο πίσω από την ανάπτυξη της ανάλυσης κυματιδίου και όλων των ιδεών που σχετίζονται με αυτά, είναι η αναζήτηση γρήγορων αλγορίθμων για τον υπολογισμό συμπαγών αναπαραστάσεων συναρτήσεων και συνόλων από δεδομένα. Στην απάντηση στο ερώτημα του πως θα μπορούσαν να επιτευχθούν τέτοιες συμπαγείς αναπαραστάσεις, υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις, κάποιες περισσότερο και άλλες λιγότερο δύσκολες σε ότι αφορά στο υπολογιστικό τους κομμάτι, αλλά με κοινό στόχο την εκμετάλλευση της δομής των δεδομένων ή των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση κάποιας ιδέας. Εξαρτάται από την περιοχή της εφαρμογής, αν θα εκμεταλλευτεί κανείς τη δομή, το συσχετισμό των συστατικών, τη συνοχή τους ή την ομαλότητα ή μη που εμφανίζουν.

Φυσικά καμία συμπαγής αναπαράσταση δεν μπορεί να βρεθεί για τυχαία σήματα π.χ. θόρυβος, αφού αυτά δεν παρουσιάζουν κανένα συσχετισμό στη δομή τους. Όμως σχεδόν πάντα το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε «πραγματικά» δεδομένα και συναρτήσεις τα οποία είναι συνήθως στενά συσχετισμένα. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η ανάλυση κυματιδίου που υλοποιείται μέσω του γρήγορου μετασχηματισμού κυματιδίου αποδεικνύεται πολύ εύχρηστο εργαλείο.

Ενώ η ονομασία «κυματίδιο» είναι αρκετά πρόσφατη (δεκαετίας '80), η βασική ιδέα από την οποία απορρέουν κυριαρχεί για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα σε πολλούς τομείς της επιστήμης, όπως στην επεξεργασία σημάτων και τη θεωρητική φυσική. Η συμβολή του τομέα των κυματιδίου είναι ότι συνενώνει όλες αυτές τις παρόμοιες ιδέες και δημιουργεί συνέργια μεταξύ όλων αυτών των τεχνικών [5]. Το αποτέλεσμα είναι ένα εύχρηστο και δυναμικό εργαλείο βασισμένο σε μια σταθερή ως προς τη βάση της θεωρία.

Το εργαλείο που χρησιμοποιούμε για να δημιουργήσουμε τους μετασχηματισμούς κυματιδίου ονομάζεται σχήμα Ανόρθωσης (lifting).

Το σχήμα Ανόρθωσης (lifting) αναπτύχθηκε το 1994, αλλά συνδέεται πολλαπλά με προγενέστερες ανακαλύψεις, βρίσκοντας ίχνη του ακόμα και μέχρι τον αλγόριθμο του Ευκλείδη. Προτάθηκε από τους Daubechies και Sweldens και δίνει τη δυνατότητα να δημιουργήσει κανείς όλους τους υπάρχοντες μετασχηματισμούς κυματιδίου. Αποδεικνύεται ότι κάθε

πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης κυματίδιο ή συστοιχία φίλτρων μπορεί να αποδομηθεί με βήματα Ανόρθωσης (lifting) [4]. Όπως διαπιστώνεται παρακάτω, αυτό γίνεται γράφοντας τον μετασχηματισμό στην πολυφασική του μορφή (έννοιες που δίνεται αναλυτικά ο ορισμός τους στην πορεία της εργασίας). Έτσι οι σχέσεις που αφορούν στην τέλεια ανακατασκευή των φίλτρων (πολυώνυμα Laurent με τα οποία αναπαριστάνουμε ένα διακριτό σήμα στο z -μετασχηματισμό) ή στο σχήμα Ανόρθωσης (lifting) μπορούν να γραφούν με τη χρήση πινάκων που έχουν σαν στοιχεία τους πολυώνυμα ή πολυώνυμα Laurent. Κάθε βήμα Ανόρθωσης (lifting) είναι επομένως ένας στοιχειώδης πίνακας (τριγωνικός άνω ή κάτω) με όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του ίσα με τη μονάδα. Αποτελεί γνωστό αποτέλεσμα στην άλγεβρα πινάκων ότι κάθε πίνακας με στοιχεία πολυώνυμα και οριζούσα ίση με τη μονάδα μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε στοιχειώδεις πίνακες [3]. Η απόδειξη αυτού έχει τη βάση της στον αλγόριθμο του Ευκλείδη. Τα πολυώνυμα Laurent που χρησιμοποιούνται για την παραγοντοποίηση του σχήματος προσφέρουν συμμετρία και προκαλούν ενδιαφέροντα ερωτήματα όσον αφορά στη μη μοναδικότητα της διαίρεσης τους.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται η μέθοδος του σχήματος Ανόρθωσης (lifting), με την οποία μπορεί κανείς χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο παραγοντοποίησης να υλοποιήσει μετασχηματισμούς κυματιδίου. Εφαρμόζεται η παραπάνω μέθοδος για τον πιο απλό μετασχηματισμό το κυματίδιο Haar [3], και στη συνέχεια σε ένα πιο πρωτότυπο παράδειγμα φίλτρων, για ένα ζεύγος φίλτρων από την οικογένεια Deslauriers-Dubuc.

Η δομή της διπλωματικής εργασίας έχει ως εξής :

□ Στο κεφάλαιο 2, αρχικά ξεκινάμε με ένα απλό παράδειγμα τιμών ενός διακριτού σήματος, το οποίο επεξεργαζόμαστε με στόχο να μπορέσουμε να εμεταλλευτούμε κατάλληλα τη δομή του, μετασχηματίζοντας έτσι αυτό το σήμα σε ένα άλλο διακριτό σήμα, του οποίου οι μη μηδενικές τιμές είναι περισσότερες από αυτές του αρχικού σήματος μας. Με αυτό τον τρόπο πετυχαίνουμε ένα είδος συμπίεσης των δεδομένων μας, καθώς έχουμε λιγότερες τιμές του σήματος για να αποθηκεύσουμε. Περιγράφουμε το μετασχηματισμό κυματιδίου ο οποίος προσφέρει μια διαφορετική λύση στο πρόβλημα της αποδόμησης ενός σήματος, καθώς είναι βασισμένος στην τεχνική πολλαπλής ανάλυσης σήματος, οπότε είναι πιο ευέλικτος και εύκολα προσαρμόσιμος στις περισσότερες εφαρμογές στη θεωρία σημάτων.

□ Στο κεφάλαιο 3, αναλύουμε τη μέθοδο μετασχηματισμού κυματιδίου που είναι βασισμένη σε μια σειρά βημάτων πρόβλεψης και διόρθωσης των τιμών ενός διακριτού σήματος και ονομάζεται σχήμα Ανόρθωσης. Παριστάνουμε με πολυώνυμα Laurent του z -μετασχηματισμού τις άρτιες και περιττές τιμές ενός διακριτού σήματος και εφαρμόζοντας τα βήματα του σχήματος, οδηγούμαστε σε σταδιακή απλοποίηση των παραπάνω πολυωνύμων, η οποία γίνεται με τη χρήση του αλγόριθμου του Ευκλείδη για τη διαίρεση των πολυωνύμων αυτών. Με

εφαρμογή του Θεωρήματος Bezout για πολώνυμα δείχνουμε πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε την οικογένεια κυματιδίων Cohen-Daubechies-Feauveau. Τέλος παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο παραγοντοποίησης του σχήματος Ανόρθωσης.

□ Στο κεφάλαιο 4 , δίνονται παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου του σχήματος Ανόρθωσης που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3. Ξεινάμε με το πιο απλό παράδειγμα, το μετασχηματισμό Haar και εφαρμόζουμε τη θεωρία του σχήματος Ανόρθωσης για την ανακατασκευή του μετασχηματισμού. Ανάλογα με το «ποιο» ζεύγος φίλτρων θεωρούμε, βρίσκουμε τον ευθύ ή τον αντίστροφο μετασχηματισμό. Κατόπιν παρουσιάζουμε ένα πιο πολύπλοκο παράδειγμα για την κατασκευή ενός φίλτρου της οικογένειας Deslauriers-Dubuc, όπου ξεινώντας από το ζεύγος φίλτρων του ευθύ μετασχηματισμού, κατασκευάζουμε το μετασχηματισμό με μια σειρά από αντιστρεπτά βήματα.

Κεφάλαιο II

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ

2.1 Εισαγωγή στο σχήμα Ανόρθωσης (Lifting) - Απλά παραδείγματα

Ξεκινάμε παραθέτοντας ένα πολύ απλό παράδειγμα με το οποίο παρουσιάζουμε πιο παραστατικά και γίνεται ευκολότερα κατανοητός ο βασικός μας στόχος, που είναι να περιγράψουμε πώς μπορούμε να μετασχηματίσουμε σήματα σε μια μορφή στην οποία, περιοχές του σήματος που παρουσιάζουν "χαμηλή δραστηριότητα" μπορούν να εντοπιστούν με πολύ μεγαλύτερη ευκολία σε αυτή, από ότι στο αρχικά δοσμένο σήμα.

Η βασική ιδέα του μετασχηματισμού κυματιδίου είναι να εκμεταλλευτεί τη συσχετισμένη δομή που παρουσιάζουν τα περισσότερα διακριτά σήματα και έτσι να κατασκευάσει μια πολύ καλή προσέγγιση.

Αρχικά όμως θα πρέπει να δώσουμε τον ορισμό του όρου "διακριτό σήμα", καθώς αυτή η έννοια χρησιμοποιείται συνεχώς στην πορεία της εργασίας.

Ορίζουμε διακριτό σήμα x μια συνάρτηση πραγματική από τους ακέραιους $n \in \mathbb{Z}$ η οποία θεωρούμε ότι έχει πεπερασμένο φορέα, δηλαδή υπάρχουν ακέραιοι με $p \leq q$ έτσι ώστε $x[n] = 0$ όταν $n < p$ ή $n > q$. Ονομάζουμε τον ακέραιο $q - p + 1$ μήκος του σήματος. Συμβολίζουμε δ_k (τον μοναδιαίο παλμό στο k) που ορίζουμε ως εξής:

$$\delta_k[n] = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = k \\ 0 & \text{αν } n \neq k \end{cases} \quad (2.1)$$

Κάθε διακριτό σήμα (επειδή θεωρούμε ότι έχει πεπερασμένο φορέα) μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός μοναδιαίων παλμών. Έτσι είναι:

$$x = \sum_k x[k]\delta_k \quad \mu\epsilon k \in \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1°

Θεωρούμε το ακόλουθο διακριτό σήμα με 2^3 μη μηδενικές τιμές στον εξής πίνακα:

n :	0	1	2	3	4	5	6	7
$s_3 [n]$	56	40	8	24	48	48	40	16

Τα δύο βασικά στοιχεία του σήματος που θέλουμε να αναλύσουμε είναι:

1. Η συνολική συμπεριφορά (trend) της ακολουθίας των τιμών του σήματος. Αξιζει να παρατηρήσουμε ότι $s_3[4] = s_3[5]$ δηλαδή ότι δεν υπάρχει μεταβολή στην ακολουθία των τιμών όταν το n πάει από το 4 στο 5. Βάσει αυτού μπορούμε να πούμε ότι η τιμή του s_3 στο $n = 4$ είναι μια καλή πρόβλεψη για την τιμή του όταν $n = 5$.
2. Η λεπτομέρεια (detail) που διακρίνουμε στην ακολουθία των τιμών του σήματος. Παρατηρούμε την μεγάλη μεταβολή στις τιμές όταν το n πάει από το 6 στο 7. Οι διακυμάνσεις στις τιμές της ακολουθίας ενός σήματος μπορούν να υπολογιστούν από το σφάλμα, όταν προβλέπουμε τις τιμές του σήματος για τα περιττά n βασισμένοι στις τιμές για άρτια n .

Προκειμένου να εκτελέσουμε αυτή την ανάλυση χωρίζουμε το σήμα σε δύο σήματα μισού μήκους σε σχέση με το αρχικό (το ένα να περιέχει τις άρτιες και το άλλο τις περιττές τιμές του n), δηλαδή παίρνουμε τα :

$$(s_3)_{\text{even}}[n] = s_3[2n] \quad \text{και} \quad (s_3)_{\text{odd}}[n] = s_3[2n+1]$$

θεωρώντας κάθε δεύτερη τιμή για το s_3 , διαδικασία την οποία ονομάζουμε υποδειγματοληψία. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την

2^ο επιπέδου μορφή του σήματος, δηλαδή το μέσο όρο των τιμών του s_3 στα άρτια $2n$ και στα περιττά $2n + 1$ με τη σχέση :

$$s_2[n] = \frac{1}{2} \{ (s_3)_{even}[n] + (s_3)_{odd}[n] \}$$

και τη λεπτομέρεια στο 2^ο επίπεδο:

$$d_2[n] = (s_3)_{even}[n] - s_2[n]$$

την οποία υπολογίζουμε αφαιρώντας από τις άρτιες τιμές του s_3 το μέσο όρο των τιμών του s_3 στα άρτια $2n$ και στα περιττά $2n + 1$. Τα αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας, δηλαδή τα σήματα μήκους 2^2 δίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

$n :$	0	1	2	3		n	0	1	2	3
$(s_3)_{even}[n]:$	56	8	48	40		$(s_3)_{odd}[n]:$	40	24	48	16
$s_2[n]:$	48	16	48	28		$d_2[n]:$	8	-8	0	12

Αξιζει να παρατηρήσουμε την τιμή $d_2[2] = 0$ που αντιστοιχεί στο $s_3[4] = s_3[5]$ και την μεγαλύτερη από τις τιμές $d_2[3]$ που αντικατοπτρίζει την μεγάλη διαφορά μεταξύ των τιμών $s_3[5]$ και $s_3[7]$.

Μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω ανάλυση για το διάνυσμα της μορφής s_2 ορίζοντας έτσι την 1^ο επιπέδου μορφή του σήματος αντίστοιχα ως εξής :

$$s_1[n] = \frac{1}{2} \{ (s_2)_{even}[n] + (s_2)_{odd}[n] \}$$

καθώς και τη λεπτομέρεια του 1^ο επιπέδου:

$$d_1[n] = (s_2)_{even}[n] - s_1[n].$$

Αυτά τα σήματα μήκους 2^1 δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί :

$n :$	0	1		$n :$	0	1
$(s_3)_{even}[n]:$	48	48		$(s_3)_{odd}[n]:$	16	28
$s_1[n]:$	32	38		$d_1[n]:$	16	10

Τελικά επαναλαμβάνουμε αυτή την ανάλυση και για το διάνυσμα της μορφής s_1 . Από τη σχέση που έχουμε ορίσει παίρνουμε για την μηδενικού επιπέδου μορφή του σήματος:

$$s_0[n] = \frac{1}{2} \{ (s_1)_{even}[n] + (s_1)_{odd}[n] \}$$

ενώ για τη λεπτομέρεια μηδενικού επιπέδου :

$$d_0[n] = (s_1)_{even}[n] - s_0[n] \quad .$$

Αυτά τα σήματα μήκους 2^9 δίνονται στον παρακάτω πίνακα :

$n :$	0		$n :$	0
$(s_1)_{even}[n]:$	32		$(s_1)_{odd}[n]:$	38
$s_0[n]:$	35		$d_0[n]:$	-3

Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να συναρμολογήσουμε αυτή την τριών επιπέδου ανάλυση στον ακόλουθο πίνακα πολυδιάστατης ανάλυσης του αρχικού σήματος [8]:

s_0	d_0	d_1		d_2			
35	-3	16	10	8	-8	0	12

Σε αυτή την ανάλυση, το πρώτο εισαγόμενο $s_0[0]$ είναι ο μέσος όρος των τιμών του αρχικού σήματος:

$$35 = (56 + 40 + 8 + 24 + 48 + 48 + 40 + 16) / 8$$

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι:
$$s_0[0] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 s_1[n] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 s_2[n] = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 s_3[n]$$

Οι 7 επόμενοι αριθμοί είναι οι συντελεστές λεπτομέρειας που προέκυψαν από την παραπάνω ανάλυση και ουσιαστικά είναι αυτοί που καθορίζουν το σχήμα του διακριτού σήματος που θεωρήσαμε και αναλύουμε.

Με την παραπάνω διαδικασία μετασχηματίσαμε το αρχικό μας διακριτό σήμα με 2^3 τιμές, σε ένα άλλο διάνυσμα 8 αριθμών. Η διαδικασία αυτή του μετασχηματισμού είναι αντιστρεπτή, καθώς από οποιαδήποτε γραμμή μπορούμε να πάμε στην προηγούμενη, με τις κατάλληλες προσθήσεις και αφαιρέσεις. Δηλαδή σίγουρα δεν χάσαμε κάτι μετασχηματίζοντας το σήμα μας. Θα πρέπει όμως να εξετάσουμε τι κερδίζουμε εφαρμόζοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό σε ένα διακριτό σήμα, ή και γενικότερα σε ένα σύνολο από δεδομένα που αναπαριστούν για παράδειγμα μια εικόνα. Ο τελικός πίνακας που περιέχει το μέσο όρο των τιμών του αρχικού και τους 7 συντελεστές λεπτομέρειας, αποτελεί μια "πιο λεπτομερειακή έκδοση" του διακριτού σήματος που επεξεργαστήκαμε. Δουλεύοντας, όπως θα εξηγήσουμε ευθύς αμέσως πάνω σε αυτόν τον πίνακα, παίρνουμε μια προσέγγιση του αρχικού μας σήματος, η οποία τις περισσότερες φορές είναι πολύ κοντά στα αρχικά μας δεδομένα. Το διακριτό σήμα στο οποίο καταλήξαμε έχει ένα συντελεστή λεπτομέρειας ίσο με μηδέν. Αυτό αποτελεί μια περιοχή "χαμηλής δραστηριότητας" στις οποίες αναφερθήκαμε στην αρχή. Ο αμέσως επόμενος μικρότερος συντελεστής λεπτομέρειας είναι το -3 . Αν θέσουμε και αυτόν ίσο με το μηδέν, τα νούμερα στον τελευταίο πίνακα διαμορφώνονται ως εξής: 35,0,16,10,8,-8,0,12. Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία αντίστροφα παίρνουμε ως τιμές του διακριτού σήματος τις: 59,43,11,27,45,45,37,13. Η προσέγγιση που παίρνουμε έτσι για το αρχικό μας σήμα είναι πολύ καλή, και παραμένει αρκετά καλή ακόμα και αν θεωρήσουμε ίσους με το μηδέν δύο ακόμα συντελεστές λεπτομέρειας, τους 8,-8. Αν λάβει κανείς υπ' όψιν του πόσο λίγα είναι τώρα τα δεδομένα (5) στα οποία βασίζεται η προσέγγιση που κάνουμε για το σήμα, θα ξαφνιαστεί με το πόσο καλή είναι.

Γενικά λοιπόν με όλα τα παραπάνω, αναφερόμαστε σε ένα σχήμα συμπίεσης, το οποίο δουλεύει ως εξής: Ξεινάμε από ένα διάνυσμα δεδομένων και μια μη αρνητική τιμή-κατώφλι (threshold) ε . Μετασχηματίζουμε το διάνυσμα όπως παρουσιάσαμε παραπάνω και μετά την ανάλυση που εφαρμόζουμε για να βρούμε το συνολικό μέσο όρο των τιμών του, καθώς και τους συντελεστές λεπτομέρειας, θέτουμε ίσο με το μηδέν κάθε συντελεστή λεπτομέρειας που είναι μικρότερος ή ίσος με το ε . Μετά από αυτή τη διαδικασία το διακριτό σήμα που παίρνουμε έχει πολλές αναλογικά τιμές ίσες με το μηδέν, οπότε αποθηκεύεται συμπιεσμένο. Η διαδικασία ονομάζεται συμπίεση χωρίς απώλειες (lossless compression), όταν καμία πληροφορία δεν χάνεται ($\varepsilon = 0$), διαφορετικά αναφερόμαστε σε συμπίεση με απώλειες (lossy) όταν $\varepsilon > 0$. Στην πρώτη περίπτωση γίνεται ακριβής ανακατασκευή του αρχικού σήματος, εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό αντίστροφα, ενώ στη δεύτερη παίρνουμε μια προσέγγιση αυτού, καθώς έχουμε αποθηκεύσει τη μετασχηματισμένη έκδοσή. Παρόλο τον αναλογικά μεγάλο αριθμό των συντελεστών λεπτομέρειας που έχουμε "πετάζει" παίρνουμε πολύ αξιοπρεπή αποτελέσματα.

Συνοψίζοντας τονίζουμε τα εξής όσον αφορά στην κεντρική ιδέα του σχήματος συμπίεσης: Δεδομένα τα οποία διέπονται από κάποιο είδος δομής μπορούν να αποθηκευτούν επαρκώς σε ισοδύναμες μορφές "αραιών" πινάκων με συμπίεση χωρίς ή με απώλειες, όπως εξετάσαμε παραπάνω. Με την εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού παίρνουμε ξανά τα δεδομένα μας ή μια συνήθως πολύ καλή προσέγγιση αυτών [9].

2.2 Κυματίδια (Wavelets)

Προκειμένου να δώσουμε στη συνέχεια τον ορισμό της έννοιας του κυματιδίου ορίζουμε έναν διανυσματικό χώρο, στον οποίο θα εντάξουμε το διακριτό σήμα των 8 τιμών που θεωρήσαμε στο παράδειγμά μας. Έτσι αντιστοιχίζουμε ένα διάνυσμα k τιμών ενός διακριτού σήματος με μια συνάρτηση βημάτων (step function) στο διάστημα $[0,1]$, η οποία μεταβάλλεται το πολύ σε $k - 1$ τιμές του άξονα των x που απέχουν ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, ενώ τις τιμές του διακριτού σήματος τις θεωρούμε σαν ύψη της συνάρτησης βήματος στον άξονα των y .

Τέτοιου είδους συνάρτηση είναι και η συνάρτηση:

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases}$$

η λεγόμενη και συνάρτηση κλιμάκωσης Haar

Η $\phi(x)$ ικανοποιεί μια σχέση κλιμάκωσης της μορφής

$$\phi(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \phi(2x - i),$$

όπου στην περίπτωση μας οι μόνοι μη μηδενικοί συντελεστές c_i είναι οι $c_0 = c_1 = 1$ που δίνουν την $\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1)$.

Για κάθε $0 \leq i \leq 2^3 - 1$ παίρνουμε έτσι μια μετατοπισμένη και συμπιεσμένη συνάρτηση κλιμάκωσης :

$$\phi_i^3(x) := \phi(2^3 x - i).$$

Αυτές οι 8 συναρτήσεις σχηματίζουν μια βάση στο διανυσματικό χώρο \mathcal{V}^3 των κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με πιθανά σημεία ασυνέχειας στα $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{7}{8}$, για τις οποίες βέβαια προκύπτει ότι: η $\phi_0^3 = 1$ μόνο στο διάστημα $[0, \frac{1}{8})$, η $\phi_1^3 = 1$ μόνο στο $[\frac{1}{8}, \frac{2}{8})$ κτλ. Έτσι ένας άλλος τρόπος να αναπαραστήσουμε τις 8 τιμές του διακριτού σήματος του παραδείγματος μας είναι ο εξής:

$$56\phi_0^3 + 40\phi_1^3 + 8\phi_2^3 + 24\phi_3^3 + 48\phi_4^3 + 48\phi_5^3 + 40\phi_6^3 + 16\phi_7^3 \in \mathcal{V}^3$$

Ανάλογα κάθε διακριτό σήμα με 8 τιμές μπορεί να αντιστοιχισθεί με ένα στοιχείο του διανυσματικού χώρου \mathcal{V}^3 . Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε με τον ίδιο τρόπο και τις επόμενες διαδικασίες που εκτελέσαμε στο διακριτό σήμα του παραδείγματός μας, δηλαδή τον υπολογισμό των μέσων όρων και των διαφορών (λεπτομέρειας), αφού πρώτα ορίσουμε έναν άλλο διανυσματικό χώρο που ορίζεται από τις 4 συναρτήσεις ϕ_i^2 που δίνονται από τον τύπο:

$$\phi_i^2(x) := \phi(2^2x - i) \text{ για } 0 \leq i \leq 2^2 - 1,$$

οι οποίες σχηματίζουν μια βάση για τον διανυσματικό χώρο \mathcal{V}^2 των σταθερών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με πιθανά σημεία ασυνέχειας στα $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$.

Ομοίως οι δύο συναρτήσεις που ορίζονται από την $\phi_i^1(x) := \phi(2^1x - i)$ για $0 \leq i \leq 2^1 - 1$ ορίζουν μια βάση για τον διανυσματικό χώρο \mathcal{V}^1 των σταθερών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με πιθανό σημείο ασυνέχειας στο $\frac{1}{2}$. Τέλος η $\phi_0^0 := \phi$ είναι μια βάση του χώρου \mathcal{V}^0 των σταθερών συναρτήσεων στο $[0,1]$. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{V}^0 \subset \mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}^2 \subset \mathcal{V}^3$. Μπορούμε έτσι να αντιστοιχίσουμε τους μέσους όρους με στοιχεία αυτών των νέων διανυσματικών χώρων, θεωρώντας τις μέσες τιμές σαν μικρότερης ανάλυσης εκδοχές του αρχικού μας σήματος. Η αντιστοίχιση που περιγράψαμε γίνεται ως εξής: ταιριάζουμε τα 48, 16, 48, 28 με $48\phi_0^2 + 16\phi_1^2 + 48\phi_2^2 + 28\phi_3^2$. Κατόπιν τις τιμές 32, 38 με $32\phi_0^1 + 38\phi_1^1$ και τέλος την τιμή 35 με $35\phi_0^0 = 35\phi$.

Προκειμένου να βρούμε μια ανάλογη αντιστοίχιση και για τους συντελεστές λεπτομέρειας, που προέκυψαν κατά τη διαδικασία ανάλυσης του διακριτού σήματος του παραδείγματός μας θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

ορισμένο στο διανυσματικό χώρο \mathcal{V}^3 . Δύο συναρτήσεις είναι ορθογώνιες μεταξύ τους αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με το μηδέν. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι το εμβαδόν της περιοχής που ορίζει το γινόμενό τους στο $[0,1]$ ισούται με το μηδέν.

Για κάθε $j = 0, 1, 2$ ορίζουμε τον χώρο κομμιτιδίου W^j να είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου \mathcal{V}^j στον \mathcal{V}^{j+1} δηλαδή $\mathcal{V}^{j+1} = \mathcal{V}^j \oplus W^j$. Έτσι προκύπτει ότι:

$$\mathcal{V}^3 = \mathcal{V}^2 \oplus W^2 = \mathcal{V}^1 \oplus W^1 \oplus W^2 = \mathcal{V}^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus W^2.$$

Κάθε χώρος W^j έχει μια φυσική βάση $\{\chi_i^j : 0 \leq i \leq 2^j - 1\}$, ενώ εκφράζοντας τις προηγούμενες συναρτήσεις βήματος του χώρου \mathcal{V}^3 με όρους αυτών των νέων συναρτήσεων βάσης, μας δίνει τους συντελεστές λεπτομέρειας του

διακριτού σήματος του παραδείγματος μας, τους οποίους και ονομάζουμε *συντελεστές κυματιδίου*.

Ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση σαν *συνάρτηση μητρικού κυματιδίου Haar* :

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases}$$

Ισοδύναμα θα μπορούσε να οριστεί ως: $\chi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1)$. Καθώς οι χ, ϕ είναι ορθογώνιες οι συναρτήσεις $\{\chi\}$ είναι μια βάση του χώρου W^0 . Οι 4 συναρτήσεις που προκύπτουν από τη σχέση:

$$\chi_i^2(x) := \chi(2^2 x - i) \text{ για } 0 \leq i \leq 2^2 - 1,$$

αποτελούν μια βάση του χώρου W^2 , γιατί αφενός μεν είναι ορθογώνιες με τις αντίστοιχες συναρτήσεις ϕ_i^2 ($0 \leq i \leq 3$) οι οποίες αποτελούν μια βάση του υπόχωρου V^2 του χώρου V^3 , ενώ αφ' ετέρου δε είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Ανάλογα οι 2 συναρτήσεις που προκύπτουν από τη σχέση:

$$\chi_i^1(x) := \chi(2^1 x - i) \text{ για } 0 \leq i \leq 2^1 - 1,$$

σχηματίζουν μια βάση του W^1 .

Τελικά τα 3 βήματα που κάναμε στο παράδειγμά μας, μετασχηματίζοντας το αρχικό διακριτό σήμα μας, υπολογίζοντας τους μέσους όρους και τις διαφορές (λεπτομέρεια των τιμών), μπορούν να αντιστοιχισθούν ως εξής:

$$\begin{aligned} 56\phi_0^3 + 40\phi_1^3 + 8\phi_2^3 + 24\phi_3^3 + 48\phi_4^3 + 48\phi_5^3 + 40\phi_6^3 + 16\phi_7^3 = \\ 48\phi_0^2 + 16\phi_1^2 + 48\phi_2^2 + 28\phi_3^2 + 8\chi_0^2 - 8\chi_1^2 + 0\chi_2^2 + 12\chi_3^2 = \\ 32\phi_0^1 + 38\phi_1^1 + 16\chi_0^1 + 10\chi_1^1 + 8\chi_0^2 - 8\chi_1^2 + 0\chi_2^2 + 12\chi_3^2 = \\ 35\phi_0^0 - 3\chi_0^0 + 16\chi_0^1 + 10\chi_1^1 + 8\chi_0^2 - 8\chi_1^2 + 0\chi_2^2 + 12\chi_3^2 \end{aligned}$$

Η τελευταία γραμμή αποτελεί την πλήρως μετασχηματισμένη έκδοση των τιμών του διακριτού σήματος και αποτελείται από το συνολικό μέσο όρο των τιμών του διακριτού σήματος και επτά *συντελεστές κυματιδίου*. Είναι η ανάλυση του σήματος με τις συναρτήσεις- βάσεις που ορίσαμε παραπάνω.

Η συμπύεση που κάναμε στο αρχικά δοσμένο διακριτό σήμα μας, θέτοντας ίσο με το μηδέν κάθε συντελεστή λεπτομέρειας που είναι μικρότερος ή ίσος με το ϵ (που θεωρήσαμε σαν τιμή-κατώφλι), αντιστοιχεί εδώ με το μηδενισμό κάποιων συντελεστών κυματιδίου. Ας δούμε ακριβώς τι εννοούμε στην πράξη:

$$\begin{aligned}
& 56\phi_0^3 + 40\phi_1^3 + 8\phi_2^3 + 24\phi_3^3 + 48\phi_4^3 + 48\phi_5^3 + 40\phi_6^3 + 16\phi_7^3 = \\
& 35\chi_0^0 - 3\chi_0^1 + 16\chi_0^1 + 10\chi_1^1 + 8\chi_0^2 - 8\chi_1^2 + 0\chi_2^2 + 12\chi_3^2 = \\
& 35\chi_0^0 + 0\chi_0^1 + 16\chi_0^1 + 10\chi_1^1 + 8\chi_0^2 - 8\chi_1^2 + 0\chi_2^2 + 12\chi_3^2
\end{aligned}$$

δηλαδή όπως διαπιστώνουμε μηδενίσαμε το συντελεστή κυματιδίου -3 .

Συνοψίζοντας τα όσα κάναμε παραπάνω εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο j θεωρούμε \mathcal{V}^j το διανυσματικό χώρο των κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων στο $[0, 1]$ με πιθανά σημεία ασυνέχειας στα :

$$\frac{1}{2^j}, \frac{2}{2^j}, \frac{3}{2^j}, \dots, \frac{2^j - 1}{2^j}.$$

Τότε οι 2^j αυτές συναρτήσεις ϕ_i^j που ορίζονται από την σχέση $\phi_i^j(x) := \phi(2^j x - i)$ για $0 \leq i \leq 2^j - 1$ αποτελούν μια βάση για τον χώρο \mathcal{V}^j . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει μια "απειρώς" αυξανόμενη αλυσίδα από διανυσματικούς χώρους

$$\mathcal{V}^0 \subset \mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}^2 \subset \mathcal{V}^3 \subset \dots \subset \mathcal{V}^j \subset \mathcal{V}^{j+1} \subset \dots$$

καθένας από τους οποίους είναι χώρος εσωτερικού γινομένου, βάσει της

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Ορίσαμε επομένως τον χώρο *κυματιδίου* W^j ως το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου \mathcal{V}^j στον \mathcal{V}^{j+1} . Οι συναρτήσεις $\chi_i^j(x) := \chi(2^j x - i)$ για $0 \leq i \leq 2^j - 1$, σχηματίζουν μια βάση για τον W^j .

Έτσι για κάθε j έχουμε αντίστοιχα ότι:

$$\mathcal{V}^j = \mathcal{V}^{j-1} \oplus W^{j-1} = \mathcal{V}^{j-2} \oplus W^{j-2} \oplus W^{j-1} = \dots = \mathcal{V}^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus \dots \oplus W^{j-2} \oplus W^{j-1}.$$

2.3 Μετασχηματισμοί πρόβλεψης και διόρθωσης διακριτού σήματος στο πεδίο του χρόνου

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει πως μπορούμε σε χωρικό επίπεδο να χτίσουμε και να εικμεταλλευτούμε την εντοπιότητα που παρουσιάζουν στη δομή τους τα περισσότερα διακριτά σήματα στο πεδίο χρόνου-συχνότητας - στην οποία αναφερθήκαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Με το παράδειγμα αυτό κάνουμε

και μια μικρή εισαγωγή σε αυτό που επεξεργαζόμαστε στην εργασία και ονομάζουμε σχήμα Ανόρθωσης.

Από το πρώτο παράδειγμα γενικότερα έχουμε την εξής ιδέα: Θεωρούμε ένα διακριτό σήμα (ορισμός (2.2)) $x = \{x[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ με $x_k \in \mathbb{R}$ το οποίο χωρίζουμε σε δύο σήματα. Το σήμα των άρτιων δειγμάτων $x_e = \{x[2k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ και των περιττών $x_o = \{x[2k+1]\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Τυπικά αυτά τα δύο σήματα είναι στενά συσχετισμένα, δηλαδή δοσμένου του ενός, μπορεί κανείς να κάνει μια καλή πρόβλεψη P για το άλλο. Φυσικό είναι η πρόβλεψη να μην είναι απόλυτα ακριβής, έτσι πρέπει να καταγραφεί η διαφορά ή λεπτομέρεια d ως εξής:

$$d = x_e - P(x_o)$$

Δοσμένων της λεπτομέρειας d και του περιττού σήματος μπορεί κανείς να υπολογίσει το άρτιο από τη σχέση: $x_e = d + P(x_o)$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι αν το P είναι καλή πρόβλεψη το σήμα d θα είναι αραιό, δηλαδή τα περισσότερα δείγματά του θα είναι μηδενικά, ή πολύ κοντά στο μηδέν.

Η διαδικασία του υπολογισμού μιας πρόβλεψης και καταγραφής της λεπτομέρειας d αντί του x_o ονομάζεται βήμα Ανόρθωσης.

Η ιδέα που αναπτύσσουμε συνδέεται με τα κυματίδια ως εξής: Το βήμα πρόβλεψης που αναφέραμε παραπάνω αφορά στο χωρικό συσχετισμό που παρουσιάζουν τα δείγματα ενός εισαγόμενου διακριτού σήματος, αλλά στα κυματίδια μας ενδιαφέρει και ο διαχωρισμός στο επίπεδο της συχνότητας. Με την παραπάνω διαδικασία δημιουργήσαμε ένα μετασχηματισμό από το (x_e, x_o) στο (x_e, d) . Όμως καθώς η επιλογή των άρτιων δειγμάτων γίνεται με υποδειγματοληψία (αφού επιλέγουμε ανά δεύτερη τιμή), οι συχνότητες των x_e δεν είναι οι ίδιες με αυτές που είχαν στο αρχικό δείγμα, κάτι που θα πρέπει να διορθωθεί. Έτσι ενώ έχουμε ένα μετασχηματισμό από το (x_e, x_o) στο (x_e, d) , προτείνουμε και ένα δεύτερο βήμα Ανόρθωσης. Το βήμα αυτό λέγεται βήμα διόρθωσης, γιατί αντικαθιστά τα άρτια συστατικά του σήματος, με πιο λείες (smoothed) τιμές S , με τη χρήση ενός τελεστή διόρθωσης U , που δρα στους συντελεστές λεπτομέρειας d :

$$s = x_e + U(d)$$

φυσικά όπως και το προηγούμενο βήμα, έτσι και αυτό είναι αντιστρεπτό, δηλαδή δοσμένων των (s, d) μπορούμε να πάρουμε τα x_e με τη σχέση $x_e = s - U(d)$ και κατόπιν τα x_o . Έτσι όπως και να επιλεγούν τα P και U , το σχήμα είναι πάντα αντιστρεπτό και αυτό είναι το κύριο χαρακτηριστικό που μας ωθεί στη χρήση κυματιδίου για τη δημιουργία συστοιχιών φίλτρων τέλει ανακατασκευής, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Χρησιμοποιώντας στοιχεία από τη γραμμική άλγεβρα κατανοούμε καλύτερα το σκοπό της ανάλυσης των τιμών του διακριτού σήματος που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο. Θεωρούμε ένα διακριτό σήμα μήκους $N = 2k$ με τιμές $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$. Παριστάνουμε το σήμα με το $N \times 1$ διάνυσμα στήλη με στοιχεία τα παραπάνω. Ακολουθώντας το ίδιο πρότυπο που χρησιμοποιείται και στον γρήγορο μετασχηματισμό Fourier (FFT) [8], χωρίζουμε το διακριτό σήμα x στα άρτια και περιττά συστατικά του τα οποία αποτελούν σήματα μήκους $N/2$, δηλαδή:

$$x_{\text{even}}[n] = x[2n] \quad \text{και} \quad x_{\text{odd}}[n] = x[2n+1]$$

για $n = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

Οι παραπάνω σχέσεις προσδιορίζουν ένα γραμμικό μετασχηματισμό, τον οποίο δηλώνουμε με το σύμβολο S_p - συντομογραφία της λέξης split δηλαδή διαχωρίζω. Δηλαδή ο διαχωρισμός αυτός παριστάνεται ως εξής:

$$S_p x = \begin{bmatrix} x_{\text{even}} \\ x_{\text{odd}} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ως εξής :

$$M_r \begin{bmatrix} x_{\text{even}} \\ x_{\text{odd}} \end{bmatrix} = x \quad (2.4)$$

Με το σύμβολο M_r ορίζουμε συντομογραφικά από τα αρχικά του, την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή αυτή του να συνενωθούν κατάλληλα (merge) μεταξύ τους τα δύο μέρη και να λάβουμε το αρχικό σήμα. Ορίζουμε όπως στο αρχικό μας παράδειγμα το διάνυσμα συμπεριφοράς (trend) του διακριτού σήματος καθώς και το διάνυσμα λεπτομέρειας του διακριτού σήματος x με τη μορφή πινάκων ως εξής :

$$s = \frac{1}{2}(x_{\text{even}} + x_{\text{odd}}), \quad d = x_{\text{even}} - s \quad (2.5)$$

(πρέπει να τονίσουμε ότι λόγω της υποδειγματοληψίας τα s και d είναι διανύσματα με $N/2$ στοιχεία).

Συμβολίζουμε με T_a (ο δείκτης a προέρχεται από το αρχικό της λέξης ανάλυση), τον γραμμικό μετασχηματισμό στον \mathbb{R}^N ο οποίος δίνεται ως εξής :

$$T_a x = \begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε τους τύπους (2.5) των s και d με τη μορφή :

$$2d = x_{even} - x_{odd}, s = x_{even} - d \quad (2.7)$$

Αποδεικνύουμε λοιπόν στη συνέχεια πως μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε αυτό το μετασχηματισμό ανάλυσης γράφοντας αυτόν σαν γινόμενο του S_p (split) και των ακόλουθων γραμμικών μετασχηματισμών - στην περίπτωση αυτή το I συμβολίζει τον $N/2 \times N/2$ μοναδιαίο πίνακα.

$$\begin{bmatrix} x_{even} \\ -2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{even} \\ x_{odd} - x_{even} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{even} \\ x_{odd} \end{bmatrix} \quad (\text{ΠΡΟΒΛΕΨΗ}) \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} s \\ -2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{even} - d \\ -2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \frac{1}{2}I \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{even} \\ -2d \end{bmatrix} \quad (\text{ΔΙΟΡΘΩΣΗ}) \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{2}(2d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s \\ -2d \end{bmatrix} \quad (\text{ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ}) \quad (2.10)$$

Γενικά ορίζουμε αυτούς τους $N \times N$ πίνακες P, U, D - στην περίπτωση που μελετούμε είναι τύπου 2×2 - ως εξής :

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} I & \frac{1}{2}I \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό ανάλυσης T_a ενός διακριτού σήματος \mathcal{X} , σαν γινόμενο των παραπάνω πινάκων δηλαδή :

$$T_a x = D U P S_p x \quad (2.12)$$

Έτσι μετά την διαδικασία της παραγοντοποίησης του T_a σαν ένα γινόμενο στοιχειωδών πινάκων λέμε ότι έχουμε κάνει ένα βήμα ανόρθωσης [8].

Δηλαδή ξεκινήσαμε από ένα συγκεκριμένο παράδειγμα τιμών ενός διακριτού σήματος και κατόπιν γενικεύοντας, είδαμε πως μπορούμε να αναλύσουμε ένα διακριτό σήμα σε ένα γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου που χρησιμοποιούμε, είναι ότι είναι αντιστρεπτή. Η χρήση (block) στοιχειωδών πινάκων εξασφαλίζει την αντιστρεψιμότητα της μεθόδου, καθώς οι πίνακες αυτοί είναι αντιστρεπτοί και οι αντίστροφοι τους είναι επίσης στοιχειώδεις πίνακες. Από τον κανόνα του Cramer πολύ εύκολα παίρνουμε ότι:

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} I & \frac{1}{2}I \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ και } D = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

και καταλήγουμε στο ότι ο γραμμικός μετασχηματισμός T_a είναι αντιστρεπτός με αντίστροφο τον :

$$T_a^{-1} = M P^{-1} U^{-1} D^{-1} \quad (2.14)$$

Τον αντίστροφο αυτό πίνακα τον ονομάζουμε πίνακα σύνθεσης δηλαδή $T_s = T_a^{-1}$. Έτσι για κάθε διακριτό σήμα \mathcal{X} μήκους N παίρνουμε ένα y με $y = T_a x$. Όπως είδαμε μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το \mathcal{X} από το y με τη σχέση. $x = T_s y$

Όπως διαπιστώσαμε με τη χρήση του πολλαπλασιασμού πινάκων υπολογίζουμε και τους δύο γραμμικούς μετασχηματισμούς ευθύ και αντίστροφο δηλαδή:

$$T_a = D U P S_p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} S_p \quad (2.15)$$

$$T_s = M_r P^{-1} U^{-1} D^{-1} = M_r \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Ας δούμε ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα για $N = 4$, σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε παραπάνω οι σχέσεις δίνουν :

$$T_a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Οπότε ο υπολογισμός π.χ των s_1 και d_1 από το s_2 μπορεί να προκύψει από το γινόμενο του πίνακα T_a με τον πίνακα στήλη του διανύσματος s_2 ως εξής :

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = T_a s_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 16 \\ 48 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 38 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix}$$

καθώς έχουμε τονίσει ότι η διαδικασία είναι αντιστρέψιμη μπορούμε να πάρουμε το s_2 από τα s_1 και d_1 :

$$s_2 = T_s \begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 38 \\ 16 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 16 \\ 48 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες T_a και T_s ονομάζονται πίνακες Haar , ανάλυσης και σύνθεσης αντίστοιχα. Στηρίζονται σε ένα σημαντικό πρότυπο το οποίο αξίζει να παρατηρήσει κανείς. Οι σειρές 2 και 4 του T_a προκύπτουν από τις σειρές 1 και 3 μετατοπίζοντας προς τα αριστερά κατά δύο θέσεις. Με αντίστοιχο τρόπο οι

στήλες 2 και 4 του T_s προκύπτουν από τις στήλες 1 και 3 μετατοπίζοντας προς τα κάτω κατά δύο θέσεις. Το πρότυπο αυτό θα μελετήσουμε λεπτομερέστερα παρακάτω σε συνδυασμό με άλλους μετασχηματισμούς κυματιδίου. Επίσης αξίζει να παρατηρήσουμε ότι $2T_a^T = T_s$ οπότε $(\sqrt{2}T_a)(\sqrt{2}T_a)^T = T_s T_a = I$, που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Haar $\sqrt{2}T_a$ που προκύπτει μετά από κανονικοποίηση είναι ένας ορθογώνιος πίνακας [8].

2.4 Μετασχηματισμοί πολλαπλής κλίμακας

Στο προηγούμενο παράδειγμα θεωρήσαμε ένα σήμα s_3 μήκους 2^3 και το μετασχηματίσαμε με τη μορφή του σήματος s_2 και τη λεπτομέρεια d_2 , το καθένα μήκους ίσο με το μισό του αρχικού, συνεχίζοντας κατόπιν τη διαδικασία για το s_2 κ.τ.λ. Μπορούμε να περιγράψουμε αυτό τον αλγόριθμο χρησιμοποιώντας τη θεωρία πινάκων και συγκεκριμένα τον πίνακα ανάλυσης που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα, γενικεύοντας ως εξής: συμβολίζουμε $T_a^{(k)}$ τον $2^k \times 2^k$ πίνακα ανάλυσης Haar. Τότε αυτός γράφεται :

$$T_a^{(k)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I^{(k-1)} & I^{(k-1)} \\ I^{(k-1)} & -I^{(k-1)} \end{bmatrix} S_p \quad (2.17)$$

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $I^{(p)}$ για τον μοναδιαίο πίνακα με διαστάσεις $2^p \times 2^p$. Παρουσιάζοντας τους υπολογισμούς που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο με τη μορφή πινάκων παίρνουμε τα παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} s_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = T_a^{(3)} s_3, \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a^{(2)} & 0 \\ 0 & I^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_a^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & I^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & I^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Για να πάρουμε όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία την *ανάλυση πολλαπλής ευκρίνειας* ή *πολλαπλής διακριτικής ικανότητας* για ένα σήμα στη συγκεκριμένη

περίπτωση για το s_3 (με τη μορφή πινάκων), συνδυάζοντας όλους τους παραπάνω μετασχηματισμούς έχουμε :

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = W_a^{(3)} s_3, \quad W_a^{(3)} = \begin{bmatrix} T_a^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & I^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & I^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a^{(2)} & 0 \\ 0 & I^{(2)} \end{bmatrix} T_a^{(3)}$$

Τον πίνακα $W_a^{(3)}$ τον ονομάζουμε πίνακα ανάλυσης τριπλής κλίμακας του κυματιδίου Haar. Όπως έχουμε τονίσει η όλη διαδικασία είναι αντιστρεπτή, οπότε θα υπάρχει ο αντίστροφος τριπλής κλίμακας πίνακας σύνθεσης του κυματιδίου Haar, ο οποίος συμβολίζεται με $W_s^{(3)}$ και αντιστρέφοντας την παραπάνω διαδικασία έχουμε :

$$W_s^{(3)} \begin{bmatrix} s_0 \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = s_3, \quad W_s^{(3)} = T_s^{(3)} \begin{bmatrix} T_s^{(2)} & 0 \\ 0 & I^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_s^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & I^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & I^{(2)} \end{bmatrix}$$

2.5 Παράδειγμα Διακριτού μετασχηματισμού Κυματιδίου CDF(2,2) μέσω του σχήματος Ανόρθωσης

Όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει και από το παράδειγμα του σήματος που ήδη αναλύσαμε σε προηγούμενη παράγραφο, σε ότι αφορά στο διακριτό μετασχηματισμό κυματιδίου, η γενική προσέγγιση που χρησιμοποιούμε είναι να χωρίζουμε ένα σήμα άρτιου μήκους N στα άρτια και περιττά μέρη του (πολυφασικά συστατικά αυτού), να εφαρμόζουμε στη συνέχεια διαδοχικούς γραμμικούς συνδυασμούς πρόβλεψης και διόρθωσης και στα δύο μέρη του σήματος και κατόπιν μια κανονικοποίηση. Η διαδικασία αυτή, όπως άλλωστε έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενη παράγραφο ονομάζεται σχήμα Ανόρθωσης και κάθε ένα στάδιο από αυτά που μόλις αναφέραμε, χαρακτηρίζεται σαν ένα βήμα του σχήματος Ανόρθωσης.

Στο παράδειγμα που παρουσιάσαμε ενός διακριτού μετασχηματισμού κυματιδίου ενός σήματος \mathcal{X} , τον οποίο ονομάσαμε και μετασχηματισμό

κυματιδίου Haar, κάναμε πρόβλεψη της τιμής $x[2n+1]$ από την προηγούμενη τιμή της $x[2n]$. Τώρα θα τροποποιήσουμε το σχήμα αυτό και θα προβλέψουμε την τιμή $x[2n+1]$ από το μέσο όρο των δύο γειτονικών της τιμών $x[2n]$ και $x[2n+2]$. Το σφάλμα d από την προβλεπόμενη τιμή έτσι είναι:

$$d[n] = x[2n+1] - \frac{1}{2}(x[2n] + x[2n+2]) = x_{\text{odd}}[n] - \frac{1}{2}(x_{\text{even}}[n] + x_{\text{even}}[n+1])$$

(αν το $x[n]$ είναι της μορφής $x[n] = an + b$ δηλαδή είναι γραμμική συνάρτηση του n τότε το σφάλμα d είναι μηδέν, όπως διαπιστώνουμε εύκολα μετά την εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων).

Ωστόσο υπάρχει ένα πρόβλημα με τον τύπο του d . Οι τιμές του σήματος είναι $x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]$ ενώ προκειμένου να υπολογίσουμε και το τελευταίο σφάλμα $d[N/2]$ χρειαζόμαστε και την τιμή $x[N]$. Μπορούμε να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα επεκτείνοντας το σήμα να είναι περιοδικό με περίοδο N , δηλαδή $x[k+N] = x[k]$ για κάθε k ακέραιο.

Έστω S ($N/2 \times N/2$) ένας τελεστής μετατόπισης. Τότε έχουμε $x_{\text{even}}[n+1] = (S^{-1}x_{\text{even}})[n]$. Έτσι ο τύπος για το συντελεστή λεπτομέρειας d γίνεται:

$$d = x_{\text{odd}} - \frac{1}{2}(x_{\text{even}} + S^{-1}x_{\text{even}}) \quad (2.18)$$

Καθώς τα x_{even} και x_{odd} είναι περιοδικά με περίοδο $N/2$ το d θα είναι περιοδικό δηλαδή:

$$d[k + N/2] = d[k] \quad \text{για κάθε ακέραιο } k$$

Έχοντας ήδη ορίσει το μετασχηματισμό πρόβλεψης ως:

$$P \begin{bmatrix} x_{\text{even}} \\ x_{\text{odd}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\text{even}} \\ d \end{bmatrix} \text{ με βάση τον παραπάνω τύπο για το } d, \text{ ο πίνακας}$$

P μπορεί να γραφτεί με τη μορφή:

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{2}(I + S^{-1}) & I \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

όπου I ο $N/2 \times N/2$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Ένα επόμενο βήμα στη διαδικασία του σχήματος Ανόρθωσης, είναι να χρησιμοποιήσουμε το διάνυσμα λεπτομέρειας d για να προβλέψουμε τα άρτια x_{even} και να πάρουμε το διάνυσμα μορφής s :

$$s[n] = x_{even}[n] + \frac{1}{4}(d[n] + d[n-1])$$

Η επιλογή της σταθεράς $\frac{1}{4}$ γίνεται έτσι ώστε τα s και x να έχουν την ίδια μέση τιμή δηλαδή:

$$\frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} s[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

Ο τύπος για το S γράφεται με μορφή διανύσματος ως εξής:

$$s = x_{even} + \frac{1}{4}(d + Sd)$$

και επειδή τα x_{even} και d είναι περιοδικά με περίοδο $N/2$ το ίδιο θα ισχύει και για το S :

$$s[k + N/2] = s[k] \text{ για κάθε ακέραιο } k$$

Στο επόμενο βήμα ορίζουμε το μετασχηματισμό διόρθωσης με $U \begin{bmatrix} x_{even} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix}$. Από την παραπάνω σχέση για το S μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα U με τη μορφή:

$$U = \begin{bmatrix} I & \frac{1}{4}(I + S) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

όπου I ο $N/2 \times N/2$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Το τελευταίο βήμα του σχήματος είναι μια κανονικοποίηση D με :

$$D \begin{bmatrix} s \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}s \\ (1/\sqrt{2})d \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

οπότε η κανονικοποίηση D δίνεται από το διαγώνιο πίνακα:

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{2}I & 0 \\ 0 & (1/\sqrt{2})I \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Τελικά ο μετασχηματισμός ανάλυσης T_a δίνεται ως το γινόμενο των παραπάνω μετασχηματισμών :

$$T_a = DUPS_p \quad (2.23)$$

Όπως κάναμε και στην περίπτωση του μετασχηματισμού κυματιδίου Haar, είναι και σε αυτήν την περίπτωση που μελετάμε εύκολο να κατασκευάσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό (μετασχηματισμό σύνθεσης T_s), απλά αντιστρέφοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς πρόβλεψης, διόρθωσης και κανονικοποίησης φυσικά ως εξής :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 1/2(I + S^{-1}) & I \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} I & -1/4(I + S) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2})I & 0 \\ 0 & \sqrt{2}I \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Ο μετασχηματισμός σύνθεσης T_s δίνεται ως το γινόμενο των παραπάνω μετασχηματισμών [8], [3] :

$$T_s = M_r P^{-1} U^{-1} D^{-1} \quad (2.27)$$

Κεφάλαιο III

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΥΜΑΤΙΔΙΟΥ ΚΑΙ ΣΥΣΤΟΙΧΙΕΣ ΦΙΛΤΡΩΝ ΔΥΟ-ΚΑΝΑΛΙΩΝ ΣΤΟ Z -ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε μια μέθοδο που πρότειναν οι Daubechies και Sweldens, με την οποία μπορεί κανείς να δημιουργήσει όλους τους υπάρχοντες μετασχηματισμούς κυματιδίου. Αυτή η μέθοδος ονομάστηκε μέθοδος Ανόρθωσης, γιατί ξεκινώντας από το αρχικό σήμα, ο μετασχηματισμός που κάνει την αποσυσχέτιση κατασκευάζεται με μια σειρά από αντιστρεπτά βήματα. Η διαδικασία που ονομάσαμε σχήμα Ανόρθωσης, ουσιαστικά συνίσταται στο χωρισμό ενός διακριτού σήματος στα άρτια και περιττά συστατικά του και στην εφαρμογή διαδοχικών γραμμικών μετασχηματισμών πρόβλεψης και διόρθωσης για τα δύο αυτά μέρη του σήματος και κατόπιν αυτών μια κανονικοποίηση. Στο κεφάλαιο αυτό μεταφέρουμε αυτή την ανάλυση μετασχηματισμού κυματιδίου που κάναμε με τη χρήση του σχήματος Ανόρθωσης στο z -μετασχηματισμό. Αυτή η ανάλυση αντιστοιχεί στην παραγοντοποίηση του πολυφασικού πίνακα του κυματιδίου σε άλλους στοιχειώδεις πίνακες και γίνεται με τη βοήθεια του αλγορίθμου της διαίρεσης πολυωνύμων [3][4].

Διακριτά σήματα και ο Z -μετασχηματισμός

Στο προηγούμενο κεφάλαιο (2^o) δώσαμε τον ορισμό του διακριτού σήματος σαν ένα γραμμικό συνδυασμό μοναδιαίων παλμών. Το σύνολο όλων αυτών των σημάτων αποτελεί έναν πραγματικό απειροδιάστατο διανυσματικό χώρο με τη βάση του να αποτελείται από τους μοναδιαίους παλμούς. Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού θα δώσουμε τον ορισμό του z -μετασχηματισμού για τη συνάρτηση που παριστάνει ένα διακριτό σήμα, τον ορισμό του πολυωνύμου

Laurent που προκύπτει άμεσα από τον z -μετασχηματισμό, καθώς και βασικές ιδιότητες των διακριτών σημάτων και των z -μετασχηματισμών αυτών.

Θεωρούμε ένα σήμα x . Ο z -μετασχηματισμός αυτού συμβολίζεται με $X(z)$ και ορίζεται ως εξής :

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]z^{-n} \quad \mu\epsilon \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (3.1)$$

όπου το n είναι ακέραιος και z είναι ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός .

Γενικά ακολουθούμε τον παραπάνω συμβολισμό, δηλαδή συμβολίζουμε τον z -μετασχηματισμό ενός σήματος με το αντίστοιχο κεφαλαίο γράμμα.

Καθώς το x έχει πεπερασμένο φορέα, το άθροισμα που ορίζει τον z -μετασχηματισμό είναι πεπερασμένο και συνεπώς $X(z)$ είναι ένα *πολυώνυμο Laurent* (πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός θετικών και αρνητικών δυνάμεων του z). Έτσι αν υποθέσουμε ότι :

$$x[n] = 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad n < p \quad \kappa\alpha\iota \quad n > q$$

τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$X(z) = x[p]z^{-p} + x[p+1]z^{-p-1} + \dots + x[q]z^{-q}$$

δηλαδή το άθροισμα έχει το πολύ $q - p + 1$ μη μηδενικούς όρους.

Όταν ο z έχει απόλυτη τιμή 1 δηλαδή $z = e^{i\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$, τότε $z^{-n} = e^{-in\omega}$ και το $X(z)$ γίνεται:

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] e^{-in\omega}$$

δηλαδή τριγωνομετρικό πολυώνυμο σε εκθετική μορφή. ω είναι η συχνότητα και n η μεταβλητή που παριστάνει το χρόνο και παίρνει διακριτές τιμές.

Για παράδειγμα, έστω ότι οι μη μηδενικοί παλμοί ενός εισαγόμενου σήματος είναι:

$$x[-1] = 2, \quad x[0] = 3 \quad \kappa\alpha\iota \quad x[2] = 4.$$

Τότε από τους ορισμούς των σχέσεων (2.1) και (2.2) το σήμα x γράφεται : $x = 2\delta_{-1} + 3\delta_0 + 4\delta_2$ και το μήκος του σήματος (από τον ήδη δοσμένο τύπο $q - p + 1$) θα είναι $2 - (-1) + 1 = 4$. (Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι $x[1] = 0$). Ο z -μετασχηματισμός του x σύμφωνα με τον τύπο (3.1) που αναφέραμε παραπάνω είναι:

$$X(z) = 2z + 3 + 4z^{-2} \quad (\text{πολυώνυμο Laurent}).$$

Όταν $z = e^{j\omega}$, τότε ο z -μετασχηματισμός γίνεται:

$$X(e^{j\omega}) = 2e^{j\omega} + 3 + 4e^{-2j\omega}.$$

Ο μετασχηματισμός από το x στο $X(z)$ είναι γραμμικός, δηλαδή όταν προσθέτουμε σήματα x και y ή πολλαπλασιάζουμε ένα σήμα x με κάποιο πραγματικό αριθμό αυτά αντιστοιχούν στις ίδιες πράξεις για τους z -μετασχηματισμούς $X(z)$ και $Y(z)$. Επίσης ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι 1-1, επί και άρα αντιστρέψιμος. Έτσι κάθε διακριτό σήμα παριστάνεται από ένα (πεπερασμένου μήκους) πολώνυμο Laurent με πραγματικούς συντελεστές στον z -μετασχηματισμό.

Δοσμένων δύο διακριτών σημάτων x και y ορίζουμε το εσωτερικό τους γινόμενο:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n]y[n]$$

(υπενθυμίζουμε ότι τα σήματα που θεωρούμε είναι με πραγματικές τιμές) όπου το άθροισμα έχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών όρων λόγω της συνθήκης του πεπερασμένου φορέα των σημάτων.

Ορίζουμε την **συνέλιξη** $x * y$ δύο διακριτών σημάτων x και y το σήμα :

$$(x * y)[n] = \sum_{j+k=n} x[j]y[k]$$

Το άθροισμα των ζευγών (j, k) στη σχέση μπορεί να γραφτεί με δύο τρόπους:

$$(x * y)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[n-k]y[k] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x[j]y[n-j]$$

Το αποτέλεσμα της συνέλιξης μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Θεωρούμε τη συνάρτηση $x[j]y[k]$ των δύο διακριτών μεταβλητών (j, k) και προσθέτουμε τις τιμές της συνάρτησης σε όλα τα ακέραια σημεία κατά μήκος της ευθείας $j + k = n$. Αν η τιμή του n είναι αρκετά μεγάλη, τότε αυτή η γραμμή της διαγωνίου δεν τέμνει το σύνολο των σημείων όπου $x[j]y[k] \neq 0$ και έτσι σε αυτή την περίπτωση $x * y[n] = 0$. Έτσι το $x * y$ είναι ένα διακριτό σήμα. Από τον ορισμό προκύπτει ότι $x * y = y * x$.

Αν τα x και y είναι μοναδιαίοι παλμοί, δηλαδή $x = \delta_p, y = \delta_q$ τότε η συνάρτηση $x[j]y[k]$ είναι μηδέν εκτός από τις τιμές $j = p$ και $k = q$. Έτσι παίρνουμε για τη συνέλιξη τους σε αυτή την περίπτωση ότι :

$$\delta_p * \delta_q = \delta_{p+q}$$

Γενικά αν $x[j] = 0$ για $j < p$ ή $j > q$ τότε:

$$(x * y)[n] = \sum_{p \leq j \leq q} x[j]y[n-j]$$

οπότε η τιμή της συνέλιξης $x * y$ στο n εξαρτάται από τις τιμές του y μεταξύ των $n - p$ και $n - q$.

Το θεώρημα που αναλύουμε παρακάτω μας δίνει μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες της συνέλιξης:

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω x και y είναι σήματα (με πεπερασμένο φορέα). Ο z -μετασχηματισμός της συνέλιξης $x * y$ αυτών είναι το γινόμενο $X(z)Y(z)$ των z -μετασχηματισμών αυτών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ο ορισμός της συνέλιξης μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια του ορισμού του μοναδιαίου παλμού (2.1) από τη σχέση: $(x * y) = \sum_{p,q} x[p]y[q]\delta_{p+q}$

Με δεδομένο ότι ο z -μετασχηματισμός του μοναδιαίου παλμού δ_{p+q} είναι: $z^{-p-q} = z^{-p}z^{-q}$ ο z -μετασχηματισμός της συνέλιξης $x * y$ γίνεται:

$$\sum_{p,q} x[p]y[q]\delta_{p+q} = \sum_{p,q} x[p]y[q]z^{-p-q} = X(z)Y(z)$$

Ορίζουμε ως *τελεστή μετατόπισης* S που εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση x του \mathbb{Z} και δίνεται από την σχέση:

$$(Sx)[n] = x[n-1], n \in \mathbb{Z}$$

Το πρόσημο μείον στον τύπο δηλώνει ότι η γραφική παράσταση της Sx προκύπτει από τη γραφική παράσταση της x μετατοπίζοντας αυτή κατά μια μονάδα προς τα δεξιά. Από τον ορισμό της συνέλιξης έχουμε ότι: $Sx = \delta_1 * x$, ενώ γενικότερα για κάθε ακέραιο k έχουμε αντίστοιχα ότι: $S^k x = \delta_k * x$.

Σχετικά με τη μετατόπιση έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω \mathcal{X} ένα διακριτό σήμα. Τότε ο z -μετασχηματισμός του Sx είναι ο $z^{-1}X(z)$ και ο z -μετασχηματισμός ενός γραμμικού συνδυασμού μετατοπίσεων δηλαδή $\sum_k a_k S^k x$ είναι ο $(\sum_k a_k z^{-k})X(z)$.

Απόδειξη

Από τα προηγούμενα ισχύει ότι $S^k x = \delta_k * x$, οπότε $\sum_k a_k S^k x = \sum_k a_k \delta_k * x = (\sum_k a_k z^{-k})X(z)$ με βάση το προηγούμενο θεώρημα που διατυπώσαμε και με δεδομένο ότι ο z -μετασχηματισμός του μοναδιαίου παλμού στο k είναι ο z^{-k} .

Δηλαδή η μετατόπιση S αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με το z^{-1} στο z -μετασχηματισμό σημάτων.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί διακριτών σημάτων στο Z -μετασχηματισμό

Οι παρακάτω γραμμικοί μετασχηματισμοί στο διανυσματικό χώρο των διακριτών σημάτων είναι πολύ σημαντικοί στη θεωρία ανάλυσης κυματιδίου που παρουσιάζουμε στην πορεία της εργασίας, καθώς ουσιαστικά εξηγούμε με τις παρακάτω διαδικασίες πως κάνουμε το χωρισμό ενός σήματος στα *πολυφασικά* συστατικά του και μεταφέρουμε αυτή τη διαδικασία στο z -μετασχηματισμό, στον οποίο άλλωστε θα αναλύσουμε και τη μέθοδο Ανόρθωσης.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ ΚΑΙ ΠΛΕΙΟΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Έστω \mathcal{X} η ακολουθία τιμών ενός διακριτού σήματος. Η 'υποδειγματοληψία με το 2' για το σήμα αυτό \mathcal{X} είναι η διαδικασία με την οποία κρατάμε μόνο τις άρτιες τιμές αυτού δηλαδή παίρνουμε το εξής σήμα:

$$x_{2\downarrow}[n] = x[2n], \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

Η διαδικασία της υποδειγματοληψίας ορίζει τον εξής γραμμικό μετασχηματισμό: $\boxed{2\downarrow}x = x_{2\downarrow}$. Ο z -μετασχηματισμός του $x_{2\downarrow}$ συμβολίζεται με $X_{2\downarrow}(z)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$X_{2\downarrow}(z) = \sum_n x[2n]z^{-n} \quad (3.3)$$

Αντίστοιχα η διαδικασία της 'πλειοδειγματοληψίας με το 2' για ένα σήμα x είναι το σήμα:

$$x_{2\uparrow}[n] = \begin{cases} x[m] & \alpha\nu n = 2m \\ 0 & \alpha\nu n = 2m + 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

και ορίζει τον γραμμικό μετασχηματισμό $\boxed{2\uparrow}x = x_{2\uparrow}$. Ο z -μετασχηματισμός του $x_{2\uparrow}$ συμβολίζεται με $X_{2\uparrow}(z)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$X_{2\uparrow}(z) = \sum_n x[n]z^{-2n} = X(z^2) \quad (3.5)$$

Το σήμα $x_{2\uparrow}$ είναι μια διασταλμένη μορφή του σήματος x (δηλαδή παρεμβάλλουμε μηδενικά μεταξύ των δειγμάτων αυτού). Εύκολα από τους ορισμούς αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{2\downarrow}\boxed{2\uparrow}x = x \quad (3.6)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός $\boxed{2\downarrow}$ είναι ο αντίστροφος από τα αριστερά του μετασχηματισμού $\boxed{2\uparrow}$.

Εναλλάσσοντας τη σειρά αυτών έχουμε:

$$(\boxed{2\uparrow}\boxed{2\downarrow}x)[n] = \begin{cases} x[n] & \alpha\nu n = 2m \\ 0 & \alpha\nu n = 2m + 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Έτσι ο $\boxed{2\uparrow}\boxed{2\downarrow}x$ είναι η προβολή του x στα σήματα που είναι μηδέν στους περιττούς ακέραιους, ενώ αν $x[n] = 0$, όταν το n είναι άρτιος τότε $\boxed{2\uparrow}\boxed{2\downarrow}x = 0$. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο $\boxed{2\downarrow}$ δεν είναι δεξιός αντίστροφος του $\boxed{2\uparrow}$ και κανένας από τους $\boxed{2\downarrow}$ και $\boxed{2\uparrow}$ δεν είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός στο διανυσματικό χώρο των σημάτων.

Στη συνέχεια εξετάζουμε ένα πολύ απλό παράδειγμα για να εφαρμόσουμε στην πράξη όσα αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ας υποθέσουμε ότι οι μη μηδενικές τιμές της ακολουθίας των τιμών ενός σήματος είναι $x[-1] = 2, x[0] = 3, x[1] = 4, x[2] = 1$. Με τη διαδικασία της υποδειγματοληψίας οι μη μηδενικές τιμές του $x_{2\downarrow}$ είναι $x_{2\downarrow}[0] = 3, x_{2\downarrow}[1] = 1$. Ο z -μετασχηματισμός αυτών είναι σύμφωνα με τον τύπο (3.1):

$$X(z) = 2z + 3 + 4z^{-1} + z^{-2} \text{ και } X_{2\downarrow}(z) = 3 + z^{-1}.$$

Αν θέσουμε $y = x_{2\downarrow}$ τότε οι μη μηδενικές τιμές του $y_{2\uparrow}$ είναι οι $y_{2\uparrow}[0] = 3, y_{2\uparrow}[2] = 1$. Έτσι ο z -μετασχηματισμός του $y_{2\uparrow}$ είναι ο $Y_{2\uparrow}(z) = Y(z^2) = 3 + z^{-2}$ (δηλαδή οι άρτιοι όροι του $X(z)$).

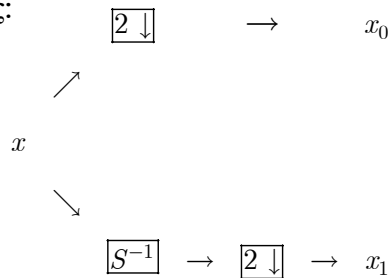
ΣΧΕΣΕΙΣ z -ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΚΑΙ $\boxed{2\downarrow}, \boxed{2\uparrow}$

Για δεδομένο σήμα x ορίζουμε :

$$x_0 = \boxed{2\downarrow}x, x_1 = \boxed{2\downarrow}S^{-1}x$$

(ο τελεστής S^{-1} μετατοπίζει το x προς τα αριστερά κατά μια μονάδα).

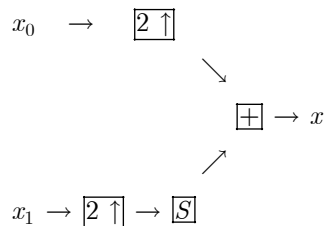
Γραφικά μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτό το διαχωρισμό με το εξής διάγραμμα ροής:



οπότε ανακατασκευάζουμε το x από τα x_0 και x_1 με βάση τη σχέση :

$$x = \boxed{2\uparrow}x_0 + S\boxed{2\uparrow}x_1 \quad (3.8)$$

η οποία αντιστοιχεί στο εξής διάγραμμα ροής:



Για να αποδείξουμε την (3.8) πρέπει να θυμηθούμε ότι:

$$\boxed{2 \uparrow} x_0[n] = \begin{cases} x[n] & \alpha \nu \ n = 2m \\ 0 & \alpha \nu \ n = 2m + 1 \end{cases}$$

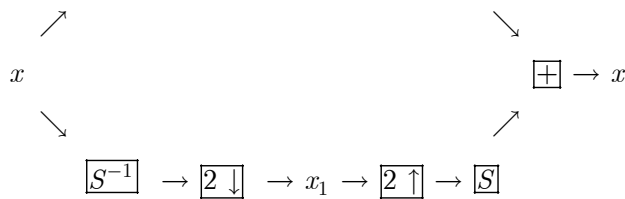
Ομοίως επειδή έχουμε ότι $(S^{-1}x)[n-1] = x[n]$ ισχύει:

$$(3.9) \quad (S\boxed{2 \uparrow}x_1)[n] = (\boxed{2 \uparrow}x_1)[n-1] = (\boxed{2 \uparrow}\boxed{2 \downarrow}S^{-1}x)[n-1] = \begin{cases} 0, n = 2m \\ x[n], n = 2m + 1 \end{cases}$$

Τα δύο διανύσματα στο δεξί μέλος της (3.8) δίνουν όλες τις τιμές του $x[n]$ για κάθε n . Έτσι από αυτή τη σχέση μπορούμε να πάρουμε τη συνθήκη τέλειας ανακατασκευής μιας ακολουθίας τιμών ενός διακριτού σήματος x η οποία είναι η εξής :

$$x = \boxed{2 \uparrow}\boxed{2 \downarrow}x_0 + S\boxed{2 \uparrow}\boxed{2 \downarrow}S^{-1}x \quad (3.10)$$

Αυτός ο τύπος μπορούμε να πούμε ότι αντιστοιχεί σε αυτόν που ονομάζουμε Lazy μετασχηματισμό κυματιδίου, (αυτόν που στην πράξη χωρίζει τα άρτια από τα περιττά μέρη) και διαγραμματικά παριστάνεται ως:



Το διακριτό σήμα χωρίζεται σε άρτια και περιττά μέρη, τα οποία συνδυάζονται ξανά χωρίς κάποιο επιπλέον μετασχηματισμό.

Οι z -μετασχηματισμοί του άρτιου x_0 και περιττού μέρους x_1 ενός σήματος είναι σύμφωνα με τον τύπο (3.1) που δίνει τον μετασχηματισμό αυτό :

$$\begin{aligned} X_0(z) &= \sum_n x[2n]z^{-n} = X_{2\downarrow}(z) \\ X_1(z) &= \sum_n x[2n+1]z^{-n} = (zX(z))_{2\downarrow} \end{aligned} \quad (3.11)$$

(πρέπει να τονίσουμε στον δεύτερο τύπο ότι πολλαπλασιάζουμε με το z πριν κάνουμε υποδειγματοληψία).

Μπορούμε να εκφράσουμε τα $X_0(z), X_1(z)$ απευθείας με όρους του $X(z)$, εισάγοντας τη μεταβλητή $z^{1/2}$

$$X_0(z) = \frac{1}{2} \left\{ X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2}) \right\} \quad \text{και} \quad X_1(z) = \frac{z^{1/2}}{2} \left\{ X(z^{1/2}) - X(-z^{1/2}) \right\} \quad (3.12)$$

δηλαδή αντικαθιστούμε το $z^{1/2}$ στον μετασχηματισμό του x και απλοποιούμε τη σχέση με βάση τον αλγεβρικό κανόνα των εκθετών: $(z^{1/2})^n = z^{n/2}$ και $(-z^{1/2})^n = (-1)^n z^{n/2}$.

Προκειμένου να επαληθεύσουμε την αλήθεια της πρότασης (3.12), παρατηρούμε ότι ο τύπος για το $X_0(z)$ καταργεί τους όρους με n περιττό, ενώ οι όροι με n άρτιο δίνουν τη μορφή του $X_0(z)$ (3.12) και το ανάποδο συμβαίνει με τον τύπο του $X_1(z)$ στον οποίο συμβάλλουν μόνο οι όροι με n περιττό, όπου με βάση τις ιδιότητες των εκθετών:

$$x[2m+1]z^{1/2}z^{-m-1/2} = x[2m+1]z^{-m}$$

διαμορφώνουν τον τύπο (3.12) για το $X_1(z)$.

Ο τύπος που δίνει τον z -μετασχηματισμό για τη σχέση (3.8) έχει τη μορφή:

$$X(z) = X_0(z)_{2\uparrow} + z^{-1}(X_1(z)_{2\uparrow}) = X_0(z^2) + z^{-1}X_1(z^2) \quad (3.13)$$

(παρατηρούμε στην εξίσωση ότι αφού κάνουμε πλειοδειγματοληψία πολλαπλασιάζουμε με τον παράγοντα z^{-1}).

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της παραπάνω διαδικασίας:

Θεωρούμε ένα διακριτό σήμα και υποθέτουμε ότι οι μη μηδενικές τιμές του είναι $x[-3] = 2, x[0] = 3, x[1] = 4, x[2] = 1$. Τότε ο z -μετασχηματισμός αυτού είναι:

$X(z) = 2z^3 + 3 + 4z^{-1} + z^{-2}$ οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε για το άρτιο και περιττό μέρος αυτού:

$$X_0(z) = X_{2\downarrow}(z) = 3 + z^{-1}$$

$$\text{και } X_1(z) = (zX(z))_{2\downarrow} = (2z^4 + 3z + 4 + z^{-1})_{2\downarrow} = 2z^2 + 4$$

(πρέπει να τονίσουμε ιδιαίτερα την μετατροπή των εκθετών).

Με χρήση του τύπου (3.13) ανασυνθέτουμε ξανά το σήμα $X(z) = 2z^3 + 3 + 4z^{-1} + z^{-2}$ ως εξής:

$$X_0(z^2) + z^{-1}X_1(z^2) = (3 + z^{-2}) + z^{-1}(2z^4 + 4) = X(z).$$

Σχήμα Ανόρθωσης και ο Πολυφασικός πίνακας στο Z -μετασχηματισμό

Εξετάζουμε τώρα πώς συνδέουμε τα όσα μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο με τον μετασχηματισμό ανάλυσης και σύνθεσης κυματιδίου. Σύμφωνα με τα παραπάνω ο χωρισμός ενός περιοδικού σήματος περιόδου N σε άρτια και περιττά μέρη περιόδου $N/2$, αντικαθίσταται στον z -μετασχηματισμό από την υποδειγματοληψία ενός σήματος x στα ζεύγη των σημάτων x_0 και x_1 (διαδικασία που ονομάσαμε πολυφασική αναπαράσταση του σήματος). Έχουμε συμβολίσει με S τον τελεστή του πολλαπλασιασμού με τον z^{-1} , στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε τον z -μετασχηματισμό και όπως θα διαπιστώσουμε δεν είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τα – όπως ονομάσαμε – βήματα πρόβλεψης και διόρθωσης σε όρους του z -μετασχηματισμού και για τα $X_0(z), X_1(z)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΟΥ ΠΟΛΥΦΑΣΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΣΤΟ Z -ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ ΚΥΜΑΤΙΔΙΟΥ CDF(2,2)

Ο μετασχηματισμός ανάλυσης κυματιδίου T_a , ενός διακριτού σήματος x δίνεται ως το γινόμενο των παραπάνω μετασχηματισμών σύμφωνα με τη σχέση:

$$T_a = DUPS_p \quad (3.14)$$

(δηλαδή όπως έχουμε προαναφέρει αποτελείται από ένα βήμα πρόβλεψης ακολουθούμενο από ένα βήμα διόρθωσης και μια κανονικοποίηση). Αναλυτικότερα έχουμε αντικαθιστώντας τους παραπάνω πίνακες:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}I & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 1/4(I+S) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -1/2(I+S^{-1}) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός ανάλυσης κυματιδίου γίνεται πολλαπλασιασμός πινάκων στο διάνυσμα των z -μετασχηματισμών του σήματος στο οποίο έχει γίνει υποδειγματοληψία δηλαδή μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} = H_p(z) \begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

οπότε με $H_p(z)$ συμβολίζουμε τον πολυφασικό πίνακα ανάλυσης ο οποίος σύμφωνα με τα παραπάνω ορίζεται ως:

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/4(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2(1+z) & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και μετά την}$$

εκτέλεση των πράξεων έχουμε ότι:

$$H_p(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} (-z + 6 - z^{-1}) & (2 + 2z^{-1}) \\ -(2 + 2z) & 4 \end{bmatrix}$$

Για να κάνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, αντιστρέφουμε το καθένα από τα βήματα της μεθόδου που ονομάσαμε σχήμα Ανόρθωσης και έχουμε προφανώς ότι:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 1/2(I + S^{-1}) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -1/4(I + S) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2}I & 0 \\ 0 & \sqrt{2}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Μετατρέποντας τα παραπάνω στο z -μετασχηματισμό παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} = G_p(z) \begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

όπου με $G_p(z)$ συμβολίζουμε τον πολυφασικό πίνακα σύνθεσης ο οποίος ορίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} G_p(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2(1+z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/4(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} 4 & -(2 + 2z^{-1}) \\ (2 + 2z) & (-z + 6 - z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{μετά την εκτέλεση των πράξεων}). \end{aligned}$$

Καθώς ο $G_p(z)$ είναι ο αντίστροφος του $H_p(z)$ πίνακα, ο $G_p(z)$ μπορεί να σχηματιστεί κατευθείαν από τον $H_p(z)$ σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer οποίος δίνει τον αντίστροφο ενός πίνακα με τον τύπο:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{όπου } \delta = ad - bc. \quad (3.18)$$

Γενικεύοντας ο πολυφασικός πίνακας ανάλυσης είναι ένα γινόμενο της μορφής:

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & F_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ F_k(z) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

όπου τα $F_1(z), \dots, F_k(z), H_{ij}(z)$ (συντελεστές πρόβλεψης και διόρθωσης) είναι πολυώνυμα Laurent και $k \neq 0$, με $\det H_p(z) = 1$.

Συνοψίζοντας είδαμε ότι η διαδικασία διαχωρίζει το αρχικό διακριτό σήμα (μέσω υποδειγματοληψίας) στα επιμέρους σήματα x_0 και x_1 και αυτό το ζεύγος κατόπιν μετασχηματίζεται στο ζεύγος y_0 και y_1 των οποίων οι z -μετασχηματισμοί είναι [σχέση(3.15)]:

$$\begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} = H_p(z) \begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix}$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο πολυφασικός πίνακας δρα πάνω στο z -μετασχηματισμό αφού το αρχικό σήμα έχει διαχωριστεί.

Όπως είδαμε ο αντίστροφος μετασχηματισμός επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του πολυφασικού πίνακα σύνθεσης (τον αντίστροφο δηλαδή του πολυφασικού πίνακα ανάλυσης):

$$G_p(z) = H_p(z)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_k(z) & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & -F_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Στον αντίστροφο μετασχηματισμό, ο αντίστροφος πολυφασικός πίνακας δρα πρώτα στους z -μετασχηματισμούς των y_0 και y_1 , ενώ μετά αυτοί συνδυάζονται και δίνουν το αρχικό σήμα.

Βάσει της σχέσης (3.19) μπορούμε όπως είναι φυσικό να υπολογίσουμε κατευθείαν τον αντίστροφο $G_p(z)$ από τον πίνακα $H_p(z)$ που περιέχει τα τέσσερα πολυώνυμα Laurent, χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Cramer που έχουμε αναφέρει ήδη πιο πάνω και ότι $\det H_p(z) = 1$. Έτσι έχουμε ότι:

$$G_p(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & -H_{01}(z) \\ -H_{10}(z) & H_{00}(z) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

(θα πρέπει να σημειώσουμε και θα το αναλύσουμε περισσότερο ότι ο πίνακας κανονικοποίησης $\begin{bmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ επιλέγεται έτσι ώστε να εξασφαλίσουμε ότι $\det H_p(z) = 1$).

Έτσι:

$$\begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} = G_p(z) \begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Συστοιχίες Φίλτρων και ο πίνακας Διαμόρφωσης στο z -μετασχηματισμό

Παρουσιάζουμε τώρα μια προσέγγιση για τον διακριτό μετασχηματισμό κυματιδίου, την οποία συναντάμε ευρέως στην θεωρία ανάλυσης σημάτων. Είναι βασισμένη στην θεωρία της συστοιχίας φίλτρων δύο καναλιών (two channel filter bank). Για να γίνει όμως κατανοητή το πρώτο που θα πρέπει να ορίσουμε είναι η έννοια του φίλτρου.

ΦΙΛΤΡΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΚΡΟΥΣΤΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ (FINITE IMPULSE RESPONSE FIR)

Το φίλτρο είναι μια γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει ένα διακριτό σήμα πάνω σε ένα άλλο διακριτό σήμα. Στο πεδίο του χρόνου αυτή η απεικόνιση παριστάνεται με τη συνέλιξη με ένα διάνυσμα h , δηλαδή η συνέλιξη ενός διακριτού σήματος με το h ονομάζεται φιλτράρισμα με το h . Έτσι: έστω h ένα διακριτό σήμα. Ο γραμμικός μετασχηματισμός C_h που ορίζεται ως:

$$C_h x = h * x, \quad \text{για όλα τα σήματα } x \quad (3.23)$$

ονομάζεται φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR). Το διάνυσμα h ονομάζεται κρουστική απόκριση του φίλτρου. Έτσι εάν το h είναι μια πεπερασμένη ακολουθία, ο C_h θα έχει πεπερασμένο φορέα. Αν θεωρήσουμε σαν x το μοναδιαίο παλμό στο 0, δηλαδή $x = \delta_0$ τότε έχουμε ότι :

$$C_h \delta_0[n] = \sum_k h[n-k] \delta_0[k] = h[n] \quad (3.24)$$

εξ ορισμού του δ_0 . Παριστάνουμε $H(z)$ τον z -μετασχηματισμό του h . Τότε όπως προκύπτει άμεσα από την 1^η πρόταση (παράγραφος (3.1)), ο z -μετασχηματισμός του $C_h x$ είναι ο $H(z)X(z)$. Δηλαδή η δράση του φίλτρου πάνω στον z -μετασχηματισμό δεν είναι παρά ο πολλαπλασιασμός του z -μετασχηματισμού του σήματος με τη συνάρτηση $H(z)$.

Ο μετασχηματισμός s^p , όπου s είναι ένας τελεστής μετατόπισης και p ακέραιος, είναι ένα φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης με $h = \delta_p$ γιατί:

$$(\delta_p * x)[n] = \sum_k \delta_p[k]x[n-k] = x[n-p] = (S^p x)[n] \quad (3.25)$$

Κάθε άλλο φίλτρο T πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) με συνάρτηση κρουστικής απόκρισης h , θα είναι γραμμικός συνδυασμός των δυνάμεων του τελεστή μετατόπισης, δηλαδή $T = \sum_p h[p]S^p$ όπως προκύπτει από τη σχέση (3.25), γιατί $h = \sum_p h[p]\delta_p$.

ΣΥΣΤΟΙΧΙΕΣ ΦΙΛΤΡΩΝ ΔΥΟ ΚΑΝΑΛΙΩΝ

Επεξεργαζόμαστε τη διαδικασία με την οποία μπορούμε να αναλύσουμε ένα διακριτό σήμα με τη χρήση δύο φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR). Μια συστοιχία φίλτρων δύο καναλιών περιέχει δύο φίλτρα ανάλυσης τα οποία συμβολίζουμε h_0 , h_1 και δύο φίλτρα σύνθεσης τα g_0 , g_1 . Τα φίλτρα με το δείκτη 0 τα ονομάζουμε χαμηλοδιαβατά, ενώ αυτά με δείκτη 1 υψιδιαβατά (θα δούμε παρακάτω από πού προέρχεται αυτή η ορολογία).

Ένα φίλτρο ανάλυσης δύο καναλιών κάνει χρήση των δύο φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR), με κρουστικές αποκρίσεις h_0 (χαμηλοδιαβατό) και h_1 (υψιδιαβατό), για να μετασχηματίσει το εισαγόμενο σήμα x σε:

$$T_a x = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{με } y_0 = \boxed{2 \downarrow} h_0 * x \quad \text{και } y_1 = \boxed{2 \downarrow} h_1 * x. \quad (3.26)$$

ΣΥΣΤΟΙΧΙΕΣ ΦΙΛΤΡΩΝ ΤΕΛΕΙΑΣ ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ (PR)

Η ορολογία χαμηλοδιαβατό και υψιδιαβατό που χρησιμοποιούμε για τα φίλτρα ουσιαστικά περιγράφει την απόκριση της συχνότητας τους. Ένα ζεύγος φίλτρων που θεωρείται ιδανικό θα είχε z -μετασχηματισμούς που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

$$H_0(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \ 0 \leq \omega \leq L \\ 0 & \alpha\nu \ L \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (3.27)$$

$$H_1(e^{i\omega}) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \ 0 \leq \omega \leq L \\ 1 & \alpha\nu \ L \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

όπου $0 < L < \pi$.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι ένα φίλτρο h πραγματικών τιμών έχει μετασχηματισμό Fourier που ικανοποιεί τη συνθήκη $H(e^{-i\omega}) = \overline{H(e^{i\omega})}$ και καθώς αυτός είναι περιοδικός περιόδου 2π αρκεί να οριστεί σε ένα διάστημα εύρους $0 \leq \omega \leq \pi$. Για ένα τέτοιο φίλτρο, το φιλτραρισμένο σήμα $h_0 * x$ έχει μόνο χαμηλές συχνότητες ($|\omega| < L$) αφού ο μετασχηματισμός Fourier αυτού $H_0(e^{i\omega})X(e^{i\omega})$ είναι μηδέν όταν $L \leq |\omega| \leq \pi$. Αντίστοιχα το φιλτραρισμένο σήμα μέσω του φίλτρου h_1 δηλαδή το $h_1 * x$ έχει μόνο υψηλές συχνότητες (3.27) όταν $L \leq |\omega| \leq \pi$.

Προκειμένου να κατασκευάσουμε φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) πρέπει να αντιμετωπίσουμε το εξής πρόβλημα:

Τα φίλτρα που περιγράφονται από τη σχέση (3.27) έχουν έναν μη πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών συντελεστών καθώς :

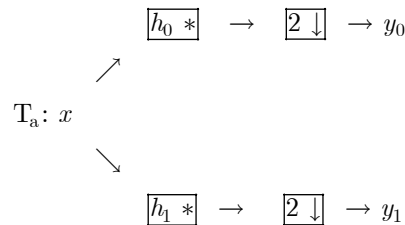
$$h_0[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L e^{in\omega} d\omega = \frac{\sin(nL)}{n\pi} \quad \mu\epsilon \quad \sin(nL) \neq 0 \quad \text{για } \acute{\alpha}\text{πειρους } \acute{\alpha}\text{κέραιους } n,$$

 καθώς $0 < L < \pi$.

Για να πάρουμε ακολουθίες με πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών συντελεστών (φίλτρα FIR), πρέπει να κάνουμε κάποια επικάλυψη ανάμεσα στις ζώνες υψηλών και χαμηλών συχνοτήτων. Ο βασικός διαχωρισμός των συχνοτήτων μπορεί να γίνει θέτοντας :

$$H_0(z) = (1+z)^p \varphi(z) \quad \text{και} \quad H_1(z) = (1-z)^q \psi(z) \quad (3.28)$$

για θετικούς ακέραιους p και q , με τα $\varphi(z), \psi(z)$ να είναι πολυώνυμα Laurent με $\varphi(-1) \neq 0$ και $\psi(1) \neq 0$. Από τις σχέσεις (3.28), αυτό μας εξασφαλίζει ότι το $H_0(z)$ μηδενίζεται στο $z = -1 (\omega = \pi)$ και το $H_1(z)$ μηδενίζεται στο $z = 1 (\omega = 0)$. Δηλαδή $H_0(-1) = 0$ και $H_1(1) = 0$. Μια μεγάλη τιμή για το p σημαίνει ότι το $H_0(e^{i\omega})$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 0, όταν το ω είναι πολύ κοντά στο π , ενώ μια μεγάλη τιμή για το q σημαίνει ότι το $H_1(e^{i\omega})$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 0, όταν το ω είναι πολύ κοντά στο 0, άρα συνοψίζοντας το πρώτο μηδενίζεται στις υψηλές συχνότητες, ενώ το δεύτερο στις χαμηλές. Γι' αυτό το λόγο λέμε ότι το h_0 είναι ένα χαμηλοδιαβατό φίλτρο, ενώ το h_1 είναι υψιδιαβατό. Καθώς και δύο παραπάνω διαδικασίες τόσο της συνέλιξης όσο και της υποδειγματοληψίας είναι γραμμικές, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ένα γραμμικό μετασχηματισμό T_a , του οποίου το εξαγόμενο είναι τα δύο ζεύγη των σημάτων y_0 και y_1 δηλαδή μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά την διαδικασία αυτή ως εξής:



Έτσι όπως διαπιστώνουμε το αρχικό σήμα πρώτα περνάει από το κάθε φίλτρο χωριστά και μετά τα δύο φιλτραρισμένα σήματα περνούν από τη διαδικασία της υποδειγματοληψίας. Στη διαδικασία του σχήματος Ανόρθωσης σε αντίθεση, τα βήματα γίνονται με αντίστροφη φορά, ενώ γίνεται και μια μετατόπιση στον ένα κλάδο του διαγράμματος.

Έχουμε ήδη δει ότι ο z -μετασχηματισμός του $h_0 * x$ είναι ο $H_0X(z)$ και ο z -μετασχηματισμός του $h_1 * x$ είναι ο $H_1X(z)$, οπότε με τη βοήθεια αυτών μπορούμε να γράψουμε τα y_0 και y_1 στον z -μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned}
 Y_0(z) &= \frac{1}{2} \left\{ H_0(z^{1/2})X(z^{1/2}) + H_0(-z^{1/2})X(-z^{1/2}) \right\} \\
 Y_1(z) &= \frac{1}{2} \left\{ H_1(z^{1/2})X(z^{1/2}) + H_1(-z^{1/2})X(-z^{1/2}) \right\}
 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις μπορούμε να ορίσουμε έναν πίνακα που ονομάζουμε πίνακα διαμόρφωσης ανάλυσης ως εξής:

$$H_m(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

με τα στοιχεία αυτού του πίνακα να είναι πολυώνυμα Laurent, οπότε οι τύποι (3.29) για τα $Y_0(z)$ και $Y_1(z)$ μπορούν να συνδυαστούν σε μια μόνο εξίσωση με τη μορφή πινάκων:

$$2 \begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} = H_m(z^{1/2}) \begin{bmatrix} X(z^{1/2}) \\ X(-z^{1/2}) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Ο όρος διαμόρφωση χρησιμοποιείται για να περιγράψει τον πίνακα $H_m(z)$ καθώς αντικαθιστώντας το z με το $-z$ αντιστοιχεί σε μετατόπιση της συχνότητας $\omega \rightarrow \omega + \pi$ όταν $z = e^{j\omega}$. Έτσι τα στοιχεία $H_0(-z)$ και $H_1(-z)$ στη δεύτερη στήλη του πίνακα $H_m(z)$ είναι τροποποιήσεις της συχνότητας κατά π των στοιχείων της πρώτης στήλης.

Στην αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή αυτή της αναδόμησης ενός σήματος από τα συστατικά του, ένα φίλτρο σύνθεσης δύο καναλιών κάνει χρήση δύο φίλτρων πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR) με κρουστικές αποκρίσεις g_0 (χαμηλοδιαβατό) και g_1 (υψηλοδιαβατό), για να μετασχηματίσει το ζεύγος των εισαγόμενων σημάτων y_0 και y_1 στο:

$$\tilde{x} = T_s \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = g_0 * (\uparrow 2 y_0) + g_1 * (\uparrow 2 y_1) \quad (3.32)$$

Όπως είδαμε και παραπάνω, έτσι και κατά την εφαρμογή της αντίστροφης διαδικασίας, δηλαδή της σύνθεσης του σήματος από τα συστατικά του, τόσο η συνέλιξη όσο και η πλειοδειγματοληψία είναι πράξεις γραμμικές και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ένα γραμμικό μετασχηματισμό T_s , του οποίου το εξαγόμενο συμβολίζουμε με \tilde{x} και μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά την διαδικασία αυτή ως εξής:

$$\begin{array}{ccc} y_0 \rightarrow \uparrow 2 \rightarrow \boxed{g_0} * & & \\ & \searrow & \\ T_s: & & \boxed{\oplus} \rightarrow \tilde{x} \\ & \nearrow & \\ y_1 \rightarrow \uparrow 2 \rightarrow \boxed{g_1} * & & \end{array}$$

Δηλαδή οι διαδικασίες γίνονται με αντίστροφη σειρά από ότι στον πολυφασικό μετασχηματισμό ανάλυσης και υπάρχει και μια μετατόπιση στον ένα κλάδο.

Για τη σύνθεση έχουμε ως προς τον z -μετασχηματισμό του \tilde{x} το αποτέλεσμα:

$$\tilde{X}(z) = G_0(z)Y_0(z^2) + G_1(z)Y_1(z^2)$$

(αφού γνωρίζουμε ότι ο z -μετασχηματισμός του $\uparrow 2 y_0$ είναι ο $Y_0(z^2)$ και αντίστοιχα του $\uparrow 2 y_1$ είναι ο $Y_1(z^2)$).

Το ζητούμενο είναι να βρεθούν h_0, h_1, g_0, g_1 , έτσι ώστε $\tilde{x} = x$.

Οπότε αν πάνω σε ένα διακριτό σήμα x εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό ανάλυσης T_a και στη συνέχεια το μετασχηματισμό σύνθεσης T_s στο $T_a x$ θα έχουμε σαν αποτέλεσμα το σήμα \tilde{x} . Έτσι θέλουμε να εκφράσουμε τον z -μετασχηματισμό δηλαδή τον $\tilde{X}(z)$ του εξαγόμενου σήματος με όρους του z -μετασχηματισμού δηλαδή του $X(z)$ του εισαγόμενου, έτσι ώστε ισοδύναμα να έχουμε $\tilde{X}(z) = X(z)$. Στην περίπτωση λέμε ότι έχουμε συστοιχία φίλτρων τέλει ανακατασκευής PR (Perfect Reconstruction).

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση υπολογίσαμε τον z -μετασχηματισμό του εξαγόμενου σήματος που συμβολίσαμε $\tilde{X}(z)$ ως:

$$\tilde{X}(z) = G_0(z)Y_0(z^2) + G_1(z)Y_1(z^2)$$

με δεδομένο ότι $(-z)^2 = z^2$ έχουμε ομοίως για το $\tilde{X}(-z)$:

$$\tilde{X}(-z) = G_0(-z)Y_0(z^2) + G_1(-z)Y_1(z^2).$$

Γράφοντας το παραπάνω ζεύγος των εξισώσεων με τη μορφή πινάκων παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(z) \\ \tilde{X}(-z) \end{bmatrix} = G_m(z) \begin{bmatrix} Y_0(z^2) \\ Y_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

όπου προφανώς είναι:

$$G_m(z) = \begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

τον οποίο πίνακα ονομάζουμε πίνακα *διαμόρφωσης σύνθεσης* σήματος. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε και να αναφέρουμε ότι τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής του πίνακα $G_m(z)$ προκύπτουν από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής αν μεταβάλουμε τη συχνότητά τους κατά π .

Από τη σχέση (3.31) γνωρίζουμε ότι $2 \begin{bmatrix} Y_0(z^2) \\ Y_1(z^2) \end{bmatrix} = H_m(z) \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}$, συνεπώς

λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (3.33) βρίσκουμε μια σχέση με την οποία συνδέονται οι z -μετασχηματισμοί του εισαγόμενου σήματος x και του εξαγόμενου σήματος \tilde{x} μιας συστοιχίας φίλτρων ανάλυσης – σύνθεσης δύο καναλιών, η οποία προφανώς είναι:

$$2 \begin{bmatrix} \tilde{X}(z) \\ \tilde{X}(-z) \end{bmatrix} = G_m(z)H_m(z) \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Έτσι αν για κάθε διακριτό σήμα x είναι $x = \tilde{x}$, τότε όπως άλλωστε ήδη έχουμε αναφέρει και παραπάνω λέμε ότι η συστοιχία φίλτρων με τα οποία κάναμε την ανάλυση-σύνθεση του σήματος έχει την ιδιότητα *τέλειας ανακατασκευής* (perfect reconstruction PR).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο (Συνθήκη τέλει ανακατασκευής)

Η ιδιότητα τέλει ανακατασκευής ενός σήματος για τη συστοιχία των φίλτρων h_0, h_1, g_0, g_1 ισχύει αν και μόνο αν οι πίνακες διαμόρφωσης $G_m(z), H_m(z)$ ικανοποιούν τη σχέση :

$$G_m(z)H_m(z) = 2I. \quad (3.36)$$

Η σχέση (3.36) καλείται συνθήκη PR και ισοδυναμεί με την $H_m(z)G_m(z) = 2I$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέτουμε ότι $G_m(z)H_m(z) = 2I$. Τότε από τη σχέση (3.35) διαπιστώνουμε ότι η συνθήκη τέλειας ανακατασκευής (PR) ισχύει, καθώς έχουμε $x = \tilde{x}$.

Αντίστροφα, αν η συνθήκη τέλειας ανακατασκευής PR ισχύει τότε ως θεωρήσουμε σαν σήμα x το μοναδιαίο παλμό δηλαδή $x = \delta_0$. Ο z -μετασχηματισμός αυτού είναι $X(z) = 1$ οπότε από τη σχέση (3.35) θα έχουμε

$$\text{ότι:} \quad 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = G_m(z)H_m(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.37) \quad \text{που ισχύει.}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε $x = \delta_1$ με z -μετασχηματισμό τον $X(z) = z^{-1}$, οπότε

$$\text{αντίστοιχα η σχέση (3.35) δίνει:} \quad 2 \begin{bmatrix} z^{-1} \\ -z^{-1} \end{bmatrix} = G_m(z)H_m(z) \begin{bmatrix} z^{-1} \\ -z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή τη σχέση με το z προκύπτει φυσικά

$$2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = G_m(z)H_m(z) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.38). \quad \text{Προσθέτουμε και αφαιρούμε τις σχέσεις}$$

(3.37) και (3.38) οπότε βρίσκουμε:

$$G_m(z)H_m(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad G_m(z)H_m(z) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{αντίστοιχα. Έτσι είναι}$$

$G_m(z)H_m(z) = 2I$ που δείχνει ότι ο $H_m(z)$ είναι ένας πίνακας αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον $G_m(z)$, οπότε θα είναι και $H_m(z)G_m(z) = 2I$.

Στη συνέχεια προκειμένου να κατανοήσουμε τη βασική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν κάποια φίλτρα για να αποτελούν φίλτρα ανάλυσης μιας συστοιχίας (PR), θα αναφέρουμε και θα αποδείξουμε το παρακάτω αλγεβρικό λήμμα:

ΛΗΜΜΑ

Έστω ότι τα $g(z), h(z)$ είναι πολυώνυμα Laurent έτσι ώστε να ισχύει γι' αυτά η συνθήκη $g(z)h(z) = c$ (όπου c ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός). Τότε τα $g(z), h(z)$ είναι μονώνυμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα $g(z), h(z)$ είναι Laurent πολυώνυμα έχουμε $g(z) = c_m z^m + \dots + c_n z^n$ με $m \leq n, c_m \neq 0, c_n \neq 0$ και $h(z) = d_p z^p + \dots + d_q z^q$ με $p \leq q, d_p \neq 0, d_q \neq 0$. Θεωρούμε το γινόμενό τους το οποίο δίνει $g(z)h(z) = c_m d_p z^{m+p} + \dots + c_n d_q z^{n+q}$. Λόγω της υπόθεσης και το δεξιό μέρος της εξίσωσης θα ισούται με τη σταθερά c . Άρα έχουμε ότι $m + p = n + q = 0, m = n, p = q$. Επομένως τα $g(z), h(z)$ είναι μονώνυμα δηλαδή $g(z) = c_n z^n$ και $h(z) = d_{-n} z^{-n}$, όπου $c_n d_{-n} = c$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε κάποια φίλτρα

πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR), να μπορούν να είναι φίλτρα ανάλυσης μιας συστοιχίας φίλτρων τέλειας ανακατασκευής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο

Θεωρούμε δύο φίλτρα h_0 και h_1 πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR). Τότε τα φίλτρα αυτά αποτελούν φίλτρα ανάλυσης μιας συστοιχίας φίλτρων τέλειας ανακατασκευής, αν και μόνο αν ο αντίστοιχος πίνακας διαμόρφωσης $H_m(z)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\det H_m(z) = cz^{2k+1} \quad (c \neq 0 \text{ μια σταθερά και } k \text{ ακέραιος}) \quad (3.39)$$

Όταν η συνθήκη (3.39) ικανοποιείται, τότε τα φίλτρα σύνθεσης g_0 και g_1 της συστοιχίας φίλτρων ορίζονται με μοναδικό τρόπο από τα φίλτρα ανάλυσης από τις εξής σχέσεις:

$$G_0(z) = \frac{2}{d(z)} H_1(-z) \quad \text{και} \quad G_1(z) = -\frac{2}{d(z)} H_0(-z) \quad (3.40)$$

όπου ως $d(z)$ θεωρούμε: $d(z) = \det H_m(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν (FIR) φίλτρα g_0 και g_1 που να αποτελούν συστοιχία φίλτρων σύνθεσης και (FIR) φίλτρα h_0 και h_1 να συνιστούν συστοιχία φίλτρων ανάλυσης, έτσι ώστε όλα να δίνουν τέλεια ανακατασκευή. Τότε οι πίνακες διαμόρφωσης αυτών ικανοποιούν τη συνθήκη (3.36) που έχουμε παρουσιάσει στο 1^ο θεώρημα, δηλαδή $G_m(z)H_m(z) = 2I$. Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\det G_m(z) \det H_m(z) = \det(2I) = 4$$

Επειδή το αποτέλεσμα του παραπάνω γινομένου είναι μια σταθερά σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, το $d(z) = \det H_m(z)$ είναι ένα μη μηδενικό μονώνυμο. Επειδή είναι $d(-z) = -d(z)$ θα πρέπει να ισούται με ένα μονώνυμο περιττού βαθμού. Επιπλέον έχουμε τονίσει ότι οι δύο πίνακες είναι αντιστρέψιμοι (ο ένας είναι ο αντίστροφος του άλλου) δηλαδή από την σχέση (3.36) ισχύει ότι $G_m(z) = 2H_m(z)^{-1}$ και βασιζόμενοι στον κανόνα του Cramer η σχέση δίνει:

$$\begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix} = \frac{2}{d(z)} \begin{bmatrix} H_1(z) & -H_0(z) \\ -H_1(z) & H_0(z) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

οπότε προκύπτουν έτσι οι σχέσεις (3.40), οι οποίες μας δίνουν τα φίλτρα σύνθεσης από τα φίλτρα ανάλυσης ενός διακριτού σήματος.

Συνοψίζοντας είδαμε ότι αν η $\det H_m(z)$ είναι μονώνυμο της μορφής cz^{2k+1} , τότε με χρήση των σχέσεων (3.40) μπορούμε να ορίσουμε πολυώνυμα Laurent $G_0(z), G_1(z)$ τα οποία είναι τα φίλτρα σύνθεσης. Ο πίνακας διαμόρφωσης σύνθεσης δίνεται στη συνέχεια από τη σχέση (3.41) και ικανοποιείται και η συνθήκη τέλει ανακατασκευής (PR).

Οι σχέσεις (3.40) δείχνουν πως από το υψιδιαβατό φίλτρο ανάλυσης h_1 προκύπτει εκτελώντας τις ακόλουθες πράξεις το χαμηλοδιαβατό φίλτρο σύνθεσης g_0 :

- μετατόπιση συχνότητας κατά το ήμισυ ζώνης (δηλαδή επειδή $z = e^{i\omega}$ τότε είναι $-z = e^{i(\omega+\pi)}$ καθώς για τα διακριτά σήματα το εύρος συχνότητας είναι $0 \leq \omega \leq 2\pi$).
- Χρονική μετατόπιση, αφού ο πολλαπλασιασμός των z -μετασχηματισμών με το $z^{-(2k+1)}$ αντιστοιχεί στον χρονικό τομέα με την εφαρμογή του τελεστή $S^{-(2k+1)}$.
- Κλιμάκωση, πράξη την οποία δηλώνει ο πολλαπλασιασμός με μια σταθερά.

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει το φίλτρο g_1 από το χαμηλοδιαβατό φίλτρο ανάλυσης h_0 .

Την παραπάνω ιδιότητα του διαχωρισμού των συχνοτήτων σε υψηλές και χαμηλές μπορούμε να την περιγράψουμε και σε επίπεδο πινάκων με βάση τον πίνακα διαμόρφωσης [από την (3.34)]:

$$H_m(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix},$$

καθώς είναι: $H_0(-1) = 0$ και $H_1(1) = 0 \Leftrightarrow$ ο $H_m(1)$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Έτσι για να κατασκευάσει κάποιος μια συστοιχία φίλτρων που να ικανοποιούν την ιδιότητα της τέλει ανακατασκευής (PR), αρκεί να ορίσει τα δύο από τα τέσσερα φίλτρα που χρειάζεται. Μπορούμε να εκφράσουμε τη συνθήκη τέλει ανακατασκευής (PR) συναρτήσει μόνο των χαμηλοδιαβατών φίλτρων ανάλυσης και σύνθεσης με τη βοήθεια του παρακάτω θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3^ο

Έστω ότι τα h_0 και g_0 είναι φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR). Αυτά τα φίλτρα αποτελούν το χαμηλοδιαβατό μέρος μιας συστοιχίας φίλτρων δύο καναλιών με τέλεια ανακατασκευή, αν και μόνο αν:

$$H_0(-1) = 0, G_0(-1) = 0 \text{ και } H_0(z)G_0(z) + H_0(-z)G_0(-z) = 2 \quad (3.42)$$

Κατά συνέπεια αν η συνθήκη (3.42) ικανοποιείται μπορούμε να ορίσουμε (FIR) φίλτρα h_1 και g_1 οι z -μετασχηματισμοί των οποίων δίνονται από τις σχέσεις :

$$H_1(z) = zG_0(-z) \quad \text{και} \quad G_1(z) = z^{-1}H_0(-z) \quad (3.43)$$

Τα φίλτρα h_1 και g_1 είναι υψιδιαβατά και το σύνολο όλων, δηλαδή των h_0 και h_1 (φίλτρα ανάλυσης) και των g_0, g_1 (φίλτρα σύνθεσης) δίνουν ένα σύνολο-συστοιχία φίλτρων τέλειας ανακατασκευής (PR).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ο πίνακας διαμόρφωσης ανάλυσης που έχουμε ήδη παρουσιάσει έχει τη

μορφή $H_m(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}$, ενώ ο πίνακας διαμόρφωσης σύνθεσης

φίλτρων είναι ο $G_m(z) = \begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix}$. Εύκολα επομένως διαπιστώνουμε

μετά την εκτέλεση των πράξεων ότι το αριστερό μέρος της σχέσης (3.42)

ισούται με το επάνω αριστερά στοιχείο του πίνακα $H_m(z)G_m(z)$. Σε

προηγούμενο θεώρημα έχουμε δείξει ότι αν τα h_0 και g_0 είναι τα

χαμηλοδιαβατά φίλτρα μιας συστοιχίας φίλτρων τέλειας ανακατασκευής (PR),

τότε ισχύει για τους πίνακες διαμόρφωσης η σχέση $H_m(z)G_m(z) = 2I$, οπότε είναι

προφανές ότι η σχέση (3.42) ισχύει.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η σχέση (3.42) ισχύει και ότι τα

$H_1(z)$ και $G_1(z)$ ορίζονται μέσω των σχέσεων (3.43). Για τα h_1 και g_1 στην

περίπτωση αυτή ισχύει ότι :

$H_1(1) = 1G_0(-1) = 0$ και $G_1(1) = 1^{-1}H_0(-1) = 0$. Άρα βάσει της υπόθεσης τα h_1 και

g_1 θα είναι υψιδιαβατά φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης (FIR).

Τέλος πρέπει να εξετάσουμε αν αυτή η συστοιχία φίλτρων ικανοποιεί την συνθήκη τέλειας ανακατασκευής (PR), δηλαδή να ελέγξουμε αν ισχύει η (3.39) :

$$\det H_m(z) = cz^{2k+1}$$

Υπολογίζουμε κατόπιν την παράσταση :

$$H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z) = -z \{ H_0(z)G_0(z) + H_0(-z)G_0(-z) \} = -2z$$

και διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί την σχέση (3.39) οπότε η παραπάνω

συστοιχία φίλτρων έχει την ιδιότητα τέλειας ανακατασκευής (PR).

Θεωρούμε τα φίλτρα h_0 και g_0 τα οποία υποθέτουμε ότι είναι χαμηλοδιαβατά (FIR). Επειδή γι' αυτά σύμφωνα με το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε ισχύει ότι: $H_0(-1) = 0$, $G_0(-1) = 0$ τότε αυτά μπορούν να γραφούν με τη μορφή που ορίζουν οι σχέσεις (3.28) δηλαδή:

$$H_0(z) = (1+z)^p \varphi(z) \quad \text{και} \quad G_0(z) = (1+z)^q \psi(z)$$

όπου τα p, q είναι θετικοί ακέραιοι και τα $\varphi(z), \psi(z)$ είναι πολυώνυμα Laurent που δεν μηδενίζονται στο $z = -1$. Η συνθήκη τέλειας ανακατασκευής (3.42) μπορεί τώρα να γραφτεί (εκτελώντας τις πράξεις) ως εξής:

$$(1+z)^p \varphi(z)(1+z)^q \psi(z) + (1-z)^p \varphi(-z)(1-z)^q \psi(-z) = 2 \Leftrightarrow$$

$$(1+z)^{p+q} \varphi(z)\psi(z) + (1-z)^{p+q} \varphi(-z)\psi(-z) = 2 \Leftrightarrow$$

$$(1+z)^n f(z) + (1-z)^n f(-z) = 2$$

(3.44)

όπου το $n = p + q$ και το $f(z) = \varphi(z)\psi(z)$ δεν μηδενίζεται στο $z = -1$.

Θα ήταν χρήσιμο να κάνουμε μια τετραγωνική αλλαγή μεταβλητής την:

$$y = \frac{1}{4}(-z + 2 - z^{-1}) \text{ η οποία ισούται με}$$

$$(-4z)^{-1}(1-z)^2 \quad (3.45)$$

(στην οποία είναι απλό να παρατηρούμε ότι το y μένει αναλλοίωτο όταν αντικαταστήσουμε το z με το z^{-1}).

Θα εξηγήσουμε στη συνέχεια τη λογική της επιλογής του συγκεκριμένου μετασχηματισμού. Έτσι παρατηρούμε ότι όταν το $z = e^{i\omega}$ τότε έχουμε για το y ότι:

$$y = \frac{1}{4}(-e^{i\omega} + 2 - e^{-i\omega}) = \left(\frac{e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{2i}\right)^2 = \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

παρατηρούμε επίσης μετά την εκτέλεση απλών πράξεων ότι: $1 - y = \cos^2 \frac{\omega}{2}$.

Οπότε η τιμή $z = 1$ (όταν $\omega = 0$) αντιστοιχεί στην $y = 0$, ενώ η $z = -1$ (όταν $\omega = \pi$) αντιστοιχεί σε $y = 1$.

$$\text{Ακόμα έχουμε ότι: } 1 - y = \frac{1}{4}(-z + 2 - z^{-1}) = (4z)^{-1}(1+z)^2$$

Επιπλέον προκύπτει ότι η μεταβολή της συχνότητας κατά π , που δηλώνει (με βάση τον τύπο $z = e^{i\omega}$) την αντικατάσταση του z με το $-z$, αντιστοιχεί σε αντικατάσταση του y με το $1 - y$.

Κατασκευή μετασχηματισμών κυματιδίου CDF(p,q)

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε ένα αλγεβρικό θεώρημα, το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό, καθώς μπορούμε με την εφαρμογή του να κατασκευάσουμε μια ολόκληρη οικογένεια μετασχηματισμών κυματιδίου την CDF(p, q) ονομασία που προέρχεται από τα αρχικά των Cohen-Daubechies - Feauveau .

ΘΕΩΡΗΜΑ 4° - ΘΕΩΡΗΜΑ BEZOUT

Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$ υπάρχει ένα μοναδικό πολυώνυμο $B_n(y)$ βαθμού $n - 1$ το οποίο ικανοποιεί τη σχέση :

$$y^n B_n(1-y) + (1-y)^n B_n(y) = 1 \quad (3.46)$$

και δίνεται από τον τύπο:

$$B_n(y) = 1 + ny + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} y^2 + \dots + \binom{n+k-1}{k} y^k + \dots + \binom{2n-1}{n-1} y^{n-1} \quad (3.47)$$

και επιπλέον ισχύει ότι $B_n(y) > 0$ για κάθε $y \geq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η απόδειξη της μοναδικότητας του παραπάνω πολυωνύμου είναι σχετικά απλή. Έστω ότι υπάρχουν δύο πολυώνυμα $B(y), \tilde{B}(y)$ βαθμού $n-1$ που να ικανοποιούν τη σχέση (3.46). Τότε η διαφορά τους: $C(y) \equiv B(y) - \tilde{B}(y)$ θα ικανοποιεί την σχέση:

$$y^n C(1-y) + (1-y)^n C(y) = 0$$

(προκύπτει αφαιρώντας κατά μέλη τις αντίστοιχες εξισώσεις (3.46) για τα $B(y), \tilde{B}(y)$). Λύνουμε ως προς $C(y)$ δηλαδή $C(y) = -y^n \{(1-y)^{-n} C(1-y)\}$ το οποίο έχει στο $y=0$ ρίζα τάξεως τουλάχιστον n . Επειδή όμως το $C(y)$ είναι βαθμού το πολύ $n-1$ (ως διαφορά δύο πολυωνύμων με βαθμό $n-1$), αυτή η τάξη της ρίζας είναι δυνατή μόνο αν $C(y) \equiv 0$. Οπότε είναι $B(y) - \tilde{B}(y) \equiv 0$, άρα το ζητούμενο πολυώνυμο είναι μοναδικό.

Έχοντας αρχικά υποθέσει για την ύπαρξη ενός τέτοιου είδους πολυωνύμου, θα δείξουμε πώς προκύπτει ο τύπος που δίνει αυτό, δηλαδή ο (3.47). Πολλαπλασιάζουμε την σχέση (3.46) με τον όρο $(1-y)^{-n}$ και αναδιατάσσουμε τους όρους.

Έχουμε ότι:

$$y^n (1-y)^{-n} B_n(1-y) = (1-y)^{-n} - B_n(y) \text{ και θέτουμε}$$

$$D(y) = (1-y)^{-n} B_n(1-y)$$

οπότε η σχέση γράφεται

$$(1-y)^{-n} - B_n(y) = y^n D(y).$$

Με διαδοχικές παραγωγίσεις (για $k=0$ $B_n(0) = 1$, για $k=1$ $B_n'(0) = n$) κτλ.

αποδεικνύεται ότι:

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^k B_n(y) \Big|_{y=0} = \left(\frac{d}{dy}\right)^k (1-y)^{-n} \Big|_{y=0} = n(n+1)\dots(n+k-1)$$

για $k = 0, 1, \dots, n-1$

Έτσι το δεξί μέλος της (3.47) είναι το πολυώνυμο Taylor του $B_n(y)$ γύρω από το $y = 0$ βαθμού $n - 1$. Όμως το $B_n(y)$ έχοντας βαθμό $n - 1$ ισούται με αυτό το πολυώνυμο. Καθώς όλοι οι διωνυμικοί συντελεστές αυτού του πολυωνύμου είναι θετικοί και ο σταθερός όρος ισούται με 1, προκύπτει από τη σχέση (3.47) (δεξί μέλος θετικό) ότι $B_n(y) > 0$ για κάθε $y \geq 0$.

Για να ολοκληρωθεί το θεώρημα του Bezout, θα πρέπει να αποδείξουμε και την ύπαρξη ενός τέτοιου πολυωνύμου $B_n(y)$. Προκειμένου να αποδειχθεί αυτό θα πρέπει να βρούμε δύο πολυώνυμα $c(y)$ και $d(y)$ βαθμού το πολύ $n - 1$, που να ικανοποιούν τη σχέση:

$$c(y)y^n + d(y)(1-y)^n = 1 \quad (3.48)$$

καθώς αν έχουμε δύο τέτοια πολυώνυμα, θεωρώντας σαν $B(y)$:

$$B(y) = \frac{1}{2}(c(1-y) + d(y))$$

το οποίο θα έχει βαθμό το πολύ $n - 1$, τότε αυτό θα ικανοποιεί τη σχέση (3.46). Αυτό συμβαίνει γιατί: η σχέση (3.48) ικανοποιείται για κάθε y , οπότε θα ισχύει και αν θέσουμε όπου y το $1 - y$, δηλαδή θα έχουμε ότι: $c(1-y)(1-y)^n + d(1-y)y^n = 1$ (3.49) .

Αν αντικαταστήσουμε το $B(y)$ στην (3.46) έχουμε:

$$\begin{aligned} y^n B(1-y) + (1-y)^n B(y) &= y^n \frac{1}{2}(c(y) + d(1-y)) + (1-y)^n \frac{1}{2}(c(1-y) + d(y)) = \\ \frac{1}{2}y^n c(y) + \frac{1}{2}y^n d(1-y) + \frac{1}{2}(1-y)^n c(1-y) + \frac{1}{2}(1-y)^n d(y) &= \\ \frac{1}{2}(y^n c(y) + (1-y)^n d(y)) + \frac{1}{2}((1-y)^n c(1-y) + y^n d(1-y)) &= \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Η ύπαρξη των δύο πολυωνύμων $c(y)$ και $d(y)$ προκύπτει με τη βοήθεια του Ευκλείδειου αλγόριθμου της διαίρεσης για πολυώνυμα.

Είναι πιο βολικό να εκφράσουμε αυτό τον αλγόριθμο με όρους οι οποίοι να είναι πίνακες, συγκεκριμένα άνω και κάτω τριγωνικοί που εφαρμόζονται στο διάνυσμα στήλη $\begin{bmatrix} y^n \\ (1-y)^n \end{bmatrix}$.

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε τη μέθοδο αυτή για την περίπτωση όπου $n = 2$.

Το πρώτο βήμα είναι να επιλέξουμε ένα μοναδιαίο κάτω τριγωνικό πίνακα, έτσι ώστε δρώντας αυτός πάνω στο διάνυσμα στήλη να μειώσει το βαθμό του δεύτερου στοιχείου του διανύσματος, αφού ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^2 \\ (1-y)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 \\ 1-2y \end{bmatrix}.$$

Το βήμα αυτό το ονομάζουμε βήμα *πρόβλεψης*.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε ένα μοναδιαίο άνω-τριγωνικό πίνακα – το δεύτερο αυτό βήμα ονομάζουμε βήμα *διόρθωσης* – που επιλέγεται έτσι ώστε να μειώσει το βαθμό του πρώτου στοιχείου του διανύσματος-στήλη. Οπότε έχουμε :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^2 \\ 1-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y \\ 1-2y \end{bmatrix}.$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία του πρώτου βήματος, δηλαδή εφαρμόζουμε έναν μοναδιαίο κάτω-τριγωνικό πίνακα τον οποίο επιλέγουμε έτσι ώστε να μειώσει ακόμα το βαθμό του δεύτερου στοιχείου:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y \\ 1-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Στο σημείο αυτό που το δεύτερο στοιχείο του διανύσματος-στήλη ισούται με μια σταθερά τερματίζουμε την παραπάνω διαδικασία. Αν συνδυάσουμε λοιπόν όλους τους παραπάνω μετασχηματισμούς θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^2 \\ (1-y)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Προκειμένου να συνδέσουμε τα παραπάνω με τον αρχικό μας στόχο που είναι η ύπαρξη δύο πολυωνύμων, ο συνδυασμός των οποίων δίνει το πολυώνυμο $B(y)$ του θεωρήματος του Bezout, γράφουμε το γινόμενο των πινάκων πρόβλεψης και διόρθωσης μετά την εκτέλεση των πράξεων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(y) & b(y) \\ c(y) & d(y) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

με τα στοιχεία $a(y), b(y), c(y), d(y)$ να είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ 1. Η

σχέση (3.50) λόγω της (3.51) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} a(y) & b(y) \\ c(y) & d(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^2 \\ (1-y)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y \\ 1 \end{bmatrix}$$

οπότε αν εκτελέσουμε τις πράξεις προκύπτει η σχέση (3.48) που απαιτήσαμε αρχικά να ισχύει δηλαδή ότι:

$$c(y)y^2 + d(y)(1-y)^2 = 1$$

(καθώς η εφαρμογή της μεθόδου έγινε θεωρώντας για παράδειγμα ότι $n = 2$).

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος, με αναγκαία συνθήκη την ύπαρξη των δύο πολυωνύμων $c(y)$ και $d(y)$ βαθμού $n-1=1$, ενώ δεν απαιτείται κάποιος συγκεκριμένος τύπος γι' αυτά.

Επειδή εφαρμόσαμε τη μέθοδο για την ειδική περίπτωση όπου $n = 2$, θα τη γενικεύσουμε και θα διαπιστώσουμε ότι ακολουθεί φυσικά το ίδιο πρότυπο, το οποίο δεν είναι άλλο από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο διαίρεσης δύο πολυωνύμων.

Έστω $f(y)$ και $g(y)$ δύο πολυώνυμα βαθμών m και n αντίστοιχα.

- Αν είναι $m \geq n$ τότε σύμφωνα με τον Ευκλείδειο αλγόριθμο θα υπάρχει ένα πολυώνυμο $h(y)$ βαθμού $m-n$ έτσι ώστε το $f(y) - g(y)h(y)$ να έχει βαθμό μικρότερο από $m-n$. Αυτά μπορούμε να τα περιγράψουμε με τη μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -h(y) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(y) \\ f(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(y) \\ f(y) - g(y)h(y) \end{bmatrix}.$$

- Αν $m \leq n$ διαιρούμε το $g(y)$ με το $f(y)$ και χρησιμοποιούμε ένα πάνω τριγωνικό πίνακα με 1 στην διαγώνιο για να αντικαταστήσουμε το στοιχείο $g(y)$ με το $g(y) - f(y)h(y)$.

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν το ένα στοιχείο του διανύσματος στήλη μετασχηματιστεί σε σταθερά.

Εξετάζουμε το παράδειγμα των δύο πολυωνύμων που πήραμε και παραπάνω χωρίς να δώσουμε στο n κάποια συγκεκριμένη τιμή. Ξεκινάμε θεωρώντας τα δύο πολυώνυμα $g(y) = y^n$ και $f(y) = (1-y)^n$, και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε μέχρι ο ένας από τους δύο όρους του διανύσματος μετατραπεί σε σταθερά. Έτσι πολλαπλασιάζοντας με άνω ή κάτω τριγωνικούς πίνακες με 1 στην διαγώνιο, παίρνουμε έναν 2×2 πίνακα με ορίζουσα ίση με τη μονάδα και τα στοιχεία του να είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ n , δηλαδή προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} a(y) & b(y) \\ c(y) & d(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^n \\ (1-y)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \alpha \end{bmatrix}$$

όπου a είναι μια σταθερά και το $\varphi(y)$ ένα πολυώνυμο βαθμού τουλάχιστον ένα. Προκειμένου να προκύπτει το δεύτερο στοιχείο του πίνακα ότι ισούται με σταθερά πολλαπλασιάζουμε αν χρειαστεί και με τον πίνακα στρέψης $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ο αλγόριθμος είναι φυσικά αντιστρεπτός, καθώς από τον κανόνα του Cramer έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} d(y) & -b(y) \\ -c(y) & a(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^n \\ (1-y)^n \end{bmatrix}.$$

Μετά την εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων διαπιστώνουμε ότι το πολυώνυμο $d(y)$ έχει βαθμό το πολύ $n-1$, αφού $d(y)\varphi(y) - \alpha b(y) = y^n$, το $b(y)$ έχει βαθμό το πολύ n και το $\varphi(y)$ έχει βαθμό τουλάχιστον ένα.

Από το ευθύ του αλγορίθμου που αναφέρουμε παραπάνω, προκύπτει κάνοντας τις πράξεις ότι $c(y)y^n + d(y)(1-y)^n = \alpha$, οπότε αν δείξουμε ότι είναι $\alpha \neq 0$, διαιρώντας τα $c(y)$ και $d(y)$ με το α παίρνουμε τη σχέση (3.48) που θέλαμε να αποδείξουμε ότι ισχύει.

Πράγματι η σταθερά α δεν μπορεί να είναι ίση με το μηδέν, γιατί αν συνέβαινε αυτό, το $d(y)$ θα είχε ρίζα στο μηδέν τουλάχιστον n τάξης και καθώς ο βαθμός του $d(y)$ είναι το πολύ $n-1$, θα έπρεπε να είναι $d(y) \equiv 0$ και συνεπώς θα είχαμε ότι και $c(y) = 0$. Με δεδομένα αυτά ο πίνακας $\begin{bmatrix} a(y) & b(y) \\ c(y) & d(y) \end{bmatrix}$ θα είχε οριζουσα ίση με το μηδέν το οποίο είναι αδύνατο. Άρα είναι $\alpha \neq 0$. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση μπορούμε να διαιρούμε τα δύο πολυώνυμα που προκύπτουν από την εφαρμογή του αλγορίθμου του Ευκλείδη, με τη σταθερά α και να παίρνουμε τη σχέση (3.48). ■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Bezout

Θα εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα του Bezout για να κατασκευάσουμε την CDF(p, q) οικογένεια των μετασχηματισμών κυματιδίου με τα p, q να είναι θετικοί ακέραιοι και $p + q = 2n$ άρτιος και θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα στο οποίο για συγκεκριμένες τιμές των p, q κατασκευάζουμε την αντίστοιχη οικογένεια μετασχηματισμών κυματιδίου. Με τη βοήθεια των σχέσεων (3.45) για το y και της αντίστοιχης για το $1-y$ μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση του Bezout σε όρους z ως εξής :

$$(1+z)^{2n} (4z)^{-n} B_n \left(\frac{-z+2-z^{-1}}{4} \right) + (1-z)^{2n} (-4z)^{-n} B_n \left(\frac{z+2+z^{-1}}{4} \right) = 1 \quad (3.52)$$

οπότε αν ορίσουμε:

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{2^p} (1+z)^p \quad (3.53)$$

$$G_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{2^q} (1+z)^q z^{-(p+q)/2} B_{(p+q)/2} \left(\frac{-z+2-z^{-1}}{4} \right) \quad (3.54)$$

τότε τα χαμηλοδιαβατά αυτά φίλτρα h_0 και g_0 ικανοποιούν τις συνθήκες του 3^{ου} θεωρήματος, καθώς είναι προφανές ότι: $H_0(-1) = 0$, $G_0(-1) = 0$ ενώ η σχέση $H_0(z)G_0(z) + H_0(-z)G_0(-z) = 2$ παίρνει τη μορφή της σχέσης (3.46) με το δεξιό μέλος της να ισούται με 2.

Οι παράγοντες που περιέχουν το $\sqrt{2}$ χρειάζονται για να μεταβάλουν την δεξιά πλευρά του θεωρήματος του Bezout από 1 σε 2 ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (3.44). Με χρήση των σχέσεων (3.43) παίρνουμε και τους z -μετασχηματισμούς για τα υψιδιαβατά φίλτρα, οπότε βρίσκουμε έτσι όλα τα φίλτρα για τον μετασχηματισμό CDF(p,q). Οι παράμετροι (p,q) δίνουν την τάξη της ρίζας $z = -1$ των $H_0(z)$ και $G_0(z)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ CDF(3,1) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΚΥΜΑΤΙΔΙΟΥ

Θεωρούμε $p = 3, q = 1$. Επειδή $p + q = 2n$, έχουμε για το n στο συγκεκριμένο παράδειγμα $n = \frac{(p+q)}{2} = 2$ οπότε $B_2(y) = 1 + 2y$ όπως προκύπτει από τη σχέση (3.47). Με αλλαγή μεταβλητής από y σε z , όπου $y = \frac{1}{4}(-z + 2 - z^{-1})$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $-z + 2 - z^{-1} = -z^{-1}(z - 1)^2$, έχουμε ότι:

$$B_2 \left(\frac{-z+2-z^{-1}}{4} \right) = 1 + 2 \left(\frac{-z+2-z^{-1}}{4} \right) = 1 - \frac{1}{2} z^{-1} (z-1)^2 = \frac{1}{2} \{-z + 4 - z^{-1}\}$$

Με χρήση των σχέσεων (3.53) και (3.54) παίρνουμε τους z -μετασχηματισμούς των χαμηλοδιαβατών φίλτρων οι οποίοι είναι οι εξής:

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{2^3} (1+z)^3 = \frac{\sqrt{2}}{8} \{z^3 + 3z^2 + 3z + 1\} \quad \text{και}$$

$$G_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{2^1} (1+z)z^{-2} \frac{1}{2} \{-z + 2 - z^{-1}\} = \frac{\sqrt{2}}{4} \{-1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}\}.$$

Όπως έχουμε προαναφέρει είναι πολύ εύκολο τώρα με βάση τις σχέσεις (3.43) να βρούμε και τα υψιδιαβατά φίλτρα, συγκεκριμένα τους z -μετασχηματισμούς αυτών οι οποίοι είναι:

$$H_1(z) = zG_0(-z) = \frac{\sqrt{2}}{4} \{-z - 3 + 3z^{-1} + z^{-2}\} \quad \text{και}$$

$$G_1(z) = z^{-1}H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \{-z^2 + 3z - 3 + z^{-1}\}$$

Άρα όλα τα παραπάνω φίλτρα του μετασχηματισμού κυματιδίου έχουν μήκος τέσσερα και αν εκφράσουμε αυτά σαν γραμμικούς συνδυασμούς μοναδιαίων παλμών θα έχουμε ότι:

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{8} (\delta_{-3} + 3\delta_{-2} + 3\delta_{-1} + \delta_0)$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} (-\delta_{-1} - 3\delta_0 + 3\delta_1 + \delta_2)$$

$$g_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} (-\delta_0 + 3\delta_1 + 3\delta_2 - \delta_3)$$

$$g_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} (-\delta_{-2} + 3\delta_{-1} - 3\delta_0 + \delta_1)$$

Από τις συστοιχίες φίλτρων (PR) σε βήματα Ανόρθωσης

Στην παράγραφο αυτή διατυπώνουμε το θεώρημα που μας επιτρέπει στη συνέχεια να παραγοντοποιήσουμε μια συστοιχία φίλτρων (PR) με μια σειρά από βήματα Ανόρθωσης. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τον πολυφασικό πίνακα που αντιστοιχεί στον πίνακα διαμόρφωσης. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του Ευκλείδειου αλγόριθμου για πολυώνυμα Laurent. Η διατύπωση του θεωρήματος είναι η εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5°

$$\text{Δίνεται ο } 2 \times 2 \text{ πίνακας} \quad H(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}$$

όπου τα $H_{nk}(z)$ είναι πολυώνυμα Laurent, με:

$$\det H(z) \equiv H_{00}(z)H_{11}(z) - H_{01}(z)H_{10}(z) = 1$$

τότε υπάρχει σταθερά $K \neq 0$ και πολυώνυμα Laurent $S_1(z), \dots, S_M(z)$ και $T_1(z), \dots, T_M(z)$ τέτοια ώστε:

$$H(z) = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix} \prod_{k=1}^M \begin{bmatrix} 1 & S_k(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_k(z) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο πολυφασικός πίνακας ενός σχήματος Ανόρθωσης έχει ορίζουσα 1, ενώ ο πίνακας διαμόρφωσης μιας συστοιχίας φίλτρων (PR) έχει ορίζουσα μονώνυμο Laurent.

Επιλέγοντας τον κατάλληλο z -μετασχηματισμό η συνθήκη ικανοποιείται.

Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος για πολυώνυμα Laurent

Ο ευκλείδειος αλγόριθμος που συνήθως παρουσιάζεται και χρησιμοποιείται για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη ΜΚΔ δύο ακεραίων, μπορεί να εφαρμοστεί και σε πολλά άλλα ανάλογα προβλήματα, όπως η εύρεση του ΜΚΔ δύο πολυωνύμων. Στην περίπτωση που μελετάμε θα τον εφαρμόσουμε σε πολυώνυμα Laurent.

Αρχικά διατυπώνουμε το θεώρημα διαιρέσης στον δακτύλιο των πολυωνύμων Laurent αφού πρώτα ορίσουμε τον βαθμό του πολυωνύμου Laurent $a(z) = a_m z^m + \dots + a_n z^n$ με $m \leq n, a_m a_n \neq 0$, ως $\deg a = n - m$ και τον οποίο (ειδικά στο επόμενο θεώρημα) θα συμβολίζουμε και με $|a|$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6^ο – ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ

Θεωρούμε δύο πολυώνυμα Laurent $a(z)$ και $b(z)$ με $b(z) \neq 0$ και $|a(z)| \geq |b(z)|$. Τότε πάντα υπάρχει ένα πολυώνυμο Laurent $\pi(z)$ (πηλίκο), με βαθμό $|\pi(z)| = |a(z)| - |b(z)|$ καθώς και ένα πολυώνυμο Laurent $v(z)$ (υπόλοιπο), με βαθμό $|v(z)| < |b(z)|$, έτσι ώστε το αρχικό πολυώνυμο Laurent $a(z)$ να γράφεται: $a(z) = b(z)\pi(z) + v(z)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $F(z)$ ο δακτύλιος των πολυωνύμων Laurent. Θεωρούμε δύο πολυώνυμα $a(z)$ και $b(z) \in F(z)$ με $b(z) \neq 0$. $a(z) = a_m z^m + \dots + a_n z^n$ με $m \leq n, a_m a_n \neq 0$, και $b(z) = b_p z^p + \dots + b_q z^q$ με $p \leq q, b_p b_q \neq 0$. Τα πολυώνυμα $A(z) \equiv z^{-m} a(z) \equiv a_m + \dots + a_n z^{n-m}$ και $B(z) \equiv z^{-p} b(z) \equiv b_p + \dots + b_q z^{q-p}$

είναι (συμβατικά) πολώνυμα με $\deg A = n - m$ και $\deg B = q - p$ αντίστοιχα δηλαδή $\deg A = |a|$ και $\deg B = |b|$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Διαίρεσης για (συμβατικά) πολώνυμα, υπάρχουν $\pi'(z), v'(z)$ πολώνυμα έτσι ώστε $A(z) = B(z)\pi'(z) + v'(z)$ με βαθμό $\deg \pi'(z) = \deg A - \deg B = |a| - |b|$ και $\deg v' < \deg B = |b|$. Από την ταυτότητα διαίρεσης προκύπτει ότι

$$z^m A(z) = z^p B(z) z^{-p} z^m \pi'(z) + z^m v'(z),$$

η οποία, ορίζοντας $\pi(z) \equiv z^{m-p} \pi'(z), v(z) \equiv z^m v'(z)$, γράφεται $a(z) = b(z)\pi(z) + v(z)$. Καθώς τα $\pi(z), v(z)$ είναι πολώνυμα Laurent και $|\pi| = \deg \pi' = |a| - |b|$, $|v| = \deg v' < |b|$ το θεώρημα απεδείχθη. ■

Αν το $b(z)$ είναι μονώνυμο, τότε το $v(z)$ ισούται με μηδέν και η διαίρεση είναι τέλεια. Έχουμε ήδη στα προηγούμενα αποδείξει ότι ένα πολώνυμο Laurent είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν είναι μονώνυμο.

Για δύο πολώνυμα Laurent ισχύει ο αλγόριθμος του Ευκλείδη όπου για συντομία συμβολίζουμε ένα πηλίκο και υπόλοιπο της διαίρεσης $a(z)$ διά $b(z)$ με $a(z)/b(z)$ και $a(z)\%b(z)$ αντίστοιχα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7^ο: (Ευκλείδειος αλγόριθμος για τα πολώνυμα Laurent)

Για δύο δεδομένα πολώνυμα Laurent $a(z)$ και $b(z)$ με $b(z) \neq 0$ και $|a(z)| \geq |b(z)|$ θεωρούμε $a_0(z) = a(z)$ και $b_0(z) = b(z)$ τα αρχικά πολώνυμα και επαναλαμβάνουμε τα επόμενα βήματα αρχίζοντας από $i = 0$:

$$\begin{aligned} a_{i+1}(z) &= b_i(z) \\ b_{i+1}(z) &= a_i(z)\%b_i(z) \end{aligned} \quad (3.56)$$

δηλ. θεωρούμε σαν νέο διαιρέτέο τον προηγούμενο διαιρέτη και σαν νέο διαιρέτη το προηγούμενο υπόλοιπο [η πράξη $a_i(z)\%b_i(z)$ δίνει το υπόλοιπο της διαίρεσης του $a_i(z)$ με το $b_i(z)$]. Τότε ο ΜΚΔ είναι $a_n(z) = \text{GCD}(a(z), b(z))$ όπου n είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο $b_n(z) = 0$ [3],[6].

Δεδομένου ότι $|b_{i+1}(z)| < |b_i(z)|$, υπάρχει m έτσι ώστε $|b_m(z)| = 0$. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν $n = m + 1$. Ο αριθμός των βημάτων που ακολουθούνται φράσσεται για το n από την ανίσωση: $n \leq |b(z)| + 1$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης είναι $q_{i+1}(z) = a_i(z)/b_i(z)$ τότε προκύπτει ότι:

$$\begin{pmatrix} a(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=n}^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_i(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(z) \\ b(z) \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

και κατά συνέπεια:

$$\begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

και έτσι το $a_n(z)$ διαιρεί και το $a(z)$ και το $b(z)$. Αν το $a_n(z)$ είναι μονώνυμο τότε τα $a(z)$ και $b(z)$ είναι πρώτα μεταξύ τους [3].

- Αυτό που είναι πρωταρχικής σημασίας στα πολυώνυμα Laurent είναι η *μη μοναδικότητα της διαίρεσης*. Γενικά θα πρέπει το γινόμενο $b(z)q(z)$ να ταιριάζει με το $a(z)$ σε τουλάχιστον $|a(z)| - |b(z)| + 1$ όρους, αλλά είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε αυτούς τους όρους είτε στην αρχή είτε στο τέλος είτε ενδιάμεσα, στο $a(z)$. Στην ελευθερία αυτής της επιλογής έγκνεται το πολύ σημαντικό αυτό στοιχείο της μη μοναδικότητας της διαίρεσης.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα παράδειγμα διαίρεσης δύο πολυωνύμων στο z -μετασχηματισμό, με τη βοήθεια του οποίου διαπιστώνουμε στην πράξη τα όσα αναφέραμε παραπάνω [3].

Έστω ότι θέλουμε να κάνουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $a(z) = z^{-1} + 6 + z$ με το πολυώνυμο $b(z) = 4 + 4z$. Επειδή το $a(z)$ έχει βαθμό $|a(z)| = 2$ πρέπει να βρούμε ένα πολυώνυμο $q(z)$ με βαθμό 1, οπότε το υπόλοιπο $r(z)$ θα έχει βαθμό μικρότερο δηλ. μηδέν. Επειδή το $r(z) = a(z) - b(z)q(z)$ που δίνεται από αυτή τη σχέση, όπως προκύπτει από την ταυτότητα της διαίρεσης $a(z) = b(z)q(z) + r(z)$, πρέπει να έχει βαθμό μηδέν, το $b(z)q(z)$ πρέπει να έχει τον ίδιο βαθμό με το $a(z)$ δηλ. να είναι δευτέρου βαθμού. Άρα το $b(z)q(z)$ θα ταιριάζει με το $a(z)$ σε δύο όρους. Όπως προαναφέραμε επειδή δεν υπάρχει περιορισμός όσον αφορά αυτό το «ταιριασμα» η παραπάνω διαίρεση μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους τους οποίους παραθέτουμε αναλυτικά στη συνέχεια.

1. Αν οι δύο όροι είναι ο z^{-1} και η σταθερά έχουμε:
 $(z^{-1} + 6 + z) : (4 + 4z)$ δίνει $q(z) = \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{5}{4}$ και $r(z) = -4z$ το οποίο έχει $|r(z)| = 1 - 1 = 0$ γιατί είναι πολυώνυμο Laurent.

2. Αν ταιριάζουμε τους όρους z και z^{-1} τότε η διαίρεση: $(z^{-1} + 6 + z) : (4 + 4z)$ δίνει $q(z) = \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}$ και $r(z) = 4$, οπότε η διαίρεση τερματίζει αφού πάλι έχουμε $|r(z)| = 0$.
3. Τέλος αν ταιριάζουμε τους όρους z και τη σταθερά παίρνουμε : $q(z) = \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}$ και $r(z) = -4z^{-1}$ με $|r(z)| = 0$ ως πολυώνυμο Laurent.

Η μεσαία λύση (2) είναι πιο ικανοποιητική, γιατί όπως έχουμε τονίσει ο αλγόριθμος της διαίρεσης δύο πολυωνύμων Laurent τερματίζει όταν το ένα στοιχείο του διανύσματος-στήλη που προκύπτει σαν αποτέλεσμα των βημάτων πρόβλεψης και διόρθωσης που εφαρμόζουμε, μετασχηματιστεί σε σταθερά. Η επιλογή (2) μας οδηγεί έτσι γρηγορότερα δηλαδή εκτελώντας λιγότερα βήματα στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ο Ευκλείδειος Αλγόριθμος σε μορφή πινάκων

Προκειμένου να αποδείξουμε το 5^ο θεώρημα θα πρέπει να εξετάσουμε τις επαναλήψεις που ορίζονται από το 7^ο θεώρημα, ξαναγράφοντας αυτές με τη μορφή γινομένου πινάκων, των οποίων τα στοιχεία είναι πολυώνυμα Laurent. Καθώς έχουμε ότι $q_{n+1}(z) = a_n(z)/b_n(z)$ το πρώτο βήμα του αλγορίθμου

$$a_1(z) = b_0(z),$$

είναι ότι : $b_1(z) = a_0(z) - b_0(z)q_1(z)$

$$a_2(z) = b_1(z),$$

το επόμενο βήμα είναι: $b_2(z) = a_1(z) - b_1(z)q_2(z)$

$$a_N(z) = b_{N-1}(z),$$

ενώ μετά από N βήματα παίρνουμε : $0 = b_N(z) = a_{N-1}(z) - b_{N-1}(z)q_N(z)$.

Βάσει του θεωρήματος $b_N(z) = 0$. Το πρώτο βήμα μπορεί να γραφτεί με τη μορφή πινάκων ως εξής: $\begin{pmatrix} a_1(z) \\ b_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix}$, ενώ το δεύτερο βήμα

$$\text{γίνεται } \begin{pmatrix} a_2(z) \\ b_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1(z) \\ b_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix},$$

οπότε τελικά προκύπτει ότι:

$$\begin{pmatrix} a_N(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \prod_{n=N}^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Παρατηρώντας τη σειρά των όρων όπως δίνεται από τα όρια του γινομένου, διαπιστώνουμε ότι ο όρος με δείκτη N είναι ο πρώτος από τα αριστερά, ενώ ο όρος με δείκτη 1 είναι ο τελευταίος δεξιά. Ο αντίστροφος του πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n(z) \end{pmatrix}$ είναι ο $\begin{pmatrix} q_n(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Έτσι πολλαπλασιάζουμε την προηγούμενη εξίσωση με τους αντίστροφους πίνακες και προκύπτει η σχέση:

$$\begin{pmatrix} a(z) \\ b(z) \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N \begin{pmatrix} q_n(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_N(z) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

- Η παραγοντοποίηση του πολυφασικού πίνακα γίνεται με τις γνωστές γραμμοπράξεις (μέθοδος απαλοιφής του Gauss), με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε πολώνυμα Laurent. Εδώ υπάρχει μια σημαντική διαφορά σε σχέση με τους πίνακες που έχουν στοιχεία πραγματικά ή μιγαδικά. Κατά την εφαρμογή των γραμμοπράξεων μπορούμε να διαιρέσουμε μια σειρά με οποιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο του πίνακα, στην περίπτωση όμως των πινάκων με στοιχεία πολώνυμα Laurent, μπορούμε να διαιρέσουμε μόνο με τα στοιχεία του πίνακα που είναι μονώνυμα της μορφής cz^m με $c \neq 0$, καθώς αυτά είναι τα μόνα πολώνυμα Laurent που είναι αντιστρέψιμα (σύμφωνα με το λήμμα που παρουσιάσαμε στην παράγραφο 3.4). Δηλαδή αν θεωρήσουμε ένα μη μηδενικό πολώνυμο Laurent $f(z) = a_p z^p + \dots + a_q z^q$ με $p \leq q, a_p \neq 0, a_q \neq 0$, ο βαθμός αυτού θα ορίζεται ως $\deg(f) = q - p$ και το αντίστροφό του δηλαδή το πολώνυμο $\frac{1}{f(z)}$ θα είναι πολώνυμο Laurent αν και μόνο αν $\deg(f) = 0$ (δηλαδή είναι μονώνυμο).
- Η μέθοδος με την οποία αντιμετωπίζουμε αυτή την ιδιαιτερότητα δεν είναι άλλη από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο διαιρέσης με υπόλοιπο για τα πολώνυμα Laurent. Έτσι όταν $\deg(f) \geq \deg(g) > 0$ μπορούμε να γράψουμε το $f(z)$ σαν $f(z) = g(z)h(z) + r(z)$ όπου τα $h(z), r(z)$ είναι πολώνυμα Laurent με: $\deg(r) < \deg(g)$. Με την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του αλγορίθμου της διαιρέσης μειώνουμε σταδιακά το βαθμό του υπολοίπου σε μηδέν, δηλαδή το υπόλοιπο γίνεται μονώνυμο, οπότε στο στάδιο των γραμμοπράξεων διαιρούμε με αυτό.

Για την απόδειξη του θεωρήματος 5, εφαρμόζουμε την σχέση (3.60) για $a(z) = H_{00}(z)$ και $b(z) = H_{01}(z)$ οπότε προκύπτει η εξής σχέση:

$$\begin{pmatrix} H_{00}(z) \\ H_{01}(z) \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N \begin{pmatrix} q_n(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Kz^c \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Όπως παρατηρούμε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $H_{00}(z)$, $H_{01}(z)$ είναι ένα μονώνυμο. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:

Γνωρίζουμε ότι τα $H_{00}(z)$, $H_{01}(z)$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$H_{00}(z)H_{11}(z) - H_{01}(z)H_{10}(z) = 1$$

και έστω ο $p(z)$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $H_{00}(z)$, $H_{01}(z)$ δηλαδή καθένα από τα $H_{00}(z)$, $H_{01}(z)$ διαιρείται με τον $p(z)$, συνεπώς όλο το αριστερό μέλος της σχέσης διαιρείται με τον $p(z)$. Οπότε τότε θα πρέπει και το δεξί μέλος της σχέσης να μπορεί να διαιρείται με τον $p(z)$, όμως έχουμε αποδείξει ότι τα μόνα πολώνυμα Laurent που διαιρούν το 1 είναι τα μονώνυμα. Έτσι το $p(z)$ είναι της μορφής $p(z) = Kz^c$. Ανάλογα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το $a_N(z)$ είναι μονώνυμο.

Αν επιπλέον πολλαπλασιάσουμε από τα δεξιά και τα δύο μέλη της σχέσης (3.61) με το z^{-c} παίρνουμε σαν αποτέλεσμα ότι :

$$\begin{pmatrix} H'_{00}(z) \\ H'_{01}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{-c}H_{00}(z) \\ z^{-c}H_{01}(z) \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N \begin{pmatrix} q_n(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Ο πολλαπλασιασμός για παράδειγμα του $H_{00}(z)$ με τον παράγοντα z^{-c} μόνο μετατοπίζει τους δείκτες στο z -μετασχηματισμό και έτσι φυσικά δεν αλλάζει το γεγονός ότι πρόκειται για παράδειγμα για τους άρτιους συντελεστές του χαμηλοδιαβατού φίλτρου, δηλαδή με άλλα λόγια επιλέγοντας το σωστό z -μετασχηματισμό για τις χαμηλές συχνότητες της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου, θα είναι πάντα δυνατό να καταλήγουμε να έχουμε $a_N(z) = K$.

Σύγκριση του σχήματος Ανόρθωσης και της Συστοιχίας Φίλτρων

Στην παράγραφο αυτή συνοψίζοντας τα όσα παρουσιάσαμε αναλυτικά στις προηγούμενες, θα αναφέρουμε επιγραμματικά τους δύο τρόπους με τους οποίους μπορεί να αναλυθεί ένας μετασχηματισμός ανάλυσης κυματιδίου μιας κλίμακας και θα παρουσιάσουμε τη σχέση με την οποία συνδέονται μεταξύ τους.

ΣΧΗΜΑ ΑΝΟΡΘΩΣΗΣ

Για την εφαρμογή της μεθόδου είδαμε ότι αρχικά το σήμα x χωρίζεται με υποδειγματοληψία στα άρτια και περιττά μέρη του :

$$x_0 = \lfloor 2 \rfloor x, x_1 = \lfloor 2 \rfloor S^{-1}x .$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τα βήματα του σχήματος Ανόρθωσης (πρόβλεψη, διόρθωση και κανονικοποίηση) στα δύο μέρη του σήματος δηλαδή στο διάνυσμα-στήλη $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$ και παίρνουμε σαν αποτέλεσμα ένα $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

Ο z -μετασχηματισμός του εξαγόμενου διανύσματος-στήλη δίνεται ως εξής (3.15) :

$$\begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} = H_p(z) \begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H_p(z) \begin{bmatrix} X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2}) \\ z^{1/2} X(z^{1/2}) - z^{1/2} X(-z^{1/2}) \end{bmatrix}, \text{ όπου } H_p(z)$$

έχουμε ορίσει τον πολυφασικό πίνακα ανάλυσης $H_p(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}$.

Αντικαθιστώντας όπου \mathcal{Z} το z^2 στην παραπάνω σχέση εύκολα διαπιστώνουμε ότι παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} Y_0(z^2) \\ Y_1(z^2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H_p(z^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z & -z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

ΣΥΣΤΟΙΧΙΑ ΦΙΛΤΡΩΝ ΔΥΟ ΚΑΝΑΛΙΩΝ

Στην περίπτωση αυτή αρχικά η ακολουθία των τιμών του σήματος φιλτράρεται από τα φίλτρα h_0 και h_1 , το χαμηλοδιαβατό - κρατάει μόνο τις χαμηλές

συχνότητες και το υψιδιαβατό φίλτρο αντίστοιχα. Στη συνέχεια κάνουμε υποδειγματοληψία στα δύο αυτά φιλτραρισμένα σήματα και η διαδικασία αυτή

δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{2 \downarrow}(h_0 * x) \\ \boxed{2 \downarrow}(h_1 * x) \end{bmatrix} .$$

Ο z -μετασχηματισμός του εξαγόμενου αυτού θα είναι:

$$\begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_0(z^{1/2})X(z^{1/2}) + H_0(-z^{1/2})X(-z^{1/2}) \\ H_1(z^{1/2})X(z^{1/2}) + H_1(-z^{1/2})X(-z^{1/2}) \end{bmatrix} .$$

Αντικαθιστώντας και σε αυτή τη σχέση όπου z το z^2 , παίρνουμε την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} Y_0(z^2) \\ Y_1(z^2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H_m(z) \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix} .$$

Με $H_m(z)$ όπως έχουμε διευκρινίσει στην παράγραφο που αναλύουμε τις συστοιχίες φίλτρων, συμβολίζουμε τον πίνακα *διαμόρφωσης ανάλυσης* σήματος.

Στο σημείο αυτό αφού συνοψίσαμε τη διαδικασία της κάθε μεθόδου, παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε ένα θεώρημα που συνδέει τις δύο μεθόδους, δηλαδή δίνει τη σχέση μεταξύ του πολυφασικού πίνακα ανάλυσης και του πίνακα διαμόρφωσης ανάλυσης σήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8^ο

Έστω $H_p(z)$ ο πολυφασικός πίνακας ενός μετασχηματισμού μιας κλίμακας ανάλυσης κυματιδίου ο οποίος προκύπτει μετά τη διαδικασία του σχήματος Ανόρθωσης. Ορίζοντας ως :

$$H_m(z) = H_p(z^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z & -z \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

τότε ο $H_m(z)$ είναι ο πίνακας διαμόρφωσης ανάλυσης σήματος μιας δύο καναλιών συστοιχίας φίλτρων τέλει ανακατασκευής.

Τα φίλτρα ανάλυσης αυτής της συστοιχίας δίνονται στον z -μετασχηματισμό από τις σχέσεις:

$$H_0(z) = H_{00}(z^2) + zH_{01}(z^2) \quad \text{και} \quad H_1(z) = H_{10}(z^2) + zH_{11}(z^2) \quad (3.65)$$

Τα φίλτρα σύνθεσης έχουν z -μετασχηματισμούς τους:

$$\begin{aligned} G_0(z) &= -(cz)^{-1} \{H_{10}(z^2) - zH_{11}(z^2)\} && \text{και} \\ G_1(z) &= (cz)^{-1} \{H_{00}(z^2) - zH_{01}(z^2)\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

όπου η $c = \det H_p(z^2)$ είναι μια μη μηδενική πραγματική σταθερά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εξ' ορισμού γνωρίζουμε ότι:

$$H_m(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z^2) + zH_{01}(z^2) & H_{00}(z^2) - zH_{01}(z^2) \\ H_{10}(z^2) + zH_{11}(z^2) & H_{10}(z^2) - zH_{11}(z^2) \end{bmatrix}.$$

Αυτός όμως λόγω της σχέσης (3.30) είναι ο πίνακας διαμόρφωσης ανάλυσης για τα φίλτρα που ορίζονται από τις παραπάνω σχέσεις. Από την υπόθεση του θεωρήματος προκύπτει ότι η ορίζουσα του $H_m(z)$ θα ισούται με $-2z \det H_p(z)$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο πολυφασικός πίνακας $H_p(z)$ που προκύπτει κατά τη διαδικασία του σχήματος Ανόρθωσης, είναι ένα γινόμενο άνω και κάτω τριγωνικών πινάκων με ορίζουσα 1, καθώς και ενός διαγώνιου πίνακα κανονικοποίησης του οποίου η ορίζουσα είναι μια μη μηδενική σταθερά c . Επομένως η $\det H_m(z)$ είναι της μορφής που ορίζεται από τη σχέση (3.39) του 2^{ου} θεωρήματος και οι σχέσεις που δίνουν τους z -μετασχηματισμούς των φίλτρων σύνθεσης ταυτίζονται με τις αντίστοιχες (3.40) του ίδιου θεωρήματος. ■

Θα παρουσιάσουμε στο σημείο αυτό, μια πολύ απλή εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, ένα παράδειγμα με τη βοήθεια του οποίου διαπιστώνουμε στην πράξη, πώς έχοντας τον πολυφασικό πίνακα ενός μετασχηματισμού μπορούμε να βρούμε τα φίλτρα ανάλυσης και σύνθεσης του μετασχηματισμού αυτού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1^ο : ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ HAAR

Δίνεται ο πολυφασικός πίνακας του μετασχηματισμού Haar, ο οποίος είναι

$$H_p(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad \text{Τότε ο πίνακας διαμόρφωσης σύμφωνα με το}$$

παραπάνω θεώρημα θα είναι ο:

$$H_m(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z & -z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+z & 1-z \\ 1-z & 1+z \end{bmatrix}.$$

Επομένως έχουμε ότι $H_0(z) = \frac{1}{2}(1+z)$ και, $H_1(z) = \frac{1}{2}(1-z)$ οι οποίοι είναι οι z -μετασχηματισμοί των φίλτρων $h_0 = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_{-1})$ και $h_1 = \frac{1}{2}(\delta_0 - \delta_{-1})$, δηλαδή των μέσων όρων και των διαφορών των γειτονικών τιμών ενός σήματος. Υπολογίζουμε και τους z -μετασχηματισμούς των φίλτρων σύνθεσης βάσει των τύπων (3.66) του προηγούμενου θεωρήματος. Είναι $\det H_p(z) = -\frac{1}{2}$, οπότε οι σχέσεις (3.66) δίνουν:

$$G_0(z) = 2z^{-1}H_1(-z) = 1 + z^{-1} \text{ και}$$

$$G_1(z) = -2z^{-1}H_0(-z) = 1 - z^{-1}$$

οι οποίοι είναι οι z -μετασχηματισμοί των φίλτρων $g_0 = \delta_0 + \delta_1$ και $g_1 = \delta_0 - \delta_1$.

Θα εξετάσουμε τώρα και ένα δεύτερο λίγο πιο πολύπλοκο παράδειγμα εφαρμογής της παραπάνω διαδικασίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2^ο : ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ (CDF(2,2))

Δίνεται ο πολυφασικός πίνακας του μετασχηματισμού CDF(2,2) ο οποίος είναι ο:

$$H_p(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} (-z + 6 - z^{-1}) & (2 + 2z^{-1}) \\ -(2 + 2z) & 4 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας διαμόρφωσης όπως υπολογίζεται από τον τύπο (3.64) είναι ο εξής :

$$H_m(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} (-z^2 + 6 - z^{-2}) & (2 + 2z^{-2}) \\ -(2 + 2z^2) & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z & -z \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \begin{bmatrix} (-z^2 + 2z + 6 + 2z^{-1} - z^{-2}) & (-z^2 - 2z + 6 - 2z^{-1} - z^{-2}) \\ (-2z^2 + 4z - 2) & (-2z^2 - 4z - 2) \end{bmatrix}$$

επομένως τα φίλτρα ανάλυσης έχουν z -μετασχηματισμούς τους :

$$H_0(z) = \frac{\sqrt{2}}{8}(-z^2 + 2z + 6 + 2z^{-1} - z^{-2}) \quad ,$$

$$H_1(z) = \frac{\sqrt{2}}{8}(-2z^2 + 4z - 2) \quad \text{και είναι τα:}$$

$$h_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}(-\delta_{-2} + 2\delta_{-1} + 6\delta_0 + 2\delta_1 - \delta_2) \quad \text{και}$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}(-2\delta_{-2} + 4\delta_{-1} - 2\delta_0).$$

Για να βρούμε τα φίλτρα σύνθεσης υπολογίζουμε πρώτα την $\det H_p(z)$ και κατόπιν εφαρμόζουμε τους τύπους (3.40). Έχουμε ότι $\det H_p(z) = 1$ οπότε οι σχέσεις (3.40) δίνουν:

$$G_0(z) = -z^{-1}H_1(-z) = \frac{\sqrt{2}}{8}(2z + 4 + 2z^{-1})$$

$$G_1(z) = z^{-1}H_0(-z) = \frac{\sqrt{2}}{8}(-z - 2 + 6z^{-1} - 2z^{-2} - z^{-3})$$

οι οποίες είναι αντίστοιχα οι z -μετασχηματισμοί των φίλτρων:

$$g_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}(2\delta_{-1} + 4\delta_0 + 2\delta_1) \quad \text{και}$$

$$g_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}(-\delta_{-1} - 2\delta_0 + 6\delta_1 - 2\delta_2 - \delta_3).$$

Για το θεώρημα 8 που αναλύσαμε παραπάνω ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή όταν μας δίνεται μια συστοιχία φίλτρων δύο καναλιών με τη συνθήκη της τέλει ανακατασκευής μπορούμε να ορίσουμε με βάση τη σχέση (3.64) τον πολυφασικό πίνακα ανάλυσης. Η συνθήκη τέλει ανακατασκευής (PR) ότι η $d(z) = \det H_m(z)$ είναι ένα μη μηδενικό μονώνυμο μας επιτρέπει χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε την περίπτωση ενός πίνακα με ορίζουσα 1. Τότε ο πολυφασικός πίνακας $H_p(z)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί σαν ένα γινόμενο ενός διαγώνιου πίνακα $\text{diag}[c^{-1}]$ (για κάποια σταθερά $c \neq 0$) και άνω ή κάτω τριγωνικών πινάκων με μονάδα στις διαγώνιες θέσεις και μηδενικά ή πολυώνυμα Laurent στις μη διαγώνιες. Καθένας από αυτούς τους παράγοντες αντιστοιχεί σε ένα βήμα Ανόρθωσης (πρόβλεψης, διόρθωσης ή κανονικοποίησης).

Ολοκλήρωση της απόδειξης του Αλγόριθμου παραγοντοποίησης του σχήματος Ανόρθωσης

Προτού ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος 5 θα πρέπει να αναλύσουμε περισσότερο κάποια σημεία της διαδικασίας της παραγοντοποίησης. Ο τύπος (3.62) δεν είναι ακριβώς ο ίδιος με τον (3.55). Γενικά θα υποθέτουμε ότι η παραγοντοποίηση έχει γίνει έτσι ώστε το $a_N(z)$ να ισούται με μια σταθερά. (Έχουμε εξηγήσει στα προηγούμενα γιατί μπορούμε πάντα να κάνουμε αυτή την υπόθεση). Για να δείξουμε ότι οι δύο μορφές του τύπου είναι ταυτόσημες παρατηρούμε τα εξής:

$$\begin{bmatrix} q(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q(z) & 1 \end{bmatrix}$$

έτσι χρησιμοποιώντας το αριστερό τμήμα της εξίσωσης στην περίπτωση που το n είναι περιττός και το δεξιό τμήμα όταν το n είναι άρτιος παίρνουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} H_{00}(z) \\ H_{01}(z) \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^{N/2} \begin{pmatrix} 1 & q_{2n-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2n}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

αν ο N είναι περιττός, έχουμε ότι $q_{2n}(z) = 0$.

Αν στη συνέχεια αντικαταστήσουμε τον πίνακα $\begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$ με τον $\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix}$ έχουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} H_{00}(z) & H'_{10}(z) \\ H_{01}(z) & H'_{11}(z) \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^{N/2} \begin{pmatrix} 1 & q_{2n-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2n}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Μέσω της σχέσης (3.68) ορίζονται τα $H'_{10}(z)$, $H'_{11}(z)$. Θεωρώντας τους ανάστροφους πίνακες και για τα δύο μέλη (ο ανάστροφος ενός γινομένου πινάκων ισούται με τον ανάστροφο του κάθε πίνακα του γινομένου πολλαπλασιασμένον κατά την αντίθετη φορά). Μετά από αυτή τη διαδικασία παίρνουμε την παρακάτω σχέση η οποία φαίνεται ότι είναι πιο κοντά στο στόχο μας :

$$\begin{pmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H'_{10}(z) & H'_{11}(z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix} \prod_{n=M}^1 \begin{pmatrix} 1 & q_{2n}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2n-1}(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Αυτό που απομένει να βρούμε είναι πώς συνδέονται τα φίλτρα $H'_{10}(z)$, $H'_{11}(z)$ με τα $H_{10}(z)$, $H_{11}(z)$.

Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ τους παρατηρούμε ότι αν ένα ζεύγος φίλτρων ανάλυσης $(H_0(z), H_1(z))$ έχει πολυφασικό πίνακα με ορίζουσα ίση με τη μονάδα, τότε κάθε άλλο ζεύγος φίλτρων ανάλυσης $(H_0(z), H_1^{new}(z))$ προκύπτει με τη βοήθεια της σχέσης: $H_1^{new}(z) = H_1(z) + H_0(z)t(z^2)$ (3.70)

Το $t(z)$ είναι ένα πολυώνυμο Laurent. Προκειμένου να αποδείξουμε το παραπάνω θα δείξουμε ότι και η ορίζουσα του πολυφασικού πίνακα των $(H_0(z), H_1^{new}(z))$ είναι 1.

$$H^{new}(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}^{new}(z) & H_{11}^{new}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) + H_{00}(z)t(z) & H_{11}(z) + H_{01}(z)t(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Οπότε πάλι προκύπτει ότι $\det H^{new}(z) = \det H(z) = 1$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στην (3.68) μπορούμε να πάρουμε το πρωτότυπο υψιδιαβατό φίλτρο με τον ακόλουθο τρόπο. Με βάση τον υπολογισμό που κάναμε και πριν, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο Laurent $t(z)$ τέτοιο ώστε:

$$\begin{bmatrix} H_{00}(z) & H'_{10}(z) \\ H_{01}(z) & H'_{11}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{10}(z) \\ H_{11}(z) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

ενώ πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με τον αντίστροφο του παραπάνω 2×2 πίνακα βρίσκουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} -t(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{11}(z) & -H'_{10}(z) \\ -H_{01}(z) & H_{00}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{10}(z) \\ H_{11}(z) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

οπότε υπολογίζουμε έτσι το $t(z)$:

$$t(z) = H'_{10}(z)H_{11}(z) - H'_{11}(z)H_{10}(z) \quad (3.74)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά τη σχέση (3.69) με τον πίνακα

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t(z) & 1 \end{bmatrix}$ και μετά από κάποιες στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -K^2 t(z) & 1 \end{bmatrix} \prod_{n=M}^1 \begin{pmatrix} 1 & q_{2n}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_{2n-1}(z) & 1 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Στη διαμόρφωση της σχέσης (3.75) έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση (3.72) καθώς και την ισότητα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -K^2 t(z) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Ο πίνακας που έχει στοιχείο του το πολυώνυμο Laurent $K^2 t(z)$ μπορεί να ενσωματωθεί στους πίνακες με τα πολυώνυμα $q(z)$ και με κατάλληλη αριθμηση των πολυωνύμων $q(z)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τα πολυώνυμα $S(z)$ και $T(z)$ του 5^{ου} θεωρήματος.

Παράδειγμα παραγοντοποίησης πολυωνύμου Laurent

Προκειμένου να δούμε στην πράξη πώς ακριβώς δουλεύει ο αλγόριθμος παραγοντοποίησης παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό CDF(2,2) του οποίου έχουμε υπολογίσει τα φίλτρα ανάλυσης και σύνθεσης. Θεωρούμε το πολυώνυμο Laurent του χαμηλοδιαβατού φίλτρου (παραλείποντας απλώς τον συντελεστή κλιμάκωσης $\sqrt{2}/8$), δηλαδή το $H_0(z) = (-z^{-2} + 2z^{-1} + 6 + 2z - z^2)$. Ξεχωρίζουμε τα πολυφασικά συστατικά αυτού:

$$H_0(z) = H_{00}(z^2) + zH_{01}(z^2) \quad \text{και} \quad H_1(z) = H_{10}(z^2) + zH_{11}(z^2) \quad (3.77)$$

δηλαδή είναι: $H_{00}(z) = -z^{-1} + 6 - z$, $H_{01}(z) = 2z^{-1} + 2$

Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι να θέσουμε:

$$a_0(z) = -z^{-1} + 6 - z, \quad b_0(z) = 2z^{-1} + 2$$

Μια επιλογή που έχουμε για τη διαίρεση είναι να ταιριάζουμε τους όρους από τα αριστερά, οπότε παίρνουμε: $-z^{-1} + 6 - z = (2z^{-1} + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}z\right) - 8z$

$$\begin{aligned} \text{Δηλαδή είναι:} \quad q_1(z) &= -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}z \\ r_1(z) &= -8z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Στο επόμενο βήμα θέτουμε:} \quad a_1(z) &= b_0(z) = 2z^{-1} + 2 \\ b_1(z) &= r_1(z) = -8z \end{aligned}$$

Εκτελούμε πάλι τη διαίρεση ταιριάζοντας πάλι τους όρους από τα αριστερά και προκύπτει ότι:

$$2z^{-1} + 2 = (-8z) \cdot \left(-\frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-1}\right), \text{ οπότε } q_2(z) = -\frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-1}, r_2(z) = 0$$

τελικά έχουμε ότι: $a_2(z) = b_1(z) = -8z$, $b_2(z) = r_2(z) = 0$.

Αφού καταλήξαμε σε $b_2(z) = 0$ έχουμε βρει έναν μέγιστο κοινό διαιρέτη των $a_0(z)$, $b_0(z)$ τον $a_2(z) = -8z$. Έτσι η σχέση (3.61) δίνει ότι

$$\begin{bmatrix} H_{00}(z) \\ H_{01}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z^{-1} + 6 - z \\ 2z^{-1} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Δυστυχώς δεν πήραμε σταθερά στο τελευταίο υπόλοιπο, όμως αυτό όπως ήδη έχουμε αναφέρει και στην παράγραφο που αναλύουμε τον αλγόριθμο μπορεί να επιτευχθεί πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το z^{-1} , οπότε η τελευταία σχέση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} -z^{-2} + 6z^{-1} - 1 \\ 2z^{-2} + 2z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Έτσι αν αρχικά είχαμε επιλέξει τον z -μετασχηματισμό

$$H_0(z) = (-z^{-4} + 2z^{-3} + 6z^{-2} + 2z^{-1} - 1)$$

ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) θα ήταν σταθερά. Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι το να επιλέξει κανείς μια παραγοντοποίηση που δεν δίνει ΜΚΔ σταθερά δεν είναι μοιραίο, όπως άλλωστε είναι εμφανές στην πορεία της διαδικασίας. Με οποιονδήποτε z -μετασχηματισμό και να ξεκινήσουμε (εφόσον ταιριάζουμε τους ίδιους όρους) θα πάρουμε τους ίδιους πίνακες με μόνη διαφορά αυτόν που περιέχει το ΜΚΔ. Αν αυτός δεν είναι σταθερά απλά κρατάμε το συντελεστή και απαλείφουμε τη δύναμη του z , όπως ακριβώς μόλις κάναμε στο παράδειγμά μας. Θα πρέπει να τονίσουμε ξανά ότι αυτή η παραγοντοποίηση που κάναμε δεν είναι φυσικά η μόνη μας επιλογή. Αν από το πρώτο βήμα είχαμε ταιριάζει άλλους όρους θα παίρναμε:

$$-z^{-1} + 6 - z = (2z^{-1} + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z\right) + 8$$

ενώ γράφοντας αυτά με τη μορφή πινάκων θα είχαμε:

$$\begin{bmatrix} -z^{-1} + 6 - 1z \\ 2z^{-1} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η μορφή αυτή δεν χρειάζεται καμία τροποποίηση, καθώς ο ΜΚΔ προέκυψε κατευθείαν σταθερά.

Κεφάλαιο IV

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΚΥΜΑΤΙΔΙΟΥ ΣΤΟ Z-ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε στο πως κάθε διακριτός μετασχηματισμός κυματιδίου με πεπερασμένα φίλτρα μπορεί να αναλυθεί σε μια πεπερασμένη ακολουθία από απλά βήματα φιλτραρίσματος, τα οποία ονομάσαμε βήματα Ανόρθωσης. Αυτή η ανάλυση μαθηματικά υλοποιείται με μια παραγοντοποίηση του πολυφασικού πίνακα του κυματιδίου σε άλλους στοιχειώδεις πίνακες. Έτσι παρουσιάσαμε τις μαθηματικές ιδιότητες, τα θεωρήματα και τις βασικές αρχές πάνω στις οποίες βασίζουμε αυτή την ανάλυση.

Στη συνέχεια θα δοθούν παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου στα οποία, ξεκινώντας από την πρωτότυπη περιγραφή ενός ζεύγους φίλτρων ζώνης πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, εφαρμόζεται η παραπάνω θεωρία για την ανακατασκευή του μετασχηματισμού με το σχήμα Ανόρθωσης.

Σχήμα Ανόρθωσης: Παράδειγμα με το κυματίδιο Haar

Αρχικά θα παρουσιαστεί ο πιο απλός μετασχηματισμός κυματιδίου, ο μετασχηματισμός Haar. Στην περίπτωση αυτή έχουμε σε ότι αφορά στα κυματίδια που αποτελούν τα φίλτρα ζώνης ότι οι z -μετασχηματισμοί αυτών είναι:

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 + z^{-1}, \\ G(z) &= -1/2 + 1/2z^{-1}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

και

$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) &= 1/2 + 1/2z^{-1}, \\ \tilde{G}(z) &= -1 + 1z^{-1},\end{aligned}\quad (3.81)$$

(Οι σχέσεις (3.80) αντιστοιχούν στα φίλτρα ανάλυσης του μετασχηματισμού κυματιδίου, ενώ οι σχέσεις (3.81) δίνουν τα φίλτρα σύνθεσης αυτού).

Αρχικά υπολογίζουμε τα H_0, H_1, G_0, G_1 (δηλαδή κάνουμε το διαχωρισμό άρτιων και περιττών συστατικών των δύο φίλτρων ανάλυσης που δώσαμε στις σχέσεις (3.80)). Με τον τρόπο αυτό θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Haar, αλλά όπως θα φανεί παρακάτω μπορούμε άμεσα να βρούμε και τον ευθύ. Η τελική επιλογή για το ποιο μετασχηματισμό υπολογίζουμε γίνεται ανάλογα με το ποια φίλτρα μας δίνονται (του ευθύ ή του αντίστροφου μετασχηματισμού). Ο υπολογισμός γίνεται με τη σχέση:

$$H(z) = H_0(z^2) + z^{-1}H_1(z^2)$$

καθώς και την αντίστοιχη που επίσης έχουμε ήδη παρουσιάσει για το $G(z)$. Έτσι από την σχέση $H(z) = 1 + z^{-1} = 1 + z^{-1} \cdot 1$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}H_0(z^2) = 1 &\Rightarrow H_0(z) = 1, \\ H_1(z^2) = 1 &\Rightarrow H_1(z) = 1,\end{aligned}\quad (3.82)$$

Ομοίως από την: $G(z) = -1/2 + 1/2z^{-1}$ προκύπτει ανάλογα ότι:

$$\begin{aligned}G_0(z) &= -1/2, \\ G_1(z) &= 1/2.\end{aligned}\quad (3.83)$$

Έπειτα κατασκευάζουμε τον πολυφασικό πίνακα (που περιέχει τα άρτια και περιττά συστατικά των δύο φίλτρων ανάλυσης του μετασχηματισμού κυματιδίου):

$$P(z) = \begin{bmatrix} H_0 & G_0 \\ H_1 & G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}\quad (3.84)$$

Στη συνέχεια με βάση τον αλγόριθμο του Ευκλείδη αποσυνθέτουμε τον πίνακα $P(z)$ σε άνω και κάτω τριγωνικούς πίνακες, χρησιμοποιώντας βήματα Ανόρθωσης πρόβλεψης d και διόρθωσης S , (τα οποία έχουμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο). Έτσι γράφουμε τον $P(z)$ ως:

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (3.85)$$

Από τη σχέση που έχουμε προαναφέρει για την παραγοντοποίηση [2][4]:

$$P(z) = \prod_{i=1}^m \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}\quad (3.86)$$

προκύπτει ότι: $K = 1, s_i(z) = -1/2, t_i(z) = 1$.

Θεωρώντας λοιπόν H, G τα δύο φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, το χαμηλοπερατό και υψηλοπερατό αντίστοιχα, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η ακολουθία $s = \{s_l / l \in \mathbb{Z}\}$ δηλώνει το αποτέλεσμα της εφαρμογής σε ένα σήμα του χαμηλοπερατού φίλτρου και της δειγματοληψίας, ενώ η ακολουθία $d = \{d_l / l \in \mathbb{Z}\}$ αντιστοιχεί στο υψηλοπερατό φίλτρο [2][3].

Σε ότι αφορά στο στάδιο ανάλυσης έχουμε ότι:

$$P(z)^{-1} = \tilde{P}(1/z) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

το οποίο προκύπτει από τον πολυφασικό πίνακα ανάλυσης δηλαδή τον:

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_0 & \tilde{H}_1 \\ \tilde{G}_0 & \tilde{G}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

Αυτό αντιστοιχεί στην εξής υλοποίηση του ευθύ μετασχηματισμού[3][6]:

$$\begin{aligned} s_l^{(0)} &= x_{2l} \\ d_l^{(0)} &= x_{2l+1} \\ d_l &= d_l^{(0)} - s_l^{(0)} \\ s_l &= s_l^{(0)} + 1/2d_l \end{aligned} \quad (3.89)$$

(οι εκθέτες δηλώνουν τα επίπεδα της φιλτραρισμένης ακολουθίας - το επίπεδο (0) αντιστοιχεί στα μη επεξεργασμένα δεδομένα).

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός μπορεί να βρεθεί απευθείας από τις παραπάνω σχέσεις λύνοντας κανείς αυτές «αντίστροφα». Σύμφωνα με αυτά ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνεται από:

$$\begin{aligned} s_l^{(0)} &= s_l - 1/2d_l \\ d_l^{(0)} &= d_l + s_l^{(0)} \\ x_{2l+1} &= d_l^{(0)} \\ x_{2l} &= s_l^{(0)} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Παρουσιάζουμε τώρα ένα πιο περίπλοκο παράδειγμα, στο οποίο εφαρμόζουμε τα βήματα του σχήματος Ανόρθωσης για την κατασκευή ενός διορθωγώνιου φίλτρου.

Σχήμα Ανόρθωσης (Lifting): Παράδειγμα με κυματίδιο της οικογένειας φίλτρων Deslauriers-Dubuc

Θεωρούμε τις εξισώσεις του φίλτρου του ευθύ μετασχηματισμού κυματιδίου στο z -μετασχηματισμό (τα δύο φίλτρα ανάλυσης των συστατικών του σήματος). Αυτές είναι:

$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) &= -\frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 \\ \tilde{G}(z) &= \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}\end{aligned}\quad (3.91)$$

Για την υλοποίηση του σχήματος Ανόρθωσης ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Συναρμολογούμε τον αντίστοιχο πολυφασικό πίνακα ανακαλώντας τη σχέση που δίνει την πολυφασική αναπαράσταση του φίλτρου η οποία είναι[5]:

$$X(z) = X_0(z^2) + z^{-1}X_1(z^2) \quad (3.92)$$

(το άρτιο κομμάτι έχει δυνάμεις του z^2 , το ίδιο συμβαίνει με το περιττό αφού βγάζουμε κοινό παράγοντα το z^{-1}), οπότε εφαρμόζουμε αυτόν στα δύο φίλτρα ανάλυσης και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) &= \left\{ -\frac{1}{8}z^{-2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z^2 \right\} + z^{-1} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z^2 \right\} \\ \tilde{G}(z) &= \left\{ \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{4} \right\} + z^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} \right\}\end{aligned}\quad (3.93)$$

τα οποία με βάση τη σχέση (3.92) δίνουν :

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0(z) &= -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z, \tilde{h}_0(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \tilde{G}_1(z) &= \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}, \tilde{g}_1(z) = -\frac{1}{2}\end{aligned}\quad (3.94)$$

οπότε στη συνέχεια με τη βοήθεια του τύπου που έχουμε παραθέσει για τον $\tilde{P}(z)$ έχουμε:

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_0(z) & \tilde{H}_1(z) \\ \tilde{G}_0(z) & \tilde{G}_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Ελέγχουμε την ορίζουσα του $\tilde{P}(z)$.

$$\det \tilde{P}(z) = \left(-\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z\right) \cdot \left(\frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad (3.96)$$

Άρα πρέπει πρώτα να γίνει μια μικρή κλιμάκωση (προφανής) στις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_0(z) &= G_1(z^{-1}) \\
\tilde{H}_1(z) &= -G_0(z^{-1}) \\
\tilde{G}_0(z) &= -H_1(z^{-1}) \quad (3.97) \\
\tilde{G}_1(z) &= H_0(z^{-1})
\end{aligned}$$

ώστε να έχουμε $\det \tilde{P}(z) = 1$ προτού τις χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε τον πολυφασικό πίνακα σύνθεσης $P(z)$ που έχει σαν στοιχεία του τα φίλτρα σύνθεσης H_0, H_1, G_0, G_1 . Δηλαδή :

$$P(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & G_0(z) \\ H_1(z) & G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z & \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}z \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

όπως πολύ εύκολα προκύπτει, κλιμακίωνοντας τις σχέσεις (3.97) και κάνοντας τις πράξεις.

Αν θέλουμε να ελέγξουμε τη συνθήκη $\tilde{P}(z^{-1})P(z) = I$ (τέλειας ανακατασκευής) πρέπει να αντιστρέψουμε τον έναν από τους πολυφασικούς πίνακες. Από τον $P(z)$ βρίσκουμε τα φίλτρα σύνθεσης τα οποία προφανώς είναι:

$$\begin{aligned}
H_0(z) &= 1 \\
H_1(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \\
G_0(z) &= \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} \quad (3.99) \\
G_1(z) &= \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}z
\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια (σύμφωνα και με τις σχέσεις που δίνουν τα φίλτρα ανάλυσης), τα φίλτρα σύνθεσης $H(z)$ και $G(z)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \{1\} + z^{-1} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2 \right\} \\
G(z) &= \left\{ \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{2} \right\} + z^{-1} \left\{ \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}z^2 \right\} \quad (3.100)
\end{aligned}$$

Μετά από την εκτέλεση των πράξεων, τα φίλτρα της (3.100) διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{2}z^{-1} + 1 + \frac{1}{2}z \\
G(z) &= \frac{1}{4}z^{-3} + \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z \quad (3.101)
\end{aligned}$$

Υπολογίσαμε λοιπόν παραπάνω αναλυτικά και τα φίλτρα σύνθεσης, ενέργεια την οποία κάνουμε για να δείξουμε πως λειτουργεί η όλη διαδικασία και που

στην ουσία δεν είναι απαραίτητο να γίνεται, λόγω της αντιστρεψιμότητας του ευθύ μετασχηματισμού.

Το επόμενο βήμα είναι η παραγοντοποίηση του πολυφασικού πίνακα ανάλυσης με βήματα Ανόρθωσης.

Από τα δύο φίλτρα ανάλυσης $\tilde{H}(z)$ και $\tilde{G}(z)$ το $\tilde{H}(z)$ είναι το μακρύτερο φίλτρο, άρα ξεκινάμε με την εξαγωγή ενός βήματος Ανόρθωσης πρόβλεψης.

Με βάση τη θεωρία που έχουμε αναφέρει ο πολυφασικός πίνακας ανάλυσης γίνεται:

$$(3.102) \quad \tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_0^{new}(z) & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \tilde{G}_0^{new}(z) & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{t}(z) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_0^{new}(z) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z)\tilde{t}(z) & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \tilde{G}_0^{new}(z) + (-\frac{1}{2})\tilde{t}(z) & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

οπότε προφανώς πρέπει να λύσουμε τις ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$(3.103) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z &= (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z)\tilde{t}(z) + \tilde{H}_0^{new}(z) \\ \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{4} &= (-\frac{1}{2})\tilde{t}(z) + \tilde{G}_0^{new}(z) \end{aligned}$$

έτσι χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη για $a_0 = \tilde{H}_0(z)$ και $b_0 = \tilde{H}_1(z)$ κατά την εκτέλεση του πρώτου βήματος. Όπως έχουμε ήδη επισημάνει λόγω της μη μοναδικότητας της διαίρεσης πολυωνύμων του z -μετασχηματισμού υπάρχουν τρεις επιλογές για το πηλίκο q_1 (οπότε και για το υπόλοιπο b_1) που προκύπτουν ανάλογα με το ποιους δύο όρους του a_0 ταιριάζουμε κάθε φορά με το b_0 .

$$(3.104) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z &= (-\frac{1}{2}z^{-1} + \frac{7}{2})(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z) - z \\ -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z &= (-\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z) + 1 \\ -\frac{1}{8}z^{-1} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z &= (\frac{7}{2}z^{-1} - \frac{1}{2})(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}z) - z^{-1} \end{aligned}$$

Η μεσαία λύση είναι πιο ικανοποιητική γιατί δίνει μοναδιαίο υπόλοιπο στην πρώτη εξίσωση των σχέσεων (3.103) και μηδέν υπόλοιπο στην δεύτερη, όπως πολύ εύκολα προκύπτει θέτοντας σ' αυτήν όπου

$$\tilde{t}(z) = (-\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}).$$

Έτσι έχουμε $\tilde{t}(z) = (-\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2})$ και $\tilde{H}_0^{new}(z) = 1$, $\tilde{G}_0^{new}(z) = 0$.

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση του δυαδικού πολυφασικού πίνακα έχουμε:

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε ένα βήμα Ανόρθωσης διόρθωσης του σήματος. Τώρα θεωρούμε ότι $\tilde{H}_0(z) = \tilde{H}_0^{new}(z) = 1$, $\tilde{G}_0(z) = \tilde{G}_0^{new}(z) = 0$. Κατ' αντιστοιχία με το βήμα Ανόρθωσης πρόβλεψης που εφαρμόσαμε πριν έχουμε:

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{H}_0(z) & H_1^{new}(z) \\ \tilde{G}_0(z) & \tilde{G}_1^{new}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tilde{s}(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

ενώ με αντικατάσταση και εκτέλεση των πράξεων μεταξύ των πινάκων καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις:

$$\left. \begin{array}{l} 1\tilde{s}(z) + \tilde{H}_1^{new}(z) = \tilde{H}_1(z) \\ \tilde{G}_1^{new}(z) = \tilde{G}_1(z) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{s}(z) + \tilde{H}_1^{new}(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ \tilde{G}_1^{new}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.107)$$

Από όλες τις πιθανές λύσεις αυτή που φαίνεται να ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας είναι η:

$$\tilde{H}_1^{new}(z) = 0, \tilde{s}(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \quad (3.108)$$

γιατί έτσι μπορεί να γίνει διαγώνιος ο πίνακας που έχει σαν στοιχείο του το $\tilde{G}_1^{new}(z)$ καθώς οι άλλοι έχουν ορίζουσα ίση με τη μονάδα, ενώ αυτός δεν έχει, οπότε είναι αυτός που θα πρέπει να ταυτιστεί με τον πίνακα που περιέχει την βάρθρωση (κανονικοποίηση) K .

Μετά από όλα αυτά καταλήγουμε στην παραγοντοποιημένη μορφή:

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Οι εξισώσεις του ευθύ μετασχηματισμού είναι [6]:

$$\begin{aligned} d_l &= -\frac{1}{2}x_{2l-1} - \frac{1}{2}x_{2l} + x_{2l+1} \\ s_l^{(0)} &= x_{2l} + \frac{1}{4}d_l + \frac{1}{4}d_{l+1} \\ s_l &= -\frac{1}{2}s_l^{(0)} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε και στο παράδειγμα του κυματιδίου Haar, λύνουμε αντίστροφα τις παραπάνω εξισώσεις για να πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
s_l^{(0)} &= -2s_l \\
x_{2l} &= s_l^{(0)} - \frac{1}{4}d_l - \frac{1}{4}d_{l+1} \\
x_{2l+1} &= \frac{1}{2}x_{2l-1} + \frac{1}{2}x_{2l} + d_l
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υλοποιήσουμε και τα υπόλοιπα φίλτρα της οικογένειας Deslauriers-Dubuc ξεκινώντας απευθείας από την περιγραφή των φίλτρων του ευθύ ή του αντίστροφου μετασχηματισμού στο z -μετασχηματισμό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1]A. Cohen, I. Daubechies, and J. C. Feauveau, "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets," *Communications on Pure Applied Mathematics*, vol. 45, pp. 485-560, 1992.

[2]G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and filter banks*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1996.

[3]I. Daubechies and W. Sweldens, "Factoring Wavelet Transforms into Lifting Steps," *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 4, pp. 247-269, 1998.

[4]A. R. Calderbank, I. Daubechies, W. Sweldens, and B.-L. Yeo, "Wavelet Transforms that Map Integersto Integers," *Journal of Applied Computational Harmonics Analysis*, vol. 5, pp. 332-369, 1998.

[5]C. Valens , "The Fast Wavelet Transform"1999

[6] W.Sweldens, "Wavelets and The Lifting Scheme": A 5 Minute Tour

[7] Roe.Goodman, "Discrete Fourier Transform and Wavelet Transforms", Supplementary Class Notes for Math 357: Topics in Applied Algebra, revised 2007.

[8] W.Sweldens and P. Schroder, "Building Your Own Wavelets At Home"

[9] Colm Mulcahy, "Plotting and Scheming with Wavelets" Spelman College Atlanta , Georgia 30314 USA.