ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΡΧΙΚΩΝ-ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΕΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

ΙΑΣΟΝΑ Φ. ΧΙΤΖΑΖΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ Γ. ΤΣΟΥΜΠΕΛΗΣ

ΜΑΙΟΣ, 2009

Αφιερώνεται στους γονείς μου

Ευχαριστίες.

Η διδακτορική αυτή διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Πατρών, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Δημήτρη Τσουμπελή, και με μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής τον Καθηγητή κ. Αναστάσιο Μπούντη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Βασίλειο Παπαγεωργίου.

Επιθυμώ, από τη θέση αυτή, να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου και τις πιο θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή μου κ. Δημήτρη Τσουμπελή, για την υπόδειξη του θέματος και την υψηλής υπευθυνότητας καθοδήγηση όλης αυτής της προσπάθειας. Τον ευχαριστώ επίσης για την εποικοδομητική συνεργασία μας, την ευκαιρία που μου προσέφερε καθώς και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε να εκπονήσω τη μελέτη αυτή.

Ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Αναστάσιο Μπούντη για το έντονο και ουσιαστικό του ενδιαφέρον, τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις του, και για την πολύ επωφελή για μένα συνεργασία μας, από τα πρώτα κιόλας προπτυχιακά μου χρόνια.

Ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Βασίλειο Παπαγεωργίου για το έντονο και ουσιαστικό του ενδιαφέρον, το χρόνο που μου αφιέρωσε, τις χρήσιμες παρατηρήσεις του και τη θετική του στάση σε ό,τι με αφορούσε.

Τον Ακαδημαϊκό και Καθηγητή του Πανεπιστημίου του Cambridge κ. Αθανάσιο Φωκά ευχαριστώ ιδιαιτέρως για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις του και τις χρήσιμες συζητήσεις μας επί της μελέτης αυτής.

Με την ολοκλήρωση της μελέτης αυτής κλείνει μια δημιουργική περίοδος πολυετούς παρουσίας μου ως προπτυχιακού και μεταπτυχιακού φοιτητή στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Επιθυμώ, λοιπόν, να ευχαριστήσω όλους τους Καθηγητές μου για τη συμβολή τους στην πορεία μου αυτή. Πολλοί ήταν οι Καθηγητές μου που συνέχισαν την επιστημονική μου εκπαίδευση και πέραν της τυπικής διδακτικής διαδικασίας. Πρώτοι μου μέντορες στα μαθηματικά στάθηκαν ο κ. Κωνσταντίνος Δρόσος, Καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών, και ο κ. Χρήστος Ντούσκος, Επίκουρος Καθηγητής του Γενικού Τμήματος της Πολυτεχνικής Σχολής. Τους ευχαριστώ όλους θερμά.

Οφείλω να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.) για την υποτροφία διδακτορικών σπουδών που μου παρείχε. Ευχαριστώ την Επιτροπή Ερευνών του Πανεπιστημίου Πατρών για τη χρηματοδότηση της διδακτορικής μου έρευνας, μέσω των Προγραμμάτων Καραθεοδωρή (2785) και Πυθαγόρα (Β.365.015). Επίσης ευχαριστώ το National Science Foundation (N.S.F.) των Η.Π.Α. για τη (μερική) χρηματοδότηση της συμμετοχής μου ως ομιλητή στο διεθνές συνέδριο NSF/CBMS Regional Research Conference: "New Perspectives for Boundary Value Problems and Their Asymptotics", May 16-20, 2005, UTPA, Edinburg, Texas.

Καταλήγοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Φώτιο και Μαρία, για την αγάπη, την ατελείωτη υπομονή, και την απαραίτητη για εμένα ηθική και υλική στήριξη που μου παρείχαν καθ' όλη τη διάρκεια των προπτυχιακών, μεταπτυχιακών και διδακτορικών μου σπουδών. Τους αφιερώνω την εργασία αυτή.

Ιάσονας Χιτζάζης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Πατρών
Πάτρα, Μάϊος 2009

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) (partial differential equations), ή, όπως αλλιώς είναι γνωστές, διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, και τα συστήματά τους, κατέχουν κεντρική θέση τόσο στα λεγόμενα καθαρά μαθηματικά όσο και στις εφαρμογές τους. Σαν χαρακτηριστικά παραδείγματα, αναφέρουμε ότι οι ΜΔΕ Laplace και Poisson έχουν κεντρική θέση στην κλασική μηχανική, το σύστημα ΜΔΕ Navier-Stokes στη ρευστομηχανική, το σύστημα ΜΔΕ Maxwell στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία, η ΜΔΕ Schrödinger στην κλασική κβαντομηχανική, το σύστημα ΜΔΕ Einstein στη γενική θεωρία σχετικότητας, οι ΜΔΕ Klein-Gordon και Dirac στη σχετικιστική κβαντομηχανική και κβαντική θεωρία πεδίου, και οι εξισώσεις Yang-Mills στις θεωρίες βαθμίδας. Επίσης, ΜΔΕ ή συστήματα ΜΔΕ εμφανίζονται στην κλασική και σύγχρονη διαφορική γεωμετρία (ΜΔΕ Lagrange, ΜΔΕ sine-Gordon, ΜΔΕ Monge-Ampere), στα φαινόμενα κυματικής διάδοσης (ΜΔΕ d' Alembert), στα φαινόμενα διάχυσης (ΜΔΕ θερμότητας), στη μη γραμμική οπτική (μη γραμμική ΜΔΕ Schrödinger), στο βέλτιστο έλεγχο (ΜΔΕ Hamilton-Jacobi), στην ακουστική, στη θεωρία ελαστικότητας, στο σχηματισμό προτύπων (pattern formation), στη στατιστική μηχανική, στην οικονομία κ.α..

Τις τελευταίες δεκαετίες, έντονη ερευνητική δραστηριότητα έχει επικεντρωθεί στη μελέτη των λεγόμενων ολοκληρώσιμων συστημάτων (integrable systems). Στην παρούσα διατριβή επικεντρωνόμαστε αποκλειστικά στο είδος εκείνο ολοκληρωσιμότητας που είναι γνωστό σαν *ολοκληρωσιμότητα μέσω της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης (inverse scattering method), ή αντίστροφης φασματικής ανάλυσης (inverse spectral method).* Η μέθοδος αυτή πρωτοεμφανίστηκε το 1967 [76], εφαρμοζόμενη στο πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ), ή πρόβλημα Cauchy, για τη μη γραμμική εξελικτική ΜΔΕ που είναι γνωστή σαν εξίσωση των Korteweg -de Vries (ή KdV). Γρήγορα ανακαλύφθηκε [93] ότι η ειδοποιός ιδιότητα της ΜΔΕ KdV, και όλων των εξελικτικών ΜΔΕ επί των οποίων η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης είναι εφαρμόσιμη, είναι η δυνατότητα διατύπωσης της υπό θεώρηση ΜΔΕ ως συνθήκης συμβατότητας (ολοκληρωσιμότητας) ενός παραμετρικού ζεύγους γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, που ονομάστηκε *ζεύγος Lax.* Για το λόγο αυτό, το είδος ολοκληρωσιμότητας στο οποίο αναφερόμαστε είναι γνωστό και σαν ολοκληρωσιμότητα με την έννοια του ζεύγους Lax. Πολλές ΜΔΕ, ενδιαφέρουσες από την άποψη των εφαρμογών, είναι ολοκληρώσιμες με την έννοια του ζεύγους Lax.

Εντούτοις, πολλά (ίσως τα περισσότερα) προβλήματα από το χώρο των εφαρμογών τα οποία μοντελοποιούνται από εξελικτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, περιγράφονται κατά φυσικό τρόπο σαν *προβλήματα αρχικών - συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ)* παρά σαν προβλήματα αρχικών τιμών. Κι αυτό διότι, συνήθως οι φυσικές διεργασίες λαμβάνουν χώρα σε *φραγμένα* χωρικά πεδία. Όμως, και από καθαρά μαθηματική άποψη τα ΠΑΣΤ (εξελικτικών ΜΔΕ) είναι συνήθως πιο ενδιαφέροντα από τα αντίστοιχα ΠΑΤ, καθώς θεωρείται γενικά δυσκολότερο να επιλυθούν. Η κύρια δυσκολία που ανακύπτει στη μελέτη ΠΑΣΤ για γραμμικές και (ολοκληρώσιμες) μη γραμμικές ΜΔΕ σχετίζεται με την εμφάνιση *άγνωστων συνοριακών τιμών* σχεδόν σε κάθε μέθοδο επίλυσης.

Έντονη ερευνητική προσπάθεια έχει καταβληθεί προς την κατεύθυνση της γενίκευσης της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης, με τρόπο ώστε η τελευταία να καταστεί εφαρμόσιμη *και σε προβλήματα αρχικών - συνοριακών τιμών* για ολοκληρώσιμες (εξελικτικές) μη γραμμικές ΜΔΕ. Η πιο αποτελεσματική προσπάθεια γενίκευσης πρωτοεφαρμόστηκε, στα μέσα της δεκαετίας του '90, στη μελέτη του προβλήματος χαρακτηριστικών συνοριακών τιμών (ή προβλήματος Goursat) για τις ΜΔΕ των Euler-Poisson-Darboux και Ernst, που περιγράφουν τη σύγκρουση επίπεδων βαρυτικών κυμάτων στο πλαίσιο της γενικής σχετικότητας [71]. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου αυτής, που αναφέρεται σαν *μέθοδος ενοποιημένου μετασχηματισμού (unified transform method)* [38], είναι η λεγόμενη *ταυτόχρονη φασματική ανάλυση του ζεύγους Lax (simultaneous spectral analysis of the Lax pair)*, στην οποία θα αναφερθούμε εκτενώς στο κύριο σώμα της διατριβής. Όπως και η κλασική μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης στα ΠΑΤ, έτσι και η γενίκευσή της για ΠΑΣΤ στην οποία μόλις αναφερθήκαμε, ανάγει το δοσμένο ΠΑΣΤ σε ένα πρόβλημα Riemann-Hilbert στο μιγαδικό επίπεδο της φασματικής, όπως λέγεται, παραμέτρου, της παραμέτρου δηλαδή που εμφανίζεται στο ζεύγος Lax. Εποπτικά, λέγοντας πρόβλημα Riemann-Hilbert εννοούμε το πρόβλημα που ζητά τον προσδιορισμό μιας τμηματικά ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης (μιας μιγαδικής μεταβλητής) από τις (γνωστές) ασυνέχειές της στο μιγαδικό επίπεδο [2], [98], [75].

Η εξίσωση KdV παράχθηκε από τους Korteweg και de Vries το 1895 από τις εξισώσεις Navier-Stokes, μέσω θεωρίας διαταραχών, σαν μοντέλο για κυματική διάδοση σε ρηχό στρώμα ύδατος [90]. Πέρα από την ιστορική της αξία, που ανακύπτει από το γεγονός ότι ήταν η πρώτη (μη γραμμική) ΜΔΕ στην οποία εφαρμόστηκε η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης για την επίλυση του αντίστοιχου ΠΑΤ, η εξίσωση KdV θεωρείται ένα σημαντικό μοντέλο συνύπαρξης μη γραμμικότητας και διασποράς, και διαθέτει μια πλούσια μαθηματική δομή. Επιπλέον, οι εφαρμογές της είναι πολύ περισσότερες από αυτήν που προαναφέρθηκε ([85], [111], [110], [94], [91], [7]). Η καίρια σημασία του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών για την εξίσωση KdV σε ένα φραγμένο διάστημα της χωρικής μεταβλητής έχει ήδη τονιστεί π.χ. στο κλασικό σύγγραμμα των Ablowitz - Clarkson, [1].

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μελετάμε το πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών για την εξίσωση KdV σε ένα φραγμένο διάστημα της χωρικής μεταβλητής. Η διατριβή διαρθρώνεται σε επτά κεφάλαια. Από αυτά, το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικού χαρακτήρα, ενώ τα υπόλοιπα έξι, δηλ. τα κεφάλαια 2, 3, 4, 5, 6 και 7, αποτελούν το πρωτότυπο μέρος της διατριβής και διαπραγματεύονται το ΠΑΣΤ που μόλις αναφέραμε. Ένα βασικό ερευνητικό αποτέλεσμα της συνεισφοράς αυτής παρέχει, για μια αρκετά γενική κλάση αρχικών και συνοριακών συνθηκών, τη λύση του αντίστοιχου ΠΑΣΤ σαν μια ολοκληρωτική αναπαράσταση μέσω της λύσης ενός αντίστοιχου προβλήματος Riemann-Hilbert. Μάλιστα, παρέχονται δύο εναλλακτικές ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για καθένα από δύο εναλλακτικά προβλήματα

Riemann-Hilbert. Ένα επιπλέον ερευνητικό αποτέλεσμα εκφράζει τις άγνωστες συνοριακές συναρτήσεις μέσω των επιβεβλημένων αρχικών - συνοριακών συνθηκών. Πιο αναλυτικά, το περιεχόμενο καθενός κεφαλαίου έχει ως ακολούθως.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το αναγκαίο υπόβαθρο, καθώς και όλα εκείνα τα στοιχεία, η γνώση των οποίων διευκολύνει την κατανόηση της πρωτότυπης συνεισφοράς που περιέχεται στα έξι κεφάλαια που ακολουθούν. Το κεφάλαιο ξεκινάει με μια σύντομη ιστορική αναδρομή στη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης και την έννοια του ζεύγους Lax. Παρουσιάζουμε τη μέθοδο αυτή όπως πρωτοεμφανίστηκε, εφαρμοζόμενη στο ΠΑΤ για την εξίσωση KdV, καθώς και τις εξελίξεις που ακολούθησαν, αναφορικά με την εισαγωγή της έννοιας του ζεύγους Lax και την εφαρμογή της μεθόδου και σε άλλες μη γραμμικές ΜΔΕ. Στη συνέχεια, δίνουμε το απαραίτητο υπόβαθρο αναφορικά με το λεγόμενο πρόβλημα Riemann-Hilbert, το οποίο αποτελεί κεντρικό εργαλείο για τη σύγχρονη διατύπωση της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης και των γενικεύσεών της, και αμέσως μετά παρουσιάζουμε τη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης για το ΠΑΤ της εξίσωσης KdV διατυπωμένη βάσει του προβλήματος Riemann-Hilbert. Επίσης παρουσιάζουμε τη λεγόμενη *μέθοδο της ένδυσης (dressing method)*, ένα χρήσιμο, για αργότερα, εργαλείο απόδειξης ότι η λύση ενός κατάλληλου προβλήματος Riemann-Hilbert είναι λύση ενός αντίστοιχου ζεύγους Lax. Τέλος, παρουσιάζουμε τη μέθοδο της *ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης του ζεύγους Lax*, που είναι η γενίκευση της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης που την καθιστά εφαρμόσιμη και σε ΠΑΣΤ.

Στα κεφάλαια 2,3 και 4 παρουσιάζουμε, σε τρία στάδια, την εφαρμογή της μεθόδου του ενοποιημένου φασματικού μετασχηματισμού στο ΠΑΣΤ που ήδη αναφέραμε, δηλαδή σε εκείνο για την εξίσωση KdV

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

σε ένα φραγμένο διάστημα της χωρικής μεταβλητής. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείται η εξίσωση KdV στη χωροχρονική περιοχή $\Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le L, \ 0 \le t \le T\} \equiv [0,L] \times [0,T]$ (L, T δοσμένες σταθερές). Ένα καλά ορισμένο ΠΑΣΤ προκύπτει θεωρώντας την αρχική συνθήκη

$$q(x,0) = q_0(x), \ \ x \in [0,L]$$

και τις τρείς συνοριακές συνθήκες

$$q(0,t) = g_0(t), \ \ q(L,t) = f_0(t), \ \ q_x(L,t) = f_1(t), \ \ t \in [0,T]$$

όπου q_0, g_0, f_0 και f_1 δοσμένες ομαλές συναρτήσεις, που ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες συμβατότητας και ανήκουν σε κατάλληλους συναρτησιακούς χώρους. Πιο αναλυτικά:

Στο κεφάλαιο 2 ξεκινάμε τη μελέτη μας με την υπόθεση ότι η ΜΔΕ KdV επιδέχεται μια λύση $q(x,t)$ στην υπό θεώρηση περιοχή Ω. Η αντίστοιχη της περιοχής Ω ταυτόχρονη φασματική ανάλυση του ζεύγους Lax της KdV υλοποιείται μελετώντας την αναλυτικότητα, στο μιγαδικό επίπεδο της φασματικής, όπως λέγεται, παραμέτρου k (η παράμετρος του ζεύγους Lax), μιας κατάλληλης τετράδας ιδιοσυναρτήσεων, δηλαδή λύσεων του ζεύγους Lax. Οι τελευταίες επιλέγονται, όπως δείχνουμε, ακολουθώντας δρόμους ολοκλήρωσης με τρόπο που να σαρώνεται το σύνορο $\partial\Omega$. Η διαδικασία αυτή μας οδηγεί στη διατύπωση ενός ιδιόμορφου, ομογενούς προβλήματος παραγοντοποίησης Riemann-Hilbert. Αυτό καθορίζεται από μια εξάδα *φασματικών*, όπως λέγονται, *συναρτήσεων*, συμβολιζόμενες με $a(k)$, $b(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $A_L(k)$ και $B_L(k)$. Οι τελευταίες, με τη σειρά τους, καθορίζονται μονοσήμαντα από τις τιμές της $q(x,t)$ και κατάλληλων παραγώγων της στο σύνορο $\partial\Omega$. Πιο συγκεκριμένα, οι $\{a(k), b(k)\}$ καθορίζονται από τις αρχικές τιμές $\{q(x,0),\ x \in [0,L]\}$, οι $\{A(k), B(k)\}$ καθορίζονται από τις συνοριακές τιμές $\{(\partial_x^j q)(0,t),\ j = 0,1,2,\ t \in [0,T]\}$, ενώ οι $\{A_L(k), B_L(k)\}$ καθορίζονται από τις συνοριακές τιμές $\{(\partial_x^j q)(L,t),\ j = 0,1,2,\ t \in [0,T]\}$. Η λύση $q(x,t)$ της KdV στην περιοχή Ω αναπαρίσταται μέσω της λύσης $M(x,t,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert από τη συμπεριφορά της τελευταίας καθώς $k \to \infty$.

Με κίνητρο την ανάλυση που ακολουθήθηκε στο κεφάλαιο 2, εστιάζουμε, από το κεφάλαιο 3 και στο εξής, την προσοχή μας σε εκείνο το πρόβλημα Riemann-Hilbert του οποίου η διατύπωση στηρίζεται στις δοσμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες που περιλαμβάνονται στη διατύπωση του καλά ορισμένου ΠΑΣΤ. Όπως έχει ήδη επισημανθεί, ένα καλά ορισμένο ΠΑΣΤ για την εξίσωση KdV προκύπτει από τον καθορισμό των αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$q(x,0) = q_0(x),\ \ q(0,t) = g_0(t),\ \ q(L,t) = f_0(t),\ \ q_x(L,t) = f_1(t).$$

Εισάγουμε, επιπλέον, τις συναρτήσεις

$$g_1(t) := q_x(0,t),\ \ g_2(t) := q_{xx}(0,t),\ \ f_2(t) := q_{xx}(L,t)$$

όπου $q(x,t)$ η μοναδική λύση του καλά ορισμένου ΠΑΣΤ.

Ορίζουμε τα ζεύγη φασματικών συναρτήσεων $(a(k),b(k))$, $(A(k),B(k))$ και $(A_L(k),B_L(k))$ ως εκείνων που καθορίζονται από τα σύνολα συναρτήσεων $\{q_0(x)\}$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ αντίστοιχα.

Οι μετασχηματισμοί $\mathbf{S} : \{q_0(x)\} \longmapsto \{a(k), b(k)\}$, $\widetilde{\mathbf{S}} : \{g_j(t)\}_{j=0}^2 \longmapsto \{A(k), B(k)\}$ και $\widetilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{L}} : \{f_j(t)\}_{j=0}^2 \longmapsto \{A_L(k), B_L(k)\}$ ορίζονται με πεπλεγμένο τρόπο μέσα από την επίλυση κατάλληλων προβλημάτων αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για *γραμμικές* συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές, ή, ισοδύναμα, μέσα από την επίλυση κατάλληλων *γραμμικών* ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Δείχνουμε ότι οι έξι αυτές φασματικές συναρτήσεις ικανοποιούν μια συγκεκριμένη αλγεβρική εξίσωση, που ονομάζεται *ολική σχέση (global relation)*. Η ύπαρξη αυτής της δεσμευτικής σχέσης εκφράζει το γεγονός ότι *οι επτά αρχικές και συνοριακές συναρτήσεις δε θα μπορούσαν να έχουν προεπιλεγεί με ανεξάρτητο μεταξύ τους τρόπο.* Με άλλα λόγια, και χωρίς να χρησιμοποιήσει κανείς το αποτέλεσμα περί καλής τοποθέτησης, γνωρίζουμε τώρα ότι δε θα μπορούσαμε να προκαθορίσουμε μια επτάδα συναρτήσεων ως αρχικά και συνοριακά δοσμένα, παρά μόνο εφόσον ικανοποιείται η ολική σχέση, περίπτωση κατά την οποία λέγονται ένα *αποδεκτό σύνολο συναρτήσεων (admissible set of functions)*.

Προκειμένου να δείξουμε, στο επόμενο κεφάλαιο 4, ότι η λύση $M(x,t,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert οδηγεί πράγματι σε μια λύση $q(x,t)$ του ΠΑΣΤ, χρειαζόμαστε τον τρόπο με τον οποίο αντιστρέφονται οι φασματικές απεικονίσεις $\mathbf{S}$, $\widetilde{\mathbf{S}}$ και $\widetilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{L}}$. Αποδεικνύουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου 3, ότι η αντιστροφή τους περιγράφεται μέσω κατάλληλων προβλημάτων Riemann-Hilbert.

Στο κεφάλαιο 4 χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 3 αναφορικά με την αντιστροφή των φασματικών απεικονίσεων. Δείχνουμε ότι, αν οι επτά συναρτήσεις $\{q_0(x)\}$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ είναι τέτοιες που να ικανοποιείται η ολική σχέση, τότε η συνάρτηση $q(x,t)$, που προκύπτει από την ασυμπτωτική συμπεριφορά, για $k \to \infty$, της λύσης $M(x,t,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert είναι, πράγματι, λύση του προβλήματος αρχικών - συνοριακών τιμών. Επιπλέον, παρουσιάζουμε δύο ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για την $q(x,t)$ μέσω της $M(x,t,k)$. Τέτοιες αναπαραστάσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την περαιτέρω μελέτη των ιδιοτήτων της λύσης $q(x,t)$ του ΠΑΣΤ, όπως, λ.χ., η ασυμπτωτική συμπεριφορά της για μεγάλες τιμές του χρόνου t.

Στο κεφάλαιο 5 μελετάμε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του προβλήματος Riemann-Hilbert που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα Riemann-Hilbert είναι μονοσήμαντα επιλύσιμο, δηλ. η συνάρτηση $M(x,t,k)$ υπάρχει και είναι μοναδική, εφόσον οι ακόλουθες δύο προϋποθέσεις πληρούνται:

(i). Το αντίστοιχο ομαλό πρόβλημα Riemann-Hilbert είναι μονοσήμαντα επιλύσιμο.

(ii). Δύο συγκεκριμένα (x,t)-παραμετρικά γραμμικά αλγεβρικά συστήματα είναι μονοσήμαντα επιλύσιμα για όλες τις τιμές των $(x,t) \in \Omega$.

Πρέπει να επισημανθεί ότι, σε κάθε περίπτωση (δηλ. ανεξάρτητα από το αν πληρούνται οι προϋποθέσεις (i) και (ii)), το πρόβλημα Riemann-Hilbert έχει μία και μοναδική λύση, για τους ακόλουθους δύο λόγους:

(a). Η καλή τοποθέτηση του ΠΑΣΤ εξασφαλίζει, μέσω της ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης του ζεύγους Lax, την ύπαρξη μιας συνάρτησης $M(x,t,k)$ που ικανοποιεί το πρόβλημα Riemann-Hilbert.

(b). Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος Riemann-Hilbert είναι ανεξάρτητη των υποθέσεων (i) και (ii).

Ωστόσο, η ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου είναι μια απόπειρα *αυτόνομης* απόδειξης της μονοσήμαντης επιλυσιμότητας του προβλήματος Riemann-Hilbert, δηλ. ανεξάρτητης από την καλή τοποθέτηση του ΠΑΣΤ.

Πρέπει να επισημανθεί ότι η αποδεικτική διαδικασία *αναγωγής του ιδιόμορφου προβλήματος Riemann-Hilbert σε ένα ολόμορφο*, που προτείνεται στο παρόν κεφάλαιο, είναι τελείως καινοτόμα και εφαρμόσιμη σε μια πολύ ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων Riemann-Hilbert. Π.χ., σε προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση KdV, η κλασική μέθοδος των μετασχηματισμών Darboux δεν είναι επιτυχής.

Στο κεφάλαιο 6 ακολουθούμε έναν εναλλακτικό τρόπο διατύπωσης προβλήματος Riemann-Hilbert για το υπό θεώρηση ΠΑΣΤ.

Η διαφορά με τον φορμαλισμό που ακολουθήθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο χειριζόμαστε τους πόλους των ιδιοσυναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, αντί να διατυπώνουμε συνθήκες που αφορούν στα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των ιδιοσυναρτήσεων στους πόλους αυτών, θεωρούμε τώρα αλματικές συνθήκες που διατυπώνονται πάνω σε επιπρόσθετες καμπύλες που περιβάλλουν τους πόλους, δηλαδή, στην περίπτωσή μας, στην ένωση δύο ομόκεντρων κύκλων. Ο φορμαλισμός αυτός γενικεύει εκείνον που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, καθώς:

(i). Οι πόλοι των ιδιοσυναρτήσεων δεν είναι απαραίτητα απλοί.

(ii). Οι πόλοι μπορεί να είναι άπειρου πλήθους, αρκεί να αποτελούν ένα φραγμένο σύνολο και να μη συσσωρεύονται στη θέση ιδιομορφίας $k = 0$.

Στα κεφάλαια 2 έως και 4 είδαμε ότι η διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert για τη συνάρτηση $M(x,t,k)$ εξαρτάται από την επτάδα αρχικών και συνοριακών συναρτήσεων $\{q_0(x) = q(x,0)\}$, $\{g_j(t) = (\partial_x^j q)(0,t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t) = (\partial_x^j q)(L,t)\}_{j=0}^2$. Από την άλλη, η καλή τοποθέτηση του ΠΑΣΤ απαιτεί προκαθορισμό μόνο της τετράδας $\{q_0(x),\ g_0(t),\ f_0(t),\ f_1(t)\}$. Η μη δυνατότητα ανεξάρτητου προκαθορισμού μιας επτάδας αρχικών και συνοριακών συναρτήσεων όπως η παραπάνω αντανακλάται, άλλωστε, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, στην ύπαρξη μιας ολικής σχέσης. Η κατασκευή της *γενικευμένης απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann (generalized Dirichlet-to-Neumann map)* συνίσταται στον καθορισμό (ή τουλάχιστον, στον χαρακτηρισμό) των άγνωστων συνοριακών τιμών, εν προκειμένω των $\{g_1(t),\ g_2(t),\ f_2(t)\}$, μέσω των επιβεβλημένων (άρα γνωστών) αρχικών και συνοριακών συνθηκών, εν προκειμένω των $\{q_0(x),\ g_0(t),\ f_0(t),\ f_1(t)\}$. Στο κεφάλαιο 7 δείχνουμε ότι η ολική σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου για το χαρακτηρισμό της γενικευμένης απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann.

Από τη στιγμή που η κατασκευή αυτή θα έχει επιτευχθεί, η διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert θα εξαρτάται μόνο από γνωστές ποσότητες, τις δοσμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Από τον τρόπο κατασκευής της ολικής σχέσης γίνεται σαφές ότι κατασκευή αυτή είναι ανεξάρτητη από τη γνώση της $q(x,t)$ στο εσωτερικό της περιοχής Ω.

Αξίζει να επισημανθεί ότι για την κατασκευή αυτή χρησιμοποιούμε ένα εναλλακτικό ζεύγος Lax, που δεν φαίνεται να έχει ξαναχρησιμοποιηθεί, καθώς χαρακτηρίζεται από *απουσία συμμετριών ανάκλασης Schwarz στο μιγαδικό k-επίπεδο.*

Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για τις άγνωστες συνοριακές τιμές $g_1(t)$, $g_2(t)$ και $f_2(t)$ παράγονται με την ακόλουθη διαδικασία:

(i). Δοσμένου ότι η ολική σχέση ισχύει για όλα τα $k \in \mathbb{C}$, εκτελούμε καθέναν από τους δύο μετασχηματισμούς $k \longmapsto Ek$ και $k \longmapsto E^2 k$, όπου $E := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, οι οποίοι αφήνουν τη σχέση διασποράς (dispersion relation) $\omega(k) := 4k^3$ *αναλλοίωτη*. Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε τελικά σε ένα σύστημα από τρείς εξισώσεις, το οποίο τελικά θα θεωρηθεί σαν σύστημα για τις άγνωστες συνοριακές τιμές.

(ii). Επιτυγχάνουμε τριγωνικές αναπαραστάσεις Gelfand-Levitan-Marchenko για τις φασματικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στη χρονική μεταβλητή t και τις αντικαθιστούμε στο σύστημα εξιώσεων που περιγράψαμε στο (i). Ας ονομάσουμε (Σ) το σύστημα που προκύπτει, θεωρούμενο σαν σύστημα ως προς τους όρους που περιέχουν τις άγνωστες συνοριακές τιμές $g_1(t)$, $g_2(t)$ και $f_2(t)$.

(iii). Εξάγουμε κατάλληλες ολοκληρωτικές ταυτότητες στο μιγαδικό k-επίπεδο. Επιλύουμε το σύστημα (Σ) ως προς τους ενδιαφέροντες όρους (δηλαδή τους όρους που περιέχουν τις άγνωστες συνοριακές τιμές, $g_1(t)$, $g_2(t)$ και $f_2(t)$). Ολοκληρώνουμε στο k-επίπεδο χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες ολοκληρωτικές ταυτότητες.

Οι εκφράσεις που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό είναι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις στο k-επίπεδο, οι οποίες περιέχουν τις $g_0(t)$, $f_0(t)$, $f_1(t)$ καθώς και κατάλληλες συναρτήσεις, που συμβολίζουμε με K_j, L_j, M_j, $j = 1, 2$. Οι τελευταίες ορίζονται μέσω της λύσης ενός προβλήματος Goursat για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά στοιχεία.

1.1 Εισαγωγή.

Στο αρχικό αυτό κεφάλαιο παρουσιάζουμε το αναγκαίο υπόβαθρο, καθώς και όλα εκείνα τα στοιχεία, η γνώση των οποίων διευκολύνει την κατανόηση της πρωτότυπης συνεισφοράς που περιέχεται στα έξι κεφάλαια που ακολουθούν. Το κεφάλαιο ξεκινάει με μια σύντομη ιστορική αναδρομή στη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης και την έννοια του ζεύγους Lax. Παρουσιάζουμε τη μέθοδο αυτή όπως πρωτοεμφανίστηκε, εφαρμοζόμενη στο πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για την εξίσωση KdV, καθώς και τις εξελίξεις που ακολούθησαν, αναφορικά με την εισαγωγή της έννοιας του ζεύγους Lax και την εφαρμογή της μεθόδου και σε άλλες μη γραμμικές ΜΔΕ. Στη συνέχεια, δίνουμε το απαραίτητο υπόβαθρο αναφορικά με το λεγόμενο πρόβλημα Riemann-Hilbert, το οποίο αποτελεί κεντρικό εργαλείο για τη σύγχρονη διατύπωση της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης και των γενικεύσεών της, και αμέσως μετά παρουσιάζουμε τη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης για το ΠΑΤ της εξίσωσης KdV διατυπωμένη βάσει του προβλήματος Riemann-Hilbert. Επίσης παρουσιάζουμε τη λεγόμενη *μέθοδο της ένδυσης (dressing method)*, ένα χρήσιμο, για αργότερα, εργαλείο απόδειξης ότι η λύση ενός κατάλληλου προβλήματος Riemann-Hilbert είναι λύση ενός αντίστοιχου ζεύγους Lax. Τέλος, παρουσιάζουμε τη μέθοδο της *ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης του ζεύγους Lax*, που είναι η γενίκευση της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης που την καθιστά εφαρμόσιμη και σε προβλήματα αρχικών - συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ).

Η παρουσίαση της ύλης του κεφαλαίου αυτού είναι συνοπτική. Στη Διπλωματική Εργασία [80] μπορεί να βρεθεί εκτενής παρουσίαση του προβλήματος Riemann-Hilbert, καθώς και της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης βασισμένης στο πρόβλημα Riemann-Hilbert.

1.2 Η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης και η έννοια του ζεύγους Lax.

1.2.1 Ιστορική εισαγωγή στη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης.

Η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης (inverse scattering method), γνωστή και σαν μέθοδος της αντίστροφης φασματικής ανάλυσης, ή του αντίστροφου φασματικού μετασχηματισμού (inverse spectral transform) ([1], [5], [49], [72], [22], [33], [34], [36], [92], [99]) εισήχθη το 1967 με τη μνημειώδη δουλειά των Gardner, Greene, Kruskal και Miura ([76],[77]) αναφερόμενη στην επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση των Korteweg- de Vries, ή, πιο σύντομα, KdV:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u \to 0 \quad \text{για} \quad |x| \to \infty. \tag{1.2}$$

Σε αδρές γραμμές, η μέθοδος έχει ως εξής.

Κατ΄ αρχήν, η εξίσωση KdV συσχετίζεται με τη μονοδιάστατη, χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger (φασματικό πρόβλημα Schrödinger)

$$\Psi_{xx} + (k^2 - u(x,t))\Psi = 0, \quad -\infty < x < \infty. \tag{1.3}$$

Ακριβέστερα, το *δυναμικό* $u = u(x,t)$ του φασματικού προβλήματος δεν είναι παρά η ίδια συνάρτηση στην οποία αναφέρεται η KdV. Η παρουσία της *φασματικής*, όπως λέγεται, παραμέτρου $k \in \mathbb{C}$ είναι καθοριστική. Σε σχέση με την παράμετρο αυτή μελετιούνται το *ευθύ* και το *αντίστροφο* φασματικό πρόβλημα (βλ. παρακάτω). Κατά την διεξαγωγή των βημάτων αυτών το t εμφανίζεται με καθαρά παραμετρικό τρόπο, γι΄ αυτό και συχνά η εξάρτηση από το t αποσιωπείται κατά την διεξαγωγή των βημάτων αυτών.

Ευθύ Φασματικό Πρόβλημα. Το πρώτο βήμα της μεθόδου συνίσταται στην εξαγωγή των λεγόμενων φασματικών δεδομένων. Η γνώση αυτών απαιτείται, ιδιαίτερα, για $t = 0$. Το γεγονός ότι $u \to 0$ για $|x| \to \infty$ σε συνδυασμό με κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες εξασφαλίζει τη ύπαρξη δύο ενδιαφερουσών κατηγοριών λύσεων του φασματικού προβλήματος. Η πρώτη είναι οι λεγόμενες *καταστάσεις σκέδασης* (*scattering states*). Πρόκειται για εκείνες για τις οποίες η φασματική παράμετρος είναι πραγματική, $k = \xi \in \mathbb{R}$, και που υπόκεινται στην ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\psi(x,k) \sim e^{i\xi x} + R(\xi)e^{-i\xi x}, \quad x \to -\infty \tag{1.4}$$

$$\psi(x,k) \sim T(\xi)e^{i\xi x}, \quad x \to +\infty. \tag{1.5}$$

Η δεύτερη ενδιαφέρουσα κατηγορία λύσεων είναι οι λεγόμενες *δέσμιες καταστάσεις* (*bound states*). Πρόκειται για εκείνες που ικανοποιούν την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\psi(x,k) \to 0, \quad |x| \to \infty. \tag{1.6}$$

Ένα βασικό αποτέλεσμα είναι ότι, μη τετριμμένες λύσεις του τελευταίου τύπου υπάρχουν μόνο για ένα πεπερασμένο πλήθος τιμών της φασματικής παραμέτρου:

$$k = i\kappa_j, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{1.7}$$

όπου τα κ_j είναι πραγματικά και θετικά (για $u \in \mathbb{R}$). Οι αντίστοιχες λύσεις (*ιδιοσυναρτήσεις*) είναι:

$$\psi_j(x) := \psi(x, i\kappa_j) \sim C_j e^{\kappa_j x}, \quad x \to -\infty \tag{1.8}$$

όπου οι σταθερές C_j μπορούν να καθοριστούν μονοσήμαντα αν επιβάλουμε στις ιδιοσυναρτήσεις ψ_j να υπακούουν στις *συνθήκες κανονικοποίησης*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^2(x)dx = 1. \tag{1.9}$$

Τελικά, οι ποσότητες

$$S := \{R(\xi), \quad -\infty < \xi < \infty, \quad \kappa_j, \;\, C_j, \;\, j = 1, 2, ..., n\} \tag{1.10}$$

που υπολογίζονται με αυτό τον τρόπο έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον κι ονομάζονται *φασματικά δεδομένα* (*spectral data*) ή *δεδομένα σκέδασης* (*scattering data*). Ο διαχωρισμός τους σε *διακριτό μέρος* και *συνεχές μέρος* γίνεται με προφανή τρόπο.

Αντίστροφο Φασματικό Πρόβλημα. Σε μία εργασία τους το 1955, [78], οι Gelfand και Levitan απέδειξαν ότι η γνώση του συνόλου των φασματικών δεδομένων S είναι επαρκής για την ανακατασκευή του δυναμικού $u(x,t)$ με βάση το οποίο ορίστηκαν, αν υποθέσουμε ότι το τελευταίο είναι άγνωστο. Βλ. επίσης [35] και, πιο πρόσφατα, [31].

Εξέλιξη των Φασματικών Δεδομένων. Στο σημείο αυτό παρεμβαίνει η γνώση ότι το δυναμικό $u(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση KdV. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι το $u(x,t)$ *εξελίσσεται* βάσει της εξίσωσης αυτής, τότε η αντίστοιχη *χρονική εξέλιξη* των φασματικών δεδομένων είναι ιδιαίτερα απλή:

$$R_t = 8i\xi^3 R \tag{1.11}$$

$$T_t = 0 \tag{1.12}$$

$$\kappa_{j,t} = 0 \quad \text{(ισοφασματικότητα (isospectral property))} \tag{1.13}$$

$$C_{j,t} = 4i\kappa_j^3 C_j. \tag{1.14}$$

Επίλυση του Προβλήματος Αρχικών Τιμών. Κατάλληλος συνδυασμός των παραπάνω βημάτων μας παρέχει τη διαδικασία επίλυσης του Προβλήματος Αρχικών Τιμών της KdV με βάση το ακόλουθο σχήμα.

1^o *βήμα.* Για $t = 0$ λύνουμε το ευθύ φασματικό πρόβλημα και υπολογίζουμε το σύνολο των φασματικών δεδομένων $S(0)$.

2^o *βήμα.* Χρονική εξέλιξη των φασματικών δεδομένων. Το $S(0)$ καθορίζει τα φασματικά δεδομένα $S(t)$ με βάση τους παραπάνω απλούς τύπους.

3^o *βήμα.* Αντίστροφος φασματικός μετασχηματισμός. Με βάση το $S(t)$ ανακατασκευάζεται το δυναμικό $u(x,t)$, δηλαδή η λύση του ΠΑΤ.

Αυτή είναι, σχηματικά, η διαδικασία επίλυσης του ΠΑΤ για την εξίσωση KdV, όπως πρωτοπαρουσιάστηκε. Η εντύπωση ότι πρόκειται για ένα σχήμα επίλυσης συνδεδεμένο ειδικά με την εξίσωση για την οποία υλοποιήθηκε, διήρκεσε μέχρι το 1971. Τότε οι Zakharov και Shabat ([112]) κατέδειξαν ότι ένα παρόμοιο σχήμα μπορεί να εφαρμοστεί για τη λεγόμενη Μη Γραμμική Εξίσωση Schrödinger (Nonlinear Schrödinger, NLS),

$$q_t - iq_{xx} + 2\lambda i|q|^2 q = 0 \tag{1.15}$$

όπου $\lambda = \pm 1$ και $q(x,t)$ μιγαδική συνάρτηση. Αυτή τη φορά η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης στηρίζεται στο φασματικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} \Psi_{1,x} + ik\Psi_1 &= q\Psi_2 \\ \Psi_{2,x} - ik\Psi_2 &= r\Psi_1 \end{aligned} \tag{1.16}$$

με την επιλογή $r = -\lambda q^\star$.

Το δρόμο της επιλυσιμότητας με την τεχνική της αντίστροφης σκέδασης δεν άργησαν να ακολουθήσουν η *τροποποιημένη εξίσωση KdV (modified KdV, mKdV)* (1972, βλ. [108])

$$q_t - 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0 \tag{1.17}$$

καθώς και η εξίσωση sine-Gordon (1973, βλ. [3])

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u \tag{1.18}$$

και πάλι με βάση το φασματικό πρόβλημα των Zakharov- Shabat, με τις επιλογές, αντίστοιχα, $r = q$ και $q = -r = \frac{1}{2}u_x$.

Ας σημειωθεί σε αυτό το σημείο ότι το φασματικό πρόβλημα Zakharov-Shabat μπορεί να συσχετιστεί και με την KdV, με την επιλογή $r = -1$.

Μνημειώδους σημασίας στάθηκε η δημοσίευση, το 1974, του περίφημου άρθρου των Ablowitz, Kaup, Newell και Segur, [4]. Εκεί προσδιόρισαν επακριβώς την κλάση εκείνη των μη γραμμικών ΜΔΕ εξέλιξης οι οποίες μπορούν να επιλυθούν με βάση τα δύο αυτά φασματικά προβλήματα, Schrödinger και Zakharov-Shabat. Επίσης κατέδειξαν με αποτελεσματικό τρόπο ότι, το ευθύ και το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα, δηλαδή η εξαγωγή των φασματικών δεδομένων και η ανακατασκευή του δυναμικού, μπορούν να θεωρηθούν *μη γραμμικές γενικεύσεις* του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου του.

Έκτοτε, πολλά άλλα φασματικά προβλήματα έχουν χρησιμοποιηθεί. Αρχικά εισάγοντας πίνακες στα φασματικά προβλήματα (Schrödinger) και Zakharov-Shabat ([109]), αργότερα θεωρώντας φασματικά προβλήματα τρίτης ([87], [20]) και ανώτερης ([96],[21]) τάξης.

1.2.2 Η έννοια του ζεύγους Lax και ολοκληρωσιμότητα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Καθοριστική για τον τρόπο μελέτης, με βάση τη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης, εξισώσεων όπως οι KdV, NLS, mKdV και sine-Gordon, και πολλών ακόμη, όπως η Boussinesq, στάθηκε η εισαγωγή από τον P.D.Lax, το 1968, του ομώνυμου ζευγαριού (*ζεύγος Lax (Lax pair)*) (βλ. [93]). Αυτό αρχικά ορίστηκε σαν ένα ζευγάρι κατάλληλων *γραμμικών* (διαφορικών) τελεστών, έστω L και B, κατά τρόπο που η υπό θεώρηση μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) να μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$L_t = [B, L] \tag{1.19}$$

όπου $[\cdot,\cdot]$ ο συνήθης αντιμεταθέτης τελεστών. Απαιτείται, επιπλέον, οι τελεστές L και B να περιέχουν μία ελεύθερη παράμετρο $k \in \mathbb{C}$, που ονομάζεται *φασματική.*

Είναι η λεγόμενη *διατύπωση Lax* (*Lax formulation*) της υπό θεώρηση εξίσωσης.

Μια εναλλακτική διατύπωση για την υπό θεώρηση ΜΔΕ είναι η λεγόμενη *αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας (zero curvature representation)* ([36]),

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \tag{1.20}$$

για ένα κατάλληλο ζευγάρι πινάκων συναρτήσεων U και V. Είναι εύκολο να επαληθεύσει κανείς ότι η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη *συνθήκη συμβατότητας (ολοκληρωσιμότητας)* του ακόλουθου συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U\Psi \\ \Psi_t &= V\Psi. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Και πάλι, οι πίνακες - συναρτήσεις U, V και Ψ εξαρτώνται και από μία ελεύθερη παράμετρο $k \in \mathbb{C}$. Εδώ, ο όρος *ζεύγος Lax* μπορεί να αναφέρεται είτε στο ζευγάρι πινάκων U και V, είτε στο ζευγάρι *διαφορικών εξισώσεων* (1.21).

Γενικότερα, *ζεύγος Lax* για μια δοσμένη ΜΔΕ ονομάζεται οποιοδήποτε ζευγάρι *γραμμικών διαφορικών εξισώσεων* το οποίο *περιέχει μια ελεύθερη παράμετρο* $k \in \mathbb{C}$ και του οποίου η συνθήκη επιλυσιμότητας (ολοκληρωσιμότητας) ισοδυναμεί με την υπό θεώρηση ΜΔΕ.

Παρενθετικά σημειώνουμε ότι ο όρος *αναπαράσταση μηδενικής καμπυλότητας* που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με μια γεωμετρική ερμηνεία για την οποία παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα των Faddeev και Takhtajan, [36].

Η έννοια του ζεύγους Lax μπορεί, τώρα, να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό της *ολοκληρωσιμότητας* μιας ΜΔΕ. Μια ΜΔΕ καλείται *ολοκληρώσιμη* ανν επιδέχεται διατύπωση ζεύγους Lax, με την ευρεία έννοια που δώσαμε παραπάνω. Πρόκειται για μια πολύ ισχυρή διατύπωση, *στην οποία στηρίζεται, πια, ολόκληρη η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης.*

Για μια ΜΔΕ *εξέλιξης* σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x και t, που μπορούν να αποκληθούν χωρική και χρονική αντίστοιχα, οι δύο εξισώσεις του ζευγαριού Lax μπορούν συχνά να αποκληθούν *x-μέρος* και *t-μέρος* (χωρικό και χρονικό μέρος). Αυτό είναι π.χ. προφανές στην περίπτωση του ζεύγους Lax (1.21). Για τις ΜΔΕ που αναφέρθηκαν παραπάνω, το χωρικό μέρος του ζευγαριού είναι το αντίστοιχο φασματικό πρόβλημα (Schrödinger για την KdV, Zakharov- Shabat για τις KdV, NLS, mKdV, sine-Gordon).

Η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης δεν άργησε να διατυπωθεί με τρόπο που να στηρίζεται στη διατύπωση, και μελέτη, ενός, όπως λέγεται, προβλήματος Riemann-Hilbert, [113] (βλ. επίσης [8]). Η διατύπωση αυτή είναι τόσο κομψότερη, όσο και πιο άμεσα γενικεύσιμη. Το πρόβλημα Riemann-Hilbert δεν άργησε να αποκτήσει κεντρική θέση στη μελέτη των ολοκληρώσιμων συστημάτων, βλ. το πρόσφατο άρθρο ανασκόπησης [84].

Μια σύντομη περιγραφή του προβλήματος Riemann-Hilbert παρατίθεται στο επόμενο εδάφιο. Στο μεθεπόμενο εδάφιο παρουσιάζουμε τη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης για την εξίσωση KdV βασισμένη στο πρόβλημα Riemann-Hilbert.

1.3 Το πρόβλημα Riemann-Hilbert.

Τόσο η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών διδιάστατων (και όχι μόνο) ολοκληρώσιμων ΜΔΕ όπως η KdV (βλ. εδάφιο 1.4 στη συνέχεια), όσο και η γενίκευσή της για προβλήματα συνοριακών τιμών (βλ. εδάφιο 1.6 και όλα τα επόμενα κεφάλαια) στηρίζεται στη διατύπωση και μελέτη ενός προβλήματος Riemann-Hilbert.

Οι ορισμοί και τα βασικά αποτελέσματα του εδαφίου αυτού παρατίθενται επιγραμματικά. Εκτενής παρουσίαση του προβλήματος Riemann-Hilbert μπορεί να βρεθεί στη Διπλωματική Εργασία [80].

Στην πιο απλή διατύπωσή του, το πρόβλημα Riemann-Hilbert ζητά τον προσδιορισμό μιας τμηματικά αναλυτικής, ή, αλλιώς, τμηματικά ολόμορφης μιγαδικής συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής η οποία παρουσιάζει δοσμένο άλμα κατά μήκος δοσμένης καμπύλης του μιγαδικού επιπέδου.

Πρόβλημα 1.1. ([75],[98],[89],[2]) Έστω L μια κλειστή, απλή, ομαλή καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ κι έστω D^+ και D^- το εσωτερικό και το εξωτερικό, αντίστοιχα, της L. Έστω, τέλος, φ μια συνάρτηση δοσμένη επί της L. Να βρεθεί η συνάρτηση $\Phi : D^+ \cup D^- \longrightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \quad t \in L \tag{1.22}$$

με την υπόθεση ότι οι περιορισμοί Φ^+ και Φ^- της Φ στα D^+ και D^-, αντίστοιχα, είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

Η Φ λέγεται μια *τμηματικά αναλυτική* συνάρτηση.

Το πρόβλημα Riemann-Hilbert εμφανίζεται, βιβλιογραφικά, σε πολλές παραλλαγές και γενικεύσεις κι έτσι θα ήταν, μάλλον, σωστότερο να μιλάμε για *προβλήματα τύπου Riemann-Hilbert.* Έτσι, ενώ το πρόβλημα 1.1 συνοψίζεται στην εξίσωση (1.1), ένα εναλλακτικό πρόβλημα Riemann-Hilbert μπορεί να εκφραστεί με μια άλλη επιλογή συνθήκης κατά μήκος της καμπύλης L:

Πρόβλημα 1.2. ([75],[98],[89],[2]) Να βρεθεί η τμηματικά αναλυτική συνάρτηση Φ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L \tag{1.23}$$

όπου $G(t)$ μια δοσμένη συνάρτηση επί της L. Με άλλα λόγια, να *παραγοντοποιηθεί* η συνάρτηση $G(t)$ σε δυο συναρτήσεις οι οποίες μπορούν να συνεχιστούν αναλυτικά εκατέρωθεν της L.

Το πρόβλημα 1.2 λέγεται πρόβλημα *παραγοντοποίησης* (factorization Riemann-Hilbert problem) (βλ. [26]), ενώ το 1.1 θα μπορούσε να αποκληθεί *πρόβλημα δοσμένου άλματος* ή *αλματικό* ή *προσθετικό (additive) πρόβλημα Riemann-Hilbert.* Και τα δυο μαζί συνοψίζονται στο παρακάτω

Πρόβλημα 1.3. ([75],[98],[89],[2]) Να βρεθεί η τμηματικά αναλυτική συνάρτηση Φ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + \varphi(t), \quad t \in L \tag{1.24}$$

όπου $G(t)$, $\varphi(t)$ δοσμένες συναρτήσεις επί της L.

Πολλές γενικεύσεις των προβλημάτων που ήδη παρουσιάσαμε εμφανίζονται στις εφαρμογές. Μία βασική κατεύθυνση γενίκευσης σχετίζεται με την επιλογή της καμπύλης L κατά μήκος της οποίας εμφανίζονται τα άλματα. Έτσι, η L μπορεί να είναι ανοικτή, να έχει άπειρο μήκος (όπως η πραγματική ευθεία) ή να είναι πιο περίπλοκη, π.χ. να παρουσιάζει κομβικά σημεία και κλάδους.

Μια άλλη βασική κατεύθυνση γενίκευσης είναι τα λεγόμενα *διανυσματικά* προβλήματα *Riemann-Hilbert* (*vector* or *matrix* Riemann-Hilbert problems) ([75],[98],[89],[2]). Για παράδειγμα, στην εξίσωση (1.23) η $G(t)$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας $n \times n$ πίνακας, ενώ η $\Phi(t)$ σαν ένα διάνυσμα-στήλη (ή σαν ένας $n \times n$ πίνακας). Έχουμε τότε το διανυσματικό πρόβλημα παραγοντοποίησης Riemann-Hilbert (matrix factorization problem) ([98],[2]).

Πολλές άλλες παραλλαγές του προβλήματος εμφανίζονται στις εφαρμογές, ενδεικτικά αναφέρουμε τις ακόλουθες.

(i). *Μη τοπικά (nonlocal)* προβλήματα Riemann-Hilbert ([1],[2]).

(ii). Προβλήματα Riemann-Hilbert *με μετατόπιση (shift)* ([1],[75]).

(iii). *Ασυνεχή (discontinuous)* προβλήματα Riemann-Hilbert ([1]).

(iv). *Διαφορικά (differential)* προβλήματα Riemann-Hilbert ([1]).

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί μια πολύ σημαντική γενίκευση του προβλήματος Riemann-Hilbert, που είναι το πρόβλημα DBAR ([2],[1], [107]) και που συνδέεται με τις λεγόμενες *γενικευμένες αναλυτικές συναρτήσεις* ([107]).

1.3.1 Ολοκληρώματα τύπου Cauchy.

Ένα κεντρικής σημασίας εργαλείο στη μελέτη του προβλήματος Riemann-Hilbert είναι τα λεγόμενα ολοκληρώματα τύπου Cauchy.

Έστω ότι L, D^+ και D^- όπως παραπάνω. Έστω επίσης ότι η $\varphi : L \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια δοσμένη, *συνεχής* συνάρτηση επί της L. Τότε το παραμετρικό ολοκλήρωμα που ορίζεται από την έκφραση

$$\Phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \quad (z,t) \in (D^+ \cup D^-) \times L \tag{1.25}$$

λέγεται *ολοκλήρωμα τύπου Cauchy (Cauchy type integral)* ενώ η συνάρτηση φ με τη βοήθεια της οποίας ορίστηκε λέγεται *πυκνότητα* του ολοκληρώματος. ([89], [98], [75], [2], [106]).

Η υπόθεση περί συνεχείας της πυκνότητας φ του ολοκληρώματος εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση $\Phi : D^+ \cup D^- \longrightarrow \mathbb{C}$ που ορίστηκε με τον τρόπο αυτό είναι μια *τμηματικά αναλυτική συνάρτηση.*

1.3.2 Συναρτήσεις τύπου Hölder.

Ενδιαφέρουσες ιδιότητες των ολοκληρωμάτων τύπου Cauchy προκύπτουν,όπως θα δούμε στα επόμενα δύο εδάφια, όταν εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας σε εκείνες τις πυκνότητες που ικανοποιούν τη λεγόμενη συνθήκη του Hölder.

Ορισμός 1.4. ([89], [98], [75], [2], [106]) Θεωρούμε μια συνάρτηση

$$\varphi : L \longrightarrow \mathbb{C}$$

Λέμε ότι η φ ικανοποιεί τη συνθήκη του Hölder εάν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές $\alpha \in (0,1]$ και $C \geq 0$ τέτοιες που

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^{\alpha} \tag{1.26}$$

για όλα τα $t_1, t_2 \in L$.

Η σταθερή α, που - όπως και η C - εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης φ, χαρακτηρίζεται σαν εκθέτης Hölder (Hölder exponent) για τη φ ([89]).

1.3.3 Ολοκληρώματα κύριας τιμής του Cauchy.

Ας θεωρήσουμε μια απλή, ομαλή (κλάσης C^1) καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$, την οποία επιπλέον υποθέτουμε ότι είναι ευθυγραμμίσιμη με άκρα a, b.

Αν $z \in L$ είναι ένα δοσμένο σημείο της καμπύλης, σχηματίζουμε ιδιόμορφα ολοκληρώματα της μορφής ([2], [106], [98], [75], [89], [32])

$$\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{1.27}$$

όπου φ είναι κάθε φορά μια δοσμένη συνάρτηση. Υιοθετούμε το συμβολισμό

$$L(z;\rho) := \{\zeta \in L : |\zeta - z| \leq \rho\}$$

για $\rho > 0$, δηλ. είναι το τμήμα της καμπύλης που περιέχεται σ΄ έναν κύκλο ακτίνας ρ.

Αν υπάρχει το όριο που περιγράφεται στο δεξί μέλος της παρακάτω σχέσης, τότε ορίζεται η έκφραση του αριστερού μέλους κι η οποία αναφέρεται σαν *ολοκλήρωμα κύριας τιμής του Cauchy*: ([98], [75], [89], [2], [32]).

$$PV \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta := \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{L \setminus L(z;\rho)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{1.28}$$

Η ύπαρξη του ανωτέρω ορίου εξασφαλίζεται, σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα, από την υπόθεση ότι η συνάρτηση φ ικανοποιεί τη συνθήκη του Hölder.

Θεώρημα 1.5. *([75], [98]) Έστω z ένα αυθαίρετα προεπιλεγμένο σημείο της καμπύλης L, την οποία υποθέτουμε απλή, ομαλή (κλάσης C^1), τουλάχιστον σε μια περιοχή του σημείου z, κι ευθυγραμμίσιμη με άκρα a, b. Υποθέτουμε ότι $z \neq a, b$.*

Το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα

$$\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

όπου η πυκνότητα φ ικανοποιεί τη συνθήκη του Hölder (τουλάχιστο σε μια περιοχή του σημείου z) υπάρχει με την έννοια της κύριας τιμής του Cauchy (όχι όμως και σαν καταχρηστικό) κι έχει τιμή

$$\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}{\zeta - z} d\zeta + \varphi(\zeta) \ln\left(\frac{b - z}{z - a}\right) \tag{1.29}$$

όπου τ΄ ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος υπάρχει (κι εννοείται πάντα) σαν καταχρηστικό. Στην ειδική περίπτωση κλειστής καμπύλης L έχουμε

$$\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_L \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}{\zeta - z} d\zeta + \pi i \varphi(\zeta). \tag{1.30}$$

Η σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα ολοκληρώματα τύπου Cauchy και τα ολοκληρώματα κύριας τιμής του Cauchy αποτελεί το λεγόμενο *θεώρημα των Plemelj - Sokhotski* που παρουσιάζουμε στο επόμενο εδάφιο.

1.3.4 Το θεώρημα των Plemelj - Sokhotski.

Έστω, για άλλη μια φορά, ότι η L είναι μια απλή, κλειστή καμπύλη του $\mathbb{C}$, την οποία θεωρούμε ομαλή κλάσης C^1. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η συνάρτηση φ ικανοποιεί τη συνθήκη του Hölder κι ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα τύπου Cauchy που ορίζεται σύμφωνα με την έκφραση (1.25). Το *θεώρημα των Plemelj - Sokhotski* ([89], [98], [75], [2], [106]) εξασφαλίζει ότι οι πλευρικές συνοριακές τιμές $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$, όπου $t \in L$, της τμηματικά αναλυτικής συνάρτησης $\Phi : D^+ \cup D^- \longrightarrow \mathbb{C}$ συνδέονται με το ολοκλήρωμα κύριας τιμής του Cauchy

$$PV \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta$$

(που ορίζεται από την (1.28)) σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} pv \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L \tag{1.31}$$

και

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} pv \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L. \tag{1.32}$$

1.3.5 Επίλυση του προβλήματος Riemann-Hilbert.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1.31) και (1.32) παίρνουμε

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \quad t \in L. \tag{1.33}$$

Η σχέση αυτή, που ταυτίζεται με την (1.1), καθιστά σαφές ότι το ολοκλήρωμα τύπου Cauchy που ορίζεται σύμφωνα με την έκφραση (1.25) αποτελεί λύση του προβλήματος Riemann-Hilbert 1.1, υπό την υπόθεση ότι η φ ικανοποιεί τη συνθήκη του Hölder επί της L. Επιπλέον, εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι η συμπεριφορά στο άπειρο της $\Phi(z)$, σχέση (1.25), είναι

$$\Phi(z) = O(\frac{1}{|z|}), \quad z \to \infty. \tag{1.34}$$

Η γενική λύση του προβλήματος 1.1 δίνεται από την έκφραση $\Phi(z) + E(z)$, όπου $E(z)$ είναι μια οποιαδήποτε ακέραια συνάρτηση. Η γενική λύση *πεπερασμένου βαθμού στο άπειρο* δίνεται από την έκφραση $\Phi(z) + P(z)$, όπου $P(z)$ αυθαίρετο πολυώνυμο.

Η εύρεση της γενικής λύσης του προβλήματος Riemann-Hilbert 1.2 στηρίζεται στην υπόθεση ότι ο *συντελεστής*, όπως λέγεται, του προβλήματος, $G(t)$, ικανοποιεί τη συνθήκη του Hölder επί της L και $G(t) \neq 0$ επί της L. Η λύση χαρακτηρίζεται από το *δείκτη* του προβλήματος, που είναι ο δείκτης της $G(t)$ κατά μήκος της κλειστής καμπύλης L:

$$\kappa := Ind_L G = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L = \frac{1}{2\pi i}[\log G(t)]_L. \tag{1.35}$$

Η γενική λύση *πεπερασμένου βαθμού στο άπειρο* του προβλήματος 1.2 είναι

$$\Phi(z) = X(z)P(z) \tag{1.36}$$

όπου η $X(z)$ είναι η λεγόμενη *θεμελιακή λύση*, ή *κανονική συνάρτηση*, του προβλήματος, που δίνεται από την έκφραση

$$X(z) := \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & z \in D^+ \\ (z-a)^{-k} e^{\Gamma(z)}, & z \in D^- \end{cases} \tag{1.37}$$

όπου $a \in D^+$ αυθαίρετα προεπιλεγμένο σημείο, ενώ η $\Gamma(z)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log[(t-a)^{-\kappa}G(t)]}{t-z}dt \tag{1.38}$$

ενώ το $P(z)$ είναι αυθαίρετο πολυώνυμο.

Ο προσδιορισμός της γενικής λύσης *πεπερασμένου βαθμού στο άπειρο* του *μη ομογενούς* προβλήματος Riemann-Hilbert 1.3, υπό την υπόθεση ότι οι G και φ ικανοποιούν τη συνθήκη του Hölder επί της L, στηρίζεται στη λύση του *αντίστοιχου ομογενούς*, πρόβλημα 1.2.

1.3.6 Το πρόβλημα Riemann-Hilbert επί της πραγματικής ευθείας.

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $\varphi : L \equiv \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ για την οποία υποθέτουμε ότι τα όρια για $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ υπάρχουν στο $\mathbb{C}$ και είναι ίσα:

$$\varphi(\infty) := \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to-\infty}\varphi(x).$$

Υποθέτουμε παραπέρα πως η φ είναι συνάρτηση τύπου Hölder επί της επεκτεταμένης πραγματικής ευθείας $\overline{L} = L \cup \{\pm\infty\}$, ικανοποιεί, δηλαδή, τις συνθήκες

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x-y|^{\alpha}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.39}$$

και

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \Lambda|x-y|^{\beta}, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ με } |x|, |y| \text{ αρκετά μεγάλα}, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{1.40}$$

για κάποιους $\alpha, \beta \in (0,1]$ (με $\alpha \neq \beta$ γενικά).

Τότε το ακόλουθο παραμετρικό ολοκλήρωμα,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad Im(z) \neq 0 \tag{1.41}$$

υπάρχει με την έννοια της κύριας τιμής και ορίζει μια συνάρτηση τμηματικά ολόμορφη εκατέρωθεν της πραγματικής ευθείας. Ονομάζεται *ολοκλήρωμα τύπου Cauchy επί της πραγματικής ευθείας*. Επιπλέον, υπάρχουν τα παρακάτω όρια κι έχουν τιμή

$$\Phi^+(\infty) := \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S^+}}\Phi(z) = \frac{1}{2}\varphi(\infty) \tag{1.42}$$

και

$$\Phi^-(\infty) := \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in S^-}}\Phi(z) = -\frac{1}{2}\varphi(\infty) \tag{1.43}$$

όπου $S^+ := \{im(z) > 0\}$, $S^- := \{im(z) < 0\}$.

Το ολοκλήρωμα κύριας τιμής επί της πραγματικής ευθείας,

$$(H\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.44}$$

υπάρχει, λόγω των παραπάνω υποθέσεων, και συνήθως αναφέρεται σαν *μετασχηματισμός του Hilbert.*

Οι σχέσεις των Plemelj - Sokhotski ισχύουν και στην περίπτωση της πραγματικής ευθείας, κι έχουν τη μορφή:

$$\Phi^{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2i}(H\varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.45}$$

Το πρόβλημα Riemann-Hilbert επί της επεκτεταμένης πραγματικής ευθείας εκφράζεται από τη συνθήκη

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \phi(t), \quad -\infty < t < \infty \tag{1.46}$$

όπου $\phi : L \equiv \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ μια δοσμένη συνάρτηση τύπου Hölder επί της επεκτεταμένης πραγματικής ευθείας. Η γενική του λύση δίνεται από την έκφραση $\Phi(z) + E(z)$, όπου $\Phi(z)$ το ολοκλήρωμα τύπου Cauchy (1.41) και $E(z)$ μια αυθαίρετη ακέραιη συνάρτηση.

1.3.7 Διανυσματικό πρόβλημα Riemann-Hilbert.

Ας υποθέσουμε ότι η L είναι μια κλειστή απλή, ομαλή (κλάσης C^1) καμπύλη του $\mathbb{C}$. Έστω επίσης $G(t)$ μια $N \times N$- πίνακας -συνάρτηση ορισμένη επί της L, για την οποία υποθέτουμε ότι κάθε στοιχείο $G_{ij}(t)$, $1 \leq i, j \leq N$ ικανοποιεί μια συνθήκη του Hölder επί της L, καθώς και ότι $\det G(t) \neq 0$, $t \in L$. Το ομογενές διανυσματικό πρόβλημα Riemann-Hilbert απαιτεί τον καθορισμό μιας τμηματικά αναλυτικής (εκατέρωθεν της L) διανυσματικής συνάρτησης (ή πίνακα-συνάρτησης) $\Phi(t)$, που ικανοποιεί την αλματική συνθήκη

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L. \tag{1.47}$$

Στην περίπτωση οπου η $\Phi(t)$ είναι συνάρτηση-πίνακας κι όχι διάνυσμα, η συνθήκη μπορεί να παρουσιάζεται στην εναλλακτική μορφή

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t)G(t), \quad t \in L. \tag{1.48}$$

Σε αντίθεση με τη βαθμωτή περίπτωση, το διανυσματικό πρόβλημα Riemann-Hilbert *στην περίπτωση γενικού πίνακα $G(t)$ δεν έχει επιλυθεί σε κλειστή μορφή.* Μάλιστα, είναι συνηθισμένο να αναφέρεται στη βιβλιογραφία ότι δεν μπορεί να επιλυθεί σε κλειστή μορφή, αν και κάτι τέτοιο μάλλον δεν είναι αποδεδειγμένο. Πάντως, το διανυσματικό πρόβλημα Riemann-Hilbert μπορεί να αναχθεί σε μία ισοδύναμη *ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση (singular integral equation).* Η τελευταία ορίζεται μέσω ενός τελεστή Fredholm, με δείκτη Fredholm ίσο με μηδέν (σε κατάλληλο συναρτησιακό χώρο). Με τον τρόπο αυτό μπορεί να διατυπωθεί για το διανυσματικό πρόβλημα Riemann-Hilbert ένα *θεώρημα εναλλακτικότητας Fredholm,* σύμφωνα με το οποίο:

Το πρόβλημα Riemann-Hilbert

$$\begin{aligned} &\Phi^+(t) = \Phi^-(t)G(t), \quad t \in L \\ &\Phi(\infty) = I \end{aligned} \tag{1.49}$$

είναι μονοσήμαντα επιλύσιμο τότε και μόνο, όταν το πρόβλημα Riemann-Hilbert

$$\begin{aligned} &\Phi^+(t) = \Phi^-(t)G(t), \quad t \in L \\ &\Phi(\infty) = 0 \end{aligned} \tag{1.50}$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση $\Phi(z) \equiv 0$. Κατά συνέπεια, η επιλυσιμότητα του προβλήματος Riemann-Hilbert 1.49 ανάγεται στην απόδειξη ότι το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann-Hilbert με ομογενή συνθήκη στο άπειρο, (1.50), έχει μόνο τη μηδενική λύση. Το τελευταίο συνήθως αποδεικνύεται μέσω ενός αποτελέσματος γνωστού σαν *λήμμα μηδενισμού (vanishing lemma).*

Λήμμα 1.6. *(Λήμμα μηδενισμού (vanishing lemma))* ([2], [114]).
Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας $G(t)$ έχει τη μορφή $G = I + g$, όπου $g, g' \in L_2 \cap L_\infty$.
Έστω επίσης ότι, είτε ο πίνακας $\frac{1}{2}(G + G^\star)$ είτε ο $\frac{1}{2i}(G - G^\star)$ είναι θετικά ορισμένος ή αρνητικά ορισμένος, όπου $G^\star := \overline{G^T}$ (ο συζυγής ανάστροφος του G).
Τότε το πρόβλημα Riemann-Hilbert με ομογενή συνθήκη στο άπειρο, (1.50), έχει μόνο τη μηδενική λύση, $\Phi(z) \equiv 0$.

Στην κατεύθυνση της γενίκευσης του τελευταίου αποτελέσματος σε πιο περίπλοκες καμπύλες, βρίσκεται και το ακόλουθο λήμμα, που αναφέρεται σε προβλήματα Riemann-Hilbert διατυπωμένα επί της καμπύλης $L := \{k \in \mathbb{C} : k^3 \in \mathbb{R}\}$.

Λήμμα 1.7. *(Γενικευμένο λήμμα μηδενισμού (generalized vanishing lemma))* ([2]).
Ας υποθέσουμε ότι η L είναι η ένωση των καμπυλών $L_j := \{arg(z) = \frac{j\pi}{3}\}$, $j = 0, 1, \cdots, 5$. Έστω $\Phi(z)$ μια τμηματικά αναλυτική συνάρτηση, $z \in \mathbb{C} \setminus L$, της οποίας τον περιορισμό στην περιοχή $\frac{(j-1)\pi}{3} < arg(z) < \frac{j\pi}{3}$ συμβολίζουμε με $\Phi_j(z)$, $j = 0, 1, \cdots, 5$.
Έστω ότι η $\Phi(z)$ ικανοποιεί τις αλματικές συνθήκες

$$\Phi_{j+1}(z) = \Phi_j(z) g_j(z), \quad z \in L_j, \quad j = 0, 1, \cdots, 5 \tag{1.51}$$

και τη συνθήκη στο άπειρο

$$\Phi(z) \to 0, \quad z \to \infty. \tag{1.52}$$

Υποθέτουμε:
(i).

$$g_j \in L_2 \cap L_\infty, \quad j = 0, 1, \cdots, 5. \tag{1.53}$$

(ii).

$$g_2(z) = g_4^\star(\overline{z}), \quad g_1(z) = g_5^\star(\overline{z}). \tag{1.54}$$

(iii).

Οι πίνακες $\frac{g_3+g_3^\star}{2}$ (ή $\frac{g_3-g_3^\star}{2i}$) και $\frac{g_6+g_6^\star}{2}$ (ή $\frac{g_6-g_6^\star}{2i}$) είναι και οι δύο θετικά ορισμένοι ή και οι δύο αρνητικά ορισμένοι.

(iv).

$$\prod_{j=1}^{6} g_j = I_N \tag{1.55}$$

όπου I_N ο $N \times N$ μοναδιαίος πίνακας.

Τότε το πρόβλημα Riemann-Hilbert (1.51)-(1.52) έχει μόνο τη μηδενική λύση, $\Phi(z) \equiv 0$.

1.4 Η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης για την εξίσωση KdV.

Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε επιγραμματικά τη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης, ή αντίστροφης φασματικής ανάλυσης, βασισμένης στο πρόβλημα Riemann-Hilbert, για τη μελέτη του προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση KdV ([1]). Παρουσίαση της μεθόδου της αντίστροφης σκέδασης, βασισμένης στο πρόβλημα Riemann-Hilbert, για ένα πολύ ευρύτερο φασματικό πρόβλημα, μπορεί να βρεθεί στη Διπλωματική Εργασία [80].

Η εξίσωση των Korteweg- de Vries, ή KdV,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{1.56}$$

επιδέχεται το ζεύγος Lax

$$\begin{aligned} Lv &= v_{xx} + u(x,t)v = \lambda v \\ v_t &= Mv = (u_x + \gamma)v - (2u + 4\lambda)v_x \end{aligned} \tag{1.57}$$

όπου λ είναι η φασματική παράμετρος, ενώ η γ είναι μια αυθαίρετη σταθερή παράμετρος, στην οποία θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Η συνθήκη συμβατότητας (ή ολοκληρωσιμότητας), $v_{xxt} = v_{txx}$, του ως άνω ζεύγους γραμμικών διαφορικών εξισώσεων είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$L_t + [L, M] = 0 \tag{1.58}$$

η οποία, με τη σειρά της, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (1.56).

1.4.1 Το ευθύ φασματικό πρόβλημα.

Θέτοντας $\lambda = -k^2$ γράφουμε το ζεύγος Lax στη μορφή

$$v_{xx} + (u(x,t) + k^2)v = 0 \tag{1.59}$$

$$v_t = (u_x + \gamma)v + (4k^2 - 2u)v_x. \tag{1.60}$$

Μελετάμε την (1.59) κατ΄ αρχήν σαν *φασματικό πρόβλημα*.

Καθώς κατά τη διαδικασία του ευθέος και του αντίστροφου φασματικού προβλήματος το t αντιμετωπίζεται σαν παράμετρος, αδιαφορούμε για την t-εξάρτηση στο παρόν και το επόμενο εδάφιο.

Υποθέτουμε ότι η $u(x)$ είναι γνωστή και τέτοια ώστε $u(x) \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$. Μπορούμε τότε να εικάσουμε ότι υπάρχουν λύσεις του (1.59) τέτοιες που, καθώς $x \to \infty$ ή $x \to -\infty$, να συμπεριφέρονται όπως οι λύσεις του προβλήματος που αντιστοιχεί στην επιλογή $u \equiv 0$, δηλαδή όπως οι $e^{\pm ikx}$. Συμβολίζουμε τις τέσσερις αυτές λύσεις με $\phi(x,k)$, $\overline{\phi}(x,k)$, $\psi(x,k)$ και $\overline{\psi}(x,k)$, καθοριζόμενες από τις ασυμπτωτικές συμπεριφορές

$$\phi(x,k) \sim e^{-ikx}, \quad \overline{\phi}(x,k) \sim e^{ikx}, \quad x \to -\infty, \tag{1.61}$$

$$\psi(x,k) \sim e^{ikx}, \quad \overline{\psi}(x,k) \sim e^{-ikx}, \quad x \to -\infty. \tag{1.62}$$

Έχει αποδειχθεί ότι, αν η $u(\cdot)$ ανήκει στο χώρο P_μ, όπου

$$P_\mu := \{u(\cdot) : \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|^\mu)|u(x)|dx < \infty\}, \tag{1.63}$$

για $\mu = 1$ ή για $\mu = 2$, τότε οι υπό αναζήτηση συναρτήσεις ϕ, $\overline{\phi}$, ψ και $\overline{\psi}$ *υπάρχουν.*

Επιπλέον, η γραμμική δομή της εξίσωσης (1.59) που αυτές ικανοποιούν επιβάλλει τις ακόλουθες σχέσεις γραμμικής εξάρτησης:

$$\begin{aligned} \phi(x,k) &= a(k)\overline{\psi}(x,k) + b(k)\psi(x,k), \\ \overline{\phi}(x,k) &= -\overline{a}(k)\psi(x,k) + \overline{b}(k)\overline{\psi}(x,k) \end{aligned} \tag{1.64}$$

για τέσσερις συναρτήσεις $a(k)$, $\overline{a}(k)$, $b(k)$ και $\overline{b}(k)$ που ικανοποιούν τις συνθήκες συμμετρίας

$$\overline{a}(k) = -\overline{a(\overline{k})} = -a(-k), \quad \overline{b}(k) = \overline{b(\overline{k})} = b(-k) \tag{1.65}$$

και τη συνθήκη

$$a(k)\overline{a}(k) + b(k)\overline{b}(k) = -1. \tag{1.66}$$

Για τις *τροποποιημένες* ιδιοσυναρτήσεις

$$\begin{aligned} M(x,k) &:= \phi(x,k)e^{ikx}, \quad \overline{M}(x,k) = \overline{\phi}(x,k)e^{-ikx} \\ N(x,k) &:= \psi(x,k)e^{-ikx}, \quad \overline{N}(x,k) = \overline{\psi}(x,k)e^{ikx} \end{aligned} \tag{1.67}$$

οι (1.64) οδηγούν στην εξίσωση

$$\frac{M(x,k)}{a(k)} = \overline{N}(x,k) + R(k)e^{2ikx}\overline{N}(x,-k) \tag{1.68}$$

όπου η φασματική συνάρτηση $R(k)$, γνωστή σαν *συντελεστής ανάκλασης (reflection coefficient)*, ορίζεται από τη σχέση $R(k) := \frac{b(k)}{a(k)}$. Η εξίσωση (1.68) είναι θεμελιώδους σημασίας, καθώς μπορεί να εκληφθεί σαν η αλματική συνθήκη ενός *προβλήματος Riemann-Hilbert.* Αυτό είναι άμεση απόρροια του ακόλουθου αποτελέσματος, η απόδειξη του οποίου μπορεί να βρεθεί π.χ. στο [1].

Λήμμα 1.8. (i). Οι συναρτήσεις $M(x,k)$ και $a(k)$ επιδέχονται αναλυτική συνέχιση στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο της φασματικής παραμέτρου k, και τείνουν στη μονάδα καθώς $|k| \to \infty$ με $im(k) > 0$.

(ii). Η συνάρτηση $\overline{N}(x,k)$ επιδέχεται αναλυτική συνέχιση στο κάτω μιγαδικό ημιεπίπεδο της φασματικής παραμέτρου k, και τείνει στη μονάδα καθώς $|k| \to \infty$ με $im(k) < 0$. □

Ορίζοντας $m_+(x,k) := \frac{M(x,k)}{a(k)}$ και $m_-(x,k) := \overline{N}(x,k)$ γράφουμε την *αλματική συνθήκη* (1.68) στη μορφή

$$m_+(x,k) - m_-(x,k) = R(k)e^{2ikx}m_-(x,-k), \quad k \in \mathbb{R} \tag{1.69}$$

με την *τμηματικά μερόμορφη* συνάρτηση $m(x,k) \equiv m_\pm(x,k)$, $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ να έχει την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$m(x,k) \to 1, \quad |k| \to \infty, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{1.70}$$

Ας σημειωθεί ότι το πρόβλημα Riemann-Hilbert (1.69)-(1.70) μπορεί να αναδιατυπωθεί και σαν *διανυσματικό* πρόβλημα Riemann-Hilbert, βλ. π.χ. [1], [2].

Το ιδιόμορφο πρόβλημα Riemann-Hilbert (1.69)-(1.70) μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα *ομαλό (ολόμορφο)* πρόβλημα Riemann-Hilbert. Αυτό βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα (Ablowitz και Clarkson):

Λήμμα 1.9. Η συνάρτηση $a(k)$ έχει ένα το πολύ πεπερασμένο πλήθος ριζών, $\{k_j\}_{j=1}^N$, όλες απλές.

Ας συμβολίσουμε με $A_j(x)$ το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $m_+(x,k)$ στον απλό πόλο k_j αυτής, $j = 1, \cdots, N$. Τότε η $m_+(x,k)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$m_+(x,k) = \mu_+(x,k) + \sum_{j=1}^{N} \frac{A_j(x)}{k - k_j}, \quad im(k) > 0 \tag{1.71}$$

όπου $\mu_+(x,k)$ κατάλληλη ολόμορφη συνάρτηση, $im(k) > 0$. Επιπλέον, ορίζουμε $\mu_-(x,k) := m_-(x,k)$, $im(k) < 0$.

Λήμμα 1.10. Οι ρίζες της $a(k)$ είναι όλες φανταστικές και κείνται στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο, δηλ. $k = i\kappa_j$, $\kappa_j > 0$, $j = 1, \cdots, N$.

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι

$$A_j(x) = C_j e^{-2\kappa_j x} m_-(x, -i\kappa_j), \quad j = 1, \cdots, N. \tag{1.72}$$

Λόγω των (1.71) και (1.72), το *ομαλό* πρόβλημα Riemann-Hilbert για την τμηματικά ολόμορφη συνάρτηση $\mu_\pm(x,k)$, $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ παίρνει τη μορφή:

$$\mu_+(x,k) - \mu_-(x,k) = R(k)e^{2ikx}\mu_-(x,-k) - \sum_{j=1}^{N} \frac{C_j e^{-2\kappa_j x}\mu_-(x,-i\kappa_j)}{k - k_j}, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{1.73}$$

$$\mu(x,k) \to 1, \quad |k| \to \infty, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{1.74}$$

1.4.2 Το αντίστροφο φασματικό πρόβλημα.

Η ανάκτηση του δυναμικού $u(x)$ (υπενθυμίζεται ότι αδιαφορούμε εδώ για την t-εξάρτηση) από τη λύση $\mu(x,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert γίνεται μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης

$$u(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{2i\sum_{j=1}^{N} C_j e^{-2\kappa_j x}\mu_-(x,-i\kappa_j) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(k)\mu_-(x,-k)dk\right\}. \qquad (1.75)$$

1.4.3 Χρονική εξέλιξη των φασματικών δεδομένων.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $M(x,t,k)e^{-ikx}$ ικανοποιεί το t-μέρος του ζεύγους Lax, καθώς και την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $M(x,t,k)$ για $k \to -\infty$ και για $k \to +\infty$ οδηγούμαστε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

(i). Η παράμετρος γ συνδέεται με τη φασματική παράμετρο k μέσω της σχέσης $\gamma = 4ik^3$.

(ii). Οι ιδιοτιμές, όπως λέγονται, $k_j = i\kappa_j$, $j = 1, \cdots, N$ παραμένουν σταθερές κατά την εξέλιξη της χρονικής παραμέτρου t. Για το λόγο αυτό, το υπό θεώρηση φασματικό πρόβλημα λέμε ότι είναι *ισοφασματικό (isospectral)*. Οι σταθερές C_j που περιγράφουν τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα εξελίσσονται με τον ακόλουθο εκθετικό τρόπο:

$$C_j(t) = C_j(0)e^{8\kappa_j^3 t}, \quad j = 1, \cdots, N. \qquad (1.76)$$

(iii). Ο συντελεστής ανάκλασης R εξελίσσεται επίσης εκθετικά, ως εξής:

$$R(k,t) = R(k,0)e^{8ik^3 t}. \qquad (1.77)$$

1.4.4 Διαδικασία επίλυσης του Προβλήματος Αρχικών Τιμών.

Η διαδικασία επίλυσης του Προβλήματος Αρχικών Τιμών που απαρτίζεται από την εξίσωση KdV (1.56), ορισμένη στην περιοχή $\{-\infty < x < \infty, \quad t > 0\}$ και την αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \qquad (1.78)$$

όπου η δοσμένη, ομαλή πραγματική συνάρτηση $f(x)$ φθίνει αρκετά γρήγορα καθώς $|x| \to \infty$ (πιο συγκεκριμένα, απαιτείται $f \in P_\mu$), βασίζεται στο ακόλουθο σχήμα:

(i). Ευθεία φασματική ανάλυση για $t = 0$. Στο στάδιο αυτό λύνουμε το φασματικό πρόβλημα που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $f(x)$, υπολογίζοντας τα φασματικά δεδομένα $\{\kappa_j, \quad C_j(0), \quad j = 1, \cdots, N, \quad R(k,0), \quad k \in \mathbb{R} \ \}$.

(ii). Χρονική εξέλιξη των φασματικών δεδομένων. Οι εκφράσεις (1.76) και (1.77) προσδιορίζουν τα $C_j(t)$, $j = 1, \cdots, N$ και $R(k,t)$. Με τον τρόπο αυτό διατυπώνεται το πρόβλημα

Riemann-Hilbert για την $\mu(x,t,k)$:

$$\begin{aligned}&\mu_+(x,t,k)-\mu_-(x,t,k)=\\&R(k,0)e^{2ikx+8ik^3t}\mu_-(x,t,-k)-\sum_{j=1}^{N}\frac{C_j(0)e^{-2\kappa_jx+8\kappa_j^3t}\mu_-(x,t,-i\kappa_j)}{k-k_j},\quad k\in\mathbb{R},\end{aligned}\tag{1.79}$$

$$\mu(x,t,k)\to 1,\quad |k|\to\infty,\quad k\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.\tag{1.80}$$

(iii). Αντίστροφη φασματική ανάλυση για τυχαίο $t\geq 0$. Η επίλυση του τελευταίου προβλήματος Riemann-Hilbert προσδιορίζει την $\mu(x,t,k)$ και, μέσω του τύπου (1.75), που παίρνει τη μορφή

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{2i\sum_{j=1}^{N}C_j(0)e^{-2\kappa_jx+8\kappa_j^3t}\mu_-(x,t,-i\kappa_j)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(k,0)e^{8ik^3t}\mu_-(x,t,-k)dk\right\}.\tag{1.81}$$

ανακτάται η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

1.5 Η μέθοδος της ένδυσης για την εξίσωση KdV.

Η *μέθοδος της ένδυσης (dressing method)*, ([113]), αρχικά εισήχθη σαν μια αλγοριθμική τεχνική παραγωγής ολοκληρώσιμων μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Μία, όμως, άλλη ενδιαφέρουσα χρήση της, χρήσιμη στην παρούσα μελέτη, σχετίζεται με τον αυστηρό χειρισμό προβλημάτων αρχικών τιμών αλλά και προβλημάτων αρχικών-συνοριακών τιμών. Πιο συγκεκριμένα, δείχνει ότι η λύση ενός κατάλληλου προβλήματος Riemann-Hilbert αποτελεί λύση εκείνου του ζεύγους Lax στου οποίου τη φασματική ανάλυση στηρίχθηκε η διατύπωση του εν λόγω προβλήματος Riemann-Hilbert, [48].

Στην περίπτωση του Προβλήματος Αρχικών-Συνοριακών Τιμών για την εξίσωση KdV (σε ένα φραγμένο διάστημα της χωρικής μεταβλητής), που μελετάμε στην παρούσα διατριβή, η ανάλυση τελικά (δηλαδή κατόπιν κατάλληλων μετασχηματισμών) καταλήγει στη διατύπωση ενός προβλήματος Riemann-Hilbert της ακόλουθης μορφής:

Πρόβλημα 1.11. Να βρεθεί μία 2×2-συνάρτηση-πίνακας $M(x,t,k)$, αναλυτική για $k\in\mathbb{C}\setminus L$, όπου $L:=\{k\in\mathbb{C}:\ k^3\in\mathbb{R}\}$, η οποία:

(i). Ικανοποιεί την αλματική συνθήκη

$$M_-(x,t,k)=M_+(x,t,k)e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}J(k),\quad k^3\in\mathbb{R}\tag{1.82}$$

όπου $J(k)$ είναι μία 2×2-συνάρτηση-πίνακας, ενώ $M_+(x,t,k)$ και $M_-(x,t,k)$ είναι οι περιορισμοί της $M(x,t,k)$, αντίστοιχα, στις περιοχές D_+ και D_-, σύμφωνα με την ακόλουθη σύμβαση: η περιοχή D_+ είναι εκείνη που αφήνει στην αριστερή μεριά της L η κίνηση κατά μήκος μιας προκαθορισμένης φοράς της L (η φορά ορίζεται στο Κεφάλαιο 1).

(ii). $M(x,t,k)=I+O(1/k)$, $k\to\infty$, $k\in\mathbb{C}\setminus L$.

Το βασικό αποτέλεσμα συνοψίζεται στο ακόλουθο

Θεώρημα 1.12. *Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα Riemann-Hilbert 1.11 επιδέχεται μία και μοναδική λύση $M(x,t,k)$, για όλα τα $(x,t) \in \Omega := [0,L] \times [0,T]$. Τότε η $M(x,t,k)$ ικανοποιεί τις δύο εξισώσεις του ζεύγους Lax για την KdV,*

$$M_x + ik[\sigma_3, M] = QM \tag{1.83}$$

$$M_t + 4ik^3[\sigma_3, M] = \widetilde{Q}M \tag{1.84}$$

όπου οι πίνακες συναρτήσεων $Q(x,t,k)$ και $\widetilde{Q}(x,t,k)$ ορίζονται από τις σχέσεις

$$Q(x,t,k) := \frac{q}{2k}(\sigma_2 - i\sigma_3), \tag{1.85}$$

$$\widetilde{Q}(x,t,k) := 2kq\sigma_2 + q_x\sigma_1 + \frac{1}{2k}(q_{xx} + 2q^2)(i\sigma_3 - \sigma_2) \tag{1.86}$$

όπου σ_j, $j = 1,2,3$ είναι οι πίνακες του Pauli,

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.87}$$

Απόδειξη. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου της ένδυσης συνίσταται στην κατασκευή δύο γραμμικών τελεστών, έστω L_1 και L_2, κατά τρόπον ώστε:

(i). Οι πίνακες συναρτήσεων $(L_1M)(x,t,k)$ και $(L_2M)(x,t,k)$ ικανοποιούν την *ίδια αλματική συνθήκη* με τη συνάρτηση $M(x,t,k)$.

(ii). Οι πίνακες συναρτήσεων $(L_1M)(x,t,k)$ και $(L_2M)(x,t,k)$ συμπεριφέρονται σαν $O(1/k)$ καθώς $k \to \infty$, $k \in \mathbb{C} \setminus L$.

Στο σημείο αυτό *υποθέτουμε* ότι το *αντίστοιχο ομογενές* πρόβλημα Riemann-Hilbert (i)-(ii'), όπου

(ii'): $M(x,t,k) = O(1/k)$, $k \to \infty$, $k \in \mathbb{C} \setminus L$

επιδέχεται μόνο τη μηδενική λύση. Αυτό μπορεί να εξασφαλιστεί εφόσον οι συμμετρίες ανάκλασης Schwarz του πίνακα $J(k)$ εγγυώνται την ύπαρξη ενός *λήμματος μηδενισμού (vanishing lemma)* (συνακόλουθα, το πρόβλημα Riemann-Hilbert 1.11 έχει μία και μοναδική λύση).

Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$(L_1M)(x,t,k) = 0, \quad (L_2M)(x,t,k) = 0, \quad k \in \mathbb{C}. \tag{1.88}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η λύση $M(x,t,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert 1.11 ικανοποιεί τις δύο εξισώσεις (1.83)-(1.84) του ζεύγους Lax, καθίσταται σαφές από τις (1.88) ότι η κατάλληλη προς διερεύνηση επιλογή τελεστών είναι

$$m(x,t,k) \equiv L_1M := (\partial_x + ik\hat{\sigma}_3)M - QM, \quad n(x,t,k) \equiv L_2M := (\partial_t + 4ik^3\hat{\sigma}_3)M - \widetilde{Q}M. \tag{1.89}$$

όπου οι $Q(x,t,k)$ και $\widetilde{Q}(x,t,k)$ δίνονται από τις (2.7) και (2.8) αντίστοιχα. Πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι

$$m(x,t,k) = O(1/k), \quad n(x,t,k) = O(1/k), \quad k \to \infty. \tag{1.90}$$

Θεωρούμε το ανάπτυγμα

$$M(x,t,k) = I + \frac{1}{k}M_1(x,t) + \frac{1}{k^2}M_2(x,t) + \frac{1}{k^3}M_3(x,t) + O(\frac{1}{k^4}) \tag{1.91}$$

για τη λύση $M(x,t,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert 1.11. Γράφουμε, επίσης, για τους πίνακες $Q(x,t,k)$ και $\widetilde{Q}(x,t,k)$

$$Q(x,t,k) = \frac{1}{k}Q_0(x,t), \quad \widetilde{Q}(x,t,k) = \frac{1}{k}A(x,t) + B(x,t) + kC(x,t) \tag{1.92}$$

και αντικαθιστούμε τα αναπτύγματα αυτά σε καθεμιά από τις εκφράσεις (1.89) για τις συναρτήσεις $m(x,t,k)$ και $n(x,t,k)$. Εξισώνοντας όρους ίδιων δυνάμεων του k, εξασφαλίζουμε ότι οι $m(x,t,k)$ και $n(x,t,k)$ έχουν τη συμπεριφορά (1.90), καθώς και ότι $Q_0(x,t) = \frac{1}{2}q(\sigma_2 - i\sigma_3)$, $A(x,t) = \frac{1}{2}(q_{xx} + 2q^2)(i\sigma_3 - \sigma_2)$, $B(x,t) = q_x\sigma_1$ και $C(x,t) = 2q\sigma_2$, δοσμένου ότι ισχύουν οι εκφράσεις

$$\begin{aligned}
M_1(x,t) &= \begin{bmatrix} M_1^{11} & 0 \\ 0 & M_1^{22} \end{bmatrix}, \\
M_2(x,t) &= \begin{bmatrix} M_2^{11} & -\frac{1}{4}q \\ -\frac{1}{4}q & M_2^{22} \end{bmatrix}, \\
M_3(x,t) &= \begin{bmatrix} M_3^{11} & -\frac{i}{8}q_x - \frac{1}{4}qM_1^{22} \\ \frac{i}{8}q_x + \frac{1}{4}qM_1^{11} & M_3^{22} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.93}$$

Όμως, κάθε λύση $M(x,t,k)$ του ζεύγους Lax έχει ανάπτυγμα της ανωτέρω μορφής: πράγματι, αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα (1.91) σε καθεμιά από τις εξισώσεις (1.83) και (1.84) του ζεύγους Lax, οδηγούμαστε επίσης στις εκφράσεις (1.93).

Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη των (1.93) εκφράζει το γεγονός ότι $M_1^{12} = M_1^{21} = 0$, οι οποίες ισοδυναμούν με την $\lim_{k\to\infty}[kM_{12}] = \lim_{k\to\infty}[kM_{21}] = 0$, ή, λόγω συνθηκών συμμετρίας, μόνο με την $\lim_{k\to\infty}[kM_{12}] = 0$.

Η δεύτερη των (1.93) εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να οριστεί η $q(x,t)$ μέσω της $M(x,t,k)$. Πιο συκεκριμένα, $q(x,t) := -4\lim_{k\to\infty}[k^2M_{12}] = -4\lim_{k\to\infty}[k^2M_{21}]$.

Η τρίτη, τέλος, των (1.93) εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να οριστεί η $q_x(x,t)$ μέσω της $M(x,t,k)$.

1.6 Προβλήματα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών και η Γενίκευση της Μεθόδου της Αντίστροφης Σκέδασης.

1.6.1 Προβλήματα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών.

Όπως αναφέραμε στα εδάφια 1.2 και 1.4, η μέθοδος της αντίστροφης σκέδασης αποτέλεσε ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη του *προβλήματος αρχικών τιμών*, ή *προβλήματος Cauchy*, κατάλληλων (δηλ. ολοκληρώσιμων με την έννοια του ζεύγους Lax) μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Πολλά, όμως, προβλήματα που εμφανίζονται στις εφαρμογές διατυπώνονται, κατά φυσικό τρόπο, ως *προβλήματα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) (boundary value problems)*, ή *προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) (initial-boundary value problems)*. Ας αναφέρουμε ορισμένα τέτοια προβλήματα.

⋄ Εργαστηριακή μελέτη κυμάτων ύδατος οδηγεί στη διατύπωση ενός ΠΑΣΤ για την εξίσωση KdV με άγνωστη συνάρτηση $u(x,t)$ ορισμένη σε μια ημιευθεία της χωρικής μεταβλητής x, και με δοσμένες τις τιμές $u(x,0)$ και $u(0,t)$ ([10]) Το πρόβλημα αυτό είναι καλά ορισμένο, [12]. Παραπέρα, αριθμητική μελέτη αυτού του ΠΣΤ ([13], [23], [24], [25], [88]) καταδεικνύει *γέννηση σολιτονίων (soliton generation)* , σε απόλυτη συμφωνία με τις πειραματικές παρατηρήσεις.

⋄ Μελέτη πειραμάτων στην ιονόσφαιρα, σχετιζόμενων με τον εντοπισμό συχνοτήτων ραδιοκυμάτων. Στο σημείο ανάκλασης του κύματος, ένα επαρκές επίπεδο κυμάτων ηλεκτρονίων πλάσματος διεγείρεται. Η μη γραμμικότητα καθίσταται σημαντική, και το πρόβλημα μοντελοποιείται με τη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) ορισμένη σε μια ημιευθεία της χωρικής μεταβλητής x ([100]), κατά τρόπο αντίστοιχο με την προηγούμενη περίπτωση. Στο ίδιο ΠΑΣΤ οδηγεί και η μελέτη οπτικών διακοπτών (optical switches) ([97]).

Προς την κατεύθυνση της μελέτης προβλημάτων αρχικών- συνοριακών τιμών, ορισμένων στην ημιευθεία της χωρικής μετεβλητής και με φθίνοντα (decaying) αρχικά και συνοριακά δεδομένα, αναπτύχθηκε (βλ. A.S.Fokas, [37], και A.S.Fokas-A.R.Its, [50]) μια ισχυρή μέθοδος η οποία ανάγει την επίλυση του ΠΑΣΤ στην επίλυση ενός προβλήματος Riemann-Hilbert. Για τη διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert, αμφότερα τα μέλη του ζεύγους Lax, δηλ. τόσο το x-μέρος όσο και το t-μέρος, παίζουν ένα σημαντικό ρόλο. Μαλιστα, *είναι το t-μέρος που καθορίζει το πού εμφανίζονται τα άλματα στο k-μιγαδικό επίπεδο.*

Ακριβέστερα, η μέθοδος συνίσταται στην *ανεξάρτητη φασματική ανάλυση καθεμιάς εκ των εξισώσεων του ζευγαριού Lax* οδηγώντας, έτσι, στη διατύπωση δύο ξεχωριστών προβλημάτων Riemann-Hilbert, τα οποία, στη συνέχεια, συνδυάζονται ώστε να προκύψει το λεγόμενο *master Riemann-Hilbert problem* ([37], [50]). Η μέθοδος εφαρμόστηκε στη μελέτη του ΠΑΣΤ για καθεμιά εκ των εξισώσεων KdV ([52]), NLS ([54]) και sine-Gordon (in laboratory coordinates) ([51]) στην ημιευθεία της χωρικής μεταβλητής x (βλ. επίσης [53]).

1.6.2 Η μέθοδος της ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης του ζεύγους Lax.

Αποφασιστικής, όμως, σημασίας για την ανάλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών στάθηκε η μελέτη του προβλήματος χαρακτηριστικών συνοριακών τιμών (ή προβλήματος Goursat) για δύο υπερβολικού τύπου συστήματα, και πιο συγκεκριμένα την εξίσωση του Ernst και τη γραμμικοποίησή της, την εξίσωση των Euler-Poisson-Darboux (EPD) (A.S.Fokas, L.Y.Sung και D.Tsoubelis, βλ. [71]).

Η εξίσωση Euler-Poisson-Darboux (EPD) είναι

$$2(\eta-\xi)u_{\eta\xi}-u_\eta+u_\xi=0 \tag{1.94}$$

ενώ η εξίσωση

$$2(\eta-\xi)H_{\eta\xi}-H_\eta+H_\xi-(\eta-\xi)(H_\eta H^{-1}H_\xi+H_\eta H^{-1}H_\xi)=0, \tag{1.95}$$

όπου ο 2×2-συμμετρικός πίνακας -συνάρτηση $H(\eta,\xi)$ εκφράζεται σαν

$$H(\eta,\xi):=F^{-1}\begin{pmatrix}F^2+\omega^2 & \omega\\ \omega & F\end{pmatrix}, \tag{1.96}$$

αναφέρεται σαν εξίσωση του Ernst, και γραμμικοποίησή της αποτελεί η (1.94). Η εξίσωση του Ernst γράφεται και σαν το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}2(\eta-\xi)F_{\eta\xi}-F_\eta+F_\xi &= 2(\eta-\xi)F^{-1}(F_\eta F_\xi-\omega_\eta\omega_\xi), && (1.97\alpha')\\ 2(\eta-\xi)\omega_{\eta\xi}-\omega_\eta+\omega_\xi &= 2(\eta-\xi)F^{-1}(F_\eta\omega_\xi+F_\eta\omega_\xi). && (1.97\beta')\end{aligned}$$

Όταν η ποσότητα $\omega(\eta,\xi)$ μηδενίζεται ταυτοτικά, η 2×2-συνάρτηση-πίνακας $H(\eta,\xi)$ γίνεται διαγώνιος, και η εξίσωση του Ernst μετασχηματίζεται στην εξίσωση EPD.

Τόσο η διαγώνια όσο και η μη διαγώνια λύση αποτελούν τη βάση των σχετικιστικών μοντέλων συγκρουόμενων βαρυτικών κυμάτων.

Προφανώς, τόσο η εξίσωση (1.94) όσο και η (1.97) είναι συμμετρικές υπό τον μετασχηματισμό $(\eta,\xi)\mapsto(\xi,\eta)$. Το ίδιο συμβαίνει και για τα αντίστοιχα ζεύγη Lax, που είναι, για την μεν εξίσωση EPD,

$$\psi_\eta=2(\eta-k)u_\eta+u,\quad \psi_\xi=2(\xi-k)u_\xi+u, \tag{1.98}$$

για την δε εξίσωση Ernst,

$$\Psi_\eta=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\xi-k}{\eta-k}}\right)H_\eta H^{-1}\Psi,\quad \Psi_\xi=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\eta-k}{\xi-k}}\right)H_\xi H^{-1}\Psi. \tag{1.99}$$

Η συμμετρία αυτή οδηγεί με φυσικό τρόπο στην ταυτόχρονη ανάλυση των δύο εξισώσεων του ζεύγους Lax ([79], [71]).

Στο πλαίσιο της μεθόδου της *ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης του ζεύγους Lax*, οι δύο εξισώσεις -μέλη του ζεύγους θεωρούνται ότι συναποτελούν *ένα φασματικό πρόβλημα*. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούνται εξ' αρχής σαν ιδιοσυναρτήσεις, των οποίων μελετάται η αναλυτικότητα στο μιγαδικό επίπεδο της φασματικής παραμέτρου, εκείνες οι $\Psi(x,t,k)$ που ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις του ζευγαριού Lax (εν αντιθέσει προς την ανεξάρτητη φασματική ανάλυση που αναφέρθηκε προηγουμένως).

Σε τεχνικό επίπεδο, γράφουμε κατ' αρχήν τις δύο εξισώσεις του ζεύγους Lax σαν μία, και συγκεκριμένα σαν τη συνθήκη να είναι ακριβής μια διαφορική 1-μορφή. Στη συνέχεια, η διαφορική αυτή 1-μορφή ολοκληρώνεται στο (x,t)-επίπεδο, επιλέγοντας δρόμους ολοκλήρωσης με τρόπο που να 'σαρώνεται' το σύνορο της περιοχής Η δυνατότητα επιλογής δρόμων ολοκλήρωσης προσαρμοσμένων στο σύνορο της εκάστοτε περιοχής είναι που χαρακτηρίζει τη μέθοδο αυτή και την καθιστά αρκετά ευέλικτη ώστε να είναι εφαρμόσιμη σε μια ευρεία κατηγορία προβλημάτων αρχικών-συνοριακών τιμών για διδιάστατες μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Η *ταυτόχρονη φασματική ανάλυση του ζεύγους Lax* αποτέλεσε την κεντρική ιδέα μιας πολύ ισχυρής μέθόδου, γνωστής σαν *Μέθοδος Ενοποιημένου Μετασχηματισμού (Unified Transform Method)* (A.S.Fokas, [38], [39], [40], βλ. και αναφορές παρακάτω).

Ασφαλώς, η εφαρμοσιμότητα της μεθόδου δεν απαιτεί την πλήρη συμμετρία των εξισώσεων του ζευγαριού Lax ως προς την εναλλαγή των ρόλων των ανεξάρτητων μεταβλητών. Είναι, κατ' αρχήν, εφαρμόσιμη σε κάθε μερική διαφορική εξίσωση με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, έστω x και t, η οποία να επιδέχεται ζεύγος Lax στη μορφή (1.21). Η συνθήκη ολοκληρωσιμότητας της εν λόγω ΜΔΕ μπορεί να γραφεί ως η απαίτηση να είναι ακριβής η διαφορική μορφή

$$\Omega = U\Psi dx + V\Psi dt. \tag{1.100}$$

Εκτός από την απλοποίηση της διαδικασίας διατύπωσης του προβλήματος Riemann-Hilbert, η τεχνική της ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης προσφέρει και τη βάση της διατύπωσης μιας *Ολικής Σχέσης (Global Relation)* ([40],[43]). Αυτή προκύπτει από την ολοκλήρωση της ως άνω διαφορικής μορφής Ω κατά μήκος του συνόρου της περιοχής ισχύος του ΠΑΣΤ και την εφαρμογή του θεωρήματος του Green.

Η Ολική Σχέση μπορεί να γραφεί σαν μια εξίσωση που συνδέει μεταξύ τους τις λεγόμενες *φασματικές συναρτήσεις (spectral functions)*, και μάλιστα με έναν απλό αλγεβρικό τρόπο ([43]). Οι φασματικές συναρτήσεις παίζουν το ρόλο μετασχηματισμών των αρχικών και συνοριακών συναρτήσεων του ΠΑΣΤ, γνωστών ή αγνώστων. Πρόσφατα αναπτύχθηκε από τον καθ. Α. Φωκά, σε συνεργασία με τους A. Boutet de Monvel και D. Shepelsky μία μέθοδος επίλυσης της Ολικής Σχέσης για τις άγνωστες συνοριακές τιμές συναρτήσει των γνωστών ([14]), για την κατασκευή δηλ. της λεγόμενης *Γενικευμένης Απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann (Generalized Dirichlet-to-Neumann Map)* ([47]). Μια εναλλακτική προσέγγιση στο πρόβλημα της επίλυσης της Ολικής Σχέσης γίνεται στο πλαίσιο της θεωρίας των χώρων Sobolev και παρέχεται στο [56].

Ό καθ. Α. Φωκάς και οι συνεργάτες του ανέπτυξαν τη μεθοδολογία αυτή και μελέτησαν πλήθος προβλημάτων αρχικών-συνοριακών τιμών για εξελικτικές ολοκληρώσιμες μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με τη χωρική μεταβλητή περιορισμένη στην ημιευθεία ή το ευθύγραμμο τμήμα, [43], [56], [14], [47], [15], [55], [18], [19], [16], [105], συνεισφορές επί των οποίων η παρούσα μελέτη είναι βασισμένη.

Άλλα προβλήματα συνοριακών τιμών που μελετήθηκαν στη βάση της μεθοδολογίας αυτής περιλαμβάνονται στις εργασίες: [62], [60], [9], [63], [64], [58], [41], [65], [73], [44], [42], [70], [59], [45], [57], [74], [27], [103], [46], [61], [69], [6], [66], [67], [28], [68], [104], [30], [29], [101], [48], [86].

1.6.3 Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για την εξίσωση KdV σε ένα φραγμένο διάστημα της χωρικής μεταβλητής.

Στην διατριβή αυτή εστιάζουμε την προσοχή μας στο Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών (ΠΑΣΤ) για την Εξίσωση των Korteweg - de Vries (KdV) σε ένα φραγμένο διάστημα $[0, L]$ ($L > 0$ δοσμένη σταθερή) της χωρικής μεταβλητής:

$$q_t + q_{xxx} + 6qq_x = 0, \quad (x,t) \in \Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < L, \ 0 < t < T\}, \tag{1.101}$$

$$q(x,0) = q_0(x), \quad 0 \le x \le L \tag{1.102}$$

$$q(0,t) = g_0(t), \quad q(L,t) = f_0(t), \quad q_x(L,t) = f_1(t), \quad 0 \le t \le T \tag{1.103}$$

για την πραγματική συνάρτηση $q(x,t)$ των μεταβλητών $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$. Στη διατύπωση αυτή, $0 < L < \infty$ και $0 < T \le \infty$ είναι δοσμένες σταθερές. Οι συναρτήσεις $q_0(x)$, $g_0(t)$, $f_0(t)$ και $f_1(t)$ θεωρούνται δοσμένες, ομαλές (C^∞) και ικανοποιούν τις συνθήκες συμβατότητας

$$g_0(0) = q_0(0), \quad f_0(0) = q_0(L), \quad q_0'(L) = f_1(0). \tag{1.104}$$

Στην περίπτωση $T = \infty$, που είναι επίσης επιτρεπτή, οι συναρτήσεις $g_0(t)$, $f_0(t)$ και $f_1(t)$ θεωρούνται επιπλέον ότι ανήκουν στο χώρο συναρτήσεων Schwartz ταχείας πτώσης, $S(\mathbb{R}^+)$.

Η καλή τοποθέτηση του προβλήματος αυτού σε κατάλληλους χώρους Sobolev έχει ήδη αποδειχθεί με χρήση τεχνικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (PDE techniques), βλ., για παράδειγμα, [11].

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, η ανάλυση του παραπάνω προβλήματος, και τα αντίστοιχα πρωτότυπα αποτελέσματα, παρουσιάζονται αναλυτικά στα κεφάλαια 2 - 7 που ακολουθούν. Μέρος των πρωτοτύπων αποτελεσμάτων της διατριβής έχει συμπεριληφθεί στις εργασίες [81], [82], [83].

Κεφάλαιο 2

Από το Ζεύγος Lax στο πρόβλημα Riemann-Hilbert.

2.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό, και σε όλα τα επόμενα, εστιάζουμε την προσοχή μας στο Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών (ΠΑΣΤ) για την Εξίσωση των Korteweg - de Vries (KdV) σε ένα φραγμένο διάστημα $[0, L]$ ($L > 0$ δοσμένη σταθερή) της χωρικής μεταβλητής:

$$q_t + q_{xxx} + 6qq_x = 0, \quad (x,t) \in \Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < L, \ 0 < t < T\}, \tag{2.1}$$

$$q(x,0) = q_0(x), \quad 0 \le x \le L \tag{2.2}$$

$$q(0,t) = g_0(t), \quad q(L,t) = f_0(t), \quad q_x(L,t) = f_1(t), \quad 0 \le t \le T \tag{2.3}$$

για την πραγματική συνάρτηση $q(x,t)$ των μεταβλητών $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$. Στη διατύπωση αυτή, $0 < L < \infty$ και $0 < T \le \infty$ είναι δοσμένες σταθερές. Οι συναρτήσεις $q_0(x)$, $g_0(t)$, $f_0(t)$ και $f_1(t)$ θεωρούνται δοσμένες, ομαλές (C^∞) και ικανοποιούν τις συνθήκες συμβατότητας

$$g_0(0) = q_0(0), \quad f_0(0) = q_0(L), \quad q_0'(L) = f_1(0). \tag{2.4}$$

Στην περίπτωση $T = \infty$, που είναι επίσης επιτρεπτή, οι συναρτήσεις $g_0(t)$, $f_0(t)$ και $f_1(t)$ θεωρούνται επιπλέον ότι ανήκουν στο χώρο συναρτήσεων Schwartz ταχείας πτώσης, $S(\mathbb{R}^+)$.

Η καλή τοποθέτηση του προβλήματος αυτού σε κατάλληλους χώρους Sobolev έχει ήδη αποδειχθεί με χρήση τεχνικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (PDE techniques), βλ., για παράδειγμα, [11].

Η εξίσωση KdV (2.1) επιδέχεται το ζεύγος Lax

$$\Psi_x + ik[\sigma_3, \Psi] = Q\Psi \tag{2.5}$$

$$\Psi_t + 4ik^3[\sigma_3, \Psi] = \widetilde{Q}\Psi \tag{2.6}$$

όπου $\Psi(x,t,k)$ είναι ένας 2×2-πίνακας -συνάρτηση, ενώ οι 2×2-πίνακες -συναρτήσεις Q και $\widetilde{Q}$ ορίζονται σαν

$$Q(x,t,k) := \frac{q}{2k}(\sigma_2 - i\sigma_3), \tag{2.7}$$

$$\widetilde{Q}(x,t,k) := 2kq\sigma_2 + q_x\sigma_1 + \frac{1}{2k}(q_{xx}+2q^2)(i\sigma_3-\sigma_2) \tag{2.8}$$

όπου σ_j, $j=1,2,3$ είναι οι πίνακες του Pauli,

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Πιο αναλυτικά,

$$Q(x,t,k) = \frac{iq}{2k}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

και

$$\widetilde{Q}(x,t,k) = \begin{bmatrix} \frac{i}{2k}(q_{xx}+2q^2) & q_x - 2ikq + \frac{i}{2k}(q_{xx}+2q^2) \\ q_x + 2ikq - \frac{i}{2k}(q_{xx}+2q^2) & -\frac{i}{2k}(q_{xx}+2q^2) \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

ενώ $[\sigma_3, A] := \sigma_3 A - A\sigma_3$ είναι ο συνήθης μεταθέτης πινάκων.

Στο πλαίσιο της κλασικής διαδικασίας της αντίστροφης σκέδασης, κάθε 2×2-πίνακας -συνάρτηση $\Psi(x,t,k)$ που είναι κλάσης C^2 στις μεταβλητές $(x,t)\in\overline{\Omega}$ για κάθε $k\in\mathbb{C}$ και ικανοποιεί το x-μέρος του ζεύγους Lax οναμάζεται *ιδιοσυνάρτηση του x-μέρους του ζεύγους Lax*. *Φασματική ανάλυση* του χωρικού μέρους (x-μέρους) του ζεύγους Lax ονομάζεται η μελέτη των ιδιοσυναρτήσεών του αναφορικά με την αναλυτικότητά τους στο μιγαδικό επίπεδο της *φασματικής*, όπως λέγεται, *παραμέτρου k*. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στην διατύπωση ενός προβλήματος Riemann-Hilbert. Με τον τρόπο αυτό, το x-μέρος του ζεύγους Lax αντιμετωπίζεται σαν ένα *ευθύ φασματικό πρόβλημα*. Το *αντίστροφο φασματικό πρόβλημα* συνίσταται στην ανακατασκευή εκείνης της ιδιοσυνάρτησης του x-μέρους του ζεύγους Lax που ικανοποιεί το δοσμένο πρόβλημα Riemann-Hilbert. Η έννοια της ιδιοσυνάρτησης και της (ευθείας και αντίστροφης) φασματικής ανάλυσης του t-μέρους του ζεύγους Lax ορίζεται αντίστοιχα. Η κλασική, λοιπόν, διαδικασία της αντίστροφης σκέδασης χαρακτηρίζεται από την *ανεξάρτητη* αντιμετώπιση καθεμιάς εκ των δύο εξισώσεων που συναποτελούν το ζεύγος Lax.

Στο πλαίσιο της μεθόδου της *ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης του ζεύγους Lax*, οι δύο εξισώσεις -μέλη του ζεύγους θεωρούνται ότι συναποτελούν *ένα φασματικό πρόβλημα*. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε εξ' αρχής σαν ιδιοσυναρτήσεις εκείνες τις $\Psi(x,t,k)$ που ικανοποιούν και τα δύο μέρη του ζεύγους Lax. Σε τεχνικό επίπεδο, γράφουμε κατ' αρχήν τις δύο εξισώσεις του ζεύγους Lax σαν μία, και συγκεκριμένα σαν τη συνθήκη να είναι ακριβής μια διαφορική 1-μορφή. Στη συνέχεια, η διαφορική αυτή 1-μορφή ολοκληρώνεται στο (x,t)-επίπεδο, επιλέγοντας δρόμους ολοκλήρωσης με τρόπο που να 'σαρώνεται' το σύνορο της περιοχής (αυτό αποσαφηνίζεται στο επόμενο εδάφιο). Η δυνατότητα επιλογής δρόμων ολοκλήρωσης προσαρμοσμένων στο σύνορο της εκάστοτε περιοχής είναι που χαρακτηρίζει τη μέθοδο αυτή και την καθιστά αρκετά ευέλικτη ώστε να είναι εφαρμόσιμη σε μια ευρεία κατηγορία προβλημάτων αρχικών-συνοριακών τιμών για διδιάστατες μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η εκτέλεση της ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης του ζεύγους Lax, και η οποία οδηγεί στη διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert, ξεκινά με την υπόθεση ότι υπάρχει (ολική) λύση $q(x,t)$ της υπό θεώρηση ΜΔΕ (στην περίπτωσή μας, της KdV) στην περιοχή Ω. Το ζεύγος Lax είναι, τότε, εξ ορισμού, επιλύσιμο, δηλ. υπάρχουν ιδιοσυναρτήσεις $\Psi(x,t,k)$.

Στην περίπτωσή μας, ο απλούστερος τρόπος επιλογής ιδιοσυναρτήσεων γίνεται θεωρώντας σαν αρχικό σημείο κάθε δρόμου ολοκλήρωσης καθένα από τα τέσσερα γωνιακά σημεία της περιοχής Ω. Χρησιμοποιώντας τη γραμμική εξάρτηση μεταξύ κάθε δύο τέτοιων ιδιοσυναρτήσεων, η οποία επιβάλλεται από τη γραμμική δομή του ίδιου του ζεύγους Lax, οδηγούμαστε στη διατύπωση ενός προβλήματος Riemann-Hilbert στο μιγαδικό επίπεδο της φασματικής παραμέτρου k.

Το πρόβλημα αυτό Riemann-Hilbert καθορίζεται από μια εξάδα συναρτήσεων της φασματικής παραμέτρου k, ή, όπως λέγονται, *φασματικών συναρτήσεων*, που συμβολίζουμε με $a(k)$, $b(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $A_L(k)$ και $B_L(k)$. Αυτές, με τη σειρά τους, καθορίζονται με μονοσήμαντο τρόπο από τις αρχικές και συνοριακές τιμές της συνάρτησης $q(x,t)$ στην ύπαρξη της οποίας βασίστηκε η ταυτόχρονη φασματική ανάλυση του ζεύγους Lax. Πιο συγκεκριμένα, οι $\{a(k),b(k)\}$ καθορίζονται από τις αρχικές τιμές $\{q(x,0)\}$, οι $\{A(k),B(k)\}$ καθορίζονται από τις συνοριακές τιμές και τις εγκάρσιες συνοριακές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης της $q(x,t)$ στο αριστερό σύνορο $x=0$, δηλ. τις $\{q(0,t),\partial_x q(0,t),\partial_{xx}(0,t)\}$, ενώ οι $\{A_L(k),B_L(k)\}$ καθορίζονται από τις συνοριακές τιμές και τις εγκάρσιες συνοριακές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης της $q(x,t)$ στο δεξιό σύνορο $x=L$, δηλ. τις $\{q(L,t),\partial_x q(L,t),\partial_{xx}(L,t)\}$.

Το πώς απαλλασσόμαστε από την υπόθεση ύπαρξης λύσης $q(x,t)$, $(x,t)\in\Omega$ της KdV και λαμβάνουμε υπόψη τις συγκεκριμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες, αποτελεί αντικείμενο των επόμενων τριών κεφαλαίων, 3,4 και 5.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το πρόβλημα Riemann-Hilbert εξαρτάται από τις $q(x,0)$, $\partial_x^j q(0,t)$, $\partial_x^j q(L,t)$, $j=0,1,2$, ενώ το καλά τοποθετημένο ΠΑΣΤ που παρουσιάσαμε απαιτεί προκαθορισμό μόνο των $\{q(x,0),\ q(0,t),\ q(L,t),\ q_x(L,t)\}$. Δηλαδή, οι $\{q_x(0,t)$, $q_{xx}(0,t)$, $q_{xx}(L,t)\}$ δεν είναι γνωστές από τη διατύπωση του ΠΑΣΤ. Από την άλλη, αν διατυπώναμε το ΠΑΣΤ με τρόπο που να καθορίζονται όλες οι $q(x,0)$, $\partial_x^j q(0,t)$, $\partial_x^j q(L,t)$, $j=0,1,2$, κάτι τέτοιο *θα συνιστούσε γενικά υπερκαθορισμό από την άποψη της καλής τοποθέτησης του προβλήματος*. Πράγματι, στο κεφάλαιο 3 δείχνουμε ότι οι $\{q_0(x):=q(x,0)\}$, $\{g_j(t):=\partial_x^j q(0,t)\}_{j=0}^2$, $\{f_j(t):=\partial_x^j q(L,t)\}_{j=0}^2$ δεν μπορούν να προκαθοριστούν όλες αυθαίρετα, αλλά με τρόπο που να ικανοποιείται μια συγκεκριμένη δεσμευτική σχέση μεταξύ τους, που ονομάζεται *ολική σχέση global relation.* Επιπλέον, στο κεφάλαιο 7 δείχνουμε πώς η ολική σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να χαρακτηριστούν οι άγνωστες συνοριακές συναρτήσεις $\{g_1(t),g_2(t),f_2(t)\}$ από τις δοσμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες $\{q_0(x),g_0(t),f_0(t),f_1(t)\}$. Η απεικόνιση αυτή λέγεται *Γενικευμένη Απεικόνιση Dirichlet-to-Neumann.*

Το πρόβλημα Riemann-Hilbert που διατυπώνεται στο κεφάλαιο αυτό έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

(i). Είναι ένα ομογενές πρόβλημα παραγοντοποίησης 2×2-πινάκων.

(ii). Είναι ένα ιδιόμορφο (μερομορφικό) πρόβλημα Riemann-Hilbert, δηλ. οι συναρτήσεις -λύσεις του δεν είναι τμηματικά ολόμορφες, αλλά *τμηματικά μερόμορφες*. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε δύο τύπους ιδιομορφιών:

(iiα). Το σημείο $k = 0$ αποτελεί σημείο ιδιομορφίας του προβλήματος Riemann-Hilbert. Αυτό κληρονομείται, ουσιαστικά, από το γεγονός ότι, εξ αρχής, το ίδιο το ζεύγος Lax παρουσιάζει ιδιομορφία στο εν λόγω σημείο.

(iiβ). Σημεία στα οποία η λύση του προβλήματος Riemann-Hilbert, την οποία συμβολίζουμε με $M(x,t,k)$ παρουσιάζει πόλους. Οι πόλοι αυτοί ανακύπτουν, στη διαδικασία διατύπωσης του προβλήματος Riemann-Hilbert, σαν ρίζες φασματικών συναρτήσεων όπως οι έξι που προαναφέραμε και κατάλληλοι αλγεβρικοί συνδυασμοί τους. Περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας στην τεχνικά πιο απλή περίπτωση όπου οι πόλοι είναι πεπερασμένου πλήθους, απλοί, και δεν ανήκουν στις καμπύλες ασυνέχειας του προβλήματος Riemann-Hilbert. Σε αντίθεση με την περίπτωση (iiα), οι ιδιομορφίες που μόλις περιγράψαμε θα μπορούσαν να αποκληθούν *κινητές* ιδιομορφίες του προβλήματος Riemann-Hilbert, καθώς, σε τελική ανάλυση, εξαρτώνται από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του ΠΑΣΤ.

Αξίζει να επισημανθεί πως στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε και έναν εναλλακτικό τρόπο διατύπωσης του προβλήματος Riemann-Hilbert, που *εξασθενίζει* τις απαιτούμενες υποθέσεις αναφορικά με τις κινητές ιδιομορφίες.

Τέλος, η ανάκτηση της συνάρτησης $q(x,t)$ από τη λύση $M(x,t,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert γίνεται μέσω της συμπεριφοράς της τελευταίας για μεγάλες τιμές της φασματικής παραμέτρου, δηλ. για $k \to \infty$.

2.2 Ορισμός και ιδιότητες των ιδιοσυναρτήσεων.

2.2.1 Ορισμός των ιδιοσυναρτήσεων.

Προκειμένου να εκτελέσουμε την *ταυτόχρονη φασματική ανάλυση* και των δύο μελών του ζεύγους Lax, ξεκινάμε γράφοντας τις δύο εξισώσεις (2.5) και (2.6) σαν μία,

$$d\Big(e^{i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}\Psi(x,t,k)\Big) = \Upsilon(x,t,k) \tag{2.12}$$

όπου $\theta(x,t,k) := kx + 4k^3 t$, ενώ η διαφορική 1-μορφή Υ ορίζεται από τη σχέση

$$\Upsilon(x,t,k) := e^{i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}\Big(Q(x,t,k)\Psi(x,t,k)dx + \widetilde{Q}(x,t,k)\Psi(x,t,k)dt\Big), \tag{2.13}$$

ενώ για έναν πίνακα A και για $\alpha \in \mathbb{C}$ ορίζουμε το εκθετικό $e^{\alpha\hat{\sigma}_3}A$ ως εξής:

$$e^{\alpha\hat{\sigma}_3}A := e^{\alpha\sigma_3}Ae^{-\alpha\sigma_3}. \tag{2.14}$$

Ας συμβολίσουμε με $(x_\star, t_\star)$ ένα *σταθερό σημείο του συνόρου* $\partial\Omega$ της περιοχής $\overline{\Omega} := [0, L] \times [0, T]$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.12) κατά μήκος μιας (τμηματικά) ομαλής καμπύλης C που ενώνει το σημείο $(x_\star, t_\star)$ με το τυχαίο σημείο $(x, t) \in \overline{\Omega}$ καταλήγουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$\Psi_\star(x,t,k) = I + \int_{(x_\star,t_\star)}^{(x,t)} e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}\Upsilon(x',t',k). \tag{2.15}$$

όπου έχει επιβληθεί η *συνθήκη κανονικοποίησης (normalization condition)*

$$\Psi_\star(x_\star, t_\star, k) = I. \tag{2.16}$$

Η μοναδική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (7.17) ορίζει την ιδιοσυνάρτηση $\Psi_\star(x, t, k)$.

Ας δώσουμε, τώρα, στο σταθερό σημείο $(x_\star, t_\star)$ τη δυνατότητα να είναι, με τη σειρά, καθένα από τα τέσσερα γωνιακά σημεία της περιοχής $\overline{\Omega}$,

$$(x_1,t_1) := (0,T), \quad (x_2,t_2) := (0,0), \quad (x_3,t_3) := (L,0), \quad (x_4,t_4) := (L,T).$$

Με τον τρόπο αυτό αποκτούμε τέσσερις, διαφορετικές μεταξύ τους, ιδιοσυναρτήσεις, τις οποίες θα συμβολίζουμε με $\Psi_j(x, t, k)$ όπου $j = 1, 2, 3, 4$ αντίστοιχα. Επιλέγοντας τους δρόμους ολοκλήρωσης να αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα με τους άξονες των x και t, οδηγούμαστε στη διατύπωση των ακόλουθων ολοκληρωτικών εξισώσεων, που αποτελούν και τους ορισμούς των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων.

$$\begin{aligned}\Psi_1(x,t,k) = \quad & I + \int_0^x e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3} Q(x',t,k)\Psi_1(x',t,k)dx' \\ & -e^{-ikx\hat{\sigma}_3}\int_t^T e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}(0,t',k)\Psi_1(0,t',k)dt'.\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(x,t,k) = \quad & I + e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}\int_0^x e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3} Q(x',0,k)\Psi_2(x',0,k)dx' \\ & +\int_0^t e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}(x,t',k)\Psi_2(x,t',k)dt'.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\Psi_2(x,t,k) = \quad & I + \int_0^x e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3} Q(x',t,k)\Psi_2(x',t,k)dx' \\ & +e^{-ikx\hat{\sigma}_3}\int_0^t e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}(0,t',k)\Psi_2(0,t',k)dt'.\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\Psi_3(x,t,k) = \quad & I - e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}\int_x^L e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3} Q(x',0,k)\Psi_3(x',0,k)dx' \\ & +\int_0^t e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}(x,t',k)\Psi_3(x,t',k)dt'.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\Psi_3(x,t,k) = \quad & I + e^{-ik(x-L)\hat{\sigma}_3}\int_0^t e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}(L,t',k)\Psi_3(L,t',k)dt' \\ & -\int_x^L e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3}Q(x',t,k)\Psi_3(x',t,k)dx'.\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}\Psi_4(x,t,k) = \quad & I - e^{-ik(x-L)\hat{\sigma}_3}\int_t^T e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}(L,t',k)\Psi_4(L,t',k)dt' \\ & -\int_x^L e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3}Q(x',t,k)\Psi_4(x',t,k)dx'.\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.2.2 Ιδιότητες των ιδιοσυναρτήσεων.

Αναλυτικότητα και φραγή των ιδιοσυναρτήσεων.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η πιο χρήσιμη πληροφορία προς την κατεύθυνση της διατύπωσης του προβλήματος Riemann-Hilbert είναι αυτή που αφορά στην αναλυτικότητα και φραγή των ιδιοσυναρτήσεων στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_k$ της φασματικής παραμέτρου k.

Προκειμένου να περιγράψουμε τις ιδιότητες φραγής και αναλυτικότητας των ιδιοσυναρτήσεων $\Psi_j(x,t,k)$ όπου $j = 1,2,3,4$, απαιτείται ο χωρισμός του διάτρητου k-μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}^\star := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ στις ακόλουθες έξι σφηνοειδείς περιοχές:

$$D_j := \{k \in \mathbb{C} : (j-1)\pi/3 < argk < j\pi/3\} \setminus \{0\}, \quad j = 1,2,\cdots,6.$$

Η μελέτη των ολοκληρωτικών εξισώσεων που ορίζουν τις ιδιοσυναρτήσεις Ψ_j συνεπάγεται ότι, για κάθε $j = 1,2,3,4$, οι περιοχές φραγής και αναλυτικότητας καθεμιάς από τις δύο στήλες της Ψ_j είναι μη επικαλυπτόμενες. Για να γίνουμε συγκεκριμένοι, εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό.

Για μια ιδιοσυνάρτηση $\Psi = \Psi(x,t,k)$ θα συμβολίζουμε με $[\Psi]_1$ και $[\Psi]_2$ την πρώτη και τη δεύτερη, αντίστοιχα, στήλη του 2×2-πίνακα Ψ, θα γράφουμε, δηλαδή, $\Psi = ([\Psi]_1, [\Psi]_2)$.

Επίσης θα χρησιμοποιούμε *υπερδείκτες* για να υποδηλώσουμε την περιοχή στην οποία κάθε διάνυσμα-στήλη είναι φραγμένη και αναλυτική.

Με βάση το συμβολισμό αυτό, η μελέτη των ολοκληρωτικών εξισώσεων που ορίζουν τις ιδιοσυναρτήσεις Ψ_1 έως και Ψ_4 συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned}&\Psi_1 = ([\Psi_1]_1^{(2)}, [\Psi_1]_2^{(5)}), \quad \Psi_2 = ([\Psi_2]_1^{(13)}, [\Psi_2]_2^{(46)}), \\ &\Psi_3 = ([\Psi_3]_1^{(5)}, [\Psi_3]_2^{(2)}), \quad \Psi_4 = ([\Psi_4]_1^{(46)}, [\Psi_4]_2^{(13)}).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Για παράδειγμα, η πρώτη στήλη του πίνακα-συνάρτησης Ψ_1, την οποία συμβολίσαμε με $[\Psi_1]_1^{(2)}$, είναι αναλυτική και φραγμένη στην περιοχή D_2 του k-μιγαδικού επιπέδου, ενώ η δεύτερη στήλη του Ψ_1, την οποία συμβολίσαμε με $[\Psi_1]_2^{(5)}$, είναι αναλυτική και φραγμένη στην περιοχή D_5 του k-μιγαδικού επιπέδου. Παρόμοια και για τις υπόλοιπες ιδιοσυναρτήσεις, Ψ_2, Ψ_3 και Ψ_4.

Είναι απαραίτητο να διευκρινίσουμε ότι, όταν αναφερόμαστε στην *φραγή* μιας ιδιοσυνάρτησης σε μια περιοχή D_j, εννοούμε, ακριβέστερα, φραγή σε κάθε σύνολο της μορφής $D_j \cap \{|k| \geq \varepsilon\}$, όπου $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό. Δηλαδή έχουμε φραγή της ιδιοσυνάρτησης καθώς $k \to \infty$, $k \in D_j$.

Αξίζει να επισημανθεί ότι, ειδικότερα, οι Ψ_2 και Ψ_3 είναι ολόμορφες σε *ολόκληρο* το *διάτρητο* μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}^\star := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Επίσης, ειδικά στην περίπτωση πεπερασμένου τελικού χρόνου, $T < \infty$, όλες οι ιδιοσυναρτήσεις είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}^\star$.

Για μεταγενέστερη χρήση, μία βασική διαπίστωση είναι η ακόλουθη. Αν θεωρήσουμε τους περιορισμούς των ιδιοσυναρτήσεων $\Psi_j(x,t,k)$, $j = 1,2,3,4$, σε υποσύνολα του (x,t)-επιπέδου όπως είναι οι ευθείες $x =$ σταθερό και $t =$ σταθερό, τότε οι περιορισμοί αυτοί, σαν συναρτήσεις του k, είναι φραγμένες και αναλυτικές σε *ευρύτερα* υποσύνολα του φασματικού επιπέδου $\mathbb{C}_k$. Πιο συγκεκριμένα, για τις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_1(0,t,k)$, $\Psi_2(x,0,k)$, $\Psi_2(0,t,k)$, $\Psi_3(x,0,k)$, $\Psi_3(L,t,k)$ και $\Psi_4(L,t,k)$ έχουμε:

$$\Psi_1(0,t,k) = ([\Psi_1]_1^{(246)}(0,t,k), [\Psi_1]_2^{(135)}(0,t,k)), \tag{2.24}$$

$$\Psi_2(x,0,k) = ([\Psi_2]_1^{(123)}(x,0,k), [\Psi_2]_2^{(456)}(x,0,k)), \tag{2.25}$$

$$\Psi_2(0,t,k) = ([\Psi_2]_1^{(135)}(0,t,k), [\Psi_2]_2^{(246)}(0,t,k)), \tag{2.26}$$

$$\Psi_3(x,0,k) = ([\Psi_3]_1^{(456)}(x,0,k), [\Psi_3]_2^{(123)}(x,0,k)), \tag{2.27}$$

$$\Psi_3(L,t,k) = ([\Psi_3]_1^{(135)}(L,t,k), [\Psi_3]_2^{(246)}(L,t,k)), \tag{2.28}$$

και

$$\Psi_4(L,t,k) = ([\Psi_4]_1^{(246)}(L,t,k), [\Psi_4]_2^{(135)}(L,t,k)). \tag{2.29}$$

Αυτές είναι άμεσο επακόλουθο των ολοκληρωτικών εξισώσεων (2.17) έως και (2.22), όταν οι τελευταίες *περιορίζονται* με τον κατάλληλο, κάθε φορά, τρόπο.

Ορισμός 2.13. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς: $D_{13} := D_1 \cup D_3$, $D_{46} := D_4 \cup D_6$, $D_{135} := D_1 \cup D_3 \cup D_5$ και $D_{246} := D_2 \cup D_4 \cup D_6$.

Αλληλεξάρτηση των ιδιοσυναρτήσεων. Οι φασματικοί πίνακες.

Η γραμμικότητα των δύο διαφορικών εξισώσεων που συναποτελούν το ζεύγος Lax συνεπάγεται ότι κάθε δύο λύσεις του συστήματος αυτού συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας απλής αλγεβρικής σχέσης. Πιο συγκεκριμένα, είναι εύκολο να δειχθεί ότι οι τέσσερις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_j(x,t,k)$, $j = 1,2,3,4$, αλληλοσχετίζονται μέσω των ακόλουθων σχέσεων,

$$\Psi_3(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k) e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3} s(k), \tag{2.30}$$

$$\Psi_1(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k) e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3} S(k) \tag{2.31}$$

και

$$\Psi_4(x,t,k) = \Psi_3(x,t,k)e^{i[kL-\theta(x,t,k)]\hat{\sigma}_3}S_L(k) \tag{2.32}$$

για κατάλληλους πίνακες -συναρτήσεις $s(k)$, $S(k)$ και $S_L(k)$, που απομένει να προσδιοριστούν.

Ορισμός 2.14. Οι 2×2-πίνακες $s(k)$, $S(k)$ και $S_L(k)$, που είναι συναρτήσεις της φασματικής παραμέτρου k, θα αναφέρονται στο εξής σαν *φασματικοί πίνακες (spectral matrices).*

Οι εξισώσεις (2.30), (2.31) και (2.32) θα αποτελέσουν τη βάση πάνω στην οποία θα στηριχτεί η διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert. Πράγματι, όπως θα δείξουμε, η συνθήκη που περιγράφει τα άλματα στο k-επίπεδο θα αποτελέσει έναν κατάλληλο μετασχηματισμό των εξισώσεων αυτών.

Ένας ευθύς υπολογισμός δείχνει ότι οι πίνακες αυτοί θα πρέπει να οριστούν ως ακολούθως:

$$s(k) := \Psi_3(0,0,k), \tag{2.33}$$

$$S(k) := \Psi_1(0,0,k) \tag{2.34}$$

και

$$S_L(k) := \Psi_4(L,0,k). \tag{2.35}$$

Τότε, οι σχέσεις (2.30), (2.31) και (2.32) παίρνουν τη μορφή:

$$\Psi_3(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k)e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}\Psi_3(0,0,k), \tag{2.36}$$

$$\Psi_1(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k)e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}\Psi_1(0,0,k) \tag{2.37}$$

και

$$\Psi_4(x,t,k) = \Psi_3(x,t,k)e^{i[kL-\theta(x,t,k)]\hat{\sigma}_3}\Psi_4(L,0,k). \tag{2.38}$$

Κάποια χρήσιμα συμπαράγωγα του φορμαλισμού αυτού είναι τα ακόλουθα.

$$S(k) = \{e^{4ik^3T\hat{\sigma}_3}\Psi_2(0,T,k)\}^{-1}. \tag{2.39}$$

$$S_L(k) = \{e^{4ik^3T\hat{\sigma}_3}\Psi_3(L,T,k)\}^{-1}. \tag{2.40}$$

$$\Psi_4(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k)e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}\left[s(k)e^{ikL\hat{\sigma}_3}S_L(k)\right]. \tag{2.41}$$

Αυτές είναι άμεσο επακόλουθο των ολοκληρωτικών εξισώσεων (2.17) έως και (2.22), όταν οι τελευταίες *περιορίζονται* με τον κατάλληλο, κάθε φορά, τρόπο.

Από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.17) έως και (2.22), ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτή που οδήγησε στις εκφράσεις (2.24) έως και (2.29), δηλ. περιοριζόμενοι σε υποσύνολα του (x,t)-επιπέδου όπως είναι οι ευθείες $x=$ σταθερό και $t=$ σταθερό, μπορούμε να εξάγουμε τις επόμενες χρήσιμες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για τους φασματικούς πίνακες:

$$s(k) = I - \int_0^L e^{ikx\hat{\sigma}_3} Q(x,0,k)\Psi_3(x,0,k)dx, \tag{2.42}$$

$$S(k) = I - \int_0^T e^{4ik^3t\hat{\sigma}_3} \widetilde{Q}(0,t,k)\Psi_1(0,t,k)dt \tag{2.43}$$

και

$$S_L^{-1}(k) = I + \int_0^T e^{4ik^3t\hat{\sigma}_3} \widetilde{Q}(L,t,k)\Psi_3(L,t,k)dt. \tag{2.44}$$

Στα εδάφια που ακολουθούν περιγράφουμε ορισμένες επιπλέον χρήσιμες ιδιότητες των ιδιοσυναρτήσεων. Αυτές έχουν να κάνουν με:

(i). Τη συμπεριφορά των ιδιοσυναρτήσεων για μεγάλες τιμές της φασματικής παραμέτρου, όταν δηλαδή $k \to \infty$.

(ii). Τη συμπεριφορά των ιδιοσυναρτήσεων για μικρές τιμές της φασματικής παραμέτρου, όταν δηλαδή $k \to 0$.

(iii). Ιδιότητες μοναδιαίας ορίζουσας, και

(iv). Συμμετρίες των ιδιοσυναρτήσεων στο μιγαδικό επίπεδο της φασματικής παραμέτρου, και ειδικότερα αναφορικά με καθέναν από τους μετασχηματισμούς $k \mapsto \bar{k}$ και $k \mapsto -k$.

Συμπεριφορά των ιδιοσυναρτήσεων στο άπειρο.

Στο εδάφιο αυτό μελετάμε τη συμπεριφορά των ιδιοσυναρτήσεων για μεγάλες τιμές της φασματικής παραμέτρου, όταν δηλαδή $k \to \infty$.

Εκτελώντας, για κάθε μία από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (2.17)-(2.22) ξεχωριστά, ολοκλήρωση κατά παράγοντες στην περιοχή όπου η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση είναι φραγμένη και αναλυτική, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι αντίστοιχες στήλες ικανοποιούν:

$$[\Psi_j]_1 = [1,0]^T + O(1/k), \quad [\Psi_j]_2 = [0,1]^T + O(1/k), \quad k \to \infty. \tag{2.45}$$

για κάθε $j = 1, ..., 4$.

Μοναδιαίες ορίζουσες.

Οι πίνακες Q και $\widetilde{Q}$ που υπεισέρχονται στον ορισμό του ζεύγους Lax είναι *μηδενικού ίχνους (traceless)*. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την ιδιότητα συμπεριφοράς στο άπειρο που μόλις περιγράψαμε, συνεπάγεται ότι κάθε λύση του ζεύγους Lax έχει μοναδιαία ορίζουσα. Πιο συγκεκριμένα,

$$\det \Psi_j(x,t,k) = 1 \tag{2.46}$$

για όλους τους $j = 1, ..., 4$.

Μια άμεση συνέπεια είναι το γεγονός ότι οι φασματικοί πίνακες έχουν κι αυτοί μοναδιαία ορίζουσα:

$$\det s(k) = 1, \quad \det S(k) = 1, \quad \det S_L(k) = 1. \tag{2.47}$$

Συμμετρίες στο επίπεδο της φασματικής παραμέτρου.

Οι συμμετρίες των πινάκων Q και $\widetilde{Q}$ συνεπάγονται τις ακόλουθες ιδιότητες συμμετρίας των ιδιοσυναρτήσεων:

$$[\Psi(x,t,k)]_{11} = [\overline{\Psi(x,t,\overline{k})}]_{22}, \quad [\Psi(x,t,k)]_{12} = [\overline{\Psi(x,t,\overline{k})}]_{21}. \tag{2.48}$$

Οι δύο αυτές ιδιότητες μπορούν να γραφούν συνοπτικά μέσω μόνο μιας εξίσωσης:

$$\overline{\Psi(x,t,\overline{k})} = \sigma_1 \Psi(x,t,k)\sigma_1. \tag{2.49}$$

Οι ιδιότητες συμμετρίας των πινάκων Q και $\widetilde{Q}$ συνεπάγονται επίσης τις ακόλουθες ιδιότητες συμμετρίας των ιδιοσυναρτήσεων:

$$[\Psi(x,t,k)]_{11} = [\Psi(x,t,-k)]_{22}, \quad [\Psi(x,t,k)]_{12} = [\Psi(x,t,-k)]_{21}. \tag{2.50}$$

Οι δύο αυτές ιδιότητες μπορούν επίσης να γραφούν συνοπτικά με μια εξίσωση:

$$\Psi(x,t,-k) = \sigma_1 \Psi(x,t,k)\sigma_1. \tag{2.51}$$

Ορισμός συμβολισμού 2.15. Από το σημείο αυτό και στο εξής, για μια ολόμορφη συνάρτηση $f(k)$ θα συμβολίζουμε πάντα με $\overline{f}(k)$ τη λεγόμενη *ανάκλαση Schwarz (Schwarz reflection)* της $f(k)$, δηλαδή $\overline{f}(k) := \overline{f(\overline{k})}$.

Οι συμμετρίες (2.49) μπορούν να *κληρονομηθούν* στους φασματικούς πίνακες. Για τον πίνακα $s(k)$ έχουμε:

$$s(k)_{11} = \overline{s}(k)_{22}, \quad s(k)_{12} = \overline{s}(k)_{21}$$

και ακριβώς το ίδιο συμβαίνει για καθέναν από τους πίνακες $S(k)$ και $S_L(k)$. Συνακόλουθα, οι τρείς αυτοί πίνακες έχουν την ακόλουθη δομή:

$$s(k) = \begin{bmatrix} \overline{a(\overline{k})} & b(k) \\ \overline{b(\overline{k})} & a(k) \end{bmatrix}, \quad S(k) = \begin{bmatrix} \overline{A(\overline{k})} & B(k) \\ \overline{B(\overline{k})} & A(k) \end{bmatrix}, \quad S_L(k) = \begin{bmatrix} \overline{A_L(\overline{k})} & B_L(k) \\ \overline{B_L(\overline{k})} & A_L(k) \end{bmatrix}. \tag{2.52}$$

Ορισμός 2.16. Οι συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $A_L(k)$ και $B_L(k)$ θα αναφέρονται στο εξής σαν *φασματικές συναρτήσεις (spectral functions).*

Συμπεριφορά κοντά στο μηδέν.

Ας υποθέσουμε ότι $\Psi_\star(x,t,k)$ είναι οποιαδήποτε από τις ιδιοσυναρτήσεις Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4, κι ας αναφερθούμε στην ολοκληρωτική εξίσωση (7.17) που η $\Psi_\star(x,t,k)$ ικανοποιεί. Εισάγουμε το μετασχηματισμό

$$\Psi_\star(x,t,k) = \begin{bmatrix} 1 & i/k \\ 1 & -i/k \end{bmatrix} \widetilde{\Psi}_\star(x,t,k) \tag{2.53}$$

του οποίου ο αντίστροφος δίνεται από τη σχέση

$$\widetilde{\Psi}_\star(x,t,k) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik & ik \end{bmatrix} \Psi_\star(x,t,k). \tag{2.54}$$

Τότε η ιδιοσυνάρτηση $\widetilde{\Psi}_\star$ ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\widetilde{\Psi}_\star = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik & ik \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\int_{(x_\star,t_\star)}^{(x,t)} \epsilon(x,t,k)\epsilon^{-1}(x',t',k)$$
$$\left\{ Q_A(x',t',k)\widetilde{\Psi}_\star(x',t',k)dx' + \widetilde{Q}_A(x',t',k)\widetilde{\Psi}_\star(x',t',k)dt' \right\} \tag{2.55}$$

όπου η συνάρτηση-πίνακας $Q_A(x,t,k)$ ορίζεται από τη σχέση

$$Q_A(x,t,k) := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2q & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{Q}_A(x,t,k) := \begin{bmatrix} q_x & -2q \\ q_{xx} + 2q^2 - 2k^2 q & -q_x \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

και η συνάρτηση-πίνακας $\epsilon(x,t,k)$ δίνεται από την έκφραση

$$\epsilon(x,t,k) := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ik & ik \end{bmatrix} e^{-(ikx+4ik^3t)\sigma_3}. \tag{2.57}$$

Είναι σαφές ότι οι ποσότητες Q_A, $\widetilde{Q}_A$ και $\epsilon(x,t,k)\epsilon^{-1}(x',t',k)$, *δεν* παρουσιάζουν ιδιομορφία όταν $k \to 0$, γεγονός που συνεπάγεται ότι η ιδιοσυνάρτηση $\widetilde{\Psi}_\star(x,t,k)$ *ιείναι ομαλή* στο σημείο $k = 0$.

Το γεγονός αυτό, ο ορισμός (2.53) της $\widetilde{\Psi}_\star$ και οι ιδιότητες συμμετρίας (2.51) συνεπάγονται την ακόλουθη συμπεριφορά:

$$\Psi_\star(x,t,k) = \frac{i\mu_\star(x,t)}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + O(1), \quad k \to 0. \tag{2.58}$$

Επιπλέον, οι ιδιότητες συμμετρίας (2.49) συνεπάγονται ότι η συνάρτηση $\sigma_\star(x,t)$ θα πρέπει να είναι πραγματική.

Πιο συγκεκριμένα,

$$\Psi_j(x,t,k) = \frac{i\mu_j(x,t)}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + O(1), \quad k \to 0, \quad j = 1,2,3,4 \tag{2.59}$$

για κατάλληλες πραγματικές συναρτήσεις $\mu_j(x,t)$, $j = 1,2,3,4$.

2.2.3 Ιδιότητες των φασματικών συναρτήσεων.

Οι ιδιότητες των ιδιοσυναρτήσεων που μόλις περιγράψαμε, σε συνδυασμό με τους ορισμούς των φασματικών πινάκων $s(k)$, $S(k)$ και $S_L(k)$ οδηγούν στις ακόλουθες ιδιότητες για τις φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $A_L(k)$ και $B_L(k)$.

Διαφορικές εξισώσεις.

Καταρχήν, καθένα από τα ζεύγη φασματικών συναρτήσεων $(a(k), b(k))$, $(A(k), B(k))$ και $(A_L(k), B_L(k))$ μπορεί να εκφραστεί μέσω *της λύσης ενός κατάλληλου προβλήματος αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για μια γραμμική διαφορική εξίσωση*. Μάλιστα, επιπλέον:

(i). Το ΠΑΤ μέσω του οποίου ορίζεται το ζεύγος $(a(k), b(k))$ βασίζεται σε γνώση των τιμών $q(x, 0)$.

(ii). Το ΠΑΤ μέσω του οποίου ορίζεται το ζεύγος $(A(k), B(k))$ βασίζεται σε γνώση των τιμών $(q(0,t), q_x(0,t), q_{xx}(0,t))$.

(iii). Το ΠΑΤ μέσω του οποίου ορίζεται το ζεύγος $(A_L(k), B_L(k))$ βασίζεται σε γνώση των τιμών $(q(L,t), q_x(L,t), q_{xx}(L,t))$.

Πιο συγκεκριμένα, έστω $k \in \mathbb{C}^\star$. Τότε:

(i) Οι φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$ ικανοποιούν τη συνθήκη

$$[b(k), a(k)]^T = [\Psi_3]_2^{(123)}(0,0,k) \equiv \psi_3(0,k), \tag{2.60}$$

όπου η διανυσματική συνάρτηση $\psi_3(x,k)$ είναι λύση του *προβλήματος αρχικών τιμών*

$$\partial_x \psi_3 + ik(I+\sigma_3)\psi_3 = Q(x,0,k)\psi_3, \quad \psi_3(L,k) = [0,1]^T, \tag{2.61}$$

και όπου $[x,y]^T$ συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα του διανύσματος -γραμμή $[x,y]$.

(ii) Οι φασματικές συναρτήσεις $A(k)$, $B(k)$ ικανοποιούν, στην περίπτωση $T < \infty$, τη συνθήκη

$$[-e^{-8ik^3T}B(k), \overline{A}(k)]^T = [\Psi_1]_2^{(135)}(0,T,k) \equiv \psi_1(T,k), \tag{2.62}$$

όπου η διανυσματική συνάρτηση $\psi_1(t,k)$ είναι λύση του *προβλήματος αρχικών τιμών*

$$\partial_t \psi_1 + 4ik^3(I+\sigma_3)\psi_1 = \widetilde{Q}(0,t,k)\psi_1, \quad \psi_1(0,k) = [0,1]^T. \tag{2.63}$$

(iii) Οι φασματικές συναρτήσεις $A_L(k)$, $B_L(k)$ ικανοποιούν, στην περίπτωση $T < \infty$, τη συνθήκη

$$[-e^{-8ik^3T}B_L(k), \overline{A}_L(k)]^T = [\Psi_3]_2^{(246)}(L,T,k) \equiv \widetilde{\psi}_3(T,k), \tag{2.64}$$

όπου η διανυσματική συνάρτηση $\widetilde{\psi}_3(t,k)$ είναι λύση του *προβλήματος αρχικών τιμών*

$$\partial_t \widetilde{\psi}_3 + 4ik^3(I+\sigma_3)\widetilde{\psi}_3 = \widetilde{Q}(L,t,k)\widetilde{\psi}_3, \quad \widetilde{\psi}_3(0,k) = [0,1]^T. \tag{2.65}$$

(iv) Στην περίπτωση $T = \infty$ οι φασματικές συναρτήσεις $A(k)$, $B(k)$ ικανοποιούν, για $k \in D_{135}$, τη συνθήκη

$$[B(k), A(k)]^T = [\Psi_1]_2^{(135)}(0,0,k) \equiv \psi_1(0,k), \tag{2.66}$$

όπου η διανυσματική συνάρτηση $\psi_1(t,k) := [\Psi_1]_2^{(135)}(0,t,k)$ είναι λύση του *προβλήματος αρχικών τιμών*

$$\partial_t \psi_1 + 4ik^3(I+\sigma_3)\psi_1 = \widetilde{Q}(0,t,k)\psi_1, \quad \lim_{t\to\infty} \psi_1(t,k) = [0,1]^T. \tag{2.67}$$

(v) Στην περίπτωση $T=\infty$ οι φασματικές συναρτήσεις $A_L(k)$, $B_L(k)$ ικανοποιούν, για $k\in D_{135}$, τη συνθήκη

$$[B_L(k), A_L(k)]^T = [\Psi_4]_2^{(135)}(L,0,k) \equiv \psi_4(0,k), \tag{2.68}$$

όπου η διανυσματική συνάρτηση $\psi_4(t,k) := [\Psi_4]_2^{(135)}(L,t,k)$ είναι λύση του *προβλήματος αρχικών τιμών*

$$\partial_t\psi_4 + 4ik^3(I+\sigma_3)\psi_4 = \widetilde{Q}(L,t,k)\psi_4, \quad \lim_{t\to\infty}\psi_4(t,k) = [0,1]^T. \tag{2.69}$$

• Οι ακόλουθες ιδιότητες των φασματικών συναρτήσεων είναι άμεσες συνέπειες των αντίστοιχων ιδιοτήτων των φασματικών πινάκων, όπως περιγράφθηκαν παραπάνω.

Φραγή και αναλυτικότητα.

Από τις ολοκληρωτικές σχέσεις που ικανοποιούνται από τους φασματικούς πίνακες $s(k)$, $S(k)$ και $S_L(k)$ προκύπτει ότι:

(i). Οι $a(k)$ και $b(k)$ είναι συναρτήσεις ολόμορφες στο διάτρητο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}^\star$ και παραμένουν φραγμένες για $k\in\mathbb{C}^+$.

(ii). Οι $A(k)$ και $B(k)$ είναι συναρτήσεις ολόμορφες στο $\mathbb{C}^\star$ και παραμένουν φραγμένες για $k\in D_{135}$.

(iii). Οι $A_L(k)$ και $B_L(k)$ είναι συναρτήσεις ολόμορφες στο $\mathbb{C}^\star$ και παραμένουν φραγμένες για $k\in D_{135}$.

Μοναδιαίες ορίζουσες.

Το γεγονός ότι οι φασματικοί πίνακες έχουν μοναδιαία ορίζουσα συνεπάγεται ότι:

$$a\bar{a} - b\bar{b} = 1, \quad A\bar{A} - B\bar{B} = 1, \quad A_L\bar{A}_L - B_L\bar{B}_L = 1, \quad k\in\mathbb{C}^\star. \tag{2.70}$$

Παρατήρηση 2.17. Για $k\in\mathbb{R}^\star$ οι τελευταίες τρείς ιδιότητες παίρνουν την ακόλουθη μορφή.

$$|a|^2 - |b|^2 = 1, \quad |A|^2 - |B|^2 = 1, \quad |A_L|^2 - |B_L|^2 = 1. \tag{2.71}$$

Συμπεριφορά στο άπειρο.

Η ιδιότητα συμπεριφοράς στο άπειρο των φασματικών πινάκων συνεπάγεται ότι:

$$a(k) = 1 + O\big(\frac{1}{k}\big), \quad b(k) = O\big(\frac{1}{k}\big), \quad k\to\infty, \quad k\in\mathbb{C}^+, \tag{2.72}$$

$$A(k) = 1 + O\big(\frac{1}{k}\big), \quad B(k) = O\big(\frac{1}{k}\big), \quad k\to\infty, \quad k\in D_{135}. \tag{2.73}$$

$$A_L(k) = 1 + O\big(\frac{1}{k}\big), \quad B_L(k) = O\big(\frac{1}{k}\big), \quad k\to\infty, \quad k\in D_{135}. \tag{2.74}$$

Συμπεριφορά στο μηδέν.

Οι ορισμοί των φασματικών συναρτήσεων, οι σχέσεις (2.52) και η συμπεριφορά (2.59) συνεπάγεται τις ακόλουθες συμπεριφορές των φασματικών συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} a(k) &= -i\frac{\mu_a}{k} + O(1), \quad b(k) = i\frac{\mu_a}{k} + O(1) \\ A(k) &= -i\frac{\mu_A}{k} + O(1), \quad B(k) = i\frac{\mu_A}{k} + O(1) \\ A_L(k) &= -i\frac{\mu_A^L}{k} + O(1), \quad B_L(k) = i\frac{\mu_A^L}{k} + O(1) \end{aligned} \tag{2.75}$$

καθώς $k \to 0$, για κατάλληλες πραγματικές σταθερές μ_a, μ_A και μ_A^L.

2.3 Διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert.

Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τις *ακτίνες* (ημιευθείες) από τις οποίες αποτελούνται τα σύνορα των περιοχών D_j:

$$L_n := \{k \in \mathbb{C} : \arg k = \frac{n\pi}{3}\}, \quad n = 0, 1, ..., 5$$

και ορίζουμε από μία κατεύθυνση σε καθεμιά από τις ακτίνες, σύμφωνα με τον εξης κανόνα:

(i). Επί των L_0, L_2 και L_4, κατεύθυνση απομάκρυνσης από την αρχή των συντεταγμένων $k = 0$.

(ii). Επί των L_1, L_3 και L_5, κατεύθυνση προσέγγισης της αρχής των συντεταγμένων $k = 0$.

Επίσης, δίνουμε από ένα πρόσημο σε καθεμιά εκ των περιοχών D_1 έως και D_6 σύμφωνα με τον ακόλουθο κανόνα: Υποθέτουμε ότι κίνηση επί του $L := L_0 \cup L_1 \cup \cdots \cup L_5$ κατά μήκος μιας κατεύθυνσης αφήνει την $+$-πλευρά από την αριστερή μεριά.

Οι D_1, D_3 και D_5 έχουν πρόσημο $+$, ενώ
οι D_2, D_4 και D_6 έχουν πρόσημο $-$.
Ορίζουμε

$$\begin{aligned} &\alpha(k) := a(k)A_L(k) + e^{2ikL}\bar{b}(k)B_L(k), \;\; \beta(k) := b(k)A_L(k) + e^{2ikL}\bar{a}(k)B_L(k), \\ &d(k) := a(k)\overline{A}(k) - b(k)\overline{B}(k), \quad \delta(k) := \alpha(k)\overline{A}(k) - \beta(k)\overline{B}(k), \\ &\Delta(k) := \alpha(k)b(k) - a(k)\beta(k) = -e^{2ikL}B_L(k), \quad \Gamma(k) := \frac{\overline{B}(k)}{\alpha(k)d(k)}, \\ &r(k) := \frac{\overline{\beta}(k)}{\alpha(k)}, \quad R(k) := \frac{a(k)}{\alpha(k)}, \quad D(k) := \frac{\delta(k)}{d(k)}, \\ &c_j^{(1)} := \frac{a(\nu_j)}{e^{2i\nu_j L}B_L(\nu_j)\alpha'(\nu_j)}, \quad j = 1, \cdots, N_1, \\ &c_j^{(2)} := \frac{\overline{B}(\lambda_j)}{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)}, \quad j = 1, \cdots, N_2. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Ορίζουμε τον 2×2-πίνακα-συνάρτηση $M(x,t,k)$ μέσω των ιδιοσυναρτήσεων $\Psi_j(x,t,k)$, $j = 1,2,3,4$ από την έκφραση:

$$M(x,t,k) := \begin{cases} M_+^{(13)} := \left(\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha(k)}, [\Psi_4]_2^{(13)}\right), & k \in \bar{D}_{13}, \\ M_-^{(2)} := \left(\frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d(k)}, [\Psi_3]_2^{(2)}\right), & k \in \bar{D}_2, \\ M_-^{(46)} := \left([\Psi_4]_1^{(46)}, \frac{[\Psi_2]_2^{(46)}}{\bar{\alpha}(k)}\right), & k \in \bar{D}_{46} \\ M_+^{(5)} := \left([\Psi_3]_1^{(5)}, \frac{[\Psi_1]_2^{(5)}}{\bar{d}(k)}\right), & k \in \bar{D}_5 \end{cases} \tag{2.77}$$

•

Πρόταση 2.18. *(Διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert).*

Υποθέσεις:

• *Η φασματική συνάρτηση $\alpha(k)$ έχει το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος ριζών, $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1} \subseteq D_{13}$, όλες εκ των οποίων είναι απλές.*

• *Η φασματική συνάρτηση $d(k)$, έχει το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος ριζών, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2} \subseteq D_2$, όλες εκ των οποίων είναι απλές.*

• *Καμμία από τις ρίζες της φασματικής συνάρτησης $d(k)$ στην περιοχή D_2 δε συμπίπτει με κάποια από τις ρίζες της $a(k)$.*

• *Καμμία από τις ρίζες της φασματικής συνάρτησης $\alpha(k)$ στην περιοχή D_{13} δε συμπίπτει με κάποια από τις ρίζες της $B_L(k)$.*

Συμπέρασμα:

Η συνάρτηση $M(x,t,k)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

• *Ιδιότητα 1. Η $M(x,t,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση στην περιοχή $\mathbb{C} \setminus L$, όπου $L := L_0 \cup L_1 \cup \cdots \cup L_5$.*

• *Ιδιότητα 2. Η $M(x,t,k)$ υφίσταται ένα άλμα για $k \in L$, που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:*

$$M_-(x,t,k) = M_+(x,t,k)e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}J_0(k), \quad k \in L \tag{2.78}$$

όπου ο αλματικός πίνακας $J_0(k)$ δίνεται από την έκφραση:

$$J_0(k) = \begin{cases} J_{03}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\overline{r}(k) \\ r(k) & 1-|r(k)|^2 \end{bmatrix}, & k \in L_0 \cup L_3 \equiv \mathbb{R} \\ J_{12}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} D(k) & \Delta(k) \\ \Gamma(k) & R(k) \end{bmatrix}, & k \in L_1 \cup L_2 \\ J_{45}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} \overline{D}(k) & -\overline{\Gamma}(k) \\ -\overline{\Delta}(k) & \overline{R}(k) \end{bmatrix}, & k \in L_4 \cup L_5. \end{cases} \tag{2.79}$$

• *Ιδιότητα 3. Οι πόλοι της συνάρτησης $M(x,t,k)$ είναι απλοί και πεπερασμένοι στο πλήθος.*

Ειδικότερα, οι πόλοι της πρώτης στήλης $[M]_1$ είναι $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1} \cup \{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2}$, όλοι περιεχόμενοι στο $\mathbb{C}^+$, ενώ οι πόλοι της δεύτερης στήλης $[M]_2$ είναι $\{\overline{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1} \cup \{\overline{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2}$, όλοι περιεχόμενοι στο $\mathbb{C}^-$.

Οι επόμενες σχέσεις ισχύουν για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα (residue relations):

$$Res\,\{[M]_1(x,t,k), k=\nu_j\} = c_j^{(1)} e^{2i\theta(x,t,\nu_j)}[M]_2(x,t,\nu_j), \quad j=1,...,N_1, \tag{2.80}$$

$$Res\,\{[M]_1(x,t,k), k=\lambda_j\} = c_j^{(2)} e^{2i\theta(x,t,\lambda_j)}[M]_2(x,t,\lambda_j), \quad j=1,...,N_2, \tag{2.81}$$

$$Res\,\{[M]_2(x,t,k), k=\overline{\nu}_j\} = \overline{c_j^{(1)}} e^{-2i\theta(x,t,\overline{\nu}_j)}[M]_1(x,t,\overline{\nu}_j), \quad j=1,...,N_1, \tag{2.82}$$

$$Res\,\left\{[M]_2(x,t,k), k=\overline{\lambda}_j\right\} = \overline{c_j^{(2)}} e^{-2i\theta(x,t,\overline{\lambda}_j)}[M]_1(x,t,\overline{\lambda}_j), \quad j=1,...,N_2. \tag{2.83}$$

• *Ιδιότητα 4. Η $M(x,t,k)$ παρουσιάζει ιδιομορφία στο σημείο $k=0$, χαρακτηριζόμενη από την ακόλουθη συμπεριφορά: Καθώς $k \to 0$, με $k \in D_{13}$, $k \in D_2$, $k \in D_{46}$, $k \in D_5$,*

$$M(x,t,k) \sim \frac{i\mu_1}{k}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \frac{i\mu_2}{k}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \frac{i\mu_1}{k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \frac{i\mu_2}{k}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.84}$$

αντίστοιχα, για δύο κατάλληλες πραγματικές συναρτήσεις $\mu_j(x,t)$, $j=1,2$.

• *Ιδιότητα 5.*

$$\det M(x,t,k) = 1. \tag{2.85}$$

• *Ιδιότητα 6.*

$$\lim_{k\to\infty} (kM)_{12} = 0. \tag{2.86}$$

• *Ιδιότητα 7.*

$$M = I + O\Big(\frac{1}{k}\Big), \quad k \to \infty, \quad k \in \mathbb{C} \setminus L. \tag{2.87}$$

Απόδειξη της Πρότασης 2.18.

• *Απόδειξη της Ιδιότητας 1.*

Αυτή είναι άμεση συνέπεια της (2.23) και του ορισμού της $M(x,t,k)$, (2.77).

Πιο συγκεκριμένα, οι πόλοι της $M(x,t,k)$ είναι:

• οι ρίζες της $\alpha(k)$ στην περιοχή D_{13}.

• οι ρίζες της $d(k)$ στην περιοχή D_2.

• οι ρίζες της $\overline{\alpha(\overline{k})}$ στην περιοχή D_{46}.

• οι ρίζες της $\overline{d(\overline{k})}$ στην περιοχή D_5.

• *Απόδειξη της Ιδιότητας 2.*

Η ανάλυσή μας τώρα θα βασιστεί στις σχέσεις (2.30), (2.31) και (2.41).

Ας ανακαλέσουμε ότι οι φασματικοί πίνακες $s(k)$ και $S(k)$, που εμφανίζονται στις πρώτες δύο από τις εξισώσεις αυτές , έχουν τη μορφή που δίνεται από τις σχέσεις (2.52). Επιπλέον, εν όψει των (2.52), μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι ο φασματικός πίνακας $s(k)e^{ikL\hat{\sigma}_3}S_L(k)$, που εμφανίζεται στην (2.41), έχει μια παρόμοια μορφή. Εν προκειμένω,

$$s(k)e^{ikL\hat{\sigma}_3}S_L(k) = \begin{bmatrix} \overline{\alpha(\bar{k})} & \beta(k) \\ \overline{\beta(\bar{k})} & \alpha(k) \end{bmatrix}, \tag{2.88}$$

όπου το *νέο* ζεύγος φασματικών συναρτήσεων $(\alpha(k), \beta(k))$ ορίζεται μέσω των ¨παλαιών' φασματικών συναρτήσεων μέσω των εκφράσεων που δίνονται στην (2.76).

Για λόγους απλότητας εισάγουμε το συμβολισμό

$$\mathbf{e} := e^{2i\theta} \equiv e^{2ikx+8ik^3t}. \tag{2.89}$$

Ας σημειωθεί ότι

$$e^{-i\theta\hat{\sigma}_3}s(k) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{\mathbf{e}}b \\ \mathbf{e}\bar{b} & a \end{bmatrix}, \tag{2.90}$$

$$e^{-i\theta\hat{\sigma}_3}S(k) = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{\mathbf{e}}B \\ \mathbf{e}\bar{B} & A \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

και

$$e^{-i\theta\hat{\sigma}_3}\{s(k)e^{ikL\hat{\sigma}_3}S_L(k)\} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\mathbf{e}}\beta \\ \mathbf{e}\bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix}. \tag{2.92}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.23) και (2.90)-(2.92), φέρνουμε τις εκφράσεις (2.30), (2.31) και (2.41) στην ακόλουθη μορφή:

$$([\Psi_3]_1^{(5)}, [\Psi_3]_2^{(2)}) = ([\Psi_2]_1^{(13)}, [\Psi_2]_2^{(46)}) \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{\mathbf{e}}b \\ \mathbf{e}\bar{b} & a \end{bmatrix}, \tag{2.93}$$

$$([\Psi_1]_1^{(2)}, [\Psi_1]_2^{(5)}) = ([\Psi_2]_1^{(13)}, [\Psi_2]_2^{(46)}) \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{\mathbf{e}}B \\ \mathbf{e}\bar{B} & A \end{bmatrix}, \tag{2.94}$$

$$([\Psi_4]_1^{(46)}, [\Psi_4]_2^{(23)}) = ([\Psi_2]_1^{(13)}, [\Psi_2]_2^{(46)}) \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\mathbf{e}}\beta \\ \mathbf{e}\bar{\beta} & \alpha \end{bmatrix}. \tag{2.95}$$

Προκειμένου, τώρα, να εξαγάγουμε την επιθυμητή αλματική συνθήκη από τις εξισώσεις (2.93)-(2.95), επαναδιευθετούμε τις τελευταίες με κατάλληλο τρόπο. Κατ΄ αρχήν οι τελευταίες εξισώσεις μπορούν να γραφούν κατά στήλες ως ακολούθως.

$$[\Psi_3]_1^{(5)} = \overline{a}[\Psi_2]_1^{(13)} + \mathbf{e}\overline{b}[\Psi_2]_2^{(46)} \tag{2.96}$$

$$[\Psi_3]_2^{(2)} = \overline{\mathbf{e}}b[\Psi_2]_1^{(13)} + a[\Psi_2]_2^{(46)} \tag{2.97}$$

$$[\Psi_1]_1^{(2)} = \overline{A}[\Psi_2]_1^{(13)} + \mathbf{e}\overline{B}[\Psi_2]_2^{(46)} \tag{2.98}$$

$$[\Psi_1]_2^{(5)} = \overline{\mathbf{e}}B[\Psi_2]_1^{(13)} + A[\Psi_2]_2^{(46)} \tag{2.99}$$

$$[\Psi_4]_1^{(46)} = \overline{\alpha}[\Psi_2]_1^{(13)} + \mathbf{e}\overline{\beta}[\Psi_2]_2^{(46)} \tag{2.100}$$

$$[\Psi_4]_2^{(13)} = \overline{\mathbf{e}}\beta[\Psi_2]_1^{(13)} + \alpha[\Psi_2]_2^{(46)}. \tag{2.101}$$

Τώρα θα διατυπώσουμε μια αλματική συνθήκη της μορφής (2.78).

Η επαναδιευθέτηση θα λάβει χώρα ξεχωριστά για κάθε μία από τις καμπύλες: $L_{03} := L_0 \cup L_3 \equiv \mathbb{R}$, $L_{12} := L_1 \cup L_2$, $L_{45} := L_4 \cup L_5$.

• **Αλματική συνθήκη επί της L_{03}.** Κατά μήκος της καμπύλης L_{03}, η προς διατύπωση αλματική συνθήκη (2.78) έχει τη μορφή:

$$M_-^{(46)} = M_+^{(13)} J_{03}. \tag{2.102}$$

Εν όψει του ορισμού (2.77), χρειάζεται να εκφράσουμε τις ποσότητες $[\Psi_4]_1^{(46)}$ καθώς και $\frac{[\Psi_2]_2^{(46)}}{\overline{\alpha}}$ σαν γραμμικούς συνδυασμούς των ποσοτήτων $\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}$ και $[\Psi_4]_2^{(13)}$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.100) και (2.101). Οι τελευταίες δίνουν

$$\frac{[\Psi_2]_2^{(46)}}{\overline{\alpha}} = \Big(\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}, [\Psi_4]_2^{(13)}\Big) \begin{bmatrix} -\frac{\overline{\mathbf{e}}\beta}{\overline{\alpha}} \\ \frac{1}{\alpha\overline{\alpha}} \end{bmatrix}. \tag{2.103}$$

και

$$[\Psi_4]_1^{(46)} = \Big(\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}, [\Psi_4]_2^{(13)}\Big) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\mathbf{e}\overline{\beta}}{\alpha} \end{bmatrix} \tag{2.104}$$

όπου έχουμε κάνει χρήση της ταυτότητας

$$\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1 \tag{2.105}$$

η απόδειξη της οποίας προκύπτει με απευθείας χρήση των αντίστοιχων ιδιοτήτων των φασματικών συναρτήσεων a, b, A_L και B_L.

Οι προκύψασες δύο εξισώσεις μπορούν να γραφούν μαζί σαν

$$\Big[[\Psi_4]_1^{(46)}, \frac{[\Psi_2]_2^{(46)}}{\overline{\alpha}}\Big] = \Big[\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}, [\Psi_4]_2^{(13)}\Big] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\overline{\mathbf{e}}\beta}{\overline{\alpha}} \\ \frac{\mathbf{e}\overline{\beta}}{\alpha} & \frac{1}{\alpha\overline{\alpha}} \end{bmatrix}. \tag{2.106}$$

Κατά συνέπεια,

$$J_{03} := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\overline{\mathbf{e}}\beta}{\overline{\alpha}} \\ \frac{\mathbf{e}\overline{\beta}}{\alpha} & \frac{1}{\alpha\overline{\alpha}} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.107}$$

• **Αλματική συνθήκη επί της L_{12}.** Κατά μήκος της καμπύλης L_{12} η προς διατύπωση αλματική συνθήκη (2.78) έχει τη μορφή

$$M_{-}^{(2)} = M_{+}^{(13)} J_{12}. \tag{2.108}$$

Εισάγουμε τη νέα φασματική συνάρτηση $d(k)$, με έκφραση που δίνεται στην (2.76).

Εν όψει του ορισμού (2.77), χρειάζεται να εκφράσουμε τις ποσότητες $\frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d}$ και $[\Psi_3]_2^{(2)}$ σαν γραμμικούς συνδυασμούς των ποσοτήτων $\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}$ και $[\Psi_4]_2^{(13)}$.

Προς τούτο, επιλύουμε την (2.101) ως προς $[\Psi_2]_2^{(46)}$ κι αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα σε αμφότερες τις εξισώσεις (2.97) και (2.98). Οι προκύπτουσες δύο εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν ως προς $\frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d}$ και $[\Psi_3]_2^{(2)}$, μέσω των $\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}$ και $[\Psi_4]_2^{(13)}$. Τελικά,

$$[\Psi_3]_2^{(2)} = \left[\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}, [\Psi_4]_2^{(13)}\right] \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{e}}\Delta \\ \frac{a}{\alpha} \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

και

$$\frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d} = \left[\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}, [\Psi_4]_2^{(13)}\right] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{d} \\ \frac{\mathbf{e}B}{\alpha d} \end{bmatrix}. \tag{2.110}$$

Ας σημειωθεί ότι χρειάστηκε να εισαχθούν οι δύο νέες φασματικές συναρτήσεις $\delta(k)$ και $\Delta(k)$, με εκφράσεις που δίνονται στην (2.76).

Οι τελευταίες δύο εξισώσεις μπορούν να γραφούν σαν μία εξίσωση πινάκων:

$$\left[\frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d}, [\Psi_3]_2^{(2)}\right] = \left[\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha}, [\Psi_4]_2^{(13)}\right] \begin{bmatrix} \frac{\delta}{d} & \overline{\mathbf{e}}\Delta \\ \frac{\mathbf{e}B}{\alpha d} & \frac{a}{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{2.111}$$

Συνακόλουθα,

$$J_{12} := \begin{bmatrix} \frac{\delta}{d} & \overline{\mathbf{e}}\Delta \\ \frac{\mathbf{e}B}{\alpha d} & \frac{a}{\alpha} \end{bmatrix}, \quad k \in L_{12}. \tag{2.112}$$

• **Αλματική συνθήκη επί της L_{45}.** Κατά μήκος της καμπύλης L_{45} η προς διατύπωση αλματική συνθήκη (2.78) έχει τη μορφή

$$M_{-}^{(46)} = M_{+}^{(5)} J_{45}. \tag{2.113}$$

Εν όψει του ορισμού (2.77), χρειάζεται να εκφράσουμε τις ποσότητες $[\Psi_4]_1^{(46)}$ και $\frac{[\Psi_2]_2^{(46)}}{\overline{\alpha}}$ σαν γραμμικούς συνδυασμούς των ποσοτήτων $[\Psi_3]_1^{(5)}$ και $\frac{[\Psi_1]_2^{(5)}}{\overline{d}}$.

Χρησιμοποιούμε τη σχέση (2.100) προκειμένου να απαλείψουμε τον όρο $[\Psi_2]_1^{(13)}$ μεταξύ των σχέσεων (2.96) και (2.99). Χειρισμός των τελευταίων δύο εξισώσεων στη νέα τους μορφή μας παρέχει τα επιθυμητά αποτελέσματα,

$$[\Psi_4]_1^{(46)} = \left[[\Psi_3]_1^{(5)}, \frac{[\Psi_1]_2^{(5)}}{\overline{d}}\right] \begin{bmatrix} \frac{\overline{\alpha}\overline{\delta}}{\overline{a}\overline{\delta} - \overline{\Delta}B} \\ -\frac{\mathbf{e}\overline{\alpha}\overline{\Delta}d}{\overline{a}\overline{\delta} - \overline{\Delta}B} \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

και
$$\frac{[\Psi_2]_2^{(46)}}{\overline{\alpha}} = \left[[\Psi_3]_1^{(5)}, \frac{[\Psi_1]_2^{(5)}}{\overline{d}}\right]\begin{bmatrix} -\frac{\overline{\mathbf{e}}B}{\overline{a}\overline{\delta}-\overline{\Delta}B} \\ \frac{\overline{a}\overline{d}}{\overline{a}\overline{\delta}-\overline{\Delta}B}\end{bmatrix}. \tag{2.115}$$
Οι τελευταίες δύο εξισώσεις μπορούν να γραφούν μαζί σαν:
$$\left[[\Psi_4]_1^{(46)}, \frac{[\Psi_2]_2^{(46)}}{\overline{\alpha}}\right] = \left[[\Psi_3]_1^{(5)}, \frac{[\Psi_1]_2^{(5)}}{\overline{d}}\right]\left(\overline{a}\overline{\delta}-\overline{\Delta}B\right)^{-1}\begin{bmatrix} \overline{\alpha}\overline{\delta} & -\overline{\mathbf{e}B} \\ -\mathbf{e}\overline{\alpha}\overline{\Delta d} & \overline{a}\overline{d}\end{bmatrix}. \tag{2.116}$$
Κατά συνέπεια,
$$J_{45} := \left(\overline{a}\overline{\delta}-\overline{\Delta}B\right)^{-1}\begin{bmatrix} \overline{\alpha}\overline{\delta} & -\overline{\mathbf{e}B} \\ -\mathbf{e}\overline{\alpha}\overline{\Delta d} & \overline{a}\overline{d}\end{bmatrix}, \quad k \in L_{45}. \tag{2.117}$$
Η κατάσταση μπορεί να απλοποιηθεί πολύ εν όψει μιας νέας ταυτότητας,
$$\overline{a}\overline{\delta}-\overline{\Delta}B = \overline{\alpha}\overline{d} \tag{2.118}$$
η απόδειξη της οποίας αποτελεί άμεση εφαρμογή των ορισμών των φασματικών συναρτήσεων $d(k)$, $\delta(k)$ και $\Delta(k)$, βλ. (2.76).

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας αυτής, ο αλματικός πίνακας J_{45} φθάνει τελικά στη μορφή:
$$J_{45} = \begin{bmatrix} \frac{\overline{\delta}}{\overline{d}} & -\frac{\overline{\mathbf{e}}B}{\overline{\alpha}\overline{d}} \\ -\mathbf{e}\overline{\Delta} & \frac{\overline{a}}{\alpha}\end{bmatrix}. \tag{2.119}$$

Συμπερασματικά, η αλματική συνθήκη δίνεται από την έκφραση (2.78), όπου ο αλματικός πίνακας $J(x,t,k)$ δίνεται ως εξής:

(i). J_{03} για $k \in L_{03}$, έκφραση (2.107),

(ii). J_{12} για $k \in L_{12}$, έκφραση (2.112), και

(iii). J_{45} για $k \in L_{45}$, έκφραση (2.119).

Η αλματική συνθήκη μπορεί να έρθει σε μια πιο σαφή και σύντομη μορφή. Προς αυτή την κατεύθυνση, εισάγουμε τις φασματικές συναρτήσεις $\Gamma(k)$, $r(k)$, $R(k)$, $D(k)$ σύμφωνα με τις εκφράσεις που δίνονται στην (2.76). Ο αλματικός πίνακας παίρνει την έκφραση:
$$J(x,t,k) = \begin{cases} J_{03} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\overline{r}(k)e^{-2i\theta} \\ r(k)e^{2i\theta} & 1-|r(k)|^2\end{bmatrix}, & k \in L_0 \cup L_3 \equiv \mathbb{R} \\ J_{12} \equiv \begin{bmatrix} D(k) & \Delta(k)e^{-2i\theta} \\ \Gamma(k)e^{2i\theta} & R(k)\end{bmatrix}, & k \in L_1 \cup L_2 \\ J_{45} \equiv \begin{bmatrix} \overline{D}(k) & -\overline{\Gamma}(k)e^{-2i\theta} \\ -\overline{\Delta}(k)e^{2i\theta} & \overline{R}(k)\end{bmatrix}, & k \in L_4 \cup L_5. \end{cases} \tag{2.120}$$
Η έκφραση αυτή οδηγεί απευθείας στις (2.78)-(2.79).

• *Απόδειξη της Ιδιότητας 3.*

Προτιθέμεθα, τώρα, να μελετήσουμε τους πόλους της συνάρτησης $M(x,t,k)$ και να χαρακτηρίσουμε τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Προς αυτή την κατεύθυνση, σημειώνουμε αρχικά ότι, εν όψει του ορισμού (2.77), οι πόλοι της $M(x,t,k)$ είναι οι ρίζες των φασματικών συναρτήσεων $\alpha(k)$, $\overline{\alpha(\overline{k})}$ και $d(k)$, $\overline{d(\overline{k})}$ στις αντίστοιχες περιοχές.

Η κατεύθυνση απλοποιείται κάτω από την υπόθεση ότι οι πόλοι είναι απλοί και ικανοποιούν τις υποθέσεις της Προτασης 2.18.

Κατ' αρχήν εστιάζουμε την προσοχή μας επί της καμπύλης $L_{12} \equiv \{\arg k = \frac{\pi}{3}\} \cup \{\arg k = \frac{2\pi}{3}\}$, που αποτελεί το κοινό σύνορο των περιοχών D_2 και D_{13}.

Κατά μήκος της καμπύλης αυτής, ο αλματικός πίνακας δίνεται από τη σχέση (2.112). Εν όψει της ταυτότητας

$$a\beta - \alpha b = e^{2ikL} B_L \tag{2.121}$$

η απόδειξη της οποίας αποτελεί απευθείας εφαρμογή των ορισμών των α και β, ο πίνακας αυτός μπορεί να γραφεί σαν

$$J_{12} := \begin{bmatrix} \frac{\delta}{d} & -B_L e^{2ikL} e^{-2i\theta} \\ \frac{\overline{B}}{\alpha d} e^{2i\theta} & \frac{a}{\alpha} \end{bmatrix}, \quad k \in L_{12} \tag{2.122}$$

και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής:

$$J_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{a} & -B_L e^{2ikL} e^{-2i\theta} \\ 0 & \frac{a}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}}{ad} e^{2i\theta} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.123}$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση αυτή μέσα στην αλματική συνθήκη (2.111) και κάνουμε χρήση της αντιστροφής

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}}{ad} e^{2i\theta} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\overline{B}}{ad} e^{2i\theta} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.124}$$

Η αλματική συνθήκη γίνεται:

$$\left[\frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d(k)}, [\Psi_3]_2^{(2)} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\overline{B}}{ad} e^{2i\theta} & 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha(k)}, [\Psi_4]_2^{(13)} \right] \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{a} & -B_L e^{2ikL} e^{-2i\theta} \\ 0 & \frac{a}{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{2.125}$$

Θεωρώντας τη δεύτερη στήλη των δύο μελών της εξίσωσης αυτής παίρνουμε:

$$[\Psi_3]_2^{(2)} = -B_L e^{2ikL} e^{-2i\theta} \frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha} + \frac{a}{\alpha} [\Psi_4]_2^{(13)}. \tag{2.126}$$

Υπολογίζοντας την εξίσωση αυτή για $k = \nu_j$ και κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι

$$\alpha(\nu_j) = 0, \quad \alpha'(\nu_j) \neq 0 \tag{2.127}$$

(ν_j είναι μια απλή ρίζα της ακέραιης συνάρτησης $\alpha(k)$) φθάνουμε στην εξίσωση

$$-B_L(\nu_j) e^{2i\nu_j L} e^{-2i\theta(x,t,\nu_j)} [\Psi_2]_1^{(13)}(x,t,\nu_j) + a(\nu_j) [\Psi_4]_2^{(13)}(x,t,\nu_j) = 0. \tag{2.128}$$

Σε συμφωνία με την υπόθεσή μας, η ρίζα $k = \nu_j$ της $\alpha(k)$ $\delta\epsilon\nu$ αποτελεί ρίζα της $B_L(k)$, δηλαδή,

$$B_L(\nu_j) \neq 0, j = 1, ..., N_1. \tag{2.129}$$

Συνακόλουθα, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$[\Psi_2]_1^{(13)}(x,t,\nu_j) = \frac{a(\nu_j)}{B_L(\nu_j)} e^{-2i\nu_j L} e^{2i\theta(x,t,\nu_j)} [\Psi_4]_2^{(13)}(x,t,\nu_j). \tag{2.130}$$

Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό

$$M(x,t,k) = \big([M]_1, [M]_2\big) \tag{2.131}$$

για τις στήλες της συνάρτησης $M(x,t,k)$. Τότε,

$$[M]_1 = \begin{cases} \frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d(k)}, & \arg k \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \\ \frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha(k)}, & \arg k \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi] \end{cases} \tag{2.132}$$

και

$$[M]_2 = \begin{cases} [\Psi_3]_2^{(2)}, & \arg k \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}] \\ [\Psi_4]_2^{(13)}, & \arg k \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi]. \end{cases} \tag{2.133}$$

Στην περίπτωσή μας, το $k = \nu_j$ είναι μια απλή ρίζα της συνάρτησης

$$[M]_1 = \frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha(k)}, \quad \arg k \in (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{2\pi}{3}, \pi) \tag{2.134}$$

με ολοκληρωτικό υπόλοιπο,

$$Res\,\{[M]_1(x,t,k), k = \nu_j\} = \frac{[\Psi_2]_1^{(13)}(\nu_j)}{\alpha'(\nu_j)}. \tag{2.135}$$

Η εξίσωση αυτή, σε συνδυασμό με την (2.130), δίνει την (2.80), όπου η $c_j^{(1)}$ δίνεται από την (2.76).

Ας στρέψουμε, τώρα, την προσοχή μας ξανά στην εξίσωση (2.125). Θεωρώντας τις πρώτες στήλες αυτής έχουμε

$$\frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d} - \frac{\overline{B}e^{2i\theta}}{ad}[\Psi_3]_2^{(2)} = \frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{a}. \tag{2.136}$$

Υπολογίζουμε την εξίσωση αυτή στο σημείο $k = \lambda_j$. Προχωρώντας με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως καταλήγουμε στην εξίσωση (2.81), όπου η $c_j^{(2)}$ δίνεται από την (2.76), κάτω από την υπόθεση ότι $a(\lambda_j) \neq 0$, $j = 1, ..., N_2$.

Τελικά, κάνοντας χρήση κατάλληλων συμμετριών λαμβάνουμε τις εξισώσεις (2.82) και (2.83).

• *Απόδειξη της Ιδιότητας 4.*

Αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού (2.77) της $M(x,t,k)$ και της συμπεριφοράς (2.59). Οι συναρτήσεις $\mu_j(x,t)$, $j = 1, 2$, είναι άγνωστες, αλλά αυτό δεν επηρεάζει το μονοσήμαντο της επιλυσιμότητας του προβλήματος Riemann-Hilbert.

• *Απόδειξη της Ιδιότητας 5.*

Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι οι πίνακες Q και $\widetilde{Q}$ είναι μηδενικού ίχνους (traceless).

• *Απόδειξη της Ιδιότητας 6.*

Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της $M(x,t,k)$ και του εύκολα αποδεικνυόμενου γεγονότος ότι κάθε λύση $\Psi(x,t,k)$ του x-μέρους του ζεύγους Lax ικανοποιεί $\lim_{k\to\infty}(k\Psi_{12}) = 0$.

• *Απόδειξη της Ιδιότητας 7.*

Αυτό λαμβάνεται από τις ολοκληρωτικές εξισώσεις των ιδιοσυναρτήσεων Ψ ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες στις περιοχές όπου οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές είναι φραγμένες και αναλυτικές. Η πρόταση έχει αποδειχθεί. □

Παρατήρηση 2.19. Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, επισημαίνουμε ότι η λύση $q(x,t)$ της εξίσωσης KdV, την οποία χρησιμοποιήσαμε για την κατασκευή των ιδιοσυναρτήσεων $\{\Psi_j(x,x,k)\}$ και τη διατύπωση του αντίστοιχου προβλήματος Riemann-Hilbert, μπορεί να ανακτηθεί από τη λύση $M(x,t,k)$ του τελευταίου. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του τύπου

$$q(x,t) = -2i\partial_x \lim_{k\to\infty}\left[kM_{22}(x,t,k)\right] = -\lim_{k\to\infty}\left[4k^2 M_{12}(x,t,k)\right], \qquad (2.137)$$

που μπορεί εύκολα να αποδειχθεί αντικαθιστώντας στο ζεύγος Lax ένα ανάπτυγμα των ιδιοσυναρτήσεων σε αντίστροφες δυνάμεις του k.

Κεφάλαιο 3

Αντιστροφή των φασματικών μετασχηματισμών και ολική σχέση.

3.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο 2 είδαμε ότι κάθε λύση $q(x,t)$ της εξίσωσης KdV στην περιοχή $\Omega := [0,L] \times [0,T]$ μπορεί να προκύψει από την ασυμπτωτική συμπεριφορά, για $k \to \infty$, της λύσης $M(x,t,k)$ ενός κατάλληλου προβλήματος Riemann-Hilbert. Το πρόβλημα Riemann-Hilbert καθορίζεται από μια εξάδα φασματικών συναρτήσεων, που συμβολίσαμε με $\{a(k), b(k), A(k), B(k), A_L(k), B_L(k)\}$, οι οποίες, με τη σειρά τους, καθορίζονται από τις αρχικές και συνοριακές τιμές της $q(x,t)$ επί του $\partial\Omega$, ως εξής. Οι $(a(k), b(k))$ καθορίζονται από την $\{q(x,0)\}$, οι $(A(k), B(k))$ καθορίζονται από τις $\{(\partial_x^j q)(0,t)\}_{j=0}^2$ και οι $(A_L(k), B_L(k))$ καθορίζονται από τις $\{(\partial_x^j q)(L,t)\}_{j=0}^2$.

Με κίνητρο την ανάλυση αυτή, εστιάζουμε, από εδώ και στο εξής, την προσοχή μας σε εκείνο το πρόβλημα Riemann-Hilbert του οποίου η διατύπωση στηρίζεται στις δοσμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Πιο συγκεκριμένα, θα *ορίσουμε*, τώρα, τα τρία ζεύγη φασματικών συναρτήσεων $(a(k), b(k))$, $(A(k), B(k))$ και $(A_L(k), B_L(k))$ μέσω των τριών συνόλων συναρτήσεων, $\{q_0(x)\}$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$, αντίστοιχα (βλ. εδάφιο 3.2).

Από την επτάδα αυτή συναρτήσεων, η τετράδα $\{q_0(x), g_0(t), f_0(t), f_1(t)\}$ είναι τα αρχικά και συνοριακά δοσμένα, που ορίζουν το καλά τοποθετημένο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών. Οι υπόλοιπες τέσσερις ορίζονται σαν $g_1(t) := q_x(0,t)$, $g_2(t) := q_{xx}(0,t)$ και $f_2(t) := q_{xx}(L,t)$, όπου $q(x,t)$ η λύση του καλά τοποθετημένου προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών στο οποίο μόλις αναφερθήκαμε.

Παραπερα, στο εδάφιο 3.4 δείχνουμε ότι οι έξι αυτές φασματικές συναρτήσεις ικανοποιούν μια συγκεκριμένη αλγεβρική εξίσωση, που ονομάζεται *ολική σχέση (global relation).*

Η ύπαρξη αυτής της δεσμευτικής σχέσης εκφράζει το γεγονός ότι *οι επτά αρχικές και συνοριακές συναρτήσεις* $\{q_0(x)\}$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$, $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ *δε θα μπορούσαν να έχουν προεπιλεγεί με ανεξάρτητο μεταξύ τους τρόπο.* Με άλλα λόγια, γνωρίζουμε τώρα (πέραν του επιχειρήματος της καλής τοποθέτησης) ότι δε θα μπορούσαμε να προκαθορίσουμε μια επτάδα συναρτήσεων όπως η παραπάνω ως αρχικά και συνοριακά δοσμένα (με ανεξάρτητο μεταξύ τους τρόπο), παρά μόνο εφόσον ικανοποιείται η ολική σχέση.

Υπό την υπόθεση ότι η συνθήκη αυτή ικανοποιείται, η επτάδα $\{q_0(x)\}$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ θα λέγεται ότι αποτελεί ένα *αποδεκτό σύνολο συναρτήσεων (admissible set of functions)*, ή ότι η τριάδα $\{g_1(t), g_2(t), f_2(t)\}$ αποτελεί ένα αποδεκτό σύνολο συναρτήσεων ως προς την τετράδα $\{q_0(x), g_0(t), f_0(t), f_1(t)\}$.

Προκειμένου να αποδείξουμε, στο επόμενο κεφάλαιο 4, ότι η λύση $M(x,t,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert οδηγεί πράγματι σε μία λύση $q(x,t)$ του ΠΑΣΤ χρειαζόμαστε τον τρόπο με τον οποίο *αντιστρέφονται* οι φασματικές απεικονίσεις $\mathbf{S} : \{q_0(x)\} \longmapsto \{a(k), b(k)\}$, $\widetilde{\mathbf{S}} : \{g_j(t)\}_{j=0}^2 \longmapsto \{A(k), B(k)\}$ και $\widetilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{L}} : \{f_j(t)\}_{j=0}^2 \longmapsto \{A_L(k), B_L(k)\}$. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ορίζονται με πεπλεγμένο τρόπο μέσα από την επίλυση κατάλληλων προβλημάτων αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για *γραμμικές* συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές, ή, ισοδύναμα, μέσα από την επίλυση κατάλληλων *γραμμικών* ολοκληρωτικών εξισώσεων. Η αντιστροφή τους, η κατασκευή, δηλαδή, των απεικονίσεων $\mathbf{S}^{-1} : \{a(k), b(k)\} \longmapsto \{q_0(x)\}$, $\widetilde{\mathbf{S}}^{-1} : \{A(k), B(k)\} \longmapsto \{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $[\widetilde{\mathbf{S}}^{\mathbf{L}}]^{-1} : \{A_L(k), B_L(k)\} \longmapsto \{f_j(t)\}_{j=0}^2$, περιγράφεται, όπως θα δούμε στο εδάφιο 3.3, μέσω κατάλληλων προβλημάτων Riemann-Hilbert. Η αντιστροφή αυτή αποτελεί το αντικείμενο των θεωρημάτων 3.23, 3.24 και 3.25.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε την αντιστροφή των τριών φασματικών μετασχηματισμών μέσω μιας *εναλλακτικής τριάδας* προβλημάτων Riemann-Hilbert.

3.2 Οι ευθείες φασματικές απεικονίσεις.

Η διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert που επιτεύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο (πρόταση 2.18) είχε δοθεί μέσω τριών ζευγαριών συναρτήσεων, των $(a(k), b(k))$, $(A(k), B(k))$ και $(A_L(k), B_L(k))$, τις οποίες και ονομάσαμε *φασματικές συναρτήσεις*. Θα ορίσουμε, τώρα, τις φασματικές συναρτήσεις μέσω των αρχικών και συνοριακών τιμών της άγνωστης συνάρτησης, $q_0(x)$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$.

Προς αυτή την κατεύθυνση, δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

• Οι φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$. Ας υποθέσουμε ότι $q_0(x) \in C^\infty([0,L])$. Η απεικόνιση

$$\mathbf{S} : \{q_0(x)\} \longmapsto \{a(k), b(k)\} \tag{3.1}$$

ορίζεται ως εξής:

$$[b(k), a(k)]^T := \phi(0,k), \tag{3.2}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\phi(x,k)$ ορίζεται μέσω της $q_0(x)$ από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\partial_x \phi(x,k) + ik(I+\sigma_3)\phi(x,k) = Q_0(x,k)\phi(x,k), \quad \phi(L,k) = [0,1]^T, \tag{3.3}$$

και όπου

$$Q_0(x,k) := \frac{q_0(x)}{2k}(\sigma_2 - i\sigma_3). \tag{3.4}$$

• **Οι φασματικές συναρτήσεις $A(k)$, $B(k)$.** Ας υποθέσουμε ότι $\{g_j(t)\}_{j=0}^2 \in C^\infty([0,T)])$ (στην περίπτωση $T = \infty$ υποθέτουμε, περαιτέρω, ότι οι συναρτήσεις αυτές ανήκουν στο χώρο συναρτήσεων Schwartz $\mathbb{S}((R^+))$). Η απεικόνιση

$$\widetilde{\mathbf{S}} : \{g_j(t)\}_{j=0}^2 \longmapsto \{A(k), B(k)\} \tag{3.5}$$

για $T < \infty$ ορίζεται ως εξής:

$$[-e^{-8ik^3T}B(k), \overline{A(\bar{k})}]^T := \Phi(T,k), \tag{3.6}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\Phi(t,k)$ ορίζεται μέσω των $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\partial_t\Phi(t,k) + 4ik^3(I+\sigma_3)\Phi(t,k) = \widetilde{Q}_0(t,k)\Phi(t,k), \quad \Phi(0,k) = [0,1]^T, \tag{3.7}$$

και όπου

$$\widetilde{Q}_0(t,k) = 2kg_0(t)\sigma_2 + g_1(t)\sigma_1 + \frac{1}{2k}[g_2(t) + 2g_0^2(t)](i\sigma_3 - \sigma_2). \tag{3.8}$$

Στην περίπτωση $T = \infty$ χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό, ο οποίος είναι βασισμένος στην ιδιοσυνάρτηση $\psi_1(t,k) \equiv \Psi_1^{(135)}(0,t,k)$, και ισχύει μόνο για $k \in D_{135}$:

$$[B(k), A(k)]^T := \hat{\Phi}(0,k), \tag{3.9}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\hat{\Phi}(t,k)$ ορίζεται μέσω των $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\partial_t\hat{\Phi}(t,k) + 4ik^3(I+\sigma_3)\hat{\Phi}(t,k) = \widetilde{Q}_0(t,k)\hat{\Phi}(t,k), \quad \lim_{t\to\infty}\hat{\Phi}(t,k) = [0,1]^T. \tag{3.10}$$

• **Οι φασματικές συναρτήσεις $A_L(k)$, $B_L(k)$.** Ας υποθέσουμε ότι $\{f_j(t)\}_{j=0}^2 \in C^\infty([0,T)])$ (στην περίπτωση $T = \infty$ υποθέτουμε, περαιτέρω, ότι οι συναρτήσεις αυτές ανήκουν στο χώρο συναρτήσεων Schwartz $\mathbb{S}((R^+))$). Η απεικόνιση

$$\widetilde{\mathbf{S^L}} : \{f_j(t)\}_{j=0}^2 \longmapsto \{A_L(k), B_L(k)\} \tag{3.11}$$

για $T < \infty$ ορίζεται ως εξής:

$$[-e^{-8ik^3T}B_L(k), \overline{A_L(\bar{k})}]^T := \varphi(T,k), \tag{3.12}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\varphi(t,k)$ ορίζεται μέσω των $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\partial_t\varphi(t,k) + 4ik^3(I+\sigma_3)\varphi(t,k) = \widetilde{Q}_L(t,k)\varphi(t,k), \quad \varphi(0,k) = [0,1]^T, \tag{3.13}$$

και όπου

$$\widetilde{Q}_L(t,k) = 2kf_0(t)\sigma_2 + f_1(t)\sigma_1 + \frac{1}{2k}[f_2(t) + 2f_0^2(t)](i\sigma_3 - \sigma_2). \tag{3.14}$$

Στην περίπτωση $T=\infty$ χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό, ο οποίος είναι βασισμένος στην ιδιοσυνάρτηση $\psi_4(t,k)\equiv\Psi_4^{(135)}(L,t,k)$, και ισχύει μόνο για $k\in D_{135}$:

$$[B_L(k),A_L(k)]^T := \hat{\varphi}(0,k), \tag{3.15}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\hat{\varphi}(t,k)$ ορίζεται μέσω των $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\partial_t\hat{\varphi}(t,k)+4ik^3(I+\sigma_3)\hat{\varphi}(t,k)=\widetilde{Q}_L(t,k)\hat{\varphi}(t,k), \quad \lim_{t\to\infty}\hat{\varphi}(t,k)=[0,1]^T. \tag{3.16}$$

Ιδιότητες των φασματικών συναρτήσεων. Ιδιότητες των φασματικών συναρτήσεων αναφορικά με φραγή και αναλυτικότητα στο k-επίπεδο, μοναδιαίες ορίζουσες, συμπεριφορά στο άπειρο καθώς και συμπεριφορά στο μηδέν είναι ακριβώς αυτές που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, 2.

• **Κάποιες αλληλεξαρτήσεις μεταξύ των φασματικών συναρτήσεων.** Υποθέτουμε (βλ. την περιγραφή των αντίστροφων φασματικών απεικονίσεων αργότερα) ότι:
- Η φασματική συνάρτηση $a(k)$ έχει ακριβώς n ρίζες, $\{k_j\}_{j=1}^n\in\mathbb{C}^+$, όλες απλές.
- Η φασματική συνάρτηση $A(k)$ έχει ακριβώς N ρίζες, $\{K_j\}_{j=1}^N\in D_{135}$, όλες απλές.
- Η φασματική συνάρτηση $A_L(k)$ έχει ακριβώς N^L ρίζες, $\{K_j^L\}_{j=1}^{N^L}\in D_{135}$, όλες απλές.

Τότε:

$$a(k)=\prod_{j=1}^{n}\frac{k-k_j}{k-\bar{k}_j}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\Big(1+|b(k')|^2\Big)\frac{dk'}{k'-k}\right\}, \quad k\in\mathbb{C}^+ \tag{3.17}$$

$$A(k)=\prod_{j=1}^{N^0}\frac{k-K_j}{k-\bar{K}_j}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\ln\Big(1+B(k')\overline{B(\bar{k}')}\Big)\frac{dk'}{k'-k}\right\}, \quad k\in D_{135}. \tag{3.18}$$

$$A_L(k)=\prod_{j=1}^{N^L}\frac{k-K_j^L}{k-\bar{K}_j^L}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\ln\Big(1+B_L(k')\overline{B_L(\bar{k}')}\Big)\frac{dk'}{k'-k}\right\}, \quad k\in D_{135}. \tag{3.19}$$

3.3 Οι αντίστροφες φασματικές απεικονίσεις.

• **Η αντίστροφη φασματική απεικόνιση Q.** Η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\mathbf{S}$, την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathbf{Q}$, ορίζεται ως εξής.

$$\mathbf{Q}:\{a(k),b(k)\}\longmapsto q_0(x) \tag{3.20}$$

με

$$q_0(x)=-2i\partial_x\lim_{k\to\infty}\Big\{k[M_{22}^{(x)}(x,k)]\Big\} \tag{3.21}$$

όπου $M^{(x)}(x,k)$ είναι η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος Riemann-Hilbert.

Ορισμός 3.20. Το x-πρόβλημα Riemann-Hilbert ορίζεται ως εξής.

• $M^{(x)}(x,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με $M_+^{(x)}(x,k)$ τον περιορισμό της για $Imk > 0$ και με $M_-^{(x)}(x,k)$ τον περιορισμό της για $Imk < 0$.

•

$$M_-^{(x)}(x,k) = M_+^{(x)}(x,k)J^{(x)}(x,k), \quad k \in \mathbb{R}^\star := \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{3.22}$$

όπου ο αλματικός πίνακας είναι

$$J^{(x)}(x,k) := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b(k)}{\overline{a}(k)}e^{-2ikx} \\ \frac{\bar{b}(k)}{a(k)}e^{2ikx} & \frac{1}{|a(k)|^2} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}^\star. \tag{3.23}$$

•

$$M^x(x,k) = I + O\Big(\frac{1}{k}\Big), \quad k \to \infty, \quad k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

• Ας υποθέσουμε ότι η φασματική συνάρτηση $a(k)$ έχει ακριβώς n ρίζες, $\{k_j\}_1^n$, όλες απλές, στην περιοχή $Imk > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $b(k_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Τότε η συνάρτηση $\overline{a}(k)$ έχει ακριβώς n ρίζες, $\{\overline{k}_j\}_1^n$, όλες απλές, και στην περιοχή $Imk < 0$.

Τότε η $[M^{(x)}]_1(x,k)$ έχει ακριβώς n πόλους, $\{k_j\}_1^n$, όλοι απλοί, με $Imk > 0$, ενώ η $[M^{(x)}]_2(x,k)$ έχει ακριβώς n πόλους, $\{\overline{k}_j\}_1^n$, όλοι απλοί, με $Imk < 0$. Για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα ισχύουν οι σχέσεις:

$$Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k), k = k_j\right\} = \frac{e^{2ik_jx}}{a'(k_j)b(k_j)}[M^{(x)}]_2(x,k_j), \quad Imk_j > 0 \tag{3.25}$$

και

$$Res\left\{[M^{(x)}]_2(x,k), k = \overline{k}_j\right\} = \frac{e^{-2i\overline{k}_jx}}{\overline{a'(k_j)b(k_j)}}[M^{(x)}]_1(x,\overline{k}_j), \quad Im\overline{k}_j < 0 \tag{3.26}$$

για $j = 1, \dots, n$.

• Στη θέση ιδιομορφίας $k = 0$ ικανοποιείται η συνθήκη

$$M^{(x)}(x,k) \sim \begin{cases} \frac{i\mu^{(x)}(x)}{k}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & k \to 0, \quad k \in \mathbb{C}^+ \\ \frac{i\mu^{(x)}(x)}{k}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & k \to 0, \quad k \in \mathbb{C}^-. \end{cases} \tag{3.27}$$

για μια κατάλληλη πραγματική συνάρτηση $\mu^{(x)}(x)$.

• **Η αντίστροφη φασματική απεικόνιση $\widetilde{\mathbf{Q}}$.** Η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\widetilde{\mathbf{S}}$, την οποία θα συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathbf{Q}}$, ορίζεται ως εξής.

$$\widetilde{\mathbf{Q}} : \{A(k), B(k)\} \longmapsto \{g_j(t)\}_{j=0}^{2} \tag{3.28}$$

με

$$\begin{aligned}
g_0(t) &= -4 \lim_{k\to\infty} [k^2 M_{12}^{(t,0)}(t,k)] \\
g_1(t) &= 2ig_0(t) \lim_{k\to\infty} \Big\{ k[M_{12}^{(t,0)}(t,k) - 1] \Big\} + 8i \lim_{k\to\infty} [k^3 M_{12}^{(t,0)}(t,k) + \frac{1}{4} g_0(t)] \\
g_2(t) &= -2i\partial_t \lim_{k\to\infty} \Big\{ k[M_{12}^{(t,0)}(t,k) - 1] \Big\} - 3g_0^2(t)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

όπου $M^{(t,0)}(t,k)$ είναι η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος Riemann-Hilbert.

Ορισμός 3.21. Το $(t,0)$-πρόβλημα Riemann-Hilbert ορίζεται ως εξής.

• Η $M^{(t,0)}(t,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus L$. Συμβολίζουμε με $M_{+}^{(t,0)}(x,k)$ τον περιορισμό της στην περιοχή D_{135} και με $M_{-}^{(t,0)}(x,k)$ τον περιορισμό της στην περιοχή D_{246}.

•
$$M_{-}^{(t,0)}(t,k) = M_{+}^{(t,0)}(t,k) J^{(t,0)}(t,k), \quad k \in L \tag{3.30}$$

όπου ο αλματικός πίνακας είναι

$$J^{(t,0)}(t,k) := \begin{bmatrix} 1 & -e^{-8ik^3 t} \frac{B(k)}{\overline{A}(k)} \\ e^{8ik^3 t} \frac{\overline{B}(k)}{A(k)} & \frac{1}{A(k)\overline{A}(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in L. \tag{3.31}$$

•
$$M^{(t,0)}(t,k) = I + O\big(\frac{1}{k}\big), \quad k \to \infty, \quad k \in \mathbb{C} \setminus L. \tag{3.32}$$

• Ας υποθέσουμε ότι η φασματική συνάρτηση $A(k)$ έχει ακριβώς N^0 ρίζες, $\{K_j\}_1^{N^0}$, όλες απλές, κι ανήκουν στην περιοχή D_{135}. Υποθέτουμε επίσης ότι $B(K_j) \neq 0$, $j = 1, \ldots, N^0$. Τότε η φασματική συνάρτηση $\overline{A}(k)$ έχει ακριβώς N^0 ρίζες, $\{\overline{K}_j\}_1^{N^0}$, όλες απλές, ανήκουσες στην περιοχή D_{246}.

Τότε η $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ έχει ακριβώς N^0 πόλους, $\{K_j\}_1^{N^0}$, όλοι απλοί, που ανήκουν στην περιοχή D_{135}, ενώ η $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ έχει ακριβώς N^0 πόλους, $\{\overline{K}_j\}_1^{N^0}$, όλοι απλοί, που ανήκουν στην περιοχή D_{246}. Για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα ισχύουν οι σχέσεις:

$$Res \left\{ [M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j \right\} = \frac{e^{8iK_j^3 t}}{A'(K_j)B(K_j)} [M^{(t,0)}]_2(t,K_j), \quad K_j \in D_{135} \tag{3.33}$$

και

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\overline{K}_j\right\} = \frac{e^{-8i\overline{K}_j^3 t}}{\overline{A'(K_j)B(K_j)}}[M^{(t,0)}]_1(t,\overline{K}_j), \quad \overline{K}_j \in D_{246} \tag{3.34}$$

για $j = 1, \ldots, N^0$.

• Στη θέση ιδιομορφίας $k = 0$ ικανοποιείται η συνθήκη

$$M^{(t,0)}(t,k) \sim \begin{cases} \frac{i\mu^{(t,0)}(t)}{k}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & k \to 0, \quad k \in D_{135} \\ \frac{i\mu^{(t,0)}(t)}{k}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & k \to 0, \quad k \in D_{246}. \end{cases} \tag{3.35}$$

για μια κατάλληλη πραγματική συνάρτηση $\mu^{(t,0)}(t)$.

• Η αντίστροφη φασματική απεικόνιση $\widetilde{\mathbf{Q}}^L$. Η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\widetilde{\mathbf{S}}^L$, την οποία θα συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathbf{Q}}^L$, ορίζεται ως εξής.

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^L : \{A_L(k), B_L(k)\} \longmapsto \{f_j(t)\}_{j=0}^2 \tag{3.36}$$

με

$$\begin{aligned} f_0(t) &= -4\lim_{k\to\infty}[k^2 M_{12}^{(t,L)}(t,k)] \\ f_1(t) &= 2if_0(t)\lim_{k\to\infty}\left\{k[M_{12}^{(t,L)}(t,k)-1]\right\} + 8i\lim_{k\to\infty}[k^3 M_{12}^{(t,L)}(t,k) + \frac{1}{4}f_0(t)] \\ f_2(t) &= -2i\partial_t\lim_{k\to\infty}\left\{k[M_{12}^{(t,L)}(t,k)-1]\right\} - 3f_0^2(t) \end{aligned} \tag{3.37}$$

όπου η $M^{(t,L)}(t,k)$ είναι η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος Riemann-Hilbert.

Ορισμός 3.22. Το (t, L)-πρόβλημα Riemann-Hilbert ορίζεται ως εξής.

• Η $M^{(t,L)}(t,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus L$. Συμβολίζουμε με $M_+^{(t,L)}(x,k)$ τον περιορισμό της στην περιοχή D_{135} και με $M_-^{(t,L)}(x,k)$ τον περιορισμό της στην περιοχή D_{246}.

•
$$M_-^{(t,L)}(t,k) = M_+^{(t,L)}(t,k)J^{(t,L)}(t,k), \quad k \in L \tag{3.38}$$

όπου ο αλματικός πίνακας είναι

$$J^{(t,L)}(t,k) := \begin{bmatrix} 1 & -e^{-8ik^3t}\frac{B_L(k)}{\overline{A}_L(k)} \\ e^{8ik^3t}\frac{\overline{B}_L(k)}{A_L(k)} & \frac{1}{A_L(k)\overline{A}_L(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in L. \tag{3.39}$$

•
$$M^{(t,L)}(t,k) = I + O\Big(\frac{1}{k}\Big), \quad k \to \infty, \quad k \in \mathbb{C} \setminus L. \tag{3.40}$$

• Ας υποθέσουμε ότι η φασματική συνάρτηση $A_L(k)$ έχει ακριβώς N^L ρίζες, $\{K_j^L\}_1^{N^L}$, όλες απλές, ανήκουσες στην περιοχή D_{135}. Υποθέτουμε επίσης ότι $B_L(K_j^L) \neq 0$, $j = 1,\ldots,N^L$. Τότε η συνάρτηση $\overline{A}_L(k)$ έχει ακριβώς N^L ρίζες, $\{\overline{K}_j^L\}_1^{N^L}$, όλες απλές, που ανήκουν στην περιοχή D_{246}.

Τότε η $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ έχει ακριβώς N^L πόλους, $\{K_j^L\}_1^{N^L}$, όλοι απλοί, που ανήκουν στην περιοχή D_{135}, ενώ η $[M^{(t,L)}]_2(t,k)$ εχει ακριβώς N^L πόλους, $\{\overline{K}_j^L\}_1^{N^L}$, όλοι απλοί, που ανήκουν στην περιοχή D_{246}. Για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα ισχύουν οι σχέσεις:

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = K_j^L\right\} = \frac{e^{8i(K_j^L)^3 t}}{A_L'(K_j^L)B_L(K_j^L)}[M^{(t,L)}]_2(t,K_j^L), \quad K_j^L \in D_{135} \tag{3.41}$$

και

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k), k = \overline{K}_j^L\right\} = \frac{e^{-8i(\overline{K}_j^L)^3 t}}{\overline{A_L'(K_j^L)B_L(K_j^L)}}[M^{(t,L)}]_1(t,\overline{K}_j^L), \quad \overline{K}_j^L \in D_{246} \tag{3.42}$$

για $j = 1,\ldots,N^L$.

• Στη θέση ιδιομορφίας $k = 0$ ικανοποιείται η συνθήκη

$$M^{(t,L)}(t,k) \sim \begin{cases} \frac{i\mu^{(t,L)}(t)}{k}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & k \to 0, \quad k \in D_{135} \\ \frac{i\mu^{(t,L)}(t)}{k}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & k \to 0, \quad k \in D_{246}. \end{cases} \tag{3.43}$$

για μια κατάλληλη πραγματική συνάρτηση $\mu^{(t,L)}(t)$.

Το γεγονός ότι οι απεικονίσεις $\mathbf{Q}$, $\widetilde{\mathbf{Q}}$ και $\widetilde{\mathbf{Q}}^L$ είναι πράγματι οι αντίστροφες των φασματικών απεικονίσεων $\mathbf{S}$, $\widetilde{\mathbf{S}}$ και $\widetilde{\mathbf{S}}^L$, αντίστοιχα, είναι το περιεχόμενο των τριών θεωρημάτων που ακολουθούν.

Θεώρημα 3.23. *Η απεικόνιση $\mathbf{Q}$ είναι η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\mathbf{S}$, δηλαδή $\mathbf{Q} = \mathbf{S}^{-1}$.*

Θεώρημα 3.24. *Η απεικόνιση $\widetilde{\mathbf{Q}}$ είναι η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\widetilde{\mathbf{S}}$, δηλαδή $\widetilde{\mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{S}}^{-1}$.*

Θεώρημα 3.25. *Η απεικόνιση $\widetilde{\mathbf{Q}}^L$ είναι η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\widetilde{\mathbf{S}}^L$, δηλαδή $\widetilde{\mathbf{Q}}^L = [\widetilde{\mathbf{S}}^L]^{-1}$.*

Απόδειξη του θεωρήματος 3.23.

Η απόδειξή μας είναι βασισμένη στην εξίσωση (2.30), δηλαδή

$$\Psi_3(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k)e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}s(k), \tag{3.44}$$

υπολογισμένη για $t = 0$,

$$\Psi_3(x,0,k) = \Psi_2(x,0,k)e^{-ikx\hat{\sigma}_3}s(k). \tag{3.45}$$

Ορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_3(x,k)$ και $\Psi_2(x,k)$ ως εκείνες που προκύπτουν όταν στον ορισμό των $\Psi_3(x,0,k)$ και $\Psi_2(x,0,k)$ η $Q(x,0,k)$ αντικατασταθεί από το $Q_0(x,k)$.

Η δεύτερη στήλη της $\Psi_3(x,k)$ θα είναι η $\phi(x,k)$. Μάλιστα, λόγω των συμμετριών ανάκλασης Schwarz του ζεύγους Lax, η $\Psi_3(x,k)$ θα έχει η μορφή

$$\Psi_3(x,k) = [\phi^\star(x,k), \phi(x,k)] \tag{3.46}$$

όπου $\phi^\star(x,k) := [\overline{\phi_2(x,\overline{k})}, \overline{\phi_1(x,\overline{k})}]^T$ για $\phi(x,k) = [\phi_1(x,k), \phi_2(x,k)]^T$.

Παρόμοια, η $\Psi_2(x,k)$ θα έχει τη μορφή

$$\Psi_2(x,k) = [\psi(x,k), \psi^\star(x,k)] \tag{3.47}$$

όπου η στήλη $\psi^\star$ σχετίζεται με την ψ όπως η $\phi^\star$ σχετίζεται με την ϕ.

Οι $\Psi_3(x,k)$ και $\Psi_2(x,k)$ σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$\Psi_3(x,k) = \Psi_2(x,k)e^{-ikx\hat{\sigma}_3}s(k). \tag{3.48}$$

Ας σημειωθεί ότι, στην μεν (3.45) ο φασματικός πίνακας $s(k)$ συνδέεται με τα $Q(x,0,k)$, ενώ στην (3.48) ο $s(k)$ συνδέεται με τα $Q_0(x,k)$.

Οι ιδιότητες φραγής και αναλυτικότητας των $\Psi_3(x,k)$ και $\Psi_2(x,k)$ συνεπάγονται ότι, οι μεν ϕ και ψ είναι αναλυτικές και φραγμένες στην περιοχή $\mathbb{C}^+ \equiv D_{123}$, οι δε $\phi^\star$ και $\psi^\star$ είναι αναλυτικές και φραγμένες στην περιοχή $\mathbb{C}^- \equiv D_{456}$.

Ορίζουμε την τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση $M^{(x)}(x,k)$, όπου $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ως εξής:

$$M^{(x)}(x,k) := \begin{cases} M_+^{(x)}(x,k) \equiv M_{(123)}^{(x)}(x,k) := \left(\frac{\psi}{a(k)}, \phi\right), & k \in \mathbb{C}^+ \equiv D_{123}, \\ M_-^{(x)}(x,k) \equiv M_{(456)}^{(x)}(x,k) := \left(\phi^\star, \frac{\psi^\star}{a(\overline{k})}, \right), & k \in \mathbb{C}^- \equiv D_{456}. \end{cases} \tag{3.49}$$

Η $M^{(x)}(x,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Συμβολίσαμε με $M_+^{(x)}(x,k)$ τον περιορισμό της για $Imk > 0$ και με $M_-^{(x)}(x,k)$ τον περιορισμό της για $Imk < 0$.

Χρησιμοποιώντας τις (3.46) και (3.47), καθώς και το γεγονός ότι

$$e^{-ikx\hat{\sigma}_3}s(k) = \begin{bmatrix} \overline{a}(k) & e^{-2ikx}b(k) \\ e^{2ikx}\overline{b}(k) & a(k) \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

στην (3.48), και κατόπιν κατάλληλων αλγεβρικών χειρισμών, είμαστε σε θέση να αναδιατυπώσουμε την εξίσωση (3.48) μέσω των συναρτήσεων (3.49). Πιο συγκεκριμένα,

$$(\phi^\star, \frac{\psi^\star}{\overline{a(\bar{k})}},) = (\frac{\psi}{a(k)}, \phi)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{b(k)}{\bar{a}(k)}e^{-2ikx} \\ \frac{\bar{b}(k)}{a(k)}e^{2ikx} & \frac{1}{|a(k)|^2} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{3.51}$$

Λόγω των ορισμών των $M_+^{(x)}(x,k)$ και $M_-^{(x)}(x,k)$, καθώς και του ορισμού (3.23) του αλματικού πίνακα $J^{(x)}(x,k)$, η τελευταία έκφραση ισοδυναμεί με την αλματική συνθήκη (3.22).

Μελετάμε, τώρα, τους πόλους καθώς και τις αντίστοιχες συνθήκες ολοκληρωτικών υπολοίπων της $M^{(x)}(x,k)$. Γράφουμε τη συνάρτηση αυτή κατά στήλες,

$$M^{(x)}(x,k) = \left[[M^{(x)}]_1(x,k), \quad [M^{(x)}]_2(x,k)\right]. \tag{3.52}$$

Για $k \in \mathbb{C}^+$ έχουμε

$$[M^{(x)}]_1(x,k) = \frac{\psi(x,k)}{a(k)}, \quad [M^{(x)}]_2(x,k) = \phi(x,k). \tag{3.53}$$

Επομένως η $[M^{(x)}]_2(x,k)$ δεν έχει πόλους στο $\mathbb{C}^+$, ενώ η $[M^{(x)}]_1(x,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες $\{k_j\}_{j=1}^n$ της $a(k)$ στην περιοχή αυτή. Τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι

$$Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k), k = k_j\right\} = \frac{\psi(x,k_j)}{a'(k_j)}, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{3.54}$$

Ανακαλούμε τώρα τις σχέσεις

$$\phi^\star = \overline{a}\psi + e^{2ikx}\overline{b}\psi^\star, \quad \phi = e^{-2ikx}b\psi + a\psi^\star. \tag{3.55}$$

Για $k = k_j$ έχουμε $a(k_j) = 0$ και, εξ' υποθέσεως, $b(k_j) \neq 0$, οπότε από την (3.55b) παίρνουμε

$$\psi(x,k_j) = e^{2ik_jx}\frac{\phi(x,k_j)}{b(k_j)}, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{3.56}$$

Από την τελευταία και την (3.54) καταλήγουμε στη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων (3.25).

Η εξαγωγή της (3.26) γίνεται με παρόμοιους χειρισμούς μεταξύ της (3.55a) και του ορισμού της $M_-^{(x)}(x,k)$.

Η εξαγωγή των (3.24) και (3.27) βασίζεται στον ορισμό της $M^{(x)}(x,k)$ και τη συμπεριφορά των $\Psi_3(x,k)$ και $\Psi_2(x,k)$ καθώς $k \to \infty$ και καθώς $k \to 0$.

Η εξαγωγή της (3.21) στηρίζεται στη μελέτη της συμπεριφοράς της $M^{(x)}(x,k)$ καθώς $k \to \infty$, βάσει του ορισμού της $M^{(x)}(x,k)$ και του γεγονότος ότι καθεμιά εκ των $\Psi_3(x,k)$ και $\Psi_2(x,k)$ ικανοποιεί το x-μέρος του ζεύγους Lax (βασισμένου στην $Q_0(x,k)$).

Για να δείξουμε, τώρα, ότι η απεικόνιση $\mathbf{Q}$ είναι η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\mathbf{S}$, δηλαδή $\mathbf{Q} = \mathbf{S}^{-1}$, ας υποθέσουμε ότι, για δοσμένο ζεύγος φασματικών συναρτήσεων

$\{a(k), b(k)\}$ ορίζουμε την $q_0(x)$ μέσω της απεικόνισης $\mathbf{Q}$, δηλ. η $q_0(x)$ δίνεται από την (3.21), όπου η $M^{(x)}(x,k)$ λύνει το x-πρόβλημα Riemann-Hilbert. Στη συνέχεια, ας ορίσουμε το ζεύγος φασματικών συναρτήσεων $\{a_0(k), b_0(k)\}$ ως εκείνων που ορίζονται από την $q_0(x)$ μέσω του φασματικού μετασχηματισμού $\mathbf{S}$, δηλαδή

$$[b_0(k), a_0(k)]^T := \phi(0,k), \tag{3.57}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\phi(x,k)$ ορίζεται μέσω της $q_0(x)$ από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\partial_x \phi(x,k) + ik(I+\sigma_3)\phi(x,k) = Q_0(x,k)\phi(x,k), \quad \phi(L,k) = [0,1]^T. \tag{3.58}$$

Θα δείξουμε ότι

$$a_0(k) = a(k), \quad b_0(k) = b(k), \quad k \in \mathbb{C}^\star. \tag{3.59}$$

Κατ' αρχήν, η μέθοδος της ένδυσης (dressing method) εξασφαλίζει ότι η $M^{(x)}(x,k)$ ικανοποιεί το x-μέρος του ζεύγους Lax που αντιστοιχεί στην $q_0(x)$, δηλαδή έχουμε

$$\Psi_x + ik[\sigma_3, \Psi] = \frac{q_0(x)}{2k}(\sigma_2 - i\sigma_3)\Psi \tag{3.60}$$

για $\Psi = M^{(x)}(x,k)$. Η ίδια, όμως, εξίσωση γνωρίζουμε ότι ικανοποιείται και από την $\Psi_3(x,k)$. Κατά συνέπεια, οι δύο λύσεις $M^{(x)}(x,k)$ και $\Psi_3(x,k)$ της εξίσωσης θα πρέπει να αλληλοσυνδέονται μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$\Psi_3(x,k) = M^{(x)}(x,k)e^{-ikx\hat{\sigma}_3}C_+(k), \tag{3.61}$$

για κάποιον κατάλληλο πίνακα $C_+(k)$ υπό προσδιορισμό.

Παίρνοντας $x = L$ στην τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\Psi_3(L,k) = I$ είμαστε σε θέση να εκφράσουμε τον $C_+(k)$ σαν:

$$C_+(k) = e^{ikL\hat{\sigma}_3}[M_+^{(x)}(L,k)]^{-1}. \tag{3.62}$$

Επίσης, για τη δεύτερη στήλη ϕ της $\Psi_3(x,k)$ έχουμε

$$\phi(L,k) = [0,1]^T. \tag{3.63}$$

Τώρα θα προσδιορίσουμε την τιμή $\Psi_2(L,k)$. Από την (3.48) για $x = L$ και δοσμένου ότι $\Psi_3(L,k) = I$ έχουμε

$$\Psi_2(L,k) = [e^{-ikL\hat{\sigma}_3}s(k)]^{-1} = e^{-ikL\hat{\sigma}_3}[s(k)]^{-1}. \tag{3.64}$$

Από την κατά συνιστώσες μορφή του πίνακα $s(k)$ βρίσκουμε

$$\Psi_2(L,k) = \begin{bmatrix} a(k) & -e^{-2ikL}b(k) \\ -e^{2ikL}\overline{b}(k) & \overline{a}(k) \end{bmatrix}. \tag{3.65}$$

Από την (3.47) έχουμε

$$\psi(L,k) = \begin{bmatrix} a(k) \\ -e^{2ikL}\bar{b}(k) \end{bmatrix}. \tag{3.66}$$

Στη συνέχεια, από τον ορισμό της $M_+^{(x)}(x,k)$ για $x = L$,

$$M_+^{(x)}(L,k) = \big(\frac{\psi(L,k)}{a(k)}, \phi(L,k)\big) \tag{3.67}$$

και τις (3.63) και (3.66) παίρνουμε

$$M_+^{(x)}(L,k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{2ikL}\frac{\bar{b}(k)}{a(k)} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

και από την (3.62),

$$C_+(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\bar{b}(k)}{a(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.69}$$

Αντικαθιστώντας τη μορφή αυτή του $C_+(k)$ στην (3.61) παίρνουμε

$$\Psi_3(x,k) = M_+^{(x)}(x,k)e^{-ikx\hat{\sigma}_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\bar{b}(k)}{a(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Αναφορικά, τώρα, με τον ορισμό των $\{a_0(k), b_0(k)\}$, έχουμε ότι η $\phi(0,k)$ δεν είναι παρά η δεύτερη στήλη της $\Psi_3(0,k)$. Δηλαδή

$$s_0(k) := \begin{bmatrix} \overline{a}_0(k) & b_0(k) \\ \bar{b}_0(k) & a_0(k) \end{bmatrix} = \Psi_3(0,k). \tag{3.71}$$

Θέτοντας $x = 0$ στην (3.70) εκφράζουμε τον $s_0(k)$ σαν

$$s_0(k) = M_+^{(x)}(0,k)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\bar{b}(k)}{a(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.72}$$

Απομένει ο προσδιορισμός του $M_+^{(x)}(0,k)$.

Αυτός μπορεί να γίνει παρατηρώντας πως το x-πρόβλημα Riemann-Hilbert στην περίπτωση $x = 0$ μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή. Πράγματι, η αλματική συνθήκη γίνεται

$$M_-^{(x)}(0,k) = M_+^{(x)}(0,k)J^{(x)}(0,k), \quad k \in \mathbb{R}^\star := \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{3.73}$$

με αλματικό πίνακα

$$J^{(x)}(0,k) := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b(k)}{\overline{a}(k)} \\ \frac{\bar{b}(k)}{a(k)} & \frac{1}{|a(k)|^2} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}^\star. \tag{3.74}$$

Ορίζουμε την τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση $J_{\pm}^{(x)}(0,k)$, $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, ως εξής:

$$J_{+}^{(x)}(0,k) := \begin{bmatrix} \frac{1}{a(k)} & b(k) \\ 0 & a(k) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{C}^{+}, \tag{3.75}$$

$$J_{-}^{(x)}(0,k) := \begin{bmatrix} \overline{a}(k) & 0 \\ \overline{b}(k) & \frac{1}{\overline{a}(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{C}^{-}. \tag{3.76}$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως η συνάρτηση $J_{\pm}^{(x)}(0,k)$ ικανοποιεί την αλματική συνθήκη

$$J_{-}^{(x)}(0,k) = J_{+}^{(x)}(0,k)J^{(x)}(0,k), \quad k \in \mathbb{R}^{\star} := \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.77}$$

Γράφοντας κατά στήλες

$$J_{\pm}^{(x)}(0,k) = \Big[[J_{\pm}^{(x)}]_1(0,k), \quad [J_{\pm}^{(x)}]_2(0,k) \Big] \tag{3.78}$$

έχουμε ότι η $[J_{+}^{(x)}]_2(0,k)$ είναι ολόμορφη (στο $\mathbb{C}^{+}$), ενώ η $[J_{+}^{(x)}]_1(0,k)$ έχει απλούς πόλους στις ρίζες $k = k_j$, $j = 1, \cdots, n$ της $a(k)$, και τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι (υποθέσαμε $b(k_j) \neq 0$)

$$Res\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{a(k)} \\ 0 \end{bmatrix}, \ k = k_j \} = \frac{1}{a'(k_j)b(k_j)} \begin{bmatrix} b(k) \\ a(k) \end{bmatrix}_{k=k_j}, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.79}$$

δηλαδή

$$Res\{ [J_{+}^{(x)}]_1(0,k), \ k = k_j \} = \frac{1}{a'(k_j)b(k_j)} [J_{+}^{(x)}]_2(0,k_j), \quad j = 1, \cdots, n. \tag{3.80}$$

Επίσης, η $[J_{-}^{(x)}]_1(0,k)$ είναι ολόμορφη (στο $\mathbb{C}^{-}$), ενώ η $[J_{-}^{(x)}]_2(0,k)$ έχει απλούς πόλους στις ρίζες $k = \overline{k}_j$, $j = 1, \cdots, n$ της $\overline{a}(k)$, με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα ($\overline{b}(\overline{k}_j) \neq 0$)

$$Res\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\overline{a}(k)} \end{bmatrix}, \ k = \overline{k}_j \} = \frac{1}{\overline{a'(k_j)b(k_j)}} \begin{bmatrix} \overline{a}(k) \\ \overline{b}(k) \end{bmatrix}_{k=\overline{k}_j}, \quad j = 1, \cdots, n \tag{3.81}$$

δηλαδή

$$Res\{ [J_{-}^{(x)}]_2(0,k), \ k = \overline{k}_j \} = \frac{1}{\overline{a'(k_j)b(k_j)}} [J_{-}^{(x)}]_1(0,\overline{k}_j), \quad j = 1, \cdots, n. \tag{3.82}$$

Επιπλέον, η $J_{\pm}^{(x)}(0,k)$ έχει μοναδιαία ορίζουσα. Ελέγχοντας και τη συμπεριφορά της $J_{\pm}^{(x)}(0,k)$ καθώς $k \to 0$ και καθώς $k \to \infty$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί το x-πρόβλημα Riemann-Hilbert για $x = 0$. Δηλαδή,

$$M_{\pm}^{(x)}(0,k) \equiv J_{\pm}^{(x)}(0,k). \tag{3.83}$$

Επομένως,

$$M_+^{(x)}(0,k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a(k)} & b(k) \\ 0 & a(k) \end{bmatrix}, \quad M_-^{(x)}(0,k) = \begin{bmatrix} \overline{a}(k) & 0 \\ \bar{b}(k) & \frac{1}{\overline{a}(k)} \end{bmatrix}. \tag{3.84}$$

Αντικαθιστώντας την (3.84a) στην (3.72) παίρνουμε

$$s_0(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a(k)} & b(k) \\ 0 & a(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\bar{b}(k)}{a(k)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a}(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & a(k) \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

και τελικά

$$a_0(k) = a(k), \quad b_0(k) = b(k) \tag{3.86}$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.24.

Η απόδειξή μας είναι βασισμένη στην εξίσωση (2.31), δηλαδή

$$\Psi_1(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k)e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}S(k) \tag{3.87}$$

υπολογισμένη για $x = 0$,

$$\Psi_1(0,t,k) = \Psi_2(0,t,k)e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}S(k). \tag{3.88}$$

Ορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_1(t,k)$ και $\Psi_2(t,k)$ ως εκείνες που προκύπτουν όταν στον ορισμό των $\Psi_1(0,t,k)$ και $\Psi_2(0,t,k)$ η $\widetilde{Q}(0,t,k)$ αντικατασταθεί από την $\widetilde{Q}_0(t,k)$.

Οι $\Psi_1(t,k)$ και $\Psi_2(t,k)$ θα έχουν τη μορφή

$$\Psi_1(t,k) = [\psi_1^\star(t,k), \psi_1(t,k)] \tag{3.89}$$

και

$$\Psi_2(t,k) = [\psi_2^\star(t,k), \psi_2(t,k)] \tag{3.90}$$

όπου $\psi_j^\star(t,k) := [\overline{\psi_{j2}(t,\overline{k})}, \overline{\psi_{j1}(t,\overline{k})}]^T$ για $\psi_j(t,k) = [\psi_{j1}(t,k), \psi_{j2}(t,k)]^T$, $j = 1,2$.

Παρατήρηση 3.26. Ας σημειωθεί ότι $\psi_2 \equiv \Phi$. Επίσης, η $\Psi_2(t,k)$ δεν θα πρέπει να συγχέεται με την $\Psi_2(x,k)$ που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια της απόδειξης του θεωρήματος 3.23. Για λόγους απλότητας χρησιμοποιήσαμε τον ίδιο συμβολισμό Ψ_2.

Οι $\Psi_1(t,k)$ και $\Psi_2(t,k)$ σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$\Psi_1(t,k) = \Psi_2(t,k)e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}S(k). \tag{3.91}$$

Ας σημειωθεί ότι, στην μεν (3.88) ο φασματικός πίνακας $S(k)$ συνδέεται με την $\widetilde{Q}(0,t,k)$, ενώ στην (3.91) ο $S(k)$ συνδέεται με την $\widetilde{Q}_0(t,k)$.

Οι ιδιότητες φραγής και αναλυτικότητας των $\Psi_1(t,k)$ και $\Psi_2(t,k)$ συνεπάγονται ότι, οι μεν ψ_1 και $\psi_2^\star$ είναι αναλυτικές και φραγμένες στην περιοχή D_{135}, οι δε $\psi_1^\star$ και ψ_2 είναι αναλυτικές και φραγμένες στην περιοχή D_{246}.

Ορίζουμε την τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση $M^{(t,0)}(t,k)$, όπου $k \in \mathbb{C} \setminus L$ ως εξής:

$$M^{(t,0)}(t,k) := \begin{cases} M_-^{(t,0)}(t,k) \equiv M_{(246)}^{(t,0)}(t,k) := \left(\psi_1^\star, \frac{\psi_2}{\overline{A}(k)}\right), & k \in D_{246}, \\ M_+^{(t,0)}(t,k) \equiv M_{(135)}^{(t,0)}(t,k) := \left(\frac{\psi_2^\star}{A(k)}, \psi_1\right), & k \in D_{135}. \end{cases} \tag{3.92}$$

Η $M^{(t,0)}(t,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus L$. Συμβολίσαμε με $M_+^{(t,0)}(t,k)$ τον περιορισμό της για $k \in D_{135}$ και με $M_-^{(t,0)}(t,k)$ τον περιορισμό της για $k \in D_{246}$.

Χρησιμοποιώντας τις (3.89) και (3.90), καθώς και το γεγονός ότι

$$e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}S(k) = \begin{bmatrix} \overline{A}(k) & e^{-8ik^3t}B(k) \\ e^{8ik^3t}\overline{B}(k) & A(k) \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

στην (3.91), και κατόπιν κατάλληλων αλγεβρικών χειρισμών, είμαστε σε θέση να αναδιατυπώσουμε την εξίσωση (3.91) μέσω των συναρτήσεων (3.92). Πιο συγκεκριμένα,

$$\left(\psi_1^\star, \frac{\psi_2}{\overline{A}(k)}\right) = \left(\frac{\psi_2^\star}{A(k)}, \psi_1\right) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{B(k)}{\overline{A}(k)}e^{-8ik^3t} \\ \frac{\overline{B}(k)}{A(k)}e^{8ik^3t} & \frac{1}{A(k)\overline{A}(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in L. \tag{3.94}$$

Λόγω των ορισμών των $M_+^{(t,0)}(t,k)$ και $M_-^{(t,0)}(t,k)$, καθώς και του ορισμού (3.31) του αλματικού πίνακα $J^{(t,0)}(t,k)$, η τελευταία έκφραση ισοδυναμεί με την αλματική συνθήκη (3.30).

Μελετάμε, τώρα, τους πόλους καθώς και τις αντίστοιχες συνθήκες ολοκληρωτικών υπολοίπων της $M^{(t,0)}(t,k)$. Γράφουμε τη συνάρτηση αυτή κατά στήλες,

$$M^{(t,0)}(t,k) = \left[[M^{(t,0)}]_1(t,k), \quad [M^{(t,0)}]_2(t,k)\right]. \tag{3.95}$$

Για $k \in D_{135}$ έχουμε

$$[M^{(t,0)}]_1(t,k) = \frac{\psi_2^\star(t,k)}{A(k)}, \quad [M^{(t,0)}]_2(t,k) = \psi_1(t,k). \tag{3.96}$$

Επομένως η $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ δεν έχει πόλους στην D_{135}, ενώ η $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες $\{K_j\}_{j=1}^{N^0}$ της $A(k)$ στην περιοχή αυτή. Τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j\right\} = \frac{\psi_2^\star(t,K_j)}{A'(K_j)}, \quad j = 1, \cdots, N^0. \tag{3.97}$$

Ανακαλούμε τώρα τις σχέσεις

$$\psi_1^\star = \overline{A}(k)\psi_2^\star + e^{8ik^3t}\overline{B}(k)\psi_2, \quad \psi_1 = e^{-8ik^3t}B(k)\psi_2^\star + A(k)\psi_2. \tag{3.98}$$

Για $k = K_j$ $j = 1, \cdots, N^0$ έχουμε $A(K_j) = 0$ και, εξ' υποθέσεως, $B(K_j) \neq 0$, οπότε από την (3.98b) για $k = K_j$ παίρνουμε

$$\psi_2^\star(t,K_j) = e^{8iK_j^3 t}\frac{\psi_1(t,K_j)}{B(K_j)}, \quad j=1,\cdots,N^0. \tag{3.99}$$

Από την τελευταία και την (3.97) καταλήγουμε στη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων (3.33).

Η εξαγωγή της (3.34) γίνεται με παρόμοιους χειρισμούς μεταξύ της (3.98a) και του ορισμού της $M_-^{(t,0)}(t,k)$.

Η εξαγωγή των (3.32) και (3.35) βασίζεται στον ορισμό της $M^{(t,0)}(t,k)$ και τη συμπεριφορά των $\Psi_1(t,k)$ και $\Psi_2(t,k)$ καθώς $k\to\infty$ και καθώς $k\to 0$.

Η εξαγωγή των (3.29) στηρίζεται στη μελέτη της συμπεριφοράς της $M^{(t,0)}(t,k)$ καθώς $k\to\infty$, βάσει του ορισμού της $M^{(t,0)}(t,k)$ και του γεγονότος ότι καθεμιά εκ των $\Psi_1(t,k)$ και $\Psi_2(t,k)$ ικανοποιεί το t-μέρος του ζεύγους Lax (βασισμένου στην $\widetilde{Q}_0(t,k)$).

Για να δείξουμε, τώρα, ότι η απεικόνιση $\widetilde{\mathbf{Q}}$ είναι η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\widetilde{\mathbf{S}}$, δηλαδή $\widetilde{\mathbf{Q}} = \widetilde{\mathbf{S}}^{-1}$, ας υποθέσουμε ότι, για δοσμένο ζεύγος φασματικών συναρτήσεων $\{A(k),B(k)\}$ ορίζουμε τις $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ μέσω της απεικόνισης $\widetilde{\mathbf{Q}}$, δηλ. οι $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ δίνονται από τις (3.29), όπου η $M^{(t,0)}(t,k)$ λύνει το $(t,0)$-πρόβλημα Riemann-Hilbert. Στη συνέχεια, ας ορίσουμε το ζεύγος φασματικών συναρτήσεων $\{A_0(k),B_0(k)\}$ ως εκείνων που ορίζονται από τις $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ μέσω του φασματικού μετασχηματισμού $\widetilde{\mathbf{S}}$, δηλαδή

$$[-e^{-8ik^3T}B_0(k),\overline{A_0(\bar{k})}]^T := \Phi(T,k), \tag{3.100}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\Phi(t,k)$ ορίζεται μέσω των $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\partial_t\Phi(t,k) + 4ik^3(I+\sigma_3)\Phi(t,k) = \widetilde{Q}_0(t,k)\Phi(t,k), \quad \Phi(0,k) = [0,1]^T. \tag{3.101}$$

Θα δείξουμε ότι

$$A_0(k) = A(k), \quad B_0(k) = B(k), \quad k\in\mathbb{C}^\star. \tag{3.102}$$

Κατ΄ αρχήν, η μέθοδος της ένδυσης (dressing method) εξασφαλίζει ότι η $M^{(t,0)}(t,k)$ ικανοποιεί το t-μέρος του ζεύγους Lax που αντιστοιχεί στις $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$, δηλαδή έχουμε

$$\Psi_t + 4ik^3[\sigma_3,\Psi] = \widetilde{Q}_0(t,k)\Psi \tag{3.103}$$

για $\Psi = M^{(t,0)}(t,k)$. Η ίδια, όμως, εξίσωση γνωρίζουμε ότι ικανοποιείται και από την $\Psi_1(t,k)$. Κατά συνέπεια, οι δύο λύσεις $M^{(t,0)}(t,k)$ και $\Psi_1(t,k)$ της εξίσωσης θα πρέπει να αλληλοσυνδέονται μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$\Psi_1(t,k) = M_+^{(t,0)}(t,k)e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}D_+(k), \tag{3.104}$$

για κάποιον κατάλληλο πίνακα $D_+(k)$ υπό προσδιορισμό.

Παίρνοντας $t=T$ στην τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\Psi_1(T,k) = I$ είμαστε σε θέση να εκφράσουμε τον $D_+(k)$ σαν:

$$D_+(k) = e^{4ik^3T\hat{\sigma}_3}[M_+^{(t,0)}(T,k)]^{-1}. \tag{3.105}$$

Επίσης, για τη δεύτερη στήλη ψ_1 της $\Psi_1(t,k)$ έχουμε

$$\psi_1(T,k) = [0,1]^T. \tag{3.106}$$

Τώρα θα προσδιορίσουμε την τιμή $\Psi_2(T,k)$. Από την (3.91) για $t=T$ και δοσμένου ότι $\Psi_1(T,k) = I$ έχουμε

$$\Psi_2(T,k) = [e^{-4ik^3T\hat{\sigma}_3}S(k)]^{-1} = e^{-4ik^3T\hat{\sigma}_3}[S(k)]^{-1}. \tag{3.107}$$

Από την κατά συνιστώσες μορφή του πίνακα $S(k)$ βρίσκουμε

$$\Psi_2(T,k) = \begin{bmatrix} A(k) & -e^{-8ik^3T}B(k) \\ -e^{8ik^3T}\overline{B}(k) & \overline{A}(k) \end{bmatrix}. \tag{3.108}$$

Από την (3.90) έχουμε

$$\psi_2^{\star}(T,k) = \begin{bmatrix} A(k) \\ -e^{8ik^3T}\overline{B}(k) \end{bmatrix}. \tag{3.109}$$

Στη συνέχεια, από τον ορισμό της $M_+^{(t,0)}(t,k)$ για $t=T$,

$$M_+^{(t,0)}(T,k) = \big(\frac{\psi_2^{\star}(T,k)}{A(k)}, \psi_1(T,k)\big) \tag{3.110}$$

και τις (3.106) και (3.109) παίρνουμε

$$M_+^{(t,0)}(T,k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{8ik^3T}\frac{\overline{B}(k)}{A(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.111}$$

και από την (3.105),

$$D_+(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}(k)}{A(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.112}$$

Αντικαθιστώντας τη μορφή αυτή του $D_+(k)$ στην (3.104) παίρνουμε

$$\Psi_1(t,k) = M_+^{(t,0)}(t,k)e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}(k)}{A(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.113}$$

Αναφορικά, τώρα, με τον ορισμό των $\{A_0(k), B_0(k)\}$, έχουμε ότι η $\Phi(0,k) \equiv \psi_2(0,k)$ δεν είναι παρά η δεύτερη στήλη της $\Psi_2(0,k)$. Δηλαδή

$$S_0(k) := \begin{bmatrix} \overline{A}_0(k) & B_0(k) \\ \overline{B}_0(k) & A_0(k) \end{bmatrix} = \Psi_2(0,k). \tag{3.114}$$

Θέτοντας $t=0$ στην (3.113) εκφράζουμε τον $S_0(k)$ σαν

$$S_0(k) = M_+^{(t,0)}(0,k)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}(k)}{A(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.115}$$

Απομένει ο προσδιορισμός του $M_+^{(t,0)}(0,k)$.

Αυτός μπορεί να γίνει παρατηρώντας πως το $(t,0)$-πρόβλημα Riemann-Hilbert στην περίπτωση $t=0$ μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή. Πράγματι, η αλματική συνθήκη γίνεται

$$M_-^{(t,0)}(0,k) = M_+^{(t,0)}(0,k)J^{(t,0)}(0,k), \quad k \in L \setminus \{0\} \tag{3.116}$$

με αλματικό πίνακα

$$J^{(t,0)}(0,k) := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{B(k)}{\overline{A}(k)} \\ \frac{\overline{B}(k)}{A(k)} & \frac{1}{A(k)\overline{A}(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in L \setminus \{0\}. \tag{3.117}$$

Ορίζουμε την τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση $J_\pm^{(t,0)}(0,k)$, $k \in \mathbb{C} \setminus L$, ως εξής:

$$J_+^{(t,0)}(0,k) := \begin{bmatrix} \frac{1}{A(k)} & B(k) \\ 0 & A(k) \end{bmatrix}, \quad k \in D_{135}, \tag{3.118}$$

$$J_-^{(t,0)}(0,k) := \begin{bmatrix} \overline{A}(k) & 0 \\ \overline{B}(k) & \frac{1}{\overline{A}(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in D_{246}. \tag{3.119}$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως η συνάρτηση $J_\pm^{(t,0)}(0,k)$ ικανοποιεί την αλματική συνθήκη

$$J_-^{(t,0)}(0,k) = J_+^{(t,0)}(0,k)J^{(t,0)}(0,k), \quad k \in L \setminus \{0\}. \tag{3.120}$$

Γράφοντας κατά στήλες

$$J_\pm^{(t,0)}(0,k) = \Big[[J_\pm^{(t,0)}]_1(0,k), \quad [J_\pm^{(t,0)}]_2(0,k) \Big] \tag{3.121}$$

έχουμε ότι η $[J_+^{(t,0)}]_2(0,k)$ είναι ολόμορφη (στο D_{135}), ενώ η $[J_+^{(t,0)}]_1(0,k)$ έχει απλούς πόλους στις ρίζες $k = K_j$, $j = 1, \cdots, N^0$ της $A(k)$, και τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι (υποθέσαμε $B(K_j) \neq 0$)

$$Res\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{A(k)} \\ 0 \end{bmatrix}, \ k = K_j \} = \frac{1}{A'(K_j)B(k_j)} \begin{bmatrix} B(k) \\ A(k) \end{bmatrix}_{k=K_j}, \quad j = 1, \cdots, N^0 \tag{3.122}$$

δηλαδή

$$Res\{ [J_+^{(t,0)}]_1(0,k), \ k = K_j \} = \frac{1}{A'(K_j)B(k_j)} [J_+^{(t,0)}]_2(0,K_j), \quad j = 1, \cdots, N^0. \tag{3.123}$$

Επίσης, η $[J_-^{(t,0)}]_1(0,k)$ είναι ολόμορφη (στο D_{246}), ενώ η $[J_-^{(t,0)}]_2(0,k)$ έχει απλούς πόλους στις ρίζες $k = \overline{K}_j$, $j = 1, \cdots, N^0$ της $\overline{A}(k)$, με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα ($\overline{B}(\overline{K}_j) \neq 0$)

$$Res\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\overline{A}(k)} \end{bmatrix}, \ k = \overline{K}_j \} = \frac{1}{\overline{\overline{A'(K_j)B(K_j)}}} \begin{bmatrix} \overline{a}(k) \\ \overline{B}(k) \end{bmatrix}_{k=\overline{K}_j}, \quad j = 1, \cdots, N^0 \tag{3.124}$$

δηλαδή

$$Res\{[J_{-}^{(t,0)}]_2(0,k),\ \ k=\overline{K}_j\} = \frac{1}{\overline{A'(K_j)B(K_j)}}[J_{-}^{(t,0)}]_1(0,\overline{K}_j), \quad j=1,\cdots,N^0. \tag{3.125}$$

Επιπλέον, η $J_{\pm}^{(t,0)}(0,k)$ έχει μοναδιαία ορίζουσα. Ελέγχοντας και τη συμπεριφορά της $J_{\pm}^{(t,0)}(0,k)$ καθώς $k\to 0$ και καθώς $k\to\infty$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί το $(t,0)$-πρόβλημα Riemann-Hilbert για $t=0$. Δηλαδή,

$$M_{\pm}^{(t,0)}(0,k) \equiv J_{\pm}^{(t,0)}(0,k). \tag{3.126}$$

Επομένως,

$$M_{+}^{(t,0)}(0,k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{A(k)} & B(k) \\ 0 & A(k) \end{bmatrix}, \quad M_{-}^{(t,0)}(0,k) = \begin{bmatrix} \overline{A}(k) & 0 \\ \overline{B}(k) & \frac{1}{\overline{A}(k)} \end{bmatrix}. \tag{3.127}$$

Αντικαθιστώντας την (3.127a) στην (3.115) παίρνουμε

$$S_0(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{A(k)} & B(k) \\ 0 & A(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}(k)}{A(k)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}(k) & B(k) \\ \overline{B}(k) & A(k) \end{bmatrix} \tag{3.128}$$

και τελικά

$$A_0(k) = A(k), \quad B_0(k) = B(k) \tag{3.129}$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.25.

Η απόδειξή μας είναι βασισμένη στην εξίσωση (2.32), δηλαδή

$$\Psi_4(x,t,k) = \Psi_3(x,t,k)e^{i[kL-\theta(x,t,k)]\hat{\sigma}_3}S_L(k) \tag{3.130}$$

υπολογισμένη για $x=L$,

$$\Psi_4(0,t,k) = \Psi_3(0,t,k)e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}S_L(k). \tag{3.131}$$

Ορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_4(t,k)$ και $\Psi_3(t,k)$ ως εκείνες που προκύπτουν όταν στον ορισμό των $\Psi_4(0,t,k)$ και $\Psi_3(0,t,k)$ η $\widetilde{Q}(L,t,k)$ αντικατασταθεί από την $\widetilde{Q}_L(t,k)$.

Οι $\Psi_4(t,k)$ και $\Psi_3(t,k)$ θα έχουν τη μορφή

$$\Psi_4(t,k) = [\psi_4^{\star}(t,k), \psi_4(t,k)] \tag{3.132}$$

και

$$\Psi_3(t,k) = [\psi_3^{\star}(t,k), \psi_3(t,k)] \tag{3.133}$$

όπου $\psi_j^{\star}(t,k) := [\overline{\psi_{j2}(t,\overline{k})}, \overline{\psi_{j1}(t,\overline{k})}]^T$ για $\psi_j(t,k) = [\psi_{j1}(t,k), \psi_{j2}(t,k)]^T$, $j=3,4$.

Παρατήρηση 3.27. Ας σημειωθεί ότι $\psi_3 \equiv \varphi$. Επίσης, η $\Psi_3(t,k)$ δεν θα πρέπει να συγχέεται με την $\Psi_3(x,k)$ που χρησιμοποιήθηκε στα πλαίσια της απόδειξης του θεωρήματος 3.23. Για λόγους απλότητας χρησιμοποιήσαμε τον ίδιο συμβολισμό Ψ_3.

Οι $\Psi_4(t,k)$ και $\Psi_3(t,k)$ σχετίζονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης

$$\Psi_4(t,k) = \Psi_3(t,k)e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}S_L(k). \tag{3.134}$$

Ας σημειωθεί ότι, στην μεν (3.131) ο φασματικός πίνακας $S_L(k)$ συνδέεται με την $\widetilde{Q}(L,t,k)$, ενώ στην (3.134) ο $S_L(k)$ συνδέεται με την $\widetilde{Q}_L(t,k)$.

Οι ιδιότητες φραγής και αναλυτικότητας των $\Psi_4(t,k)$ και $\Psi_3(t,k)$ συνεπάγονται ότι, οι μεν ψ_4 και $\psi_3^\star$ είναι αναλυτικές και φραγμένες στην περιοχή D_{135}, οι δε $\psi_4^\star$ και ψ_3 είναι αναλυτικές και φραγμένες στην περιοχή D_{246}.

Ορίζουμε την τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση $M^{(t,L)}(t,k)$, όπου $k \in \mathbb{C} \setminus L$ ως εξής:

$$M^{(t,L)}(t,k) := \begin{cases} M_-^{(t,L)}(t,k) \equiv M_{(246)}^{(t,L)}(t,k) := \left(\psi_4^\star, \frac{\psi_3}{\overline{A}_L(k)}\right), & k \in D_{246}, \\ M_+^{(t,L)}(t,k) \equiv M_{(135)}^{(t,L)}(t,k) := \left(\frac{\psi_3^\star}{A_L(k)}, \psi_4\right), & k \in D_{135}. \end{cases} \tag{3.135}$$

Η $M^{(t,L)}(t,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus L$. Συμβολίσαμε με $M_+^{(t,L)}(t,k)$ τον περιορισμό της για $k \in D_{135}$ και με $M_-^{(t,L)}(t,k)$ τον περιορισμό της για $k \in D_{246}$.

Χρησιμοποιώντας τις (3.132) και (3.133), καθώς και το γεγονός ότι

$$e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}S_L(k) = \begin{bmatrix} \overline{A}_L(k) & e^{-8ik^3t}B_L(k) \\ e^{8ik^3t}\overline{B}_L(k) & A_L(k) \end{bmatrix} \tag{3.136}$$

στην (3.134), και κατόπιν κατάλληλων αλγεβρικών χειρισμών, είμαστε σε θέση να αναδιατυπώσουμε την εξίσωση (3.134) μέσω των συναρτήσεων (3.135). Πιο συγκεκριμένα,

$$\left(\psi_4^\star, \frac{\psi_3}{\overline{A}_L(k)}\right) = \left(\frac{\psi_3^\star}{A_L(k)}, \psi_4\right) \begin{bmatrix} 1 & -\frac{B_L(k)}{\overline{A}_L(k)}e^{-8ik^3t} \\ \frac{\overline{B}_L(k)}{A_L(k)}e^{8ik^3t} & \frac{1}{A_L(k)\overline{A}_L(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in L. \tag{3.137}$$

Λόγω των ορισμών των $M_+^{(t,L)}(t,k)$ και $M_-^{(t,L)}(t,k)$, καθώς και του ορισμού (3.39) του αλματικού πίνακα $J^{(t,L)}(t,k)$, η τελευταία έκφραση ισοδυναμεί με την αλματική συνθήκη (3.38).

Μελετάμε, τώρα, τους πόλους καθώς και τις αντίστοιχες συνθήκες ολοκληρωτικών υπολοίπων της $M^{(t,L)}(t,k)$. Γράφουμε τη συνάρτηση αυτή κατά στήλες,

$$M^{(t,L)}(t,k) = \left[[M^{(t,L)}]_1(t,k), \quad [M^{(t,L)}]_2(t,k)\right]. \tag{3.138}$$

Για $k \in D_{135}$ έχουμε

$$[M^{(t,L)}]_1(t,k) = \frac{\psi_3^\star(t,k)}{A_L(k)}, \quad [M^{(t,L)}]_2(t,k) = \psi_4(t,k). \tag{3.139}$$

Επομένως η $[M^{(t,L)}]_2(t,k)$ δεν έχει πόλους στην D_{135}, ενώ η $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες $\{K_j^L\}_{j=1}^{N^L}$ της $A_L(k)$ στην περιοχή αυτή.

Επίσης, για $k \in D_{246}$ έχουμε

$$[M^{(t,L)}]_1(t,k) = \psi_4^\star(t,k), \quad [M^{(t,L)}]_2(t,k) = \frac{\psi_3(t,k)}{\overline{A}_L(k)}. \tag{3.140}$$

Επομένως η $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ δεν έχει πόλους στην D_{246}, ενώ η $[M^{(t,L)}]_2(t,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες $\{\overline{K}_j^L\}_{j=1}^{N^L}$ της $\overline{A}_L(k)$ στην περιοχή αυτή.

Κάτω από την υπόθεση $B_L(K_j^L) \neq 0$, $j = 1, \cdots, N^L$, που έχει ήδη γίνει, η εξαγωγή των συνθηκών (3.41) και (3.42) για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα γίνεται τελείως αντίστοιχα με την εξαγωγή των (3.33) και (3.34), που έγινε στα πλαίσια της απόδειξης του θεωρήματος (3.24).

Η εξαγωγή των (3.40) και (3.43) βασίζεται στον ορισμό της $M^{(t,L)}(t,k)$ και τη συμπεριφορά των $\Psi_4(t,k)$ και $\Psi_3(t,k)$ καθώς $k \to \infty$ και καθώς $k \to 0$.

Η εξαγωγή των (3.37) στηρίζεται στη μελέτη της συμπεριφοράς της $M^{(t,L)}(t,k)$ καθώς $k \to \infty$, βάσει του ορισμού της $M^{(t,L)}(t,k)$ και του γεγονότος ότι καθεμιά εκ των $\Psi_4(t,k)$ και $\Psi_3(t,k)$ ικανοποιεί το t-μέρος του ζεύγους Lax (βασισμένου στην $\widetilde{Q}_L(t,k)$).

Για να δείξουμε, τώρα, ότι η απεικόνιση $\widetilde{\mathbf{Q}}^L$ είναι η αντίστροφη της φασματικής απεικόνισης $\widetilde{\mathbf{S}}^L$, δηλαδή $\widetilde{\mathbf{Q}}^L = [\widetilde{\mathbf{S}}^L]^{-1}$, ας υποθέσουμε ότι, για δοσμένο ζεύγος φασματικών συναρτήσεων $\{A_L(k), B_L(k)\}$ ορίζουμε τις $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ μέσω της απεικόνισης $\widetilde{\mathbf{Q}}^L$, δηλ. οι $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ δίνονται από τις (3.37), όπου η $M^{(t,L)}(t,k)$ λύνει το (t,L)-πρόβλημα Riemann-Hilbert. Στη συνέχεια, ας ορίσουμε το ζεύγος φασματικών συναρτήσεων $\{A_0^L(k), B_0^L(k)\}$ ως εκείνων που ορίζονται από τις $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ μέσω του φασματικού μετασχηματισμού $\widetilde{\mathbf{S}}^L$, δηλαδή

$$[-e^{-8ik^3T}B_0^L(k), \overline{A_0^L(\overline{k})}]^T := \varphi(T,k), \tag{3.141}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\varphi(t,k)$ ορίζεται μέσω των $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ακόλουθου γραμμικού προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\partial_t\varphi(t,k) + 4ik^3(I+\sigma_3)\varphi(t,k) = \widetilde{Q}_L(t,k)\varphi(t,k), \quad \varphi(0,k) = [0,1]^T. \tag{3.142}$$

Θα δείξουμε ότι

$$A_0^L(k) = A_L(k), \quad B_0^L(k) = B_L(k), \quad k \in \mathbb{C}^\star. \tag{3.143}$$

Κατ' αρχήν, η μέθοδος της ένδυσης (dressing method) εξασφαλίζει ότι η $M^{(t,L)}(t,k)$ ικανοποιεί το t-μέρος του ζεύγους Lax που αντιστοιχεί στις $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$, δηλαδή έχουμε

$$\Psi_t + 4ik^3[\sigma_3, \Psi] = \widetilde{Q}_L(t,k)\Psi \tag{3.144}$$

για $\Psi = M^{(t,L)}(t,k)$. Η ίδια, όμως, εξίσωση γνωρίζουμε ότι ικανοποιείται και από την $\Psi_4(t,k)$. Κατά συνέπεια, οι δύο λύσεις $M^{(t,L)}(t,k)$ και $\Psi_4(t,k)$ της εξίσωσης θα πρέπει να αλληλοσυνδέονται μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$\Psi_4(t,k) = M_+^{(t,L)}(t,k)e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}H_+(k), \tag{3.145}$$

για κάποιον κατάλληλο πίνακα $H_+(k)$ υπό προσδιορισμό.

Παίρνοντας $t = T$ στην τελευταία σχέση και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\Psi_4(T,k) = I$ είμαστε σε θέση να εκφράσουμε τον $H_+(k)$ σαν:

$$H_+(k) = e^{4ik^3T\hat{\sigma}_3}[M_+^{(t,L)}(T,k)]^{-1}. \tag{3.146}$$

Επίσης, για τη δεύτερη στήλη ψ_4 της $\Psi_4(t,k)$ έχουμε

$$\psi_4(T,k) = [0,1]^T. \tag{3.147}$$

Τώρα θα προσδιορίσουμε την τιμή $\Psi_3(T,k)$. Από την (3.134) για $t = T$ και δοσμένου ότι $\Psi_4(T,k) = I$ έχουμε

$$\Psi_3(T,k) = [e^{-4ik^3T\hat{\sigma}_3}S_L(k)]^{-1} = e^{-4ik^3T\hat{\sigma}_3}[S_L(k)]^{-1}. \tag{3.148}$$

Από την κατά συνιστώσες μορφή του πίνακα $S_L(k)$ βρίσκουμε

$$\Psi_3(T,k) = \begin{bmatrix} A_L(k) & -e^{-8ik^3T}B_L(k) \\ -e^{8ik^3T}\overline{B}_L(k) & \overline{A}_L(k) \end{bmatrix}. \tag{3.149}$$

Από την (3.133) έχουμε

$$\psi_3^\star(T,k) = \begin{bmatrix} A_L(k) \\ -e^{8ik^3T}\overline{B}_L(k) \end{bmatrix}. \tag{3.150}$$

Στη συνέχεια, από τον ορισμό της $M_+^{(t,L)}(t,k)$ για $t = T$,

$$M_+^{(t,L)}(T,k) = \big(\frac{\psi_3^\star(T,k)}{A_L(k)}, \psi_4(T,k)\big) \tag{3.151}$$

και τις (3.147) και (3.150) παίρνουμε

$$M_+^{(t,L)}(T,k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{8ik^3T}\frac{\overline{B}_L(k)}{A_L(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.152}$$

και από την (3.146),

$$H_+(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}_L(k)}{A_L(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.153}$$

Αντικαθιστώντας τη μορφή αυτή του $H_+(k)$ στην (3.145) παίρνουμε

$$\Psi_4(t,k) = M_+^{(t,L)}(t,k)e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}_L(k)}{A_L(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.154}$$

Αναφορικά, τώρα, με τον ορισμό των $\{A_0^L(k), B_0^L(k)\}$, έχουμε ότι η $\varphi(0,k) \equiv \psi_3(0,k)$ δεν είναι παρά η δεύτερη στήλη της $\Psi_3(0,k)$. Δηλαδή

$$S_0^L(k) := \begin{bmatrix} \overline{A}_0^L(k) & B_0^L(k) \\ \overline{B}_0^L(k) & A_0^L(k) \end{bmatrix} = \Psi_3(0,k). \tag{3.155}$$

Θέτοντας $t=0$ στην (3.154) εκφράζουμε τον $S_0^L(k)$ σαν

$$S_0^L(k) = M_+^{(t,L)}(0,k) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}_L(k)}{A_L(k)} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.156}$$

Απομένει ο προσδιορισμός του $M_+^{(t,L)}(0,k)$.

Αυτός μπορεί να γίνει παρατηρώντας πως το (t,L)-πρόβλημα Riemann-Hilbert στην περίπτωση $t=0$, όπως και το $(t,0)$-πρόβλημα Riemann-Hilbert στην περίπτωση $t=0$, μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή. Πράγματι, η αλματική συνθήκη γίνεται

$$M_-^{(t,L)}(0,k) = M_+^{(t,L)}(0,k) J^{(t,L)}(0,k), \quad k \in L \setminus \{0\} \tag{3.157}$$

με αλματικό πίνακα

$$J^{(t,L)}(0,k) := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{B_L(k)}{\overline{A}_L(k)} \\ \frac{\overline{B}_L(k)}{A_L(k)} & \frac{1}{A_L(k)\overline{A}_L(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in L \setminus \{0\}. \tag{3.158}$$

Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 3.24, η μοναδική λύση του (t,L)-προβλήματος Riemann-Hilbert για $t=0$ είναι

$$M_\pm^{(t,L)}(0,k) \equiv J_\pm^{(t,L)}(0,k), \tag{3.159}$$

όπου η τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση $J_\pm^{(t,L)}(0,k)$, $k \in \mathbb{C} \setminus L$, ορίζεται ως εξής:

$$J_+^{(t,L)}(0,k) := \begin{bmatrix} \frac{1}{A_L(k)} & B_L(k) \\ 0 & A_L(k) \end{bmatrix}, \quad k \in D_{135}, \tag{3.160}$$

$$J_-^{(t,L)}(0,k) := \begin{bmatrix} \overline{A}_L(k) & 0 \\ \overline{B}_L(k) & \frac{1}{\overline{A}_L(k)} \end{bmatrix}, \quad k \in D_{246}. \tag{3.161}$$

Επομένως,

$$M_+^{(t,L)}(0,k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_L(k)} & B_L(k) \\ 0 & A_L(k) \end{bmatrix}, \quad M_-^{(t,L)}(0,k) = \begin{bmatrix} \overline{A}_L(k) & 0 \\ \overline{B}_L(k) & \frac{1}{\overline{A}_L(k)} \end{bmatrix}. \tag{3.162}$$

Αντικαθιστώντας την (3.162a) στην (3.156) παίρνουμε

$$S_0^L(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_L(k)} & B_L(k) \\ 0 & A_L(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\overline{B}_L(k)}{A_L(k)} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_L(k) & B_L(k) \\ \overline{B}_L(k) & A_L(k) \end{bmatrix} \tag{3.163}$$

και τελικά

$$A_0^L(k) = A_L(k), \quad B_0^L(k) = B_L(k), \tag{3.164}$$

όπως θέλαμε να δείξουμε.

3.4 Η Ολική Σχέση (Global Relation).

Θα δείξουμε ότι οι έξι βασικές φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $A_L(k)$ και $B_L(K)$, των οποίων ο ορισμός βασίζεται στις αρχικές και συνοριακές τιμές της άγνωστης λύσης του ΠΑΣΤ, *δεν* είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Απεναντίας, ικανοποιούν μια συγκεκριμένη αλγεβρική σχέση, την οποία, σύμφωνα και με τις υπάρχουσες αναφορές, θα ονομάζουμε Ολική Σχέση (global relation).

Προκειμένου να εξαγάγουμε την ολική σχέση, ανακαλούμε ότι η διαφορική 1-μορφή που ορίζεται από την έκφραση (7.18) είναι ακριβής. Ας συμβολίσουμε με C την κλειστή καμπύλη που αποτελεί το σύνορο $\{0 < x < L, \quad 0 < t < T\}$, το οποίο θεωρούμε προσανατολισμένο κατά την ορθή φορά, δηλ. αντίθετα με τη φορά κίνησης των δεικτών του ωρολογίου. Ολοκληρώνοντας την 1-μορφή Υ κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C κι εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green παίρνουμε

$$\int_C \Upsilon(x,t,k) = 0. \tag{3.165}$$

Πιο αναλυτικά, η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί σαν:

$$\begin{aligned}
&\int_0^L e^{ik\xi\hat{\sigma}_3} Q(\xi,0,k)\Psi(\xi,0,k)d\xi + e^{ikL\hat{\sigma}_3}\int_0^T e^{4ik^3\tau\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}(L,\tau,k)\Psi(L,\tau,k)d\tau \\
&-e^{4ik^3T\hat{\sigma}_3}\int_0^L e^{ik\xi\hat{\sigma}_3} Q(\xi,T,k)\Psi(\xi,T,k)d\xi - \int_0^T e^{4ik^3\tau\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}(0,\tau,k)\Psi(0,\tau,k)d\tau \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.166}$$

Αν στην τελευταία σχέση κάνουμε την αντικατάσταση $\Psi = \Psi_3$ και κάνουμε κατάλληλη χρήση των ολοκληρωτικών σχέσεων στις οποίες οι φασματικοί πίνακες $s(k)$, $S(k)$ και $S_L(k)$ υπακούουν, οδηγούμαστε τελικά στην ακόλουθη εξίσωση:

$$-I + S^{-1}(k)s(k)\{e^{ikL\hat{\sigma}_3}S_L(k)\} + e^{4ik^3T\hat{\sigma}_3}\int_0^L e^{ik\xi\hat{\sigma}_3}(Q\Psi_4)(\xi,T,k)d\xi = 0. \tag{3.167}$$

Αν, τώρα, γράψουμε τους πίνακες $s(k)$, $S(k)$ κα $S_L(k)$ κατά συνιστώσες και θεωρήσουμε το (12)-στοιχείο της προκύπτουσας εξίσωσης, παίρνουμε:

$$(aA_L + \overline{b}e^{2ikL}B_L)B - (bA_L + \overline{a}e^{2ikL}B_L)A = e^{8ik^3T}c(k), \quad k \in \mathbb{C}^\star \tag{3.168}$$

όπου η φασματική συνάρτηση $c(k)$ ορίζεται σαν

$$\begin{aligned} c(k): &= -\Big[\int_0^L e^{ik\xi\hat{\sigma}_3}(Q\Psi_4)(\xi,T,k)d\xi\Big]_{12} \\ &\equiv -\int_0^L e^{2ik\xi}(Q\Psi_4)_{12}(\xi,T,k)d\xi. \end{aligned} \tag{3.169}$$

Ας σημειωθεί ότι η $c(k)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση του $k \in \mathbb{C}^{\star}$. Επιπλέον,

$$c(k) = \begin{cases} O\big(\frac{1}{k}\big), & k \to \infty, \quad Imk > 0, \\ O\big(\frac{1+e^{2ikL}}{k^2}\big), & k \to \infty, \quad Imk < 0, \\ \frac{i\mu_c}{k} + O(1), & k \to 0, \quad \mu_c \in \mathbb{R} \quad \text{κατάλληλη σταθερή}. \end{cases} \tag{3.170}$$

Η σχέση (3.168) είναι η επιθυμητή *ολική σχέση (global relation).*

Παρατήρηση 3.28. Στην περίπτωση $T = \infty$ η ολική σχέση γίνεται

$$(aA_L + \bar{b}e^{2ikL}B_L)B - (bA_L + \bar{a}e^{2ikL}B_L)A = 0, \quad k \in D_{135}. \tag{3.171}$$

Ορισμός 3.29. (Αποδεκτά σύνολα συναρτήσεων).

Έστω ότι οι συναρτήσεις $q_0(x)$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$, και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$, όπου $0 \le x \le L$, $0 \le t \le T$, είναι δοσμένες, ομαλές και τέτοιες ώστε $(\partial_x^j q_0)(0) = g_j(0)$, $(\partial_x^j q_0)(L) = f_j(0)$, $j = 0, 1, 2$.

Έστω, επίσης, ότι οι φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $A_L(k)$, $B_L(k)$ ορίζονται με βάση τις $q_0(x)$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$, και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ σύμφωνα με τους ορισμούς των φασματικών συναρτήσεων που έχουν ήδη δοθεί.

Ας υποθέσουμε, τέλος, ότι οι έξι αυτές φασματικές συναρτήσεις ικανοποιούν την ολική σχέση (3.168) για κάποια συνάρτηση $c(k)$ η οποία είναι αναλυτική για $k \in \mathbb{C}^{\star}$ και ικανοποιεί τις συνθήκες (3.170).

Τότε θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ σχηματίζουν ένα *αποδεκτό σύνολο συναρτήσεων ως προς την (admissible set of functions with respect to)* $q_0(x)$. (Στην περίπτωση $T = \infty$ ο ορισμός *δεν* συμπεριλαμβάνει αναφορά στην $c(k)$).

Κεφάλαιο 4

Από το πρόβλημα Riemann-Hilbert στο πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών.

4.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο 2 είδαμε ότι η ταυτόχρονη φασματική ανάλυση του ζεύγους Lax, αναφορικά με το σύνορο της περιοχής $[0,L]\times[0,T]$, μας οδηγεί στη διατύπωση ενός προβλήματος Riemann-Hilbert. Η διαδικασία αυτή, που υλοποιήθηκε κάτω από την *υπόθεση ότι το υπό μελέτη πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών είναι επιλύσιμο*, μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη λύση $q(x,t)$ του ΠΑΣΤ μέσω της λύσης $M(x,t,k)$ του προβλήματος RH, όταν, βέβαια, η τελευταία υπάρχει. Η διατύπωση του προβλήματος RH στηρίζεται σε μια εξάδα συναρτήσεων της φασματικής παραμέτρου, $\{a(k),b(k),A(k),B(k),A_L(k),B_L(k)\}$, που ονομάστηκαν *φασματικές συναρτήσεις*. Οι τελευταίες, με τη σειρά τους, εξαρτώνται από την επτάδα *αρχικών και συνοριακών τιμών* $\{q(x,0)\}$, $\{\partial_x^j q(0,t)\}_{j=0}^2$, $\{\partial_x^j q(L,t)\}_{j=0}^2$, όπου $x\in[0,L]$, $t\in[0,T]$.

Στο παρόν κεφάλαιο διερευνούμε εκείνο το πρόβλημα RH, οι φασματικές συναρτήσεις του οποίου είναι εκείνες που ορίζονται βάσει των συναρτήσεων $\{q_0(x),\ x\in[0,L],\ g_j(t),\ f_j(t),\ t\in[0,T],\ j=0,1,2\}$. Ο ορισμός αυτός των φασματικών συναρτήσεων δόθηκε στο εδάφιο 3.2. Οι επτά αυτές συναρτήσεις *δεν μπορούν να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους*. Πράγματι, στο εδάφιο 3.4 εδείχθη ότι δεν μπορούν να προκαθοριστούν αυθαίρετα, αλλά έτσι που οι αντίστοιχες φασματικές συναρτήσεις να ικανοποιούν μια αλγεβρική εξίσωση που ονομάστηκε *ολική σχέση (global relation)*. Ακριβέστερα, στο κεφάλαιο 7 θα δείξουμε ότι η ολική σχέση εκφράζει ένα σύνολο *τριών περιορισμών* που πρέπει να ικανοποιούνται από τις φασματικές συναρτήσεις. Δηλαδή, οι επτά συναρτήσεις $\{q_0(x),\ \ g_j(t),\ \ f_j(t),\ \ j=0,1,2\}$ είναι συμβατές μεταξύ τους μόνο στην περίπτωση κατά την οποία ικανοποιούνται οι τρείς αυτοί περιορισμοί (σε κάθε άλλη περίπτωση *δεν* οδηγούν σε ένα επιλύσιμο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών). Επομένως μόνο τέσσερις από αυτές μπορούν να καθοριστούν ανεξάρτητα μεταξύ τους, για περεταίρω εξηγήσεις επ΄ αυτού παραπέμπουμε στο κεφάλαιο 7.

Στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα του εδαφίου 3.3, αναφορικά με την αντιστροφή των φασματικών απεικονίσεων. Δείχνουμε ότι, αν οι επτά συναρτήσεις $\{q_0(x),\ g_j(t),\ f_j(t),\ j=0,1,2\}$ είναι τέτοιες που να ικανοποιείται η ολική σχέση, τότε η συνάρτηση $q(x,t)$, που προκύπτει από την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης $M(x,t,k)$ του RH, όταν η τελευταία υπάρχει, *είναι πράγματι λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών.* Επιπλέον παρουσιάζουμε δύο ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για την $q(x,t)$ μέσω της $M(x,t,k)$. Τετοιες αναπαραστάσεις είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την περαιτέρω μελέτη των ιδιοτήτων της λύσης $q(x,t)$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών, όπως λ.χ. η ασυμπτωτική συμπεριφορά της για μεγάλες τιμές του χρόνου t.

Ας σημειωθεί ότι μια διερεύνηση της επιλυσιμότητας του προβλήματος RH παρουσιάζεται ξεχωριστά στο κεφάλαιο 5.

Το επόμενο εδάφιο περιλαμβάνει την παρουσίαση και την απόδειξη του βασικού αποτελέσματος του κεφαλαίου αυτού, που είναι το θεώρημα 4.30.

4.2 Παρουσίαση του βασικού θεωρήματος.

Το επόμενο θεώρημα συνιστά το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού.

Θεώρημα 4.30. *(Το Πρόβλημα Riemann-Hilbert).*

Έστω ότι οι συναρτήσεις $q_0(x)$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$, $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$, *με* $0 \le x \le L$, $0 \le t \le T$ *είναι δοσμένες, ομαλές και ικανοποιούν τις συνθήκες συμβατότητας* $(\partial_x^j q_0)(0) = g_j(0)$, $(\partial_x^j q_0)(L) = f_j(0)$, $j = 0,1,2$.

Έστω ότι οι φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $A_L(k)$ *και* $B_L(k)$ *ορίζονται με βάση τις* q_0, g_j, f_j *σύμφωνα με τους ορισμούς των φασματικών απεικονίσεων που έχουν ήδη δοθεί.*

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ *και* $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ *σχηματίζουν ένα αποδεκτό σύνολο συναρτήσεων ως προς την* $q_0(x)$.

Ορίζουμε τις φασματικές συναρτήσεις $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $d(k)$, $\delta(k)$, $\Delta(k)$, $D(k)$, $\Gamma(k)$, $r(k)$, $R(k)$ *και τις σταθερές* $c_j^{(1)}$ *και* $c_j^{(2)}$ *σύμφωνα με τις εξισώσεις (2.76).*

Ας υποθέσουμε ότι:

• *Η φασματική συνάρτηση* $\alpha(k)$ *έχει το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος από πόλους,* $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}$, *όλοι εκ των οποίων είναι απλοί.*

• *Η φασματική συνάρτηση* $d(k)$ *έχει το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος από πόλους,* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2}$, *όλοι εκ των οποίων είναι απλοί.*

• *Οι υποθέσεις της Πρότασης 2.1 πληρούνται.*

Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα Riemann-Hilbert για την 2×2*-συνάρτηση-πίνακα* $M(x,t,k)$ *που ορίζεται σύμφωνα με τις ιδιότητες 1 - 6 της Πρότασης 2.1 έχει μία και μοναδική λύση* $M(x,t,k)$ *για όλα τα* $(x,t)\in\Omega$.

Τότε:

(i). Η συνάρτηση $q(x,t)$ *που ορίζεται από το όριο*

$$q(x,t) := -2i\partial_x \lim_{k\to\infty}\left[kM_{22}(x,t,k)\right] \equiv -\lim_{k\to\infty}\left[4k^2 M_{12}(x,t,k)\right] \tag{4.1}$$

ικανοποιεί την εξίσωση KdV.

(ii). Η συνάρτηση $q(x,t)$ έχει αρχικές τιμές:

$$q(x,0)=q_0(x), \quad 0\le x\le L \tag{4.2}$$

και συνοριακές τιμές:

$$(\partial_x^j q)(0,t)=g_j(t), \quad (\partial_x^j q)(L,t)=g_j(t), \quad j=0,1,2, \quad 0\le t\le T. \tag{4.3}$$

(iii). Η λύση $q(x,t)$ του προβλήματος Αρχικών-Συνοριακών Τιμών επιδέχεται τις ακόλουθες δύο ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις μέσω της λύσης του προβλήματος Riemann-Hilbert, καθεμιά από τις οποίες ενσωματώνει τόσο το συνεχές, όσο και το διακριτό φάσμα. Η πρώτη ολοκληρωτική αναπαράσταση είναι:

$$\begin{aligned}
&q(x,t)=\\
=\;& -2i\sum_{j=1}^{N_1}\overline{c_j^{(1)}}e^{-2i\bar\nu_j x-8i\bar\nu_j^3 t}(\partial_x-2i\bar\nu_j)M_{21}(x,t,\bar\nu_j)\\
-\;& 2i\sum_{j=1}^{N_2}\overline{c_j^{(2)}}e^{-2i\bar\lambda_j x-8i\bar\lambda_j^3 t}(\partial_x-2i\bar\lambda_j)M_{21}(x,t,\bar\lambda_j)\\
+\;& \frac{1}{\pi}\int_{L_{45}}\left\{\left[1-\overline{R}(k)\right]\partial_x M_{22}^{+}(x,t,k)+\Gamma(k)e^{-2ikx-8ik^3t}(\partial_x-2ik)M_{21}^{+}(x,t,k)\right\}dk\\
+\;& \frac{1}{\pi}\int_{L_{03}}\left\{r(k)e^{-2ikx-8ik^3t}(\partial_x-2ik)M_{21}^{+}(x,t,k)+|r(k)|^2\partial_x M_{22}^{+}(x,t,k)\right\}dk\\
+\;& \frac{1}{\pi}\int_{L_{12}}\left\{\left[1-R(k)\right]\partial_x M_{22}^{+}(x,t,k)-\Delta(k)e^{-2ikx-8ik^3t}(\partial_x-2ik)M_{21}^{+}(x,t,k)\right\}dk.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Η δεύτερη ολοκληρωτική αναπαράσταση είναι:

$$\begin{aligned}
&q(x,t)=\\
=\;& 4(-1)^{N_1+N_2+1}[A_1(S_1+S_0')+A_2(S_2+S_0')+\cdots+A_{N_1}(S_{N_1}+S_0')\\
+\;& A_1'(S_0+S_1')+A_2'(S_0+S_2')+\cdots+A_{N_2}'(S_0+S_{N_2}')]\\
-\;& \frac{2i}{\pi}\int_{L_{45}}\left\{k\left[1-\overline{R}(k)\right]M_{12}^{+}(x,t,k)+k\overline{\Gamma}(k)e^{-2ikx-8ik^3t}M_{11}^{+}(x,t,k)\right\}dk\\
-\;& \frac{2i}{\pi}\int_{L_{03}}\left\{k|r(k)|^2M_{12}^{+}(x,t,k)+k\overline{r}(k)e^{-2ikx-8ik^3t}M_{11}^{+}(x,t,k)\right\}dk\\
+\;& \frac{2i}{\pi}\int_{L_{12}}\left\{k\left[1-R(k)\right]M_{12}^{+}(x,t,k)-k\Delta(k)e^{-2ikx-8ik^3t}M_{11}^{+}(x,t,k)\right\}dk
\end{aligned} \tag{4.5}$$

όπου:

$$S_0:=\sum_{j=1}^{N_1}\overline{\nu}_j, \quad S_0':=\sum_{j=1}^{N_2}\overline{\lambda}_j,$$

$$\begin{aligned}
S_i &:= S_0 + S_0' - \overline{\nu}_i, \quad i = 1, ..., N_1, \\
S_i' &:= S_0 + S_0' - \overline{\lambda}_i, \quad i = 1, \ldots, N_2, \\
A_j &:= -\overline{c_j^{(1)}} e^{-2i\overline{\nu}_j x - 8i\overline{\nu}_j^3 t} M_{11}(x, t, \overline{\nu}_j), \quad j = 1, \ldots, N_1, \\
A_j' &:= -\overline{c_j^{(2)}} e^{-2i\overline{\lambda}_j x - 8i\overline{\lambda}_j^3 t} M_{11}(x, t, \overline{\lambda}_j), \quad j = 1, \ldots, N_2.
\end{aligned}$$

Η δεύτερη ολοκληρωτική αναπαράσταση ισχύει κάτω από την επιπλέον υπόθεση ότι οι ακόλουθες δύο συνθήκες ικανοποιούνται. Η πρώτη συνθήκη είναι:

$$\begin{aligned}
& \int_{L_{45}} \left\{ [1 - \overline{R}(k)] M_{12}^+(x, t, k) + \overline{\Gamma}(k) e^{-2ikx - 8ik^3 t} M_{11}^+(x, t, k) \right\} dk \\
+ & \int_{L_{03}} \left\{ |r(k)|^2 M_{12}^+(x, t, k) + \overline{r}(k) e^{-2ikx - 8ik^3 t} M_{11}^+(x, t, k) \right\} dk \\
+ & \int_{L_{12}} \left\{ [1 - R(k)] M_{12}^+(x, t, k) - \Delta(k) e^{-2ikx - 8ik^3 t} M_{11}^+(x, t, k) \right\} dk \\
= & \ 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

και η δεύτερη συνθήκη είναι:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \overline{c_j^{(1)}} e^{-2i\overline{\nu}_j - 8i\overline{\nu}_j^3} [M(x, t, \overline{\nu}_j)]_1 \\
& + (-1)^{N_2} \sum_{j=1}^{N_2} \overline{c_j^{(2)}} e^{-2i\overline{\lambda}_j - 8i\overline{\lambda}_j^3} [M(x, t, \overline{\lambda}_j)]_1 \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.30.

• **Μονοσήμαντη επιλυσιμότητα του προβλήματος Riemann-Hilbert.** Μια διερεύνηση του μονοσήμαντου της επιλυσιμότητας του προβλήματος Riemann-Hilbert δίνεται ξεχωριστά στο επόμενο κεφάλαιο.

• **Απόδειξη του ότι η $q(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση KdV.**

Αυτό χρησιμοποιεί επιχειρήματα της λεγόμενης *μεθόδου της ένδυσης (dressing method)*, βλ. εδάφιο 1.5 ([113]). Μπορεί να αποδειχθεί απ' ευθείας ότι η $M(x,t,k)$ (η μοναδική λύση του προβλήματος Riemann-Hilbert) και η $q(x,t)$ (όπως ορίστηκε από τη σχέση (4.1)) ικανοποιούν και τις δύο εξισώσεις του ζεύγους Lax, και κατά συνέπεια η $q(x,t)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης KdV.

• **Απόδειξη ότι $q(x,0) = q_0(x)$.**

Ο ορισμός (4.1) μας παρέχει έναν τύπο για την $q(x,0)$ μέσω της $M(x,0,k)$. Αυτός ταυτίζεται με τον τύπο (3.21), εφόσον οι ποσότητες ($q_0(x)$, $M^{(x)}(x,k)$) αντικατασταθούν από τις ($q(x,0)$, $M(x,0,k)$).

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση ανάμεσα στα προβλήματα Riemann-Hilbert που ικανοποιούνται από τις $M(x,0,k)$ και $M^{(x)}(x,k)$.

Πράγματι, ας ορίσουμε την $M^{(x)}(x,k)$ μέσω της $M(x,0,k)$ από τον τύπο

$$M^{(x)}(x,k) = M(x,0,k)P^{(x)}(x,k) \tag{4.8}$$

όπου ο πίνακας $P^{(x)}(x,k)$ δίνεται από την έκφραση

$$P^{(x)}(x,k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{1}{R(k)} & e^{-2ikx}\Delta(k) \\ 0 & R(k) \end{bmatrix}, & k \in D_{13} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -e^{2ikx}\frac{\Gamma(k)}{R(k)} & 1 \end{bmatrix}, & k \in D_2 \\ \begin{bmatrix} \overline{R}(k) & 0 \\ e^{2ikx}\overline{\Delta}(k) & \frac{1}{\overline{R}(k)} \end{bmatrix}, & k \in D_{46} \\ \begin{bmatrix} 1 & -e^{-2ikx}\frac{\overline{\Gamma}(k)}{\overline{R}(k)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & k \in D_5. \end{cases} \tag{4.9}$$

Τότε θα δείξουμε ότι η $M^{(x)}(x,k)$ είναι η (μοναδική) λύση του x-προβλήματος Riemann-Hilbert (x-RH) που περιγράφεται στην παράγραφο 3.3.

Εκ κατασκευής έχουμε ότι η $M^{(x)}(x,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση-πίνακας που ικανοποιεί την αλματική συνθήκη (3.22)-(3.23). Επιπλέον, η σχέση (2.87) μαζί με την συμπεριφορά των φασματικών συναρτήσεων στο άπειρο συνεπάγονται ότι η συμπεριφορά της $M^{(x)}(x,k)$ στο άπειρο δίνεται από τη σχέση (3.24). Επιπλέον, η (2.84) συνυπολογιζόμενη με τη συμπεριφορά των φασματικών συναρτήσεων καθώς $k \to 0$ κατευθείαν μας οδηγούν στη συμπεριφορά (3.27).

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι πόλοι και τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $M^{(x)}(x,k)$ είναι ακριβώς εκείνα που περιγράφουμε στη διατύπωση του x-προβλήματος Riemann-Hilbert.

(i) $k \in D_{13}$. Γράφοντας την $M(x,t,k)$ κατά στήλες, $M = ([M]_1, [M]_2)$, η σχέση (4.8) μπορεί να αποσυντεθεί στις:

$$[M^{(x)}]_1(x,k) = \frac{1}{R(k)}[M]_1(x,0,k) \tag{4.10}$$

και

$$[M^x]_2(x,k) = e^{-2ikx}\Delta(k)[M]_1(x,0,k) + R(k)[M]_2(x,0,k). \tag{4.11}$$

Τώρα, η $[M]_1(x,0,k)$ έχει απλούς πόλους στις ρίζες $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}$ της $\alpha(k)$. Δοσμένου ότι $\frac{1}{R(k)} = \frac{\alpha(k)}{a(k)}$, συνάγεται από την (4.10) ότι η $[M^{(x)}]_1(x,k)$ *δεν έχει πόλους στα σημεία* $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}$. Τώρα, έχουμε ότι η $[M^{(x)}]_1(x,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες της $a(k)$ στην D_{13}. Γράφουμε $\{k_j\}_{j=1}^{n} = \{k_j\}_{j=1}^{n_1} \cup \{k_j\}_{j=n_1+1}^{n}$ για $n = n_1 + n_2$ έτσι ώστε $\{k_j\}_{j=1}^{n_1} \subseteq D_{13}$ και $\{k_j\}_{j=n_1+1}^{n} \subseteq D_2$. Επομένως, η $[M^{(x)}]_1$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες $\{k_j\}_{j=1}^{n_1}$ της $a(k)$ στην περιοχή D_{13}, όπως και στον ορισμό του x-RH. Προκειμένου να υπολογίσουμε τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, κατ΄ αρχήν χρησιμοποιούμε τη σχέση $[M^{(x)}]_1(x,k) =$

$\frac{\alpha(k)}{a(k)}[M]_1(x,0,k)$ για να πάρουμε

$$Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k), k=k_j\right\} = \frac{\alpha(k_j)}{a'(k_j)}[M]_1(x,0,k_j). \tag{4.12}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο μέσω της $[M_2^{(x)}(x,k_j)$, χρησιμοποιούμε την (4.11) και το γεγονός ότι $R(k_j)=0$, καθώς και $\Delta(k_j)=\alpha(k_j)b(k_j)$, για να συνάγουμε:

$$[M]_1(x,0,k_j) = \frac{e^{2ik_jx}}{\alpha(k_j)b(k_j)}[M^{(x)}]_2(x,k_j).$$

Η (4.12) γίνεται τότε

$$Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k), k=k_j\right\} = \frac{e^{2ik_jx}}{a'(k_j)b(k_j)}[M^{(x)}]_2(x,k_j), \quad j=1,\ldots,n_1 \tag{4.13}$$

που είναι η σωστή έκφραση ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του x-RH.

Επικεντρώνουμε τώρα την προσοχή μας στην (4.11). Στην περιοχή D_{13}, η $[M]_2(x,0,k)$ δεν έχει πόλους, ενώ η $[M]_1(x,0,k)$ έχει απλούς πόλους στις ρίζες $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}$ της $\alpha(k)$ στην εν λόγω περιοχή, με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$Res\left\{[M]_1(x,0,k), k=\nu_j\right\} = c_j^{(1)}e^{2i\nu_jx}[M]_2(x,0,\nu_j), \quad j=1,\ldots,N_1. \tag{4.14}$$

Επιπλέον, έχουμε $\Delta(\nu_j)=-a(\nu_j)\beta(\nu_j)$, καθώς και

$$Res\left\{R(k)[M]_2(x,0,k)\right\}_{k=\nu_j} = \frac{a(\nu_j)}{\alpha'(\nu_j)}[M]_2(x,0,\nu_j).$$

Αντικαθιστώντας στην (4.11) βρίσκουμε, κατόπιν κάποιων αλγεβρικών χειρισμών,

$$Res\left\{[M^{(x)}]_2(x,k), k=\nu_j\right\} = c_j^{(1)}[e^{2i\nu_jL}B_L(\nu_j)-a(\nu_j)\beta(\nu_j)][M]_2(x,0,\nu_j). \tag{4.15}$$

Εν όψει της ταυτότητας $a\beta-\alpha b = e^{2ikL}B_L$ (σχέση (2.121)) έχουμε $a(\nu_j)\beta(\nu_j)=e^{2i\nu_jL}B_L(\nu_j)$, επομένως από την (4.15) παίρνουμε $Res\left\{[M^{(x)}]_2(x,k), k=\nu_j\right\}=0$, $j=1,\ldots,N_1$, δηλαδή η $[M^{(x)}]_2(x,k)$ *δεν* έχει πόλους (είναι ολόμορφη) στα σημεία $k=\nu_j$, $j=1,\ldots,N_1$, σε συμφωνία με τον ορισμό του x-RH.

(ii) $k\in D_2$. Γράφοντας ξανά κατά στήλες $M=([M]_1,[M]_2)$, η σχέση (4.8) αποσυντίθεται στις

$$[M^{(x)}]_1(x,k) = [M]_1(x,0,k) - e^{2ikx}\frac{\Gamma(k)}{R(k)}[M]_2(x,0,k) \tag{4.16}$$

και

$$[M^{(x)}]_2(x,k) = [M]_2(x,0,k). \tag{4.17}$$

Στην περιοχή D_2, η $[M]_2(x,0,k)$ δεν έχει πόλους, κι επομένως, από την (4.17), η $[M^{(x)}]_2(x,k)$ δεν έχει πόλους στην περιοχή αυτή. Επιπλέον, στην περιοχή D_2 η $[M]_1(x,0,k)$ έχει απλούς στα σημεία $k=\lambda_j$, $j=1,\ldots,N_2$, με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$Res\,\{[M]_1(x,0,k), k=\lambda_j\} = c_j^{(2)} e^{2i\lambda_j x}[M]_2(x,0,\lambda_j), \quad j=1,\ldots,N_2. \tag{4.18}$$

όπου $c_j^{(2)} = \frac{\bar{B}(\lambda_j)}{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)}$.

Ας ανακαλέσουμε, επιπλέον, πως το γεγονός ότι η $[M]_1(x,0,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2}$ της $d(k)$ στην περιοχή D_2. Παραπέρα, έχουμε $\frac{\Gamma(k)}{R(k)} = \frac{\bar{B}(k)}{a(k)d(k)}$, κι άρα

$$Res\left[\frac{\Gamma(k)}{R(k)}\right]_{k=\lambda_j} = \frac{\bar{B}(\lambda_j)}{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)}. \tag{4.19}$$

Αντικατάσταση των σχέσεων (4.18) και (4.19) στην (4.16) δίνει

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k), k=\lambda_j\right\} \\ &= \frac{\bar{B}(\lambda_j)}{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)} e^{2i\lambda_j x}[M]_2(x,0,\lambda_j) - \frac{\bar{B}(\lambda_j)}{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)} e^{2i\lambda_j x}[M]_2(x,0,\lambda_j) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.20}$$

οπότε η $[M^{(x)}]_1(x,k)$ δεν έχει πόλους στα σημεία $k=\lambda_j$, $j=1,\ldots,N_2$ (ανακαλούμε ότι, εξ' υποθέσεως, $a(\lambda_j)\neq 0$, $j=1,\ldots,N_2$).

Ας θεωρήσουμε ξανά την (4.16). Στο (i) συμβολίσαμε τις ρίζες της $a(k)$ στην περιοχή D_2 με $\{k_j\}_{j=n_1+1}^{n}$ (όπου $n=n_1+n_2$). Δεδομένου ότι οι μόνοι πιθανοί (απλοί) πόλοι της $[M]_1(x,0,k)$ στην D_2 είναι οι ρίζες της $d(k)$ στην περιοχή αυτή, και δεδομένης της υπόθεσής μας ότι οι $d(k)$ και $a(k)$ δεν έχουν κοινές ρίζες στην D_2, έχουμε ότι η $[M]_1(x,0,k)$ είναι καλά ορισμένη στα $k=k_j$, $j=n_1+1,\ldots,n$. Συνεπώς,

$$Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k), k=k_j\right\} = -e^{2ik_j x}\frac{\bar{B}(k_j)}{a'(k_j)d(k_j)}[M]_2(x,0,k_j). \tag{4.21}$$

Δοσμένου ότι $[M]_2(x,0,k_j) = [M^{(x)}]_2(x,k_j)$ και $d(k_j) = -b(k_j)\bar{B}(k_j)$ (από τον ορισμό του $d(k)$ και το γεγονός ότι $a(k_j)=0$) βρίσκουμε

$$Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k)k=k_j\right\} = \frac{e^{2ik_j x}}{a'(k_j)b(k_j)}[M^{(x)}]_2(x,k_j), \quad j=n_1+1,\ldots,n \tag{4.22}$$

που είναι η σωστή έκφραση ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του x-RH.

(iii) $k\in D_{46}$. Γράφοντας ξανά $M=([M]_1,[M]_2)$, η σχέση (4.8) μπορεί να αποσυντεθεί στις σχέσεις

$$[M^{(x)}]_1(x,k) = \bar{R}(k)[M]_1(x,0,k) + e^{2ikx}\bar{\Delta}(k)[M]_2(x,0,k) \tag{4.23}$$

και
$$[M^{(x)}]_2(x,k) = \frac{1}{\bar{R}(k)}[M]_2(x,0,k). \qquad (4.24)$$

Θεωρούμε πρώτα την (4.24). Έχουμε ότι η $[M]_2(x,0,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες της $\alpha(\bar{k})$ στην περιοχή D_{46}. Επίσης, $R(k) = \frac{a(k)}{\alpha(k)}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η $[M^{(x)}]_2(x,k)$ έχει απλούς πόλους στις (απλές) ρίζες $\{\bar{k}_j\}_{j=1}^{n_1}$ της $\bar{a}(k)$ στην περιοχή D_{46}. Προκειμένου να εξάγουμε την έκφραση των αντίστοιχων ολοκληρωτικών υπολοίπων, γράφουμε την (4.24) στη μορφή

$$[M^{(x)}]_2(x,k) = \frac{\bar{\alpha}(k)}{\bar{a}(k)}[M]_2(x,0,k) \qquad (4.25)$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$Res\left\{[M^{(x)}]_2(x,k), k=\bar{k}_j\right\} = \frac{\bar{\alpha}(\bar{k}_j)}{\bar{a}'(\bar{k}_j)}[M]_2(x,0,\bar{k}_j) \equiv \overline{\frac{\alpha(k_j)}{a'(k_j)}}[M]_2(x,0,\bar{k}_j). \qquad (4.26)$$

Για να εκφράσουμε ολοκληρωτικό αυτό υπόλοιπο μέσω της $[M^{(x)}]_1(x,\bar{k}_j)$, χρησιμοποιούμε την (4.23) για $k=\bar{k}_j$. Επειδή $\bar{R}(\bar{k}_j)=0$, καθώς και $\bar{\Delta}(\bar{k}_j) = \bar{\alpha}(\bar{k}_j)\bar{b}(\bar{k}_j)$, παίρνουμε

$$[M]_2(x,0,\bar{k}_j) = \frac{e^{-2i\bar{k}_j}x}{\bar{\alpha}(\bar{k}_k)\bar{b}(\bar{k}_j)}[M^{(x)}]_1(x,\bar{k}_j). \qquad (4.27)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.26) βρίσκουμε

$$Res\left\{[M^{(x)}]_2(x,k), k=\bar{k}_j\right\} = \frac{e^{-2i\bar{k}_jx}}{\overline{a'(k_j)b(k_j)}}[M^{(x)}]_1(x,\bar{k}_j), \quad j=1,\ldots,n_1 \qquad (4.28)$$

που είναι η σωστή έκφραση ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του x-RH.

Τώρα εστιάζουμε την προσοχή μας στην (4.23). Στην περιοχή D_{46} έχουμε ότι η $[M]_1(x,0,k)$ δεν έχει πόλους. Άλλωστε, η $[M]_2(x,0,k)$ έχει απλούς πόλους στις στις (απλές) ρίζες $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1}$ της $\bar{\alpha}(k)$ στην εν λόγω περιοχή, με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$Res\left\{[M]_2(x,0,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = \overline{c_j^{(1)}}e^{-2i\bar{\nu}_jx}[M]_1(x,0,\bar{\nu}_j), \quad j=1,\ldots,N_1. \qquad (4.29)$$

όπου
$$\overline{c_j^{(1)}} = \frac{e^{2i\bar{\nu}_jL}\bar{a}(\bar{\nu}_j)}{\bar{B}_L(\bar{\nu}_j)\bar{\alpha}'(\bar{\nu}_j)}. \qquad (4.30)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = \\ &Res[\bar{R}(k)]_{k=\bar{\nu}_j}[M]_1(x,0,\bar{\nu}_j) + e^{2i\bar{\nu}_jx}\bar{\Delta}(\bar{\nu}_j)Res\left\{[M]_2(x,0,k), k=\bar{\nu}_j\right\}. \end{aligned} \qquad (4.31)$$

Τώρα, έχουμε $R(k) = \frac{\bar{a}(k)}{\bar{\alpha}(k)}$, κι επομένως

$$Res[\bar{R}(k)]_{k=\bar{\nu}_j} = \frac{\bar{a}(\bar{\nu}_j)}{\bar{\alpha}'(\bar{\nu}_j)}. \tag{4.32}$$

Επίσης, από τον ορισμό της $\Delta(k)$ έχουμε

$$\Delta(\bar{\nu}_j) = -\bar{a}(\bar{\nu}_j)\bar{\beta}(\bar{\nu}_j). \tag{4.33}$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (4.29), (4.30), (4.32) και (4.33) στην (4.31). Εν όψει της ταυτότητας $a\beta - \alpha b = e^{2ikL}B_L$ (σχέση (2.121)) έχουμε

$$\bar{a}(\bar{\nu}_j)\bar{\beta}(\bar{\nu}_j) = e^{-2i\bar{\nu}_j L}\bar{B}_L(\bar{\nu}_j). \tag{4.34}$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (4.29), (4.30), (4.32) και (4.33) στην (4.31). Χρησιμοποιώντας την (4.34), και κατόπιν κάποιων αλγεβρικών χειρισμών , καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$Res\left\{[M^{(x)}]_1(x,k), k = \bar{\nu}_j\right\} = 0, \tag{4.35}$$

δηλ. η $[M^{(x)}]_1(x,k)$ είναι ολόμορφη στα σημεία $k = \bar{\nu}_j$, $j = 1,\ldots,N_1$, που είναι σε συμφωνία με τον ορισμό του x-RH.

(iv) $k \in D_5$. Γράφοντας ξανά $M = ([M]_1, [M]_2)$, η σχέση (4.8) αποσυντίθεται στις

$$[M^{(x)}]_1(x,k) = [M]_1(x,0,k) \tag{4.36}$$

και

$$[M^{(x)}]_2(x,k) = -e^{-2ikx}\frac{\bar{\Gamma}(k)}{\bar{R}(k)}[M]_1(x,0,k) + [M]_2(x,0,k). \tag{4.37}$$

Στην περιοχή D_5, η $[M]_1(x,0,k)$ δεν έχει πόλους. Συνεπώς, από την (4.36), η $[M^{(x)}]_1(x,k)$ δεν έχει πόλους στην D_5, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του x-RH.

Επιπλέον, στην D_5 έχουμε ότι η $[M]_2(x,0,k)$ έχει πιθανούς (απλούς) πόλους στις ρίζες $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2}$, του $\bar{d}(k)$ στην εν λόγω περιοχή, με ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$Res\left\{[M]_2(x,0,k), k = \bar{\lambda}_j\right\} = \overline{c_j^{(2)}}e^{-2i\bar{\lambda}_j x}[M]_1(x,0,\bar{\lambda}_j), \quad j = 1,\ldots,N_2. \tag{4.38}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\frac{\bar{\Gamma}(k)}{\bar{R}(k)} = \frac{B(k)}{\bar{a}(k)\bar{d}(k)},$$

γεγονός που έχει σαν συνέπεια ότι

$$Res\left[\frac{\bar{\Gamma}(k)}{\bar{R}(k)}\right]_{k=\bar{\lambda}_j} = \frac{B(\bar{\lambda}_j)}{\bar{a}(\bar{\lambda}_j)\bar{d}'(\bar{\lambda}_j)} = \frac{B(\bar{\lambda}_j)}{\overline{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)}}, \quad j = 1,\ldots,N_2. \tag{4.39}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.38), (4.39) και το γεγονός ότι

$$\overline{c_j^{(2)}} = \frac{B(\bar{\lambda}_j)}{\overline{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)}}, \quad j = 1, \ldots, N_2 \tag{4.40}$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(x)}]_2(x,k), k = \bar{\lambda}_j\right\} \\ &= -e^{-2i\bar{\lambda}_j x} Res\left[\frac{\bar{\Gamma}(k)}{\overline{R}(k)}\right]_{k=\bar{\lambda}_j} [M]_1(x,0,\bar{\lambda}_j) + Res\left\{[M]_2(x,0,k), k = \bar{\lambda}_j\right\} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.41}$$

δηλ. η $[M^{(x)}]_2(x,k)$ είναι ολόμορφη στα σημεία $k = \bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, N_2$, σε συμφωνία με τον ορισμό του x-RH.

Επιστρέφουμε, τώρα, στη σχέση (4.37),

$$[M^{(x)}]_2(x,k) = -e^{-2ikx}\frac{B(k)}{\bar{a}(k)\bar{d}(k)}[M]_1(x,0,k) + [M]_2(x,0,k) \tag{4.42}$$

για να θεωρήσουμε τις ρίζες της $\bar{a}(k)$ στην περιοχή D_5, δηλαδή τις $\{\bar{k}_j\}_{j=n_1+1}^{n}$ $(n = n_1+n_2)$.

Στην περιοχή D_5, έχουμε ότι οι $[M]_1(x,0,k)$ και $[M]_2(x,0,k)$ είναι ολόμορφες (δεν έχουν πόλους) στα σημεία $k = \bar{k}_j$, $j = n_1+1, \ldots, n$. (Ας σημειωθεί ότι έχει υποτεθεί πως οι $d(k)$ και $a(k)$ *δεν* έχουν κοινές ρίζες στην περιοχή D_2, κι επομένως οι $\bar{d}(k)$ και $\bar{a}(k)$ δεν έχουν κοινές ρίζες στην περιοχή D_5).

Συνακόλουθα,

$$Res\left\{[M^{(x)}]_2(x,k), k = \bar{k}_j\right\} = -e^{-2i\bar{k}_j x}\frac{B(\bar{k}_j)}{\bar{a}'(\bar{k}_j)\bar{d}(\bar{k}_j)}[M]_1(x,0,\bar{k}_j). \tag{4.43}$$

Όμως, $[M]_1(x,0,\bar{k}_j) = [M^{(x)}]_1(x,\bar{k}_j)$ και $\bar{d}(\bar{k}_j) = -\bar{b}(\bar{k}_j)B(\bar{k}_j)$. Τελικά,

$$Res[M^{(x)}]_2(x,k=\bar{k}_j) = \frac{e^{-2i\bar{k}_j x}}{\overline{a'(k_j)b(k_j)}}[M^{(x)}]_1(x,\bar{k}_j), \quad j = n_1+1, \ldots, n. \tag{4.44}$$

που είναι η σωστή έκφραση ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του x-RH.

Τελικά, έχουμε αποδείξει ότι η $M^{(x)}(x,k)$ είναι η μοναδική λύση του x-προβλήματος Riemann-Hilbert.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ο πίνακας $P^{(x)}(x,k)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες. Αποσυντιθέμενος στο διαγώνιο και αντιδιγώνιο μέρος του,

$$P^{(x)}(x,k) = P_{diag}^{(x)}(x,k) + P_{off}^{(x)}(x,k) \tag{4.45}$$

βρίσκουμε πως

$$P^{(x)}_{diag}(x,k) = I + O\Big(\frac{1}{k}\Big), \quad k \to \infty, \tag{4.46}$$

και

$$P^{(x)}_{off}(x,k) \longrightarrow 0 \quad \text{εκθετικά}, \quad k \to \infty. \tag{4.47}$$

Το γεγονός αυτό εγγυάται ότι οι $M(x,0,k)$ κσι $M^{(x)}(x,k)$ έχουν ταυτόσημες ασυμπτωτικές συμπεριφορές που ορίζουν τις $q(x,0)$ και $q_0(x)$, αποδεικνύοντας έτσι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

• **Απόδειξη ότι** $(\partial_x^j q)(0,t) = g_j(t), \quad (\partial_x^j q)(L,t) = g_j(t), \quad j = 0,1,2.$

Στη *μέθοδο της ένδυσης (dressing method)*, βλ. εδάφιο 1.5 ([113]), λαμβάνουμε εκφράσεις για τα $(\partial_x^j q)(x,t)$ μέσω της $M(x,t,k)$. Υπολογίζοντας τις εκφράσεις αυτές για $x = 0$ διαπιστώνουμε ότι οι τύποι που ορίζουν τις $(\partial_x^j q)(0,t)$ μέσω της $M(0,t,k)$ ταυτίζονται με τους τύπους (3.29), όταν οι $(\{g_j(t)\}, M^{(t,0)}(t,k))$ αντικατασταθούν από τις $(\{(\partial_x^j q)(0,t)\}, M(0,t,k))$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση μεταξύ των προβλημάτων Riemann-Hilbert που ικανοποιούνται από τις $M(0,t,k)$ και $M^{(t,0)}(t,k)$. Ορίζουμε την $M^{(t,0)}(t,k)$ μέσω της $M(0,t,k)$ σύμφωνα με τον τύπο

$$M^{(t,0)}(t,k) = M(0,t,k)P^{(t,0)}(t,k). \tag{4.48}$$

Και πάλι ο πίνακας $P^{(t,0)}(t,k)$ μπορεί να υπολογιστεί ρητά. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των $M(0,t,k)$ και $M^{(t,0)}(t,k)$ παίρνουμε

$$P^{(t,0)}(t,k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\alpha(k)}{A(k)} & GR(k)e^{-8ik^3t} \\ 0 & \frac{A(k)}{\alpha(k)} \end{bmatrix}, & k \in D_{13} \\ \begin{bmatrix} d(k) & -\frac{b(k)}{\overline{A}(k)}e^{-8ik^3t} \\ 0 & \frac{1}{d(k)} \end{bmatrix}, & k \in D_2 \\ \begin{bmatrix} \frac{\overline{A}(k)}{\overline{\alpha}(k)} & 0 \\ \overline{GR}(k)e^{8ik^3t} & \frac{\overline{\alpha}(k)}{\overline{A}(k)} \end{bmatrix}, & k \in D_{46} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{\overline{d}(k)} & 0 \\ -\frac{\overline{b}(k)}{A(k)}e^{8ik^3t} & \overline{d}(k) \end{bmatrix}, & k \in D_5. \end{cases} \tag{4.49}$$

Στην τελευταία έκφραση,

$$GR(k) := (\alpha B - \beta A)(k) \equiv (aA_L + \overline{b}e^{2ikL}B_L)B - (bA_L + \overline{a}e^{2ikL}B_L)A = e^{8ik^3T}c(k). \tag{4.50}$$

Τότε θα δείξουμε ότι η $M^{(t,0)}(t,k)$ είναι η (μοναδική) λύση του $(t,0)$-προβλήματος Riemann-Hilbert ($(t,0)$-RH)που περιγράφεται στην παράγραφο 3.3.

Εκ κατασκευής έχουμε ότι η $M^{(t,0)}(t,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση-πίνακας που ικανοποιεί την αλματική συνθήκη (3.30)-(3.31). Παραπέρα, η σχέση (2.87) μαζί με την συμπεριφορά των φασματικών συναρτήσεων στο άπειρο συνεπάγονται όι η συμπεριφορά της $M^{(t,0)}(t,k)$ στο άπειρο δίνεται από την (3.32). Επιπλέον, η (2.84) σε συνδυασμό με τη συμπεριφορά των φασματικών συναρτήσεων καθώς το $k \to 0$ μας οδηγούν απευθείας στη συμπεριφορά (3.35).

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι πόλοι και τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $M^{(t,0)}(x,k)$ είναι ακριβώς εκείνα που περιγράφονται στη διατύπωση του $(t,0)$-RH.

(i) $k \in D_{13}$. Γράφοντας $M = ([M]_1, [M]_2)$, η σχέση (4.48) αποσυντίθεται στις

$$[M^{(t,0)}]_1(t,k) = \frac{\alpha(k)}{A(k)}[M]_1(0,t,k) \tag{4.51}$$

και

$$[M^{(t,0)}]_2(t,k) = (\alpha B - \beta A)(k)e^{-8ik^3t}[M]_1(0,t,k) + \frac{A(k)}{\alpha(k)}[M]_2(0,t,k). \tag{4.52}$$

Έχουμε ότι η $[M]_1(t,0,k)$ έχει πιθανούς (απλούς) πόλους στην D_{13} μόνο στις ρίζες της $\alpha(k)$ στην περιοχή αυτή, κι επομένως από την (4.51), παίρνουμε ότι η $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ έχει πιθανούς πόλους μόνο στις ρίζες της $A(k)$ στην περιοχή D_{13}. Ανακαλούμε ότι η $A(k)$ έχει ρίζες τα σημεία $\{K_j\}_{j=1}^{N^0} \subseteq D_{135}$. Γράφουμε $\{K_j\}_{j=1}^{N^0} = \{K_j\}_{j=1}^{N_1^0} \cup \{K_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0}$ για $N^0 = N_1^0 + N_2^0$ έτσι ώστε $\{K_j\}_{j=1}^{N_1^0} \subseteq D_{13}$ και $\{K_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} \subseteq D_5$. Έτσι, η $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ έχει απλούς πόλους στα σημεία $\{K_j\}_{j=1}^{N_1^0} \subseteq D_{13}$, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τις συνθήκες που περιγράφουν τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, χρησιμοποιούμε κατ΄ αρχήν τη σχέση (4.51) για να βρούμε

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j\right\} = \frac{\alpha(K_j)}{A'(K_j)}[M]_1(0,t,K_j). \tag{4.53}$$

Προκειμένου να τα εκφράσουμε μέσω της συνάρτησης $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ χρησιμοποιούμε την (4.51) για $k = K_j$. Δεδομένου ότι $A(K_j) = 0$, παίρνουμε

$$[M]_1(0,t,K_j) = \frac{e^{8iK_j^3t}}{\alpha(K_j)B(K_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,K_j). \tag{4.54}$$

Αντικατάσταση στη σχέση (4.53) δίνει

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j\right\} = \frac{e^{8iK_j^3t}}{A'(K_j)B(K_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,K_j), \quad j = 1,\dots,N_1^0 \tag{4.55}$$

που είναι η σωστή έκφραση ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Στρέφουμε, τώρα, την προσοχή μας στην (4.52). Έχουμε ότι η $[M]_2(0,t,k)$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_{13}, κι επίσης η $[M]_1(0,t,k)$ έχει πόλους μόνο στις ρίζες $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}$ της $\alpha(k)$ στην εν λόγω περιοχή. Κατά συνέπεια, τα μόνα σημεία στα οποία είναι δυνατόν να έχει πόλους η $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ στην περιοχή D_{13} είναι οι ρίζες $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}$ της $\alpha(k)$ στην περιοχή αυτή.

Θα προσδιορίσουμε, τώρα, τις συνθήκες που περιγράφουν τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Κατ' αρχήν, από την (4.52) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\nu_j\right\} = \\ &= -(\beta A)(\nu_j)e^{-8i\nu_j^3 t} Res\left\{[M]_1(0,t,k), k=\nu_j\right\} + \frac{A(\nu_j)}{\alpha'(\nu_j)}[M]_2(0,t,\nu_j). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Τώρα, από την (4.51) παίρνουμε

$$[M]_1(0,t,k) = \frac{A(k)}{\alpha(k)}[M^{(t,0)}]_1(t,k) \tag{4.57}$$

έτσι ώστε να έχουμε

$$Res\left\{[M]_1(0,t,k), k=\nu_j\right\} = \frac{A(\nu_j)}{\alpha'(\nu_j)}[M^{(t,0)}]_1(t,\nu_j). \tag{4.58}$$

Επικαλούμενοι, τώρα, τη γνωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$Res\left\{[M]_1(0,t,k), k=\nu_j\right\} = \overline{c_j^{(1)}} e^{8i\nu_j^3 t}[M]_2(0,t,\nu_j), \quad c_j^{(1)} = \frac{a(\nu_j)}{e^{2i\nu_j L}B_L(\nu_j)\alpha'(\nu_j)} \tag{4.59}$$

βρίσκουμε

$$\frac{A(\nu_j)}{\alpha'(\nu_j)}[M]_2(0,t,\nu_j) = e^{2i\nu_j L}e^{-8i\nu_j^3 t}\frac{B_L(\nu_j)A^2(\nu_j)}{\alpha'(\nu_j)a(\nu_j)}[M^{(t,0)}]_1(t,\nu_j). \tag{4.60}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (4.58) και (4.60) στην (4.56) καταλήγουμε στην έκφραση

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\nu_j\right\} = \left[-\beta(\nu_j) + e^{2i\nu_j L}\frac{B_L(\nu_j)}{a(\nu_j)}\right]\frac{A^2(\nu_j)}{\alpha'(\nu_j)}e^{-8i\nu_j^3 t}[M^{(t,0)}]_1(t,\nu_j). \tag{4.61}$$

Εν όψει της ταυτότητας $a\beta - \alpha b = e^{2ikL}B_L$ (εξίσωση (2.121)) έχουμε $a(\nu_j)\beta(\nu_j) = e^{2i\nu_j L}B_L(\nu_j)$, και η σχέση (4.61) μας οδηγεί στην έκφραση

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\nu_j\right\} = 0, \quad j=1,\ldots,N_1, \tag{4.62}$$

δηλαδή η $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ είναι ολόμορφη στα σημεία $k=\nu_j$, $j=1,\ldots,N_1$. Τελικά, η $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ *δεν* έχει πόλους στην περιοχή D_{13}, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

(ii) $k \in D_2$. Γράφοντας ξανά κατά στήλες $M = ([M]_1, [M]_2)$, η σχέση (4.48) αποσυντίθεται στις ακόλουθες σχέσεις:

$$[M^{(t,0)}]_1(t,k) = d(k)[M]_1(0,t,k) \tag{4.63}$$

και

$$[M^{(t,0)}]_2(t,k) = -\frac{b(k)}{\bar{A}(k)}e^{-8ik^3t}[M]_1(0,t,k) + \frac{1}{d(k)}[M]_2(0,t,k). \tag{4.64}$$

Η $[M]_1(0,t,k)$ έχει πόλους στις ρίζες της $d(k)$ στην περιοχή D_2, και η εξίσωση (4.63) συνεπάγεται ότι η $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ δεν έχει πόλους στην περιοχή D_2, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Εστιάζουμε, τωρα, την προσοχή μας στην εξίσωση (4.64). Η $[M]_2(0,t,k)$ δεν έχει πόλους στην περιοχή D_2. Κατά συνέπεια, οι μόνοι πιθανοί πόλοι της $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ είναι οι ρίζες $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2}$ της $d(k)$ στην D_2 καθώς και οι ρίζες $\{\bar{K}_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0}$ της $\bar{A}(k)$ στην D_2.

Κατ΄ αρχάς μελετάμε τα σημεία $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2} \subseteq D_2$, υποθέτοντας ότι $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2} \cap \{\bar{K}_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} = \emptyset$. Η αντίστοιχη συνθήκη για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι:

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\lambda_j\right\} = -\frac{b(\lambda_j)}{\bar{A}(\lambda_j)}e^{-8i\lambda_j^3t}Res\left\{[M]_1(0,t,k), k=\lambda_j)\right\} + \frac{1}{d'(\lambda_j)}[M]_2(0,t,\lambda_j). \tag{4.65}$$

Χρησιμοποιούμε τη γνωστή ολοκληρωτική συνθήκη

$$Res\left\{[M]_1(0,t,k), k=\lambda_j\right\} = \overline{c_j^2}e^{8i\lambda_j^3t}[M]_2(0,t,\lambda_j), \quad c_j^{(2)} = \frac{\bar{B}(\lambda_j)}{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)}, \quad j=1,\ldots,N_2. \tag{4.66}$$

Αντικατάσταση στην (4.65) και χρήση της $a(\lambda_j)\bar{A}(\lambda_j) - b(\lambda_j)\bar{B}(\lambda_j) = d(\lambda_j) = 0$ μας οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\lambda_j\right\} = 0, \quad j=1,\ldots,N_2 \tag{4.67}$$

κι επομένως η $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ δεν έχει πόλους στα σημεία $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2}$ (ας σημειωθεί ότι κάναμε χρήση της γνωστής υπόθεσης $\bar{A}(\lambda_j) \neq 0$).

Επικεντρώνουμε τώρα την προσοχή μας στα σημεία $\{\bar{K}_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} \subseteq D_2$, *υποθέτοντας ότι* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2} \cap \{\bar{K}_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} = \emptyset$. Από την (4.64) παίρνουμε

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\bar{K}_j\right\} = -\frac{b(\bar{K}_j)}{\bar{A}'(\bar{K}_j)}e^{-8i\bar{K}_j^3t}[M]_1(0,t,\bar{K}_j). \tag{4.68}$$

Από την (4.63) έχουμε

$$[M]_1(0,t,\bar{K}_j) = \frac{1}{d(\bar{K}_j)}[M^{(t,0)}]_1(t,\bar{K}_j). \tag{4.69}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή και το γεγονός ότι $d(\bar{K}_j) = -b(\bar{K}_j)\bar{B}(\bar{K}_j)$ καταλήγουμε στη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\bar{K}_j\right\} = \frac{e^{-8i\bar{K}_j^3t}}{\overline{\overline{A'(K_j)B(K_j)}}}[M^{(t,0)}]_1(t,\bar{K}_j), \quad j=N_1^0+1,\ldots,N^0 \tag{4.70}$$

που είναι και η σωστή συνθήκη, σύμφωνα με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Τώρα θα μελετήσουμε την περιπτωση όπου $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2} \cap \{\bar{K}_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} \neq \emptyset$. Υποθέτουμε ότι το $\lambda_j \equiv \bar{K}_j$ είναι μια *κοινή* (απλή) ρίζα των $\bar{A}(k)$ και $d(k)$, υποθέτουμε δηλαδή πως $\bar{A}(\bar{K}_j) = d(\bar{K}_j) = 0$. Ο ορισμός $d(k) := a(k)\bar{A}(k) - b(k)\bar{B}(k)$ συνεπάγεται ότι $d(\bar{K}_j) = -b(\bar{K}_j)\bar{B}(\bar{K}_j) = 0$. Ανακαλούμε από τον ορισμό του $(t,0)$-RH πως έχουμε υποθέσει $\bar{B}(\bar{K}_j) = \overline{B(K_j)} \neq 0$. Επομένως το $\bar{K}_j$ είναι επίσης μια απλή ρίζα του $b(k)$, δηλαδή $b(\bar{K}_j) = 0$. Έτσι αποδεικνύεται ότι το $k = \bar{K}_j$ είναι μια *επουσιώδης (απαλείψιμη)* ιδιομορφία της φασματικής συνάρτησης $\frac{b(k)}{\bar{A}(k)}$, με

$$\lim_{k\to\bar{K}_j}\left[\frac{b(k)}{\bar{A}(k)}\right] = \frac{b'(\bar{K}_j)}{\bar{A}'(\bar{K}_j)}. \tag{4.71}$$

Ανακαλούμε τη γνωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων (4.66), γραμμένη σαν

$$Res\left\{[M]_1(0,t,k), k = \bar{K}_j\right\} = \frac{\bar{B}(\bar{K}_j)}{a(\bar{K}_j)d'(\bar{K}_j)} e^{8i\bar{K}_j^3 t}[M]_2(0,t,\bar{K}_j). \tag{4.72}$$

Η έκφραση (4.64) συνεπάγεται

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k = \bar{K}_j\right\} = \\ &= -\lim_{k\to\bar{K}_j}\left[\frac{b(k)}{\bar{A}(k)}e^{-8ik^3 t}\right] Res\left\{[M]_1(0,t,k), k = \bar{K}_j\right\} + \frac{1}{d'(\bar{K}_j)}[M]_2(0,t,\bar{K}_j). \end{aligned} \tag{4.73}$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.71) και (4.72) στην (4.73) λαμβάνουμε

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k = \bar{K}_j\right\} = \frac{1}{d'(\bar{K}_j)}\left[1 - \frac{b'(\bar{K}_j)\bar{B}(\bar{K}_j)}{a(\bar{K}_j)\bar{A}'(\bar{K}_j)}\right][M]_2(0,t,\bar{K}_j). \tag{4.74}$$

Τώρα, υπολογίζοντας την παράγωγο $d'(k)$ στη θέση $k = \bar{K}_j$ παίρνουμε

$$d'(\bar{K}_j) = a(\bar{K}_j)\bar{A}'(\bar{K}_j) - b'(\bar{K}_j)\bar{B}(\bar{K}_j) \tag{4.75}$$

κι έτσι η (4.74) γίνεται:

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k = \bar{K}_j\right\} = \frac{1}{a(\bar{K}_j)\bar{A}'(\bar{K}_j)}[M]_2(0,t,\bar{K}_j). \tag{4.76}$$

Η έκφραση (4.63) συνεπάγεται

$$Res\left\{[M]_1(0,t,k), k = \bar{K}_j\right\} = \frac{1}{d'(\bar{K}_j)}[M^{(t,0)}]_1(t,\bar{K}_j). \tag{4.77}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.72) μαζί με την (4.77) παίρνουμε

$$[M]_2(0,t,\bar{K}_j) = e^{-8i\bar{K}_j^3 t}\frac{a(\bar{K}_j)}{\bar{B}(\bar{K}_j)}[M^{(t,0)}]_1(t,\bar{K}_j). \tag{4.78}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία εξίσωση στην (4.76) βρίσκουμε

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\bar{K}_j\right\} = \frac{e^{-8i\bar{K}_j^3 t}}{\bar{A}'(\bar{K}_j)\bar{B}(\bar{K}_j)}[M^{(t,0)}]_1(t,\bar{K}_j), \tag{4.79}$$

που είναι, και πάλι, η σωστή συνθήκη, σύμφωνα με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

(iii) $k \in D_{46}$. Γράφοντας και πάλι $M = ([M]_1, [M]_2)$, η εξίσωση (4.48) αποσυντίθεται στις

$$[M^{(t,0)}]_1(t,k) = \frac{\bar{A}(k)}{\bar{\alpha}(k)}[M]_1(0,t,k) + (\alpha B - \beta A)(k)e^{8ik^3 t}[M]_2(0,t,k) \tag{4.80}$$

και

$$[M^{(t,0)}]_2(t,k) = \frac{\bar{\alpha}(k)}{\bar{A}(k)}[M]_2(0,t,k). \tag{4.81}$$

Εξετάζουμε πρώτα την (4.81). Έχουμε ότι η $[M]_2(0,t,k)$ έχει πόλους μόνο στις ρίζες της $\bar{\alpha}(k)$ στην D_{46}. Κατά συνέπεια, οι μόνοι πιθανοί πόλοι της $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ στην περιοχή D_{46} είναι οι ρίζες $\{\bar{K}_j\}_{j=1}^{N_1^0} \subseteq D_{46}$ της $\bar{A}(k)$ στην εν λόγω περιοχή. Τώρα κάνουμε χρήση της (4.81) για να εξάγουμε την αντίστοιχη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων. Κατ' αρχήν λαμβάνουμε

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\bar{K}_j)\right\} = \frac{\bar{\alpha}(\bar{K}_j)}{\bar{A}'(\bar{K}_j)}[M]_2(0,t,\bar{K}_j). \tag{4.82}$$

Προκειμένου να εκφράσουμε το ολοκληρωτικό αυτό υπόλοιπο μέσω της $[M^{(t,0)}]_1(t,\bar{K}_j)$ χρησιμοποιούμε την (4.80) υπολογισμένη για $k=\bar{K}_j$. Κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι $\bar{A}(\bar{K}_j)=0$ παίρνουμε

$$[M]_2(0,t,\bar{K}_j) = \frac{e^{-8i\bar{K}_j^3 t}}{\bar{\alpha}(\bar{K}_j)\bar{B}(\bar{K}_j)}[M^{(t,0)}]_1(t,\bar{K}_j). \tag{4.83}$$

Αντικατάσταση στην (4.82) μας οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_2(t,k), k=\bar{K}_j\right\} = \frac{e^{-8i\bar{K}_j^3 t}}{\overline{A'(K_j)B(K_j)}}[M^{(t,0)}]_1(t,\bar{K}_j), \quad j=1,\dots,N_1^0 \tag{4.84}$$

που είναι και η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Στη συνέχεια, εστιάζουμε την προσοχή μας στην (4.80). Χρησιμοποιώντας αυτήν μαζί με τα γεγονότα ότι η $[M]_1(0,t,k)$ είναι ολόμορφη στην D_{46}, καθώς και ότι η $[M]_2(0,t,k)$ έχει πόλους στις ρίζες $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1}$ της $\bar{\alpha}(k)$ στην εν λόγω περιοχή, έχουμε ότι οι μόνοι πιθανοί πόλοι της $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ στην περιοχή D_{46} είναι οι ρίζες $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1} \subseteq D_{46}$ της $\bar{\alpha}(k)$.

Προκειμένου να παράγουμε την αντίστοιχη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, λαμβάνουμε, πρώτα, από την (4.80) ότι

$$\begin{aligned}&Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = \\ &\frac{\bar{A}(\bar{\nu}_j)}{\bar{\alpha}'(\bar{\nu}_j)}[M]_1(0,t,\bar{\nu}_j) - \bar{\beta}(\bar{\nu}_j)\bar{A}(\bar{\nu}_j)e^{8i\bar{\nu}_j^3 t} Res\left\{[M]_2(0,t,k), k=\bar{\nu}_j\right\}.\end{aligned} \tag{4.85}$$

Τώρα, από την (4.81) γραμμένη στη μορφή $[M]_2(0,t,k) = \frac{\bar{A}(k)}{\bar{\alpha}(k)}[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ βρίσκουμε

$$Res\left\{[M]_2(0,t,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = \frac{\bar{A}(\bar{\nu}_j)}{\bar{\alpha}'(\bar{\nu}_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,\bar{\nu}_j). \tag{4.86}$$

Επίσης, η γνωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$Res\left\{[M]_2(0,t,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = \overline{c_j^{(1)}} e^{-8i\bar{\nu}_j^3 t}[M]_1(0,t,\bar{\nu}_j) \tag{4.87}$$

μαζί με τον ορισμό της ποσότητας $c_j^{(1)}$ και την εξίσωση (4.86) μας δίνουν

$$[M]_1(0,t,\bar{\nu}_j) = e^{-2i\bar{\nu}_j L} e^{8i\bar{\nu}_j^3 t}\frac{\bar{B}_L(\bar{\nu}_j)\bar{A}(\bar{\nu}_j)}{\bar{a}(\bar{\nu}_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,\bar{\nu}_j). \tag{4.88}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (4.86) και (4.88) στην (4.85) καταλήγουμε στην:

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = \left[e^{-2i\bar{\nu}_j L}\frac{\bar{B}_L(\bar{\nu}_j)}{\bar{a}(\bar{\nu}_j)} - \bar{\beta}(\bar{\nu}_j)\right]\frac{[\bar{A}(\bar{\nu}_j)]^2}{\bar{\alpha}'(\bar{\nu}_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,\bar{\nu}_j). \tag{4.89}$$

Εν όψει της ταυτότητας $a\beta - \alpha b = e^{2ikL}B_L$ (σχέση (2.121)) η οποία συνεπάγεται ότι $\bar{a}\bar{\beta} - \bar{\alpha}\bar{b} = e^{-2ikL}\bar{B}_L$, για $k=\bar{\nu}_j$ (απ' όπου $\bar{\alpha}(\bar{\nu}_j)=0$) έχουμε $\bar{a}(\bar{\nu}_j)\bar{\beta}(\bar{\nu}_j) = e^{-2i\bar{\nu}_j L}\bar{B}_L(\bar{\nu}_j)$, έτσι ώστε η (4.89) να γίνεται:

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = 0, \quad j=1,\ldots,N_1, \tag{4.90}$$

δηλαδή, η $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ *δεν* έχει πόλους στην περιοχή D_{46}, σε συμφωνία με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

(iv) $k \in D_5$. Γράφοντας και πάλι $M = ([M]_1, [M]_2)$, η σχέση (4.48) αποσυντίθεται στις

$$[M^{(t,0)}]_1(t,k) = \frac{1}{\bar{d}(k)}[M]_1(0,t,k) - \frac{\bar{b}(k)}{A(k)}e^{8ik^3 t}[M]_2(0,t,k) \tag{4.91}$$

και

$$[M^{(t,0)}]_2(t,k) = \bar{d}(k)[M]_2(0,t,k). \tag{4.92}$$

Για $k \in D_5$ έχουμε ότι η $[M]_2(0,t,k)$ έχει πόλους στις ρίζες της $\bar{d}(k)$ στην περιοχή D_5, κι επομένως από την (4.92) συνεπάγεται ότι η $[M^{(t,0)}]_2(t,k)$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_5, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Επιπλέον, η $[M]_1(0,t,k)$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_5, κι επομένως από την (4.91) συνάγεται ότι οι μόνοι πιθανοί πόλοι της $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ στην περιοχή D_5 είναι οι ρίζες $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2} \subseteq D_5$ της $\bar{d}(k)$ καθώς και οι ρίζες $\{K_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} \subseteq D_5$ $(N_1^0 + N_2^0 = N^0)$ της $A(k)$ (χρειάζεται να δείξουμε ότι μόνο οι τελευταίες είναι πραγματικά πόλοι της $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$).

Κατ΄ αρχήν μελετάμε τους $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2} \subseteq D_5$, υποθέτοντας ότι $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2} \cap \{K_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} = \emptyset$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την αντίστοιχη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων της $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ στα $k = \bar{\lambda}_j$, χρησιμοποιούμε πρώτα την (4.91) για να βρούμε ότι

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = \bar{\lambda}_j\right\} = \frac{1}{\bar{d}'(\bar{\lambda}_j)}[M]_1(0,t,\bar{\lambda}_j) - \frac{\bar{b}(\bar{\lambda}_j)}{A(\bar{\lambda}_j)} e^{8i\bar{\lambda}_j^3 t}\left\{Res[M]_2(0,t,k), k = \bar{\lambda}_j\right\}. \tag{4.93}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση

$$Res\left\{[M]_2(0,t,k), k = \bar{\lambda}_j\right\} = \overline{c_j^{(2)}} e^{-8i\bar{\lambda}_j^3 t}[M]_1(0,t,\bar{\lambda}_j), \quad \overline{c_j^{(2)}} = \frac{B(\bar{\lambda}_j)}{a(\lambda_j) d'(\lambda_j)} \tag{4.94}$$

και το γεγονός ότι

$$\overline{a(\lambda_j)\bar{A}(\lambda_j) - b(\lambda_j)\bar{B}(\lambda_j)} = \overline{d(\lambda_j)} = \bar{d}(\bar{\lambda_j}) = 0$$

φθάνουμε τελικά στην έκφραση

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = \bar{\lambda}_j\right\} = 0, \quad j = 1, \ldots, N_2. \tag{4.95}$$

Άρα η $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ *δεν* έχει πόλους στα σημεία $k = \bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, N_2$, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Εστιάζουμε τώρα την προσοχή μας στα σημεία $\{K_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} \subseteq D_5$, υποθέτοντας ότι $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2} \cap \{K_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} = \emptyset$.

Προκειμένου να παράγουμε την αντίστοιχη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων για την $[M^{(t,0)}]_1(t,k)$ στα $k = K_j$ βρίσκουμε, κατ΄ αρχήν από την (4.91) ότι

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j\right\} = -\frac{\bar{b}(K_j)}{A'(K_j)} e^{8iK_j^3 t}[M]_2(0,t,K_j), \quad j = N_1^0 + 1, \ldots, N^0. \tag{4.96}$$

Τώρα, από την (4.92) υπολογισμένη για $k = K_j$ λαμβάνουμε

$$[M]_2(0,t,K_j) = \frac{1}{\bar{d}(K_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,K_j) = -\frac{1}{\bar{b}(K_j)B(K_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,K_j), \tag{4.97}$$

όπου $\bar{d}(K_j) = -\bar{b}(K_j)B(K_j)$, καθώς $A(K_j) = 0$. Αντικατάσταση στην (4.96) μας παρέχει τη σχέση

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j\right\} = \frac{e^{8iK_j^3 t}}{A'(K_j)B(K_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,K_j), \quad j = N_1^0 + 1, \ldots, N^0 \tag{4.98}$$

που είναι και η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Μελετάμε, τώρα, την περίπτωση κατά την οποία $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2} \cap \{K_j\}_{j=N_1^0+1}^{N^0} \neq \emptyset$.

Υποθέτουμε ότι το $\bar{\lambda}_j \equiv K_j$ είναι μια *κοινή* (απλή) ρίζα των $A(k)$ και $\bar{d}(k)$, δηλ. ότι $A(K_j) = \bar{d}(K_j) = 0$. Ο ορισμός $\bar{d}(k) := \bar{a}(k)A(k) - \bar{b}(k)B(k)$ συνεπάγεται ότι $\bar{d}(K_j) = -\bar{b}(K_j)B(K_j) = 0$. Ανακαλούμε από τον ορισμό του $(t,0)$-RH ότι έχουμε υποθέσει πως $B(K_j) \neq 0$. Συνακόλουθα, το K_j είναι επίσης μια απλή ρίζα του $\bar{b}(k)$, δηλαδή $\bar{b}(K_j) = 0$. Αυτό δείχνει ότι το $k = K_j$ είναι μια επουσιώδης ιδιομορφία της φασματικής συνάρτησης $\frac{\bar{b}(k)}{A(k)}$, με

$$\lim_{k\to K_j}\left[\frac{\bar{b}(k)}{A(k)}\right] = \frac{\bar{b}'(K_j)}{A'(K_j)}. \tag{4.99}$$

Ανακαλούμε, τώρα, τη γνωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων (4.94), γραμμένη στη μορφή

$$Res\left\{[M]_2(0,t,k), k = K_j\right\} = \frac{B(K_j)}{\bar{a}(K_j)\bar{d}'(K_j)} e^{-8iK_j^3 t}[M]_1(0,t,K_j). \tag{4.100}$$

Η εξίσωση (4.91) συνεπάγεται πως

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j\right\} = \\ &\frac{1}{\bar{d}'(K_j)}[M]_1(0,t,K_j) - \lim_{k\to K_j}\left[\frac{\bar{b}(k)}{A(k)}e^{8ik^3t}\right] Res\left\{[M]_2(0,t,k), k = K_j\right\}. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.99) και (4.100) στην (4.101) έχουμε:

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j\right\} = \frac{1}{\bar{d}'(K_j)}\left[1 - \frac{\bar{b}'(K_j)B(K_j)}{\bar{a}(K_j)A'(K_j)}\right][M]_1(0,t,K_j). \tag{4.102}$$

Τώρα, υπολογίζοντας την παράγωγο $\bar{d}'(k)$ στο σημείο $k = \bar{K}_j$ έχουμε

$$\bar{d}'(K_j) = \bar{a}(K_j)A'(K_j) - \bar{b}'(K_j)B(K_j) \tag{4.103}$$

έτσι που η σχέση (4.102) να γίνεται:

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k = K_j\right\} = \frac{1}{\bar{a}(K_j)A'(K_j)}[M]_1(0,t,K_j). \tag{4.104}$$

Η έκφραση (4.92) συνεπάγεται

$$Res\left\{[M]_2(0,t,k), k = K_j\right\} = \frac{1}{\bar{d}'(K_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,K_j). \tag{4.105}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.100) μαζί με την (4.105) παίρνουμε

$$[M]_1(0,t,K_j) = e^{8iK_j^3 t}\frac{\bar{a}(K_j)}{B(K_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,K_j). \tag{4.106}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία εξίσωση στην (4.104) βρίσκουμε

$$Res\left\{[M^{(t,0)}]_1(t,k), k=K_j\right\} = \frac{e^{8iK_j^3 t}}{A'(K_j)B(K_j)}[M^{(t,0)}]_2(t,K_j), \tag{4.107}$$

που είναι, και πάλι, η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του $(t,0)$-RH.

Τελικά, έχει αποδειχθεί ότι η $M^{(t,0)}(t,k)$ είναι η μοναδική λύση του $(t,0)$-προβλήματος Riemann-Hilbert.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ο πίνακας $P^{(t,0)}(t,k)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες. Αποσυντιθέμενος στο διαγώνιο και αντιδιγώνιο μέρος του,

$$P^{(t,0)}(t,k) = P^{(t,0)}_{diag}(t,k) + P^{(t,0)}_{off}(t,k) \tag{4.108}$$

βρίσκουμε ότι

$$P^{(t,0)}_{diag}(t,k) = I + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k\to\infty, \tag{4.109}$$

και

$$P^{(t,0)}_{off}(t,k) \longrightarrow 0 \quad \text{εκθετικά}, \quad k\to\infty. \tag{4.110}$$

Το γεγονός αυτό εγγυάται ότι οι $M(0,t,k)$ και $M^{(t,0)}(t,k)$ έχουν ταυτόσημες ασυμπτωτικές συμπεριφορές που ορίζουν τις $\{(\partial_x^j q)(0,t)\}$ και $(\{g_j(t)\}$, αποδεικνύοντας έτσι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αντίστοιχες θεωρήσεις ισχύουν στο δεξιό άκρο $x=L$.

Στη *μέθοδο της ένδυσης (dressing method)*, βλ. εδάφιο 1.5 ([113]), λαμβάνουμε εκφράσεις για τα $(\partial_x^j q)(x,t)$ μέσω της $M(x,t,k)$. Υπολογίζοντας τις εκφράσεις αυτές για $x=L$ διαπιστώνουμε ότι οι τύποι που ορίζουν τις $(\partial_x^j q)(L,t)$ μέσω της $M(L,t,k)$ ταυτίζονται με τους τύπους (3.29), όταν οι $(\{f_j(t)\}, M^{(t,L)}(t,k))$ αντικατασταθούν από τις $(\{(\partial_x^j q)(L,t)\}, M(L,t,k))$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση μεταξύ των προβλημάτων Riemann-Hilbert που ικανοποιούνται από τις $M(L,t,k)$ και $M^{(t,L)}(t,k)$. Ορίζουμε την $M^{(t,L)}(t,k)$ μέσω της $M(L,t,k)$ σύμφωνα με τον τύπο

$$M^{(t,L)}(t,k) = M(L,t,k)P^{(t,L)}(t,k). \tag{4.111}$$

Και πάλι, ο πίνακας $P^{(t,L)}(t,k)$ μπορεί να υπολογιστεί ρητά. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των $M(L,t,k)$ και $M^{(t,L)}(t,k)$ παίρνουμε

$$
P^{(t,L)}(t,k)=\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 0\\ e^{2ikL+8ik^3t}\frac{\bar{b}(k)}{\alpha(k)A_L(k)} & 1\end{bmatrix}, & k\in D_{13}\\ \begin{bmatrix}\overline{A}_L(k) & 0\\ -e^{2ikL+8ik^3t}\frac{\overline{GR}(k)}{d(k)} & \frac{1}{\overline{A}_L(k)}\end{bmatrix}, & k\in D_2\\ \begin{bmatrix}1 & e^{-2ikL-8ik^3t}\frac{b(k)}{\overline{\alpha}(k)\overline{A}_L(k)}\\ 0 & 1\end{bmatrix}, & k\in D_{46}\\ \begin{bmatrix}\frac{1}{A_L(k)} & -e^{-2ikL-8ik^3t}\frac{GR(k)}{\bar{d}(k)}\\ 0 & A_L(k)\end{bmatrix}, & k\in D_5.\end{cases} \tag{4.112}
$$

Τότε θα δείξουμε ότι η $M^{(t,L)}(t,k)$ είναι η (μοναδική) λύση του (t,L)-προβλήματος Riemann-Hilbert ((t,L)-RH)που περιγράφεται στην παράγραφο 3.3.

Εκ κατασκευής έχουμε ότι η $M^{(t,L)}(t,k)$ είναι μια τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση-πίνακας που ικανοποιεί την αλματική συνθήκη (3.38)-(3.39). Παραπέρα, η σχέση (2.87) μαζί με την συμπεριφορά των φασματικών συναρτήσεων στο άπειρο συνεπάγονται ότι η συμπεριφορά της $M^{(t,L)}(t,k)$ στο άπειρο δίνεται από την (3.40). Επιπλέον, η (2.84) σε συνδυασμό με τη συμπεριφορά των φασματικών συναρτήσεων καθώς το $k\to 0$ μας οδηγούν απευθείας στη συμπεριφορά (3.43).

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι πόλοι και τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $M^{(t,L)}(x,k)$ είναι ακριβώς εκείνα που περιγράφονται στη διατύπωση του (t,L)-RH.

(i) $k\in D_{13}$. Γράφοντας $M=([M]_1,[M]_2)$, η σχέση (4.111) αποσυντίθεται στις ακόλουθες:

$$
[M^{(t,L)}]_1(t,k)=[M]_1(L,t,k)+e^{2ikL+8ik^3t}\frac{\bar{b}(k)}{\alpha(k)A_L(k)}[M]_2(L,t,k) \tag{4.113}
$$

και

$$
[M^{(t,L)}]_2(t,k)=[M]_2(L,t,k). \tag{4.114}
$$

Για $k\in D_{13}$ έχουμε ότι η $[M]_2(L,t,k)$ είναι ολόμορφη στην υπό θεώρηση περιοχή. Η σχέση (4.114) συνεπάγεται ότι η $[M^{(t,L)}]_2(t,k)$ *δεν* έχει πόλους στην περιοχή D_{13}, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του (t,L)-RH.

Επίσης, για $k\in D_{13}$ έχουμε ότι η $[M]_1(L,t,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες της $\alpha(k)$ στην D_{13}. Η σχέση (4.113) συνεπάγεται ότι οι μόνοι πιθανοί πόλοι της $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ στην περιοχή D_{13} είναι οι ρίζες $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}\subseteq D_{13}$ της $\alpha(k)$, καθώς και οι ρίζες της $A_L(k)$ στην D_{13}. Γράφουμε $\{K_j^L\}_{j=1}^{N^L}=\{K_j^L\}_{j=1}^{N_1^L}\cup\{K_j^L\}_{j=N_1^L+1}^{N^L}$ για $N^L=N_1^L+N_2^L$ έτσι ώστε $\{K_j^L\}_{j=1}^{N_1^L}\subseteq D_{13}$ και $\{K_j^L\}_{j=N_1^L+1}^{N^L}\subseteq D_5$. Επομένως οι ρίζες της $A_L(k)$ στην περιοχή D_{13} είναι $\{K_j^L\}_{j=1}^{N_1^L}$. Τώρα θα επιχειρήσουμε να παράγουμε τις αντίστοιχες συνθήκες ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Κατ' αρχήν μελετάμε τα $\{K_j^L\}_{j=1}^{N_1^L}$, υποθέτοντας ότι $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}\cap\{K_j^L\}_{j=1}^{N_1^L}=\emptyset$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\left\{Res[M]_1(L,t,k), k = K_j^L\right\} = 0$ (που ισχύει καθώς η $[M]_1(L,t,k)$ είναι ολόμορφη στο $k = K_j^L$) βρίσκουμε από την (4.113) ότι

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = K_j^L\right\} = e^{2iK_j^L L + 8i(K_j^L)^3 t} \frac{\bar{b}(K_j^L)}{\alpha(K_j^L) A_L'(K_j^L)} [M^{(t,L)}]_2(t, K_j^L). \quad (4.115)$$

Τώρα, από τον ορισμό της $\alpha(k)$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $A_L(K_j^L) = 0$ έχουμε $\alpha(K_j^L) = e^{2iK_j^L L}\bar{b}(K_j^L) B_L(K_j^L)$, έτσι που η προηγούμενη σχέση να γίνεται

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = K_j^L\right\} = \frac{e^{8i(K_j^L)^3 t}}{B_L(K_j^L) A_L'(K_j^L)} [M^{(t,L)}]_2(t, K_j^L), \quad j = 1, \ldots, N_1^L, \quad (4.116)$$

που είναι η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του (t, L)-RH.

Τώρα εστιάζουμε την προσοχή μας στα $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}$, υποθέτοντας ότι $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1} \cap \{K_j^L\}_{j=1}^{N_1^L} = \emptyset$.

Η συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων για την $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ στα $k = \nu_j$, $j = 1, \ldots, N_1$ μπορεί να βρεθεί, κατάρχήν, από την (4.113), ως εξής:

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = \nu_j\right\} = \\ &\{Res[M]_1(L,t,k), k = \nu_j\} + e^{2i\nu_j L + 8i\nu_j^3 t} \frac{\bar{b}(\nu_j)}{\alpha'(\nu_j) A_L(\nu_j)} [M]_2(L,t,\nu_j). \end{aligned} \quad (4.117)$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$Res\left\{[M]_1(L,t,k), k = \nu_j\right\} = c_j^{(1)} e^{2i\nu_j L + 8i\nu_j^3 t} [M]_2(L,t,\nu_j), \quad c_j^{(1)} = \frac{a(\nu_j)}{e^{2i\nu_j L} B_L(\nu_j) \alpha'(\nu_j)} \quad (4.118)$$

καταλήγουμε στην:

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = \nu_j\right\} = e^{2i\nu_j L + 8i\nu_j^3 t} \frac{[M]_2(L,t,\nu_j)}{\alpha'(\nu_j)} \left\{ \frac{a(\nu_j)}{e^{2i\nu_j L} B_L(\nu_j)} + \frac{\bar{b}(\nu_j)}{A_L(\nu_j)} \right\}. \quad (4.119)$$

Ο ορισμός της φασματικής συνάρτησης $\alpha(k)$ συνεπάγεται ότι

$$\frac{a(\nu_j)}{e^{2i\nu_j L} B_L(\nu_j)} + \frac{\bar{b}(\nu_j)}{A_L(\nu_j)} = \frac{\alpha(\nu_j)}{e^{2i\nu_j L} B_L(\nu_j) A_L(\nu_j)} = 0 \quad (4.120)$$

καθώς $\alpha(\nu_j) = 0$. Συνεπώς

$$Res[M^{(t,L)}]_1(t, k = \nu_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, N_1, \quad (4.121)$$

δηλαδή η $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ είναι ολόμορφη στα σημεία $k = \nu_j$, $j = 1, \dots, N_1$, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του (t, L)-RH.

Μελετάμε, τώρα, την περίπτωση κατά την οποία $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1} \cap \{K_j^L\}_{j=1}^{N_1^L} \neq \emptyset$.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το $\nu_j = K_j^L$ είναι μια *κοινή* (απλή) ρίζα των φασματικών συναρτήσεων $\alpha(k)$ και $A_L(k)$, δηλαδή $\alpha(K_j^L) = A_L(K_j^L) = 0$. Ο ορισμός της $\alpha(k)$ συνεπάγεται ότι $\alpha(K_j^L) = e^{2iK_j^L L}\bar{b}(K_j^L)B_L(K_j^L) = 0$. Ας ανακαλέσουμε τώρα, την υπόθεσή μας ότι δεν υπάρχει κοινή ρίζα μεταξύ των φασματικών συναρτήσεων $\alpha(k)$ και $B_L(k)$ στην περιοχή D_{13}, επομένως $B_L(K_j^L) \neq 0$. Προκύπτει ότι το K_j^L είναι μια απλή ρίζα της $\bar{b}(k)$, δηλαδή $\bar{b}(K_j^L) = 0$.

Συνακόλουθα, το $k = K_j^L$ είναι ένας απλός πόλος της φασματικής συνάρτησης $\frac{\bar{b}(k)}{\alpha(k)A_L(k)}$, με ολοκληρωτικό υπόλοιπο

$$Res\left[\frac{\bar{b}(k)}{\alpha(k)A_L(k)}\right]_{k=K_j^L} = \frac{\bar{b}'(K_j^L)}{\alpha'(K_j^L)A_L'(K_j^L)}(\neq 0). \tag{4.122}$$

Επιπλέον, η $[M]_1(L,t,k)$ έχει έναν απλό πόλο στο $k = K_j^L$, με αντίστοιχη συνθήκη ολοκληρωτικού υπολοίπου την ακόλουθη:

$$\left\{Res[M]_1(L,t,k), k = K_j^L\right\} = \frac{a(K_j^L)}{e^{2iK_j^L L}B_L(K_j^L)\alpha'(K_j^L)}e^{2iK_j^L L + 8i(K_j^L)^3 t}[M]_2(L,t,K_j^L). \tag{4.123}$$

Ας σημειωθεί, επίσης, ότι η $[M]_2(L,t,k)$ είναι ολόμορφη στην υπό θεώρηση περιοχή.
Η εξίσωση (4.113) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = K_j^L\right\} = \\ &= Res\left\{[M]_1(L,t,k), k = K_j^L\right\} + e^{2iK_j^L L + 8i(K_j^3 t)}Res\left[\frac{\bar{b}(k)}{\alpha(k)A_L(k)}\right]_{k=K_j^L}[M]_2(L,t,K_j^L). \end{aligned} \tag{4.124}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.122) και (4.123) στην (4.124) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = K_j^L\right\} = \\ &\frac{1}{\alpha'(K_j^L)}\left[\frac{a(K_j^L)}{B_L(K_j^L)} + e^{2iK_j^L L}\frac{\bar{b}'(K_j^L)}{A_L'(K_j^L)}\right]e^{8i(K_j^L)^3 t}[M]_2(L,t,K_j^L). \end{aligned} \tag{4.125}$$

Τώρα, υπολογίζοντας την παράγωγο της $\alpha(k)$ στη θέση $k = K_j^L$ έχουμε:

$$\alpha'(K_j^L) = a(K_j^L)A_L'(K_j^L) + e^{2iK_j^L L}\bar{b}'(K_j^L)B_L(K_j^L). \tag{4.126}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.126) στην (4.125) καταλήγουμε, τελικά, στην έκφραση:

$$\left\{Res[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = K_j^L\right\} = \frac{e^{8i(K_j^L)^3 t}}{A'_L(K_j^L)B_L(K_j^L)}[M^{(t,L)}]_2(t,K_j^L), \tag{4.127}$$

που είναι, και πάλι, η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του (t,L)-RH.

(ii) $k \in D_2$. Γράφοντας, και πάλι, $M = ([M]_1, [M]_2)$, η σχέση (4.111) αποσυντίθεται στις ακόλουθες:

$$[M^{(t,L)}]_1(t,k) = \bar{A}_L(k)[M]_1(L,t,k) - e^{2ikL+8ik^3t}\frac{(\alpha B - \beta A)(k)}{d(k)}[M]_2(L,t,k) \tag{4.128}$$

και

$$[M^{(t,L)}]_2(t,k) = \frac{1}{\bar{A}_L(k)}[M]_2(L,t,k). \tag{4.129}$$

Ασχολούμαστε κατ΄ αρχήν, με την (4.128). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Έχουμε ότι η $[M]_1(L,t,k)$ έχει πόλους στις ρίζες της $d(k)$ στην D_2, ενώ η $[M]_2(L,t,k)$ είναι ολόμορφη στην D_2. Επομένως, από την (4.128) συμπεραίνουμε ότι οι μόνοι πιθανοί πόλοι της $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ στην D_2 είναι οι ρίζες $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2} \subseteq D_2$ της $d(k)$. Θα δείξουμε ότι τελικά η $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ είναι ολόμορφη στα σημεία αυτά.

Από την εξίσωση (4.128) λαμβάνουμε για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα ότι

$$\begin{aligned}&Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = \lambda_j\right\} = \\ &\bar{A}_L(\lambda_j)\left\{Res[M]_1(L,t,k), k = \lambda_j\right\} - e^{2i\lambda_j L+8i\lambda_j^3 t}\frac{\overline{GR}(\lambda_j)}{d'(\lambda_j)}[M]_2(L,t,\lambda_j).\end{aligned} \tag{4.130}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$Res\left\{[M]_1(L,t,k), k = \lambda_j\right\} = c_j^{(2)}e^{2i\lambda_j L+8i\lambda_j^3 t}[M]_2(L,t,\lambda_j), \quad c_j^{(2)} = \frac{\bar{B}(\lambda_j)}{a(\lambda_j)d'(\lambda_j)} \tag{4.131}$$

βρίσκουμε

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = \lambda_j\right\} = e^{2i\lambda_j L+8i\lambda_j^3 t}\frac{[M]_2(L,t,\lambda_j)}{d'(\lambda_j)}\left\{\frac{\bar{A}_L(\lambda_j)\bar{B}(\lambda_j)}{a(\lambda_j)} - \overline{GR}(\lambda_j)\right\}. \tag{4.132}$$

Τώρα προτιθέμεθα να δείξουμε ότι

$$a(\lambda_j)\overline{GR}(\lambda_j) = \bar{A}_L(\lambda_j)\bar{B}(\lambda_j), \quad j = 1, \ldots, N_2. \tag{4.133}$$

Προς αυτή την κατεύθυνση, χρησιμοποιούμε πρώτα τον ορισμό της φασματικής συνάρτησης $d(k)$ και το γεγονός ότι $d(\lambda_j) = 0$ για να συμπεράνουμε ότι

$$a(\lambda_j)\bar{A}(\lambda_j) = b(\lambda_j)\bar{B}(\lambda_j). \tag{4.134}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον ορισμό της φασματικής συνάρτησης $GR(k)$ καθώς και την εξίσωση (4.134) για να βρούμε

$$\overline{GR}(\lambda_j) = (\bar{a}\bar{A}_L\bar{B} - \bar{b}\bar{A}_L\bar{A})(\lambda_j). \tag{4.135}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.134), η *προς απόδειξη* εξίσωση(4.133) είναι ισοδύναμη με την

$$\overline{GR}(\lambda_j) = \big(\bar{A}_L\frac{\bar{A}}{b}\big)(\lambda_j). \tag{4.136}$$

Χρησιμοοιώντας την (4.135), η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$(\bar{a}\bar{A}_L\bar{B} - \bar{b}\bar{A}_L\bar{A})(\lambda_j) = \big(\bar{A}_L\frac{\bar{A}}{b}\big)(\lambda_j). \tag{4.137}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (4.134) αντικαθιστούμε $\bar{B}(\lambda_j) = \big(\frac{a}{b}\bar{B}\big)(\lambda_j)$ στην προηγούμενη εξίσωση για να φθάσουμε, κατόπιν λίγων αλγεβρικών χειρισμών, στην *ισοδύναμη μορφή*

$$\big(\frac{\bar{A}_L\bar{A}}{b}\big)(\lambda_j) = \big(\frac{\bar{A}_L\bar{A}}{b}\big)(\lambda_j) \tag{4.138}$$

καταδεικνύοντας ότι η (4.133) *πράγματι ισχύει.*

Τελικά, αντικαθιστώντας την (4.133) στην (4.132) παίρνουμε

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = \lambda_j\right\} = 0, \quad j = 1, \ldots, N_2, \tag{4.139}$$

δηλαδή ότι η $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ *δεν* έχει πόλους στα σημεία $k = \lambda_j$, $j = 1, \ldots, N_2$, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του (t,L)-RH.

Στη συνέχεια στρέφουμε την προσοχή μας στην εξίσωση (4.129). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $[M]_2(L,t,k)$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_2, βλέπουμε ότι οι μόνοι *πιθανοί* πόλοι της $[M^{(t,L)}]_2(t,k)$ στην περιοχή D_2 είναι οι ρίζες $\{\bar{K}_j^L\}_{j=N_1^L+1}^{N^L} \subseteq D_2$ της φασματικής συνάρτησης $\bar{A}_L(k)$.

Η συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων που συνάγεται από την (4.129) είναι

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k), k = \bar{K}_j^L\right\} = \frac{1}{\bar{A}'_L(\bar{K}_j^L)}[M]_2(L,t,\bar{K}_j^L), \quad j = N_1^L + 1, \ldots, N^L. \tag{4.140}$$

Δεδομένου ότι $\bar{A}_L(\bar{K}_j^L) = 0$, η εξίσωση (4.128) για $k = \bar{K}_j^L$ δίνει ότι

$$[M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L) = -e^{2i\bar{K}_j^L L + 8i(\bar{K}_j^L)^3 t}\frac{\overline{GR}(\bar{K}_j^L)}{d(\bar{K}_j^L)}[M]_2(L,t,\bar{K}_j^L). \tag{4.141}$$

Τώρα, ο ορισμός της φασματικής συνάρτησης $\overline{GR}(k)$

$$\overline{GR}(k) = (\bar{a}\bar{A}_L + be^{-2ikL}\bar{B}_L)\bar{B} - (\bar{b}\bar{A}_L + ae^{-2ikL}\bar{B}_L)\bar{A} \tag{4.142}$$

συνεπάγεται, λόγω της $\bar{A}_L(\bar{K}_j^L)=0$, για $k=\bar{K}_j^L$ ότι

$$\overline{GR}(\bar{K}_j^L)=e^{-2i\bar{K}_j^L L}\bar{B}_L(\bar{K}_j^L)(b\bar{B}-a\bar{A})(\bar{K}_j^L). \tag{4.143}$$

Ο ορισμός της $d(k)$ και το γεγονός ότι $\bar{A}_L(\bar{K}_j^L)=0$ σενεπάγεται τη σχέση $(b\bar{B}-a\bar{A})(\bar{K}_j^L)=-d(\bar{K}_j^L)$, έτσι, ώστε

$$\overline{GR}(\bar{K}_j^L)=-e^{-2i\bar{K}_j^L L}\bar{B}_L(\bar{K}_j^L)d(\bar{K}_j^L). \tag{4.144}$$

Χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα στην (4.141) λαμβάνουμε

$$[M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L)=e^{8i(\bar{K}_j^L)^3 t}\bar{B}_L(\bar{K}_j^L)[M]_2(L,t,\bar{K}_j^L) \tag{4.145}$$

δηλαδή

$$[M]_2(L,t,\bar{K}_j^L)=e^{-8i(\bar{K}_j^L)^3 t}\frac{[M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L)}{\bar{B}_L(\bar{K}_j^L)}. \tag{4.146}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία εξίσωση στην (4.140) τελικά καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k),k=\bar{K}_j^L\right\}=\frac{e^{-8i(\bar{K}_j^L)^3 t}}{\overline{B_L(K_j^L)A_L'(K_j^L)}}[M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L),\quad j=N_1^L+1,\ldots,N^L. \tag{4.147}$$

που είναι, και πάλι, η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του (t,L)-RH.

(iii) $k\in D_{46}$. Γράφοντας και πάλι $M=([M]_1,[M]_2)$, η έκφραση (4.111) αποσυντίθεται στις ακόλουθες δύο:

$$[M^{(t,L)}]_1(t,k)=[M]_1(L,t,k) \tag{4.148}$$

και

$$[M^{(t,L)}]_2(t,k)=e^{-2ikL-8ik^3t}\frac{b(k)}{\bar{\alpha}(k)\bar{A}_L(k)}[M]_1(L,t,k)+[M]_2(L,t,k). \tag{4.149}$$

Για $k\in D_{46}$ έχουμε ότι η $[M]_1(L,t,k)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στην υπό θεώρηση περιοχή. Κατά συνέπεια, από την (4.148) παίρνουμε ότι η $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ δεν έχει πόλους στην περιοχή D_{46}, σε συμφωνία με τον ορισμό του (t,L)-RH.

Στη συνέχεια, έχουμε ότι η $[M]_2(L,t,k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες της $\bar{\alpha}(k)$ στην περιοχή D_{46}, και η σχέση (4.149) συνεπάγεται ότι οι μόνοι πιθανοί πόλοι της συνάρτησης $[M^{(t,L)}]_2(t,k)$ είναι οι ρίζες $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1}\subseteq D_{46}$ της φασματικής συνάρτησης $\bar{\alpha}(k)$ καθώς και οι ρίζες $\{\bar{K}_j^L\}_{j=1}^{N_1^L}\subseteq D_{46}$ της φασματικής συνάρτησης $\bar{A}_L(k)$.

Μελετάμε πρώτα τα $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1}\subseteq D_{46}$, υποθέτοντας ότι $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1}\cap\{\bar{K}_j^L\}_{j=1}^{N_1^L}=\emptyset$.

Για $k=\bar{\nu}_j$, η αντίστοιχη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, όπως συνάγεται από την (4.149), είναι:

$$\begin{aligned}&Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k),k=\bar{\nu}_j\right\}=\\&e^{-2i\bar{\nu}_jL-8i\bar{\nu}_j^3t}\frac{b(\bar{\nu}_j)}{\bar{\alpha}'(\bar{\nu}_j)\bar{A}_L(\bar{\nu}_j)}[M]_1(L,t,\bar{\nu}_j)+Res\left\{[M]_2(L,t,k),k=\bar{\nu}_j\right\}.\end{aligned} \tag{4.150}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$Res\left\{[M]_2(L,t,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = \overline{c_j^{(1)}} e^{-2i\bar{\nu}_j L - 8i\bar{\nu}_j^3 t}[M]_1(L,t,\bar{\nu}_j), \quad \overline{c_j^{(1)}} = \frac{\overline{a(\nu_j)}}{e^{-2i\bar{\nu}_j L}\overline{B_L(\nu_j)\alpha'(\nu_j)}} \tag{4.151}$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = e^{-2i\bar{\nu}_j L - 8i\bar{\nu}_j^3 t}\frac{[M]_1(L,t,\bar{\nu}_j)}{\overline{\alpha'(\nu_j)}}\left\{\frac{b(\bar{\nu}_j)}{\overline{A_L(\nu_j)}} + \frac{\overline{a(\nu_j)}e^{2i\bar{\nu}_j L}}{\overline{B_L(\nu_j)}}\right\}. \tag{4.152}$$

Αλλά από τον ορισμό της φασματικής συνάρτησης $\alpha(k)$ συνεπάγεται ότι

$$\frac{b(\bar{\nu}_j)}{\overline{A_L(\nu_j)}} + \frac{\overline{a(\nu_j)}e^{2i\bar{\nu}_j L}}{\overline{B_L(\nu_j)}} = e^{2i\bar{\nu}_j L}\frac{\overline{\alpha(\nu_j)}}{\overline{A_L(\nu_j)B_L(\nu_j)}} = 0 \tag{4.153}$$

καθώς $\overline{\alpha(\nu_j)} = \bar{\alpha}(\bar{\nu}_j) = 0$. Επομένως,

$$Res[M^{(t,L)}]_2(t,k) = 0, \quad j = 1,\ldots,N_1. \tag{4.154}$$

Κατά συνέπεια, η $[M^{(t,L)}]_2(t,k)$ *δεν* έχει πόλους στα σημεία $k=\bar{\nu}_j$, $j=1,\ldots,N_1$, γεγονός που βρίσκεται σε συμφωνία με τον ορισμό του (t,L)-RH.

Τώρα μελετάμε τις ρίζες $\{\bar{K}_j^L\}_{j=1}^{N_1^L} \subseteq D_{46}$ της φασματικής συνάρτησης $\bar{A}_L(k)$, υποθέτοντας ότι $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1} \cap \{\bar{K}_j^L\}_{j=1}^{N_1^L} = \emptyset$.

Έχουμε ότι η συνάρτηση $[M]_2(L,t,k)$ είναι ολόμορφη στα σημεία αυτά, ενώ η σχέση (4.149) συνεπάγεται ότι οι συνθήκες ολοκληρωτικών υπολοίπων που αντιστοιχούν στη $[M^{(t,L)}]_2(t,k)$ είναι:

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k), k=\bar{K}_j^L\right\} = e^{-2i(\bar{K}_j^L)L - 8i(\bar{K}_j^L)^3 t}\frac{b(\bar{K}_j^L)}{\bar{\alpha}(\bar{K}_j^L)\bar{A}'_L(\bar{K}_j^L)}[M]_1(L,t,\bar{K}_j^L). \tag{4.155}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.148) υπολογισμένη για $k=\bar{K}_j^L$, δηλ. $[M]_1(L,t,\bar{K}_j^L) = [M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L)$, παίρνουμε

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k), k=\bar{K}_j^L\right\} = e^{-2i\bar{K}_j^L L - 8i(\bar{K}_j^L)^3 t}\frac{b(\bar{K}_j^L)}{\overline{\alpha(K_j^L)A'_L(K_j^L)}}[M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L). \tag{4.156}$$

Τελικά, ο ορισμός της φασματικής συνάρτησης $\bar{\alpha}(k)$ υπολογισμένος για $k=\bar{K}_j^L$, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\bar{A}_L(\bar{K}_j^L)=0$, δίνουν $\overline{\alpha(K_j^L)} = e^{-2i\bar{K}_j^L L}b(\bar{K}_j^L)\overline{B_L(K_j^L)}$, οπότε η έκφραση (4.156) έρχεται στη μορφή

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k), k=\bar{K}_j^L\right\} = \frac{e^{-8i(\bar{K}_j^L)^3 t}}{\overline{A'_L(K_j^L)B_L(K_j^L)}}[M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L), \quad j=1,\ldots,N_1^L, \tag{4.157}$$

που είναι, και πάλι, η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του (t, L)-RH.

Τώρα μελετάμε την περίπτωση στην οποία $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1} \cap \{\bar{K}_j^L\}_{j=1}^{N_1^L} \neq \emptyset$.

Υποθέτουμε ότι το $\bar{\nu}_j = \bar{K}_j^L$ είναι *κοινή* (απλή) ρίζα των φασματικών συναρτήσεων $\bar{\alpha}(k)$ και $\bar{A}_L(k)$, δηλ. ότι $\bar{\alpha}(\bar{K}_j^L) = \bar{A}_L(\bar{K}_j^L) = 0$. Ο ορισμός της φασματικής συνάρτησης $\bar{\alpha}(k)$ συνπάγεται ότι: $\bar{\alpha}(\bar{K}_j^L) = e^{-2i\bar{K}_j^L L} b(\bar{K}_j^L)\bar{B}_L(\bar{K}_j^L) = 0$. Ας ανακαλέσουμε, τώρα, την υπόθεσή μας ότι οι φασματικές συναρτήσεις $\alpha(k)$ και $B_L(k)$ *δεν* έχουν κοινές ρίζες στην περιοχή D_{13}, γεγονός που συνεπάγεται ότι $\overline{B_L(K_j^L)} = \bar{B}_L(\bar{K}_j^L) \neq 0$. Συνακόλουθα, το $\bar{K}_j^L$ είναι (απλή) ρίζα της $b(k)$, δηλαδή $b(\bar{K}_j^L) = 0$.

Κατά συνέπεια, η ποσότητα $k = \bar{K}_j^L$ είναι απλός πόλος της φασματικής συνάρτησης $\frac{b(k)}{\bar{\alpha}(k)\bar{A}_L(k)}$, με ολοκληρωτικό υπόλοιπο

$$Res\left[\frac{b(k)}{\bar{\alpha}(k)\bar{A}_L(k)}\right]_{k=\bar{K}_j^L} = \frac{b'(\bar{K}_j^L)}{\bar{\alpha}'(\bar{K}_j^L)\bar{A}'_L(\bar{K}_j^L)}(\neq 0). \tag{4.158}$$

Επίσης, η συνάρτηση $[M]_2(L, t, k)$ παρουσιάζει απλό πόλο στη θέση $k = \bar{K}_j^L$, με ολοκληρωτικό υπόλοιπο που περιγράφεται από την ακόλουθη συνθήκη:

$$Res\left\{[M]_2(L, t, k), k = \bar{K}_j^L\right\} = \frac{\overline{a(K_j^L)}}{e^{-2i\bar{K}_j^L}\overline{B_L(K_j^L)\alpha'(K_j^L)}} e^{-2i\bar{K}_j^L L - 8i(\bar{K}_j^L)^3 t}[M]_1(L, t, \bar{K}_j^L). \tag{4.159}$$

Τώρα, η σχέση (4.149) συνεπάγεται ότι το $k = \bar{K}_j^L$ είναι απλός πόλος της $[M^{(t,L)}]_2(t, k)$, με ολοκληρωτικό υπόλοιπο που περιγράφεται από τη συνθήκη

$$\begin{aligned} &Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t, k), k = \bar{K}_j^L\right\} = \\ &e^{-2i\bar{K}_j^L L - 8i(\bar{K}_j^L)^3 t} Res\left[\frac{b(k)}{\bar{\alpha}(k)\bar{A}_L(k)}\right]_{k=K_j^L} [M]_1(L, t, \bar{K}_j^L) + Res\left\{[M]_2(L, t, k), k = K_j^L\right\}. \end{aligned} \tag{4.160}$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (4.158) και (4.159) στην (4.160) παίρνουμε

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t, k), k = \bar{K}_j^L\right\} = \frac{e^{-8i(\bar{K}_j^L)^3 t}}{\bar{\alpha}'(\bar{K}_j^L)}\left[e^{-2i\bar{K}_j^L L}\frac{b'(\bar{K}_j^L)}{\bar{A}'_L(\bar{K}_j^L)} + \frac{\bar{a}(\bar{K}_j^L)}{\bar{B}_L(\bar{K}_j^L)}\right][M]_1(L, t, \bar{K}_j^L). \tag{4.161}$$

Τώρα, υπολογίζοντας την παράγωγο της φασματικής συνάρτησης $\bar{\alpha}(k)$ στο σημείο $k = \bar{K}_j^L$ έχουμε

$$\bar{\alpha}'(\bar{K}_j^L) = \bar{a}(\bar{K}_j^L)\bar{A}'_L(\bar{K}_j^L) + e^{-2i\bar{K}_j^L L} b'(\bar{K}_j^L)\bar{B}_L(\bar{K}_j^L). \tag{4.162}$$

Επίσης, η σχέση (4.148) υπολογισμένη στο σημείο $k = \bar{K}_j^L$ μας δίνει

$$[M]_1(L,t,\bar{K}_j^L) = [M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L). \tag{4.163}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.162) καθώς (4.163) στην (4.161) τελικά καταλήγουμε στην έκφραση

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_2(t,k), k = \bar{K}_j^L\right\} = \frac{e^{-8i(\bar{K}_j^L)^3 t}}{\bar{A}'_L(\bar{K}_j^L)\bar{B}_L(\bar{K}_j^L)}[M^{(t,L)}]_1(t,\bar{K}_j^L), \tag{4.164}$$

που είναι, και πάλι, η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του (t,L)-RH.

(iv) $k \in D_5$. Γράφοντας $M = ([M]_1, [M]_2)$, η σχέση (4.111) αποσυντίθεται στις ακόλουθες δύο σχέσεις:

$$[M^{(t,L)}]_1(t,k) = \frac{1}{A_L(k)}[M]_1(L,t,k) \tag{4.165}$$

και

$$[M^{(t,L)}]_2(t,k) = e^{-2ikL-8ik^3 t}\frac{GR(k)}{\bar{d}(k)}[M]_1(L,t,k) + A_L(k)[M]_2(L,t,k). \tag{4.166}$$

Ας σημειωθεί, κατ΄ αρχήν, ότι η $[M]_1(L,t,k)$ δε έχει πόλους στην D_5. Κατά συνέπεια, λόγω της (4.165), οι μόνοι πιθανοί πόλοι της $[M^{(t,L)}]_1(t,k)$ είναι οι ρίζες $\{K_j^L\}_{j=N_1^L+1}^{N^L} \subseteq D_5$ της $A_L(k)$. Η αντίστοιχη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων που προκύπτει από την (4.165), είναι

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = K_j^L\right\} = \frac{1}{A'_L(K_j^L)}[M]_1(L,t,K_j^L). \tag{4.167}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την (4.166) για να πάρουμε

$$[M]_1(L,t,K_j^L) = -e^{2iK_j^L L+8i(K_j^L)^3 t}\frac{\bar{d}(K_j^L)}{GR(K_j^L)}[M^{(t,L)}]_2(t,K_j^L). \tag{4.168}$$

Αντικατάσταση του τελευταίου αποτελέσματος στην (4.167) μας δίνει:

$$Res\left\{[M^{(t,L)}]_1(t,k), k = K_j^L\right\} = -e^{2iK_j^L L+8i(K_j^L)^3 t}\frac{\bar{d}(K_j^L)}{A'_L(K_j^L)GR(K_j^L)}[M^{(t,L)}]_2(t,K_j^L). \tag{4.169}$$

Ο ορισμός της φασματικής συνάρτησης $GR(k)$ υπολογισμένος για $k = K_j^L$, το γεγονός ότι $A_L(K_j^L) = 0$, καθώς και ο ορισμός της φασματικής συνάρτησης $\bar{d}(k)$ υπολογισμένος για $k = K_j^L$, μας οδηγούν στην έκφραση

$$GR(K_j^L) = -e^{2iK_j^L L}B_L(K_j^L)\bar{d}(K_j^L). \tag{4.170}$$

Αντικατάσταση της τελευταίας έκφρασης στην (4.169) μας οδηγεί στη συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων:

$$Res[M^{(t,L)}]_1(t, k = K_j^L) = \frac{e^{8i(K_j^L)^3 t}}{A_L'(K_j^L) B_L(K_j^L)} [M^{(t,L)}]_2(t, K_j^L), \quad j = N_1^L + 1, \ldots, N^L, \tag{4.171}$$

που είναι η σωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων, σύμφωνα με τον ορισμό του (t, L)-RH.

Τώρα ερχόμαστε στην (4.166), προκειμένου να μελετήσουμε τους πόλους της συνάρτησης $[M^{(t,L)}]_2(t, k)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $[M]_1(L, t, k)$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_5, καθώς και το γεγονός ότι η $[M]_2(L, t, k)$ έχει απλούς πόλους στις απλές ρίζες $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2} \subseteq D_5$ της φασματικής συνάρτησης $\bar{d}(k)$ στην D_5, έχουμε ότι οι μόνοι *πιθανοί* πόλοι της συνάρτησης $[M^{(t,L)}]_2(t, k)$ στην περιοχή D_5 είναι οι $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2}$. Από την έκφραση (4.166) συνεπάγεται η ακόλουθη σχέση για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα:

$$\begin{aligned} &Res \left\{ [M^{(t,L)}]_2(t, k), k = \bar{\lambda}_j \right\} = \\ &-e^{-2i\bar{\lambda}_j L - 8i\bar{\lambda}_j^3 t} \frac{GR(\bar{\lambda}_j)}{\bar{d}'(\bar{\lambda}_j)} [M]_1(L, t, \bar{\lambda}_j) + A_L(\bar{\lambda}_j) Res \left\{ [M]_2(L, t, k), k = \bar{\lambda}_j \right\}. \end{aligned} \tag{4.172}$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή συνθήκη ολοκληρωτικών υπολοίπων

$$Res \left\{ [M]_2(L, t, k), k = \bar{\lambda}_j \right\} = \overline{c_j^{(2)}} e^{-2i\bar{\lambda}_j L - 8i\bar{\lambda}_j^3 t} [M]_1(L, t, \bar{\lambda}_j), \quad \overline{c_j^{(2)}} = \frac{B(\bar{\lambda}_j)}{\overline{a(\lambda_j) d'(\lambda_j)}} \tag{4.173}$$

στην (4.172), καταλήγουμε στην έκφραση:

$$Res \left\{ [M^{(t,L)}]_2(t, k), k = \bar{\lambda}_j \right\} = e^{-2i\bar{\lambda}_j L - 8i\bar{\lambda}_j^3 t} \frac{[M]_1(L, t, \bar{\lambda}_j)}{\overline{d'(\lambda_j)}} \left\{ \frac{A_L(\bar{\lambda}_j) B(\bar{\lambda}_j)}{\overline{a(\lambda_j)}} - GR(\bar{\lambda}_j) \right\}. \tag{4.174}$$

Εν όψει, όμως, της έκφρασης (4.133) που αποδείχθηκε νωρίτερα, δηλαδή,

$$a(\lambda_j) \overline{GR}(\lambda_j) = \bar{A}_L(\lambda_j) \bar{B}(\lambda_j), \quad j = 1, \ldots, N_2, \tag{4.175}$$

τελικά λαμβάνουμε

$$Res \left\{ [M^{(t,L)}]_2(t, k), k = \bar{\lambda}_j \right\} = 0, \quad j = 1, \ldots, N_2, \tag{4.176}$$

δηλ. ότι η $[M^{(t,L)}]_2(t, k)$ είναι ολόμορφη στα σημεία $k = \bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, N_2$, που είναι, και πάλι, σε συμφωνία με τον ορισμό του (t, L)-RH.

Τελικά, έχει αποδειχθεί ότι η $M^{(t,L)}(t,k)$ είναι η μοναδική λύση του (t,L)-προβλήματος Riemann-Hilbert.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ο πίνακας $P^{(t,L)}(t,k)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες. Αποσυντιθέμενος στο διαγώνιο και αντιδιγώνιο μέρος του,

$$P^{(t,L)}(t,k) = P_{diag}^{(t,L)}(t,k) + P_{off}^{(t,L)}(t,k) \tag{4.177}$$

βρίσκουμε ότι

$$P_{diag}^{(t,L)}(t,k) = I + O\Big(\frac{1}{k}\Big), \quad k \to \infty, \tag{4.178}$$

και

$$P_{off}^{(t,L)}(t,k) \longrightarrow 0 \quad \text{εκθετικά}, \quad k \to \infty. \tag{4.179}$$

Το γεγονός αυτό εγγυάται ότι οι $M(L,t,k)$ και $M^{(t,L)}(t,k)$ έχουν ταυτόσημες ασυμπτωτικές συμπεριφορές που ορίζουν τις $\{(\partial_x^j q)(L,t)\}$ και $(\{f_j(t)\}$, αποδεικνύοντας έτσι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

• **Απόδειξη των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων.** Οι αποδείξεις των δύο ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων βασίζονται στην κατά στήλες θεώρηση του προβλήματος Riemann-Hilbert, στην εφαρμογή του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy και στις οριακές διαδικασίες (4.1).

Το Θεώρημα 4.30 έχει αποδειχθεί. $\square$

Κεφάλαιο 5

Επί της Μονοσήμαντης Επιλυσιμότητας του Προβλήματος Riemann-Hilbert.

5.1 Εισαγωγή.

Στο παρόν κεφάλαιο μελετάμε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του προβλήματος Riemann-Hilbert που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα Riemann-Hilbert είναι μονοσήμαντα επιλύσιμο, δηλ. η συνάρτηση $M(x,t,k)$ υπάρχει και είναι μοναδική, εφόσον οι ακόλουθες δύο προϋποθέσεις πληρούνται:

(i). Το αντίστοιχο ομαλό πρόβλημα Riemann-Hilbert είναι μονοσήμαντα επιλύσιμο, βλ. Υπόθεση 5.33 παρακάτω.

(ii). Δύο συγκεκριμένα (x,t)-παραμετρικά γραμμικά αλγεβρικά συστήματα είναι μονοσήμαντα επιλύσιμα για όλες τις τιμές των $(x,t) \in \Omega$, βλ. τη διατύπωση του Θεωρήματος 5.36 παρακάτω.

Το Θεώρημα 5.38, που παρουσιάζεται στο επόμενο εδάφιο και είναι το κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού, εξασφαλίζει το μονοσήμαντο της επιλυσιμότητας του προβλήματος Riemann-Hilbert εφόσον οι προϋποθέσεις αυτές πληρούνται.

Παρατήρηση 5.31. Η ύπαρξη λύσης του προβλήματος Riemann-Hilbert μπορεί να αποδειχθεί και χωρίς τις τελευταίες δύο υποθέσεις, με τον παρακάτω έμμεσο τρόπο. Η ύπαρξη λύσης $q(x,t)$ του Προβλήματος Αρχικών-Συνοριακών Τιμών έχει ήδη αποδειχθεί χρησιμοποιώντας κλασικές τεχνικές μερικών διαφορικών εξισώσεων (PDE techniques), βλ. [11], για αρκετά γενικούς συναρτησιακούς χώρους Sobolev (που περιέχουν το χώρο Schwartz συνοριακών δοσμένων που θεωρούμε εδώ). Η εκτέλεση, στη συνέχεια, της ταυτόχρονης φασματικής ανάλυσης του ζεύγους Lax που αντιστοιχεί στη λύση $q(x,t)$, όπως παρουσιάστηκε στο πρώτο κεφάλαιο, οδηγεί στην κατασκευή μιας συνάρτησης $M(x,t,k)$ που έχει ακριβώς τις ιδιότητες του προβλήματος Riemann-Hilbert που θεωρούμε.

Παρατήρηση 5.32. Από τις αποδείξεις των θεωρημάτων 5.36 και 5.37 παρακάτω καθίσταται σαφές ότι οι υποθέσεις (i) και (ii) *δεν* χρειάζονται για την απόδειξη της *μοναδικότητας* της λύσης του προβλήματος Riemann-Hilbert. Κατά συνέπεια, καταδεικνύεται ότι, ακόμη και χωρίς τις υποθέσεις αυτές, το πρόβλημα Riemann-Hilbert *δεν* μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις. Η παρατήρηση αυτή, σε συνδυασμό με την προηγούμενη, καταδεικνύει ότι, *ανεξάρτητα από τις υποθέσεις (i) και (ii) το πρόβλημα Riemann-Hilbert έχει μία και μοναδική λύση.* Εντούτοις, ο τρόπος αυτός απόδειξης δεν είναι αυτοδύναμος, καθώς χρησιμοποιεί επιχειρήματα από τεχνικές PDE. Για το λόγο αυτό και προβαίνουμε στην παρούσα προσπάθεια αυτόνομης διερεύνησης. Σημειώνουμε επίσης ότι η διερεύνηση, ή και απόδειξη, των ιδιοτήτων (i) και (ii) αποτελεί ανοικτό πρόβλημα, βλ. και παρατήρηση 5.34 παρακάτω.

5.2 Παρουσίαση των θεωρημάτων.

Το θεώρημα 5.38 είναι το κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού.

Η απόδειξή του στηρίζεται στα θεωρήματα 5.35, 5.36 και 5.37 που παρουσιάζονται αμέσως παρακάτω. Η απόδειξή τους παρουσιάζεται στο επόμενο εδάφιο, 5.3.

Ξεκινάμε με την υπόθεση ότι το αντίστοιχο ομαλό πρόβλημα Riemann-Hilbert είναι μονοσήμαντα επιλύσιμο.

Υπόθεση 5.33. *Θεωρούμε το ακόλουθο ομαλό πρόβλημα Riemann-Hilbert για μια 2×2-πίνακα-συνάρτηση $M^h(x,t,k)$:*

• *Η $M^h(x,t,k)$ υφίσταται ένα άλμα επί της καμπύλης $L := \{k^3 \in \mathbb{R}\}$, με αντίστοιχη αλματική συνθήκη:*

$$M^h_-(x,t,k) = M^h_+(x,t,k)J(x,t,k), \quad k \in L \tag{5.1}$$

όπου $J(x,t,k) := e^{-(ikx+4ik^3t)\sigma_3}J_0(k)e^{(ikx+4ik^3t)\sigma_3}$.

• *$M^h(x,t,k)$ είναι ολόμορφη για $k \in \mathbb{C}\setminus L$, και δεν παρουσιάζει ιδιομορφία καθώς $k \to 0$.*

• *$M^h(x,t,k) \to I$ καθώς $k \to \infty$ για $k \in \mathbb{C}\setminus L$.*

Υποθέτουμε ότι αυτό το πρόβλημα Riemann-Hilbert είναι μονοσήμαντα επιλύσιμο, δηλ. η συνάρτηση $M^h(x,t,k)$ με τις παραπάνω ιδιότητες υπάρχει και είναι μοναδική.

Παρατήρηση 5.34. Αναφορικά με τη μονοσήμαντη επιλυσιμότητα του προβλήματος Riemann-Hilbert για την $M^h(x,t,k)$: στην περίπτωση προβλημάτων τέτοιου είδους, δηλ. ομαλών προβλημάτων Riemann-Hilbert παραγοντοποίησης πινάκων, συνήθως χρησιμοποιείται το γεγονός ότι ο αλματικός πίνακας J ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες συμμετριών Schwarz στο μιγαδικό k-επίπεδο, μέσω των οποίων διατυπώνεται ένα *λήμμα μηδενισμού (vanishing lemma)* ([114]) για το αντίστοιχο πρόβλημα Riemann-Hilbert με λύση ασυμπτωτικά μηδενιζόμενη στο άπειρο, δηλ. $O(1/k)$ καθώς $k \to \infty$. Αυτό συνεπάγεται τη μονοσήμαντη επιλυσιμότητα του αρχικού (υπό θεώρηση) προβλήματος. Εντούτοις, μπορεί να διαπιστωθεί ότι τα επιτάγματα του ([114]) *δεν* ικανοποιούνται, κι έτσι το πρόβλημα της επιλυσιμότητας του προβλήματος Riemann-Hilbert για την $M^h(x,t,k)$ παραμένει ανοικτό. Ας σημειωθεί ότι η κατάσταση είναι παρόμοια με την περίπτωση προβλημάτων Riemann-Hilbert που αντιστοιχούν σε προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών στην ημιευθεία (ή και στο ευθύγραμμο τμήμα) της χωρικής μεταβλητής, [52], [54], [38], [43], [56], [55], [18], [19], [16].

Θεώρημα 5.35. *Θεωρούμε το ακόλουθο (μη ομογενές) πρόβλημα Riemann-Hilbert για την 2×2-συνάρτηση-πίνακα $M^H(x,t,k)$:*

• *Η $M^H(x,t,k)$ υφίσταται ένα άλμα επί της καμπύλης $L := \{k^3 \in \mathbb{R}\}$, με αλματική συνθήκη*

$$M_-^H(x,t,k) = M_+^H(x,t,k)J(x,t,k) + h(x,t,k)[J(x,t,k) - I], \quad k \in L \tag{5.2}$$

όπου η συνάρτηση $h(x,t,k)$ ορίζεται από τον τύπο

$$h(x,t,k) := \left[\sum_{j=1}^{N} c_j \frac{e^{2i\nu_j x + 8i\nu_j^3 t}}{k - \nu_j} X_{j+N}, \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_j \frac{e^{-2i\bar{\nu}_j x - 8i\bar{\nu}_j^3 t}}{k - \bar{\nu}_j} X_j \right] \tag{5.3}$$

όπου $\{X_j\}_{j=1}^{2N}$ είναι οποιοδήποτε σύνολο γνωστών σταθερών πινάκων-διανυσμάτων (καθένα με N στοιχεία) και $c_j := c_j^{(1)}$, για $j = 1, \ldots, N_1$, ενώ $c_j := c_{j-N_1}^{(2)}$, για $j = N_1 + 1, \ldots, N$.

• *$M^H(x,t,k) \to I$ καθώς $k \to \infty$, με $k \in \mathbb{C} \setminus L$.*

Τότε:

(i) Η $M^H(x,t,k)$ υπάρχει και είναι μοναδική.

(ii) Η $M^H(x,t,k)$ μπορεί να προκύψει από την $M^h(x,t,k)$ μέσω του τύπου:

$$M^H(x,t,k) = M^h(x,t,k) - \int_L \frac{h(x,t,k')[J(x,t,k') - I][M_-^h]^{-1}(x,t,k')M^h(x,t,k)}{k' - k} dk'. \tag{5.4}$$

Θεώρημα 5.36. *Ας θεωρήσουμε τον τετραγωνικό πίνακα $A := [A_{lj}]_{2N \times 2N}$ με στοιχεία A_{lj} που ορίζονται από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned}
A_{lj} &:= \delta_{lj}, \quad l = 1, \cdots, N, \quad j = 1, \cdots, N \\
A_{lj} &:= -c_{l-N} \frac{e^{2i\theta(x,t,\nu_{l-N})}}{\bar{\nu}_j - \nu_{l-N}}, \quad l = N+1, \cdots, 2N, \;\; j = 1, \cdots, N \\
A_{lj} &:= -\bar{c}_l \frac{e^{-2i\theta(x,t,\bar{\nu}_l)}}{\nu_{j-N} - \bar{\nu}_l}, \quad l = 1, \cdots, N, \;\; j = N+1, \cdots, 2N \\
A_{lj} &:= \delta_{l-N,j-N}, \quad l = N+1, \cdots, 2N, \;\; j = N+1, \cdots, 2N.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Συμβολίζουμε με $\widetilde{A} := [\widetilde{A}_{lj}]_{2N \times 2N}$ τον αντίστροφο του παραπάνω πίνακα, ο οποίος μπορεί να οριστεί υπό την προϋπόθεση ότι $det(A) \neq 0$ για όλα τα $(x,t) \in \Omega$.

Έστω ότι οι $2N$- το πλήθος σταθεροί πίνακες -διανύσματα $[M^H]_1(x,t,\bar{\nu}_j)$, $[M^H]_2(x,t,\bar{\nu}_j)$, $j = 1, \cdots, N$ ορίζονται από την επίλυση του ακόλουθου (x,t)-παραμετρικού $(2N) \times (2N)$-γραμμικού αλγεβρικού συστήματος:

$$[M^H]_1(x,t,\bar{\nu}_j) = \left\{ I - \int_L h(x,t,k') \frac{[J(x,t,k')-I](M_-^h)^{-1}(x,t,k')}{k'-\bar{\nu}_j} dk' \right\} [M^h]_1(x,t,\bar{\nu}_j) \tag{5.6}$$

$$[M^H]_2(x,t,\nu_j) = \left\{ I - \int_L h(x,t,k') \frac{[J(x,t,k')-I](M_-^h)^{-1}(x,t,k')}{k'-\nu_j} dk' \right\} [M^h]_2(x,t,\nu_j) \tag{5.7}$$

όπου $h(x,t,k') = [[h]_1(x,t,k'), [h]_2(x,t,k')]$, *με στήλες*

$$[h]_1(x,t,k') = \sum_{j=1}^{N} c_j \frac{e^{2i\nu_j x + 8i\nu_j^3 t}}{k'-\nu_j} \left\{ \sum_{l=1}^{N} \widetilde{A}_{l,j+N} [M^H]_1(x,t,\bar{\nu}_l) + \sum_{l=N+1}^{2N} \widetilde{A}_{l,j+N} [M^H]_2(x,t,\nu_{l-N}) \right\}, \tag{5.8}$$

και

$$[h]_2(x,t,k') = \sum_{j=1}^{N} \bar{c}_j \frac{e^{-2i\bar{\nu}_j x - 8i\bar{\nu}_j^3 t}}{k'-\bar{\nu}_j} \left\{ \sum_{l=1}^{N} \widetilde{A}_{l,j} [M^H]_1(x,t,\bar{\nu}_l) + \sum_{l=N+1}^{2N} \widetilde{A}_{l,j} [M^H]_2(x,t,\nu_{l-N}) \right\}, \tag{5.9}$$

όπου έχουμε παραπέρα υποθέσει ότι η ορίζουσα $D_1 \equiv D_1(x,t)$ *του παραπάνω συστήματος είναι* $D_1(x,t) \neq 0$ *για όλα τα* $(x,t) \in \Omega$.

Στη γενική περίπτωση το σύστημα είναι επιλύσιμο, και ορίζει τις ποσότητες $[M^H]_1(x,t,\bar{\nu}_j)$, $[M^H]_2(x,t,\bar{\nu}_j)$, $j = 1,\cdots,N$ *μέσω της μοναδικής λύσης* $M^h(x,t,k)$ *του ομογενούς προβλήματος Riemann-Hilbert.*

Έστω, τώρα, ότι τα διανύσματα $X_j \equiv [\widetilde{M}]_1(x,t,\bar{\nu}_j)$, *για* $j = 1,\cdots,N$, *και* $X_j \equiv [\widetilde{M}]_2(x,t,\bar{\nu}_{j-N})$, *για* $j = N+1,\cdots,2N$, *ορίζονται μέσω της επίλυσης του* $(2N)\times(2N)$-*γραμμικού αλγεβρικού συστήματος*

$$\sum_{l=1}^{2N} A_{lj} X_l = C_j, \quad j = 1,\cdots,2N \tag{5.10}$$

όπου τα C_j, $j = 1,\cdots,2N$, *ορίζονται σαν*

$$C_j := [M^H]_1(x,t,\bar{\nu}_j), \;\; j = 1,\cdots,N, \;\; C_j := [M^H]_2(x,t,\nu_{j-N}), \;\; j = N+1,\cdots,2N \tag{5.11}$$

ενώ τα A_{lj} *έχουν οριστεί προηγουμένως.*

Το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί στη συμπαγή μορφή $XA = C$, *όπου* $X := [X_1,\cdots,X_{2N}]$ *και* $C := [C_1,\cdots,C_{2N}]$, *και είναι επιλύσιμο τότε και μόνο, όταν* $det(A) \neq 0$, *περίπτωση κατά την οποία έχουμε* $X = CA^{-1}$.

Ορίζουμε, παραπέρα:

$$\widetilde{M}(x,t,k) := M^H(x,t,k) + h(x,t,k). \tag{5.12}$$

Τότε η $\widetilde{M}$ ικανοποιεί το ακόλουθο μερόμορφο πρόβλημα Riemann-Hilbert:

• *Η $\widetilde{M}(x,t,k)$ υφίσταται ένα άλμα επί της καμπύλης $L := \{k^3 \in \mathbb{R}\}$, με αλματική συνθήκη*

$$\widetilde{M}_-(x,t,k) = \widetilde{M}_+(x,t,k)e^{-(ikx+4ik^3t)\sigma_3}J_0(k)e^{(ikx+4ik^3t)\sigma_3}, \quad k \in L. \tag{5.13}$$

• *Η πρώτη στήλη $[\widetilde{M}]_1(x,t,k)$ έχει τους απλούς πόλους $\{\nu_j\}_{j=1}^N$, και η δεύτερη στήλη $[\widetilde{M}]_2(x,t,k)$ έχει τους απλούς πόλους $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^N$. Ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα:*

$$Res\left\{[\widetilde{M}]_1(x,t,k), k=\nu_j\right\} = c_j e^{2i\nu_j x+8i\nu_j^3 t}[\widetilde{M}]_2(x,t,\nu_j), \quad j=1,\ldots,N \tag{5.14}$$

και

$$Res\left\{[\widetilde{M}]_2(x,t,k), k=\bar{\nu}_j\right\} = \overline{c_j} e^{-(2i\bar{\nu}_j x+8i\bar{\nu}_j^3 t)}[\widetilde{M}]_1(x,t,\bar{\nu}_j), \quad j=1,\ldots,N. \tag{5.15}$$

(Ας σημειωθεί ότι η αλματική συνθήκη, οι πόλοι και οι συνθήκες ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι ακριβώς τα ίδια με τα αντίστοιχα του προβλήματος Riemann-Hilbert για την $M(x,t,k)$).

• *Η $\widetilde{M}(x,t,k)$ είναι ολόμορφη στα υπόλοιπα σημεία του $\mathbb{C}\setminus L$, και δεν παρουσιάζει ιδιομορφία καθώς $k \to 0$.*

• *$\widetilde{M}(x,t,k) \to I$ καθώς $k \to \infty$, με $k \in \mathbb{C}\setminus L$.*

Επιπλέον, η λύση του παραπάνω προβλήματος Riemann-Hilbert είναι μοναδική.

Θεώρημα 5.37. *Θεωρούμε το βασικό μας πρόβλημα Riemann-Hilbert για την 2×2-συνάρτηση-πίνακα $M(x,t,k)$. Τότε:*

(i) Η $M(x,t,k)$ υπάρχει και είναι μοναδική.

(ii) Η $M(x,t,k)$ προκύπτει από την $\widetilde{M}(x,t,k)$ μέσω του τύπου

$$M(x,t,k) = \left\{I + \frac{iy(x,t)}{2k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right\}\widetilde{M}(x,t,k), \tag{5.16}$$

όπου

$$y(x,t) := 2i\lim_{k\to\infty}[k\widetilde{M}]_{12}. \tag{5.17}$$

Θεώρημα 5.38. *Ας υποθέσουμε ότι:*

(i). Η υπόθεση 5.33 ικανοποιείται.

(ii). Για κάθε $(x,t) \in \Omega$ έχουμε $detA(x,t) \neq 0$ και $D_1(x,t) \neq 0$, όπου οι $detA(x,t)$ και $D_1(x,t)$ ορίζονται στην εκφώνηση του θεωρήματος 5.36.

Τότε:

• *Υπάρχει μία και μοναδική λύση $M(x,t,k)$, $(x,t) \in \Omega$, $k \in \mathbb{C} \setminus L$ του προβλήματος Riemann-Hilbert που παρουσιάστηκε στο εδάφιο 2.3 και στο κεφάλαιο 4.*

• *Η $M(x,t,k)$ ορίζεται από την ακόλουθη διαδικασία:*

(i). Υπάρχει μία και μοναδική συνάρτηση $M^h(x,t,k)$ που λύνει το πρόβλημα Riemann-Hilbert (5.1), λόγω της υπόθεσης 5.33.

(ii). Υπάρχει μία και μοναδική συνάρτηση $M^H(x,t,k)$ που ορίζεται μέσω της $M^h(x,t,k)$ σαν η μοναδική λύση του προβλήματος Riemann-Hilbert (5.2) του θεωρήματος 5.35, όπου τα $\{X_j\}_{j=1}^{2N} := \{[M^H]_1(x,t,\bar{\nu}_j),\ [M^H]_2(x,t,\bar{\nu}_j)\}_{j=1}^{N}$ ορίζονται μονοσήμαντα από τη λύση του συστήματος (5.6)-(5.7) του θεωρήματος (5.36).

(iii). Υπάρχει μία και μοναδική συνάρτηση $\widetilde{M}(x,t,k)$ που ορίζεται από την $M^H(x,t,k)$ μέσω της (5.12), όπου η $h(x,t,k)$ ορίζεται από τις (5.8) και (5.9).

(iv). Υπάρχει μία και μοναδική συνάρτηση $M(x,t,k)$ που ορίζεται από την $\widetilde{M}(x,t,k)$ μέσω των σχέσεων (5.16) και (5.17).

Απόδειξη του θωρήματος 5.38.
Είναι άμεση επακόλουθο των θεωρημάτων 5.35, 5.36 και 5.37. □

5.3 Αποδείξεις των θεωρημάτων.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.35.
Αυτό το πρόβλημα Riemann-Hilbert μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα Riemann-Hilbert που περιγράφεται στην υπόθεση 5.33. Πιο συγκεκριμένα, είμαστε σε θέση να παραγοντοποιήσουμε τον αλματικό πίνακα $J(x,t,k)$ μέσω της μοναδικής λύσης $M^h(x,t,k)$ του προβλήματος Riemann-Hilbert της υπόθεσης 5.33 ως ακολούθως:

$$J(x,t,k) = [M^h_+(x,t,k)]^{-1} M^h_-(x,t,k). \tag{5.18}$$

Κάνοντας χρήση του γεγονότος αυτού γράφουμε την (5.2) στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}&[M^H(M^h)^{-1}]_+(x,t,k) - [M^H(M^h)^{-1}]_-(x,t,k) = \\ &-h(x,t,k)[J(x,t,k) - I](M^h_-)^{-1}(x,t,k), \quad k \in L.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Επίσης, έχουμε $M^H(M^h)^{-1} \to I$ για $k \to \infty$, με $k \in \mathbb{C} \setminus L$. Αυτό το πρόβλημα Riemann-Hilbert μπορεί να επιλυθεί κάνοντας χρήση των τύπων των Plemelj-Sokhotski, βλ. [2], και η λύση είναι αυτή που δίνεται από την έκφραση (5.4). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.36.
Προκειμένου να μελετήσουμε την μονοσήμαντη επιλυσιμότητα του προβλήματος Riemann-Hilbert για την τμηματικά μερόμορφη συνάρτηση $\widetilde{M}(x,t,k)$ μπορούμε προφανώς να αποσυνθέσουμε την $\widetilde{M}(x,t,k)$ σαν $\widetilde{M}(x,t,k) = M^H(x,t,k) + h(x,t,k)$, εξίσωση (5.12), όπου

η $M^H(x,t,k)$ είναι μια τμηματικά ολόμορφη συνάρτηση, ενώ η $h(x,t,k)$ δίνεται από την (5.3), όπου $X_j := [\widetilde{M}]_1(x,t,\bar{\nu}_j)$ για $j = 1,\cdots,N$, και $X_j := [\widetilde{M}]_2(x,t,\bar{\nu}_{j-N})$ για $j = N+1,\cdots,2N$.

Τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι οι συνθήκες ολοκληρωτικών υπολοίπων (5.14)-(5.15) οδηγούν στο γραμμικό αλγεβρικό σύστημα (5.10), το οποίο καθορίζει τις ποσότητες $\{X_j\}_{j=1}^{2N}$ με μοναδικό τρόπο, εφόσον, βέβαια, $det(A) \neq 0$.

Επίσης είναι εύκολο να δειχθεί ότι η αλματική συνθήκη (5.2) για την $M^H(x,t,k)$ είναι ισοδύναμη με την αλματική συνθήκη (5.13) για την $\widetilde{M}(x,t,k)$. Επιπλέον, η συμπεριφορά στο άπειρο της $M^H(x,t,k)$ ισοδυναμεί με τη συμπεριφορά στο άπειρο της $\widetilde{M}(x,t,k)$.

Τελικά, έχει δειχθεί ότι η $\widetilde{M}(x,t,k)$ είναι πραγματικα μια λύση του υπό θεώρηση προβλήματος Riemann-Hilbert.

Δείχνουμε, τώρα, ότι το υπό θεώρηση πρόβλημα Riemann-Hilbert δεν έχει περισσότερες από μία λύσεις.

Έστω ότι οι 2×2-πίνακες -συναρτήσεις $\widetilde{M}(x,t,k)$ και $\widetilde{M}'(x,t,k)$ αποτελούν λύσεις του προβλήματος Riemann-Hilbert, θα δείξουμε ότι $\widetilde{M} \equiv \widetilde{M}'$.

Προς αυτή την κατεύθυνση, ας θεωρήσουμε το γινόμενο $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ (το οποίο είναι καλά ορισμένο, καθώς $\det \widetilde{M} \equiv 1$). Χρησιμοποιώντας την αλματική συνθήκη (5.13), η οποία ικανοποιείται από αμφότερες τις $\widetilde{M}$ και $\widetilde{M}'$, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι $(\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1})_+ = (\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1})_-$ για $k \in L$. Αυτό σημαίνει ότι η $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ *δεν* παρουσιάζει άλμα κατά μήκος της καμπύλης $\{k^3 \in \mathbb{R}\}$. Επιπλέον, έχουμε $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1} = I + O(\frac{1}{k})$ καθώς $k \to \infty$.

Οι μόνες πιθανές ιδιομορφίες της $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ είναι οι (απλοί) πόλοι $\{\nu_j\}_{j=1}^N \cup \{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^N$ των $\widetilde{M}$, $\widetilde{M}'$. Θα δείξουμε ότι τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ μηδενίζονται, και κατά συνέπεια η συνάρτηση αυτή είναι ολόμορφη.

Εστιάζουμε κατ' αρχήν την προσοχή μας στην περιοχή D_2, όπου τα σημεία $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2}$ είναι οι μόνοι πιθανοί πόλοι της $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$. Κατ' αρχήν γράφουμε

$$\begin{aligned}&\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1} = \\ &\widetilde{M}'\begin{bmatrix} R(k) & -\Delta(k)e^{-2i\theta(x,t,k)} \\ -\Gamma(k)e^{2i\theta(x,t,k)} & D(k)\end{bmatrix}\left\{\widetilde{M}\begin{bmatrix} R(k) & -\Delta(k)e^{-2i\theta(x,t,k)} \\ -\Gamma(k)e^{2i\theta(x,t,k)} & D(k)\end{bmatrix}\right\}^{-1}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Δείχνουμε, τώρα, ότι

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\begin{bmatrix} R(k) \\ -\Gamma(k)e^{2i\theta(x,t,k)}\end{bmatrix}\right\}_{k=\lambda_j} = 0 \tag{5.21}$$

και

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\begin{bmatrix} -e^{-2i\theta(x,t,k)}\Delta(k) \\ D(k)\end{bmatrix}\right\}_{k=\lambda_j} = 0. \tag{5.22}$$

Προκειμένου να δείξουμε την (5.21), έχουμε

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\begin{bmatrix} R(k) \\ -\Gamma(k)e^{2i\theta(x,t,k)}\end{bmatrix}\right\}_{k=\lambda_j} =$$
$$R(\lambda_j)Res\left\{[M]_1(x,t,k), k=\lambda_j\right\} - Res[\Gamma(k)]_{k=\lambda_j}e^{2i\theta(x,t,\lambda_j)}[M]_2(x,t,\lambda_j). \tag{5.23}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$Res[\Gamma(k)]_{k=\lambda_j} = \frac{\bar{B}(\lambda_j)}{\alpha(\lambda_j)d'(\lambda_j)}$$

και την έκφραση που δίνει τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα $Res\left\{[M]_1(x,t,k), k=\lambda_j\right\}$ καταλήγουμε τελικά στην (5.21).

Πρικειμένου να αποδείξουμε την (5.22), έχουμε

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\begin{bmatrix} -e^{-2i\theta(x,t,k)}\Delta(k) \\ D(k)\end{bmatrix}\right\}_{k=\lambda_j} =$$
$$-e^{-2i\theta(x,t,\lambda_j)}\Delta(\lambda_j)Res\left\{[M]_1(x,t,k), k=\lambda_j\right\} + Res[D(k)]_{k=\lambda_j}[M]_2(x,t,\lambda_j). \tag{5.24}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$Res[D(k)]_{k=\lambda_j} = \frac{\delta(\lambda_j)}{d'(\lambda_j)}$$

και, για άλλη μια φορά, την έκφραση που δίνει τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $[M]_1(x,t,k)$ στα σημεία $k=\lambda_j$, καταλήγουμε τελικά στην (5.22).

Οι εκφράσεις (5.21) και (5.22) ισχύουν επίσης όταν η $\widetilde{M}$ αντικαθίσταται από την $\widetilde{M}'$. Οι τέσσερις τελευταίες συνθήκες μαζί συνεπάγονται ότι η έκφραση του δεξιού μέλος της (5.20) *δεν* έχει πόλους στα σημεία ατ $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N_2}$, κατά συνέπεια η συνάρτηση $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_2.

Παρόμοιες θεωρήσεις ισχύουν και στις ακόλουθες περιοχές. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τα εξής.

Για $k \in D_{13}$ γράφουμε

$$\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1} =$$
$$\widetilde{M}'\begin{bmatrix} D(k) & \Delta(k)e^{-2i\theta(x,t,k)} \\ \Gamma(k)e^{2i\theta(x,t,k)} & R(k)\end{bmatrix}\left\{\widetilde{M}\begin{bmatrix} D(k) & \Delta(k)e^{-2i\theta(x,t,k)} \\ \Gamma(k)e^{2i\theta(x,t,k)} & R(k)\end{bmatrix}\right\}^{-1}. \tag{5.25}$$

και χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες δύο σχέσεις, η απόδειξη των οποίων είναι παρόμοια με εκείνη των σχέσεων (5.21) και (5.22):

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\left[\begin{array}{c} D(k) \\ \Gamma(k)e^{2i\theta(x,t,k)} \end{array}\right]\right\}_{k=\nu_j} = 0 \tag{5.26}$$

και

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\left[\begin{array}{c} e^{-2i\theta(x,t,k)}\Delta(k) \\ R(k) \end{array}\right]\right\}_{k=\nu_j} = 0. \tag{5.27}$$

Οι σχέσεις (5.26) και (5.27) ισχύουν επίσης όταν η $\widetilde{M}$ αντικαθίσταται από την $\widetilde{M}'$. Και οι τέσσερις σχέσεις μαζί συνεπάγονται ότι το δεξιό μέλος της (5.25) δεν έχει πόλους στα σημεία $\{\nu_j\}_{j=1}^{N_1}$, κατά συνέπεια η συνάρτηση $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_{13}.

Για $k \in D_5$, γράφουμε

$$\begin{aligned} &\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1} = \\ &\widetilde{M}'\left[\begin{array}{cc} \bar{D}(k) & -\bar{\Gamma}(k)e^{-2i\theta(x,t,k)} \\ -\bar{\Delta}(k)e^{2i\theta(x,t,k)} & \bar{R}(k) \end{array}\right]\left\{\widetilde{M}\left[\begin{array}{cc} \bar{D}(k) & -\bar{\Gamma}(k)e^{-2i\theta(x,t,k)} \\ -\bar{\Delta}(k)e^{2i\theta(x,t,k)} & \bar{R}(k) \end{array}\right]\right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

και χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες δύο σχέσεις, η απόδειξη των οποίων είναι παρόμοια με εκείνη των σχέσεων (5.21) και (5.22):

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\left[\begin{array}{c} \bar{D}(k) \\ -\bar{\Delta}(k)e^{2i\theta(x,t,k)} \end{array}\right]\right\}_{k=\bar{\lambda}_j} = 0 \tag{5.29}$$

και

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\left[\begin{array}{c} -e^{-2i\theta(x,t,k)}\bar{\Gamma}(k) \\ \bar{R}(k) \end{array}\right]\right\}_{k=\bar{\lambda}_j} = 0. \tag{5.30}$$

Οι σχέσεις (5.29) και (5.30) ισχύουν επίσης όταν η συνάρτηση $\widetilde{M}$ αντικαθίσταται από την $\widetilde{M}'$. Και οι τέσσερις αυτές σχέσεις μαζί συνεπάγονται ότι η έκφραση του δεξιού μέλους της (5.28) δεν παρουσιάζει πόλους στα σημεία $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_2}$, κατά συνέπεια η συνάρτηση $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_5.

Για $k \in D_{46}$, γράφουμε

$$\begin{aligned} &\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1} = \\ &\widetilde{M}'\left[\begin{array}{cc} \bar{R}(k) & \bar{\Gamma}(k)e^{-2i\theta(x,t,k)} \\ \bar{\Delta}(k)e^{2i\theta(x,t,k)} & \bar{D}(k) \end{array}\right]\left\{\widetilde{M}\left[\begin{array}{cc} \bar{R}(k) & \bar{\Gamma}(k)e^{-2i\theta(x,t,k)} \\ \bar{\Delta}(k)e^{2i\theta(x,t,k)} & \bar{D}(k) \end{array}\right]\right\}^{-1}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

και χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες δύο σχέσεις, η απόδειξη των οποίων είναι παρόμοια με εκείνη των σχέσεων (5.21) και (5.22):

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\left[\begin{array}{c}\bar{R}(k)\\ \bar{\Delta}(k)e^{2i\theta(x,t,k)}\end{array}\right]\right\}_{k=\bar{\nu}_j}=0 \tag{5.32}$$

και

$$Res\left\{\widetilde{M}(x,t,k)\left[\begin{array}{c}e^{-2i\theta(x,t,k)}\bar{\Gamma}(k)\\ \bar{D}(k)\end{array}\right]\right\}_{k=\bar{\nu}_j}=0. \tag{5.33}$$

Οι σχέσεις (5.32) και (5.33) ισχύουν επίσης όταν η $\widetilde{M}$ αντικαθίσταται από την $\widetilde{M}'$. Και οι τέσσερις σχέσεις μαζί συνεπάγονται ότι η έκφραση του δεξιού μέλους της σχέσης (5.31) δεν εμφανίζει πόλους στα σημεία $\{\bar{\nu}_j\}_{j=1}^{N_1}$, κατά συνέπεια η συνάρτηση $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ είναι ολόμορφη στην περιοχή D_{46}.

Τελικά, η συνάρτηση $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}$ είναι *ακέραιη*, και ισούται με $I+O(\frac{1}{k})$ καθώς $k\to\infty$. Από το θεώρημα του Liouville έπεται τότε ότι $\widetilde{M}'\widetilde{M}^{-1}\equiv I$, και, κατά συνέπεια, $\widetilde{M}'\equiv\widetilde{M}$.

Καταληκτικά, η συνάρτηση $\widetilde{M}(x,t,k)$ που κατασκευάστηκε προηγουμένως αποτελεί τη *μοναδική λύση* του προβλήματος Riemann-Hilbert. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.37.

Αποδεικνύουμε κατ΄ αρχήν ότι η συνάρτηση $M(x,t,k)$, όπως δίνεται από την έκφραση (5.16), αποτελεί λύση του προβλήματος Riemann-Hilbert.

Έχουμε ότι η $M(x,t,k)$ είναι τμηματικά μερόμορφη στην περιοχή $\mathbb{C}\setminus L$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί οτι η αλματική συνθήκη κατά μήκος της καμπύλης L, οι πόλοι, οι συνθήκες για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, καθώς και η συμπεριφορά στο άπειρο της συνάρτησης $M(x,t,k)$ είναι ακριβώς τα ίδια όπως και για τη συνάρτηση $\widetilde{M}(x,t,k)$. Απομένει, λοιπόν, να αποδειχθεί ότι η συμπεριφορά της $M(x,t,k)$ καθώς $k\to 0$ είναι η σωστή.

Ας εστιάσουμε κατ΄ αρχήν την προσοχή μας στην περιοχή D_{13}. Εισάγουμε το συμβολισμό

$$\widetilde{M}^{(13)}(x,t,0)=\left[\begin{array}{cc}\widetilde{\alpha} & \widetilde{\beta}\\ \widetilde{\gamma} & \widetilde{\delta}\end{array}\right] \tag{5.34}$$

όπου $\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}-\widetilde{\beta}\widetilde{\gamma}=1$.

Η ποσότητα $\widetilde{M}(x,t,0)$ ικανοποιεί

$$\widetilde{M}^{(46)}(x,t,0)=\widetilde{M}^{(13)}(x,t,0)J_{03}(x,t,0) \tag{5.35}$$

και

$$\widetilde{M}^{(46)}(x,t,0)=\sigma_1\widetilde{M}^{(13)}(x,t,0)\sigma_1. \tag{5.36}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $r(0)=1$ λαμβάνουμε

$$J_{03}(x,t,0)=\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right]. \tag{5.37}$$

Οι εξισώσεις (5.35) και (5.36) μας δίνουν

$$\widetilde{M}^{(13)}(x,t,0) = \begin{bmatrix} \widetilde{\alpha} & \frac{1-\widetilde{\alpha}^2}{2\widetilde{\alpha}} \\ -\widetilde{\alpha} & \frac{1+\widetilde{\alpha}^2}{2\widetilde{\alpha}} \end{bmatrix}. \tag{5.38}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.38) στην έκφραση (5.16) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$M(x,t,k) \sim \frac{i\sigma(x,t)}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad k \to 0, \quad k \in D_{13}, \tag{5.39}$$

που είναι η σωστή συμπεριφορά, για

$$\sigma(x,t) := \frac{y(x,t)}{2\widetilde{\alpha}(x,t)}.$$

Ερχόμαστε τώρα στην περιοχή D_2.

Χρησιμοποιώντας τις αλματικές συνθήκες

$$\widetilde{M}^{(46)} = \widetilde{M}^{(13)} J_{03}, \quad \widetilde{M}^{(2)} = \widetilde{M}^{(13)} J_{12}, \quad \widetilde{M}^{(46)} = \widetilde{M}^{(5)} J_{45} \tag{5.40}$$

είμαστε σε θέση να συσχετίσουμε την $\widetilde{M}^{(5)}$ με την $\widetilde{M}^{(2)}$, ως ακολούθως:

$$\widetilde{M}^{(5)} = \widetilde{M}^{(2)} J^\star \tag{5.41}$$

με

$$J^\star(x,t,k) := (J_{12}^{-1} J_{03} J_{45}^{-1})(x,t,k) = \begin{bmatrix} J_{11}^\star & J_{12}^\star \\ J_{21}^\star & J_{22}^\star \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

όπου η κατά στοιχεία μορφή των πινάκων J_{03}, J_{12} και J_{45} συνεπάγεται ότι οι βαθμωτές ποσότητες $J_{11}^\star$, $J_{12}^\star$, $J_{21}^\star$ και $J_{22}^\star$ θα πρέπει να δίνονται από τις εκφράσεις:

$$J_{11}^\star := R(k)[\bar{R}(k) - \bar{r}(k)\bar{\Delta}(k)] - \Delta(k)[r(k)\bar{R}(k) + (1-|r(k)|^2)\bar{\Delta}(k)], \tag{5.43}$$

$$J_{12}^\star := \{R(k)[\bar{\Gamma}(k) - \bar{r}(k)\bar{D}(k)] - \Delta(k)[r(k)\bar{\Gamma}(k) + (1-|r(k)|^2)\bar{D}(k)]\}e^{-2i\theta(x,t,k)}, \tag{5.44}$$

$$J_{21}^\star := \{-\Gamma(k)[\bar{R}(k) - \bar{r}(k)\bar{\Delta}(k)] + D(k)[r(k)\bar{R}(k) + (1-|r(k)|^2)\bar{\Delta}(k)]\}e^{2i\theta(x,t,k)} \tag{5.45}$$

και

$$J_{22}^\star := -\Gamma(k)[\bar{\Gamma}(k) - \bar{r}(k)\bar{D}(k)] + D(k)[r(k)\bar{\Gamma}(k) + (1-|r(k)|^2)\bar{D}(k)]. \tag{5.46}$$

Μια λεπτομερής ανάλυση της συμπεριφοράς των φασματικών συναρτήσεων καθώς $k \to 0$ μας οδηγεί τελικά στην ακόλουθη μορφή για τον πίνακα $J^\star(x,t,0)$:

$$J^\star(x,t,0) = \begin{bmatrix} -R_0 L_0 + R_0^2 & -L_1 - R_0 D_0 \\ L_1 + R_0 D_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \to 0 \tag{5.47}$$

όπου

$$R_0 := R(0),$$
$$D_0 := D(0),$$
$$L_0 := \lim_{k\to 0}[\Delta(k) + \bar{\Delta}(k)]$$

και

$$L_1 := \lim_{k\to 0}[\Gamma(k)\bar{\Delta}(k)].$$

Γράφουμε τώρα

$$\widetilde{M}^{(2)}(x,t,0) = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\alpha}} & \tilde{\tilde{\beta}} \\ \tilde{\tilde{\gamma}} & \tilde{\tilde{\delta}} \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

με $\tilde{\tilde{\alpha}}\tilde{\tilde{\delta}} - \tilde{\tilde{\beta}}\tilde{\tilde{\gamma}} = 1$. Έχουμε:

$$\widetilde{M}^{(5)}(x,t,0) = \widetilde{M}^{(2)}(x,t,0)J(x,t,0), \quad \widetilde{M}^{(5)}(x,t,0) = \sigma_1\widetilde{M}^{(2)}(x,t,0)\sigma_1. \tag{5.49}$$

Είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την ποσότητα $\varepsilon := L_1 + R_0D_0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\lim_{k\to 0}[\Gamma(k)\bar{\Delta}(k)] = -\lim_{k\to 0}[\Gamma(k)\Delta(k)] \tag{5.50}$$

κι επομένως

$$\varepsilon = \lim_{k\to 0}[R(k)D(k) - \Gamma(k)\Delta(k)] = 1 \tag{5.51}$$

από την ιδιότητα μοναδιαίας ορίζουσας.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.49), (5.50) και (5.51) βρίσκουμε

$$\widetilde{M}^{(2)}(x,t,0) = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\alpha}} & \tilde{\tilde{\beta}} \\ -\tilde{\tilde{\alpha}} & \tilde{\tilde{\beta}} + (R_0^2 - R_0L_0)\tilde{\tilde{\alpha}} \end{bmatrix}. \tag{5.52}$$

Η εξίσωση (5.16) μας δίνει

$$M^{(2)}(x,t,k) \sim \left\{ I + \frac{iy(x,t)}{2k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \widetilde{M}^{(2)}(x,t,0), \tag{5.53}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.52) λαμβάνουμε τελικά

$$M(x,t,k) \sim \frac{i\tilde{\tilde{\sigma}}(x,t)}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad k \to 0, \quad k \in D_2, \tag{5.54}$$

που είναι η σωστή συμπεριφορά, όπου η $\tilde{\tilde{\sigma}}(x,t)$ δίνεται από την έκφραση

$$\tilde{\tilde{\sigma}}(x,t) := [2\tilde{\tilde{\beta}} + (R_0^2 - R_0L_0)\tilde{\tilde{\alpha}}]\frac{y(x,t)}{2}. \tag{5.55}$$

Ας σημειωθεί ότι η ιδιότητα μοναδιαίας ορίζουσας του πίνακα $\widetilde{M}^{(2)}(x,t,0)$ συνεπάγεται ότι

$$\widetilde{\widetilde{\beta}} = \frac{1-(R_0^2 - R_0L_0)\widetilde{\widetilde{\alpha}}^2}{2\widetilde{\widetilde{\alpha}}} \tag{5.56}$$

κατά τρόπον ώστε

$$\widetilde{M}^{(2)}(x,t,0) = \begin{bmatrix} \widetilde{\widetilde{\alpha}} & \frac{1-(R_0^2-R_0L_0)\widetilde{\widetilde{\alpha}}^2}{2\widetilde{\widetilde{\alpha}}} \\ -\widetilde{\widetilde{\alpha}} & \frac{1+(R_0^2-R_0L_0)\widetilde{\widetilde{\alpha}}^2}{2\widetilde{\widetilde{\alpha}}} \end{bmatrix} \tag{5.57}$$

και

$$\widetilde{\widetilde{\sigma}}(x,t) = \frac{y(x,t)}{2\widetilde{\widetilde{\alpha}}(x,t)}. \tag{5.58}$$

Τελείως αντίστοιχες διαδικασίες ισχύουν επίσης στις περιοχές D_{46} και D_5.

Η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος Riemann-Hilbert ακολουθεί τις ίδιες γραμμές με την περίπτωση του Προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών στην ημιευθεία της χωρικής μεταβλητής x [52].

Έστω ότι οι $M(x,t,k)$ και $M'(x,t,k)$ αποτελούν λύσεις του προβλήματος Riemann-Hilbert, με την συμπεριφορά της $M'(x,t,k)$ καθώς $k \to 0$ να συνδέεται με μία συνάρτηση $\sigma'(x,t)$ διαφορετική, γενικά, από την $\sigma(x,t)$. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι

$$M'(x,t,k) \sim \frac{i\sigma'(x,t)}{k} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad k \to 0, \quad k \in D_{13}. \tag{5.59}$$

Προτιθέμεθα να δείξουμε ότι $M' \equiv M$. Για να το πετύχουμε αυτό, θεωρούμε το γινόμενο $M'M^{-1}$.

Η απόδειξη του γεγονότος ότι η συνάρτηση $M'M^{-1}$ δεν παρουσιάζει άλματα για $k \in L := \{k^3 \in \mathbb{R}\}$, καθώς και του ότι είναι ολόμορφη στην περιοχή $\mathbb{C} \setminus L$, είναι, ουσιαστικά ταυτόσημη με εκείνη της περίπτωσης του Θεωρήματος 2.

Αναφορικά με τη συμπεριφορά της $M'M^{-1}$ καθώς $k \to 0$, προχωρούμε ως ακολούθως. Κατ΄ αρχήν αντιστρέφουμε την (5.16) για να πάρουμε

$$[M(x,t,k)]^{-1} = [\widetilde{M}(x,t,k)]^{-1} \left\{ I - \frac{iy(x,t)}{2k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{5.60}$$

Από την εξίσωση (5.38) έχουμε

$$[\widetilde{M}^{(13)}(x,t,0)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+\widetilde{\alpha}^2}{2\widetilde{\alpha}} & -\frac{1-\widetilde{\alpha}^2}{2\widetilde{\alpha}} \\ \widetilde{\alpha} & \widetilde{\alpha} \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

και

$$[\widetilde{M}^{(13)}(x,t,0)]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\widetilde{\alpha}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι

$$[\widetilde{M}(x,t,k)]^{-1} \left\{ -\frac{iy(x,t)}{2k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \sim -\frac{i\sigma(x,t)}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.63}$$

όταν $k \to 0$, με $k \in D_{13}$. Χρησιμοποιώντας την (5.63), από την (5.60) παίρνουμε

$$[M(x,t,k)]^{-1} \sim -\frac{i\sigma(x,t)}{k}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k \to 0, \quad k \in D_{13}. \tag{5.64}$$

Οι σχέσεις (5.59) και (5.64) συνεπάγονται ότι ο όρος που αντιστοιχεί στο k^{-2} μηδενίζεται, κι επομένως

$$M'M^{-1} = O(1/k) + O(1), \quad k \to 0. \tag{5.65}$$

Δοσμένου ότι $M'M^{-1} \to I$ καθώς $k \to \infty$, είμαστε σε θέση να κάνουμε την ακόλουθη βελτίωση στο προηγούμενο αποτέλεσμα:

$$M'M^{-1} = O(1/k) + I, \quad k \to 0. \tag{5.66}$$

Προτιθέμεθα να δείξουμε ότι ο όρος $O(1/k)$ είναι ταυτοτικά ίσος με μηδέν. Για να το πετύχουμε αυτό, γράφουμε

$$M'M^{-1} = I + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad k \to 0. \tag{5.67}$$

Οι συνθήκες συμμετρίας που αντιστοιχούν στο μετασχηματισμό $k \mapsto -k$, δηλαδή

$$M(x,t,-k) = \sigma_1 M(x,t,k)\sigma_1$$

και

$$M'(x,t,-k) = \sigma_1 M'(x,t,k)\sigma_1$$

συνεπάγονται ότι

$$[M'M^{-1}](x,t,-k) = \sigma_1[M'M^{-1}](x,t,k)\sigma_1 \tag{5.68}$$

και από την (5.67) έχουμε

$$D = -A, \quad C = -B \tag{5.69}$$

κι επομένως

$$M'M^{-1} = I + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} A & B \\ -B & -A \end{bmatrix}, \quad k \to 0. \tag{5.70}$$

Οι συνθήκες

$$\lim_{k\to\infty}[kM]_{12} = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty}[kM']_{12} = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} M_{12} = 0$$

και

$$\lim_{k\to\infty} M_{22} = 1,$$

σε συνδυασμό με το γεγονός ότι

$$[kM']_{12} = [kM]_{12} + AM_{12} + BM_{22} \tag{5.71}$$

συνεπάγονται ότι $B = 0$.

Τέλος, η ιδιότητα μοναδιαίας ορίζουσας $\det(M'M^{-1}) = 1$ συνεπάγεται ότι $A = 0$. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι $\lim_{k\to 0}[M'M^{-1}] = I$. Το θεώρημα του Liouville εξασφαλίζει ότι $M'M^{-1} = I$, κι άρα $M' = M$.

Καταληκτικά, η συνάρτηση $M(x, t, k)$, δινόμενη από την έκφραση (5.16), αποτελεί την μοναδική λύση του προβλήματος Riemann-Hilbert. $\square$

Κεφάλαιο 6

Μια Εναλλακτική Διατύπωση Προβλήματος Riemann-Hilbert.

6.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθούμε έναν εναλλακτικό τρόπο διατύπωσης προβλήματος Riemann-Hilbert για το υπό θεώρηση πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών ([81]).

Η διαφορά με τον προηγούμενο φορμαλισμό σχετίζεται με τον τρόπο με τον οποίο χειριζόμαστε τους πόλους της ιδιοσυναρτήσεων $M(x,t,k)$, $M^{(x)}(x,k)$, $M^{(t,0)}(t,k)$ και $M^{(t,L)}(t,k)$ στο μιγαδικό επίπεδο της φασματικής παραμέτρου, $k \in \mathbb{C}$. Πιο συγκεκριμένα, αντί να διατυπώνουμε συνθήκες που αφορούν στα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των ιδιοσυναρτήσεων στους πόλους αυτών, στον παρόντα φορμαλισμό θεωρούμε *αλματικές συνθήκες* που διατυπώνονται πάνω σε *επιπρόσθετες καμπύλες*, με τις τελευταίες να επιλέγονται έτσι ώστε να *περιβάλλονται οι πόλοι* των ιδιοσυναρτήσεων.

Στην περίπτωση του υπό θεώρηση προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών, θα δούμε ότι η επιπρόσθετη καμπύλη είναι η ένωση δύο ομόκεντρων κύκλων, κοινού κέντρου $k=0$, οι ακτίνες των οποίων επιλέγονται με τρόπο ώστε όλοι οι πόλοι των ιδιοσυναρτήσεων να περιέχονται στην *δακτυλιοειδή περιοχή* μεταξύ των κύκλων αυτών. Για να είναι εφικτό αυτό, είναι απαραίτητο να ισχύει η παρακάτω

Υπόθεση 6.39. *Υποθέτουμε ότι:*

(i). Υπάρχει ένα φραγμένο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ της φασματικής παραμέτρου k που περιέχει όλους τους πόλους των ιδιοσυναρτήσεων $M(x,t,k)$, $M^{(x)}(x,k)$, $M^{(t,0)}(t,k)$ και $M^{(t,L)}(t,k)$.

(ii). Το σημείο $k=0$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης πόλων των $M(x,t,k)$, $M^{(x)}(x,k)$, $M^{(t,0)}(t,k)$ και $M^{(t,L)}(t,k)$.

Με άλλα λόγια, ο φορμαλισμός που αναπτύσσουμε εδώ δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση όπου το σύνολο των πόλων είναι μη φραγμένο απειροσύνολο (δηλ. έχει σημείο συσσώρευσης το σημείο $k=\infty$) ή έχει σημείο συσσώρευσης το $k=0$. Ο παρών, όμως, φορμαλισμός *γενικεύει* εκείνον που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα καφάλαια, τουλάχιστον στα ακόλουθα δύο σημεία:

(i). Οι πόλοι των $M(x,t,k)$, $M^{(x)}(x,k)$, $M^{(t,0)}(t,k)$ και $M^{(t,L)}(t,k)$ δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένου πλήθους, αλλά μπορεί να είναι και άπειρου πλήθους, αρκεί να ικανοποιούνται οι παραπάνω δύο υποθέσεις.

(ii). Οι πόλοι των $M(x,t,k)$, $M^{(x)}(x,k)$, $M^{(t,0)}(t,k)$ και $M^{(t,L)}(t,k)$ δεν είναι απαραίτητα απλοί (πρώτης τάξης).

Ένα επιλέον πλεονέκτημα του παρόντος φορμαλισμού είναι ότι το πρόβλημα Riemann-Hilbert δεν έχει άλλες ιδιομορφίες εκτός της $k=0$, κι έτσι παρακάμπτεται το ζήτημα της απεικόνισης των πόλων κατά τη διαδικασία απόδειξης της επιλυσιμότητας του προβλήματος Riemann-Hilbert.

6.2 Διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert.

Προκειμένου να περιγράψουμε το αποτέλεσμά μας, υιοθετούμε τον ακόλουθο συμβολισμό. Κατ΄ αρχήν εισάγουμε τις δακτυλιοειδείς (annular) περιοχές

$$S_0 := \{k \in \mathbb{C} : 0 < |k| < R_1\},$$

$$S_1 := \{k \in \mathbb{C} : R_1 < |k| < R_2\},$$

και

$$S_2 := \{k \in \mathbb{C} : |k| > R_2\},$$

κοινού κέντρου $k=0$.

Με το συμβολισμό αυτό, η υπόθεση που υιοθετούμε (υπόθεση 6.39) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Υπόθεση 6.40. *Υποθέτουμε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί R_1 και R_2, με $R_2 > R_1$, κατά τρόπον ώστε όλες οι ρίζες των φασματικών συναρτήσεων $\alpha(k)$, $d(k)$, $a(k)$, $A(k)$ και $A_L(k)$ να περιέχονται στην δακτυλιοειδή περιοχή S_1.*

Το σύνορο της περιοχής S_1 αποτελείται από την ένωση των κύκλων

$$C_1 := \{k \in \mathbb{C} : |k| = R_1\}$$

και

$$C_2 := \{k \in \mathbb{C} : |k| = R_2\}$$

κατά μήκος των οποίων θα διατυπώσουμε, στη συνέχεια, κατάλληλες αλματικές συνθήκες.

Θεωρούμε, λοιπόν, την επαυξημένη καμπύλη $\Sigma := L \cup \partial S_1 \equiv L \cup C_1 \cup C_2$ (όπου $L := \{k \in \mathbb{C} : k^3 \in \mathbb{R}\}$ είναι η αλματική καμπύλη που θεωρήθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια).

Προσανατολίζουμε την καμπύλη Σ κατά τον ακόλουθο τρόπο. Η κατεύθυνση κατά μήκος καθενός από τα τμήματα της επαυξημένης καμπύλης Σ είναι η εξής:

$L_0 \setminus \bar{S}_1$, $L_2 \setminus \bar{S}_1$, $L_4 \setminus \bar{S}_1$: απομάκρυνση από την αρχή των αξόνων.

$L_1 \setminus \bar{S}_1$, $L_3 \setminus \bar{S}_1$, $L_5 \setminus \bar{S}_1$: κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων.
$L_0 \cap \bar{S}_1$, $L_2 \cap \bar{S}_1$, $L_4 \cap \bar{S}_1$: κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων.
$L_1 \cap \bar{S}_1$, $L_3 \cap \bar{S}_1$, $L_5 \cap \bar{S}_1$: απομάκρυνση από την αρχή των αξόνων.
$C_1 \cap (D_{135})$: ορθή φορά, δηλ. αντίθετα προς την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.
$C_1 \cap (D_{246})$: ανάδρομη φορά, δηλ. σύμφωνα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.
$C_2 \cap (D_{135})$: ανάδρομη φορά.
$C_2 \cap (D_{246})$: ορθή φορά. □

Υιοθετούμε την σύμβαση κατά την οποία η κίνηση κατά μήκος της αφήνει στα αριστερά την περιοχή με θετικό πρόσημο, και στα δεξιά την περιοχή με αρνητικό πρόσημο.

Καθεμιά από τις υποπεριοχές

$$\Omega_{j\alpha} := D_j \cap S_\alpha, \quad j = 1, ..., 6, \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

θα αποκτά, σύμφωνα με τη σύμβαση αυτή, ένα πρόσημο.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι, για κάθε $j = 1, \cdots, 6$ και $\alpha = 0, 1, 2$, η περιοχή $\Omega_{j\alpha}$ διακρίνεται σαν θετικού ή αρνητικού προσήμου ανάλογα με το πρόσημο της παράστασης $(-1)^{j+\alpha-1}$.

Θα συμβολίζουμε με Ω_+ την ένωση των περιοχών $\Omega_{j\alpha}$ θετικού προσήμου, δηλαδή με $j + \alpha - 1$ άρτιο, ενώ με με Ω_- την ένωση των περιοχών $\Omega_{j\alpha}$ αρνητικού προσήμου, δηλαδή με $j + \alpha - 1$ περιττό.

Η ένωση των συνόρων των περιοχών $\Omega_{j\alpha}$, $j = 1, ..., 6$, $\alpha = 0, 1, 2$ ορίζει την καμπύλη

$$\Sigma := \partial\Omega_+ = \partial\Omega_-$$

Προκειμένου να διατυπώσουμε την αλματική συνθήκη, είναι απαραίτητο να χωρίσουμε την καμπύλη Σ σε οκτώ τμήματα, που θα συμβολίζουμε με Σ_j, $j = 1, ..., 8$ και που ορίζουμε ως ακολούθως:

$$\Sigma_1 := (L_1 \cup L_4) \setminus \bar{S}_1,$$

$$\Sigma_2 := (L_2 \cup L_3) \setminus \bar{S}_1,$$

$$\Sigma_3 := (C_1 \cup C_2) \cap (D_{13})$$

και

$$\Sigma_4 := (C_1 \cup C_2) \cap D_2.$$

Οι καμπύλες Σ_5, Σ_6, και Σ_7 ορίζονται σαν οι ανακλάσεις των Σ_2, Σ_3 και Σ_4, αντίστοιχα, ως προς τον πραγματικό άξονα. Τέλος, η Σ_8 είναι το εναπομείναν μέρος της Σ.

Έστω ότι η 2×2-πίνακας -συνάρτηση $M(x, t, k)$ ορίζεται κατά κλάδους ως εξής:

$$M(x,t,k) := \begin{cases} M_+^{(13)} := \left(\frac{[\Psi_2]_1^{(13)}}{\alpha(k)}, [\Psi_4]_2^{(13)}\right), \quad k \in \{\bar{D}_{13}\} \setminus \bar{S}_1, \\ M_-^{(2)} := \left(\frac{[\Psi_1]_1^{(2)}}{d(k)}, [\Psi_3]_2^{(2)}\right), \quad k \in \bar{D}_2 \setminus \bar{S}_1, \\ M_-^{(46)} := \left([\Psi_4]_1^{(46)}, \frac{[\Psi_2]_2^{(46)}}{\bar{\alpha}(k)}\right), \quad k \in \{\bar{D}_{46}\} \setminus \bar{S}_1 \\ M_+^{(5)} := \left([\Psi_3]_1^{(5)}, \frac{[\Psi_1]_2^{(5)}}{\bar{d}(k)}\right), \quad k \in \bar{D}_5 \setminus \bar{S}_1 \\ M^{(0)} := \Psi_2, \quad k \in \bar{S}_1. \end{cases} \tag{6.1}$$

Παρατήρηση 6.41. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $M(x,t,k)$, όπως ορίστηκε, είναι συνεχής κατά μήκος των τμημάτων της L που περιέχονται στην περιοχή S_1.

Θεώρημα 6.42. *Η $M(x,t,k)$ είναι λύση του ακόλουθου προβλήματος Riemann-Hilbert, που θα ονομάζουμε $xt-RH$ πρόβλημα:*

Είναι μια τμηματικά ολόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$.

Οι συνοριακές τιμές των περιορισμών $M_+(x,t,k)$ και $M_-(x,t,k)$ της M στις περιοχές Ω_+ και Ω_-, αντίστοιχα, καθώς το k προσεγγίζει την καμπύλη ασυνέχειας Σ αλληλοσχετίζονται μέσω της έκφρασης

$$M_-(x,t,k) = M_+(x,t,k)e^{-i\theta(x,t,k)\sigma_3} J_m(k) e^{i\theta(x,t,k)\sigma_3}, \quad k \in \Sigma_m, \tag{6.2}$$

όπου $m = 1, 2, \cdots, 8$, $\theta(x,t,k) := kx + 4k^3 t$,

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\overline{r}(k) \\ r(k) & 1-|r(k)|^2 \end{bmatrix}, \; J_2 = \begin{bmatrix} D(k) & \Delta(k) \\ \Gamma(k) & R(k) \end{bmatrix}, \; J_3 = \begin{bmatrix} \alpha(k) & -\beta(k) \\ 0 & \frac{1}{\alpha(k)} \end{bmatrix},$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} \frac{\overline{A}(k)}{d(k)} & b(k) \\ \frac{\overline{B}(k)}{d(k)} & a(k) \end{bmatrix},$$

$J_{m+3}(k) = \sigma_3 J_m^*(\bar{k})\sigma_3$, $m = 2, 3, 4$, $J_8(k) = I$.

Οι ιδιότητες 4,5,6 και 7 της πρότασης 2.1 του Κεφαλαίου 2 εξακολουθούν να ισχύουν. □

Απόδειξη του θεωρήματος 6.42. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι τελείως αντίστοιχη με εκείνη του φορμαλισμού του Κεφαλαίου 2. □

Παρατήρηση 6.43. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι $det J_m(k) = 1$, για $m = 1, \cdots, 8$.
□

6.3 Αντιστροφή φασματικών μετασχηματισμών.

Όπως και για το πρόβλημα Riemann-Hilbert που περιφράφθηκε στα κεφάλαια 2, 3, 4 και 5, έτσι και η διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert που περιγράφθηκε στο θεώρημα 6.42 στηρίζεται στις έξι φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $A_L(k)$ και $B_L(k)$. Οι τελευταίες, με τη σειρά τους, ορίζονται από τις αρχικές και συνοριακές συναρτήσεις μέσω των *φασματικών μετασχηματισμών* S, $\widetilde{S}$ και $\widetilde{S}^L$ που ορίστηκαν στο εδάφιο 3.2. Στο εδάφιο 3.3 είχαμε παρουσιάσει την αντιστροφή των φασματικών αυτών μετασχηματισμών, βάσει κατάλληλων *ιδιόμορφων* προβλημάτων Riemann-Hilbert.

Στο παρόν εδάφιο παρουσιάζουμε έναν εναλλακτικό τρόπο αντιστροφής των *ίδιων* φασματικών μετασχηματισμών S, $\widetilde{S}$ και $\widetilde{S}^L$, βασισμένο στο εναλλακτικό, *ολόμορφο* πρόβλημα Riemann-Hilbert, χρησιμοποιώντας δηλαδή, τους δύο κύκλους C_1 και C_2 που περιβάλλουν τους πόλους, αντί δίνοντας συνθήκες για τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

Αντιστροφή του φασματικού μετασχηματισμού S. Θεωρούμε την επαυξημένη καμπύλη $\Sigma^{(x)} := \mathbb{R} \cup (\partial S_1)$, με τον ακόλουθο προσανατολισμό:

$\mathbb{R} \setminus \bar{S}_1$: κατεύθυνση προς το $+\infty$. $\mathbb{R} \cap S_1$: κατεύθυνση προς το $-\infty$.

$C_1 \cap \mathbb{C}^+$: ορθή φορά. $C_1 \cap \mathbb{C}^-$: ανάδρομη φορά.

$C_2 \cap \mathbb{C}^+$: ανάδρομη φορά. $C_2 \cap \mathbb{C}^-$: ορθή φορά.

Η συνάρτηση $q_0(x)$ ορίζεται από την έκφραση (3.21), όπου η 2×2-συνάρτηση-πίνακας $M^{(x)}(x,k)$ ορίζεται σαν η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος Riemann-Hilbert:

Πρόβλημα x-Riemann-Hilbert: Η $M^{(x)}(x,k)$ είναι μια τμηματικά ολόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma^{(x)}$, και υφίσταται την αλματική συνθήκη:

$$M_-^{(x)}(x,k) = M_+^{(x)}(x,k) J^{(x)}(x,k), \quad k \in \Sigma^{(x)} \setminus \{0\} \tag{6.3}$$

όπου ο αλματικός πίνακας $J^{(x)}(x,k)$ δίνεται από την έκφραση:

$$J^{(x)}(x,k) := \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{b(k)}{\bar{a}(k)} e^{-2ikx} \\ \frac{\bar{b}(k)}{a(k)} e^{2ikx} & \frac{1}{|a(k)|^2} \end{bmatrix}, & k \in \mathbb{R}^\star \\ \begin{bmatrix} a(k) & -b(k) e^{-2ikx} \\ 0 & \frac{1}{a(k)} \end{bmatrix}, & k \in (\partial S_1) \cap \mathbb{C}^+ \\ \begin{bmatrix} \bar{a}(k) & 0 \\ \bar{b}(k) e^{2ikx} & \frac{1}{\bar{a}(k)} \end{bmatrix}, & k \in (\partial S_1) \cap \mathbb{C}^-. \end{cases} \tag{6.4}$$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης $M^{(x)}(x,k)$ καθώς $k \to \infty$ και καθώς $k \to 0$ δίνεται από τις σχέσεις (3.24) και (3.27), αντίστοιχα.

Αντιστροφή του φασματικού μετασχηματισμού $\widetilde{S}$. Οι συναρτήσεις $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ ορίζονται από τις οριακές διαδικασίες (3.29), όπου η 2×2-πίνακας -συνάρτηση $M^{(t,0)}(t,k)$ ορίζεται σαν μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος Riemann-Hilbert:

Πρόβλημα $(t,0)$-Riemann-Hilbert: Η $M^{(t,0)}(t,k)$ είναι μια τμηματικά ολόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, και υφίσταται την ακόλουθη αλματική συνθήκη:

$$M_-^{(t,0)}(t,k) = M_+^{(t,0)}(t,k) J^{(t,0)}(t,k), \quad k \in \Sigma \tag{6.5}$$

όπου ο αλματικός πίνακας $J^{(t,0)}(t,k)$ δίνεται από την έκφραση:

$$J^{(t,0)}(t,k) := \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-8ik^3t} \frac{B(k)}{\overline{A}(k)} \\ e^{8ik^3t} \frac{\overline{B}(k)}{A(k)} & \frac{1}{A(k)\overline{A}(k)} \end{bmatrix}, & k \in L \setminus \bar{S}_1 \\ I, \quad k \in L \cap \bar{S}_1 \\ \begin{bmatrix} A(k) & -e^{-8ik^3t} B(k) \\ 0 & \frac{1}{A(k)} \end{bmatrix}, & k \in (\partial S_1) \cap (D_{135}) \\ \begin{bmatrix} \bar{A}(k) & 0 \\ e^{8ik^3t} \bar{B}(k) & \frac{1}{\bar{A}(k)} \end{bmatrix}, & k \in (\partial S_1) \cap (D_{246}). \end{cases} \tag{6.6}$$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης $M^{(t,0)}(t,k)$ καθώς $k \to \infty$ και καθώς $k \to 0$ δίνεται από τις σχέσεις (3.32) και (3.35), αντίστοιχα.

Αντιστροφή του φασματικού μετασχηματισμού $\widetilde{S}^L$. Οι συναρτήσεις $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ ορίζονται από τις οριακές διαδικασίες (3.37), όπου η 2×2-πίνακας -συνάρτηση $M^{(t,L)}(t,k)$ ορίζεται σαν η μοναδική λύση του ακόλουθου προβλήματος Riemann-Hilbert:

Πρόβλημα (t,L)-Riemann-Hilbert: Η $M^{(t,L)}(t,k)$ είναι μια τμηματικά ολόμορφη συνάρτηση του $k \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ και υφίσταται την ακόλουθη αλματική συνθήκη:

$$M_-^{(t,L)}(t,k) = M_+^{(t,L)}(t,k) J^{(t,L)}(t,k), \quad k \in \Sigma \tag{6.7}$$

όπου ο αλματικός πίνακας $J^{(t,L)}(t,k)$ δίνεται από την έκφραση:

$$J^{(t,L)}(t,k) := \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-8ik^3t}\frac{B_L(k)}{\bar{A}_L(k)} \\ e^{8ik^3t}\frac{\bar{B}_L(k)}{A_L(k)} & \frac{1}{A_L(k)\bar{A}_L(k)} \end{bmatrix}, & k \in L \setminus \bar{S}_1 \\ I, \quad k \in L \cap \bar{S}_1 \\ \begin{bmatrix} \frac{a(k)}{\bar{A}_L(k)} & -e^{-8ik^3t}\frac{b(k)}{\bar{A}_L(k)} \\ -e^{8ik^3t}\bar{\beta}(k) & \bar{\alpha}(k) \end{bmatrix}, & k \in (\partial S_1) \cap (D_{135}) \\ \begin{bmatrix} \frac{\bar{a}(k)}{A_L(k)} & e^{-8ik^3t}\beta(k) \\ e^{8ik^3t}\frac{\bar{b}(k)}{A_L(k)} & \alpha(k) \end{bmatrix}, & k \in (\partial S_1) \cap (D_{246}). \end{cases} \tag{6.8}$$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης $M^{(t,L)}(t,k)$ καθώς $k \to \infty$ και καθώς $k \to 0$ δίνεται από τις σχέσεις (3.40) και (3.43), αντίστοιχα.

Παρατήρηση 6.44. $detJ^{(x)}(x,k) = detJ^{(t,0)}(t,k) = detJ^{(t,L)}(t,k) = 1$. □

6.4 Παρουσίαση του βασικού αποτελέσματος.

Ακολουθώντας τις γραμμές του εναλλακτικού φορμαλισμού, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η λύση του προβλήματος Riemann-Hilbert $xt - RH$ είναι μοναδική. Μέσω αυτής, μπορεί να ανακτηθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών, σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.45. *Ορίζουμε τη συνάρτηση $q(x,t)$ μέσω της λύσης $M(x,t,k)$ του $xt - RH$ από την έκφραση (4.1). Τότε η $q(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση KdV, και παίρνει τις αρχικές τιμές (4.2) και τις συνοριακές τιμές (4.3).*

Απόδειξη του θεωρήματος 6.45. Η απόδειξη του αποτελέσματος αυτού βασίζεται στην εισαγωγή των πινάκων $P^{(x)}(x,k)$, $P^{(t,0)}(t,k)$ και $P^{(t,L)}(t,k)$, σύμφωνα με το πνεύμα του εναλλακτικού φορμαλισμού. Οι πίνακες αυτοί, για $k \in \mathbb{C} \setminus \bar{S}_1$ δίνονται από τις εξισώσεις (4.9), (4.49) και (4.112), αντίστοιχα. Τέλος, για $k \in S_1$ έχουμε $P^{(x)}(x,k) = P^{(t,0)}(t,k) = P^{(t,L)}(t,k) = I$. □

6.5 Ολοκληρωτικές Αναπαραστάσεις.

Θεώρημα 6.46. *Η λύση $q(x,t)$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών επιδέχεται τις ακόλουθες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις, μέσω της λύσης του προβλήματοςRiemann-Hilbert $xt-RH$.*

$$
\begin{aligned}
& q(x,t) = \\
= \ & \frac{1}{\pi}\int_{L_{45}} \left\{ \left[1-\overline{R}(k)\right] \partial_x M_{22}^{+}(x,t,k) + \Gamma(k) e^{-2ikx-8ik^3t}(\partial_x - 2ik) M_{21}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{1}{\pi}\int_{L_{03}} \left\{ r(k) e^{-2ikx-8ik^3t}(\partial_x - 2ik) M_{21}^{+}(x,t,k) + |r(k)|^2 \partial_x M_{22}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{1}{\pi}\int_{L_{12}} \left\{ \left[1-R(k)\right] \partial_x M_{22}^{+}(x,t,k) - \Delta(k) e^{-2ikx-8ik^3t}(\partial_x - 2ik) M_{21}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{1}{\pi}\int_{(\partial S_1)\cap(D_{13})} \left\{ \beta(k) \partial_x M_{21}^{+}(x,t,k) + [1-\frac{1}{\alpha(k)}] \partial_x M_{22}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{1}{\pi}\int_{(\partial S_1)\cap D_2} \left\{ -b(k) \partial_x M_{21}^{+}(x,t,k) + [1-a(k)] \partial_x M_{22}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{1}{\pi}\int_{(\partial S_1)\cap(D_{46})} \left[1-\frac{1}{\bar{\alpha}(k)}\right] \partial_x M_{22}^{+}(x,t,k) dk \\
+ \ & \frac{1}{\pi}\int_{(\partial S_1)\cap D_5} \left\{ \frac{B(k)}{\bar{d}(k)} \partial_x M_{21}^{+}(x,t,k) + [1-\bar{a}(k)] \partial_x M_{22}^{+}(x,t,k) \right\} dk. \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

Μια εναλλακτική ολοκληρωτική αναπαράσταση δίνεται από την έκφραση:

$$
\begin{aligned}
& q(x,t) = \\
= \ & \frac{2}{\pi i}\int_{L_{45}} \left\{ k\left[1-\overline{R}(k)\right] M_{12}^{+}(x,t,k) + k\overline{\Gamma}(k) e^{-2ikx-8ik^3t} M_{11}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{2}{\pi i}\int_{L_{03}} \left\{ k|r(k)|^2 M_{12}^{+}(x,t,k) + k\overline{r}(k) e^{-2ikx-8ik^3t} M_{11}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{2}{\pi i}\int_{L_{12}} \left\{ k\left[1-R(k)\right] M_{12}^{+}(x,t,k) - k\Delta(k) e^{-2ikx-8ik^3t} M_{11}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{2}{\pi i}\int_{(\partial S_1)\cap(D_{13})} \left\{ k\beta(k) M_{11}^{+}(x,t,k) + k[1-\frac{1}{\alpha(k)}] M_{12}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{2}{\pi i}\int_{(\partial S_1)\cap D_2} \left\{ -kb(k) M_{11}^{+}(x,t,k) + k[1-a(k)] M_{12}^{+}(x,t,k) \right\} dk \\
+ \ & \frac{2}{\pi i}\int_{(\partial S_1)\cap(D_{46})} k\left[1-\frac{1}{\bar{\alpha}(k)}\right] M_{12}^{+}(x,t,k) dk \\
+ \ & \frac{2}{\pi i}\int_{(\partial S_1)\cap D_5} \left\{ k\frac{B(k)}{\bar{d}(k)} M_{11}^{+}(x,t,k) + k[1-\bar{a}(k)] M_{12}^{+}(x,t,k) \right\} dk. \qquad (6.10)
\end{aligned}
$$

Η δεύτερη ολοκληρωτική αναπαράσταση ισχύει κάτω από την υπόθεση ότι η ακόλουθη συνθήκη ικανοποιείται:

$$
\begin{aligned}
& \int_{L_{45}} \left\{[1-\overline{R}(k)]M_{12}^{+}(x,t,k) + \overline{\Gamma}(k)e^{-2ikx-8ik^3t}M_{11}^{+}(x,t,k)\right\}dk \\
+ & \int_{L_{03}} \left\{|r(k)|^2 M_{12}^{+}(x,t,k) + \overline{r}(k)e^{-2ikx-8ik^3t}M_{11}^{+}(x,t,k)\right\}dk \\
+ & \int_{L_{12}} \left\{[1-R(k)]M_{12}^{+}(x,t,k) - \Delta(k)e^{-2ikx-8ik^3t}M_{11}^{+}(x,t,k)\right\}dk \\
+ & \int_{(\partial S_1)\cap(D_{13})} \left\{\beta(k)M_{11}^{+}(x,t,k) + [1-\frac{1}{\alpha(k)}]M_{12}^{+}(x,t,k)\right\}dk \\
+ & \int_{(\partial S_1)\cap D_2} \left\{-b(k)M_{11}^{+}(x,t,k) + [1-a(k)]M_{12}^{+}(x,t,k)\right\}dk \\
+ & \int_{(\partial S_1)\cap(D_{46})} \left[1-\frac{1}{\bar{\alpha}(k)}\right]M_{12}^{+}(x,t,k)dk \\
+ & \int_{(\partial S_1)\cap D_5} \left\{\frac{B(k)}{\bar{d}(k)}M_{11}^{+}(x,t,k) + [1-\bar{a}(k)]M_{12}^{+}(x,t,k)\right\}dk \\
= & \ 0.
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

Απόδειξη του θεωρήματος 6.46.

Οι αποδείξεις των ανωτέρω δύο ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων, κατ΄ αντιστοιχία με εκείνων του εναλλακτικού φορμαλισμού, βασίζονται στην κατά στήλες θεώρηση του προβλήματος Riemann-Hilbert $xt-RH$, στην εφαρμογή του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy και στις οριακές διαδικασίες (4.1). □

Κεφάλαιο 7

Η Γενικευμένη Απεικόνιση Dirichlet to Neumann.

7.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια δείξαμε ότι η μελέτη του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) για την εξίσωση KdV σε ένα φραγμένο διάστημα της χωρικής μεταβλητής, $0 < x < L$, μπορεί να αναχθεί στη μελέτη ενός ιδιόμορφου προβλήματος παραγοντοποίησης Riemann-Hilbert (RH) στο μιγαδικό επίπεδο της φασματικής παραμέτρου k. Οι ασυνέχειες αυτού του προβλήματος Riemann-Hilbert καθορίζονται πλήρως από μια εξάδα κατάλληλων *φασματικών συναρτήσεων*, τις $(a(k), b(k))$, $(A(k), B(k))$ και $(A_L(k), B_L(k))$. Οι τελευταίες, με τη σειρά τους, ορίζονται (πεπλεγμένα) μέσω της αρχικής συνθήκης $\{q(x, 0)\}$ και της εξάδας των συνοριακών συναρτήσεων $\{q(0, t), q_x(0, t), q_{xx}(0, t)\}$ και $\{q(L, t), q_x(L, t), q_{xx}(L, t)\}$.

Εντούτοις, το υπό θεώρηση ΠΑΣΤ είναι *καλά τοποθετημένο (well-posed)* εάν επιβληθούν μια αρχική συνθήκη καθώς και τρείς συνοριακές συνθήκες, [11]. Για παράδειγμα, ένα τέτοιο καλά τοποθετημένο ΠΑΣΤ προκύπτει εάν επιβληθεί η αρχική συνθήκη $\{q(x, 0) = q_0(x)\}$, μια συνοριακή συνθήκη στο αριστερό σύνορο, $\{q(0, t) = g_0(t)\}$, και δύο συνοριακές συνθήκες στο δεξιό σύνορο, $\{q(L, t) = f_0(t), q_x(L, t) = f_1(t)\}$.

Ας σημειωθεί, πάντως, ότι κι άλλες επιλογές των τριών συνοριακών συναρτήσεων είναι μαθηματικά ευλογοφανείς. Για παράδειγμα, αντί της $q_x(L, t)$ θα μπορούσε να έχει επιβληθεί η $q_x(0, t)$. Εντούτοις, από την άποψη των φυσικών εφαρμογών η πρώτη επιλογή είναι πιο συνηθισμένη ([11]). Κι αυτό διότι, στην πράξη, δεν υπάρχουν πληροφορίες που να εγγυώνται την ύπαρξη, στο μέσο στο οποίο γίνεται η μετάδοση του κύματος, επιβολής δεύτερης συνοριακής συνθήκης, ή κυματοδηγού, στο αριστερό άκρο.

Η κατασκευή της *Γενικευμένης Απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann* συνίσταται στον καθορισμό των άγνωστων συνοριακών τιμών μέσω των επιβεβλημένων (άρα γνωστών) αρχικών και συνοριακών συνθηκών. Εν προκειμένω, δοσμένων των ποσοτήτων $\{q(x, 0)$, $q(0, t)$, $q(L, t)$, $q_x(L, t)\}$, το πρόβλημα συνίσταται στον προσδιορισμό (ή, τουλάχιστον, στον χαρακτηρισμό) των ποσοτήτων $\{q_x(0, t)$, $q_{xx}(0, t)$, $q_{xx}(L, t)\}$. Από τη στιγμή που η κατασκευή αυτή θα έχει επιτευχθεί, η διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert θα εξαρτάται μόνο από γνωστές ποσότητες, τις δοσμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες.

Το γεγονός ότι η επτάδα *ανεξάρτητων μεταξύ τους* αρχικών και συνοριακών τιμών $\{q(x,0),\ \partial_x^j q(0,t),\ \partial_x^j q(L,t)\}$ που εμπλέκεται στη διατύπωση του προβλήματος Riemann-Hilbert *υπερκαθορίζει* τη λύση $q(x,t)$ του ΠΑΣΤ, αντανακλάται, όπως είδαμε, στην ύπαρξη μιας *ολικής σχέσης (global relation)*. Η εξίσωση αυτή, που αλληλοσυνδέει τις παραπάνω αρχικές και συνοριακές τιμές, παίρνει μια σχετικά απλή αλγεβρική μορφή όταν εκφράζεται μέσω των *φασματικών συναρτήσεων* που καθορίζουν το πρόβλημα Riemann-Hilbert. Ας υπενθυμίσουμε, στο σημείο αυτό, πως η εξαγωγή της ολικής σχέσης γίνεται με ολοκλήρωση του ζεύγους Lax ταυτόχρονα κατά μήκος του συνόρου της περιοχής ισχύος του ΠΑΣΤ, $[0,L]\times[0,T]$, και, κατά συνέπεια, *δεν εξαρτάται από την επίλυση του ΠΑΣΤ* και τον προσδιορισμό της $q(x,t)$ εντός της περιοχής.

Η δυνατότητα διατύπωσης μιας ολικής σχέσης προσφέρει, λοιπόν, τον ακρογωνιαίο λίθο προς την κατεύθυνση του χαρακτηρισμού της Γενικευμένης Απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann, χωρίς να χρειάζεται να λύσουμε το ΠΑΣΤ, απομακρυνόμενοι, έτσι, από το σύνορο.

Το ΠΑΣΤ για τη *Μη Γραμμική Εξίσωση Schrödinger (nonlinear Schrödinger, NLS)* στην ημιευθεία της χωρικής μεταβλητής, με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet,

$$
\begin{aligned}
&iq_t + q_{xx} - 2\lambda|q|^2 q = 0, \quad \lambda = \pm 1, \quad q = q(x,t) \in \mathbb{C}, \quad x \geq 0,\ \ t \geq 0\\
&q(x,0) = q_0(x), \quad x \geq 0,\\
&q(0,t) = g_0(t), \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

στάθηκε το πρώτο ΠΑΣΤ στο οποίο υιοθετήθηκε μια νέα, ισχυρή τεχνική προς την κατεύθυνση του χαρακτηρισμού αυτού, [14].

Το πρώτο βήμα της τεχνικής συνίστατο στην εξαγωγή, και αντικατάσταση μέσα στην ολική σχέση, μιας *τριγωνικής αναπαράστασης (triangular representation) Gelfand-Levitan-Marchenko (GLM)* ([17]) των φασματικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στη χρονική μεταβλητή t. Το επόμενο βήμα ήταν η επίλυση της ολικής σχέσης ως προς την άγνωστη συνοριακή τιμή $q_x(0,t)$. Η επίτευξη αυτού πραγματοποιήθηκε με την ολοκλήρωση, στο k-μιγαδικό επίπεδο, βάσει συγκεκριμένων ολοκληρωτικών ταυτοτήτων. Έτσι επιτεύχθηκε έκφραση της $q_x(0,t)$ μέσω μιας ολοκληρωτικής αναπαράστασης που περιείχε τις $q(0,t)$, $q(x,0)$ καθώς και ένα πρόβλημα Goursat (χαρακτηριστικών συνοριακών τιμών) για *γραμμικές* μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Σε μια συνέχεια της προσπάθειας αυτής, [47], επιτεύχθηκαν εκφράσεις για τις άγνωστες συνοριακές τιμές μέσω των γνωστών συνοριακών τιμών και *κατάλληλων ιδιοσυναρτήσεων* για τη *Μη Γραμμική Εξίσωση Schrödinger (NLS)*, την *τροποποιημένη εξίσωση KdV (mKdV)*, και για την εξίσωση sine-Gordon στην ημιευθεία της χωρικής μεταβλητής, [47], καθώς και στο πεπερασμένο διάστημα, [55], [16].

Η ανάλυση του αντίστοιχου προβλήματος για την εξίσωση KdV στην *ημιευθεία της χωρικής μεταβλητής* ($x \geq 0$) εμφανίστηκε αρκετά αργότερα, [105], [102]. Η καθυστέρηση αυτή οφείλετο στο γεγονός ότι είχαν διαγνωστεί δυσκολίες στην εξαγωγή κατάλληλων αναπαραστάσεων Gel'fand-Levitan-Marchenko. Κι αυτό επειδή το ζεύγος Lax το οποίο χρησιμοποιήθηκε εμφάνιζε την δύσχρηστη ιδιομορφία k^{-1}.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε το πρόβλημα του χαρακτηρισμού της Γενικευμένης Απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann για την εξίσωση KdV σε ένα *φραγμένο* διάστημα της χωρικής μεταβλητής x. Μάλιστα, υλοποιούμε το στόχο αυτό χρησιμοποιώντας ένα *διαφορετικό ζεύγος Lax*, [5]. Το ζεύγος Lax που χρησιμοποιούμε εδώ *δεν* έχει ιδιομορφίες στο μιγαδικό επίπεδο της φασματικής παραμέτρου k, κι έτσι η αντίστοιχη δυσκολία έχει *παρακαμφθεί εκ των προτέρων*. Ένα χαρακτηριστικό, όμως, του ζεύγους Lax που χρησιμοποιούμε εδώ είναι η *πλήρης απουσία συμμετριών ανάκλασης Schwarz* στο μιγαδικό k-επίπεδο. Ας σημειωθεί ότι η απουσία συμμετριών τέτοιου τύπου καταδεικνύει πως ένα τέτοιο ζεύγος Lax είναι ακατάλληλο προκειμένου για τη διατύπωση ενός προβλήματος Riemann-Hilbert. Κι αυτό διότι, για ένα τέτοιο πρόβλημα Riemann-Hilbert δεν θα μπορούσε να διατυπωθεί ένα *λήμμα μηδενισμού (vanishing lemma)* (κι άρα το πρόβλημα Riemann-Hilbert δεν θα ήταν απαραίτητα επιλύσιμο). Παρ' όλα αυτά, μια έλλειψη συμμετριών όπως αυτή *δεν* αποτελεί πρόβλημα για το πρόβλημα που μελετάμε στο παρόν καφάλαιο. Κι αυτό επειδή, φυσικά, η μελέτη της Γενικευμένης Απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann μπορεί να γίνει *ανεξάρτητα* από το πρόβλημα Riemann-Hilbert. Ανάλυση μιας ολικής σχέσης που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος Lax χωρίς συμμετρίες των φασματικών συναρτήσεων αποτελεί νεωτερικό στοιχείο της εργασίας αυτής.

Το εναλλακτικό ζεύγος Lax για την εξίσωση KdV, το οποίο χρησιμοποιούμε στο κεφάλαιο αυτό, δίνεται από τις εξισώσεις ([5]):

$$\Psi_x + ik[\sigma_3, \Psi] = Q_1\Psi \tag{7.1}$$

$$\Psi_t + 4ik^3[\sigma_3, \Psi] = \widetilde{Q}_1\Psi \tag{7.2}$$

όπου

$$Q_1(x,t,k) := \begin{bmatrix} 0 & q(x,t) \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

και

$$\widetilde{Q}_1(x,t,k) := \begin{bmatrix} -q_x & -2q^2 - q_{xx} \\ 2q & q_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2iq & 2iq_x \\ 0 & -2iq \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} 0 & 4q \\ -4 & 0 \end{bmatrix} k^2. \tag{7.4}$$

Επίσης

$$\sigma_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

είναι οι πίνακες Pauli, και

$$\hat{\sigma}_3 A \equiv [\sigma_3, A] := \sigma_3 A - A\sigma_3.$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την παρουσίαση αποφεύγοντας υπολογισμούς ρουτίνας, περιοριζόμαστε στην περίπτωση μηδενικής αρχικής συνθήκης, $q_0(x) \equiv 0$.

Προκειμένου να παράξουμε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις που χαρακτηρίζουν τη Γενικευμένης Απεικόνισης Dirichlet-to-Neumann, προχωρούμε ως ακολούθως.

(i). Δοσμένου ότι η ολική σχέση ισχύει για όλα τα $k \in \mathbb{C}$, εκτελούμε καθέναν από τους δύο μετασχηματισμούς $k \longmapsto Ek$ και $k \longmapsto E^2k$, όπου $E := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, οι οποίοι αφήνουν τη σχέση διασποράς (dispersion relation) $\omega(k) := 4k^3$ *αναλλοίωτη*. Με τον τρόπο αυτό οδηγούμαστε τελικά σε ένα σύστημα από τρείς εξισώσεις, το οποίο τελικά θα θεωρηθεί σαν σύστημα για τις άγνωστες συνοριακές τιμές $\{g_1(t) := q_x(0,t), g_2(t) := q_{xx}(0,t), f_2(t) := q_{xx}(L,t)\}$.

(ii). Επιτυγχάνουμε τριγωνικές αναπαραστάσεις Gelfand-Levitan-Marchenko για τις φασματικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στη χρονική μεταβλητή t.

Αντικαθιστούμε τις αναπαραστάσεις αυτές στο σύστημα εξισώσεων που περιγράψαμε στο (i).

Ας ονομάσουμε (Σ) το σύστημα που προκύπτει, θεωρούμενο σαν σύστημα ως προς τους όρους που περιέχουν τις άγνωστες συνοριακές τιμές $g_1(t)$, $g_2(t)$ και $f_2(t)$.

(iii). Εξαγάγουμε κατάλληλες ολοκληρωτικές ταυτότητες στο μιγαδικό k-επίπεδο. Επιλύουμε το σύστημα (Σ) ως προς τους ενδιαφέροντες όρους (δηλαδή τους όρους που περιέχουν τις άγνωστες συνοριακές τιμές, $g_1(t)$, $g_2(t)$ και $f_2(t)$). Ολοκληρώνουμε στο k-επίπεδο χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες ολοκληρωτικές ταυτότητες. Οι εκφράσεις που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό είναι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις στο k-επίπεδο, οι οποίες περιέχουν τις $g_0(t)$, $f_0(t)$, $f_1(t)$ καθώς και κατάλληλες συναρτήσεις, που συμβολίζουμε με K_j, L_j, M_j, $j = 1, 2$. Οι τελευταίες ορίζονται μέσω της λύσης ενός προβλήματος Goursat για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Το κεφάλαιο αυτό διαρθρώνεται με τον ακόλουθο τρόπο.

Στο τμήμα 7.2 παρουσιάζουμε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για τις $g_1(t)$, $g_2(t)$ και $f_2(t)$, στη μορφή ενός θεωρήματος, το οποίο συνιστά και το βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού.

Στο τμήμα 7.3 παρουσιάζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στο δεύτερο ζεύγος Lax. Με τη βοήθειά τους εισάγουμε τους αντίστοιχους *φασματικούς πίνακες*, τους οποίους χρησιμοποιούμε στη συνέχεια.

Στο τμήμα 7.4 ορίζουμε τις *δώδεκα* βασικές φασματικές συναρτήσεις από τις αρχικές και συνοριακές τιμές του ΠΑΣΤ.

Στο τμήμα 7.5 εξάγουμε την ολική σχέση που ικανοποιείται από τις φασματικές συναρτήσεις που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο.

Στο τμήμα 7.6 εξάγουμε τις αναπαραστάσεις Gelfand-Levitan-Marchenko των οκτώ φασματικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στη χρονική μεταβλητή t.

Στο τμήμα 7.7 διατυπώνουμε κι αποδεικνύουμε τις ολοκληρωτικές ταυτότητες που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια για την επίλυση της ολικής σχέσης.

Στο τμήμα 7.8 δίνουμε την απόδειξη του βασικού μας θεωρήματος (τμήμα 7.2). Εξάγουμε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις κάνοντας χρήση των αποτελεσμάτων των παραγράφων 7.6 και 7.7 που προηγήθηκαν.

Στα τμήματα 7.9 και 7.10 παρουσιάζουμε δύο παραλλαγές του βασικού θεωρήματος. Πιο συγκεκριμένα:

Στο τμήμα 7.9 παρουσιάζουμε μια αναδιατύπωση του βασικού θεωρήματος μέσω ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων, αντί για ένα πρόβλημα Goursat για μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Στο τμήμα 7.10 καταδεικνύουμε ότι το θεώρημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί μέσω των ιδιοσυναρτήσεων $\Phi(t,k)$ και $\varphi(t,k)$, στο πνεύμα της [47].

7.2 Έκθεση του κύριου αποτελέσματος.

Υπενθυμίζουμε ότι η διατύπωση του προβλήματος έχει ως εξής:

Δίνοντας $\{q(x,0) = q_0(x), q(0,t) = g_0(t), q(L,t) = f_0(t), q_x(L,t) = f_1(t)\}$ να καθοριστούν οι $\{g_1(t) := q_x(0,t), g_2(t) := q_{xx}(0,t), f_2(t) := q_{xx}(L,t)\}$.

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί το κύριο αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου.

Θεώρημα 7.47. *Υποθέτουμε ότι $q_0(x) \equiv 0$. Τότε ισχύουν οι επόμενες εκφράσεις για τις άγνωστες συνοριακές τιμές $g_1(t)$, $g_2(t)$ και $f_2(t)$:*

$$
\begin{aligned}
g_2(t) = \quad & -g_0^2(t) + \\
& +\frac{24}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_1^1(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{g_0(t)}{4ik^3}\right]dk \\
& -\frac{24}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^3\Omega_1^2(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t \widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{f_1(t)}{8k^3}\right]dk \\
& -\frac{24}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_1^3(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{f_0(t)}{4ik^3}\right]dk \\
& +\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}\left[\Theta_1^1(k)F(t,k) + \Theta_1^2(k)F(t,ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_1^3(k)F(t,ke^{-4\pi i/3})\right]dk.
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1(t) = \quad & -\frac{12i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_2^1(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{g_0(t)}{4ik^3}\right]dk \\
& +\frac{12i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^3\Omega_2^2(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t \widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{f_1(t)}{8k^3}\right]dk \\
& +\frac{12i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_2^3(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{f_0(t)}{4ik^3}\right]dk \\
& -\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}\left[\Theta_2^1(k)F(t,k) + \Theta_2^2(k)F(t,ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_2^3(k)F(t,ke^{-4\pi i/3})\right]dk.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

και

$$\begin{aligned}
f_2(t) = \quad & -f_0^2(t) + \\
& -\frac{24}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_3^1(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{g_0(t)}{4ik^3}\right]dk \\
& +\frac{24}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^3\Omega_3^2(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t \widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{f_1(t)}{8k^3}\right]dk \\
& +\frac{24}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_3^3(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{f_0(t)}{4ik^3}\right]dk \\
& -\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}\left[\Theta_3^1(k)F(t,k) + \Theta_3^2(k)F(t,ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_3^3(k)F(t,ke^{-4\pi i/3})\right]dk
\end{aligned} \tag{7.8}$$

όπου ∂D_1^0 *είναι η καμπύλη που προκύπτει από το προσανατολισμένο σύνορο* ∂D_1 *της περιοχής* D_1*, όταν το τελευταίο παραμορφώνεται τοπικά προκειμένου να παρακαμφθεί το σημείο ιδιομορφίας* $k = 0$*. Επίσης,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(k) \;:=\; & \exp[-\frac{2\pi i}{3} + 2e^{-\frac{5\pi i}{6}}kL] - \exp[-\frac{4\pi i}{3} + 2e^{-\frac{\pi i}{6}}kL] - \exp[2e^{-\frac{5\pi i}{6}}kL] \\
+ \; & \exp[-\frac{4\pi i}{3} + 2ikL] + \exp[2e^{-\frac{\pi i}{6}}kL] - \exp[-\frac{2\pi i}{3} + 2ikL].
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Οι φασματικές συναρτήσεις $\Omega_j^i(k)$ *δίνονται από τις εκφράσεις:*

$$\Omega_j^1(k) := \Theta_j^1(k) + \Theta_j^2(k)e^{-4\pi i/3} + \Theta_j^3(k)e^{-2\pi i/3} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega_j^2(k) := \Theta_j^1(k)e^{2ikL} + \Theta_j^2(k)\exp\left[2e^{-\pi i/6}kL - \frac{2\pi i}{3}\right] \\
&+\Theta_j^3(k)\exp\left[2e^{-5\pi i/6}kL - \frac{4\pi i}{3}\right]
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega_j^3(k) := \Theta_j^1(k)e^{2ikL} + \Theta_j^2(k)\exp\left[2e^{-\pi i/6}kL - \frac{4\pi i}{3}\right] \\
&+\Theta_j^3(k)\exp\left[2e^{-5\pi i/6}kL - \frac{2\pi i}{3}\right]
\end{aligned} \tag{7.12}$$

ενώ οι φασματικές συναρτήσεις $\Theta_j^i(k)$ *δίνονται από τις εκφράσεις:*

$$\begin{aligned}
\Theta_1^1(k) &:= \exp\left[-\frac{2\pi i}{3}+2e^{\frac{-5\pi i}{6}}kL\right]-\exp\left[-\frac{4\pi i}{3}+2e^{-\frac{\pi i}{6}}kL\right]\\
\Theta_1^2(k) &:= \exp\left[-\frac{4\pi i}{3}+2ikL\right]-\exp\left[2e^{-\frac{5\pi i}{6}}kL\right]\\
\Theta_1^3(k) &:= \exp\left[2e^{\frac{-\pi i}{6}}kL\right]-\exp\left[-\frac{2\pi i}{3}+2ikL\right]\\
\Theta_2^1(k) &:= \exp\left[2e^{\frac{-\pi i}{6}}kL\right]-\exp\left[2e^{-\frac{5\pi i}{6}}kL\right]\\
\Theta_2^2(k) &:= \exp\left[2e^{\frac{-5\pi i}{6}}kL\right]-\exp\left[2ikL\right]\\
\Theta_2^3(k) &:= \exp\left[2ikL\right]-\exp\left[2e^{-\frac{\pi i}{6}}kL\right]\\
\Theta_3^1(k) &:= \exp\left[-\frac{4\pi i}{3}\right]-\exp\left[-\frac{2\pi i}{3}\right]\\
\Theta_3^2(k) &:= 1-\exp\left[-\frac{4\pi i}{3}\right]\\
\Theta_3^3(k) &:= \exp\left[-\frac{2\pi i}{3}\right]-1. \qquad (7.13)
\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις K_1, K_2, $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$, $\widetilde{N}_1$ *και* $\widetilde{N}_2$ *των ορισμάτων* (t,s) *ορίζονται μέσω τη-ς λύσης του επόμενου προβλήματος Goursat για γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:*

Εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
&K_{1t}-K_{1s} = -(2g_0^2(t)+g_2(t))K_2+2ig_1(t)\widetilde{M}_2+4g_0(t)\widetilde{N}_2\\
&K_{2t}+K_{2s} = 2g_0(t)K_1-4\widetilde{N}_1\\
&\widetilde{M}_{1t}-\widetilde{M}_{1s} = \frac{i}{2}(3g_0^2(t)+g_2(t))K_1+\frac{i}{2}(g_0'(t)+g_0(t)g_1(t))K_2-(g_0^2(t)+g_2(t))\widetilde{M}_2+\\
&+2ig_1(t)\widetilde{N}_2\\
&\widetilde{M}_{2t}+\widetilde{M}_{2s} = -\frac{i}{2}g_1(t)K_1-\frac{i}{2}(3g_0^2(t)+g_2(t))K_2+g_0(t)\widetilde{M}_1\\
&\widetilde{N}_{1t}-\widetilde{N}_{1s} = \frac{1}{4}(-g_1'(t)-g_1^2(t)+3g_0^3(t)+g_0(t)g_2(t))K_2+\\
&+\frac{i}{2}(3g_0^2(t)+g_2(t))\widetilde{M}_1+\frac{i}{2}(\frac{1}{4}g_0'(t)+2g_0(t)g_1(t))\widetilde{M}_2-(g_0^2(t)+g_2(t))\widetilde{N}_2\\
&\widetilde{N}_{2t}+\widetilde{N}_{2s} =\\
&= -\frac{1}{4}(3g_0^2(t)+g_2(t))K_1+\frac{7}{4}g_0'(t)K_2-\frac{i}{2}g_1(t)\widetilde{M}_1-\frac{i}{2}(3g_0^2(t)+g_2(t))\widetilde{M}_2+\\
&+g_0(t)\widetilde{N}_1 \qquad (7.14)
\end{aligned}$$

όπου, για λόγους απλότητας, αποκρύψαμε στο συμβολισμό την εξάρτηση από τα ορίσματα (t,s).

Χαρακτηριστικές συνοριακές συνθήκες:

$$
\begin{aligned}
&K_1(t,t) = 2g_0(t)\\
&K_2(t,-t) = 0\\
&\widetilde{M}_1(t,t) = ig_1(t)\\
&\widetilde{M}_2(t,-t) = 0\\
&\widetilde{N}_1(t,t) = -\frac{1}{2}(g_0^2(t) + g_2(t))\\
&\widetilde{N}_2(t,-t) = 0.
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

Ένα παρόμοιο πρόβλημα Goursat ικανοποιείται, με τις K, $\widetilde{M}$, $\widetilde{N}$ *να αντικαθίστανται από τις* K_L, $\widetilde{M}_L$, $\widetilde{N}_L$ *και τις* (g_0, g_1, g_2) *να αντικαθίστανται από τις* (f_0, f_1, f_2).

Η συνάρτηση $F(t,k)$ *δίνεται από την έκφραση:*

$$
\begin{aligned}
F(t,k) = \quad & -ig_0(t)\int_0^t \widetilde{M}_2(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\\
& -\frac{1}{2}g_0(t)\int_0^t K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\\
& +\frac{1}{2}g_1(t)\int_0^t K_2(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\\
& -ikg_0(t)\int_0^t K_2(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\\
& +ie^{2ikL}f_0(t)\int_0^t \widetilde{M}_2^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\\
& +\frac{1}{2}e^{2ikL}f_0(t)\int_0^t K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\\
& -\frac{1}{2}e^{2ikL}f_1(t)\int_0^t K_2^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\\
& +ike^{2ikL}f_0(t)\int_0^t K_2^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\\
& +\Bigg(\int_0^t \Bigg(2\widetilde{N}_1^L(t,t-2\tau) - if_0(t)\widetilde{M}_2^L(t,t-2\tau) - \frac{1}{2}f_0(t)K_1^L(t,t-2\tau)\\
& +\frac{1}{2}f_1(t)K_2^L(t,t-2\tau) + \Big[2\widetilde{M}_1^L(t,t-2\tau) - if_0(t)K_2^L(t,t-2\tau)\Big]k\\
& +2K_1^L(t,t-2\tau)k^2\Bigg)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2ik}(1-e^{-2ikL})\int_0^t\bigg(2\widetilde{N}_1^L(t,2\tau-t)-if_0(t)\widetilde{M}_2^L(t,2\tau-t)$$
$$-\frac{1}{2}f_0(t)K_1^L(t,2\tau-t)+\frac{1}{2}f_1(t)K_2^L(t,2\tau-t)$$
$$+\Big[2\widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)-if_0(t)K_2^L(t,2\tau-t)\Big]k+2K_1^L(t,2\tau-t)k^2\bigg)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\bigg)$$
$$\bigg(\int_0^t\bigg(2\widetilde{N}_1(t,2\tau-t)-ig_0(t)\widetilde{M}_2(t,2\tau-t)-\frac{1}{2}g_0(t)K_1(t,2\tau-t)$$
$$+\frac{1}{2}g_1(t)K_2(t,2\tau-t)+\Big[2\widetilde{M}_1(t,2\tau-t)-ig_0(t)K_2(t,2\tau-t)\Big]k$$
$$+2K_1(t,2\tau-t)k^2\bigg)e^{8ik^3\tau}d\tau\bigg)$$

$$-e^{2ikL}\bigg(\int_0^t\bigg(2\widetilde{N}_1^L(t,2\tau-t)-if_0(t)\widetilde{M}_2^L(t,2\tau-t)-\frac{1}{2}f_0(t)K_1^L(t,2\tau-t)$$
$$+\frac{1}{2}f_1(t)K_2^L(t,2\tau-t)+\Big[2\widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)-if_0(t)K_2^L(t,2\tau-t)\Big]k$$
$$+2K_1^L(t,2\tau-t)k^2\bigg)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau\bigg)$$
$$\bigg(\int_0^t\bigg(2\widetilde{N}_1(t,2\tau-t)-ig_0(t)\widetilde{M}_2(t,2\tau-t)-\frac{1}{2}g_0(t)K_1(t,2\tau-t)$$
$$+\frac{1}{2}g_1(t)K_2(t,2\tau-t)+\Big[2\widetilde{M}_1(t,2\tau-t)-ig_0(t)K_2(t,2\tau-t)\Big]k$$
$$2K_1(t,2\tau-t)k^2\bigg)e^{8ik^3\tau}d\tau\bigg). \tag{7.16}$$

Περίληψη της απόδειξης.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η απόδειξη θα διεκπεραιωθεί σε τρία βήματα:

(i) Κατασκευάζουμε τριγωνικές αναπαραστάσεις Gelfand-Levitan-Marchenko των φασματικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στη χρονική μεταβλητή t.

(ii) Η ολική σχέση ισχύει για όλα τα $k\in\mathbb{C}$. Εκτελούμε καθέναν από τους μετασχηματισμούς $k\mapsto ke^{-\frac{2\pi i}{3}}$ και $k\mapsto ke^{-\frac{4\pi i}{3}}$ (οι οποίοι αφήνουν το εκθετικό $e^{8ik^3\tau}$ αναλλοίωτο). Ως εκ τούτου λαμβάνουμε *άλλες δύο* εξισώσεις, κι όλες μαζί συνιστούν ένα σύστημα τριών εξισώσεων, που στο εξής θα αναφέρουμε σαν (Σ). Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις τριγωνικές αναπαραστάσεις εντός του συστήματος (Σ). Επιλύουμε το προκύπτον σύστημα ως προς τους όρους που περιέχουν τις άγνωστες συνοριακές τιμές.

(iii) Ολοκληρώνουμε στο k-μιγαδικό επίπεδο κατά μήκος της καμπύλης ∂D_1^0 και χρησιμοποιούμε συγκεκριμένες ολοκληρωτικές ταυτότητες.

7.3 Ιδιοσυναρτήσεις και φασματικοί πίνακες για το δεύτερο ζεύγος Lax.

Ο ορισμός των τεσσάρων βασικών ιδιοσυναρτήσεων που αντιστοιχούν στο δεύτερο ζεύγος Lax (εξισώσεις (7.1) και (7.2)) ακολουθεί την ίδια διαδικασία με εκείνη που ακολουθήθηκε για το πρώτο ζεύγος Lax (βλ. δεύτερο κεφάλαιο). Για λόγους απλότητας της παρουσίασης, χρησιμοποιούμε και πάλι τους συμβολισμούς $\Psi_j(x,t,k)$, $j=1,2,3,4$.

Ας συμβολίσουμε με $(x_\star, t_\star)$ ένα *σταθερό* σημείο *του συνόρου* $\partial\Omega$ της περιοχής $\overline{\Omega} := [0,L]\times[0,T]$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.12) κατά μήκος μιας (τμηματικά) ομαλής καμπύλης C που ενώνει το σημείο $(x_\star,t_\star)$ με το τυχαίο σημείο $(x,t)\in\overline{\Omega}$ καταλήγουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$\Psi_\star(x,t,k) = I + \int_{(x_\star,t_\star)}^{(x,t)} e^{-i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}\Upsilon_1(x',t',k). \tag{7.17}$$

όπου η διαφορική 1-μορφή Υ_1 ορίζεται από τη σχέση

$$\Upsilon_1(x,t,k) := e^{i\theta(x,t,k)\hat{\sigma}_3}\Big(Q_1(x,t,k)\Psi(x,t,k)dx + \widetilde{Q}_1(x,t,k)\Psi(x,t,k)dt\Big), \tag{7.18}$$

όπου $(x_\star,t_\star)$ συμβολίζει καθένα από τα σημεία

$$(x_1,t_1) := (0,T), \quad (x_2,t_2) := (0,0), \quad (x_3,t_3) := (L,0), \quad (x_4,t_4) := (L,T)$$

και όπου το $T>0$ είναι αυθαίρετα σταθεροποιημένο.

Επιλέγοντας τα ευθύγραμμα τμήματα των δρόμων ολοκλήρωσης να είναι παράλληλα προς τους άξονες των x και t, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις οι οποίες ορίζουν μονοσήμαντα τις $\Psi_j(x,t,k)$, $j=1,2,3,4$ παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}\Psi_1(x,t,k) = \quad & I + \int_0^x e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3}Q_1(x',t,k)\Psi_1(x',t,k)dx' \\ & -e^{-ikx\hat{\sigma}_3}\int_t^T e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}_1(0,t',k)\Psi_1(0,t',k)dt'.\end{aligned} \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(x,t,k) = \quad & I + e^{-4ik^3t\hat{\sigma}_3}\int_0^x e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3}Q_1(x',0,k)\Psi_2(x',0,k)dx' \\ & +\int_0^t e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}_1(x,t',k)\Psi_2(x,t',k)dt'.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\Psi_2(x,t,k) = \quad & I + \int_0^x e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3}Q_1(x',t,k)\Psi_2(x',t,k)dx' \\ & +e^{-ikx\hat{\sigma}_3}\int_0^t e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}_1(0,t',k)\Psi_2(0,t',k)dt'.\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}\Psi_3(x,t,k) = \quad & I - e^{-4ik^3 t\hat{\sigma}_3}\int_x^L e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3} Q_1(x',0,k)\Psi_3(x',0,k)dx' \\ & + \int_0^t e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}_1(x,t',k)\Psi_3(x,t',k)dt'. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\Psi_3(x,t,k) = \quad & I + e^{-ik(x-L)\hat{\sigma}_3}\int_0^t e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}_1(L,t',k)\Psi_3(L,t',k)dt' \\ & - \int_x^L e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3} Q_1(x',t,k)\Psi_3(x',t,k)dx'. \end{aligned} \tag{7.23}$$

$$\begin{aligned}\Psi_4(x,t,k) = \quad & I - e^{-ik(x-L)\hat{\sigma}_3}\int_t^T e^{-4ik^3(t-t')\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}_1(L,t',k)\Psi_4(L,t',k)dt' \\ & - \int_x^L e^{-ik(x-x')\hat{\sigma}_3} Q_1(x',t,k)\Psi_4(x',t,k)dx'. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Οι παραπάνω τέσσερις λύσεις του ζεύγους Lax αλληλοσυνδέονται μέσω των ακόλουθων σχέσεων:

$$\Psi_3(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k)e^{-(ikx+4ik^3t)\hat{\sigma}_3}s_1(k), \tag{7.25}$$

$$\Psi_1(x,t,k) = \Psi_2(x,t,k)e^{-(ikx+4ik^3t)\hat{\sigma}_3}S_1(T,k) \tag{7.26}$$

και

$$\Psi_4(x,t,k) = \Psi_3(x,t,k)e^{-(ik(x-L)+4ik^3t)\hat{\sigma}_3}S_{1L}(T,k) \tag{7.27}$$

για κατάλληλους πίνακες συναρτήσεων του k, $s_1(k)$, $S_1(T,k)$ και $S_{1L}(T,k)$, που θα ονομάζονται *φασματικοί πίνακες*. Ένας απευθείας υπολογισμός μας δίνει ότι οι πίνακες αυτοί θα πρέπει να οριστούν ως εξής:

$$s_1(k) := \Psi_3(0,0,k), \tag{7.28}$$

$$S_1(T,k) := \Psi_1(0,0,k) \tag{7.29}$$

και

$$S_{1L}(T,k) := \Psi_4(L,0,k). \tag{7.30}$$

Γράφουμε τους φασματικούς πίνακες στη μορφή

$$s_1(k) = \begin{bmatrix}\hat{a}(k) & b(k)\\ \hat{b}(k) & a(k)\end{bmatrix}, \tag{7.31}$$

$$S_1(T,k) = \begin{bmatrix}\hat{A}(T,k) & B(T,k)\\ \hat{B}(T,k) & A(T,k)\end{bmatrix} \tag{7.32}$$

και

$$S_{1L}(T,k) = \begin{bmatrix} \hat{A}_L(T,k) & B_L(T,k) \\ \hat{B}_L(T,k) & A_L(T,k) \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

για *δώδεκα κατάλληλες φασματικές συναρτήσεις*, $a(k)$, $b(k)$, $A(T,k)$, $B(T,k)$, $A_L(T,k)$, $B_L(T,k)$, $\hat{a}(k)$, $\hat{b}(k)$, $\hat{A}(T,k)$, $\hat{B}(T,k)$, $\hat{A}_L(T,k)$, $\hat{B}_L(T,k)$.

Παρατήρηση 7.48. Βλέπουμε πως, αναφορικά με το *δεύτερο* ζεύγος Lax, χρειάστηκε να εισαγάγουμε *δώδεκα* φασματικές συναρτήσεις αντί για έξι, κι αυτό επειδή, στην περίπτωση αυτή *δεν* έχουμε συμμετρίες ανάκλασης Schwarz στο k-μιγαδικό επίπεδο. Φυσικά, πρέπει να τονιστεί επιπλέον ότι οι $a(k)$, $b(k)$, $A(T,k)$, $B(T,k)$, $A_L(T,k)$ και $B_L(T,k)$ *δεν θα πρέπει να συγχέονται με εκείνες που ορίστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο σε σχέση με το πρώτο ζεύγος Lax.* Για λόγους απλότητας κρατήθηκε ο ίδιος συμβολισμός για τις έξι αυτές φασματικές συναρτήσεις.

Οι εξισώσεις (7.28), (7.29), (7.30), (7.31), (7.32), και (7.33), μαζί με το γεγονός ότι η $\Psi_3(x,0,k)$ ικανοποιεί την x-εξίσωση του ζεύγους Lax , ενώ οι $\Psi_1(0,t,k)$ και $\Psi_3(L,t,k)$ ικανοποιούν την t-εξίσωση του ζεύγους Lax, αποτελούν το κίνητρο για τον τρόπο που θα δοθούν οι ορισμοί για τις δώδεκα φασματικές συναρτήσεις $a(k)$ έως και $\hat{B}_L(t,k)$ μέσω των αρχικών και συνοριακών συναρτήσεων (εξισώσεις (7.37)-(7.48) του εδαφίου 7.4).

Χρησιμοποιώντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (7.19) μέχρι και (7.24) προκύπτουν οι ακόλουθες ολοκληρωτικές σχέσεις που ικανοποιούνται από τους φασματικούς πίνακες, και οι οποίες είναι χρήσιμες για την παραγωγή της *ολικής σχέσης* στο εδάφιο 7.5.

$$s_1(k) = I - \int_0^L e^{ikx\hat{\sigma}_3} Q_1(x,0,k)\Psi_3(x,0,k)dx, \tag{7.34}$$

$$S_1(T,k) = I - \int_0^T e^{4ik^3t\hat{\sigma}_3} \widetilde{Q}_1(0,t,k)\Psi_1(0,t,k)dt \tag{7.35}$$

ανδ

$$S_{1L}^{-1}(T,k) = I + \int_0^T e^{4ik^3t\hat{\sigma}_3} \widetilde{Q}_1(L,t,k)\Psi_3(L,t,k)dt. \tag{7.36}$$

7.4 Οι φασματικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στο δεύτερο ζεύγος Lax.

Οι φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$, $\hat{a}(k)$, $\hat{b}(k)$, $A(t,k)$, $B(t,k)$, $\hat{A}(t,k)$, $\hat{B}(t,k)$, $A_L(t,k)$, $B_L(t,k)$, $\hat{A}_L(t,k)$ και $\hat{B}_L(t,k)$ ορίζονται, με πεπλεγμένο τρόπο, ως ακολούθως, για όλα τα $k \in \mathbb{C}$ και $t > 0$.

-
$$[b(k), a(k)]^T := \phi(0,k), \tag{7.37}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\phi(x,k)$ ορίζεται μέσω των τιμών $\{q_0(x)\}$ από τη λύση του ΠΑΤ:

$$\partial_x \phi(x,k) + 2ikDiag[1,0]\phi(x,k) = Q_{10}(x,k)\phi(x,k), \;\; \phi(L,k) = [0,1]^T. \tag{7.38}$$

- $$[\hat{a}(k), \hat{b}(k)]^T := \phi^\star(0,k), \tag{7.39}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\phi^\star(x,k)$ ορίζεται μέσω των τιμών $\{q_0(x)\}$ από τη λύση του ΠΑΤ:

$$\partial_x \phi^\star(x,k) - 2ikDiag[0,1]\phi^\star(x,k) = Q_{10}(x,k)\phi^\star(x,k), \;\; \phi^\star(L,k) = [1,0]^T. \tag{7.40}$$

- $$[-e^{-8ik^3t}B(t,k), \hat{A}(t,k)]^T := \Phi(t,k), \tag{7.41}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\Phi(t,k)$ ορίζεται μέσω των τιμών $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ΠΑΤ:

$$\partial_t \Phi(t,k) + 8ik^3Diag[1,0]\Phi(t,k) = \widetilde{Q}_{10}(t,k)\Phi(t,k), \;\; \Phi(0,k) = [0,1]^T. \tag{7.42}$$

- $$[A(t,k), -e^{8ik^3t}\hat{B}(t,k)]^T := \Phi^\star(t,k), \tag{7.43}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\Phi^\star(t,k)$ ορίζεται μέσω των τιμών $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ΠΑΤ:

$$\partial_t \Phi^\star(t,k) - 8ik^3Diag[0,1]\Phi^\star(t,k) = \widetilde{Q}_{10}(t,k)\Phi^\star(t,k), \;\; \Phi^\star(0,k) = [1,0]^T. \tag{7.44}$$

- $$[-e^{-8ik^3t}B_L(t,k), \hat{A}_L(t,k)]^T := \varphi(t,k), \tag{7.45}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\varphi(t,k)$ ορίζεται μέσω των τιμών $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ΠΑΤ:

$$\partial_t \varphi(t,k) + 8ik^3Diag[1,0]\varphi(t,k) = \widetilde{Q}_{1L}(t,k)\varphi(t,k), \;\; \varphi(0,k) = [0,1]^T. \tag{7.46}$$

- $$[A_L(t,k), -e^{8ik^3t}\hat{B}_L(t,k)]^T := \varphi^\star(t,k), \tag{7.47}$$

όπου η συνάρτηση-διάνυσμα $\varphi^\star(t,k)$ ορίζεται μέσω των τιμών $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ από τη λύση του ΠΑΤ:

$$\partial_t \varphi^\star(t,k) - 8ik^3Diag[0,1]\varphi^\star(t,k) = \widetilde{Q}_{1L}(t,k)\varphi^\star(t,k), \;\; \varphi^\star(0,k) = [1,0]^T. \tag{7.48}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι $Q_{10}(x,k)$, $\widetilde{Q}_{10}(t,k)$ και $\widetilde{Q}_{1L}(t,k)$ είναι οι πίνακες που λαμβάνονται όταν οι $q(x,0)$, $\{(\partial_x^j q)(0,t)\}_{j=0}^2$ και $\{(\partial_x^j q)(L,t)\}_{j=0}^2$ αντικαθίστανται από τις $q_0(x)$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ στις εκφράσεις των $Q_1(x,0,k)$, $\widetilde{Q}_1(0,t,k)$ και $\widetilde{Q}_1(L,t,k)$, αντίστοιχα.

7.5 Η ολική σχέση (global relation) που αντιστοιχεί στο δεύτερο ζεύγος Lax.

Όπως και στην περίπτωση των έξι φασματικών συναρτήσεων του δεύτερου κεφαλαίου, οι δώδεκα φασματικές συναρτήσεις που ορίσαμε δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά ικανοποιούν μια αλγεβρική σχέση, που θα αποκαλέσουμε και πάλι *ολική σχέση (global relation)*.

Προκειμένου να παράγουμε την ολική σχέση, γράφουμε τις δύο εξισώσεις του (δεύτερου) ζευγαριού Lax, (7.1) και (7.2), σαν μία εξίσωση, την εξίσωση να είναι ακριβής μια διαφορική 1-μορφή:

$$d\Big(e^{(ikx+4ik^3t)\hat{\sigma}_3}\Psi(x,t,k)\Big) = \Upsilon_1(x,t,k) \tag{7.49}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι η διαφορική 1-μορφή Υ_1 ορίζεται ως εξής:

$$\Upsilon_1(x,t,k) := e^{(ikx+4ik^3t)\hat{\sigma}_3}\Big(Q_1(x,t,k)\Psi(x,t,k)dx + \widetilde{Q}_1(x,t,k)\Psi(x,t,k)dt\Big). \tag{7.50}$$

όπου υπενθυμίζουμε το συμβολισμό $e^{\alpha\hat{\sigma}_3}A := e^{\alpha\sigma_3}Ae^{-\alpha\sigma_3}$ για έναν πίνακα A.

Ας ανακαλέσουμε, τώρα, ότι η διαφορική 1-μορφή που ορίζεται από την έκφραση (7.50) είναι ακριβής. Ας συμβολίσουμε με C_T την κλειστή καμπύλη που αποτελεί το σύνορο της περιοχής $\{0 < x < L, \quad 0 < t < T\}$, το οποίο θεωρούμε προσανατολισμένο κατά την ορθή φορά, δηλ. αντίθετα με τη φορά κίνησης των δεικτών του ωρολογίου. Ολοκληρώνοντας την 1-μορφή Υ_1 κατά μήκος της κλειστής καμπύλης C_T κι εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green παίρνουμε

$$\int_{C_T} \Upsilon_1(x,t,k) = 0. \tag{7.51}$$

Πιο αναλυτικά, η εξίσωση αυτή γράφεται

$$\begin{aligned}
&\int_0^L e^{ik\xi\hat{\sigma}_3}Q_1(\xi,0,k)\Psi(\xi,0,k)d\xi + e^{ikL\hat{\sigma}_3}\int_0^T e^{4ik^3\tau\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}_1(L,\tau,k)\Psi(L,\tau,k)d\tau \\
&-e^{4ik^3T\hat{\sigma}_3}\int_0^L e^{ik\xi\hat{\sigma}_3}Q_1(\xi,T,k)\Psi(\xi,T,k)d\xi - \int_0^T e^{4ik^3\tau\hat{\sigma}_3}\widetilde{Q}_1(0,\tau,k)\Psi(0,\tau,k)d\tau \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7.52}$$

Αντικαθιστώντας $\Psi = \Psi_3$ και κάνοντας κατάλληλη χρήση των ολοκληρωτικών σχέσεων (7.34), (7.35) και (7.36)) εξαγάγουμε την ακόλουθη μορφή της ολικής σχέσης:

$$-I + S_1^{-1}(T,k)s_1(k)\{e^{ikL\hat{\sigma}_3}S_{1L}(T,k)\} + e^{4ik^3T\hat{\sigma}_3}\int_0^L e^{ik\xi\hat{\sigma}_3}(Q_1\Psi_4)(\xi,T,k)d\xi = 0. \tag{7.53}$$

Γράφοντας κατά συνιστώσες τους πίνακες $s_1(k)$, $S_1(T,k)$ και $S_{1L}(T,k)$ και θεωρώντας το (12)-στοιχείο της προκύπτουσας εξίσωσης πινάκων παίρνουμε την εξίσωση

$$(aA_L + \hat{b}e^{2ikL}B_L)B - (bA_L + \hat{a}e^{2ikL}B_L)A = e^{8ik^3T}c(k,T), \quad k \in \mathbb{C} \tag{7.54}$$

όπου $A = A(T,k)$, $B(T,k)$ κλπ., ενώ το $c(k,T)$ ορίζεται από την έκφραση

$$\begin{aligned} c(k,T) : &= -\Big[\int_0^L e^{ik\xi\hat{\sigma}_3}(Q_1\Psi_4)(\xi,T,k)d\xi\Big]_{(12)} \\ &\equiv -\int_0^L e^{2ik\xi}(Q_1\Psi_4)_{(12)}(\xi,T,k)d\xi. \end{aligned} \tag{7.55}$$

και τονίζουμε ότι *δεν* θα πρέπει να συγχέεται με το $c(k,T)$ που αντιστοιχεί στο πρώτο ζεύγος Lax (κεφάλαιο 3). Ας σημειωθεί ότι η $c(k,T)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση του $k \in \mathbb{C}$. Επιπλέον,

$$c(k,T) = \begin{cases} O\big(\frac{1}{k}\big), & k \to \infty, \quad Imk > 0, \\ O\big(\frac{1+e^{2ikL}}{k}\big), & k \to \infty, \quad Imk < 0. \end{cases} \tag{7.56}$$

Παρατήρηση 7.49. Στην περίπτωση $T = \infty$ η ολική σχέση γίνεται

$$(aA_L + \hat{b}e^{2ikL}B_L)B - (bA_L + \hat{a}e^{2ikL}B_L)A = 0, \tag{7.57}$$

και ισχύει μόνο για $k \in D_{135}$, όπου υπενθυμίζουμε τον ορισμό των περιοχών D_1, D_3 και D_5:

$$D_j := \{k \in \mathbb{C} : (j-1)\pi/3 < argk < j\pi/3\} \setminus \{0\}, \quad j = 1, 2, ..., 6$$

και ότι $D_{135} := D_1 \cup D_3 \cup D_5$.

Στην περίπτωση μηδενικής αρχικής συνθήκης, δηλαδή $q_0(x) \equiv 0$, έχουμε $a(k) \equiv 1$, $b(k) \equiv 0$, $\hat{a}(k) \equiv 1$ και $\hat{b}(k) = \frac{1}{2ik}\big(1 - e^{-2ikL}\big)$.

Η ολική σχέση που θα αναλύσουμε γίνεται:

$$\begin{aligned} &(A_L(t,k) + \frac{1}{2ik}\big(1 - e^{-2ikL}\big)B_L(t,k))B(t,k) - e^{2ikL}B_L(t,k)A(t,k) \\ &= e^{8ik^3t}c(k,t), \quad k \in \mathbb{C}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{7.58}$$

Ορισμός 7.50. Έστω ότι οι συναρτήσεις $q_0(x)$, $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$, όπου $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$, είναι δοσμένες, ομαλές και τέτοιες ώστε $(\partial_x^j q_0)(0) = g_j(0)$, $(\partial_x^j q_0)(L) = f_j(0)$, $j = 0, 1, 2$.

Έστω ότι οι φασματικές συναρτήσεις $a(k)$, $b(k)$, $\hat{a}(k)$, $\hat{b}(k)$, $A(t,k)$, $B(t,k)$, $\hat{A}(t,k)$, $\hat{B}(t,k)$, $A_L(t,k)$, $B_L(t,k)$, $\hat{A}_L(t,k)$ και $\hat{B}_L(t,k)$ αντιστοιχούν στις παραπάνω συναρτήσεις σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν στο εδάφιο 7.4.

Ας υποθέσουμε ότι οι φασματικές συναρτήσεις ικανοποιούν την (ολική) σχέση (7.54) για κάποια συνάρτηση $c(k,T)$ που είναι αναλυτική ως προς $k \in \mathbb{C}$ (ακέραιη) και ικανοποιεί την (7.56).

Τότε λέμε ότι το σύνολο των έξι συναρτήσεων $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ αποτελούν ενα αποδεκτό σύνολο συναρτήσεων ως προς (admissible set of functions with respect to) $q_0(x)$. (Στην περίπτωση $T=\infty$, προφανώς δεν υπάρχει λόγος να αναφερθούμε στις ιδιότητες της $c(k,T)$).

7.6 Αναπαραστάσεις Gelfand-Levitan-Marchenko των φασματικών συναρτήσεων $A(t,k)$, $B(t,k)$, $A_L(t,k)$ και $B_L(t,k)$.

Πρόταση 7.51. *Οι φασματικές συναρτήσεις $A(t,k)$, $B(t,k)$, $A_L(t,k)$ και $B_L(t,k)$ επιδέχονται τις ακόλουθες αναπαραστάσεις:*

$$\begin{aligned} A(t,k) = 1+ \quad & \int_0^t \{2\widetilde{N}_1(t,t-2\tau) - ig_0(t)\widetilde{M}_2(t,t-2\tau) - \frac{1}{2}g_0(t)K_1(t,t-2\tau) \\ & + \frac{1}{2}g_1(t)K_2(t,t-2\tau) + \left[2\widetilde{M}_1(t,t-2\tau) - ig_0(t)K_2(t,t-2\tau)\right]k \\ & + 2K_1(t,t-2\tau)k^2\}e^{8ik^3\tau}d\tau \end{aligned} \tag{7.59}$$

$$\begin{aligned} B(t,k) = \quad & -\int_0^t \{2\widetilde{N}_1(t,2\tau-t) - ig_0(t)\widetilde{M}_2(t,2\tau-t) - \frac{1}{2}g_0(t)K_1(t,2\tau-t) \\ & + \frac{1}{2}g_1(t)K_2(t,2\tau-t) + \left[2\widetilde{M}_1(t,2\tau-t) - ig_0(t)K_2(t,2\tau-t)\right]k \\ & + 2K_1(t,2\tau-t)k^2\}e^{8ik^3\tau}d\tau \end{aligned} \tag{7.60}$$

$$\begin{aligned} A_L(t,k) = 1+ \quad & \int_0^t \{2\widetilde{N}_1^L(t,t-2\tau) - if_0(t)\widetilde{M}_2^L(t,t-2\tau) - \frac{1}{2}f_0(t)K_1^L(t,t-2\tau) \\ & + \frac{1}{2}f_1(t)K_2^L(t,t-2\tau) + \left[2\widetilde{M}_1^L(t,t-2\tau) - if_0(t)K_2^L(t,t-2\tau)\right]k \\ & + 2K_1^L(t,t-2\tau)k^2\}e^{8ik^3\tau}d\tau \end{aligned} \tag{7.61}$$

και

$$\begin{aligned}B_L(t,k) = \quad & -\int_0^t \{2\widetilde{N}_1^L(t,2\tau-t) - if_0(t)\widetilde{M}_2^L(t,2\tau-t) - \frac{1}{2}f_0(t)K_1^L(t,2\tau-t) \\ & +\frac{1}{2}f_1(t)K_2^L(t,2\tau-t) + \left[2\widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t) - if_0(t)K_2^L(t,2\tau-t)\right]k \\ & +2K_1^L(t,2\tau-t)k^2\}e^{8ik^3\tau}d\tau. \end{aligned} \tag{7.62}$$

Οι συναρτήσεις K_1, K_2, $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$, $\widetilde{N}_1$ και $\widetilde{N}_2$ των ορισμάτων (t,s) ορίζονται μέσω της λύσης του προβλήματος Goursat (7.14)-(7.15). Ένα παρόμοιο πρόβλημα Goursat ικανοποιείται, με τις συναρτήσεις K, $\widetilde{M}$ και $\widetilde{N}$ να αντικαθίστανται από τις K_L, $\widetilde{M}_L$ και $\widetilde{N}_L$, αντίστοιχα, και τις συναρτήσεις (g_0, g_1, g_2) να αντικαθίστανται από τις (f_0, f_1, f_2).

Οι χρονικές ιδιοσυναρτήσεις για το δεύτερο ζεύγος Lax. Στη συνέχεια θα κάνουμε χρήση των ιδιοσυναρτήσεων $\Psi(t,k)$ και $\psi(t,k)$ που ορίζονται σαν οι μοναδικές λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών:

$$\Psi_t + 4ik^3[\sigma_3, \Psi] = \widetilde{Q}_{10}(t,k)\Psi(t,k), \quad \Psi(0,k) = I \tag{7.63}$$

και

$$\psi_t + 4ik^3[\sigma_3, \psi] = \widetilde{Q}_{1L}(t,k)\psi(t,k), \quad \psi(0,k) = I. \tag{7.64}$$

όπου, όπως έχουμε ήδη επισημάνει, οι $\widetilde{Q}_{10}(t,k)$ και $\widetilde{Q}_{1L}(t,k)$ είναι οι συναρτήσεις που προκύπτουν όταν οι $\{(\partial_x^j q)(0,t)\}_{j=0}^2$ και $\{(\partial_x^j q)(L,t)\}_{j=0}^2$ αντικαθίστανται από τις $\{g_j(t)\}_{j=0}^2$ και $\{f_j(t)\}_{j=0}^2$ στις εκφράσεις των $\widetilde{Q}_1(0,t,k)$ και $\widetilde{Q}_1(L,t,k)$, αντίστοιχα.

Είναι χρήσιμο να εκτελέσουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\Psi = \widetilde{\Psi}e^{\omega\sigma_3}, \quad \psi = \widetilde{\psi}e^{\omega\sigma_3} \tag{7.65}$$

όπου $\omega := 4ik^3t$. Τότε οι νέες ιδιοσυναρτήσεις $\widetilde{\Psi}$ και $\widetilde{\psi}$ ικανοποιούν παρόμοιες εξισώσεις, αλλά χωρίς μεταθέτες:

$$\widetilde{\Psi}_t + 4ik^3\sigma_3\widetilde{\Psi} = \widetilde{Q}_{10}(t,k)\widetilde{\Psi}(t,k), \quad \widetilde{\Psi}(0,k) = I, \tag{7.66}$$

$$\widetilde{\psi}_t + 4ik^3\sigma_3\widetilde{\psi} = \widetilde{Q}_{1L}(t,k)\widetilde{\psi}(t,k), \quad \widetilde{\psi}(0,k) = I. \tag{7.67}$$

Γράφουμε τις $\widetilde{\Psi}$ και $\widetilde{\psi}$ κατά στήλες, ως ακολούθως:

$$\widetilde{\Psi} = [\widetilde{\Phi}^\star, \widetilde{\Phi}], \quad \widetilde{\psi} = [\widetilde{\varphi}^\star, \widetilde{\varphi}]. \tag{7.68}$$

Αυτές οι διανυσματικές συναρτήσεις μπορούν να χαρακτηριστούν σαν οι μοναδικές λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων αρχικών τιμών:

$$\widetilde{\Phi}_t + 4ik^3\sigma_3\widetilde{\Phi} = \widetilde{Q}_{10}(t,k)\widetilde{\Phi}(t,k), \quad \widetilde{\Phi}(0,k) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{7.69}$$

$$\widetilde{\Phi}_t^\star + 4ik^3\sigma_3\widetilde{\Phi}^\star = \widetilde{Q}_{10}(t,k)\widetilde{\Phi}^\star(t,k), \quad \widetilde{\Phi}(0,k) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{7.70}$$

$$\widetilde{\varphi}_t + 4ik^3\sigma_3\widetilde{\varphi} = \widetilde{Q}_{1L}(t,k)\widetilde{\varphi}(t,k), \quad \widetilde{\varphi}(0,k) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{7.71}$$

και

$$\widetilde{\varphi}_t^\star + 4ik^3\sigma_3\widetilde{\varphi}^\star = \widetilde{Q}_{1L}(t,k)\widetilde{\varphi}^\star(t,k), \quad \widetilde{\varphi}^\star(0,k) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}. \tag{7.72}$$

Γράφουμε τώρα κατά στήλες και τις Ψ και ψ, ως ακολούθως:

$$\Psi = [\Phi^\star, \Phi], \quad \psi = [\varphi^\star, \varphi]. \tag{7.73}$$

Οι σχέσεις
(i) ανάμεσα στις Φ και $\widetilde{\Phi}$,
(ii) ανάμεσα στις φ και $\widetilde{\varphi}$,
(iii) ανάμεσα στις $\Phi^\star$ και $\widetilde{\Phi}^\star$, και τέλος
(iv) ανάμεσα στις $\varphi^\star$ και $\widetilde{\varphi}^\star$,
είναι οι ακόλουθες:

$$\Phi = \widetilde{\Phi}e^{-4ik^3t}, \quad \varphi = \widetilde{\varphi}e^{-4ik^3t}, \quad \Phi^\star = \widetilde{\Phi}^\star e^{4ik^3t}, \quad \varphi^\star = \widetilde{\varphi}^\star e^{4ik^3t}. \tag{7.74}$$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$A(t,k) = \Phi_1^\star(t,k), \quad B(t,k) = -e^{8ik^3t}\Phi_1(t,k), \tag{7.75}$$

$$\hat{A}(t,k) = \Phi_2(t,k), \quad \hat{B}(t,k) = -e^{-8ik^3t}\Phi_2^\star(t,k), \tag{7.76}$$

$$A_L(t,k) = \varphi_1^\star(t,k), \quad B_L(t,k) = -e^{8ik^3t}\varphi_1(t,k) \tag{7.77}$$

και

$$\hat{A}_L(t,k) = \varphi_2(t,k), \quad \hat{B}_L(t,k) = -e^{-8ik^3t}\varphi_2^\star(t,k). \tag{7.78}$$

Εν όψει των εξισώσεων (7.74), οι τελευταίες σχέσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$A(t,k) = \widetilde{\Phi}_1^\star(t,k)e^{4ik^3t}, \quad B(t,k) = -\widetilde{\Phi}_1(t,k)e^{4ik^3t} \tag{7.79}$$

$$\hat{A}(t,k) = \widetilde{\Phi}_2(t,k)e^{-4ik^3t}, \quad \hat{B}(t,k) = -\widetilde{\Phi}_2^\star(t,k)e^{-4ik^3t} \tag{7.80}$$

$$A_L(t,k) = \widetilde{\varphi}_1^\star(t,k)e^{4ik^3t}, \quad B_L(t,k) = -\widetilde{\varphi}_1(t,k)e^{4ik^3t} \tag{7.81}$$

$$\hat{A}_L(t,k) = \widetilde{\varphi}_2(t,k)e^{-4ik^3t}, \quad \hat{B}_L(t,k) = -\widetilde{\varphi}_2^\star(t,k)e^{-4ik^3t}. \tag{7.82}$$

Παρατήρηση 7.52. Από τις οκτώ αυτές φασματικές συναρτήσεις, εδώ χρειαζόμαστε μόνο τις $A(t,k)$, $B(t,k)$, $A_L(t,k)$ και $B_L(t,k)$.

Απόδειξη της Πρότασης 7.51. Ανακαλούμε ότι η 2×2-συνάρτηση-πίνακας $\widetilde{\Psi}(t,k)$ ικανοποιεί το προβλημα αρχικών τιμών (7.66). Ανακαλούμε επίσης ότι οι πίνακες $\widetilde{Q}_{10}(t,k)$ και $\widetilde{Q}_{1L}(t,k)$ έχουν τη μορφή:

$$\widetilde{Q}_{10}(t,k) = R(t) + kS(t) + k^2T(t), \quad \widetilde{Q}_{1L}(t,k) = R_L(t) + kS_L(t) + k^2T_L(t). \tag{7.83}$$

Υιοθετούμε το ansatz (υπόθεση εργασίας)

$$\widetilde{\Psi}(t,k) = e^{-4ik^3t\sigma_3} + \int_{-t}^{t}[N(t,s) + kM(t,s) + k^2K(t,s)]e^{-4ik^3s\sigma_3}ds \tag{7.84}$$

όπου οι K, M και N είναι 2×2-πίνακες συναρτήσεων.

Η αναπαράσταση (7.84) προφανώς ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\widetilde{\Psi}(0,k) = I$. Αντικαθιστούμε το ansatz στη συνήθη διαφορική εξίσωση (7.66) και χρησιμοποιούμε τον τύπο διαφόρισης

$$\partial_t \int_{-t}^{t} F(t,s)e^{-4ik^3s\sigma_3}ds = \int_{-t}^{t} F_t(t,s)e^{-4ik^3s\sigma_3}ds + F(t,t)e^{-4ik^3s\sigma_3} - F(t,-t)e^{4ik^3s\sigma_3}. \tag{7.85}$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να απαλείψουμε τους όρους ολοκλήρωσης που περιέχουν τις ποσότητες $k^3e^{-4ik^3s\sigma_3}$, $k^4e^{-4ik^3s\sigma_3}$ και $k^5e^{-4ik^3s\sigma_3}$, εκτελούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, βάσει του τύπου

$$\begin{aligned}&-4ik^3\int_{-t}^{t} F(t,s)e^{-4ik^3s\sigma_3}ds = \\ &\left[F(t,t)e^{-4ik^3t\sigma_3} - F(t,-t)e^{4ik^3t\sigma_3} - \int_{-t}^{t} F_t(t,s)e^{-4ik^3s\sigma_3}ds\right]\sigma_3\end{aligned} \tag{7.86}$$

και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}&[\ldots]e^{-4ik^3t\sigma_3} + [\ldots]e^{4ik^3t\sigma_3} + [\ldots]ke^{-4ik^3t\sigma_3} + [\ldots]ke^{4ik^3t\sigma_3} \\ &+[\ldots]k^2e^{-4ik^3t\sigma_3} + [\ldots]k^2e^{4ik^3t\sigma_3} + \int_{-t}^{t}[\ldots]e^{-4ik^3t\sigma_3} \\ &+\int_{-t}^{t}[\ldots]e^{-4ik^3s\sigma_3}ds + \int_{-t}^{t}[\ldots]ke^{-4ik^3s\sigma_3} + \int_{-t}^{t}k^2[\ldots]e^{-4ik^3s\sigma_3} = 0.\end{aligned} \tag{7.87}$$

Η ισότητα αυτή ικανοποιείται εφόσον απαιτήσουμε να μηδενίζεται καθεμιά από τις αγκύλες $[\ldots]$. Οδηγούμαστε με τον τρόπο αυτό στις εκφράσεις:

$$K_t(t,s)+\sigma_3 K_s(t,s)\sigma_3 = R(t)K(t,s)+S(t)M(t,s)+T(t)N(t,s) \tag{7.88}$$

$$M_t(t,s)+\sigma_3 M_s(t,s)\sigma_3 = R(t)M(t,s)+S(t)N(t,s)+\frac{1}{4i}T(t)K_s(t,s)\sigma_3 \tag{7.89}$$

$$N_t(t,s)+\sigma_3 N_s(t,s)\sigma_3 = R(t)N(t,s)+\frac{1}{4i}S(t)K_s(t,s)\sigma_3+\frac{1}{4i}T(t)M_s(t,s)\sigma_3 \tag{7.90}$$

$$K(t,t)-\sigma_3 K(t,t)\sigma_3 = T(t) \tag{7.91}$$

$$K(t,-t)+\sigma_3 K(t,-t)\sigma_3 = 0 \tag{7.92}$$

$$M(t,t)-\sigma_3 M(t,t)\sigma_3 = S(t)-\frac{1}{4i}T(t)K(t,t)\sigma_3 \tag{7.93}$$

$$M(t,-t)+\sigma_3 M(t,-t)\sigma_3 = \frac{1}{4i}T(t)K(t,-t)\sigma_3 \tag{7.94}$$

$$N(t,t)-\sigma_3 N(t,t)\sigma_3 = R(t)-\frac{1}{4i}S(t)K(t,t)\sigma_3-\frac{1}{4i}T(t)M(t,t)\sigma_3 \tag{7.95}$$

$$N(t,-t)+\sigma_3 N(t,-t)\sigma_3 = \frac{1}{4i}S(t)K(t,-t)\sigma_3+\frac{1}{4i}T(t)M(t,-t)\sigma_3. \tag{7.96}$$

Στη συνέχεια, θα δηλώνουμε με $A_{\text{diag}} \equiv \text{Diag}\{A\}$ και $A_{\text{off}} \equiv \text{Off}\{A\}$ το διαγώνιο και αντιδιαγώνιο (off-diagonal), αντίστοιχα, μέρος ενός πίνακα A.

Η εξίσωση (7.93) μπορεί να αποσυντεθεί στις ακόλουθες δύο εξισώσεις:

$$2M_{\text{off}}(t,t) = S_{\text{off}}(t)-\frac{1}{4i}T(t)K_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3 \tag{7.97}$$

και

$$S_{\text{diag}}(t)-\frac{1}{4i}T(t)K_{\text{off}}(t,t)\sigma_3 = 0. \tag{7.98}$$

Η εξίσωση (7.94) αποσυντίθεται στις εξισώσεις

$$2M_{\text{diag}}(t,-t) = \frac{1}{4i}T(t)K_{\text{off}}(t,-t)\sigma_3 \tag{7.99}$$

και

$$T(t)K_{\text{diag}}(t,-t)\sigma_3 = 0. \tag{7.100}$$

Επισημαίνουμε ότι η εξίσωση (7.100) είναι συμβατή με την (7.92). Επίσης, η εξίσωση (7.98) είναι συμβατή με την (7.91), κι αυτό μας δίνει

$$S_{\text{diag}}(t) = \frac{1}{8i}T^2(t)\sigma_3. \tag{7.101}$$

Από τις εξισώσεις (7.97) και (7.99) παίρνουμε

$$M_{\text{off}}(t,t) = \frac{1}{2}S_{\text{off}}(t)-\frac{1}{8i}T(t)K_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3 \tag{7.102}$$

$$M_{\text{diag}}(t,-t) = \frac{1}{8i}T(t)K_{\text{off}}(t,-t)\sigma_3. \tag{7.103}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$K_{\mathrm{diag}}(t,t)\sigma_3 = \sigma_3 K_{\mathrm{diag}}(t,t) \tag{7.104}$$

$$K_{\mathrm{off}}(t,-t)\sigma_3 = -\sigma_3 K_{\mathrm{off}}(t,-t) \tag{7.105}$$

οι τελευταίες δύο εξισώσεις μπορούν να γραφούν σαν:

$$M_{\mathrm{off}}(t,t) = \frac{1}{2}S_{\mathrm{off}}(t) - \frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 K_{\mathrm{diag}}(t,t) \tag{7.106}$$

$$M_{\mathrm{diag}}(t,-t) = -\frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 K_{\mathrm{off}}(t,-t). \tag{7.107}$$

Οι δύο αυτές σχέσεις μας παρακινούν να εισάγουμε τη συνάρτηση

$$\widetilde{M}(t,s) := M(t,s) + \frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 K(t,s). \tag{7.108}$$

Παρατήρηση 7.53. (κάποιες συνέπειες).
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\mathrm{Off}[T(t)\sigma_3 K(t,s)] = T(t)\sigma_3 K_{\mathrm{diag}}(t,s) \tag{7.109}$$

$$\mathrm{Diag}[T(t)\sigma_3 K(t,s)] = T(t)\sigma_3 K_{\mathrm{off}}(t,s), \tag{7.110}$$

καθώς και τον ορισμό της $\widetilde{M}$, έχουμε

$$\widetilde{M}_{\mathrm{off}}(t,s) = M_{\mathrm{off}}(t,s) + \frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 K_{\mathrm{diag}}(t,s) \tag{7.111}$$

$$\widetilde{M}_{\mathrm{diag}}(t,s) = M_{\mathrm{diag}}(t,s) + \frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 K_{\mathrm{off}}(t,s). \tag{7.112}$$

Πιο συγκεκριμένα, λαμβάνουμε

$$\widetilde{M}_{\mathrm{off}}(t,t) = \frac{1}{2}S_{\mathrm{off}}(t) \tag{7.113}$$

$$\widetilde{M}_{\mathrm{diag}}(t,-t) = 0. \qquad \diamondsuit \tag{7.114}$$

Τώρα, δεδομένου ότι ο πίνακας T είναι αντιδιαγώνιος, έχουμε:

$$\mathrm{Off}[T(t)M(t,\pm t)\sigma_3] = T(t)M_{\mathrm{diag}}(t,\pm t)\sigma_3 \tag{7.115}$$

$$\mathrm{Diag}[T(t)M(t,\pm t)\sigma_3] = T(t)M_{\mathrm{off}}(t,\pm t)\sigma_3. \tag{7.116}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (7.91) και (7.92) έχουμε:

$$\mathrm{Off}[S(t)K(t,t)\sigma_3] = \frac{1}{2}S_{\mathrm{diag}}(t)T(t)\sigma_3 + S_{\mathrm{off}}(t)K_{\mathrm{diag}}(t,t)\sigma_3 \tag{7.117}$$

$$\operatorname{Diag}[S(t)K(t,t)\sigma_3] = S_{\text{diag}}(t)K_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3 + \frac{1}{2}S_{\text{off}}(t)T(t)\sigma_3 \tag{7.118}$$

$$\operatorname{Off}[S(t)K(t,-t)\sigma_3] = S_{\text{diag}}(t)K_{\text{off}}(t,-t)\sigma_3 \tag{7.119}$$

$$\operatorname{Diag}[S(t)K(t,-t)\sigma_3] = S_{\text{off}}(t)K_{\text{off}}(t,-t)\sigma_3. \tag{7.120}$$

Αποσυνθέτοντας τις εξισώσεις (7.95) και (7.96) στα διαγώνια και αντιδιαγώνια μέρη τους και κάνοντας χρήση των τελευταίων έξι εκφράσεων, παίρνουμε:

$$N_{\text{off}}(t,t) = \frac{1}{2}R_{\text{off}}(t) - \frac{1}{8i}T(t)M_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3 - \frac{1}{16i}S_{\text{diag}}(t)T(t)\sigma_3 - \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)K_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3 \tag{7.121}$$

$$R_{\text{diag}}(t) = \frac{1}{4i}T(t)M_{\text{off}}(t,t)\sigma_3 + \frac{1}{4i}S_{\text{diag}}(t)K_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3 + \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)T(t)\sigma_3 \tag{7.122}$$

$$N_{\text{diag}}(t,-t) = \frac{1}{8i}T(t)M_{\text{off}}(t,-t)\sigma_3 + \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)K_{\text{off}}(t,-t)\sigma_3 \tag{7.123}$$

$$T(t)M_{\text{diag}}(t,-t)\sigma_3 + S_{\text{diag}}(t)K_{\text{off}}(t,-t)\sigma_3 = 0. \tag{7.124}$$

Χρησιμοποιώντας την (7.101), η εξίσωση (7.121) γίνεται

$$N_{\text{off}}(t,t) = \frac{1}{2}R_{\text{off}}(t) - \frac{1}{128}T^3(t) - \frac{1}{8i}T(t)M_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3 - \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)K_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3. \tag{7.125}$$

Αντικαθιστώντας

$$M_{\text{diag}}(t,t)\sigma_3 = \sigma_3 M_{\text{diag}}(t,t) \tag{7.126}$$

και

$$M_{\text{off}}(t,-t)\sigma_3 = -\sigma_3 M_{\text{off}}(t,-t) \tag{7.127}$$

καθώς και τις (7.104) και (7.105) εντός των σχέσεων (7.121) και (7.123) βρίσκουμε

$$N_{\text{off}}(t,t) = \frac{1}{2}R_{\text{off}}(t) - \frac{1}{128}T^3(t) - \frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 M_{\text{diag}}(t,t) - \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3 K_{\text{diag}}(t,t) \tag{7.128}$$

και

$$N_{\text{diag}}(t,-t) = -\frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 M_{\text{off}}(t,-t) - \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3 K_{\text{off}}(t,-t). \tag{7.129}$$

Οι τελευταίες δύο εξισώσεις δίνουν το κίνητρο για την εισαγωγή της συνάρτησης

$$\widetilde{N}(t,s) := N(t,s) + \frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 M(t,s) + \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3 K(t,s). \tag{7.130}$$

Παρατήρηση 7.54. Ο ορισμός της συνάρτησης $\widetilde{N}$ συνεπάγεται:

$$\widetilde{N}_{\text{off}}(t,t) = \frac{1}{2}R_{\text{off}}(t) - \frac{1}{128}T^3(t) \tag{7.131}$$

$$\widetilde{N}_{\text{diag}}(t,-t) = 0. \qquad \diamondsuit \tag{7.132}$$

Οι εκφράσεις (7.108) και (7.130) ορίζουν το μετασχηματισμό

$$\{M, N\} \longmapsto \left\{\widetilde{M}, \widetilde{N}\right\}. \tag{7.133}$$

Ο αντίστροφος του μετασχηματισμού αυτού δίνεται από τις εκφράσεις

$$M(t,s) = \widetilde{M}(t,s) - \frac{1}{8i}T(t)\sigma_3 K(t,s) \tag{7.134}$$

$$N(t,s) = \widetilde{N}(t,s) - \frac{1}{8i}T(t)\sigma_3\widetilde{M}(t,s) + [\frac{1}{64}T^2(t) - \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3]K(t,s). \tag{7.135}$$

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό (7.133) επί των εξισώσεων (7.88)-(7.96) για να πάρουμε

$$\begin{aligned}
& K_t(t,s) + \sigma_3 K_s(t,s)\sigma_3 \\
= & \left[R(t) + \frac{1}{64}T^3(t) - \frac{1}{8i}[S(t)T(t) + T(t)S_{\text{off}}(t)]\sigma_3\right]K(t,s) \\
+ & \left[S(t) - \frac{1}{8i}T^2(t)\sigma_3\right]\widetilde{M}(t,s) + T(t)\widetilde{N}(t,s)
\end{aligned} \tag{7.136}$$

$$\begin{aligned}
& \widetilde{M}_t(t,s) + \sigma_3\widetilde{M}_s(t,s)\sigma_3 \\
= & \left[\frac{1}{8i}T'(t)\sigma_3 - \frac{1}{8i}R(t)T(t)\sigma_3 + S(t)[\frac{1}{64}T^2(t) - \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3]\right. \\
- & \left.\frac{1}{8i}\sigma_3 T(t)[R(t) + \frac{1}{64}T^3(t)] - \frac{1}{64}\sigma_3 T(t)[S(t)T(t) + T(t)S(t)]\sigma_3\right]K(t,s) \\
+ & \left[R(t) - \frac{1}{8i}S(t)T(t)\sigma_3 - \frac{1}{8i}\sigma_3 T(t)S(t) - \frac{1}{64}\sigma_3 T^3(t)\sigma_3\right]\widetilde{M}(t,s) \\
+ & [S(t) - \frac{1}{8i}\sigma_3 T^2(t)]\widetilde{N}(t,s)
\end{aligned} \tag{7.137}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{N}_t(t,s) + \sigma_3\widetilde{N}_s(t,s)\sigma_3 \\
= & \Bigg(-\frac{1}{32}T(t)T'(t) + \frac{1}{8i}S'_{\text{off}}(t)\sigma_3 + R(t)[\frac{1}{64}T^2(t) - \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3] \\
- & \frac{1}{8i}\sigma_3 T(t)\left[\frac{1}{8i}T'(t)\sigma_3 - \frac{1}{8i}R(t)T(t)\sigma_3 + S(t)[\frac{1}{64}T^2(t) - \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3]\right. \\
- & \left.\frac{1}{8i}\sigma_3 T(t)[R(t) + \frac{1}{64}T^3(t)] - \frac{1}{64}\sigma_3 T(t)[S(t)T(t) + T(t)S_{\text{off}}(t)]\sigma_3\right] \\
+ & [-\frac{1}{64}T^2(t) + \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3]\left[R(t) + \frac{1}{64}T^3(t) - \frac{1}{8i}[S(t)T(t) + T(t)S_{\text{off}}(t)]\sigma_3\right]\Bigg)K(t,s) \\
+ & \Bigg(\frac{1}{8i}T'(t)\sigma_3 - \frac{1}{8i}R(t)T(t)\sigma_3 + [-\frac{1}{64}T^2(t) + \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3][S(t) - \frac{1}{8i}T^2(t)\sigma_3] \\
- & \frac{1}{8i}\sigma_3 T(t)\left[R(t) - \frac{1}{8i}S(t)T(t)\sigma_3 - \frac{1}{8i}\sigma_3 T(t)S(t) - \frac{1}{64}\sigma_3 T^3(t)\sigma_3\right]\Bigg)\widetilde{M}(t,s) \\
+ & \Bigg(R(t) - \frac{1}{8i}\sigma_3 T(t)[S(t) - \frac{1}{8i}\sigma_3 T^2(t)] + \left[-\frac{1}{64}T^2(t) + \frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3\right]T(t)\Bigg)\widetilde{N}(t,s)
\end{aligned} \tag{7.138}$$

$$K(t,t) - \sigma_3 K(t,t)\sigma_3 = T(t) \tag{7.139}$$

$$K(t,-t) + \sigma_3 K(t,-t)\sigma_3 = 0 \tag{7.140}$$

$$\widetilde{M}(t,t) - \sigma_3\widetilde{M}(t,t)\sigma_3 = S_{\text{off}}(t) \tag{7.141}$$

$$\widetilde{M}(t,-t) + \sigma_3\widetilde{M}(t,-t)\sigma_3 = 0 \tag{7.142}$$

$$\widetilde{N}(t,t) - \sigma_3\widetilde{N}(t,t)\sigma_3 = R_{\text{off}}(t) - \frac{1}{64}T^3(t) \tag{7.143}$$

$$\widetilde{N}(t,-t) + \sigma_3\widetilde{N}(t,-t)\sigma_3 = 0. \tag{7.144}$$

Τελικά, η αναπαράσταση της $\widetilde{\Psi}(t,k)$ παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(t,k) &= e^{-4ik^3t\sigma_3}\\ &+ \int_{-t}^{t}\Bigg(\widetilde{N}(t,s)-\frac{1}{8i}T(t)\sigma_3\widetilde{M}(t,s)+\left[\frac{1}{64}T^2(t)-\frac{1}{8i}S_{\text{off}}(t)\sigma_3\right]K(t,s)\\ &+ \left[\widetilde{M}(t,s)-\frac{1}{8i}T(t)\sigma_3K(t,s)\right]k+K(t,s)k^2\Bigg)e^{-4ik^3s\sigma_3}ds. \end{aligned} \tag{7.145}$$

Θα συμβολίσουμε τις δεύτερες στήλες των πινάκων K, $\widetilde{M}$ και $\widetilde{N}$ με

$$\begin{bmatrix}K_1\\K_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\widetilde{M}_1\\ \widetilde{M}_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\widetilde{N}_1\\ \widetilde{N}_2\end{bmatrix} \tag{7.146}$$

αντίστοιχα.

Αν ανακαλέσουμε, τώρα, τη στοιχειακή μορφή των πινάκων R, S και T,

$$R(t)=\begin{bmatrix}-g_1 & -2g_0^2-g_2\\ 2g_0 & g_1\end{bmatrix},\quad S(t)=\begin{bmatrix}2ig_0 & 2ig_1\\ 0 & -2ig_0\end{bmatrix},\quad T(t)=4\begin{bmatrix}0 & g_0\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \tag{7.147}$$

κι αντικαταστήσουμε εντός των εξισώσεων (7.136)-(7.144), θα καταλήξουμε στο πρόβλημα Goursat (7.14)-(7.15).

Ανακαλούμε, επίσης, ότι έχουμε συμβολίσει με

$$\widetilde{\Phi}^{\star}=\begin{bmatrix}\widetilde{\Phi}_1^{\star}\\ \widetilde{\Phi}_2^{\star}\end{bmatrix},\quad \widetilde{\Phi}=\begin{bmatrix}\widetilde{\Phi}_1\\ \widetilde{\Phi}_2\end{bmatrix} \tag{7.148}$$

την πρώτη και δεύτερη, αντίστοιχα, στήλη του πίνακα $\widetilde{\Psi}$. Γράφοντας κατά συνιστώσες την επιτευχθείσα αναπαράσταση και κάνοντας χρήση των σχέσεων (7.79) και (7.81) λαμβάνουμε τις επόμενες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για τις φασματικές συναρτήσεις A και B:

$$\begin{aligned}A(t,k)=1+ &\int_{-t}^{t}\{\widetilde{N}_1(t,s)-\frac{i}{2}g_0(t)\widetilde{M}_2(t,s)+\frac{1}{4}[-g_0(t)K_1(t,s)+g_1(t)K_2(t,s)]\\ &+\left[\widetilde{M}_1(t,s)-\frac{i}{2}g_0(t)K_2(t,s)\right]k+K_1(t,s)k^2\}e^{4ik^3(t-s)}ds\end{aligned} \tag{7.149}$$

$$\begin{aligned}B(t,k)= &-\int_{-t}^{t}\{\widetilde{N}_1(t,s)-\frac{i}{2}g_0(t)\widetilde{M}_2(t,s)-\frac{1}{4}g_0(t)K_1(t,s)+\frac{1}{4}g_1(t)K_2(t,s)\\ &+\left[\widetilde{M}_1(t,s)-\frac{i}{2}g_0(t)K_2(t,s)\right]k+K_1(t,s)k^2\}e^{4ik^3(t+s)}ds\end{aligned} \tag{7.150}$$

Εκτελώντας το μετασχηματισμό $s = t - 2\tau$ στην έκφραση για την $A(t,k)$ και το μετασχηματισμό $s = 2\tau - t$ στην έκφραση για την $B(t,k)$ καταλήγουμε στις αναπαραστάσεις (7.59)- (7.60).

Ένα ansatz παρόμοιο με το (7.84) μπορεί να υιοθετηθεί για την $\widetilde{\psi}(t,k)$, αλλά με τις K, M και N να έχουν αντικατασταθεί από τις K^L, M^L και N^L. Με μια διαδικασία τελείως ανάλογη με την προηγηθείσα καταλήγουμε στις αναπαραστάσεις (7.61)-(7.62), κι ένα πρόβλημα Goursat παρόμοιο με το (7.14)-(7.15) ικανοποιείται, με τις K, $\widetilde{M}$ και $\widetilde{N}$ να έχουν αντικατασταθεί από τις K_L, $\widetilde{M}_L$ και $\widetilde{N}_L$ και τις (g_0, g_1, g_2) να έχουν αντικατασταθεί από τις (f_0, f_1, f_2). Η απόδειξη της Πρότασης 7.51 έχει ολοκληρωθεί. ◇

Παρατήρηση 7.55. Μια σημαντική παρατήρηση είναι η ακόλουθη. Οι συνοριακές συνθήκες (7.15), καθώς και οι συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν στο σύνορο $x = L$ όπως περιγράφηκε νωρίτερα, συνεπάγονται ότι οι *γνωστές* συνοριακές τιμές μπορούν να εκφραστούν σαν

$$g_0(t) = \frac{1}{2}K_1(t,t), \quad f_0(t) = \frac{1}{2}K_1^L(t,t), \quad f_1(t) = -i\widetilde{M}_1^L(t,t), \tag{7.151}$$

ενώ οι *άγνωστες* συνοριακές τιμές μπορούν να εκφραστούν σαν

$$g_1(t) = -i\widetilde{M}_1(t,t), \quad g_2(t) = -2\widetilde{N}_1(t,t) - g_0^2(t), \quad f_2(t) = -2\widetilde{N}_1^L(t,t) - f_0^2(t). \tag{7.152}$$

7.7 Ολοκληρωτικές ταυτότητες.

Θα κάνουμε χρήση των ακόλουθων δύο ολοκληρωτικών ταυτοτήτων:

$$\int_{\partial D_1} k^2 \left[\int_0^t e^{8ik^3(\tau - t')}K(\tau,t)d\tau\right] dk = \frac{\pi}{12}K(t',t) \tag{7.153}$$

και

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D_1^0} \frac{k^m \Omega_j^i(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\int_0^t e^{8ik^3(\tau - t')}K(\tau,t)d\tau\right] dk = \\ &\int_{\partial D_1^0} \frac{k^m \Omega_j^i(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\int_0^{t'} e^{8ik^3(\tau - t')}K(\tau,t)d\tau - \frac{K(t',t)}{8ik^3}\right] dk \end{aligned} \tag{7.154}$$

για $m = 3,4$ και $i,j = 1,2,3$. Ας σημειωθεί ότι το $k = 0$ είναι η μόνη ρίζα της συνάρτησης $\mathbb{D}(k)$ που περιέχεται στο περίβλημα του D_1 (αυτό είναι άμεση συνέπεια του λεγόμενου θεωρήματος του Levin, [95]).

Αποδείξεις. Προκειμένου να αποδείξουμε την (7.153), γράφουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής στη μορφή

$$\int_{\partial D_1} k^2 \left[\int_0^{t'} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau \right] dk + \int_{\partial D_1} k^2 \left[\int_{t'}^{t} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau \right] dk. \quad (7.155)$$

Θα δώσουμε, τώρα, έναν μετασχηματισμό της καμπύλης ∂D_1 επί της καμπύλης ∂D_4. Προς αυτή την κατεύθυνση, ας ανακαλέσουμε ότι έχουμε συμβολίσει με $\partial D_1 = L_0 \cup L_1$ και $\partial D_4 = L_3 \cup L_4$. Τώρα, απεικονίζουμε την L_0 επί της L_4 μέσω της έκφρασης $k \mapsto e^{\frac{4\pi i}{3}} k$, και απεικονίζουμε την L_1 επί της L_3 μέσω της έκφρασης $k \mapsto e^{\frac{2\pi i}{3}} k$. Κατά συνέπεια, η (7.155) μπορεί να γραφεί σαν

$$\int_{\partial D_4} k^2 \left[\int_0^{t'} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau \right] dk + \int_{\partial D_1} k^2 \left[\int_{t'}^{t} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau \right] dk. \quad (7.156)$$

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{\partial D_4} k^2 \left[\int_0^{t'} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau \right] dk =$$
$$\int_{\partial D_4^0} \left[k^2 \int_0^{t'} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau - \frac{K(t', t)}{8ik} \right] dk + \frac{K(t', t)}{8i} \int_{\partial D_4^0} \frac{dk}{k} \quad (7.157)$$

και

$$\int_{\partial D_1} k^2 \left[\int_{t'}^{t} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau \right] dk =$$
$$\int_{\partial D_1^0} \left[k^2 \int_{t'}^{t} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau + \frac{K(t', t)}{8ik} \right] dk - \frac{K(t', t)}{8i} \int_{\partial D_1^0} \frac{dk}{k}. \quad (7.158)$$

Συνακόλουθα, η (7.156) γίνεται

$$\int_{\partial D_4^0} \left[k^2 \int_0^{t'} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau - \frac{K(t', t)}{8ik} \right] dk + \frac{K(t', t)}{8i} \int_{\partial D_4^0} \frac{dk}{k} +$$
$$\int_{\partial D_1^0} \left[k^2 \int_{t'}^{t} e^{8ik^3(\tau - t')} K(\tau, t) d\tau + \frac{K(t', t)}{8ik} \right] dk - \frac{K(t', t)}{8i} \int_{\partial D_1^0} \frac{dk}{k}. \quad (7.159)$$

Ας σημειωθεί ότι η πρώτη και τρίτη ολοκληρωτέες συναρτήσεις είναι αναλυτικές και φθίνουσες επί των ∂D_4 και ∂D_1 αντίστοιχα. Επίσης, οι όροι πρώτης τάξης (ως προς τον όρο k^{-1}) περιέχει τους ταλαντευόμενους (oscillatory) παράγοντες $e^{-8ik^3 t'}$ και $e^{-8ik^3(t-t')}$.

Κατά συνέπεια, το πρώτο και το τρίτο ολοκλήρωμα μηδενίζονται. Τα εναπομείναντα δύο ολοκληρώματα δίνουν

$$\frac{K(t',t)}{8i}\left[\int_{\partial D_4^0}\frac{dk}{k}-\int_{\partial D_1^0}\frac{dk}{k}\right]=\frac{K(t',t)}{8i}i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{12}K(t',t)$$

που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Προκειμένου να αποδείξουμε την (7.154), γράφουμε το αριστερό μέλος της σχέσης ως το άθροισμα του δεξιού μέλους με τον όρο

$$\int_{\partial D_1^0}\frac{k^m\Omega_j^i(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_{t'}^{t}e^{8ik^3(\tau-t')}K(\tau,t)d\tau+\frac{K(t',t)}{8ik^3}\right]dk. \tag{7.160}$$

Ας σημειωθεί ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι αναλυτική και φραγμένη στην περιοχή D_1^0. Επιπλέον, ο όρος μηδενικής τάξης (ως προς $(k^3)^{-1}$) της ολοκληρωτέας συνάρτησης είναι $e^{8ik^3(t-t')}O(k^{m-3})]$, και ο ταλαντευόμενος παράγοντας $e^{8ik^3(t-t')}$ είναι φραγμένος στην περιοχή D_1. Κατά συνέπεια, το λήμμα του Jordan συνεπάγεται ότι ο όρος αυτός μηδενίζεται. Έτσι, η ταυτότητα (7.154) έχει αποδειχθεί. $\diamond$

7.8 Επίλυση της ολικής σχέσης: απόδειξη του βασικού θεωρήματος.

Ο στόχος μας τώρα είναι να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα των τελευταίων δύο εδαφίων ώστε να αποδείξουμε το θεώρημα 7.47.

Προς αυτή την κατεύθυνση , ας θεωρήσουμε την ολική σχέση (7.58). Εκτελώντας καθέναν από τους μετασχηματισμούς $k \longmapsto Ek$, $k \longmapsto E^2k$, όπου $E := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, οι οποίοι *αφήνουν τη σχέση διασποράς (dispersion relation)* $\omega(k) := 4k^3$ *αναλλοίωτη*, λαμβάνουμε *άλλες δύο εξισώσεις,*

$$\begin{aligned}&(A_L(t,Ek)+\frac{1}{2iEk}\big(1-e^{-2iEkL}\big)B_L(t,Ek))B(t,Ek)-e^{2iEkL}B_L(t,Ek)A(t,Ek)\\&=e^{8ik^3t}c(Ek,t),\quad k\in\mathbb{C}\end{aligned} \tag{7.161}$$

και

$$\begin{aligned}&(A_L(t,E^2k)+\frac{1}{2iE^2k}\big(1-e^{-2iE^2kL}\big)B_L(t,E^2k))B(t,E^2k)\\&-e^{2iE^2kL}B_L(t,E^2k)A(t,E^2k)=e^{8ik^3t}c(E^2k,t),\quad k\in\mathbb{C}.\end{aligned} \tag{7.162}$$

Οι εξισώσεις (7.58), (7.161) και (7.162) που αποτελούν ένα σύστημα προς επίλυση για τις άγνωστες συνοριακές συναρτήσεις $g_1(t)$, $g_2(t)$ και $f_2(t)$.

Κατ' αρχήν, αντικαθιστούμε τις αναπαραστάσεις (7.59), (7.60), (7.61) και (7.62), για τις φασματικές συναρτήσεις A, B, A_L και B_L, εντός των (7.58), (7.161) και (7.162). Οδηγούμαστε τότε στο ακόλουθο σύστημα:

$$I_1 + I_2 + e^{2ikL} I_3 = RHS(k) \tag{7.163}$$

$$I_1 + e^{-\frac{2\pi i}{3}} I_2 + \exp(2e^{-\frac{\pi i}{6}} kL) I_3 = RHS(ke^{-\frac{2\pi i}{3}}) \tag{7.164}$$

$$I_1 + e^{-\frac{4\pi i}{3}} I_2 + \exp(2e^{-\frac{5\pi i}{6}} kL) I_3 = RHS(ke^{-\frac{4\pi i}{3}}) \tag{7.165}$$

όπου

$$I_1 := -2 \int_0^t \widetilde{N}_1(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau, \tag{7.166}$$

$$I_2 := -2k \int_0^t \widetilde{M_1}(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau, \tag{7.167}$$

$$I_3 := 2 \int_0^t \widetilde{N}_1^L(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau \tag{7.168}$$

είναι οι όροι που αντιστοιχούν στις άγνωστες συνοριακές τιμές, ενώ

$$\begin{aligned} & RHS(k) := \\ & 2k^2 \int_0^t K_1(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau - 2e^{2ikL} k \int_0^t \widetilde{M}_1^L(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau \\ - \quad & 2e^{2ikL} k^2 \int_0^t K_1^L(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau + F(t,k) e^{8ik^3 t} + c(k,t) e^{8ik^3 t}. \end{aligned} \tag{7.169}$$

όπου η συνάρτηση $F(t,k)$ δίνεται από την έκφραση (7.16).
Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} I_j \;=\; & [\mathbb{D}(k)]^{-1} \Big\{ \Omega_j^1(k) \Big[2k^2 \int_0^t K_1(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau \Big] \\ & + \Omega_j^2(k) \Big[-2k \int_0^t \widetilde{M}_1^L(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau \Big] + \Omega_j^3(k) \Big[-2k^2 \int_0^t K_1^L(t, 2\tau - t) e^{8ik^3\tau} d\tau \Big] \Big\} \\ & + [\mathbb{D}(k)]^{-1} \Big\{ \Theta_j^1(k) G(t,k) + \Theta_j^2(k) G(t, ke^{-\frac{2\pi i}{3}}) + \Theta_j^3(k) G(t, ke^{-\frac{-4\pi i}{3}}) \Big\} \end{aligned} \tag{7.170}$$

για $j = 1,2,3$, όπου $G(t,k) := [F(t,k) + c(k,t)] e^{8ik^3 t}$. Οι φασματικές συναρτήσεις $\Theta_j^i(k)$ και $\Omega_j^i(k)$, $i,j = 1,2,3$ είναι αυτές που δίνονται στην εκφώνηση του θεωρήματος 7.47.

Εστιάζουμε, κατ΄ αρχήν, την προσοχή μας επί του I_1. Πρόκειται να πολλαπλασιάσουμε την έκφραση (7.170), στην περίπτωση $j = 1$, με $k^2\exp(-8ik^3t')$, όπου $t' > 0$, $t' < t$, και να ολοκληρώσουμε επί της καμπύλης ∂D_1^0. Προς αυτή την κατεύθυνση, επισημαίνουμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}[\Theta_1^1(k)c(t,k) + \Theta_1^2(k)c(t,ke^{-\frac{2\pi i}{3}}) + \Theta_1^3(k)c(t,ke^{-\frac{4\pi i}{3}})] \tag{7.171}$$

είναι αναλυτική και φραγμένη στο εσωτερικό της καμπύλης ∂D_1^0, κι επομένως

$$\int_{\partial D_1^0}\frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}\exp(8ik^3(t-t'))[\Theta_1^1(k)c(t,k) + \Theta_1^2(k)c(t,ke^{-\frac{2\pi i}{3}}) + \Theta_1^3(k)c(t,ke^{-\frac{4\pi i}{3}})]dk = 0. \tag{7.172}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική ταυτότητα (7.153) έχουμε

$$\int_{\partial D_1} k^2[\int_0^t \widetilde{N}_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau]dk = \frac{\pi}{12}\widetilde{N}_1(t,2t'-t). \tag{7.173}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική ταυτότητα (7.154) είμαστε σε θέση να χειριστούμε τους όρους που περιλαμβάνουν τις ποσότητες K_1, $\widetilde{M}_1^L$, K_1^L ως ακολούθως.

$$\begin{gathered}\int_{\partial D_1^0}\frac{2k^4\Omega_1^1(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau\right]dk = \\ \int_{\partial D_1^0}\frac{2k^4\Omega_1^1(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^{t'} K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau - \frac{K_1(t,2t'-t)}{8ik^3}\right]dk\end{gathered} \tag{7.174}$$

$$\begin{gathered}\int_{\partial D_1^0}\frac{-2k^3\Omega_1^2(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t \widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau\right]dk = \\ \int_{\partial D_1^0}\frac{-2k^3\Omega_1^2(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^{t'} \widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau - \frac{\widetilde{M}_1^L(t,2t'-t)}{8ik^3}\right]dk\end{gathered} \tag{7.175}$$

$$\begin{gathered}\int_{\partial D_1^0}\frac{-2k^4\Omega_1^3(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^t K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau\right]dk = \\ \int_{\partial D_1^0}\frac{-2k^4\Omega_1^3(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\int_0^{t'} K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau - \frac{K_1^L(t,2t'-t)}{8ik^3}\right]dk\end{gathered} \tag{7.176}$$

Πολλαπλασιάζουμε, τώρα, την έκφραση (7.170) (για $j=1$) με $k^2e^{-8ik^3t'}$, ολοκληρώνουμε για $k\in\partial D_1^0$ και χρησιμοποιούμε τις (7.172), (7.173), (7.174), (7.175) και (7.176) για να λάβουμε

$$
\begin{aligned}
&-2\frac{\pi}{12}\widetilde{N}_1(t,2t'-t)=\\
&=\int_{\partial D_1^0}\frac{2k^4\Omega_1^1(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^{t'}K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau-\frac{K_1(t,2t'-t)}{8ik^3}]dk\\
&+\int_{\partial D_1^0}\frac{-2k^3\Omega_1^2(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^{t'}\widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau-\frac{\widetilde{M}_1^L(t,2t'-t)}{8ik^3}]dk\\
&+\int_{\partial D_1^0}\frac{-2k^4\Omega_1^3(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^{t'}K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t')}d\tau-\frac{K_1^L(t,2t'-t)}{8ik^3}]dk\\
&+\int_{\partial D_1^0}\frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}e^{8ik^3(t-t')}[\Theta_1^1(k)F(t,k)+\Theta_1^2(k)F(t,ke^{-\frac{2\pi i}{3}})\\
&+\Theta_1^3(k)F(t,ke^{-\frac{4\pi i}{3}})]dk.
\end{aligned}\tag{7.177}
$$

Τώρα, υπολογίζουμε την έκφραση για $t'=t$:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\pi}{6}\widetilde{N}_1(t,t)=\\
&=\int_{\partial D_1^0}\frac{2k^4\Omega_1^1(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^{t}K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau-\frac{K_1(t,t)}{8ik^3}]dk\\
&+\int_{\partial D_1^0}\frac{-2k^3\Omega_1^2(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^{t}\widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau-\frac{\widetilde{M}_1^L(t,t)}{8ik^3}]dk\\
&+\int_{\partial D_1^0}\frac{-2k^4\Omega_1^3(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^{t}K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau-\frac{K_1^L(t,t)}{8ik^3}]dk\\
&+\int_{\partial D_1^0}\frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}[\Theta_1^1(k)F(t,k)+\Theta_1^2(k)F(t,ke^{-\frac{2\pi i}{3}})\\
&+\Theta_1^3(k)F(t,ke^{-\frac{4\pi i}{3}})]dk.
\end{aligned}\tag{7.178}
$$

Τέλος, κάνουμε χρήση των (7.151)-(7.152) για να καταλήξουμε στην προς απόδειξη αναπαράσταση (7.6).

Στη συνέχεια, στρέφουμε την προσοχή μας στο I_2. Προχωρούμε όπως και προηγουμένως, επισημαίνοντας πως η δομή της εξίσωσης (7.170) για $j=2$ είναι ίδια με την $j=1$, εφόσον οι ποσότητες $(\Theta_1^i,\Omega_1^i,\widetilde{N}_1)$ ανικαθίστανται από τις $(\Theta_2^i,\Omega_2^i,\widetilde{M}_1)$. Τότε καταλήγουμε στην επόμενη έκφραση, η οποία είναι ανάλογη με την (7.178):

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\pi}{6}\widetilde{M}_1(t,t) = \\
&= \int_{\partial D_1^0} \frac{2k^4\Omega_2^1(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^t K_1(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{K_1(t,t)}{8ik^3}]dk \\
&+ \int_{\partial D_1^0} \frac{-2k^3\Omega_2^2(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^t \widetilde{M}_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{\widetilde{M}_1^L(t,t)}{8ik^3}]dk \\
&+ \int_{\partial D_1^0} \frac{-2k^4\Omega_2^3(k)}{\mathbb{D}(k)}[\int_0^t K_1^L(t,2\tau-t)e^{8ik^3(\tau-t)}d\tau - \frac{K_1^L(t,t)}{8ik^3}]dk \\
&+ \int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}[\Theta_2^1(k)F(t,k) + \Theta_2^2(k)F(t,ke^{-\frac{2\pi i}{3}}) \\
&+\Theta_2^3(k)F(t,ke^{-\frac{4\pi i}{3}})]dk. \qquad (7.179)
\end{aligned}
$$

Κάνοντας χρήση των εκφράσεων (7.151)-(7.152) καταλήξουμε στην προς απόδειξη αναπαράσταση (7.7).

Τέλος, στρέφουμε την προσοχή μας στην I_3. Προχωρώντας όπως και προηγουμένως, καταλήγουμε σε μια έκφραση όμοια με την (7.178), αλλά με τις ποσότητες $(\Theta_1^i, \Omega_1^i, \widetilde{N}_1)$ να έχουν αντικατασταθεί από τις $(\Theta_3^i, \Omega_3^i, \widetilde{N}_1^L)$. Κάνοντας και πάλι χρήση των εκφράσεων (7.151)-(7.152) καταλήξουμε στην προς απόδειξη αναπαράσταση (7.8). Η απόδειξη του θεωρήματος 7.47 έχει ολοκληρωθεί. $\diamond$

7.9 Αναπαραστάσεις μέσω ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Ένας εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης των άγνωστων συνοριακών τιμών εκφράζεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.56. *Ισχύουν οι επόμενες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για τις άγνωστες συνοριακές τιμές $g_2(t)$, $g_1(t)$ και $f_2(t)$:*

$$\begin{aligned}
g_2(t) = \quad & -g_0^2(t) + \\
& +\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_1^1(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{K}_1(t,k) - \frac{g_0(t)}{2ik^3}\right] dk \\
& -\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^3\Omega_1^2(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{\hat{M}}_1^L(t,k) - \frac{f_1(t)}{4k^3}\right] dk \\
& -\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_1^3(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{K}_1^L(t,k) - \frac{f_0(t)}{2ik^3}\right] dk \\
& +\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)} \left[\Theta_1^1(k)F(t,k) + \Theta_1^2(k)F(t,ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_1^3(k)F(t,ke^{-4\pi i/3})\right] dk,
\end{aligned} \tag{7.180}$$

$$\begin{aligned}
g_1(t) = \quad & -\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_2^1(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{K}_1(t,k) - \frac{g_0(t)}{2ik^3}\right] dk \\
& +\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^3\Omega_2^2(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{\hat{M}}_1^L(t,k) - \frac{f_1(t)}{4k^3}\right] dk \\
& +\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_2^3(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{K}_1^L(t,k) - \frac{f_0(t)}{2ik^3}\right] dk \\
& -\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)} \left[\Theta_2^1(k)F(t,k) + \Theta_2^2(k)F(t,ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_2^3(k)F(t,ke^{-4\pi i/3})\right] dk,
\end{aligned} \tag{7.181}$$

και

$$\begin{aligned}
f_2(t) = \quad & -f_0^2(t) + \\
& -\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_3^1(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{K}_1(t,k) - \frac{g_0(t)}{2ik^3}\right] dk \\
& +\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^3\Omega_3^2(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{\hat{M}}_1^L(t,k) - \frac{f_1(t)}{4k^3}\right] dk \\
& +\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^4\Omega_3^3(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\hat{K}_1^L(t,k) - \frac{f_0(t)}{2ik^3}\right] dk \\
& -\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)} \left[\Theta_3^1(k)F(t,k) + \Theta_3^2(k)F(t,ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_3^3(k)F(t,ke^{-4\pi i/3})\right] dk
\end{aligned} \tag{7.182}$$

όπου η συνάρτηση $F(t,k)$ ορίζεται μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$
\begin{aligned}
&F(t,k) = \\
&-\frac{i}{2}g_0(t)\hat{\tilde{M}}_2(t,k) - \frac{1}{4}g_0(t)\hat{K}_1(t,k) + \frac{1}{4}g_1(t)\hat{K}_2(t,k) - \frac{i}{2}kg_0(t)\hat{K}_2(t,k) \\
&-\frac{i}{2}e^{2ikL}f_0(t)\hat{\tilde{M}}_2^L(t,k) + \frac{1}{4}e^{2ikL}f_0(t)\hat{K}_1^L(t,k) + \frac{1}{4}e^{2ikL}f_1(t)\hat{K}_2^L(t,k) \\
&+\frac{i}{2}ke^{2ikL}f_0(t)\hat{K}_2^L(t,k) \\
&+\frac{1}{4}\Bigg(e^{8ik^3t}\bigg(2\check{\tilde{N}}_1^L(t,k) - if_0(t)\check{\tilde{M}}_2^L(t,k) - \frac{1}{2}f_0(t)\check{K}_1^L(t,k) \\
&+\frac{1}{2}f_1(t)\check{K}_2^L(t,k) + [2\check{\tilde{M}}_1^L(t,k) - if_0(t)\check{K}_2^L(t,k)]k + 2\check{K}_1^L(t,k)k^2\bigg) \\
&-\frac{1}{2ik}(1-e^{-2ikL})\bigg(2\hat{\tilde{N}}_1^L(t,k) - if_0(t)\hat{\tilde{M}}_2^L(t,k) - \frac{1}{2}f_0(t)\hat{K}_1^L(t,k) + \frac{1}{2}f_1(t)\hat{K}_2^L(t,k) \\
&+[2\hat{\tilde{M}}_1^L(t,k) - if_0(t)\hat{K}_2^L(t,k)]k + 2\hat{K}_1^L(t,k)k^2\bigg)\Bigg) \\
&\times e^{8ik^3t}\bigg(2\hat{\tilde{N}}_1(t,k) - ig_0(t)\hat{\tilde{M}}_2(t,k) - \frac{1}{2}g_0(t)\hat{K}_1(t,k) + \frac{1}{2}g_1(t)\hat{K}_2(t,k) \\
&+[2\hat{\tilde{M}}_1(t,k) - ig_0(t)\hat{K}_2(t,k)]k + 2\hat{K}_1(t,k)k^2\bigg) \\
&-\frac{1}{2}e^{2ikL+16ik^3t}\bigg(2\hat{\tilde{N}}_1(t,k) - if_0(t)\hat{\tilde{M}}_2^L(t,k) - \frac{1}{2}f_0(t)\hat{K}_1^L(t,k) + \frac{1}{2}f_1(t)\hat{K}_2^L(t,k) \\
&+[2\hat{\tilde{M}}_1^L(t,k) - if_0(t)\hat{K}_2^L(t,k)]k + 2\hat{K}_1^L(t,k)k^2\bigg) \\
&\times\bigg(2\check{\tilde{N}}_1(t,k) - ig_0(t)\check{\tilde{M}}_2(t,k) - \frac{1}{2}g_0(t)\check{K}_1(t,k) + \frac{1}{2}g_1(t)\check{K}_2(t,k) \\
&+[2\check{\tilde{M}}_1(t,k) - ig_0(t)\hat{K}_2(t,k)]k + 2\check{K}_1(t,k)k^2\bigg)
\end{aligned}
\tag{7.183}
$$

όπου οι συναρτήσεις $\hat{K}_1(t,k)$, $\hat{K}_2(t,k)$, $\hat{\tilde{M}}_1(t,k)$, $\hat{\tilde{M}}_2(t,k)$, $\hat{\tilde{N}}_1(t,k)$, $\hat{\tilde{N}}_2(t,k)$, $\check{K}_1(t,k)$, $\check{K}_2(t,k)$, $\check{\tilde{M}}_1(t,k)$, $\check{\tilde{M}}_2(t,k)$, $\check{\tilde{N}}_1(t,k)$, *και* $\check{\tilde{N}}_2(t,k)$ *ορίζονται μέσω των ακόλουθων συστημάτων γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ως προς τη χρονική μεταβλητή* t*):*

$$\hat{K}_{1t} + 8ik^3\hat{K}_1 = -[2g_0^2(t) + g_2(t)]\hat{K}_2 + 2ig_1(t)\hat{\tilde{M}}_2 + 4g_0(t)\hat{\tilde{N}}_2 + 4g_0(t) \tag{7.184}$$

$$\hat{K}_{2t} = 2g_0(t)\hat{K}_1 - 4\hat{\check{N}}_1 \tag{7.185}$$

$$\hat{\check{M}}_{1t} + 8ik^3\hat{\check{M}}_1 = \frac{i}{2}[3g_0^2(t) + g_2(t)]\hat{K}_1 + \frac{i}{2}[g_0'(t) + g_0(t)g_1(t)]\hat{K}_2 - [g_0^2(t) + g_2(t)]\hat{\check{M}}_2$$
$$+2ig_1(t)\hat{\check{N}}_2 + 2ig_1(t) \tag{7.186}$$

$$\hat{\check{M}}_{2t} = -\frac{i}{2}g_1(t)\hat{K}_1 - \frac{i}{2}[3g_0^2(t) + g_2(t)]\hat{K}_2 + g_0(t)\hat{\check{M}}_1 \tag{7.187}$$

$$\hat{\check{N}}_{1t} + 8ik^3\hat{\check{N}}_1 = \frac{1}{4}[-g_1'(t) - g_1^2(t) + 3g_0^3(t) + g_0(t)g_2(t)]\hat{K}_2 + \frac{i}{2}[3g_0^2(t) + g_2(t)]\hat{\check{M}}_1$$
$$+\frac{i}{2}[\frac{1}{4}g_0'(t) + 2g_0(t)g_1(t)]\hat{\check{M}}_2 - [g_0^2(t) + g_2(t)]\hat{\check{N}}_2 - [g_0^2(t) + g_2(t)] \tag{7.188}$$

$$\hat{\check{N}}_{2t} = -\frac{1}{4}[3g_0^2(t)+g_2(t)]\hat{K}_1 + \frac{7}{4}g_0'(t)\hat{K}_2 - \frac{i}{2}g_1(t)\hat{\check{M}}_1 - \frac{i}{2}[3g_0^2(t)+g_2(t)]\hat{\check{M}}_2 + g_0(t)\hat{\check{N}}_1 \tag{7.189}$$

$$\check{K}_{1t} - 8ik^3\check{K}_1 = -[2g_0^2(t) + g_2(t)]\check{K}_2 + 2ig_1(t)\check{\check{M}}_2 + 4g_0(t)\check{\check{N}}_2 + 4g_0(t) \tag{7.190}$$

$$\check{K}_{2t} = 2g_0(t)\check{K}_1 - 4\check{\check{N}}_1 \tag{7.191}$$

$$\check{\check{M}}_{1t} - 8ik^3\check{\check{M}}_1 = \frac{i}{2}[3g_0^2(t) + g_2(t)]\check{K}_1 + \frac{i}{2}[g_0'(t) + g_0(t)g_1(t)]\check{K}_2 - [g_0^2(t) + g_2(t)]\check{\check{M}}_2$$
$$+2ig_1(t)\check{\check{N}}_2 + 2ig_1(t) \tag{7.192}$$

$$\check{\check{M}}_{2t} = -\frac{i}{2}g_1(t)\check{K}_1 - \frac{i}{2}[3g_0^2(t) + g_2(t)]\check{K}_2 + g_0(t)\check{\check{M}}_1 \tag{7.193}$$

$$\check{\check{N}}_{1t} - 8ik^3\check{\check{N}}_1 = \frac{1}{4}[-g_1'(t) - g_1^2(t) + 3g_0^3(t) + g_0(t)g_2(t)]\check{K}_2 + \frac{i}{2}[3g_0^2(t) + g_2(t)]\check{\check{M}}_1$$
$$+\frac{i}{2}[\frac{1}{4}g_0'(t) + 2g_0(t)g_1(t)]\check{\check{M}}_2 - [g_0^2(t) + g_2(t)]\check{\check{N}}_2 - [g_0^2(t) + g_2(t)] \tag{7.194}$$

$$\check{\check{N}}_{2t} = -\frac{1}{4}[3g_0^2(t)+g_2(t)]\check{K}_1 + \frac{7}{4}g_0'(t)\check{K}_2 - \frac{i}{2}g_1(t)\check{\check{M}}_1 - \frac{i}{2}[3g_0^2(t)+g_2(t)]\check{\check{M}}_2 + g_0(t)\check{\check{N}}_1 \tag{7.195}$$

με αρχικές συνθήκες

$$\hat{K}_j(0,k) = \hat{\check{M}}_j(0,k) = \hat{\check{N}}_j(0,k) = \check{K}_j(0,k) = \check{\check{M}}_j(0,k) = \check{\check{N}}_j(0,k) = 0, \quad j = 1,2. \tag{7.196}$$

Απόδειξη του θεωρήματος 7.47.

Χρησιμοποιούμε τον κοινό συμβολισμό $H(t,s)$ για καθεμιά από τις συναρτήσεις $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$, $\tilde{M}_1(t,s)$, $\tilde{M}_2(t,s)$, $\tilde{N}_1(t,s)$ και $\tilde{N}_2(t,s)$. Ορίζουμε

$$\hat{H}(t,k) := \int_{-t}^{t} e^{4ik^3(s-t)} H(t,s)ds \tag{7.197}$$

και

$$\check{H}(t,k) := \int_{-t}^{t} e^{4ik^3(t-s)} H(t,s)ds. \tag{7.198}$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^t H(t, 2\tau - t) e^{8ik^3(\tau - t)} d\tau = \frac{1}{2}\hat{H}(t,k) \tag{7.199}$$

και

$$\int_0^t H(t, t - 2\tau) e^{8ik^3(\tau - t)} d\tau = \frac{1}{2} e^{8ik^3 t}\check{H}(t,k). \tag{7.200}$$

Επί των ταυτοτήτων (7.197) και (7.199) βασίζεται η παραγωγή των εκφράσεων (7.180), (7.181) και (7.182) από τις (7.6), (7.7) και (7.8).

Επί των ταυτοτήτων (7.199) και (7.200) βασίζεται η παραγωγή της νέας μορφής της συνάρτησης $F(t,k)$, έκφραση (7.183), από την (7.16).

Η παραγωγή των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (7.184) μέχρι και (7.195) από το πρόβλημα Goursat (7.14) - (7.15) βασίζεται στις επόμενες τέσσερις ταυτότητες:

$$\hat{H}_t = \int_{-t}^{t} (H_t + H_s) e^{4ik^3(s-t)} ds + 2e^{-8ik^3 t} H(t,-t) \tag{7.201}$$

$$\hat{H}_t + 8ik^3\hat{H} = \int_{-t}^{t} (H_t - H_s) e^{4ik^3(s-t)} ds + 2H(t,t) \tag{7.202}$$

$$\check{H}_t = \int_{-t}^{t} (H_t + H_s) e^{4ik^3(t-s)} ds + 2e^{8ik^3 t} H(t,-t) \tag{7.203}$$

$$\check{H}_t - 8ik^3\check{H} = \int_{-t}^{t} (H_t - H_s) e^{4ik^3(t-s)} ds + 2H(t,t). \tag{7.204}$$

Προκειμένου, τώρα να αποδείξουμε τις τελευταίες τέσσερις ταυτότητες, εφαρμόζουμε το γνωστό τύπο

$$\partial_t \int_{-t}^{t} H^\star(t,s)ds = \int_{-t}^{t} \partial_t H^\star(t,s)ds + H^\star(t,t) + H^\star(t,-t) \tag{7.205}$$

επί καθεμιάς εκ των συναρτήσεων $H^\star(t,s) := H(t,s)e^{4ik^3(s-t)}$ και $H^\star(t,s) := H(t,s)e^{4ik^3(t-s)}$, για να λάβουμε

$$\partial_t \hat{H}(t,k) = \int_{-t}^{t} H_t e^{4ik^3(s-t)} ds - 4ik^3 \hat{H} + H(t,t) + e^{-8ik^3 t} H(t,-t) \tag{7.206}$$

και

$$\partial_t \check{H}(t,k) = \int_{-t}^{t} H_t e^{4ik^3(t-s)} ds + 4ik^3 \check{H} + H(t,t) + e^{8ik^3 t} H(t,-t). \tag{7.207}$$

Επίσης, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-t}^{t} H_s e^{4ik^3(s-t)} ds = H(t,t) - e^{-8ik^3 t} H(t,-t) - 4ik^3 \hat{H} \tag{7.208}$$

και

$$\int_{-t}^{t} H_s e^{4ik^3(t-s)} ds = H(t,t) - e^{8ik^3 t} H(t,-t) + 4ik^3 \check{H}. \tag{7.209}$$

Συνδυάζοντας με κατάλληλο τρόπο τις τελευταίες τέσσερις σχέσεις καταλήγουμε στις (7.201), (7.202), (7.203) και (7.204).

Η απόδειξη του θεωρήματος 7.56 έχει ολοκληρωθεί. ◇

7.10 Αναπαραστάσεις μέσω των ιδιοσυναρτήσεων $\Phi(t,k)$, $\varphi(t,k)$.

Θεώρημα 7.57. *Ισχύουν οι επόμενες ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για τις άγνωστες συνοριακές τιμές $g_2(t)$, $g_1(t)$ και $f_2(t)$:*

$$\begin{aligned} g_2(t) = \quad & -g_0^2(t) + \\ & + \frac{12}{\pi} \int_{\partial D_1^0} \frac{k^2 \Omega_1^1(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\frac{1}{3} e^{-4ik^3 t} X_1(t,k) - \frac{g_0(t)}{2ik} \right] dk \\ & - \frac{12}{\pi} \int_{\partial D_1^0} \frac{k^2 \Omega_1^2(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\frac{1}{3} e^{-4ik^3} \hat{X}_1^L(t,k) - \frac{f_1(t)}{4k^2} \right] dk \\ & - \frac{12}{\pi} \int_{\partial D_1^0} \frac{k^2 \Omega_1^3(k)}{\mathbb{D}(k)} \left[\frac{1}{3} e^{-4ik^3 t} X_1^L(t,k) - \frac{f_0(t)}{2ik} \right] dk \\ & + \frac{12}{\pi} \int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)} \left[\Theta_1^1(k) F(t,k) + \Theta_1^2(k) F(t, ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_1^3(k) F(t, ke^{-4\pi i/3}) \right] dk, \end{aligned} \tag{7.210}$$

$$\begin{aligned}
g_1(t) = \quad & -\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2\Omega_2^1(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\frac{1}{3}e^{-4ik^3t}X_1(t,k) - \frac{g_0(t)}{2ik}\right]dk \\
& +\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2\Omega_2^2(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\frac{1}{3}e^{-4ik^3t}\hat{X}_1^L(t,k) - \frac{f_1(t)}{4k^2}\right]dk \\
& +\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2\Omega_2^3(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\frac{1}{3}e^{-4ik^3t}X_1^L(t,k) - \frac{f_0(t)}{2ik}\right]dk \\
& -\frac{6i}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}\left[\Theta_2^1(k)F(t,k) + \Theta_2^2(k)F(t,ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_2^3(k)F(t,ke^{-4\pi i/3})\right]dk,
\end{aligned} \tag{7.211}$$

$$\begin{aligned}
f_2(t) = \quad & -f_0^2(t) + \\
& -\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2\Omega_3^1(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\frac{1}{3}e^{-4ik^3t}X_1(t,k) - \frac{g_0(t)}{2ik}\right]dk \\
& +\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2\Omega_3^2(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\frac{1}{3}e^{-4ik^3t}\hat{X}_1^L(t,k) - \frac{f_1(t)}{4k^2}\right]dk \\
& +\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2\Omega_3^3(k)}{\mathbb{D}(k)}\left[\frac{1}{3}e^{-4ik^3t}X_1^L(t,k) - \frac{f_0(t)}{2ik}\right]dk \\
& -\frac{12}{\pi}\int_{\partial D_1^0} \frac{k^2}{\mathbb{D}(k)}\left[\Theta_3^1(k)F(t,k) + \Theta_3^2(k)F(t,ke^{-2\pi i/3}) + \Theta_3^3(k)F(t,ke^{-4\pi i/3})\right]dk
\end{aligned} \tag{7.212}$$

όπου

$$X_1(t,k) := \tilde{\Phi}_1(t,k) + E\tilde{\Phi}_1(t,Ek) + E^2\tilde{\Phi}_1(t,E^2k), \tag{7.213}$$

$$X_1^L(t,k) := \tilde{\varphi}_1(t,k) + E\tilde{\varphi}_1(t,Ek) + E^2\tilde{\varphi}_1(t,E^2k), \tag{7.214}$$

$$\hat{X}_1^L(t,k) := \tilde{\varphi}_1(t,k) + E^2\tilde{\varphi}_1(t,Ek) + E\tilde{\varphi}_1(t,E^2k). \tag{7.215}$$

Απόδειξη του θεωρήματος 7.57.
Οι αναπαραστάσεις Gelfand-Levitan-Marchenko των ιδιοσυναρτήσεων $\tilde{\Phi}_1(t,k)$, $\tilde{\Phi}_2(t,k)$, $\tilde{\Phi}_1^\star(t,k)$, και $\tilde{\Phi}_2^\star(t,k)$ μπορούν να γραφούν στην επόμενη μορφή.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_1(t,k) = e^{4ik^3t}\bigg(&\hat{\tilde{N}}_1(t,k) + \frac{1}{2i}g_0(t)\hat{\tilde{M}}_2(t,k) + \frac{1}{4}[-g_0(t)\hat{K}_1(t,k) + g_1(t)\hat{K}_2(t,k)] \\
&+[\hat{\tilde{M}}_1(t,k) + \frac{1}{2i}g_0(t)\hat{K}_2(t,k)]k + \hat{K}_1(t,k)k^2\bigg),
\end{aligned} \tag{7.216}$$

$$\tilde{\Phi}_2(t,k) = e^{4ik^3t}\Big(1 + \hat{\tilde{N}}_2(t,k) + \frac{1}{2i}\hat{\tilde{M}}_1(t,k) - \frac{1}{4}g_0(t)\hat{K}_2(t,k)$$
$$+[\hat{\tilde{M}}_2(t,k) + \frac{1}{2i}\hat{K}_1(t,k)]k + \hat{K}_2(t,k)k^2\Big), \tag{7.217}$$

$$\tilde{\Phi}_1^{\star}(t,k) = e^{-4ik^3t}\Big(1 + \check{\tilde{N}}_1(t,k) + \frac{1}{2i}g_0(t)\check{\tilde{M}}_2(t,k) + \frac{1}{4}[-g_0(t)\check{K}_1(t,k) + g_1(t)\check{K}_2(t,k)]$$
$$+[\check{\tilde{M}}_1(t,k) + \frac{1}{2i}g_0(t)\check{K}_2(t,k)]k + \check{K}_1(t,k)k^2\Big), \tag{7.218}$$

$$\tilde{\Phi}_2^{\star}(t,k) = e^{-4ik^3t}\Big(\check{\tilde{N}}_2(t,k) + \frac{1}{2i}\check{\tilde{M}}_1(t,k) - \frac{1}{4}g_0(t)\check{K}_2(t,k)$$
$$+[\check{\tilde{M}}_2(t,k) + \frac{1}{2i}\check{K}_1(t,k)]k + \check{K}_2(t,k)k^2\Big). \tag{7.219}$$

Τώρα εφαρμόζουμε καθέναν από τους μετασχηματισμούς $k \mapsto Ek$ και $k \mapsto E^2k$. Με τον τρόπο αυτό παράγονται άλλες δύο τετράδες εξισώσεων. Έτσι διαθέτουμε *δώδεκα* εξισώσεις, που θα θεωρηθούν σαν ένα προς επίλυση σύστημα για τις *δώδεκα* συναρτήσεις
$\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$, $\hat{\tilde{M}}_1$, $\hat{\tilde{M}}_2$, $\hat{\tilde{N}}_1$, $\hat{\tilde{N}}_2$, $\check{K}_1$, $\check{K}_2$, $\check{\tilde{M}}_1$, $\check{\tilde{M}}_2$, $\check{\tilde{N}}_1$, $\check{\tilde{N}}_2$.
Τελικά παίρνουμε:

$$k^2\hat{K}_1(t,k) = \frac{1}{3}e^{-4ik^3t}X_1(t,k) \tag{7.220}$$

$$k^2\hat{K}_2(t,k) = \frac{1}{3}e^{-4ik^3t}\hat{X}_2(t,k) \tag{7.221}$$

$$k\hat{\tilde{M}}_1(t,k) = \frac{1}{3}e^{-4ik^3t}\hat{X}_1(t,k) \tag{7.222}$$

$$k^2\hat{\tilde{M}}_2(t,k) = \frac{i}{6}e^{-4ik^3t}X_1(t,k) + \frac{k}{3}e^{-4ik^3t}X_2(t,k) \tag{7.223}$$

$$k^2\hat{\tilde{N}}_1(t,k) = -\frac{1}{12}g_0(t)e^{-4ik^3t}X_1(t,k) + \frac{ik}{6}g_0(t)e^{-4ik^3t}X_2(t,k)$$
$$-[\frac{1}{12}g_1(t) - \frac{i}{6}g_0(t)]e^{-4ik^3t}\hat{X}_2(t,k) + \frac{1}{12}g_0(t)e^{-4ik^3t}X_1(t,k)$$
$$+\frac{k^2}{3}e^{-4ik^3t}[\tilde{\Phi}_1(t,k) + \tilde{\Phi}_1(t,Ek) + \tilde{\Phi}_1(t,E^2k)] \tag{7.224}$$

$$k^2[1 + \hat{\tilde{N}}_2(t,k)] = \frac{ik}{6}e^{-4ik^3t}\hat{X}_1(t,k) + \frac{1}{12}g_0(t)e^{-4ik^3t}\hat{X}_2(t,k)$$
$$+\frac{k^2}{3}e^{-4ik^3t}[\tilde{\Phi}_2(t,k) + \tilde{\Phi}_2(t,Ek) + \tilde{\Phi}_2(t,E^2k)]. \tag{7.225}$$

Αναφορικά, τώρα, με τις ιδιοσυναρτήσεις $\tilde{\varphi}_1(t,k)$, $\tilde{\varphi}_2(t,k)$, $\tilde{\varphi}_1^{\star}(t,k)$ και $\tilde{\varphi}_2^{\star}(t,k)$, ισχύουν αναπαραστάσεις ανάλογες με τις (7.216), (7.217), (7.218) και (7.219) αλλά με τις συναρτήσεις $\left(\hat{K}_1,\, \hat{K}_2,\, \hat{\hat{M}}_1,\, \hat{\hat{M}}_2,\, \hat{\hat{N}}_1,\, \hat{\hat{N}}_2, \check{K}_1,\, \check{K}_2,\, \check{\check{M}}_1,\, \check{\check{M}}_2,\, \check{\check{N}}_1,\, \check{\check{N}}_2,\, g_0,\, g_1 \right)$ να έχουν αντικατασταθεί από τις $\left(\hat{K}_1^L,\, \hat{K}_2^L,\, \hat{\hat{M}}_1^L,\, \hat{\hat{M}}_2^L,\, \hat{\hat{N}}_1^L,\, \hat{\hat{N}}_2^L,\, \check{K}_1^L,\, \check{K}_2^L,\, \check{\check{M}}_1^L,\, \check{\check{M}}_2^L,\, \check{\check{N}}_1^L,\, \check{\check{N}}_2^L,\, f_0,\, f_1 \right)$.

Με μια τελείως όμοια διαδικασία οδηγούμαστε σε εκφράσεις ανάλογες με τις (7.220), (7.221), (7.222), (7.223), (7.224) και (7.225), αλλά με τις συναρτήσεις $X_1(t,k)$, $X_2(t,k)$, $\hat{X}_1(t,k)$, $\hat{X}_2(t,k)$ να έχουν αντιατασταθεί από τις $X_1^L(t,k)$, $X_2^L(t,k)$, $\hat{X}_1^L(t,k)$, $\hat{X}_2^L(t,k)$, αντίστοιχα, όπου:

$$X_1(t,k) := \tilde{\Phi}_1(t,k) + E\tilde{\Phi}_1(t,Ek) + E^2\tilde{\Phi}_1(t,E^2k) \tag{7.226}$$

$$X_2(t,k) := \tilde{\Phi}_2(t,k) + E^2\tilde{\Phi}_2(t,Ek) + E\tilde{\Phi}_2(t,E^2k) \tag{7.227}$$

$$\hat{X}_1(t,k) := \tilde{\Phi}_1(t,k) + E^2\tilde{\Phi}_1(t,Ek) + E\tilde{\Phi}_1(t,E^2k) \tag{7.228}$$

$$\hat{X}_2(t,k) := \tilde{\Phi}_2(t,k) + E\tilde{\Phi}_2(t,Ek) + E^2\tilde{\Phi}_2(t,E^2k) \tag{7.229}$$

$$X_1^L(t,k) := \tilde{\varphi}_1(t,k) + E\tilde{\varphi}_1(t,Ek) + E^2\tilde{\varphi}_1(t,E^2k) \tag{7.230}$$

$$X_2^L(t,k) := \tilde{\varphi}_2(t,k) + E^2\tilde{\varphi}_2(t,Ek) + E\tilde{\varphi}_2(t,E^2k) \tag{7.231}$$

$$\hat{X}_1^L(t,k) := \tilde{\varphi}_1(t,k) + E^2\tilde{\varphi}_1(t,Ek) + E\tilde{\varphi}_1(t,E^2k) \tag{7.232}$$

$$\hat{X}_2^L(t,k) := \tilde{\varphi}_2(t,k) + E\tilde{\varphi}_2(t,Ek) + E^2\tilde{\varphi}_2(t,E^2k). \tag{7.233}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τις ποσότητες $k^2\hat{K}_1(t,k)$, $k^2\hat{K}_1^L(t,k)$ και $k\hat{\hat{M}}_1^L(t,k)$ εντός των εξισώσεων (7.180), (7.181) και (7.182), βρίσκουμε τις προς απόδειξη ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις (7.210), (7.211) και (7.212).

Η απόδειξη του θεωρήματος 7.57 έχει ολοκληρωθεί. ⋄

Βιβλιογραφία

[1] Ablowitz, M.J., and Clarkson, P.A., *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, 1992.

[2] M.J.Ablowitz and A.S.Fokas, *Introduction and Applications of Complex Variables*, Cambridge University Press, 1997.

[3] Ablowitz, M.J., Kaup, D.J., Newell, A.C., and Segur, H., *Method for Solving the Sine - Gordon Equation*, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1262-1264 (1973).

[4] Ablowitz, M.J., Kaup, D.J., Newell, A.C., and Segur, H., *The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems*, *Studies in Appl. Math.* **53** (1974), 249-315.

[5] Ablowitz, M.J., and Segur, H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM 1981.

[6] Antipov, Y.A., and Fokas,A.S., *The modified Helmholtz equation in a semi-strip*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **138** (2005), no. 2, 339-365.

[7] V.V. Bazhanov, S.L. Lukyanov, and A.B. Zamolodchikov, Commun. Math. Phys. **177**, 381 (1996).

[8] Beals, R., and Coifman, R.R., *Scattering and Inverse Scattering for First Order Systems*, *Comm. Pure Appl. Math.* **XXXVII** (1984), 39-90.

[9] ben-Avraham, D., and Fokas, A.S., *The solution of the modified Helmholtz equation in a wedge and an application to diffusion-limited coalescence*, *Phys. Lett. A* **263**(1999),no. 4-6, 355-359.

[10] Bona, J., Pritchard, W.G., and Scott, L.R., *An Evaluation of a Model Equation for Water Waves*, *Philos. Trans. R. Soc. London A* **302** (1981), 457-510.

[11] J.L.Bona, S.M.Sun and B.-Y.Zhang, *A nonhomogeneous boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), 1391-1436.

[12] Bona, J., and Winther, R., *The Korteweg - de Vries Equation, Posed in a Quarter Plane*, *SIAM J. Math. Anal.* **14** (1983), 1056-1106.

[13] Bona, J., and Winther, R., *The Korteweg - de Vries Equation in a Quarter Plane, Continuous Dependence Result*, *Differential Integral Equations* **2** (1989), 228-250.

[14] Boutet de Monvel, A., Fokas, A.S., and Shepelsky, D., *Analysis of the Global Relation for the Nonlinear Schrodinger Equation on the Half-Line*, *Lett. Math. Phys.* **65** (2003), 199-212.

[15] A.Boutet de Monvel, A.S.Fokas and D. Shepelsky, *The mKdV equation on the half line*, J. Inst. Math. Jussieu **3** (2) (2004), 139-164.

[16] A.Boutet de Monvel, A.S.Fokas and D. Shepelsky, *Integrable nonlinear evolution equations on a finite interval*, Commun. Math. Phys. **263** (2006), 133-172.

[17] A.Boutet de Monvel and V. Kotlyarov, *Scattering problem for the Zakharov-Shabat equations on the semi-axis*, Inverse Problems **16** (2000) 1813-1837.

[18] A.Boutet de Monvel, D. Shepelsky, *The modified KdV equation on a finite interval*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.I **337** (2003), 517-522.

[19] A.Boutet de Monvel and D.Shepelsky, *Initial boundary value problem for the mK-dV equation on a finite interval*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **54**,5 (2004), 1477-1495.

[20] Caudrey, P.J., *The inverse scattering problem for the third order equation* $u_{xxx} + q(x)u_x + r(x)u = i\rho^3 u$, *Phys. Lett. A* **79** (1980), 264-268.

[21] Caudrey, P.J., *The inverse problem for a general* $N \times N$ *spectral equation*, *Physica* **6D** (1982), 51-66.

[22] Caudrey, P.J., *Spectral Transforms*, in: *Soliton Theory: A Survey of Results*, Edited by A. Fordy, Manchester University Press, Manchester, 1990.

[23] Chou, R.L., and Chu, C.K., *Solitons Induced by Boundary Conditions from the Boussinesq Equation*, *Phys. Fluids A* **2** (1990), 1974.

[24] Chou, R.L., Ph.D. Dissertation, City University of New York, 1987 (unpublished).

[25] Chu, C.K., and Chou, R.L., *Solitons Induced by Boundary Conditions*, *Adv. in Appl. Mech.*, **27** (1990), 283-302.

[26] Clancey, K. and Gohberg, I., *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators*, Birkhauser-Verlag 1981.

[27] Crowdy, D.G, and Fokas, A.S., *Explicit integral solutions for the plane elastostatic semi-strip* , *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* **460** (2004), no. 2045, 1285-1309.

[28] Dassios, G., and Fokas, A.S., *The basic elliptic equations in an equilateral triangle* , *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **461** (2005), no. 2061, 2721-2748.

[29] Dassios, G., and Fokas, A.S., *Methods for solving elliptic PDEs in spherical coordinates*, *SIAM J. Appl. Math.* **68** (2008), no. 4, 1080-1096.

[30] De Lillo, S., and Fokas, A.S., *The Dirichlet-to-Neumann map for the heat equation on a moving boundary*, *Inverse Problems* **23** (2007), no. 4, 1699-1710.

[31] Deift, P., and Trubowitz, E., *Inverse Scattering on the Line*, *Commun. Pure Appl. Math.* **32** (1979), 121-151.

[32] Dettman, J.W., *Applied Complex Variables*, Dover Publications, 1984.

[33] Dodd, R.K., Eilbeck, J.C., Gibbon, J.D. and Morris, H.C., *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, 1982.

[34] Drazin, P.G., and Johnson, R.S., *Solitons: An Introduction*, Cambridge University Press, 1989.

[35] Faddeev, L.D., *The Inverse Problem in the Quantum Theory of Scattering*, *J. Math. Phys.* **4** (1963), 72-104.

[36] Faddeev, L.D., and Takhtajan, L.A., *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1987.

[37] Fokas, A.S., *Initial - Boundary Value Problems for Soliton Equations*, Proceedings of the III Potsdam - V Kiev International Workshop 1991 (Springer, Berlin 1992).

[38] A.S.Fokas, *A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **53** (1997), 1411.

[39] Fokas, A.S., *Lax Pairs and a New Spectral Method for Linear and Integrable Nonlinear PDEs*, *Sel. Math. New Ser.* **4** (1998), 31-68.

[40] Fokas, A.S., *On the Integrability of Linear and Nonlinear Partial Differential Equations*, *J. Math. Phys.* **41**, No 6 (2000), 4188-4237.

[41] Fokas, A.S., *Two-dimensional partial differential equations in a convex polygon*, *Roy. Soc. Lond. Proc. Ser. A* **457** (2001), no. 6, 371-393.

[42] Fokas, A.S., *Differential forms, spectral theory, and boundary value problems. The legacy of the inverse scattering transform in applied mathematics (South Hadley, MA, 2001)*, 69-92, Contemp. Math., 301, *Amer. Math. Soc., Providence, RI,* 2002.

[43] A.S.Fokas, *Integrable Nonlinear Evolution Equations on the Half-Line*, Commun. Math. Phys. **230** (2002), 1-39.

[44] Fokas, A.S., *A new transform method for evolution partial differential equations, IMA J. Appl. Math.* **67** (2002), no. 6, 559-590.

[45] Fokas, A.S., *Ehrenpreis type representations and their Riemann-Hilbert nonlinearisation, J. Nonlinear Math. Phys.* **10** (2003), suppl. 1, 47-61.

[46] Fokas, A.S., *Boundary-value problems for linear PDEs with variable coefficients, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* **460** (2004), no. 2044, 1131-1151.

[47] A.S.Fokas, *The Generalized Dirichlet-to-Neumann Map for Certain Nonlinear Evolution PDEs*, Commun. Pure Appl. Math. **LVIII** (2005), 0639-0670.

[48] Fokas, A.S., *A unified approach to boundary value problems, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA,* 2008.

[49] Fokas, A.S., and Gelfand, I.M., *Integrability of Linear and Nonlinear Evolution Equations and the Associated Nonlinear Fourier Transforms, Lett. Math. Phys.* **32** (1994), 189-210.

[50] Fokas, A.S., and Its, A.R., *Soliton Generation for Initial-Boundary Value Problems, Phys. Rev. Lett.* **68** (1992), 3117-3120.

[51] Fokas, A.S., and Its, A.R., *An Initial-Boundary Value Problem for the sine-Gordon Equation, Theor. Math. Phys.* **92** no.3 (1992), 964-978.

[52] A.S.Fokas and A.R.Its, *An initial-boundary value problem for the Korteweg-de Vries equation*, Math. Comp. Simul. **37** (1994), 293-321.

[53] Fokas, A.S., and Its, A.R., *Integrable Equations on the Half-Infinite Line, Chaos, Solitons and Fractals* **5** no. 12 (1995), 2367-2376.

[54] A.S.Fokas and A.R.Its, *The linearization of the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrodinger equation*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996) 738-764.

[55] A.S.Fokas and A.R.Its, *The nonlinear Schrodinger equation on the interval*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 6091-6114.

[56] A.S.Fokas, A.R.Its and L.-Y.Sung, *The nonlinear Schrodinger equation on the half-line*, Nonlinearity **18** (2005) 1771-1822.

[57] Fokas, A.S., and Kamvissis, S., *Zero-dispersion limit for integrable equations on the half-line with linearisable data. Abstr. Appl. Anal.* **2004**, no. 5, 361-370.

[58] Fokas, A.S., and Kapaev, A.A., *A Riemann-Hilbert approach to the Laplace equation*, *J. Math. Anal. Appl.* **251** (2000), no. 2, 770-804.

[59] Fokas, A.S., and Kapaev, A.A., *On a transform method for the Laplace equation on a polygon*, *IMA J. Appl. Math.* **68** (2003), no. 4, 355-408.

[60] A.S.Fokas and C.R.Menyuk, *Integrability and self-similarity in transient stimulated Raman scattering*, *J. Nonlin. Sci.* **9**(1999), no.1, 1-31.

[61] Fokas, A.S., and Papageorgiou, D.T., *Absolute and convective instability for evolution PDEs on the half-line*, *Stud. Appl. Math.* **114** (2005) no. 1, 95-114.

[62] A.S. Fokas and B.Pelloni, *The solution of certain initial boundary-value problems for the linearized Korteweg-de Vries equation*, *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A* **454** (1998) no. 1970, 645-657.

[63] Fokas, A.S, and Pelloni, B., *Method for solving moving boundary value problems for linear evolution equations* , *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000), no. 21, 4785-4789.

[64] Fokas, A.S., and Pelloni, B., *Boundary value problems for linearized Boussinesq type systems. Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000)*, 296-301, *SIAM, Philadelphia, PA*, 2000.

[65] Fokas, A.S, and Pelloni, B., *Two-point boundary value problems for linear evalution equations*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **131** (2001), no. 3, 521-543.

[66] Fokas, A.S., and Pelloni, B., *Boundary value problems for Boussinesq type systems*, *Math. Phys. Anal. Geom.* **8** (2005), no. 1, 59-96.

[67] Fokas, A.S., and Pelloni, B., *A transform method for linear evolution PDEs on a finite interval* , *IMA J. Appl. Math.* **70** (2005), no. 4, 564-587.

[68] Fokas, A.S., and Pelloni, B., *Generalized Dirichlet to Neumann map for moving initial-boundary value problems*, *J. Math. Phys.* **48** (2007), no. 1, 013502.

[69] Fokas, A.S., Rogers, C., and Schief, W.K., *Evolution of methacrylate distribution during wood saturation*, *Appl. Math. Lett.* **18** (2005), no. 3, 321-328.

[70] Fokas, A.S., and Schultz, P.F., *Long-time asymptotics of moving boundary problems using an Ehrenpreis-type representation and its Riemann-Hilbert nonlinearization*, *Comm. Pure Appl. Math.* **56** (2003), no. 4, 517-548.

[71] A.S.Fokas and D.Tsoubelis, *The Inverse Spectral Method and the Initial Value Problem for Colliding Gravitational Waves*, Loughborough University Report, 1995; A.S.Fokas, L.Y.Sung and D.Tsoubelis, *The Inverse Spectral Method for Colliding Gravitational Waves*, Math. Phys. Anal. Geom. **1**, 313 (1999).

[72] Fokas, A.S., and Zakharov, V.E., editors, *Important Developments in Soliton Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelburg, 1993.

[73] Fokas, A.S., and Zyskin, M., *The fundamental differential form and boundary-value problems*, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **55** (2002), no. 3, 457-479.

[74] Fulton, S.R., Fokas, A.S., and Xenophontos, C.A., *An analytical method for linear elliptic PDEs and its numerical implementation*, *J. Comput. Appl. Math.* **167** (2004), no. 2, 465-483.

[75] Gakhov, F.D., *Boundary Value Problems*, Dover 1990.

[76] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., and Miura, R.M., *Method for Solving the Korteweg - de Vries Equation*, *Phys. Rev. Lett.* **19**, (1967), 1095-1097.

[77] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., and Miura, R.M., *The Korteweg - de Vries Equation and Generalizations VI. Methods for Exact Solution*, *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), 97-133.

[78] Gelfand, I.M., and Levitan, B.M., *On the determination of a differential equation from its spectral function*, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **1** (1955), 253-304.

[79] I. Hauser and F.J. Ernst, J. Math. Phys. **30**, 872 (1989), **30**, 2322 (1989), **31**, 871 (1990), and **32**, 198 (1990).

[80] Χιτζάζης, Ι., *Το Πρόβλημα Riemann-Hilbert και η Εφαρμογή του στη Μελέτη Προβλημάτων Αρχικών-Συνοριακών τιμών Γραμμικών και μη Γραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Τμ. Μαθηματικών Παν. Πατρών, 2008 (239 σελίδες).

[81] Hitzazis, Ias., and Tsoubelis, D., *Riemann-Hilbert Formulation for the KdV Equation on the Interval*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **347** (2009), 261-266.

[82] Hitzazis, Ias., and Tsoubelis, D., *The KdV Equation on the Interval*, 2009, υποβληθείσα προς δημοσίευση, 62 σελίδες.

[83] Hitzazis, Ias., and Tsoubelis, D., *The generalized Dirichlet to Neumann map for the KdV Equation on a Finite Interval*, 2009, προς δημοσίευση, 40 σελίδες.

[84] Its, A.R., *The Riemann-Hilbert Problem and Integrable Systems*, *Notices of the American Mathematical Society* **50** (2003), no.11, 1389-1400.

[85] R.S. Johnson, J. Nonlinear Math. Phys. **10** Suppl. 1, 72 (2003).

[86] Kamvissis, S., *Semiclassical nonlinear Schrodinger on the half-line*, *J. Math. Phys.* **44** (2003), no. 12, 5849-5868.

[87] Kaup, D.J., *On the inverse scattering problem for the cubic eigenvalue problem of the class* $\phi_{xxx} + 6Q\phi_x + 6R\phi = \lambda\phi$, *Studies in Appl. Math.* **62** (1980), 189-216.

[88] Kaup, D.J., and Wycoff, P., *Time Evolution of the Scattering Data for the Forced Toda Lattice*, *Stud. Appl. Math.* **81** (1989), 7-20.

[89] Kress, R., *Linear Integral Equations*, Springer 1999.

[90] Korteweg, D.J., and de Vries, G., *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, *Philos. Mag. Ser. 5*, **39** (1895), 422-443.

[91] B. A. Kupershmidt and P. Mathieu, Phys. Lett. B **227**, 245 (1989).

[92] Lamb, G.L., *Elements of Soliton Theory*, J. Wiley and Sons, 1980.

[93] P.D.Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Commun. Pure Appl. Math. **21** (1968), 467-490.

[94] H. Leblond, Phys. Rev. A **78**, 013807 (2008).

[95] Levin, B., *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Translation of Mathematical Monographs, 5, AMS, Providence, 1972.

[96] Mikhailov, A.V., *The reduction problem and the inverse scattering method*, *Physica* **3D** (1981), 73-117.

[97] Moloney, J.V., and Newell, A.C., *Theory of Light-Beam Propagation of Nonlinear Interfaces*, *Phys. Rev. A* **39** (1989), 1809-1840.

[98] Muskhelishvili, N.I., *Singular Integral Equations*, Dover 1992.

[99] Newell, A.C., *Solitons in Mathematics and Physics*, SIAM 1985.

[100] Sheerin, J., Weatherall, J.C., Nicholson, D.R., Payne, G.L., Goldman,M.V., and Hansen, P.J., *Solitons and Ionospheric Modification*, *J. Atmospheric Terr. Phys.* **44** (1982), 1043.

[101] Sifalakis, A.G, Fokas, A.S., Fulton, S.R., and Saridakis, Y.G., *The generalized Dirichlet-Neumann map for linear elliptic PDEs and its numerical implementation*, *J. Comput. Appl. Math.* **219** (2008), no. 1, 9-34.

[102] Treharne, P.A., *Ph. D. Thesis*, Trinity College, University of Cambridge, 2004.

[103] P.A.Treharne and A.S.Fokas, *Boundary value problems for systems of linear evolution equations*, *IMA J. Appl. Math.* **69** (2004), no. 6, 539-555.

[104] P.A.Treharne and A.S.Fokas, *Initial-boundary value problems for linear PDEs with variable coefficients*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **143** (2007), no. 1, 221-242.

[105] P.A.Treharne and A.S.Fokas, *The generalized Dirichlet to Neumann map for the KdV equation on the half-line*, *J. Nonlin. Sci.* **18** (2008), no. 2, 191-217.

[106] Τσουμπελής, Δ., *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Μέρος ΙΙ,* Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2003.

[107] Vekua, I.N., *Generalized Analytic Functions*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics **25**, Pergamon Press, Oxford, New York, 1962.

[108] Wadati, M., *The modified Korteweg - de Vries Equation*, *J. Phys. Soc. Japan* **32** (1972), 1681.

[109] Wadati, M. and Kamijo, T.,*Prog. Theor. Phys.* **52**, 397 (1974).

[110] H. Washimi and T. Taniuti, Phys. Rev. Lett. **17**, 996 (1966).

[111] N.J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **15**, 240 (1965).

[112] Zakharov, V.E. and Shabat, A.B., *Exact Theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, *Soviet Phys. JETP* **34** (1972), 62-69.

[113] V.E.Zakharov and A.B.Shabat, *A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I and II*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 226-235 and **13** (1979), 166-174.

[114] X.Zhou, *The Riemann-Hilbert problem and inverse scattering*, SIAM J. Math. Anal., **20** (1989), 966-986.