ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

“ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ”

Θέμα Διπλωματικής Εργασίας :

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Χριστόπουλος Κων/νος

ΑΜ 248

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Κ. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ ΚΥΡΟΥΣΗΣ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που με ανέχτηκε όλο αυτό το διάστημα. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Κ. Ελευθέριο Κυρούση για την υποστήριξη και τις χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχε καθόλη τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές και συναδέλφους μου στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών , των οποίων οι ζωηρές συζητήσεις και η γενικότερη συναδελφικότητα διαμόρφωσαν μεγάλο μέρος της σκέψης μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστούν διάφορα προβλήματα με την επίλυσή τους , από το βιβλίο *concrete mathematics (GRAHAM , KNUTH* ***και*** *PATASHNIK)* ***, τα οποία ανήκουν στο πεδίο των Διακριτών Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα στο πρώτο κεφάλαιο θα δούμε διάφορα προβλήματα αναδρομής όπου κάποια από αυτά θα είναι παραλλαγές γνωστών προβλημάτων (πχ : Ο ΠΥΡΓΟΣ ΤΟΥ HANOI) των οποίων οι (γνωστές) λύσεις θα μας βοηθάνε για να αποδεικνύουμε κάθε φορά αυτό που θέλουμε. Στο δεύτερο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με προβλήματα και ασκήσεις αθροισμάτων , τα οποία είναι παντού στα μαθηματικά , γι άυτό χρησιμοποιούμε βασικά εργαλεία για να τα λύσουμε , αναπτύσσοντας γενικές τεχνικές έτσι ώστε η διαδικασία να είναι φιλική προς τον αναγνώστη.***

Στη συνέχεια στο τρίτο κεφάλαιο θα συναντήσουμε ασκήσεις οι οποίες αφορούν τις ακέραιες συναρτήσεις. Οι ακέραιοι αριθμοί αποτελούν τη ραχοκοκαλιά των Διακριτών Μαθηματικών , και εμείς συχνά χρειάζεται να μετατρέπουμε κλάσματα ή αυθαίρετους πραγματικούς αριθμούς σε ακέραιους. Ο στόχος λοιπόν αυτού του κεφαλαίου είναι να αποκτήσουμε οικειότητα και άνεση με τέτοιου είδους μετατροπές μέσα από τις ασκήσεις και να μάθουμε μερικές από τις αξιοσημείωτες ιδιότητες τους.

Μέσα από τις ασκήσεις του τέταρτου κεφαλαίου γίνεται μια εισαγωγή στη θεωρία αριθμών ένα σημαντικό κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με τις ιδιότητες των ακεραίων. Τέλος στο κεφάλαιο 5 θα συναντήσουμε ασκήσεις και προβλήματα τα οποία βασίζονται στη μελέτη των διωνυμικών συντελεστών οι οποίοι είναι πολύ σημαντικοί στις εφαρμογές και επίσης πιο εύκολοι να τους χειριστούμε σε σύγκριση με άλλες ποσότητες τών προηγούμενων κεφαλαίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 16 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 2 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 7 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 3 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 8 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 4 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 9 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 5 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 2 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 6 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 6 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 7 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 14 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 8 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 20 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

Άσκηση 1. *Χρησιμοποιήστε την* *repertoire method* *για να λυθεί η παρακάτω αναδρομική σχέση : (με παραμέτρους τα* α, β_0, β_1 *και* γ*)*

$g(1) = a$

$g(2n+j) = 3g(n) + \gamma n + \beta_j$, *όπου* $j = 0, 1$ *και* $n \geq 1$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δοκιμάστε την σχέση $g(n) = n$

Απόδειξη.

Λύνοντας μια αναδρομική σχέση ο στόχος μας είναι να βρούμε ένα τύπο ο οποίος θα ισοδυναμεί με την σχέση αυτή. Με άλλα λόγια, ο τύπος που θα βρούμε θα πρέπει να ορίζεται ακριβώς όπως και η αναδρομική σχέση, και φυσικά όταν βάζουμε τιμές στο τύπο μας, καθώς και στην αναδρομική μας σχέση, θα πρέπει να παίρνουμε τις ίδιες τιμές.

Η παραπάνω σχέση λοιπόν είναι μια 4 παραμετρική αναδρομική σχέση, και σύμφωνα με την εκφώνηση, μπορεί να γραφτεί ώς εξής :

$g(1) = a$

$g(2n+0) = 3g(n) + \gamma n + \beta_0 \qquad (a_1)$

$g(2n+1) = 3g(n) + \gamma n + \beta_1$, και $n \geq 1$

Υπάρχουν τρία σημαντικά βήματα που χρειάζεται να κάνουμε :

(1) Θα βρούμε μερικές αρχικές τιμές για την παραπάνω σχέση.

(2) Εξετάζοντας τις τιμές που λαμβάνονται στο βήμα 1, θα βρούμε τη γενική μορφή για τον τύπο της αναδρομικής σχέσης.

(3) Θα χρησιμοποιήσουμε την *repertoire method* **για να βρούμε τον ακριβή τύπο.**

Ξεκινώντας λοιπόν από το βήμα 1 για διάφορες τιμές θα έχουμε :

$g(1) = a$

$g(2) = g(2(1)+0) = 3g(1) + \gamma + \beta_0 = 3a + \gamma + \beta_0$

$g(3) = g(2(1)+1) = 3g(1) + \gamma + \beta_1 = 3a + \gamma + \beta_1$

$g(4) = g(2(2)+0) = 3g(2) + 2\gamma + \beta_0 = 9a + 5\gamma + 4\beta_0$

$g(5) = g(2(2)+1) = 3g(2) + 2\gamma + \beta_1 = 9a + 5\gamma + 3\beta_0 + \beta_1$

$g(6) = g(2(3)+0) = 3g(3) + 3\gamma + \beta_0 = 9a + 6\gamma + \beta_0 + 3\beta_1$

$g(7) = g(2(3)+1) = 3g(3) + 3\gamma + \beta_1 = 9a + 6\gamma + 4\beta_1$

$g(8) = g(2(4)+0) = 3g(4) + 4\gamma + \beta_0 = 27a + 19\gamma + 13\beta_0$

$g(9) = g(2(4)+1) = 3g(4) + 4\gamma + \beta_1 = 27a + 19\gamma + 12\beta_0 + \beta_1$

$g(10) = g(2(5)+0) = 3g(5) + 5\gamma + \beta_0 = 27a + 20\gamma + 10\beta_0 + 3\beta_1$

Πηγαίνοντας τώρα στο βήμα 2 θα προσπαθήσουμε , σύμφωνα με αυτά που βρήκαμε παραπάνω , να βρούμε τη γενική μορφή της αναδρομικής σχέσης. Έτσι, θα έχουμε :

n	$g(n)$	
1	$a+0\gamma+0\beta_0+0\beta_1$	
2	$3a+\gamma+\beta_0+0\beta_1$	
3	$3a+\gamma+0\beta_0+\beta_1$	
4	$9a+5\gamma+4\beta_0+0\beta_1$	
5	$9a+5\gamma+3\beta_0+\beta_1$	
6	$9a+6\gamma+\beta_0+3\beta_1$	(A)
7	$9a+6\gamma+0\beta_0+4\beta_1$	
8	$27a+19\gamma+13\beta_0+0\beta_1$	
9	$27a+19\gamma+12\beta_0+\beta_1$	
10	$27a+20\gamma+10\beta_0+3\beta_1$	

....

Με αυτόν τον τρόπο, τώρα μπορούμε να σκεφτούμε ότι η γενική μορφή της σχέσης μας μπορεί να είναι

$g(n) = A(n)a + B(n)\beta_0 + C(n)\beta_1 + D(n)\gamma, \qquad (a_2)$

Μια πολύ σημαντική παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι η εξής : Για όλα τα n με $n \geq 1$, το n μπορεί να αναπαρασταθεί από την σχέση $2^k + h$, όπου , 2^k είναι η μεγαλύτερη δύναμη του 2 , μην υπερβαίνοντας το n , και $0 \leq h < 2^k$. Από τον παραπάνω πίνακα (A) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι: όταν $n = 2^k + h$, τότε ο συντελεστής του α είναι ο 3^k. Για παράδειγμα όταν το $n = 10$, τότε $n = 2^3 + 2$ και ο συντελεστής του α είναι ο $3^3 = 27$. [Η παρατήρηση αυτή θα χρειαστεί στη συνέχεια]

Οπότε θα έχουμε $A(n) = 3^k$

Εν συνεχεία, θα βρούμε τον ακριβή τύπο χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (1.18) του βιβλίου η οποία είναι :

$f(j) = a_j, \quad$ για $1 \leq i < d$

$f(dn+j) = cf(n) + \beta_j$, $\quad$ για $0 \leq j < d$ και $n \geq 1$

$f((b_m b_{m-1} b_{m-2} \ldots\ldots\ldots b_1 b_0)_d) = (a_{b_m} \beta_{b_{m-1}} \beta_{b_{m-2}} \ldots\ldots\ldots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_c$

Στην περίπτωσή μας τώρα θα πρέπει να βάλουμε στη σχέση (a_1) όπου γ = 0 και θα έχουμε :

$g(1) = a$

$g(2n+0) = 3g(n) + \beta_0, \qquad (a_3)$

$g(2n+1) = 3g(n) + \beta_1$, και $n \geq 1$

Έτσι λοιπόν για $d = 2$ και $c = 3$ θα έχουμε :

$n = (1b_m b_{m-1} b_{m-2} ... b_1 b_0)_2$ και $f((1b_m b_{m-1} b_{m-2} \dots\dots\dots b_1 b0)_2) = (a\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}} \dots\dots\dots \beta_{b_1}\beta_{b_0})_3$

Από την (a_2) ξέρουμε ότι $g(n) = A(n)a + B(n)b_0 + C(n)\beta_1 + D(n)\gamma$ και για $\gamma = 0$ παίρνουμε :

$A(n)a + B(n)\beta_0 + C(n)\beta_1 = (a\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}} \dots\dots\dots \beta_{b_1}\beta_{b_0})_3$

Με τον παραπάνω τρόπο ορίσαμε τα $A(n), B(n)$ και $C(n)$. Στη συνέχεια θα πάρουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $g(n) = A(n)$ για όλα τα $n \in N$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου $\gamma = \beta_0 = \beta_1 = 0$ και $\alpha = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση μας θα γίνει :

$g(n) = A(n)1 + B(n)0 + C(n)0 + D(n)0$

$g(n) = A(n)$ για όλα τα $n \in N$

Και η αναδρομική σχέση (a_3) θα πάρει την εξής μορφή :

$A(1) = a$

$A(2n + j) = 3A(n)$ για $j = 0, 1$ και $n \in N$

Από προηγούμενη παρατήρηση δείξαμε ότι $A(n) = 3^k$ όπου $n = 2^k + h$. Τώρα θέλουμε να αποδείξουμε ότι $A(n) = 3^k$ για όλα τα $k \geq 0$. Από επαγωγή έχουμε

Βασική υπόθεση :$k = 0 \longrightarrow n = 3^0 + h, \quad 0 \leq h < 2^0 \longrightarrow n = 1$

$g(n) = A(n)$ και $g(1) = 1 \longrightarrow A(1) = 1 \longrightarrow A(1) = 3^0 = 1$

Υποθέτουμε ότι $A(2^{k-1} + h) = 3^{k-1}, \quad 0 \leq h < 2^{k-1}$ και θα αποδείξουμε ότι :

$A(2^k + h) = 3^k, \quad 0 \leq h < 2^k$

1) n άρτιος : $n = 2n_1 \longrightarrow 2^k + h = 2n_1 \longrightarrow n_1 = 2^{k-1} + h/2$ Άρα :

$A(2n_1) = A(2^k + h) = 3A(n_1) = 3A(2^{k-1} + \frac{h}{2}) = 33^{k-1} = 3^k$

2) n περιττός : $n = 2n_1 + 1 \longrightarrow 2^k + h = 2n_1 + 1 \longrightarrow n_1 = 2^{k-1} + \frac{h-1}{2}$ Άρα :

$A(2n_1 + 1) = A(2^k + h) = 3A(n1) = 3A(2^{k-1} + \frac{h-1}{2}) = 33^{k-1} = 3^k$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Αντικαθιστώντας το $g(n) = 1$ στην (a_1) έχουμε $g(1) = 1 = a$ και :

$g(2n + 0) = 3g(n) + \gamma n + \beta_0 \longrightarrow 1 = 3 + \gamma n + \beta_0 \longrightarrow 1 = 3 + \gamma n + \beta_0 \longrightarrow$

$-2 = \gamma n + \beta_0$ **Άρα** $\beta_0 = -2$ **και** $\gamma = 0$

Αντίστοιχα και από την $g(2n + 1) = 3g(n) + \gamma n + \beta_1$ θα πάρουμε $\beta_1 = -2$ και $\gamma = 0$

Έτσι λοιπόν για $\alpha = 1, \gamma = 0, \beta_0 = \beta_1 = -2$ από την (a_2) έχουμε : $1 = A(n) - 2C(n) - 2D(n)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Αντικαθιστώντας το $g(n) = n$ στην (a_1) έχουμε $g(1) = 1 = a$ και :

$g(2n + 0) = 3g(n) + \gamma n + \beta_0 \longrightarrow 2n = 3n + \gamma n + \beta_0 \longrightarrow 0 = n + \gamma n + \beta_0 \longrightarrow$

$0 = (\gamma + 1)n + \beta_0$ **Άρα** $\beta_0 = 0$ **και** $\gamma = -1$

Αντίστοιχα και από την $g(2n + 1) = 3g(n) + \gamma n + \beta_1$ θα πάρουμε $\beta_1 = 1$ και $\gamma = -1$

Έτσι, για $\alpha = 1, \gamma = -1, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ από την (a_2) έχουμε : $n = A(n) - B(n) + D(n)$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε :

$A(n)a + B(n)\beta_0 + C(n)\beta_1 = (a\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}}\ldots\ldots\ldots\beta_{b_1}\beta_{b_0})_3 \qquad (1)$

$A(n) = 3^k \quad , \quad$ **Όπου** $\quad n = 2^k + h \qquad (2)$

$1 = A(n) - 2C(n) - 2D(n) \qquad (3)$

$n = A(n) - B(n) + D(n) \qquad (4)$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα πάρουμε :

$2 \longrightarrow A(n) = 3^k$

$2+3 \longrightarrow D(n) = \frac{3^k - 2C(n) - 1}{2} \qquad (5)$

$2+4+5 \longrightarrow B(n) = 3^k + \frac{3^k - 2C(n) - 1}{2} - n \qquad (6)$

$1+2+6 \longrightarrow 3^k a + (3^k + \frac{3^k - 2C(n) - 1}{2} - n)\beta_0 + C(n)\beta_1 = (a\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}}\ldots\ldots\ldots\beta_{b_1}\beta_{b_0})_3$

$\longrightarrow C(n) = \frac{(a\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}}\ldots\ldots\ldots\beta_{b_1}\beta_{b_0})_3 - a3^k - \beta_0 \frac{3^{k+1} - 2n}{2}}{\beta_1 + \beta_0}$

$\square$

Άσκηση 2. ***Μας δίνεται ότι $H(n) = J(n+1) - J(n)$. Η ισότητα (1.8) του βιβλίου μας λέει ότι $H(2n) = 2$ και $H(2n+1) = J(2n+2) - J(2n+1) = (2J(n+1) - 1) - (2J(n) + 1) = 2H(n) - 2$, για όλα τα $n \geq 1$. Επιπλέον, φαίνεται πιθανό να αποδειχθεί ότι $H(n) = 2$ για όλα τα n, από επαγωγή στο n. Τι λάθος υπάρχει εδώ*** ;

Απόδειξη.

Από το παραπάνω πρόβλημα ξέρουμε τα ακόλουθα :

$$H(n) = J(n+1) - J(n) \qquad (1)$$

Η ισότητα (1.8) του βιβλίου της σελίδας 10 μας δίνει :

$$J(1) = 1$$

$$J(2n) = 2J(n) - 1 \text{ , για όλα τα } n \geq 1 \qquad (2)$$

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1 \text{ , για όλα τα } n \geq 1$$

Αλλά πώς βγαίνουν τα αναπτύγματα του $H(2n)$ και $H(2n+1)$; Ας το δούμε αναλυτικά . Αρχικά ας δούμε αν το $H(2n) = 2$, για όλα τα $n \geq 1$, συμφωνεί με την άσκηση :

Με τον τρόπο αυτό, σύμφωνα με την ισότητα (1.8) θα έχουμε :

$$H(2n) = J(2n+1) - J(2n) \longrightarrow H(2n) = [2J(n) + 1] - [2J(n) - 1] \longrightarrow$$

$$H(2n) = 2J(n) + 1 - 2J(n) + 1 \longrightarrow$$

$$H(2n) = 2$$

Στη συνέχεια θα δούμε εάν το $H(2n+1) = J(2n+2) - J(2n+1) = (2J(n+1) - 1) - (2J(n) + 1) = 2H(n) - 2$, για όλα τα $n \geq 1$, συμφωνεί με την εκφώνηση της άσκησης

Έτσι, σύμφωνα με την ισότητα (1.8) θα έχουμε :

$$H(2n+1) = J(2n+1+1) - J(2n+1) \longrightarrow H(2n+1) = J(2n+2) - J(2n+1) \longrightarrow$$

$$H(2n+1) = J(2(n+1)) - J(2n+1) \longrightarrow H(2n+1) = [2J(n+1) - 1] - [2J(n) + 1] \longrightarrow$$

$$H(2n+1) = 2J(n+1) - 1 - 2J(n) - 1 \longrightarrow H(2n+1) = 2[J(n+1) - J(n)] - 2 \longrightarrow$$

$$H(2n+1) = 2H(n) - 2$$

Έτσι λοιπόν τώρα αποδείξαμε ότι τα ακόλουθα είναι σωστά :

$$H(2n) = 2 \text{ , για όλα τα } n \geq 1$$

$$H(2n+1) = 2H(n) - 2 \text{ , για όλα τα } n \geq 1$$

Αυτό που απομένει τώρα είναι να ικανοποιηθεί και η βασική περίπτωση, όταν δηλαδή το $n = 1$. Έτσι, για το $H(1)$ θα έχουμε :

$$H(1) = J(1+1) - J(1) \longrightarrow H(1) = J(2) - J(1) \longrightarrow H(1) = [2J(1) - 1] - J(1) \longrightarrow$$

$$H(1) = 2(1) - 1 - 1 \longrightarrow H(1) = 0$$

Όπως βλέπουμε παραπάνω, το πρόβλημα δεν συμφωνεί με την βασική περίπτωση για $n = 1$ καθώς $H(1) = 0$ και φυσικά $H(1) \neq 2$. Γι' αυτό και η σχέση $H(n) = 2$ για όλα τα n δεν είναι αληθής.

□

Άσκηση 3. ***Λύστε την παρακάτω αναδρομική σχέση :***

$Q_n \neq 0$, $Q_0 = \alpha$, $Q_1 = \beta$

$Q_n = \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}}$, *για όλα τα* $n > 1$

Υποθέστε ότι $Q_n \neq 0$, ***για όλα τα*** $n \geq 0$ **.**

Απόδειξη.

Έχοντας σαν δεδομένο την παραπάνω αναδρομική σχέση , θα δουλέψουμε βρίσκοντας κάθε όρο με αντικατάσταση . Άρα, θα έχουμε :

Για τους όρους Q_2 **και** Q_3 **:**

$$Q_2 = \frac{1+Q_1}{Q_0} = \frac{1+\beta}{\alpha} \ , \ Q_3 = \frac{1+Q_2}{Q_1} = \frac{1+\frac{1+\alpha}{\beta}}{\beta} = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} \longrightarrow Q_3 = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

Για τον όρο Q_4 **:**

$$Q_4 = \frac{1+Q_3}{Q_2} = \frac{1+\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}}{\frac{1+\beta}{\alpha}} = (\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\alpha\beta})(\frac{\alpha}{1+\beta}) = \frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{\beta(1+\beta)} = \frac{\alpha(\beta+1)+(\beta+1)}{\beta(1+\beta)} \longrightarrow Q_4 = \frac{1+\alpha}{\beta}$$

Για τον όρο Q_5 **:**

$$Q_5 = \frac{1+Q_4}{Q_3} = \frac{1+\frac{(1+\alpha)}{\beta}}{\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta}} = \frac{1+\alpha+\beta}{\beta}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1} = \alpha \longrightarrow Q_5 = \alpha = Q_0$$

Τέλος έχουμε για τα Q_6 **και** Q_7 **ότι :**

$$Q_6 = \frac{1+Q_5}{Q_4} = \frac{1+\alpha}{\frac{1+\alpha}{\beta}} = \beta \longrightarrow Q_6 = \beta = Q_1 \ , \ Q_7 = \frac{1+Q_6}{Q_5} = \frac{1+\beta}{\alpha} = Q_2 \longrightarrow Q_6 = Q_2$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι η ακολουθία είναι περιοδική.

Για να αποδείξουμε ότι ισχύει για όλα τα $n \geq 0$ **θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την μαθηματική επαγωγή , παίρνοντας πρώτα κάποιες παραδοχές , όπως :**

Όταν $n = 5k$ **τότε** $Q_n = \alpha$ **, όταν** $n = 5k+1$ **τότε** $Q_n = \beta$ **, όταν** $n = 5k+2$ **τότε** $Q_n = \frac{1+\beta}{\alpha}$ **, όταν** $n = 5k+3$ **τότε** $Q_n = \frac{1+\alpha+\beta}{\beta\alpha}$ **, τέλος όταν** $n = 5k+4$ **τότε** $Q_n = \frac{1+\alpha}{\beta}$**. Όπου** $k \geq 0$

Βήμα 1 : Για $k = 0$ **έχουμε τη σειρά :**

$$Q_0 = \alpha \ , \ Q_1 = \beta \ , \ Q_2 = \frac{1+\beta}{\alpha} \ , \ Q_3 = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} \ , \ Q_4 = \frac{1+\alpha}{\beta}$$

Βήμα 2 : Έστω ότι ισχύει για $k = m$ **δηλαδή :**

$$Q_{5m} = \alpha \ , \ Q_{5m+1} = \beta \ , \ Q_{5m+2} = \frac{1+\beta}{\alpha} \ , \ Q_{5m+3} = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} \ , \ Q_{5m+4} = \frac{1+\alpha}{\beta}$$

Βήμα 3 : Τέλος θα δείξουμε ότι ισχύει για $k = m + 1$.

$$Q_{5(m+1)} = \frac{1 + Q_{5(m+1)-1}}{Q_{5(m+1)-2}} = \frac{1 + Q_{5(m+4)}}{Q_{5(m+3)}} = \frac{1 + \alpha + \beta}{\beta} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta + 1} = \alpha \longrightarrow Q_{5(m+1)} = \alpha$$

$$Q_{5(m+1)+1} = \frac{1 + Q_{5(m+1)+1-1}}{Q_{5(m+1)+1-2}} = \frac{1 + Q_{5(m+1)}}{Q_{5m+4}} = \frac{1 + \alpha}{\frac{\beta}{\alpha+1}} = \beta \longrightarrow Q_{5(m+1)+1} = \beta$$

$$Q_{5(m+1)+2} = \frac{1 + Q_{5(m+1)+2-1}}{Q_{5(m+1)+2-2}} = \frac{1 + Q_{5(m+1)+1}}{Q_{5(m+1)}} = \frac{1 + \beta}{\alpha} = \beta \longrightarrow Q_{5(m+1)+2} = \frac{1 + \beta}{\alpha}$$

$$Q_{5(m+1)+3} = \frac{1 + Q_{5(m+1)+3-1}}{Q_{5(m+1)+3-2}} = \frac{1 + Q_{5(m+1)+2}}{Q_{5(m+1)+1}} = \frac{1 + \frac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta} \longrightarrow Q_{5(m+1)+3} = \frac{1 + \alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$Q_{5(m+1)+4} = \frac{1 + Q_{5(m+1)+4-1}}{Q_{5(m+1)+4-2}} = \frac{1 + Q_{5(m+1)+3}}{Q_{5(m+1)+2}} = (\frac{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}{\alpha\beta})(\frac{\alpha}{1 + \beta}) = \frac{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}{\beta(1 + \beta)} =$$

$$= \frac{\alpha(\beta + 1) + (\beta + 1)}{\beta(1 + \beta)} \longrightarrow Q_{5(m+1)+4} = \frac{1 + \alpha}{\beta}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε και για $k = m + 1$ άρα η λύση που βρήκαμε είναι αληθής

$\square$

Άσκηση 4. ***Μερικές φορές είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η επαγωγή προς τα πίσω, αποδεικνύοντας πράγματα από το*** n ***στο*** $n-1$ ***αντί να γίνεται αντίστροφα! Παραδείγματος χάριν, εξετάστε το παρακάτω :***

$$P(n) : x_1 \ldots\ldots x_n \leq [\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_n}{n}]^n \quad ,$$

Εάν

$$x_1, \ldots\ldots, x_n \geq 0$$

Αυτό είναι αληθές όταν $n = 2$ ***, με*** $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$

(α) Βάζοντας όπου $x_n = \frac{x_1+x_2\ldots\ldots+x_{n-1}}{(n-1)}$ ***να αποδειχθεί ότι από το*** $P(n)$ ***μπορούμε να βρούμε το*** $P(n-1)$ ***όποτε το*** $n > 1$

(β) Δείξτε ότι από το $P(n)$ ***και το*** $P(2)$ ***μπορούμε να βρούμε το*** $P(2n)$

(γ) Τέλος εξηγήστε γιατί αυτό κάνει το $P(n)$ ***αληθές για όλα τα*** n

Απόδειξη.

(α) Με την αντικατάσταση του x_n **με το** $x_n = \frac{x_1+x_2\ldots\ldots+x_{n-1}}{(n-1)}$ **θα έχουμε τα εξής :**

Αρχικά έχουμε :

$$x_1x_2 \ldots\ldots x_n \leq [\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_n}{n}]^n$$

$$\Longrightarrow x_1x_2 \ldots\ldots x_{n-1}\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{n-1}}{(n-1)} \leq [\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2\ldots\ldots+x_{n-1}}{(n-1)}}{n}]^n$$

$$\Longrightarrow x_1x_2 \ldots\ldots x_{n-1}\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{n-1}}{(n-1)} \leq [\frac{\frac{(n-1)(x_1+x_2\ldots\ldots+x_{n-1})}{n-1} + \frac{x_1+x_2\ldots\ldots+x_{n-1}}{(n-1)}}{n}]^n$$

$$\Longrightarrow x_1x_2 \ldots\ldots x_{n-1}\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{n-1}}{(n-1)} \leq [\frac{\frac{n(x_1+x_2\ldots\ldots+x_{n-1})}{n-1}}{n}]^n$$

$$\Longrightarrow x_1x_2 \ldots\ldots x_{n-1}\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{n-1}}{(n-1)} \leq [\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{n-1}}{n-1}]^n$$

Τέλος διαιρώντας και τα δύο μέλη με

$$\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{n-1}}{(n-1)}$$

θα έχουμε :

$$\Longrightarrow x_1 \ldots\ldots x_{n-1} \leq [\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{n-1}}{n-1}]^{n-1}$$

(β) Άν θέλουμε να αποδείξουμε το $P(2n)$ θα πρέπει πρώτα να δημιουργήσουμε το γινόμενο $x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_{2n}$. Σαν πρώτη σκέψη είναι να χρησιμοποιήσουμε το $P(n)$ δύο φορές αλλά με τον παρακάτω τρόπο :

Πρώτα θα χρησιμοποιήσουμε το $P(n)$ που μας δίνεται από την εκφώνηση, δηλαδή :

$$x_1 x_2 \ldots\ldots x_n \leq [\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_n}{n}]^n$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το $P(n)$ αλλά με δείκτες από $n+1$ εώς $2n$. Δηλαδή :

$$x_{n+1} x_{n+2} \ldots\ldots x_{2n} \leq [\frac{x_{n+1} + x_{n+2} \ldots\ldots + x_{2n}}{n}]^n$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα κατά μέλη θα έχουμε :

$$x_1 x_2 \ldots\ldots x_{2n} \leq [\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_n}{n} \frac{x_{n+1} + x_{n+2} \ldots\ldots + x_{2n}}{n}]^n$$

Για να συνεχίσουμε τώρα την απόδειξη της άσκησης θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και το $P(2)$. Αρχικά είναι υποχρεωτικό να το ορίσουμε. Σύμφωνα με την άσκηση το $P(2)$ ορίζεται :

$P(n): \ x_1 x_2 \ldots\ldots x_n \leq [\frac{x_1+x_2\ldots\ldots+x_n}{n}]^n$ **Έτσι το $P(2)$ θα είναι :** $x_1 x_2 \leq [\frac{x_1+x_2}{2}]^2$ **.Άν τώρα θέσουμε τα εξής :**

$y_1 = \frac{x_1+x_2\ldots\ldots+x_n}{n}$ **και** $y_2 = \frac{x_{n+1}+x_{n+2}\ldots\ldots+x_{2n}}{n}$ **Σύμφωνα με τον ορισμό του $P(2)$ θα έχουμε :**

$$[\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_n}{n} \frac{x_{n+1} + x_{n+2} \ldots\ldots + x_{2n}}{n}]^n \leq [[\frac{\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{2n}}{n}}{2}]^2]^n = [\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{2n}}{2n}]^{2n}$$

Άρα :

$$x_1 x_2 \ldots\ldots x_{2n} \leq [\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{2n}}{2n}]^{2n}$$

Άν τώρα δουλέψουμε αντίστροφα , χρησιμοποιώντας δηλαδή πρώτα το $P(2)$ και έπειτα το $P(n)$ θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα ;

Χρησιμοποιώντας το $P(2)$

$$\Longrightarrow x_1 x_2 \ldots\ldots x_{2n} \leq [\frac{x_1 + x_2}{2}]^2 [\frac{x_3 + x_4}{2}]^2 \ldots\ldots [\frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}]^2$$

Άν θέσουμε όπου $y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}^2, \ldots\ldots, y_n = \frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}^2$ **τότε χρησιμοποιώντας το $P(n)$ θα έχουμε :**

$$[\frac{x_1 + x_2}{2}]^2 [\frac{x_3 + x_4}{2}]^2 \ldots\ldots [\frac{x_{2n-1} + x_{2n}}{2}]^2 \leq [[\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x_{2n-1}+x_{2n}}{2}}{n}]^n]^2 = [[\frac{\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{2n-1}+x_{2n}}{2}}{n}]^n]^2$$

$$\Longrightarrow x_1 x_2 \ldots\ldots x_{2n} \leq [\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{2n}}{2n}]^{2n}$$

(γ) Η ιδέα εδώ είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής θεωρώντας ώς βάση ότι η $P(n)$ ισχύει όταν $n = 1, 2$ και επαγωγικά δουλεύοντας θα πούμε ότι : άν ισχύει για $n \leq k$ θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$

Για $n = 1$ έχουμε $[\frac{x_1}{1}]^1$ Έτσι έχουμε το $P(1)$ $n = 2$ έχουμε $[\frac{x_1+x_2}{2}]^2$ Έτσι έχουμε το $P(2)$

Υποθέτοντας,όπως αναφέραμε παραπάνω, ότι για $n \leq k$ ισχύει το $P(n)$, τί γίνεται για $n = k + 1$

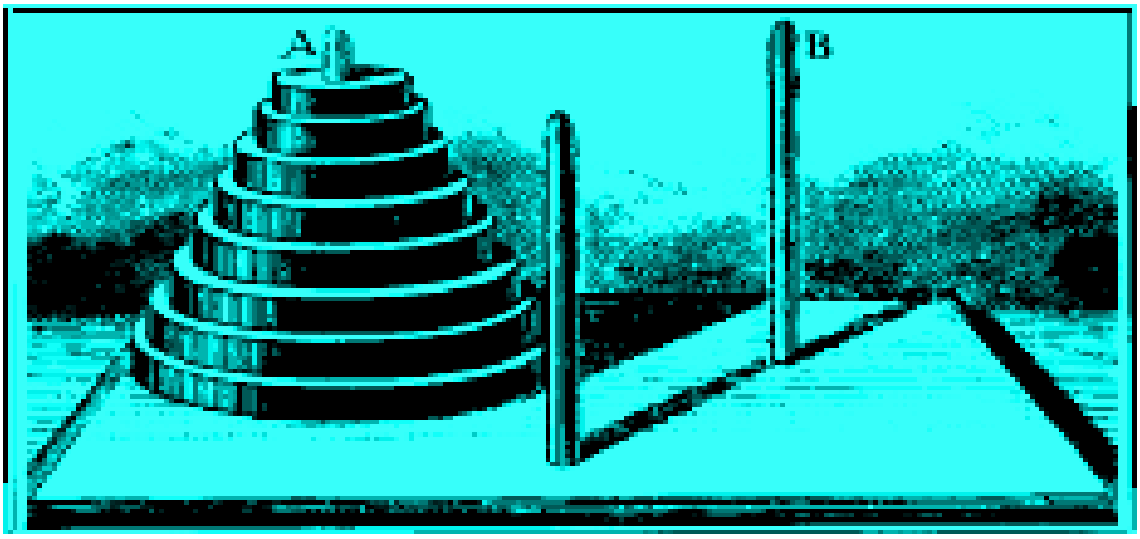
Περίπτωση 1 : Άν $k + 1$ είναι άρτιος .Τότε ο $\frac{k+1}{2}$ είναι ακέραιος και μικρότερος από τον $k + 1$ έτσι το $P(\frac{k+1}{2})$ ισχύει και βασιζόμενοι στο ερώτημα (β) , εφόσον ισχύει το $P(\frac{k+1}{2})$ και το $P(2)$ τότε $\longrightarrow P(k + 1)$

Περίπτωση 2 : Άν $k+1$ είναι περιττός .Τότε ο $\frac{k+2}{2}$ είναι ακέραιος και μικρότερος από τον $k + 1$ έτσι το $P(\frac{k+2}{2})$ ισχύει και βασιζόμενοι στο ερώτημα (β) , εφόσον ισχύει το $P(\frac{k+2}{2})$ και το $P(2)$ τότε $\longrightarrow P(k+2)$.Τέλος στηριζόμενοι και στο ερώτημα (α) , $P(k+2) \longrightarrow P(k+1)$

Επομένως , για $n = k + 1$ το $P(2)$ ισχύει για όλες τις περιπτώσεις .

□

Άσκηση 5. ***Βρείτε την πιό σύντομη ακολουθία κινήσεων , σύμφωνα με την οποία μπορούμε να μεταφέρουμε έναν πύργο n δίσκων από τον αριστερό γόμφο A στο δεξιό γόμφο B, εάν οι άμεσες κινήσεις μεταξύ του A και του B απαγορεύονται. Κάθε κίνηση πρέπει να είναι πρός ή από το μέσο γόμφο.***



Σχήμα 1: The tower of hanoi
(Όπως είναι γνωστό ένας μεγαλύτερος δίσκος δεν πρέπει ποτέ να εμφανιστεί επάνω από έναν μικρότερο.)

Απόδειξη.

Η αναδρομική σχέση που προκύπτει από το πρόβλημα του πύργου του *hanoi* **είναι ένα από τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα. Για την εύρεση μιας λύσης θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα.**

Βήμα 1. Εξετάστε τις μικρές περιπτώσεις. Αυτό μας δίνει τη διορατικότητα στο πρόβλημα και μας βοηθά στα επόμενα δύο βήματα.

Βήμα 2. Βρείτε και αποδείξτε μια μαθηματική έκφραση για την ποσότητα ενδιαφέροντος. Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας κάποιες διαδοχικές επαναλήψεις.

Βήμα 3. Βρείτε και αποδείξτε μια κλειστή μορφή για τη μαθηματική έκφρασή μας. Για τον πύργο του *hanoi* **, αυτό θα είναι η λύση της αναδρομικής σχέσης που θα βρούμε στο βήμα 2.**

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αναδρομικά ως εξής:

Αρχικά εξετάστε την περίπτωση, $n = 1$**, όπου πρέπει να κινήσουμε έναν ενιαίο δίσκο από το A προς το B. Δεδομένου ότι οι άμεσες κινήσεις απαγορεύονται αυτό απαιτεί 2 κινήσεις και ως εκ τούτου** $T_1 = 2$**.(Όπου** T_n **είναι , ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που θα κάνουμε για να μεταφέρουμε τους** n **δίσκους από το A στο B μέσω του μεσαίου γόμφου.)**

Ορίζουμε το πώς θα μεταφέρουμε τους n **δίσκους από το γόμφο A προς το γόμφο B αναδρομικά ως εξής :**

Από την υπόθεση ξέρουμε πως για να κινήσουμε τους $n-1$ **κορυφαίους δίσκους από το A προς το B χωρίς απευθείας κίνηση , θα χρειαστούμε** T_{n-1} **κινήσεις.**

Κινήστε το μεγαλύτερο δίσκο από το A προς το μεσαίο γόμφο. Άρα θα χρειαστούμε μία κίνηση.

Πάλι από την υπόθεση ξέρουμε πως για να κινήσουμε τους $n-1$ κορυφαίους δίσκους από το B προς A χωρίς απευθείας κίνηση , θα χρειαστούμε T_{n-1} κινήσεις.

Κινήστε το μεγαλύτερο δίσκο από το μεσαίο γόμφο προς το B. Άρα θα χρειαστούμε πάλι μία κίνηση.

Πάλι από την υπόθεση ξέρουμε πως αν κινήσουμε τους $n-1$ κορυφαίους δίσκους από το A προς το B χωρίς απευθείας κίνηση , θα χρειαστούμε T_{n-1} κινήσεις.

Μετά από αυτές τις κινήσεις όλοι οι n δίσκοι θα είναι σωστά διαταγμένοι στο γόμφο B. Κατά συνέπεια μπορούμε να δούμε ότι οι συνολικές κινήσεις που απαιτούνται για να μεταφέρουμε τους n δίσκους είναι $T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 3T_{n-1} + 2$. Δοκιμάζοντας τώρα μικρές τιμές στον τύπο που βρήκαμε , θα έχουμε:

n	T_n
1	$T_1 = 2$
2	$T_2 = 3T_1 + 2 = 3 * 2 + 2 = 8$
3	$T_3 = 3T_2 + 2 = 3 * 8 + 2 = 26$
4	$T_4 = 3T_3 + 2 = 3 * 26 + 2 = 80$
	....

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε εύκολα να μαντέψουμε ότι η λύση στην αναδρομική μας σχέση θα είναι :

$$T_n = 3^n - 1$$

Τώρα θέλουμε να αποδείξουμε με επαγωγή ότι ισχύει η σχέση $T_n = 3^n - 1$

Για $n = 0$ έχουμε ότι : $T_1 = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Και η επαγωγή συνεχίζεται για $n > 0$, εάν εμείς υποθέσουμε ότι η σχέση μας ισχύει για n , θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n + 1$. Οπότε θα έχουμε :

$$T_{n+1} = 3T_n + 2 = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 1$$

Οπότε ισχύει για όλα τα n.

□

Άσκηση 6. ***Ορισμένες από τις περιοχές που ορίζονται από τις n γραμμές στο επίπεδο είναι άπειρες, ενώ άλλες είναι φραγμένες. Ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός αριθμός των φραγμένων περιοχών ;***

Απόδειξη.

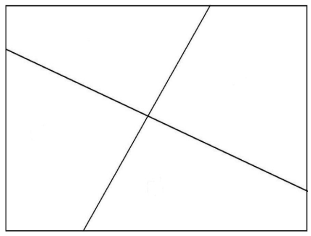
Πρώτον, όπως και στα περισσότερα ερωτήματα αναδρομής , ας προσπαθήσουμε να το αναλύσουμε για μικρές τιμές του n και στη συνέχεια να δούμε αν μπορούμε να κάνουμε γενικεύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Για $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ και $n = 4$, θα λάβουμε αντίστοιχα τις παρακάτω περιοχές στο επίπεδο.

$n = 1$

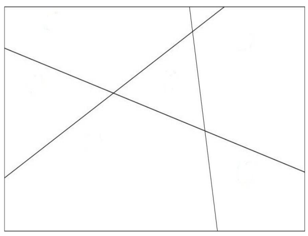
(2 άπειρες περιοχές)

$n = 2$



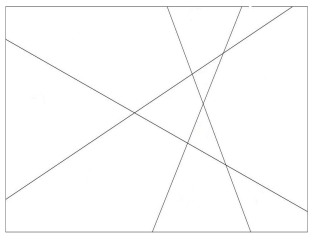
(4 άπειρες περιοχές)

$n = 3$



(1 φραγμένη και 6 άπειρες περιοχές)

$n = 4$



(3 φραγμένες και 8 άπειρες περιοχές)

Ας συγκρίνουμε τώρα τα n , L_n ($L_n =$ ο μέγιστος αριθμός των περιοχών που ορίζονται από τις n γραμμές) και B_n. Όπου $B_n =$ ο μέγιστος αριθμός φραγμένων περιοχών που ορίζονται από τις n γραμμές.

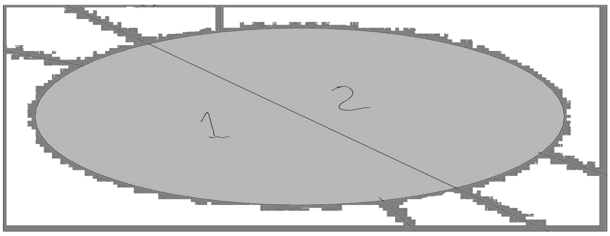
n	1	2	3	4
L_n	2	4	7	11
B_n	0	0	1	3

Καταρχήν πρέπει να αναφερθεί , ότι προσπαθούμε να βρούμε τον μέγιστο δυνατό αριθμό φραγμένων περιοχών. Ο μέγιστος αριθμός θα καθοριστεί από n μη παράλληλες γραμμές. Όπως αναφέρεται στο βιβλίο, γνωρίζουμε ότι ο μέγιστος αριθμός περιοχών L_n , που μπορούν να σχηματιστούν δίνεται από την αναδρομική σχέση $L_n = L_{n-1} + n$ και ο κλειστός τύπος του L_n δίνεται στη σελίδα 7 του βιβλίου *concrete mathematics* **και είναι:**

$$L_n = n\frac{(n+1)}{2} + 1 \quad n \geq 0 \qquad (1.6)$$

Παρακάτω είναι μια απεικόνιση του τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε τη νιοστή γραμμή.

Ο κύκλος αντιπροσωπεύει την περιφέρεια στην οποία βρίσκονται τα σημεία τομής.



Όπως μπορείτε να δείτε από την παραπάνω εικόνα (καθώς και από τα παραδείγματα για $n = 1$ **,** $n = 2$ **,** $n = 3$ **και** $n = 4$**) , η νιοστή γραμμή μπορεί να κόψει το επίπεδο σε 2 νέες άπειρες περιοχές. Αυτό σημαίνει ότι από τις** n **νέες περιοχές , οι** $n-2$ **θα πρέπει να είναι οι νέες φραγμένες περιοχές. Αυτό κρύβει την ακόλουθη αναδρομική σχέση:**

$$B_0 = 0, B_1 = 0, B_2 = 0 \ \textbf{οπότε} \ B_n = B_{n-1} + (n-2) \ \ n > 2$$

Έτσι , τώρα μπορούμε να βρούμε τον τύπο της αναδρομικής σχέσης $B_n = B_{n-1} + (n-2)$ **, ως εξής :**
$B_n = B_{n-1} + (n-2)$
$B_n = B_{n-1} + (n-3) + (n-2)$
$B_n = B_{n-1} + (n-4) + (n-3) + (n-2)$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$B_n = B_0+B_1+B_2+S_{n-2}$, **όπου** $S_{n-2} = 1+2+3+\ldots+(n-3)+(n-2)$. **Ξέρουμε από πρίν ότι:** $B_0 = 0, B_1 = 0, B_2 = 0 \Longrightarrow B_n = S_{n-2}$

από τη σελίδα 6 του βιβλίου και τη σχέση (1.5) γνωρίζουμε ότι ισχύει :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \textbf{Άρα για } n = n-2 \textbf{ θα έχουμε}, \quad B_n = S_{n-2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Εφόσον βρήκαμε τον τύπο , αυτό που μας μένει είναι να αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι ισχύει πάντα.
Έστω $n = 3$ **τότε** $B_3 = \frac{(3-2)(3-1)}{2} = 1$ **το οποίο ισχύει.**
Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n < k$ **δηλαδή** $B_{k-1} = \frac{(k-3)(k-2)}{2}$ **και θα δείξουμε ότι ισχύει για** $n = k$**.**
$B_k = \frac{(k-3)(k-2)}{2} = B_{k-1} + (k-2) = \frac{(k-3)(k-2)}{2} + 2\frac{(k-2)}{2} = \frac{k^2-3k+2}{2} = \frac{(k-2)(k-1)}{2}$

□

Άσκηση 7. ***Πόσα κομμάτια τυριού μπορείτε να λάβετε από ένα ενιαίο παχύ κομμάτι εάν το κόψετε σε 5 ευθείες φέτες ; (το τυρί πρέπει να μείνει στην αρχική του θέση ενώ το κόβετε , και κάθε φέτα πρέπει να αντιστοιχεί σε ένα τρισδιάστατο επίπεδο.) Βρείτε μια αναδρομική σχέση για το P_n , που είναι ο μέγιστος αριθμός τρισδιάστατων περιοχών που μπορούν να οριστούν από τα n διαφορετικά επίπεδα.***

Απόδειξη.

Για να προσεγγίσουμε αυτό το πρόβλημα αρχικά θα πρέπει να αναφερθούμε στο πρόβλημα του βιβλίου (*concrete mathematics*) της σελίδας 4 (είναι χρήσιμο για την συνέχεια της άσκησης) , το οποίο μας λέει ότι:

Ο μέγιστος αριθμός L_n των περιοχών που ορίζεται από n γραμμές στο επίπεδο , δίνεται από τον τύπο :

$$L_n = L_{n-1} + n \ , \qquad n > 0 \qquad (1.5)$$

Και η λύση της παραπάνω αναδρομικής σχέσης δίνεται ακολούθως από τον τύπο :

$$L_n = n\frac{(n+1)}{2} + 1 \qquad (1.6)$$

Θα εξετάσουμε την πιο γενική περίπτωση, όπου τα επίπεδα που παρεμβάλλονται δεν είναι παράλληλα , δηλαδή τα κοψίματα που θα κάνουμε στην επιφάνεια δεν θα σχηματίζουν παράλληλες γραμμές και αυτό γιατί η άσκηση μας ζητάει να βρούμε τον μέγιστο αριθμό τρισδιάστατων περιοχών. Συνεχίζοντας λοιπόν την επίλυση της άσκησης παρατηρούμε ότι: Για το $n^{οστο}$ επίπεδο , όλα τα προηγούμενα $n-1$ τεμνόμενα επίπεδα θα κόψουν το $n^{οστο}$ επίπεδο και θα του δημιουργήσουν το πολύ $n-1$ τομές.

Έτσι λοιπόν και σύμφωνα με την σχέση (1.6) αυτές οι τομές θα διαιρέσουν το $n^{οστο}$ επίπεδο το πολύ σε $1 + n\frac{(n-1)}{2}$ περιοχές (αντικαθιστώντας στην (1.6) όπου $n = n-1$).

Κατά συνέπεια η αναδρομική σχέση που περιγράφει το μέγιστο αριθμό των εφικτών περιοχών δημιουργώντας n τομές είναι :

$$P_n = P_{n-1} + L_{n-1} = P_{n-1} + 1 + n\frac{(n-1)}{2}$$

Δοκιμάζοντας τώρα μικρές τιμές στον τύπο που βρήκαμε , θα έχουμε:

n	P_n
1	$P_1 = 2$
2	$P_2 = P_1 + L_1 = 2 + 2 = 4 = \frac{1*2*3}{6} + 2 + 1$
3	$P_3 = P_2 + L_2 = 4 + 4 = 8 = \frac{2*3*4}{6} + 3 + 1$
4	$P_4 = P_3 + L_3 = 8 + 7 = 15 = \frac{3*4*5}{6} + 4 + 1$
5	$P_5 = P_4 + L_4 = 15 + 11 = 26 = \frac{4*5*6}{6} + 5 + 1$
6	$P_6 = P_5 + L_5 = 26 + 16 = 42 = \frac{5*6*7}{6} + 6 + 1$

. . . .

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε εύκολα να μαντέψουμε ότι η λύση στην αναδρομική μας σχέση θα είναι :

$$P_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + n + 1$$

Τέλος θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι ισχύει η σχέση $P_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + n + 1$

Για $n = 0$ **έχουμε ότι :** $P_0 = \frac{(-1)0(1)}{6} + 0 + 1 = 1$

Και η επαγωγή συνεχίζεται για $n > 0$ **εάν εμείς υποθέσουμε ότι η σχέση μας ισχύει όταν αντικατασταθεί το** n **με το** $n-1$**. Οπότε :**

$$P_n = P_{n-1} + 1 + n\frac{(n-1)}{2} = \frac{(n-2)(n-1)(n)}{6} + n + n\frac{(n-1)}{2} + 1$$

Άρα :

$$P_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + n + 1$$

$\square$

Άσκηση 8. *Χρησιμοποιήστε την* repertoire method *για να λύσετε την 5 παραμετρική αναδρομική σχέση :*

$h(1) = a$

$h(2n + j) = 4h(n) + \gamma_j n + \beta_j$, *όπου* $j = 0, 1$ *και* $n \geq 1$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Δοκιμάστε την σχέση $h(n) = n$ ***και την*** $h(n) = n^2$

Απόδειξη.

Με την *repertoire method* **εξετάζουμε μια σειρά από περιπτώσεις και στο τέλος καταλήγουμε στη λύση μας. Στη συγκεκριμμένη αναδρομική σχέση αν εισάγουμε τα** $j = 0, 1$ **θα καταλήξουμε στο ακόλουθο :**

$h(1) = a$

$h(2n + 0) = 4h(n) + \gamma_0 n + \beta_0$ $\qquad (a_1)$

$h(2n + 1) = 4h(n) + \gamma_1 n + \beta_1$

Η παραπάνω σχέση λοιπόν έχει για παραμέτρους τα : $\alpha, \beta_0, \beta_1, \gamma_0$ **και** γ_1

(1)Αρχικά λοιπόν θα πρέπει να βρούμε μερικές αρχικές τιμές για την παραπάνω σχέση.

$h(1) = a$

$h(2) = h(2(1) + 0) = 4h(1) + \gamma_0 + \beta_0 = 4a + \gamma_0 + \beta_0$

$h(3) = h(2(1) + 1) = 4h(1) + \gamma_1 + \beta_1 = 4a + \gamma_1 + \beta_1$

$h(4) = h(2(2) + 0) = 4h(2) + 2\gamma_0 + \beta_0 = 16a + 6\gamma_0 + 5\beta_0$

$h(5) = h(2(2) + 1) = 4h(2) + 2\gamma_1 + \beta_1 = 16a + 4\gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\beta_0 + \beta_1$

$h(6) = h(2(3) + 0) = 4h(3) + 3\gamma_0 + \beta_0 = 16a + 4\gamma_1 + 3\gamma_0 + \beta_0 + 4\beta_1$

$h(7) = h(2(3) + 1) = 4h(3) + 3\gamma_1 + \beta_1 = 16a + 7\gamma_1 + 5\beta_1$

$h(8) = h(2(4) + 0) = 4h(4) + 4\gamma_0 + \beta_0 = 64a + 28\gamma_0 + 21\beta_0$

Σε αυτό το στάδιο θα προσπαθήσουμε , σύμφωνα με τα παραπάνω , να βρούμε τη γενική μορφή της αναδρομικής σχέσης. Έτσι, θα έχουμε :

n	$h(n)$
1	$a + 0\gamma_0 + \gamma_1 + 0\beta_0 + 0\beta_1$
2	$4a + \gamma_0 + \beta_0 + 0\beta_1 + 0\gamma_1$
3	$4a + \gamma_1 + 0\gamma_0 + 0\beta_0 + \beta_1$
4	$16a + 6\gamma_0 + 5\beta_0 + 0\beta_1 + 0\gamma_1$
5	$16a + 4\gamma_0 + 2\gamma_1 + 4\beta_0 + \beta_1$
6	$16a + 4\gamma_1 + 3\gamma_0 + \beta_0 + 4\beta_1$
7	$16a + 7\gamma_1 + 0\gamma_0 + 0\beta_0 + 5\beta_1$
8	$64a + 28\gamma_0 + 0\gamma_1 + 21\beta_0 + 0\beta_1$

(A)

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του προηγούμενου πίνακα (A) , η γενική μορφή της σχέσης μας θα είναι:

$h(n) = A(n)a + B(n)\beta_0 + C(n)\beta_1 + D(n)\gamma_0 + E(n)\gamma_1, \qquad (a_2)$

Μια σημαντική παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι η εξής : Για όλα τα n **με** $n \geq 1$ **, το** n **μπορεί να αναπαρασταθεί από την σχέση** $2^k + l$ **, όπου ,** 2^k **είναι η μεγαλύτερη δύναμη του** 2 **, μην υπερβαίνοντας το** n **, και** $0 \leq l < 2^k$**. Από τον παραπάνω πίνακα (A) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι , όταν** $n = 2^k + l$ **, τότε ο συντελεστής του α είναι ο** 4^k**. Για παράδειγμα όταν το** $n = 7$ **, τότε** $n = 2^2 + 3$ **και ο συντελεστής του α είναι ο** $4^2 = 16$**. [Η παρατήρηση αυτή θα χρειαστεί στη συνέχεια]**

Εν συνεχεία, θα βρούμε τον ακριβή τύπο χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (1.18) του βιβλίου η οποία είναι :

$f(j) = a_j, \quad$ για $1 \leq i < d$

$f(dn + j) = cf(n) + \beta_j \ , \quad$ για $0 \leq j < d$ και $n \geq 1$

$f((b_m b_{m-1} b_{m-2} \ldots\ldots\ldots b_1 b_0)_d) = (a_{b_m} \beta_{b_{m-1}} \beta_{b_{m-2}} \ldots\ldots\ldots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_c$

Στην περίπτωσή μας τώρα θα πρέπει να βάλουμε στη σχέση (a_1) **όπου** $\gamma_0, \gamma_1 = 0$ **και θα έχουμε :**

$h(1) = a$

$h(2n + 0) = 4h(n) + \beta_0, \qquad (a_3)$

$h(2n + 1) = 4h(n) + \beta_1$, και $n \geq 1$

Έτσι λοιπόν για $d = 2$ **και** $c = 4$ **θα έχουμε :**

$n = (1 b_m b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_0)_2 \qquad$ και $\qquad f((1 b_m b_{m-1} b_{m-2} \ldots\ldots\ldots b_1 b0)_2) = (a \beta_{b_{m-1}} \beta_{b_{m-2}} \ldots\ldots\ldots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_4$

Από την (a_2) **ξέρουμε ότι** $g(n) = A(n)a + B(n)\beta_0 + C(n)\beta_1 + D(n)\gamma_0 + E(n)\gamma_1$ **και για** $\gamma_0, \gamma_1 = 0$ **παίρνουμε :**

$A(n)a + B(n)\beta_0 + C(n)\beta_1 = (a \beta_{b_{m-1}} \beta_{b_{m-2}} \ldots\ldots\ldots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_4$

Με τον παραπάνω τρόπο ορίσαμε τα $A(n), B(n)$ **και** $C(n)$ **. Στη συνέχεια θα πάρουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις**

Περίπτωση 1: $h(n) = A(n)$ **για όλα τα** $n \in N$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου $\gamma_0 = \gamma_1 = \beta_0 = \beta_1 = 0$ **και α = 1. Σε αυτή την περίπτωση η σχέση μας θα γίνει :**

$h(n) = A(n)1 + B(n)0 + C(n)0 + D(n)0 + E(n)0$

$h(n) = A(n) \qquad$ για όλα τα $n \in N$

Και η αναδρομική σχέση (a_3) **θα πάρει την εξής μορφή :**

$A(1) = a$

$A(2n + j) = 3A(n) \qquad$ για $j = 0, 1$ και $n \in N$

Από προηγούμενη παρατήρηση που έγινε, δείξαμε ότι $A(n) = 4^k$ **όπου** $n = 2^k + l$**. Τώρα θέλουμε να αποδείξουμε ότι** $A(n) = 4^k$ **για όλα τα** $k \geq 0$**. Από επαγωγή έχουμε**

Βασική υπόθεση :$k = 0 \longrightarrow n = 4^0 + l, \quad 0 \leq l < 2^0 \longrightarrow n = 1 h(n) = A(n)$ **και** $h(1) = 1 \longrightarrow A(1) =$

$1 \longrightarrow A(1) = 4^0 = 1$

Υποθέτουμε ότι $A(2^{k-1}+l) = 4^{k-1}, \quad 0 \leq l < 2^{k-1}$ **και θα αποδείξουμε ότι :**

$A(2^k+l) = 4^k, \quad 0 \leq l < 2^k$

1) n **άρτιος :** $n = 2n_1 \longrightarrow 2^k + l = 2n_1 \longrightarrow n_1 = 2^{k-1} + l/2$ **Άρα :**

$A(2n_1) = A(2^k+l) = 4A(n_1) = 4A(2^{k-1}+\frac{l}{2}) = 44^{k-1} = 4^k$

2) n **περιττός :** $n = 2n_1+1 \longrightarrow 2^k + l = 2n_1 + 1 \longrightarrow n_1 = 2^{k-1} + \frac{l-1}{2}$ **Άρα :**

$A(2n_1+1) = A(2^k+l) = 4A(n1) = 4A(2^{k-1}+\frac{l-1}{2}) = 44^{k-1} = 4^k$

Περίπτωση 2: Αντικαθιστώντας το $h(n) = 1$ **στην** (a_1) **έχουμε** $h(1) = 1 = a$ **και :**

$h(2n+0) = 4h(n) + \gamma_0 n + \beta_0 \longrightarrow 1 = 4 + \gamma_0 n + \beta_0 \longrightarrow \beta_0 = -3$ και $\gamma_0 = 0$

Αντίστοιχα και από την $h(2n+1) = 4h(n) + \gamma_1 n + \beta_1$ **θα πάρουμε** $\beta_1 = -3$ **και** $\gamma_1 = 0$

Έτσι λοιπόν για $\alpha = 1, \gamma_0 = 0, \gamma_1 = 0, \beta_0 = \beta_1 = -3$ **από την** (a_2) **έχουμε :** $1 = A(n) - 3B(n) - 3C(n)$

Περίπτωση 3: Αντικαθιστώντας το $h(n) = n$ **στην** (a_1) **έχουμε** $h(1) = 1 = a$ **και :**

$h(2n+0) = 4h(n) + \gamma_0 n + \beta_0 \longrightarrow 2n = 4n + \gamma_0 n + \beta_0 \longrightarrow 0 = 2n + \gamma_0 n + \beta_0 \longrightarrow \beta_0 = 0$ και $\gamma_0 = -2$

Αντίστοιχα και από την $h(2n+1) = hg(n) + \gamma_1 n + \beta_1$ **θα πάρουμε** $\beta_1 = 1$ **και** $\gamma_1 = -2$

Έτσι λοιπόν για $\alpha = 1, \gamma_0 = -2, \gamma_1 = -2, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ **από την** (a_2) **έχουμε :** $n = A(n) + C(n) - 2D(n) - 2E(n) \quad n \geq 1$

Περίπτωση 4: Αντικαθιστώντας το $h(n) = n^2$ **στην** (a_1) **έχουμε** $h(1) = 1 = a$ **και :**

$h(2n+0) = 4h(n) + \gamma_0 n + \beta_0 \longrightarrow 4n^2 = 4n^2 + \gamma_0 n + \beta_0 \longrightarrow 0 = \gamma_0 n + \beta_0 \longrightarrow \beta_0 = 0$ και $\gamma_0 = 0$ **Αντίστοιχα και από την** $h(2n+1) = hg(n) + \gamma_1 n + \beta_1$ **θα πάρουμε** $\beta_1 = 1$ **και** $\gamma_1 = 4$ **Έτσι λοιπόν για** $\alpha = 1, \gamma_0 = 0, \gamma_1 = 4, \beta_0 = 0, \beta_1 = 1$ **από την** (a_2) **έχουμε :** $n^2 = A(n) + C(n) + 4E(n) \quad n \geq 1$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε :

$A(n)a + B(n)\beta_0 + C(n)\beta_1 = (a\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}} \ldots\ldots\ldots \beta_{b_1}\beta_{b_0})_4 \quad (0), \quad A(n) = 4^k$, **Όπου** $n = 2^k + l \quad (1)$

$1 = A(n) - 3B(n) - 3C(n) \quad (2), \quad n = A(n) + C(n) - 2D(n) - 2E(n) \quad (3), \quad n^2 = A(n) + C(n) + 4E(n) \quad (4)$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα πάρουμε :

$$(1) \longrightarrow A(n) = 4^k \quad , \quad (1)+(2) \longrightarrow B(n) = \frac{1-4^k}{3} \quad (5), \quad (1)+(4) \longrightarrow E(n) = \frac{n^2 - 4^k - C(n)}{4} - n \qquad (6)$$

$$(1)+(3)+(6) \longrightarrow D(n) = \frac{\frac{(3)4^k}{2} + 3\frac{C(n)}{2} - \frac{n^2}{2} - n)}{2} \qquad (7)$$

$$(0)+(1)+(5) \longrightarrow 4^k a + \frac{1-4^k}{3}\beta_0 + C(n)\beta_1 = (a\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}} \ldots\ldots\ldots \beta_{b_1}\beta_{b_0})_4$$

$$\longrightarrow C(n) = \frac{(a\beta_{b_{m-1}}\beta_{b_{m-2}} \ldots\ldots\ldots \beta_{b_1}\beta_{b_0})_4 - a4^k - \beta_0\frac{1-4^k}{3}}{\beta_1 + \beta_0}$$

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 9	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 4 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 10	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 9 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 11	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 11 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 12	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 15 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 13	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 19 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 14	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 24 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 15	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 16 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 16	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 27 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 17	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 23 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 18	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 21 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 19	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 20 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 20	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 29 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 21	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 31 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

Άσκηση 9. ***Εκφράστε το τριπλό άθροισμα (1) σαν τρία αθροίσματα ώς εξής :***

$$\sum_{1\le i<j<k\le 4} a_{ijk} \qquad (1)$$

α: Αθροίζοντας πρώτα στο k ,στη συνέχεια στο j και τέλος στο i.

β: Αθροίζοντας πρώτα στο i ,στη συνέχεια στο j και τέλος στο k.

Τέλος να γραφούν τα τριπλά αθροίσματα ολοκληρωμένα , χωρίς τον συμβολισμό $\sum$, χρησιμοποιώντας παρενθέσεις έτσι ώστε να φαίνεται τι πρόκειται να προστεθεί αρχικά.

Απόδειξη.

Ο συμβολισμός $\sum$ εμφανίζεται πάρα πολλές φορές σε αυτή την εργασία , έτσι πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι ξέρουμε ακριβώς τι σημαίνει. Τυπικά , γράφουμε :

$$\sum_{P(k)} a_k \qquad (2.4)$$

σαν συντομογραφία για το άθροισμα όλων των a_k όρων έτσι ώστε το k είναι ένας ακέραιος αριθμός που ικανοποιεί μια δεδομένη συνθήκη $P(k)$. Η συνθήκη $P(k)$ είναι οποιαδήποτε έκφραση για το k και συγκεκριμένα στην άσκησή μας έχουμε : $P(k) = 1 \le i < j < k \le 4$. Μετά από αυτή τη μικρή εισαγωγή ας δούμε τώρα τα ερωτήματα (α) , (β) με τη σειρά.

(α) Από σχέση (1) ξέρουμε ότι ισχύει : $1 \le i < j < k \le 4$ έτσι σύμφωνα με αυτό εφόσον $i < j$ και $j < k$ τότε $j \ge i+1$ και $k \ge j+1$ αντίστοιχα. Επίσης από τον τύπο (2.28) γνωρίζουμε ότι:$\sum_{j\in J,k\in K} a_j b_k = \left(\sum_{j\in J} a_j\right)\left(\sum_{k\in K} b_k\right)$ και από τη σχέση (2.32) ξέρουμε ότι : $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}$. Οπότε το άθροισμά μας θα έχει ως εξής :

$$\sum_{1\le i<j<k\le 4} a_{ijk} = \sum_{1\le i<4}\sum_{i+1\le j<4}\sum_{j+1\le k\le 4} a_{ijk} = \sum_{1\le i\le 2}\sum_{i+1\le j\le 3}\sum_{j+1\le k\le 4} a_{ijk}$$

Και υπολογίζοντας εύκολα τα αθροίσματα , παίρνουμε :

$$\sum_{1\le i<j<k\le 4} a_{ijk} = \sum_{1\le i\le 2}\sum_{i+1\le j\le 3}\sum_{j+1\le k\le 4} a_{ijk} = ((a_{123} + a_{124}) + a_{134}) + a_{234}$$

(β) Η μόνη διαφορά που θα έχουμε τώρα σε σχέση με το ερώτημα (α) είναι ότι θα αλλάξουμε τη σειρα της άθροισης. Αθροίζοντας πρώτα από το k με $1 \le k \le 4$ έπειτα από το j με $1 \le j \le k-1$ και τέλος από το i με $1 \le i \le j-1$(βασιζόμενοι πάντα στην σχέση $1 \le i < j < k \le 4$).Οπότε το άθροισμα μας θα έχει ως εξής :

$$\sum_{1\le i<j<k\le 4} a_{ijk} = \sum_{1\le k<4}\sum_{1\le j<k-1}\sum_{1\le i\le j-1} a_{ijk} = \sum_{3\le k\le 4}\sum_{2\le j\le k-1}\sum_{1\le i\le j-1} a_{ijk}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα αθροισματα όπως στο ερώτημα (α):

$$\sum_{1\le i<j<k\le 4} a_{ijk} = \sum_{3\le k\le 4}\sum_{2\le j\le k-1}\sum_{1\le i\le j-1} a_{ijk} = a_{123} + (a_{124} + (a_{134} + a_{234}))$$

□

Άσκηση 10. ***Ποιός είναι ο νόμος των εκθετών για την αυξανόμενη παραγοντική δύναμη , ο οποίος είναι ανάλογος με την σχέση (2.52)***

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} \qquad (2.52)?$$

Χρησιμοποιήστε αυτό για να ορίσετε το $x^{\overline{-n}}$.

Απόδειξη.

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση της άσκησης ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις και ας δώσουμε κάποιους χρήσιμους ορισμούς. Παρατηρούμε ότι :
$x^{\overline{0}} = 1$
$x^{\overline{1}} = x$
$x^{\overline{2}} = x(x+1)$
$x^{\overline{3}} = x(x+1)(x+2)$
$x^{\overline{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3)$
Άρα το $x^{\overline{m}}$ **και το** $x^{\overline{m+1}}$ **είναι όμοια , διαφέρουν μόνο κατά ένα παράγοντα. Οπότε μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση πως για τους ακέραιους** $m, n \geq 0$ **ισχύει ότι ,** $x^{\overline{m+1}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{1}}$**. Έτσι στη γενική περίπτωση θα έχουμε** $x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$**. Η υπόθεση που κάναμε λοιπόν αποδεικνύεται ώς εξής :**

Εξόρισμού , για τους ακέραιους $m, n \geq 0$ **έχουμε ότι :**

$$x^{\overline{m}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)$$

$$x^{\overline{m+n}} = x(x+1)\ldots(x+m-1)(x+m)(x+m+1)\ldots(x+m+n-1)$$

Αντικαθιστώντας τώρα όπου $x^{\overline{m}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)$ **θα έχουμε :**

$$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)(x+m+1)\ldots(x+m+n-1)$$

και επειδή $(x+m)^{\overline{n}} = (x+m)(x+m+1)\ldots(x+m+n+1)$ **τότε θα πάρουμε** $x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$ **, για όλους τους ακέραιους** $m, n \geq 0$**. Από τα παραπάνω λοιπον συμπερασματικά θα έχουμε ότι για όλους τους ακέραιους** $m, n \geq 0$ **και** $m \geq n$ **,**
$x^{\overline{m-n}} = x(x+1)\ldots(x+m-n-1)$
$x^{\overline{m}} = x^{\overline{m-n+n}} = x^{\overline{m-n}}(x+m-n)^{\overline{n}}$
$x^{\overline{m-n}} = \frac{x^{\overline{m}}}{(x+m-n)^{\overline{n}}}$
τότε λοιπόν και αν θέσουμε όπου $m = 0$ **θα έχουμε :** $x^{\overline{-n}} = \frac{x^{\overline{0}}}{(x-n)^{\overline{n}}} = \frac{1}{(x-n)^{\overline{n}}}$

Ετσι λοιπόν ορίσαμε παραπάνω ότι $x^{\overline{-n}} = \frac{1}{(x-n)^{\overline{n}}} = \frac{1}{(x-n)(x-n+1)\ldots(x-1)}$ **και από αυτόν τον ορισμό θα πρέπει να αποδείξουμε ότι** $x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$**. Για να το αποδείξουμε όμως αυτό θα πρέπει να πάρουμε τέσσερις περιπτώσεις , οι οποίες είναι οι ακόλουθες :**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: οι ακέραιοι $m, n \geq 0$**. Έχει γίνει η απόδειξη.**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: οι ακέραιοι $m, n < 0$**. Από τον ορισμό του** $x^{\overline{n}}$ **για ακέραιους** $n < 0$ **έχουμε ότι** $x^{\overline{m+n}} = \frac{1}{(x+m+n)^{\overline{-(m+n)}}}$**. Όταν ,** $-m > 0$ **και** $-n > 0$ **τότε**

$$x^{\overline{m+n}} = \frac{1}{(x+m+n)^{\overline{-n}}(x+m+n-n)^{\overline{-m}}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: οι ακέραιοι $m > 0$ **και** $n < 0$**. Εάν** $(m+n) \geq 0$ **τότε :**

$$x^{\overline{m+n}} = x(x+1)\ldots(x+m+n-1) = \frac{x(x+1)\ldots(x+m+n-1)(x+m+n)\ldots(x+m-1)}{(x+m+n)(x+m+n+1)\ldots(x+m-1)} = \frac{x^{\overline{m}}}{(x+m)^{\overline{n}}}$$

Εάν $(m+n) \leq 0$ **τότε :**

$$x^{\overline{m+n}} = \frac{1}{(x+m+n)^{\overline{-(m+n)}}} = \frac{1}{(x+m+n)(x+m+n+1)\dots(x-1)} =$$

$$= \frac{x(x+1)\dots(x+m-1)}{(x+m+n)(x+m+n+1)\dots(x-1)x\dots(x+m-1)} = \frac{x^{\overline{m}}}{(x+m+n)^{\overline{-n}}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4: οι ακέραιοι $m < 0$ **και** $n > 0$**. Εάν** $(m+n) \geq 0$ **τότε :**

$$x^{\overline{m+n}} = x(x+1)\dots(x+m+n-1) = \frac{(x+m)(x+m+1)\dots x(x+1)\dots(x+m+n+1)}{(x+m)(x+m+1)\dots(x-1)} \Longrightarrow$$

$$x^{\overline{m+n}} = \frac{(x+m)^{\overline{n}}}{(x+m)^{\overline{-m}}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$$

Εάν $(m+n) \leq 0$ **τότε :**

$$x^{\overline{m+n}} = \frac{1}{(x+m+n)^{\overline{-(m+n)}}} = \frac{1}{(x+m+n)(x+m+n+1)\ ldots(x-1)} =$$

$$= \frac{(x+m)(x+m+1)\dots(x+m+n-1)}{(x+m)(x+m+1)\dots(x+m+n)(x+m+n+1)\dots(x-1)} = \frac{(x+m)^{\overline{n}}}{(x+m)^{\overline{-m}}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$$

Εν κατακλείδι , βρήκαμε (1) τον νόμο των εκθετών για την αυξανόμενη παραγοντική δύναμη , $x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$ **, (2) ορίσαμε μια έκφραση για το** $x^{\overline{-n}}$ **και τέλος (3) αποδείξαμε ότι από τον ορισμό μας , ο νόμος ισχύει για τους ακεραίους** m **,** n**.**

$\square$

Άσκηση 11. ***Ο γενικός κανόνας (2.56) για την άθροιση κατα τμήματα είναι ισοδύναμος με :***

$$\sum_{0\le k\le n}(a_{k+1}-a_k)b_k =$$

$$= a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{0\le k\le n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k), \ \ \gamma\iota\alpha \ \ n\ge 0.$$

Αποδείξτε την παραπάνω σχέση απευθείας χρησιμοποιώντας την επιμεριστική , την προσεταιριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Απόδειξη.

Πρίν ξεκινήσουμε την επίλυση της άσκησης ας δώσουμε πρώτα τον ορισμό των παραπάνω τριών απλών ιδιοτήτων , όπως ανφέρονται στο βιβλίο *concrete mathematics*.

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k \ \ (distributive \ \ law) \ \ (2.15), \ \ \sum_{k\in K}(a_k+b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k \ \ (associative \ \ law) \ \ (2.16)$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)} \ \ (commutative \ \ law) \ \ (2.17)$$

Εφαρμόζοντας τώρα στο άθροισμα $\sum_{0\le k\le n}(a_{k+1}-a_k)b_k$ **, αρχικά την επιμεριστική ιδιότητα και στη συνέχεια την προσεταιριστική ιδιότητα αντίστοιχα θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.**

$$\sum_{0\le k\le n}(a_{k+1}-a_k)b_k = \sum_{0\le k\le n}(a_{k+1}b_k - a_kb_k) = \sum_{0\le k\le n-1} a_{k+1}b_k - \sum_{0\le k\le n-1} a_kb_k$$

Στη συνέχεια κάνοντας πράξεις στην τελευταία ισότητα θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

$$\sum_{0\le k\le n}(a_{k+1}-a_k)b_k = \sum_{0\le k\le n-1} a_{k+1}b_k - \sum_{0\le k\le n-1} a_kb_k = \sum_{0\le k\le n-1} a_{k+1}b_k - [\sum_{0\le k\le n} a_kb_k - a_nb_n] =$$

$$= \sum_{0\le k\le n-1} a_{k+1}b_k - \sum_{1\le k\le n} a_kb_k + a_nb_n - a_0b_0 = \sum_{0\le k\le n-1} a_{k+1}b_k - \sum_{0\le k\le n} a_{k+1}b_{k+1} + a_nb_n - a_0b_0 =$$

$$= \sum_{0\le k\le n-1}(a_{k+1}b_k - a_{k+1}b_{k+1}) + a_nb_n - a_0b_0 = -\sum_{0\le k\le n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k) + a_nb_n - a_0b_0 \Longrightarrow$$

Οπότε καταλήξαμε στο ζητούμενο :

$$\sum_{0\le k\le n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_nb_n - a_0b_0 - \sum_{0\le k\le n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k), \ \gamma\iota\alpha \ n\ge 0.$$

□

Άσκηση 12. ***Υπολογίστε με τη βοήθεια της μεθόδου 5 , του βιβλίου*** *concrete mathematics* ***, το παρακάτω άθροισμα.***

$$\blacksquare_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Σημείωση: Πρώτα αποδείξτε ότι : $\blacksquare_n + \square_n = 2\sum_{1\leq j\leq k\leq n} jk$

Απόδειξη.

<u>**ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΕΘΟΔΟΥ 5 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ** *CONCRETE MATHEMATICS* **ΣΕΛΙΔΑ 46**</u>

Ένας τρόπος για να ανακαλύψουμε τον τύπο της $\square_n$, είναι να αντικαταστήσουμε το αρχικό άθροισμα από ένα φαινομενικά πιο πολύπλοκο διπλό άθροισμα το οποίο μπορεί πραγματικά να απλοποιηθεί αν εργαστούμε κατάλληλα.

$$\square_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{1\leq j\leq k\leq n} k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} k = \sum_{j=1}^{n}(\frac{j+n}{2})(n-j+1) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(n(n+1)+j-j^2) =$$

$$= \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) - \frac{1}{2}\square_n = \frac{1}{2}n(n+\frac{1}{2})(n+1) - \frac{1}{2}\square_n$$

Με βάση λοιπόν την παραπάνω εισαγωγή και παίρνοντας μια ιδέα για τη μέθοδο 5 , θα προσπαθήσουμε να βρούμε αρχικά την τιμή του $\blacksquare_n + \square_n$. Οπότε θα έχουμε :

$$\blacksquare_n + \square_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)[\textbf{προσεταιριστική ιδιότητα(2.16)}] = \sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) = \sum_{k=1}^{n} kk(k+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2\frac{1}{2}kk(k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2}k(k+1)[\textbf{επιμεριστική ιδιότητα(2.15)}] \quad (1)$$

Από την περιγραφή της μεθόδου 5 είδαμε ότι $\sum_{k=j}^{n} k = (\frac{j+n}{2})(n-j+1)$, άρα στην περίπτωσή μας θα έχουμε $\frac{1}{2}k(k+1) = \sum_{j=1}^{k} j$. Αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε :

$$2\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2}k(k+1) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{j=1}^{k} j\right) \quad (2)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα (2.28) της σελίδας 35 η οποία φαίνεται παρακάτω :

$$\sum_{j\in J, k\in K} a_j b_k = \left(\sum_{j\in J} a_j\right)\left(\sum_{k\in K} b_k\right) \quad (2.28)$$

Άρα η (2) θα γίνει:

$$\blacksquare_n + \square_n = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\left(\sum_{j=1}^{k} j\right) = 2\sum_{j=1}^{k}\sum_{k=1}^{n} kj = 2\sum_{1\leq j\leq k\leq n} kj \Longrightarrow \blacksquare_n + \square_n = 2\sum_{1\leq j\leq k\leq n} kj \quad (3)$$

Χρησιμοποιούμε την έκφραση (2.33) για το άνω τριγωνικό άθροισμα , ($S_{\triangleright} = \sum_{1\leq j\leq k\leq n} a_j a_k = \frac{1}{2}\left((\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$) για καλύτερο υπολογισμό όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\blacksquare_n + \square_n = 2\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Ο πρώτος όρος είναι το τετράγωνο του αθροίσματος των πρώτων n φυσικών αριθμών και ο δεύτερος όρος είναι το άθροισμα των πρώτων n τετραγώνων. Από μέθοδο 5 γνωρίζουμε ότι $\square_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ και επίσης ξέρουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Οπότε η λύση μας θα έχει ως εξής :

$$\blacksquare_n + \square_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \square_n \Longrightarrow \blacksquare_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$\square$

Άσκηση 13. ***Να λυθεί η παρακάτω αναδρομική σχέση χρησιμοποιώντας έναν αθροιστικό συντελεστή.***

$T_0 = 5$

$2T_n = nT_{n-1} + 3n! \qquad \qquad \textit{για} \;\; n > 0$

Απόδειξη.

Πρίν ξεκινήσουμε την επίλυση με την μέθοδο που αναφέρεται , ας δοκιμάσουμε μερικές μικρές τιμές μήπως έτσι καταφέρουμε να μαντέψουμε τον τύπο της αναδρομικής σχέσης.

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην $\quad 2T_n = nT_{n-1} + 3n! \quad$ **παίρνουμε :**

$T_0 = 5$

$T_1 = \frac{1*5+3*1}{2} = 4$

$T_2 = \frac{2*4+3*2*1}{2} = 7$

$T_3 = \frac{3*7+3*3*2*1}{2} = \frac{39}{2}$

$T_4 = \frac{4*\frac{39}{2}+3*4*3*2*1}{2} = 75$

$T_5 = \frac{5*75+3*5*4*3*2*1}{2} = \frac{735}{2}$

Όπως φαίνεται παραπάνω δεν μπορούμε να βρούμε τίποτα για τον τύπο της T_n**.**

Η γενική μέθοδος με βάση την οποία μπορούμε να ανάγουμε μια αναδρομική σχέση σε ένα άθροισμα δίνεται από τον τύπο (2.9) της σελίδας 27 του βιβλίου *concrete mathematics* **και είναι ο ακόλουθος :**

$$a_nT_n = b_nT_{n-1} + c_n \qquad \qquad (2.9)$$

Συγκρίνοντας τώρα τον τύπο (2.9) με την αναδρομική σχέση $2T_n = nT_{n-1}+3n!$ **παρατηρούμε ότι** $a_n = 2$ **,** $b_n = n$ **και** $c_n = 3n!$**. Πολλαπλασιάζοντας τώρα την σχέση** $a_nT_n = b_nT_{n-1} + c_n$ **με έναν αθροιστικό συντελεστή** s_n **θα πάρουμε :**

$$s_na_nT_n = s_nb_nT_{n-1} + s_nc_n$$

Ο παράγοντας s_n **είναι πολύ έξυπνη επιλογή καθώς έτσι δημιουργείται το** $s_nb_n = s_{n-1}a_{n-1}$**. Στη συνέχεια αν γράψουμε όπου** $S_n = s_na_nT_n$ **θα έχουμε μια αθροιστική-αναδρομική σχέση , την** $S_n = S_{n-1} + s_nc_n$**. Και έτσι καταλήγουμε στόν τύπο :**

$$S_n = s_0a_0T_0 + \sum_{1 \le k \le n} s_kc_k = s_1b_1T_0 + \sum_{1 \le k \le n} s_kc_k$$

Με τη βοήθεια λοιπόν των παραπάνω καταλήγουμε στή σχέση (2.10) του βιβλίου , η οποία δίνει τη λύση στην αναδρομική σχέση (2.9).

$$T_n = \frac{1}{s_na_n}(s_1b_1T_0 + \sum_{1 \le k \le n} s_kc_k) \qquad \qquad (2.10)$$

Το σημαντικότερο και δυσκολότερο βήμα λοιπόν είναι να βρούμε το κατάλληλο s_n. Σε αυτό το βήμα λοιπόν μας βοηθάει η σχέση $\frac{s_{n-1}a_{n-1}}{b_n}$ η οποία αν επεκταθεί μας δίνει τη σχέση (2.11) του βιβλίου.

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}....a_1}{b_n b_{n-1}....b_2} \qquad (2.11)$$

Στην περίπτωσή μας τώρα για $a_n = 2$, $b_n = n$, όπως βρήκαμε παραπάνω το s_n θα μας δώσει :

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}....a_1}{b_n b_{n-1}....b_2} = \frac{2*2*2\dots 2}{n(n-1)\dots 2*1} = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

Υπενθυμίζοντας επιπλέον ότι $T_0 = 5$ και $c_n = 3n!$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε στον γενικό τύπο (2.10) και θα έχουμε :

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}(s_1 b_1 T_0 + \sum_{1\le k\le n} s_k c_k) = \frac{n!}{2^n}(5 + 3\sum_{1\le k\le n} 2^{k-1}) =$$

$$\frac{n!}{2^n}(5 + 3\sum_{1\le k-1\le n-1} 2^{k-1}) = \frac{n!}{2^n}(5 + 3\sum_{0\le r\le n-1} 2^r) \quad \gamma\iota\alpha \quad r = k-1$$

Σε αυτό το σημειο θα πρέπει να αναφέρουμε την παρακάτω σχέση η οποία είναι χρήσιμη για το επόμενο βήμα :

$$\sum_{0\le k\le n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad \gamma\iota\alpha \quad x \ne 1$$

Έτσι στην περιπτωσή μας θα αντικαταστήσουμε και θα πάρουμε :

$$T_n = \frac{n!}{2^n}(5 + 3\sum_{0\le r\le n-1} 2^r) = \frac{n!}{2^n}(5 + 3\frac{2^{(n-1)+1}-1}{2-1}) = \frac{n!}{2^n}(2 + 3*2^n) \Longrightarrow$$

$$T_n = n!(2^{1-n} + 3)$$

□

Άσκηση 14. ***Να υπολογιστεί το παρακάτω άθροισμα :***

$$\sum_{0\le k\le n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)} \qquad (1)$$

Βοήθεια: Μπορείτε να γενικεύσετε τον τύπο (2.57) του βιβλίου.

Απόδειξη.

Όπως αναφέρεται λοιπόν και στην εκφώνηση , η λύση της παραπάνω άσκησης στηρίζεται στή γενίκευση του τύπου (2.57) του βιβλίου *concrete mathematics* **, και είνα ο :**

$$\sum_{0\le k\le n} kH_k = \sum_{0\le x\le n} xH_x\delta x = \frac{n^{\underline{2}}}{2}(H_n - \frac{1}{2}) \qquad (2.57)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την πρώτη ισότητα της σχέσης (2.57) στο δικό μας άθροισμα , η σχέση (1) θα πάρει την μορφή :

$$\sum_{0\le k\le n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{0\le x\le n} \frac{H_x}{(x+1)(x+2)} \qquad (2)$$

Πρίν προχωρήσουμε στην επίλυση ας δούμε κάποιες σημαντικές σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε από το βιβλίο *concrete mathematics* **στις σελίδες 55 και 52. Ξέρουμε (από σελ 55) ότι:**

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u \qquad (2.56)$$

Επίσης (από σελ 55) : $Ev(x) = v(x{+}1)$. **Τέλος (από σελ 52) έχουμε :** $\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots\ldots(x+m)} = x^{\underline{-m}}$ (2.51).

Για να πάρει όμως η σχέση (1) τη μορφή της σχέσης (2.56) θα πρέπει πρώτα να βρούμε τα $u(x), v(x), Ev(x), \Delta v(x)$ *και* $\Delta u(x)$ **. Έτσι θα έχουμε :** $u(x) = H_x$**, οπότε** $\Delta u(x) = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}$**, από** *table* **55 σελίδα 55 βιβλίου ,** $\Delta v(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = x^{\underline{-2}}$**, ολοκληρώνοντας το** $\Delta v(x)$ **θα έχουμε** $v(x) = -x^{\underline{-1}} = -\frac{1}{x+1}$ (2.51) **και τέλος** $Ev(x) = -\frac{1}{x+2} = -(x+1)^{\underline{-1}}$**.**

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω στην (2.56) παίρνουμε :

$$\sum_{0\le x\le n} \frac{H_x}{(x+1)(x+2)}\delta x = H_x x^{\underline{-1}}|_o^n - \sum_{0\le x\le n}(x+1)^{\underline{-1}}x^{\underline{-1}}\delta x = H_x x^{\underline{-1}}|_o^n - \sum_{0\le x\le n}(x+1)^{\underline{-1}}x^{\underline{-1}}\delta x$$

$$= -H_n n^{\underline{-1}} + \sum_{0\le x\le n}(x)^{\underline{-2}}\delta x = -H_n n^{\underline{-1}} - (x)^{\underline{-1}}|_o^n = -\frac{H_n}{n+1} - \frac{1}{n+1} + 1 = 1 - \frac{H_n+1}{n+1}$$

Έτσι τελικά και με βάση τη σχέση (2) καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα :

$$\sum_{0\le k\le n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{H_n+1}{n+1}$$

□

Άσκηση 15. ***Αποδείξτε ότι :***

$$\frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} \qquad (1)$$

Εκτός και αν ένας από τους παρονομαστές είναι μηδέν.

Απόδειξη.

Για αρχή χρήσιμο θα ήταν να δώσουμε κάποιους συμαντικούς ορισμούς για το $x^{\underline{n}}$ οι οποίοι θα μας βοηθήσουν στην επίλυση της άσκησης.

Για $n > 0$ από (2.43) έχουμε :

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-n+1) = \frac{x!}{(x-n)!} \qquad (2.43)$$

Για $n < 0$ από (2.51) έχουμε :

$$x^{\underline{n}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n)} \qquad (2.51)$$

Και τέλος για $n = 0$ είναι προφανές πως έχουμε : $x^{\underline{n}} = 1$.

Για να αποδειχτεί η σχέση (1) θα πρέπει να δούμε ότι ισχύει για διάφορες περιπτώσεις των n , m.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Όταν $n = 0$ και $m = 0$ τότε είναι προφανές ότι ισχύει η σχέση (1).

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Όταν $n > 0$ και $m > 0$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό $x^{\underline{n}} = \frac{x!}{(x-n)!}$ θα έχουμε :

$$\frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \frac{\frac{x!}{(x-m)!}}{\frac{(x-n)!}{(x-n-m)!}} = \frac{x!(x-n-m)!}{(x-n)!(x-m)!} \qquad (2) \qquad \textit{και}$$

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{\frac{x!}{(x-n)!}}{\frac{(x-m)!}{(x-m-n)!}} = \frac{x!(x-n-m)!}{(x-n)!(x-m)!} \qquad (3) \qquad \textit{απο} \qquad (2)+(3) \qquad \frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : Όταν $n < 0$ και $m < 0$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό $x^{\underline{n}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+n)}$ θα έχουμε :

$$\frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \frac{\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x-m)}}{\frac{1}{(x-n+1)(x-n+2)\ldots\ldots(x-n-m)}} = \frac{(x-n+1)\ldots\ldots(x-n-m)}{(x+1)\ldots\ldots(x-m)} \qquad (4)$$

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x-n)}}{\frac{1}{(x-m+1)(x-m+2)\ldots\ldots(x-m-n)}} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots(x-m-n)}{(x+1)\ldots\ldots(x-n)} \qquad (5)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $n \leq m < 0$ έτσι $0 < -m \leq -n$.

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots(x-m-n)}{(x+1)\ldots\ldots(x-n)} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots(x-n)(x-n+1)\ldots\ldots(x-m-n)}{(x+1)\ldots\ldots(x-m)(x-m+1)\ldots\ldots(x-n)} \Longrightarrow$$

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Όταν $n < 0$ και $m > 0$ εάν $-m-n \geq 1$.

$$\frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-m+1)}{(x-n)(x-n-1)\ldots\ldots(x-n-m+1)}$$

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x-n)}}{\frac{1}{(x-m+1)(x-m+2)\ldots\ldots(x-m-n)}} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots(x-m-n)}{(x+1)\ldots\ldots(x-n)} \Longrightarrow$$

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots x(x+1)\ldots\ldots(x-m-n)}{(x+1)\ldots\ldots(x-m-n)(x-m-n+1)\ldots\ldots(x-n)} = \frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}}$$

Όταν $n < 0$ και $m > 0$ εάν $-m-n \leq -1$.

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots(x-m-n)}{(x+1)\ldots\ldots(x-n)}$$

$$\frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-m+1)}{(x-n)(x-n-1)\ldots\ldots(x-n-m+1)} = \frac{x\ldots\ldots(x-n-m+1)(x-n-m)\ldots\ldots(x-m+1)}{(x-n)\ldots\ldots(x+1)x\ldots\ldots(x-n-m+1)} \Longrightarrow$$

$$\frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots(x-m-n)}{(x+1))\ldots\ldots(x-n)} = \frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}}$$

Όταν $n < 0$ και $m > 0$ εάν $-1 < -m-n < 1 \longrightarrow -m-n = 0$.

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots(x-m-n)}{(x+1)\ldots\ldots(x-n)} = \frac{(x-m+1)\ldots\ldots x}{(x-n-m+1)\ldots\ldots(x-n)} \Longrightarrow$$

$$\frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}} = \frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5 : Όταν $n > 0$ και $m < 0$. Η περίπτωση αυτή είναι συμμετρική της περίπτωσης 4 και αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Η απόδειξη τελείωσε.

Μια άλλη πιο σύντομη απόδειξη μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο :

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} \qquad (2.52)$$

Έτσι λοιπόν από το παραπάνω κατευθείαν μπορούμε να βγάλουμε ότι :

$$x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}} = x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}} \Longrightarrow \frac{x^{\underline{m}}}{(x-n)^{\underline{m}}} = \frac{x^{\underline{n}}}{(x-m)^{\underline{n}}}$$

□

Άσκηση 16. ***Υπολογίστε το $\Delta(c^{\underline{x}})$, και χρησιμοποιήστε το για να συμπεράνετε την τιμή του αθροίσματος :***

$$\sum_{1\leq k\leq n}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k})$$

Απόδειξη.

Οι πεπερασμένοι υπολογισμοί βασίζονται στις ιδιότητες του τελεστή διαφοράς Δ , όπου ορίζεται ώς :

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \qquad (2.42)$$

Έπειτα από την ιδιότητα (2.42) θα ήταν απαραίτητο να αναφέρουμε και την ιδιότητα (2.43) του βιβλίου η οποία είναι :

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-m+1) \qquad (2.43)$$

Έτσι λοιπόν χρησιμοποιώντας αρχικά την σχέση (2.42) και έπειτα την σχέση (2.43) για τον υπολογισμό του $\Delta(c^{\underline{x}})$, θα έχουμε :

$$\Delta(c^{\underline{x}}) = c^{\underline{x+1}} - c^{\underline{x}} = c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-x+1)(c-x) - c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-x+1) \Longrightarrow$$

$$\Delta(c^{\underline{x}}) = c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-x+1)(c-x-1) \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα πολλαπλασιάσουμε και θα διαιρέσουμε την σχέση (1) με το $(c-x)$ και θα πάρουμε τον παρακάτω προφανή πλέον τύπο :

$$\Delta(c^{\underline{x}}) = \frac{c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-x+1)(c-x)(c-x-1)}{(c-x)}$$

Χρησιμοποιώντας όμως την ιδιότητα (2.43) , ο αριθμητής του $\Delta(c^{\underline{x}})$ θα πάρει την εξής μορφή : $c^{\underline{x+2}} = c(c-1)(c-2)\ldots\ldots(c-x+1)(c-x)(c-x-1)$. Άρα η τελική μορφή του $\Delta(c^{\underline{x}})$ θα είναι :

$$\Delta(c^{\underline{x}}) = \frac{c^{\underline{x+2}}}{(c-x)} \qquad (2)$$

Προκειμένου να συνάγουμε την τιμή του αθροίσματος $\sum_{1\leq k\leq n}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k})$ χρησιμοποιώντας την υπολογιστική τιμή $\Delta(c^{\underline{x}})$, αντικαθηστούμε στην (1) όπου $c=-2$ και $x=x-2$. Δηλαδή :

$$\Delta((-2)^{\underline{x-2}}) = \frac{(-2)^{\underline{(x-2)+2}}}{(-2)-(x-2)} = \frac{(-2)^{\underline{x}}}{-x} \qquad (3)$$

Ένα επιπλέον στοιχείο που μπορούμε να εξάγουμε είναι το παρακάτω :

$$-\Delta f(x) = -(f(x+1) - f(x)) = f(x) - f(x+1) = -f(x+1) - (-f(x)) = \Delta(-f(x))$$

$$\alpha\rho\alpha \qquad \Delta(-(-2)^{\underline{x-2}}) = \frac{(-2)^{\underline{x}}}{x} \qquad (4)$$

Πρίν προχωρήσουμε ας δούμε κάποιες επιπλέον σημαντικές σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε από το βιβλίο *concrete mathematics*. **Ξέρουμε (από σελ 49) ότι:**

$$\sum_{a\leq x\leq b} g(x)\delta x = \sum_{a\leq k<b} g(k) \quad (2.48) \qquad \sum_{a\leq x\leq b} g(x)\delta x = f(b) - f(a) \quad (2.47)$$

Επίσης (από σελ 48) : $g(x) = \Delta f(x)$ **εάν και μόνο εάν** $\sum g(x)\delta x = f(x) + c$ (2.46)

Οπότε από τις σχέσεις (3) , (2.48) και (2.46) έχουμε :

$$\sum_{1\le k\le n}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}) = \sum_{1\le k\le n+1}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k})\delta k = -(-2)^{\underline{k-2}}|_1^{n+1} = -(-2)^{\underline{n+1-2}} - (-(-2)^{\underline{1-2}} = -(-2)^{\underline{n-1}} - (-(-2)^{\underline{-1}} \Longrightarrow$$

$$\sum_{1\le k\le n}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}) = -(-2)^{\underline{n-1}} - (-(-2)^{\underline{-1}} = -(-2)^{\underline{n-1}} + (-2)^{\underline{-1}} = (-2)^{\underline{-1}} - (-2)^{\underline{n-1}}$$

Τέλος (από σελ 52) βλέπουμε ότι : $\frac{1}{(x+1)(x+2).........(x+m)} = x^{\underline{-m}}$ (2.51).**Οπότε στη δική μας περίπτωση θα έχουμε :**

$$c^{\underline{-1}} = \frac{1}{c+1} \quad , \quad (-2)^{\underline{-1}} = \frac{1}{(-2+1)} = -1$$

$$\sum_{1\le k\le n}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}) = -1 - (-2)^{\underline{n-1}} = -1 - ((-2)(-2-1)(-2-2)\ldots\ldots(-2-(n-2)))$$

$$= -1 - ((-2)(-3)(-4)\ldots\ldots(-n))) = -1 + ((-1)(-2)(-3)(-4)\ldots\ldots(-n))) = -1 + (-1)^n n!$$

Και έτσι τελικά καταλήξαμε στο εξής :

$$\sum_{1\le k\le n}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}) = -1 + (-1)^n n!$$

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

$$\sum_{1\le k\le n}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}) = -1 + (-1)^n n!$$

$$\begin{pmatrix} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sum_{1\le k\le n}(\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}) & -2 & 1 & -7 & 23 \\ -1+(-1)^n n! & -2 & 1 & -7 & 23 \end{pmatrix}$$

$\square$

Άσκηση 17. ***Να βρεθεί το άθροισμα $\sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k(k+1)}$ με δύο τρόπους :***

(α) Αντικατάστησε το $\frac{1}{k(k+1)}$ με ένα απλό κλάσμα και

(β) Αθροίστε κατά μέρη.

Απόδειξη.

(α) Το αρχικό μας άθροισμα είναι το $\sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k(k+1)}$, έτσι τώρα θα εκφράσουμε το $\frac{2k+1}{k(k+1)}$ σε ένα κλάσμα απλούστερης μορφής.

$$\frac{2k+1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}\Longrightarrow\frac{2k+1}{k(k+1)}=\frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}\Longrightarrow\frac{2k+1}{k(k+1)}=\frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$$

Συγκρίνοντας τώρα και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας θα βρούμε τις τιμές των A και B.

$$A=1,\ \ A+B=2\Longrightarrow A=1,\ \ B=2\ \ \textit{και}\ \ \frac{2k+1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}.$$

Τώρα λοιπόν αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα που βρήκαμε παραπάνω στο αρχικό μας άθροισμα , η λύση της άσκησης φαντάζει πολύ πιο εύκολη , καθώς τα δύο αθροίσματα που προκύπτουν είναι γνωστά (βλ. ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1) . Δηλαδή :

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k(k+1)}=\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}+\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k+1}=[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}]+[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}]\Longrightarrow$$

[ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1: Ξέρουμε ότι : $[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}]=H_n,$ όπου H_n είναι η αρμονική σειρά. Επίσης αν στο άθροισμα $[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}]$ προσθέσουμε και αφεραίσουμε το 1 τότε θα γίνει : $[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}]+\frac{1}{n+1}-1=H_n-1+\frac{1}{n+1}.$] Άρα :

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k(k+1)}=H_n+H_n-1+\frac{1}{n+1}=2H_n-\frac{n}{n+1}$$

(β) Η προσέγγιση της άσκησης με βάση το ερώτημα (β) θα είναι εντελώς διαφορετική καθώς καλούμαστε να κάνουμε άθροιση κατά μέλη. Αρχικά θα πρέπει να αναφέρουμε την σχέση (2.48) του βιβλίου , η οποία είναι η $\sum_{a\le k\le b}g(x)\delta x=\sum_{a\le k<b}g(k).$ Άρα :

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{2k+1}{k(k+1)}=\sum_{1\le x\le n+1}\frac{2x+1}{x(x+1)}\delta x\qquad(1)$$

Πρίν προχωρήσουμε στην επίλυση ας δούμε κάποιες σημαντικές σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε από το βιβλίο *concrete mathematics* στις σελίδες 55 και 52. Ξέρουμε (από σελ 55) ότι: $\sum u\Delta v=uv-\sum Ev\Delta u$ (2.56). Επίσης (από σελ 55) : $Ev(x)=v(x+1).$ Τέλος (από σελ 52) έχουμε : $\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots\ldots\ldots(x+m)}=x^{\underline{-m}}$ (2.51).

Στη συνέχεια θα πρέπει να φέρουμε το άθροισμα $\sum_{1\le x\le n+1}\frac{2x+1}{x(x+1)}\delta x$ στη μορφή της σχέσης (2.56). Οπότε θα πρέπει να βρούμε τα $u(x),v(x),Ev(x),\Delta v(x)$ *και* $\Delta u(x)$. Έτσι θα έχουμε :

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει συνοπτικά κάποιες χρήσιμες μετατροπές

$f = \Sigma g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}} = 1$	0
$x^{\underline{1}} = x$	1
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$
$x^{\underline{m+1}}/(m+1)$	$x^{\underline{m}}$
H_x	$x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$

Σχήμα 2: *Table* 55

$u(x) = 2x+1$, **οπότε** $\Delta u(x) = 2$, $\Delta v(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, **άρα από (2.51)** $\Delta v(x) = (x-1)^{\underline{-2}}$, **ολοκληρώνοντας το** $\Delta v(x)$ **θα έχουμε** $v(x) = -(x-1)^{\underline{-1}} = -\frac{1}{x}$ (2.51) **και τέλος** $Ev(x) = -\frac{1}{x+1}$.

Κάνοντας όλη τη παραπάνω προεργασία αντικαθιστούμε και έχουμε :

$$\sum \frac{2x+1}{x(x+1)}\delta x = (2x+1)(-\frac{1}{x}) - \sum(-\frac{1}{x+1})2\Delta x = 2\sum x^{\underline{-1}} - \frac{2x+1}{x} \Longrightarrow$$

$$\sum \frac{2x+1}{x(x+1)}\delta x = 2H_x - 2 - \frac{1}{x} + c \qquad [\sum x^{\underline{m}}\delta x = H_x \;\; \gamma\iota\alpha \;\; m=-1](2.53)$$

Τέλος από την ισότητα $\sum_{a\le x\le b} x^{\underline{m}}\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\big|_a^b$, **για** $m \neq -1$ **(2.53), καταλήγουμε στο τελικό μας αποτέλεσμα.**

$$\sum_{1\le x\le n+1} \frac{2x+1}{x(x+1)}\delta x = [2H_x - 2 - \frac{1}{x} + c]|_1^{n+1} = [2H_{n+1} - 2 - \frac{1}{n+1} + c] - [2H_1 - 2 - \frac{1}{1} + c] \Longrightarrow$$

$$\sum_{1\le x\le n+1} \frac{2x+1}{x(x+1)}\delta x = [2H_{n+1} - 2 - \frac{1}{n+1} + c] - [2H_{n+1} - 2 - \frac{1}{n+1} + c] = 2H_n + \frac{2}{n+1} - 2 - \frac{1}{n+1} - 2 + 2 + 1 \Longrightarrow$$

$$(\alpha\pi o\ (1)) \quad \sum_{1\le k\le n} \frac{2k+1}{k(k+1)} = 2H_n + \frac{1}{n+1} - 1 = 2H_n - \frac{n}{n+1} = \sum_{1\le x\le n+1} \frac{2x+1}{x(x+1)}\delta x = 2H_n - \frac{n}{n+1}$$

Άρα :

$$\sum_{1\le k\le n} \frac{2k+1}{k(k+1)} = 2H_n - \frac{n}{n+1}$$

□

Άσκηση 18. ***Υπολογίστε τα αθροίσματα :***

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k}, \quad T_n = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} k, \quad U_n = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} k^2,$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο διαταραχών με $n \ge 0$.

Απόδειξη.

Ο υπολογισμός των παραπάνω αθροισμάτων θα γίνει κάνοντας κάποιες πράξεις στα ίδια τα αθροίσματα έτσι ώστε απλοποιώντας τα να βρούμε ένα αποτέλεσμα το οποίο να είναι εμφανές .

Ξεκινώντας λοιπόν από το πρώτο στη σειρά άθροισμα θα έχουμε :

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k}$$

Από το παραπάνω τώρα βλέπουμε πως αν αυξήσουμε το n **σε** $n+1$ **τότε μας δίνει :**

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} \Longrightarrow S_{n+1} = \sum_{0\le k\le n+1} (-1)^{(n+1)-k}$$

Κάνοντας *split* **στον πρώτο όρο του αθροίσματος :**

$$S_{n+1} = \sum_{0\le k\le n+1} (-1)^{(n+1)-k} = a_0 + \sum_{1\le k\le n+1} (-1)^{(n+1)-k} = (-1)^{n+1-0} + \sum_{1\le k+1\le n+1} (-1)^{(n+1)-(k+1)} \Longrightarrow$$

$$S_{n+1} = (-1)^{n+1-0} + \sum_{0\le k+1\le n+1} (-1)^{(n+1)-(k+1)} = (-1)^{n+1} + \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} = (-1)^{n+1} + S_n \Longrightarrow$$

Άρα δείξαμε ότι : $S_{n+1} = (-1)^{n+1} + S_n \quad (1)$

Στη συνέχεια κάνουμε *split* **στον τελευταίο όρο του αθροίσματος :**

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} \Longrightarrow S_{n+1} = \sum_{0\le k\le n+1} (-1)^{(n+1)-k} = (-1)^{(n+1)-(n+1)} + \sum_{0\le k\le n} (-1)^{(n+1)-k} \Longrightarrow$$

$$S_n = (-1)^{(n+1)-(n+1)} + \sum_{0\le k\le n} (-1)^{(n+1)-k} = 1 - \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k} = 1 - S_n \Longrightarrow$$

Άρα αποδείξαμε ότι : $S_{n+1} = 1 - S_n \quad (2)$

Τέλος από $(1) + (2)$

$$1 - S_n = (-1)^{n+1} + S_n \Longrightarrow 2S_n = 1 - (-1)^{n+1} \Longrightarrow S_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$$

Ακολούθως και για το δεύτερο άθροισμα θα έχουμε την ίδια διαδικασία. Οπότε :

$$T_n = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{n-k} k$$

Από το παραπάνω τώρα βλέπουμε πως αν αυξήσουμε το n **σε** $n+1$ **τότε μας δίνει :**

$$T_n = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{n-k} k \Longrightarrow T_{n+1} = \sum_{0 \le k \le n+1} (-1)^{(n+1)-k} k$$

Κάνοντας *split* **στον πρώτο όρο του αθροίσματος :**

$$T_{n+1} = \sum_{0 \le k \le n+1} (-1)^{(n+1)-k} k = a_0 + \sum_{1 \le k \le n+1} (-1)^{(n+1)-k} k = 0(-1)^{n+1} + \sum_{0 \le k+1 \le n+1} (-1)^{(n+1)-(k+1)} (k+1) \Longrightarrow$$

$$T_{n+1} = 0(-1)^{n+1} + \sum_{0 \le k+1 \le n+1} (-1)^{(n+1)-(k+1)} (k+1) = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{(n-k)} k + \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{(n-k)} = T_n + S_n \Longrightarrow$$

Άρα δείξαμε ότι : $T_{n+1} = T_n + S_n \quad (3)$

Στη συνέχεια κάνουμε *split* **στον τελευταίο όρο του αθροίσματος :**

$$T_n = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{n-k} k \Longrightarrow T_{n+1} = \sum_{0 \le k \le n+1} (-1)^{(n+1)-k} k = (-1)^{(n+1)-(n+1)} (n+1) + \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{(n+1)-k} k \Longrightarrow$$

$$T_{n+1} = (-1)^{(n+1)-(n+1)} (n+1) + \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{(n+1)-k} k = n+1 - \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{(n-k} k = n+1 - T_n \Longrightarrow$$

Άρα αποδείξαμε ότι : $T_{n+1} = n+1 - T_n \quad (4)$

Από $(3) + (4)$ **θα έχουμε :**

$$T_n + S_n = n+1 - T_n \Longrightarrow 2T_n = n+1 - (1 + (-1)^n) \Longrightarrow T_n = \frac{n - (-1)^n}{2}$$

Τέλος και για το τρίτο άθροισμα έχουμε :

$$U_n = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^{n-k} k^2 \Longrightarrow U_{n+1} = \sum_{0 \le k \le n+1} (-1)^{n+1-k} k^2$$

Κάνοντας *split* **στον πρώτο όρο του αθροίσματος :**

$$U_{n+1} = \sum_{0 \le k \le n+1} (-1)^{(n+1)-k} k^2 = 0(-1)^{n+1} + \sum_{1 \le k \le n+1} (-1)^{(n+1)-k} k^2 = \sum_{0 \le k+1 \le n+1} (-1)^{(n+1)-(k+1)} (k+1)^2 \Longrightarrow$$

$$U_{n+1} = \sum_{0\leq k+1\leq n+1} (-1)^{(n+1)-(k+1)}(k+1)^2 = \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{(n-k)}(k^2+2k+1) =$$

$$\sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{(n-k)}k^2 + \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{(n-k)}2k + \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{(n-k)} = U_n + 2T_n + S_n$$

Άρα δείξαμε ότι : $U_{n+1} = 2T_n + S_n + U_n \quad (5)$

Στη συνέχεια κάνουμε *split* **στον τελευταίο όρο του αθροίσματος :**

$$U_n = \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{n-k}k^2 \Longrightarrow U_{n+1} = \sum_{0\leq k\leq n+1} (-1)^{(n+1)-k}k^2 = (-1)^{(n+1)-(n+1)}(n+1)^2 + \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{(n+1)-k}k^2 \Longrightarrow$$

$$U_{n+1} = (-1)^{(n+1)-(n+1)}(n+1)^2 + \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{(n+1)-k}k^2 = (n+1)^2 - \sum_{0\leq k\leq n} (-1)^{(n-k}k^2 = (n+1)^2 - U_n \Longrightarrow$$

Άρα αποδείξαμε ότι : $U_{n+1} = (n+1)^2 - U_n \quad (6)$

Από $(5)+(6)$ **θα έχουμε :**

$$(n+1)^2 - U_n = 2T_n + S_n + U_n \Longrightarrow 2U_n = (n+1)^2 - 2T_n - S_n \Longrightarrow 2U_n = (n+1)^2 - (n-(-1)^n) - (1+(-1)^n \Longrightarrow$$

$$U_n = \frac{n-(-1)^n}{2}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας τον τύπο (2.24) του βιβλίου για να λύσουμε την παραπάνω άσκηση. Με τον τρόπο βέβαια που λύθηκε η άσκηση είναι σαν να αποδεικνύεται κάθε φορά αυτός ο τύπος.

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0\leq k\leq n} a_{k+1} \qquad (2.24)$$

□

Άσκηση 19. ***Προσπαθήστε να υπολογίσετε το άθροισμα*** $\sum_{0\leq k\leq n} kH_k$ ***με τη μέθοδο διαταραχής , αλλά από αυτό να συνάγεται η τιμή του παρακάτω αθροίσματος.***

$$\sum_{0\leq k\leq n} H_k$$

Απόδειξη.

Η ιδέα της μεθόδου της διαταραχής στηρίζεται στον τύπο (2.24) του βιβλίου *concrete mathematics*, **και η απόδειξη του είναι η ακόλουθη.**

Ξεκινάμε με ένα άγνωστο άθροισμα και το ονομάζουμε S_n **:**

$$S_n = \sum_{0\leq k\leq n} a_k$$

Έπειτα ξαναγράφουμε το S_{n+1} **με δύο τρόπους , κάνοντας** *split* **στον πρώτο και στον τελευταίο όρο του αθροίσματος.**

$$S_n + a_{n+1} = \sum_{0\leq k\leq n+1} a_k = a_0 + \sum_{1\leq k\leq n+1} a_k = a_0 + \sum_{1\leq k+1\leq n+1} a_{k+1} = a_0 + \sum_{0\leq k\leq n} a_{k+1}$$

Με βάση λοιπόν το παραπάνω ανάπτυγμα , για την δική μας άσκηση θα έχουμε :

$$S_n = \sum_{0\leq k\leq n} kH_k$$

$$S_n + (n+1)H_{n+1} = \sum_{0\leq k\leq n+1} kH_k = 0H_0 + \sum_{1\leq k\leq n+1} kH_k = 0 + \sum_{1\leq k+1\leq n+1} (k+1)H_{k+1} = \sum_{0\leq k\leq n} (k+1)H_{k+1}$$

Πρίν προχωρήσουμε όμως καλό είναι να διευκρυνίσουμε ότι η H_n **είναι αρμονική συνάρτηση και ο τύπος της είναι** $H_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k}$ **και επίσης** $H_{n+1} = \sum_{1\leq k\leq n+1} \frac{1}{k} = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}$.

Αντικαθιστώντας τώρα το H_{n+1} **στο παραπάνω ανάπτυγμα θα έχουμε :**

$$S_n + (n+1)H_{n+1} = \sum_{0\leq k\leq n} (k+1)H_{k+1} = \sum_{0\leq k\leq n} (k+1)(\frac{1}{k+1} + H_k) = \sum_{0\leq k\leq n} 1 + \sum_{0\leq k\leq n} kH_k + \sum_{0\leq k\leq n} H_k \Longrightarrow$$

$$S_n + (n+1)H_{n+1} = \sum_{0\leq k\leq n} 1 + \sum_{0\leq k\leq n} kH_k + \sum_{0\leq k\leq n} H_k \Longrightarrow (n+1)H_{n+1} = \sum_{0\leq k\leq n} 1 + \sum_{0\leq k\leq n} H_k \Longrightarrow$$

$$\sum_{0\leq k\leq n} H_k = (n+1)H_{n+1} - \sum_{0\leq k\leq n} 1 \Longrightarrow \sum_{0\leq k\leq n} H_k = (n+1)H_{n+1} - (n+1)$$

□

Άσκηση 20. ***Υπολογίστε το παρακάτω άθροισμα :***

$$\sum_{1\le k\le n} \frac{(-1)^k k}{4k^2-1}$$

Απόδειξη.

Υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι για να υπολογίσουμε το παραπάνω άθροισμα. Ένας τρόπος είναι να κοιτάξουμε προσεκτικά το δοθέν άθροισμα και να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή του κλάσματος και να εκφράσουμε το άθροισμα με πιο απλή μορφή. Έπειτα ο υπολογισμός είναι πολύ εύκολος. Έτσι λοιπόν θα έχουμε :

$$\sum_{1\le k\le n} \frac{(-1)^k k}{4k^2-1} = \sum_{1\le k\le n} \frac{(-1)^k k}{(2k-1)(2k+1)}$$

Τώρα μπορούμε να απλοποιήσουμε το $\frac{k}{(2k-1)(2k+1)}$ **με τον ακόλουθο τρόπο :**

$$\frac{k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A_1}{(2k-1)} + \frac{A_2}{(2k+1)} \Longrightarrow$$

$$k = A_1(2k+1) + A_2(2k-1) \Longrightarrow k = 2A_1 + 2A_2 + A_1 - A_2 \Longrightarrow 2A_1 + 2A_2 = 1 \;\; A_1 - A_2 = 0$$

Άρα για $A_1 = A_2 = \frac{1}{4}$**, (όπως προκύπτει από την παραπάνω ισότητα) θα έχουμε :**

$$\sum_{1\le k\le n} \frac{(-1)^k k}{4k^2-1} = \sum_{1\le k\le n} \frac{(-1)^k k}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{1\le k\le n} (-1)^k(\frac{1}{4(2k-1)} + \frac{1}{4(2k+1)}) =$$

$$\frac{1}{4}\sum_{1\le k\le n}(-1)^k(\frac{1}{(2k-1)}+\frac{1}{(2k+1)}) = \frac{1}{4}\sum_{1\le k\le n}(\frac{(-1)^k}{(2k-1)}+\frac{(-1)^k}{(2k+1)}) = \frac{1}{4}(\frac{-1}{2*1-1}+\sum_{2\le k\le n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}+\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}) =$$

$$\frac{1}{4}(-1+\sum_{2\le k\le n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)} + \sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} + \frac{(-1)^n}{2n+1}) \qquad (1)$$

Στη συνέχεια , θα δουλέψουμε με το άθροισμα $\sum_{2\le k\le n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}$ **, προσπαθώντας να βρούμε κάποια σχέση , που μπορεί να έχει με το άθροισμα** $\sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}$**. Οπότε :**

$$\sum_{2\le k\le n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)} = \sum_{2\le k+1\le n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)-1)} = \sum_{2\le k+1\le n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2-1)} = \sum_{2\le k+1\le n}(-1)\frac{(-1)^k}{(2k+1)} = -\sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} \Longrightarrow$$

$$\sum_{2\le k\le n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)} = -\sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) , θα βρούμε το τελικό αποτέλεσμα :

$$\frac{1}{4}(-1+\sum_{2\le k\le n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}+\sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}+\frac{(-1)^n}{2n+1}) = \frac{1}{4}(-1-\sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}+\sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}+\frac{(-1)^n}{2n+1}) \Longrightarrow$$

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^k k}{4k^2-1} = \frac{1}{4}(-1-\sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}+\sum_{1\le k\le n-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}+\frac{(-1)^n}{2n+1}) = \frac{-1}{4}+\frac{(-1)^n}{8n+4} \Longrightarrow$$

$$\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^k k}{4k^2-1} = \frac{-1}{4}+\frac{(-1)^n}{8n+4}$$

□

Άσκηση 21. Η συνάρτηση *Riemann's* $\zeta(k)$ **ορίζεται ως εξής :**

$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots\ldots\ldots=\sum_{1\leq j}\frac{1}{j^k}$

(α) Να αποδειχθεί ότι $\sum_{2\leq k}(\zeta(k)-1)=1$

(β) Να βρεθεί η τιμή του αθροίσματος $\sum_{1\leq k}(\zeta(2k)-1)$

Απόδειξη.

(α) Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω , το πρώτο βήμα μας θα είναι να αντικαταστήσουμε τη συνάρταση $\zeta(k)$ **στο άθροισμα του ερωτήματος** (α)**. Οπότε θα έχουμε :**

$$\sum_{2\leq k}(\zeta(k)-1)=\sum_{2\leq k}(1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+.....-1)=\sum_{2\leq k}(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+.....)\Longrightarrow$$

$$\sum_{2\leq k}(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+.....)=\sum_{2\leq k}\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^k}=\sum_{2\leq j}\sum_{2\leq k}\frac{1}{j^k}\Longrightarrow$$

$$\sum_{2\leq j}\sum_{2\leq k}\frac{1}{j^k}=\sum_{2\leq j}\sum_{0\leq k}\frac{1}{j^{k+2}}=\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^2}\sum_{0\leq k}\frac{1}{j^k}\Longrightarrow$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε ένα γινόμενο δύο αθροισμάτων. Στη συνέχεια ξέροντας ότι η σειρά $\sum_{0\leq n}z^n$ **είναι μια γεωμετρική σειρά , θα ισούται με** $\frac{1}{1-z}$ **(όταν** $z\geq 2$**) . Οπότε για τη συγκεκριμένη σειρά θα έχουμε** $\sum_{0\leq k}\frac{1}{j^k}=\frac{j}{j-1}$

Άρα :

$$\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^2}\sum_{0\leq k}\frac{1}{j^k}=\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^2}\frac{j}{j-1}=\sum_{2\leq j}\frac{1}{j(j-1)}\Longrightarrow$$

$$\sum_{2\leq j}\frac{1}{j(j-1)}=\sum_{0\leq j}\frac{1}{(j+2)(j+1)}\qquad(1)$$

Όμως από τον τύπο (2.51) της σελίδας 52 του βιβλίου *concrete mathematics* **ξέρουμε ότι** $\frac{1}{(x+1)(x+2)........(x+m)}=x^{\underline{-m}}$**. Οπότε στην δική μας περίπτωση θα γίνει** $\frac{1}{(j+1)(j+2)}=j^{\underline{-2}}$ **και αντικαθιστώντας στην (1) θα πάρουμε:**

$$\sum_{0\leq j}\frac{1}{(j+2)(j+1)}=\sum_{0\leq j}j^{\underline{-2}}\qquad(2)$$

Τέλος θα αντικαταστήσουμε στη σχέση (2) τον τύπο $\sum_{0\leq k}a_k=\lim_{n\to 00}\sum_{0\leq k\leq n}a_k$**, που βρίσκεται στη σελίδα 58 του βιβλίου.**

$$\sum_{0\leq j}\frac{1}{(j+2)(j+1)}=\sum_{0\leq j}j^{\underline{-2}}=\lim_{n\to 00}\sum_{0\leq j\leq n}j^{\underline{-2}}=\lim_{n\to 00}\frac{j^{\underline{-1}}}{-1}\Big|_o^n=1$$

(β) **Για το δεύτερο ερώτημα τώρα θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία μόνο που αντί για** k **στην συνάρτηση** *Riemann's* **θα βάλλουμε** $2k$. **Άρα :**

$$\sum_{1\leq k}(\zeta(2k)-1)=\sum_{1\leq k}(1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+.....-1)=\sum_{1\leq k}(\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+.....)\Longrightarrow$$

$$\sum_{1\leq k}(\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+.....)=\sum_{1\leq k}\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^{2k}}=\sum_{2\leq j}\sum_{1\leq k}\frac{1}{j^{2k}}\Longrightarrow$$

$$\sum_{2\leq j}\sum_{1\leq k}\frac{1}{j^{2k}}=\sum_{2\leq j}\sum_{0\leq k}\frac{1}{j^{2k+2}}=\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^2}\sum_{0\leq k}\frac{1}{j^{2k}}\Longrightarrow$$

Ξέρουμε ότι η σειρά $\sum_{0\leq n}z^n$ **είναι μια γεωμετρική σειρά η οποία ισούται με** $\frac{1}{1-z}$ **(όταν** $z\geq 2$**).**

Οπότε για τη συγκεκριμένη σειρά θα έχουμε $\sum_{0\leq k}\frac{1}{j^{2k}}=\frac{j^2}{j^2-1}$ **. Άρα :**

$$\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^2}\sum_{0\leq k}\frac{1}{j^{2k}}=\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^2}\frac{j^2}{j^2-1}=\sum_{2\leq j}\frac{1}{j^2-1}=\sum_{2\leq j}\frac{1}{(j-1)(j+1)}=\sum_{0\leq j}\frac{1}{(j+1)(j+3)}\Longrightarrow$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με $j+2$ **και από** $\sum_{a\leq k\leq b}g(x)\delta x=\sum_{a\leq k<b}g(k)$ **(2.48) του βιβλίου** *concrete mathematics* **σελίδα 49 θα έχουμε :**

$$\sum_{0\leq j}\frac{1}{(j+1)(j+3)}=\sum_{0\leq j}\frac{j+2}{(j+1)(j+2)(j+3)}=\sum_{0\leq x}\frac{x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}\delta x$$

Για να το λύσουμε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του βιβλίου *concrete mathematics* **σελίδα 55 :**

$$\sum u\Delta v=uv-\sum Ev\Delta u \quad (2.56)$$

Επίσης γνωρίζουμε (από σελ 55) ότι: $Ev(x)=v(x+1)$.

Οπότε : $u=x+2,\Delta u=1,\Delta v=\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=x^{\underline{-3}},v=-\frac{x^{\underline{-2}}}{2}$ και $Ev=-\frac{(x+1)^{\underline{-2}}}{2}$.

$$\sum_{0\leq x}\frac{x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}\delta x=\lim_{n\to 00}-\frac{x^{\underline{-2}}}{2}(x+2)|_o^n-\sum_{0\leq x}-\frac{(x+1)^{\underline{-2}}}{2}\Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to 00}-\frac{x^{\underline{-2}}}{2}(x+2)|_o^n-\sum_{0\leq x}-\frac{(x+1)^{\underline{-2}}}{2}=\lim_{n\to 00}[-\frac{n^{\underline{-2}}}{2}(n+2)+-\frac{0^{\underline{-2}}}{2}(0+2)]+\lim_{n\to 00}-\frac{(x+1)^{\underline{-1}}}{2}|_o^n\Longrightarrow$$

Τέλος καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα :

$$\lim_{n\to 00}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2}-\lim_{n\to 00}\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 22	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 10 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 23	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 12 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 24	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 11 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 25	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 36 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 26	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 17 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 27	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 20 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 28	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 23 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 29	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 16 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 30	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 31 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 31	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 35 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 32	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 33 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 33	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 14 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

Άσκηση 22. ***Δείξτε ότι η παρακάτω έκφραση είναι πάντα είτε $\lfloor x \rfloor$ είτε $\lceil x \rceil$.***

$$\lceil \frac{2x+1}{2} \rceil - \lceil \frac{2x+1}{4} \rceil + \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor \qquad (1)$$

Απόδειξη.

Θα ξεκινήσουμε καλύπτοντας βασικούς ορισμούς όπως , *floor functions* **(συνάρτηση μέγιστου ακέραιου) και** *ceil functions* **(συνάρτηση ελάχιστου ακέραιου).**

Floor , $\lfloor x \rfloor =$ **Ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του** x

Ceiling , $\lceil x \rceil =$ **Ο ελάχιστος ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του** x

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : $p = 3.14$ **, άρα σύμφωνα με τα παραπάνω** $\lfloor p \rfloor = 3$ **και** $\lceil p \rceil = 4$.

Εφόσον κάναμε τον απαραίτητο πρόλογο ας ξαναγράψουμε την έκφραση (1) με διαφορετικό τρόπο όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\lceil \frac{2x+1}{2} \rceil - \lceil \frac{2x+1}{4} \rceil + \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor = \lceil x + \frac{1}{2} \rceil - (\lceil \frac{2x+1}{4} \rceil - \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor) \qquad (2)$$

Αρχικά λοιπόν θα υποθέσουμε ότι $\frac{2x+1}{4} = n$ **και θα πάρουμε περιπτώσεις αν το** x **είναι ακέραιος ή όχι.**

(α)Αν ο x **είναι ακέραιος , τότε** $\frac{2x+1}{4} = (\frac{x}{2} + \frac{1}{4}) = n$**, όπου ο** n **δεν είναι ακέραιος. (β)Αν ο** x **δεν είναι ακέραιος , τότε** $\frac{2x+1}{4} = (\frac{x}{2} + \frac{1}{4}) = n$**, όπου ο** n **μπορεί να είναι ακέραιος μπορεί και όχι. Έτσι τώρα θα πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις για το** n.

(α)Έστω ότι $\frac{2x+1}{4} = n$ **, όπου** n **είναι ένας ακέραιος. Τότε :**
$(\lceil \frac{2x+1}{4} \rceil - \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor) = (\lceil n \rceil - \lfloor n \rfloor) = 0$ **επειδή** $\lceil n \rceil = \lfloor n \rfloor$.**Ακόμα όταν** $\frac{2x+1}{4} = n$ **,τότε** $x = 2n - \frac{1}{2}$ **,επιπλέον** $\lceil x \rceil = \lceil 2n - \frac{1}{2} \rceil = \lceil 2n \rceil$.**Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) θα έχουμε :**

$$\lceil x + \frac{1}{2} \rceil - (\lceil \frac{2x+1}{4} \rceil - \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor) = \lceil x + \frac{1}{2} \rceil - 0 = \lceil 2n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rceil = \lceil 2n \rceil = \lceil x \rceil$$

(β)Έστω ότι $\frac{2x+1}{4} = n$ **, όπου** n **δεν είναι ακέραιος. Τότε από τον τύπο (3.2) και (3.6) του βιβλίου** *concrete mathematics* **έχουμε :**

$$\lceil y \rceil - \lfloor y \rfloor = 1 \quad (3.2) \quad \text{και όταν } n \text{ είναι ακέραιος} \quad \lfloor y \rfloor + n = \lfloor y + n \rfloor, \quad (3.6)$$

Οπότε από τις (3.2) και (3.6) αντίστοιχα θα έχουμε :

$$(\lceil \frac{2x+1}{4} \rceil - \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor) = 1 \qquad (3)$$

Και από την (3) με βάση τη σχέση (3.6) έχουμε :

$$\lceil x + \frac{1}{2} \rceil - (\lceil \frac{2x+1}{4} \rceil - \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor) = \lceil x + \frac{1}{2} \rceil - 1 = \lceil x + \frac{1}{2} - 1 \rceil = \lceil x - \frac{1}{2} \rceil$$

Τέλος θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3.8) του βιβλίου: $x = \lfloor x \rfloor + [x]$ **(3.8), όπου** $\lfloor x \rfloor$ **είναι ένας ακέραιος και** $0 < [x] < 1$. **Οπότε αντικαθιστώντας στο** $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ **θα έχουμε:** $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil = \lceil \lfloor x \rfloor + [x] - \frac{1}{2} \rceil$.

Αν $[x] > \frac{1}{2}$ **τότε** $\lceil \lfloor x \rfloor + [x] - \frac{1}{2} \rceil = \lceil \lfloor x \rfloor + y \rceil = \lceil x \rceil$ **, όπου** $0 < y < \frac{1}{2}$.

Αν $[x] < \frac{1}{2}$ **τότε** $\lceil \lfloor x \rfloor + [x] - \frac{1}{2} \rceil = \lceil \lfloor x \rfloor + y \rceil = \lfloor x \rfloor$ **, όπου** $0 < y < \frac{1}{2}$.

Αν $[x] = \frac{1}{2}$ **τότε** $\lceil \lfloor x \rfloor + [x] - \frac{1}{2} \rceil = \lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor$.

Από όλα τα παραπάνω λοιπόν φαίνεται ξεκάθαρα πως :

$$\lceil \frac{2x+1}{2} \rceil - \lceil \frac{2x+1}{4} \rceil + \lfloor \frac{2x+1}{4} \rfloor = \lfloor x \rfloor \quad \eta \quad \lceil x \rceil$$

□

Άσκηση 23. ***Αποδείξτε ότι :***

$$\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor \qquad (1)$$

για όλους τους ακέραιους n ***και όλους τους θετικούς ακέραιους*** m.

Αυτή η ταυτότητα μας δίνει έναν άλλο τρόπο να μετατρέπουμε τα ανώτατα όρια σε κατώτατα και αντίστροφα, αντί της χρησιμοποίησης του ανακλαστικού νόμου (3.4) , ο οποίος είναι:

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil \quad , \quad \lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor \qquad (3.4)$$

Απόδειξη.

Το πηλίκο της διαίρεσης του n με το m είναι το $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$, όταν το n και το m είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Είναι πρακτικό να υπάρξει μια απλή σημείωση επίσης για το υπόλοιπο αυτού του τμήματος, το οποίο το καλούμε $n \, mod \, m$. Ο βασικός τύπος είναι (σελ.82 βιβλίου):

$$n = m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + n \, mod \, m$$

Η παραπάνω έκφραση λοιπόν μας λέει ότι μπορούμε να εκφράσουμε το $n \, mod \, m$ ώς $n - m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. Εμείς μπορούμε να το γενικεύσουμε αύτο για τους αρνητικούς αριθμούς , και στην πραγματικότητα , για όλους τους τυχαίους πραγματικούς αριθμούς. Η γενίκευση αυτή δίνεται στον τύπο (3.21) του βιβλίου :

$$x \, mod \, y = x - y\lfloor \frac{x}{y} \rfloor \ , \ \ \gamma\iota\alpha \ \ y \neq 0 \qquad (3.21)$$

Μετα τον παραπάνω χρήσιμο πρόλογο , ερχόμενοι στην άσκηση μας το πρώτο πράγμα που θα κάνουμε είναι να αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της σχέσης (1) το $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. Άρα :

$$\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor \rightarrow \lceil \frac{n}{m} \rceil - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \qquad (2)$$

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστούμε την σχέση (3.6) του βιβλίου η οποία είναι :$\lfloor y \rfloor + n = \lfloor y + n \rfloor$ (3.6) όταν το n είναι ακέραιους. Χρησιμοποιούμε την (3.6) στην (2) και παίρνουμε(το $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ είναι ακέραιος εξόρισμού).

$$\lceil \frac{n}{m} \rceil - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \rightarrow \lceil \frac{n}{m} - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} - \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \rfloor \rightarrow \lceil \frac{n - m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1-m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}{m} \rfloor \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την σχέση (3.21) στην (3) βγάζουμε το παρακάτω αποτέλεσμα :

$$\lceil \frac{n - m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1-m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}{m} \rfloor \rightarrow \lceil \frac{n \, mod \, m}{m} \rceil = \lfloor \frac{n \, mod \, m}{m} + \frac{m-1}{m} \rfloor \quad (4)$$

Για να αποδείξουμε τώρα την αρχική έκφραση (1) θα σπάσουμε τα δύο μέλη και θα τα ονομάσουμε ώς εξής : $AM = \lceil \frac{n \, mod \, m}{m} \rceil$ και $\Delta M = \lfloor \frac{n \, mod \, m}{m} + \frac{m-1}{m} \rfloor$, όπου AM : αριστερό μέλος και ΔM : δεξιό μέλος. Εφόσον η σχέση (1) θα πρέπει να ισχύει για όλους τους θετικούς ακέραιους m , θα πάρουμε περιπτώσεις : (A) $m = 1$ και (B) $m > 1$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (A) $m = 1$ και ο n είναι ακέραιος :

$$AM = \lceil \frac{n \, mod \, m}{m} \rceil = \lceil \frac{n - m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}{m} \rceil = \lceil n - \lfloor n \rfloor \rceil = 0$$

$$\Delta M = \lfloor \frac{n \, mod \, m}{m} + \frac{m-1}{m} \rfloor = \lfloor \frac{n \, mod \, m}{m} \rfloor = \lfloor \frac{n - m\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}{m} \rfloor = \lfloor n - \lfloor n \rfloor \rfloor = 0$$

Άρα $AM = \Delta M$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (Β) $m > 1$ **και ο** n **είναι ακέραιος. Για την περίπτωση αυτή γνωρίζουμε από το βιβλίο** *concrete mathematics* **σελ. 82 ότι , όταν το** y **είναι θετικός ακέραιος τότε ισχύει η ανίσωση** $0 \leq x \bmod y < y$**. Στη δική μας περίπτωση τώρα επειδή** $m > 0$ **ο τύπος θα γίνει** $0 \leq n \bmod m < m$ **ή** $0 \leq n \bmod m \leq m-1$ **(5).**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (Β1) : Όταν $n \bmod m = 0$ **, τότε είναι προφανές ότι :**

$$AM = \lceil \frac{n \bmod m}{m} \rceil = 0, \Delta M = \lfloor \frac{n \bmod m}{m} + \frac{m-1}{m} \rfloor = \lfloor \frac{m-1}{m} \rfloor = 0 \rightarrow AM = \Delta M$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (Β2) : Στην τελευταία περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (5) χωρίς το μηδέν όμως , καθώς αυτή την περίπτωση την καλύψαμε στην (Β1). Συνεπώς θα έχουμε :

$$1 \leq n \bmod m \leq m-1 \Longrightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{n \bmod m}{m} \leq \frac{m-1}{m} \quad (6) \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{m} + \frac{(m-1)}{m} \leq \frac{n \bmod m}{m} + \frac{(m-1)}{m} \leq \frac{m-1}{m} + \frac{(m-1)}{m} \Longrightarrow \frac{1}{m} + 1 - \frac{1}{m} \leq \frac{n \bmod m}{m} + \frac{(m-1)}{m} \leq \frac{2m-2}{m}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : $\frac{2m-2}{m} = 2 - \frac{2}{m} < 2$ **καθώς** $m > 1$**. Οπότε η παραπάνω θα γίνει :**

$$1 \leq \frac{n \bmod m}{m} + \frac{(m-1)}{m} < 2 \qquad (7)$$

Βλέποντας τα συμπεράσματα (6) και (7) που βγάλαμε παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

$$AM = \lceil \frac{n \bmod m}{m} \rceil = 1 \quad , \quad \Delta M = \lfloor \frac{n \bmod m}{m} + \frac{m-1}{m} \rfloor = 1 \quad , \quad AM = \Delta M$$

Άρα αποδείξαμε ότι :

$$\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lfloor \frac{n+m-1}{m} \rfloor$$

για όλους τους ακέραιους n **και όλους τους θετικούς ακέραιους** m**.**

□

Άσκηση 24. ***Αποδείξτε ότι το ανοικτό διάστημα , (a, b) δηλαδή , $(a \dots b)$ περιέχει $\lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1$ ακέραιους αριθμούς , όπου $\alpha < \beta$. Επίσης , δείξτε γιατί η περίπτωση $\alpha = \beta$ πρέπει να αποκλειστεί προκειμένου να είναι η απόδειξη σωστή.***

Απόδειξη.

Στην παραπάνω εκφώνηση λοιπόν μας γίνεται γνωστό ότι το (a, b) είναι ένα ανοικτό διάστημα δηλαδή , ένας αριθμός γ θα ανήκει σε αυτό αν και μόνον αν $\alpha < \gamma < \beta$. Όπου α , β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$.

Από τα κατώτατα και ανώτατα όρια συναρτήσεων (*Floor and Ceiling Function*) και τις σχέσεις (3.7)(α) , (3.7)(β) του βιβλίου σελ. 69 , ξέρουμε ότι :

$$x < n \Longleftrightarrow \lfloor x\rfloor < n \ , \qquad (3.7)(\alpha) \quad , \quad n < x \Longleftrightarrow n < \lceil x\rceil \ , \qquad (3.7)(\beta)$$

Όπου , x είναι ένας πραγματικός αριθμός και n είναι ένας ακέραιος.

Για να ξεκινήσουμε την απόδειξη θα υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε :

$$\alpha < n < \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < n \quad \textit{και} \quad n < \beta \quad (1)$$

Όπου , α , β είναι πραγματικοί αριθμοί και n είναι ακέραιος.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.7)(α) θα εξετάσουμε το $\alpha < n$ και θα έχουμε το ακόλουθο:

$$\alpha < n \qquad \Longrightarrow \qquad \lfloor\alpha\rfloor < n \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.7)(β) θα εξετάσουμε το $n < \beta$ και θα βρούμε το παρακάτω:

$$\beta > n \qquad \Longrightarrow \qquad \lceil\beta\rceil > n \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας τις ισότητες (2) και (3) που βρήκαμε παραπάνω καταλήγουμε πολύ κοντά στην λύση που θέλουμε καθώς έχουμε:

$$\alpha < n < \beta \quad \Longrightarrow \quad \lfloor\alpha\rfloor < n < \lceil\beta\rceil \quad (4)$$

Με λίγα λόγια δηλαδή καταφέραμε να ανάγουμε το $\alpha < n < \beta$ στο $\lfloor\alpha\rfloor < n < \lceil\beta\rceil$, όπου $\lfloor\alpha\rfloor$, n και $\lceil\beta\rceil$ είναι όλοι ακέραιοι.

Τοποθετώντας τώρα όλους του ακέραιους που περιέχονται στην ανίσωση $\lfloor\alpha\rfloor < n < \lceil\beta\rceil$ σε μία λίστα θα έχουμε : $[\lfloor\alpha\rfloor+1, \lfloor\alpha\rfloor+2, \dots\dots, \lceil\beta\rceil-2, \lceil\beta\rceil-1]$. Για να βρούμε τώρα το πλήθος των ακεραίων που βρίσκονται μέσα στην λίστα , θα αφαιρέσουμε από τον τελευταίο τον πρώτο και θα προσθέσουμε την μονάδα($S =$ πλήθος ακεραίων). Δηλαδή :

$$S = \lceil\beta\rceil - 1 - (\lfloor\alpha\rfloor + 1) + 1 = \lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1 \qquad (5)$$

Για την περίπτωση όπου $\alpha = \beta$ είναι πραγματικοί αριθμοί η σχέση (5) ισχύει καθώς $\alpha = \beta \longrightarrow \lfloor\alpha\rfloor = \lfloor\beta\rfloor$ *και* $\lceil\beta\rceil = \lceil\alpha\rceil$. Ας δώσουμε ένα παράδειγμα. Έστω $\alpha = \beta = 2.5$, τότε : $\lfloor\alpha\rfloor = \lfloor\beta\rfloor = 2$ και $\lceil\beta\rceil = \lceil\alpha\rceil = 3$(Κανονικά θα πρέπει να βγάλουμε $S = 0$ για να ισχύει).

$$S = \lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1 = 3 - 2 - 1 = 0$$

Τέλος αν $\alpha = \beta$ είναι ακέραιοι αριθμοί η σχέση (5) δεν ισχύει καθώς $\alpha = \beta \longrightarrow \lfloor\alpha\rfloor = \lfloor\beta\rfloor = \lceil\beta\rceil = \lceil\alpha\rceil$. Ας δώσουμε ένα παράδειγμα. Έστω $\alpha = \beta = 2$, τότε : $\lfloor\alpha\rfloor = \lfloor\beta\rfloor = \lceil\beta\rceil = \lceil\alpha\rceil = 2$ (Κανονικά θα πρέπει να βγάλουμε $S = 1$ για να ισχύει).

$$S = \lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$$

Κατά συνέπεια , η περίπτωση όπου $\alpha = \beta$ είναι ακέραιοι πρέπει να αποκλειστεί καθώς δεν ισχύει ο τύπος $\lceil\beta\rceil - \lfloor\alpha\rfloor - 1$.

□

Άσκηση 25. ***Υποθέτοντας ότι το*** n ***είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος , βρείτε τον κλειστό τύπο του παρακάτω αθροίσματος***

$$\sum_{1<k<2^{2^n}} \frac{1}{2^{\lfloor logk \rfloor} 4^{\lfloor log(logk) \rfloor}}$$

Απόδειξη.

Μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα σε μια απλούστερη μορφή αντικαθιστώντας τις δυνάμεις με πιο απλές σχέσεις. Για να υπολογίσουμε το παραπάνω άθροισμα θα θέσουμε όπου $m = \lfloor lgl \rfloor$ **και όπου** $l = \lfloor lgk \rfloor$**. Υποθέτουμε ότι οι λογάριθμοι** lgl **και** lgk **έχουν βάση το 2. Οπότε θα έχουμε :**

$$\sum_{1<k<2^{2^n}} \frac{1}{2^{\lfloor logk \rfloor} 4^{\lfloor lglogk \rfloor}} = \sum_{l,m,1<k<2^{2^n}} 2^{-l}4^{-m}[m = \lfloor logl \rfloor][l = \lfloor logk \rfloor][1 < k < 2^{2^n}] \qquad (1)$$

Πρέπει να δεσμεύσουμε τις τιμές τών l **,** m **και** k **(με βάση την σχέση (3.5)(α) του βιβλίου) έτσι ώστε το άθροισμα να μπορεί να χωριστεί εύκολα και να υπολογιστεί. Άρα οι** $m = \lfloor lgl \rfloor, l = \lfloor lgk \rfloor$ **και** $1 < k < 2^{2n}$ **θα γίνουν ως εξής :**

$$m = \lfloor logl \rfloor \Longleftrightarrow m \le logl < m+1 \Longleftrightarrow 2^m \le l < 2^{m+1}, \quad l = \lfloor logk \rfloor \Longleftrightarrow l \le logk < l+1 \Longleftrightarrow 2^l \le k < 2^{l+1}$$

Από πρίν ξέρουμε ότι $1 < k < 2^{2^n}$ **και** $l = \lfloor lgk \rfloor$**. Για** $k > 1$ **τότε** $l > 0$ **και για** $k = 2$ **τότε** $l = 1$**. Λογαριθμίζοντας τώρα και τα δύο μέλη της ανίσωσης** $k < 2^{2^n}$ **θα έχουμε** $logk < 2^n$ **και από** $l < logk$ **που βρήκαμε παραπάνω , θα πάρουμε** $l < 2^n$ **και** $l \ge 1 \Longrightarrow 1 \le l < 2^n$**.**

Έτσι λοιπόν ξέρουμε ότι $1 \le l < 2^n$ **και από την σχέση** $m = \lfloor lgl \rfloor \Longrightarrow m < logl$ **καθώς για** $l = 1$ **τότε** $m = 0$**. Στη συνέχεια λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της** $l < 2^n$ **παίρνουμε** $logl < n \Longrightarrow m < n \Longrightarrow 0 \le m < n$**. Βάζοντας τώρα αυτα που βρήκαμε για τα** $logl$ **και** $logk$ **στη σχέση (1) θα έχουμε :**

$$\sum_{l,m,1<k<2^{2^n}} 2^{-l}4^{-m}[m = \lfloor logl \rfloor][l = \lfloor logk \rfloor][1 < k < 2^{2n}] = \sum_{l,k,m} 2^{-l}4^{-m}[2^m \le l < 2^{m+1}][2^l \le k < 2^{l+1}][0 \le m < n]$$

Εξόρισμού γνωρίζουμε πως από πολλαπλασιασμό αθροισμάτων το παραπάνω θα γίνει ώς εξής:

$$\sum_{l,k,m} 2^{-l}4^{-m}[2^m \le l < 2^{m+1}][2^l \le k < 2^{l+1}][0 \le m < n] = \sum_{2^m \le l < 2^{m+1}} \sum_{2^l \le k < 2^{l+1}} \sum_{0 \le m < n} 2^{-l}4^{-m}$$

Στη συνέχεια αλλάζοντας την σειρά των αθροισμάτων χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα θα έχουμε :

$$\sum_{2^m \le l < 2^{m+1}} \sum_{2^l \le k < 2^{l+1}} \sum_{0 \le m < n} 2^{-l}4^{-m} = \sum_{0 \le m < n} 4^{-m} \sum_{2^m \le l < 2^{m+1}} 2^{-l} \sum_{2^l \le k < 2^{l+1}}$$

Έπειτα θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε κάθε άθροισμα από τα παραπάνω ξεχωριστά. Οπότε θα πάρουμε :

$$\sum_{2^l \le k < 2^{l+1}} = 2^{l+1} - 2^l = 2^l * (2-1) = 2^l \Longrightarrow \sum_{0 \le m < n} 4^{-m} \sum_{2^m \le l < 2^{m+1}} 2^{-l}2^l = \sum_{0 \le m < n} 4^{-m} \sum_{2^m \le l < 2^{m+1}}$$

$$\sum_{2^m \le l < 2^{m+1}} = 2^{m+1} - 2^m = 2^m * (2-1) = 2^m \Longrightarrow \sum_{0 \le m < n} 4^{-m}2^m = \sum_{0 \le m < n} 2^{-m}$$

Τέλος για το $\sum_{0\leq m<n} 2^{-m}$, παρατηρούμε ότι είναι μια γεωμετρική σειρά. Για τις γεωμετρικές σειρές ξέρουμε ότι : $\sum_{0\leq m<n} \frac{1}{z^m} = \frac{1-z^n}{1-z}$ (για $z \geq 1$) . Οπότε για την περίπτωσή μας θα έχουμε: $\sum_{0\leq m<n} 2^{-m} = 1 * \frac{1-\frac{1}{2}^n}{1-\frac{1}{2}} = 2*(1-2^{-n})$. Άρα :

$$\sum_{0\leq m<n} 4^{-m} \sum_{2^m\leq l<2^{m+1}} 2^{-l} \sum_{2^l\leq k<2^{l+1}} = \sum_{0\leq m<n} 2^{-m} = 2*(1-2^{-n})$$

Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν έχουμε να πούμε ότι όταν το n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος , τότε ο κλειστός τύπος του αθροίσματος :

$$\sum_{1<k<2^{2^n}} \frac{1}{2^{\lfloor logk \rfloor} 4^{\lfloor log(logk) \rfloor}}$$

είναι ο :

$$\sum_{1<k<2^{2^n}} \frac{1}{2^{\lfloor logk \rfloor} 4^{\lfloor log(logk) \rfloor}} = 2*(1-2^{-n})$$

□

Άσκηση 26. *Υπολογίστε το άθροισμα* $\sum_{0\le k<m}\lfloor x+\frac{k}{m}\rfloor$ (1) *στην περίπτωση όπου* $x\ge 0$ *, αντικαθιστώντας το* $\lfloor x+\frac{k}{m}\rfloor$ *με το* $\sum_j[1\le j\le x+\frac{k}{m}]$ *και αθροίζοντας πρώτα στο* k. *Κοιτάξτε αν η απάντησή σας συμφωνεί με την σχέση (3.26).*

$$\lfloor mx\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor x+\frac{1}{m}\rfloor+\ldots\ldots+\lfloor x+\frac{m-1}{m}\rfloor \qquad (3.26)$$

Απόδειξη.

Ξεκινώντας λοιπόν με την άσκησή μας το πρώτο πράγμα που θα κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε το $\lfloor x+\frac{k}{m}\rfloor$ στο αρχικό άθροισμα (1). Οπότε θα έχουμε :

$$\sum_{0\le k<m}\lfloor x+\frac{k}{m}\rfloor=\sum_{j,k}[0\le k<m][[1\le j\le x+\frac{k}{m}]\ ,\ x\ge 0 \qquad (2)$$

Από τα παραπάνω μπορούμε να βγάλουμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα, όπως : το $j\le x+\frac{k}{m}$ μας δίνει $m(j-x)\le k$ και επίσης , $j\le x+\frac{k}{m}$, $(j-x)\le\frac{k}{m}$, $j-x<1$, $j<x+1$. Έτσι λοιπόν σαν συμπέρασμα βγάζουμε ότι $j\le\lceil x\rceil$ και η (2) θα γίνει :

$$\sum_{j,k}[0\le k<m][1\le j\le x+\frac{k}{m}]=\sum_{j,k}[0\le k<m][1\le j\le\lceil x\rceil][k\ge m(j-x)] \qquad (3)$$

Στη συνέχεια θα πρέπει να αθροίσουμε πρώτα από το k άρα το (3) θα γίνει:

$$\sum_{1\le j\le\lceil x\rceil}\sum_k[0\le k<m][k\ge m(j-x)]=\sum_{1\le j\le\lceil x\rceil}\sum_k[0\le k<m]-\sum_{1\le j\le\lceil x\rceil}\sum_k[0\le k<m(j-x)] \qquad (4)$$

Για το όριο του j στο δεύτερο άθροισμα της σχέσης (4) έχουμε ότι : $1\le j\le\lceil x\rceil$, $m(j-x)<0$ άρα $j=\lceil x\rceil$ είναι το άνω όριο για το j. Έτσι η ισότητα (4) μπορεί να γραφτεί τώρα ώς εξής :

$$\sum_{1\le j\le\lceil x\rceil}\sum_k[0\le k<m]-\sum_{1\le j\le\lceil x\rceil}\sum_k[0\le k<m(j-x)]=\sum_{1\le j\le\lceil x\rceil}\sum_k[0\le k<m]-\sum_{j=\lceil x\rceil}\sum_k[0\le k<m(j-x)]=$$

$$\sum_{1\le j\le\lceil x\rceil}m-\sum_{j=\lceil x\rceil}\sum_k[m(j-x)] \qquad (5)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (3.12) του βιβλίου η οποία μας λέει ότι άν έχουμε το διάστημα $[a\ldots b]$ τότε οι ακέραιοι που υπάρχουν μέσα σε αυτό το διάστημα δίνονται από τον τύπο $\lfloor b\rfloor-\lceil a\rceil+1$. Οπότε θα έχουμε.

$$\sum_{1\le j\le\lceil x\rceil}m-\sum_{j=\lceil x\rceil}\sum_k[m(j-x)]=m(\lfloor\lceil x\rceil\rfloor-\lceil 1\rceil+1)-\lceil m(\lceil x\rceil-x)\rceil$$

Ξέρουμε ότι $\lfloor\lceil x\rceil\rfloor=\lceil x\rceil$ και $\lceil\lceil x\rceil\rceil=\lceil x\rceil$ για $x\ge 0$. Άρα :

$$m(\lfloor\lceil x\rceil\rfloor-\lceil 1\rceil+1)-\lceil m(\lceil x\rceil-x)\rceil=m\lceil x\rceil-m\lceil x\rceil-\lceil -mx\rceil$$

Τέλος από ανακλαστική ιδιότητα γνωρίζουμε ότι : $\lceil -x\rceil=-\lfloor x\rfloor$.

$$m\lceil x\rceil-m\lceil x\rceil-\lceil -mx\rceil=-\lceil -mx\rceil=\lfloor mx\rfloor\Longrightarrow$$

$$\sum_{0\le k<m}\lfloor x+\frac{k}{m}\rfloor=\lfloor mx\rfloor$$

Όπως φαίνεται ξεκάθαρα παραπάνω , η λύση μας συμφωνεί απόλυτα με την ισότητα (3.26).

□

Άσκηση 27. ***Βρείτε το άθροισμα όλων των πολλαπλάσιων του x που ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[a \dots b]$, όταν $x > 0$.***

Απόδειξη.

Αρχικά θα θέσουμε όπου $S =$ το άθροισμα όλων των πολλαπλάσιων του x που ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[a \dots b]$, όταν $x > 0$. Άρα θα έχουμε :

$$S = \sum_{k \in Z, a \leq kx \leq b} kx = \sum kx[k \in Z, a \leq kx \leq b][k \textbf{ ακέραιος}] = x \sum k[k \in Z, a \leq kx \leq b][k \textbf{ ακέραιος}]$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1 : Από τις σχέσεις (3.7)(γ) και (3.7)(δ) του βιβλίου ξέρουμε ότι :

$$x \leq n \iff \lceil x \rceil \leq n \ , \qquad (3.7)(\gamma) \quad , \quad n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor \ , \qquad (3.7)(\delta)$$

Όπου , x είναι ένας πραγματικός αριθμός και n είναι ένας ακέραιος.

$$x \sum k[k \in Z, \frac{a}{x} \leq k \leq \frac{b}{x}][k \textbf{ ακέραιος}] = x \sum k[k \in Z, \lceil \frac{a}{x} \rceil \leq k \leq \lfloor \frac{b}{x} \rfloor][k \textbf{ ακέραιος}]$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2 : Από τους τύπους (2.48) και (2.43) του βιβλίου *concrete mathematics* **γνωρίζουμε ότι :**

$$\sum_{a \leq k \leq b} g(x)\delta x = \sum_{a \leq k < b} g(k) \qquad (2.48), \qquad x^{\underline{m}} = x(x-1)\dots(x-m+1) \qquad (2.43)$$

Άρα θα έχουμε :

$$x \sum k[k \in Z, \lceil \frac{a}{x} \rceil \leq k < \lfloor \frac{b}{x} \rfloor + 1][k \textbf{ ακέραιος}] = x \sum_{\lceil \frac{a}{x} \rceil \leq k \leq \lfloor \frac{b}{x} \rfloor + 1} k^{\underline{1}} \delta k$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 3 : Τέλος από την σχέση (2.53) έχουμε τον ακόλουθο τύπο :

$$\sum_{a \leq x \leq b} x^{\underline{m}} \delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} \Big|_a^b, \qquad m \neq -1 \qquad (2.53)$$

Οπότε στην δική μας περίπτωση θα έχουμε :

$$S = x \sum_{\lceil \frac{a}{x} \rceil \leq k \leq \lfloor \frac{b}{x} \rfloor + 1} k^{\underline{1}} \delta k = x \frac{k^{\underline{2}}}{2} \Big|_{\lceil \frac{a}{x} \rceil}^{\lfloor \frac{b}{x} + 1 \rfloor}$$

Έτσι λοιπόν , το άθροισμα όλων των πολλαπλάσιων του x που ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[a \dots b]$, όταν $x > 0$, είναι το :

$$S = x \frac{k^{\underline{2}}}{2} \Big|_{\lceil \frac{a}{x} \rceil}^{\lfloor \frac{b}{x} + 1 \rfloor} = \frac{x}{2}[k(k-1)] \Big|_{\lceil \frac{a}{x} \rceil}^{\lfloor \frac{b}{x} + 1 \rfloor} = \frac{x}{2}[\lfloor \frac{b}{x} + 1 \rfloor \lfloor \frac{b}{x} \rfloor - \lceil \frac{a}{x} \rceil \lceil \frac{a}{x} - 1 \rceil]$$

□

Άσκηση 28. ***Δείξτε ότι το n -οστό στοιχείο της σειράς :*** $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots\ldots$ ***είναι το*** $\lfloor\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\rfloor$.

Απόδειξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι το n -οστό στοιχείο της σειράς είναι το m και έτσι λοιπόν θα πρέπει να βρούμε ποιό είναι αυτό. Από την παραπάνω σειρά παρατηρούμε ότι η θέση της τελευταίας εμφάνισης ενός αριθμού x στην σειρά , δίνεται από τον τύπο $\frac{x(x+1)}{2}$. Δηλαδή η θέση της τελευταίας εμφάνισης του αριθμού 3 είναι η , $\frac{3*4}{2}=6$. Τώρα θα πρέπει να δείξουμε ότι αυτός ο τύπος ισχύει για όλα τους αριθμούς. Με μαθηματική επαγωγή λοιπόν και θέτωντας όπου $\frac{x(x+1)}{2}=P(x)$, θα έχουμε:

ΒΗΜΑ 1 : Ισχύει για $x=1$ καθώς $P(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$

ΒΗΜΑ 2 : Δεδομένου ότι το x είναι (x) θέσεις μπροστά από την τελευταία εμφάνιση του $x-1$, έχουμε:

$$P(x)=P(x-1)+x=\frac{(x-1)x}{2}+x=\frac{(x-1)x+2x}{2}=\frac{(x-1+2)x}{2}=\frac{x(x+1)}{2}$$

Έτσι , σύμφωνα με αυτό που βρήκαμε παραπάνω , αποδείξαμε ότι $P(x)=\frac{x(x+1)}{2}$ για όλα τα $x\in Z^{+}$.

Εφόσον είπαμε παραπάνω ότι το n -οστό στοιχείο είναι το m τότε το n θα βρίσκεται ανάμεσα στις θέσεις $P(m-1)$ και $P(m)$, δηλαδή :

$$P(m-1)<n\leq P(m)\Longrightarrow\frac{(m-1)m}{2}<n\leq\frac{(m+1)m}{2}\Longrightarrow(m-1)m<2n\leq m(m+1)\Longrightarrow$$

$$m^2-m<2n\leq m^2+m\Longrightarrow m^2-m+\frac{1}{4}<2n<m^2+m+\frac{1}{4}\Longrightarrow(m-\frac{1}{2})^2<2n<(m+\frac{1}{2})^2\Longrightarrow$$

$$m-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<m+\frac{1}{2}\Longrightarrow m<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<m+1\Longrightarrow$$

Από την σχέση (3.5)(α) του βιβλίου ξέρουμε ότι :

$$\lfloor x\rfloor=n\quad\iff\quad n\leq x<n+1\qquad(3.5)(\alpha)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την σχέση αυτή στην άσκηση μας θα έχουμε :

$$m<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<m+1\Longrightarrow m=\lfloor\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\rfloor$$

Έτσι λοιπόν δείξαμε ότι το n -οστό στοιχείο της σειράς : $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots\ldots$ **είναι το :**

$$\lfloor\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\rfloor$$

□

Άσκηση 29. ***Αποδείξτε ότι*** $n \mod 2 = \frac{(1-(-1)^n)}{2}$. ***Βρείτε και αποδείξτε μια παρόμοια έκφραση για το*** $n \mod 3$ ***στη μορφή*** $a+bw^n+cw^{2n}$, ***όπου*** w ***είναι ο μιγαδικός αριθμός*** $\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : $w^3 = 1$ ***και*** $1 + w + w^2 = 0$. ***Άρα*** $w^2 = -w - 1$ ***(*).***

Απόδειξη.

Για το πρώτο μέρος της άσκησης διακρίνουμε δύο περιπτώσεις : (1) Όταν το n **είναι περιττός και (2) Όταν το** n **είναι άρτιος.**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (1) n **είναι περιττός : Σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι το ακέραιο υπόλοιπο της διαίρεσης ενός περιττού αριθμού με το δύο μας δίνει τη μονάδα άρα** $n \mod 2 = 1$ **και** $(-1)^n = -1$. **Άρα :**

$$\frac{(1-(-1)^n)}{2} = \frac{(1-(-1))}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow n \mod 2 = \frac{(1-(-1)^n)}{2}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (2) n **είναι άρτιος : Σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι το ακέραιο υπόλοιπο της διαίρεσης ενός άρτιου αριθμού με το δύο μας δίνει το μηδέν άρα** $n \mod 2 = 0$ **και** $(-1)^n = 1$. **Άρα :**

$$\frac{(1-(-1)^n)}{2} = \frac{(1-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \Longrightarrow n \mod 2 = \frac{(1-(-1)^n)}{2}$$

Για το δεύτερο μέρος της άσκησης τώρα θα πρέπει να βρούμε μια έκφραση στην ακόλουθη μορφή $n \mod 3 = a + bw^n + cw^{2n}$, **όπου** $w = \frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}$. **Ουσιαστικά θα πρέπει να βρούμε τις τιμές των** a **,** b **και** c **, δημιουργώντας τρείς εξισώσεις με τρείς μεταβλητές.**

Όταν διαιρούμε έναν αριθμό με το 3 , τότε 3 δυνατά αποτελέσματα έχουμε για το ακέραιο υπόλοιπο της διαίρεσης : (1) $n \mod 3 = 0$ **, (2)** $n \mod 3 = 1$ **και** $n \mod 3 = 2$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (1) Όταν $n = 0$ **ισχύει ότι :** $n \mod 3 = 0$. **Άρα :**

$$a + bw^n + cw^{2n} = 0 \Longrightarrow a + bw^0 + cw^0 = 0 \Longrightarrow a + b + c = 0 \qquad (\alpha)$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (2) Όταν $n = 1$ **ισχύει ότι :** $n \mod 3 = 1$**(εδω θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (*)). Άρα :**

$$a + bw^n + cw^{2n} = 1 \Longrightarrow a + bw^1 + cw^2 = 1 \Longrightarrow a + bw + c(-w-1) = 1 \Longrightarrow$$

$$a + bw + -cw - c = 1 \Longrightarrow a + (b-c)w + -c - 1 = 0 \qquad (\beta)$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (3) Όταν $n = 2$ **ισχύει ότι :** $n \mod 3 = 2$**(εδω θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (*) και** $w^3 = 1$**). Άρα :**

$$a + bw^n + cw^{2n} = 2 \Longrightarrow a + bw^2 + cw^4 = 2 \Longrightarrow a + b(-w-1) + cw^3w = 2 \Longrightarrow$$

$$a - bw - b + cw = 2 \Longrightarrow a - b - (b-c)w = 2 \Longrightarrow a - b - (b-c)w - 2 = 0 \qquad (\gamma)$$

Συνοψίζοντας θα έχουμε :

$a + b + c = 0$ **,** $a + (b-c)w + -c - 1 = 0$ **και** $a - b - (b-c)w - 2 = 0$.

Λύνοντας το σύστημα θα πάρουμε $a = 1$ **,** $b = \frac{w-1}{3}$ **και** $c = \frac{-(w+2)}{3}$. **Τέλος η έκφραση που θέλουμε να βρούμε θα έχει την παρακάτω μορφή :**

$$n \mod 3 = 1 + \frac{1}{3}[(w-1)w^n - (w+2)w^{2n}]$$

□

Άσκηση 30. ***Αποδείξτε ότι ισχύει ή ότι δεν ισχυεί η παρακάτω πρόταση :***

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \le \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Απόδειξη.

Για να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση , θα χρειαστεί να εξετάσουμε 4 περιπτώσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Όταν τα x και y είναι και τα δύο ακέραιοι.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Όταν το x είναι πραγματικός και το y ακέραιος.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Όταν το x είναι ακέραιος και το y είναι πραγματικός.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4: Όταν τα x και τα y είναι και οι δύο πραγματικοί.

Πρίν όμως ξεκινήσουμε να εξετάσουμε τις 4 αυτές περιπτώσεις ας θυμηθούμε κάποιες σημαντικές ιδιότητες του βιβλίου *concrete mathematics* **οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες στην πορεία της άσκησης. Όταν ο x είναι ακέραιος τότε $\lfloor x \rfloor = x$. Άν ο x είναι πραγματικός τότε $x = \lfloor x \rfloor + [x]$ (3.8) , όπου $[x]$ είναι το κλασματικό μέρος του x. Ακόμα από (3.6) γνωρίζουμε ότι $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Σε καθε μια από τις περιπτώσεις θα εργαζόμαστε για κάθε μέλος ξεχωριστά. Άρα έστω ΑΜ = αριστερό μέλος και ΔΜ = δεξιό μέλος , οπότε ΑΜ = $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor$ και ΔΜ =$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$. Άρα για ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 θα έχουμε :
$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = x + y + x + y = 2x + 2y$ και $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2x + 2y$. Όποτε ΑΜ = ΔΜ , και ισχύει ότι $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \le \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: x είναι πραγματικός και y ακέραιος :
$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + y + \lfloor x \rfloor + y = 2\lfloor x \rfloor + 2y = 2(x - [x]) + 2y = 2x + 2y - 2[x]$ και $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + 2y = (2x - [2x]) + 2y = 2x + 2y - [2x]$. Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να δούμε ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στο $2[x]$ και στο $[2x]$. Έτσι λοιπόν όταν $[x] < \frac{1}{2} \Longrightarrow 2[x] < 1$ τότε $[2x] = 2[x]$ και όταν $[x] > \frac{1}{2} \Longrightarrow 2[x] > 1$ τότε $[2x] = 2[x] - 1$.

Συνεχίζοντας την άσκηση σύμφωνα με τα παραπάνω για $[x] < \frac{1}{2}$ θα έχουμε : ΑΜ = $2x + 2y - 2[x]$ και ΔΜ = $2x + 2y - 2[x]$. Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$. Για $[x] > \frac{1}{2}$ θα έχουμε : ΑΜ = $2x+2y-2[x]$ και ΔΜ = $2x+2y-(2[x]-1)$. Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor < \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: y είναι πραγματικός και x ακέραιος :
$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor = \lfloor y \rfloor + x + \lfloor y \rfloor + x = 2x + 2\lfloor y \rfloor = 2x + 2(y - [y]) = 2x + 2y - 2[y]$ και $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2x + \lfloor 2y \rfloor = 2x + (2y - [2y]) = 2x + 2y - [2y]$. Άν $[y] < \frac{1}{2}$ θα έχουμε : ΑΜ = $2x + 2y - 2[y]$ και ΔΜ = $2x + 2y - 2[y]$. Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$. Για $[y] > \frac{1}{2}$ θα έχουμε : ΑΜ = $2x + 2y - 2[y]$ και ΑΜ = $2x + 2y - (2[y] - 1)$. Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor < \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Πριν ξεκινήσουμε με την περίπτωση 4 ας δείξουμε κάτι σημαντικό το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Άν x και y είναι πραγματικοί ξέρουμε ότι $x + y = \lfloor x + y \rfloor + [x + y]$ (2) ακόμα γνωρίζουμε ότι $x = \lfloor x \rfloor + [x]$ και $y = \lfloor y \rfloor + [y]$. Προσθέτοντας κατα μέλη αυτές τις δύο θα πάρουμε $x + y = \lfloor x \rfloor + [x] + \lfloor y \rfloor + [y]$. από την (2) θα έχουμε : $[\lfloor x + y \rfloor + [x + y]] = [\lfloor x \rfloor + [x] + \lfloor y \rfloor + [y]]$. Επειδή τα $\lfloor x \rfloor$,$\lfloor y \rfloor$ και $\lfloor x + y \rfloor$ είναι ακέραιοι δεν συνησφαίρουν στην ισότητα. Οπότε : $[[x + y]] = [x + y] = [[x] + [y]]$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4: y είναι πραγματικός και x πραγματικός :
$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor = x - [x] + y - [y] + (x+y) - [x+y] = 2x+2y-([x]+[y]+[x+y]) = 2x+2y-([x]+[y]+[x+y]) = 2x + 2y - ([x] + [y] + [[x] + [y]])$ και $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2x - [2x] + 2y - [2y] = 2x + 2y - ([2x] + [2y])$.
Άν τώρα $[y] < \frac{1}{2}$ και $[x] < \frac{1}{2}$ (τότε $[x]+[y] < 1$) θα έχουμε : ΑΜ = $2x+2y-([x]+[y]+[[x]+[y]]) = 2x+2y-([x]+[y]+[x]+[y]) = 2x+2y-2[x]-2[y]$ και ΔΜ = $2x+2y-([2x]+[2y]) = 2x+2y-2[x]-2[y]$. Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Για $[y] > \frac{1}{2}$ **και** $[x] < \frac{1}{2}$**(αν** $[x]+[y] < 1$**) θα έχουμε : AM** $= 2x+2y-([x]+[y]+[[x]+[y]]) = 2x+2y-([x]+[y]+[x]+[y]) = 2x+2y-2[x]-2[y]$ **και ΔM** $= 2x+2y-([2x]+[2y]) = 2x+2y-2[x]-2[y]+1$.
Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor < \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
Για $[y] > \frac{1}{2}$ **και** $[x] < \frac{1}{2}$**(αν** $[x]+[y] > 1$**) θα έχουμε : AM** $= 2x+2y-([x]+[y]+[[x]+[y]]) = 2x+2y-([x]+[y]+[x]+[y]-1) = 2x+2y-2[x]-2[y]+1$ **και ΔM** $= 2x+2y-([2x]+[2y]) = 2x+2y-2[x]-2[y]+1$.
Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
Για $[y] < \frac{1}{2}$ **και** $[x] > \frac{1}{2}$**(αν** $[x]+[y] < 1$**) θα έχουμε : AM** $= 2x+2y-([x]+[y]+[[x]+[y]]) = 2x+2y-([x]+[y]+[x]+[y]) = 2x+2y-2[x]-2[y]$ **και ΔM** $= 2x+2y-([2x]+[2y]) = 2x+2y-2[x]-2[y]+1$.
Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor < \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
Για $[y] > \frac{1}{2}$ **και** $[x] < \frac{1}{2}$**(αν** $[x]+[y] > 1$**) θα έχουμε : AM** $= 2x+2y-([x]+[y]+[[x]+[y]]) = 2x+2y-([x]+[y]+[x]+[y]-1) = 2x+2y-2[x]-2[y]+1$ **και ΔM** $= 2x+2y-([2x]+[2y]) = 2x+2y-2[x]-2[y]+1$.
Οπότε $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor = \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.
Τέλος , για $[y] > \frac{1}{2}$ **και** $[x] > \frac{1}{2}$**(τότε** $[x]+[y] > 1$**) θα έχουμε : AM** $= 2x+2y-([x]+[y]+[[x]+[y]]) = 2x+2y-([x]+[y]+[x]+[y]-1) = 2x+2y-2[x]-2[y]+1$ **και ΔM** $= 2x+2y-([2x]+[2y]) = 2x+2y-2[x]+1-2[y]+1$. **Οπότε** $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor < \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Έτσι λοιπόν και για τις τέσσερις περιπτώσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Όταν τα x **και** y **είναι και τα δύο ακέραιοι.**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Όταν το x **είναι πραγματικός και το** y **ακέραιος.**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: Όταν το x **είναι ακέραιος και το** y **είναι πραγματικός.**

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4: Όταν τα x **και τα** y **είναι και οι δύο πραγματικοί.**

Ισχύει ότι :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Στις παραπάνω περιπτώσεις τα $[x]$ **και** $[y]$ **είναι μικρότερα του 1.**

□

Άσκηση 31. ***Απλοποιήστε τον παρακάτω τύπο :***

$$\lfloor (n+1)^2 n! e \rfloor \ mod\, n \qquad (1)$$

όπου n ***ακέραιος με*** $n \geq 0$

Απόδειξη.

Για να λύσουμε το παραπάνω θα πρέπει να εξετάσουμε αν μπορεί να απλοποιηθεί ο όρος $(n+1)^2 n! e$**. Αρχικά ξέρουμε ότι** $e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots\ldots$ **Άρα για το** $(n+1)^2 n! e$ **θα έχουμε :**

$$(n+1)^2 n! e = \frac{(n+1)^2 n!}{0!} + \frac{(n+1)^2 n!}{1!} + \frac{(n+1)^2 n!}{2!} + \ldots\ldots = \frac{(n+1)^2 n!}{0!} + \frac{(n+1)^2 n!}{1!} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(n+1)^2 n!}{(n-1)!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n)!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n+3)!} + \ldots\ldots$$

Στη συνέχεια θα θέσουμε όπου $x_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(n+1)^2 n!}{(k-1)!}$ **και όπου** $y_n = \sum_{k\geq 2} \frac{(n+1)^2 n!}{(n+k)!}$**. Άρα θα έχουμε :**

$$(n+1)^2 n! e = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(n+1)^2 n!}{(k-1)!} + (n+1)^2 + (n+1) + \sum_{k\geq 2} \frac{(n+1)^2 n!}{(n+k)!} = x_n + (n+1)^2 + (n+1) + y_n \qquad (2)$$

Τώρα για την ανάγκη της άσκησης θα θεωρήσουμε ότι το $x_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(n+1)^2 n!}{(k-1)!}$ **είναι ακέραιος και θα το αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή.**

Για $k = 1$ **έχουμε ότι :**

$$x_n = \frac{(n+1)^2 n!}{(1-1)!} = \frac{(n+1)^2 n!}{0!}$$

Άρα $x_n \in Z$ **με** $n \in Z$**. Υποθέτουμε ότι ισχύει για** $k = n-1$ **και θα δείξουμε ότι ισχύει και για** $k = n$**. Για** $k = n$ **έχουμε :**

$$x_n = x_{n-1} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n-1)!} = x_{n-1} + (n+1)^2 n$$

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι το x_{n-1} **είναι ακέραιος καθώς το υποθέσαμε παραπάνω , αλλά επίσης και το** $(n+1)^2 n$ **ακέραιος , οπότε** $x_n \in Z$ **με** $n \in Z$**.**

Έτσι λοιπόν με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε το x_n **ώς εξής :**

$$x_n = n \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(n+1)^2 (n-1)!}{(k-1)!} = nK_n \quad , \quad K_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(n+1)^2 (n-1)!}{(k-1)!}$$

Όμως και το K_n **είναι ακέραιος καθώς αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με μαθηματική επαγωγή όπως αποδείξαμε παραπάνω για το** x_n**. Οπότε το** x_n **θα μπορούσε πολύ απλά να γραφτεί ώς :** $x_n = nk$**, όπου** $n, k \in Z$**.**

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το y_n **, προσπαθώντας να το μετατρέψουμε και αυτό σε κάτι πιο απλό και πιο χρήσιμο για την συνέχεια της άσκησης.**

$$y_n = \sum_{k\geq 2} \frac{(n+1)^2 n!}{(n+k)!} = \frac{(n+1)^2 n!}{(n+2)!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n+3)!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n+4)!} + \ldots\ldots\ldots =$$

$$= \frac{(n+1)^2 n!}{(n+2)(n+1)n!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n+3)(n+2)(n+1)n!} + \frac{(n+1)^2 n!}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n!} + \ldots\ldots\ldots =$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+2)} + \frac{(n+1)}{(n+3)(n+2)} + \frac{(n+1)}{(n+4)(n+3)(n+2)} + \ldots\ldots\ldots = \frac{(n+1)}{(n+2)}[1 + \frac{1}{(n+3)} + \frac{1}{(n+4)(n+3)} + \ldots\ldots\ldots]$$

Γενικά γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{x} < \frac{1}{x-k}$ **, άρα** $\frac{1}{n+4} < \frac{1}{n+3}$**. Οπότε στην περίπτωσή μας θα έχουμε :**

$$y_n = \frac{(n+1)}{(n+2)}[1 + \frac{1}{(n+3)} + \frac{1}{(n+4)(n+3)} + \ldots\ldots\ldots] < \frac{(n+1)}{(n+2)}[1 + \frac{1}{(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+3)} + \ldots\ldots\ldots] \Longrightarrow$$

$$y_n < \frac{(n+1)}{(n+2)}[1 + \frac{1}{(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+3)} + \ldots\ldots\ldots] = \frac{(n+1)}{(n+2)} \sum_{x \geq 1} [\frac{1}{n+3}]^{x-1} \qquad (3)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι το άθροισμα $\sum_{x\geq 1}[\frac{1}{n+3}]^{x-1}$ **είναι μια γεωμετρική πρόοδος και μπορεί να γραφτεί ώς εξής :**

$$\sum_{x\geq 1}[\frac{1}{n+3}]^{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+3}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+3}} = \frac{n+3}{n+2}$$

Βάζοντας τώρα αυτό που βρήκαμε στην ανίσωση (3) θα πάρουμε :

$$y_n < \frac{(n+1)}{(n+2)} \sum_{x\geq 1}[\frac{1}{n+3}]^{x-1} = \frac{(n+1)}{(n+2)} \frac{n+3}{n+2} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} < 1$$

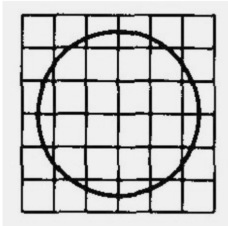
Γνωρίζοντας όμως ότι $n \geq 0$ **τότε και** $y_n \geq 0$ **, άρα για το** y_n **θα ισχύει :** $0 \leq y_n < 1$.

Από τη σχέση (2) ξέρουμε ότι : $(n+1)^2 n!e = x_n + (n+1)^2 + (n+1) + y_n$**. Ακόμα από την σχέση (3.6) του βιβλίου** *concrete mathematics* **γνωρίζουμε ότι :** $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$**. Άρα στη δική μας περίπτωση** $\lfloor (n+1)^2 n!e \rfloor = x_n + (n+1)^2 + (n+1) + \lfloor y_n \rfloor$**, καθώς δείξαμε παραπάνω ότι** $x_n + (n+1)^2 + (n+1)$ **είναι ακέραιος. Το** $\lfloor y_n \rfloor = 0$ **καθώς** $\lfloor y_n \rfloor$ **είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος μικρότερος ή ίσος του** y_n**. Άρα τελικά θα έχουμε** $\lfloor (n+1)^2 n!e \rfloor = x_n + (n+1)^2 + (n+1)$**. Τέλος βάζοντας αυτά που βρήκαμε στη σχέση (1) θα έχουμε :**

$$\lfloor (n+1)^2 n!e \rfloor \ mod\ n = (x_n + (n+1)^2 + (n+1))\ mod\ n = (nk + (n+1)^2 + (n+1))\ mod\ n =$$
$$= (nk + n^2 + 3n + 2)\ mod\ n = (n(k+n+3) + 2)\ mod\ n = 2\ mod\ n \Longrightarrow$$
$$\lfloor (n+1)^2 n!e \rfloor \ mod\ n = 2\ mod\ n$$

□

Άσκηση 32. ***Ένας κύκλος με διάμετρο , $2n-1$ μονάδες έχει ζωγραφιστεί συμμετρικά σε μια $2nx2n$ σκακιέρα. Διευκρινίζεται ότι όπου $n=3$.***



(α) Βρείτε πόσα κελιά του πίνακα περιέχουν ένα τμήμα του κύκλου.

(β) Βρείτε μια συνάρτηση $f(n,k)$ έτσι ώστε ακριβώς $\sum f(n,k)[1 \leq k \leq n-1]$ κελιά του πίνακα να βρίσκονται εξ' ολοκλήρου μέσα στον κύκλο.

Απόδειξη.

(α) Ένα τμήμα ενός κύκλου είναι αυτό που ορίζεται από μια χορδή και ένα τόξο. Από το σχήμα λοιπόν μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο κύκλος δεν διέρχεται μέσα από καμία γωνία από τα παραπάνω κελιά. Όμως εμείς θα πρέπει να αποδείξουμε αυτό το γεγονός για τη γενική περίπτωση , για οποιοδήποτε n δηλαδή. Άρα θα πρέπει να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Δοθέντος ενός κύκλου με διάμετρο $=(2n-1)$ μονάδες, ο κύκλος δεν μπορεί να περάσει μέσω οποιασδήποτε γωνίας οποιουδήποτε κελιού. Οπότε θα έχουμε :

Λαμβάνουμε υπόψη τη διάμετρο του κύκλου $=(2n-1)$, με ακτίνα $\rho=(n-\frac{1}{2})$ μονάδες (1). Για να περάσει ο κύκλος μέσα από οποιαδήποτε γωνία , μπορούμε να παρουσιάσουμε την ακτίνα «ρ» με 2 τρόπους:
(1) ρ $=m$ μονάδες, όπου $m=$ αριθμός των κελιών που το «ρ» μπορεί να καλύψει με την κίνηση κατά μήκος των πλευρών των κελιών. $m \in Z$.
(2) ρ $=m*\sqrt{2}$ μονάδες , όπου $m=$ αριθμός των κελιών που το «ρ» μπορεί να καλύψει με την κίνηση κατά μήκος των διαγωνίων των κελιών. $m \in Z$.
Ξέρουμε στα σίγουρα ότι, το κέντρο του κύκλου, είναι σε μια γωνία ενός κελιού, ως εκ τούτου μπορούμε εύκολα να συνάγουμε την τιμή «ρ» από τις διαγωνίους των κελιών. Από το θεώρημα του Πυθαγόρα, ξέρουμε ότι το μήκος μιας διαγωνίου ενός κελιού $=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

Για την περίπτωση (1) ξέρουμε ότι $\rho=(n-\frac{1}{2})$ και ότι $n \in Z \longrightarrow$ το ρ δέν είναι ακέραιος, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση που κάναμε ότι τα ρ , m είναι ακέραιοι. Άρα δεν ισχύει η (1).

Για την περίπτωση (2) ξέρουμε ότι $\rho=(n-\frac{1}{2})$ και ότι $n \in Z$ ακόμα $\rho^2=(n-\frac{1}{2})^2 \longrightarrow$ το ρ^2 δέν είναι ακέραιος, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση που κάναμε ότι τα ρ^2 , m^2 είναι ακέραιοι. Άρα δεν ισχύει η (2).

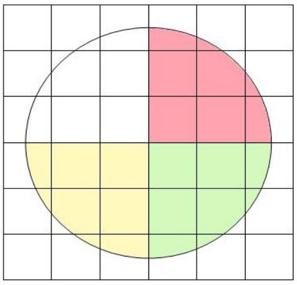
Κατά συνέπεια έχουμε απόδείξει ότι, ο κύκλος δεν μπορεί να περάσει μέσω από οποιαδήποτε γωνία οποιουδήποτε κελιού , για οποιοδήποτε αριθμό κελιών n.

Έχοντας απόδείξη το παραπάνω, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι ο κύκλος πρέπει να περάσει μέσω των κελιών. Από το σχήμα , παρατηρούμε ότι ο αριθμός των τομών του κύκλου με τα κελιά είναι ο αριθμός των κελιών από τα οποία διέρχεται ο κύκλος. Ο κύκλος κόβει $(2n-1)$ οριζόντιες γραμμές και $(2n-1)$ κάθετες γραμμές. Κάθε γραμμή την κόβει δύο φορές. Έτσι ο αριθμός των τομών θα έιναι : $2*(2n-1)+2*(2n-1)=4n-2+4n-2=8n-4$.

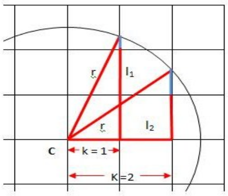
Άρα ο αριθμός των κελιών μέσα από τα οποία περνάει ο κύκλος είναι ίσο με $8n-4$. Από το σχήμα , μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όλα τα κελιά που κόβει ο κύκλος περιέχουν

τουλάχιστον ένα τμήμα του κύκλου. Άρα ο αριθμός των κελιών που περιέχουν ένα τμήμα του κύκλου ισούται με $8n - 4$.

(β) Άν χωρίσουμε τον κύκλο του σχήματος σε τέσσερα τεταρτημόρια τότε και τα τέσσερα θα περιέχουν ίσο αριθμό πλήρων κελιών. Επομένως είναι αρκετό να υπολογίσουμε τον αριθμό των κελιών που βρίσκονται μέσα σε ένα τεταρτημόριο και πολλαπλασιάζοντας με το 4 μπορούμε να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα. Θυμίζουμε ότι ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τον αριθμό των κελιών που βρίσκοντε ολόκληρα μέσα στον κύκλο.



Ξέρουμε ότι ο κύκλος κόβει $2n - 1$ κάθετες γραμμές και αποκλείοντας την κάθετη γραμμή που περνάει μέσω του κέντρου του κύκλου, ο κύκλος θα κόβει $2n - 2$ κάθετες γραμμές. Επιπλέον ο αριθμός των κάθετων γραμμών που κόβονται σε κάθε τεταρτημόριο , δίνεται από τον τύπο $\frac{(2n-2)}{2} = n - 1$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε τεταρτημόριο έχει $n - 1$ κάθετες λουρίδες πλάτους μιας μονάδας. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όλα τα τετράγωνα που βρίσκονται μέσα στο τεταρτημόριο είναι μέρος των κάθετων λουρίδων.



Στη συνέχεια ξέρουμε ότι το μήκος της κάθετης γραμμής της κάθε λουρίδας μέσα σε ένα τεταρτημόριο μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Πυθαγόρα : $l_1 = \sqrt{(r^2 - 1^2)}$ και $l_2 = \sqrt{(r^2 - 2^2)}$. Τώρα μπορεί να παρατηρηθεί εύκολα από το σχήμα ότι το $\lfloor l_1 \rfloor$ και $\lfloor l_2 \rfloor$ δίνουν τον αριθμό τών πλήρων τετραγώνων στην κάθετη γραμμή τα οποία είναι μέρος της λουρίδας.

Τέλος άν αθροίσουμε τον αριθμό όλων των πλήρων τετραγώνων των κάθετων γραμμών , παίρνουμε : $\sum \lfloor \sqrt{(r^2 - k^2)} \rfloor [1 \leq k \leq n - 1]$. Επομένως ο αριθμός των τετραγώνων που είναι εξ΄ ολοκλήρου μέσα στον κύκλο δίνεται από το άθροισμα :

$$\sum f(n,k)[1 \leq k \leq n-1] = \sum (4 * \lfloor \sqrt{(r^2 - k^2)} \rfloor)[1 \leq k \leq n-1] \Longrightarrow f(n,k) = 4 * \lfloor \sqrt{(r^2 - k^2)} \rfloor$$

$\square$

Άσκηση 33. ***Αποδείξτε ότι ισχύει ή ότι δεν ισχυεί η παρακάτω πρόταση :***

$$(x \bmod ny) \bmod y = x \bmod y \quad , \quad n \in Z$$

Απόδειξη.

Διαβάζοντας προσεκτικά την εκφώνηση της άσκησης παρατηρούμε πως θα πρέπει να πάρουμε δύο πιθανές περιπτώσεις για το ny **, οι οποίες θα είναι :**

(α) $\quad ny \neq 0$
(β) $\quad ny = 0$

(α) Για αυτή την περίπτωση αρχικά θα πρέπει να υποθέσουμε ότι : $x \bmod y = p$ **, όπου** $|\, p \,|<|\, y \,|$ **και** p **είναι ακέραιος. Σύμφωνα με τον ορισμό του** $<< mod >>$ **, υπάρχει ένας ακέραιος** m **τέτοιος ώστε :**

$$x = my + p \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι $x \bmod ny = q$ **, όπου** $|\, q \,|<|\, ny \,|$ **και** q **είναι ακέραιος. Σύμφωνα με τον ορισμό του** $<< mod >>$ **, υπάρχει ένας ακέραιος** t **τέτοιος ώστε :**

$$x = t(ny) + q \qquad (2)$$

Από σχέση (1) λοιπόν γνωρίζουμε ότι $x = my + p$**. Ποια όμως είναι η τιμή της σχέσης** $(x \bmod ny) \bmod y$ **; Εργαζομαστέ ώς εξής :**

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε αντίστοιχα $x = my + p$ **και** $x = t(ny) + q$**. Στη συνέχεια λύνουμε την (2) ώς προς** q **και όπου** x **αντικαθηστούμε την σχέση (1) , δηλαδή θα έχουμε :**

$$x = t(ny) + q \Longrightarrow q = x - t(ny) = my + p - t(ny) = (m - nt)y + p$$

Έτσι λοιπόν από τα παραπάνω θα έχουμε $q = (m - nt)y + p$ **, όπου φυσικά το** $m - nt$ **είναι ακέραιος και** $|\, p \,|<|\, y \,|$ **, έτσι εύκολα βγάζουμε συμπέρασμα ότι** $q \bmod y = p$**. από υπόθεση όμως γνωρίζουμε ότι** $x \bmod ny = q$**. Άρα θα έχουμε :**

$$(x \bmod ny) \bmod y = q \bmod y = p \Longrightarrow (x \bmod ny) \bmod y = p$$

Τέλος σύμφωνα με τις παραδοχές που κάναμε παραπάνω αποδείξαμε ότι :

$$(3) \qquad (x \bmod ny) \bmod y = p$$

$$(4) \qquad x \bmod y = p$$

Δηλαδή δείξαμε ότι :

$$(x \bmod ny) \bmod y = x \bmod y \quad , \quad n \in Z$$

(β) Τώρα για την περίπτωση (β) τα πράγματα γίνονται πιο απλά καθώς χρησιμοποιώντας την σχέση (3.22) του βιβλίου $(x \bmod 0 = x)$ **θα καταλήξουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα άμεσα.**

$$(x \bmod ny) \bmod y = (x \bmod 0) \bmod y = x \bmod y$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 34 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 2 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 35 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 6 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

ΑΣΚΗΣΗ 36 $\Longleftrightarrow$ ***ΑΣΚΗΣΗ 14 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

Άσκηση 34. ***Αποδείξτε ότι*** $gcd(m,n) \times lcm(m,n) = m \times n$ ***και χρησιμοποιήστε αυτή την ταυτότητα ώστε να εκφράσετε το*** $lcm(m,n)$ ***συναρτήση του*** $lcm(n \bmod m, m)$ ***, όταν ισχύει ότι :*** $n \bmod m \neq 0$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις (4.12) , (4.14) και (4.15)

Απόδειξη.

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση της άσκησης ας παραθέσουμε μερικά διευκρινιστικά σχόλια. Αρχικά θα πρέπει να αναφέρουμε ότι κάθε αριθμός γράφεται σαν γινόμενο πρώτων αριθμών δηλαδή :

$$n = p_1 p_2 \dots p_m = \prod_{1 \leq k \leq m} p_k \ , \quad p_1 \leq \dots \leq p_m \qquad (4.10)$$

Επίσης από την σχέση (4.11) του βιβλίου ξέρουμε ότι κάθε αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο άπειρων πρώτων (δυνάμεις πρώτων) , όπου μερικοί από αυτούς τους παράγοντες είναι η μονάδα.

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_m^{n_m} = \prod_p p^{n_p} \ , \quad n_p \geq 0 \qquad (4.11)$$

Κάθε αριθμός αναπαρηστάται από μια ακολουθία εκθετών από όλους τους διαδοχικούς πρώτους αριθμούς. Για παράδειγμα όταν $n = 20$ **θα έχουμε ,** $20 = 2^2 \times 3^0 \times 5^1$ **και η αναπαράσταση θα είναι** $(2,0,1,0)$. **Όταν τώρα θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς , προσθέτουμε τις αναπαραστάσεις τους , πχ για** $n = 20$ **και** $m = 42$ **θα έχουμε αντίστοιχα** $20 = 2^2 \times 3^0 \times 5^1$ **και** $40 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1$ **με αντιστοιχες αναπαραστάσεις** $(2,0,1,0)$ **και** $(1,1,0,1)$. **Οπότε η αναπαράσταση του** $n \times m = 20 \times 42$ **θα είναι** $(2+1, 0+1, 1+0, 0+1) = (3,1,1,1)[k = m \times n \Leftrightarrow k_p = m_p + n_p \quad (4.12)]$. **Τέλος ας δώσουμε ένα παράδειγμα για το πώς υπολογίζουμε το** gcd**(μέγιστος κοινός διαιρέτης) , για** $n = 20$ **και** $m = 42$ **θα έχουμε [χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.15) του βιβλίου** $k = gcd(m,n) \Leftrightarrow k_p = min(m_p, n_p)$**] :**

$$gcd(20,42) = gcd(2^2 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^0, 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1) = 2^{min(2,1)} \times 3^{min(0,1)} \times 5^{min(1,0)} \times 7^{min(1,0)} \Longrightarrow$$

$$gcd(20,42) = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 = 2$$

Ο υπολογισμός του lcm**(ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο) γίνέται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.15) του βιβλίου η οποία είναι :**

$$k = lcm(m,n) \Leftrightarrow k_p = max(m_p, n_p)$$

Μετά από αυτή τη μεγάλη και χρήσιμη εισαγωγή θα πρέπει αρχικά να αποδείξουμε ότι $gcd(m,n) lcm(m,n) = mn$. **Γνωρίζουμε ότι κάθε πρώτος παράγοντας** p**(πχ. 2,3,5,...) εμφανίζεται και στον αριθμό** m **αλλά και στον αριθμό** n. **Δηλαδή :**

$$gcd(m,n) = 2^{min(n_2,m_2)} \times 3^{min(n_3,m_3)} \times \dots \quad , \quad lcm(m,n) = 2^{max(n_2,m_2)} \times 3^{max(n_3,m_3)} \times \dots$$

άρα $m = 2^{m_2} \times 3^{m_3} \times \dots$ **και** $n = 2^{n_2} \times 3^{n_3} \times \dots$. **Για κάθε εκθέτη** n_p **και** m_p **ένα θα είναι** min **και το άλλο θα είναι** max **, το ένα δηλαδή θα εμφανίζεται στο** gcd **και το άλλο στο** lcm. **Έτσι λοιπόν θα ισχύει ότι :**

$$min(m_p, n_p) + max(m_p, n_p) = m_p + n_p$$

Εφαρμόζουμε αυτό για όλους τους πρώτους παράγοντες p **στην παρουσίαση του αριθμού μας θα πάρουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε , δηλαδή :**

$$gcd(m,n) \times lcm(m,n) = m \times n$$

Τέλος για να εκφράσουμε το $lcm(m,n)$ **συναρτήση του** $lcm(n \mod m, m)$ **, όταν ισχύει ότι :** $n \mod m \neq 0$ **, θα ξεκινήσουμε από το** $lcm(n \mod m, m)$ **και θα έχουμε :**

$$lcm(n \mod m, m) = \frac{n \mod m \times m}{gcd(n \mod m, m)}$$

Έπειτα από την αναδρομική σχέση (4.4) του βιβλίου ($gcd(m,n) = gcd(n \mod m, m)$ **) θα πάρουμε το εξής :**

$$lcm(n \mod m, m) = \frac{n \mod m \times m}{gcd(m,n)}$$

Στη συνέχεια , εκφράζουμε το $gcd(m,n)$ **συναρτήση του** $lcm(m,n)$ **άρα :** $gcd(m,n) = \frac{m \times n}{lcm(m,n)}$**.**
Οπότε :

$$lcm(n \mod m, m) = \frac{n \mod m \times m}{\frac{m \times n}{lcm(m,n)}} = \frac{n \mod m}{n} \times lcm(m,n) \Longrightarrow$$
$$lcm(m,n) = \frac{n}{n \mod m} \times lcm(n \mod m, m)$$

□

Άσκηση 35. ***Δείξτε τι σημαίνει η έκφραση*** $a = b(\mod 0) \quad (1)$**.**

Απόδειξη.

Η *modular* **αριθμητική είναι ένα από τα κύρια εργαλεία που παρέχονται από την θεωρία αριθμών. Πήραμε μια μικρή γεύση λύνοντας αντίστοιχες ασκήσεις , όταν χρησιμοποιήσαμε τη διμελής πράξη** *mod* **, συνήθως ως μια λειτουργία ανάμεσα σε μια έκφραση. Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση** *mod* **επίσης στο σύνολο των εξισώσεων , για τις οποίες μια ελαφρώς διαφορετική σημείωση είναι καταλληλότερη:**

$$a = b(\mod m) \quad \Longleftrightarrow \quad a \mod m = b \mod m \qquad (4.35)$$

Παραδείγματος χάριν , $9 = -16(\mod 5)$ **, επειδή** $9 \mod 5 = 4 = (-16) \mod 5$**. Ο τύπος** $a = b(\mod m)$ **μπορεί να διαβάστεί ώς εξής : " Το** a **ίσο με το** b *modulo* m **". Ο ορισμός έχει νόημα όταν τα** a **,** b **, και** m **είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί , αλλά εμείς σχεδόν πάντα χρησιμοποιούμε το παραπάνω μόνο με ακέραιους. Δεδομένου ότι το** $x \mod m$ **διαφέρει από το** x **από ένα πολλαπλάσιο του** m **, μπορούμε να γράφουμε την παραπάνω έκφραση με έναν άλλο τρόπο :**

$$a = b(\mod m) \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \text{ είναι πολλαπλάσιο του } m \qquad (4.36)$$

Ερχόμενοι τώρα στην άσκηση μας και χρησιμοποιώντας την σχεση (4.35) που αναφέραμε λίγο παραπάνω , στην (1) θα έχουμε :

$$a = b(\mod 0) \quad \Longleftrightarrow \quad a \mod 0 = b \mod 0 \qquad (2)$$

Από το βιβλίο όμως *concrete mathematics* **της σελίδας 82 παίρνουμε την σχέση (3.22) , η οποία λέαι ότι :** $x \mod 0 = x$**. Χρησιμοποιώντας τώρα την (3.22) στην άσκηση μας θα έχουμε :**

$$a = b(\mod 0) \quad \Longleftrightarrow \quad a \mod 0 = b \mod 0 \quad \Longleftrightarrow a = b$$

Οπότε από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η έκφραση $a = b(\mod 0)$ **μας δίνει σαν αποτέλεσμα την ισότητα** $a = b$**.**

□

Άσκηση 36. ***Αποδείξτε οτι ισχύουν ή οτι δεν ισχύουν η παρακάτω εκφράσεις.***

(α) $gcd(km, kn) = k\ gcd(m, n)$

(β) $lcm(km, kn) = k\ lcm(m, n)$

Απόδειξη.

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση της άσκησης καλό θα ήταν να δώσουμε μερικούς ορισμούς οι οποίοι θα είναι χρήσιμοι για την συνέχεια της άσκησης : gcd : **μέγιστος κοινός διαιρέτης. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ακέραιων αριθμών** m **και** n **είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που τους διαιρεί και τους δύο , δηλαδή :**

$$gcd(m, n) = max(k \mid \frac{k}{m} \text{ και } \frac{k}{n}) \qquad (1)$$

lcm : **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ακέραιων αριθμών** m **και** n **είναι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που είναι πολλαπλάσιο και των δύο αριθμών , δηλαδή (αν** $m \leq 0$ **ή** $n \leq 0$ **, η σχέση (2) δεν ορίζεται) :**

$$lcm(m, n) = min(k \mid \quad k > 0 \ \frac{m}{k} \text{ και } \frac{n}{k}) \qquad (2)$$

Στους παραπάνω ορισμούς, έχουμε χρησιμοποιήσει το $\frac{k}{m}$ **και το** $\frac{k}{n}$**. Η λειτουργία ορίζεται ως εξής :** $\frac{m}{n} \Longleftrightarrow m > 0$ **και** $n = mk$ **για κάποιο ακέραιο αριθμό** k.

Για να λυθεί το δεδομένο πρόβλημα, είναι σημαντικό να είναι γνωστά τα ακόλουθα σημεία : (1) Κάθε αριθμός γράφεται σαν γινόμενο πρώτων αριθμών δηλαδή :

$$n = p_1 p_2 \ldots p_m = \prod_{1 \leq k \leq m} p_k \ , \quad p_1 \leq \ldots \leq p_m \qquad (4.10)$$

(2) Επίσης από την σχέση (4.11) του βιβλίου ξέρουμε ότι κάθε αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο άπειρων πρώτων (δυνάμεις πρώτων) , όπου μερικοί από αυτούς τους παράγοντες είναι η μονάδα.

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \ldots p_m^{n_m} = \prod_p p^{n_p} \ , \quad n_p \geq 0 \qquad (4.11)$$

Η ανωτέρω εξίσωση παρουσιάζει το n **μαναδικά. Έτσι μπορούμε να σκεφτούμε μια ακολουθία** $<< n_2, n_3, n_5, \ldots >>$ **σαν ένα αριθμητικό σύστημα για τους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Για παράδειγμα όταν** $n = 20$ **θα έχουμε ,** $20 = 2^2 \times 3^0 \times 5^1$ **και η αναπαράσταση θα είναι** $(2, 0, 1, 0)$**. Όταν τώρα θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς , προσθέτουμε τις αναπαραστάσεις τους , πχ για** $n = 20$ **και** $m = 42$ **θα έχουμε αντίστοιχα** $20 = 2^2 \times 3^0 \times 5^1$ **και** $40 = 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1$ **με αντιστοιχες αναπαραστάσεις** $(2, 0, 1, 0)$ **και** $(1, 1, 0, 1)$**. Οπότε η αναπαράσταση του** $n \times m = 20 \times 42$ **θα είναι** $(2+1, 0+1, 1+0, 0+1) = (3, 1, 1, 1)[k = m \times n \Leftrightarrow k_p = m_p + n_p \quad (4.12)$ **, το οποίο προυποθέτει ότι** $\frac{m}{n} \Longleftrightarrow m_p \leq m_n$ **για όλα τα** p **(4.13)].**

Τέλος ας δώσουμε ένα παράδειγμα για το πώς υπολογίζουμε το gcd**(μέγιστος κοινός διαιρέτης) , για** $n = 20$ **και** $m = 42$ **θα έχουμε [χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.15) του βιβλίου** $k = gcd(m, n) \Leftrightarrow k_p = min(m_p, n_p)]$ **:**

$$gcd(20, 42) = gcd(2^2 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^0, 2^1 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^1) = 2^{min(2,1)} \times 3^{min(0,1)} \times 5^{min(1,0)} \times 7^{min(1,0)} \Longrightarrow$$

$$gcd(20, 42) = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 = 2$$

Ο υπολογισμός του lcm**(ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο) γίνέται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.15) του βιβλίου η οποία είναι :**

$$k = lcm(m, n) \Leftrightarrow k_p = max(m_p, n_p)$$

Τώρα, ερχόμενοι στο δεδομένο πρόβλημα , θέλουμε να πάρουμε την τιμή του $gcd(km, kn)$ **και** $lcm(km, kn)$ **συναρτήση του** $gcd(m, n)$ **και** $lcm(m, n)$ **αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι** $k = (km)(kn)$. **Αυτό υπονοεί ότι** $k_p = (km)_p + (kn)_p$ **(από σχέση (4.12)). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ίδια σχέση , εάν** $A = km$ **, τότε** $A_p = k_p + m_p$ **και εάν** $B = kn$**, τότε** $B_p = k_p + n_p$.

Για την σχέση (α) θα έχουμε όπου $X = gcd(km, kn)$ **και όπου** $Y = kgcd(m, n)$. **Οπότε από (4.15) θα έχουμε :**

$$X = gcd(km, kn) \Longleftrightarrow X_p = min(A_p, B_p) = min(k_p + m_p, k_p + n_p)$$

Και από (4.12) θα έχουμε :

$$Y = k\ gcd(m, n) \Longleftrightarrow Y_p = k_p + min(m_p, n_p)$$

Δεδομένου ότι, το k_p **είναι ένας όρος που προστίθεται και στο** m_p **και στο** n_p**, δεν μας πειράζει ποια είναι η τιμή του** k_p **καθώς υπολογίζουμε το** $min(k_p + m_p, k_p + n_p)$. **Παραδείγματος χάριν, ας υποθέσουμε ότι** $m_p < n_p$. **Τότε ,** $x_p = (k_p + m_p)$ **και** $y_p = k_p + (m_p)$.
Δηλαδή , $gcd(km, kn) = k\ gcd(m, n)$.

Για την σχέση (α) θα έχουμε όπου $X = lcm(km, kn)$ **και όπου** $Y = k\ lcm(m, n)$. **Οπότε από (4.15) θα έχουμε :**

$$X = lcm(km, kn) \Longleftrightarrow X_p = max(A_p, B_p) = max(k_p + m_p, k_p + n_p)$$

Και από (4.12) θα έχουμε :

$$Y = k\ lcm(m, n) \Longleftrightarrow Y_p = k_p + max(m_p, n_p)$$

Δεδομένου ότι, το k_p **είναι ένας όρος που προστίθεται και στο** m_p **και στο** n_p**, δεν μας πειράζει ποια είναι η τιμή του** k_p **καθώς υπολογίζουμε το** $min(k_p + m_p, k_p + n_p)$. **Παραδείγματος χάριν, ας υποθέσουμε ότι** $m_p < n_p$. **Τότε ,** $x_p = (k_p + n_p)$ **και** $y_p = k_p + (n_p)$.
Δηλαδή , $lcm(km, kn) = k\ lcm(m, n)$.

Έτσι καταλήξαμε στο ότι ισχύουν και οι δύο σχέσεις άρα :

(α) $gcd(km, kn) = k\ gcd(m, n)$

(β) $lcm(km, kn) = k\ lcm(m, n)$

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΩΝΥΜΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 37	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 2 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 38	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 3 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 39	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 4 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 40	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 6 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 41	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 7 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 42	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 8 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 43	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 14 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 44	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 15 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 45	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 16 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 46	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 17 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 47	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 18 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 48	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 43 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 49	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 45 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***
ΑΣΚΗΣΗ 50	$\Longleftrightarrow$	***ΑΣΚΗΣΗ 74 ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ***

Άσκηση 37. ***Για ποιές τιμές του k είναι το $\binom{n}{k}$ μέγιστο , όταν για n έχουμε ένα δοθέν θετικό ακέραιο ; αποδείξτε την απαντησή σας.***

Απόδειξη.

Αρχικά σαν πρώτο στάδιο πολυ σημαντικό για την συνέχεια θα ήταν να βάλουμε κάποιες τοιχαίες τιμές έτσι ώστε να παρατηρήσουμε πότε γίνεται μέγιστο το $\binom{n}{k}$(από πίνακα 155 σελ. 155 του βιβλίου). Οπότε θα έχουμε :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

Από τον παραπάνω πίνακα λοιπόν παρατηρούμε πώς το $\binom{n}{k}$ γίνεται μέγιστο σε δύο περιπτώσεις :
(1) Όταν το n είναι περιττός και $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ή $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
(2) Όταν το n είναι άρτιος και $k = \frac{n}{2}$.

Για την απόδειξη της άσκησης υποθέτουμε ότι το $\binom{n}{k^*}$ είναι το μέγιστο , όπου $n \in Z^+$.
Έτσι λοιπόν καθώς το $\binom{n}{k^*}$ είναι το μέγιστο , διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $\binom{n}{k^*+1} \leq \binom{n}{k^*}$
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: $\binom{n}{k^*-1} \leq \binom{n}{k^*}$

Για την ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 θα έχουμε :

$$\binom{n}{k^*+1} = \frac{n!}{(n-k^*-1)!(k^*+1)!} = \frac{n!}{(n-k^*-1)!(k^*+1)k^*!} \qquad (\alpha)$$

$$\binom{n}{k^*} = \frac{n!}{k^*!(n-k^*)!} = \frac{n!}{(n-k^*-1)!(k^*+1)k^*!} \times \frac{k^*+1}{(n-k^*)} \qquad (\beta)$$

Έπειτα αντικαθιστώντας τα (α) και (β) στην ανίσωση $\binom{n}{k^*+1} \leq \binom{n}{k^*}$ θα πάρουμε:

$$\frac{n!}{(n-k^*-1)!(k^*+1)k^*!} \leq \frac{n!}{(n-k^*-1)!(k^*+1)k^*!} \times \frac{k^*+1}{(n-k^*)}$$

Έτσι , για να είναι η παραπάνω έκφραση αληθής θα πρέπει προφανώς να ισχύει ότι $\frac{k^*+1}{(n-k^*)} \geq 1$, οπότε θα έχουμε :

$$\frac{k^*+1}{(n-k^*)} \geq 1 \Longrightarrow k^*+1 \geq n-k^* \Longrightarrow 2k^* \geq n-1 \Longrightarrow k^* \geq \frac{n-1}{2} \qquad (\alpha 1)$$

Για την ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 θα έχουμε :

$$\binom{n}{k^*-1} = \frac{n!}{(n-k^*+1)!(k^*-1)!} = \frac{n!}{(n-k^*+1)(n-k^*)!(k^*-1)!} \qquad (\gamma)$$

$$\binom{n}{k^*} = \frac{n!}{k^*!(n-k^*)!} = \frac{n!}{(n-k^*+1)(k^*-1)!(n-k^*)!} \times \frac{n-k^*+1}{k^*} \qquad (\delta)$$

Έπειτα αντικαθιστώντας τα (γ) και (δ) στην ανίσωση $\binom{n}{k^*-1} \leq \binom{n}{k^*}$ **θα πάρουμε:**

$$\frac{n!}{(n-k^*+1)(n-k^*)!(k^*-1)!} \leq \frac{n!}{(n-k^*+1)(k^*-1)!(n-k^*)!} \times \frac{n-k^*+1}{k^*}$$

Οπότε, για να είναι η παραπάνω έκφραση αληθής θα πρέπει προφανώς να ισχύει ότι $\frac{n-k^*+1}{k^*} \geq 1$ **, οπότε θα έχουμε :**

$$\frac{n-k^*+1}{k^*} \geq 1 \Longrightarrow n-k^*+1 \geq k^* \Longrightarrow n+1 \geq 2k^* \Longrightarrow k^* \leq \frac{n+1}{2} \qquad (\gamma 1)$$

Κάνοντας ολη την παραπάνω προεργασία και με την βοήθεια των σχέσεων (α1) και (α2) καταλήγουμε στην ανίσωση : $\frac{n-1}{2} \leq k^* \leq \frac{n+1}{2}$. **Αν θέλουμε να το υπολογίσουμε περισσότερο θα πάρουμε περιπτώσεις για το** n.
Όταν το n **είναι άρτιος ,** $n = 2a$, $a \in Z^+$ **, θα έχουμε :**

$$\frac{n-1}{2} \leq k^* \leq \frac{n+1}{2} \Longrightarrow \frac{2a-1}{2} \leq k^* \leq \frac{2a+1}{2}$$ **Καθώς όμως το** $k^* \in Z$ **, βλέπουμε ότι** $\frac{2a-1}{2}$ **και** $\frac{2a+1}{2} \notin Z$ **, έτσι λοιπόν** $k^* = \frac{2a}{2} = \frac{n}{2}$

Στην περίπτωση τώρα που το n **είναι περιττός , και χρησιμοποιώντας την σχέση** $(\mathbf{3.5}b)$ **του βιβλίου** *concrete mathematcs* , $(\lfloor x^* \rfloor = n^* \Longleftrightarrow x^* - 1 < n^* \leq x^*, n^* \in Z)$ **θα έχουμε :**

$$\frac{n}{2} - 1 < \frac{n-1}{2} \leq \frac{n}{2} \Longleftrightarrow \frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad (3). \quad [\textbf{Όπου } x^* = \frac{n}{2} \textbf{ και } n^* = \frac{n-1}{2}]$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση $(\mathbf{3.5}d)$ **του βιβλίου** *concrete mathematcs* , $(\lceil x^* \rceil = n^* \Longleftrightarrow x^* \leq n^* < x^* + 1, n^* \in Z)$ **και θα έχουμε :**

$$\frac{n}{2} \leq \frac{n+1}{2} < \frac{n}{2} + 1 \Longleftrightarrow \frac{n+1}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil \quad (4). \quad [\textbf{Όπου } x^* = \frac{n}{2} \textbf{ και } n^* = \frac{n+1}{2}]$$

Εν΄ κατακλείδι λοιπόν οι αρχικές μας υποθέσεις συμφωνούν πλήρως με αυτα που αποδείξαμε διότι και στην περιπτωση όπου το n **είναι περιττός για το** k^* **ισχύει ότι** $k^* = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ **ή** $k^* = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ **καθώς όπως βρήκαμε παραπάνω (από (3) και (4)):**

$$\frac{n-1}{2} \leq k^* \leq \frac{n+1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k^* \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

$\square$

Άσκηση 38. ***Αποδείξτε την ιδιότητα του εξαγώνου :***

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}$$

Απόδειξη.

Ξεκινώντας την επίλυση της άσκησης ας αναφέρουμε μερικούς χρήσιμους ορισμούς όπως : τι είναι το τρίγωνο του *Pascal* **και ποιές είναι οι ιδιότητες του εξαγώνου.**

Τρίγωνο του *Pascal* **: Το τρίγωνο του** *Pascal* **είναι μια γεωμετρική διάταξη των δυωνυμικών συντελεστών σε ένα τρίγωνο. Οι πρώτες έξι σειρές του τριγώνου του** *Pascal* **φαίνονται παρακάτω.**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Hexagon Property: **Γύρω από κάθε στοιχείο** $\binom{n}{k}$ **στη συνηθισμένη τριγωνική σειρά του τριγώνου του** *Pascal* **είναι έξι στοιχεία που καταλαμβάνουν κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου , τα οποία είναι :**

$$\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k+1}, \binom{n+1}{k}, \binom{n-1}{k}, \binom{n+1}{k+1}, \binom{n}{k-1}$$

Θέλωντας να δώσουμε ένα παράδειγμα θα πάρουμε από τον πίνακα 155 του βιβλίου τις τιμές του για $n = 8, 9, 10$ **και θα έχουμε :**

$$\begin{pmatrix}
n & & & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \dots \\
8 & 1 & \dots & 28 & 56 & 70 & \dots \\
9 & 1 & \dots & 36 & 84 & 126 & \dots \\
10 & 1 & \dots & 45 & 120 & 210 & \dots
\end{pmatrix}$$

Άρα σύμφωνα με την ιδιότητα του εξαγώνου $hexagon(84) = 56*36*210 = 28*120*126 = 423360$**.**

Δείχνοντας λοιπόν με τα παραπάνω τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται το τρίγωνο του *Pascal* **με την ιδιότητα του εξαγώνου είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε την ισότητα της εκφώνησης αφού πρώτα δώσουμε τον ορισμό (5.3) του βιβλίου :**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \geq k \geq 0 \qquad (5.3)$$

Οπότε θα έχουμε :

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\frac{n!}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1} \Longrightarrow$$

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}$$

□

Άσκηση 39. ***Υπολογίστε το*** $\binom{-1}{k}$ ***αναιρώντας τον άνω δείκτη.***

Απόδειξη.

Από το βιβλίο *concrete mathematics* **και τη σχέση (5.1) της σελίδας 154 γνώρίζουμε για τους διωνυμικούς συντελεστές ότι :**

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k(k-1)\ldots(1)} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!}, & \textbf{Για ακέραιους } k \geq 0 \\ 0 & , \textbf{ Για ακέραιους } k < 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να αναδιατυπωθεί ως προς τα παραγοντικά στην κοινή περίπτωση όπου ο άνω δείκτης r είναι ένας θετικός ακέραιος n (φυσικός αριθμός), ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον κατώτερο δείκτη k:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \geq k \geq 0 \tag{5.3}$$

Στη συνέχεια για να πάρουμε τις τιμές των συντελεστών για διάφορες τιμές των n και k , θα μας βοηθήσει ο πίνακας 155 της σελίδας 155 , ο οποίος είναι ο παρακάτω :

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Μια πολύ σημαντική παρατήρηση που θα μπορούσαμε να κάνουμε εδώ είναι η εξής: Κάθε αριθμός στο τρίγωνο του *Pascal* **είναι το άθροισμα των δύο αριθμών στην προηγούμενη γραμμή, ο ένας βρίσκεται ακριβώς από πάνω και ο άλλος λίγο προς τα αριστερά. Έτσι αυτή η παρατήρηση μας δίνει τον τύπο (5.8) του βιβλίου.**

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}, \qquad k \textbf{ ακέραιος και } r \textbf{ θετικός ακέραιος} \tag{5.8}$$

Τώρα ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά τις τιμές του όπου το n είναι αρνητικός ακέραιος αριθμός. Ένας τρόπος για να προσεγγίσουμε αυτές τις τιμές είναι η χρήση του αθροιστικού νόμου (5.8) , δημιουργώντας τον παρακάτω πάνακα(πίνακας 164) . Για παράδειγμα, θα πρέπει να έχουμε $\binom{-1}{0} = 1$, καθώς $\binom{0}{0} = \binom{-1}{0} + \binom{-1}{-1}$ και $\binom{-1}{-1} = 0$, τότε πρέπει να έχουμε $\binom{-1}{0} = 1$. Και $\binom{0}{1} = \binom{-1}{1} + \binom{-1}{0}$ .... και ούτω καθεξής.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	286
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	66
-2	1	2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	11
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Για αρνητικό n μπορούμε να επεκτείνουμε το διωνυμικό συντελεστή, όπως φαίνεται παρακάτω (από σελίδα 164 του βιβλίου).

$$r^{\underline{k}} = r(r-1)\ldots(r-k+1) = (-1)^k(-r)(1-r)\ldots(k-1-r) = (-1)^k(k-r-1)^{\underline{k}} \quad (1)$$

Όταν $k \geq 0$, και όταν $k < 0$ τότε η τιμή έιναι μηδέν.

Έπειτα όπως προαναφέραμε στη σχέση (5.1) του βιβλίου ισχύει ότι $\binom{r}{k} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!}$, οπότε από την σχέση (1) που βγάλαμε λίγο παραπάνω θα έχουμε :

$$\binom{r}{k} = \frac{(-1)^k(k-r-1)^{\underline{k}}}{k!} = (-1)^k\binom{k-r-1}{k}, \qquad k \text{ ακέραιος}$$

Τώρα για να πάρουμε την τιμή του $\binom{-1}{k}$ θα βάλουμε όπου $r=-1$ και θα έχουμε :

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k\binom{k-(-1)-1}{k} = (-1)^k\binom{k}{k} = (-1)^k \Longrightarrow$$
$$\binom{-1}{k} = (-1)^k$$

k **ακέραιος και** $\binom{k}{k} = 1$

Έτσι η λύση που θα βρούμε θα είναι 1 ή -1 , θα εξαρτάται δηλαδή από την τιμή του k. Άν k είναι άρτιος τότε $\binom{-1}{k} = 1$, ενώ αν k είναι περιττός τότε $\binom{-1}{k} = -1$.

$\square$

Άσκηση 40. ***Να υπολογιστεί το παρακάτω άθροισμα εφορμόζοντας σωστά την ταυτότητα της συμμετρίας.***

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \quad , \quad n\geq 0$$

Απόδειξη.

Σε αυτό το άθροισμα ο δείκτης της άθροισης k εμφανίζεται έξι φορές. Αυτό μπορεί να είναι δύσκολο για να λυθεί το άθροισμα. Αλλά το $2k$ στο άθροισμα εμφανίζεται με τέτοιο τρόπο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (5.21) του βιβλίου για να απλοποιήσουμε το γινόμενο δύο διωνυμικών συντελεστών.

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}, \qquad m\ ,\ k\ \textbf{ακέραιοι} \quad (5.21)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την παραπάνω ταυτότητα (5.21) θα έχουμε :

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \qquad (1)$$

Αυτό το βήμα μειώνει την εμφάνιση του k κατα 1. Έτσι τώρα έχουμε 5 ακόμη εμφανίσεις του k. Ο $k+1$ παράγοντας στο παραπάνω άθροισμα μπορεί να απορροφηθεί μέσω του $\binom{n}{k}$ χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ταυτότητα(πίνακας 174 , βιβλίου): $\binom{r}{k}=\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$. Το οποίο μας δίνει $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$ και κάνοντας αναδιάταξη στους όρους παίρνουμε $\binom{n}{k}=\frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Άς χρησιμοποιήσουμε αυτή την σχέση στην ισότητα (1) :

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{k+1}\frac{k+1}{n+1}=$$

$$=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}\frac{(-1)^k}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k \qquad (2)$$

Τώρα έχουμε πια απαλλαγεί από 2 εμφανίσεις του k. Για την εξάλειψη και άλλου k μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε συμμετρία στο $\binom{n+k}{k}$ ή να αναιρέσουμε τον άνω δείκτη $n+k$ ο οποίος καταργεί το k αλλά και τον παράγοντα $(-1)^k$.
Ο κανόνας της συμμετρίας έχει ως εξής : $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. Στο βιβλίο χρησιμοποιείται η ταυτότητα της συμμετρίας στην ισότητα (2) ώς εξής :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k \qquad (3)$$

Αυτό εξαλείφει άλλη μια εμφάνιση του k στο άθροισμα. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα για τα αθροίσματα γινομένων τών διωνυμικών συντελεστών στην εξίσωση (3). Η ταυτότητα(πίνακας 169 (5.24)) που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ είναι:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{l}{m+k}\binom{s+k}{n}(-1)^k=(-1)^{l+m}\binom{s-m}{n-l} \quad m\ ,\ l\ ,\ n\ \textbf{ακέραιοι με}\ l\geq 0$$

Αντικαθιστώντας τώρα τα m , l , n και s σε αυτή την ταυτότητα με τα $n+1$, 1 , n και n αντίστοιχα , θα πάρουμε :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k=\frac{1}{n+1}(-1)^n\binom{n-1}{-1}=0 \qquad (4)$$

Σημειωση : $\binom{n}{k} = 0$ **όταν** $k < 0$.

Τώρα, ας διερευνήσοψμε τη δεύτερη επιλογή την αναίρεση δηλαδή του άνω δείκτη του $\binom{n+k}{k}$ **στην εξίσωση (2). Η ταυτότητα της άρνησης του άνω δείκτη δίνεται από τον τύπο(πίνακας 174 του βιβλίου):**

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}, \qquad k \text{ ακέραιος}$$

Και χρησιμοποιώντας την παραπάνω στην εξίσωση (4) θα έχουμε :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{-n-1}{k}\binom{n+1}{k+1} \qquad (5)$$

Εφαρμόζοντας την ακόλουθη ταυτότητα : $\sum_{k\geq 0}\binom{l}{m+k}\binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n}$ **στην εξίσωση (5) (αντικαθιστώντας πρώτα όπου** l , m , n **και** s **τα** $n+1$, **1** , 0 **και** $-n-1$ **αντίστοιχα) , θα πάρουμε :**

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k = \frac{1}{n+1}\binom{0}{n}$$

Σύμφωνα με αυτά που βρήκαμε παραπάνω όταν το $n > 0$ **τότε** $\frac{1}{n+1}\binom{0}{n} = 0$. **Όταν όμως** $n = 0$ **παίρνουμε** $\frac{1}{n+1}\binom{0}{n} = \frac{1}{1}\binom{0}{0} = 1$. **Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την προηγούμενη λύση καθώς είχαμε βρεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις η τιμή της παράστασης κάνει μηδέν. Το λάθος έγινε όταν εφαρμόσαμε συμμετρία, όταν ο άνω δείκτης θα μπορούσε να είναι αρνητικός. Το** $\binom{n+k}{k}$ **δεν μπορεί να αντικατασταθεί από το** $\binom{n+k}{n}$ **όταν το** k **κυμαίνεται πάνω από όλους τους ακέραιους αριθμούς, διότι μετατρέπει το μηδέν σε μια τιμή μη μηδενική όταν** $k < -n$. **Ακόμα όταν** $k < -n$ **τότε και ο παράγοντας** $\binom{n+1}{k+1}$ **γίνεται μηδέν. Η μόνη εξαίρεση είναι όταν** $n = 0$ **και** $k = -1$. **Έτσι για να διορθώσουμε το λάθος κατά τη χρήση συμμετρίας στην εξίσωση (2), πρέπει να εξετάσουμε την υπόθεση, όταν** $n = 0$ **και** $k = -1$. **Εφαρμόζοντας αυτό παίρνουμε :**

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{n}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k - \frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}\binom{n+1}{0}(-1)^{-1}$$

Από την εξίσωση (4) γνωρίζουμε ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης είναι μηδέν , άρα :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k = -\frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}\binom{n+1}{0}(-1)^{-1}$$

Ως εκ τούτου θα έχουμε τον τύπο :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k = \frac{1}{n+1}\binom{n-1}{n}\binom{n+1}{0}$$

Αυτό το άθροισμα θα είναι πάντα μηδέν για όλες τις τιμές του n **παρά μόνο για** $n = 0$. **Όπου για** $n = 0$ **η τιμή του αθροίσματος θα ισούται με την μονάδα.**

□

Άσκηση 41. ***Είναι η σχέση (5.34) αληθής ακόμα και όταν $k < 0$ (k ακέραιος) ;***

$$r^{\underline{k}}(r-\frac{1}{2})^{\underline{k}} = \frac{(2r)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}\ , \qquad k \geq 0 \quad (5.34)$$

Απόδειξη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 ($k > 0$): Εξετάζοντας λοιπόν την παραπάνω άσκηση αρχικά θα σταθούμε στον όρο $r^{\underline{-k}}$ όπου σύμφωνα με τον τύπο (2.51) του βιβλίου η σχέση μας θα γίνει ώς εξής :

$$r^{\underline{-k}} = \frac{1}{(r+1)(r+2)\ldots(r+k)} \qquad \Longrightarrow$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το 2 τον παρονομαστή και θα έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα :

$$r^{\underline{-k}} = \frac{1}{(r+1)(r+2)\ldots(r+k)} = \frac{1}{(\frac{2r+2}{2})(\frac{2r+4}{2})\ldots(\frac{2r+2k}{2})} = \frac{2^k}{(2r+2)(2r+4)\ldots(2r+2k)} \qquad (1)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 ($k > 0$): Στη συνέχεια θα σταθούμε στον όρο $(r-\frac{1}{2})^{\underline{-k}}$ όπου σύμφωνα με τον τύπο (2.51) του βιβλίου η σχέση μας θα γίνει ώς εξής :

$$(r-\frac{1}{2})^{\underline{-k}} = \frac{1}{(r-\frac{1}{2}+1)(r\frac{1}{2}+2)\ldots(r\frac{1}{2}+k)} \qquad \Longrightarrow$$

Έπειτα πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το 2 τον παρονομαστή και θα έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα :

$$(r-\frac{1}{2})^{\underline{-k}} = \frac{1}{(r\frac{1}{2}+1)(r\frac{1}{2}+2)\ldots(r\frac{1}{2}+k)} = \frac{1}{(\frac{2r-1+2}{2})(\frac{2r-1+4}{2})\ldots(\frac{2r-1+2k}{2})} = \frac{1}{(\frac{2r+1}{2})(\frac{2r+3}{2})\ldots(\frac{2r+2k-1}{2})} \Longrightarrow$$

$$(r-\frac{1}{2})^{\underline{-k}} = \frac{2^k}{(2r+1)(2r+3)\ldots(2r+2k-1)} \qquad (2)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας , τις σχέσεις (1) και (2) που βρήκαμε λίγο παραπάνω , κατα μέλη θα πάρουμε :

$$(1)\times(2) \quad r^{\underline{-k}}(r-\frac{1}{2})^{\underline{-k}} = \frac{2^k}{(2r+2)(2r+4)\ldots(2r+2k)}\frac{2^k}{(2r+1)(2r+3)\ldots(2r+2k-1)} \Longrightarrow$$

$$r^{\underline{-k}}(r-\frac{1}{2})^{\underline{-k}} = \frac{2^{2k}}{(2r+1)(2r+2)(2r+3)(2r+4)\ldots(2r+2k-1)(2r+2k)}$$

Δεδομένου ότι το πρόβλημα ζητάει, την περίπτωση για $k < 0$, μπορούμε να ορίσουμε το k' του οποίου η περιοχή είναι οι αρνητικοί ακέραιοι $k' < 0$ και ώς εκ τούτου να αντικαταστήσουμε στη σχέση (5.34) το $-k$ με το k'. Άρα :

$$r^{\underline{k'}}(r-\frac{1}{2})^{\underline{k'}} = \frac{(2r)^{\underline{2k'}}}{2^{2k'}}\ , \qquad k' < 0$$

Συνεπώς η σχέση (5.34) είναι επίσης αληθής και όταν $k < 0$.

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Περίπτωση για $k = -1$, $r^{\underline{-1}}(r-\frac{1}{2})^{\underline{-1}} = \frac{4}{(2r+1)(2r+2)} = \frac{(2)^{\underline{-2}}}{2^{-2}}$

Περίπτωση για $k = -2$, $r^{\underline{-2}}(r-\frac{1}{2})^{\underline{-2}} = \frac{16}{(2r+1)(2r+2)(2r+3)(2r+4)} = \frac{(2)^{\underline{-4}}}{2^{-4}}$

□

Άσκηση 42. ***Ποια είναι η προσεγγιστική τιμή του παρακάτω αθροίσματος , όταν το*** n ***είναι πολύ μεγάλο ;***

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(1-\frac{k}{n})^n \qquad (1)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Αυτό το άθροισμα είναι το $\Delta^n f(0)$ ***για κάποια συνάρτηση*** f***.***

Απόδειξη.

Αρχικά θα ήταν σημαντικό να θυμηθούμε μερικούς χρήσιμους τύπους του βιβλίου *concrete mathematics*. **Έτσι λοιπόν στην σελίδα 188 έχουμε τον τύπο (5.40) ο οποίος είναι :**

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+k) \quad n>0 \quad (5.40)$$

Τώρα θα προρπαθήσουμε να συγκρίνουμε την εξίσωση (1) και τον τύπο (5.40) του βιβλίου. Ας πούμε ότι $f(x)=(1-\frac{k}{n})^n$ **και εφαρμόζοντας την** $f(x)$ **στον τύπο (5.40) θα έχουμε :**

$$\Delta^n f(x)=\sum_k \binom{n}{k}(-1)^{n-k}(1-\tfrac{x+k}{n})^n \ \ (f(x)\to(5.40)) \ \ , \ \ \Delta^n f(0)=\sum_k \binom{n}{k}(-1)^{n-k}(1-\tfrac{k}{n})^n \quad (x\leftarrow 0)$$

$$\Delta^n f(0)=\sum_k \binom{n}{k}(-1)^{k-n}(1-\tfrac{k}{n})^n \implies \Delta^n f(0)=(-1)^{-n}\sum_k \binom{n}{k}(-1)^{k}(1-\tfrac{k}{n})^n \ \ (2)$$

Με αυτό τον τρόπο συνάγαμε την δοθείσα εξίσωση (5.34) η οποία είναι το δεξί μέλος της (2) , δηλαδή :

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(1-\frac{k}{n})^n=(-1)^n\Delta^n f(0) \qquad (3)$$

Σε αυτό το σημείο ας θυμηθούμε τον τύπο της σελίδας 189 του βιβλίου , που μας λέει για την νιοστή διαφορά της σειράς του Νεύτωνα.

$$\Delta^n f(0)=\{^{n!a_n}_{0} \qquad ^{n\le d}_{n>d} \qquad (4)$$

Τώρα μπορούμε να αλλάξουμε την σχέση (3) σύμφωνα με τον τύπο (4) όπως φαίνεται ακριβώς παρακάτω.

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(1-\frac{k}{n})^n=(-1)^n\Delta^n f(0) \Longleftrightarrow \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(1-\frac{k}{n})^n=(-1)^n n!a_n \qquad (5)$$

Αυτό το οποίο δεν ξέρουμε από την παραπάνω σχέση είναι το a_n. **Άρα για το** a_n **, από το ανάπτυγμα θα έχουμε :**

$$(1-\frac{x}{n})^n=1+(-1)\binom{n}{1}(\frac{x}{n})+(-1)^2\binom{n}{2}(\frac{x}{n})^2+\ldots\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}(\frac{x}{n})^n \Longrightarrow a_n=(-1)^n\binom{n}{n}(\frac{1}{n})^n=(-1)^n(\frac{1}{n})^n$$

Έπειτα το a_n **που βρήκαμε το αντικαθηστούμε στην (5) και θα έχουμε το τελικό αποτέλεσμα.**

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(1-\frac{k}{n})^n=(-1)^n n!a_n=(-1)^n(-1)^n n!(\frac{1}{n})^n=(-1)^{2n}\frac{n!}{n^n}$$

Αυτό το οποίο μας έμεινε να υπολογίσουμε είναι το $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$ **, καθώς το** n **σύμφωνα με την εκφώνηση είναι πολύ μεγάλο.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\{\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\ldots\ldots\frac{1}{n}\}=0 \quad , \quad \textbf{οπότε}$$

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k(1-\frac{k}{n})^n=0$$

□

Άσκηση 43. ***Αποδείξτε την ταυτότητα (5.25) αναιρώντας τον άνω δείκτη στη συνέληξη*** *Vandermonde''s* ***(5.22). Έπειτα δείξτε την σχέση (5.26).***

$$\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n} \quad (5.22), \qquad \sum_{k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^k = (-1)^{l+m}\binom{s-m-l}{l-m-n} \quad (5.25)$$

$$\sum_{0\le k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1} \quad (5.26)$$

Απόδειξη.

Εκτός από τη σχέση (5.22) , υπάρχουν άλλες δύο ταυτότητες οι οποίες είναι χρήσιμες για την απόδειξη της άσκησης. Η μία είναι η ταυτότητα της συμμετρίας ενώ η άλλη είναι η ταυτότητα *upper negation* **και είναι αντίστοιχα οι :**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (1) \qquad \textbf{και} \qquad \binom{r}{k} = (-1)^k\binom{k-r-1}{k} \quad (2)$$

Ξεκινώντας με το αριστερό άκρο της σχέσης (5.25) , θα προκύψει το δεξί άκρο χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) , (2) και (5.22). Αρχίζοντας με την αριστερή πλευρά θα έχουμε:

$$\sum_{k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^k = \sum_{k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^{k-m+l}(-1)^{m+l}$$

Το παραπάνω ισχύει καθώς $(-1)^k = (-1)^k(1) = (-1)^k(-1)^{2l} = (-1)^{k+2l} = (-1)^{k+l+l+m-m} = (-1)^{k+l-m}(-1)^{l+m}$**. Ακόμα καθώς τα** l **,** m **είναι ανεξάρτητα του** k **θα έχουμε :**

$$\sum_{k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^{k-m+l}(-1)^{m+l} = (-1)^{m+l}\sum_{k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^{k-m+l}$$

Τώρα καθώς $k \le 1$ **,** $l, m, n \in Z$ **και** $l, m, n \ge 0$ **μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της συμμετρίας στην αριστερή πλευρά για να πάρουμε :**

$$(-1)^{m+l}\sum_{k\le l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^{k-m+l} = (-1)^{m+l}\sum_{k\le l}\binom{l-k}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^{-k-m+l}$$

Δεδομένου ότι έχουμε τον ίδιο εκθέτη -1 με το κατώτατο μέρος του πρώτου όρου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (2) μόλις φέρουμε το ανώτερο μέρος του πρώτου όρου στην ίδια μορφή. Δηλαδή :

$$(-1)^{m+l}\sum_{k\le l}\binom{l-k}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^{-k-m+l} = (-1)^{m+l}\sum_{k\le l}\binom{l-k+m-m+1-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^{-k-m+l} =$$

$$= (-1)^{m+l}\sum_{k\le l}\binom{l-k-m-(-m-1)-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^{-k-m+l}$$

Θυμίζουμε ότι $\binom{r}{k} = (-1)^k\binom{k-r-1}{k}$**. Δεδομένου ότι όλοι οι όροι στο άθροισμά μας είναι ακέραιοι αριθμοί μπορούμε να θέσουμε** $r = -m-1$ **και** $k = l-m-k$**. Επιτρέποντας κατά συνέπεια σε μας να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2) (***upper negation***). Έτσι έχουμε:**

$$(-1)^{m+l}\sum_{k\le l}\binom{l-k-m-(-m-1)-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^{-k-m+l} = (-1)^{m+l}\sum_{k\le l}\binom{-m-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n}$$

Τέλος εφαρμόζοντας τη συνέλιξη $Vandermonde$ **(5.22) στο άθροισμα μας θα λάβουμε το δεξιό μέλος της εξίσωσης (5.25) , αυτο δηλαδή που ζητούσαμε. Οπότε :**

$$(-1)^{m+l}\sum_{k\leq l}\binom{l-k-m-(-m-1)-1}{l-k-m}\binom{s}{k-n}(-1)^{-k-m+l}=(-1)^{m+l}\binom{s-m-1}{l-n-m}\Longrightarrow$$

$$\sum_{k\leq l}\binom{l-k}{m}\binom{s}{k-n}(-1)^{k}=(-1)^{l+m}\binom{s-m-l}{l-m-n}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την ταυτότητά (5.26) θα πάρουμε την ίδια προσέγγιση όπως κάναμε και στην επίλυση της (5.25) , αλλά θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (5.25) στην απόδειξη αυτή αντί της ταυτότητας (5.22). Από το αριστερό μέλος της ταυτότητας (5.26) θα έχουμε :

$$\sum_{0\leq k\leq l}\binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n}=\sum_{0\leq k\leq l}\binom{l-k}{m}\binom{q+k}{q+k-n}$$

Η παραπάνω ισότητα βγαίνει καθώς δέδομένου ότι $n.q\geq 0$ **, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα της συμμετρίας στόν δεύτερο όρο του πρώτου μέλους. Στη συνέχεια κάνοντας τήν αντικατάσταση του** $k-q$ **με το** k **μπορούμε να τροποποιήσουμε το άθροισμα και να πάρουμε :**

$$\sum_{0\leq k-q\leq l}\binom{l-(k-q)}{m}\binom{q+(k-q)}{q+(k-q)-n}=\sum_{q\leq k\leq l+q}\binom{l-k+q}{m}\binom{k}{k-n}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την σχέση (2) (*upper negation***) στον δεξιό όρο του αθροίσματος , αυτή τη φορά θα λάβουμε:**

$$\sum_{q\leq k\leq l+q}\binom{l-k+q}{m}\binom{k-n-k-1}{k-n}(-1)^{k-n}=(-1)^{-n}\sum_{q\leq k\leq l+q}\binom{l-k+q}{m}\binom{-n-1}{k-n}(-1)^{k}$$

Βάζουμε όπου $l+q=l'$ **και έχουμε :** $\quad (-1)^{-n}\sum_{k\leq l'}\binom{l'-k}{m}\binom{-n-1}{k-n}(-1)^{k}$

Όμως παρατηρούμε ότι αν βάλουμε όπου $-n-1=s$ **και όπου** $l=l'$ **τότε θα πάρουμε την σχέση (5.25) την οποία την αποδείξαμε παραπάνω και οπότε μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη της σχέσης (5.26). Άρα θα έχουμε :**

$$(-1)^{-n}\sum_{k\leq l'}\binom{l'-k}{m}\binom{-n-1}{k-n}(-1)^{k}=(-1)^{-n}(-1)^{l+q+m}\binom{-n-1-m-1}{l+q-m-n}$$

$$(-1)^{l+q-m-n}\binom{-n-1-m-1}{l+q-m-n}=(-1)^{l+q-m-n}\binom{l+q-m-n-(l+q+1)-1}{l+q-m-n}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας την σχέση (2) (*upper negation***) και την ταυτότητα της συμμετρίας άλλη μια φορά θα λάβουμε το αριστερό μέλος της ταυτότητας (5.26) :**

$$(-1)^{l+q-m-n}\binom{l+q-m-n-(l+q+1)-1}{l+q-m-n}=\binom{l+q+1}{l+q-m-n}=\binom{l+q+1}{l+q+1-(m+n+1)}\Longrightarrow$$

$$\sum_{0\leq k\leq l}\binom{l-k}{m}\binom{q+k}{n}=\binom{l+q+1}{l+q+1-(m+n+1)}=\binom{l+q+1}{m+n+1}$$

$\square$

Άσκηση 44. *Υπολογίστε το άθροισμα :* $\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ : Χρησιμοποιήστε τη σχέση (5.29)

$$\sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}(-1)^k = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} \quad a,b,c \geq 0 \qquad (5.29)$$

Απόδειξη.

Αρχικά ας υπολογίσουμε το άθροισμα $\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k$ για μικρές τιμές του n , έτσι ώστε να δούμε , αν από τα αποτελέσματα που θα βρούμε , μήπως μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα.

$$n=0 \qquad \binom{0}{0}^3(-1)^0 = 1$$

$$n=1 \qquad \binom{1}{0}^3(-1)^0 + \binom{1}{1}^3(-1)^1 = 0$$

$$n=2 \qquad \binom{2}{0}^3(-1)^0 + \binom{2}{1}^3(-1)^1 + \binom{2}{2}^3(-1)^2 = -6$$

$$n=3 \qquad \binom{3}{0}^3(-1)^0 + \binom{3}{1}^3(-1)^1 + \binom{3}{2}^3(-1)^2 + \binom{3}{3}^3(-1)^3 = 0$$

$$n=4 \qquad \binom{4}{0}^3(-1)^0 + \binom{4}{1}^3(-1)^1 + \binom{4}{2}^3(-1)^2 + \binom{4}{3}^3(-1)^3\binom{4}{4}^3(-1)^4 = 90$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα μας αλλάζει ανάλογα με την τιμή του n. Γι΄ αυτό και τον υπολογισμό των αθροισμάτων θα τον κάνουμε συνυπολογίζοντας τις δύο παρακάτω περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: Το n είναι περιττός.

Όταν το n είναι περιττός έχουμε $n+1$ όρους για το άθροισμα $\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k$, από $k=0$ εώς $k=n$. Επεκτείνοντας λοιπόν τους όρους του αθροίσματος θα έχουμε :

$$\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k = \binom{n}{0}^3 - \binom{n}{1}^3 + \binom{n}{2}^3 - \ldots\ldots - \binom{n}{n-2}^3 + \binom{n}{n-1}^3 - \binom{n}{n}^3$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα συμμετρίας (η οποία είναι η : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ σελ. 174) θα έχουμε :

$$\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k = \binom{n}{0}^3 - \binom{n}{1}^3 + \binom{n}{2}^3 - \ldots\ldots - \binom{n}{2}^3 + \binom{n}{1}^3 - \binom{n}{0}^3 = 0$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: Το n είναι άρτιος.

Όταν το n είναι άρτιος τότε έχουμε $n+1$ όρους για το άθροισμα $\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k$, από $k=0$ εώς $k=n$. Θα υπολογίσουμε το άθροισμα ως εξής :

$$\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k = \sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{k}\binom{n}{k}(-1)^k$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας όπου $k = \frac{n}{2} + k$ το άθροισμά μας θα γίνει :

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{k}\binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{\frac{n}{2}+k} \binom{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+k}\binom{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+k}\binom{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+k}(-1)^{\frac{n}{2}+k}$$

Έπειτα θα αντικαταστήσουμε όπου $\frac{n}{2} = p$ και το άθροισμά μας θα γίνει :

$$\sum_{\frac{n}{2}+k} \binom{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+k} \binom{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+k} \binom{\frac{n}{2}+\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+k} (-1)^{\frac{n}{2}+k} = \sum_{p+k} \binom{p+p}{p+k} \binom{p+p}{p+k} \binom{p+p}{p+k} (-1)^{p+k} \quad \textbf{Όπου } 0 \leq p+k \leq n$$

Λύνοντας την ανίσωση $0 \leq p+k \leq n$ θα έχουμε $-p \leq k \leq n-p$, ξέρουμε από πρίν ότι $\frac{n}{2} = p \Longrightarrow n = 2p$. Άρα η ανίσωση θα γίνει $-p \leq k \leq p$. Επειδή όνως από τον ορισμό του διωνυμικού συντελεστή ξέρουμε ότι $\binom{n}{k} = 0$ όταν $k < 0$, τότε $0 \leq k \leq p$. Μετά την εύρεση του νέου πεδίου ορισμού για το k το άθροισμά μας θα πάρει την παρακάτω μορφή.

$$\sum_{k} \binom{p+p}{p+k} \binom{p+p}{p+k} \binom{p+p}{p+k} (-1)^{p+k} = (-1)^p \sum_{p+k} \binom{p+p}{p+k} \binom{p+p}{p+k} \binom{p+p}{p+k} (-1)^k$$

Ο όρος $(-1)^p$ βγήκε έξω από το άθροισμα καθώς το p είναι ανεξάρτητο της αθροιστικής μεταβλητής k. Στη συνέχεια της άσκησης θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (5.29) της εκφώνησης και θα πάρουμε :

$$(-1)^p \sum_{p+k} \binom{p+p}{p+k} \binom{p+p}{p+k} \binom{p+p}{p+k} (-1)^k = (-1)^p \frac{(p+p+p)!}{p!p!p!} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k} \binom{n}{k}^3 (-1)^k = (-1)^p \frac{(3p)!}{(p!)^3}$$

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Ας ελέγξουμε το αποτέλεσμα, όταν το n είναι άρτιος για μικρές τιμές του n και ας συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά που βρήκαμε στην αρχή.

$$\begin{aligned}
n = 0 \Longrightarrow p = 0 &\quad (-1)^p \tfrac{(3p)!}{(p!)^3} = (-1)^0 \tfrac{(0)!}{(0!)^3} = 1 \\
n = 2 \Longrightarrow p = 1 &\quad (-1)^p \tfrac{(3p)!}{(p!)^3} = (-1)^1 \tfrac{(3)!}{(1!)^3} = -6 \\
n = 4 \Longrightarrow p = 2 &\quad (-1)^p \tfrac{(3p)!}{(p!)^3} = (-1)^2 \tfrac{(6)!}{(2!)^3} = 90
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα ταιριάζουν απόλυτα. Οπότε ανακεφαλαιόνοντας έχουμε να πούμε ότι :

$$\textbf{Αν } n \textbf{ είναι περιττός :} \qquad \sum_{k} \binom{n}{k}^3 (-1)^k = 0$$

$$\textbf{Αν } n \textbf{ είναι άρτιος :} \qquad \sum_{k} \binom{n}{k}^3 (-1)^k = (-1)^p \frac{(3p)!}{(p!)^3}\ , \quad \textbf{Όπου } p = \frac{n}{2}$$

□

Άσκηση 45. ***Υπολογίστε το άθροισμα :***

$$\sum_k \binom{2a}{a+k}\binom{2b}{b+k}\binom{2c}{c+k}(-1)^k \qquad (1)$$

Όταν τα a ***,*** b ***και*** c ***είναι μη αρνιτικοί ακέραιοι.***

Απόδειξη.
Όπως γνωρίζουμε από τη σχέση (5.3) του βιβλίου *concrete mathematics* **, ο διωνυμικός συντελεστής** $\binom{n}{k}$ **μπορεί να εκφραστεί με παραγοντικούς όρους ως ακολούθως :**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad \textbf{ακέραιοι } n \text{ , } k \geq 0 \qquad (5.3)$$

Τώρα λοιπόν θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε κάθε όρο της σχέσης (1) με παραγοντικούς όρους , σύμφωνα με τον τύπο (5.3) που αναφέραμε.

$$\binom{2a}{a+k} = \frac{(2a)!}{(a-k)!(a+k)!} \ (2) \quad \binom{2b}{b+k} = \frac{(2b)!}{(b-k)!(b+k)!} \ (3) \quad \binom{2c}{c+k} = \frac{(2c)!}{(c-k)!(c+k)!} \ (4)$$

Επιπλέον αντικαθιστώντας τις (2) , (3) και (4) στο άθροισμα (1) θα βγάλουμε την παρακάτω σχέση :

$$\sum_k \binom{2a}{a+k}\binom{2b}{b+k}\binom{2c}{c+k}(-1)^k = \sum_k \frac{(2a)!(2b)!(2c)!(-1)^k}{(a-k)!(a+k)!(b-k)!(b+k)!(c-k)!(c+k)!} \qquad (5)$$

Στη συνέχεια θα πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με το γινόμενο $(a+b)!(b+c)!(c+a)!$ **και θα έχουμε :**

$$\sum_k \frac{(2a)!(2b)!(2c)!(a+b)!(b+c)!(c+a)!(-1)^k}{(a-k)!(a+k)!(b-k)!(b+k)!(c-k)!(c+k)!(a+b)!(b+c)!(c+a)!} =$$

$$= \frac{(2a)!(2b)!(2c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!} \sum_k \frac{(a+b)!(b+c)!(c+a)!(-1)^k}{(a-k)!(a+k)!(b-k)!(b+k)!(c-k)!(c+k)!}$$

Το κλάσμα $\frac{(2a)!(2b)!(2c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}$ **βγαίνει έξω από το άθροισμα καθώς είναι σταθερά(θα το χρησιμοποιήσουμε στο τέλος). Συνεχίζοντας τις πράξεις στο άθροισμα θα έχουμε :**

$$\sum_k \frac{(a+b)!(b+c)!(c+a)!(-1)^k}{(a-k)!(a+k)!(b-k)!(b+k)!(c-k)!(c+k)!} = \sum_k \frac{(a+b)!}{(a+k)!(b-k)!}\frac{(b+c)!}{(b+k)!(c-k)!}\frac{(c+a)!}{(c+k)!(a-k)!}(-1)^k \qquad (6)$$

Από τη σχέση (5.3) μπορούμε να συνάγουμε τα παρακάτω :

$$\frac{(a+b)!}{(a+k)!(b-k)!} = \binom{a+b}{a+k} \quad , \quad \frac{(b+c)!}{(b+k)!(c-k)!} = \binom{b+c}{b+k} \quad , \quad \frac{(c+a)!}{(c+k)!(a-k)!} = \binom{c+a}{c+k}$$

Αντικαθηστούμε τους παραπάνω τύπους στην (6) και παίρνουμε :

$$\sum_k \frac{(a+b)!}{(a+k)!(b-k)!}\frac{(b+c)!}{(b+k)!(c-k)!}\frac{(c+a)!}{(c+k)!(a-k)!}(-1)^k = \sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}(-1)^k \qquad (7)$$

Παρατηρούμε όμως πως η σχέση (7) είναι η γνωστή σχέση (5.29) της σελίδας 171 και είναι η :

$$\sum_k \binom{a+b}{a+k}\binom{b+c}{b+k}\binom{c+a}{c+k}(-1)^k = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} \qquad a,b,c \geq 0 \qquad (5.29)$$

Τέλος πολλαπλασιάζοντας το κλάσμα $\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$ **με τη σταθερά** $\frac{(2a)!(2b)!(2c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}$ **που είχαμε βρεί λίγο παραπάνω , η (1) θα γίνει :**

$$\sum_k \binom{2a}{a+k}\binom{2b}{b+k}\binom{2c}{c+k}(-1)^k = \frac{(2a)!(2b)!(2c)!}{(a+b)!(b+c)!(c+a)!}\frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$$

□

Άσκηση 46. ***Βρείτε μια απλή σχέση ανάμεσα στα :*** $\binom{2n-\frac{1}{2}}{n}$ ***και*** $\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n}$.

Απόδειξη.

Αυτό που πρέπει να κάνουμε σε αυτή την άσκηση είναι να πάρουμε τα $\binom{2n-\frac{1}{2}}{n}$ **,** $\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n}$ **και να τα αναπτύξουμε ξεχωριστά το καθένα , χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.1) του βιβλίου :**

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots\ldots(r-k+1)}{k!} \qquad (5.1)$$

Οπότε για το $\binom{2n-\frac{1}{2}}{n}$ **θα έχουμε :**

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(2n-\frac{1}{2})(2n-\frac{1}{2}-1)(2n-\frac{1}{2}-2)\ldots(2n-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(\frac{(4n-1)}{2})(\frac{4n-3}{2})(\frac{4n-5}{2})\ldots(\frac{2n+1}{2})}{n!}$$
$$= \frac{(4n-1)(4n-3)(4n-5)\ldots(2n+1)}{2^n n!} = \frac{(4n-1)(4n-3)(4n-5)\ldots(4n-(2n-1))}{2^n n!}$$

Στη συνέχεια θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με το γινόμενο : $4n(4n-2)(4n-4)(4n-6)\ldots(4n-(2n-2))$ **και θα έχουμε :**

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)(4n-5)(4n-6)\ldots\ldots(4n-(2n-2))(4n-(2n-1))}{4n(4n-2)(4n-4)(4n-6)\ldots(4n-(2n-2))2^n n!} \Longrightarrow$$

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)(4n-5)(4n-6)\ldots\ldots(4n-(2n-2))(4n-(2n-1))}{2^n 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1)2^n} \Longrightarrow$$

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)(4n-5)(4n-6)\ldots\ldots(4n-(2n-2))(4n-(2n-1))}{(2n)!2^{2n}} \Longrightarrow$$

Άν απομονώσουμε τώρα το κλάσμα $\frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)(4n-5)(4n-6)\ldots\ldots(4n-(2n-2))(4n-(2n-1))}{(2n)!}$ **, βλεπουμε ότι με τη βοήθεια του τύπου (5.1) παίρνουμε :**

$$\binom{4n}{2n} = \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)(4n-5)(4n-6)\ldots\ldots(4n-(2n-2))(4n-(2n-1))}{(2n)!}$$

Οπότε αν αντικαταστήσουμε αυτή τη σχέση στην παραπάνω θα πάρουμε :

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\binom{4n}{2n}}{2^{2n}} \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία και για το $\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n}$**. Οπότε θα έχουμε :**

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n} = \frac{(2n-\frac{1}{2})(2n-\frac{1}{2}-1)(2n-\frac{1}{2}-2)\ldots(2n-\frac{1}{2}-2n+1)}{(2n!)} = \frac{(\frac{(4n-1)}{2})(\frac{4n-3}{2})(\frac{4n-5}{2})\ldots(\frac{1}{2})}{(2n!)} =$$
$$= \frac{(4n-1)(4n-3)(4n-5)\ldots(1)}{\underline{2^{2n}}(2n!)} \qquad (\underline{2^{2n}}$$ **: καθώς στον αριθμητή έχουμε** $2n$ **όρους)**

Έπειτα θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με το γινόμενο : $4n(4n-2)(4n-4)(4n-6)\ldots(4n-(4n-2)$ **και θα έχουμε :**

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n} = \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)(4n-5)(4n-6)\ldots\ldots(4n-(4n-2)(1)}{4n(4n-2)(4n-4)(4n-6)\ldots(4n-(4n-2))2^{2n}(2n!)} =$$

$$= \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)(4n-5)(4n-6)\ldots\ldots(2)(1)}{\underline{2^{2n}}2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(2n-(2n-1))(2n!)2^{2n}} \quad (\underline{2^{2n}} \text{ : καθώς έχουμε } 2n \text{ όρους}) \Longrightarrow$$

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n} = \frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)(4n-4)(4n-5)(4n-6)\ldots\ldots(2)(1)}{2^{2n}2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots(1)(2n!)2^{2n}} = \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!2^{4n}} \Longrightarrow$$

$$\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n} = \frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!2^{4n}} \qquad (2)$$

Άρα μια απλή σχέση ανάμεσα στα : $\binom{2n-\frac{1}{2}}{n}$ **και** $\binom{2n-\frac{1}{2}}{2n}$ **, είναι :**

$$\frac{\binom{2n-\frac{1}{2}}{n}}{\binom{2n-\frac{1}{2}}{n}} = \frac{\frac{\binom{4n}{2n}}{2^{2n}}}{\frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!2^{4n}}} = \frac{\frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!2^{2n}}}{\frac{(4n)!}{(2n)!(2n)!2^{4n}}} = 2^{2n}$$

$\square$

Άσκηση 47. ***Απλοποιείστε το παρακάτω γινόμενο :***

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} \qquad (1)$$

Απόδειξη.

Από το βιβλίο *concrete mathematics* **και τη σχέση (5.1) της σελίδας 154 γνώρίζουμε για τους διωνυμικούς συντελεστές ότι :**

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k(k-1)\dots(1)} = \frac{r^{\underline{k}}}{k!}, & \text{Για ακέραιους } k \geq 0 \\ 0 & , \text{Για ακέραιους } k < 0 \end{cases} \qquad (5.1)$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο (5.1) σε κάθε όρο της σχέσης (1) θα βγάλουμε τα παρακάτω αποτελέσματα :

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}\frac{(r-\frac{1}{3})\dots(r-\frac{1}{3}-k+1)}{k!}\frac{(r-\frac{2}{3})\dots(r-\frac{2}{3}-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}\frac{(r-\frac{1}{3})\dots(r+\frac{2}{3}-k)}{k!}\frac{(r-\frac{2}{3})\dots(r+\frac{1}{3}-k)}{k!} \Longrightarrow$$

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} = \frac{r(r-\frac{1}{3})(r-\frac{2}{3})(r-1)\dots\dots\dots(r-k+1)(r-k+\frac{2}{3})(r-k+\frac{1}{3})}{(k!)^3} \qquad (2)$$

Παρατηρούμε πως ο αριθμητής της σχέσης (2) περιέχει $3k$ **όρους. Με βάση αυτό το δεδομένο λοιπόν , το επόμενο βήμα θα είναι να πολλαπλασιάσουμε αριθμητη και παρονομαστή με το** 3^{3k}**. Οπότε :**

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} = \frac{3r(3r-1)(3r-2)(3r-3)\dots\dots(3r-3k+3)(3r-3k+2)(3r-3k+1)}{(k!)^3}\times\frac{1}{3^{3k}} \qquad (3)$$

Μια ακόμα σημαντική παρατήρηση είναι ότι το γινόμενο $3r(3r-1)(3r-2)(3r-3)\dots\dots\dots(3r-3k+3)(3r-3k+2)(3r-3k+1)$ **ισούται με το κλάσμα** $\frac{(3r)!}{(3r-3k)!}$ **καθώς** $3r! = 3r(3r-1)\dots(3r-3k+1)(3r-3k)\dots(2)(1)$**. Αντικαθιστώντας στην (3) θα έχουμε :**

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} = \frac{(3r)!}{(3r-3k)!}\times\frac{1}{(k!)^3 3^{3k}} \qquad (4)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε πως αν πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα $\frac{(3r)!}{(3r-3k)!}$ **με το** $(3k)!$ **σε αριθμητή και παρονομαστή θα έχουμε :**

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} = \frac{(3r)!(3k)!}{(3r-3k)!(3k)!}\times\frac{1}{(k!)^3 3^{3k}} = \binom{3r}{3k}(3k)!\frac{1}{(k!)^3 3^{3k}} \qquad (5)$$

$\binom{3r}{3k} = \frac{(3r)!}{(3r-3k)!(3k)!}$ **από τον τύπο** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $n \geq k \geq 0$ (5.3) **του βιβλίου. Έπειτα έχοντας το** $(3k)!$ **αν πολλαπλασιάσουμε με το** $\frac{(2k)!}{(2k)!}$ **και στη συνέχεια όπου** $(k!)^3 = (k!)^2(k!)$ **θα πάρουμε :**

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} = \binom{3r}{3k}\frac{(3k)!(2k)!}{(2k)!(k!)}\frac{1}{(k!)^2 3^{3k}} = \binom{3r}{3k}\binom{3k}{2k}\frac{(2k)!}{(k!)^2 3^{3k}} \qquad \{\binom{3k}{2k} = \frac{(3k)!}{(2k)!(k!)}\}$$

Τέλος επειδή $\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(2k)!}{(2k)!-(k!)(k!)} = \binom{2k}{k}$ **(από σχέση (5.3)).**

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} = \binom{3r}{3k}\binom{3k}{2k}\frac{(2k)!}{(k!)^2 3^{3k}} = \binom{3r}{3k}\binom{3k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{1}{3^{3k}} \Longrightarrow$$

$$\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{3}}{k}\binom{r-\frac{2}{3}}{k} = \binom{3r}{3k}\binom{3k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{1}{3^{3k}}$$

□

Άσκηση 48. ***Αποδείξτε την τριπλή διωνυμική ταυτότητα (5.28) της σελίδας 171.***

$$\sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n} = \binom{r}{m}\binom{s}{n} \qquad m,n \geq 0 \qquad (5.28)$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Αντικατέστησε το $\binom{r+k}{m+n}$ ***με το άθροισμα*** $\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j}$.

Απόδειξη.

Εκτός από την ταυτότητα $Vandermonde's$ $\sum_k \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$ (5.22) **την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη , υπάρχουν άλλες δύο ταυτότητες οι οποίες είναι χρήσιμες για την λύση της άσκησης. Η μία είναι η ταυτότητα της συμμετρίας ενώ η άλλη είναι η ταυτότητα του γινομένου δύο διώνυμικών συντελεστών. Έχουμε αντίστοιχα :**

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (5.4) \qquad \textbf{και} \qquad \binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k} \quad (5.21)$$

Το πρώτο μας βήμα θα είναι να αντικαταστήσουμε το $\binom{r+k}{m+n}$ **με το άθροισμα** $\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j}$ **, όπως φαίνεται και στη σημείωση. Οπότε θα έχουμε :**

$$\sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n} = \sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j}$$

Από τον τύπο (2.27) γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της άθροισης. Δηλαδή $\sum_j \sum_k a_{j,k} = \sum_k \sum_j a_{j,k}$ (2.27). **Στην περίπτωσή μας θα έχουμε :**

$$\sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j} = \sum_j \sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j}$$

Να σημειώσουμε επίσης ότι ο όρος $\binom{r}{m+n-j}$ **του παραπάνω αθροίσματος είναι ανεξάρτητος του** k **, οπότε το άθροισμα θα μπορούσε να γραφτεί ως εξής :**

$$\sum_j \sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r}{m+n-j}\binom{k}{j} = \sum_j \binom{r}{m+n-j}\sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{k}{j} \qquad (1)$$

Από τη σχέση (5.21) μπορούμε να πάρουμε το παρακάτω :

$$\binom{m-r+s}{k}\binom{k}{j} = \binom{m-r+s}{j}\binom{m-r+s-j}{k-j}$$ **, και αντικαθιστώντας στην (1)**

$$\sum_j \binom{r}{m+n-j}\sum_k \binom{n+r-s}{n-k}\binom{m-r+s}{j}\binom{m-r+s-j}{k-j}$$

Παρόμοια με πρίν βλέπουμε ότι ο όρος $\binom{m-r+s}{j}$ **του παραπάνω αθροίσματος είναι ανεξάρτητος του** k **, οπότε το άθροισμα θα μπορούσε να γραφτεί ως εξής :**

$$\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{m-r+s}{j}\sum_k \binom{n+r-s}{n-k}\binom{m-r+s-j}{k-j} \qquad (2)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (5.22) ($Vandermonde's$ **) οι όροι του αθροίσματος (ως προς** k **) μπορούν να απλοποιηθούν ώς ακολούθως :**

$$\sum_k \binom{n+r-s}{n-k}\binom{m-r+s-j}{k-j} = \binom{m-r+s-j+n+r-s}{k-j+n-k} = \binom{m+n-j}{n-j} \quad , \quad \textbf{(αντικαθηστώ στη (2))}$$

$$\sum_j \binom{r}{m+n-j}\binom{m-r+s}{j}\binom{m+n-j}{n-j} \qquad (3)$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα (5.21) (ταυτότητα γινομένου δύο διώνυμικών συντελεστών) και την ταυτότητα (5.4) (ταυτότητα της συμμετρίας) διαδοχικά , στο γινόμενο $\binom{r}{m+n-j}\binom{m+n-j}{n-j}$ **θα έχουμε :**

$$\binom{r}{m+n-j}\binom{m+n-j}{n-j} = \binom{r}{n-j}\binom{r-n+j}{m} \quad , \quad \textbf{(από ταυτότητα (5.21))} \Longrightarrow$$

$$\binom{r}{n-j}\binom{r-n+j}{m} = \binom{r}{r-n+j}\binom{r-n+j}{m} \quad , \quad \textbf{(από ταυτότητα (5.4) στο } \binom{r}{n-j} \textbf{)} \Longrightarrow$$

$$\binom{r}{r-n+j}\binom{r-n+j}{m} = \binom{r}{m}\binom{r-m}{r-n+j-m} \quad , \quad \textbf{(από ταυτότητα (5.21))} \Longrightarrow$$

$$\binom{r}{m}\binom{r-m}{r-n+j-m} = \binom{r}{m}\binom{r-m}{n-j} \quad , \quad \textbf{(από ταυτότητα (5.4) στο } \binom{r-m}{r-n+j-m} \textbf{)}$$

Αντικαθιστώντας αυτό που βρήκαμε παραπάνω στη σχέση (3) , λαμβάνουμε το ακόλουθο άθροισμα :

$$\sum_j \binom{r}{m}\binom{r-m}{n-j}\binom{m-r+s}{j} \qquad (3)$$

Τέλος , επειδή ο όρος $\binom{r}{m}$ **είναι ανεξάρτητος του** k **θα βγεί έξω από το άθροισμα και εφαρμόζοντας την ταυτότητα (5.22) (** $Vandermonde's$ **) στο υπόλοιπο άθροισμα θα έχουμε το τελικό αποτέλεσμα.**

$$\binom{r}{m}\sum_j \binom{r-m}{n-j}\binom{m-r+s}{j} = \binom{r}{m}\binom{r-m+m-r+s}{n} = \binom{r}{m}\binom{s}{n} \Longrightarrow$$

$$\sum_k \binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n} = \binom{r}{m}\binom{s}{n}$$

□

Άσκηση 49. ***Βρείτε τον τύπο του παρακάτω αθροίσματος.***

$$\sum_{k\leq n}\binom{2k}{k}4^{-k} \qquad k,n\in Z \qquad (1)$$

Απόδειξη.

Διαβάζοντας προσεκτικά την εκφώνηση της άσκησης παρατηρούμε πως θα πρέπει να μετασχηματίσουμε τη σχέση (1) έτσι ώστε να μετατρέψουμε το άθροισμα σε ένα πιο απλό και πιο γνωστό. Οπότε θα έχουμε :

$$\sum_{k\leq n}\binom{2k}{k}4^{-k}=\sum_{k\leq n}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}=\sum_{k\leq n}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \qquad (2)$$

Η προεργασία αυτή έγινε , καθώς έτσι γίνεται ξεκάθαρο πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (5.36) του βιβλίου , η οποία είναι :

$$\binom{n-\frac{1}{2}}{n}=\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \quad n\in Z \quad (5.36)$$ **(Βάζουμε όπου $n=k$ και αντικαθηστούμε στη (2))**

$$\sum_{k\leq n}\binom{2k}{k}4^{-k}=\sum_{k\leq n}\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}=\sum_{k\leq n}\binom{k-\frac{1}{2}}{k} \qquad (3)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (5.9) του βιβλίου , κάνοντας πρώτα κάποιες απαραίτητες αντικαταστάσεις.

$$\sum_{k\leq n}\binom{r+k}{k}=\binom{r+n+1}{n} \quad n\in Z \quad (5.9)$$ **(για** $r=-\frac{1}{2}$**)** $\Longrightarrow \sum_{k\leq n}\binom{k-\frac{1}{2}}{k}=\binom{n+1-\frac{1}{2}}{n}$, **Άρα:**

$$\sum_{k\leq n}\binom{2k}{k}4^{-k}=\sum_{k\leq n}\binom{k-\frac{1}{2}}{k}=\binom{n+1-\frac{1}{2}}{n}$$

Από την σχέση (5.35) ξέρουμε ότι : $\binom{r}{k}\binom{r-\frac{1}{2}}{k}=\frac{\binom{2r}{2k}\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$ **και για** $r=n+1$ **και** $k=n$ **έχουμε:**

$$\binom{n+1}{n}\binom{n+1-\frac{1}{2}}{n}=\frac{\binom{2n+2}{2n}\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \qquad (4)$$

Έπειτα θα διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της (4) με τον όρο $\binom{n+1}{n}$**. Προτού ομως το κάνουμε αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι** $\binom{n+1}{n}=n+1$ **και** $\binom{2n+2}{2n}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{2}=(n+1)(2n+1)$**. Οπότε :**

$$\binom{n+1-\frac{1}{2}}{n}=\frac{\binom{2n+2}{2n}\binom{2n}{n}}{\binom{n+1}{n}2^{2n}}=\frac{(n+1)(2n+1)\binom{2n}{n}}{(n+1)2^{2n}}=\frac{(2n+1)\binom{2n}{n}}{2^{2n}}=(2n+1)\binom{2n}{n}4^{-n}$$

Τελικά , ο τύπος του αθροίσματος $\sum_{k\leq n}\binom{2k}{k}4^{-k}$ **θα είναι :**

$$\sum_{k\leq n}\binom{2k}{k}4^{-k}=(2n+1)\binom{2n}{n}4^{-n}$$

□

Άσκηση 50. Αυτό το πρόβλημα αφορά μια παρεκκλίνουσα εκδοχή του τριγώνου του Pascal στο οποίο οι πλευρές αποτελούνται από τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, \ldots$ αντί να είναι όλοι ίσοι με τη μονάδα. Επιπλέον οι αριθμοί που βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου εξακολουθούν να ικανοποιούν τον αθροιστικό τύπο :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 2 & & 2 & & & \\ & & 3 & & 4 & & 3 & & \\ & 4 & & 7 & & 7 & & 4 & \\ 5 & & 11 & & 14 & & 11 & & 5 \end{array}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Εάν το $\left(\binom{n}{k}\right)$ υποδηλώνει τον k-οστό αριθμό στη σειρά n , για $1 \leq k \leq n$, τότε θα έχουμε $\left(\binom{n}{1}\right) = \left(\binom{n}{n}\right) = n$ και $\left(\binom{n}{k}\right) = \left(\binom{n-1}{k}\right) + \left(\binom{n-1}{k-1}\right)$ για $1 < k < n$. Εκφράστε με τύπο την ποσότητα $\left(\binom{n}{k}\right)$.

Απόδειξη.

Το πρώτο μας βήμα σε αυτή την άσκηση είναι να προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε την παραλλαγή του τριγώνου του *pascal*. Εφόσον , όπως αναφέρεται στην εκφώνηση , τα άκρα του αποτελούνται από τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, \ldots$ και οι αριθμοί πυ βρίσκονται στο εσωτερικό του δημιουργούνται από τον τύπο $\left(\binom{n}{k}\right) = \left(\binom{n-1}{k}\right) + \left(\binom{n-1}{k-1}\right)$, θα έχουμε :

n	$\left(\binom{n}{1}\right)$	$\left(\binom{n}{2}\right)$	$\left(\binom{n}{3}\right)$	$\left(\binom{n}{4}\right)$	$\left(\binom{n}{5}\right)$	$\left(\binom{n}{6}\right)$	$\left(\binom{n}{7}\right)$	$\left(\binom{n}{8}\right)$	$\left(\binom{n}{9}\right)$
1	$\underline{1}$								
2	2	$\underline{2}$							
3	3	4	$\underline{3}$						
4	4	7	7	$\underline{4}$					
5	5	11	14	11	$\underline{5}$				
6	6	16	25	25	16	$\underline{6}$			
7	7	22	41	50	41	22	$\underline{7}$		
8	8	29	63	91	91	63	29	$\underline{8}$	
9	9	37	92	154	182	154	92	37	$\underline{9}$

Ας παραθέσουμε και το αυθεντικό τρίγωνο του *pascal* έτσι ώστε να γίνουν οι απαραίτητ-ες συγκρίσεις.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$
0	1									
1	$\underline{1}$	1								
2	1	$\underline{2}$	1							
3	1	3	$\underline{3}$	1						
4	1	4	6	$\underline{4}$	1					
5	1	5	10	10	$\underline{5}$	1				
6	1	6	15	20	15	$\underline{6}$	1			
7	1	7	21	35	35	21	$\underline{7}$	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	$\underline{8}$	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	$\underline{9}$	1

Συγκρίνοντας την παραλλαγή του τριγώνου του *pascal* **με το αυθεντικό τρίγωνο του** *pascal* **βλέπουμε ότι : οι στήλες** $\binom{n}{1}$ **και** $\left(\binom{n}{1}\right)$ **περιλαμβάνουν ακριβώς του ίδιους αριθμούς , όπως επίσης και οι διαγώνιοι των δύο τριγώνων που έχουν τους αριθμούς υπογραμμισμένους. Μετά από λίγη παρατήρηση το σημαντικό που διπιστώνουμε είναι ότι : κάθε αριθμός της παραλλαγής του τριγώνου του** *pascal* **ισούται με το άθροισμα δύο τιμών του τριγώνου του** *pascal*. **Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να εξάγουμε τον τύπο:**

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (1)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Από ποιούς αριθμούς προέρχεται ο $\left(\binom{3}{2}\right) = 4$ **; Σύμφωνα με τον τύπο (1) θα πρέπει να ισούται με :** $\left(\binom{3}{2}\right) = \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 3 + 1$ **το οποίο ισχύει. Από ποιούς αριθμούς προέρχεται ο** $\left(\binom{6}{3}\right) = 25$ **; Σύμφωνα με τον τύπο (1) θα πρέπει να ισούται με :** $\left(\binom{6}{3}\right) = \binom{6}{2} + \binom{5}{3} = 15 + 10$ **το οποίο ισχύει.**

Τέλος με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση (1) για κάθε n.
Περίπτωση: $n = 1$

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{1}{k} \quad (2), \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{1}{k-1} + \binom{0}{k} \quad (3)$$

Δύο εκδοχές υπάρχουν για το k **:** $k = 0$ **ή** $k = 1$.
$k = 0$ **: (2)** $\binom{1}{0} = 1$ **και (3)** $\binom{1}{-1} + \binom{0}{0} = 0 + 1 = 1$
$k = 1$ **: (2)** $\binom{1}{1} = 1$ **και (3)** $\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ισχύει για n **και θα δείξουμε ότι ισχύει και για** $n + 1$.

$$\left(\binom{n+1}{k}\right) = \binom{n+1}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\left(\binom{n+1}{k}\right) = \left(\binom{n}{k}\right) + \left(\binom{n}{k-1}\right) = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-2} + \binom{n-1}{k-1}$$

Άρα ο τύπος (1) αποδείχθηκε.

$\square$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1 ¨Διακριτά μαθηματικά¨, Παναγιωτόπουλος Αντώνιος Χ., Εκδόσεις Σταμούλη, *ISBN* 960−351 − 227 − 3, 1999.

2 ¨ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ¨, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, *ISBN* 978 − 960 − 524 − 072 − 1, 2009.

3 *K.H.Rosen.* ***Διακριτά Μαθηματικά και Εφαρμογές τους. 5η Έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2009.***

4 *D.E. Ensley , J.W.Crawley. Discrete Mathematics : Mathematical Reasoning and Proof with Puzzles, Patterns and Games.Wiley ,* 2006.

5 Χ. Ζαρολιάγκης. Σημειώσεις για την Επίλυση Αναδρομικών Σχέσεων. Εισαγωγή στους Αλγόριθμους.

6 *T.H. Cormen , C.E. Leiserson and R.L. Rivest. Introduction to Algorithms.* (1*stedition*) *MIT Press.* 1990.

7 *R.L. Graham , D.E. Knuth , O.Patashnik. Concrete Mathematics. Addision − Wesley.* 1988.

8 *http : //ocw.mit.edu/Ocw/Electrical−Engineering−and−Computer−Science/*6−042*JMathematics−for − Computer − ScienceFall*2002*/CoyrseHome/index.htm.*