ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Θεώρημα Gauss–Bonnet

Μάνθα Λουκοπούλου
Μαθηματικός

Διπλωματική Εργασία για Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης
στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιβλέπων Καθηγητής
Αθανάσιος Κοτσιώλης, Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα 2009

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες **v**

Εισαγωγή **1**

1 Το τοπικό θεώρημα Gauss–Bonnet **3**

2 Το γενικευμένο θεώρημα Gauss–Bonnet **21**

3 Το γενικευμένο θεώρημα Gauss–Bonnet σε n-διαστάσεις (n-άρτιος) **35**

Βιβλιογραφία **41**

Ευχαριστίες

Επιθυμώ να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή κ. Αθανάσιο Κοτσιώλη, για τις πολύτιμες συμβουλές του ως επιβλέπων της παρούσας μεταπτυχιακής διατριβής. Επίσης ευχαριστώ θερμά τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς επιτροπής, Καθηγητή κ. Βασίλειο Παπαντωνίου και Επίκουρο Καθηγητή κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο, για τις χρήσιμες παρατηρήσεις τους, πάνω στο κείμενο.

Μάνθα Λουκοπούλου

Πάτρα, Ιούνιος 2009

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε το θεώρημα των Gauss-Bonnet και μερικές από τις συνέπειές του. Το θεώρημα αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της θεωρίας επιφανειών. Για πρώτη φορά δημοσιεύθηκε από τον O. Bonnet (1819-1892) το 1848, αλλά πιθανότατα ήταν γνωστό στον Gauss. Εν συνεχεία θα μελετήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_S K$ της καμπυλότητας Gauss K μιας συμπαγούς προσανατολισμένης επιφάνειας S. Θα δούμε ότι η ποσότητα $(1/2\pi)\int_S K$ είναι πάντα ένας ακέραιος αριθμός, που είναι η χαρακτηριστική του Euler της S. Πρόκειται για την δυσδιάστατη εκδοχή του θεωρήματος Gauss–Bonnet. Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για μεγαλύτερες διαστάσεις (άρτιες), αλλά οι υπολογισμοί είναι λιγότερο προφανείς και γι' αυτό θα αρκεστούμε σε λίγα σχόλια για αυτή την πιο γενική περίπτωση, στην τελευταία παράγραφο της εργασίας.

Κεφάλαιο 1

Το τοπικό θεώρημα Gauss–Bonnet

Το θεώρημα Gauss–Bonnet προκύπτει εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes σε μια 1-μορφή, η οποία κατασκευάζεται με τη βοήθεια ενός μοναδιαίου εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου. Έστω S μια προσανατολισμένη επιφάνεια ή μια επιφάνεια με σύνορο στον $\mathbb{R}^3$. Ας υποθέσουμε ότι το $\mathbf{X}$ είναι ένα λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε ένα ανοιχτό σύνολο U στην S. Χρησιμοποιούμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}$ για να κατασκευάσουμε μια 1-μορφή στο U ως εξής: Για κάθε $\mathbf{v} \in S_p$, όπου S_p είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $p \in S$, έστω $J\mathbf{v} \in S_p$ το διάνυσμα που προκύπτει από το $\mathbf{v}$ με μια θετική στροφή $J : S_p \to S_p$ κατά γωνία $\pi/2$. Υπενθυμίζουμε ότι, δοθέντος $\theta \in \mathbb{R}$, η θετική θ-στροφή σε ένα σημείο $p \in S$ της προσανατολισμένης επιφάνειας S, είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός

$$R_\theta : S_p \to S_p, \quad \mathbf{v} \mapsto R_\theta(\mathbf{v}) = (\cos\theta)\mathbf{v} + (\sin\theta)\mathbf{N}(p) \times \mathbf{v},$$

άρα για $\theta = \pi/2$, έχουμε $R_{\pi/2}(\mathbf{v}) = \mathbf{N}(p) \times \mathbf{v} \overset{\text{ορ}}{=} J\mathbf{v}$. Επομένως $J\mathbf{v} = \mathbf{N}(p) \times \mathbf{v}$, όπου $\mathbf{N}(p)$ είναι το κάθετο διανυσματικό πεδίο στην S στο σημείο p. Σημειώνουμε ότι το ζεύγος διανυσμάτων $\{\mathbf{v}, J\mathbf{v}\}$ αποτελεί μια διατεταγμένη ορθοκανονική βάση του S_p συμβιβαστή με τον προσανατολισμό της S. Ορίζουμε την 1-μορφή ω πάνω στο U ως εξής:

$$\omega(\mathbf{v}) = (D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}) \cdot J\mathbf{X}(p) = (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}) \cdot J\mathbf{X}(p), \tag{1.1}$$

όπου D συμβολίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο που ορίζεται ως εξής: $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} - (\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}\cdot\mathbf{N}(p))\mathbf{N}(p)$ και το $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ ορίζεται ως εξής: $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = (\mathbf{X}\dot{\circ}\alpha)(t_0)$, όπου $\alpha : I \to U$ είναι μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη στο U τέτοια ώστε $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$ και U είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}_p, p \in U$ (Η $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ είναι η εφαπτομενική συνιστώσα του $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$). Η 1-μορφή ω λέγεται *μορφή συνοχής* πάνω στο U συσχετισμένη με το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}$. Επίσης, ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $J\mathbf{X}$ ως εξής:

$$(J\mathbf{X})(p) \overset{\text{ορ}}{=} J\mathbf{X}(p) = \mathbf{N}(p) \times \mathbf{X}(p), \quad \forall p \in U.$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι $J\mathbf{X}(p) \perp \mathbf{X}(p)$ για κάθε $p \in S$ και το $J\mathbf{X}$ είναι μοναδιαίο, αφού τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{N}, \mathbf{X}$ είναι μοναδιαία. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} &= \omega(\mathbf{v})J\mathbf{X}(p) \\ D_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X}) &= -\omega(\mathbf{v})\mathbf{X}(p). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Πράγματι, αφού το $\mathbf{X}$ είναι μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο στην S έχει συναλλοίωτη παράγωγο $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$ ορθογώνια στο $\mathbf{X}(p)$. Προηγουμένως είδαμε ότι και το διανυσματικό πεδίο $J\mathbf{X}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{X}$. Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} \perp \mathbf{X}(p) \\ J\mathbf{X}(p) \perp \mathbf{X}(p) \end{array}\right\} \Rightarrow D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = aJ\mathbf{X}(p), \text{ για κάποιο } a \in \mathbb{R}.$$

Άρα $a = D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} \cdot J\mathbf{X}(p)$ και λόγω της (1.1) έχουμε $a = \omega(\mathbf{v})$. Συνεπώς $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = aJ\mathbf{X}(p) = \omega(\mathbf{v})J\mathbf{X}(p)$. Ομοίως ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{X}(p) \perp (J\mathbf{X})(p) \\ D_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X}) \perp (J\mathbf{X})(p) \end{array}\right\} \Rightarrow D_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X}) = b\mathbf{X}(p), \text{ για κάποιο } b \in \mathbb{R}.$$

Άρα $b = D_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X}(p) =$ [1] $\nabla_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}) - J\mathbf{X}(p) \cdot D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = -\omega(\mathbf{v})$. Συνεπώς

[1] Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ιδιότητα της συναλλοίωτης παραγώγου:

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = (D_{\mathbf{v}}\mathbf{X})\cdot\mathbf{Y}(p) + \mathbf{X}(p)\cdot D_{\mathbf{v}}\mathbf{Y} \Leftrightarrow (D_{\mathbf{v}}\mathbf{X})\cdot\mathbf{Y}(p) = \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) - \mathbf{X}(p)\cdot D_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}.$$

Αν λοιπόν αντικαταστήσουμε στην τελευταία σχέση το $\mathbf{X}$ με $J\mathbf{X}$, το οποίο είναι επίσης λείο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο της S, και το $\mathbf{Y}$ με το $\mathbf{X}$, προκύπτει ότι $D_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X})\cdot\mathbf{X}(p) = \nabla_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}) - J\mathbf{X}(p)\cdot D_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$.

$D_{\mathbf{v}}(J\mathbf{X}) = b\mathbf{X}(p) = -\omega(\mathbf{v})\mathbf{X}(p)$.

Η μορφή συνοχής ω μετράει, ως προς το πρόσημο, τον ρυθμό περιστροφής, ως προς το $\mathbf{X}$, των παράλληλων διανυσματικών πεδίων επί των παραμετρικοποιημένων καμπυλών στο U. Προκειμένου να το δούμε αυτό πρέπει πρώτα να διατυπώσουμε ακριβώς την έννοια του " ρυθμού περιστροφής ". Έστω $\alpha : [a, b] \to S$ ένα παραμετρικοποιημένο τόξο στην S και έστω ότι τα $\mathbf{Y}$ και $\mathbf{Z}$ είναι μοναδιαία λεία εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία στην S κατά μήκος της α. Τότε :

$$\mathbf{Z}(t) = \cos\theta(t)\mathbf{Y}(t) + \sin\theta(t)J\mathbf{Y}(t),$$

για κάποια λεία συνάρτηση $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ (βλέπε Σχήμα 1.1).

Σχήμα 1.1: Η $\theta(t)$ μετράει τη γωνία στροφής από το $\mathbf{Y}(t)$ στο $\mathbf{Z}(t)$.

Ένας συγκεκριμένος τύπος για μια τέτοια συνάρτηση θ μπορεί να προκύψει ως εξής. Έστω $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη που ορίζεται από τη σχέση:

$$\beta(t) = (\mathbf{Z}(t) \cdot \mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}(t) \cdot J\mathbf{Y}(t)).$$

Τότε $\|\beta(t)\| = 1$ για κάθε $t \in I$, επομένως μπορούμε να βρούμε ένα $\theta_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\beta(a) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$. Θέτουμε $\theta(t) = \theta_0 + \int_{\beta_t} \eta$ όπου β_t είναι ο περιορισμός της καμπύλης β στο κλειστό διάστημα $[a, t]$ και η είναι η 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2$ που δίνεται από τη σχέση:

$$\eta = -[x_2/(x_1^2 + x_2^2)]dx_1 + [x_1/(x_1^2 + x_2^2)]dx_2.$$

Τότε $\beta(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ για κάθε $t \in I$ όπως απαιτείται.

Η συνάρτηση θ μετράει τη γωνία στροφής από το $\mathbf{Y}$ στο $\mathbf{Z}$ κατά μήκος της καμπύλης α και δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Όμως κάθε δύο τέτοιες συναρτήσεις διαφέρουν κατά ένα πολλαπλάσιο του 2π. Άρα η παράγωγος $\theta'(t)$ είναι μοναδικά ορισμένη. Αυτή η παράγωγος θ' λέγεται *περιστροφική τιμή* του $\mathbf{Z}$, ως προς το $\mathbf{Y}$, κατά μήκος της καμπύλης α. Ο πραγματικός αριθμός $\theta(b) - \theta(a)$ είναι επίσης μονοσήμαντα οριμένος και λέγεται *ολική γωνία στροφής* του $\mathbf{Z}$ κατά μήκος της καμπύλης α, ως προς το $\mathbf{Y}$.

Λήμμα 1.1. *Έστω S μια προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{X}$ ένα λείο, μοναδιαίο, εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο σε ένα ανοιχτό $U \subset S$, και έστω ω η μορφή συνοχής στο U συσχετισμένη με το $\mathbf{X}$. Έστω $\alpha : [a,b] \to U$ ένα παραμετρικοποιημένο τόξο καμπύλης στο U και $\mathbf{Z}$ ένα τυχόν παράλληλο διανυσματικό πεδίο επί της α. Τότε*

(i) $\omega(\dot{\alpha})$ ισούται με την αρνητική περιστροφική τιμή του $\mathbf{Z}$ ως προς το $\mathbf{X}$ (ή ακριβέστερα ως προς το $\mathbf{X} \circ \alpha$) επί της α. Δηλαδή $\omega(\dot{\alpha}) = -\theta'$.

(ii) Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha \omega$ ισούται με την αρνητική τιμή της συνολικής περιστροφής του $\mathbf{Z}$, ως προς το $\mathbf{X}$, επί της α. Δηλαδή $\int_\alpha \omega = -(\theta(b) - \theta(a))$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια λεία απεικόνιση που μετράει την γωνία στροφής από το $\mathbf{X}$ στο $\mathbf{Z}$, επί της α. Αφού το $\mathbb{Z}$ είναι παράλληλο διανυσματικό πεδίο επί της α έχουμε [2]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{Z}' = (\cos\theta \mathbf{X} \circ \alpha + \sin\theta J\mathbf{X} \circ \alpha)' \\
&= -\theta' \sin\theta \mathbf{X} \circ \alpha + \cos\theta (\mathbf{X} \circ \alpha)' + \theta' \cos\theta J\mathbf{X} \circ \alpha + \sin\theta (J\mathbf{X} \circ \alpha)' \\
&= -\theta' \sin\theta \mathbf{X} \circ \alpha + \cos\theta D_{\dot{\alpha}} \mathbf{X} + \theta' \cos\theta J\mathbf{X} \circ \alpha + \sin\theta D_{\dot{\alpha}} J\mathbf{X} \\
&= \theta'(-\sin\theta \mathbf{X} \circ \alpha + \cos\theta J\mathbf{X} \circ \alpha) + (\cos\theta)\omega(\dot{\alpha}) J\mathbf{X} \circ \alpha - (\sin\theta)\omega(\dot{\alpha})\mathbf{X} \circ \alpha \\
&= \theta'(-\sin\theta \mathbf{X} \circ \alpha + \cos\theta J\mathbf{X} \circ \alpha) + \omega(\dot{\alpha})(\cos\theta J\mathbf{X} \circ \alpha - \sin\theta \mathbf{X} \circ \alpha) \\
&= (\theta' + \omega(\dot{\alpha}))(\cos\theta J\mathbf{X} \circ \alpha - \sin\theta \mathbf{X} \circ \alpha).
\end{aligned}$$

Άρα, αφού $\cos\theta J\mathbf{X} \circ \alpha - \sin\theta \mathbf{X} \circ \alpha \neq 0$, είναι $\theta' + \omega(\dot{\alpha}) = 0 \Rightarrow \omega(\dot{\alpha}) = -\theta'$.
(ii) $\int_\alpha \omega = \int_a^b \omega(\dot{\alpha}) \overset{(i)}{=} \int_a^b -\theta' = -\int_a^b \theta' = -(\theta(b) - \theta(a))$. □

Ορισμός 1.1. *Γεωδαισιακή καμπύλη σε μια n-επιφάνεια $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ είναι μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη $\alpha : I \to S$ (όπου το I είναι ένα ανοιχτό διάστημα του $\mathbb{R}$), της οποίας η επιτάχυνση είναι πάντοτε ορθογώνια στην S. Δηλαδή*

$$\alpha(t) \in S, \quad \dot{\alpha}(t) \in S_{\alpha(t)} \quad \textit{και} \quad \ddot{\alpha}(t) \in S^{\perp}_{\alpha(t)}, \quad \textit{για κάθε} \quad t \in I,$$

όπου $S_{\alpha(t)}$ είναι ο εφαπτόμενος χώρος της S στο σημείο $\alpha(t)$.

[2] Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιούμε τη σχέση $D_{\dot{\alpha}}\mathbf{X} = (\mathbf{X} \circ \alpha)'$. Επίσης σύμφωνα με τη σχέση (1.2) είναι $D_{\mathbf{v}}\mathbf{X} = \omega(\mathbf{v})J\mathbf{X}(p)$, άρα για $\mathbf{v} = \dot{\alpha}$ ισχύει $D_{\dot{\alpha}}\mathbf{X} = \omega(\dot{\alpha})J\mathbf{X}(p)$.

Σημειώνουμε ότι οι γεωδαισιακές καμπύλες έχουν πάντα ταχύτητα σταθερού μέτρου. Αν $\alpha : [a,b] \to U$ είναι μια γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας στην S (δηλαδή $\|\dot\alpha(t)\| = 1$, για κάθε $t \in [a,b]$) τότε το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας $\dot\alpha$ είναι παράλληλο επί της α και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{Z}$ του Λήμματος 1.1. Σύμφωνα λοιπόν με το Λήμμα 1.1, ισχύει $\int_\alpha \omega = -(\theta(b) - \theta(a))$, όπου $\theta(b) - \theta(a)$ είναι η συνολική γωνία στροφής του $\dot\alpha$, ως προς το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}$, για κάθε λεία, μοναδιαίας ταχύτητας καμπύλη α στο U. Ο σχετικός τύπος περιέχει επίσης την *γεωδαισιακή καμπυλότητα* $\kappa_g : [a,b] \to \mathbb{R}$ της α, που ορίζεται ως εξής:

$$\kappa_g = (\dot\alpha)' \cdot J\dot\alpha. \tag{1.3}$$

Η γεωδαισιακή καμπυλότητα μετράει πόσο η καμπύλη α αποκλίνει από το να είναι γεωδαισιακή. Η απόλυτη τιμή $|\kappa_g|$ είναι το μέτρο $\|\dot\alpha'\|$ της συναλλοίωτης επιτάχυνσης $\dot\alpha'$ της α, επειδή το $\dot\alpha$, που είναι μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο επί της α, έχει συναλλοίωτη παράγωγο ορθογώνια στον εαυτό του και άρα πολλαπλάσιο του $J\dot\alpha$. Δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} (\dot\alpha)' \perp \dot\alpha \\ J\dot\alpha \perp \dot\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \ \text{υπάρχει } \lambda \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } (\dot\alpha)' = \lambda J\dot\alpha.$$

Σημειώνουμε ότι η καμπύλη α είναι γεωδαισιακή, αν και μόνο αν, $\kappa_g = 0$. Πράγματι, α είναι γεωδαισιακή καμπύλη $\Leftrightarrow (\dot\alpha)' = 0 \overset{(1.3)}{\Leftrightarrow} \kappa_g = 0$.

Λήμμα 1.2. *Έστω S μια προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $\mathbf{X}$ ένα λείο, μοναδιαίο, εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο σε ένα ανοιχτό $U \subset S$. Έστω ω η μορφή συνοχής στο U συσχετισμένη με το $\mathbf{X}$ και $\alpha : [a,b] \to S$ ένα λείο, μοναδιαίας ταχύτητας τόξο καμπύλης στο U. Τότε η συνολική γωνία στροφής του $\dot\alpha$, ως προς το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}$, ισούται με $\int_a^b \kappa_g - \int_\alpha \omega$. (Δηλαδή, $\phi(b) - \phi(a) = \int_a^b \phi' = \int_a^b \kappa_g - \int_\alpha \omega$, όπου $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση που μετράει τη γωνία στροφής από το $\mathbf{X}$ στο $\dot\alpha$.)*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{Z}$ ένα παράλληλο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο επί της α. Αν $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση που μετράει τη γωνία στροφής από το $\mathbf{X}$ στο $\mathbf{Z}$ επί της α, τότε η συνάρτηση $\phi - \theta$ μετράει τη γωνία στροφής από το $\mathbf{Z}$ στο $\dot\alpha$. Επομένως, αφού $\dot\alpha = \cos(\phi-\theta)\mathbf{Z} + \sin(\phi-\theta)J\mathbf{Z}$, έχουμε[3]:

$$\begin{aligned}(\dot\alpha)' &= -(\phi'-\theta')\sin(\phi-\theta)\mathbf{Z} + (\phi'-\theta')\cos(\phi-\theta)J\mathbf{Z}\\ &= (\phi'-\theta')[-\sin(\phi-\theta)\mathbf{Z} + \cos(\phi-\theta)J\mathbf{Z}].\end{aligned} \tag{1.4}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}J\dot\alpha &= \cos(\phi-\theta)J\mathbf{Z} + \sin(\phi-\theta)(-\mathbf{Z})\\ &= -\sin(\phi-\theta)\mathbf{Z} + \cos(\phi-\theta)J\mathbf{Z}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Από τις σχέσεις (1.4) και (1.5) εύκολα προκύπτει ότι

$$(\dot\alpha)'\cdot J\dot\alpha = (\phi'-\theta')[\sin^2(\phi-\theta)+\cos^2(\phi-\theta)] = (\phi'-\theta').$$

Άρα από τη σχέση (1.3) συμπεραίνουμε ότι $\kappa_g = (\dot\alpha)'\cdot J\dot\alpha = (\phi'-\theta')$, ή ισοδύναμα

$$\phi' = \kappa_g + \theta'. \tag{1.6}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1 (ii), ολοκληρώνουμε τη σχέση (1.6) και υπολογίζουμε την ολική γωνία στροφής του $\dot\alpha$ ως προς το $\mathbf{X}$, ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi' &= \int_a^b \kappa_g + \int_a^b \theta' \Leftrightarrow\\ \phi(b)-\phi(a) &= \int_a^b \kappa_g + (\theta(b)-\theta(a)) \overset{\text{Λήμ. } 1.1\ (ii)}{\Leftrightarrow}\\ \phi(b)-\phi(a) &= \int_a^b \kappa_g - \int_\alpha \omega.\end{aligned}$$

□

Πριν συνεχίσουμε στο επόμενο λήμμα, δίνουμε κάποιους απαραίτητους ορισμούς:

[3]Υπολογίζοντας την συναλλοίωτη παράγωγο του $\dot\alpha$ ως προς $\dot\alpha$, δηλαδή $D_{\dot\alpha}\dot\alpha = (\dot\alpha\circ\alpha)' = (\dot\alpha)'$, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{Z}$, και $J\mathbf{Z}$ είναι παράλληλα επί της α, δηλαδή $\mathbf{Z}' = \mathbf{0}$ και $J\mathbf{Z}' = \mathbf{0}$. Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Z}$ είναι παράλληλο εξ' υποθέσεως. Το διανυσματικό πεδίο $J\mathbf{Z}$ προκύπτει ότι είναι παράλληλο γιατί λόγω του θεωρήματος για την ύπαρξη και τη μοναδικότητα παράλληλου διανυσματικού πεδίου, φαίνεται ότι υπάρχει ένα μοναδικό παράλληλο διανυσματικό πεδίο επί της α με αρχική τιμή $J\mathbf{Z}(a)$. Αυτό το διανυσματικό πεδίο πρέπει να είναι λείο, μοναδιαίο και ορθογώνιο στο $\mathbf{Z}$ επί της α. Τέτοιο διανυσματικό πεδίο είναι μόνο το $J\mathbf{Z}$.

Ορισμός 1.2. *Μια διαφορική k-μορφή (ή απλά μια k-μορφή) σε μια n-επιφάνεια S είναι μια συνάρτηση ω, η οποία αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ σε κάθε διατεταγμένο σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ k διανυσμάτων του εφαπτόμενου χώρου S_p, όπου $p \in S$, έτσι ώστε:*

(*i*) *Για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ και $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k \in S_p$, $p \in S$, η απεικόνιση που αντιστοιχεί το $\mathbf{v} \in S_p$ στο $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}$, να είναι γραμμική.*

(*ii*) *Για κάθε $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in S_p$ και για κάθε μετάθεση σ των ακεραίων $\{1, \ldots, k\}$ να ισχύει*

$$\omega(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}) = (\text{sign } \sigma)\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

Σημειώνουμε ότι η ιδιότητα (*i*) εκφράζει την *πολυγραμμικότητα* της k-μορφής ω, ενώ η ιδιότητα (*ii*) εκφράζει την *αντισυμμετρικότητα* της ω.

Ορισμός 1.3. *Η συνάρτηση ζ η οποία αντιστοιχεί σε κάθε διατεταγμένο σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ n διανυσμάτων του S_p τον πραγματικό αριθμό:*

$$\zeta(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix},$$

λέγεται στοιχείο όγκου της S. Επίσης ορίζουμε ως όγκο $V(S)$ μιας συμπαγούς προσανατολισμένης n-επιφάνειας $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ το ολοκλήρωμα επί της S του στοιχείου όγκου ζ αυτής, δηλαδή $V(S) = \int_S \zeta$.

Είναι εμφανές (λόγω των ιδιοτήτων της ορίζουσας), ότι το στοιχείο όγκου ζ μιας προσανατολισμένης n-επιφάνειας $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ είναι μια (λεία) n-μορφή στην S.

Ορισμός 1.4. *Έστω $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ μια προσανατολισμένη n-επιφάνεια και έστω $\mathbf{N}$ το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην S. Τότε η απεικόνιση*

$$L_p : S_p \to S_p, \quad \mathbf{v} \mapsto L_p(\mathbf{v}) \overset{o\rho}{=} -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$$

καλείται απεικόνιση Weingarten της S στο σημείο $p \in S$.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απεικόνισης Weingarten μπορεί να γίνει κατανοητή από την παρακάτω σχέση:

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N} = -(\mathbf{N} \dot{\circ}\, \alpha)(t_0),$$

όπου $\alpha : I \to S$ είναι μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη στην S τέτοια ώστε $\dot{\alpha}(t_0) = \mathbf{v}$. Αυτό σημαίνει ότι η $L_p(\mathbf{v})$ μετρά (ως προς το πρόσημο) το ρυθμό μεταβολής της διεύθυνσης του κάθετου διανυσματικού πεδίου $\mathbf{N}$ καθώς διερχόμαστε από το σημείο p κατά μήκος μιας τέτοιας καμπύλης α. Σημειώνουμε ότι η απεικόνιση Weingarten συχνά αναφέρεται και ως *τελεστής σχήματος* (shape operator) (βλέπε [5], [6], [8]).

Λήμμα 1.3. *Έστω S μια προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{X}$ ένα λείο, μοναδιαίο, εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στο ανοιχτό υποσύνολο $U \subset S$, και έστω ω η μορφή συνοχής στο U συσχετισμένη με το $\mathbf{X}$. Τότε στο U ισχύει:*

$$d\omega = -K\zeta,$$

όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας S και ζ το στοιχείο όγκου της S.

Απόδειξη. Το διαφορικό της μορφής συνοχής ω, $d\omega$, είναι μια 2-μορφή, επομένως θα υπάρχει μια συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $d\omega = f\zeta$. Για να βρούμε το $f(p)$, $p \in U$, αρκεί να υπολογίσουμε τα $d\omega$ και ζ πάνω σε μια βάση του εφαπτόμενου επιπέδου S_p της S στο σημείο p. Η βάση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η συντεταγμενική βάση $\{\mathbf{E}_1(p), \mathbf{E}_2(p)\}$ συνδεμένη με μια τοπική παραμέτρηση φ της S, της οποίας η εικόνα περιέχει το σημείο p και περιέχεται στο U. Αν ω_i ($i \in \{1, 2\}$) είναι οι λείες συναρτήσεις που ορίζονται από τη σχέση $\omega_i = \omega(\mathbf{E}_i)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
d\omega(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) &= \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\omega(\mathbf{E}_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}\omega(\mathbf{E}_1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \cdot J\mathbf{X} \circ \varphi) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \cdot J\mathbf{X} \circ \varphi) \\
&= \nabla_{\mathbf{E}_1}\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \cdot J\mathbf{X} \circ \varphi + \nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{E}_1} J\mathbf{X} \\
&\quad -\nabla_{\mathbf{E}_2}\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \cdot J\mathbf{X} \circ \varphi - \nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{E}_2} J\mathbf{X} \\
&= (\nabla_{\mathbf{E}_1}\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{E}_2}\nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X}) \cdot J\mathbf{X} \circ \varphi \\
&\quad +\nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{E}_1} J\mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{E}_2} J\mathbf{X} \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

όπου $\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{Z}$, για κάποιο λείο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Z}$ στο U, είναι το λείο διανυσματικό πεδίο επί της φ που ορίζεται ως εξής: $(\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{Z})(p) \overset{\text{ορ}}{=} \nabla_{\mathbf{E}_i(p)}\mathbf{Z}$. Επίσης, το $\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{Z}$ για κάποιο λείο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Z}$ επί της φ, είναι το λείο διανυσματικό πεδίο επί της φ που ορίζεται ως εξής: $(\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{Z})(p) = \nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{Z}$ όπου $\mathbf{e}_1 = (p, 1, 0)$ και $\mathbf{e}_2 = (p, 0, 1)$ είναι η κανονική βάση (βλέπε [6, σελ. 193]). Ο πρώτος όρος της σχέσης (1.7) μηδενίζεται λόγω της ισότητας των μεικτών μερικών παραγώγων. Επιπλέον εαν συμβολίσουμε με $D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X}$ την εφαπτομενική συνιστώσα του $\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} &= D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} + ((\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X}) \cdot \mathbf{N} \circ \varphi)\mathbf{N} \circ \varphi \\ &= D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} + (L(\mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{X} \circ \varphi)\mathbf{N} \circ \varphi \end{aligned} \tag{1.8}$$

όπου $L(\mathbf{E}_i)$ είναι το διανυσματικό πεδίο επί της φ που ορίζεται από τη σχέση: $L(\mathbf{E}_i)(p) = L_p(\mathbf{E}_i(p)) = -\nabla_{\mathbf{E}_i}\mathbf{N}$, όπου L_p είναι η απεικόνιση Weingarten της φ στο σημείο p. Χρησιμοποίωντας αυτό και τον αντίστοιχο τύπο για το $\nabla_{\mathbf{E}_i}J\mathbf{X}$ προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) &= \nabla_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{E}_1}J\mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \cdot \nabla_{\mathbf{E}_2}J\mathbf{X} \\ &\overset{(1.8)}{=} [D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} + (L(\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{X} \circ \varphi)\mathbf{N} \circ \varphi] \cdot [D_{\mathbf{E}_1}J\mathbf{X} + (L(\mathbf{E}_1) \cdot J\mathbf{X} \circ \varphi)\mathbf{N} \circ \varphi] \\ &\quad -[D_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} + (L(\mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{X} \circ \varphi)\mathbf{N} \circ \varphi] \cdot [D_{\mathbf{E}_2}J\mathbf{X} + (L(\mathbf{E}_2) \cdot J\mathbf{X} \circ \varphi)\mathbf{N} \circ \varphi] \\ &= D_{\mathbf{E}_2}\mathbf{X} \cdot D_{\mathbf{E}_1}J\mathbf{X} - D_{\mathbf{E}_1}\mathbf{X} \cdot D_{\mathbf{E}_2}J\mathbf{X} \\ &\quad +(L(\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{X} \circ \varphi)(L(\mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{X} \circ \varphi) \\ &\quad -(L(\mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{X} \circ \varphi)(L(\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{X} \circ \varphi). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Οι δύο πρώτοι όροι της σχέσης (1.9) μηδενίζονται, γιατί για κάθε i και j η συναλλοίωτη παράγωγος $D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X}$ του μοναδιαίου διανυσματικού πεδίου $\mathbf{X}$ είναι ορθογώνια με το $\mathbf{X}$, επομένως είναι ένα πολλαπλάσιο του $J\mathbf{X}$ και άρα ορθογώνιο με $D_{\mathbf{E}_i}J\mathbf{X}$. Δηλαδή

$$D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} \perp \mathbf{X} \;\Rightarrow\; D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} = aJ\mathbf{X} \;\Rightarrow\; D_{\mathbf{E}_i}\mathbf{X} \perp D_{\mathbf{E}_i}J\mathbf{X}.$$

Εφαρμόζοντας τη διανυσματική ταυτότητα για τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4) = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4) - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4)(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3)$$

στους δύο όρους που απέμειναν στην (1.9) έχουμε:

$$\begin{aligned} d\omega(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) &= (L(\mathbf{E}_2) \times L(\mathbf{E}_1)) \cdot (\mathbf{X} \circ \varphi \times J\mathbf{X} \circ \varphi) \\ &= -L(\mathbf{E}_1) \times L(\mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{N} \circ \varphi \\ &= -(\det L)\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{N} \circ \phi \\ &= -(K \circ \phi)\det\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{N} \circ \varphi \end{pmatrix} \\ &= -(K \circ \varphi)\zeta(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \\ &= -(K\zeta)(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \end{aligned}$$

από το οποίο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $d\omega = -K\zeta$. □

Θεώρημα 1.1. *Έστω S μια προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, και U ένα ανοιχτό υποσύνολο της S στο οποίο ορίζεται ένα λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}$. Τότε για κάθε ιδιάζοντα δίσκο $\varphi : D \to U$ και κάθε $\mathbf{Z}$ παράλληλο διανυσματικό πεδίο επί του $\partial\varphi$, το ολοκλήρωμα $\int_\varphi K\zeta$ ισούται με την συνολική γωνία στροφής του $\mathbf{Z}$, ως προς το $\mathbf{X}$, επί του $\partial\varphi$.*

Απόδειξη. Έστω ω η μορφή συνοχής που σχετίζεται με το $\mathbf{X}$. Από το Λήμμα 1.3, το Θεώρημα του Stokes, και το Λήμμα 1.1 (ii), έχουμε:

$$\int_\varphi K\zeta = -\int_\varphi d\omega = -\int_{\partial\varphi} \omega = \theta(b) - \theta(a).$$

□

Παρατήρηση: Το Θεώρημα 1.1 μας δείχνει ειδικότερα ότι η συνολική γωνία στροφής του $\mathbf{Z}$ ως προς το $\mathbf{X}$ επί του συνόρου $\partial\varphi$, είναι ανεξάρτητη από τα $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Z}$ και μάλιστα εξαρτάται μόνο από το φ. Αυτή η γωνία λέγεται *γωνία ολονομίας* του φ. Σημειώνουμε ότι αυτή η γωνία εξαρτάται αυστηρά από το φ και όχι απλώς από το $\partial\varphi$ (βλεπε Σχήμα 1.2).

Το Θεώρημα 1.1 επίσης μας δίνει μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία της καμπυλότητας Gauss K: ο αριθμός $K(p)$, $p \in S$ είναι το όριο, καθώς ένας δίσκος φ γύρω από το

Σχήμα 1.2: Η συνολική γωνία στροφής ενός μοναδιαίου διανυσματικού πεδίου $\mathbf{Z}$ παράλληλου επί της $\alpha = \partial\varphi_1 = \partial\varphi_2$, ως προς ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}_1$ στο σύνολο $U_1 = \mathrm{S}^2 - \{p_1\}$, θα είναι διαφορετική από τη συνολική γωνία στροφής του $\mathbf{Z}$ επί της α ως προς ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}_2$ στο $U_2 = \mathrm{S}^2 - \{p_2\}$.

p συστέλλεται στο σημείο p, του λόγου: $\dfrac{\text{γωνία ολονομίας του } \varphi}{\text{εμβαδό του } \varphi}$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τα ακόλουθα:

Πόρισμα 1.1. *Έστω S μια προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, $p \in S$ και $\varphi : D \to S$ ένας ιδιάζων δίσκος στην S με $\varphi(0) = p$ και με διαφορικό $d\varphi_0 : \mathbb{R}^2_0 \to S_p$ μη ιδιάζων. Τότε:*

$$K(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\theta(\varphi_\varepsilon)}{A(\varphi_\varepsilon)}$$

όπου $\varphi_\varepsilon : D \to S$ ορίζεται ως εξής: $\varphi_\varepsilon(q) = \varphi(\varepsilon q)$, $\theta(\varphi_\varepsilon)$ είναι η γωνία ολονομίας του φ_ε, και $A(\varphi_\varepsilon)$ είναι το εμβαδό του φ_ε (βλέπε Σχήμα 1.3).

Απόδειξη. Για ε αρκετά μικρό, η εικόνα $\mathrm{Im}\varphi_\varepsilon$ περιέχεται στην εικόνα μιας τοπικής παραμέτρησης της S, επομένως υπάρχει ένα λείο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}$ (για παράδειγμα ένα κανονικοποιημένο συντεταγμενικό πεδίο) σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει την εικόνα του φ_ε. Η ομαλότητα του φ στο μηδέν, εξασφαλίζει ότι $A(\varphi_\varepsilon) \neq 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathbf{E}_i$ είναι τα συντεταγμενικά διανυσματικά πεδία που σε κάθε $p \in S$ αποτελούν τη συντεταγμενική βάση $\{\mathbf{E}_1(p), \mathbf{E}_2(p)\}$ συνδεμένη με μια τοπική παραμέτρηση της S (όπως έχουμε αναφέρει στην απόδειξη του Λήμματος 1.3), τότε ορίζουμε τα συντεταγμενικά πεδία $\mathbf{E}_i^\varepsilon$ επί του φ από τη σχέση

$$\mathbf{E}_i^\varepsilon(q) = \varepsilon \mathbf{E}_i(\varepsilon q). \tag{1.10}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1, το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα, και το γεγονός ότι τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{E}_i^\varepsilon$ επί του φ_ε σχετίζονται με τα συντεταγμενικά διανυσματικά πεδία $\mathbf{E}_i$ επί του φ μέσω της σχέσης (1.10), έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\theta(\varphi_\varepsilon)}{A(\varphi_\varepsilon)} &= \frac{\int_{\varphi_\varepsilon} K\zeta}{\int_{\varphi_\varepsilon}\zeta} = \frac{\int_D (K\circ\varphi_\varepsilon)\zeta(\mathbf{E}_1^\varepsilon,\mathbf{E}_2^\varepsilon)}{\int_D \zeta(\mathbf{E}_1^\varepsilon,\mathbf{E}_2^\varepsilon)} \\
&= \frac{K(\varphi_\varepsilon(q_1))\zeta(\mathbf{E}_1^\varepsilon(q_1),\mathbf{E}_2^\varepsilon(q_1))\int_D 1}{\zeta(\mathbf{E}_1^\varepsilon(q_2),\mathbf{E}_2^\varepsilon(q_2))\int_D 1} \\
&= \frac{K(\varphi(\varepsilon q_1))\zeta(\mathbf{E}_1(\varepsilon q_1),\mathbf{E}_2(\varepsilon q_1))}{\zeta(\mathbf{E}_1(\varepsilon q_2),\mathbf{E}_2(\varepsilon q_2))},
\end{aligned}$$

για κάποια $q_1, q_2 \in D$ (εξαρτώνται από το ε). Παίρνοντας το όριο καθώς $\varepsilon \to 0$ ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Σχήμα 1.3: Η καμπυλότητα Gauss $K(p)$ ισούται με το όριο του λόγου: γωνία ολονομίας του φ_ε/εμβαδό του φ_ε, καθώς $\varepsilon \to 0$.

Ορισμός 1.5. *Έστω S μια επιφάνεια με σύνορο στον $\mathbb{R}^3$. Ιδιάζων τρίγωνο στην S είναι μια λεία απεικόνιση $\varphi : \Delta \to S$, όπου $\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Το σύνορο του ιδιάζοντος τριγώνου είναι μια κατά τμήματα λεία παραμετρικοποιημένη καμπύλη $\partial\varphi = \varphi \circ \alpha$, όπου $\alpha : [0, 3] \to \Delta$ και ορίζεται ως εξής:*

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0), & \text{αν } 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t, t-1), & \text{αν } 1 \leq t \leq 2 \\ (0, 3-t), & \text{αν } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Το θεώρημα Gauss–Bonnet στην τοπική του μορφή συνδέει το ολοκλήρωμα της καμπυλότητας Gauss πάνω σε ένα ομαλό τρίγωνο, με το ολοκλήρωμα της γεωδαισιακής καμπυλότητας πάνω στο σύνορο του ομαλού τριγώνου. Όταν λέμε ομαλό τρίγωνο σε μια προσανατολισμένη επιφάνεια S, εννοούμε ένα ιδιάζων τρίγωνο $\phi : \Delta \to S$ το οποίο είναι ο περιορισμός στο Δ μιας αμφιμονοσήμαντης τοπικής παραμέτρησης της S που ορίζεται σε κάποιο ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^2$ που περιέχει το Δ. Το σύνορο $\partial\varphi : [0, 3] \to S$, είναι τότε μια κατά τμήματα λεία καμπύλη στην S με την ιδιότητα ότι κάθε $\alpha_i = \partial\varphi\big|_{[i-1,i]}$ είναι μια κανονική παραμετρικοποιημένη καμπύλη ($\dot{\alpha}_i \neq \mathbf{0}$), για $i \in \{1,2,3\}$. Οι *εξωτερικές γωνίες* ενός ομαλού τριγώνου φ είναι οι μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (-\pi, \pi]$ τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{v}_i = (\cos\theta_i)\mathbf{u}_i + (\sin\theta_i)J\mathbf{u}_i,$$

όπου $\mathbf{u}_i = \dot{\alpha}_i(i)/\left\|\dot{\alpha}_i(i)\right\|$ για κάθε $i \in \{1,2,3\}$, $\mathbf{v}_i = \dot{\alpha}_{i+1}(i)/\left\|\dot{\alpha}_{i+1}(i)\right\|$ για κάθε $i \in \{1,2\}$, και $\mathbf{v}_3 = \dot{\alpha}_1(0)/\left\|\dot{\alpha}_1(0)\right\|$ (βλέπε Σχήμα 1.4). Πράγματι έχουμε ότι $0 \leq \theta_i \leq \pi$ για κάθε i αφού η φ διατηρεί τον προσανατολισμό.

Σχήμα 1.4: Οι εξωτερικές γωνίες ενός ομαλού τριγώνου.

Θεώρημα 1.2. (Τοπικό Θεώρημα Gauss–Bonnet) *Έστω S μια προσανατολισμένη επιφάνεια με σύνορο στον $\mathbb{R}^3$ και $\varphi : \Delta \to S$ ένα ομαλό τρίγωνο στην S. Τότε*

$$\int_\varphi K\zeta + \int_a^b \kappa_g = 2\pi - \sum_{i=1}^{3}\theta_i,$$

όπου K είναι η καμπυλότητα Gauss της S, ζ είναι το στοιχείο όγκου στην S, $\beta : [a,b] \to S$ είναι μια μοναδιαίας ταχύτητας αναπαραμέτρηση του $\partial\varphi$, κ_g είναι η γεωδαισιακή καμπυλότητα της β, και $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ είναι οι εξωτερικές γωνίες του τριγώνου της φ.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{\varphi}$ μια αμφιμονοσήμαντη τοπική παραμέτρηση της επιφάνειας S. Δηλαδή η $\tilde{\varphi}$ είναι μια παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $\tilde{\varphi} : V \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ και επίσης η $\tilde{\varphi}$ είναι συνεπής με τον προσανατολισμό ζ στην S με την έννοια ότι $\zeta(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) > 0$ (για κάθε S ισχύει $\zeta(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = \pm 1$), όπου $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ είναι τα συντεταγμενικά διανυσματικά πεδία σε κάθε σημείο της $\tilde{\varphi}(V)$. Αν $\varphi : \Delta \to S$ είναι ένα ομαλό τρίγωνο στην S, τότε θεωρούμε την φ σαν ένα περιορισμό της $\tilde{\varphi}$ στο Δ, δηλαδή $\varphi = \tilde{\varphi}\big|_\Delta$. Άρα υπάρχει ένα λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{X}$ που ορίζεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $U \subset S$, το οποίο περιέχει την εικόνα της φ. Πράγματι αρκεί να θέσουμε $U = \tilde{\varphi}(V) \supset \varphi(\Delta)$ και να θεωρήσουμε το μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{E}_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}}{\left\|\mathbf{E}_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}\right\|}$$

όπου $\mathbf{E}_1$ είναι το πρώτο συντεταγμενικό πεδίο της $\tilde{\varphi}$. Έστω ω η μορφή συνοχής στο U, ως προς το διανυσματικό πεδίο της $\mathbf{X}$. Τότε από το Λήμμα 1.3 και την τοπική εκδοχή του θεωρήματος Stokes έχουμε:

$$\int_{\varphi} K\zeta = -\int_{\varphi} d\omega = -\int_{\partial\varphi} \omega = -\int_{\beta} \omega = -\int_{\beta_1} \omega - \int_{\beta_2} \omega - \int_{\beta_3} \omega, \tag{1.11}$$

όπου $\beta_i : [a_i, b_i] \to S$ είναι τα τρία ομαλά τμήματα της β. Επίσης από το Λημμα 1.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} \phi_i' &= \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g - \int_{\beta_i} \omega \quad \Rightarrow \\ \int_{\beta_i} \omega &= \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g - \int_{a_i}^{b_i} \phi_i' \quad \Rightarrow \\ \sum \int_{\beta_i} \omega &= \sum \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g - \sum_i \phi_i \quad \Rightarrow \\ \int_{\beta} \omega &= \sum \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g - \sum \phi_i, \end{aligned} \tag{1.12}$$

όπου ϕ_i είναι η ολική γωνία στροφής του $\dot{\beta}_i$ ως προς το $\mathbf{X}$. Επιλέγοντας τώρα το θ_0 έτσι ώστε

$$\dot{\beta}_1(a_1) = \cos\theta_0 \mathbf{X}(\beta(a_1)) + \sin\theta_0 J\mathbf{X}(\beta(a_1)),$$

έχουμε ότι (βλέπε Σχήμα 1.5):

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1(b_1) &= \cos(\theta_0 + \phi_1)\mathbf{X}(\beta(a_2)) + \sin(\theta_0 + \phi_1)J\mathbf{X}(\beta(a_2)) \\ \dot{\beta}_2(a_2) &= \cos(\theta_0 + \phi_1 + \theta_1)\mathbf{X}(\beta(a_2)) + \sin(\theta_0 + \phi_1 + \theta_1)J\mathbf{X}(\beta(a_2)) \\ \dot{\beta}_2(b_2) &= \cos(\theta_0 + \phi_1 + \theta_1 + \phi_2)\mathbf{X}(\beta(a_3)) + \sin(\theta_0 + \phi_1 + \theta_1 + \phi_2)J\mathbf{X}(\beta(a_3)) \\ \dot{\beta}_3(a_3) &= \cos(\theta_0 + \phi_1 + \theta_1 + \phi_2 + \theta_2)\mathbf{X}(\beta(a_3)) + \sin(\theta_0 + \phi_1 + \theta_1 + \phi_2 + \theta_2)J\mathbf{X}(\beta(a_3)) \\ &\vdots \\ \dot{\beta}_1(a_1) &= \cos(\theta_0 + \sum \phi_i + \sum \theta_i)\mathbf{X}(\beta(a_1)) + \sin(\theta_0 + \sum \phi_i + \sum \theta_i)J\mathbf{X}(\beta(a_1)). \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις για το $\dot{\beta}_1(a_1)$ συμπεραίνουμε ότι $\sum \phi_i + \sum \theta_i = 2k\pi$, για κάποιο ακέραιο k, ή ισοδύναμα

$$\sum \phi_i = 2k\pi - \sum \theta_i. \tag{1.13}$$

Επομένως:

$$\int_{\varphi} K\zeta \overset{(1.11)}{=} -\int_{\beta}\omega \overset{(1.12)}{=} -\sum \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g + \sum \phi_i$$
$$\overset{(1.13)}{=} -\sum \int_{a_i}^{b_i} \kappa_g + 2k\pi - \sum \theta_i,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi} K\zeta + \int_a^b \kappa_g + \sum \theta_i\right) = k \tag{1.14}$$

για κάποιον ακέραιο k.

Σχήμα 1.5: Η γωνία στροφής του $\dot{\beta}$ ως προς το $\mathbf{X}$ αυξάνεται κατά ϕ_i κατά μήκος της β_i και αυξάνεται κατά θ_i στην i-οστή κορυφή του φ.

Για να δείξουμε στη σχέση (1.14) ότι $k = 1$, θεωρούμε ένα ιδιάζων τρίγωνο $\varphi_t : \Delta \to \mathbb{R}^3$ που ορίζεται για κάθε $t \in [0,1]$ ως εξής:

$$\varphi_t(x_1, x_2) = \begin{cases} \varphi(0,0) + \dfrac{\varphi(tx_1, tx_2) - \varphi(0,0)}{t}, & \text{αν } 0 < t \leq 1 \\ \varphi(0,0) + x_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,0) + x_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0,0), & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

Τότε το φ_t είναι στην πραγματικότητα ένα ομαλό τρίγωνο στην προσανατολισμένη επιφάνεια $S_t = \mathrm{Im}\tilde{\varphi}_t$, όπου $\tilde{\varphi}_t : W \to \mathbb{R}^3$ είναι μια παραμετρικοποιημένη επιφάνεια που παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε το φ στον παραπάνω τύπο με μια τοπική παραμέτρηση $\tilde{\varphi}_t : W \to S$ της S με $\tilde{\varphi}\big|_{\Delta} = \varphi$.

Το ανοιχτό σύνολο $W \subset \mathbb{R}^2$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε το $tp \in W$ για κάθε $p \in W$ και $t \in [0,1]$. Οι επιφάνειες S_t $(0 \leq t \leq 1)$ περιγράφουν μια συνεχή παραμόρφωση της 2-επιφάνειας $S_1 = \mathrm{Im}\tilde{\varphi}$ επί της επιφάνειας S_0 η οποία είναι τμήμα του επιπέδου (βλέπε Σχήμα 1.6).

Σχήμα 1.6: Η παραμόρφωση φ_t παραμορφώνει το τρίγωνο φ στο επίπεδο τρίγωνο φ_0.

Συμβολίζουμε με K^t και ζ^t την καμπυλότητα Gauss και το στοιχείο όγκου της S_t. Με $\kappa_g^t : [a_t, b_t] \to \mathbb{R}$ και θ_i^t συμβολίζουμε αντίστοιχα τη γεωδαισιακή καμπυλότητα και τις εξωτερικές γωνίες που σχετίζονται με το ομαλό τρίγωνο φ_t. Τότε η σχέση (1.14) γίνεται

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi_t} K^t\zeta^t + \int_{a_t}^{b_t} \kappa_g^t + \sum \theta_i^t\right) = k^t, \tag{1.15}$$

όπου k^t είναι ένας ακέραιος. Το αριστερό μέλος της σχέσης (1.15) ποικίλλει συνεχώς ανάλογα με το t, επομένως το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και με το δεξιό μέλος της σχέσης. Επειδή το k^t είναι πάντα ένας ακέραιος, το k^t πρέπει να έχει την ίδια τιμή για όλα τα $t \in [0,1]$. Όμως όταν $t = 0$, το ομαλό τρίγωνο φ_t είναι απλά ένα επίπεδο τρίγωνο, φραγμένο από ευθύγραμμα τμήματα, επομένως (αφού είμαστε στο επίπεδο) ισχύει $K^0 = 0, \kappa_g^0 = 0, \sum \theta_i^0 = 2\pi$ και άρα η σχέση (1.15) γίνεται:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi_0} K^0\zeta^0 + \int_{a_0}^{b_0} \kappa_g^0 + \sum \theta_i^0\right) &= k^0 \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1}{2\pi}(0+0+2\pi) &= k^0 \quad \Leftrightarrow \\
1 &= k^0.
\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν $1 = k^0 = k^1 = k$ και η σχέση (1.14) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\varphi} K\zeta + \int_{a}^{b} \kappa_g + \sum \theta_i\right) &= 1 \quad \Leftrightarrow \\
\int_{\varphi} K\zeta + \int_{a}^{b} \kappa_g + \sum \theta_i &= 2\pi \quad \Leftrightarrow \\
\int_{\varphi} K\zeta + \int_{a}^{b} \kappa_g &= 2\pi - \sum \theta_i.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση: Ο τύπος του τοπικού θεωρήματος Gauss–Bonnet μπορεί να διατυπωθεί ως προς τις εσωτερικές γώνιες $\delta_i = \pi - \theta_i$ του φ, ως εξής: Αφού $\delta_i = \pi - \theta_i$ εύκολα αποδεικνύεται ότι $-\sum_{i=1}^{3}\theta_i = \sum_{i=1}^{3}\delta_i - 3\pi$, άρα

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi} K\zeta + \int_{a}^{b} \kappa_g &= 2\pi - \sum_{i}^{3} \theta_i \Leftrightarrow \\
\int_{\varphi} K\zeta + \int_{a}^{b} \kappa_g &= 2\pi + \sum_{i=1}^{3} \delta_i - 3\pi \Leftrightarrow \\
\int_{\varphi} K\zeta + \int_{a}^{b} \kappa_g &= \sum_{i=1}^{3} \delta_i - \pi. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Ο παραπάνω τύπος έχει μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία για τα *γεωδαισιακά τρίγωνα.*

Ορισμός 1.6. *Ένα γεωδαισιακό τρίγωνο στην* S *είναι ένα ομαλό τρίγωνο* $\varphi : \Delta \to S$ *τέτοιο ώστε κάθε λείο τμήμα του συνόρου του* $\partial\varphi$ *να είναι μια αναπαραμέτρηση μιας γεωδαισιακής.*

Για τέτοιου είδους τρίγωνα ισχύει $\int_a^b \kappa_g = 0$, επομένως η σχέση (1.16) γίνεται:

$$\int_{\varphi} K\zeta = \sum_{i=1}^{3} \delta_i - \pi. \tag{1.17}$$

Αφού $\sum_{i=1}^{3} \delta_i - \pi = 0$ όταν η επιφάνεια S είναι ένα επίπεδο (και γενικότερα οποτεδήποτε $K = 0$), η σχέση (1.17) μας λέει ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\varphi} K\zeta$ *μετράει το γωνιακό περίσσευμα (σε σχέση με τα γεωδαισιακά τρίγωνα της επίπεδης γεωμετρίας) του περιεχομένου ενός γεωδαισιακού τριγώνου* φ. Ειδικότερα:

- Αν $K > 0$ παντού, τότε τα γεωδαισιακά τρίγωνα στην S έχουν άθροισμα γωνιών *μεγαλύτερο* του π ($> \pi$).
- Αν $K < 0$ παντού, τότε τα γεωδαισιακά τρίγωνα στην S έχουν άθροισμα γωνιών *μικρότερο* του π ($< \pi$).

Κεφάλαιο 2

Το γενικευμένο θεώρημα Gauss–Bonnet

Το θεώρημα Gauss–Bonnet στην γενικευμένη του μορφή (όπως θα δούμε παρακάτω στο Θεώρημα 1.5) εκφράζει το ολοκλήρωμα $\int_\varphi K$ της καμπυλότητας Gauss μιας συμπαγούς προσανατολισμένης επιφάνειας S, ως 2π φορές έναν συγκεκριμένο ακέραιο συσχετισμένο με την S. Αν υπάρχει ένα λείο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο, που δεν μηδενίζεται πουθενά επί της S, τότε ο παραπάνω ακέραιος πρέπει να είναι μηδέν:

Θεώρημα 2.1. *Έστω S μια συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα λείο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο, που δεν μηδενίζεται πουθενά επί της S. Τότε $\int_\varphi K = 0$.*

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, θα χρησιμοποιήσουμε την γενικευμένη εκδοχή του θεωρήματος Stokes, την οποία υπενθυμίζουμε παρακάτω:

Γενικευμένο Θεώρημα Stokes (βλέπε [6, Κεφ. 20]):

(*i*) *Έστω S μια συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια, με σύνορο, στον $\mathbb{R}^3$, και έστω ότι το σύνορό της ∂S είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό της S. Έστω ω μια λεία 1-μορφή στην S. Τότε $\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$.*

(*ii*) *Έστω S μια συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια, χωρίς σύνορο, στον $\mathbb{R}^3$, και έστω ω μια λεία 1-μορφή στην S. Τότε $\int_\varphi d\omega = 0$.*

Απόδειξη. Έστω λοιπόν, $\mathbf{X}$ ένα λείο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο, που δεν μηδενίζεται επί της S. Τότε το $\mathbf{X}/\left\|\mathbf{X}\right\|$ είναι ένα λείο, μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο επί της S. Αν ω είναι η μορφή συνοχής ως προς το $\mathbf{X}/\left\|\mathbf{X}\right\|$, τότε από το Λήμμα 1.3 και το γενικευμένο θεώρημα Stokes (ii), έχουμε διαδοχικά:

$$\int_S K = \int_S K\zeta = -\int_S d\omega = 0.$$

□

Πόρισμα 2.1. *Έστω S μια συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$, της οποίας η καμπυλότητα Gauss K είναι μη αρνητική, $K \geq 0$. Τότε δεν μπορεί να υπάρχει λείο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στην S που να μην μηδενίζεται. Ειδικότερα, δεν υπάρχει λείο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο που να μη μηδενίζεται επι της S^2 (μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$).*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα: *σε κάθε συμπαγή προσανατολισμένη n-επιφάνεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$, υπάρχει ένα σημείο p τέτοιο ώστε η δεύτερη θεμελιώδης μορφή στο p να είναι ορισμένη* (βλέπε [6, Κεφ. 12]), πρέπει να υπάρχει ένα σημείο $p \in S$ τέτοιο ώστε η καμπυλότητα Gauss να είναι $K(p) > 0$ ή $K(p) < 0$. Η δεύτερη περίπτωση απορρίπτεται από την υπόθεση του πορίσματος. Επομένως η K πρέπει να είναι > 0 σε κάθε ανοιχτό υποσύνολο της S γύρω από το p και αφού $K \geq 0$ παντού, συνεπάγεται ότι $\int_S K > 0$. □

Για να καταλάβουμε καλύτερα τι συμβαίνει όταν δεν υπάρχει λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στην επιφάνεια S, ας αναλογιστούμε την περίπτωση που η S είναι η μοναδιαία σφαίρα S^2 προσανατολισμένη από το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Παρόλο που (σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα) δεν μπορεί να υπάρχει λείο, μοναδιαίο, εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο, που δεν μηδενίζεται επί της S^2, υπάρχει ένα επί της $\mathrm{S}^2 - \{p\}$ όπου $p = (0,0,-1)$ είναι ο νότιος πόλος της S^2, και υπάρχει άλλο ένα επί της $\mathrm{S}^2 - \{q\}$ όπου $q = (0,0,1)$ είναι ο βόρειος πόλος της S^2. Για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε το $\mathbf{X}_1$ επί της $\mathrm{S}^2 - \{p\}$ ως εξής:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{E}_1^{\varphi_1} \circ \varphi_1^{-1} / \left\|\mathbf{E}_1^{\varphi_1} \circ \varphi_1^{-1}\right\|,$$

όπου $\varphi_1^{-1} : \mathrm{S}^2 - \{p\} \to \mathbb{R}^2$ είναι η στερεογραφική προβολή που αντιστοιχεί στο νότιο πόλο $p \in \mathrm{S}^2$ και $\mathbf{E}_1^{\varphi_1}$ είναι το πρώτο συντεταγμενικό πεδίο της φ_1. Όμοια μπορούμε να ορίσουμε το $\mathbf{X}_2$ επί της $\mathrm{S}^2 - \{q\}$ ως εξής:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{E}_1^{\varphi_2} \circ \varphi_2^{-1} / \left\| \mathbf{E}_1^{\varphi_2} \circ \varphi_2^{-1} \right\|,$$

όπου $\varphi_2^{-1} : \mathrm{S}^2 - \{q\} \to \mathbb{R}^2$ είναι η στερεογραφική προβολή που αντιστοιχεί στο βόρειο πόλο $q \in \mathrm{S}^2$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ω_1 και ω_2 είναι οι μορφές συνοχής ως προς τα $\mathbf{X}_1$ και $\mathbf{X}_2$ αντίστοιχα, και ας θέσουμε:

$$\mathrm{S}^2_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{S}^2 : x_3 \geq 0\} \quad \text{και} \quad \mathrm{S}^2_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{S}^2 : x_3 \leq 0\}.$$

Τότε παρατηρούμε ότι οι S^2_+ και S^2_- είναι επιφάνειες με σύνορο, των οποίων η ένωση είναι η σφαίρα S^2 και η τομή ο ισημερινός της S^2. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3 και την γενικευμένη μορφή του θεωρήματος Stokes (i), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{S}^2} K &= \int_{\mathrm{S}^2} K\zeta = \int_{\mathrm{S}^2_+} K\zeta + \int_{\mathrm{S}^2_-} K\zeta = -\int_{\mathrm{S}^2_+} d\omega_1 - \int_{\mathrm{S}^2_-} d\omega_2 \\
&= -\int_{\partial \mathrm{S}^2_+} \omega_1 - \int_{\partial \mathrm{S}^2_-} \omega_2 = -\int_{\partial \mathrm{S}^2_+} \omega_1 + \int_{\partial \mathrm{S}^2_+} \omega_2.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι το $\partial \mathrm{S}^2_-$ και το $\partial \mathrm{S}^2_+$ είναι η ίδια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ (ισημερινός), εφοδιασμένη όμως με αντίθετους προσανατολισμούς.

Αν θέσουμε $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ για $0 \leq t \leq 2\pi$, τότε βλέπουμε ότι ο περιορισμός της α στο $(0, 2\pi)$, δηλαδή η $\alpha\big|_{(0,2\pi)}$, είναι μια τοπική παραμέτρηση του $\partial \mathrm{S}^2_+$, από την εικόνα της οποίας λείπει ένα μόνο σημείο του $\partial \mathrm{S}^2_+$, το $(1, 0, 0)$. Έχουμε λοιπόν:

$$\int_{\mathrm{S}^2} K = -\int_{\partial \mathrm{S}^2_+} \omega_1 + \int_{\partial \mathrm{S}^2_+} \omega_2 = -\int_\alpha \omega_1 + \int_\alpha \omega_2. \tag{2.1}$$

Αλλά σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 το ολοκλήρωμα $-\int_\alpha \omega_1$ ισούται με την ολική γωνία στροφής του $\mathbf{Z}$ ως προς το $\mathbf{X}_1$ επί της α, όπου $\mathbf{Z}$ είναι ένα οποιοδήποτε παράλληλο διανυσματικό πεδίο επί της α (θα μπορούσαμε να πάρουμε $\mathbf{Z} = \dot{\alpha}$). Επίσης το $\int_\alpha \omega_2$ ισούται με την ολική γωνία στροφής του $\mathbf{X}_2$ ως προς το $\mathbf{Z}$ επί της α. Άρα η σχέση (1.18) ισούται με την ολική γωνία στροφής του $\mathbf{X}_2$ ως προς το $\mathbf{X}_1$ επί της α. Όμως αφού $\mathbf{X}_1(\alpha(2\pi)) = \mathbf{X}_1(\alpha(0))$ και $\mathbf{X}_2(\alpha(2\pi)) = \mathbf{X}_2(\alpha(0))$, αυτή η ολική γωνία στροφής πρέπει να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα $(1/2\pi)\int_{\mathrm{S}^2} K$ πρέπει να είναι ένας ακέραιος. Από το Σχήμα 1.7 είναι εύκολο να δούμε ότι ο ακέραιος αυτός είναι το 2. Πράγματι αυτό ήταν αναμενόμενο αφού γνωρίζουμε ότι για την μοναδιαία σφαίρα είναι $K = 1$, επομένως

$$\int_{\mathrm{S}^2} K = \int_{\mathrm{S}^2} 1 = V(\mathrm{S}^2) = 4\pi = 2 \cdot 2\pi.$$

Σχήμα 2.1: Η γωνία στροφής του $\mathbf{X}_2$ ως προς το $\mathbf{X}_1$ αυξάνεται κατά 2π κατά μήκος κάθε μισού του ισημερινού.

Το γενικευμένο θεώρημα Gauss–Bonnet προκύπτει γενικεύοντας την παραπάνω κατασκευή σε μια αυθαίρετη συμπαγή προσανατολισμένη επιφάνεια $S \subset \mathbb{R}^3$. Θα πρέπει πρώτα να καθιερώσουμε έναν τύπο ολοκλήρωσης για την ολική γωνία στροφής, κατά μήκος μιας παραμετρικοποιημένης καμπύλης, ενός μοναδιαίου εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου ως προς ένα άλλο. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε αυτή την ολική γωνία στροφής κατά μήκος των κλειστών καμπύλων, οι οποίες περικλείουν *ιδιομορφίες* ενός εκ των διανυσματικών πεδίων.

Λήμμα 2.1. *Έστω $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}$ δύο λεία μοναδιαία εφαπτόμενα διανυσματικά πεδία που ορίζονται σε ένα ανοιχτό σύνολο U μιας προσανατολισμένης επιφάνειας S. Έστω $\omega_{\mathbf{XY}}$ η λεία 1-μορφή στο U που ορίζεται ως εξής:*

$$\omega_{\mathbf{XY}} = f dg - g df,$$

όπου $f = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ και $g = \mathbf{X} \cdot J\mathbf{Y}$. Τότε:

(i) $d\omega_{\mathbf{XY}} = 0$.

(ii) Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha \omega_{\mathbf{XY}}$, όπου α είναι μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη στο U, είναι ίσο με την ολική γωνία στροφής του $\mathbf{X}$ ως προς το $\mathbf{Y}$ επί της α.

Για την απόδειξη του Λήμματος 1.4 θα μας χρειαστεί η εξής πρόταση (βλέπε [5, σελ. 155], ή [6, σελ. 182]):

Πρόταση 2.1. *Έστω $f : S \to \mathbb{R}$ μια λεία συνάρτηση σε μια προσανατολισμένη επιφάνεια S και έστω ω μια λεία 1-μορφή στην S. Τότε:*

(*i*) $d(df) = 0$.

(*ii*) $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$.

Απόδειξη. (*του Λήμματος 1.4*) (*i*) Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, έχουμε

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathbf{XY}} &= d(fdg - gdf) = d(fdg) - d(gdf) \\ &= df \wedge dg - fd(dg) - dg \wedge df - gd(df) \\ &= df \wedge dg - dg \wedge df = df \wedge dg + df \wedge dg \\ &= 2df \wedge dg. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $f^2 + g^2 = 1$. Πράγματι, αφού $f = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$, $g = \mathbf{X} \cdot J\mathbf{Y}$ και $\mathbf{X} = \cos\theta\mathbf{Y} + \sin\theta J\mathbf{Y}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = (\cos\theta\mathbf{Y} + \sin\theta J\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{Y} = \cos\theta \\ g &= \mathbf{X} \cdot J\mathbf{Y} = (\cos\theta\mathbf{Y} + \sin\theta J\mathbf{Y}) \cdot J\mathbf{Y} = \sin\theta \end{aligned}$$

Άρα $f^2 + g^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. Επομένως $d(f^2 + g^2) = 0$, ή ισοδύναμα

$$2fdf + 2gdg = 0. \tag{2.3}$$

Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά την εξίσωση (1.20) με dg έχουμε:

$$\begin{aligned} (2fdf + 2gdg) \wedge dg &= 0 \wedge dg \ \Leftrightarrow \\ 2fdf \wedge dg + 2gdg \wedge dg &= 0 \ \Leftrightarrow \\ 2fdf \wedge dg &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά την εξίσωση (1.20) με df έχουμε:

$$\begin{aligned} (2fdf + 2gdg) \wedge df &= 0 \wedge df \ \Leftrightarrow \\ 2fdf \wedge df + 2gdg \wedge df &= 0 \ \Leftrightarrow \\ 2gdg \wedge df &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Όμως αφού $f^2+g^2=1$ συμπεραίνουμε ότι οι f, g δεν μπορούν να γίνουν ταυτόχρονα μηδέν. Άρα από τις σχέσεις (1.21) και (1.22) συμπεραίνουμε ότι $2df \wedge dg = 0$, και λόγω της (1.19) είναι $d\omega_{\mathbf{XY}} = 0$.

(ii) Έστω $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που μετράει την γωνία στροφής από το $\mathbf{Y}$ στο $\mathbf{X}$ επί της α, έτσι ώστε

$$\mathbf{X}\circ\alpha = \cos\theta\mathbf{Y}\circ\alpha + \sin\theta J\mathbf{Y}\circ\alpha.$$

Τότε, αφού $f = \mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$, ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} f\circ\alpha &= (\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})\circ\alpha = (\mathbf{X}\circ\alpha)\cdot(\mathbf{Y}\circ\alpha) \\ &= (\cos\theta\mathbf{Y}\circ\alpha + \sin\theta J\mathbf{Y}\circ\alpha)\cdot(\mathbf{Y}\circ\alpha) \\ &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Επίσης, αφού $g = \mathbf{X}\cdot J\mathbf{Y}$, όμοια έχουμε:

$$\begin{aligned} g\circ\alpha &= (\mathbf{X}\cdot J\mathbf{Y})\circ\alpha = (\mathbf{X}\circ\alpha)\cdot(J\mathbf{Y}\circ\alpha) \\ &= (\cos\theta\mathbf{Y}\circ\alpha + \sin\theta J\mathbf{Y}\circ\alpha)\cdot(J\mathbf{Y}\circ\alpha) \\ &= \sin\theta. \end{aligned}$$

Επομένως αφού $\omega_{\mathbf{XY}} = fdg - gdf$ είναι:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{XY}}(\dot\alpha) &= (f\circ\alpha)dg(\dot\alpha) - (g\circ\alpha)df(\dot\alpha) \\ &= \cos\theta\ (g\circ\alpha)' - \sin\theta\ (f\circ\alpha)' \\ &= \cos\theta\ (\sin\theta)' - \sin\theta\ (\cos\theta)' \\ &= \cos^2\theta\cdot\theta' + \sin^2\theta\cdot\theta' \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\cdot\theta' \\ &= \theta' \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.23) παίρνουμε:

$$\int_\alpha \omega_{\mathbf{XY}} = \int_a^b \omega_{\mathbf{XY}}(\dot\alpha) \overset{(1.23)}{=} \int_a^b \theta' = \theta(b) - \theta(a).$$

$\square$

Υπενθυμίζουμε τώρα τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 2.1. *Μέγιστη γεωδαισιακή καμπύλη σε μια n-επιφάνεια $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, λέγεται η γεωδαισιακή καμπύλη $\alpha : I \to S$ έτσι ώστε:*

(i) $0 \in I$, $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{v}$,

(ii) Αν $\beta : \tilde{I} \to S$ είναι μια άλλη γεωδαισιακή στην S με $\beta(0) = p$ και $\dot{\beta}(0) = \mathbf{v}$, τότε $\tilde{I} \subset I$ και $\beta(t) = \alpha(t)$ για κάθε $t \in \tilde{I}$.

Ορισμός 2.2. *Έστω $T(S) = \bigcup_{p \in S} S_p \subset S \times \mathbb{R}^{n+1}$ η εφαπτόμενη δέσμη της S, $\mathbf{v} \in T(S)$ και $\alpha_{\mathbf{v}} : (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ η μέγιστη γεωδαισιακή στην S με $\dot{\alpha}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$. Έστω $U = \{\mathbf{v} \in T(S) : 1 \in$ πεδίο ορισμού της $\alpha_{\mathbf{v}}\}$. Τότε εκθετική απεικόνιση $\exp$ της επιφάνειας S λέγεται η απεικόνιση που ορίζεται ως εξής:*

$$\exp : U \to S, \quad \mathbf{v} \mapsto \exp(\mathbf{v}) = \alpha_{\mathbf{v}}(1).$$

Παρατήρηση: Το μηδενικό διάνυσμα στον S_p ανήκει στο U (για κάθε $p \in S$) και μάλιστα $\exp(\mathbf{0}) = \alpha_{\mathbf{0}}(1) = p$.

Θεώρημα 2.2. ([6, σελ. 167]) *Η εκθετική απεικόνιση $\exp : U \to S$ μιας n-επιφάνειας $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) Το πεδίο ορισμού U της $\exp$ είναι ένα ενοιχτό υποσύνολο της εφαπτόμενης δέσμης $T(S)$.

(ii) Αν $\mathbf{v} \in U$ τότε $t\mathbf{v} \in U$ για $0 \leq t \leq 1$.

(iii) Η $\exp$ είναι μια λεία απεικόνιση.

(iv) Για κάθε $p \in S$ υπάρχει ένα σύνολο U_p, ανοιχτό στον S_p που περιέχει το $\mathbf{0} \in S_p$, έστι ώστε $U_p \subset U$ και ο περιορισμός $\exp\big|_{U_p}$ νε είναι μια αμφιδιαφόριση από το U_p σε ένα ανοικτό υποσύνολο της S που περιέχει το p.

(v) Για κάθε $p \in S$ και $\mathbf{v} \in S_p$, η μέγιστη γεωδαισιακή $\alpha_{\mathbf{v}}$ με $\dot{\alpha}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$ δίνεται ως εξής: $\alpha_{\mathbf{v}}(t) = \exp(t\mathbf{v})$.

Ας περάσουμε τώρα στην έννοια της *ιδιομορφίας* ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{X}$ σε μια επιφάνεια S.

Ορισμός 2.3. *Έστω* $\mathbf{X} : U \to S_p$ *ένα λείο διανυσματικό πεδίο μιας προσανατολισμένης επιφάνειας* S *που ορίζεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο* $U \subset S$. *Μια μεμονωμένη ιδιομορφία (isolated singularity) του διανυσματικού πεδίου* $\mathbf{X}$, *είναι ένα σημείο* $p \in S$ *τέτοιο ώστε* $p \notin U$ *αλλά* $V - \{p\} \subset U$ *για κάποιο ανοιχτό υποσύνολο* V *στην* S *που περιέχει το* p.

Αν p είναι μια μεμονωμένη ιδιομορφία του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{X}$, τότε (λόγω του Θεωρήματος 1.4) μπορούμε να επιλέξουμε τα εξής (βλέπε Σχήμα 1.8):

(*i*) $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε η εκθετική απεικόνιση exp της S να είναι μια εμφιδιαφόριση μεταξύ μιας ανοιχτής μπάλας $B_\varepsilon = \{\mathbf{v} \in S_p : \|\mathbf{v}\| < \varepsilon\}$ ακτίνας ε με κέντρο το $\mathbf{0}$, και ενός ανοικτού υποσυνόλου $U_\varepsilon \subset U \cup \{p\}$,

(*ii*) $\mathbf{u} \in S_p$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$,

(*iii*) $r \in \mathbb{R}$ με $0 < r < \varepsilon$,

(*iv*) ένα λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Y}$ στο U_ε.

Σχήμα 2.2: Η εκθετική απεικόνιση, για αρκετά μικρό ε, απεικονίζει αμφιδιαφορικά την ε-μπάλα B_ε με κέντρο το $\mathbf{0}$, σε ένα ανοιχτό σύνολο U_ε της S. Επιπλέον οι γεωδαισιακές της S που διέρχονται από το p, είναι οι εικόνες, μέσω της εκθετικής απεικόνισης, των ευθειών που διέρχονται από το $\mathbf{0}$ στον εφαπτόμενο χώρο S_p.

Για παράδειγμα, το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Y}$ μπορούμε να το βρούμε εφαρμόζοντας το διαφορικό της εκθετικής απεικόνισης $d\exp$ σε κάθε λείο, μη μηδενικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Z}$ επί της B_ε και μετά διαιρώντας με το μέτρο του. Δηλαδή,

$$\mathbf{Y} = \frac{d\exp(\mathbf{Z})}{\|d\exp(\mathbf{Z})\|}.$$

Αν $\theta_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ είναι η λεία απεικόνιση που μετράει την γωνία στροφής από το $\mathbf{X}(t)$ στο $\mathbf{Y}(t)$, τότε ο δείκτης $\iota(\mathbf{X}, p)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\iota(\mathbf{X}, p) = \frac{1}{2\pi}(\theta_r(2\pi) - \theta_r(0)). \tag{2.7}$$

Σχήμα 2.3: Μεμονωμένες ιδιομορφίες διανυσματικών πεδίων. Σε κάθε περίπτωση φαίνονται οι ολοκληρωτικές καμπύλες και δηλώνεται ο δείκτης.

Γι' αυτό, σύμφωνα με το Λήμμα 1.4 τελικά έχουμε

$$\iota(\mathbf{X},p) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_r} \omega_{\mathbf{XY}}, \tag{2.8}$$

όπου $\omega_{\mathbf{XY}}$ είναι η λεία 1-μορφή που ορίσαμε στο Λήμμα 1.4.

Λήμμα 2.2. *Ο δείκτης $\iota(\mathbf{X},p)$ είναι ένας ακέραιος αριθμός, ο οποίος εξαρτάται μόνο από το $\mathbf{X}$ και το p (και όχι από την επιλογή των $\varepsilon, \mathbf{u}, r$ και $\mathbf{Y}$).*

Απόδειξη. Έστω $\theta_r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ η λεία απεικόνιση που μετράει την γωνία στροφής από το $\mathbf{X}$ στο $\mathbf{Y}$ επί της α_r. Από τη σχέση (1.24) έχουμε $\mathbf{X}\circ\alpha_r(2\pi) = \mathbf{X}\circ\alpha_r(0)$. Επειδή $\mathbf{X}(t) = \cos\theta_r(t)\mathbf{Y}(t) + \sin\theta_r(t)J\mathbf{Y}(t)$, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
&\cos\theta_r(2\pi)\mathbf{Y}\circ\alpha_r(2\pi) + \sin\theta_r(2\pi)J\mathbf{Y}\circ\alpha_r(2\pi) = \\
&\quad = \mathbf{X}\circ\alpha_r(2\pi) \\
&\quad = \mathbf{X}\circ\alpha_r(0) \\
&\quad = \cos\theta_r(0)\mathbf{Y}\circ\alpha_r(0) + \sin\theta_r(0)J\mathbf{Y}\circ\alpha_r(0).
\end{aligned}$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση και δεδομένου ότι

$$\mathbf{Y}\circ\alpha_r(2\pi) = \mathbf{Y}\circ\alpha_r(0) \quad \text{και} \quad J\mathbf{Y}\circ\alpha_r(2\pi) = J\mathbf{Y}\circ\alpha_r(0),$$

θα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει

$$\left.\begin{aligned}
\cos\theta_r(2\pi) &= \cos\theta_r(0) \\
\sin\theta_r(2\pi) &= \sin\theta_r(0)
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Οι σχέσεις (1.27) ικανοποιούνται όταν $\theta_r(2\pi) - \theta_r(0)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, δηλαδή $\theta_r(2\pi) - \theta_r(0) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς λόγω της σχέσης (1.25) συμπεραίνουμε ότι: $\iota(\mathbf{X},p) = (1/2\pi)2k\pi = k \in \mathbb{Z}$.

Ανεξαρτησία του $\mathbf{Y}$: Έστω $\mathbf{Z}$ ένα άλλο λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στο $U_\varepsilon \subset U \cup p$. Πρέπει να δείξουμε ότι η ολική γωνία στροφής του $\mathbf{X}$ ως προς το $\mathbf{Z}$ επί της α_r, ισούται με την ολική γωνία στροφής του $\mathbf{X}$ ως προς το $\mathbf{Y}$ επί της α_r. Η διαφορά αυτών των δύο γωνιών είναι η ολική γωνία στροφής του $\mathbf{Y}$ ως προς το $\mathbf{Z}$. Από το Λήμμα 1.4 γνωρίζουμε ότι αυτή η γωνία ισούται με $\int_{\alpha_r} \omega_{\mathbf{YZ}}$, πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι $\int_{\alpha_r} \omega_{\mathbf{YZ}} = 0$. Η 1-μορφή $\omega_{\mathbf{YZ}}$ ορίζεται στο U_ε και η α_r είναι το σύνορο του ιδιάζοντος δίσκου $\varphi_r : D \to U_\varepsilon$ που ορίζεται ως εξής:

$$(x_1, x_2) \mapsto \varphi_r(x_1, x_2) = \exp(r(x_1\mathbf{u} + x_2 J\mathbf{u})).$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Stokes έχουμε διαδοχικά:

$$\int_{\alpha_r} \omega_{\mathbf{YZ}} = \int_{\partial\varphi_r} \omega_{\mathbf{YZ}} = \int_{\varphi_r} d\omega_{\mathbf{YZ}} \overset{\text{Λημ. 1.4}}{=} 0$$

<u>*Ανεξαρτησία του r:*</u> Έστω $\omega_{\mathbf{XY}}$ η 1-μορφή στο $U_\varepsilon - \{p\}$ η οποία ορίζεται όπως στο Λήμμα 1.4. Τότε η σχέση (1.26) δείχνει ότι ο δείκτης $\iota(\mathbf{X}, p)$ μεταβάλλεται συνεχώς ως προς το r. Αλλά επειδή ο δείκτης $\iota(\mathbf{X}, p)$ είναι πάντα ένας ακέραιος, αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν ο $\iota(\mathbf{X}, p)$ είναι μια σταθερή συνάρτηση ως προς r. Άρα ο δείκτης $\iota(\mathbf{X}, p)$ είναι ανεξάρτητος του r.

<u>*Ανεξαρτησία του* $\mathbf{u}$*:*</u> Υπενθυμίζουμε ότι $B_\varepsilon = \{\mathbf{v} \in S_p : \|\mathbf{v}\| < \varepsilon\}$ και $U_\varepsilon \subset U \cup \{p\}$. Για $0 < r < \varepsilon$ θέτουμε:

$$S_r = \left\{ q \in U_\varepsilon : \left\| \left(\exp\big|_{B_\varepsilon} \right)^{-1} (q) \right\|^2 \leq r^2 \right\}.$$

Τότε η S_r είναι μια προσανατολισμένη επιφάνεια με σύνορο (περιοχή του σημείου q), που έχει προσανατολιστεί από τον προσανατολισμό της S περιορισμένο πάνω στην S_r. Επιπλέον η καμπύλη $\alpha_r : I = (0, 2\pi) \to \partial S_r$ με τύπο $\alpha_r(t) = \exp(r\cos t\mathbf{u} + r\sin tJ\mathbf{u})$ είναι μια τοπική παραμέτρηση του ∂S_r. Από την εικόνα $\alpha(I)$ λείπει ακριβώς ένα σημείο του συνόρου ∂S_r, επομένως έχουμε

$$\iota(\mathbf{X}, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_r} \omega_{\mathbf{XY}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial S_r} \omega_{\mathbf{XY}}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την επιλογή του $\mathbf{u}$.

<u>*Ανεξαρτησία του ε:*</u> Έστω ότι η εκθετική απεικόνιση exp, απεικονίζει τις σφαίρες

$$B_{\varepsilon_1} = \{\mathbf{v} \in S_p : \|\mathbf{v}\| < \varepsilon_1\} \quad \text{και} \quad B_{\varepsilon_2} = \{\mathbf{v} \in S_p : \|\mathbf{v}\| < \varepsilon_2\}$$

αμφιδιαφορισίμως σε ανοιχτά υποσύνολα του $U \cup \{p\}$. Τότε, για να υπολογίσουμε τον δείκτη $\iota(\mathbf{X}, p) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_r} \omega_{\mathbf{XY}}$, μπορούμε να επιλέξουμε το r να είναι μικρότερο και από το ε_1 και από το ε_2. Έτσι η επιλογή του $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ φαίνεται ότι είναι ανεξάρτητη από τον υπολογισμό του δείκτη $\iota(\mathbf{X}, p)$. □

Θεώρημα 2.3. (Γενικευμένο θεώρημα Gauss–Bonnet) *Έστω S μια συμπαγής, προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και $\mathbf{X}$ ένα λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην S εκτός από κάποιες μεμονωμένες ιδιομορφίες $\{p_1, \ldots, p_k\}$. Τότε:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_S K = \sum_{i=1}^{k} \iota(\mathbf{X}, p).$$

Ειδικότερα η ποσότητα $(1/2\pi)\int_S K$ είναι πάντα ένας ακέραιος αριθμός.

Παρατηρήσεις: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να διαβαστεί με δύο τρόπους:

(1) Η ποσότητα $(1/2\pi)\int_S K$ είναι πάντα ένας ακέραιος αριθμός χ, και εκφράζει το θεώρημα Gauss–Bonnet.

(2) Το άθροισμα των δεικτών, $\sum_{i=1}^{k} \iota(\mathbf{X}, p)$, ενός λείου μοναδιαίου εφαπτόμενου διανυσματικού πεδίου ορισμένου στην S εκτός από κάποιες μεμονωμένες ιδιομορφίες, (είναι το ίδιο με το άθροισμα των δεικτών ενός οποιουδήποτε άλλου τέτοιου διανυσματικού πεδίου) είναι επίσης ένας ακέραιος αριθμός χ, και ονομάζεται *θεώρημα Poincare–Hopf*.

Αυτός ο κοινός ακέραιος αριθμός χ καλείται *χαρακτηριστική του Euler* της επιφάνειας S. Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\chi = 2 - 2g$, όπου g είναι το *γένος* (genus) της S (δηλαδή ο αριθμός των " χειρολαβών " της S) (βλέπε Σχήμα 1.10).

Σχήμα 2.4: Επιφάνειες με γένος $g \in \{1, 2, 3\}$.

Στην εκφώνηση του γενικευμένου θεωρήματος Gauss–Bonnet υποθέσαμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην S εκτός από κάποιες μεμονωμένες ιδιομορφίες. Σημειώνουμε ότι η συμπάγεια της S μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μόνο πεπερασμένου το πλήθος μεμονωμένων ιδιομορφιών για κάθε δοσμένο διανυσματικό πεδίο.

Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι η εκθετική απεικόνιση exp στην S ορίζεται ως εξής:

$$\exp : S_p \to S, \quad \mathbf{v} \mapsto \exp(\mathbf{v}) = \alpha_{\mathbf{v}}(1),$$

όπου $\alpha_{\mathbf{v}}$ είναι η μέγιστη γεωδαισιακή στην S με $\alpha_{\mathbf{v}}(0) = p$ και $\dot{\alpha}_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$. Επίσης, $B_\varepsilon = \{\mathbf{v} \in S_p : \|\mathbf{v}\| < \varepsilon\}$. Στη συνέχεια για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$ επιλέγουμε $\varepsilon_i > 0$ έτσι ώστε η εκθετική απεικόνιση exp, να απεικονίζει την σφαίρα B_{ε_i} ακτίνας ε_i γύρω από το $\mathbf{0}$ του S_{p_i}, αμφιδιαφορισίμως σ' ένα ανοιχτό σύνολο U_i γύρω από το $p_i \in S$. Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε τα ε_i να είναι αρκετά μικρά έτσι ώστε $U_i \cap U_j = \emptyset$ για $i \neq j$. Επιλέγουμε τώρα $r > 0$ τέτοιο ώστε $r < \varepsilon_i$ για κάθε i. Έστω

$$S_+ = \bigcup_{i=1}^{k} S_i, \quad \text{όπου} \quad S_i = \left\{ q \in U_i : \left\| \left(\exp|_{B_{\varepsilon_i}} \right)^{-1} (q) \right\| \leq r \right\}$$

και έστω

$$S_- = \left\{ q \in S : \left\| \left(\exp|_{B_{\varepsilon_i}} \right)^{-1} (q) \right\| \geq r \;\; \text{όταν} \;\; q \in U_{\varepsilon_i} \;\; \text{για κάποιο} \;\; i \right\}$$

(βλέπε Σχήμα 1.11).

Σχήμα 2.5: Η S είναι η ένωση δύο επιφανειών με σύνορο, η μία είναι η S_+ η οποία αποτελείται από την ένωση δίσκων γύρω από τις ιδιομορφίες του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{X}$, και η άλλη είναι η S_-, που αποτελείται από το συμπλήρωμα του εσωτερικού αυτών των δίσκων.

Τότε τα S_+ και S_- είναι συμπαγείς επιφάνειες με σύνορο στον $\mathbb{R}^3$, προσανατολισμένες από τον περιορισμό του προσανατολισμού της S, και ισχύει $\partial S_+ = \partial S_- = S_+ \cap S_-$. Σημειώνουμε ωστόσο ότι ο επαγόμενος προσανατολισμός στο σύνορο ∂S_+ είναι αντίθετος από εκείνον στον σύνορο ∂S_-.

Έστω τώρα $\mathbf{Y}$ ένα λείο μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην ένωση $\bigcup_{i=1}^{k} U_i$. (Για παράδειγμα, το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Y}$ μπορούμε να το πάρουμε, εφαρμόζοντας το διαφορικό της εκθετικής απεικόνισης $d\exp$ πάνω σε λεία, μη μηδενικά διανυσματικά πεδία ορισμένα σε κάθε B_{ε_i}, κανονικοποιώντας εν συνεχεία το αποτέλεσμα.) Θέτοντας ω_1 να είναι η μορφή συνοχής ως προς το $\mathbf{Y}$ και ω_2 να είναι η μορφή συνοχής ως προς το $\mathbf{X}$, το Λήμμα 1.3 και το θεώρημα Stokes συνεπάγονται ότι:

$$\begin{aligned}
\int_S K &= \int_S K\zeta = \int_{S_+} K\zeta + \int_{S_-} K\zeta \overset{\text{Λημ. 1.3}}{=} -\int_{S_+} d\omega_1 - \int_{S_-} d\omega_2 \\
&\overset{\text{Stokes}}{=} -\int_{\partial S_+} \omega_1 - \int_{\partial S_-} \omega_2 = -\int_{\partial S_+} \omega_1 + \int_{\partial S_+} \omega_2 \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big(-\int_{\partial S_i} \omega_1 + \int_{\partial S_i} \omega_2 \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big(-\int_{\alpha_i} \omega_1 + \int_{\alpha_i} \omega_2 \Big), \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

όπου $\alpha_i : [0, 2\pi] \to \partial S_i$ είναι μια τοπική παραμέτρηση του ∂S_i που ορίζεται ως από τη σχέση:

$$\alpha_i(t) = \exp(r \cos t \; \mathbf{u}_i + r \sin t J \mathbf{u}_i),$$

και $\mathbf{u}_i$ είναι ένα από τα μοναδιαία διανύσματα του S_{p_i}. Σημειώνουμε ότι η πέμπτη ισότητα παραπάνω, προέρχεται από το γεγονός ότι τα ∂S_+ και ∂S_- έχουν αντίθετο προσανατολισμό. Αν $\mathbf{Z}_i$ είναι ένα παράλληλο μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο επί της α_i, τότε επειδή $-\int_{\alpha_i} \omega_1 + \int_{\alpha_i} \omega_2 = -\int_{\alpha_i} \omega_1 - \big(-\int_{\alpha_i} \omega_2 \big)$, από το Λήμμα 1.1 συνεπάγεται ότι το ολοκλήρωμα $-\int_{\alpha_i} \omega_1 + \int_{\alpha_i} \omega_2$ ισούται με την ολική γωνία στροφής του $\mathbf{Z}$ ως προς το $\mathbf{Y}$ επί της α_i, μείον την ολική γωνία στροφής του $\mathbf{Z}$ ως προς το $\mathbf{X}$ επί της α_i. Η διαφορά αυτών των δύο γωνιών όμως ισούται με την ολική γωνία στροφής του $\mathbf{X}$ ως προς το $\mathbf{Y}$ επί της α_i. Η τελευταία αυτή γωνία είναι ίση με 2π φορές τον δείκτη του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{X}$ στο σημείο (μεμονωμένη ιδιομορφία) p_i. Επομένως η σχέση (1.28) γίνεται:

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(-\int_{\alpha_i} \omega_1 + \int_{\alpha_i} \omega_2 \Big) = \sum_{i=1}^{k} \Big(-\int_{\alpha_i} \omega_1 - \big(-\int_{\alpha_i} \omega_2 \big) \Big) = \sum_{i=1}^{k} 2\pi \; \iota(\mathbf{X}, p_i).$$

Άρα έχουμε $\int_S K = 2\pi \sum_{i=1}^{k} \iota(\mathbf{X}, p_i)$, και το γενικευμένο θεώρημα Gauus–Bonnet αποδείχθηκε. □

Κεφάλαιο 3

Το γενικευμένο θεώρημα Gauss–Bonnet σε n-διαστάσεις (n-άρτιος)

Ο τύπος των Gauss–Bonnet γενικεύεται σε συμπαγείς προσανατολισμένες n–επιφάνειες S, οποιασδήποτε άρτιας διάστασης, ως εξής:

$$\big(2/V(\mathrm{S}^n)\big)\int_S K = \chi, \tag{3.1}$$

όπου $V(\mathrm{S}^n)$ είναι ο όγκος της μοναδιαίας n–σφάιρας S^n, K είναι η καμπυλότητα Gauss–Kronecker της S και χ είναι η χαρακτηριστική του Euler της S (ένας ακέραιος αριθμός). Η απόδειξη της σχέσης (1.29) στηρίζεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1. *Έστω S μια προσανατολισμένη n–επιφάνεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$, ζ το στοιχείο όγκου στην S, και ξ το στοιχείο όγκου στην μοναδιαία σφαίρα S^n με τον συνήθη προσανατολισμό. Τότε*

$$N^*\xi = K\zeta,$$

όπου $N : S \to \mathrm{S}^n$ είναι η απεικόνιση Gauss και K η καμπυλότητα Gauss–Kronecker της S.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του Λήμματος 1.6, αναφέρουμε κάποιες απαραίτητες έννοιες και ένα θεώρημα, που θα χρησιμοποιήσουμε στην πορεία.

Ορισμός 3.1. *Έστω S μια n-επιφάνεια, ω μια k-μορφή σε μια m-επιφάνεια $\tilde{S}$ και $f : S \to \tilde{S}$ μια λεία απεικόνιση. Τότε η απεικόνιση $f^*\omega$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$(f^*\omega)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(df(\mathbf{v}_1), \ldots, df(\mathbf{v}_k)) \tag{3.2}$$

είναι μια k-μορφή στην S. Η $(f^*\omega)$ καλείται ανάκληση (pull back) της ω από την f.

Συνεχίζουμε τώρα με τον ορισμό της *καμπυλότητας Gauss-Kronecker* μιας n-επιφάνειας S.

Ορισμός 3.2. *Έστω $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ μια προσανατολισμένη n-επιφάνεια και έστω $L_p : S_p \to S_p$, $\mathbf{v} \mapsto L_p(v) \overset{o\rho}{=} -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$ η απεικόνιση Weingarten της S στο p, όπου $\mathbf{N}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στην S. Η ορίζουσα $K(p) = \det L_p$ καλείται καμπυλότητα Gauss-Kronecker της S στο σημείο p.*

Σημειώνουμε ότι για $n = 2$, η καμπυλότητα Gauss-Kronecker είναι η γνωστή καμπυλότητα Gauss σε μια 2-επιφάνεια. Για την καμπυλότητα Gauss-Kronecker ισχύει το εξής θεώρημα (για την απόδειξη βλέπε [6, σελ. 89]):

Θεώρημα 3.1. *Έστω S μια προσανατολισμένη n-επιφάνεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$, $p \in S$, $\mathbf{Z}$ ένα μη μηδενικό κάθετο διανυσματικό πεδίο στην S τέτοιο ώστε $\mathbf{N} = \mathbf{Z}/\|\mathbf{Z}\|$, και $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ μια βάση του S_p. Τότε η καμπυλότητα Gauss-Kronecker της S στο σημείο p δίνεται από τη σχέση*

$$K(p) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1}\mathbf{Z} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix} \Bigg/ \|\mathbf{Z}(p)\|^n \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{Z}(p) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

όπου για $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}_p$, $\mathbf{w}_i = (p, \mathbf{w}_{i,1}, \ldots, \mathbf{w}_{i,n+1})$ ισχύει:

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{w}_{1,1} & \cdots & \mathbf{w}_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{w}_{n+1,1} & \cdots & \mathbf{w}_{n+1,n+1} \end{vmatrix}.$$

Έστω τώρα $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ μια προσανατολισμένη n-επιφάνεια. Έστω $N : S \to \mathbb{R}^{n+1}$ η απεικόνιση που συνδέεται με το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{N}$ της S μέσω της σχέσης $\mathbf{N}(p) = (p, N(p))$, όπου $p \in S$. Τότε, επειδή $\|\mathbf{N}(p)\| = 1$, για κάθε $p \in S$, η N απεικονίζει την S στην μοναδιαία n-σφαίρα $\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Αυτή η απεικόνιση $N : S \to \mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ καλείται απεικόνιση Gauss.

Η απεικόνιση Gauss μπορεί να θεωρηθεί ως εκείνη η απεικόνιση που σε κάθε $p \in S$, αντιστοιχεί το σημείο στον $\mathbb{R}^{n+1}$ που προκύπτει μεταφέροντας το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N}(p)$ στην αρχή των αξόνων (βλέπε Σχήμα 1.12).

Σχήμα 3.1: Η απεικόνιση Gauss μιας 1-επιφάνειας S (δηλαδή μιας καμπύλης) στον $\mathbb{R}^2$.

Παρατήρηση: Αν στο Θεώρημα 1.6 θέσουμε $\mathbf{Z} = \mathbf{N}$ και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα $dN(\mathbf{v})$ και $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{N}$ έχουν το ίδιο διανυσματικό μέρος για κάθε $\mathbf{v} \in S_p$ και $p \in S$, τότε η σχέση (1.31) παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} K(p) &= (-1)^n \det \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1}\mathbf{N} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n}\mathbf{N} \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \det \begin{pmatrix} dN(\mathbf{v}_1) \\ \vdots \\ dN(\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{N}^{\mathrm{S}^n}(N(p)) \end{pmatrix} \Bigg/ \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

όπου $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ είναι μια βάση του S_p και $\mathbf{N}^{\mathrm{S}^n}$ ο τυπικός προσανατολισμός στη σφαίρα S^n που ορίζεται ως εξής: $\mathbf{N}^{\mathrm{S}^n}(q) = (q, (-1)^n q)$.

Ορισμός 3.3. *Έστω $f : S \to \tilde{S}$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ δύο προσανατολισμένων n-επιφανειών του $\mathbb{R}^{n+1}$ και έστω κάποιο $p \in S$ τέτοιο ώστε το διαφορικό $df_p : S_p \to \tilde{S}_{f(p)}$ να μην είναι ιδιάζων. Τότε λέμε ότι η f διατηρεί τον προσανατολισμό στο σημείο p αν το df_p απεικονίζει τις βάσεις του S_p, συμβατές με τον προσανατολισμό της S,* *σε βάσεις του $\tilde{S}_{f(p)}$, συμβατές με τον προσανατολισμό της $\tilde{S}$. Αν αυτό δεν συμβαίνει λέμε ότι η f αντιστρέφει τον προσανατολισμό στο σημείο p.*

Συνεπώς λόγω της σχέσης (1.32) και του παραπάνω ορισμού συμπεραίνουμε ότι η καμπυλότητα Gauss-Kronecker $K(p)$ σε ένα σημείο $p \in S$ μιας προσανατολισμένης n-επιφάνειας $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, είναι θετική αν και μόνο αν η απεικόνιση Gauss $N : S \to \mathrm{S}^n$ διατηρεί τον προσανατολισμό στο σημείο p, ενώ η $K(p)$ είναι αρνητική αν και μόνο αν η απεικόνιση N αντιστρέφει τον προσανατολισμό στο p.

Ας περάσουμε τώρα στην απόδειξη του Λήμματος 1.6.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S_p$, $p \in S$. Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση Gauss $N : S \to \mathrm{S}^n$ είναι μια λεία απεικόνιση και ότι το στοιχείο όγκου ξ της μοναδιαίας σφαίρας S^n είναι μια n-μορφή. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
(N^*\xi)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) &\overset{(1.30)}{=} \xi(dN(\mathbf{v}_1), \ldots, dN(\mathbf{v}_n)) \\
&= \det\begin{pmatrix} dN(\mathbf{v}_1) \\ \vdots \\ dN(\mathbf{v}_n) \\ \mathbf{N}^{\mathrm{S}^n}(N(p)) \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{v}_1}\mathbf{N} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{v}_n}\mathbf{N} \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} \\
&\overset{(1.32)}{=} K(p)\det\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{N}(p) \end{pmatrix} = K(p)\zeta(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).
\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $(N^*\xi)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = K(p)\zeta(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, για κάθε $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S_p$, και $p \in S$, ή ισοδύναμα $N^*\xi = K\zeta$. □

Έστω $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ μια συμπαγής συνεκτική προσανατολισμένη n-επιφάνεια με $K > 0$ σε κάθε σημείο της. Τότε ο αριθμός $\big(2/V(\mathrm{S}^n)\big)\int_S K$ είναι ένας ακέραιος. Πράγματι, δείξαμε προηγουμένως ότι όταν $K > 0$ τότε η απεικόνιση Gauss N είναι μια αμφιδιαφόριση που διατηρεί τον προσανατλισμό. Επίσης, επειδή ισχύει η σχέση (βλέπε [6, σελ. 154])

$$\int_S N^*\xi = \int_{\mathrm{S}^n} \xi \tag{3.5}$$

έχουμε

$$\int_S K = \int_S K\zeta \overset{\text{Λημ. 1.6}}{=} \int_S N^*\xi \overset{(1.33)}{=} \int_{\mathrm{S}^n} \xi = V(\mathrm{S}^n).$$

Άρα:

$$\big(2/V(\mathrm{S}^n)\big)\int_S K = 2.$$

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι για $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ συμπαγή, συνεκτική, προσανατολισμένη n-επιφάνεια με $K > 0$, η ποσότητα $\big(2/V(\mathrm{S}^n)\big)\int_S K$ είναι ένας ακέραιος αριθμός.

Στη γενική περίπτωση τώρα, αν $p \in S$ είναι ένα σημείο τέτοιο ώστε $K(p) \neq 0$, τότε το διαφορικό dN_p θα είναι μη ιδιάζων. Δηλαδή η ορίζουσα του πίνακα που αντιστοιχεί στο διαφορικό της απεικόνισης Gauss είναι διάφορη του μηδενός, άρα ισχύει το *θεώρημα της Αντιστροφής απεικόνισης* για n-επιφάνειες, που λέει τα εξής:

Θεώρημα 3.2. *Έστω S και $\tilde{S}$ δύο n-επιφάνειες, $\psi : S \to \tilde{S}$ μια λεία απεικόνιση και $p \in S$ ένα σημείο τέτοιο ώστε το διαφορικό $d\psi_p : S_p \to \tilde{S}_{\psi(p)}$ να είναι μη ιδιάζων. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο $V \subset S$ γύρω από το p και ένα ανοιχτό υποσύνολο $W \subset \tilde{S}$ γύρω από το $\psi(p)$ έτσι ώστε ο περιοριμός της ψ στο V, $\psi\big|_V$, να είναι μια αμφιδιαφόριση από το V στο W.*

Στην περίπτωσή μας αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο U_p της S, γύρω από το p, το οποίο απεικονίζεται αμφιδιαφορισίμως μέσω της N επί ενός ανοιχτού υποσυνόλου $N(U_p)$ της σφαίρας S^n. Αν $K(p) > 0$, η αμφιδιαφόριση $N\big|_{U_p}$ διατηρεί τον προσανατολισμό, άρα

$$\int_{U_p} K = \int_{U_p} K\zeta \overset{\text{Λημ. 1.6}}{=} \int_{U_p} N^*\xi \overset{(1.33)}{=} \int_{N(U_p)} \xi = V(N(U_p).$$

Αν $K(p) < 0$, η αμφιδιαφόριση $N\big|_{U_p}$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό, άρα

$$\int_{U_p} K = \int_{U_p} K\zeta \overset{\text{Λημ. 1.6}}{=} \int_{U_p} N^*\xi \overset{(1.33)}{=} -\int_{N(U_p)} \xi = -V(N(U_p).$$

Παρατήρηση: Μπορεί να αποδειχθεί ότι (βλέπε [3]) τα " περισσότερα " σημεία q της S^n είναι ομαλά σημεία της απεικόνισης Gauss N, δηλαδή το διαφορικό dN_p είναι μη ιδιάζων ($K(p) \neq 0$) για κάθε $p \in N^{-1}(q)$. Επιπλέον, ο ακέραιος d που ορίζεται ως εξής:

$$d = \#\{p \in N^{-1}(q) : K(p) > 0\} - \#\{p \in N^{-1}(q) : K(p) < 0\}$$

είναι ανεξάρτητος από το ομαλό σημείο q, όπου το σύμβολο $\#\{-\}$ δηλώνει τον αριθμό των σημείων του πεπερασμένου συνόλου $\{-\}$. Αυτός ο αριθμός d καλείται *βαθμός* της απεικόνισης Gauss $N : S \to \mathrm{S}^n$.

Για ένα κατάλληλα μικρό ανοιχτό σύνολο U γύρω από ένα ομαλό σημείο q της N, προκύπτει ότι το σύνολο $N^{-1}(U)$ αποτελείται από την ένωση του πλήθους $\#(N^{-1}(q))$ ξένων ανοιχτών συνόλων της S. Καθένα από αυτά τα ξένα ανοιχτά σύνολα απεικονίζεται αμφιδιαφορισίμως μέσω της N επί του U. Έπομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{N^{-1}(U)} K &= \int_{N^{-1}(U)} K\zeta \overset{\text{Λημ. } 1.6}{=} \int_{N^{-1}(U)} N^*\xi = \int_{\cup N^{-1}(q_i)} N^*\xi \\ &= \sum_{i=1}^{d} \int_{N^{-1}(q_i)} N^*\xi \overset{(1.33)}{=} \sum_{i=1}^{d} \int_U \xi = d\int_U \xi = dV(U),\end{aligned}$$

όπου $d = \#(N^{-1}(q))$.

Αφού οι περιοχές όπου $K = 0$ δεν συνεισφέρουν τίποτα στον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_S K$, μια κατάλληλη επιλογή διαμέρισης της μονάδας πάνω στην S^n, έτσι ώστε το πεπερασμένο κάλυμμα της S^n που αποτελεί αυτή τη διαμέριση να απαρτίζεται από σύνολα U που είναι περιοχές ομαλών σημείων, συνεπάγεται ότι:

$$\int_S K = dV(\mathrm{S}^n) \Leftrightarrow (1/V(\mathrm{S}^n)) \int_S K = d.$$

Για n άρτιο έχουμε $d = \chi/2$ όπου χ είναι η χαρακτηριστική του Euler της n-επιφάνειας S. Άρα

$$(2/V(\mathrm{S}^n)) \int_S K = \chi.$$

Βιβλιογραφία

[1] K. Burns and M. Gidea: *Differential Geometry and Topology, With a View to Dynamical Systems*, Studies in Advanced Mathematics, Chapman and Hall, 2005.

[2] V. Gullemin and A. Pollack: *Differential Topology*, Prentice–Hall, Inc., 1974.

[3] J. Milnor: *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, 1965.

[4] F. Morgan: *Riemannian Geometry, A Beginner's Guide*, Jones and Barlett Publishers Int., London, 1993.

[5] B. O'Neill: *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1966.

[6] J. A. Thorpe: *Elementary Topics in Differential Geometry*, Undegraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1979.

[7] I. M. Singer and J. A. Thorpe: *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott, Foresman and Company, 1970.

[8] Β. Ι. Παπαντωνίου: *Διαφορική Γεωμετρία, Θεωρία Επιφανειών, Τόμος ΙΙ*, Πάτρα 1997.