

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

# ΜΕΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΥΡΕΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ  
ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Κρεμμύδας Ανδρέας



Πάτρα 2010

## Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια απόκτησης Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης (Μ.Δ.Ε) Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της κατεύθυνσης 'Μαθηματικά φυσικών και βιομηχανικών εφαρμογών', υπό την επίβλεψη της Επίκ. Καθηγήτριας του Γενικού Τμήματος της Πολυτεχνικής Σχολής κα. Ευγενίας Πετροπούλου. Φέρει τον τίτλο 'Μερικές μέθοδοι εύρεσης και μελέτης κυματικών λύσεων', ασχολείται δε με μεθόδους εύρεσης κυματικών λύσεων καθώς και λύσεων οδευόντων κυμάτων επί σειράς πολύ γνωστών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων καθώς και με θεωρήματα μελέτης της ύπαρξης και της μοναδικότητας, ευστάθειας, ασυμπτωτικής συμπεριφοράς και μονοτονίας των ανωτέρω λύσεων. Η πλούσια βιβλιογραφία αλλά και έρευνα των τελευταίων ετών, αναδεικνύει το έντονο ενδιαφέρον γύρω από αυτό το θέμα ενώ πλέον τούτων διαφαίνονται και ενδιαφέροντα συμπεράσματα πάνω στην μελέτη της ταχύτητας των κυμάτων αυτών.

Στην παρούσα διπλωματική θα περιοριστούμε σε μερικές ansätze μεθόδους εύρεσης κυματικών λύσεων, καθώς και στην ύπαρξη και μοναδικότητα ειδικών κατηγοριών κυματικών λύσεων.

Από την θέση τούτη, δράττομαι της ευκαιρίας να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στα μέλη της Συμβουλευτικής Επιτροπής, την Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Χρυσή Γ. Κοκολογιαννάκη, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Jacobus Pieter (Ko) van der Weele χωρίς των οποίων την ουσιαστική συμπαράσταση δεν θα ήταν ποτέ δυνατή η πραγμάτωση αυτής της μελέτης.

Ιδιαίτερος θερμά θα ήθελα να ευχαριστήσω την Επίκ. Καθηγήτρια του Γενικού Τμήματος και επιβλέπουσα της παρούσης μελέτης κα. Ευγενία Πετροπούλου, για την υπόδειξη του θέματος, τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις. Περαιτέρω δε για την αγόγγυστη συμπαράσταση και ιώβεια επιμονή-υπομονή της, που συνέβαλαν καθοριστικά στην επιτυχή περάτωση της εργασίας.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου Αριστοτέλη και Άννα για την αμέριστη ηθική αλλά και οικονομική βοήθεια τους, για το ζην και το ευ ζην.

Στήν μνήμη του Καθηγητή  
Παναγιώτη Δ. Σιαφάρικα

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Γενικά Περί Κυμάτων . . . . .	1
1.2	Οδεύοντα κύματα . . . . .	5
1.3	Κλασικά παραδείγματα σολιτονίων . . . . .	7
1.3.1	Σολιτονικές λύσεις της εξίσωσης KdV . . . . .	7
1.3.2	Σολιτονικές λύσεις της εξίσωσης Sine-Gordon . . . . .	8
1.4	Μέθοδοι εύρεσης οδευόντων κυμάτων . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Μια ενοποιημένη ansätze μέθοδος</b>	<b>11</b>
2.1	Η μέθοδος . . . . .	11
2.2	Εφαρμογή στην εξίσωση KdV-Burgers-Kuramoto . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Μια ansätze μέθοδος για μη γραμμικές εξελικτικές και κυματικές εξισώσεις</b>	<b>21</b>
3.1	Η μέθοδος . . . . .	21
3.2	Εφαρμογή στην εξίσωση Benjamin-Bona-Mahony . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Μια συναρτησιακή-αναλυτική μέθοδος</b>	<b>29</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	29
4.2	Η μέθοδος . . . . .	31
4.3	Βασικά Αποτελέσματα . . . . .	32
4.4	Εφαρμογές . . . . .	37
4.4.1	Η εξίσωση Lienard . . . . .	37
4.4.2	Η εξίσωση KdV . . . . .	44
4.4.3	Η σύνθετη εξίσωση KdV-Burger . . . . .	46
4.4.4	Η εξίσωση Kawahara . . . . .	46
4.4.5	Η εξίσωση KdV-Burgers-Kuramoto-Sivashinsky . . . . .	47

<b>5</b>	<b>Μια ολοκληρωτική μέθοδος</b>	<b>51</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	51
5.2	Βασική Υπόθεση Εργασίας . . . . .	56
5.3	Μαθηματικοί ορισμοί κυματικών λύσεων . . . . .	57
5.4	Θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων . . . . .	59
5.5	Απόδειξη ισοδυναμίας . . . . .	61
5.6	Εφαρμογές . . . . .	65
5.7	Περαιτέρω Αποτελέσματα . . . . .	69
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>73</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Γενικά Περί Κυμάτων

Τα κυματικά φαινόμενα εμφανίζονται σε πολλά φυσικά προβλήματα. Ίσως το καλύτερο εργαλείο για την μελέτη και κατανόηση αυτών των φαινομένων είναι η αναζήτηση λύσεων οδευόντων κυμάτων των Μ.Δ.Ε που τα περιγράφουν. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην εισαγωγή του προσαφτου βιβλίου [28], τα οδεύοντα κύματα

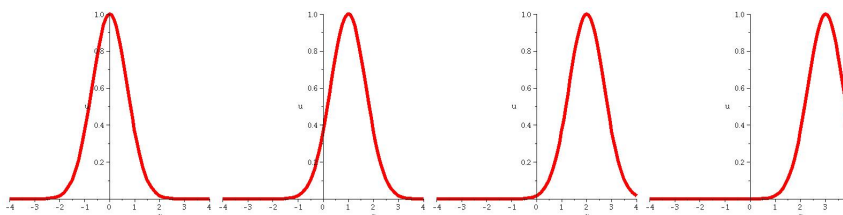
- (α) παρέχουν έναν τρόπο εύρεσης ακριβούς λύσης των αντίστοιχων εξισώσεων,
- (β) μελετώνται εύκολα,
- (γ) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό των ιδιοτήτων της γενικής λύσης των αντιστοιχων εξισώσεων και,
- (δ) χαρακτηρίζουν την «μακροπρόθεσμη» συμπεριφορά των λύσεων σε πολλές περιπτώσεις.

Είναι αρκετά δύσκολο να δώσουμε έναν πολύ γενικό ορισμό για το τι είναι ένα κύμα. Σε πολλές περιπτώσεις το κύμα μπορεί να οριστεί ως το αποτέλεσμα μίας διαταραχής, που μετακινείται μέσα σε κάποιο μέσο, όπως ο αέρας, το νερό κ.ο.κ. Περαιτέρω δε καθώς η διαταραχή μετακινείται, μπορούμε να παρατηρήσουμε την θέση της, καθώς αυτή ταξιδεύει με συγκεκριμένη ταχύτητα, προς κάποια κατεύθυνση. Έτσι οποιαδήποτε μετρήσιμη ένδειξη της θέσης και της ταχύτητας της διαταραχής καλείται **σήμα**. Το σήμα μπορεί να αλλοιωθεί. Όσο όμως παραμένει αναγνωρίσιμο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον εντοπισμό της κίνησης της διαταραχής. Έχοντας υπόψη τα παραπάνω, μπορούμε να δώσουμε τον εξής διαισθητικό ορισμό για το κύμα [39, σελ. 4].

*«Κύμα αποτελεί οποιοδήποτε αναγνωρίσιμο σήμα, που μεταφέρεται από ένα σημείο ενός μέσου σε ένα άλλο, με αναγνωρίσιμη ταχύτητα»*

Τα κύματα παίζουν σημαντικό ρόλο και εμφανίζονται σε διάφορους τομείς της επιστήμης, όπως στην ακουστική, την βιολογία, την χημεία, κ.ο.κ. Ίσως το πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα κύματος να είναι αυτό της πέτρας που πέφτει στην επιφάνεια μίας λίμνης, δημιουργώντας κυκλικά κύματα που σβήνουν καθώς εξαπλώνονται. Παράδειγμα κύματος όμως αποτελεί και η διαταραχή του αέρα από τον ήχο, αλλά και ο τρόπος που σταματούν τα αυτοκίνητα πριν τον φωτεινό σηματοδότη.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κύματα που διαδίδονται σε μονοδιάστατα μέσα, όπως για παράδειγμα κατά μήκος μίας χορδής. Τα μονοδιάστατα κύματα αναπαρίστανται μαθηματικά με συναρτήσεις δύο μεταβλητών  $u(x, t)$ , όπου το  $u$  αποτελεί μια μέτρηση για κάθε σημείο  $x$  του μέσου, την χρονική στιγμή  $t$ . Για την χρονική στιγμή  $t_0$ , μπορούμε να δούμε το  $u(x, t_0)$  ως μια συνάρτηση του  $x$ , ενώ για μετέπειτα χρονικές στιγμές  $t_1, t_2$  μπορούμε να δούμε πως το κύμα μετακινείται στο μέσο συναρτήσει του χρόνου (Βλ. Σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1: Οδεύον κύμα της μορφής  $u(x, t) = e^{-(x-t)^2}$  για τις χρονικές στιγμές  $t = 0, 1, 2, 3$

Μιας και η μαθηματική αναπαράσταση των κυμάτων είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών  $u(x, t)$ , οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (Μ.Δ.Ε) είναι πολύ σημαντικές γιατί διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην μελέτη των κυμάτων. Μερικά κλασικά παραδείγματα γραμμικών και μη γραμμικών Μ.Δ.Ε που εκφράζουν φυσικά φαινόμενα και επιδέχονται λύσεις κυματικής μορφής είναι οι [17],[39]:

- Εξίσωση διάχυσης της θερμότητας:

$$u_t = Du_{xx}, \quad (1.1.1)$$

όπου  $D$  η σταθερά της διάχυσης. Η εξίσωση αυτή περιγράφει την διάχυση της θερμικής ενέργειας σε ένα ομογενές μέσο. Χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση της ροής μιας ποσότητας, όπως η θερμότητα ή η συγκέντρωση σωματιδίων. Η εξίσωση της διάχυσης περιγράφει επίσης την ασταθή ροή του οριακού στρώματος σε προβλήματα Stokes - Rayleigh καθώς επίσης και την διάχυση της στροβιλώδους ροής γύρω από στροβίλους.

- Κυματική εξίσωση:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (1.1.2)$$

όπου  $c$  σταθερά. Η εξίσωση αυτή περιγράφει την διάδοση ενός κύματος (ή μιας διαταραχής) και εμφανίζεται σε μια πληθώρα φυσικών προβλημάτων. Μεταξύ αυτών είναι προβλήματα δονούμενων χορδών, δονούμενων μεμβρανών, επιμήκους δονήσεων σε ελαστικές ράβδους, κυμάτων αβαθών νερών, ακουστικής, μετάδοσης ηλεκτρικών σημάτων κατά μήκος καλωδίων, καθώς και ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων κατά την απουσία φορτίου ή διηλεκτρικού.

- Εξίσωση KdV(Korteweg-deVries):

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1.3)$$

όπου  $\alpha$  και  $\beta$  σταθερές. Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για να περιγράψει την εξέλιξη του φαινομένου της διασποράς των κυμάτων σε βάθος χρόνου, όπου το φαινόμενο της αύξησης του μη γραμμικού όρου εξισορροπείται από την διασπορά. Η (1.1.3) ουσιαστικά είναι η διασημότερη Μ.Δ.Ε και εισήχθη από τους Korteweg και deVries [41] για να περιγράψει την διάδοση μονόδρομων κυμάτων σε ρηχά νερά.

Παρουσιάζεται δε σε πληθώρα φυσικών φαινομένων, όπως κυμάτων νερού, εσωτερικών βαρυτικών κυμάτων στρωματοποιημένων υγρών, κυμάτων πίεσης σε φουσαλίδες αερίων-υγρών και περιστροφικής ροής σε σωλήνες. Υπάρχουν περαιτέρω φυσικά συστήματα στα οποία η KdV κάνει την εμφάνιση της όπως η προσέγγιση μακρών κυμάτων, συμπεριλαμβανομένων των κυμάτων βαρύτητας-ακουστικής σε συμπιεστό βαρύ υγρό, αξονοσυμμετρικά κύματα σε μη ομοιόμορφο περιστρεφόμενο υγρό, ακουστικά κύματα σε μη αρμονικούς κρυστάλλους, μη γραμμικά κύματα σε κρύο πλάσμα, αξονοσυμμετρικά μαγνητουδροδυναμικά κύματα, καθώς και επιμήκους διασποράς κυμάτων σε ελαστικές ράβδους [34, 35, 16, 9, 52, 61, 43]

- Εξίσωση sine-Gordon:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + k \sin u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1.4)$$

όπου  $c$  και  $k$  σταθερές. Η εξίσωση αυτή προέκυψε κατά την μελέτη προβλημάτων της διαφορικής γεωμετρίας, καθώς και προβλήματα κρυσταλλογραφίας [25]. Επιπλέον εμφανίζεται σε μια πληθώρα φυσικών φαινομένων συμπεριλαμβανομένων της διάδοσης της μαγνητικής ροής σε ενώσεις υπεραγώγιμων συράγγων τύπου Josephson, στο άλμα φάσης κυματικών συναρτήσεων υπεραγώγιμων ηλεκτρονίων σε μακριές ενώσεις Josephson, σε αλυσίδες άκαμπτων εκκρεμών συνδεδεμένων με ελατήρια, στην διάδοση σύντομων οπτικών παλμών σε Laser, την ευστάθεια της κίνησης των υγρών, σε σιδηρομαγνητικά και σιδηροηλεκτρικά υλικά, στην δυναμική συγκεκριμένων μοριακών αλυσίδων όπως το DNA, στην φυσική στοιχειωδών σωματιδίων κ.α. [36, 55, 4, 42, 57, 27, 7, 58, 59, 19]



- Εξίσωση Burgers:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1.5)$$

όπου  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες. Η εξίσωση Burgers αποτελεί το απλούστερο μη γραμμικό μοντέλο για την διάχυση κυμάτων στην υδροδυναμική. Εισήχθη το 1948 από τον Burgers [11] για μονοδιάστατες διαταραχές και εμφανίζεται και σε πολλά άλλα προβλήματα φυσικής συμπεριλαμβανομένων των ηχητικών κυμάτων σε μέσα με ιξώδες, κυμάτων σε ελαστικές σήραγγες με ιξώδη ρευστά, και μαγνητουδροδυναμικά κύματα σε μέσα με πεπερασμένη ηλεκτρική αγωγιμότητα [44].

- Εξίσωση Fisher:

$$u_t - \nu u_{xx} = k \left( u - \frac{u^2}{\kappa} \right), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.1.6)$$

όπου  $\nu, k, \kappa$  σταθερές. Η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται ως μη γραμμικό μοντέλο για την μελέτη διάδοσης κυμάτων σε ένα μεγάλο αριθμό βιολογικών και χημικών συστημάτων. Εισήχθη το 1936 από τον Fisher [24] για να ερευνηθεί η διάδοση του «κύματος» ενός γονιδίου σε έναν πληθυσμό. Τα τελευταία χρόνια η εξίσωση αυτή χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση ενός μεγάλου αριθμού προβλημάτων που περιλαμβάνουν κύματα καλλιέργειας ανάπτυξης γονιδίων, διάδοση χημικών κυμάτων, πληθυσμό νετρονίων σε πυρηνικούς αντιδραστήρες κ.α. [3, 6, 12, 13]. Κάνει επίσης την εμφάνιση της στην θεωρία εσωτερικής αναφλέξεως, της μη γραμμικής διάχυσης και της χημικής κινητικής [40, 5, 23].

- Εξίσωση Boussinesq:

$$u_{tt} - u_{xx} + (3u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0, \quad (1.1.7)$$

Η εξίσωση Boussinesq περιγράφει την ασθενή μονοδιάστατη μετάδοση κυμάτων νερού που διαδίδονται τόσο στην θετική όσο και την αρνητική κατεύθυνση του άξονα  $x$  [47, 60, 68, 69, 1, 51]. Τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε νέες μορφές της εξίσωσης Boussinesq που αφορούν στην διάδοση κυμάτων νερού καθώς και σε τροποποιημένες εξισώσεις Boussinesq που αφορούν στην ταχύτητα μιας αυθαίρετης ανύψωσης και της ελεύθερης μετατόπισης επιφάνειας νερού.

- Εξίσωση Burgers-Huxley (BH):

$$u_t + \alpha uu_x - \nu u_{xx} = \beta(1-u)(u-\gamma)u, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (1.1.8)$$

όπου  $\alpha, \beta \geq 0, \gamma (0 < \gamma < 1)$  και  $\nu$  παράμετροι. Η εξίσωση αυτή περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ μεταφοράς, αντίδρασης και διάχυσης. Όταν  $\alpha = 0$  η (1.1.8) μετατρέπεται στην εξίσωση Hodgkin-Huxley που περιγράφει την διάδοση νευρικών παλμών στις νευρικές ίνες και την κίνηση τοιχωμάτων σε υγρούς κρυστάλλους [30, 56, 53, 54, 64, 65, 66].

Λόγω της πολυπλοκότητας της εξίσωσης Huxley οι εξισώσεις FitzHugh-Nagumo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) - v$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon(u - \gamma v)$$

$$f(u) = u(1-u)(u-\alpha) \text{ με } \alpha, \gamma, \epsilon \text{ σταθερές } 0 < \alpha < \frac{1}{2}, 0 < \epsilon \ll 1, 0 < \gamma < \frac{4}{(1-\alpha)^2}$$

προτάθηκαν ως απλές αναλυτικές και πάνω από όλα χρήσιμες εξισώσεις για να μοντελοποιήσουν προβλήματα αντιστοιχα με αυτά που μοντελοποιούνται απο την (1.1.8). Αντίστοιχα για  $\beta = 0$  και  $\alpha = 1$  η (1.1.8) μετατρέπεται στην εξίσωση Burgers (1.1.5).

- Εξίσωση Kadomtsev-Petviashvili (KP):

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\sigma^2 u_{yy} = 0 \quad (1.1.9)$$

Η (1.1.9) αποτελεί μια γενίκευση της KdV σε δύο διαστάσεις. Εισήχθη το 1970 από τους Kadomtsev και Petviashvili [37] για να περιγράψει τα αργής μεταβολής κύματα σε μέσα διασποράς. Η (1.1.9) με  $\sigma^2 = +1$  εμφανίζεται στην μελέτη των ασθενών μη γραμμικών κυμάτων διασποράς στο πλάσμα και επίσης στην διαμόρφωση ασθενών μη γραμμικών μακρών κυμάτων νερού που ταξιδεύουν σχεδόν μονοδιάστατα [2]. Αντίστοιχα για  $\sigma^2 = -1$  η εξίσωση εμφανίζεται στην ακουστική. Πρόσφατα οι Chen και Liu [14, 15] παρήγαγαν την ενοποιημένη εξίσωση KP (uKP) για επιφάνειες και ενδιάμεσα κύματα που διαδίδονται σε ένα περιστρεφόμενο κανάλι με ποικίλες τοπογραφίες και τοιχώματα.

## 1.2 Οδεύοντα κύματα

Μια θεμελιώδης μαθηματική αναπαράσταση ενός κύματος είναι η

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (1.2.1)$$

όπου  $f$  είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και  $c$  μη μηδενική σταθερά. Την χρονική στιγμή  $t = 0$  το γράφημα της  $u$  θα δίνεται από τον τύπο  $u(x, t) = f(x)$ . Εάν  $c > 0$ , τότε το γράφημα της  $u$  σε μια δεδομένη στιγμή μετά την  $t = 0$ , θα είναι το αρχικό γράφημα μετατοπισμένο κατά την θετική διεύθυνση του άξονα  $x$ . Ουσιαστικά η συνάρτηση (1.2.1) είναι μια διαταραχή που μετακινείται με σταθερή ταχύτητα  $|c|$ . Αντίστοιχα, όταν  $c < 0$ , η διαταραχή θα μετακινείται προς την αρνητική διεύθυνση του άξονα  $x$  με σταθερή ταχύτητα  $|c|$ . Σε κάθε περίπτωση το γράφημα της  $u$  σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t$ , παραμένει αναλλοίωτο και αναγνωρίσιμο.

Κύματα που αναπαριστώνται με συναρτήσεις της μορφής (1.2.1) ονομάζονται **οδεύοντα κύματα** (Travelling Waves). Τα δύο κύρια χαρακτηριστικά των οδεύοντων κυμάτων είναι το σχήμα τους που καθορίζεται από την συνάρτηση  $f$  και η ταχύτητα τους  $|c|$ . Σε προβλήματα που αφορούν σε οδεύοντα κύματα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι σταθερή και η ταχύτητα  $c$  δεν είναι μηδενική, έτσι ώστε η  $u(x, t)$  να αναπαριστά πράγματι την κίνηση κάποιας διαταραχής σε ένα μέσο.

Όπως αναφέραμε ήδη στην §1.1, οι Μ.Δ.Ε διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην μελέτη των κυμάτων. Ειδικά τα οδεύοντα κύματα αποτελούν ειδικού τύπου λύσεις της μορφής (1.2.1) μιας Μ.Δ.Ε. Για την εύρεση μιας τέτοιας λύσης, σε γενικές γραμμές, υποθέτουμε ότι  $u(x, t) = f(x - ct)$  και μετά καθορίζουμε ποιες συναρτήσεις  $f$  και σταθερές  $c$  δίνουν λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Τα οδεύοντα κύματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν περαιτέρω στις εξής κατηγορίες [39]:

- Κυματικά μέτωπα (Wave Fronts), όταν το οδεύον κύμα  $u(x, t)$  για κάθε συγκεκριμένο  $t$  ικανοποιεί τις σχέσεις

$$u(x, t) \rightarrow \kappa_1 \text{ καθώς } x \rightarrow -\infty, u(x, t) \rightarrow \kappa_2 \text{ καθώς } x \rightarrow \infty \quad (1.2.2)$$

όπου  $\kappa_1, \kappa_2$  σταθερές εν γένει διάφορες μεταξύ των.

- Παλμούς (Pulses), όταν το οδεύον κύμα  $u(x, t)$  ικανοποιεί τις σχέσεις (1.2.2) με  $\kappa_1 = \kappa_2$ .
- Σολιτόνια (Solitons), όταν το οδεύον κύμα  $u(x, t) = f(x - ct) = f(z)$ ,  $c > 0$ , είναι παλμός τέτοιος ώστε η  $f(z)$  να ικανοποιεί τις σχέσεις  $f, f', f'', \dots \rightarrow 0$  καθώς το  $z \rightarrow \pm\infty$ .
- Κυματικούς Συρμούς (Wave Trains), όταν το οδεύον κύμα μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$u(x, t) = A \cos(\kappa x - \omega t) \text{ ή } u(x, t) = A \cos(\kappa x + \omega t) \quad (1.2.3)$$

όπου  $A \neq 0$ ,  $\kappa > 0$  και  $\omega > 0$  είναι σταθερές. Η σταθερά  $\kappa$  ονομάζεται **κυματικός αριθμός** (Wave Number) και εκφράζει τον αριθμό των κύκλων αυτού του περιοδικού κύματος που εμφανίζονται σε ένα “παράθυρο” μήκους  $2\pi$  στον άξονα  $x$ . Η σταθερά  $\omega$  ονομάζεται **κυκλική συχνότητα** (Circular Frequency) και εκφράζει τον αριθμό των κύκλων του κύματος που διέρχεται από ένα σταθερό σημείο του άξονα  $x$  για χρονικό διάστημα  $2\pi$ . Γενικότερα, οι κυματικοί συρμοί εκφράζονται με συναρτήσεις της μορφής  $u(x, t) = f(\kappa x - \omega t)$  όπου  $f$  περιοδική συνάρτηση.

Μια Μ.Δ.Ε μπορεί να έχει λύσεις κυματικών συρμών, αλλά όχι απαραίτητα για κάθε πιθανό κυματικό αριθμό  $\kappa$  ή συχνότητα  $\omega$ . Για να βρούμε ποιοι κυματικοί αριθμοί και ποιες συχνότητες επιτρέπονται, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την  $u(x, t) = A \cos(\kappa x - \omega t)$  στην Μ.Δ.Ε και έτσι να προκύψει μια σχέση μεταξύ των  $\kappa$  και  $\omega$ . Αυτή η σχέση

ονομάζεται **σχέση διασποράς** (Dispersion Relation) και υποδεικνύει ποιες τιμές των  $\kappa$  και  $\omega$  μπορούν να επιλεγούν ώστε η ζητούμενη  $u(x, t)$  να είναι λύση κυματικού συρμού. Για παράδειγμα, για την κυματική εξίσωση (1.1.2) η σχέση διασποράς προκειμένου να δέχεται λύσεις υπό μορφή κυματικών συρμών (1.2.3) είναι  $\omega^2 = c^2\kappa^2$ .

### 1.3 Κλασικά παραδείγματα σολιτονίων

Σε αυτή την παράγραφο θα εξάγουμε κλασικές σολιτονικές λύσεις, τόσο για την εξίσωση KdV (1.1.3) όσο και για την εξίσωση Sine-Gordon (1.1.4)

#### 1.3.1 Σολιτονικές λύσεις της εξίσωσης KdV

Όπως αναφέραμε ήδη, η εξίσωση KdV έχει την μορφή

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.3.1.1)$$

Θα αναζητήσουμε λύσεις της KdV της μορφής  $u(x, t) = f(x - ct) = f(z)$ , όπου  $c > 0$  και  $f(z), f'(z), f''(z) \rightarrow 0$  καθώς το  $z \rightarrow \pm\infty$ . Αντικαθιστώντας στην (1.3.1.1) λαμβάνουμε μια μη γραμμική Σ.Δ.Ε τρίτης τάξης για την  $f(z)$  της μορφής:

$$-cf' + ff' + f''' = 0,$$

απόπου ολοκληρώνοντας μια φορά ως προς  $z$  βρίσκουμε

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 + f'' = \alpha \quad (1.3.1.2)$$

όπου  $\alpha$  η σταθερά ολοκλήρωσης. Με την υπόθεση ότι  $f(z)$  και  $f''(z) \rightarrow 0$  καθώς το  $z \rightarrow \infty$ , η τιμή του  $\alpha$  προκύπτει μηδέν. Πολλαπλασιάζοντας με  $f'$  την (1.3.1.2) προκύπτει

$$-cff' + \frac{1}{2}f^2f' + f'f'' = 0$$

απόπου ολοκληρώνοντας ξανά ως προς  $z$  λαμβάνουμε

$$-\frac{1}{2}cf^2 + \frac{1}{6}f^3 + \frac{1}{2}(f')^2 = b, \quad (1.3.1.3)$$

όπου  $b$  η σταθερά ολοκλήρωσης. Όμως  $f(z), f'(z) \rightarrow 0$  καθώς το  $z \rightarrow \infty$  οπότε  $b = 0$ . Λύνοντας την (1.3.1.3) ως προς  $(f')^2$  λαμβάνουμε

$$3(f')^2 = (3c - f)f^2 \quad (1.3.1.4)$$

Για να έχει νόημα η (1.3.1.4) απαιτούμε,  $0 < f(z) < 3c$  οπότε η (1.3.1.4) ξαναγράφεται ως εξής:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3c - f}} f' = 1$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη ως προς  $z$  βρίσκουμε

$$\int \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3c - f}} df = \int dz \xrightarrow{f=3c-g^2} \int \frac{2\sqrt{3}}{3c - g^2} g' dg = - \int dz \Rightarrow \ln \left( \frac{\sqrt{3c + g}}{\sqrt{3c - g}} \right) = -\sqrt{c}z + d$$

όπου  $d$  σταθερά ολοκλήρωσης. Λύνοντας ως προς  $g$  βρίσκουμε

$$g(z) = \sqrt{3c} \frac{e^{-\sqrt{c}z+d} - 1}{e^{-\sqrt{c}z+d} + 1} = -\sqrt{3c} \tanh\left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d)\right]$$

απ' όπου λόγω της  $f = 3c - g^2$  βρίσκουμε τελικά την  $f(z)$ :

$$f(z) = 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(\sqrt{c}z - d)\right]$$

Εφόσον η αυθαίρετη σταθερά  $d$  δηλώνει απλώς μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $f$ , μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε  $d = 0$  οπότε

$$f(z) = 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}z\right]$$

Η τελική μορφή της σολιτονικής λύσης για την εξίσωση KdV είναι

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right] \quad (1.3.1.5)$$

Εκ της (1.3.1.5) είναι προφανές ότι το ύψος του κύματος είναι ανάλογο της ταχύτητάς του. Αυτό σημαίνει ότι τα ψηλότερα κύματα ταξιδεύουν με μεγαλύτερη ταχύτητα.

### 1.3.2 Σολιτονικές λύσεις της εξίσωσης Sine-Gordon

Όπως αναφέραμε ήδη η εξίσωση Sine-Gordon έχει την μορφή:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \quad (1.3.2.1)$$

Θα αναζητήσουμε λύσεις της (1.3.2.1) της μορφής  $u(x, t) = f(x - ct) = f(z)$ , όπου  $f, f' \rightarrow 0$  καθώς  $z \rightarrow \pm\infty$ . Αντικαθιστώντας στην (1.3.2.1) έχουμε

$$c^2 f'' - f'' + \sin f = 0 \Rightarrow (c^2 - 1)f'' + \sin f = 0,$$

απ' όπου πολλαπλασιάζοντας με  $f'$  και στην συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς  $z$  προκύπτει

$$\frac{1}{2}(c^2 - 1)(f')^2 - \cos f = \alpha, \quad (1.3.2.2)$$

όπου  $\alpha$  η σταθερά ολοκλήρωσης. Με την υπόθεση ότι  $f, f' \rightarrow 0$  καθώς  $z \rightarrow \pm\infty$  προκύπτει ότι  $\alpha = -1$ , οπότε η (1.3.2.2) γίνεται:

$$\frac{1}{2}(c^2 - 1)(f')^2 - \cos f = -1 \Rightarrow (f')^2 = \frac{2}{1 - c^2}(1 - \cos f) = \frac{4}{1 - c^2} \sin^2(f/2) \quad (1.3.2.3)$$

Για να έχει νόημα η (1.3.2.3) θα πρέπει  $c^2 < 1$ . Μια λύση της μη γραμμικής Σ.Δ.Ε (1.3.2.3) είναι η

$$f(z) = 4 \arctan e^{\frac{z}{\sqrt{1 - c^2}}}$$

που δίνει τελικά την σολιτονική λύση

$$u(x, t) = 4 \arctan e^{-\frac{x - ct}{\sqrt{1 - c^2}}}$$

## 1.4 Μέθοδοι εύρεσης οδευόντων κυμάτων

Οι Μ.Δ.Ε που εμφανίζονται σε προβλήματα, όπως αυτά που ήδη αναφέραμε, ανάγονται όπως είδαμε στην §1.3, σε Σ.Δ.Ε., όταν επιθυμούμε να βρούμε κυματικές λύσεις αυτών. Αυτές οι Σ.Δ.Ε μπορούν να μελετηθούν με διάφορες κατάλληλες μεθόδους.

Η πιο "απλή" και κλασική μέθοδος είναι αυτή που εφαρμόστηκε στα παραδείγματα της §1.3, δηλαδή

- α) να υποθέσει κάποιος την μορφή του οδευόντος κύματος και
- β) αντικαθιστώντας αυτή την μορφή στην υπό μελέτη Μ.Δ.Ε να βρει επακριβώς την μορφή του κύματος.

Αυτήν την τεχνική έχουν χρησιμοποιήσει, αναπτύξει και εξελίξει πάρα πολλοί ερευνητές (ειδικά τα τελευταία χρόνια) σε εκατοντάδες εργασίες. Συγκεκριμένα ακολουθώντας αυτή την γενική φιλοσοφία έχουν βρεθεί διάφορες κυματικές λύσεις με την χρήση συγκεκριμένων μορφών λύσεων που εμπίπτουν στην γενική κατηγορία των ansätze. Τέτοιες μεθόδους θα παρουσιάσουμε στα κεφάλαια 2 και 3.

Άλλες μέθοδοι χρησιμοποιούν στοιχεία συναρτησιακής ανάλυσης ή θεωρίας ολοκληρωτικών εξισώσεων. Τέτοιες μεθόδους θα παρουσιάσουμε στα κεφάλαια 4 και 5. Φυσικά υπάρχουν και άλλες μέθοδοι αντιμετώπισης προβλημάτων σχετικών με τις κυματικές λύσεις διάφορων Μ.Δ.Ε όπως μέθοδοι

- που βασίζονται στην ανάλυση στον χώρο φάσεων της αντίστοιχης Σ.Δ.Ε
- που βασίζονται στην μελέτη του φάσματος διαφορικών τελεστών σχετιζομένων με το υπό μελέτη πρόβλημα
- σχετικές με ομάδες Lie
- που χρησιμοποιούν τον μετασχηματισμό Bäcklund
- διαταραχών
- αντίστροφης σκέδασης (inverse scattering)
- αριθμητικές

Για αρκετές από τις παραπάνω μεθόδους παραπέμπουμε στα βιβλία [17],[18],[62]

## Κεφάλαιο 2

### Μια ενοποιημένη ansätze μέθοδος

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε έναν γενικό μετασχηματισμό για την κατασκευή οδοντών κυματικών λύσεων σε κλειστή μορφή (exact solutions) μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Η γενική ιδέα είναι ο χειρισμός μιας ansätze λύσης για την απόκτηση γενικών exact λύσεων που είναι γενικές λύσεις απλούστερων ολοκληρώσιμων εξισώσεων. Η επιλογή της ansätze λύσης βασίζεται στην κατάλληλη επιλογή ενός διαφορικού τελεστή ή μιας “βάσης” συναρτήσεων, όπως οι τριγωνομετρικές, υπερβολικές, οι συναρτήσεις Weierstrass και οι ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi. Η μέθοδος αυτή προτάθηκε στην εργασία [38].

#### 2.1 Η μέθοδος

Σύμφωνα με την μέθοδο που θα παρουσιάσουμε αναζητούμε λύσεις οδοντών κυμάτων μιας Μ.Δ.Ε της μορφής

$$u(\xi) = \alpha L[\log F(\xi)] + \sum_{i=-n}^m (\alpha_i F^i(\xi) + b_i L[F^i(\xi)]) \quad (2.1.1)$$

όπου  $F$  συνάρτηση του  $\xi$ , που θα οριστεί αργότερα, τα  $\alpha, \alpha_i, \beta_i$  συντελεστές που θα προσδιοριστούν κατά την εφαρμογή της μεθόδου και  $L$  ο κλασικός διαφορικός τελεστής

$$L = (\cdot)' = \frac{d}{d\xi}$$

Τότε η (2.1.1) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$u(\xi) = \alpha \frac{d}{d\xi} [\log F(\xi)] + \sum_{i=-n}^m (\alpha_i + b_i \frac{d}{d\xi}) F^i(\xi) \quad (2.1.2)$$



Κάνοντας τις πράξεις παραγωγίσης στην (2.1.2) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
u &= \alpha \frac{F'}{F} + \sum_{i=-n}^m (\alpha_i F^i + i b_i F^{i-1} F') \\
&= \sum_{i=-n}^m (\alpha_i F^i + c_i F^{i-1} F') = \sum_{i=-n}^m F^{i-1} (\alpha_i F + c_i F') \\
&= \sum_{i=1}^m F^{i-1} (\alpha_i F + c_i F') + \sum_{i=-n}^0 F^{i-1} (\alpha_i F + c_i F'), \tag{2.1.3}
\end{aligned}$$

όπου

$$c_i = \begin{cases} \alpha, & i = 0 \\ i b_i, & i \neq 0 \end{cases}$$

ή

$$u = \alpha_0 + \alpha \frac{F'}{F} + \sum_{i=1}^m F^{i-1} (\alpha_i F + b_i F') + \sum_{i=1}^n F^{-i-1} (\alpha_i F + b_i F') \tag{2.1.4}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να επιλέξουμε την  $F$  από ένα σύνολο συναρτήσεων, όπως οι τριγωνομετρικές, ή μπορούμε να απαιτήσουμε ο διαφορικός τελεστής  $L(F) \equiv F'$  να ικανοποιεί μια γενική μη γραμμική εξίσωση της μορφής

$$L(F) = N(F) + g \tag{2.1.5}$$

όπου  $N$  μη γραμμικός τελεστής σε ένα χώρο Hilbert  $H$  και  $g$  γνωστό στοιχείο του  $H$ . Υποθέτουμε ότι η (2.1.5) είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή υποθέτουμε ότι έχει γνωστές exact λύσεις. Αντικαθιστώντας την (2.1.5) στην (2.1.3) λαμβάνουμε

$$u = \sum_{i=-n}^m F^{i-1} (\alpha_i F + c_i [N(F) + g]) \tag{2.1.6}$$

Το ansätze (2.1.6) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λυθεί μια δεδομένη μη γραμμική διαφορική εξίσωση “εξισορροπώντας” (balancing) τον όρο που εμπεριέχει την παράγωγο υψηλότερης τάξης με τους μη γραμμικούς όρους. Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις της (2.1.1) ή της ισοδύναμης της (2.1.4)

### Περίπτωση 1

Έστω  $F(\xi) = \sin \xi$ ,  $\alpha = 0$  και περιορίζουμε το ανάπτυγμα (2.1.4) στις θετικές δυνάμεις της  $F$ . Αυτό μας δίνει την ακόλουθη τριγωνομετρική ανάπτυξη:

$$u = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i \sin \xi + b_i \cos \xi) \sin^{i-1} \xi \quad (2.1.7)$$

### Περίπτωση 2

Έστω  $F(\xi) = \sinh \xi$ ,  $\alpha = 0$  και περιορίζουμε το ανάπτυγμα (2.1.4) στις θετικές δυνάμεις της  $F$ . Αυτό μας δίνει την ακόλουθη ανάπτυξη σε υπερβολικές συναρτήσεις:

$$u = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i \sinh \xi + b_i \cosh \xi) \sinh^{i-1} \xi \quad (2.1.8)$$

### Περίπτωση 3

Έστω  $F(\xi) = \operatorname{sech} \xi$  (ή  $\sec \xi$ ),  $\alpha = 0$  και περιορίζουμε το ανάπτυγμα (2.1.4) στις θετικές δυνάμεις της  $F$ . Αυτό μας δίνει

$$u = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i \operatorname{sech} \xi + b_i \operatorname{sech} \xi + \tanh \xi) \operatorname{sech}^{i-1} \xi$$

η επειδή

$$\frac{F'}{F} = \frac{\operatorname{sech} \xi \tanh \xi}{\operatorname{sech} \xi} = \tanh \xi$$

λαμβάνουμε τελικά το ανάπτυγμα

$$u = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i \operatorname{sech} \xi + b_i \tanh \xi) \operatorname{sech}^{i-1} \xi \quad (2.1.9)$$

Ομοίως για  $F(\xi) = \sec \xi$ , προκύπτει το ανάπτυγμα

$$u = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i \operatorname{sech} \xi + b_i \tanh \xi) \operatorname{sech}^{i-1} \xi \quad (2.1.10)$$

#### Περίπτωση 4

Έστω  $F(\xi) = \frac{\alpha \operatorname{sech}(b\xi)}{\operatorname{sech}(b\xi) + c \tanh(b\xi)}$ , οπότε η παράγωγός της θα είναι

$$F'(\xi) = \frac{\alpha bc \operatorname{sech}(b\xi)}{(\operatorname{sech}(b\xi) + c \tanh(b\xi))^2}$$

Επιπλέον θα απαιτήσουμε οι δυνάμεις της  $F$  να είναι θετικές. Αυτό μας δίνει το ακόλουθο ανάπτυγμα

$$u = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \left( \alpha_i + \frac{b_i}{\operatorname{sech}(b\xi) + c \tanh(b\xi)} \right) \frac{\operatorname{sech}^i(b\xi)}{(\operatorname{sech}(b\xi) + c \tanh(b\xi))^i} \quad (2.1.11)$$

#### Περίπτωση 5

Θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια μια λύση βασιζόμενοι στην επιλογή του μη γραμμικού τελεστή  $N(u)$  αντί της συνάρτησης  $F(\xi)$ . Έστω  $N(u) = -u^2$ , οπότε εκ της (2.1.5) προκύπτει

$$L(F) \equiv F' = N(F) + g = -F^2 - g,$$

που είναι μια εξίσωση Riccati, οπότε η σχέση (2.1.3) μας δίνει λύση της μορφής

$$u = \sum_{i=-n}^m F^{i-1} (\alpha_i F + c_i [-F^2 - g]) \quad (2.1.12)$$

Επομένως οι λύσεις της υπό μελέτης Μ.Δ.Ε μπορούν να καθοριστούν μέσω των γενικών γνωστών λύσεων της εξίσωσης Riccati.

#### Περίπτωση 6

Ομοίως με την περίπτωση 5 μπορούμε να κατασκευάσουμε μια λύση βασιζόμενοι στις συναρτήσεις Weierstrass που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(F')^2 = 4F^3 - \mu F - \eta \quad (2.1.13)$$

Όπου  $\mu, \eta$  γνωστές σταθερές. Αυτό σημαίνει ότι ο μη γραμμικός τελεστής  $N$  είναι:

$$N(F) = \sqrt{4F^3 - \mu F - \eta}$$

οπότε

$$L(F) \equiv F' = N(F) + g = \sqrt{4F^3 - \mu F - \eta}$$

για  $g = 0$ . Έτσι η σχέση (2.1.3) γίνεται

$$u = \sum_{i=-n}^m F^{i-1}(\alpha_i F + c_i F') = \sum_{i=-n}^m F^{i-1}(\alpha_i F + c_i \sqrt{4F^3 - \mu F - \eta}) \quad (2.1.14)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πρώτες πέντε παράγωγοι των ελλειπτικών συναρτήσεων Weierstrass ικανοποιούν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} F'' &= 6F^2 - \mu/2 \\ F^{(3)} &= 12FF' \\ F^{(4)} &= 120F^3 - 18\mu F - 12\eta \\ F^{(5)} &= 360F^2 F' - 18\mu F' \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

### Περίπτωση 7

Ομοίως με την περίπτωση 6 μπορούμε να κατασκευάσουμε μια λύση που βασίζεται στις ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση:

$$(F')^2 = (1 - F^2)(1 - mF^2) \quad (2.1.16)$$

οπότε ο μη γραμμικός τελεστής  $N$  θα είναι

$$N(F) = (1 - F^2)^{1/2}(1 - mF^2)^{1/2}$$

και τελικά η σχέση (2.1.3) γίνεται

$$u = \sum_{i=-n}^k F^{i-1}(\alpha_i F + c_i \sqrt{(1 - F^2)(1 - mF^2)}) \quad (2.1.17)$$

Σημειώνουμε ότι οι πρώτες τέσσερις παράγωγοι των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi είναι:

$$\begin{aligned} F'' &= 2mF^3 - (m+1)F \\ F^{(3)} &= (6mF^2 - (m+1))F' \\ F^{(4)} &= 24m^2 F^5 - 20m(m+1)F^3 + (m^2 + 14m + 1)F \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

## 2.2 Εφαρμογή στην εξίσωση KdV-Burgers-Kuramoto

Έστω η εξίσωση KdV-Burgers-Kuramoto (KBK)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (2.2.1)$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  σταθερές. Κατά τον Kuramoto η εξίσωση (2.2.1) είναι ένα καλό μοντέλο για την περιγραφή φαινομένων που εμπεριέχουν τις έννοιες της μη γραμμικότητας, dissipation, dispersion και ευστάθειας. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής  $\xi = \kappa(x - ct)$ , όπου  $\kappa$  ο κυματικός αριθμός και  $c$  η ταχύτητα του κύματος, στην (2.2.1) λαμβάνουμε μετά από μια ολοκλήρωση ως προς  $\xi$ :

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 + \alpha\kappa \frac{du}{d\xi} + \beta\kappa^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \gamma\kappa^3 \frac{d^3u}{d\xi^3} = A \quad (2.2.2)$$

όπου  $A$  η σταθερά της ολοκλήρωσης.

### Ansätze I: Ανάπτυγμα $\text{sech} - \tanh$

Αναζητούμε λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (2.2.2) βασιζόμενη στο ανάπτυγμα (2.1.8). Με αντικατάσταση του (2.1.8) στο (2.2.2) και εξισορρόπηση του υψηλότερου μη γραμμικού όρου με τις όρους υψηλότερων παραγώγων, παίρνουμε  $m = 3$ , συγκεκριμένα η λύση δίνεται από

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 \text{sech}\xi + \alpha_2 \text{sech}^2\xi + \alpha_3 \text{sech}^3\xi + \tanh\xi(b_1 + b_2 \text{sech}\xi + b_3 \text{sech}^2\xi) \quad (2.2.3)$$

Τώρα με αντικατάσταση του (2.2.3) στην (2.2.2) και μηδενίζοντας τους συντελεστές των όρων  $\text{sech}^i$ ,  $\text{sech}^{i-1}$  και  $\tanh$  ταυριάζοντας τις δυο πλευρές της εξίσωσης, παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} -c\alpha_0 + \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \frac{1}{2}b_1^2 &= A \\ b_1\alpha_0 - cb_1 &= 0 \\ -\alpha\kappa\alpha_1 - \gamma\kappa^3\alpha_1 + b_2\alpha_0 + \alpha_1b_1 + \beta\kappa^2b_2 - cb_2 &= 0 \\ \alpha_1\alpha_0 - c\alpha_1 + b_1b_2 + \beta\kappa^2\alpha_1 - \gamma\kappa^3b_2 - \alpha\kappa b_2 &= 0 \\ b_3\alpha_0 - cb_3 + \alpha_1b_2 + \alpha_2b_1 - 2\alpha\kappa\alpha_2 + 4\beta\kappa^2b_3 - 8\gamma\kappa^3\alpha_2 - 2\beta\kappa^2b_1 &= 0 \\ \alpha\kappa b_1 + b_1b_3 + \alpha_2\alpha_0 - c\alpha_2 + 4\beta\kappa^2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + 4\gamma\kappa^3b_1 - 2\alpha\kappa b_3 - 8\gamma\kappa^3b_3 &= 0 \\ \alpha_1b_3 + \alpha_3b_1 - 3\alpha\kappa\alpha_3 - 6\beta\kappa^2b_2 + \alpha_2b_2 - 27\gamma\kappa^3\alpha_3 + 6\gamma\kappa^3\alpha_1 &= 0 \\ 9\beta\kappa^2\alpha_3 + 2\alpha\kappa b_2 - c\alpha_3 + \alpha_3\alpha_0 + \alpha_1\alpha_2 - b_1b_2 - 2\beta\kappa^2\alpha_1 + b_2b_3 + 20\gamma\kappa^3b_2 &= 0 \\ \alpha_3b_2 - 12\beta\kappa^2b_3 + 24\gamma\kappa^3\alpha_2 + \alpha_2b_3 &= 0 \\ 60\gamma\kappa^3b_3 - 6\beta\kappa^2\alpha_2 + \frac{1}{2}b_3^2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 - b_1b_3 - 6\gamma\kappa^3b_1 + 3\alpha\kappa b_3 - \frac{1}{2}b_2^2 + \alpha_1\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3b_3 + 60\gamma\kappa^3\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2\alpha_3 - 12\beta\kappa^2\alpha_3 - b_2b_3 - 24\gamma\kappa^3b_2 &= 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{1}{2}b_3^2 - 60\gamma\kappa^3b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Η λύση του οποίου μας δίνει έναν αριθμό από λύσεις. Μια από αυτές είναι η

$$b_1 = 0, \alpha_3 = 0, b_2 = 0, \alpha_1 = 0, b_3 = -120\gamma k^3, \beta = 8\gamma k, \alpha_0 = c - 48\gamma k^3, \alpha = 4\gamma k^2, \alpha_2 = 120\gamma k^3 \quad (2.2.5)$$

$$b_1 = 0, \alpha_3 = 0, b_2 = 0, \alpha_1 = 0, b_3 = -120\gamma k^3, \beta = -8\gamma k, \alpha_0 = c + 48\gamma k^3, \alpha = 4\gamma k^2, \alpha_2 = -120\gamma k^3 \quad (2.2.6)$$

$$\beta = 0, \alpha = \frac{76}{11}\gamma k^2, b_1 = \frac{240}{11}\gamma k^3, k = k, \alpha_0 = c, \alpha_3 = 0, c = c, b_2 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0, b_3 = -120\gamma k^3 \quad (2.2.7)$$

Βάση της (2.2.7) το ansätze μπορεί να γραφεί ως εξής

$$u = \alpha_0 + \alpha_2 \operatorname{sech}^2 \xi + b_3 \tanh \xi \operatorname{sech}^2 \xi \quad (2.2.8)$$

άρα μια λύση της (2.2.1) είναι

$$u = c - \frac{3\alpha\beta}{2\gamma} + \frac{15\alpha\beta}{4\gamma} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\beta}{8\gamma}(x - ct) \right] \left\{ 1 - \tanh \left[ \frac{\beta}{4\gamma}(x - ct) \right] \right\} \quad (2.2.9)$$

για περισσότερες λύσεις βλέπε [26]

### Ansätze II: Ανάπτυγμα $\sec - \tan$

Αναζητούμε λύσεις της (2.2.2) της μορφής

$$u(\xi) = \alpha_0 + \sum_1^m (\alpha_i \sec \xi + b_i \tan \xi) \sec^{i-1} \xi \quad (2.2.10)$$

Αντικαθιστώντας την (2.2.10) στην (2.2.1) και εξισορροπώντας τον μη γραμμικό όρο υψηλότερου βαθμού με τους όρους παραγώγων υψηλότερης τάξης, προκύπτει  $m = 3$ . Έτσι η ζητούμενη λύση θα έχει την μορφή

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 \sec \xi + \alpha_2 \sec^2 \xi + \alpha_3 \sec^3 \xi + \tan \xi (b_1 + b_2 \sec \xi + b_3 \sec^2 \xi) \quad (2.2.11)$$

Τώρα αντικαθιστούμε την (2.2.11) στην (2.2.2) και εξισώνοντας τους συντελεστές των ομόβαθμων δυνάμεων των  $\sec^i, \sec^i \tan$  καταλήγουμε στο ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα αλγεβρικών

εξισώσεων ως προς  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\alpha_0^2 - c\alpha_0 - \frac{1}{2}b_1^2 &= A \\
-cb_1 + b_1\alpha_0 &= 0 \\
-cb_2 + \alpha_1b_1 - \gamma\kappa^3\alpha_1 + \alpha\kappa\alpha_1 - \beta\kappa^2b_2 + b_2\alpha_0 &= 0 \\
-\beta\kappa^2\alpha_1 + \gamma\kappa^3b_2 - \alpha\kappa b_2 - c\alpha_1 - b_1b_2 + \alpha_1\alpha_0 &= 0 \\
-8\gamma\kappa^3\alpha_2 - 4\beta\kappa^2b_3 + b_3\alpha_0 + \alpha_1b_2 + \alpha_2b_1 - b_3 + 2\alpha\kappa\alpha_2 + 2\beta\kappa^2b_1 &= 0 \\
\alpha\kappa b_1 - \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{2}b_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - 2\alpha\kappa b_3 - c\alpha_2 - 4\gamma\kappa^3b_1 + 8\gamma\kappa^3b_3 + \alpha_2\alpha_0 - 4\beta\kappa^2\alpha_2 - b_1b_3 &= 0 \\
\alpha_3b_1 + \alpha_1b_3 + 6\beta\kappa^2b_2 + 3\alpha\kappa\alpha_3 - 27\gamma\kappa^3\alpha_3 + 6\gamma\kappa^3\alpha_1 + \alpha_2b_2 &= 0 \tag{2.2.12} \\
2\beta\kappa^2\alpha_1 - c\alpha_3 - b_2b_3 + b_1b_2 - 20\gamma\kappa^3b_2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_0 - 9\beta\kappa^2\alpha_3 + 2\alpha\kappa b_2 &= 0 \\
12\beta\kappa^2b_3 + 24\gamma\kappa^3\alpha_2 + \alpha_3b_2 + \alpha_2b_3 &= 0 \\
3\alpha\kappa b_3 - \frac{1}{2}b_3^2 - 60\gamma\kappa^3b_3 + b_1b_3 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + 6\gamma\kappa^3b_1 + \alpha_1\alpha_3 + \frac{1}{2}b_2^2 + 6\beta\kappa^2\alpha_2 &= 0 \\
60\gamma\kappa^3\alpha_3 + \alpha_3b_3 &= 0 \\
12\beta\kappa^2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + 24\gamma\kappa^3b_2 + b_2b_3 &= 0 \\
\frac{1}{2}\alpha_3^2 + \frac{1}{2}b_3^2 + 60\gamma\kappa^3b_3 &= 0
\end{aligned}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα π.χ με Maple λαμβάνουμε διάφορες λύσεις. Μια απο αυτές είναι η

$$\begin{aligned}
\alpha_0 = c, \alpha_3 = 0, \beta = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, b_2 = 0, \beta_3 = 120\gamma k^3, b_1 = -\frac{60}{19}\alpha k \\
k = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{19\gamma}} \quad \text{ή} \quad k = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{11\alpha}{19\gamma}}
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

όπου  $c$  αυθαίρετη σταθερά. Άρα, οι δύο λύσεις της (2.2.1) είναι οι

$$u_1 = c - \frac{15\alpha}{19}\sqrt{\frac{\alpha}{19\gamma}} \tan \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{19\gamma}}(x - ct) \right] \left( -2 + \sec^2 \left[ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{19\gamma}}(x - ct) \right] \right) \tag{2.2.14}$$

$$u_1 = c + \frac{15\alpha}{19}\sqrt{-\frac{11\alpha}{19\gamma}} \tan \left[ \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{11\alpha}{19\gamma}}(x - ct) \right] \left( 2 + 11 \sec^2 \left[ \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{11\alpha}{19\gamma}}(x - ct) \right] \right) \tag{2.2.15}$$

### Ansätze III: Ανάπτυγμα σε συναρτήσεις Weierstrass

Αναζητούμε λύσεις της (2.2.2) που εκφράζονται μέσω των συναρτήσεων Weierstrass που ικανοποιούν την (2.1.13). Πιο συγκεκριμένα αναζητούμε λύσεις που αναπαριστώνται από την

σχέση

$$u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 F(\xi) + \alpha_3 \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} + \alpha_4 F'(\xi) \quad (2.2.16)$$

όπου  $F$  η ελλειπτική συνάρτηση Weierstrass. Με αντικατάσταση της (2.2.16) στην (2.2.2) και κάνοντας χρήση των εξισώσεων (2.1.15) καταλήγουμε στο ακόλουθο αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 24\alpha_4^2 + 120\gamma\kappa^3\alpha_4 &= 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_2^2 + 6\beta\kappa^2\alpha_2 + 6\alpha\kappa\alpha_4 &= 0 \\ 12\beta\kappa^2\alpha_4 + 12\gamma\kappa^3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_4 &= 0 \\ -c\alpha_2 - 18\gamma\kappa^3\alpha_4\mu + \alpha_2\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_4 2\mu &= 0 \\ \alpha\kappa\alpha_2 + \alpha_1\alpha_4 - c\alpha_4 &= 0 \\ c\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha\kappa\alpha_4\mu - \frac{1}{2}\alpha_3^2\eta + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\beta\kappa^2\alpha_2\mu - 12\gamma\kappa^3\alpha_4\eta &= A \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα π.χ με Maple λαμβάνουμε διάφορες λύσεις. Μια από αυτές είναι η

$$\kappa = \pm \frac{36\sqrt[4]{12/\mu\beta}}{\gamma}, \alpha = \frac{\beta^2}{16\gamma}, \alpha_1 = \frac{64c\gamma^2 - \beta^3}{64\gamma^2}, \alpha_4 = -60\gamma\kappa^3, \alpha_2 = -15\beta\kappa^2, \alpha_3 = 0 \quad (2.2.18)$$

#### Ansätze IV: Ανάπτυγμα σε ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi

Αναζητούμε λύσεις που εκφράζονται μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi, και που ικανοποιούν την μη γραμμική διαφορική εξίσωση (2.1.16). Πιο συγκεκριμένα, για την εξίσωση KDV-Burgers-Kuramoto, θα εξάγουμε ακριβείς λύσεις τρίτου βαθμού που αντιπροσωπεύονται από την

$$u(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 F(\xi) + \alpha_3 \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} + \alpha_4 F'(\xi) + \alpha_5 F(\xi)^2 + \alpha_6 F(\xi)F'(\xi) \quad (2.2.19)$$

όπου  $F$  η ελλειπτική εξίσωση Jacobi

Αντικαθιστούμε το ανάπτυγμα (2.2.19) στην διαφορική εξίσωση (2.2.2). Θέτουμε τους συντελεστές των  $F^i$  και  $F^i F'$  ίσον με μηδέν ταιριάζοντας της δύο πλευρές της παραγώμενης εξίσωσης. Αυτό οδηγεί σε ένα μεγάλο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Παρουσιάζουμε το



παραγώμενο συστημα για την ειδική περίπτωση όπου  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\alpha_6^2 m + 60\gamma\kappa^3\alpha_6 m^2 &= 0 \\
6\beta\kappa^2\alpha_5 m - \frac{1}{2}\alpha_6^2 m - 60\gamma\kappa^3\alpha_6 m^2 + 3\alpha\kappa\alpha_6 m - 60\gamma\kappa^3\alpha_6 m + \frac{1}{2}\alpha_5^2 - \frac{1}{2}\alpha_6^2 &= 0 \\
\alpha_5\alpha_6 + 12\beta\kappa^2\alpha_6 m + 24\gamma\kappa^3\alpha_5 m &= 0 \\
2\beta\kappa^2\alpha_2 m + \alpha_2\alpha_5 &= 0 \\
\frac{1}{2}\alpha_6^2 + \alpha_5\alpha_1 - 4\beta\kappa^2\alpha_5 - c\alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 - & \\
- 4\beta\kappa^2\alpha_5 m - 2\alpha\kappa\alpha_6 - 2\alpha\kappa\alpha_6 m + 8\gamma\kappa^3\alpha_6 &52\gamma\kappa^3\alpha_6 m + 8\gamma\kappa^3\alpha_6 m^2 = 0 \\
6\gamma\kappa^3\alpha_2 + \alpha_2\alpha_6 &= 0 \\
\alpha_6\alpha_1 + 2\alpha\kappa\alpha_5 - 8\gamma\kappa^3\alpha_5 - 4\beta\kappa^2\alpha_6 - c\alpha_6 - 8\gamma\kappa^3\alpha_5 m - 4\beta\kappa^2\alpha_6 m &= 0 \\
- \beta\kappa^2\alpha_2 m - \beta\kappa^2\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 - c\alpha_2 &= 0 \\
2\beta\kappa^2\alpha_5 - c\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - 4\gamma\kappa^3\alpha_6 m + \alpha\kappa\alpha_6 - 4\gamma\kappa^3\alpha_6 &= A \\
- \gamma\kappa^3\alpha_2 m - \gamma\kappa^3\alpha_2 + \alpha\kappa\alpha_2 &= 0
\end{aligned}$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε μια απο τις πιθανές λύσεις

$$\begin{aligned}
\alpha_5 = -120\gamma\kappa^3, m = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \alpha_6 = -120\gamma\kappa^3, c = c, k = k, \beta = 8\gamma\kappa, \\
\alpha_1 = 72\gamma\kappa^3 + c, \alpha = 4\gamma\kappa^2, A = 1152\gamma^2\kappa^6 - \frac{1}{2}c^2
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

## Κεφάλαιο 3

# Μια ansätze μέθοδος για μη γραμμικές εξελικτικές και κυματικές εξισώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μια σειρά απο (ansätze) Σ.Δ.Ε πρώτης τάξης, που αντιστοιχούν σε λύσεις οδοντών κυμάτων για κάποια μη γραμμική Μ.Δ.Ε. Θα ερευνήσουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες η υπό μελέτη μη γραμμική Μ.Δ.Ε έχει συγκεκριμένο είδος λύσεων οδοντών κυμάτων. Η μέθοδος αυτή παρουσιάστηκε στην εργασία [67]

### 3.1 Η μέθοδος

Έστω η γενική κλάση μη γραμμικών Μ.Δ.Ε

$$\begin{aligned} & f_1(u)u_t + f_2(u)u_x + f_3(u)u_{tt} + f_4(u)u_{tx} + f_5(u)u_{xx} + f_6(u)u_t^2 + f_7(u)u_tu_x + f_8(u)u_x^2 \\ & + f_9(u)u_{ttt} + f_{10}(u)u_{ttx} + f_{11}(u)u_{ttx} + f_{12}(u)u_{xxx} + f_{13}(u)u_tu_{tt} + f_{14}(u)u_{tt}u_x + f_{15}(u)u_tu_{xx} \\ & + f_{16}(u)u_xu_{xx} + f_{17}(u)u_t^3 + f_{18}(u)u_t^2u_x + f_{19}(u)u_tu_x^2 + f_{20}(u)u_x^3 + \dots = g(u) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

όπου  $f_i(u)$  ( $i = 1, 2, 3 \dots$ ) και  $g(u)$  αλγεβρικές συναρτήσεις του  $u$  (π.χ πολυωνυμικές, ρητές κ.λ.π). Εφόσον ενδιαφερόμαστε μόνο για λύσεις οδοντών κυμάτων θέτουμε  $\xi = x - ct$ , και έτσι η (3.1.1) μετασχηματίζεται στην παρακάτω μη γραμμική Σ.Δ.Ε

$$\begin{aligned} & [-cf_1 + f_2]u' + [c^2f_3 - cf_4 + f_5]u'' + [c^2f_6 - cf_7 + f_8](u')^2 + [-c^3f_9 + c^2f_{10} - cf_{11} \\ & + f_{12}]u''' + [-c^3f_{13} + c^2f_{14} - cf_{15} + f_{16}]u'u'' + [-c^3f_{17} + c^2f_{18} - cf_{19} + f_{20}](u')^3 + \dots = g(u) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Είναι σχεδόν αδύνατο να βρούμε μια γενική λύση για αυτή την μη γραμμική Σ.Δ.Ε. Θα αναζητήσουμε λοιπόν, μερικές τυπικές (formal) λύσεις οδοντώντων κυμάτων

### Περίπτωση Ι

Για λύσεις που περιέχουν όρους της υπερβολικής τέμνουσας θεωρούμε το ansätze

$$u' = -vbu\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}} \quad (3.1.3)$$

όπου  $v, \alpha, b$  πραγματικοί αριθμοί, και  $v > 0$ . Με ολοκλήρωση, παίρνουμε την λύση

$$u(\xi) = \alpha \operatorname{sech}^v(b\xi + c_0) \quad (3.1.4)$$

και κατόπιν προκύπτουν

$$\begin{aligned} u'' &= v^2 b^2 u \left[ 1 - \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] = -\frac{vb}{\sqrt{1 - (u/\alpha)^{2/v}}} \left[ 1 - \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] u' \\ u''' &= v^2 b^2 \left[ 1 - \frac{(v+1)(v+2)}{v^2} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] u' \\ u^{(4)} &= \frac{-b^3}{\sqrt{1 - (u/\alpha)^{2/v}}} \left[ v^3 - 2(v+1)(2+2v+v^2) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} + (v+1)(v+2)(v+3) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{4/v} \right] u' \\ u^{(5)} &= b^4 \left[ v^4 - 2(v+1)(v+2)(2+2v+v^2) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} + (v+1)(v+2)(v+3)(v+4) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{4/v} \right] u' \end{aligned}$$

κ.ο.κ

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.1.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left\{ f_2 - cf_1 - \frac{vb(c^2 f_3 - cf_4 + f_5)}{\sqrt{1 - (u/\alpha)^{2/v}}} \left[ 1 - \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] \right. \\ \left. - vbu\sqrt{1 - (u/\alpha)^{2/v}}(c^2 f_6 - cf_1 + f_8) + \dots \right\} vbu\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}} \equiv -g(u) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

### Περίπτωση ΙΙ

Ομοίως για λύσεις που περιέχουν όρους της υπερβολικής εφαπτομένης θεωρούμε το ansätze

$$u' = vbu \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \left[ 1 - \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] \quad (3.1.6)$$

όπου  $\alpha, b, v$  πραγματικοί αριθμοί με  $v > 0$ . Η προκύπτουσα λύση είναι

$$u(\xi) = \alpha \tanh^v(b\xi + c_0) \quad (3.1.7)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} u'' &= vb^2u \left[ (v-1) \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v} - 2v + (v+1) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] = b \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \left[ v-1 - (v+1) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] u' \\ u''' &= b^2 \left[ (v-1)(v-2) \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v} - 2v^2 + (v+1)(v+2) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] u' \end{aligned}$$

κ.ο.κ

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.1.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} &vbu\{f_2 - cf_1 + b \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \left[ v-1 - (v+1) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] (c^2f_3 - cf_4 + f_5) \\ &+ vbu \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \left[ 1 - \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] (c^2f_6 - cf_7 + f_8) + \dots \} \times \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \left[ 1 - \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right] \equiv g(u) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

### Περίπτωση III

Το ansätze

$$u' = \alpha u + bu^n \quad (\text{εξίσωση Bernouli}) \quad (3.1.9)$$

όπου  $\alpha, b, n$  πραγματικοί αριθμοί, και  $\alpha b < 0$ ,  $n \neq 1$ , με λύση

$$u(\xi) = \left[ -\frac{\alpha}{2b} \tanh \left( \frac{n-1}{2} \alpha \xi + c_0 \right) - \frac{\alpha}{2b} \right]^{1/(n-1)} \quad (3.1.10)$$

έχει προταθεί για την μελέτη μιας συγκεκριμένης εξίσωση διάχυσης στην [45]. Τώρα παρουσιάζουμε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα. Απο την (3.1.9) έχουμε

$$\begin{aligned} u'' &= (\alpha + bnu^{n-1})u' = \alpha^2 + \alpha b(n+1)n^{n-1} + b^2nu^{2n-2} \\ u''' &= [\alpha^2 + \alpha bn(n+1)u^{n-1} + b^2n(2n-1)u^{2n-2}]u' \end{aligned}$$

κ.ο.κ

Έτσι η (3.1.10) αποτελεί λύση της (3.1.2), αν οι συντελεστές ικανοποιούν την σχέση

$$[f_2 - cf_1 + (\alpha + bnu^{n-1})(c^2f_3 - cf_4 + f_5) + (\alpha u + bu'')(c^2f_6 - cf_7 + f_8) + \dots](\alpha u + bu'') \equiv g(u) \quad (3.1.11)$$

## Περίπτωση IV

Εισάγουμε το ansatz

$$u' = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 \quad (3.1.12)$$

που αποτελεί μια εξίσωση Riccati με πραγματικούς, σταθερούς συντελεστές (Όταν  $\alpha_0 = 0$ , η (3.1.12) είναι ειδική περίπτωση της (3.1.9) για  $n = 2$ ). Η λύση της (3.1.12) είναι

$$u(\xi) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha_2} \tan\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi + c_0\right) - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \quad (3.1.13)$$

για  $\Delta = 4\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2 > 0$ , και

$$u(\xi) = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha_2} \tanh\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi + c_0\right) - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \quad (3.1.14)$$

για  $\Delta = 4\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2 < 0$ . Τότε εκ της (3.1.12) προκύπτουν

$$\begin{aligned} u'' &= (\alpha_1 + 2\alpha_2 u)u' \\ u''' &= (2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2 + 6\alpha_1\alpha_2 u + 6\alpha_2^2 u^2)u' \end{aligned}$$

κ.ο.κ

Οι δε συντελεστές όπως και στην Περίπτωση III πρέπει να ικανοποιούν την σχέση

$$\begin{aligned} &[f_2 - cf_1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 u)(c^2 f_3 - cf_4 + f_5) + \\ &(\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2)(c^2 f_6 - cf_7 + f_8) + \dots] \times (\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2) \equiv g(u) \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

## Περίπτωση V

Για λύσεις που περιέχουν όρους ημιτόνου θεωρούμε το ansatz

$$u' = vb u \sqrt{\left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v} - 1} \quad (3.1.16)$$

όπου  $\alpha, b, v$  πραγματικοί αριθμοί, και  $v > 0$ . Μέσω ολοκλήρωσης, παίρνουμε την λύση

$$u(\xi) = \alpha \sin^v(b\xi + c_0) \quad (3.1.17)$$

και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} u'' &= -v^2 b^2 u \left[1 - \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v}\right] = -\frac{vb}{\sqrt{(\alpha/u)^{2/v} - 1}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v}\right] u' \\ u''' &= -v^2 b^2 \left[1 - \frac{(v-1)(v-2)}{v^2} \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v}\right] u' \end{aligned}$$

κ.ο.κ

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.1.2) έχουμε

$$\begin{aligned} \{f_2 - cf_1 - \frac{vb(c^2f_3 - cf_4 + f_5)}{\sqrt{(u/\alpha)^{2/v} - 1}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{v}\right) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}\right] \right. \\ \left. + vbu\sqrt{\left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v} - 1}(c^2f_6 - cf_7 + f_8) + \dots\}vbu\sqrt{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} - 1} \equiv g(u) \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

### Περίπτωση VI

Για λύσεις που περιέχουν όρους της υπερβολικής συντέμνουσας θεωρούμε το ansätze

$$u' = -vbu\sqrt{1 + \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}} \quad (3.1.19)$$

όπου  $v, \alpha, b$  πραγματικοί αριθμοί. Μέσω ολοκλήρωσης, αποκτούμε την λύση

$$u(\xi) = \alpha \operatorname{cosech}^v(b\xi + c_0) \quad (3.1.20)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} u'' &= v^2b^2u \left[1 + \frac{v+1}{v} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}\right] = -\frac{vb}{\sqrt{1 + (u/\alpha)^{2/v}}} \left[1 + \frac{v+1}{v} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}\right] u' \\ u''' &= v^2b^2 \left[1 + \frac{(v+1)(v+2)}{v^2} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}\right] u' \end{aligned}$$

κ.ο.κ

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα στην (3.1.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \{f_2 - cf_1 - \frac{vb(c^2f_3 - cf_4 + f_5)}{\sqrt{1 + (u/\alpha)^{2/v}}} \left[1 + \frac{v+1}{v} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}\right] \right. \\ \left. - vbu\sqrt{1 + \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}}(c^2f_6 - cf_7 + f_8) + \dots\}vbu\sqrt{1 + \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v}} \equiv g(u) \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

### Περίπτωση VII

Έστω το ansätze:

$$u' = \frac{vbu}{2} \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \sin \left[2 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \quad (3.1.22)$$

όπου  $v, \alpha, b$  πραγματικοί αριθμοί. Μέσω ολοκλήρωσης, παίρνουμε την λύση

$$u(\xi) = \alpha \tan^{-1/v}[\exp(b\xi + c_0)] \quad (3.1.23)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} u'' &= b \left\{ \cos \left[ 2 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] + \frac{(v-1)}{2} \left( \frac{\alpha}{u} \right)^{1/v} \sin \left[ 2 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] \right\} u' \\ u''' &= \frac{b^2}{8} \left( \frac{\alpha}{u} \right)^{2/v} \left\{ (v-1)(v-2) - (v-1)(v-2) \cos \left[ 4 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] \right. \\ &\quad \left. + 6(v-1) \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \sin \left[ 4 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] + 8 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{2/v} \cos \left[ 4 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] \right\} u' \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

κ.ο.κ

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.1.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\{f_2 - cf_1 + (c^2 f_3 - cf_4 + f_5)b \left( \cos \left[ 2 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] + \frac{(v-1)}{2} \left( \frac{\alpha}{u} \right)^{1/v} \sin \left[ 2 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] \right) \\ &+ (c^2 f_6 - cf_7 + f_8) \frac{vbu}{2} \left( \frac{\alpha}{u} \right)^{1/v} \sin \left[ 2 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] + \dots \} \times \frac{vbu}{2} \left( \frac{\alpha}{u} \right)^{1/v} \sin \left[ 2 \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] \equiv g(u) \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

### Περίπτωση VIII

Έστω το ansatz:

$$u' = -vbu \left( \frac{\alpha}{u} \right)^{1/v} \sin^2 \left[ \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \right] \quad (3.1.26)$$

όπου  $v, \alpha, b$  πραγματικοί αριθμοί. Μέσω ολοκλήρωσης παίρνουμε την λύση

$$u(\xi) = \alpha \cot^{-1/v}(b\xi + c_0) \quad (3.1.27)$$

και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
u'' &= b^2 v u \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v} \sin^3 \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \left\{ 2 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v} \cos \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] + (v-1) \sin \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \right\} \\
&= -b \sin \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \left\{ 2 \cos \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] + (v-1) \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \sin \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \right\} u' \\
u''' &= \frac{b^2}{2} \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{2/v} \sin^2 \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \left\{ (v-1)(v-2) + 4 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \right. \\
&\quad - (v-1)(v-2) \cos \left[ 2 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v} \right] + 8 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{2/v} \cos \left[ 2 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v} \right] \\
&\quad \left. + 6(v-1) \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v} \sin \left[ 2 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v} \right] \right\} u'
\end{aligned}$$

κ.ο.κ

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.1.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\{ f_2 - c f_1 - b(c^2 f_3 - c f_4 + f_5) \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \sin \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \times \left( 2 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v} \cos \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] + (v-1) \sin \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \right) \\
&- v b u (c^2 f_6 - c f_7 + f_8) \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \sin^2 \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] + \dots \} \times v b u \left(\frac{\alpha}{u}\right)^{1/v} \sin^2 \left[\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/v}\right] \equiv -g(u)
\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

## Περίπτωση IX

Θεωρούμε το ansatz

$$u' = -\frac{\alpha b v}{2} \sin \left(\frac{2u}{\alpha}\right) \left(\tan \frac{u}{\alpha}\right)^{1/v} \tag{3.1.29}$$

όπου τα  $\alpha, b, v$  πραγματικοί αριθμοί. Μέ ολοκλήρωση προκύπτει

$$u(\xi) = \alpha \cot^{-1}(b\xi + c_0)^v \tag{3.1.30}$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
u'' &= -b \left[ 1 + v \cos \left(\frac{2u}{\alpha}\right) \right] \tan^{1/v} \left(\frac{u}{\alpha}\right) u' \\
u''' &= b^2 \left[ 2 + 3v \cos \left(\frac{2u}{\alpha}\right) + v^2 \cos \left(\frac{4u}{\alpha}\right) \right] \tan^{2/v} \left(\frac{u}{\alpha}\right) u'
\end{aligned}$$



κ.ο.κ

Οι συντελεστές όπως και στην Περίπτωση III πρέπει να ικανοποιούν την σχέση

$$\begin{aligned}
& [f_2 - cf_1 - (c^2f_3 - cf_4 + f_5)b \left[ 1 + v \cos \left( \frac{2u}{\alpha} \right) \right] \tan^{1/v} \left( \frac{u}{\alpha} \right) \\
& - (c^2f_6 - cf_7 + f_8) \frac{\alpha bv}{2} \sin \left( \frac{2u}{\alpha} \right) \left( \tan \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} + \dots] \\
& \times \frac{\alpha bv}{2} \sin \left( \frac{2u}{\alpha} \right) \left( \tan \frac{u}{\alpha} \right)^{1/v} \equiv -g(u) \quad (3.1.31)
\end{aligned}$$

## 3.2 Εφαρμογή στην εξίσωση Benjamin-Bona-Mahony

Στην [67] εφαρμόστηκε η μέθοδος της §3.1 σε διάφορες εξισώσεις όπως οι γενικευμένες εξισώσεις KdV, η γενικευμένη εξίσωση Joseph-Egri, η γενικευμένη εξίσωση Sharma-Tasso-Olver, η γενικευμένη εξίσωση Kuramoto-Shivashinski, η γενικευμένη εξίσωση Splading, η γενικευμένη εξίσωση Fitzhugh-Nagumo, η γενικευμένη εξίσωση KdV-Burgers, οι εξισώσεις Sine-Gordon. Εδώ θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου στην γενικευμένη εξίσωση Benjamin-Bona-Mahony

$$u_t + (\beta u^\alpha + 1)u_x - \gamma u_{txx} = 0 \quad (3.2.1)$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Για  $\alpha=1$  και  $\gamma=1$ , η (3.2.1) ανάγεται στην αρχική εξίσωση Benjamin-Bona-Mahony [8].

Θα εφαρμόσουμε την Περίπτωση I σε αυτήν την εξίσωση, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι η λύση οδύοντος κύματος μπορεί να εκφραστεί με την μορφή της (3.1.4). Αντικαθιστώντας τους συντελεστές  $f_1(u) = 1, f_2(u) = \beta u^\alpha + 1, f_4(u) = -\gamma, f_i(u) = 0, i \neq 1, 2, 4$  στην (3.1.5) παίρνουμε

$$\beta u^\alpha + 1 - c + c\gamma\beta^2 v^2 \left[ 1 - \frac{(v+1)(v+2)}{v^2} \left( \frac{u}{\alpha} \right)^{2/v} \right] \equiv 0 \quad (3.2.2)$$

Θέτοντας  $v = 2/\alpha$ , παίρνουμε

$$\alpha = \left[ \frac{(c-1)(\alpha+1)(\alpha+2)}{2\beta} \right]^{1/\alpha} \quad \text{και} \quad b = \pm \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{c-1}{c\gamma}}$$

υπό την προϋπόθεση ότι  $c > 1$  προκειμένου  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## Κεφάλαιο 4

# Μια συναρτησιακή-αναλυτική μέθοδος

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια συναρτησιακή-αναλυτική μέθοδο για την εύρεση φραγμένων, αναλυτικών λύσεων κάποιων γενικών κλάσεων μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Οι κλάσεις αυτές περιλαμβάνουν εξισώσεις που συνδέονται με την μελέτη κυματικών λύσεων μη γραμμικών Μ.Δ.Ε όπως η KdV, Kawahara κ.λ.π. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε στις εργασίες [49] και [50].

### 4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε εξισώσεις της μορφής

$$g''(\xi) + \alpha g'(\xi) + \beta g(\xi) = h(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(\xi) [g(\xi)]^n, \quad (4.1.1)$$

και της μορφής

$$g^{(m)}(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k g^{(k)}(z) = h(z) + \sum_{k=1}^N \beta_k g'(z) [g(z)]^k, \quad g^{(i)}(0) = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad (4.1.2)$$

Συγκεκριμένα, θα αποδειχθεί ότι υπό ορισμένες συνθήκες, αυτές οι εξισώσεις έχουν φραγμένες, αναλυτικές λύσεις σε μια περιοχή του  $\xi = 0$ , της μορφής

$$g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \frac{\xi}{T} \right)^{n-1}, \quad |\xi| < T, T > 0, \quad (4.1.3)$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική όταν δίνονται συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες, διότι τότε οι συντελεστές  $A_n$  καθορίζονται μονοσήμαντα μέσω μιας αναδρομικής σχέσης.

Η απόδειξη αυτών των αποτελεσμάτων στηρίζεται σε μια συναρτησιακή αναλυτική μέθοδο που εισήχθη στην [31] για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, στις [32], [33] για μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και στην [48] για την μελέτη κάποιων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που κάνουν την εμφάνιση τους σε διάφορα φυσικά προβλήματα. Με την χρήση αυτής της μεθόδου μπορούμε να καθορίσουμε λύσεις μιας διαφορικής εξίσωσης στο χώρο Banach  $H_1(\Delta)$

$$H_1(\Delta) = \left\{ f : \Delta \rightarrow \mathbb{R} / f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) z^{n-1} \text{ Αναλυτικά στο } \Delta \text{ με } \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)| < +\infty \right\},$$

όπου  $\Delta = \{z \in \mathbb{R} : |z| < 1\}$  και η norm σε αυτό το χώρο είναι

$$\|f(z)\|_{H_1(\Delta)} = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|$$

αναπαριστώντας τον χώρο Banach  $H_1(\Delta)$  χρησιμοποιώντας δύο μεταθετικούς τελεστές που ορίζονται σε έναν αφηρημένο χώρο Banach  $H_1$ , η εν λόγω διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε μια ισοδύναμη τελεστική εξίσωση στον  $H_1$ .

Αφού η (4.1.3) συγκλίνει, μιας και ανήκει στον  $H_1(\Delta)$ , η (4.1.3) δεν θα αποτελεί τυπική λύση (formal solution), συγκριτικά με τις λύσεις που αποκτούμε με άλλες μεθόδους. Επιπλέον η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, που έχει κατασκευαστικό χαρακτήρα, επιτρέπει την εξαγωγή δύο εύκολα ελέγξιμων συνθηκών, που αφορούν στην ύπαρξη μοναδικής λύσης στον  $H_1(\Delta)$  των (4.1.1), (4.1.2), καθώς και ενός φράγματος των λύσεων τους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (4.1.1) περιλαμβάνει την εξίσωση Lienard

$$g''(\xi) + lg(\xi) + mg^3(\xi) + ng^5(\xi) = 0, \quad (4.1.4)$$

όπου  $l, m, n$  πραγματικές σταθερές. Η εξίσωση (4.1.4) θεωρείται γενίκευση της εξίσωσης του πακτωμένου εκκρεμούς, αλλά εμφανίζεται και όταν αναζητούμε σολιτονικές λύσεις της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger

$$iu_t + u_{xx} + \beta_1 |u|^2 u + r_1 |u|^4 u + i\alpha_1 (|u|^2 u)_x + i s_1 (|u|^2)_x u = 0, \quad u = u(x, t)$$

Επίσης η (4.1.1) περιλαμβάνει και την εξίσωση

$$g''(\xi) - rg'(\xi) - \tilde{\alpha} g^2(\xi) - bg(\xi) - d = 0, \quad (4.1.5)$$

η οποία προκύπτει από την εξίσωση Burgers-KdV

$$u_t + cuu_x + Gu_{xx} + su_{xxx} = 0, \quad u = u(x, t), \quad (4.1.6)$$

όπου  $c, G, s$  πραγματικές σταθερές με  $Ggs \neq 0$ , υποθέτοντας λύσεις της μορφής  $u(x, t) = g(x - vt) = g(\xi)$ . Αναφέρουμε ότι το πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας φραγμένων λύσεων υπό μορφή οδοντών κυμάτων, τα οποία τείνουν σε σταθερές τιμές στο  $\pm\infty$  έχει μελετηθεί στο [10]. Επίσης στην [21] βρέθηκαν δύο ακριβείς (exact) λύσεις της (4.1.5)

## 4.2 Η μέθοδος

Έστω  $H$  αφηρημένος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert πάνω από το σώμα  $\mathbb{C}$ , με την ορθοκανονική βάση  $\{e_n\}, n = 1, 2, 3, \dots$ . Η χρήση των συμβόλων  $(\cdot, \cdot)$  και  $\|\cdot\|$  εκφράζουν εσωτερικό γινόμενο και norm του  $H$  αντίστοιχα. Έστω  $H_1$  χώρος Banach που αποτελείται από αυτά τα στοιχεία  $f$  στον  $H$  που ικανοποιούν την συνθήκη  $\sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)| < +\infty$ . Η norm του  $H_1$  δίνεται από την σχέση  $\|f\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)| < +\infty$ . Τέλος, έστω  $V$  και  $V^*$  (ο συζυγής του  $V$ ) οι μεταθετικοί τελεστές στον  $H$  που ορίζονται ως

$$\begin{aligned} Ve_n &= e_{n+1}, & n &= 1, 2, 3, \dots \\ V^*e_n &= e_{n-1}, & n &= 2, 3, \dots, & V^*e_1 &= 0. \end{aligned}$$

Από τις [31] και [32] γνωρίζουμε ότι

- (i) Κάθε σημείο  $z$  του εσωτερικού του μοναδιαίου δίσκου  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , ανήκει στο σημειακό φάσμα του  $V^*$  και το σύνολο των ιδιοστοιχείων  $f_z = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}e_n, f_0 = e_1$ , αποτελούν ένα πλήρες σύστημα στον  $H$ , με την έννοια ότι, εάν το  $f$  είναι ορθογώνιο στο  $f_z$  για κάθε  $z \in \Delta$ , τότε  $f = 0$ .

- (ii) Η απεικόνιση

$$\phi(z) = (f_z, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(f, e_n)} z^{n-1}, \quad z \in \Delta \quad (4.2.1)$$

είναι 1-1, επί και διατηρεί την norm. Το στοιχείο  $f$  του  $H_1$  που ορίζεται από την (4.2.1) καλείται abstract form του  $\phi(z)$ . Σε γενικές γραμμές η abstract form μιας συνάρτησης  $G(\phi(z)) : H_1(\Delta) \rightarrow H_1(\Delta)$  είναι μια απεικόνιση  $N(f) : H_1 \rightarrow H_1$  για το οποίο ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$G(\phi(z)) = (f_z, N(f)), z \in \Delta$$

- (iii) Ο  $H_1$  μένει αναλλοίωτος από τους τελεστές  $V^m, (V^*)^m$  και  $\|V^m\|_1 = \|(V^*)^m\|_1 = 1, m = 1, 2, \dots$

- (iv) Με βάση την (4.2.1) προκύπτει ότι

$$\frac{d^k \phi(z)}{dz^k} = (f_z, (C_0 V^*)^k f)$$

όπου  $z \in \Delta, k = 1, 2, \dots$ , και  $C_0$  ο διαγώνιος τελεστής  $C_0 e_n n e_n, n = 1, 2, \dots$ , που έχει αυτοσυζυγή επέκταση με διακριτό φάσμα, δηλαδή το πεδίο ορισμού του  $C_0$  μπορεί να επεκταθεί στο πεδίο τιμών του φραγμένου τελεστή  $B_0 e_n = \frac{1}{n} e_n, n = 1, 2, \dots$ ,

(v) Εάν  $G(z, \phi(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z) [\phi(z)]^{n-1}$ , όπου οι συναρτήσεις  $\alpha_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} z^{k-1}$  αποτελούν στοιχεία του χώρου  $H_1(\Delta)$ , δηλαδή  $\|\alpha_n(z)\|_{H_1(\Delta)} \leq \mu_n < +\infty, n = 1, 2, \dots$ , και η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n w^{n-1}$  έχει επαρκώς μεγάλη ακτίνα σύγκλισης, τότε η abstract form του  $G(z, \phi(z))$  είναι

$$N(f) = \alpha_1 + \alpha_2(V)f + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(V) [\phi(V)]^{n-1} f,$$

όπου  $\alpha_1$  είναι το στοιχείο του  $H_1$  που αντιστοιχεί στην συνάρτηση  $\alpha_1(z)$  μέσω της αναπαράστασης  $\alpha_1(z) = (f_z, \alpha_1)$ ,  $\alpha_n(V) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} V^{k-1}$  και  $\phi(V)f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) V^{n-1} f$ , με  $\|\phi(V)\|_1 = \|f\|_1$

(vi) Η abstract form του όρου  $[f(z)]^k f'(z)$ , είναι το στοιχείο  $\frac{1}{k+1} C_0 V^* [f_1(V)]^k f$ , δηλαδή

$$[f(z)]^k f'(z) = \frac{1}{k+1} (f_z, C_0 V^* [f_1(V)]^k f), \text{ όπου}$$

$$f_1(V)f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) V^{n-1} f, \text{ με } \|f_1(V)f\|_1 = \|f\|_1$$

### 4.3 Βασικά Αποτελέσματα

Στην παράγραφο αυτή παραθέτουμε τα θεωρήματα που αφορούν στις φραγμένες, αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων (4.1.1) και (4.1.2)

#### Θεώρημα 1

Έστω η διαφορική εξίσωση (4.1.1)

$$g''(\xi) + \alpha g'(\xi) + \beta g(\xi) = h(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(\xi) [g(\xi)]^n, \quad |\xi| < T, T > 0, \quad (4.3.1)$$

όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικές σταθερές. Υποθέτουμε ότι:

$$(i) h(zT) \in H_1(\Delta), \alpha_n(zT) \in H_1(\Delta) \text{ με } \|\alpha_n(zT)\|_{H_1(\Delta)} \leq \mu_n, n = 2, 3, \dots$$

$$(ii) \text{ Η συνάρτηση } \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n w^{n-2} \text{ είναι ακέραια ή έχει μια επαρκώς μεγάλη ακτίνα σύγκλισης,}$$

$$(iii) |\beta|T^2 + |\alpha|T - 2 < 0, \quad (4.3.2)$$

$$(iv) L \left( |g(0)| + T|g'(0)| + \frac{T^2}{2} \|h(zT)\|_{H_1(\Delta)} \right) < P(R_0), \quad (4.3.3)$$

όπου  $R_0$  το σημείο όπου η συνάρτηση  $P(R) = R - \frac{T^2 L}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n R^n$  παίρνει την μέγιστη τιμή της και  $L = \frac{2}{2 - |\alpha|T - |\beta|T^2}$ .

Τότε το πρόβλημα αρχικών συνθηκών που αποτελείται από τις (4.3.1) και  $g(0), g'(0)$  έχει τουλάχιστον μία αναλυτική λύση της μορφής

$$g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) \left( \frac{\xi}{T} \right)^{n-1}, \quad |\xi| < T, \quad (4.3.4)$$

που μαζί με τις δύο πρώτες παραγώγους της συγκλίνει απόλυτα. Επιπλέον η (4.3.4) φράσσεται από το  $R_0$ .

## Θεώρημα 2

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$g^{(m)}(z) + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k g^{(k)}(z) = h(z) + \sum_{k=1}^N \beta_k g'(z) [g(z)]^k \quad (4.3.5)$$

$$g^{(i)}(0) = g_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (4.3.6)$$

όπου  $\alpha_k, \beta_k, g_i$ , είναι πραγματικές σταθερές. Υποθέτουμε ότι  $h(z) \in H_1(\Delta)$  και

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\alpha_k| k!}{m!} < 1, \quad (4.3.7)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|g_k|}{k!} + \frac{1}{m!} \|h(z)\|_{H_1(\Delta)} < \frac{1}{L} P(R_0), \quad (4.3.8)$$

όπου  $L = \frac{1}{1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|\alpha_k|k!}{m!}}$  και  $R_0$  το σημείο όπου η συνάρτηση

$$P(R) = R - \frac{L}{m!} \sum_{k=1}^N \frac{|\beta_k|}{k+1} R^{k+1}$$

αποκτά το μέγιστό της. Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (4.3.5),(4.3.6) έχει τουλάχιστον μια λύση στον  $H_1(\Delta)$  φραγμένη από το  $R_0$  της μορφής  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, e_n) z^{n-1}$ .

### Σχόλια

- (i) Όταν δοθούν οι αρχικές συνθήκες, καθορίζονται με μοναδικό τρόπο οι λύσεις των (4.3.1), (4.3.5) εφόσον οι συντελεστές  $(f, e_n), (g, e_n)$  ικανοποιούν μια συγκεκριμένη αναδρομική σχέση.
- (ii) Οι συνθήκες (4.3.2),(4.3.3) και (4.3.7),(4.3.8) εξασφαλίζουν ότι η λύση θα είναι αναλυτική στο  $\Delta$  με τους αντίστοιχους συντελεστές  $(f, e_n), (g, e_n)$  να είναι αθροίσιμες ακολουθίες.
- (iii) Η συνάρτηση  $P(R)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $N + 1$  ως προς  $R$  και έτσι το σημείο στο οποίο η συνάρτηση  $P(R)$  αποκτά το μέγιστο της μπορεί εύκολα να βρεθεί αναλυτικά ή αριθμητικά.
- (iv) Οι συνθήκες (4.3.2),(4.3.3) και (4.3.7),(4.3.8), καθορίζουν μια περιοχή για  $T > 0$ , όπου η λύση  $g(z)$  συγκλίνει απόλυτα. Παρόλο που η περιοχή αυτή μπορεί να είναι μικρή σε μερικές περιπτώσεις, αυτό το μικρό  $T$  είναι αρκετό να επεκτείνει (αριθμητικά) την περιοχή όπου η λύση ισχύει
- (v) Τα αποτελέσματα των θεωρημάτων 1 και 2 ισχύουν ακόμα και στην περίπτωση όπου οι παράμετροι των εξισώσεων καθώς και οι αρχικές συνθήκες είναι μιγαδικές σταθερές και  $\Delta = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ .

Οι αποδείξεις των θεωρημάτων 1 και 2 είναι παρόμοιες, γι' αυτό παραθέτουμε μόνο την απόδειξη του θεωρήματος 1.

### Απόδειξη του Θεωρήματος 1

Έστω  $z = \frac{\xi}{T}$  και  $g(\xi) = g(zT) = f(z), \alpha_n(\xi) = \alpha_n(zT) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n z^{n-1}$ ,  $h(\xi) = h(zT) = \tilde{h}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_n z^{n-1}$ . Τότε η (4.3.1) γίνεται

$$f''(z) + \alpha T f'(z) + \beta T^2 f(z) = T^2 \tilde{h}(z) + T^2 \sum_{n=2}^{\infty} A_n(z) [f(z)]^n \quad (4.3.9)$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην §4.2 έχουμε

$$(f_z, (C_0V^*)^2f) + \alpha T(f_z, C_0V^*f) + \beta T^2(f_z, f) = T^2(f_z, \tilde{h}) + T^2(f_z, N(f))$$

και επειδή το σύνολο  $f_z, z \in \Delta$  είναι πλήρες:

$$(C_0V^*)^2f + \alpha TC_0V^*f + \beta T^2f = T^2\tilde{h} + T^2N(f) \quad (4.3.10)$$

που αποτελεί την abstract form της (4.2.1),  $C_0, V^*$  ο διαγώνιος και μεταθετικός τελεστής που είδαμε στην §4.2,  $\tilde{h} = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{h}, e_n)e_n$ ,  $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)e_n$  είναι οι abstract forms των  $\tilde{h}(z)$  και  $f(z)$  αντίστοιχα, σύμφωνα με την απεικόνιση (4.2.1) και  $N(f) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(V)[f(V)]^{n-1}f$ .

Λαμβάνοντας υπόψιν την σχέση

$$(C_0V^*)^k f = C_0(C_0 + I) \dots (C_0 + (k-1)I)(V^*)^k f$$

για  $k = 2, 3, \dots$ , όπου  $I$  ο ταυτοτικός τελεστής, η (4.3.10) γίνεται:

$$C_0(C_0 + I)(V^*)^2f + \alpha TC_0V^*f + \beta T^2f = T^2\tilde{h} + T^2N(f)$$

ή

$$(V^*)^2f + \alpha TB_1V^*f + \beta T^2Bf = T^2B\tilde{h} + T^2BN(f) \quad (4.3.11)$$

όπου  $B, B_1$  οι διαγώνιοι τελεστές:

$$B_1e_n = \frac{1}{n+1}e_n, \quad Be_n = \frac{1}{n(n+1)}e_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

με norms  $\|B\|_1 = \|B_1\|_1 = \frac{1}{2}$ . Λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό του τελεστή  $V^*$  η (4.3.11) γίνεται

$$f + \alpha TV^2B_1V^*f + \beta T^2V^2Bf = c_1e_1 + c_2e_2 + T^2V^2B\tilde{h} + T^2V^2BN(f), \quad (4.3.12)$$

όπου  $c_1, c_2$  σταθερές που μπορούν να καθοριστούν παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο μερών της (4.3.12) με τα  $e_1, e_2$ .

Τότε καθορίζονται ως εξής:

$$(f, e_1) + 0 + 0 = c_1(e_1, e_1) + 0 + 0 + 0 \Rightarrow c_1 = (f, e_1) = f(0) = g(0)$$

και

$$(f, e_2) + 0 + 0 = 0 + c_2(e_2, e_2) + 0 + 0 \Rightarrow c_2 = (f, e_2) = f'(0) = Tg'(0)$$

Έτσι η (4.3.12) γίνεται:

$$(I + \alpha TV^2B_1V^* + \beta T^2V^2B)f = g(0)e_1 + Tg'(0)e_2 + T^2V^2B\tilde{h} + T^2V^2BN(f)$$



ή

$$f = (I + \alpha TV^2 B_1 V^* + \beta T^2 V^2 B)^{-1} [g(0)e_1 + Tg'(0)e_2 + T^2 V^2 B \tilde{h} + T^2 V^2 B N(f)] = g(f), \quad (4.3.13)$$

αφού σύμφωνα με την (4.3.2) θα ισχύει

$$\|\alpha TV^2 B_1 V^* + \beta T^2 V^2 B\|_1 \leq \frac{|\alpha|T + |\beta|T^2}{2} < 1$$

οπότε σύμφωνα με ένα πολύ γνωστό θεώρημα της θεωρίας τελεστών, ο τελεστής  $I + \alpha TV^2 B_1 V^* + \beta T^2 V^2 B$  είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του ορίζεται σε όλον τον  $H$ , φράσσεται δε από το

$$L = \frac{1}{1 - \frac{|\alpha|T + |\beta|T^2}{2}} = \frac{2}{2 - |\alpha|T - |\beta|T^2}$$

Έτσι από την (4.3.13) καταλήγουμε στο

$$\|q(f)\|_1 \leq L \left( |g(0)| + T|g'(0)| + \frac{T^2}{2} \|\tilde{h}\|_1 + \frac{T^2}{2} \|N(f)\|_1 \right)$$

Για  $\|f\| \leq R, R > 0$ , από την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\|q(f)\|_1 \leq L \left( |g(0)| + T|g'(0)| + \frac{T^2}{2} \|\tilde{h}\|_1 \right) + \frac{T^2 L}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n R^n \quad (4.3.14)$$

Έστω  $M_1(R) = \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n R^{n-2}$ , που είναι θετική, συνεχής και αύξουσα συνάρτηση στο  $[0, R_1]$ , όπου  $R_1$  η ακτίνα σύγκλισης της σειράς η οποία είναι επαρκώς μεγάλη σύμφωνα με την υπόθεση (ii) του θεωρήματος. Τότε υπάρχει ένα  $R_2 \in (0, R_1)$  τέτοιο ώστε  $\frac{T^2 L}{2} R_2 M_1(R_2) > 1$ . Έτσι η συνάρτηση  $M_2(R) = 1 - \frac{T^2 L}{2} R M_1(R)$  μηδενίζεται σε κάποιο σημείο  $R_3 \in (0, R_2)$ , αφού  $M_2(0) = 1 > 0$  και  $M_2(R_2) < 0$ . Ως συνέπεια η συνάρτηση

$$P(R) = R M_2(R) = R - \frac{T^2 L}{2} R^2 M_1(R) = R - \frac{T^2 L}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n R^n$$

επιτυγχάνει το μέγιστό της σε ένα σημείο  $R_0 \in (0, R_3)$ , αφού  $P(0) = P(R_3) = 0$  και  $P'(0) = M_2(0) = 1 > 0, P'(R_3) = R_3 M_2'(R_3) < 0$ . Άρα για  $R = R_0$  και

$$L \left( |g(0)| + T|g'(0)| + \frac{T^2}{2} \|h(zT)\|_{H_1(\Delta)} \right) < P(R_0)$$

απορρέει από την (4.3.14):  $\|q(f)\|_1 < R_0$

Αυτό σημαίνει ότι η  $g$  είναι μια απεικόνιση από τον κλειστό δίσκο  $S(0, R_0)$  στον εαυτό του. Επιπλέον, η  $g$  είναι συμπαγής απεικόνιση, εφόσον ο  $B$  είναι συμπαγής τελεστής. Έτσι από το θεώρημα σταθερού σημείου του Schauder συμπεραίνουμε ότι η τελεστική εξίσωση (4.3.13) έχει τουλάχιστον μία λύση στον  $H_1$  φραγμένη από το  $R_0$ . Ισοδυνάμως η διαφορική εξίσωση (4.3.9) με τις αρχικές συνθήκες  $f(0), f'(0)$  έχει τουλάχιστον μια λύση στον  $H_1(\Delta)$ , που αποδεικνύει και το θεώρημα. Το γεγονός πως η  $g(\xi)$  φράσσεται από το  $R_0$  απορρέει από την παρακάτω σχέση:

$$|g(\xi)| = |f(z)| \leq \|f(z)\|_{H_1(\Delta)} = \|f\|_1 \leq R_0.$$

### Παρατήρηση

Οι συντελεστές  $(f, e_n)$  της (4.3.4) ικανοποιούν μια αναδρομική σχέση που αποκτάται από το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μερών της (4.3.10) με το  $e_n$ .

## 4.4 Εφαρμογές

### 4.4.1 Η εξίσωση Lienard

Έστω η εξίσωση Lienard:

$$g''(\xi) + lg(\xi) + mg^3(\xi) + \eta g^5(\xi) = 0, \quad (4.4.1.1)$$

όπου  $l, m, \eta$  πραγματικές σταθερές. Έστω ότι:

$$(i) |l|T^2 < 2, \quad (4.4.1.2)$$

$$(ii) |g(0)| + T|g'(0)| < \frac{P(R_0)(2 - |l|T^2)}{2}, \quad (4.4.1.3)$$

όπου  $R_0$  το σημείο όπου η συνάρτηση  $P(R) = R - \frac{T^2}{2-|l|T^2}(|m|R^3 + |\eta|R^5)$  αποκτά το μέγιστό της. Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών που αποτελείται από την (4.4.1.1) και  $g(0), g'(0)$  έχει τουλάχιστον μια αναλυτική λύση της μορφής

$$g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) \left(\frac{\xi}{T}\right)^{n-1}, \quad |\xi| < T, \quad (4.4.1.4)$$

που μαζί με τις δύο πρώτες παραγώγους συγκλίνει απόλυτα. Επιπλέον η λύση αυτή είναι φραγμένη από το  $R_0$ . Επιπρόσθετα οι συντελεστές  $(f, e_n)$  της (4.4.1.4) μπορούν να προσδιοριστούν

μονοσήμαντα από την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned}
(f, e_1) &= g(0), & (f, e_2) &= Tg'(0), \\
(f, e_{n+2}) &= -\frac{lT^2}{n(n+1)}(f, e_n) - \frac{mT^2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (f, e_k) \sum_{s=1}^{n+1-k} (f, e_s)(f, e_{n+2-k-s}) \\
&\quad - \frac{\eta T^2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (f, e_k) \sum_{s=1}^{n+1-k} (f, e_s) \sum_{r=1}^{n+2-k-s} (f, e_r) \sum_{p=1}^{n+3-k-s-r} (f, e_p)(f, e_{n+4-k-s-r-p}), \forall n \geq 1
\end{aligned} \tag{4.4.1.5}$$

### Απόδειξη

Η απόδειξη προκύπτει από το θεώρημα 1 για:

$$\alpha = 0, \quad \beta = l, \quad h(\xi) \equiv 0, \quad \alpha_3(\xi) \equiv -m, \quad \alpha_5(\xi) \equiv -\eta, \quad \alpha_n(\xi) \equiv 0, \quad \forall n \neq 3, 5.$$

Είναι προφανές ότι οι υποθέσεις (i) και (ii) του θεωρήματος 1 ικανοποιούνται και ότι

$$L = \frac{2}{2 - |l|T^2}, \quad P(R) = R - \frac{T^2 L}{2}(|m|R^3 + |\eta|R^5).$$

Συμφωνά με την (4.3.10), η abstract form της (4.4.1.1) στον  $H$  είναι

$$(C_0 V^*)^2 f + lT^2 f = -mT^2 [f(V)]^2 f - \eta T^2 [f(V)]^4 f$$

ή

$$C_0(C_0 + I)(V^*)^2 f + lT^2 f = -mT^2 [f(V)]^2 f - \eta T^2 [f(V)]^4 f, \tag{4.4.1.6}$$

όπου  $f(V)f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) V^{n-1} f$ .

Όπως αναφέρθηκε και στην απόδειξη του θεωρήματος 1 είναι

$$(f, e_1) = g(0), \quad (f, e_2) = Tg'(0).$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο μερών της (4.4.1.6) με το  $e_n$  έχουμε

$$\begin{aligned}
& (C_0(C_0 + I)(V^*)^2 f, e_n) + lT^2(f, e_n) \\
&= -mT^2([f(V)]^2 f, e_n) - \eta T^2([f(V)]^4 f, e_n) \Rightarrow n(n+1)((V^*)^2 f, e_n) + lT^2(f, e_n) \\
&= -mT^2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) V^{k-1} f(V) f, e_n \right) - \eta T^2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) V^{k-1} [f(V)]^3 f, e_n \right) \\
&\Rightarrow n(n+1)(f, V^2 e_n) + lT^2(f, e_n) \\
&= -mT^2 \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) (f(V) f, (V^*)^{k-1} e_n) - \eta T^2 \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) ([f(V)]^3 f, (V^*)^{k-1} e_n) \\
&\Rightarrow n(n+1)(f, e_{n+2}) + lT^2(f, e_n) \\
&= -mT^2 \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) \sum_{s=1}^{\infty} (f, e_s) (V^{s-1} f, e_{n-k+1}) \\
&\quad - \eta T^2 \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) \sum_{s=1}^{\infty} (f, e_s) (V^{s-1} [f(V)]^2 f, e_{n-k+1}) \\
&\Rightarrow n(n+1)(f, e_{n+2}) + lT^2(f, e_n) \\
&= -mT^2 \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) \sum_{s=1}^{\infty} (f, e_s) (f, e_{n-k-s+2}) \\
&\quad - \eta T^2 \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) \sum_{s=1}^{\infty} (f, e_s) \sum_{r=1}^{\infty} (f, e_r) (V^{r-1} f(V) f, e_{n-k-s+2}) \\
&\Rightarrow n(n+1)(f, e_{n+2}) + lT^2(f, e_n) \\
&= -mT^2 \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) \sum_{s=1}^{\infty} (f, e_s) (f, e_{n-k-s+2}) \\
&\quad - \eta T^2 \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) \sum_{s=1}^{\infty} (f, e_s) \sum_{r=1}^{\infty} (f, e_r) \sum_{p=1}^{\infty} (f, e_p) (V^{p-1} f, e_{n-k-s-r+3}) \\
&\Rightarrow n(n+1)(f, e_{n+2}) + lT^2(f, e_n) \\
&= -mT^2 \sum_{k=1}^n (f, e_k) \sum_{s=1}^{n+1-k} (f, e_s) (f, e_{n-k-s+2}) \\
&\quad - \eta T^2 \sum_{k=1}^n (f, e_k) \sum_{s=1}^{n+1-k} (f, e_s) \sum_{r=1}^{n+2-k-s} (f, e_r) \sum_{p=1}^{n+3-k-s-r} (f, e_p) (f, e_{n-k-s-r-p+4}),
\end{aligned}$$

αφού ο δείκτης του  $e$  πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ειδικές περιπτώσεις που οδηγούν σε λύσεις που βρέθηκαν στην εργασία [22].

## Περίπτωση I

Έστω

$$\eta = \frac{3m^2}{16l}, \quad l < 0, \quad m > 0, \quad g(0) = \pm\sqrt{2}\sqrt{-\frac{l}{m}}, \quad g'(0) = \mp \frac{l\sqrt{-l}}{\sqrt{2}m\sqrt{-\frac{l}{m}}}T$$

Για τις παραπάνω παραμέτρους και αρχικές συνθήκες βρίσκουμε

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) \left(\frac{\xi}{T}\right)^{n-1} \\ &= \pm\sqrt{2}\sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)} \pm \frac{\sqrt{-l}\sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)}\xi}{\sqrt{2}} \pm \frac{l\sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)}\xi^2}{4\sqrt{2}} \pm \frac{5l\sqrt{-l}\sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)}\xi^3}{24\sqrt{2}} \\ &\quad \pm \frac{17l^2\sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)}\xi^4}{192\sqrt{2}} \pm \frac{121(-l)^{5/2}\sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)}\xi^5}{1920\sqrt{2}} \pm \frac{721l^3\sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)}\xi^6}{23040\sqrt{2}} \pm \dots, \end{aligned}$$

το οποίο συμπίπτει με τους επτά πρώτους όρους του αναπτύγματος MacLaurin της λύσης

$$g(\xi) = \pm\sqrt{-\frac{2l}{c}(1 + \tanh(\xi\sqrt{-l}))}$$

που βρέθηκε στην [22].

## Περίπτωση II

Έστω

$$n = \frac{3m^2}{16l}, \quad l < 0, \quad m > 0, \quad g(0) = \pm\sqrt{2}\sqrt{-\frac{l}{m}}, \quad g'(0) = \pm \frac{l\sqrt{-l}}{\sqrt{2}m\sqrt{-\frac{l}{c}}}T.$$

Για τις παραπάνω παραμέτρους και αρχικές συνθήκες βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
g(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n) \left( \frac{\xi}{T} \right)^{n-1} \\
&= \pm \sqrt{2} \sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)} \mp \frac{\sqrt{-l} \sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)} \xi}{\sqrt{2}} \pm \frac{l \sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)} \xi^2}{4\sqrt{2}} \mp \frac{5l \sqrt{-l} \sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)} \xi^3}{24\sqrt{2}} \\
&\quad \pm \frac{17l^2 \sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)} \xi^4}{192\sqrt{2}} \mp \frac{121(-l)^{5/2} \sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)} \xi^5}{1920\sqrt{2}} \pm \frac{721l^3 \sqrt{-\left(\frac{l}{m}\right)} \xi^6}{23040\sqrt{2}} \mp \dots,
\end{aligned}$$

το οποίο συμπίπτει με τους επτά πρώτους όρους του αναπτύγματος MacLaurin της λύσης

$$g(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{2l}{c} (1 - \tanh(\xi \sqrt{-l}))}$$

που βρέθηκε στην [22].

### Περίπτωση III

Έστω

$$\begin{aligned}
l < 0, \quad n \geq 0, \quad g(0) &= 2 \sqrt{-\left(\frac{Dl}{(m/2 + D)^2 - 4/3nl}\right)}, \\
g'(0) &= \frac{4D(-l)^{3/2}(-3m^2 + 12D^2 + 16nl)}{\sqrt{-\left(\frac{Dl}{9(m+2D)^2 - 48nl}\right)}(3(m+2D)^2 - 16nl)^2} T.
\end{aligned}$$

Για τις παραπάνω παραμέτρους και αρχικές συνθήκες βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
(f, e_1) &= 2 \sqrt{-\left(\frac{Dl}{(m/2 + D)^2 - 4/3nl}\right)}, \\
\frac{(f, e_2)}{T} &= \frac{4D(-l)^{3/2}(-3m^2 + 12D^2 + 16nl)}{\sqrt{-\left(\frac{Dl}{9(m+2D)^2 - 48nl}\right)}(3(m+2D)^2 - 16nl)^2}, \\
\frac{(f, e_3)}{T^2} &= 2\sqrt{3}l \sqrt{-\left(\frac{Dl}{3(m+2D)^2 - 16nl}\right)} \left( -1 + \frac{48D(3m(m+2D)^2 - 16(m+3D)nl)}{(3(m+2D)^2 - 16nl)^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(f, e_4)}{T^3} &= \frac{2D(-l)^{-5/2}(-3m^2 + 12D^2 + 16nl)}{\sqrt{3}\sqrt{-\frac{Dl}{(m+2D)^2-16nl}}(3(m+2D)^2 - 16nl)^4} (9(m+2D)^2(m^2 - 44mD + 4D^2) \\ &\quad - 96(m^2 - 20mD - 116D^2)nl + 256n^2l^2), \\ \frac{(f, e_5)}{T^4} &= \frac{l^2}{2(3(m+2D)^2 - 16nl)^3} \sqrt{-\left(\frac{Dl}{9(m+2D)^2 - 48nl}\right)} (81(m+2D)^4(m^4 \\ &\quad - 152m^3D + 920m^2D^2 - 608mD^3 + 16D^4) - 1728(m+2D)^2(m^4 - 112m^3D \\ &\quad + 2144mD^3 - 1232D^4)nl + 13824(m^4 - 72m^3D - 456m^2D^2 + 608mD^3 \\ &\quad + 2832D^4)n^2l^2 - 49152(m^2 - 36mD - 308D^2)n^3l^3 + 65536n^4l^4),\end{aligned}$$

που συμπίπτει με τους πέντε πρώτους συντελεστές του αναπτύγματος MacLaurin της λύσης

$$g(\xi) = \sqrt{\frac{-4lDe^{-2\sqrt{-l}\xi}}{(De^{-2\sqrt{-l}\xi} + m/2)^2 - 4/3nl}}$$

που βρέθηκαν στην [22].

#### Περίπτωση IV

Έστω

$$\begin{aligned}l < 0, \quad n \geq 0, \quad g(0) &= -2\sqrt{-\left(\frac{Dl}{(m/2 + D)^2 - 4/3nl}\right)}, \\ g'(0) &= -\frac{4\sqrt{3}\left(-\frac{Dl}{3(m+2D)^2-16nl}\right)^{3/2}(-3m^2 + 12D^2 + 16nl)}{D\sqrt{-l}}T.\end{aligned}$$

Για τις παραπάνω παραμέτρους και αρχικές συνθήκες βρισκουμε

$$\begin{aligned}(f, e_1) &= -2\sqrt{-\left(\frac{Dl}{(m/2 + D)^2 - 4/3nl}\right)}, \\ \frac{(f, e_2)}{T} &= -\frac{4\sqrt{3}\left(-\frac{Dl}{3(m+2D)^2-16nl}\right)^{3/2}(-3m^2 + 12D^2 + 16nl)}{D\sqrt{-l}}, \\ \frac{(f, e_3)}{T^2} &= 2\sqrt{3}l\sqrt{-\left(\frac{Dl}{3(m+2D)^2 - 16nl}\right)}\left(1 + \frac{48D(-3m(m+2D)^2 + 16(m+3D)nl)}{(3(m+2D)^2 - 16nl)^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(f, e_4)}{T^3} &= -\frac{2\sqrt{-l} \left( \sqrt{-\frac{Dl}{3(m+2D)^2-16nl}} \right)^{3/2} (-3m^2 + 12D^2 + 16nl)}{\sqrt{3}} \times \\ &\quad \left( \frac{1}{D} + \frac{80Dnl}{((m/2 + D)^2 - 4/3nl)^2} - \frac{12m}{(m/2 + D)^2 - 4/3nl} \right), \\ \frac{(f, e_5)}{T^4} &= \frac{l^2}{2(3(m+2D)^2 - 16nl)^3} \sqrt{-\left( \frac{Dl}{9(m+2D)^2 - 48nl} \right)} (81(m+2D)^4(m^4 \\ &\quad - 152m^3D + 920m^2D^2 - 608mD^3 + 16D^4) - 1728(m+2D)^2(m^4 - 112m^3D \\ &\quad + 2144mD^3 - 1232D^4)nl + 13824(m^4 - 72m^3D - 456m^2D^2 + 608mD^3 \\ &\quad + 2832D^4)n^2l^2 - 49152(m^2 - 36mD - 308D^2)n^3l^3 + 65536n^4l^4),\end{aligned}$$

που συμπίπτει με τους πέντε πρώτους συντελεστές του αναπτύγματος MacLaurin της λύσης

$$g(\xi) = -\sqrt{\frac{-4lDe^{-2\sqrt{-l}\xi}}{(De^{-2\sqrt{-l}\xi} + m/2)^2 - 4/3nl}}$$

που βρέθηκαν στην [22].

## Περίπτωση V

Έστω

$$l < 0, \quad m > 0, \quad n \geq 0$$

ή

$$l < 0, \quad m \geq 0, \quad n > 0$$

και

$$g(0) = \pm 2 \cdot 3^{1/4} \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{l^2}{36m^2-16nl}}}{1 + \frac{m}{\sqrt{m^2-16/3nl}}}}, \quad g'(0) = 0$$

Για τις παραπάνω παραμέτρους και αρχικές συνθήκες βρίσκουμε

$$\begin{aligned}(f, e_1) &= \pm 2 \cdot 3^{1/4} \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{l^2}{36m^2-16nl}}}{1 + \frac{m}{\sqrt{m^2-16/3nl}}}}, \\ \frac{(f, e_2)}{T} &= 0,\end{aligned}$$



$$\frac{(f, e_3)}{T^2} = \mp \frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{l^2}{36m^2-16nl}}}{1+\frac{m}{\sqrt{m^2-16/3nl}}}}}{3^{3/4}(m + \sqrt{m^2 - 16/3nl})^2} \left( \frac{2ml^2}{\sqrt{\frac{l^2}{9m^2-48nl}}} + 6m^2\sqrt{\frac{l^2}{3m^2 - 16nl}}\sqrt{3m^2 - 16nl} \right. \\ \left. + 3ml\sqrt{m^2 - 16/3nl} + l(3m^2 + 16nl) \right)$$

$$\frac{(f, e_4)}{T^3} = 0$$

$$\frac{(f, e_5)}{T^4} = \pm \frac{2l}{9 \cdot 3^{3/4}(m + \sqrt{m^2 - 16/3nl})^4} \left( 72m^2\sqrt{\frac{l^2}{3m^2 - 16nl}}\sqrt{3m^2 - 16nl}(m^2 + 4nl) + \right. \\ \left. \frac{8ml^2(3m^2 + 20nl)}{\sqrt{\frac{l^2}{9m^2-48nl}}} + 3ml\sqrt{m^2 - 16/3nl}(39m^2 + 64nl) + l(117m^4 - 120m^2nl + 896n^2l^2) \right)$$

που συμπίπτει με τους πέντε πρώτους συντελεστές του αναπτύγματος MacLaurin της λύσης

$$g(\xi) = \pm \sqrt{\frac{4\sqrt{\frac{3l^2}{3m^2-16nl}}(\operatorname{sech}(\sqrt{-l}\xi))^2}{2 + \left(-1 + \frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{3m^2-16nl}}\right)(\operatorname{sech}(\sqrt{-l}\xi))^2}}$$

που βρέθηκαν στην [22].

## Σχόλια

- (1) Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις, εάν οι αρχικές συνθήκες και παράμετροι της (4.4.1.1) ικανοποιούν τις συνθήκες (4.4.1.2) και (4.4.1.3), οι αποκτηθείσες λύσεις συγκλίνουν απόλυτα μαζί με τις πρώτες δυο παραγώγους τους.
- (2) Για άλλες αρχικές συνθήκες, μπορούμε να βρούμε τυπικές (formal) λύσεις της (4.4.1.1) της μορφής (4.4.1.4). Εάν πλέον τούτου ικανοποιούνται και οι (4.4.1.2),(4.4.1.3), οι αποκτηθείσες λύσεις συγκλίνουν απόλυτα μαζί με τις δύο πρώτες παραγώγους τους.

## 4.4.2 Η εξίσωση KdV

Έστω η εξίσωση KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u = u(x, t), \quad (4.4.2.1)$$

Αναζητούμε λύσεις οδευόντων κυμάτων της μορφής  $u(x, t) = g(v(x - ct - x_0) = \xi)$ ,  $v \neq 0$  και η (4.4.2.1) μετατρέπεται στην

$$g'''(\xi) - \frac{c}{v^2}g'(\xi) + \frac{1}{v^2}g(\xi)g'(\xi) = 0, \quad |\xi| < T, T > 0 \quad (4.4.2.2)$$

με αρχικές συνθήκες  $g^{(i)}(\xi = 0) = d_i, i = 0, 1, 2$  ή στην

$$g'''(z) - \frac{cT^2}{v^2}g'(z) = -\frac{T^2}{v^2}g(z)g'(z), \quad (4.4.2.3)$$

όπου  $z = \frac{\xi}{T}, T > 0$ , με αρχικές συνθήκες  $g^{(i)}(z = 0) = T^i d_i, i = 0, 1, 2$ . Η εξίσωση (4.4.2.3) προκύπτει από την (4.3.5) για  $m = 3, \alpha_0 = 0 = \alpha_2, \alpha_1 = -\frac{cT^2}{v^2}, h(z) \equiv 0, N = 1, \beta_1 = -\frac{T^2}{v^2}, g_0 = d_0, g_1 = Td_1, g_2 = T^2d_2$ . Έτσι οι (4.3.7), (4.3.8) γίνονται αντίστοιχα

$$|c|T^2 < 6v^2, \quad \frac{T^2|d_2|}{2} + T|d_1| + |d_0| < \frac{(6v^2 - |c|T^2)^2}{12T^2v^2}, \quad (4.4.2.4)$$

ενώ η ισοδύναμη της (4.4.2.3) τελεστική εξίσωση είναι

$$\left[ I - \frac{cT^2}{v^2}V^3B_1V^* \right] g = d_0e_1 + Td_1e_2 + \frac{T^2}{2}d_2e_2 - \frac{T^2}{2v^2}V^3B_1V^*[g_1(V)]g \quad (4.4.2.5)$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μερών της (4.4.2.5) με  $e_n, n = 4, 5, \dots$  παίρνουμε τη αναδρομική σχέση

$$(g, e_n) - \frac{cT^2}{v^2(n-2)(n-1)}(g, e_{n-2}) = -\frac{cT^2}{v^2(n-2)(n-1)} \sum_{s=1}^{n-2} (g, e_s)(g, e_{n-1-s}) \quad \forall n \geq 4,$$

$$(g, e_n) = \frac{T^{n-1}d_{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, 3$$

και έτσι οι συντελεστές  $(g, e_n)$  του  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, e_n)z^{n-1}$  προσδιορίζονται μοναδικά όταν οι αρχικές συνθήκες δοθούν.

Για την ειδική περίπτωση  $d_0 = c + 8v^2, d_1 = 0, d_2 = -24v^2$ , η  $g(\xi)$  δίνεται από τον τύπο

$$g(\xi) = c + 8v^2 - 12v^2\xi^2 + 8v^2\xi^4 - \frac{68v^2\xi^6}{15} + \frac{248v^2\xi^8}{105} - \frac{5528v^2\xi^{10}}{4725} + \dots$$

Αυτό συμπίπτει με τους έντεκα πρώτους όρους του αναπτύγματος MacLaurin της λύσης  $g(\xi) = c + 8v^2 - 12v^2 \tanh^2 \xi$ , που βρέθηκαν στην [46], χρησιμοποιώντας μια αυτοματοποιημένη μέθοδο συνάρτησης  $\tanh$  που βασίζεται στο ansatz ότι η (4.4.2.1) έχει λύση της μορφής  $u(x, t) = \sum_{i=0}^M \alpha_i S^i$ , όπου  $S = \tanh \xi$ . Επιπλέον, εάν οι ανισότητες (4.4.2.4) ικανοποιούνται για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων και αρχικών συνθηκών, η αποκτηθείσα λύση συγκλίνει απόλυτα στο  $|\xi| < T$  και είναι φραγμένη από το  $R_0 = \frac{6v^2}{LT^2}$ .

### 4.4.3 Η σύνθετη εξίσωση KdV-Burger

Έστω η σύνθετη εξίσωση KdV-Burger

$$u_t + puu_x + qu^2u_x + ru_{xx} - su_{xxx} = 0, \quad u = u(x, t), qs > 0 \quad (4.4.3.1)$$

όπου  $p, q, r, s$  μη μηδενικές πραγματικές παράμετροι. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της KdV, σε μη γραμμικά, φαινόμενα διάχυσης και φαινόμενα σκέδασης [63].

Με χρήση του μετασχηματισμού:  $u = r\sqrt{\frac{6}{sq}}\tilde{u}, t = \frac{s^2}{r^3}\tilde{t}, x = \frac{s}{r}\tilde{x}, \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) = g(\xi), \xi = v(\tilde{x} - c\tilde{t} - \tilde{x}_0), v \neq 0$  και  $z = \frac{\xi}{T}$ , η (4.4.3.1) μετατρέπεται στην ακόλουθη Σ.Δ.Ε

$$g'''(z) - \frac{T}{v}g''(z) + \frac{cT^2}{v^2}g'(z) = \frac{\sigma T^2}{v^2}g(z)g'(z) + \frac{6T^2}{v^2}[g(z)]^2g'(z) = 0, \quad (4.4.3.2)$$

με αρχικές συνθήκες  $g^{(i)}(z=0) = T^i d_i, i = 0, 1, 2..$  Οι (4.3.7) και (4.3.8) γίνονται

$$\frac{1}{6} \left| \frac{cT^2}{v^2} \right| + \frac{1}{3} \left| \frac{T}{v} \right| < 1, \quad \frac{T^2|d_2|}{2} + T|d_1| + |d_0| < \frac{1}{L} \cdot P(R_0), \quad (4.4.3.3)$$

όπου  $L = \frac{6v^2}{6v^2 - 2T|v| - |c|T^2}$  και  $R_0$  το σημείο όπου η συνάρτηση

$$P(R) = R - L \left( \frac{1}{12} \left| \frac{\sigma T^2}{v^2} \right| R^2 + \frac{1}{3} \left| \frac{T^2}{v^2} \right| R^3 \right)$$

αποκτά το μέγιστό της. Όπως και στην §4.4.2, βρίσκουμε ότι οι συντελεστές  $(g, e_n)$  της  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, e_n) z^{n-1}$  καθορίζονται μονοσήμαντα όταν δοθούν οι αρχικές συνθήκες, μέσω μιας αναδρομικής σχέσης.

Για την ειδική περίπτωση όπου  $c = \frac{1}{6} + 2v^2 - \frac{1}{24}\sigma^2, d_0 = \pm\frac{1}{6} - \frac{\sigma}{12}, d_1 = \pm v, d_2 = 0$ , βρίσκουμε με εφαρμογή του θεωρήματος 2 μια λύση υπο μορφή δυναμοσειράς. Οι πρώτοι 11 όροι της λύσης συμπίπτουν με τους πρώτους όρους της έκφρασης MacLaurin της λύσης  $g(\xi) = \pm(v \tanh \xi + \frac{1}{6}) - \frac{1}{12}\sigma$ , που βρέθηκε στην [46], χρησιμοποιώντας μια αυτοματοποιημένη μέθοδο συνάρτησης  $\tanh$  που βασίζεται στο ansatz ότι η (4.4.3.1) έχει λύση της μορφής  $u(x, t) = \sum_{i=0}^M \alpha_i S^i$ , όπου  $S = \tanh \xi$ . Επιπλέον, εάν οι ανισότητες (4.4.3.3) ικανοποιούνται για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων και αρχικών συνθηκών, η αποκτηθείσα λύση συγκλίνει απόλυτα στο  $|\xi| < T$  και είναι φραγμένη από το  $R_0$ .

### 4.4.4 Η εξίσωση Kawahara

Έστω η γενικευμένη εξίσωση Kawahara

$$u_t + \sigma uu_x + \lambda u^2u_x + u_{xxx} + u_{xxxx} = 0, \quad u = u(x, t), \quad (4.4.4.1)$$

όπου  $\sigma, \lambda$  πραγματικές παράμετροι. Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει την διάδοση των σημάτων μέσα από ηλεκτρικές γραμμές μετάδοσης, μακρά κύματα κάτω από στρώμα πάγου σε υγρά πεπερασμένου βάθους, μαγνητοακουστικά κύματα μέσα σε πλάσμα κ.α. [17], [46].

Αναζητούμε λύσεις οδευόντων κυμάτων της μορφής  $u(x, t) = g(v(x - ct - x_0)), v \neq 0$  της εξίσωσης (4.4.4.1) και βρίσκουμε την  $\Sigma.\Delta.E$

$$g^{(5)}(z) - \frac{T^2}{v^2} g'''(z) + \frac{cT^4}{v^4} g'(z) = \frac{\sigma T^4}{v^4} g(z)g'(z) + \frac{\lambda T^4}{v^4} [g(z)]^2 g'(z), \quad (4.4.4.2)$$

όπου  $z = \frac{x}{T}, T > 0$ , με αρχικές συνθήκες  $g^{(i)}(z=0) = T^i d_i, i = 0, 1, \dots, 4$

Οι (4.3.7) και (4.3.8) γίνονται

$$\frac{1}{5!} \left| \frac{cT^4}{v^4} \right| + \frac{1}{20} \left| \frac{T^2}{v^2} \right| < 1, \quad \sum_{k=0}^4 \frac{T^k |d_k|}{k!} < \frac{P(R_0)}{L}, \quad (4.4.4.3)$$

όπου  $L = \frac{1}{1 - \frac{1}{5!} \left| \frac{cT^4}{v^4} \right| - \frac{1}{20} \left| \frac{T^2}{v^2} \right|}$  και  $R_0$  το σημείο όπου η συνάρτηση

$$P(R) = R - \frac{L}{5!} \left( \frac{1}{2} \left| \frac{\sigma T^4}{v^4} \right| R^2 + \frac{1}{3} \left| \frac{\lambda T^4}{v^4} \right| R^3 \right)$$

αποκτά το μέγιστό της. Όπως και στην §4.4.2, βρίσκουμε ότι οι συντελεστές  $(g, e_n)$  της  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, e_n) z^{n-1}$  καθορίζονται μονοσήμαντα όταν δοθούν οι αρχικές συνθήκες, μέσω μιας αναδρομικής σχέσης.

Για τις ειδικές περιπτώσεις:  $\sigma = 1, \lambda = 0, v = \frac{1}{2\sqrt{13}}, c = \frac{36}{169}, d_1 = d_3 = 0, d_0 = \frac{105}{169}, d_2 = -\frac{420}{169}, d_4 = \frac{5880}{169}$  και  $\lambda = 1, c = \frac{1}{10} + 24v^4 - \frac{\sigma^2}{4}, d_1 = d_3 = 0, d_0 = \pm \frac{1+40v^2}{\sqrt{10}} - \frac{\sigma}{2}, d_2 = \mp 12\sqrt{10}v^2, d_4 = \pm 96\sqrt{10}v^2$  βρίσκουμε με εφαρμογή του θεωρήματος 2 λύσεις υπό μορφή δυναμοσειράς. Οι πρώτοι 11 όροι αυτών των λύσεων συμπίπτουν με τους πρώτους όρους της έκφρασης MacLaurin της λύσης  $g(\xi) = \frac{105}{169} \operatorname{sech}^4(\xi)$  και  $g(\xi) = -\frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{10}}(1 + 40v^2 - 60v^2 \tanh^2 \xi)$  αντίστοιχα, που βρέθηκαν στην [46], χρησιμοποιώντας μια αυτοματοποιημένη μέθοδο συνάρτησης  $\tanh$  που βασίζεται στο ansatz ότι η (4.4.4.1) έχει λύση της μορφής  $u(x, t) = \sum_{i=0}^M \alpha_i S^i$ , όπου  $S = \tanh \xi$ . Επιπλέον, εάν οι ανισότητες (4.4.4.3) ικανοποιούνται για τις παραπάνω τιμές των παραμέτρων και αρχικών συνθηκών, η αποκτηθείσα λύση συγκλίνει απόλυτα στο  $|\xi| < T$  και είναι φραγμένη από το  $R_0$ .

#### 4.4.5 Η εξίσωση KdV-Burgers-Kuramoto-Sivashinsky

Έστω η εξίσωση KdV-Burgers-Kuramoto-Sivashinsky

$$u_t + uu_x + pu_{xx} + qu_{xxx} + ru_{xxxx} = 0, \quad u = u(x, t), \quad (4.4.5.1)$$

όπου  $p, q, r \neq 0$  πραγματικές παράμετροι. Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει φυσικές διαδικασίες της τυρβώδους ροής [20].

Όταν αναζητούμε λύσεις οδευόντων κυμάτων της μορφής  $u(x, t) = g(v(x - ct - x_0)), v \neq 0$  η (4.4.5.1) μετατρέπεται στην

$$g'''(z) + \frac{qT}{rv}g''(z) + \frac{pT^2}{rv^2}g'(z) - \frac{cT^3}{rv^3}g(z) = -\frac{T^3}{rv^3}g(z)g'(z), \quad (4.4.5.2)$$

όπου  $z = \frac{\xi}{T}, T > 0$ , με αρχικές συνθήκες  $g^{(i)}(z=0) = T^i d_i, i = 0, 1, \dots, 4$ .

Οι (4.3.7), (4.3.8) γίνονται αντίστοιχα

$$\frac{1}{24} \left| \frac{cT^3}{rv^3} \right| + \frac{1}{12} \left| \frac{pT^2}{rv^2} \right| + \frac{1}{4} \left| \frac{qT}{rv} \right| < 1, \quad \sum_{k=0}^3 \frac{T^k |d_k|}{k!} < \frac{12}{L^2} \left| \frac{rv^3}{T^3} \right|, \quad (4.4.5.3)$$

όπου  $L = \frac{1}{\frac{1}{24} \left| \frac{cT^3}{rv^3} \right| + \frac{1}{12} \left| \frac{pT^2}{rv^2} \right| + \frac{1}{4} \left| \frac{qT}{rv} \right|}$ . Όπως και στην §4.4.2, βρίσκουμε ότι οι συντελεστές  $(g, e_n)$  της  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, e_n) z^{n-1}$  ορίζονται μονοσήμαντα όταν δοθούν οι αρχικές συνθήκες, από μία αναδρομική σχέση.

Για την ειδική περίπτωση όπου  $p = r = 1$ , οι παρακάτω λύσεις της (4.4.5.1) βρέθηκαν στην εργασία [46].

$$\text{Εάν } q = 0, v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}, \text{ τότε } g(\xi) = c + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (-9S + 11S^3), S = \tanh \xi.$$

$$\text{Εάν } q = \pm 4, v = \frac{1}{2}, \text{ τότε } g(\xi) = c \pm 9 - 15S \mp S^2 + 15S^3, S = \tanh \xi.$$

$$\text{Εάν } q = \pm \frac{12}{\sqrt{47}}, v = \frac{1}{2\sqrt{47}}, \text{ τότε } g(\xi) = c + \frac{47}{\sqrt{47}} (\pm 3 + 3S \mp 3S^2 + S^3), S = \tanh \xi.$$

$$\text{Εάν } q = \pm \frac{16}{\sqrt{73}}, v = \frac{1}{2\sqrt{73}}, \text{ τότε } g(\xi) = c + \frac{15}{73\sqrt{73}} (\pm 4 + 5S \mp 4S^2 + S^3), S = \tanh \xi.$$

Οι παραπάνω λύσεις ανακτήθηκαν με την χρήση μιας αυτοματοποιημένης μεθόδου συνάρτησης  $\tanh$  που βασίζεται στο ansatz ότι η (4.4.5.1) (με  $p = r = 1$ ) έχει λύση της μορφής  $u(x, t) = \sum_{i=0}^M \alpha_i S^i$ , όπου  $S = \tanh \xi$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι στην [46] αναφέρεται πώς η μέθοδος λειτουργεί μόνο για τις παραπάνω τιμές των  $q$ .

Επίσης στην [20], βρέθηκαν οι ακόλουθες λύσεις της (4.4.5.1).

$$\text{Εάν } q = 0, v = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{11p}{19r}}, pr < 0 \text{ τότε } g(\xi) = c - 15r \left(-\frac{11p}{19r}\right)^{3/2} \left(\frac{9}{11} + \tan^2 \xi\right) \tan \xi.$$

$$\text{Εάν } q = 0, v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{19r}}, pr > 0 \text{ τότε } g(\xi) = c - 15r \left(\frac{p}{19r}\right)^{3/2} (3 + \tan^2 \xi) \tan \xi.$$

$$\text{Εάν } q = \pm 4\sqrt{pr}, v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{r}}, pr > 0 \text{ τότε ,}$$

$$g(\xi) = c \mp 11r \left(\frac{p}{r}\right)^{3/2} - 15r \left(\frac{p}{r}\right)^{3/2} (1 \pm \tan \xi + \tan^2 \xi) \tan \xi.$$

Οι παραπάνω λύσεις ανακτήθηκαν με την χρήση της εκτεταμένης μεθόδου tanh, που έχει ένα βασικό ansatz ότι η (4.4.5.1) έχει μια λύση της μορφής  $u(x, t) = \sum_{i=0}^M \alpha_i w^i$ , όπου το  $w$  ικανοποιεί την εξίσωση Riccati  $w = b + w^2$ .

Όλες οι παραπάνω λύσεις βρέθηκαν επίσης υπό μορφή δυναμοσειράς με εφαρμογή του θεωρήματος 2. Επιπλέον εάν ικανοποιούνται οι ανισότητες (4.4.5.3) για τις προαναφερθείσες τιμές των παραμέτρων και για κατάλληλες αρχικές συνθήκες, οι αποκτηθείσες λύσεις συγκλίνουν απολύτως στο  $|\xi| < T$  και είναι φραγμένες απο το  $R_0 = \frac{24}{L} \left| \frac{rv^3}{v^3} \right|$ .



## Κεφάλαιο 5

### Μια ολοκληρωτική μέθοδος

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο με την οποία μπορεί να καθοριστεί κατά πόσο μια μη γραμμική, βαθμωτή εξίσωση αντίδρασης-μεταφοράς-διάχυσης παρουσιάζει λύσεις οδευόντων κυμάτων, καθώς και να ερευνήσουμε τις ιδιότητες των κυμάτων αυτών. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει την χρήση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης, και είναι εναλλακτική της ανάλυσης του χώρου φάσεων-ταχυτήτων. Περιγράφεται δε λεπτομερώς στο βιβλίο [28].

#### 5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με εξισώσεις που περιλαμβάνουν όρους όπως, μη γραμμικής διάχυσης, μη γραμμικής μεταφοράς, και μη γραμμικής αντίδρασης. Αυτές οι εξισώσεις τίθενται στην γενική μορφή

$$u_t = (D(u)u_x)_x + B(u)u_x + F(u), \quad (5.1.1)$$

όπου  $t$ , η χρονική μεταβλητή και  $x$  η χωρική μεταβλητή. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης (5.1.1), αντιπροσωπεύει μια διεργασία διάχυσης, με  $D$  τον συντελεστή της μη γραμμικής διάχυσης. Ο δεύτερος όρος της εξίσωσης αντιπροσωπεύει ένα φαινόμενο μεταφοράς, με το  $B$  να αναπαριστά μια μη γραμμική συνάρτηση ταχύτητας. Ο τελευταίος όρος αντιπροσωπεύει μια διεργασία αντίδρασης. Εάν το  $F$  είναι θετικό, αντιπροσωπεύει έναν μη γραμμικό όρο πηγής (source), ενώ εάν είναι αρνητικό έναν μη γραμμικό όρο καταβόθρας (sink). Η άγνωστη συνάρτηση  $u(x, t)$  συνήθως αντιπροσωπεύει μια μη αρνητική βιολογική, φυσική ή χημική μεταβλητή, όπως η πυκνότητα ή η συγκέντρωση.

Η γενική κλάση (5.1.1) περιλαμβάνει αρκετές γνωστές εξισώσεις όπως οι επόμενες:

- Η εξίσωση Fisher ή εξίσωση logistic

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)$$



που αποτελεί το αρχέτυπο ντετερμινιστικό μοντέλο για την διάδοση ενός πλεονεκτικού γονιδίου σε ένα πληθυσμό διπλοειδών (με δύο χρωμοσώματα) ατόμων που ζουν σε μονοδιάστατο περιβάλλον.

- Η εξίσωση Newell-Whitehead

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u^2)$$

που προκύπτει κατόπιν κατάλληλης κανονικοποίησης, στην μελέτη θερμικής μεταφοράς ενός υγρού που θερμαίνεται από κάτω. Αναλογιζόμενοι την διαταραχή από μια σταθερή κατάσταση, η εξίσωση αυτή περιγράφει την εξέλιξη του μεγέθους της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας, εάν αυτή μεταβάλλεται αργά.

- Η εξίσωση Zeldovich

$$u_t = u_{xx} + u^2(1 - u)$$

που παρουσιάζεται στην θεωρία ανάφλεξης. Ο άγνωστος  $u$  αντιπροσωπεύει την θερμοκρασία, ενώ ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέρος αντιπροσωπεύει την δημιουργία θερμότητας ένεκα ανάφλεξης.

- Η εξίσωση KPP

$$u_t = u_{xx} + c(u)$$

όπου  $c$  διαφορίσιμη συνάρτηση για  $0 < u < 1, c(0) = 0, c(u) > 0$  για  $0 < u < 1, c(1) = 0$ , και  $c'(0) > c'(u)$  για  $0 < u < 1$ . Η ανωτέρω εξίσωση αποτελεί γενίκευση των εξισώσεων Fisher και Newell-Whitehead.

- Η εξίσωση Nagumo

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)(u - \alpha) \text{ με } 0 < \alpha < 1,$$

που είναι μια από ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφουν την μετάδοση ηλεκτρικών παλμών στα νεύρα.

- Η εξίσωση πορωδών μέσων γνωστή και ως εξίσωση Νευτώνειων πολυτροπικών φίλτρων

$$u_t = (u^m)_{xx} \text{ με } m > 0,$$

που ανάγεται στην γνωστή γραμμική εξίσωση θερμότητας για  $m = 1$ . Πήρε το όνομα της επειδή περιγράφει την ροή ενός αδιαβατικού αερίου σε πορώδες μέσο. Ο άγνωστος  $u$  αντιπροσωπεύει την πυκνότητα του αερίου, ενώ η σταθερά  $m$  σχετίζεται με την αδιαβατική σταθερά του αερίου. Χρησιμοποιείται επίσης για την περιγραφή μη γραμμικής μεταφοράς

θερμότητας, διάχυσης εξαρτώμενης από την συγκέντρωση, κίνησης σωματιδίων πλάσματος σε μαγνητικά πεδία, και εξέλιξης βιολογικών πληθυσμών. Για  $m = 2$  απαντάται στην θεωρία οριακού στρώματος, αλλά και στην αδιαστατοποίηση της εξίσωσης Boussinesq στην υδρολογία. Για  $m = 7/2$  παρουσιάζεται στην μελέτη των ηλιακών εκλάμψεων, ενώ έχει επίσης προταθεί ως κατάλληλο μοντέλο για την περιγραφή της εξάπλωσης διαγαλαξιακών πολιτισμών.

- Η εξίσωση πορωδών μέσων με απορρόφηση, όπου  $m > 0$  και  $p > 0$ .

$$u_t = (u^m)_{xx} - u^p \quad \text{ή} \quad u_t = (u^m)_{xx} + u^p$$

- Η εξίσωση Burgers

$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

στην οποία αναφερθήκαμε εκτενώς σε προηγούμενα κεφάλαια.

- Η εξίσωση πορωδών μέσων με μεταφορά όπου  $m, n$  θετικές σταθερές.

$$u_t = (u^m)_{xx} + (u^n)_x$$

- Η εξίσωση Richards γνωστή και ως η μη γραμμική εξίσωση Fokker-Planck

$$u_t = (D(u)u_x + b(u))_x$$

Υπό κατάλληλες συνθήκες επί των συναρτήσεων  $D$  και  $b$ , αυτή η εξίσωση περιγράφει την μονοδιάστατη μεταφορά του νερού σε ένα ομογενές μη κορεσμένο έδαφος. Το  $u$  αντιπροσωπεύει την υγρασία του εδάφους. Ο όρος  $u_{xx}$  στο δεξιό μέρος της εξίσωσης αντιπροσωπεύει την τριχοειδή αναρρόφηση, ενώ ο όρος  $u_x$  σχετίζεται με την επίδραση της βαρύτητας και είναι ανάλογος της υδραυλικής αγωγιμότητας του εδάφους.

- Το πρόβλημα της απόσβεσης

$$u_t = (u^m)_{xx} - \begin{cases} u^{-p}, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}$$

όπου  $m > 0$  και  $p > 0$ .

- Μοντέλα ανάφλεξης

$$u_t = u_{xx} + \begin{cases} 0, & 0 \leq u < \delta \\ c(u), & u \geq \delta \end{cases}$$

όπου  $c(u) > 0$  για  $u > \delta$  και  $c(\delta) \geq 0$ . Αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν την ανάφλεξη μιας φλόγας με ένα αντιδραστήριο σε μια μονοβηματική χημική αντίδραση. Ο άγνωστος  $u$  αντιπροσωπεύει την κανονικοποιημένη θερμοκρασία, και η  $c(u)$  έναν κανονικοποιημένο όρο με θερμοκρασία ανάφλεξης  $\delta$ .

- Η εξίσωση πορωδών μέσων με μεταφορά και αντίδραση

$$u_t = (u^m)_{xx} + (b_0 u^n)_x + c_0 u^p - c_1 u^q,$$

όπου  $m > 0, n > 0, p > 0, q > 0, b_0, c_0 \geq 0$  και  $c_1 \geq 0$  αποτελούν σταθερές.

Επανερχόμενοι στην γενική εξίσωση

$$u_t = (\alpha(u))_{xx} + (b(u))_x + c(u) \quad (5.1.2)$$

θα αναζητήσουμε μόνο μη αρνητικές λύσεις αυτής. Ο συντελεστής  $b$  μπορεί να θεωρηθεί ως μια μη γραμμική συνάρτηση μεταφοράς ροής, με το  $b'$  την αντίστοιχη μη γραμμική ταχύτητα, ενώ το  $\alpha$  αποτελεί τον συντελεστή της διάχυσης.

Θα κάνουμε υποθέσεις για τα  $\alpha, b, c$  τόσο γενικής φύσεως που θα μπορούν να θεωρηθούν στο όριο των σύγχρονων προϋποθέσεων για την μαθηματική θεωρία των Μ.Δ.Ε της μορφής (5.1.2) και θα επιτρέψουμε στα  $\alpha', b'$  να μηδενίζονται σε ορισμένα σημεία αλλά και ο όρος της αντίδρασης  $c$  να είναι μη συνεχής.

Θεωρούμε κατάρχη ότι η (5.1.2) έχει λύση οδεύοντος κύματος της μορφής

$$u(x, t) = f(\xi) \text{ με } \xi = x - \sigma t \quad (5.1.3)$$

όπου  $\sigma$  σταθερά που αντιπροσωπεύει την ταχύτητα του κύματος. Αντικαθιστώντας την (5.1.3) στην (5.1.2) λαμβάνουμε την Σ.Δ.Ε

$$(\alpha(f))'' + (b(f))' + c(f) + \sigma f' = 0 \quad (5.1.4)$$

όπου  $f'$  η παράγωγος της  $f$  ως προς  $\xi$ .

Για την γενική κλάση Μ.Δ.Ε της μορφής (5.1.2), η (5.1.4) δεν έχει πάντοτε κλασσική λύση. Για παράδειγμα για την εξίσωση πορωδών μέσων,  $u_t = (u^m)_{xx}$ , η εξίσωση (5.1.4) γίνεται  $(f^m)'' + \sigma f' = 0$ . Για  $m > 1$  έχουμε τη λύση

$$f(\xi) = \begin{cases} (-\frac{m-1}{m}\sigma\xi)^{1/(m-1)}, & \xi < 0 \\ 0, & \xi \geq 0 \end{cases} \quad (5.1.5)$$

για κάθε  $\sigma > 0$ . Αυτή η λύση έχει φυσικό νόημα, καθώς τα  $f$  και  $(f^m)'$  που στην περίπτωση των πορωδών μέσων αντιστοιχούν στην πυκνότητα και την ροή αντίστοιχα, είναι συνεχής. Για

την περίπτωση  $m \geq 2$  όμως η δοθείσα συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο  $\xi = 0$  και έτσι δεν είναι κλασσική λύση.

Θέτοντας  $g(\xi) = -(\alpha(f))'(\xi)$  η (5.1.4) ανάγεται στο σύστημα

$$\begin{cases} f' = -g/\alpha'(f) \\ g' = -g\{\sigma + b'(f)\}/\alpha'(f) + c(f) \end{cases} \quad (5.1.6)$$

Στον χώρο φάσεων οι τροχιές του ανωτέρω συστήματος δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{dg}{df} = \sigma + b'(f) - \frac{c(f)\alpha'(f)}{g} \quad (5.1.7)$$

Αν επιπλέον, η (5.1.4) δέχεται λύση  $f(\xi)$  για την οποία  $f(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0$  και  $f(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} l$  και

$$(\alpha(f))'(\xi) \rightarrow 0 \text{ καθώς } \xi \rightarrow \infty$$

αυτή η λύση απαραίτητα αντιστοιχεί σε μια τροχιά που προσεγγίζει το σημείο  $(f, g) = (0, 0)$  στον χώρο φάσεων. Θέτοντας

$$\theta(f(\xi)) = g(\xi) \text{ και } s = f(\xi)$$

και ολοκληρώνοντας την (5.1.7) με αρχικές συνθήκες  $(0, 0)$ , αυτή η τροχιά μπορεί να χαρακτηριστεί ως λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\theta(s) = \sigma s + b(s) - \int_0^s \frac{c(r)\alpha'(r)}{\theta(r)} dr \quad (5.1.8)$$

όπου  $\theta$  άγνωστος. Αντιστρόφως μια λύση  $f$  της (5.1.4) μπορεί να κατασκευαστεί από μια λύση  $\theta$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8) λύνοντας την

$$\frac{\alpha'(f)}{\theta(f)} f' = -1 \quad (5.1.9)$$

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δείξουμε ότι με την μελέτη της (5.1.8), μπορούμε να εξάγουμε καινούρια συμπεράσματα και μια εκτεταμένη θεωρία για τις λύσεις οδοντώντων κυμάτων των μη γραμμικών εξισώσεων διάχυσης-μεταφοράς-αντίδρασης της μορφής (5.1.2). Η σχετική θεωρία που έχει αναπτυχθεί για την εξίσωση (5.1.8) μπορεί να βρεθεί στην [29]

Σε σύγκριση με την μελέτη του χώρου φάσεων του (5.1.6) που σπάνια μπορεί να γίνει ολικά, ένα πλεονέκτημα της χρήσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8), αποτελεί το γεγονός ότι πρέπει να ελεγχθούν λίγες λεπτομέρειες της εξίσωσης. Για να αναλύσουμε την πλέον λεπτομερή

συμπεριφορά των οδευόντων κυμάτων, μένει να κατανοήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των λύσεων  $\theta$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8), που όμως μπορούν να διαφέρουν από εφαρμογή σε εφαρμογή.

Λαμβάνοντας υπόψιν μια συνθήκη για το  $\theta$  που επιτρέπει την εύρεση του  $f$  από την (5.1.9), και υποθέτοντας  $c(0) = c(l) = 0$  με  $l > 0$ , ένα από τα πολλά αποτελέσματα που υποδεικνύει τις δυνατότητες της μεθόδου είναι το ακόλουθο.

**Η (5.1.2) παρουσιάζει λύσεις κυματικών μετώπων (wave fronts) με ταχύτητα  $\sigma$  εάν και μόνο εάν η ολοκληρωτική εξίσωση (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  στο  $[0, l]$  τέτοια ώστε  $\theta(l) = 0$ .**

## 5.2 Βασική Υπόθεση Εργασίας

Δεδομένου ότι στην εξίσωση (5.1.2), ο άγνωστος  $u(x, t)$  είναι γενικά μη αρνητικός, θα υποθέτουμε εφεξής ότι οι συντελεστές της εξίσωσης ορίζονται σε κάποιο κλειστό διάστημα  $I$  με ελάχιστο το 0. Επειδή όμως θέλουμε να ασχοληθούμε με φραγμένες αλλά και μη φραγμένες λύσεις της (5.1.2) σε ένα κοινό πλαίσιο, θα δηλώσουμε το μέγιστο του διαστήματος αυτού με  $l$  που δύναται να είναι άπειρο ή πεπερασμένο. Έτσι θα θεωρούμε

$$I = [0, l) \text{ με } l = \infty, \text{ ή } I = [0, l] \text{ με } 0 < l < \infty$$

Οι υποθέσεις για την εξίσωση (5.1.2) είναι οι ακόλουθες:

Οι συντελεστές  $a, b$  και  $c$  ορίζονται στο  $I$ , είναι πραγματικές συναρτήσεις και

- (i) Η συνάρτηση  $a$  είναι συνεχής στο  $I$ , συνεχώς διαφορίσιμη στο  $(0, l)$ , με  $a'(u) > 0$  για  $0 < u < l$ , και  $a(0) = 0$ .
- (ii) Η συνάρτηση  $b$  είναι συνεχής στο  $I$ , διαφορίσιμη στο  $(0, l)$ , με  $b(0) = 0$ .
- (iii) Η συνάρτηση  $c$  είναι τέτοια ώστε τα πλευρικά όρια  $c(u-)$  και  $c(u+)$  να υπάρχουν για κάθε  $0 < u < l$ , με  $c(u-) < 0$  εάν  $c(u) < 0$ , και,  $c(u+) > 0$  εάν  $c(u) > 0$ ,

$$\int_0^s |c(r)| a'(r) dr < \infty \text{ για κάθε } 0 < s \leq l, \quad s < \infty,$$

$$c(0) = 0 \text{ και } c(l) = 0 \text{ εάν } l < \infty.$$

Οι υποθέσεις αυτές ισχύουν για όλες τις εξισώσεις που αναφέραμε στην §(5.1).

Για  $c$  συνεχή στο  $I$  θα αρκούσε να θεωρήσουμε ασθενείς λύσεις της εξίσωσης (5.1.4). Παρόλα αυτά, θα πρέπει να μπορούμε να θεωρούμε και όρους μη ομαλής (singular) αντίδρασης. Για αυτό εισάγουμε έναν ορισμό της λύσης της (5.1.4) που επιτρέπει την θεώρηση οδεύοντων-κυμάτων για τα οποία δεν ισχύει αναγκαστικά ότι η  $c(f)$  είναι παντού τοπικά ολοκληρώσιμη. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση όπου  $l = \infty$  θεωρούμε

$$c_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, & s \leq \varepsilon \\ c(s), & s > \varepsilon \end{cases}$$

για κάθε  $\varepsilon > 0$ , και εάν  $l < \infty$  φραγμένο θεωρούμε

$$c_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0, & s \leq \varepsilon \\ c(s), & \varepsilon < s < l - \varepsilon \\ 0, & s \geq l - \varepsilon \end{cases}$$

για κάθε  $l/2 > \varepsilon > 0$ .

### 5.3 Μαθηματικοί ορισμοί κυματικών λύσεων

Στην §1.2 δώσαμε ορισμένους κυρίως διαισθητικούς ορισμούς κυμάτων. Στην συνέχεια παραθέτουμε μερικούς αυστηρά μαθηματικούς ορισμούς κυμάτων που θα μας φανούν χρήσιμοι στην συνέχεια.

**Ορισμός 5.3.1** *Μια συνάρτηση  $f$  που ορίζεται σε ένα ανοιχτό πραγματικό διάστημα  $\Omega$  με τιμές στο  $I$  ονομάζεται λύση οδεύοντος-κύματος της εξίσωσης (5.1.2) με ταχύτητα  $\sigma$  εάν  $f \in C(\Omega)$ ,  $(\alpha(f))' \in L^1_{loc}(\Omega)$ ,  $c_\varepsilon(f) \in L^1_{loc}(\Omega)$  για κάθε αρκούντως μικρό  $\varepsilon > 0$ , και*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} [\{(\alpha(f))' + b(f) + \sigma f\} \phi' - c_\varepsilon(f) \phi] d\xi = 0 \quad (5.3.1)$$

για κάθε δοθείσα  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Κάθε κλασική ή ασθενής λύση της (5.1.4) στο  $\Omega$  θεωρείται λύση υπό την έννοια του ανωτέρω ορισμού.

**Ορισμός 5.3.2** *Εάν για τον προηγούμενο ορισμό ισχύει  $\Omega = (-\infty, \infty)$ , τότε η συνάρτηση  $f$  λέγεται ότι είναι μια ολική λύση οδεύοντος-κύματος της εξίσωσης (5.1.2).*

**Ορισμός 5.3.3** Δύο λύσεις οδευόντων-κυμάτων λέγονται **δυσδιάκριτες** (*indistinct*) όταν η μία αποτελεί μετατόπιση της άλλης ή όταν η μία αποτελεί περιορισμό της άλλης σε ένα μικρότερο πεδίο. Ειδιάλλως ονομάζονται **διακριτές** (*distinct*)

**Ορισμός 5.3.4** Μια φραγμένη ολική λύση οδευόντος-κύματος που είναι μονότονη, αλλά όχι σταθερή, και τέτοια ώστε

$$f(\xi) \rightarrow l^- \text{ καθώς } \xi \rightarrow -\infty \quad (5.3.2)$$

και

$$f(\xi) \rightarrow l^+ \text{ καθώς } \xi \rightarrow \infty \quad (5.3.3)$$

για κάποια  $l^-, l^+ \in I$  με  $c(l^-) = c(l^+) = 0$  λέγεται ότι είναι μια λύση **κυματικού μετώπου** (*wavefront*) από το  $l^-$  στο  $l^+$ .

**Ορισμός 5.3.5** Μια λύση οδευόντος-κύματος που ορίζεται ως μονότονη, αλλά όχι σταθερή στο  $(\omega, \infty)$  για κάποια πραγματική σταθερά  $\omega$ , και τέτοια ώστε η (5.3.3) να ισχύει για κάποια  $l^+ \in I$  με  $c(l^+) = 0$  λέγεται ότι είναι μια λύση **ημικυματικού μετώπου** στο  $l^+$ . Αντιστοίχως μια λύση οδευόντος-κύματος που ορίζεται ως μονότονη, αλλά όχι σταθερή στο  $(-\infty, \omega)$  για κάποια πραγματική σταθερά  $\omega$ , και τέτοια ώστε η (5.3.2) να ισχύει για κάποια  $l^-$  με  $c(l^-) = 0$  λέγεται ότι είναι μια λύση **ημικυματικού μετώπου** από το  $l^-$

**Ορισμός 5.3.6** Μια λύση ημικυματικού μετώπου που δεν είναι επεκτάσιμη σε μια ολική λύση οδευόντος-κύματος λέγεται ότι είναι μια λύση **αυστηρά ημικυματικού μετώπου**

Για να περιγράψουμε πλήρως την αναλογία μεταξύ των λύσεων οδευόντων-κυμάτων της (5.1.2) και των λύσεων της (5.1.8) χρειαζόμαστε επιπλέον ένα περιορισμό. Επιστρέφοντας στην (5.1.8), βλέπουμε ότι μια λύση οδευόντος-κύματος  $f$  και μια λύση  $\theta$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης, σχετίζονται μέσω της (5.1.9). Από αυτό συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\nu}^{f(\xi)} \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \xi_0 - \xi$$

για κάποιο  $\nu$  μέσα στο πεδίο ορισμού της  $\theta$  και κάποιο αριθμό  $\xi_0$ . Για να δικαιολογηθεί αυτό το παραπάνω ολοκλήρωμα πρέπει να είναι καλά ορισμένο. Πιο συγκεκριμένα, για μια λύση οδευόντος-κύματος της (5.1.2) με τιμές  $f(\xi)$  στο  $(0, \delta)$ , αυτό σημαίνει ότι η  $\theta$  ορίζεται απαραίτητα στο πεδίο  $(0, \delta)$ , και

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr < \infty \text{ για κάθε } 0 < s_0 < s_1 < \delta \quad (5.3.4)$$

Εφεξής ο περιορισμός αυτός θα αναφέρεται ως:

**Ορισμός 5.3.7** Μια λύση  $\theta$  της (5.1.8) σε μια δεξιά γειτονιά του μηδενός  $[0, \delta)$ , ή  $[0, \delta]$  με  $\delta < \infty$ , λέγεται ότι ικανοποιεί την **συνθήκη ολοκληρωσιμότητας** σε αυτή την γειτονιά εάν ισχύει η (5.3.4)

Υπό αυτή την συνθήκη, οι μονότονες λύσεις οδευόντων-κυμάτων της (5.1.2) χαρακτηρίζονται από τις αντίστοιχες λύσεις της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8). Τα ακόλουθα μπορούν να αποδειχθούν (βλ. §5.5)

**Θεώρημα 5.3.8** Η (5.1.2) έχει μια λύση ημικυματικού μετώπου με ταχύτητα  $\sigma$  φθίνουσα στο  $\theta$  εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση που ικανοποιεί την συνθήκη της ολοκληρωσιμότητας σε ένα διάστημα  $[0, \delta)$  για κάποιο  $0 < \delta \leq l$ .

**Θεώρημα 5.3.9** Έστω  $l < \infty$ . Η (5.1.2) έχει μια λύση κυματικού μετώπου από το  $l$  στο  $\theta$  με ταχύτητα  $\sigma$  εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  που ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο  $[0, l]$  τέτοια ώστε  $\theta(l) = 0$ .

**Θεώρημα 5.3.10** Έστω  $l = \infty$ . Η (5.1.2) έχει μια μη φραγμένη μονότονη λύση οδευόντος-κύματος με ταχύτητα  $\sigma$  φθίνουσα στο  $\theta$  εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  που ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο  $[0, \infty)$ .

## 5.4 Θεωρία ολοκληρωτικών εξισώσεων

Η δυσκολία με την μελέτη της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8) βρίσκεται στον μή ομαλό πυρήνα της. Έστω η παρακάτω πιο γενική εξίσωση

$$\theta(s) = F(s) - \int_0^s \frac{g(r)}{\theta(r)} dr, \quad (5.4.1)$$

όπου  $F$  συνεχής στο  $I$  με  $F(0) \geq 0$ , και  $g$  ολοκληρώσιμη για κάθε φραγμένο υποσύνολο του  $I$ . Έστω ακόμη

$$G(r, \theta) = \begin{cases} g(r)/\theta & \text{για } \theta > 0 \\ -\infty & \text{για } g(r) < 0 \text{ και } \theta = 0 \\ 0 & \text{για } g(r) = 0 \text{ και } \theta = 0 \\ \infty & \text{για } g(r) > 0 \text{ και } \theta = 0 \end{cases}$$

**Ορισμός 5.4.1** Μια συνάρτηση  $\theta$  λέγεται ότι είναι λύση της (5.4.1) σε μια δεξιά γειτονιά του μηδενός  $[0, \delta) \subseteq I$  εάν ορίζεται ως πραγματική, μη αρνητική και συνεχής στο  $[0, \delta)$ , η  $G(r, \theta(r))$  είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $(0, \delta)$ ,



$$\int_0^s G(r, \theta(r))dr := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\epsilon^s G(r, \theta(r))dr \text{ υπάρχει}$$

και ικανοποιεί την

$$\theta(s) = F(s) - \int_0^s G(r, \theta(r))dr \quad (5.4.2)$$

$\forall s \in (0, \delta)$ . Μια συνάρτηση  $\theta$  λέγεται ότι είναι λύση της (5.4.1) σε μία συμπαγή δεξιά γειτονιά του μηδενός  $[0, \delta]$  εάν επιπλέον η  $\theta$  είναι συνεχής στο  $[0, \delta]$  και μπορεί να περάσει στο όριο  $s \uparrow \delta$  την (5.4.2).

Αποτελέσματα απο την θεωρία της εξίσωσης (5.4.1) που αποδείχθηκαν στο [29] και θα εφαρμοστούν στην (5.1.8) περιλαμβάνουν τα επόμενα λήμματα. Σε ένα μέρος αυτών των αποτελεσμάτων έναν σημαντικό ρόλο παίζει η μεταβλητή

$$Q(s) := \left| 2 \int_0^s g(r)dr \right|^{1/2}$$

**Λήμμα 5.4.2** Εάν  $F(0) > 0$  η (5.4.1) έχει μια μοναδική θετική λύση  $\theta$  σε μια δεξιά γειτονιά του μηδενός  $[0, \delta)$  τέτοια ώστε  $\delta = l$  ή  $\theta(s) \rightarrow 0$  καθώς  $s \uparrow \delta$ .

**Λήμμα 5.4.3** Η (5.4.1) δεν έχει λύση, έχει μοναδική λύση ή έναν μη αριθμήσιμο αριθμό λύσεων που μεγιστοποιείται (majorized) από μια μοναδική μέγιστη λύση (maximal solution). Επιπλέον:

- (i) Εάν  $g(s) \leq 0$  για κάθε  $s \in (0, \delta)$ , όπου  $0 < \delta < l$ , τότε η (5.4.1) δεν έχει λύση στο  $[0, \delta)$  ή έχει μοναδική λύση στο  $[0, \delta)$ .
- (ii) Εάν  $g(s) \geq 0$  και  $Q(s) > 0$  για κάθε  $s \in (0, \delta)$ , όπου  $0 < \delta \leq l$ , και για δοθέν  $s \in (0, \delta)$  υπάρχει  $s^* \in (s, \delta)$  και  $0 < \kappa < 2$  τέτοια ώστε  $F(r) - F(s) \leq \kappa \left\{ 2 \int_s^r g(w)dw \right\}^{1/2}$  για κάθε  $r \in (s, s^*)$ , τότε η (5.4.1) δεν έχει λύση στο  $[0, \delta)$  ή έχει έναν μη αριθμήσιμο αριθμό λύσεων στο  $[0, \delta)$ .

**Λήμμα 5.4.4** Έστω  $g(s) \geq 0$  και  $Q(s) > 0$  για κάθε  $s \in (0, \delta)$ , όπου  $0 < \delta \leq l$ . Ορίζουμε

$$L(s) := 1/|\ln Q(s)| \text{ και } J(s) := 1/|\ln L(s)|. \quad (5.4.3)$$

- (i) Εάν  $F(s) \geq (2Q - QL^2\{1 + J^2\}/4)(s)$  για κάθε  $s \in (0, \delta)$ , τότε η (5.4.1) δέχεται μέγιστη λύση  $\theta$  σε μια δεξιά γειτονιά του μηδενός. Επιπλέον,  $F(s) - (Q + QL\{1 + J\}^2/2)(s) \leq \theta(s) \leq F(s)$  για κάθε  $s \in (0, \delta^*)$ , όπου  $0 < \delta^* \leq \delta$ .
- (ii) Εάν  $F(s) \leq (2Q - \kappa QL^2)(s)$  για κάθε  $s \in (0, \delta)$  για κάποιο  $\kappa > 1/4$ , τότε η (5.4.1) δεν έχει λύση στο  $[0, \delta)$

**Λήμμα 5.4.5** Έστω  $g(s) \leq 0$  και  $Q(s) > 0$  για κάθε  $s \in (0, \delta)$  όπου  $0 < \delta \leq l$

- (i) Εάν για κάθε  $s \in (0, \delta)$  υπάρχει  $s^* \in (0, \delta)$  και  $0 < \kappa < 2$ , τέτοιο ώστε  $F(r) - F(s) \leq \kappa \left\{ 2 \int_r^s |g(w)| dw \right\}^{1/2}$  για κάθε  $r \in (s^*, s)$ , τότε η (5.4.1) έχει μια μοναδική λύση  $\theta$  στο  $[0, \delta)$ . Επιπλέον, εάν υπάρχει ένα σημείο  $s \in (0, \delta)$  για το οποίο  $\theta(s) = 0$ , τότε  $\theta \equiv Q \equiv 0$  στο  $[0, s]$ .
- (ii) Εάν  $\alpha Q(s) \leq F(s) \leq \beta Q(s)$  για κάθε  $s \in (0, \delta)$ , για κάποιες σταθερές  $-\infty < \alpha \leq \beta \leq \infty$  με  $\alpha \geq -2/(\sqrt{\beta^2 + 4} + \beta)$ , τότε η (5.4.1) έχει μια μοναδική λύση  $\theta$  στο  $[0, \delta)$ . Επιπλέον, για κάθε  $s \in [0, \delta)$ ,

$$F(s) + \left\{ 2/(\sqrt{\beta^2 + 4} + \beta) \right\} Q(s) \leq \theta(s) \leq F(s) + \left\{ 2/(\sqrt{\alpha^2 + 4} + \alpha) \right\} Q(s).$$

**Λήμμα 5.4.6** Οποιαδήποτε λύση  $\theta$  της εξίσωσης (5.4.1) σε ένα φραγμένο διάστημα  $[0, \delta) \subseteq I$  αποτελεί λύση της (5.4.1) στο  $[0, \delta]$ . Επιπλέον,  $\delta = l, \theta(s) \rightarrow 0$  καθώς  $s \uparrow \delta$ , ή η  $\theta$  είναι επεκτάσιμη σε ένα διάστημα  $[0, \delta^*)$  με  $\delta < \delta^* \leq l$ .

**Λήμμα 5.4.7** Έστω ότι η εξίσωση (5.4.1) έχει δύο διαφορετικές παραμέτρους και συντελεστές  $F_i$  και  $g_i$  σε ένα διάστημα  $I$  για  $i = 1, 2$ .

- (i) Έστω  $F_2(0) \geq F_1(0)$ ,  $s \mapsto F_2(s) - F_1(s)$  είναι μη φθίνουσα στο  $[0, \delta)$ , και  $g_2 \leq g_1$  σχεδόν παντού στο  $(0, \delta)$ , για κάποιο  $0 < \delta \leq l$ . Τότε, εάν η (5.4.1) με  $i = 1$  έχει μια λύση  $\theta_1$  στο  $[0, \delta)$  τέτοια ώστε  $g_2/\theta_1 \in L^1_{loc}(0, \delta)$ , η εξίσωση με  $i = 2$  έχει μια λύση  $\theta_2$  στο  $[0, \delta)$  τέτοια ώστε  $\theta_2(s) \geq \theta_1(s)$  για κάθε  $s \in [0, \delta)$ . Επιπλέον, εάν  $F_2(s) - F_1(s) > F_2(r) - F_1(r)$  για κάθε  $0 \leq r < s$ , τότε  $\theta_2(s) = \theta_1(s)$  εάν και μόνο εάν  $\theta_2(s) = 0$ .
- (ii) Έστω  $F_2 \geq F_1$  στο  $[0, \delta)$ , και  $\max\{0, g_2\} \leq g_1$  σχεδόν παντού στο  $(0, \delta)$  για κάποιο  $0 < \delta \leq l$ . Τότε, εάν η (5.4.1) με  $i = 1$  έχει μια λύση  $\theta_1$  στο  $[0, \delta)$ , η εξίσωση με  $i = 2$  έχει μια λύση  $\theta_2$  στο  $[0, \delta)$  τέτοια ώστε  $\theta_2(s) \geq \theta_1(s) + F_2(s) - F_1(s)$  για κάθε  $s \in [0, \delta)$ .

## 5.5 Απόδειξη ισοδυναμίας

Θα ξεκινήσουμε με προκαταρκτικές πληροφορίες για τις λύσεις οδοντών-κυμάτων της (5.1.2).

**Λήμμα 5.5.1** Έστω ότι η (5.1.2) έχει μια λύση οδούκτος-κύματος  $f$  σε ένα ανοικτό διάστημα  $\Omega$ .

- (i) Εάν  $f \equiv f^*$  για κάποιο  $f^* \in I$ , τότε  $c(f^*) = 0$ .

(ii) Εάν  $0 < f(\xi) < l$  για κάθε  $\xi \in \Omega$ , τότε  $\alpha(f) \in C^1(\Omega)$ ,  $(\alpha(f))' + b(f) + \sigma f$  είναι απολύτως συνεχής στο  $\Omega$ , και

$$((\alpha(f))' + b(f) + \sigma f)' + c(f) = 0 \quad (5.5.1)$$

σχεδόν παντού στο  $\Omega$ .

(iii) Εάν  $l > f(\xi_1) > f(\xi) > 0$  για κάθε  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq \Omega$  και κάποιο  $\xi_1 \in \Omega$ , τότε  $(\alpha(f))'(\xi_1) < 0$  ή  $c(f(\xi_1)) \geq 0$ .

(iv) Εάν  $l > f(\xi) > f(\xi_1) > 0$  για κάθε  $\xi \in (\xi_0, \xi_1) \subseteq \Omega$  και κάποιο  $\xi_1 \in \Omega$ , τότε  $(\alpha(f))'(\xi_1) < 0$  ή  $c(f(\xi_1)) \geq 0$ .

**Απόδειξη** Το (i) μπορεί να αποδειχθεί τυπικά με αντικατάσταση στην (5.1.4) και προκύπτει από τον Ορισμό 5.3.1. Για το (ii), όταν  $0 < f < l$ , ο Ορισμός 5.3.1 είναι ισοδύναμος του ορισμού μιας λύσης για την (5.1.4) με την έννοια των κατανομών. Για τα (iii), (iv) εάν η  $\Sigma.\Delta.E$  (5.1.4) έχει ένα τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο  $\xi_1$ , τότε με αντικατάσταση στην (5.1.4) αναγκαστικά  $c(f(\xi_1)) \geq 0$ , ενώ αν η εξίσωση έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο  $\xi_1$ , τότε  $c(f(\xi_1)) \leq 0$ .

Με τις παραπάνω πληροφορίες μπορούμε να αποδείξουμε το ευθύ των θεωρημάτων 5.3.8, 5.3.9, 5.3.10.

Έστω ότι η εξίσωση (5.1.2) έχει μια μονότονη λύση οδύοντος-κύματος σε ένα διάστημα  $\Omega = (\omega, \infty)$  για το οποίο ισχύει  $f(\xi) \rightarrow 0$  καθώς  $\xi \rightarrow \infty$  και  $f(\xi) \rightarrow \delta$  καθώς  $\xi \rightarrow \omega$  με  $0 < \delta \leq l$  και  $-\infty \leq \omega < \infty$ . Θέτουμε

$$\Xi_0 := \sup\{\xi \in (\omega, \infty) : f(\xi) > 0\}$$

και

$$\Xi_1 := \inf\{\xi \in (\omega, \infty) : f(\xi) < \delta\}$$

Απο το Λήμμα 5.5.1(ii),  $\alpha(f) \in C^1(\Xi_1, \Xi_0)$ ,  $(\alpha(f))' + b(f) + \sigma f$  είναι απολύτως συνεχής στο  $(\Xi_1, \Xi_0)$  και η (5.5.1) ισχύει σχεδόν παντού στο  $(\Xi_1, \Xi_0)$ . Συνεπακόλουθα μπορούμε να ορίσουμε μια συνεχή μη αρνητική συνάρτηση  $\theta$  στο  $(0, \delta)$  μέσω της σχέσης

$$\theta(f(\xi)) = -(\alpha(f))'(\xi) \text{ για } \xi \in (\Xi_1, \Xi_0). \quad (5.5.2)$$

Θα δείξουμε ότι η  $\theta$  αποτελεί λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8) που ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας (5.3.4) που αναζητούμε.

Έστω

$$S := \{\xi \in (\Xi_1, \Xi_0) : (\alpha(f))'(\xi) = 0\},$$

και παρατηρούμε ότι απο το Λήμμα 5.5.1,  $c(f(\xi)) = 0$  για κάθε  $\xi \in S$ . Ακολούθως

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} |c(f(\xi))| d\xi = \int_{(\xi_1, \xi_2)/S} |c(f(\xi))| d\xi = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{-|c(f(\xi))|(\alpha(f))'(\xi)}{\theta(f(\xi)) + \varepsilon} d\xi$$

για οποιοδήποτε  $\Xi_1 < \xi_1 < \xi_2 < \Xi_0$ . Με την σύμβαση πως οποιοδήποτε κλάσμα της μορφής  $c\alpha'/\theta$  παίρνει την τιμή 0 εάν τα  $c\alpha'$  και  $\theta$  μηδενίζονται ταυτόχρονα, προκύπτει ότι

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} |c(f(\xi))| d\xi = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{f(\xi_2)}^{f(\xi_1)} \frac{|c(r)\alpha'(r)|}{\theta(r) + \varepsilon} dr = \int_{f(\xi_2)}^{f(\xi_1)} \left| \frac{c(r)\alpha'(r)}{\theta(r)} \right| dr$$

για οποιοδήποτε  $\Xi_1 < \xi_1 < \xi_2 < \Xi_0$ . Με την παραπάνω σύμβαση, το  $c\alpha'/\theta$  είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του  $(0, \delta)$ . Επιπλέον, επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω χωρίς τις απόλυτες τιμές αυτή την φορά, έχουμε

$$\int_{f(\xi_2)}^{f(\xi_1)} \frac{c(r)\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \int_{\xi_1}^{\xi_2} c(f(\xi)) d\xi \text{ για κάθε } \Xi_1 < \xi_1 < \xi_2 < \Xi_0. \quad (5.5.3)$$

Εναλλακτικά επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω αντικαθιστώντας το  $c$  με 1, θα έχουμε ότι το  $\alpha'/\theta$  είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $(0, \delta)$ , και

$$\int_{f(\xi_2)}^{f(\xi_1)} \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \xi_2 - \xi_1 - \int_{(\xi_1, \xi_2) \cap S} 1 d\xi \quad (5.5.4)$$

για κάθε  $\Xi_1 < \xi_1 < \xi_2 < \Xi_0$ .

Ολοκληρώνοντας την (5.5.1) και συνδυάζοντας τις (5.5.2), (5.5.3), η  $\theta$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$\theta(s_1) - \sigma s_1 - b(s_1) = \theta(s_0) - \sigma s_0 - b(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} \frac{c(r)\alpha'(r)}{\theta(r)} dr$$

για κάθε  $0 < s_0 < s_1 < \delta$ . Απο το Λήμμα 5.4.6, αυτό υπονοεί ότι

$$\mu := \lim_{s \downarrow 0} \theta(s) \geq 0 \text{ υπάρχει,} \quad (5.5.5)$$

$$\int_0^s \frac{c(r)\alpha'(r)}{\theta(r)} dr := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^s \frac{c(r)\alpha'(r)}{\theta(r)} dr \text{ υπάρχει,}$$

και

$$\theta(s) = \mu + \sigma s + b(s) - \int_0^s \frac{c(r)\alpha'(r)}{\theta(r)} dr$$

για κάθε  $0 < s < \delta$ , όπου, εάν  $\mu = 0$ , η  $\theta$  ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση (5.1.8) και την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας (5.3.4) στο  $[0, \delta)$ .

Μένει να δείξουμε ότι  $\mu = 0$ . Συνδυάζοντας τις (5.5.2), (5.5.5) προκύπτει ότι  $(\alpha(f))'(\xi) \rightarrow -\mu$  καθώς  $\xi \uparrow \Xi_0$ . Άρα, εάν  $\Xi_0 = \infty$ , αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν  $\mu = 0$ . Ενώ εάν  $\Xi_0 < \infty$ , αφού  $(\alpha(f))' \equiv f \equiv 0$  στο  $(\Xi_0, \infty)$ , από την (5.3.1) προκύπτει ότι  $\mu = 0$ .

Αυτό αποδεικνύει το ευθύ των Θεωρημάτων 5.3.8, 5.3.10. Το ευθύ του θεωρήματος 5.3.9 μπορεί να αποδειχθεί με την επέκταση των παραπάνω σχετικά με το όριο (5.5.5) στο αντίστοιχο όριο  $s \uparrow l$ .

Για να επιβεβαιωθούν τα αντίστροφα συμπεράσματα των Θεωρημάτων 5.3.8, 5.3.10, υποθέτουμε ότι η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  που ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο διάστημα  $[0, \delta]$  με  $0 < \delta \leq l$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι εάν  $\delta = l < \infty$ , τότε η  $\theta$  επιλύει την (5.1.8) στο  $[0, l]$ , και  $\theta(l) = 0$ . Έστω  $\nu \in (0, \delta)$  και θέτουμε

$$\Xi_0 := \int_0^\nu \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr \text{ και } \Xi_1 := - \int_\nu^\delta \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr \quad (5.5.6)$$

Κατόπιν, έστω  $\Omega$  το διάστημα  $(-\infty, \infty)$  εάν  $\delta = l < \infty$  ή το διάστημα  $(\Xi_1, \infty)$  στην αντίθετη περίπτωση. Τέλος, ορίζουμε την συνάρτηση  $f$  στον  $\Omega$  ως

$$- \int_\nu^{f(\xi)} \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \max\{\xi, \Xi_1\} \text{ για } \xi \leq 0 \quad (5.5.7)$$

$$\int_{f(\xi)}^\nu \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \min\{\xi, \Xi_0\} \text{ για } \xi > 0 \quad (5.5.8)$$

Θα δείξουμε ότι η  $f$  αποτελεί λύση οδεύοντος-κύματος της εξίσωσης (5.1.2) στο  $\Omega$  με τις ιδιότητες που αναζητούμε.

Προφανώς η  $f$  είναι συνεχής στον  $\Omega$ . Επιπλέον παραγωγίζοντας τις (5.5.7) και (5.5.8), το  $(\alpha(f))'$  υπάρχει στο  $(\Xi_1, \Xi_0)$  και ικανοποιεί την (5.5.2). Ακριβέστερα, αφού

$$\theta(0) = 0, \text{ και } \theta(\delta) = 0 \text{ εάν } \Xi_1 > -\infty, \quad (5.5.9)$$

συμπεραίνουμε ότι  $\alpha(f) \in C^1(\Omega)$ . Τώρα ορίζουμε την απεικόνιση  $\Psi$  στον  $(0, \delta)$  με  $\Psi(f(\xi)) = \xi$  για  $\xi \in (\Xi_1, \Xi_0)$ . Απο τις (5.5.7), (5.5.8) προκύπτει ότι η  $\Psi$  είναι απολύτως συνεχής στο  $(0, \delta)$  και  $\Psi'(s) = -\alpha'(s)/\theta(s)$  για σχεδόν όλα τα  $s \in (0, \delta)$ . Συνεπακόλουθα

$$\int_{\Psi(s_1)}^{\Psi(s_0)} |c(f(\xi))| d\xi = \int_{s_0}^{s_1} \frac{|c(r)|\alpha'(r)}{\theta(r)} dr$$

για κάθε  $0 < s_0 < s_1 < \delta$ . Αυτό υπονοεί ότι  $c \in L^1_{loc}(\Xi_1, \Xi_0)$ , και άρα  $c \in L^1_{loc}(\Omega)$  για αρκούντως μικρό  $\varepsilon > 0$ , όπου η  $c_\varepsilon$  ορίστηκε στην §5.2. Επιπλέον, εφαρμόζοντας το παραπάνω με  $c$  αντι για  $|c|$  η (5.5.3) ισχύει.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης των θεωρημάτων 5.3.8, 5.3.9, 5.3.10 μένει να δείξουμε ότι ισχύει η (5.3.1). Από τις (5.1.8), (5.5.2), (5.5.3) ισχύει

$$((\alpha(f))' + b(f) + \sigma f)(\xi_2) - ((\alpha(f))' + b(f) + \sigma f)(\xi_1) = - \int_{\xi_1}^{\xi_2} c(f(\xi)) d\xi$$

για κάθε  $\Xi_1 < \xi_1 < \xi_2 < \Xi_0$ . Από αυτό προκύπτει η απόλυτη συνέχεια του  $(\alpha(f))' + b(f) + \sigma f$  στο  $(\Xi_1, \Xi_0)$  και ότι η (5.5.1) ισχύει σχεδόν παντού στο  $(\Xi_1, \Xi_0)$ . Έτσι πολλαπλασιάζοντας την (5.5.1) με μια συνάρτηση ελέγχου  $\phi \in C_0^\infty$ , ολοκληρώνοντας τα δύο μέρη και χρησιμοποιώντας την (5.5.2) προκύπτει

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\{(\alpha(f))' + b(f) + \lambda f\}\phi' - c(f)\phi] d\xi \\ &= \phi(\xi_2)\{-\theta(f(\xi_2)) + b(f(\xi_2)) + \lambda f(\xi_2)\} - \phi(\xi_1)\{-\theta(f(\xi_1)) + b(f(\xi_1)) + \lambda f(\xi_1)\} \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

για κάθε  $\Xi_1 < \xi_1 < \xi_2 < \Xi_0$ . Με  $\xi_1 \downarrow \Xi_1$  και  $\xi_2 \uparrow \Xi_0$  στην (5.5.10) και έχοντας υπόψιν την (5.5.9) προκύπτει η (5.3.1)

## 5.6 Εφαρμογές

Θα εξετάσουμε το παράδειγμα ενός κυματικού μετώπου από το  $l$  στο  $0$  τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = 0 \text{ για κάθε } \xi \geq \xi^* \text{ για κάποιο } \xi^* \in (-\infty, \infty) \quad (5.6.1)$$

και

$$f(\xi) = l \text{ για κάθε } \xi \leq \xi^{**} \text{ για κάποιο } \xi^{**} \in (-\infty, \infty) \quad (5.6.2)$$

Αυτό αναδεικνύει ότι οι μεταβλητές  $\Xi_0$  και  $\Xi_1$  που εισήχθησαν στην προηγούμενη παράγραφο, για την απόδειξη των θεωρημάτων 5.3.8, 5.3.9, 5.3.10, δεν συμπίπτουν αναγκαστικά με τα supremum και infimum αντίστοιχα του πεδίου ορισμού του οδεύοντος κύματος. Οι μεταβλητές  $\Xi_0$  και  $\Xi_1$  παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην κατασκευή μιας λύσης οδεύοντος-κύματος της εξίσωσης (5.1.2) από μια λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8), και αντιστρόφως.

**Εφαρμογή 5.6.1** Έστω, λοιπόν η εξίσωση

$$u_t = (\sqrt{u(1-u)}u_x)_x + (k+2u)\sqrt{u(1-u)}, \quad (5.6.3)$$

όπου  $k$  αυθαίρετη σταθερά. Η (5.6.3) έχει λύση κυματικού μετώπου με ταχύτητα κύματος  $\sigma = k+1$  που δίνεται από την

$$f(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leq -\pi/2 \\ (1 - \sin \xi)/2, & -\pi/2 < \xi < \pi/2 \\ 0, & \xi \geq \pi/2 \end{cases} \quad (5.6.4)$$

Η εξίσωση αυτή εμπίπτει στην γενική μορφή της (5.1.2) με  $\alpha(u) = \int_0^u \sqrt{s(1-s)} ds$ ,  $b(u) = 0$ ,  $c(u) = (k+2u)\sqrt{u(1-u)}$ , και  $I := [0, 1]$ . Παραγωγίζοντας την (5.6.4) προκύπτει

$$f'(\xi) = -\sqrt{f(1-f)}(\xi) \text{ για κάθε } -\infty < \xi < \infty \quad (5.6.5)$$

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξει κανείς ότι η (5.6.4) αποτελεί κλασσική λύση της Σ.Δ.Ε  $(\sqrt{f(1-f)}f')' + (k+2f)\sqrt{f(1-f)}\sigma f' = 0$  στο  $(-\infty, \infty)$ , και άρα είναι μια λύση κυματικού μετώπου της (5.6.3) από το 1 στο 0 με ταχύτητα κύματος  $\sigma$ . Με όρους της προηγούμενης παραγράφου για αυτό το οδεύον-κύμα έχουμε  $\omega = -\infty$ ,  $\delta = 1$ ,  $\Xi_0 := \sup\{\xi \in (\omega, \infty) : f(\xi) > 0\} = \pi/2$  και  $\Xi_1 := \inf\{\xi \in (\omega, \infty) : f(\xi) < \delta\} = -\pi/2$ . Άρα ξαναγράφοντας την (5.5.2) ως  $\theta(f(\xi)) = -(\alpha'(f)f')(\xi) = -(\sqrt{f(1-f)}f')(\xi)$  για  $\xi \in (\Xi_1, \Xi_0)$ , και χρησιμοποιώντας την (5.6.5), παίρνουμε την

$$\theta(s) = s(1-s) \quad (5.6.6)$$

για  $0 < s < 1$ . Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχώς επεκτάσιμη στο  $I$  με  $\theta(0) = \theta(1) = 0$ . Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι ικανοποιεί την αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση

$$\theta(s) = \sigma s - \int_0^s \frac{(k+2r)r(1-r)}{\theta(r)} dr \quad (5.6.7)$$

σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον, αφού είναι θετική στο  $(0, 1)$ , αυτομάτως ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο  $I$ . Αντιστρόφως ξεκινώντας από την λύση (5.6.6) της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.6.7), μπορούμε ακολουθώντας την μεθοδολογία της προηγούμενης παραγράφου να κατασκευάσουμε μια λύση οδεύοντος-κύματος της (5.6.3). Πιο συγκεκριμένα για οποιοδήποτε δοθέν  $\nu \in (0, 1)$ , κάνοντας χρήση των (5.5.6), (5.5.7), (5.5.8) μπορούμε να κατασκευάσουμε την συνάρτηση  $f$  στον  $(-\infty, \infty)$  από την

$$\arcsin\{1 - 2f(\xi)\} = \begin{cases} \max\{\xi - \arcsin(2\nu - 1), -\pi/2\}, & \xi \leq 0 \\ \min\{\xi - \arcsin(2\nu - 1), \pi/2\}, & \xi > 0 \end{cases}$$

**Εφαρμογή 5.6.2** Η εξίσωση

$$u_t = u_{xx} + \begin{cases} 4u^2(8u-3), & 0 \leq u < 1/2 \\ 0, & u = 1/2 \\ 4(1-u)^2(8u-5), & 1/2 < u \leq 1 \end{cases} \quad (5.6.8)$$

έχει λύση κυματικού μετώπου με ταχύτητα  $\sigma = 0$  που δίνεται από την

$$f(\xi) = \begin{cases} [1 + 2(\xi_0 - \xi)^2]/2[1 + (\xi_0 - \xi)^2], & \xi < \xi_0 \\ 1/2, & \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ 1/2[1 + (\xi - \xi_1)^2], & \xi > \xi_1 \end{cases} \quad (5.6.9)$$

για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών  $\xi_0, \xi_1$  με  $\xi_0 < \xi_1$ .

Πράγματι παραγωγίζοντας την (5.6.9), μπορεί να ελεγχθεί ότι αυτή η συνάρτηση είναι ολικά συνεχής, παραγωγίσιμη, και δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη παντού εκτός από τα σημεία  $\xi_0$  και  $\xi_1$ . Επιπλέον, η  $u = f(x)$  ικανοποιεί την (5.6.8) παντού, εκτός των σημείων  $x = \xi_0$  και  $x = \xi_1$ . Συνακόλουθα, εύκολα επιβεβαιώνεται ότι αυτή αποτελεί λύση κυματικού μετώπου της (5.6.8) από το 1 στο 0 με ταχύτητα 0 υπό την έννοια του Ορισμού 5.3.1. Ακολουθώντας την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, βρίσκουμε ότι  $\Xi_0 := \infty$  και  $\Xi_1 := -\infty$  ενώ η συνάρτηση  $\theta$  μπορεί να οριστεί ως εξής

$$\theta(s) = \begin{cases} 2s\sqrt{2s(1-2s)}, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ 2(1-s)\sqrt{2(1-s)(2s-1)}, & 1/2 < s \leq 1 \end{cases} \quad (5.6.10)$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι ικανοποιεί την αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση (5.1.8). Έστω  $S = [\xi_0, \xi_1]$ . Ισχύει  $c(f(\xi)) = 0$  για κάθε  $\xi \in S$ , άρα ικανοποιείται το Λήμμα 5.5.1. Αντιστρόφως, μπορούμε να ακολουθήσουμε την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου για να κατασκευάσουμε μια λύση οδεύοντος κύματος  $f$  της εξίσωσης (5.6.8) από την (5.6.10). Για κάθε  $\nu \in (0, 1)$ , χρησιμοποιώντας τις (5.5.6)-(5.5.8), παίρνουμε

$$f(\xi) = \begin{cases} [1 + 2(\eta - \xi)^2]/2[1 + (\eta - \xi)^2], & \xi \leq \eta \\ 1/2[1 + (\xi - \eta)^2], & \xi > \eta \end{cases} \quad (5.6.11)$$

όπου

$$\eta = \begin{cases} -\sqrt{(1-2\nu)/2\nu}, & \nu \leq 1/2 \\ \sqrt{(2\nu-1)/2(1-\nu)}, & \nu > 1/2 \end{cases} \quad (5.6.12)$$

Αυτή είναι η λύση κυματικού μετώπου (5.6.9) με  $\xi_0 = \xi_1 = \eta$ .

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω, ξεκινώντας από την λύση οδεύοντος κύματος (5.6.9) της Μ.Δ.Ε (5.6.8), υπολογίσαμε μια λύση (5.6.10) της αντίστοιχης ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8). Έπειτα, κάνοντας χρήση της (5.6.10), κατασκευάσαμε την λύση οδεύοντος κύματος (5.6.11), (5.6.12) της Μ.Δ.Ε (5.6.8). Παρόλα αυτά ενώ η αρχική λύση είναι σταθερή σε ένα διάστημα  $[\xi_0, \xi_1]$  θετικού μήκους, η ανακατασκευασμένη λύση (5.6.11), (5.6.12) δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Για την ακρίβεια η ανακατασκευασμένη λύση είναι ανεξάρτητη του μήκους του διαστήματος  $\xi_1 - \xi_0$ . Έτσι σε γενικές γραμμές δεν υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των διακριτών μονότονων λύσεων οδεύοντων κύματων της γενικής εξίσωσης αντίδρασης-μεταφοράς-διάχυσης (5.1.2) και των λύσεων της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8). Παρά την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου, μπορεί να δείχθει ότι υπάρχει 1-1 αντιστοιχία υπό τον όρο ότι αναλογιζόμαστε μόνο τις μονότονες λύσεις οδεύοντων κυμάτων  $f$  που ορίζονται σε ένα πεδίο ορισμού  $\Omega$ , με  $\inf\{f(\xi) : \xi \in \Omega\} = 0$  και  $\sup\{f(\xi) : \xi \in \Omega\} = \delta$ , που είναι αυστηρά μονότονες στο  $\{\xi \in \Omega : 0 < f(\xi) < \delta\}$



**Εφαρμογή 5.6.3** Έστω  $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$  μια αυστηρά φθίνουσα ακολουθία τιμών στο  $(0, 1]$  τέτοια ώστε  $s_0 = 1$  και  $s_i = O(i^{-3})$  καθώς  $i \rightarrow \infty$ . Θέτουμε  $\xi_0 = -\pi$ . Με επαγωγή ορίζουμε  $\eta_{i-1} = \xi_{i-1} + \pi/i^2$  και  $\xi_i > \eta_{i-1}$  για κάθε  $i \geq 1$ . Η εξίσωση

$$u_t = u_{xx} + \begin{cases} i^4 \left(u - \frac{s_i + s_{i-1}}{2}\right), & s_i < u < s_{i-1} \text{ και } i \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δέχεται λύση κυματικού μετώπου με ταχύτητα  $\sigma = 0$  που δίνεται απο την

$$f(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \leq \xi_0 \\ \frac{s_i + s_{i-1}}{2} - \frac{s_i - s_{i-1}}{2} \cos\{i^2(\xi - \xi_{i-1})\}, & \xi_{i-1} < \xi < \eta_{i-1} \text{ και } i \geq 1 \\ s_i, & \eta_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i \text{ και } i \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.6.13)$$

Μιας και οι υπολογισμοί της επαλήθευσης αυτού του παραδείγματος είναι αρκετά επίπονοι, οι λεπτομέρειες έχουν παραλειφθεί. Η αντίστοιχη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1.8) είναι

$$\theta(s) = \begin{cases} i^2 \sqrt{(s - s_i)(s_{i-1} - s)}, & s_i < s < s_{i-1} \text{ και } i \geq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.6.14)$$

Τα σημαντικά χαρακτηριστικά αυτού του παραδείγματος είναι ότι

$$\begin{aligned} \Xi_0 &:= \sup\{\xi \in (-\infty, \infty) : f(\xi) > 0\} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\eta_i - \xi_i) + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \eta_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\pi}{(i+1)^2} + \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \eta_{i-1}) \end{aligned} \quad (5.6.15)$$

και  $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\eta_{i-1}, \xi_i]$ . Έτσι η (5.6.1) ικανοποιείται εάν και μόνο εάν η (5.6.15) συγκλίνει. Η κατασκευή μιάς λύσης οδεύοντος κύματος απο την (5.6.14) με την προσέγγιση της προηγούμενης παραγράφου δίνει αυτόματα αντιστοίχιση στην συνάρτηση (5.6.13) με  $\xi_i = \eta_{i-1}$  για κάθε  $i \geq 1$ .

Τα δύο προηγούμενα παραδείγματα αφορούν σε λύσεις κυματικού μετώπου  $f$  απο το  $l$  στο  $0$  με την ιδιότητα ότι υπάρχει μία ή περισσότερες τιμές  $s^* \in (0, l)$  τέτοιες ώστε  $f \equiv s^*$  σε κάποιο διάστημα θετικού μήκους. Είδαμε επίσης ότι φτιάχνοντας μια λύση  $\theta$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης από την λύση κυματικού μετώπου και κατόπιν χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο για την ανακατασκευή μιας λύσης οδεύοντος κύματος καταλήγουμε σε μια λύση οδεύοντος κύματος που δεν έχει απαραίτητα αυτήν την ιδιότητα.

## 5.7 Περαιτέρω Αποτελέσματα

Τα παρακάτω αποτελούν πορίσματα των Θεωρημάτων 5.3.8, 5.3.9, 5.3.10

**Πόρισμα 5.7.1 (του Θεωρήματος (5.3.8)).** Εάν  $f$  λύση ημικυματικού μετώπου της (5.1.2) φθίνουσα στο  $\theta$  σε ένα διάστημα  $\Omega$ , τότε  $\alpha(f) \in C^1(\Omega)$  και  $(\alpha(f))'(\xi) \rightarrow 0$  καθώς  $\xi \rightarrow \infty$ .

**Πόρισμα 5.7.2 (του Θεωρήματος (5.3.8)).** Εάν η (5.1.2) έχει λύση ημικυματικού μετώπου με ταχύτητα κύματος  $\sigma$  φθίνουσα στο  $\theta$ , τότε η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία τέτοια λύση  $f$  στο διάστημα  $\Omega$  με την ιδιότητα ότι η  $f$  είναι αυστηρά φθίνουσα στο  $\{\xi \in \Omega : f(\xi) > 0\}$ .

**Πόρισμα 5.7.3 (του Θεωρήματος (5.3.8)).** Η εξίσωση (5.1.2) δεν έχει καμία ή άπειρο αριθμό από διακριτές λύσεις ημικυματικού μετώπου  $f$  με ταχύτητα  $\sigma$  φθίνουσες στο  $\theta$  σε ένα διάστημα  $\Omega$  που είναι αυστηρά φθίνουσες στο  $\{\xi \in \Omega : f(\xi) > 0\}$  ανάλογα με το εάν η (5.1.8) έχει καμία, μια ή άπειρο αριθμό λύσεων που ικανοποιούν την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας σε ένα διάστημα  $[0, \delta)$  με  $0 < \delta \leq l$ .

**Πόρισμα 5.7.4 (του Θεωρήματος (5.3.8)).**

(i) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια λύση ημικυματικού μετώπου  $f$  με ταχύτητα  $\sigma$  σε ένα διάστημα  $\Omega$  για το οποίο

$$f(\xi) = 0 \text{ για κάθε } \xi \geq \xi^* \text{ για κάποιο } \xi^* \in \Omega \quad (5.7.1)$$

εάν και μόνο εάν η εξίσωση (5.1.8) έχει μία λύση  $\theta$  σε ένα διάστημα  $[0, \delta)$  με την ιδιότητα

$$\int_0^s \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr < \infty \text{ για κάθε } 0 < s < \delta \quad (5.7.2)$$

(ii) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια λύση ημικυματικού μετώπου  $f$  με ταχύτητα  $\sigma$  φθίνουσα στο  $\theta$ , σε ένα διάστημα  $\Omega$  με

$$f(\xi) > 0 \text{ για κάθε } \xi \in \Omega \quad (5.7.3)$$

εάν και μόνο εάν η εξίσωση (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  που ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο διάστημα  $[0, \delta)$  με την παρακάτω ιδιότητα

$$\int_0^s \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \infty \text{ για κάθε } 0 < s < \delta \quad (5.7.4)$$

ή  $\theta(s_i) = 0$  για μία σειρά από τιμές  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \delta)$  τέτοιο ώστε  $s_i \downarrow 0$  καθώς  $i \uparrow \infty$ .

**Πόρισμα 5.7.5 (του Θεωρήματος (5.3.9)).** Έστω  $f$  λύση κυματικού μετώπου της (5.1.2) από το  $l$  στο  $0$ , τότε  $\alpha(f) \in C^1(-\infty, \infty)$  και  $(\alpha(f))'(\xi) \rightarrow 0$  καθώς  $\xi \rightarrow \pm\infty$ .

**Πόρισμα 5.7.6 (του Θεωρήματος (5.3.9)).** Εάν η εξίσωση (5.1.2) έχει λύση κυματικού μετώπου από το  $l$  στο  $0$  με ταχύτητα  $\sigma$ , τότε η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια τέτοια λύση  $f$  με την ιδιότητα ότι η  $f$  είναι αυστηρά φθίνουσα στο  $\{\xi \in (-\infty, \infty) : l > f(\xi) > 0\}$

**Πόρισμα 5.7.7 (του Θεωρήματος (5.3.9)).** Η εξίσωση (5.1.2) έχει καμία, μία ή έναν άπειρο αριθμό διακριτών λύσεων κυματικών μετώπων  $f$  από το  $l$  στο  $0$  με ταχύτητα  $\sigma$  που είναι αυστηρά φθίνοντα στο  $\{\xi \in (-\infty, \infty) : l > f(\xi) > 0\}$  ανάλογα με το εάν η εξίσωση (5.1.8) έχει αντίστοιχα καμία, μία ή έναν άπειρο αριθμό λύσεων  $\theta$  που ικανοποιούν την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο  $[0, l]$  με  $\theta(l) = 0$ .

**Πόρισμα 5.7.8 (του Θεωρήματος (5.3.9)).**

- (i) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια λύση κυματικού μετώπου  $f$  με ταχύτητα  $\sigma$  για την οποία η (5.6.1) και (5.6.2) ισχύουν εάν και μόνο εάν η εξίσωση (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  στο  $[0, l]$  με ιδιότητες  $\theta(l) = 0$  και

$$\int_0^l \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr < \infty \quad (5.7.5)$$

- (ii) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια λύση κυματικού μετώπου  $f$  από το  $l$  στο  $0$  με ταχύτητα  $\sigma$  για την οποία η (5.6.1) ισχύει αλλά

$$f(\xi) < l \text{ για κάθε } \xi \in (-\infty, \infty) \quad (5.7.6)$$

εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  στο  $[0, l]$  με ιδιότητες

$$\int_0^s \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr < \infty \text{ για κάθε } 0 < s < l, \quad (5.7.7)$$

και

$$\int_0^l \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \infty \quad (5.7.8)$$

ή  $\theta(s_i) = 0$  για μια ακολουθία τιμών  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, l)$  τέτοια ώστε  $s_i \uparrow l$  καθώς  $i \uparrow \infty$ .

- (iii) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια λύση κυματικού μετώπου  $f$  από το  $l$  στο  $0$  με ταχύτητα  $\sigma$  για την οποία

$$f(\xi) > 0 \text{ για κάθε } \xi \in (-\infty, \infty) \quad (5.7.9)$$

και η (5.6.2) ισχύει εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  στο  $[0, l]$  με ιδιότητες  $\theta(l) = 0$ ,

$$\int_s^l \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr < \infty \text{ για κάθε } 0 < s < l, \quad (5.7.10)$$

και η (5.7.6) ικανοποιείται ή  $\theta(s_i) = 0$  για μια ακολουθία τιμών  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, l)$  τέτοια ώστε  $s_i \downarrow 0$  καθώς  $i \uparrow \infty$ .

(iv) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια λύση κυματικού μετώπου  $f$  από το  $l$  στο  $0$  με ταχύτητα  $\sigma$  για την οποία οι (5.7.6), (5.7.9) ισχύουν εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  που ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο  $[0, l]$  με τις ιδιότητες

$$\int_0^s \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \infty \text{ για κάθε } 0 < s < l \quad (5.7.11)$$

ή  $\theta(s_i) = 0$  για μία ακολουθία τιμών  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, l)$  τέτοια ώστε  $s_i \downarrow 0$  καθώς  $i \uparrow \infty$ , και

$$\int_0^l \frac{\alpha'(r)}{\theta(r)} dr = \infty \text{ για κάθε } 0 < s < l \quad (5.7.12)$$

ή  $\theta(s_i) = 0$  για μία ακολουθία τιμών  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, l)$  τέτοια ώστε  $s_i \uparrow l$  καθώς  $i \uparrow \infty$ .

Τα ακόλουθα αποτελούν αντίστοιχα αποτελέσματα για το θεώρημα 5.3.10, για τα οποία υποθέτουμε  $l = \infty$ .

**Πόρισμα 5.7.9 (του Θεωρήματος (5.3.10)).** Εάν η  $f$  αποτελεί μη φραγμένη μονότονη λύση οδεύοντος κύματος της (5.1.2) σε ένα διάστημα  $\Omega = (\omega, \infty)$  με  $-\infty \leq \omega < \infty$  φθίνουσα στο  $0$ , τότε  $\alpha(f) \in C^1(\Omega)$  και  $(\alpha(f))'(\xi) \rightarrow 0$  καθώς  $\xi \rightarrow \infty$

**Πόρισμα 5.7.10 (του Θεωρήματος (5.3.10)).** Εάν η (5.1.2) έχει μια μη φραγμένη μονότονη λύση οδεύοντος κύματος με ταχύτητα  $\sigma$  φθίνουσα στο  $0$ , τότε η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια τέτοια λύση  $f$  σε ένα διάστημα  $\Omega$  με την ιδιότητα η  $f$  να είναι αυστηρά φθίνουσα στο  $\{\xi \in \Omega : f(\xi) > 0\}$ .

**Πόρισμα 5.7.11 (του Θεωρήματος (5.3.10)).** Η (5.1.2) έχει καμία, μία ή έναν άπειρο αριθμό διακριτών μη φραγμένων μονότονων λύσεων  $f$  οδεύοντων κυμάτων με ταχύτητα  $\sigma$  σε ένα πεδίο  $\Omega = (\omega, \infty)$  με  $-\infty \leq \omega < \infty$  φθίνουσα στο  $0$  που είναι αυστηρά φθίνοντα στο  $\{\xi \in \Omega : f(\xi) > 0\}$  ανάλογα με το εάν η εξίσωση (5.1.8) έχει αντίστοιχα καμία, μία, ή έναν άπειρο αριθμό λύσεων που ικανοποιούν την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο  $[0, \infty)$ .

**Πόρισμα 5.7.12 (του Θεωρήματος (5.3.10)).**

- (i) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια μη φραγμένη, αυστηρά ημικυματικού μετώπου λύση  $f$  με ταχύτητα  $\sigma$  για την οποία η εξίσωση (5.7.1) ισχύει εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  στο  $[0, \infty)$  με την ιδιότητα ότι η εξίσωση (5.7.5) ισχύει.
- (ii) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια ολική, μη φραγμένη, μονότονη, λύση οδεύοντος κύματος  $f$ , με ταχύτητα  $\sigma$  για την οποία η (5.7.1) ισχύει εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  στο  $[0, \infty)$  με τις ιδιότητες η (5.7.7) να ισχύει και η (5.7.8) να ισχύει ή  $\theta(s_i) = 0$  για μια ακολουθία τιμών  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$  τέτοια ώστε  $s_i \uparrow \infty$  καθώς  $i \uparrow \infty$ .
- (iii) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια μη φραγμένη αυστηρά ημικυματικού μετώπου λύση  $f$  με ταχύτητα  $\sigma$  φθίνουσα στο  $0$  για την οποία η (5.7.3) ισχύει εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  στο  $[0, \infty)$  με τις ιδιότητες, η (5.7.10) να ισχύει και η (5.7.8) να ισχύει ή  $\theta(s_i) = 0$  για μια ακολουθία τιμών  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$  τέτοια ώστε  $s_i \downarrow 0$  καθώς  $i \uparrow \infty$ .
- (iv) Η εξίσωση (5.1.2) έχει μια μη φραγμένη, μονότονη, ολική λύση οδεύοντος κύματος  $f$  με ταχύτητα  $\sigma$  φθίνουσα στο  $0$  τέτοια ώστε η (5.7.3) ισχύει εάν και μόνο εάν η (5.1.8) έχει μια λύση  $\theta$  που ικανοποιεί την συνθήκη ολοκληρωσιμότητας στο  $[0, \infty)$  με τις ιδιότητες η (5.7.11) ισχύει ή  $\theta(s_i) = 0$  για μια ακολουθία τιμών  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$  τέτοια ώστε  $s_i \downarrow 0$  καθώς  $i \uparrow \infty$  και η (5.7.11) ισχύει ή  $\theta(s_i) = 0$  για μια ακολουθία τιμών  $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$  τέτοια ώστε  $s_i \uparrow \infty$  καθώς  $i \uparrow \infty$ .

# Βιβλιογραφία

- [1] M.J. Ablowitz, R. Haberman, Nonlinear evolution equations two and three dimensions, *Phys.Rev.Lett.* **35** (1975), 1185-1188.
- [2] M.J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transforms*, SIAM Publications, Philadelphia (1981).
- [3] K. Aoki, Gene culture waves of advance, *J.Math.Biol.* **25** (1987), 453-464.
- [4] E.T. Arecchi, G.L. Masserini, P. Schwendimann, Electromagnetic propagation in a resonant medium, *Rev.Nuovo Cimento* **1** (1969), 181-192.
- [5] R. Aris, *The mathematical theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalyst*, Oxford University Press, Oxford (1975).
- [6] R. Arnold, K. Showalter, J.J. Tyson, Propagations of chemical reactions in space, *J.Chem.Educ.* **64** (1987), 740-742.
- [7] A. Barone, F. Esposito, C.J. Magee, A.C. Scott, Theory and applications of the sine-Gordon equation, *Rev.Nuovo Cimento* **1**(2) (1971), 227-267.
- [8] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Phil.Trans.R.Soc.* **A272** (1972), 47.
- [9] D.J. Benney, Long waves on liquid films, *J.Math.Phys.* **45** (1966), 150-155.
- [10] J.L. Bona, J.L. Schonbek, Travelling-wave solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation, *Proc.Roy.Soc. Edinburgh Sect A*,**101** (1985), 207-26.
- [11] J.M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv.Appl.Mech.* **1** (1948), 171-199.
- [12] J. Canosa, Diffusion in nonlinear multiplicative media, *J.Math.Phys.* **10** (1969), 1862-1868.

- [13] J. Canosa, On a nonlinear diffusion equation describing population growth, IBM J.Res.Develop. **17** (1973), 307-313.
- [14] Y. Chen, P.L.-F. Liu, The unified Kadomtsev-Petviashvili equation of interfacial waves, J.Fluid Mech. **288** (1995a), 383-408.
- [15] Y. Chen, P.L.-F. Liu, Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation, J.Fluid Mech. **228** (1995b), 351-381.
- [16] L. Debnath, Nonlinear Water Waves, Academic Press, Boston 1994
- [17] L. Debnath, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers Second Edition, Birkhäuser, 2005
- [18] P.G. Drazin, R.S. Johnson, Solitons: An introduction, Cambridge University Press, 1989
- [19] U.ENZ, Discrete mass, elementary length, and topological invariant as a consequence of relativistic invariant principles, Phys.Rev. **131** (1963), 1392-1394.
- [20] E. Fan, Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, Phys.Lett. **227** A(2000), 212-218.
- [21] Z. Feng, The first integral method to study the Burgers-Kortweg-de Vries equation, J.Phys.A:Math.Gen. **35** (2002), 343-349
- [22] Z. Feng, On explicit exact solutions for the Lienard equation and its applications, Phys.Lett. **293** A(2002), 50-56
- [23] P.C. Fife, Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, Lecture Notes in Biomathematics, **28** (1979), Springer-Verlag, Berlin.
- [24] R.A. Fischer, The wave of advance of advantageous genes, Ann Eugenics **7** (1936), 335-369.
- [25] J. Frenkel, T. Kontorova, On the theory of plastic deformation and twinning, Fiz.Zh. **1** (1939), 137-139.
- [26] Fu Zuntao, Liu Shikuo, Liu Shida, New exact solutions to KDV-Burgers-Kuramoto equation. Chaos, Solitons & Fractals **23** (2005), 608-16.
- [27] J.D. Gibbon, A survey of the origins and physical importance of soliton equations, Phil.Trans.Roy.Soc.London **A315** (1985), 335-365

- [28] B.H. Gilding, R. Kersner, Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction, Birkhäuser, 2004.
- [29] B.H. Gilding, A singular nonlinear Volterra integral equation, J. Integral Equations Appl. **5** (1993), 465-502.
- [30] A.L. Hodgkin, A.F. Huxley, A qualitative description of membrane current and its applications to conduction and excitation in nerve, J.Physiol.(London)**117** (1952), 500-544.
- [31] E.K. Ifantis, An existence theory for functional-differential equations and functional-differential systems, J.Diff.Equat. **29(1)** (1978), 86-104.
- [32] E.K. Ifantis, Analytic solutions for nonlinear differential equations, J.Math.Anal.Appl. **124(2)** (1987), 339-380.
- [33] E.K. Ifantis, Global analytic solutions of the radial nonlinear wave equation, J.Math.Anal.Appl. **124(2)** (1987), 381-410.
- [34] R.S. Johnson, A nonlinear equation incorporating damping and dispersion, J.Fluid Mech. **42** (1970), 49-60.
- [35] R.S. Johnson, A modern introduction to the Mathematical Theory of Water Waves, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [36] B.D. Josephson, Supercurrents through the barriers, Adv.Phys. **14** (1965), 419-451.
- [37] B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili, On stability of solitary waves in weakly dispersive media, Dokl.Akad.Nauk.SSSR **192** (1970), 753-756, Sov.Phys.Dokl.**15**,539-541.
- [38] S.A. Khuri, Travelling wave solutions for nonlinear differential equations: A unified ansätze approach, Chaos, Solitons and Fractals **32** (2007), 252-258.
- [39] R. Knobel, An Introduction to the Mathematical Theory of Waves, American Mathematical Society, 2000
- [40] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, N. Piscunov, A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter and its application to a biological problem, Bull.Univ.Moscow.Ser.Internat.Sec A.**1** (1937), 4-25.
- [41] D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of stationary waves, Phil.Mag. (5) **39** (1895), 442-443.



- [42] G.L. Lamb, Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium, *Rev.Mod.Phys.* **49** (1973), 99-124
- [43] S. Leibovich, Weakly nonlinear waves in rotating fluids, *J.Fluids Mech.* **42** (1970), 803-822
- [44] M.J. Lighthill, Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, in surveys in mechanics,(ed. G.K.Batchelor and R.M. Davies), Cambridge University Press, Cambridge (1956), 250-351.
- [45] B.Q. Lu, B.Z. Xiu, Z.L. Pang, X.F. Jiang, Exact travelling wave solutions of one class of nonlinear diffusion, *Phys. Lett.* **175A**,113-115
- [46] E.J. Parkes, B.R. Duffy, An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to nonlinear evolution equations, *Comput.Phys.Commun.* **98** (1996), 288-300.
- [47] D.H. Peregrine, Long waves on beach, *J.Fluid.Mech.* **27** (1967), 815-827.
- [48] E.N. Petropoulou, P.D. Sifarakas, Analytic solutions of some nonlinear ordinary differential equations, *Dynam.Syst.Appl.* **13** (2004), 283-316.
- [49] E.N. Petropoulou, P.D. Sifarakas, Analytic bounded travelling wave solutions of some nonlinear equations, *Chaos Solitons & Fractals* **33** (2007),94-108.
- [50] E.N. Petropoulou, P.D. Sifarakas, I.D. Stabolas, Analytic bounded travelling wave solutions of some nonlinear equations II, *Chaos Solitons & Fractals* **41** (2008), 803-810.
- [51] P. Prasad, R. Ravindran,A theory of nonlinear waves in multidimensions:with special reference to surface water waves, *J.Inst.Math.Appl.* **20** (1977), 9-20.
- [52] L.G. Redekop, P.D. Weidman, Solitary Rossby waves in zonal shear flows and their interactions, *J.Atmos.Sci.* **35** (1968), 790-804.
- [53] J. Satsuma, Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations (ed.Ablowitz,M.A. et al.), World Publishing Company, Singapore(1987).
- [54] J. Satsuma, Explicit Solutions of nonlinear equations with density dependent diffusion, *J.Phys.Soc.Japan* **56** (1987), 1947-1950.
- [55] A.C. Scott, A nonlinear Klein-Gordon equation. *Amer.J.Phys.* **37** (1969), 52-61.
- [56] A.C. Scott, *Neurophysics*,John Wiley,New York(1977).

- [57] A.C. Scott, F.Y.F. Chu, D.W. McLaughlin, The soliton - A new concept in applied science, Proc.IEEE **61** (1973), 1443-1483.
- [58] T.H.R. Skyrme, A nonlinear theory of strong interactions, Proc.Roy.Soc.London **A247** (1958), 260-278.
- [59] T.H.R. Skyrme, Particle states of a quantized meson field, Proc.Roy.Soc.London **A262** (1961), 237-245.
- [60] M. Toda, M. Wadati, A Soliton and two Solitons in an exponential lattice and related equations, J.Phys.Soc.Japan **34** (1973), 18-25.
- [61] L. Van Wijngaarden, On the equation of motion for mixtures of liquid and gas bubble, J.Fluid Mech. **33** (1968), 465-474.
- [62] A.I. Volpert, V.A. Volpert, V.A. Volpert, Travelling wave solutions of parabolic systems, Translations of mathematical Monographs 140, American Mathematical Society, 1994
- [63] M. Wang, Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation, Phys.Lett.A, **312** (1996), 279-87.
- [64] X.Y. Wang, Nerve propagation and wall in liquid crystals, Phys.Lett.**112A** (1985), 402-406.
- [65] X.Y. Wang, Brochard-Leger wall in liquid crystals, Phys.Rev. **A34** (1986), 5179-5182.
- [66] X.Y. Wang, Z.S. Shu, Y.K. Lu, Solitary wave solutions of the generalized Burgers-Huxley equation, J.Phys.Math.Gen. **23** (1990), 271-274.
- [67] Z.J. Yang, Travelling wave solutions to nonlinear evolution and wave equations, J.Phys.A, **27** (1994), 2837-2855
- [68] V.E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, J.Appl.Mech.Tech.Phys. **9** (1968), 86-94.
- [69] V.E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, J.Appl.Mech.Tech.Phys. **2** (1968), 190-194.