ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΥΠΕΡΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΨΕΥΔΟ-ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΑΙΜΑΚΑΜΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Διδακτορική Διατριβή
ΠΑΤΡΑ 2003

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Θεωρώ καθήκον, πρώτα από όλα να εκφράσω τις ειλικρινείς και πιο θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή κ. Βασίλη Παπαντωνίου. Τον ευχαριστώ για την υπόδειξη του θέματος, για το γεγονός ότι καθ'ολη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στάθηκε δίπλα μου με υπομονή και κατανόηση και για την αποφασιστική συμβολή του στο σχεδιασμό και στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Θερμά ευχαριστώ τους Καθηγητές κ. κ. Θεμιστοκλή Κουφογιώργο και Φίλιπο Ξένο, μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, για τη συμβολή τους στην τελειοποίηση αυτής της διατριβής.
Επίσης, τους Καθηγητές L.Vestraelen και F.Defever για τη συνεργασία την οποία είχαμε και για την φιλοξενία τους κατά την παραμονή μου στο Πανεπιστήμιο K.U.Leuven του Βελγίου.

Θεωρώ επίσης υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τους γονείς μου Αριστείδη και Κατερίνα για την ηθική και οικονομική υποστήριξη που μου πρόσφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, ευχαριστώ το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ) και την Επιτροπή Ερευνών του Πανεπιστημίου Πατρών για την οικονομική στήριξη την οποία μου παρείχαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της Διδακτορικής μου Διατριβής.

Γεώργιος Καϊμακάμης

Μάρτιος 2003

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας των εξεταζόμενων προβλημάτων

Η μελέτη της ψευδο-Riemannian Γεωμετρίας, δηλαδή η μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων τα οποία είναι εφοδιασμένα με ένα μετρικό τανυστή τυχαίου δείκτη ν, αποτέλεσε και αποτελεί ιδιαίτερο πεδίο ερευνητικών ενδιαφερόντων πολλών γεωμετρών και όχι μόνο.
Όταν η μετρική με την οποία εφοδιάζεται ο θεωρούμενος χώρος είναι θετικά ορισμένη (δηλαδή ν=0), τότε αναφερόμαστε στη γεωμετρίαRiemann, ενώ όταν η μετρική δεν είναι θετικά ορισμένη και ο δείκτης είναι ένα (ν=1), τότε αναφερόμαστε στην γεωμετρία Lorentz. Για αρκετά χρόνια οι δύο Γεωμετρίες αναπτύχθηκαν αυτόνομα. Από την μία πλευρά η γεωμετρία Riemann μελετήθηκε με τρόπο ανεξάρτητο των συνεταγμένων και γι΄ αυτό μπόρεσε να δώσει ολικές λύσεις σε πολλά προβλήματα. Από την άλλη, λόγω της στενής σύνδεσης της γεωμετρίας Lorentz, κυρίως της 4-διάστατης πολλαπλότητας Lorentz-Minkowski με τη Θεωρία της Σχετικότητας, η έρευνα της συγκεκριμένης γεωμετρίας ήταν προσανατολισμένη στο να δώσει απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα που είχαν την αφετηρία τους στη Φυσική. Τα τελευταία, όμως, χρόνια αυτό άλ-

λαξε, αφού τέθηκαν προβλήματα με σαφώς καθαρό μαθηματικό ενδιαφέρον και άρχισε η μελέτη της γεωμετρίας Lorentz ως ενός νέου αυτόνομου κλάδου της γεωμετρίας. Αρχικά η έρευνα ασχολήθηκε με τη μελέτη των καμπυλών και επιφανειών του χώρου E_1^4 και φυσικά των υπερεπιφανειών αυτής. Πολλά προβλήματα όπως ταξινόμησης, χαρακτηρισμού επιφανειών ή πολλαπλοτήτων κ.λπ. που είχαν διατυπωθεί και λυθεί στη γεωμετρία Riemann, μεταφέρθηκαν και μελετήθηκαν και στη γεωμετρία Lorentz. Αρκετά από αυτά ήταν πιο δύσκολα στην αντιμετώπισή τους, αλλά τα αποτελέσματα που προέκυπταν ήταν ουσιωδώς πιο πλούσια από τα αντίστοιχα της γεωμετρίας Riemann.

Ο Β.Παπαντωνίου στη Διδακτορική του Διατριβή, το 1978, ασχολήθηκε με προβλήματα της Ευθειακής Γεωμετρίας Lorentz. Ειδικότερα, ασχολήθηκε με τη μελέτη των σμηνών ευθειών της τριδιάστατης πολλαπλότητας Lorentz E_1^3. Αν S είναι μια επιφάνεια του E_1^3, χωροειδής ή χρονοειδής και θεωρηθεί το καθετικό ή το εφαπτομενικό σμήνος ευθειών της E_1^3 που παράγεται από την S, τότε μερικά προβλήματα που αντιμετωπίσθηκαν είχαν να κάνουν είτε με τη διατήρηση των εμβαδών μεταξύ των χωνών S_1, S_2 της εστιακής επιφάνειας του σμήνους, είτε με τη διατήρηση των γωνιών τυχαίου ζεύγους καμπυλών της S_1 και των εικόνων τους της S_2, είτε τέλος με άλλα συναφή θέματα. Αποτελέσματα αυτής της διατριβής ήταν οι ακόλουθες δημοσιεύσεις: «On the surfaces of Lorentz manifold whose normal bundles have special properties» το 1983, στο περιοδικό Annali di Matematica pura ed Applicata, [51], «On the normal rectilinear congruences of the Lorentz manifold $[R^3,(+,+,-)]$, establishing a mapping between its focal surfaces preserving the mean curvatures» στο περιοδικό Tensor N.S. το 1986, [52], «On the rectilinear congruence of the Lorentz manifold $[R^3,(+,+,-)]$, establishing a conformal mapping between its focal surfaces », στο περιοδικό Rivista di Matematica della Universita di Parma το 1987, [53] και «On the rectilinear congruences of Lorentz manifold establishing an area preserving representation», το 1988, στο περιοδικό Tensor N.S., [54].

Πολλές εργασίες είχαν ως στόχο την ταξινόμηση των διαφόρων επιφανειών του E^3. Πράγματι ο T.Takahashi στην εργασία του [56], με τίτλο «Minimal immersions of Riemannian manifolds», που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Journal of the Mathematical Society of Japan το 1966, απέδειξε ότι οι ελαχιστικές επιφάνειες και οι σφαίρες είναι οι μόνες επιφάνειες του E^3 που ικανοποιούν τη σχέση $\triangle\vec{r} = \lambda\vec{r}$ όπου $\lambda \in R$ και $\triangle$ ο τελεστής του Laplace.

O K.Kenmotsu στην εργασία του [39], με τίτλο «Surfaces of revolution with prescribed mean curvature» η οποία δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Tôhoku Mathematical Journal το 1980, μελέτησε την ύπαρξη επιφανειών εκ περιστροφής του E^3 των οποίων η μέση καμπυλότητα είναι γνωστή συνάρτηση.

Στη συνέχεια οι M.Do Carmo - M.Dajczer στην εργασία τους [28], με τίτλο «Helicoidal surfaces with constant mean curvature» που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Tôhoku Mathematical Journal το 1982, μελέτησαν τις ελικοειδείς επιφάνειες του E^3 που έχουν σταθερή μέση καμπυλότητα.

Το 1988 ο O.J.Garay στην εργασία του [32], με τίτλο «On a certain class of finite type surfaces of revolution» που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Kodai Mathematical Journal, ταξινόμησε τις επιφάνειες εκ περιστροφής του χώρου E^3 των οποίων οι συντεταγμένες συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του Laplace με διακεκριμένες ιδιοτιμές. Συνεχίζοντας ο O.J.Garay, το 1990, στην εργασία του [33], με τίτλο «An extension of Takahashi' s theorem» που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Geometriae Dedicata, απέδειξε ότι οι μόνες υπερεπιφάνειες του E^n των οποίων οι συντεταγμένες συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του Laplace είναι ανοικτά τμήματα είτε ελαχιστικών υπερεπιφανειών, είτε υπερσφαιρών, είτε γενικευμένων κυκλικών κυλίνδρων.

Οι A.Ferrandez και P.Lucas στην εργασία τους [31], με τίτλο «On surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space» που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Pacific Journal of Mathematics το 1992, ταξινόμησαν τις επιφάνειες του $E^3_s,\ s=0,1$ που ικανοποιούν τη σχέση $\triangle H=\lambda H$ όπου H το διανυσματικό πεδίο της μέσης καμπυλότητας των επιφανειών και $\lambda\in R$. Το 1992, οι L.Alias, A.Ferrandez και P.Lucas, δημοσίευσαν την εργασία [4], με τίτλο «Surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\triangle x=Ax+B$», στο περιοδικό Pacific Journal of Mathematics, στην οποία μελέτησαν τις επιφάνειες του $E^3_s,\ s=0,1$ που ικανοποιούν σχέση της μορφής $\triangle x=Ax+B$ όπου A είναι ένας ενδομορφισμός του E^3_s και B ένα σταθερό διάνυσμα.

Ο S.M.Choi μελέτησε την απεικόνιση Gauss των εκ περιστροφής επιφανειών του 3-διάστατου Minkowski χώρου στην εργασία του [22], με τίτλο «On the Gauss map of surfaces of revolution in a 3-dimensional Minkowski space» που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Tsukuba Journal of Mathematics το 1996.

Το 1998 στο περιοδικό Journal of Geometry δημοσιεύθηκε η εργασία των Chr. Baikoussis -T. Koufogiorgos με τίτλο «Helicoidal surfaces with prescribed Mean or Gaussian curvature» στην οποία μελέτησαν το πρόβλημα της ύπαρξης ελικοειδών επιφανειών του E^3 με καμπυλότητα Gauss ή μέση καμπυλότητα, δοσμένη γνωστή συνάρτηση, [8]. Το αποτέλεσμα που αναφέρεται στη μέση καμπυλότητα, επεκτείνει το αντίστοιχο αποτέλεσμα του K.Kenmotsu.

Η μελέτη υποπολλαπλοτήτων πεπερασμένου τύπου (finite type) της πολλαπλότητας E^3 με αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας, έγινε για πρώτη φορά από τον B.-Y.Chen στην εργασία του [15], με τίτλο «Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type», που δημοσιεύθηκε το 1991 στο Soochow Journal of Mathematics και απέδειξε ότι κάθε επιφάνεια του E^3, με αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας (διαρμονική επιφάνεια) του E^3 είναι ελάχιστης έκτασης. Στην ίδια εργασία ο B.-Y.Chen διατύπωσε την ακόλουθη εικασία :

Κάθε διαρμονική υποπολλαπλότητα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{E}^{\mathbf{m}}$ είναι ελάχιστης έκτασης.

Στη συνέχεια ο I. Dimitrić με την εργασία του «Submanifolds of $\mathbb{E}^m$ with harmonic mean curvature vector», που δημοσιεύθηκε στο Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica το 1992, γενίκευσε το αποτέλεσμα του B.-Y.Chen που προαναφέρθηκε και απέδειξε ότι μία διαρμονική υποπολλαπλότητα M^n του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{E}^m$ $(n < m)$ είναι ελάχιστης έκτασης αν είναι είτε καμπύλη, είτε υποπολλαπλότητα με σταθερή μέση καμπυλότητα, είτε υπερεπιφάνεια με δύο το πολύ διαφορετικές κύριες καμπυλότητες, είτε ψευδοομφαλική υποπολλαπλότητα διάστασης $n \neq 4$, είτε τέλος υποπολλαπλότητα πεπερασμένου τύπου, [27].

Το 1994, οι H.Alencar-M.Do Carmo στην εργασία τους [3], με τίτλο «Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres», που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Proceedings of the American Mathematical Society, μελέτησαν τις συμπαγείς υπερεπιφάνειες μιας $(n+1)$-διάστατης σφαίρας S^{n+1}, οι οποίες έχουν σταθερή μέση καμπυλότητα.

Οι L.Alias, A.Ferrandez και P.Lucas, το 1995, στην εργασία τους [5], με τίτλο «Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $\triangle x = Ax + B$», που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Transactions of the American Mathematical Society, απέδειξαν ότι οι μόνες υπερεπιφάνειες που ικανοποιούν μία τέτοια σχέση είναι ανοικτά τμήματα είτε ελαχιστικών είτε ολικά ομφαλικών υπερεπιφανειών, είτε γινόμενο μιας ολικά ομφαλικής και μιας ολικά γεωδαισιακής υποπολλαπλότητας, είτε μια ειδική κατηγορία υπερεπιφανειών.

Οι Th.Hasanis - Th. Vlachos στην εργασία τους [37], με τίτλο «Hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector field», που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Mathematische Nachrichten το 1995, απέδειξαν ότι κάθε διαρμονική υπερεπιφάνεια του $\mathbb{E}^4$ είναι ελάχιστης έκτασης. Η απόδειξή τους έγινε με χρήση συντεταγμένων. Στο ίδιο αποτέλεσμα κατέληξε και ο F.Defever χρησιμοποιώντας την έννοια του τελεστή σχήματος (shape operator) των υπερεπιφανειών και την ιδιότητα ότι ο τελεστής αυτός είναι πάντα διαγωνοποιήσιμος ως προς κατάλληλη βάση. Το αποτέλεσμά του αυτό ο F.Defever το δημοσίευσε στην εργασία του [23], με τίτλο «Hypersurfaces of $\mathbb{E}^4$ with harmonic mean curvature vector», που δημοσιεύτηκε επίσης στο περιοδικό Mathematische Nachrichten το 1998.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα εκτεθέντα αποτελέσματα μπορούμε να παραθέσουμε τον παρακάτω συνολοθεωρητικό πίνακα

$$\begin{array}{ccc} \Delta\vec{H}=\vec{0} & \subset & \Delta\vec{H}=\lambda\vec{H} \\ \cup & & \cup \\ \vec{H}=\vec{0} & \subset & \Delta\vec{r}=\lambda\vec{r} \end{array}$$

Είναι φανερό ότι οι εργασίες αυτές επαληθεύουν την εικασία του B.-Y.Chen, που αναφέρθηκε προηγουμένως. Η προσπάθεια διερεύνησης της ορθότητας μιας αντίστοιχης εικασίας στην περίπτωση που έχουμε ψευδο-Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^m_s$, έγινε για πρώτη φορά από τους B.-Y.Chen, S. Ishikawa στην εργασία τους [20], με τίτλο «Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces», που δημοσιεύθηκε στο Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University το 1991 και στην οποία έδωσαν **παραδείγματα διαρμονικών χωροειδών επιφανειών του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{E}^4_s$ $(s=1,2)$ οι οποίες δεν είναι ελάχιστης έκτασης**. Το ιδιαίτερα ενδιαφέρον όμως σε αυτό το πρόβλημα είναι ότι το 1998 οι ίδιοι ερευνητές στην εργασία τους [21], με τίτλο «Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces», που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Kyushuy Journal of Mathematics, απέδειξαν ότι κάθε διαρμονική επιφάνεια του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{E}^3_s$ $(s=1,2)$ είναι ελάχιστης έκτασης, **δηλαδή για το χώρο $\mathbb{E}^3_s$ η εικασία είναι αληθής**.

Το πρόβλημα του καθορισμού διαφόρων ειδών επιφανειών (εκ περιστροφής, ευθειογενών, ελικοειδών, κ.λπ.) του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{E}^3_s$ $(s = 0, 1)$ ή υπερεπιφανειών του $\mathbb{E}^4_s$ $(s = 1, 2)$, που πληρούν συγκεκριμένες ιδιότητες, έχει μελετηθεί κατά καιρούς από αρκετούς ερευνητές και πιο πρόσφατα από τους B.-Y.Chen [18], Chr.Baikoussis, D.Blair, B.-Y.Chen, F.Defever [9], S.P.Jung και J.S.Pak [38], A.Takiyama και S.Izumiya [57], R.Lopez [42], [43],S.Lin [55], Y.H.Kim και D.W.Yoon [40], Y.Ge [34]. Επίσης αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη των υπερεπιφανειών σε Lorentz-Minkowski χώρους, όπως για παράδειγμα οι R.Aiyama και Q.M.Cheng [1], J.Alias και A.J.Pastor [6], J.Alias και A.J.Aledo [7], L.Ximin [58], C.Gerhardt [35] .

1.2 Περιληπτική παρουσίαση της Διατριβής

Ένα από τα προβλήματα τα οποία εξετάζονται σ΄ αυτή τη διατριβή είναι η μελέτη της ύπαρξης ελικοειδών επιφανειών της 3-διάστατης ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E^3_1, με καμπυλότητα Gauss μια δοσμένη διαφορίσιμη συνάρτηση. Ένα άλλο από τα προβλήματα που εξετάζονται σ΄ αυτή τη διατριβή είναι η μελέτη των διαρμονικών υπερεπιφανειών της 4-διάστατης ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E^4_1. Τέλος, επεκτείνονται και γενικεύονται τα αποτελέσματα αυτά για διαρμονικές υπερεπιφάνειες του ψευδο-Ευκλειδείου χώρου $E^4_s, s = 0, 1, 2, 3, 4$.

Στο *Κεφάλαιο 1* γίνεται μια ιστορική αναδρομή στο πρόβλημα της μελέτης των επιφανειών με σταθερή καμπυλότητα Gauss ή με σταθερή μέση καμπυλότητα και ειδικότερα στον καθορισμό συγκεκριμένων ειδών επιφανειών (εκ περιστροφής, ελικοειδών, κ.λπ.) του Ευκλείδειου χώρου E^3 καθώς και του χώρου E^3_1, όπως επίσης και σε προβλήματα που αφορούν υπερεπιφάνειες στους χώρους E^4 και E^4_1.

Στο *Κεφάλαιο 2* παρουσιάζονται βασικές έννοιες της Διαφορικής Γεωμετρίας, όπως οι Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες, οι διαφορίσιμες συναρτήσεις πάνω σε πολλαπλότητα, ο εφαπτόμενος και ο συνεφαπτόμενος χώρος, τα διανυσματικά πεδία, τα τανυστικά πεδία πάνω σε πολλαπλότητα, οι γραμμικές συνοχές, οι ψευδο-πολλαπλότητες Riemann, η συναλλοίωτη παράγωγος, καθώς και οι ψευδο-υποπολλαπλότητες Riemann δοθείσης πολλαπλότητας.

Στο *Κεφάλαιο 3* επιλύεται το πρόβλημα της ύπαρξης ελικοειδών επιφανειών, ως προς ένα χωροειδή ή ένα χρονοειδή άξονα περιστροφής, της 3-διάστατης πολλαπλότητας E_1^3, με καμπυλότητα Gauss δοσμένη διαφορίσιμη συνάρτηση. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος πρώτα αποδεικνύεται ότι η καμπυλότητα Gauss αυτών των επιφανειών, είναι συναρτήση μόνο μιας μεταβλητής και στη συνέχεια δημιουργούμε τις μη Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με μη σταθερούς συντελεστές, όπου η συνάρτηση $K = K(u)$ είναι γνωστή. Τέλος επιλύουμε αυτές τις εξισώσεις σε κάθε περίπτωση. Από τη μελέτη αυτού του προβλήματος προέκυψαν τα Θεωρήματα (3.2.1), (3.2.2). Αντίστοιχα αποτελέσματα που αφορούν στη μέση καμπυλότητα αναφέρονται στο [49]. Αυτά τα αποτελέσματα είναι πρωτότυπα και έχουν δημοσιευθεί στην εργασία με τίτλο «Helicoidal surfaces in 3-dimensional Minkowski space» [11], στο περιοδικό Journal of Mathematical Analysis and its Applications.

Στο *Κεφάλαιο 4* μελετώνται οι διαρμονικές υπερεπιφάνειες του χώρου E_1^4. Η μελέτη αυτή γίνεται με τη βοήθεια βασικών εννοιών της Διαφορικής Γεωμετρίας, όπως για παράδειγμα του τελεστή σχήματος (shape operator), του τελεστή του Laplace, των μορφών συνοχής (connection forms), των εξισώσεων του Gauss, Weingarten του Codazzi κ.λπ. Ειδικότερα, θεωρούμε μια κατάλληλη βάση (ορθοκανονική ή ψευδοορθοκανονική) του εφαπτόμενου χώρου των υπερεπιφανειών του E_1^4 και γίνεται διάκριση κατά τη μελέτη του προβλήματος, ως προς το αν ο τελεστής σχήματος της υπερεπιφάνειας διαγωνοποιείται ή όχι ως προς αυτή τη βάση. Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την εξίσωση του Codazzi βρίσκουμε τις μορφές συνοχής ω_{ij}^k. Με την εξίσωση του Gauss υπολογίζουμε τις τιμές των δράσεων των διανυσμάτων της βάσης στις μορφές συνοχής. Στη συνέχεια, από τη συνθήκη της διαρμονικότητας αποδεικνύεται, σε κάθε περίπτωση, ότι οι υπερεπιφάνειες αυτές είναι ελάχιστης έκτασης. Αυτά τα αποτελέσματα είναι πρωτότυπα και μέρος αυτών έχει υποβληθεί προς δημοσίευση στην εργασία με τίτλο «Biharmonic Lorentz hypersurfaces in E_1^4», [24].

Στο *Κεφάλαιο 5* θέλοντας να πετύχουμε γενίκευση των αποτελεσμάτων του τετάρτου Κεφαλαίου, μελετούμε τις διαρμονικές υπερεπιφάνειες του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_s^4 με $s = 0, 1, 2, 3, 4$. Μελετούμε, δηλαδή, υπερεπιφάνειες του E_s^4 με τυχαίο δείκτη. Η μελέτη αυτή γίνεται για την περίπτωση που ο τελεστής σχήματος ως προς κατάλληλη βάση είναι διαγωνοποιήσιμος. Η περίπτωση κατά την οποία ο τελεστής σχήματος είναι μη διαγωνοποιήσιμος, εξ όσων γνωρίζουμε συνεχίζει να είναι ανοικτό πρόβλημα.Η μελέτη αυτών των υπερεπιφανειών γίνεται με «εργαλεία» που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 4. Αυτά τα αποτελέσματα είναι πρωτότυπα και μέρος αυτών έχει υποβληθεί προς δημοσίευση στην εργασία με τίτλο «Biharmonic hypersurfaces of the 4-dimensional semi-Euclidean space E_s^4», [25].

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες

2.1 Διαφορίσιμες πολλαπλότητες

Ορισμός 2.1.1. Ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff M που σε κάθε σημείο του υπάρχει περιοχή ομοιόμορφη προς ένα ανοικτό υποσύνολο της$\mathbb{R}^n$, λέγεται τοπολογική πολλαπλότητα ή απλώς πολλαπλότητα διάστασηςn.

Η έννοια της συνεκτικότητας ενός χώρου είναι τοπολογική ιδιότητα και απαιτείται, για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη συνεχών καμπυλών, που συνδέουν τυχόντα σημεία του. Υπάρχουν πολλαπλότητες συνεκτικές, για παράδειγμα η σφαίρα S^n και μη συνεκτικές για παράδειγμα, η γενική γραμμική ομάδα όλων των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων $GL(n, \mathbb{R})$ διάστασης n^2. Η πολλαπλότητα αυτή είναι μια μη συνεκτική πολλαπλότητα με δύο συνεκτικές συνιστώσες, τις $GL^+(n, \mathbb{R})$ και $GL^-(n, \mathbb{R})$.

Ορισμός 2.1.2. Τοπικός χάρτης ή χάρτης πάνω σε μια n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M (ή M^n) λέγεται ένα ζεύγος (U, ϕ), όπου U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της M και ϕ ένας ομοιομορφισμός του U πάνω σε ένα ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{R}^n$.

Το σύνολο U, που είναι το πεδίο ορισμού της ϕ, λέγεται πεδίο ορισμού του

χάρτη και η ϕ, απεικόνιση του χάρτη. Ο αριθμός n λέγεται διάσταση του χάρτη.
Θεωρούμε ένα χάρτη (U,ϕ) μιας τοπολογικής πολλαπλότητας M^n. Τότε κάθε σημείο $P \in U$ καθορίζεται από τις συντεταγμένες

$$\{x^1(P), \ldots, x^n(P)\}$$

του σημείου $\phi(P) \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, $x^i(P) = x^i(\phi(P)) = (x^i \circ \phi)(P)$, $i = 1, \ldots, n$. Αν το σύνολο U είναι συνεκτικό, τότε οι αριθμοί $x^i(P)$ λέγονται συντεταγμένες του P ως προς το χάρτη (U,ϕ), ενώ η n-άδα των συναρτήσεων $x^1, \ldots x^n$ τέτοιων ώστε

$$x^i : U \subseteq M \to \mathbb{R};\ x^i : P \mapsto x^i(P) = [\phi(P)]^i,\ i = 1, \ldots, n,$$

όπου δηλαδή η i-συντεταγμένη του P είναι η i-συντεταγμένη του $\phi(P)$, λέγεται σύστημα τοπικών συντεταγμένων (ή και τοπικό σύστημα συντεταγμένων) στο U, ως προς το χάρτη (U,ϕ). Έτσι κάθε τοπικός χάρτης της M ορίζει ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων αυτής.

Ορισμός 2.1.3. **Διαφορίσιμη δομή** (ή άτλαντας) διάστασης n, τάξης διαφορισιμότητας r (ή κλάσης C^r) πάνω σε μια n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M λέγεται μια συλλογή χαρτών $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ (I είναι ένα σύνολο δεικτών), όπου $\phi_\alpha(U_\alpha)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε

1. $M = \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$,
2. Για κάθε ζεύγος $\alpha, \beta \in I$ η απεικόνιση

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : (x^1, \ldots, x^n) \mapsto \{y^1 = y^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^n = y^n(x^1, \ldots, x^n)\}$$

είναι διαφορίσιμη τάξης r (ή κλάσης C^r).

3. Η συλλογή $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ είναι η μέγιστη οικογένεια τοπικών χαρτών που ικανοποιούν τις 1 και 2.

Αν $r = \infty$ τότε η δομή αυτή λέγεται διαφορίσιμη τάξης απείρου ή απλά διαφορίσιμη.
Δίνουμε τον ορισμό της διαφορίσιμης πολλαπλότητας.

Ορισμός 2.1.4. Διαφορίσιμη πολλαπλότητα (ή C^∞ πολλαπλότητα) διάστασης n λέγεται κάθε n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M, με αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας της, εφοδιασμένη με μια διαφορίσιμη δομή διάστασης n.

Μερικά παραδείγματα διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων αποτελούν η σφαίρα $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ με εξίσωση $x_1^2 + x_2^2 = 1$ διάστασης 1, η σφαίρα $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ με εξίσωση $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ διάστασης 2 και η γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ διάστασης n^2. Θα ορίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο πολλαπλοτήτων.
Θεωρούμε τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες $[M^m, U_1 = (U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}]$ και $[N^n, U_2 = (U_\beta, \phi_\beta)_{\beta \in J}]$ και το καρτεσιανό γινόμενο $M^m \times N^n$. Το γινόμενο αυτό είναι επίσης ένας χώρος Hausdorff, και έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.
Θεωρούμε πάνω σ' αυτό το χώρο τη συλλογή

$$U = U_1 \times U_2 = \{(U_\alpha \times U_\beta, \phi_\alpha \times \phi_\beta) | (U_\alpha, \phi_\alpha) \in U_1 \text{ και } (U_\beta, \phi_\beta) \in U_2\}$$

όπου $\phi_\alpha \times \phi_\beta$ παριστάνει την απεικόνιση

$$\phi_\alpha \times \phi_\beta : U_\alpha \times U_\beta \to (\phi_\alpha \times \phi_\beta)(U_\alpha \times U_\beta) = \phi_\alpha(U_\alpha) \times \phi_\beta(U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$$

με τιμή

$$(\phi_\alpha \times \phi_\beta)(x, y) = (\phi_\alpha(x), \phi_\beta(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = R^{m+n}$$

Πρόταση 2.1.5. *[60, σελ. 347] Το ζεύγος $(M^m \times N^n, U)$ ορίζει μια $(m+n)$-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα, η οποία λέγεται καρτεσιανό γινόμενο των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων M^m και N^n.*

Ένα παράδειγμα τέτοιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας αποτελεί ο διδιάστατος τόρος $T^2 = S^1 \times S^1$. Ο διδιάστατος τόρος είναι η επιφάνεια που παράγεται όταν περιστραφεί ο κύκλος $S^1 : (x_1 - \alpha)^2 + x_2^2 = r^2,\ r < \alpha$ γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

Υποθέτουμε ότι M είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης m, τάξης διαφορισιμότητας r (ή κλάσης C^r) και ότι A είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της M.

Ορισμός 2.1.6. Η συνάρτηση $f : A \subseteq M \to \mathbb{R}$ λέγεται διαφορίσιμη τάξης r (ή κλάσης C^r) πάνω στο A αν η συνάρτηση

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap A) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη για κάποιο χάρτη (U, ϕ) πάνω στην M.

Το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων κλάσης C^r, που ορίζονται στην n-διάστατη πολλαπλότητα M κλάσης C^r, συμβολίζεται με $D^r(M)$, ενώ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στην πολλαπλότητα M, κλάσης C^∞, συμβολίζεται με $D^0(M)$.

Θεωρούμε τις πολλαπλότητες M^n και N^m και έστω $f : A \subseteq M^n \to N^m$ μια συνεχής απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο A της M.

Ορισμός 2.1.7. Η απεικόνιση $f : A \subseteq M^n \to N^m$ λέγεται **διαφορίσιμη** κλάσης C^r στο σημείο $P \in A$, αν για κάθε χάρτη (U, ϕ) της M και (V, ψ) της N τέτοιον ώστε $P \in U$ και $f(P) \in V$, η απεικόνιση

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

είναι διαφορίσιμη κλάσης C^r στο σημείο $\phi(P) \in \mathbb{R}^n$.

Αν η f είναι διαφορίσιμη τάξης r σε κάθε σημείο του A τότε η f λέγεται διαφορίσιμη απεικόνιση τάξης r (ή κλάσης C^r) στο σύνολο A.

Πρόταση 2.1.8. *Η απεικόνιση $f : M^n \to N^m$ είναι διαφορίσιμη κλάσης C^r αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της $\{y^i\} = \{y^1, \ldots, y^m\}$ του σημείου $f(P) \in N$, είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις κλάσης C^r των τοπικών συντεταγμένων του τυχαίου σημείου $P \in M$. Δηλαδή αν θέσουμε*

$$y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

τότε οι f^i να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις κλάσης C^r.

2.2 Εφαπτόμενος-Συνεφαπτόμενος χώρος, Διανυσματικά πεδία - Διαφορικές Μορφές

Έστω $D^r(M, P)$ το σύνολο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων κλάσης C^r στο σημείο $P \in M$. Το σύνολο $D^r(M, P)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο[60, σελ. 366], ο οποίος γίνεται άλγεβρα, αν ορίσουμε ως δεύτερο νόμο εσωτερικής σύνθεσης τον πολλαπλασιασμό των συναρτήσεων.

Ορισμός 2.2.1. **Διαφόριση** της άλγεβρας $D^r(M, P)$ στο σημείο P, λέγεται μια πραγματική συνάρτηση $\mathcal{D} : D^r(M, P) \to \mathbb{R}$ με τις εξής δύο ιδιότητες

1. Η $\mathcal{D}$ είναι γραμμική, δηλαδή ισχύει

   $\mathcal{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{D}(f) + \mu \mathcal{D}(g)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $f, g \in D^r(M, P)$.

2. Η $\mathcal{D}$ ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz, δηλαδή έχουμε,

   $\mathcal{D}(fg) = f(P)\mathcal{D}(g) + g(P)\mathcal{D}(f)$, $\forall f, g \in D^r(M, P)$.

Ορισμός 2.2.2. **Εφαπτόμενο διάνυσμα** στο σημείο P της n-διάστατης πολλαπλότητας M, λέγεται η απεικόνιση $X_P : D^r(M, P) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

(i) $X_P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 X_P(f_1) + \lambda_2 X_P(f_2)$

(ii) $X_P(f_1 f_2) = f_1(P)X_P(f_2) + f_2(P)X_P(f_1)$, για κάθε $f_1, f_2 \in D^r(M,P)$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Η γραμμική απεικόνιση X_P ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz και κατά συνέπεια είναι μια διαφόριση της άλγεβρας $D^r(M,P)$. Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο P μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, αποτελεί διανυσματικό χώρο. Τον διανυσματικό αυτό χώρο, τον λέμε εφαπτόμενο χώρο της M στο σημείο P και θα τον συμβολίζουμε με $T_P(M)$.
Έστω M, N δύο διαφορίσιμες πολλαπλότητες και f μία απεικόνιση από την M στην N.

Ορισμός 2.2.3. Η απεικόνιση $f_{*_P} : T_P(M) \to T_{f(P)}(N)$, $f_{*_P} : X_P \to f_{*_P} X_P$ όπου $f_{*_P} X_P : D^0(N) \to \mathbb{R}$, $f_{*_P} X_P : g \mapsto (f_{*_P} X_P)g = X_P(g \circ f)$, λέγεται **διαφορικό** (differential) της απεικόνισης $f : M \to N$ στο σημείο $P \in M$, συμβολίζεται επίσης και με $(df)_P$, και είναι μια γραμμική απεικόνιση του εφαπτόμενου χώρου $T_P(M)$ στον εφαπτόμενο χώρο $T_{f(P)}(N)$.

Ορισμός 2.2.4. Αν $f : M \to \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση, το διαφορικό $(df)_P$ της f στο $P \in M$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$(df)_P : T_P(M) \to \mathbb{R}, \quad \text{με την ταύτιση } T_{f(P)}\mathbb{R} \equiv \mathbb{R},$$

$$(df)_P : X_P \to (df)_P X_P = X_P(f).$$

Ορισμός 2.2.5. [50, σελ. 16] Μία πολλαπλότητα N ονομάζεται **υποπολλαπλότητα** της πολλαπλότητας M όταν:

(i) $N \subseteq M$ (ως σύνολα)

(ii) Η απεικόνιση έγκλισης $j : N \to M$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και για κάθε σημείο $P \in N$ το διαφορικό dj είναι ένα προς ένα απεικόνιση.

Παραδείγματα υποπολλαπλοτήτων της $\mathbb{R}^3$, διάστασης 2 αποτελούν η μοναδιαία σφαίρα S^2, ο κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$, ενώ η μοναδιαία σφαίρα S^n είναι υποπολλαπλότητα της $\mathbb{R}^{n+1}$, διάστασης n.

Το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων με πεδίο ορισμού τον $T_P(M)$ και τιμές στο R αποτελεί γραμμικό χώρο, τον λεγόμενο δϋκό χώρο του $T_P(M)$. Ο χώρος αυτός είναι ισομορφικός με τον $T_P(M)$, συμβολίζεται με $T_P^*(M)$ και ονομάζεται συνεφαπτόμενος χώρος της M στο P. Είναι προφανές ότι τα στοιχεία $(df)_P$ του ορισμού 2.2.4 ανήκουν στο χώρο $T_P^*(M)$. Η συλλογή όλων των εφαπτόμενων (συνεφαπτόμενων) χώρων της M σε κάθε σημείο αυτής, συμβολίζεται με $T(M)$ [αντ. $T^*(M)$] και λέγεται **εφαπτόμενη δέσμη** (tangent bundle) [αντ. **συνεφαπτόμενη δέσμη** (cotangent bundle)] αυτής, δηλαδή είναι

$$T(M) = \bigcup_{P\in M} T_P(M) = \{(P, X_P) \,|\, P \in M, X_P \in T_P(M)\},$$

$$\left(T^*(M) = \bigcup_{P\in M} T_P^*(M) \right)$$

μπορεί δε να γίνει επίσης διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης $2n$ [60, σελ. 381].

Ορισμός 2.2.6. Έστω M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $D^0(M)$ η αντίστοιχη (πραγματική) άλγεβρα των (πραγματικών) διαφορίσιμων συναρτήσεων επί της M. Μια απεικόνιση $\mathcal{D} : D^0(M) \to D^0(M)$ λέγεται **διαφόριση** της άλγεβρας $D^0(M)$ αν έχει τις εξής δύο ιδιότητες

1. $\mathcal{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda\mathcal{D}(f) + \mu\mathcal{D}(g)$,

2. $\mathcal{D}(fg) = f\mathcal{D}(g) + \mathcal{D}(f)g$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $f, g \in D^0(M)$.

Ορισμός 2.2.7. Έστω M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $T(M)$ η αντίστοιχη εφαπτόμενη δέσμη αυτής. Καλούμε **διανυσματικό πεδίο** της M μια απεικόνιση

$$X : M \to T(M)$$

με την ιδιότητα $\pi \circ X = Id_M$, όπου $\pi : T(M) \to M$, με τιμή $\pi(P, X_P) = P$, είναι η φυσική προβολή της εφαπτόμενης δέσμης $T(M)$ στην πολλαπλότητα M.

Αν λοιπόν X είναι ένα διανυσματικό πεδίο μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, τότε για κάθε $f \in D^0(M)$ ορίζεται η πραγματική συνάρτηση $X(f)$ (ή Xf) ως εξής:

$$X(f) : M \to \mathbb{R}$$

$$X(f) : P \to [X(f)](P) = X_P(f).$$

Ειδικότερα, για δοθέντα χάρτη (U, ϕ) της M με (τοπικό) σύστημα συντεταγμένων (x^i) και X όπως προηγουμένως, ορίζονται οι συνιστώσες συναρτήσεις X^i με $1 \leq i \leq n = \dim M$ του X, από τη σχέση $X^i = X(x^i)$, δηλαδή

$$X^i(P) = \left[X(x^i)\right](P) = [X_P]\,(x^i).$$

Συνεπώς, για κάθε $P \in M$, ισχύει

$$X_P = \sum_{i=1}^{n} [X_P]\,(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P = \sum_{i=1}^{n} X^i(P) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P .$$

Εύκολα αποδεικνύεται τώρα, ότι κάθε διανυσματικό πεδίο της M αποτελεί επίσης διαφόριση της άλγεβρας $D^0(M)$. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι το διανυσματικό πεδίο X σε κάθε σημείο $P \in M$ καθορίζει το διάνυσμα $X_P \in T_P(M)$. Επιπλέον, είναι γνωστό ότι το διανυσματικό πεδίο X είναι διαφορίσιμο σε ένα σημείο $P \in M$ αν και μόνο αν υπάρχει χάρτης (U, ϕ) της M στο σημείο P έτσι ώστε $X^i \in D^0(M)$, $1 \leq i \leq n$, ή ισοδύναμα αν και μόνο αν για κάθε συνάρτηση $f \in D^0(M)$ η συνάρτηση $X(f)$ είναι επίσης διαφορίσιμη. Ειδικότερα, τα φυσικά διανυσματικά πεδία $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$, $1 \leq i \leq n$ μιας n-διάστατης διαφορίσιμης πολλαπλότητας M είναι διαφορίσιμα, γιατί $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = \delta_i^j$, (δέλτα του Kronecker) $\forall i, j = 1, \ldots, n$, που είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις (αριθμοί).

Το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων πάνω σε μια πολλαπλότητα συμβολίζεται με $D^1(M)$. Αν τώρα στο σύνολο αυτό, $D^1(M)$, ορίσουμε τις ακόλουθες πράξεις

(i) $(X+Y)f = Xf + Yf$

(ii) $(fX)g = f(Xg)$ όπου $f, g \in D^0(M)$ και $X, Y \in D^1(M)$

οριζόμενες κατά σημείο, τότε το σύνολο αυτό αποτελεί **πρότυπο** (module) πάνω από την άλγεβρα $D^0(M)$. Βάση αυτού του προτύπου αποτελούν τα n φυσικά διανυσματικά πεδία $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$, που έχουν την ιδιότητα ώστε σε κάθε σημείο $P \in M$, να αντιστοιχούν τη φυσική βάση $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_P$, $i = 1, \ldots, n$ του $T_P(M)$. Επομένως, κάθε $X \in D^1(M)$ γράφεται ως εξής:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Η σχέση αυτή λέμε ότι αποτελεί την τοπική παράσταση του X ως προς τον θεωρούμενο χάρτη (U, ϕ) της M. Ως συμπέρασμα αυτής της σχέσης έχουμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο X είναι ορισμένο τοπικά (δηλαδή, ως προς ένα τοπικό χάρτη της M), όταν είναι γνωστές οι αντίστοιχες συντεταγμένες συναρτήσεις του, $X^i = X^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $1 \leq i \leq n$.
Ορίζουμε την ακόλουθη πράξη στο σύνολο $D^1(M)$. Για κάθε $X, Y \in D^1(M)$ το διανυσματικό πεδίο $[X, Y] = XY - YX$ με $[X, Y]\, f = X(Yf) - Y(Xf)$ για κάθε $f \in D^0(M)$, λέγεται **αγκύλη ή γινόμενο Lie** (Lie bracket) των πεδίων X, Y και είναι επίσης μια διαφόριση της άλγεβρας $D^0(M)$. Με αυτή την πράξη το πρότυπο $D^1(M)$ αποτελεί άλγεβρα Lie, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

(i) $[X, Y] = -[Y, X], \ \forall X, Y \in D^1(M)$

(ii) $[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1 [X_1, Y] + \lambda_2 [X_2, Y], \ \forall\, X_i \in D^1(M)$,
$\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$

(iii) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0, \forall\, X,Y,Z \in D^1(M)$
(Ταυτότητα Jacobi).

Έστω M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n και P τυχαίο σημείο αυτής. Από τον εφαπτόμενο χώρο $T_P(M)$ παίρνουμε τον δυϊκό του $T_P^*(M)$, δηλαδή τον συνεφαπτόμενο χώρο της M στο σημείο P.

Ορισμός 2.2.8. Διαφορική μορφή πρώτης τάξης (ή διαφορική 1-μορφή) επί της διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, λέγεται η απεικόνιση

$$\omega : M \to \bigcup_{P\in M} T_P^*(M)$$

η οποία σε κάθε σημείο $P \in M$, αντιστοιχεί το συνεφαπτόμενο διάνυσμα $\omega(P)$ (ή ω_P) του συνεφαπτόμενου χώρου $T_P^*(M)$.

Από τον ορισμό (2.2.8), συμπεραίνουμε πως για κάθε $P \in M$ η αντίστοιχη διαφορική 1-μορφή είναι μια γραμμική μορφή πάνω στον $T_P(M)$, δηλαδή $\omega(P) : T_P(M) \to \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, αν $D^1(M)$ είναι το σύνολο των διανυσματικών πεδίων επί της M και $D_1(M)$ το δυϊκό του σύνολο, τότε ως διαφορικές 1-μορφές ορίζονται τα στοιχεία του $D_1(M)$, όπου

$$D_1(M) = \{\omega |\, \omega : D^1(M) \to D^0(M),\, \omega : D^0 - \text{γραμμική απεικόνιση}\}.$$

Ορισμός 2.2.9. Τανυστικό πεδίο τύπου (p,q), ή μικτό τανυστικό πεδίο ανταλλοίωτης τάξης p και συναλλοίωτης τάξης q λέγεται κάθε απεικόνιση

$$T : \underbrace{D^1(M)\times\ldots\times D^1(M)}_{q-\text{φορές}} \to \begin{cases} \underbrace{D^1(M)\times\ldots\times D^1(M)}_{p-\text{φορές}} \\ D^0(M),\ \text{αν } p=0 \end{cases}$$

η οποία είναι $D^0(M)$-γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή.

Αν $p=0$ τότε έχουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(0,q)$ τα οποία ονομάζονται συναλλοίωτα τανυστικά πεδία. Αν $q=0$ τότε έχουμε τα τανυστικά πεδία τύπου

$(p, 0)$ τα οποία λέγονται ανταλλοίωτα τανυστικά πεδία. Αν $p = 1$, $q = 0$ τότε παίρνουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(1, 0)$, δηλαδή τα **διανυσματικά πεδία**. Αν $p = 0$, $q = 1$ τότε παίρνουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(0, 1)$, δηλαδή τις **διαφορικές 1-μορφές**. Αν $p = 0$, $q = 0$ τότε έχουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(0, 0)$, δηλαδή τις διαφορίσιμες συναρτήσεις και τις σταθερές.

Ορισμός 2.2.10. [50, σελ. 42] Έστω $f : N \to M$ μία διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των πολλαπλοτήτων N, M. Αν $\omega \in T^*(M)$ τότε ορίζουμε την απεικόνιση $f^*\omega : T_P(N) \to T_{f(P)}(M)$ με τιμή

$$(f^*\omega)(u_1, ..., u_n) = \omega(f_*(u_1), ..., f_*(u_n))$$

για κάθε $u_i \in T_P(N), i = 1, 2, ..., n$ και $P \in N$. Η $f^*\omega$ ονομάζεται **απεικόνιση επιστροφής** (pullback) του ω διαμέσου της f.

2.3 Ψευδο-Ευκλείδειοι Διανυσματικοί χώροι

Έστω V ένας n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος και $g : V \times V \to R$ μία απεικόνιση που να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Να είναι γραμμική, δηλαδή

$$g(\lambda u + \mu v, w) = \lambda g(u, w) + \mu g(v, w), \ \ \forall \lambda, \mu \in R, \ \ \forall u, v, w \in V.$$

2. Να είναι συμμετρική, δηλαδή

$$g(u, v) = g(v, u), \ \ \forall u, v \in V.$$

3. Να είναι μη εκφυλισμένη, δηλαδή αν $g(u, v) = 0$ $\forall u \in V$, τότε να είναι $v = 0$.

Η απεικόνιση g ονομάζεται **μετρικός τανυστής** πάνω στον V. Από τον τρόπο που ορίσθηκε η g είναι φανερό ότι $g \in \overset{2}{\otimes} V^*$, δηλαδή είναι ένα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο τύπου $(0,2)$. Λέμε ότι ο τανυστής g είναι **θετικά** ορισμένος στον V αν $g(u,u) > 0$, για κάθε μη μηδενικό $u \in V$. Αντίστοιχα αν έχουμε $g(u,u) < 0$, για κάθε μη μηδενικό $u \in V$, τότε ο μετρικός τανυστής λέγεται **αρνητικά** ορισμένος. Αν τέλος ο g δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένος τότε τον χαρακτηρίζουμε ως **αόριστο** (indefinite). Αν δεν ισχύει η ιδιότητα τρία (3), του ως άνω ορισμού, δηλαδή αν υπάρχει $u \neq 0$ του V τέτοιο ώστε $g(u,v) = 0 \ \forall v \in V$, τότε ο μετρικός τανυστής λέγεται **εκφυλισμένος**. Θεωρούμε έναν υπόχωρο W του V. Τότε ο περιορισμός του μετρικού τανυστή g στο $W \times W$ είναι επίσης μία συμμετρική διγραμμική μορφή πάνω στον W, την οποία συμβολίζουμε με $g_{|W}$. Ο W ονομάζεται μη-εκφυλισμένος υπόχωρος του V, αν ο $g_{|W}$ είναι μη εκφυλισμένος. Η διάσταση q του μεγαλύτερου υπόχωρου W, στον οποίο ο $g_{|W}$ είναι αρνητικά ορισμένος ονομάζεται **δείκτης** (index) του g στον V και γράφουμε $IndV = q$. Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του g, ορίζεται ως η απεικόνιση $h : V \to R$ με τιμή $h(u) = g(u,u), \ \forall u \in V$. Ο μετρικός τανυστής g μπορεί να γραφθεί και στην ακόλουθη μορφή

$$g(u,v) = \frac{1}{2}\{h(u+v) - h(u) - h(v)\} \ \forall u,v \in V$$

Έστω $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ μία τυχαία βάση του V. Τότε ο μετρικός τανυστής g, μπορεί να παρασταθεί από έναν $n \times n$ πίνακα $G = [g_{ij}]$, όπου

$$g_{ij} = g(e_i, e_j), \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

Ο G ονομάζεται **πίνακας** του μετρικού τανυστή g ως προς την βάση B και είναι συμμετρικός, αφού η g είναι συμμετρική απεικόνιση. Αν θεωρήσουμε δύο διανύσματα u, v του V τότε έχουμε

$$g(u,v) = g\left(u^i e_i, \ v^j e_j\right) = g_{ij} u^i v^j,$$

όπου χρησιμοποιείται η σύμβαση του Einstein για το άθροισμα.

Πρόταση 2.3.1. *Μία συμμετρική διγραμμική μορφή επί του χώρου V είναι μη εκφυλισμένη αν και μόνο αν ο πίνακάς της, ως προς μια βάση του, είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Έστω $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ μία βάση του V και $u \in V$. Τότε $g(u,v) = 0 \;\; \forall v \in V$ αν και μόνο αν $g(u,e_i) = 0, i = 1,2,...,n$. Έχουμε

$$g(u,e_i) = g\left(u^j e_j, e_i\right) = g_{ij}u^j, \quad g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Η g όμως, είναι εκφυλισμένη αν και μόνο αν υπάρχουν αριθμοί $u^1, u^2, ..., u^n$ όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $g_{ij}u^j = 0$. Αλλά αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη γραμμική εξάρτηση των στηλών του πίνακα $G = (g_{ij})$, δηλαδή ο πίνακας G δεν είναι αντιστρέψιμος. □

Αν η διγραμμική μορφή g είναι θετικά ορισμένη τότε ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενό επί του V, ο οποίος τότε λέγεται **Ευκλείδειος χώρος**. Κάθε μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή g επί του V, καλείται ψευδο-Ευκλείδεια μετρική και ο χώρος V **ψευδο-Ευκλείδειος χώρος**. Αν ο δείκτης q του g είναι 1, τότε το g λέγεται **μετρική Lorentz** και ο ψευδο-Ευκλείδειος χώρος V ονομάζεται **χώρος Lorentz-Minkowski**.

Έστω V ένας ψευδο-Ευκλείδειος χώρος εφοδιασμένος με μία ψευδο-Ευκλείδεια μετρική g. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\|\cdot\| : V \to R\,; \;\; \|u\| = |g(u,u)|^{\frac{1}{2}} \;\; , \; \forall\, u \in V \tag{2.3.1}$$

την οποία καλούμε μήκος (norm) του διανύσματος u. Ένα διάνυσμα u ονομάζεται

1. **Χωροειδές** (spacelike), αν $g(u,u) > 0$ ή $u = 0$
2. **Ισοτροπικό** (lightlike ή null), αν $g(u,u) = 0$ και $u \neq 0$
3. **Χρονοειδές** (timelike), αν $g(u,u) < 0$

Ισοτροπικός κώνος του V λέγεται το σύνολο Λ όλων των ισοτροπικών διανυσμάτων του, δηλαδή το σύνολο

$$\Lambda = \{u \in (V - \{0\}) \mid \quad g(u,u) = 0\}$$

Μοναδιαίο διάνυσμα του χώρου V είναι ένα διάνυσμα u με μήκος 1, αλλά $g(u,u) = \pm 1$. Δύο διανύσματα u και v είναι ορθογώνια (γράφουμε $u \perp v$) αν και μόνο αν $g(u,v) = 0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε ισοτροπικό διάνυσμα του V είναι ορθογώνιο με τον εαυτό του (αυτοορθογώνια διανύσματα).
Έστω W ένας υπόχωρος του V. Ορίζουμε τον κάθετο χώρο του W ως το σύνολο $W^{\perp} = \{u \in V : u \perp W\} = \{u \in V : g(u,w) = 0, \ \forall w \in W\}$. Είναι σημαντικό το γεγονός ότι στους ψευδο-Ευκλείδιους χώρους, γενικά, δεν ισχύει η σχέση $W \bigcap W^{\perp} = \{0\}$. Δύο υπόχωροι U, W του V είναι ορθογώνιοι αν $g(u,w) = 0$, για κάθε $u \in U$ και $w \in W$. Ορίζουμε ως **ισοτροπικό υπόχωρο** (radical ή null space) του V, ως προς τον μετρικό τανυστή g, τον χώρο RadV που ορίζεται ως εξής:

$$RadV = \{u \in V \mid g(u,v) = 0, \ \ \forall v \in V\}$$

Πρόταση 2.3.2. *Έστω (V,g) ένας n-διάστατος ψευδο-Ευκλείδειος χώρος και W ένας k-διάστατος υπόχωρός του. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\begin{aligned}
&(1) \quad dimW + dimW^{\perp} = n \\
&(2) \quad \left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W \\
&(3) \quad RadW = RadW^{\perp} = W \bigcap W^{\perp}
\end{aligned}$$

Απόδειξη. (1) Υποθέτουμε ότι $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ είναι μία βάση του V έτσι ώστε τα διανύσματα $e_1, ..., e_k$ με $(k \leq n)$ να είναι βάση του W. Ένα διάνυσμα u ανήκει στον χώρο $W^{\perp}$ αν και μόνο αν $g(u, e_i) = 0$ για $1 \leq i \leq k$, δηλαδή

$$g_{ij} u^j = 0.$$

Αυτές είναι k το πλήθος γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους. Από την πρόταση (2.3.1) οι γραμμές του πίνακα των συντελεστών είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και επομένως ο πίνακας έχει τάξη k. Έτσι ο χώρος των λύσεων έχει διάσταση $n-k$. Οι λύσεις $\{u^1, u^2, ..., u^m\}$ δίνουν ακριβώς τα διανύσματα $u = \sum u^i e_i$ του $W^\perp$ και επομένως η σέση (1) είναι αληθής αφού $k + (n-k) = n$.
(2) Έστω $u \in \left(W^\perp\right)^\perp$. Άρα $u \perp W^\perp$ και από τον ορισμό του χώρου $W^\perp$ έχουμε ότι $W \subset \left(W^\perp\right)^\perp$. Από την (1) οι χώροι $W, \left(W^\perp\right)^\perp$ έχουν την ίδια διάσταση, επομένως είναι ίσοι.
(3) Θεωρούμε $u \in W \bigcap W^\perp \subset W^\perp$. Δηλαδή $g(u,w) = 0$ για κάθε $w \in W$ οπότε το u είναι στοιχείο του $RadW$. Αντίστροφα, για κάθε $u \in RadW \subset W$ έχουμε $g(u,w) = 0$ για κάθε $w \in W$ από την οποία προκύπτει ότι $u \in W \bigcap W^\perp$. Επομένως, $RadW = W \bigcap W^\perp$. Από την (2) και την σχέση $RadW^\perp = \left(W^\perp\right)^\perp$ έχουμε και ότι $RadW^\perp = W \bigcap W^\perp$. □

Πρόταση 2.3.3. *[50, σελ. 49] Ένας υπόχωρος W του V είναι μη-εκφυλισμένος αν και μόνο αν ο V είναι ευθύ άθροισμα των W και $W^\perp$.*

Έστω V ένας Lorentz-Minkowski χώρος και W ένας υπόχωρός του. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για τον W:

1. Αν ο $g_{|W}$ είναι θετικά ορισμένος, τότε ο W λέγεται χωροειδής (spacelike) υπόχωρος.

2. Αν ο $g_{|W}$ είναι μη εκφυλισμένος, δείκτου 1 τότε ο W λέγεται χρονοειδής (timelike) υπόχωρος.

3. Αν ο $g_{|W}$ είναι εκφυλισμένος τότε ο W λέγεται ισοτροπικός (lightlike) υπόχωρος.

Πρόταση 2.3.4. *[50, σελ. 141] Αν u είναι ένα* ***χρονοειδές*** *διάνυσμα του Lorentz-Minkowski διανυσματικού χώρου (V,g), τότε ο υπόχωρος $u^\perp$ του V είναι χωροειδής και ο V είναι το ευθύ άθροισμα $\lambda u \oplus u^\perp \ , \ \lambda \in R$.*

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι ένας υπόχωρος W ενός χώρου V είναι χρονοειδής αν και μόνο αν ο $W^{\perp}$ είναι χωροειδής.

Έστω V ένας n-διάστατος ψευδο-Ευκλείδειος χώρος. Ένα σύνολο B, διακεκριμένων ορθογωνίων μοναδιαίων διανυσμάτων του ονομάζεται, ως γνωστό, ορθοκανονικό σύνολο. Κάθε σύνολο n ορθοκανονικών διανυσμάτων του V αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του. Ο πίνακας της g ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ του V είναι διαγώνιος και ισχύει ότι

$$g(e_i, e_j) = 0 \ \ \forall i \neq j, \quad g(e_j, e_j) = \varepsilon_j = \pm 1 \ \ , \ \ i, j = 1, 2, ..., n$$

Το τυχαίο στοιχείο $u \in V$ γράφεται στη μορφή

$$u = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ \ g(u, e_i) e_i$$

Όταν έχουμε ένα n-διάστατο χώρο Lorentz (V, g), μπορούμε να ορίσουμε ως **ψευδο-ορθοκανονική βάση** του, [29], το σύνολο $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} g(e_1, e_1) &= g(e_2, e_2) = 0, \ \ g(e_1, e_2) = 1 \\ g(e_1, e_i) &= g(e_2, e_i) = 0, \ \ g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \ \ 3 \leq i, j \leq n \end{aligned}$$

Ο πίνακας της g ως προς μία ψευδο-ορθοκανονική βάση δεν είναι τότε προφανώς διαγώνιος.

Γνωρίζοντας μία ορθοκανονική βάση του V μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μία ψευδο-ορθοκανονική βάση του χώρου [29, σελ. 7-9].

2.4 Ψευδο-Πολλαπλότητες Riemann

Ορισμός 2.4.1. Ψευδομετρική Riemann πάνω σε μια πολλαπλότητα M είναι ένα μη εκφυλισμένο (nondegenerate) συναλλοίωτο συμμετρικό τανυστικό πεδίο g (ή $\langle\, ,\, \rangle$) τύπου $(0,2)$, με την ιδιότητα: « Η διάσταση της αρνητικά ορισμένης υποδέσμης της εφαπτόμενης δέσμης $T(M)$ της M (ως προς την ψευδομετρική Riemann), να είναι σταθερή ».

Κάθε πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με μια ψευδομετρική Riemann λέγεται **ψευδο-πολλαπλότητα Riemann**.

Η διάσταση της αρνητικά ορισμένης υποδέσμης, αναφέρεται και ως **δείκτης** (index) της πολλαπλότητας M και συμβολίζεται με ν. Ισχύει ότι: $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Αν $\nu = 0$, τότε η M είναι μια πολλαπλότητα Riemann και σ′ αυτή την περίπτωση, για κάθε $P \in M$ το $g_P : T_P(M) \times T_P(M) \to \mathbb{R}$ είναι ένα (θετικά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον $T_P(M)$. Αν $\nu = 1$ και $n \geq 2$, η πολλαπλότητα M λέγεται **πολλαπλότητα Lorentz**.

Αν $(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της M, οι συνιστώσες του μετρικού τανυστικού πεδίου g είναι

$$g_{ij}(P) = g_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_P\right), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Οι συντεταγμένες $(x_1, \ldots, x_n)$ λέγονται **ψευδο-Ευκλείδειες** συντεταγμένες τύπου (μ, ν), όπου $\mu = n - \nu$.

Στον χώρο $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε τον ακόλουθο μετρικό τανυστή

$$g_P(u_P, v_P) = -\sum_{i=1}^{\nu} u_i v_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} u_j v_j,$$

όπου $u_P = (u_1, \ldots, u_n)$, $v_P = (v_1, \ldots, v_n)$ και $P \in \mathbb{R}^n$.

Ο χώρος R^n εφοδιασμένος με αυτόν τον μετρικό τανυστή αποτελεί μια n-διάστατη ψευδο-Ευκλείδεια πολλαπλότητα και σημειώνεται με $\mathbb{E}^n_\nu$. Αν $\nu = 0$, τότε ο $\mathbb{E}^n_0$ είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{E}^n$. Αν $\nu = 1$ και $n \geq 2$, έχουμε την $\mathbb{E}^n_1$ η οποία λέγεται **ψευδο-Ευκλείδεια πολλαπλότητα** ή **πολλαπλότητα Lorentz -Minkowski**. Ο μετρικός τανυστής μιας n-διάστατης πολλαπλότητας Riemann καθιστά κάθε εφαπτόμενο χώρο της, χώρο εσωτερικού γινομένου, γραμμικά ισόμορφο με τον E^n. Κάθε εφαπτόμενος χώρος μιας n-διάστατης πολλαπλότητας Lorentz-Minkowski M είναι γραμμικά ισόμορφος με τον E_1^n και η γεωμετρία Lorentz μελετά τον χαρακτήρα και τις ιδιότητες των διανυσμάτων σε ένα τέτοιο χώρο.

Ορισμός 2.4.2. Συνοχή (ή σύνδεση) πάνω στην ψευδο-πολλαπλότητα Riemann M λέγεται μια απεικόνιση που θα την συμβολίζουμε με ∇, όπου

$$\nabla : D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$$

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\begin{aligned} &(1) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \\ &(2) \quad \nabla_X(\alpha Y + \beta Y) = \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z \\ &(3) \quad \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y \end{aligned}$$

όπου $X, Y, Z \in D^1(M)$, f, g διαφορίσιμες συναρτήσεις πάνω στην πολλαπλότητα M και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ο τελεστής ∇_X λέγεται συναλλοίωτη παραγώγιση ως προς X.

Η διαφορά των διανυσματικών πεδίων $\nabla_X Y$ και $\nabla_Y X$ ορίζει την αγκύλη του Lie:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

Θεώρημα 2.4.3. *[50, σελ. 61] Έστω M μία ψευδο-πολλαπλότητα Riemann. Τότε υπάρχει μοναδική συνοχή ∇ τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} &(1) \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \\ &(2) \quad X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \end{aligned}$$

για όλα τα $X, Y, Z \in D^1(M)$. Η συνοχή αυτή ονομάζεται Levi-Civita συνοχή και χαρακτηρίζεται από τον τύπο του Koszul:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_Y Z, X\rangle &= Y\langle Z, X\rangle + Z\langle X, Y\rangle - X\langle Y, Z\rangle - \\ &\quad - \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle X, [Y, Z]\rangle \end{aligned}$$

Θα ορίσουμε τώρα τις μορφές συνοχής (connection forms) μιας n-διάστατης ψευδο-πολλαπλότητας Riemann M. Έστω μια ορθοκανονική βάση $G = \{e_i\}_{i=1}^n$ του εφαπτόμενου χώρου $T_P(M), P \in M$ της M.

Ορισμός 2.4.4. Οι 1-μορφές ω_i^k που ορίζονται από τη σχέση

$$\varepsilon_k \omega_i^k(e_j) = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle, \ \varepsilon_k = \langle e_k, e_k\rangle = \pm 1 \tag{2.4.1}$$

λέγονται **μορφές συνοχής** της ψευδο-πολλαπλότητας Riemann M, ως προς τη βάση $G = \{e_i\}_{i=1}^n$, όπου ο δείκτης k δεν είναι αθροιστικός.

Θα χρησιμοποιούμε, στη συνέχεια, τον συμβολισμό $\omega_i^k(e_j) = \omega_{ij}^k$ οπότε θα έχουμε ότι $\nabla_{e_i} e_j = \omega_{ij}^k e_k$.
Ισχύει το ακόλουθο Λήμμα

Λήμμα 2.4.5. *Οι μορφές συνοχής της ψευδο-πολλαπλότητας Riemann M, ως προς μία ορθοκανονική βάση, ικανοποιούν τη σχέση*

$$\omega_{ij}^k = -\varepsilon_j \varepsilon_k \omega_{ik}^j \tag{2.4.2}$$

όπου ο δείκτης j δεν είναι αθροιστικός.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}\langle e_j, e_k\rangle &= \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle + \langle e_j, \nabla_{e_i} e_k\rangle = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\langle \omega_i^k(e_j) e_k, e_k\right\rangle + \left\langle e_j, \omega_i^j(e_k) e_j\right\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \omega_{ij}^k \varepsilon_k + \omega_{ik}^j \varepsilon_j = 0 \\ &\Rightarrow \omega_{ij}^k = -\varepsilon_j \varepsilon_k \omega_{ik}^j \end{aligned}$$

□

Η συναλλοίωτη παράγωγος μιας διαφορικής 1-μορφής ω, επί της M, ορίζεται από τη σχέση

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y) \tag{2.4.3}$$

όπου $X, Y \in D^1(M)$.

Ορισμός 2.4.6. Έστω M μία ψευδο-πολλαπλότητα Riemann και ∇ η συνοχή Levi-Civita. Ορίζουμε την απεικόνιση R έτσι ώστε

$$R : D^1(M) \times D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$$

με τιμή

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

όπου $[\,,\,]$ είναι η αγκύλη Lie. Η απεικόνιση R ορίζει ένα αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο τύπου $(1,3)$ πάνω στην πολλαπλότητα M που ονομάζεται **τανυστικό πεδίο καμπυλότητας**.

Για το τανυστικό πεδίο καμπυλότητας ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.4.7. *[50, σελ. 75] Αν $X, Y, Z, W \in D^1(M)$ τότε*

(1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$

(2) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

(4) $(\nabla_X R)(Y,Z,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,W) + (\nabla_Z R)(X,Y,W) = 0$

Οι σχέσεις (3) και (4) της προηγούμενης πρότασης είναι γνωστές ως **πρώτη** και **δεύτερη ταυτότητα του Bianchi**.

Στη συνέχεια ορίζουμε το τανυστικό πεδίο στρέψης

Ορισμός 2.4.8. Τανυστικό πεδίο στρέψης της γραμμικής σύνδεσης ∇ λέγεται η απεικόνιση T που ορίζεται ως εξής:

$$T : D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$$

$$(X, Y) \to T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

όπου $[\,,\,]$ είναι η αγκύλη Lie. Η στρέψη είναι ένα αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο τύπου $(1, 2)$.

Από την σχέση (1) του θεωρήματος 2.4.3 προκύπτει ότι η συνοχή Levi-Civita σε μία ψευδο-πολλαπλότητα Riemann M έχει στρέψη ίση με μηδέν. Δηλαδή $T(X, Y) = 0, \forall X, Y \in D^1(M)$.

2.5 Ψευδο-Υποπολλαπλότητες Riemann

Έστω M μία υποπολλαπλότητα της πολλαπλότητας Riemann (N, g). Κάθε εφαπτόμενος χώρος $T_P(M)$ μπορεί να θεωρηθεί υπόχωρος του $T_P(N)$. Επομένως αν δράσουμε με το μετρικό τανυστή g σε κάθε ζεύγος εφαπτομένων διανυσμάτων της M, σε κάποιο σημείο της P, θα επάγουμε έναν μετρικό τανυστή $\tilde{g}_P$ στην M ως εξής $\tilde{g}_P(X, Y) = g_P(f_* X, f_* Y)$. Άρα ο $\tilde{g}_P$ είναι η απεικόνιση επιστροφής (pullback) $f^*(g)$ όπου f είναι η απεικόνιση έγκλισης (inclusion map) $f : M \to N$. Όταν ο μετρικός τανυστής g δεν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, δηλαδή είναι αόριστος, η $f^*(g)$ ορίζει μια μετρική στην M αν και μόνο αν κάθε $T_P(M)$ είναι μη-εκφυλισμένος υπόχωρος του $T_P(N)$ και ο δείκτης του $T_P(M)$ είναι ίδιος για όλα τα $P \in M$.

Ορισμός 2.5.1. [50, σελ. 57] Έστω M μία υποπολλαπλότητα της ψευδο-πολλαπλότητας Riemann N. Αν η pullback $f^*(g)$ ορίζει μετρική στην M τότε η M ονομάζεται ψευδο-υποπολλαπλότητα Riemann της N.

Οι χώροι

$$S_1^{n-1}(c,r) = \{x \in E_1^n \;\; / < x-c, x-c >= r^2\}$$

και

$$H^{n-1}(c,-r) = \{x \in E_1^n \;\; / < x-c, x-c >= -r^2\}$$

αποτελούν παραδείγματα υποπολλαπλοτήτων της ψευδο-πολλαπλότητας Riemann E_1^n.

Αν $dimN - dimM = 1$ τότε η M λέγεται **υπερεπιφάνεια** της N. Έστω M μια m-διάστατη υποπολλαπλότητα της n-διάστατης ψευδο-πολλαπλότητας Riemann N $(m < n)$. Αν $\overline{\langle\, ,\, \rangle}$ είναι η μετρική της N, τότε την επαγόμενη μετρική της M θα τη συμβολίζουμε με $\langle\, ,\, \rangle$. Σε ότι ακολουθεί θα ταυτίζουμε διανυσματικά πεδία της M με τις εικόνες τους διαμέσου του διαφορικού της απεικόνισης έγκλισης (inclusion map) $f : M \to N$, δηλαδή: $f_*X = X$, $\forall X \in D^1(M)$ και αν $X, Y \in T_P(M)$, $P \in M$, το εσωτερικό γινόμενο στην M θα ορίζεται ως εξής:

$$\langle X, Y \rangle = \overline{\langle f_*X,\, f_*Y \rangle}.$$

Κάθε χώρος $T_P(M)$ είναι μη εκφυλισμένος υπόχωρος του $T_P(N)$ οπότε από την Πρόταση (2.3.3) έχουμε ότι $T_P(N) = T_P(M) \oplus T_P(M)^\perp$.

Έστω τώρα X, Y δύο διανυσματικά πεδία της M και $\overline{X}$, $\overline{Y}$ οι επεκτάσεις αυτών στην πολλαπλότητα N, δηλαδή τα διανυσματικά πεδία της N τα οποία όταν περιοριστούν στην πολλαπλότητα M είναι τα διανυσματικά X, Y, αντίστοιχα. Έστω επίσης $\overline{\nabla}$ η συνοχή της ψευδο-πολλαπλότητας Riemann N. Τότε η τιμή της $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ στο σημείο $P \in M$, δεν εξαρτάται από τις επεκτάσεις $\overline{X}$, $\overline{Y}$ των X, Y αντίστοιχα, και το διανυσματικό πεδίο $[\overline{X}, \overline{Y}]$ της N είναι επέκταση του διανυσματικού πεδίου $[X, Y]$ της M. Έτσι γράφουμε $\overline{\nabla}_X Y$ αντί $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ και αναλύουμε αυτό το διανυσματικό πεδίο της N σε δύο συνιστώσες, μια εφαπτομενική της M, $\nabla_X Y$ και μια κάθετη της M, $\alpha(X, Y)$. Επομένως, θα έχουμε

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \text{ (τύπος του } \mathbf{Gauss}).$$

Η απεικόνιση

$$\nabla : D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$$

$$\nabla : (X,Y) \mapsto \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

ορίζει μια συνοχή στην M που λέγεται επαγόμενη συνοχή στην υποπολλαπλότητα M. Επίσης η απεικόνιση

$$\alpha : D^1(M) \times D^1(M) \to [D^1(M)]^\perp$$

$$\alpha : (X,Y) \to \alpha(X,Y)$$

είναι συμμετρική, διγραμμική και λέγεται δεύτερη θεμελιώδης μορφή της υποπολλαπλότητας M. Έστω ξ ένα διανυσματικό πεδίο της N κάθετο στην M. Το $\overline{\nabla}_X \xi$ αναλύεται σε μια εφαπτομενική συνιστώσα την $-A_\xi X$ και σε μια κάθετη την $\nabla^\perp_X \xi$, οπότε έχουμε τον ακόλουθο τύπο του **Weingarten**

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi.$$

Η απεικόνιση

$$\nabla^\perp : D^1(M) \times [D^1(M)]^\perp \to [D^1(M)]^\perp$$

$$\nabla^\perp : (X,\xi) \mapsto \nabla^\perp_X \xi$$

έχει τις ιδιότητες μιας συνοχής και λέγεται κάθετη συνοχή (normal connection) της υποπολλαπλότητας M. Η απεικόνιση

$$A : D^1(M) \times [D^1(M)]^\perp \to D^1(M)$$

$$A : (X,\xi) \mapsto A_\xi X$$

είναι γραμμική και ως προς X και ως προς ξ. Η απεικόνιση $A_\xi : T_P(M) \to T_P(M)$ λέγεται **απεικόνιση Weingarten** της M στο $P \in M$ ως προς τη διεύθυνση $\xi \in T_P^{\perp}(M)$. Για κάθε διανυσματικό πεδίο ξ της N κάθετο της M έχουμε

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \overline{\langle \alpha(X,Y), \xi\rangle}, \quad \forall X, Y \in D^1(M).$$

Όταν η M είναι μια ψευδο-υπερεπιφάνεια Riemann της N, τότε υπάρχει μοναδικό (με προσέγγιση φοράς) μοναδιαίο διάνυσμα $\xi \in T_P^{\perp}(M)$. Επομένως, για διανυσματικά πεδία $X, Y \in D^1(M)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha(X,Y) = h(X,Y)\xi \tag{2.5.1}$$

όπου η h είναι μία διγραμμική συμμετρική συνάρτηση πάνω στο$T_P(M) \times T_P(M)$ και ονομάζεται δεύτερη θεμελιώδης μορφή της M ως προς τη διεύθυνση ξ. Επεκτείνοντας το διάνυσμα ξ τοπικά σε ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο ξ κοντά στο P, έχουμε $\overline{\langle \xi, \xi\rangle} = \pm 1$. Αν παραγωγίσουμε αυτή τη σχέση παίρνουμε $\overline{\langle \overline{\nabla}_X \xi, \xi\rangle} = 0$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Weingarten, έχουμε

$$\overline{\langle -A_\xi X + \nabla_X^{\perp}\xi, \xi\rangle} = 0$$

και άρα $\overline{\langle \nabla_X^{\perp}\xi, \xi\rangle} = 0$. Αφού όμως το ξ είναι το μοναδικό κάθετο διανυσματικό πεδίο της N, το $\nabla_X^{\perp}\xi$ θα είναι πολλαπλάσιο του ξ και άρα $\nabla_X^{\perp}\xi = 0$ [41, σελ. 15, Τόμος ΙΙ]. Κατά συνέπεια, ο τύπος του Weingarten, στην περίπτωση των υπερεπιφανειών, παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X.$$

Αν τώρα, θέσουμε $A_\xi = S$, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.5.2. Έστω ξ μοναδιαίο και κάθετο διανυσματικό πεδίο μιας υπερεπιφάνειας $M \subset N$. Το τανυστικό πεδίο S, τύπου $(1,1)$, που δίνεται από τη σχέση

$$\langle S(X), Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle, \ \forall X, Y \in D^1(M)$$

λέγεται τελεστής του Weingarten ή **τελεστής σχήματος** (shape operator) της M ως προς τη διεύθυνση ξ.

Από την σχέση (2.5.1) και τον προηγούμενο ορισμό έχουμε ότι

$$\langle S(X), Y\rangle = \langle h(X,Y)\xi, \xi\rangle = \varepsilon h(X,Y), \ \ \forall X, Y \in D^1(M) \tag{2.5.2}$$

όπου $\varepsilon = \langle \xi, \xi\rangle = \pm 1$.

Λήμμα 2.5.3. *[50, σελ. 107] Αν S είναι ο τελεστής σχήματος της υπερεπιφάνειας $M \subset N$ ως προς τη διεύθυνση ξ, τότε ισχύει $S(X) = -\overline{\nabla}_X \xi$, $X \in D^1(M)$ και σε κάθε σημείο ο γραμμικός τελεστής $S : T_P(M) \to T_P(M)$ είναι αυτοσυζυγής.*

Ο τελεστής σχήματος S μετράει την ταχύτητα μεταβολής της διεύθυνσης του ξ στην πολλαπλότητα N (δηλαδή το 'στρίψιμο' του ξ) ως προς όλες τις εφαπτόμενες διευθύνσεις της M και επειδή ο κάθετος χώρος του ξ στο σημείο $P \in M$ είναι ακριβώς ο εφαπτόμενος χώρος της M στο σημείο P, εκφράζει την στροφή του $T_P(M)$ στην πολλαπλότητα N. Συνεπώς, ο S μας δίνει πληροφορίες γύρω από το σχήμα της M και για το λόγο αυτό λέγεται και τελεστής σχήματος της M.

Μια μη εκφυλισμένη υπερεπιφάνεια M_r^m της πολλαπλότητας Lorentz-Minkowski E_1^{n+1}, λέμε ότι είναι εφοδιασμένη με δομή Riemann ή Lorentz, ανάλογα με το αν η μετρική g που επάγεται στην M_r^m από την μετρική Lorentz του χώρου E_1^{n+1} είναι θετικά ορισμένη ή αόριστη. Στην πρώτη περίπτωση το κάθετο διάνυσμα $\vec{\xi}$ σε κάθε σημείο της M^m είναι χρονοειδές, δηλαδή $<\vec{\xi}, \vec{\xi}>= -1$ και η υπερεπιφάνεια ονομάζεται υπερεπιφάνεια Riemann, ενώ στην δεύτερη περίπτωση το κάθετο διάνυσμα $\vec{\xi}$ σε κάθε σημείο της M_1^m είναι χωροειδές, δηλαδή $<\vec{\xi}, \vec{\xi}>= +1$ και η υπερεπιφάνεια ονομάζεται υπερεπιφάνεια Lorentz.
Ο τελεστής σχήματος μιας υπερεπιφάνειας Riemann είναι πάντα διαγωνοποιήσιμος ως προς μία ορθοκανονική βάση. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο όταν η υπερεπιφάνεια είναι Lorentz. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι στην περίπτωση της υπερεπιφάνειας Lorentz η θεωρούμενη βάση μπορεί να είναι και

ψευδο-ορθοκανονική. Όμως, επειδή ο τελεστής σχήματοςS, στο σημείο P της M_1^m, είναι ένας συμμετρικός ενδομορφισμός του εφαπτόμενου χώρου$T_P(M_1^m)$, όταν η υπερεπιφάνεια είναι Lorentz, ο S μπορεί να πάρει μία από τις ακόλουθες τέσσερις μορφές, ως προς κατάλληλη βάση του εφαπτόμενου χώρου$T_P(M_1^m)$, το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων της οποίας, δίνεται αντίστοιχα από τους πίνακες G [44],[45],[46]:

Πρώτη Περίπτωση :

Όταν

$$G = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & +1 & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & +1 \end{pmatrix}$$

τότε $S = diag[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ **(I)**

Δεύτερη Περίπτωση : Όταν

$$G = \begin{pmatrix} 0 & +1 & & & & & \\ +1 & 0 & & & & & \\ & & +1 & & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & . & & \\ & & & & & . & \\ & & & & & & +1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & & \\ 0 & \lambda & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & . & & \\ & & & & & . & \\ & & & & & & \lambda_{n-2} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(II)}$$

Τρίτη Περίπτωση :

Όταν

$$G = \begin{pmatrix} 0 & +1 & & & & & \\ +1 & 0 & & & & & \\ & & +1 & & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & . & & \\ & & & & & . & \\ & & & & & & +1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & & & \\ 0 & \lambda & & & & & & \\ & & \lambda & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & . & & & \\ & & & & & . & & \\ & & & & & & . & \\ & & & & & & & \lambda_{n-3} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(III)}$$

Τέταρτη Περίπτωση :

Όταν

$$G = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & +1 & & & & & \\ & & +1 & & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & . & & \\ & & & & & . & \\ & & & & & & +1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$S = \begin{pmatrix} \mu & \nu & & & & & \\ -\nu & \mu & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & . & & \\ & & & & & . & \\ & & & & & & \lambda_{n-2} \end{pmatrix}, \nu \neq 0 \qquad \textbf{(IV)}$$

Στην πρώτη και την τέταρτη περίπτωση η θεωρούμενη βάση είναι **ορθοκανονική** ενώ στη δεύτερη και τρίτη είναι **ψευδο-ορθοκανονική**. Στην πρώτη έχουμε απλές πραγματικές ιδιοτιμές, στη δεύτερη μία πραγματική ιδιοτιμή πολλαπλότητας 2, στην τρίτη μία πραγματική ιδιοτιμή πολλαπλότητας 3 και στην τελευταία περίπτωση έχουμε μία μιγαδική ιδιοτιμή, την μ$\pm i$ν, μ, ν $\in R$ και ν$\neq 0$.

Οι εξισώσεις των **Gauss** και **Codazzi** για υπερεπιφάνειες είναι [41, σελ. 23-25]:

$$R(X,Y)Z = S(X) < S(Y), Z > -S(Y) < S(X), Z > \tag{2.5.3}$$

και

$$(\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X\,. \tag{2.5.4}$$

αντίστοιχα.

Έστω M μια m-διάστατη υπερεπιφάνεια της $m+1$-διάστατης ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας N. Τότε το διάνυσμα $\vec{H} = H\vec{\xi}$, όπου $H = \frac{1}{\varepsilon m} trS$ και $\varepsilon = $ $=< \vec{\xi}, \vec{\xi} >= \pm 1$, λέγεται διάνυσμα μέσης καμπυλότητας της M, [14]. Η υπερεπιφάνεια M λέγεται ελαχιστική αν $H = 0$.

Η κλίση (gradient) τυχαίας βαθμωτής συνάρτησης $f \in D^o(M)$ δίνεται από τη σχέση [50]

$$< gradf, X >= X(f) \;\; , \;\; \forall X \in D^1(M)\,.$$

Αν θεωρήσουμε τις φυσικές συντεταγμένες του ψευδο-Ευκλειδείου χώρου, τότε έχουμε ότι

$$gradf = \epsilon_i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \partial_i\,,$$

όπου $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Θα συμβολίζουμε την κλίση μιας συνάρτησης f, στη συνέχεια με ∇f. Η απόκλιση (divergence) ενός διανυσματικού πεδίου $X \in D^1(M)$ ορίζεται από τη σχέση

$$divX = -\epsilon_i < \nabla_{e_i} X, e_i >$$

όπου $\{e_i\} i = 1, 2, ..., m$ ορθοκανονική βάση του του εφαπτόμενου χώρου της M. Είναι γνωστό ότι η Λαπλασιανή Δf μιας συνάρτησης $f \in D^o(M)$ είναι η απόκλιση της κλίσης της f. Δηλαδή

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Επομένως η δράση του τελεστή του Laplace σε τυχαία βαθμωτή συνάρτηση $f \in D^o(M)$ δίνεται από τη σχέση [21]

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i (e_i e_i f - \nabla_{e_i} e_i f)\,, \tag{2.5.5}$$

όπου $< e_i, e_i >= \epsilon_i = \pm 1$. Αν για παράδειγμα, H είναι η μέση καμπυλότητα μιας υπερεπιφάνειας M_1^3 του E_1^4, τότε

$$\begin{aligned}\Delta H &= -\sum_{i=1}^{3} \epsilon_i (e_i e_i H - \nabla_{e_i} e_i H) = \\ &= -\epsilon_1 \left(e_1 e_1(H) - \nabla_{e_1} e_1(H)\right) - \epsilon_2 \left(e_2 e_2(H) - \nabla_{e_2} e_2(H)\right) - \\ &\quad -\epsilon_3 \left(e_3 e_3(H) - \nabla_{e_3} e_3(H)\right).\end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε με $\vec{r}$ το διανυσματικό πεδίο θέσης της υπερεπιφάνειας και με Δ τον τελεστή του Laplace, τότε, όπως είναι γνωστό, ισχύει η σχέση [13]:

$$\Delta \vec{r} = -n\vec{H} \tag{2.5.6}$$

Η σχέση (2.5.6) δείχνει ότι μία υπερεπιφάνεια είναι ελαχιστική αν και μόνο αν οι συντεταγμένες συναρτήσεις της είναι αρμονικές, δηλαδή αν είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του Laplace με αντίστοιχη ιδιοτιμή το 0. Από την άλλη πλευρά όμως είναι φανερό ότι κάθε ελαχιστική υπερεπιφάνεια ικανοποιεί τη σχέση

$$\Delta \vec{H} = \vec{0} \tag{2.5.7}$$

Οι υπερεπιφάνειες για τις οποίες ισχύει η (2.5.7) έχουν αρμονικό διάνυσμα μέσης καμπυλότητας. Θα χρειασθούμε το ακόλουθο Λήμμα (βλ.[31] ή [14]).

Λήμμα 2.5.4. *Αν M_1^3 είναι μια υπερεπιφάνεια της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4 με αρμονικό διάνυσμα μέσης καμπυλότητας, τότε ικανοποιείται η εξίσωση*

$$2S(\nabla H) + 3\ \varepsilon H(\nabla H) + \left\{\Delta H + \varepsilon H tr S^2\right\} \vec{\xi} = 0$$

όπου $\varepsilon =< \vec{\xi}, \vec{\xi} >= \pm 1$.

Απόδειξη. Εφόσον η M_1^3 έχει αρμονικό διάνυσμα μέσης καμπυλότητας θα είναι $\Delta \vec{H} = \vec{0}$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το $\Delta \vec{H}$, όπου $\vec{H} = H\vec{\xi}$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα ορθοκανονικό πλαίσιο πεδίων $\{X_1, X_2, X_3\}$ τέτοιο ώστε $\nabla_{X_i} X_j(P) = 0$, με $P \in M_1^3$. Από τη σχέση

$$\overline{\nabla}_{X_i}\overline{\nabla}_{X_i}\vec{H} = X_iX_i(H)\vec{\xi} - 2X_i(H)SX_i - H(\nabla_{X_i}S)X_i - Hh(SX_i, X_i)\vec{\xi}$$

έχουμε αθροίζοντας ως προς i,

$$\Delta\vec{H} = 2S\,(\nabla H) + Htr\nabla S + \{\Delta H + \varepsilon HtrS^2\}\vec{\xi} \tag{2.5.8}$$

Επομένως για να υπολογίσουμε το $\Delta\vec{H}$, αρκεί να βρούμε μια έκφραση για το $tr\nabla S$. Διακρίνουμε περιπτώσεις, ανάλογα με τη μορφή που μπορεί να πάρει ο τελεστής σχήματος S ως προς κατάλληλα θεωρούμενη βάση.

Περίπτωση Πρώτη: Ο τελεστής σχήματος S διαγωνοποιείται.

Έστω $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3$ μια ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του τελεστή σχήματος S, δηλαδή τέτοια ώστε $Se_i = \lambda_i e_i$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} tr\nabla S &= \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i\,(\nabla_{e_i}S)\,e_i = \\ &= \left[\epsilon_1 e_1\,(\lambda_1) + \epsilon_2\,(\lambda_2 - \lambda_1)\,\omega_{22}^1 + \epsilon_3\,(\lambda_3 - \lambda_1)\,\omega_{33}^1\right] e_1 + \\ &\quad + \left[\epsilon_2 e_2\,(\lambda_2) + \epsilon_1\,(\lambda_1 - \lambda_2)\,\omega_{11}^2 + \epsilon_3\,(\lambda_3 - \lambda_2)\,\omega_{33}^2\right] e_2 + \\ &\quad + \left[\epsilon_3 e_3\,(\lambda_3) + \epsilon_1\,(\lambda_1 - \lambda_3)\,\omega_{11}^3 + \epsilon_2\,(\lambda_2 - \lambda_3)\,\omega_{22}^3\right] e_3 \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

όπου $\epsilon_i =< e_i, e_i >= \pm 1$.

Από την εξίσωση του Codazzi $(\nabla_{e_1}S)\,e_2 = (\nabla_{e_2}S)\,e_1$ προκύπτει ότι

$$\epsilon_i\,(\lambda_i - \lambda_j)\,\omega_{ii}^j = \epsilon_j e_j\,(\lambda_i) \tag{2.5.10}$$

για $i, j = 1, 2, 3$. Η σχέση (2.5.9) λόγω της (2.5.10) δίνει

$$\begin{aligned} tr\nabla S &= \epsilon_1 e_1 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) e_1 + \epsilon_2 e_2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) e_2 + \\ &\quad + \epsilon_3 e_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) e_3 = 3\ \varepsilon \nabla H \end{aligned}$$

Άρα καταλήξαμε στη σχέση

$$tr\nabla S = 3\ \varepsilon \nabla H \tag{2.5.11}$$

Αντικαθιστώντας την (2.5.11) στην εξίσωση (2.5.8) έχουμε

$$\Delta \vec{H} = 2S(\nabla H) + 3\ \varepsilon H \nabla H + \{\Delta H + \varepsilon H tr S^2\}\vec{\xi} \tag{2.5.12}$$

και επομένως έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη του Λήμματος για την περίπτωση αυτή.

Αυτή η σχέση είναι εύκολο να αποδειχθεί και στις περιπτώσεις που ο τελεστής σχήματος δεν είναι διαγώνιος, χρησιμοποιώντας κατάλληλη βάση και ακολουθώντας αντίστοιχους συλλογισμούς . □

Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα (2.5.4), για να έχει μία υπερεπιφάνεια αρμονικό διάνυσμα μέσης καμπυλότητας πρέπει και αρκεί να ικανοποιείται το σύστημα των εξισώσεων

$$S(\nabla H) = -\varepsilon \frac{3H}{2}(\nabla H) \tag{2.5.13}$$

$$\Delta H + \varepsilon H tr S^2 = 0 \tag{2.5.14}$$

Αν λάβουμε τώρα υπόψη μας και την σχέση (2.5.6), οι υπερεπιφάνειες με αρμονικό διάνυσμα μέσης καμπυλότητας πληρούν την σχέση

$$\Delta^2 \vec{r} = \vec{0} \tag{2.5.15}$$

Επομένως οι υπερεπιφάνειες που ικανοποιούν την (2.5.7) μπορούν να χαρακτηριστούν ως **διαρμονικές υπερεπιφάνειες**. Είναι προφανές ότι οι ελαχιστικές υπερεπιφάνειες είναι διαρμονικές.

Κεφάλαιο 3

Ελικοειδείς Επιφάνειες του Τριδιάστατου Ψευδο-Ευκλείδειου Χώρου $\mathbf{E_1^3}$

3.1 Ελικοειδείς Κινήσεις στον Χώρο E_1^3 γύρω από Χωροειδή ή Χρονοειδή άξονα

Έστω ο χώρος R^3 εφοδιασμένος με την ακόλουθη ψευδο-Ευκλείδεια μετρική $ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$. Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή ο χώρος (R^3, ds^2) είναι ένας ψευδο-Ευκλείδειος χώρος που ονομάζεται 3-διάστατη πολλαπλότητα Lorentz-Minkowski, και συμβολίζεται με E_1^3. Θεωρούμε μία καμπύλη $\gamma : I = (a, b) \subset R \to \Pi$ ενός επιπέδου Π του E_1^3 και έστω ε μια ευθεία γραμμή του Π, η οποία δεν τέμνει την καμπύλη γ. Ελικοειδής επιφάνεια (helicoidal surface) M στον E_1^3 λέγεται η μη εκφυλισμένη επιφάνεια η οποία παράγεται από κατάλληλες στερεές κινήσεις $g_t : E_1^3 \to E_1^3$, $t \in R$ γύρω από τον άξονα ε. Με άλλα λόγια, μια ελικοειδής επιφάνεια M με άξονα ε στον E_1^3 είναι αναλλοίωτη από την μονοπαραμετρική υποομάδα των στερεών κινήσεων στον E_1^3.

Αν ο άξονας ε είναι χωροειδής (δηλαδή, αν η διεύθυνσή του είναι χωροειδής), τότε υπάρχει ένας μετασχηματισμός Lorentz, ο οποίος μετασχηματίζει τον άξονα ε σε έναν από τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων π.χ. στον άξονα x_2, όπου $Ox_0x_1x_2$ είναι το θεωρούμενο σύστημα συντεταγμένων. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο άξονας περιστροφής είναι ο άξονας x_2 και το επίπεδο Π είναι χωροειδές π.χ.το x_1x_2-επίπεδο ή χρονοειδές π.χ. το x_0x_2-επίπεδο.

Στη συνέχεια αυτού του Κεφαλαίου θα ταυτίζουμε ένα διάνυσμα (a,b,c) με το ανάστροφό του $(a,b,c)^t$. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη γ βρίσκεται στο x_1x_2-επίπεδο ή στο x_0x_2-επίπεδο. Η καμπύλη γ θα έχει τότε διανυσματική παραμετρική εξίσωση

$$\gamma(u) = (0,\ f(u),\ g(u)) \quad ή \quad \gamma(u) = (f(u),\ 0,\ g(u)),$$

αντίστοιχα, όπου $f = f(u)$ υποθέτουμε ότι είναι μια θετική συνάρτηση κλάσης C^1 και $g = g(u)$ είναι μια συνάρτηση κλάσης C^2 στο $I = (a,b)$. Έστω ότι η υποομάδα της ομάδας Lorentz η οποία διατηρεί αναλλοίωτο τον άξονα περιστροφής x_2 αποτελείται από πίνακες της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

με $a_{i,j} \in R$.

Τα διανύσματα του άξονα περιστροφής είναι της μορφής $(0,0,c)$, όπου το c κάποιος πραγματικός αριθμός. Ο πίνακας A, αφού αφήνει αναλλοίωτο τον άξονα περιστροφής πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

από την οποία προκύπτει ότι $a_{13} = 0,\ a_{23} = 0,\ a_{33} = 1$. Επίσης ο A πρέπει να διατηρεί και το εσωτερικό γινόμενο του χώρου, δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$< Au, Av >=< u, v > \tag{3.1.1}$$

για οποιαδήποτε διανύσματα $u = (u_1, u_2, u_3)$ και $v = (v_1, v_2, v_3)$ του χώρου E_1^3. Από την (3.1.1) προκύπτει το σύστημα που πρέπει να ικανοποιούν τα $a_{ij},\ i, j = 1, 2, 3$:

$$-a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = -1$$
$$-a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$$
$$-a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0$$

Ως λύση του συστήματος αυτού έχουμε:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = \cosh v \\ a_{12} &= a_{21} = \sinh v \\ a_{31} &= a_{32} = 0 \end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας A, που εκφράζει στροφή γύρω από τον χωροειδή άξονα x_2 είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα, η ελικοειδής επιφάνεια M που προκύπτει από περιστροφή και μεταφορά γύρω από χωροειδή άξονα θα έχει διανυσματική παραμετρική εξίσωση :

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix}$$

όπου c είναι ο λόγος της γραμμικής προς την γωνιακή ταχύτητα του τυχαίου σημείου της καμπύλης και λέγεται βήμα της ελικοειδούς επιφάνειας. Επομένως,

$$\vec{r}(u,v) = (f(u)sinhv, f(u)coshv, g(u) + cv)\,, f(u) > 0, c \in R^+ \qquad (3.1.2)$$

ή

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix}$$

συνεπώς

$$\vec{r}(u,v) = (f(u)coshv, f(u)sinhv, g(u) + cv)\,, f(u) > 0, c \in R^+ \qquad (3.1.3)$$

Η ελικοειδής επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση (3.1.2) λέγεται τύπου I ενώ η επιφάνεια που ορίζεται από την (3.1.3) λέγεται τύπου II.
Αν τώρα ο άξονας ε είναι χρονοειδής (δηλαδή, αν η διεύθυνσή του είναι χρονοειδής), μπορούμε να υποθέσουμε ότι η καμπύλη γ βρίσκεται στο x_0x_1-επίπεδο. Τότε θα έχει διανυσματική παραμετρική εξίσωση

$$\gamma(u) = (g(u), f(u), 0),$$

όπου $f = f(u)$ υποθέτουμε ότι είναι μια θετική συνάρτηση κλάσης C^1 και $g = g(u)$ είναι μια συνάρτηση κλάσης C^2 στο I. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε να βρούμε την υποομάδα της ομάδας Lorentz η οποία αφήνει αναλλοίωτο τον άξονα περιστροφής x_0 και διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Θεωρούμε πάλι τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Τα διάνυσματα του άξονα Ox_0 είναι της μορφής $(c, 0, 0)$ όπου το c, κάποιος πραγματικός αριθμός. Ο A αφήνει αναλλοίωτο τον άξονα περιστροφής, επομένως θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$A \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

από την οποία προκύπτει ότι $b_{11} = 1,\ b_{21} = 0,\ b_{31} = 0$. Όμως θα πρέπει να διατηρεί και το εσωτερικό γινόμενο του χώρου, δηλαδή να ισχύει η (3.1.1), από την οποία προκύπτει το σύστημα που πρέπει να ικανοποιούν τα $b_{ij},\ \ i, j = 1, 2, 3$:

$$\begin{gathered} -b_{12}^2 + b_{22}^2 + b_{32}^2 = 1 \\ -b_{13}^2 + b_{23}^2 + b_{33}^2 = 1 \\ -b_{12}b_{13} + b_{22}b_{23} + b_{32}b_{33} = 0 \\ b_{13} = b_{12} = 0 \end{gathered}$$

Λύση του συστήματος αυτού είναι

$$\begin{aligned} b_{22} &= b_{33} = \cos v \\ b_{23} &= -\sin v \\ b_{32} &= \sin v \end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας A, που εκφράζει στροφή γύρω από χρονοειδή άξονα x_0, παίρνει τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

Άρα, η ελικοειδής επιφάνεια M που προκύπτει από περιστροφή και μεταφορά γύρω από χρονοειδή άξονα θα έχει διανυσματική παραμετρική εξίσωση

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ή

$$\vec{r}(u,v) = (g(u) + cv,\ f(u)cosv,\ f(u)sinv)\,,\ f(u) > 0,\ c \in R^{+} \qquad (3.1.4)$$

όπου η σταθερά c έχει την ίδια σημασία που αναφέρθηκε προηγουμένως και λέγεται ελικοειδής επιφάνεια τύπου III.

Θα λέμε ότι μια ελικοειδής επιφάνεια είναι τύπου I^{+} ή I^{-} (αντ. II^{+} ή II^{-}, III^{+} ή III^{-}) αν η διακρίνουσα της πρώτης θεμελιώδους τετραγωνικής μορφής της, $EG - F^2$, είναι θετική ή αρνητική, αντίστοιχα.

3.2 Ύπαρξη Ελικοειδών Επιφανειών στο Χώρο E_1^3 με καμπυλότητα Gauss δοθείσα συνάρτηση

Έστω $\gamma(u) = (0,\ u,\ g(u))$, $u \in I$ μια καμπύλη κλάσης C^2 ορισμένη στο ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}-\{0\}$, με $||\gamma'(u)|| \neq 0$. Αν εφαρμόσουμε μια ελικοειδή κίνηση σ' αυτή την καμπύλη γύρω από τον άξονα Ox_2, μπορούμε να πάρουμε την ελικοειδή επιφάνεια M του E_1^3 η οποία περιγράφεται από την εξίσωση (3.1.2) ή από την

$$\vec{r}(u,v) = (usinhv, ucoshv, g(u) + cv) \qquad (3.2.1)$$

Η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης διαφορική τετραγωνική μορφή της επιφάνειας M, που δίνεται από την εξίσωση (3.2.1) είναι:

$$I = (1 + g'^2)du^2 + 2cg'dudv + (c^2 - u^2)dv^2$$

και

$$II = \frac{1}{w}(-ug''du^2 + 2cdudv + u^2g'dv^2)$$

αντίστοιχα, όπου $w = [|c^2 - u^2(1+g'^2)|]^{\frac{1}{2}}$ και ο τόνος συμβολίζει την παράγωγο ως προς u.

Η καμπυλότητα Gauss της M, εύκολα αποδεικνύεται ότι, δίνεται από τη σχέση

$$K(u) = -\frac{u^3g'g'' + c^2}{[c^2 - u^2(1+g'^2)|c^2 - u^2(1+g'^2)|} \tag{3.2.2}$$

δηλαδή ότι είναι συνάρτηση μόνο της u, αφού η $g : R \to R$ είναι συνάρτηση μόνο της u. Θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.2.1. *Θεωρούμε την ελικοειδή επιφάνεια M του E_1^3 που δίνεται από την εξίσωση (3.2.1), τις δοσμένες σταθερές $c \in R^+$, $c_1, c_2 \in R$ και μια διαφορίσιμη συνάρτηση $K = K(u)$, $u \in I$. Τότε ορίζεται μια οικογένεια καμπυλών $\gamma(u) \equiv \gamma(K(u), c; c_1, c_2)$ και μια οικογένεια ελικοειδών επιφανειών τύπου I^+ (ή I^-), του χώρου Minkowski E_1^3 με καμπυλότητα Gauss $K = K(u)$, $u \in I_1 = (-c, c) - \{0\} \subset I$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε τώρα ότι η προς προσδιορισμό επιφάνεια είναι τύπου I^+, δηλαδή $EG - F^2 = c^2 - u^2(1+g'^2) > 0$. Η διαφορική, τότε, εξίσωση (3.2.2) παίρνει τη μορφή

$$K(u) = -\frac{u^3g'g'' + c^2}{\left[c^2 - u^2(1+g'^2)\right]^2} \tag{3.2.3}$$

Το πρόβλημα λοιπόν του προσδιορισμού των καμπυλών και των επιφανειών του χώρου E_1^3, ανάγεται στην ολοκλήρωση αυτής της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με μη σταθερούς συντελεστές. Θέτουμε

$$h(u) = \left(u^2g' - c^2\right)\left[c^2 - u^2(1+g'^2\right]^{-1} \tag{3.2.4}$$

οπότε η εξίσωση (3.2.3) ανάγεται στην εξίσωση

$$h'(u) = 2uK(u) \tag{3.2.5}$$

Η γενική λύση της (3.2.5) είναι

$$h(u) = c_1 + 2\int uK(u)du, \quad c_1 \in R \tag{3.2.6}$$

Αν συγκρίνουμε τώρα τις σχέσεις (3.2.4) και (3.2.6) έχουμε ότι

$$g'^2(u) = \frac{c^2A - u^2(A-1))}{u^2A)}, \quad u \in I_1 = (-c, c) \setminus \{0\}$$

όπου

$$A(u) = 1 + c_1 + 2\int uK(u)du \tag{3.2.7}$$

Άρα

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{\sqrt{(c^2 - u^2)\,A + u^2}}{|u|[A]^{\frac{1}{2}}}du, \quad c_2 \in R.$$

Ορίζεται, λοιπόν, η διπαραμετρική οικογένεια των καμπυλών

$$\gamma(u) \equiv \gamma(K(u), c; c_1, c_2) = (0, u, c_2 \pm \int \frac{\sqrt{(c^2 - u^2)\,A + u^2}}{|u|[A]^{\frac{1}{2}}})$$

του χώρου E_1^3.

Αν εφαρμόσουμε τώρα μια ελικοειδή κίνηση γύρω από τον άξοναOx_2, με βήμα c σ′ αυτές τις καμπύλες, παίρνουμε μια διπαραμετρική οικογένεια ελικοειδών επιφανειών, *τύπου* I^+, στον E_1^3, με καμπυλότητα Gauss $K = K(u)$, $u \in I_1$, οι οποίες δίνονται από τη διανυσματική παραμετρική εξίσωση

$$\vec{r}(u, v) = (u \sinh v, u \cosh v, cv + c_2 \pm \int \frac{\sqrt{(c^2 - u^2)\,A + u^2}}{|u|[A]^{\frac{1}{2}}}) \tag{3.2.8}$$

και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. □

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $F = 0$, τότε έχουμε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή, δηλαδή $g(u) = c_1,\ \ c_1 \in R$. Η εξίσωση τότε των ελικοειδών επιφανειών γίνεται

$$\vec{r}(u,v) = (usinhv, ucoshv, c_1 + cv)\ \ , c \in R^+$$

η οποία είναι, για δοσμένο c_1, η εξίσωση του **ορθού ελικοειδούς** στον E_1^3. Η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα αυτού του ορθού ελικοειδούς, που είναι τύπου I^+, ή του αντιστοίχου του τύπου I^-, είναι

$$K(u) = -\frac{c^2}{(c^2 - u^2)^2} < 0\ \ ,\ \ H(u) = 0$$

$$K(u) = \frac{c^2}{(c^2 - u^2)^2} > 0\ \ ,\ \ H(u) = 0$$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι το ορθό ελικοειδές στο χώρο E_1^3 είναι επιφάνεια ελάχιστης έκτασης με θετική (τύπου I^-) ή αρνητική (τύπου I^+) καμπυλότητα Gauss.

Έστω $\gamma(u) = (\ g(u),\ u,\ 0)$, $u \in I$ μια καμπύλη κλάσης C^2 ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα του $R - \{0\}$, με $||\gamma'(u)|| \neq 0$. Αν εφαρμόσουμε μια ελικοειδή κίνηση σ' αυτή την καμπύλη γύρω από τον άξονα Ox_0, μπορούμε να πάρουμε την ελικοειδή επιφάνεια M του E_1^3 η οποία περιγράφεται από την εξίσωση (3.1.4) ή από την

$$\vec{r}(u,v) = (g(u) + cv, ucosv, usinv) \tag{3.2.9}$$

Η πρώτη και η δεύτερη θεμελιώδης διαφορική τετραγωνική μορφή της επιφάνειας M που δίνεται από την εξίσωση (3.2.9) είναι:

$$I = (1 - g'^2)du^2 - 2cg'dudv + (u^2 - c^2)dv^2$$

και

$$II = \frac{1}{w}(ug''du^2 - 2cdudv + u^2g'dv^2)$$

αντίστοιχα, όπου $w = [|u^2(1-g'^2) - c^2|]^{\frac{1}{2}}$ και ο τόνος συμβολίζει την παράγωγο ως προς u.

Η καμπυλότητα Gauss της M, εύκολα αποδεικνύεται ότι, δίνεται από τη σχέση

$$K(u) = \frac{u^3 g' g'' - c^2}{[u^2(1-g'^2 - c^2]\,|u^2(1-g'^2) - c^2|} \tag{3.2.10}$$

δηλαδή ότι είναι συνάρτηση μόνο της u, αφού η $g : R \to R$ είναι συνάρτηση μόνο της u. Θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.2.2. *Θεωρούμε την ελικοειδή επιφάνεια M του E_1^3 που δίνεται από την εξίσωση (3.2.9), τις δοσμένες σταθερές $c \in R^+$, $c_1, c_2 \in R$ και μια διαφορίσιμη συνάρτηση $K = K(u)$, $u \in I$. Τότε ορίζεται μια οικογένεια καμπυλών $\gamma(u) \equiv \gamma(K(u), c; c_1, c_2)$ και μια οικογένεια ελικοειδών επιφανειών τύπου III^+ (ή III^-), του χώρου Minkowski E_1^3 με καμπυλότητα Gauss $K = K(u)$, $u \in I_1 = (-c, c) - \{0\} \subset I$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε τώρα ότι η προς προσδιορισμό επιφάνεια είναι τύπου III^+, δηλαδή $EG - F^2 = u^2(1-g'^2) - c^2) > 0$. Η διαφορική τότε εξίσωση (3.2.10) παίρνει τη μορφή

$$K(u) = \frac{u^3 g' g'' - c^2}{[u^2(1-g'^2) - c^2)]^2} \tag{3.2.11}$$

Το πρόβλημα λοιπόν του προσδιορισμού των καμπυλών και επιφανειών του χώρου E_1^3 με τις τεθείσες υποθέσεις, ανάγεται στην ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (3.2.11). Θέτουμε

$$h(u) = -\left(u^2 g' + c^2\right)\left[c^2 - u^2(1-g'^2\right]^{-1} \tag{3.2.12}$$

οπότε η εξίσωση (3.2.11) ανάγεται στην εξίσωση

$$h'(u) = -2uK(u) \tag{3.2.13}$$

Η γενική λύση της (3.2.13) είναι

$$h(u) = c_1 - 2\int uK(u)du, \quad c_1 \in R \tag{3.2.14}$$

Αν συγκρίνουμε τώρα τις σχέσεις (3.2.12) και (3.2.14) έχουμε ότι

$$g'^2(u) = \frac{-c^2A + u^2(A+1))}{u^2A)}, \quad u \in I_1 = (-c, c) \setminus \{0\}$$

όπου

$$A(u) = -1 - c_1 + 2\int uK(u)du \quad > 0 \tag{3.2.15}$$

Άρα

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{\sqrt{(u^2 - c^2)\,A + u^2}}{|u|[A]^{\frac{1}{2}}}du, \quad c_2 \in R.$$

Ορίζεται, λοιπόν η διπαραμετρική οικογένεια των καμπυλών

$$\gamma(u) \equiv \gamma(K(u), c; c_1, c_2) = (c_2 \pm \int \frac{\sqrt{(u^2 - c^2)\,A + u^2}}{|u|[A]^{\frac{1}{2}}}, u, 0)$$

Αν εφαρμόσουμε τώρα μια ελικοειδή κίνηση με βήμα c σ' αυτές τις καμπύλες, παίρνουμε μια διπαραμετρική οικογένεια ελικοειδών επιφανειών, *τύπου* III^+, στον E_1^3, με καμπυλότητα Gauss $K = K(u)$, $u \in I_1$, οι οποίες δίνονται από τη διανυσματική παραμετρική εξίσωση

$$\vec{r}(u,v) = (cv + c_2 \pm \int \frac{\sqrt{(c^2 - u^2)\,A + u^2}}{|u|[A]^{\frac{1}{2}}}, ucosv, usinv) \tag{3.2.16}$$

και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. □

Η περίπτωση $EG - F^2 < 0$ αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο και παίρνουμε αντίστοιχα αποτελέσματα.

Αντίστοιχα θεωρήματα που αφορούν την ύπαρξη ελικοειδών επιφανειών τουE_1^3 με συνάρτηση μέσης καμπυλότητας δοθείσα συνάρτηση έχουν διατυπωθεί στο [49].

Κεφάλαιο 4

Διαρμονικές Υπερεπιφάνειες του Τετραδιάστατου Ψευδο-Ευκλείδειου Χώρου $\mathbf{E}_1^4$

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τις υπερεπιφάνειες $M_r^3, r = 0, 1$ του E_1^4 για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$\Delta \vec{H} = \vec{0}\,,$$

όπου $\vec{H}$ είναι το διανυσματικό πεδίο της μέσης καμπυλότητας των υπερεπιφανειών. Η συγκεκριμένη μελέτη αναπτύσσεται με τη βοήθεια της θεωρίας των υποπολλαπλοτήτων και ειδικότερα των υπερεπιφανειών. Γίνεται ευρεία χρήση των εξισώσεων των Gauss, Weingarten και Codazzi όπως επίσης και του τελεστή σχήματος. Τελικά, το βασικό συμπέρασμά μας είναι ότι **η απαίτηση της διαρμονικότητας μιας υπερεπιφάνειας του E_1^4 συνεπάγεται τον μηδενισμό της μέσης καμπυλότητας αυτής**

$$\mathbf{H} = \mathbf{0}\,,$$

δηλαδή ότι οι υπερεπιφάνειες αυτές είναι ελάχιστης έκτασης (minimal).

4.1 Υπερεπιφάνειες του $\mathbf{E}_1^4$ εφοδιασμένες με δομή Riemann

Έστω ο χώρος E_1^4, δηλαδή ο χώρος R^4 εφοδιασμένος με τη μη θετικά ορισμένη μετρική $ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$. Θεωρούμε μια υπερεπιφάνεια M^3 του E_1^4 η οποία έστω ότι κληρονομεί μετρική της μορφής $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, Τότε κάθε τέτοια υπερεπιφάνεια θα λέγεται υπερεπιφάνεια Riemann. Για το μοναδιαίο καθετικό διάνυσμα $\vec{\xi}$ στην περίπτωση αυτή, θα ισχύει $< \vec{\xi}, \vec{\xi} >= \varepsilon = -1$. Θα αποδείξουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.1. *Αν M^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, τότε η M^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αντίθετα ότι υπάρχει $P \in M^3$ στο οποίο η μέση καμπυλότητα είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή $H(P) \neq 0$. Επειδή η H είναι συνεχής συνάρτηση, υπάρχει περιοχή U της M^3 με $P \in U$ τέτοια ώστε $H \neq 0$ για κάθε σημείο της U. Εργαζόμενοι στην περιοχή U θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Γνωρίζουμε ότι η M^3 είναι διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann ($\varepsilon = -1$) αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις (2.5.13) και (2.5.14). Δηλαδή

$$S(\nabla H) = \frac{3H}{2}(\nabla H) \tag{4.1.1}$$

$$\Delta H - H tr S^2 = 0 \tag{4.1.2}$$

Από την (4.1.2) παρατηρούμε ότι η M^3 δεν μπορεί να έχει σταθερή μέση καμπυλότητα διότι τότε αυτή προφανώς θα ήταν μηδέν, πράγμα το οποίο είναι άτοπο, λόγω της υπόθεσης. Επομένως $\nabla H \neq \vec{0}$ και από την (4.1.1) έχουμε ότι το ∇H είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή σχήματος S με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\dfrac{3H}{2}$.

Θεωρούμε μία ορθοκανονική βάση $\{e_i\}_{i=1}^3$ του εφαπτόμενου χώρου της M^3 στο τυχαίο σημείο της U, αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του S. Για τα διανύσματα της βάσης ισχύουν οι σχέσεις $< e_i, e_i >= \epsilon_i = +1$, $< e_i, e_j >= 0$ για $1 \leq i \leq 3$ και $i \neq j$. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι το ∇H βρίσκεται στην διεύθυνση του e_1. Επομένως, θα έχουμε $\lambda_1 = \dfrac{3H}{2}$ και

$$e_1(H) \neq 0\,,\ e_2(H) = 0\,,\ e_3(H) = 0 \tag{4.1.3}$$

αφού από τον ορισμό του ∇, έχουμε ότι $\nabla H = e_1(H)e_1 + e_2(H)e_2 + e_3(H)e_3$. Ο τελεστής σχήματος S της M^3 ως προς αυτή τη βάση διαγωνοποιείται, αφού $Se_1 = \dfrac{3H}{2}e_1$ και $Se_i = \lambda_i e_i$, $i = 2, 3$. Επομένως μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3H}{2} & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{4.1.4}$$

Για την συνέχεια της απόδειξης είναι απαραίτητη η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1.2. *Αν M^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, με τελεστή σχήματος S ο οποίος έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε η M^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Αφού υποθέσαμε ότι $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_2 \neq \frac{3H}{2}$ και $\lambda_3 \neq \frac{3H}{2}$, θα έχουμε

$$\lambda_2 + \lambda_3 + \frac{3H}{2} = -3H \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{9H}{2}\,. \tag{4.1.5}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε και αποδεικνύουμε μια σειρά Λημμάτων διαμέσου των οποίων προκύπτει η απόδειξη της Πρότασης (4.1.2).

Λήμμα 4.1.3. *Αν M^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (4.1.2), τότε οι μορφές συνοχής της M^3 δίνονται από τις σχέσεις*

$$\omega_{ij}^{j} = 0\,,\ \forall i, j = 1, 2, 3$$

$$\omega_{12}^1 = \omega_{13}^1 = 0, \;\; \omega_{21}^2 = \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2} - \lambda_2}$$
$$\omega_{31}^3 = \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2} - \lambda_3}, \;\; \omega_{23}^2 = \frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2}, \;\; \omega_{32}^3 = \frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2 - \lambda_3}$$
$$\omega_{13}^2 = \omega_{23}^1 = \omega_{32}^1 = 0$$

Απόδειξη. Η σχέση (2.4.2) γίνεται $\omega_{ij}^k = -\omega_{ik}^j$, αφού στην περίπτωση αυτή $\epsilon_i = +1, i = 1, 2, 3$. Επομένως εύκολα έχουμε ότι

$$\omega_{ij}^j = 0\,, \;\; \forall i, j = 1, 2, 3 \tag{4.1.6}$$

Από την εξίσωση του Codazzi, (βλ. σχέση 2.5.4), θα υπολογίσουμε τις υπόλοιπες μορφές συνοχής. Έχουμε

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_1 > = < (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_1 > \;.$$

Όμως

$$\begin{aligned} < (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_1 > &= < \nabla_{e_1} (S e_2)\,, e_1 > - < S\,(\nabla_{e_1} e_2)\,, e_1 >= \\ &= < \lambda_2 \nabla_{e_1} e_2, e_1 > + < e_1\,(\lambda_2)\, e_2, e_1 > -\lambda_1 \omega_{12}^1 = \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)\, \omega_{12}^1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} < (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_1 > &= < \nabla_{e_2} (S e_1)\,, e_1 > - < S\,(\nabla_{e_2} e_1)\,, e_1 >= \\ &= < \lambda_1 \nabla_{e_2} e_1, e_1 > + < e_2\,(\lambda_1)\, e_1, e_1 > -\lambda_1 \omega_{21}^1 = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_1)\, \omega_{21}^1 = 0\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\omega_{12}^1 = 0 \tag{4.1.7}$$

αφού από την υπόθεση $\lambda_1 = \dfrac{3H}{2} \neq \lambda_2$.
Από τον τύπο τώρα

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_1 > = < (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_1 >$$

προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$\omega_{13}^1 = 0\,. \tag{4.1.8}$$

Επίσης η ίδια εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$<(\nabla_{e_1}S)\,e_2, e_2> = <(\nabla_{e_2}S)\,e_1, e_2>\ .$$

Αλλά το πρώτο μέλος της είναι ίσο με

$$\begin{aligned} <(\nabla_{e_1}S)\,e_2, e_2> &= <\nabla_{e_1}(Se_2)\,, e_2> - <S\,(\nabla_{e_1}e_2)\,, e_2> = \\ &= <\lambda_2\nabla_{e_1}e_2, e_2> + <e_1\,(\lambda_2)\,e_2, e_2> -\lambda_2\omega_{12}^2 = \\ &= e_1\,(\lambda_2) \end{aligned}$$

ενώ το δεύτερο είναι ίσο με

$$\begin{aligned} <(\nabla_{e_2}S)\,e_1, e_2> &= <\nabla_{e_2}(Se_1)\,, e_2> - <S\,(\nabla_{e_2}e_1)\,, e_2> = \\ &= <\lambda_1\nabla_{e_2}e_1, e_2> + <e_2\,(\lambda_1)\,e_1, e_2> -\lambda_2\omega_{21}^2 = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)\,\omega_{21}^2\,. \end{aligned}$$

Άρα

$$\omega_{21}^2 = \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2} - \lambda_2} \tag{4.1.9}$$

αφού $\lambda_1 = \dfrac{3H}{2} \neq \lambda_2$.
Από τη σχέση τώρα

$$<(\nabla_{e_1}S)\,e_3, e_3> = <(\nabla_{e_3}S)\,e_1, e_3>$$

με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\omega_{31}^3 = \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2} - \lambda_3} \tag{4.1.10}$$

και εντελώς ανάλογα από τη σχέση

$$<(\nabla_{e_2}S)\,e_3, e_2> = <(\nabla_{e_3}S)\,e_2, e_2>$$

προκύπτει ότι

$$\omega_{23}^2 = \frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2}\,. \tag{4.1.11}$$

Όμοια από τη σχέση

$$< (\nabla_{e_2} S)\, e_3, e_3 > = < (\nabla_{e_3} S)\, e_2, e_3 >$$

βρίσκουμε ότι

$$\omega_{32}^3 = \frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2 - \lambda_3} \tag{4.1.12}$$

και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τις εξισώσεις

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_3 > = < (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_3 >$$

και

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_2 > = < (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_2 >$$

καταλήγουμε στις σχέσεις

$$(\lambda_2 - \lambda_3)\, \omega_{12}^3 = (\lambda_1 - \lambda_3)\, \omega_{21}^3 \tag{4.1.13}$$

και

$$(\lambda_3 - \lambda_2)\, \omega_{13}^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, \omega_{31}^2 \tag{4.1.14}$$

αντίστοιχα.

Επιπλέον, θα πρέπει να επισημανθεί ότι λόγω της (4.1.3) και του ορισμού της αγκύλης Lie, υφίσταται η σχέση $[e_2, e_3]\,(H) = 0$.

Όμως $[e_2, e_3] = \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_3} e_2$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3]\,(H) &= \nabla_{e_2} e_3(H) - \nabla_{e_3} e_2(H) = \\
&= \omega_{23}^1 e_1(H) + \omega_{23}^2 e_2(H) + \omega_{23}^3 e_3(H) - \\
&\quad -\omega_{32}^1 e_1(H) - \omega_{32}^2 e_2(H) - \omega_{32}^3 e_3(H) = \\
&= \omega_{23}^1 e_1(H) - \omega_{32}^1 e_1(H)
\end{aligned}$$

λόγω της (4.1.3). Άρα

$$\omega_{23}^1 = \omega_{32}^1 \tag{4.1.15}$$

αφού $e_1(H) \neq 0$.

Από τις (4.1.13), (4.1.14) και την (4.1.15) προκύπτει ότι

$$\omega_{13}^2 = \omega_{23}^1 = \omega_{32}^1 = 0 \tag{4.1.16}$$

□

Λήμμα 4.1.4. *Για μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann M^3, με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (4.1.2), ισχύουν οι σχέσεις*

$$e_3\left(\omega_{21}^2\right) = \omega_{23}^2\left(\omega_{31}^3 - \omega_{21}^2\right) \ , \ e_2\left(\omega_{31}^3\right) = \omega_{32}^3\left(\omega_{21}^2 - \omega_{31}^3\right)$$

$$e_1\left(\omega_{21}^2\right) = -\left(\omega_{21}^2\right)^2 - \frac{3H}{2}\lambda_2 \ , \ e_1\left(\omega_{31}^3\right) = -\left(\omega_{31}^3\right)^2 - \frac{3H}{2}\lambda_3$$

$$e_1\left(\omega_{32}^3\right) = -\omega_{31}^3\omega_{32}^3 \ , \ e_1\left(\omega_{23}^2\right) = -\omega_{21}^2\omega_{23}^2$$

$$e_2\left(\omega_{32}^3\right) - e_3\left(\omega_{22}^3\right) - \omega_{23}^2\omega_{22}^3 + \left(\omega_{32}^3\right)^2 - \omega_{22}^1\omega_{31}^3 = -\lambda_2\lambda_3$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα (4.1.3) εύκολα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}e_1 &= \nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_1}e_3 = 0 \\
\nabla_{e_2}e_1 &= \omega_{21}^2 e_2 \ , \ \nabla_{e_2}e_2 = \omega_{22}^1 e_1 + \omega_{22}^3 e_3 \ , \ \nabla_{e_2}e_3 = \omega_{23}^2 e_2 \\
\nabla_{e_3}e_1 &= \omega_{31}^3 e_3 \ , \ \nabla_{e_3}e_2 = \omega_{32}^3 e_3 \ , \ \nabla_{e_3}e_3 = \omega_{33}^1 e_1 + \omega_{33}^2 e_2
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_2}e_1 = \\
&= -\omega_{21}^2 e_2
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
[e_3, e_1] &= \nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{e_1}e_3 = \\
&= \omega_{31}^3 e_3 \, .
\end{aligned}$$

Από τον τύπο του τανυστή καμπυλότητας για τα πεδία e_2, e_3, e_1 τώρα, έχουμε

$$\begin{aligned} R(e_2,e_3)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_1 = \\ &= \nabla_{e_2}(\omega_{31}^3 e_3) - \nabla_{e_3}(\omega_{21}^2 e_2) - \omega_{23}^2\nabla_{e_2}e_1 + \omega_{32}^3\nabla_{e_3}e_1 = \\ &= \omega_{31}^3\omega_{23}^2 e_2 + e_2(\omega_{31}^3)e_3 - \omega_{21}^2\omega_{32}^3 e_3 - \\ &\quad - e_3(\omega_{21}^2)e_2 - \omega_{23}^2\omega_{21}^2 e_2 + \omega_{32}^2\omega_{31}^3 e_3 \end{aligned}$$

οπότε

$$< R(e_2,e_3)e_1, e_2 >= \omega_{31}^3\omega_{23}^2 - e_3\left(\omega_{21}^2\right) - \omega_{23}^2\omega_{21}^2$$

και

$$< R(e_2,e_3)e_1, e_3 >= e_2\left(\omega_{31}^3\right) - \omega_{21}^2\omega_{32}^3 + \omega_{32}^3\omega_{31}^3\,.$$

Όμως από τον τύπο (2.5.3) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} < R(e_2,e_3)e_1, e_2 > &= < Se_2, e_2 >< Se_3, e_1 > - < Se_3, e_2 >< Se_2, e_1 > \\ &= < \lambda_2 e_2, e_2 >< \lambda_3 e_3, e_1 > - < \lambda_3 e_3, e_2 >< \lambda_2 e_2, e_1 > \\ &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} < R(e_2,e_3)e_1, e_3 > &= < Se_2, e_3 >< Se_3, e_1 > - < Se_3, e_3 >< Se_2, e_1 > \\ &= < \lambda_2 e_2, e_3 >< \lambda_3 e_3, e_1 > - < \lambda_3 e_3, e_3 >< \lambda_2 e_2, e_1 > \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Επομένως

$$e_3\left(\omega_{21}^2\right) = \omega_{23}^2\left(\omega_{31}^3 - \omega_{21}^2\right) \tag{4.1.17}$$

και

$$e_2\left(\omega_{31}^3\right) = \omega_{32}^3\left(\omega_{21}^2 - \omega_{31}^3\right)\,. \tag{4.1.18}$$

Ο τύπος του τανυστή καμπυλότητας, για τα πεδία e_1, e_2, e_1, δίνει ακόμη

$$\begin{aligned} R(e_1,e_2)\,e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{[e_1,e_2]}e_1 = \\ &= \nabla_{e_1}(\omega_{21}^2 e_2) + \omega_{21}^2\nabla_{e_2}e_1 = \\ &= e_1(\omega_{21}^2)\,e_2 + (\omega_{21}^2)^2\,e_2 \end{aligned}$$

οπότε

$$< R(e_1,e_2)\,e_1, e_2 >= e_1\left(\omega_{21}^2\right) + \left(\omega_{21}^2\right)^2 .$$

Από τον τύπο (2.5.3) έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} < R(e_1,e_2)\,e_1,e_2 > &= < Se_1,e_2 >< Se_2,e_1 > - < Se_2,e_2 >< Se_1,e_1 >= \\ &= -\frac{3H}{2}\lambda_2 . \end{aligned}$$

Άρα

$$e_1\left(\omega_{21}^2\right) = -\left(\omega_{21}^2\right)^2 - \frac{3H}{2}\lambda_2 ,$$

ή ισοδύναμα

$$e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right) = -\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2 - \frac{3H}{2}\lambda_2 . \tag{4.1.19}$$

Ομοίως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} R(e_3,e_1)\,e_1 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{[e_3,e_1]}e_1 = \\ &= -\nabla_{e_1}(\omega_{31}^3 e_3) - \omega_{31}^3\nabla_{e_3}e_1 = \\ &= -e_1(\omega_{31}^3)\,e_3 + \omega_{31}^3\nabla e_1 e_3 - (\omega_{31}^3)^2\,e_3 = \\ &= -e_1(\omega_{31}^3)\,e_3 - (\omega_{31}^3)^2\,e_3 \end{aligned}$$

Επομένως

$$< R(e_3,e_1)\,e_1, e_3 >= -e_1\left(\omega_{31}^3\right) - \left(\omega_{31}^3\right)^2 .$$

Από τον τύπο (2.5.3) όμως

$$\begin{aligned} < R(e_3,e_1)\,e_1,e_3 > &= < Se_3,e_3 >< Se_1,e_1 > - < Se_1,e_3 >< Se_3,e_1 >= \\ &= \frac{3H}{2}\lambda_3 . \end{aligned}$$

Επομένως καταλήγουμε στη σχέση

$$e_1\left(\omega_{31}^3\right) = -\left(\omega_{31}^3\right)^2 - \frac{3H}{2}\lambda_3\,,$$

ή ισοδύναμα

$$e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right) = -\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2 - \frac{3H}{2}\lambda_3\,. \tag{4.1.20}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τον τύπο του τανυστή καμπυλότητας για τα πεδίαe_3, e_1, e_2, παίρνουμε

$$\begin{aligned} R\left(e_3, e_1\right) e_2 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{[e_3,e_1]}e_2 = \\ &= -\nabla_{e_1}\left(\omega_{32}^3 e_3\right) - \omega_{31}^3\nabla_{e_3}e_2 = \\ &= -e_1\left(\omega_{32}^3\right)e_3 - \omega_{31}^3\omega_{32}^3 e_3 \end{aligned}$$

οπότε

$$< R\left(e_3, e_1\right) e_2, e_3 >= -e_1\left(\omega_{32}^3\right) - \omega_{31}^3\omega_{32}^3\,.$$

Αλλά

$$< R\left(e_3, e_1\right) e_2, e_3 >=< Se_3, e_3 >< Se_1, e_2 > - < Se_1, e_3 >< Se_2, e_3 >= 0\,.$$

Επομένως

$$e_1\left(\omega_{32}^3\right) = -\omega_{31}^3\omega_{32}^3\,. \tag{4.1.21}$$

Με τον ίδιο τρόπο από το $< R\left(e_1, e_2\right) e_3, e_2 >$ καταλήγουμε στη σχέση

$$e_1\left(\omega_{23}^2\right) = -\omega_{21}^2\omega_{23}^2\,. \tag{4.1.22}$$

Υπολογίζουμε τώρα και το $< R\left(e_2, e_3\right) e_2, e_3 >$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} R\left(e_2, e_3\right) e_2 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_2 = \\ &= \nabla_{e_2}\left(\omega_{32}^3\right)e_3 - \nabla_{e_3}\left(\omega_{22}^1 e_1 + \omega_{22}^3 e_3\right) - \omega_{23}^2\nabla_{e_2}e_2 + \omega_{32}^3\nabla_{e_3}e_2 = \\ &= e_2\left(\omega_{32}^3\right)e_3 + \omega_{32}^3\omega_{23}^2 e_2 - \omega_{23}^2\omega_{22}^3 e_3 + \left(\omega_{32}^3\right)^2 e_3 - e_3\left(\omega_{22}^3\right)e_3 - \\ &\quad -e_3\left(\omega_{22}^1\right)e_1 - \omega_{22}^1\omega_{31}^3 e_3 - \omega_{23}^2\omega_{22}^1 e_1 - \omega_{22}^3\omega_{33}^1 e_1 - \omega_{22}^3\omega_{33}^3 e_2\,, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} < R\left(e_2, e_3\right) e_2, e_3 > &= e_2\left(\omega_{32}^3\right) - e_3\left(\omega_{22}^3\right) - \omega_{23}^2\omega_{22}^3 + \\ &\quad + \left(\omega_{32}^3\right)^2 - \omega_{22}^1\omega_{31}^3 \end{aligned}$$

Από τον τύπο (2.5.3) όμως, έχουμε επίσης ότι

$$< R\left(e_3, e_1\right) e_2, e_3 >= -\lambda_2\lambda_3\,.$$

Δηλαδή

$$e_2\left(\omega_{32}^3\right) - e_3\left(\omega_{22}^3\right) - \omega_{23}^2\omega_{22}^3 + \left(\omega_{32}^3\right)^2 - \omega_{22}^1\omega_{31}^3 = -\lambda_2\lambda_3 \qquad (4.1.23)$$

και επομένως ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Λήμματος (4.1.4). □

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη της Πρότασης (4.1.2). Από τις σχέσεις (4.1.4) και (4.1.5) εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$trS^2 = \frac{45H^2}{2} - 2\lambda_2\lambda_3\,. \qquad (4.1.24)$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη σχέση (2.5.5) έχουμε

$$\begin{aligned} \triangle H &= -\left(e_1e_1(H) - \nabla_{e_1}e_1(H)\right) - \left(e_2e_2(H) - \nabla_{e_2}e_2(H)\right) - \\ &\quad - \left(-e_3e_3(H) - \nabla_{e_3}e_3(H)\right) = \\ &= -e_1e_1(H) + \nabla_{e_2}e_2(H) + \nabla_{e_3}e_3(H) = \\ &= -e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1e_1 + \omega_{22}^3e_3\right)(H) + \left(\omega_{33}^1e_1 + \omega_{33}^2e_2\right)(H) \end{aligned}$$

οπότε τελικά

$$\triangle H = -e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1 + \omega_{33}^1\right)e_1(H)\,. \qquad (4.1.25)$$

Επομένως η σχέση (4.1.2) λόγω των (4.1.24) και (4.1.25) γίνεται

$$e_1e_1(H) - \left(\omega_{22}^1 + \omega_{33}^1\right)e_1(H) + H\left(\frac{45H^2}{2} - 2\lambda_2\lambda_3\right) = 0$$

ή

$$e_1e_1(H) + \left(\omega_{21}^2 + \omega_{31}^3\right)e_1(H) + H\left(\frac{45H^2}{2} - 2\lambda_2\lambda_3\right) = 0\,. \qquad (4.1.26)$$

Αν δράσουμε με το πεδίο e_2 και στα δύο μέλη της (4.1.26) θα έχουμε

$$\left[e_2\left(\omega_{21}^2\right)+e_2\left(\omega_{31}^3\right)\right]e_1(H)-2He_2\left(\lambda_2\lambda_3\right)=0 \tag{4.1.27}$$

αφού

$$e_2e_1(H)=e_1e_2(H)-\left[e_1,e_2\right](H)=\omega_{21}^2e_2(H)=0$$

και

$$e_2e_1e_1(H)=e_1e_2\left(e_1(H)\right)-\left[e_1,e_2\right]\left(e_1(H)\right)=\omega_{21}^2e_2\left(e_1(H)\right)=0\,.$$

Όμως

$$e_2\left(\lambda_2\lambda_3\right)=e_2\left(\lambda_2\right)\lambda_3+\lambda_2e_2\left(\lambda_3\right) \tag{4.1.28}$$

και επειδή $\lambda_2+\lambda_3=-\dfrac{9H}{2}$, εύκολα έχουμε ότι

$$e_2\left(\lambda_2\right)+e_2\left(\lambda_3\right)=-\frac{9e_2(H)}{2}=0\,,$$

κατά συνέπεια

$$e_2\left(\lambda_2\right)=-e_2\left(\lambda_3\right)\,.$$

Η (4.1.28) τότε γίνεται

$$e_2\left(\lambda_2\lambda_3\right)=\left(\lambda_2-\lambda_3\right)e_2\left(\lambda_3\right)\,.$$

Άρα η (4.1.27) λόγω του Λήμματος (4.1.3), διαιρώντας με το $e_1(H)\neq 0$ δίνει

$$\begin{aligned} e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right) &= -e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)+ \\ &\quad +\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\,. \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

Ομοίως αν δράσουμε με το e_3 στην (4.1.26) θα πάρουμε

$$\begin{aligned} e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right) &= -e_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)+ \\ &\quad +\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)^2\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\,. \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

Λήμμα 4.1.5. *Αν M^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann, με τελεστή σχήματος όπως στην Πρόταση (4.1.2), τότε*

$$e_2(\lambda_3) = e_3(\lambda_2) = 0$$

Απόδειξη. Δείξαμε προηγουμένως (βλ. Λήμμα 4.1.4) ότι $[e_1, e_2] = -\omega_{21}^2 e_2$. Εφαρμόζουμε και τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης στη συνάρτηση $\dfrac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}$ και έχουμε

$$[e_1, e_2]\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right) = -\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2} e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right),$$

ή ισοδύναμα

$$e_1\left[e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)\right] - e_2\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)\right] = -\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2} e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right).$$

Όμως οι εκφράσεις $e_2\left(\dfrac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)$ και $e_1\left(\dfrac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)$ είναι γνωστές από τις σχέσεις (4.1.29) και (4.1.19) αντίστοιχα. Επομένως, η τελευταία σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} & e_1\left(-e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right) + \frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right) - \\ & -e_2\left(-\frac{3H}{2}\lambda_2 - \left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\right) = -\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2} e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right) \end{aligned} \tag{4.1.31}$$

Η έκφραση όμως $e_2\left(\dfrac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)$ στην τελευταία εξίσωση είναι γνωστή από το συνδυασμό των σχέσεων (4.1.10), (4.1.12) και (4.1.18).

Θα υπολογίσουμε τώρα την έκφραση $e_2\left(\frac{3H}{2}\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\right)$. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
e_2\left(\frac{3H}{2}\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\right) &= e_2\left(\frac{3H}{2}\right)\lambda_2+\frac{3H}{2}e_2\left(\lambda_2\right)+ \\
&+ 2\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)
\end{aligned}
$$

ή ακόμη

$$
\begin{aligned}
& e_2\left(\frac{3H}{2}\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\right)=\frac{3H}{2}e_2\left(\lambda_2\right)- \\
& -2\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\cdot\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+ \\
& +2\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\cdot\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}+ \\
& +4\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}
\end{aligned}
\tag{4.1.32}
$$

Τέλος, για την εξίσωση (4.1.31) αρκεί να υπολογιστεί η έκφραση που ακολουθεί

$$
\begin{aligned}
& e_1\left(-e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)+\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)= \\
& =-e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)- \\
& -\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)-e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right)+
\end{aligned}
$$

$$+e_1\left(\frac{2H}{e_1(H)}\right)(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}$$

$$+2\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}+$$

$$+\frac{2H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2 e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)$$

$$=\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)-$$

$$-\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(-\frac{3H}{2}\lambda_2-\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\right)- \tag{4.1.33}$$

$$-\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\frac{3H}{2}\lambda_3+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\right)+$$

$$+e_1\left(\frac{2H}{e_1(H)}\right)(\lambda_2-\lambda_3)^2\,\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}+$$

$$+\frac{4H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}+$$

$$+\frac{2H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2\left(-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)$$

Κατά συνέπεια η σχέση (4.1.31) λόγω των (4.1.19), (4.1.29), (4.1.32) και(4.1.33), γίνεται τελικά

$$\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left[\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2-e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right)\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2-\right.$$

$$-\frac{H}{e_1(H)}\left(\left(3\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)(\lambda_2-\lambda_3)^2+2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right)\Bigg]=0(*)$$

Από την εξίσωση αυτή συνάγεται ότι είτε το $e_2\left(\lambda_3\right)=0$, είτε η παράσταση εντός της αγκύλης ισούται με μηδέν. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $e_2\left(\lambda_3\right)\neq 0$ οπότε η παράσταση εντός της αγκύλης θα ισούται με μηδέν. Από την εξίσωση αυτή επιλύοντας ως προς $e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right) &= -\frac{H}{e_1(H)}\left(\left(3\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)+2\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\right) \\
&\quad +\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2
\end{aligned}$$

Δρούμε με το e_2 και στα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και λαμβάνοντας πάλι υπόψη ότι $e_2e_1(H)=0$ και ότι $e_2(H)=0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&-\frac{H}{e_1(H)}\left[3e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)-e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)+2e_2\left(\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)\right]+ \\
&+2\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\right)^2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\left(e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)-e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right)+ \\
&+e_2\left(\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2}\right)\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2=0
\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

Στην εξίσωση (4.1.34) όλες οι υπεισερχόμενες εκφράσεις έχουν υπολογισθεί εκτός από τις $e_2\left(\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)$ και $e_2\left(\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2}\right)$. Για το λόγο αυτό στη συνέχεια υπολογίζουμε αυτές τις εκφράσεις. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
e_2\left(\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\lambda_2-\lambda_3}\right) &= \frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}e_2e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)= \\
&= \frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\left[e_1e_2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)+\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right]= \\
&= \frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\left[e_1\left(-2e_2\left(\lambda_3\right)\right)+\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\left(-2e_2\left(\lambda_3\right)\right)\right]
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
& e_2\left(\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)= \\
& =\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\left[-2e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right)-2\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right]= \\
& =\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\left[-2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)-2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right]- \\
& -2\cdot\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}
\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned}
e_2\left(\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2}\right) &= \frac{-2}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^3}\;e_2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)= \\
&= \frac{-2}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^3}\left[e_2\left(\lambda_2\right)-e_2\left(\lambda_3\right)\right]= \\
&= \frac{-2}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^3}\left[-e_2\left(\lambda_3\right)-e_2\left(\lambda_3\right)\right]=
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$e_2\left(\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_3)^2}\right)=\frac{4}{(\lambda_2-\lambda_3)^2}\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\,. \tag{4.1.36}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις (4.1.18), (4.1.21), (4.1.29), (4.1.35) και (4.1.36) στην εξίσωση (4.1.34) έχουμε

$$\frac{H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2=2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\,. \tag{4.1.37}$$

Δρούμε πάλι με το e_2 στην εξίσωση αυτή και παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{2H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\,. \tag{4.1.38}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4.1.38) επί δύο (2) και τη συγκρίνουμε με την (4.1.37). Από την σύγκριση αυτή προκύπτει ότι

$$\frac{3H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2=0,$$

το οποίο είναι αδύνατο γιατί έχουμε υποθέσει ότι $H\neq 0$ και $\lambda_2\neq\lambda_3$. Επομένως η υπόθεσή μας είναι ψευδής και κατά συνέπεια $e_2\left(\lambda_3\right)=0$.

Εφαρμόζουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης $[e_3,e_1]=\omega_{31}^3 e_3$, που αποδείξαμε στο Λήμμα (4.1.4), στη συνάρτηση $\dfrac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}$ και έχουμε

$$e_3\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right]-e_1\left[e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right]=\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)$$

Αντικαθιστούμε τώρα σε αυτή τα $e_1\left(\dfrac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)$ και $e_3\left(\dfrac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)$ από τις σχέσεις (4.1.20) και (4.1.30) αντίστοιχα, οπότε

$$-e_3\left(\frac{3H}{2}\lambda_3+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\right)-$$

$$-e_1\left(-e_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)+\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)^2\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\right)= \tag{4.1.39}$$

$$=-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)$$

Από τη σχέση (4.1.30) γνωρίζουμε την έκφραση για το$e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)$. Αρκεί επομένως, στην εξίσωση (4.1.39) να υπολογίσουμε το$e_3\left(\frac{3H}{2}\lambda_3+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\right)$ και το $e_1\left(-e_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)+\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)^2\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\right)$. Πράγματι έχουμε διαδοχικά

$$e_3\left(\frac{3H}{2}\lambda_3+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\right)=e_3\left(\frac{3H}{2}\right)\lambda_3+\frac{3H}{2}e_3\left(\lambda_3\right)$$

$$+2\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)=4\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\frac{H}{e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)^2$$

$$+\frac{3H}{2}e_3\left(\lambda_3\right)-2\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)$$

και

$$e_1\left(-e_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)+\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)^2\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\right)=$$

$$=-e_1\left(\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\right)\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)-$$

$$-\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left(e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)-e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)\right)+$$

$$+e_1\left(\frac{2H}{e_1(H)}\right)(\lambda_3-\lambda_2)^2\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}+$$

$$+2\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)e_1\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}+$$

$$+\frac{2H}{e_1(H)}\left(\lambda_3-\lambda_2\right)^2e_1\left(\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\right)=$$

$$=\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)-$$

$$-\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left(-\frac{3H}{2}\lambda_3-\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\right)-$$

$$-\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left(\frac{3H}{2}\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\right)+$$

$$+e_1\left(\frac{2H}{e_1(H)}\right)(\lambda_3-\lambda_2)^2\,\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}+$$

$$+\frac{4H}{e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)e_1\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}+$$

$$+\frac{2H}{e_1(H)}\left(\lambda_3-\lambda_2\right)^2\left(-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\right)$$

Επομένως η σχέση (4.1.39) γίνεται τελικά

$$\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left[\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2-e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right)(\lambda_3-\lambda_2)^2\right.$$
$$\left.-\frac{H}{e_1(H)}\left(\left(3\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)(\lambda_3-\lambda_2)^2+2(\lambda_3-\lambda_2)\,e_1(\lambda_3-\lambda_2)\right)\right]=0$$

Από αυτή τη σχέση, η οποία είναι ανάλογη της σχέσης (*), ακολουθώντας την ίδια σειρά συλλογισμών, καταλήγουμε στην $e_3(\lambda_2)=0$.

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι $e_2(\lambda_3)=e_3(\lambda_2)=0$ και επομένως ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Λήμματος (4.1.5). □

Επανερχόμαστε στην απόδειξη της Πρότασης (4.1.2). Λόγω του Λήμματος (4.1.5), η σχέση (4.1.23) σε συνδυασμό με τις (4.1.9), (4.1.10), (4.1.11) και (4.1.12) δίνει

$$-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}=\lambda_2\lambda_3\,. \tag{4.1.40}$$

Ενδιαφερόμαστε τώρα να υπολογίσουμε την έκφραση $e_1e_1(H)$ η οποία υπεισέρχεται στη σχέση (4.1.26).

Λήμμα 4.1.6. *Αν M^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann, με τελεστή σχήματος όπως στην Πρόταση (4.1.2), τότε ισχύει η σχέση*

$$e_1e_1(H)=-\frac{261H^3}{8}+\frac{1}{2}H\lambda_2\lambda_3$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\lambda_2+\lambda_3=-\frac{9H}{2}$. Επομένως

$$e_1e_1(\lambda_2)+e_1e_1(\lambda_3)=-\frac{9}{2}e_1e_1(H)\,. \tag{4.1.41}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_2) &= e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)\left(\frac{3H}{2}-\lambda_2\right)+\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1\left(\frac{3H}{2}-\lambda_2\right)= \\
&= \left(-\frac{3H}{2}\lambda_2-\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\right)\left(\frac{3H}{2}-\lambda_2\right) \\
&\quad +\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\left(\frac{3}{2}e_1(H)-e_1(\lambda_2)\right)= \\
&= -\left(\frac{3H}{2}\right)^2\lambda_2+\frac{3H}{2}\lambda_2^2-\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2+ \\
&\quad +\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\lambda_2+\frac{3}{2}\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(H)-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_2)= \\
&= -\frac{9H^2}{4}\lambda_2+\frac{3H}{2}\lambda_2^2-\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2+ \\
&\quad +\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\lambda_2-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_2).
\end{aligned}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\lambda_2-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_2) &= \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_2)\left[\frac{\lambda_2}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}-1\right]= \\
&= \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\left(2\lambda_2-\frac{3H}{2}\right)= \\
&= \left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\left(2\lambda_2-\frac{3H}{2}\right).
\end{aligned}$$

Επίσης

$$
\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_3) &= e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\left(\frac{3H}{2}-\lambda_3\right)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1\left(\frac{3H}{2}-\lambda_3\right)= \\
&= \left(-\frac{3H}{2}\lambda_3-\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\right)\left(\frac{3H}{2}-\lambda_3\right) \\
&\quad +\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\left(\frac{3}{2}e_1(H)-e_1(\lambda_3)\right)= \\
&= -\left(\frac{3H}{2}\right)^2\lambda_3+\frac{3H}{2}\lambda_3^2-\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2+ \\
&\quad +\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\lambda_3+\frac{3}{2}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(H)-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_3)= \\
&= -\frac{9H^2}{4}\lambda_3+\frac{3H}{2}\lambda_3^2-\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2+ \\
&\quad +\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\lambda_3-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_3)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\lambda_3-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_3) &= \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_3)\left[\frac{\lambda_3}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}-1\right]= \\
&= \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\left(2\lambda_3-\frac{3H}{2}\right)= \\
&= (\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3})^2\left(2\lambda_3-\frac{3H}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Άρα

$$e_1e_1(\lambda_2)+e_1e_1(\lambda_3)=2\left(\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\lambda_3\right)-$$

$$-3H\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2-3H\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2+\frac{81H^3}{8}+\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)+$$

$$+\frac{3H}{2}\left(\frac{81H^2}{4}-2\lambda_2\lambda_3\right),$$

οπότε τελικά

$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_2)+e_1e_1(\lambda_3) &= 2\left[\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\left(\lambda_2-\frac{3H}{2}\right)\right]+\frac{81H^3}{2}+\\
&\quad +2\left[\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\left(\lambda_3-\frac{3H}{2}\right)\right]+\\
&\quad +\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)-3H\lambda_2\lambda_3\,.
\end{aligned}$$

Αν τώρα λάβουμε υπόψη μας και τη σχέση (4.1.41), τότε από την τελευταία εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned}
e_1e_1(H) &= -\frac{4}{9}\left[\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\left(\lambda_2-\frac{3H}{2}\right)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\left(\lambda_3-\frac{3H}{2}\right)\right]-\\
&\quad -9H^3-\frac{1}{3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)+\frac{2}{3}H\lambda_2\lambda_3\,,
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} e_1e_1(H) &= \frac{4}{9}\left[\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_2)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_3)\right]+ \\ &\quad -\frac{1}{3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)+\frac{2}{3}H\lambda_2\lambda_3-9H^3\,. \end{aligned} \tag{4.1.42}$$

Αντικαθιστούμε, τώρα, τη σχέση (4.1.42) στην εξίσωση (4.1.26), οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3}\left[\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_2)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_3)\right]+ \\ &+2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)+\frac{81H^3}{2}-4H\lambda_2\lambda_3=0 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3}\left[\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\frac{3H}{2}+\lambda_2)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\frac{3H}{2}+\lambda_3)\right]+ \\ &\qquad +\frac{81H^3}{2}-4H\lambda_2\lambda_3=0\,. \end{aligned} \tag{4.1.43}$$

Όμως επειδή $\lambda_2+\lambda_3+\dfrac{3H}{2}=-3H$, εύκολα έχουμε ότι

$$e_1\left(\frac{3H}{2}+\lambda_2\right)=e_1(-\lambda_3-3H),\quad e_1\left(\frac{3H}{2}+\lambda_3\right)=e_1(-\lambda_2-3H)\,,$$

οπότε η (4.1.43) γίνεται

$$\begin{aligned} &-\frac{4}{3}\left[\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_3)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_2)\right]- \\ &-4\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)+\frac{81H^3}{2}-4H\lambda_2\lambda_3=0\,. \end{aligned} \tag{4.1.44}$$

Ακόμη έχουμε

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_3)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_2)=e_1(\lambda_2)e_1(\lambda_3)\frac{\frac{3H}{2}-\lambda_2+\frac{3H}{2}-\lambda_3}{(\frac{3H}{2}-\lambda_2)(\frac{3H}{2}-\lambda_3)}=$$

$$=\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\left(2\frac{3H}{2}-(\lambda_2+\lambda_3)\right)=\frac{15H}{2}\cdot\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}$$

ή ακόμη αν ληφθεί υπόψη και η (4.1.40)

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_3)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_2)=-\frac{15H}{2}\lambda_2\lambda_3\,.$$

Άρα η σχέση (4.1.44) τελικά δίνει

$$\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)=\frac{81H^3}{8}+\frac{3}{2}H\lambda_2\lambda_3\,. \tag{4.1.45}$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία στην (4.1.26), οπότε έχουμε

$$e_1e_1(H)=-\frac{261H^3}{8}+\frac{1}{2}H\lambda_2\lambda_3 \tag{4.1.46}$$

που είναι η ζητούμενη σχέση, και έτσι η απόδειξη του Λήμματος (4.1.6) έχει ολοκληρωθεί. □

Επανερχόμαστε στην απόδειξη της Πρότασης (4.1.2). Δρούμε με το e_1 και στα δύο μέλη της (4.1.45), οπότε έχουμε

$$\left[e_1(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2})+e_1(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3})\right]e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1e_1(H)=$$

$$=\frac{243H^2}{8}e_1(H)+\frac{3}{2}e_1(H)\lambda_2\lambda_3+\frac{3}{2}He_1\left(\lambda_2\lambda_3\right)\,. \tag{4.1.47}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (4.1.19), (4.1.20), (4.1.45) και (4.1.46) το πρώτο μέλος της (4.1.47) γίνεται

$$\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)+e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right]e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1e_1(H)=$$

$$=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\left(-\frac{171H^3}{4}-H\lambda_2\lambda_3\right)+ \qquad (4.1.48)$$

$$+\frac{27H^2}{4}e_1(H)-2\lambda_2\lambda_3e_1(H)\,.$$

Για να βρούμε την έκφραση του δευτέρου μέλους της (4.1.47) θα πρέπει να υπολογίσουμε το $e_1\left(\lambda_2\lambda_3\right)$. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
e_1\left(\lambda_2\lambda_3\right) &= e_1(\lambda_2)\lambda_3+\lambda_2e_1(\lambda_3)= \\
&= \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\left(\frac{3H}{2}-\lambda_2\right)\lambda_3+\lambda_2\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\left(\frac{3H}{2}-\lambda_3\right)= \\
&= \frac{3H}{2}\cdot\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\lambda_3-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\lambda_2\lambda_3+ \\
&\quad +\frac{3H}{2}\cdot\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\cdot\lambda_2-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\cdot\lambda_2\lambda_3= \\
&= -\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\lambda_2\lambda_3+ \\
&\quad +\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_3+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_2\right)\,.
\end{aligned} \qquad (4.1.49)$$

Όμως $e_1(\lambda_2)+e_1(\lambda_3)=-\frac{9}{2}e_1(H)$, οπότε

$$e_1(\lambda_2)\lambda_3=-\frac{9}{2}e_1(H)\lambda_3-e_1(\lambda_3)\lambda_3$$

και

$$e_1(\lambda_3)\lambda_2 = -\frac{9}{2}e_1(H)\lambda_2 - e_1(\lambda_2)\lambda_2$$

Προσθέτωντας τις εξισώσεις αυτές κατά μέλη

$$e_1\left(\lambda_2\lambda_3\right) = e_1(\lambda_2)\lambda_3 + \lambda_2 e_1(\lambda_3) =$$

$$= \frac{81H}{4}e_1(H) - (e_1(\lambda_2)\lambda_2 + e_1(\lambda_3)\lambda_3) = \frac{81H}{4}e_1(H) -$$

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\left(\frac{3H}{2}-\lambda_2\right)\lambda_2 - \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\left(\frac{3H}{2}-\lambda_3\right)\lambda_3\,,$$

ή τελικά

$$\begin{aligned} e_1\left(\lambda_2\lambda_3\right) \quad &= \quad \frac{81H}{4}e_1(H) - \left[\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2 + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3\right)\right] + \\ &\quad + \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2^2 + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3^2\,. \end{aligned} \tag{4.1.50}$$

Τα πρώτα μέλη των (4.1.49) και (4.1.50) είναι ίσα άρα και τα δεύτερα. Δηλαδή

$$\begin{aligned} -\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2} + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\lambda_2\lambda_3 \quad &+ \quad \frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_3 + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_2\right) = \\ &= \quad \frac{81H}{4}e_1(H) + \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2^2 + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3^2 - \\ &\quad - \left[\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2 + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3\right)\right] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\lambda_2\lambda_3 \quad - \quad \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2^2-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3^2=$$

$$= \quad \frac{81H}{4}e_1(H)-\frac{3H}{2}\cdot\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot(\lambda_3+\lambda_2)-$$

$$-\frac{3H}{2}\cdot\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\cdot(\lambda_3+\lambda_2)\Leftrightarrow$$

$$-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2\left(\lambda_2+\lambda_3\right) \quad - \quad \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3\left(\lambda_2+\lambda_3\right)$$

$$= \quad \frac{81H}{4}e_1(H)+\frac{27H^2}{4}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right).$$

Από αυτή προκύπτει

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3=\frac{9}{2}e_1(H)+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right) \quad (4.1.51)$$

Η σχέση (4.1.50) λόγω της (4.1.51) γίνεται

$$\begin{aligned} e_1(\lambda_2)\lambda_3+\lambda_2e_1(\lambda_3) &= \frac{81H}{4}e_1(H)+\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2^2+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3^2- \\ &- \frac{3H}{2}\left[\frac{9}{2}e_1(H)+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right] \end{aligned} \quad (4.1.52)$$

Τα πρώτα μέλη των (4.1.49), (4.1.52) είναι ίσα, επομένως θα είναι ίσα και τα δεύτερα. Άρα

$$-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_2\left(\lambda_2+\lambda_3\right)+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_3+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_2\right)+$$

$$-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_3\left(\lambda_2+\lambda_3\right)=\frac{54H}{4}e_1(H)-\frac{9H^2}{4}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right),$$

από την οποία χρησιμοποιώντας και την (4.1.51), έχουμε ότι

$$\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\lambda_3+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\lambda_2\right)=-\frac{27H}{4}e_1(H)-9H^2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)$$

Αντικαθιστούμε αυτή τη σχέση στην (4.1.49), οπότε

$$\begin{aligned} e_1(\lambda_2)\lambda_3+\lambda_2 e_1(\lambda_3) &= -\lambda_2\lambda_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)-\frac{27H}{4}e_1(H)+ \\ &- 9H^2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right). \end{aligned} \tag{4.1.53}$$

Λόγω τώρα της (4.1.53) το δεύτερο μέλος της (4.1.47) γίνεται

$$\begin{aligned} \frac{243H^2}{8}e_1(H) &+ \frac{3}{2}e_1(H)\lambda_2\lambda_3+\frac{3}{2}He_1(\lambda_2\lambda_3)= \\ &= -\frac{81H^2}{8}e_1(H)-\frac{3}{2}H\lambda_2\lambda_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)- \\ &\quad -\frac{27}{2}H^3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)+\frac{3}{2}e_1(H)\lambda_2\lambda_3+ \\ &\quad +\frac{243}{8}H^2 e_1(H). \end{aligned} \tag{4.1.54}$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων (4.1.47), (4.1.48) και (4.1.54) προκύπτει η σχέση

$$\left(54H^2+14\lambda_2\lambda_3\right)e_1(H)=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\left(-117H^3+2H\lambda_2\lambda_3\right) \tag{4.1.55}$$

Εφαρμόζουμε το e_1 και στα δύο μέλη της (4.1.55), οπότε έχουμε

$$\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)+e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right]\left(-117H^3+2H\lambda_2\lambda_3\right)$$

$$+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\left[-351H^2e_1(H)+2e_1(H)\lambda_2\lambda_3+2He_1(\lambda_2\lambda_3)\right]=$$

$$=\left(108He_1(H)+14e_1(\lambda_2\lambda_3)\right)e_1(H)+\left(54H^2+14\lambda_2\lambda_3\right)e_1e_1(H)$$

Η εξίσωση αυτή λόγω των (4.1.19), (4.1.20), (4.1.45), (4.1.46) και (4.1.53) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη

$$\frac{27}{4}H\left[e_1(H)\right]^2+\frac{23085}{32}H^5-\frac{963}{4}H^3\lambda_2\lambda_3-\frac{13}{2}H\lambda_2^2\lambda_3^2-$$
$$-99H^3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2+2H\lambda_2\lambda_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2=0\,. \tag{4.1.56}$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα κατά μέλη τις (4.1.45) και (4.1.55), οπότε έχουμε

$$\left(54H^2+14\lambda_2\lambda_3\right)\left[e_1(H)\right]^2=\left(-117H^3+2H\lambda_2\lambda_3\right)\left(\frac{81H^3}{8}+\frac{3}{2}H\lambda_2\lambda_3\right). \tag{4.1.57}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο την (4.1.55) και έχουμε

$$\left(54H^2+14\lambda_2\lambda_3\right)^2\left[e_1(H)\right]^2=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\left(-117H^3+2H\lambda_2\lambda_3\right)^2 \tag{4.1.58}$$

Αντικαθιστούμε στην (4.1.58) το $[e_1(H)]^2$ από τη σχέση (4.1.57), οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned}&\left(54H^2+14\lambda_2\lambda_3\right)\left(\frac{81H^3}{8}+\frac{3}{2}H\lambda_2\lambda_3\right)=\\&\left(-117H^3+2H\lambda_2\lambda_3\right)\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2.\end{aligned}\tag{4.1.59}$$

Επομένως η εξίσωση (4.1.54) λόγω των (4.1.57) και (4.1.59) γίνεται τελικά

$$\begin{aligned}&-162679995H^9-12522762\lambda_2\lambda_3H^7+8128512\lambda_2^2\lambda_3^2H^5-\\&-89712\lambda_2^3\lambda_3^3H^3+12992\lambda_2^4\lambda_3^4H=0\,.\end{aligned}\tag{4.1.60}$$

Θέτουμε $x=\dfrac{\lambda_2\lambda_3}{H^2}$, οπότε η (4.1.60) γίνεται

$$\begin{aligned}F(x)&=12992x^4-89712x^3+8128512x^2\\&\quad-12522762x-162679995=0\,.\end{aligned}\tag{4.1.61}$$

Για να έχει η εξίσωση (4.1.61) πραγματική λύση, θα πρέπει $\lambda_2\lambda_3=\rho H^2$, όπου ρ ρίζα του F, δηλαδή $F(\rho)=0$. Τότε όμως, αντικαθιστώντας στην (4.1.57) το $\lambda_2\lambda_3$ με το ίσον του, θα έχουμε

$$8\,(54+14\rho)\,[e_1(H)]^2=(81+12\rho)\,(-117+2\rho)\,H^4\,.$$

Εφαρμόζοντας το e_1 και στα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (4.1.46), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left(4\rho^2-477\rho+2430\right)H^3=0\,.$$

Για να φθάσουμε σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι καμία από τις ρίζες του$\varphi(\rho)=4\rho^2-477\rho+2430$ δεν είναι ρίζα του $F(x)$. Πράγματι οι ρίζες της εξίσωσης $\varphi(\rho)=0$ είναι οι $\dfrac{9\left(53\pm\sqrt{2329}\right)}{8}$, οι οποίες δεν επαληθεύουν την $F(x)=0$.

Κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $H = 0$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Αποδείξαμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που ο τελεστής σχήματος έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, η διαρμονικότητα κάθε υπερεπιφάνειας Riemann του E_1^4 συνεπάγεται την ελαχιστικότητά της, δηλαδή ότι $H = 0$. Επομένως η απόδειξη της Πρότασης (4.1.2) έχει ολοκληρωθεί. □

Για την απόδειξη του Θεωρήματος (4.1.1) είναι επίσης απαραίτητη και η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 4.1.7. *Αν ο τελεστής σχήματος S μιας διαρμονικής υπερεπιφάνειας Riemann M^3 της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, έχει δύο διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε η M^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda_1 = \dfrac{3H}{2}$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Τότε η παράσταση του τελεστή σχήματος S ως προς την ορθοκανονική βάση $\{e_i\}$, $i = 1, 2, 3$ θα δίνεται από τον πίνακα

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3H}{2} & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

όπου βέβαια $Se_1 = \dfrac{3H}{2}e_1$, $Se_i = \lambda_i e_i$, $i = 2, 3$.
Από τον πίνακα αυτόν εύκολα βρίσκουμε ότι $trS^2 = \dfrac{9H^2}{4} + 2\lambda^2$. Όμως

$$2\lambda + \frac{3H}{2} = -3H \Rightarrow 2\lambda = -\frac{9H}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{9H}{4}\,.$$

Επομένως, εύκολα έχουμε ότι $trS^2 = \dfrac{99H^2}{8}$. Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση του Codazzi, όπως και στο Λήμμα (4.1.3) και λαμβάνοντας υπόψη ότι στην προκειμένη περίπτωση είναι $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = -\dfrac{9H}{4}$, βρίσκουμε τις αντίστοιχες μορφές σύνδεσης ω_{ij}^k, δηλαδή εκφράσεις αντίστοιχες των (4.1.7)-(4.1.10), από τις οποίες εύκολα έχουμε ότι

$$e_1(H) = -\frac{5}{3}H\omega_{21}^2 = -\frac{5}{3}H\omega_{31}^3\,.$$

Άρα $\omega_{21}^2 = \omega_{31}^3$. Η αντίστοιχη σχέση της (4.1.19) είναι

$$e_1\left(\omega_{21}^2\right) = -\left(\omega_{21}^2\right)^2 + \frac{27H^2}{8}\,. \tag{4.1.62}$$

Αν δράσουμε με το e_1 και στα δύο μέλη της σχέσης $e_1(H) = -\frac{5}{3}H\omega_{21}^2$ θα έχουμε

$$e_1e_1(H) = -\frac{5}{3}e_1(H)\omega_{21}^2 - \frac{5}{3}He_1\left(\omega_{21}^2\right)\,.$$

Η σχέση αυτή λόγω της (4.1.62) γίνεται

$$e_1e_1(H) = -\frac{5}{3}e_1(H)\omega_{21}^2 - \frac{5}{3}H\left[-\left(\omega_{21}^2\right)^2 + \frac{27H^2}{8}\right]$$

ή

$$e_1e_1(H) = \frac{40}{9}H\left(\omega_{21}^2\right)^2 - \frac{45H^3}{8}\,.$$

Αλλά η σχέση (2.5.5) δίνει

$$\begin{aligned}
\triangle H &= -\left(e_1e_1(H) - \nabla_{e_1}e_1(H)\right) - \left(e_2e_2(H) - \nabla_{e_2}e_2(H)\right) - \\
&\quad - \left(-e_3e_3(H) - \nabla_{e_3}e_3(H)\right) = \\
&= -e_1e_1(H) + \nabla_{e_2}e_2(H) + \nabla_{e_3}e_3(H) = \\
&= -e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1e_1 + \omega_{22}^3e_3\right)(H) + \left(\omega_{33}^1e_1 + \omega_{33}^2e_2\right)(H)\,,
\end{aligned}$$

οπότε τελικά

$$\triangle H = -e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1 + \omega_{33}^1\right)e_1(H)\,.$$

Επομένως, η εξίσωση (4.1.2) στην περίπτωση αυτή, παίρνει την μορφή

$$\frac{40}{9}H\left(\omega_{21}^2\right)^2 + 2\left(\omega_{21}^2\right)e_1(H) + \frac{54}{8}H^3 = 0\,,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{10}{9}H\left(\omega_{21}^2\right)^2 + \frac{27}{4}H^3 = 0\,.$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι $H \neq 0$, κατά συνέπεια η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\frac{10}{9}\left(\omega_{21}^2\right)^2 + \frac{27}{4}H^2 = 0$$

η οποία είναι αδύνατη. Επομένως η υπόθεσή μας ότι $H \neq 0$ δεν είναι αληθής και ολοκληρώθηκε η απόδειξη της Πρότασης (4.1.7). $\square$

Παρατήρηση 4.1.8. Στην περίπτωση που η ιδιοτιμή $\frac{3H}{2}$ εμφανίζεται με πολλαπλότητα 2, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3H}{2}$, από την ισότητα $e_1(\lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)\,\omega_{21}^2$, προκύπτει ότι $e_1(H) = 0$. Επομένως $\nabla H = 0$, αφού από την υπόθεση είναι και $e_2(H) = e_3(H) = 0$, δηλαδή η H είναι σταθερή, οπότε από τη σχέση (4.1.2) προκύπτει ότι $H = 0$.

Παρατήρηση 4.1.9. Στην περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3H}{2}$, από την εξίσωση $trS = 3H$ έχουμε ότι

$$3\frac{3H}{2} = 3H$$

δηλαδή ότι $H = 0$.

Αν συνθέσουμε τώρα τις Προτάσεις (4.1.2) και (4.1.7), έχουμε την απόδειξη του Θεωρήματος (4.1.1). Αποδείξαμε λοιπόν, ότι η διαρμονικότητα κάθε υπερεπιφάνειας Riemann του E_1^4, συνεπάγεται την ελαχιστικότητά της. $\square$

4.2 Υπερεπιφάνειες του $\mathbf{E_1^4}$ εφοδιασμένες με δομή Lorentz

Θεωρούμε την πολλαπλότητα E_1^4 και έστω η υπερεπιφάνεια M_1^3 του E_1^4 εφοδιασμένη με την μετρική $ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$. Κάθε τέτοια υπερεπιφάνεια του E_1^4 θα λέγεται υπερεπιφάνεια Lorentz. Για το μοναδιαίο καθετικό διάνυσμα $\vec{\xi}$ κάθε τέτοιας υπερεπιφάνειας, θα έχουμε τότε $< \vec{\xi}, \vec{\xi} >= \varepsilon = 1$. Θα αποδείξουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 4.2.1. *Αν M_1^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, τότε η M_1^3 είναι υπερεπιφάνεια ελάχιστης έκτασης.*

Υποθέτουμε αντίθετα ότι η M_1^3 έχει μέση καμπυλότητα διάφορη του μηδενός ($H \neq 0$) και θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι άτοπο. Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι η M_1^3 διαρμονική, είναι οι

$$S(\nabla H) = -\frac{3H}{2}(\nabla H) \tag{4.2.1}$$

$$\Delta H + H tr S^2 = 0 \tag{4.2.2}$$

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, ο τελεστής σχήματος S των υπερεπιφανειών σε αυτή την περίπτωση, δεν διαγωνοποιείται πάντα. Διακρίνουμε ως εκ τούτου τις ακόλουθες περιπτώσεις.

4.2.1 Υπερεπιφάνειες του $\mathbf{E}_1^4$ με διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος

Από την (4.2.2) παρατηρούμε ότι η M_1^3 δεν μπορεί να έχει σταθερή μέση καμπυλότητα διότι τότε αυτή προφανώς θα ήταν μηδέν. Επομένως $\nabla H \neq \vec{0}$ και από την (4.2.1) έχουμε ότι το ∇H είναι ιδιοδιάνυσμα του τελεστή S με αντίστοιχη ιδιοτιμή $-\dfrac{3H}{2}$.

Θεωρούμε μία ορθοκανονική βάση $\{e_i\}_{i=1}^3$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του τελεστή σχήματος S. Για τα διανύσματα της βάσης έχουμε ότι $< e_1, e_1 >= = \epsilon_1 = -1$, $< e_i, e_i >= \epsilon_i = +1$ για $i = 2, 3$ και $< e_i, e_j >= 0$ για $i \neq j$. Μπορούμε πάντα χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέτουμε ότι το ∇H βρίσκεται στην διεύθυνση του e_1. Επομένως $\lambda_1 = -\dfrac{3H}{2}$ και

$$e_1(H) \neq 0\,,\ e_2(H) = 0\,,\ e_3(H) = 0\,. \tag{4.2.3}$$

Ο τελεστής σχήματος ως προς αυτή τη βάση διαγωνοποιείται, αφού $Se_1 = -\dfrac{3H}{2}e_1$ και $Se_i = \lambda_i e_i$, $i = 2, 3$. Επομένως μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{3H}{2} & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{4.2.4}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος (4.2.1) είναι απαραίτητη η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.2. *Αν M_1^3 είναι μια υπερεπιφάνεια Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, με διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος ο οποίος έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε η M_1^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_2 \neq -\dfrac{3H}{2}$, $\lambda_3 \neq -\dfrac{3H}{2}$. Τότε θα έχουμε

$$\lambda_2 + \lambda_3 - \frac{3H}{2} = 3H \Rightarrow \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{9H}{2}\,. \tag{4.2.5}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι $trS^2 = \dfrac{45H^2}{2} - 2\lambda_2\lambda_3$. Παραθέτουμε και αποδεικνύουμε μια σειρά Λημμάτων διαμέσου των οποίων θα προκύψει η απόδειξη της Πρότασης (4.2.2).

Λήμμα 4.2.3. *Αν M_1^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz της ψευδο-Ευκλείδιας πολλαπλότητας E_1^4, με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (4.2.2), τότε οι μορφές συνοχής της M_1^3 δίνονται από τις σχέσεις*

$$\omega_{ij}^j = 0\,,\ \ \forall i, j = 1, 2, 3$$

$$\begin{gathered} \omega_{12}^1 = \omega_{13}^1 = 0 \\ \omega_{21}^2 = -\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2} + \lambda_2}\,, \quad \omega_{31}^3 = -\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2} + \lambda_3} \\ \omega_{23}^2 = \frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2}\,, \quad \omega_{32}^3 = \frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2 - \lambda_3} \\ \omega_{31}^2 = \omega_{12}^3 = \omega_{23}^1 = 0 \end{gathered}$$

Απόδειξη. Η σχέση (2.4.2) στην περίπτωση αυτή γίνεται $\omega_{ij}^k = -\omega_{ik}^j$. Εύκολα έχουμε ότι

$$\omega_{ij}^j = 0\,, \ \ \forall i, j = 1, 2, 3\,.$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Codazzi, όπως και στο Λήμμα (4.1.3), μπορούμε να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες μορφές συνοχής. Έτσι μετά από σειρά αντίστοιχων πράξεων, έχουμε τελικά τις ζητούμενες σχέσεις. □

Εργαζόμενοι όπως στο Λήμμα (4.1.4) και χρησιμοποιώντας τις τιμές των μορφών συνοχής του Λήμματος (4.2.3), μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 4.2.4. *Για μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz M_1^3, με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (4.2.2), ισχύουν οι σχέσεις*

$$e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right) = \frac{3H}{2}\lambda_2 + \left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2 \tag{4.2.6}$$

$$e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right) = \frac{3H}{2}\lambda_3 + \left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2 \tag{4.2.7}$$

$$e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right) = \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3} \tag{4.2.8}$$

$$e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right) = \frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right) \tag{4.2.9}$$

$$e_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right) = \frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3} - \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right) \tag{4.2.10}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του Λήμματος αυτού παραλείπεται δεδομένου ότι συνάγεται από σειρά πράξεων αναλόγων εκείνων του Λήμματος (4.1.4). □

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.5.5) έχουμε

$$\begin{aligned} \triangle H &= (e_1e_1(H) - \nabla_{e_1}e_1(H)) - (e_2e_2(H) - \nabla_{e_2}e_2(H)) - \\ &\quad - (-e_3e_3(H) - \nabla_{e_3}e_3(H)) = \\ &= e_1e_1(H) + \nabla_{e_2}e_2(H) + \nabla_{e_3}e_3(H) = \\ &= e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1 e_1 + \omega_{22}^3 e_3\right)(H) + \left(\omega_{33}^1 e_1 + \omega_{33}^2 e_2\right)(H)\,, \end{aligned}$$

η οποία με τη βοήθεια των σχέσεων (4.2.3) γράφεται

$$\triangle H = e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1 + \omega_{33}^1\right) e_1(H)\,.$$

Η εξίσωση λοιπόν (4.2.2) σ' αυτή την περίπτωση, παίρνει τη μορφή

$$e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1 + \omega_{33}^1\right) e_1(H) + H\left(\frac{45H^2}{2} - 2\lambda_2\lambda_3\right) = 0\,.$$

Όμως από την $\omega_{ij}^k = -\omega_{ik}^j$ έχουμε ότι $\omega_{22}^1 = \omega_{21}^2$ και $\omega_{33}^1 = \omega_{31}^3$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται τελικά

$$e_1e_1(H) + \left(\omega_{21}^2 + \omega_{31}^3\right) e_1(H) + H\left(\frac{45H^2}{2} - 2\lambda_2\lambda_3\right) = 0 \qquad (4.2.11)$$

Λήμμα 4.2.5. *Αν M_1^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (4.2.2), τότε*

$$e_2\left(\lambda_3\right) = e_3\left(\lambda_2\right) = 0$$

Απόδειξη. Δρούμε με το e_2 στην (4.2.11) και έχουμε

$$\left[e_2\left(\omega_{21}^2\right) + e_2\left(\omega_{31}^3\right)\right] e_1(H) - 2He_2\left(\lambda_2\lambda_3\right) = 0 \qquad (4.2.12)$$

επειδή

$$e_2e_1(H) = e_1e_2(H) - \left[e_1, e_2\right](H) = \omega_{21}^2 e_2(H) = 0$$

και

$$e_2e_1e_1(H) = e_1e_2\left(e_1(H)\right) - \left[e_1, e_2\right]\left(e_1(H)\right) = \omega_{21}^2 e_2\left(e_1(H)\right) = 0\,.$$

Ακόμη ισχύει ότι

$$e_2(\lambda_2\lambda_3) = e_2(\lambda_2)\lambda_3 + \lambda_2 e_2(\lambda_3)$$

και

$$\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{9H}{2}.$$

Κατά συνέπεια

$$e_2(\lambda_2) + e_2(\lambda_3) = \frac{9e_2(H)}{2}.$$

Αν τώρα λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (4.2.3) τότε εύκολα έχουμε ότι$e_2(\lambda_2) + e_2(\lambda_3) = 0$, οπότε

$$e_2(\lambda_2) = -e_2(\lambda_3).$$

Διαιρώντας με το $e_1(H) \neq 0$ η (4.2.12) λόγω του Λήμματος (4.2.3), δίνει

$$\begin{aligned} e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right) &= -e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right) - \\ &\quad -\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3} \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Ομοίως, αν δράσουμε με το e_3 στην (4.2.11) θα πάρουμε

$$\begin{aligned} e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right) &= -e_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right) - \\ &\quad -\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)^2\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2} \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Από τη σχέση $[e_1, e_2] = -\omega_{21}^2 e_2$, θα υπολογίσουμε το $[e_1, e_2]\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)$. Πράγματι, έχουμε

$$e_1\left[e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)\right] - e_2\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)\right] = \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right) \tag{4.2.15}$$

Αντικαθιστούμε τώρα σε αυτή τη σχέση τις τιμές των $e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)$ και

$e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)$ από τις σχέσεις (4.2.13) και (4.2.6) αντίστοιχα, οπότε έχουμε

$$\begin{gathered}
e_1\left(-e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)-\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)- \\
-e_2\left(\frac{3H}{2}\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\right)=\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)
\end{gathered} \tag{4.2.16}$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια την έκφραση $e_2\left(\frac{3H}{2}\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\right)$.

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{gathered}
e_2\left(\frac{3H}{2}\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\right)=e_2\left(\frac{3H}{2}\right)\lambda_2+\frac{3H}{2}e_2\left(\lambda_2\right)+ \\
+2\cdot\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\cdot e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)=\frac{3H}{2}e_2\left(\lambda_2\right)+ \\
+2\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\cdot\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)- \\
-4\frac{H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}
\end{gathered} \tag{4.2.17}$$

Ακόμη, έχουμε

$$\begin{gathered}
e_1\left(-e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)-\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)= \\
=e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)+
\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)-e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)\right)-\\
&-e_1\left(\frac{2H}{e_1(H)}\right)(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}-\\
&-2\frac{2H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}-\\
&-\frac{2H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2 e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)=\\
&=\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)+\\
&+\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(-\frac{3H}{2}\lambda_2-\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\right)+\\
&+\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\frac{3H}{2}\lambda_3+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\right)-\\
&-e_1\left(\frac{2H}{e_1(H)}\right)\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}-\\
&-\frac{4H}{e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}-\\
&-\frac{2H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}.
\end{aligned}
\tag{4.2.18}
$$

Επομένως η (4.2.16) λόγω των (4.2.13), (4.2.17) και (4.2.18) γίνεται

$$\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left[\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2 - e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right)(\lambda_2-\lambda_3)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{H}{e_1(H)}\left(\left(3\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)(\lambda_2-\lambda_3)^2-2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right)\right]=0$$

Από την εξίσωση αυτή συνάγεται ότι είτε $e_2\left(\lambda_3\right)=0$, είτε η παράσταση εντός της αγκύλης θα ισούται με μηδέν. Ας υποθέσουμε ότι $e_2\left(\lambda_3\right)\neq 0$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Αφού $e_2\left(\lambda_3\right)\neq 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right) &= \frac{H}{e_1(H)}\left(\left(3\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)-2\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{(\lambda_2-\lambda_3)}\right) \\ &\quad +\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_3)^2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2 \end{aligned}$$

Δρούμε με το e_2 και στα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και έχουμε

$$0=\frac{H}{e_1(H)}\left[3e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)-e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)-2e_2\left(\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)\right]+$$

$$+2\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\right)^2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\left(e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)-e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\right)+$$

$$+e_2\left(\frac{1}{(\lambda_2\lambda_3)^2}\right)\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2.$$

Όμως

$$e_2\left(\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\lambda_2-\lambda_3}\right) = \frac{1}{(\lambda_2-\lambda_3)}e_2e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)+e_2\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\right)e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)$$

Επειδή ισχύουν οι σχέσεις, $[e_1,e_2]=\dfrac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_2$ και $[e_1,e_2]=e_1e_2-e_2e_1$, έπεται ότι

$$e_2e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)=e_1e_2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_2\left(\lambda_2-\lambda_3\right).$$

Άρα

$$e_2\left(\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)=\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\left[e_1e_2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right]-$$

$$-\frac{e_2(\lambda_2)-e_2(\lambda_3)}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2}e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\left[e_1\left(-2e_2\left(\lambda_3\right)\right)-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\left(-2e_2\left(\lambda_3\right)\right)\right]+$$

$$+2\frac{e_2(\lambda_3)}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2}e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)=$$

$$=\quad\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\left[-2e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right)+2\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right]$$

$$+2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\left(e_1(\lambda_2)-e_1(\lambda_3)\right)=$$

$$=\quad\frac{1}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\left[-2\left(\lambda_2-\lambda_3\right)e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)-2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)\right]+$$

$$+2\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}+2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\cdot\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3}\left(e_1(\lambda_2)-e_1(\lambda_3)\right)=0$$

λόγω της σχέσης (4.2.8). Χρησιμοποιούμε τώρα και τις σχέσεις (4.2.8) και (4.2.13), οπότε έχουμε

$$\frac{H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2=-2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right). \tag{4.2.19}$$

Δρούμε πάλι με το e_2 στην εξίσωση αυτή και παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{2H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2=\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}. \tag{4.2.20}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4.2.20) επί μείον δύο (-2) και τη συγκρίνουμε με την (4.2.19). Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει ότι

$$-\frac{5H}{e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2=0$$

το οποίο είναι αδύνατο γιατί έχουμε υποθέσει ότι $H\neq 0$ και $\lambda_2\neq\lambda_3$.
Επομένως η υπόθεσή μας ότι $e_2\left(\lambda_3\right)\neq 0$ είναι ψευδής και κατά συνέπεια θα είναι $e_2\left(\lambda_3\right)=0$.
Από τη σχέση $[e_3,e_1]=\omega_{31}^3 e_3$, υπολογίζουμε το $[e_3,e_1]\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)$. Είναι

$$e_3\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\right]-e_1\left[e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\right]=\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)$$

Αντικαθιστώντας σε αυτή τις τιμές των $e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)$ και $e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)$ από τις σχέσεις (4.2.7) και (4.2.14) αντίστοιχα και εργαζόμενοι εντελώς ανάλογα, όπως προηγουμένως αποδεικνύεται ότι και $e_3\left(\lambda_2\right)=0$.
Δείξαμε λοιπόν ότι $e_2\left(\lambda_3\right)=e_3\left(\lambda_2\right)=0$ και επομένως ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Λήμματος (4.2.5). □

Λήμμα 4.2.6. *Για μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz M_1^3, με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (4.2.2), ισχύει η σχέση*

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\cdot\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}=\lambda_2\lambda_3 \tag{4.2.21}$$

Απόδειξη. Εργαζόμενοι όπως στο Λήμμα (4.1.4), και χρησιμοποιώντας το Λήμμα (4.2.5) προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Θα υπολογίσουμε, τώρα τη συνάρτηση $e_1e_1(H)$.

Λήμμα 4.2.7. *Για μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz M_1^3, με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (4.2.2), ισχύει η σχέση*

$$e_1e_1(H)=-\frac{369H^3}{8}+\frac{13}{2}H\lambda_2\lambda_3 \tag{4.2.22}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση
$$\lambda_2+\lambda_3=\frac{9H}{2}$$
έχουμε ότι
$$e_1e_1(\lambda_2)+e_1e_1(\lambda_3)=\frac{9}{2}e_1e_1(H)\,. \tag{4.2.23}$$
Όμως
$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_2) &= e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)\left(\frac{3H}{2}+\lambda_2\right)+\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1\left(\frac{3H}{2}+\lambda_2\right)= \\
&= \left(\frac{3H}{2}\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\right)\left(\frac{3H}{2}+\lambda_2\right) \\
&\quad +\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\left(\frac{3}{2}e_1(H)+e_1(\lambda_2)\right)= \\
&= \left(\frac{3H}{2}\right)^2\lambda_2+\frac{3H}{2}\lambda_2^2+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2+ \\
&\quad +\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\lambda_2+\frac{3}{2}\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(H)+\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(\lambda_2)\,,
\end{aligned}$$
ή τελικά
$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_2) &= \frac{9H^2}{4}\lambda_2+\frac{3H}{2}\lambda_2^2+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2+ \\
&\quad +\frac{3}{2}\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\lambda_2+\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(\lambda_2)\,.
\end{aligned}$$

Ακόμη

$$\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\lambda_2+\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(\lambda_2)=\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(\lambda_2)\left[\frac{\lambda_2}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+1\right]=$$

$$=\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\left(2\lambda_2+\frac{3H}{2}\right)=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\left(2\lambda_2+\frac{3H}{2}\right).$$

Αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_3) &= e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\left(\frac{3H}{2}+\lambda_3\right)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1\left(\frac{3H}{2}+\lambda_3\right)= \\
&= \left(\frac{3H}{2}\lambda_3+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\right)\left(\frac{3H}{2}+\lambda_3\right) \\
&\quad +\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\left(\frac{3}{2}e_1(H)+e_1(\lambda_3)\right)= \\
&= \left(\frac{3H}{2}\right)^2\lambda_3+\frac{3H}{2}\lambda_3^2+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2+ \\
&\quad +\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\lambda_3+\frac{3}{2}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(H)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(\lambda_3),
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_3) &= \frac{9H^2}{4}\lambda_3+\frac{3H}{2}\lambda_3^2+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2+ \\
&\quad +\frac{3}{2}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\lambda_3+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(\lambda_3)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\lambda_3+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(\lambda_3) &= \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(\lambda_3)\left[\frac{\lambda_3}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}+1\right]= \\
&= \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\left(2\lambda_3+\frac{3H}{2}\right)= \\
&= \left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\left(2\lambda_3+\frac{3H}{2}\right)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_2)+e_1e_1(\lambda_3) &= 2\left(\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\lambda_2+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\lambda_3\right)+ \\
&+3H\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2+3H\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2+\frac{81H^3}{8}+ \\
&+\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)+ \\
&+\frac{3H}{2}\left(\frac{81H^2}{4}-2\lambda_2\lambda_3\right),
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_2)+e_1e_1(\lambda_3) &= \frac{324H^3}{8}+2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)^2\left(\lambda_2+\frac{3H}{2}\right)+ \\
&+2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\left(\lambda_3+\frac{3H}{2}\right)+ \\
&+\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)e_1(H)-3H\lambda_2\lambda_3
\end{aligned}$$

Από τη σχέση τώρα (4.2.23) και την προηγούμενη, συνάγουμε ότι

$$e_1e_1(H) = 9H^3 + \frac{4}{9}\left[\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1\left(\lambda_2\right) + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1\left(\lambda_3\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2} + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)e_1(H) - \frac{2}{3}H\lambda_2\lambda_3$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση στην (4.2.11) και παίρνουμε

$$\frac{4}{9}\left[\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(\lambda_2) + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(\lambda_3)\right] - \frac{8H}{3}\lambda_2\lambda_3 -$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2} + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)e_1(H) + \frac{63H^3}{2} = 0$$

η οποία γράφεται ακόμη ως εξής

$$\frac{4}{9}\left[\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1\left(\lambda_2 - \frac{3H}{2}\right) + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1\left(\lambda_3 - \frac{3H}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{8H}{3}\lambda_2\lambda_3 + \frac{63H^3}{2} = 0\,,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{4}{9}\left[-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(\lambda_3) - \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(\lambda_2)\right] - \frac{8H}{3}\lambda_2\lambda_3 -$$

$$+\frac{4}{3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2} + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)e_1(H) + \frac{63H^3}{2} = 0\,.$$

Όμως

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(\lambda_3) + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(\lambda_2) = \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\left(2\frac{3H}{2}+\lambda_2+\lambda_3\right) =$$

$$= \frac{15H}{2}\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και τη σχέση (4.2.21) έχουμε

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}e_1(\lambda_3)+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}e_1(\lambda_2)=\frac{15H}{2}\lambda_2\lambda_3\,.$$

Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)e_1(H)=-\frac{189H^3}{8}+\frac{9}{2}H\lambda_2\lambda_3\,. \tag{4.2.24}$$

Αντικαθιστούμε τώρα την (4.2.24) στην (4.2.11), οπότε έχουμε

$$e_1e_1(H)=-\frac{369H^3}{8}+\frac{13}{2}H\lambda_2\lambda_3$$

που είναι η ζητούμενη σχέση, και έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Λήμματος (4.2.7).

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη της Πρότασης (4.2.2). Δρούμε με τοe_1 και στα δύο μέλη της (4.2.24), οπότε έχουμε

$$\left[e_1(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2})+e_1(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3})\right]e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)e_1e_1(H)=$$

$$=-\frac{567H^2}{8}e_1(H)+\frac{9}{2}e_1(H)\lambda_2\lambda_3+\frac{9}{2}He_1\left(\lambda_2\lambda_3\right) \tag{4.2.25}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (4.2.6), (4.2.7), (4.2.22) και (4.2.24) το πρώτο μέλος της (4.2.25) γίνεται

$$\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)+e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\right]e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)e_1e_1(H)=$$

$$\begin{aligned}&=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\left(-\frac{279H^3}{4}+11H\lambda_2\lambda_3\right)+\\&\qquad+\frac{27H^2}{4}e_1(H)-2\lambda_2\lambda_3e_1(H)\end{aligned} \tag{4.2.26}$$

Για να βρούμε την έκφραση του δεύτερου μέλους της (4.2.25) θα πρέπει να υπολογίσουμε το $e_1(\lambda_2\lambda_3)$. Έχουμε διαδοχικά

$$
\begin{aligned}
e_1(\lambda_2\lambda_3) &= e_1(\lambda_2)\lambda_3 + \lambda_2 e_1(\lambda_3) = \\
&= \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\left(\frac{3H}{2}+\lambda_2\right)\lambda_3 + \lambda_2\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\left(\frac{3H}{2}+\lambda_3\right) = \\
&= \frac{3H}{2}\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_3 + \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2\lambda_3 + \\
&\quad + \frac{3H}{2}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_2 + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_2\lambda_3 = \\
&= \left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2} + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\lambda_2\lambda_3 + \\
&\quad + \frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_3 + \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_2\right).
\end{aligned}
\tag{4.2.27}
$$

Όμως $e_1(\lambda_2) + e_1(\lambda_3) = \frac{9}{2}e_1(H)$, οπότε

$$e_1(\lambda_2)\lambda_3 = \frac{9}{2}e_1(H)\lambda_3 - e_1(\lambda_3)\lambda_3$$

και

$$e_1(\lambda_3)\lambda_2 = \frac{9}{2}e_1(H)\lambda_2 - e_1(\lambda_2)\lambda_2\,.$$

Προσθέτουμε τώρα τις εξισώσεις αυτές κατά μέλη

$$e_1(\lambda_2\lambda_3) = e_1(\lambda_2)\lambda_3 + \lambda_2 e_1(\lambda_3) =$$

$$= \frac{81H}{4}e_1(H) - \left(e_1(\lambda_2)\lambda_2 + e_1(\lambda_3)\lambda_3\right) = \frac{81H}{4}e_1(H) -$$

$$-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\left(\frac{3H}{2}+\lambda_2\right)\lambda_2-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\left(\frac{3H}{2}+\lambda_3\right)\lambda_3\,,$$

ή τελικά

$$\begin{aligned} e_1\left(\lambda_2\lambda_3\right) &= \frac{81H}{4}e_1(H)-\left[\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3\right)\right]- \\ &\quad -\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2^2-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3^2 \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Τα πρώτα μέλη των (4.2.27) και (4.2.28) είναι ίσα άρα και τα δεύτερα. Δηλαδή

$$\begin{aligned} \left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\lambda_2\lambda_3 &+ \frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_3+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_2\right)= \\ &= \frac{81H}{4}e_1(H)-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2^2-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3^2- \\ &\quad -\left[\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3\right)\right]\Leftrightarrow \\ \left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\lambda_2\lambda_3 &+ \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2^2+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3^2 \\ &= \frac{81H}{4}e_1(H)-\frac{3H}{2}\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\left(\lambda_3+\lambda_2\right)- \\ &\quad -\frac{3H}{2}\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\left(\lambda_3+\lambda_2\right)\Leftrightarrow \\ \frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2\left(\lambda_2+\lambda_3\right) &+ \frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3\left(\lambda_2+\lambda_3\right) \\ &= \frac{81H}{4}e_1(H)-\frac{27H^2}{4}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right). \end{aligned}$$

Από αυτή προκύπτει ότι

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3=\frac{9}{2}e_1(H)-\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right). \quad (4.2.29)$$

Η σχέση (4.2.28) λόγω της (4.2.29) γίνεται

$$\begin{aligned} e_1(\lambda_2)\lambda_3+\lambda_2 e_1(\lambda_3) &= \frac{81H}{4}e_1(H)-\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2^2-\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3^2- \\ &- \frac{3H}{2}\left[\frac{9}{2}e_1(H)-\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Τα πρώτα μέλη των (4.2.27), (4.2.30) είναι ίσα, επομένως θα είναι ίσα και τα δεύτερα. Άρα

$$\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_2(\lambda_2+\lambda_3)+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_3+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_2\right)+$$

$$+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)=\frac{54H}{4}e_1(H)+\frac{9H^2}{4}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)$$

από την οποία χρησιμοποιώντας και την (4.2.29), έχουμε ότι

$$\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\lambda_3+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\lambda_2\right)=\frac{-27H}{4}e_1(H)+9H^2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right).$$

Αντικαθιστούμε αυτή τη σχέση στην (4.2.27), οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} e_1(\lambda_2)\lambda_3+\lambda_2 e_1(\lambda_3) &= \lambda_2\lambda_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)-\frac{27H}{4}e_1(H)+ \\ &+ 9H^2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right). \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Λόγω τώρα της (4.2.31) το δεύτερο μέλος της (4.2.25) γίνεται

$$\begin{aligned}
-\frac{567H^2}{8}e_1(H) \quad + \quad & \frac{9}{2}e_1(H)\lambda_2\lambda_3+\frac{9}{2}He_1\left(\lambda_2\lambda_3\right)= \\
= \quad & -\frac{243H^2}{8}e_1(H)+\frac{9}{2}H\lambda_2\lambda_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)+ \\
& +\frac{81}{2}H^3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)+\frac{9}{2}e_1(H)\lambda_2\lambda_3- \\
& -\frac{567}{8}H^2e_1(H)\,.
\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

Από το συνδυασμό τώρα των σχέσεων (4.2.25), (4.2.26) και (4.2.32) προκύπτει η σχέση

$$\left(432H^2-26\lambda_2\lambda_3\right)e_1(H)=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\left(441H^3-26H\lambda_2\lambda_3\right)\,. \tag{4.2.33}$$

Εφαρμόζουμε το e_1 και στα δύο μέλη της (4.2.33), οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}\right)+e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\right]\left(441H^3-26H\lambda_2\lambda_3\right) \\
&+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)\left[1323H^2e_1(H)-26e_1(H)\lambda_2\lambda_3-26He_1(\lambda_2\lambda_3)\right]= \\
&=\left(864He_1(H)-26e_1(\lambda_2\lambda_3)\right)e_1(H)+\left(432H^2-26\lambda_2\lambda_3\right)e_1e_1(H)\,.
\end{aligned}$$

Η σχέση αυτή λόγω των (4.2.6), (4.2.7), (4.2.24), (4.2.22) και (4.2.31) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη

$$\frac{2079}{2}H\left[e_1(H)\right]^2+\frac{288441}{16}H^5-\frac{5463}{2}H^3\lambda_2\lambda_3-221H\lambda_2^2\lambda_3^2-$$

$$-207H^3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2+52H\lambda_2\lambda_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2=0\,. \tag{4.2.34}$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα κατά μέλη τις (4.2.24) και (4.2.33), οπότε έχουμε

$$\left(432H^2-26\lambda_2\lambda_3\right)\left[e_1(H)\right]^2=\left(441H^3-26H\lambda_2\lambda_3\right)\left(-\frac{189H^3}{8}+\frac{9}{2}H\lambda_2\lambda_3\right). \tag{4.2.35}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο την (4.2.33) και έχουμε

$$\left(432H^2-26\lambda_2\lambda_3\right)^2\left[e_1(H)\right]^2=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2\left(441H^3-26H\lambda_2\lambda_3\right)^2 \tag{4.2.36}$$

Αντικαθιστούμε στην (4.2.36) το $\left[e_1(H)\right]^2$ από τη σχέση (4.2.35), οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned}&\left(432H^2-26\lambda_2\lambda_3\right)\left(-\frac{189H^3}{8}+\frac{9}{2}H\lambda_2\lambda_3\right)=\\&\left(441H^3-26H\lambda_2\lambda_3\right)\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2}+\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2}+\lambda_3}\right)^2.\end{aligned} \tag{4.2.37}$$

Επομένως η εξίσωση (4.2.34) λόγω των (4.2.35) και (4.2.37) γίνεται τελικά

$$\begin{aligned}&-6863560515H^9+485815806\lambda_2\lambda_3H^7+59355504\lambda_2^2\lambda_3^2H^5-\\&-6157008\lambda_2^3\lambda_3^3H^3+140608\lambda_2^4\lambda_3^4H=0\,.\end{aligned} \tag{4.2.38}$$

Θέτουμε $x = \dfrac{\lambda_2\lambda_3}{H^2}$, οπότε η (4.2.38) γίνεται

$$\begin{aligned} F(x) &= 140608x^4 - 6157008x^3 + 59355504x^2 \\ &\quad +485815806x - 6863560515 = 0\,. \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

Για να έχει η εξίσωση (4.2.39) πραγματική λύση, θα πρέπει $\lambda_2\lambda_3 = \rho H^2$, όπου ρ ρίζα του F, δηλαδή $F(\rho) = 0$. Τότε όμως, αντικαθιστώντας στην (4.2.35) το $\lambda_2\lambda_3$ με το ίσον του, θα έχουμε

$$8\,(432 - 26\rho)\,[e_1(H)]^2 = (441 - 26\rho)\,(-189 + 36\rho)\,H^4\,. \tag{4.2.40}$$

Εφαρμόζοντας το e_1 και στα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα (4.2.7), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left(1612\rho^2 - 36819\rho + 163053\right) H^3 = 0\,.$$

Για να φθάσουμε σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι καμία από τις ρίζες του $\varphi(\rho) = 1612\rho^2 - 36819\rho + 163053$ δεν είναι ρίζα του $F(x)$. Πράγματι οι ρίζες της εξίσωσης $\varphi(\rho) = 0$ είναι οι $\dfrac{36819 \pm 3\sqrt{35742513}}{3224}$, οι οποίες δεν επαληθεύουν την $F(x) = 0$. Κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $H = 0$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Αποδείξαμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που ο τελεστής σχήματος έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, η διαρμονικότητα κάθε υπερεπιφάνειας Lorentz του E_1^4 συνεπάγεται την ελαχιστικότητά της, δηλαδή ότι $H = 0$. Επομένως η απόδειξη της Πρότασης (4.2.2) έχει ολοκληρωθεί.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος (4.2.1) είναι απαραίτητη και η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 4.2.8. *Αν M_1^3 είναι μια υπερεπιφάνεια Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, με διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος ο οποίος έχει δύο διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε η M_1^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda_1 = -\dfrac{3H}{2}$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Τότε η παράσταση του τελεστή S παίρνει τη μορφή

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{3H}{2} & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $trS = 3H$. Άρα $2\lambda - \dfrac{3H}{2} = 3H$ οπότε

$$\lambda = \frac{9H}{4}\,.$$

Επομένως, εύκολα κανείς υπολογίζει ότι $trS^2 = \dfrac{99H^2}{8}$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Codazzi, όπως και στο Λήμμα (4.1.3) , βρίσκουμε τις μορφές συνοχής. Πράγματι προκύπτουν εκφράσεις αντίστοιχες των (4.1.7)-(4.1.10). Δηλαδή

$$\omega_{21}^2 = -\frac{e_1(\lambda_2)}{\frac{3H}{2} + \lambda_2}\,, \qquad \omega_{31}^3 = -\frac{e_1(\lambda_3)}{\frac{3H}{2} + \lambda_3}\,.$$

Εφόσον τώρα γνωρίζουμε την τιμή του λ, αντικαθιστώντας στις σχέσεις (4.2.6) και (4.2.7) έχουμε ότι

$$e_1(H) = -\frac{5H}{3}\omega_{21}^2\,, \qquad e_1(H) = -\frac{5H}{3}\omega_{31}^3\,.$$

Άρα $\omega_{21}^2 = \omega_{31}^3$. Η αντίστοιχη σχέση της (4.1.19) παίρνει στην προκειμένη περίπτωση τη μορφή

$$e_1\left(\omega_{21}^2\right) = -\frac{27H^2}{8} - \left(\omega_{21}^2\right)^2\,. \tag{4.2.41}$$

Αλλά, όπως αποδείξαμε προηγουμένως $e_1(H) = -\dfrac{5H}{3}\omega_{21}^2$, οπότε δρώντας και στα δύο μέλη με το e_1 έχουμε

$$e_1e_1(H) = -\frac{5}{3}e_1(H)\omega_{21}^2 - \frac{5H}{3}e_1\left(\omega_{21}^2\right)\,.$$

Η σχέση αυτή λόγω της (4.2.41) γίνεται

$$e_1e_1(H) = -\frac{5}{3}e_1(H)\omega_{21}^2 - \frac{5H}{3}\left[-\frac{27H^2}{8} - \left(\omega_{21}^2\right)^2\right],$$

ή

$$e_1e_1(H) = \frac{45H^3}{8} + \frac{40H}{9}\left(\omega_{21}^2\right)^2.$$

Αλλά η σχέση (2.5.5) δίνει

$$\begin{aligned}
\triangle H &= \left(e_1e_1(H) - \nabla_{e_1}e_1(H)\right) - \left(e_2e_2(H) - \nabla_{e_2}e_2(H)\right) - \\
&\quad - \left(-e_3e_3(H) - \nabla_{e_3}e_3(H)\right) = \\
&= e_1e_1(H) + \nabla_{e_2}e_2(H) + \nabla_{e_3}e_3(H) = \\
&= e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1e_1 + \omega_{22}^3e_3\right)(H) + \left(\omega_{33}^1e_1 + \omega_{33}^2e_2\right)(H),
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\triangle H = e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1 + \omega_{33}^1\right)e_1(H).$$

Επομένως, η εξίσωση (4.2.2) παίρνει τη μορφή

$$\frac{45H^3}{8} + \frac{40H}{9}\left(\omega_{21}^2\right)^2 + 2\omega_{21}^2e_1(H) + \frac{99H^3}{8} = 0$$

Όμως $e_1(H) = -\frac{5H}{3}\omega_{21}^2$, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$H\left[\frac{10}{9}\left(\omega_{21}^2\right)^2 + \frac{72H^2}{4}\right] = 0$$

Επειδή από την υπόθεση είναι $H \neq 0$, θα έχουμε

$$\frac{10}{9}\left(\omega_{21}^2\right)^2 + \frac{72H^2}{4} = 0$$

το οποίο όμως είναι αδύνατο. Άρα ολοκληρώθηκε η απόδειξη της πρότασης. $\square$

Παρατήρηση 4.2.9. Στην περίπτωση που η ιδιοτιμή $-\frac{3H}{2}$ εμφανίζεται με πολλαπλότητα 2, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3H}{2}$, έχουμε από τη σχέση $< \left(\nabla_{e_1}S\right)e_2, e_2 >=< \left(\nabla_{e_2}S\right)e_1, e_2 >$ ότι $e_1(H) = 0$. Επομένως $\nabla H = 0$, δηλαδή η H είναι σταθερή. Εύκολα τότε από τη σχέση (4.2.2) προκύπτει επίσης ότι $H = 0$.

Παρατήρηση 4.2.10. Στην περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{3H}{2}$, τότε από την βασική εξίσωση $trS = 3H$ έχουμε αμέσως ότι

$$-3\frac{3H}{2} = 3H$$

και κατά συνέπεια συμπεραίνουμε ότι $H = 0$.

Αποδείχθηκε λοιπόν η αλήθεια του θεωρήματος (4.2.1), σε όλες τις περιπτώσεις υπερεπιφανειών Lorentz M_1^3 της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, με διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος.

4.2.2 Υπερεπιφάνειες του $\mathbf{E_1^4}$ με μη διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος

Ανάλογα με τη μορφή που μπορεί να πάρει ο τελεστής σχήματος των υπερεπιφανειών διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Α. Υπερεπιφάνειες $\mathbf{M_1^3}$ του $\mathbf{E_1^4}$ με τελεστή σχήματος τύπου ΙΙ (Βλ. §2.5)

Ας θεωρήσουμε μια υπερεπιφάνεια M_1^3 του E_1^4. Από τη σχέση (4.2.2) παρατηρούμε ότι η M_1^3 δεν μπορεί να έχει σταθερή μέση καμπυλότητα, διότι τότε αυτή θα ήταν μηδέν. Επομένως $\nabla H \neq \vec{0}$ και από την (4.2.1) έχουμε ότι το ∇H είναι ιδιοδιάνυσμα του S με αντίστοιχη ιδιοτιμή $-\frac{3H}{2}$. Όπως αναφέρθηκε και στην παράγραφο 2.3, υπάρχει πάντα μία ψευδο-ορθοκανονική βάση$\{e_1, e_2, e_3\}$ του εφαπτόμενου χώρου της M_1^3, ως προς την οποία ο τελεστής σχήματος της

M_1^3 να παίρνει τη μορφή

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{4.2.42}$$

δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις $Se_1 = \lambda e_1 + e_2$, $Se_2 = \lambda e_2$, $Se_3 = \lambda_3 e_3$.

Για τα διανύσματα της βάσης αυτής έχουμε

$$< e_1, e_1 >=< e_2, e_2 >= 0 \quad , \quad < e_3, e_3 >= +1$$

$$< e_1, e_2 >=< e_2, e_1 >= +1 \quad \text{και} \quad < e_1, e_3 >=< e_2, e_3 >= 0.$$

Θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 4.2.11. *Έστω M_1^3 μία διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4 με τελεστή σχήματος που δίνεται από την (4.2.42). Τότε η M_1^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι το∇H βρίσκεται στην διεύθυνση του e_3 . Επομένως, $\lambda_3 = -\dfrac{3H}{2}$ και κατά συνέπεια

$$e_1(H) = 0\,,\ e_2(H) = 0\,,\ e_3(H) \neq 0\,.$$

Από την εξίσωση του Codazzi μπορούμε να καθορίσουμε τις μορφές συνοχής ω_{ij}^k. Πράγματι από τη σχέση

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_1 >=< (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_1 >$$

συνάγεται εύκολα ότι $-\omega_{21}^1 + \omega_{22}^2 = 0$.

Όμως

$$\nabla_{e_p} < e_1, e_2 >= 0 \Rightarrow < \nabla_{e_p} e_1, e_2 > + < e_1, \nabla_{e_p} e_2 >= 0 \Rightarrow \omega_{p1}^1 = -\omega_{p2}^2$$

Άρα

$$\omega_{21}^1 = \omega_{22}^2 = 0\,.$$

Από τις εξισώσεις τώρα

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_2 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_2 >$$

και

$$< (\nabla_{e_2} S)\, e_3, e_1 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_2, e_1 > ,$$

έχουμε

$$e_3(\lambda) = (\lambda_3 - \lambda)\, \omega_{13}^1 \tag{4.2.43}$$

και

$$e_3(\lambda) = (\lambda_3 - \lambda)\, \omega_{23}^2 \tag{4.2.44}$$

αντίστοιχα, οπότε προφανώς

$$\omega_{13}^1 = \omega_{23}^2 \, .$$

Αλλά

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_p} < e_1, e_1 >= 0 \Rightarrow < \nabla_{e_p} e_1, e_1 > + < e_1, \nabla_{e_p} e_1 >= 0 \Rightarrow \omega_{p1}^2 = 0,\\
&\nabla_{e_p} < e_2, e_2 >= 0 \Rightarrow < \nabla_{e_p} e_2, e_2 > + < e_2, \nabla_{e_p} e_2 >= 0 \Rightarrow \omega_{p2}^1 = 0,\\
&\nabla_{e_p} < e_3, e_3 >= 0 \Rightarrow < \nabla_{e_p} e_3, e_3 > + < e_3, \nabla_{e_p} e_3 >= 0 \Rightarrow \omega_{p3}^3 = 0,\\
&\nabla_{e_p} < e_1, e_3 >= 0 \Rightarrow < \nabla_{e_p} e_1, e_3 > + < e_1, \nabla_{e_p} e_3 >= 0 \Rightarrow \omega_{p1}^3 = -\omega_{p3}^2,\\
&\nabla_{e_p} < e_2, e_3 >= 0 \Rightarrow < \nabla_{e_p} e_2, e_3 > + < e_2, \nabla_{e_p} e_3 >= 0 \Rightarrow \omega_{p2}^3 = -\omega_{p3}^1.
\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

Επίσης από τις σχέσεις

$$< (\nabla_{e_2} S)\, e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_2, e_3 >,$$

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_3 >$$

και

$$< (\nabla_{e_2} S)\, e_3, e_2 > = < (\nabla_{e_3} S)\, e_2, e_2 >$$

έχουμε

$$\omega_{32}^3 = 0\,, \quad \omega_{31}^3 = 0\,, \quad \omega_{23}^1 = 0\,.$$

Αν τώρα ληφθούν υπόψη και οι σχέσεις (4.2.45) έχουμε ακόμη ότι

$$\omega_{33}^1 = 0\,, \quad \omega_{33}^2 = 0\,, \quad \omega_{22}^3 = 0\,.$$

Από την εξίσωση τώρα,

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_3 > = < (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_3 >$$

προκύπτει ότι

$$\omega_{12}^3 = \omega_{21}^3\,.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= \omega_{11}^1 e_1 \;\;,\;\; \nabla_{e_1} e_2 = \omega_{12}^2 e_2 + \omega_{12}^3 e_3 \;\;,\;\; \nabla_{e_1} e_3 = \omega_{13}^1 e_1 + \omega_{13}^2 e_2 \\
\nabla_{e_2} e_1 &= \omega_{21}^3 e_3 \;\;,\;\; \nabla_{e_2} e_2 = 0 \;\;,\qquad \nabla_{e_2} e_3 = \omega_{23}^2 e_2 \\
\nabla_{e_3} e_1 &= 0 \;\;,\qquad \nabla_{e_3} e_2 = \omega_{32}^2 e_2 \;\;,\;\; \nabla_{e_3} e_3 = 0\,.
\end{aligned}$$

Από την ψευδοορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ κατασκευάζουμε, για πραγματικό $\mu \neq 0$, τις ακόλουθες δύο οικογένειες ορθοκανονικών βάσεων$\{X_1, X_2, X_3\}$, $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ ως εξής

$$\begin{aligned}
X_1 &= \mu e_1 + \frac{1}{2\mu} e_2 & \qquad & Y_1 = -\mu e_1 - \frac{1}{2\mu} e_2 \\
X_2 &= \mu e_1 - \frac{1}{2\mu} e_2 & \text{και} & \quad Y_2 = \mu e_1 - \frac{1}{2\mu} e_2 \\
X_3 &= e_3 & & Y_3 = e_3
\end{aligned}$$

Θεωρούμε μια από αυτές, την $G = \{X_1, X_2, X_3\}$ που λαμβάνεται για $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ οπότε

$$X_1 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \;\; X_2 = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}, \;\; X_3 = e_3\,.$$

Για τα διανύσματα αυτής της βάσης, προφανώς ισχύουν οι σχέσεις

$$< X_1, X_1 >= +1 \quad , \quad < X_2, X_2 >= -1 \quad \text{και} \quad < X_3, X_3 >= +1$$

$$< X_1, X_2 >= 0 \quad , \quad < X_1, X_3 >= 0 \quad \text{και} \quad < X_2, X_3 >= 0$$

Χρησιμοποιώντας τη νέα βάση G μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα του τελεστή S ως προς αυτή τη βάση και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το trS^2. Εύκολα έχουμε ότι

$$S = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3H}{2} \end{pmatrix}$$

Όμως από την σχέση $trS = 3H$ μπορούμε να υπολογίσουμε το λ, αφού $trS = 2\lambda + \lambda_3$.

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\lambda = \frac{9H}{4} \tag{4.2.46}$$

και

$$trS^2 = \frac{99H^2}{8}\,.$$

Επομένως η (4.2.2) γίνεται

$$-\epsilon_1 \left(X_1X_1(H) - \nabla_{X_1}X_1(H)\right) - \epsilon_2 \left(X_2X_2(H) - \nabla_{X_2}X_2(H)\right) -$$

$$-\epsilon_3 \left(X_3X_3(H) - \nabla_{X_3}X_3(H)\right) + H\left(\frac{99H^2}{8}\right) = 0\,. \tag{4.2.47}$$

Όμως $X_1X_1(H) = 0, \;\; X_2X_2(H) = 0, \;\; \nabla_{X_3}X_3 = 0$ και $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = 1$ οπότε η σχέση (4.2.47) γίνεται

$$\nabla_{X_1}X_1(H) - \nabla_{X_2}X_2(H) - e_3e_3(H) + \frac{99H^3}{8} = 0\,. \tag{4.2.48}$$

Υπολογίζουμε τα $\nabla_{X_1}X_1(H)$, $\nabla_{X_2}X_2(H)$. Έχουμε διαδοχικά

$$
\begin{aligned}
\nabla_{X_1}X_1 &= \nabla_{\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}}\left(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{e_1}\left(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{e_2}\left(\frac{e_1+e_2}{\sqrt{2}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\nabla_{e_1}\left(\frac{e_1}{\sqrt{2}}\right) + \nabla_{e_1}\left(\frac{e_2}{\sqrt{2}}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\nabla_{e_2}\left(\frac{e_1}{\sqrt{2}}\right) + \nabla_{e_2}\left(\frac{e_2}{\sqrt{2}}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{e_1}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{e_1}e_2\right] + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{e_2}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{e_2}e_2\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\omega_{11}^1 e_1 + \omega_{11}^3 e_3 + \omega_{12}^2 e_2 + \omega_{12}^3 e_3 + \omega_{21}^3 e_3\right]
\end{aligned}
$$

Άρα

$$\nabla_{X_1}X_1(H) = \frac{1}{2}\left[\omega_{11}^3 + \omega_{12}^3 + \omega_{21}^3\right] e_3(H).$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\nabla_{X_2}X_2(H) = \frac{1}{2}\left[\omega_{11}^3 - \omega_{12}^3 - \omega_{21}^3\right] e_3(H).$$

Η σχέση λοιπόν (4.2.48) παίρνει τη μορφή

$$e_3e_3(H) - 2\omega_{12}^3 e_3(H) - \frac{99H^3}{8} = 0 \tag{4.2.49}$$

Η σχέση (4.2.43) λόγω της (4.2.46) γίνεται$e_3(H) = -\dfrac{5H}{3}\omega_{13}^1$. Από τις (4.2.45) ισχύει ότι $\omega_{13}^1 = -\omega_{12}^3$.

Επομένως

$$e_3(H) = \frac{5H}{3}\omega_{12}^3\,. \tag{4.2.50}$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Gauss για να υπολογίσουμε το $< R\,(e_3, e_1)\,e_2, e_3 >$ Βρίσκουμε ότι $< R\,(e_3, e_1)\,e_2, e_3 >= e_3\,(\omega_{12}^3) - (\omega_{12}^3)^2$ και από τον τύπο (2.5.3) έχουμε ότι $< R\,(e_3, e_1)\,e_2, e_3 >= -\dfrac{27H^2}{8}$.
Κατά συνέπεια θα ισχύει η ακόλουθη εξίσωση

$$e_3\left(\omega_{12}^3\right) = \left(\omega_{12}^3\right)^2 - \frac{27H^2}{8}\,. \tag{4.2.51}$$

Εφαρμόζουμε το e_3 και στα δύο μέλη της (4.2.50) έχουμε

$$e_3e_3(H) = \frac{5}{3}e_3(H)\omega_{12}^3 + \frac{5H}{3}e_3\left(\omega_{12}^3\right)\,,$$

η οποία λόγω της (4.2.51) γίνεται

$$e_3e_3(H) = \frac{40H}{9}\left(\omega_{12}^3\right)^2 - \frac{45H^3}{8}\,.$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία στην εξίσωση (4.2.49) και χρησιμοποιούμε την (4.2.50), οπότε έχουμε

$$\frac{10H}{9}\left(\omega_{12}^3\right)^2 - \frac{144H^3}{8} = 0\,.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $H \neq 0$, οπότε η προηγούμενη γίνεται

$$\frac{5}{9}\left(\omega_{12}^3\right)^2 - \frac{72H^2}{8} = 0\,. \tag{4.2.52}$$

Εφαρμόζουμε πάλι το e_3 στην (4.2.52) και παίρνουμε

$$\frac{5}{9}\left(\omega_{12}^3\right)^2 - \frac{255H^2}{8} = 0\,. \tag{4.2.53}$$

Από τις (4.2.52) και (4.2.53) αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι $H = 0$. Επομένως ολοκληρώθηκε η απόδειξη της Πρότασης (4.2.11) $\square$

Β. Υπερεπιφάνειες $\mathbf{M}_1^3$ *του* $\mathbf{E}_1^4$ *με τελεστή σχήματος τύπου III (Βλ. §2.5)*

Θα εξετάσουμε τις υπερεπιφάνειες των οποίων ο τελεστής σχήματος ως προς κατάλληλη ψευδοορθοκανονική βάση, μπορεί να γραφεί στην μορφή,

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.2.54}$$

δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $Se_1 = \lambda e_1 + e_3$, $Se_2 = \lambda e_2$, $Se_3 = e_2 + \lambda e_3$.

Πρόταση 4.2.12. *Έστω M_1^3 μία διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4 με τελεστή σχήματος που δίνεται από την (4.2.54). Τότε η M_1^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε από την ψευδο-ορθοκανονική βάση να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική και στη συνέχεια να βρούμε τον πίνακα του τελεστή σχήματος ως προς τη νέα βάση. Πράγματι, εύκολα έχουμε ότι ο τελεστής σχήματος γίνεται

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda \end{pmatrix}$$

Από τη σχέση $3H = trS$, τώρα έχουμε ότι $\lambda + \lambda + \lambda = 3H$. Όμως από την (4.2.1), εύκολα προκύπτει ότι $\lambda = -\dfrac{3H}{2}$. Επομένως

$$-3\frac{3H}{2} = 3H \Rightarrow 5H = 0$$

οπότε προφανώς θα είναι $H = 0$. □

Γ. Υπερεπιφάνειες M_1^3 *του* E_1^4 *με τελεστή σχήματος τύπου IV (Βλ. §2.5)*

Σ' αυτή την περίπτωση ο τελεστής σχήματος των υπερεπιφανειών, ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ έχει την ακόλουθη μορφή

$$S = \begin{pmatrix} \mu & \nu & 0 \\ -\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \nu \neq 0 \tag{4.2.55}$$

δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $Se_1 = \mu e_1 + \nu e_2$, $Se_2 = -\nu e_1 + \mu e_2$, $Se_3 = \lambda_3 e_3$.

Πρόταση 4.2.13. *Έστω M_1^3 μία διαρμονική υπερεπιφάνεια Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4 με τελεστή σχήματος που δίνεται από την (4.2.55). Τότε η M_1^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Από την (4.2.2) παρατηρούμε ότι η M_1^3 δεν μπορεί να έχει σταθερή μέση καμπυλότητα διότι τότε αυτή θα ήταν μηδέν. Επομένως $\nabla H \neq \vec{0}$ και από την (4.2.1) έχουμε ότι το ∇H είναι ιδιοδιάνυσμα του S με αντίστοιχη ιδιοτιμή $-\frac{3H}{2}$. Στην προκειμένη περίπτωση το ∇H βρίσκεται στην διεύθυνση του e_3. Επομένως $\lambda_3 = -\frac{3H}{2}$ και

$$e_1(H) = 0\,,\ e_2(H) = 0\,,\ e_3(H) \neq 0\,.$$

Από τη σχέση $trS = 3H$ έχουμε ανάλογα ότι

$$2\mu - \frac{3H}{2} = 3H \Rightarrow \mu = \frac{9H}{4}\,.$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Codazzi, οπότε από τις

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_1 > = < (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_1 >\,,$$

$$< (\nabla_{e_2} S)\, e_3, e_2 > = < (\nabla_{e_3} S)\, e_2, e_2 >$$

και

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_2 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_2 >$$

προκύπτουν οι σχέσεις

$$e_3(H) = -\frac{5H}{3}\omega_{13}^1\,, \;\; e_3(H) = -\frac{5H}{3}\omega_{23}^2\,, \;\; e_3(\nu) = -\nu\omega_{13}^1\,.$$

Προφανώς λοιπόν θα είναι $\omega_{13}^1 = \omega_{23}^2$.

Από τις ισότητες τώρα $< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_3 >$ και $< (\nabla_{e_2} S)\, e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_2, e_3 >$ παίρνουμε αντίστοιχα τις σχέσεις

$$\frac{15H}{4}\omega_{31}^3 + \nu\omega_{32}^3 = 0$$

$$\frac{15H}{4}\omega_{32}^3 - \nu\omega_{31}^3 = 0$$

από τις οποίες αφού $H \neq 0$ και $\nu \neq 0$ εύκολα συνάγεται ότι

$$\omega_{31}^3 = 0\,, \quad \omega_{32}^3 = 0\,.$$

Λόγω τώρα της σχέσης $\omega_{ij}^k = -\varepsilon_j \varepsilon_k \omega_{ik}^j$, οι προηγούμενες σχέσεις γίνονται

$$\omega_{33}^1 = 0\,, \quad \omega_{33}^2 = 0\,.$$

Γνωρίζουμε όμως επιπλέον ότι

$$[e_1, e_2]\,(H) = 0 \Rightarrow \nabla_{e_1} e_2(H) - \nabla_{e_2} e_1(H) = 0 \Rightarrow \omega_{12}^3 = \omega_{21}^3 = 0\,.$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τις εκφράσεις $< R\,(e_1, e_3)\, e_1, e_3 >$ και $< R\,(e_3, e_2)\, e_3, e_2 >$ μία φορά από τον τύπο του τανυστή καμπυλότητας και μία φορά από τον τύπο (2.5.3).

Από τους υπολογισμούς αυτούς και μετά τις αναγκαίες αναγωγές προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$e_3\left(\omega_{11}^3\right) = -\left(\omega_{13}^1\right)^2 + \frac{27H^2}{8}$$

$$e_3\left(\omega_{23}^2\right) = -\left(\omega_{23}^2\right)^2 + \frac{27H^2}{8}\,.$$

Η εξίσωση $\triangle H + HtrS^2 = 0$ μετασχηματίζεται ως ακολούθως

$$-\epsilon_1\left(e_1e_1(H) - \nabla_{e_1}e_1(H)\right) - \epsilon_2\left(e_2e_2(H) - \nabla_{e_2}e_2(H)\right) -$$

$$-\epsilon_3\left(e_3e_3(H) - \nabla_{e_3}e_3(H)\right) + H\left(\frac{99H^2}{8} - 2\nu^2\right) = 0$$

ή

$$\left(-\omega_{11}^3 + \omega_{22}^3\right)e_3(H) - e_3e_3(H) + H\left(\frac{99H^2}{8} - 2\nu^2\right) = 0\,. \tag{4.2.56}$$

Επειδή όμως

$$\omega_{11}^3 = -\epsilon_1\epsilon_3\omega_{13}^3 = \omega_{13}^3$$

$$\omega_{22}^3 = -\epsilon_2\epsilon_3\omega_{23}^2 = -\omega_{23}^2$$

$$\omega_{13}^1 = \omega_{23}^2\,,$$

η (4.2.56) γράφεται

$$e_3e_3(H) + 2\omega_{13}^1e_3(H) - H\left(\frac{99H^2}{8} - 2\nu^2\right) = 0 \tag{4.2.57}$$

Δρούμε τώρα και στα δύο μέλη της $e_3(H) = -\frac{5H}{3}\omega_{13}^1$ με το e_3 και έχουμε

$$\begin{aligned} e_3e_3(H) &= -\frac{5}{3}\omega_{13}^1e_3(H) - \frac{5H}{3}e_3\left(\omega_{13}^1\right) = \\ &= -\frac{5}{3}\left(-\frac{5H}{3}\omega_{13}^1\right)\omega_{13}^1 - \frac{5H}{3}\left(-\left(\omega_{13}^1\right)^2 + \frac{27H^2}{8}\right)\,, \end{aligned}$$

οπότε

$$e_3e_3(H) = \frac{40H}{9}\left(\omega_{13}^1\right)^2 - \frac{45H^3}{8}$$

και συνεπώς η εξίσωση (4.2.57) γίνεται

$$\frac{10H}{9}\left(\omega_{13}^{1}\right)^{2}+2H\nu^{2}-\frac{144H^{3}}{8}=0\,.$$

Έστω ότι $H \neq 0$, τότε η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{10}{9}\left(\omega_{13}^{1}\right)^{2}+2\nu^{2}-\frac{144H^{2}}{8}=0\,. \tag{4.2.58}$$

Εφαρμόζουμε το e_3 στην (4.2.58), οπότε έχουμε επίσης ότι

$$\frac{10}{9}\left(\omega_{13}^{1}\right)^{2}+2\nu^{2}-\frac{270H^{2}}{8}=0\,. \tag{4.2.59}$$

Από τις (4.2.58) και (4.2.59), αφαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει ότι $H = 0$, πράγμα άτοπο και επομένως η αλήθεια της Πρότασης (4.2.13) απεδείχθει. $\square$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι και στις περιπτώσεις που οι υπερεπιφάνειεςLorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_1^4, έχουν μη διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος, η απαίτηση της διαρμονικότητα τους συνεπάγεται την ελαχιστικότητα τους.

Αν λοιπόν συνθέσουμε τα αποτελέσματα των παραγράφων 4.1 και 4.2 τότε μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε διαρμονική υπερεπιφάνεια του 4-διάστατου ψευδο-Ευκλείδειου χώρου $\mathbf{E}_1^4$ είναι ελάχιστης έκτασης.

Κεφάλαιο 5

Διαρμονικές Υπερεπιφάνειες του Τετραδιάστατου Ψευδο-Ευκλείδειου Χώρου $\mathbf{E_s^4}$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τις διαρμονικές υπερεπιφάνειες M_r^3, $r = 0, 1$ του χώρου E_1^4 και αποδείξαμε ότι είναι ελάχιστης έκτασης. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τις διαρμονικές υπερεπιφάνειες M_r^3, $r = 0, 1, 2, 3$ του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_s^4, $s = 0, 1, 2, 3, 4$, των οποίων ο τελεστής σχήματος S διαγωνοποιείται ως προς κατάλληλη βάση. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, όπως και στην περίπτωση του χώρου E_1^4, χρησιμοποιώντας δηλαδή τις εξισώσεις των Gauss, Weingarten και Codazzi, όπως επίσης και των ιδιοτήτων του τελεστή σχήματος μιας υπερεπιφάνειας, θα φθάσουμε στο συμπέρασμα ότι η απαίτηση της διαρμονικότητας μιας υπερεπιφάνειας, συνεπάγεται τον μηδενισμό της καμπυλότητας αυτής

$$H = 0$$

δηλαδή, ότι οι υπερεπιφάνειες αυτές είναι ελάχιστης έκτασης (minimal).

Έστω ο ψευδο-Ευκλείδειος χώρος E_s^4. Θεωρούμε μια υπερεπιφάνεια M_r^3 του E_s^4, για την οποία υποθέτουμε ότι ο τελεστής σχήματος S διαγωνοποιείται. Για το μοναδιαίο καθετικό διάνυσμα $\vec{\xi}$ στην περίπτωση αυτή θα ισχύει $<\vec{\xi},\vec{\xi}>=\varepsilon=\pm 1$. Θα αποδείξουμε τώρα το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.1.1. *Αν M_r^3, $0\le r\le 3$, είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann ή Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_s^4, $0\le s\le 4$, με διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος S, τότε η M_r^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αντίθετα ότι η M_r^3 έχει μέση καμπυλότητα διάφορη του μηδενός ($H\neq 0$). Θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Για να είναι η M_r^3 διαρμονική υπερεπιφάνεια πρέπει και αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις (2.5.13) και (2.5.14). Από την (2.5.13) έχουμε ότι το ∇H είναι ιδιοδιάνυσμα του S με αντίστοιχη ιδιοτιμή $-\varepsilon\dfrac{3H}{2}$. Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1,e_2,e_3\}$ του εφαπτόμενου χώρου της M_r^3 με $<e_i,e_j>=0, i\neq j$ και $<e_i,e_i>=\epsilon_i=\pm 1$, αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του S και υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι το ∇H είναι στη διεύθυνση του e_1, δηλαδή υποθέτουμε ότι

$$Se_1=-\varepsilon\frac{3H}{2}e_1,\;\; Se_2=\lambda_2 e_2,\;\; Se_3=\lambda_3 e_3.$$

Για τη συνέχεια της απόδειξης είναι απαραίτητη η ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 5.1.2. *Αν ο τελεστής σχήματος S μιας υπερεπιφάνειας Riemann ή Lorentz M_r^3 έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε η M_r^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την υπόθεση, στην περίπτωση αυτή ο τελεστής σχήματος μπορεί να πάρει τη μορφή

$$S=\begin{pmatrix} -\varepsilon\frac{3H}{2} & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{5.1.1}$$

Επίσης, αφού το ∇H θεωρήθηκε στη διεύθυνση του e_1, θα έχουμε ότι

$$e_1(H) \neq 0\,,\ e_2(H) = 0\,,\ e_3(H) = 0\,. \tag{5.1.2}$$

Επειδή όμως όλες οι ιδιοτιμές του S είναι διαφορετικές μεταξύ τους, είναι

$$-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2 \neq 0\,,\ -\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_3 \neq 0\,,\ \lambda_3 - \lambda_2 \neq 0\,. \tag{5.1.3}$$

Εύκολα επίσης, συμπεραίνουμε ότι

$$trS^2 = \frac{9H^2}{4} + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Όμως, επειδή $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2\lambda_2\lambda_3$ και $\lambda_2 + \lambda_3 = \varepsilon\frac{9H}{2}$ καταλήγουμε στη σχέση

$$trS^2 = \frac{45H^2}{2} - 2\lambda_2\lambda_3. \tag{5.1.4}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε και αποδεικνύουμε μια σειρά Λημμάτων διαμέσου των οποίων προκύπτει η απόδειξη της Πρότασης (5.1.2).

Λήμμα 5.1.3. *Αν M_r^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann ή Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_s^4, με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (5.1.2), τότε οι μορφές συνοχής της M_r^3 δίνονται από τις σχέσεις*

$$\omega_{ij}^j = 0,\ \ \forall\ i,j = 1,2,3$$

$$\omega_{12}^1 = 0\ \ ,\omega_{13}^1 = 0\ \ ,\omega_{21}^2 = \frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2}$$

$$\omega_{31}^3 = \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_3}\ \ ,\omega_{23}^2 = \frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2}\ \ ,\omega_{32}^3 = \frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2 - \lambda_3}$$

$$\omega_{23}^1 = 0\ \ ,\omega_{32}^1 = 0\ \ ,\omega_{13}^2 = 0$$

Απόδειξη. Από τη σχέση $\omega_{ij}^k = -\epsilon_j\epsilon_k\omega_{ik}^j$ αν θέσουμε όπου $j = k$, εύκολα παίρνουμε ότι $\omega_{ij}^j = -\omega_{ij}^j$ και τελικά

$$\omega_{ij}^j = 0,\ \ \forall\ i,j = 1,2,3. \tag{5.1.5}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Codazzi, (βλ. σχέση 2.5.4), υπολογίζουμε τις μορφές συνοχής ω_{ij}^k. Χρησιμοποιώντας την $e_2(H)=0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_1 > &= < \nabla_{e_1} (Se_2)\, , e_1 > - < S\, (\nabla_{e_1} e_2)\, , e_1 >= \\
&= < \lambda_2 \nabla_{e_1} e_2, e_1 > + < e_1\, (\lambda_2)\, e_2, e_1 > - \lambda_1 \omega_{12}^1 = \\
&= (\lambda_2 - \lambda_1)\, \omega_{12}^1
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_1 > &= < \nabla_{e_2} (Se_1)\, , e_1 > - < S\, (\nabla_{e_2} e_1)\, , e_1 >= \\
&= < \lambda_1 \nabla_{e_2} e_1, e_1 > + < e_2\, (\lambda_1)\, e_1, e_1 > - \lambda_1 \omega_{21}^1 = \\
&= \lambda_1 \omega_{21}^1 + < e_2 \left(-\varepsilon \tfrac{3H}{2}\right) e_1, e_1 > - \lambda_1 \omega_{21}^1 = \\
&= (\lambda_1 - \lambda_1)\, \omega_{21}^1 = 0
\end{aligned}$$

οπότε από την εξίσωση

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_1 >=< (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_1 >$$

προκύπτει

$$\omega_{12}^1 = 0. \tag{5.1.6}$$

Αντίστοιχα, από τις σχέσεις

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_1 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_1 >$$

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_2 >=< (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_2 >$$

και

$$< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_3 >$$

προκύπτουν οι

$$\omega_{13}^1 = 0\,, \quad \omega_{21}^2 = \frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon \frac{3H}{2} - \lambda_2}\,, \quad \omega_{31}^3 = \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon \frac{3H}{2} - \lambda_3}\,. \tag{5.1.7}$$

Ομοίως από τις εξισώσεις

$$< (\nabla_{e_2} S)\, e_3, e_2 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_2, e_2 >$$

και

$$< (\nabla_{e_2} S)\, e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_2, e_3 >$$

προκύπτουν οι

$$\omega_{23}^2 = \frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3 - \lambda_2}\,, \quad \omega_{32}^3 = \frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2 - \lambda_3}\,. \tag{5.1.8}$$

Θα πρέπει επίσης να επισημανθεί ότι λόγω της (5.1.2) και του ορισμού της αγκύλης Lie, ισχύει η σχέση $[e_2, e_3]\,(H) = 0$.
Όμως $[e_2, e_3] = \nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_3} e_2$, επομένως

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3]\,(H) &= \nabla_{e_2} e_3(H) - \nabla_{e_3} e_2(H) = \\
&= \omega_{23}^1 e_1(H) + \omega_{23}^2 e_2(H) - \omega_{32}^1 e_1(H) - \omega_{23}^3 e_3(H) = \\
&= \omega_{23}^1 e_1(H) - \omega_{32}^1 e_1(H)\,,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left(\omega_{23}^1 - \omega_{32}^1\right) e_1(H) = 0$$

και κατά συνέπεια

$$\omega_{23}^1 = \omega_{32}^1\,.$$

Η σχέση αυτή, μαζί με τις εξισώσεις του Codazzi $< (\nabla_{e_1} S)\, e_2, e_3 >=$ $< (\nabla_{e_2} S)\, e_1, e_3 >$ και $< (\nabla_{e_1} S)\, e_3, e_2 >=< (\nabla_{e_3} S)\, e_1, e_2 >$, δίνουν τελικά

$$\omega_{23}^1 = 0, \quad \omega_{32}^1 = 0, \quad \omega_{13}^2 = 0\,. \tag{5.1.9}$$

□

Λήμμα 5.1.4. *Αν M_r^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann ή Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_s^4, με τελεστή σχήματος S όπως στην Πρόταση (5.1.3), τότε*

$$e_2\,(\lambda_3) = e_3\,(\lambda_2) = 0$$

Απόδειξη. Από τον τύπο του τανυστή καμπυλότητας υπολογίζουμε το $R(e_2,e_3)e_1$ και στη συνέχεια τα εσωτερικά γινόμενα $< R(e_2,e_3)e_1, e_i >, i = 2,3$. Έχουμε

$$\begin{aligned} R(e_2,e_3)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{e_3}\nabla e_2 e_1 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_1 = \\ &= \nabla_{e_2}(\omega_{31}^3 e_3) - \nabla_{e_3}(\omega_{21}^2 e_2) - \omega_{23}^2\nabla_{e_2}e_1 + \omega_{32}^3\nabla_{e_3}e_1 = \\ &= \omega_{31}^3\omega_{23}^2 e_2 + e_2(\omega_{31}^3)e_3 - \omega_{21}^2\omega_{32}^3 e_3 - \\ &\quad - e_3(\omega_{21}^2)e_2 - \omega_{23}^2\omega_{21}^2 e_2 + \omega_{32}^2\omega_{31}^3 e_3 \end{aligned}$$

οπότε

$$< R(e_2,e_3)e_1, e_2 >= \omega_{31}^3\omega_{23}^2 - e_3\left(\omega_{21}^2\right) - \omega_{23}^2\omega_{21}^2$$

και

$$< R(e_2,e_3)e_1, e_3 >= e_2\left(\omega_{31}^3\right) - \omega_{21}^2\omega_{32}^3 + \omega_{32}^3\omega_{31}^3 .$$

Όμως από τον τύπο (2.5.3) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} < R(e_2,e_3)e_1, e_2 > &= < Se_2, e_2 >< Se_3, e_1 > - < Se_3, e_2 >< Se_2, e_1 >= \\ &= < \lambda_2 e_2, e_2 >< \lambda_3 e_3, e_1 > - < \lambda_3 e_3, e_2 >< \lambda_2 e_2, e_1 > \\ &= 0 , \end{aligned}$$

δηλαδή

$$< R(e_2,e_3)e_1, e_2 >= 0$$

Όμοια

$$\begin{aligned} < R(e_2,e_3)e_1, e_3 > &= < Se_2, e_3 >< Se_3, e_1 > - < Se_3, e_3 >< Se_2, e_1 > \\ &= < \lambda_2 e_2, e_3 >< \lambda_3 e_3, e_1 > - < \lambda_3 e_3, e_3 >< \lambda_2 e_2, e_1 > \\ &= 0 , \end{aligned}$$

δηλαδή

$$< R(e_2,e_3)e_1, e_3 >= 0$$

και έτσι έχουμε

$$\omega_{31}^3\omega_{23}^2 - e_3\left(\omega_{21}^2\right) - \omega_{23}^2\omega_{21}^2 = 0$$

και

$$e_2\left(\omega_{31}^3\right) - \omega_{21}^2\omega_{32}^3 + \omega_{32}^3\omega_{31}^3 = 0\,.$$

Λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα (5.1.3), οι σχέσεις αυτές γράφονται

$$e_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right) = \frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3} - \frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right) \quad (5.1.10)$$

$$e_2\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right) = \frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right) \quad (5.1.11)$$

Από τη σχέση (2.5.5) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\triangle H &= (e_1e_1(H) - \nabla_{e_1}e_1(H)) - (e_2e_2(H) - \nabla_{e_2}e_2(H)) - \\
&\quad - (-e_3e_3(H) - \nabla_{e_3}e_3(H)) = \\
&= e_1e_1(H) + \nabla_{e_2}e_2(H) + \nabla_{e_3}e_3(H) = \\
&= e_1e_1(H) + \left(\omega_{22}^1e_1 + \omega_{22}^3e_3\right)(H) + \left(\omega_{33}^1e_1 + \omega_{33}^2e_2\right)(H)
\end{aligned}$$

ή

$$\triangle H = -\epsilon_1e_1e_1(H) + \left(\epsilon_2\omega_{22}^1 + \epsilon_3\omega_{33}^1\right)e_1(H)$$

η οποία λόγω των $\omega_{22}^1 = -\epsilon_1\epsilon_2\omega_{21}^2$ και $\omega_{33}^1 = -\epsilon_1\epsilon_3\omega_{31}^3$ γίνεται

$$\triangle H = \epsilon_1e_1e_1(H) + \epsilon_1\left(\omega_{21}^2 + \omega_{31}^3\right)e_1(H)\,. \quad (5.1.12)$$

Επομένως η σχέση (2.5.14) λόγω των (5.1.2) και (5.1.4), (5.1.12) και του Λήμματος (5.1.3) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\epsilon_1e_1e_1(H) &+ \epsilon_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H) - \\
&- \varepsilon H\left(\frac{45H^2}{2} - 2\lambda_2\lambda_3\right) = 0\,.
\end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Αν δράσουμε διαδοχικά με τα e_2 και e_3 στην (5.1.13), λάβουμε υπόψη μας τις σχέσεις (5.1.10) και (5.1.11) και εργασθούμε όπως και στο Κεφάλαιο 4 (βλ. Λήμματα 4.1.5 και 4.2.5), έχουμε

$$\begin{aligned} e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right) &= -\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}-\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)- \\ & \quad \frac{2H\varepsilon}{\epsilon_1 e_1(H)}(\lambda_2-\lambda_3)^2\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\,, \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

$$\begin{aligned} e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right) &= -\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)- \\ & \quad \frac{2H\varepsilon}{\epsilon_1 e_1(H)}(\lambda_3-\lambda_2)^2\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\,. \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Εντελώς ανάλογα με τη βοήθεια του τανυστή καμπυλότητας υπολογίζουμε τις εκφράσεις $< R\,(e_1,e_2)\,e_1,e_2 >$, $< R\,(e_3,e_1)\,e_1,e_3 >$, $< R\,(e_3,e_1)\,e_2,e_3 >$ και $< R\,(e_1,e_2)\,e_3,e_2 >$. Οι εκφράσεις αυτές υπολογίζονται επίσης με χρήση του τύπου (2.5.3). Εξισώνοντας τώρα τα δεύτερα μέλη των αντίστοιχων εκφράσεων έχουμε

$$e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2 = \varepsilon\epsilon_1\frac{3}{2}H\lambda_2 \tag{5.1.16}$$

$$e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2 = \varepsilon\epsilon_1\frac{3}{2}H\lambda_3 \tag{5.1.17}$$

$$e_1\left(\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3}\right)=-\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2-\lambda_3} \tag{5.1.18}$$

και

$$e_1\left(\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\right)=-\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\cdot\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}\,. \tag{5.1.19}$$

Με τη βοήθεια τώρα του Λήμματος (5.1.3) και της $\omega_{21}^3 = -\epsilon_1\epsilon_3\omega_{23}^1 = 0$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] = \nabla_{e_1} e_2 - \nabla_{e_2} e_1 &= -\omega_{21}^1 e_1 - \omega_{21}^2 e_2 - \omega_{21}^3 e_3 = \\ &= -\omega_{21}^2 e_2\end{aligned}$$

οπότε

$$[e_1, e_2] = -\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2} e_2 \tag{5.1.20}$$

Με τη βοήθεια αυτής της σχέσης υπολογίζουμε τη συνάρτηση

$$[e_1, e_2]\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2}\right).$$

Πράγματι, έχουμε

$$[e_1, e_2]\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2}\right) = -\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2} e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2}\right),$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}e_1\left[e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2}\right)\right] &- e_2\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2}\right)\right] = \\ &= -\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2} e_2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2}\right)\end{aligned}$$

Η σχέση αυτή όμως, λόγω των σχέσεων (5.1.14), (5.1.16), (5.1.17) και (5.1.18) γίνεται

$$\left[\frac{\varepsilon H}{\epsilon_1 e_1(H)}\left(\left(3\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_3}\right)(\lambda_2 - \lambda_3)^2 + 2(\lambda_2 - \lambda_3) e_1(\lambda_2 - \lambda_3)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2} - \lambda_3}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{\epsilon_1} e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right)(\lambda_2 - \lambda_3)^2\right]\frac{e_2(\lambda_3)}{\lambda_2 - \lambda_3} = 0$$

Από την εξίσωση αυτή συνάγεται ότι, είτε το $e_2(\lambda_3) = 0$, είτε η παράσταση εντός της αγκύλης θα ισούται με μηδέν. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι$e_2(\lambda_3) \neq$

0. Θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Πράγματι αφού $e_2\left(\lambda_3\right) \neq 0$, από την τελευταία εξίσωση θα έχουμε ότι:

$$e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right) = -\frac{H}{e_1(H)}\left(\left(3\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right) + 2\frac{e_1\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}{\left(\lambda_2-\lambda_3\right)}\right) - \frac{\epsilon_1}{\varepsilon\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2 .$$

Δρούμε τώρα με το e_2 στα δύο μέλη της εξίσωσης αυτής και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.11), (5.1.14) και (5.1.20), έχουμε

$$-\frac{\varepsilon H}{\epsilon_1 e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2 = 2\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right). \qquad (5.1.21)$$

Δρούμε πάλι με το e_2 στην (5.1.21), οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$-\frac{2\varepsilon H}{\epsilon_1 e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2 = \left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2} - \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right). \qquad (5.1.22)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (5.1.22) επί δύο (2) και τη συγκρίνουμε με την (5.1.21). Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει ότι

$$-\frac{3\varepsilon H}{\epsilon_1 e_1(H)}\left(\lambda_2-\lambda_3\right)^2 = 0$$

το οποίο είναι αδύνατο γιατί έχουμε υποθέσει ότι $H \neq 0$ και $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Επομένως, η υπόθεσή μας ότι $e_2\left(\lambda_3\right) \neq 0$ είναι ψευδής και κατά συνέπεια θα είναι

$$e_2\left(\lambda_3\right) = 0 .$$

Εντελώς ανάλογα, από το Λήμμα (5.1.3), βρίσκουμε ότι

$$[e_3, e_1] = \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3} e_3 . \qquad (5.1.23)$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια με τη βοήθεια της (5.1.23), τη συνάρτηση

$$[e_3, e_1]\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right).$$

Έχουμε

$$
\begin{aligned}
e_3\left[e_1\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right] \; - \; e_1\left[e_3\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\right] &= \\
&= \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_3\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)
\end{aligned}
$$

η οποία λόγω των σχέσεων (5.1.15), (5.1.16), (5.1.17) και (5.1.19) γίνεται

$$
\left[\frac{\varepsilon H}{\epsilon_1 e_1(H)}\left(\left(3\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)(\lambda_3-\lambda_2)^2+2\left(\lambda_3-\lambda_2\right)e_1\left(\lambda_3-\lambda_2\right)\right)+\right.
$$

$$
\left.+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}-\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2+\frac{\varepsilon}{\epsilon_1}e_1\left(\frac{H}{e_1(H)}\right)(\lambda_3-\lambda_2)^2\right]\frac{e_3(\lambda_2)}{\lambda_3-\lambda_2}=0\,.
$$

Εργαζόμενοι τώρα όπως προηγουμένως, αποδεικνύουμε ότι

$$e_3\left(\lambda_2\right)=0\,.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$e_2\left(\lambda_3\right)=0, \quad e_3\left(\lambda_2\right)=0 \tag{5.1.24}$$

και κατά συνέπεια ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Λήμματος (5.1.4) □

Επανερχόμενοι τώρα στην απόδειξη της Πρότασης (5.1.2), θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση $e_1e_1(H)$.
Από τη σχέση $\lambda_2+\lambda_3=\dfrac{9\varepsilon H}{2}$, έχουμε ότι

$$e_1e_1(H)=\frac{2}{9\varepsilon}\left(e_1e_1\left(\lambda_2\right)+e_1e_1\left(\lambda_3\right)\right)\,. \tag{5.1.25}$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογισθούν οι συναρτήσεις $e_1e_1\left(\lambda_i\right)$, $i=2,3$. Υπολογίζουμε πρώτα το $e_1e_1\left(\lambda_2\right)$. Με τη βοήθεια των σχέσεων (5.1.7), (5.1.16) και

(5.1.17), έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} e_1e_1(\lambda_2) &= e_1\left(\omega_{21}^2\right)\left(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2\right)+\omega_{21}^2 e_1\left(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2\right)= \\ &= \varepsilon\epsilon_1\frac{3H}{2}\lambda_2\left(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2\right)-\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\left(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2\right) \\ &\quad +\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\left(-\varepsilon\frac{3}{2}e_1(H)-e_1(\lambda_2)\right)= \\ &= -\epsilon_1\frac{9H^2}{4}\lambda_2-\varepsilon\epsilon_1\frac{3H}{2}\lambda_2^2+\varepsilon\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2+ \\ &\quad +\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\lambda_2-\varepsilon\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)e_1(H) \\ &\quad -\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}e_1(\lambda_2) \end{aligned}$$

ή τελικά ,

$$\begin{aligned} e_1e_1(\lambda_2) &= -\epsilon_1\frac{9H^2}{4}\lambda_2-\varepsilon\epsilon_1\frac{3H}{2}\lambda_2^2+\varepsilon\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2- \\ &\quad -\varepsilon\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)^2\left(2\lambda_2+\varepsilon\frac{3H}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_3) &= e_1\left(\omega_{31}^3\right)\left(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3\right)+\omega_{31}^3 e_1\left(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3\right)=\\
&= \varepsilon\epsilon_1\frac{3H}{2}\lambda_3\left(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3\right)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\left(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3\right)\\
&\quad +\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\left(-\varepsilon\frac{3}{2}e_1(H)-e_1(\lambda_3)\right)=\\
&= -\epsilon_1\frac{9H^2}{4}\lambda_3-\varepsilon\epsilon_1\frac{3H}{2}\lambda_3^2+\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2+\\
&\quad +\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\lambda_3-\varepsilon\frac{3}{2}\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(H)\\
&\quad -\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}e_1(\lambda_3)
\end{aligned}$$

ή τελικά ,

$$\begin{aligned}
e_1e_1(\lambda_3) &= -\epsilon_1\frac{9H^2}{4}\lambda_3-\varepsilon\epsilon_1\frac{3H}{2}\lambda_3^2+\varepsilon\frac{3H}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2-\\
&\quad -\varepsilon\frac{3}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2\left(2\lambda_3+\varepsilon\frac{3H}{2}\right).
\end{aligned} \tag{5.1.27}$$

Επομένως η σχέση (5.1.25) λόγω των σχέσεων (5.1.26) και (5.1.27), γίνεται

$$\begin{aligned}
e_1e_1(H) &= -9\epsilon_1 H^3-\frac{1}{3}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)-\\
&\quad -\frac{4\varepsilon}{9}\left(\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)e_1(\lambda_2)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(\lambda_3)\right)+
\end{aligned}$$

$$+\frac{2\epsilon_1}{3}H\lambda_2\lambda_3\,.$$

Αντικαθιστούμε τώρα την τελευταία έκφραση της συνάρτησης $e_1e_1(H)$ στην (5.1.13) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
- &\quad \frac{4\epsilon_1\varepsilon}{3}\left(\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)e_1(\lambda_2)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(\lambda_3)\right)+\\
+ &\quad 2\epsilon_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)-\frac{135\varepsilon+54}{2}H^3\\
+ &\quad (2+6\varepsilon)H\lambda_2\lambda_3=0\,,
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
- &\quad \frac{4\epsilon_1\varepsilon}{3}\left(\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)e_1(\lambda_2-\frac{3\varepsilon H}{2})+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(\lambda_3-\frac{3\varepsilon H}{2})\right)-\\
- &\quad \frac{135\varepsilon+54}{2}H^3+(2+6\varepsilon)H\lambda_2\lambda_3=0\,. \qquad (5.1.28)
\end{aligned}$$

Η (5.1.28), λόγω της σχέσης $-\dfrac{3\varepsilon H}{2}+\lambda_2+\lambda_3=3\varepsilon H$, μετασχηματίζεται στην ακόλουθη

$$\begin{aligned}
- &\quad \frac{4\epsilon_1\varepsilon}{3}\left(\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}\right)e_1(\lambda_3)+\left(\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(\lambda_2)\right)-\\
- &\quad 4\epsilon_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)-\\
- &\quad \frac{135\varepsilon+54}{2}H^3+(2+6\varepsilon)H\lambda_2\lambda_3=0\,. \qquad (5.1.29)
\end{aligned}$$

Σημαντικό είναι το ακόλουθο Λήμμα

Λήμμα 5.1.5. *Αν M_r^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann ή Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_s^4, με τελεστή σχήματος S, που δίνεται* *από την (5.1.1) τότε ισχύει η σχέση*

$$-\epsilon_1 \frac{e_1(\lambda_2)e_1(\lambda_3)}{(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2)(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3)} - \lambda_2\lambda_3 = 0 \qquad (5.1.30)$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση $< R\,(e_2, e_3)\, e_2, e_3 >$. Έχουμε

$$\begin{aligned} R\,(e_2,e_3)\,e_2 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_2 = \\ &= \nabla_{e_2}\left(\omega_{32}^3\right)e_3 - \nabla_{e_3}\left(\omega_{22}^1 e_1 + \omega_{22}^3 e_3\right) - \omega_{23}^2\nabla_{e_2}e_2 + \omega_{32}^3\nabla_{e_3}e_2 = \\ &= e_2\left(\omega_{32}^3\right)e_3 + \omega_{32}^3\omega_{23}^2 e_2 - \omega_{23}^2\omega_{22}^3 e_3 + \left(\omega_{32}^3\right)^2 e_3 - e_3\left(\omega_{22}^3\right)e_3 - \\ &\quad - e_3\left(\omega_{22}^1\right)e_1 - \omega_{22}^1\omega_{31}^3 e_3 - \omega_{23}^2\omega_{22}^1 e_1 - \omega_{22}^3\omega_{33}^1 e_1 - \omega_{22}^3\omega_{33}^3 e_2\,, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} < R\,(e_2,e_3)\,e_2,e_3 > &= e_2\left(\omega_{32}^3\right) - e_3\left(\omega_{22}^3\right) - \omega_{23}^2\omega_{22}^3 + \\ &\quad + \left(\omega_{32}^3\right)^2 - \omega_{22}^1\omega_{31}^3\,. \end{aligned}$$

Από τον τύπο (2.5.3), όμως, έχουμε επίσης ότι

$$< R\,(e_2,e_3)\,e_2,e_3 >= -\lambda_2\lambda_3\,,$$

δηλαδή

$$e_2\left(\omega_{32}^3\right) - e_3\left(\omega_{22}^3\right) - \omega_{23}^2\omega_{22}^3 + \left(\omega_{32}^3\right)^2 - \omega_{22}^1\omega_{31}^3 = -\lambda_2\lambda_3\,,$$

οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.24) και το Λήμμα (5.1.3) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$-\epsilon_1 \frac{e_1(\lambda_2)e_1(\lambda_3)}{(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2)(-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3)} - \lambda_2\lambda_3 = 0\,,$$

που είναι η ζητούμενη. □

Επανερχόμενοι στην απόδειξη της Πρότασης (5.1.2), η εξίσωση (5.1.29) λόγω του προηγούμενου Λήμματος γίνεται

$$4\epsilon_1\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2} + \frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H) - 2(6+3\varepsilon)H\lambda_2\lambda_3 + \frac{54+135\varepsilon}{2}H^3 = 0$$

από την οποία συνάγουμε ότι

$$\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)e_1(H)=-\frac{54+135\varepsilon}{8\epsilon_1}H^3+\frac{6+3\varepsilon}{2\epsilon_1}H\lambda_2\lambda_3\,. \tag{5.1.31}$$

Η σχέση (5.1.13), λόγω της (5.1.31) μετασχηματίζεται στην

$$e_1e_1(H)=\frac{54+315\varepsilon}{8\epsilon_1}H^3-\frac{6+7\varepsilon}{2\epsilon_1}H\lambda_2\lambda_3\,. \tag{5.1.32}$$

Δρώντας με το e_1 στα δύο μέλη της (5.1.31), και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.16), (5.1.17) και (5.1.32) παίρνουμε

$$\left(\frac{378+486\varepsilon}{4}H^2-(10+3\varepsilon)\lambda_2\lambda_3\right)e_1(H)=\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{324+558\varepsilon}{4}H^3+(6+7\varepsilon)H\lambda_2\lambda_3\right) \tag{5.1.33}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις (5.1.31), (5.1.33) και έχουμε

$$\left(\frac{378+486\varepsilon}{4}H^2-(10+3\varepsilon)\lambda_2\lambda_3\right)[e_1(H)]^2=$$
$$\left(-\frac{54+135\varepsilon}{8\epsilon_1}H^3+\frac{6+3\varepsilon}{2\epsilon_1}H\lambda_2\lambda_3\right)\left(-\frac{324+558\varepsilon}{4}H^3+(6+7\varepsilon)H\lambda_2\lambda_3\right) \tag{5.1.34}$$

Δρούμε πάλι με το e_1 στην (5.1.33), οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned} &- \frac{1026+1053\varepsilon}{4} H\left[e_1(H)\right]^2 - \frac{117+104\varepsilon}{2\epsilon_1} H\lambda_2^2\lambda_3^2 + \\ &+ \frac{54+103\varepsilon}{2}\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2 H^3 - \\ &- (12+14\varepsilon)\left(\frac{e_1(\lambda_2)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_2}+\frac{e_1(\lambda_3)}{-\varepsilon\frac{3H}{2}-\lambda_3}\right)^2 H\lambda_2\lambda_3 - \\ &- \frac{6426+4500\varepsilon}{8\epsilon_1} H^3\lambda_2\lambda_3 + \frac{155763+132678\varepsilon}{32\epsilon_1} H^5 = 0\,. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση λόγω των (5.1.31), (5.1.34) και της υπόθεσης ότι $H \neq 0$, μετατρέπεται σε μία αλγεβρική εξίσωση τετάρτου βαθμού ως προς το x, όπου $x = \dfrac{\lambda_2\lambda_3}{H^2}$. Πράγματι εύκολα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F(x) &= 64(997+1200\varepsilon)x^4 - 144(21067+21690\varepsilon)x^3 \\ &\quad +324(79054+104142\varepsilon)x^2 + 4374(56966+54103\varepsilon)x \\ &\quad -295245(11348+11899\varepsilon) \quad = 0\,. \end{aligned} \tag{5.1.35}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις υπερεπιφανειών καθόσον αυτές είναι υπερεπιφάνειες Lorentz ή υπερεπιφάνειες Riemann.

Στην περίπτωση που η M_1^3 είναι υπερεπιφάνεια Lorentz, δηλαδή $\varepsilon = 1$, η εξίσωση (5.1.35) γίνεται

$$\begin{aligned} F(x) &= 140608x^4 - 6157008x^3 + 59355504x^2 \\ &\quad +485815806x - 6863560515 \quad = 0\,. \end{aligned}$$

Για να έχει αυτή η εξίσωση πραγματική λύση, θα πρέπει $\lambda_2\lambda_3 = \rho H^2$, όπου ρ ρίζα του F, δηλαδή $F(\rho) = 0$. Τότε όμως, αντικαθιστώντας στην (5.1.34) το $\lambda_2\lambda_3$ με το ίσον του, θα έχουμε

$$8\epsilon_1\,(432-26\rho)\left[e_1(H)\right]^2 = (441-26\rho)\,(-189+36\rho)\,H^4\,.$$

Εφαρμόζοντας το e_1 και στα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (5.1.32) καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\left(1612\rho^2 - 36819\rho + 163053\right) H^3 = 0\,.$$

Για να φθάσουμε σε άτοπο αρκεί να δείξουμε ότι καμία από τις ρίζες του $\varphi(\rho) = 1612\rho^2 - 36819\rho + 163053$ δεν είναι ρίζα του $F(x)$. Πράγματι, οι ρίζες της εξίσωσης $\varphi(\rho) = 0$ είναι οι $\dfrac{36819 \pm 3\sqrt{35742513}}{3224}$, οι οποίες δεν επαληθεύουν την $F(x) = 0$. Κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $H = 0$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.
Στην περίπτωση που η M_1^3 είναι υπερεπιφάνεια Riemann, δηλαδή $\varepsilon = -1$, η εξίσωση (5.1.35) γίνεται

$$\begin{aligned} F(x) \; = \; & 12992x^4 - 89712x^3 + 8128512x^2 \\ & -12522762x - 162679995 \quad = 0\,, \end{aligned}$$

οπότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην περίπτωση των υπερεπιφανειών Lorentz καταλήγουμε στο ζητούμενο.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που ο τελεστής σχήματος S έχει τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές τότε η διαρμονικότητα κάθε υπερεπιφάνειας του E_s^4 συνεπάγεται την ελαχιστικότητά της, δηλαδή ότι $H = 0$ και έτσι η απόδειξη της Πρότασης (5.1.2) έχει ολοκληρωθεί. □

Για την απόδειξη του Θεωρήματος (5.1.1) είναι απαραίτητη και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.1.6. *Αν ο τελεστής σχήματος S μιας διαρμονικής υπερεπιφάνειας Riemann ή Lorentz M_r^3 έχει δυο διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε η M_r^3 είναι ελάχιστης έκτασης.*

Απόδειξη. Ο τελεστής σχήματος τώρα παίρνει τη μορφή

$$S = \begin{pmatrix} -\varepsilon\frac{3H}{2} & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \tag{5.1.36}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι το ∇H είναι στη διεύθυνση του e_1, οπότε έχουμε ότι

$$e_1(H) \neq 0\,,\ e_2(H) = 0\,,\ e_3(H) = 0\,. \tag{5.1.37}$$

Από τη σχέση $3\varepsilon H = trS$ συνάγουμε ότι $\lambda = \dfrac{9\varepsilon H}{4}$ και έτσι αν χρησιμοποιήσουμε την (5.1.36) βρίσκουμε εύκολα ότι

$$trS^2 = \frac{99H^2}{8}\,. \tag{5.1.38}$$

Λήμμα 5.1.7. *Αν M_r^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann ή Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_s^4, με τελεστή σχήματος S, που δίνεται από τον τύπο (5.1.36), τότε ισχύουν οι σχέσεις*

$$\omega_{21}^2 = \omega_{31}^3 = -\frac{3}{5}\cdot\frac{e_1(H)}{H} \tag{5.1.39}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμμεση συνέπεια των

$$< (\nabla_{e_1}S)\,e_2, e_2 >=< (\nabla_{e_2}S)\,e_1, e_2 >$$

και

$$< (\nabla_{e_1}S)\,e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3}S)\,e_1, e_3 >$$

□

Λήμμα 5.1.8. *Αν M_r^3 είναι μια διαρμονική υπερεπιφάνεια Riemann ή Lorentz της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_s^4, με τελεστή σχήματος S, που δίνεται από την (5.1.36) τότε ισχύει η σχέση*

$$e_1\left(\omega_{21}^2\right) = \epsilon_1\frac{27H^2}{8} - \left(\omega_{21}^2\right)^2 \tag{5.1.40}$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την (5.1.40), αρκεί να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $< R\left(e_1, e_2\right) e_1, e_2 >$ μία φορά με χρήση του τύπου (2.5.3), μία φορά με τη βοήθεια του τύπου του τανυστή καμπυλότητας και στη συνέχεια να εξισώσουμε τα δεύτερα μέλη. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} < R\left(e_1, e_2\right) e_1, e_2 > &= < Se_1, e_2 >< Se_2, e_1 > - < Se_2, e_2 >< Se_1, e_1 > \\ &= \epsilon_1 \frac{27H^2}{8} \end{aligned}$$

και

$$< R\left(e_1, e_2\right) e_1, e_2 >= e_1\left(\omega_{21}^2\right) + \left(\omega_{21}^2\right)^2 ,$$

οπότε αν εξισώσουμε τα δεύτερα μέλη προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

Συνεχίζοντας την απόδειξη της Πρότασης (5.1.6) παρατηρούμε ότι η σχέση (2.5.14) λόγω των (2.5.5), (5.1.37) και (5.1.38) παίρνει την μορφή

$$-\epsilon_1 e_1 e_1(H) - 2\epsilon_1\left(\omega_{21}^2\right) e_1(H) + \varepsilon\frac{99H^3}{8} = 0 . \tag{5.1.41}$$

Ανάλογα οι εξισώσεις (5.1.39) και (5.1.41) μετασχηματίζονται στις

$$-5H\omega_{21}^2 = 3e_1(H) \tag{5.1.42}$$

και

$$\epsilon_1 e_1 e_1(H) + 2\epsilon_1\left(\omega_{21}^2\right) e_1(H) - \varepsilon\frac{99H^3}{8} = 0 \tag{5.1.43}$$

αντίστοιχα. Δρώντας με το e_1 στην (5.1.42) και χρησιμοποιώντας την (5.1.40) έχουμε

$$e_1 e_1(H) = \frac{40}{9} H\left(\omega_{21}^2\right)^2 - \frac{45H^3\epsilon_1}{8} .$$

Επομένως, η (5.1.43) γίνεται

$$H\left[\epsilon_1\frac{10}{9}\left(\omega_{21}^2\right)^2 - \frac{45+99\varepsilon}{8}H^2\right] = 0 .$$

Λόγω της υπόθεσης ότι $H \neq 0$ θα πρέπει η παράσταση εντός της αγκύλης να είναι μηδέν. Δρώντας με το e_1 στην

$$\epsilon_1 \frac{10}{9} \left(\omega_{21}^2\right)^2 - \frac{45+99\varepsilon}{8} H^2 = 0 \tag{5.1.44}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.40) και (5.1.42) έχουμε τελικά

$$\epsilon_1 \frac{10}{3} \left(\omega_{21}^2\right)^2 - \frac{945+165\varepsilon}{8} H^2 = 0\,. \tag{5.1.45}$$

Συγκρίνοντας τις (5.1.44) και (5.1.45) συμπεραίνουμε ότι $H = 0$, το οποίο είναι άτοπο. □

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι και στην περίπτωση που ο τελεστής σχήματος S έχει δύο διαφορετικές ιδιοτιμές, η διαρμονικότητα κάθε υπερεπιφάνειας του E_s^4 συνεπάγεται την ελαχιστικότητα της, και κατά συνέπεια η απόδειξη της Πρότασης (5.1.6) έχει ολοκληρωθεί.

Παρατήρηση 5.1.9. Στην περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $-\varepsilon\frac{3H}{2} = \lambda_2 = \lambda_3$, η εξίσωση $trS = 3\varepsilon H$ γράφεται

$$-3\varepsilon\frac{3H}{2} = 3\varepsilon H$$

από την οποία προκύπτει ότι $H = 0$.

Επειδή λοιπόν αυτές είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις για τον διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος S της υπερεπιφάνειας M_r^3, έπεται ότι η απόδειξη του Θεωρήματος (5.1.1) έχει ολοκληρωθεί. □

Προβλήματα για παραπέρα έρευνα

Ενδιαφέρον πρόβλημα για περαιτέρω έρευνα είναι η μελέτη των διαρμονικών υποπολλαπλοτήτων μιας ψευδο-πολλαπλότητας Riemann. Ενδιαφέρον πρόβλημα είναι επίσης και η μελέτη (ή η ταξινόμηση) των υπερεπιφανειών του χώρου E_1^4 που ικανοποιούν την εξίσωση $\triangle\vec{H} = \lambda\vec{H}$, όπου $\vec{H}$ το διάνυσμα της μέσης καμπυλότητας και $\triangle$ ο τελεστής του Laplace.

Έστω M_s^2, $s = 0, 1$ μια επιφάνεια του τριδιάστατου Lorentz-Minkowski χώρου E_1^3 και $\triangle$, $\vec{H}$, $\mathbf{r}$ η Λαπλασιανή, το διάνυσμα της μέσης καμπυλότητας και το διάνυσμα θέσης της M_s^2, αντίστοιχα, τότε είναι γνωστό ότι $\triangle\mathbf{r} = -2H\mathbf{N}$. Ο T. Takahashi [56] απέδειξε ότι οι μόνες επιφάνειες του E^3 που ικανοποιούν τη σχέση $\triangle\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι οι ελαχιστικές επιφάνειες και οι σφαίρες. Ο O. J. Garay [32] καθόρισε τις πλήρεις επιφάνειες εκ περιστροφής του E^3 οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση $\triangle\mathbf{r}^i = \lambda^i\mathbf{r}^i$, $i = 1, 2, 3$. Οι A. Ferrandez, O. J. Garay και P. Lucas [30] απέδειξαν ότι οι μόνες επιφάνειες του E^3 που ικανοποιούν τη σχέση $\triangle H = \lambda H$ είναι οι ελαχιστικές επιφάνειες ή ανοικτά τμήματα σφαιρών ή ορθών κυκλικών κυλίνδρων. Γενικεύοντας την ως άνω ταξινόμηση οι A. Ferrandez, P. Lucas [31] απέδειξαν ότι επιφάνειες του E_1^3 που ικανοποιούν αυτή τη σχέση είναι οι επιφάνειες μηδενικής μέσης καμπυλότητας ή ανοικτά τμήματα B-scroll επιφανειών, ή ανοικτά τμήματα των επιφανειών $S^1(r) \times \mathbb{R}$, $H^1(r) \times \mathbb{R}$, $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$, $H^2(r)$ και $S_1^2(r) \times \mathbb{R}$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη των ως άνω προβλημάτων και κυρίως στο χώρο E_1^3, όταν ο τελεστής του Laplace αναφέρεται ως προς τη δεύτερη ή την τρίτη θεμελιώδη διαφορική τετραγωνική μορφή των επιφανειών αυτών. Για παράδειγμα, θα ήταν ενδιαφέρον να γνωρίζουμε ποιες επιφάνειες του E_1^3 ή ποιες επιφάνειες του E_1^{n+1} ικανοποιούν σχέσεις της μορφής $\triangle^{II}\vec{r} = A\vec{r}$, $\triangle^{II}\vec{H} = \lambda\vec{H}$, $\triangle^{III}\vec{r} = A\vec{r}$, $\triangle^{III}\vec{H} = \lambda\vec{H}$ κ.λπ.

Βιβλιογραφία

[1] Aiyama R. -Cheng Q.M., *Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in a Lorentz space form of dimension 4*, Kodai Mathematical Journal, **15(3)**, (1992) 375–386.

[2] Aiyama R., *On the Gauss map of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space*, Tsukuba J. Math., **16(2)**, (1992) 353–361.

[3] Alencar H. -Do Carmo M., *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proceedings of the American Mathematical Society, **120(4)**, (1994) 1223–1229.

[4] Alias L., Ferrandez A., Lucas P., *Surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying* $\Delta \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B$, Pacific Journal of Mathematics, **156(2)**, (1992) 201–208.

[5] Alias L., Ferrandez A., Lucas P., *Hypersurfaces in space forms satisfying the condition* $\Delta \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B$, Transactions of the American Mathematical Society, **347(5)**, (1995) 1793–1801.

[6] Alias L. -Pastor A.J., *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces with spherical boundary in the Lorentz-Minkowski space*, J. of Geometry and Physics, **28**, (1998) 85–93.

[7] Alias L. -Aledo J., *Curvature properties of compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space*, Differential Geometry and its Applications, **14**, (2001) 137–149.

[8] Baikoussis Chr. - Koufogiorgos T., *Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature*, Journal of Geometry, **63**, (1998) 25–29.

[9] Baikoussis Chr., Blair D., Chen B. Y., Defever F., *Hypersurfaces of Restricted Type in Minkowski Space*, Geometriae Dedicata, **62**, (1996) 319–332.

[10] Beneki Chr. - Kaimakamis G. - Papantoniou B. J., *A classification of surfaces of revolution with constant Gauss curvature in a 3-dimensional Minkowski space*, Bull. Calcutta Math. Soc., **90(6)**, (1998) 441–458.

[11] Beneki Chr. - Kaimakamis G. - Papantoniou B. J., *Helicoidal surfaces in 3-dimensional Minkowski space* J. Math. Anal. Appl., **275(2)**, (2002) 586–614.

[12] Chen B.Y., *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, Inc., N.Y, 1973.

[13] Chen B.Y., *Total mean curvature and submanifolds of finite type*, Volume I, II, World Scientific Publishing, Singapore, 1984.

[14] Chen B. Y., *Finite-type Pseudo-Riemannian Submanifolds*, Tamkang Journal of Math. **17(2)**, (1986) 137–151.

[15] Chen B. Y., *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. **17**, (1991) 169–188.

[16] Chen B. Y., *Submanifolds of finite type and applications, Proc. Geometry and Topology Research Center*, Taegu **3**, (1993) 1–48.

[17] Chen B. Y., *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds,* Arch. Math. **60**, (1993) 568–578.

[18] Chen B. Y., *Submanifolds in De Sitter space-time satisfying* $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$, Israel J. of Math. **91**, (1995) 373–391.

[19] Chen B. Y., *A report on submanifolds of finite type*, Soochow J. of Math. **22**, (1996) 117–337.

[20] Chen B. Y. -Ishikawa S., *Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces*, Memoirs of the Fac. of Science, Kyushu University, Series A **45**, (1991) 323–347.

[21] Chen B. Y. -Ishikawa S., *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushuy Journal of Mathematics **52**, (1998) 167–185.

[22] Choi S. M., *On the Gauss map of surfaces of revolution in a* 3-*dimensional Minkowski space*, Tsukuba J. Math., **19(2)**, (1996) 351-367.

[23] Defever F., *Hypersurfaces of* E^4 *with harmonic mean curvature vector*, Math. Nachr. **196**, (1998) 61–69.

[24] Defever F., Kaimakamis G., Papantoniou B. , *Biharmonic Lorentz hypersurfaces in* E^4_1, έχει υποβληθεί προς δημοσίευση.

[25] Defever F., Kaimakamis G., Papantoniou B., *Biharmonic hypersurfaces of the 4-dimensional semi-Euclidean space* E^4_s, έχει υποβληθεί προς δημοσίευση.

[26] Dimitrić I., *Quadratic representation and submanifolds of finite type, Doctoral thesis,Michigan State University*, 1989.

[27] Dimitrić I., *Submanifolds of* $\mathbb{E}^m$ *with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **20**, (1992) 53-65.

[28] Do Carmo M. - Dajczer M., *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tôhoku Math. J., II. Ser., **34**, (1982) 425–435.

[29] Duggal K.L.- Bejancu A., *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[30] Ferrandez A. - Garay O. J. - Lucas P., *On a certain class of conformally flat Euclidean hypersurfaces*, Proc. of the Conf. in Global Analysis and Global Differential Geometry, Berlin, 1990.

[31] Ferrandez A. - Lucas P., *On surfaces in* 3*-dimensional Lorentz-Minkowski space*, Pacific J. Math., **152(1)**, (1992) 93–100.

[32] Garay O. J., *On a certain class of finite type surfaces of revolution*, Kodai Math. J., **11(1)**, (1988) 25–31.

[33] Garay O. J., *An extension of Takahashi' s theorem*, Geom. Dedicata, **34(2)**, (1990) 105–112 .

[34] Ge Y., *Immersed surfaces of prescribed Gauss curvature into Minkowski space* , Proc. Amer. Math. Soc., **129(7)**, (2000) 2093–2101.

[35] Gerhardt C., *Hypersurfaces of prescribed mean curvature in Lorentzian manifolds*, Math. Zeits., **235**, (2000) 83–97.

[36] Hano J. - Nomizu K., *Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space*, Tôhoku Math. J., II. Ser., **36**, (1984) 427–437 .

[37] Th. Hasanis, Th. Vlachos, *Hypersurfaces in* $\mathbb{E}^4$ *with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr., **172**, (1995) 145-169.

[38] Jung S. D. -Pak J. S., *Classification of cylindrical ruled surfaces satisfying* $\Delta H = AH$ *in a 3-dimensional Minkowski space*, Bull. Korean Math. Soc , **33(1)**, (1996) 97–106 .

[39] Kenmotsu K., *Surfaces of revolution with prescribed mean curvature*, Tôhoku Math. J., II. Ser., **32**, (1980) 147–153.

[40] Kim Y. H. -Yoon D. W., *Ruled surfaces with finite type Gauss map in Minkowski spaces*, Soochow J. of Math., **26(1)**, (2000) 85-96.

[41] Kobayashi S. - Nomizu K., *Foundations of differential geometry*, I, II, Interscience Publishers, N.Y., 1963.

[42] Lopez R., *Constant mean curvature surfaces foliated by circles in Lorentz-Minkowski space*,Geometriae Dedicata **76**, (1999) 81–95.

[43] Lopez R., *Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space*, Tôhoku Math. J. **52**, (2000) 515–532.

[44] Magid M., *Shape operators of Einstein hypersurfaces in indefinite space forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **84(2)**, (1982) 237–242.

[45] Magid M., *Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental form*, Tsukuba J. Math. **8**, (1984) 31–54.

[46] Magid M., *Lorentzian isoparametric hypersurfaces*, Pacific J. Math. **118**, (1985) 165–198.

[47] Milnor T. K., *Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-space*, Trans. Amer. Math. Soc. **280(1)**, (1983) 161–185.

[48] Mishchenko A. - Fomenko A., *A course of differential geometry and topology*, Translate from Russian by A. Talashev, Mir Publishers Moscow, 1988.

[49] Μπενέκη Χριστίνα, *Χαρακτηρισμός πολλαπλοτήτων Kahler με τη βοήθεια μικρών γεωδαισιακών σωλήνων*, Διδακτορική Διατριβή, Πάτρα 2002.

[50] O' Neil B., *Semi-Riemannian geometry, With Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego, CA, 1983.

[51] Papantoniou B. J., *On the Surfaces of Lorentz Manifold Whose Normal Bundles Have Special Properties*, Annali di Matematica pura ed applicata, **CXXXV(IV)**, (1983) 319–328.

[52] Papantoniou B. J., *On the normal rectilinear congruences of Lorentz manifold* $[R^3, (+, +, -)]$ *establishing a mapping between its focal surfaces preserving the mean curvatures*, Tensor N.S., **43(3)**, (1986) 217–222.

[53] Papantoniou B. J., *On the rectilinear congruence of Lorentz manifold* $[R^3, (+, +, -)]$ *establishing a conformal mapping between its focal surfaces* , Riv. Mat. Univ. Parma, **13(4)**, (1987) 111–118.

[54] Tsagas Gr. -Papantoniou B. J., *On the rectilinear congruences of Lorentz manifold establishing an area preserving representation*, Tensor N.S., **47**, (1988) 127–139.

[55] Senchun Lin, *Curvature restrictions on convex, timelike surfaces in Minkowski 3-space* , Proc. Amer. Math. Soc., **128(5)**, (1999) 1459–1466.

[56] Takahashi T., *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **18**, (1966) 380–385.

[57] Takiyama A. -Izumiya S., *A time like surface in Minkowski 3-space which contains light-like lines* , Journal of Geometry, **64**, (1999) 95–101.

[58] Ximin Liu, *Spacelike hypersurfaces in the de Sitter spaces*, Journal of mathematical Physics, **42(8)**, (2001) 3965–3972.

[59] Yano K. - Kon M., *Structures on manifolds*, World Scientific Publishing, Singapore, 1984.

[60] Παπαντωνίου Β. Ι., *Διαφορίσιμες πολλαπλότητες*,Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1993.

[61] Παπαντωνίου Β. Ι., *Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία Riemann*, Τόμος ΙΙ, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1996.

[62] Παπαντωνίου Β. Ι., *Διαφορική Γεωμετρία, Θεωρία Επιφανειών*, Τόμος ΙΙ, Αυτοέκδοση, Πάτρα, 1997.