ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής

Μελέτη της απόδοσης μηχανισμών κατανομής διαιρέσιμων πόρων

Αλέξανδρος Ανδρέας Βουδούρης

Διπλωματική Εργασία
στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Επιστήμη και Τεχνολογία των Υπολογιστών"

Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

Ιωάννης Καραγιάννης, Επίκουρος Καθηγητής (Επιβλέπων)
Χρήστος Κακλαμάνης, Καθηγητής
Σωτήριος Νικολετσέας, Αναπληρωτής Καθηγητής

Δεκέμβριος 2014

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ιωάννη Καραγιάννη, Επίκουρο καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, για την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές που μου προσέφερε (και συνεχίζει να μου προσφέρει), καθώς και για τις σφαιρικές γνώσεις και τις out-of-the-box ιδέες του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της πρώτης κοινής μας ερευνητικής εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Κακλαμάνη, Καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, και τον κ. Σωτήρη Νικολετσέα, Αναπληρωτή καθηγητή του τμήματος Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή αυτής της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Αντελίνα Μάδια και τον Γιώργο Κριμπά για τη συμπαράσταση και τη βοήθεια τους κατά τη διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας, καθώς και την οικογένεια μου για την οικονομική και συναισθηματική στήριξη καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Μελέτη της απόδοσης μηχανισμών κατανομής διαιρέσιμων πόρων

Αλέξανδρος Ανδρέας Βουδούρης

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία χρησιμοποιούμε έννοιες και εργαλεία της Θεωρίας Παιγνίων με σκοπό να μελετήσουμε την απόδοση μηχανισμών κατανομής διαιρέσιμων πόρων εστιάζοντας κυρίως στον μηχανισμό αναλογικής κατανομής. Σύμφωνα με αυτόν τον μηχανισμό, ένα σύνολο χρηστών ανταγωνίζονται για ένα διαιρέσιμο πόρο—όπως το εύρος ζώνης ενός τηλεπικοινωνιακού καναλιού—υποβάλλοντας προσφορές. Ο μηχανισμός κατανέμει σε κάθε χρήστη ένα μέρος του πόρου το οποίο είναι ανάλογο της προσφοράς του και συλλέγει ένα ποσό ίσο με την προσφορά αυτή ως πληρωμή. Οι χρήστες στοχεύουν στη μεγιστοποίηση της ωφέλειας τους και συμπεριφέρονται στρατηγικά αλλάζοντας τις προσφορές τους με σκοπό να το πετύχουν. Έτσι, ο μηχανισμός ορίζει ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής. Παρουσιάζουμε γνωστά αποτελέσματα από τη σχετική βιβλιογραφία καθώς και νέα βελτιωμένα φράγματα για το κόστος της αναρχίας ως προς το κοινωνικό όφελος για συσχετιζόμενες ισορροπίες στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης και για ισορροπίες κατά Bayes-Nash στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε ένα κάτω φράγμα $1/2$ για το κόστος της αναρχίας ως προς τις προαναφερθείσες έννοιες ισορροπίας, βελτιώνοντας σημαντικά το προηγούμενο καλύτερο κάτω φράγμα 26.8% που πρόσφατα απέδειξαν οι Syrgkanis και Tardos (STOC 2013). Επίσης, μελετάμε για πρώτη φορά τη περίπτωση όπου οι χρήστες διαθέτουν περιορισμένους προϋπολογισμούς και παρουσιάζουμε ένα κάτω φράγμα περίπου 36% και ένα άνω φράγμα 50% για το κόστος της αναρχίας χρησιμοποιώντας ως αντικειμενική συνάρτηση το αποτελεσματικό όφελος το οποίο λαμβάνει υπόψη προϋπολογισμούς.

Η παρούσα διπλωματική εργασία υποστηρίχθηκε μερικώς από το έργο Ε.114 "Τα στρατηγικά παίγνια ως υπολογιστικές μηχανές - Σχεδιασμός και ανάλυση αλγορίθμων για μη συνεργατικά περιβάλλοντα" του προγράμματος βασικής έρευνας Κ. Καραθεοδωρή του Πανεπιστημίου Πατρών.

On the efficiency of divisible resource allocation mechanisms

Alexandros Andreas Voudouris

Abstract

In this thesis, we use notions and techniques from Game Theory in order to analyze the performance of divisible resource allocation mechanisms focusing mainly on the proportional allocation mechanism. According to this mechanism, a set of users are competing for a divisible resource—such as bandwidth of a communication link—by submitting bids. The mechanism allocates to each user a fraction of the resource that is proportional to the user's bid and collects an amount equal to the bid as payment. Users aim to maximize their individual utility and act strategically in order to achieve their goal. Hence, the mechanism defines a proportional allocation game. We cover previously known results from the related literature and present new bounds on the price of anarchy with respect to the social welfare over coarse-correlated and Bayes-Nash equilibria in the full and incomplete information settings, respectively. In particular, we prove a lower bound of $1/2$ for the price of anarchy over both equilibrium concepts, significantly improving the previously best known lower bound, presented by Syrgkanis and Tardos (STOC 2013). Furthermore, we study for the first time the scenario where users have budget constraints and present lower bounds on the price of anarchy using the effective welfare (which takes budgets into account) as an objective function.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μηχανισμοί κατανομής διαιρέσιμων πόρων

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε διάφορους μηχανισμούς κατανομής διαιρέσιμων πόρων εστιάζοντας κυρίως στον μηχανισμό αναλογικής κατανομής. Επίσης, ορίζουμε τις βασικές έννοιες και τα μοντέλα που θα μας απασχολήσουν σε αυτή τη διπλωματική εργασία.

1.1 Ο μηχανισμός αναλογικής κατανομής

Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα. Υποθέστε δύο χρήστες, τον A και τον B, κάθε ένας από τους οποίους επιθυμεί να μεταφέρει δεδομένα από έναν κόμβο πηγής s προς έναν κόμβο προορισμού t. Οι δύο κόμβοι συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός τηλεπικοινωνιακού καναλιού με περιορισμένο εύρος ζώνης. Η βασική ερώτηση που θέλουμε να απαντήσουμε είναι η εξής:

Πως μπορούμε να μοιράσουμε το εύρος ζώνης στους χρήστες έτσι ώστε
όλοι να είναι όσο το δυνατόν πιο ευχαριστημένοι;

Για να απαντήσουμε στη παραπάνω ερώτηση, χρειαζόμαστε ένα μηχανισμό που να δέχεται ως είσοδο τις προτιμήσεις των χρηστών και να παράγει ως έξοδο μια κατανομή του εύρους ζώνης σε αυτούς. Ένας τέτοιος μηχανισμός είναι ο *μηχανισμός αναλογικής κατανομής* (proportional allocation mechanism) που πρώτος παρουσίασε ο Kelly [12]. Σύμφωνα με τον μηχανισμό αυτό, ένας διαιρέσιμος πόρος, όπως, για παράδειγμα, το εύρος ζώνης μιας τηλεπικοινωνιακής σύνδεσης, κατανέμεται στους χρήστες ως εξής. Κάθε χρήστης κάνει μια προσφορά στον μηχανισμό η οποία αναλογεί στην *επιθυμία του να πληρώσει* (willingness-to-pay) για να λάβει ένα μέρος του πόρου. Ο μηχανισμός κατανέμει σε κάθε χρήστη ένα μέρος του πόρου ίσο με τον λόγο της προσφοράς του χρήστη προς το σύνολο των προσφορών από όλους τους χρήστες, δηλαδή είναι ανάλογο της προσφοράς του χρήστη. Τέλος, ο μηχανισμός δέχεται μια πληρωμή από κάθε χρήστη η οποία είναι ίση με την προσφορά του.

Συνοπτικά, λοιπόν, ο μηχανισμός λειτουργεί ως εξής[1]:

[1]Παραλλαγές του μηχανισμού αναλογικής κατανομής με διαφορετικό ορισμό για τον κανόνα κατανομής ή τον κανόνα πληρωμών έχουν παρουσιαστεί στις εργασίες [14, 15, 16, 17, 21].

(1) Κάθε χρήστης i κάνει μια προσφορά b_i.
(2) Ο μηχανισμός δεσμεύει για κάθε χρήστη i ένα μέρος d_i του πόρου ίσο με

$$d_i = \frac{b_i}{\sum_j b_j}.$$

(3) Κάθε χρήστης i πληρώνει στον μηχανισμό την προσφορά του b_i.

Επομένως, ο μηχανισμός δέχεται ως είσοδο ένα *διάνυσμα προσφορών* (bid vector) $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ το οποίο αποτελείται από μια προσφορά για κάθε έναν από τους n σε πλήθος χρήστες (ή πλειοδότες, bidders) και παράγει μια *αναλογική κατανομή* (proportional allocation) $d(\mathbf{b}) = (d_1, ..., d_n)$ του πόρου στους πλειοδότες τέτοια ώστε $0 \leq d_i \leq 1$, για κάθε πλειοδότη i, και $\sum_i d_i = 1$. Για παράδειγμα, με είσοδο το διάνυσμα προσφορών $\mathbf{b} = (1/16, 1/8, 1/8)$ για τρεις πλειοδότες, ο μηχανισμός παράγει την κατανομή $d(\mathbf{b}) = (20\%, 40\%, 40\%)$.

1.2 Παιχνίδια αναλογικής κατανομής

Όπως είναι φυσικό, ο μηχανισμός αναλογικής κατανομής ορίζει ένα *παιχνίδι αναλογικής κατανομής* (proportional allocation game) μεταξύ των πλειοδοτών οι οποίοι συμπεριφέρονται στρατηγικά. Έστω N το σύνολο όλων των n σε πλήθος πλειοδοτών. Κάθε πλειοδότης $i \in N$ συσχετίζεται με μια *συνάρτηση αποτίμησης* (valuation function) $v_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ η οποία εκφράζει το πόσο ευχαριστημένος είναι για το μέρος d_i του πόρου που του έχει κατανεμηθεί. Κάνουμε τρεις τυπικές υποθέσεις σχετικά με τις συναρτήσεις αποτίμησης των πλειοδοτών: είναι *κοίλες*[2] (concave), *μη-φθίνουσες* (non-decreasing), και *μη-αρνητικές* (non-negative). Η στρατηγική κάθε πλειοδότη i είναι η προσφορά b_i που επιλέγει. Ένα διάνυσμα προσφορών $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ συνεπάγεται μια κατανομή $d(\mathbf{b}) = (d_1, ..., d_n)$ και αναπαριστά μια *κατάσταση* (state) του παιχνιδιού. Συχνά, συμβολίζουμε με B_{-i} το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών εκτός από την προσφορά του πλειοδότη i, και έτσι, έχουμε ότι

$$d_i = \frac{b_i}{b_i + B_{-i}}.$$

Η *ωφέλεια* (utility) ενός πλειοδότη i σε μια κατάσταση $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ του παιχνιδιού η οποία συνεπάγεται την κατανομή $d(\mathbf{b}) = (d_1, ..., d_n)$ ορίζεται ως η διαφορά της αποτίμησης $v_i(d_i)$ του πλειοδότη για το μέρος d_i του πόρου που λαμβάνει και της προσφοράς b_i που πρέπει να πληρώσει, δηλαδή,

$$u_i(\mathbf{b}) = v_i(d_i) - b_i.$$

Υποθέτουμε ότι κάθε πλειοδότης είναι *συντηρητικός* (conservative) με την έννοια ότι η αποτίμηση του για ένα μέρος του πόρου αποτελεί τη μέγιστη προσφορά που θα έκανε για να λάβει το συγκεκριμένο μέρος του πόρου, δηλαδή, $b_i \in [0, v(d_i)]$. Διαφορετικά, η ωφέλεια του θα μπορούσε να γίνει αρνητική το

[2]Πρόσφατα, οι Correa et al. [5] μελέτησαν παιχνίδια αναλογικής κατανομής με μη-κοίλες συναρτήσεις αποτίμησης.

οποίο σημαίνει ότι δεν θα είχε κίνητρο να συμμετέχει στο παιχνίδι. Προφανώς, κάθε πλειοδότης, δεδομένου το τι κάνουν οι υπόλοιποι πλειοδότες, επιθυμεί να επιλέξει μια προσφορά η οποία να μεγιστοποιήσει την ωφέλεια του.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Υποθέστε $n = 3$ πλειοδότες με γραμμικές συναρτήσεις αποτίμησης $v_1(x) = x$, και $v_2(x) = v_3(x) = \frac{2}{3}x$, όπου η μεταβλητή x αναπαριστά το μέρος του πόρου που λαμβάνει κάθε πλειοδότης. Στην κατάσταση $\mathbf{b} = (1/16, 1/8, 1/8)$, η κατανομή που παράγεται είναι η $d(\mathbf{b}) = (20\%, 40\%, 40\%)$ και, επομένως, οι ωφέλειες των πλειοδοτών, σύμφωνα με τον ορισμό, είναι

$$u_1(\mathbf{b}) = 20\% - 1/16 \simeq 0.138$$

και

$$u_2(\mathbf{b}) = u_3(\mathbf{b}) = \frac{2}{3} \cdot 40\% - 1/8 \simeq 0.142.$$

Τι θα γίνει στη περίπτωση που ο πλειοδότης 1 αποφασίσει να αλλάξει την προσφορά του από $1/16$ σε $1/4$; Τότε, το παιχνίδι πάει στη κατάσταση $\mathbf{b}' = (1/4, 1/8, 1/8)$, όπου η κατανομή που παράγεται είναι η $d(\mathbf{b}') = (50\%, 25\%, 25\%)$ και οι ωφέλειες των πλειοδοτών είναι

$$u_1(\mathbf{b}') = 50\% - 1/4 = 0.25$$

και

$$u_2(\mathbf{b}') = u_3(\mathbf{b}') = \frac{2}{3} \cdot 25\% - 1/8 \simeq 0.042.$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η ωφέλεια του πλειοδότη 1 αυξάνεται από 0.138 σε 0.25. Σε μια τέτοια περίπτωση, λέμε ότι ο πλειοδότης 1 έχει *κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς* (incentive to unilaterally deviate) στην προσφορά $1/4$.

Η κατάσταση $\mathbf{b}'$ είναι ευσταθής με την έννοια ότι δεν υπάρχει κάποιος πλειοδότης με κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε οποιαδήποτε προσφορά. Για παράδειγμα, ας δούμε τι συμβαίνει με τον πλειοδότη 1. Έστω ότι η προσφορά των πλειοδοτών 2 και 3 είναι $1/8$ και ότι η προσφορά του πλειοδότη 1 είναι y. Τότε, η ωφέλεια του πλειοδότη 1 στη γενική κατάσταση $\mathbf{b}_y = (y, 1/8, 1/8)$ είναι μια συνάρτηση ως προς y:

$$u_1(\mathbf{b}_y) = \frac{y}{y + 1/4} - y.$$

Η παράγωγος αυτής της συνάρτησης μηδενίζεται για $y = 1/4$ το οποίο σημαίνει ότι ο πλειοδότης 1 μεγιστοποιεί την ωφέλεια του κάνοντας μια προσφορά ίση με $1/4$. Σε μια τέτοια περίπτωση, λέμε ότι η προσφορά $1/4$ αποτελεί τη *βέλτιστη αντίδραση* (best responce) του πλειοδότη 1 στις προσφορές των υπόλοιπων πλειοδοτών. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η προσφορά $1/8$ αποτελεί τη βέλτιστη αντίδραση των πλειοδοτών 2 και 3 στις προσφορές των υπόλοιπων πλειοδοτών. Πράγματι, η ωφέλεια του πλειοδότη 2 στη γενική κατάσταση $\mathbf{b}_z = (1/4, z, 1/8)$ όπου η προσφορά του πλειοδότη 1 είναι $1/4$, η προσφορά του πλειοδότη 2 είναι z, και η προσφορά του πλειοδότη 3 είναι $1/8$, είναι μια συνάρτηση ως προς z:

$$u_2(\mathbf{b}_z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z + 3/8} - z.$$

Η παράγωγος της συνάρτησης αυτής μηδενίζεται για $z = 1/8$. Επομένως, όντως, η προσφορά $1/8$ αποτελεί τη βέλτιστη αντίδραση του πλειοδότη 2 στις προσφορές των υπόλοιπων πλειοδοτών. Το ίδιο ισχύει και για τον πλειοδότη 3 λόγω της συμμετρίας του με τον πλειοδότη 2. Μια τέτοια ευσταθής κατάσταση καλείται *ισορροπία* (equilibrium). Έχουν προταθεί διάφορες έννοιες ισορροπίας στη βιβλιογραφία. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε μερικές από αυτές.

Μια κατάσταση **b** καλείται *αμιγής ισορροπία κατά Nash* (pure Nash equilibrium) αν η ωφέλεια κάθε πλειοδότη, δεδομένων των προσφορών των υπόλοιπων πλειοδοτών, μεγιστοποιείται. Δηλαδή, σε μια αμιγή ισορροπία κατά Nash, κανένας πλειοδότης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε οποιαδήποτε άλλη προσφορά ώστε να αυξήσει την ωφέλεια του. Συμβολίζοντας με $(b_i', \mathbf{b}_{-i})$ το διάνυσμα προσφορών που προκύπτει από το **b** όταν ο πλειοδότης i αποκλίνει μονομερώς από την προσφορά b_i στην προσφορά b_i', μπορούμε να εκφράσουμε τη συνθήκη αμιγούς ισορροπίας ως

$$u_i(\mathbf{b}) \geq u_i(b_i', \mathbf{b}_{-i}), \text{ για κάθε πλειοδότη } i \text{ και κάθε προσφορά } b_i'.$$

Γενικά, είναι γνωστό ότι υπάρχουν παιχνίδια που δεν έχουν αμιγείς ισορροπίες κατά Nash[3]. Ωστόσο, οι Hajek και Gopalakrishnan [8] απέδειξαν ότι κάθε παιχνίδι αναλογικής κατανομής έχει μια μοναδική αμιγή ισορροπία κατά Nash στην οποία συγκλίνουν οι πλειοδότες[4].

Θεώρημα 1.1 (Hajek και Gopalakrishnan [8])**.** *Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής με $n \geq 2$ πλειοδότες και έστω ότι για κάθε πλειοδότη i η συνάρτηση αποτίμησης v_i που του αντιστοιχεί είναι κοίλη, γνησίως αύξουσα, και παραγωγίσιμη. Τότε, το παιχνίδι διαθέτει μια μοναδική αμιγή ισορροπία κατά Nash.*

Η προσφορά b_i κάθε πλειοδότη μπορεί να είναι πιθανοτική με την έννοια ότι είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί μια πιθανοτική κατανομή $\mathcal{B}_i$ πάνω στο σύνολο όλων των ντετερμινιστικών προσφορών του πλειοδότη. Με $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times ... \times \mathcal{B}_n$ συμβολίζουμε την κοινή πιθανοτική κατανομή που ακολουθούν τα διανύσματα προσφορών. Στόχος κάθε πλειοδότη είναι να επιλέξει την πιθανοτική προσφορά (δηλαδή, την πιθανοτική κατανομή) που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλεια του $\mathbb{E}_{\mathbf{b} \sim \mathcal{B}}[u_i(\mathbf{b})]$. Οι πιθανοτικές προσφορές των πλειοδοτών μπορούν να είναι ανεξάρτητες ή συσχετιζόμενες μεταξύ τους.

[3] Για παράδειγμα, το ταίριασμα των νομισμάτων (matching pennies) είναι ένα πολύ απλό παιχνίδι που δεν διαθέτει αμιγή ισορροπία κατά Nash.

[4] Ο Roughgarden [18] παρουσίασε μια εναλλακτική απόδειξη χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση δυναμικού η οποία εμμέσως χρησιμοποιείται και στην απόδειξη των Hajek και Gopalakrishnan.

Στη πρώτη περίπτωση, η πιθανοτική προσφορά ενός πλειοδότη καλείται *μικτή* (mixed) και ένα διάνυσμα τέτοιων μικτών προσφορών καλείται *μικτή ισορροπία κατά Nash* (mixed Nash equilibrium) αν η αναμενόμενη ωφέλεια κάθε πλειοδότη, δεδομένων των μικτών προσφορών των υπόλοιπων πλειοδοτών, μεγιστοποιείται. Με άλλα λόγια, σε μια μικτή ισορροπία κατά Nash $\mathbf{b} \sim \mathcal{B}$ κανένας πλειοδότης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε μια διαφορετική προσφορά b'_i ώστε να αυξήσει την αναμενόμενη ωφέλεια του, δηλαδή,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{b}\sim\mathcal{B}}[u_i(\mathbf{b})] \geq \mathbb{E}_{\mathbf{b}_{-i}\sim\mathcal{B}_{-i}}[u_i(b'_i, \mathbf{b}_{-i})], \text{ για κάθε πλειοδότη } i \text{ και κάθε προσφορά } b'_i.$$

Στη περίπτωση των *συσχετιζόμενων προσφορών* (correlated bids), μπορούμε να φανταστούμε ότι υπάρχει ένας συντονιστής ο οποίος ορίζει μια πιθανοτική κατανομή $\mathcal{B}$ πάνω σε όλα τα δυνατά διανύσματα ντετερμινιστικών προσφορών και συντονίζει με αυτόν τον τρόπο τη συμπεριφορά των πλειοδοτών. Ένα διάνυσμα συσχετιζόμενων προσφορών $\mathbf{b} \sim \mathcal{B}$ καλείται *συσχετιζόμενη ισορροπία* (coarse-correlated equilibrium) αν κανένας πλειοδότης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε μια διαφορετική *ντετερμινιστική* προσφορά b'_i, δηλαδή,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{b}\sim\mathcal{B}}[u_i(\mathbf{b})] \geq \mathbb{E}_{\mathbf{b}_{-i}\sim\mathcal{B}_{-1}}[u_i(b'_i, \mathbf{b}_{-i})], \text{ για κάθε πλειοδότη } i \text{ και κάθε προσφορά } b'_i.$$

Για ευκολία στην ανάγνωση, συνήθως δεν γράφουμε ρητά τις κατανομές που ακολουθούν τα διανύσματα προσφορών στους δείκτες των αναμενόμενων τιμών.

Μέχρι στιγμής έχουμε αναφερθεί σε έννοιες ισορροπίας στο *μοντέλο πλήρους πληροφόρησης* (full information setting) στο οποίο κάνουμε την (συχνά μη ρεαλιστική) υπόθεση ότι οι πλειοδότες γνωρίζουν τις συναρτήσεις αποτίμησης των υπόλοιπων πλειοδοτών. Ωστόσο, είναι φυσικό να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση αποτίμησης ενός πλειοδότη αποτελεί ιδιωτική του πληροφορία. Για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των πλειοδοτών σε τέτοιες καταστάσεις, μελετούμε έννοιες ισορροπίας και στο *μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης* (incomplete information setting) όπου κάθε πλειοδότης επιλέγει τυχαία (και ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους πλειοδότες) τη συνάρτηση αποτίμησης του $\mathbf{v}_i$ από μια πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$ πάνω σε κοίλες, μη-φθίνουσες, και μη-αρνητικές συναρτήσεις στο πεδίο $[0, 1]$. Εδώ, στόχος του πλειοδότη i είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη ωφέλεια του για κάθε πιθανή συνάρτηση αποτίμησης v_i που μπορεί να επιλέξει από την κατανομή $\mathbf{F}_i$.

Στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης υποθέτουμε ότι οι πιθανοτικές κατανομές $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \times ... \times \mathbf{F}_n$ με τις οποίες συσχετίζονται οι πλειοδότες είναι γνωστές σε όλους τους πλειοδότες. Αυτό επιτρέπει σε κάθε πλειοδότη να έχει μια εκτίμηση σχετικά με τη συμπεριφορά των υπόλοιπων πλειοδοτών. Δηλαδή, ο πλειοδότης i βασίζει την επιλογή της προσφοράς του τόσο στην ακριβή συνάρτηση αποτίμησης του v_i όσο και στις πιθανοτικές κατανομές $\mathbf{F}_{-i}$ σύμφωνα με τις οποίες οι υπόλοιποι πλειοδότες επιλέγουν τις συναρτήσεις αποτίμησης τους (και τις αντίστοιχες προσφορές τους). Συνεπώς, η προσφορά του πλειοδότη i είναι μια (πιθανώς τυχαία) συνάρτηση $b_i(\mathbf{v}_i)$.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{b}(\mathbf{v})$ αποτελούμενο από μια συνάρτηση προσφοράς για κάθε πλειοδότη (έτσι ώστε οι προσφορές διαφορετικών πλειοδοτών να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους) καλείται *ισορροπία κατά Bayes-Nash* (Bayes-Nash equilibrium) αν δεν υπάρχει πλειοδότης i με κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε κάποια διαφορετική συνάρτηση προσφοράς $b'_i(v_i)$ ώστε να αυξήσει την αναμενόμενη ωφέλεια του, για οποιαδήποτε συνάρτηση αποτίμησης v_i, δηλαδή, για κάθε πλειοδότη i και κάθε συνάρτηση προσφοράς $b'_i(v_i)$, πρέπει

$$\mathbb{E}_{\mathbf{v}\sim\mathbf{F}}[u_i(\mathbf{b}(\mathbf{v}))|v_i] \geq \mathbb{E}_{\mathbf{v}_{-i}\sim\mathbf{F}_{-i}}[u_i(b'_i(v_i), \mathbf{b}_{-i}(\mathbf{v}_{-i}))|v_i].$$

Και εδώ, μπορούμε να διακρίνουμε τις ισορροπίες σε αμιγείς, μικτές, και συσχετιζόμενες ανάλογα με το είδος των συναρτήσεων προσφοράς που χρησιμοποιούν οι πλειοδότες.

1.3 Το κόστος της αναρχίας

Το *κοινωνικό όφελος* (social welfare) μιας ντετερμινιστικής κατανομής $d = (d_1, ..., d_n)$ ορίζεται ως η συνολική αποτίμηση των πλειοδοτών για τα μέρη του πόρου που λαμβάνουν στη κατανομή d, δηλαδή,

$$\mathrm{SW}(d) = \sum_i v_i(d_i).$$

Αντίστοιχα, το κοινωνικό όφελος μιας πιθανοτικής κατανομής d ορίζεται ως η συνολική αναμενόμενη αποτίμηση των πλειοδοτών για τα μέρη του πόρου που λαμβάνουν στη κατανομή d, δηλαδή,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{SW}(d)\right] = \sum_i \mathbb{E}\left[v_i(d_i)\right].$$

Με SW^* συμβολίζουμε το βέλτιστο (αναμενόμενο) κοινωνικό όφελος, δηλαδή τη μέγιστη τιμή του κοινωνικού οφέλους για όλες τις δυνατές (πιθανοτικές) κατανομές. Είναι γνωστό, όπως θα δούμε και παρακάτω με ένα παράδειγμα, ότι το βέλτιστο κοινωνικό όφελος δεν επιτυγχάνεται αναγκαστικά σε κατάσταση ισορροπίας[5].

Το *κόστος της αναρχίας* (price of anarchy) παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην εξαιρετική εργασία των Koutsoupias και Papadimitriou [13], και αποτελεί ένα μέτρο το οποίο μας επιτρέπει να ποσοτικοποιήσουμε την ποιότητα των ισορροπιών ως προς το κοινωνικό όφελος. Τυπικά, το κόστος της αναρχίας ορίζεται ως εξής. Έστω μια κλάση ισορροπιών EQ (όπως για παράδειγμα η κλάση των αμιγών ισορροπιών κατά Nash). Τότε, το κόστος της αναρχίας ως προς την κλάση EQ ορίζεται ως ο λόγος της ελάχιστης

[5]Ένα κλασικό παράδειγμα παιχνιδιού στο οποίο εμφανίζεται αυτό το φαινόμενο είναι το δίλημμα του φυλακισμένου (prisoner's dilemma).

τιμής του (αναμενόμενου) κοινωνικού οφέλους για όλες τις κατανομές $d(\mathbf{b})$ σε κατάσταση ισορροπίας $\mathbf{b} \in \mathrm{EQ}$ προς το βέλτιστο (αναμενόμενο) κοινωνικό όφελος, δηλαδή,

$$\mathrm{PoA} = \min_{\mathbf{b} \in \mathrm{EQ}} \frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{SW}(d(\mathbf{b}))\right]}{\mathrm{SW}^*}.$$

Παρατηρήστε ότι, επειδή για κάθε ισορροπία $\mathbf{b}$ ισχύει ότι $\mathbb{E}\left[\mathrm{SW}(d(\mathbf{b}))\right] \leq \mathrm{SW}^*$, έχουμε ότι $\mathrm{PoA} \leq 1$.

Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα όπου έχουμε τρεις παίκτες με συναρτήσεις αποτίμησης $v_1(x) = x$ και $v_2(x) = v_3(x) = \frac{2}{3}x$, και το παιχνίδι βρίσκεται στην αμιγή ισορροπία κατά Nash $\mathbf{b} = (1/4, 1/8, 1/8)$ η οποία συνεπάγεται την κατανομή $d(\mathbf{b}) = (50\%, 25\%, 25\%)$. Εδώ, το κοινωνικό όφελος είναι

$$\mathrm{SW}(d(\mathbf{b})) = 50\% + 2 \cdot \frac{2}{3} 25\% = 0.8325.$$

Ωστόσο, το βέλτιστο κοινωνικό όφελος είναι $\mathrm{SW}^* = 1$ και επιτυγχάνεται στη κατάσταση $\mathbf{b}' = (1, 0, 0)$ η οποία συνεπάγεται την κατανομή $d(\mathbf{b}') = (100\%, 0\%, 0\%)$. Λόγω της ύπαρξης αυτού του παραδείγματος έχουμε ότι το κόστος της αναρχίας για παιχνίδια αναλογικής κατανομής ως προς αμιγείς ισορροπίες κατά Nash είναι το πολύ περίπου 83% (στη πραγματικότητα είναι λίγο χειρότερο). Γενικά, θέλουμε να παρέχουμε εγγυήσεις απόδοσης για τις καταστάσεις ισορροπίας, δηλαδή, να βρούμε αυστηρά φράγματα για το κόστος της αναρχίας.

Οι Johari και Tsitsiklis [10] ήταν οι πρώτοι που εξέτασαν την ποιότητα των αναλογικών κατανομών ως προς το κοινωνικό όφελος. Εστίασαν σε αμιγείς ισορροπίες κατά Nash και απέδειξαν ένα αυστηρό φράγμα $3/4$ για το κόστος της αναρχίας. Η ανάλυση τους βασίζεται στη παρατήρηση ότι η χειρότερη περίπτωση προκύπτει όταν οι πλειοδότες έχουν *γραμμικές* συναρτήσεις αποτίμησης (όπως στο παράδειγμα μας). Πιο συγκεκριμένα, οι Johari και Tsitsiklis παρατήρησαν ότι μια αμιγής ισορροπία κατά Nash σε ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής όπου οι πλειοδότες έχουν κοίλες συναρτήσεις αποτίμησης είναι επίσης αμιγής ισορροπία κατά Nash σε ένα παιχνίδι όπου κάθε πλειοδότης έχει μια *γραμμική* συνάρτηση αποτίμησης με κλίση ίση με την παράγωγο της αρχικής συνάρτησης αποτίμησης για το μέρος του πόρου που λαμβάνει ο πλειοδότης στην ισορροπία αυτή. Το γεγονός ότι το βέλτιστο κοινωνικό όφελος στο νέο παιχνίδι είναι τουλάχιστον όσο το κοινωνικό όφελος στο αρχικό παιχνίδι τους επιτρέπει να θεωρήσουν την απλούστερη περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων αποτίμησης στην ανάλυση τους. Το φράγμα για το κόστος της αναρχίας προκύπτει με την επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος, στόχος του οποίου είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους της αναρχίας υπό περιορισμούς ισορροπίας. Μια εναλλακτική απόδειξη για το αποτέλεσμα της εργασίας [10], χωρίς τη χρήση αυτού του επιχειρήματος, παρουσιάστηκε στην εργασία [18] από τον Roughgarden (βλέπε επίσης και την εργασία [9]). Στο κεφάλαιο 2 θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το αποτέλεσμα των Johari και Tsitsiklis.

Στόχος της εργασίας αυτής είναι η απόδειξη φραγμάτων για το κόστος της αναρχίας για πιο γενικές κλάσεις ισορροπιών. Δυστυχώς, ο μετασχηματισμός που αξιοποίησαν οι Johari και Tsitsiklis δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε πιο γενικές κλάσεις ισορροπιών αφού το μέρος του πόρου που λαμβάνει κάθε παίκτης είναι, γενικά, μια τυχαία μεταβλητή. Αυτό είναι μια κοινή δυσκολία η οποία εκδηλώνεται κατά την ανάλυση παιχνιδιών, όταν αποχωρούμε από τις αμιγείς ισορροπίες κατά Nash και την πλήρη πληροφόρηση. Συγκεκριμένα, οι ισορροπίες κατά Bayes-Nash έχουν τόσο πλούσια δομή που, συνήθως, η ανάλυση για το κόστος της αναρχίας εξετάζει την ποιότητα αυτών των ισορροπιών χωρίς να λαμβάνει υπόψη τη δομή τους. Αντίθετα, η ανάλυση γίνεται φράσσοντας την ωφέλεια κάθε παίκτη σε κατάλληλα επιλεγμένες μονομερείς αποκλίσεις των πλειοδοτών οι οποίες αποκαλύπτουν τη σχέση που έχει το κοινωνικό όφελος σε κατάσταση ισορροπίας με το βέλτιστο κοινωνικό όφελος. Αυτή η προσέγγιση έχει χρησιμοποιηθεί σε πληθώρα προηγούμενων εργασιών οι οποίες εστιάζουν κυρίως σε δημοπρασίες (για παράδειγμα, βλέπε τις εργασίες [1, 2, 4, 7, 11, 20, 23]) και είναι η προσέγγιση που ακολουθούμε και σε αυτή την εργασία όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3 όπου παρουσιάζουμε τα κύρια αποτελέσματα μας.

Οι Syrgkanis και Tardos [23] παρουσιάζουν ένα γενικό πλαίσιο ανάλυσης για την ευρεία κλάση των *ομαλών μηχανισμών* (smooth mechanisms) που μελέτησε ο Roughgarden [19, 20] (βλέπε επίσης [22]). Για να ορίσουμε πότε ένα μηχανισμός είναι ομαλός, ας υποθέσουμε έναν μηχανισμό ο οποίος δέχεται προσφορές από τους πλειοδότες (κάθε ένας από τους οποίους συσχετίζεται με μια συνάρτηση αποτίμησης v_i) και στην κατάσταση $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ παράγει μια κατανομή $d(\mathbf{b}) = (d_1, ..., d_n)$ και ορίζει πληρωμές $p(\mathbf{b}) = (p_1, ..., p_2)$ για τους πλειοδότες (στη περίπτωση του μηχανισμού αναλογικής κατανομής έχουμε ότι $p_i = b_i$). Ένας τέτοιος μηχανισμός καλείται (λ, μ)-ομαλός αν για όλες τις καταστάσεις $\mathbf{b}$ και $\mathbf{b}^*$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$\sum_i u_i(b_i^*, \mathbf{b}_{-i}) \geq \lambda \sum_i v_i(d(\mathbf{b}^*)) - \mu \sum_i p_i(\mathbf{b}).$$

Μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων, οι Syrgkanis και Tardos δείχνουν ένα κάτω φράγμα 26.8% για το κόστος της αναρχίας για συσχετιζόμενες ισορροπίες και μικτές ισορροπίες κατά Bayes-Nash για παιχνίδια αναλογικής κατανομής. Στην ανάλυση τους, φράσσουν την ωφέλεια που έχει κάθε πλειοδότης σε ισορροπία από την ωφέλεια που θα είχε αν απέκλινε μονομερώς σε μια κατάλληλα ορισμένη *πιθανοτική* προσφορά με πιθανοτική κατανομή η οποία εξαρτάται μόνο από την βέλτιστη κατανομή και την συνάρτηση αποτίμησης του πλειοδότη που αποκλίνει (μια προσέγγιση η οποία έχει επίσης χρησιμοποιηθεί σε διαφορετικά πλαίσια στις εργασίες [2, 11, 22, 24]). Στο κεφάλαιο 2 θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Σε αντίθεση με την εργασία των Syrgkanis και Tardos, η προσφορά απόκλισης που θεωρούμε εμείς είναι *ντετερμινιστική* και εξαρτάται από τις προσφορές των πλειοδοτών σε κατάσταση ισορροπίας (αυτό είναι στο ίδιο πνεύμα με την πρόσφατη ανάλυση των Feldman et al. [7] για παιχνίδια δημοπρασιών). Πιο συγκεκριμένα, η προσφορά απόκλισης που χρησιμοποιούμε ορίζεται ως το γινόμενο του αναμενόμενου μέρους του πόρου που λαμβάνει ο πλειοδότης που αποκλίνει στη βέλτιστη κατανομή και της αναμενόμενης τιμής του αθροίσματος των προσφορών των υπόλοιπων πλειοδοτών σε κατάσταση ισορροπίας.

1.4 Πλειοδότες με περιορισμένο προϋπολογισμό

Είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι οι πλειοδότες δεν διαθέτουν απεριόριστους χρηματικούς πόρους. Για τον λόγο αυτό, επεκτείνουμε το μοντέλο που συζητήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους προσθέτοντας περιορισμούς προϋπολογισμού στους πλειοδότες. Εδώ, κάθε πλειοδότης i έχει έναν μη-αρνητικό προϋπολογισμό c_i ο οποίος εκφράζει την *ικανότητα* που έχει ο πλειοδότης *να πληρώσει* ώστε να αγοράσει ένα μέρος του πόρου (ability-to-pay). Προφανώς, η προσφορά που κάνει ένας πλειοδότης δεν πρέπει να ξεπερνά τον διαθέσιμο προϋπολογισμό του. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να οδηγήσει σε ισορροπίες με εξαιρετικά χαμηλό κοινωνικό όφελος σε σχέση με το βέλτιστο δυνατό (ο ορισμός του οποίου δεν λαμβάνει υπόψη προϋπολογισμούς).

Ακολουθώντας τις εργασίες [6] και [23], χρησιμοποιούμε ως αντικειμενική συνάρτηση το *αποτελεσματικό όφελος* (effective welfare) για να εξετάσουμε την ποιότητα των ισορροπιών στη περίπτωση όπου οι πλειοδότες έχουν περιορισμένο προϋπολογισμό. Το αποτελεσματικό όφελος μιας (ντετερμινιστικής) κατανομής $d = (d_1, ..., d_n)$ ορίζεται ως

$$\mathrm{EW}(d) = \sum_i \min\{v_i(d_i), c_i\}.$$

Παρατηρήστε ότι ο ορισμός είναι ανάλογος του ορισμού του κοινωνικού οφέλους. Η κύρια διαφορά είναι ότι η αποτίμηση κάθε πλειοδότη φράσσεται εκ των άνω από τον προϋπολογισμό του. Διαισθητικά, το αποτελεσματικό όφελος εκφράζει το γεγονός ότι το μέγιστο χρηματικό ποσό που ένας πλειοδότης θα έδινε για να αγοράσει ένα συγκεκριμένο μέρος του πόρου δεν μπορεί να ξεπερνά τον προϋπολογισμό του. Για τη περίπτωση πιθανοτικών κατανομών d, επεκτείνουμε τον ορισμό του αποτελεσματικού οφέλους ως

$$\mathrm{EW}(d) = \sum_i \min\{\mathbb{E}\left[v_i(d_i)\right], c_i\}.$$

Με EW^* συμβολίζουμε το βέλτιστο αποτελεσματικό όφελος, δηλαδή, τη μέγιστη τιμή του αποτελεσματικού οφέλους για όλες τις δυνατές (πιθανοτικές) κατανομές. Το κόστος της αναρχίας ως προς το αποτελεσματικό όφελος (για κάποια κλάση ισορροπιών) ορίζεται, και πάλι, ως η ελάχιστη τιμή του αποτελεσματικού οφέλους για όλες τις κατανομές $d(\mathbf{b})$ σε ισορροπία $\mathbf{b}$ προς το βέλτιστο αποτελεσματικό όφελος, δηλαδή,

$$\mathrm{PoA} = \min_{\mathbf{b} \in \mathrm{EQ}} \frac{\mathrm{EW}(d(\mathbf{b}))}{\mathrm{EW}^*}.$$

Στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης, υποθέτουμε ότι τόσο ο προϋπολογισμός $\mathbf{c}_i$ του πλειοδότη i όσο και η συνάρτηση αποτίμησης του $\mathbf{v}_i$ είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν μια πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$ η οποία συσχετίζεται με τον πλειοδότη i και ορίζεται πάνω σε ζευγάρια αποτίμησης-προϋπολογισμού. Σε αυτή τη περίπτωση, ορίζουμε το αποτελεσματικό όφελος ως

$$\mathrm{EW}(d) = \sum_i \mathbb{E}_{(\mathbf{v}_i,\mathbf{c}_i)\sim\mathbf{F}_i}\left[\min\{\mathbb{E}_{(\mathbf{v}_{-i},\mathbf{c}_{-i})\sim\mathbf{F}_{-i}}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\right],$$

όπου η δεύτερη αναμενόμενη τιμή λαμβάνει υπόψη όλα τα ζευγάρια αποτίμησης-προϋπολογισμού των υπόλοιπων πλειοδοτών αφού το αντίστοιχο ζευγάρι του πλειοδότη i έχει οριστεί. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς στις αποδείξεις του κεφαλαίου 3, δεν γράφουμε τους δείκτες στις αναμενόμενες τιμές. Ο συγκεκριμένος ορισμός του αναμενόμενου οφέλους ενδεχομένως να φαίνεται παράδοξος και ίσως ένας πιο λογικός ορισμός θα ήταν να θεωρήσουμε ότι το αναμενόμενο όφελος είναι ίσο με την αναμενόμενη τιμή του αναμενόμενου οφέλους όπως αυτό έχει οριστεί για ντετερμινιστικές κατανομές. Ωστόσο, παρατηρήστε ότι λόγω της *κατάρας του νικητή* (winner's curse), οι πλειοδότες τείνουν να κάνουν μεγάλες προσφορές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το κόστος της αναρχίας να τείνει στο μηδέν καθώς το αποτελεσματικό όφελος σε κατάσταση ισορροπίας είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με το βέλτιστο αποτελεσματικό όφελος το οποίο δεν λαμβάνει υπόψη προϋπολογισμούς.

Κεφάλαιο 2
Προηγούμενα αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια γνωστά αποτελέσματα από τη σχετική βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα, πρώτα θα δούμε πως οι Johari και Tsitsiklis απέδειξαν το φράγμα $3/4$ για αμιγείς ισορροπίες κατά Nash και στη συνέχεια θα δούμε τα φράγματα που παρουσίασαν οι Syrgkanis και Tardos για συσχετιζόμενες ισορροπίες και ισορροπίες κατά Bayes-Nash. Σε μερικά σημεία, οι αποδείξεις που παρουσιάζονται στη συνέχεια, απλοποιούν τις πρωτότυπες.

2.1 Αμιγείς ισορροπίες κατά Nash

Οι Johari και Tsitsiklis [10] μελέτησαν παιχνίδια αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης σε καταστάσεις αμιγής ισορροπίας κατά Nash και απέδειξαν ένα αυστηρό φράγμα $3/4$ για το κόστος της αναρχίας ως προς το κοινωνικό όφελος. Η ανάλυση τους στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η χειρότερη περίπτωση προκύπτει όταν οι πλειοδότες έχουν γραμμικές συναρτήσεις αποτίμησης. Πιο συγκεκριμένα, έστω ένα γενικό παιχνίδι αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης στο οποίο κάθε πλειοδότης i έχει μια κοίλη συνάρτηση αποτίμησης v_i και έστω μια κατανομή $d = (d_1, ..., d_n)$ η οποία βρίσκεται σε κατάσταση αμιγούς ισορροπίας κατά Nash. Τότε, η κατανομή d βρίσκεται σε κατάσταση αμιγούς ισορροπίας κατά Nash και στο παιχνίδι αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης όπου κάθε παίκτης i έχει μια γραμμική συνάρτηση αποτίμησης με κλίση την παράγωγο της v_i στο σημείο d_i, δηλαδή, $v_i'(d_i)$.

Λήμμα 2.1 (Johari και Tsitsiklis [10]). *Έστω $d = (d_1, ..., d_n)$ μια οποιαδήποτε εφικτή κατανομή και $x = (x_1, ..., x_n)$ μια βέλτιστη κατανομή. Τότε, ισχύει ότι*

$$\frac{\mathrm{SW}(d)}{\mathrm{SW}^*} \geq \frac{\sum_i v'(d_i)d_i}{\max_i\{v_i'(d_i)\}}.$$

Απόδειξη. Έστω ένας πλειοδότης i με μια κοίλη συνάρτηση αποτίμησης v_i τέτοια ώστε $v_i(0) \geq 0$. Λόγω της κοιλότητας της v_i, έχουμε ότι $v_i(x_i) \leq v_i(d_i) + v'(d_i)(x_i - d_i)$ το οποίο συνεπάγεται ότι ο λόγος του κοινωνικού οφέλους στη κατανομή d προς το κοινωνικό όφελος στη βέλτιστη κατανομή x είναι το εξής:

$$\frac{\mathrm{SW}(d)}{\mathrm{SW}^*} \geq \frac{\sum_i(v_i(d_i) - v_i'(d_i)d_i) + \sum_i v_i'(d_i)d_i}{\sum_i(v_i(d_i) - v_i'(d_i)d_i) + \sum_i v_i'(x_i)x_i}.$$

Εφόσον η x είναι μια εφικτή κατανομή ισχύει ότι $\sum_i x_i = 1$ και, επομένως, μπορούμε να φράξουμε τον δεξιότερο όρο του παρανομαστή ως εξής:

$$\sum_i v_i'(x_i)x_i \leq \sum_i \max_i\{v_i'(x_i)\}x_i = \max_i\{v_i'(x_i)\} \sum_i x_i = \max_i\{v_i'(x_i)\}.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα, μπορούμε να φράξουμε τον λόγο του κοινωνικού οφέλους στη κατανομή d προς το βέλτιστο κοινωνικό όφελος ως εξής:

$$\frac{\mathrm{SW}(d)}{\mathrm{SW}^*} \geq \frac{\sum_i(v_i(d_i) - v_i'(d_i)d_i) + \sum_i v_i'(d_i)d_i}{\sum_i(v_i(d_i) - v_i'(d_i)d_i) + \max_i\{v_i'(x_i)\}}.$$

Τώρα, παρατηρήστε ότι επειδή έχουμε υποθέσει ότι $v_i(0) \geq 0$ και λόγω του ότι η συνάρτηση αποτίμησης v_i είναι κοίλη, έχουμε ότι $v_i'(d_i)d_i \leq v_i(d_i)$. Αυτό σημαίνει ότι η έκφραση $\sum_i(v_i(d_i) - v_i'(d_i)d_i)$ είναι μη-αρνητική. Συνεπώς, εφόσον $\sum_i v_i'(d_i)d_i \leq \max_i\{v_i'(x_i)\}$, μπορούμε να απομακρύνουμε τον όρο $\sum_i(v_i(d_i) - v_i'(d_i)d_i)$ τόσο από τον αριθμητή όσο και από τον παρανομαστή, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Αξιοποιώντας το Λήμμα 2.1, οι Johari και Tsitsiklis απέδειξαν το φράγμα $3/4$ για το κόστος της αναρχίας ως προς αμιγείς ισορροπίες κατά Nash επιλύοντας ένα απλουστευμένο γραμμικό πρόγραμμα. Ο στόχος αυτού του γραμμικού προγράμματος είναι η ελαχιστοποίηση του λόγου μεταξύ του κοινωνικού οφέλους μιας οποιασδήποτε εφικτής κατανομής προς το βέλτιστο κοινωνικό όφελος υπό περιορισμούς ισορροπίας. Εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά επιχειρήματα ώστε να αποδείξουμε το φράγμα για τη περίπτωση όπου κάθε πλειοδότης i έχει μια γραμμμική συνάρτηση αποτίμησης της μορφής $v_i(x) = \frac{v_i(x_i)}{x_i}x$, όπου $x_i \in [0, 1]$ είναι το μέρος του πόρου που κατανέμεται στον πλειοδότη i σε μια βέλτιστη κατανομή. Σε κατάσταση ισορροπίας, κανένας πλειοδότης i δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε οποιαδήποτε άλλη προσφορά καθώς η ωφέλεια του μεγιστοποιείται. Αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος της ωφέλειας του πλειοδότη i σε κατάσταση ισορροπίας είναι ίση με μηδέν. Επιλύοντας την αντίστοιχες εξισώσεις, μπορούμε να βρούμε τις προσφορές που μεγιστοποιούν τις ωφέλειες των πλειοδοτών και να φράξουμε το κόστος της αναρχίας.

Θεώρημα 2.2 (Johari και Tsitsiklis [10]). *Το κόστος της αναρχίας για παιχνίδια αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης ως προς αμιγείς ισορροπίες κατά Nash είναι τουλάχιστον* $3/4$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ μια αμιγής ισορροπία κατά Nash και έστω $B_{-i} = \sum_{j \neq i} b_j$ το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών στην ισορροπία $\mathbf{b}$ εκτός της προσφοράς του πλειοδότη i. Η ωφέλεια του πλειοδότη i ως συνάρτηση της προσφοράς του b_i είναι η

$$u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) = v_i\left(\frac{b_i}{b_i + B_{-i}}\right) - b_i = \frac{v_i(x_i)}{x_i}\frac{b_i}{b_i + B_{-i}} - b_i$$

και μεγιστοποιείται (ως προς b_i) για

$$b_i = \sqrt{\frac{v_i(x_i)}{x_i}B_{-i}} - B_{-i}.$$

Συμβολίζοντας με $B = \sum_i b_i$ το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών στην ισορροπία **b**, έχουμε ότι $B = b_i + B_{-i} = \sqrt{\frac{v_i(x_i)}{x_i}B_{-i}}$ και η ωφέλεια του πλειοδότη i στην ισορροπία είναι

$$\begin{aligned} u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) &= \frac{b_i}{b_i + B_{-i}}\frac{v_i(x_i)}{x_i} - b_i \\ &= \frac{\sqrt{\frac{v(x_i)}{x_i}B_{-i}} - B_{-i}}{\sqrt{\frac{v(x_i)}{x_i}B_{-i}}}\frac{v_i(x_i)}{x_i} - \sqrt{\frac{v(x_i)}{x_i}B_{-i}} + B_{-i} \\ &= \frac{v_i(x_i)}{x_i} - 2\sqrt{\frac{v(x_i)}{x_i}B_{-i}} + B_{-i} \\ &= \frac{v_i(x_i)}{x_i} - 2B + \frac{x_i}{v_i(x_i)}B^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\alpha - 2\beta + \frac{\beta^2}{\alpha} \geq \frac{3}{4}\alpha - \beta$ για κάθε $\alpha > 0$ και β, και θέτοντας $\alpha = \frac{v_i(x_i)}{x_i}$ και $\beta = B$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) &\geq \frac{3}{4}\frac{v_i(x_i)}{x_i} - B \\ &= \frac{1}{x_i}\left(\frac{3}{4}v_i(x_i) - Bx_i\right) \\ &\geq \frac{3}{4}v_i(x_i) - Bx_i. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας την παραπάνω ανισότητα για όλους τους πλειοδότες, έχουμε ότι

$$\sum_i u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) \geq \frac{3}{4}\sum_i v_i(x_i) - B\sum_i x_i.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sum_i x_i = 1$ και τον ορισμό της ωφέλειας κάθε πλειοδότη από όπου προκύπτει ότι $\mathrm{SW}(b_i, \mathbf{b}_{-i}) = \sum_i u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) + B$. □

Το συγκεκριμένο φράγμα είναι αυστηρό καθώς υπάρχει ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης με γραμμικές συναρτήσεις αποτίμησης έτσι ώστε το κοινωνικό όφελος της μοναδικής ισορροπίας κατά Nash του παιχνιδιού να είναι το πολύ $3/4$ φορές χειρότερο του βέλτιστου δυνατού.

Λήμμα 2.3 (Johari και Tsitsiklis [10])**.** *Υπάρχει ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης έτσι ώστε το κόστος της αναρχίας ως προς αμιγείς ισορροπίες κατά Nash να είναι το πολύ* $3/4$.

Απόδειξη. Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόροσης με n πλειοδοτές έτσι ώστε ο πλειοδότης 1 να έχει συνάρτηση αποτίμησης $v_1(x) = x$ και κάθε πλειοδότης $i \geq 2$ να έχει συνάρτηση αποτίμησης $v_i(x) = x/2$. Έστω $\mathbf{b}$ μια αμιγής ισορροπία κατά Nash αυτού του παιχνιδιού. Λόγω συμμετρίας, όλοι οι πλειοδότες $i \geq 2$ κάνουν την ίδια προσφορά $b_i = b$. Η ωφέλεια του πλειοδότη $i \geq 2$ ως συνάρτηση της προσφοράς του b_i είναι

$$u_i(b_i, \mathbf{b}_{-i}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_i}{b_i + b_1 + (n-2)b} - b_i.$$

Μηδενίζοντας την παράγωγο αυτής της συνάρτησης και θέτοντας $b_i = b$, έχουμε ότι

$$2(b_1 + (n-1)b)^2 = b_1 + (n-2)b. \tag{2.1}$$

Αντίστοιχα, η ωφέλεια του πλειοδότη 1 ως συνάρτηση της προσφοράς του b_1 είναι

$$u_1(b_1, \mathbf{b}_{-1}) = \frac{b_1}{b_1 + (n-1)b} - b_1.$$

Μηδενίζοντας την παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης, έχουμε ότι

$$(b_1 + (n-1)b)^2 = (n-1)b. \tag{2.2}$$

Συνδυάζοντας της σχέσεις (2.1) και (2.2), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σε κατάσταση ισορροπίας ο πλειοδότης 1 κάνει προσφορά $b_1 = nb$. Επομένως, ο μισός πόρος κατανέμεται στον πλειοδότη 1 και ο υπόλοιπος μισός πόρος κατανέμεται ομοιόμορφα στους υπόλοιπους $n-1$ πλειοδότες. Το κοινωνικό όφελος στη κατάσταση ισορροπίας τείνει στο $3/4$ καθώς το πλήθος n των πλειοδοτών τείνει στο άπειρο, ενώ το βέλτιστο κοινωνικό όφελος είναι 1 και επιτυγχάνεται στην κατάσταση όπου ολόκληρος ο πόρος κατανέμεται στον πλειοδότη 1. □

2.2 Συσχετιζόμενες ισορροπίες και ισορροπίες κατά Bayes-Nash

Οι Syrgkanis και Tardos [23] μελέτησαν τον μηχανισμό αναλογικής κατανομής ως μέλος της κλάσης των ομαλών μηχανισμών και απέδειξαν ένα κάτω φράγμα $2 - \sqrt{3} \approx 26.8\%$ για το κόστος της αναρχίας ως προς συσχετιζόμενες ισορροπίες και ισορροπίες κατά Bayes-Nash στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης και στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης, αντίστοιχα. Η ανάλυση τους στηρίζεται σε μια γενική μέθοδο εύρεσης φραγμάτων για το κόστος της αναρχίας παιχνιδιών τα οποία ορίζονται από ομαλούς μηχανισμούς. Η μέθοδος φράσσει την ωφέλεια που έχει κάθε πλειοδότης σε κατάσταση ισορροπίας από την ωφέλεια που θα είχε αν απέκλινε μονομερώς σε μια προσφορά η οποία εξαρτάται από το μέρος του πόρου που ο πλειοδότης λαμβάνει σε μια βέλτιστη κατανομή και το φράγμα ακολουθεί από το γεγονός ότι ο μηχανισμός είναι ομαλός (βλέπε παράγραφο 1.3). Για την περίπτωση των συσχετιζόμενων ισορροπιών έχουμε το εξής γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.4 (Syrgkanis και Tardos [23])**.** *Αν ένας μηχανισμός είναι (λ, μ)-ομαλός, τότε το αναμενόμενο κοινωνικό όφελος σε μια οποιαδήποτε συσχετιζόμενη ισορροπία του επαγόμενου παιχνιδιού είναι τουλάχιστον $\frac{\lambda}{\max\{1,\mu\}}$ φορές το βέλτιστο κοινωνικό όφελος.*

Απόδειξη. Έστω ένας (λ, μ)-ομαλός μηχανισμός ο οποίος δέχεται μια προσφορά b_i από κάθε πλειοδότη i (ο οποίος έχει μια συνάρτηση αποτίμησης v_i) και στη κατάσταση $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ παράγει μια κατανομή $d(\mathbf{b}) = (d_1, ..., d_n)$ και ορίζει πληρωμές $p(\mathbf{b}) = (p_1, ..., p_n)$ για τους πλειοδότες. Τότε, για όλες τις καταστάσεις $\mathbf{b}$ και $\mathbf{b}^*$ ισχύει η ανισότητα

$$\sum_i \mathbb{E}\left[u_i(b_i^*, \mathbf{b}_{-i})\right] \geq \lambda \sum_i \mathbb{E}\left[v_i(d(\mathbf{b}^*))\right] - \mu \sum_i E[p_i(\mathbf{b})]. \tag{2.3}$$

Έστω x_i η βέλτιστη κατανομή για τον πλειοδότη i. Σε μια συσχετιζόμενη ισορροπία $\mathbf{b}$ δεν υπάρχει πλειοδότης i με κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε οποιαδήποτε ντετερμινιστική προσφορά συμπεριλαμβανομένης και της προσφοράς b_i^* που του εγγυόταν την κατανομή x_i, δηλαδή,

$$\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\right] \geq \mathbb{E}\left[u_i(b_i^*, \mathbf{b}_{-i})\right]$$

Αθροίζοντας την παραπάνω ανισότητα για όλους τους πλειοδότες και χρησιμοποιώντας την ανισότητα (2.3), έχουμε ότι

$$\sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\right] \geq \sum_i \mathbb{E}\left[u_i(b_i^*, \mathbf{b}_{-i})\right] \geq \lambda \sum_i \mathbb{E}\left[v_i(d(\mathbf{b}^*))\right] - \mu \sum_i E[p_i(\mathbf{b})].$$

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι $u_i(\mathbf{b}) = v_i(d(\mathbf{b})) - p_i(\mathbf{b})$ καθώς και το γεγονός ότι $\mathrm{SW}^* = \sum_i \mathbb{E}\left[v_i(d(\mathbf{b}^*))\right]$, έχουμε ότι

$$\max\{1, \mu\}\mathrm{SW}(d(\mathbf{b})) \geq \sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\right] + \mu \sum_i E[p_i(\mathbf{b})] \geq \lambda \mathrm{SW}^*$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πιο συγκεκριμένα, για την περίπτωση μικτών ισορροπιών κατά Bayes-Nash στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης, οι Syrgkanis και Tardos απέδειξαν το επόμενο θεώρημα η απόδειξη του οποίου ακολουθεί την γενική μέθοδο που συζητήσαμε παραπάνω.

Θεώρημα 2.5 (Syrgkanis and Tardos [23]). *Το κόστος της αναρχίας για παιχνίδια αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης ως προς μικτές ισορροπίες κατά Bayes-Nash είναι τουλάχιστον* $2 - \sqrt{3}$.

Απόδειξη. Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης στο οποίο η συνάρτηση αποτίμησης $\mathbf{v}_i$ του πλειοδότη i επιλέγεται τυχαία από μια πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους πλειοδότες. Έστω $\mathbf{b}$ μια μικτή ισορροπία κατά Bayes-Nash η οποία συνεπάγεται την κατανομή d και έστω B η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών. Με B_{-i} συμβολίζουμε το άθροισμα όλων των προσφορών εκτός της προσφοράς του πλειοδότη i. Εφόσον η κατάσταση $\mathbf{b}$ είναι ισορροπία, δεν υπάρχει πλειοδότης i με κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε οποιαδήποτε (πιθανοτική) προσφορά. Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη ωφέλεια του πλειοδότη i

όταν αποκλίνει μονομερώς στην προσφορά y αποτελεί κάτω φράγμα για την αναμενόμενη ωφέλεια του στην ισορροπία $\mathbf{b}$, δηλαδή,

$$\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\right] \geq \mathbb{E}\left[u_i(y, \mathbf{b}_{-i})\right].$$

Υποθέστε ότι ο πλειοδότης i αποκλίνει μονομερώς και επιλέγει ομοιόμορφα μια τυχαία προσφορά $\theta_i \sim U[0, \lambda v_i(x_i)]$, όπου λ είναι μια σταθερά η τιμή της οποίας θα οριστεί στη συνέχεια και x_i είναι το μέρος του πόρου που ο πλειοδότης i λαμβάνει σε μια βέλτιστη κατανομή. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function, pdf) της τυχαίας μεταβλητής θ_i είναι

$$f(\theta_i) = \frac{1}{\lambda v_i(x_i)}$$

και η μέση τιμή της είναι

$$\mathbb{E}\left[\theta_i\right] = \frac{1}{2}\lambda v_i(x_i).$$

Η αναμενόμενη ωφέλεια του πλειοδότη i όταν αποκλίνει μονομερώς στη πιθανοτική προσφορά θ_i είναι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u_i(\theta_i, \mathbf{b}_{-i})\right] &= \mathbb{E}\left[v_i\left(\frac{\theta_i}{\theta_i + B_{-i}}\right) - \theta_i\right] \\
&= \int_0^{\lambda v_i(x_i)} v_i\left(\frac{y}{y + B_{-i}}\right)\frac{1}{\lambda v_i(x_i)}dy - \frac{1}{2}\lambda v_i(x_i).
\end{aligned}$$

Γενικά, αν ο πλειοδότης i κάνει προσφορά μεγαλύτερη της $\frac{xB_{-i}}{1-x}$, τότε το μέρος του πόρου που λαμβάνει είναι τουλάχιστον x, για κάθε $x \in [0,1]$. Επομένως, για όλες τις προσφορές $y \geq \frac{x_i B_{-i}}{\mu - x_i}$, το μέρος του πόρου που λαμβάνει ο πλειοδότης i είναι τουλάχιστον x_i/μ. Επιπλέον, εφόσον η συνάρτηση αποτίμησης v_i είναι κοίλη, έχουμε ότι $v_i\left(\frac{x_i}{\mu}\right) \geq \frac{1}{\mu}v_i(x_i)$. Επομένως, μπορούμε να φράξουμε την αναμενόμενη ωφέλεια του πλειοδότη i ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u_i(\theta_i, \mathbf{b}_{-i})\right] &\geq \int_{\frac{x_i B_{-i}}{\mu - x_i}}^{\lambda v_i(x_i)} \frac{v_i(x_i/\mu)}{\lambda v_i(x_i)}dy - \frac{1}{2}\lambda v_i(x_i) \\
&\geq \int_{\frac{x_i B_{-i}}{\mu - x_i}}^{\lambda v_i(x_i)} \frac{1}{\lambda\mu}dy - \frac{1}{2}\lambda v_i(x_i) \\
&= \frac{1}{\lambda\mu}\left(\lambda v_i(x_i) - \frac{x_i B_{-i}}{\mu - x_i}\right) - \frac{1}{2}\lambda v_i(x_i) \\
&= \frac{1}{\mu}v_i(x_i) - \frac{1}{\lambda\mu}\frac{x_i B_{-i}}{\mu - x_i} - \frac{1}{2}\lambda v_i(x_i) \\
&= \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{2}\right)v_i(x_i) - \frac{1}{\lambda\mu}\frac{x_i B_{-i}}{\mu - x_i} \\
&\geq \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{2}\right)v_i(x_i) - \frac{1}{\lambda\mu}\frac{x_i B}{\mu - 1}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ακολουθεί από το γεγονός ότι $B_{-i} \leq B$ και $x_i \leq 1$. Αθροίζοντας την παραπάνω ανισότητα για όλους τους πλειοδότες, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sum_i x_i = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\theta_i, \mathbf{b}_{-i})\right] &\geq \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{2}\right) \sum_i v_i(x_i) - \frac{1}{\lambda\mu} \sum_i \frac{x_i B}{\mu - 1} \\ &= \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{2}\right) \sum_i v_i(x_i) - \frac{1}{\lambda\mu(\mu-1)} B. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Θέτοντας $\lambda = \frac{1}{\mu(\mu-1)}$ και παρατηρώντας ότι $\mathrm{SW}^* = \sum_i v_i(x_i)$, παίρνουμε την ανισότητα

$$\sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\theta_i, \mathbf{b}_{-i})\right] \geq \frac{2\mu - 3}{2\mu(\mu-1)} \sum_i v_i(x_i) - B.$$

Η ποσότητα $\frac{2\mu-3}{2\mu(\mu-1)}$ μεγιστοποιείται σε $2 - \sqrt{3}$ για $\mu = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})$ και, επομένως, έχουμε ότι

$$\mathrm{SW}(d) = \sum_i v_i(d_i) = \sum_i u_i(\mathbf{b}) + B \geq \sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\theta_i, \mathbf{b}_{-i})\right] + B \geq (2 - \sqrt{3})\mathrm{SW}^*.$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Παρατηρήστε ότι με την παραπάνω απόδειξη, δείξαμε ότι ο μηχανισμός αναλογικής κατανομής είναι $(2 - \sqrt{3}, 1)$-ομαλός.

Κεφάλαιο 3
Βελτιωμένα φράγματα για το κόστος της αναρχίας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα κύρια αποτελέσματα αυτής της διπλωματικής εργασίας όπως αυτά δημοσιεύτηκαν στην εργασία [3]. Πρώτα παρουσιάζουμε βελτιωμένα φράγματα για το κόστος της αναρχίας ως προς το κοινωνικό όφελος και στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα πρώτα σταθερά φράγματα για το κόστος της αναρχίας ως προς το αποτελεσματικό όφελος όταν οι πλειοδότες έχουν περιορισμένους προϋπολογισμούς.

3.1 Φράγματα σχετικά με το κοινωνικό όφελος

Σε αυτή τη παράγραφο, παρουσιάζουμε βελτιωμένα φράγματα για το κόστος της αναρχίας παιχνιδιών αναλογικής κατανομής ως προς το κοινωνικό όφελος (δηλαδή, οι πλειοδότες διαθέτουν απεριόριστο προϋπολογισμό). Θεωρούμε τόσο συσχετιζόμενες ισορροπίες στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης όσο και ισορροπίες κατά Bayes-Nash στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης. Οι αποδείξεις μας χρησιμοποιούν το παρακάτω λήμμα το οποίο φράσσει από κάτω την ωφέλεια ενός πλειοδότη όταν ο πλειοδότης αυτός αποκλίνει μονομερώς σε μια συγκεκριμένη ντετερμινιστική προσφορά την οποία θα ορίσουμε στη συνέχεια.

Λήμμα 3.1. *Έστω ένας πλειοδότης με κοίλη και μη-φθίνουσα συνάρτηση αποτίμησης $v : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ και έστω Γ μια τυχαία μεταβλητή η οποία συμβολίζει το άθροισμα των προσφορών των υπόλοιπων πλειοδοτών. Τότε, για κάθε $z \in [0, 1]$ και για κάθε $\mu > 0$, η αναμενόμενη ωφέλεια που θα είχε ο πλειοδότης αν απέκλινε μονομερώς στη ντετερμινιστική προσφορά $\mu z \mathbb{E}[\Gamma]$ είναι τουλάχιστον $\frac{3\mu-1}{4\mu} v(z) - \mu z \mathbb{E}[\Gamma]$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό της ωφέλειας του πλειοδότη, αρκεί να δείξουμε ότι η αναμενόμενη αποτίμηση του πλειοδότη όταν αυτός αποκλίνει στη ντετερμινιστική προσφορά $y = \mu z \mathbb{E}[\Gamma]$ είναι τουλάχιστον $\frac{3\mu-1}{4\mu} v(z)$. Έστω το γεγονός $T := \left\{\Gamma \geq y\left(\frac{1}{z} - 1\right)\right\}$. Όταν το T είναι ψευδές, έχουμε ότι $\frac{y}{y+\Gamma} > z$ και, εφόσον η v είναι μη-φθίνουσα συνάρτηση, έχουμε ότι

$$v\left(\frac{y}{y+\Gamma}\right) \geq v(z).$$

Διαφορετικά, όταν το T είναι αληθές, έχουμε ότι $\frac{y}{y+\Gamma} \in [0, z]$. Εφόσον η v είναι κοίλη και μη-αρνητική, η τιμή της στο διάστημα $[0, z]$ φράσσεται από κάτω από την ευθεία που συνδέει τα σημεία $(0, 0)$ και

$(z, v(z))$. Επομένως, έχουμε ότι

$$v\left(\frac{y}{y+\Gamma}\right) \geq \frac{y}{y+\Gamma} \cdot \frac{v(z)}{z}.$$

Συνεπώς, μπορούμε να φράξουμε την αναμενόμενη αποτίμηση του πλειοδότη όταν αυτός αποκλίνει στη ντετερμινιστική προσφορά y χρησιμοποιώντας τις παραπάνω δύο παρατηρήσεις καθώς και την γραμμικότητα της μέσης τιμής. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[v\left(\frac{y}{y+\Gamma}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[v\left(\frac{y}{y+\Gamma}\right)\mathbb{1}\overline{T}\right] + \mathbb{E}\left[v\left(\frac{y}{y+\Gamma}\right)\mathbb{1}T\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[v(z)\mathbb{1}\overline{T}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{y}{y+\Gamma}\cdot\frac{v(z)}{z}\mathbb{1}T\right] \\
&= v(z)(1-\Pr[T]) + \frac{v(z)}{z}\mathbb{E}\left[\frac{y}{y+\Gamma}\mathbb{1}T\right]. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Εδώ, χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό $X\mathbb{1}T$ για να συμβολίσουμε την τυχαία μεταβλητή που ισούται με X αν το γεγονός T είναι αληθές και είναι μηδέν σε διαφορετική περίπτωση.

Τώρα, θα δουλέψουμε με τον δεξιότερο όρο του δεξιού μέρους της παραπάνω έκφρασης, δηλαδή, τον όρο $\mathbb{E}\left[\frac{y}{y+\Gamma}\mathbb{1}T\right]$. Εφόσον η συνάρτηση $\frac{y}{y+\Gamma}$ είναι κυρτή ως προς τη μεταβλητή Γ, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα του Jensen και να πάρουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\frac{y}{y+\Gamma}\mathbb{1}T\right] = \mathbb{E}\left[\frac{y}{y+\Gamma}|T\right]\cdot\Pr[T] \geq \frac{y\Pr[T]}{y+\mathbb{E}\left[\Gamma|T\right]}.$$

Ακόμη, γνωρίζουμε ότι για κάθε τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ ισχύει ότι $\mathbb{E}\left[X|T\right] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\Pr[T]}$ και, έτσι, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\frac{y}{y+\Gamma}\mathbb{1}T\right] \geq \frac{y\Pr[T]^2}{y\Pr[T]+\mathbb{E}\left[\Gamma\right]} \geq \frac{y\Pr[T]^2}{y+\mathbb{E}\left[\Gamma\right]}.$$

Η δεύτερη ανισότητα είναι προφανής καθώς $\Pr[T] \leq 1$. Αντικαθιστώντας την προσφορά $y = \mu z\mathbb{E}\left[\Gamma\right]$ και αξιοποιώντας το γεγονός ότι $z \leq 1$, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\frac{y}{y+\Gamma}\mathbb{1}T\right] \geq \frac{\mu z\Pr[T]^2}{1+\mu z} \geq \frac{\mu z}{\mu+1}\Pr[T]^2. \qquad (3.2)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες (3.1), (3.2), και το γεγονός ότι $1-\alpha+\frac{\mu}{\mu+1}\alpha^2 \geq \frac{3\mu-1}{4\mu}$ για κάθε α, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[v\left(\frac{y}{y+\Gamma}\right)\right] \geq v(z)\left(1-\Pr[T]+\frac{\mu}{\mu+1}\Pr[T]^2\right) \geq \frac{3\mu-1}{4\mu}v(z),$$

όπως επιθυμούσαμε. □

Αξιοποιώντας το Λήμμα 3.1 μπορούμε να δείξουμε ότι το κόστος της αναρχίας ως προς συσχετιζόμενες ισορροπίες στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης και αμιγείς ισορροπίες κατά Bayes-Nash στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης είναι τουλάχιστον $1/2$. Ξεκινάμε με τη περίπτωση των συσχετιζόμενων ισορροπιών στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης η οποία είναι και πιο απλή.

Θεώρημα 3.2. *Το κόστος της αναρχίας για παιχνίδια αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης ως προς συσχετιζόμενες ισορροπίες είναι τουλάχιστον* $1/2$.

Απόδειξη. Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης με n πλειοδότες στο οποίο κάθε πλειοδότης i έχει μια κοίλη και μη-φθίνουσα συνάρτηση αποτίμησης $v_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ και έστω x_i το μέρος του πόρου που ο πλειοδότης i λαμβάνει σε μια βέλτιστη κατανομή. Έστω $\mathbf{b}$ μια συσχετιζόμενη ισορροπία η οποία ορίζει μια τυχαία κατανομή $d(\mathbf{b}) = (d_1, ..., d_n)$ και έστω $B = \sum_i b_i$ η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών. Με B_{-i} συμβολίζουμε το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών εκτός της προσφοράς του πλειοδότη i. Εφόσον, το διάνυσμα $\mathbf{b}$ είναι μια συσχετιζόμενη ισορροπία, ο πλειοδότης i δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε οποιαδήποτε ντετερμινιστική προσφορά (συμπεριλαμβανομένης και της $x_i\mathbb{E}[B_{-i}]$). Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.1 για τον πλειοδότη i με $z = x_i$, $\mu = 1$ και $\Gamma = B_{-i}$, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] \geq \mathbb{E}[u_i(x_i\mathbb{E}[B_{-i}], \mathbf{b}_{-i})] \geq \frac{1}{2}v_i(x_i) - x_i\mathbb{E}[B_{-i}].$$

Αθροίζοντας την παραπάνω ανισότητα για όλους τους πλειοδότες και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $B_{-i} \leq B$ για κάθε πλειοδότη i, και $\sum_i x_i = 1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] &\geq \frac{1}{2}\sum_i v_i(x_i) - \sum_i x_i\mathbb{E}[B_{-i}] \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_i v_i(x_i) - \sum_i x_i\mathbb{E}[B] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{SW}^* - \mathbb{E}[B].\end{aligned} \tag{3.3}$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί καθώς εξ'ορισμού γνωρίζουμε ότι το κοινωνικό όφελος είναι ίσο με το άθροισμα των ωφελειών όλων των πλειοδοτών συν το άθροισμα των προσφορών τους, δηλαδή, $\mathbb{E}[\mathrm{SW}(d)] = \sum_i \mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] + \mathbb{E}[B]$. □

Το τελευταίο βήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2 ξεκινά με την ανισότητα (3.3). Ουσιαστικά, αυτή η ανισότητα έχει την εξής γενική μορφή:

$$\sum_i \mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] \geq \lambda\mathrm{SW}^* - \mu\sum_i x_i\mathbb{E}[B_{-i}].$$

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2, το κάτω φράγμα που παρουσιάζεται στην εργασία [23] των Syrgkanis και Tardos, στηρίζεται στην ανισότητα (2.4) η οποία έχει την παραπάνω γενική μορφή καθώς και στο συμπέρασμα ότι το κόστος της αναρχίας είναι ίσο με $\frac{\lambda}{\max\{1,\mu\}}$. Τα επιχειρήματα ομαλότητας της εργασίας [23] οδηγούν σε μια έκδοση της ανισότητας αυτής με $\lambda = 2 - \sqrt{3}$ και $\mu = 1$. Εδώ, καταφέραμε να βελτιώσουμε αυτές τις παραμέτρους σε $\lambda = 1/2$ και $\mu = 1$. Το επόμενο μας λήμμα υποδεικνύει ότι αυτές οι παράμετροι δεν μπορούν να βελτιωθούν περαιτέρω.

Λήμμα 3.3. *Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής τέτοιο ώστε για όλες τις τιμές των λ και μ που ικανοποιούν την ανισότητα*

$$\sum_i u_i(\mathbf{b}) \geq \lambda \mathrm{SW}^* - \mu \sum_i x_i B_{-i}, \tag{3.4}$$

όπου x_i είναι το μέρος του πόρου που κατανέμεται στον πλειοδότη i σε μια βέλτιστη κατανομή και B_{-i} είναι το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών εκτός της προσφοράς του πλειοδότη i σε μια αμιγή ισορροπία κατά Nash, να ισχύει ότι

$$\frac{\lambda}{\max\{1,\mu\}} \leq \frac{1}{2} + \epsilon.$$

Απόδειξη. Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής με $n \geq 2$ πλειοδότες στο οποίο ο πλειοδότης 1 έχει συνάρτηση αποτίμησης $v_1(x) = x$ και ο πλειοδότης i έχει συνάρτηση αποτίμησης $v_i(x) = \frac{n-1}{2n-3}x$, για κάθε $i \geq 2$. Μηδενίζοντας τις παραγώγους των συναρτήσεων ωφέλειας των πλειοδοτών, μπορούμε να δείξουμε ότι οι προσφορές στη (μοναδική) αμιγή ισορροπία κατά Nash είναι $b_1 = 1/4$ και $b_i = \frac{1}{4(n-1)}$, για κάθε $i \geq 2$. Πράγματι, υποθέτοντας ότι αυτό ισχύει για όλους τους πλειοδότες εκτός του πλειοδότη i, μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η προσφορά y που μεγιστοποιεί την ωφέλεια $u_i(y, b_{-i}) = v_i\left(\frac{y}{y+B_{-i}}\right) - y$ για τον πλειοδότη i ικανοποιεί τη σχέση $y = b_i$. Δηλαδή, ο πλειοδότης 1 λαμβάνει τον μισό πόρο και οι υπόλοιποι πλειοδότες μοιράζονται ομοιόμορφα τον υπόλοιπο μισό πόρο. Επομένως, έχουμε οτι

$$u_1(\mathbf{b}) = v_1(1/2) - 1/4 = 1/4$$

και

$$\sum_{i \neq 1} u_i(\mathbf{b}) = (n-1)\left(v_i\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) - \frac{1}{4(n-1)}\right) = \frac{1}{4(2n-3)}.$$

Το βέλτιστο κοινωνικό όφελος είναι $\mathrm{SW}^* = 1$ και προκύπτει όταν ολόκληρος ο πόρος κατανέμεται στον πλειοδότη 1, δηλαδή, $x_1 = 1$ και $x_i = 0$, για κάθε $i \geq 2$. Επομένως, η ανισότητα (3.4) γίνεται

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4(2n-3)} \geq \lambda - \frac{\mu}{4}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\lambda \leq \max\{1,\mu\}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4(2n-3)}\right).$$

Το λήμμα ακολουθεί θέτοντας το n εξαιρετικά μεγάλο. □

Αξιοποιώντας και πάλι το Λήμμα 3.1 και ακολουθώντας την ίδια γενική προσέγγιση με αυτή του Θεωρήματος 3.2 μπορούμε να αποδείξουμε το φράγμα $1/2$ και για το κόστος της αναρχίας ως προς ισορροπίες κατά Bayes-Nash στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης.

Θεώρημα 3.4. *Το κόστος της αναρχίας για παιχνίδια αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης ως προς αμιγείς ισορροπίες κατά Bayes-Nash είναι τουλάχιστον* $1/2$.

Απόδειξη. Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης στο οποίο η συνάρτηση αποτίμησης $\mathbf{v}_i$ του πλειοδότη i επιλέγεται τυχαία από μια πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$ πάνω σε κοίλες και μη-φθίνουσες συναρτήσεις $v_i : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, ανεξάρτητα για κάθε πλειοδότη. Έστω x_i η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το μέρος του πόρου που ο πλειοδότης i λαμβάνει στη βέλτιστη κατανομή. Έστω $\mathbf{b}$ μια αμιγής ισορροπία κατά Bayes-Nash και B η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών. Εδώ, B_{-i} είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία συμβολίζει το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών εκτός της προσφοράς του πλειοδότη i. Εφόσον το διάνυσμα $\mathbf{b}$ είναι μια αμιγής ισορροπία κατά Bayes-Nash, ο πλειοδότης i δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει σε μια οποιαδήποτε ντετερμινιστική προσφορά (συμπεριλαμβανομένης και της $\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right]$) όταν η συνάρτηση αποτίμησης που επιλέγεται από τη πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$ είναι v_i. Σε όλες τις αναμενόμενες τιμές υπό περιορισμό, γράφουμε v_i για να συμβολίσουμε το γεγονός ότι η συνάρτηση αποτίμησης $\mathbf{v}_i$ που επιλέχτηκε από την $\mathbf{F}_i$ είναι v_i. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.1 για τον πλειοδότη i με $z = \mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]$, $\mu = 1$ και $\Gamma = B_{-i}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})|v_i\right] &\geq \mathbb{E}\left[u_i(\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right], \mathbf{b}_{-i})|v_i\right]\\ &\geq \frac{1}{2}v_i(\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]) - \mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right]\\ &\geq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[v_i(x_i)|v_i\right] - \mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B\right].\end{aligned}$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα του Jensen καθώς η συνάρτηση αποτίμησης v_i του πλειοδότη i είναι κοίλη και από το γεγονός ότι σε μια αμιγή ισορροπία κατά Bayes-Nash η προσφορά ενός πλειοδότη διαφορετικού του i δεν εξαρτάται από την ακριβή συνάρτηση αποτίμησης του πλειοδότη i και, επομένως, $\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right] = \mathbb{E}\left[B_{-i}\right] \leq \mathbb{E}\left[B\right]$. Θεωρώντας όλες τις δυνατές συναρτήσεις αποτίμησης για τον πλειοδότη i που επιλέγονται τυχαία από την πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$, έχουμε ότι η αναμενόμενη ωφέλεια του είναι

$$\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\right] \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right] - \mathbb{E}\left[x_i\right]\mathbb{E}\left[B\right].$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω ανισότητες για όλους τους πλειοδότες και χρησιμοποιώντας τα γεγονότα ότι $\sum_i x_i = 1$ και $B_{-i} \leq B$ για κάθε πλειδότη i, έχουμε ότι

$$\sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\right] \geq \frac{1}{2}\sum_i \mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right] - \sum_i x_i\mathbb{E}\left[B\right] = \frac{1}{2}\mathrm{SW}^* - \mathbb{E}\left[B\right].$$

Το θεώρημα προκύπτει από την τελευταία αυτή ανισότητα καθώς γνωρίζουμε ότι εξ'ορισμού το κοινωνικό όφελος ισούται με το άθροισμα των αναμενόμενων ωφελειών των πλειοδοτών συν τις συνολικές προσφορές των πλειοδοτών. □

3.2 Πλειοδότες με περιορισμένο προϋπολογισμό

Σε αυτή τη παράγραφο, εξετάζουμε την περίπτωση όπου οι πλειοδότες έχουν περιορισμένους προϋπολογισμούς και αποδεικνύουμε ένα κάτω φράγμα περίπου 36% και ένα άνω φράγμα 50% για το κόστος της αναρχίας ως προς το αποτελεσματικό όφελος όπως αυτό ορίστηκε στη παράγραφο 1.4.

Πριν συνεχίσουμε με τη παρουσίαση αυτών των φραγμάτων, σημειώνουμε ότι μικρές τροποποιήσεις στις αποδείξεις της προηγούμενης παραγράφου μας επιτρέπουν να δείξουμε ότι το κοινωνικό όφελος οποιασδήποτε κατανομής σε κατάσταση ισορροπίας είναι τουλάχιστον το $1/2$ του βέλτιστου αποτελεσματικού οφέλους. Αυτό αποτελεί βελτίωση ενός αντίστοιχου φράγματος 26.8% που αποδεικνύεται στην εργασία [23]. Οι απαραίτητες τροποποιήσεις είναι οι εξής. Για κάθε πλειοδότη i ορίζουμε την προσφορά απόκλισης του σε σχέση με το μέρος του πόρου που λαμβάνει στην κατανομή που μεγιστοποιεί το αποτελεσματικό όφελος και διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν η προσφορά απόκλισης ξεπερνά ή όχι τον προϋπολογισμό του πλειοδότη. Στη περίπτωση όπου η προσφορά είναι μικρότερη του προϋπολογισμού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1. Ωστόσο, σε διαφορετική περίπτωση το Λήμμα 3.1 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αλλά, ευτυχώς, η ανισότητα που ορίζει είναι προφανής (μάλιστα, χρησιμοποιούμε αυτό το επιχείρημα στις παρακάτω αποδείξεις). Έτσι, επαναλαμβάνοντας την ανάλυση των αποδείξεων των Θεωρημάτων 3.2 και 3.4, συμπεραίνουμε ότι το κοινωνικό όφελος σε κατάσταση ισορροπίας είναι τουλάχιστον το $1/2$ του κοινωνικού οφέλους της κατανομής που μεγιστοποιεί το αποτελεσματικό όφελος και το φράγμα αποδεικνύεται από την παρατήρηση ότι το αποτελεσματικό όφελος μιας κατανομής φράσσεται εκ των άνω από το κοινωνικό όφελος της κατανομής αυτής.

Ας δούμε τώρα τις αποδείξεις των βασικών μας θεωρημάτων για το μοντέλο όπου οι πλειοδότες έχουν περιορισμένους προϋπολογισμούς. Και εδώ, ξεκινάμε με την περίπτωση των συσχετιζόμενων ισορροπιών στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης που είναι και η πιο απλή.

Θεώρημα 3.5. *Το κόστος της αναρχίας για παιχνίδια αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης μεταξύ πλειοδοτών περιορισμένου προϋπολογισμού ως προς συσχετιζόμενες ισορροπίες είναι τουλάχιστον* 0.3596.

Απόδειξη. Έστω $\mu \in (1/3, 1]$ μια παράμετρος, η ακριβή τιμή της οποίας θα οριστεί στη συνέχεια. Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης με n πλειοδότες στο οποίο ο πλειοδότης i έχει μια κοίλη και μη-φθίνουσα συνάρτηση αποτίμησης $v_i : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ και έναν προϋπολογισμό $c_i \geq 0$. Με x_i συμβολίζουμε το μέρος του πόρου που ο πλειοδότης i λαμβάνει στη κατανομή που μεγιστοποιεί το αποτελεσματικό όφελος. Έστω $\mathbf{b}$ μια συσχετιζόμενη ισορροπία η οποία ορίζει μια κατανομή $d(\mathbf{b}) = (d_1, ..., d_n)$ και έστω B η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών. Με B_{-i} συμβολίζουμε το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών εκτός από την προσφορά του πλειοδότη i. Έστω A το σύνολο των πλειοδοτών που έχουν $\mathbb{E}[v_i(d_i)] \le c_i$. Προφανώς, για κάθε πλειοδότη που δεν ανήκει στο σύνολο A, ισχύει ότι

$$\min\{\mathbb{E}[v_i(d_i)], c_i\} \ge \min\{v_i(x_i), c_i\}.$$

Αθροίζοντας την παραπάνω ανισότητα για όλους του πλειοδότες που δεν ανήκουν στο A και πολλαπλασιάζοντας με $1-\mu$, έχουμε

$$(1-\mu)\sum_{i\notin A}\min\{\mathbb{E}[v_i(d_i)], c_i\} \ge (1-\mu)\sum_{i\notin A}\min\{v_i(x_i), c_i\}. \tag{3.5}$$

Τώρα, για κάθε πλειοδότη $i \in A$, διακρίνουμε μεταξύ δύο περιπτώσεων, ανάλογα με το αν η ντετερμινιστική προσφορά απόκλισης $\mu x_i \mathbb{E}[B_{-i}]$ του πλειοδότη ξεπερνά ή όχι τον προϋπολογισμό του c_i. Αν $\mu x_i \mathbb{E}[B_{-i}] > c_i$, τότε προφανώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] &\ge 0\\ &> c_i - \mu x_i \mathbb{E}[B_{-i}]\\ &\ge \frac{3\mu-1}{4\mu}\min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\} - \mu x_i \mathbb{E}[B_{-i}].\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την ίδια ανισότητα στη περίπτωση όπου $\mu x_i \mathbb{E}[B_{-i}] \le c_i$, φράσσουμε την ωφέλεια του πλειοδότη i από την ωφέλεια που θα είχε αν απέκλινε μονομερώς στην προσφορά $\mu x_i \mathbb{E}[B_{-i}]$ (η οποία είναι μικρότερη του προϋπολογισμού c_i). Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] \ge \frac{3\mu-1}{4\mu}\mathbb{E}[v_i(x_i)] - \mu x_i \mathbb{E}[B_{-i}].$$

Αθροίζοντας την τελευταία ανισότητα για όλους τους πλειοδότες $i \in A$, και χρησιμοποιώντας τα γεγονότα $\sum_i x_i = 1$ και $B_{-i} < B$, για κάθε πλειοδότη i, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i\in A}\mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] &\ge \frac{3\mu-1}{4\mu}\sum_{i\in A}\min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\} - \sum_{i\in A}\mu x_i \mathbb{E}[B_{-i}]\\ &\ge \frac{3\mu-1}{4\mu}\sum_{i\in A}\min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\} - \mu\mathbb{E}[B]\sum_{i\in A}x_i\\ &\ge \frac{3\mu-1}{4\mu}\sum_{i\in A}\min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\} - \mu\mathbb{E}[B].\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $B = \sum_i b_i$ και τη γραμμικότητα της μέσης τιμής, η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i\in A}(\mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] + \mu\mathbb{E}[b_i]) + \mu\sum_{i\notin A}\mathbb{E}[b_i] \ge \frac{3\mu-1}{4\mu}\sum_{i\in A}\min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\}.$$

Εφόσον $\mu \leq 1$ και $v_i(d_i) = u_i(\mathbf{b}) + b_i$, έχουμε ότι $\mathbb{E}[u_i(\mathbf{b})] + \mu\mathbb{E}[b_i] \leq \min\{\mathbb{E}[v_i(d_i)], c_i\}$ για κάθε πλειοδότη $i \in A$. Ακόμη, έχουμε ότι $\mathbb{E}[b_i] \leq \mathbb{E}[v_i(d_i)] = \min\{\mathbb{E}[v_i(d_i)], c_i\}$, για κάθε πλειοδότη $i \notin A$. Συνεπώς, η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i\in A} \min\{\mathbb{E}[v_i(d_i)], c_i\} + \mu \sum_{i\notin A} \min\{\mathbb{E}[v_i(d_i)], c_i\} \geq \frac{3\mu-1}{4\mu} \sum_{i\in A} \min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\} \tag{3.6}$$

Αθροίζοντας τις ανισότητες (3.5) και (3.6), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{EW}(d(\mathbf{b})) &= \sum_{i\in A} \min\{\mathbb{E}[v_i(d_i)], c_i\} + \sum_{i\notin A} \min\{\mathbb{E}[v_i(d_i)], c_i\} \\
&\geq \frac{3\mu-1}{4\mu} \sum_{i\in A} \min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\} + (1-\mu) \sum_{i\notin A} \min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\} \\
&\geq \min\left\{\frac{3\mu-1}{4\mu}, 1-\mu\right\} \sum_{i} \min\{\mathbb{E}[v_i(x_i)], c_i\} \\
&= \min\left\{\frac{3\mu-1}{4\mu}, 1-\mu\right\} \mathrm{EW}^*.
\end{aligned}$$

Επομένως, το κόστος της αναρχίας ως προς το αποτελεσματικό όφελος για συσχετιζόμενες ισορροπίες στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης φράσσεται από τη ποσότητα $\min\left\{\frac{3\mu-1}{4\mu}, 1-\mu\right\}$ η οποία μεγιστοποιείται στη τιμή $\frac{7-\sqrt{17}}{8} \approx 0.3596$ για $\mu = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$. □

Στη συνέχεια θα δούμε την απόδειξη του φράγματος για τη περίπτωση των ισορροπιών κατά Bayes-Nash στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης. Η συγκεκριμένη απόδειξη είναι λίγο πιο πολύπλοκη από αυτή του Θεωρήματος 3.5.

Θεώρημα 3.6. *Το κόστος της αναρχίας για παιχνίδια αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης μεταξύ πλειοδοτών περιορισμένου προϋπολογισμού ως προς ισορροπίες κατά Bayes-Nash είναι τουλάχιστον* 0.3596.

Απόδειξη. Έστω $\mu \in (1/3, 1]$ μια παράμετρος η ακριβή τιμή της οποίας θα οριστεί στη συνέχεια. Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης με n πλειοδότες στο οποίο η συνάρτηση αποτίμησης $\mathbf{v}_i$ και ο προϋπολογισμός $\mathbf{c}_i$ του πλειοδότη i επιλέγονται τυχαία από μια πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$ πάνω σε ζευγάρια κοίλων μη-φθίνουσων συναρτήσεων $v_i : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ και θετικών αριθμών $c_i \in \mathbb{R}^+$, ανεξάρτητα για κάθε πλειοδότη. Έστω x_i η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το μέρος του πόρου που ο πλειοδότης i λαμβάνει στη κατανομή που μεγιστοποιεί το αποτελεσματικό όφελος. Έστω $\mathbf{b}$ μια αμιγής ισορροπία κατά Bayes-Nash η οποία ορίζει μια πιθανοτική κατανομή $d(\mathbf{b}) = (d_1, ..., d_n)$ και έστω B η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών. Και πάλι, με B_{-i} συμβολίζουμε το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών εκτός από την προσφορά του πλειοδότη i. Για κάθε πλειοδότη i, ορίζουμε ως A_i το σύνολο που περιέχει όλα τα ζευγάρια μιας συνάρτησης αποτίμησης και του αντίστοιχου προϋπολογισμού (v_i, c_i) τα οποία επιλέγονται τυχαία από τη πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$ με την οποία συσχετίζεται ο πλειοδότης αυτός και ικανοποιούν τη συνθήκη $\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)|v_i\right] \leq c_i$. Έστω ένας πλειοδότης i με ζευγάρι αποτίμησης-προϋπολογισμού $(v_i, c_i) \notin A_i$. Από τον ορισμό του A_i, έχουμε ότι

$$\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)|v_i\right], c_i\} \geq \min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)|v_i\right], c_i\}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα ζευγάρια αποτίμησης-προϋπολογισμού που δεν ανήκουν στο σύνολο A_i, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right] \geq \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right].$$

Αθροίζοντας την παραπάνω ανισότητα για όλους τους πλειοδότες, έχουμε ότι

$$\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right] \geq \sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right]. \tag{3.7}$$

Τώρα, έστω ένα ζευγάρι αποτίμησης-προϋπολογισμού $(v_i, c_i) \in A_i$ για τον πλειοδότη i το οποίο επιλέγεται από την κατανομή $\mathbf{F}_i$. Αν $\mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right] \leq c_i$, τότε μπορούμε να φράξουμε την αναμενόμενη ωφέλεια $\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})|v_i\right]$ του πλειοδότη i λαμβάνοντας υπόψη την απόκλιση του στην προσφορά $\mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right]$ (η οποία δεν ξεπερνά τον προϋπολογισμό c_i). Από το Λήμμα 3.1, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})|v_i\right] &\geq \frac{3\mu - 1}{4\mu} v_i(\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]) - \mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right] \\
&\geq \frac{3\mu - 1}{4\mu}\mathbb{E}\left[v_i(x_i)|v_i\right] - \mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B\right] \\
&\geq \frac{3\mu - 1}{4\mu}\min\{\mathbb{E}\left[v_i(x_i)|v_i\right], c_i\} - \mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B\right].
\end{aligned}$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα του Jensen καθώς η συνάρτηση v_i είναι κοίλη και από το γεγονός ότι το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών εκτός της προσφοράς του πλειοδότη i δεν εξαρτάται απο τη συνάρτηση αποτίμησης του πλειοδότη i, δηλαδή, $\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right] = \mathbb{E}\left[B_{-i}\right]$. Διαφορετικά, αν $\mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right] > c_i$, τότε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1, αλλά η ίδια ανισότητα αποδεικνύεται εύκολα καθώς

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})|v_i\right] &\geq 0 \\
&> c_i - \mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B_{-i}|v_i\right] \\
&\geq \frac{3\mu - 1}{4\mu}\min\{\mathbb{E}\left[v_i(x_i)|v_i\right], c_i\} - \mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B\right].
\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω δύο υπο-περιπτώσεις συμπεραίνουμε ότι, όταν $(v_i, c_i) \in A_i$, ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})|v_i\right] + \mu\mathbb{E}\left[x_i|v_i\right]\mathbb{E}\left[B\right] \geq \frac{3\mu - 1}{4\mu}\min\{\mathbb{E}\left[v_i(x_i)|v_i\right], c_i\}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα ζευγάρια αποτίμησης-προϋπολογισμού που ανήκουν στο A_i, έχουμε

$$\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\mathbb{E}\left[x_i\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right]\mathbb{E}\left[B\right] \geq \frac{3\mu-1}{4\mu}\mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right].$$

Χρησιμοποιώντας το προφανές γεγονός ότι $\mathbb{E}\left[x_i\right] \geq \mathbb{E}\left[x_i\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right]$ και την παραπάνω ανισότητα, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\mathbb{E}\left[x_i\right]\mathbb{E}\left[B\right] &\geq \mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\mathbb{E}\left[x_i\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right]\mathbb{E}\left[B\right] \\ &\geq \frac{3\mu-1}{4\mu}\mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right], c_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right]. \qquad (3.8)\end{aligned}$$

Τώρα, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}&\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right] \\ &\geq \sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b}) + b_i\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\sum_i \mathbb{E}\left[b_i\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right] \\ &\geq \sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b}) + \mu b_i\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\sum_i \mathbb{E}\left[b_i\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right] \\ &= \sum_i \mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\mathbb{E}\left[B\right] \\ &= \sum_i \left(\mathbb{E}\left[u_i(\mathbf{b})\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\mathbb{E}\left[x_i\right]\mathbb{E}\left[B\right]\right) \\ &\geq \frac{3\mu-1}{4\mu}\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right]. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η ποσότητα $\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}$ είναι ίση με $\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right]$ όταν $(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i$ και ίση με $\mathbf{c}_i$ διαφορετικά. Στην τελευταία περίπτωση, ο προϋπολογισμός είναι προφανώς μεγαλύτερος από την προσφορά του πλειοδότη i. Η δεύτερη ανισότητα ισχύει καθώς $\mu \leq 1$. Οι δύο επόμενες ισότητες είναι προφανείς, ενώ η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα (3.8). Τώρα, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες (3.7) και (3.9), έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{EW}(d) &= \sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\right] \\ &= \sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] + \mu\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right] \\ &\quad + (1-\mu)\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(d_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right] \\ &\geq \frac{3\mu-1}{4\mu}\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \in A_i\right] \\ &\quad + (1-\mu)\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right], \mathbf{c}_i\}\mathbb{1}(\mathbf{v}_i, \mathbf{c}_i) \notin A_i\right] \\ &\geq \min\left\{\frac{3\mu-1}{4\mu}, 1-\mu\right\}\sum_i \mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}\left[\mathbf{v}_i(x_i)\right], \mathbf{c}_i\}\right]\end{aligned}$$

$$= \min\left\{\frac{3\mu-1}{4\mu}, 1-\mu\right\} \mathrm{EW}^*.$$

Επομένως, το κόστος της αναρχίας ως προς το αποτελεσματικό όφελος φράσσεται από τη ποσότητα $\min\left\{\frac{3\mu-1}{4\mu}, 1-\mu\right\}$ η οποία μεγιστοποιείται στη τιμή $\frac{7-\sqrt{17}}{8} \approx 0.3596$ για $\mu = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$. $\square$

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζοντας ένα άνω φράγμα για το κόστος της αναρχίας το οποίο ισχύει ακόμη και για αμιγείς ισορροπίες κατά Nash. Το γεγονός αυτό είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον καθώς αποδεικνύει ότι το φράγμα $3/4$ των Johari και Tsitsiklis δεν επεκτείνεται σε πιο πολύπλοκα και γενικά μοντέλα, όπως σε αυτό όπου έχουμε πλειοδότες περιορισμένου προϋπολογισμού.

Θεώρημα 3.7. *Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής μεταξύ πλειοδοτών περιορισμένου προϋπολογισμού με κόστος της αναρχίας το πολύ $1/2 + \epsilon$ ως προς αμιγείς ισορροπίες κατά Nash για το αποτελεσματικό όφελος.*

Απόδειξη. Έστω $\alpha \in (0,1)$ και έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής με δύο πλειοδότες. Ο πλειοδότης 1 έχει συνάρτηση αποτίμησης $v_1(x) = x$ και προϋπολογισμό $c_1 = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$. Ο πλειοδότης 2 έχει συνάρτηση αποτίμησης $v_2(x) = \alpha x$ και απεριόριστο προϋπολογισμό. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η κατάσταση $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ στην οποία ο πλειοδότης 1 κάνει προσφορά $b_1 = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$ (δηλαδή, ίση με τον προϋπολογισμό του) και ο πλειοδότης 2 κάνει προσφορά $b_2 = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}$ είναι μια αμιγής ισορροπία κατά Nash. Πράγματι, οι παράγωγοι των ωφελειών των πλειοδοτών ως συναρτήσεις των προσφορών τους, y_1 και y_2, αντίστοιχα, είναι

$$\frac{\partial v_1(\frac{y_1}{y_1+b_2})}{\partial y_1} = \frac{b_2}{(y_1+b_2)^2} - 1$$

και

$$\frac{\partial v_1(\frac{y_2}{b_1+y_2})}{\partial y_1} = \frac{\alpha b_1}{(b_1+y_2)^2} - 1$$

και μηδενίζονται για $y_1 = b_1$ και $y_2 = b_2$. Η κατανομή $d(\mathbf{b}) = (d_1, d_2)$ που παράγεται στη κατάσταση $\mathbf{b}$ ορίζει ότι το μέρος του πόρου που πρέπει να κατανεμηθεί στον πλειοδότη 1 είναι $d_1 = \frac{1}{1+\alpha}$ ενώ το μέρος του πόρου που πρέπει να κατανεμεθεί στον πλειοδότη 2 είναι $d_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$. Παρατηρήστε ότι η αποτίμηση $v_1\left(\frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{1}{1+\alpha}$ του πλειοδότη 1 είναι σημαντικά μεγαλύτερη από τον προϋπολογισμό του c_1, για κάθε τιμή της παραμέτρου α. Επομένως, το αποτελεσματικό όφελος της κατανομής $d(\mathbf{b})$ είναι

$$\mathrm{EW}(d) = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha} = \frac{\alpha+\alpha^2+\alpha^3}{(1+\alpha)^2}.$$

Το βέλτιστο αποτελεσματικό όφελος φράσσεται από το κοινωνικό όφελος στη κατάσταση όπου ο πλειοδότης 1 κάνει προσφορά ίση με τον προϋπολογισμό του $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$ και ο πλειοδότης 2 κάνει προσφορά ίση με $1 - \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$. Τότε, το μέρος του πόρου που λαμβάνει ο πλειοδότης 1 είναι $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$ και η αποτίμηση του είναι ίση με τον προϋπολογισμό του, ενώ ο πλειοδότης 2 λαμβάνει το υπόλοιπο $1 - \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$ του πόρου. Επομένως, το βέλτιστο αποτελεσματικό όφελος είναι

$$\mathrm{EW}^* = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} + \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}\right) = \frac{2\alpha + \alpha^2 + \alpha^3}{(1+\alpha)^2}.$$

Προφανώς, ο λόγος $\mathrm{EW}(d)/\mathrm{EW}^*$ τείνει εκ των άνω στο $1/2$ καθώς η παράμετρος α τείνει στο 0. Το θεώρημα ακολουθεί επιλέγοντας επαρκώς μικρή τιμή για τη παράμετρο α. □

Κεφάλαιο 4

Αντί επιλόγου: Κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα

Ολοκληρώνουμε αυτή την εργασία παρουσιάζοντας κάποια ανοικτά προβλήματα.

4.1 Υπολογισμός αυστηρών φραγμάτων

Ένα προφανές πρόβλημα το οποίο αφήνει ανοικτό η εργασίας μας είναι ο υπολογισμός αυστηρών φραγμάτων για το κόστος της αναρχίας ως προς τις κλάσεις των συσχετιζόμενων ισορροπιών και των ισορροπιών κατά Bayes-Nash με τις οποίες ασχοληθήκαμε. Μέχρι στιγμής, το μοναδικό γνωστό άνω φράγμα είναι το αντι-παράδειγμα με κόστος της αναρχίας $3/4$ που παρουσιάστηκε στην εργασία των Johari και Tsitsiklis [10] για αμιγείς ισορροπίες κατά Nash. Παρατηρήστε ότι, προφανώς, το συγκεκριμένο άνω φράγμα ισχύει και για τη κλάση των συσχετιζόμενων ισορροπίων καθώς είναι υπερ-κλάση αυτής των αμιγών ισορροπιών κατά Nash. Συνεπώς, θέτουμε το εξής ερώτημα:

Είναι το $3/4$ το αυστηρό φράγμα για όλες τις κλάσεις ισορροπίας;

Στο σημείο αυτό, να σημειώσουμε ότι υπάρχει λόγος που δεν ασχοληθήκαμε καθόλου με τη περίπτωση των μικτών ισορροπιών σε οποιοδήποτε από τα μοντέλα θεωρήσαμε. Το παρακάτω λήμμα μας υποδεικνύει ότι, για παιχνίδια αναλογικής κατανομής (πλήρους ή ελλιπούς πληροφόρησης), η κλάση των μικτών ισορροπιών συμπίπτει με αυτή των αμιγών.

Λήμμα 4.1. *Η κλάση των μικτών ισορροπιών κατά Bayes-Nash σε κάθε παιχνίδια αναλογικής κατανομής (πιθανώς με πλειοδότες περιορισμένου προϋπολογισμού) συμπίπτει με τη κλάση των αμιγών ισορροπιών κατά Bayes-Nash.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης (πιθανώς με πλειοδότες περιορισμένου προϋπολογισμού) το οποίο διαθέτει μια μικτή ισορροπία κατά Bayes-Nash $\mathbf{b}$ στην οποία ο πλειοδότης i κάνει δύο διαφορετικές προσφορές y_1 και y_2 (με $y_1 < y_2$) με μη μηδενική πιθανότητα όταν η συνάρτηση αποτίμησης του είναι v_i. Αν ο πλειοδότης i έχει συγκεκριμένο προϋπολογισμό c_i, τότε υποθέτουμε ότι και οι δύο αυτές προσφορές είναι μικρότερες του προϋπολογισμού του. Στη συνέχεια θα δείξουμε αυτό μας οδηγεί σε άτοπο.

Σύμφωνα με τη συνθήκη της μικτής ισορροπίας κατά Bayes-Nash, και οι δύο προσφορές y_1 και y_2 πρέπει να μεγιστοποιούν την αναμενόμενη ωφέλεια U του πλειοδότη i δεδομένου ότι η συνάρτηση αποτίμησης του είναι η v_i, δηλαδή, πρέπει

$$U = \mathbb{E}\left[u_i(y_1, b_{-i})|v_i\right] = \mathbb{E}\left[u_i(y_2, b_{-i})|v_i\right].$$

Έστω B_{-i} η τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει το άθροισμα των προσφορών όλων των πλειοδοτών εκτός από την προσφορά του πλειοδότη i και έστω $f(y) = \mathbb{E}\left[v_i\left(\frac{y}{y+B_{-i}}\right)\right]$ η αναμενόμενη αποτίμηση του πλειοδότη i όταν αποκλίνει μονομερώς στην προσφορά y. Προφανώς, έχουμε ότι $\mathbb{E}\left[u_i(y, b_{-i})\right] = f(y) - y$.

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $[y_1, y_2]$ καθώς ορίζεται ως γραμμικός συνδυασμός κοίλων συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής B_{-i}, η αποτίμηση $v_i\left(\frac{y}{y+B_{-i}}\right)$ του πλειοδότη i είναι μια κοίλη συνάρτηση ως προς y, και η μέση τιμή ως προς B_{-i} είναι απλώς ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων. Επίσης, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[y_1, y_2]$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε λόγω της κοιλότητας της f πρέπει να υπάρχει μια προσφορά $y' \in [y_1, y_2)$ τέτοια ώστε $f(y') = f(y_2)$. Δηλαδή, ο πλειοδότης i μπορεί να αποκλίνει μονομερώς στην προσφορά y' (η οποία είναι προφανώς μικρότερη του προϋπολογισμού του c_i, αν υπάρχει) και να βελτιώσει την αναμενόμενη ωφέλεια του σε $\mathbb{E}\left[u_i(y', b_{-i})|v_i\right] = f(y') - y' > f(y_2) - y_2 = U$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς σε κατάσταση ισορροπίας ο πλειοδότης i δεν έχει συμφέρον να αποκλίνει μονομερώς σε οποιαδήποτε προσφορά y'.

Το γεγονός ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνεπάγεται ότι $\Pr[B_{-i} > 0] > 0$. Τότε, για κάθε θετική τιμή της B_{-i}, η αποτίμηση $v_i\left(\frac{y}{y+B_{-i}}\right)$ του πλειοδότη i είναι μια γνησίως κοίλη συνάρτηση ως προς y το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι επίσης γνησίως κοίλη ως γραμμικός συνδυασμός κοίλων και γνησίως κοίλων συναρτήσεων. Συνεπώς, υπάρχει ένα $\lambda \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) > \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2)$ και ο πλειοδότης i έχει συμφέρον να αποκλίνει στην προσφορά $y' = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ (η οποία είναι μικρότερη του προϋπολογισμού του, αν έχει) καθώς

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u_i(y', b_{-i})\right] &= f(y') - y' \\
&> \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2) - \lambda y_1 - (1-\lambda)y_2 \\
&= \lambda(f(y_1) - y_1) + (1-\lambda)(f(y_2) - y_2) \\
&= U.
\end{aligned}$$

Προφανώς κάτι τέτοιο μας οδηγεί σε άτοπο καθώς έχουμε υποθέσει ότι U είναι η αναμενόμενη ωφέλεια του πλειοδότη i στην μικτή ισορροπία (δηλαδή, είναι η μέγιστη δυνατή). Συνεπώς, το στήριγμα (support) οποιασδήποτε ισορροπίας κατά Bayes-Nash δεν μπορεί να περιέχει δύο διαφορετικές προσφορές για τον πλειοδότη i όταν η συνάρτηση αποτίμησης του είναι v_i. Επομένως, επεκτείνοντας αυτό το επιχείρημα για όλες τις δυνατές συναρτήσεις αποτίμησης του πλειοδότη i και για όλους τους πλειοδότες, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε παιχνίδι αναλογικής κατανομής διαθέτει μία μοναδική μικτή ισορροπία κατά Bayes-Nash η οποία είναι αμιγής. □

Να σημειώσουμε ότι αν οι συναρτήσεις αποτίμησης των πλειοδοτών είναι παραγωγίσιμες (κάτι το οποίο δεν υποθέτουμε στη παραπάνω απόδειξη), τότε υπάρχει μια απλούστερη απόδειξη η οποία προκύπτει από την παρατήρηση ότι η αναμενόμενη ωφέλεια του πλειοδότη i, όταν θεωρηθεί ως συνάρτηση της προσφοράς του, έχει γνησίως φθίνουσα παράγωγο. Τότε, η ωφέλεια κάθε πλειοδότη μεγιστοποιείται από μια προσφορά ίση είτε με τον προϋπολογισμό του πλειδότη (αν έχει) είτε με τη μοναδική προσφορά που μηδενίζει τη παράγωγο της συνάρτησης αποτίμησης.

Ένα πόρισμα που προκύπτει από την εργασία των Johari και Tsitsiklis [10] και το Λήμμα 4.1 είναι ότι το κόστος της αναρχίας ως προς μικτές ισορροπίες κατά Nash είναι αυστηρά $3/4$ στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης.

Πόρισμα 4.2. *Το κόστος της αναρχίας για παιχνίδια αναλογικής κατανομής πλήρους πληροφόρησης (με πλειοδότες χωρίς προϋπολογισμό) ως προς μικτές ισορροπίες κατά Nash είναι αυστηρά* $3/4$.

Παρακινούμενοι από το παραπάνω αποτέλεσμα, αναρωτηθήκαμε αν το ίδιο ισχύει και για τη περίπτωση των συσχετιζόμενων ισορροπιών στο μοντέλο πλήρους πληροφόρησης. Πραγματοποιήσαμε διάφορα πειράματα με σκοπό να εντοπίσουμε κάποια συσχετιζόμενη ισορροπία η οποία να μην είναι αμιγής, χωρίς επιτυχία. Συνεπώς, ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι το εξής:

Υπάρχουν συσχετιζόμενες ισορροπίες οι οποίες να μην είναι αμιγείς;

Να σημειώσουμε ότι σε περίπτωση όπου και η κλάση των συσχετιζόμενων ισορροπιών συμπίπτει με αυτή των αμιγών, τότε το πρόβλημα υπολογισμού αυστηρών φραγμάτων για το κόστος της αναρχίας ως προς γενικότερες κλάσεις ισορροπιών είναι στοιχειώδες.

4.2 Συσχετιζόμενες ισορροπίες κατά Bayes-Nash

Ένα ακόμη ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα αφορά την εύρεση αυστηρών φραγμάτων για το κόστος της αναρχίας ως προς συσχετιζόμενες ισορροπίες κατά Bayes-Nash στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης. Ο βασικός λόγος για τον οποίο δεν ασχοληθήκαμε με αυτή τη κλάση ισορροπιών είναι το γεγονός ότι η τεχνική μας απαιτεί η αναμενόμενη τιμή του αθροίσματος των προσφορών των υπόλοιπων πλειοδοτών να είναι ίδια για κάθε πιθανή συνάρτηση αποτίμησης που ο πλειοδότης i μπορεί να επιλέξει τυχαία από την πιθανοτική κατανομή που του αντιστοιχεί. Ωστόσο, αυτή η ιδιότητα δεν ικανοποιείται για πιο γενικές έννοιες ισορροπίας. Συνεπώς, θέτουμε την εξής ερώτηση:

Πόσο είναι το κόστος της αναρχίας ως προς συσχετιζόμενες ισορροπίες κατά Bayes-Nash στο μοντέλο ελλιπούς πληροφόρησης;

Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση δεν μπορεί να είναι $3/4$ όπως αποδεικνύουμε με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.3. *Υπάρχει ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης τέτοιο ώστε το κόστος της αναρχίας ως προς συσχετιζόμενες ισορροπίες κατά Bayes-Nash να είναι το πολύ* 0.7154.

Απόδειξη. Ένα διάνυσμα $\mathbf{b}(\mathbf{v}) = (b_1(\mathbf{v}_1), ..., b_n(\mathbf{v}_n))$ πιθανώς συσχετιζόμενων συναρτήσεων προσφοράς καλείται συσχετιζόμενη ισορροπία κατά Bayes-Nash αν κανένας πλειοδότης i δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς σε οποιαδήποτε ντετερμινιστική συνάρτηση προσφοράς ώστε να βελτιώσει την αναμενόμενη ωφέλεια του (δεδομένων των συναρτήσεων προσφοράς των υπόλοιπων πλειοδοτών), για κάθε πιθανή συνάρτηση αποτίμησης v_i που μπορεί να επιλέξει τυχαία από την πιθανοτική κατανομή $\mathbf{F}_i$ που του αντιστοιχεί. Οι συσχετιζόμενες ισορροπίες κατά Bayes-Nash είναι πιο γενικές από τις μικτές ισορροπίες κατά Bayes-Nash καθώς οι συναρτήσεις προσφοράς διαφορετικών πλειοδοτών δεν είναι υποχρεωτικά ανεξάρτητες.

Έστω ένα παιχνίδι αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης με δύο πλειοδότες. Ο πλειοδότης 1 έχει συνάρτηση αποτίμησης $v_1(x)$ η οποία είναι x με πιθανότητα p_1 και $\epsilon_1 x$ με πιθανότητα $1 - p_1$, δηλαδή,

$$v_1(x) = \begin{cases} x, & \text{με πιθανότητα } p_1 \\ \epsilon_1 x, & \text{με πιθανότητα } 1 - p_1. \end{cases}$$

Ο πλειοδότης 2 έχει συνάρτηση αποτίμησης $v_2(x)$ η οποία είναι αx με πιθανότητα p_2 και $\epsilon_2 x$ με πιθανότητα $1 - p_2$, δηλαδή,

$$v_2(x) = \begin{cases} \alpha x, & \text{με πιθανότητα } p_2 \\ \epsilon_2 x, & \text{με πιθανότητα } 1 - p_2. \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha \leq 1$ και, επίσης, το α είναι αρκετά μεγαλύτερο από το ϵ_1 το οποίο με τη σειρά του είναι αρκετά μεγαλύτερο από το ϵ_2.

Κατασκευάζουμε μια συσχετιζόμενη ισορροπία κατά Bayes-Nash της εξής μορφής. Όταν οι αποτιμήσεις των πλειοδοτών είναι x και αx, τότε οι προσφορές τους είναι γ και δ, αντίστοιχα. Αυτές οι τιμές είναι μεγάλες και παρέχουν σταθερά μέρη του πόρου και στους δύο πλειοδότες. Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις τουλάχιστον ένας από τους πλειοδότες έχει σχεδόν μηδενική αποτίμηση και, κατά συνέπεια, οι αντίστοιχες προσφορές είναι σχεδόν μηδενικές. Ωστόσο, ο πλειοδότης με σημαντικά μεγαλύτερη αποτίμηση καταθέτει μια αρκετά μεγαλύτερη προσφορά (η οποία όμως και πάλι είναι πολύ κοντά στο μηδέν) έτσι ώστε να πάρει σχεδόν το 100% του πόρου. Στη συνέχεια, για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς, στρογγυλοποιούμε τις σχεδόν μηδενικές προσφορές ή αποτιμήσεις στο 0 και χειριζόμαστε τις κατανομές που είναι σχεδόν το 100% του πόρου ως ακριβώς 100%. Αυτή η στρογγυλοποίηση δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα αλλά, για μια πιο τυπική απόδειξη, απαιτούνται σημαντικά πιο λεπτομερείς (και χωρίς ενδιαφέρον) υπολογισμοί. Οπότε, υποθέτουμε ότι όταν οι αποτιμήσεις είναι x ή $\epsilon_1 x$ για τον πλειοδότη 1 και $\epsilon_2 x$ για τον πλειοδότη 2, οι προσφορές είναι (σχεδόν) 0 αλλά η προσφορά του πλειοδότη 1 είναι αρκετά μεγαλύτερη ώστε να του κατανεμηθεί (σχεδόν) το 100% του πόρου. Αντίστοιχα, όταν οι αποτιμήσεις των δύο πλειοδοτών είναι $\epsilon_1 x$ και αx, αντίστοιχα, τότε οι προσφορές είναι (σχεδόν) 0 αλλά η προσφορά του πλειοδότη 2 είναι αρκετά μεγαλύτερη ώστε να του κατανεμηθεί (σχεδόν) το 100% του πόρου. Το κοινωνικό όφελος $\mathrm{SW}(d)$ αυτής της κατανομής είναι (σχεδόν) ίσο με

$$\mathrm{SW}(d) = p_1 p_2 \left(\frac{\gamma}{\gamma+\delta} + \alpha \frac{\delta}{\gamma+\delta} \right) + p_1(1-p_2) + \alpha(1-p_1)p_2.$$

Ας δούμε τι συμβαίνει σε μια βέλτιστη κατανομή. Αν η συνάρτηση αποτίμησης του πλειοδότη 1 είναι x τότε λαμβάνει το 100% του πόρου, ανεξάρτητα από το ποια είναι η συνάρτηση αποτίμησης του πλειοδότη 2. Αν η συνάρτηση αποτίμησης του πλειοδότη 1 είναι $\epsilon_1 x$ και η συνάρτηση αποτίμησης του πλειοδότη 2 είναι $\epsilon_2 x$, τότε και πάλι ο πλειοδότης 1 λαμβάνει το 100% του πόρου. Ωστόσο, αν η συνάρτηση αποτίμησης του πλειοδότη 2 είναι αx, τότε αυτός είναι που λαμβάνει το 100% του πόρου. Επομένως, το βέλτιστο κοινωνικό όφελος είναι (σχεδόν) ίσο με

$$\mathrm{SW}^* = p_1 + \alpha(1-p_1)p_2.$$

Η αναμενόμενη ωφέλεια του πλειοδότη 1 όταν η αποτίμηση του είναι x είναι (προσεγγιστικά) $p_2 \frac{\gamma}{\gamma+\delta} + 1 - p_2 - p_2\gamma$ και γίνεται (προσεγγιστικά) $p_2 \frac{y}{y+\delta} + 1 - p_2 - y$ όταν αποκλίνει στη ντετερμινιστική προσφορά y. Απαιτούμε η πρώτη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη της δεύτερης έτσι ώστε να μην υπάρχει τέτοια μονομερής απόκλιση για τον πλειοδότη 1, δηλαδή, πρέπει

$$p_2 \frac{\gamma}{\gamma+\delta} - p_2\gamma \geq p_2 \frac{y}{y+\delta} - y, \text{ για κάθε } y \geq 0.$$

Αντίστοιχα, η αναμενόμενη ωφέλεια του πλειοδότη 2 όταν η αποτίμηση του είναι αx είναι (προσεγγιστικά) $p_1 \frac{\alpha\delta}{\gamma+\delta} - p_1\delta$ και γίνεται (προσεγγιστικά) $p_1 \frac{\alpha y}{\gamma+y} - y$ όταν αποκλίνει στη ντετερμινιστική προσφορά y. Και πάλι, απαιτούμε η πρώτη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη της δεύτερης έτσι ώστε να μην υπάρχει τέτοια μονομερής απόκλιση για τον πλειοδότη 2, δηλαδή πρέπει

$$p_1 \frac{\alpha\delta}{\gamma+\delta} - p_1\delta \geq p_1 \frac{\alpha y}{\gamma+y} - y, \text{ για κάθε } y \geq 0.$$

Το δεξιά μέρη των παραπάνω περιορισμών μεγιστοποιούνται σε $(\sqrt{p_2} - \sqrt{\delta})^2$ και $(\sqrt{\alpha p_1} - \sqrt{\gamma})^2$, αντίστοιχα. Παραμένει το να υπολογίσουμε τις ακριβείς προσφορές που ικανοποιούν αυτούς τους περιορισμούς έτσι ώστε το κόστος της αναρχίας $\mathrm{SW}(d)/\mathrm{SW}^*$ να ελαχιστοποιείται. Αυτό γίνεται με το εξής μη-γραμμικό μαθηματικό πρόγραμμα:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \frac{p_1 p_2 \left(\frac{\gamma}{\gamma+\delta} + \alpha \frac{\delta}{\gamma+\delta}\right) + p_1(1-p_2) + \alpha(1-p_1)p_2}{p_1 + \alpha(1-p_1)p_2} \\
\text{subject to:} \quad & p_2 \frac{\gamma}{\gamma+\delta} - p_2\gamma \geq (\sqrt{p_2} - \sqrt{\delta})^2 \\
& \alpha p_1 \frac{\delta}{\gamma+\delta} - p_1\delta \geq (\sqrt{\alpha p_1} - \sqrt{\gamma})^2 \\
& \gamma, \delta \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq p_1, p_2 \leq 1
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας το λογισμικό Matlab, επιλύσαμε το παραπάνω μη-γραμμικό πρόγραμμα και βρήκαμε ότι για τις τιμές $\alpha = 0.2913$, $\gamma = 0.1071$, $\delta = 0.1510$, $p_1 = 0.6682$, και $p_2 = 0.7616$ το κόστος της αναρχίας για το στιγμιότυπο που εξετάζουμε ελαχιστοποιείται σε 0.7154. □

Κατά την ανάλυση παιχνιδιών αναλογικής κατανομής ελλιπούς πληροφόρησης κάναμε την υπόθεση ότι οι πλειοδότες επιλέγουν τις συναρτήσεις αποτίμησης τους τυχαία και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Αυτή είναι μια τυπική υπόθεση που γίνεται στη βιβλιογραφία [1, 4, 7, 11, 20, 22, 23] με την εργασία [2] να αποτελεί τη μόνη εξαίρεση που γνωρίζουμε. Δυστυχώς, η απόδειξη μας για το φράγμα του κόστους της αναρχίας ως προς αμιγείς ισορροπίες κατά Bayes-Nash δεν μπορεί να επεκταθεί στη περίπτωση των συσχετιζόμενων συναρτήσεων αποτίμησης και, επιπλέον, δεν έχουμε καταφέρει να βρούμε κάποιο αντι-παράδειγμα με μη-σταθερό κόστος της αναρχίας για αυτό το μοντέλο. Συνεπώς, θέτουμε το εξής ερώτημα:

Πόσο είναι το κόστος της αναρχίας για τη περίπτωση συσχετιζόμενων συναρτήσεων αποτίμησης;

Οι ερωτήσεις που θέσαμε σε αυτή τη παράγραφο είναι ενδιαφέρουσες και για παιχνίδια αναλογικής κατανομής μεταξύ πλειοδοτών περιορισμένου προϋπολογισμού.

Βιβλιογραφία

[1] K. Bhawalkar and T. Roughgarden. Welfare guarantees for combinatorial auctions with item bidding. In *Proceedings of the 22nd Annual ACM—SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 700–709, 2011.

[2] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, P. Kanellopoulos, M. Kyropoulou, B. Lucier, R. Paes Leme, and E. Tardos. Bounding the inefficiency of outcomes in generalized second price auctions. *Journal of Economic Theory*, forthcoming. Preliminary version: *arXiv:1201.6429*.

[3] I. Caragiannis and A. A. Voudouris. Welfare guarantees for proportional allocations. In *Proceedings of the 7th International Symposium on Algorithmic Game Theory (SAGT)*, LNCS 8768, Springer, pages 206–217, 2014.

[4] G. Christodoulou, A. Kovács, and M. Schapira. Bayesian combinatorial auctions. In *Proceedings of the 35th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP)*, Part 1, LNCS 5125, Springer, pages 820–832, 2008.

[5] J. R. Correa, A. S. Schulz, and N. E. Stier-Moses. The price of anarchy of the proportional allocation mechanism revisited. In *Proceedings of the 9th Conference on Web and Internet Economics (WINE)*, LNCS 8289, Springer, pages 109–120, 2013.

[6] S. Dobzinski, R. Paes Leme. Efficiency guarantees in auctions with budgets. In *Proceedings of the 41st International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP)*, pages 392–404, 2014.

[7] M. Feldman, H. Fu, N. Gravin, and B. Lucier. Simultaneous auctions are (almost) efficient. In *Proceedings of the 45th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 201–210, 2013.

[8] B. Hajek and G. Gopalakrishnan. Do greedy autonomous systems make for a sensible Internet? Unpublished manuscript, 2002.

[9] R. Johari. The price of anarchy and the design of scalable resource allocation algorithms. Chapter 21 in *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, pages 543–568, 2007.

[10] R. Johari and J. N. Tsitsiklis. Efficiency loss in a network resource allocation game. *Mathematics of Operations Research*, 29(3), pages 407–435, 2004.

[11] B. de Keijzer, E. Markakis, G. Schaefer, and O. Telelis. Inefficiency of standard multi-unit auctions. In *Proceedings of the 21st Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, LNCS 8125, Springer, pages 385–396, 2013.

[12] F. P. Kelly. Charging and rate control for elastic traffic. *European Transactions on Telecommunications*, 8, pages 33–37, 1997.

[13] E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou. Worst-case equilibria. In *Proceedings of the 16th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, LNCS 1563, Springer, pages 404–413, 1999.

[14] R. T. Maheswaran and T. Basar. Nash equilibrium and decentralized negotiation in auctioning divisible resources. *Group Decision and Negotiation*, 12(5), pages 361–395, 2003.

[15] R. T. Maheswaran and T. Basar. Social welfare of selfish agents: motivating efficiency for divisible resources. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1550–1555, 2004.

[16] T. Nguyen and E. Tardos. Approximately maximizing efficiency and revenue in polyhedral environments. In *Proceedings of the 8th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 11–20, 2007.

[17] T. Nguyen and M. Vojnovic. Weighted proportional allocation. In *Proceedings of the 2011 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modeling of Computer Systems*, pages 173–184, 2011.

[18] T. Roughgarden. Potential functions and the inefficiency of equilibria. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. III, pages 1071–1094, 2006.

[19] T. Roughgarden. Intrinsic Robustness of the Price of Anarchy. In *Proceedings of of the 41st Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)* , pages 513–522, 2009.

[20] T. Roughgarden. The price of anarchy in games of incomplete information. In *Proceedings of the 13th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 862–879, 2012.

[21] S. Sanghavi and B. Hajek. Optimal allocation of a divisible good to strategic buyers. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2748–2753, 2004.

[22] V. Syrgkanis. Bayesian games and the smoothness framework. *arXiv: 1203.5155*, 2012.

[23] V. Syrgkanis and E. Tardos. Composable and efficient mechanisms. In *Proceedings of the 45th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 211–220, 2013.

[24] V. Syrgkanis and E. Tardos. Bayesian sequential auctions. In *Proceedings of the 13th ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pages 929–944, 2012.